UNIVERZITET U BEOGRADU

Dr DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ
UZ SARADNJU
Dr DOBRIVOJA MIHAILOVIĆA i JOŽA ULČARA

ZBORNIK MATEMATIČKIH PROBLEMA

SA PRILOZIMA I NUMERIČKIM TABLICAMA

II

DRUGO IZMENJENO I DOPUNJENO IZDANJE

U OPŠTOJ REDAKCIJI
Dr D. S. MITRINOVIĆA

Naučna knjiga
BEOGRAD
1960

ZBORNIK MATEMATIČKIH PROBLEMA II

MATRICE I DETERMINANTE

REDOVI

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH

VIŠESTRUKI, KRIVOLINISKI I POVRŠINSKI INTEGRALI

VEKTORSKA ANALIZA

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

TEORIJA VEROVATNOĆE

PROBLEMI IZ RAZNIH OBLASTI

PRILOZI

NUMERIČKE TABLICE

UNIVERZITET U BEOGRADU

Dr DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ

UZ SARADNJU

Dr DOBRIVOJA MIHAILOVIĆA I JOŽA ULČARA

ZBORNIK MATEMATIČKIH PROBLEMA

SA PRILOZIMA I NUMERIČKIM TABLICAMA

II

DRUGO IZMENJENO I DOPUNJENO IZDANJE

U OPŠTOJ REDAKCIJI

Dr D. S. MITRINOVIĆA

Naučna knjiga

BEOGRAD

1960

UNIVERZITETSKI UDŽBENICI

Rešenjem Rektora Univerziteta u Beogradu br. 351 od 20 februara 1960 godine, a na osnovu predloga Univerzitetske komisije za udžbenike i druge stručne i naučne publikacije, ova knjiga primljena je kao stalan univerzitetski udžbenik.

Prvo izdanje: 1958 godine
Tiraž: 1500 primeraka
Obim $21^1/_2$ tabaka

Drugo izdanje: 1960 godine
Tiraž: 2000 primeraka
Obim: $26^1/_2$ tabaka

Za izdavača *Dušan Ristić*, glavni urednik *Borivoje Jovanović*, urednik *Siniša Ilić*, tehnički urednik *Mihailo Jozić*, korektor *Olga Aleksić*.

Štampa Grafičko preduzeće „Akademija", Beograd, Kosmajska ul. 28, Tel. 24-701 i 20-732.
Štampanje završeno decembra 1960 godine.

I. Newton

I. Newton

Exempla docent non minus quam praecepta.

Leonardo da Vinci

Nessuna umana investigazione si può denominare vera scienza s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni.

H. Poincaré

Il n'y a pas de problèmes résolus, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus.

H. Poincaré

La logique, qui peut donner la certitude, est l'instrument de la démonstration; l'intuition est l'instrument de l'invention.

Ch. Hermite

Une découverte analytique survient au moment nécessaire pour rendre possible chaque nouveau progrès dans l'étude des phénomènes du nombre réel.

L. Boltzmann

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.

P. A. M. Dirac

Les mathématiques constituent l'outil qui convient spécialement pour traiter les notions abstraites, de toute nature et, dans ce domaine, leur pouvoir est illimité. C'est pourquoi un livre sur la physique nouvelle, s'il n'est pas purement la description de travaux d'expériences, doit être essentiellement mathématique.

J. Hadamard

Dans toute méditation scientifique, la parole est toujours, pour commencer, à l'intuition: le raisonnement rigoureux qui s'élabore ensuite n'est autre chose que l'intuition contrôlée...

VREMENSKA TABELA ISTORIJE MATEMATIKE[1]

Tales (624?—546?)
Pitagora (580?—500?)
Zenon (490?—430?)
Hipokrat (oko 440 pre n. ere)
Platon (428?—348?)
Eudoks (408?—355?)
Aristotel (384—322)
Euklid (365?—300?)
Arhimed (287?—212)
Apolonijus (262?—190?)
Heron (oko 100 pre n. ere)
Ptolomej (85?—165?)
Diofant (oko 250)
Papus (oko 320)
Alhwârazmi (—840?)
Albirûni (973—1048)
Regiomontanus (1436—1476)
Kopernik (1473—1543)
Cardano (1501—1576)
Viète (1540—1603)
Galilej (1564—1642)
Kepler (1571—1630)
Descartes (1596—1650)
Fermat (1601—1665)
Pascal (1623—1662)
Huyghens (1629—1695)
Gregory (1638—1675)
Newton (1643—1727)
Leibniz (1646—1716)

Bernoulli, Jacob (1655—1705)
Bernoulli, Johann (1667—1748)
Bernoulli, Daniel (1700—1782)
Euler (1707—1783)
Laplace (1749—1827)
Legendre (1752—1833)
Fourier (1768—1830)
Gauss (1777—1855)
Cauchy (1789—1857)
Лобачевский (1792—1856)
Steiner (1796—1863)
Abel (1802—1829)
Bolyai (1802—1860)
Jacobi (1804—1851)
Dirichlet (1805—1859)
Grassmann (1809—1877)
Galois (1811—1832)
Weierstrass (1815—1897)
Чебышев (1821—1894)
Cayley (1821—1895)
Riemann (1826—1866)
Cremona (1830—1903)
Lie (1842—1899)
Pasch (1843—1930)
Cantor (1845—1918)
Klein (1849—1925)
Poincaré (1854—1912)
Moore (1862—1932)
Hilbert (1862—1943)

[1] Ova tabela objavljena je u knjizi:

H. Behnke — W. Süss — K. Fladt: *Grundzüge der Mathematik*, Bd. 1 (Beilage), Göttingen, 1958.

Ovu tabelu izradio je H. Gericke sa primedbom da ona daje pregled doba u kome su živeli značajniji matematičari i da su uzeti u obzir oni matematičari koji su izvršili odsudan uticaj na razvoj matematike.

Primedba. U *Zborniku* I, drugo izdanje (str. XV—XVI), pod naslovom *Veliki i znameniti matematičari*, objavljen je spisak matematičara koji su veoma zaslužni za razvoj matematike kao i onih čiji se rezultati pominju u početnom kursu matematike bez obzira na to što nisu veliki matematičari.

S A D R Ž A J

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Ne verujem da sam ikad završio poslednju korekturu neke rasprave a da nisam već 24 sata docnije ponovo našao nekoliko tačaka koje bih mogao da izradim bolje ili potpunije.

Helmholtz

Nikad nisam završio neki rad a da nisam zažalio zbog načina na koji sam ga sastavio ili zbog plana koji sam usvojio.

Poincaré

Drugo izdanje *Zbornika matematičkih problema* II znatno se razlikuje od njegovog prvog izdanja i to na prvom mestu po sadržini. Poglavlje *Kompleksni brojevi i kompleksne funkcije* prebačeno je u *Zbornik* III, dok su dodata tri nova poglavlja: *Funkcije više promenljivih; Višestruki, krivoliniski i površinski integrali; Teorija verovatnoće.*

Prvo poglavlje, *Matrice i determinante*, ima 246 zadataka i problema, dok ih je u prvom izdanju bilo 120. Ovo poglavlje sada je potpunije i kvalitetnije i sadrži niz novih interesantnih problema.

Drugo poglavlje, *Redovi*, znatno je prošireno i ima 120 zadataka i problema, dok ih je u prvom izdanju bilo samo 53. Ovo poglavlje trebalo bi još proširiti, ma da i u ovom obliku ono obuhvata raznovrstan i interesantan materijal.

Dok su u prvom izdanju u jednom poglavlju bile i obične i parcijalne diferencijalne jednačine, u ovom izdanju posebno poglavlje posvećeno je običnim a posebno parcijalnim diferencijalnim jednačinama. U oba poglavlja sada ima ukupno 363 (283 + 80) zadatka i problema prema 308 u prethodnom izdanju. I u ovim poglavljima učinjene su izmene i dopune, ali one nisu tako brojne i bitne kao u prva dva poglavlja.

Novo poglavlje, *Funkcije više promenljivih*, sadrži 37 zadataka, a novo poglavlje *Višestruki, krivoliniski i površinski integrali* — 78. U ovim poglavljima, koja bi uostalom trebalo znatno proširiti, dati su uglavnom zadaci kakvi se postavljaju na ispitima na tehničkim i prirodno-matematičkim fakultetima.

Poglavlje *Vektorska analiza* takođe je prošireno: ranije u njemu je bilo 53 zadatka i problema, a sada ih je 77.

U poglavlju *Diferencijalna geometrija* tekst je ponovo redigovan. Po nekoliko sličnih zadataka iz prvog izdanja grupisano je u ovom izdanju pod jednim zadatkom. Osim toga, dodat je izvestan broj novih zadataka i problema, tako da ih sada ima 165 u odnosu na 161 u ranijem izdanju.

Novo poglavlje, *Teorija verovatnoće*, obuhvata 28 zadataka i problema. Ovo poglavlje valjalo bi znatno proširiti, ali i u ovom obliku ono će biti od nesumnjive koristi za studente prirodno-matematičkog i elektrotehničkog fakulteta (otsek za tehničku fiziku).

U poglavlju *Problemi iz raznih oblasti* ima 60 problema i oni su većinom novi.

Prema tome, u ovom izdanju ukupno ima 1174 zadatka i problema, dok ih je u prvom izdanju bilo 1011.

U poglavlju *Prilozi* ima pet novih informativnih članaka koji se odnose na polinome Laguerre-a, Hermite-a, Čebiševa, Gegenbauer-a i na Bessel-ove funkcije. Od šest priloga objavljenih u prvom izdanju ovde je zadržano tri. Članci o navedenim specijalnim funkcijama biće od koristi studentima fizike prirodno-matematičkih fakulteta kao i studentima elektrotehničkih fakulteta.

Poglavlje *Numeričke tablice* znatno je smanjeno u ovom izdanju i svedeno samo na tri male tablice od kojih dve nisu bile u ranijem izdanju.

U *Pregledu simbola i skraćenica* izvršene su neke izmene i dopune u odnosu na sličan pregled objavljen u *Zborniku* III.

Poglavlje *Vektorska analiza* sastavio je D. Mihailović, poglavlje *Diferencijalna geometrija* — J. Ulčar i poglavlje *Teorija verovatnoće* — Z. Pop-Stojanović.

Sva ostala poglavlja izradio je D. S. Mitrinović uz pomoć desetak saradnika. Poglavlje *Višestruki, krivoliniski i površinski integrali* izrađeno je uz saradnju S. Fempla i D. Tošića; poglavlje *Funkcije više promenljivih* uz saradnju M. Popadića i poglavlje *Redovi* uz saradnju E. Stipanića (zadaci: 55, 56, 57, 58, 96, 98, 99, 100, 101, 102, 103). Udeo ostalih saradnika naveden je u knjizi na odgovarajućem mestu.

Metod koji je primenjen za izradu *Zbornika matematičkih problema* opisan je u predgovorima prvoj i trećoj knjizi *Zbornika*. Ovde će biti učinjene samo neke napomene:

1° Interesovanje koje vlada za *Zbornik* daje njegovim sastavljačima podstreka da ga i dalje usavršavaju i upotpunjavaju. Na izradi *Zbornika* okuplja se sve više saradnika među kojima je znatan broj mladih, čak i vrlo mladih; oni su uneli ne samo svežinu već i mladalačku poletnost. Može se očekivati da će se na izradi *Zbornika* u novim izdanjima okupiti još veći broj saradnika nego što je to sada slučaj;

2° U novom izdanju ove knjige biće učinjene znatne izmene kako u sadržini tako i u rasporedu materijala. Na prvom mestu biće dat bolji redosled poglavlja. U ovoj knjizi sva nova poglavlja dodata su onda kad je već bilo složeno poglavlje *Parcijalne diferencijalne jednačine*, i stoga redosled nije pravilan;

3° Poglavlja nisu strogo odvojena jedno od drugog. Tako, na primer, zadataka iz vektorske analize ima u poglavljima: *Vektorska analiza, Funkcije više promenljivih* i *Višestruki, krivoliniski i površinski integrali.* Sličan je slučaj sa zadacima iz diferencijalne geometrije. U novom izdanju biće izvršeno pregrupisavanje zadataka da bi se navedeni nedostatak otklonio;

4° Kada novim izdanjima budu dodata poglavlja: *Numeričke metode, Laplace-ova transformacija, Tenzorski račun, Algebarska geometrija, Matematička logika, Integralne jednačine*, tada će *Zbornik* obuhvatiti uglavnom celokupnu materiju koja se obrađuje na tehničkim i prirodno-matematičkim fakultetima.

Pri proveravanju rešenja učestvovali su u većoj ili manjoj meri: D. Đoković, S. Prešić, D. Mihailović, P. Vasić, S. Fempl, D. Tošić i S. Pavlović. Posebno valja istaći da su D. Đoković i S. Prešić kritički pročitali poglavlja: *Determinante i matrice* i *Redovi*, P. Vasić — poglavlje *Diferencijalna geometrija*, D. Mihailović — poglavlje *Teorija verovatnoće* i D. Đoković *Priloge*. Njihove primedbe i sugestije doprinele su da se na više mesta poboljšaju formulacije i upotpune rešenja.

Jedan deo skica za crteže izradili su S. Pavlović i D. Tošić.

U jezičnoj i opštoj redakciji kao i u štamparskim korekturama uzela je živog učešća O. Mitrinović. U štamparskim korekturama pomagali su: P. Vasić, D. Tošić i M. D. Mitrinović.

O. Aleksić zaslužuje priznanje za svesrdno zalaganje na tehničkoj pripremi rukopisa za štampu, jer je pravilnim rasporedom formula pri kucanju na pisaćoj mašini znatno olakšala posao ručnim slagačima.

Grafičko preduzeće „Akademija" sa svojim ručnim slagačima Aleksandrom Zdravkovićem, Ivanom Ješićem i Miodragom Milovanovićem zaslužuje priznanje za zalaganje da slog dobije umetnički oblik.

Decembra 1960 godine
Beograd

D. S. Mitrinović

PREGLED SIMBOLA I SKRAĆENICA

1. $\Rightarrow$ logički simbol: *implikacija*; $\Leftrightarrow$ logički simbol: *ekvivalencija*.
$P \Rightarrow Q$ znači: iz P sleduje Q; $P \Leftarrow Q$ znači: iz Q sleduje P;
$P \Leftrightarrow Q$ znači: $P \Rightarrow Q$ i $Q \Rightarrow P$.

2. $$n! \equiv \underline{|n} \equiv \begin{cases} 1\cdot 2\cdot 3\cdots n & (n \text{ prirodan broj}), \\ 1 & (n=0). \end{cases}$$

$(2n)!! \equiv 2\cdot 4\cdots (2n)$; $(2n+1)!! \equiv 1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n+1)$.

$\binom{a}{k} \equiv \dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$ (k prirodan broj, a ma kakvo); $\binom{a}{0} \equiv 1$ (a ma kakvo).

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n$; $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$.

Ako je $f(x, y)$ simetrična funkcija od x i y, tada je

$$\sum_{abcd} f(a, b) = f(a, b)+f(a, c)+f(a, d)+f(b, c)+f(b, d)+f(c, d);$$

$$\prod_{abcd} f(a, b) = f(a, b)\, f(a, c)\, f(a, d)\, f(b, c)\, f(b, d)\, f(c, d).$$

Slično se definišu izrazi:

$$\sum_{a_1 a_2 \ldots a_k} f(a_1, a_2, \ldots, a_\nu), \qquad \prod_{a_1 a_2 \ldots a_k} f(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) \quad (\nu \leqslant k)$$

ako je $f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ simetrična funkcija naznačenih argumenata.

4. Relacija $a_1, a_2, \ldots, a_k \geqslant L$ zamenjuje skup relacija

$$a_1 \geqslant L,\quad a_2 \geqslant L,\quad \ldots,\quad a_k \geqslant L.$$

Ako je $\alpha \leqslant \beta$, tada relacija

$$\alpha \leqslant a_1, \ \ldots,\ a_k \leqslant \beta$$

zamenjuje skup relacija

$$\alpha \leqslant a_1 \leqslant \beta;\quad \alpha \leqslant a_2 \leqslant \beta;\quad \ldots;\quad \alpha \leqslant a_k \leqslant \beta$$

tj. skup relacija

$$\alpha \leqslant a_\nu \leqslant \beta \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Relacija $k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ znači:

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

5. Ako su a i b prirodni brojevi, tada relacija $(a, b) = 1$ označava da su a i b relativno prosti brojevi.

6. $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) označavaju skup realnih brojeva, recimo x, za koje je redom

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad a \leqslant x < b, \qquad a < x \leqslant b, \qquad a < x < b.$$

Četiri navedena simbola pišu se i u obliku: $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$.

7. Ako je E jedan skup, relacija $x \in E$ kazuje da je x element skupa E, tj. da x pripada skupu E. Relacija $x \notin E$ kazuje da x ne pripada skupu E.

Ako su E_1 i E_2 dva skupa, relacija $E_1 \subset E_2$ ili $E_2 \supset E_1$ kazuje da svaki element skupa E_1 pripada skupu E_2 ($\subset$ znak *inkluzije*).

Relacija $E_1 \cap E_2$ (*presek* skupova E_1 i E_2) označava skup svih elemenata koji istovremeno pripadaju i skupu E_1 i skupu E_2. Umesto $E_1 \cap E_2$ piše se i $\cap E_1 E_2$.

Relacija $E_1 \cup E_2$ (*unija* skupova E_1 i E_2) označava skup svih elemenata koji pripadaju bilo skupu E_1 bilo skupu E_2. Umesto $E_1 \cup E_2$ piše se i $\cup E_1 E_2$.

$E_1 \setminus E_2$ (*diferencija*, razlika skupova E_1 i E_2) označava skup svih elemenata E_1 koji ne pripadaju skupu E_2.

8. $\max(a_1, \ldots, a_n)$ označava onaj (ili one) od n realnih brojeva $a_1, \ldots, a_n$ koji nije premašen ni od jednog ostalih brojeva iz ovog skupa. Na analogni način definiše se $\min(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

9. Ako su brojevi a i b $(\neq 0)$ celi brojevi, relacija $b \mid a$, tj. $a \equiv 0 \pmod{b}$ kazuje da se b sadrži u a bez ostatka.

Ako su $P(x)$ i $Q(x)$ dva polinoma, relacija $Q(x) \mid P(x)$ izražava činjenicu da je $P(x) \equiv Q(x) R(x)$, gde je $R(x)$ treći polinom.

10. Ako je a realno, tada je

$$|a| = a \operatorname{sgn} a = \begin{cases} a & (a \geqslant 0), \\ -a & (a \leqslant 0); \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -1 & (a < 0). \end{cases}$$

11. δ_{ik} *Kronecker*-ov simbol (*Kronecker*-ova delta): $\delta_{ik} = \delta^i_k = \delta^{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$

12. U realnom području $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ $(a \geqslant 0$; n prirodan broj) označava samo nenegativnu vrednost, tj. $\sqrt[n]{a} = \left|\sqrt[n]{a}\right|$.

13. Ako je a realan broj, tada $[a]$ odnosno $\mathrm{E}(a)$ označava najveći ceo broj koji ne premašuje a.

14. $H(t)$ *Heaviside*-ova funkcija: $H(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ \frac{1}{2} & (t = 0), \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$

15. $\approx$ (približno jednako) upotrebljava se u slučaju kada se eksplicitno ne daje ocena greške.

Relacija $a \ll b$ između pozitivnih brojeva a i b kazuje da je a veoma malo u poređenju sa b. Relacija $a \gg b$ $(a, b > 0)$ kazuje da je a veoma veliko u poređenju sa b.

16. i imaginarna jedinica;

$\operatorname{Re}\{z\} = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re} z$ realni deo kompleksnog broja z;

$\operatorname{Im}\{z\} = \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im} z$ imaginarni deo kompleksnog broja z;

$\bar{z}$ konjugovana vrednost kompleksnog broj z;

$\cos\theta + i\sin\theta = \operatorname{cis}\theta = e^{i\theta}$.

17. $\exp x \equiv e^x$ (e osnova prirodnih logaritama); $\exp_a x \equiv a^x$ $(a > 0)$; $\operatorname{pot}_a x \equiv x^a$ $(x > 0)$;

$$\log x = \log_e x \quad (x > 0); \quad \operatorname{ch}_a x = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}_a x = \frac{a^x - a^{-x}}{2}.$$

18. Pod $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$ podrazumeva se, u realnom području, *glavna* vrednost odgovarajuće multiformne funkcije:

$$\operatorname{Arc\,sin} x, \quad \operatorname{Arc\,cos} x, \quad \operatorname{Arc\,tg} x, \quad \operatorname{Arc\,cotg} x.$$

19. $\dot{x} \equiv dx/dt$, $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2, \ldots$;

$y' \equiv dy/dx$, $y'' \equiv d^2y/dx^2, \ldots$; $D^k \equiv d^k/dx^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $D^0 \equiv 1$.

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \equiv \partial z/\partial x \equiv z_x' \equiv z_x; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \partial z/\partial y \equiv z_y' \equiv z_y.$$

20. $[f(x)]_a^b \equiv f(x)\Big|_a^b \equiv f(b) - f(a)$; $[f(x, y)]_{x=a}^{x=b} = f(x, y)\Big|_{x=a}^{x=b} = f(b, y) - f(a, y)$.

21. v. p. $\int_a^b f(x)\,dx$ ili P $\int_a^b f(x)\,dx$ glavna (*Cauchy*-eva) vrednost integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

22. $\oint_\Gamma f(z)\,dz$ ili $\int_{\Gamma+} f(z)\,dz$ integral kompleksne funkcije $f(z)$ duž zatvorene putanje Γ uzet u smislu protivnom kretanju kazaljke na satu.

23. $f(x)=o(g(x))$ $(x\to a)$ označava $f(x)/g(x)\to 0$ $(x\to a)$;

$f(x)=O(g(x))$ $(x\to a)$ označava da je izraz $f(x)/g(x)$ ograničen kada $x\to a$.

$f(x)\sim g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)/g(x)\}=1$.

24. area P=veličina površine P.
Ako su A i B dve tačke, tada $\overline{AB}$ označava dužinu duži AB.

25. Pod krugom (O, r) podrazumeva se krug poluprečnika r čiji je centar u tački O

26. Kvadratna matrica reda n označava se:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{matrix}\right\| \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

U upotrebi su i oznake: $\|a_{ik}\|$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ i $\|a_{ik}\|_1^n$.
Jedinična matrica E_n (odnosno E) je matrica $\|\delta_{ik}\|_1^n$ (δ_{ik} *Kronecker*-ova delta).

27. $\operatorname{tr}\|a_{ik}\|_1^n=\operatorname{sp}\|a_{ik}\|_1^n=\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\nu\nu}$.

28. $(a_{pq}\,a_{rs})=\begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} \\ a_{rq} & a_{rs}\end{vmatrix}$, $\quad (a_{pq}\,a_{rs}\,a_{uv})=\begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} & a_{pv} \\ a_{rq} & a_{rs} & a_{rv} \\ a_{uq} & a_{us} & a_{uv}\end{vmatrix}$, itd.

Determinanta reda n označava se sa:

$$\det\|a_{ik}\|_1^n=|a_{ik}|_1^n \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{vmatrix} \quad \text{ili} \quad \sum \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

29. Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označava se sa:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \text{ili} \quad \vec{a}\,\vec{b}.$$

Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označava se sa:

$$\vec{a}\times\vec{b} \quad \text{ili} \quad [\vec{a}\,\vec{b}] \quad \text{ili} \quad [\vec{a}, \vec{b}].$$

Mešoviti proizvod vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ označava se sa:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] \quad \text{ili} \quad [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \quad \text{ili} \quad (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) \quad \text{ili} \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

30. Operator *nabla* $\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$.

31. Ako je U skalarna funkcija tačke $M(x, y, z)$, tada je

$$\operatorname{grad} U=\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

32. Ako je $\vec{F}=\{X, Y, Z\}$ vektor-funkcija tačke $M(x, y, z)$, tada je

$$\operatorname{div}\vec{F}=\nabla\vec{F}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

33. Ako je $\vec{F}=\{X, Y, Z\}$ vektor-funkcija tačke $M(x, y, z)$, tada je

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\operatorname{curl}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

34. Ako je U skalarna funkcija tačke $M(x, y, z)$, tada je

$$\Delta U=\nabla^2 U=\operatorname{div}\operatorname{grad} U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Operator $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ zove se *laplasijan.*

35. Ako je U skalarna funkcija tačke $M(x, y, z)$ i vremena t, tada je

$$\Box U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\qquad (c=\text{const}).$$

Operator $\Box=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ zove se *dalambertijan.*

36. Oznaka $n=a\,(b)\,c$ upotrebljava se za opisivanje numeričkih tablica i znači da n uzima sve vrednosti članova aritmetičke progresije čiji je prvi član a, razlika b i poslednji član $\leqslant c$.

37. Gama-funkcija:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt \qquad (x>0).$$

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x).$$

38. Funkcija greške:

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

39. Integralna eksponencijalna funkcija i integralni logaritam:

$$\operatorname{Ei}(x)=\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt,\qquad \operatorname{li}(x)=\int_0^x \frac{dt}{\log t}.$$

40. Integralni sinus i integralni kosinus:

$$\operatorname{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,\qquad \operatorname{Ci}(x)=-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

41. *Legendre*-ov polinom:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}x^{n-2k}=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots).$$

42. *Laguerre*-ov polinom:

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}\binom{n}{k}x^k.$$

43. Generalisani *Laguerre*-ov polinom:

$$L_n^s(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+k+1)}x^k.$$

44. Pridruženi *Laguerre*-ov polinom:

$$L_n^{(\nu)}(x)=\frac{d^\nu L_n(x)}{dx^\nu}\qquad (\nu \text{ prirodan broj } \leqslant n).$$

45. *Hermite*-ov polinom:

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

46. Polinom *Čebiševa*:

$$T_n(x)=2^{n-1}\left\{x^n+n\sum_{k=1}^{[n/2]}(-1)^k\frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1}\frac{1}{2^{2k}}x^{n-2k}\right\}\qquad (n\geqslant 2),$$

$$T_1(x)=x,$$

$$T_0(x)=1.$$

47. *Bessel*-ova funkcija prve vrste:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

48. *Bessel*-ova funkcija druge vrste:

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}\qquad (\nu\neq 0 \text{ ceo broj}),$$

$$N_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}\qquad (n=\text{ceo broj}).$$

49. Modifikovana *Bessel*-ova funkcija prve vrste:

$$I_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

50. Modifikovana *Bessel*-ova funkcija druge vrste:

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}\qquad (\nu\neq \text{ceo broj}),$$

$$K_n(x)=\frac{\pi}{2}\lim_{\nu\to n}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}\qquad (n=\text{ceo broj}).$$

51. *Kelvin*-ove funkcije:

$$\operatorname{ber}_\nu x+i\operatorname{bei}_\nu x=I_\nu\left(xe^{\frac{3\pi i}{4}}\right),$$

$$\operatorname{ker}_\nu x+i\operatorname{kei}_\nu x=K_\nu\left(xe^{\frac{3\pi i}{4}}\right).$$

PRIMEDBA O UPOTREBI SLOVA

Ukoliko su oznake podesnije izabrane, utoliko one više koriste u utvrđivanju neke zakonitosti i u otkrivanju novih osobina. Ako su oznake podesno izabrane, formule dobijaju estetsku formu. Evo nekoliko uputstava za upotrebu slova.

Pojedinačno upotrebljavaju se naročito slova:

$$a;\ k;\ m;\ n;\ p;\ r;\ N.$$

$$\alpha;\ \nu;\ \theta.$$

U čestoj su upotrebi parovi slova:

$$a, b;\ i, j;\ m, n;\ p, q;\ x, y;\ u, v;\ X, Y;\ A, B;\ P, Q.$$

$$\alpha, \beta;\ \lambda, \mu;\ \xi, \eta.$$

Trojke slova koje se često upotrebljavaju:

$$a, b, c;\ i, j, k;\ l, m, n;\ p, q, r;\ x, y, z;\ A, B, C;\ P, Q, R;\ X, Y, Z.$$

$$\alpha, \beta, \gamma;\ \lambda, \mu, \nu;\ \xi, \eta, \zeta.$$

Prirodni brojevi označavaju se najčešće slovima:

$$k;\ m;\ n;\ p;\ r;\ N;\ \nu.$$

Vektori se češće obeležavaju malim nego velikim slovima latinske azbuke i strelicom iznad slova. Gotska slova bez strelice upotrebljavaju se takođe za označavanje vektora.

Česta je upotreba slova sa indeksima. Primeri:

$$a_{ij};\ a_{mn};\ a_{mnp};\ a_{s_k},\ a_m^n,\ a_{m_1 m_2 \cdots m_k}^{n_1 n_2 \cdots n_k}.$$

Funkcija promenljive x označava se najčešće sa

$$f(x);\ g(x);\ h(x);\ F(x);\ G(x);\ H(x).$$

$$\varphi(x);\ \psi(x);\ \chi(x).$$

Ako se posmatraju dve funkcije, bolje je uzeti slova f i g ili φ i ψ, nego f i φ ili f i ψ, tj. ne treba mešati grčka slova i latinicu.

GRCKA AZBUKA

α β γ δ ε ζ η θ, ϑ ι κ λ μ ν ξ o π ρ σ τ υ φ χ ψ ω

A B Γ Δ E Z H Θ I K Λ M N Ξ O Π P Σ T Υ Φ X Ψ Ω

GOTICA

$\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{e}$ $\mathfrak{f}$ $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{h}$ $\mathfrak{i}$ $\mathfrak{j}$ $\mathfrak{k}$ $\mathfrak{l}$ $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{o}$ $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{r}$ ſ, $\mathfrak{s}$, ß $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{u}$ $\mathfrak{v}$ $\mathfrak{w}$ $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ $\mathfrak{z}$

$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{I}$ $\mathfrak{J}$ $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{O}$ $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{T}$ $\mathfrak{U}$ $\mathfrak{V}$ $\mathfrak{W}$ $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$

MATRICE I DETERMINANTE

I. UVODNI ZADACI IZ MATRIČNOG RAČUNA

1. Za *Pauli*-ove matrice

$$A=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}\quad (i=\sqrt{-1}),$$

koje se sreću u kvantnoj mehanici, važe relacije:

$$1^0\quad A^2=B^2=C^2=E\quad (E \text{ jedinična matrica});$$

$$2^0\quad BC=-CB=iA,\quad CA=-AC=iB,\quad AB=-BA=iC.$$

Proveriti ovo tvrđenje.

2. Dokazati formulu

$$M(a)\cdot M(b)=M(a+b),$$

gde je

$$M(a)=\begin{Vmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{Vmatrix}.$$

3. Odrediti matricu x drugog reda koja zadovoljava uslov

$$\begin{Vmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{Vmatrix}\cdot x\cdot\begin{Vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{Vmatrix}.$$

4. Ako je

$$A=\begin{Vmatrix}3 & 6 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{Vmatrix},$$

pokazati da je

$$A^4-A^2+2A-3E=\begin{Vmatrix}292 & 455 & 278 & 66\\ 66 & 94 & 59 & 14\\ 14 & 24 & 10 & 3\\ 3 & 5 & 6 & -2\end{Vmatrix}.$$

5. Šta pretstavlja jednačina

$$\|x\ \ y\ \ z\|\begin{Vmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}x\\ y\\ z\end{Vmatrix}=E\quad (E \text{ jedinična matrica})$$

u *Dekartovom* pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$?

6. Proveriti da li važi sledeća tablica množenja

	H	I	J	K
H	H	I	H	$-I$
I	H	J	$-H$	I
J	J	$-K$	J	K
K	$-J$	K	J	K

gde su H, I, J, K, matrice:

$$H=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad I=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$J=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad K=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

7. Odrediti sve matrice koje su komutativne s matricama:

$$1^0 \quad \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}; \qquad 2^0 \quad \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}; \qquad 3^0 \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Rešenje. 3^0 Tražena matrica

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{Vmatrix}$$

treba da zadovoljava uslov

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Odavde sleduju skalarne jednakosti:

$$\begin{aligned} &a_2=0, && b_2=a_1, && c_2=b_1, && d_2=c_1, \\ &a_3=0, && b_3=a_2, && c_3=b_2, && d_3=c_2, \\ &a_4=0, && b_4=a_3, && c_4=b_3, && d_4=c_3, \\ & && 0=a_4, && 0=b_4, && 0=c_4. \end{aligned}$$

Prema tome, matrica komutativna s matricom 3⁰ ima oblik

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{Vmatrix}.$$

8. Da li se parametri a i b mogu tako odrediti da matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} b & b & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{Vmatrix}$$

budu komutativne?

9. Odrediti A^k (k prirodan broj), gde je

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Uputstvo. Obrazovati matrice A^2, A^3, A^4, A^5, A^6, A^7, A^8 i konstatovati da sve potencije matrice A imaju jedan od oblika

$$A, \quad A^2=\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad A^3=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A^4=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

10. Ako je n prirodan broj i ako je

$$M\equiv\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad E\equiv\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

proveriti da li je

$$M^n\equiv E+n(M-E).$$

11. Odrediti A^k (k prirodan broj), ako je

$$1^0 \quad A=\begin{Vmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{Vmatrix}; \qquad 2^0 \quad A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Uputstvo. 1⁰ Poći od relacije

$$\begin{Vmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{Vmatrix}.$$

2⁰ Poći od relacije

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b-1 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Generalizacija. Proširiti rezultate na matrice reda n.

12. Ako su A i B matrice reda n i ako je

$$AB - BA \equiv E,$$

pokazati da važi relacija

$$A^n B - BA^n \equiv nA^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

13. Dokazati relaciju

$$\begin{Vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{Vmatrix}^n \equiv \begin{Vmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{Vmatrix} \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

Uputstvo. Primeniti metod potpune indukcije.

14. Ako je

$$A \equiv \begin{Vmatrix} 0 & -\operatorname{tg} t \\ \operatorname{tg} t & 0 \end{Vmatrix},$$

proveriti da li je

$$E + A \equiv \begin{Vmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{Vmatrix} (E - A).$$

15. Pokazati da je

$$(A/n)^s = A/n \qquad (s \text{ prirodan broj}),$$

ako je

$$A = \| a_{ik} \|_1^n,$$

gde je $a_{ik} = 1$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

16. Ako je

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

pokazati da je

$$M^n = M^{n-2} + M^2 - E \qquad \{n\,(\geqslant 3) \text{ prirodan broj}\}.$$

17. Data je matrica

$$A \equiv \left\Vert \begin{array}{cc:cc} a & b & p & q \\ c & d & r & s \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\Vert \equiv \begin{Vmatrix} B & P \\ 0 & E \end{Vmatrix} \qquad (E \text{ jedinična matrica})$$

koja je razbijena na četiri bloka, kao što je tačkicama pokazano.

Ispitati da li je tačna relacija

$$A^k = \begin{Vmatrix} B^k & \dfrac{B^k - E}{B - E} P \\ 0 & E \end{Vmatrix}.$$

18. Dokazati formulu

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^n \equiv \begin{Vmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

19. Odrediti $A=\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ u slučajevima:

$$1^0 \quad A^2=E; \qquad 2^0 \quad A^3=E; \qquad 3^0 \quad A^4=E.$$

Rešenje. 1^0 Uslov $A^2=E$ ekvivalentan je skupu uslova:

$$(1) \qquad a^2+bc=1, \quad ab+bd=0, \quad ac+cd=0, \quad bc+d^2=1.$$

Ako je $d=-a$, sve jednakosti (1) svode se na $a^2+bc=1$.

Ako je $d\neq -a$, tada je $b=0$, $c=0$, $a=\pm 1$, $d=\pm 1$ (u obzir dolaze samo gornji ili samo donji znaci).

Sve matrice A, koje zadovoljavaju uslov $A^2=E$, su: $\pm E$ i $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & -a \end{Vmatrix}$, gde je $a^2+bc=1$.

20. Odrediti sve matrice drugog reda čiji je kvadrat nula-matrica.

Rešenje. Neka je tražena matrica

$$A=\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}.$$

Prema uslovu zadatka je

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

odnosno

$$\begin{Vmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

$$\therefore \quad a^2+bc=0, \quad ab+bd=0, \quad ac+cd=0, \quad bc+d^2=0.$$

$$\therefore \quad a^2=d^2=-bc, \quad b(a+d)=0, \quad c(a+d)=0.$$

$$\therefore \quad d=-a, \quad a^2=-bc.$$

Tražena matrica je

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & -a \end{Vmatrix} \qquad (a^2=-bc).$$

21. Rešiti matričnu jednačinu

$$(1) \qquad XA=0$$

(X tražena matrica drugog reda; A data matrica drugog reda).

Rešenje. Ako je $A=0$, tada je X ma koja matrica drugog reda. Ako $A\neq 0$, tada se mogu desiti dva slučaja:

1^0 det $A\neq 0$; tada je $X=0$;

2^0 det $A=0$; tada je A oblika $\begin{Vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ a & b \end{Vmatrix}$ ili $\begin{Vmatrix} a & b \\ \beta a & \beta b \end{Vmatrix}$.

Jednačina (1) u prvom slučaju postaje

$$\begin{Vmatrix} x & y \\ z & u \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ a & b \end{Vmatrix}=0, \quad \text{gde je} \quad X=\begin{Vmatrix} x & y \\ z & u \end{Vmatrix}.$$

$$\therefore \quad x\alpha a+ay=0, \quad x\alpha b+yb=0, \quad z\alpha a+ua=0, \quad z\alpha b+ub=0.$$

$$\therefore \quad \alpha x+y=0, \quad \alpha z+u=0.$$

$$\therefore \quad y=-\alpha x, \quad u=-\alpha z.$$

Prema tome je $$X=\begin{Vmatrix} x & -\alpha x \\ z & -\alpha z \end{Vmatrix}.$$

Proizvod
$$\begin{Vmatrix} x & -\alpha x \\ z & -\alpha z \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ a & b \end{Vmatrix}$$
zaista je nula-matrica.

Koje je rešenje u drugom slučaju?

II. UVODNI ZADACI IZ TEORIJE DETERMINANATA

22. Izračunati determinante:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}; \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rezultat. $D_1=-2$; $D_2=154$.

23. Proveriti rezultat

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -160.$$

24. Izračunati determinante:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -5 & -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & -4 & -7 \\ 3 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Rezultat. -200; -241.

25. Verifikovati rezultate:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \equiv (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \times (a+b+c+d);$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \equiv (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \times (ab+ac+ad+bc+bd+cd);$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \equiv (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \times (abc+abd+acd+bcd).$$

26. Razviti determinantu

$$D \equiv \begin{vmatrix} bc-k & ca-k & ab-k \\ b+c & c+a & a+b \\ \left(b+\frac{k}{b}\right)\left(c+\frac{k}{c}\right) & \left(c+\frac{k}{c}\right)\left(a+\frac{k}{a}\right) & \left(a+\frac{k}{a}\right)\left(b+\frac{k}{b}\right) \end{vmatrix} \quad (abc \neq 0).$$

Rešenje. Ako elemente prve kolone podelimo sa bc, druge sa ca, treće sa ab, dobijamo

$$D \equiv (abc)^2 \begin{vmatrix} 1-\frac{k}{bc} & 1-\frac{k}{ca} & 1-\frac{k}{ab} \\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{c}+\frac{1}{a} & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \\ \left(1+\frac{k}{b^2}\right)\left(1+\frac{k}{c^2}\right) & \left(1+\frac{k}{c^2}\right)\left(1+\frac{k}{a^2}\right) & \left(1+\frac{k}{a^2}\right)\left(1+\frac{k}{b^2}\right) \end{vmatrix}.$$

Stavimo li $1/a=A$, $1/b=B$, $1/c=C$, determinanta D dobija oblik

$$D \equiv (ABC)^{-2} \begin{vmatrix} 1-kBC & 1-kCA & 1-kAB \\ B+C & C+A & A+B \\ (1+kB^2)(1+kC^2) & (1+kC^2)(1+kA^2) & (1+kA^2)(1+kB^2) \end{vmatrix}.$$

Budući da je

$$\begin{vmatrix} 1-kCA & 1-kAB \\ C+A & A+B \end{vmatrix} \equiv (B-C)(1+kA^2),$$

$$\begin{vmatrix} 1-kBC & 1-kAB \\ B+C & A+B \end{vmatrix} \equiv (A-C)(1+kB^2),$$

$$\begin{vmatrix} 1-kBC & 1-kCA \\ B+C & C+A \end{vmatrix} \equiv (A-B)(1+kC^2),$$

determinanta D, posle razvijanja po elementima treće vrste, postaje

$$D \equiv (ABC)^{-2}(1+kA^2)(1+kB^2)(1+kC^2)\{(B-C)-(A-C)+(A-B)\} \equiv 0.$$

27. Proveriti rezultate:

$$1^0 \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} \equiv (a^2+b^2+c^2+d^2)^2;$$

$$2^0 \quad \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} \equiv 4(a-b)(a-c)(b-c);$$

$$3^0 \quad \begin{vmatrix} 0 & c & -b & x \\ -c & 0 & a & y \\ b & -a & 0 & z \\ -x & -y & -z & 0 \end{vmatrix} \equiv (ax+by+cz)^2.$$

Uputstvo. 1^0 Odrediti kvadrat date determinante. Množiti: vrsta $\times$ vrsta.

28. Primenom osobina determinanata proveriti identitete:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \equiv -(a+b+c)\,[(a^2+b^2+c^2)-(bc+ca+ab)];$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x^3 & x^6 \end{vmatrix} \equiv x^4\,(x-1)^3\,(x+1);$$

$$\begin{vmatrix} b^2c^2+a^2d^2 & bc+ad & 1 \\ c^2a^2+b^2d^2 & ca+bd & 1 \\ a^2b^2+c^2d^2 & ab+cd & 1 \end{vmatrix} \equiv (a-d)\,(b-d)\,(c-d)\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b).$$

29. Ako je $s_r \equiv a^r+b^r+c^r$, ispitati da li važi relacija

$$\begin{vmatrix} s_r & s_{r+1} & s_{r+2} \\ s_{r+1} & s_{r+2} & s_{r+3} \\ s_{r+2} & s_{r+3} & s_{r+4} \end{vmatrix} \equiv a^r\, b^r\, c^r\,(b-c)^2\,(c-a)^2\,(a-b)^2.$$

30. Dokazati identitet

$$\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ \cos n\theta & \cos(n+1)\,\theta & \cos(n+2)\,\theta \\ \sin n\theta & \sin(n+1)\,\theta & \sin(n+2)\,\theta \end{vmatrix} \equiv (1-2t\cos\theta+t^2)\sin\theta\,.$$

31. Pokazati da važi relacija

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_1-\mu a_1 & \lambda b_2-\mu a_2 & \lambda b_3-\mu a_3 \\ \lambda c_1-\nu a_1 & \lambda c_2-\nu a_2 & \lambda c_3-\nu a_3 \end{vmatrix}.$$

Ako se parametri λ, μ, ν izaberu tako da je $\lambda=a_1$, $\mu=b_1$, $\nu=c_1$, pokazati da je

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \qquad (a_1 \neq 0)\,.$$

32. Proveriti rezultate:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} \equiv -8abcd;$$

$$\begin{vmatrix} 2x+y+z & y & z \\ x & x+2y+z & z \\ x & y & x+y+2z \end{vmatrix} \equiv 2(x+y+z)^3.$$

33. Izračunati determinantu

$$\begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 1 \\ \cos\left(a+\frac{2}{3}\pi\right) & \sin\left(a+\frac{2}{3}\pi\right) & 1 \\ \cos\left(a-\frac{2}{3}\pi\right) & \sin\left(a-\frac{2}{3}\pi\right) & 1 \end{vmatrix}.$$

34. Dokazati identitet

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \equiv 4 \sin\frac{a+b+c}{2} \sin\frac{b+c-a}{2} \sin\frac{c+a-b}{2} \sin\frac{a+b-c}{2}.$$

35. Dokazati identitete:

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} \equiv 4(b+c)(c+a)(a+b);$$

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \equiv 2(ab+bc+ca)^3;$$

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \equiv (a+b+c)^3;$$

$$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} \equiv -(b+c+d-a)(c+d+a-b) \times (d+a+b-c)(a+b+c-d).$$

36. Proveriti identitet

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \\ \cos 3a & \cos 3b & \cos 3c \end{vmatrix} \equiv 4(\cos b - \cos c)(\cos c - \cos a)(\cos a - \cos b) \times (\cos a + \cos b + \cos c + 2\cos a \cos b \cos c).$$

37. Dokazati identitete:

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} \equiv x^2-1; \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} \equiv x(x^2-2^2); \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \equiv (x^2-1)(x^2-3^2);$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & x & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & x & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & x & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \equiv x(x^2-2^2)(x^2-4^2); \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & x & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & x & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & x & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \equiv (x^2-1)(x^2-3^2) \times (x^2-5^2).$$

Generalisati.

38. Dokazati relaciju

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & ab+bc+ca & abc \\ 1 & b+c+d & bc+cd+db & bcd \\ 1 & c+d+a & cd+da+ac & cda \\ 1 & d+a+b & da+ab+bd & dab \end{vmatrix}.$$

Generalisati.

39. Ako su A, B, C uglovi jednog trougla, izračunati determinantu

$$\begin{vmatrix} \sin 2A & \sin C & \sin B \\ \sin C & \sin 2B & \sin A \\ \sin B & \sin A & \sin 2C \end{vmatrix}.$$

40. Izraziti $E \equiv (x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)$ u obliku zbira dva kvadrata.

Rešenje.

$$E \equiv \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z & x \\ -x & z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y & z \\ -z & y \end{vmatrix}.$$

Ako se prva i druga determinanta pomnože (vrsta $\times$ kolona), dobija se

$$E \equiv \begin{vmatrix} xz+xy & x^2-yz \\ yz-x^2 & xy+xz \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y & z \\ -z & y \end{vmatrix}.$$

Posle množenja (vrsta $\times$ kolona) biće

$$E \equiv \begin{vmatrix} xyz+xy^2-x^2z+yz^2 & xz^2+xyz+x^2y-y^2z \\ y^2z-x^2y-xyz-xz^2 & yz^2-x^2z+xy^2+xyz \end{vmatrix}$$
$$\equiv (xyz+xy^2-x^2z+yz^2)^2+(y^2z-x^2y-xyz-xz^2)^2.$$

Obrazovati ostala izražavanja funkcije E u obliku zbira dva kvadrata. Koliko ih je ukupno?

41. Dokazati identitete:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin(b+c) & \cos(b-c) \\ 1 & \sin(c+a) & \cos(c-a) \\ 1 & \sin(a+b) & \cos(a-b) \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \cos 2a & \cos a & \sin a \\ \cos 2b & \cos b & \sin b \\ \cos 2c & \cos c & \sin c \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \cos(b+c) & \sin(b+c) & \cos(b-c) \\ \cos(c+a) & \sin(c+a) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \sin(a+b) & \cos(a-b) \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sin 2a & \cos 2a & 1 \\ \sin 2b & \cos 2b & 1 \\ \sin 2c & \cos 2c & 1 \end{vmatrix}.$$

42. Dokazati identitet

$$\begin{vmatrix} abcd & abd & acd & bcd \\ abc & abcd & acd & bcd \\ abc & abd & abcd & bcd \\ abc & abd & acd & abcd \end{vmatrix} \equiv a^3 b^3 c^3 d^3 (abcd - \Sigma ab + 2\Sigma a - 3).$$

43. Dokazati

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1 & b_1+\mu a_1 & c_1 \\ a_2+\lambda b_2 & b_2+\mu a_2 & c_2 \\ a_3+\lambda b_3 & b_3+\mu a_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv (1-\lambda\mu) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ispitati da li navedena osobina važi za determinante reda n.

44. Proveriti identitet

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^{n+3} & b^{n+3} & c^{n+3} & d^{n+3} \end{vmatrix} \equiv V(a, b, c, d)\, \Sigma a^p b^q c^r d^s$$

$\{V(a, b, c, d)$ *Vandermonde*-ova determinanta; $p+q+r+s=n\}$.

45. Data je determinanta

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^{n+2} & b^{n+2} & c^{n+2} \end{vmatrix} \quad (n \text{ prirodan broj}).$$

Za $n=1$ je $D_1 = (b-a)(c-a)(c-b)\,\Sigma a$.

Za $n=2$ je $D_2 = (b-a)(c-a)(c-b)(\Sigma a^2 + \Sigma ab)$.

Za $n=3$ je $D_3 = (b-a)(c-a)(c-b)(\Sigma a^3 + \Sigma a^2 b + abc)$

$(\Sigma a^2 b = a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b;$ itd.$)$.

Kako će glasiti opšta formula?

46. Ako je $b_1 c_1 \neq 0$, dokazati *Gauss-Chiò*-ovu formulu o kondenzovanju

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{b_1 c_1} \begin{vmatrix} (a_1 b_2) & (b_1 c_2) & (c_1 d_2) \\ (a_1 b_3) & (b_1 c_3) & (c_1 d_3) \\ (a_1 b_4) & (b_1 c_4) & (c_1 d_4) \end{vmatrix},$$

gde je, na primer, $(a_1 b_2) \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Generalisati rezultat.

Uputstvo. Umesto determinante četvrtog reda može se pisati

$$\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & c_1 d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & c_1 d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & c_1 d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & c_1 d_4 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & (c_1 d_2) \\ a_3 & b_3 & c_3 & (c_1 d_3) \\ a_4 & b_4 & c_4 & (c_1 d_4) \end{vmatrix}.$$

Na analogni način treba dalje formirati determinantu u kojoj će tri elementa u prvoj vrsti biti nule.

Generalizacija. Opštija formula o kondenzovanju glasi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{\prod_{k=2}^{n-1} a_{1k}} \begin{vmatrix} (a_{11} a_{22}) & (a_{12} a_{23}) & \cdots & (a_{1,n-1} a_{2n}) \\ (a_{11} a_{32}) & (a_{12} a_{33}) & & (a_{1,n-1} a_{3n}) \\ \vdots & & & \\ (a_{11} a_{n2}) & (a_{12} a_{n3}) & & (a_{1,n-1} a_{nn}) \end{vmatrix},$$

ako je $\prod_{k=2}^{n-1} a_{1k} \neq 0$.

47. Dokazati *Gauss-Chiò*-ove formule o kondenzovanju determinanata:

$$(a_1 b_2 c_3) \equiv \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} (a_1 b_2) & (a_1 c_2) \\ (a_1 b_3) & (a_1 c_3) \end{vmatrix}, \quad a_1 \neq 0;$$

$$(a_1 b_2 c_3 d_4) \equiv \frac{1}{a_1^2} \begin{vmatrix} (a_1 b_2) & (a_1 c_2) & (a_1 d_2) \\ (a_1 b_3) & (a_1 c_3) & (a_1 d_3) \\ (a_1 b_4) & (a_1 c_4) & (a_1 d_4) \end{vmatrix}, \quad a_1 \neq 0;$$

$$(a_1 b_2 c_3 d_4) \equiv \frac{1}{(a_1 b_2)} \begin{vmatrix} (a_1 b_2 c_3) & (a_1 b_2 d_3) \\ (a_1 b_2 c_4) & (a_1 b_2 d_4) \end{vmatrix}, \quad (a_1 b_2) \neq 0;$$

$$(a_1 b_2 c_3 d_4 e_5) \equiv \frac{1}{(a_1 b_2 c_3)} \begin{vmatrix} (a_1 b_2 c_3 d_4) & (a_1 b_2 c_3 e_4) \\ (a_1 b_2 c_3 d_5) & (a_1 b_2 c_3 e_5) \end{vmatrix}, \quad (a_1 b_2 c_3) \neq 0.$$

U ovim formulama je:

$$(a_1 b_2) \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad (a_1 b_2 c_3) \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \ \ldots$$

48. Proveriti da li se polinom

$$P(z) \equiv a + bz + cz^2 + dz^3 + z^4$$

može napisati u obliku determinante

$$\begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & z & -1 \\ a & b & c & d+z \end{vmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} z^2 & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ a+bz & c & d+z \end{vmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ a & b+cz & d+z \end{vmatrix}.$$

49. Ako je

$$ax + by + cz = 1, \qquad cx + ay + bz = 0, \qquad bx + cy + az = 0,$$

ispitati da li je vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

jednaka recipročnoj vrednosti determinante

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

i da li je

$$\begin{vmatrix} ax+cy+bz & bx+ay+cz & cx+by+az \\ by+az+cx & cy+bz+ax & ay+cz+bx \\ cz+bx+ay & az+cx+by & bz+ax+cy \end{vmatrix} \equiv 1.$$

50. Ako je

$$A \equiv \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

tada je

$$\det(A - \lambda E) \equiv \lambda^4 - a_1 \lambda^3 - a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda - a_4.$$

Proveriti ovaj rezultat i ispitati da li se može generalisati na analogne matrice reda n.

51. Pokazati da determinanta

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ x & a^3 & 1 & a \\ y & z & a^3 & 1 \end{vmatrix}$$

ne zavisi od x, y, z.

Rešenje. Tvrđenje je tačno, jer je

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 - a \cdot a^2 \\ a^3 & 1 & a & a^2 - a \cdot a \\ x & a^3 & 1 & a - a \cdot 1 \\ y & z & a^3 & 1 - a \cdot a^3 \end{vmatrix} \equiv (1-a^4) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^3 & 1 & a \\ x & a^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv (1-a^4) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 - a \cdot a \\ a^3 & 1 & a - a \cdot 1 \\ x & a^3 & 1 - a \cdot a^3 \end{vmatrix} \equiv (1-a^4)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^3 & 1 \end{vmatrix} \equiv (1-a^4)^3.$$

Generalizacija. Ispitati da li determinanta

$$D_{k+1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{k-2} & a^{k-1} & a^k \\ a^k & 1 & a & & a^{k-3} & a^{k-2} & a^{k-1} \\ x_{31} & a^k & 1 & & a^{k-4} & a^{k-3} & a^{k-2} \\ x_{41} & x_{42} & a^k & & a^{k-5} & a^{k-4} & a^{k-3} \\ \vdots & & & & & & \\ x_{k+1,1} & x_{k+1,2} & x_{k+1,3} & & x_{k+1,k-1} & a^k & 1 \end{vmatrix}$$

zavisi od elemenata x_{pq}?

52. Ako se determinanta reda n

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

pomnoži determinantom reda n

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{12} & a_{11} & 0 & & 0 \\ -a_{13} & 0 & a_{11} & & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_{1n} & 0 & 0 & & a_{11} \end{vmatrix},$$

dobija se

$$(1) \qquad A a_{11}^{n-2} = \begin{vmatrix} (a_{11}\, a_{22}) & (a_{11}\, a_{32}) & \cdots & (a_{11}\, a_{n2}) \\ (a_{11}\, a_{23}) & (a_{11}\, a_{33}) & & (a_{11}\, a_{n3}) \\ \vdots & & & \\ (a_{11}\, a_{2n}) & (a_{11}\, a_{3n}) & & (a_{11}\, a_{nn}) \end{vmatrix},$$

gde je, na primer,

$$(a_{11}\, a_{23}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Dokazati relaciju (1) koja izražava *Gauss-Chiò*-ov postupak za svođenje determinante reda n na jednu determinantu reda $n-1$.

53. Determinanta četvrtog reda

$$D = |a_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

može se izračunati po sledećem postupku:

1° Izvršiti cikličku permutaciju druge, treće i četvrte kolone, dok prva kolona ostaje na svom mestu u matrici ove determinante;

2° Dopisati prve tri kolone sdesna za sve tri determinante koje se dobijaju cikličkom permutacijom kolona i izvršiti množenje elemenata, kao što to strelice pokazuju;

3° Znak *plus* i *minus* uzimati naizmence, kao što to pokazuje priložena shema;

4° Determinanta D jednaka je zbiru 24 sabirka koji su navedeni.

Na taj način dobijaju se ove tri determinante četvrtog reda:

$$\begin{array}{cccc|ccc} + & - & + & - & & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ + & - & + & - & & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} +a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44} \\ -a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{41} \\ +a_{13}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{42} \\ -a_{14}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{43} \\ +a_{14}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{41} \\ -a_{11}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{42} \\ +a_{12}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{43} \\ -a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{44} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ccc} + & - & + & - & & & \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ + & - & + & - & & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} +a_{11}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{42} \\ -a_{13}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{41} \\ +a_{14}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{43} \\ -a_{12}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{44} \\ +a_{12}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{41} \\ -a_{11}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{43} \\ +a_{13}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{44} \\ -a_{14}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{42} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ccc} + & - & + & - & & & \\ a_{11} & a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} & a_{12} \\ a_{21} & a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} & a_{22} \\ a_{31} & a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} & a_{32} \\ a_{41} & a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} & a_{42} \\ + & - & + & - & & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} +a_{11}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{43} \\ -a_{14}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{41} \\ +a_{12}\,a_{23}\,a_{31}\,a_{44} \\ -a_{13}\,a_{21}\,a_{34}\,a_{42} \\ +a_{13}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{41} \\ -a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{44} \\ +a_{14}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{42} \\ -a_{12}\,a_{24}\,a_{31}\,a_{43} \end{array}$$

Ovaj postupak dao je student *D. Rebić.*

Proveriti navedeni rezultat i ispitati da li se *Rebićev* postupak (koji je analogan *Sarrus*-ovom postupku) može proširiti na determinante proizvoljnog reda.

III. INVERZNE MATRICE

54. Proveriti relaciju

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{Vmatrix}^{-1} \equiv \begin{Vmatrix} \dfrac{bc}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{ca}{(b-c)(b-a)} & \dfrac{ab}{(c-a)(c-b)} \\ \dfrac{-(b+c)}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{-(c+a)}{(b-c)(b-a)} & \dfrac{-(a+b)}{(c-a)(c-b)} \\ \dfrac{1}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{1}{(b-c)(b-a)} & \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} \end{Vmatrix},$$

gde je $(b-c)(c-a)(a-b)\neq 0$.

Ustanoviti da li se zakon formiranja elemenata gornje inverzne matrice može generalisati na *Vandermonde*-ove matrice reda n

$$\begin{Vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^{n-1} \end{Vmatrix}.$$

55. Ako je $c\neq a$, proveriti da li važi relacija

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & c & c^2 \end{Vmatrix}^{-1} \equiv \begin{Vmatrix} \dfrac{c(c-2a)}{(a-c)^2} & \dfrac{ca}{a-c} & \dfrac{a^2}{(c-a)^2} \\ \dfrac{2a}{(a-c)^2} & -\dfrac{c+a}{a-c} & -\dfrac{2a}{(c-a)^2} \\ -\dfrac{1}{(a-c)^2} & \dfrac{1}{a-c} & \dfrac{1}{(c-a)^2} \end{Vmatrix}.$$

56. Odrediti inverznu matricu matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad (a,\ b \text{ skalari}).$$

57. Data je matrica

$$A = \begin{Vmatrix} E_r & M \\ 0 & E_s \end{Vmatrix}$$

(E_r, E_s jedinične matrice tipa $r\times r$, odnosno $s\times s$; M matrica tipa $r\times s$).

Odrediti inverznu matricu A^{-1}.

Odgovor. $A^{-1} = \begin{Vmatrix} E_r & -M \\ 0 & E_s \end{Vmatrix}$.

58. Da li je tačna relacija

$$(A+A^{-1})^{2n+1} \equiv 2^{2n+1} A \qquad (n \text{ nula ili prirodan broj}),$$

ako je

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}?$$

59. Da li postoji A^{-1} u skupu matrica

$$A = \begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix} \quad (a, b \text{ realni brojevi})?$$

Da li su komutativne bilo koje dve matrice A_1 i A_2 iz datog skupa matrica?

60. Date su matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Izračunati: A^{-1}, A^{-2}, B^{-1}, B^{-2}.

61. Ako je $A = (d_1 d_2 \ldots d_n)$ nesingularna dijagonalna matrica, proveriti da li je

$$A^{-1} = (d_1^{-1} d_2^{-1} \ldots d_n^{-1}).$$

62. Date su matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -6 & -6 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Ispitati da li važe jednakosti

$$AB = BA, \quad A^{-1}B = BA^{-1}, \quad AB^{-1} = B^{-1}A, \quad A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

63. Odrediti matrice A^2, A^3, A^{-1}, A^{-2}, ako je

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Rezultat. $\begin{Vmatrix} 16 & -3 \\ -5 & 19 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 54 \\ 90 & -53 \end{Vmatrix}, \quad \frac{1}{17}\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \frac{1}{289}\begin{Vmatrix} 19 & 3 \\ 5 & 16 \end{Vmatrix}.$

64. Rešiti matrične jednačine:

$$1^0 \quad (A - 2E)X = A + E; \qquad 2^0 \quad Y(A - 2E) = A + E,$$

gde je E jedinična matrica i $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

Rezultat. $1^0 \quad X = \begin{Vmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{Vmatrix}.$

65. Ako je A kvadratna matrica i k prirodan broj, tada iz uslova $A^k=0$ sleduje

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

Rešenje. Pođimo od identiteta

$$A^k-E^k=(A-E)(A^{k-1}+A^{k-2}+\cdots+A+E). \tag{1}$$

Ako je $A^k=0$, tada (1) postaje

$$E=(E-A)(A^{k-1}+A^{k-2}+\cdots+A+E).$$

Odavde izlazi

$$(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}.$$

66. Po X rešiti matrične jednačine:

1° $AX=B$; 2° $XA=B$; 3° $AX=BA^{-1}B$; 4° $XA=BA^{-1}B$,

gde je

$$A\equiv\begin{Vmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&0&-1\end{Vmatrix},\quad B\equiv\begin{Vmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}.$$

67. Ako je

$$M\equiv\begin{Vmatrix}1&2&0\\1&2&2\\1&1&1\end{Vmatrix},$$

pokazati da je $(M^{-1})^2=(M^2)^{-1}$.

68. Data je matrica

$$M\equiv\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&\cos a&-\sin a\\0&\sin a&\cos a\end{Vmatrix}\quad\left(\cos\frac{1}{2}a\neq0\right).$$

Pokazati da je $E+M$ nesingularna (regularna) matrica i da važi relacija

$$(E-M)(E+M)^{-1}=\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\right)\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{Vmatrix}.$$

69. Neka je

$$x=\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Vmatrix},\quad y=\begin{Vmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Vmatrix},\quad z=\begin{Vmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{Vmatrix},$$

$$A=\begin{Vmatrix}1&3&5\\3&5&1\\5&3&1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}-1&2&-3\\-2&3&1\\2&-3&-1\end{Vmatrix}.$$

Polazeći od relacija

$$y=Ax,\quad z=By,$$

izraziti x pomoću z.

70. Iz relacija

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}$$

izračunati $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$ pomoću $\begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix}$.

Rezultat.
$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 26 & -8 & 18 \\ -41 & 8 & -25 \\ 40 & -10 & 26 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix}.$$

71. Date su matrice:

(1) $$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{Vmatrix} \quad (a \text{ skalar}).$$

Odrediti a tako da budu zadovoljeni uslovi:

(2) $$ABC = -E, \quad CA = B \quad (C \text{ kvadratna matrica drugog reda}).$$

Rešenje. Ako se iz relacija (2) eliminiše matrica C, dobija se

$$AB^2A^{-1} = -E, \quad \text{odakle sleduje} \quad B^2 = -E.$$

Za partikularne vrednosti (1) poslednja relacija postaje

$$\begin{Vmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Odavde sleduje $a = \pm 1$.

72. Po X rešiti matričnu jednačinu

$$\begin{Vmatrix} 0 & -b & -b \\ a & 0 & -b \\ a & a & 0 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 0 & b & b \\ -a & 0 & b \\ -a & -a & 0 \end{Vmatrix},$$

gde su a i b realni brojevi.

Uzeti u obzir slučajeve:

$$1^0 \quad 0 \neq a \neq b \neq 0; \qquad 2^0 \quad a = b \neq 0.$$

73. Ako su A i B dve nesingularne i komutativne kvadratne matrice istog reda, tada

1° Važe relacije:

$$AB^{-1}=B^{-1}A, \quad A^{-1}B=BA^{-1}, \quad A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1};$$

2° Matrične jednačine $AX=B$, $YA=B$ imaju jedno isto rešenje koje se može označiti sa B/A.

Dokazati ovo.

Rešenje. 1° Budući da je

$$AB=BA,$$

posle množenja sleva sa B^{-1}, dobija se

$$B^{-1}AB=A, \quad \text{jer je} \quad B^{-1}B=E \quad (E \text{ jedinična matrica}).$$

Ako se leva i desna strana poslednje relacije pomnože sdesna sa B^{-1}, biće

$$B^{-1}ABB^{-1}=AB^{-1}, \quad \text{tj.} \quad B^{-1}A=AB^{-1}.$$

Istim postupkom dokazuju se relacije

$$A^{-1}B=BA^{-1}, \quad A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

Budući da su matrice A i B nesingularne, postoje i njihove inverzne matrice.

2° Posle množenja sleva sa A^{-1} jednačina

$$AX=B \quad \text{postaje} \quad A^{-1}AX=A^{-1}B.$$

$$\therefore \quad X=A^{-1}B.$$

Posle množenja sdesna sa A^{-1} jednačina

$$YA=B \quad \text{postaje} \quad YAA^{-1}=BA^{-1}.$$

$$\therefore \quad Y=BA^{-1}.$$

Budući da je $A^{-1}B=BA^{-1}$, date jednačine imaju isto rešenje.

74. Ako se sa A' i B' označe matrice koje se od kvadratnih komutativnih i regularnih matrica A i B istog reda dobijaju transpozicijom, ispitati da li su komutativne matrice:

1° A' i B'; 2° $(A')^{-1}$ i B'; 3° A' i $(B')^{-1}$; 4° $(A')^{-1}$ i $(B')^{-1}$.

Ispitati takođe da li jednačine

$$A'X'=B' \quad \text{i} \quad Y'A'=B'$$

imaju jedno isto rešenje.

IV. SPECIJALNE MATRICE

75. Da li su matrice

$$\left\|\begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{matrix}\right\|, \quad \frac{1}{3}\left\|\begin{matrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix}\right\|, \quad \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|$$

ortogonalne?

76. Da li je matrica $\left\|\begin{matrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{matrix}\right\|$ hermitska?

Rezultat. Jeste.

77. Ako je x jednokolona matrica, obrazovati $x'x$ i xx', i ispitati da li je matrica xx' simetrična.

78. Proveriti da li matrice

$$H = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad K = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

imaju osobine:

$$H = K^{-1}, \quad H' = K, \quad H^{-1} = H'.$$

79. Ako je $A = \bar{A}^{-1}$ i ako je $A = X + iY$ (X, Y realne matrice), pokazati da je

(1) $\qquad XY = YX, \quad X^2 + Y^2 = E \quad$ (E jedinična matrica).

Rešenje. Prema navedenim uslovima je

$$X + iY = (X - iY)^{-1}.$$

Ako se leva i desna strana ove relacije pomnože sdesna sa $X - iY$, dobija se

$$(X + iY)(X - iY) = E, \quad \text{tj} \quad X^2 + i(YX - XY) + Y^2 = E.$$

Odavde sleduju relacije (1).

80. Ako je

$$A \equiv \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad H \equiv \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a_1 \\ 0 & -1 & a_1 & a_2 \\ -1 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix},$$

ispitati da li je matrica HA simetrična i da li je $HAH^{-1} = A'$. Generalisati ove rezultate.

81. Koliko najviše raznih elemenata ima simetrična kvadratna matrica reda n?

Odgovor. $\binom{n+1}{2}$.

82. Dokazati da je proizvod dve ortogonalne matrice ortogonalna matrica i da je matrica, inverzna ortogonalnoj matrici, takođe ortogonalna.

83. Dokazati da je proizvod dve unitarne matrice unitarna matrica i da je matrica, inverzna unitarnoj matrici, takođe unitarna.

84. Pokazati da je proizvod od r unitarnih matrica tako isto jedna unitarna matrica.

Dokaz. Neka su A_k ($k = 1, 2, \ldots, r$) unitarne matrice, tj. matrice za koje važe uslovi

(1) $\qquad A_k^{-1} = \bar{A}_k' \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$

Posmatrajmo izraz

$$(A_1 A_2 \cdots A_r)^{-1} \quad \text{odnosno} \quad A_r^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Ovaj se izraz, prema (1), svodi na oblik

$$\begin{aligned}\overline{A}_r' \cdots \overline{A}_2' \overline{A}_1' &= (\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_r)' \\ &= \overline{(A_1 A_2 \cdots A_r)}'.\end{aligned}$$

Prema tome, dokazali smo relaciju

$$(A_1 A_2 \cdots A_r)^{-1} = \overline{(A_1 A_2 \cdots A_r)}'.$$

Ovim je dokazan navedeni stav.

Primedba. Da li navedeni stav važi za ortogonalne matrice?

85. Odrediti pozitivne brojeve a, b, c, d, e, f, g, h tako da matrica

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\begin{Vmatrix} a & \sqrt{f} & \sqrt{3} & c\sqrt{g} & \sqrt{f} \\ b & \sqrt{f} & -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{f} \\ c & 0 & c\sqrt{3} & -c\sqrt{g} & 0 \\ d & -\sqrt{f} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{f} \\ e & -\sqrt{f} & \sqrt{3} & c\sqrt{g} & -\sqrt{f} \end{Vmatrix}$$

bude ortogonalna.

86. Date su dve ortogonalne matrice

$$A = \| a_{ik} \|_1^n, \qquad B = \| b_{ik} \|_1^n.$$

Ispitati da li ove matrice imaju osobinu

$$\det \| a_{ik} - b_{ik} \| = 0, \quad \text{ako je} \quad \det \| a_{ik} \| - \det \| b_{ik} \| = 0.$$

Uputstvo. Poći od relacije

$$B' - A' = A'(A - B)B',$$

koja važi za ortogonalne matrice.

87. Neka je

(1) $$X = AZ, \qquad Y = A'Z,$$

gde je

$$A \equiv \begin{Vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{Vmatrix}; \quad a, b, c \text{ realne konstante}; \quad X \equiv \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad Y \equiv \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}, \quad Z \equiv \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix}.$$

Pokazati da je direktna transformacija od X na Y ortogonalna.

Uputstvo. Ako se iz (1) eliminiše matrica Z, dobija se

(2) $$X = A(A')^{-1} Y.$$

(Transformacija $X = BY$ zove se ortogonalna, ako je matrica B ortogonalna).

Da bismo utvrdili da li je matrica $A(A')^{-1}$ ortogonalna, treba ispitati da li je

$$\{A(A')^{-1}\}\{A(A')^{-1}\}' = E,$$

odnosno da li je

(3) $$A'A = AA'.$$

Za gore navedenu matricu A uslov (3) je zadovoljen. Prema tome, transformacija (2) je ortogonalna.

88. Proveriti da li je

$$\begin{Vmatrix} z & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \bar{z} \\ 1 \end{Vmatrix} = \| az\bar{z} + bz + c\bar{z} + d \|.$$

Ako je broj $az\bar{z} + bz + c\bar{z} + d$ realan za svako z, tada je matrica

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$$

hermitska. Da li važi obrnuto?

89. Odrediti BAB', gde je A koso-simetrična matrica tipa $n \times n$ i gde je

$$B \equiv \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & & b_2 \\ b_3 & b_3 & & b_3 \end{vmatrix}$$

matrica tipa $3 \times n$.

90. Ako je $a = \sin\theta \sin\varphi$, $b = \sin\theta\cos\varphi$, $c = \cos\theta\sin\varphi$, $d = \cos\theta\cos\varphi$, da li je matrica

$$\begin{Vmatrix} a & b & d & -c \\ b & -a & c & d \\ c & d & -b & a \\ d & -c & -a & -b \end{Vmatrix}$$

ortogonalna?

91. Da li je matrica

$$\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{3} & (1+i)/\sqrt{3} \\ (1-i)/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$$

unitarna?

92. Ako je A kvadratna matrica, pokazati da je matrica $A' + A$ simetrična, a $\bar{A}' + A$ hermitska.

93. Ako su sve determinante

$$(a_{11}), \quad (a_{11}\, a_{22}), \quad \ldots, \quad (a_{11}\, a_{22} \cdots a_{n-1, n-1})$$

različite od nule, tada se matrica

$$A = \| a_{ik} \| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

može pretstaviti u obliku

$$A = CB \quad (C \text{ donja, } B \text{ gornja trougaona matrica reda } n).$$

Dokaz. Trougaone matrice C i B reda n imaju oblike:

$$C = \| c_{ik} \| \quad (c_{ik}=0 \text{ za } i<k),$$
$$B = \| b_{ik} \| \quad (b_{ik}=0 \text{ za } i>k)$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, n).$$

Pokazaćemo najpre da je navedeni stav tačan za matricu drugog reda ($n=2$), tj. da se c_{11}, c_{21}, c_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22} mogu odrediti tako da je

$$\text{(1)} \qquad \begin{Vmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \qquad (a_{11} \neq 0).$$

Ova relacija važi ako i samo ako je

$$\text{(2)} \qquad c_{11} b_{11}=a_{11}, \quad c_{11} b_{12}=a_{12}, \quad c_{21} b_{11}=a_{21}, \quad c_{21} b_{12}+c_{22} b_{22}=a_{22}.$$

Kako je $a_{11} \neq 0$, skalari c_{11} i b_{11} različiti su od nule. Iz (2) izlazi

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}/b_{11}, \\ c_{21} &= a_{21}/b_{11}, \\ b_{12} &= a_{12}/c_{11} = a_{12} b_{11}/a_{11}, \\ c_{22} b_{22} &= a_{22}-c_{21} b_{12} = (a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21})/a_{11}, \end{aligned}$$

gde je $a_{11} \neq 0$ i $b_{11} \neq 0$.

Prema tome, ako je $b_{11} \neq 0$ i $b_{22} \neq 0$, matrica

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \qquad (a_{11} \neq 0)$$

može se faktorisati prema formuli (1).

Ako je $b_{11}=1$ i $b_{22}=1$, tada imamo faktorizaciju

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & (a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21})/a_{11} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (a_{11} \neq 0).$$

Primedba I. Iz relacija (2) izlazi

$$a_{12} a_{21}=a_{11} b_{12} c_{21}.$$

Ako je $a_{11}=0$, tada je $a_{12} a_{21}=0$.
To znači da se matrica

$$\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \qquad (a_{12} a_{21} \neq 0)$$

ne može pretstaviti kao proizvod jedne donje C i jedne gornje B trougaone matrice drugog reda.

Međutim, postoje matrice A ($a_{11}=0$ i $a_{12}=0$ ili $a_{11}=0$ i $a_{21}=0$) drugog reda koje se mogu faktorisati na navedeni način.

Primedba II. Valja naglasiti da je u ovom problemu poredak matrica C i B bitan (prvi faktor je donja, a drugi gornja trougaona matrica).

Pretpostavimo sada da je stav istinit za matricu reda $n=s-1$ ($s \geqslant 3$ neki prirodan broj), pa ispitajmo da li on važi za matricu reda $n=s$.

Razbijmo matricu

$$A_s = \| a_{ik} \| \quad (i, k=1, 2, \ldots, s)$$

na blokove na sledeći način:

$$A_s = \left\Vert \begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \hdashline a_{s1} & a_{s2} & a_{ss} \end{array} \right\Vert = \begin{Vmatrix} A_{s-1} & u \\ v & \| a_{ss} \| \end{Vmatrix}.$$

Učinimo isto sa matricama C_s i B_s, tj. razbijmo ih na blokove na sledeći način:

$$C_s = \left\| \begin{array}{ccc:c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \hdashline c_{s1} & c_{s2} & & c_{ss} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} C_{s-1} & 0 \\ x & \| c_{ss} \| \end{array} \right\|,$$

$$B_s = \left\| \begin{array}{ccc:c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & & b_{ss} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} B_{s-1} & y \\ 0 & \| b_{ss} \| \end{array} \right\|.$$

Postavimo sada pitanje da li se matrice C_s i B_s mogu tako odrediti da bude

$$C_s B_s = A_s,$$

odnosno

$$\left\| \begin{array}{cc} C_{s-1} & 0 \\ x & \| c_{ss} \| \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} B_{s-1} & y \\ 0 & \| b_{ss} \| \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{s-1} & u \\ v & \| a_{ss} \| \end{array} \right\|,$$

odnosno

$$\left\| \begin{array}{cc} C_{s-1} B_{s-1} & C_{s-1} y \\ x B_{s-1} & xy + \| c_{ss} b_{ss} \| \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{s-1} & u \\ v & \| a_{ss} \| \end{array} \right\|.$$

Poslednja relacija važi ako i samo ako je

(4) $$C_{s-1} B_{s-1} = A_{s-1},$$

(5) $$C_{s-1} y = u,$$

(6) $$x B_{s-1} = v,$$

(7) $$xy + \| c_{ss} b_{ss} \| = \| a_{ss} \|.$$

Relacija (4) izražava induktivnu hipotezu, jer smo pretpostavili da se jedna matrica reda $s-1$ može rastaviti u obliku proizvoda dve trougaone matrice reda $s-1$, napred navedenog oblika.

Ako se iz matričnih relacija (5), (6), (7) mogu odrediti matrice x, y i skalari c_{ss}, b_{ss}, tada je dokazano da je stav tačan za $n=s$, ako je tačan za $n=s-1$.

Kako je po pretpostavci $\det A_{s-1} \neq 0$, iz relacije

$$\det A_{s-1} = \det (C_{s-1} B_{s-1}) = (\det C_{s-1}) (\det B_{s-1})$$

izlazi da su $\det C_{s-1}$ i $\det B_{s-1}$ različite od nule, pa postoje inverzne matrice $\overset{-1}{C_{s-1}}$ i $\overset{-1}{B_{s-1}}$.

Iz (5), (6), (7) sleduje:

(8) $$y = \overset{-1}{C_{s-1}} u, \quad x = v \overset{-1}{B_{s-1}},$$

(9) $$c_{ss} b_{ss} = a_{ss} - (c_{s1} b_{1s} + c_{s2} b_{2s} + \cdots + c_{s,s-1} b_{s-1,s}).$$

Na osnovu relacije (9) zaključujemo da se za b_{ss} ili c_{ss} može uzeti proizvoljna vrednost koja je različita od nule. Ako se uzme $b_{ss}=1$, tada je c_{ss} dato jednačinom (9).

Ovim je induktivni dokaz završen.

Ako se usvoji da se svaka matrica prvog reda smatra kao trougaona matrica (bilo donja bilo gornja), tada se svaka matrica prvog reda $\| a_{11} \|$ može napisati kao proizvod dve matrice

$$\| c_{11} \| \quad \text{i} \quad \| b_{11} \|$$

od kojih se prva uzima kao donja, a druga kao gornja trougaona matrica.

Prema tome, matrica $\| a_{ik} \|$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$, za koju je

$$(a_{11}) \neq 0, \quad (a_{11} a_{22}) \neq 0, \quad \ldots, \quad (a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1,n-1}) \neq 0,$$

može se pretstaviti kao proizvod donje i gornje trougaone matrice reda n. Ovo faktorisanje biće jedinstveno ako se dijagonalnim elementima jedne od trougaonih matrica fiksiraju vrednosti od kojih nijedna nije jednaka nuli.

94. Matricu

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix}$$

izraziti kao proizvod dve trougaone matrice.

Rešenje. Proizvod matrice A i matrice

$$M_1=\begin{Vmatrix} 1 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & -a_{14}/a_{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (a_{11}\neq 0)$$

ima oblik

$$AM_1=\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{31} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{41} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix},$$

gde je $b_{11}=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})/a_{11}$, itd.

Ako je $b_{11}\neq 0$, odnosno

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,$$

i ako je

$$M_2=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_{12}/b_{11} & -b_{13}/b_{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

dobija se

$$AM_1M_2=\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & b_{21} & c_{11} & c_{12} \\ a_{41} & b_{31} & c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix},$$

gde je $c_{11}=(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})/b_{11}$, itd.

Ako je $c_{11}\neq 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

i ako je

$$M_3=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c_{12}/c_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

dobija se

$$A\,M_1 M_2 M_3 = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & b_{21} & c_{11} & 0 \\ a_{41} & b_{31} & c_{21} & d_{11} \end{Vmatrix},$$

gde je $d_{11}=(c_{11}\,c_{22}-c_{12}\,c_{21})/c_{11}$.

Poslednja matrica je *trougaona matrica.*

Kako je

$$M_1 M_2 = \begin{Vmatrix} 1 & -a_{12}/a_{11} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & -b_{12}/b_{11} & -b_{13}/b_{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$(M_1 M_2)\,M_3 = \begin{Vmatrix} 1 & -a_{12}/a_{11} & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & -b_{12}/b_{11} & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & -c_{12}/c_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

zaključujemo da je $M_1 M_2 M_3$ takođe *trougaona matrica.*

Prema tome, dobijamo

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & b_{21} & c_{11} & 0 \\ a_{41} & b_{31} & c_{21} & d_{11} \end{Vmatrix} (M_1 M_2 M_3)^{-1},$$

jer je $M_1 M_2 M_3$ regularna matrica.

Inverzna matrica trougaone matrice $M_1 M_2 M_3$ je trougaona matrica istog oblika

$$\begin{Vmatrix} 1 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ 0 & 1 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ovim smo matricu A rastavili na proizvod dve trougaone matrice.

Primer. Za matricu

$$\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{Vmatrix},$$

prema prethodnom, dobijamo:

$$M_1 = \begin{Vmatrix} 1 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad M_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad M_1 M_2 M_3 = \begin{Vmatrix} 1 & -4 & -13 & -4/9 \\ 0 & 1 & 3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$(M_1 M_2 M_3)^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Dakle, dolazimo do sledeće faktorizacije:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & -36 & 0 \\ 1 & -6 & -14 & 22/9 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

V. RANG MATRICE. LINEARNE FORME

95. Odrediti rang matrica:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 7 & -11 & -6 & 2 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 23 \end{Vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & -15 & -1 \end{Vmatrix},$$

$$A_5 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Rezultat. Rang matrice $A_5 = 4$.

96. Odrediti rang matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \end{Vmatrix}.$$

Ako je rang manji od 3, koja veza postoji između vrsta, a koja između njenih kolona?

97. Odrediti rang matrice

$$\begin{Vmatrix} 6 & 11 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -8 & -6 & 5 \\ 5 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ako je rang manji od 5, koja zavisnost postoji između vrsta, a koja između njenih kolona?

98. Odrediti λ tako da rang matrice

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$$

bude što manji.

99. Odrediti rang matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \\ 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \end{Vmatrix} \qquad (a, b, c, d \text{ proizvoljni skalari}).$$

Dati generalizaciju.

Rezultat. Za svaki skup vrednosti parametara a, b, c, d rang date matrice je 2.

100. Odrediti rang matrice

$$\begin{Vmatrix} 4-x & 2\sqrt{5} & 0 \\ 2\sqrt{5} & 4-x & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 4-x \end{Vmatrix} \qquad (x \text{ realan parametar}).$$

101. Odrediti rang matrice $\| a_{ik} \|_1^n$, gde je

$$a_{ik} = 1 \qquad (i \neq k),$$
$$= n-1 \qquad (i = k).$$

102. Dat je skup linearnih jednačina

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} f_1 &\equiv 2x + 3y - z - t = 0, \\ f_2 &\equiv x - y - 2z - 4t = 0, \\ f_3 &\equiv 3x + y + 3z - 2t = 0, \\ f_4 &\equiv 6x + 3y - 7t = 0. \end{aligned}$$

Ako skup jednačina (A) ima i netrivijalnih rešenja, pokazati da postoji relacija

(1) $$f_1 \equiv \lambda f_2 + \mu f_3 + \nu f_4,$$

gde su λ, μ, ν tri konstante koje treba odrediti.

Posmatrati zatim skup jednačina:

(B) $$\begin{aligned} g_1 &\equiv 2x + y + 3z + 6t = 0, \\ g_2 &\equiv 3x - y + z + 3t = 0, \\ g_3 &\equiv -x - 2y + 3z = 0, \\ g_4 &\equiv -x - 4y - 2z - 7t = 0. \end{aligned}$$

Matrica determinante skupa jednačina (B) dobijena je transpozicijom matrice determinante skupa jednačina (A).

Da li se i za skup jednačina (B) mogu odrediti parametri α, β, γ takvi da bude

(2) $$g_1 \equiv \alpha g_2 + \beta g_3 + \gamma g_4.$$

Rešiti skup jednačina (B).

Rešenje. Determinanta skupa jednačina (A)

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

jednaka je nuli, jer je zbir odgovarajućih elemenata prve, druge i treće vrste jednak elementima četvrte vrste. Skup jednačina (A) osim trivijalnih ima i netrivijalna rešenja, data relacijama:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-t}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}},$$

odnosno

$$\frac{x}{55} = \frac{-y}{33} = \frac{-z}{22} = \frac{t}{33}, \quad \text{ili} \quad \frac{x}{5} = -\frac{y}{3} = -\frac{z}{2} = \frac{t}{3}.$$

Relacija (1) ima oblik

$$f_1 \equiv -f_2 - f_3 + f_4.$$

S obzirom da je matrica determinante skupa (B) postala transpozicijom matrice determinante Δ, ona je takođe jednaka nuli, te će skup (B) osim trivijalnih imati i netrivijalna rešenja, data relacijama:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & -2 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-t}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix}},$$

odnosno

$$x = y = z = -t.$$

Parametre α, β, γ u relaciji

$$g_1 \equiv \alpha g_2 + \beta g_3 + \gamma g_4$$

odredićemo iz skupa jednačina

$$3\alpha-\beta-\gamma=2, \quad -\alpha-2\beta-4\gamma=1, \quad \alpha+3\beta-2\gamma=3, \quad 3\alpha-7\gamma=6,$$

koji, s obzirom da je

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

ima rešenje

$$\alpha=\frac{33}{55}, \quad \beta=\frac{22}{55}, \quad \gamma=-\frac{33}{55},$$

te je

$$g_1\equiv\frac{3}{5}g_2+\frac{2}{5}g_3-\frac{3}{5}g_4.$$

103. U jednom problemu elektrotehnike javlja se sledeći skup linearnih jednačina

$$\begin{aligned} -i_a \qquad - i_d \quad + i_f &= 0, \\ i_a - i_b \qquad - i_e \quad &= 0, \\ i_b + i_c \qquad - i_f &= 0, \\ a i_a \qquad - d i_d + e i_e \quad &= 0, \\ b i_b - c i_c \qquad - e i_e \quad &= 0, \\ a i_a + b i_b \qquad + f i_f &= E. \end{aligned}$$

Odrediti i_e kao funkciju od a, b, c, d, e, f, E.

Rešenje. Nepoznata i_e data je količnikom $i_e=D_e/D$, gde je

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & e & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & -e & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}, \quad D_e=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & E & f \end{vmatrix}.$$

Ako elementima I i IV kolone determinante D dodamo odgovarajuće elemente poslednje kolone, dobijamo

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & e & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & -e & 0 \\ a+f & b & 0 & f & 0 & f \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 & -d & e \\ 0 & b & -c & 0 & -e \\ a+f & b & 0 & f & 0 \end{vmatrix}.$$

Ako elementima I i IV kolone poslednje determinante dodamo elemente III kolone i od elemenata II kolone oduzmemo elemente III kolone, dobijamo

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & -d & e \\ -c & b+c & -c & -c & -e \\ a+f & b & 0 & f & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -d & e \\ -c & b+c & -c & -e \\ a+f & b & f & 0 \end{vmatrix}.$$

Dodajmo sada elementima II i IV kolone poslednje determinante elemente I kolone, pa dobijamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & -d & a+e \\ -c & b & -c & -c-e \\ a+f & a+b+f & f & a+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -d & a+e \\ b & -c & -c-e \\ a+b+f & f & a+f \end{vmatrix}$$

$$= ef(a+b+c+d) + f(a+d)(b+c) + e(a+b)(c+d) + ad(b+c) + bc(a+d).$$

Determinanta D_e izračunava se na isti način kao determinanta D, tj.

$$D_e = -E \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix} = E(bd-ac).$$

104. Diskutovati skup jednačina

$$\begin{aligned} (1-a)x + (2a+1)y + (2a+2)z &= a, \\ ax + ay &= 2a+2, \\ 2x + (a+1)y + (a-1)z &= a^2-2a+9, \end{aligned}$$

gde je a parametar.

105. Odrediti a tako da linearne forme

$$f_1 \equiv 5x-2y+9z, \quad f_2 \equiv -x+y+3z, \quad f_3 \equiv x-ay+2az$$

budu zavisne. Koja je onda zavisnost između tih formi?

106. Odrediti parametre a, b, c, d tako da linearne forme

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv (1-a)x+y+z+t, \\ f_2 &\equiv x+(1-b)y+z+t, \\ f_3 &\equiv x+y+(1-c)z+t, \\ f_4 &\equiv x+y+z+(1-d)t \end{aligned}$$

budu zavisne.

107. Rešiti skup linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} x+2y-3z+4t &= 9, \\ x - z + t &= 1, \\ 3x - y + z &= -1, \\ -x + y + 2t &= 9, \\ 3x + y + 3t &= 9. \end{aligned}$$

Rezultat. $x=-1$, $y=0$, $z=2$, $t=4$.

108. Da li skup jednačina

$$x+y-2z=0, \quad 2x+y-3z=0, \quad 2x-y-z=0,$$
$$6x-y-5z=0, \quad 7x-3y-4z=0$$

ima rešenja?

109. Rešiti skup jednačina:

$$\begin{aligned} (n-1)\,x_1 &= x_2+x_3+\cdots+x_n, \\ (n-1)\,x_2 &= x_1+x_3+\cdots+x_n, \\ &\vdots \\ (n-1)\,x_n &= x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}. \end{aligned}$$

110. 1° Odrediti x_1 i x_2 iz skupa linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 3, \\ x_1+2x_2+2x_3+3x_4+4x_5 &= 9, \\ 2x_1+x_2-2x_3+2x_4-3x_5 &= -16, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_5 &= 2, \\ -x_1+x_2-4x_3+4x_4+2x_5 &= -12. \end{aligned} \tag{1}$$

2° Iz skupa jednačina (1) odrediti x_2, x_3, x_5.

3° Iz istog skupa jednačina odrediti x_1 i x_5.

Rešenje. 1° Da bismo odredili x_1 i x_2, možemo primeniti *Cramer*-ove formule. Ovaj postupak iziskuje izračunavanje tri determinante petog reda.

Ovde će biti naveden drugi postupak, zasnovan na množenju matrica pomoću blokova. Ovaj postupak iziskuje manji broj računskih operacija nego *Cramer*-ov postupak, a naročito je koristan, ako p nepoznatih treba naći iz skupa od n jednačina, gde je $n\,(>p)$ veliko.

Umesto skupa (1) možemo sažeto pisati

$$\left\|\begin{array}{cc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 2 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hdashline x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} 3 \\ 9 \\ \hdashline -16 \\ 2 \\ -12 \end{array}\right\|, \tag{2}$$

odnosno

$$(3)\qquad \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Vmatrix},$$

gde su, na primer, A_1 i X_1 sledeće matrice (blokovi):

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad X_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}.$$

Posle primene blokovskog množenja matrica, relacija (3) postaje

$$(4)\qquad \begin{aligned} A_1X_1 + A_2X_2 &= Y_1, \\ A_3X_1 + A_4X_2 &= Y_2. \end{aligned}$$

Budući da tražimo samo x_1 i x_2, iz jednačina (4) treba odrediti samo X_1. Eliminišimo iz (4) matricu X_2. Redom dobijamo sledeći niz relacija:

$$\begin{aligned} A_4X_2 &= Y_2 - A_3X_1, \\ X_2 &= A_4^{-1}(Y_2 - A_3X_1) \qquad (\det A_4 \neq 0), \\ Y_1 &= A_1X_1 + A_2A_4^{-1}(Y_2 - A_3X_1). \end{aligned}$$

Rezultat eliminacije X_2 iz jednačina (4) je

$$(5)\qquad (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)\,X_1 = Y_1 - A_2A_4^{-1}Y_2.$$

Ako je $\det(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3) \neq 0$, tada se iz (5) određuje X_1 i odatle neposredno dobijaju x_1 i x_2.

Relacija (5), za partikularan slučaj (1), ima oblik

$$\begin{Vmatrix} 67 & 63 \\ 101 & 105 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 \\ -4 \end{Vmatrix},$$

odakle se bez teškoće izračunavaju x_1 i x_2.

Red izračunavanja je sledeći:

$$A_4^{-1},\quad A_2A_4^{-1},\quad A_2A_4^{-1}Y_2,\quad Y_1 - A_2A_4^{-1}Y_2;$$
$$A_2A_4^{-1}A_3,\quad A_1 - A_2A_4^{-1}A_3,$$

tj. treba izračunati inverznu matricu matrice trećeg reda, zatim izvršiti tri operacije množenja matrica i dve operacije oduzimanja matrica.

Navedeni postupak ima praktičan značaj.

111. Ako su x, y, z, u konačni i $|x| + |y| + |z| + |u| > 0$ i ako važe relacije:

$$(1)\qquad x = by + cz + du, \quad y = ax + cz + du, \quad z = ax + by + du, \quad u = ax + by + cz,$$

pokazati da je

$$(2)\qquad \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} = 1 \qquad (a, b, c, d \neq -1).$$

Rešenje. Potreban i dovoljan uslov da dati skup jednačina ima netrivijalnih rešenja je

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} -1 & b & c & d \\ a & -1 & c & d \\ a & b & -1 & d \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Posle razvijanja determinante, koja se javlja u (3), dobija se (2).

112. Pod pretpostavkom da jednačine

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$$

imaju jedan zajednički koren, pokazati da je ovaj koren dat jednačinom

$$\begin{vmatrix} a & c & d & 0 \\ 0 & b & c & d \\ \alpha & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} b & c & d & 0 \\ a & b & c & d \\ \beta & \gamma & \delta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Rešenje. Posmatrajmo četiri jednačine:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(ax+b)\,x^3+cx^2+dx=0, \quad && ax^3+bx^2+cx=-d, \\ &(\alpha x+\beta)\,x^3+\gamma x^2+\delta x=0, \quad && \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x=-\delta. \end{aligned}$$

Rezultat eliminacije veličina x^3, x^2, x je

$$\begin{vmatrix} ax+b & c & d & 0 \\ a & b & c & d \\ \alpha x+\beta & \gamma & \delta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0, \text{ tj. } \begin{vmatrix} a & c & d & 0 \\ 0 & b & c & d \\ \alpha & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} b & c & d & 0 \\ a & b & c & d \\ \beta & \gamma & \delta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Da li bismo umesto posmatranog pomoćnog skupa jednačina (1) mogli uočiti neki drugi skup jednačina koji bi takođe doveo do rezultata?

VI. SOPSTVENE VREDNOSTI MATRICE

113. Ako su poznate karakteristične (sopstvene) vrednosti kvadratne matrice A reda n, odrediti karakteristične vrednosti matrice A^2.

Rešenje. Karakteristični polinom matrice A napišimo u obliku:

$$(1) \qquad |A-\lambda E| \equiv (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda),$$

gde su λ_k karakteristične vrednosti matrice A.

Ako se u identitetu (1) umesto λ stavi $-\lambda$, dobija se

$$(2) \qquad |A+\lambda E| \equiv (\lambda_1+\lambda)(\lambda_2+\lambda)\cdots(\lambda_n+\lambda).$$

Iz relacija (1) i (2), posle množenja, sleduje

$$(3) \qquad |A^2-\lambda^2 E| \equiv (\lambda_1^2-\lambda^2)(\lambda_2^2-\lambda^2)\cdots(\lambda_n^2-\lambda^2).$$

Stavimo li ovde λ umesto λ^2, biće

$$(4) \qquad |A^2-\lambda E| \equiv (\lambda_1^2-\lambda)(\lambda_2^2-\lambda)\cdots(\lambda_n^2-\lambda).$$

Prema tome, karakteristične vrednosti matrice A^2 su λ_k^2 $(k=1, 2, \ldots, n)$.

114. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristične vrednosti kvadratne matrice A reda n i ako je $k\,(>1)$ prirodan broj, tada su

$$\lambda_\nu^k \quad (\nu=1, 2, \ldots, n)$$

karakteristične vrednosti matrice A^k.

Rešenje. Pođimo od karakterističnog polinoma matrice A, napisanog u obliku

(1) $$|A-\lambda E| \equiv (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda).$$

Ako je $\varepsilon=\exp(2\pi i/k)$, tada važe sledeći identiteti (koji se dobijaju iz (1), kada se umesto λ redom stavlja $\lambda\varepsilon, \lambda\varepsilon^2, \ldots \lambda\varepsilon^{k-1}$):

(2) $$\begin{aligned} |A-\lambda\varepsilon E| &\equiv (\lambda_1-\lambda\varepsilon)(\lambda_2-\lambda\varepsilon)\cdots(\lambda_n-\lambda\varepsilon),\\ |A-\lambda\varepsilon^2 E| &\equiv (\lambda_1-\lambda\varepsilon^2)(\lambda_2-\lambda\varepsilon^2)\cdots(\lambda_n-\lambda\varepsilon^2),\\ &\vdots\\ |A-\lambda\varepsilon^{k-1} E| &\equiv (\lambda_1-\lambda\varepsilon^{k-1})(\lambda_2-\lambda\varepsilon^{k-1})\cdots(\lambda_n-\lambda\varepsilon^{k-1}).\end{aligned}$$

Ako se pomnože svi izrazi koji se nalaze na levim stranama relacija (1) i (2), a zatim na desnim stranama istih relacija, dobija se

$$|A^k-\lambda^k E| \equiv (\lambda_1{}^k-\lambda^k)(\lambda_2{}^k-\lambda^k)\cdots(\lambda_n{}^k-\lambda^k).$$

Stavi li se ovde λ umesto λ^k, biće

$$|A^k-\lambda E| \equiv (\lambda_1{}^k-\lambda)(\lambda_2{}^k-\lambda)\cdots(\lambda_n{}^k-\lambda).$$

Prema tome, ako su λ_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ karakteristične vrednosti matrice A reda n, tada su

$$\lambda_\nu{}^k \quad \{\nu=1, 2, \ldots, n;\ k\,(>1) \text{ prirodan broj}\}$$

karakteristične vrednosti matrice A^k.

115. Ako su poznate karakteristične (sopstvene) vrednosti regularne matrice A reda n, odrediti karakteristične vrednosti inverzne matrice A^{-1}.

Rešenje. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ rešenja jednačine

(1) $$|A-\lambda E|=0,$$

gde su: A regularna matrica reda n i E jedinična matrica reda n.

Budući da je

$$A(A^{-1}-\lambda^{-1}E)=-\lambda^{-1}(A-\lambda E),$$

dobija se

$$|A(A^{-1}-\lambda^{-1}E)| = |-\lambda^{-1}(A-\lambda E)|,$$

odnosno

$$|A|\,|A^{-1}-\lambda^{-1}E| = (-1)^n\lambda^{-n}|A-\lambda E|.$$

Ako je λ_k jedna nula polinoma $|A-\lambda E|$, tada je

$$|A^{-1}-\lambda_k{}^{-1}E| = 0.$$

Prema tome, karakteristične vrednosti matrice A^{-1} su

$$\lambda_1{}^{-1},\ \lambda_2{}^{-1},\ \ldots,\ \lambda_n{}^{-1}.$$

Primedba I. Da li karakteristična jednačina (1) može imati među korenima nulu? {Posmatrati relaciju između proizvoda korena karakteristične jednačine (1) matrice A i determinante matrice A}.

Primedba II. Tretirati slučaj kada jednačina (1) ima višestrukih korena.

116. Da li se parametar a može tako odrediti da jedna sopstvena vrednost matrice

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -3\\ 0 & 3 & a\\ 0 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$$

bude jednaka nuli?

117. Kvadratna matrica A reda n slična je kvadratnoj matrici B reda n, ako postoji takva nesingularna kvadratna matrica X reda n da je

$$A = X^{-1} BX .$$

Dokazati stav:

1° Ako je A slično sa B, tada je B slično sa A;

2° Ako je A slično sa B i B slično sa C, tada je i A slično sa C;

3° A je slično sa A.

Dokaz. 1° Iz $A=X^{-1} BX$ sleduje

$$B=XAX^{-1}=(X^{-1})^{-1} A (X^{-1}).$$

2° Iz relacija

$$A=X^{-1} BX, \quad B=Y^{-1} CY$$

sleduje

$$A=X^{-1}(Y^{-1} CY) X=(YX)^{-1} C(YX).$$

3° $A=E^{-1} AE.$

Primedba. C je kvadratna matrica reda n; Y nesingularna kvadratna matrica reda n; E jedinična matrica reda n.

Činjenica da je matrica A slična matrici B označava se sa

$$A \sim B.$$

Stav iskazuje da sličnost matrica ima osobinu simetričnosti, tranzitivnosti i refleksivnosti, tj. sličnost matrica je relacija ekvivalencije.

118. Dokazati da slične matrice imaju iste (identične) karakteristične polinome.

Dokaz. $A=X^{-1}BX$ (videti prethodni zadatak).

$$\begin{aligned} \therefore \quad |A-\lambda E| &= |X^{-1}BX-\lambda E| \\ &= |X^{-1}(BX-\lambda X)| \\ &= |X^{-1}(B-\lambda E)X| \\ &= |X^{-1}|\,|B-\lambda E|\,|X| \\ &= |B-\lambda E|. \end{aligned}$$

Obrnuto ne važi, tj. ako su karakteristični polinomi dve matrice identični, matrice ne moraju biti slične. Identičnost karakterističnih polinoma dve matrice potreban je uslov da su dve matrice slične, ali nije i dovoljan.

Primer. Matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

imaju iste karakteristične polinome, ali nisu slične.

Ako je X proizvoljna nesingularna matrica drugog reda, tada je

$$X^{-1}EX=E\neq \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \text{gde je} \quad E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

119. Da li su matrice

$$\begin{Vmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{Vmatrix}$$

slične među sobom ?

120. Dat je polinom $g(r) \equiv 2 + r - r^2$ i matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ispitati da li je

$$P^{-1} g(A) P = g(P^{-1} AP).$$

Dokazati da prethodna formula uopšte važi kada je $g(r)$ polinom.

VII. MATRIČNA ANALIZA

121. Polazeći od formule

(1) $$\frac{d}{dt} \| a_{ik} \| = \left\| \frac{d}{dt} a_{ik} \right\|,$$

izvesti sledeće formule:

(2) $$\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt},$$

(3) $$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt} B + A \frac{dB}{dt},$$

(4) $$\frac{d}{dt} A^2 = \frac{dA}{dt} A + A \frac{dA}{dt},$$

(5) $$\frac{d}{dt} A^3 = \frac{dA}{dt} A^2 + A \frac{dA}{dt} A + A^2 \frac{dA}{dt},$$

(6) $$\frac{d}{dt} A^{-1} = -A^{-1} \frac{dA}{dt} A^{-1}.$$

U formuli (2) A i B su matrice istog tipa; u formuli (3) A i B su matrice respektivno tipa $m \times n$ i $n \times p$.

U formulama (4) i (5) A je kvadratna matrica, a u formuli (6) A je nesingularna matrica.

Elementi matrica A i B su diferencijabilne funkcije promenljive t.

Rešenje. Formulu (6) izvešćemo polazeći od identiteta

$$A A^{-1} = E.$$

Posle diferenciranja dobija se jedno za drugim:

$$\frac{dA}{dt} A^{-1} + A \frac{dA^{-1}}{dt} = 0;$$

$$A \frac{dA^{-1}}{dt} = -\frac{dA}{dt} A^{-1};$$

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1} \frac{dA}{dt} A^{-1}.$$

Primedba. Ako je

$$A = \begin{Vmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos t & \sin t \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} \cos t & \cos a \\ \sin t & \sin a \end{Vmatrix} \quad (a \text{ parametar}),$$

pokazati da je

$$\frac{d}{dt}(AB) = E \sin(a-t) \quad (E \text{ jedinična matrica}).$$

Generalizacija. Odrediti:

$$1^0\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_1A_2\cdots A_\nu);\quad 2^0\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^\nu;\quad 3^0\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^{-\nu}\quad (\nu \text{ prirodan broj}).$$

122. Napisati diferencijalnu jednačinu

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+a_3\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+a_2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=0$$

(x funkcija od t; a_0, a_1, a_2, a_3 konstante)

u matričnom obliku.

Rešenje. Uvedimo tri pomoćne promenljive

$$(2)\qquad x_1=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t;\quad x_2=\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2;\quad x_3=\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^3x/\mathrm{d}t^3.$$

Relacija (1) tada postaje

$$(3)\qquad \mathrm{d}x_3/\mathrm{d}t=-a_3x_3-a_2x_2-a_1x_1-a_0x.$$

Jednačina (1), odnosno relacije (2) i (3) mogu se napisati u matričnom obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{Vmatrix} x\\ x_1\\ x_2\\ x_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} x\\ x_1\\ x_2\\ x_3\end{Vmatrix}.$$

123. Data je matrica

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & a/n\\ -a/n & 1\end{Vmatrix}\quad (a \text{ realan broj; } n \text{ prirodan broj}).$$

Pokazati da je:

$$1^0\qquad A=\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{1/2}\begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{Vmatrix}\quad (\operatorname{tg}\theta=a/n);$$

$$2^0\qquad \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{Vmatrix}^n=\begin{Vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{Vmatrix};$$

$$3^0\qquad \lim_{n\to+\infty}A^n=\begin{Vmatrix} \cos a & \sin a\\ -\sin a & \cos a\end{Vmatrix}.$$

Primedba. Ako postoje granične vrednosti:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a,\quad \lim_{n\to+\infty}b_n=b,\quad \lim_{n\to+\infty}c_n=c,\quad \lim_{n\to+\infty}d_n=d,$$

tada je, po definiciji,

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{Vmatrix} a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty}a_n & \lim\limits_{n\to+\infty}b_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}c_n & \lim\limits_{n\to+\infty}d_n\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a & b\\ c & d\end{Vmatrix}.$$

124. Ako je

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 4\\ 3 & -4 & 0\end{Vmatrix},$$

odrediti e^A.

Rešenje. Da bismo odredili

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k,$$

potrebno je izračunati matrice

$$A^k \quad (k=2,3,4,\dots).$$

Karakteristični polinom matrice A je

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -3\\ -1 & -\lambda & 4\\ 3 & -4 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-26\lambda.$$

Prema *Cayley-Hamilton*-ovoj teoremi je

(1) $$A^3+26A=0.$$

Odavde sleduje

(2) $$\begin{aligned}A^3&=-26A,\\ A^5&=-26A^3=26^2A,\\ A^7&=26^2A^3=-26^3A\\ &\vdots\\ A^{2n+1}&=(-1)^n 26^n A.\end{aligned}$$

Polazeći opet od (1), dobija se

(3) $$\begin{aligned}A^4&=-26A^2,\\ A^6&=-26A^4=26^2A^2,\\ &\vdots\\ A^{2n}&=(-1)^{n-1}26^{n-1}A^2.\end{aligned}$$

Na osnovu formula (2) i (3) biće

$$e^A=E+\left(\frac{1}{1!}-\frac{26}{3!}+\frac{26^2}{5!}-\cdots\right)A+\left(\frac{1}{2!}-\frac{26}{4!}+\frac{26^2}{6!}-\cdots\right)A^2$$

$$=E+\left(\frac{\sin\sqrt{26}}{\sqrt{26}}\right)A+\frac{1-\cos\sqrt{26}}{26}A^2.$$

Stavi li se ovde

$$A=\begin{Vmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 4\\ 3 & -4 & 0\end{Vmatrix},\quad A^2=\begin{Vmatrix}-10 & 12 & 4\\ 12 & -17 & 3\\ 4 & 3 & -25\end{Vmatrix},$$

dobija se e^A u obliku matrice trećeg reda.

Primedba. Postoji i drugi metod za izračunavanje matrice e^A.

125. Odrediti e^A, gde je $A=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$.

Rešenje. Budući da je

$$A^{2n}=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}=E,\quad A^{2n+1}=A \qquad (n \text{ prirodan broj ili nula}),$$

biće

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=E\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}+A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!},$$

odnosno

$$e^A=\begin{Vmatrix}\mathrm{ch}\,1 & \mathrm{sh}\,1\\ \mathrm{sh}\,1 & \mathrm{ch}\,1\end{Vmatrix}.$$

126. Izračunati e^A, gde je A matrica

$$A=\pi i\begin{Vmatrix}10 & -2 & -2\\ -2 & 13 & 4\\ -2 & 4 & 13\end{Vmatrix}.$$

Rezultat.

$$e^A=\frac{1}{9}\begin{Vmatrix}-7 & -4 & -4\\ -4 & -1 & 8\\ -4 & 8 & -1\end{Vmatrix}.$$

127. Ako je

$$A=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t\\ 0 & -t & 0\end{Vmatrix}\quad (t \text{ skalar}),$$

pretstaviti e^A kao matricu tipa 3×3.

VIII. RAZNI PROBLEMI

128. Dokazati da je

$$\begin{Vmatrix}\cos\theta+\sin\theta & 2\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta-\sin\theta\end{Vmatrix}^n=\begin{Vmatrix}\cos n\theta+\sin n\theta & 2\sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta-\sin n\theta\end{Vmatrix}$$

(n ceo broj).

129. Odrediti sve matrice X tipa 2×2 za koje važi uslov

(1) $$X^2-4X+3E=0.$$

Uputstvo. Relacija (1) može se napisati u obliku

(2) $$(X-2E)^2=E.$$

Ako se stavi

$$X-2E=\begin{Vmatrix}a & b\\ c & d\end{Vmatrix},$$

tada je

$$(X-2E)^2=\begin{Vmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & bc+d^2\end{Vmatrix}.$$

Iz (2) izlazi:

$$a^2+bc=1=bc+d^2,$$

$$b(a+d)=0=c(a+d).$$

Sve tražene matrice X su:

$$E,\ 3E,\ \begin{Vmatrix}2+p & q(1-p)\\ q^{-1}(1+p) & 2-p\end{Vmatrix}\quad (q\ (\neq 0)\ \text{i}\ p\ \text{ma kakve konstante}).$$

130. Pokazati da se svaka kvadratna matrica A može izraziti kao zbir od jedne simetrične i jedne koso-simetrične matrice.

Uputstvo. Posmatrati

$$2A=(A+A')+(A-A').$$

131. Ako je

$$AB+A+E=0 \quad (A, B \text{ kvadratne matrice reda } n),$$

pokazati da je matrica A regularna i $A^{-1}=-E-B$.

132. Koordinate x, y, z prelaze u koordinate x_1, y_1, z_1 pomoću formula

$$(1)\qquad \begin{aligned} 9x_1 &= 4x+7y-4z,\\ 9y_1 &= x+4y+8z,\\ 9z_1 &= 8x-4y+z. \end{aligned}$$

Pomoću istih formula koordinate x_1, y_1, z_1 prelaze u koordinate x_2, y_2, z_2, itd.

Dokazati da je

$$x_4=x, \quad y_4=y, \quad z_4=z.$$

Rešenje. Umesto (1) možemo pisati

$$(2)\qquad 9\begin{Vmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1 \end{Vmatrix}=A\begin{Vmatrix} x\\ y\\ z \end{Vmatrix}, \quad \text{gde je } A=\begin{Vmatrix} 4 & 7 & -4\\ 1 & 4 & 8\\ 8 & -4 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ostale formule za transformaciju imaju oblike:

$$(3)\qquad 9\begin{Vmatrix} x_2\\ y_2\\ z_2 \end{Vmatrix}=A\begin{Vmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1 \end{Vmatrix},$$

$$(4)\qquad 9\begin{Vmatrix} x_3\\ y_3\\ z_3 \end{Vmatrix}=A\begin{Vmatrix} x_2\\ y_2\\ z_2 \end{Vmatrix},$$

$$(5)\qquad 9\begin{Vmatrix} x_4\\ y_4\\ z_4 \end{Vmatrix}=A\begin{Vmatrix} x_3\\ y_3\\ z_3 \end{Vmatrix}.$$

Ako se iz relacija (2), (3), (4), (5) eliminišu matrice

$$\begin{Vmatrix} x_k\\ y_k\\ z_k \end{Vmatrix} \quad (k=1, 2, 3),$$

dobija se

$$(6)\qquad 9^4\begin{Vmatrix} x_4\\ y_4\\ z_4 \end{Vmatrix}=A^4\begin{Vmatrix} x\\ y\\ z \end{Vmatrix}.$$

Kako je

$$A^4=\begin{Vmatrix} 9^4 & 0 & 0\\ 0 & 9^4 & 0\\ 0 & 0 & 9^4 \end{Vmatrix}=9^4\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

relacija (6) ekvivalentna je relaciji

$$\begin{Vmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}.$$

Odavde izlazi

$$x_4 = x, \quad y_4 = y, \quad z_4 = z,$$

što je i trebalo dokazati.

Primedba. Rešiti zadatak i bez upotrebe matričnog računa i na taj način uvideti koje su prednosti ovog računa.

133. Ako je

$$A = \begin{Vmatrix} 5\cos\theta+4 & -4\cos\theta+3\sin\theta+4 & -2\cos\theta-6\sin\theta+2 \\ -4\cos\theta-3\sin\theta+4 & 5\cos\theta+4 & -2\cos\theta+6\sin\theta+2 \\ -2\cos\theta+6\sin\theta+2 & -2\cos\theta-6\sin\theta+2 & 8\cos\theta+1 \end{Vmatrix},$$

da li je tačna relacija

$$A^n = 9^{n-1} \begin{Vmatrix} 5\cos n\theta+4 & -4\cos n\theta+3\sin n\theta+4 & -2\cos n\theta-6\sin n\theta+2 \\ -4\cos n\theta-3\sin n\theta+4 & 5\cos n\theta+4 & -2\cos n\theta+6\sin n\theta+2 \\ -2\cos n\theta+6\sin n\theta+2 & -2\cos n\theta-6\sin n\theta+2 & 8\cos n\theta+1 \end{Vmatrix},$$

gde je n ceo broj.

Da li se θ može tako izabrati da matrica A^n bude dijagonalna?

Uputstvo. Primeniti metod matematičke indukcije.

134. Koordinate x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1} i koordinate x_k, y_k, z_k vezane su relacijama:

$$9x_k = (5\cos\theta+4)\,x_{k-1} + (-4\cos\theta+3\sin\theta+4)\,y_{k-1} + (-2\cos\theta-6\sin\theta+2)\,z_{k-1},$$

$$9y_k = (-4\cos\theta-3\sin\theta+4)\,x_{k-1} + (5\cos\theta+4)\,y_{k-1} + (-2\cos\theta+6\sin\theta+2)\,z_{k-1},$$

$$9z_k = (-2\cos\theta+6\sin\theta+2)\,x_{k-1} + (-2\cos\theta-6\sin\theta+2)\,y_{k-1} + (8\cos\theta+1)\,z_{k-1}.$$

Koordinate x, y, z (odnosno x_0, y_0, z_0) prelaze u koordinate x_1, y_1, z_1 pomoću datih formula.

Koordinate x_1, y_1, z_1 prelaze u koordinate x_2, y_2, z_2 pomoću istih formula itd.

Ispitati da li se koordinate x_n, y_n, z_n izražavaju sa x, y, z (odnosno x_0, y_0, z_0) pomoću gornjih formula, gde su x_k, y_k, z_k zamenjeni sa x_n, y_n, z_n, a x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1} sa x, y, z, i θ sa $n\theta$.

Rešenje. Pretpostavimo da su tačne relacije

$$\begin{aligned} &9x_n = (5\cos n\theta+4)\,x + (-4\cos n\theta+3\sin n\theta+4)\,y + (-2\cos n\theta-6\sin n\theta+2)\,z, \\ (1)\quad &9y_n = (-4\cos n\theta-3\sin n\theta+4)\,x + (5\cos n\theta+4)\,y + (-2\cos n\theta+6\sin n\theta+2)\,z, \\ &9z_n = (-2\cos n\theta+6\sin n\theta+2)\,x + (-2\cos n\theta-6\sin n\theta+2)\,y + (8\cos n\theta+1)\,z. \end{aligned}$$

Posmatrajmo zatim relacije:

$$\begin{aligned} &9x_{n+1} = (5\cos\theta+4)\,x_n + (-4\cos\theta+3\sin\theta+4)\,y_n + (-2\cos\theta-6\sin\theta+2)\,z_n, \\ (2)\quad &9y_{n+1} = (-4\cos\theta-3\sin\theta+4)\,x_n + (5\cos\theta+4)\,y_n + (-2\cos\theta+6\sin\theta+2)\,z_n, \\ &9z_{n+1} = (-2\cos\theta+6\sin\theta+2)\,x_n + (-2\cos\theta-6\sin\theta+2)\,y_n + (8\cos\theta+1)\,z_n. \end{aligned}$$

Eliminacijom parametara x_n, y_n, z_n iz šest relacija (1) i (2) dobija se

$$9^2 \begin{Vmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{Vmatrix} = BA \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix},$$

gde su A i B matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 5\cos n\theta+4 & -4\cos n\theta+3\sin n\theta+4 & -2\cos n\theta-6\sin n\theta+2 \\ -4\cos n\theta-3\sin n\theta+4 & 5\cos n\theta+4 & -2\cos n\theta+6\sin n\theta+2 \\ -2\cos n\theta+6\sin n\theta+2 & -2\cos n\theta-6\sin n\theta+2 & 8\cos n\theta+1 \end{Vmatrix},$$

$$B = \begin{Vmatrix} 5\cos\theta+4 & -4\cos\theta+3\sin\theta+4 & -2\cos\theta-6\sin\theta+2 \\ -4\cos\theta-3\sin\theta+4 & 5\cos\theta+4 & -2\cos\theta+6\sin\theta+2 \\ -2\cos\theta+6\sin\theta+2 & -2\cos\theta-6\sin\theta+2 & 8\cos\theta+1 \end{Vmatrix}.$$

Proizvod BA ima oblik

$$9 \begin{Vmatrix} 5\cos(n+1)\theta+4 & -4\cos(n+1)\theta+3\sin(n+1)\theta+4 & -2\cos(n+1)\theta-6\sin(n+1)\theta+2 \\ -4\cos(n+1)\theta-3\sin(n+1)\theta+4 & 5\cos(n+1)\theta+4 & -2\cos(n+1)\theta+6\sin(n+1)\theta+2 \\ -2\cos(n+1)\theta+6\sin(n+1)\theta+2 & -2\cos(n+1)\theta-6\sin(n+1)\theta+2 & 8\cos(n+1)\theta+1 \end{Vmatrix}.$$

Odavde sleduje zaključak: Ako su formule (1) tačne, odnosno

$$9x_n = f(n, \theta, x, y, z), \quad 9y_n = g(n, \theta, x, y, z), \quad 9z_n = h(n, \theta, x, y, z),$$

onda su tačne i formule:

$$9x_{n+1} = f(n+1, \theta, x, y, z), \quad 9y_{n+1} = g(n+1, \theta, x, y, z), \quad 9z_{n+1} = h(n+1, \theta, x, y, z).$$

Prema ovome i na osnovu činjenice da su formule (1) tačne za $n=1$, zaključuje se da su formule (1) tačne za svaki prirodan broj n.

135. Neka je E matrica tipa $n \times n$

$$E = \| e_{ik} \| \quad (e_{ik} = 1 \text{ za } i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

i neka su A i B dve nesingularne matrice istog tipa za koje važi uslov

$$A + B = kE \quad (k \text{ skalar}).$$

Ako $S(C)$ označava zbir svih elemenata matrice C, pokazati da je

$$\{1 - kS(A^{-1})\}\{1 - kS(B^{-1})\} = 1.$$

Rešenje. Pokažimo prvo da za proizvoljne matrice C i D reda n važi relacija:

(1) $$S(CED) = S(C)\,S(D).$$

Ako je

$$C = \| c_{ij} \|; \quad D = \| d_{kl} \|,$$

tada je

$$S(C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}; \quad S(D) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} d_{kl}.$$

Kako je

$$CE = \left\| \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \right\|,$$

biće

(2) $$CED = \left\| \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \sum_{k=1}^{n} d_{kl} \right\|.$$

(Svi elementi jedne vrste matrice CE međusobno su jednaki; kod matrice CED indeksi elemenata označeni su sa i i l).

Koristeći (2), dobijamo

$$S(CED) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} d_{kl} \right) \right\}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \right) \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{kl} \right) = S(C)\, S(D).$$

Time je relacija (1) dokazana.

Matrice A i B, prema zadatku, zadovoljavaju uslov

(3) $$A + B = kE.$$

Pomnožimo li (3) sa leve strane sa A^{-1}, a sa desne sa B^{-1}, dobijamo

$$A^{-1} + B^{-1} = kA^{-1} E B^{-1}.$$

Odavde, na osnovu (1), sleduje

$$S(A^{-1} + B^{-1}) = S(A^{-1}) + S(B^{-1}) = S(kA^{-1} EB^{-1}) = kS(A^{-1} EB^{-1}) = kS(A^{-1})\, S(B^{-1}),$$

odnosno

$$S(A^{-1}) + S(B^{-1}) = kS(A^{-1})\, S(B^{-1}).$$

Dobijena relacija je ekvivalentna sa onom koju je trebalo dokazati.

Ovo je rešenje *D. Đokovića*.

136. Inverzna matrica

$$B = \| b_{ik} \| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gornje (donje) trougaone nesingularne matrice

$$A = \| a_{ik} \| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

takođe je gornja (donja) trougaona matrica.

Element b_{kk} glavne dijagonale matrice B izračunava se po formuli

$$b_{kk} = \frac{1}{a_{kk}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Elementi i-te vrste gornje trougaone matrice dati su formulom

$$b_{ik} = -\frac{1}{a_{kk}} \sum_{j=i}^{k-1} b_{ij}\, a_{jk} \quad (k = i+1,\ i+2, \ldots, n).$$

Elementi k-te kolone donje trougaone matrice dati su formulom

$$b_{ik} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=k}^{i-1} a_{ij}\, b_{jk} \quad (i = k+1,\ k+2, \ldots, n).$$

Dokazati navedene formule.

Dokaz. Uzećemo u obzir samo gornje trougaone matrice. Za donje trougaone matrice dokaz je potpuno analogan.

Neka je A proizvoljna gornja trougaona nesingularna matrica:

$$(1) \qquad A=\| a_{jk} \| \quad (a_{jk}=0 \text{ za } j>k).$$

Njenu izverznu matricu označimo sa B. Matrica B je takođe gornja trougaona matrica:

$$(2) \qquad B=\| b_{ij} \| \quad (b_{ij}=0 \text{ za } i>j).$$

To sleduje iz toga što su svi minori elemenata matrice A iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

Kako je B inverzna matrica matrice A, biće

$$BA=E, \text{ tj. } \| b_{ij} \| \, \| a_{jk} \| = E,$$

odakle izlazi

$$(3) \qquad \left\| \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, a_{jk} \right\| = E.$$

S obzirom na relacije (1) i (2) je

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, a_{jk} = \sum_{j=i}^{k} b_{ij}\, a_{jk},$$

pa relaciju (3) možemo napisati u obliku

$$(4) \qquad \sum_{j=i}^{k} b_{ij}\, a_{jk} = \delta_i^k \quad (\delta_i^k \text{ je } Kronecker\text{-ov simbol}).$$

Iz (4) za $i=k$ sleduje

$$b_{kk}\, a_{kk}=1, \text{ tj. } b_{kk}=\frac{1}{a_{kk}} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Za $k>i$ iz (4) sleduje

$$\sum_{j=i}^{k} b_{ij}\, a_{jk}=0,$$

odakle je

$$b_{ik}=-\frac{1}{a_{kk}} \sum_{j=i}^{k-1} b_{ij}\, a_{jk} \quad (k=i+1, i+2, \ldots, n).$$

Ovo je rešenje dao *D. Đoković.*

137. 1° Neka su: M proizvoljna kvadratna matrica reda n; A data kvadratna matrica reda n i E jedinična matrica reda n.

Ako u matrici M promene mesta vrste p i q, tada se dobija nova matrica M_{pq}.

Pokazati da važi relacija

$$A_{pq}=E_{pq}A.$$

2° Ako su u jednoj matrici M elementi m_{pi} vrste p zamene sa

$$\lambda m_{pi}+\mu m_{qi} \quad (\lambda \text{ skalar } \neq 0),$$

dobija se matrica $M_{pq}(\lambda, \mu)$.

Pokazati da važi relacija

$$A_{pq}(\lambda, \mu)=E_{pq}(\lambda, \mu)\, A.$$

3° Operacije navedene pod 1° i 2° (izvršene ili sa vrstama ili sa kolonama) zovu se *elementarne operacije.*

Pokazati da se nizom elementarnih operacija može od matrica

$$A=\left\|\begin{matrix}2&3&-1\\2&6&-3\\2&0&1\end{matrix}\right\|,\quad B=\left\|\begin{matrix}2&3&-1\\1&-1&0\\-3&4&6\end{matrix}\right\|$$

preći respektivno na matrice

$$A_1=\left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{matrix}\right\|,\quad B_1=\left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\|.$$

138. Date su matrice

$$M\equiv\left\|\begin{matrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{matrix}\right\|,\quad M^*\equiv\left\|\begin{matrix}\bar\alpha&\bar\beta\\\bar\gamma&\bar\delta\end{matrix}\right\|$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kompleksni brojevi; $\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma, \bar\delta$ njihove konjugovane vrednosti).

Odrediti matrice M tako da obadve matrice

$$M+M^* \text{ i } MM^*$$

budu skalarne i da je $\det M \geqslant 0$.

Matrice M sa navedenom osobinom obrazuju skup $\{M\}$.

Pokazati da svaka matrica $M(\neq 0)$ iz skupa $\{M\}$ ima inverznu matricu koja takođe pripada skupu $\{M\}$.

139. Ako postoje relacije

$$(1)\quad \begin{aligned}&l_1^2+m_1^2+n_1^2=l_2^2+m_2^2+n_2^2=l_3^2+m_3^2+n_3^2=1,\\&l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0,\end{aligned}$$

tada je:

$$(2)\quad l_1^2+l_2^2+l_3^2=1,\quad m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0,\quad \text{itd.}$$

Izvesti ove relacije i dati im geometrisko tumačenje.

Uputstvo. Ako se pođe od matrice

$$A=\left\|\begin{matrix}l_1&m_1&n_1\\l_2&m_2&n_2\\l_3&m_3&n_3\end{matrix}\right\|,$$

i uzmu u obzir relacije (1), dobija se

$$AA'=\left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\|=E.$$

Odavde sleduje

$$A'A=A'(A')^{-1}=E.$$

Iz poslednje jednakosti dobijaju se relacije (2).

140. Pokazati da matrice, komutativne sa matricom

$$A=\left\|\begin{matrix}2&1\\1&1\end{matrix}\right\|,$$

imaju oblik

$$a\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} + b\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

gde su a i b dva proizvoljna skalara.

141. Data je nesingularna matrica parnog reda

$$A = \| a_{ik} \|,$$

gde je

$$a_{ik} = 0 \quad (i+k \text{ parno}).$$

Dokazati da inverzna matrica A^{-1} ima istu strukturu kao matrica A, tj.

$$A^{-1} = \| b_{ik} \|,$$

gde je

$$b_{ik} = 0 \quad (i+k \text{ parno}).$$

142. Ako je A kvadratna matrica i ako je

$$A^k = E \quad (k \text{ prirodan broj}),$$

tada je matrica A regularna i $A^{-1} = A^{k-1}$. Dokazati ovo.

143. Ako je zbir elemenata svake vrste (odnosno kolone) kvadratne matrice jednak broju $a\ (\neq 0)$, tada je zbir elemenata svake vrste (odnosno kolone) njene inverzne matrice jednak broju a^{-1}.

144. Pokazati da je

$$(1) \qquad A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0,$$

gde je

$$A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}, \quad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Polazeći od (1), odrediti sve matrice drugog reda A koje imaju osobinu $A^2 = 0$.

Dokazati da je

$$A^k = 0 \quad (k \text{ prirodan broj} > 2)$$

tada i samo tada ako je $A^2 = 0$.

145. Ako se u matrici

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{n}{3} & \binom{n+1}{3} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} \end{Vmatrix}$$

izostavi k-ta $(1 \leqslant k \leqslant n+1)$ kolona, dobija se nova matrica, čiju determinantu treba izračunati.

146. 1° U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy strane jednog trougla leže na pravama

$$a_k x+b_k y+c_k=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3). \tag{1}$$

Dvostruka vrednost površine tog trougla je apsolutna vrednost izraza

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}. \tag{2}$$

2° Ako su

$$A_k x+B_k y+C_k z+D_k=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{3}$$

jednačine četiri ravni u Dekartovom pravouglom trijedru $Oxyz$, tada je šestostruka vrednost zapremine tetraedra, ograničenog ovim ravnima, jednaka apsolutnoj vrednosti izraza

$$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}^3}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

Pretpostavlja se da se ne anulira nijedan od minora koji se javljaju u imenitelju u formulama (2) i (4).

Rešenje. 1° Dvostruka vrednost površine trougla čija su temena $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ jednaka je apsolutnoj vrednosti determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Iz jednačina (1) dobijamo

$$\Delta_1 x_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_1 y_1=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 x_2=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_2 y_2=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 x_3=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_3 y_3=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Na osnovu poslednje tri grupe obrazaca, determinanta (5) postaje

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Posle množenja sa

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

poslednja relacija postaje

$$D\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix},$$

odakle izlazi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{-D^2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3},$$

što je trebalo dokazati.

Na analogni način izvodi se formula (4).

Primedba. Ove formule dokazao je *Joachimsthal (Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 40).

147. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy data je hiperbola $xy=1$. Pokazati da tačke A, B, C, D date hiperbole sa apscisama $x_1, x_2, x_3, \dfrac{1}{x_1x_2x_3}$ $(x_1x_2x_3\neq 0)$ leže na jednom krugu.

Rešenje. Tačke A, B, C, D imaju sledeće koordinate:

$$A\left(x_1,\frac{1}{x_1}\right),\quad B\left(x_2,\frac{1}{x_2}\right),\quad C\left(x_3,\frac{1}{x_3}\right),\quad D\left(\frac{1}{x_1x_2x_3},\ x_1x_2x_3\right).$$

Da bi te četiri tačke bile konciklične, treba da bude ispunjen uslov

$$(1)\qquad D=\begin{vmatrix} x_1^2+\dfrac{1}{x_1^2} & x_1 & \dfrac{1}{x_1} & 1 \\ x_2^2+\dfrac{1}{x_2^2} & x_2 & \dfrac{1}{x_2} & 1 \\ x_3^2+\dfrac{1}{x_3^2} & x_3 & \dfrac{1}{x_3} & 1 \\ x_1^2x_2^2x_3^2+\dfrac{1}{x_1^2x_2^2x_3^2} & \dfrac{1}{x_1x_2x_3} & x_1x_2x_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Dokazaćemo da je uslov (1) ispunjen za proizvoljne vrednosti apscisa x_1, x_2, x_3 $(x_1x_2x_3\neq 0)$.

Determinantu D možemo napisati kao zbir dve determinante

$$(2)\qquad D=D_1+D_2,$$

gde je

$$(3)\quad D_1=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & \dfrac{1}{x_1} & 1 \\ x_2^2 & x_2 & \dfrac{1}{x_2} & 1 \\ x_3^2 & x_3 & \dfrac{1}{x_3} & 1 \\ \dfrac{1}{x_1^2x_2^2x_3^2} & \dfrac{1}{x_1x_2x_3} & x_1x_2x_3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2 & 1 & x_1 \\ x_2^3 & x_2^2 & 1 & x_2 \\ x_3^3 & x_3^2 & 1 & x_3 \\ \dfrac{1}{x_1^3x_2^3x_3^3} & \dfrac{1}{x_1^2x_2^2x_3^2} & 1 & \dfrac{1}{x_1x_2x_3} \end{vmatrix},$$

$$
(4) \quad D_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1^2} & x_1 & \dfrac{1}{x_1} & 1 \\ \dfrac{1}{x_2^2} & x_2 & \dfrac{1}{x_2} & 1 \\ \dfrac{1}{x_3^2} & x_3 & \dfrac{1}{x_3} & 1 \\ x_1^2x_2^2x_3^2 & \dfrac{1}{x_1x_2x_3} & x_1x_2x_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1^3 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^3 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3^3 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & \dfrac{1}{x_1^3x_2^3x_3^3} & \dfrac{1}{x_1x_2x_3} & \dfrac{1}{x_1^2x_2^2x_3^2} \end{vmatrix}.
$$

Premeštanjem kolona uviđamo da je $D_1 = -D_2$, što znači da je relacija (1) tačna, tj. da su tačke A, B, C i D uvek konciklične.

Ovo je rešenje dao *Radovan V. Krtolica*, student I godine Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, u školskoj 1959—1960 godini.

148. Data je realna kvadratna forma

$$F(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \qquad (A > 0; \quad B^2 - AC < 0).$$

Neka je

$$(1) \qquad x_1 = ax + by, \quad y_1 = a_1 x + b_1 y$$

linearna transformacija koja transformiše elipsu $F(x, y) = 1$ u krug $x_1^2 + y_1^2 = 1$.

Pokazati da je determinanta matrice svake transformacije (1) različita od nule.

149. 1° Pokazati da se matrica

$$M \equiv \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix}$$

može napisati u obliku

$$\begin{Vmatrix} 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_3 & y_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix}.$$

2° Izračunati det M.

3° Da li se matrica

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix}$$

može napisati u obliku

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & x_3 & y_3 \\ 0 & 0 & x_4 & y_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix} ?$$

4° Generalisati ovaj rezultat.

150. Data je matrica

$$A \equiv \begin{Vmatrix} 1-\sqrt{6} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}-\sqrt{6} \end{Vmatrix}.$$

1° Odrediti rang matrice A.

2° Odrediti x i y iz uslova

$$A \cdot \begin{Vmatrix} x \\ -1 \\ y \end{Vmatrix} = 0.$$

3° Za izračunate vrednosti x i y naći proizvod

$$\begin{Vmatrix} x & 1 & y \end{Vmatrix} \cdot A.$$

151. Data je kvadratna matrica

$$H = \| h_{ik} \| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

gde je

$$h_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k-1), \\ 0 & (i \neq k-1). \end{cases}$$

1° Odrediti matricu H^r (r prirodan broj).

2° Da li su matrice H^r i H^s (r i s prirodni brojevi) komutativne?

Rešenje. 1°

$$H^2 = \| h_{ik}^{(2)} \|, \quad \text{gde je} \quad h_{ik}^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} h_{jk} = \begin{cases} 1 & (i = k-2), \\ 0 & (i \neq k-2). \end{cases}$$

$$H^3 = \| h_{ik}^{(3)} \|, \quad \text{gde je} \quad h_{ik}^{(3)} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} h_{jk}^{(2)} = \begin{cases} 1 & (i = k-3), \\ 0 & (i \neq k-3). \end{cases}$$

Naslućujemo da je

$$(1) \qquad H^r = \| h_{ik}^{(r)} \|, \quad \text{gde je} \quad h_{ik}^{(r)} = \begin{cases} 1 & (i = k-r), \\ 0 & (i \neq k-r). \end{cases}$$

Metodom matematičke indukcije pokazaćemo da je ova hipoteza istinita.

Matrica

$$H^{r+1} = \| h_{ik}^{(r+1)} \| \quad \text{odnosno} \quad H \cdot H^r,$$

na osnovu induktivne hipoteze, postaje

$$H^{r+1} = \left\| \sum_{j=1}^{n} h_{ij} h_{jk}^{(r)} \right\|,$$

gde je

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j-1) \\ 0 & (i \neq j-1) \end{cases}, \qquad h_{jk}^{(r)} = \begin{cases} 1 & (j = k-r), \\ 0 & (j \neq k-r) \end{cases}$$

Odavde izlazi

$$h_{ik}^{(r+1)} = \begin{cases} 1 & (i = k-r-1), \\ 0 & (i \neq k-r-1). \end{cases}$$

Ovim je induktivni dokaz završen.

Ako je u formuli (1) $r=n$, tada je $n=k-i$ što je nemogućno, budući da je $i \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, $n \geqslant i$, $n \geqslant k$.

Prema tome je:

$$H^r=0 \qquad (r \geqslant n),$$

$$H^r=\left\| h_{ik}^{(r)} \right\| \qquad (r < n),$$

gde je

$$h_{ik}^{(r)}=\begin{cases} 1 & (i=k-r), \\ 0 & (i \neq k-r). \end{cases}$$

Matrice

(2) $$H,\ H^2, \ldots,\ H^{n-1}$$

zovu se *pomoćne jedinične matrice.*

Matrice

(3) $$F,\ F^2, \ldots,\ F^{n-1},$$

gde je

$$F=\| f_{ik} \| \quad \text{i} \quad f_{ik}=\begin{cases} 1 & (i=k+1), \\ 0 & (i \neq k+1), \end{cases}$$

takođe se zovu pomoćne jedinične matrice.

152. Data je matrica

$$A=\| a_{ik} \| \quad (i,\ k=1,\ 2, \ldots,\ n),$$

gde je

$$\begin{aligned} a_{ik} &= a \quad (i=k), \\ &= 1 \quad (i=k-1), \\ &= 0 \quad (i \neq k;\ i \neq k-1). \end{aligned}$$

Dokazati formulu

$$(1) \qquad A^r=\left\| \begin{matrix} a^r & \binom{r}{1} a^{r-1} & \binom{r}{2} a^{r-2} & \ldots & \binom{r}{n-1} a^{r-n+1} \\ & a^r & \binom{r}{1} a^{r-1} & & \binom{r}{n-2} a^{r-n+2} \\ & & a^r & & \binom{r}{n-3} a^{r-n+3} \\ & 0 & & & \vdots \\ & & & & a^r \end{matrix} \right\|,$$

gde je r prirodan broj.

Rešenje. Matrica A može se napisati u obliku

$$A=a\,E_n+H,$$

gde je E_n jedinična matrica reda n i H pomoćna jedinična matrica reda n, tj.

$$H=\| h_{ik} \|, \quad \text{gde je} \quad h_{ik}=\begin{cases} 1 & (i=k-1), \\ 0 & (i \neq k-1). \end{cases}$$

Budući da su matrice E_n i H komutativne, na zbir

$$a\,E_n+H$$

može se primeniti binomna formula

$$(aE_n+H)^r=\sum_{\nu=0}^{r}\binom{r}{\nu}a^{r-\nu}E_n^{r-\nu}H^\nu.$$

Kako je, prema prethodnom problemu,

$$E_n^{r-\nu}=E_n \text{ i } H^\nu=\|h_{ik}^{(\nu)}\|, \quad \text{gde je} \quad h_{ik}^{(\nu)}=\begin{cases}1 & (i=k-\nu)\\ 0 & (i\neq k-\nu)\end{cases},$$

dobija se

$$(aE_n+H)^r=\sum_{\nu=0}^{r}\binom{r}{\nu}a^{r-\nu}H^\nu.$$

Kako je

$$H^\nu=0 \quad (\nu\geqslant n),$$

$$H^\nu=\|h_{ik}\|, \quad \text{gde je} \quad h_{ik}=\begin{cases}1 & (i=k-1),\\ 0 & (i\neq k-1),\end{cases} \quad (\nu<n),$$

dobija se formula (1).

Ovo je rešenje dala *Branislava Peruničić*, student VIII semestra Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, u školskoj 1958/1959 godini.

Formula (1) može se takođe dokazati direktnom primenom metoda matematičke indukcije.

153. Pokazati da za kvadratnu matricu

$$H=\|h_{ik}\| \quad (i,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

gde je

$$h_{ik}=\begin{cases}1 & (i=k-1),\\ 0 & (i\neq k-1),\end{cases}$$

važe relacije

$$(H'H)^2=H'H, \qquad (HH')^2=HH',$$

$$H^rH'^r+H'^sH^s=E \quad (r+s=n;\ r,s \text{ prirodni brojevi}).$$

154. Odrediti A^k (k prirodan broj ili nula) ako je

$$A=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\-1&-1&0&1\end{Vmatrix}.$$

Generalisati.

Uputstvo. Kako je

$$A=E+B,$$

gde je

$$E=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&-1&0&0\end{Vmatrix}$$

i kako su matrice E i B komutativne, biće

$$(1) \qquad A^k=(B+E)^k=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}B^rE^{k-r}=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}B^r.$$

Budući da je

$$B^2=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B^3=0, \quad B^4=0, \ldots,$$

relacija (1) postaje

$$A^k=E+kB+\binom{k}{2}B^2,$$

tj.

$$A^k=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ \binom{k}{2} & k & 1 & 0 \\ -\binom{k}{2}-k & -k & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

155. Posmatrajmo kvadratnu matricu M reda n čiji su elementi a_{ij} definisani relacijama

$$a_{i,\,n-i+1}=1, \quad a_{ij}=0, \quad i+j\neq n+1 \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

To su, ustvari, matrice čiji su svi elementi jednaki nuli osim onih koji se nalaze na drugoj (sporednoj) dijagonali: svi ovi elementi su jedinice.

Proveriti da li je $M'=M$ i $M^2=E$.

156. Proveriti formule:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}^2=-E, \qquad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^4=-E.$$

Da li uopšte važi relacija

$$A^{2n}=-E,$$

ako je

$$A=\| a_{ik} \| \quad (i,\ k=1,\ 2, \ldots,\ 2n),$$

gde je

$$a_{ik}=\begin{cases} -1 & (i=2n;\ k=1), \\ 1 & (i=k-1), \\ 0 & (\text{u ostalim slučajevima}). \end{cases}$$

157. Data je matrica

$$M=\| m_{ik} \| \quad (i,\ k=1,\ 2, \ldots,\ n),$$

gde je

$$\begin{aligned} m_{ik} &= a \quad (i=k), \\ &= b \quad (i=k-1), \\ &= c \quad (i=k-2), \\ &= 0 \quad (i\neq k,\ k-1,\ k-2). \end{aligned}$$

Odrediti matricu M^r (r prirodan broj).

Generalisati ovaj zadatak.

158. Pokazati da je

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}^5 = 0.$$

Generalisati.

159. Kvadratna matrica A zove se *involutivna* ako je $A^2 = E$.

Nesingularna kvadratna matrica A je *ortogonalna*, ako je $A' = A^{-1}$ ($'$ je operacija transponovanja matrice).

Kvadratna matrica je *simetrična* ako je ispunjen uslov $A' = A$.

Ako nesingularna matrica A ima dve od tri navedene osobine, ona ima i treću osobinu.

Dokazati ovaj stav.

160. Dokazati: 1° Ako je kvadratna matrica A idempotentna, tada je matrica $2A - E$ involutivna; 2° Ako je kvadratna matrica A involutivna, tada je matrica $\frac{1}{2}(A + E)$ idempotentna.

Primedba. Za kvadratnu matricu $A\ (\neq 0)$ kaže se da je *idempotentna* ako je $A^2 = A$.

161. Ako je A kvadratna matrica III reda čiji su elementi kompleksni brojevi, tada su svi glavni minori matrice $A\overline{A}'$ negativni. — Dokazati.

Ovaj stav važi uopšte za kvadratne matrice reda n.

Primedba. Glavni minori kvadratne matrice A zovu se minori čija se glavna dijagonala poklapa sa glavnom dijagonalom matrice A.

162. Date su matrice:

$$A_t = (tE - A)^{-1} \qquad (t \text{ skalar}),$$

$$A_u = (uE - A)^{-1} \qquad (u \text{ skalar})$$

(A jedna kvadratna matrica i E jedinična matrica).

Polazeći od

$$A_t^{-1}(A_u - A_t)A_u^{-1} = A_t^{-1} - A_u^{-1},$$

pokazati da je

$$(t-u)A_t A_u = A_u - A_t.$$

Pod kojim uslovima važe navedene relacije?

163. Neka je adj A adjungovana matrica matrice A tipa $n \times n$.

Odrediti matricu

$$\operatorname{adj}^k A = \operatorname{adj}(\operatorname{adj}^{k-1} A) \quad (k \text{ prirodan broj}),$$

gde je $\operatorname{adj}^0 A = A$.

164. Ako su matrice A i B takve da postoje AB i BA, tada AB i BA imaju jednake zbirove dijagonalnih elemenata.

Ispitati da li ova osobina važi za proizvode

$$ABC, \quad BCA, \quad CAB$$

i uopšte za proizvode r matrica A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$.

165. Neka je A matrica tipa $m \times n$ i B matrica tipa $n \times p$. Ako $r(P)$ označava rang matrice P, tada je

$$\min\{r(A),\ r(B)\} \geqslant r(AB) \geqslant r(A) + r(B) - n.$$

166. Data je matrica

$$A \equiv \begin{Vmatrix} 2t & 4\sqrt{t} & 4t \\ 0 & 2\sqrt{t} & 4t \\ \sqrt{1-t} & 0 & 2\sqrt{1-t} \end{Vmatrix}$$

1° Odrediti max det A $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

2° Odrediti X iz matrične jednačine

$$AX = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (0 < t < 1).$$

167. Odrediti M^n ako je n prirodan broj i

$$M = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Rešenje. Matrica M^n imaće oblik

$$\begin{Vmatrix} A(n) & B(n) \\ C(n) & D(n) \end{Vmatrix},$$

gde su A, B, C, D funkcije od n.

Funkcije A, B, C, D odredićemo iz relacije

$$\begin{Vmatrix} A(n+1) & B(n+1) \\ C(n+1) & D(n+1) \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}^{n+1} \equiv \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}^{n} \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

$$\equiv \begin{Vmatrix} A(n) & B(n) \\ C(n) & D(n) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} 4A(n)+B(n) & 2A(n)+3B(n) \\ 4C(n)+D(n) & 2C(n)+3D(n) \end{Vmatrix}.$$

Odavde sleduju relacije:

(1) $\quad A(n+1) = 4A(n) + B(n),$

(2) $\quad B(n+1) = 2A(n) + 3B(n),$

(3) $\quad C(n+1) = 4C(n) + D(n),$

(4) $\quad D(n+1) = 2C(n) + 3D(n).$

Ove četiri relacije su *diferencne* jednačine.

Posle eliminacije $B(n)$ i $B(n+1)$ iz jednačina (1) i (2) i iz jednačine

$$A(n+2)=4A(n+1)+B(n+1),$$

koja se dobija iz (1), dolazi se do diferencne jednačine

$$A(n+2)-7A(n+1)+10A(n)=0.$$

Opšte rešenje ove diferencne jednačine je

$$A(n)=\alpha_1\cdot 5^n+\alpha_2\cdot 2^n \qquad (\alpha_1,\ \alpha_2 \text{ proizvoljne konstante}).$$

Analogno, iz jednačina (3) i (4) sleduje

$$C(n)=\alpha_3\cdot 5^n+\alpha_4\cdot 2^n \qquad (\alpha_3,\ \alpha_4 \text{ proizvoljne konstante}).$$

Kako je

$$\left\|\begin{matrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}A(1) & B(1)\\ C(1) & D(1)\end{matrix}\right\|,\qquad \left\|\begin{matrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{matrix}\right\|^2=\left\|\begin{matrix}A(2) & B(2)\\ C(2) & D(2)\end{matrix}\right\|,$$

za α_1, α_2, α_3, α_4 dobijamo

$$\alpha_1=\frac{2}{3},\quad \alpha_2=\frac{1}{3},\quad \alpha_3=-\frac{1}{3},\quad \alpha_4=-\frac{1}{3}.$$

Prema tome, funkcije $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$ su određene.

Traženi rezultat je

$$\left\|\begin{matrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{matrix}\right\|^n\equiv\left\|\begin{matrix}\frac{2}{3}\cdot 5^n+\frac{1}{3}\cdot 2^n & \frac{2}{3}\cdot 5^n-\frac{2}{3}\cdot 2^n\\ \frac{1}{3}\cdot 5^n-\frac{1}{3}\cdot 2^n & \frac{1}{3}\cdot 5^n+\frac{2}{3}\cdot 2^n\end{matrix}\right\|.$$

Ovo interesantno rešenje dao je *S. Prešić.*

Primedba. Da li ovaj rezultat važi ako je n ceo negativan broj?

168. Da li se celi brojevi a, b, c, d mogu tako izabrati da matrica

$$\left\|\begin{matrix}a & b\\ c & d\end{matrix}\right\|^k \qquad (k \text{ prirodan broj})$$

bude oblika

$$\left\|\begin{matrix}A(k) & B(k)\\ C(k) & D(k)\end{matrix}\right\|,$$

gde su $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$ skalarni polinomi promenljive k?

Generalisati ovaj problem za kvadratnu matricu reda n.

169. Dokazati formulu

$$(1)\qquad D_{n+1}\equiv\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ -x & 1 & 0 & & 0 & 0\\ 0 & -x & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -x & 1\end{vmatrix}$$

$$\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n.$$

Rešenje. I. Posmatrajmo sledeću determinantu reda $n+2$

$$D_{n+2}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ -x & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -x & 1 \end{vmatrix},$$

tj.

$$(2) \qquad \begin{aligned} D_{n+2} &= (-1)^{n+3} a_{n+1} (-x)^{n+1} + D_{n+1} \\ &= a_{n+1} x^{n+1} + D_{n+1}. \end{aligned}$$

Pretpostavimo li da je formula (1) tačna za neko n, tj. da je

$$D_{n+1} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

tada je, na osnovu (2),

$$D_{n+2} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}.$$

Data formula (1) je tačna za $n=0$, jer je $D_1 = a_0$.
Ovim je induktivni dokaz završen.

II. Elementima I kolone dodajmo:
elemente II kolone prethodno pomnožene sa x;
elemente III kolone prethodno pomnožene sa x^2;
$\vdots$
elemente poslednje kolone prethodno pomnožene sa x^n.
Iz tako dobijene determinante neposredno izlazi traženi rezultat.

170. Pokazati da se polinom $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ može napisati u obliku determinante reda $n+1$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Uputstvo. Elementima poslednje kolone dodati:
elemente I kolone prethodno pomnožene sa x^n;
elemente II kolone prethodno pomnožene sa x^{n-1};
$\vdots$
elemente n-te kolone prethodno pomnožene sa x.

171. Po x rešiti jednačinu stepena n

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & a_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^n \end{vmatrix} = 0 \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ različiti parametri}),$$

gde je D determinanta reda $n+1$.

Rezultat. Koreni su: $x_k = a_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

172. Po x rešiti jednačinu

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0,$$

gde je D determinanta reda n.

173. Izračunati vrednost determinante $|a_{ik}|_1^n$, gde je

$$a_{ik} = \begin{cases} 0 & (i=k), \\ 1 & (i \neq k). \end{cases}$$

Rešenje.

$$|a_{ik}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \end{vmatrix}.$$

Ako elementima prve kolone dodamo odgovarajuće elemente svih ostalih kolona, dobijamo

$$|a_{ik}| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \end{vmatrix}.$$

Ako od elemenata druge, treće, ..., n-te kolone poslednje determinante oduzmemo odgovarajuće elemente prve kolone, dobijamo

$$|a_{ik}| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

174. Ispitati da li se determinanta matrice $\|a_{ik}\|_1^n$ ne menja ako se svaki njen element a_{ik} pomnoži skalarom α^{i-k} $(\alpha \neq 0)$.

175. Ako je

$$f(x) \equiv (r_1 - x)(r_2 - x) \cdots (r_n - x),$$

pokazati da je

$$\begin{vmatrix} r_1 & a & a & \cdots & a \\ b & r_2 & a & & a \\ b & b & r_3 & & a \\ \vdots & & & & \\ b & b & b & & r_n \end{vmatrix} \equiv \begin{cases} \dfrac{af(b) - bf(a)}{a-b} & (b \neq a), \\ f(a) - af'(a) & (b = a). \end{cases}$$

Rešenje. Označimo datu determinantu sa δ. Ako svakom elementu ove determinante dodamo x, dobijamo novu determinantu

$$(1)\qquad D(x)\equiv\begin{vmatrix} r_1+x & a+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & r_2+x & a+x & & a+x \\ b+x & b+x & r_3+x & & a+x \\ \vdots & & & & \\ b+x & b+x & b+x & & r_n+x \end{vmatrix}.$$

Ako u determinanti $D(x)$ od elemenata druge, treće, ..., n-te kolone oduzmemo odgovarajuće elemente prve kolone, dobijamo

$$(2)\qquad D(x)\equiv\begin{vmatrix} r_1+x & a-r_1 & a-r_1 & \cdots & a-r_1 \\ b+x & r_2-b & a-b & & a-b \\ b+x & 0 & r_3-b & & a-b \\ \vdots & & & & \\ b+x & 0 & 0 & & r_n-b \end{vmatrix}.$$

Iz (2) se zaključuje da je $D(x)$ linearna funkcija promenljive x, tj.

$$(3)\qquad D(x)=A+Bx.$$

Za $x=0$ iz (3) izlazi

$$D(0)=A=\delta,$$

te dobijamo

$$(4)\qquad D(x)=\delta+Bx.$$

Na osnovu (1), za $x=-a$ i $x=-b$, relacija (4) postaje respektivno:

$$(5)\qquad \begin{aligned} f(a)&=(r_1-a)(r_2-a)\cdots(r_n-a)=\delta-Ba,\\ f(b)&=(r_1-b)(r_2-b)\cdots(r_n-b)=\delta-Bb.\end{aligned}$$

Iz relacija (5), ako je $b\neq a$, dobija se

$$\delta=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

Za slučaj $b=a$, determinanta δ ima vrednost

$$\lim_{b\to a}\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(a)-af'(a).$$

Ovo je rešenje dao *Hölder*.

176. Izračunati sledeću determinantu D_k reda k:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & & \binom{k-1}{1} & \binom{k}{1} \\ 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & & \binom{k-1}{2} & \binom{k}{2} \\ 0 & 0 & \binom{3}{3} & & \binom{k-1}{3} & \binom{k}{3} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{k-1}{k-2} & \binom{k}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{k-1}{k-1} & \binom{k}{k-1} \end{vmatrix}$$

Rešenje. Ako se u datoj determinanti oduzme svaka kolona od naredne kolone i pri tome ima na umu obrazac

$$\binom{\lambda}{\nu}-\binom{\lambda-1}{\nu}\equiv\binom{\lambda-1}{\nu-1},$$

dobija se

$$D_k\equiv\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} & & \binom{k-2}{1} & \binom{k-1}{1} \\ 0 & 0 & 1 & & \binom{k-2}{2} & \binom{k-1}{2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{k-2}{k-3} & \binom{k-1}{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{k-2}{k-2} & \binom{k-1}{k-2} \end{vmatrix},$$

odnosno

$$D_k\equiv\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & & \binom{k-2}{1} & \binom{k-1}{1} \\ 1 & \binom{2}{2} & & \binom{k-2}{2} & \binom{k-1}{2} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & \binom{k-2}{k-3} & \binom{k-1}{k-3} \\ 0 & 0 & & \binom{k-2}{k-2} & \binom{k-1}{k-2} \end{vmatrix}.$$

Prema tome, dolazi se do rekurentne relacije

$$D_k=D_{k-1}.$$

Kako je

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} \end{vmatrix}=1,$$

biće $D_k=1$.

177. Dokazati relaciju

$$\text{(1)}\qquad D_n=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\qquad (n \text{ prirodan broj}),$$

gde je D_n determinanta reda n

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\theta & & & \\ & & 1 & \ddots & 1 & \\ & & & & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

Rešenje. Između determinanata D_k, D_{k-1}, D_{k-2} postoji relacija

$$D_k = 2(\cos\theta)\, D_{k-1} - D_{k-2}. \tag{2}$$

Pretpostavimo da je relacija (1) tačna za $n=k-1$ i $n=k-2$, tj. da važe formule:

$$D_{k-1} = \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}, \quad D_{k-2} = \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}. \tag{3}$$

Tada (2) postaje

$$D_k = 2\cos\theta \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Iz ovog sleduje zaključak:

Ako je formula (1) tačna za $n=k-1$ i $n=k-2$, ona je tačna i za $n=k$.

Formula (1) je tačna za $n=1$ i $n=2$, jer je

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta, \quad \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

Ovim je induktivni dokaz završen.

Primedba. Da li formula (1) važi za svako θ (na primer za $\theta=0$)?

178. Kvadrat svake determinante parnog reda može se napisati u obliku koso-simetrične determinante.

Uputstvo. Kvadrat determinante $(a_1\, b_2\, c_3\, d_4)$ može se dobiti množenjem determinanata:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\ -b_3 & a_3 & -d_3 & c_3 \\ -b_4 & a_4 & -d_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Njihov proizvod je koso-simetrična determinanta:

$$\begin{vmatrix} 0 & -(a_1 b_2)-(c_1 d_2) & -(a_1 b_3)-(c_1 d_3) & -(a_1 b_4)-(c_1 d_4) \\ (a_1 b_2)+(c_1 d_2) & 0 & -(a_2 b_3)-(c_2 d_3) & -(a_2 b_4)-(c_2 d_4) \\ (a_1 b_3)+(c_1 d_3) & (a_2 b_3)+(c_2 d_3) & 0 & -(a_3 b_4)-(c_3 d_4) \\ (a_1 b_4)+(c_1 d_4) & (a_2 b_4)+(c_2 d_4) & (a_3 b_4)+(c_3 d_4) & 0 \end{vmatrix}.$$

Slično se izvodi dokaz u opštem slučaju, što će učiniti čitalac.

179. Pokazati da je

$$\begin{vmatrix} (a_1-b_1)^2 & (a_1-b_2)^2 & (a_1-b_3)^2 & (a_1-b_4)^2 \\ (a_2-b_1)^2 & (a_2-b_2)^2 & (a_2-b_3)^2 & (a_2-b_4)^2 \\ (a_3-b_1)^2 & (a_3-b_2)^2 & (a_3-b_3)^2 & (a_3-b_4)^2 \\ (a_4-b_1)^2 & (a_4-b_2)^2 & (a_4-b_3)^2 & (a_4-b_4)^2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Generalisati ovaj identitet.

Uputstvo. Pomnožiti (vrsta $\times$ vrsta) determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 & 0 \\ a_3^2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_4^2 & a_4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2b_1 & b_1^2 & 0 \\ 1 & -2b_2 & b_2^2 & 0 \\ 1 & -2b_3 & b_3^2 & 0 \\ 1 & -2b_4 & b_4^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

180. Dokazati formulu

$$|a_{ik}|_1^n = (-1)^{n-1} 2^{n-1} (n-2),$$

gde je

$$a_{ik} = -1 \quad (i=k), \qquad a_{ik} = +1 \quad (i \neq k).$$

181. Dokazati identitet

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m}{2} & \binom{m}{1} & 1 & & 0 \\ \binom{m}{3} & \binom{m}{2} & \binom{m}{1} & & 0 \\ \vdots & & & & \\ \binom{m}{k} & \binom{m}{k-1} & \binom{m}{k-2} & & \binom{m}{1} \end{vmatrix} \equiv \binom{m+k-1}{k}.$$

182. Razviti determinantu reda n

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Posmatrajmo determinantu reda $n+1$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

i razvijmo je: 1° po elementima poslednje vrste i 2° kao *Vandermonde*-ovu determinantu. Determinanta Δ može se napisati u obliku

$$\prod_{1 \leq k < i \leq n+1} (x_i - x_k).$$

Koeficijent uz x_{n+1}^{n-1} u ovom proizvodu je

$$-\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \prod_{1 \leq k < i \leq n} (x_i - x_k).$$

U determinanti Δ algebarski komplement elementa x_{n+1}^{n-1} je $-D_n$. Prema tome dobijamo

$$D_n \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \prod_{1 \leq k < i \leq n} (x_i - x_k).$$

Primedba. Primenom ovog postupka dobija se

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & & x_2^n \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & & x_n^n \end{vmatrix} \equiv \sigma_{n-s} \prod_{1 \leq k < i \leq n} (x_i - x_k).$$

(σ_p pretstavlja osnovnu simetričnu funkciju reda p od elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Tako, na primer, ako je $s=1$, imaćemo

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & & x_n^n \end{vmatrix} = \left(\prod_{r=1}^{n} x_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x_r}\right) \prod_{1\leqslant k<i\leqslant n} (x_i - x_k).$$

183. Dokazati da je cirkulanta

$$C \equiv \begin{vmatrix} p & p+2q & p+q & q \\ q & p & p+2q & p+q \\ p+q & q & p & p+2q \\ p+2q & p+q & q & p \end{vmatrix}$$

deljiva sa

$$\begin{vmatrix} p & p+2q \\ p+q & q \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Ako elementima prve vrste dodamo odgovarajuće elemente ostalih vrsta, cirkulanta C dobija oblik

$$C \equiv (3p+4q) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ q & p & p+2q & p+q \\ p+q & q & p & p+2q \\ p+2q & p+q & q & p \end{vmatrix}.$$

Oduzevši elemente prve kolone od elemenata ostalih kolona i razvijajući determinantu po elementima prve vrste, dobija se

$$(3p+4q) \begin{vmatrix} p-q & p+q & p \\ -p & -q & q \\ -q & -p-q & -2q \end{vmatrix}.$$

Ako elementima prve vrste dodamo elemente treće vrste, a zatim oduzmemo elemente prve kolone od elemenata treće kolone, dobijamo

$$(3p+4q) \begin{vmatrix} p-2q & 0 & 0 \\ -p & -q & p+q \\ -q & -p-q & -q \end{vmatrix},$$

odnosno

$$(3p+4q)\,(2q-p) \begin{vmatrix} -q & p+q \\ p+q & q \end{vmatrix} \equiv (3p+4q)\,(2q-p) \begin{vmatrix} p & p+2q \\ p+q & q \end{vmatrix}.$$

Primedba. Navedenu osobinu cirkulante C primetio je *R. Goormaghtigh* (*Scripta mathematica*, vol. 21, 1955, p. 203). Gornji dokaz dala je *Kovina Milošević*.

Generalizacija. Na analogni način faktorisati opštu cirkulantu četvrtog reda

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Videti sledeći problem.

184. Dokazati identitet

$$
(1)\quad \begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
a_6 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\
a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 \\
a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 \\
a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_1
\end{vmatrix}
$$

$$
\equiv \left(\sum_{i=1}^{6} a_i \right) \begin{vmatrix}
a_1+a_4-a_3-a_6 & a_2+a_5-a_3-a_6 \\
a_6+a_3-a_2-a_5 & a_1+a_4-a_2-a_5
\end{vmatrix} \begin{vmatrix}
a_1-a_4 & a_2-a_5 & a_3-a_6 \\
a_6-a_3 & a_1-a_4 & a_2-a_5 \\
a_5-a_2 & a_6-a_3 & a_1-a_4
\end{vmatrix}.
$$

Rešenje. Elementima prve vrste date determinante šestog reda dodajmo odgovarajuće elemente ostalih vrsta.

Svi elementi prve vrste tako dobljene determinante imaju istu vrednost $\sum\limits_{i=1}^{6} a_i$ koja se može izvući ispred determinante kao faktor. Tako se dobija $\left(\sum\limits_{i=1}^{6} a_i \right) D$, gde je D determinanta u čijoj su prvoj vrsti elementi jedinice, a elementi ostalih vrsta poklapaju se sa elementima polazne determinante.

Oduzimajući elemente prve kolone od odgovarajućih elemenata ostalih kolona u determinanti D, u prvoj vrsti se dobijaju nule izuzev prvog elementa. Ako tu determinantu razvijemo po elementima prve vrste, dobijamo:

$$
\left(\sum_{i=1}^{6} a_i \right) \begin{vmatrix}
a_1-a_6 & a_2-a_6 & a_3-a_6 & a_4-a_6 & a_5-a_6 \\
a_6-a_5 & a_1-a_5 & a_2-a_5 & a_3-a_5 & a_4-a_5 \\
a_5-a_4 & a_6-a_4 & a_1-a_4 & a_2-a_4 & a_3-a_4 \\
a_4-a_3 & a_5-a_3 & a_6-a_3 & a_1-a_3 & a_2-a_3 \\
a_3-a_2 & a_4-a_2 & a_5-a_2 & a_6-a_2 & a_1-a_2
\end{vmatrix}.
$$

Ako sada elemente četvrte vrste dodamo odgovarajućim elementima prve vrste, tada je u prvoj vrsti treći element *nula.*

U ovoj determinanti, u prvoj vrsti, prvi element jednak je sa četvrtim, a drugi sa petim. Oduzmemo li sada elemente prve kolone od odgovarajućih elemenata četvrte kolone, a elemente druge kolone od elemenata pete kolone, nalazimo

$$
\left(\sum_{i=1}^{6} a_i \right) \begin{vmatrix}
a_1+a_4-a_3-a_6 & a_2+a_5-a_3-a_6 & 0 & 0 & 0 \\
a_6-a_5 & a_1-a_5 & a_2-a_5 & a_3-a_6 & a_4-a_1 \\
a_5-a_4 & a_6-a_4 & a_1-a_4 & a_2-a_5 & a_3-a_6 \\
a_4-a_3 & a_5-a_3 & a_6-a_3 & a_1-a_4 & a_2-a_5 \\
a_3-a_2 & a_4-a_2 & a_5-a_2 & a_6-a_3 & a_1-a_4
\end{vmatrix}.
$$

Ako elemente poslednje vrste dodamo elementima druge vrste, dobijamo

$$
\left(\sum_{i=1}^{6} a_i \right) \begin{vmatrix}
a_1+a_4-a_3-a_6 & a_2+a_5-a_3-a_6 & 0 & 0 & 0 \\
a_6+a_3-a_2-a_5 & a_1+a_4-a_2-a_5 & 0 & 0 & 0 \\
a_5-a_4 & a_6-a_4 & a_1-a_4 & a_2-a_5 & a_3-a_6 \\
a_4-a_3 & a_5-a_3 & a_6-a_3 & a_1-a_4 & a_2-a_5 \\
a_3-a_2 & a_4-a_2 & a_5-a_2 & a_6-a_3 & a_1-a_4
\end{vmatrix}.
$$

Primenom *Laplace*-ove teoreme na poslednju determinantu dobija se relacija (1), koju je trebalo dokazati.

Primedba. Ovo je partikularni slučaj stava koji je dokazao *S. V. Pavlović*, a koji glasi: Svaka cirkulanta reda $2n$ uvek je deljiva jednom determinantom reda $n-1$ i jednom determinantom reda n. Za ove determinante je karakteristično da su svi njihovi elementi linearne funkcije elemenata date cirkulante.

185. Pokazati da je proizvod dve cirkulante trećeg reda takođe cirkulanta istog reda.

Da li ovo važi za proizvod dve cirkulante reda n?

Odgovor. Da.

186. Data je matrica

$$M = \begin{Vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \\ \vdots & \vdots \\ P_n & Q_n \end{Vmatrix},$$

gde su P_1 i Q_1 matrice

$$\| a_1 \, a_2 \cdots a_r \|, \quad \| b_1 \, b_2 \cdots b_s \|$$

$$(a_k, \ b_k \text{ kompleksni brojevi}; \quad r+s=n).$$

$P_2, P_3, \ldots, P_n$ su ma koje matrice tipa $1 \times r$ koje se iz P_1 dobijaju permutovanjem elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

$Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ su ma koje matrice tipa $1 \times s$ koje se iz Q_1 dobijaju permutovanjem elemenata $b_1, b_2, \ldots, b_s$.

Odrediti $\det M$.

187. Dokazati *Hadamard*-ov stav:

Dovoljan uslov da determinanta

$$D = \det \| a_{ik} \|_1^n$$

bude različita od nule je

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{mod} a_{ii} > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \operatorname{mod} a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $D=0$. Tada skup linearnih homogenih jednačina

$$\text{(2)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

ima netrivijalno rešenje $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gde je $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{mod} x_k > 0$.

Neka je

$$\text{(3)} \qquad \max (\operatorname{mod} x_1, \operatorname{mod} x_2, \ldots, \operatorname{mod} x_n) = \operatorname{mod} x_k.$$

Posmatrajmo iz skupa jednačina (2) jednačinu

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \cdots + a_{kk} x_k + \cdots + a_{kn} x_n = 0.$$

Odavde izlazi

$$\operatorname{mod} (a_{kk} x_k) \leqslant \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{n} \operatorname{mod} (a_{kr} x_r),$$

odnosno

$$\operatorname{mod} a_{kk} \leqslant \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq k}}^{n} (\operatorname{mod} a_{kr}) \operatorname{mod} (x_r / x_k) \leqslant \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq k}}^{n} \operatorname{mod} a_{kr},$$

zbog relacije (3).

Prema tome, ako bi bilo $D=0$, tada bi za elemente bar jedne vrste važilo

$$\operatorname{mod} a_{ii} \leqslant \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq i}}^{n} \operatorname{mod} a_{ir}.$$

Na osnovu ovog zaključujemo da je uslov (1) dovoljan da determinanta D bude različita od nule.

188. Ako se na glavnoj dijagonali determinante D_7 sedmog reda nalaze po redu elementi

$$:a \quad 0,\ a,\ 0,\ a,\ 0,\ a$$

i ako su svi ostali njeni elementi jednaki 1, pokazati da je

$$D_7 = 2\,(a-1)^3\,(a-3).$$

Ako se na glavnoj dijagonali determinante D_{2n+1} reda $2n+1$ nalaze redom elementi

$$a,\ 0,\ a,\ \ldots,\ 0,\ a$$

dok su svi ostali jednaki broju 1, odrediti D_{2n+1}.

189. Dokazati identitet

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ -a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -a & b \end{vmatrix} \equiv (a+b)^n.$$

190. Proveriti da li je

$$|\, a_{pq} \,|_1^n = (x-y)^{n-1}\,[x+(n-1)\,y],$$

gde je

$$a_{pq} = \begin{cases} x & (p=q), \\ y & (p\neq q). \end{cases}$$

191. Dokazati identitet

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & & 1/(n+2) \\ \vdots & & & \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & & 1/(2n) \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}}.$$

192. Dokazati identitet

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ m & x & -2 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & x & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x & -(m-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & x & -m \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{cases} x(x^2+2^2)(x^2+4^2)\cdots(x^2+m^2) & (m \text{ parno}), \\ (x^2+1^2)(x^2+3^2)\cdots(x^2+m^2) & (m \text{ neparno}). \end{cases}$$

193. Pokazati da je

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{vmatrix} \equiv a(a-b)^2.$$

Da li je $a(a-b)^3$ vrednost determinante četvrtog reda navedene strukture?

Razviti determinantu $|c_{ik}|_1^n$, gde je

$$c_{ik} = \begin{cases} a & (i \geqslant k), \\ b & (i < k). \end{cases}$$

194. Data je determinanta

$$D_{2n} \equiv |a_{ik}|_1^{2n},$$

gde je

$$a_{ik} = \begin{cases} \lambda & (i=k), \\ \mu & (i+k=2n+1), \\ 0 & (\text{u ostalim slučajevima}). \end{cases}$$

Odrediti D_{2n} u obliku polinoma po λ i μ.

Uputstvo. Obrazovati jednu rekurentnu relaciju.

195. Dokazati formulu

$$\det \| c_{ik} \|_1^n = \frac{a(b+1)^n - b(a+1)^n}{a-b} \qquad (b \neq a),$$

gde je

$$\begin{aligned} c_{ik} &= 1 \quad (i=k), \\ &= -a \quad (i<k), \\ &= -b \quad (i>k). \end{aligned}$$

Šta će biti ako je $a=b$?

Primedba. Uporediti sa zadatkom 175 na strani 60.

196. Dokazati relaciju

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1+a_2^2 & a_2 a_3 & & a_2 a_n \\ \vdots & & & & \\ a_n a_1 & a_n a_2 & a_n a_3 & & 1+a_n^2 \end{vmatrix} \equiv 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

197. Prva vrsta jedne cirkulante D petog reda ima za elemente

$$x,\ y,\ z,\ 0,\ 0.$$

Odrediti D kao proizvod pet linearnih faktora.

Ispitati da li je izraz

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)yz-2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)zx+2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)xy$$

faktor determinante D.

198. Dokazati formulu

$$[1!\ 2!\ \ldots\ (n-2)!\ n!]\ D_{n,\,n-1} \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} r_k - \binom{n}{2}\right] V_n,$$

gde je

$$D_{n,\,n-1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{r_1}{1} & \binom{r_2}{1} & & \binom{r_n}{1} \\ \vdots & & & \\ \binom{r_1}{n-2} & \binom{r_2}{n-2} & & \binom{r_n}{n-2} \\ \binom{r_1}{n} & \binom{r_2}{n} & & \binom{r_n}{n} \end{vmatrix}, \quad V_n \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & & r_n \\ \vdots & & & \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(V_n *Vandermonde*-ova determinanta).

199. Ako kvadratna matrica A reda n ima osobinu da je više od n^2-n njenih elemenata jednako nuli, tada je det $A=0$.

Dokazati ili opovrgnuti ovaj iskaz.

200. Izračunati vrednost determinante

$$D=|a_{ik}| \quad (i,k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

u sledećim slučajevima

1^0 $a_{ik}=0$ za $i+k$ parno;

2^0 $a_{ik}=0$ za $i+k$ neparno.

201. Ako su funkcije f_{rs} $(r, s = 1, 2, \ldots, n)$ promenljive x diferencijabilne, dokazati formulu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & & \\ f_{k1} & f_{k2} & & f_{kn} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & & f_{nn} \end{vmatrix} \equiv \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{k1} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{k2} & & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{kn} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

202. Ako su P, Q, R, S polinomi po x, stepena $\leqslant 4$, pokazati da je izraz

$$T(x) \equiv \begin{vmatrix} P & Q & R & S \\ P' & Q' & R' & S' \\ P'' & Q'' & R'' & S'' \\ P''' & Q''' & R''' & S''' \end{vmatrix}$$

takođe polinom čiji je stepen $\leqslant 4$.

Rešenje. Vodeći računa o tome da je

$$P^{(k)} \equiv 0, \quad R^{(k)} \equiv 0, \quad Q^{(k)} \equiv 0, \quad S^{(k)} \equiv 0 \quad (k = 5, 6, 7, \ldots),$$

diferenciranjem se dobija redom:

$$T'(x) \equiv \begin{vmatrix} P & Q & R & S \\ P' & Q' & R' & S' \\ P'' & Q'' & R'' & S'' \\ P^{(4)} & Q^{(4)} & R^{(4)} & S^{(4)} \end{vmatrix}, \qquad T''(x) \equiv \begin{vmatrix} P & Q & R & S \\ P' & Q' & R' & S' \\ P''' & Q''' & R''' & S''' \\ P^{(4)} & Q^{(4)} & R^{(4)} & S^{(4)} \end{vmatrix},$$

$$T'''(x) \equiv \begin{vmatrix} P & Q & R & S \\ P'' & Q'' & R'' & S'' \\ P''' & Q''' & R''' & S''' \\ P^{(4)} & Q^{(4)} & R^{(4)} & S^{(4)} \end{vmatrix}, \qquad T^{(4)}(x) \equiv \begin{vmatrix} P' & Q' & R' & S' \\ P'' & Q'' & R'' & S'' \\ P''' & Q''' & R''' & S''' \\ P^{(4)} & Q^{(4)} & R^{(4)} & S^{(4)} \end{vmatrix},$$

$$T^{(5)}(x) \equiv 0,$$

što znači da stepen polinoma $T(x)$ ne premašuje 4.

Da li se ovaj rezultat može generalisati?

203. Odrediti funkcije $f_n(x)$ i $g_n(x)$ koje su definisane na sledeći način:

$$f_n(x) = |a_{ik}|_1^n, \quad g_n(x) = |b_{ik}|_1^n,$$

gde je:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 + x & (i = k), \\ 1 & (i \neq k), \end{cases} \qquad b_{ik} = \begin{cases} x + a_k & (i = k), \\ x & (i \neq k). \end{cases}$$

Rešenje. 1° Diferenciranjem po x nalazi se

$$f_n'(x) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x & 1 & & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1+x \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & & 1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Prema tome imamo relaciju

$$f_n'(x) = n\, f_{n-1}(x).$$

Stavljajući $n=2$, dobijamo

$$f_2'(x) = 2f_1(x) = 2+2x. \quad \therefore \quad f_2(x) = c+2x+x^2 \quad (c=\text{const}).$$

Iz poslednje relacije za $x=0$ sleduje $c=0$.

Dalje se dobija:

$$f_3(x) = 3x^2+x^3, \quad f_4(x) = 4x^3+x^4, \quad \ldots, \quad f_n(x) = nx^{n-1}+x^n.$$

2° Izvod drugog reda funkcije $g_n(x)$ identički se anulira:

$$g_n''(x) = 0. \quad \therefore \quad g_n(x) = Ax+B.$$

Za $x=0$ i $x=1$ dobija se respektivno

$$B = a_1\, a_2 \cdots a_n;$$

$$A+B = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

Ovim su određene konstante integracije.

204. Ako je $u = yz/x$, $v = zx/y$, $w = xy/z$, izračunati funkcionalnu determinantu

$$J \equiv \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Rezultat. $J=4$.

205. Dokazati identitet

$$W(y_1, y_2, y_3) \equiv y_1^3 \, W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}\right),$$

gde je $W(y_1, y_2, y_3)$ vronskijan

$$W(y_1, y_2, y_3) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

i gde su y_1, y_2, y_3 diferencijabilne funkcije promenljive x.

Rešenje. Dati identitet može se dokazati razvijanjem izraza na njegovoj levoj i desnoj strani. Međutim, ovaj postupak neće biti podesan ako je vronskijan višeg reda. Stoga ćemo navesti drugi način dokazivanja ovog identiteta.

Napišimo $W(y_1, y_2, y_3)$ u obliku

$$(1) \qquad W(y_1, y_2, y_3) \equiv y_1^3 \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{y_2}{y_1} & \dfrac{y_3}{y_1} \\ \dfrac{y_1'}{y_1} & \dfrac{y_2'}{y_1} & \dfrac{y_3'}{y_1} \\ \dfrac{y_1''}{y_1} & \dfrac{y_2''}{y_1} & \dfrac{y_3''}{y_1} \end{vmatrix}.$$

Primenimo na determinantu, koja se javlja u (1), *Gauss-Chiò*-ovu formulu o kondenzovanju

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \qquad (a_1 \neq 0),$$

pa dobijamo

$$W(y_1, y_2, y_3) \equiv y_1^3 \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{y_2}{y_1} \\ \dfrac{y_1'}{y_1} & \dfrac{y_2'}{y_1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{y_3}{y_1} \\ \dfrac{y_1'}{y_1} & \dfrac{y_3'}{y_1} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{y_2}{y_1} \\ \dfrac{y_1''}{y_1} & \dfrac{y_2''}{y_1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{y_3}{y_1} \\ \dfrac{y_1''}{y_1} & \dfrac{y_3''}{y_1} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\equiv y_1^3 \begin{vmatrix} \dfrac{y_2'}{y_1} - \dfrac{y_1'}{y_1}\dfrac{y_2}{y_1} & \dfrac{y_3'}{y_1} - \dfrac{y_1'}{y_1}\dfrac{y_3}{y_1} \\ \dfrac{y_2''}{y_1} - \dfrac{y_1''}{y_1}\dfrac{y_2}{y_1} & \dfrac{y_3''}{y_1} - \dfrac{y_1''}{y_1}\dfrac{y_3}{y_1} \end{vmatrix}.$$

Ako drugoj vrsti dodamo elemente prve vrste, pomnožene prethodno sa $-2y_1'/y_1$, dobijamo

$$W(y_1, y_2, y_3) \equiv y_1^3 \begin{vmatrix} \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' & \left(\dfrac{y_3}{y_1}\right)' \\ \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)'' & \left(\dfrac{y_3}{y_1}\right)'' \end{vmatrix},$$

odnosno

$$y_1^3 \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{y_2}{y_1} & \dfrac{y_3}{y_1} \\ 0 & \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' & \left(\dfrac{y_3}{y_1}\right)' \\ 0 & \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)'' & \left(\dfrac{y_3}{y_1}\right)'' \end{vmatrix} \equiv y_1^3\, W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}\right).$$

Primedba. Primeniti ovaj postupak na vronskijan $W(y_1, y_2, y_3, y_4)$ i pokazati da je

$$W(y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv y_1^4\, W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}\right).$$

Danica Perčinkova—Včkova pokazala je da se na ovaj način može dokazati relacija

$$W(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \equiv y_1^n\, W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right).$$

206. Odrediti matricu A, ako je

$$\operatorname{adj} A = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Generalisati.

207. Odrediti realnu regularnu matricu oblika $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix}$, ako je

$$A + A^{-1} = 0.$$

208. Odrediti matricu P tako da je

$$P^{-1} \begin{Vmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix} P$$

dijagonalna matrica.

209. Ako su S i T dve kvadratne matrice istog reda, ako je E jedinična matrica i ako matrice $E+S$, $E+ST$, $E+TS$, $E-S$ nisu singularne, pokazati da važi relacija

$$(E+S)^{-1}(S+T)(E+ST)^{-1}(E+S) = (E-S)(E+TS)^{-1}(S+T)(E-S)^{-1}.$$

210. Da li se parametar a može tako odrediti da matrice:

$$1^0 \quad \begin{Vmatrix} 6 & 3 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{Vmatrix}; \qquad 2^0 \quad \begin{Vmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & a & 3 \end{Vmatrix}$$

budu ranga 3?

Rezultat. 1^0 $a=3$; 2^0 $a=2$ ili $a=-6$.

211. Proveriti rezultat

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{Vmatrix}^{-1} = \frac{1}{64} \begin{Vmatrix} 66 & -14 & 2 & -46 \\ 18 & 2 & -14 & 2 \\ -30 & 18 & 2 & 18 \\ -46 & 2 & 18 & 34 \end{Vmatrix}.$$

212. Izračunati determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 3 & -9 \\ 6 & 3 & 6 & -4 \\ 15 & 8 & 7 & -7 \\ -5 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Primenom *MacMillan*-ove modifikacije *Gauss-Chiò*-ovog postupka (videti knjigu: *D. S. Mitrinović — D. Mihailović*: *Linearna algebra — Analitička geometrija — Polinomi*, Beograd, 1959, str. 63) dobija se:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & & 7 & & 3 & & 1 \\ & \mathbf{-14} & & \mathbf{33} & & \mathbf{9} & \\ 2 & & 3 & & 6 & & 5 \\ & \mathbf{-8} & & \mathbf{-27} & & \mathbf{13} & \\ 8 & & 8 & & 7 & & 8 \\ & \mathbf{-24} & & \mathbf{74} & & \mathbf{-32} & \\ -3 & & -6 & & 4 & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & & 33 & & 9 \\ & \mathbf{3} & & \mathbf{6} & \\ -8 & & -27 & & 13 \\ & \mathbf{8} & & \mathbf{7} & \\ -24 & & 74 & & -32 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 214 & & 112 \\ & \mathbf{-27} & \\ -155 & & \mathbf{-14} \end{vmatrix} = -532.$$

Primedbe. I. Navedeni postupak nije direktno primenjen na datu determinantu D, već na determinantu koja je dobijena posle jednostavnih transformacija.

II. Izračunati determinantu D i na druge načine.

213. Dokazati identitet *V. F. Ivanoff*-a

$$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ S_{n-1} & S_{n-2} & S_{n-3} & S_{n-4} & & n-1 \\ S_n & S_{n-1} & S_{n-2} & S_{n-3} & & S_1 \end{vmatrix} \equiv (n!)^2,$$

gde je

$$S_k \equiv 1^k + 2^k + \cdots + n^k.$$

214. Ispitati da li je tačan identitet

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ -1 & x & -x^2 & x^3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_0x+a_1 & a_1x+a_2 & a_2x+a_3 \\ a_1x+a_2 & a_2x+a_3 & a_3x+a_4 \\ a_2x+a_3 & a_3x+a_4 & a_4x+a_5 \end{vmatrix}.$$

215. Ako su a, b, c, d koreni jednačine

$$px^4+qx^3+rx^2+x+1=0 \quad (p\neq 0),$$

pokazati da je

$$D\equiv\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}=0.$$

Rešenje. Posle razvijanja determinante D dobija se

$$D=abc+acd+bcd+abd+abcd.$$

Kako su a, b, c, d koreni jednačine

$$px^4+qx^3+rx^2+x+1=0,$$

prema *Viète*-ovim vezama između korena i koeficijenata ove jednačine, biće

$$abc+acd+bcd+abd=-1/p,$$

$$abcd=1/p,$$

te je zaista $D=0$.

216. Ako je $xyz\neq 0$, tada je

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 1 & -b & 1 \\ 1 & 1 & -c \end{vmatrix}=0$$

rezultat eliminacije x, y, z iz relacija

(1) $$(x+y)(x+z)=bcyz,$$

(2) $$(y+z)(y+x)=cazx,$$

(3) $$(z+x)(z+y)=abxy.$$

Uputstvo. Iz jednačina (2) i (3), posle množenja, dobija se

(4) $$(y+z)^2(z+x)(y+x)=a^2bcx^2yz.$$

Jednačine (1) i (4) posle deljenja dovode do relacije

$$(y+z)^2=a^2x^2,$$

tj.

(5) $$y+z=\pm ax.$$

Ako se (5) zameni u (2) i (3), dobijaju se još dve relacije.

217. Dokazati formulu

(1) $$-36R^2V^2=\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & d^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & e^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & f^2 \\ d^2 & e^2 & f^2 & 0 \end{vmatrix},$$

gde je V zapremina tetraedra $ABCD$ i R poluprečnik sfere opisane oko ovog tetraedra i gde su a, b, c, d, e, f dužine ivica tetraedra $ABCD$, tj.

$$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c,\ \overline{AD}=d,\ \overline{BD}=e,\ \overline{CD}=f.$$

Rešenje. Neka se koordinatni početak Dekartovog pravouglog trijedra osa nalazi u centru sfere i neka su

$$(x_k, y_k, z_k) \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

koordinate tačaka A, B, C, D.

Kako je

$$\pm 6RV = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & R \\ x_2 & y_2 & z_2 & R \\ x_3 & y_3 & z_3 & R \\ x_4 & y_4 & z_4 & R \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \mp 6RV = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & -R \\ x_2 & y_2 & z_2 & -R \\ x_3 & y_3 & z_3 & -R \\ x_4 & y_4 & z_4 & -R \end{vmatrix},$$

posle množenja ovih determinanata dobija se

$$-36R^2V^2 = \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2 & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-R^2 & x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3-R^2 & x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4-R^2 \\ x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1-R^2 & x_2^2+y_2^2+z_2^2-R^2 & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3-R^2 & x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4-R^2 \\ x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1-R^2 & x_3x_2+y_3y_2+z_3z_2-R^2 & x_3^2+y_3^2+z_3^2-R^2 & x_3x_4+y_3y_4+z_3z_4-R^2 \\ x_4x_1+y_4y_1+z_4z_1-R^2 & x_4x_2+y_4y_2+z_4z_2-R^2 & x_4x_3+y_4y_3+z_4z_3-R^2 & x_4^2+y_4^2+z_4^2-R^2 \end{vmatrix}.$$

Budući da je

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = \frac{1}{2}\left\{x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]\right\}$$

i kako je

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2=0, \quad x_2^2+y_2^2+z_2^2-R^2=0,$$

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=c^2,$$

nalazi se

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=R^2-\frac{1}{2}c^2.$$

Ako se na analogni način odrede izrazi

$$x_ix_k+y_iy_k+z_iz_k \quad (i, k=1, 2, 3, 4; \ i\neq k),$$

dobija se formula (1).

218. Odrediti n-ti izvod funkcije

(1) $f=g/h$ (g, h su n-puta diferencijabilne funkcije).

Rešenje. Ako je

$$f^{(k)}=\mathrm{d}^kf/\mathrm{d}x^k, \quad g^{(k)}=\mathrm{d}^kg/\mathrm{d}x^k, \quad h^{(k)}=\mathrm{d}^kh/\mathrm{d}x^k$$

$$(k=1, 2, \ldots, n),$$

dobijaju se sledeće relacije:

$$\begin{aligned} &hf &&= g, \\ &h'f+hf' &&= g', \\ &h''f+2h'f'+hf'' &&= g'', \\ & &&\vdots \\ &h^{(n)}f+\binom{n}{1}h^{(n-1)}f'+\binom{n}{2}h^{(n-2)}f''+\cdots+hf^{(n)} &&= g^{(n)}. \end{aligned}$$

Odavde sleduje

$$f^{(n)}=\frac{1}{h^{n+1}}\begin{vmatrix} h & 0 & 0 & \cdots & 0 & g \\ h' & h & 0 & & 0 & g' \\ h'' & 2h' & h & & 0 & g'' \\ \vdots & & & & & \\ h^{(n)} & \binom{n}{1}h^{(n-1)} & \binom{n}{2}h^{(n-2)} & & \binom{n}{n-1}h' & g^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Ovo je rešenje dao *V. F. Ivanoff* (*American Mathematical Monthly*, t. 55, 1948).

219. Ako je $F(x)=f(g)$ (g funkcija od x), dokazati da važi formula *V. F. Ivanoff*-a:

$$F^{(n)}x=\begin{vmatrix} g' & g'' & g''' & g^{(4)} & \cdots & g^{(n)} \\ -1 & g'\mathrm{D} & \binom{2}{1}g''\mathrm{D} & \binom{3}{1}g'''\mathrm{D} & & \binom{n-1}{1}g^{(n-1)}\mathrm{D} \\ 0 & -1 & \binom{2}{2}g'\mathrm{D} & \binom{3}{2}g''\mathrm{D} & & \binom{n-1}{2}g^{(n-2)}\mathrm{D} \\ 0 & 0 & -1 & \binom{3}{3}g'\mathrm{D} & & \binom{n-1}{3}g^{(n-3)}\mathrm{D} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & g'\mathrm{D} \end{vmatrix}\mathrm{D}f,$$

gde je $g^{(k)}=\mathrm{d}^k g/\mathrm{d}x^k$ i $\mathrm{D}^k f=\mathrm{d}^k f/\mathrm{d}g^k$.

220. Ako simboli ab i $|abc|$ označavaju

(1) $$ab=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

(2) $$|abc|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

dokazati

(3) $$|abc|\cdot|def|^2=\begin{vmatrix} |aef| & |afd| & |ade| \\ |bef| & |bfd| & |bde| \\ |cef| & |cfd| & |cde| \end{vmatrix}.$$

Koristeći relaciju (3), dokazati

(4) $$\begin{vmatrix} ad & ae & af \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{vmatrix}^3=\begin{vmatrix} |aef| & |afd| & |ade| \\ |bef| & |bfd| & |bde| \\ |cef| & |cfd| & |cde| \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} |dbc| & |dca| & |dab| \\ |ebc| & |eca| & |eab| \\ |fbc| & |fca| & |fab| \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Ako a, b, ... shvatimo kao vektore zadate svojim koordinatama

$$a=\{a_i\},\ b=\{b_i\},\ldots\quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

u odnosu na *Descartes*-ov pravougli koordinatni sistem desne dispozicije, tada izrazi (1) i (2) respektivno znače skalarni i mešoviti proizvod odgovarajućih vektora.

Za dokazivanje relacije (3) primenićemo relacije

(5) $$|def|^2 = |d\times e,\ e\times f,\ f\times d|,$$

(6) $$|abc|\cdot|def| = \begin{vmatrix} ad & ae & af \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{vmatrix},$$

gde, na primer, $d\times e$ označava vektorski proizvod vektora d i e.

Prema (5) leva strana jednakosti (3) može se napisati u obliku

(7) $$|abc|\cdot|def|^2 = |abc|\cdot|d\times e,\ e\times f,\ f\times d|;$$

kako je dalje, s obzirom na (6),

(8) $$|abc|\cdot|d\times e,\ e\times f,\ f\times d| = \begin{vmatrix} a(d\times e) & a(e\times f) & a(f\times d) \\ b(d\times e) & b(e\times f) & b(f\times d) \\ c(d\times e) & c(e\times f) & c(f\times d) \end{vmatrix}$$

i kako je, po definiciji mešovitog proizvoda tri vektora, na primer, $a(d\times e) = |ade|$, formule (7) i (8) dokazuju tvrđenje (3).

Relacija (4) neposredna je posledica relacije (3). Da bismo ovo pokazali, uočimo jednakost

(9) $$|def|\cdot|abc|^2 = \begin{vmatrix} |dbc| & |dca| & |dab| \\ |ebc| & |eca| & |eab| \\ |fbc| & |fca| & |fab| \end{vmatrix}.$$

Izmnožimo zatim odgovarajuće strane relacija (3) i (9) i primenimo formulu (6) na dobijeni izraz $|abc|^3\cdot|def|^3 = \{|abc|\cdot|def|\}^3$, te dobijamo relaciju (4).

Primedba. Ovaj zadatak i rešenje redigovao je *V. Janekoski.*

221. Razviti determinantu

$$D_n = |d_{ik}|_1^n,$$

gde je

$$d_{ik} = a\ (i=k),$$
$$= b\ (i=k-1),$$
$$= c\ (i=k+1),$$
$$= 0\ (i\neq k,\ k-1,\ k+1).$$

Uputstvo. D_n zadovoljava diferencnu jednačinu

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2},$$

čije je opšte rešenje

$$D_n = C_1\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}\right)^n \quad (a^2-4bc\neq 0),$$

gde su C_1 i C_2 konstante koje se određuju na osnovu vrednosti determinanata $D_1\ (=a)$ i $D_2\ (=a^2-bc)$.

222. Po $x_s\ (s=0, 1, 2\ldots, n)$ rešiti skup linearnih jednačina

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k+a}{\nu}x_{k-\nu} = b_k \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n;\ a \text{ realna konstanta}).$$

Rezultat. $$x_s = \sum_{r=0}^{s}(-1)^r\binom{s+a}{r}b_{s-r} \quad (s=0, 1, 2, \ldots, n).$$

223. Data je matrica

$$M_1 = \left\| \begin{matrix} a & -d & g & j & m & -p & -s & -v \\ b & e & -h & k & -n & q & -t & -w \\ c & f & i & -l & -o & -r & u & -z \end{matrix} \right\|,$$

gde su $a, b, c, \ldots, v, w, z$ pozitivni brojevi.

Neka je M_2 ma koja matrica tipa 3×7 koja nastaje iz M_1, kada se izostavi jedna ma koja njena kolona.

Proveriti da li je rang $M_1 = \text{rang } M_2 = 3$.

Rešenje. Označimo sa I, II i III prvu, drugu i treću vrstu matrice M_1. Ako ne bi bio rang $M_1=3$, tada bi postojali realni brojevi A, B, C, takvi da je

$$(1) \qquad A\,\mathrm{I}+B\,\mathrm{II}=C\,\mathrm{III} \qquad (A^2+B^2+C^2>0).$$

Ne umanjujući generalnost rezultata, možemo smatrati da je $C \geqslant 0$.

Razlikovaćemo četiri slučaja, gde treba isključiti $A^2+B^2+C^2=0$.

1^0 $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$. Tada bi bilo

$$Aj+Bk=-Cl,$$

što je nemogućno, jer su j, k, l prema pretpostavci pozitivni brojevi.

2^0 $A \leqslant 0, B \leqslant 0$. Tada bi bilo

$$Aa+Bb=Cc,$$

što je nemogućno, jer su a, b, c pozitivni brojevi.

3^0 $A \geqslant 0, B \leqslant 0$. Tada bi bilo

$$-Ad+Be=Cf,$$

što je nemogućno, jer su takođe d, e, f pozitivni brojevi.

4^0 $A \leqslant 0, B \geqslant 0$. Tada bi bilo

$$Ag-Bh=Ci,$$

što je nemogućno, jer su g, h, i pozitivni brojevi.

Time smo utvrdili da je rang $M_1=3$.

Relacija rang $M_2=3$ dokazuje se potpuno analogno.

Primedba. Ovaj zadatak formulisao je *D. Đoković*, a rešenje dao *R. Lučić*.

Generalizacija. *D. Đoković* takođe je formulisao sledeći problem:

Neka je M matrica tipa $n \times 2^n$ koja ispunjava uslove:

1^0 Svi njeni elementi su realni brojevi različiti od nule;

2^0 Raspored pozitivnih i negativnih elemenata različit je za svaku kolonu.

Neka je N matrica koja se dobija iz matrice M dodajući joj jednu novu vrstu, čiji su svi elementi realni brojevi istog znaka.

Neka je P matrica koja se dobija iz matrice M kada se izostavi jedna ma koja njena kolona.

Pokazati da važe sledeće relacije:

$$\text{rang } M = \text{rang } P = n \quad \text{i} \quad \text{rang } N = n+1.$$

Primedba I. Matrica koja ima n vrsta i zadovoljava uslove 1^0 i 2^0 može imati najviše 2^n kolona.

Primedba II. Može se dati i generalizacija u kojoj bi se dozvolilo da neki od elemenata budu jednaki nuli.

224. Matrica A tipa $m\times n$ i ranga r permutovanjem vrsta i permutovanjem kolona može se svesti na ekvivalentnu matricu oblika

$$B=\begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix} \quad (\det P\neq 0),$$

gde su P, Q, R, S matrice tipa

$$r\times r,\quad r\times j,\quad k\times r,\quad k\times j \quad (m=r+k;\ n=r+j).$$

Ispitati da li važi relacija

$$(\operatorname{rang} B=r)\Leftrightarrow (S=RP^{-1}Q).$$

Primer.

$$\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix};$$

$$P^{-1}=\frac{1}{12}\begin{Vmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 1 \end{Vmatrix},\quad RP^{-1}Q=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}=S.$$

Dakle, matrica je ranga 2.

225. Neka je $A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Dokazati:

1° $\quad A^k=\begin{Vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ (k prirodan broj);

2° $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{A^n}{n!}=\begin{Vmatrix} e & e \\ 0 & e \end{Vmatrix}$.

Rešenje. Matrica A je *Jordan*-ova matrica. Stoga je

$$f(A)=\begin{Vmatrix} f(1) & f'(1) \\ 0 & f(1) \end{Vmatrix},$$

gde ćemo za posmatrane slučajeve uzeti prvo $f(x)=x^k$, a zatim $f(x)=e^x$.

Na taj način dobijamo:

1° $\quad f(x)=x^k,\ f'(x)=kx^{k-1},\ f(1)=1,\ f'(1)=k,$

pa je

$$A^k=\begin{Vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

2° $\quad f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ f(1)=f'(1)=e,$

pa je

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=\begin{Vmatrix} e & e \\ 0 & e \end{Vmatrix}.$$

Redigovano prema rešenju studenta *B. Sekuloskog* koje je dao na pismenom ispitu iz predmeta *Matematičke metode u fizici* (Elektrotehnički fakultet u Beogradu, jun 1960).

226. Dokazati formulu

$$\begin{Vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{Vmatrix}^n = \frac{1}{3}(a+2b)^n \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} + \frac{1}{3}(a-b)^n \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots).$$

Uputstvo. Primeniti metod matematičke indukcije.

227. Dokazati formule

$$\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}^{2k} = \begin{Vmatrix} 3^{2k} & 0 \\ 0 & 3^{2k} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}^{2k+1} = \begin{Vmatrix} -3^{2k} & 2\cdot 3^{2k} \\ 4\cdot 3^{2k} & 3^{2k} \end{Vmatrix}$$

$$(k=1, 2, 3, \ldots).$$

228. Posmatrajmo determinantu trećeg reda $|a_{ik}|$, čiji su svi elementi jedan od brojeva ± 1.

1^0 Pokazati da je $|a_{ik}|$ paran broj. 2^0 Odrediti max $|a_{ik}|$.

Rezultat. 2^0 max $|a_{ik}|=4$.

229. Odrediti max $|a_{ik}|$, gde je $|a_{ik}|$ determinanta trećeg reda čiji su elementi jedan od brojeva 0 i 1.

Rezultat. max $|a_{ik}|=2$.

230. Odrediti vrednost determinante $|a_{ik}|_1^n$, gde je

1^0 $a_{ik}=\min(i, k)$; 2^0 $a_{ik}=\max(i, k)$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$.

Rezultat. 1^0 $|a_{ik}|_1^n=1$; 2^0 $|a_{ik}|_1^n=(-1)^{n-1}n$.

231. Proveriti

$$\begin{Vmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Da li ova osobina važi za analogne matrice višeg reda?

232. Pomnožiti determinante

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & a & d & c \\ d & c & b & a \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

i na osnovu njihovog proizvoda odrediti vrednost determinante A.

233. Ako je $f(x)=x^3-ax^2-bx-c$ i $M=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{Vmatrix}$, pokazati da je

$$f'(M)=\begin{Vmatrix} -b & -2a & 3 \\ 3c & 2b & a \\ ac & ab+3c & a^2+2b \end{Vmatrix}.$$

Ispitati da li je zaista rang matrice $f'(M)$ jednak broju različitih korena polinoma $f(x)$ u polju kompleksnih brojeva.

Primedba. Ovaj problem postavio je *MacDuffee.*

234. Ako su B i C kvadratne komutativne matrice i $C^2=0$, proveriti da li je

$$(B+C)^{k+1}=B^k\{B+(k+1)\,C\} \quad (k \text{ prirodan broj ili nula}).$$

235. Ako je $D=|\,a_{ik}\,|_1^n$, gde je:

$$a_{ik}=a \quad (i\neq k), \qquad a_{ik}=0 \quad (i=k\neq n), \qquad a_{nn}=b,$$

proveriti da li je tačna formula

$$D=(-a)^{n-1}\{(n-1)\,a-(n-2)\,b\}.$$

Uputstvo. Primeniti metod matematičke indukcije.

236. Izračunati $D=|\,a_{ij}\,|_1^n$ $(n>2)$, ako je

$$a_{ij}=a+(i-1)\,n+j \qquad (i,j=1,2,\ldots,n).$$

Rezultat. $D=0$.

237. Proveriti formulu

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & & 1 \\ -1 & -1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & & \\ -1 & -1 & -1 & & 0 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & & 1 \\ -1 & 1 & 0 & & -1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & -1 & 1 & & 0 \end{Vmatrix},$$

gde su matrice koso-simetrične parnog reda.

238. 1° Ako je $A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$ i $\sigma=\dfrac{\operatorname{tr} A}{2\sqrt{\Delta}}$ $(\Delta=\det A>0)$, tada je

$$(1) \qquad A^n=\Delta^{\frac{1}{2}(n-1)}\,U_{n-1}(\sigma)\,A-\Delta^{\frac{1}{2}n}\,U_{n-2}(\sigma)\,E,$$

gde je E jedinična matrica i $U_n(x)$ pridruženi polinom *Čebiševa* koji se poklapa sa funkcijom

$$\frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\sqrt{1-x^2}}$$

u intervalu $(-1,+1)$.

2^0 Ako je $\Delta=0$, tada je

(2) $$A^n=(\operatorname{tr} A)^{n-1} A.$$

Dokazati navedene formule.

Rešenje. 1^0 Prvi pridruženi polinomi *Čebiševa* su

$$U_{-1}(\sigma)=0, \qquad U_0(\sigma)=1, \qquad U_1(\sigma)=2\sigma.$$

Formula (1) istinita je za $n=1$, jer je

$$A^1=\Delta^0 U_0(\sigma) A-\Delta^{1/2} U_{-1}(\sigma) E=1 \cdot A-0 \cdot E=A.$$

Za $n=2$ biće

(3) $$A^2=\Delta^{1/2} U_1(\sigma) A-\Delta U_0(\sigma) E=2\sigma \sqrt{\Delta} A-\Delta E.$$

Kako je $\sigma=(\operatorname{tr} A)/(2\sqrt{\Delta})$, relacija (3) postaje

(4) $$A^2=(\operatorname{tr} A) A-\Delta E.$$

Poslednja relacija je tačna s obzirom na *Cayley–Hamilton*-ovu teoremu, jer je

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2-(\operatorname{tr} A) \lambda+\Delta$$

karakteristični polinom matrice A.

Pretpostavimo sada da je formula (1) tačna za $n=k\,(\geqslant 2)$, tj. da je

(5) $$A^k=\Delta^{(k-1)/2} U_{k-1}(\sigma) A-\Delta^{k/2} U_{k-2}(\sigma) E.$$

Pokazaćemo da odatle sleduje da je relacija (1) tačna i za $n=k+1$, tj. da je

(6) $$A^{k+1}=\Delta^{k/2} U_k(\sigma) A-\Delta^{(k+1)/2} U_{k-1}(\sigma) E.$$

Na osnovu (5) i (3) biće

(7) $$\begin{aligned} A^{k+1}=A^k A&=\Delta^{(k-1)/2} U_{k-1}(\sigma) A^2-\Delta^{k/2} U_{k-2}(\sigma) A \\ &=\Delta^{(k-1)/2} U_{k-1}(\sigma)\left[2\sigma \sqrt{\Delta} A-\Delta E\right]-\Delta^{k/2} U_{k-2}(\sigma) A \\ &=\Delta^{k/2}\left[2\sigma U_{k-1}(\sigma)-U_{k-2}(\sigma)\right] A-\Delta^{(k+1)/2} U_{k-1}(\sigma) E. \end{aligned}$$

Upoređujući formule (6) i (7), vidimo da još treba dokazati da važi identitet

(8) $$U_k(\sigma)+U_{k-2}(\sigma)=2\sigma U_{k-1}(\sigma).$$

Koristeći definiciju polinoma $U_k(\sigma)$, relacija (8) svodi se na relaciju

$$\sin (k+1) \theta+\sin (k-1) \theta=2 \sin k\theta \cos \theta \qquad (\theta=\arccos \sigma),$$

koja je zaista tačna.

Time smo metodom matematičke indukcije dokazali formulu (1).

Ovo je rešenje *D. Đokovića*.

Primedba. Formule (1) i (2) navedene su bez dokaza u knjizi:

P. I. Richards: Manual of Mathematical physics (London–New York–Paris–Los Angeles, 1959, p. 312).

239. Odrediti dijagonalne matrice A trećeg reda koje ispunjavaju uslov

(1) $$A^2=A+2E \qquad (E \text{ jedinična matrica}).$$

Da li među ovim dijagonalnim matricama ima skalarnih matrica?

Generalizacija I. Odrediti dijagonalne matrice A reda n za koje je ispunjen uslov (1).

Generalizacija II. Koliko ima dijagonalnih matrica A tipa $n \times n$ za koje važi uslov

$$A^k+\alpha_1 A^{k-1}+\alpha_2 A^{k-2}+\cdots+\alpha_{k-1} A+\alpha_k E=0 \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ skalari})?$$

240. Pokazati da je

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} a\alpha & a & \alpha & 1 \\ b\beta & b & \beta & 1 \\ c\gamma & c & \gamma & 1 \end{Vmatrix} = 3$$

(a, b, c različiti brojevi; α, β, γ različiti brojevi).

241. Proveriti formulu

$$\begin{Vmatrix} A & H & G \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} A^{-1} & -A^{-1}HB^{-1} & A^{-1}HB^{-1}FC^{-1}-A^{-1}GC^{-1} \\ 0 & B^{-1} & -B^{-1}FC^{-1} \\ 0 & 0 & C^{-1} \end{Vmatrix},$$

gde su A, B, C, F, G, H matrice od kojih su A, B, C kvadratne i regularne.

242. Proveriti formulu

$$\begin{Vmatrix} \cos a & \sin a & \cos b & \sin b \\ -\sin a & \cos a & -\sin b & \cos b \\ 0 & 0 & \cos c & \sin c \\ 0 & 0 & -\sin c & \cos c \end{Vmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos a & -\sin a & -\cos(a-b+c) & \sin(a-b+c) \\ \sin a & \cos a & -\sin(a-b+c) & -\cos(a-b+c) \\ 0 & 0 & \cos c & -\sin c \\ 0 & 0 & \sin c & \cos c \end{Vmatrix}$$

(a, b, c skalari).

243. Posmatrati determinantu D_{2k-1} ($k=2, 3, \ldots$). Prvih $k+1$ elemenata njene prve vrste su *jedinice*, a ostalih $k-2$ elemenata su *nule*. Sledećih $k-2$ vrsta su ciklične permutacije prve vrste. Elementi k-te vrste su po redu

$$1, 2, \ldots, k, 0, 0, \ldots, 0.$$

Sledećih $k-1$ vrsta su ciklične permutacije k-te vrste.

Izračunati D_{2k-1}.

Primer. Za $k=5$ determinanta ima oblik

$$D_9 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Rezultat. $D_{2k-1}=(k+1)^{k-1}$.

244. Odrediti vrednost determinante

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & d & -c & f & -e & -h & g \\ -c & -d & a & b & g & h & -e & -f \\ -d & c & -b & a & h & -g & f & -e \\ -e & -f & -g & -h & a & b & c & d \\ -f & e & -h & g & -b & a & -d & c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & f & e & -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

Uputstvo. Obrazovati proizvod $D\times D$.

Rezultat. $D=(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)^4$.

245. Matricu A tipa $(2k)\times(2k)$ razbiti na blokove:

$$A=\begin{Vmatrix} M & N \\ P & Q \end{Vmatrix},$$

gde su M, N, P, Q kvadratne matrice tipa $k\times k$.

Ako je bar jedna od matrica N i P nula-matrica, tada je

$$\det A=(\det M)\ (\det Q).$$

Ako je bar jedna od matrica M i Q nula-matrica, tada je

$$\det A=(-1)^k(\det N)\ (\det P).$$

Dokazati navedene iskaze.

246. Neka je $D_n=|\,a_{ik}\,|_1^n$ simetrična determinanta sa realnim elementima. Ako je $a_{ik}=0\ (i=k)$ i ako su $n-1$ glavnih minora reda $n-1$ jednaki nuli, da li preostali glavni minor reda $n-1$ može biti različit od nule?

Ispitati ovo posebno za determinante reda $n=3, 4, 5, \ldots$.

Primer. Simetrična determinanta

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & c & 0 & f \\ 0 & e & f & 0 \end{vmatrix} \qquad (cef\neq 0)$$

pretstavlja primer determinante četvrtog reda sa traženim osobinama.

R E D O V I

I. NUMERIČKI REDOVI

1. Pokazati da je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)} \quad (r>1)$$

konvergentan.

Uputstvo. Poći od identiteta

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}$$

$$\equiv \frac{1}{r-1}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}\right],$$

ili od nejednakosti

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)} < \frac{1}{n^2} \quad (r>1).$$

2. Pokazati da su redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+2}}$$

konvergentni.

Uputstvo. Za drugi red primeniti nejednakost

$$\frac{1}{n^{n+2}} < \frac{1}{n^2} \quad (n=2, 3, \ldots).$$

3. Ispitati da li je red, čiji je opšti član

$$u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1},$$

konvergentan ili divergentan.

4. Ispitati za koje je vrednosti parametara a (>0) i b (>0) red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}{(1+b)(1+2b)\cdots(1+nb)}$$

konvergentan.

5. Da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$ konvergira ili divergira?

6. Ispitati konvergenciju redova čiji su opšti članovi:

$$\left(\frac{nr}{n+1}\right)^n; \quad \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}; \quad n^2 e^{-n};$$

$$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}; \quad (-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n).$$

7. Sumirati redove

$$1^0 \quad \sum_{k=1}^{n-1} k^2(n-k)^2; \qquad 2^0 \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}; \qquad 3^0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}.$$

Rezultat. 1^0 $\frac{1}{30}(n^5-n)$.

8. Sumirati $f(N)=\sum_{n=1}^{N} 1/\{n(n+1)(n+2)\}$ i odrediti $\lim_{N\to\infty} f(N)$.

Uputstvo. Poći od

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \equiv \frac{1}{2}\,\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}.$$

Rezultat. $\lim_{N\to\infty} f(N)=1/4$.

9. Pokazati da je $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\{n(n+1)(n+2)(n+3)\}=1/18$.

10. Sumirati n prvih članova reda

$$\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{6}{3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots.$$

Uputstvo. Poći od opšteg člana

$$u_n=\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{3^n}$$

napisanog u obliku

$$u_n=\frac{1}{2n(n+1)}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

Traženi zbir je

$$S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

11. Sumirati redove:

$$1^0 \qquad \frac{5}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{6}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{7}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots,$$

$$2^0 \qquad \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2!}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{4!}+\frac{5\cdot 7\cdot 9}{6!}+\cdots$$

Rezultat. 1^0 Zbir prvih n članova je izraz $n(3n+7)/[2(n+1)(n+2)]$, koji $\to 3/2$, ako $n\to\infty$. 2^0 $\frac{1}{2}[7e+6-e^{-1}]$.

12. Ako su redovi $\sum u_n^2$ i $\sum v_n^2$ konvergentni, ispitati da li je red $\sum u_n v_n$ takođe konvergentan.

Uputstvo. Primeniti nejednakost

$$u v \leqslant \frac{1}{2}(u^2+v^2).$$

13. Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergira, pokazati da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ takođe konvergira.

Dokaz. Budući da je

$$\left(a_n-\frac{1}{n}\right)^2 \geqslant 0,$$

izlazi

$$(1) \qquad a_n^2+\frac{1}{n^2} \geqslant 2\frac{a_n}{n}, \quad \text{tj.} \quad \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right).$$

Kako $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergira i kako, po pretpostavci, konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, na osnovu (1) zaključuje se da konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$.

14. Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan, isti je slučaj sa redom $\sum_{k=1}^{\infty}(Aa_k+Ba_{k+1})$, gde su A i B proizvoljne konstante.

15. Pokazati da je red $\sum \frac{n+1}{n} a_n$ konvergentan, ako je red $\sum a_n$ konvergentan.

II. POTENCIJALNI REDOVI

16. Proveriti razvoje:

$$1^0 \qquad \frac{1+3x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n^2+1)\, x^n;$$

$$2^0 \qquad \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^n} x^{n-1}.$$

Odrediti poluprečnike konvergencije ovih redova.

17. Proveriti razvoje:

$$1^0 \qquad \frac{1-x^2}{1-2x\cos a+x^2} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos na;$$

$$2^0 \qquad \frac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin na;$$

$$3^0 \qquad \frac{1-x\,\mathrm{ch}\, a}{1-2x\,\mathrm{ch}\, a+x^2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,\mathrm{ch}\, na.$$

Odrediti poluprečnike konvergencije ovih redova.

Uputstvo. Rastaviti date funkcije na parcijalne razlomke oblika

$$\frac{A}{x-\alpha}.$$

Primedba. Redovi pod 1° i 2° mogu se smatrati i kao *Fourier*-ovi redovi, kod kojih je x parametar, dok je a promenljivo. Tada se na jednostavan način dolazi do navedenih razvoja.

18. Polazeći od relacije

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (|x|<1),$$

odrediti zbirove redova:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k.$$

19. Ako je $|x|<1$, pokazati da je zbir potencijalnog reda

$$\frac{2^2x^2}{1\cdot 4}+\frac{3^2x^3}{2\cdot 5}+\frac{4^2x^4}{3\cdot 6}+\cdots$$

funkcija

$$f(x)=\frac{4-x^3}{3x^2}\log(1-x)+\frac{12-6x-2x^2+5x^3}{9x(1-x)} \quad (x\neq 0), \quad f(0)=0.$$

20. Odrediti poluprečnik konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n+1)(n+3)(n+4)}$$

i pokazati da se zbir ovog reda za vrednosti x za koje je konvergentan može izraziti u konačnom obliku.

21. Odrediti poluprečnik konvergencije i zbir reda

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}.$$

22. Odrediti poluprečnik konvergencije potencijalnog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n(2n+1)}$$

i pokazati da se zbir ovog reda može izraziti u konačnom obliku.

23. Za koje su vrednosti realnog parametra r redovi

$$1+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta+\cdots; \quad r\sin\theta+r^2\sin 2\theta+\cdots$$

konvergentni? Sumirati ove redove za slučaj kad su konvergentni.

24. Sumirati red $\sum_{k=1}^{n} x^k \sin(k-1)a$.

Uputstvo. Poći od reda

$$\sum_{k=1}^{n} x^k\cos(k-1)a+i\sum_{k=1}^{n} x^k\sin(k-1)a \quad (i \text{ imaginarna jedinica}).$$

Rezultat. $\{x\sin a-x^n\sin na+x^{n+1}\sin(n-1)a\}/(1-2x\cos a+x^2)$.

25. Sumirati konačne redove:

$$A \equiv 1+\binom{n}{1}\cos\theta+\binom{n}{2}\cos 2\theta+\cdots+\binom{n}{n}\cos n\theta,$$

$$B \equiv \binom{n}{1}\sin\theta+\binom{n}{2}\sin 2\theta+\cdots+\binom{n}{n}\sin n\theta.$$

Rešenje. Kako je

$$\begin{aligned} A+iB &\equiv 1+\binom{n}{1}e^{i\theta}+\binom{n}{2}e^{2i\theta}+\cdots+\binom{n}{n}e^{ni\theta} \\ &\equiv (1+e^{i\theta})^n \\ &\equiv (1+\cos\theta+i\sin\theta)^n \\ &\equiv \left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \\ &\equiv 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n \\ &\equiv 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

dobija se

$$A\equiv 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2},$$

$$B\equiv 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}.$$

Primedba. Ovo je rešenje *Ž. Pantića.*

26. Razviti funkciju

$$\left(\frac{1-x}{1+x+x^2}\right)^n \quad (n \text{ prirodan broj})$$

u *Taylor*-ov red u okolini tačke $x=0$.

Rezultat. $1-2nx+n(2n-1)x^2+\cdots$

27. Ako je x veliko, odrediti jednu aproksimaciju funkcije

$$f(x)\equiv(x^2+1)^{1/2}-(x^2-1)^{1/2},$$

tako da greška bude reda $1/x^5$.

Rezultat. $1/x$.

Primedba. Kakav se zaključak može izvući iz relacije

$$f(x)-\frac{1}{x}\equiv\frac{1}{x(x+\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2+1})(x^2+\sqrt{x^4-1})} \quad (x\neq 0),$$

koju treba verifikovati?

28. Razviti izraz $(x\sqrt{x^2-2x})/(x^2+1)$ u potencijalni red po $1/x$ i pokazati da za dovoljno veliko $x(>0)$ važi aproksimativna formula

$$\frac{x\sqrt{x^2-2x}}{x^2+1} \approx 1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2},$$

gde su a i b dve numeričke konstante koje treba odrediti.

29. U okolini početka razviti funkciju

$$(1+x)^{1+x}$$

u potencijalni red.

Rezultat. $1+x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\cdots$.

30. U okolini tačke $x=0$ razviti u potencijalni red funkciju $\log(1/\sqrt{1-2x\cos\theta+x^2})$ i odrediti njegov poluprečnik konvergencije.

31. U okolini tačke $x=0$ razviti u potencijalni red funkciju

$$f(x)=\int_{-x}^{2x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

32. U okolini tačke $x=0$ razviti u potencijalni red funkciju $\log(x+\sqrt{1-x^2})$ izrazivši je prethodno jednim integralom.

33. Funkciju $f(x, y)=1/\{(1-x)(1-y)\}$ razviti u potencijalni red u okolini tačke $x=0$, $y=0$.

Rezultat. Za $|x|<1$, $|y|<1$ biće

$$f(x, y)=1+(x+y)+(x^2+xy+y^2)+\cdots+(x^n+x^{n-1}y+\cdots+y^n)+\cdots$$

34. U okolini tačke $x=0$ razviti u *Taylor*-ov red funkciju

$$\frac{\log(1+x)}{1+x}.$$

Rešenje. Ako se pođe od redova

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n+\cdots,$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

koji konvergiraju za $-1<x<+1$, dobija se red

$$\frac{\log(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\cdots+(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n+\cdots$$

Ovaj red je konvergentan za $-1<x<+1$.

35. Ispitati da li je

$$\exp e^x = e + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad \left(a_\nu = \frac{1}{\nu!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\nu}{k!}\right).$$

Proveriti da li važi rekurentna relacija

$$\nu a_\nu = a_{\nu-1} + \frac{1}{1!} a_{\nu-2} + \frac{1}{2!} a_{\nu-3} + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)!} a_0.$$

i da li koeficijent

$$a_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \cdots\right)$$

ima vrednost $\frac{5e}{3!}$?

36. Proveriti razvoj

$$\int_0^t \frac{dx}{(1+x^3)^{1/2}} = t - \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{t^7}{7} - \cdots \quad (|t| < 1).$$

Ako se ovaj integral aproksimira sa prva tri člana reda, kolika se greška čini? Posebno izračunati integral i jednu gornju granicu greške ako je $t = 1/2$.

37. Proveriti relaciju

$$2 \cos x \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \{1 + (-1)^n\} \frac{x^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

Ispitati da li se $\cos x \operatorname{ch} x$ može napisati i u oblicima

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^\nu}{(2\nu)!}\left(\cos \frac{\nu\pi}{2}\right) x^{2\nu} \quad \text{i} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^{4\nu}}{(8\nu)!} x^{8\nu} - 4x^4 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^{4\nu}}{(8\nu+4)!} x^{8\nu}.$$

38. Pokazati da je

$$e^{-\frac{1}{2}x} \log\left(1 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \cdots \quad (-2 < x \leqslant 2).$$

Proveriti da li se ovom razvoju može dati oblik

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad (-2 < x \leqslant 2),$$

gde je

$$a_\nu = (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{(\nu-i)!\, i}.$$

39. Pokazati da je

$$f(x) \equiv 2 \log \frac{2}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^3}{3} + \cdots \quad (-1<x<+1).$$

Uputstvo. Razviti prvo $f'(x)$ u potencijalni red i imati na umu da je $f(0)=0$.

40. Funkcija θ promenljive x definisana je relacijom

$$\theta = \alpha + x \sin \theta \quad (\alpha = \text{const}).$$

Pokazati da je, za $x=0$,

$$\frac{d\theta}{dx} = \sin\alpha \quad \text{i} \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = \sin 2\alpha.$$

Aproksimirati θ *Taylor*-ovim polinomom drugog stepena.

41. Ako je $x>1$, pokazati da važi razvoj

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} - \frac{7}{16x^3} + \cdots\right).$$

42. Razviti funkciju $f(x) = \sqrt{x^2-1}/x$ u potencijalni red u okolini beskonačno daleke tačke $+\infty$.

43. Pokazati da postoje razvoji

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos x)^x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

i izračunati koeficijente a_0, a_1, a_2, a_3 kao i b_0, b_1, b_2, b_3.

Izvesti formulu kojom je izražen koeficijent b_{n+1} pomoću koeficijenata

$$a_k, \; b_k \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Rešenje. Bez teškoće određuju se razvoji

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots,$$

$$(\cos x)^x = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \cdots,$$

čiji je poluprečnik konvergencije $\frac{1}{2}\pi$.

Stavimo li $g(x) = (\cos x)^x$, dobijamo

(1) $$g'(x) = g(x)(\log\cos x - x \operatorname{tg} x).$$

Kako je

$$(\log\cos x)' = -\operatorname{tg} x = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

biće

$$\log\cos x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n x^{n+1},$$

$$-x\operatorname{tg}x = -\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1},$$

$$\log\cos x - x\operatorname{tg}x = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)a_n x^{n+1}.$$

Na taj način relacija (1) postaje

$$\sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)a_n x^{n+1}\right).$$

Upoređenjem koeficijenata koji stoje uz x^n dobijamo

$$-(n+1)b_{n+1} = 2a_0 b_{n-1} + \frac{3}{2}a_1 b_{n-2} + \frac{4}{3}a_2 b_{n-3} + \cdots + \frac{n+1}{n}a_{n-1}b_0.$$

Primenom ove formule nalazimo, na primer,

$$b_4 = 0, \quad b_5 = -1/12.$$

Dobijene formule se uprošćavaju ako se ima na umu da je $\operatorname{tg}x$ neparna funkcija.

44. Red čiji je opšti član $(x^n\log n)/n$ konvergentan je ako je $|x|<1$ i $x=-1$, a divergentan za ostale vrednosti x.

Proveriti ovaj rezultat.

45. Proveriti da li je proizvod redova

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

$$\frac{1}{b}-\frac{ax}{b(b+a)}+\frac{a^2x^2}{b(b+a)(b+2a)}-\cdots+(-1)^n\frac{a^n x^n}{b(b+a)(b+2a)\cdots(b+na)}+\cdots$$

jednak redu

$$\frac{1}{b}+\frac{x}{a+b}+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{2a+b}+\frac{1}{3!}\frac{x^3}{3a+b}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{x^n}{na+b}+\cdots$$

Za koje vrednosti x važi dobijeni proizvod?

46. Funkciju

$$f(x)\equiv\log(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

razviti u potencijalni red u okolini početka.

Uputstvo. Posmatrati datu funkciju u obliku

$$f(x)\equiv\log\frac{1-x^5}{1-x} \quad (x\neq 1),$$

$$\equiv\log 5 \quad (x=1).$$

47. Za koje vrednosti x red

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\, x^n$$

konvergira?

48. Odrediti poluprečnik konvergencije reda

$$1+x+\frac{1}{2}x^2+3x^3+\frac{1}{4}x^4+5x^5+\frac{1}{6}x^6+\cdots.$$

Rešenje. Za $|x| \geqslant 1$ dati red je divergentan.

Za $|x| < 1$ redovi

$$(1) \qquad 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4\cdots,$$

$$(2) \qquad x+3x^3+5x^5+\cdots$$

apsolutno su konvergentni.

Dati red je apsolutno konvergentan za $|x| < 1$, jer je on zbir redova (1) i (2).

Za $|x| < 1$ biće

$$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\cdots=1+\int_0^x \frac{t}{1-t^2}\,dt=1-\frac{1}{2}\log(1-x^2),$$

$$x(1+3x^2+5x^4+\cdots)=x\frac{d}{dx}(x+x^3+x^5+\cdots)$$

$$=x\frac{d}{dx}\frac{x}{1-x^2}=x\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Zbir posmatranog reda je

$$S(x)=1-\frac{1}{2}\log(1-x^2)+\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \qquad (|x|<1).$$

49. Dokazati da je red $\sum_{n=0}^{\infty}\{x^n \operatorname{sh}(n+1)a\}$ konvergentan, ako je $|x| < e^{-a}$ $(a>0)$, i da je njegov zbir $\operatorname{sh} a/(1-2x\operatorname{ch} a+x^2)$.

50. Ispitati da li je tačna relacija

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}=\int_0^x \frac{1}{t}\log\frac{1}{1-t}\,dt \qquad (|x|<1).$$

51. Dokazati relaciju

$$\int_0^1 \left[-\frac{1}{x^2}\log(1-x)-\frac{1}{x}\right]dx=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

i na osnovu nje izračunati navedeni integral.

52. Sumirati red

$$1+\frac{2^2 x^2}{2!}+\frac{3^2 x^4}{4!}+\cdots+\frac{n^2 x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$$

Rešenje. Odredimo A_0, A_1, A_2 tako da je

$$(2n)^2 \equiv A_0+A_1(2n-2)+A_2(2n-2)(2n-3).$$

Neposredno se zaključuje da je $A_2=1$. Ako se stavi $n=1$ i $n=3/2$, dobija se $A_0=4$ i $A_1=5$, pa je

$$n^2 \equiv 1+\frac{5}{4}(2n-2)+\frac{1}{4}(2n-2)(2n-3).$$

Primenom ovog rezultata dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\frac{5}{4}x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!}+\frac{1}{4}x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-4}}{(2n-4)!}$$

$$=\operatorname{ch} x+\frac{5}{4}x\operatorname{sh} x+\frac{1}{4}x^2\operatorname{ch} x.$$

Generalizacija. Navedeni postupak može se primeniti na sumiranje redova oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k x^{2n-2}}{(2n-2)!} \qquad (k \text{ prirodan broj}).$$

Za slučaj $k=3$ treba $(2n)^3$ izraziti u obliku

$$A_0+A_1(2n-2)+A_2(2n-2)(2n-3)+A_3(2n-2)(2n-3)(2n-4).$$

Budući da je

$$n^3 \equiv 1+\frac{19}{8}(2n-2)+\frac{9}{8}(2n-2)(2n-3)+\frac{1}{8}(2n-2)(2n-3)(2n-4),$$

dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\frac{19x}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!}+\frac{9x^2}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-4}}{(2n-4)!}+\frac{x^3}{8}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{2n-5}}{(2n-5)!}$$

$$=\left(1+\frac{9x^2}{8}\right)\operatorname{ch} x+\left(\frac{19x}{8}+\frac{x^3}{8}\right)\operatorname{sh} x.$$

53. Polazeći od jednakosti

$$(1) \qquad \log\frac{1+x}{1-x}=2\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt \qquad (|x|<1),$$

razviti funkciju $\log\frac{1+x}{1-x}$ po *Taylor*-ovoj formuli i proceniti grešku koja se čini kada se ova funkcija aproksimira *Taylor*-ovim polinomom.

Ako se stavi da je

$$(2)\qquad \frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N}\qquad (N \text{ prirodan broj}),$$

pokazati da je

$$(3)\qquad \log(N+1)\approx\log N+\frac{2}{2N+1}$$

i da je greška aproksimacije manja od

$$\frac{1}{6N(N+1)(2N+1)}.$$

Rešenje. Integracijom identiteta

$$\frac{2}{1-t^2}=\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}=2\left(1+t^2+\cdots+t^{2n-2}+\frac{t^{2n}}{1-t^2}\right)$$

u granicama $(0, x)$ dobijamo

$$(4)\qquad \log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)+R_n\qquad (|x|<1),$$

gde je

$$R_n=2\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt\qquad (|x|<1).$$

Ako $\log\frac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$ aproksimiramo *Taylor*-ovim polinomom

$$2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right),$$

greška je R_n.

Kako je $0\leqslant t\leqslant x<1$, biće

$$2\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt\leqslant 2\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-x^2}\,dt=\frac{2}{1-x^2}\int_0^x t^{2n}\,dt=\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}.$$

Dakle, greška je manja od

$$\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}.$$

Stavimo li

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N},$$

dobijamo $x=1/(2N+1)$, te je

$$\log\frac{N+1}{N}\approx 2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2N+1)^{2n-1}}\right],$$

dok je greška manja od

$$\frac{1}{2(2n+1)N(N+1)(2N+1)^{2n-1}}.$$

Ako se zaustavimo na prvom članu ($n=1$), biće

$$\log\frac{N+1}{N}\approx\frac{2}{2N+1},\quad \text{tj.}\quad \log(N+1)\approx\log N+\frac{2}{2N+1},$$

dok je greška manja od

$$\frac{1}{6N(N+1)(2N+1)}.$$

54. Ako za koeficijente a_n potencijalnog reda $\sum a_n x^n$ važe relacije

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L_1 \qquad (n \text{ parno}),$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L_2 \qquad (n \text{ neparno}),$$

kada $n\to\infty$, pokazati da je poluprečnik konvergencije ovog reda $R=1/\sqrt{L_1L_2}$.

Navesti primer jednog ovakvog reda.

55. Ako je

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}(n+1)^{-1}\qquad (|x|<1),$$

dokazati da je

$$(1)\qquad r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}(k+1)^{-1}<x^{2n+2}[(n+1)(1-x^2)]^{-1}.$$

Dokaz. Kako je

$$\frac{x^{2k+2}}{k+2}<x^2\frac{x^{2k}}{k+1}\qquad (k=n,\ n+1,\ldots),$$

biće takođe

$$r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}(k+1)^{-1}<\frac{x^{2n}}{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k}=\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(1-x^2)}.$$

Može se dobiti i bolja majorantna formula, kao na primer

$$r_n(x)<x^{2n+2}[(n+2)(1-x^2)]^{-1}.$$

56. Odrediti potencijalni red $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n}$ funkcije $\cos^4 x$ i ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n)!\,a_n x^{2n}.$$

Rešenje. Kako je

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

kao i

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \quad \cos 4x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!},$$

biće

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!},$$

odnosno

$$\cos^4 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2}\frac{2^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{8}\frac{4^{2n}}{(2n)!}\right] x^{2n}.$$

Traženi red je, dakle,

$$(1) \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2^{2n-1} + 2^{4n-3}) x^{2n},$$

a njegov poluprečnik konvergencije je R, gde je

$$R^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n-1}+2^{4n-3}}{2^{2n+1}+2^{4n+1}} \quad \text{odnosno} \quad R^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-2n-2}+2^{-4}}{2^{-2n}+1} = \frac{1}{2^4}, \text{ odakle je } R = \frac{1}{4}.$$

Za $x = 1/4$ i $x = -1/4$ red (1) divergira, jer red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{8}\right)$$

divergira. Prema tome, red (1) konvergira kada $x \in \left(-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right)$, a divergira kada $x \notin \left(-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right)$.

57. Funkciju

$$f(x) = \operatorname{sh}(x^2)$$

razviti u potencijalni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i ispitati konvergenciju reda.

Ako je

$$\operatorname{sh}(4^{-1}) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k 4^{-k},$$

pokazati da je

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k 4^{-k} = \frac{\bar{\vartheta}}{(2n+1)!\, 2^{4n}} \qquad \left(\frac{1}{4} < \bar{\vartheta} < 1\right).$$

Rešenje. Pošto je

$$\operatorname{sh}(x^2) = \frac{1}{2}(e^{x^2} - e^{-x^2}),$$

i

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \qquad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!},$$

dobija se

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{sh}(x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}.$$

Red (1) konvergira za svako x.

Za $x=2^{-1}$ imamo

$$\operatorname{sh}(4^{-1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!\,2^{4n-2}}.$$

Ako je

$$\operatorname{sh}(4^{-1})\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)!\,2^{4k-2}},$$

onda je, na osnovu *Taylor*-ove formule za funkcije e^{x^2} i e^{-x^2},

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!\,2^{4k-2}}=\frac{1}{(2n+1)!\,2^{4n+2}}\left(e^{\frac{\theta}{4}}+e^{-\frac{\vartheta}{4}}\right) \quad (0<\theta<1;\ 0<\vartheta<1).$$

Dalje je

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!\,2^{4k-2}}<\frac{e^{\frac{1}{4}}+1}{(2n+1)!\,2^{4n+2}}<\frac{1}{(2n+1)!\,2^{4n}},$$

$$\frac{1}{(2n+1)!\,2^{4n+2}}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!\,2^{4k-2}},$$

tj.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!\,2^{4k-2}}=\frac{\vartheta}{(2n+1)!\,2^{4n}} \quad \left(\frac{1}{4}<\vartheta<1\right).$$

58. Data je funkcija

$$f(t)=\int_0^t \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$

1° Razviti funkciju $f(t)$ u potencijalni red $\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$ i ispitati konvergenciju dobijenog reda.

2° Ako je

$$f(10^{-1})\approx\sum_{n=0}^{2}a_n 10^{-n},$$

proceniti grešku.

Rešenje. 1° Pošto je

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad (|x|<1),$$

biće

$$\operatorname{arc\,tg} x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1<x\leqslant 1).$$

ili

$$\int_0^t \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)},$$

tj.

$$(1) \qquad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Poluprečnik konvergencije reda (1) je $R=1$, jer je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(2n+4)}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+4)}{(2n+1)(2n+2)} = 1.$$

Za $t=1$ i $t=-1$ red (1) takođe konvergira, jer red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

konvergira.

Dakle, red (1) konvergira za $t \in [-1, +1]$.

2^0 Po pretpostavci je

$$f(10^{-1}) \approx \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)10^{2n+2}},$$

pa je greška

$$r_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)\,10^{2n+2}}.$$

Zato je

$$|r_2| < \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 10^8},$$

odnosno

$$|r_2| < \frac{2}{100 \cdot 10^8} \quad \text{ili} \quad |r_2| < 2 \cdot 10^{-10}.$$

III. FOURIER-OVI REDOVI

59. U intervalu $(-\pi, +\pi)$ razviti funkciju $f(x) = 1/(5+3\cos x)$ u *Fourier*-ov red.

60. Ako je k prirodan broj, pokazati da je

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = (-1)^k \, 2\pi/k^2.$$

Koristeći ovo, razviti u *Fourier*-ov red funkciju

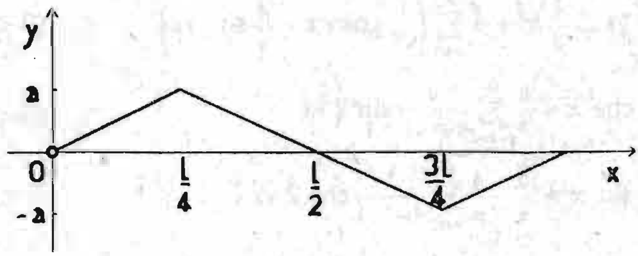
$$f(x) = x^2 \sin x \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant +\pi).$$

Pokazati zatim da je

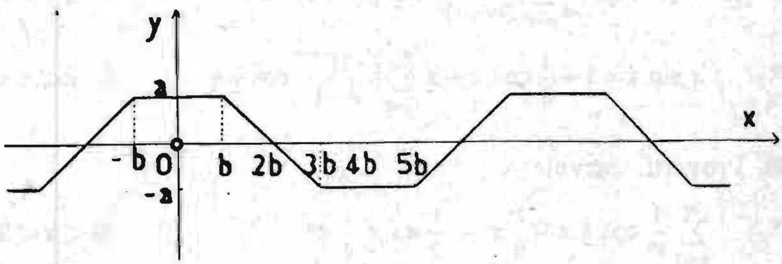
$$\frac{2^2}{1^2 \cdot 3^2} - \frac{4^2}{3^2 \cdot 5^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n)^2}{(2n-1)^2 (2n+1)^2} + \cdots = \frac{\pi}{8}.$$

61. Ispitati da li se funkcija, definisana za $0 < x < L$ na slici, može prikazati redom

$$\frac{8a}{\pi^2}\left(\sin\frac{2\pi x}{L} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{6\pi x}{L} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{10\pi x}{L} - \cdots\right).$$



62. Odrediti *Fourier*-ov red koji će pretstavljati trapezno talasanje prikazano na slici.



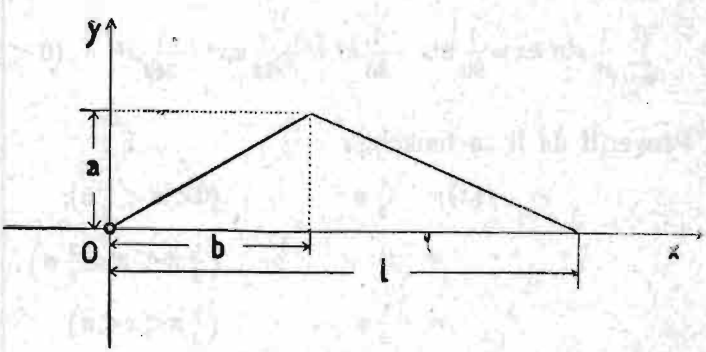
63. Grafički prikazati funkciju

$$f(x) = \{-|\cos x| / \cos x\}^{1/2}$$

i razviti je u *Fourier*-ov red.

64. Razviti u *Fourier*-ov red periodičnu funkciju $f(x)$ u ova tri slučaja:

1^0 $f(x)$ je neparna funkcija, a njen grafik u polu-periodi L prikazan je na slici;



2^0 $f(x)$ je parna funkcija, a njen grafik u polu-periodi L prikazan je na slici;

3^0 Grafik funkcije $f(x)$ u periodi L prikazan je na slici.

65. Proveriti razvoje:

1^0 $$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \pi \left(1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{1+\nu^2} \cos \nu x\right) \qquad (0 < x < \pi);$$

2^0 $$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu^2} \cos \nu x - \frac{\pi}{\nu} \sin \nu x\right) \qquad (0 < x < 2\pi);$$

3^0 $$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{4\nu^2 - 1} \sin 2\nu x \qquad (0 < x < \pi);$$

4^0 $$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4\nu^2 - 1} \cos 2\nu x \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi);$$

5^0 $$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \nu}{\nu^2 - 1} \sin \nu x \qquad (-\pi < x < +\pi);$$

6^0 $$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^3} \sin (2\nu+1)x \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi);$$

7^0 $$x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2 - 1} \cos \nu x \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant +\pi).$$

66. Proveriti razvoje:

1^0 $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx = \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}x^2 \qquad (0 < x < 2\pi);$$

2^0 $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} \cos kx = \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{4}x^2 \qquad (-\pi < x < +\pi);$$

3^0 $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin kx = \frac{1}{6}\pi^2 x - \frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{1}{12}x^3 \qquad (0 < x < 2\pi);$$

4^0 $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \cos kx = \frac{1}{90}\pi^4 - \frac{1}{12}\pi^2 x^2 + \frac{1}{12}\pi x^3 - \frac{1}{48}x^4 \qquad (0 < x < 2\pi);$$

5^0 $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin kx = \frac{1}{90}\pi^4 x - \frac{1}{36}\pi^2 x^3 + \frac{1}{48}\pi x^4 - \frac{1}{240}x^5 \qquad (0 < x < 2\pi).$$

67. Proveriti da li za funkciju

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\pi && (0 < x < \tfrac{1}{3}\pi), \\ &= 0 && \left(\tfrac{1}{3}\pi < x < \tfrac{2}{3}\pi\right), \\ &= -\frac{1}{3}\pi && \left(\tfrac{2}{3}\pi < x < \pi\right) \end{aligned}$$

važe razvoji:

$$f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\cos x-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{7}\cos 7x-\frac{1}{11}\cos 11x+\cdots\right)$$

$$=\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 8x+\frac{1}{5}\sin 10x+\cdots$$

68. Proveriti razvoj

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

69. Data je diferencijalna jednačina

$$(1) \qquad y''(x)+y(x)=|\sin x|.$$

Odrediti opšte rešenje jednačine (1) u obliku *Fourier*-ovog reda

$$(2) \qquad y(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

i oceniti grešku r_n koja se čini ako se to rešenje aproksimira trigonometriskim polinomom stepena $2n$.

Rešenje. Ako se zameni u (1) razvoj za $|\sin x|$, dat u prethodnom zadatku, i funkcija $y(x)$, data jednakošću (2), dobija se

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{\infty}(1-k^2)(A_k\cos kx+B_k\sin kx)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

Upoređivanjem koeficijenata nalazi se:

$$A_0=\frac{4}{\pi}, \quad A_{2\nu}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{(4\nu^2-1)^2}, \quad A_{2\nu+1}=0 \quad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

$$B_\nu=0 \quad (\nu=2,3,4,\ldots); \quad A_1 \text{ i } B_1 \text{ proizvoljni}.$$

Prema tome, opšte rešenje (2) glasi

$$y(x)=\frac{2}{\pi}+A_1\cos x+B_1\sin x+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(4k^2-1)^2}.$$

Greška r_n je $\displaystyle\frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(4k^2-1)^2}$ i za nju važi ocena:

$$|r_n|\leqslant\frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}<\frac{4}{\pi}\int_n^{\infty}\frac{1}{(4t^2-1)^2}dt.$$

Izračunamo li naznačeni integral, dobija se

$$|r_n|<\frac{2n}{\pi(4n^2-1)}-\frac{1}{2\pi}\log\frac{2n+1}{2n-1}.$$

70. Data je diferencijalna jednačina

$$y''+16y=f(x),$$

gde je

$$f(x)=\begin{cases} x & \left(-\frac{1}{2}\pi<x<0\right), \\ 1 & \left(0<x<\frac{1}{2}\pi\right) \end{cases}$$

$$f(x+\pi)=f(x).$$

Odrediti njeno rešenje u obliku *Fourier*-ovog reda.

71. Proveriti razvoj

$$x\cos^2\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\sin x=\frac{\sin 2x}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{\sin 3x}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\sin 4x}{3\cdot 4\cdot 5}-\cdots \quad (-\pi<x<+\pi).$$

IV. RAZNI PROBLEMI

72. Primenom redova izračunati integral

$$I=\int_0^1 \log x\cdot\log(1-x)\,dx.$$

Rešenje. Upotrebimo razvoj

$$-\log(1-x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots \quad (-1\leqslant x<1)$$

i izračunajmo integral

$$J=\int_0^1 x^k\log x\,dx \quad (k=1,2,\ldots).$$

Primenom parcijalne integracije dobijamo

$$J=-\frac{1}{(k+1)^2},$$

pa je

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2}.$$

Kako je

$$\frac{1}{k(k+1)^2}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2},$$

dobijamo

$$I=2-\frac{1}{6}\pi^2,$$

jer je

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

73. Za koje vrednosti x konvergira potencijalni red

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (n^2-n)(x^2-x)^n ?$$

U konačnom obliku odrediti funkciju $F(x)$ koju definiše (1) za vrednosti x za koje dati red konvergira.

Rezultat. Red (1) je konvergentan ako je

$$|x^2-x| < 1,$$

tj. ako je

$$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) < x < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Tražena funkcija $F(x)$ ima oblik

$$F(x) \equiv 2x^2(x-1)^2/(1+x-x^2)^3 \qquad (|x^2-x| < 1).$$

74. Dokazati $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)/n! = 1$.

Rešenje. I. Ako se pođe od

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!,$$

može se jedno za drugim pisati:

$$x^{-1} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-1}/n!,$$

$$(1-x^{-1})x^{-1}e^x = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^{n-2}/n!,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)/n! = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)/n! = 1.$$

II. Jednostavnije je sledeće rešenje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) = 1.$$

75. Dokazati *B. van der Pol*-ovu relaciju

$$(1) \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

polazeći od *Wallis*-ove relacije

$$(2) \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Rešenje. Polazeći od proizvoda

$$(3)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+2)}{(2k)(2k+1)},$$

dobija se

$$\prod_{k=1}^{N}\frac{(2k-1)(2k+2)}{(2k)(2k+1)}\equiv\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdots\frac{(2N-3)(2N)}{(2N-2)(2N-1)}\cdot\frac{(2N-1)(2N+2)}{(2N)(2N+1)}$$

$$\equiv\frac{1}{2}\,\frac{2N+2}{2N+1}\to\frac{1}{2}\qquad (N\to\infty).$$

Prema tome, iz relacije (3), vodeći računa o (2), sleduje *B. van der Pol*-ova relacija (1).

76. Parcijalnom integracijom izvesti asimptotski red

$$\int_x^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x^2}-\frac{2!\cos x}{x^3}-\frac{3!\sin x}{x^4}+\cdots$$

77. Data je funkcija greške

$$\operatorname{erf} x\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\qquad\left(\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right).$$

Parcijalnom integracijom izvesti asimptotski red

$$\int_x^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2^3x^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7}+\cdots\right)$$

i pokazati da je

$$\operatorname{erf} x=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

78. Ako je

$$f_0(x)\equiv 1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots,$$

$$f_1(x)\equiv x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

$$f_2(x)\equiv\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots,$$

pokazati da je

$$f_0(x+y)\equiv f_0(x)f_0(y)+f_1(x)f_2(y)+f_2(x)f_1(y).$$

79. Dat je red

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

1° Odrediti njegov poluprečnik konvergencije.

2° Odrediti izraz za $f'(x)$ u konačnom obliku, pa iz njega izvesti izraz za samu funkciju $f(x)$.

3° Za $x=1/2$ sabrati dovoljan broj članova, da bi $f(1/2)$ bilo izračunato sa greškom manjom od 10^{-3}.

80. Funkciju $\{\exp(x \operatorname{cotg} a)\}\cos x$ razviti u *Taylor*-ov red u okolini tačke $x=0$.

Rešenje. Ako se pođe od funkcije

$$e^{x \operatorname{cotg} a}(\cos x + i \sin x) = e^{x \operatorname{cotg} a + ix}$$

$$= 1 + (x \operatorname{cotg} a + ix) + \frac{1}{2!}(x \operatorname{cotg} a + ix)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x \operatorname{cotg} a + ix)^n + \cdots,$$

dobija se

$$e^{x \operatorname{cotg} a}\cos x = 1 + x \operatorname{cotg} a + \frac{1}{2!}x^2(\operatorname{cotg}^2 a - 1) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}x^n\left[\operatorname{cotg}^n a - \binom{n}{2}\operatorname{cotg}^{n-2} a + \binom{n}{4}\operatorname{cotg}^{n-4} a - \cdots\right] + \cdots$$

Izraz u uglastoj zagradi može se napisati u obliku

$$(1) \qquad \frac{1}{\sin^n a}\left[\cos^n a - \binom{n}{2}\cos^{n-2} a \sin^2 a + \binom{n}{4}\cos^{n-4} a \sin^4 a - \cdots\right].$$

Na osnovu *Moivre*-ove formule

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na,$$

zaključuje se da se izraz (1) svodi na $(\cos na)/\sin^n a$.

Prema tome imamo rezultat

$$\{\exp(x \operatorname{cotg} a)\}\cos x = 1 + x \operatorname{cotg} a + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\cos ka}{\sin^k a}x^k.$$

Primedba. Rešenje se uprošćava ako se vrše transformacije na sledeći način:

$$e^{x \operatorname{cotg} a}(\cos x + i \sin x) = e^{x(\operatorname{cotg} a + i)} = \exp\left(x\frac{e^{ia}}{\sin a}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{e^{\nu ia}}{\nu!\,\sin^\nu a}x^\nu.$$

Odavde sleduje

$$e^{x \operatorname{cotg} a}\cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos \nu a}{\nu!\,\sin^\nu a}x^\nu.$$

81. Ako je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, proveriti relacije

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x,$$

$$\alpha f''(x) + \alpha^2 f'(x) + f(x) = e^{\alpha x},$$

$$\alpha^2 f''(x) + \alpha f'(x) + f(x) = e^{\alpha^2 x},$$

gde je $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

82. Funkciju $\log \sin x$ razviti u potencijalni red po $\cos x$.

83. Ako je n prirodan broj, tada je

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}k^n \equiv (-1)^{n+1}\, n!$$

Rešenje. *M. S. Knebelman* (*The American Mathematical Monthly*, vol. 41, 1934, p. 454) dao je ovaj dokaz navedene jednakosti:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}k^n &\equiv -\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}e^{kx}\\ &\equiv -\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}(1-e^x)^n\\ &\equiv (-1)^{n+1}\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^n\\ &\equiv (-1)^{n+1}\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}(x^n+A_1x^{n+1}+A_2x^{n+2}+\cdots)\end{aligned}$$

(A_1, A_2, ... funkcije od n).

Na kraju se dobija

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}k^n \equiv (-1)^{n+1}\, n!$$

84. Ako je

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}},$$

odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} u_n/\sqrt{n}$.

Rešenje. Izraz $u_n/\sqrt{n}$ može se napisati u obliku

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}.$$

Za integrabilnu funkciju $f(x)$ važi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Za posmatrani slučaj funkcija $f(x)$ ima oblik $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, te je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}=2\sqrt{2}-2.$

85. 1° Ispitati i grafički prikazati funkciju $f(x)=\sqrt{x}\cos x$.

2° Razviti $\cos x$ po *Taylor*-ovoj formuli u okolini $x=0$ i koristeći ovaj razvoj izračunati integral $g(x)=\int\limits_0^x \sqrt{t}\cos t\,dt$.

3° Ako se funkcija $g(x)$ aproksimira sa prva četiri člana *Taylor*-ova polinoma, proceniti grešku. Rezultat primeniti na izračunavanje integrala $g(1)$ i utvrditi sa koliko je tačnih cifara dobijen rezultat.

86. Ako se funkcija

$$f(\lambda) = (x \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda)/(x \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda)$$

razvije u potencijalni red

$$P_0 + P_1 \lambda + \cdots + P_n \lambda^n + \cdots,$$

koeficijent P_n je polinom stepena $n+1$ po x.

Ispitati da li su svi polinomi P_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ deljivi sa x^2-1.

87. Za izračunavanje granične vrednosti funkcije

$$f(x) = g(x) - h(x), \quad \text{kada} \quad x \to +\infty,$$

gde su:

$$g(x) = (x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m)^{1/m}, \quad h(x) = (x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n)^{1/n},$$

upotrebiti podesne razvoje u redove za funkcije $g(x)$ i $h(x)$.

88. Polazeći od činjenice da su funkcije

$$(1) \qquad \operatorname{ch} x \cos x, \quad \operatorname{ch} x \sin x, \quad \operatorname{sh} x \cos x, \quad \operatorname{sh} x \sin x$$

partikularna rešenja diferencijalne jednačine $y^{(4)} + 4y = 0$, ili od identiteta koji, na primer, za prvu funkciju glasi

$$4 \operatorname{ch} x \cos x \equiv \{\exp x + \exp(-x)\} \{\exp(ix) + \exp(-ix)\},$$

razviti funkcije (1) u potencijalne redove u okolini $x=0$.

Za funkciju $\operatorname{ch} x \cos x$ traženi razvoj je

$$1 - \frac{4}{4!} x^4 + \frac{4^2}{8!} x^8 - \cdots + (-1)^k \frac{4^k}{(4k)!} x^{4k} + \cdots$$

89. Data je funkcija

$$f(x) \equiv \frac{x^2}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1} \qquad (\alpha \text{ parametar}).$$

1° U okolini tačke $x=0$ razviti funkciju $f(x)$ u potencijalni red i odrediti njegov poluprečnik konvergencije.

2° Grafički prikazati funkciju $f(x)$ i izračunati integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

90. Ako važi razvoj

$$x \operatorname{cotg} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \qquad (0 < |x| < 2\delta),$$

proveriti da li je

$$x \operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{2n}) a_n x^{2n} \qquad (|x| < \delta).$$

Na osnovu ovoga, ili nekim drugim načinom, dokazati da je

$$\sum_{\nu=0}^{n}(1-2^{2\nu})\,a_\nu\,a_{n-\nu}=\begin{cases}1 & (n=1),\\ 0 & (n>1).\end{cases}$$

91. Funkciju $x(a)$, definisanu relacijom

$$(1)\qquad x\log x+x-1=a,$$

aproksimirati u okolini tačke $a=0$ *Taylor*-ovim polinomom trećeg stepena. Na osnovu toga pokazati da je jedno aproksimativno rešenje x_1 jednačine (1), ako je a malo, dato formulom

$$x_1=1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{16}a^2$$

i oceniti grešku $|x-x_1|$ koja se pri tome čini.

92. Data je jednačina (E) $x^2-x-2=a\,x^3$, gde je a realan parametar. Ako je a malo, pokazati da je $-1+\frac{1}{3}a-\frac{8}{27}a^2$ aproksimativna vrednost jednog korena ove jednačine. Izvesti analognu aproksimaciju za koren jednačine (E) koji je blizak broju 2. Najzad, učiniti isto i za treći koren jednačine (E).

93. Dat je integral

$$I_n=\int_0^1 x^a(\log x)^n\,dx\qquad(a\geqslant 0;\ n\ \text{prirodan broj}).$$

1° Pokazati da važi rekurentna relacija

$$I_n=-\frac{n}{a+1}I_{n-1},$$

i izračunati integral I_n.

2° Polazeći od razvoja

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

i primenjujući rezultat iz tačke 1°, izračunati integral $\int_0^1 x^x\,dx$ na tri tačne decimale.

Rezultat. 1° $I_n=(-1)^n\dfrac{n!}{(a+1)^{n+1}}$.

$$2°\quad \int_0^1 x^x\,dx=\int_0^1 e^{x\log x}\,dx=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\cdots=0{,}783\ldots$$

94. Odrediti asimptote krive

$$y=(x-2)\exp\frac{1}{x-3}$$

i nacrtati krivu.

Rešenje. Najpre imamo

$$y\to+\infty \quad (x\to 3+0),$$

$$y\to 0 \quad (x\to 3-0),$$

što znači da je prava $x=3$ asimptota date krive.

Kako je

$$\exp\frac{1}{x-3}=1+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{3!}\,\frac{1}{(x-3)^3}+\cdots \quad (x\neq 3),$$

biće

$$y=(x-2)\left[1+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{\lambda}{(x-3)^3}\right]$$

(λ funkcija od x koja ostaje konačna ako $|x|\to\infty$).

Poslednja relacija može se napisati u obliku

$$y=x-2+\frac{x-2}{x-3}+\frac{1}{2}\,\frac{x-2}{(x-3)^2}+\lambda\frac{x-2}{(x-3)^3}.$$

Budući da je

$$\frac{x-2}{x-3}=1+\frac{1}{x}+\frac{\lambda_1}{x^2}$$

i

$$\frac{x-2}{(x-3)^2}=\frac{1}{x}+\frac{\lambda_2}{x^2}$$

(λ_1 i λ_2 funkcije od x koje ostaju konačne kad $|x|\to\infty$), dobija se

$$y=x-1+\frac{3}{2}\,\frac{1}{x}+\frac{\mu}{x^2}$$

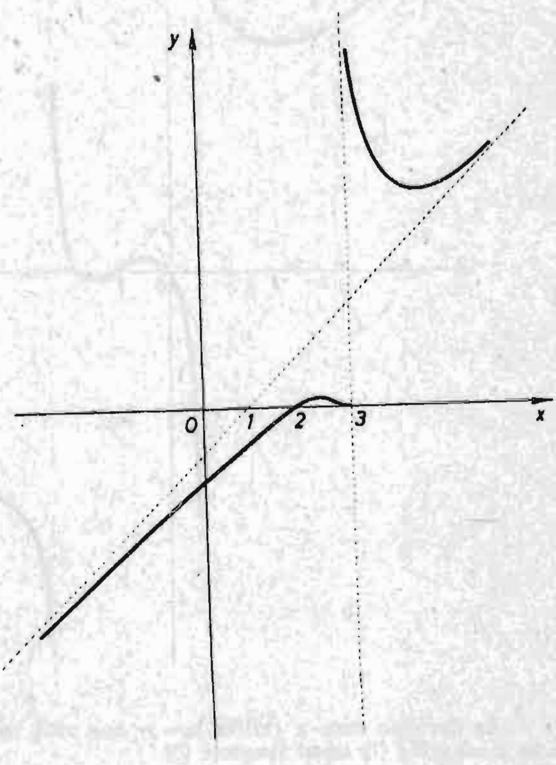
(μ funkcija od x koja ostaje konačna kad $|x|\to\infty$).

Prema tome, jednačina kose asimptote ove krive je

$$y=x-1.$$

Ostaje još da se ispita da li postoji presek ove asimptote sa datom krivom, ekstremumi itd., da bi se ova kriva mogla nacrtati.

Kriva je prikazana na slici.



95. Ispitati položaj krive

(1) $$y=\frac{2x-3x^2+x^3}{1+2x-x^2}$$

prema njenoj tangenti u tački (0,0). Nacrtati krivu.

Rešenje. Kako je

$$\frac{2x-3x^2+x^3}{1+2x-x^2}\equiv 2x-7x^2+\frac{17-7x}{1+2x-x^2}x^3,$$

dobij se

(2) $y=2x-7x^2+\lambda x^3$ (razvoj funkcije y po *Taylor*-ovoj formuli),

gde je λ funkcija od x koja ostaje konačna kada $x\to 0$.

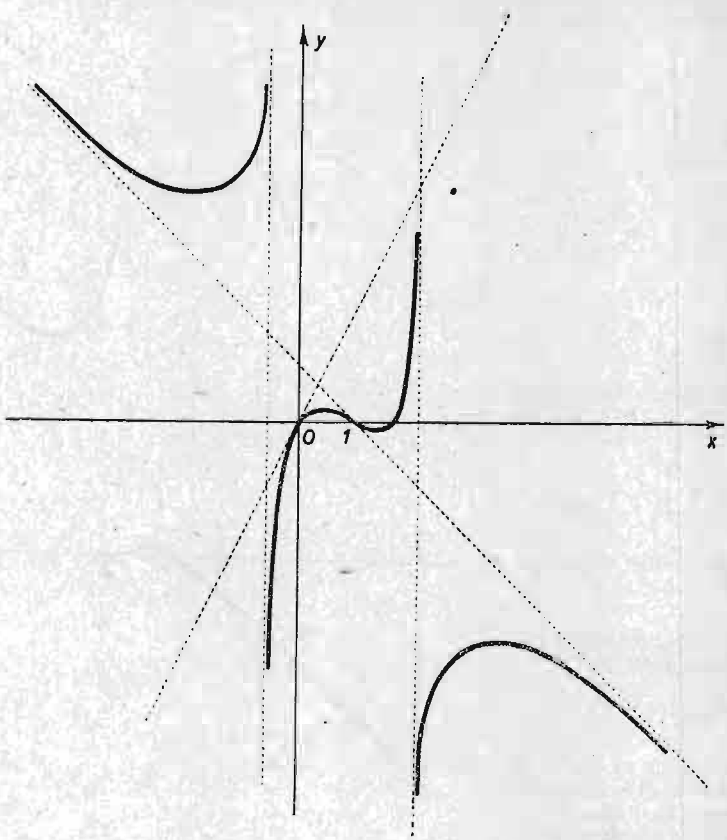
Iz poslednje relacije izlazi da jednačina tangente krive (1), odnosno (2), glasi

(3) $$y=2x.$$

Na osnovu (2) i (3), za dato x, dobija se

(4) $$y_k-y_t=-7x^2+\lambda x^3.$$

{ y_k ordinata tačke na krivoj (2), y_t ordinata tačke na tangenti (3) }.



Za dovoljno malo x razlika y_k-y_t ima znak izraza $-7x^2$, što znači da je u okolini tačke $x=0$ kriva (1) ispod tangente (3).

Kako je, za $|x|$ dovoljno veliko,

$$(x^3-3x^2+2x):(-x^2+2x+1)=-x+1-\frac{1}{x}+\cdots,$$

biće

(5) $$y=-x+1-\frac{1}{x}+\frac{\mu}{x^2},$$

gde je μ funkcija od x koja ostaje konačna kad $|x|\to\infty$.

Prema tome, prava

(6) $$y=-x+1$$

asimptota je krive (1).

Za dato x, prema (5) i (6), je

$$y_k-y_a=-\frac{1}{x}+\frac{\mu}{x^2} \qquad (y_a \text{ ordinata tačke na asimptoti}).$$

Na osnovu ove formule zaključuje se da je za $|x|$ dovoljno veliko

$$\operatorname{sgn}(y_k-y_a)=-\operatorname{sgn}x.$$

Kriva (1) prikazana je na priloženoj slici.

96. Data je funkcija

$$f(t)=\int_0^t x^2\cos(x^2)\,dx.$$

1° Razviti funkciju $f(t)$ u potencijalni red i ispitati konvergenciju dobijenog reda.

2° Izračunati $f(2^{-1})$ tako da greška bude manja od 10^{-5}.

Rešenje. 1° Kako je

$$\cos(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!},$$

biće

$$x^2\cos(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n)!} \quad \text{i} \quad \int_0^t x^2\cos(x^2)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{4n+3}}{(2n)!\,(4n+3)},$$

pa je, dakle,

(1) $$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{4n+3}}{(2n)!\,(4n+3)}.$$

Poluprečnik konvergencije dobijenog reda je R, gde je

$$R^4=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{(-1)^n}{(2n)!\,(4n+3)}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!\,(4n+7)}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!\,(4n+7)}{(2n)!\,(4n+3)},$$

odnosno

$$R^4=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(4n+7)}{4n+3}=\infty,$$

tj. red (1) konvergira za $t\in(-\infty,+\infty)$.

2° Za $t=2^{-1}$ je

$$f(2^{-1})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,(4n+3)\cdot 2^{4n+3}}.$$

Ako je

(2) $$\frac{1}{(2n)!\,(4n+3)\,2^{4n+3}}<10^{-5}$$

onda je i apsolutna vrednost tražene greške manja od 10^{-5}.

Nejednakost (2) je zadovoljena za $n\geqslant 2$, pa je

$$f(2^{-1})\approx\frac{1}{3\cdot 8}-\frac{1}{2!\cdot 7\cdot 2^7}$$

ili

$$f(2^{-1})\approx 0{,}041\,109.$$

97. Ispitati položaj krive

$$y=\sqrt{1+x-x^2}-\sqrt[3]{1-2x+3x^2}$$

prema njenoj tangenti u tački $x=0$.

Rešenje. Za funkcije

$$f(x)\equiv\sqrt{1+x-x^2},\qquad g(x)\equiv\sqrt[3]{1-2x+3x^2}$$

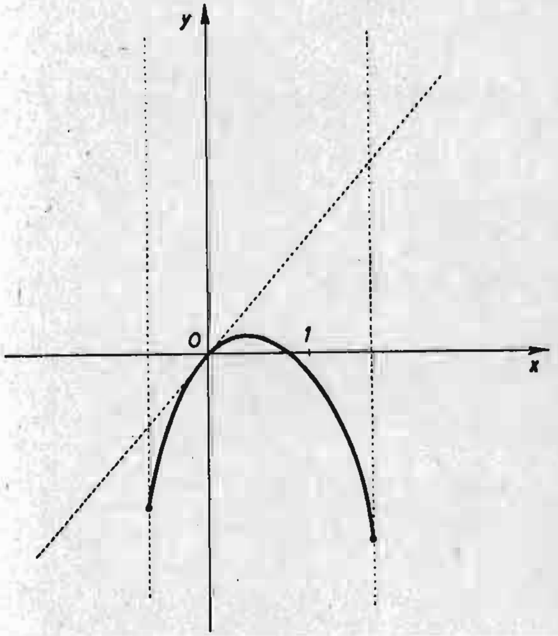
dobijamo razvoje

$$f(x)\equiv[1+(x-x^2)]^{1/2}\equiv 1+\binom{1/2}{1}(x-x^2)+\binom{1/2}{2}(x-x^2)^2+\binom{1/2}{3}(x-x^2)^3+\cdots;$$

$$g(x)\equiv[1+(-2x+3x^2)]^{1/3}\equiv 1+\binom{1/3}{1}(-2x+3x^2)+\binom{1/3}{2}(-2x+3x^2)^2$$
$$+\binom{1/3}{3}(-2x+3x^2)^3+\cdots$$

Dakle, imamo

$$y=f(x)-g(x)=\left[1+\frac{1}{2}(x-x^2)-\frac{1}{8}x^2+\cdots\right]-\left[1+\frac{1}{3}(-2x+3x^2)-\frac{4}{9}x^2+\cdots\right],$$



tj.

$$y=\frac{7}{6}x-\frac{85}{72}x^2+\lambda x^3,$$

gde je λ funkcija od x koja ostaje konačna kada $x\to 0$.

Prema tome, jednačina tangente date krive u tački $x=0$ glasi

$$y=\frac{7}{6}x.$$

Razlika između ordinate (y_k) krive i ordinate (y_t) tangente za dato x ima oblik

$$y_k-y_t=-\frac{85}{72}x^2+\lambda x^3.$$

U okolini tačke $x=0$ kriva je ispod tangente.

Kriva je prikazana na priloženoj slici.

98. Dat je red

$$(1)\qquad \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2.$$

Pokazati da red (1) konvergira i da je njegova suma merni broj luka s krive $y=\cos x$ u razmaku $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Ako se uzme

$$s\approx\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$$

proceniti grešku.

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0,\qquad \frac{\dfrac{1}{2n+1}\left[\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^2}{\dfrac{1}{2n-1}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2}=\frac{4n^2-1}{4n^2+8n+4}<1,$$

na osnovu *Leibniz*-ovog kriterijuma za alternativne redove izlazi da red (1) konvergira.

Imamo

$$s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\quad\text{i}\quad \sqrt{1+\sin^2 x}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\sin^{2n}x,$$

pa je

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx.$$

No, kako je

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}$$

kao i

$$\binom{\frac{1}{2}}{n}=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}\qquad(n=1,2,3,\ldots),$$

biće

$$s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2.$$

Ako je

$$s\approx\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2,$$

tada je

$$r_4=\sum_{\nu=5}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1}\left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\right]^2\quad\text{i}\quad 0<r_4<\frac{1}{9}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\right)^2<0{,}007.$$

99. Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} = s(x) \qquad (x>1),$$

dokazati da je

$$(x-1)\,s(x) = 1 + \theta(x-1) \qquad (x>1;\ 0<\theta<1).$$

Dokaz. Kako je

$$(n+1)^{-x} < n^{-x} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

na osnovu *Cauchy*-evog integralnog kriterijuma je

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-x} < \int_1^{\infty} t^{-x}\,dt < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \qquad (x>1),$$

ili

$$s(x) < 1 + \int_1^{\infty} t^{-x}\,dt \quad \text{i} \quad \int_1^{\infty} t^{-x}\,dt < s(x),$$

odnosno

$$s(x) < 1 + \frac{1}{x-1}\,; \qquad \frac{1}{x-1} < s(x),$$

tj.

$$\frac{1}{x-1} < s(x) < \frac{x}{x-1}$$

i najzad

$$(x-1)\,s(x) = 1 + \theta(x-1) \qquad (x>1;\ 0<\theta<1).$$

100. Posmatrati krivu

$$(1) \qquad y = \log(1+x)$$

i njenu tangentu u tački $O(0,0)$. Neka je $f(t)$ veličina površine ograničene pomenutom tangentom, lukom krive na segmentu $[0, t]$ i pravom $x=t$.

1° Obrazovati funkciju $f(t)$ i razviti je u potencijalni red.

2° Ispitati konvergenciju dobijenog reda.

3° Izračunati $f(10^{-1})$ tako da greška bude manja od 10^{-4}.

4° Geometriski protumačiti šta pretstavlja red $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n}$.

Rešenje. 1° Jednačina tangente krive (1) u tački $O(0,0)$ je $y=x$. Kako je

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \int_0^t \log(1+x)\,dx \quad \text{i} \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

dobija se

$$(2) \qquad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

2° Poluprečnik konvergencije reda (2) je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)} = 1.$$

Za $t=1$ i $t=-1$ red (2) takođe konvergira, jer konvergira red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

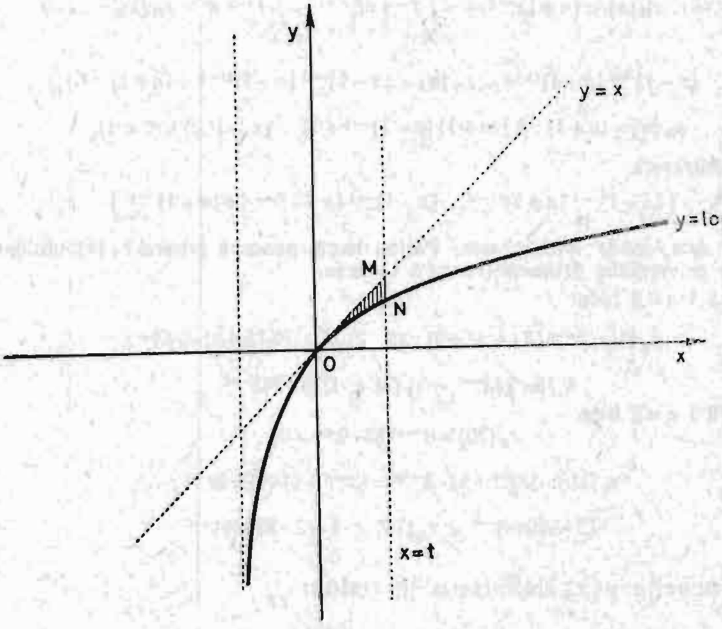
Dakle, red (2) konvergira za $t \in [-1, +1]$.

3⁰ Budući da je

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(n+2)\,10^{n+2}},$$

dobija se

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)(k+2)\,10^{k+2}}.$$



Biće sigurno $|r_n| < 10^{-4}$, ako je

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)\,10^{n+3}} < 10^{-4}.$$

Poslednja nejednakost je zadovoljena za $n \geqslant 1$, pa je

$$f\left(\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 10^3} = \frac{1}{6000}$$

tražena približna vrednost.

4⁰ Imamo

$$\overline{MN} = dy - \Delta y = t - \log(1+t) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n},$$

gde je dy diferencijal funkcije (1) u tački $O(0,0)$, a Δy priraštaj iste funkcije i t priraštaj argumenta x.

101. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} = s(x)$, dokazati da je

$$(1) \qquad r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-x} = (n+1)^{-x}\,[\theta + (n+1)\,(x-1)^{-1}] \quad (x>1;\ 0<\theta<1).$$

Šta se može kazati o proceni greške pomoću obrasca (1) s obzirom na promenljivu x? Proceniti grešku za $x=5$, $n=2$ i $x=10$, $n=2$.

Dokaz. Na osnovu *Cauchy*-evog integralnog kriterijuma dobija se

$$r_{n+1}(x) < \int_{n+1}^{\infty} t^{-x}\,dt < r_n(x) \qquad (x>1)$$

ili

$$r_n(x) < (n+1)^{-x} + \int_{n+1}^{\infty} t^{-x}\,dt, \qquad \int_{n+1}^{\infty} t^{-x}\,dt < r_n(x),$$

odnosno

$$(x-1)^{-1}(n+1)^{1-x} < r_n(x) < (x-1)^{-1}(n+1)^{1-x} + (n+1)^{-x}$$

i najzad

$$r_n(x) = (n+1)^{-x}\,[(n+1)(x-1)^{-1} + \theta] \qquad (x>1;\ 0<\theta<1).$$

Dužina intervala

$$\left((x-1)^{-1}(n+1)^{1-x},\ \ (x-1)^{-1}(n+1)^{1-x} + (n+1)^{-x}\right)$$

je $(n+1)^{-x}$ i ona opada kad x raste. Prema tome, procena greške $r_n(x)$ utoliko je preciznija ukoliko je vrednost promenljive $x\ (>1)$ veća.

Za $x=5$ i $n=2$ biće

$$r_2(5) = 3^{-5}(3\cdot 4^{-1} + \theta) \quad \text{ili} \quad r_2(5) = (0{,}75 + \theta)\cdot 243^{-1},$$

tj.

$$0{,}75\cdot 243^{-1} < r_2(5) < 1{,}75\cdot 243^{-1}.$$

Za $x=10$ i $n=2$ biće

$$r_2(10) = 3^{-10}(3\cdot 9^{-1} + \theta)$$

ili

$$r_2(10) = (3^{-1} + \theta)\cdot 3^{-10} = (3^{-1} + \theta)\cdot 59049^{-1},$$

tj.

$$(3\cdot 59049)^{-1} < r_2(10) < 4\cdot (3\cdot 59049)^{-1}.$$

102. Funkcija $y(x)$ definisana je redom

$$(1) \qquad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}\,x^{2n}.$$

Ispitati konvergenciju reda, a zatim proveriti da li je funkcija $y(x)$ partikularno rešenje diferencijalne jednačine.

$$x\,y'(x) + y(x) = a\cos ax\,.$$

Rešenje. Red (1) konvergira za svako x. Kako je

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n\,a^{2n+1}}{(2n+1)!}\,x^{2n-1},$$

dobija se

$$x\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n\,a^{2n+1}}{(2n+1)!}\,x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}\,x^{2n}$$

$$= a\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ax)^{2n}}{(2n)!} = a\cos ax\,.$$

103. Pokazati da je

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2+na+1} < \frac{\pi}{\sqrt{4-a^2}} - \frac{2}{\sqrt{4-a^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2n+a+2}{\sqrt{4-a^2}} + \frac{1}{n^2+an+1} \qquad (0<a<2);$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2+na+1} < \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+1)^2} \qquad (a=2);$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2+na+1} < \frac{1}{\sqrt{a^2-4}} \log \frac{2n+2+a+\sqrt{a^2-4}}{2n+2+a-\sqrt{a^2-4}} + \frac{1}{n^2+an+1} \qquad (a>2).$$

Uputstvo. Primeniti *Cauchy*-ev integralni kriterijum. Formirati takođe bolje majorantne formule.

104. Za koje vrednosti x konvergiraju redovi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}?$$

105. Pokazati da red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}\sqrt{1+kx}}$$

uniformno konvergira za $0 \leqslant x < \infty$.

106. Razviti funkciju $\operatorname{ch} x$ u red po stepenima osnove e^x-1 i odrediti za koje vrednosti x važi ovaj razvoj.

Rešenje. Stavimo li $e^x-1=t$, dobijamo

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(1+t+\frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{2}(1+t+1-t+t^2-t^3+\cdots),$$

odnosno

$$\operatorname{ch} x = 1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{2}t^5+\cdots$$

Ovaj razvoj važi za $|t|=|e^x-1|<1$, tj. za $x<\log 2$.

107. Odrediti poluprečnik konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \left(a_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}\right)$$

i funkciju $f(x)$ koja je definisana ovim redom.

Rezultat. $f(x)=x(1-2x)^{-2}$. Poluprečnik konvergencije je $1/2$.

108. Izračunati $f^{(n)}(0)$, gde je $f(x)=x\,e^x/(1-x)$.

Rešenje. Funkcija $f(x)$ može se napisati u obliku

$$f(x) = -e^x + \frac{e^x}{1-x}.$$

Stoga je

$$f^{(n)}(x) = -e^x + \left(e^x \frac{1}{1-x}\right)^{(n)}.$$

Primenom *Leibniz*-ove formule

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)},$$

gde je

$$u=e^x,\quad v=\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\quad(|x|<1),$$

dobija se

$$(uv)^{(n)}\,|_{x=0}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!$$

Prema tome, tražena vrednost je

$$f^{(n)}(0)=-1+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!$$

Primedba. Ispitati da li je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=e.$

109. Izračunati

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{d}^{pq}}{\mathrm{d}x^{pq}}\left\{\frac{x^p-x^q}{(1+x^p)\,(1+x^q)}\right\}\Bigg|_{x=0}\qquad (p,q \text{ prirodni brojevi}).$$

Rešenje. Pođimo od razlaganja

$$f(x)=\frac{x^p-x^q}{(1+x^p)\,(1+x^q)}=\frac{1}{1+x^q}-\frac{1}{1+x^p}.$$

Potencijalni red

$$(2)\qquad g(x)=\frac{1}{1+x^q}=1-x^q+x^{2q}-\cdots+(-1)^p x^{pq}+\cdots$$

konvergentan je za $|x|<1$.

Na osnovu (2) dobija se

$$g^{(pq)}(0)=(-1)^p\,(pq)!$$

Na analogni način nalazi se

$$h^{(pq)}(0)=(-1)^q\,(pq)!$$

gde je $h(x)=1/(1+x^p)$.

Prema tome, za izraz (1) dobija se

$$\{(-1)^p-(-1)^q\}\,(pq)!$$

110. U okolini tačke $x=0$ aproksimirati funkciju

$$f(x)=e^{\sin x}$$

Taylor-ovim polinomom $P_n(x)$ stepena n, tako da je

$$|f(x)-P_n(x)|<\frac{1}{32}\qquad\left(|x|\leqslant\frac{1}{6}\pi\right).$$

Rezultat. $n=2;\quad P_2(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2.$

111. Dokazati formulu

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{2\nu} \sin^4 \frac{a}{2^\nu} = a^2 - \sin^2 a .$$

Rešenje. Stavimo li $a_\nu = 2^{2\nu} \sin^4 \frac{a}{2^\nu}$, dobijamo

$$(2) \qquad a_\nu = 2^{2\nu-2}\left(1 - \cos \frac{a}{2^{\nu-1}}\right)^2$$

$$= 2^{2\nu-2}\left(1 - 2\cos \frac{a}{2^{\nu-1}} + \cos^2 \frac{a}{2^{\nu-1}}\right)$$

$$= 2^{2\nu-3}\left(2 - 4\cos \frac{a}{2^{\nu-1}} + 1 + \cos \frac{a}{2^{\nu-2}}\right)$$

$$= 2^{2\nu-3}\left(3 + \cos \frac{a}{2^{\nu-2}} - 4\cos \frac{a}{2^{\nu-1}}\right).$$

S druge strane, polazeći od izraza

$$(3) \qquad J_k = 2^{2k}\left(1 - \cos \frac{a}{2^k}\right),$$

dobijamo

$$(4) \qquad 2(J_{\nu-1} - J_{\nu-2}) = 2\left[2^{2\nu-2}\left(1 - \cos \frac{a}{2^{\nu-1}}\right) - 2^{2\nu-4}\left(1 - \cos \frac{a}{2^{\nu-2}}\right)\right]$$

$$= 2^{2\nu-3}\left(4 - 4\cos \frac{a}{2^{\nu-1}} - 1 + \cos \frac{a}{2^{\nu-2}}\right)$$

$$= 2^{2\nu-3}\left(3 + \cos \frac{a}{2^{\nu-2}} - 4\cos \frac{a}{2^{\nu-1}}\right).$$

Upoređivanjem (2) i (4) nalazimo

$$(5) \qquad a_\nu = 2(J_{\nu-1} - J_{\nu-2}).$$

n-ta parcijalna suma reda (1) je

$$(6) \qquad S_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 2 \sum_{\nu=1}^{n} (J_{\nu-1} - J_{\nu-2}) = 2(J_{n-1} - J_{-1}).$$

Iz (6), na osnovu (3), dobijamo

$$(7) \qquad S_n = 2\left[2^{2n-2}\left(1 - \cos \frac{a}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{4}(1 - \cos 2a)\right] = \left(\frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}\right)^2 - \sin^2 a .$$

Kad $n \to \infty$, iz (7) sleduje

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}\right)^2 - \sin^2 a = a^2 - \sin^2 a$$

i time je dokazana formula (1).

Ovo je rešenje *D. Đokovića.*

112. Dokazati nejednakost

(1) $$\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\log x - \log y} \qquad (x>y>0).$$

Rešenje. I. Razvoj

$$\log z = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right]$$

važi ako je $z>0$. Za $z>1$ je

$$\log z > 2\frac{z-1}{z+1}, \quad \text{tj.} \quad \frac{z+1}{2} > \frac{z-1}{\log z}.$$

Stavimo li ovde $z=x/y$ $(x>y>0)$, dobija se

$$\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\log x - \log y} \qquad (x>y>0).$$

Ovu nejednakost dokazali su: *B. Ostle* i *H. L. Terwilliger* (*Proceedings of the Montana Academy of Science*, t. 17, p. 69—70, 1957).

Ova nejednakost igra važnu ulogu u nekim problemima tehnologije *(heat transfer problems)*.

II. *D. Đoković* dokazao je nejednakost (1) na sledeći način.

Nejednakost

(2) $$\frac{\log x - \log y}{x-y} > \frac{2}{x+y} \qquad (x>y>0)$$

ekvivalentna je nejednakosti (1). Ako se stavi $x=y+z$ $(z>0)$, relacija (2) postaje

(3) $$\frac{\log(y+z) - \log y}{z} > \frac{2}{2y+z} \qquad (y>0;\ z>0).$$

Zamenimo li z/y sa t (>0), biće

(4) $$\log(1+t) > \frac{2t}{t+2} = 2 - \frac{4}{t+2} \qquad (t>0).$$

Funkcija

$$f(t) = \log(1+t) + \frac{4}{t+2} - 2 \qquad (t>-1)$$

je rastuća, jer je

$$f'(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{4}{(t+2)^2} = \frac{t^2}{(t+1)(t+2)^2} > 0 \qquad (t>-1).$$

Usled toga važi nejednakost

$$f(t) > f(0) = 0 \qquad (t>0),$$

što je upravo nejednakost (4), koja je ekvivalentna nejednakosti (1).

113. Dokazati formulu

(1) $$2^{2n+1} D^n \left(x^{n+1/2} D^{n+1} e^{\sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{x}} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Dokaz. Pođimo od relacije

$$e^{\sqrt{x}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{\nu}{2}}}{\nu!}.$$

Odavde jedno za drugim sleduje:

$$D^{n+1} e^{\sqrt{x}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\nu}{2}-n\right) \frac{x^{\frac{\nu}{2}-n-1}}{\nu!} \right],$$

$$x^{n+\frac{1}{2}} D^{n+1} e^{\sqrt{x}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\nu}{2}-n\right) \frac{x^{\frac{\nu-1}{2}}}{\nu!} \right],$$

$$D^{n}\left(x^{n+\frac{1}{2}} D^{n+1} e^{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\nu}{2}-n\right)\frac{\nu-1}{2}\left(\frac{\nu-1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\nu-1}{2}-n+1\right) \frac{x^{\frac{\nu-1}{2}-n}}{\nu!} \right],$$

Dalje se dobija

$$2^{2n+1} D^{n}\left(x^{n+\frac{1}{2}} D^{n+1} e^{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\nu(\nu-2)\cdots(\nu-2n)\,(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu-2n+1) \frac{x^{\frac{\nu-2n-1}{2}}}{\nu!} \right]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-2n) \frac{x^{\frac{\nu-2n-1}{2}}}{\nu!} \right]$$

$$= \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \left[\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-2n) \frac{x^{\frac{\nu-2n-1}{2}}}{\nu!} \right]$$

$$= \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \left[\frac{\nu!}{(\nu-2n-1)!} \frac{x^{\frac{\nu-2n-1}{2}}}{\nu!} \right]$$

$$= \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} \frac{x^{\frac{\nu-2n-1}{2}}}{(\nu-2n-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k/2}}{k!}$$

$$= e^{\sqrt{x}}.$$

Time je dokaz formule (1) završen.

114. Izračunati određeni integral

$$J = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 dx.$$

Rešenje. Integral J može se rastaviti na dva integrala

$$J = 2\int_0^1 \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x}\, dx + 2\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \log \frac{x+1}{x-1}\, dx.$$

Stavimo li $x=1/t$, dobijamo

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \log \frac{x+1}{x-1}\, dx = \int_1^0 t \log \frac{1+t}{1-t}\, d\frac{1}{t} = \int_0^1 \frac{1}{t} \log \frac{1+t}{1-t}\, dt.$$

Prema tome imamo

(1) $$J = 4 \int_0^1 \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x}\, dx.$$

Ako funkciju

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x} \qquad (x \neq 0) \\ &= 2 \qquad\qquad\qquad\quad (x=0) \end{aligned} \qquad (|x| < 1)$$

razvijemo u red oblika $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, integral (1) postaje

$$J = 8 \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} \right) dx = 8 \lim_{\varepsilon \to 1-0} \int_0^{\varepsilon} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} \right) dx$$

$$= 8 \lim_{\varepsilon \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2k+1}}{(2k+1)^2} = 8 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Budući da je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{8} \pi^2,$$

nalazimo

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 dx = \pi^2.$$

115. Izračunati

(1) $$\int_0^{\pi/2} \sin(\sin x)\, dx$$

tako da greška bude manja od 10^{-3}.

Rešenje. Kako je

(2) $$\sin t = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta t \qquad (0 < \theta < 1),$$

biće

(3) $$\sin(\sin x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\sin^{2k-1} x}{(2k-1)!} + (-1)^n \frac{\sin^{2n+1} x}{(2n+1)!} \cos(\theta \sin x).$$

Integraleći levu i desnu stranu jednakosti (3) u intervalu $[0, \pi/2]$, dobijamo

(4) $$\int_0^{\pi/2} \sin(\sin x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k-1} x}{(2k-1)!}\, dx$$
$$+ \int_0^{\pi/2} (-1)^n \frac{\sin^{2n+1} x}{(2n+1)!} \cos(\theta \sin x)\, dx.$$

Budući da je

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k-1} x \, dx = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \cos(\theta \sin x) \, dx \leqslant \frac{\pi}{2},$$

relacija (4) postaje

$$(5) \qquad \int_0^{\pi/2} \sin(\sin x) \, dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{[(2k-1)!!]^2} + R_n \qquad \left(|R_n| \leqslant \frac{1}{(2n+1)!} \, \frac{\pi}{2} \right).$$

Da bismo našli vrednost integrala (1) sa greškom manjom od 10^{-3}, treba da je

$$(6) \qquad \frac{1}{(2n+1)!} \, \frac{\pi}{2} < 10^{-3}.$$

Kako je nejednakost (6) ispunjena za $n=3$, iz (5) dobijamo

$$\int_0^{\pi/2} \sin(\sin x) \, dx \approx \sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k-1}}{[(2k-1)!!]^2} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{225} = 0{,}89\dot{3}.$$

Bez teškoće se proverava da je greška u gornjem rezultatu manja i od $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$. Ako za rezultat uzmemo 0,893, greška koja nastaje takođe je manja od $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$. Prema tome, rezultat

$$\int_0^{\pi/2} \sin(\sin x) \, dx \approx 0{,}893$$

dat je sigurno sa tačnošću 10^{-3}.

Ovo je rešenje *P. Vasića.*

116. 1° Dokazati jednakost

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \, dt \qquad (a, b > 0).$$

2° Sumirati redove

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+3n}.$$

Rešenje. 1° Za $k > 0$ biće

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{k+n} = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \int_0^1 x^{k+n-1} \, dx = \int_0^1 x^{k-1} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n x^n \, dx$$

$$= \int_0^1 x^{k-1} \frac{1-(-1)^{m+1} x^{m+1}}{1+x} \, dx = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x} \, dx + (-1)^m \int_0^1 \frac{x^{m+k}}{1+x} \, dx.$$

Kako

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{m+k}}{1+x} \, dx \leqslant \int_0^1 x^{m+k} \, dx = \frac{1}{m+k+1} \to 0 \qquad (m \to \infty),$$

iz (1) izlazi

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k+n} = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx.$$

Ako se stavi

$$k=a/b,\quad x=t^b \qquad (a,\ b>0),$$

jednakost (2) postaje

$$(3)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt.$$

2° Prema (3),

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+3n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^3},\qquad B=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+3n}=\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^3}.$$

Kako je

$$A=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx,$$

$$A+B=\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

dobijamo

$$A=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\log 2\right),\qquad B=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\log 2\right).$$

Ovo je rešenje *D. Adamovića*.

117. Da li se iz uniformne i apsolutne konvergencije reda $\sum u_n(x)$ u segmentu $[a, b]$ sme izvesti zaključak da red $\sum |u_n(x)|$ u $[a, b]$ uniformno konvergira?

Rešenje. Ovaj zaključak ne može se izvesti. To se dokazuje, na primer, redom

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x}{(1+x^2)^n},$$

koji u intervalu $[0, 1]$ apsolutno i uniformno konvergira, a čiji red apsolutnih vrednosti u $[0, 1]$ ne konvergira uniformno.

Tvrđenje o apsolutnoj konvergenciji očigledno je. Ostatak reda (1) ima oblik

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}x}{(2+x^2)(1+x^2)^n},$$

pa

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{x}{(1+x^2)^n}=\varphi_n(x),\qquad x\in[0,1].$$

Kako je

$$\varphi_n'(x)=\frac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}},$$

funkcija $\varphi_n(x)$ u $[0, 1]$ uzima maksimalnu vrednost za $x=1/\sqrt{2n-1}$.

Stoga za $x \in [0, 1]$ važi

$$|R_n(x)| \leqslant \varphi_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \, \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

pa red (1) u [0, 1] uniformno konvergira.

S druge strane, red apsolutnih vrednosti $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ ima ostatak

$$\overline{R_n(x)} = \frac{1}{x(1+x^2)^n}.$$

Kako je

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, 1] \quad (n=1, 2, \ldots),$$

i

$$\overline{R_n(x_n)} = \frac{\sqrt{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

ovaj red za $x \in [0, 1]$ ne konvergira uniformno.

Ovo je rešenje *D. Adamovića.*

118. Pokazati da postoji takva numeracija $r_n\,(n=1, 2, \ldots)$ skupa svih racionalnih brojeva intervala (0, 1) da red $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{n} r_\nu$ divergira.

Rešenje. Stavimo

$$a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

i neka je $b_n\ (n=1, 2, \ldots)$ niz obrazovan od svih ostalih racionalnih brojeva iz (0, 1). Beskrajni proizvod $\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ konvergira. Stoga postoji takvo a da je

$$(1) \qquad \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu > a > 0 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Niz $r_n\ (n=1, 2, \ldots)$ može se obrazovati na sledeći način:

$r_1 = a_1$;

r_2 je prvi po redu član niza $b_n\ (n=1, 2, \ldots)$ koji nije manji od 1/2;

$r_3 = a_2$;

(2! − 1 članova)

r_4 je prvi po redu od preostalih članova niza $b_n\ (n=1, 2, \ldots)$ koji nije manji od 1/3;

$r_5 = a_3, \quad r_6 = a_4, \quad r_7 = a_5, \quad r_8 = a_6, \quad r_9 = a_7$;

(5 = 3! − 1 članova)

r_{10} je prvi po redu od preostalih članova niza $b_n\ (n=1, 2, \ldots)$ koji nije manji od 1/4;

⋮

Ovako formirani niz $r_n\ (n=1, 2, \ldots)$ iscrpljuje nizove $a_n\ (n=1, 2, \ldots)$ i $b_n\ (n=1, 2, \ldots)$, tj. sve racionalne brojeve intervala (0, 1). Iz načina na koji je niz $r_n\ (n=1, 2, \ldots)$ obrazovan izlazi, s obzirom na (1), da opšti član reda

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{n} r_\nu$$

majorira opšti član divergentnog reda

$$a \quad + \underbrace{\frac{a}{2!} + \frac{a}{2!}}_{(2!\ \text{članova})} \quad + \underbrace{\frac{a}{3!} + \frac{a}{3!} + \frac{a}{3!} + \frac{a}{3!} + \frac{a}{3!} + \frac{a}{3!}}_{(3!\ \text{članova})} \quad + \cdots,$$

što znači da red (2) divergira.

Primedba. Postoje numeracije s_n $(n=1, 2, \ldots)$ skupa svih racionalnih brojeva iz $(0, 1)$ za koje red $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{n} s_\nu$ konvergira. Neka je, na primer, c_n $(n=1, 2, \ldots)$ niz obrazovan od svih racionalnih brojeva iz $(0, 1)$ koji ostaju kad se isključe brojevi $1/n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Niz s_n $(n=1, 2, \ldots)$ definisan jednakostima

$$s_{2k-1} = 1/k, \quad s_{2k} = c_k \quad (k=1, 2, \ldots)$$

pretstavlja jednu takvu numeraciju.

Ovo je rešenje *D. Adamovića.*

119. Dokazati identitet

$$\sum_{k=1}^{n-1} e^{z \cos \frac{2k\pi}{n}} \sin\left(z \sin \frac{2k\pi}{n} - \frac{2kr\pi}{n}\right) = 0$$

$(r, n$ prirodni brojevi; z proizvoljan kompleksan broj$)$.

Rešenje. Napišimo dati zbir u obliku $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$, gde je

$$a_k = e^{z \cos \frac{2k\pi}{n}} \sin\left(z \sin \frac{2k\pi}{n} - \frac{2kr\pi}{n}\right).$$

Formirajmo član

$$\begin{aligned} a_{n-k} &= e^{z \cos \frac{2(n-k)\pi}{n}} \sin\left(z \sin \frac{2(n-k)\pi}{n} - \frac{2(n-k)r\pi}{n}\right) \\ &= e^{z \cos\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right)} \sin\left[z \sin\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) - 2r\pi + \frac{2kr\pi}{n}\right] \\ &= -a_k . \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a_k &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + a_{n-k}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_k) = 0. \end{aligned}$$

Ovim je dati identitet dokazan.

Ovo je rešenje *R. Lučića.*

120. Razviti funkciju $|x(\pi - x)|$ u *Fourier*-ov red u intervalu $(-\pi, +\pi)$.

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

I. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

1. 1° Naći funkciju $y(x)$ koja zadovoljava jednačinu

$$y'(x)+a\,y(x)=c\,e^{bx} \qquad (a, b, c \text{ konstante}).$$

2° Odrediti realne nule funkcije $y(x)$.

Rezultat.

$$1^\circ \quad y(x)=\begin{cases} \dfrac{c}{a+b}\,e^{bx}+Ae^{-ax} & (a+b\neq 0) \\ c\,x\,e^{bx}+Ae^{-ax} & (a+b=0) \end{cases} \quad (A \text{ integraciona konstanta}).$$

2. Odrediti funkciju $y(x)$ koja zadovoljava uslove

$$y'(x)+2\,xy(x)=x\,e^{-x^2}, \qquad y(0)=0,$$

i grafički je prikazati.

3. Ispitati integralne krive definisane jednačinom

$$(2\,y-x)\,y'=y+2\,x.$$

Rezultat. $x^2+xy-y^2=C$ (C integraciona konstanta).

4. Integraliti diferencijalne jednačine:

$$1^\circ \quad yy'-y'^2=e^x; \qquad 2^\circ \quad x\,dy^2-y\,dx\,dy-y\,dx^2=0.$$

5. Rešiti diferencijalne jednačine:

$1^\circ \quad x\,dx+(y-\sqrt{xy})\,dy=0;$ $\qquad 2^\circ \quad x\,y'-y=y\log(y/x);$

$3^\circ \quad (2\,y\cos x+\sin^4 x)\,dx-\sin x\,dy=0;$ $\qquad 4^\circ \quad y'\cos y+\sin y=x;$

$5^\circ \quad y'=(x-y)^2-2\,(x-y)-2;$ $\qquad 6^\circ \quad y^2+(1-xy)\,y'=0;$

$7^\circ \quad y\,dx+x\,(x^2y-1)\,dy=0;$ $\qquad 8^\circ \quad 1+(x+y^2)\,y'=0.$

6. Rešiti diferencijalne jednačine:

$1^\circ \quad x^2y'+xy+\exp(xy)=a;$ $\qquad 2^\circ \quad x^2+y^2-2\,xy\,y'=a\,(xy'-y);$

$$3^\circ \quad (x^2+y^2)\,y'-2\,xy=a\,(xy'-y)$$

(a realna konstanta).

Uputstvo. Za integraciju jednačina 1° i 2° upotrebiti smenu $y=xu$, gde je u nova nepoznata funkcija.

7. Data je jednačina $(x^2 y^2+x)\,dy+y\,dx=0$.

1° Pokazati da postoji takva funkcija $M=f(xy)$ da izraz

$$M\{(x^2 y^2+x)\,dy+y\,dx\}$$

pretstavlja totalni diferencijal.

2° Odrediti integralne krive date jednačine i od ovih izdvojiti onu koja prolazi kroz tačku $(-1, 1)$.

3° Proučiti partikularnu integralnu krivu i videti da li je ona simetrična prema pravoj $y=1$. Približno nacrtati ovu krivu.

8. Pokazati da je diferencijalna jednačina skupa krivih

$$y=\{\lambda f_1(x)+f_2(x)\}/\{\lambda f_3(x)+f_4(x)\} \qquad (f_1 f_4-f_2 f_3\neq 0;\ \lambda \text{ parametar})$$

Riccati-eva diferencijalna jednačina

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{vmatrix} \frac{dy}{dx}=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}+\left(\begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ f_2' & f_3' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_4 & f_1 \\ f_4' & f_1' \end{vmatrix}\right)y+\begin{vmatrix} f_3 & f_4 \\ f_3' & f_4' \end{vmatrix}y^2.$$

9. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(1) \qquad xy\,dy/dx=y^2+a^2-ax\pm a\{(x-a)^2+y^2\}^{1/2} \qquad (a=\text{const}).$$

Uputstvo. Izvršiti smenu $z=\{(x-a)^2+y^2\}^{1/2}$.

Primedba. Proveriti da li relacija

$$(2) \qquad \{(x-a)^2+y^2\}^{1/2}\pm a=ex \qquad (e \text{ integraciona konstanta})$$

definiše rešenje jednačine (1).

Jednačina (2) definiše konusni presek čija je jedna žiža tačka $(a, 0)$ i e ekscentricitet.

10. Rešiti diferencijalne jednačine:

1° $(y-x)(1+x^2)^{1/2}\dfrac{dy}{dx}=a(1+y^2)^{3/2}$ $(a=\text{const})$; 2° $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y^{-1}-\log x}$

Uputstvo. 1° Upotrebiti smenu $x=\operatorname{tg} u$, $y=\operatorname{tg} v$;

2° Napisati jednačinu u obliku $y\dfrac{dx}{x}+(\log x)\,dy=\dfrac{dy}{y}$.

11. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}\,\frac{2x+3y^2+1}{3x+4y^2+1}.$$

12. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y^3\frac{dy}{dx}+y^2+x=0.$$

Uputstvo. Izvršiti smenu $y^2=u-x$ (u nova nepoznata funkcija).

Primedba. Proveriti da li je rešenje date jednačine definisano relacijom

$$2x^2+2xy^2+y^4=C\exp\left(-2\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y^2}{x}\right).$$

13. Rešiti diferencijalne jednačine:

1^0 $$(1+x^2)\frac{dy}{dx}-x(1+2x^2)y=x(1+x^2)^{1/2};$$

2^0 $$x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+(2x^2-1)y=x^3y^3;$$

3^0 $$x\frac{dy}{dx}=(x^{a+1}+2)y-x^a y^{3/2} \quad (a=\text{const}).$$

Rezultati. 1^0 $$y=\frac{C\exp(1+x^2)}{(1+x^2)^{1/2}}-\frac{1}{2(1+x^2)^{1/2}};$$

2^0 $$\frac{1}{y^2}=\frac{C}{x^2(x^2-1)}+\frac{2}{5}\frac{x^3}{x^2-1};$$

3^0 $$xy^{-1/2}=1+C\exp\left(-\frac{x^{a+1}}{2(a+1)}\right) \quad (a\neq -1).$$

C označava integracionu konstantu. Ako je $a=-1$, šta će biti opšte rešenje jednačine 3^0?

14. Ispitati da li jednačina

(E) $$y(2x-y+2)\,dx+2(x-y)\,dy=0$$

ima jedan integracioni faktor koji je funkcija samo od x. U potvrdnom slučaju rešiti jednačinu (E).

15. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y\,dx+(a+e^{px}y^q)\,dy=0 \quad (y>0;\ a, p, q \text{ parametri}).$$

Uputstvo. Izvršiti smenu $t=\varepsilon e^x$ $(\varepsilon=\pm 1)$.

16. Rešiti diferencijalnu jednačinu $dy/dx=y(x-y)/x(x+y)$.

Rešenje. $$y(x\,dy+y\,dx)=x(y\,dx-x\,dy),$$

$$\therefore\quad x\,dy+y\,dx=xy\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2},$$

$$\therefore\quad d(xy)=(xy)\,d(x/y),$$

$$\therefore\quad \log(Cxy)=x/y \quad (C \text{ integraciona konstanta}).$$

Primedba. Rešiti ovu jednačinu i nekim drugim metodom.

17. Odrediti integralne krive diferencijalne jednačine

$$y'=y/x+\sqrt{(y/x)^2-1}.$$

Ispitati ove krive i odrediti tangente povučene na njih iz koordinatnog početka.

18. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y=xp+x^m f(p)$$

($p\equiv dy/dx$; m realna konstanta; $x>0$; $f(p)$ diferencijabilna funkcija).

Uputstvo. Posle diferenciranja leve i desne strane, dobija se *Bernoulli*-eva jednačina po x

$$\frac{dx}{dp}+\frac{1}{m}\Big[\log f(p)\Big]' x+\frac{1}{mf(p)}x^{2-m}=0 \qquad \{m\neq 0;\ f(p)\not\equiv 0\}.$$

Slučaj $m=0$ treba posebno tretirati, kao i slučaj $f(p)\equiv 0$.

19. Data je diferencijalna jednačina

$$(\mathrm{E}_1) \qquad (1+x^2)^2(y')^2+\alpha^2 y^2=\beta^2 \qquad (\alpha, \beta \text{ konstante}).$$

1^0 Integraliti jednačinu (E_1).

2^0 Pokazati da su, ma za kakvo β, sva nekonstantna rešenja jednačine (E_1) takođe rešenja jedne homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda (E_2) koju treba obrazovati. Polazeći od ove činjenice, odrediti opšte rešenje jednačine (E_2).

20. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(1) \qquad (px-y)(py+x)=a^2p \qquad (p=dy/dx;\ a=\text{const}).$$

Rešenje. Jednačina (1) može se napisati u obliku

$$(2) \qquad p^2xy-py^2+px^2-xy=a^2p.$$

Smenom $x^2=u$, $y^2=v$ dobija se $p=(x/y)(dv/du)$ i jednačina (2) postaje

$$xy\frac{u}{v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2-v\frac{x}{y}\frac{dv}{du}+u\frac{x}{y}\frac{dv}{du}-xy=a^2\frac{x}{y}\frac{dv}{du},$$

odnosno

$$u\left(\frac{dv}{du}\right)^2-v\frac{dv}{du}+u\frac{dv}{du}-v=a^2\frac{dv}{du},$$

odnosno

$$v=u\frac{dv}{du}-a^2\frac{dv}{du}\Big/\left(\frac{dv}{du}+1\right).$$

Ovo je *Clairaut*-ova diferencijalna jednačina.

Opšti integral ove jednačine je

$$(3) \qquad v=Cu-a^2C/(C+1) \qquad (C \text{ integraciona konstanta}).$$

Ako se ovde stavi $u=x^2$ i $v=y^2$, dobija se relacija

$$(4) \qquad y^2=Cx^2-a^2C/(C+1),$$

koja definiše rešenje jednačine (1).

Primedba. Ispitati integralne krive.

21. Ispitati da li jednačina

$$\{a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+(a_0-a_1+a_2)y^3+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2+a_6x+a_7y+a_8\}\,dx$$
$$+\{a_0y^3+a_1xy^2+a_2x^2y+(a_0-a_1+a_2)x^3+a_3y^2+a_4xy+a_5x^2+a_6y+a_7x+a_8\}\,dy=0$$

ima integracioni faktor oblika $f(x+y)$.

Rešenje. Napišimo datu jednačinu u obliku

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

i ispitajmo da li postoji takva funkcija $f(x+y)$ da izraz

$$\text{(E)} \qquad f(t)\,P(x,y)\,dx+f(t)\,Q(x,y)\,dy \qquad (t=x+y)$$

bude totalni diferencijal jedne funkcije $u(x,y)$.

Izraz (E) biće totalni diferencijal ako je ispunjen uslov

$$f'(t)\,(P-Q)=f(t)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

odnosno

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{(3a_0-4a_1+3a_2)\,t-(a_4-2a_5)}{(a_1-a_2)\,t^2+(a_3-a_5)\,t+(a_6-a_7)}.$$

Integracioni faktor je funkcija

$$f(t)=\exp\left(\int\frac{(3a_0-4a_1+3a_2)\,t-(a_4-2a_5)}{(a_1-a_2)\,t^2+(a_3-a_5)\,t+(a_6+a_7)}\,dt\right).$$

Ovde je pretpostavljeno da funkcija $f'(t)/f(t)$ ima smisla.

22. Pokazati da diferencijalna jednačina

$$(x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3)\,dx+(y^2+xy^2+2xy-x^2-x^3)\,dy=0$$

ima integracioni faktor oblika $f(x+y)$. Odrediti opšte rešenje ove jednačine i ispitati ga.

Rezultat. Integracioni faktor je funkcija $f(x+y)=1/\{(x+y)^2(x+y+2)^2\}$.

Opšte rešenje definisano je jednačinom

$$x^2+y^2+C(xy+x+y)=0 \qquad (C \text{ integraciona konstanta}).$$

23. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(x+xy+y^2)\,dx-(x^2+xy-y)\,dy=0$$

i ispitati integralne krive.

Rešenje.

$$\frac{dx}{x^2+xy-y}=\frac{dy}{y^2+xy+x}.$$

$$\therefore\quad \frac{dx-dy}{(x+y)\,(x-y-1)}=\frac{x\,dx+y\,dy}{(x+y)\,(x^2+y^2)}.$$

$$\therefore\quad (x-y-1)^2=c\,(x^2+y^2).$$

24. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2(3xy+1)}{3-xy}.$$

Uputstvo. Upotrebiti smenu $xy=u$.

25. Data je diferencijalna jednačina

$$y'-2y\operatorname{cotg}2x=\frac{1}{3}(\sin x)^2/\cos x.$$

Odrediti integralnu krivu koja sa svojom tangentom u tački apscise $x=0$ ima dodir najvišeg reda.

26. Ispitati integralne krive diferencijalne jednačine

$$dy/dx=(2x-y+1)/(x-2y+1).$$

Rezultat. Integralne krive jednačine (1) su konusni preseci

$$x^2-xy+y^2+x-y+a=0 \qquad (a \text{ integraciona konstanta}).$$

Primedba. Ako se prilikom rešavanja diferencijalne jednačine

(1) $$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) \qquad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0\right)$$

stavi

$$u=ax+by+c, \qquad v=\alpha x+\beta y+\gamma,$$

tada je

(2) $$\frac{du}{dv}=\frac{a+b\,(dy/dx)}{\alpha+\beta\,(dy/dx)}=\frac{a+b\,F(u/v)}{\alpha+\beta\,F(u/v)}.$$

Dakle, jednačinu (1) sveli smo na homogenu jednačinu (2) i to postupkom koji se razlikuje od uobičajenog. U čemu je prednost navedenog postupka?

27. Rešiti diferencijalnu jednačinu

(1) $$dy/dx=(2x-4y+1)/(x-2y+1)$$

i ispitati da li među integralnim krivama postoji jedna prava.

Rezultat. Opšte rešenje jednačine (1) definisano je relacijom

$$(3x-6y+1)^2 \exp(12x-6y)=\text{const}.$$

28. Partikularni integral jednačine

$$y'+y^2-3y\,\text{tg}\,x+\text{tg}^2\,x-1=0$$

ima oblik $k\,\text{tg}\,x$, gde je k konstanta koju treba odrediti. Naći njeno opšte rešenje.

29. Data je relacija $y=1+x\,e^y$ koja definiše funkciju $y=f(x)$.

Izraziti dy/dx kao racionalnu funkciju od x i y. Ovako dobijena relacija definiše jedan skup krivih. Odrediti njihove ortogonalne trajektorij e

30. Pokazati da jednačina

$$(x^2+x)\,y'+y^2+(1-2x)\,y-2x=0$$

ima partikularno rešenje oblika $y_1=k$, gde je k konstanta koju treba odrediti.

Odrediti njeno opšte rešenje. Pokazati da sve integralne krive ove jednačine prolaze kroz dve fiksne tačke.

31. Pokazati da integralne krive jednačine

$$(4y-3x-5)\,y'-3y+7x+2=0$$

čine skup zatvorenih krivih. Ispitati realnost tih krivih i izračunati veličinu površine koju te krive zatvaraju.

32. Data je diferencijalna jednačina $\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=1$.

1° Stavljajući $y=vx$, pokazati da je rešenje ove jednačine definisano relacijom

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\log(x^2-xy+y^2)+\text{arc tg}\,\frac{2y-x}{x\sqrt{3}}=C_1.$$

2° Stavljajući $x=vy$, pokazati da je njeno rešenje definisano relacijom

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\log(x^2-xy+y^2)-\text{arc tg}\,\frac{2x-y}{y\sqrt{3}}=C_2.$$

3° Pokazati da su ova rešenja ekvivalentna i naći vezu između parametara C_1 i C_2.

33. Data je diferencijalna jednačina

$$\text{(E)} \qquad x^2(x-1)\,y'-y^2-x(x-2)\,y=0.$$

1° Naći opšte rešenje ove jednačine.

2° Odrediti fiksne tačke kroz koje prolaze sve integralne krive jednačine (E).

3° Ispitati integralne krive jednačine (E) i za one koje imaju centar odrediti geometrisko mesto centara.

34. Data je diferencijalna jednačina

$$2xyy'-y^2+x=0.$$

1° Naći onu integralnu krivu (C) koja prolazi kroz tačku (1, 0).

2° Ispitati krivu (C) i grafički prikazati dobijene rezultate.

3° Izračunati zapreminu obrtnog tela koje se dobija kada se površina ograničena krivom (C) i x-osom obrće oko x-ose.

35. Odrediti krivu čija tangenta u svakoj njenoj tački seče na ordinatnoj osi otsečak proporcionalan kvadratu apscise. Među ovakvim krivim odrediti onu koja za $x=0$ ima ekstremum i ispitati prirodu tog ekstremuma.

36. Data je diferencijalna jednačina

$$\frac{dy}{dx}=y\,\text{cotg}\,x+\sin 2x.$$

1° Odrediti opšte rešenje $y=y(x)$ te jednačine i ono partikularno rešenje $y=y_p(x)$ koje zadovoljava uslov $y_p(\pi/2)=0$.

2° Nacrtati krivu (C) $y=y_p(x)$.

3° Izračunati veličinu površine između krive (C) i otsečka x-ose od 0 do 2π.

37. Pokazati da je izraz

$$\frac{(x+2y)\,dx+y\,dy}{(x+y)^2}$$

totalan diferencijal jedne funkcije koja zavisi od x i y.

Na osnovu toga naći opšte rešenje jednačine

$$(x+2y)\,dx+y\,dy=0.$$

38. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(x^2-y^4)\frac{dy}{dx}-xy=0$$

i pokazati da su njene integralne krive unikurzalne i da nemaju ni jedne tačke u beskrajnosti.

39. Integraliti diferencijalnu jednačinu

$$x^2y'-xy+y^2=0$$

i od integralnih krivih ispitati onu koja prolazi kroz tačku $(-1, 1)$.

40. Brzina jedne trimolekularne reakcije određena je obrascem

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)(c-x) \qquad (k, a, b, c \text{ pozitivne konstante}).$$

Ako je $x=x_0$ za $t=0$, odrediti t u funkciji od x.
Šta će biti ako je $a=b\neq c$, ili $a=b=c$?

41. Pokazati da funkcija $y=(1+x)/\sqrt{1+x^2}$ zadovoljava jednu diferencijalnu jednačinu oblika $y'=R(x, y)$, gde je $R(x, y)$ racionalna funkcija po x i y, koju treba odrediti. Zatim integraliti tako formiranu diferencijalnu jednačinu.

42. Odrediti krive u ravni koje imaju osobinu da normala u svakoj njihovoj tački prolazi kroz jednu fiksnu tačku date ravni.

43. Rešiti jednačinu

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=ax+y \qquad (a=\text{const}).$$

Ima li ova jednačina singularnih rešenja?

44. Pokazati da funkcija

$$(1) \qquad y(x)=\begin{cases} x/(e^x-1) & (x\neq 0), \\ 1 & (x=0) \end{cases}$$

zadovoljava jednu diferencijalnu jednačinu prvog reda oblika $dy/dx=R(x, y)$, gde je $R(x, y)$ racionalna funkcija po x i y.

Naći opšti integral tako dobijene diferencijalne jednačine i geometrisko mesto prevojnih tačaka integralnih krivih.

Razviti funkciju (1) u potencijalni red u okolini početka i odrediti njegov poluprečnik konvergencije.

45. Odrediti parametre λ i μ tako da izraz

$$(x^2+2\lambda xy+\mu y)\,dx+(\mu x^2+\lambda x+y)\,dy$$

bude totalan diferencijal jedne funkcije $P(x, y, C)$ (C proizvoljna integraciona konstanta) i naći ovu funkciju.

Da li postoji jedna takva kriva iz familije $P(x, y, C)=0$ koja seče x-osu u tački $(1, 0)$ pod uglom od 45^0?

46. Ispitati integralne krive jednačine

$$(x-xy^2)\,dx+(y+x^2y)\,dy=0.$$

47. Integraliti jednačinu

$$x^3\frac{dy}{dx}+2x^2y-3x^3-1=0.$$

Pokazati da integralne krive imaju za asimptotu jednu fiksnu pravu, i da svaka od njih preseca ovu asimptotu u dve tačke koje su simetrične u odnosu na početak. Naći geometrisko mesto prevojnih tačaka integralnih krivih.

48. Data je diferencijalna jednačina

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(2x-y^2)}{x(3y^2-x)}.$$

1° Odrediti njeno opšte rešenje (integralne krive).

2° Pokazati da se integralna kriva koja prolazi kroz početak raspada u više krivih koje treba odrediti.

49. Pokazati da se diferencijalna jednačina

$$\text{(E)}\qquad y'^3-y'^2-4y^2-27y^4=0\qquad \{y=f(x)\}$$

može pretstaviti pomoću relacija

$$y'=(1+t^2)(1+3t^2),\quad y=t+t^3\qquad (t \text{ pomoćna promenljiva}).$$

Iskoristiti ovu činjenicu za iznalaženje rešenja jednačine (E).

50. U diferencijalnoj jednačini

$$(xy+y^2+b^2)\,dx-(x^2+xy+a^2)\,dy=0\qquad (a,\,b=\text{const})$$

izvršiti smenu promenljivih

$$x=u+v,\quad y=ku-v\qquad (k=\text{const}).$$

Ispitati da li se k može tako izabrati da se u transformovanoj jednačini promenljive mogu razdvojiti.

51. Dat je skup krivih

$$(\Gamma)\qquad x+y-1=\operatorname{tg}(x+\lambda)\qquad (\lambda \text{ parametar}).$$

1° Koliko krivih iz ovog skupa prolazi kroz jednu tačku $M(x_0,y_0)$ u xy-ravni?

2° Odrediti ortogonalne trajektorije skupa krivih (Γ).

52. Pokazati da diferencijalna jednačina

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+y^2-\mu)\,y+\lambda x}{(x^2+y^2-\mu)\,x-\lambda y}\qquad (\lambda \text{ i } \mu \text{ parametri})$$

smenom $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ dobija oblik, gde se promenljive mogu razdvojiti. Odrediti opšte rešenje ove jednačine za različite vrednosti parametara λ i μ.

53. Odrediti integralne krive jednačine

$$(xy'-y)^2=x^2-3xy+4y^2$$

i ispitati koliko integralnih krivih prolazi kroz svaku tačku xy ravni. Posebno odrediti krive koje prolaze kroz tačku $(1, 0)$, ispitati ih i grafički prikazati.

54. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y^3+ay}{x^3(by+c)+ax}\qquad (a, b, c \text{ konstante}).$$

Rešenje. Umesto (1) može se posmatrati jednačina

$$(2)\qquad \frac{dx}{dy}=\frac{by+c}{y(y^2+a)}\,x^3+\frac{a}{y(y^2+a)}\,x.$$

Ako se stavi $x^2=1/u$, jednačina (2) postaje

$$\frac{du}{dy}+\frac{2a}{y(y^2+a)}\,u=-2\,\frac{by+c}{y(y^2+a)}.$$

Rešenje ove jednačine je

$$\frac{y^2}{y^2+a}\,u=-2\int\frac{by+c}{(y^2+a)^2}\,y\,dy+C\qquad (C \text{ integraciona konstanta})$$

$$=-\frac{b}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\sqrt{a}}+\frac{c+by}{y^2+a}+C\qquad (a>0).$$

Rešenje jednačine (1) je definisano relacijom

$$y^2=x^2(y^2+a)\left(C-\frac{b}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\sqrt{a}}\right)+x^2(c+by).$$

Primedba. Šta će biti ako je $a=0$ i $a<0$?

55. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x^2\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)-2\alpha x^2y+\frac{1}{4}+\alpha^2x^2=0\qquad (\alpha=\text{const}),$$

tražeći njena partikularna rešenja oblika

$$y_1(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\qquad (a, b, c, d \text{ konstante}).$$

56. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(x^{n+1}+y^n)\,y'-x^n y=0.$$

Uputstvo. Poći od oblika $x^{n+1}+y^n-x^n y x'=0$.

57. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(1) \qquad (Bx^2+Axy+C)\frac{dy}{dx}+(Axy+By^2+C)=0 \qquad (A^2+B^2+C^2>0).$$

Rešenje. Ako se stavi

$$(2) \qquad u=x+y, \quad v=xy,$$

tada se dobija

$$(3) \qquad \frac{dv}{du}=\frac{x\,dy+y\,dx}{dy+dx}=\frac{x(Axy+By^2+C)-y(Bx^2+Axy+C)}{(Axy+By^2+C)-(Bx^2+Axy+C)}$$

$$=\frac{Av(x-y)-Bv(x-y)+C(x-y)}{-Bu(x-y)},$$

tj.

$$\frac{dv}{du}=\frac{(A-B)v+C}{-Bu} \qquad (B\neq 0),$$

tj.

$$(4) \qquad \frac{dv}{(A-B)v+C}+\frac{du}{Bu}=0 \qquad (B\neq 0,\ A\neq B).$$

Posle integracije biće

$$\frac{1}{A-B}\log\left|v+\frac{C}{A-B}\right|+\frac{1}{B}\log|u|=\text{const},$$

odnosno

$$\left|v+\frac{C}{A-B}\right|^{B}|u|^{A-B}=\text{const}.$$

Ako se u i v zamene vrednostima (2), poslednja jednačina postaje

$$\left|xy+\frac{C}{A-B}\right|^{B}|x+y|^{A-B}=\text{const} \qquad (B\neq 0;\ A\neq B).$$

To je opšte rešenje jednačine (1) u slučaju kada je $B\neq 0$ i $A\neq B$.

Ako je $B=0$, jednačina (1) postaje

$$\frac{dy}{dx}=-1 \qquad (A^2+C^2>0),$$

te je njeno opšte rešenje

$$x+y=\text{const}.$$

U ovom slučaju rešenje jednačine (1) je takođe

$$Axy+C=0.$$

Ako je $B=A$ $(\neq 0)$, jednačina (4) dobija oblik

$$\frac{dv}{C}+\frac{du}{Bu}=0 \qquad (C\neq 0),$$

odakle je

$$\frac{1}{C}v+\frac{1}{B}\log|u|=\text{const},$$

odnosno

$$e^{Bxy}|x+y|^{C}=\text{const}.$$

Ako je $B=A$ $(\neq 0)$ i $C=0$, jednačina (1) postaje

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x},$$

odakle izlazi

$$xy=\text{const}.$$

U ovom slučaju rešenje je takođe $y=-x$.

II. LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG I VIŠEG REDA

58. Za razne vrednosti realnog parametra a odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''-2y'+ay=0.$$

Rezultat.
$$y=e^x\left[C_1\exp\left(x\sqrt{1-a}\right)+C_2\exp\left(-x\sqrt{1-a}\right)\right] \qquad (a<1);$$
$$y=e^x\left[C_1\cos\left(x\sqrt{a-1}\right)+C_2\sin\left(x\sqrt{a-1}\right)\right] \qquad (a>1);$$
$$y=e^x(C_1+C_2x) \qquad (a=1)$$

(C_1, C_2 integracione konstante).

59. Rešiti diferencijalne jednačine:

1° $y''+y=\sin^4 x$;

2° $y''-2y'+y=e^{-x}\sin x+4e^x$;

3° $x^2y''-2y=x+\cos x$;

4° $x^2y''-xy'+2y=x\log x$;

5° $y'''-7y''+6y=x^2$;

6° $(1-x)y'''-3y''=0$;

7° $y''+(e^x-1)y'=e^{2x}$;

8° $a^2y''+2ay'+y=\mathrm{ch}(x/a)$

(a realna konstanta).

60. Rešiti diferencijalne jednačine:

1° $xy''+2y'+xy=0$;

2° $x(x+a)(y''-m^2y)-(2x+a)(y'-my)=x^2e^{-mx}$

(a i m realne konstante).

61. Rešiti sledeće skupove diferencijalnih jednačina:

1° $\dfrac{dx}{dt}=y,\quad \dfrac{dy}{dt}=z,\quad \dfrac{dz}{dt}=x$;

2° $\dfrac{dx}{dt}=2x+y-z,\quad \dfrac{dy}{dt}=x+2y-z,\quad \dfrac{dz}{dt}=3x-3y-z$;

3° $\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dz}{dt}+x=0,\quad \dfrac{dz}{dt}-\dfrac{dx}{dt}+y=0,\quad \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+z=0$;

4° $\dfrac{dy}{dx}-y+z=\dfrac{3}{2}x^2,\quad \dfrac{dz}{dx}+4y+2z=1+4x$;

5° $\ddot{x}+a^2y=0,\quad \ddot{y}-a^2x=0 \quad (a\neq 0)$;

6° $\ddot{x}+x+y=-5,\quad \ddot{y}-4x-3y=-3$;

7° $\dot{x}=2x,\quad \dot{y}=3x-2y,\quad \dot{z}=2y+3z$;

8° $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}x-y,\quad \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}y+x,\quad \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{1}{2}z$.

Rešenje. 8^0 Mogu se formirati ove dve kombinacije

$$\frac{d(x+iy)}{dt}=\left(\frac{1}{2}+i\right)(x+iy)$$
$$\frac{d(x-iy)}{dt}=\left(\frac{1}{2}-i\right)(x-iy) \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Posle integracije dobija se

$$x+iy=Ae^{\left(\frac{1}{2}+i\right)t}, \quad x-iy=Be^{\left(\frac{1}{2}-i\right)t}$$

(A, B integracione konstante).

Iz poslednjih relacija izlazi

$$x=e^{\frac{1}{2}t}\left(C_1\cos t-C_2\sin t\right),$$
$$y=e^{\frac{1}{2}t}\left(C_1\sin t+C_2\cos t\right)$$

(C_1, C_2 integracione konstante).

Ako ovim relacijama pridružimo

$$z=C_3e^{\frac{1}{2}t} \quad (C_3 \text{ integraciona konstanta}),$$

imamo rešenje datog skupa diferencijalnih jednačina.

62. Odrediti parametre A, B, C, D tako da jednačina

$$(1) \qquad (x^2+A)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+(Bx^2+Cx+D)\,y=0$$

ima kao partikularan integral funkciju e^{ax} ($a=\text{const}$).

Za te vrednosti ovih parametara odrediti opšti integral jednačine (1).

63. Odrediti a, b, c, d tako da jednačina

$$x(x-1)\,y''+(ax+b)\,y'+(cx+d)\,y=0$$

ima partikularno rešenje $y_1(x)=1/(x-1)$, a zatim naći opšte rešenje ove jednačine.

64. Odrediti opšte rešenje jednačine

$$(2x+1)\,y''+(4x-2)\,y'-8y=(6x^2+x-3)\,e^x$$

kada se zna da homogena jednačina

$$(2x+1)\,y''+(4x-2)\,y'-8y=0$$

ima partikularno rešenje oblika e^{ax}, gde je a konstanta koju treba naći.

65. Data je diferencijalna jednačina

$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x) \qquad (a \text{ i } b \text{ konstante}).$$

1° Pokazati da se opšte rešenje ove jednačine može izraziti u obliku

$$y(x)=Ae^{-\frac{1}{2}ax}\sin\frac{\lambda}{2}(x-B)+\frac{2}{\lambda}\int_{x_0}^{x} f(t)\,e^{\frac{1}{2}a(t-x)}\sin\frac{\lambda}{2}(x-t)\,dt,$$

gde je $\lambda^2=4b-a^2>0$ i gde su A i B integracione konstante, a x_0 podesno izabrana numerička konstanta.

2° Za slučajeve $a^2-4b>0$ i $4b-a^2=0$ izvesti odgovarajuće izraze koji određuju opšte rešenje date jednačine.

66. Odrediti opšte rešenje jednačine

$$y''+k^2y=f(x) \qquad (k \text{ realna konstanta}),$$

i utvrditi da se ono može izraziti u obliku

$$y=A\cos kx+B\sin kx+\frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin k(x-t)\,dt,$$

gde su A i B integracione konstante, a x_0 jedna podesno izabrana numerička konstanta.

67. Ispitati da li je funkcija

$$y=C\left[\frac{3}{nx}\sin(nx+\alpha)-\left(1-\frac{3}{n^2x^2}\right)\cos(nx+\alpha)\right]$$

(C, α integracione konstante)

rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(n^2-\frac{6}{x^2}\right)y=0.$$

68. Smenom $y=z(x)/x^2$ transformisati jednačinu

$$\text{(E)} \qquad x^2y''(x)+(3x^2+4x)y'(x)+(2x^2+6x+2)y(x)=0$$

i videti da li se dobijena jednačina po funkciji $z(x)$ može upotrebiti za integraciju jednačine (E).

69. Odrediti opšte rešenje jednačine

$$\left(\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{1+x^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right).$$

Uputstvo. Neposredno se zaključuje da je $y_1(x)=x$ jedno njeno partikularno rešenje. Drugo partikularno rešenje je $y_2(x)=\operatorname{arc\,tg} x$.

70. Opšte rešenje jednačine

(1) $$y''(x)-y(x)=0$$

može se napisati u obliku

(2) $$y(x)=a\operatorname{sh}(x+b) \quad (a, b \text{ integracione konstante}),$$

ili u obliku

(3) $$y(x)=Ae^{x}+Be^{-x} \quad (A, B \text{ integracione konstante}).$$

Kako ćemo, polazeći od oblika (2), dobiti partikularno rešenje Be^{-x}?

Uputstvo. Staviti $a=-2Be^{b}$ u (2) i pustiti da $b\to-\infty$.

71. Proveriti da li su funkcije

$$y_1=1+x, \quad y_2=(3x-1)\,x^{1/2}$$

partikularna rešenja diferencijalne jednačine

$$(6x^3+20x^2-2x)\,y''-(9x^2+10x+1)\,y'+(9x+1)\,y=0,$$

i odrediti njeno opšte rešenje.

72. Rešiti jednačinu

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=2x.$$

Uputstvo. $\dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy\right)=2x.$

73. Data je diferencijalna jednačina

(1) $$xy''(x)-2y'(x)+xy(x)=0.$$

Pokazati da svako rešenje jednačine (1) zadovoljava jednu linearnu diferencijalnu jednačinu četvrtog reda sa konstantnim koeficijentima.

Koristeći ovu osobinu jednačine (1), odrediti joj rešenje.

Ako je data opštija jednačina

(2) $$xy^{(k)}(x)-ky^{(k-1)}(x)+xy(x)=0 \quad (k \text{ prirodan broj}),$$

ispitati da li ona ima osobinu da svako njeno rešenje zadovoljava jednu linearnu diferencijalnu jednačinu reda $2k$.

74. Pokazati da je svako rešenje diferencijalne jednačine

$$x^3(x+4)\,y^{(4)}-4x^2(x+3)\,y'''+12x(x+2)\,y''-24(x+1)\,y'+24y=0$$

polinom po x. Generalisati.

Uputstvo. Poći od polinoma

$$P(x)\equiv a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k.$$

Rezultat. Opšte rešenje glasi

$$y=Ax^4+Bx^3+Cx^2+D(x+1) \quad (A, B, C, D \text{ integracione konstante}).$$

75. Ispitati da li jednačina

$$L[y] \equiv (x^3 - 3x^2)\, y'' + (x^3 - 2x^2 - 6x)\, y' + (2x^2 - 10x + 6)\, y = 0$$

ima partikularno rešenje oblika $y_1 = x^k$ (k parametar kojim se može slobodno raspolagati). U afirmativnom slučaju, rešiti jednačinu $L[y] = x^3 - 4x^2$.

76. Pokazati da je jedno partikularno rešenje jednačine

$$\text{(E)} \qquad x(1-x)^2\, y'' + (1 - x^2)\, y' + (1 + x)\, y = 0$$

linearna funkcija po x i, na osnovu ovoga, rešiti jednačinu (E).

77. Pokazati da jednačina $(1 - x^2)\, y'' + x y' + 8y = 0$ ima rešenje oblika $a + b x^2 + c x^4$, gde su a, b, c parametri. Na osnovu ovog odrediti opšte rešenje ove jednačine.

78. Ispitati da li su sva rešenja diferencijalne jednačine drugog reda

$$(1) \qquad (\sin x)\, y'' - (\cos x + \sin x)\, y' + (\cos x)\, y = \cos x$$

takođe rešenja diferencijalne jednačine trećeg reda

$$(2) \qquad y''' - y'' + y' - y + 1 = 0.$$

Rešenje. Opšte rešenje jednačine (2) je

$$(3) \qquad y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + 1 \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3 \text{ integracione konstante}).$$

Funkcija y, definisana relacijom (3), biće rešenje jednačine (1), ako je ispunjen uslov $C_2 = C_3$.

Zaista, sva rešenja jednačine (1) obuhvaćena su rešenjima jednačine (2). Opšte rešenje jednačine (1) je

$$y = C_1 e^x + C_2 (\cos x + \sin x) + 1.$$

79. Data je linearna diferencijalna jednačina

$$\text{(E)} \qquad y''' + p(x)\, y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = 0.$$

1° Koji uslov treba da zadovoljavaju funkcije $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ da bi jednačina (E) imala jedan *prvi integral* oblika

$$(\text{E}_1) \qquad P(x)\, y'' + Q(x)\, y = C,$$

gde su $P(x)$ i $Q(x)$ određene funkcije od x, a C proizvoljna konstanta.

2° Ako je $p(x) \equiv r(x)$ i $q(x) \equiv 1$, odrediti jednačinu (E_1) i opšte rešenje jednačine (E).

80. Odrediti opšte rešenje *Laplace*-ove diferencijalne jednačine

$$L \equiv x y''' - 6 y'' + x y = 0$$

pomoću jednačina koje se dobijaju diferenciranjem diferencijalnog polinoma L.

Da li se i jednačina $x y'' - 4 y' - x y = 0$ može rešiti pomoću navedenog postupka?

81. Odrediti opšte rešenje jednačine

(1) $$D^4y+2a^2D^2y+a^4y=\cos bx \qquad (a, b \text{ realne konstante}).$$

Rezultat. Opšte rešenje jednačine (1) glasi

(2) $$y=(C_1+C_2x)\cos ax+(C_3+C_4x)\sin ax+\frac{\cos bx}{(b^2-a^2)^2} \qquad (a\neq b)$$

(C_1, C_2, C_3, C_4 integracione konstante).

Ako je $b=a$, tada rešenje jednačine (1) ima oblik

(3) $$y=(C_1+C_2x)\cos ax+(C_3+C_4x)\sin ax-\frac{x^2}{8a^2}\cos ax \qquad (a\neq 0).$$

Primedba. Da li se rešenje (3) može dobiti iz (2)?

82. Izvršiti smenu $\sin x=t$ u diferencijalnoj jednačini

(E) $$y''+(\operatorname{tg} x)\,y'-(\cos x)^2\,y=(\sin x\cos x)^2.$$

Da li se dobijena jednačina (E_1) može koristiti za integraciju jednačine (E)? U potvrdnom slučaju, odrediti ono rešenje $y=f_p(x)$ jednačine (E) koje zadovoljava uslove $f_p(0)=2$, $f_p'(0)=0$.

Da li su diferencijalne jednačine (E) i (E_1) ekvivalentne?

83. Pokazati da diferencijalna jednačina

(E) $$x^2(1+x^3)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3}{2}x\frac{dy}{dx}+y=0$$

ima jedno partikularno rešenje $y=f(x)$, definisano relacijama

$$y=-3t^2/(t^3+2), \qquad x=-3t/(t^3+2).$$

Koristeći ovo, odrediti opšte rešenje jednačine (E).

Da li se parametri a, b, c mogu izabrati tako, da se i opštija jednačina

$$x^2(a+x^3)\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$$

može integraliti na analogni način?

84. Transformisati diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A}{(x-a)^2(x-b)^2}\,y$$

pomoću smene promenljivih

$$u=\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right|, \qquad y=(x-b)\,v$$

$$\{A, a, b \text{ konstante}; \quad y=y(x), \quad v=v(u)\}.$$

85. Odrediti opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine

$$L[y]\equiv y^{(n)}-1!\binom{n}{1}x^{n-1}y^{(n-1)}+2!\binom{n}{2}x^{n-2}y^{(n-2)}-\cdots+(-1)^n n!\binom{n}{n}y=0$$

pomoću rešenja jednačine $dL[y]/dx=0$.

Rezultat. $y=C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$ (C_k integracione konstante).

86. Ako su $u(x)$ i $v(x)$ dva linearno nezavisna partikularna rešenja diferencijalne jednačine

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^3y}{dx^3}+P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)\,y=0,$$

pokazati da je opšte rešenje ove jednačine dato izrazom

$$y=A\,u(x)+B\,v(x),$$

gde je

$$\frac{1}{v}\,\frac{dA}{dx}=-\frac{1}{u}\,\frac{dB}{dx}=c\,e^{\mu}\Big/\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)$$

(c integraciona konstanta; $\mu=-\int P(x)\,dx$).

Rešenje. Budući da su $u(x)$ i $v(x)$ dva rešenja jednačine (1), rešenje će biti i funkcija

$$\text{(2)} \qquad y=Au+Bv \qquad (A,\,B \text{ konstante}).$$

Pretpostavimo sada da su A i B funkcije od x i odredimo ih tako da (2) bude opšte rešenje jednačine (1).

Iz (2) sleduje

$$\text{(3)} \qquad y'=A'u+B'v+Au'+Bv' \qquad ('=d/dx).$$

Da bismo odredili funkcije $A(x)$ i $B(x)$, možemo propisati uslov

$$\text{(4)} \qquad A'u+B'v=0.$$

Jednačina (3), uz uslov (4), postaje

$$\text{(5)} \qquad y'=Au'+Bv'.$$

Odavde sleduje:

$$\text{(6)} \qquad y''=A'u'+B'v'+Au''+Bv'',$$

$$\text{(7)} \qquad y'''=A''u'+2A'u''+Au'''+B''v'+2B'v''+Bv'''.$$

Na osnovu (5), (6), (7) jednačina (1) dobija oblik

$$A(u'''+Pu''+Qu'+Ru)+B(v'''+Pv''+Qv'+Rv)$$
$$+A''u'+2A'u''+B''v'+2B'v''+P(A'u'+B'v')=0.$$

Budući da su $u(x)$ i $v(x)$ partikularna rešenja jednačine (1), poslednja jednačina postaje

$$\text{(8)} \qquad A''u'+2A'u''+B''v'+2B'v''+P(A'u'+B'v')=0.$$

Funkcije $A(x)$ i $B(x)$ određene su jednačinama (4) i (8). Iz (4) sleduje

$$B'=-A'\cdot(u/v), \qquad B''=-A''\cdot(u/v)-A'\cdot(u/v)'.$$

Smenom ovih izraza u (8) dobija se

$$A''v\,(u'v-uv')+A'\{2v\,(u''v-uv'')+(Pv-v')\,(u'v-uv')\}=0.$$

$$\therefore \quad A'/v=c\,\{\exp(-\textstyle\int P\,dx)\}/(u'v-uv')^2.$$

Dalje se dobija

$$B'/u=-c\,\{\exp(-\textstyle\int P\,dx)\}/(u'v-uv')^2.$$

Prema tome, opšte rešenje jednačine (1) je

$$y=c\left[u\int\frac{v\exp(-\int P\,dx)}{(u'v-uv')^2}\,dx-v\int\frac{u\exp(-\int P\,dx)}{(u'v-uv')^2}\,dx\right]+bu+av$$

($a,\,b,\,c$ integracione konstante).

Generalizacija. Pokušati generalizaciju ovog problema za linearne jednačine reda $n\geqslant 4$

87. Rešiti skupove (sisteme) diferencijalnih jednačina:

1° $(\mathrm{D}-1)\,u-2\,v=e^{-x}, \quad (\mathrm{D}-1)\,v=2\,u+1;$

2° $\mathrm{D}u-v=0, \quad \mathrm{D}v-w=0, \quad \mathrm{D}w-u=0;$

3° $(\mathrm{D}^2-4\mathrm{D})\,u-(\mathrm{D}-1)\,v=e^{4x}, \quad (\mathrm{D}+6)\,u+(\mathrm{D}^2-\mathrm{D})\,v=0$

$\{\mathrm{D}=\mathrm{d}/\mathrm{d}x, \quad \mathrm{D}^2=\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2; \quad u=u(x), \quad v=v(x), \quad w=w(x)\}.$

Rezultat.

1° $u=-\frac{2}{3}-e^{-x}\left(2A+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x\right)+2Be^{2x},$

$v=\frac{1}{3}+2\left(A-\frac{1}{4}x\right)e^{-x}+2Be^{3x};$

2° $u=Ae^{x}-\frac{1}{2}(B+C\sqrt{3})\,e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}(C-B\sqrt{3})\,e^{-x/2}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2},$

$v=Ae^{x}+\left(B\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)e^{-x/2},$

$w=Ae^{x}-\frac{1}{2}(B-C\sqrt{3})\,e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}(C+B\sqrt{3})\,e^{-x/2}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2};$

3° $u=2Ae^{-x}+2Ce^{2x}+6Ee^{3x}+\frac{2}{5}e^{4x},$

$v=-5Ae^{-x}-7Be^{x}-8Ce^{2x}-9Ee^{3x}-\frac{1}{3}e^{4x}$

(A, B, C, E integracione konstante).

88. Ako dve jednačine

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0, \qquad b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

imaju jedan zajednički koren x_1, tada postoje identiteti:

$$\begin{aligned}
a_0x_1^4+a_1x_1^3+a_2x_1^2+a_3x_1 &\equiv 0,\\
a_0x_1^3+a_1x_1^2+a_2x_1+a_3 &\equiv 0,\\
b_0x_1^4+b_1x_1^3+b_2x_1^2 &\equiv 0,\\
b_0x_1^3+b_1x_1^2+b_2x_1 &\equiv 0,\\
b_0x_1^2+b_1x_1+b_2 &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Ako se iz ovih identiteta eliminišu x_1^4, x_1^3, x_1^2, x_1, dobija se

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0\\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\
b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0\\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0\\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2
\end{vmatrix}=0.$$

To je *Sylvester*-ov metod eliminacije.

Da li se ovaj metod, uz potrebne modifikacije, može primeniti na skup od dve linearne diferencijalne jednačine oblika:

$$(1)\qquad A_0 D^3 y + A_1 D^2 y + A_2 Dy + A_3 y = 0,\quad B_0 D^2 y + B_1 Dy + B_2 y = 0$$

$$(A_k,\ B_k \text{ funkcije promenljive } x)?$$

Rešenje. Odgovor je potvrdan. Ako jednačine (1) imaju jedno zajedničko rešenje $y_1(x)$, tada važe identiteti:

$$\begin{aligned}
&A_0 D^4 y_1 + (A_0' + A_1) D^3 y_1 + (A_1' + A_2) D^2 y_1 + (A_2' + A_3) Dy_1 + A_3' y_1 \equiv 0,\\
&A_0 D^3 y_1 + A_1 D^2 y_1 + A_2 Dy_1 + A_3 y_1 \equiv 0,\\
&B_0 D^4 y_1 + (2B_0' + B_1) D^3 y_1 + (B_0'' + 2B_1' + B_2) D^2 y_1 + (B_1'' + 2B_2') Dy_1 + B_2'' y_1 \equiv 0,\\
&B_0 D^3 y_1 + (B_0' + B_1) D^2 y_1 + (B_1' + B_2) Dy_1 + B_2' y_1 \equiv 0,\\
&B_0 D^2 y_1 + B_1 Dy_1 + B_2 y_1 \equiv 0
\end{aligned}$$

$$(D^k y_1 \equiv d^k y_1 / dx^k).$$

Ako se determinanta

$$\begin{vmatrix}
A_0 & A_0' + A_1 & A_1' + A_2 & A_2' + A_3 & A_3' \\
0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\
B_0 & 2B_0' + B_1 & B_0'' + 2B_1' + B_2 & B_1'' + 2B_2' & B_2'' \\
0 & B_0 & B_0' + B_1 & B_1' + B_2 & B_2' \\
0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2
\end{vmatrix}$$

anulira za svako x, tada jednačine (1) imaju jedno zajedničko netrivijalno rešenje.

Ovaj rezultat bez teškoće se primenjuje i na druge slučajeve.

Primer. Ispitati navedenim metodom da li jednačine

$$D^3 y + (x-a) D^2 y + x(x-a) Dy - ax^2 y = 0,\quad D^2 y + (x-a) Dy - axy = 0$$

imaju zajedničko rešenje i u potvrdnom slučaju odrediti ga.

Rezultat. $y_1 = \exp(ax)$.

89. Proveriti da li je relacijama

$$x_1 = (-16C_2 + 3C_3)e^t + 3C_4 te^t,\qquad x_2 = (2C_1 - 12C_4)e^t + 2C_2 te^t,$$

$$x_3 = (-8C_1 - 9C_3)e^t + (-8C_2 - 9C_4)te^t,\quad x_4 = (6C_1 + 6C_3)e^t + (6C_2 + 6C_4)te^t$$

$$(C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \text{ integracione konstante})$$

definisano rešenje skupa linearnih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_4,\\
\frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{8}x_1 + x_2 - \frac{3}{8}x_3 - \frac{1}{2}x_4,\\
\frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + x_3 - \frac{1}{4}x_4,\\
\frac{dx_4}{dt} &= -\frac{3}{8}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{8}x_3 + x_4.
\end{aligned}$$

III. INTEGRACIJA POMOĆU REDOVA

90. Da li postoje takva rešenja diferencijalne jednačine

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \cos x$$

koja se mogu razviti u red oblika

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots ?$$

U potvrdnom slučaju ispitati i grafički prikazati ova rešenja.

91. Odrediti dva nezavisna partikularna rešenja jednačine

$$x^2 y'' - 4xy' + (x^2 + 6)\, y = 0$$

u obliku potencijalnih redova $\sum a_k x^k$ i ispitati da li se opšte rešenje ove jednačine može izraziti u konačnom obliku.

92. U obliku potencijalnog reda $\sum a_k x^k$ odrediti funkciju $f(x)$ koja zadovoljava uslove:

$$f'''(x) + f(x)\, f''(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1.$$

93. Ako je

$$dx/dt = x^2 + y, \quad dy/dt = y^2 + x, \quad x(0) = y(0) = 1,$$

odrediti rešenja u obliku:

$$x(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \cdots,$$
$$y(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 + \cdots$$

94. Odrediti rešenja diferencijalne jednačine

$$x^2 (1 - x)\, y'' - 3x^2 y' - \frac{3}{4}(1 + x)\, y = 0$$

u obliku potencijalnog reda $\sum a_k x^k$.

95. Pokazati da su rešenja diferencijalne jednačine

$$(1 + 3x^2)\, y'' - 5xy' - 3y = 0$$

funkcije

$$y_1(x) = 3x + 4x^3,$$

$$y_2(x) = 1 + \frac{3}{2!} x^2 + \frac{7 \cdot 3}{4!} x^4 + \cdots + (-1)^k 3 a_k x^{2k} + \cdots,$$

gde je

$$(2k)!\, a_k = [(6k - 5)(6k - 11) \cdots 1][(2k - 5)(2k - 7) \cdots 1] \quad (k \geqslant 3).$$

96. Data je diferencijalna jednačina

(E) $$4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0.$$

1° Odrediti potencijalni red $y(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ koji zadovoljava jednačinu (E). Koliki je poluprečnik konvergencije ovog reda?

2° Odrediti zbir ovog reda.

3° Odrediti jednu smenu promenljive $x = x(t)$ pomoću koje se jednačina (E) svodi na linearnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima. Na osnovu ovog naći opšte rešenje jednačine (E).

97. Odrediti rešenje $y = y(x)$ diferencijalne jednačine

$$(x^2 - 1)\,y'' + 2(\lambda + 1)\,x y' + 2\lambda y = 0 \qquad (\lambda \text{ parametar})$$

koje se može razviti u red oblika

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

i odrediti zbir ovog reda za $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

98. Data je diferencijalna jednačina

$$\text{(E)} \qquad x y'' - (x + \lambda)\,y' + \lambda y = 0 \qquad (\lambda \text{ realan parametar}).$$

1° Pokazati da ova jednačina ima jedno partikularno rešenje nezavisno od λ i odrediti njeno opšte rešenje.

2° Ako je λ prirodan broj, jednačina (E) ima jedno partikularno rešenje koje se može razviti u potencijalni red u okolini $x = 0$, i koje je infinitezimala reda $n + 1$, ako je x infinitezimala prvog reda. Odrediti poluprečnik konvergencije ovog reda.

99. U obliku potencijalnih redova $\sum a_k x^k$ odrediti dva partikularna rešenja linearne diferencijalne jednačine

$$\text{(E)} \qquad y''(x) + 2x y'(x) + 4y(x) = 0.$$

Posebno odrediti ono rešenje $y_p(x)$ jednačine (E) koje zadovoljava uslove

$$y_p(0) = 0, \quad y_p'(0) = 2.$$

Pokazati da se $y_p(x)$ može izraziti u konačnom obliku i da je $y_p(1) = 2/e$.

100. Pokazati da diferencijalnu jednačinu

$$\text{(E)} \qquad 4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (1 - x^2)\,y = 0$$

zadovoljava generalisani potencijalni red oblika

$$y = x^\nu (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots),$$

gde su ν, A_0, A_1, A_2, ... konstante koje treba odrediti.

Odrediti dva linearno nezavisna partikularna rešenja ove jednačine i pokazati da samo jedno od njih ostaje konačno kada $x \to 0$.

Da li se jednačina (E) može integraliti pomoću *Bessel*-ovih funkcija?

101. Odrediti rešenja diferencijalne jednačine

$$(1) \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

u obliku potencijalnog reda

$$(2) \qquad y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Rešenje. Polazeći od (2), dobija se

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,a_{k+1}x^k,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\,a_{k+2}x^k,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+3)(k+2)(k+1)\,a_{k+3}x^k.$$

Da bi (2) bilo rešenje jednačine (1), mora biti

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+3)(k+2)(k+1)\,a_{k+3}+(2k+1)\,a_k\}\,x^k\equiv 0.$$

Odavde sleduje

$$a_{k+3}=-\frac{2k+1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\,a_k. \tag{3}$$

I. *k je oblika* $3r$ (*r prirodan broj ili nula*). Tada je, prema (3),

$$a_3=-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,a_0,$$

$$a_6=-\frac{7}{4\cdot 5\cdot 6}\,a_3,$$

$$\vdots$$

$$a_{3r}=-\frac{6r-5}{(3r-2)(3r-1)(3r)}\,a_{3r-3}.$$

Odavde sleduje

$$a_{3r}=(-1)^r\,\frac{1\cdot 7\cdots(6r-5)}{(3r)!}\,a_0.$$

II. *k je oblika* $3r+1$ (*r prirodan broj ili nula*). Tada je, prema (3),

$$a_4=-\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4}\,a_1,$$

$$a_7=-\frac{9}{5\cdot 6\cdot 7}\,a_4,$$

$$\vdots$$

$$a_{3r+1}=-\frac{6r-3}{(3r-1)(3r)(3r+1)}\,a_{3r-2}.$$

Odavde se dobija

$$a_{3r+1}=(-1)^r\,\frac{3\cdot 9\cdots(6r-3)}{(3r+1)!}\,a_1.$$

III. *k je oblika* $3r+2$ (*r nula ili prirodan broj*). Tada je, prema (3),

$$a_5=-\frac{5}{3\cdot 4\cdot 5}\,a_2,$$

$$a_8=-\frac{11}{6\cdot 7\cdot 8}\,a_5,$$

$$\vdots$$

$$a_{3r+2}=-\frac{6r-1}{(3r)(3r+1)(3r+2)}\,a_{3r-1}.$$

Iz ovih relacija sleduje

$$a_{3r+2}=(-1)^r\,\frac{5\cdot 11\cdots(6r-1)}{(3r+2)!}\,2a_2.$$

Prema tome, opšte rešenje jednačine (1) je

$$
\begin{aligned}
y = & \{ a_0+a_3x^3+ \cdots +a_{3r}x^{3r}+ \cdots \} \\
& + \{ a_1x+a_4x^4+ \cdots +a_{3r+1}x^{3r+1}+ \cdots \} \\
& + \{ a_2x^2+a_5x^5+ \cdots +a_{3r+2}x^{3r+2}+ \cdots \},
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
y = & \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1\cdot 7 \cdots (6r-5)}{(3r)!} x^{3r} \right] a_0 \\
& + \left[x + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{3\cdot 9 \cdots (6r-3)}{(3r+1)!} x^{3r+1} \right] a_1 \\
& + \left[\frac{x^2}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{5\cdot 11 \cdots (6r-1)}{(3r+2)!} x^{3r+2} \right] 2a_2
\end{aligned}
$$

(a_0, a_1, a_2 proizvoljne konstante).

Tri izraza koji se nalaze u uglastim zagradama jesu partikularna rešenja jednačine (1). Ako se na red čiji je opšti član

$$(-1)^r \frac{1\cdot 7 \cdots (6r-5)}{(3r)!} x^{3r}$$

primeni *D'Alembert*-ov kriterijum, dobija se

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} = - \frac{6r+1}{(3r+1)\,(3r+2)\,(3r+3)} x^3 .$$

Za svako x je

$$\left| \frac{u_{r+1}}{u_r} \right| = \frac{6r+1}{(3r+1)\,(3r+2)\,(3r+3)} \, |x|^3 \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

Dakle, ovaj alternativni red konvergira za svako x.

Isto važi i za potencijalne redove

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{3\cdot 9 \cdots (6r-3)}{(3r+1)!} x^{3r+1}, \qquad \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{5\cdot 11 \cdots (6r-1)}{(3r+2)!} x^{3r+2}.$$

IV. KONTURNI I DRUGI USLOVI

102. Rešiti konturni problem

$$y''(x)+\lambda y(x)=0, \quad y(a)=y(b), \quad y'(a) = -y'(b) \qquad (a \neq b).$$

Rešenje. Opšte rešenje jednačine

(1) $$y''(x)+\lambda y(x) = 0$$

ima oblik

(2)
$$
\begin{aligned}
y(x) &= C_1 \cos kx + C_2 \sin kx && (\lambda = k^2) \\
&= C_1 + C_2 x && (\lambda = 0) \qquad (k \text{ realna konstanta}) \\
&= C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx && (\lambda = -k^2)
\end{aligned}
$$

(C_1, C_2 integracione konstante).

I. *Slučaj* $\lambda = k^2$. Konstante C_1 i C_2 treba odrediti iz konturnih uslova koji se, u ovom slučaju, svode na jednačine:

$$(3)\qquad \begin{aligned} C_1(\cos ka - \cos kb) + C_2(\sin ka - \sin kb) &= 0,\\ C_1(\sin ka + \sin kb) - C_2(\cos ka + \cos kb) &= 0. \end{aligned}$$

Determinanta ovog sistema je

$$\begin{vmatrix} \cos ka - \cos kb & \sin ka - \sin kb \\ \sin ka + \sin kb & -\cos ka - \cos kb \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Prema tome, sistem (3) ima i drugih rešenja osim trivijalnog.

Iz prve od jednačina (3) dobija se

$$\begin{aligned} C_2 &= -C_1(\cos ka - \cos kb)/(\sin ka - \sin kb) \\ &= C_1\left(\sin k\frac{a+b}{2}\right)\Big/\left(\cos k\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

Prema tome je

$$y(x) = C_1\left[\cos kx + \left(\sin kx \sin k\frac{a+b}{2}\right)\Big/\left(\cos k\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

$$\therefore\quad y(x) = C_1 \cos k\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Big/\left(\cos k\frac{a+b}{2}\right).$$

Traženo rešenje konturnog problema za $\lambda = k^2$ ima oblik

$$(4)\qquad y(x) = A\cos k\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \qquad (A \text{ proizvoljna konstanta}).$$

II. *Slučaj* $\lambda = -k^2$. Konturni uslovi su, za ovaj slučaj, oblika

$$(5)\qquad \begin{aligned} C_1(\operatorname{ch} ka - \operatorname{ch} kb) + C_2(\operatorname{sh} ka - \operatorname{sh} kb) &= 0,\\ C_1(\operatorname{sh} ka + \operatorname{sh} kb) + C_2(\operatorname{ch} ka + \operatorname{ch} kb) &= 0. \end{aligned}$$

Determinanta ovog sistema ima takođe vrednost *nule*.

Iz prve od jednačina (5) sleduje

$$\begin{aligned} C_2 &= -C_1(\operatorname{ch} ka - \operatorname{ch} kb)/(\operatorname{sh} ka - \operatorname{sh} kb) \\ &= -C_1\left(\operatorname{sh} k\frac{a+b}{2}\right)\Big/\left(\operatorname{ch} k\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

Rešenje datog konturnog problema za $\lambda = -k^2$ ima oblik

$$(6)\qquad y(x) = A\operatorname{ch} k\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \qquad (A \text{ proizvoljna konstanta}).$$

Zaključak. Rešenje konturnog problema je

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos k\left(x - \frac{a+b}{2}\right) && (\lambda = k^2),\\ &= A && (\lambda = 0),\\ &= A\operatorname{ch} k\left(x - \frac{a+b}{2}\right) && (\lambda = -k^2). \end{aligned}$$

Ovaj problem ima *neprekidan spektar*.

103. Odrediti $x(t)$ iz uslova:

$$x^{(4)}(t)-x(t)=a,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=0,\quad x''(0)=0,\quad x'''(0)=0 \quad (a \text{ konstanta})$$

i ispitati koliko realnih nula ima tako određena funkcija $x(t)$. Izračunati nule na dve tačne cifre.

Rezultat. $x(t)=\frac{1}{2}a(\cos t+\operatorname{ch} t-2)$.

104. Data je diferencijalna jednačina

$$(\mathrm{E}) \qquad y''+A(x)\,y'+B(x)\,y=0,$$

gde su $A(x)$ i $B(x)$ funkcije realne promenljive x.

1° Smenom nezavisno promenljive $x=f(t)$ dobija se nova jednačina oblika

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \ddot{y}+a(t)\,\dot{y}+b(t)\,y=0,$$

koju treba obrazovati.

2° Koji uslovi treba da budu ispunjeni da bi bilo

$$(\mathrm{R}) \qquad a(t)\equiv \mathrm{const}, \qquad b(t)\equiv \mathrm{const}\,?$$

3° Pokazati da jednačina

$$(\mathrm{E}_2) \qquad (1+x^2)\,y''+x\,y'-k^2\,y=0$$

i funkcija $f(t)\equiv \operatorname{sh} t$ ispunjavaju uslove (R).

4° Naći opšte rešenje jednačine (E_2).

5° Odrediti ono rešenje jednačine (E_2) koje se može razviti u potencijalni red oblika $\sum \alpha_k x^k$.

6° Rešiti problem o sopstvenim vrednostima koji sačinjavaju jednačina (E_2) i uslovi: $y(a)=0$ i $y(b)=0$ $(a\neq b)$.

105. Data je diferencijalna jednačina

$$(\mathrm{E}_1) \qquad L[y]\equiv x\,y''-(k-1)\,y'+k^2x^{2k-1}\,y=0 \qquad (k \text{ parametar}).$$

1° Pokazati da se može odrediti takva funkcija $x=x(t)$, da jednačina (E_1) dobije oblik $\ddot{y}+\theta(t)\,y=0$. Polazeći od ovog rezultata, integraliti jednačinu (E_1).

2° Integraliti zatim diferencijalnu jednačinu

$$(\mathrm{E}_2) \qquad L[y]=k^2x^{3k-1}$$

i ispitati da li za $k=1/2$ postoji takvo rešenje $y=y(x)$ jednačine (E_2) koje zadovoljava uslove: $y(0)=0$ i $y'(x)$ ostaje konačno kada $x\to 0$.

106. Rešiti konturni problem:

$$\frac{dx}{dr}=A(B-y)\,r, \qquad \frac{dy}{dr}=Cx; \qquad y(r) \text{ ograničeno u tački } r=0; \qquad y(r_0)=\delta$$

$$(A,\ B,\ C,\ \delta,\ r_0 \text{ pozitivne konstante}).$$

107. Data je diferencijalna jednačina $y''(x)+\lambda y(x)=0$ i konturni uslovi:

$$y(a)=y(b), \quad y'(a)=y'(b) \quad (a\neq b).$$

Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije ovog konturnog problema.

108. Data je diferencijalna jednačina

$$d^2y(x)/dx^2=f(x)$$

i konturni uslovi $y(a)=0$, $y(b)=0$ $(a\neq b)$.

Pokazati da se rešenje ovog konturnog problema može pretstaviti u obliku

$$y(x)=\frac{x-a}{b-a}\int_x^b (t-b)\,f(t)\,dt+\frac{x-b}{b-a}\int_a^x (t-a)\,f(t)\,dt.$$

109. Formirati linearnu homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda čije je opšte rešenje

$$y=Z_\nu(ae^{bx}) \quad (a,\ b \text{ konstante}),$$

gde je ν indeks cilindrične funkcije Z_ν.

Ako je $a>0$ i $b<0$, odrediti funkciju $Z_\nu(ae^{bx})$ pod uslovom da ona bude ograničena u okolini tačke $x=\infty$.

110. Rešiti konturne probleme:

1° $\quad x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)\,y=0 \quad$ (ν fiksno; λ parametar),

$\quad y(1)=0$, $y(x)$ ograničeno kad $x\to 0$;

2° $\quad x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)\,y=0 \quad$ (ν fiksno; λ parametar),

$\quad y(x)$ ograničeno za $0\leqslant x<+\infty$.

111. Rešiti skup diferencijalnih jednačina

$$\ddot{x}(t)=3x(t)-4\dot{y}(t), \quad \ddot{y}(t)=3y(t)+4\dot{x}(t),$$

i odrediti i grafički prikazati ono partikularno rešenje $x_p(t)$, $y_p(t)$ koje zadovoljava uslove:

$$x_p(0)=2, \quad y_p(0)=0, \quad \dot{x}_p(0)=0, \quad \dot{y}_p(0)=0.$$

Rezultat. $x_p(t)=3\cos t-\cos 3t$, $\quad y_p(t)=3\sin t-\sin 3t$.

112. Rešiti problem o sopstvenim vrednostima:

$$y^{(4)}(x)-\lambda^4 y(x)=0 \quad (\lambda\neq 0),$$

$$y^{(k)}(a)=y^{(k)}(b) \quad (a\neq b;\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

113. Rešiti skup jednačina

$$\dot{x}(t)=z(t)+y(t)-x(t), \quad \dot{y}(t)=z(t)+x(t)-y(t), \quad \dot{z}(t)=x(t)+y(t)+z(t),$$

i to specijalno ako je $x(0)=1$, $y(0)=0$, $z(0)=0$.

114. Data je diferencijalna jednačina

(E) $$(2x^2-3x+1)\,y''(x)+2xy'(x)-2y(x)=0.$$

1° Odrediti opšte rešenje $y(x)$ jednačine (E) i grafički prikazati funkciju $y(x)$.

2° Odrediti ono partikularno rešenje $y_p(x)$ koje zadovoljava uslove:

$$y_p(0)=0, \quad y_p'(0)=1.$$

115. Iz uslova

(E) $$6\ddot{x}(t)-3\dot{x}(t)+6x(t)+\dot{y}(t)=t, \quad \ddot{x}(t)+8x(t)+y(t)=0$$

odrediti $x(t)$ i $y(t)$.

Ako je $x(0)=11/36$, $y(0)=-22/9$, $\dot{x}(0)=1/6$, pokazati da je geometrisko mesto tačke (x, y), u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, jedna prava koja prolazi kroz početak.

Primedba. Opšte rešenje skupa jednačina (E) je

$$x=Ae^t+Be^{2t}+Ce^{3t}+\frac{1}{36}(6t+11),$$

$$y=-9Ae^t-12Be^{2t}-17Ce^{3t}-\frac{2}{9}(6t+11)$$

(A, B, C integracione konstante).

116. Pokazati da diferencijalna jednačina

(1) $$x^2(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+x(x-4)\frac{dy}{dx}+6y=0$$

ima partikularno rešenje oblika $y_1=x^k$, gde je k konstanta koju treba odrediti.

Zatim odrediti opšte rešenje jednačine (1) i ono partikularno rešenje koje ostaje konačno kad $x\to 1$.

117. Odrediti ono partikularno rešenje $y_p(x)$ jednačine

$$y^{IV}(x)+2y''(x)-3y(x)=10,$$

koje zadovoljava uslove: $y_p(x)\equiv y_p(-x)$, $y_p(0)=0$, $y_p''(0)=0$.

118. U ravni Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema Oxy koordinate $\{x(t), y(t)\}$ tačke M definisane su skupom jednačina

$$t\dot{x}+5x+y=t, \quad t\dot{y}-x+3y=t^2.$$

1° Odrediti jednačine krivih (C) trajektorija tačke M kada se t menja.

2° Specijalno odrediti onu od krivih (C) koja u momentu $t=1$ seče y-osu ortogonalno.

119. Date su diferencijalne jednačine:

(1) $\ddot{u}+4u=0$, (2) $\ddot{v}+v=0$ $\{u=u(t), \ v=v(t)\}$.

Neka su $x_1(t)$ i $y_1(t)$ dva partikularna rešenja jednačine (1) koja zadovoljavaju uslove:

$$x_1(0)=a, \quad x_1'(0)=0; \quad y_1(0)=0, \quad y_1'(0)=2a.$$

Neka su $x_2(t)$ i $y_2(t)$ dva partikularna rešenja jednačine (2) koja zadovoljavaju uslove:

$$x_2(0)=a, \quad x_2'(0)=0; \qquad y_2(0)=0, \quad y_2'(0)=-a,$$

gde je a jedna pozitivna konstanta.

Odrediti funkcije $x_1(t)$, $y_1(t)$; $x_2(t)$, $y_2(t)$.

Tačke $M_1\{x_1(t), y_1(t)\}$, $M_2\{x_2(t), y_2(t)\}$, kada t varira, opisuju u jednom istom Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy istu trajektoriju. Dokazati.

120. Data je diferencijalna jednačina (E) $ax^2y''-y=0$, gde je $a(\neq 0)$ realna konstanta.

1° Odrediti opšte rešenje jednačine (E) za razne vrednosti parametra a.

2° Za koje će vrednosti parametra a ovo rešenje biti racionalna funkcija od x?

121. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''-2y'+2y=\cos px \qquad (p \text{ prirodan broj})$$

i izdvojiti ono partikularno rešenje koje je periodična funkcija promenljive x.

122. Odrediti jednačinu krivih (Γ) koje su definisane diferencijalnom jednačinom

$$(1) \qquad y'''(x)+y(x)=0.$$

Posebno odrediti onu od krivih (Γ) koja ima tačku $M(0,1)$ kao prevojnu tačku i čija tangenta u istoj tački M zaklapa sa x-osom ugao od 45^0.

Rezultat. Tražena partikularna kriva je

$$y(x)=\exp(x/2)\left\{(1/\sqrt{3})\sin(x\sqrt{3}/2)+\cos(x\sqrt{3}/2)\right\}.$$

123. Odrediti $y(x)$ iz uslova

$$y(x)\,y''(x)=2\{y'(x)\}^2, \qquad y(1)=1.$$

124. Odrediti $y(x)$ iz uslova

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-\frac{dy(x)}{dx}-2y(x)=4x^2-3e^{-x}, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=3.$$

125. Pokazati da funkcija $y=x\sin\lambda x$, gde je λ parametar, zadovoljava jednu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$(1) \qquad y''+R_1(x,\lambda)\,y'+R_2(x,\lambda)\,y=0,$$

gde su $R_1(x,\lambda)$ i $R_2(x,\lambda)$ racionalne funkcije po x i λ.

Dati su konturni uslovi:

$$(2) \qquad y(a)=0, \quad y(b)=0 \qquad (a\neq b).$$

Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije konturnog problema, koji čine uslovi (1) i (2) i grafički prikazati sopstvene funkcije.

126. Odrediti $y(x)$ iz uslova

$$x\frac{d^2y(x)}{dx^2}+2\frac{dy(x)}{dx}+4xy(x)=\sin 2x\,,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\,,\qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\,.$$

Uputstvo. Data jednačina može se napisati u obliku $(xy)''+4(xy)=\sin 2x$.

127. Odrediti koordinate tačke $M\{x=x(t),\ y=y(t)\}$, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy, iz uslova:

$$\ddot{x}+x=\dot{y},\quad 4\dot{x}+2x=\dot{y}+2y,\quad x(0)=0,\quad y(0)=1,\quad \dot{x}(0)=2.$$

Ispitati da li tačka $M(x, y)$ leži na paraboli $(5x-2y)^2=4(y-2x)$.

Primedba. Opšte rešenje datih linearnih diferencijalnih jednačina je

$$x=Ae^t+Be^{-t}+Ce^{2t}\,,\quad y=2Ae^t-2Be^{-t}+\frac{5}{2}Ce^{2t}$$

(A, B, C integracione konstante).

128. Da li postoji takvo rešenje jednačine

$$x^2y''+4xy'+2y=x$$

koje je ograničeno kad $x\to 0$?

Rezultat. $y=x/6$.

129. Odrediti funkcije $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ koje zadovoljavaju uslove:

$$(D+1)u+2Dv+4D^2w=0,\quad (2D+1)u+Dv+D^2w=0,\quad 3Du+v+w=0,$$

$$u(0)=1,\quad v(0)=0,\quad w(0)=0,\quad Dw(x)\,|_{x=0}=0.$$

Rezultat. $u=\frac{1}{10}(9e^{-x/3}-4e^{x/2}+5e^x)$, $v=\frac{1}{10}(9e^{-x/3}+26e^{x/2}-25e^x-10)$,

$$w=1+e^x-2e^{x/2}.$$

130. Odrediti funkcije $x(t)$, $y(t)$ koje zadovoljavaju uslove:

$$\dot{x}+ax=y,\quad \dot{y}+ay=x,\quad x(0)=0,\quad y(0)=1.$$

Rezultat. $x=e^{-at}\operatorname{sh} t$, $y=e^{-at}\operatorname{ch} t$.

131. Data je diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a^2y(t)=0\qquad (a \text{ realna konstanta}).$$

1° Odrediti partikularno rešenje $y_p(t)$ koje zadovoljava uslove:

$$y'(0)=\lambda,\quad y'\left(\frac{\pi}{2a}\right)+\lambda y\left(\frac{\pi}{2a}\right)=0\qquad (\lambda \text{ realna konstanta}).$$

2° Odrediti amplitudu i period partikularnog rešenja $y_p(t)$.

132. Smenom $x=1/t$, $y=ute^{-t}$ transformisati diferencijalnu jednačinu

$$x^2y''+(3x-1)y'+y=0$$

odrediti njeno rešenje koje ostaje konačno kad $x\to+\infty$.

133. Rešiti konturni problem

$$y''(x)+\lambda y(x)=0, \quad y'(a)=my(a), \quad y'(b)=my(b)$$

(m proizvoljna konstanta različita od nule; $a \neq b$; λ realno).

Rešenje. Opšte rešenje diferencijalne jednačine je

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cos kx + C_2 \sin kx && (\lambda = k^2); \\ (1) \qquad &= C_1 + C_2 x && (\lambda = 0); \\ &= C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx && (\lambda = -k^2). \end{aligned}$$

(k realna konstanta; C_1, C_2 integracione konstante).

Slučaj $\lambda = k^2$. Konstante C_1 i C_2 određuju se iz uslova:

$$(2) \qquad \begin{aligned} C_1(m \cos ka + k \sin ka) + C_2(m \sin ka - k \cos ka) = 0, \\ C_1(m \cos kb + k \sin kb) + C_2(m \sin kb - k \cos kb) = 0. \end{aligned}$$

Determinanta ovog skupa jednačina je

$$\Delta(k) \equiv (m^2 + k^2) \sin k(b-a).$$

Skup jednačina (2) imaće i netrivijalnih rešenja, ako je $\Delta = 0$, tj. ako je

$$k = n\pi/(b-a) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Prema tome, sopstvene vrednosti ovog konturnog problema su

$$(3) \qquad \lambda = k^2 = \{n\pi/(b-a)\}^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

S obzirom na oblik kojim je definisan parametar λ, uzeli smo samo $n = 1, 2, 3, \ldots$
Prema (3) sopstvene funkcije su

$$\Phi_n(x) = m \sin\left[\frac{n}{b-a}(a-x)\right] - \frac{n}{b-a} \cos\left[\frac{n}{b-a}(a-x)\right] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ostaje još da se tretiraju slučajevi $\lambda = 0$ i $\lambda = -k^2$.

134. Rešiti konturni problem

$$(1) \qquad 2f(x)f''(x) = \{f'(x)\}^2, \quad f(0) = f(2\pi) = (\pi/2)^2.$$

Rešenje. Smenom $f(x) = \exp(\int z\,dx)$ jednačina (1) postaje

$$2z' = -z^2.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}C_1 \qquad (C_1 \text{ integraciona konstanta}).$$

$$\therefore \quad f(x) = \exp\left(\int \frac{2}{x+C_1} dx\right).$$

$$\therefore \quad f(x) = C_2(x+C_1)^2 \qquad (C_2 \text{ integraciona konstanta}).$$

Integracione konstante C_1 i C_2 odredićemo iz uslova

$$(2) \qquad (\pi/2)^2 = C_2 C_1^2, \qquad (\pi/2)^2 = C_2(2\pi + C_1)^2.$$

$$\therefore \quad C_2\{(2\pi + C_1)^2 - C_1^2\} = 0.$$

Budući da je $C_2 \neq 0$, jer $C_2 = 0$ protivureči uslovima (2), izlazi

$$(2\pi + C_1)^2 - C_1^2 = 0 \Rightarrow C_1 = -\pi.$$

Iz (2) sleduje $C_2 = 1/4$.
Prema tome, sopstvena funkcija je

$$(3) \qquad f(x) = \frac{1}{4}(x-\pi)^2.$$

135. Odrediti funkciju $x = x(t)$ koja zadovoljava uslove:

$$(1)\quad \begin{array}{ll} dx(t)/dt = ax^3 + bx + c & (a,\ b,\ c,\ \text{realne konstante}), \\ x(0) = x_0 \neq 0 & (x_0\ \text{realna konstanta}) \end{array}$$

u slučajevima:

1^0 $a = b = c = 0$; 2^0 $a = b = 0,\ c \neq 0$;

3^0 $a = c = 0,\ b \neq 0$; 4^0 $b = c = 0,\ a \neq 0$;

5^0 $c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0$; 6^0 $a = 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$.

Da li nađeno rešenje $x(t)$ ostaje konačno kad $t \to \infty$? Posebno ispitati svaki od šest navedenih slučajeva.

136. Data je diferencijalna jednačina

$$(\text{E})\qquad (1 - x^2)\, y''(x) - x y'(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \qquad (\lambda\ \text{realan parametar})$$

i konturni uslovi $y(a) = y(b) = 0$ $(a \neq b)$.

Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije ovog konturnog problema.

Za integraciju jednačine (E) upotrebiti smene: $x = \cos t$ i $x = \pm \operatorname{ch} t$.

137. Odrediti realan parametar λ tako da rešenje $y(x)$ diferencijalne jednačine

$$(\text{E})\qquad y''(x) + 4y'(x) + (\lambda^2 + 4)\, y(x) = 0$$

ima osobinu:

$$y(0) = 0, \qquad y(2\pi) = 0$$

i da se k-puta i samo toliko puta anulira u intervalu $(0, 2\pi)$.

Rešenje. Opšte rešenje diferencijalne jednačine (E) je

$$(1)\qquad y = e^{-2x}(A \sin \lambda x + B \cos \lambda x) \qquad (A,\ B\ \text{integracione konstante}).$$

Iz uslova $y(0) = 0$ izlazi $B = 0$.

Rešenje (1) dobija sada oblik

$$(2)\qquad y = A e^{-2x} \sin \lambda x.$$

Takođe treba da bude ispunjen uslov

$$\sin 2\lambda\pi = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = m/2 \quad (\pm m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Parametar m treba tako izabrati da se funkcija

$$A e^{-2x} \sin \frac{m}{2} x$$

anulira tačno k puta u intervalu $(0,\ 2\pi)$. To će biti ako je $m = k + 1$, pa je $\lambda = \dfrac{1}{2}(k+1)$.

Zaista, razmak između dve uzastopne nule funkcije $\sin \dfrac{k+1}{2} x$ je $\dfrac{2\pi}{k+1}$. U intervalu $(0, 2\pi)$ posmatrana funkcija ima tačno k nula.

Traženo rešenje glasi

$$y(x) = A e^{-2x} \sin \frac{k+1}{2} x \qquad (A\ \text{konstanta} \neq 0).$$

138. Odrediti realan parametar λ tako da diferencijalna jednačina

$$y''(x)+2y'(x)+(\lambda^2+1)\,y(x)=0$$

ima rešenje $y_p(x)$ koje zadovoljava uslove

$$y_p(0)=0\,, \quad y_p(2\pi)=0$$

i povrh toga se još tačno k puta anulira u intervalu $(0, 2\pi)$.

Rezultat. Traženi parametar je $\lambda=\frac{1}{2}(k+1)$.

Odgovarajuće partikularno rešenje je

$$y_p(x)=A e^{-x}\sin\frac{1}{2}(k+1)\,x \qquad (A \text{ konstanta} \neq 0)\,.$$

139. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'''+2y''-y'-2y=x e^{-x}\,.$$

Da li postoji takvo partikularno rešenje $y_p(x)$ ove jednačine koje ima osobine:

$y_p(x)$ ostaje konačno kada $x\to+\infty$;

$y_p(0)=0; \quad y_p'(0)=0$?

Ako je odgovor potvrdan, nacrtati krivu $y=y_p(x)$.

Rezultat. Opšte rešenje date jednačine glasi

$$y=\frac{1}{4}e^{-x}(x-x^2)+C_1 e^{x}+C_2 e^{-x}+C_3 e^{-2x} \qquad (C_1, C_2, C_3 \text{ integracione konstante})\,.$$

140. Rešiti konturni problem

$$\begin{aligned} &y^{(4)}(x)-k^4 y(x)=0 \qquad (k\neq 0)\,, \\ &y(0)=y''(0)=y''(1)=y'''(1)-y(1)=0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Uputstvo. Opšte rešenje jednačine (1) je

$$y(x)=C_1\operatorname{ch}kx+C_2\operatorname{sh}kx+C_3\cos kx+C_4\sin kx \tag{2}$$

$$(C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ integracione konstante})\,.$$

Ako se upotrebe uslovi $y(0)=y''(0)=0$, dobija se

$$C_1=0\,, \quad C_3=0\,. \tag{3}$$

Kada se druga dva konturna uslova primene na rešenje (2), dobija se

$$\begin{aligned} &C_2\operatorname{sh}k-C_4\sin k=0\,, \\ &C_2(k^3\operatorname{ch}k-\operatorname{sh}k)-C_4(k^3\cos k+\sin k)=0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Skup jednačina (4) ima i drugih rešenja osim trivijalnih, ako je parametar k definisan relacijom

$$k^3(\operatorname{tg}k-\operatorname{th}k)=2\operatorname{tg}k\operatorname{th}k\,. \tag{5}$$

Za određivanje realnih rešenja ove jednačine podesno je posmatrati jednačinu (5) u obliku

$$\operatorname{coth}k-\operatorname{cotg}k=2/k^3 \qquad (\text{jer je } k\neq 0)\,.$$

141. Data je diferencijalna jednačina

$$y''+2ay'+2a^2y=ae^{-ax}\cos ax \qquad (a=\text{const}).$$

1° Odrediti opšte rešenje ove jednačine.

2° Odrediti njeno partikularno rešenje $y_p(x)$ za koje je

$$y_p(0)=0, \quad y_p(1)=1.$$

3° Partikularno rešenje $y_p(x)$, nađeno u 2°, zavisi od parametra a. Pokazati da postoji $\lim\limits_{a\to 0} y_p(x)$ za svako x.

142. Funkciju $f(x)\equiv 1$ $(0<x<l)$ razviti u red sopstvenih funkcija konturnog problema

$$(1) \qquad y''+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad aly'(l)+y(l)=0$$

$$(a=\text{const};\ l=\text{const}>0).$$

Rešenje. Ako je $\lambda=k^2$, opšte rešenje date diferencijalne jednačine je

$$y=C_1\cos kx+C_2\sin kx \qquad (C_1,\ C_2 \text{ integracione konstante}).$$

Konturni uslovi svode se na relacije

$$C_1=0, \qquad C_2(alk\cos kl+\sin kl)=0.$$

Netrivijalna rešenja konturnog problema (1) dobićemo iz uslova

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\mu=-a\mu \qquad (kl=\mu).$$

Transcendentna jednačina (1) ima po μ beskonačno mnogo rešenja:

$$(3) \qquad \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots$$

Karakteristične (sopstvene) vrednosti konturnog problema (1) su:

$$\frac{\mu_1^2}{l^2},\ \frac{\mu_2^2}{l^2},\ \frac{\mu_3^2}{l^2},\ \ldots,$$

a karakteristične (sopstvene) funkcije su

$$\sin\left(\frac{\mu_r}{l}x\right) \qquad (r=1,2,3,\ldots).$$

Traženi red sopstvenih funkcija (*Fourier*-ov red) ima oblik

$$1=\sum_{r=1}^{\infty} A_r\sin\left(\frac{\mu_r}{l}x\right) \qquad (0<x<l),$$

gde je

$$A_r=\frac{2(1-\cos\mu_r)}{\mu_r-\frac{1}{2}\sin 2\mu_r}.$$

143. Data je diferencijalna jednačina

$$x^4y''+2x^3y'+\lambda^2y=0 \qquad (\lambda \text{ parametar})$$

i konturni uslovi $y(a)=y(b)=0$.

Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije ovog konturnog problema.

Uputstvo. Smenom $x=1/t$ data jednačina se transformuje u jedan nov oblik podesniji za integraciju.

V. RAZNI PROBLEMI

144. Rešiti diferencijalne jednačine:

1° $(1-x^2)(y''-y'^2/y)+xy'-y=0$; 2° $yy''+y^2-y'=0$;

3° $y''+f(y)y'^2+g(y)y'^3=0$; 4° $y''+f(y)y'^2=0$;

5° $(1+x^2)y''+1+y'^2=0$; 6° $y''+f(x)y'^2=0$;

7° $2yy''-3y'^2-4y^2=0$; 8° $yy''+y'^2=f(x)$;

9° $(xy'-y)^2+x^2yy''=0$; 10° $y''\sin y=1$.

145. Rešiti diferencijalne jednačine:

1° $(y''+y)(y'''+y')=x-1$; 2° $y'''=y''^2$.

146. Rešiti diferencijalne jednačine:

1° $\frac{d^2y}{dx^2}+a(\cos y)^2\frac{dy}{dx}+by=0$ $(a, b=\text{const})$;

2° $y''=1/\sqrt{k^2+a^2(y-b^2)}$ $(k, a, b=\text{const})$;

3° $y''+f(x)(y')^a+g(x)y'=0$ $(a=\text{const})$.

147. Kakav će oblik imati opšti integral diferencijalne jednačine

$$y''-2y'+(1-\alpha^2)y=e^x+\sin^2 x$$

za različite vrednosti parametra α?

148. Odrediti neprekidnu funkciju $f(x)$ koja zadovoljava uslov

$$\int_0^x tf(t)\,dt=x^2+f(x).$$

Uputstvo. Posle diferenciranja po x dobija se

$$f'(x)-xf(x)=-2x.$$

Funkcija $f(x)$ ima oblik $-2\exp(x^2/2)+2$.

149. Odrediti funkciju $f(x, y)$ iz uslova

$$f_x'(x, y)=(y+1)\sin(x+y)+x\cos(x+y),$$

$$f_y'(x, y)=(x-1)\cos(x+y)+y\sin(x+y).$$

150. Odrediti $f(x, y)$ iz uslova

$$f_x'(x, y)=(3y-x)/(x+y)^3, \quad f_y'(x, y)=(y-3x)/(x+y)^3.$$

151. Da li je mogućno izabrati parametre a, b, c, a', b', c' tako da izraz

$$\{(x+y+z)\,dx+(ax+by+cz)\,dy+(a'x+b'y+c'z)\,dz\}/(x+y+z)^3$$

bude totalni diferencijal jedne funkcije $u(x, y, z)$? U afirmativnom slučaju, odrediti funkciju $u(x, y, z)$.

152. Odrediti neprekidno-diferencijabilnu funkciju $f(x)$ koja zadovoljava integralnu jednačinu

$$\int_0^x \{1+f'^2(x)\}^{1/2}\, dx = 2x^{1/2}+f(x).$$

Rezultat. $f(x)=\frac{1}{3}x^{1/2}(x-3)$.

153. Dat je skup hiperbola $x^2-y^2-2ax+1=0$ (a parametar). Odrediti ortogonalne trajektorije ovih hiperbola i ispitati da li je među njima jedna elipsa.

154. Posmatrati skup krivih

$$(\Gamma) \qquad y=\lambda f(x)+g(x) \qquad (\lambda \text{ parametar}),$$

gde su $f(x)$ i $g(x)$ dve date funkcije promenljive x koje imaju prvi izvod. U tački preseka krive (Γ) i prave $x=a$ povučena je tangenta krive (Γ).

1° Kad λ varira od $-\infty$ do $+\infty$, dobija se beskonačan skup tangenata. Pokazati da sve tangente prolaze kroz jednu fiksnu tačku S koju treba odrediti.

2° Ako je y-osa geometrisko mesto tačke S, kada se a menja, koji oblik imaju funkcije $f(x)$ i $g(x)$?

3° Ako je x-osa geometrisko mesto tačke S, šta se može reći o funkcijama $f(x)$ i $g(x)$?

155. Diferencijalna jednačina

$$(E_1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0$$

smenom $x=Q(t)$ postaje

$$(E_2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0.$$

Pokazati da koeficijenti jednačina (E_1) i (E_2) zadovoljavaju identitet

$$\{2P(x)\,Q(x)+dQ(x)/dx\}\,\{Q(x)\}^{-3/2}\equiv\{2p(t)\,q(t)+dq(t)/dt\}\,\{q(t)\}^{-3/2}.$$

156. Odrediti funkciju $y=f(x)$ tako da je

$$\int x^2\,dy+\int xy\,dx=ax^3 \qquad (a=\text{const}).$$

157. Odrediti neprekidne funkcije $f(x)$ koje zadovoljavaju uslov

$$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{3}x\{f(x)+2f(0)\}.$$

158. Rešiti skup *Clairaut*-ovih diferencijalnih jednačina

$$x=t\dot{x}+f(\dot{x},\dot{y}), \qquad y=t\dot{y}+g(\dot{x},\dot{y}).$$

Kako će glasiti skup *Clairaut*-ovih jednačina, gde su $x_k(t)$ $(k=1,2,\dots,n)$ funkcije promenljive t?

159. Rešiti skupove diferencijalnih jednačina

$$1^0 \quad \dot{x}=x(y-z), \quad \dot{y}=y(z-x), \quad \dot{z}=z(x-y);$$

$$2^0 \quad \dot{x}=x(y^2-z^2), \quad \dot{y}=y(z^2-x^2), \quad \dot{z}=z(x^2-y^2).$$

160. Rešiti skup diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x(cz-by)}=\frac{dy}{y(ax-cz)}=\frac{dz}{z(by-ax)}.$$

Rezultat. $xyz=C_1, \quad ax+by+cz=C_2$ (C_1, C_2 integracione konstante).

161. U odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxyz$ dato je polje vektora $\vec{A}=\{2xz, yz, f(x, y)\}$, gde su (x, y, z) koordinate početne tačke M vektora $\vec{A}$ i gde je $f(x, y)$ jedna skalarna funkcija, koja zavisi samo od x i y.

1^0 Odrediti $f(x, y)$ tako da je $\vec{A}=\operatorname{grad} u$, gde je u skalarna funkcija od x, y, z koju takođe treba naći.

2^0 Odrediti linije vektorskog polja $\vec{A}$ dobijenog u prethodnoj tački [linija vektorskog polja $\vec{A}$ je kriva čija je tangenta u svakoj od njenih tačaka $M(x, y, z)$ nosač vektora $\vec{A}(M)$].

162. Projekcije vektora $\vec{A}$ su:

$$yz(y^2-z^2), \quad zx(z^2-x^2), \quad xy(x^2-y^2),$$

gde su (x, y, z) koordinate početka vektora $\vec{A}$.

Odrediti krive čije su tangente u svakoj njenoj tački $M(x, y, z)$ nosači vektora $\vec{A}(M)$.

163. Dat je izraz $P\,dx+Q\,dy$, u kome je

$$P\equiv y+yz^2/(x^2+y^2), \qquad Q\equiv -x-xz^2/(x^2+y^2),$$

gde je z jedna funkcija od x i y.

1^0 Obrazovati relaciju (E) koju treba da zadovoljava funkcija z da bi dati izraz $P\,dx+Q\,dy$ bio totalni diferencijal jedne funkcije $u(x, y)$.

U relaciji (E) izvršiti smenu promenljivih $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ (r, θ nove nezavisno promenljive), i polazeći od transformisane jednačine, pokazati da je opšti oblik funkcije z sa traženom osobinom dat jednačinom

$$x^2+y^2+z^2=F(y/x) \qquad \{F(y/x) \text{ proizvoljna funkcija od } y/x\}.$$

2^0 Specijalno ako je $F(y/x)\equiv 4/(1+y^2/x^2)$, odrediti $u(x, y)$.

Rezultat. 1^0 Relacija (E) glasi $z(xz_x+yz_y)+x^2+y^2=0$.

U polarnim koordinatama jednačina (E) ima oblik $zz_r+r=0$.

$2^0 \quad u(x, y)\equiv -2\{(xy)/(x^2+y^2)+\operatorname{arc\,tg}(y/x)\}+\text{const}.$

164. Ispitati da li postoji takva funkcija $\mu(u)$ $(u=x+y+z)$ da izraz

$$\mu(u)\,[(y+z)\,yz\,dx+(z+x)\,zx\,dy+(x+y)\,xy\,dz]$$

bude totalni diferencijal jedne funkcije $F(x, y, z)$. U potvrdnom slučaju odrediti funkciju $F(x, y, z)$.

165. Neka je y ma koji integral jednačine

$$\text{(E)} \qquad y''=f(x)\,y,$$

gde je $f(x)$ diferencijabilna funkcija promenljive x.

1° Ispitati da li kvadrat tog integrala $z=y^2$ zadovoljava jednu linearnu homogenu diferencijalnu jednačinu trećeg reda (E_1) čiji koeficijenti zavise samo od $f(x)$ i $f'(x)$.

2° U potvrdnom slučaju, odrediti opšti integral jednačine (E_1), ako su y_1 i y_2 dva linearno nezavisna integrala jednačine (E).

Rešenje. 1° Formirajmo relacije:

$$\text{(1)} \quad z=y^2; \quad z'=2yy';$$

$$\text{(2)} \quad z''=2yy''+2(y')^2=2f(x)\,y^2+2(y')^2 \quad \text{(na osnovu E)};$$

$$\text{(3)} \quad z'''=2f'(x)\,y^2+4f(x)\,yy'+4y'y''=2f'(x)\,y^2+8f(x)\,yy' \quad \text{(na osnovu E)}.$$

Ako se iz tri relacije (1) i (3) eliminišu dve veličine y^2 i yy', dobija se

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 0 \\ z' & 0 & 2 \\ z''' & 2f'(x) & 8f(x) \end{vmatrix}=0,$$

odnosno

$$z'''-8f(x)\,z'-4f'(x)\,z=0.$$

2° Funkcije y_1^2 i y_2^2 su dva partikularna rešenja jednačine (4).

Da li je funkcija $y_1 y_2 \equiv \frac{1}{2}\{(y_1+y_2)^2-(y_1^2+y_2^2)\}$ partikularno rešenje jednačine (4) i da li je ono linearno nezavisno u odnosu na y_1^2 i y_2^2?

166. Dat je skup diferencijalnih jednačina

$$\text{(S)} \qquad \dot{x}=e^x\cos y, \quad \dot{y}=e^x\sin y.$$

Ako je $z(t)=x(t)+iy(t)$, gde su $x(t)$ i $y(t)$ definisani skupom (S), pokazati da kompleksna funkcija z promenljive t zadovoljava jednu diferencijalnu jednačinu, čijom se integracijom dobijaju $z(t)$, $x(t)$, $y(t)$.

Rešiti (S) i nekim drugim načinom, pa uporediti rezultate.

Da li se navedeni postupak za integraciju skupa (S) može primeniti i na skup jednačina

$$\ddot{x}=e^x\cos y, \quad \ddot{y}=e^x\sin y?$$

Primeniti ovaj postupak na skup jednačina

$$\dot{x}=P(x, y), \quad \dot{y}=Q(x, y),$$

gde su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ realni i imaginarni deo jedne iste analitičke funkcije promenljive $z(\equiv x+iy)$.

167. Rešiti skup diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{dt}=y+z, \quad \frac{dy}{dt}=z+x, \quad \frac{dz}{dt}=x+y.$$

Odrediti $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ pod uslovom da je:

$$x(0)=a, \quad y(0)=b, \quad z(0)=c \qquad (a, b, c \text{ date konstante}).$$

Pokazati da je kriva koju opisuje tačka $\{x(t), y(t), z(t)\}$, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$, ravna i odrediti jednačinu ravni (P) ove krive.

Kad parametri a, b, c variraju, ravan (P) takođe varira i rotira oko jedne fiksne prave koju treba odrediti.

168. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine četvrtog reda

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} y^{(4)} & y^{(3)} & y'' \\ y^{(3)} & y'' & y' \\ y'' & y' & y \end{vmatrix} = 0.$$

Rešenje. Posmatrajmo relaciju

$$(2) \qquad y''+Ay'+By=0,$$

gde su A i B dve konstante.

Posle diferenciranja relacija (2) postaje

$$(3) \qquad y^{(3)}+Ay''+By'=0,$$

$$(4) \qquad y^{(4)}+Ay^{(3)}+By''=0.$$

Rezultat eliminacije parametara A i B iz relacije (2), (3), (4) je diferencijalna jednačina (1).

Opšte rešenje jednačine (2) je

$$(5) \qquad y=Ce^{r_1x}+De^{r_2x} \qquad (C, D \text{ integracione konstante}),$$

gde su r_1 i r_2 rešenja karakteristične jednačine

$$r^2+Ar+B=0.$$

Relacija (5) definiše opšte rešenje jednačine (1), gde su A, B, C, D integracione konstante.

Generalizacija. Rešiti takođe jednačine

$$\begin{vmatrix} y^{(6)} & y^{(5)} & y^{(4)} & y^{(3)} \\ y^{(5)} & y^{(4)} & y^{(3)} & y'' \\ y^{(4)} & y^{(3)} & y'' & y' \\ y^{(3)} & y'' & y' & y \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} y^{(8)} & y^{(7)} & y^{(6)} & y^{(5)} & y^{(4)} \\ y^{(7)} & y^{(6)} & y^{(5)} & y^{(4)} & y^{(3)} \\ y^{(6)} & y^{(5)} & y^{(4)} & y^{(3)} & y'' \\ y^{(5)} & y^{(4)} & y^{(3)} & y'' & y' \\ y^{(4)} & y^{(3)} & y'' & y' & y \end{vmatrix} = 0,$$

kao i opštu jednačinu ovog tipa

$$\begin{vmatrix} y^{(2n)} & y^{(2n-1)} & \dots & y^{(n)} \\ y^{(2n-1)} & y^{(2n-2)} & & y^{(n-1)} \\ \vdots & & & \\ y^{(n+1)} & y^{(n)} & & y' \\ y^{(n)} & y^{(n-1)} & & y \end{vmatrix} = 0 .$$

169. Rešiti jednačinu

$$\begin{vmatrix} y^{(5)} & y^{(4)} & y^{(3)} \\ y^{(4)} & y^{(3)} & y'' \\ y^{(3)} & y'' & y' \end{vmatrix} = 0$$

kao i njenu generalizaciju

$$\begin{vmatrix} y^{(2n+1)} & y^{(2n)} & \dots & y^{(n+1)} \\ y^{(2n)} & y^{(2n-1)} & & y^{(n)} \\ \vdots & & & \\ y^{(n+1)} & y^{(n)} & & y' \end{vmatrix} = 0 .$$

170. Data je diferencijalna jednačina

$$\text{(E)} \qquad pq\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (p^2+q^2)\frac{dy}{dx} + pq = 0 ,$$

u kojoj su p i q respektivno: $\partial z/\partial x$ i $\partial z/\partial y$, gde je

$$z = (x-y)\, g(x+y) + h(x+y) .$$

(g i h su dve proizvoljne funkcije od $x+y$ koje imaju izvode drugog reda).

Pokazati da se integralne krive jednačine (E) mogu odrediti i da se jedna familija ovih krivih dobija bez kvadratura, a druga pomoću jedne kvadrature.

Primedba. Integracija jedne od jednačina koje se dobijaju iz (E) može da se izvrši na osnovu činjenice da ona ima integracioni faktor oblika $\mu = \mu(x+y)$.

171. Podesnim grupisanjem članova integraliti jednačine:

1° $z\,dx + z\,dy - (x+y)\,dz = 0$; 2° $xz\,dx + yz\,dy - (x^2+y^2)\,dz = 0$.

Rešenje. 2° Jednačini se može dati oblik

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = \frac{dz}{z} .$$

Odavde izlazi

$$x^2 + y^2 = C z^2 \qquad (C \text{ integraciona konstanta}) .$$

172. Ispitati i grafički prikazati funkciju $f(x)$ koja zadovoljava uslove:

$$(x^2+1)\, f'(x) = x f(x) + 1 , \qquad f(0) = 1 .$$

173. Izračunati poluprečnik krivine u tački $(1, 1)$ krive $y = f(x)$ koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$dy/dx = x^2 + y^2 .$$

174. Data je diferencijalna jednačina

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2x}{x^2-1}y+2=0.$$

1° Odrediti integralnu krivu (C) ove jednačine koja prolazi kroz tačku (0, 0).

2° Nacrtati krivu (C).

3° Izračunati veličinu površine koju ograničavaju kriva (C) i x-osa u I kvadrantu.

175. Odrediti funkciju $y=y(x)$ koja zadovoljava uslove

$$(xy-y^2)\,y'=y^2, \qquad y(1)=-1.$$

176. Pokazati da je funkcija $(\arcsin\sqrt{x})/\sqrt{x(1-x)}$ jedno rešenje diferencijalne jednačine oblika

$$y'=f(x)\,y+g(x),$$

gde su $f(x)$ i $g(x)$ racionalne funkcije od x koje treba obrazovati. Rešiti ovu diferencijalnu jednačinu i pokazati da ona ima jedno partikularno rešenje koje se može razviti u potencijalni red u okolini tačke $x=0$.

177. Odrediti ortogonalne trajektorije skupa $C(a)$ cikloida

$$x=a(t-\sin t), \qquad y=a(1-\cos t).$$

Proveriti da li su krive $C(b)$, definisane jednačinama

$$x=b(t-\sin t)/t^2, \qquad y=b(1-\cos t)/t^2,$$

tražene trajektorije.

178. Odrediti i grafički prikazati ono rešenje jednačine $4y''=y$ koje zadovoljava uslove:

$$y\to 0 \text{ kad } x\to+\infty \text{ i } y'=6 \text{ kad je } x=0.$$

179. Integraliti jednačinu

$$xy''+2(\lambda+1)\,y'+xy=0 \qquad (\lambda>-1).$$

Pokazati da je jedno partikularno rešenje ove jednačine funkcija

$$y_1(x)=\int_0^1 (1-t^2)^\lambda \cos xt\,dt.$$

Ako je λ prirodan broj, pokazati da se ovaj integral može izraziti pomoću elementarnih funkcija.

180. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$3y''^2-y'y'''-y''y'^2=0.$$

Uputstvo. Promeniti ulogu nezavisno promenljive i funkcije, pa se dobija

$$x'''+x''=0.$$

181. Pokazati da diferencijalna jednačina

$$(1) \qquad (x^4-6x^2+1)\,y'-(4x^3-12x)\,y=4(x^2+1)^3$$

ima kao partikularno rešenje jedan polinom trećeg stepena koji treba odrediti.

Odrediti opšte rešenje ove jednačine.

Pokazati da poznavanje jednog integrala jednačine (1) omogućava određivanje neodređenog integrala

$$J(x)=\int\frac{(x^2+1)^3}{(x^4-6x^2+1)^2}\,dx.$$

Rešenje. Bez teškoće nalazimo da je polinom

$$y_1(x)=4x(1-x^2)$$

jedno partikularno rešenje jednačine (1).

Izvršimo li smenu

$$y=y_1+t \qquad (t \text{ nova funkcija promenljive } x),$$

dobijamo

$$\frac{t'}{t}=\frac{4x^3-12x}{x^4-6x^2+1},$$

odakle izlazi

$$t=C(x^4-6x^2+1) \qquad (C \text{ integraciona konstanta}).$$

Opšte rešenje jednačine (1) glasi

$$y=4x(1-x^2)+C(x^4-6x^2+1).$$

Kako je $y_1(x)$ partikularno rešenje jednačine (1), važi identitet

$$(2) \qquad (x^4-6x^2+1)\,y_1'(x)-(4x^3-12x)\,y_1(x)=4(x^2+1)^3.$$

Traženi integral $J(x)$, na osnovu (2), dat je formulom

$$4J(x)=\int\frac{y_1'}{x^4-6x^2+1}\,dx-\int\frac{(4x^3-12x)\,y_1}{(x^4-6x^2+1)^2}\,dx=\frac{y_1}{x^4-6x^2+1}+\text{const}.$$

Odavde dobijamo

$$J(x)=\frac{x-x^3}{x^4-6x^2+1}+\text{const}.$$

182. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(1) \qquad xyy''-xy'^2+yy'+y^2=0.$$

Pokazati da je

$$y_n(x)=\frac{1}{n!}x^n e^{-x} \qquad (n \text{ prirodan broj})$$

partikularno rešenje jednačine (1) i da maksimum funkcije $y_n(x)$ opada kada n raste.

183. Odrediti funkcije $y(x)$ i $z(x)$, definisane relacijama

$$y^2-z^2=a^2, \quad y'^2-z'^2=b \qquad (a,\ b \text{ konstante}).$$

184. Pokazati da su funkcije

$$y_1 = \left(\frac{1+ix}{2}\right)^{1/2}, \qquad y_2 = \left(\frac{1-ix}{2}\right)^{1/2}$$

partikularna rešenja diferencijalne jednačine

$$\text{(E)} \qquad (1+x^2)\,y'' + x\,y' - \frac{1}{4}\,y = 0.$$

Na osnovu ove činjenice zaključiti da je funkcija $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ takođe jedno partikularno rešenje jednačine (E).

185. Diferencijalna jednačina

$$x^2(x^2-1)\,y'' - (x^2-2)\,(x\,y'-y) = 0$$

ima partikularno rešenje $y_1 = x$.

Odrediti opšte rešenje ove jednačine.

186. Od integralnih krivih jednačine

$$y'' + 4y = \sin x$$

odrediti onu koja u tački (0, 0) ima sa svojom tangentom u toj tački dodir što je moguće višeg reda. Tako nađena partikularna integralna kriva sastoji se iz talasa. Izračunati veličinu površine između x-ose i jednog talasa.

187. Ako je $\dfrac{d^2V}{dx^2} = n^2 V$ i $V = V_0$ za $x = 0$ i $V = 0$ za $x = l$, pokazati da je

$$V = \frac{V_0 \operatorname{sh} n\,(l-x)}{\operatorname{sh} n\,l} \qquad (n,\ V_0,\ l \text{ konstante}).$$

188. Dokazati da je funkcija

$$y(x) = \int_0^{\pi} \cos\,(a\,x \cos t)\,dt \qquad (a = \text{const})$$

jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + a^2\,x\,y = 0.$$

189. Data je diferencijalna jednačina

$$x^2y''(x) - 6y(x) = 0.$$

1° Odrediti opšte rešenje ove jednačine.

2° Odrediti partikularno rešenje $y_p(x)$ koje zadovoljava inicijalne uslove:

$$y_p(1) = 2, \qquad y_p'(1) = 1.$$

3° Za razne vrednosti parametra a odrediti broj realnih rešenja jednačine $y_p(x) = a$, gde je $y_p(x)$ nađeno partikularno rešenje.

4° Naći opšte rešenje jednačine

$$x^2y''(x) - 6y(x) = x^2 \log x.$$

190. Opšte rešenje diferencijalne jednačine

(1) $$(\sin x)^2 y'' + (\sin x \cos x)\, y' - y = 0$$

može se napisati bilo u obliku

(2) $$y = \frac{A}{\sin x} + B \operatorname{cotg} x \qquad (A,\ B \text{ integracione konstante}),$$

bilo u obliku

(3) $$y = C \operatorname{tg}\frac{x}{2} + D \operatorname{cotg}\frac{x}{2} \qquad (C,\ D \text{ integracione konstante}).$$

Proveriti ovo i pokazati da se od rešenja oblika (2) može preći na rešenje oblika (3) i obrnuto.

Polazeći i od (2) i od (3) odrediti ono rešenje $y_p(x)$ jednačine (1) koje zadovoljava uslove:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{i} \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

191. Pokazati da je svako rešenje diferencijalne jednačine

(1) $$x^2(x+3)\, y''' - 3x(x+2)\, y'' + 6(x+1)\, y' - 6y = 0$$

jedan polinom po x.

Odrediti i grafički prikazati ono partikularno rešenje jednačine (1) koje u tački $x=0$ ima extremum i uz to prolazi kroz tačku (1,1).

Rešenje. Ispitajmo da li data jednačina ima rešenje oblika

$$\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu x^{k-\nu} \qquad (a_0 \neq 0).$$

Prva tri izvoda ove funkcije su:

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} (k-\nu)\, a_\nu\, x^{k-\nu-1}, \ \sum_{\nu=0}^{k-2} (k-\nu)(k-\nu-1)\, a_\nu\, x^{k-\nu-2}, \ \sum_{\nu=0}^{k-3} (k-\nu)(k-\nu-1)(k-\nu-2)\, a_\nu\, x^{k-\nu-3}.$$

Ako se ove vrednosti zamene na levoj strani jednačine (1), dobija se jedan polinom čiji je koeficijent uz x^k oblika

$$a_0\,[k(k-1)(k-2) - 3k(k-1) + 6k - 6] \qquad (a_0 \neq 0).$$

Da bi jednačina (1) imala polinomnih rešenja, neophodno je da se izraz

$$k(k-1)(k-2) - 3k(k-1) + 6k - 6$$

odnosno

(2) $$k^3 - 6k^2 + 11k - 6$$

anulira bar za jednu vrednost koja je prirodan broj.

Kako se (2) anulira za $k = 1,\ 2,\ 3$, jednačina (1) može imati kao partikularna rešenja: jedan polinom prvog stepena, jedan polinom drugog stepena i jedan polinom trećeg stepena.

Polinom trećeg stepena

(3) $$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

biće rešenje ako je $C = D$.

Prema tome, polinom

(4) $$y = Ax^3 + Bx^2 + C(x+1)$$

je rešenje jednačine (1).

Ovo je ustvari, opšte rešenje jednačine (1).

Na osnovu (4) zaključujemo da jednačina (1) zaista ima polinomna rešenja prvog, drugog i trećeg stepena.

Ostaje još da se odredi i grafički prikaže partikularno rešenje.

192. Data je diferencijalna jednačina

$$(\cos x)\, y' + 3\,(\sin x)\, y = 4 \sin x + 2 \sin^3 x .$$

1^0 Odrediti njen opšti integral.

2^0 Konstruisati integralne krive i naći na njima one tačke kroz koje prolaze sve te krive.

3^0 Izračunati veličinu P površine između integralne krive, x-ose i pravih $x = k\pi$ i $x = (k+1)\pi$ (k pozitivan ceo broj ili nula). Pokazati da P ne zavisi od integracione konstante.

193. Data je *Riccati*-eva jednačina:

$$(x-1)\, y' - y^2 + xy - x + 1 = 0 .$$

1^0 Naći sve polinome prvog stepena koji su partikularni integrali date jednačine.

2^0 Znajući ove partikularne integrale, naći opšti integral date jednačine.

3^0 Pokazati da sve krive pretstavljene opštim integralom prolaze kroz tačku $(1, 1)$, izuzev jedne krive. Naći partikularan integral koji odgovara toj krivoj, ispitati njen tok i odrediti njene asimptote.

194. Data je diferencijalna jednačina $y' = y\sqrt{1-y^2}$.

Naći njen opšti integral i pokazati da se onaj partikularni integral, koji za $x=0$ daje $y=1$, može napisati u obliku

$$x = \log \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \qquad y = \sin t .$$

Konstruisati krivu datu ovim integralom.

Odrediti veličinu površine koju zaklapa ova kriva sa koordinatnim osama i pravom $x = a$, i ispitati čemu teži veličina te površine kad $a \to +\infty$.

195. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(1-x^2)\, y'' - xy' + 4y = 0$$

ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje polinom drugog stepena po x.

196. Odrediti ono rešenje diferencijalne jednačine

$$y''(x) - y(x) = 0$$

koje zadovoljava granične uslove:

$$y(0) + 2y'(0) = 1 , \qquad y(0) - y(1) = 2 .$$

197. Data je diferencijalna jednačina

$$(1) \qquad L[y] \equiv (x^2+1)\, y'' - 2xy' + 2y = 0 .$$

1^0 Pokazati da se konstante a, b, c mogu tako odrediti da funkcija

$$y = ax^2 + bx + c$$

pretstavlja opšte rešenje jednačine (1).

2^0 Odrediti opšte rešenje jednačine $L[y] = x^2 + 1$.

198. Da li postoji partikularni integral diferencijalne jednačine

$$x^2y''+4xy'+2y=\log(1+x)$$

koji se može razviti u potencijalni red u okolini početka?

U potvrdnom slučaju odrediti poluprečnik konvergencije ovog reda.

199. Odrediti integralne krive jednačine $yy''=2y'^2+y^2$ i među njima onu čija tangenta u tački $(0,1)$ zaklapa sa x-osom ugao $\frac{1}{3}\pi$. Nacrtati tu partikularnu krivu.

200. Odrediti partikularno rešenje $y=y_p(x)$ jednačine

$$2yy''-3y'^2=4y^2$$

koje zadovoljava uslove $y_p(0)=1$, $y_p'(0)=0$. Zatim po x rešiti jednačinu $y_p(x)=a$, gde je a realan parametar.

201. Odrediti krive u ravni koje imaju osobinu da im je poluprečnik krivine za sve tačke jedna ista konstanta.

202. Odrediti partikularno rešenje $y_p(x)$ jednačine

$$\frac{d^2y}{dx^2}=3y(y^2+1)^2$$

koje zadovoljava inicijalne uslove: $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Grafički prikazati dobijeno partikularno rešenje.

203. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''-3y'+2y=e^x,$$

kao i ono partikularno rešenje $y=f(x)$ koje zadovoljava inicijalne uslove:

$$f(0)=1, \quad f'(0)=0.$$

Nacrtati grafik partikularnog rešenja.

204. Obrazovati homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda koju zadovoljava funkcija $(\sin x)/x$ i čiji su koeficijenti racionalne funkcije po x. Zatim naći opšte rešenje tako obrazovane jednačine.

205. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ posmatrati cilindar $y=x^n$ i na njemu odrediti krivu koja ima osobinu da u svakoj njenoj tački M oskulatorna ravan prolazi kroz ortogonalnu projekciju tačke M na y-osi.

206. Ispitati da li jednačina

$$(x^2+x)y''+(1-4x)y'+6y=0$$

ima za rešenje polinom i u potvrdnom slučaju naći njeno opšte rešenje.

207. Data je diferencijalna jednačina

$$y''(x) - a^2 y(x) = \operatorname{ch} x \qquad (a \text{ realna konstanta}).$$

1° Odrediti opšte rešenje ove jednačine.

2° Odrediti njeno partikularno rešenje $y_p(x)$ koje zadovoljava uslove:

$$y_p(0) = 0, \quad y_p'(0) = 0.$$

3° Grafički prikazati funkciju $\lim\limits_{a \to 1} y_p(x)$.

208. Odrediti rešenje $y = f(x)$ jednačine $y'' = \operatorname{tg}^3 y + \operatorname{tg} y$ koje zadovoljava inicijalne uslove: $f(0) = \pi/4$, $f'(0) = 1$.

Grafički prikazati dobijeno rešenje.

209. Od integralnih krivih $y = y(x, C_1, C_2)$ jednačine

$$yy'' + y'^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

gde su α, β, γ parametri, odrediti one koje su parabole.

210. Rešiti konturni problem

$$y(x)\, y''(x) + y'^2(x) = f(x), \qquad y(a) = A, \qquad y(b) = B.$$

211. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + \lambda y' + y = \sin \omega x \qquad (\lambda, \omega \text{ parametri})$$

i izdvojiti ono partikularno rešenje koje je periodična funkcija promenljive x.

212. U jednačini $yy'' = k(y'^2 - 1)$ odrediti parametar k tako, da bi se opšti integral te diferencijalne jednačine mogao izraziti u konačnom obliku.

213. Odrediti funkciju $x(t)$ iz uslova

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{3t}, \qquad x(0) = 0, \qquad x(\log 2) = 0.$$

214. Odrediti i grafički prikazati funkciju $y = y(x)$ koja zadovoljava uslove:

$$x^4 y'' = y'(y' + x^3), \qquad y(1) = 2, \qquad y'(1) = 1.$$

215. Dokazati da relacije $x = \sin \frac{1}{2} t$, $y = \cos nt$ definišu jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1 - x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 4n^2 y = 0.$$

Na osnovu ovog izvesti formulu

$$\cos nt = 1 - \frac{n^2}{2!}\left(2 \sin \frac{1}{2} t\right)^2 + \frac{n^2(n^2 - 1^2)}{4!}\left(2 \sin \frac{1}{2} t\right)^4 - \cdots$$

216. Ako je $x = \sin pt$, $y = \cos qt$, dokazati da je

$$p^2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - p^2x\frac{dy}{dx} + q^2y = 0 \qquad (p \text{ i } q \text{ parametri}).$$

Koristeći ovaj rezultat, razviti funkciju $\cos qt$ u potencijalni red po $\sin pt$.

Primenom ovog postupka razviti takođe funkciju $\sin qt$ u potencijalni red po $\sin pt$.

Tako isto razviti funkciju $\operatorname{sh} qt$ u potencijalni red po $\operatorname{sh} pt$.

217. Pokazati da funkcija

$$y = \sin(a \arcsin x) \qquad (a \text{ parametar})$$

zadovoljava jednu diferencijalnu jednačinu oblika

$$\text{(E)} \qquad y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0,$$

gde su $P(x)$ i $Q(x)$ racionalne funkcije po x, koje treba odrediti.

Polazeći od (E), naći $y^{(n+2)}$ za $x=0$, zatim konstatovati da je

$$\sin(a \arcsin x) = a\left[x + \frac{1^2-a^2}{3!}x^3 + \frac{(1^2-a^2)(3^2-a^2)}{5!}x^5 + \cdots\right],$$

i odavde izvesti

$$\sin a\theta = a\left[\sin\theta + \frac{1^2-a^2}{3!}\sin^3\theta + \frac{(1^2-a^2)(3^2-a^2)}{5!}\sin^5\theta + \cdots\right],$$

gde je $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant +\pi/2$.

Odrediti opšte rešenje jednačine (E).

Rešiti analogan zadatak za funkciju

$$f(x) = \operatorname{ch}(a \arcsin x).$$

218. Rešiti jednačinu $f(x) = k$ (k parametar), gde je funkcija $f(x)$ definisana skupom uslova

$$f''(x) - 4f(x) = 2e^{3x}, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 2.$$

219. Diferencijalna jednačina

$$(\mathrm{E}_1) \qquad 9x\sqrt[3]{x}\,y'' + 6\sqrt[3]{x}\,y' - y = 0$$

smenom $x = t^3$ svodi se na jednačinu (E_2).

Integraliti jednačine (E_1) i (E_2) i odrediti partikularnu integralnu krivu jednačine (E_1) koja prolazi kroz tačku $(0, 1)$ i ima y-osu kao osu simetrije.

220. Odrediti funkciju $f(x)$ koja zadovoljava uslove:

$$f''(x) + 2f'(x) + 3f(x) = 2e^{-x}, \quad f(0) = 2, \quad f'(0) = -2$$

i grafički je prikazati.

221. Odrediti funkciju $y(x)$ koja zadovoljava uslove:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(x) + ay'^2(x) + b = 0 \qquad (a \text{ i } b \text{ pozitivne konstante}).$$

Grafički prikazati dobijeno rešenje.

222. Odrediti integralnu krivu (Γ) $y=f(x)$ jednačine

$$y'''+y'-2y=0$$

tako da je kriva (Γ) u tački $(0, 0)$ konkavna prema pozitivnom smeru y-ose; da ta kriva dodiruje pravu $y=x$ u tački $(0, 0)$; da je poluprečnik krivine krive (Γ) u tački $(0, 0)$ jednak 1.

223. Odrediti opšte rešenje jednačine

$$y''-y'-6y=4e^{-x}.$$

Naći: 1° partikularno rešenje $y=y(x)$ koje ispunjava uslove: $y=0$ ako je $x=0$ i y je ograničeno kada $x \to +\infty$;

2° partikularno rešenje $y=y(x)$ koje ispunjava uslove: $y=0$ ako je $x=0$ i $x=\log 2$;

3° partikularno rešenje $y=y(x)$ koje ispunjava uslove: $y=0$ i $y'=0$ ako je $x=0$.

Grafički prikazati tri dobijena partikularna rešenja.

224. Data je diferencijalna jednačina $y''-4y=4e^{-2x}$ koja u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy definiše jedan skup krivih (C). Od ovih krivih izdvojiti onu koja ima jednu asimptotu paralelnu x-osi i koja, u tački preseka sa y-osom, ima tangentu paralelnu pravoj $y=x$. Nacrtati ovu krivu.

225. Odrediti funkciju $f(x)$ koja zadovoljava uslove:

$$[f''(x)+f(x)]\,[f'''(x)+f'(x)]=x-1, \quad f(0)=2, \quad f'(0)=3, \quad f''(0)=-1.$$

226. Posmatrati diferencijalnu jednačinu

$$y'''-3y'+2y=x^3+e^{\alpha x} \qquad (\alpha \text{ realan parametar}).$$

1° Među integralnim krivim ove jednačine izdvojiti onu koja u koordinatnom početku ima sa x-osom dodir što je moguće višeg reda.

2° Da li se određeni red dodira može povisiti ako se α podesno izabere?

227. Odrediti onaj integral $y=y(x)$ diferencijalne jednačine

$$y'''(x)-y''(x)-y'(x)+y(x)=(24x-4)\,e^x+3x$$

koji zadovoljava uslove $y(0)=1$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=0$.

228. Naći funkciju $x=f(t)$ koja zadovoljava uslove:

$$\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-3x=0, \quad f(0)=0, \quad f'(0)=4, \quad f''(0)=0.$$

229. U diferencijalnoj jednačini

$$(\mathrm{E}) \qquad x^3\frac{d^3y}{dx^3}=ay \qquad (a \text{ realna konstanta})$$

izvršiti smenu $x=\pm e^t$, a zatim naći opšte rešenje jednačine (E).

230. Odrediti rešenje $y(x)$ diferencijalne jednačine

$$x^2 y'''(x) + 3x y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$$

koje za $x = 0$ dobija vrednost 1 i koje se može razviti u potencijalni red u okolini $x = 0$.

231. Odrediti integralne krive jednačine $y^{(4)} - y = 0$ i među njima onu čija je osa simetrije y-osa; koja prolazi kroz tačku $M(0, 3)$ i za koju je $(0, 2)$ centar oskulatornog kruga u tački M.

Nacrtati luk ove krive kad x varira od 0 do π.

232. Grafički prikazati funkciju $y = y(x)$ koja je definisana skupom uslova:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = x, \quad y(0) = y(l) = 0, \quad y'(0) = y'(l) = 0,$$

gde je l jedna pozitivna konstanta.

233. Odrediti integralne krive jednačine

$$y^{(4)} - a^4 y = 0 \qquad (a \text{ realna konstanta}),$$

koje su simetrične prema y-osi.

Tako određene integralne krive dodiruju x-osu u tačkama $(1,0)$ i $(-1,0)$, ako parametar a zadovoljava uslov

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} a + \operatorname{th} a = 0 .$$

Dokazati ovaj rezultat i izračunati najmanje pozitivno rešenje transcendentne jednačine (1) sa jednom tačnom decimalom.

234. Odrediti i grafički prikazati funkciju $y = f(x)$ koja zadovoljava uslove:

$$y^{(4)} + 8y''' + 23y'' + 26y' + 10y = 10\,e^{-x},$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = -6 .$$

235. Odrediti opšte rešenje skupa jednačina

$$\frac{dy(x)}{dx} + 3y(x) + z(x) = 0, \qquad \frac{dz(x)}{dx} - y(x) + z(x) = 0$$

i naći ono partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

236. Ispitati i konstruisati krivu $x = x(t)$, $y = y(t)$, gde su funkcije $x(t)$ i $y(t)$ definisane skupom uslova:

$$\dot{x} + 2x + y = 0, \quad \dot{y} + x + 2y = 0; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0 .$$

237. Odrediti funkcije $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, definisane skupom jednačina

$$\dot{x} + 2y - z = -\sin 2t, \quad \dot{y} - x = 0, \quad \ddot{z} + y + 4z = 4\sin t ,$$

238. Odrediti funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ koje zadovoljavaju uslove:

$$3\dot{x}=y-z, \quad \dot{y}=x-z, \quad 2\dot{z}=x-y;$$
$$x(0)=2, \quad y(0)=3, \quad z(0)=1.$$

Ako su $\{x(t), y(t), z(t)\}$ koordinate jedne tačke M u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, ispitati da li M opisuje ravnu krivu kada t varira.

239. Rešiti skup jednačina

$$\frac{dx}{dt}=a(y+z), \quad \frac{dy}{dt}=b(z+x), \quad \frac{dz}{dt}=c(x+y)$$

za razne vrednosti realnih parametara a, b, c.

240. Odrediti funkcije $x=x(t)$, $y=y(t)$ iz uslova:

$$\ddot{x}-4\dot{y}=\sin t, \quad \ddot{y}+4\dot{x}=\cos t, \quad x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=\alpha, \quad y(0)=\beta, \quad \dot{y}(0)=0.$$

241. Integraliti skup diferencijalnih jednačina

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+z}{x}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{z-y}{x}.$$

Generalizacija. Takođe integraliti skup jednačina

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1z}{x}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{a_2x+b_2y+c_2z}{x} \qquad (a_k, b_k, c_k \text{ konstante}).$$

242. Skup diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx} \qquad (l, m, n \text{ konstante})$$

definiše u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu jedan skup krivih. Ispitati ove krive. Da li kroz svaku tačku $M(x_0, y_0, z_0)$ prolazi jedna kriva?

243. Skup diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2}=\frac{dy}{-2xy}=\frac{dz}{-2xz}$$

određuje u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu skup krivih. Ispitati ove krive i videti da li kroz svaku tačku (x_0, y_0, z_0) prolazi jedna kriva.

244. Pokazati da skup jednačina

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2)}=\frac{dy}{y(x^2+y^2)}=\frac{dz}{z^2}$$

određuje, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, skup ravnih krivih sa dva parametra.

Odrediti krivu koja prolazi kroz tačku $(1, 1, 1)$ i ispitati njene ortogonalne projekcije u ravnima Oyz, Ozx, Oxy.

245. Rešiti skup diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

i u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ rešenju dati geometrisko tumačenje.

246. Obrazovati jednačinu skupa parabola koje se dobijaju kada se parabola $y^2=2px$ (p pozitivna konstanta) pomera paralelno samoj sebi i to tako da njeno teme opisuje krivu: 1° $y^2=-2px$; 2° $y=x^3$.

Odrediti ortogonalne trajektorije skupa parabola dobijenih u slučaju 1°.

247. Ispitati da li *Riccati*-eva jednačina

$$y'=1-6x+2(5-4x)y+8xy^2$$

ima jedno partikularno rešenje oblika $y_1=(ax+b)/(cx+d)$.

U potvrdnom slučaju naći opšte rešenje ove jednačine.

248. Rešiti linearnu diferencijalnu jednačinu

$$y''+ay'+by=0 \qquad (a \text{ i } b \text{ konstante}),$$

svodeći je na *Riccati*-evu jednačinu.

249. Ispitati i konstruisati krive

$$(\Gamma) \qquad (x+2y)^2=a(x+y) \qquad (a \text{ parametar}).$$

Takođe odrediti i ispitati ortogonalne trajektorije krivih (Γ).

250. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy posmatrati konusne preseke

$$(\Gamma) \qquad x^2+2\lambda xy-2y^2=1 \qquad (\lambda \text{ parametar}).$$

1° Odrediti fiksne tačke kroz koje prolaze ovi konusni preseci.

2° Ispitati prirodu krivih (Γ) kada λ varira.

3° Obrazovati diferencijalnu jednačinu ortogonalnih trajektorija krivih (Γ) i napisati je u obliku

$$(E) \qquad x\,dx/P=y\,dy/Q,$$

gde su P i Q dva polinoma po x i y.

4° Integraliti jednačinu (E).

251. Odrediti funkcije $x(t)$ i $y(t)$, definisane skupom diferencijalnih jednačina:

$$\dot{x}+y+2\lambda\sin t\cos t=0, \quad \dot{y}-x+2\lambda\sin^2 t=0 \qquad (\lambda \text{ pozitivna konstanta}).$$

Pokazati da se funkcije $x(t)$ i $y(t)$ mogu izraziti u obliku

$$(C) \qquad x=2\lambda\cos^2 t+A\cos(t+B), \qquad y=2\lambda\sin t\cos t+A\sin(t+B),$$

gde su A i B dve proizvoljne konstante.

Konstruisati krivu (C) u slučaju kad je $A=0$ i $B=0$.

252. Data je funkcija

$$f(x) \equiv \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n\right] \quad (n \text{ ceo pozitivan broj ili nula}).$$

1° Pokazati da se funkcija $f(x)$ za $|x| \geqslant 1$ poklapa sa jednim polinomom $P(x)$ stepena n.

2° Pokazati da polinom $P(x)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\text{(E)} \qquad (x^2-1)\,y''+xy'-n^2y=0.$$

3° U jednačini (E) izvršiti smene:

$$\text{(S)} \qquad x=\cos t \ \text{ za } \ |x| \leqslant 1 \ \text{ i } \ x=\varepsilon \operatorname{ch} t \ \text{ za } \ |x| \geqslant 1 \quad (\varepsilon=\pm 1).$$

Polazeći od dobijenih rezultata, integraliti jednačinu (E). Obrazložiti zbog čega su bile potrebne dve smene (S).

253. Pokazati da se krive

$$(\Gamma_1) \quad y^2=2p(x-a), \qquad (\Gamma_2) \quad y=\exp\frac{b-x}{p}$$

seku ortogonalno.

Ako se a menja, odrediti ortogonalne trajektorije krivih (Γ_1). Ako se b menja, odrediti ortogonalne trajektorije krivih (Γ_2).

254. Odrediti i ispitati onu od integralnih krivih diferencijalne jednačine $2xy'-y=x+1$ koja dodiruje x-osu.

255. Odrediti ravne krive (Γ) koje imaju osobinu da sredina duži MC (C centar krivine krive (Γ) u tački M ove krive) opisuje datu pravu.

256. Pokazati da se diferencijalna jednačina drugog reda

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=0,$$

smenom

$$x=\varepsilon e^{\xi}, \qquad y=\varepsilon e^{\xi}\eta(\xi) \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

svodi na oblik

$$\frac{dz}{d\eta}=\frac{\eta(z^2-1)}{z-\eta} \qquad \left(z=\frac{d\eta}{d\xi}+\eta\right).$$

257. Ako je $x-y=e^{x+y}$, pokazati da je

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4(y-x)}{(1+x-y)^3}.$$

Rešiti diferencijalnu jednačinu (E).

258. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2(axy+b)}{cxy+d} \qquad (a, b, c, d \text{ konstante}),$$

izvršivši prethodno podesnu smenu funkcije.

259. Dat je skup diferencijalnih jednačina

$$\dot{x}+y+\sin t\cos t=0,\quad \dot{y}-x+\sin^2 t=0\qquad (t \text{ označava vreme}),$$

koji definiše kretanje tačke $M\{x(t),\ y(t)\}$ u ravni Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema Oxy.

1° Odrediti trajektoriju tačke J, ako je $\overrightarrow{MJ}$ vektor ubrzanja tačke M.

2° Gde treba da se nalazi tačka M u datom momentu $t=t_0$, da bi vektor brzine tačke M prolazio kroz koordinatni početak O? Za fiksno t_0 pokazati da je geometrisko mesto tačke M jedan krug.

3° Rešiti dati skup diferencijalnih jednačina.

260. 1° Pokazati da je funkcija $f(x)=\sqrt{-x+\sqrt{x^2+1}}$ partikularno rešenje jedne linearne diferencijalne jednačine drugog reda (E), čiji su koeficijenti racionalne funkcije po x.

2° Polazeći od jednačine (E), pokazati da je

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^k\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n\qquad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

gde je

$$k=\begin{cases}\frac{1}{2}(n-2) & (n \text{ parno});\\ \frac{1}{2}(n-3) & (n \text{ neparno}).\end{cases}$$

3° Ako se u jednačini (E) izvrši smena nezavisno promenljive $x=\operatorname{sh} t$, dobija se jednačina (E_1). Polazeći od (E_1), obrazovati opšte rešenje jednačine (E). Da li je funkcija $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ takođe partikularno rešenje jednačine (E)?

261. Pokazati da je funkcija $D^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ jedno partikularno rešenje linearne diferencijalne jednačine

$$\text{(E)}\qquad (x^2-1)y''+xy'-n^2y=0\qquad (n \text{ prirodan broj; } |x|<1).$$

Rešenje. Polazeći od

$$z=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},\quad z'=-x(2n-1)(1-x^2)^{n-\frac{3}{2}},$$

dobija se

$$z'/z=-x(2n-1)(1-x^2)^{-1},$$

odnosno

$$(1-x^2)z'+(2n-1)xz=0.$$

Ako se nađe izvod reda n poslednje relacije, dobija se

$$(1-x^2)D^{n+1}z-\binom{n}{1}2xD^nz-\binom{n}{2}2D^{n-1}z+(2n-1)xD^nz+(2n-1)nD^{n-1}z=0,$$

tj.

$$(1-x^2)D^{n+1}z-xD^nz+n^2D^{n-1}z=0.$$

Dakle, $D^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ zaista je rešenje jednačine (E).

262. Pokazati da je funkcija

$$\mathrm{D}^n [(x-1)^{n+p} (x+1)^{n+q}]$$

jedno partikularno rešenje linearne diferencijalne jednačine

$$(\mathrm{E}) \quad (1-x^2)\, y'' + \{(p+q-2)\, x + (p-q)\}\, y' + (n+1)(n+p+q)\, y = 0.$$

Rešenje. Stavi li se $u \equiv (x-1)^{n+p} (x+1)^{n+q}$, dobija se

$$(x^2-1)\, u' \equiv \{(2n+p+q)\, x + (p-q)\}\, u.$$

Primenom *Leibniz*-ove formule nalazi se

$$(x^2-1)\, \mathrm{D}^{n+2} u - \{(p+q-2)\, x + (p-q)\}\, \mathrm{D}^{n+1} u - (n+1)(n+p+q)\, \mathrm{D}^n u = 0.$$

Ako se ovde stavi $\mathrm{D}^n u \equiv y$, poslednja jednačina postaje upravo jednačina (E), što je i trebalo pokazati.

Generalizacija. Uzmimo sada opštiju funkciju

$$u \equiv (x-a)^{n+p} (x-b)^{n+q}.$$

Odavde se nalazi jedno za drugim

$$u'/u \equiv (n+p)/(x-a) + (n+q)/(x-b),$$

$$(x-a)(x-b)\, u' \equiv \{(2n+p+q)\, x - n(a+b) - (aq+bp)\}\, u.$$

Korišćenjem *Leibniz*-ove formule i stavljanjem $\mathrm{D}^n u = y$, dobija se

$$(\mathrm{E}_1) \quad (x-a)(x-b)\, y'' + \{(2-p-q)\, x + a(q-1) + b(p-1)\}\, y' - (n+1)(n+p+q)\, y = 0.$$

Za $a=1$, $b=-1$ jednačina (E_1) postaje jednačina (E).

Prema tome, funkcija $y_1 = \mathrm{D}^n \{(x-a)^{n+p} (x-b)^{n+q}\}$ je jedno partikularno rešenje jednačine (E_1).

263. Ako je $y = (1+x^2)^{1/2}$, pokazati da je

$$(1+x^2)\, \mathrm{D}^n y + (2n-3)\, x \mathrm{D}^{n-1} y + (n-1)(n-3)\, \mathrm{D}^{n-2} y = 0 \qquad (n \geqslant 2).$$

Rešenje. Iz relacije $y = (1+x^2)^{1/2}$ nalazi se

$$y'/y = x/(1+x^2) \quad \text{ili} \quad (1+x^2)\, \mathrm{D} y - x y = 0.$$

Ako se primeni *Leibniz*-ova formula, dobija se

$$(1+x^2)\, \mathrm{D}^n y + 2x \binom{n-1}{1} \mathrm{D}^{n-1} y + 2\binom{n-1}{2} \mathrm{D}^{n-2} y - x\, \mathrm{D}^{n-1} y - (n-1)\, \mathrm{D}^{n-2} y = 0,$$

odnosno
$$(1+x^2)\, \mathrm{D}^n y + (2n-3)\, x\, \mathrm{D}^{n-1} y + (n-1)(n-3)\, \mathrm{D}^{n-2} y = 0.$$

Prema tome, diferencijalna jednačina

$$(1+x^2)\, z'' + (2n-3)\, x z' + (n-1)(n-3)\, z = 0$$

kao partikularno rešenje funkciju

$$z_1(x) = \mathrm{D}^{n-2} (1+x^2)^{1/2} \qquad (n \geqslant 2).$$

264. Pokazati da je funkcija $\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{(n)}$ jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + xy' + (n+1)\, y = 0.$$

Odrediti opšte rešenje ove jednačine.

265. Pokazati da je n-ti izvod funkcije

$$f(x)=(1+x^2)^{-1/2}$$

oblika

$$f^{(n)}(x)=P_n(x)\,(1+x^2)^{-n-\frac{1}{2}},$$

gde je $P_n(x)$ polinom stepena n čiji je koeficijent uz x^n jednak izrazu $(-1)^n\,n!$

Dokazati da polinom $P_n(x)$ zadovoljava relacije:

$$P_{n+1}(x)=(1+x^2)\,P_n'(x)-(2n+1)\,x\,P_n(x);$$

$$P_{n+1}(x)+(2n+1)\,x\,P_n(x)+n^2(1+x^2)\,P_{n-1}(x)=0,$$

$$P_n'(x)=-n^2P_{n-1}(x),$$

$$(1+x^2)\,P_n''(x)-(2n-1)\,x\,P_n'(x)+n^2P_n(x)=0.$$

Na osnovu ovih relacija pokazati da je $P_n(x)$ oblika

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{n-2p}x^{n-2p}+\cdots,$$

gde je

$$a_{n-2p}=(-1)^{n+p}\,n!\,\frac{n(n-1)\cdots(n-2p+1)}{4^p\,(p!)^2}.$$

266. Pokazati da je funkcija $\mathrm{D}^{n-1}\{\exp(x+x^2)\}$ jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

(E) $$\mathrm{D}^2z-(2x+1)\,\mathrm{D}z-2nz=0.$$

Ako se funkcija $\exp(x+x^2)$ razvije u red oblika $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, pokazati da postoji relacija

$$(n+1)\,a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}\qquad(n\geqslant 1).$$

Takođe pokazati da je:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=e^2,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n=3e^2,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n=14e^2.$$

Uputstvo. Polazeći od $y=\exp(x+x^2)$, dobija se

$$y'-(2x+1)\,y=0.$$

Primenom *Leibniz*-ove formule nalazi se

$$\mathrm{D}^{n+1}y-(2x+1)\,\mathrm{D}^n y-2n\,\mathrm{D}^{n-1}y=0.$$

Ako se stavi $\mathrm{D}^{n-1}y=z$, poslednja jednačina upravo je jednačina (E).

267. Pokazati da je funkcija

$$z_1(x)=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\log(1+x^2)$$

jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1+x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+2(k+1)\,x\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+k(k+1)\,z=0.$$

Uputstvo. Poći od

$$y=\log(1+x^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{1+x^2}\qquad\text{odnosno}\qquad(1+x^2)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2x=0.$$

268. Dokazati stav: *Riccati*-eva diferencijalna jednačina

$$\text{(E)}\qquad \frac{dy}{dx}+y^2=\frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2\qquad(\alpha=\text{const})$$

transformiše se u sebe samu smenom funkcije

$$y=-\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2\left[1\bigg/\left(z+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\frac{\theta'}{\theta}\right)\right],$$

gde je z nova nepoznata funkcija promenljive x i $\theta(x)$ ($\neq$const) proizvoljna funkcija od x koja ima treći izvod.

Na osnovu ovoga stava integraliti jednačinu (E).

Posebno proučiti slučaj $\alpha=-1/4$.

Primedba. Videti o ovome:
D. S. *Mitrinović*: *Sur une équation différentielle du second ordre transformable en elle-même* (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 228, 1949, p. 1188—1190).

269. Data je *Emden*-ova diferencijalna jednačina

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y^n=0\qquad(n\ \text{realan broj})$$

koja igra važnu ulogu u teoriskoj fizici i astronomiji.

1° Dokazati da je funkcija

$$(2)\qquad A^{\frac{2}{n-1}}f(Ax)\qquad(A\ \text{pozitivna konstanta})$$

jedno rešenje jednačine (1), ako je $f(x)$ rešenje te jednačine.

2° Proveriti da li su funkcije

$$1-\frac{1}{6}x^2\qquad \text{za}\quad n=0\,;$$

$$(\sin x)/x\qquad \text{za}\quad n=1\,;$$

$$\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)^{-1/2}\qquad \text{za}\quad n=5$$

partikularna rešenja jednačine (1).

3° Ispitati da li jednačina (1) za $n=5$ ima, osim navedenog rešenja, i drugih rešenja oblika

$$(a+bx+cx^2)^{-1/2}\qquad(a,b,c\ \text{realne konstante};\ |a|+|b|+|c|>0).$$

4° Ispitati da li *Emden*-ova diferencijalna jednačina trećeg reda

$$(3)\qquad \frac{d^3y}{dx^3}+\frac{a}{x}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{b}{x^2}\frac{dy}{dx}+cy^n=0\qquad(a,b,c,n\ \text{realne konstante})$$

ima osobinu da joj je funkcija

$$A^{\frac{3}{n-1}}f(Ax)$$

rešenje ako je to slučaj sa funkcijom $f(x)$.

Da li slična osobina važi za odgovarajuće diferencijalne jednačine višeg reda, a posebno za jednačinu četvrtog reda

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{a}{x}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{b}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{c}{x^3}\frac{dy}{dx}+ey^n=0$$

$(a,b,c,e,n$ realne konstante$)$?

Rešenje. Funkcija

(4) $$y=(a+bx+cx^2)^{-1/2},$$

biće rešenje jednačine (1) ako je ispunjen identitet

$$4bcx^2+(b^2+12ac-4)x+4ab\equiv 0.$$

Odavde izlazi

$$bc=0,\quad ab=0,\quad b^2+12ac=4.$$

Ovaj skup jednačina ima dva skupa rešenja:

I. $ac=1/3$, $b=0$; II. $a=0$, $c=0$, $b=\pm 2$.

Prema tome, jednačina (1) za $n=5$ ima partikularna rešenja

$$y_1=\{c\,[x^2+1/(3c^2)]\}^{-1/2},\quad y_2=(2x)^{-1/2},\quad y_3=(-2x)^{-1/2}.$$

Rešenje y_1 je realno ako je $c>0$. Rešenje y_2 je realno ako je $x>0$. Rešenje y_3 je realno ako je $x<0$.

Konstatuje se da se korišćenjem osobine 1° iz rešenja $\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)^{-1/2}$ dobija rešenje y_1.

Primedba. U knjizi: *A. Fletcher — J. C. P. Miller — L. Rosenhead*: *An Index of Mathematical Tables* (New York, 1946, 451 p.) na str. 332 navedena su rešenja napred spomenuta pod 2°. Međutim rešenja

$$y_2(x)=(2x)^{-1/2}\quad (x>0);\qquad y_3(x)=(-2x)^{-1/2}\quad (x<0)$$

u ovom *Indeksu matematičkih tablica* nisu navedena. Verovatno da nisu ni poznata.

Rešenja $y_2(x)$ i $y_3(x)$ ne nalaze se ni u knjizi:

E. Kamke: *Differentialgleichungen—Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I (Leipzig, 1942, 642 Seiten).

Ova knjiga o običnim diferencijalnim jednačinama ima enciklopediski karakter. Na str. 560—561 izneti su poznati rezultati o *Emden*-ovoj jednačini.

Videti članak: *D. S. Mitrinović — K. Slipčević*: *Sur l'équation d'Emden* (*Mathesis*, t. 69, 1960, p. 74—75).

270. Data je neodređena diferencijalna jednačina

(1) $$\frac{d}{dx}\,\frac{u}{v}=\frac{du}{dx}\Big/\frac{dv}{dx}\qquad (u \text{ i } v \text{ funkcije od } x).$$

Ako je u dato, odrediti v i obratno.

Rešenje. I. Jednačina (1) može se napisati u obliku

(2) $$\frac{u'}{v}-u\,\frac{v'}{v^2}=\frac{u'}{v'}\qquad ('=d/dx).$$

Jedno za drugim dobija se:

$$\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}=\frac{u'}{u}\,\frac{v}{v'},\qquad \frac{u'}{u}=\frac{v'/v}{1-(v/v')},$$

$$\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}=\frac{v'}{v}\left(\frac{1}{1-(v/v')}-1\right),\qquad \frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}=\left(1-\frac{v}{v'}\right)^{-1}.$$

Dakle

$$u=v\exp\left[\int\left(1-\frac{v}{v'}\right)^{-1}dx\right].$$

Sličnim postupkom dobija se

$$v = \sqrt{u}\exp\left\{\pm\frac{1}{2}\int[(u'/u)^2 - 4(u'/u)]^{1/2}\,dx\right\}.$$

Ovo rešenje jednačine (1) dao je *E. J. Scott* (*The American Mathematical Monthly*, vol. 59, 1952, p. 707).

II. *Kovina Milošević* dobila je rešenje primenom *Mitrinovićevog* načina za rešavanje neodređenih diferencijalnih jednačina.

Stavi li se

(3) $$u(x) = e^{\int\zeta\,dx},\quad v(x) = e^{\int\eta\,dx}\quad (\zeta,\ \eta \text{ nove nepoznate funkcije}),$$

jednačina (1) dobija oblik

(4) $$\zeta - \eta = \zeta/\eta.$$

Ako je $\zeta-\eta=\theta$ (θ diferencijabilna funkcija od x), tada je

$$\zeta = \frac{\theta^2}{\theta-1},\quad \eta = \frac{\theta}{\theta-1}.$$

Prema tome, *eksplicitno rešenje* jednačine (1) je

$$u(x) = \exp\int\frac{\theta^2}{\theta-1}\,dx,\quad v(x) = \exp\int\frac{\theta}{\theta-1}\,dx.$$

Iz relacije

$$v(x) = \exp\int\frac{\theta}{\theta-1}\,dx$$

izlazi

$$\theta = \frac{v'}{v'-v},$$

pa se dobija

$$u(x) = \exp\int\frac{v'^2}{(v'-v)\,v}\,dx,$$

odnosno

$$u(x) = \exp\left[\int\left(\frac{v'}{v} + \frac{v'}{v'-v}\right)dx\right],$$

odakle sleduje *Scott*-ovo rešenje

$$u(x) = v(x)\exp\int\frac{v'}{v'-v}\,dx.$$

Primedba I. Drugi način je prirodniji.

Primedba II. Videti članak o neodređenim diferencijalnim jednačinama u *Prilozima* u ovom *Zborniku*.

271. Odrediti ono rešenje $\{x(t),\ y(t)\}$ skupa jednačina

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + y = 2t,$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \log t,$$

koje ima osobinu

$$x(t)\to 1,\quad y(t)\to 0\quad (t\to 0).$$

272. Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije konturnog problema

$$y^{(4)}(x) + \lambda^2 y''(x) = 0,$$

$$y''(0) = y(0) = y''(1) = y(1) = 0.$$

273. Rešiti linearnu homogenu vektorsku diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$(1) \qquad \alpha \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \beta \frac{d\vec{r}}{dt} - k(k\alpha + \beta)\vec{r} = 0$$

(k skalarna konstanta ; $\alpha (\neq 0)$ i β dve skalarne funkcije promenljive t).

Rešenje. Jedno partikularno rešenje jednačine (1) je

$$\vec{r} = \vec{a}_0 e^{kt} \qquad (\vec{a}_0 = \overrightarrow{\text{const}}).$$

Ovo partikularno rešenje navodi nas da upotrebimo smenu

$$\vec{r} = \vec{R} e^{kt} \qquad (\vec{R} \text{ nova vektorska funkcija koju treba odrediti}).$$

Ovom smenom jednačina (1) postaje

$$(2) \qquad \alpha \ddot{\vec{R}} + (2k\alpha + \beta)\dot{\vec{R}} = 0.$$

Iz (2) zaključujemo da $\dot{\vec{R}}$ ima stalan pravac, tj. da je

$$(3) \qquad \dot{\vec{R}} = \lambda \vec{b} \qquad (\vec{b} = \overrightarrow{\text{const}}).$$

Zamenom $\dot{\vec{R}}$ iz (3) u (2) dobijamo za funkciju λ jednačinu

$$(4) \qquad \alpha \dot{\lambda} + (2k\alpha + \beta)\lambda = 0.$$

Iz (3) i (4) nalazimo

$$\lambda = \exp\left(-2k + \int \frac{\beta}{\alpha} dt\right),$$

$$\dot{\vec{R}} = \vec{b} \exp\left(-2k + \int \frac{\beta}{\alpha} dt\right),$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} \int \exp\left(-2k + \int \frac{\beta}{\alpha} dt\right) dt \qquad (\vec{a} = \overrightarrow{\text{const}}).$$

Prema tome, opšte rešenje date vektorske diferencijalne jednačine je

$$\vec{r} = \vec{R} e^{kt} = e^{kt} \left[\vec{a} + \vec{b} \int \exp\left(-2k + \int \frac{\beta}{\alpha} dt\right) dt\right].$$

Zbog konstantnosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ hodograf vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je ravna kriva.

Ovaj zadatak formulisao je i rešio *V. Janekoski*.

274. Rešiti linearnu homogenu vektorsku diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$(1) \qquad \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \frac{d^2\alpha}{dt^2} \frac{d\vec{r}}{dt} + \varepsilon \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3 \vec{r} = 0$$

(α skalarna funkcija promenljive t; $\varepsilon = \pm 1$).

Rešenje. Jednačina (1) može se napisati i u obliku

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\dfrac{d\alpha}{dt}}\right) + \frac{d\alpha}{dt}\vec{r} = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\vec{r}}{d\alpha}\right) + \varepsilon \vec{r} = 0,$$

tj.

$$\text{(2)} \qquad \frac{d^2\vec{r}}{d\alpha^2} + \varepsilon\vec{r} = 0 .$$

Rešenje jednačine (2) glasi:

$$\text{(3)} \qquad \vec{r} = \vec{a}\cdot\begin{cases}\cos\alpha(t)\\ \operatorname{ch}\alpha(t)\end{cases} + \vec{b}\cdot\begin{cases}\sin\alpha(t)\\ \operatorname{sh}\alpha(t)\end{cases} \qquad (\vec{a},\ \vec{b} = \overrightarrow{\text{const}})$$

pri čemu gornje rešenje važi za $\varepsilon = +1$, a donje za $\varepsilon = -1$.

Rešenje (3) je takođe rešenje date jednačine (1).

Ovaj zadatak formulisao je i rešio *V. Janekoski*.

275. Proveriti da li je za jednačinu

$$(\sin y - m \operatorname{tg} x) \cos y \, dx - (\operatorname{tg} x + m \sin y) \, dy = 0 \qquad (m = \text{const})$$

integracioni faktor

$$\frac{\cos x}{1 - \cos^2 x \cos^2 y}$$

i da li je njeno rešenje

$$\operatorname{arc\,tg} (\sin x \operatorname{cotg} y) = \log C \left(\frac{1 - \cos x \cos y}{1 + \cos x \cos y} \right)^{m/2} \qquad (C \text{ integraciona konstanta}).$$

276. Odrediti funkciju oblika

$$\text{(1)} \qquad f(x, y) = g(x) + h(y),$$

koja ispunjava uslov

$$\text{(2)} \qquad y \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = xy(x^2 + y^2).$$

Rešenje. Relacija (2), kada funkcija $f(x, y)$ ima oblik (1), postaje

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{x} g'(x) - x^2 = \frac{1}{y} h'(y) + y^2,$$

odakle izlazi

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{x} g'(x) - x^2 = 2C, \qquad \frac{1}{y} h'(y) + y^2 = 2C,$$

gde je $C = \text{const}$.

Posle integracije jednačina (4) dobija se

$$g(x) = \frac{1}{4} x^4 + Cx^2 + C_1, \qquad h(y) = -\frac{1}{4} y^4 + Cy^2 + C_2$$

(C_1, C_2 integracione konstante).

Prema tome, tražena funkcija $f(x, y)$ je

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x^4 - y^4) + C(x^2 + y^2) + A \qquad (A, C \text{ proizvoljne konstante}).$$

Generalizacija. Umesto (2) posmatrati neku opštiju relaciju koja će dovesti do razdvajanja promenljivih.

277. Odrediti partikularno rešenje $y_p(x)$ oblika $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ diferencijalne jednačine

$$y''+xy'=e^x,$$

koje zadovoljava uslove: $y_p(0)=0$, $y_p'(0)=0$.

278. Rešiti skup diferencijalnih jednačina

$$x^2y''+xy'+3xz'+2y=x+1, \qquad x^2z''+xy'+xz'-2z=0.$$

Uputstvo. Upotrebiti smenu $x=\pm e^t$.

279. Rešiti skup diferencijalnih jednačina:

$$y''+z=x^5, \qquad z''+y=0.$$

280. Odrediti $f(x)$ i $g(x)$ iz relacija

$$f(x)=\int_0^x g(t)\,dt, \qquad g(x)=1-\int_0^x f(t)\,dt.$$

Rezultat. $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$.

281. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+2xy^2-y^3}{x^3+x^2y}.$$

Pokazati da su integralne krive ove jednačine algebarske i da je jedna od njih prava.

282. Odrediti funkciju $f(x)$ koja je definisana integralnom jednačinom

$$f(x)-\int_0^x f(t)\,dt=e^{-x}.$$

Rezultat. $f(x)=\operatorname{ch} x$.

283. Pokazati da diferencijalna jednačina krivih

(1) $\quad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (C\neq 0;\ B^2-AC\neq 0)$

glasi

$$\{(y'')^{-2/3}\}'''=0.$$

Uputstvo. Posmatrati jednačinu (1) u obliku

$$y=ax+b\pm(cx^2+2dx+e)^{1/2}.$$

Primedba. Ako je $B^2-AC=0$, tada je $c=0$ i diferencijalna jednačina parabola glasi

$$\{(y'')^{-2/3}\}''=0.$$

Ispitati takođe slučajeve: 1^0 $C=0$, $B\neq 0$ i 2^0 $C=0$, $B=0$.

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

1. Integraliti parcijalne diferencijalne jednačine:

1^0 $s+xyp+yz=0$; 2^0 $s+xyp=0$;

3^0 $s+yq+z=0$; 4^0 $y^2s+2yp=1$;

5^0 $ps-qr=0$; 6^0 $pq=zs$;

7^0 $(1-y^2)s+yp=ay^3(1-y^2)$ $(a=\text{const})$,

gde su p, q, r, s, t *Monge*-ove oznake:

$$p=\partial z/\partial x, \quad q=\partial z/\partial y, \quad r=\partial^2 z/\partial x^2, \quad s=\partial^2 z/\partial x\,\partial y, \quad t=\partial^2 z/\partial y^2.$$

Rešenje. 1^0 $\dfrac{\partial}{\partial x}(q+xyz)=0 \iff q+xyz=Y$, tj. $\dfrac{\partial z}{\partial y}+xyz=Y$.

$$\therefore \quad z=\exp\Big(-\frac{1}{2}xy^2\Big)\Big\{X+\int\exp\Big(\frac{1}{2}xy^2\Big)Y\,dy\Big\}.$$

X je proizvoljna diferencijabilna funkcija promenljive x; Y je proizvoljna diferencijabilna funkcija promenljive y.

3^0 $\dfrac{\partial}{\partial y}(p+yz)=0 \iff p+yz=X \iff z=e^{-xy}(Y+\int e^{xy}X\,dx)$.

4^0 $z=(x/y)+(X/y^2)+Y$.

5^0 Umesto jednačine $ps-qr=0$ može se pisati

$$\begin{vmatrix} \partial z/\partial x & \partial z/\partial y \\ \partial p/\partial x & \partial p/\partial y \end{vmatrix}=0,$$

što znači da je $p=f(z)$, gde je $f(z)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija po z.

Rešenje je $x=Y+Z$.

6^0 $p\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\dfrac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{p}\dfrac{\partial p}{\partial y}$.

Odavde izlazi rešenje $z=XY$.

7^0 $z=\frac{1}{3}ax(y^2-1)(y^2+2)+(y^2-1)^{1/2}X+Y$.

2. Odrediti rešenje $z(x, y)$ jednačine

$$\partial^2 z/\partial x\,\partial y=x+y$$

koje zadovoljava uslove: $z(x, 0)\equiv x$, $z(0, y)\equiv y^2$.

Rezultat. $z(x, y)\equiv x+y^2+\frac{1}{2}xy(x+y)$.

3. Pokazati da je funkcija

$$z = x f(x+y) + g(x+y),$$

gde su $f(u)$ i $g(u)$ diferencijabilne funkcije promenljive u, rešenje parcijalne jednačine

$$r - 2s + t = 0.$$

Među rešenjima z odrediti ono koje zadovoljava uslove:

$$z|_{x=0} = ay^2, \quad z|_{y=0} = bx^2 \quad (a, b \text{ konstante; } ab \neq 0).$$

Rezultat. $z = (x+y)(bx+ay)$.

4. Transformisati parcijalnu jednačinu

$$z\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + x^2 + y^2 = 0 \tag{1}$$

smenom promenljivih

$$u = y/x, \quad v = x^2 + y^2, \quad w = z^2,$$

i odrediti njeno rešenje.

Rešenje. $$\mathrm{d}w = 2z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right) = \frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

$$\mathrm{d}v = 2(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y).$$

$$\therefore \quad 2z\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial u} + 2x\frac{\partial w}{\partial v}, \qquad 2z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial u} + 2y\frac{\partial w}{\partial v}$$

Jednačina (1) sada dobija oblik

$$\frac{\partial w}{\partial v} + 1 = 0,$$

odakle izlazi

$$w = -v + f(u) \qquad \{f(u) \text{ diferencijabilna funkcija po } u\}.$$

Prema tome, opšte rešenje jednačine (1) je

$$x^2 + y^2 + z^2 = f(y/x).$$

5. Proveriti da li je rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$y(x+y)z_{xx} - (x^2 - y^2)z_{xy} - x(x+y)z_{yy} + (x-y)(z_x + z_y) = 0$$

određeno relacijom

$$z = f(x^2 + y^2) + g(x-y),$$

gde su $f(x^2+y^2)$ i $g(x-y)$ diferencijabilne funkcije po naznačenim argumentima.

6. Obrazovati diferencijalnu jednačinu skupa krivih:

$$1^0 \quad y = C^2 f(x) + C g(x) + h(x);$$

$$2^0 \quad y = [C^2 f(x) + 1]/[C g(x) + 1],$$

gde je C parametar.

7. Sastaviti parcijalnu diferencijalnu jednačinu skupa površina:

$$1^0 \quad z=f(x+y)\,g(x-y);$$

$$2^0 \quad z=f(X+Y)\,g(X-Y),$$

gde su $f(x+y)$ i $g(x-y)$ proizvoljne diferencijabilne funkcije naznačenih argumenata i gde je X proizvoljna diferencijabilna funkcija od x i Y proizvoljna diferencijabilna funkcija od y.

8. Rešiti parcijalne jednačine:

1^0 $x^2p-x^2yq+y=0$; $\quad 2^0$ $p=(qy+z)^2$;

3^0 $xzp+yzq-xy=0$; $\quad 4^0$ $p^2=z^2(1-pq)$;

5^0 $x^2p^2+y^2q^2-z=0$; $\quad 6^0$ $q=xp+p^2$;

7^0 $p^2+q^2-z^2=0$; $\quad 8^0$ $pqz^2=xy$.

9. Rešiti parcijalne jednačine:

$$1^0 \quad p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3=az+x_1x_2/x_3;$$

$$2^0 \quad x_1p_1+(z+x_3)\,p_2+(z+x_2)\,p_3=x_2+x_3;$$

$$3^0 \quad (p_1-z)(p_2-z)(p_3-z)=p_1p_2p_3;$$

$$4^0 \quad p_1+x_1p_2+(x_2p_2+x_3p_3)\,p_3=0;$$

$$5^0 \quad x_2p_1+x_1p_2+(p_1-p_2)(p_3+x_4)(p_4+x_3)=1$$

$$(a=\text{const};\quad p_k=\partial z/\partial x_k).$$

10. Integraliti parcijalnu jednačinu

$$x^2p+y^2q=0$$

i od integralnih površina odrediti onu koja prolazi kroz pravu

$$x=2y=3z.$$

Ispitati dobijenu površinu.

11. Integraliti parcijalnu jednačinu

$$p^2-2pq+2q^2=4z$$

i među integralnim površinama odrediti onu koja prolazi kroz krivu

$$x=0, \quad z=y^2.$$

Ispitati dobijenu površinu.

12. Odrediti rešenje $z=z(x,y)$ jednačine

$$\partial^4 z/\partial x^2\,\partial y^2=4$$

koje ima osobinu da se izrazi

$$z,\quad \partial z/\partial x,\quad \partial^2 z/\partial x^2,\quad \partial^3 z/\partial x^3$$

anuliraju za sve vrednosti x i y koje zadovoljavaju jednačinu $xy=1$.

13. Odrediti funkciju $u(x, t)$ koja zadovoljava parcijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\, \partial t} = e^{-t} \cos x$$

i uslove

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=0} = 0.$$

Pokazati da tražena funkcija $u(x, t)$ ima osobinu

$$u(x, t) \to \sin x \qquad (t \to +\infty).$$

Rezultat. $u(x, t) = (1 - e^{-t}) \sin x$.

14. Odrediti rešenje $z(x, y)$ parcijalne jednačine

(E) $$\partial z(x, y)/\partial y = x^2 + 2y$$

koje zadovoljava uslov $z(x, x^2) \equiv 1$.

Rešenje. Iz (E) izlazi

$z(x, y) = x^2 y + y^2 + X$ (X proizvoljna diferencijabilna funkcija promenljive x).

Iz datog uslova sleduje

$$X = 1 - 2x^4.$$

Prema tome, traženo rešenje je $z(x, y) = 1 + x^2 y + y^2 - 2x^4$.

15. Pokazati da je rešenje $u = u(x, t)$ jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (a \text{ konstanta}),$$

koje zadovoljava uslove

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x),$$

dato relacijom

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\{f(x - at) + f(x + at)\} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(s)\, ds.$$

Da li funkcije $f(x)$ i $F(x)$ moraju zadovoljavati izvesne uslove?

16. Odrediti funkcije $f(x)$ i $g(y)$ pod uslovom da proizvod $u = f(x)\, g(y)$ bude rešenje parcijalne jednačine

$$(1 - x) \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0.$$

Zatim odrediti partikularno rešenje ove jednačine koje zadovoljava uslove:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -1; \quad g(1) = 0, \quad g'(1) = 1.$$

17. Ispitati da li je funkcija $v = \int_{r/\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-u^2)\, du$ rešenje jednačine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 4 \frac{\partial v}{\partial t}.$$

18. U parcijalnoj jednačini

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

izvršiti smenu promenljivih $u = x + y$, $v = x - y$, a zatim naći opšte rešenje jednačine (E).

Od integralnih površina jednačine (E) naći onu koja prolazi kroz krivu

$$x = \sin t + \cos t, \quad y = \sin t - \cos t, \quad z = \operatorname{tg} t.$$

19. Dokazati da je funkcija

$$\int_0^{2\pi} f(x \cos t + y \sin t + iz,\ t)\, dt \qquad (i = \sqrt{-1})$$

jedno rešenje *Laplace*-ove jednačine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

20. Ako je $u(x, y, z)$ rešenje *Laplace*-ove parcijalne jednačine

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

tada su rešenja i funkcije

$$u_x, \quad x u_x + y u_y + z u_z, \quad y u_x - x u_y, \quad y^2 u_{xx} - 2 x y u_{xy} + x^2 u_{yy} + z u_z.$$

21. Odrediti funkcije oblika

$$u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

koje zadovoljavaju parcijalnu jednačinu

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{\lambda u}{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (\lambda \text{ parametar}).$$

22. Data je parcijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial u}{\partial t} + cu \qquad (a,\ b,\ c \text{ realne konstante}).$$

Odrediti rešenja ove jednačine koja su oblika $u = X(x)\, T(t)$.

23. Data je parcijalna jednačina

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad (a = \text{const}).$$

Pokazati da ova jednačina ima rešenje oblika $V = f(x/\sqrt{t})$ i odrediti ga. Pokazati da je i funkcija $\partial f/\partial x$ rešenje date parcijalne jednačine.

24. Odrediti rešenja oblika $z = f(x)\, g(y)$ parcijalne jednačine

$$x^2 z_x - y z_y = 0.$$

25. Odrediti rešenja oblika

$$z = f(x, y) = g(r) \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

koja zadovoljavaju parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 5x \frac{\partial z}{\partial x} - 5y \frac{\partial z}{\partial y} + 8z - 16 = 0.$$

U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu geometriski okarakterisati dobijeno rešenje i odrediti ono koje zadovoljava uslove: $f(1, 0) = 1$ i $f(1, 1) = 2$.

26. Odrediti rešenja parcijalne diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

koja su oblika $u = f\left(\dfrac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$. Ako je $f\left(\dfrac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$ jedno rešenje date jednačine, da li su $f\left(\dfrac{y^2 + z^2}{x^2}\right)$ i $f\left(\dfrac{z^2 + x^2}{y^2}\right)$ tako isto njena rešenja?

27. Ispitati da li jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2u}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

ima rešenje oblika $u = F\{(x + y + z)/(x^2 + y^2 + z^2)\}$.

28. Ako je funkcija $z(x, y)$ ma koje rešenje parcijalne jednačine

$$\partial^2 z / \partial x \, \partial y = (az)/(x - y)^2 \qquad (a \text{ konstanta}),$$

ispitati da li su njena rešenja i funkcije

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

29. Data je telegrafska jednačina

$$(\mathrm{E}_1) \qquad A \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} + 2B \frac{\partial v}{\partial T} = C \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \qquad (A, B, C \text{ konstante}).$$

1^0 Pokazati da se jednačina (E_1) svodi na oblik

$$(\mathrm{E}_2) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial v}{\partial t}$$

smenom $X = \lambda x$, $T = \mu t$, gde su λ i μ dve konstante koje treba odrediti.

2^0 Pokazati da se jednačina (E_2) smenom $v = ue^{-t}$ svodi na oblik

$$(\mathrm{E}_3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u.$$

3^0 Pokazati da se smenom $\xi = x - t$, $\eta = x + t$ jednačina (E_3) svodi na oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{1}{4} u = 0.$$

30. Odrediti funkciju oblika

$$u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

koja zadovoljava parcijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a u \qquad (a=\text{const}).$$

31. Pokazati da *Laplace*-ova jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

ima rešenje oblika

$$u=f(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

i odrediti ga.

Ispitati da li je funkcija

$$\int_a^z f(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dz \qquad (a \text{ podesno izabrana numerička konstanta})$$

takođe rešenje posmatrane *Laplace*-ove jednačine.

Uopšte, ako je $u_0(x, y, z)$ jedno rešenje jednačine (1), ispitati da li je

$$\int_a^z u_0(x, y, z)\,dz \qquad (a \text{ podesno izabrana numerička konstanta})$$

takođe rešenje jednačine (1).

32. Odrediti rešenja oblika $z=X(x)\,Y(y)$ *Laplace*-ove jednačine

$$z_{xx}+z_{yy}=0$$

koja zadovoljavaju uslove:

$$z\equiv\sin x \quad (y=0) \quad \text{i} \quad z\to 0 \quad (y\to+\infty).$$

33. Odrediti vrednosti parametra k za koje parcijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ima rešenja oblika $u(x, y)=f(x)\,\mathrm{sh}\,ky$ uz uslove:

$$u(0, y)\equiv 0, \quad u(l, y)\equiv 0 \quad (l=\text{const}).$$

34. Data je parcijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Traže se rešenja oblika $u=T(t)\,X(x)$, gde funkcija $X(x)$ zadovoljava konturne uslove:

$$X(1)=0, \quad X(0) \text{ ostaje konačno}.$$

35. Posmatrati parcijalnu jednačinu

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

1° Ispitati da li ova jednačina ima rešenja oblika

$$u = Y(y) \exp\left(\alpha \frac{x^2}{y}\right)$$

{ α konstanta koju treba odrediti; $Y(y)$ funkcija od y koju takođe treba odrediti } i, u potvrdnom slučaju, naći ta rešenja.

2° Dokazati da je izraz

$$u(x, y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y,$$

gde je $u(x, y)$ ma koje rešenje jednačine (E), totalni diferencijal jedne funkcije $v(x, y)$ i da je ta funkcija $v(x, y)$ takođe rešenje jednačine (E).

3° Rezultat iz tačke 2° proveriti na jednom primeru.

36. Odrediti funkciju oblika $z = f(x^2 + y^2)$ koja zadovoljava parcijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Rezultatu dati geometrisko tumačenje.

37. Odrediti funkcije u oblika $f(x)\,g(y)\,h(z)$ koje zadovoljavaju *Laplace*-ovu parcijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

38. Odrediti rešenja oblika $u = X(x)\,T(t)$ parcijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (h \text{ realna konstanta}).$$

39. Ako je $u = f(x, y)$ jedno rešenje *Laplace*-ove jednačine

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

tada su parcijalni izvodi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \ldots$$

takođe rešenja jednačine (E).

Ovo važi za svaku linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu čiji su koeficijenti konstantni.

Dokazati navedena tvrđenja.

40. Naći rešenja oblika $y=R(r)\,T(t)$ parcijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\qquad (c=\text{const}).$$

41. Odrediti funkciju $z=f(y/x)$ koja zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

42. Odrediti rešenje oblika

$$z(x,y)=f(t)\qquad \{\, t=(x-x_0)(y-y_0);\ x_0,\, y_0 \text{ numeričke konstante} \,\}$$

parcijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\,\partial y}+\lambda^2 z(x,y)=0\qquad (\lambda=\text{const}).$$

Pokazati da se $f(t)$ može izraziti pomoću *Bessel*-ovih funkcija i da postoji takvo rešenje $z(x,y)$ koje postaje 1 za $x=x_0$ i $y=y_0$.

43. Odrediti sva rešenja parcijalne diferencijalne jednačine

$$r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)=0$$

oblika $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ rezultatu dati geometrisko tumačenje.

44. Odrediti rešenja oblika (S) $z=f(x)+g(y)$ parcijalne diferencijalne jednačine $rs-xr-ys+p=0$. Koja od nađenih površina (S) prolazi kroz pravu $x=y=z$ i tačku $(1,0,1)$? Ispitati ovu partikularnu površinu i njene preseke sa koordinatnim ravnima.

45. Data je funkcija

$$u=f(x\cos\theta+y\sin\theta+at)+g(x\cos\theta+y\sin\theta-at) \tag{1}$$

$\{x, y, t$ nezavisno promenljive; θ, a parametri; $f(\lambda)$ i $g(\mu)$ proizvoljne diferencijabilne funkcije naznačenih argumenata$\}$.

Formirati parcijalnu jednačinu drugog reda čije je rešenje (1).

Rešenje. Iz (1) sleduje

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\cos\theta)^2 f''(\lambda)+(\cos\theta)^2 g''(\mu),\\
(2)\qquad &\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\sin\theta)^2 f''(\lambda)+(\sin\theta)^2 g''(\mu),\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2 f''(\lambda)+a^2 g''(\mu),
\end{aligned}$$

gde su $f''(\lambda)$ i $g''(\mu)$ drugi izvodi po λ, odnosno po μ.

Iz (2) neposredno sleduje

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Funkcija (1) je rešenje parcijalne jednačine (3).

46. Svaka funkcija oblika $z=x^m f(y/x)$ zadovoljava parcijalne diferencijalne jednačine

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=mz,\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=m(m-1)z.$$

Dokazati ovaj rezultat i na osnovu njega zaključiti da svaka funkcija oblika $z=\rho\varphi(\theta)+\psi(\theta)$ (ρ i θ modul i argument broja $x+iy$) zadovoljava jednačinu

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

47. Data je funkcija

$$\Phi(x,y)=\int_a^x F\{(u-x)(u-y)\}\,\varphi(u)\,du+\int_b^y F\{(u-x)(u-y)\}\,\psi(u)\,du$$

(a i b dve numeričke konstante).

Ispitati da li je funkcija $\Phi(x,y)$ rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$\partial^2 z/\partial x\,\partial y=z,$$

ako je

$$tF''(t)+F'(t)=F(t),\qquad F(0)=1.$$

Pretpostavlja se da parametri a i b i funkcije $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $F(u)$ zadovoljavaju uslove koji se nameću da bi zadatak imao smisla.

48. Data je parcijalna diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0. \tag{1}$$

Odrediti njeno partikularno rešenje oblika

$$u=f(r)\cos\theta, \tag{2}$$

koje zadovoljava uslove:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=-\cos\theta \quad \text{za} \quad r=a \quad (a=\text{const}); \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\to 0 \quad \text{kada} \quad r\to\infty. \tag{4}$$

Rešenje. Vodeći računa o obliku rešenja (2), jednačina (1) postaje

$$r^2 f''(r)+2rf'(r)-2f(r)=0. \tag{5}$$

Opšte rešenje *Euler*-ove jednačine (5) je

$$f(r)=C_1 r+C_2/r^2 \quad (C_1,\ C_2 \text{ integracione konstante}).$$

Prema (2) funkcija $u(r,\theta)$ je

$$u=(C_1 r+C_2/r^2)\cos\theta.$$

Ako se primene uslovi (3) i (4), dobija se tražena funkcija

$$u=\frac{1}{2}a^3(\cos\theta/r^2).$$

49. Pokazati da je $z_1 = x^n f(y/x)$ rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n^2 z.$$

Da li se na osnovu ovoga može zaključiti da su funkcije

$$z_2 = y^n g(y/x) \text{ i } z_3 = x^n f(y/x) + y^n g(y/x)$$

tako isto rešenja ove jednačine?

50. Pokazati da parcijalna diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\alpha \text{ pozitivna konstanta})$$

ima rešenje oblika

$$\Phi = \varphi(\alpha x / 2\sqrt{t}).$$

Odrediti to rešenje i naći partikularno rešenje koje zadovoljava uslove:

$$\varphi = 0 \quad \text{za } x > 0 \text{ i } t \to 0+; \qquad \varphi = \varphi_0 = \text{const za } x \geqslant 0 \text{ i } t \to +\infty.$$

51. Promenljive u, v, w i x, y, z vezane su relacijama:

(1) $u = k^2 x/r^2$, $v = k^2 y/r^2$, $w = k^2 z/r^2$ $\{k = \text{const}, \; r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\}$.

1° Odrediti $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$ i proveriti jednakosti:

(2) $$x(\partial u/\partial x) + y(\partial u/\partial y) + z(\partial u/\partial z) = -u,$$

(3) $$(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2 = k^4/r^4.$$

2° Odrediti v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z $\{v_x = \partial v/\partial x, \; v_y = \partial v/\partial y, \ldots\}$ i napisati jednakosti za v i w analogne jednakostima (2) i (3).

3° Proveriti jednakost

$$v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0$$

i napisati druge dve jednakosti koje se dobijaju cikličkom permutacijom u, v, w.

4° Proveriti jednakosti:

$$\Delta u = -2u/r^2, \quad \Delta v = -2v/r^2, \quad \Delta w = -2w/r^2,$$

gde je $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$.

5° Ako se u funkciji $g(u, v, w)$ izvrši smena (1), dobija se funkcija $f(x, y, z)$, tj. $g(u, v, w) \equiv f(x, y, z)$.

Proveriti relaciju

$$(x f_x + y f_y + z f_z) + (u g_u + v g_v + w g_w) = 0.$$

6° Ako je funkcija $G(u, v, w)$ jedno rešenje *Laplace*-ove jednačine

$$G_{uu} + G_{vv} + G_{ww} = 0,$$

tada je funkcija $F(x, y, z) \equiv \frac{1}{r} G(k^2 x/r^2, k^2 y/r^2, k^2 z/r^2)$ jedno rešenje *Laplace*-ove jednačine

$$F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} = 0.$$

52. Data je biharmoniska parcijalna jednačina

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0.$$

1° Utvrditi da ona ima sledeća rešenja:

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad xy, \quad x^2 y, \quad x^3 y, \quad x\cos\lambda x \operatorname{ch}\lambda y, \quad y\cos\lambda x \operatorname{ch}\lambda y, \quad y^4-x^4$$

(λ konstanta).

2° Ako su $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$ dve harmoniske funkcije, pokazati da su funkcije $\varphi(x,y)+x\psi(x,y)$, $\varphi(x,y)+y\psi(x,y)$, $(x^2+y^2)\varphi(x,y)$ biharmoniske.

53. Ispitati da li parcijalna jednačina

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-z=e^{x-y}\sin y$$

ima rešenja oblika $z=(\cos y)\cdot w(x-y)$, gde je w diferencijabilna funkcija od $x-y$.

Ako jednačina ima takvih rešenja, odrediti ih.

Rezultat. Diferencijalna jednačina za određivanje funkcije $w(t)$ glasi

$$\mathrm{d}^3 w/\mathrm{d}t^3+\mathrm{d}w/\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}e^{-t}.$$

Kada se integrali ova jednačina, dobija se traženo rešenje.

54. Odrediti rešenje oblika $u=f(x^2+y^2)$ *Maxwell*-ove parcijalne diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$$

i posebno ono partikularno rešenje $u_p=f_p(x^2+y^2)$ koje ima osobinu

$$f_p(x^2+y^2)\to 1 \quad \text{ako} \quad (x,y)\to(0,0).$$

55. Data je parcijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a^4\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0 \qquad (a \text{ realna konstanta}).$$

1° Odrediti njena rešenja koja su oblika $y=f(x)\,g(t)$.

2° Odrediti integracione konstante tako da budu zadovoljeni granični uslovi:

$$y=0, \quad \partial y/\partial x=0 \qquad \text{za } x=0;$$

$$\partial^2 y/\partial x^2=0, \quad \partial^3 y/\partial x^3=0 \qquad \text{za } x=l.$$

Primedba. Prilikom rešavanja ovog zadatka pojaviće se jedna transcendentna jednačina

56. Data je parcijalna jednačina

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\right)=0.$$

Odrediti rešenja ove jednačine koja su oblika

$$\Phi=f(r)\cos k\theta,$$

gde je k jedna konstanta i $f(r)$ funkcija argumenta r koju treba naći.

57. Da li parcijalna diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2}+2\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}=0$$

ima rešenja oblika

$$1^0 \quad u=f(x^2+y^2+z^2); \qquad 2^0 \quad u=f(x+y+z)?$$

U potvrdnom slučaju, odrediti ih.

Rezultat. 1^0 $u=C_1(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}+C_2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}+C_3(x^2+y^2+z^2)+C_4$

(C_1, C_2, C_3, C_4 proizvoljne konstante).

58. Odrediti parcijalnu jednačinu drugog reda čije je opšte rešenje

$$z=x^a f_1+x^b f_2 \qquad (a\neq b), \tag{1}$$

gde su f_1 i f_2 dve diferencijabilne funkcije promenljive y/x.

Rešenje. Iz (1) sleduje

$$xp+yq=ax^a f_1+bx^b f_2, \tag{2}$$

$$x^2r+2xys+y^2t=a(a-1)x^a f_1+b(b-1)x^b f_2, \tag{3}$$

gde su p, q, r, s, t *Monge*-ove oznake.

Rezultat eliminacije funkcija f_1 i f_2 iz relacija (1), (2) i (3) dat je jednačinom

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 1 \\ xp+yq & a & b \\ x^2r+2xys+y^2t & a(a-1) & b(b-1) \end{vmatrix}=0.$$

Posle razvijanja determinante koja se nalazi na levoj strani poslednje jednačine, dobija se

$$z=\frac{a+b-1}{ab}(xp+yq)-\frac{1}{ab}(x^2r+2xys+y^2t) \qquad (ab\neq 0).$$

Prema tome, možemo formulisati ovaj rezultat:

Opšti integral parcijalne jednačine

$$x^2r+2xys+y^2t-(a+b-1)(xp+yq)+abz=0$$

dat je relacijom

$$z=x^a f_1(y/x)+x^b f_2(y/x) \qquad (a\neq b),$$

gde su $f_1(y/x)$ i $f_2(y/x)$ proizvoljne diferencijabilne funkcije naznačenog argumenta.

Kad je $a=1$, $b=2$, tada je funkcija

$$z=xf_1(y/x)+x^2 f_2(y/x)$$

opšti integral jednačine

$$z=xp+yq-\frac{1}{2}(x^2r+2xys+y^2t).$$

59. Odrediti parcijalnu jednačinu trećeg reda čije je opšte rešenje

$$z=x^a f_1+x^b f_2+x^c f_3, \tag{1}$$

gde su a, b, c tri različite konstante i f_1, f_2, f_3 tri ma kakve diferencijabilne funkcije od y/x.

Rešenje. Iz (1) izlazi

$$xp+yq=ax^a f_1+bx^b f_2+cx^c f_3,$$

$$(xp+yq)^{(2)}=a(a-1)x^a f_1+b(b-1)x^b f_2+c(c-1)x^c f_3, \tag{2}$$

$$(xp+yq)^{(3)}=a(a-1)(a-2)x^a f_1+b(b-1)(b-2)x^b f_2+c(c-1)(c-2)x^c f_3.$$

Ako se iz relacija (1) i (2) eliminišu f_1, f_2, f_3, dobija se

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ xp+yq & a & b & c \\ (xp+yq)^{(2)} & a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \\ (xp+yq)^{(3)} & a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno

$$\Delta_0 z - \Delta_1\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\Delta_2\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$-\Delta_3\left(x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3x^2y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+3xy^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}+y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)=0,$$

gde Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3 imaju ove vrednosti:

$$\Delta_0 = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ (a-1)(a-2) & (b-1)(b-2) & (c-1)(c-2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \\ a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \end{vmatrix}.$$

Gornje alternante, u razvijenom obliku, pretstavljene su izrazima:

$$\Delta_0 = abc(b-a)(c-a)(c-b),$$

$$\Delta_1 = (b-a)(c-a)(c-b)[(ab+bc+ca)-(a+b+c)+1],$$

$$\Delta_2 = (b-a)(c-a)(c-b)[(a+b+c)-3],$$

$$\Delta_3 = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Iz izloženog izvodi se ovaj zaključak:
Opšti integral linearne parcijalne jednačine trećeg reda

$$abcz = [(ab+bc+ca)-(a+b+c)+1]\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$-[(a+b+c)-3]\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$+\left(x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3x^2y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+3xy^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}+y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)$$

dat je relacijom

$$z = x^a f_1(y/x)+x^b f_2(y/x)+x^c f_3(y/x),$$

gde su $f_1(y/x)$, $f_2(y/x)$, $f_3(y/x)$ proizvoljne diferencijabilne funkcije.

60. Ako je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\Big/\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \{z=f(x,y)\}$$

funkcija samo od z, pokazati da je funkcija

$$u\equiv\frac{\partial z}{\partial x}\Big/\frac{\partial z}{\partial y}$$

rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$(1)\qquad u\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Rešenje. Polazeći od

$$u\equiv z_x/z_y \qquad (z_x\equiv\partial z/\partial x,\quad z_{xy}\equiv\partial^2 z/\partial x\,\partial y,\ \dots),$$

dobija se:

$$u_x\equiv(z_{xx}\,z_y-z_x\,z_{xy})/z_y^2,\qquad u_y\equiv(z_{xy}\,z_y-z_x\,z_{yy})/z_y^2,$$

$$u_{xy}\equiv(z_{xxy}\,z_y^2-z_{xx}\,z_{yy}\,z_y-z_{xy}^2\,z_y-z_x\,z_y\,z_{xyy}+2z_{yy}\,z_x\,z_{xy})/z_y^3.$$

Za ove vrednosti izraz $u u_{xy}-u_x u_y$, posle izvršenih transformacija, postaje

$$(2)\qquad (1/z_y^4)(z_{xxy}\,z_y^2\,z_x-z_{xx}\,z_{xy}\,z_y^2-z_{xyy}\,z_x^2\,z_y+z_{xy}\,z_{yy}\,z_x^2).$$

Budući da je, prema pretpostavci, izraz

$$z_{xy}/(z_x z_y)\equiv\Phi(z) \qquad (\text{tj. funkcija samo od } z),$$

mogu se napisati ove relacije

$$\frac{\partial}{\partial x}[z_{xy}/(z_x z_y)]\equiv\Phi_z z_x,\qquad \frac{\partial}{\partial y}[z_{xy}/(z_x z_y)]\equiv\Phi_z z_y,$$

odnosno

$$[1/(z_x^2 z_y^2)]\,(z_{xxy}\,z_x\,z_y-z_{xy}\,z_{xx}\,z_y-z_{xy}^2\,z_x)\equiv\Phi_z z_x,$$

$$[1/(z_x^2 z_y^2)]\,(z_{xyy}\,z_x\,z_y-z_{xy}^2\,z_y-z_{xy}\,z_x\,z_{yy})\equiv\Phi_z z_y.$$

Odavde se, jednostavnom kombinacijom, dobija

$$[1/(z_x^2 z_y^2)]\,(z_{xxy}\,z_x\,z_y^2-z_{xx}\,z_{xy}\,z_y^2-z_{xyy}\,z_x^2\,z_y+z_{xy}\,z_x^2\,z_{yy})\equiv 0.$$

Na osnovu ovog identiteta izlazi da je izraz (2) takođe identički jednak nuli, pa je zaista $u\equiv z_x/z_y$ rešenje parcijalne jednačine (1), ako je $z_{xy}/(z_x z_y)$ funkcija samo od z.

Primer. Ovaj će slučaj nastupiti ako je na primer $z=\exp(xy)$.

61. Rešiti skup parcijalnih diferencijalnih jednačina:

$$(1)\quad u\frac{\partial w}{\partial x}+2w\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad (2)\quad u\frac{\partial w}{\partial x}+2w\frac{\partial v}{\partial y}=0,\qquad (3)\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Rešenje. Iz jednačina (1) i (2) sleduje

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

a iz jednačina (3) i (4)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},$$

odnosno

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Opšte rešenje poslednje jednačine je

$$u = f(x+y) + g(x-y)$$

$\{ f(x+y)$ i $g(x-y)$ proizvoljne diferencijabilne funkcije naznačenih argumenata $\}$.

Stoga je

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f'(x+y) - g'(x-y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = f'(x+y) + g'(x-y).$$

$$\therefore \quad dv = f'(x+y)\, d(x+y) - g'(x-y)\, d(x-y).$$

$$\therefore \quad v = f(x+y) - g(x-y) + C \qquad (C \text{ integraciona konstanta}).$$

Iz jednačine (1) sleduje

$$\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2}{u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{tj.} \quad w = \frac{h(y)}{u^2}.$$

Rešenje skupa jednačina (1), (2), (3) dato je relacijama

$$u = f(x+y) + g(x-y), \qquad v = f(x+y) - g(x-y) + C, \qquad w = h(y)/\{f(x+y) + g(x-y)\}^2,$$

gde su $f(x+y)$, $g(x-y)$, $h(y)$ proizvoljne diferencijabilne funkcije i C proizvoljna konstanta.

62. Rešiti skup parcijalnih jednačina

$$(1) \quad y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial v}{\partial y} = 4xy, \qquad (2) \quad x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 8xy,$$

i odrediti ono njeno rešenje $\{u(x,y),\ v(x,y)\}$ koje ima osobinu da za $y = 2x$ postaje $\{9x^2, 6x^2\}$.

Rešenje. Jednostavnim kombinovanjem datih jednačina dobija se

$$(3) \qquad y\frac{\partial (u+v)}{\partial x} + x\frac{\partial (u+v)}{\partial y} = 12xy,$$

$$(4) \qquad y\frac{\partial (u-v)}{\partial x} - x\frac{\partial (u-v)}{\partial y} = -4xy.$$

Da bismo odredili opšte rešenje linearne jednačine (3), gde je nepoznata funkcija $u+v$, obrazujmo odgovarajući skup običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{d(u+v)}{12xy},$$

odakle se dobija

$$x^2 - y^2 = C_1, \qquad 6x^2 - (u+v) = C_2 \qquad (C_1, C_2 \text{ integracione konstante}).$$

Prema tome, opšte rešenje jednačine (3) je

$$(5) \qquad u + v = 6x^2 + f(x^2 - y^2),$$

gde je $f(x^2-y^2)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija naznačenog argumenta.

Polazeći od skupa običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{d(u-v)}{-4xy},$$

nalazimo

$$x^2 + y^2 = C_3, \qquad -2x^2 - (u-v) = C_4 \qquad (C_3, C_4 \text{ integracione konstante}).$$

Opšte rešenje jednačine (4) je

$$(6) \qquad u - v = -2x^2 + g(x^2 + y^2),$$

gde je $g(x^2+y^2)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija navedenog argumenta.

Stavimo li $y=2x$, iz (5) i (6) dobijamo

(7) $$15x^2=6x^2+f(-3x^2),$$

(8) $$3x^2=-2x^2+g(5x^2).$$

Ako se stavi $-3x^2=p$, jednačina (7) postaje

$$f(p)=-3p, \quad \text{tj.} \quad f(x^2-y^2)=-3(x^2-y^2).$$

Smenom $5x^2=q$, jednačina (8) dobija oblik

$$g(q)=q, \quad \text{tj.} \quad g(x^2+y^2)=x^2+y^2.$$

Prema tome, dobijamo

$$u+v=3(x^2+y^2), \quad u-v=-x^2+y^2,$$

odakle je

$$u=x^2+2y^2, \quad v=2x^2+y^2.$$

63. Rešiti skup parcijalnih jednačina

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=w$, (2) $\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial y}=u$, (3) $\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=v$,

i odrediti ono rešenje $\{u, v, w\}$ koje za $y=x$ dobija oblik $\{\operatorname{ch} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{ch} x\}$.

Rešenje. Mogućno je formirati sledeću relaciju

(4) $$\frac{\partial(u+v+w)}{\partial x}-\frac{\partial(u+v+w)}{\partial y}=u+v+w.$$

Odgovarajući sistem *Lagrange*-ovih jednačina ima oblik

$$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}(u+v+w)}{u+v+w}.$$

Na osnovu ovog nalazimo da je opšte rešenje jednačine (4)

(5) $$u+v+w=e^x f(x+y),$$

gde je $f(x+y)$ diferencijabilna funkcija po $x+y$.

Polazeći od jednačina (1), (2), (3), mogućno je obrazovati i ove dve relacije:

(6) $$\varepsilon^2\frac{\partial[u+\varepsilon v+\varepsilon^2 w]}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial(u+\varepsilon v+\varepsilon^2 w)}{\partial y}=u+\varepsilon v+\varepsilon^2 w,$$

(7) $$\varepsilon\frac{\partial(u+\varepsilon^2 v+\varepsilon w)}{\partial x}-\varepsilon^2\frac{\partial(u+\varepsilon^2 v+\varepsilon w)}{\partial y}=u+\varepsilon^2 v+\varepsilon w,$$

gde je $\varepsilon=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$.

Opšta rešenja jednačina (6) i (7) respektivno su

(8) $$u+\varepsilon v+\varepsilon^2 w=e^{\varepsilon x}g(\varepsilon x+\varepsilon^2 y),$$

(9) $$u+\varepsilon^2 v+\varepsilon w=e^{\varepsilon^2 x}h(\varepsilon^2 x+\varepsilon y),$$

gde su $g(\varepsilon x+\varepsilon^2 y)$ i $h(\varepsilon^2 x+\varepsilon y)$ ma kakve funkcije naznačenih argumenata.

Zaista, jednačini (6) odgovara skup običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{\mathrm{d}x}{\varepsilon^2}=\frac{\mathrm{d}y}{-\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}(u+\varepsilon v+\varepsilon^2 w)}{u+\varepsilon v+\varepsilon^2 w},$$

odakle izlazi

$$\varepsilon x+\varepsilon^2 y=C_1, \quad e^{-\varepsilon x}(u+\varepsilon v+\varepsilon^2 w)=C_2.$$

Jednačini (7) odgovara sledeći skup običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{\varepsilon}=\frac{dy}{-\varepsilon^2}=\frac{d(u+\varepsilon^2 v+\varepsilon w)}{u+\varepsilon^2 v+\varepsilon w},$$

odakle je

$$\varepsilon^2 x+\varepsilon y=C_3,\qquad e^{-\varepsilon^2 x}(u+\varepsilon^2 v+\varepsilon w)=C_4.$$

Opšte rešenje skupa jednačina (1), (2), (3) dato je relacijama (5), (8), (9). Stavimo li $y=x$, tada relacije (5), (8), (9) postaju

(10) $$3\operatorname{ch} x=e^x f(2x),$$

(11) $$(1+\varepsilon+\varepsilon^2)\operatorname{ch} x=e^{\varepsilon x}g(\varepsilon x+\varepsilon^2 x),$$

(12) $$(1+\varepsilon^2+\varepsilon)\operatorname{ch} x=e^{\varepsilon^2 x}h(\varepsilon^2 x+\varepsilon x).$$

Ako se u (10) stavi $2x=t$, dobija se

$$f(t)=3e^{-t/2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}=\frac{3}{2}(1+e^{-t}).$$

Jednačine (11) i (12) svode se na

$$g(\varepsilon x+\varepsilon^2 x)=0,\qquad h(\varepsilon^2 x+\varepsilon x)=0,$$

jer je $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$.

Stoga je $g(t)=0$ i $h(t)=0$, pa za određivanje funkcija u, v, w imamo jednačine:

$$u+v+w=\frac{3}{2}e^x(1+e^{-x-y}),$$

$$u+\varepsilon v+\varepsilon^2 w=0,$$

$$u+\varepsilon^2 v+\varepsilon w=0,$$

odakle je

$$u=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad v=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad w=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

gde je

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1\\1+\varepsilon+\varepsilon^2&\varepsilon&\varepsilon^2\\1+\varepsilon+\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon\end{vmatrix}=3(\varepsilon^2-\varepsilon^4)=3(\varepsilon^2-\varepsilon),$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{3}{2}(e^x+e^{-y})&1&1\\0&\varepsilon&\varepsilon^2\\0&\varepsilon^2&\varepsilon\end{vmatrix}=\frac{3}{2}(e^x+e^{-y})(\varepsilon^2-\varepsilon),$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&\frac{3}{2}(e^x+e^{-y})&1\\1&0&\varepsilon^2\\1&0&\varepsilon\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}(e^x+e^{-y})(\varepsilon-\varepsilon^2),$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&\frac{3}{2}(e^x+e^{-y})\\1&\varepsilon&0\\1&\varepsilon^2&0\end{vmatrix}=\frac{3}{2}(e^x+e^{-y})(\varepsilon^2-\varepsilon).$$

Definitivno dobijamo

$$u=\frac{1}{2}(e^x+e^{-y}),\qquad v=\frac{1}{2}(e^x+e^{-y}),\qquad w=\frac{1}{2}(e^x+e^{-y}).$$

Primedba. Redigovano prema rešenju koje je dao *H. Bremekamp* (Wiskundige opgaven met de oplossingen, t. 19, 1954, p. 349—351).

64. Pokazati da se *Humbert*-ova parcijalna diferencijalna jednačina

(1) $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0$$

smenom promenljivih

(2) $$\begin{aligned} x&=\xi+\varepsilon\,\eta+\varepsilon^2\zeta,\\ y&=\xi+\varepsilon^2\eta+\varepsilon\,\zeta, \qquad (\varepsilon^2+\varepsilon+1=0),\\ z&=\xi+\ \eta+\ \zeta,\end{aligned}$$

svodi na oblik

(3) $$\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta}=0.$$

Rešenje. Iz (2) dobija se

$$\xi=\frac{1}{3}(x+y+z),$$

$$\eta=\frac{1}{3}(\varepsilon^2x+\varepsilon y+z),$$

$$\zeta=\frac{1}{3}(\varepsilon x+\varepsilon^2y+z).$$

Prema pravilu za diferenciranje složenih funkcija dobija se:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\varepsilon^2\frac{\partial u}{\partial\eta}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{9}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right)+\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\zeta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\,\partial\zeta}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\right)\right],$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{9}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\,\partial\zeta}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\zeta}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)\right].$$

Dalje imamo

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{1}{3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right].$$

Koristeći dobijene izraze za $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, dobijamo

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{1}{27}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3}+\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\zeta^2}+2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta}+\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^2\,\partial\zeta}+\varepsilon^2\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^2\,\partial\eta}\right)\right.$$

$$+\varepsilon^2\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^2\,\partial\eta}+\frac{\partial^3 u}{\partial\eta^3}+\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial\eta\,\partial\zeta^2}+2\left(\varepsilon^2\frac{\partial^3 u}{\partial\eta^2\,\partial\zeta}+\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta}+\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\partial\eta^2}\right)$$

$$\left.+\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^2\,\partial\zeta}+\varepsilon^2\frac{\partial^3 u}{\partial\eta^2\,\partial\zeta}+\frac{\partial^3 u}{\partial\zeta^3}+2\left(\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial\eta\,\partial\zeta^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\zeta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta}\right)\right].$$

Posle sređivanja biće

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{1}{27}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3}+3\varepsilon\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi\,\partial \eta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial \eta\,\partial \zeta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2\,\partial \zeta}\right)\right.$$

$$\left.+3\varepsilon^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi\,\partial \zeta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2\,\partial \eta}+\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^2\,\partial \zeta}\right)+6\frac{\partial^3 u}{\partial \xi\,\partial \eta\,\partial \zeta}\right].$$

Slično nalazimo za $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ i $\dfrac{\partial^3 u}{\partial z^3}$ sledeće izraze:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=\frac{1}{27}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3}+3\varepsilon^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi\,\partial \eta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial \eta\,\partial \zeta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2\,\partial \zeta}\right)\right.$$

$$\left.+3\varepsilon\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi\,\partial \zeta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2\,\partial \eta}+\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^2\,\partial \zeta}\right)+6\frac{\partial^3 u}{\partial \xi\,\partial \eta\,\partial \zeta}\right],$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=\frac{1}{27}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3}+3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi\,\partial \eta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial \eta\,\partial \zeta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2\,\partial \zeta}\right)\right.$$

$$\left.+3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi\,\partial \zeta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2\,\partial \eta}+\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^2\,\partial \zeta}\right)+6\frac{\partial^3 u}{\partial \xi\,\partial \eta\,\partial \zeta}\right].$$

Sabiranjem tri dobijena izraza imamo

$$\text{(4)}\qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=\frac{1}{9}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3}+6\frac{\partial^3 u}{\partial \xi\,\partial \eta\,\partial \zeta}\right).$$

Još treba odrediti $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$.

Polazeći od izraza za $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, diferenciranjem po y nalazi se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{9}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \zeta}\right)+\left(\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \zeta}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \zeta}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \zeta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right)\right].$$

Posle svođenja sličnih članova možemo pisati

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{9}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \zeta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \zeta}\right).$$

Dalje imamo

$$(5)\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{27}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\zeta^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^2\,\partial\eta}-\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^2\,\partial\zeta}-\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^2\,\partial\eta}+\frac{\partial^3 u}{\partial\eta^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial\eta\,\partial\zeta^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta}-\frac{\partial^3 u}{\partial\eta^2\,\partial\zeta}\right)$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^2\,\partial\zeta}+\frac{\partial^3 u}{\partial\eta^2\,\partial\zeta}+\frac{\partial^3 u}{\partial\zeta^3}-\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta}-\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\zeta^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial\eta\,\partial\zeta^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{27}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial\eta^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial\zeta^3}-3\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta}\right).$$

Kada se unesu izrazi (4) i (5) u jednačinu (1), dobija se jednačina (3).

65. Odrediti dve diferencijabilne funkcije $f(x)$ i $g(y)$ pod uslovom da njihov proizvod $f(x)\,g(y)$ bude rešenje parcijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=z^a\,F(x)\,G(y),$$

gde je a data konstanta i gde su $F(x)$ i $G(y)$ date funkcije od x, odnosno od y.

66. Data je parcijalna diferencijalna jednačina

$$(\mathrm{E}_1)\qquad \partial^2 F/\partial x\,\partial y=F.$$

Obrazovati običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda koja se dobija ako se u (E_1) stavi $F=f(u)$, gde je $u=xy$.

Parcijalna jednačina trećeg reda

$$(\mathrm{E}_2)\qquad \partial^3 F/\partial x\,\partial y\,\partial z=F,$$

stavljajući $F=f(u)$, gde je $u=xyz$, svodi se na jednu običnu diferencijalnu jednačinu.

Parcijalne jednačine

$$(\mathrm{E}_3)\qquad \partial^4 F/\partial x\,\partial y\,\partial z\,\partial t=F,\qquad \partial^5 F/\partial x\,\partial y\,\partial z\,\partial t\,\partial v=F,$$

stavljajući $F=f(u)$, gde je $u=xyzt$ odnosno $u=xyztv$, svode se takođe na obične diferencijalne jednačine.

Utvrditi zakon formiranja obične diferencijalne jednačine na koju se svodi parcijalna diferencijalna jednačina

$$\partial^p F/\partial x_1\,\partial x_2\,\cdots\,\partial x_p=F,$$

stavljajući $F=f(u)$, gde je $u=x_1\,x_2\,\cdots\,x_p$.

67. 1° Odrediti rešenja oblika $z=f(x)\,g(y)$ parcijalne jednačine

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

2° Pokazati da se među rešenjima nalazi funkcija

$$H(a, x, y)=\exp(ax+a^2y)\qquad (a=\text{const}).$$

3° Pokazati da su funkcije

$$\frac{\partial}{\partial a}H(a, x, y),\quad \frac{\partial^2}{\partial a^2}H(a, x, y),\quad \frac{\partial^3}{\partial a^3}H(a, x, y),\quad \ldots$$

takođe rešenja jednačine (1).

4° Razviti funkciju $H(a, x, y)$ u red oblika

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}P_n(x, y),$$

gde je $P_n(x, y)$ polinom stepena n po x i y.

5° Formirati polinom $P_n(x, y)$ i proveriti relacije:

$$\frac{\partial}{\partial x}P_n(x, y)=n\,P_{n-1}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}P_n(x, y)=n(n-1)\,P_{n-2}(x, y).$$

6° Ispitati da li je $P_n(x, y)$ rešenje jednačine (1).

68. Odrediti rešenja $f(t, u)$ parcijalne diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

koja imaju neprekidne druge parcijalne izvode i zadovoljavaju dopunski uslov:

1° $\quad f(t, u)\equiv g(t)+h(u)$,

ili

2° $\quad f(t, u)\equiv g(t)\,h(u)$,

ili

3° $\quad f(t, u)\equiv g(e^t\cos u)\,h(e^t\sin u)$,

ili

4° $\quad f(t, u)\equiv$ polinom po t, u.

Sa $g(t)$, $h(u)$, $g(e^t\cos u)$, $h(e^t\sin u)$ označene su funkcije naznačenih argumenata.

69. Kako glasi najopštije zajedničko diferencijabilno rešenje parcijalnih jednačina

$$z_{xx}-z_{yy}=0,\quad z_{xx}+z_{yy}=0?$$

70. Pokazati da opšte rešenje parcijalne jednačine

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{n}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{m}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (m, n \text{ prirodni brojevi})$$

glasi

$$(2) \qquad u(x, y) = \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1}\,\partial y^{n-1}}\left[\frac{X(x)-Y(y)}{x-y}\right],$$

gde su $X(x)$ i $Y(y)$ proizvoljne diferencijabilne funkcije naznačenih argumenata.

Rešenje. Bez teškoće se pokazuje da je funkcija

$$u(x, y) = \frac{1}{x-y}\{X(x)-Y(y)\}$$

rešenje jednačine (1) za $m=1$ i $n=1$, tj. jednačine

$$(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ako se ova jednačina diferencira $m-1$ puta po x, dobija se

$$(x-y)\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^m \partial y} + \binom{m-1}{1}\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1}\partial y} - \frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1}\partial y} = 0,$$

odnosno

$$(x-y)\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^m \partial y} + m\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1}\partial y} - \frac{\partial^m u}{\partial x^m} = 0.$$

Ako se poslednja jednačina diferencira $n-1$ puta po y, dobija se

$$(x-y)\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m\,\partial y^n} - \binom{n-1}{1}\frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial x^m\,\partial y^{n-1}} + m\frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial x^{m-1}\,\partial y^n} - \frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial x^m\,\partial y^{n-1}} = 0,$$

odnosno

$$(x-y)\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m\,\partial y^n} - n\frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial x^m\,\partial y^{n-1}} + m\frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial x^{m-1}\,\partial y^n} = 0.$$

Stavi li se ovde

$$z = \frac{\partial^{m+n-2} u}{\partial x^{m-1}\,\partial y^{n-1}},$$

tada poslednja jednačina postaje

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - n\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

To znači da je zaista funkcija (2) rešenje jednačine (1).

71. Odrediti funkcije $u = f(x^2+y^2+z^2)$ koje zadovoljavaju uslov

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{k/2}} \qquad (k \text{ realno}).$$

72. Odrediti funkcije $f(x)$ i $u(x, y)$ tako da je:

$$f(x^2+y^2)\left(\frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \mathrm{d}u(x, y),$$

$$f(x^2-y^2)\left(\mathrm{d}y - \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{d}u(x, y).$$

73. Odrediti rešenje $u(x, y)$ jednačine

(1) $$u_{xx}(x, y) + 2u_{xy}(x, y) - 3u_{yy}(x, y) = 0$$

za koje važe uslovi:

(2) $$u(x, 0) \equiv 3x^2, \qquad u_y(x, 0) \equiv 0.$$

Rešenje. Budući da opšte rešenje jednačine (1) glasi

$$u(x, y) = f(x+y) + g(3x-y),$$

gde su $f(x+y)$ i $g(3x-y)$ diferencijabilne funkcije naznačenih argumenata, prema (2), dobija se

(3) $$f(x) + g(\lambda) = 3x^2,$$

(4) $$f'(x) - g'(\lambda) = 0, \qquad (\lambda = 3x;\ g'(\lambda) = dg(\lambda)/d\lambda).$$

Iz (3), posle diferenciranja po x, biće

(5) $$f'(x) + 3g'(\lambda) = 6x.$$

Iz relacija (4) i (5) nalazi se

$$4g'(\lambda) = 6x = 2\lambda, \quad \text{tj.} \quad g'(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda.$$

Odavde sleduje

$$g(\lambda) = \frac{1}{4}\lambda^2 + C \qquad (C = \text{const}).$$

Dakle, dobija se

$$f(x) = 3x^2 - \frac{9}{4}x^2 - C = \frac{3}{4}x^2 - C.$$

Traženo rešenje je

$$u(x, y) = \frac{3}{4}(x+y)^2 - C + \frac{1}{4}(3x-y)^2 + C$$

$$= 3x^2 + y^2.$$

Ovo rešenje ispunjava zadate uslove (2).

74. Odrediti funkciju $f(x)$ za koju važi uslov

$$g(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \qquad \{g(x),\ h(y) \text{ date funkcije}\},$$

gde je $u = x\,f(y) + y\,f(x)$.

75. Odrediti zajedničko rešenje parcijalnih jednačina

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = b \qquad (a, b \text{ konstante}).$$

76. Odrediti zajedničko rešenje parcijalnih jednačina

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = b, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c \qquad (a, b, c \text{ konstante}).$$

77. Odrediti konstante A, B, a, b tako da jednačine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A e^{ax+by}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = B e^{ax+by}$$

imaju zajedničko rešenje.

78. Odrediti konstante a, b, c, d tako da parcijalne diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ax^2y+by^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = cx^3+dxy^3$$

imaju zajedničko rešenje.

79. Odrediti netrivijalno rešenje $u(x,t)$ parcijalne jednačine

(1) $\quad u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t) \quad$ (a realna konstanta)

koje zadovoljava homogene granične uslove

(2) $\quad u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \quad$ (l realna konstanta)

i koje se može prikazati u obliku

(3) $\quad u(x,t)=X(x)\,T(t),$

gde je $X(x)$ funkcija promenljive x i $T(t)$ funkcija promenljive t.

Rešenje. Na osnovu (3) jednačina (1) postaje

(4) $$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Ova jednakost može postojati samo u slučaju ako je

(5) $$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda \qquad (\lambda \text{ konstanta}).$$

Na osnovu (5) vidimo da su funkcije $X(x)$ i $T(t)$ određene linearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda:

(6) $$X''(x)+\lambda X(x)=0,$$

(7) $$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0.$$

Iz graničnih uslova (2), na osnovu (3), dobija se

$$u(0,t)=X(0)\,T(t)=0,$$

$$u(l,t)=X(l)\,T(t)=0.$$

Iz ovih relacija izlazi da funkcija $X(x)$ mora zadovoljavati uslove:

(8) $$X(0)=0, \quad X(l)=0.$$

Ako bi bilo $T(t)\equiv 0$, tada bismo dobili $u(x,t)\equiv 0$, tj. trivijalno rešenje koje je izuzeto iz posmatranja.

Na ovaj način pokazali smo da funkcija $T(t)$ ne mora zadovoljavati nikakve dopunske uslove, dok funkcija $X(x)$ mora ispunjavati uslove (8).

Relacije (6) i (8) čine problem o sopstvenim vrednostima. Interesuju nas netrivijalna rešenja ovog graničnog (konturnog) problema.

Posle jednostavnih izračunavanja dolazimo do rezultata:

Sopstvene vrednosti konturnog problema (6) i (8) su:

(9) $$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

dok su sopstvene funkcije:

(10) $$X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

sa tačnošću do proizvoljnog faktora.

Za vrednosti λ_n, određene formulom (9), iz jednačine (7) dobija se

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at \qquad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{11}$$

(A_n, B_n proizvoljne konstante).

Prema tome, funkcija

$$u_n(x, t) = X_n(x)\, T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x$$

je jedno partikularno rešenje jednačine (1).

Ovo rešenje ispunjava uslove (2) i (3).

Dokazuje se takođe da je

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x$$

rešenje jednačine (1) i da ono ispunjava uslove (2).

80. Integraliti parcijalne jednačine:

$1^0 \quad zs + \dfrac{z}{q^2} t + pq = 0; \qquad 2^0 \quad s = f(z)\, pq; \qquad 3^0 \quad r - t + \dfrac{2p}{x} = 0.$

Uputstvo. 1^0 Ova jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(zp - \frac{z}{q}\right) + 1 = 0\,;$$

2^0 Ova jednačina može se napisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\log p - \int f(z)\, dz\right] = 0\,;$$

3^0 To je *Euler*-ova jednačina kojoj se može dati oblik

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p+q+\frac{z}{x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p+q+\frac{z}{x}\right) + \frac{1}{x}\left(p+q+\frac{z}{x}\right) = 0.$$

Primedba. Videti članak:

N. Saltikov: *Méthodes immédiates d'intégration d'équations aux dérivées partielles du second ordre* (L'Enseignement mathématique, t. 38, 1939—1940, p. 132—159).

FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH

1. Odrediti domen u kome je definisana funkcija

$$f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2x+y} + \cos^2(1+xy) - (1+x^2)^{1/y}.$$

Šta je granica (rub) domena? Da li je domen zatvoren?

Rešenje. Funkcija $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{2x+y}$ definisana je u svima tačkama (x, y) u kojima izraz $\sqrt{2x+y}$ ima smisla, tj. u oblasti $2x+y \geqslant 0$. Funkcija $\cos^2(1+xy)$ definisana je u čitavoj xy-ravni. Funkcija $(1+x^2)^{1/y}$ definisana je takođe u čitavoj ravni izuzev na pravoj $y=0$.

Na osnovu toga zaključuje se da je funkcija $f(x, y)$ definisana u poluravni $2x+y \geqslant 0$ iz koje je isključena poluprava $y=0$ $(x \geqslant 0)$.

Granicu domena čine prava $2x+y=0$ i pozitivni deo x-ose. Deo granice domena koji leži na x-osi ne pripada domenu, a preostali deo granice pripada. Prema tome, domen je je delimično zatvoren.

2. Odrediti granične vrednosti:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y), \quad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y), \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$$

ako je

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + 2x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2}.$$

Rešenje.

$$(1) \qquad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} (1+2x) = 1.$$

$$(2) \qquad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2 + 3y^3}{y^2} = \lim_{y \to 0} (-1+3y) = -1.$$

Ne postoji $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$, jer granične vrednosti (1) i (2) nisu jednake.

3. Odrediti

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \log_{ab} x \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2}{\partial a\, \partial b} \log_{ab} x \qquad (x > 0; \quad ab > 0).$$

Rešenje. Ako je

$$f(x, y) = \log_y x = \frac{\ln x}{\ln y} \qquad (x > 0;\ y > 0),$$

tada je

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{\ln x}{y \ln^2 y} = -\frac{\log_y x}{y \ln y}.$$

Primenom ove formule dobija se

$$\frac{\partial}{\partial a} \log_{ab} x = -\frac{\log_{ab} x}{a \ln(ab)}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial a\, \partial b} \log_{ab} x = \frac{2}{ab} \frac{\log_{ab} x}{\ln^2(ab)},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \log_{ab} x = \frac{2 + \ln(ab)}{a^2 \ln^2(ab)} \log_{ab} x.$$

Primedba. $\ln x = \log_e x \qquad (x > 0).$

4. Da li postoje, simultana i sukcesivne granične vrednosti funkcije

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y)^2} \qquad (x^2+y \neq 0)$$

za tačku $x=0,\ y=0$?

Rešenje.

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x^2 y}{(x^2+y)^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 y}{(x^2+y)^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Međutim, granična vrednost

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{(x^2+y)^2}$$

ne postoji. Da bismo ovo pokazali, uzmimo dva *nula*-niza

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

te je

$$f(x_n, y_n) = \frac{\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}}{\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Ova se vrednost ne poklapa sa navedenim graničnim vrednostima.

5. Data je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin(x/y) & (y \neq 0), \\ 0 & (y = 0). \end{cases}$$

Odrediti:

$$f_x(0, 0), \quad f_x(0, k) \quad (k \neq 0);$$

$$f_y(0, 0), \quad f_y(0, h) \quad (h \neq 0);$$

$$f_{xy}(0, 0), \quad f_{yx}(0, 0).$$

6. Relacije

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad G(x, y, u, v) = 0$$

određuju dve od promenljivih x, y, u, v kao funkcije ostalih dveju.

Pokazati da je

(1) $$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y = 0.$$

Navesti relacije analogne relaciji (1).

7. Ako je

$$u^2 + uv = \log(xy), \quad v^2 + uv = x^2 + y^2,$$

odrediti

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

i pokazati da je

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{xy(u+v)^2} = \frac{y^2-x^2}{xy[x^2+y^2+\log(xy)]}.$$

Rezultat.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2v+u-2ux^2}{2x(u+v)^2};\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{4ux^2+2vx^2-v}{2x(u+v)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2v+u-2uy^2}{2y(u+v)^2};\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{4uy^2+2vy^2-v}{2y(u+v)^2}.$$

8. Ako je $u=(x+y)^{(y+z)^{z+x}}$, odrediti parcijalne izvode prvog reda

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Rezultat.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u\,(y+z)^{z+x}\left[\frac{1}{x+y}+\log(x+y)\log(y+z)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=u\,(y+z)^{z+x}\left[\frac{1}{x+y}+\frac{z+x}{y+z}\log(x+y)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=u\,(y+z)^{z+x}\log(x+y)\left[\frac{z+x}{y+z}+\log(y+z)\right].$$

9. Relacija

$$e^{ax+by+cz}=Ax+By+Cz \qquad (a, b, c;\ A, B, C \text{ konstante})$$

definiše funkciju z od x i y. Naći $\partial^2 z/\partial x\,\partial y$.

Rezultat. Stavljajući $e^{ax+by+cz}=s$, dobija se

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{as-A}{cs-C},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{(aC-Ac)\,(bC-Bc)\,s}{(cs-C)^3}.$$

10. Ako je $u=f(x, y)$, $x=\rho(\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi)$, $y=\rho(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)$, da li važi relacija

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2-\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2=4\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,?$$

11. Ako je $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, proveriti relacije:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta\equiv\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y;\quad \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)_\theta\equiv\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_x;$$

$$r^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_y\equiv\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_r;\quad r^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x\equiv\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)_r.$$

12. Pokazati da su izrazi

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

invarijantni u odnosu na transformaciju

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+h,\qquad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+k,$$

gde su: α, h, k konstante; x', y' nove nezavisno promenljive.

Geometriski protumačiti ovaj rezultat.

13. Ako je $F(x, y, z, u) = 0$, pokazati da je

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 1 .$$

Rešenje. Ako je $\dfrac{\partial F}{\partial u} \neq 0$, relacija $F=0$ $\{$umesto $F(x, y, u, v)$ uzeto je $F\}$ definiše u kao funkciju od tri promenljive x, y, z. Diferenciranjem te relacije po x dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

odakle izlazi

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} . \tag{1}$$

Sličnim rezonovanjem dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} , \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial z} , \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{\partial F}{\partial u} . \tag{4}$$

Množenjem ovih relacija nalazimo

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} - 1\right) = 0 ,$$

odakle, na osnovu učinjenih pretpostavki, sleduje da je zaista

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 1 .$$

14. Neka je $f(x, y)$ funkcija od x i y, gde su x i y funkcije promenljive t definisane relacijama

$$u(x, t) = 0 , \qquad v(y, t) = 0 ,$$

što znači da je $f(x, y) \equiv g(t)$.

Pokazati da je

$$\frac{dg(t)}{dt} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}\right) \Big/ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) .$$

15. Ako je $u \equiv f(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ i $v \equiv g(ax^2 + 2bxy + cy^2)$, tada je

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) .$$

16. Neka je

$$x = f(u, v) , \qquad y = g(u, v) , \qquad z = h(u, v) .$$

Pokazati da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} \Big/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \quad \text{ako je} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 .$$

17. Neka je

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Ako je

$$\Delta g(x, y, z) = 0, \quad \Delta h(x, y, z) = 0,$$

pokazati da je

$$\Delta\Delta f(x, y, z) = 0,$$

gde je

$$f(x, y, z) \equiv g(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)\, h(x, y, z).$$

18. Neka je

(1) $$u = f(x, y, z),$$

(2) $$v = g(x, y, z),$$

(3) $$w = h(x, y, z),$$

(4) $$\frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} \neq 0.$$

Pokazati da je

(5) $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{v,w} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)}.$$

Rešenje. Na osnovu pretpostavke (4) iz relacija (2) i (3) mogu se odrediti y i z kao funkcije od v, w, x. Zamenom ovih izraza u (1) dobija se nov sistem relacija

$$u = f_1(x, v, w), \quad v = g(x, y, z), \quad w = h(x, y, z)$$

ekvivalentan sistemu relacija (1), (2), (3).

Budući da je

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, v, w)} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, v, w)},$$

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, v, w)} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, v, w)} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)},$$

dobija se relacija (5).

19. Odrediti stepen homogenosti funkcije

$$f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{2xy}}{\sqrt{x^4 + y^4}},$$

kao i vrednost izraza

(1) $$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Rezultat. Stepen homogenosti je $-4/3$, dok izraz (1) na osnovu *Euler*-ove teoreme o homogenim funkcijama dobija oblik

$$-\frac{4}{3} \frac{\sqrt[3]{2xy}}{\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

20. Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

1^0 $z = \log|2xy - y| + xy - x;$ 2^0 $z = |x^2 + xy + y^2 - 1| + 3|x - 3|.$

21. Odrediti izvod funkcije

$$u = x + yz$$

za tačku $A(2, 2, -1)$, u pravcu prema tački $B(-1, 2, 1)$.

Rešenje. Izvod funkcije u pravcu dat je obrascem

$$\frac{du}{dn} = \vec{n}_0 \operatorname{grad} u,$$

gde je $\vec{n}_0$ jedinični vektor pomeranja. Za ovaj slučaj je

$$\operatorname{grad} u = \vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k},$$

pa je za tačku A

$$\operatorname{grad} u = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Kako je

$$\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 2\vec{k},$$

biće

$$\vec{n}_0 = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{k}}{\sqrt{13}}.$$

Usled toga je

$$\frac{du}{dn} = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{k}}{\sqrt{13}} (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

22. Odrediti izvod vektorske funkcije

$$\vec{v} = x^2yz\,\vec{i} + y^2xz\,\vec{j} + z^2xy\,\vec{k}$$

za tačku $A(1, 2, 3)$, u pravcu prema tački $B(3, 2, 1)$.

Rešenje. Izvod vektora $\vec{v}$ u pravcu $\vec{n}_0$ dat je obrascem

$$\frac{d\vec{v}}{dn} = (\vec{n}_0\nabla)\,\vec{v} = (\vec{n}_0\nabla)\,(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = \vec{i}(\vec{n}_0\nabla)\,v_x + \vec{j}(\vec{n}_0\nabla)\,v_y + \vec{k}(\vec{n}_0\nabla)\,v_z.$$

Kako je

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{2}}, \quad (\nabla v_x)_A = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad (\nabla v_y)_A = 12\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}, \quad (\nabla v_z)_A = 18\vec{i} + 9\vec{j} + 12\vec{k},$$

dobija se

$$\frac{d\vec{v}}{dn} = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})\sqrt{2}.$$

23. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$u = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} \qquad (x^2+y^2+z^2=1).$$

Da li se na osnovu dobijenih ekstremnih vrednosti može izvesti dvostruka nejednakost

$$2 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} \leqslant \sqrt{6} \qquad (x^2+y^2+z^2=1)\,?$$

24. Odrediti najkraće i najduže otstojanje od početka koordinatnog sistema do tačaka na površini

$$(x/a)^p+(y/b)^p+(z/c)^p=1$$

(a, b, c pozitivne konstante; p paran broj >2).

Rezultat. Najduže otstojanje je $\left(a^{\frac{2p}{p-2}}+b^{\frac{2p}{p-2}}+c^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}$, a najkraće $\min(a,b,c)$.

25. Posmatrajmo površinu čija je jednačina

$$(1) \qquad F(x,y,z)=C \qquad (C=\text{const}),$$

gde je $F(x,y,z)$ homogena funkcija naznačenih argumenata stepena m. Pokazati da jednačina tangentne ravni ove površine u njenoj tački $M(\vec{r})$, tj. $M(x,y,z)$ ima oblik

$$(2) \qquad X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}+Z\frac{\partial F}{\partial z}=mC$$

(X, Y, Z koordinate proizvoljne tačke tangentne ravni).

Dokaz. Jednačina tangentne ravni površine (1) u tački $M(\vec{r})$ biće

$$(3) \qquad (\vec{R}-\vec{r})\cdot\nabla F=0.$$

Na osnovu *Euler*-ove teoreme o homogenim funkcijama je

$$(4) \qquad \vec{r}\cdot\nabla F=mC.$$

Iz (3) i (4) neposredno dobijamo

$$\vec{R}\cdot\nabla F=mC,$$

ili u skalarnom obliku

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}+Z\frac{\partial F}{\partial z}=mC.$$

Generalizacija. Odrediti jednačinu tangentne ravni površine

$$F^*(x,y,z)+\sum_{k=1}^{n}F_k(x,y,z)=\text{const},$$

gde je $F_k(x,y,z)$ homogena funkcija od x, y, z stepena m_k i $F^*(x,y,z)$ nehomogena funkcija Videti zadatak 29.

Primedba. Prema rešenju *V. Janekoskog* redigovao *P. Vasić*.

26. Odrediti najmanju vrednost funkcije

$$z=x^2+y^2+(ax+by+c)^2.$$

Rezultat. $c^2/(a^2+b^2+1)$.

27. Ako je $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, odrediti

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}$$

i proveriti da li je tačna relacija

$$\frac{\partial^{2n}\theta}{\partial x^n\,\partial y^n}=\frac{(2n-1)!}{r^{2n}}\sin\left(2n\theta-\frac{1}{2}n\pi\right).$$

28. Kroz centar elipsoida

(1) $$\varphi(x, y, z) \equiv x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0$$

položena je ravan

(2) $$\psi(x, y, z) \equiv Ax + By + Cz = 0.$$

Odrediti dužine osa elipse koja se dobija kao presek elipsoida i ravni.

Uputstvo. Ma za koju tačku $P(x, y, z)$ presečne krive kvadrat potega je

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \equiv f(x, y, z),$$

pri čemu x, y, z moraju zadovoljavati jednačine (1) i (2). Svi ovi potezi pretstavljaju poluprečnike elipse. Najveći i najmanji poteg biće velika i mala poluosa elipse.

Problem se svodi na iznalaženje vezanog ekstrema funkcije

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z),$$

gde su λ i μ *Lagrange*-ovi multiplikatori.

29. Ako je

(1) $$F(x, y, z) = F^*(x, y, z) + \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu(x, y, z),$$

gde je $F^*(x, y, z)$ nehomogena funkcija ili nula, a $F_\nu(x, y, z)$ homogena funkcija stepena homogenosti m_ν, pokazati da jednačina tangentne ravni površine

(2) $$F(x, y, z) = 0$$

glasi

(3) $$\vec{R} \cdot \nabla F = \vec{r} \cdot \nabla F^* + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu F_\nu$$

($\vec{R}$ vektor položaja proizvoljne tačke na tangentnoj ravni; $\vec{r}$ vektor položaja dodirne tačke).

Dokaz. Pođimo od opšte jednačine tangentne ravni

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \nabla F = 0,$$

ili

(4) $$\vec{R} \cdot \nabla F = \vec{r} \cdot \nabla F.$$

Jednačina (4) na osnovu (1) postaje

(5) $$\vec{R} \cdot \nabla F = \vec{r} \cdot \nabla F^* + \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r} \cdot \nabla F_\nu.$$

Kako je, na osnovu *Euler*-ovog stava o homogenim funkcijama,

$$\vec{r} \cdot \nabla F_\nu = m_\nu F_\nu,$$

iz (5) sleduje direktno jednačina (3).

Napomena. Analogan stav važi za jednačinu tangente krive u ravni.

Redigovano prema rešenju *V. Janekoskog.*

30. Pokazati da homogena funkcija $F(x, y, z)$ stepena m po x, y, z zadovoljava uslov

$$(1)\quad (xF_{xx}+yF_{xy}+zF_{xz})\,dx+(xF_{yx}+yF_{yy}+zF_{yz})\,dy+(xF_{zx}+yF_{zy}+zF_{zz})\,dz = (m-1)(F_x dx+F_y dy+F_z dz).$$

Dokaz. Po *Euler*-ovom stavu o homogenim funkcijama je

$$\vec{r}\cdot\nabla F = mF.$$

Diferenciranjem dobijamo

$$(2)\quad d\vec{r}\cdot\nabla F+\vec{r}\cdot d(\nabla F) = m\,dF.$$

Budući da je

$$d\vec{r}\cdot\nabla F = dF,$$

relacija (2) može se napisati u obliku

$$\vec{r}\cdot d(\nabla F) = (m-1)\,dF.$$

Ovim je relacija (1) dokazana.

Kako je

$$d(\nabla F) = \nabla(dF),$$

relacija (1) u razvijenom obliku glasi

$$x\frac{\partial}{\partial x}(dF)+y\frac{\partial}{\partial y}(dF)+z\frac{\partial}{\partial z}(dF) = (m-1)\,dF.$$

Prema tome, ako je F homogena funkcija stepena m, onda je i diferencijal te funkcije homogena funkcija po istim argumentima i to stepena $m-1$.

Generalizacija. Pomoću metoda matematičke indukcije dokazati odgovarajući stav za n-ti diferencijal homogene funkcije.

Primedba. Prema rešenju *V. Janekoskog* redigovao *P. Vasić.*

31. Posmatrajmo krivu čije su jednačine

$$(1)\quad F(x, y, z)=0,\quad G(x, y, z)=0,$$

gde su F i G homogene funkcije naznačenih argumenata respektivno stepena m_1 i m_2.

1° Jednačina tangente u tački $M(\vec{r})$, tj. $M(x, y, z)$ krive (1) glasi

$$(2)\quad \vec{R}\times(\nabla F\times\nabla G)=0.$$

2° Jednačina normalne ravni u tački $M(\vec{r})$ krive (1) glasi

$$(3)\quad [\vec{R},\ \nabla F,\ \nabla G] = \pm|\vec{r}|\,|\nabla F\times\nabla G|.$$

Dokaz. 1° Jednačina tangente krive (1) u tački $M(\vec{r})$ je

$$(4)\quad (\vec{R}-\vec{r})\times(\nabla F\times\nabla G)=0 \quad \text{ili} \quad \vec{R}\times(\nabla F\times\nabla G)=\vec{r}\times(\nabla F\times\nabla G).$$

Kako je

$$\vec{r}\times(\nabla F\times\nabla G)=\nabla F(\vec{r}\nabla G)-\nabla G(\vec{r}\nabla F)$$

i

$$(5)\quad \vec{r}\cdot\nabla F=0,\quad \vec{r}\cdot\nabla G=0 \quad \text{(zbog homogenosti funkcija } F \text{ i } G)$$

jednačina (4) postaje

$$\vec{R}\times(\nabla F\times\nabla G)=0.$$

2° Jednačina normalne ravni krive (1) u tački $M(\vec{r})$ je

(6) $$[\vec{R}-\vec{r},\ \nabla F,\ \nabla G]=0, \quad \text{ili} \quad [\vec{R},\ \nabla F,\ \nabla G]=[\vec{r},\ \nabla F,\ \nabla G].$$

Kako je

$$[\vec{r},\nabla F,\nabla G]^2=\begin{vmatrix} \vec{r}\cdot\vec{r} & \vec{r}\cdot\nabla F & \vec{r}\cdot\nabla G \\ \nabla F\cdot\vec{r} & \nabla F\cdot\nabla F & \nabla F\cdot\nabla G \\ \nabla G\cdot\vec{r} & \nabla G\cdot\nabla F & \nabla G\cdot\nabla G \end{vmatrix}=|\vec{r}|^2\begin{vmatrix} \nabla F\cdot\nabla F & \nabla F\cdot\nabla G \\ \nabla G\cdot\nabla F & \nabla G\cdot\nabla G \end{vmatrix}$$

$$=|\vec{r}|^2|\nabla F\times\nabla G|^2, \quad \text{jer je} \quad \vec{r}\cdot\nabla G=\vec{r}\cdot\nabla F=0,$$

jednačina (6) postaje

$$[\vec{R},\ \nabla F,\ \nabla G]=\pm|\vec{r}|\,|\nabla F\times\nabla G|,$$

gde znak $+$ uzimamo ako je $[\vec{r},\ \nabla F,\ \nabla G]>0$ i obratno.

Prema rešenju *V. Janekoskog* redigovao *P. Vasić.*

32. Ako vektor $\vec{a}$ ima utvrđen pravac u prostoru, pokazati da je vektor $\operatorname{rot}\vec{a}$ ortogonalan na tom pravcu.

33. Ako je O fiksna tačka i M ma koja tačka u prostoru, posmatrati vektor

$$\vec{a}=f(|\vec{r}|)\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad (\vec{r}=\overrightarrow{OM}).$$

Izračunati $\operatorname{div}\vec{a}$ i $\operatorname{rot}\vec{a}$ i ispitati da li se $f(|\vec{r}|)$ može odrediti tako da polje vektora $\vec{a}$ bude *Laplace*-ovo.

34. Ispitati da li je tačna relacija

$$\operatorname{div}\{\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\operatorname{div}\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\operatorname{div}\vec{w}+\operatorname{grad}(\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v}-\operatorname{grad}(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}.$$

35. Dokazati relaciju

$$\vec{v}\cdot\operatorname{rot}\vec{w}=\vec{w}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}$$

ako je $\vec{w}=(\vec{v}\cdot\vec{v})\,\vec{v}$, gde je $\vec{v}$ jedan promenljiv vektor.

36. Ako je $\vec{a}$ konstantan vektor, proveriti relaciju

$$\operatorname{rot}\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^n}=\frac{(2-n)\,\vec{a}}{|\vec{r}|^n}+\frac{n\,\vec{r}\,(\vec{a}\cdot\vec{r})}{|\vec{r}|^{n+2}} \qquad (\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}).$$

37. Ako su A i B fiksne tačke, a M jedna promenljiva tačka, ispitati da li se vektor $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM}$ može pretstaviti kao gradijent jedne skalarne funkcije.

VIŠESTRUKI, KRIVOLINISKI I POVRŠINSKI INTEGRALI

I. VIŠESTRUKI INTEGRALI

1. Izračunati dvostruki integral

$$\iint\limits_G \left(x + \frac{y^2}{x^2}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,,$$

gde je G oblast definisana relacijom $x^2+y^2-2ax \leqslant 0$.

2. Izračunati

$$\iint\limits_G \frac{\operatorname{arc\,tg}(y/x)}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,,$$

gde je G kvadrat ograničen pravama

$$x=0\,, \quad x=a\,, \quad y=0\,, \quad y=a \qquad (a>0)\,.$$

Rezultat. $\frac{1}{2}\, a\pi \log \operatorname{tg}\left(\frac{3}{8}\pi\right)$.

3. Izračunati integral

$$\int\limits_0^a \mathrm{d}x \int\limits_0^x \sqrt{\frac{x}{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}y\,.$$

Rezultat. $\frac{2}{3}\, a^{3/2} \log(1+\sqrt{2})$.

4. Izračunati integral $\iint\limits_G e^{-(x+y)^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, gde je G oblast definisana relacijama: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Uputstvo. Upotrebiti smenu: $x=\rho\cos^2\theta$, $y=\rho\sin^2\theta$ $(\rho \geqslant 0)$.

Rezultat. $1/2$.

5. Izračunati integral $\iint\limits_G (x^3+y^3)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, gde je G oblast definisana relacijama

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqslant 0\,, \qquad x \geqslant 0\,, \qquad y \geqslant 0\,.$$

Rezultat. $\frac{2}{15}\, ab\,(a^3+b^3)$.

6. Izračunati integral $\int\limits_0^a \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}y$.

7. Izračunati

$$\iint\limits_G \frac{1}{y}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy\,,$$

gde je G deo ravni u prvom kvadrantu ograničen jediničnim krugom i pravama

$$y=x \quad \text{i} \quad x=0\,.$$

Rezultat. Kada se pređe na polarne koordinate, dobija se

$$-\frac{1}{4}\pi\log\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi\,.$$

8. Skicirati oblast integracije integrala

$$I=\int_0^2 dy\int_{1/2}^{2-y^2/8}\frac{y\,dx}{x^{5/2}}\,.$$

Izmeniti red integracije i pokazati da je

$$I=\frac{16\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

9. Promeniti red integracije u dvostrukom integralu

$$\int_0^a dy\int_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}}\frac{y\,(x+a)\log(x+a)}{(x-a)^2}\,dx$$

i izračunati ga.

10. Izračunati

$$I=\iint\limits_{\substack{x^2+y^4\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} y^3\sqrt{1-x^2-y^4}\,dx\,dy\,.$$

Rezultat.

$$I=\int_0^1 y^3\int_0^{\sqrt{1-y^4}}\sqrt{1-y^4-x^2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{32}\,.$$

Upotrebiti smenu $1-y^4=t^2$.

11. Izmeniti red integracije u dvostrukom integralu i zatim izračunati integral:

$$1^0\qquad \int_0^a dy\int_0^y\frac{x\,dx}{\{(a^2-x^2)(a-y)(y-x)\}^{1/2}}\,;$$

$$2^0\qquad \int_0^a dx\int_0^x\frac{dy}{\{(a-x)(x-y)(a-y)(a+y)\}^{1/2}}\,.$$

Rezultat.

$$1^0\qquad \int_0^a dx\int_x^a\frac{x\,dy}{\{(a^2-x^2)(a-y)(y-x)\}^{1/2}}=\pi a\,;$$

$$2^0\qquad \int_0^a dy\int_y^a\frac{dx}{\{(a-x)(x-y)(a-y)(a+y)\}^{1/2}}=\frac{\pi^2}{2}\,.$$

12. Izračunati integral

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dx\, dy.$$

Rezultat. $\frac{9}{16}\pi$.

13. Ako je G oblast, određena relacijama

$$x(1-x) > 0, \quad y > 0, \quad y - x < 0,$$

izračunati integral $\iint\limits_G x\, dx\, dy$.

Rezultat. $1/3$.

14. Izračunati integral

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0}} e^{-x-y}(x+y)^n\, dx\, dy \qquad (n \text{ prirodan broj ili nula}).$$

Rezultat. $(n+1)!$

Primedba. Ako je $n=-1$, navedeni integral ima vrednost 1.

15. Izračunati integral

$$\iint x^3 y^7 \sqrt{1-x^4-y^4}\, dx\, dy$$

po oblasti koja je definisana relacijama

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x^4 + y^4 \leqslant 1.$$

Rezultat. $1/210$.

16. Izračunati integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}(x^2+y^2+b^2)^{1/2}} \qquad (a, b > 0).$$

Rezultat. $2\pi/(a^2+ab)$.

17. Izračunati integral

$$J = \iint\limits_G \frac{\cos x}{1 - \sin x \sin y}\, dx\, dy,$$

gde je G kvadrat $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$.

Rešenje. Najpre je

$$J = \int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 - \sin x \sin y}\, dy.$$

Izračunajmo prvo neodređeni integral

$$I = \int \frac{\cos x}{1 - \sin x \sin y}\, dy.$$

Smenom $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=t$ dobijamo:

$$I=\int\frac{2\cos x}{t^2-2t\sin x+1}\,dt=\int\frac{2\cos x}{(t-\sin x)^2+\cos^2 x}\,dt$$

$$=2\int\frac{d\left(\frac{t-\sin x}{\cos x}\right)}{1+\left(\frac{t-\sin x}{\cos x}\right)^2}=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t-\sin x}{\cos x}\right)+\text{const.}$$

Na osnovu toga je

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1-\sin x\sin y}\,dy=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\sin x}{\cos x}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\pi/2}$$

$$=2\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)-\operatorname{arc\,tg}(-\operatorname{tg}x)\right].$$

Kako je

$$\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1-\cos\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right),$$

biće

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1-\sin x\sin y}\,dy=\frac{1}{2}\pi+x.$$

Na kraju dobijamo

$$J=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\pi+x\right)dx=\frac{3}{8}\pi^2.$$

18. Pokazati da je

$$\iiint_G e^{x+2y+3z}\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{6}(e-1)^3,$$

gde je G tetraedar ograničen ravnima:

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=1.$$

19. Naznačiti oblast integracije u integralu

$$\int_0^1 dx\int_x^{1/x}\frac{y^2\,dy}{(x+y)^2\sqrt{1+y^2}}$$

i, promenivši red integracije, pokazati da je njegova vrednost

$$\sqrt{2}-\frac{1}{2}.$$

20. Izračunati integral

$$\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{x}\frac{dy}{y\sqrt{y-x^2}}.$$

Rezultat. $\frac{1}{2}\pi$.

21. Izračunati integral

$$\iint\limits_G (x^3+y^3)\,dx\,dy,$$

gde je G oblast definisana nejednakostima:

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x^2+y^2-ay \leqslant 0 \qquad (a>0).$$

Rezultat. $\frac{1}{120}a^5\left(1+\frac{105}{32}\pi\right)$.

22. Ako je f funkcija promenljive $r\,(=\sqrt{x^2+y^2})$, koja ima integrabilan drugi izvod, izračunati

$$J = \iint\limits_G (f_{xx}+f_{yy})\,dx\,dy,$$

gde je G oblast definisana relacijom

$$a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2.$$

Rešenje. Pređemo li na polarne koordinate pomoću smene $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, dobijamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r}f',$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}f''+\frac{y^2}{r^3}f',$$

gde je $f'=df/dr$, $f''=d^2f/dr^2$.

Slično nalazimo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}f''+\frac{x^2}{r^3}f'.$$

Kako je jakobijan transformacije jednak r, biće

$$J = \iint\limits_{G'} \left(\frac{x^2}{r^2}f''+\frac{y^2}{r^3}f'+\frac{y^2}{r^2}f''+\frac{x^2}{r^3}f'\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \iint\limits_{G'} \left(f''+\frac{f'}{r}\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b (rf')'\,dr = 2\pi\,(rf')\Big|_a^b$$

$$= 2\pi\left[\,b\left(\frac{df}{dr}\right)_{r=b} - a\left(\frac{df}{dr}\right)_{r=a}\right].$$

23. Izračunati integral

$$\iint\limits_G \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\,dx\,dy,$$

gde je G unutrašnja oblast parabole $y^2=2px$ $(p>1)$.

24. Izračunati dvostruki integral

$$I=\int_{a/2}^{a} \mathrm{d}x \int_{x}^{a} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y \qquad (a>0).$$

Rešenje. Promenimo li red integracije, dobijamo

$$I=\int_{a/2}^{a} \mathrm{d}y \int_{a/2}^{y} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\int_{a/2}^{a}\left[\frac{1}{(\frac{1}{4}a^2+y^2)^{1/2}}-\frac{1}{y\sqrt{2}}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\log(\sqrt{10}+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\log 2.$$

25. Izračunati dvostruki integral

$$\iint_G \frac{1}{(x^2+y^2)(1+\sqrt[3]{x^2+y^2})}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gde je G oblast definisana relacijama

$$x^2-y^2\leqslant 0, \quad x^2+y^2\geqslant 1, \quad x^2+y^2\leqslant 4.$$

26. Izračunati

$$\iint_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

po kvadratu G čija su temena u tačkama $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$.

Rešenje. Posle prelaska na polarne koordinate dobija se

$$\iint_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}=2\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}\frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{(1+r^2)^{3/2}}.$$

Kako je

$$\int\frac{r\,\mathrm{d}r}{(1+r^2)^{3/2}}=-\frac{1}{(1+r^2)^{1/2}},$$

biće

$$\iint_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}=2\int_0^{\pi/4}\left(1-\frac{\cos\theta}{(2-\sin^2\theta)^{1/2}}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}-2\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{(2-\sin^2\theta)^{1/2}}.$$

Smenom $\sin\theta=\sqrt{2}\sin t$ dobija se

$$\iint_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{\pi}{2}-2\int_0^{\pi/6}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{6}.$$

27. Izračunati približnu vrednost integrala

$$\iint_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{4-x^3-y^3}},$$

gde je G kvadrat $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, deobom kvadrata G na 16 jednakih kvadrata.

28. Izračunati nesvojstvene trostruke integrale:

$$1^0 \quad \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}; \qquad 2^0 \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Rezultat. 1^0 $\frac{4}{3}\pi$; 2^0 $\pi\sqrt{\pi}$.

29. Izračunati integral

$$\iiint\limits_G xyz\,dx\,dy\,dz,$$

gde je G trodimenziona oblast

$$x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad z\geqslant 0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1.$$

Rezultat. $\frac{1}{48}a^2b^2c^2$.

30. Izračunati integrale:

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0\leqslant y\leqslant\pi}} (x+y)\sin x\sin y\,dx\,dy; \qquad \iint\limits_{\substack{x,\,y>0\\ x^3+y^3\leqslant a^3}} x^2y^2\sqrt{a^3-x^3-y^3}\,dx\,dy;$$

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 1,\,y\geqslant 1\\ x+y\leqslant 4}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^4}; \qquad \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^4}; \qquad \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant a}} x^y\,dx\,dy.$$

31. Izračunati integral

$$J=\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz,$$

gde je G oblast ograničena površinama $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(z\geqslant 0)$ i $z=0$.

Rešenje.

$$J=\int\limits_0^c z\,dz\iint\limits_S dx\,dy=\int\limits_0^c z\,S(z)\,dz,$$

gde je $S(z)$ površina elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$, dobijene presekom poluelipsoida sa ravni koja je paralelna xy-ravni. Kako je

$$S(z)=\pi\frac{ab}{c^2}(c^2-z^2),$$

biće

$$M=\pi\frac{ab}{c^2}\int\limits_0^c (c^2-z^2)\,z\,dz=\frac{1}{4}\pi abc^2.$$

II. KRIVOLINISKI INTEGRALI

32. Izračunati krivoliniski integral

$$\oint_C (xy^2\,dy - yx^2\,dx),$$

gde je C krug $x^2+y^2-2y=0$.

Rezultat. $\frac{3}{2}\pi$.

33. Izračunati krivoliniski integral

$$\oint_C e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy),$$

gde je C krug $x^2+y^2=r^2$.

Rezultat. 0.

34. Pomoću krivoliniskog integrala izračunati veličinu površine koju ograničava astroida $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

Rezultat. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

35. Služeći se krivoliniskim integralom, odrediti veličinu površine koju ograničava kriva $y^2=x^2-x^4$.

Uputstvo. 1° Upotrebiti parametarske jednačine ove krive: $x=\cos t$, $y=\sin t\cos t$. 2° Staviti $y=\tau x$ (τ parametar).

Rezultat. 4/3.

36. Izračunati veličinu površine koja je ograničena krivom

$$(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2) \qquad (a>0).$$

Rezultat. $\frac{1}{4}\pi a^2$.

37. Izračunati krivoliniski integral

$$J = \int (y^2z^2\,dx + z^2x^2\,dy + x^2y^2\,dz)$$

po krivoj

$$x=\cos t, \quad y=\cos 2t, \quad z=\cos 3t$$

u smislu u kome parametar t raste.

Rešenje. I. Koordinate x, y, z su periodične funkcije parametra t i respektivno imaju periode 2π, π i $\frac{2}{3}\pi$. Zajednički period je 2π, pa za $t=2\pi$ dobijamo iste vrednosti kao i za $t=0$. Dakle, kriva je zatvorena. Prema ovome je

$$(1)\qquad J = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 2t\cos^2 3t\sin t - 2\cos^2 t\cos^2 3t\sin 2t - 3\cos^2 t\cos^2 2t\sin 3t)\,dt.$$

Budući da je

$$\cos^2 kt = \frac{1+\cos 2kt}{2} \quad (k=1,2,3) \quad \text{i} \quad \cos a\cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\},$$

imaćemo u integrandu sabirke sa proizvodima oblika $\sin pt\cos 2qt$ ($p=1,2,3$; $2q=0,1,2,3,4,5$), pri čemu za jedno p fiksno, q uzima samo neke od naznačenih vrednosti.

Kako je

$$\int_0^{2\pi} \sin pt \cos 2qt \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(p+2q)t + \sin(p-2q)t] \, dt = 0,$$

integral J jednak je nuli.

II. Do rezultata se dolazi i na sledeći način. Integral J može se napisati u obliku

$$J = \int_0^{\pi} f(t) \, dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t) \, dt = J_1 + J_2,$$

gde je $f(t)$ integrand u integralu (1).

Ako se u integralu J_2 izvrši smena $t = 2\pi - \theta$, dobija se $J_2 = -J_1$, tj. $J = 0$.

38. Izračunati krivoliniski integral

$$\int_{\Gamma} (y \, dx + 2x \, dy),$$

gde je Γ kontura koja ograničava oblast G za čije tačke (x, y) važi bar jedna od nejednakosti

$$x^2 + y^2 - 2x < 0, \quad x^2 + y^2 - 2y < 0.$$

Rezultat. $\frac{3}{2}\pi + 1$.

III. PRIMENE NA IZRAČUNAVANJE POVRŠINA I ZAPREMINA

39. Izračunati zapreminu elipsoida čije su poluose a, b, c.

Rešenje. Uvedimo koordinate ρ, φ, θ koje su sa Dekartovim pravouglim koordinatama x, y, z vezane relacijama

$$x = a\rho \cos\theta \cos\varphi, \quad y = b\rho \cos\theta \sin\varphi, \quad z = c\rho \sin\theta.$$

Jednačina elipsoida $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ u ovim koordinatama glasi $\rho = 1$. Unutrašnje tačke elipsoida određene su nejednakostima

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{(oblast } G).$$

Za *Jacobi*-evu determinantu dobijamo

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = abc\rho^2 \cos\theta.$$

Kako je ovde $|\cos\theta| = \cos\theta$, biće $|J| = J$. Traženu zapreminu V daje određeni integral

$$V = \iiint_G dx \, dy \, dz = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta \, d\theta \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3}\pi abc.$$

40. Izračunati zapreminu tela koje ograničavaju površine:

$$x + y + z = 3a, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$$

Rezultat. $3\pi a^3$.

41. Naći zapreminu V tela obuhvaćenog površinom

$$\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)^3+z^6=\frac{z}{2}\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right). \tag{1}$$

Rešenje. Ako uvedemo uopštene sferne koordinate

$$x=3\rho\cos\varphi\cos^{1/3}\psi,\qquad y=2\rho\sin\varphi\cos^{1/3}\psi,\qquad z=\rho\sin^{1/3}\psi$$

(φ geografska dužina; ψ geografska širina),

jednačina površine (1) dobija oblik

$$\rho\sqrt[3]{2}=\sqrt[9]{\sin\psi\cos^2\psi}.$$

Oblast ograničena površinom (1) data je u novim koordinatama sledećim nejednakostima:

$$0\leqslant\varphi<2\pi,$$
$$0\leqslant\psi\leqslant\pi/2,$$
$$0\leqslant\rho\leqslant\rho_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[9]{\sin\psi\cos^2\psi}.$$

Tražena zapremina je

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\psi\int_0^{\rho_1}|J|\,d\rho$$
$$=2\pi\int_0^{\pi/2}d\psi\int_0^{\rho_1}2\rho^2\sin^{-2/3}\psi\cos^{-1/3}\psi\,d\rho$$
$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi/2}\sin^{-1/3}\psi\cos^{1/3}\psi\,d\psi,$$

gde je $|J|$ apsolutna vrednost jakobijana $J=2\rho^2\sin^{-2/3}\psi\cos^{-1/3}\psi$.

Smenom $\sin\psi=\sqrt{t}$ dobija se

$$V=\frac{1}{3}\pi\int_0^1\frac{t^{-2/3}}{\sqrt[3]{1-t}}dt=\frac{1}{3}\pi\int_0^1 t^{1/3-1}(1-t)^{2/3-1}dt.$$

Poslednji integral pretstavlja B-funkciju, pa je

$$V=\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Na osnovu formule

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\qquad\{\Gamma(x)\text{ gama-funkcija}\}$$

biće

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{3}\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Na osnovu formule

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\qquad(0<p<1),$$

za $p=1/3$ dobija se

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Tražena zapremina iznosi $V=\dfrac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

42. Izračunati zapreminu tela koje ograničavaju površine:

$$z=\frac{4}{x^2+y^2}, \qquad z=0, \qquad x^2+y^2=1, \qquad x^2+y^2=4.$$

Rezultat. $8\pi \log 2$.

43. Odrediti zapreminu tela koje ograničava površina

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x.$$

Rezultat. $\frac{1}{3}\pi a^3$.

44. Proveriti da li cilindri

$$x^2+y^2=2ax, \qquad z^2=2ax$$

ograničavaju telo čija je zapremina $128\,a^3/15$.

45. Izračunati zapreminu tela ograničenog hiperboličkim paraboloidom

$$z^2=xy$$

i ravnima

$$x+y-a=0, \qquad x+y-b=0 \qquad (0<a<b).$$

Rešenje. Tražena zapremina $|G|$ oblasti G data je integralom

$$|G|=2\iint_G \sqrt{xy}\,dx\,dy.$$

Smenom $x=r\cos^2\theta$, $y=r\sin^2\theta$, čiji je jakobijan $J=r\sin 2\theta$, integral $|G|$ postaje

$$|G|=\Big(\int_a^b r^2 dr\Big)\Big(\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta\Big)=\frac{1}{12}\pi(b^3-a^3).$$

46. Izračunati zapreminu V tela ograničenog površinom

(1) $$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$$

ako je

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Rešenje. Uvedimo smenu

$$a_1x+b_1y+c_1z=u, \qquad a_2x+b_2y+c_2z=v, \qquad a_3x+b_3y+c_3z=w,$$

za koju je

$$J=\left[\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}\right]^{-1}=\frac{1}{\Delta}.$$

Tada je

$$V=\iiint_G dx\,dy\,dz=\frac{1}{\Delta}\iiint_{G'} du\,dv\,dw,$$

gde je G oblast obuhvaćena površinom (1), a G' oblast obuhvaćena sferom

$$u^2+v^2+w^2=h^2.$$

Prema tome je $V=\dfrac{4\pi h^3}{3\Delta}$.

47. Izračunati veličinu površine koja je ograničena krivama:

$$xy = 1, \quad xy = 8, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 8x.$$

Rezultat. $7 \log 2$.

48. Izračunati veličinu površine koja je ograničena krivama:

$$xy = a, \quad xy = b, \quad x^2 y = c, \quad x^2 y = d \qquad (a, b, c, d > 0;\ a < b;\ c < d).$$

Rezultat. $(b-a) \log \frac{d}{c}$.

49. Izračunati veličinu površine ograničene krivama:

$$x^3 y = a, \quad x^3 y = b, \quad x^4 y = c, \quad x^4 y = d \qquad (a, b, c, d > 0;\ a < b;\ c < d).$$

Rezultat. $\frac{1}{6}(b^3 - a^3)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}\right)$.

50. Izračunati veličinu površine koju ograničavaju krive

$$y^3 = a x^2, \quad y^3 = b x^2, \quad x^4 = c y^3, \quad x^4 = d y^3$$
$$(a, b, c, d > 0; \quad a < b; \quad c < d).$$

Rezultat. $\frac{6}{35}(b^{7/6} - a^{7/6})(d^{5/6} - c^{5/6})$.

51. Odrediti zapreminu V tela koju ograničavaju površina

$$b^2 x^2 = a^2 y^2 + x^2 z^2 \qquad (a, b > 0)$$

i ravni $x = 0$ i $x = a$.

Rešenje. Preseci površine normalni na x-osi jesu elipse, čije su projekcije u yz-ravni

$$\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (x = \text{const})$$

pri čemu x igra ulogu parametra. Površina te elipse je

$$b \cdot \frac{b\,|x|}{a} \cdot \pi = \frac{b^2 \pi}{a}\,|x|.$$

Stoga je

$$V = \frac{b^2 \pi}{a} \int_0^a |x|\,dx = \frac{1}{2} \pi a b^2.$$

Površina $b^2 x^2 = a^2 y^2 + x^2 z^2$ se naziva conocuneus, tj. konusan klin.

52. Odrediti omotač prave kupe, visine H, čija je osnova elipsa s poluosama a i b.

Rešenje. Ako koordinatni početak postavimo u teme kupe, a z-osu uzmemo u pravcu visine H, jednačina konusne površine na kojoj leži omotač je

$$\text{(1)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{H^2}.$$

Oblast integracije u xy-ravni je elipsa

$$(G) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Prema tome, površina omotača je

$$M=\iint_G \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Iz (1) je

$$p=\frac{Hx}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}},\quad q=\frac{Hy}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}},$$

te je

$$M=\iint_G \left\{\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}^{1/2} dx\,dy,$$

gde je

$$\alpha=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+H^2},\qquad \beta=\frac{1}{b}\sqrt{b^2+H^2}.$$

Ako uvedemo uopštene polarne koordinate

$$x=a\rho\cos\theta,\qquad y=b\rho\sin\theta,$$

oblast integracije postaje krug $\rho\leqslant 1$, dok integral zbog $|J|=ab\rho$ postaje

$$M=ab\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Kako je $\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta$ periodična funkcija s primitivnim periodom π, iz prethodne relacije izlazi

$$M=ab\int_0^{\pi}\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Ako integral rastavimo na dva integrala u granicama $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ i $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, pa u drugom integralu smenimo θ sa $\pi-\theta$, dobijamo

$$M=ab\left(\int_0^{\pi/2}\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\,d\theta-\int_{\pi/2}^{0}\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\,d\theta\right),$$

odnosno

$$M=2ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Ako još izvršimo smenu $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$, biće

$$M=2ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{\alpha^2\sin^2\varphi+\beta^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=2ab\beta\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Ako je $a>b$, tada je $\alpha^2<\beta^2$. Stavimo li $\alpha^2/\beta^2=k^2\,(<1)$, biće

$$M=2a\sqrt{b^2+H^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Ovaj integral je eliptički integral druge vrste i označava se sa $E(k,\varphi)$ ako je φ gornja granica integrala. Za $\varphi=\pi/2$ označava se sa E potpuni integral. Na taj način je

$$M=2aE\sqrt{b^2+H^2}.$$

Postoje tablice pomoću kojih se određuju vrednosti integrala E za razne vrednosti *modula k*.

IV. RAZNI ZADACI

53. Izračunati srednju vrednost funkcije

$$f(x, y) \equiv \sin^2 x \sin^2 y$$

u kvadratu $0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Rezultat. 1/4.

54. Izračunati dvostruke integrale:

$$1^\circ \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (|x|+|y|)\, dx\, dy; \qquad 2^\circ \iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} (x^2+y^2)\, dx\, dy.$$

Rezultat. 1° 4/3; 2° $\pi/\sqrt{2}$.

55. Izračunati srednju vrednost funkcije

$$f(x, y, z) \equiv x^2+y^2+z^2$$

u oblasti

$$x^2+y^2+z^2-x-y-z \leqslant 0.$$

Rezultat. 6/5.

56. Izračunati integral

$$I(m, n, p) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\, dx\, dy\, dz \qquad (m, n, p \text{ nenegativni celi brojevi}).$$

Rezultat.

$$I(m, n, p) = \frac{4\pi}{m+n+p+3} \; \frac{(m-1)!!\,(n-1)!!\,(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!} \qquad (m, n, p \text{ parni}),$$

$$= 0 \qquad (\text{u ostalim slučajevima}).$$

57. Odrediti srednju vrednost funkcije xyz u pozitivnom oktantu elipsoida

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1.$$

58. Odrediti srednju vrednost funkcije xy^2z^3 u pozitivnom oktantu sfere

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

59. Odrediti jednačinu ortogonalne projekcije (C_p) u ravni Oxy krive

$$(C) \qquad x^2+y^2+z^2=1, \qquad x+z=1.$$

Izraziti koordinate tačaka krive (C_p), koja je elipsa, kao funkcije ekscentrične anomalije t i, koristeći parametarsko pretstavljanje krive (C), izračunati kriviliniski integral

$$\oint\limits_C (y\, dx+z\, dy+x\, dz).$$

60. Početak vektora $\vec{\rho}$ je fiksna tačka $A(a, b, c)$, a kraj mu je u tački $P(x, y, z)$ koja se nalazi na zatvorenoj glatkoj površini S. Odrediti fluks Φ vektora

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho^3}\vec{\rho} \qquad (\rho = |\vec{\rho}|)$$

kroz površinu S.

Rešenje. Pretpostavićemo da površina S ne prolazi kroz tačku $A(a, b, c)$. Razlikovaćemo dva slučaja.

Slučaj I. S ne obuhvata tačku A. Prema teoremi *Gauss—Ostrogradskog* je

$$\Phi = \oiint_S \vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = \iiint_G \operatorname{div}\vec{v}\, dg,$$

gde je $d\vec{\sigma}$ vektorski element površine sa smerom na spoljnu stranu površine S, a G je deo prostora ograničen površinom S.

Budući da je

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{v} &= \nabla\left(\frac{1}{\rho^3}\vec{\rho}\right) = \left(\nabla\frac{1}{\rho^3}\right)\cdot\vec{\rho} + \frac{1}{\rho^3}\nabla\cdot\vec{\rho} \\ &= -\frac{3}{\rho^4}(\nabla\rho)\cdot\vec{\rho} + \frac{3}{\rho^3} \\ &= -\frac{3}{\rho^4}\vec{\rho}_0\cdot\vec{\rho} + \frac{3}{\rho^3} = 0,\end{aligned}$$

biće $\Phi = 0$.

Slučaj II. S obuhvata tačku A. Kako je $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ za $\rho \neq 0$, integral $\oiint_S \vec{v}\cdot d\vec{\sigma}$ može se svesti na $\oiint_K \vec{v}\cdot d\vec{\sigma}$, gde je K bilo kakva druga glatka površina koja obuhvata A. Izaberimo za K jediničnu sferu. Kako je

$$\vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = \frac{1}{\rho^3}\vec{\rho}\cdot d\vec{\sigma} = \frac{1}{1^3}|\vec{\rho}|\,|d\vec{\sigma}|\cos(\vec{\rho}, d\vec{\sigma}) = d\sigma,$$

dobija se

$$\Phi = \oiint_K d\sigma = 4\pi.$$

61. Izračunati fluks vektora $\vec{v}(x^2, y^2, z^2)$ kroz deo $0 \leqslant z \leqslant h$ konusne površine $x^2 + y^2 = z^2$.

Rešenje. Iz jednačine konusne površine $z = \sqrt{x^2+y^2}$ nalazimo

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, dx\, dy.$$

Površinu

$$F \equiv \sqrt{x^2+y^2} - z = 0$$

orijentišimo u smeru vektora

$$\operatorname{grad} F = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} - \vec{k} \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2}).$$

Traženi fluks je

$$\iint_S \vec{v}\, d\vec{\sigma} = \iint_S (x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}) \frac{\left(\dfrac{x}{r}\vec{i} + \dfrac{y}{r}\vec{j} - \vec{k}\right)}{\sqrt{\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} + 1}}\, d\sigma$$

$$= \iint_S \left(\frac{x^3}{r} + \frac{y^3}{r} - z^2\right) dx\, dy .$$

Prelazeći na polarne koordinate, dobijamo $\iint_S \vec{v}\, d\vec{\sigma} = -\frac{1}{2}\pi h^4$.

62. Odrediti cirkulaciju vektora

$$\vec{v} = (\sin y)\vec{i} + x(1 + \cos y)\vec{j}$$

duž zatvorene krive C čija je jednačina

$$(1) \qquad 4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0 .$$

Rešenje. I. Cirkulacija vektora $\vec{v}$ data je izrazom

$$\oint_C \vec{v}\, d\vec{r} = \oint_C \{ \sin y\, dx + x(1 + \cos y)\, dy \} .$$

Kriva C je elipsa, što se uviđa ako se, na primer, jednačina (1) napiše u obliku

$$4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 - 36 = 0$$

ili

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1 .$$

Primenjujući *Riemann—Green*-ovu formulu

$$\oint_C \vec{v}\, d\vec{r} = \oiint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad (S \text{ površina ograničena sa } C),$$

pri čemu je

$$P = \sin y, \qquad Q = x(1 + \cos y),$$

dobija se

$$\oint_C \vec{v}\, d\vec{r} = \oiint_S (1 + \cos y - \cos y)\, dx\, dy = \oiint_S dx\, dy = \text{area } S .$$

Kako je area $S = 6\pi$, tražena cirkulacija iznosi

$$\oint_C \vec{v}\, d\vec{r} = 6\pi .$$

II. Do rezultata se dolazi i na sledeći način:

$$\oint_C \vec{v}\, d\vec{r} = \oint_C \{ d(x \sin y) + x\, dy \} = \oint_C x\, dy = \text{area } S = 6\pi .$$

63. Izračunati integral

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx \qquad (a, b > -1)$$

primenjujući na integral $\int_0^1 x^y\,dx \quad (y > -1)$ stav o integraciji pod znakom integrala.

Rešenje. Integralimo li relaciju

$$\int_0^1 x^y\,dx = \frac{1}{y+1}$$

u granicama (a, b), jedno za drugim dobijamo

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,dx \right) dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1},$$

$$\int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy \right) dx = \log \frac{b+1}{a+1},$$

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log \frac{b+1}{a+1}.$$

64. Izračunati integral

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

gde je (x_1, y_1, z_1) tačka sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (a > 0),$$

a (x_2, y_2, z_2) tačka sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \qquad (b > 0).$$

65. Izračunati

$$\iint (x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy)$$

po spoljnoj strani sferne površine

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Rezultat. $\frac{8}{3}\pi r^3 (a+b+c)$.

66. Izračunati veličinu površine onog dela cilindrične površine $x^2 + y^2 = a^2$ koji isecaju ravni

$$x + z = 0, \quad x - z = 0 \qquad (x \geqslant 0;\; y \geqslant 0).$$

67. Pomoću *Stokes*-ove formule izračunati integral

$$\int (y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z)$$

uzet duž kruga

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x+y+z=0$$

u smeru kretanja kazaljke na satu, ako se posmatra sa pozitivnog dela x-ose.

Rešenje. Prema *Stokes*-ovoj teoremi je

$$\int (y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z) = \int (y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k})\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k})\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = -\iint_S (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma},$$

gde je S skup $\{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2\} \cap \{x+y+z=0\}$. Integral je uzet po onoj strani površine S sa koje se kretanje po krugu vidi u smeru suprotnom kretanju kazaljki na satu. Ovu stranu karakteriše jedinični vektor $\vec{n}$ normale ravni $x+y+z=0$, koji sa koordinatnim osama čini tupe uglove.

Ovaj jedinični vektor je $\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, pa je $\mathrm{d}\vec{\sigma} = \vec{n}\,|\mathrm{d}\vec{\sigma}|$.

Poslednji integral postaje

$$-\iint_S (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\cdot\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\,|\mathrm{d}\sigma| = \sqrt{3}\iint_S |\mathrm{d}\sigma| = \sqrt{3}\ \text{area}\, S = \pi a^2\sqrt{3}.$$

68. Navesti geometrisko tumačenje površinskog integrala

$$\iint_S \vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma},$$

gde je S proizvoljna zatvorena površina i $\vec{r}$ vektor položaja.

Rešenje. Primenom teoreme *Gauss–Ostrogradskog* dobijamo

$$\iint_S \vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma} = \iiint_G \operatorname{div}\vec{r}\,\mathrm{d}g = \iiint_G 3\,\mathrm{d}g = 3\,|G|,$$

gde je $|G|$ zapremina oblasti G obuhvaćena površinom S.

69. Proveriti *Riemann–Green*-ovu formulu

$$\iint_A (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_C (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y),$$

(A oblast u xy-ravni, ograničena jednom prostom zatvorenom krivom C) na primeru

$$P = x^2(1-3y^2), \quad Q = y^2(3x^2-1).$$

Ovde je oblast A trougao ograničen pravama $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

70. Neka je $\vec{r}\,(r = |\vec{r}|)$ vektor položaja tačke (x, y, z) i S zatvorena glatka površina koja obuhvata oblast G. Pretvoriti površinski integral $\oiint\limits_S r^2\, d\vec{\sigma}$ u zapreminski.

Rešenje. Uočimo vektor $r^2 \vec{c}_0$, gde je $\vec{c}_0$ jedinični vektor konstantnog pravca. Na osnovu teoreme *Gauss — Ostrogradskog* je

$$\oiint\limits_S r^2 \vec{c}_0\, d\vec{\sigma} = \iiint\limits_G \operatorname{div}(r^2 \vec{c}_0)\, dg.$$

Zbog

$$\operatorname{div}(r^2 \vec{c}_0) = \nabla(r^2 \vec{c}_0) = \vec{c}_0 \cdot \nabla r^2 + r^2 \nabla \vec{c}_0 = \vec{c}_0 \cdot 2r\nabla r = 2r\vec{c}_0 \operatorname{grad} r = 2r\vec{c}_0\, \vec{r}_0 = 2\vec{r} \cdot \vec{c}_0$$

i zbog konstantnosti vektora $\vec{c}_0$ možemo pisati

$$\vec{c}_0 \oiint\limits_S r^2\, d\vec{\sigma} = 2\vec{c}_0 \iiint\limits_G \vec{r}\, dg, \quad \text{tj.} \quad \vec{c}_0 \Big(\oiint\limits_S r^2\, d\vec{\sigma} - 2 \iiint\limits_G \vec{r}\, dg \Big) = 0,$$

ili kraće $\vec{c}_0 \cdot \vec{A} = 0$.

Kako $\vec{c}_0$ ima fiksan, no proizvoljan pravac, ne mora biti $\vec{c}_0 \perp \vec{A}$. Poslednji proizvod jednak je nuli samo u slučaju kada je $\vec{A} = 0$. Prema tome je

$$\oiint\limits_S r^2\, d\vec{\sigma} = 2 \iiint\limits_G \vec{r}\, dg.$$

71. Svesti krivoliniski integral

$$\oint\limits_C (u_1 \nabla u_2) \cdot d\vec{r} \qquad (u_1 \text{ i } u_2 \text{ funkcije od } x, y, z)$$

na površinski.

Rešenje. Na osnovu *Stokes*-ove teoreme je

$$\oint\limits_C (u_1 \nabla u_2) \cdot d\vec{r} = \iint\limits_S \nabla \times (u_1 \nabla u_2)\, d\vec{\sigma} = \iint\limits_S (\nabla u_1 \times \nabla u_2 + u_1 \nabla \times \nabla u_2) \cdot d\vec{\sigma}$$

$$= \iint\limits_S (\nabla u_1 \times \nabla u_2)\, d\vec{\sigma} = \iint\limits_S [\nabla u_1, \nabla u_2, d\vec{\sigma}],$$

jer je $\nabla \times \nabla u_2 = 0$.

Primedba. Treba još navesti pretpostavke o funkcijama u_1 i u_2, krivoj C i površini S pod kojima vredi dobijena jednakost.

72. Oceniti vrednost integrala

$$I = \iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 10} \frac{dx\, dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$$

Rešenje. Po stavu o srednjoj vrednosti je

$$m\,|G| \leqslant \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy \leqslant M\,|G| \qquad (|G| = \operatorname{mes} G),$$

gde su $m = \inf f(x, y)$, $M = \sup f(x, y)$ u oblasti G.

U zadatku je $m = f(0, 0) = 1/102$, $M = f(\pi/2, \pi/2) = 1/100$, $|G| = 200$.

Prema tome je $100/51 < I < 2$.

73. Izračunati

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_G f(x,y)\,dx\,dy,$$

gde je G oblast ograničena krugom $x^2+y^2=\rho^2$ i $f(x,y)$ neprekidna funkcija od $x, y \in G$.

Rešenje. Po stavu o srednjoj vrednosti je

$$\frac{1}{|G|} \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta),$$

gde (ξ,η) pretstavlja proizvoljnu tačku oblasti G, pri čemu je $|G| = \operatorname{mes} G = \pi\rho^2$. Zato je

$$\frac{1}{\pi\rho^2} \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta).$$

Budući da $(\xi,\eta) \in G$, biće

$$0 \leqslant |\xi| \leqslant \rho \qquad 0 \leqslant |\eta| \leqslant \rho,$$

te ako $\rho \to +0$, tada istovremeno $\xi \to 0$ i $\eta \to 0$. Stoga je

$$\lim_{\rho\to+0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}} f(\xi,\eta).$$

Međutim, zbog neprekidnosti funkcije $f(x,y)$ u oblasti G je

$$\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}} f(\xi,\eta) = f(0,0),$$

te je na osnovu prethodne relacije

$$\lim_{\rho\to+0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = f(0,0).$$

74. Neka je C zatvorena kontura u ravni $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$, koja ograničava površinu S. Izračunati integral

$$(1) \qquad I = \oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Primenimo li *Stokes*-ovu formulu na (1), dobijamo

$$(2) \qquad I = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma \qquad (d\sigma \text{ diferencijalni element površine}),$$

gde je

$$P = z\cos\beta - y\cos\gamma, \qquad Q = x\cos\gamma - z\cos\alpha, \qquad R = y\cos\alpha - x\cos\beta.$$

Smenom ovih vrednosti u (2) nalazimo

$$I = 2\iint_S (\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\,d\sigma = 2 \text{ area } S.$$

U vektorskom obliku je

$$I = \oint_C (\vec{\mu} \times \vec{r})\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{\mu} \times \vec{r})\, d\vec{\sigma} = \iint_S 2\vec{\mu}\, d\vec{\sigma} = 2 \iint_S d\sigma = 2 \operatorname{area} S,$$

gde je $\vec{\mu} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

75. Dokazati drugu *Green*-ovu formulu u prostoru

$$(1) \qquad \iiint_G (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy\, dz = \oiint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma,$$

gde je G oblast ograničena površinom S, a $\vec{n}$ jedinični vektor spoljašnje normale na površini S. Funkcije $u(x, y, z)$ i $v(x, y, z)$ imaju izvode drugog reda u oblasti G, a Δ je *Laplace*-ov operator $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$.

Rešenje. Transformišemo desnu stranu jednakosti (1) pomoću

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n} \operatorname{grad} u.$$

Primenom formule *Ostrogradskog* dobija se

$$\oiint_S (v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v)\, d\vec{\sigma} = \iiint_G \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v)\, dg$$

$$= \iiint_G (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy\, dz.$$

76. Izračunati srednju vrednost funkcije

$$f(x, y, z) = \exp\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

u oblasti G, određenoj relacijom $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

Rešenje. Po definiciji, srednja vrednost iznosi

$$\mu = \frac{1}{|G|} \iint_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

gde je $|G|$ zapremina oblasti G, tj. $|G| = \frac{4}{3}\pi abc$.

Ako u integralu

$$I = \iiint_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_G \exp\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2} dx\, dy\, dz$$

izvršimo smenu $x = a\rho\cos\varphi\cos\psi$, $y = b\rho\sin\varphi\cos\psi$, $z = c\rho\sin\psi$, za koju je

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \psi)} = abc\rho^2\cos\psi,$$

dobijamo

$$I = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi\, d\psi \int_0^1 \rho^2 e^\rho\, d\rho = 4\pi(e-2)\, abc.$$

Prema tome, tražena srednja vrednost je $\mu = 3(e-2)$.

77. Ako je

$$F(x, y) = \int_a^x \mathrm{d}u \int_b^y f(u, v)\, \mathrm{d}v,$$

gde je $f(u, v)$ neprekidna funkcija, pokazati da je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = f(x, y).$$

78. Izračunati zapreminu tela koje ograničavaju elipsoid

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

i konusna površina

(2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \qquad (z \geqslant 0).$$

Rešenje. Zapremina isečka elipsoida je

$$V = \iint_G c\left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

gde je G projekcija ovog isečka na xy-ravni. Oblast G je ograničena projekcijom preseka elipsoida i konusa, tj. krivom u xy-ravni

$$\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1,$$

koja se dobija eliminacijom z iz jednačina (1) i (2).

Ako izvršimo smenu

$$x\sqrt{2} = a\rho\cos\theta, \qquad y\sqrt{2} = b\rho\sin\theta,$$

oblast integracije biće krug $\rho \leqslant 1$, dok će θ varirati od 0 do 2π.

Kako je jakobijan izraz oblika

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta & \dfrac{b}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ -\dfrac{a}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta & \dfrac{b}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2}ab\rho,$$

dobija se

$$V = c\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2}\rho^2} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2}ab\rho\, \mathrm{d}\rho.$$

Odavde, posle smene $\rho^2 = 2t$, izlazi

$$V = \frac{1}{2}abc\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{1/2} (\sqrt{1-t} - \sqrt{t})\, \mathrm{d}t = \pi abc\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}},$$

tj.

$$V = \frac{1}{3}\pi abc(2 - \sqrt{2}).$$

VEKTORSKA ANALIZA

1. Ako je $\vec{a}(t) \times \dfrac{d\vec{a}(t)}{dt} = 0$, pokazati da je $\vec{a}_0 = \text{ort}\,\vec{a}(t) = \overrightarrow{\text{const}}$.

Rešenje. Iz $\vec{a}(t) = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$ sleduje

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{a}_0 + a\frac{d\vec{a}_0}{dt} \qquad (|\vec{a}| = a).$$

Vektorskim množenjem jednačine $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$ prethodnom dobija se

$$\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt} = \left(a \cdot \vec{a}_0 \times \frac{da}{dt}\vec{a}_0\right) + \vec{a} \times |\vec{a}| \frac{d\vec{a}_0}{dt}.$$

Po uslovu zadatka je $\vec{a} \times \dfrac{d\vec{a}}{dt} = 0$ i

$$|\vec{a}|\,\vec{a}_0 \times \frac{da}{dt}\vec{a}_0 = |\vec{a}| \frac{da}{dt}(\vec{a}_0 \times \vec{a}_0) = 0,$$

te je

$$\vec{a} \times |\vec{a}| \frac{d\vec{a}_0}{dt} = 0, \qquad \vec{a}^2\left(\vec{a}_0 \times \frac{d\vec{a}_0}{dt}\right) = 0.$$

Pošto je $\vec{a}^2 \neq 0$ i $\vec{a}_0(t) \neq 0$, poslednja relacija postoji za

$$\frac{d\vec{a}_0}{dt} = 0, \quad \text{tj.} \quad \vec{a}_0 = \text{ort}\,\vec{a} = \overrightarrow{\text{const}}.$$

2. Dokazati da ako kriva ima fleksiju jednaku nuli, ona pretstavlja pravu.

Rezultat. Po *Frenet—Serret*-ovom vektorskom obrascu

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R},$$

($\vec{T}$ i $\vec{N}$ jedinični vektori tangente odnosno glavne normale) iz $1/R = 0$, proizilazi $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = 0$, tj.

$$\vec{T} = \vec{a} = \overrightarrow{\text{const}} \qquad (|\vec{a}| = 1),$$

a odavde

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{a}.$$

Ponovnom integracijom dobijamo

$$\vec{r} = \vec{a} \cdot s + \vec{b} \qquad (\vec{b} = \overrightarrow{\text{const}}),$$

a ovo je vektorska jednačina prave.

3. Pokazati da se *Frenet-Serret*-ovi obrasci

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{\vec{N}}{R}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds}=-\frac{\vec{T}}{R}-\frac{\vec{B}}{\tau}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds}=\frac{\vec{N}}{\tau}$$

($\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ jedinični vektori osa prirodnog trijedra; R poluprečnik fleksije; τ poluprečnik torzije) mogu dobiti iz opšteg obrasca

$$\frac{d\vec{a}}{ds}=\vec{\omega}\times\vec{a},$$

zamenjujući vektor $\vec{a}$ redom sa $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$. Odrediti vektor $\vec{\omega}$.

Rešenje. Rastavimo traženi vektor $\vec{\omega}$ u komponente duž tangente i binormale

$$\vec{\omega}=\alpha\,\vec{T}+\beta\,\vec{B}$$

i odredimo skalarne činioce α i β.

Stavimo u $\dfrac{d\vec{a}}{ds}=\vec{\omega}\times\vec{a}$ najpre $\vec{a}=\vec{T}$ i prednju vrednost za $\vec{\omega}$, pa ćemo dobiti

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\beta\,(\vec{B}\times\vec{T})=\beta\vec{N}=\frac{\vec{N}}{R},$$

odakle je $\beta=1/R$.

Ako zatim u $\dfrac{d\vec{a}}{ds}=\vec{\omega}\times\vec{a}$ zamenimo $\vec{a}=\vec{B}$ i $\vec{\omega}=\alpha\vec{T}+\beta\vec{B}$ dobijamo

$$\frac{d\vec{B}}{ds}=\alpha\,(\vec{T}\times\vec{B})=-\alpha\vec{N}=\frac{\vec{N}}{\tau},$$

odakle je: $\alpha=-1/\tau$.

Prema tome je

$$\vec{\omega}=-\frac{\vec{T}}{\tau}+\frac{\vec{B}}{R}.$$

Ako u obrazac $\dfrac{d\vec{a}}{ds}=\vec{\omega}\times\vec{a}$ zamenimo prednju vrednost za $\vec{\omega}$ i $\vec{a}=\vec{N}$ dobijamo

$$\frac{d\vec{N}}{ds}=-\frac{1}{\tau}(\vec{T}\times\vec{N})+\frac{1}{R}(\vec{B}\times\vec{N})=-\frac{\vec{T}}{R}-\frac{\vec{B}}{\tau}.$$

4. Skalarno polje je definisano odnosom površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{i}$ i $\vec{r}$ i površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{j}$ i $\vec{r}$. Odrediti grad φ i ekviskalarne površine.

Rezultat. $\varphi=\dfrac{|\vec{c}\times\vec{r}|}{|\vec{j}\times\vec{r}|}=\left(\dfrac{z^2+y^2}{z^2+x^2}\right)^{1/2}$; $\quad \text{grad}\,\varphi=\varphi\cdot\left(\dfrac{z\vec{k}+y\vec{j}}{z^2+y^2}-\dfrac{z\vec{k}+x\vec{i}}{z^2+x^2}\right).$

Ekviskalarne površine: $C^2x^2-y^2+(C^2-1)\,z^2=0.$

5. Dokazati da ako je torzija krive jednaka nuli, ona leži u ravni.

Rešenje. Iz *Frenet–Serret*-ovog vektorskog obrasca

$$\frac{d\vec{B}}{ds}=\frac{\vec{N}}{\tau}$$

($\vec{B}$ i $\vec{N}$ jedinični vektori binormale odnosno glavne normale; τ poluprečnik torzije) i uslova $1/\tau=0$ proizilazi $\dfrac{d\vec{B}}{ds}=0$, odakle integracijom dobijamo

$$\vec{B}=\vec{c}=\overrightarrow{\text{const}} \qquad (|\vec{c}|=1).$$

Vektor $\vec{B}$ je upravan na jediničnom vektoru $\vec{T}$ tangente, te je

$$\vec{B}\cdot\vec{T}=0, \quad \text{ili} \quad \vec{c}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}=0, \quad \text{ili} \quad \frac{d}{ds}(\vec{c}\,\vec{r})=0,$$

odakle integracijom nalazimo

$$\vec{r}\,\vec{c}=\alpha \qquad (\alpha=\text{const})$$

a ovo je vektorska jednačina ravni u kojoj leži kriva linija.

6. Izračunati gradijent sledećih funkcija tačke:

1^0 $\varphi(M)=z/(x^2+y^2)^{1/2}$; 2^0 $\varphi(M)=\log(x+y)$;

3^0 $\varphi(M)=\sqrt{(\vec{a}\times\vec{r})^2}$; 4^0 $\varphi(M)=(\vec{a}\,\vec{r})/r^3$;

5^0 $\varphi(M)=f(\rho)$, gde je $\rho=\sqrt{(\vec{c}\times\vec{r})^2}$ ($\vec{c}$ konstantni vektor).

Rezultat.

1^0 $\operatorname{grad}\varphi=\dfrac{-xz\cdot\vec{i}-zy\cdot\vec{j}+(x^2+y^2)\cdot\vec{k}}{(x^2+y^2)^{1/2}\cdot(x^2+y^2+z^2)}$; 2^0 $\operatorname{grad}\varphi=\dfrac{\vec{i}+\vec{j}}{x+y}$;

3^0 $\operatorname{grad}\varphi=\dfrac{(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{a}}{\sqrt{(\vec{a}\times\vec{r})^2}}$; 4^0 $\operatorname{grad}\varphi=\dfrac{\vec{a}}{r^3}-\dfrac{3\vec{r}(\vec{a}\,\vec{r})}{r^5}$;

$$5^0 \quad \operatorname{grad}\varphi=f'(\rho)\frac{(\vec{c}\times\vec{r})\times\vec{c}}{\sqrt{(\vec{c}\times\vec{r})^2}}.$$

7. Za polje skalara $\varphi(\vec{r})=(\vec{a}\,\vec{r})/(\vec{b}\,\vec{r})$, gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori i $\vec{r}$ vektor položaja tačke polja, odrediti grad φ i ekviskalarne površine.

Uputstvo. Obrazovati diferencijal $d\varphi$; koeficijent uz $d\vec{r}$ pretstavljaće grad φ.

Rezultat. $\operatorname{grad}\varphi=\dfrac{\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{b}\cdot\vec{r})^2}$.

Ekviskalarne površine imaju jednačinu $(\vec{a}\,\vec{r})/(\vec{b}\,\vec{r})=C$ ili $(\vec{a}-C\cdot\vec{b})\cdot\vec{r}=0$, a to su ravni koje prolaze kroz pol i imaju za normalni vektor $\vec{a}-C\cdot\vec{b}$, komplanaran sa konstantnim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

8. Izračunati $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2$ ($\vec{c}$ konstantni vektor).

Rešenje. Polazeći od toga da je $d\varphi=\operatorname{grad}\varphi\cdot d\vec{r}$, treba naći

$$d|\vec{c}\times\vec{r}|^2=d\{(\vec{c}\times\vec{r})\cdot(\vec{c}\times\vec{r})\}=2\{(\vec{c}\times\vec{r})\cdot(\vec{c}\times d\vec{r})\}.$$

Stavljajući $\vec{c}\times\vec{r}=\vec{a}$, dobijamo

$$d|\vec{c}\times\vec{r}|^2=2\{\vec{a}\cdot(\vec{c}\times d\vec{r})\}=2\{d\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})\}=d\vec{r}\cdot 2\{(\vec{c}\times\vec{r})\times\vec{c}\}.$$

Odavde proizilazi

$$\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2=2\{(\vec{c}\times\vec{r})\times\vec{c}\}=2\vec{r}(\vec{c}\,\vec{c})-2\vec{c}(\vec{r}\,\vec{c}).$$

9. Izračunati $\operatorname{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})$ ($\vec{c}$ konstantni vektor).

Rešenje. Iz $\varphi(\vec{r})=\vec{c}\cdot\vec{r}=c_1x+c_2y+c_3z$ proizilazi

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}=\vec{c}.$$

Na drugi način imamo $d\varphi=\vec{c}\,d\vec{r}$, odakle neposredno nalazimo $\operatorname{grad}\varphi=\vec{c}$.

10. Izračunati projekcije vektora $\vec{a}$ na tangencijalne ravni na ekviskalarne površine polja $f(\vec{r})$, kao i projekcije toga vektora na normale ove površine.

Odgovor. $\dfrac{\operatorname{grad}f\times(\vec{a}\times\operatorname{grad}f)}{(\operatorname{grad}f)^2}$ i $\dfrac{(\vec{a}\cdot\operatorname{grad}f)\cdot\operatorname{grad}f}{(\operatorname{grad}f)^2}$.

11. Odrediti $\operatorname{grad}f(\vec{r})$ i ekviskalarne površine za

$$f(\vec{r})=(\vec{a}\times\vec{r})^2 \quad (\vec{a}\text{ konstantni vektor}).$$

Odgovor. Pošto je

$$df(\vec{r})=2(\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{a}\times d\vec{r})=2\{(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{a}\}\cdot d\vec{r},$$

upoređujući sa $df(\vec{r})=\operatorname{grad}f(r)\,d\vec{r}$, nalazimo

$$\operatorname{grad}f(\vec{r})=2\{(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{a}\}.$$

Ostaje još da se odrede i prouče ekviskalarne površine datog skalarnog polja.

12. Za polje funkcije $f(\vec{r})=(\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{b}\times\vec{r})$, gde je $\vec{a}\{a,0,0\}$, $\vec{b}\{b\cos\alpha,\ b\sin\alpha,0\}$ ($a=\text{const.}$, $\alpha=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$), odrediti $\operatorname{grad}f(\vec{r})$ i ekviskalarne površine. Diskutovati slučajeve: $\alpha=0$ i $\alpha=\pi/2$.

Odgovor. $\operatorname{grad}f(\vec{r})=(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{b}+(\vec{b}\times\vec{r})\times\vec{a}.$

Jednačina ekviskalarnih površina je: $\cos\alpha\cdot(x^2+y^2)-xy\sin\alpha=C.$

Za $\alpha=0$ je $x^2+y^2=C$ (koaksijalni cilindri); za $\alpha=\pi/2$ je $xy=C$ (hiperbolični cilindri).

13. Data je ravan $\vec{R}\vec{n}+D=0$ i tačka $P\{\vec{r}\}$ van nje. Skalarna funkcija $\varphi(\vec{r})$ pretstavlja rastojanje tačke P od date ravni. Izračunati grad φ i odrediti ekviskalarne površine.

Rešenje. Prema zadatku je $\varphi(\vec{r})=(\vec{r}\,\vec{n}+D)/|\vec{n}|$, pa je

$$\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}(\vec{r}\,\vec{n}+D)/|\vec{n}|=\vec{n}/|\vec{n}|=\vec{n}_0=\operatorname{ort}\vec{n}.$$

Ostaje još da se odrede ekviskalarne površine datog skalarnog polja.

14. Ako je jednačina ekviskalarne površine data u obliku $\varphi(\vec{r})=0$, napisati u vektorskom obliku jednačine tangentne ravni i normale na tu površinu u tački $M\{\vec{r}\}$.

Rešenje. Vektor normale na površinu kolinearan je sa grad φ, pa je:

$$\text{jednačina tangentne ravni:}\quad (\vec{R}-\vec{r})\cdot\operatorname{grad}\varphi=0;$$

$$\text{jednačina normale na površinu:}\quad (\vec{R}-\vec{r})\times\operatorname{grad}\varphi=0;$$

15. Pokazati da funkcija

$$f(x,y)=-2I\operatorname{arctg}y/x \qquad (I=\text{const})$$

pretstavlja potencijal magnetnog polja čiji je vektor

$$\vec{H}=\frac{2I}{x^2+y^2}(-y\vec{i}+x\vec{j}).$$

Rešenje.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2Iy/(x^2+y^2),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=(-2Ix)/(x^2+y^2),\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

$$\operatorname{grad}f=\frac{2I}{x^2+y^2}(y\vec{i}-x\vec{j})=-\vec{H}.$$

16. Date su tačke M_1, M_2 i M_3 koje ne leže na jednoj pravoj. Odrediti takvu tačku P u ravni ovih tačaka da suma rastojanja $\varphi=\overline{M_1P}+\overline{M_2P}+\overline{M_3P}$ bude minimalna.

Rešenje. Ako se stavi $\overline{M_1P}=r_1$, $\overline{M_2P}=r_2$ i $\overline{M_3P}=r_3$, tada je $\varphi=r_1+r_2+r_3$.

Pošto P pretstavlja tačku minimuma, ekviskalarne linije u okolini ove tačke moraju biti zatvorene krive koje obuhvataju P, dok u tački P mora biti

$$\operatorname{grad}\varphi=0,\quad \text{tj.}\quad \operatorname{grad}(r_1+r_2+r_3)=0$$

ili

$$\frac{\vec{r}_1}{r_1}+\frac{\vec{r}_2}{r_2}+\frac{\vec{r}_3}{r_3}=0,\quad \text{ili}\quad \vec{r}_1^{\,0}+\vec{r}_2^{\,0}+\vec{r}_3^{\,0}=0\qquad (\vec{r}_i^{\,0}=\operatorname{ort}\vec{r}_i,\ i=1,2,3).$$

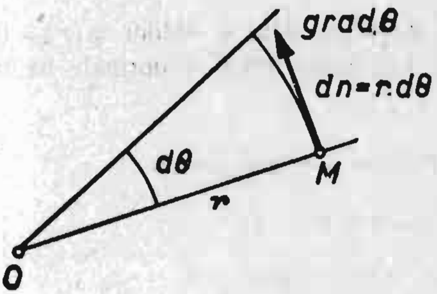
To znači da od jediničnih vektora r_i^0 može biti obrazovan ravnostrani trougao. Zato je $\sphericalangle M_1PM_2=\sphericalangle M_2PM_3=\sphericalangle M_3PM_1=2\pi/3$. Tačku P treba konstruisati kao tačku iz koje se svaki od otsečaka M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 vidi pod uglom od $2\pi/3$.

17. Ako je $f(u, v)$ složena funkcija vektora položaja $\vec{r}$ preko dve funkcije u i v, pokazati da je

$$\operatorname{grad} f = f_u' \operatorname{grad} u + f_v' \operatorname{grad} v .$$

18. Ako su r i θ polarne koordinate tačke M u ravni, tada je $\theta = \theta(M)$. Odrediti grad θ.

Rešenje. Iz $\theta = \text{const}$ proizilazi da su ekviskalarne linije poluprave koje polaze iz pola. Vektor grad θ je upravan na OM. Njegova skalarna veličina se može dobiti ako se uzme u obzir da uglu $d\theta$ odgovara rastojanje između dve bliske nivo-linije jednako



$$dn = r\,d\theta ,$$

te je

$$|\operatorname{grad} \theta| = \frac{d\theta}{dn} = 1/r .$$

Znači grad θ je upravan na OM i usmeren u smislu rašćenja ugla θ, a skalarna veličina mu je jednaka $1/r$.

S druge strane je

$$\operatorname{grad} r = \vec{r}/r = \operatorname{ort} \vec{r}$$

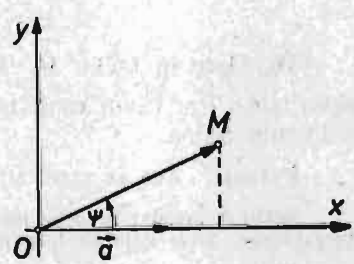
koji ima za nosač OM, a modul 1. Dakle, ako vektor grad r izvrši rotaciju za $\pi/2$, dobija se vektor $r \operatorname{grad} \theta$.

19. Data je ravan P i u njoj konstantni vektor $\vec{a}$. Funkcija proizvoljne tačke M u ovoj ravni $\psi(M)$ definisana je tako, da je jednaka uglu merenom od vektora $\vec{a}$ do $\overrightarrow{OM}$ u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu.

1° Odrediti grad ψ i ekviskalarne linije u ravni P.

2° Kako će se promeniti rezultat za grad ψ, ako se za ψ uzme ugao između ravni koja prolazi kroz datu tačku M u prostoru i nepokretnu pravu s nepokretnom ravni, koja prolazi kroz ovu istu nepokretnu pravu? Kakve će u ovom slučaju biti ekviskalarne površine?

Rešenje. 1° Uzimajući ravan P za ravan XOY, osu OX duž vektora $\vec{a}$, a početak sistema u njegovoj napadnoj tački, dobija se



$$\operatorname{tg} \psi = y/x \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg} \psi = (\vec{r}\,\vec{j})/(\vec{r}\,\vec{i}) .$$

Odavde je

$$\frac{d\psi}{\cos^2 \psi} = \frac{(\vec{r}\,\vec{i})(\vec{j}\,d\vec{r}) - (\vec{r}\,\vec{j})(\vec{i}\,d\vec{r})}{(\vec{r}\,\vec{i})^2},$$

ili

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)\,d\psi = [1 + (\vec{r}\,\vec{j})^2/(\vec{r}\,\vec{i})^2]\,d\psi = \frac{(\vec{r}\,\vec{i})\cdot\vec{j} - (\vec{r}\,\vec{j})\cdot\vec{i}}{(\vec{r}\,\vec{i})^2}\cdot d\vec{r},$$

odakle je, posle svih uprošćenja,

$$d\psi = \frac{(\vec{r}\,\vec{i})\vec{j} - (\vec{r}\,\vec{j})\cdot\vec{i}}{r^2}\cdot d\vec{r} \qquad (r = |\vec{r}|).$$

Pošto je $d\psi = \text{grad}\,\psi \cdot d\vec{r}$, upoređenjem poslednjih dveju relacija nalazimo

$$\text{grad}\,\psi = \{(\vec{r}\,\vec{i})\vec{j} - (\vec{r}\,\vec{j})\vec{i}\}/r^2.$$

Kako je

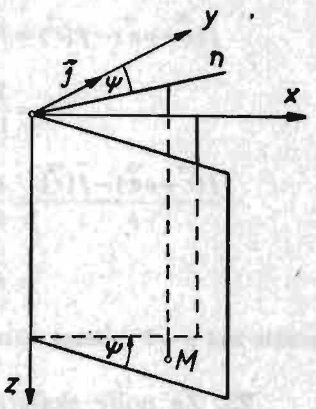
$$(\vec{r}\,\vec{i})\vec{j} - (\vec{r}\,\vec{j})\vec{i} = \vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k} \times \vec{r},$$

dobija se

$$\text{grad}\,\psi = (\vec{k} \times \vec{r})/r^2.$$

Ekviskalarne linije se dobijaju iz $\text{tg}\,\psi = y/x$ stavljajući $\text{tg}\,\psi = C_i$, tj. $y = C_i x$, a ovo je familija pravih koje prolaze kroz koordinatni početak.

2° Neka nepokretna ravan pretstavlja ravan XOZ, a ravan koja sadrži tačku M prolazi kroz osu OZ, tada normalni vektor $\vec{n}$ ove poslednje ravni je paralelan ravni XOY, te je $\sphericalangle(\vec{n}, \vec{j}) = \psi$. Zato je i ovde $\text{tg}\,\psi = y/x$.



Postupkom identičnim onome pod 1° nalazimo:

$$\{(\vec{r}\,\vec{i})^2 + (\vec{r}\,\vec{j})^2\}\,d\psi = \{(\vec{r}\,\vec{i})\vec{j} - (\vec{r}\,\vec{j})\vec{i}\}\,d\vec{r}.$$

Međutim ovde je

$$(\vec{r}\,\vec{i})^2 + (\vec{r}\,\vec{j})^2 = r^2 - (\vec{r}\,\vec{k})^2 = r^2 \sin^2 \sphericalangle(\vec{r}, \vec{k}) = (\vec{k} \times \vec{r})^2,$$

te je

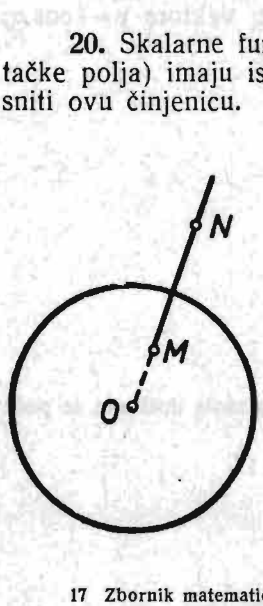
$$d\psi = \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{(\vec{k} \times \vec{r})^2}\, d\vec{r}, \quad \text{odnosno} \quad \text{grad}\,\psi = \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{(\vec{k} \times \vec{r})^2}.$$

Ekviskalarne površine date su relacijom

$$\text{tg}\,\psi = C_i, \quad \text{tj.} \quad y = C_i x \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

tj. pretstavljaju pramen ravni koje prolaze kroz nepokretnu pravu (osu OZ).

20. Skalarne funkcije položaja $\varphi = r$ i $\psi = r^2$ ($r = |\vec{r}|$, $\vec{r}$ vektor položaja tačke polja) imaju iste ekviskalarne površine, ali različite gradijente. Objasniti ovu činjenicu.



Odgovor. Za obadva skalarna polja ekviskalarne površine su lopte. Neka je kroz proizvoljnu tačku M polja skalara φ konstruisana ekviskalarna površina i na normali na ovu odabrana tačka N. Tada

$$|\text{grad}\,\varphi| = \lim_{N \to M} \left| \frac{\varphi(N) - \varphi(M)}{\overline{MN}} \right| \qquad (N \to M \text{ duž normale})$$

karakteriše promenu funkcije $\varphi(M)$ u odnosu na rastojanje $\overline{MN}$. Za funkciju $\varphi = r$ je $\frac{d\varphi}{dr} = 1$, a za $\psi = r^2$ je $\frac{d\psi}{dr} = 2r$. Ako φ dobija niz ekvidistantnih vrednosti, na primer $\varphi = 1, 2, 3, \ldots$ tada je respektivno $r = 1, 2, \ldots$ tj. ekviskalarne površine se nalaze na podjednakom rastojanju jedna od druge. Za $\psi = 1, 2, 3, \ldots$ je $r = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$, tj. ove površine se sve više približavaju jedna drugoj.

21. Polazeći od činjenice da elipsa $r_1+r_2=2a$ pretstavlja ekviskalarnu liniju funkcije $f=r_1+r_2$, gde su r_1 i r_2 potezi proizvoljne tačke na elipsi, dokazati da normala elipse polovi ugao između potega.

Rešiti analogni problem za hiperbolu $r_1-r_2=2a$, kao i za parabolu $r-x=p$ sa žižom u koordinatnom početku.

22. Pokazati ekvivalentnost definicionih relacija:

$$\frac{df}{d\vec{e}}=\vec{e}\cdot\operatorname{grad} f \quad \text{i} \quad \frac{df}{d\vec{e}}=\lim_{\rho\to 0+}\frac{f(\vec{r}+\rho\vec{e})-f(\vec{r})}{\rho}$$

za izvod skalarne funkcije tačke $f(X)$ u pravcu jediničnog vektora $\vec{e}$.

Uputstvo. Može se, na primer, poći od

$$f(\vec{r}+\rho\vec{e})-f(\vec{r})=f(x+\rho\cos\alpha,\ y+\rho\cos\beta,\ z+\rho\cos\gamma)-f(x,y,z)$$

$$=\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\rho+o(\rho^2);$$

$$\frac{f(\vec{r}+\rho\vec{e})-f(\vec{r})}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma+o(\rho)$$

$$=\vec{e}\cdot\operatorname{grad} f+o(\rho),$$

odakle kad $\rho\to 0+$ desna strana teži ka $\vec{e}\cdot\operatorname{grad} f$.

23. Za polje skalara

$\varphi(\vec{r})=\vec{r}\,\vec{n}+D$ $\{\vec{r}$ vektor položaja tačke polja; $\vec{n}=(A,B,C)\}$

odrediti izvod $d\varphi/d\vec{e}$ skalara $\varphi(\vec{r})$ u pravcu jediničnog vektora $\vec{e}=\{\cos\alpha,$ $\cos\beta,\ \cos\gamma\}$ za proizvoljnu tačku $M\{\vec{r}\}$ polja.

Rešenje. Traženi izvod je

$$\frac{d\varphi}{d\vec{e}}=\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{e}.$$

Ovde je

$$\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}(\vec{r}\,\vec{n}+D)=\vec{n},$$

te je

$$\frac{d\varphi}{d\vec{e}}=\vec{n}\,\vec{e}=A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma.$$

Čitalac može na ovome zadatku proveriti, da se do rezultata može doći ako se pođe i od sledeće definicije izvoda skalara u pravcu:

$$\frac{d\varphi}{d\vec{e}}=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(\vec{r}+h\vec{e})-\varphi(\vec{r})}{h}.$$

24. Izračunati izvod skalarne funkcije $\varphi = \vec{a} \cdot \vec{r}$ ($\vec{a}$ konstantni vektor) u pravcu vektora $\vec{e}$.

Rešenje. Iz $d(\vec{a}\,\vec{r}) = \vec{a}\,d\vec{r}$ proizilazi $\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad}(\vec{a}\,\vec{r}) = \vec{a}$, pa

$$\frac{d\varphi}{d\vec{e}} = \vec{e} \operatorname{grad} \varphi = \vec{e}\,\vec{a}.$$

Traženi izvod se može dobiti i na sledeći način:

$$\frac{d\varphi}{d\vec{e}} = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{a}\cdot(\vec{r}+\vec{e}h) - \vec{a}\,\vec{r}}{h} = \lim_{h\to 0} (\vec{a}\,\vec{e}) = \vec{a}\,\vec{e}.$$

25. Naći izvod skalarne funkcije

$$\varphi(\vec{r}) = (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot (\vec{b} \times \vec{r}) \quad (\vec{a} \text{ i } \vec{b} \text{ konstantni vektori})$$

u pravcu jediničnog vektora $\vec{e}$.

Rešenje. Traženi izvod je:

$$\frac{d\varphi}{d\vec{e}} = \lim_{h\to 0} \frac{\{\vec{a}\times(\vec{r}+h\vec{e})\}\cdot\{\vec{b}\times(\vec{r}+h\vec{e})\} - (\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{b}\times\vec{r})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\{(\vec{a}\times\vec{r}) + h(\vec{a}\times\vec{e})\}\cdot\{(\vec{b}\times\vec{r}) + h(\vec{b}\times\vec{e})\} - (\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{b}\times\vec{r})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \{(\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{b}\times\vec{e}) + (\vec{b}\times\vec{r})\cdot(\vec{a}\times\vec{e}) + h(\vec{a}\times\vec{e})\cdot(\vec{b}\times\vec{e})\}$$

$$= (\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{b}\times\vec{e}) + (\vec{b}\times\vec{r})\cdot(\vec{a}\times\vec{e}).$$

26. Izračunati izvod skalarne funkcije $\varphi(\vec{r}) = \log r$ u pravcu jediničnog vektora $\vec{e}$.

Rešenje. Polazeći od $d\varphi = d\vec{r} \cdot \operatorname{grad} \varphi$, nalazimo pre svega $\varphi = \frac{1}{2} \log |\vec{r}|^2$, odakle je

$d\varphi = \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot d\vec{r}$, tj. $\operatorname{grad} d\varphi = \vec{r}/r^2$. Zato je

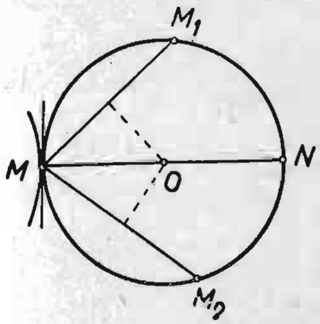
$$\frac{d\varphi}{d\vec{e}} = \vec{e} \operatorname{grad} \varphi = (\vec{e}\,\vec{r})/r^2.$$

Na drugi način se ovaj izvod nalazi polazeći od

$$\frac{d\varphi}{de} = \lim_{h\to 0} \frac{\log\sqrt{(\vec{r}+h\vec{e})^2} - \log\sqrt{r^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(\vec{r}+h\vec{e})^2 - \log r^2}{2h},$$

odakle se, na primer, primenom *L'Hospital*-ovog pravila dobija napred nađeni rezultat.

27. Za skalarno polje φ u ravni pokazati, kako se geometriskom konstrukcijom može odrediti grad φ ako su poznati izvodi skalara u dva pravca $\frac{d\varphi}{dl_1}$ i $\frac{d\varphi}{dl_2}$ za istu tačku M polja.



Rešenje. Ako su dati izvodi pozitivni, tada treba u tački M konstruisati $MM_1 = \frac{d\varphi}{dl_1}$ i $MM_2 = \frac{d\varphi}{dl_2}$.

Presečna tačka O simetrala duži MM_1 i MM_2 određuje centar kruga koji prolazi kroz tačke M, M_1 i M_2. Njegov prečnik je $MN = |\mathrm{grad}\,\varphi|$, a $\mathrm{grad}\,\varphi = \overrightarrow{MN}$.

28. Odrediti vektorske linije za polje vektora

$$a = \vec{r}/r^3 \qquad (r = |\vec{r}|).$$

Rešenje. Iz diferencijalne jednačine vektorskih linija

$$\vec{a} \times d\vec{r} = 0, \text{ ili } dx/x = dy/y = dz/z$$

proizilazi posle integracije

$$y = C_1 x, \quad z = C_2 x \qquad (C_1 \text{ i } C_2 \text{ integracione konstante});$$

a to su prave koje prolaze kroz koordinatni početak.

29. Odrediti vektorske linije u polju vektorske funkcije $\vec{a} = \vec{c} \times \vec{r}$ ($\vec{r}$ vektor položaja tačke polja; $\vec{c}$ konstantni vektor).

Rešenje. Vektorska diferencijalna jednačina vektorskih linija je

$$d\vec{r} \times (\vec{c} \times \vec{r}) = 0, \quad \text{ili} \quad d\vec{r} = dt \cdot (\vec{c} \times \vec{r}), \quad \text{ili} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{c} \times \vec{r}.$$

Množeći ovu jednačinu skalarno najpre sa $\vec{r}$, a zatim sa $\vec{c}$ i imajući u vidu da je $\vec{r} \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) = 0$ i $\vec{c} \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) = 0$, dobijamo:

$$\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \quad \text{i} \quad \vec{c}\,\frac{d\vec{r}}{dt} = 0,$$

ili

$$\frac{d(r^2)}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt}(\vec{c}\,\vec{r}) = 0 \qquad (\vec{r} = |\vec{r}|).$$

Integracijom nalazimo:

$$r = r_0, \quad \vec{c}\,\vec{r} = \alpha \qquad (r_0 \text{ i } \alpha \text{ integracione konstante}).$$

Jednačina $r = r_0$ pretstavlja familiju koncentričnih sfera sa centrom u polu, a jednačina $\vec{r}\,\vec{c} = \alpha$ definiše familiju ravni koje su upravne na vektoru $\vec{c}$.

Tražene vektorske linije su krugovi koji leže u ravnima upravnim na vektoru $\vec{c}$, a centri im leže na pravoj koja prolazi kroz pol, a paralelna je vektoru $\vec{c}$.

30. Odrediti vektorske linije magnetnog polja koje obrazuje električna struja konstantnog intenziteta I, koja teče kroz beskrajni pravolinijski provodnik.

Rešenje. Koristeći izraz za vektor $\vec{H}$:

$$\vec{H}=\frac{2I}{\rho^2}(-y\vec{i}+x\vec{j})\qquad(\rho^2=x^2+y^2)$$

diferencijalna jednačina vektorskih linija je

$$\vec{H}\times d\vec{r}=0,$$

odakle za $\vec{H}=\{-y,\ x,\ 0\}$ dobijamo sistem diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0},$$

čija integracija daje

$$x^2+y^2=a^2,\quad z=b.$$

Vektorske linije su krugovi koji pretstavljaju preseke koaksijalnih cilindara sa osom OZ sa ravnima koje su paralelne koordinatnoj ravni XOY.

31. Dokazati da ako su vektorske linije polja vektora $\vec{a}$ upravne na jednoj familiji površina, tada je krivina ovih linija data obrascem

$$\frac{1}{\rho}=\left|\nabla\times\frac{\vec{a}}{a}\right|.$$

32. Dokazati tačnost obrazaca:

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{v})=\varphi\operatorname{div}\vec{v}+\vec{v}\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{v})=(\varphi\operatorname{rot}\vec{v})+(\operatorname{grad}\varphi\times\vec{v}),$$

i primeniti ih na određivanje divergencije i rotora vektorske funkcije $f(\vec{a}\,\vec{r})\cdot\vec{a}$ ($\vec{a}$ konstantni jedinični vektor).

Odgovor.

$$\operatorname{div}\{\vec{a}\cdot f(\vec{a}\,\vec{r})\}=f(\vec{a}\,\vec{r})\cdot\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\operatorname{grad}f(\vec{a}\,\vec{r})=\vec{a}f'(\vec{a}\,\vec{r})\operatorname{grad}(\vec{a}\,\vec{r})$$

$$=|\vec{a}|^2\cdot f'(\vec{a}\,\vec{r})=f'(\vec{a}\,\vec{r}).$$

$$\operatorname{rot}\{\vec{a}\cdot f(\vec{a}\,\vec{r})\}=f(\vec{a}\,\vec{r})\operatorname{rot}\vec{a}+[\operatorname{grad}f(\vec{a}\,\vec{r})\times\vec{a}]$$

$$=f'(\vec{a}\,\vec{r})\cdot\vec{a}\times\vec{a}=0.$$

33. Proveriti da li je polje vektorske funkcije

$$\vec{v}=\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\qquad(\vec{\omega}=\overrightarrow{\mathrm{const}})$$

solenoidno i izraziti $\vec{v}$ rotorom izvesnog vektora, koji treba odrediti.

Odgovor. $\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=-\operatorname{rot}\left(\frac{r^3}{3}\vec{\omega}\right)\quad(r=|\vec{r}|).$

34. Izračunati $\operatorname{div}\vec{v}$ i $\operatorname{rot}\vec{v}$ za vektorske funkcije:

a) $\vec{v}=f(\rho)\vec{r}$ $\quad(\rho=|\vec{a}\times\vec{r}|;\ \vec{a}$ konstantni vektor$)$;

b) $\vec{v}=f(\rho)(\vec{a}\times\vec{r})$ $\quad(\rho=|\vec{a}\times\vec{r}|;\ \vec{a}$ konstantni vektor$)$.

Odgovor. a) $\operatorname{div}\vec{v}=3f(\rho)+\rho f'(\rho)$; $\quad \operatorname{rot}\vec{v}=f'(\rho)\dfrac{\vec{r}\,\vec{a}}{\rho}(\vec{r}\times\vec{a})$;

b) $\operatorname{div}\vec{v}=0$; $\quad \operatorname{rot}\vec{v}=[2f(\rho)+f'(\rho)\rho]\,\vec{a}$.

35. Pretstaviti vektor $\vec{v}=\vec{a}\times\operatorname{grad}\varphi$ ($\vec{a}$ konstantni vektor) kao rotor izvesnog vektora.

Uputstvo. Izračunati najpre $\operatorname{rot}(\varphi\,\vec{a})$ i pokazati da je

$$\operatorname{rot}(\varphi\,\vec{a})=\varphi\operatorname{rot}\vec{a}+(\operatorname{grad}\varphi\times\vec{a}),$$

a zatim ovde staviti $\vec{a}=\overrightarrow{\text{const}}$.

Rezultat. $\vec{v}=\vec{a}\times\operatorname{grad}\varphi=-\operatorname{rot}(\varphi\,\vec{a})$.

36. Odrediti divergenciju: a) polja linearnih brzina rotirajuće tečnosti i b) divergenciju jačine magnetnog polja koje stvara struja konstantnog intenziteta I koja teče kroz beskonačni pravoliniski provodnik.

Pokazati da su polja pod a) i b) solenoidna.

Uputstvo i rezultat.

a) Koristeći $\vec{v}=\omega(-y\vec{i}+x\vec{j})$, nalazi se $\operatorname{div}\vec{v}=0$.

b) Koristeći vektor jačine magnetnog polja

$$\vec{H}=\frac{2I}{\rho^2}(-y\vec{i}+x\vec{j}) \qquad (\rho^2=x^2+y^2)$$

nalazi se $\operatorname{div}\vec{H}=0$.

Čitalac može utvrditi da je: a) $\operatorname{rot}\vec{v}\neq 0$ i b) $\operatorname{rot}\vec{H}\neq 0$, što sa prednjim rezultatima potvrđuje solenoidni karakter dvaju polja.

37. Na primeru vektorskih funkcija $\vec{v}=\vec{a}$ i $\vec{w}=\vec{r}$ ($\vec{a}$ konstantni vektor; $\vec{r}$ vektor položaja tačke polja) pokazati da važe diferencijalne operacije:

$$(\vec{v}\operatorname{grad})\,\vec{w}=(\vec{v}\,\vec{i})\frac{\partial\vec{w}}{\partial x}+(\vec{v}\,\vec{j})\frac{\partial\vec{w}}{\partial y}+(\vec{v}\,\vec{k})\frac{\partial\vec{w}}{\partial z},$$

$$(\vec{v}\operatorname{grad})\,\vec{w}=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{w}(\vec{r}+h\vec{v})-\vec{w}(\vec{r})}{h}.$$

38. Odrediti $\operatorname{div}\{\vec{a}\times(\vec{r}\times\vec{b})\}$, gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori, a $\vec{r}$ vektor položaja tačke polja.

Rezultat. $\operatorname{div}\{\vec{a}\times(\vec{r}\times\vec{b})\}=2(\vec{a}\,\vec{b})$.

39. Dokazati obrasce:

$$\operatorname{div}(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{w}\operatorname{rot}\vec{v}-\vec{v}\operatorname{rot}\vec{w};$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\operatorname{div}\vec{w}-\vec{w}\operatorname{div}\vec{v}+(\vec{w}\operatorname{grad})\vec{v}-(\vec{v}\operatorname{grad})\vec{w};$$

$$\operatorname{grad}(\vec{v}\cdot\vec{w}) = (\vec{w}\times\operatorname{rot}\vec{v})+(\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{w})+(\vec{w}\operatorname{grad})\vec{v}+(\vec{v}\operatorname{grad})\vec{w}.$$

40. Odrediti funkciju $f(r)$ tako da je $\operatorname{div} f(r)\cdot\vec{r}=0$ $(r=|\vec{r}|)$.

Rešenje. $\operatorname{div} f(r)\cdot\vec{r}=f(r)\cdot\operatorname{div}\vec{r}+(\operatorname{grad} f(r),\vec{r})=3f(r)+\dfrac{f'(r)}{r}(\vec{r}\,\vec{r})=3f(r)+rf'(r).$

Po uslovu zadatka je $3f(r)+rf'(r)=0$, odakle je $f(r)=c/r^3$ $(c=\text{const})$.

41. Pokazati da je

a) za polje brzine čvrstog tela

$$\vec{v}=\vec{v}_0+(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$\operatorname{div}\vec{v}=0$;

b) za polje ubrzanja čvrstog tela

$$\vec{w}=\vec{w}_0+(\vec{\omega}\times\vec{r})+[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]$$

$\operatorname{div}\vec{w}=-2\omega^2$.

42. Primenom obrasca

$$\operatorname{grad}(\vec{v}\,\vec{w}) = (\vec{w}\times\operatorname{rot}\vec{v})+(\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{w})+(\vec{w}\operatorname{grad})\vec{v}+(\vec{v}\operatorname{grad})\vec{w}$$

pokazati da je:

1° $(\vec{v}\operatorname{grad})\vec{v}=\operatorname{rot}\vec{v}\times\vec{v}$ za $|\vec{v}|=\text{const}$;

2° $\operatorname{grad}(\vec{v}^2)=(\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v})=-2(\vec{v}\operatorname{grad})\vec{v}$, za $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ $\quad(\vec{\omega}=\overrightarrow{\text{const}})$;

3° $\operatorname{grad}(\vec{a}\,\vec{v})-(\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{v})=(\vec{a}\operatorname{grad})\vec{v}$ $\quad(\vec{a}=\overrightarrow{\text{const}})$;

4° $\operatorname{grad}(\vec{a}\operatorname{grad}\varphi)=(\vec{a}\operatorname{grad})\operatorname{grad}\varphi$ $\quad(\vec{a}=\overrightarrow{\text{const}})$.

43. Dokazati identitet

$$\Delta(\varphi\psi)=\varphi\Delta\psi+\psi\Delta\varphi+2\nabla\varphi\nabla\psi.$$

Rešenje. Polazeći od toga da je $\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$, nalazimo

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi\psi) &= \nabla(\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi)=\nabla(\varphi\nabla\psi)+\nabla(\psi\nabla\varphi)\\ &= \nabla\varphi\nabla\psi+\varphi\Delta\psi+\nabla\psi\nabla\varphi+\psi\Delta\varphi\\ &= \varphi\Delta\psi+\psi\Delta\varphi+2\nabla\varphi\nabla\psi.\end{aligned}$$

44. Dokazati identitet $\Delta(\nabla\varphi)=\nabla(\Delta\varphi)$.

Rešenje. Koristeći relaciju:

$$[\nabla, \nabla\vec{v}]=\nabla(\nabla\vec{v})-\Delta\vec{v}$$

i stavljajući $\vec{v}=\nabla\varphi$ i pošto je $[\nabla, \nabla\vec{v}]=0$, dobija se

$$0=\nabla(\nabla\nabla\varphi)-\Delta(\nabla\varphi), \quad \text{odakle je} \quad \Delta(\nabla\varphi)=\nabla(\Delta\varphi).$$

45. Odrediti $\Delta\varphi$ ako je $\varphi=\varphi(r)$ $\quad(r=|\vec{r}|)$.

Odgovor.

U prostoru: $\Delta\varphi=\varphi''+\dfrac{2}{r}\varphi'$; u ravni: $\Delta\varphi=\varphi''+\dfrac{1}{r}\varphi'$.

46. Odrediti $\Delta\varphi$ ako je $\varphi=\varphi(\rho)$ $(\rho=|\vec{a}\times\vec{r}|$; $\vec{a}$ konstantni vektor; $\vec{r}$ vektor položaja tačke polja).

Odgovor.

U prostoru: $\Delta\varphi=\varphi''+\dfrac{1}{\rho}\varphi'$; u ravni: $\Delta\varphi=\varphi''$.

47. Ako su $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ tri dvaput diferencijabilne funkcije tačke, izračunati ∇f i Δf za skalarno polje

$$f(\vec{r})=\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}.$$

Ispitati specijalni slučaj

$$\vec{u}=r^2\vec{r}, \qquad \vec{v}=(\vec{u}\,\vec{r})\,\vec{a}, \qquad \vec{w}=\vec{r}\times\vec{b},$$

gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dve vektorske konstante.

48. Primeniti triput uzastopce operator ∇ na skalarno polje $f(\vec{r})$ i ispitati moguće slučajeve.

Isto pitanje za vektorsko polje $\vec{a}$.

49. Pretstaviti vektor $\vec{a}\times\operatorname{grad} f$ ($\vec{a}$ konstantni vektor) kao prostorni izvod jedne vektorske funkcije i to kao određenu graničnu vrednost.

Uputstvo. Rezultat zadatka 35 (na str. 262) pretstaviti u formi granične vrednosti koja definiše prostorni izvod.

50. Proveriti sledeće relacije:

$$(\vec{v}\nabla)\,f\vec{a}=\vec{a}(\vec{v}\operatorname{grad} f)+f(\vec{v}\nabla)\,\vec{a};$$

$$[\vec{c}, \operatorname{grad}(\vec{a}\,\vec{b})]=[\vec{a}, (\vec{c}\nabla)\,\vec{b}]+[\vec{b}, (\vec{c}\nabla)\,\vec{a}];$$

$$(\vec{c}\nabla)\,(\vec{a}\times\vec{b})=[\vec{a}\times(\vec{c}\nabla)\,\vec{b}]-[\vec{b}\times(\vec{c}\nabla)\,\vec{a}];$$

$$[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\operatorname{rot}\vec{c}]=[\vec{b}, (\vec{a}\nabla)\,\vec{c}]-[\vec{a}, (\vec{b}\nabla)\,\vec{c}].$$

51. Proveriti tačnost sledećih relacija:

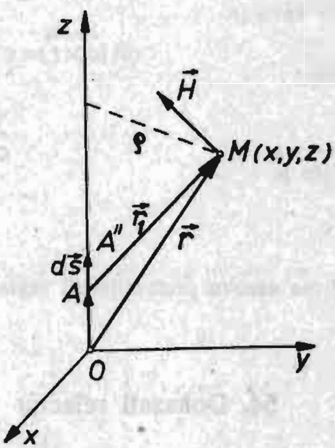
$$(\vec{a}\times\nabla)\times\vec{b}=(\vec{a}\nabla)\,\vec{b}+(\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b})-\vec{a}\operatorname{div}\vec{b};$$

$$(\vec{a}\times\nabla)\times\vec{r}=-2\vec{a};$$

$$(\nabla\times\vec{a})\times\vec{b}=-(\vec{a}\nabla)\,\vec{b}-(\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b})+(\operatorname{rot}\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}\operatorname{div}\vec{b}.$$

52. Električna struja konstantne jačine I teče kroz beskonačni pravoliniski provodnik koji se poklapa sa osom OZ u njenom pozitivnom smeru. Naći vektor magnetnog polja $\vec{H}$ u proizvoljnoj tački $M(x, y, z)$.

Rešenje. Po *Biot-Savart*-ovom zakonu element provodnika $\overrightarrow{AA'}$ stvara u tački $M(x, y, z)$ magnetno polje čiji je vektor



$$d\vec{H}=\frac{I}{r_1^3}(d\vec{s}\times\vec{r}_1),$$

gde je

$$d\vec{s}=\overrightarrow{AA'},\ \vec{r}_1=\overrightarrow{AM},\ r_1=|\vec{r}_1|=AM.$$

Po uslovu zadatka vektor magnetnog polja će biti:

$$\vec{H}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I}{r_1^3}(d\vec{s}\times\vec{r}_1),$$

Ako je $OA=\xi$, tada je $\overrightarrow{OA}=\xi\vec{k}$, $d\vec{s}=d\xi\,\vec{k}$, $\vec{r}_1=\vec{r}-\overrightarrow{OA}$, tj. $\vec{r}_1=\{x, y, z-\xi\}$, te je

$$r_1=|\vec{r}_1|=\{x^2+y^2+(z-\xi)^2\}^{1/2}=\{\rho^2+(z-\xi)^2\}^{1/2},$$

gde je $\rho^2=x^2+y^2$ kvadrat rastojanja tačke M od ose OZ. Uzimajući još u obzir da je

$$d\vec{s}\times\vec{r}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & d\xi\\ x & y & z-\xi\end{vmatrix}=-y\,d\xi\,\vec{i}+x\,d\xi\,\vec{j},$$

dobijamo

$$\vec{H}=I\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-y\vec{i}+x\vec{j})\,d\xi}{[\rho^2+(z-\xi)^2]^{3/2}}.$$

Pošto je tačka M fiksirana, posle smene

$$\xi-z=\rho\operatorname{tg}t,\quad d\xi=\rho\,dt/\cos^2 t$$

dobija se

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{[\rho^2+(z-\xi)^2]^{3/2}}=\frac{1}{r^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=2/\rho^2.$$

Zato je

$$\vec{H}=\frac{2I}{\rho^2}(-y\vec{i}+x\vec{j}).$$

53. Dokazati da je krivolinijski integral

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

jednak vektoru površine koja se graniči konturom C.

Rešenje. Ako se leva i desna strana gornjeg izraza pomnože skalarno proizvoljnim konstantnim vektorom $\vec{a}$, dobiće se

$$\vec{I}\,\vec{a} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{a} \cdot (\vec{r} \times d\vec{r}) = \frac{1}{2} \oint (\vec{a} \times \vec{r})\, d\vec{r}.$$

Prema *Stokes*-ovoj teoremi je

$$\oint_C (\vec{a} \times \vec{r})\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} (\vec{a} \times \vec{r})\, d\vec{\sigma}.$$

No kako je

$$\operatorname{rot} (\vec{a} \times \vec{r}) = \nabla \times (\vec{a} \times \vec{r}) = \vec{a} (\nabla \vec{r}) - (\vec{a} \nabla) \vec{r} = 3\vec{a} - \vec{a} = 2\vec{a},$$

biće

$$\oint_C (\vec{a} \times \vec{r})\, d\vec{r} = 2\vec{a} \iint_S d\vec{\sigma}.$$

Zato je

$$\vec{I} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \iint_S d\vec{\sigma}$$

tj. na osnovu proizvoljnosti vektora $\vec{a}$:

$$\vec{I} = \iint_S d\vec{\sigma}.$$

54. Dokazati relaciju

$$\vec{I} = \oint_C \varphi\, d\vec{r} = \iint_S d\vec{\sigma} \times \operatorname{grad} \varphi,$$

gde je C kontura koja ograničava površinu S.

Rešenje. Skalarnim množenjem gornje relacije proizvoljnim konstantnim vektorom $\vec{a}$ imamo

$$\vec{I} \cdot \vec{a} = \oint_C \varphi \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Primenom *Stokes*-ove teoreme, dobijamo

$$\oint_C \varphi \vec{a}\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} (\varphi \vec{a})\, d\vec{\sigma}.$$

No kako je

$$\operatorname{rot} (\varphi \vec{a}) = (\vec{a} \times \operatorname{grad} \varphi),$$

biće

$$\iint_S \operatorname{rot} (\varphi \vec{a})\, d\vec{\sigma} = \iint_S (\operatorname{grad} \varphi \times \vec{a})\, d\vec{\sigma} = \iint_S \vec{a} \cdot (d\vec{\sigma} \times \operatorname{grad} \varphi),$$

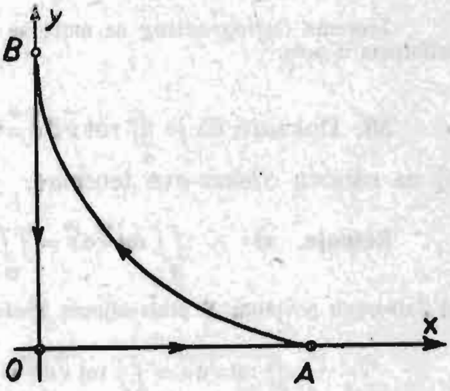
ili pošto je $\vec{a}$ konstantan proizvoljan vektor, dobija se

$$\vec{I} = \iint_S d\vec{\sigma} \times \operatorname{grad} \varphi.$$

55. Naći cirkulaciju vektora $\vec{v}=y\vec{i}-x\vec{j}$ duž konture koju obrazuju koordinatne ose i luk astroide $\vec{r}=a\cdot\cos^3 t\cdot\vec{i}+a\sin^3 t\cdot\vec{j}$ koji leži [u prvom kvadrantu.

Rešenje. Prema slici je

$$\oint_C \vec{v}\,d\vec{r}=\int_{OA}\vec{v}\,d\vec{r}+\int_{AB}\vec{v}\,d\vec{r}+\int_{BO}\vec{v}\,d\vec{r}.$$



Duž $\overline{OA}$ je $\vec{v}=-x\vec{j}$, $\vec{r}=x\vec{i}$, $d\vec{r}=dx\,\vec{i}$, $\vec{v}\,d\vec{r}=0$, te je

$$\int_{OA}\vec{v}\,d\vec{r}=0.$$

Duž $\overline{BO}$ je $\vec{v}=y\vec{i}$, $\vec{r}=y\vec{j}$, $d\vec{r}=dy\,\vec{j}$, $\vec{v}\,d\vec{r}=0$, te je

$$\int_{BO}\vec{v}\,d\vec{r}=0.$$

Duž luka AB astroide je

$$d\vec{r}=-3a\cos^2 t\sin t\,dt\cdot\vec{i}+3a\sin^2 t\cos t\,dt\cdot\vec{j},$$

te je

$$\int_{AB}\vec{v}\,d\vec{r}=-\frac{3}{4}a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=-\frac{3\pi}{16}a^2.$$

Zato je

$$\oint_C \vec{v}\,d\vec{r}=-\frac{3\pi}{16}a^2.$$

56. Primeniti na integral

$$\oiint_S(\vec{a}\times\vec{p})\,d\sigma \qquad (\vec{a}\text{ konstantni vektor})$$

teoremu *Ostrogradskog.*

Rešenje. Po teoremi *Ostrogradskog* je

$$\oiint_S(\vec{a}\times\vec{p})\,d\vec{\sigma}=\iiint_D \operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{p})\,dV.$$

No kako je

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{p})=(\nabla(\vec{a}\times\vec{p}))=-\vec{a}\cdot(\nabla\times p)=-\vec{a}\operatorname{rot}\vec{p},$$

biće

$$\oiint_S(\vec{a}\times\vec{p})\,d\vec{\sigma}=-\iiint_V \vec{a}\operatorname{rot}\vec{p}\cdot dV.$$

57. Izračunati neposredno $\oiint\limits_S \frac{\vec{r}}{r^3}\,d\vec{\sigma}$, gde je S površina lopte poluprečnika a sa centrom u polu. Zašto se na dati integral ne može primeniti teorema *Ostrogradskog*?

Rešenje.

$$\oiint\limits_S \frac{\vec{r}}{r^3}\,d\vec{\sigma} = \oiint\limits_S \frac{\vec{r}}{r^3}\,\vec{n}\,d\sigma = \oiint\limits_S \frac{\vec{r}}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\,d\sigma = \oiint\limits_S \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{1}{a^2}\oiint\limits_S d\sigma = \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi .$$

Teorema *Ostrogradskog* ne može se primeniti, jer divergencija vektorskog polja nije definisana u polu.

58. Dokazati da je $\oiint\limits_S \operatorname{rot}\vec{v}\,d\vec{\sigma} = 0$ a) na osnovu teoreme *Ostrogradskog*; b) na osnovu *Stokes*-ove teoreme.

Rešenje. a) $$\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{v}\,d\vec{\sigma} = \iiint\limits_D \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v}\,dV = 0 .$$

b) Zatvorenu površinu S proizvoljnom konturom L podelimo na dva dela S_1 i S_2. Tada je

$$\oiint\limits_S \operatorname{rot}\vec{v}\,d\vec{\sigma} = \iint\limits_{S_1} \operatorname{rot}\vec{v}\,d\vec{\sigma} + \iint\limits_{S_2} \operatorname{rot}\vec{v}\,d\vec{\sigma} = \oint\limits_L \vec{v}\,d\vec{r} + \oint\limits_{-L} \vec{v}\,d\vec{r},$$

$$\oiint\limits_S \operatorname{rot}\vec{v}\,d\vec{\sigma} = \oint\limits_L \vec{v}\,d\vec{r} - \oint\limits_L \vec{v}\,d\vec{r} = 0 .$$

59. Izračunati $\oiint\limits_S (\vec{a}\,\vec{r})\,d\vec{\sigma}$ ($\vec{a}$ konstantni vektor).

Rešenje. Prema

$$\oiint\limits_S \varphi\,d\vec{\sigma} = \iiint\limits_D \operatorname{grad}\varphi\,dV$$

imamo

$$\oiint\limits_S (\vec{a}\,\vec{r})\,d\vec{\sigma} = \iiint\limits_D \operatorname{grad}(\vec{a}\,\vec{r})\,dV = \iiint\limits_D \vec{a}\,dV = \vec{a}\cdot V$$

gde je V zapremina obuhvaćena površinom S.

60. Odrediti $\operatorname{div}\vec{r}$ ($\vec{r}$ vektor položaja tačke), a zatim primenom teoreme *Ostrogradskog* izračunati fluks ovoga vektora kroz zatvorenu površinu koja ograničava deo prostora zapremine V.

Rešenje. Koristeći se rezultatom: $\operatorname{div}\vec{r} = 3$, prema teoremi *Ostrogradskog*:

$$\oiint\limits_S \vec{r}\,d\vec{\sigma} = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{r}\,dx\,dy\,dz$$

dobija se

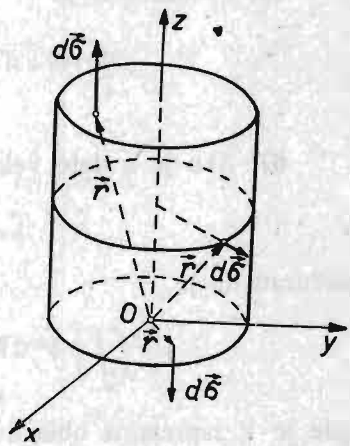
$$\oiint\limits_S \vec{r}\,d\vec{\sigma} = 3\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = 3V .$$

61. Odrediti divergenciju i fluks kroz proizvoljnu zatvorenu površinu vektora indukcije elektrostatičkog polja

$$\vec{D} = \frac{e}{r^2}\cdot\vec{r}_0 \qquad (\vec{r}_0 = \text{ort}\,\vec{r}).$$

Rezultat. $\text{div}\,\vec{D} = 0$; $\oiint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{\sigma} = 0.$

62. Odrediti fluks vektora položaja $\vec{r}$ kroz pravi kružni cilindar poluprečnika osnove R i visine H, ako centar njegove donje osnove leži u koordinatnom početku.



Rešenje. Traženi fluks je

$$\oiint_S (\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}) = \iint_{S_1} (\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}) + \iint_{S_2} (\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}) + \iint_{S_3} (\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}),$$

gde su S_1, S_2, S_3 respektivno površine donje, gornje osnove i omotača cilindra.

Pošto je $\vec{r} \perp \mathrm{d}\vec{\sigma}$, na S_1, to je $\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma} = 0$, te je

$$\iint_{S_1} (\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}) = 0.$$

Na S_2 je

$$\iint_{S_2} (\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}) = \iint_{S_2} (\vec{r}\,\vec{n})\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_2} H\,\mathrm{d}\sigma = H \iint_{S_2} \mathrm{d}\sigma = H\cdot\pi R^2,$$

gde je $\vec{n}$ jedinični vektor spoljne normale na gornju osnovu, a $\mathrm{d}\sigma = |\mathrm{d}\vec{\sigma}|$. Najzad se dobija

$$\iint_{S_3} (\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}) = \iint_{S_3} (\vec{r}\,\vec{n})\,\mathrm{d}\sigma = R \iint_{S_3} \mathrm{d}\sigma = R\cdot 2\pi R H = 2\pi R^2 H,$$

gde je $\vec{n}$ jedinični vektor spoljne normale na površini omotača. Zato je

$$\oiint_S (\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}) = \pi R^2 H + 2\pi R^2 H = 3\pi R^2 H.$$

63. Ako su u oblasti D, čija je zapremina V, a koja je ograničena površinom S, definisana polja funkcija f i $\vec{a}$, pokazati da je

$$\oiint_S \mathrm{d}\vec{\sigma}\,\vec{a}\,(\nabla f) = -\iiint_D \nabla f\cdot(\nabla\times\vec{a})\,\mathrm{d}V.$$

64. Pokazati da vektor $\vec{a}$, upravan na jednu fiksiranu ravan, čiji je modul u svakoj tački funkcija rastojanja od ove ravni, pretstavlja gradijent jedne skalarne funkcije.

65. Ako je S površina koja se oslanja na konturu C, proveriti relaciju

$$\iint\limits_S f\cdot\operatorname{rot}\vec{u}\,d\vec{\sigma}=\oint\limits_C f\vec{u}\,d\vec{r}-\iint\limits_S(\operatorname{grad}f\times\vec{u})\,d\vec{\sigma}.$$

Uzimajući ovde $\vec{u}=\operatorname{grad}\varphi$, pokazati da je

$$\iint\limits_S(\operatorname{grad}f\times\operatorname{grad}\varphi)\,d\vec{\sigma}=\oint\limits_C f\operatorname{grad}\varphi\,d\vec{r}=-\oint\limits_C\varphi\operatorname{grad}f\,d\vec{r}.$$

66. Pokazati da je

$$\oiint\limits_S\operatorname{rot}\vec{a}\,d\vec{\sigma}=0\quad\text{i}\quad\oiint\limits_S\operatorname{grad}f\times d\vec{\sigma}=0.$$

67. Ako je $\vec{a}$ dato vektorsko polje, pa se formiraju polja

$$\vec{b}=\operatorname{rot}\vec{a}\quad\text{i}\quad\vec{c}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{b},$$

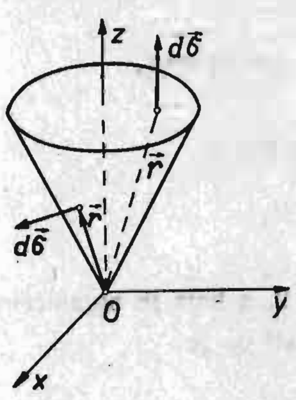
pokazati da je

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_V\vec{b}^2\,dV=\frac{1}{2}\oiint\limits_S(\vec{a}\times\vec{b})\,d\vec{\sigma}+\iiint\limits_V\vec{a}\cdot\vec{c}\,dV,$$

gde je V zapremina oblasti ograničene površinom S.

68. Odrediti fluks vektora položaja kroz prav kružni konus čiji je vrh u koordinatnom početku, poluprečnik osnove je R, a visina H.

Rešenje. Fluks kroz površinu konusa je



$$\oiint\limits_S\vec{r}\,d\vec{\sigma}=\iint\limits_{S_1}\vec{r}\,d\vec{\sigma}+\iint\limits_{S_2}\vec{r}\,d\vec{\sigma},$$

gde je S_1 površina omotača, a S_2 površina osnove konusa. Na površini omotača konusa je $\vec{r}$ upravno na površinskom elementu $d\vec{\sigma}$, te je $\vec{r}\,d\vec{\sigma}=0$, pa je zato

$$\iint\limits_{S_1}\vec{r}\,d\vec{\sigma}=0.$$

Za površinu osnove S_2 je

$$\vec{r}\,d\vec{\sigma}=(\vec{r}\,\vec{n})\,d\sigma=r_n\,d\sigma=H\,d\sigma\qquad(\vec{n}=\operatorname{ort}d\vec{\sigma}).$$

$$\therefore\quad\iint\limits_{S_2}\vec{r}\,d\vec{\sigma}=H\iint\limits_{S_2}d\sigma=\pi R^2H.$$

Zato je

$$\oiint\limits_S\vec{r}\,d\vec{\sigma}=\pi R^2H.$$

69. Ako je $\vec{a}$ dato vektorsko polje, $\vec{t}$ jedinični vektor tangente na krivu integracije, pokazati da je

$$\int_A^B \vec{a}\cdot(\vec{t}\,\nabla)\,\vec{a}\,ds = \frac{1}{2}\,[\vec{a}^2(B) - \vec{a}^2(A)],$$

gde su A i B dve tačke na ovoj krivoj.

70. Dokazati obrazac

$$\oint_C u\,dv = \iint_S (\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v)\,d\vec{\sigma},$$

gde je S površina koja se oslanja na konturu C, a u i v dve funkcije tačke.

71. Dokazati formulu

$$\operatorname{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A} + (\vec{B}\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\nabla)\vec{B}$$

i, polazeći od nje, dokazati relaciju

$$\operatorname{rot}\{r^n(\vec{a}\times\vec{r})\} = (n+2)\,r^n\vec{a} - n\,r^{n-2}(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{r},$$

gde je $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$, $\vec{r}$ vektor položaja, $r = |\vec{r}|$.

72. Odrediti sve funkcije

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad g_1(y),\quad g_2(y)$$

koje imaju osobinu da je vektor

$$\{y f_1(x) + g_1(y),\ f_2(x) + x g_2(y),\ 0\},$$

čiji je početak u tački (x, y, z), jednak gradijentu jedne skalarne funkcije.

73. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy posmatrati vektorsko polje čiji vektor $\vec{F}(M)$ u tački $M(x, y)$ ima za koordinate

$$\frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^n},\quad \frac{3x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^n}.$$

Odrediti n tako da bude $\vec{F}(M) = \operatorname{grad} U(M)$ i za nađeno n odrediti $U(M)$.

Rezultat. $U(M) = \dfrac{y^2-x^2}{2(x^2+y^2)^2} + C$ (C realna konstanta).

Ova funkcija odgovara broju $n=3$.

74. Ako je P ortogonalna projekcija proizvoljne tačke M na osi l, a $f(r)$ data diferencijabilna funkcija promenljive r, ispitati da li se vektor $f(|\overrightarrow{PM}|)\,\overrightarrow{PM}$ može pretstaviti kao gradijent jedne skalarne funkcije.

75. Ako je

$$\vec{A} = \vec{A}(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

gde je

$$u_\nu = u_\nu(x, y, z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

proveriti formulu

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{grad} u_\nu \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial u_\nu}.$$

Odrediti takođe $\operatorname{div} \vec{A}$.

76. Dokazati formulu

$$(1) \qquad \oint\!\!\!\oint_S \cos(\vec{r}, \vec{n})\, d\sigma = 2 \iiint_G \frac{1}{r}\, dx\, dy\, dz,$$

gde je S zatvorena površina, koja ograničava oblast G; $\vec{n}$ spoljašnja normala na površini S u tački $M(x, y, z)$; $\vec{r}$ radijus-vektor tačke $M(x, y, z)$ sa početkom u $A(a, b, c)$ i $r = |\vec{r}|$.

Rešenje. Polazeći od jednakosti

$$\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0) = \vec{r}_0\, \vec{n}_0,$$

dobija se

$$\oint\!\!\!\oint_S \cos(\vec{r}, \vec{n})\, d\sigma = \oint\!\!\!\oint_S \vec{r}_0\, d\vec{\sigma} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{r}_0\, dg = 2 \iiint_G \frac{1}{r}\, dx\, dy\, dz.$$

77. Vektor $\vec{v}(x, y, z)$ ima neprekidne prve izvode u trodimenzionoj oblasti G ograničenoj površinom S. Odrediti

$$\oint\!\!\!\oint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma},$$

gde je $d\vec{\sigma}$ upravljeni element površine.

Rešenje. Prema teoremi *Gauss-Ostrogradskog* je

$$\oint\!\!\!\oint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_G \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v}\, dg.$$

Kako je

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla(\nabla \times \vec{v}) = [\nabla \nabla \vec{v}] = 0,$$

biće

$$\oint\!\!\!\oint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 0.$$

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA

UPOTREBLJENE OZNAKE

1. **ab** ili **a · b** znači skalarni proizvod vektora **a** i **b**.
2. [**ab**] ili [**a**, **b**] znači vektorski proizvod vektora **a** i **b**.
3. (**abc**) ili (**a**, **b**, **c**) znači [**ab**] **c**.
4. $\{a_1, a_2, a_3\}$ znači vektor čije su pravougle koordinate a_1, a_2, a_3.
5. $\mathfrak{r}$ označuje promenljivi radijus-vektor tačke na krivoj ili površini.
6. Kod izraza, kod kojih su upotrebljeni „gornji" i „donji" indeksi, upotrebljena je tzv. *konvencija o sabiranju*.
7. **t**, **n**, **b** označuju jedinične vektore *Frenet*-ovog trijedra krive.
8. $\mathfrak{r}_i$ znači $\partial \mathfrak{r}(u^1, u^2)/\partial u^i$.
9. **N** označuje jedinični normalni vektor na površini.
10. g_{ik} su koeficijenti prve, a h_{ik} koeficijenti druge diferencijalne forme na površini.

I. PROSTORNE KRIVE

1. Naći dužinu s luka date krive.

1° $\quad \mathfrak{r} = \left\{ a\cos bt - b\cos at,\ a\sin bt + b\cos at,\ \dfrac{4ab}{a+b}\cos\dfrac{a+b}{2}t \right\}$

od tačke $t=0$ do proizvoljne tačke krive;

2° $\mathfrak{r} = \{\sin^2 t,\ \sin t\cos t,\ \log\cos t\}$ od $t=0$ do proizvoljne tačke krive;

3° $\mathfrak{r} = \{t + a^2/t,\ t - a^2/t,\ 2a\log(t/a)\}$ od preseka sa x-osom do proizvoljne tačke;

4° $y = x^2/2a$, $z = x^3/6a^2$ $(a = \text{const})$ od koordinatnog početka do tačke $T(x_0, y_0, z_0)$ krive.

Rešenje. 1° $s = \int_0^t \sqrt{\dot{\mathfrak{r}}^2}\,dt = \int_0^t 2ab\,dt = 2abt$; $\quad$ 2° $s = \log\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

3° *Za* presečnu tačku krive i x-ose iz $y = t - \dfrac{a^2}{t} = 0$, $\quad z = 2a\log\dfrac{t}{a} = 0$ dobijamo vrednost $t = a$. Tražena dužina s luka je onda

$$s = \int_a^t \sqrt{\dot{\mathfrak{r}}^2}\,dt = \sqrt{2}\int_a^t \left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right)dt = \sqrt{2}\left(t - \frac{a^2}{t}\right);$$

4° Stavljajući $x \equiv t$, možemo jednačinu krive napisati vektorski u obliku

$$\mathfrak{r} = \{t,\ t^2/2a,\ t^3/6a^2\}.$$

Onda imamo

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{\mathfrak{r}}^2}\,dt = \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{2a^2}\right)dt = t + \frac{t^3}{6a^2}, \quad \text{ili} \quad s = x_0 + z_0.$$

2. Šta je sferna indikatrisa tangenata krive

$$\mathfrak{r} = \{2t - \sin 2t, \ -\cos 2t, \ 4 \sin t\}?$$

Rešenje. Za jedinični tangentni vektor date krive dobijamo

$$\mathfrak{r}^* = \dot{\mathfrak{r}}/|\dot{\mathfrak{r}}| = \{\sin^2 t, \ \sin t \cos t, \ \cos t\}.$$

Ako $\mathfrak{r}^*$ posmatramo kao radijus-vektor, onda on određuje traženu indikatrisu. Njene parametarske jednačine su

$$x = \sin^2 t, \ y = \sin t \cos t, \ z = \cos t.$$

Eliminacijom parametra t iz prve dve odnosno iz sve tri jednačine dobijamo

$$x^2 + y^2 - x = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Indikatrisa je, prema tome, presek cilindra, određenog prvom od ovih jednačina, sa loptom, datom drugom jednačinom. Dobijena kriva je *Viviani*-jeva kriva.

3. Pokazati da tangenta krive

$$x^2 = 3y, \qquad 2xy = 9z$$

zatvara stalan ugao sa jednim određenim pravcem. Koji je taj ugao i taj pravac?

Rešenje. Stavljajući $x \equiv t$, možemo jednačinu krive pisati vektorski u obliku

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{r} = \{t, \ t^2/3, \ 2t^3/27\},$$

odakle dobijamo jedinični tangentni vektor $\mathbf{t} = \dot{\mathfrak{r}}/|\dot{\mathfrak{r}}|$ krive:

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{t} = \frac{1}{9+2t^2} \cdot \{9, \ 6t, \ 2t^2\}.$$

Sada ćemo pokušati da potražimo takav konstantan jedinični vektor $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$, ukoliko postoji, koji sa $\mathbf{t}$ zahvata stalan ugao, odnosno da bude

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} = c \qquad (c = \text{const}).$$

Iz (2) i (3) sleduje onda da jednačina

$$2(c - e_3)\, t^2 - 6 e_2 t + 9(c - e_1) = 0$$

mora biti zadovoljena za svaku vrednost od t, što daje

$$c = e_1 = e_3, \quad e_2 = 0.$$

Pošto je vektor $\mathbf{e}$ jediničan, dobijamo iz $e_1^2 + e_3^2 = 1$ da je $c = e_1 = e_3 = 1/\sqrt{2}$. Traženi vektor postoji; to je vektor

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \{1, 0, 1\}.$$

S njim zaklapa tangenta krive stalni ugao θ za koji važi

$$\cos\theta = \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} = c = 1/\sqrt{2}.$$

$$\therefore \quad \theta = \pi/4.$$

4. Naći one tačke krive $\mathfrak{r} = \{t^4/4, \ t^3/3, \ t^2/2\}$, u kojima su tangente paralelne sa ravni $x + 3y + 2z = 0$.

Rešenje. Tražene tačke krive su date onim vrednostima parametra t za koje je tangentni vektor $\dot{\mathfrak{r}} = \{t^3, \ t^2, \ t\}$ date krive normalan na normalnom vektoru $\mathbf{N} = \{1, 3, 2\}$ date ravni. Jednačina $\dot{\mathfrak{r}} \cdot \mathbf{N} = t^3 + 3t^2 + 2t = 0$ daje nam osim $t = 0$, kojoj vrednosti odgovara singularna tačka krive, tražene vrednosti $t_1 = -1$ i $t_2 = -2$. Tangente su paralelne datoj ravni, dakle, u tačkama $(1/4, \ -1/3, \ 1/2)$ i $(4, \ -8/3, \ 2)$.

5. Pokazati da jedna od bisektrisa između tangente i binormale krive $\mathfrak{r}=\{3t, 3t^2, 2t^3\}$ ima stalan pravac.

Dokaz. Za jedinične vektore $\mathbf{t}$ i $\mathbf{b}$ na tangenti i binormali dobijamo

$$\mathbf{t}=\frac{1}{1+2t^2}\cdot\{1, 2t, 2t^2\}, \qquad \mathbf{b}=\frac{1}{1+2t^2}\cdot\{2t^2, -2t, 1\}.$$

odakle izlazi da je vektor

$$\mathbf{t}+\mathbf{b}=\{1, 0, 1\}$$

konstantan. Budući da vektor $\mathbf{t}+\mathbf{b}$ leži na jednoj od pomenutih simetrala, stav je time dokazan.

6. Pokazati da su radijusi ρ, τ prve i druge krivine zadate krive jednaki.

1^0 $\mathfrak{r}=\{a(3t-t^3),\ 3at^2,\ a(3t+t^3)\}$;

2^0 $\mathfrak{r}=\{t,\ t^2/2a,\ t^3/6a^2\}$;

3^0 $\mathfrak{r}=\{t+a^2/t,\ t-a^2/t,\ 2a\log(t/a)\}$.

Rezultat.

1^0 $\rho=\tau=3a(1+t^2)^2$; 2^0 $\rho=\tau=(t^2+2a^2)^2/(4a^3)$; 3^0 $\rho=\tau=(a^2+t^2)/(at^2)$.

7. Izračunati krivinu $k=1/\rho$ date krive.

1^0 $\mathfrak{r}=\{e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t\}$;

2^0 $\mathfrak{r}=\{4a\cos^3 t,\ 4a\sin^3 t,\ 3c\cos 2t\}$ $(a, c=\text{const})$;

3^0 $\mathfrak{r}=\{a(t-\sin t),\ a(1-\cos t),\ 4t\sin(t/2)\}$ $(a=\text{const})$.

Rezultat.

1^0 $k=\sqrt{2}\cdot e^{-t}/3$; 2^0 $k=\dfrac{a}{6(a^2+c^2)\sin 2t}$; 3^0 $k=\sqrt{1+\sin^2(t/2)}/(4a)$.

8. Na jediničnoj lopti su uvedene geografska dužina φ i komplement geografske širine θ. Odrediti fleksiju i torziju krive $\varphi=\theta$.

Rešenje. Lopta je određena radijus-vektorom

$$\mathfrak{r}^*(\varphi, \theta)=\{\cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta\}.$$

Odavde dobijamo, stavljajući $\varphi=\theta=t$, jednačinu date krive u obliku

$$\mathfrak{r}^*(t, t)=\mathfrak{r}(t)=\{\sin t\cos t,\ \sin^2 t,\ \cos t\}.$$

Određujemo izvode $\dot{\mathfrak{r}}$, $\ddot{\mathfrak{r}}$, $\dddot{\mathfrak{r}}$ i unosimo ih u formule za krivinu $1/\rho$ i torziju $1/\tau$, pa dobijamo

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{1+\sin^2\varphi}{2}\right)^3}, \qquad \tau=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}.$$

9. Ako je n-ti izvod radijus-vektora $\mathfrak{r}(s)$ po luku s dat sa $\mathfrak{r}^{(n)}=$ $=a_n\mathbf{t}+b_n\mathfrak{n}+c_n\mathbf{b}$, odrediti njegov $(n+1)$-vi izvod.

Rezultat. $\mathfrak{r}^{(n+1)}=a_{n+1}\mathbf{t}+b_{n+1}\mathfrak{n}+c_{n+1}\mathbf{b}$, gde je

$$a_{n+1}=a_n'-kb_n, \qquad b_{n+1}=b_n'-ka_n-\varkappa c_n, \qquad c_{n+1}=c_n'+\varkappa b_n.$$

10. Po kakvoj krivoj seku tangente kružne zavojnice ravan koja je normalna na osi krive?

Rešenje. Jednačinu zavojnice uzimamo u obliku

(1) $$\mathfrak{r} = \{ a\cos t,\ a\sin t,\ bt \}.$$

Ne gubimo ništa od opštosti, ako za ravan, koju sečemo tangentama krive, uzimamo xy-ravan. Jednačinu krive u kojoj tangente krive (1) seku xy-ravan dobijamo ako u jednačinu tangente

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}+\lambda\dot{\mathfrak{r}}$$

mesto proizvoljnog parametra λ unesemo onu njegovu vrednost za koju treća koordinata vektora $\mathfrak{r}^*$ postaje nula, tj. $\lambda=-t$. Time za presečnu krivu dobijamo jednačinu

$$\mathfrak{r}^* = \{ a\cos t + at\sin t,\ a\sin t - at\cos t,\ 0 \}.$$

Parametarske jednačine

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t), \quad z = 0$$

ove krive pokazuju, da je ona *evolventa* kruga $x^2+y^2=a^2$ u xy-ravni, tj. evolventa kruga u kome ravan seče kružni cilindar na kome se zavojnica nalazi.

11. Na binormali krive konstantne torzije $\varkappa$ izaberimo tačku M na konstantnom rastojanju c od krive. Odrediti ugao φ između binormale krive i binormale geometriskog mesta tačke M.

Rešenje. Ako je kriva zadata radijus-vektorom $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$, gde je s dužina luka na njoj, onda jednačina geometriskog mesta glasi $\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}+c\mathbf{b}$. Binormala geometriskog mesta ima smer vektora

$$[d\mathfrak{r}^*/ds,\ d^2\mathfrak{r}^*/ds^2] = c^2\varkappa^3\mathbf{t}+c\varkappa^2\mathbf{n}+k(1+c^2\varkappa^2)\mathbf{b}.$$

Ovaj vektor zahvata sa $\mathbf{b}$ traženi ugao φ, za koji dobijamo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c\varkappa^2}{k\sqrt{c^2\varkappa^2+1}}.$$

12. Zadata je jedna kriva čija krivina je k a torzija $\varkappa$. Odrediti krivinu k^* i torziju $\varkappa^*$ za sfernu indikatrisu: 1° tangenata; 2° binormala.

Rezultat. 1° $$k^* = \frac{\sqrt{k^2+\varkappa^2}}{k}, \quad \varkappa^* = \frac{k\varkappa'-k'\varkappa}{k(k^2+\varkappa^2)};$$

2° $$k^* = \frac{\sqrt{k^2+\varkappa^2}}{\varkappa}, \quad \varkappa^* = \frac{\varkappa k'-k\varkappa'}{\varkappa(k^2+\varkappa^2)}.$$

13. Na tangenti krive, čija krivina je k i torzija $\varkappa$, uzmimo tačku M na konstantnom rastojanju c od dodirne tačke. Izračunati krivinu k^* geometriskog mesta tačke M.

Rezultat. Krivina k^* je data sa

$$k^{*2}(1+c^2k^2)^3 = c^2k^2\varkappa^2(1+c^2k^2)+(k+ck'+c^2k^3)^2.$$

14. Na binormali krive, kojoj je zadata krivina k i torzija $\varkappa$, izaberimo tačku M na konstantnom rastojanju c od krive. Izračunati krivinu k^* geometriskog mesta tačke M.

Rezultat. Za traženu krivinu k^* važi

$$k^{*2}(1+c^2\varkappa^2)^3 = c^2\varkappa^4(1+c^2\varkappa^2)+(k-c\varkappa'+c^2k\varkappa^2)^2.$$

15. Naći krivinu polarne krive za datu vitoperu krivu.

Rešenje. Data kriva neka je određena jednačinom $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$, gde je s prirodni parametar, a tražena kriva neka bude određena radijus-vektorom $\mathfrak{r}^*$, a s^* neka bude dužina luka na njoj. Ako izvode po s obeležavamo crtom, onda imamo, kod uobičajenih oznaka, jednačinu polarne krive u vidu

$$\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}+\rho\mathbf{n}+\tau\rho'\mathbf{b}.$$

Diferenciranjem po s i primenom *Frenet*-ovih formula dobijamo

$$\mathbf{t}^*\frac{ds^*}{ds}=\left(\frac{\rho}{\tau}+(\tau\rho')'\right)\mathbf{b},$$

odakle sleduje

$$\text{(1)}\qquad \mathbf{t}^*=\mathbf{b},\qquad \frac{ds^*}{ds}=\frac{\rho}{\tau}+(\rho'\tau)'.$$

Diferenciranjem prve od ovih dveju jednačina po s dobijamo

$$\frac{\mathbf{n}^*}{\rho^*}\cdot\frac{ds^*}{ds}=-\frac{\mathbf{n}}{\tau},$$

a odavde

$$\text{(2)}\qquad \mathbf{n}^*=-\mathbf{n},\qquad \frac{1}{\rho^*}\,\frac{ds^*}{ds}=\frac{1}{\tau}.$$

Iz drugih jednačina (1) i (2) za radijus-krivine ρ^* polarne krive sleduje

$$\rho^*=\rho+(\rho'\tau)'.$$

16. Odrediti radijus torzije polarne krive jedne date krive.

Rešenje. Obeležavajući jedinične vektore *Frenet*-ovog trijedra za polarnu krivu redom sa $\mathbf{t}^*$, $\mathbf{n}^*$, $\mathbf{b}^*$, onda iz prethodnog zadatka sleduje

$$\mathbf{b}^*=[\mathbf{t}^*\mathbf{n}^*]=-[\mathbf{b}\mathbf{n}]=\mathbf{t},$$

odakle diferenciranjem po s izlazi

$$\text{(1)}\qquad -\frac{\mathbf{n}^*}{\tau^*}\cdot\frac{ds^*}{ds}=\frac{\mathbf{n}}{\rho}.$$

Koristeći relacije (1) i (2) prethodnog zadatka, odavde dobijamo traženu relaciju

$$\tau^*=\frac{\rho}{\tau}\,[\rho+\tau(\rho'\tau)'].$$

17. Odrediti krive, za koje je jedna zadata kriva C polarna kriva.

Uputstvo. Neka je kriva C^*, određena radijus-vektorom $\mathfrak{r}^*$, jedna kriva sa traženom osobinom, a zadata kriva neka je $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$. Na osnovu prvih jednačina (1) i (2) zadataka 15 sleduje da svaka tangenta krive C^* leži u oskulatornoj ravni krive C, položene u odgovarajućoj tački. Zato postoje takve skalarne funkcije $\lambda(s)$ i $\mu(s)$ da važi

$$\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}+\lambda\mathbf{t}+\mu\mathbf{n},$$

a koje treba odrediti. Koristeći osobinu da je $d\mathfrak{r}^*/ds$ paralelan sa $\mathbf{b}$ (vidi jednačinu (1) zad. 15), dobijamo diferencijalne jednačine ,

$$\lambda'=k\mu-1,\qquad \mu'=-k\lambda,$$

koje određuju tražene funkcije λ i μ.

18. Naći torzije dveju krivih koje se mogu tako uzajamno jednoznačno preslikati da korespondentne tačke imaju istu binormalu.

Rešenje. Oskulatorne ravni krivih u korespondentnim tačkama su, po pretpostavci, paralelne. Znači vektori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ i $\mathbf{t}^*$, obeležavajući jedinične vektore *Frenet*-ovog trijedra kod jedne krive bez a kod druge sa zvezdom, su komplanarni. Prema tome važi

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{t}\cos\alpha + \mathbf{n}\sin\alpha,$$

gde je $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$. Diferenciranjem ove jednačine po luku s jedne krive i množenjem dobijene jednačine skalarno sa $\mathbf{b}=\mathbf{b}^*$ dobijamo $0=\sin\alpha/\tau$, odakle sleduje — ako se krive ne poklapaju — da je $1/\tau=0$. Na isti način sleduje da je i torzija za drugu krivu nula.

Obe krive su, prema tome, ravne.

19. Glavne normale krive (C) su binormale krive (C'). Kakav uslov zadovoljavaju radijusi ρ i τ prve i druge krivine krive (C)?

Rešenje. Kriva (C) neka je data jednačinom $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$, a kriva (C') jednačinom $\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}^*(s^*)$; s i s^* su prirodni parametri. Ako je a rastojanje odgovarajućih tačaka krivih, onda je

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r} + a\mathbf{n}.$$

Diferenciranjem ove jednačine po s dobijamo

$$\mathbf{t}^* \cdot \frac{ds^*}{ds} = \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\mathbf{t} + a'\mathbf{n} - \frac{a}{\tau}\mathbf{b}. \tag{1}$$

Skalarno množenje jednačine (1) sa $\mathbf{n}=\mathbf{b}^*$ daje $0=a'$ ili $a=\text{const}$. Onda iz (1) sleduje

$$\mathbf{t}^* = \frac{(\rho-a)\mathbf{t} + a\mathbf{b}}{\sqrt{(\rho-a)^2+a^2}}, \qquad \frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\left(1-\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{a}{\tau}\right)^2}.$$

Ovu jednačinu diferenciramo još jedanput po s, nakon čega skalarnim množenjem sa $\mathbf{n}$, kako je $\mathbf{n}\mathbf{n}^*=\mathbf{b}^*\mathbf{n}^*=0$, dobijamo traženu relaciju

$$\frac{1}{\rho} = a\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right).$$

20. Naći prvu krivinu evolvente krive kojoj su zadati radijusi ρ i τ prve i druge krivine kao funkcije prirodnog parametra.

Rešenje Ako je jednačina date krive $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$, a jednačina njene evolvente $\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}^*(s^*)$ (s^* prirodni parametar), onda važi

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r} + (c-s)\mathbf{t} \quad (c=\text{const}). \tag{1}$$

Diferenciranjem ove jednačine po s dobijamo, ako veličine koje pripadaju krivoj $\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}^*(s^*)$ označujemo zvezdicom, relacije

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{n}, \qquad \frac{ds^*}{ds} = \frac{c-s}{\rho}. \tag{2}$$

Prvu od jednačina (2) diferenciramo opet po s, pa dobijamo, koristeći (2):

$$\frac{\mathbf{n}^*}{\rho^*} = \left(-\frac{\mathbf{t}}{\rho} + \frac{\mathbf{b}}{\tau}\right)\cdot\frac{\rho}{c-s}. \tag{3}$$

Odavde sleduje

$$\frac{1}{\rho^*} = \left|\frac{\mathbf{n}^*}{\rho^*}\right| = \left|\frac{\rho\mathbf{b} - \tau\mathbf{t}}{\tau(c-s)}\right|,$$

ili

$$\frac{1}{\rho^*} = \frac{\sqrt{\rho^2+\tau^2}}{\tau(c-s)}, \tag{4}$$

što se tražilo.

21. Naći torziju evolvente date vitopere krive.

Rešenje. Iz relacija (2), (3) i (4) prethodnog zadatka sleduje

$$\text{(5)} \qquad \mathbf{t}^* = \mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}^* = \frac{-\tau\,\mathbf{t} + \rho\,\mathbf{b}}{\sqrt{\rho^2+\tau^2}},$$

odakle dobijamo

$$\mathbf{b}^* = [\mathbf{t}^*\,\mathbf{n}^*] = \frac{\rho\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}}{\sqrt{\tau^2+\rho^2}}.$$

Diferenciranjem ove jednačine po luku s date krive i uzimajući u obzir (5), kao i (2) od prethodnog zadatka, nalazimo, koristeći *Frenet*-ovu formulu $d\mathbf{b}^*/ds^* = -\mathbf{n}^*/\tau^*$, za traženu torziju $\varkappa^* = 1/\tau^*$ formulu

$$\varkappa^* = \frac{k\varkappa' - k'\varkappa}{(k^2+\varkappa^2)(c-s)k}, \quad k = \frac{1}{\rho}, \quad \varkappa = \frac{1}{\tau}.$$

22. 1° Koje krive imaju tu osobinu da sve njihove oskulatorne lopte imaju isti centar?

2° Kod kojih krivih je radijus sferne krivine konstantan?

3° Naći prirodnu jednačinu sfernih krivih.

Rešenje. 1° Za radijus R sferne krivine neravne krive $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ imamo $R^2 = \rho^2 + \tau^2\rho'^2$. Obeležavajući crticom izvod po luku s krive, imamo

$$\text{(1)} \qquad \frac{dR^2}{ds} = 2\rho'(\rho + \tau(\rho'\tau)') = 2\rho'\tau\left(\frac{\rho}{\tau} + (\rho'\tau)'\right).$$

Radijus-vektor $\mathbf{r}^*$ centra oskulatorne lopte date krive, koji je određen sa $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \rho\,\mathbf{n} + \tau\rho'\,\mathbf{b}$, po pretpostavci je konstantan. Zato je $\mathbf{r}^{*\prime} = (\rho/\tau + (\tau\rho')')\,\mathbf{b} = \mathbf{0}$, ili

$$\text{(2)} \qquad \frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{ds}(\rho'\tau) = 0.$$

Iz (1) i (2) izlazi $R = \text{const}$. Ispitivane krive su, znači, *sferne*, tj. svaka leži na jednoj lopti.

2° Iz $dR^2/ds = 0$, (1) i (2), zbog $\tau \neq 0$, sleduje da su tražene krive ili *sferne* ili imaju *konstantnu krivinu*.

3° Jednačina (2).

Dedukcija je izvedena za *prostorne* krive. Za *ravne* sferne krive, tj. za $\rho' = 0$, $1/\tau = 0$ (za krugove), jednačina (2) nije zadovoljena. Jednačina (2) je dakle prirodna jednačina neravnih sfernih krivih.

23. Ispitati skup krivih, za koje je odnos fleksije i torzije konstantan.

Rešenje. Ako iz *Frenet*-ovih formula

$$\mathbf{t}' = \frac{\mathbf{n}}{\rho}, \qquad \mathbf{b}' = -\frac{\mathbf{n}}{\tau}$$

posmatrane krive eliminišemo $\mathbf{n}$ i stavimo $\rho/\tau = c$ ($c = \text{const}$), dobijamo

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} + c\,\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{o},$$

ili posle integriranja

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{b} + c\,\mathbf{t} = \mathbf{a},$$

gde je $\mathbf{a}$ jedan konstantan vektor. Skalarno kvadriranje jednačine (1) daje $\mathbf{a}^2 = 1 + c^2$, pa možemo, prema tome, vektor $\mathbf{a}$ pisati u obliku $\mathbf{a} = \sqrt{1+c^2}\cdot\mathbf{e}$, gde je $\mathbf{e}$ konstantan jedinični vektor. Skalarnim množenjem jednačine (1) sa $\mathbf{t}$ dobijamo

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{e}\cdot\mathbf{t} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}},$$

što znači da je $\mathbf{e}\cdot\mathbf{t}$ nezavisno od parametra s ispitivane krive, odnosno da je ugao između $\mathbf{e}$ i $\mathbf{t}$ stalan. Prave koje su paralelne sa $\mathbf{e}$ i koje seku našu krivu, obrazuju jednu cilindričnu površinu, a kriva seče te prave — pravoliniske generatrise — pod stalnim uglom. Krive sa ovom osobinom zovu se *zavojnice.*

Za konstantni ugao φ između tangente zavojnice i pravoliniske generatrise cilindra na kome ona leži, dobijamo iz (2) relaciju

$$\rho/\tau = \operatorname{cotg}\varphi\,,$$

a za jedinični vektor $\mathbf{n}$ na glavnoj normali iz (1) sleduje

(3) $$\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{t}] = [\mathbf{a} - c\cdot\mathbf{t}, \mathbf{t}] = [\mathbf{a}, \mathbf{t}] = [\mathbf{e}, \mathbf{t}]\cdot\sqrt{1+c^2}\,.$$

Vektori $\mathbf{a} = \sqrt{1+c^2}\cdot\mathbf{e}$ i $\mathbf{t}$ leže u tangencijalnoj ravni cilindra. Zato je vektor

(4) $$\mathbf{N} = [\mathbf{a}, \mathbf{t}] = \sqrt{1+c^2}\cdot[\mathbf{e}, \mathbf{t}]$$

jedan normalan vektor na toj cilindričnoj površini. Jednačine (3) i (4) pokazuju da je $\mathbf{n}=\mathbf{N}$ tj. da glavna normala zavojnice ima uvek smer normale cilindra.

24. Pokazati da je kriva $\mathbf{r} = \{e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t\}$ cilindarska zavojnica i odrediti cilindar čije generatrise seče pod konstantnim uglom.

Rešenje. Za krivinu $1/\rho$ i torziju $1/\tau$ dobijamo

$$1/\rho = \sqrt{2}\,(e^t + e^{-t})^{-2}, \qquad 1/\tau = -\sqrt{2}\,(e^t + e^{-t})^{-2},$$

odakle $\rho/\tau = -1 = \mathrm{const}$; kriva je, dakle, zaista cilindarska zavojnica.

Pravoliniske generatrise cilindra imaju smer *Darboux*-ovog vektora

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{t}}{\tau} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}\cdot\{-1, 1, 0\}\,,$$

znači paralelne su sa konstantnim vektorom $\mathbf{l} = \{-1, 1, 0\}$. Jednačina cilindra je onda $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{l}$, gde je λ parametar nezavisan od t, ili u parametarskom obliku

$$x = e^t - \lambda\,, \qquad y = e^{-t} + \lambda\,, \qquad z = \sqrt{2}\,t\,.$$

Odavde se dobija, eliminacijom parametara λ i t, jednačina cilindra u obliku

$$x + y = e^{z/\sqrt{2}} + e^{-z/\sqrt{2}}, \quad \text{ili} \quad x + y = 2\operatorname{ch}(z/\sqrt{2})\,.$$

Ako koordinatni sistem okrenemo za 45^0 oko z-ose, tj. ako stavimo $x + y = \sqrt{2}\,x'$, $x - y = \sqrt{2}\,y'$, $z = z'$, dobijamo za cilindar u novom sistemu jednačinu $x' = \sqrt{2}\operatorname{ch}(z'/\sqrt{2})$.

25. Kod kojih krivih je fleksija $1/\rho$ konstantna i torzija $1/\tau$ konstantna?

Rešenje. Budući da je $\rho/\tau = \mathrm{const}$, posmatrana kriva je neka zavojnica. Ona seče krivoliniske generatrise nekog cilindra pod konstantnim uglom φ. Koordinatni sistem xyz, u odnosu na koji ćemo posmatrati krivu, odaberimo tako da je njegova xy-ravan normalna na pravoliniske generatrise cilindra C. Ova ravan seče C u nekoj krivi, koju možemo pretstaviti u obliku

(1) $$\mathbf{r}^* = \{x(s^*),\ y(s^*),\ 0\}\,,$$

gde s^* označuje dužinu luka te krive. Prema tome je

(2) $$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1\,.$$

Vektorskoj jednačini posmatrane krive može se onda dati oblik

(3) $$\mathbf{r} = \{x(s^*),\ y(s^*),\ z(s^*)\}\,,$$

gde razume se, s^* više nije prirodni parametar. Da bismo odredili još nepoznatu funkciju $z(s^*)$, koristimo činjenicu da tangentni vektor $\dot{\mathfrak{r}}$ i koordinatni vektor $\mathfrak{e}_3=\{0,0,1\}$ obrazuju konstantni ugao φ. To nam daje

$$\cos\varphi = \frac{\dot{\mathfrak{r}}}{|\dot{\mathfrak{r}}|}\cdot\mathfrak{e}_3 = \frac{\dot{z}}{(1+\dot{z}^2)^{1/2}}.$$

Posle integriranja i stavljajući da je integraciona konstanta jednaka nuli, nalazimo traženu funkciju

(4) $$z(s^*) = s^*\operatorname{cotg}\varphi.$$

Jednačinu krive (3) možemo sada pisati u obliku

(5) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^* + s^*\mathbf{a},$$

gde $\mathbf{a}$ označuje konstantni vektor $\{0, 0, \operatorname{ctg}\varphi\}$. Ako označimo sa s dužinu luka krive (5), imamo

(6) $$\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{ds^*} = \frac{d\mathfrak{r}^*}{ds^*} + \mathbf{a}.$$

No kako je

$$\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 = \dot{\mathfrak{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \operatorname{cotg}^2\varphi = 1 + \operatorname{cotg}^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi},$$

iz (6) dobijamo

$$\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\cdot\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{d\mathfrak{r}^*}{ds^*} + \mathbf{a}, \quad \text{ili} \quad \mathbf{t}\cdot\frac{1}{\sin\varphi} = \mathbf{t}^* + \mathbf{a},$$

gde $\mathbf{t}$ i $\mathbf{t}^*$ označuju jedinične tangentne vektore krive (1) odn. (3). Diferenciranjem poslednje jednačine po s dobijamo

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}\cdot\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{d\mathbf{t}^*}{ds^*}\cdot\sin\varphi,$$

odakle, koristeći *Frenet*-ovu formulu za izvod tangentnog vektora, sleduje

(7) $$\frac{\mathbf{n}}{\rho} = \frac{\mathbf{n}^*}{\rho^*}\cdot\sin^2\varphi,$$

gde $\mathbf{n}$ i $\mathbf{n}^*$ znače jedinične vektore na glavnim normalama krive (1) odn. (3), a ρ i ρ^* radijuse krivine tih krivih. Iz (7) izlazi da je

$$\rho^* = \rho\sin^2\varphi.$$

Pošto je ρ po pretpostavci konstantan, sleduje da je i ρ^* konstantan. Kriva (1) je prema tome *krug*, cilindar C kružni cilindar, a ispitivana kriva — *kružna zavojnica*.

26. Potreban i dovoljan uslov, da glavne normale krive budu paralelne nekoj utvrđenoj ravni je da ta kriva bude cilindarska zavojnica.

Dokaz. Ako su glavne normale $\mathbf{n}$ krive paralelne nekoj ravni koja je normalna na stalnom vektoru $\mathbf{e}$, onda je $\mathbf{n}\mathbf{e}=0$. Iz *Frenet*-ove jednačine $\rho\mathbf{t}'=\mathbf{n}$ sleduje zbog toga, skalarnim množenjem sa $\mathbf{e}$, da je $\mathbf{t}'\mathbf{e}=0$, ili $\mathbf{t}\mathbf{e}=\text{const}$, što znači da je kriva cilindarska zavojnica.

Obratno, ako je kriva cilindarska zavojnica, postoji stalni jedinični vektor $\mathbf{e}$ (ima smer pravolinijskih generatrisa cilindra na kome kriva leži), za koji važi $\mathbf{e}\cdot\mathbf{t}=\text{const}$, odakle sleduje opet $\mathbf{t}'\mathbf{e}=0$, i $\mathbf{n}\mathbf{e}=0$, što znači da su glavne normale $\mathbf{n}$ paralelne sa ravnima koje su normalne na $\mathbf{e}$.

27. Pokazati da je kriva $\mathfrak{r}=\{4a\cos^3 t,\ 4a\sin^3 t,\ 3c\cos 2t\}$ cilindarska zavojnica.

Rešenje. Za jedinični vektor $\mathbf{n}$ na glavnoj normali krive dobijamo $\mathbf{n}=\{\sin t,\ \cos t,\ 0\}$. Glavna normala je, prema tome, paralelna xy-ravni, odakle na osnovu prethodnog zadatka sledi da je kriva cilindarska zavojnica.

28. Dokazati da je opšta zavojnica $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$, gde s znači prirodni parametar, okarakterisana relacijom $(\mathfrak{r}'', \mathfrak{r}''', \mathfrak{r}'''')=0$.

Dokaz. Koristeći *Frenet*-ove formule

$$\mathbf{t}'=\frac{\mathbf{n}}{\rho}, \quad \mathbf{n}'=-\frac{\mathbf{t}}{\rho}+\frac{\mathbf{b}}{\tau}, \quad \mathbf{b}'=-\frac{\mathbf{n}}{\tau}$$

možemo vektore $\mathfrak{r}''$, $\mathfrak{r}'''$, $\mathfrak{r}''''$ izraziti kao linearne kombinacije vektora $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, naime

$$\mathfrak{r}''=\frac{1}{\rho}\cdot\mathbf{n},$$

$$\mathfrak{r}'''=-\frac{1}{\rho^2}\cdot\mathbf{t}-\frac{\rho'}{\rho^2}\cdot\mathbf{n}+\frac{1}{\rho\tau}\cdot\mathbf{b},$$

$$\mathfrak{r}''''=\frac{3\rho'}{\rho^3}\cdot\mathbf{t}+\left(-\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{\rho\tau^2}-\left(\frac{1}{\rho}\right)''\right)\cdot\mathbf{n}+\left(2\left(\frac{1}{\rho}\right)'\cdot\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\tau}\right)'\right)\cdot\mathbf{b}.$$

Za trostruki proizvod $(\mathfrak{r}'', \mathfrak{r}''', \mathfrak{r}'''')$ dobijamo, posle uprošćenja, formulu

$$(1)\qquad (\mathfrak{r}'', \mathfrak{r}''', \mathfrak{r}'''')=\frac{1}{\rho^5}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{\tau}\right).$$

Prema tome, ako je u važnosti relacija $(\mathfrak{r}'', \mathfrak{r}''', \mathfrak{r}'''')=0$, tada je, na osnovu (1), $\rho/\tau=\text{const}$, što znači da je kriva zavojnica; i obratno, ako je kriva zavojnica, tada je $\rho/\tau=\text{const}$, odnosno $\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{\tau}\right)=0$, a na osnovu (1) dobija se $(\mathfrak{r}'', \mathfrak{r}''', \mathfrak{r}'''')=0$. Time je teorema dokazana.

29. Dokazati da je prostorna kriva onda i samo onda cilindarska zavojnica, ako za njen binormalni jedinični vektor $\mathbf{b}$ važi $(\mathbf{b}', \mathbf{b}'', \mathbf{b}''')=0$.

Dokaz. Dokazuje se da je

$$(\mathbf{b}', \mathbf{b}'', \mathbf{b}''')=\frac{1}{\tau^5}\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\rho}\right),$$

odakle sleduje tvrđenje.

30. Ispitati centralnu projekciju obične zavojnice iz jedne tačke njene ose na neku ravan koja je normalna na tu osu.

Rešenje. Vektorsku jednačinu obične zavojnice možemo pisati u obliku

$$\mathfrak{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ ht\},$$

gde je $\mathfrak{r}$ promenljivi radijus-vektor, a t proizvoljan parametar. Za centar projiciranja uzimamo tačku $C(0, 0, c)$, koja određuje radijus-vektor $\mathbf{c}$, a za projekcionu ravan koordinatnu xy-ravan. Jednačina projekcionog zraka, tj. prave koja spaja centar C sa jednom proizvoljno uzetom tačkom M zavojnice, glasi onda

$$(1)\qquad \mathfrak{r}^*=\mathbf{c}+\lambda(\mathfrak{r}-\mathbf{c}) \qquad (t=\text{const}),$$

gde je λ proizvoljni parametar, a $\mathfrak{r}^*$ promenljivi radijus-vektor. Radijus-vektor $\mathfrak{r}^*$ daće nam traženu projekciju M' tačke M, ako λ u jednačini (1) odredimo tako da treća koordinata vektora $\mathfrak{r}^*$ bude nula. Dobijamo $\lambda=-c/(ht-c)$. Unoseći ovu vrednost u (1), dobijamo

$$\mathfrak{r}^*=-\frac{ac}{ht-c}\cdot\{\cos t,\ \sin t,\ 0\},$$

ili, u skalarnom obliku

$$(2)\qquad x=-\frac{ac}{ht-c}\cdot\cos t, \quad y=-\frac{ac}{ht-c}\cdot\sin t, \quad z=0.$$

Ako u ravni, na koju projiciramo, uvedemo polarne koordinate ρ i φ, dobijamo za projiciranu krivu (2) polarnu jednačinu $\rho(c-h\varphi)=ac$.

Obična zavojnica se projicira, prema tome, u *hiperboličnu spiralu*.

31. Odrediti funkciju $\varphi(t)$ tako da glavne normale krive $\mathfrak{r}=\{t, \sin t, \varphi(t)\}$ budu paralelne sa yz-ravni.

Rešenje. Za izvode $\mathfrak{r}'=\mathrm{d}\mathfrak{r}/\mathrm{d}s$, $\mathfrak{r}''=\mathrm{d}^2\mathfrak{r}/\mathrm{d}s^2$ dobijamo

$$\mathfrak{r}'=\left\{1, \cos t, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right\}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},$$

$$\mathfrak{r}''=\left\{0, -\sin t, \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right\}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left\{1, \cos t, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right\}\cdot\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}.$$

Da bi glavna normala, koja ima smer vektora $\mathfrak{r}''$, bila paralelna yz-ravni, mora prva koordinata vektora $\mathfrak{r}''$ biti jednaka nuli, dakle $\mathrm{d}^2t/\mathrm{d}s^2=0$, odnosno

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2t+\varphi'^2}}=\frac{1}{c}\qquad(c=\text{const}).$$

Odavde sleduje, stavljajući $k=1/\sqrt{c^2-1}$, da tražena funkcija ima oblik

$$\varphi(t)=\frac{1}{k}\int\sqrt{1-k^2\cos^2t}\;\mathrm{d}t.$$

Specijalno, za $k=1$, dobijamo $\varphi(t)=-\cos t+\text{const}$.

32. Ispitati paralelnu projekciju kružne zavojnice na jednu ravan koja je normalna na osu zavojnice.

Rešenje. Ako je $\mathfrak{c}=\{c_1, c_2, c_3\}$ jedinični vektor koji određuje smer projiciranja, z-osa osa zavojnice, a xy-ravan ravan na koju projiciramo, onda dobijamo — kao u zadatku 30 — za projiciranu krivu jednačine

$$(1)\qquad x=a\cos t-\frac{c_1}{c_3}ht,\qquad y=a\sin t-\frac{c_2}{c_3}ht,\qquad z=0,$$

gde je h neka konstanta (visina jednog zavoja zavojnice), a radijus cilindra na kome zavojnica leži, a t promenljivi parametar.

Da bi ispitali oblik projicirane krive (1), stavljamo $hc_1/c_3=b$, $hc_2/c_3=c$, a u xy-ravni biramo nov koordinatni sistem tako da prava $by-cx=0$ bude nova x'-osa i da koordinatni početak ostane isti. Ako u jednačinama (1) zamenimo x i y njihovim vrednostima, izračunatim iz transformacionih jednačina

$$\sqrt{b^2+c^2}\cdot y'=cx-by,\qquad \sqrt{b^2+c^2}\cdot x'=bx+cy,$$

dobijamo, stavljajući još $c/\sqrt{b^2+c^2}=\cos\varphi$, $b/\sqrt{b^2+c^2}=\sin\varphi$, posle uprošćenja, jednačine

$$x'=a\sin(\varphi+t)-\sqrt{b^2+c^2}\cdot t,\qquad y'=a\cos(\varphi+t).$$

Ako još menjamo orijentaciju osa i sistem pomerimo u smeru y'-ose za $-\sqrt{b^2+c^2}$ i ako koordinate u ovom sistemu obeležimo sa x'' i y'', onda za projiciranu krivu (1) dobijamo jednačine

$$x''=\sqrt{b^2+c^2}\cdot t-a\sin(\varphi+t),\qquad y''=\sqrt{b^2+c^2}-a\cos(\varphi+t).$$

A ovo su, kao što se lako proverava, jednačine *cikloide* — obične, izdužene ili skraćene — koju opisuje jedna tačka koja je vezana za krug radijusa $\sqrt{b^2+c^2}$ na rastojanju a od centra, kad se on kotrlja bez klizanja po x''-osi. Ova cikloida je, dakle, obična, izdužena ili skraćena prema tome da li je $\sqrt{b^2+c^2}$ jednako, manje ili veće od a.

Ako je α_3 ugao koji vektor $\mathfrak{c}$ zahvata sa z-osom, onda je

$$\sqrt{b^2+c^2}=\frac{h}{c_3}\sqrt{c_1{}^2+c_2{}^2}=h\operatorname{tg}\alpha_3.$$

Cikloida je izdužena, obična ili skraćena prema tome da li je $\operatorname{tg}\alpha_3$ manje, jednako ili veće od a/h. A pošto za ugao θ, koji zahvata tangenta naše zavojnice sa pravolinijskim generatrisama cilindra na kome leži, dobijamo $\operatorname{tg}\theta=a/h$, izlazi da se zavojnica projicira u cikloidu, koja je izdužena, obična ili skraćena prema tome da li projekcioni zraci zahvataju sa osom zavojnice ugao koji je manji, jednak ili veći od ugla θ.

33. Obična zavojnica je presečena jednom ravni π, a u svim presečnim tačkama su položene oskulatorne ravni na krivu.

1° Pokazati da se sve te oskulatorne ravni seku u jednoj tački M.

2° Odrediti trajektoriju tačke M, ako se π okreće oko jedne prave kroz koju prolazi.

Rešenje. 1° Za oskulatornu ravan kružne zavojnice

$$\mathfrak{r} = \{ a\cos t,\ a\sin t,\ kt \} \tag{1}$$

dobijamo jednačinu

$$x \cdot k\sin t - y \cdot k\cos t + az + akt = 0. \tag{2}$$

Zavojnicu sečemo ravninom π, datu jednačinama

$$x = A_1 + uB_1 + vC_1, \qquad y = A_2 + uB_2 + vC_2, \qquad z = A_3 + uB_3 + vC_3, \tag{3}$$

gde su A_i, B_i i C_i $(i=1,2,3)$ date konstante, a u i v nezavisni parametri. Eliminacijom x, y i z iz (1) i (3) dobijamo sistem

$$a\cos t = A_1 + uB_1 + vC_1, \qquad a\sin t = A_2 + uB_2 + vC_2, \qquad kt = A_3 + uB_3 + vC_3. \tag{4}$$

Svako rešenje (t, u, v) ovog sistema daje po jednu presečnu tačku krive (1) i ravni (3). Eliminacijom t iz (2) i (4) dobijamo jednačinu

$$(kA_2x - kA_1y + a^2z + a^2A_3) + u(kB_2x - kB_1y + a^2B_3) + v(kC_2x - kC_1y + a^2C_3) = 0,$$

koja za one vrednosti u i v, koje odgovaraju presečnim tačkama zavojnice (1) sa ravni (3,) pretstavlja jednačinu oskulatornih ravni u tim tačkama. Dobijena jednačina pokazuje da sve ove oskulatorne ravni prolaze kroz tačku koju određuje sistem

$$\begin{aligned} kA_2x - kA_1y + a^2z + a^2A_3 &= 0 \\ kB_2x - kB_1y \qquad + a^2B_3 &= 0 \\ kC_2x - kC_1y \qquad + a^2C_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

2° Ravan π neka se okreće oko neke prave koja je paralelna sa nekim datim vektorom $\{B_1, B_2, B_3\}$. Jednačinu pramena tih ravni dobijamo ako u sistem (3) mesto C_i stavimo $C_i + \lambda D_i$ $(i=1,2,3)$, gde su D_i bilo kakve konstante koje zadovoljavaju uslov

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Onda tako izmenjene jednačine (3) za svaku vrednost λ određuju po jednu ravan pramena. A jednačine (5), u kojima prethodno izvršimo smenu konstanata C_i sa izrazima $C_i + \lambda D_i$, određuju jednu pravu, naime pravu koju određuju prve dve jednačine sistema (5).

Geometrisko mesto tačaka M je, prema tome, jedna prava.

34. Data je sferna indikatrisa tangenata vitopere krive.

1° Naći jednačinu krive;

2° Ispitati specijalni slučaj kada je ta indikatrisa krug;

3° Koristeći dobijeni rezultat, napisati opštu jednačinu svih zavojnica, kojima je zadata fleksija ili torzija. Specijalno, naći zavojnicu kod koje je $\rho(t) = 1/a\cos t$;

4° Napisati jednačinu krivih konstantne fleksije.

Rešenje. 1° Indikatrisa je data jednim jediničnim radijus-vektorom

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(t). \tag{1}$$

Ako je $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(t)$ tražena kriva, tada postoji jedna skalarna funkcija $c(t)$ takva da važi

$$d\mathfrak{r}/dt = c(t)\,\mathbf{t}(t),$$

odakle izlazi

$$\mathfrak{r} = \int c(t)\,\mathbf{t}\,dt. \tag{2}$$

Obratno, ako je jednačina krive oblika (2), gde je $c(t)$ jedna proizvoljna funkcija od t, $\mathbf{t}$ je njen jedinični tangentni vektor, a (1) njena sferna indikatrisa tangenata. Prema tome, krive (2), gde je $c(t)$ proizvoljna funkcija od t, su tražene krive.

2° U specijalnom slučaju, kad je indikatrisa krug, možemo staviti

$$\mathbf{t} = \{ a\cos t,\ a\sin t,\ b \}, \tag{3}$$

gde su a i b konstante vezane relacijom

$$a^2 + b^2 = 1. \tag{4}$$

Ako je s dužina luka krive (2), imamo $ds/dt = \sqrt{\dot{\mathfrak{r}}^2} = c(t)$. Iz (3) i (4) dobijamo diferenciranjem, koristeći jednu *Frenet*-ovu formulu:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho} = \frac{a}{c(t)}\cdot\{-\sin t,\ \cos t,\ 0\},$$

odakle sleduje

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a}{c(t)},\quad \mathbf{n} = \{-\sin t,\ \cos t,\ 0\}. \tag{5}$$

Iz (3) i (5) nalazimo

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}] = \{-b\cos t,\ -b\sin t,\ a\},$$

odakle dobijamo, po *Frenet*-ovoj formuli za izvod binormalnog vektora, jednačine

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{\tau} = -\frac{b}{c(t)}\cdot\{-\sin t,\ \cos t,\ 0\}.$$

Odavde sleduje

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{c(t)}. \tag{6}$$

Iz prve od jednačina (5) i iz jednačine (6) dobijamo najzad

$$\frac{1}{\rho} : \frac{1}{\tau} = a : b = \text{const}.$$

Tražene krive su u ovom specijalnom slučaju, prema tome, *opšte cilindarske zavojnice*. A lako se uviđa da je i kod svake cilindarske zavojnice sferna indikatrisa tangenata krug ili jedan njegov deo.

3° Jednačina svih zavojnica, ne uzimajući u obzir njihov položaj u prostoru, koje imaju zadat radijus prve krivine $\rho(t)$, glasi na osnovu (2) i prve od jednačina (5)

$$\mathfrak{r} = a\int \rho(t)\,\mathbf{t}\,dt,$$

gde je $\mathbf{t}$ dat sa (3), tj.

$$\mathfrak{r} = \{ a^2\int\rho\cos t\,dt,\ a^2\int\rho\sin t\,dt,\ ab\int\rho\,dt \}. \tag{7}$$

Analogno dobijamo jednačinu svih zavojnica sa zadatim radijusom torzije $\tau(t)$ u obliku

$$\mathfrak{r} = \{ ab\int\tau\cos t\,dt,\ ab\int\tau\sin t\,dt,\ b^2\int\tau\,dt \}. \tag{8}$$

U dobijenim jednačinama (7) i (8), a i b su proizvoljne konstante vezane relacijom (4).

Specijalno, za $\rho(t)=\text{const}$, $\tau(t)=\text{const}$ jednačine, (7) i (8) daju kružne zavojnice.

Jednačinu zavojnice za $\rho(t) = 1/a\cos t$ dobijamo iz (7), posle integriranja i imajući u vidu (4), u obliku

$$\mathfrak{r} = \left\{ at,\ -a\log\cos t,\ \pm\sqrt{1-a^2}\log\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Integracione konstante su stavljene jednake nuli, jer bismo u protivnom imali samo paralelno pomeranje krive.

4^0 Neka je parametar t sada dužina σ luka indikatrise (1). Onda, ako crticom obeležimo izvod po luku s krive, imamo

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} \cdot \frac{1}{c(\sigma)},$$

odakle, koristeći $1/\rho^2 = \mathbf{r}''^2$ i $(d\mathbf{t}/d\sigma)^2 = 1$, dobijamo $\rho = c(\sigma)$. Pošto je ρ, po pretpostavci, konstantan, dobijamo traženu jednačinu krivih konstantne fleksije $1/\rho$, s obzirom na (2), u obliku

$$\mathbf{r} = \rho \int \mathbf{t}\, d\sigma,$$

gde je $\mathbf{t}$ proizvoljan jedinični vektor, a σ luk krive koju određuje $\mathbf{t}$, posmatran kao radijus-vektor.

35. Data je sferna indikatrisa binormale vitopere krive.

1^0 Naći jednačinu krive;

2^0 Kakvu krivu dobijamo u slučaju da je indikatrisa krug?

3^0 Napisati jednačinu krivih koje imaju datu konstantnu torziju $1/\tau$.

Rešenje. 1^0 Jedinični binormalni vektor $\mathbf{b}$ neka je dat kao funkcija parametra t:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(t). \tag{1}$$

Smatrajući $\mathbf{b}$ kao radijus-vektor, (1) pretstavlja jednačinu indikatrise binormale. Ako je s luk krive, imamo, koristeći *Frenet*-ovu formulu $\mathbf{n} = -\tau \cdot d\mathbf{b}/ds$, relaciju

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t} = [\mathbf{n}\,\mathbf{b}] = -\tau \cdot \left[\frac{d\mathbf{b}}{ds}, \mathbf{b}\right] = \tau \cdot \left[\mathbf{b}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right] \frac{dt}{ds},$$

odakle dobijamo jednačinu tražene krive u obliku

$$\mathbf{r} = \int \tau \left[\mathbf{b}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right] dt. \tag{2}$$

Obrnuto, svaka jednačina oblika (2), gde je $\mathbf{b}$ ma koji jedinični vektor za koji važi $(\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ddot{\mathbf{b}}) > 0$, a τ proizvoljna funkcija od t, pretstavlja jednačinu krive čija je torzija $1/\tau$, a $\mathbf{b}$ jedinični vektor na binormali — što se lako verifikuje.

2^0 Ako je indikatrisa (1) krug, možemo je pisati u obliku

$$\mathbf{b} = \{a \cos t,\ a \sin t,\ b\}, \tag{3}$$

gde su a i b proizvoljne konstante vezane relacijom $a^2 + b^2 = 1$. Obeležavajući, kao obično, izvod po t tačkom, a izvod po luku s krive (2) crticom, dobijamo iz (2) i (3) $ds/dt = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2} = a\tau$ i, dalje, odavde i iz (2):

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{a} [\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}],$$

$$\mathbf{t}' = \dot{\mathbf{t}} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot [\mathbf{b}, \ddot{\mathbf{b}}].$$

Ova poslednja jednačina, kad još pomoću (3) izračunamo $[\mathbf{b}, \ddot{\mathbf{b}}]$, dobija oblik

$$\mathbf{t}' = \frac{b}{a\tau} \cdot \{\sin t,\ -\cos t,\ 0\},$$

odakle sleduje

$$\frac{1}{\rho} = |\mathbf{t}'| = \frac{b}{a\tau}, \quad \text{ili} \quad \frac{\rho}{\tau} = \frac{a}{b} = \text{const}.$$

Krive, čije su sferne indikatrise binormala krugovi, jesu *zavojnice*.

3^0 Jednačina krive sa konstantnom torzijom $1/\tau$ je jednačina (2), u kojoj je $\mathbf{b}$ proizvoljan jedinični vektor.

36. Pokazati da su evolvente kružne zavojnice ravne krive, čije ravni su normalne na osi zavojnice, i da su one isto tako i evolvente kružnih preseka rotacionog cilindra na koji zavojnica može da se položi.

37. Data je kriva $y=x^n$, $z=f(x)$, gde je n konstanta, a f neka funkcija od x.

Odrediti funkciju $f(x)$ tako da oskulatorna ravan krive u njenoj proizvoljnoj tački M prolazi kroz projekciju P tačke M na y-osi.

Rešenje. Oskulatorna ravan krive u tački $M(x, y, z)$ ima jednačinu

$$\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ 1 & nx^{n-1} & z' \\ 0 & n(n-1)\,x^{n-2} & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

gde su ξ, η, ζ tekuće koordinate. Budući da ova ravan, po pretpostavci, prolazi kroz tačku $P(0, y, 0)$, važi

$$\begin{vmatrix} x & 0 & z \\ 1 & x & z' \\ 0 & n-1 & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

ili

$$x^2 z'' - (n-1)(xz'-z) = 0, \quad \text{tj.} \quad z'' = (n-1)\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{x}\right),$$

odakle izlazi

$$z' = (n-1)\frac{z}{x} + C \qquad (C = \text{const}),$$

te, posle integriranja, dobijamo

$$z = ax^{n-1} + bx \qquad (a = \text{const},\ b = \text{const}).$$

Tražena funkcija je $f(x) = ax^{n-1} + bx$.

38. Data je prostorna kubna parabola jednačinom

(1) $$\mathfrak{r} = \{c_1 t,\ c_2 t^2,\ c_3 t^3\}.$$

1° Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tri tačke krive, date vrednostima t_1, t_2, t_3 parametra t;

2° Koristeći rezultat 1°, napisati jednačinu oskulatorne ravni date krive u proizvoljnoj njenoj tački;

3° Pokazati da četiri ravni koje prolaze kroz jednu istu, promenljivu tetivu krive, a svaka od njih kroz jednu stalnu tačku krive, imaju konstantan dvojni odnos.

Rešenje. 1° Neka tražena ravan ima jednačinu

(2) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 = 0,$$

gde su a_i $(i=1, 2, 3, 4)$ konstante koje treba odrediti, a x_i $(i=1, 2, 3)$ tekuće koordinate. Kako ravan, po pretpostavci, prolazi kroz date tačke krive (1), mora jednačina

$$a_1 c_1 t + a_2 c_2 t^2 + a_3 c_3 t^3 + a_4 = 0$$

imati korene t_1, t_2, t_3, odakle, na osnovu osobina korena kubne jednačine, sleduje

$$\frac{a_2}{a_3} = -\frac{c_3}{c_2}(t_1+t_2+t_3), \quad \frac{a_1}{a_3} = \frac{c_1}{c_3}(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1), \quad \frac{a_4}{a_3} = -c_3 t_1 t_2 t_3.$$

Jednačinu (2) možemo sada pisati u obliku

(3) $$c_2c_3(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)\,x_1-c_1c_3(t_1+t_2+t_3)\,x_2+c_1c_2x_3-c_1c_2c_3t_1t_2t_3=0.$$

U njoj su svi koeficijenti poznati. To je tražena jednačina ravni.

2° Oskulatorna ravan krive (1) u tački (t) je granični položaj ravni (3) za $t_i\to t$ $(i=1,2,3)$. Tražena jednačina, prema tome, glasi

$$3c_2c_3t^2x_1-3c_1c_2t\,x_2+c_1c_2\,x_3-c_1c_2c_3t^3=0.$$

3° Jednačinu ravni kroz tri tačke (t_1), (t_2) i (t) krive (1) možemo, s obzirom na (3), pisati u obliku

(4) $$c_2c_3t_1t_2x_1-c_1c_3(t_1+t_2)x_2+c_1c_2x_3+t\,[c_2c_3(t_1+t_2)x_1-c_1c_3\,x_2-c_1c_2c_3t_1t_2]=0.$$

Neka budu četiri fiksne tačke krive date vrednostima τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 parametra t. Zamenjujući u (4) t redom sa τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, dobijamo jednačine četiri ravni jednog pramena. Dvojni odnos tih ravni jednak je dvojnom odnosu konstanti τ_i, koji je, naravno, nezavisan od t_1 i t_2, odnosno od položaja one tetive krive kroz koju prolaze ravni. A to je i trebalo dokazati.

II. POVRŠINE

39. Data je površina

$\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ \sqrt{a^2-u^2}\}$ (u i v nezavisni parametri, a neka konstanta).

1° Koja je to površina? 2° Šta su koordinatne krive $u=\text{const}$, $v=\text{const}$? 3° Kakvo je geometrisko značenje parametara u i v?

Rešenje. 1° Eliminacijom parametara u i v iz jednačina

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=\sqrt{a^2-u^2}$$

dobijamo, uzevši u obzir da je $z\geqslant 0$, jednačine

(1) $$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad z\geqslant 0.$$

Površina je prema tome polulopta radijusa a.

2° Zbog $y/x=\operatorname{tg} v$ sleduje da su u-linije, tj. krive $v=\text{const}$, krive u kojima poluloptu (1) seku ravni pramena $y=x\operatorname{tg} v$ $(v=\text{const})$. Možemo ih nazvati meridijanima.

Iz $u=\text{const}$ sleduje da je $z=\sqrt{a^2-u^2}=\text{const}$. Krive $u=\text{const}$ su, prema tome, krugovi u kojima poluloptu (1) seku ravni $z=\text{const}$. Nazvaćemo ih paralelnim krugovima.

3° u je rastojanje tačke (u, v) polulopte do z-ose, a v je njena geografska dužina.

40. Data je površina $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ k\,v\}$, gde su u i v nezavisni parametri i $k\neq 0$ jedna konstanta.

1° Kakve su krive parametarske linije $u=\text{const}$ i $v=\text{const}$?

2° Ispitati oblik površine.

Rešenje. 1° Kriva $u=\text{const}$ je zavojnica na kružnom cilindru radijusa u, čija visina jednog zavoja je $2\pi k$.

Kriva $v=\text{const}$ je jedna prava koja seče z-osu i paralelna je sa xy-ravni. Zaista jednačine

(1) $$y/x=\operatorname{tg} v,\quad z=k\,v,\quad v=\text{const}$$

određuju takve prave. One su pravoliniske generatrise površine.

2° Jednačine (1) pokazuju da posmatrana površina postaje obrtanjem prave p oko z-ose tako da ostaje stalno paralelna sa xy-ravni i jednovremenim translatornim pomeranjem u pravcu z-ose, a da pri tome odnos brzine translatornog pomeranja i okretanja ostaje konstantan (jednak k). Površina je *obična zavojna površina* ili *pravi helikoid.*

41. Data je površina $\mathfrak{r}=\{R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta\}$, gde su θ, φ nezavisni parametri, a R konstantna. 1° Kakva je to površina? 2° Šta su koordinatne krive? 3° Naći geometrisko značenje parametara θ i φ.

Rešenje. 1° Eliminacijom parametara θ i φ iz jednačina

$$x=R\cos\theta\cos\varphi,\quad y=R\cos\theta\sin\varphi,\quad z=R\sin\theta$$

dobija se $x^2+y^2+z^2=R^2$. Površina je *lopta* radijusa R.

2° Iz $y/x=\operatorname{tg}\varphi$ i $z=R\sin\theta$ sleduje da su krive $\varphi=\text{const}$ meridijani (videti prethodni zadatak), a krive $z=\text{const}$ paralelni krugovi.

3° φ i θ su geografske koordinate.

42. Šta je geometrisko mesto glavnih normala kružne zavojnice?

Rešenje. Ako zavojnicu napišemo u obliku

$$\mathfrak{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\},$$

gde su a i b konstante, a t proizvoljni parametar, onda za traženo geometrisko mesto njenih glavnih normala dobijamo jednačine

$$x=(a+\lambda)\cos t,\quad y=(a+\lambda)\sin t,\quad z=bt,$$

gde je parametar λ nezavisan od t. Površina je, prema tome, jedan *pravi helikoid*.

43. Odrediti geometrisko mesto sredina tetiva kružne zavojnice.

Rezultat. Deo *pravog helikoida*.

44. Ispitati što pretstavljaju date jednačine, u kojima su u i v nezavisni parametri.

1° $x_i=a_iu+b_iv+c_i\quad (i=1,2,3;\ a_i,\ b_i,\ c_i=\text{const})$;

2° $\mathfrak{r}=\{r\cos u,\ r\sin u,\ v\}\quad (0\neq r=\text{const})$;

3° $\mathfrak{r}=\{a\cos u,\ a\sin u,\ b(u+v)\}\quad (0\neq a,\ b=\text{const})$;

4° $\mathfrak{r}=\{f(u),\ g(u),\ v\}\quad$ (f, g proizvoljne funkcije od u);

5° $\mathfrak{r}=\{u,\ v,\ auv\}\quad (0\neq a=\text{const})$;

6° $\mathfrak{r}=\{a\cos u\cos v,\ b\cos u\sin v,\ c\sin u\}\quad (0\neq a, b, c=\text{const})$.

Rezultat. 1° a) Ako vektori $\mathbf{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ i $\mathbf{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ nisu kolinearni, jednačine pretstavljaju *ravan*. Koordinatne krive $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ su familije paralelnih pravih, a u i v su afine koordinate u sistemu u kome je tačka $C(c_1, c_2, c_3)$ koordinatni početak, a vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ — koordinatni vektori.

b) Ako je $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, tj. $a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3$, i bar jedan od vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nije $\mathbf{o}$, jednačine određuju *pravu* koja prolazi kroz C i paralelna je sa $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

c) Ako je $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{o}$, tj. $a_i=b_i=0$, jednačine određuju *tačku* C.

2° *Rotacioni cilindar* radijusa r. Krive $u=\text{const}$ su pravoliniske generatrise, a krive $v=\text{const}$ — paralelni krugovi.

3° *Rotacioni cilindar* radijusa a. Krive $u=\text{const}$ su pravoliniske generatrise, a krive $v=\text{const}$ — kružne zavojnice. Napraviti skicu!

4° *Cilindar*, čije pravoliniske generatrise su paralelne z-osi i dodiruju se do krive $x=f(u)$, $y=g(u)$ u xy-ravni.

5° *Hiperbolični paraboloid*. Koordinatne krive su obe familije pravih na površini.

6° *Elipsoid* $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1$. Krive $u=\text{const}$ su elipse sa poluosama $a\cos u$, $b\cos u$ i leže u ravnima paralelnim sa xy-ravni. Krive $v=\text{const}$ su elipse u ravnima $y=x\operatorname{tg}v$.

45. Data je kriva (l) jednačinom $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$, gde je s prirodni parametar.

1° Posmatrati površinu (T), određenu jednačinom

$$(1) \qquad \mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}(s) + \lambda\, \mathbf{t}(s),$$

gde je $\mathbf{t} = d\mathfrak{r}/ds$, a λ parametar nezavisan od s.

2° Kakav uzajamni položaj imaju tangentne ravni površine u tačkama jedne iste pravoliniske generatrise?

Rešenje. 1° Pošto su koordinatne krive $s=\text{const}$ tangente krive (1), površina (T) je geometrisko mesto tangenata te krive. Ona je, dakle, jedna *tangentna površina*.

Koordinatna kriva $\lambda=\text{const}$ je, budući da je $|\mathbf{t}|=1$, kao što pokazuje (1), kriva koju opisuje krajnja tačka B jedne duži AB konstantne dužine λ, čija početna tačka A klizi po krivoj (l), a sama duž ima stalno pravac tangente krive u A.

2° Normalni vektor $\mathbf{N}$ površine u tački (s, λ) ima smer vektora

$$[\mathfrak{r}^*_s, \mathfrak{r}^*_\lambda] = \left[\mathbf{t} + \frac{\lambda}{\rho}\mathbf{n}, \mathbf{t}\right] = -\frac{\lambda}{\rho}\mathbf{b},$$

gde je $\mathfrak{r}^*_s$ i $\mathfrak{r}^*_\lambda$ izvod vektora $\mathfrak{r}^*$ po s odn. po λ. Za tangentnu ravan dobijamo onda, kod konstantnog s i λ, ako je $\mathfrak{r}^{**}$ promenljivi radijus-vektor do te ravni, jednačinu $(\mathfrak{r}^{**}-\mathfrak{r}^*)\,\mathbf{N}=0$, gde je $\mathfrak{r}^*$ određen sa (1), odakle sleduje

$$[\mathfrak{r}^{**}-\mathfrak{r}(s)]\,\mathbf{b}(s) = 0 \qquad (s=\text{const}).$$

Ova jednačina je nezavisna od λ. Dakle, u svim tačkama jedne pravoliniske generatrise tangentne ravni date površine poklapaju se.

46. Data je tangentna površina krive

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2-ax=0.$$

Naći presek te površine sa xy-ravni.

Rezultat. Data kriva je *Vivijani*-jeva kriva, a traženi presek *cisoida*.

47. Data je površina $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ f(v)\}$, gde su u i v nezavisni parametri, a $f(v)$ proizvoljna funkcija od v.

1° Ispitati oblik površine i napisati njenu jednačinu u obliku $z=F(x, y)$.

2° Kakva je korespondencija preslikavanje π tangentnih ravni površine, čije dodirne tačke leže na jednoj pravoliniskoj generatrisi, u tačke ove generatrise, kod kojeg preslikavanja svaka ravan korespondira svojoj dodirnoj tački?

Rešenje. 1° Površina je geometrisko mesto onih pravih paralelnih sa xy-ravni koje seku z-osu i krivu $\mathfrak{r}=\{\cos v,\ \sin v,\ f(v)\}$. Sve ove prave — pravoliniske generatrise površine — seku jednu stalnu pravu (z-osu), a paralelne su jednoj stalnoj ravni, normalnoj na toj pravi (xy-ravni). Ovakve površine zovu se *pravi konoidi*.

Eliminacijom parametara u i v iz parametarskih jednačina

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(v)$$

dobijamo jednačinu datog konoida u obliku $z=f(\operatorname{arc\,tg} y/x)$.

2° Za tangentnu ravan površine u tački (u, v) dobijamo, ako tekuće koordinate na njoj označimo sa x', y', z', jednačinu

$$(1) \qquad x'\sin v - y'\cos v\, f(v) + [z' - f(v)]\,u = 0.$$

U tačkama krive $v=\text{const}$, tj. pravoliniske generatrise, daje (1) jednačinu jednog pramenu tangentnih ravni, ako u igra ulogu promenljivog parametra. Pošto svakoj vrednosti u, pri konstantnom v, odgovara jedna tačka generatrise, kod preslikavanja π korespondentnim elementima odgovara ista vrednost u. Parametar u možemo tumačiti i kao projektivnu koordinatu tangentne ravni u pramenu, odnosno tačke u nizu dodirnih tačaka tih ravni. Preslikavanje π je, prema tome, jedna *projektivnost*.

48. Data je jedna kriva C jednačinom $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$, gde je s dužina luka krive. Koju površinu pretstavlja jednačina $\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}(s)+(u-s)\mathfrak{r}'(s)$, gde je parametar u nezavisan od s?

Rezultat. *Tangentna površina* krive C. Koordinatne krive $u=\text{const}$ su evolvente krive C, a krive $s=\text{const}$ su tangente krive C.

49. Površina S data je jednačinom $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ f(u)\}$, gde su u i v nezavisni parametri, a f proizvoljna funkcija od u.

1° Ispitati oblik površine S; 2° Napisati jednačinu površine u obliku $z=F(x,y)$; 3° Koristeći rezultat 2°, napisati jednačinu kružnog konusa, čije pravoliniske generatrise grade sa njegovom osom ugao α.

Rešenje. 1° Parametarske jednačine površine su

$$(1)\qquad x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=f(u).$$

Eliminacijom parametra v dobijamo

$$(2)\qquad x^2+y^2=u^2,\quad z=f(u),$$

što znači da su koordinatne krive $u=\text{const}$ krugovi, paralelni sa xy-ravni i sa centrima na z-osi. Površina S je, prema tome, jedna *rotaciona površina*. Iz $y/x=\operatorname{tg} v$ izlazi da su krive $v=\text{const}$ njeni meridijani. Meridijan u xz-ravni je odreden sa $v=0$, odnosno sa $x=u$, $y=0$, $z=f(u)$, ili, ako odavde eliminiramo u, sa

$$(3)\qquad z=f(x),\quad y=0.$$

Površina S postaje, prema tome, rotacijom krive (3) oko z-ose. Koordinatne krive $u=\text{const}$ i $v=\text{const}$ su paralelni krugovi i meridijani.

2° Eliminacijom parametra u iz jednačina (2) dobijamo traženu jednačinu površine (1) u obliku

$$(4)\qquad z=f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

3° Za osu konusa izaberimo z-osu, a za njegov vrh koordinatni početak. On nastaje, dakle, rotacijom prave $z=x\operatorname{cotg}\alpha$, $y=0$ oko z-ose. U ovom slučaju je, prema tome, $f(u)=u\operatorname{cotg}\alpha$. Jednačina konusa, s obzirom na (4), glasi

$$x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

50. Svaku tačku M lopte $x^2+y^2+z^2=a^2$ projiciramo iz njenog centra na tangentnu ravan lopte u tački $A(0,0,a)$. Dekartove koordinate u, v projekcije M' tačke M u sistemu, kome je početak u A a ose su mu paralelne sa x- odn. y-osom prostornog koordinatnog sistema, tumačimo kao krivoliniske koordinate tačke M na lopti. Naći jednačinu lopte u koordinatama u, v. Šta su koordinatne krive?

Rezultat.

$$\mathfrak{r}=\left\{au/\sqrt{u^2+v^2+a^2},\quad av/\sqrt{u^2+v^2+a^2},\quad a^2/\sqrt{u^2+v^2+a^2}\right\}.$$

Koordinatne krive $u=\text{const}$ i $v=\text{const}$ su glavni krugovi čije ravni prolaze kroz y- odnosno x-osu.

51. Data je površina

$$\mathfrak{r}=\{e^{hv}f(u)\cos(u+v),\quad e^{hv}f(u)\sin(u+v),\quad e^{hv}\varphi(u)\},$$

gde je h konstanta, a f i φ date funkcije od u.

Pokazati da krive $u=\text{const}$ leže na konusima

$$x^2+y^2-\frac{f^2}{\varphi^2}z^2=0$$

i da seku njegove pravoliniske generatrise pod konstantnim uglom.

52. Naći anvelopu datih jednoparametarskih familija površina (α parametar).

1° Ravni $x\cos\alpha+y\sin\alpha+z-a=0$ $\quad(a=\text{const})$;

2° Ravni $ax\cos\alpha+by\sin\alpha+z-c=0$ $\quad(a, b, c=\text{const})$;

3° Lopte $x^2+y^2+(z-a\alpha)^2-\alpha^2=0$ $\quad(\pm 1\neq a=\text{const})$;

4° Paraboloidi $x^2+y^2=4\alpha(z-\alpha)$;

5° Ravni $z=\alpha^3x+\alpha^2y+1$.

Rezultat. 1° *Rotacioni konus* $x^2+y^2-(z-a)^2=0$;

2° *Eliptički konus* $a^2x^2+b^2y^2-(z-c)^2=0$;

3° Za $a^2>1$, *rotacioni konus* $(a^2-1)(x^2+y^2)=z^2$; za $a^2<1$, ne postoji anvelopa;

4° *Rotacioni konus* $x^2+y^2=z^2$;

5° *Konus* $27x^2(z-1)-4y^3=0$.

53. Odrediti povratnu krivu anvelope ravni $z=\alpha^3x+\alpha^2y+\alpha$, gde je α parametar.

Rezultat. Presek cilindara $3x-y^2=0$ i $3yz+1=0$. Naći asimptote ove krive.

54. Tangentne ravni površine $a(yz+zx+zy)=xyz$ u njenim presečnim tačkama sa loptom $x^2+y^2+z^2=R^2$ otsecaju na koordinatnim osama segmente sa konstantnom sumom. Dokazati.

55. Ispitati kakvu površinu obrazuju normale, povučene u tačkama jedne pravoliniske generatrise ma kog pravog konoida.

Rešenje. Ako je jednačina konoida data u obliku

$$\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ \varphi(v)\}, \tag{1}$$

gde je φ neka zadata funkcija od v, onda za normalni vektor $[\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2]$ $(u^1\equiv u,\ u^2\equiv v)$ dobijamo

$$[\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2]=\{\varphi'\sin v,\ -\varphi'\cos v,\ u\}.$$

Parametarske jednačine geometriskog mesta normala na površini (1) u tačkama generatrise $v=v_0$ $(v_0=\text{const})$ glase dakle

$$x=u\cos v_0+\lambda\varphi'(v_0)\sin v_0,\quad y=u\sin v_0+\lambda\varphi'(v_0)\cos v_0,\quad z=\varphi(v_0)+\lambda u, \tag{2}$$

gde je λ parametar nezavisan od u.

U slučaju $\varphi'(v_0)\neq 0$ daje eliminacija parametara λ i u iz (2) jednačinu traženog geometriskog mesta u obliku

$$(z-\varphi)\varphi'=(x\cos v_0+y\sin v_0)(x\sin v_0-y\cos v_0). \tag{3}$$

Ako izaberemo nov koordinatni sistem, u kojem z-osa ostaje ista po položaju i smeru, a nova x-osa je generatrisa $v=v_0$, onda — obeležavajući nove koordinate sa x^*, y^*, z^* — jednačina (3) dobija oblik

$$z^*=\frac{1}{\varphi'}x^*y^*.$$

U ovom slučaju traženo geometrisko mesto je uvek *hiperbolički paraboloid*.

U slučaju $\varphi'(v_0)=0$ posmatrana površina je *ravan*

$$x\sin v_0-y\cos v_0=0.$$

56. Fiksna tačka C na z-osi povezana je sa promenljivom tačkom P xy-ravni. Odrediti anvelopu ravni koje prolaze kroz P a normalne su na CP.

Rezultat. *Rotacioni paraboloid* $x^2+y^2=4cz$, gde c označava rastojanje tačke P od koordinatnog početka.

57. Pokazati da tangentne ravni pravog konoida

$$\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ a\sqrt{\operatorname{tg} v}\}\qquad (a=\text{const})$$

u tačkama jedne pravoliniske generatrise seku ravan $z=0$ po paralelnim pravama.

58. Naći povratnu liniju razvojne površine koja obvija hiperbolički paraboloid $z=xy$ duž krive po kojoj cilindar $x^2=y$ seče taj paraboloid.

Rešenje. Stavljajući $x=u$, $y=v$, dobijamo za paraboloid parametarske jednačine

$$x=u,\quad y=v,\quad z=uv,$$

a za krivu, po kojoj paraboloid seče cilindar $x^2=y$, jednačinu $u^2=v$. Ako na toj krivoj izaberemo kao parametar u, dobijamo jednačinu tangentnih ravni u tačkama te krive u obliku

(1) $$u^2\xi+u\eta-\zeta-u^3=0,$$

gde ξ,η,ζ znače tekuće koordinate. Anvelopa ovih ravni je data razvojna površina.

Diferencirajući dva puta jednačinu (1) po parametru u dobijamo

(2) $$2u\xi+\eta-3u^2=0\quad\text{i}\quad \xi-3u=0.$$

Iz sistema jednačina (1) i (2) određujemo ξ,η,ζ kao funkcije od u. Time dobijamo jednačine tražene povratne krive u obliku

$$\xi=3u,\quad \eta=-3u^2,\quad \zeta=-u^3.$$

Kriva je *kubna parabola.*

59. Razvojna površina dodiruje loptu $x^2+y^2+z^2=a^2$ u presečnim tačkama lopte i cilindra $x^2+y^2-ax=0$.

Ispitati povratnu krivu razvojne površine i njen presek sa xy-ravni.

Rezultat. Povratna kriva je evoluta preseka lopte i cilindra (*Vivijani*-eve krive), a presek razvojne površine i xy-ravni je parabola $y^2=4a(a-x)$.

60. Data je površina

$$\mathfrak{r}^*=\{(v+p)\sin u+f(u),\ (v+q)\cos u+g(u),\ av+h(u)\},$$

gde a, p, q označavaju konstante, u, v nezavisne parametre, f, g i h proizvoljne funkcije od u. Odrediti krive čije su tangente paralelne sa pravoliniskim generatrisama površine. Specijalno, odrediti one krive za koje je radijus krivine ρ konstantan.

Rešenje. Pravoliniske generatrise površine su koordinatne krive $u=\text{const}$. One imaju, prema tome, smer vektora $\mathfrak{r}^*_2=\partial\mathfrak{r}^*/\partial v=\{\sin u,\ \cos u,\ a\}$. Ako je $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$ tražena kriva, na kojoj je $s=s(u)$ prirodni parametar, a tangenta na njoj u tački, određenoj sa $u=u_0$ ($u_0=\text{const}$), paralelna sa generatrisom $u=u_0$, onda su vektori $\mathfrak{r}'(s)$ i $\mathfrak{r}^*_2$ za $u=u_0$ kolinearni. Za svako u, prema tome, važi

(1) $$d\mathfrak{r}/ds=\lambda\mathfrak{r}^*_2\qquad (\lambda=\text{const}),$$

odakle sleduje

$$\lambda=1/|\mathfrak{r}^*_2|=1/\sqrt{1+a^2},$$

i, unošenjem ove vrednosti za λ u (1) i integracijom,

$$\mathfrak{r} = \int \frac{\mathfrak{r}^*_2\, ds}{\sqrt{1+a^2}}.$$

To je jednačina traženih krivih. U njoj je $s=s(u)$ proizvoljna funkcija od u. Parametarske jednačine krivih glase

$$(2) \qquad x = \int \frac{\sin u}{\sqrt{1+a^2}} ds, \quad y = \int \frac{\cos u}{\sqrt{1+a^2}} ds, \quad z = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} s + \text{const},$$

gde je u proizvoljna funkcija od s.

Za radijus ρ krivine krive (1) imamo

$$\frac{1}{\rho^2} = \mathfrak{r}''^2 = \frac{u'^2}{1+a^2},$$

odakle za $\rho=\text{const}$ sleduje

$$u = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\rho} s + \text{const}.$$

Zamenom ove vrednosti za u u (2) dobijamo jednačine traženih krivih u specijalnom slučaju $\rho=\text{const}$. One su *kružne zavojnice*.

61. Odrediti povratnu krivu obvojnice skupa ravni

$$x \sin u - y \cos u + z - a u = 0 \qquad (u \text{ parametar, } a \text{ konstanta}).$$

Rezultat. Zavojnica $x=a\cos u$, $y=a\sin u$, $z=au$.

62. Dat je skup ravni $3u^2x-2uy+z-u^3=0$ (u parametar).

1° Odrediti obvojnicu ovog skupa;

2° Odrediti povratnu krivu obvojnice.

Rezultat. 1° $(xy-z)^2-4(x^2-y)(y^2-xz)=0$; 2° Kubna parabola $x=u$, $y=u^2$, $z=u^3$.

63. Može li razvojna površina biti minimalna?

Rezultat. Samo *ravan*.

64. Izvesti opštu jednačinu pravoliniske površine koja nastaje kretanjem prave koja datu pravu seče pod konstantnim uglom α.

Rešenje. Data nepokretna prava neka je z-osa, a pokretna prava neka ima jednačine

$$(1) \qquad \frac{x}{1} = \frac{y}{t} = \frac{z-k}{n},$$

gde su n i k neke funkcije proizvoljnog parametra t.

Za dati ugao α imamo $\cos\alpha = n/\sqrt{1+t^2+n^2}$, ili

$$(2) \qquad n = \sqrt{1+t^2}\operatorname{cotg}\alpha,$$

čime je funkcija n određena, dok za k možemo uzeti proizvoljnu funkciju $\varphi(t)$.

Iz (1) sleduje

$$t = \frac{y}{x}, \qquad n = \frac{z-\varphi(t)}{x} = \frac{1}{x}\left[z-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

Zamenom ovih vrednosti za t i n u (2) dobijamo za traženu površinu jednačinu

$$z = \varphi(y/x) + \sqrt{x^2+y^2}\operatorname{cotg}\alpha.$$

Za specijalni slučaj $\alpha=\pi/2$ dobijamo *konoid* $z=\varphi(y/x)$. A ako je $\alpha=\pi/2$ i $\varphi(t)$ linearna funkcija, dobijamo *hiperbolički paraboloid*.

65. Data je dvoparametarska familija pravih

(1) $x=tz+p, \quad y=pz+t^3/3$ (t i p nezavisni parametri).

1° Kakav uslov treba da zadovoljavaju parametri t i p, da bi prave date familije bile generatrise jedne razvojne površine?

2° Naći jednačinu povratne krive te razvojne površine;

3° Odrediti geometrisko mesto tih povratnih linija;

4° Odrediti krive u kojima xy-ravan seče razvojne površine.

Rešenje. 1° Stavljajući $z=u$ i $p=p(t)$, gde je $p(t)$ funkcija od t koju treba odrediti, možemo (1) pisati vektorski u obliku

(2) $\mathfrak{r}=\{p(t), t^3/3, 0\}+u\cdot\{t, p(t), 1\}=\mathfrak{r}^*(t)+u\,\mathfrak{e}(t)$.

Ovo je jednačina jedne razvojne površine ako važi $(\dot{\mathfrak{r}}^*, \mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}})=0$, ili

$$\begin{vmatrix} p' & t^2 & 0 \\ t & p & 1 \\ 1 & p' & 0 \end{vmatrix}=0,$$

odakle sleduje $p'\pm t=0$, ili $p(t)=c\pm t^2/2$ ($c=$const). To je tražena relacija između p i t.

2° U (2) stavljamo $p(t)=c\pm t^2/2$ i, smatrajući $u^1\equiv t$, $u^2\equiv u$, određujemo normalni vektor $[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2]$ razvojne površine. Dobijamo

$$[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2]=\{ut(t\pm u), \mp(t\pm u), (-t^2/2\pm 1)(t\pm u)\},$$

gde treba uzeti ili svugde gornje ili svugde donje znake. Povratna kriva je singularna kriva površine, znači kriva, definisana sa $[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2]=\mathfrak{o}$, što daje $t\pm u=0$. U jednačini razvojne površine stavljamo $t=\pm u$, pa dobijamo

(3) $\mathfrak{r}=\{c\mp t^2/2, -t^3/6\mp ct, \mp t\}$,

što pretstavlja jednačinu povratnih krivih.

3° Jednačina (3) daje traženo geometrisko mesto, ako u njoj smatramo c kao parametar nezavisan od t. Eliminacijom parametara iz parametarskih jednačina površine dobijamo njenu jednačinu u koordinatnom obliku $9(xz-y)^2-4z^6=0$.

4° U jednačine (1) stavljamo $p=c\pm t^2/2$, $z=0$, a onda eliminišemo parametar t. Dobijamo

$$8(x-c)^3\mp 9y^2=0.$$

66. Data je površina

$\mathfrak{r}=\{v\cos u, v\sin u, \sin 2u\}$ (u i v nezavisni parametri).

1° Ispitati oblik površine; 2° Pokazati da je površina jednostrana.

Rešenje. 1° Iz parametarskih jednačina

(1) $x=v\cos u, \quad y=v\sin u, \quad z=\sin 2u$

površine dobija se njena jednačina u Dekartovim koordinatama

$$z=2xy/(x^2+y^2).$$

Odavde izlazi, stavljanjem $z=$const, da je površina pravoliniska i da su kod nje pravoliniske generatrise prave koje seku z-osu, a paralelne su sa xy-ravni. Ove generatrise seku krivu $x=\cos u$, $y=\sin u$, $z=\sin 2u$, koja leži na cilindru $x^2+y^2=1$. Ako ovaj cilindar razvijemo u ravan, onda ta kriva prelazi u sinusoidu $z=\sin 2u$, $0\leq u<2\pi$. Ovakva površina zove se *cilindroid*.

2° Kriva

$$u=\pi t+u_0, \quad v=-2v_0 t+v_0 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1),$$

koja leži na datoj površini, počinje u tački $M_0(u_0, v_0)$, a završava u tački $(u_0+\pi, -v_0)$, koja se poklapa, na osnovu (1), sa M_0. Kriva je, prema tome, zatvorena. Ako po ovoj krivi pomeramo kontinualno jedinični normalni vektor

$$\mathbf{N}=\frac{1}{D}\{-2\sin u\cos 2u,\ 2\cos u\cos 2u,\ v\} \qquad (D=\sqrt{v^2+4\cos^2 2u})$$

date površine, onda on pri povratku u polaznu tačku dolazi u položaj $-\mathbf{N}(u_0, v_0)$. Time je dokazano da je površina jednostrana.

67. Na površini $\mathfrak{r}=\{a\cos v,\ a\sin v,\ u\}$, gde su u i v nezavisni parametri, data je kriva $u=kt$, $v=t\,(k=\text{const})$. Naći dužinu s luka te krive od $t=t_1$ do $t=t_2$.

Rešenje.

$$ds^2=a^2 dv^2+du^2,$$

odakle, zbog $du=k\,dt$, $dv=dt$, sleduje $ds=\sqrt{a^2+k^2}\,dt$, i odavde, posle integriranja po t od t_1 do t_2

$$s=\sqrt{a^2+k^2}\,(t_2-t_1).$$

Površina je, očigledno, *kružni cilindar*, a data kriva *zavojnica* na njemu.

68. Na površini $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ u^2/2\}$ data je kriva $v=ku$ (k pozitivna konstanta).

1° Ispitati oblik krive;

2° Naći dužinu s luka te krive od koordinatnog početka do proizvoljne tačke krive.

Rešenje. Za projekcije tačaka površine na xy-ravan su u i v polarne koordinate. Jednačina projekcije date krive u ovim koordinatama je $u=v/k$, što znači da je ta projekcija jedna *Arhimedova spirala*. Ako ovu spiralu projiciramo natrag na datu površinu, koja je rotaciona površina, nastala obrtanjem parabole $2z=x^2$; $y=0$ oko z-ose, onda se dobija opet data kriva.

2° Za liniski elemenat ds na površini dobijamo

$$(1) \qquad ds^2=(1+u^2)\,du^2+u^2\,dv^2.$$

Ako na krivoj uvedemo parametar t, stavljajući $u=t$, $v=kt$, imamo $du=dt$ i $dv=k\,dt$. Ove vrednosti za du i dv zamenjujemo u (1), pa dobijamo

$$ds^2=[1+(1+k^2)\,t^2]\,dt^2,$$

odakle za traženi luk s, posle integriranja, izlazi

$$s=\frac{t}{2}\sqrt{1+(1+k^2)t^2}+\frac{1}{2\sqrt{1+k^2}}\log\left(\sqrt{1+k^2}\cdot t+\sqrt{1+(1+k^2)t^2}\right).$$

69. Data je površina $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ uv\}$, gde su u i v nezavisni parametri.

1° Odrediti tip površine;

2° Odrediti krive u kojima površinu seku ravni paralelne sa xy-ravni.

Rešenje. 1° Površina je konus čije pravoliniske generatrise $v=\text{const}$ seku kružne zavojnice $u=\text{const}$, koje leže na cilindrima sa zajedničkom osom — z-osom;

2° Ako prodor z-ose i presečne ravni izaberemo za pol, a za polarnu osu pravu paralelnu sa x-osom, onda su u i v polarne koordinate tačaka presečne krive. Njena jednačina $uv=\text{const}$ pokazuje da je to *hiperbolička spirala*.

70. U ravni je dat afini koordinatni sistem $(O;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ sa koordinatnim početkom u tački O i koordinatnim vektorima $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, koji imaju dužine e_1 i e_2 (za neku izabranu jedinicu dužine), a među sobom zatvaraju ugao ω.

1° Napisati metrični tenzor ravni. Specijalno i za slučaj kad je sistem Dekartov kosougli i Dekartov pravougli;

2° Izvesti, koristeći 1°, formulu za rastojanje dveju tačaka u ravni;

3° Odrediti dužinu s luka krive $y=f(x)$ u kosouglom sistemu.

Rešenje. 1° Ako su x i y afine koordinate tačaka u datom sistemu, onda ravan možemo vektorski pretstaviti u obliku

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0+\mathbf{e}_1 x+\mathbf{e}_2 y, \tag{1}$$

gde je $\mathfrak{r}_0$ neki konstantan, a $\mathfrak{r}$ promenljivi radijus-vektor. Stavljajući $x=u^1$, $y=u^2$, izračunavamo koeficijente $g_{ik}=\mathfrak{r}_i\mathfrak{r}_k=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$:

$$g_{11}=e_1{}^2,\quad g_{12}=e_1e_2\cos\omega,\quad g_{22}=e_2{}^2,$$

odakle za liniski elemenat ds sleduje, ako pišemo x, y mesto u^1, u^2:

$$ds^2=e_1{}^2dx^2+2e_1e_2\cos\omega\, dx\,dy+e_2{}^2dy^2. \tag{2}$$

Ako je sistem $(O;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ Dekartov (kosougli), tada je $e_1=e_2=1$, pa (2) dobija oblik

$$ds^2=dx^2+2\cos\omega\, dx\,dy+dy^2. \tag{3}$$

A ako je taj sistem pravougli Dekartov, onda osim $e_1=e_2=1$ važi i $\omega=\pi/2$, pa iz (2) dobijamo $ds^2=dx^2+dy^2$.

2° Da bi našli formulu za rastojanje datih tačaka $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$, uzimamo jednačine duži T_1T_2 u obliku

$$x=x_1+t(x_2-x_1),\quad y=y_1+t(y_2-y_1)\qquad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

Odavde dobijamo $dx=(x_2-x_1)dt$, $dy=(y_2-y_1)dt$, što unosimo u (2) i nalazimo ds. Posle integriranja po t od 0 do 1 i kvadriranja dobijamo za traženo rastojanje d formulu

$$d^2=e_1{}^2(x_2-x_1)^2+2e_1e_2\cos\omega\,(x_2-x_1)(y_2-y_1)+e_2{}^2(y_2-y_1)^2.$$

3° Za traženi luk s, stavljajući $y'=dy/dx$, dobijamo iz (3) formulu

$$s=\int\sqrt{1+2\cos\omega\cdot y'+y'^2}\,dx.$$

71. Na lopti $\mathfrak{r}=\{a\cos u\cos v,\ a\sin u\cos v,\ a\sin v\}$ leži kriva $u=v$. Naći uglove pod kojim ova kriva seče koordinatne krive $u=$const i $v=$const. Specijalno za tačku na ekvatoru i na polovima.

Rešenje. Prva diferencijalna forma date površine je

$$ds^2=a^2\cos^2 v\,du^2+a^2dv^2.\quad \therefore\quad g_{11}=a^2\cos^2 v,\quad g_{12}=0,\quad g_{22}=a^2.$$

Ugao α između krive i paralelnog kruga $v=$const naći ćemo po formuli

$$\cos\alpha=\frac{g_{11}du+g_{12}dv}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{11}du^2+2g_{12}du\,dv+g_{22}dv^2}}, \tag{1}$$

koja, u našem slučaju, posle zamenjivanja koeficijenata g_{ik} njihovim vrednostima i skraćivanja, zbog $du=dv$, postaje $\cos\alpha=\cos v/\sqrt{1+\cos^2 v}$. Ova formula određuje, pri datom v, traženi ugao α.

Budući da je $g_{12}=0$, koordinatne krive se seku ortogonalno. Zbog toga je ugao α, pod kojim u datoj tački kriva seče paralelni krug $v=$const, komplementan sa uglom β, pod kojim kriva u toj tački seče meridijan.

Za presečnu tačku krive sa ekvatorom važi $v=0$; znači $\cos\alpha=1/\sqrt{2}$, ili $\alpha=\beta=\pi/4$. Kriva prolazi i kroz polove lopte. Oni su određeni sa $v=\pm\pi/2$. Za ove tačke imamo $\cos\alpha=0$, ili $\alpha=\pm\pi/2$. Dakle, u ovim tačkama kriva dodiruje meridijane $u=\pm\pi/2$.

72. Data je površina

$$\mathfrak{r} = \{2pu\cos v,\ 2qu\sin v,\ 2u^2(p\cos^2 v + q\sin^2 v)\}$$

(p i q konstante, u i v nezavisni parametri).

1° Odrediti tip površine;

2° Na površini odrediti krive u čijim tačkama tangentne ravni površine zahvataju sa xy-ravni stalan ugao.

Rešenje. 1° *Paraboloid* $x^2/p + y^2/q = 2z$.

2° Tangentna ravan

$$2u(x\cos v + y\sin v) - z = 2u^2(p\cos^2 v + q\sin^2 v)$$

zahvata sa xy-ravni ugao θ, definisan sa $\cos\theta = 1/\sqrt{1+4u^2}$.

Ugao θ je konstantan, ako je $u = \text{const}$. Tražene krive su koordinatne krive $u = \text{const}$.

73. Napisati metričnu diferencijalnu formu za ravan u kojoj su date polarne koordinate ρ, φ i izvesti formulu za dužinu s luka krive $\rho = \rho(\varphi)$.

Rešenje. Ravan možemo vektorski pretstaviti u obliku

$$\mathfrak{r} = \{\rho\cos\varphi\ \ \rho\sin\varphi,\ 0\}.$$

Uzimajući $u^1 \equiv \rho$, $u^2 \equiv \varphi$, dobijamo $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = \rho^2$, odakle dobijamo traženu formu

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

Za luk s krive $\rho = \rho(\varphi)$ odavde sleduje, stavljajući $\rho' = d\rho\ d\varphi$, tražena formula

$$s = \int\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi.$$

74. Odrediti ugao μ između tangente krive $\rho = \rho(\varphi)$ u ravni, u kojoj su uvedene polarne koordinate ρ i φ, i ρ-linija (polarnih radijus-vektora).

Rešenje. U datoj ravni imamo metričnu diferencijalnu formu:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

(videti zad. 73) i, prema tome, uzevši $u^1 \equiv \rho$, $u^2 \equiv \varphi$,

$$g_{11} = 1,\quad g_{12} = 0,\quad g_{22} = \rho^2.$$

Ugao μ dobijamo iz formule

$$\cos\mu = \frac{g_{1i}\, du^i}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{ik}\, du^i\, du^k}},$$

u koju treba g_{ik} zameniti njihovim vrednostima i staviti $du^1 = \rho' d\varphi$, $du^2 = d\varphi$, gde ρ' znači $d\rho/d\varphi$. Dobijamo

$$\cos\mu = \frac{\rho' d\varphi}{\sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + \rho'^2 d\varphi^2}} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}.$$

Odavde sleduje tražena formula $\operatorname{tg}\mu = \rho/\rho'$.

75. Kakav ugao α zahvata prava $y = kx + n$ sa x-osom u ravni, gde su x, y kosougle koordinate, a ω koordinatni ugao?

Rešenje. Prva diferencijalna forma u datoj ravni je (videti na primer zad. 70)

$$ds^2 = dx^2 + 2\cos\omega\, dx\, dy + dy^2,$$

pa je, prema tome, uzevši $u^1 \equiv x$, $u^2 \equiv y$,

$$g_{11} = g_{22} = 1,\quad g_{12} = \cos\omega.$$

Ugao α biće određen formulom

$$\cos\alpha = \frac{g_{1i}\,du^i}{\sqrt{g_{11}}\,\sqrt{g_{ik}\,du^i\,du^k}},$$

ako u njoj koeficijente g_{ik} zamenimo njihovim vrednostima i stavimo $du^1 = dx$, $du^2 = dy = k\,dx$. Posle skraćivanja sa dx dobijamo

$$\cos\alpha = \frac{1 + k\cos\omega}{\sqrt{1 + 2k\cos\omega + k^2}}, \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{k\sin\omega}{1 + k\cos\omega}.$$

76. Na lopti $\mathfrak{r} = \{a\cos u\cos v,\ a\sin u\cos v,\ a\sin v\}$ date su krive

$$(l)\quad u = v, \qquad (l')\quad u + v = \pi/2.$$

Naći uglove pod kojima se one seku.

Rešenje. Krive (l) i (l') su dve *Viviani*-eve krive, naime krive u kojima cilindri $x^2 + y^2 - a x = 0$ i $x^2 + y^2 - a y = 0$ seku loptu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Iz njihovih jednačina $u = v$ i $v = \pi/2 - u$ sleduje da se one seku u tački čije su krivoliniske koordinate $u = \pi/4$, $v = \pi/4$.

Parametarske jednačine datih krivih možemo napisati u obliku

$$(1) \qquad u = t, \quad v = t; \qquad u = \tau, \quad v = \pi/2 - \tau,$$

gde su t i τ proizvoljni parametri. Ugao α pod kojim se ove krive seku dobijamo iz formule

$$\cos\alpha = \frac{g_{ik}\,du^i\,\delta u^k}{\sqrt{g_{ik}\,du^i\,du^k}\,\sqrt{g_{ik}\,\delta u^i\,\delta u^k}},$$

ako u njoj koeficijente g_{ik} zamenimo njihovim vrednostima

$$g_{11} = a^2\cos v, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = a^2,$$

i ako, na osnovu (1), stavimo $du^1 = dt$, $du^2 = dt$, $\delta u^1 = d\tau$, $\delta u^2 = -d\tau$. Posle skraćivanja sa $dt\,d\tau$ dobijamo za traženi ugao formulu

$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{\cos^2 v - 1}{\cos^2 v + 1}.$$

Za presečnu tačku $(\pi/4,\ \pi/4)$ krivih dobijamo odavde, zamenom $v = \pi/4$, $\cos\alpha = -1/3$ ili $\alpha \approx 109°\,28'$.

Date krive seku se i u singularnim tačkama koordinatnog sistema, tj. na polovima, koji su određeni sa $v = \pm\pi/2$. U ovim tačkama je $u \equiv u^1$ neodređen, dakle i du^1, δu^1. Zbog toga za njih formula (2) ne mora dati tačan rezultat. Određujući direktno ugao α između tangentnih vektora krivih (1) u tim tačkama, dobijamo $\alpha = \pi/2$.

77. Na hiperboličnom paraboloidu $\mathfrak{r} = \{u^1,\ u^2,\ u^1 u^2\}$ položene su krive definisane jednačinama

$$u^1 = \cos t, \quad u^2 = \sin t, \quad \text{i} \quad u^1 = \tau, \quad u^2 = a\tau$$

(t i τ proizvoljni parametri, a neka konstanta).

Naći koordinate presečnih tačaka krivih i ugao pod kojim se one seku. Za koju se vrednost od a one seku ortogonalno?

Rezultat. Krive se seku u dvema tačkama, čije krivoliniske koordinate u^1, u^2 su $\left(\pm 1/\sqrt{1+a^2},\ \pm a/\sqrt{1+a^2}\right)$, gde treba uzeti ili oba gornja ili oba donja znaka. U tim tačkama krive se seku pod istim uglom θ, određenim relacijom

$$\cos\theta = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin 4\varphi}{\sqrt{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi} \cdot \sqrt{1 + \sin^2 2\varphi}} \qquad (\operatorname{tg}\varphi = a).$$

Krive se seku ortogonalno za $\varphi = 0$, $\varphi = \pm\pi/4$ i $\varphi = \pi/2$, odnosno za $a = 0,\ \pm 1,\ \infty$, tj. kad se druga kriva dobija presecanjem paraboloida jednom od ravni $y = 0$, $y = \pm x$ i $x = 0$.

78. Na površini sa datom metričnom formom $ds^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du\, dv + g_{22} dv^2$ posmatrati krive, definisane diferencijalnom jednačinom

$$(1) \qquad P(u, v)\, du^2 + Q(u, v)\, du\, dv + R(u, v)\, dv^2 = 0,$$

u kojoj su P, Q i R zadate funkcije od u i v. Pokazati pod kojim uslovom krive (1) obrazuju na površini ortogonalnu mrežu, tj. takvu dvoparametarsku familiju krivih, da kroz svaku tačku površine prolazi po jedna kriva od svake familije i da se seku ortogonalno.

Rešenje. Uslov za normalnost dvaju smerova $du : dv$ i $\delta u : \delta v$ na površini sa datim metričnim tenzorom je

$$(2) \qquad g_{11}\, du\, \delta u + g_{12}(du\, \delta v + dv\, \delta u) + g_{22}\, dv\, \delta v = 0.$$

Ako su du/dv i $\delta u/\delta v$ određeni jednačinom (1), tj. ako su koreni kvadratne jednačine

$$P\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + Q\left(\frac{du}{dv}\right) + R = 0$$

po du/dv, onda imamo, na osnovu *Viète*-ovih pravila za korene kvadratne jednačine, relacije

$$(3) \qquad \frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v} = -\frac{Q}{P}, \qquad \frac{du}{dv}\,\frac{\delta u}{\delta v} = \frac{R}{P}.$$

Ako jednačinu (2) podelimo sa $dv\, \delta v$, pa iz tako dobivene jednačine i relacija (3) eliminišemo du/dv i $\delta u/\delta v$, dobijamo traženi uslov u obliku

$$(4) \qquad g_{11} R - g_{12} Q + g_{22} P = 0.$$

79. Data je površina $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u^1, u^2)$.

1° Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivih;

2° Odrediti ortogonalne trajektorije pravoliniskih generatrisa tangentne površine kružne zavojnice.

Rešenje. 1° Ako u jednačinu $g_{ik}\, du^i\, \delta u^k = 0$ zamenimo $\delta u^1 = 0$, $\delta u^2 \neq 0$, dobijamo jednačinu ortogonalnih trajektorija krivih $u^1 = \text{const}$, tj. u^2-linija, zbog

$$g_{ik}\, du^i\, \delta u^k = g_{i1}\, du^i\, \delta u^1 + g_{i2}\, du^i\, du^2,$$

u obliku

$$g_{2i}\, du^i = 0.$$

Za ortogonalne trajektorije u^1-linija na površini imamo, po analogiji, jednačinu

$$g_{1i}\, du^i = 0.$$

2° Ako je tangentna površina kružne zavojnice $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u^1)$, gde je u^1 prirodni parametar na njoj, data radijus-vektorom

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}(u^1) + u^2\, \dot{\mathfrak{r}}(u^1),$$

dobićemo diferencijalnu jednačinu ortogonalnih trajektorija pravoliniskih generatrisa $u^1 = \text{const}$, zbog $g_{12} = g_{22} = 1$, u obliku

$$du^1 + du^2 = 0,$$

što daje $u^2 = C - u^1$ $(C = \text{const})$. Tražene trajektorije su, prema tome, definisane jednačinom

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}(u^1) + (C - u^1)\, \dot{\mathfrak{r}}(u^1).$$

Trajektorije su *evolvente* date kružne zavojnice.

80. Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivih površine

$$\mathfrak{r} = \{u \cos v,\ u \sin v,\ u + v\}.$$

Rezultat. $2u + v = a, \qquad u = \operatorname{tg}(b - v) \qquad (a = \text{const},\ b = \text{const}).$

81. Naći diferencijalnu jednačinu ortogonalnih mreža na površini sa metričnom formom $ds^2 = g_{11} du^2 + g_{22} dv^2$.

Rešenje. Na osnovu jednačine (4) zadatka 78. možemo traženu jednačinu pisati u obliku

$$g_{11} du^2 + \varphi(u, v)\, du\, dv - g_{22} dv^2 = 0 \qquad (\varphi \text{ proizvoljna funkcija od } u \text{ i } v).$$

82. Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivih površine

$$\mathfrak{r} = \{ v \cos u - a \sin u,\ v \sin u + a \cos u,\ au \},$$

gde je a pozitivna konstanta, a u i v nezavisni parametri.

Rezultat. $v = au + C, \quad v = a\sqrt{2}\, \text{tg}\,(u\sqrt{2} + C') \qquad (C, C' = \text{const}).$

83. Data je pravoliniska površina jednačinom

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}(s) + u\mathbf{e},$$

gde $\mathfrak{r}(s)$ definiše jednu krivu na kojoj je s prirodni parametar, $\mathbf{e}(s)$ jedan jedinični vektor, a u parametar nezavisan od s.

Naći ortogonalne trajektorije pravoliniskih generatrisa.

Rezultat. $u + \int \cos\theta\, ds = \text{const} \qquad (\cos\theta = \mathbf{e} \cdot \mathfrak{r}')$.

84. Pokazati da na helikoidu $\mathfrak{r} = \{u \cos v,\ u \sin v,\ av\}$ $(0 \neq a = \text{const})$ integralne krive jednačine $du^2 - (u^2 + a^2)\, dv^2 = 0$ obrazuju ortogonalnu mrežu.

85. Na površini sa zadatom metričnom diferencijalnom formom $ds^2 = g_{11} du^2 + 2 g_{12} du\, dv + g_{22} dv^2$ leže krive, definisane jednačinom $P du + Q dv = 0$, gde su P i Q date funkcije od u i v.

1° Odrediti diferencijalnu jednačinu ortogonalnih trajektorija datih krivih;

2° Odrediti ortogonalne trajektorije krivih $\varphi + \theta = \text{const}$ na jediničnoj lopti, na kojoj su φ i θ geografske koordinate.

Rešenje. 1° U jednačinu

$$g_{11} \frac{du}{dv} \frac{\delta u}{\delta v} + g_{12} \left(\frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v} \right) + g_{22} = 0$$

uslova za normalnost smerova $du : dv$ i $\delta u : \delta v$ stavljamo $\delta u / \delta v = -Q/P$, te dobijamo traženu diferencijalnu jednačinu u obliku

$$(P g_{12} - Q g_{11})\, du + (P g_{22} - Q g_{12})\, dv = 0.$$

U specijalnom slučaju, kod jedinične lopte, dobijamo — zbog $g_{11} = \cos^2\theta$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$, $P = Q = 1$ — za trajektorije datih krivih jednačinu $-\cos^2\theta\, d\varphi + d\theta = 0$. Ortogonalne trajektorije krivih $\varphi + \theta = \text{const}$ (*Vivijani*-jeve krive) su, prema tome, krive, definisane jednačinom

$$\varphi + C = \text{tg}\,\theta \qquad (C = \text{const}).$$

86. Proveriti da se krive familija

$$\sin u + a(v + 1) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{a}{3 \sin^3 u} + v = b \qquad (a, b = \text{const})$$

na površini

$$\mathfrak{r} = \{ \sin u \cos v,\ \sin u \sin v,\ \cos u + \log \text{tg}\,(u/2) + 1 \}$$

seku ortogonalno.

87. Naći diferencijalnu jednačinu izogonalnih trajektorija koordinatnih krivih na površini sa datom metričnom diferencijalnom formom $ds^2 = g_{ik}\,du^i\,du^k$. Specijalno, izvesti jednačinu izogonalnih trajektorija meridijana na obrtnim površinama.

Rešenje. 1° U formulu

$$\cos\theta = \frac{g_{ik}\,du^i\,\delta u^k}{\sqrt{g_{ik}\,du^i\,du^k}\,\sqrt{g_{ik}\,\delta u^i\,\delta u^k}}$$

za ugao θ između smerova $du^1 : du^2$ i $\delta u^1 : \delta u^2$ na datoj površini stavljamo $\delta u^2 = 0$, $\delta u^1 \neq 0$, pa dobijamo za izogonalne trajektorije u^1-linija jednačinu

$$\cos\theta = \frac{g_{1i}\,du^i}{\sqrt{g_{11}}\,\sqrt{g_{ik}\,du^i\,du^k}} \qquad (\theta = \text{const}).$$

Analogno dobijamo za izogonalne trajektorije u^2-linija jednačinu

$$\cos\theta = \frac{g_{2i}\,du^i}{\sqrt{g_{22}}\,\sqrt{g_{ik}\,du^i\,du^k}} \qquad (\theta = \text{const}).$$

2° U slučaju obrtne površine

$$\mathfrak{r} = \{\, u\cos v,\ u\sin v,\ f(u) \,\}$$

dobijamo, posle određivanja koeficijenata

$$g_{11} = 1 + f'^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = u^2,$$

stavljanjem $u = u^1$, $v = u^2$, za izogonalne trajektorije meridijana $v \equiv u^2 = \text{const}$ jednačinu

$$\sqrt{1+f'^2}\cdot\sqrt{(1+f'^2)\,du^2 + u^2\,dv^2}\cdot\cos\theta = (1+f'^2)\,du,$$

ili

$$u^2\cos^2\theta\,dv^2 = (1+f'^2)\sin^2\theta\,du^2.$$

Odavde dobijamo, posle integriranja, jednačinu traženih trajektorija u obliku

$$v\,\mathrm{cotg}\,\theta + \text{const} = \pm\int \sqrt{1+f'^2(u)}\,\frac{du}{u}\,\cdot$$

88. Dat je torus, koji nastaje rotacijom kruga radijusa r oko prave koja leži u ravni tog kruga na rastojanju $R\,(>r)$ od njegovog centra.

1° Naći izogonalne trajektorije meridijana torusa;

2° Odrediti one specijalne izogonalne trajektorije meridijana, ukoliko postoje, koje se projiciraju na ekvatorijalnu ravan kao elipse.

Rešenje. 1° Torus je dat jednačinom

$$\mathfrak{r} = \{\, u\cos v,\ u\sin v,\ \sqrt{r^2-(R-u)^2} \,\},$$

a krive koje njegove meridijane seku pod stalnim uglom θ jednačinom

$$(1) \qquad dv = \mathrm{tg}\,\theta\,\sqrt{1+f'^2(u)}\,\frac{du}{u}, \qquad f(u) = \sqrt{r^2-(R-u)^2}$$

(videti prethodni zadatak!). Integriranjem jednačine (1) dobijamo

$$\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}\,(v-v_0)\,\mathrm{cotg}\,\theta = \arccos\left(\frac{b^2-a^2}{au} - \frac{b}{a}\right) \qquad (v = \text{const}),$$

ili, rešeno po u,

$$u=\frac{R^2-r^2}{R+r\cos\left[\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}(v-v_0)\operatorname{cotg}\theta\right]},$$

što možemo pisati u obliku

$$u=\frac{p}{1+\varepsilon\cos m(v-v_0)},\tag{2}$$

gde je

$$p=\frac{R^2-r^2}{R},\quad \varepsilon=\frac{r}{R},\quad m=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}\operatorname{cotg}\theta;$$

2⁰ Za projekcije tačaka torusa na ekvatorsku ravan su u i v polarne koordinate. Zato će jednačina (2), zbog $0<\varepsilon<1$, pretstavljati elipsu ako je $m=1$, odnosno

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}.\tag{3}$$

Tražene trajektorije imaju, prema tome, jednačinu koja se dobija, ako u (2) stavimo $m=1$. To su krive koje meridijane torusa seku pod stalnim uglom θ, koji je, na osnovu (3), jednak uglu koji zahvata tangenta, povučena na torus od njegovog središta, sa ekvatorskom ravninom.

89. Izvesti jednačinu krivih koje leže na površini sa datim metričnim tenzorom g_{ik} i koje polove uglove, koje grade parametarske linije $u^i=\text{const}$.

Rešenje. Neka je data površina $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(u^1,u^2)$. Smer tangentnog vektora $\mathfrak{r}_1 du^1+\mathfrak{r}_2 du^2$ treba izabrati tako da bude položen na simetrali ugla koji zahvataju $\mathfrak{r}_1$ i $\mathfrak{r}_2$. A to je onda i samo onda ako je

$$|\mathfrak{r}_1 du^1|=|\mathfrak{r}_2 du^2|.$$

Skalarnim kvadriranjem dobijamo traženu jednačinu u obliku

$$g_{11}(du^1)^2-g_{22}(du^2)^2=0.$$

Jednačine krivih za svaku od obe familije posebno glase

$$\sqrt{g_{11}}\,du^1+\sqrt{g_{22}}\,du^2=0 \quad \text{i} \quad \sqrt{g_{11}}\,du^1-\sqrt{g_{22}}\,du^2=0.$$

90. Odrediti krive koje polove uglove koje grade koordinate krive na datoj površini.

1⁰ $\mathfrak{r}=\{a\cos u\sin v,\ a\sin u\sin v,\ a\cos v\}$;

2⁰ $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ av\}$;

3⁰ $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ u+v\}$.

Rezultat. 1⁰ Površina je *lopta* radijusa a, a tražene krive imaju jednačinu

$$u\pm\log\operatorname{tg}(v/2)=\text{const}.$$

2⁰ Površina je *helikoid*, a tražene krive:

$$\log(u+\sqrt{u^2+a^2})\pm v=\text{const}.$$

3⁰ $$\sqrt{2}\log(u+\sqrt{u^2+1})\pm v=\text{const}.$$

Ispitati oblik površine, posmatrajući krive $u+v=\text{const}$!

91. Naći diferencijalnu jednačinu krivih koje u-linije, tj. krive $v=\text{const}$, na datoj površini seku pod konstantnim uglom φ.

Rezultat. $$dv/du = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{g_{11}/g_{22}}.$$

92. Odrediti sferne tačke paraboloida $2z = x^2/A + y^2/B$ $(A, B=\text{const})$.

Rešenje. Potrebni i dovoljni uslov za egzistenciju sfernih tačaka na površini $z=f(x, y)$:

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}$$

daje u našem slučaju, ako u datoj jednačini površine smatramo z kao funkciju od x i y, relacije

$$\frac{1/A}{1+x^2/A^2} = \frac{0}{xy/AB} = \frac{1/B}{1+y^2/B^2}.$$

Ove jednačine imaju četiri kompleksna rešenja

$$x=0, \quad y=\pm\sqrt{B(A-B)}, \quad z=\frac{1}{2}(A-B);$$

i

$$x=\pm\sqrt{A(B-A)}, \quad y=0, \quad z=\frac{1}{2}(B-A),$$

koja određuju četiri sferne tačke. Ako konstante A i B imaju suprotne znake, tj. ako je paraboloid hiperbolički, nijedna od tih tačaka nije realna, a ako A i B imaju jednake znake, tj. ako je paraboloid eliptički, onda postoje dve realne sferne tačke.

Specijalno, u slučaju $A>B>0$, sferne tačke paraboloida su

$$\left(0, \ \pm\sqrt{B(A-B)}, \ \frac{1}{2}(A-B)\right).$$

93. Odrediti realne sferne tačke elipsoida $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}+\dfrac{z^2}{C}=1$ $(A>B>C>0)$.

Rezultat. Postoje četiri realne sferne tačke:

$$\left(\pm\sqrt{A\,\frac{A-B}{A-C}}, \ 0, \ \pm\sqrt{C\,\frac{B-C}{A-C}}\right).$$

94. Pokazati da su tačke krive $y^2-2ax=0$, $z=0$ sferne tačke površine

$$az^2+(2x+a)(y^2-2ax)=0 \qquad (a=\text{const}).$$

95. Odrediti radijus krivine normalnih preseka paraboloida $z=x^2/a^2+$ $+y^2/b^2$ u tački $O(0, 0, 0)$ za slučaj kada je normalni presek dat jednačinom $y=kx$ $(k=\text{const})$.

Rešenje. Tangentna ravan na paraboloid u O je xy-ravan, a *Dupin*-ova indikatrisa za tačku O je homotetična (sa centrom homotetije u O) sa krivama $x^2/a^2+y^2/b^2=\text{const}$. Glavni pravci za tačku O su dakle pravci x-ose i y-ose. Normalni preseci za te smerove su parabole $z=x^2/a^2$, $y=0$ odnosno $z=y^2/b^2$, $x=0$, pa za glavne radijuse krivine za tačku O, prema tome, dobijamo

$$R_1=a^2/2, \quad R_2=b^2/2.$$

Prema *Euler*-ovoj formuli imamo onda za traženi radijus krivine R relaciju

$$\frac{1}{R}=2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) \qquad (k=\operatorname{tg}\varphi),$$

tj.

$$\frac{1}{R}=\frac{2}{a^2b^2}\cdot\frac{b^2+a^2k^2}{1+k^2}.$$

96. Površinu $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$ ($a, b = \text{const}$) seče ravan $z = ky$ ($k = \text{const}$). Odrediti radijus krivine ρ preseka za tačku (0, 0, 0).

Rešenje. Odgovarajući normalni presek je parabola $z = x^2/a^2$, $y = 0$. Njen radijus krivine u datoj tački je $R = a^2/2$. Po *Meusnier*-ovoj teoremi je $\rho = (a^2/2)\cos\theta$, gde je θ ugao između z-ose i date ravni, dakle $k = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. Prema tome je

$$\rho = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

97. Paraboloid $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$ ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$) seče ravan $y = x$. Odrediti radijus krivine u tački (0, 0, 0) presečne krive, ako se ravan te krive okreće oko prave $x = y$, $z = 0$.

Rezultat. Ako je θ ugao između ravni preseka i z-ose, onda za traženi radijus krivine ρ dobijamo $\rho = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cos\theta$.

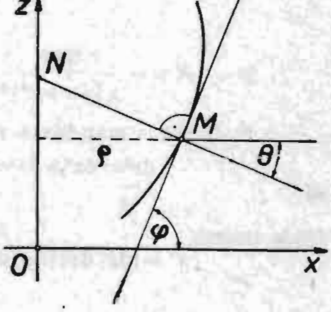
98. Tačka P leži na presečnoj krivoj dveju površina, čije su normalne krivine u P, u smeru te krive, k_1 i k_2, a ugao između normala površina u P je θ. Izračunati krivinu k presečne krive u P.

Rezultat. $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos\theta}/\sin\theta$.

99. Za rotacionu površinu sa z-osom kao osom rotacije dato je rastojanje ρ tačaka površine do ose rotacije kao funkcija $\rho(s)$ od prirodnog parametra s na meridijanu. Odrediti *Gauss*-ovu krivinu K površine.

Rešenje. Na sl. m pretstavlja onaj meridijan površine, koji leži u xz-ravni. Za glavni radijus R_1 krivine, koji odgovara smeru tangente paralelnog kruga površine u tački M, važi (oznake vidi na slici!):

$$1/R_1 = \cos\theta/\rho, \quad \text{ili} \quad R_1 = MN.$$



Ugao φ između tangente na meridijan u M i x-ose je određen sa

$$\operatorname{tg}\varphi = dz/dx = z'/x', \quad z' = dz/ds, \quad x' = dx/ds,$$

odakle, zbog $x'^2 + z'^2 = 1$, sleduje

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = z'.$$

Dakle, za R_1 imamo

$$(1) \qquad 1/R_1 = \cos\theta/\rho = \sin\varphi/x = z'/x.$$

Drugi radijus glavne krivine R_2 je radijus krivine meridijana u tački M, znači

$$1/R_2 = (x'z'' - x''z')/(x'^2 + z'^2)^{3/2} = x'z'' - x''z' = -x''(z' - x'z''/x'').$$

Budući da iz $x'^2 + z'^2 = 1$ sleduje $x'x'' + z'z'' = 0$, ili $z''/x'' = -x'/z'$, imamo dakle

$$(2) \qquad 1/R_2 = -x''(z' + x'^2/z') = -x''/z'(x'^2 + z'^2) = -x''/z'.$$

Iz (1) i (2) dobijamo

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = -\frac{x''}{x},$$

i, zbog $\rho = x$,

$$K = -\rho''/\rho.$$

100. Odrediti radijuse glavnih krivina paraboloida $xy=cz$ u njegovim presečnim tačkama sa hiperboloidom $x^2+y^2-z^2+c^2=0$.

Rezultat. Za jednačinu glavnih krivina dobijamo $z^4k^2+2cz^2k-c^2=0$, odakle za tražene radijuse R_1, R_2 sleduje

$$R_1=\frac{z^2}{c}\cdot(1+\sqrt{2}),\qquad R_2=\frac{z^2}{c}\cdot(1-\sqrt{2}).$$

101. Odrediti *Gauss*-ovu krivinu K datih rotacionih površina:

1° Paraboloid; 2° Torus;

3° Površina koja nastaje rotacijom krive $z=k\sqrt{x}$, $x>0$, $y>0$ oko z-ose;

4° Površina koja nastaje rotacijom traktrise

$$x=R\sin\varphi,\quad y=0,\quad z=R\left(\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\cos\varphi\right)$$

oko z-ose.

Rešenje. 1° Neka je rotaciona osa paraboloida z-osa, i neka je $z=kx^2$, $k\neq 0$, njegov meridijan u xz-ravni. Ako je s luk na meridijanu, imamo

$$ds^2=dx^2+dz^2=(1+4k^2x^2)\,dx^2,$$

odakle je

$$dx/ds=x'=1/\sqrt{1+4k^2x^2},$$

i

$$x''=(dx'/dx)\,(dx/ds)=-4k^2x/(1+4k^2x^2)^2.$$

Iz $K=-x''/x$ (videti zad. 99) za *Gauss*-ovu krivinu sleduje $K=4k^2/(1+4k^2x^2)^2$.

2° Parametarske jednačine meridijana torusa, kome je rotaciona osa z-osa, možemo pisati u obliku

$$x=R+r\cos\theta,\quad y=0,\quad z=r\sin\theta\qquad (r,\ R=\text{const}),$$

gde je $\theta=s/r$, ako je s luk na njemu.

Odavde dobijamo

$$K=-\frac{x''}{x}=\frac{\cos\theta}{r(R+r\cos\theta)}.$$

3° $$K=-\frac{2k^2}{x(4x+k^2)^2}.$$

4° Za luk s meridijana važi

$$ds^2=dx^2+dz^2=R^2\cos^2\varphi\,(1+\operatorname{cotg}^2\varphi)\,d\varphi^2=R^2\operatorname{cotg}^2\varphi\,d\varphi^2,$$

ili

$$d\varphi/ds=\operatorname{tg}\varphi/R.$$

Onda imamo

$$x'=(dx/d\varphi)\,(d\varphi/ds)=\sin\varphi,\qquad x''=(dx'/d\varphi)\,(d\varphi/ds)=\sin\varphi/R.$$

$$\therefore\quad K=-\frac{x''}{x}=-\frac{1}{R^2}.$$

102. Parabola rotira oko svoje direktrise. Izračunati odnos glavnih krivina dobijene rotacione površine.

Rezultat. Za svaku tačku površine važi $k_2:k_1=-2$, gde k_1, k_2 označavaju glavne krivine u smeru meridijana odn. paralelnog kruga te tačke.

103. Odrediti *Gauss*-ovu krivinu K površine za koju je data metrična diferencijalna forma.

1° $ds^2=du^2+G\,dv^2$; 2° $ds^2=\lambda(u,v)\,(du^2+dv^2)$; 3° $ds^2=2F\,du\,dv$.

Rešenje. Iz *Gauss*-ove *„theoreme egregium“* sleduje:

1° $K=-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\cdot\dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$; 2° $K=-\dfrac{1}{2\lambda}\cdot\left(\dfrac{\partial^2\log\lambda}{du^2}+\dfrac{\partial^2\log\lambda}{\partial v^2}\right)$; 3° $K=-\dfrac{1}{F}\cdot\dfrac{\partial^2\log F}{\partial u\,\partial v}$.

104. Pokazati da je zbir krivina dvaju ortogonalnih normalnih preseka za svaku tačku površine konstantna veličina.

Rešenje. Neka su R_1 i R_2 glavni radijusi krivine, a R' i R'' radijusi krivina za dva uzajamno ortogonalna normalna preseka. Postoji onda jedan ugao θ takav, da važi (na osnovu *Euler*-ove formule)

$$\frac{1}{R'}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2},\qquad \frac{1}{R''}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{R_1}+\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{R_2}.$$

Sabiranjem dobijamo

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\text{const}.$$

105. Odrediti totalnu i srednju[1] krivinu površine

$\mathfrak{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ uv\}$ (u i v nezavisni parametri; a i b konstante).

Rezultat. Iz jednačine za glavne krivine

$$g^2k^2-4ab\sqrt{g}\,(a^2-b^2+uv)\,k-4a^2b^2=0$$

dobijamo

$$K=-\frac{4a^2b^2}{g^2},\qquad H=\frac{4ab}{\sqrt{g^3}}(a^2-b^2+uv);$$

$$g=4a^2b^2+a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2.$$

106. Odrediti totalnu i srednju krivinu *Scherk*-ove površine

$$z=\frac{1}{a}(\log\cos ax-\log\cos ay)\qquad (0\neq a=\text{const}).$$

Rezultat. $$H=0;\quad K=-\left(\frac{a\sec ax\cdot\sec ay}{1+\operatorname{tg}^2ax+\operatorname{tg}^2ay}\right)^2.$$

107. Naći totalnu krivinu površine $e^z=\sin\sqrt{x^2+y^2}$.

Rešenje. Stavljajući $x=u\cos v$, $y=u\sin u$, dobijamo jednačinu površine u obliku

$$\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ \log\sin u\}.$$

$$\therefore\quad K=\frac{h}{g}=-\frac{\sin 2u}{2u}.$$

108. Naći srednju krivinu H tangentne površine krive $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$.

Rešenje. Jednačina površine je $\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}(s)+u\cdot\dot{\mathfrak{r}}'(s)$. Ako su za krivu dati radijusi $\rho(s)$ i $\tau(s)$ prve i druge krivine, dobija se za srednju krivinu H u tački (s,u) površine formula

$$H=\rho/(u\tau).$$

109. Izračunati *Gauss*-ovu i srednju krivinu površine koju obrazuju binormale krive čija je krivina k, a torzija $\varkappa$.

Rezultat. Ako je $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$ data kriva, onda jednačina površine glasi $\mathfrak{r}^*=\mathfrak{r}(s)+u\,\mathbf{b}(s)$, gde je u parametar nezavisan od s. Za ovu površinu dobijamo

$$K=-\frac{\varkappa^2}{(1+\varkappa^2u^2)^2},\qquad H=\frac{k+k\varkappa^2u^2-\varkappa'u}{(1+\varkappa^2u^2)^{3/2}}.$$

[1] Srednja krivina H u jednoj tački površine je zbir glavnih krivina u toj tački. No, neki autori (na pr. nemački) definišu srednju krivinu i kao *poluzbir* glavnih krivina; u ovom slučaju bi trebalo kod naših formula zameniti H svugde sa $2H$.

110. Pokazati da totalna krivina K svakog pravog konoida zadovoljava uslov $-1 < K < 0$.

Dokaz. Jednačinu površine pišemo u obliku $\mathfrak{r} = \{u \cos v,\ u \sin v,\ f(v)\}$, gde su u i v nezavisni parametri, f proizvoljna funkcija. Odavde, posle određivanja veličina g_{ik} i h_{ik}, dobijamo

$$K = \frac{h}{g} = -\frac{f'^2(v)}{u^2 + f'^2(v)},$$

odakle zaista sleduje $-1 < K < 0$.

111. Naći one rotacione površine čija je srednja krivina jednaka nuli.

Rešenje. Za rotacionu površinu $\mathfrak{r} = \{u \cos v,\ u \sin v,\ f(u)\}$ nalazimo koeficijente

$$g_{11} = 1 + f'^2(u), \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = u^2,$$

$$h_{11} = \frac{f''(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}, \quad h_{12} = 0, \quad h_{22} = \frac{u f'(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}.$$

Unoseći ove vrednosti u jednačinu

$$\frac{1}{R} = \frac{h_{11}\, du^2 + h_{22}\, dv^2}{g_{11}\, du^2 + g_{22}\, dv^2},$$

gde R znači radijus krive u tački (u, v) normalnog preseka površine u smeru $du : dv$, dobijamo — pošto su krive $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ krivinske — za glavne radijuse krivine R_1 i R_2 vrednosti

$$(1) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{h_{11}}{g_{11}} = \frac{f''(u)}{\sqrt{[1 + f'^2(u)]^3}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{h_{22}}{g_{22}} = \frac{f'(u)}{u\sqrt{1 + f'^2(u)}}.$$

Po uslovu zadatka je

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0,$$

odakle dobijamo iz (1), posle uprošćenja, diferencijalnu jednačinu

$$(2) \qquad u f''(u) + [1 + f'^2(u)]\, f'(u) = 0,$$

koja određuje funkciju $f(u)$. Ako u (2) stavimo $f'(u) = p$ i integriramo, dobijamo

$$p = \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}} \qquad (c = \text{const}).$$

Odavde izlazi

$$f(u) = c \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - c^2}} = c \operatorname{ar\,ch} \frac{u}{2} + k \qquad (k = \text{const}),$$

ili, birajući nove oznake $u \equiv x$, $f(u) \equiv z$, jednačina

$$x = c \operatorname{ch} \frac{z - k}{c}.$$

To je jednačina *lančanice*. Tražene površine se dobijaju, prema tome, obrtanjem ovih krivih oko z-ose. To su *katenoidi*.

112. Odrediti one rotacione površine konstantne pozitivne *Gauss*-ove krivine $1/a^2$, kod kojih je moguće diferencijalnu jednačinu meridijana integrirati elementarno (u konačnom obliku).

Rešenje. Neka meridijan rotacione površine leži u xz-ravni, koordinate njene proizvoljne tačke M neka budu x i z, ugao koji tangenta na krivu u M zahvata sa x-osom neka je φ, a luk krive neka je s. Dato je

$$(1) \qquad \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{1}{a^2} \qquad (a = \text{const}),$$

gde su R_1 i R_2 glavni radijusi krivine rotacione površine u M. Jedan od tih radijusa jednak je radijusu krivine meridijana površine u M. Neka je to R_1, pa imamo zbog $dx/ds = \cos\varphi$:

$$(2) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{dx}.$$

Pošto je radijus paralelnog kruga u M jednak koordinati x tačke M, imamo prema *Meusnier*-ovoj teoremi, relaciju

$$(3) \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{\cos(\pi/2-\varphi)}{x} = \frac{\sin\varphi}{x}.$$

Iz (1), (2) i (3) dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$x dx = a^2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi,$$

odakle integracijom sleduje

$$(4) \qquad x^2 = \frac{a^2+C}{2} - a^2\cos^2\varphi = \frac{a^2+C}{2a^2}\cdot a^2\left(1-\frac{2a^2}{a^2+C}\cos^2\varphi\right),$$

gde je C integraciona konstanta, ili

$$(5) \qquad x = \frac{a}{k}\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi},$$

ako stavimo $2a^2/(a^2+C)=k^2$. Odavde izračunavamo dx i zamenjujemo u $dz=\operatorname{tg}\varphi\, dx$, pa dobijamo

$$(6) \qquad dz = ak\cdot\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}.$$

Parametarske jednačine meridijana su, prema tome, na osnovu (5) i (6):

$$(7) \qquad x=\frac{a}{k}\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}, \quad y=0, \quad z=ak\int\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}+C_1.$$

Integral u poslednjoj jednačini (7) se izražava racionalno eliptičnim normalnim integralima prve i druge vrste modula k. Oni su elementarno integrabilni samo ako je $k^2=1$, odnosno $C=a^2$, u kom slučaju dobijamo za meridijan jednačine

$$x=a\sin\varphi, \quad y=0, \quad z=-a\cos\varphi+C_1 \qquad (C_1=\text{const}),$$

ili

$$x^2+(z-C_1)^2=a^2, \quad y=0.$$

Tražene površine su, prema tome, samo *lopte* radijusa a.

113. Odrediti rotacione površine konstantne negativne *Gauss*-ove krivine, za koje se diferencijalna jednačina meridijana može elementarno integrirati.

Rešenje. Neka je konstantna krivina traženih površina jednaka $-1/a^2$ ($a=\text{const}$). Ako upotrebimo oznake prethodnog zadatka, onda dobijamo iz jednačine (4) toga zadatka odgovarajuću jednačinu za sada tretirani slučaj ako u njoj a^2 zamenimo sa $-a^2$. Prema tome imamo, ako još $\cos^2\varphi$ izrazimo sa $\sin^2\varphi$, jednačinu

$$x^2=\frac{C-a^2}{2}+a^2\cos^2\varphi=\frac{C+a^2}{2a^2}\cdot a^2\left(1-\frac{2a^2}{C+a^2}\sin^2\varphi\right).$$

Odavde, stavljajući $2a^2/(a^2+C)=k^2$, dobijamo

$$x=\frac{a}{k}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

A odavde, uzimajući u obzir $dz=\operatorname{tg}\varphi\, dx$,

$$(1) \qquad z=-ak\int\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Integral u (1) se izražava racionalno eliptičnim normalnim integralima prve i druge vrste modula k. On je elementarno integrabilan samo u slučaju, kada je $k^2=1$, odnosno $C=a^2$. Tada dobijamo

$$(2)\qquad z=-a\int\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi=-a\left[\log\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\varphi\right]+c,$$

gde je c integraciona konstanta. Na osnovu (1) i (2) dobijamo sada parametarske jednačine meridijana, ako prethodno još promenimo orijentaciju z-ose, u obliku

$$(3)\qquad x=a\cos\varphi,\quad y=0,\quad z=a\left[\log\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\varphi\right]+c.$$

Možemo uzeti $c=0$, jer to geometriski znači samo paralelno pomeranje koordinatnog sistema u pravcu z-ose. Jednačine (3) su parametarske jednačine *traktrise* sa osnovom a, kojoj je asimptota osa rotacije tražene površine.

Tražene povišine su, prema tome površine koje postaju rotacijom traktrise oko svoje asimptote, takozvane *pseudosfere*.

Pokazati da jednačina (3) pretstavlja istu krivu kao i jednačine u zadatku 101, 4°, pri $a=R$, $c=0$.

114. Data je familija rotacionih površina koje se dobijaju jedna iz druge translacijom duž ose rotacije.

1° Odrediti jednačinu onih rotacionih površina sa istom osom koje seku ortogonalno površine date familije;

2° Pokazati da za totalne krivine K i K^* površina date i tražene familije u istoj tački važi $K=-K^*$.

Rešenje. 1° Izabravši z-osu za osu rotacije površina date familije, možemo njenu jednačinu pisati u obliku

$$(1)\qquad \mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ f(u)+h\}\qquad (h=\text{const}),$$

gde su u i v nezavisni parametri, a $f(u)$ data funkcija od u. Ako je h promenljiv parametar, tada je (1) jednačina date familije.

Za traženu familiju površina možemo onda napisati jednačinu

$$(2)\qquad \mathfrak{r}^*=\{u\cos v,\ u\sin v,\ \Phi(u)\},$$

gde je Φ neka funkcija od u koju treba odrediti.

Meridijani površine (1) i (2), koji leže u uz-ravni, imaju jednačine $z=f(u)+h$ i $z=\Phi(u)$. Površine (1) i (2) će se seći uzajamno ortogonalno, ako se ovi meridijani budu sekli ortogonalno, dakle ako bude važilo

$$(3)\qquad \Phi'(u)\,f'(u)+1=0.$$

Odavde sleduje

$$\Phi(u)=-\int\frac{du}{f'(u)},$$

što treba uneti u (2). Tako se dobija jednačina tražene familije.

2° Za totalne krivine K i K^* površine (1) i (2) u istoj tački imamo

$$K=\frac{f'(u)\,f''(u)}{u\,[1+f'^2(u)]^2},\qquad K^*=\frac{\Phi'(u)\,\Phi''(u)}{u\,[1+\Phi'^2(u)]^2}.$$

Odavde i iz (3) sleduje relacija $K=-K^*$, koju je trebalo dokazati.

115. Ako na normalama jedne površine nanosimo istu dužinu a, računato od površine, onda krajnje tačke te duži obrazuju površinu koja se zove *paralelna* ili *ekvidistantna* sa datom površinom. Tačke dveju paralelnih površina koje leže na istoj normali nazivamo korespondentnim.

Pokazati da su tangentne ravni na dve paralelne površine u korespondentnim tačkama paralelne.

Rešenje. Ako su $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{r}^*$ radijus-vektori korespondentnih tačaka, a $\mathbf{N}$ jedinični normalni vektor prve površine, onda važi

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r} + a\mathbf{N}.$$

Za dokaz paralelnosti tangentnih ravni dovoljno je pokazati da je vektor $\mathbf{N}$ kolinearan sa normalnim vektorom

$$[\mathfrak{r}_1^*, \mathfrak{r}_2^*] = [\mathfrak{r}_1 + a\mathbf{N}_1, \mathfrak{r}_2 + a\mathbf{N}_2]$$

druge površine, odnosno da je vektor

$$(1) \qquad [\mathbf{N}, [\mathfrak{r}_1^*, \mathfrak{r}_2^*]] = \mathfrak{r}_1^* \cdot (\mathbf{N}\mathfrak{r}_2^*) - \mathfrak{r}_2^* \cdot (\mathbf{N}\mathfrak{r}_1^*)$$

vektor o, a to se zaista dobija iz (1) ako se stavi $\mathfrak{r}_1^* = \mathfrak{r}_1 + a\mathbf{N}_1$, $\mathfrak{r}_2^* = \mathfrak{r}_2 + a\mathbf{N}_2$.

116. Date su dve paralelne površine S i S^*, kod kojih je rastojanje korespondentnih tačaka jednako a.

1° Odrediti *Gauss*-ovu krivinu K^* površine S^* kao funkciju *Gauss*-ove krivine K i *srednje* krivine H površine S;

2° Odrediti srednju krivinu H^* površine S^* kao funkciju od K i H;

3° Pokazati da je S^* razvojna površina ako i samo ako je i S razvojna površina;

4° Pokazati u kom slučaju krivama jedne ortogonalne mreže na S korespondiraju na S^* opet krive jedne ortogonalne mreže;

5° Kada asimptotske krive na S^* odgovaraju asimptotskim krivama na S?

Rešenje. 1° Ako radijus-vektori $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{r}^*$ određuju površinu S odn. S^*, a $\mathbf{N}$ je jedinični normalni vektor na S, onda je

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r} + a\mathbf{N}.$$

Odavde izračunavamo, koristeći formule

$$g_{ik} = \mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k, \qquad \mathfrak{r}_i \mathbf{N}_k = -h_{ik}, \qquad \mathbf{N}_i \mathbf{N}_k = h_{ik} H - g_{ik} K$$

za površinu S, kao i analogne za površinu S^*, koeficijente g^*_{ik} prve diferencijalne forme na S^*:

$$(1) \qquad g^*_{ik} = (1 - a^2 K)\, g_{ik} + a(aH - 2)\, h_{ik},$$

a posle i koeficijente h^*_{ik} druge diferencijalne forme

$$(2) \qquad h^*_{ik} = aK g_{ik} + a(1 - aH)\, h_{ik}.$$

Iz $K^* = h^*/g^*$, gde h^* i g^* znače determinante $|h^*_{ik}|$ i $|g^*_{ik}|$, dobijamo onda

$$(3) \qquad K^* = \frac{K}{1 - aH + a^2 K}.$$

2° Iz formule

$$H^* = \frac{1}{g^*}\,(h^*_{11} g^*_{22} - 2 h^*_{12} g^*_{12} + h^*_{22} g^*_{11})$$

nalazimo zamenom h^*_{ik} i g^*_{ik} njihovim vrednostima (1) i (2) traženu relaciju

$$H^* = \frac{H - 2aK}{1 - aH + a^2 K}.$$

3^0 Iz (3) izlazi da se iz $K \equiv 0$ dobija $K^* \equiv 0$ i obrnuto, čime je tvrđenje dokazano.

4^0 Ortogonalnu mrežu na S biramo za koordinatne krive. U tom slučaju je $g_{12} \equiv 0$. Iz (1) sleduje za $i=1$, $k=2$ da je $g^*_{12}=0$, u slučaju $aH-2 \neq 0$, onda i samo onda ako je i $h_{12} \equiv 0$, tj. kada su krive posmatrane mreže krivinske krive, dok za slučaj $aH-2=0$ sleduje $g^*_{12}=0$ već iz $g_{12} \equiv 0$.

Prema tome, ortogonalnoj mreži na S korespondira na S^* ortogonalna mreža samo onda ako su krive date mreže krivinske. Izuzetak imamo u slučaju kada površina S ima konstantnu srednju krivinu H, a korespondentne tačke na površinama S i S^* su na rastojanju $a=2/H$, kada svakoj ortogonalnoj mreži na S odgovara jedna ortogonalna mreža na S^*.

5^0 Asimptotske krive na S biramo za koordinatne krive. Onda je $h_{11}=h_{22} \equiv 0$. Da bi njihove korespondentne krive na S^* bile asimptotske, potrebno je da bude $h^*_{11}=h^*_{22} \equiv 0$. A ovaj uslov je ispunjen, na osnovu (2), samo u slučaju $K \equiv 0$ (a onda i $K^* \equiv 0$).

Kod dve paralelne površine su asimptotske krive jedne i druge površine korespondentne samo onda ako su površine razvojne.

117. Napisati formule za paralelni prenos (u smislu *Levi-Cività*) vektora po paralelnim krugovima na jediničnoj lopti. Specijalno, za vektor dužine a koji je tangencijalan na nulti meridijan.

Rešenje. 1^0 Ako je data neka površina $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(u^1, u^2)$ u krivoliniskim koordinatama u^1, u^2, sa prvom diferencijalnom formom $ds^2=g_{ik}du^i du^k$, i na površini jedna kriva $u^i=u^i(t)$, onda za vektor $\mathbf{a}=a^i\mathfrak{r}_i=\{a^1, a^2\}$ u tangentnoj ravni površine, koji treba transportirati u smislu *Levi-Cività* po datoj krivi, važi diferencijalna jednačina

$$(1)\qquad \frac{da^s}{dt}+\Gamma_{kl}{}^s\frac{du^l}{dt}a^k=0.$$

U našem slučaju, uzimajući geografske koordinate φ, θ, površina je data radijus-vektorom

$$\mathfrak{r}=\{\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\},$$

a liniski element ds diferencijalnom formom

$$(2)\qquad ds^2=d\theta^2+\cos^2\theta\, d\varphi^2.$$

Jednačina paralelnog kruga je $\theta=\text{const}$. Na njemu, prema tome, ako sa σ označimo njegovu dužinu luka, merenog od $\varphi=0$, važi

$$(3)\qquad \theta=\text{const},\qquad \varphi=\frac{\sigma}{\cos\theta}.$$

Uzimajući $\theta \equiv u^1$, $\varphi \equiv u^2$, izračunavamo *Christoffel*-ove simbole $\Gamma_{kl}{}^s$:

$$\Gamma_{11}{}^1=0,\qquad \Gamma_{12}{}^1=0,\qquad \Gamma_{22}{}^1=\frac{\sin 2\theta}{2},$$

$$\Gamma_{11}{}^2=0,\qquad \Gamma_{12}{}^2=-\operatorname{tg}\theta,\qquad \Gamma_{22}{}^2=0.$$

Dobijene vrednosti za $\Gamma_{kl}{}^s$ unosimo u (1), pa dobijamo, koristeći relacije (3), za paralelni prenos vektora $\mathbf{a}$ po paraleli (3) jednačine

$$\frac{da^1}{d\sigma}=-a^2\sin\theta,\qquad \frac{da^2}{d\sigma}=a^1\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta},$$

ili, ako, zbog lakšeg pisanja, uvedemo oznake $a^1 \equiv x$, $a^2 \equiv y$, jednačine

$$(4)\qquad \frac{dx}{d\sigma}=-y\sin\theta,\qquad \frac{dy}{d\sigma}=x\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

Deljenjem jednačina (4) dobijamo, posle izvesnog uprošćenja

$$x\,dx+\cos^2\theta\cdot y\,dy=0,$$

odakle sleduje

$$(5) \qquad y = \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{A^2 - x^2},$$

gde A^2 označava integracionu konstantu. Ako dobijeni izraz za y iz (5) uneseno u prvu jednačinu (4), dobija se

$$-\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \operatorname{tg}\theta\, d\sigma$$

$$\therefore \quad \arccos\frac{x}{A} = \sigma\operatorname{tg}\theta + B \qquad (B = \text{const}).$$

Odavde i iz (5) sleduju tražene jednačine prenosa (opet pišemo a^1, a^2 umesto x, y) u obliku

$$a^1 = A\cos(\sigma\operatorname{tg}\theta + B), \quad a^2 = \frac{A}{\cos\theta}\sin(\sigma\operatorname{tg}\theta + B).$$

2° Vektor dužine a, koji dodiruje neki meridijan, može se napisati u našem slučaju u obliku $\mathbf{a} = a \cdot \mathfrak{r}_1$, jer je $\mathbf{a}^2 = a^2 g_{11} = a^2$. Naš tangentni vektor ima, prema tome, u afinom koordinatnom sistemu na tangencijalnoj ravni, čiji su koordinatni vektori $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, koordinate $\{a, 0\}$. Da bismo dobili jednačine prenosa ovog vektora, treba u (5) odrediti konstante A i B tako, da one daju za $\sigma = 0$ baš $a^1 = a$, $a^2 = 0$. Dobijamo $A = a$ i $B = 0$, pa su tražene jednačine, prema tome, oblika

$$a^1 = a\cos(\sigma\operatorname{tg}\theta), \quad a^2 = \frac{a}{\cos\theta}\sin(\sigma\operatorname{tg}\theta).$$

Iz ovih formula, imajući u vidu metrični tenzor (2), verifikuje se odmah da dužina vektora $\mathbf{a}$ pri prenosu ostaje ista. Ugao α između vektora $\mathbf{a}$ i meridijana koji prolazi kroz početnu tačku vektora, naprotiv, se menja. Za taj ugao dobijamo lako $\alpha = \sigma \cdot \operatorname{tg}\theta$. Dakle, prenos je elementaran samo na ekvatoru.

III. KRIVE NA POVRŠINAMA

118. Paraboloid $\mathfrak{r} = \{u^1, u^2, c u^1 u^2\}$ $(c = \text{const})$ dodiruje jedna razvojna površina duž krive $u^i = u^i(t)$ $(i = 1, 2)$. Odrediti smer pravoliniskih generatrisa razvojne površine.

Rešenje. Tangenta date krive i pravoliniska generatrisa u bilo kojoj zajedničkoj tački imaju uzajamno konjugirane pravce u odnosu na datu površinu. Za njihove smerove du^1/du^2 i $\delta u^1/\delta u^2$ važi zbog toga $h_{ik}\, du^i\, \delta u^k = 0$, gde su h_{ik} koeficijenti druge osnovne forme zadatog paraboloida Zbog $h_{11} = h_{22} = 0$ imamo

$$du^1\,\delta u^2 + du^2\,\delta u^1 = 0 \quad \text{ili} \quad du^2/du^1 + \delta u^2/\delta u^1 = 0.$$

Smer pravoliniske generatrise je određen dakle sa $\delta u^2/\delta u^1 = -du^2/du^1 = -\dot u^2/\dot u^1$, $(\dot u^i = du^i/dt)$, odnosno vektorom

$$\mathfrak{r}_1\dot u^1 - \mathfrak{r}_2\dot u^2 \qquad (\mathfrak{r}_i = \partial\mathfrak{r}/\partial u^i).$$

119. Na površini

$$\mathfrak{r} = \left\{\sin u\cos v,\ \sin u\sin v,\ \cos u + \log\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \varphi(v)\right\},$$

gde su u, v nezavisni parametri, a φ proizvoljna funkcija od v, data je familija krivih definisanih sa

$$(1) \qquad \sin u + v = \text{const}.$$

Odrediti familiju onih krivih na površini koje su konjugirane sa datim krivima.

Rešenje. Uslov za konjugiranost

$$h_{11}\frac{du}{dv}\frac{\delta u}{\delta v}+h_{12}\left(\frac{du}{dv}+\frac{\delta u}{\delta v}\right)+h_{22}=0$$

u našem slučaju glasi

$$\frac{du}{dv}\cdot\frac{\delta u}{\delta v}-\sin^2 u=0. \tag{2}$$

Iz (1) nalazimo $\delta u/\delta v=-1/\cos v$ i ovo zamenjujemo u (2), pa dobijamo diferencijalnu jednačinu čiji integral $\operatorname{cotg} u=\sin v+\text{const}$ određuje traženu familiju krivih.

120. Odrediti asimptotske krive na datim površinama:

1° $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ a\log u\}\quad (a=\text{const});$

2° $z=1/(x^2+y^2);$

3° $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ a\cos nv\}\quad (a=\text{const};\ n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots);$

4° $\mathfrak{r}=\{(1+\cos u)\operatorname{cotg} v,\ 1+\cos u,\ \sin u/\sin v\};$

5° $\mathfrak{r}=\{(1+u)\operatorname{ch} v,\ (1-u)\operatorname{sh} v,\ u\};$

6° $\mathfrak{r}=\{(1+u)\cos v,\ (1-u)\sin v,\ u\};$

7° $\mathfrak{r}=\{v\cos u-\sin u,\ v\sin u+\cos u,\ u\};$

8° $\mathfrak{r}=\{v/\operatorname{ch} u,\ uv/\operatorname{ch} u,\ \operatorname{arc tg} v\};$

9° $\mathfrak{r}=\{3u+3v,\ 3u^2+3v^2,\ 2u^3+2v^3\}.$

Rezultat. 1° $u=C_1e^{-v}$, $u=C_2e^{v}$. (C_1, $C_2=\text{const}$). Projekcije asimptotskih krivih na xy-ravan su *logaritamske spirale*.

2° Stavljajući $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, dobijamo za asimptotske krive jednačine

$$u=C_1e^{-\frac{v}{\sqrt{3}}},\quad u=C_2e^{\frac{v}{\sqrt{3}}}\qquad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

3° Prave $v=\text{const}$ i krive $u^2=c\sin nv$ ($c=\text{const}$). Specijalno, za $n=2$, dobijamo $u^2=c\sin 2v$. Projekcije druge familije asimptotskih krivih na xy-ravan su, dakle, u ovom slučaju *lemniskate*.

4° $\operatorname{cotg}\frac{u}{2}=a\sin^2\frac{v}{2},\quad \operatorname{cotg}\frac{u}{2}=b\cos^2\frac{v}{2}\qquad (a,\ b=\text{const});$

5° $v=\text{const},\quad u=\dfrac{c\sqrt{\operatorname{ch} v}-\sqrt{\operatorname{sh} v}}{c\sqrt{\operatorname{ch} v}+\sqrt{\operatorname{sh} v}}\qquad (c=\text{const});$

6° $v=\text{const},\quad u=\dfrac{c\sqrt{\cos v}-\sqrt{\sin v}}{c\sqrt{\cos v}+\sqrt{\sin v}}\qquad (c=\text{const});$

7° $u=\text{const},\quad u-2v=\text{const};$

8° $v=\operatorname{sh}\left(c\pm\dfrac{u}{\sqrt{2}}\right)\qquad (c=\text{const});$

9° $u+v=\text{const},\quad u-v=\text{const}.$

121. Naći asimptotske krive konoida $z=f(y/x)$.

Rešenje. Uvodimo krivoliniske koordinate, stavljajući $x=u$, $y=uv$. Asimptotske linije su onda

$$v=c_1;\quad c_2u^2=f'(v)\qquad (c_1,\ c_2=\text{const}),$$

ili

$$y=c_1x\quad \text{i}\quad c_2x^2=f'(y/x).$$

122. Odrediti asimptotske krive date površine.

1° $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ kv\}$ $(k=\text{const})$;

2° $\mathfrak{r}=\{a(u+v),\ b(u-v),\ uv\}$ $(a, b=\text{const})$;

3° $\mathfrak{r}=\{(u+v)(3+2u^2+2v^2-8uv),\ (v-u)(3+2u^2+2v^2+8uv),\ 12uv\}$

Rešenje. 1°, 2°, 3° Koordinatne krive.

123. Odrediti asimptotske krive na datim površinama.

1° $z=mxy$ $(m=\text{const})$; 2° $zx^2=ay^2$ $(a=\text{const})$;

3° $z=y\sin x$; 4° $x^2(y-z)=y+z$;

5° $z=x^m y^n$ $(m, n=\text{const})$.

Rezultat. 1° $x=a,\ z=amy$ $(a=\text{const})$ i $y=b,\ z=bmx$ $(b=\text{const})$;

2° $y=ax$; $y=bx^2$ $(a, b=\text{const})$;

3° $x=\text{const}$; $y^2\cos x=\text{const}$;

4° $x=\text{const}$; $x^2y/(1+x^2)^2=\text{const}$;

5° $y=ax^{\alpha}$; $y=bx^{\beta}$, gde su a i b proizvoljne konstante, a

$$\alpha=\frac{-mn+\sqrt{mn(m+n-1)}}{n(n-1)},\qquad \beta=\frac{-mn-\sqrt{mn(m+n-1)}}{n(n-1)}.$$

124. Izvesti jednačine asimptotskih krivih na površini, datoj u cilindričnim koordinatama.

Rešenje. Ako su na površini uvedene cilindrične koordinate r i φ, onda se njena jednačina može pisati u obliku

$$\mathfrak{r}=\{r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z\},$$

gde je $z=z(r,\varphi)$ neka zadata funkcija od r i φ. Odavde određujemo — uzevši $u^1\equiv r$, $u^2\equiv\varphi$ — koeficijente h_{ik} i dobivene vrednosti unosimo u jednačinu asimptotskih krivih

$$h_{ik}\,du^i\,du^k=0.$$

Ako koordinate obeležimo opet sa r i φ, dobijamo traženu jednačinu u obliku

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}dr^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)dr\,d\varphi+\left(r\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)d\varphi^2=0.$$

125. Data je kriva $\mathfrak{r}=\{t^n,\ t^{n-1},\ t^{n-2}\}$ (t parametar; n prirodan broj).

1° Naći jednačinu površine koja je geometrisko mesto sredina tetiva te krive;

2° Odrediti asimptotske krive na toj površini.

Rezultat. 1° Površina ima jednačinu

$$\mathfrak{r}=\left\{\frac{u^n+v^n}{2},\ \frac{u^{n-1}+v^{n-1}}{2},\ \frac{u^{n-2}+v^{n-2}}{2}\right\}\qquad (u \text{ i } v \text{ nezavisni parametri});$$

2° $u^{\frac{n-1}{2}}\pm v^{\frac{n-1}{2}}=\text{const}.$

126. Odrediti asimptotske krive površine

$$z = x \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2).$$

Rešenje. Za asimptotske krive u cilindričnim koordinatama r i φ dobija se jednačina

$$r = \frac{c}{1 \pm \cos \varphi} \qquad (c = \text{const}).$$

Projekcije asimptotskih krivih u xy-ravni su dve familije *parabola.*

127. Data je prava

(1) $$z = mx, \qquad y = nx \qquad (m, n = \text{const}).$$

1° Odrediti jednačinu površine koja je geometrisko mesto pravih koje su paralelne sa yz-ravni i seku pravu (1);

2° Odrediti asimptotske krive na tim površinama.

Rešenje. 1° Jednačina svake pravoliniske površine, čije su pravoliniske generatrise paralelne yz-ravni, može se pisati u obliku

(2) $$z = y\varphi(x) + \psi(x),$$

gde su φ i ψ neke funkcije od x. Svaka pravoliniska generatrisa ove površine seče pravu (1). Za svako x imaju, prema tome, jednačine (1) i (2) zajedničko rešenje po y i z. Eliminacija y i z iz (1) i (2) daje

$$mx = nx \cdot \varphi(x) + \psi(x).$$

Odavde određujemo $\psi(x)$ i unosimo ga u (2), pa dobijamo

(3) $$z = y\varphi(x) + x[m - n \cdot \varphi(x)].$$

Za svaki izbor funkcije $\varphi(x)$ daje (3) po jednu jednačinu za tražene površine;

2° Asimptotske krive su date jednačinama

$$x = \text{const} \quad \text{i} \quad y = nx + \frac{c}{\sqrt{\varphi'(x)}} \qquad (c = \text{const}).$$

128. Odrediti funkciju f tako, da asimptotske krive površine $z = f(x) - f(y)$ obrazuju ortogonalnu mrežu.

Rešenje. Za asimptotske krive dobijamo jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{f''(x)}{f''(y)}}.$$

Uslov da se ove krive seku ortogonalno može se napisati u obliku

$$\frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)} = \frac{f''(y)}{1 + f'^2(y)}.$$

Pošto je svaka strana ove jednačine nezavisna od x i y, dobijamo odavde integracijom

$$f(x) = -\frac{1}{a} \log \cos (ax + b) + \text{const},$$

gde su a i b konstante.

Jednačina površine glasi

$$az = \log \frac{\cos (ay + b)}{\cos (ax + b)}.$$

129. Odrediti sve površine $z=F(x,y)$ čije su asimptotske krive date jednačinama $y=c$, $xf(y)=c'$ $(c, c'=\text{const})$.

Rešenje. Upoređujući diferencijalnu jednačinu datih krivih

$$f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+xf'(y)\,\mathrm{d}y^2=0$$

sa opštom diferencijalnom jednačinom asimptotskih krivih za površinu $z=F(x,y)$, dobijamo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0, \qquad \frac{2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}}{f(x)}=\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{xf'(y)},$$

odakle određujemo funkciju F. Dobijamo

$$z=F(x,y)=ay+b+cx\int f^2(y)\,\mathrm{d}y+c'x \qquad (a \text{ i } b \text{ integracione konstante}).$$

130. Naći torziju asimptotskih krivih na površini $2z=ax^2+2hxy+by^2$, gde su a, b, h date konstante.

Rešenje. Koristeći *Beltrami*–*Enneper*-ov stav da je kvadrat torzije $1/\tau$ asimptotskih krivih jednak negativnoj *Gausss*-ovoj krivini, iz

$$\frac{1}{\tau}=\frac{\sqrt{s^2-rt}}{1+p^2+q^2}$$

u datom slučaju dobijamo

$$\frac{1}{\tau}=\frac{\sqrt{h^2-ab}}{1+(ax+hy)^2+(hx+by)^2}.$$

131. Odrediti torziju asimptotskih krivih na datoj površini.

1^0 $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ hv\}$ $(h=\text{const})$;

2^0 $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ 1/u\}$.

Rezutat. 1^0 $1/\tau=\pm h/(u^2+h^2)$; 2^0 $1/\tau=u\sqrt{2}/(u^4+1)$.

132. Pokazati da je *Gauss*-ova krivina kod površina, kod kojih se asimptotske krive seku pod konstantnim uglom, proporcionalna kvadratu srednje krivine.

Dokaz. Krive na površini sa prvom diferencijalnom formom $g_{ik}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^k$, definisane diferencijalnom jednačinom

$$P(\mathrm{d}u^1)^2+Q\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2+R(\mathrm{d}u^2)^2=0,$$

seku se pod uglom θ, određenim sa

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{g}\sqrt{Q^2-4PR}}{g_{11}R-g_{12}Q+g_{22}P}.$$

Prema tome, asimptotske krive na toj površini — budući da njihova diferencijalna jednačina glasi $h_{ik}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^k=0$ — seku se pod uglom θ za koji važi

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{2\sqrt{g}\sqrt{h_{12}^2-h_{11}h_{22}}}{g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11}}=2\sqrt{-\frac{h}{g}}\cdot\frac{g}{g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11}},$$

ili

$$\operatorname{tg}\theta=2\cdot\frac{\sqrt{-K}}{H} \qquad (K \text{ Gauss-ova, } H \text{ srednja krivina}).$$

Odavde sleduje

$$4K+H^2\operatorname{tg}^2\theta=0,$$

što dokazuje teoremu.

133. Odrediti torziju asimptotskih krivih na površini koju obrazuju binormale date vitopere krive.

Rešenje. Iz jednačine površine

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r} + u \cdot \mathbf{b},$$

gde $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s)$ određuje datu krivu, a u je parametar koji je nezavisan od s, izračunavamo koeficijente h_{ik} i g_{ik} ($u^1 = u$, $u^2 = s$) i zamenjujemo ih u formulu

$$\frac{1}{\tau^*} = \sqrt{-\frac{h}{g}}.$$

Dobijamo

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{\tau}{u^2 + \tau^2},$$

gde je $1/\tau^*$ tražena torzija, a $1/\tau$ torzija date krive.

134. Napisati jednačinu asimptotskih krivih za rotacione površine, ako je dat meridijan $z = f(x)$, $y = 0$, a rotaciona osa je z-osa. Specijalno za $f(x) = \pm\sqrt{x}$.

Rešenje. Rotaciona površina je određena radijus-vektorom

$$\mathfrak{r} = \{u \cos v,\ u \sin v,\ f(u)\},$$

gde su u i v nezavisni parametri. Odavde izračunavamo

$$\sqrt{g}\, h_{11} = u f''(u), \quad h_{12} = 0, \quad \sqrt{g}\, h_{22} = u^2 f'(u).$$

Unoseći dobivene vrednosti za h_{ik} u jednačinu asimptotskih krivih

$$h_{11}\, du^2 + 2 h_{12}\, du\, dv + h_{22}\, dv^2 = 0,$$

dobijamo

$$f''(u)\, du^2 + u f'(u)\, dv^2 = 0,$$

odakle sleduje tražena jednačina asimptotskih krivih

$$v = \pm \int \sqrt{-\frac{f''(u)}{u f'(u)}}\, du$$

u krivoliniskim koordinatama u, v.

U specijalnom slučaju, za $f(u) = \pm\sqrt{u}$, dobijamo

$$u = c e^{v\sqrt{2}} \qquad (c = \text{const}).$$

Projekcije asimptotskih krivih na xy-ravan u ovom slučaju su *logaritamske spirale.*

135. Odrediti jednačinu asimptotskih krivih za rotacionu površinu čija je osa z-osa, a meridijan je dat u obliku $x = g(z)$, $y = 0$. Specijalno za $g(z) = a\, \mathrm{ch}(z/a)$.

Rešenje. Jednačinu površine pišemo u obliku

$$\mathfrak{r} = \{g(u) \cos v,\ g(u) \sin v,\ u\}.$$

Za diferencijalnu jednačinu asimptotskih krivih dobijamo onda $g''\, du^2 - g\, dv^2 = 0$, odakle

$$v = \pm \int \sqrt{g''(u) . g(u)}\, du + C \qquad (C = \text{const}).$$

U datom specijalnom slučaju (katenoid) imamo $u = \pm a v + \text{const}$. Pokazati da asimptotske krive seku sve meridijane katenoida pod uglom 45^0!

136. Parametarske krive površine su asimptotske krive. Izračunati krivinu tih krivih.

Rezultat. Za krive $u=\text{const}$ dobijamo

$$k=-\sqrt{g}\cdot\Gamma_{22}^{1}\,g_{22}^{-3/2},\ \text{a za krive } v=\text{const}\ k=\sqrt{g}\cdot\Gamma_{11}^{2}\,g_{11}^{-3/2},$$

137. Naći jednačine asimptotskih i krivinskih krivih površine $z=\operatorname{arc\,tg}(y/x)$.

Rešenje. Uvodeći krivolinijske koordinate u, v jednačinama $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, možemo površinu pretstaviti vektorski u obliku

$$\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ v\}.$$

Ona je, dakle, *obična zavojna površina* ili *helikoid*. Određujemo koeficijente g_{ik} i h_{ik}:

$$g_{11}=1,\quad g_{12}=0,\quad g_{22}=1+u^2,$$

$$h_{11}=0,\quad h_{12}=-\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\quad h_{22}=0.$$

Jednačina asimptotskih krivih $h_{ik}\,du^i\,du^k=0$ $(u^1=u,\ u^2=v)$ se reducira na $du\,dv=0$. Asimptotske krive su, prema tome, koordinatne krive, tj zavojnice $u=\text{const}$ i pravolinijske generatrise $v=\text{const}$. Zbog $g_{12}=0$ asimptotske linije helikoida se seku ortogonalno.

Jednačina krivinskih krivih datog helikoida dobija oblik

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ 1 & 0 & 1+u^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

ili $du^2-(1+u^2)\,dv^2=0$, odakle, posle integriranja, sleduje

(1) $$\log(u+\sqrt{1+u^2})=\pm(v+C),$$

gde C označava integracionu konstantu. Jednačinu (1) možemo pisati i u obliku

(2) $$u=\pm\operatorname{sh} v+C.$$

Budući da su u i v polarne koordinate ortogonalnih projekcija tačaka $(u,\ v)$ helikoida na ravan xy, sleduje iz (2) da su projekcije krivinskih krivih na xy-ravan spiralnog oblika, koje se u oba pravca ovijaju oko koordinatnog početka. Ako se ove krive projiciraju natrag na helikoid, dobijamo njegove krivinske krive koje se ovijaju oko ose te površine.

138. Naći krivinske krive na paraboloidu $z=ax^2+by^2$.

Rešenje. Površinu možemo vektorski pretstaviti u obliku

$$\mathfrak{r}=\{x,\ y,\ ax^2+by^2\}.$$

Smatrajući $x=u^1$, $y=u^2$, izračunavamo koeficijente g_{ik} i h_{ik}:

$$g_{11}=1+4a^2x^2,\quad g_{12}=4abxy,\quad g_{22}=1+4b^2y^2,$$

$$\sqrt{g}\,h_{11}=2a,\qquad h_{12}=0,\qquad \sqrt{g}\,h_{22}=2b.$$

Dobijene vrednosti unosimo u jednačinu krivinskih krivih

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix}=0,$$

pa dobijamo

(1) $$4a^2bxy\,dx^2+(a-b+4ab^2y^2-4a^2bx^2)\,dx\,dy-4ab^2xy\,dy^2=0.$$

Ovu jednačinu množimo sa xy, a posle stavljamo

$$\sqrt{4b^2y^2\mathrm{d}y^2}=2by\mathrm{d}y=\mathrm{d}v, \quad \text{ili} \quad v=by^2,$$

$$\sqrt{4a^2x^2\mathrm{d}x^2}=2ax\mathrm{d}x=\mathrm{d}u, \quad \text{ili} \quad u=ax^2.$$

Jednačina (1) se transformiše u

$$(2) \qquad u\dot{v}^2-(v-u)\dot{v}-v=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\dot{v} \quad (\dot{v}=\mathrm{d}v/\mathrm{d}u).$$

Levu stranu možemo pisati u obliku $u(\dot{v}-\dot{v}_1)(\dot{v}-\dot{v}_2)$, gde su $\dot{v}_1$ i $\dot{v}_2$ koreni kvadratne jednačine (po $\dot{v}$):

$$u\dot{v}^2-(v-u)\dot{v}-v=0,$$

znači $\dot{v}_1=v/u$, $\dot{v}_2=-1$. Prema tome, jednačinu (2) možemo pisati u obliku

$$u\left(\dot{v}-\frac{v}{u}\right)(\dot{v}+1)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\dot{v}=0,$$

ili

$$(3) \qquad (u\dot{v}-v)(\dot{v}+1)-\frac{a-b}{4ab}\dot{v}=0.$$

U slučaju da je $a-b\neq 0$, sleduje iz (3):

$$(4) \qquad v-u\dot{v}=\frac{(b-a)\dot{v}}{4ab(\dot{v}+1)},$$

što je *Clairaut*-ova diferencijalna jednačina. Stavljamo $\dot{v}=c(c=\text{const})$ i $u=ax^2$, $v=by^2$ u (4), pa dobijamo jednačinu familija krivinskih krivih datog paraboloida za $a\neq b$ u obliku

$$(5) \qquad acx^2-by^2=\frac{(a-b)c}{4ab(c+1)}.$$

Osim ovih krivih postoji još jedna, naime anvelopa familije (5), u kojoj je c promenljivi parametar.

Za slučaj $a=b$ dobija jednačina (3) oblik

$$(u\dot{v}-v)(\dot{v}+1)=0,$$

odakle izlazi

$$v=c_1^2u, \quad u+v=c_2 \qquad (c_1^2=\text{const}, \quad c_2=\text{const}),$$

ili

$$y=c_1x \quad \text{i} \quad x^2+y^2=c_2/a.$$

Krivinske krive su, u ovom slučaju, meridijani i paralelni krugovi.

139. Odrediti geodezisku krivinu za paralelne krugove i meridijane na obrtnim površinama.

Rešenje. Neka je rotaciona površina data jednačinom $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ f(u)\}$.

Prema *Meusnier*-jevoj formuli za geodetsku krivinu $1/\rho_g$ i krivinu $1/\rho=1/u$ za paralelne krugove imamo relacije

$$\frac{1}{\rho_g}=\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{\cos\varphi}{u}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}=f'(u).$$

Za radijus ρ_g geodeziske krivine na paralelama $u=\text{const}$ dobijamo dakle

$$\rho_g=u\sqrt{1+f'^2(u)}.$$

Geodeziska krivina za meridijane je nula.

140. Odrediti geodezisku krivinu krive po kojoj ravan $x/a+y/b=1$ seče elipsoid $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$, i to za tačku $A(a, 0, 0)$.

Rešenje. Ugao θ između tangentne ravni elipsoida u A i date ravni određen je sa $\operatorname{cotg}\theta=b/a$. Data kriva je neki kosi presek elipsoida u tački A. Odgovarajući normalni presek elipsoida u A je elipsa

$$x^2/a^2+z^2/c^2=1, \quad y=0;$$

njen radijus krivine u A je $R=c^2/a$. Prema tome, za traženu geodezisku krivinu $1/\rho_g$ u tački A dobijamo

$$\frac{1}{\rho_g}=\frac{1}{R}\cdot\operatorname{cotg}\theta=\frac{b}{c^2}.$$

141. Odrediti geodezisku krivinu $1/\rho_g$ krive u kojoj ravan $x/a+y/b+$ $+z/c=1$ seče elipsoid $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$, posmatrajući je kao krivu ovog elipsoida za tačku $C(0, 0, c)$.

Rešenje. Za krivinu $1/R$ odgovarajućeg normalnog preseka u tački C pomoću *Euler*-ove formule dobijamo relaciju

$$\frac{1}{R}=\frac{2c}{a^2+b^2},$$

a odavde, koristeći *Meusnier*-evu formulu, za krivinu $1/\rho$ presečne krive u C izraz

$$\frac{1}{\rho}=2\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2)^3}}.$$

Ako je onda θ ugao između z-ose i normale ravni preseka, izlazi

$$\frac{1}{\rho_g}=\frac{\cos\theta}{\rho}=\frac{2ab}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}.$$

Geodeziska krivina $1/\rho_g$ u C je nezavisna od c.

142. Naći geodeziske krive na konusu $x^2+y^2-z^2=0$.

Rešenje. Jednačinu konusa uzimamo u vektorskom obliku $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ u\}$, a odavde izračunavamo koeficijente $g_{ik}\,(u^1\equiv u,\ u^2\equiv v)$, čije vrednosti unosimo u jednačinu geodeziskih krivih

$$2\frac{d}{ds}(g_{2i}\dot{u}^i)=\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^2}\dot{u}^i\dot{u}^k.$$

Ako krivoliniske koordinate opet obeležimo sa u i v, dobijamo

$$2\frac{d}{ds}(u^2\dot{v})=0,$$

a odavde

$$\text{(1)} \qquad u^2\frac{dv}{ds}=h=\text{const}.$$

Iz $ds^2=2du^2+u^2dv^2$ i (1) eliminišimo ds, pa dobijamo

$$u^4dv^2=h^2(2du^2+u^2dv^2),$$

ili

$$\pm\frac{dv}{h\sqrt{2}}=\frac{du}{u\sqrt{u^2-h^2}}.$$

Integracijom ove jednačine nalazi se

$$\frac{c\pm v}{\sqrt{2}}=\arcsin\left(\frac{h}{u}\right) \quad \text{ili} \quad \frac{h}{u}=\sin\left(\frac{c\pm v}{\sqrt{2}}\right).$$

To je jednačina geodeziskih krivih u krivoliniskim koordinatama u, v.

143. Odrediti geodeziske krive na cilindričnim površinama.

Rešenje. Kad cilindar razvijemo u ravan, onda geodeziske krive cilindra prelaze u geodeziske krive ravni, tj. u prave. Zavijanjem ravni natrag u cilindar prelaze te prave u geodeziske krive cilindra, koje su, prema tome, njegove zavojnice.

Zadatak možemo rešiti analitički, rešavajući jednačine geodeziskih krivih

$$(1)\qquad 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g_{li}\,\dot{u}^i)=\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\dot{u}^i\,\dot{u}^k \qquad (l=1,2)$$

gde tačka znači izvod po s, za slučaj cilindričnih površina.

Iz jednačine ove površine

$$(2)\qquad \mathfrak{r}=\{f(u^1),\ \varphi(u^1),\ u^2\} \qquad (f \text{ i } \varphi \text{ date funkcije od } u^1)$$

izračunavamo koeficijente g_{ik} i h_{ik} i njihove vrednosti unosimo u (1), čime dobijamo

$$[\dot{f}^2(u^1)-\dot{\varphi}^2(u^1)]\,\ddot{u}^1=0, \qquad \ddot{u}^2=0.$$

Odavde sleduje

$$(3)\qquad u^1=a_1s+b_1, \qquad u^2=a_2s+b_2 \qquad (a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2 \text{ integracione konstante}).$$

Eliminacija u^1 i u^2 iz (2) i (3) daje jednačinu asimptotskih krivih, a to je zaista jednačina zavojnica na datoj površini.

144. Naći jednačinu geodeziskih krivih za rotacione površine.

Rezultat. Ako je jednačina površine data u obliku $\mathfrak{r}=\{u\cos v,\ u\sin v,\ f(u)\}$, gde je $f(u)$ neka zadata funkcija od u, onda su geodeziske krive na površini određene jednačinom

$$v=c\pm h\int\sqrt{\frac{1+f'^2}{u^2-h^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u} \qquad (c \text{ i } h \text{ proizvoljne konstante}).$$

145. Odrediti geodeziske krive na katenoidu

$$\sqrt{x^2+y^2}=c\,\mathrm{ch}\,(z/c) \qquad (c=\mathrm{const}).$$

Rešenje. Na katenoidu imamo krivolinske koordinate u, v, definisane sa

$$x=u\cos v, \qquad y=u\sin v.$$

Onda za linski element $\mathrm{d}s$ na njemu dobijamo

$$(1)\qquad \mathrm{d}s^2=\frac{u^2}{u^2-c^2}\mathrm{d}u^2+u^2\mathrm{d}v^2.$$

Jednačina geodeziskih krivih

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g_{2i}\,\dot{u}^i)=\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^2}\dot{u}^i\,\dot{u}^k \qquad (u^1\equiv u,\ u^2\equiv v,\ \dot{u}^i\equiv \mathrm{d}u^i/\mathrm{d}s)$$

za ovaj slučaj glasi $2\,\mathrm{d}(u^2\dot{v})/\mathrm{d}s=0$, odakle sleduje

$$(2)\qquad u^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=c_1=\mathrm{const}.$$

Eliminacijom $\mathrm{d}s$ iz (1) i (2) dobija se

$$\mathrm{d}v=\pm\frac{c_1\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2-c^2)(u^2-c_1^2)}},$$

i odavde integracijom

$$v=c_2\pm c_1\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2-c^2)(u^2-c_1^2)}} \qquad (c_2=\mathrm{const}).$$

To je tražena jednačina geodeziskih krivih u koordinatama u, v.

146. Pokazati da se određivanje geodeziskih krivih na površini $z=\alpha x+\varphi(y)$ ($\alpha=\text{const}$) svodi na kvadrature. *(D. Mitrinović)*

Rešenje. Jednačina geodeziskih krivih

$$(1+p^2+q^2)\frac{d^2y}{dx^2}=pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+(2ps-qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(pr-2qs)\frac{dy}{dx}-qr$$

za datu površinu glasi

$$(1)\qquad (1+\alpha^2+\varphi'^2)\frac{d^2y}{dx^2}=\alpha\varphi''\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\varphi'\varphi''\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Uvodimo novu promenljivu u, stavljajući $u=dy/dx$, posle čega jednačina (1) dobija oblik

$$(2)\qquad (1+\alpha^2+\varphi'^2)u\frac{du}{dy}=\alpha\varphi''u^3-\varphi'\varphi''u^2.$$

Trivijalno rešenje $u=0$ ove jednačine daje pravoliniske generatrise $y=\text{const}$ površine. Ostale geodeziske krive određuje jednačina koju dobijamo iz (2), ako u njoj izostavimo faktor u. Ovu jednačinu možemo pisati u obliku

$$(3)\qquad \frac{du}{dy}+\frac{\varphi'\varphi''}{F(y)}u=\frac{\alpha\varphi''}{F(y)}\qquad \{F(y)=1+\alpha^2+\varphi'^2\}.$$

To je *Bernoulli*-eva jednačina koja se svodi, kao što je poznato, supstitucijom $u=1/v$ na linearnu jednačinu prvog reda, koja je integrabilna u kvadraturama.

Nije teško, uostalom, odrediti i konačni rezultat. Izvršujući u jednačini (3) pomenutu transformaciju $u=1/v$, dobijamo

$$\frac{dv}{y}-\frac{\varphi'\varphi''}{F(y)}v+\frac{\alpha\varphi''}{F(y)}=0.$$

Rešavajući ovu linearnu jednačinu poznatim metodama, dobijamo

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\varphi'^2}}\left\{C_1-\alpha\int\frac{\varphi''(y)\,dy}{(1+\alpha^2+\varphi'^2)^{3/2}}\right\}$$

ili, obeležavajući, radi kratkoće, izraz u velikoj zagradi sa $\Phi(y)$:

$$v=\frac{\Phi(y)}{\sqrt{1+\alpha^2+\varphi'^2}},$$

što, zbog $v=1/u=dx/dy$, daje

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\Phi(y)}{\sqrt{1+\alpha^2+\varphi'^2}}.$$

$$\therefore\quad x+C_2=\int\frac{\Phi(y)\,dy}{\sqrt{1+\alpha^2+\varphi'^2}}.$$

IV. TRANSFORMACIJA KOORDINATA I PRESLIKAVANJA

147. Krivoliniske koordinate x', y', z' u prostoru definisane su jednačinama

$$(1)\qquad x=x'y'\cos z',\qquad y=x'y'\sin z',\qquad 2z=(x')^2-(y')^2,$$

gde su x, y, z Dekartove koordinate.

1° Naći one tačke prostora za koje je jakobijan transformacije (1) jednak nuli;

2° Odrediti oblik koordinatnih površina $x'=\text{const}$, $y'=\text{const}$ i $z'=\text{const}$.

Rešenje. 1^0 Za jakobijan transformacije (1) dobijamo

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x',y',z')}=2x'y'(x'^2+y'^2).$$

Prema tome je $J=0$ za $x'=0$ ili $y'=0$. Za $x'=0$ iz (1) sleduje da je $x=y=0$, $z\leqslant 0$, dok za $y'=0$ dobijamo $x=y=0$, $z\geqslant 0$. Jakobijan je nula, dakle, za tačke na z-osi.

2^0 Iz jednačina (1) sleduje

$$x^2+y^2=x'^2y'^2, \qquad 4z^2=(x'^2-y'^2)^2,$$

odakle je

$$x'^2-y'^2=2z, \qquad x'^2+y'^2=2\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

ili

$$x'^2=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad y'^2=-z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Odavde dobijamo za $x'=c$, ($c=\text{const}$), odnosno $y'=k$ ($k=\text{const}$) jednačine

$$2c^2z=c^4-x^2-y^2 \qquad \text{odnosno} \qquad 2k^2z=-k^4+x^2+y^2.$$

Koordinatna površina $x'=c$ je, prema tome, onaj rotacioni paraboloid sa z-osom kao osom rotacije, koji ima teme u tački $(0,0,c^2/2)$, a xy-ravan seče po krugu radijusa c^2. Koordinatna površina $y'=k$ je rotacioni paraboloid koji prolazi kroz krug $x^2+y^2=k^4$, $z=0$, a teme mu je u tački $(0,0,-k^2/2)$. Površine $x'=\text{const}$ i $y'=\text{const}$ su, prema tome, simetrične u odnosu na xy-ravan.

Iz $y/x=\operatorname{tg} z'$ i prve dve jednačine (1) sleduje — pošto se možemo ograničiti na $x'>0$, $y'>0$ — da su površine $z'=\text{const}$ poluravni kojima je z-osa zajednička prava.

148. Data je transformacija koordinata

(1) $\quad x^2+y^2+z^2-x'x=0, \quad x^2+y^2+z^2-y'y=0, \quad x^2+y^2+z^2-z'z=0,$

gde su x, y, z pravougle koordinate.

1^0 Šta su koordinatne površine $x'=\text{const}$, $y'=\text{const}$ i $z'=\text{const}$?

2^0 Pokazati da se te koordinatne površine seku uzajamno ortogonalno.

Rešenje. 1^0 Koordinatne površine $x'=\text{const}$, $y'=\text{const}$ i $z'=\text{const}$ su familije lopti koje dodiruju yz-, zx-, odnosno xy-ravan u koordinatnom početku.

2^0 Prostor preslikavamo inverzijom, uzevši koordinatni početak kao centar inverzije, a za stepen inverzije 1. Transformacione jednačine onda glase

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad y=\frac{Y}{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad z=\frac{Z}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Jednačine (1) prelaze sada u

$$x'X-1=0, \qquad y'Y-1=0, \qquad z'Z-1=0,$$

koje, za $x'=\text{const}$, $y'=\text{const}$ i $z'=\text{const}$, pretstavljaju familije ravni koje su paralelne sa yz-, zx- odn. sa xy-ravni. One pretstavljaju jedan trostruko ortogonalni sistem. A pošto je inverzija jedno konformno preslikavanje prostora, time je dokazano da i ispitivane koordinatne površine obrazuju jedan trostruko ortogonalni sistem, što se i tražilo.

Rešiti zadatak i bez primene inverzije.

149. Pokazati da data familija površina, gde x, y, z znače Dekartove pravougle koordinate, a u, v međusobno nezavisne parametre, obrazuje trostruko ortogonalni sistem.

1^0 $\quad ux-yz=0, \quad \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}=v, \quad \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+z^2}=w;$

2^0 $\quad 4\log\sin x-y^2-z^2=u, \quad y=vz, \quad (y^2+z^2)\sin x=w;$

3^0 $\quad 4x+y^2+z^2=u, \quad y=vz, \quad y^2+z^2=w\cdot e^x.$

150. Date su transformacione jednačine

$$(1)\qquad \begin{aligned} &x^2+y^2+z^2-x'x=0, \quad z-y'y=0,\\ &(x^2+y^2+z^2)^2-z'(y^2+z^2)=0, \end{aligned}$$

gde su x, y, z Dekartove koordinate?

1° Šta su koordinatne površine $x'=\text{const}$, $y'=\text{const}$ i $z'=\text{const}$?

2° Pokazati da te koordinatne površine obrazuju jedan trostruko ortogonalni sistem.

Rešenje. 1° Površine $x'=\text{const}$ su lopte koje dodiruju yz-ravan u koordinatnom početku; površine $y'=\text{const}$ su poluravni kojima je x-osa zajednička prava, dok su površine $z'=\text{const}$ torusi kojima je x-osa zajednička osa, a koordinatni početak je svima jedina singularna tačka.

2° Uzevši transformaciju kao u zadatku 148, dobijamo

$$x'X-1=0, \quad Z-y'Y=0, \quad z'(Y^2+Z^2)-1=0.$$

Ove jednačine daju, za $x'=\text{const}$, $y'=\text{const}$ i $z'=\text{const}$, koordinatne površine kod cilindričnih koordinata, koje obrazuju jedan trostruko ortogonalni sistem. Zbog toga obrazuju i posmatrane površine jedan takav sistem.

151. Date su transformacione jednačine

$$(1)\qquad x'=\frac{xy}{z^2}, \quad y'=x^2+y^2+z^2, \quad z'=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2-y^2},$$

gde x, y, z znače Dekartove pravougle koordinate.

Pokazati da koordinatne površine $x'=\text{const}$, $y'=\text{const}$ i $z'=\text{const}$ obrazuju jedan trostruko ortogonalni sistem.

Rešenje. Ako desne strane jednačina (1) označimo sa $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ i $h(x,y,z)$, onda treba pokazati da važi identično po x, y, z relacija

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}=0,$$

kao i analogne za g, h i za h, f. A to se, zamenjujući u ove relacije parcijalne izvode od f, g, h njihovim vrednostima, izračunatim iz (1), odmah verifikuje.

152. Data je površina

$$\mathfrak{r}=\left\{\pm\sqrt{\frac{a-b}{b}}\,uv,\ \ \pm\frac{1}{b}\sqrt{\frac{b-a}{a}(1+au)(1+av)},\ \ \frac{1}{2}\frac{b-a}{ab}(1+au+av)\right\},$$

gde su a i b konstante za koje važi $a>b>0$.

1° Odrediti oblik površine; 2° Pokazati da koordinatne krive obrazuju izometričnu ortogonalnu mrežu na površini.

Rešenje. 1° Površina je *hiperbolički paraboloid* $2z=y^2-x^2$;

2° Za liniski element ds na površini dobija se

$$(1)\qquad ds^2=\frac{a-b}{4b^2}(u-v)\,[f(u)\,du^2-f(v)\,dv^2], \quad f(u)=\frac{a(a-b)u-b}{u(1+au)}.$$

Iz uslova da izrazi pod kvadratnim korenima u jednačini površine treba da budu pozitivni izlazi da parametri u, v variraju u oblasti G_1, određenoj sa $v<-1/a$, $-1/a<u<0$, i u oblasti G_2, definisanoj sa $u<-1/a$, $-1/a<v<0$. U oblasti G_1 važi $v<u$ i $f(v)<0$, $f(u)>0$, a u oblasti G_2: $u<v$ i $f(v)>0$, $f(u)<0$.

Na površini uvodimo nove krivoliniske koordinate u', v', stavljajući u slučaju $u > v$

$$u' = \int \sqrt{f(u)}\,du, \quad v' = \int \sqrt{-f(v)}\,dv,$$

a u slučaju $u < v$:

$$u' = \int \sqrt{-f(u)}\,du, \quad v' = \int \sqrt{f(v)}\,dv.$$

Posle izvršene transformacije koordinata, formula (1) postaje $ds^2 = \lambda(u', v')(du'^2 + dv'^2)$, gde je λ neka pozitivna funkcija od u' i v'. Dobijeni oblik prve diferencijalne forme dokazuje da koordinatne krive $u' = \text{const}$ i $v' = \text{const}$, a prema tome i krive $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, obrazuju izometričnu ortogonalnu mrežu.

Ispitati slučajeve u kojima za konstante a, b ne važi uslov $a > b > 0$.

153. Ako koordinatne krive $u = \text{const}$ i $v = \text{const}$ neke površine obrazuju izometričnu mrežu, tada su krive $u + v = \text{const}$ i $u - v = \text{const}$ simetrale uglova te koordinatne mreže i obrazuju takođe izometričnu ortogonalnu mrežu.

154. Odrediti jedno konformno preslikavanje površine $2z = x^2 + y^2$ na ravan.

Rešenje. Ako su ρ, φ, z cilindrične koordinate date površine, onda je ona određena radijus-vektorom

$$\mathfrak{r} = \{\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ \rho^2/2\}. \tag{1}$$

Odavde izračunavamo g_{ik} $(\rho \equiv u^1,\ \varphi \equiv u^2)$:

$$g_{11} = 1 + \rho^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \rho^2,$$

odakle za liniski element ds površine (1) dobijamo

$$ds^2 = (1 + \rho^2)\,d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2 = \rho^2\left(\frac{1+\rho^2}{\rho^2}\,d\rho^2 + d\varphi^2\right). \tag{2}$$

Sada uvodimo na datoj površini nove koordinate u, v, definisane sa

$$\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}\,d\rho = du, \quad d\varphi = du.$$

Odavde dobijamo, posle integracije:

$$u = \sqrt{1+\rho^2} + \log\frac{\sqrt{1+\rho^2} - 1}{\rho} + C_1, \quad v = \varphi + C_2, \tag{3}$$

gde su C_1, C_2 integracione konstante. U koordinatama u, v forma (2) prelazi u

$$ds^2 = \rho^2(du^2 + dv^2). \tag{4}$$

Koeficijenti forme (4) date površine su proporcionalni sa koeficijentima diferencijalne forme $dx^2 + dy^2$ u xy-ravni. Preslikavanje $(u, v) \to (x, y)$ tačaka površine u tačke xy-ravni je, prema tome, konformno.

Paralelni krugovi $\rho = \text{const}$ i meridijani $\varphi = \text{const}$ preslikavaju se kod ovog preslikavanja, na osnovu (3), u prave $x = \text{const}$ odnosno $y = \text{const}$.

155. Preslikati torus konformno na ravan.

Rešenje. Jednačina torusa koji se dobija rotacijom kruga radijusa r oko ose koja leži u ravni kruga na rastojanju R od njegovog centra, može se pisati u obliku

$$\mathfrak{r} = \{(R + r\cos\theta)\cos\varphi,\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi,\ r\sin\theta\}, \tag{1}$$

gde su φ i θ nezavisni parametri koji variraju u intervalima $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ i $-\pi \leqslant \theta < \pi$. Za liniski element ds na površini (1) dobijamo

$$ds^2 = (R + r\cos\theta)^2 d\varphi^2 + r^2\,d\theta^2,$$

ili

$$ds^2 = (R + r\cos\theta)^2\left(d\varphi^2 + \frac{r^2}{(R + r\cos\theta)^2}\,d\theta^2\right). \tag{2}$$

U ravni sa pravouglim koordinatama x, y uvodimo krivoliniske koordinate φ, θ, definisane jednačinama

$$(3) \qquad \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}x, \quad \frac{r\,\mathrm{d}\theta}{R+r\cos\theta} = \mathrm{d}y.$$

Kod integriranja ovih jednačina razlikujemo slučajeve $R>r$, $R=r$ i $R<r$.

a) U slučaju $R>r$ dobijamo, stavljajući integracione konstante jednake nuli:

$$(4) \qquad x=\varphi, \quad y=\frac{2r}{\sqrt{R^2-r^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{R-r}{R+r}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Preslikavanje $(\varphi, \theta)\to(x, y)$, definisano sa (4), je jedno traženo konformno preslikavanje, jer metrični tenzor (2) možemo pisati u obliku

$$\mathrm{d}s^2=(R+r\cos\theta)^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2).$$

Torus se preslikava u pravougaonu oblast $0\leqslant x<2\pi$, $-\frac{\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}<y<\frac{\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}$.

b) U slučaju $R=r$ jednačine (3) daju preslikavanje

$$(5) \qquad x=\varphi, \quad y=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

kod koga se torus preslikava u pojas $0\leqslant x<2\pi$.

c) U slučaju $R<r$ integracija jednačine (3) određuje preslikavanje

$$(6) \qquad x=\varphi, \quad y=\frac{r}{r-R}\log\left|\frac{\sqrt{r+R}+\sqrt{r-R}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r+R}-\sqrt{r-R}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right|.$$

Torus u slučaju $R<r$ preseca sam sebe u singularnim tačkama $\theta=\pm\arccos(-R/r)$. Ako ove dve singularne tačke otstranimo od torusa, onda on raspada u dve površine, od kojih svaka prelazi kod preslikavanja (6) u pojas $0<x<2\pi$, što se lako proverava.

Svako drugo konformno preslikavanje torusa na ravan dobijamo, u sva tri slučaja, ako još xy-ravan konformno preslikamo na uv-ravan pomoću jednačina

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v),$$

gde je $x(u, v)$ i $y(u, v)$ proizvoljan par uzajamno konjugovanih harmoniskih funkcija.

156. Proveriti da je sferno preslikavanje helikoida na jediničnu loptu konformno.

Rešenje. Neka je helikoid dat radijus-vektorom

$$(1) \qquad \mathbf{r}=\{\rho\cos\varphi, \ \rho\sin\varphi, \ k\varphi\}.$$

Za liniski element ds dobijamo

$$(2) \qquad \mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+(k^2+\rho^2)\,\mathrm{d}\varphi^2,$$

a za jedinični normalni vektor **N** na površini (1) jednačinu

$$(3) \qquad \mathbf{N}=\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\{\sin\varphi, \ -\cos\varphi, \ \rho\}.$$

Vektor **N**, posmatran kao radijus-vektor, određuje jednu jediničnu loptu. Preslikavanje helikoida (1) na loptu (3), kod koga korespondentne tačke imaju iste odgovarajuće koordinate ρ i φ, zove se *sferno*. Da bi pokazali da je ovo preslikavanje konformno, posmatramo liniski element dσ na lopti (3), za koji dobijamo

$$(4) \qquad \mathrm{d}\sigma^2=\frac{k^2}{(k^2+\rho^2)^2}\left[\mathrm{d}\rho^2+(k^2+\rho^2)\,\mathrm{d}\varphi^2\right].$$

Koeficijenti diferencijalnih formi (2) i (4) su proporcionalni, što znači da je ispitivano preslikavanje zaista konformno.

157. Proveriti da je sferno preslikavanje katenoida na jediničnu loptu konformno.

Rešenje. Katenoid neka je dat radijus-vektorom

$$\mathfrak{r} = \left\{ u\cos v,\quad u\sin v,\quad c\log\frac{u+\sqrt{u^2-c^2}}{c} \right\} \qquad (c=\text{const}).$$

Za liniski element ds na njemu dobijamo

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{u^2}{u^2-c^2}\,du^2 + u^2\,dv^2,$$

a za jedinični normalni vektor $\mathbf{N}$ na katenoidu koordinate

$$(2) \qquad \mathbf{N} = \left\{ \frac{c}{u}\cos v,\ -\frac{c}{u}\sin v,\ \frac{\sqrt{u^2-c^2}}{u} \right\}.$$

Jednačina (2) daje, ako $\mathbf{N}$ smatramo radijus-vektorom, jediničnu loptu, na koju je sferno preslikan katenoid. Korespondentne tačke imaju iste odgovarajuće koordinate u i v. Metrična diferencijalna forma na lopti (2) je

$$(3) \qquad d\sigma^2 = \frac{c^2}{u^4}\left(\frac{u^2}{u^2-c^2}\,du^2 + u^2\,dv^2 \right).$$

Pošto su koeficijenti formi (1) i (3) proporcionalni, posmatrano preslikavanje zaista je konformno

158. Naći jednačinu loksodrome na lopti radijusa r i ispitati u šta prelazi ta kriva kod stereografske projekcije lopte od jednog pola na njenu ekvatorijalnu ravan.

Rešenje. a) ako je v geografska dužina, a u komplemenat geografske širine na lopti, onda je ona vektorski data radijus-vektorom

$$(1) \qquad \mathfrak{r} = \{ r\sin u\cos v,\quad r\sin u\sin v,\quad r\cos u \}.$$

Metrični tenzor na njoj je

$$ds^2 = r^2(du^2 + \sin^2 u\,dv^2).$$

Loksodroma na lopti je kriva koja njene meridijane seče pod konstantnim uglom. Ako je taj ugao α, onda dobijamo diferencijalnu jednačinu loksodrome, kada u formuli za ugao θ između smerova $du:dv$ i $\delta u:\delta v$ na površini (1)

$$\cos\theta = \frac{du\,\delta u + \sin^2 u\,dv\,\delta v}{\sqrt{(du^2+\sin^2 u\,dv^2)(\delta u^2+\sin^2 u\,\delta v^2)}}$$

stavimo $\delta v=0$, $\delta u\neq 0$, $\theta=\alpha$. Posle uprošćenja dobijamo

$$dv \pm \operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{du}{\sin u} = 0,$$

odakle, posle integracije, sleduje

$$(2) \qquad v \pm \operatorname{tg}\alpha\cdot\log\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \text{const}.$$

To je tražena jednačina loksodrome u koordinatama u i v.

b) Ako je $P(0,\,0,\,r)$ pol lopte, M bilo koja njena tačka, a M' prodor prave PM sa xy-ravni, onda je preslikavanje $M\to M'$ *stereografsko projiciranje* lopte na njenu ekvatorijalnu ravan. U toj ravni uvodimo polarne koordinate ρ i φ. Jednačine preslikavanja dobićemo iz uslova za kolinearnost vektora $\overrightarrow{PM}$ i $\overrightarrow{PM'}$, što daje

$$\frac{r\sin u\cos v}{\rho\cos\varphi} = \frac{r\sin u\sin v}{\rho\sin\varphi} = \frac{r\cos u - r}{-r},$$

odakle se lako dobijaju tražene jednačine stereografskog projiciranja

$$(3) \qquad \varphi = v, \qquad \rho = r \operatorname{cotg} \frac{u}{2}.$$

Ako uvedemo nove konstante c_1 i c_2, iz (2) i (3) dobijamo jednačinu stereografske projekcije loksodrome u obliku

$$\rho = e^{c_1 \varphi + c_2}.$$

Loksodroma se projektuje, prema tome, u *logaritamsku spiralu.*

159. *Traktrisa* je ravna kriva kod koje otsečak njene tangente od dodira do neke stalne prave p njene ravni ima stalnu dužinu a. Ako traktrisa rotira oko prave p obrazuje rotacionu površinu koja se zove *pseudosfera.*

Na pseudosferi uzimamo krivoliniske koordinate u i v, gde u znači dužinu luka na meridijanu (traktrisi) koji počinjemo meriti od singularne tačke traktrise, a v ugao između meridijanske ravni i jedne stalne ravni koja prolazi kroz rotacionu osu.

1° Izračunati liniski element pseudosfere;

2° Posmatrati preslikavanje ι (*Poincaré*-ovo) tačaka pseudosfere u tačke jedne ravni, u kojoj su izabrane pravougle Dekartove koordinate x^*, y^*, definirano sa $(u, v) \to (x^*, y^*)$ i $x^* = v$, $y^* = e^u$. Kakvo je to preslikavanje?

3° U šta prelaze geodeziske krive pseudosfere kod preslikavanja ι?

4° Koristeći preslikavanje ι, naći jednačinu krivih na pseudosferi, koje njezine meridijane seku pod stalnim uglom.

Rešenje. 1° Ako za ravan traktrise izaberemo xz-ravan, z-osu za pravu p i ako stavimo $a=1$, dobijamo za traktrisu iz njene definicione osobine diferencijalnu jednačinu

$$(1) \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Orijentaciju z-ose uzimamo tako da od dva moguća znaka pred korenom dođe znak —. Odavde dobijamo

$$z + C = \log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} - \sqrt{1-x^2}.$$

Pomeranjem koordinatnog sistema u smeru z-ose možemo postići da integraciona konstanta bude $C=0$. Iz (1) sleduje da kriva za $x=1$ ima jednu singularnu tačku A. Luk u ćemo meriti, prema uslovu zadatka, od A.

Paralelni krugovi $u=$const i meridijani $v=$const pseudosfere seku se ortogonalno. Zbog toga će liniski element ds na toj površini biti oblika

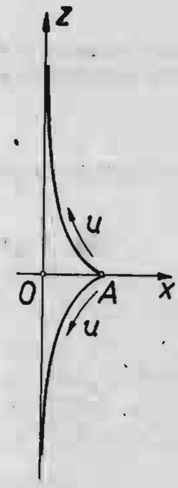
$$(2) \qquad ds^2 = g_{11}\, du^2 + g_{22}\, dv^2.$$

Liniski element na meridijanu je $\sqrt{g_{11}}\, du$, a na paraleli $\sqrt{g_{22}}\, dv$. No pošto je luk na meridijanu kod nas jednak u, biće $\sqrt{g_{11}}\, du = du$, ili $g_{11}=1$. Paralelni krug koji prolazi kroz tačku $(x, 0, z)$ je krug radijusa x, pa je prema tome liniski elemenat $\sqrt{g_{11}}\, dv$ na njemu jednak $x dv$. Prema tome je $g_{22}=x^2$. Da bismo našli g_{22} kao funkciju od u i v, treba izraziti x sa u i v. U tom cilju nalazimo, koristeći (1),

$$du^2 = dx^2 + dz^2 = dx^2 + \frac{1-x^2}{x^2}\, dx^2 = \frac{dx^2}{x^2},$$

odakle sleduje $du = -dx/x$, gde je od dva moguća znaka stavljen znak —. Time je luku u data orijentacija koja je označena na slici. Prema tome imamo $x = e^{-u}$.

Svaki par koordinata (u, v), uzimajući za u i v proizvoljne vrednosti u intervalima $0 \leqslant u < \infty$ i $0 \leqslant v < 2\pi$, određuje dve tačke na pseudosferi, koje leže simetrično u odnosu na xy-ravan. Zato ćemo posmatrati samo jedan deo pseudosfere, na pr. „gornji", tj. onaj koji leži „iznad" xy-ravni. Onda svakom paru koordinata u, v u datim intervalima odgovara tačno jedna tačka na pseudosferi.



Za liniski element ds dobijamo sada, stavljajući u (2) $g_{11}=1$ $g_{22}=e^{-2u}$, izraz

(3) $$ds^2 = du^2 + e^{-2u}\, dv^2 .$$

2° Da bismo ispitali preslikavanje ι, izračunavamo liniski elemenat ds^* ravni:

(4) $$ds^{*2} = dx^{*2} + dy^{*2} = e^{2u}(du^2 + e^{-2u} dv^2).$$

Odgovarajući koeficijenti u diferencijalnim formama (3) i (4) su proporcionalni. Preslikavanje ι je, prema tome, *konformno*.

3° Da bismo dobili jednačinu geodeziskih krivih na pseudosferi u jednostavnom obliku, prvo ćemo na površini uvesti nove krivoliniske koordinate i to baš koordinate x^*, y^*, definisane jednačinama

(5) $$x^* = v, \qquad y^* = e^u .$$

Onda će preslikavanje ι biti određeno time što će korespondentne tačke imati iste odgovarajuće koordinate x^*, y^*.

Kod preslikavanja ι gornji deo pseudosfere preslikaće se u pojas xy-ravni, određen sa $0 \leqslant x^* < 2\pi$, $y^* \geqslant 1$. Korisno je posmatrati slučaj kada koordinatu v ne ograničavamo nejednačinom $0 < v < 2\pi$, već dozvoljavamo da v uzima makoju vrednost u intervalu $-\infty < v < \infty$. Tada se svaka tačka pseudosfere, budući da je uzeta bezbroj puta, preslikava u bezbroj tačaka xy-ravni, koje imaju istu ordinatu, a apscise su im multipla od 2π. Ova pretpostavka neka važi od sada dalje. Gornji deo pseudosfere, „ovijene" bezbroj puta, preslikava se, prema tome u celu poluravan $y^* \geqslant 1$.

Za liniski element ds na površini dobijamo iz (4) i (5)

$$ds^2 = \frac{1}{y^{*2}}\,(dx^{*2} + dy^{*2}).$$

Imamo, dakle $g_{11} = g_{22} = 1/y^{*2}$, $g^*_{22} = 0$. Odavde izračunamo Γ^l_{ik} i unosimo ih u diferencijalnu jednačinu geodeziskih krivih oblika $y^* = y^*(x^*)$:

$$y^{*''} - (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^1)\, y^{*'} + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)\, y^{*'2} - \Gamma_{22}^1\, y^{*'3} + \Gamma_{11}^2 = 0,$$

čime dobijamo jednačinu

$$y^* y^{*''} + y^{*'2} + 1 = 0 \qquad \text{ili} \qquad \frac{d}{dx^*}(y^* y^{*'}) + 1 = 0,$$

odakle je

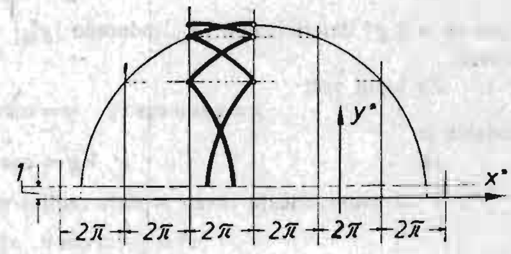
$$y^* y^{*'} + x^* = a \qquad \text{ili} \qquad \frac{d}{dx^*}(y^{*2}) = 2(a - x^*) \qquad (a = \text{const}),$$

koja daje

(6) $$(x^* - a)^2 + y^{*2} = b^2 \qquad (a, b = \text{const}).$$

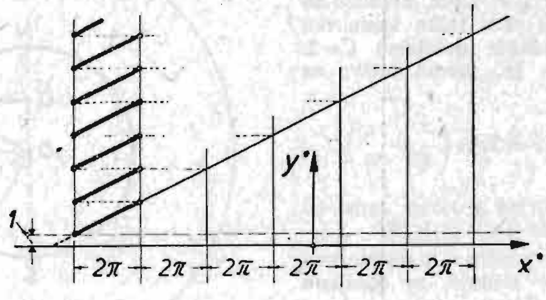
Geodeziske krive gornjeg dela pseudosfere prelaze kod preslikavanja ι, prema tome, u krive određene sa (6) i $y^* \geqslant 1$, znači u kružne lukove koji leže u poluravni $y^* \geqslant 1$, a imaju središta na x-osi. Iz jednačine (6) ispale su slike geodeziskih krivih $v = \text{const}$, tj. polupravih $x^* = \text{const}$, budući da se njihove jednačine ne mogu pisati u obliku $y^* = y^*(x^*)$.

Geodeziska kriva može se više puta obaviti oko pseudosfere. Ako tetiva $y^* = 1$ kružnog luka koji je kod preslikavanja ι slika date geodeziske krive, ima dužinu između $n\pi$ i $(n+1)\pi$, onda ona obavija pseudosferu više od n puta, ali manje od $(n+1)$ puta. Svaka geodeziska kriva je simetrična u odnosu na jednu određenu meridijansku ravan, naime u odnosu na onu, u kojoj leži meridijan koji se preslikava u polupravu, čije produženje prolazi kroz centar kružnog luka u koji se preslikava ta geodeziska kriva. Na slici je nacrtana slika jedne geodeziske krive i za slučaj da je koordinata v uzeta modulo 2π.



Primedba. Ako na pseudosferi orijentišemo luk u meridijana tako, da on stalno raste tj. da se menja od $-\infty$ do $+\infty$, i da je u tački A jednak nuli (na sl. na str. 330 trebalo bi u ovom slučaju donjoj strelici, na primer, dati suprotan smer), onda jednačine $x^* = v$, $y^* = e^u$ definišu jedno preslikavanje *cele* pseudosfere na xy-ravan, tj. gornji deo u poluravan $y^* \geqslant 1$, a donji u pojas $0 \leqslant y < 1$. Samo, pogrešno je onda zaključiti da se kod tog preslikavanja geodeziske krive pseudosfere preslikavaju u *cele* polukrugove poluravni $y^* \geqslant 0$ sa centrima na x-osi. U tom slučaju je naime diferencijalna forma (3) metrična forma za *gornji* deo pseudosfere, ali ne i za *donji*, gde je kvadrat liniskog elementa jednak $du^2 + e^{2u} dv^2$. Prema tome, diferencijalne jednačine geodeziskih krivih u koordinatama u i v za gornji i za donji deo pseudosfere u ovom slučaju nisu iste.

4° Meridijani pseudosfere se preslikavaju kod preslikavanja ι u paralelne poluprave $x^* = \text{const}$ poluravni $y^* \geqslant 1$. Zato se posmatrane krive pseudosfere preslikavaju, budući da je preslikavanje ι konformno, u krive koje te poluprave seku pod stalnim uglom, a to su polu-



prave poluravni $y^* \geqslant 1$. Jednačine tih slika su, prema tome, $y^* = ax^* + b$, $y^* \geqslant 1$, a u koordinatama u i v one glase:

$$e^u = av + b \qquad (u \geqslant 0;\ a, b = \text{const}).$$

A to su, smatrajući u i v krivoliniskim koordinatama na pseudosferi, i tražene jednačine krivih. Svaka od njih se obavija bezbroj puta oko pseudosfere.

160. Na jediničnoj lopti su uvedene geografska širina u i geografska dužina v kao krivoliniske koordinate, a u jednoj ravni pored pravouglih koordinata x^* i y^*, i krivoliniske koordinate u, v, definisane jednačinama

$$\begin{aligned}
&1^0\quad x^* = \rho(u)\cos v, && y^* = \rho(u)\sin v;\\
&2^0\quad x^* = \varphi(u, v), && y^* = u;\\
&3^0\quad x^* = v, && y^* = \psi(u, v);\\
&4^0\quad x^* = f(v), && y^* = f(v)\,h(u).
\end{aligned}$$

Između tačaka M lopte i tačaka M' ravni definisano je jedno preslikavanje σ_1, σ_2, σ_3 odnosno σ_4 time što korespondentne tačke imaju iste krivoliniske koordinate u, v. Odrediti oblik funkcija ρ, φ, ψ, f i h pod uslovom da preslikavanje bude *ekvivalentno*, tj. da korespondentni likovi imaju jednake površine. U slučaju 1° neka bude tražena funkcija takva da se i južni pol preslikava u tačku, a kod ostalih slučajeva neka budu tražene funkcije što jednostavnije. U šta se preslikava mreža meridijana i paralela lopte?

Rešenje. Potreban i dovoljan uslov da neko preslikavanje lopte na ravan bude ekvivalentno, je da njihovi površinski elementi budu jednaki, tj. da bude $\sqrt{g}\,du\,dv = \sqrt{g^*}\,du\,dv$, ili

(1) $$\sqrt{g} = \sqrt{g^*},$$

gde su g i g^* determinante $|g_{ik}|$ odnosno $|g^*_{ik}|$ *Gauss*-ovih koeficijenata za loptu odnosno ravan.

Za loptu važi

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u,$$

odakle je

(2) $$\sqrt{g} = \cos u.$$

1° U ovom slučaju ravan je data radijus-vektorom

$$\mathfrak{r}^* = \{\rho(u)\cos v,\ \rho(u)\sin v,\ 0\},$$

odakle izračunavamo

(3) $$\sqrt{g^*} = \rho\,\frac{d\rho}{du}.$$

Iz (1), (2) i (3) dobijamo, posle integracije, traženu funkciju u obliku

(4) $$\rho(u) = \sqrt{2\sin u + C},$$

gde je C integraciona konstanta koju još treba odrediti. Južni pol lopte, određen sa $u = -\pi/2$, preslikaće se u tačku samo ako je $\rho(-\pi/2) = 0$, odakle dobijamo $C = 2$. Tražena funkcija ρ je, prema tome, na osnovu (4),

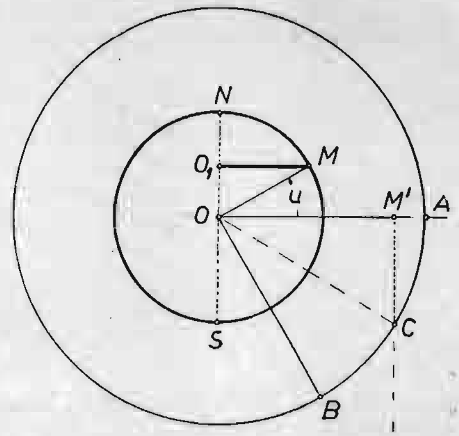
$$\rho(u) = \sqrt{2\sin u + 2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right).$$

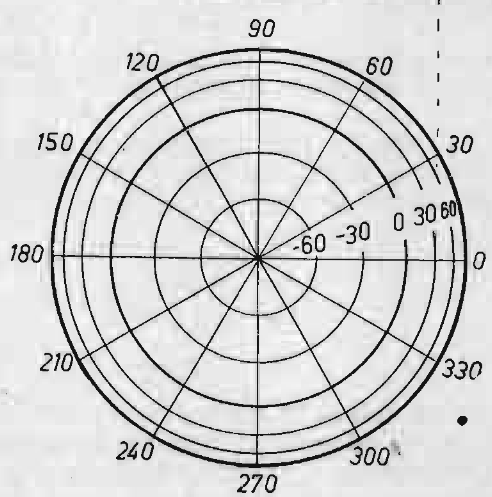
Pošto geografska širina u varira samo od $-\pi/2$ do $+\pi/2$, važi $0 \leqslant \rho(u) \leqslant 2$.

Eliminacijom v odn. u iz transformacionih jednačina 1° sleduje, za dobijenu funkciju $\rho(u)$:

$$x^{*2} + y^{*2} = \rho^2, \quad y^* = x^* \operatorname{tg} v,$$

što pokazuje da se paralelni krugovi $u = \text{const}$ lopte preslikavaju kod preslikavanja σ_1 u koncentrične krugove sa zajedničkim centrom O, čiji radijusi variraju od 0 do 2, a meridijani te lopte u duži koje prolaze kroz tačku O koja ih polovi. Svaka tačka lopte ima kao svoju sliku neku tačku, osim severnog pola koji se preslikava u krug radiusa 2. Preslikavanje σ_1 je podesno, prema tome, za crtanje geografskih karata oblasti oko južnog pola.





Na slici gore je pokazano kako se konstruiše radijus kruga koji je slika ma kog datog paralelnog kruga lopte. S je južni pol lopte, O_1M radijus jednog paralelnog kruga lopte, koju pretstavlja manji krug sa centrom u O. Veći krug je koncentričan sa ovim i ima radijus dva puta veći od manjeg. Ugao MOB je prav, a OC simetrala ugla AOB. M' je ortogonalna projekcija tačke C na OA. Radijus traženog kruga je OM'. Na istoj slici dole je prikazano kako se preslikava mreža paralela i meridijana. Ucrtane su slike 0-tog meridijana i 0-te paralele kao i onih koji se od ovih razlikuju za multipla od $\pi/6$, no na slici su vrednosti za u i v date ne u radijanima nego u stepenima.

2° Ravan je sada data radijus-vektorom $\mathfrak{r}=\{\varphi(u, v), u, 0\}$, odakle dobijamo

$$\sqrt{g^*}=\frac{\partial\varphi}{\partial v}. \tag{5}$$

Tražena funkcija φ treba da zadovoljava, na osnovu (1) i (2), jednačinu $\partial\varphi/\partial v=\cos u$, odakle dobijamo

$$\varphi(u, v)=v\cos u+\chi(u),$$

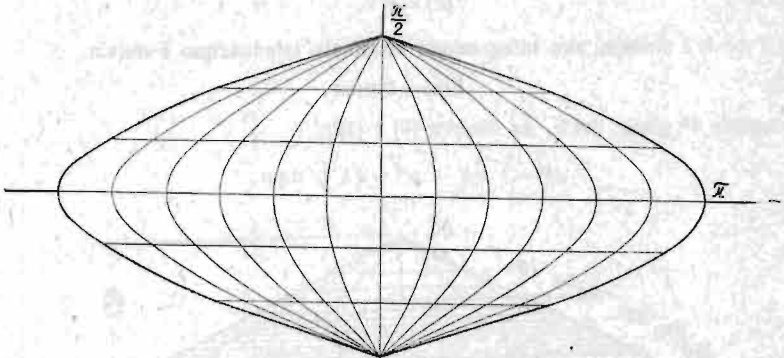
gde je χ proizvoljna funkcija od u. Najjednostavnija funkcija φ je, prema tome,

$$\varphi(u, v)=v\cos u.$$

Dakle, jednačine 2° glase

$$x^*=v\cos u, \quad y^*=u.$$

Paralele $u=$const lopte preslikavaju se kod preslikavanja σ_2 u paralelne duži $y^*=$const, a meridijani $v=$const u sinusoide $x^*=v\cos y^*$. Slika prikazuje kako se preslikava kod σ_2 mreža paralela i meridijana lopte.

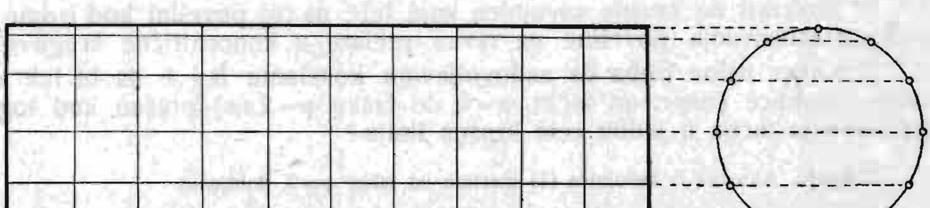


3° Na analogan način kao kod 1° i 2° dobijamo diferencijalnu jednačinu za funkciju ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=\cos u,$$

odakle sleduje $\psi(u, v)=\sin u+\chi(v)$, gde je χ proizvoljna funkcija od v. Najjednostavnija funkcija ψ je, prema tome, $\psi(u, v)=\sin u$. Jednačine 3° glase $x^*=v$, $y^*=\sin u$.

Paralelni krugovi $u=$const i meridijani $v=$const lopte se preslikavaju kod preslikavanja σ_3 u uzajamno normalne duži. (Videti sliku.)



Ako ravan na koju preslikavamo loptu obavijemo oko lopte tako da se x^*-osa, posle obavijanja, poklopi sa ekvatorom lopte, a koordinatni početak da padne na nulti meridijan, onda je očigledno da korespondente tačke kod preslikavanja σ_3 leže na pravoj koja je paralelna sa ekvatorskom ravninom i koja seče z-osu, tj. duž koja spaja polove. Dobili smo, prema tome, poznato preslikavanje *Arhimeda-Lamberta*.

4⁰ Iz jednačine ravni

$$\mathfrak{r}^* = \{ f(v),\ f(v)\, h(u),\ 0 \}$$

izračunavamo

$$(6) \qquad \sqrt{g^*} = f(v)\, f'(v)\, h'(u).$$

gde f' i h' označavaju izvode funkcija f i h po njihovim argumentima. Na osnovu (1) i (2) funkcije f i h moraju zadovoljavati jednačinu

$$(7) \qquad f(v)\, f'(v)\, h'(u) = \cos u\,,$$

odakle sleduje, da $f(v)\, f'(v)$ treba da bude nezavisno od v, znači

$$(8) \qquad f(v)\, f'(v) = c \qquad (c = \text{const}),$$

odakle

$$f(v) = \sqrt{2cv + C} \qquad (C = \text{const}).$$

Najjednostavniju funkciju $f(v)$ koja nije konstanta dobijamo ako stavimo $c = 1/2$, $C = 0$. Prema tome imamo

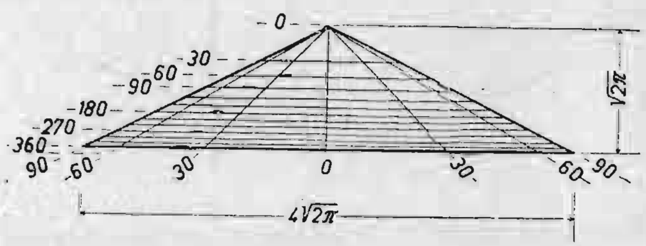
$$(9) \qquad f(u) = \sqrt{v}\,.$$

Iz (7), (8) i $c = 1/2$ sleduje, ako integracionu konstantu izjednačimo s nulom,

$$(10) \qquad h(u) = 2 \sin u\,.$$

Jednačine 4⁰ glase, dakle, na osnovu (9) i (10):

$$x^* = \sqrt{v}\,, \qquad y^* = 2\sqrt{v}\, \sin u\,.$$



Ove jednačine pokazuju da se meridijani $v = \text{const}$ lopte preslikavaju kod preslikavanja σ_4 u paralelne duži $x^* = \text{const}$, a paralelni krugovi $u = \text{const}$ u duži $y^* = 2x^* \sin u$ (videti sliku). Površina lopte preslikava se u jedan ravnokraki trougao.

161. Data je tangentna površina kružne zavojnice

$$(1) \qquad \mathfrak{r}^* = \{ a \cos \varphi,\ a \sin \varphi,\ k\varphi \} \qquad (a, k = \text{const}).$$

1⁰ Pokazati da kružne zavojnice koje leže na toj površini kod izometričnog preslikavanja površine na ravan prelaze u koncentrične krugove.

2⁰ Kakav uslov treba da zadovoljavaju konstante a i k da bi luk n zavoja zavojnice (napr. od tačke $\varphi = 0$ do tačke $\varphi = 2n\pi$) prešao kod tog preslikavanja tačno u jednu celu kružnu liniju?

Rešenje. Ako luk σ zavojnice (1) merimo od tačke $\varphi = 0$, dobijamo

$$(2) \qquad \sigma = \sqrt{a^2 + k^2}\, \varphi.$$

Stavljajući $\sqrt{a^2 + k^2} = c$, možemo (1) pisati u obliku

$$\mathfrak{r}^*(\sigma) = \left\{ a \cos \frac{\sigma}{c},\ a \sin \frac{\sigma}{c},\ \frac{k}{c}\, \sigma \right\},$$

a radijus-vektor $\mathfrak{r}(\sigma, t)$ do proizvoljne tačke površine u vidu

$$(3) \qquad \mathfrak{r}(\sigma, t) = \mathfrak{r}^*(\sigma) + t\,\mathfrak{r}^{*\prime}(\sigma),$$

gde crtica označava izvod po σ. Izračunavajući iz (3) veličine g_{ik}, ako se smatra $\sigma \equiv u^1$, $t \equiv u^2$, dobija se za liniski element ds^* tangentne površine izraz

$$(4) \qquad ds^{*2} = \left(1 + \frac{a^2}{c^4}t^2\right) d\sigma^2 + 2\, d\sigma\, dt + dt^2.$$

1⁰ U ravni uzimamo Dekartove pravougle koordinate x, y i posmatramo preslikavanje ι tačaka površine (3) u tačke ravni, definisano sa $(\sigma, t) \to (x, y)$, gde je

$$(5) \qquad x = r\cos\frac{\sigma}{r} + t\sin\frac{\sigma}{r}, \qquad y = r\sin\frac{\sigma}{r} + t\cos\frac{\sigma}{r},$$

a r konstanta, čiju vrednost ćemo odrediti naknadno. Za diferencijal luka ds u ravni dobijamo

$$(6) \qquad ds^2 = \left(1 + \frac{t^2}{r^2}\right) d\sigma^2 + 2\, d\sigma\, dt + dt^2.$$

Preslikavanje ι će biti izometrično ako konstantu r možemo izabrati tako, da odgovarajući koeficijenti diferencijalnih formi (4) i (6) budu jednaki. To postižemo stavljajući $1/r^2 = a^2/c^4$, odakle izlazi

$$(7) \qquad r = (a^2 + k^2)/a.$$

Koordinatne krive $t = \text{const}$ površine (3), tj. zavojnice, prelaze kod preslikavanja ι u koncentrične krugove, što je trebalo dokazati. Zaista eliminacijom parametra σ iz (5) dobijamo

$$x^2 + y^2 = r^2 + t^2.$$

2⁰ Dužina n zavoja zavojnice (1), na osnovu (2), jednaka je $\sqrt{a^2+k^2}\cdot 2\pi n$. Taj luk, po pretpostavci, treba da pređe u jednu kružnu liniju radijusa r. Prema tome treba da bude $\sqrt{a^2+k^2}\cdot 2\pi n = 2\pi r$. Odavde i iz (7) sleduje tražena relacija $k = \pm a\sqrt{n^2 - 1}$.

162. Pokazati da za svaki katenoid postoji takav helikoid na koji se on može isometrično preslikati (saviti).

Rešenje. Neka su katenoid i helikoid dati radijus-vektorima

$$\mathfrak{r} = \left\{u\cos v,\ u\sin v,\ c\log\left[\left(u + \sqrt{u^2 - c^2}\right)/c\right]\right\} \quad \text{i} \quad \mathfrak{r}^* = \{r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ k\varphi\}.$$

Prve diferencijalne osnovne forme

$$ds^2 = u^2du^2/(u^2 - c^2) + u^2dv^2 \quad \text{i} \quad ds^{*2} = dr^2 + (r^2 + k^2)\,d\varphi^2$$

ovih površina postaju, ako na katenoidu pređemo na krivoliniske koordinate r, φ, definisane jednačinama $r = \sqrt{u^2 - c^2}$, $\varphi = v$, identično jednake za slučaj $c = \pm k$. To dokazuje teoremu.

163. Da li postoji takva kriva, da pravoliniska površina koju obrazuju njene binormale, ima tu osobinu da se može uopšteno-ekvivalentno preslikati na jedan zadati pravi helikoid, i da kod toga preslikavanja pravoliniske generatrise jedne površine odgovaraju pravoliniskim generatrisama druge?

Rešenje. Neka je pravi helikoid dat jednačinom

$$\mathfrak{r} = \{u\cos\varphi,\ u\sin\varphi,\ c\varphi\},$$

odakle dobijamo

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = u^2 + c^2; \quad g = u^2 + c^2.$$

Za pravolinisku površinu, formiranu od binormala jedne krive koja je data radijus-vektorom $\mathfrak{r}(s)$, tj. za površinu

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}(s) + u^*\mathbf{b},$$

imamo

$$g^*_{11}=1,\quad g^*_{12}=0,\quad g^*_{22}=1+\varkappa^2 u^{*2};\quad g^*=1+\varkappa^2 u^{*2}.$$

Posmatramo preslikavanje, definisano sa $u=u^*$, $\varphi=s$, koje generatrise jedne površine prevodi u generatrise druge. Ovo preslikavanje je uopšteno-ekvivalentno, ako postoji takva konstanta λ da važi $g^*=\lambda g$. A to je moguće za $\varkappa=1/c$; onda je $c\sqrt{g^*}=\sqrt{g}$, ili $\sqrt{g^*}/\sqrt{g}=1/c$ (=const). Prema tome, svaka kriva konstantne torzije $\varkappa=1/c$ je jedno rešenje problema.

Specijalno, za $c\neq1$, gornje preslikavanje je *uopšteno-ekvivalentno*, ali nije i *konformno* jer g^*_{ik} nisu proporcionalni sa g_{ik}. Za $c=1$, međutim, preslikavanje je, zbog $g^*_{ik}=g_{ik}$, čak i *izometrično*.

164. Dat je jedan kružni konus čija osa o zahvata sa pravoliniskim generatrisama ugao a, a vrh mu je u V. Ako svaku njegovu izvodnicu okrenemo u njenoj meridijanskoj ravni oko V za ugao $\pi/2-a$, dok ne padne u ravan ω koja je normalna na o i prolazi kroz V, onda na taj način svakoj tački M konusa odgovara tačno jedna tačka u ravni ω — tačka M^* u koju prelazi M posle okretanja generatrise VM. Kakvo je preslikavanje $M\to M^*$?

Rešenje. Uzimajući V za koordinatni početak, a o za z-osu, možemo jednačinu konusa pisati u obliku

$$\mathfrak{r}=\{s\sin a\cos\varphi,\ s\sin a\sin\varphi,\ s\cos a\}.$$

Za tačku $M(s,\varphi)$ je, na primer, $s=VM$, dok je φ ugao između xz-ravni i meridijanske ravni tačke M. Za diskriminantu koeficijenata prve osnovne forme dobijamo $g=s^2\sin^2 a$.

Tački M, određenoj radijus-vektorom $\mathfrak{r}$, odgovara tačka M^* koja je data radijus-vektorom

$$\mathfrak{r}^*=\{s\cos\varphi,\ s\sin\varphi,\ 0\},$$

odakle sleduje $g^*=s^2$.

Zbog $\sqrt{g}/\sqrt{g^*}=\sin a$ (=const), preslikavanje $M\to M^*$ je *uopšteno ekvivalentno*. Specijalno, za $a=30^0$, konstantni odnos površina kosespondentnih figura je 1:2.

165. Na lopti radijusa a zadata je jedna fiksna tačka P. Neka je M bilo koja tačka na lopti, a tačka N sredina najkraće krive na lopti koja vezuje P sa M. Ortogonalna projekcija tačke N na tangentnu ravan lopte u P neka je M^*. 1⁰ Kakvo je preslikavanje $M\to M^*$ tačaka lopte u tačke tangentne ravni? 2⁰ Kakvo je preslikavanje $M\to M^{**}$ ako je $\overrightarrow{PM^{**}}=2\cdot\overrightarrow{PM^*}$?

Rešenje. Uzimamo jedan pravougli Dekartov koordinatni sistem sa početkom u centru lopte, a kome z-osa prolazi kroz P. Ako sa 2θ obeležimo komplement geografske širine, a sa φ geografsku dužinu („severni pol" lopte je u P), imamo za loptu jednačinu

$$\mathfrak{r}=\{a\sin2\theta\cos\varphi,\ a\sin2\theta\sin\varphi,\ a\cos2\theta\}.$$

Odavde se dobija $\sqrt{g}=2a^2\sin2\theta$.

1⁰ Tački M, određenoj radijus-vektorom $\mathfrak{r}$, odgovara tačka M^* koja je data radijus-vektorom

$$\mathfrak{r}^*=\{a\sin\theta\cos\varphi,\ a\sin\theta\sin\varphi,\ a\},$$

odakle sleduje

$$\sqrt{g^*}=\frac{a^2}{2}\sin2\theta.$$

Kako je $\sqrt{g}/\sqrt{g^*}=4$ (=const), preslikavanje $M\to M^*$ je *uopšteno-ekvivalentno*, tj. površine korespondentnih figura su u konstantnom odnosu.

2⁰ Preslikavanje $M\to M^{**}$ je *ekvivalentno*, tj. korespondentne figure imaju jednake površine.

TEORIJA VEROVATNOĆE

1. Iz kutije koja sadrži n belih i m crnih kuglica, slučajno se izvlače $k\,(\leqslant m+n)$ kuglica.

Kolika je verovatnoća da se među izvučenim kuglicama nalaze $r\,(\leqslant k)$ belih?

Koristeći dobijeni rezultat, naći zbir

$$S \equiv \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n}{\nu}\binom{m}{k-\nu}.$$

Rešenje. Ukupan broj kuglica je $m+n$. Broj svih mogućih izvlačenja k elemenata iz skupa koji sadrži $m+n$ elemenata, iznosi $\binom{m+n}{k}$.

Broj svih povoljnih ishoda je $\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}$.

Prema tome, tražena verovatnoća iznosi

$$p(r) = \frac{\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}}{\binom{m+n}{k}}.$$

Kako verovatnoće $p(r)$ čine potpun sistem, mora da bude

$$\frac{\binom{n}{0}\binom{m}{k-0}}{\binom{m+n}{k}} + \frac{\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}}{\binom{m+n}{k}} + \cdots + \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{0}}{\binom{m+n}{k}} = 1$$

odnosno

$$\sum_{\nu=0}^{k} \binom{n}{\nu}\binom{m}{k-\nu} = \binom{m+n}{k}.$$

2. a) Neko je istovremeno kupio dve kutije šibica. (Obe kutije sadrže po n komada palidrvaca.) Kada mu je bilo potrebno, on je palidrvca slučajno uzimao i iz jedne i iz druge kutije. Kolika je verovatnoća, da u momentu kada konstatuje da je jedna od kutija prazna, druga sadrži $k\,(\leqslant n)$ komada palidrvaca?

b) Koristeći se rezultatom dobijenim pod a) naći zbir

$$S \equiv \sum_{\nu=0}^{n} 2^{\nu}\binom{2n-\nu}{n}.$$

Rešenje. a) Zadatak ćemo ovako shvatiti: u trenutku kada se konstatuje da je jedna kutija prazna zamišljamo da je zamenjujemo istom takvom punom kutijom. Tada imamo omogućeno neprekidno izvlačenje palidrvaca, pri čemu $2n+1$ izvlačenje znači izvesnost da je jedna od kutija prazna. Prema tome broj svih mogućih izvlačenja $2n+1$ elemenata bilo iz jedne ili druge kutije iznosi 2^{2n+1}.

Međutim, nama su povoljni oni slučajevi kada imamo ovakvu situaciju:

I kutija sadrži u momentu izvlačenja $2n-k+1$-og palidrvca, k palidrvaca ili, što je isto, da smo do tog izvlačenja iz nje izvukli $n-k$ palidrvaca;

II kutija ne sadrži u momentu izvlačenja $2n-k+1$-og palidrvca ni jedno palidrvce ili što je isto da smo iz nje izvukli do tog momenta svih n palidrvaca, a da izvlačenje $2n-k+1$-og palidrvca pogađa baš ovu kutiju.

Jasno je da postoji još isti ovoliki broj nama povoljnih situacija s obzirom da kutije I i II mogu da promene uloge.

Prema tome, broj povoljnih ishoda dobijamo sada na ovaj način: $\binom{2n-k}{n}$ je broj svih mogućih izvlačenja n palidrvaca iz skupa koji sadrži $2n-k$ palidrvaca. No ovaj broj može da se kombinuje sa brojem izvlačenja preostalih k palidrvaca iz jedne i druge kutije. Dakle, $\binom{2n-k}{n}2^k$ je polovina svih povoljnih ishoda s obzirom da kutije I i II mogu da promene uloge.

Prema tome, tražena verovatnoća iznosi

$$p(k)=\frac{2\binom{2n-k}{n}2^k}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2^{2n-k}}\binom{2n-k}{n}.$$

b) Kako dobijene verovatnoće čine potpun sistem, imamo

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}+\frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n-1}{n}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-n}}\binom{n}{n}=1$$

odnosno

$$\sum_{\nu=0}^{n}2^{\nu}\binom{2n-\nu}{n}=2^{2n}.$$

Primedba. Pri rešavanju problema pod a) pretpostavlja se da je izvlačenje palidrvca podjednako verovatno iz jedne kao i iz druge kutije, i da se ove verovatnoće u toku opita ne menjaju.

Ovaj zadatak potiče od poljskog matematičara *Stefana Banach*-a.

3. a) Neko je napisao n pisama i stavio ih u koverte koje je zatvorio. Zatim je na kovertama slučajno pisao adrese. Kolika je verovatnoća da nijedan adresant ne dobije svoje pismo?

b) Kolika je verovatnoća da bar jedan adresant dobije svoje pismo?

c) Čemu teže verovatnoće dobijene pod a) i b) kada $n\to\infty$?

Rešenje. a) Da bismo našli tražene verovatnoće, koristićemo teoremu o verovatnoći unije događaja koji se međusobno ne isključuju.

Neka je dat skup događaja: $E_1, E_2, \ldots, E_n$, koji se međusobno ne isključuju. Uvodimo oznake:

$$S_1\equiv\sum_{i}P\{E_i\},$$

$$S_2\equiv\sum_{i,j}P\{E_i\cap E_j\},$$

$$S_3\equiv\sum_{i,j,k}P\{E_i\cap E_j\cap E_k\},$$

$$\vdots$$

$$S_n\equiv P\{E_1\cap E_2\cap\ldots\cap E_n\},$$

gde se sabiranja vrše po kombinacijama indeksa. Tada je

$$P\left\{\bigcup_{\nu=1}^{n}E_\nu\right\}=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+1}S_\nu.$$

(U dokaz ovog stava ovde se nećemo upuštati).

Imajući sada u vidu ovaj stav, rešićemo prvo drugi deo našeg zadatka.

Neka E_i pretstavlja događaj da i-ti adresant dobije pravo (njemu namenjeno) pismo. Tada je

$$p\{E_i\}=\frac{1}{n},\quad \text{tj.}\quad S_1=\sum_i P\{E_i\}=1.$$

Ako je i-ti adresant dobio svoje pismo onda verovatnoća da j-ti adresant dobije takođe odgovarajuće pismo iznosi

$$P_{E_i}\{E_j\}=\frac{1}{n-1}.$$

Verovatnoća da oba dobiju odgovarajuća pisma je

$$P\{E_i\cap E_j\}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$$

odnosno

$$S_2=\sum_{i,j}P\{E_i\cap E_j\}=\frac{1}{n(n-1)}\binom{n}{2}=\frac{1}{2!}.$$

Slično je

$$S_3=\sum_{i,j,k}P\{E_i\cap E_j\cap E_k\}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\binom{n}{3}=\frac{1}{3!},$$

$$\vdots$$

$$S_n=P\{E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n\}=\frac{1}{n!}.$$

Prema tome, verovatnoća da bar jedan adresant dobije svoje pismo, iznosi

$$P\left\{\bigcup_{\nu=1}^{n}E_\nu\right\}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}. \tag{1}$$

b) Kako je događaj „da nijedan adresant ne dobije svoje pismo" *komplementaran* događaju da bar jedan adresant dobije svoje pismo, verovatnoću pod a) dobićemo ako od jedinice oduzmemo verovatnoću dobijenu pod (1), dakle,

$$1-P\left\{\bigcup_{\nu=1}^{n}E_\nu\right\}=\sum_{\nu=2}^{n}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}. \tag{2}$$

c) Lako je uvideti da je

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\bigcup_{\nu=1}^{n}E_\nu\right\}=1-e^{-1}\quad \text{i}\quad \lim_{n\to\infty}\left[1-P\left\{\bigcup_{\nu=1}^{n}E_\nu\right\}\right]=e^{-1}.$$

4. a) Voz ima n vagona. Svaki od k putnika bira slučajno vagon. Kolika je verovatnoća da se u svakom vagonu nađe bar jedan putnik?

b) Kolika je verovatnoća da se zauzmu $r\,(\leqslant n)$ vagona voza?

c) Koristeći se rezultatom dobijenim pod a), naći zbir

$$S\equiv\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\nu^k\binom{n}{\nu},$$

gde je k prirodan broj koji nije veći od n.

Rešenje. a) Slično se rezonuje kao u prethodnom zadatku. Tražena verovatnoća je

$$p=\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}(n-\nu)^k.$$

b) Tražena verovatnoća iznosi $p=\dfrac{\binom{n}{r}}{n^k}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^{\nu}\binom{r}{\nu}(r-\nu)^k.$

c) Ako je $k \leqslant n$, imamo

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \nu^k \binom{n}{\nu} = 0 \qquad (k < n),$$

odnosno

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \nu^k \binom{n}{\nu} = (-1)^{n-1} n! \qquad (k = n).$$

Primedba. Zadatak pod b) ima ovakvu fizičku interpretaciju: protok od k čestica prebrojava se sistemom od n brojača raspoređenih u redu. Svaka od čestica sa podjednakom verovatnoćom pada u jedan od brojača. Kolika je verovatnoća da će čestice biti prebrojane pomoću $r (\leqslant n)$ brojača?

5. Kolika je verovatnoća da $\binom{n}{7}$, gde je n slučajno izabran prirodan broj, bude deljivo sa 7? Kolika je verovatnoća da $\binom{n}{7}$ bude deljivo sa 12?

Rešenje. Verovatnoća da važi $7 \mid \binom{n}{7}$ ista je kao i verovatnoća da važi

$$49 \mid n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6).$$

Ovo poslednje je ispunjeno ako je n takav prirodan broj da pri deobi sa 49 daje kao ostatak jedan od brojeva: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prema tome, iz 49 uzastopnih celih brojeva tačno njih 7 ispunjavaju pomenuti zahtev. Dakle, tražena verovatnoća je

$$p = 7/49 = 1/7.$$

Verovatnoća da važi relacija $12 \mid \binom{n}{7}$ ista je kao verovatnoća da važi

$$64 \cdot 27 \mid n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6).$$

Ovo sledi otuda što od sedam uzastopnih celih brojeva dva su deljiva sa 3. Ako je pritom još jedan od njih deljiv sa 9, onda je čitav proizvod deljiv sa 27. Dakle, ako je:

$$n = 9k + r \qquad (r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

onda je čitav proizvod deljiv sa 27.

Dalje, od sedam uzastopnih celih brojeva ili su $n-1$, $n-3$, i $n-5$ ili n, $n-2$, $n-4$ i $n-6$, deljivi sa 2.

U prvom slučaju od tri parna broja $n-1$, $n-3$, $n-5$ sa 4 moraju da budu deljivi ili $n-3$ ili $n-1$ i $n-5$. Ako su sa 4 deljivi $n-1$ i $n-5$, od ova dva uzastopna broja deljiva sa 4, bar jedan mora da je deljiv sa 8. Prema tome, ako je $n-1$ deljivo sa 4, tj. $n = 4l+1$, proizvod je deljiv sa $2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$. Ako je $4 \mid (n-3)$, onda da bi proizvod bio deljiv sa 64 mora da je $16 \mid (n-3)$, tj. da je $n = 16l+3$. Najzad, ako su n, $n-2$, $n-4$ i $n-6$ deljivi sa 2, tada dva od njih moraju da budu deljivi sa 4. Prema tome, čitav proizvod mora biti deljiv sa: $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Dakle, relacija

$$64 \mid n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$$

važi kada je n oblika:

$$4l+1 \quad \text{ili} \quad 16l+3 \quad \text{ili} \quad 2l.$$

Imajući u vidu ovo poslednje i ono pređašnje, dolazimo do zaključka da n mora imati jedan od sledećih oblika:

$$n = 16l + s \qquad (s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14),$$

$$n = 9k + r \qquad (r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Prema tome, tražena verovatnoća iznosi

$$p = \frac{7 \cdot 13}{9 \cdot 16} = \frac{91}{144}.$$

6. Kolika je verovatnoća da se 2^n, gde je n slučajno izabran prirodan broj, završava cifrom 2? A ciframa 1, 2?

Rešenje. Ako ispišemo potencije dvojke vidimo da se cifra 2 pojavljuje sa periodom 4, a grupa cifara 1, 2 sa periodom 20. Prema tome, tražene verovatnoće su respektivno: 1/4 i 1/20.

7. Kolika je verovatnoća da dva slučajno izabrana cela broja budu uzajamno prosta?

Rešenje. Odredićemo verovatnoću da dva slučajno izabrana cela broja n i m nemaju ni jednog *prostog* zajedničkog delitelja.

Da bismo to našli, odgovorimo na pitanje, kakva je verovatnoća da dva slučajno izabrana prirodna broja n i m nemaju zajednički delilac 2. Imajući u vidu definiciju verovatnoće, rezonujemo ovako: uočimo prvih N prirodnih brojeva, pa iz njih izaberimo slučajno dva broja n i m. Kolika je sada verovatnoća da se od N prvih prirodnih brojeva izvuku dva koji neće biti parni? Puštajući da $N \to \infty$, dobićemo onda traženu verovatnoću.

Da bismo to našli, pretpostavimo prvo da je N paran broj. (Ova pretpostavka ne ograničava opštost razmatranja.)

Tada imamo: broj svih mogućih izvlačenja brojeva n i m iz skupa koji sadrži N prirodnih brojeva je: $N \cdot N = N^2$.

Nama ne odgovaraju oni izbori za n i m pri kojima n i m uzimaju $\frac{N}{2}$ mogućih parnih vrednosti: $2, 4, \ldots, N$. Broj takvih ishoda (slučajeva) je: $\frac{N}{2} \cdot \frac{N}{2} = \frac{N^2}{4}$. Ostali ishodi su nam povoljni i ima ih: $N^2 - \frac{1}{4} N^2$.

Dakle, verovatnoća da n i m nemaju zajednički delilac 2 je

$$\frac{N^2 - \frac{1}{4} N^2}{N^2} = 1 - \frac{1}{4}.$$

Kada $N \to \infty$ ovaj broj se ne menja.

Sada nastavimo, i tražimo da n i m ne budu deljivi ni sa 2 ni sa 3. Sličnim rasuđivanjem dolazimo do tražene verovatnoće:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right).$$

Ako nastavimo tako dalje, dobijamo verovatnoću da prirodni brojevi n i m koje slučajno biramo, nemaju kao zajedničke delitelje:

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots, p_k,$$

gde p_k znači k-ti prost broj; ona iznosi:

$$\text{(A)} \qquad \prod(k) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right).$$

Međutim, nama je potrebna granična vrednost $\lim\limits_{k \to \infty} \prod(k)$.

Da bismo našli ovu graničnu vrednost, izraz pod (A) transformisaćemo ovako:

$$\frac{1}{\prod(k)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \cdots \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_k}\right)^2}.$$

Množenjem relacija

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots,$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots,$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{p_k}\right)^2} = 1 + \left(\frac{1}{p_k}\right)^2 + \left(\frac{1}{p_k^2}\right)^2 + \cdots,$$

dobija se

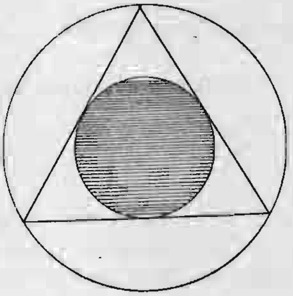
$$\lim_{k\to+\infty} \prod(k) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}.$$

Prema tome, verovatnoća da dva slučajno izabrana prirodna broja budu uzajamno prosta, iznosi $6/\pi^2$.

Ovaj problem potiče od ruskog matematičara *Čebiševa*.

8. Kolika je verovatnoća da duž izabrana u datom krugu bude veća od strane ravnostranog trougla upisanog u tom krugu?

Rešenje. Neka je poluprečnik kruga r. Gde se mora nalaziti središte slučajno izabrane duži ako želimo da ona ima veću dužinu od strane ravnostranog trougla koji je upisan u dati krug? Sa slike je jasno da središte ne sme da izađe iz kruga koji je upisan u ravnostrani trougao. Prema tome, tražena verovatnoća nije ništa drugo do odnos površina kruga koji je upisan u ravnostrani trougao i kruga koji je opisan oko ravnostranog trougla. Dakle, tražena verovatnoća je:

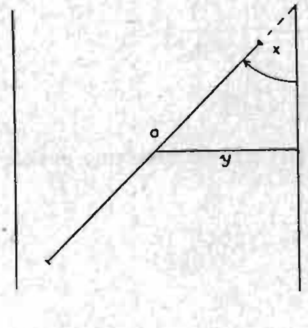


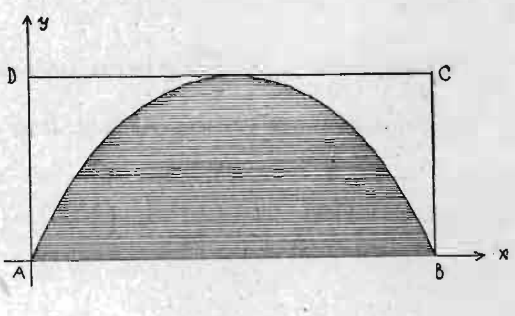
$$\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{4} r^2 \pi}{r^2 \pi}.$$

Ako se uzme da sve tražene tetive imaju jedan kraj fiksiran u jednoj tački na periferiji kruga, onda je tražena verovatnoća 1/3. Ako se traže tetive fiksnog pravca, dobija se 1/2.

Ovo je poznati *Bertrand*-ov paradoks.

9. Ravan je podeljena paralelama čija međusobna rastojanja iznose $2a$. Na ravan se baca igla dužine $2a$. Verovatnoća da igla seče jednu od pravih iznosi $\frac{2}{\pi}$.



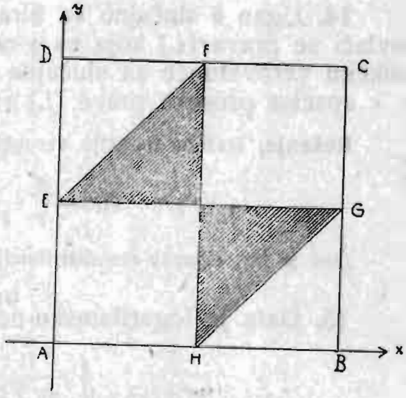


Dokaz. Položaj igle u ravni odredivaćemo sa dva broja x i y koji opisuju položaj središta igle (vidi sliku). Igla seče bar jednu od paralela ako je: $y \leqslant a \sin x$. No kako je: $0 \leqslant x \leqslant \pi$, to se tražena verovatnoća dobija poredenjem površina koju omeđuje luk sinusoide za $x \in [0, \pi]$ i x-osa, i pravougaonika $ABCD$. Prema tome, tražena verovatnoća je:

$$p = \frac{\int_0^{\pi} a \sin x \, dx}{a\pi} = \frac{2a}{a\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Ovo je klasični problem *Buffon*-a.

10. Data je duž ML dužine a. Na duži ML slučajno se biraju tačke P i Q. Kolika je verovatnoća da duži MP, PQ, QL mogu da obrazuju trougao?



Rešenje. Stavimo: $MP = x$; $MQ = y$. Ako (x, y) shvatimo kao tačku u ravni, onda je njen položaj ograničen na kvadrat $ABCD$ (v. sliku). Prema tome, $ABCD$ pretstavlja skup svih mogućih položaja tačke (x, y). Koji nam položaji nisu povoljni? Očigledno oni za koje je:

$$MP > \frac{a}{2}, \quad QL > \frac{a}{2}, \quad PQ > \frac{a}{2}.$$

Ako je $MP > \frac{a}{2}$, onda je $QM > \frac{a}{2}$; ta oblast je gornji desni kvadrat kvadrata $ABCD$. Ako je $QL > \frac{a}{2}$ onda je $x < \frac{a}{2}$ i $y < \frac{a}{2}$; ta oblast je donji levi kvadrat u $ABCD$. Najzad, ako je $PG > \frac{a}{2}$, tj kada je $y - x > \frac{a}{2}$ ili $-x + y < -\frac{a}{2}$; odgovarajuće oblasti su trouglovi EFD i HBG. Prema tome, preostali (izšrafirani) položaji su nam jedini povoljni. Dakle, tražena verovatnoća je $p = 1/4$.

11. Slučajna promenljiva ξ uzima vrednosti: $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ sa verovatnoćama $p\{x = r\}$ proporcionalnim $\binom{n}{r}$. Naći funkciju verovatnoće za slučajnu promenljivu ξ.

Rešenje. $p\{x = r\} = k\binom{n}{r}$, gde je k konstanta proporcionalnosti koju ćemo odrediti iz uslova da verovatnoće $p\{x = r\}$ čine potpun sistem. Imamo

$$\sum_{\nu=0}^{n} k\binom{n}{\nu} = 1$$

odakle

$$k = \frac{1}{2^n}.$$

Prema tome, tražena funkcija verovatnoće glasi

$$p(r) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{r}.$$

12. Neka je x normalna slučajna promenljiva sa varijancom jednakom jedan. Naći matematičko očekivanje za $|x|$.

Odgovor. $\sqrt{2/\pi}$.

13. Slučajna promenljiva ξ uzima vrednosti $x=0, 1, 2, 3, \ldots$, sa verovatnoćama $p\{x=r\}$ proporcionalnim sa $a^r/r!$ $(a>0)$. Naći funkciju verovatnoće za slučajnu promenljivu ξ.

Rešenje. Slično kao u zadatku (11) dobijamo

$$k\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a^{\nu}}{\nu!}=1$$

odnosno

$$k=e^{-a} \quad \text{i} \quad p(r)=e^{-a}\frac{a^r}{r!} \qquad (r=0, 1, 2, \ldots).$$

Ovo je tzv. *Poisson*-ova distribucija.

14. Ugao θ slučajno se bira iz intervala $(-\pi/2, +\pi/2)$. Iz tačke $(0, 1)$ povlači se prava (L) koja sa y-osom zaklapa slučajno izabrani ugao θ. Naći funkciju verovatnoće za slučajnu promenljivu ξ koja uzima vrednost x, gde je x apscisa preseka prave (L) i ose Ox.

Rešenje. Tražena funkcija verovatnoće je

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}, \qquad x\in(-\infty, +\infty).$$

Ovo je tzv. *Cauchy*-eva distribucija.

15. Data je logaritamsko-normalna raspodela:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\,e^{-(\log x)^2/2} & (x>0),\\[2mm] 0 & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

Naći matematičko očekivanje i varijancu.

Odgovor: $\sqrt{e}$, e^2-e.

16. Data je *Pareto*-distribucija

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x_0}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} & (x>x_0),\\[2mm] 0 & (x\leqslant x_0).\end{cases}$$

Pokazati da postoji moment reda k (k prirodan broj) tada i samo tada ako je $\alpha>k$.

17. Data je karakteristična funkcija

$$\varphi(t)=e^{a(e^{it}-1)} \qquad (a=\text{const}).$$

a) Naći odgovarajuću funkciju verovatnoće.

b) Pokazati da je:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[f(n)]^2=\frac{e^{-2a}}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2a\cos\theta}\,d\theta,$$

gde je $f(n)$ funkcija verovatnoće dobijena pod a).

Rešenje. a) Funkcija verovatnoće prema teoremi *Levy*-a data je integralom

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-int}\varphi(t)\,dt$$

(slučaj kada se radi o diskretno raspodeljenoj slučajnoj promenljivoj).

Primenjena na naš slučaj daje

$$f(n)=e^{-a}\frac{a^n}{n!} \quad (n=0,1,2,\ldots),$$

što pretstavlja *Poisson*-ovu raspodelu.

b) Da bismo dokazali tvrdenje treba funkciju $e^{2a\cos\theta}$ razviti u red po stepenima od $2a\cos\theta$, pa potom izvršiti razmenu graničnih procesa koja je u ovom slučaju dopuštena. (Ovde ne ulazimo u detaljne dokaze opravdanosti ovakve razmene).

18. Date su nezavisne slučajne promenljive x i y, čije su funkcije verovatnoća respektivno:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \quad (\alpha>0);$$

$$g(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & (y\geqslant 0)\\ 0 & (y<0)\end{cases} \quad (\beta>0).$$

a) Naći funkciju verovatnoće $h(u)$ slučajne promenljive $u=x+y$.

b) Odrediti funkciju distribucije $H(u)$.

Rešenje. a) Funkcija verovatnoće $h(u)$ dobija se kao *konvolucioni* proizvod funkcija f i g. Dakle,

$$h(u)=f(x)*g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(u-x)f(x)\,dx=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}(e^{-\alpha u}-e^{-\beta u}) & (u\geqslant 0),\\ 0 & (u<0).\end{cases}$$

b) Funkcija distribucije je $H(u)=\int_0^u h(t)\,dt$.

19. Slučajna promenljiva X ima funkciju verovatnoće:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$$

gde je $\alpha>0$, $\beta>0$. Pokazati da za $\alpha\to\infty$, raspodela slučajne veličine $\dfrac{\beta X-\alpha}{\sqrt{\alpha}}=\xi$ teži ka normalnoj sa parametrima $E(\xi)=0$ i $\sigma=1$.

Uputstvo. Posle izvršene transformacije slučajne promenljive X, treba iskoristiti asimptotsku relaciju

$$\Gamma(\alpha)\sim\alpha^{\alpha-1/2}e^{-\alpha}\sqrt{2\pi}.$$

20. Funkcija verovatnoće apsolutne veličine brzine molekula data je *Maxwell*-ovom distribucijom

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} & (x>0)\\ 0 & (x\leqslant 0)\end{cases}\qquad (\alpha>0).$$

Naći srednju brzinu molekula, disperziju, srednju kinetičku energiju molekula (masa molekula je m) i disperziju energije.

21. Funkcija verovatnoće slučajne promenljive ξ data je izrazom

$$f(x)=\frac{a}{e^{-x}+e^{x}}\qquad x\in(-\infty,\ +\infty).$$

a) Odrediti konstantu a; i b) Verovatnoću da u dva nezavisna posmatranja ξ uzima vrednosti manje od 1.

Uputstvo. a) Konstantu a određujemo iz uslova da verovatnoće o kojima je reč čine potpun sistem. Dakle,

$$a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}=1.$$

b) Verovatnoća da slučajna promenljiva ξ uzme vrednost manju od 1 je

$$F(1)=\int_{-\infty}^{+1}f(x)\,dx,$$

pa je tražena verovatnoća $[F(1)]^2$.

22. Dato je:

α_1	kuglica boje	1
α_2		2
$\vdots$		$\vdots$
α_p		p

čiji je ukupni zbir $\sum_{\nu=1}^{p}\alpha_\nu=2n$;

(i, j), $1\leqslant i, j\leqslant p$ određuje tip para izvučenih kuglica, pri čemu (i, j) i (j, i) pretstavljaju isti tip.

Kolika je verovatnoća da slučajno izvučeni par bude tipa (i, j), gde je $1\leqslant i, j\leqslant p$?

Primedba. Ovaj problem je proširenje problema *D. Đokovića*. Videti: *Zbornik matematičkih problema* III, 1960, str. 258, problem 40.

23. Data je funkcija verovatnoće:

$$f(x)=\begin{cases}ke^{-kx} & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}\qquad (k>0).$$

Neka je: $u=\left(x-\dfrac{1}{k}\right)^2.$

Naći funkciju verovatnoće $g(u)$.

24. Odrediti karakteristične funkcije za sledeće funkcije verovatnoće:

a) $$f(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|} \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

b) $$f(x) = \frac{a}{\pi (a^2 + x^2)} \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & (|x| \leqslant a), \\ 0 & (|x| > a), \end{cases}$$

d) $$f(x) = \frac{2 \sin \frac{ax}{2}}{\pi a x^2}.$$

Uputstvo. Karakteristična funkcija definisana je *Riemann—Stieltjes*-ovim integralom

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \, dF(x) \qquad \{F(x) \text{ funkcija distribucije}\}$$

koji se u sva četiri navedena slučaja svodi na oblik $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) \, dx$.

25. Neka je ξ slučajna promenljiva čija je funkcija verovatnoće:

$$f_1(n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a} \qquad (a > 0;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Neka parametar a pretstavlja vrednost slučajne promenljive η čija je funkcija verovatnoće:

$$f_2(a) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} a^{\alpha - 1} e^{-\beta a} & (a > 0), \\ 0 & (a \leqslant 0) \end{cases} \qquad (\alpha > 0, \quad \beta > 0).$$

Naći verovatnoću da slučajna promenljiva ξ uzme svaku datu vrednost n $(0, 1, 2, \ldots)$.

Odgovor. $$f(n) = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^\alpha \binom{-\alpha}{n} \frac{(-1)^n}{(1+\beta)^n}.$$

Ovo je negativna binomna distribucija.

26. Date su karakteristične funkcije:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1 - |t| & (|t| \leqslant 1), \\ 0 & (|t| > 1); \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos \pi t}{1^2} + \frac{\cos 3\pi t}{3^2} + \frac{\cos 5\pi t}{5^2} + \cdots \right)$$

kojima redom odgovaraju funkcije distribucije $F_1(x)$ i $F_2(x)$ dve slučajne promenljive ξ i η.

Pokazati da je

$$\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t) \quad (|t| \leqslant 1)$$

Da li iz ovoga sleduje: $F_1(x) \equiv F_2(x)$?

27. Data je funkcija verovatnoće dve slučajne promenljive X i Y:

$$\varphi(x, y)=\begin{cases} 3x^2y+3y^2x & ((x, y)\in[0, 1]\times[0,1]), \\ 0 & ((x, y)\notin[0, 1]\times[0,1]). \end{cases}$$

a) Da li su slučajne veličine X i Y međusobno zavisne?

b) Naći marginalne funkcije verovatnoće.

c) Izračunati uslovnu verovatnoću

$$P_{\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}}\left\{\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}\right\}$$

28. Date su slučajne promenljive ξ i η, čije su funkcije distribucije respektivno $F(x)$ i $G(x)$.

a) Ako između slučajnih promenljivih ξ i η postoji linearna veza $\eta=a\xi+b$, naći odgovarajuću vezu između $F(x)$ i $G(x)$.

b) U slučaju pod a) kada ξ i η imaju funkcije verovatnoće $f(x)$ i $g(x)$ respektivno, koje zadovoljavaju uslove: $f(x)=F'(x)$ i $g(x)=G'(x)$, za svako x, naći vezu između $f(x)$ i $g(x)$.

Rešenje. a) Relacija $\eta\leqslant x$ ekvivalentna je relacijama:

$$\xi\leqslant(x-b)/a \quad (a>0),$$
$$\xi\geqslant(x-b)/a \quad (a<0).$$

Prema tome,

$P\{\eta\leqslant x\}=G(x)$ (ovo je definicija funkcije distribucije),

odnosno

$$G(x)=\begin{cases} P\{\xi\leqslant(x-b)/a\} & (a>0), \\ 1-P\{\xi\leqslant(x-b)/a\} & (a<0). \end{cases}$$

dakle,

$$G(x)=\begin{cases} F\left(\dfrac{x-b}{a}\right) & (a>0), \\ 1-F\left(\dfrac{x-b}{a}\right) & (a<0). \end{cases}$$

Ovo je tražena veza.

b) Funkcije verovatnoća vezane su relacijom

$$g(x)=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

PROBLEMI IZ RAZNIH OBLASTI

1. U smislu metoda najmanjih kvadrata aproksimirati funkciju $\sin x$, u intervalu $(0, \pi/2)$, linearnom funkcijom promenljive x.

Uputstvo. Posmatrati funkciju

$$F(a, b) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (ax+b-\sin x)^2 \, dx,$$

zatim iz jednačina $\partial F/\partial a = 0$ i $\partial F/\partial b = 0$ odrediti a i b.

Proveriti da li je tražena linearna funkcija

$$f(x) \equiv \frac{8}{\pi}\left(1 - \frac{3}{\pi}\right) + \frac{24}{\pi^2}\left(\frac{4}{\pi} - 1\right) x.$$

2. Date su tačke $P_1(1,2)$, $P_2(3,3)$, $P_3(5,5)$, $P_4(7,6)$.

U smislu metoda najmanjih kvadrata odrediti pravu koja najbolje zadovoljava date uslove.

3. Odrediti parametre A i B eksponencijalne krive

$$y = A \exp(Bx)$$

koja, u smislu metoda najmanjih kvadrata, najbolje zadovoljava uslove:

x	0	1	2	3
y	1,8	6	14	42

4. Odrediti parabolu $y = ax^2 + bx + c$ koja će, u smislu metoda najmanjih kvadrata, najbolje zadovoljavati uslove:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	3,20	3,23	3,25	3,26	3,25	3,23	3,18	3,13	3,06	2,98

5. Data je elipsa $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $\quad (a > b > 0;\ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Izračunati krivoliniski integral

$$\int_E ds/(r_1 r_2)^{1/2},$$

gde je ds element luka elipse, i gde su r_1 i r_2 potezi jedne tačke ove elipse.

Rešenje. $\qquad ds = \{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t\}^{1/2} \, dt,$

$$r_1 = a - (a^2 - b^2)^{1/2} \cos t \qquad r_2 = a + (a^2 - b^2)^{1/2} \cos t.$$

$$\therefore \quad \int_E ds/(r_1 r_2)^{1/2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

6. Odrediti krive na površini

(S) $$x=\cos u - v \sin u, \quad y=\sin u + v \cos u, \quad z=e^{u+v},$$

čija je oskulatorna ravan u svakoj tački u isto vreme tangentna ravan površine (S).

7. 1° Pokazati da su parametarske jednačine površine

(1) $$\frac{1}{a^2}x^2 - \frac{1}{b^2}y^2 + \frac{1}{c^2}z^2 = 1$$

oblika

(2) $$x=a\frac{uv+1}{u+v}, \quad y=b\frac{uv-1}{u+v}, \quad z=c\frac{u-v}{u+v}.$$

2° Odrediti parametre u, v onih tačaka površine

(S) $$x^2 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$$

koje leže na pravoj

(D) $$\frac{x+3}{4} = \frac{y+8}{14} = \frac{z-12}{-21}.$$

3° Koje tačke površine (S) imaju osobinu da tangentne ravni ove površine u tim tačkama sadrže datu pravu (D)?

Rešenje. 2° Tačke površine (S) izrazićemo parametarski sa

$$x=\frac{uv+1}{u+v}, \quad y=2\frac{uv-1}{u+v}, \quad z=3\frac{u-v}{u+v}.$$

Za tačke površine (S) koje leže na pravoj (D) biće

$$3\,uv+5\,u+5\,v+11=0, \qquad 7\,uv+9\,u+v+7=0,$$

odakle je

$$u_1=-3, \quad v_1=-1; \qquad u_2=1, \quad v_2=-2,$$

odnosno

$$x_1=-1, \quad y_1=-1, \quad z_1=3/2; \qquad x_2=1, \quad y_2=6, \quad z_2=-9.$$

Tačke $M_1\,(-1, -1, 3/2)$ i $M_2\,(1, 6, -9)$ leže na površini (S) i na pravoj (D).

3° Jednačina tangentne ravni površine (S) u tački $M(x, y, z)$ glasi

(T) $$xX - \frac{yY}{4} + \frac{zZ}{9} = 1.$$

Ako tangentna ravan (T) sadrži i pravu (D), tada je

$$4\,x - \frac{7}{2}\,y - \frac{7}{3}\,z = 0, \qquad -3\,x + 2\,y + \frac{4}{3}\,z = 1.$$

Povrh toga je još

$$x^2 - \frac{1}{4}\,y^2 + \frac{1}{9}\,z^2 = 1.$$

Iz navedenog skupa jednačina dobijamo: $x=-7/5$, $y=-2$, $z=3/5$, odnosno tangentna ravan (T) u tački $M(-7/5, -2, 3/5)$ sadržaće pravu (D).

8. Izračunati zapreminu tela, ograničenog površinama čije su jednačine, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$,

$$z=|x+y|-|x-y|, \qquad z=|x+y|+|x-y|, \qquad |x|+|y|=\sqrt{2}.$$

9. Odrediti ortogonalne trajektorije krivih

$$x^3-3xy^2=C \qquad (C \text{ parametar}).$$

Rezultat. $3x^2y-y^3=A$ (A parametar). Da li se u teoriji funkcija kompleksne promenljive može doći do rezultata bez ma kakvih integracija?

10. Odrediti $f(t)$ tako da kriva

$$x=\int f(t)\sin t\,dt, \qquad y=\int f(t)\cos t\,dt, \qquad z=\int f(t)\operatorname{tg} t\,dt$$

ima konstantnu krivinu.

11. Proveriti formulu

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\log x\log(1-x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}.$$

12. Pokazati da jednačina

$$(1) \qquad 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$$

nema realnih korena.

Rešenje. Jednašina (1) može imati samo negativne realne korene. Neka je $x=-y$ ($y>0$). Jednačina (1) dobija oblik

$$(2) \qquad 1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}=0.$$

Budući da je

$$1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}>e^{-y}>0 \qquad (y>0),$$

zaključuje se da jednačina (1) nema realnih korena.

Primedba. Redigovano prema rešenju koje je dao *J. Lipman* (*The American Mathematical Monthly*, vol. 67, 1960, p. 379).

13. Ako su R_1 i R_2 ($0<R_1<R_2<\infty$) poluprečnici konvergencije redova $\sum a_n z^n$ i $\sum b_n z^n$, pokazati da je R_1 poluprečnik konvergencije reda $\sum(a_n+b_n)z^n$. Posebno posmatrati slučaj $R_1=R_2$.

14. Data je diferencijalna jednačina

$$(1) \qquad (ax^2+bx+c)\,y'+(x-d)\,y=f(x),$$

gde su a, b, c, d date realne konstante i $f(x)$ data funkcija od x.

1° Pokazati da se rešenje jednačine (1) može svesti na oblik u kome se pojavljuje kvadratura koja zavisi samo od $f(x)$.

2° Koji uslov treba da ispuni funkcija $f(x)$ da bi jednačina (1) imala polinomno rešenje?

Generalisati.

15. Neka za funkciju

$$f(x) \qquad (0<x<2\pi)$$

važi *Fourier*-ov red

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx).$$

Pokazati da *Fourier*-ov red funkcije

$$\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u \qquad (0<x<2\pi)$$

glasi

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx+B_n \sin nx),$$

gde je

$$A_0=2\pi a_0-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} uf(u)\,\mathrm{d}u, \qquad A_n=-\frac{1}{n}b_n, \qquad B_n=-\frac{1}{n}a_0+\frac{1}{n}a_n.$$

16. Dokazati da je *Wronski*-eva determinanta reda $n+1$ funkcija

$$u,\ uv,\ uv^2,\ \ldots,\ uv^n \qquad (u,\ v \text{ funkcije od } x)$$

jednaka izrazu

$$1!\ 2!\ \cdots\ n!\ u^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^{\binom{n+1}{2}}.$$

Primedba. Ovaj rezultat naveo je *Prouhet* 1852 godine. Videti takođe: *D. Zeitlin*: *A Wronskian* (The American mathematical monthly, vol. 65, 1958, p. 345—349).

17. Za determinantu

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (a_{ik} \text{ realni brojevi})$$

važi relacija

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} D_3 \leqslant \frac{1}{8}\{&\operatorname{mod} a_{11}+\operatorname{mod}(a_{11}-a_{12})+\operatorname{mod}(a_{12}-a_{13})+\operatorname{mod} a_{13}\}\\ \times\{&\operatorname{mod} a_{21}+\operatorname{mod}(a_{21}-a_{22})+\operatorname{mod}(a_{22}-a_{23})+\operatorname{mod} a_{23}\}\\ \times\{&\operatorname{mod} a_{31}+\operatorname{mod}(a_{31}-a_{32})+\operatorname{mod}(a_{32}-a_{33})+\operatorname{mod} a_{33}\}.\end{aligned}$$

Primedba. Ovo je partikularni slučaj nejednakosti koju su dokazali *A. B. Bloch* i *G. Pólya*. Njihova nejednakost glasi

$$\operatorname{mod} D_n \leqslant \prod_{i=1}^{n'}\frac{1}{2}\{\operatorname{mod} a_{i1}+\operatorname{mod}(a_{i1}-a_{i2})+\operatorname{mod}(a_{i2}-a_{i3})+\cdots$$
$$+\operatorname{mod}(a_{i,\,n-1}-a_{in})+\operatorname{mod} a_{in}\},$$

gde je $D_n=|a_{ik}|_1^n$ (koeficijenti a_{in} determinante D_n su realni).

18. Odrediti intervale u kojima je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x \cos nx$$

uniformno konvergentan.

Rezultat. Dati red uniformno konvergira na svakom segmentu promenljive x koji ne sadrži ni jednu od tačaka $k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

19. Nizovi $\{u_n\}$ i $\{v_n\}$ definisani su jednakostima:

$$u_{n+1}=3\,u_n+v_n, \qquad v_{n+1}=2\,u_n+4\,v_n. \tag{1}$$

Izraziti u_n i v_n kao funkciju od u_0, v_0, n

1° upotrebom matrice $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$,

2° posmatranjem redova

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!}=y, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} v_n \frac{x^n}{n!}=z \tag{2}$$

kao i $\dfrac{dy}{dx}$ i $\dfrac{dz}{dx}$.

Rešenje. 1° Ako se sistemu (1) da oblik

$$\begin{Vmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_n \\ v_n \end{Vmatrix},$$

dobija se

$$\begin{Vmatrix} u_n \\ v_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}^n \begin{Vmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Vmatrix} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Ovim se problem rešavanja sistema (1) svodi na određivanje potencije $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}^n$.

Sopstvene vrednosti matrice $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$ su 5 i 2. Zbog ovoga je ova matrica slična matrici $\begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$, odnosno postoji matrica $S=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $(|S| \neq 0)$ takva, da je

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = S^{-1} \begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} S. \tag{4}$$

Odavde izlazi $S=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

Jednakost (4) postaje

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix},$$

odakle dobijamo

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}^n \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 5^n+2^{n+1} & 5^n-2^n \\ 2\cdot 5^n-2^{n+1} & 2\cdot 5^n+2^n \end{Vmatrix}.$$

Koristeći dobijenu jednakost, relacija (3) postaje

$$\begin{Vmatrix} u_n \\ v_n \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 5^n+2^{n+1} & 5^n-2^n \\ 2\cdot 5^n-2^{n+1} & 2\cdot 5^n+2^n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Vmatrix},$$

odakle je

(5)
$$u_n=\frac{1}{3}(5^n+2^{n+1})u_0+\frac{1}{3}(5^n-2^n)v_0,$$
$$v_n=\frac{1}{3}(2\cdot 5^n-2^{n+1})u_0+\frac{1}{3}(2\cdot 5^n+2^n)v_0.$$

2° Iz jednakosti (2) sleduje

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} u_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(3u_n+v_n)\frac{x^n}{n!}=3y+z,$$

$$\frac{dz}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} v_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(2u_n+4v_n)\frac{x^n}{n!}=2y+4z.$$

Dakle, funkcije $y(x)$ i $z(x)$ zadovoljavaju diferencijalne jednačine

(6)
$$\frac{dy}{dx}=3y+z,\quad \frac{dz}{dx}=2y+4z$$

i uslove $y(0)=u_0$, $z(0)=v_0$.

Opšte rešenje sistema (6) je

$$y=C_1e^{5x}-C_2e^{2x},\quad z=2C_1e^{5x}+C_2e^{2x}.$$

Iz uslova $y(0)=u_0$, $z(0)=v_0$ nalazimo

$$C_1=\frac{u_0+v_0}{3},\qquad C_2=\frac{v_0-2u_0}{3},$$

pa su funkcije $y(x)$ i $z(x)$ date jednakostima

$$y(x)=\frac{1}{3}(u_0+v_0)e^{5x}+\frac{1}{3}(2u_0-v_0)e^{2x},$$

$$z(x)=\frac{2}{3}(u_0+v_0)e^{5x}+\frac{1}{3}(v_0-2u_0)e^{2x}.$$

Koristeći se razvitkom $e^{ax}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}x^n$, dobijamo

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{5^n}{3}(u_0+v_0)+\frac{2^n}{3}(2u_0-v_0)\right]\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\frac{x^n}{n!},$$

$$z(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2\cdot 5^n}{3}(u_0+v_0)+\frac{2^n}{3}(v_0-2u_0)\right]\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}v_n\frac{x^n}{n!},$$

odakle za u_n i v_n nalazimo izraze (5).

Primedba. Ovo je rešenje *S. Prešića*. Uporediti sa zadatkom 167 (str. 57 ovog *Zbornika*).

Generalizacija 1. Tretirati opšti slučaj

$$u_{n+1}=au_n+bv_n,\quad v_{n+1}=cu_n+dv_n$$
(a, b, c, d konstante).

Generalizacija II. Proučiti navedeni problem za nizove

$$\{u_{nr}\} \quad (r=1, 2, \ldots, \nu)$$

koji su definisani relacijama

$$u_{n+1,\,r} = \alpha_{1r}\, u_{n1} + \alpha_{2r}\, u_{n2} + \cdots + \alpha_{\nu r}\, u_{n\nu}$$

$$(r=1, 2, \ldots, \nu).$$

20. Odrediti parametre p i q tako da izraz

$$\frac{x^p\, \mathrm{d}y - y^q\, \mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

bude tačan diferencijal jedne funkcije $u(x, y)$, koju treba naći.

21. Ako je $y=g(x)$ jedno rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + xy = 0,$$

tada je $z=xg(1/x)$ jedno rešenje jednačine

$$x^5 \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} + z = 0.$$

Proveriti ovo tvrđenje.

22. Odrediti opšte rešenje jednačine

$$(2x - x^3)\, y'' - (1 + x^2)\, y' + 4xy = 0$$

u obliku koji će vredeti za malo x.

23. Odrediti funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ koje zadovoljavaju uslove:

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - x + 2z = e^{-t},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + x \qquad = 2e^{-t},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + x + 2y = 3e^{-t},$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0.$$

Čemu teže $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ kada $t \to +\infty$?

Rezultat. Rešenje je

$$x = e^{-t}\left(x_0 + \frac{5}{2}t - y_0 t - t^2 + \frac{1}{2} z_0 t^2 + \frac{1}{4} t^3\right),$$

$$y = e^{-t}\left(y_0 + 2t - z_0 t - \frac{3}{4} t^2\right),$$

$$z = e^{-t}\left(z_0 + \frac{3}{2} t\right).$$

24. Pokazati da je $y=\exp(ix^2)$ $(i=\sqrt{-1})$ rešenje diferencijalne jednačine

$$xy''-y'+4x^3y=0,$$

i na osnovu toga napisati opšte rešenje ove jednačine.

25. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos x\,\mathrm{sh}\,y+\mathrm{sh}\,2y}{b\sin x\,\mathrm{ch}\,y+\sin 2x}\qquad (b=\text{const}).$$

Rešenje. I. Jednačina (1) može se napisati u obliku

$$b(\sin x\,\mathrm{ch}\,y\,dy+\cos x\,\mathrm{sh}\,y\,dx)+(\sin 2x\,dy+\mathrm{sh}\,2y\,dx)=0.$$

Integracioni faktor ove jednačine je $(\sin x\,\mathrm{sh}\,y)^{-2}$.

Opšte rešenje jednačine (1) je

$$(2)\qquad \frac{b}{\sin x\,\mathrm{sh}\,y}+2\,\mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{coth}\,y=\text{const}.$$

II. Ako se stavi $\mathrm{sh}\,y=-i\sin iy$, $\mathrm{ch}\,y=\cos iy$, tada (1) postaje

$$(3)\qquad \frac{\sin z\,dz}{b+2\cos z}=\frac{\sin\bar z\,d\bar z}{b+2\cos\bar z}\qquad (z=x+iy,\ \bar z=x-iy).$$

Polazeći od (3) može se dobiti rešenje (2).

26. Odrediti tačke površine

$$(1)\qquad z=18y^3-9x^2y-3x^3$$

u kojima su njene tangentne ravni paralelne sa ravni

$$x+y+z=0.$$

Ispitati preseke površine (1) sa koordinatnim ravnima.

27. Odrediti tangentne ravni površine

$$xy+yz+zx=-3$$

koje su paralelne sa ravni

$$x-y+2z=0.$$

Rezultat. Tražene tangentne ravni su:

$$x-y+2z\pm 2\sqrt{6}=0.$$

28. Odrediti diferencijabilne funkcije $f(\xi)$ i $g(\eta)$ pod uslovom da se izraz

$$(x^2-y^2)\,[f(x+y)+g(x-y)],$$

za svako x i y, može napisati u obliku $F(x)+G(y)$, gde su $F(x)$ i $G(y)$ dve funkcije koje takođe treba naći.

Rešenje. Zadatak se svodi na *funkcionalnu jednačinu*

$$(1)\qquad (x^2-y^2)\,[f(x+y)+g(x-y)]=F(x)+G(y).$$

Odavde sleduje

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\{(x^2-y^2)[f(x+y)+g(x-y)]\}=0,$$

odnosno

$$(2)\quad (x+y)(x-y)[f''(x+y)-g''(x-y)]+2(x-y)f'(x+y)-2(x+y)g'(x-y)=0,$$

gde je na primer

$$f'(x+y)=df/d\xi \qquad (\xi=x+y);$$

$$g''(x-y)=d^2f/d\eta^2 \qquad (\eta=x-y).$$

U jednačini (2) promenljive se mogu razdvojiti, jer se jednačini (2) može dati oblik

$$f''(x+y)+\frac{2}{x+y}f'(x+y)=g''(x-y)+\frac{2}{x-y}g'(x-y),$$

odnosno

$$f''(\xi)+\frac{2}{\xi}f'(\xi)=g''(\eta)+\frac{2}{\eta}g'(\eta).$$

Na osnovu poslednje relacije biće

$$(3)\qquad f''(\xi)+\frac{2}{\xi}f'(\xi)=C_1,$$

$$(4)\qquad g''(\eta)+\frac{2}{\eta}g'(\eta)=C_1$$

(C_1 ma kakva konstanta).

Opšte rešenje jednačine (3) je

$$f(\xi)=\frac{C_1}{6}\xi^2+C_2+\frac{C_3}{\xi} \qquad (C_2,\ C_3 \text{ konstante}).$$

Opšte rešenje jednačine (4) je

$$g(\eta)=\frac{C_1}{6}\eta^2+C_2'+\frac{C_3'}{\eta} \qquad (C_2',\ C_3' \text{ konstante}).$$

Prema tome, tražene funkcije $f(x+y)$ i $g(x-y)$ imaju oblike

$$f(x+y)=\frac{A_1}{x+y}+B_1+C(x+y)^2,$$

$$g(x-y)=\frac{A_2}{x-y}+B_2+C(x-y)^2$$

(A_1, A_2, B_1, B_2, C proizvoljne konstante).

Funkcije $F(x)$ i $G(y)$ su oblika

$$F(x)=\ (A_1+A_2)x+(B_1+B_2)x^2+2Cx^4,$$

$$G(y)=-(A_1-A_2)y-(B_1+B_2)y^2-2Cy^4.$$

Funkcionalna jednačina (1) pojavljuje se u jednom problemu mehanike.

29. Data je jednačina (E) $f'(x)=af(x-\lambda)$, gde su a i λ dve konstante i $f(x)$ jedna funkcija, koja ima izvod $f'(x)$ za sve vrednosti promenljive x.

1° Pokazati da je svaka linearna homogena kombinacija rešenja jednačine (E) takođe rešenje iste jednačine.

2° Ako je $f(x)$ jedno rešenje jednačine (E), pokazati da je $f(x-x_0)$ (x_0 ma kakva konstanta) tako isto rešenje jednačine (E).

3° Odrediti rešenje jednačine $f'(x)=f(x-\lambda)$ oblika $f(x)=e^{rx}$, gde je r konstanta koju treba naći.

30. Pokazati da srednja vrednost otstojanja tačaka sferne površine $(0; a)$ od jedne fiksne tačke $P(\overline{PO}=c=\text{const})$ iznosi

$$c+\frac{1}{3}\frac{a^2}{c} \quad (c>a),$$

$$a+\frac{1}{3}\frac{c^2}{a} \quad (c<a).$$

Rešenje. Neka se početak Dekartovog pravouglog trijedra osa nalazi u tački O i neka x-osa ima pravac i smer vektora $\overrightarrow{OP}$. Tada jednačina sferne površine glasi

$$(1) \qquad x^2+y^2+z^2=a^2,$$

dok otstojanje od tačke P do ma koje tačke (x, y, z) na sferi iznosi

$$\sqrt{(c-x)^2+y^2+z^2}, \quad \text{tj., vodeći računa o (1),} \quad \sqrt{a^2+c^2-2cx}.$$

Srednja vrednost otstojanja je

$$S=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a}\sqrt{c^2+a^2-2cx}\,dx=-\frac{1}{6ac}\sqrt{(a^2+c^2-2cx)^3}\Big|_{-a}^{+a}$$

$$=-\frac{1}{6ac}(|a-c|^3-|a+c|^3).$$

Ako je $c>a$, tada je

$$S=-\frac{1}{6ac}\left[(c-a)^3-(c+a)^3\right]=c+\frac{1}{3}\frac{a^2}{c}.$$

Ako je $c<a$, tada je

$$S=-\frac{1}{6ac}\left[(a-c)^3-(a+c)^3\right]=a+\frac{1}{3}\frac{c^2}{a}.$$

31. Dat je skup površina

$$(1) \qquad 2e^{-z}-\cos(x+y)=\theta(x-y),$$

gde je θ neprekidna funkcija od $x-y$.

1° Odrediti onu površinu (S) iz skupa (1) koja prolazi kroz krivu

$$y=-x, \quad e^z\cos^2 x=1.$$

2° Odrediti nivoske linije površine (S) u odnosu na ravan Oxy i ortogonalne trajektorije nivoskih linija.

3° Ispitati nivoske linije površine (S) u odnosu na ravan Ozx.

32. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(1) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^s+a\,xy^{r-1}\frac{dy}{dx}+b\,y^r=0$$

$$(a, b, s, r \text{ konstante}; \quad ab\neq 0; \quad s\neq r; \quad s\neq 1).$$

Rešenje. Jednačina (1) se može napisati u obliku

$$\text{(2)} \qquad \frac{p^{s-1}}{y^{r-1}}+ax+b\frac{y}{p}=0 \qquad (py\neq 0;\ p=dy/dx).$$

Posle diferenciranja i smene $dx=dy/p$, jednačina (2) postaje

$$\text{(3)} \qquad \frac{(s-1)\,p^s-by^r}{p}\,dp=\frac{(r-1)\,p^s-(a+b)\,y^r}{y}\,dy.$$

Poslednja jednačina, ako se stavi

$$p^s=t, \quad y^r=z,$$

dobija oblik

$$\text{(4)} \qquad \frac{(s-1)\,t-bz}{st}\,dt=\frac{(r-1)\,t-(a+b)\,z}{rz}\,dz.$$

Stavi li se ovde $t/z=u$, tada se (4) svodi na jednačinu, gde se promenljive mogu razdvojiti.

Specijalno, u slučaju kada je

$$b=a\,(s-1)/(r-s) \qquad (s,\ r \text{ celi brojevi}),$$

rešenje jednačine (1) određeno je relacijom

$$y^{s-r}=Ca\left(\frac{s-r}{s-1}\right)^{s-1}(C+x)^{s-1} \qquad (C \text{ integraciona konstanta}).$$

Čitalac će odrediti rešenje jednačine (1) za slučajeve koji su isključeni iz posmatranja, kao na primer za $s=1$.

33. Dokazati

$$\text{(1)} \qquad \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+k+i)\right\}\equiv\frac{(n-1)!\,(m+\nu-1)!}{(\nu-1)!\,(m+n+\nu-1)!}$$

$(m,\ n,\ \nu$ prirodni brojevi).

Rešenje. Kako je

$$\text{(2)} \qquad x^{n-1}(1-x)^m\equiv x^{n-1}-\binom{m}{1}x^n+\binom{m}{2}x^{n+1}-\cdots+(-1)^m\binom{m}{m}x^{m+n-1}$$

$(m,\ n$ prirodni brojevi)

biće

$$\text{(3)} \qquad \int_0^x t^{n-1}(1-t)^m\,dt\equiv\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{n+1}\binom{m}{1}x^{n+1}-\cdots+(-1)^m\frac{1}{m+n}\binom{m}{m}x^{m+n}.$$

Ako se integracija ponovi još $\nu-1$ puta, dobija se

$$\text{(4)} \qquad \underbrace{\int_0^x dx\int_0^x dx\cdots\int_0^x}_{\nu} t^{n-1}(1-t)^m\,dt\equiv\frac{1}{n\,(n+1)\cdots(n+\nu-1)}x^{n+\nu-1}$$

$$-\frac{\binom{m}{1}}{(n+1)\,(n+2)\cdots(n+\nu)}x^{n+\nu}+\cdots+(-1)^m\frac{\binom{m}{m}}{(n+m)(n+m+1)\cdots(n+m+\nu-1)}x^{n+m+\nu-1}.$$

Ako se *Cauchy*-eva formula primeni na izraz koji se javlja na levoj strani relacije (4), dobija se

$$(5)\quad \frac{1}{(\nu-1)!}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}t^{n-1}(1-t)^m\,dt$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{m}\left[(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{(n+k)(n+k+1)\cdots(n+k+\nu-1)}x^{n+\nu+k-1}\right].$$

Stavi li se ovde $x=1$, biće

$$(6)\quad \frac{1}{(\nu-1)!}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m+\nu-1}\,dt$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{m}\left[(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{(n+k)(n+k+1)\cdots(n+k+\nu-1)}\right].$$

Kako *Euler*-ov integral prve vrste

$$\mathrm{B}(p,q)\equiv\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

za $p=n$, $q=m+\nu$ ima vrednost

$$\mathrm{B}(n,m+\nu)\equiv\frac{(n-1)!\,(m+\nu-1)!}{(m+n+\nu-1)!},$$

relacija (6) postaje upravo relacija (1) koju je trebalo dokazati.

Ako je $n=\nu\neq m$, formula (1) dobija oblik

$$(7)\quad \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{n-1}(n+k+i)\right\}\equiv\frac{(m+n-1)!}{(m+2n-1)!}.$$

Primedba. Videti članak:

D. S. Mitrinović, *Sur quelques formules sommatoires* {Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija Matematika i fizika, № 7 (1956), 7 strana}.

U ovom članku izvedene su opštije formule koje obuhvataju formulu (1) kao partikularan slučaj.

Tako, na primer, izvedena je formula

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=1}^{\nu}[n+(i+k-1)p]\right\}\equiv(\nu+m-1)!/[p^\nu(\nu-1)!\,(r/p)_{\nu+m}]$$

gde su: m, ν prirodni brojevi, $p\,(>0)$, $n\,(>0)$ realni brojevi i

$$(r/p)_{\nu+m}\equiv\prod_{s=1}^{\nu+m}[(n/p)+s-1].$$

34. Odrediti $f(x)$ tako da je

$$\int[f(x)]^n\,dx=\left[\int f(x)\,dx\right]^n\qquad(n \text{ prirodan broj}),$$

ako su konstante integracije podesno izabrane.

35. Ako je n prirodan broj, tada je

$$\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \Big/ (x-1)^n \equiv \sum_{k=1}^{n} \Big\{\binom{n}{k} \Big/ (x-1)^{n+1-k}\Big\}.$$

Dokazati ovu relaciju i izvesti razlaganje u parcijalne razlomke funkcije

$$\Big(1+\sum_{k=1}^{n} k x^k\Big) \Big/ (x-1)^{n+1} \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

36. Ako je $f(x)$ pozitivna i monotono opadajuća funkcija na segmentu $[0,1]$, tada je

$$(1) \qquad \frac{\int_0^1 x f^2(x)\,dx}{\int_0^1 x f(x)\,dx} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

Dokaz. Posmatrajmo dvostruki integral

$$J = \int_0^1 \int_0^1 f(x) f(y) (x-y) [f(x)-f(y)]\,dx\,dy.$$

Uzimajući u obzir navedene hipoteze o funkciji $f(x)$, biće

$$(x-y)[f(x)-f(y)] \leqslant 0.$$

$$\therefore \quad J \leqslant 0.$$

Ako se razvije J, dobija se

$$\int_0^1 \int_0^1 x f^2(x) f(y)\,dx\,dy - \int_0^1 \int_0^1 y f^2(x) f(y)\,dx\,dy$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 x f(x) f^2(y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^1 y f(x) f^2(y)\,dx\,dy \leqslant 0.$$

Odavde izlazi

$$\Big(\int_0^1 x f^2(x)\,dx\Big)\Big(\int_0^1 f(y)\,dy\Big) - \Big(\int_0^1 f^2(x)\,dx\Big)\Big(\int_0^1 y f(y)\,dy\Big)$$

$$- \Big(\int_0^1 x f(x)\,dx\Big)\Big(\int_0^1 f^2(y)\,dy\Big) + \Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big)\Big(\int_0^1 y f^2(y)\,dy\Big) \leqslant 0.$$

Budući da je

$$\int_0^1 x f^2(x)\,dx \equiv \int_0^1 y f^2(y)\,dy, \qquad \int_0^1 f(x)\,dx \equiv \int_0^1 f(y)\,dy,$$

dobija se nejednakost (1).

37. Primenom *Laplace*-ove transformacije odrediti sliku funkcija:

$$1^\circ \quad f(t) = H(\sin t)\, H(t) \sin t; \qquad 2^\circ \quad f(t) = |\sin t|\, H(t),$$

gde $H(t)$ označava *Heaviside*-ovu funkciju.

38. Pomoću operacionog računa odrediti funkcije $x(t)$ i $y(t)$ koje zadovoljavaju uslove:

$$\ddot{x}(t)+3\dot{y}(t)-2x(t)=\cos t, \qquad \ddot{y}(t)-3\dot{x}(t)-2y(t)=0,$$

$$x(0)=y(0)=\dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0.$$

39. Pomoću operacionog računa odrediti funkcije $x(t)$ i $y(t)$ koje zadovoljavaju uslove:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{D}^2+2)\,x-\mathrm{D}y=1\\ \mathrm{D}x+(\mathrm{D}^2+2)\,y=0\end{array}\right\}\ \text{za } t>0;$$

$$x=x_0,\ \mathrm{D}x=y=\mathrm{D}y=0 \quad \text{za } t=0.$$

40. Primenom operacionog računa ili na koji drugi način rešiti integralne jednačine:

1° $f(t)+\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s=t$; 2° $f(t)=4t-3\int_0^t f(s)\sin(t-s)\,\mathrm{d}s$;

3° $f(t)+\int_0^t e^{t-s}f(s)\,\mathrm{d}s=\mathrm{ch}\,t$; 4° $f(t)=9e^{2t}-2\int_0^t f(s)\cos(t-s)\,\mathrm{d}s$;

5° $f(t)+\int_0^t f(s)\sin(t-s)\,\mathrm{d}s=\sin 2t.$

41. Primenom *Laplace*-ove transformacije odrediti sliku funkcije $f(t)$ $(t>0)$ koja je definisana na sledeći način:

$$f(t+4)\equiv f(t).$$

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && (t\leqslant 1),\\ &= t-1 && (1\leqslant t\leqslant 2),\\ &= 3-t && (2\leqslant t\leqslant 3),\\ &= 0 && (3\leqslant t\leqslant 4).\end{aligned}$$

42. Odrediti funkciju $y(t)$ koju definišu relacije:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y+2\int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t=H(t-a), \quad y(0)=-2.$$

43. Pomoću operacionog računa odrediti funkcije $x(t)$ i $y(t)$ koje za $t>0$ zadovoljavaju uslove:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-4x+2y=0,$$

$$2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+12x-8y=H(t-3)$$

kao i uslove

$$x(0)=0, \qquad y(0)=1.$$

44. Odrediti rešenje $y(x)$ koje zadovoljava uslove:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = \{\sin \omega (t-a)\} H(t-a),$$

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

gde je $H(t)$ *Heaviside*-ova funkcija.

Posebno tretirati slučaj $n = \pm \omega$.

45. Jedan skup $\{C\}$ krivih definisan je diferencijalnom jednačinom

(1) $$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

gde su P i Q diferencijabilne funkcije promenljivih x i y.

1° Izračunati poluprečnik krivine ma koje krive iz skupa $\{C\}$ u njenoj tački $M(x, y)$.

2° Primeniti rezultat na slučaj

$$P(x, y) = -x^2 - y^2, \qquad Q(x, y) = 1.$$

3° Za navedeni partikularni slučaj odrediti oskulatorni krug u tački (1,1).

Rešenje. 1° Iz (1) dobijamo

$$y' = -\frac{P}{Q}, \qquad y'' = \frac{Q'P - QP'}{Q^2},$$

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(P^2+Q^2)^{3/2}}{|Q(Q'P - QP')|} \qquad (R \text{ poluprečnik krivine}).$$

Kako je

$$P' = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} y' = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{P}{Q}\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$Q' = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} y' = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{P}{Q}\frac{\partial Q}{\partial y},$$

posle zamene biće

$$R = \frac{(P^2+Q^2)^{3/2}}{\left|Q\left(P\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{P^2}{Q}\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right|} \quad \text{ili} \quad R = \frac{(P^2+Q^2)^{3/2}}{\left|PQ\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) - P^2\frac{\partial Q}{\partial y} - Q^2\frac{\partial P}{\partial x}\right|}.$$

2° U slučaju kada je $P = -x^2 - y^2$ i $Q = 1$, nalazimo

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,$$

te je

(2) $$R = \frac{[(x^2+y^2)^2+1]^{3/2}}{2\,|x + y(x^2+y^2)|}.$$

3° Stavljajući $x = y = 1$, na osnovu formule (2) dobijamo $R = \frac{5}{6}\sqrt{5}$.

Oskulatorni krug u tački (1,1) određen je jednačinom

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{5}{6}\sqrt{10} - 2\right)x - \left(\frac{5}{6}\sqrt{10} + 2\right)y + 2 = 0.$$

46. Odrediti jednačinu krivih na sferi koje seku njene meridijane pod konstantnim uglom.

Rešenje. Jednačine meridijana su:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=\sqrt{R^2-r^2}\qquad (\varphi=\text{const}).$$

Jednačine tražene krive neka su:

$$x'=r\cos\varphi,\quad y'=r\sin\varphi,\quad z'=\sqrt{R^2-r^2}\qquad (r\ \text{funkcija od}\ \varphi)$$

(r i φ su polarne koordinate projekcije neke tačke sfere na xy–ravni, dok je R poluprečnik sfere).

Projekcije elementarnog vektora pomeranja duž meridijana i tražene krive su respektivno

$$dx=\cos\varphi\,dr,\quad dy=\sin\varphi\,dr,\quad dz=\frac{-r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}},$$

i

$$dx'=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi,\qquad dy'=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi,\qquad dz'=\frac{-r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

Ugao preseka θ ove dve krive dat je formulom

$$\cos\theta=\frac{dx\,dx'+dy\,dy'+dz\,dz'}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\ \sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}}.$$

Posle zamene diferencijala i sređivanja dobijamo

$$\cos\theta=\pm\frac{R\,dr}{\sqrt{R^2\,dr^2+(R^2-r^2)r^2 d\varphi^2}}\quad \text{ili}\quad \pm\operatorname{cotg}\theta\,d\varphi=\frac{R\,dr}{r\sqrt{R^2-r^2}}.$$

Integracijom ove jednačine dobijamo

$$\text{(1)}\qquad \pm(\varphi+C)\operatorname{cotg}\theta=R\int\frac{dr}{r\sqrt{R^2-r^2}}\quad (C\ \text{integraciona konstanta}).$$

Integral

$$I=R\int\frac{dr}{r\sqrt{R^2-r^2}}$$

pomoću smene $r=R/x$ postaje

$$I=-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=-\operatorname{ar\,ch}x.$$

Zamenom u (1) dobijamo

$$\pm(\varphi+C)\operatorname{cotg}\theta=-\operatorname{ar\,ch}x=-\operatorname{ar\,ch}\frac{R}{r}.$$

Odavde sleduje

$$\frac{R}{r}=\operatorname{ch}[(\varphi+C)\operatorname{cotg}\theta].$$

Stavimo $k=\operatorname{cotg}\theta$ i izaberimo x-osu tako da bude $C=0$, te jednačina projekcije tražene krive u xy–ravni glasi

$$r=\frac{R}{\operatorname{ch}k\varphi}.$$

Ova kriva naziva se *loksodroma.*

Primedba. Ovaj zadatak dat je 1918 godine na ispitu iz opšte matematike (*Mathématiques générales*) na Fakultetu nauka (*Faculté des Sciences*) u Grenoblu (Francuska).

47. Pokazati da se diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+(\lambda-x^2)\,y=0 \qquad (\lambda=\text{const})$$

smenom $y=u\,e^{-x^2/2}$ svodi na oblik

$$\frac{d^2 u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}+(\lambda-1)\,u=0.$$

Odrediti rešenja poslednje jednačine koja su oblika $\sum a_k x^k$. Ako je λ neparan prirodan broj, ispitati da li važi relacija $y\to 0$ $(x\to+\infty)$.

48. Odrediti $x(t)$ i $y(t)$ iz uslova:

$$\ddot{x}(t)-2x(t)+2y(t)=0, \qquad \ddot{y}(t)+x(t)-3y(t)=0;$$

$$x(0)=1,\quad y(0)=0;\quad x(t)\to 0,\quad y(t)\to 0 \qquad (t\to+\infty).$$

49. Ako je

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=x+y+7e^{2t}+2\sin t+3\cos t-t+5,\\ (1)\qquad &\\ &\frac{dy}{dt}=3x-y+47e^{2t}+\sin t-5\cos t+t-8,\end{aligned}$$

tada je

$$\frac{d^2 x}{dt^2}-4x=68e^{2t}-4.$$

Proveriti ovo i odrediti rešenje $\{x, y\}$ skupa jednačina (1) koje ispunjava uslove:

$$x\to 1 \quad (t\to-\infty), \qquad y=0 \quad (t=0).$$

50. Za kvadratnu matricu N kaže se da je *normalna* ako je $\overline{N}'N=N\overline{N}'$.

Ako je matrica dijagonalna ili hermitska ili unitarna, ona je normalna.

Ako je A normalna matrica, a U unitarna, tada je matrica $U^{-1}AU$ normalna.

Ako je matrica U unitarna i matrica $U^{-1}AU$ dijagonalna, tada je matrica A normalna.

Dokazati navedene iskaze.

51. Ako funkcije $z=z(x)$ i $f(z)$ imaju sve izvode koji se javljaju, dokazati *Hoppe*-ovu formulu

$$(1)\qquad \frac{d^n f(z)}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{z^k f^{(k)}(z)}{k!}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}z^{-\nu}\frac{d^n(z^\nu)}{dx^n}\right\},$$

gde je $f^{(k)}(z)=\dfrac{d^k f(z)}{dz^k}$.

Dokazati takođe da se formula (1) može napisati u obliku

$$\frac{d^n f(z)}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k f^{(k)}(z)}{k!}\,\frac{d^n\left(\frac{z}{a}-1\right)^k}{dx^n},$$

gde a treba smatrati kao konstantu prilikom diferenciranja po x, a posle diferenciranja staviti $a=z$.

Rešenje. Označimo sa

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{z}{a}-1\right)^k\right\}_{a=z}$$

rezultat zamene a sa z u izrazu u vitičastoj zagradi, u kome se pri diferenciranju a smatra konstantom. Istu oznaku upotrebićemo u drugim sličnim slučajevima.

Prema binomnoj formuli, imamo

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{z}{a}-1\right)^k\right\}_{a=z} &= (-1)^k\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}z^\nu a^{-\nu}+1\right]\right\}_{a=z}\\ &= \left\{\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}a^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^n(z^\nu)}{\mathrm{d}x^n}\right\}_{a=z}\\ &= \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}z^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^n(z^\nu)}{\mathrm{d}x^n}.\end{aligned}$$

Odavde izlazi drugo tvrđenje zadatka.

Formulu (1) dokazaćemo totalnom indukcijom.

Za $n=1$ formula (1) je tačna, jer je

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}x}=f'(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\sum_{k=1}^{1}\left\{\frac{z\,f'(z)}{1!}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}z^{-\nu}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right\}.$$

Pretpostavimo sada da (1) važi za prirodan broj n. U tom slučaju diferenciranjem po x dobija se

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n+1}f(z)}{\mathrm{d}x^{n+1}} &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{z^k f^{(k)}(z)}{k!}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}z^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^{n+1}(z^\nu)}{\mathrm{d}x^{n+1}}\right\}\\ &+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k z^{k-1}}{k!}f^{(k)}(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}z^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^n(z^\nu)}{\mathrm{d}x^n}\right\}\\ &+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{z^k f^{(k+1)}(z)}{k!}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}z^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^n(z^\nu)}{\mathrm{d}x^n}\right\}\\ &+\frac{z^n f^{(n+1)}(z)}{n!}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}z^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^n(z^\nu)}{\mathrm{d}x^n}\\ &-\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{z^k f^{(k)}(z)}{k!}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}\nu z^{-\nu-1}\frac{\mathrm{d}^n(z^\nu)}{\mathrm{d}x^n}\right\}.\end{aligned}$$

Pet članova na desnoj strani označimo redom sa A, B, C, D, E. Imamo

$$\begin{aligned}B+C+E &= f'(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}z^{-1}\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}x^n}\\ &+\sum_{k=2}^{n}\frac{z^{k-1}f^{(k)}(z)}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\left\{\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^{k-\nu}\left[\binom{k}{\nu}-\binom{k-1}{\nu}\right]z^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^n(z^\nu)}{\mathrm{d}x^n}+z^{-k}\frac{\mathrm{d}^n(z^k)}{\mathrm{d}x^n}\right\}\\ &-f'(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}z^{-1}\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}x^n}-\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{z^{k-1}f^{(k)}(z)}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}\frac{\nu}{k}z^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^n(z^\nu)}{\mathrm{d}x^n}\right\}\equiv 0,\end{aligned}$$

jer je

$$\binom{k}{\nu}-\binom{k-1}{\nu}=\binom{k-1}{\nu-1}=\binom{k}{\nu}\frac{\nu}{k}.$$

Stoga je

$$\frac{d^{n+1} f(z)}{dx^{n+1}} = A + D = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{z^k f^{(k)}(z)}{k!} \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} z^{-\nu} \frac{d^{n+1}(z^\nu)}{dx^{n+1}} \right\}$$

$$+ \frac{z^n f^{(n+1)}(z)}{n!} \frac{dz}{dx} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} z^{-\nu} \frac{d^n(z^\nu)}{dx^n}.$$

Ova jednakost postaje formula (1), sa $n+1$ umesto n, ako identički važi jednakost

$$(2) \qquad \frac{dz}{dx} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} z^{-\nu} \frac{d^n(z^\nu)}{dx^n} = \frac{z}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu+1} \binom{n+1}{\nu} z^{-\nu} \frac{d^{n+1}(z^\nu)}{dx^{n+1}}.$$

Ostaje da se dokaže identitet (2), koji se može napisati u obliku

$$\frac{dz}{dx} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^n \right\}_{a=z} = -\frac{z}{n+1} \left\{ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{n+1} \right\}_{a=z}$$

ili

$$(3) \qquad \left\{ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{n+1} \right\}_{a=z} = -(n+1) \left\{ \frac{1}{a} \frac{dz}{dx} \frac{d^n}{dx^n} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^n \right\}_{a=z}.$$

Totalnom indukcijom može se dokazati činjenica: Ako funkcija $u = u(x)$ ima sve izvode, tada je, za svako $n = 2, 3, \ldots$ i za $\nu < n$,

$$(4) \qquad \frac{d^\nu (u^n)}{dx^\nu} = \sum_{\mu=n-\nu}^{n-1} u^\mu A_\mu^{(n)},$$

gde su $A_\mu^{(n)}$ proizvodi stepena izvoda funkcije u i brojnih konstanata. Zaista, za $n > 1$ imamo

$$\frac{d(u^n)}{dx} = n\, u^{n-1} \frac{du}{dx};$$

ako je (4) tačno za $\nu = \nu_0 < n-1$, formula (4) važi i za $\nu = \nu_0 + 1$, jer se diferenciranjem dobija

$$\frac{d^{\nu_0+1}(u^n)}{dx^{\nu_0+1}} = \sum_{\mu=n-\nu_0}^{n-1} \mu\, u^{\mu-1} \frac{du}{dx} A_\mu^{(n)} + \sum_{\mu=n-\nu_0}^{n-1} u^\mu \frac{dA_\mu^{(n)}}{dx}.$$

Iz dokazane činjenice izlazi da je za $\nu < n$ $(n = 2, 3, \ldots)$

$$\left\{ \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^n \right\}_{a=z} = 0.$$

Odatle izlazi

$$\left\{ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{n+1} \right\}_{a=z} = \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{d}{dx} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{n+1} \right] \right\}_{a=z}$$

$$= -(n+1) \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(1 - \frac{z}{a}\right)^n \frac{1}{a} \frac{dz}{dx} \right] \right\}_{a=z}$$

$$= -(n+1) \frac{1}{z} \frac{dz}{dx} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^n \right\}_{a=z}$$

$$-(n+1) \frac{1}{z} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^n \frac{d^{n-\nu} z}{dx^{n-\nu}} \right\}_{a=z}$$

$$= -(n+1) \left\{ \frac{1}{a} \frac{dz}{dx} \frac{d^n}{dx^n} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^n \right\}_{a=z}.$$

Identitet (3) je time dokazan.

Ovo je rešenje *D. Adamovića.*

52. Data je funkcija

$$u=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \quad (-1\leqslant x\leqslant +1;\ n \text{ prirodan broj}).$$

1° Pokazati da postoji diferencijalna jednačina oblika

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0 \tag{1}$$

$\{a(x)$ i $b(x)$ polinomi bez zajedničkog faktora$\}$,

čije je jedno partikularno rešenje funkcija u.

2° Ako se jednačina (1) diferencira n puta po x, dobija se

$$A(x)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+B(x)\frac{d^n y}{dx^n}+C(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=0. \tag{2}$$

Odrediti $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$.

3° Stavi li se $x=\cos\theta$ i $z=\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, jednačina (2) dobija oblik

$$\alpha(\theta)\frac{d^2z}{d\theta^2}+\beta(\theta)\frac{dz}{d\theta}+\gamma(\theta)z=0.$$

Integraliti ovu jednačinu.

4° Pokazati da važi formula

$$\frac{d^k u}{dx^k}=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}-k}Q_k(x),$$

gde je $Q_k(x)$ polinom po x. Izračunati $Q_k(1)$.

5° Na osnovu prethodnih rezultata proveriti identitet

$$\frac{d^{n-1}(\sin^{2n-1}\theta)}{dx^{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{n}\sin n\theta.$$

6° Primenom metoda parcijalne integracije, dokazati formulu

$$\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta=\frac{1}{(2n-1)!!}\int_0^\pi f^{(n)}(\cos\theta)\sin^{2n}\theta\, d\theta,$$

gde funkcija $f(x)$ ima neprekidan izvod $f^{(n)}(x)$.

53. Ako je $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom, pokazati da važi formula:

$$nP_n(x)+P'_{n-1}(x)=\sum_{i+j+k=n-1} xP_i(x)P_j(x)P_k(x) \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Dokaz. Označimo sa $F(x, t)$ generatrisu *Legendre*-ovih polinoma

$$F(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(x)t^\nu, \tag{2}$$

a sa D_t i D_x operatore $\dfrac{\partial}{\partial t}$ i $\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Tada je

$$D_t F=\frac{x-t}{1-2xt+t^2}F,\quad D_x F=\frac{t}{1-2xt+t^2}F,$$

odakle izlazi

$$D_t F+D_x F=\frac{x}{1-2xt+t^2}F.$$

Množeći sleva poslednju jednačinu operatorom D_t^{n-1}, dobijamo

$$(3)\qquad D_t^n F+D_x D_t^{n-1}F=x\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}\left(D_t^\nu\frac{1}{1-2xt+t^2}\right)\left(D_t^{n-1-\nu}F\right).$$

Kvadrirajući jednačinu (2), dobijamo

$$(4)\qquad (1-2xt+t^2)^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(x)t^\nu,\quad a_\nu(x)=\sum_{i=0}^{\nu}P_i(x)P_{\nu-i}(x).$$

Iz (2) i (4) izlazi

$$D_t^\nu F\Big|_{t=0}=\nu!\,P_\nu(x),\quad D_t^\nu\frac{1}{1-2xt+t^2}\Big|_{t=0}=\nu!\sum_{i=0}^{\nu}P_i(x)P_{\nu-i}(x).$$

Na osnovu toga, ako u (3) stavimo $t=0$, biće

$$(n-1)!(nP_n(x)+P'_{n-1}(x))$$
$$=x\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\frac{(n-1)!}{\nu!(n-\nu-1)!}\nu!(n-1-\nu)!\,P_{n-1-\nu}(x)\sum_{i=0}^{\nu}P_i(x)P_{\nu-i}(x)\right]$$

tj.

$$nP_n(x)+P'_{n-1}(x)=x\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{\nu}P_i(x)P_{\nu-i}(x)P_{n-1-\nu}(x),$$

što je ekvivalentno sa (1).

Primedba. Ovaj zadatak sastavio je i rešio *D. Đoković*.

54. Ako je $H_n(x)$ *Hermite*-ov polinom, tada je

$$H_n(x)=(2x-D)^n\cdot 1\qquad (D=d/dx).$$

Primedba. Na desnoj strani date relacije stoji operator $(2x-D)^n$ koji treba primeniti na jedinicu.

55. Pokazati da za pridružene *Laguerre*-ove polinome važi relacija

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)L_n^{(k)}(x)+(k+1)\left[L_{n-1}^{(k+1)}(x)-L_{n-1}^{(k)}(x)\right]$$
$$=-x\sum_{\nu=0}^{n-k-1}(\nu+1)!\binom{n-1}{\nu}L_{n-1-\nu}^{(k)}(x),$$

gde su n i $k\,(<n)$ prirodni brojevi.

Specijalno za $k=0$ dobijamo da za obične *Laguerre*-ove polinome važi relacija

$$L_n(x)+L'_{n-1}(x)-L_{n-1}(x)=-x\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)!\binom{n-1}{\nu}L_{n-1-\nu}(x).$$

56. Pokazati da se pridruženi *Laguerre*-ov polinom $L_n^{(k)}(x)$ može izraziti kao linearna kombinacija običnih *Laguerre*-ovih polinoma formulom

$$\frac{L_n^{(k)}(x)}{n!}=(-1)^k\sum_{\nu=0}^{n-k}\binom{k+\nu-1}{\nu}\frac{L_{n-k-\nu}(x)}{(n-k-\nu)!}.$$

57. Pridruženi *Laguerre*-ov polinom $L_n^{(k)}(x)$ prikazati kao linearnu kombinaciju polinoma $L_\nu^{(r)}(x)$ $(\nu=r, r+1,\ldots,n-k+r)$, gde su n, k, r prirodni brojevi koji ispunjavaju uslov $n>k>r$.

Primedba. Zadatke od 54 do 57 sastavio je *D. Đoković*.

58. Data je kriva

$$y=\frac{1}{2}\int_a^x g(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_a^x\frac{dt}{g(t)}\qquad \{x\geqslant a;\ g(t)>0\}.$$

Pokazati da je dužina s njenog luka u intervalu (a, x) data formulom

$$s=\frac{1}{2}\int_a^x|g(t)|\,dt+\frac{1}{2}\int_a^x\frac{dt}{|g(t)|}.$$

59. Data je funkcija

$$f(x)=a\sin^2\frac{1}{4}\pi x+b\cos^2\frac{1}{4}\pi x,$$

pri čemu je $ab\neq 0$, $b<a$.

1° Odrediti primitivni period date funkcije i njenu oscilaciju u intervalu dužine primitivnog perioda.

2° Odrediti polinom $g(x)$ najnižeg stepena takav da je $g(x)=f(x)$ za $x=0, 1, 2, 3, 4$.

60. Primenom formule za srednju vrednost

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx,$$

pokazati da je

$$\frac{1}{6}\pi\leqslant\int_0^{1/2}\frac{dx}{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2}}<\frac{1}{9}\pi\sqrt{3}\qquad (k^2<1).$$

Proveriti da li važi bolja ocena

$$\frac{1}{6}\pi\leqslant\int_0^{1/2}\frac{dx}{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{1/2}}<\frac{1}{3}\pi\frac{1}{\sqrt{4-k^2}}\qquad (k^2<1).$$

PRILOZI

I. O JEDNOJ NEODREĐENOJ DIFERENCIJALNOJ JEDNAČINI[1]

1. Označimo sa y i z dve funkcije promenljive x i sa

$$y', y'', \ldots, y^{(p)}; \quad z', z'', \ldots, z^{(q)}$$

njihove sukcesivne izvode po x.

Relacija

$$G(x; y, y', y'', \ldots, y^{(p)}; z, z', z'', \ldots, z^{(q)}) = 0 \tag{1}$$

naziva se neodređena diferencijalna jednačina ili *Monge*-ova jednačina.

Pod rešenjem jednačine (1) podrazumeva se skup svih funkcija y i z koje zadovoljavaju jednačinu (1).

Hilbert je postavio ovaj problem:

Ispitati da li se rešenje jednačine (1) može izraziti pomoću obrazaca

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, w, w_1, w_2, \ldots, w_r), \\ y &= \psi(t, w, w_1, w_2, \ldots, w_r), \\ z &= \chi(t, w, w_1, w_2, \ldots, w_r) \end{aligned} \tag{2}$$

{φ, ψ, χ određene funkcije naznačenih argumenata, t jedan parametar, w proizvoljna funkcija od t i $w_k = d^k w / dt^k$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$}.

Rešenje oblika (2) zove se *eksplicitno rešenje* (u francuskoj literaturi *solution explicite;* u nemačkoj — *integrallose Auflösung*).

Polazeći od partikularne jednačine

$$z' = (y'')^2, \tag{3}$$

koja je tipa (1), *Hilbert* je dao negativan odgovor na pitanje postavljeno u navedenom problemu. Na osnovu zaključka koji je dobio za jednačinu (3), *Hilbert* je zatim dokazao stav: *Rešenje jednačine*

$$z' = g(x; z; y, y', y'') \tag{4}$$

ne može se izraziti pomoću obrazaca oblika (2), *tj. jednačina* (4) *nema eksplicitnog rešenja.*

Time je dokazana *nemogućnost eksplicitne integracije* jednačine (1) u opštem slučaju.

2. Ovde ćemo dati tri metoda za integraciju jednačine

$$\frac{y''}{y} - \frac{z''}{z} = h \quad (h \text{ nezavisno od } x). \tag{5}$$

---

[1] Redigovano prema članku:

D. S. Mitrinović: *O jednoj neodređenoj diferencijalnoj jednačini* (*Godišen zbornik na Filozofskiot fakultet na Univerzitetot vo Skopje,* Prirodno-matematički oddel, knjiga 3, 1950, № 6, 16 strana).

Isključujemo iz posmatranja specijalan slučaj kada su bilo y bilo z oblika $\alpha x+\beta$, gde su α i β konstante.

Prvi metod. Jednačina (5) može se zameniti sistemom

$$y'' = [\Phi(x) + h]\, y, \tag{6}$$

$$z'' = \Phi(x)\, z, \tag{7}$$

gde je Φ proizvoljna funkcija promenljive x.

Analizom jednačina (6) i (7) dobija se ovaj rezultat:

Teorema I. *Kada je linearna jednačina* (6) *integrabilna za dati oblik funkcije* $\Phi(x)$ *i proizvoljno* h, *tada je integrabilna i jednačina* (7) *za isti oblik funkcije* $\Phi(x)$. *Funkcije* $y(x)$ *i* $z(x)$, *rešenja jednačina* (6) *i* (7), *koja odgovaraju istoj funkciji* $\Phi(x)$, *jesu rešenje neodređene jednačine* (5).

Navedena teorema omogućava da se iskoristi *Darboux – Drach*-ov metod na osnovu kojeg je mogućno obrazovati sve slučajeve u kojima se jednačina (6) integrali pomoću kvadratura za proizvoljno h. Iz toga izlazi da se za proizvoljno h može formirati beskrajni niz parova funkcija $y(x)$ i $z(x)$, gde će svaki par pretstavljati jedno rešenje jednačine (5). Neka je opšte rešenje jednačine (6), za neki dati oblik funkcije $\Phi(x)$, prikazano relacijom

$$y = C_1\, \theta_1(x, h) + C_2\, \theta_2(x, h)$$

{C_1 i C_2 integracione konstante; θ_1 i θ_2 linearno nezavisna partikularna rešenja jednačine (6)}.

Ako C_3 i C_4 označavaju dve nove integracione konstante, tada funkcije

$$y = C_1\, \theta_1(x, h) + C_2\, \theta_2(x, h), \qquad z = C_3\, \theta_1(x, 0) + C_4\, \theta_2(x, 0)$$

određuju jedno rešenje jednačine (5).

Primer. Uzmimo linearnu jednačinu

$$y'' = \left[\frac{m(m-1)}{\sin^2 x} + \frac{n(n-1)}{\cos^2 x} + h\right] y,$$

gde su m i n dva prirodna broja.

Darboux je pokazao da je ta jednačina integrabilna za proizvoljno h. Ako se iskoristi taj rezultat, dobija se par funkcija y i z koji definiše jedno rešenje jednačine (5).

Drugi metod. Izvršimo u jednačini (5) smene

$$y = \exp(\textstyle\int \eta\, dx), \quad z = \exp(\textstyle\int \xi\, dx), \tag{8}$$

gde su η i ξ dve nove nepoznate funkcije. Tada se dobija

$$\eta' - \xi' + \eta^2 - \xi^2 = h, \tag{9}$$

$$(\eta - \xi)' + (\eta - \xi)(\eta + \xi) = h. \tag{10}$$

Ako se tu stavi

$$\eta - \xi = \theta, \tag{11}$$

gde je θ neka proizvoljna diferencijabilna funkcija od x, nalazi se

$$\theta' + \theta(\eta + \xi) = h. \tag{12}$$

Iz (11) i (12) izlazi

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\theta} - \frac{\theta'}{\theta} + \theta\right), \quad \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\theta} - \frac{\theta'}{\theta} - \theta\right). \tag{13}$$

Prema tome, eksplicitno rešenje jednačine (9) određeno je obrascima (13), gde je θ proizvoljna diferencijabilna funkcija promenljive x.

Na osnovu obrazaca (8) dobija se dalje

$$y=\frac{1}{\sqrt{\theta}}\exp\left\{\frac{1}{2}\int\left(\frac{h}{\theta}+\theta\right)dx\right\},\qquad z=\frac{1}{\sqrt{\theta}}\exp\left\{\frac{1}{2}\int\left(\frac{h}{\theta}-\theta\right)dx\right\}.$$

Stoga imamo ovaj rezultat:

T e o r e m a II. *Rešenje jednačine* (5) *određeno je obrascima*

$$(14)\quad y=\frac{A}{\sqrt{\theta}}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{h}{\theta}+\theta\right)dx\right\},\qquad z=\frac{B}{\sqrt{\theta}}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{h}{\theta}-\theta\right)dx\right\},$$

gde su A *i* B *dve integracione konstante,* x_0 *jedna numerička podesno izabrana konstanta,* θ *proizvoljna funkcija od* x.

U slučaju kada je $h=0$, eksplicitno rešenje jednačine (5) dato je obrascima

$$y=\frac{Aw}{\sqrt{w'}},\qquad z=\frac{B}{\sqrt{w'}},$$

gde je w proizvoljna funkcija od x i $w'=dw/dx$.

Stavi li se $w=\frac{1}{2}v^2$, gde je v neka druga proizvoljna funkcija od x, gornje eksplicitno rešenje ima oblik

$$y=Av(v/v')^{1/2},\qquad z=B(vv')^{-1/2}.$$

T r e ć i m e t o d. Ako je T neka diferencijabilna funkcija promenljive z, ispitajmo da li se može naći rešenje $\{y, z\}$ jednačine (5), gde su funkcije y i z vezane relacijom

$$(15)\qquad y=T(z).$$

Označimo li sa $\dot{T}$ i $\ddot{T}$ izvode dT/dz i d^2T/dz^2, iz relacije (15) izlazi

$$(16)\qquad y'=\dot{T}z',\qquad y''=\ddot{T}z'^2+\dot{T}z''.$$

Posle unošenja vrednosti (16) u jednačinu (5), dobija se

$$(17)\qquad \ddot{T}zz'^2+\dot{T}zz''-Tz''=hzT.$$

Stavljajući

$$(18)\qquad z'=p,\qquad z''=p\frac{dp}{dz},$$

jednačina (17) postaje

$$(19)\qquad (z\dot{T}-T)\frac{dp}{dz}+z\ddot{T}p=\frac{hzT}{p},$$

tj. ona je *Bernoulli*-eva tipa

$$\frac{dp}{dz}+P(z)p=Q(z)p^k,$$

gde je

$$k=-1,\quad P=\frac{z\ddot{T}}{z\dot{T}-T},\quad Q=\frac{hzT}{z\dot{T}-T}.$$

Ovde se pretpostavlja da se izraz $z\dot{T}-T$ ne svodi identički na nulu.

Ako se stavi $p=u^{1/2}$, jednačina (19) postaje

$$u' + \frac{2z\dot{T}}{z\dot{T}-T}\,u = \frac{2hzT}{z\dot{T}-T},$$

odakle izlazi

$$u = (z\dot{T}-T)^{-2}[K_1 + 2h\int zT(z\dot{T}-T)\,dz],$$

gde je K_1 integraciona konstanta.

Dalje se nalazi:

$$p = \frac{1}{z\dot{T}-T}[K_1 + 2h\int zT(z\dot{T}-T)\,dz]^{1/2},$$

$$x + K_2 = \int (z\dot{T}-T)[K_1 + 2h\int zT(z\dot{T}-T)\,dz]^{-1/2}\,dz,$$

gde je K_2 jedna nova integraciona konstanta.

Prema tome, može se formulisati ovaj rezultat:

T e o r e m a III. *Ako su z_0 i z_1 dve numeričke podesno izabrane konstante, K_1 i K_2 dve proizvoljne konstante i T proizvoljna funkcija od z, tada se nezavisno promenljiva x i nepoznata funkcija y izražavaju obrascima*

$$x + K_2 = \int_{z_1}^{z} (z\dot{T}-T)[K_1 + hz^2T^2 - 4h\int_{z_0}^{z} zT^2\,dz]^{-1/2}\,dz, \tag{20}$$

$$y = T(z). \tag{21}$$

U obrascima (20) i (21) ulogu parametra igra druga nepoznata funkcija z.

Da bismo dobili rešenje jednačine (5) u obliku

$$y = y(x), \quad z = z(x), \tag{22}$$

potrebno je izvršiti dve kvadrature i zatim jednu inverziju, što se praktički može ostvariti samo u vrlo izuzetnim slučajevima.

Primer. Posmatrajmo partikularni slučaj $T(z)=z^s$, gde je s neka realna konstanta različita od 0, 1, -1.

Ako je $h(s+1)/(s-1)=\omega^2$, na osnovu obrazaca (20) i (21) nalazi se

$$y = \alpha[\mathrm{ch}(\omega x+\gamma)]^{s/(s+1)}, \quad z = \beta[\mathrm{ch}(\omega x+\gamma)]^{1/(s+1)}. \tag{23}$$

Ako je $h(s+1)/(s-1)=-\omega^2$, iz obrazaca (20) i (21) izlazi

$$y = \alpha[\cos(\omega x+\gamma)]^{s/(s+1)}, \quad z = \beta[\cos(\omega x+\gamma)]^{1/(s+1)}. \tag{24}$$

Obrasci (23), odnosno (24), određuju partikularna eksplicitna rešenja jednačine (5), tj. rešenja oblika (22). U tim rešenjima α, β, γ, ω označavaju realne konstante.

Da bi se ocenilo na kakve se teškoće nailazi ako se traže rešenja oblika (22), dovoljno je uzeti vrlo jednostavan slučaj $T(z)=z^2+z$, u kome, je kao što izlazi iz (20), promenljiva x definisana jednim hipereliptičkim integralom.

3. Sada ćemo uporediti metode pomoću kojih smo integralili jednačinu (5). Najpre konstatujemo da je drugi od tih metoda najpraktičniji. Ako je $\theta(x)$, na primer, racionalna funkcija po x ili po $\sin x$ i $\cos x$, obrasci (14) daće eksplicitno rešenje jednačine (5).

Dobijanje eksplicitnih rešenja po prvom i trećem metodu zahteva da se izvrše ne samo neke kvadrature već i inverzije.

Međutim, treći metod je najopštiji. On će dovesti do opšteg rešenja jedne neodređene jednačine oblika (1) uvek kada uspemo da obrazujemo, na primer, jednu takvu relaciju

$$y = T(x; z, z', z'', \ldots, z^{(n)})$$

pomoću koje se jednačina (1) svodi na integrabilnu jednačinu po z, ali pod uslovom da T ostane proizvoljna funkcija naznačenih argumenata. Tako, na primer, jednačina

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{z'''}{z''} + \frac{z'}{z}\right)\frac{y'}{y} + a^2 \frac{z''}{z} = 0 \qquad (a = \text{const})$$

koja se javlja u jednom važnom problemu teorije elasticiteta, integrali se primenom trećeg metoda, uzimajući u pomoć relaciju $y = T(z')$, gde je T proizvoljna funkcija od z'.

II. O JEDNOJ LINEARNOJ PARCIJALNOJ JEDNAČINI KOJA IMA OSOBINU CLAIRAUT-OVE JEDNAČINE[1]

1. Posmatrajmo polinome

(1) $$z = A_{10}x + A_{01}y,$$

(2) $$z = (A_{10}x + A_{01}y) + (A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2),$$

(3) $$z = (A_{10}x + A_{01}y) + (A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2) + (A_{30}x^3 + A_{21}x^2y + A_{12}xy^2 + A_{03}y^3),$$

$$\vdots$$

gde su A_{ik} proizvoljne konstante.

Iz relacije (1) dobija se

(4) $$p = \frac{\partial z}{\partial x} = A_{10}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = A_{01}.$$

Eliminacijom A_{10} i A_{01} iz (1) i (4) dolazi se do linearne parcijalne jednačine prvog reda

$$z = xp + yq.$$

Potpuni integral poslednje jednačine dat je relacijom (1)

Iz relacije (2) izlazi

(5) $$p = \frac{\partial z}{\partial x} = A_{10} + 2A_{20}x + A_{11}y, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = A_{01} + A_{11}x + 2A_{02}y,$$
$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2A_{20}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = A_{11}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2A_{02}.$$

---

[1] Redigovano prema članku: D. S. Mitrinović: *O jednoj linearnoj parcijalnoj jednačini* (*Glasnik matematičko-fizički i astronomski*, tom 1, 1946, str. 168—182 i 209—226).

Eliminacijom pet konstanata A_{10}, A_{01}, A_{20}, A_{11}, A_{02} iz šest relacija (2) i (5) dobija se linearna parcijalna jednačina drugog reda

$$z = (xp + yq) - \frac{1}{2!}(x^2 r + 2xys + y^2 t).$$

Potpuni integral poslednje jednačine dat je relacijom (2).

Iz relacije (3) nalazi se

$$(6)\quad \begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= A_{10} + 2A_{20}x + A_{11}y + 3A_{30}x^2 + 2A_{21}xy + A_{12}y^2,\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= A_{01} + A_{11}x + 2A_{02}y + A_{21}x^2 + 2A_{12}xy + 3A_{03}y^2,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2A_{20} + 6A_{30}x + 2A_{21}y,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= A_{11} + 2A_{21}x + 2A_{12}y,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2A_{02} + 2A_{12}x + 6A_{03}y,\\
\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= 6A_{30}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = 2A_{21}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} = 2A_{12}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 6A_{03}.
\end{aligned}$$

Ako se iz deset relacija (3) i (6) eliminiše devet konstanata koje se javljaju u tim relacijama, dolazi se do linearne parcijalne jednačine trećeg reda

$$z = (xp + yq) - \frac{1}{2!}(xp + yq)^{(2)} + \frac{1}{3!}(xp + yq)^{(3)}.$$

Potpuni integral poslednje jednačine dat je relacijom (3).

Na isti način dolazi se do zaključka da je

$$\begin{aligned}
z = {} & A_{10}x + A_{01}y\\
& + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2\\
& + A_{30}x^3 + A_{21}x^2y + A_{12}xy^2 + A_{03}y^3\\
& + A_{40}x^4 + A_{31}x^3y + A_{22}x^2y^2 + A_{13}xy^3 + A_{04}y^4
\end{aligned}$$

potpuni integral linearne parcijalne jednačine četvrtog reda

$$z = (xp + yq) - \frac{1}{2!}(xp + yq)^{(2)} + \frac{1}{3!}(xp + yq)^{(3)} - \frac{1}{4!}(xp + yq)^{(4)}.$$

Uopšte, može se dokazati da je funkcija

$$\begin{aligned}
z = {} & (A_{10}x + A_{01}y)\\
& + (A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2)\\
& + \cdots\\
& + A_{n,0}x^n + A_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + A_{1,n-1}xy^{n-1} + A_{0,n}y^n
\end{aligned}$$

potpuni integral linearne parcijalne jednačine reda n

$$(7)\quad z = (xp + yq) - \frac{1}{2!}(xp + yq)^{(2)} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}(xp + yq)^{(n)}.$$

Prema svemu izloženom izvodi se zaključak:

Potpuni integral parcijalne jednačine (7) *dobija se, ako se u toj jednačini mesto svakog izvoda stavi jedna proizvoljna konstanta.*

U potpunom integralu jednačine (7) ima $\frac{1}{2}n(n+3)$ konstanata.

2. Postavimo pitanje da li se navedeni zaključak može proširiti na linearnu parcijalnu jednačinu sa nepoznatom funkcijom z koja zavisi od više promenljivih

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m \qquad (m \geqslant 3).$$

Odgovor je afirmativan.

Može se pokazati da se, na primer, potpuni integral jednačine

$$z = \left(x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)$$

$$-\frac{1}{2!}\left(x_1^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + x_2^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + x_3^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + 2x_2x_3\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_3} + 2x_3x_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_3\partial x_1} + 2x_1x_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}\right)$$

dobija ako se umesto izvoda prvog i drugog reda stave proizvoljne konstante, tj. potpuni integral ove jednačine je

$$z = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_1^2 + A_5x_2^2 + A_6x_3^2 + A_7x_2x_3 + A_8x_3x_1 + A_9x_1x_2,$$

gde su A_k ma kakve konstante.

III. LAGUERRE-OVI POLINOMI

1. *Funkcija-generatrisa Laguerre-ovih polinoma.* Posmatrajmo funkciju

$$f(t) = \frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}},$$

gde je t kompleksna promenljiva, a x parametar koji je takođe kompleksna promenljiva. Ova funkcija ima na konačnoj daljini samo jedan singularitet: $t=1$ (esencijalni singularitet). Prema tome, funkcija $f(t)$ može se razviti u *Taylor*-ov red u okolini tačke $t=0$. Ovaj red konvergira u oblasti $|t|<1$. Dakle, imamo razvoj

$$\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t|<1), \tag{1.1}$$

tj.

$$L_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)\Bigg|_{t=0}. \tag{1.2}$$

$L_n(x)$ može se takođe napisati u obliku

$$L_n(x) = e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \tag{1.3}$$

kao što će niže biti pokazano.

Ako se *Leibniz*-ova formula primeni na proizvod $x^n e^{-x}$, formula (1.3) postaje

$$(1.4)\qquad L_n(x)=e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^{n-k}(x^n)}{\mathrm{d}x^{n-k}} \frac{\mathrm{d}^k(e^{-x})}{\mathrm{d}x^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left\{(-1)^k \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(k+1)\, x^k\right\}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!},$$

tj.

$$L_n(x)=(-1)^n\left\{x^n-\frac{n^2}{1!}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+(-1)^n n!\right\}.$$

$L_n(x)$ je polinom stepena n i naziva se *Laguerre*-ov polinom, a funkcija $f(t)$ funkcija-generatrisa *Laguerre*-ovih polinoma.

Najpre imamo razvoj

$$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \frac{e^x}{1-t} e^{-\frac{x}{1-t}}$$

$$= \frac{e^x}{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{x^k}{(1-t)^k}$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{x^k}{(1-t)^{k+1}}.$$

Polazeći od ovog izraza, dobija se

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)=e^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}{(1-t)^{k+n+1}} \frac{x^k}{k!},$$

te je

$$(1.5)\qquad \left.\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)\right|_{t=0} = e^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(k+2)\cdots(k+n) \frac{x^k}{k!}.$$

S druge strane je

$$x^n e^{-x} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+k}}{k!},$$

odakle izlazi

$$(1.6)\qquad e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}) = e^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (n+k)(n+k-1)\cdots(k+1) \frac{x^k}{k!}.$$

Upoređenjem (1.5) i (1.6) zaključuje se da je zaista

$$\left.\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)\right|_{t=0} = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}).$$

Evo nekoliko prvih *Laguerre*-ovih polinoma:

$L_0(x) = 1,$

$L_1(x) = 1-x,$

$L_2(x) = 2-4x+x^2,$

$L_3(x) = 6-18x+9x^2-x^3,$

$L_4(x) = 24-96x+72x^2-16x^3+x^4,$

$L_5(x) = 120-600x+600x^2-200x^3+25x^4-x^5,$

$L_6(x) = 720-4320x+5400x^2-2400x^3+450x^4-36x^5+x^6,$

$L_7(x) = 5040-35280x+52920x^2-29400x^3+7350x^4-882x^5+49x^6-x^7,$

$L_8(x) = 40320-322560x+564480x^2-376320x^3+117600x^4-18816x^5+1568x^6-64x^7+x^8,$

$L_9(x) = 362880-3265920x+6531840x^2-5080320x^3+1905120x^4-381024x^5+42336x^6$
$-2592x^7+81x^8-x^9,$

$L_{10}(x) = 3628800-36288000x+81648000x^2-72576000x^3+31752000x^4-7620480x^5$
$+1058400x^6-86400x^7+4050x^8-100x^9+x^{10}.$

2. *Rekurentne relacije.* Ako se diferenciraju po t obe strane identiteta (1.1), posle sređivanja dolazi se do novog identiteta

$$e^{-\frac{xt}{1-t}} - \frac{x}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} = (1-t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} L_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Na osnovu (1.1) poslednji identitet postaje

$$(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!} - x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!} = (1-t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} L_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ako se ovde izjednače koeficijenti uz t^n, dolazi se do rekurentne relacije

$$(2.1) \qquad L_{n+1}(x) + (x-2n-1) L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0.$$

Ako se identitet (1.1) diferencira po x, dobija se

$$-\frac{t}{(1-t)^2} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Na osnovu (1.1) poslednji identitet postaje

$$t \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!} + (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) \frac{t^n}{n!} = 0,$$

odakle izlazi rekurentna relacija

$$(2.2) \qquad n L_{n-1}(x) + L_n'(x) - n L_{n-1}'(x) = 0.$$

Ako (2.1) diferenciramo dva puta po x, nalazimo

$$L_{n+1}''(x) + (x-2n-1) L_n''(x) + 2L_n'(x) + n^2 L_{n-1}''(x) = 0.$$

Zamenimo li n sa $n+1$, dobijamo

(2.3) $L''_{n+2}(x)+(x-2n-3)L''_{n+1}(x)+2L'_{n+1}(x)+(n+1)^2L''_n(x)=0.$

Iz (2.2) izlazi:

(2.4) $$L'_{n+1}(x)=(n+1)\{L'_n(x)-L_n(x)\},$$

(2.5) $$L''_{n+1}(x)=(n+1)\{L''_n(x)-L'_n(x)\}.$$

Iz (2.4) izlazi:

$$L'_{n+2}(x)=(n+2)\{L'_{n+1}(x)-L_{n+1}(x)\},$$

$$L''_{n+2}(x)=(n+2)\{L''_{n+1}(x)-L'_{n+1}(x)\}.$$

Na osnovu (2.4) dobija se

$$\begin{aligned}L''_{n+2}(x)&=(n+2)\{(n+1)[L''_n(x)-L'_n(x)]-(n+1)[L'_n(x)-L_n(x)]\}\\&=(n+1)(n+2)L''_n(x)-2(n+1)(n+2)L'_n(x)+(n+1)(n+2)L_n(x).\end{aligned}$$

Relacija (2.3) sada dobija oblik

(2.6) $$xL''_n(x)+(1-x)L'_n(x)+nL_n(x)=0.$$

Diferencijalna jednačina

(2.7) $$xy''+(1-x)y'+ny=0$$

zove se *Laguerre*-ova. S obzirom na identitet (2.6) zaključuje se da jednačina (2.7) ima kao jedno partikularno rešenje *Laguerre*-ov polinom $L_n(x)$.

Primedba. Do diferencijalne jednačine (2.7) može se doći i na sledeći način. Pođe li se od relacija

$$z=x^n e^{-x}, \qquad z'=x^{n-1}e^{-x}(n-x),$$

dobija se

$$xz'+(x-n)z=0.$$

Ako se ova relacija $n+1$ puta diferencira po x, nalazi se

$$xz^{(n+2)}+(x+1)z^{(n+1)}+(n+1)z^{(n)}=0.$$

Stavimo li $z^{(n)}=u$, poslednja jednačina postaje

$$xu''+(x+1)u'+(n+1)u=0.$$

Ako ovde izvršimo smenu

$$u=ve^{-x} \qquad (v \text{ nova funkcija}),$$

dolazi se do relacije

$$xv''+(1-x)v'+nv=0.$$

Jedno partikularno rešenje ove jednačine je

$$v=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Dakle, drugim putem izveli smo *Laguerre*-ovu diferencijalnu jednačinu.

3. *Ortogonalnost Laguerre-ovih polinoma.* Posmatrajmo integral

$$(3.1)\qquad J=\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)\,L_n(x)\,\mathrm{d}x$$

i, ako je $m\leqslant n$, napišimo ga u obliku

$$J=\int_0^\infty L_m(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

Primenimo li na J metod parcijalne integracije, dobijamo

$$\left[L_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^n e^{-x})\right]_{x=0}^{x\to\infty}-\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}L_m(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

Funkcija $L_m(x)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^n e^{-x})$ ima oblik

$$(-1)^n e^{-x}L_m(x)\left\{-(x^n)+\binom{n-1}{1}(x^n)'-\binom{n-1}{2}(x^n)''+\cdots+(-1)^n(x^n)^{(n-1)}\right\}.$$

Kada $x\to\infty$, ovaj izraz $\to 0$. Za $x=0$ navedeni izraz se anulira, pa je

$$J=-\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}L_m(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

Primeni li se sada $m-1$ puta metod parcijalne integracije na poslednji integral, nalazi se

$$(3.2)\qquad J=(-1)^m\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}^m L_m(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

Ako je $m<n$, na poslednji integral treba opet primeniti metod parcijalne integracije. Na taj način dobija se

$$J=(-1)^m\left[\frac{\mathrm{d}^m L_m(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}(x^n e^{-x})\right]_{x=0}^{x\to\infty}$$

$$+(-1)^{m+1}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}^{m+1}L_m(x)}{\mathrm{d}x^{m+1}}\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

Prvi sabirak u J anulira se za $x=0$ i $x\to\infty$, a takođe i drugi sabirak, jer je $\dfrac{\mathrm{d}^{m+1}L_m(x)}{\mathrm{d}x^{m+1}}\equiv 0$.

Ako je $m=n$, tada (3.2) dobija oblik

$$J=(-1)^n\int_0^\infty x^n e^{-x}\frac{\mathrm{d}^n L_n(x)}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{d}x$$

$$=n!\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\Big[-n!\,e^{-x}(x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots+n!)\Big]_{x=0}^{x\to\infty}=(n!)^2.$$

Prema tome, došli smo do rezultata

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, \mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n),$$

$$= (n!)^2 \qquad (m = n).$$

Ovaj rezultat može se napisati i u obliku

(3.3) $$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, \mathrm{d}x = (n!)^2 \delta_{mn} \qquad (\delta_{mn}\ \textit{Kronecker}\text{-ov simbol}).$$

Za funkcije $L_m(x)$ i $L_n(x)$ kaže se da su ortogonalne u intervalu $(0, \infty)$ sa težinom e^{-x}.

4. *Pridruženi Laguerre-ov polinom.* Polinom

(4.1) $$L_n^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{d}^k L_n(x)}{\mathrm{d}x^k} \qquad (k \leqslant n)$$

naziva se *pridruženi Laguerre-ov polinom.* On je jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$x y'' + (k+1-x) y' + (n-k) y = 0.$$

Do ovog rezultata se dolazi ako se *Laguerre*-ova jednačina

$$x z'' + (1-x) z' + n z = 0$$

diferencira k puta po x i zatim stavi $z^{(k)} = y$.

5. *Pridružena Laguerre-ova funkcija.* U vezi sa pridruženim *Laguerre*-ovim polinomom uvodi se *pridružena Laguerre-ova funkcija*

(5.1) $$y_{n,k} = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k-1}{2}} L_n^{(k)}(x).$$

Funkcija $y_{n,k}$ je jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$x y'' + 2y' + \left(n - \frac{k-1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{k^2-1}{4x}\right) y = 0,$$

što nije teško pokazati.

Polinomi $L_n^{(k)}(x)$ definisani su identitetom

$$(-1)^k \frac{1}{(1-t)^{k+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{L_n^{(k)}(x)}{n!} t^{n-k}.$$

U kvantnoj mehanici[1] pojavljuju se integrali

$$J_{n,m}^{k}(p) = \int_0^\infty x^p y_{n,k} y_{m,k}\, \mathrm{d}x \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

---

[1] H. Margenau—G. M. Murphy: *The mathematics of physics and chemistry,* New York, 1949, p. 125—126.

J. Kampé de Fériet: *Fonctions de la Physique mathématique,* Paris, 1957, p. 74.

tj. integrali

$$J_{n,m}^{k}(p)=\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{k+p-1}L_{n}^{(k)}(x)\,L_{m}^{(k)}(x)\,dx \qquad (p=1,2,3,\ldots).$$

S. Prešić[1] je dokazao formulu

$$(5.2)\quad J_{n,m}^{k}(p)=(-1)^{n+m}m!n!\sum_{\nu=0}^{\min(m-k,\,n-k)}\binom{p-1}{m-k-\nu}\binom{p-1}{n-k-\nu}\frac{(k+p+\nu-1)!}{\nu!}$$

$$(p=2,3,4,\ldots).$$

Kao specijalan slučaj ove formule dobijaju se formule

$$(5.3)\qquad J_{n,n}^{k}(2)=\frac{(n!)^{3}}{(n-k)!}(2n-k+1),$$

$$(5.4)\qquad J_{n,n}^{k}(3)=\frac{(n)!^{3}}{(n-k)!}(6n^{2}-6nk+k^{2}+6n-3k+2).$$

U literaturi navode se ove dve formule kao i

$$(5.5)\qquad J_{n,n}^{k}(1)=\frac{(n!)^{3}}{(n-k)!}$$

koja nije obuhvaćena *Prešićevom* formulom.

U literaturi takođe se navodi rezultat[2]

$$(5.6)\qquad \int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{k+p-1}\{L_{n}^{(k)}(x)\}^{2}dx$$

$$=(-1)^{p-1}\frac{(n!)^{3}}{(n-k)!}(p-1)!\sum_{\nu=0}^{p-1}(-1)^{\nu}\binom{p-1}{\nu}\binom{n+\nu}{p-1}\binom{n+\nu-k}{p-1}$$

koji je sadržan u formuli (5.2) za $m=n$.

Formula (5.6) obuhvata (5.3), (5.4), (5.5) kao partikularne slučajeve.

Upoređenjem formula (5.2) i (5.6), posle sređivanja dolazi se do identiteta

$$\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}\binom{n-k}{\nu}\binom{m+n-\nu}{n}=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\binom{m}{\nu}\binom{n+m-\nu}{m}\binom{n+m-k-\nu}{m}$$

$$(n\geqslant m+k).$$

---

[1] *Zbornik matematičkih problema* III, 1960, str. 269–270.

[2] H. A. Bethe – E. E. Salpeter: *Quantum mechanics of one-and two-electron atoms*, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1957, § 3, formula 3.13.

6. *Generalisani Laguerre-ovi polinomi.* Ovi polinomi $L_n^s(x)$ definisani su relacijom

$$(6.1)\qquad \frac{1}{(1-t)^{s+1}}\, e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x)\,\frac{t^n}{n!},$$

gde je s ma kakva konstanta. Ako je $s=0$, tada imamo obične *Laguerre*-ove polinome $L_n(x)$, tj.

$$L_n^0(x) = L_n(x).$$

Slično kao u § 1 dokazuje se formula

$$(6.2)\qquad L_n^s(x) = x^{-s}\,e^x\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^{n+s}\,e^{-x})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (s+k+1)(s+k+2)\cdots(s+n)\binom{n}{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+k+1)}\, x^k,$$

gde je $\Gamma(a)$ gama-funkcija.

Navedimo sledeće partikularne slučajeve:

$$L_0^n(x) = 1, \qquad L_n^{-n}(x) = (-1)^n\,x^n \qquad (n \text{ nula ili prirodan broj}).$$

Bez teškoće se dolazi do zaključka da linearna diferencijalna jednačina drugog reda, čije je jedno partikularno rešenje funkcija (6.2), ima oblik

$$(6.3)\qquad x\,y'' + (s+1-x)\,y' + n\,y = 0.$$

Ovo je diferencijalna jednačina generalisanih *Laguerre*-ovih polinoma. Dokazaćemo sada formulu

$$(6.4)\qquad \int_0^{\infty} x^s\,e^{-x}\,L_m^s(x)\,L_n^s(x)\,dx = n!\,\Gamma(n+s+1)\,\delta_{mn} \qquad (s > -1),$$

gde je $\Gamma(a)$ gama-funkcija i δ_{mn} *Kronecker*-ova delta.

Pretpostavimo da je $m \leqslant n$, čime se ne umanjuje opštost rezultata. Vodeći računa o (6.2), integral iz formule (6.4) dobija oblik

$$I(m, n, s) = \int_0^{\infty} L_m^s(x)\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^{n+s}\,e^{-x})\,dx.$$

Posle parcijalne integracije nalazi se

$$I(m, n, s) = \left[L_m^s(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^{n+s}\,e^{-x}) \right]_{x=0}^{x\to\infty} - \int_0^{\infty} \frac{d\,L_m^s(x)}{dx}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^{n+s}\,e^{-x})\,dx.$$

Kako je funkcija

$$L_m^s(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^{n+s}\,e^{-x})$$

oblika

$$x^{s+1} P_1(x) e^{-x} \qquad \{P_1(x) \text{ polinom stepena } m+n-1\},$$

ona se anulira za $x=0$ (jer je $s>-1$) i teži nuli kada $x \to \infty$.

Ako se na integral

$$I(m, n, s) = -\int_0^\infty \frac{dL_m^s(x)}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^{n+s} e^{-x})\, dx$$

opet primeni parcijalna integracija, dobija se

$$I(m, n, s) = -\left[\frac{dL_m^s(x)}{dx} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^{n+s} e^{-x})\right]_{x=0}^{x\to\infty} + \int_0^\infty \frac{d^2 L_m^s(x)}{dx^2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^{n+s} e^{-x})\, dx.$$

Funkcija

$$\frac{dL_m^s(x)}{dx} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^{n+s} e^{-x})$$

ima oblik

$$x^{s+2} P_2(x) e^{-x} \qquad \{P_2(x) \text{ polinom stepena } m+n-3\}$$

i ona se anulira za $x=0$ i teži nuli kada $x \to \infty$.

Produžujući tako, posle m-te primene parcijalne integracije, dobija se

$$\text{(6.5)} \qquad I(m, n, s) = (-1)^m \int_0^\infty \frac{d^m L_m^s(x)}{dx^m} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^{n+s} e^{-x})\, dx$$

$$= m! \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^{n+s} e^{-x})\, dx,$$

jer je

$$\frac{d^m L_m^s(x)}{dx^m} = (-1)^m m!$$

Ako je $m<n$, posle još jedne parcijalne integracije, nalazi se

$$I(m, n, s) = m! \left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^{n+s} e^{-x})\right]_{x=0}^{x\to\infty}.$$

Funkcija $\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^{n+s} e^{-x})$ ima oblik

$$x^{s+m+1} P_{m+1}(x) e^{-x} \qquad \{P_{m+1}(x) \text{ polinom stepena } n-m-1\}.$$

Ova funkcija takođe se anulira za $x=0$, a teži nuli ako $x \to \infty$. Dakle,

$$I(m, n, s) = 0 \qquad (m<n;\ s>-1).$$

Ako je $m=n$, tada (6.5) postaje

$$I(n, n, s) = n! \int_0^\infty x^{n+s} e^{-x}\, dx.$$

Kako je, za $n=0, 1, 2, \ldots$ i $s > -1$,

$$\int_0^\infty x^{n+s} e^{-x} \, dx = \Gamma(n+s+1) \qquad \{\Gamma(a) \text{ gama-funkcija}\},$$

dobija se

$$I(n, n, s) = n! \; \Gamma(n+s+1).$$

Ovim je dokazana formula (6.4).

Prema tome, generalisani *Laguerre*-ovi polinomi $L_n^s(x) \; (s > -1)$ ortogonalni su u intervalu $(0, \infty)$ sa težinom $x^s e^{-x}$.

7. *Rekurentne relacije između generalisanih Laguerre-ovih polinoma.* Polazeći od (6.1) i (6.2), dolazi se do sledećih relacija:

$$\frac{d}{dx} L_n^s(x) = -n L_{n-1}^{s+1}(x),$$

$$x L_n^s(x) = (n+s) L_n^{s-1}(x) - L_{n+1}^{s-1}(x),$$

$$L_n^{s-1}(x) = L_n^s(x) - n L_{n-1}^s(x),$$

$$L_{n+1}^s(x) = (2n+s+1-x) L_n^s - n(n+s) L_{n-1}^s(x).$$

Ako je s prirodan broj, tada između pridruženih (§ 4) i generalisanih (§ 6) *Laguerre*-ovih polinoma postoji veza

$$L_n^{(s)} = (-1)^s s! \binom{n}{s} L_{n-s}^s(x),$$

odnosno

$$L_n^s(x) = \frac{(-1)^s}{s! \binom{n+s}{s}} L_{n+s}^{(s)}.$$

Ovim formulama obuhvaćene su relacije

$$L_n^0(x) \equiv L_n(x), \quad L_0^n(x) \equiv 1.$$

8. *Generalisani Laguerre-ovi polinomi izraženi kompleksnim integralom.* Pođimo od definicione formule

$$\frac{1}{(1-t)^{s+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) \frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < 1)$$

za generalisane *Laguerre*-ove polinome.

Funkcija $(1-t)^{-s-1}$ je multiformna. U daljem izlaganju posmatraćemo onu njenu granu koja dobija vrednost 1 kada je $t=0$.

Na osnovu jednog stava iz kompleksne analize važi formula

$$\text{(8.1)} \qquad \frac{L_n^s(x)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(1-t)^{s+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} \frac{1}{t^{n+1}} \, dt,$$

gde je C krug $|t| = r < 1$.

Izvršimo li smenu $t=\frac{u-x}{u}$, dobija se

$$\frac{L_n^s(x)}{n!}=\frac{e^x x^{-s}}{2\pi i}\oint_{C'}\frac{e^{-u}u^{s+n}}{(u-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

Tački $t=0$ u t-ravni odgovara tačka $u=x$ u u-ravni. Kada tačka t opiše krug $|t|=r<1$, tačka u opiše krug C' čija je jednačina

$$u\bar{u}-\frac{x}{1-r^2}u-\frac{x}{1-r^2}\bar{u}+\frac{x^2}{1-r^2}=0,$$

tj.

$$\left|u-\frac{x}{1-r^2}\right|=\frac{r|x|}{1-r^2}.$$

Prema tome, krug C' obuhvata tačku $u=x$ i ne prolazi kroz tačku $u=0$, kada je $x\neq 0$.

Na osnovu *Cauchy*-eve teoreme o ostacima biće

$$\oint_{C'}\frac{e^{-u}u^{s+n}}{(u-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}u=2\pi i\operatorname*{Res}_{u=x}\frac{e^{-u}u^{s+n}}{(u-x)^{n+1}}.$$

Kako je $u=x$ pol reda $n+1$, dobija se

$$\operatorname*{Res}_{u=x}\frac{e^{-u}u^{s+n}}{(u-x)^{n+1}}=\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}\left(e^{-u}u^{s+n}\right)\Big|_{u=x}.$$

Dakle,

$$L_n^s(x)=e^x x^{-s}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{s+n}e^{-x}\right).$$

Tako smo drugim putem došli do formule (6.2).

9. *Generalisani Laguerre-ovi polinomi sa dva parametra.* To su polinomi oblika

(9.1) $$L_n(x,r,s)=x^{-s}e^{rx}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n+s}e^{-rx}\right),$$

gde su r i s dva parametra.

Za $r=1$ polinom $L_n(x,r,s)$ svodi se na generalisani *Laguerre*-ov polinom $L_n^s(x)$.

Formuli (9.1) može se dati oblik

(9.2) $$L_n(x,r,s)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(s+1+\nu,1,n-\nu)(-rx)^{\nu},$$

gde je

$$(m,d,\nu)=m(m+d)(m+2d)\cdots\{m+(\nu-1)d\}=\prod_{k=1}^{\nu}\{m+(k-1)d\},$$

$$(m,d,0)=1.$$

Bez teškoće se utvrđuje da postoji identitet

$$L_n(x,r,s)\equiv L_n^s(rx).$$

Prvih šest polinoma $L_n(x, r, s)$ imaju oblike:

$$L_0(x, r, s) = 1,$$

$$L_1(x, r, s) = (1+s) - rx,$$

$$L_2(x, r, s) = (1+s)(2+s) - 2(2+s)rx + r^2x^2,$$

$$L_3(x, r, s) = (1+s)(2+s)(3+s) - 3(2+s)(3+s)rx + 3(3+s)r^2x^2 - r^3x^3,$$

$$L_4(x, r, s) = (1+s)(2+s)(3+s)(4+s) - 4(2+s)(3+s)(4+s)rx$$
$$+6(3+s)(4+s)r^2x^2 - 4(4+s)r^3x^3 + r^4x^4,$$

$$L_5(x, r, s) = (1+s)(2+s)(3+s)(4+s)(5+s) - 5(2+s)(3+s)(4+s)(5+s)rx$$
$$+10(3+s)(4+s)(5+s)r^2x^2 - 10(4+s)(5+s)r^3x^3 + 5(5+s)r^4x^4 - r^5x^5.$$

Za polinome $L_n(x, r, s)$ važe rekurentne relacije:

$$L_{n+2}(x, r, s) + (rx - 2n - s - 3)\, L_{n+1}(x, r, s) + (n+1)(n+s+1)\, L_n(x, r, s) = 0,$$

$$x L_n''(x, r, s) + (s + 1 - rx)\, L_n'(x, r, s) + n\, r\, L_n(x, r, s) = 0.$$

Polinomi $L_m(x, r, s)$ i $L_n(x, r, s)$ $(m \neq n)$ ortogonalni su u intervalu $(0, \infty)$ sa težinom $e^{-rx} x^s$. Za njih važi formula

$$\int_0^\infty e^{-rx} x^s\, L_m(x, r, s)\, L_n(x, r, s)\, dx = \frac{n!\,\Gamma(s+1+n)}{r^{s+1}}\, \delta_{mn}.$$

Bez teškoće se dokazuju sledeće formule:

$$\int_0^\infty e^{-rx} x^{s+1}\, L_m(x, r, s)\, L_n(x, r, s)\, dx$$

$$= 0 \qquad (m > n+1 \text{ ili } m < n-1),$$

$$= -\frac{(n+1)!\,\Gamma(s+2+n)}{r^{s+2}} \qquad (m = n+1),$$

$$= \frac{(2n+s+1)\, n!\,\Gamma(s+1+n)}{r^{s+2}} \qquad (m = n);$$

$$\int_0^\infty e^{-rx} x^{m+s}\, L_n(x, r, s)\, dx = (-1)^n \frac{m!\,\Gamma(s+1+m)}{(m-n)!\, r^{s+1+m}} \qquad (m \geqslant n),$$

$$= 0 \qquad (m < n).$$

LITERATURA

G. Szegö: *Orthogonal polynomials* (American Mathematical Society, *Colloquium publications*, vol. 23, revised edition, 1959).

E. Pinney: *Laguerre functions in the mathematical foundations of the electromagnetic theory of the paraboloidal reflector* (Journal of Mathematics and Physics, t. 25, 1946, p. 49—79).

IV. HERMITE-OVI POLINOMI

1. *Funkcija – generatrisa Hermite-ovih polinoma. Hermite*-ovi polinomi $H_n(x)$ definisani su relacijom

$$(1.1) \qquad e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Funkcija e^{2tx-t^2} naziva se *generatrisa Hermite*-ovih polinoma.

Polinom $H_n(x)$ određen je izrazom

$$(1.2) \qquad H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2tx-t^2}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2-(x-t)^2}\Big|_{t=0}$$

$$= e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\Big|_{t=0}$$

$$= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

U § 2 biće pokazano da je

$$(1.3) \qquad H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

Evo prvih jedanaest *Hermite*-ovih polinoma:

$H_0(x) = 1,$

$H_1(x) = 2x,$

$H_2(x) = 4x^2-2,$

$H_3(x) = 8x^3-12x,$

$H_4(x) = 16x^4-48x^2+12,$

$H_5(x) = 32x^5-160x^3+120x,$

$H_6(x) = 64x^6-480x^4+720x^2-120,$

$H_7(x) = 128x^7-1344x^5+3360x^3-1680x,$

$H_8(x) = 256x^8-3584x^6+13440x^4-13440x^2+1680,$

$H_9(x) = 512x^9-9216x^7+48384x^5-80640x^3+30240x,$

$H_{10}(x) = 1024x^{10}-23040x^8+161280x^6-403200x^4+302400x^2-30240.$

Upotrebljava se i sledeća definicija *Hermite*-ovih polinoma

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right).$$

Između $H_n(x)$ i $H_n^*(x)$ postoji veza

$$H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n^*(x\sqrt{2}),$$

odnosno

$$H_n^*(x) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Evo prvih jedanaest polinoma $H_n^*(x)$:

$$H_0^*(x) = 1,$$
$$H_1^*(x) = x,$$
$$H_2^*(x) = x^2-1,$$
$$H_3^*(x) = x^3-3x,$$
$$H_4^*(x) = x^4-6x^2+3,$$
$$H_5^*(x) = x^5-10x^3+15x,$$
$$H_6^*(x) = x^6-15x^4+45x^2-15,$$
$$H_7^*(x) = x^7-21x^5+105x^3-105x,$$
$$H_8^*(x) = x^8-28x^6+210x^4-420x^2+105,$$
$$H_9^*(x) = x^9-36x^7+378x^5-1260x^3+945x,$$
$$H_{10}^*(x) = x^{10}-45x^8+630x^6-3150x^4+4725x^2-945.$$

2. *Rekurentne relacije.* Ako se relacija (1.1) diferencira po x, dobija se

$$2te^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Na osnovu (1.1) ova relacija postaje

$$2t\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x)\frac{t^n}{n!},$$

odakle izlazi

(2.1) $$2nH_{n-1}(x) = H_n'(x).$$

Diferenciramo li sada po t relaciju (1.1), dobijamo

$$2(x-t)e^{2xt-t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

tj.

$$2(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Odavde izlazi

(2.2) $$2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)=H_{n+1}(x).$$

Eliminacijom $H_{n-1}(x)$ iz (2.1) i (2.2) dobija se

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x)+H_n'(x).$$

Posle diferenciranja ova relacija postaje

$$2xH_n'(x)+2H_n(x) = H_{n+1}'(x)+H_n''(x).$$

Na osnovu (2.1) poslednja relacija dobija oblik

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x) = 0.$$

Ovim je pokazano da diferencijalna jednačina

$$(2.3) \qquad y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

ima za jedno partikularno rešenje *Hermite*-ov polinom $H_n(x)$.

Jednačina (2.3) naziva se *Hermite*-ova diferencijalna jednačina.

Primedba. Do relacije (2.3) može se doći i na sledeći način. Pođimo od

$$z = e^{-x^2} \quad \text{i} \quad z' = -2xe^{-x^2},$$

odakle se dobija

$$z' + 2xz = 0.$$

Ako ovu relaciju diferenciramo $n+1$ puta, imamo

$$z^{(n+2)} + 2xz^{(n+1)} + 2(n+1)z^{(n)} = 0.$$

Ako stavimo $z^{(n)} = u$, dobijamo

$$u'' + 2xu' + 2(n+1)u = 0.$$

Smenom $u = e^{-x^2} v$ poslednja jednačina postaje

$$v'' - 2xv' + 2nv = 0.$$

Ovim smo pokazali da je zaista funkcija

$$(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

jedno partikularno rešenje *Hermite*-ove jednačine.

Polazeći od diferencijalne jednačine (2.3) možemo doći do formule (1.3). Pretpostavimo da jednačina (2.3) ima neko partikularno rešenje u obliku polinoma. Neka je to polinom

$$P_k(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots \qquad (a_0 \neq 0).$$

Ako zamenimo $P_k(x)$ u (2.3) i izjednačimo najstariji koeficijent dobijenog polinoma sa nulom, dobijamo

$$-2k + 2n = 0 \iff k = n.$$

Prema tome, ako postoji polinomsko rešenje jednačine (2.3), ono mora biti polinom stepena n. Zato ćemo u (2.3) staviti

$$y = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \qquad (a_0 \neq 0),$$

te se dobija

$$\sum_{k=0}^{n-2} (n-k)(n-k-1) a_k x^{n-k-2} - 2 \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k x^{n-k} + 2n \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0.$$

Ako u prvom zbiru stavimo k umesto $k+2$, biće

$$\sum_{k=2}^{n} (n-k+2)(n-k+1) a_{k-2} x^{n-k} + 2 \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{n-k} = 0,$$

tj.

$$2a_1 x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} [(n-k+2)(n-k+1) a_{k-2} + 2k a_k] x^{n-k} = 0.$$

Iz poslednje jednakosti sleduje

$$a_1 = 0 \quad \text{i} \quad a_k = -\frac{(n-k+2)(n-k+1)}{2k} a_{k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Na osnovu ovih relacija zaključujemo da su svi koeficijenti a_ν sa neparnim indeksom jednaki nuli. Koeficijente sa parnim indeksom odredićemo, koristeći se dobijenom rekurentnom relacijom. Na osnovu te relacije možemo ispisati sledeći skup jednakosti:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{n(n-1)}{2 \cdot 2} a_0, \\ a_4 &= -\frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} a_2, \\ &\vdots \\ a_{2k} &= -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2 \cdot 2k} a_{2k-2}. \end{aligned}$$

Množenjem ovih jednakosti dobijamo

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!} \frac{1}{2^{2k} \cdot k!} a_0.$$

Konstanta a_0 je proizvoljna, ali uzećemo $a_0 = 2^n$ da bismo dobili baš *Hermite*-ov polinom.

Dakle,

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} 2^{n-2k}.$$

Prema tome, polinom $P_n(x)$ postaje

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_{2k} x^{n-2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

3. *Ortogonalnost Hermite-ovih polinoma.* Za *Hermite*-ove polinome $H_m(x)$ i $H_n(x)$ važi formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, \mathrm{d}x = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{mn}. \tag{3.1}$$

Da bismo ovo dokazali, u slučaju kada je $m \leqslant n$, posmatrajmo integral (3.1) u obliku

$$I_{mn} = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (e^{-x^2})\, \mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

Posle primene parcijalne integracije dobija se

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \left[(-1)^n H_m(x) \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} (e^{-x^2})\right]_{x \to -\infty}^{x \to +\infty} - (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}H_m(x)}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}^{n-1}(e^{-x^2})}{\mathrm{d}x^{n-1}}\, \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}H_m(x)}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}^{n-1}(e^{-x^2})}{\mathrm{d}x^{n-1}}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Posle korišćenja relacije (2.1) dobija se

$$I_{mn}=(-1)^{n+1}2m\int_{-\infty}^{+\infty}H_{m-1}(x)\frac{d^{n-1}(e^{-x^2})}{dx^{n-1}}\,dx.$$

Ako se ponovo primeni parcijalna integracija, biće

$$I_{mn}=(-1)^{n+2}2^2m(m-1)\int_{-\infty}^{+\infty}H_{m-2}(x)\frac{d^{n-2}(e^{-x^2})}{dx^{n-2}}\,dx.$$

Posle m-te primene parcijalne integracije na integral (3.2), dobija se

$$I_{mn}=(-1)^{n+m}2^m m!\int_{-\infty}^{+\infty}H_0(x)\frac{d^{n-m}(e^{-x^2})}{dx^{n-m}}\,dx. \tag{3.3}$$

Ako je $m<n$, posle ponovne primene parcijalne integracije, nalazi se

$$I_{mn}=(-1)^{n+m}2^m m!\left[\frac{d^{n-m-1}(e^{-x^2})}{dx^{n-m-1}}\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty}=0.$$

Ako je $m=n$, tada (3.3) postaje

$$I_{nn}=2^n n!\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=2^n n!\sqrt{\pi}.$$

Ovim je dokazana formula (3.1).

4. *Hermite-ove funkcije.* Funkcije oblika

$$\psi_n(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x) \tag{4.1}$$

zovu se *Hermite*-ove funkcije.

Ove funkcije su partikularna rešenja diferencijalne jednačine

$$z''+(2n+1-x^2)z=0. \tag{4.2}$$

Ako se u (2.3) izvrši smena $y=ze^{x^2/2}$ (z nova funkcija), dobija se jednačina (4.2).

Funkcije $\psi_m(x)$ i $\psi_n(x)$ $(m\neq n)$ ortogonalne su u intervalu $(-\infty,+\infty)$, kao što se vidi iz sledećeg:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\psi_n(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\,dx=n!\,2^n\sqrt{\pi}\,\delta_{mn}.$$

Do zaključka o ortogonalnosti funkcija $\psi_m(x)$ i $\psi_n(x)$ $(m\neq n)$ može se doći i na sledeći način.

Za $\psi_m(x)$ i $\psi_n(x)$ važe relacije:

$$\psi_m''(x)+(2m+1-x^2)\psi_m(x)=0,$$

$$\psi_n''(x)+(2n+1-x^2)\psi_n(x)=0,$$

odakle sleduje

$$\psi_m''(x)\,\psi_n(x) - \psi_n''(x)\,\psi_m(x) = 2(n-m)\,\psi_m(x)\,\psi_n(x).$$

Kako je

$$\frac{d}{dx}\{\psi_m'(x)\,\psi_n(x) - \psi_m(x)\,\psi_n'(x)\} = \psi_m''(x)\,\psi_n(x) - \psi_m(x)\,\psi_n''(x),$$

dobija se

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{\psi_m''(x)\,\psi_n(x) - \psi_n''(x)\,\psi_m(x)\}\,dx = 2(n-m)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx,$$

tj.

$$\Big[\psi_m'(x)\,\psi_n(x) - \psi_m(x)\,\psi_n'(x)\Big]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} = 2(n-m)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx,$$

tj.

$$(n-m)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = 0.$$

Ako je $n \neq m$, tada je

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = 0.$$

Takođe važi formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\,\psi_n'(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \pm 1), \\ 2^{n-1}\,n!\sqrt{\pi} & (m = n-1), \\ -2^n\,(n+1)!\sqrt{\pi} & (m = n+1). \end{cases}$$

5. *Veza između Laguerre-ovih i Hermite-ovih polinoma.* Bez teškoće se mogu proveriti ove relacije:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n\,2^{2n}\,L_n^{-1/2}(x^2),$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n\,2^{2n+1}\,x\,L_n^{1/2}(x^2).$$

LITERATURA

P. Appell — J. Kampé de Fériet: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite*, Paris, 1926.

E. D. Rainville: *Special Functions*, New York, 1960.

V. POLINOMI ČEBIŠEVA

1. *Funkcija – generatrisa.* Posmatrajmo funkciju

$$(1.1)\qquad G(x,t)=\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}\qquad(-1\leqslant x\leqslant +1).$$

Stavimo li $x=\cos\theta$, funkcija $G(x,t)$ dobija oblik

$$\frac{1-t^2}{1-2t\cos\theta+t^2}\equiv -1+\frac{1}{1-te^{i\theta}}+\frac{1}{1-te^{-i\theta}}.$$

U okolini tačke $t=0$ za $|t|<1$ važi razvoj

$$(1.2)\qquad \frac{1-t^2}{1-2t\cos\theta+t^2}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}t^n e^{in\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}t^n e^{-in\theta}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\theta$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos(n\arccos x).$$

Definišimo funkciju $T_n^*(x)$ jednakošću

$$(1.3)\qquad \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n T_n^*(x)\,t^n\qquad(-1\leqslant x\leqslant +1),$$

gde je $\varepsilon_0=1$ i $\varepsilon_n=2\ (n\geqslant 1)$.

Iz (1.2) i (1.3) izlazi

$$(1.4)\qquad T_n^*(x)=\cos(n\arccos x).$$

Na osnovu formule

$$\cos na=2^{n-1}\left\{\cos^n a+n\sum_{k=1}^{[n/2]}(-1)^k\frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1}\frac{1}{2^{2k}}\cos^{n-2k}a\right\}\qquad(n\geqslant 2),$$

dobija se

$$(1.5)\qquad T_n^*(x)=2^{n-1}\left\{x^n+n\sum_{k=1}^{[n/2]}(-1)^k\frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1}\frac{1}{2^{2k}}x^{n-2k}\right\}$$

$$(-1\leqslant x\leqslant +1;\ n\geqslant 2).$$

Polinom

$$T_n(x)=2^{n-1}\left\{x^n+n\sum_{k=1}^{[n/2]}(-1)^k\frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1}\frac{1}{2^{2k}}x^{n-2k}\right\}\qquad(n\geqslant 2)$$

$$T_1(x)=x,\qquad T_0(x)=1,$$

koji se poklapa sa funkcijom $T_n^*(x)$ za $-1\leqslant x\leqslant 1$, zove se *polinom Čebiševa.*

Funkcija (1.1) naziva se generatrisa polinoma *Čebiševa.*

Evo nekoliko prvih polinoma *Čebiševa*:

$$T_0(x)=1,$$
$$T_1(x)=x,$$
$$T_2(x)=2x^2-1,$$
$$T_3(x)=4x^3-3x,$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,$$
$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1,$$
$$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x,$$
$$T_8(x)=128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1,$$
$$T_9(x)=256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x,$$
$$T_{10}(x)=512x^{10}-1280x^8+1120x^6-400x^4+50x^2-1.$$

2. *Diferencijalna jednačina Čebiševa.* Ako stavimo

$$y=\cos(n\arccos x), \tag{2.1}$$

posle diferenciranja dobijamo

$$y'=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x), \tag{2.2}$$

$$y''=\frac{nx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)-\frac{n^2}{1-x^2}\cos(n\arccos x). \tag{2.3}$$

Posle eliminacije $\cos(n\arccos x)$ i $\sin(n\arccos x)$ iz (2.1), (2.2) i (2.3) dolazimo do jednakosti

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0. \tag{2.4}$$

To je diferencijalna jednačina *Čebiševa*. Jedno njeno partikularno rešenje je funkcija $T_n^*(x)=\cos(n\arccos x)$, a drugo funkcija $U_n(x)=\sin(n\arccos x)$.

Funkcija $U_n(x)$ zove se funkcija *Čebiševa* druge vrste, dok se funkcija $T_n^*(x)$ zove funkcija *Čebiševa* prve vrste.

3. *Funkcija Čebiševa druge vrste.* Metodom matematičke indukcije dokazuje se formula

$$\sin na=2^{n-1}\sin a\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\binom{n-k-1}{k}\frac{1}{2^{2k}}\cos^{n-2k-1}a \qquad (n\geqslant 1).$$

Prema tome, funkciji $U_n(x)$ može se dati oblik

$$U_n(x)=\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\binom{n-k-1}{k}\frac{1}{2^{2k}}x^{n-2k-1} \qquad (n\geqslant 1),$$

$$U_0(x)=0.$$

Generatrisa funkcija $U_n(x)$ je funkcija

$$\frac{1}{1-tx+t^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)\,t^{n-1} \qquad (|t|<1;\ |x|\leqslant 1).$$

Evo nekoliko prvih funkcija *Čebiševa* druge vrste:

$$U_0(x) = 0,$$

$$U_1(x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$U_2(x) = \sqrt{1-x^2}\, 2x,$$

$$U_3(x) = \sqrt{1-x^2}\,(4x^2-1),$$

$$U_4(x) = \sqrt{1-x^2}\,(8x^3-4x),$$

$$U_5(x) = \sqrt{1-x^2}\,(16x^4-12x^2+1),$$

$$U_6(x) = \sqrt{1-x^2}\,(32x^5-32x^3+6x),$$

$$U_7(x) = \sqrt{1-x^2}\,(64x^6-80x^4+24x^2-1),$$

$$U_8(x) = \sqrt{1-x^2}\,(128x^7-192x^5+80x^3-8x),$$

$$U_9(x) = \sqrt{1-x^2}\,(256x^8-448x^6+240x^4-40x^2+1),$$

$$U_{10}(x) = \sqrt{1-x^2}\,(512x^9-1024x^7+672x^5-160x^3+10x).$$

4. *Rekurentne relacije.* Pođimo od identiteta

$$\cos(n+1)a + \cos(n-1)a \equiv 2\cos na \cos a$$

i stavimo tu $a = \arccos x$. Tada se dobija

$$(4.1) \qquad T^*_{n+1}(x) = 2x\, T^*_n(x) - T^*_{n-1}(x) \qquad (n \geqslant 1),$$

tj.

$$(4.2) \qquad T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant +1).$$

Leva i desna strana relacije (4.2) su polinomi čije su vrednosti jednake za svako $x \in [-1, +1]$. Prema tome, takođe važi jednakost (4.2) za svako x (realno ili imaginarno).

Relacija (4.2) može da posluži za obrazovanje polinoma *Čebiševa*. Zaista, polazeći od $T_0(x) = 1$ i $T_1(x) = x$, iz (4.2) dobija se

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

itd.

Identitet

$$\sin(n+1)a + \sin(n-1)a = 2\sin na \cos a$$

dovodi do rekurentne relacije

$$U_{n+1}(x) = 2x\, U_n(x) - U_{n-1}(x) \qquad (n \geqslant 1).$$

Navedimo još jednakosti:

$$\frac{d}{dx} T^*_n(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} U_n(x), \qquad \frac{d}{dx} U_n(x) = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} T^*_n(x).$$

5. *Rodrigues-ova formula za funkcije Čebiševa.* Funkcije $T_n^*(x)$ i $U_n(x)$ mogu se izraziti u obliku:

$$T_n^*(x)=(-1)^n 2^n \frac{n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, \tag{5.1}$$

$$U_n(x)=(-1)^{n-1}2^n n\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}. \tag{5.2}$$

Iz jednakosti

$$y=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},\quad y'=-(2n-1)x(1-x^2)^{n-\frac{3}{2}}$$

izlazi

$$(1-x^2)y'+(2n-1)xy=0.$$

Ako se ova jednakost diferencira $n+1$ puta po x, dobija se

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-3xy^{(n+1)}+(n^2-1)y^{(n)}=0.$$

Stavi li se $y^{(n)}=z$, poslednja jednačina postaje

$$(1-x^2)z''-3xz'+(n^2-1)z=0.$$

Ako se ovde izvrši smena funkcije pomoću formule

$$z=(1-x^2)^{-1/2}w,$$

dobija se

$$(1-x^2)w''-xw'+n^2w=0. \tag{5.3}$$

Prema tome, funkcija

$$\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \tag{5.4}$$

je jedno partikularno rešenje jednačine *Čebiševa* (2.4).

Opšte rešenje jednačine (2.4) je

$$y=C_1T_n^*(x)+C_2U_n(x)\qquad(-1\leqslant x\leqslant +1). \tag{5.5}$$

Kako je (5.1) polinom po x, definisan za $-1\leqslant x\leqslant +1$, i kako funkcija $U_n(x)$ nije polinom, izlazi kao zaključak da važi identitet

$$T_n^*(x)=C\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\qquad(-1\leqslant x\leqslant +1), \tag{5.6}$$

gde je C fiksna konstanta koju treba odrediti.

Ako se u (5.6) odredi granična vrednost kada x teži ka 1 sa negativne strane, dobija se

$$1=(-1)^n(2n-1)!!\,C,$$

odakle izlazi

$$C=(-1)^n\frac{1}{(2n-1)!!}=(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}.$$

Ovim je dokazana formula (5.1).

Slično ovome dokazuje se formula (5.2).

6. *Nule polinoma Čebiševa.* Dokazaćemo da polinom $T_n(x)$ ima n različitih realnih nula i da one sve pripadaju intervalu $(-1, +1)$.

Posmatrajmo najpre funkciju

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \tag{6.1}$$

Nule ove funkcije određene su jednačinom

$$\cos(n \arccos x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Dakle,

$$\arccos x = (2k+1)\frac{\pi}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Sve nule funkcije (6.1) date su formulom

$$x_k = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6.2}$$

Bez teškoće se zaključuje da je

$$x_n = x_{n-1}, \quad x_{n+1} = x_{n-2}, \quad \ldots$$

Kako je $T_n(x)$ $(n > 0)$ polinom stepena n, sve njegove nule takođe su određene formulom (6.2).

7. *Osobina ortogonalnosti.* Bez teškoće dokazuje se formula

$$\int_0^\pi \cos mt \cos nt \, dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi/2 & (m = n \neq 0), \\ \pi & (m = n = 0), \end{cases}$$

gde su m i n celi brojevi.

Ako se izvrši smena promenljive $t = \arccos x$, navedena formula dobija oblik

$$\int_{-1}^{+1} T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi/2 & (m = n \neq 0), \\ \pi & (m = n = 0). \end{cases}$$

Dakle, funkcije $T_m(x)$ i $T_n(x)$ ortogonalne su u intervalu $(-1, +1)$ sa težinom $1/\sqrt{1-x^2}$.

Polazeći od formule

$$\int_0^\pi \sin mt \sin nt \, dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi/2 & (m = n \neq 0), \\ 0 & (mn = 0), \end{cases}$$

dolazi se do osobine ortogonalnosti funkcija *Čebiševa* druge vrste:

$$\int_{-1}^{+1} U_m(x) U_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi/2 & (m = n \neq 0), \\ 0 & (mn = 0). \end{cases}$$

8. *Problem Čebiševa.* Godine 1854 *Čebišev* je postavio sledeći problem: Odrediti realne koeficijente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tako da bude ispunjen uslov

(8.1) $$\max_{-1 \leqslant x \leqslant +1} |x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n| = \min.$$

Rešenje ovog problema iskazuje se stavom:

Jedini polinom
$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$
sa realnim koeficijentima za koji važi uslov (8.1) je $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$, gde je $T_n(x)$ polinom *Čebiševa.*

VI. BESSEL-OVE FUNKCIJE

1. *Generatrisa Bessel-ovih funkcija.* Funkcija
$$G(z,t) = e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$$
može se razviti u *Laurent*-ov red
$$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots) + \left(\frac{A_{-1}}{t} + \frac{A_{-2}}{t^2} + \cdots\right),$$
tj.
$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n t^n,$$
u okolini tačke $t=0$. Ovaj red konvergira za svako $t(\neq 0)$.

Koeficijenti A_n izračunavaju se pomoću kompleksnog integrala

(1.1) $$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} G(z,t) \frac{dt}{t^{n+1}}.$$

Ako se ovde stavi $t = e^{i\theta}$, dobija se
$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{z}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} e^{-n\theta i} \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(z \sin\theta - n\theta)} \, d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(z \sin\theta - n\theta) \, d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(z \sin\theta - n\theta) \, d\theta.$$

Ako se u drugom od ovih integrala izvrši smena
$$\theta = 2\pi - \varphi,$$
dobija se
$$\int_0^{2\pi} \sin(z \sin\theta - n\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(-z \sin\varphi - 2n\pi + n\varphi) \, d\varphi$$
$$= -\int_0^{2\pi} \sin(z \sin\varphi - n\varphi) \, d\varphi,$$

odakle je

$$\int_0^{2\pi} \sin(z\sin\theta - n\theta)\,d\theta = 0 .$$

Prema tome je

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta .$$

Ako se u drugom od ovih integrala izvrši smena $\theta = 2\pi - \varphi$, zaključuje se da ova dva integrala imaju jednake vrednosti, te je

$$(1.2) \qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta .$$

Ova formula važi za $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Pretpostavimo sada da je n prirodan broj. Tada je

$$A_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(-n\theta - z\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta + z\sin\theta)\,d\theta .$$

Stavimo li ovde $\theta = \pi - \varphi$, nalazimo

$$A_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\pi - n\varphi + z\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos n\pi \cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$= (-1)^n \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi .$$

Dakle, došli smo do relacije

$$(1.3) \qquad A_{-n} = (-1)^n A_n .$$

Koeficijenti A_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ zovu se *Bessel*-ovi koeficijenti i označavaju sa $J_n(z)$. Funkcija $G(z, t)$ naziva se generatrisa *Bessel*-ovih funkcija.

Između $J_n(z)$ i $J_{-n}(z)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ postoji veza

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) ,$$

koja neposredno izlazi iz (1.3).

Da bismo razvili $J_n(z)$ u potencijalni red po z, stavimo $t = 2u/z$. Tada integral (1.1) postaje

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n \oint_{|u| = |z|/2} e^{u - \frac{z^2}{4u}} \frac{du}{u^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Primeni li se *Cauchy*-ev stav o ostacima na navedeni krivoliniski integral, dobija se

$$(1.4) \qquad J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(z/2)^{2r}}{r!\,(n+r)!}.$$

Zaista, posmatrajmo razvoje

$$e^u = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} u^r,$$

$$e^{-z^2/(4u)} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} \frac{(z/2)^{2r}}{u^r}.$$

Da bismo izračunali ostatak funkcije

$$\frac{1}{u^{n+1}} e^{u-\frac{z^2}{4u}}$$

za esencijalni singularitet $u=0$, u izrazu

$$e^{u-\frac{z^2}{4u}} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} u^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} \frac{(z/2)^{2r}}{u^r}\right)$$

odredimo koeficijent uz u^n.

Taj koeficijent ima oblik

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{(r+n)!} \frac{1}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}.$$

Prema tome,

$$\operatorname*{Res}_{u=0} \left\{\frac{1}{u^{n+1}} e^{u-\frac{z^2}{4u}}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(z/2)^{2r}}{r!\,(r+n)!}.$$

Ovim je dokazana formula (1.4).

Ako je z realno i $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, iz (1.2) sleduje

$$|J_n(z)| \leqslant 1.$$

2. *Diferencijalna jednačina Bessel-ovih funkcija.* Pokazaćemo da je funkcija

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(z/2)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!} \qquad (|z| < \infty)$$

jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(2.1) \qquad z^2 w''(z) + z w'(z) + (z^2 - n^2) w(z) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

koja se zove *Bessel*-ova diferencijalna jednačina.

Ako se uvede oznaka

$$a_r = (-1)^r \frac{1}{2^{n+2r}\, r!\,(n+r)!},$$

tada je

$$(2.2) \qquad J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{n+2r}.$$

Odavde izlazi

$$(2.3) \qquad J_n'(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (n+2r) a_r z^{n+2r-1},$$

$$(2.4) \qquad J_n''(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (n+2r)(n+2r-1) a_r z^{n+2r-2}.$$

Leva strana jednačine (2.1) za (2.2), (2.3), (2.4) postaje

$$\sum_{r=0}^{\infty} (n+2r)(n+2r-1) a_r z^{n+2r} + \sum_{r=0}^{\infty} (n+2r) a_r z^{n+2r} + (z^2 - n^2) \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{n+2r}.$$

Koeficijent uz z^{n+2r} ima oblik

$$\{(n+2r)(n+2r-1) + (n+2r) - n^2\} a_r + a_{r-1},$$

tj.

$$\{(n+2r)^2 - n^2\} a_r + a_{r-1},$$

tj.

$$4r(n+r) \frac{(-1)^r}{2^{n+2r} r!(n+r)!} + \frac{(-1)^{r-1}}{2^{n+2r-2}(r-1)!(n+r-1)!}.$$

Ovaj izraz identički se anulira, što znači da je zaista $J_n(z)$ jedno partikularno rešenje jednačine (2.1).

Na analogni način dokazuju se relacije

$$\frac{d}{dz}\{z^n J_n(z)\} = z^n J_{n-1}(z) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\frac{d}{dz}\{z^{-n} J_n(z)\} = -z^{-n} J_{n+1}(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Posle naznačenog diferenciranja i skraćivanja sa z^n odnosno sa z^{-n}, dobija se

$$J_{n-1}(z) = \frac{n}{z} J_n(z) + J_n'(z),$$

$$J_{n+1}(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_n'(z).$$

3. *Bessel-ova funkcija kada je indeks proizvoljan broj.* Posmatrajmo *Bessel*-ovu funkciju $J_n(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ celog argumenta, tj.

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(z/2)^{n+2r}}{r!(n+r)!}.$$

Ova se funkcija može napisati u obliku

$$(3.1) \qquad J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(z/2)^{n+2r}}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n+r+1)},$$

gde je $\Gamma(x)$ gama-funkcija.

Umesto funkcije (3.1) uzmimo funkciju

$$(3.2) \qquad J_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(z/2)^{\nu+2r}}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(\nu+r+1)},$$

gde je ν ma kakva kompleksna konstanta.

Stavi li se

$$a_r = \frac{(-1)^r}{2^{\nu+2r}\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(\nu+r+1)},$$

funkcija (3.2) dobija oblik

$$J_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{\nu+2r}. \tag{3.3}$$

Bez teškoće se pokazuje da je

$$z^2 J_\nu''(z) + z J_\nu'(z) + (z^2 - \nu^2) J_\nu(z) \equiv 0,$$

što znači da je funkcija (3.2) jedno partikularno rešenje jednačine

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + (z^2 - \nu^2)\, w(z) = 0,$$

gde je ν kompleksna konstanta.

4. *Modifikovane Bessel-ove funkcije.* Generatrisa ovih funkcija je

$$e^{\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(z)\, t^n.$$

Slično kao i ranije dobija se

$$I_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\,(n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}.$$

Između modifikovane *Bessel*-ove funkcije $I_n(z)$ i *Bessel*-ove funkcije $J_n(z)$ postoji veza

$$J_n(iz) = i^n I_n(z).$$

Za modifikovane funkcije $I_n(z)$ važe relacije

$$z^n I_{n-1}(z) = \{z^n I_n(z)\}',$$

$$z^{-n} I_{n+1}(z) = \{z^{-n} I_n(z)\}'.$$

Diferencijalna jednačina modifikovanih funkcija $I_\nu(z)$ (ν ma kakva konstanta) glasi

$$z^2 w''(z) + z w'(z) - (z^2 + \nu^2)\, w(z) = 0. \tag{4.1}$$

Slično kao za funkcije $J_\nu(z)$ pokazuje se da je funkcija

$$I_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2r}}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(\nu+r+1)}$$

jedno partikularno rešenje jednačine (4.1).

LITERATURA

G. N. Watson: *A Treatise on the theory of Bessel functions*, second edition, Cambridge, 1944.

G. Petiau: *La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la physique mathématique*, Paris, 1955.

N. Nielsen: *Handbuch der Theorie der Cylinder Funktionen*, Leipzig, 1904.

E. T. Whittaker—G. N. Watson: *A Course of modern analysis*, fourth edition, Cambridge, 1952.

В. И. Смирнов: *Курс высшей математики*, том III, часть II, Москва, 1957

VII. GEGENBAUER-OVI POLINOMI

Funkcije $C_n^\nu(x)$ definisane razvojem

$$(1)\qquad (1-2xt+t^2)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x)\,t^n \qquad (-1\leqslant x\leqslant +1;\ \nu \text{ realno})$$

zovu se *Gegenbauer*-ovi polinomi ili generalisani *Legendre*-ovi polinomi, jer je

$$C_n^{1/2}=P_n(x) \qquad (\textit{Legendre}\text{-ov polinom}).$$

Njihov je oblik

$$(2)\qquad C_n^\nu=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{\Gamma(\nu+n-k)}{k!\,(n-2k)!\,\Gamma(\nu)}(2x)^{n-2k}.$$

Na ove polinome prvi je naišao *Jacobi* (1859), a zatim ih je sistematski proučavao *L. Gegenbauer* (počev od 1877 godine).

Ako se relacija (1) diferencira po t i izjednače koeficijenti na levoj i desnoj strani u dobijenoj relaciji, dolazi se do rekurentne relacije

$$(3)\qquad (n+2)\,C_{n+2}^\nu(x)=2(\nu+n+1)\,x\,C_{n+1}^\nu(x)-(2\nu+n)\,C_n^\nu(x).$$

Slično ovome, dolazi se do rekurentne relacije

$$(4)\qquad x\frac{\mathrm{d}C_n^\nu(x)}{\mathrm{d}x}=n\,C_n^\nu(x)+\frac{\mathrm{d}C_{n-1}^\nu(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Pomoću relacija (3) i (4) dobija se nova relacija

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2C_n^\nu(x)}{\mathrm{d}x^2}-(2\nu+1)\,x\frac{\mathrm{d}C_n^\nu(x)}{\mathrm{d}x}+n\,(n+2\nu)\,C_n^\nu(x)=0.$$

Prema tome, *Gegenbauer*-ov polinom $C_n^\nu(x)$ je jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine drugog reda

$$(1-x^2)\,y''-(2\nu+1)\,x\,y'+n(n+2\nu)\,y=0.$$

Za $\nu=1/2$ ova jednačina svodi se na *Legendre*-ovu diferencijalnu jednačinu, jer je

$$P_n(x)=C_n^{1/2}(x).$$

Za polinome $C_m^\nu(x)$ i $C_n^\nu(x)$ važi formula

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,C_m^\nu(x)\,C_n^\nu(x)=\begin{cases} 0 & (m\neq n)\\[4pt] \dfrac{\pi\,\Gamma(2\nu+n)}{2^{2\nu-1}\,n!\,(\nu+n)\,\Gamma^2(\nu)} & (m=n)\end{cases}\qquad \left(\nu>-\tfrac{1}{2}\right).$$

Prema tome, *Gegenbauer*-ovi polinomi $C_m^\nu(x)$ i $C_n^\nu(x)$ $(m\neq n;\ \nu>-1/2)$ ortogonalni su sa težinom $(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ na segmentu $[-1,+1]$.

VIII. O INTEGRACIJI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA POMOĆU INTEGRACIONIH FAKTORA

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$(1) \qquad x[ax^p y^q + f(xy)]\,dy + y[bx^p y^q + g(xy)]\,dx = 0$$

(a, b, p, q konstante; $x > 0$, $y > 0$; $f(u)$, $g(u)$, $f'(u)$, $g'(u)$ neprekidne funkcije promenljive $u = xy$).

Ako se traži integracioni faktor jednačine (1) oblika $F(xy)\cdot G(x^2y)$, gde su $F(xy)$ i $G(x^2y)$ funkcije naznačenih argumenata, dolazi se do jednačine

$$(2) \qquad xy[(a-b)x^p y^q + (f(u)-g(u))]\frac{F'(u)}{F(u)}$$
$$+ x^2y[(2a-b)x^p y^q + (2f(u)-g(u))]\frac{G'(z)}{G(z)}$$
$$+ [a(p+1)-b(q+1)]x^p y^q + f(u) - g(u) + xy(f'(u)-g'(u)) = 0,$$

gde je $F'(u) = dF(u)/du$, $G'(z) = dG(z)/dz$, $u = xy$, $z = x^2y$.

Ako je

$$(3) \qquad b = a, \qquad z\frac{G'(z)}{G(z)} = q - p,$$

tada se u relaciji (2) promenljive razdvajaju.

Tada se dobija

$$(4) \qquad \frac{F'(u)}{F(u)} = \frac{p-q-1}{u} - \frac{f'(u)-g'(u)}{f(u)-g(u)} + \frac{1}{u}\,\frac{(p-q)f(u)}{f(u)-g(u)} \qquad \{f(u) \not\equiv g(u)\}.$$

Slučaj $a = b$, $f(u) \equiv g(u)$ je vrlo jednostavan i ovde nije tretiran.

Polazeći od (3) i (4), za integracioni faktor jednačine (1) dobija se

$$M \equiv \frac{x^{q-p-1}y^{-1}}{f(xy)-g(xy)}\exp\left\{(p-q)\int\frac{f(xy)}{f(xy)-g(xy)}\,d\log(xy)\right\}.$$

Diferencijalna jednačina

$$x[x^p y^{p+1} + f(xy)]\,dy + y[x^p y^{p+1} + f(xy) - 1]\,dx = 0$$

partikularni je slučaj jednačine (1). Njen integracioni faktor je funkcija

$$1/[y\exp\int f(xy)\,d\log(xy)].$$

Interesantno je rešiti ove probleme:

1° Odrediti slučajeve integrabiliteta pomoću kvadratura diferencijalne jednačine

$$x[a_1x^p y^q + f(x^r y^s)]\,dy + y[a_2x^p y^q + g(x^r y^s)]\,dx = 0,$$

tražeći integracioni faktor oblika $F(xy)\cdot G(x^r y^s)$;

2° Odrediti slučajeve integrabiliteta pomoću kvadratura diferencijalne jednačine

$$x[a_1x^p y^q + b_1x^r y^s + f(xy)]\,dy + y[a_2x^p y^q + b_2x^r y^s + g(xy)]\,dx = 0,$$

tražeći integracioni faktor oblika $F(xy)\cdot G(x^2y)\cdot H(xy^2)$, odnosno oblika $x^\lambda y^\mu F(xy)$.

NUMERIČKE TABLICE

I. VAŽNIJE KONSTANTE

N	$\log_{10} N$	N	$\log_{10} N$
$\pi =$ 3,141 59265	0,49 71499	$\pi^2 =$ 9,869 60440	0,99 42997
$2\pi =$ 6,283 18531	0,79 81799	$1/\pi^2 =$ 0,101 32118	9,00 57003 − 10
$4\pi =$ 12,566 37061	1,09 92099	$\sqrt{\pi} =$ 1,772 45385	0,24 85749
$\pi/2 =$ 1,570 79633	0,19 61199	$1/\sqrt{\pi} =$ 0,564 18958	9,75 14251 − 10
$\pi/3 =$ 1,047 19755	0,02 00286	$(3/\pi)^{1/2} =$ 0,977 20502	9,98 99857 − 10
$4\pi/3 =$ 4,188 79020	0,62 20886	$(4/\pi)^{1/2} =$ 1,128 37917	0,05 24551
$\pi/4 =$ 0,785 39816	9,89 50899 − 10	$\sqrt[3]{\pi} =$ 1,464 59189	0,16 57166
$\pi/6 =$ 0,523 59878	9,71 89986 − 10	$1/\sqrt[3]{\pi} =$ 0,682 78406	9,83 42834 − 10
$1/\pi =$ 0,318 30989	9,50 28501 − 10	$\sqrt[3]{\pi^2} =$ 2,145 02940	0,33 14332
$1/2\pi =$ 0,159 15494	9,20 18201 − 10	$(3/4\pi)^{1/3} =$ 0,620 35049	9,79 26371 − 10
$3/\pi =$ 0,954 92966	9,97 99714 − 10	$(\pi/6)^{1/3} =$ 0,805 99598	9,90 63329 − 10

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846$; $e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536$

II. POTENCIJE BROJA 2

n	2^n	$\log_{10} 2^n$	n	2^n	n	2^n	n	2^n	n	2^n
1	2	0,3010 2999 5664	10	1024	19	524288	28	268 435456	37	137438 953472
2	4	0,6020 5999 1328	11	2048	20	1 048576	29	536 875912	38	274877 906944
3	8	0,9030 8998 6992	12	4096	21	2 097152	30	1073 741824	39	549755 813888
4	16	1,2041 1998 2656	13	8192	22	4 194304	31	2147 483648	40	1 099511 627776
5	32	1,5051 4997 8320	14	16384	23	8 388608	32	4294 967296	41	2 199023 255552
6	64	1,8061 7997 3984	15	32768	24	16 777216	33	8589 934592	42	4 398046 511104
7	128	2,1072 0996 9648	16	65530	25	33 544432	34	17179 869184	43	8 796093 022208
8	256	2,4082 3996 5312	17	131072	26	67 108864	35	34359 738368	44	17 592186 044416
9	512	2,7092 6996 0976	18	262144	27	134 217728	36	68719 476736	45	35 184372 088832

III. POTENCIJE n^{ν} NEKIH PRIRODNIH BROJEVA

$n \backslash \nu$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691	25937424601
12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	439981696	5159780352	61917364224
13	169	2197	28561	371293	4826809	62748517	815730721	10604499373	137858491849
14	196	2744	38416	537824	7529536	105413504	1475789056	20661046784	289254654976
15	225	3375	50625	759375	11390625	170859375	2562890625	38443359375	576650390625