U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Grupa za Mehaniku

PRIMENA NEANALITIČNIH KOMPLEKSNIH FUNKCIJA I MONOGENIH KVATERNIONA U MEHANICI FLUIDA

(Doktorska disertacija)

kandidat

Mane Šašić

(Mane Šašić, diplomirani mašinski inženjer i magistar mehan. nauka)

S A D R Ž A J

U v o d .

Rad se sastoji iz dva dela. U prvom delu se proučavavaju ravanska strujanja viskoznog nestišljivog fluida posredstvom neanalitičnih kompleksnih funkcija. U drugom delu rada posmatraju se prostorna strujanja viskoznog nestišljivog fluida i problemi iz ove oblasti povezuju sa monogenim kvaternion-funkcijama. Na početku svakog dela izložena je ukratko teorija o ovim funkcijama kao i njihova dosadašnja primena u Mehanici fluida.

Poznato je da su dinamičke jednačine za slučaj ravanskog potencijalnog strujanja nestišljivog fluida automatski zadovoljene i da se kinematski deo problema svodi na iznalaženje dveju harmonijskih funkcija : potencijalne (φ) i strujne funkcije (ψ) . Ove dve funkcije zadovoljavaju Cauchy-Riemann-ove uslove i Laplace-ovu jednačinu pa se za rešavanje problema mogu koristiti i analitične funkcije kompleksne promenljive $z=x+iy$. Zbog toga se u račun uvodi kompleksni potencijal $w=\varphi+i\psi$ i kompleksna brzina $\bar{v} = \frac{dw}{dz} = v_x-iv_y$ koje su , dakle , analitične funkcije kompleksne promenljive z . Bilo je sasvim prirodno da se po analogiji sa ovim posmatraju i brzinska polja viskoznog fluida koja su vrtložna. Samo za slučaj strujanja viskoznog fluida funkcija φ ne može da predstavlja potencijal brzine, ali ništa ne smeta da se zajedno sa strujnom funkcijom ψ , koja postoji bez obzira da li je fluid viskozan ili nije, posmatra neka proizvoljna funkcija φ u obliku $\varphi+i\psi = w$. Ovde funkcija w zavisi od promenljivih z i $\bar{z}$ jer se iz izraza $\varphi+i\psi$ ne mogu eliminisati x i y samo posredstvom promenljive z pošto ovom prilikom φ i ψ ne zadovoljavaju Cauchy-Riemann-ove uslove. Ovakav način prilaženja problemu omogućio je korišćenje dobro poznate teorije A.Bilimovića$^{(1)}$ o odstupanju neanalitične funkcije od analitičnosti, kojoj je u Mehanici fluida K.Voronjec$^{(2)}$ prvi našao primenu pri proučavanju potencijalnog strujanja stišljivog fluida. Naime, A-Bilimović je definisao vektor $\vec{B}$ kao meru odstupanja neanalitične funkcije od analitičnosti, koji u svakoj tački kompleksne ravni z odredjuje vektor grad φ kad je poznat grad ψ i obrnuto, grad ψ kad je poznat grad φ. Vektor $\vec{B}$ je različit od nule u onim tačkama kompleksne ravni z u kojima je funkcija w neanalitična. U tačkama u kojima je funkcija w analitična vektor $\vec{B}$ je jednak nuli i jednačina kojom je on definisan dovodi do Cauchy-Riemann-ovih uslova.

U ovome radu je umesto vektora $\vec{B}$ uvedena kompleksna funkcija B_o koja je preko izvoda strujne funkcije ψ po promenljivoj z povezana sa kompleksnom brzinom u strujnom polju viskoznog fluida. Uvodjenje kompleksne funkcije B_o i proučavanje njenog odstupanja od analitičnosti omogućilo je dobijanje i analizu čitave klase brzinskih polja viskoznog nestišljivog fluida kao i uporedjivanje ovih brzinskih polja sa Laplace-ovim poljem koje odgovara potencijalnom strujanju nestišljivog fluida. Osim toga, ovaj način proučavanja strujnih polja otkrio je fizički smisao nekih konstanata u već poznatim rešenjima, koje su do sada imale čisto matematičko značenje.

Po analogiji sa kompleksnim potencijalom ravanskog strujanja K.Voronjec[27] je definisao kvaternionski potencijal prostornog strujanja. Njegova uloga je ista pri proučavanju prostornih strujanja kao i kompleksnog potencijala pri proučavanju ravanskog strujanja. Kvaternionski potencijal prostornog strujanja predstavlja monogenu kvaternion-funkciju koja ima izvesna svojstva slična svojstvima analitičnih funkcija kompleksne promenljive z. U citiranom radu je kvaternionski potencijal korišćen za analizu i proučavanje raznih potencijalnih prostornih strujanja, zatim, za analizu Stokes-ovog laganog strujanja i za proučavanje strujanja sa potencijalom vrtloga.

U ovome radu su monogene kvaternion-funkcije povezane sa pseudo-ravanskim i pseudo-osnosimetričnim strujanjima čiji vrtlozi imaju potencijal, kao i sa strujanjima koja se mogu proučavati posredstvom Oseen-ovih jednačina kretanja viskoznog nestišljivog fluida. Pored toga, izložen je nešto opširnije Stokes-ov problem opstrujavanja lopte jednolikom strujom viskoznog fluida i na ovom primeru pokažana prednost primene monogenih kvaternion-funkcija u odnosu na klasičan postupak rešavanja ovog problema.

Mehanika fluida nije i jedina oblast Mehanike u kojoj su kvaternion-funkcije našle primenu. U knjizi T.Andjelića [21] naveden je primer proučavanja rotacije čvrstog tela posredtstvom kvaterniona. Pokazano je da se problem rotacije čvrstog tela oko nepomične ose, koja prolazi kroz stalnu tačku prostora, svodi na jedinični kvaternion. To znači da svakom jediničnom kvaternionu odgovara neka moguća rotacija čvrstog tela pod navedenim uslovima. U radovima Misicu-a [26] se, takodje , koriste kvaternion-funkcije za proučavanje prostornih problema u Mehanici čvrstog tela kao i za proučavanje jednačina ravnoteže u oblasti elastičnosti. Nadajmo se da ovo neće ostati i jedini pravci primene kvaternion-funkcija u rešavanju problema čiji broj raste iz dana u dan.

Rukovodilac ovog rada bio je moj profesor Konstantin Voronjec. Ja mu se ovom prilikom najtoplije zahvaljujem na mnogobrojnim savetima i velikoj pomoći koju mi je ukazao u toku rada.

I DEO

PRIMENA NEANALITIČNIH KOMPLEKSNIH FUNKCIJA U MEHANICI FLUIDA

Neanalitične kompleksne funkcije i njihovo odstupanje od analitičnosti

1° Uobičajeno je da se pod pojmom "neanalitična kompleksna funkcija" podrazumeva funkcija koja zavisi od dve promenljive: $z=x+iy$ i $\bar{z}=x-iy$. Neanalitične kompleksne funkcije su, u opšte uzev, vrlo složene funkcije. Ovde se neće te funkcije posmatrati sa matematičke tačke gledišta već će se o njima dati samo ono što je u neposrednoj vezi sa njihovom primenom u Mehanici fluida, što je i predmet ovoga rada. Osim toga, primenjivaće se samo "elementarne neanalitične funkcije" za koje se uzima oznaka $w=w(z,\bar{z})$. Kaže se da je w elementarna funkcija od z i $\bar{z}$ ako postoji konačan niz elementarnih operacija kojima podležu z i $\bar{z}$ kada se njima odredjuje w. Te elementarne operacije su sabiranje, množenje, stepenovanje i njima obratni postupci.

Pre nego što se predje na izlaganje predvidjene materije o neanalitičnim funkcijama, navešće se definicija analitične kompleksne funkcije i njihova svojstva koja omogućuju da se one mogu koristiti za proučavanje potencijalnih vektorskih polja. Naime, ima kompleksnih funkcija $w(x,y,i)$ promenljivih x, y i imaginarne jedinice i koje se mogu rastaviti na realni i imaginarni deo i napisati u obliku

$$w(x,y,i) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{1}$$

gde su $u(x,y)$ i $v(x,y)$ realne funkcije. Ovakve se funkcije mogu predstaviti u ravni w sa u i v kao formalnim koordinatama . Svakom paru vrednosti x i y odgovara tačka z u ravni Oxy i vrednosti $u(x,y)$ i $v(x,y)$ pa, prema tome, i tačka w u ravno Ouv. Kaže se da tačka w predstavlja sliku tačke z. Kad se x i y menjaju opisivaće tačka z krivu ℓ u svojoj ravni a istovremeno w crta krivu L u svojoj ravni. Dakle, kriva L prestavlja sliku krive ℓ i njen oblik zavisi od oblika krive ℓ i od funkcije w .

Može se od jedne te iste krive ℓ dobiti bezbroj krivih L ako se raspolaže sa bezbroj funkcija w. Razume se, mogućno je i od raznih krivih ℓ dobiti jednu te istu krivu L izborom odgovarajućih funkcija w. Kako svaka vrednost z jednoznačno odredjuje vrednosti x i y, a ove odgovarajuće vrednosti u i v funkcije w, to se može reći da je w funkcija od z. Sad se postavlja sledeće pitanje: pod kojim će uslovima w zavisiti samo od z odnosno kad se sme staviti da je $w = w(z)$? Ako se potraži odgovor na ovo pitanje doći će se do poznatog zaključka da u ovom slučaju funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ ne mogu biti proizvoljne već da moraju zadovoljavati Cauchy-Riemann-ove jednačine:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} . \tag{2}$$

Upravo, jednačine (2) predstavljaju potreban i dovoljan uslov da funkcija w zavisi samo od z. Ova klasa kompleksnih funkcija nazvana je analitičnim kompleksnim funkcijama.

Iz Cauchy-Riemann-ovih jednačina sleduju i najvažnija svojstva analitičnih kompleksnih funkcija, od kojih se neka ovde navode bez dokaza :

- funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ su harmonijske jer zadovoljavaju Laplace-ovu jednačinu ,

- krive $u(x,y) = \text{const.}$ i $v(x,y) = \text{const.}$ su medjusobom ortogonalne i čine kvadratnu mrežu jer je $\text{grad } u \perp \text{grad } v$ i $|\text{grad } u| = |\text{grad } v|$,

- izvod analitične funkcije ne zavisi od pravca u kome se posmatra priraštaj kompleksne promenljive z, jer uslovi (2) pokazuju da je $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial (iy)}$, i

- analitične funkcije poseduju svojstvo konformnog preslikavanja.

2° Ako funkcija (1) ne zadovoljava uslove (2) tada se za nju kaže da je ona neanalitična u onim tačkama kompleksne ravni u kojima ti uslovi nisu zadovoljeni. Iz oznake za takve funkcije , $w = w(z,\bar{z})$, vidi se da su analitične funkcije zaista specijalna klasa kompleksnih funkcija i da se one mogu definisati i posredstvom uslova da je $\partial w/\partial \bar{z} = 0$. Ovako definisan uslov analitičnosti dovodi do konstatacije da razne neanalitične funkcije i različito odstupaju od analitičnosti. Može se desiti da je,na primer,neanalitična funkcija takvog oblika da joj je već prvi izvod po promenljivoj $\bar{z}$ analitična funkcija. Suprotno ovome,svakako da ima i takvih neanalitičnih funkcija čiji ni N-ti izvod po promenljivoj $\bar{z}$ nije analitična funkcija .

Verovatno je ovo i navelo akademika A.Bilimovića[1] na ideju da uvede neku "meru" odstupanja neanalitičnih funkcija od analitičnosti. Upravo, Bilimović je prvo izrazio Cauchy-Riemann-ove uslove sa vektorskim oznakama kao

(3) $\qquad \operatorname{grad} v = [\vec{k}\ ,\ \operatorname{grad} u]$

gde je $\vec{k} = [\vec{i}\ ,\ \vec{j}]$, i , zatim , definisao vektor

(4) $\qquad \vec{B} = \operatorname{grad} v - [\vec{k}\ ,\ \operatorname{grad} u]$

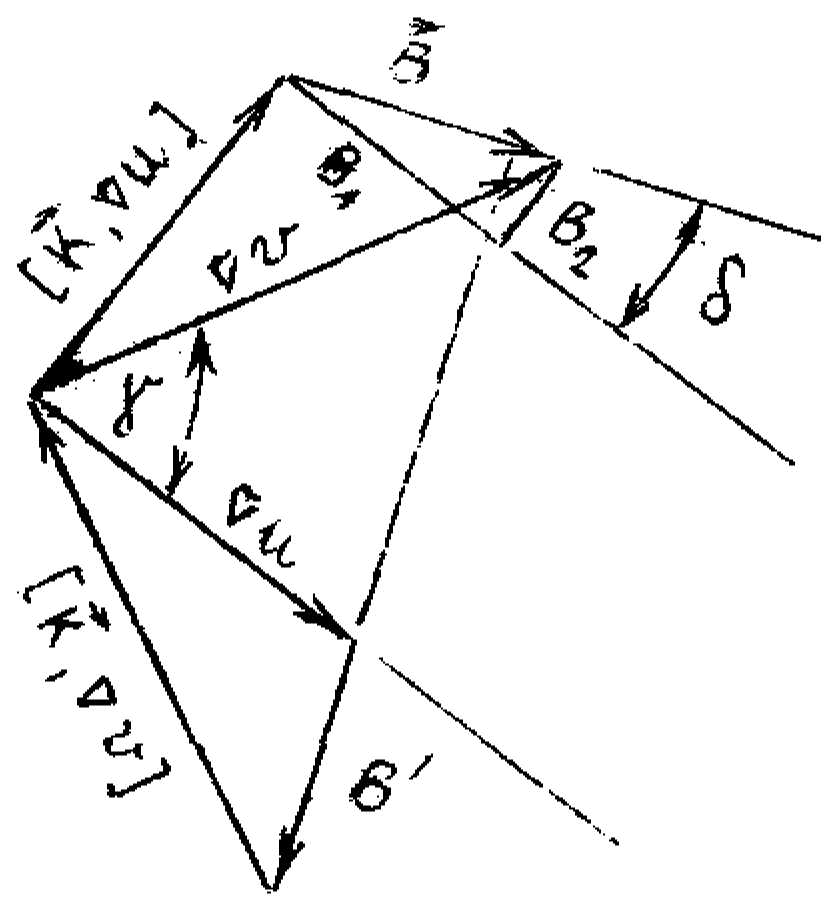
kao meru odstupanja neanalitične funkcije $w(z,\bar{z})$ od analitičnosti. Ako je vektor $\vec{B}$ jednak nuli,funkcija w je analitična i jednačina (4) prelazi u (3) odnosno u Cauchy-Riemann-ove uslove (2). Može se jednačina (3) pomnožiti vektorski ortom $\vec{k}$ i dobiti još jedan oblik Cauchy-Riemann-ovih uslova

(5) $\qquad \operatorname{grad} u = -[\vec{k}\ ,\ \operatorname{grad} v]$

i , opet , definisati drugi vektor

(6) $\qquad \vec{B}' = -\operatorname{grad} u - [\vec{k}\ ,\ \operatorname{grad} v]$

koji,takodje,može predstavljati meru odstupanja neanalitične funkcije $w(z,\bar{z})$ od analitičnosti. Medjusobni položaj ovih vektora dat je na sledećoj slici, sa koje se vidi da se, na primer, vektor $\vec{B}$ može razložiti na dva pravca: B_1-u pravcu vektora grad u i B_2- u pravcu upravnom na vektoru grad u .



Ako se sa γ označi ugao izmedju vektora grad u i grad v , tada intenziteti ovih projekcija iznose :

$B_1 = |\text{grad } v| \cos \gamma$

$B_2 = |\text{grad } v| \sin \gamma - |\text{grad } u|$.

3° Na osnovu dosadašnjeg izlaganja može se zaključiti da vektori grad u i $\vec{B}$, ili grad v i $\vec{B}'$, karakterišu neanalitičnu funkciju u svim tačkama kompleksne ravni u kojima je ona neanalitična. Isto to čine i vektori grad u i grad v. Bilimović smatra da je za proučavanje neanalitičnih funkcija pogodnije posmatrati vektore grad u i $\vec{B}$, ili grad v i $\vec{B}'$, umesto vektora grad u i grad v , jer se prema njima može izvršiti klasifikacija neanalitičnih funkcija. Tako se, na primer, može formirati klasa neanalitičnih funkcija kod kojih ugao δ izmedju vektora grad u i $\vec{B}$ ima konstantnu vrednost. Ovde se posebno izdvajaju dva tipa neanalitičnih funkcija: prvi, kod kojih je ugao $\delta = 90^\circ (B_1=0)$ i drugi, kod kojih je ugao $\delta = 0$ $(B_2=0)$. Ova dva tipa obuhvataju neanalitične funkcije koje je proučavao Fréchet i koje su poznate pod imenom "para-analitične" funkcije. Upravo, Fréchet je ove funkcije nazvao familijom "P" i familijom "D". Kod njih vektor grad u ima fiksiran pravac. Familija "P" obuhvata neanalitične funkcije kod kojih je $u=u(x)$ i $v=v(y)$, a familija "D" kod kojih je $u=F(x)$ i $v=yF'(x) + \phi(x)$. Lako se može pokazati da familija "P" pripada slučaju kada je $\delta = 90^\circ (B_1=B_x=0)$, $B_2=B_y=v'(y) - u'(x)$, a familija "D" kada je $\delta = 0^\circ (B_2=B_y=0)$, $B_1=B_x=yF''(x) + \phi'(x)$.

Sledeću klasu neanalitičnih funkcija mogle bi da predstavljaju ,na primer,funkcije kod kojih je $u(x,y)$ harmonijska funkcija. Ona tada zadovoljava Laplace-ovu jednačinu pa se može odrediti funkcija $v^*(x,y)$ koja je vezana sa funkcijom $u(x,y)$ Cauchy-Riemann-ovim jednačinama. Takve se neanalitične funkcije mogu napisati u obliku

$$w(x,y,i) = u + iv^* + i(v - v^*) \tag{7}$$

odnosno mogu se rastaviti na analitični i na neanalitični deo koji je čisto imaginaran. Mera odstupanja jedne takve neanalitične funkcije od analitičnosti bila bi,prema (4),

$$\vec{B} = \mathrm{grad}(v-v^*) \ . \tag{8}$$

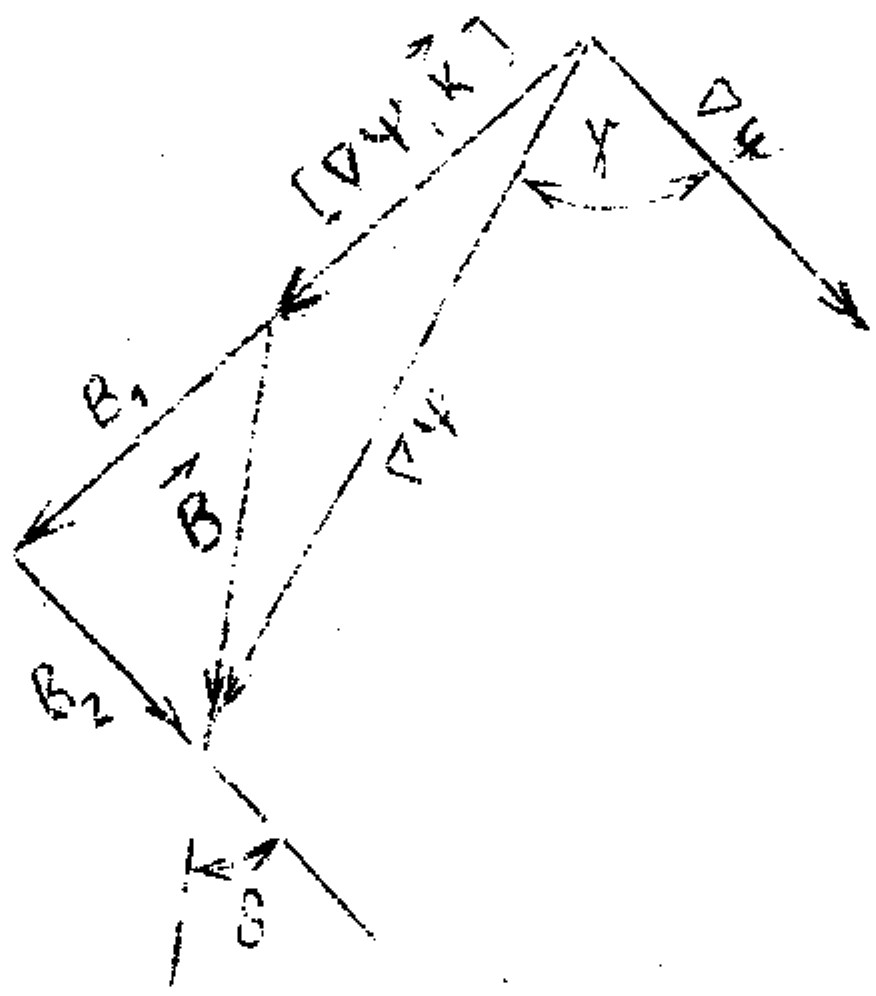
4° U teoriji potencijalnog strujanja funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ predstavljaju potencijal brzine i strujnu funkciju, koje se najčešće obeležavaju sa $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$. Strujna funkcija uvek postoji bez obzira da li se proučava kretanje stišljivog ili nestišljivog, savršenog ili viskoznog fluida. To znači da je u svakoj tački strujnog polja poznat vektor $\mathrm{grad}\,\psi$ ako je poznata strujna funkcija. Zato će se u daljem izlaganju vektor $\vec{B}$ pisati u obliku koji je pogodniji sa fizičke tačke gledišta, kao

$$\vec{B} = \mathrm{grad}\,\varphi - [\mathrm{grad}\,\psi\, ,\, \vec{k}] \tag{9}$$

jer vektori $\vec{B}$ i $\mathrm{grad}\,\psi$ u potpunosti odredjuju $\mathrm{grad}\,\varphi$ jednačinom

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \vec{B} + [\mathrm{grad}\,\psi\, ,\, \vec{k}] \, . \tag{9'}$$

Razume se, i iz jednačina (9) ili (9′) sleduju Cauchy-Riemann-ovi uslovi kada je vektor $\vec{B}$ jednak nuli. Medjusobni položaj vektora $\vec{B}$, $\mathrm{grad}\,\varphi$ i $\mathrm{grad}\,\psi$, vezanih jednačinom (9) dat je na sledećoj slici, na kojoj je vektor $\vec{B}$ razložen na projekcije u pravcu vektora $\mathrm{grad}\,\psi$ i u pravcu upravnom na vektor $\mathrm{grad}\,\psi$. Ovde su :



$B_1 = |\mathrm{grad}\,\varphi| \sin\gamma - |\mathrm{grad}\,\psi|$

$B_2 = |\mathrm{grad}\,\varphi| \cos\gamma$,

gde je γ ugao izmedju vektora $\mathrm{grad}\,\varphi$ i $\mathrm{grad}\,\psi$, a δ ugao izmedju vektora $\vec{B}$ i $\mathrm{grad}\,\psi$. Mogu se i ovde definisati oblici para-analitičnih funkcija kada $\mathrm{grad}\,\psi$ ima fiksiran pravac, koje bi bile obuhvaćene vrednostima $\hat{\delta} = 0$ i $\hat{\delta} = 90^{\circ}$. Sa fizičke tačke gledišta slučaj kada $\mathrm{grad}\,\psi$ ima fiksiran pravac nije interesantan, jer se odnosi na najprostija strujanja. Medjutim, može $\mathrm{grad}\,\psi$ biti promenljivog pravca a ugao $\hat{\delta}$ iznositi 90° ($B_2 = 0$). Tada je $\gamma = 90^{\circ}$ i vektori $\mathrm{grad}\,\varphi$ i $\mathrm{grad}\,\psi$ su medjusobom ortogonalni, ali je $|\mathrm{grad}\,\varphi| \neq |\mathrm{grad}\,\psi|$ pa Cauchy-Riemann-ovi uslovi ne mogu biti zadovoljeni. Ovaj slučaj se javlja pri potencijalnom strujanju stišljivog fluida i u radu K.Voronjeca[2] pokazano je da je tada vektor $\vec{B}$ kolinearan sa brzinom strujanja ako je fluid barotropan.

5° Može se umesto vektora $\vec{B}$ uvesti kompleksna veličina jednačinom

$$B = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 2\,\partial w/\partial\bar{z} \tag{10}$$

i , zatim , ona smatrati kao mera odstupanja neanalitične funkcije $w(x,y,i)$ od analitičnosti. U opštem slučaju je i B neanalitična funkcija, pa se, prema S.Fomplu[3], i za nju može definisati funkcija B_1 kao mera odstupanja od analitičnosti. Isti se postupak može ponoviti i za funkciju B_1 i doći do funkcije B_2 koja će predstavljati odstupanje od analitičnosti funkcije B_1. Na taj način se dolazi do pojma odstupanja "višeg reda". Može se desiti da jedno od ovih odstupanja postane analitična funkcija. Tada je odstupanje sledećeg reda jednako nuli.

Ako je prvo odstupanje analitična funkcija, tj. ako je $B=B(z)$, tada su funkcije φ i ψ biharmonijske i rešenja su Maxwell-ove parcijalne diferencijalne jednačine

$$\Delta\Delta\varphi = 0 \quad \text{i} \quad \Delta\Delta\psi = 0 .$$

Dokazano je da sve neanalitične funkcije sa analitičnim odstupanjem pripadaju klasi Goursat-ovih funkcija čiji je oblik

$$(11) \qquad w(x,y,i) = f(z) + \bar{z}\, g(z)$$

gde su $f(z)$ i $g(z)$ proizvoljne analitične funkcije. Théodorescu je takve funkcije nazvao areolarnim polinomima I stepena, jer se dobijaju iz uslova da je areolarni izvod drugog reda odgovarajuće neanalitične funkcije jednak nuli. Dakle, u ovom slučaju su φ i ψ realni i imaginarni deo Goursat-ovih funkcija, odnosno areolarnih polinoma I stepena.

Ako je B neanalitična funkcija a B_1 analitična, tada je funkcija $w(x,y,i)$ areolarni polinom II stepena[4], tj.

$$(12) \qquad w(x,y,i) = f(z) + \bar{z}\, g(z) + \bar{z}^2\, h(z)$$

gde su $f(z)$, $g(z)$ i $h(z)$ proizvoljne analitične funkcije.

Théodorescu je definisao i areolarne polinome N-og stepena kao

$$(13) \qquad w(x,y,i) = \sum_{n=o}^{N} \bar{z}^n\, F_n(z)$$

koji se dobijaju kao rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$(14) \qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial \bar{z}^{N+1}} = 0 .$$

U svom sledećem radu je Fempl[5] pokazao da su areolarni polinomi N-og stepena ($N=1,2,3,\ldots$) klasa neanalitičnih funkcija čiji je areolarni izvod reda N analitična funkcija. Kako red izvoda areolarnog polinoma predstavlja ujedno i red odstupanja od analitičnosti, to se ovi polinomi mogu definisati i kao neanalitične kompleksne funkcije čije je odstupanje od analitičnosti onoga reda analitična funkcija kog je reda polinom .

Vektor $\vec{B}$ kao mera odstupanja polja brzine nekog strujanja od Laplace-ovog polja

1° Rešavanje problema u vezi sa strujanjem fluida svodi se , uglavnom , na iznalaženje brzine $\vec{v}$ i pritiska p u svakoj tački strujnog polja. Polje brzine je,u opštem slučaju,složeno polje i karakterisano je vrednostima koje u tom polju imaju div $\vec{v}$ i rot $\vec{v}$. Najprostije i najviše proučeno polje je Laplace-ovo polje za koje je

$$(15) \qquad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{rot} \vec{v} = 0$$

i koje odgovara potencijalnom strujanju nestišljivog fluida. U slučaju ravanskog strujanja,na primer u ravni Oxy,jednačine (15) imaju oblik

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

i indentički su zadovoljene: prva strujnom funkcijom ψ i druga potencijalom φ brzine $\vec{v}$. Ove dve funkcije su sa projekcijama brzine vezane jednačinama

$$(16) \qquad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \; .$$

Time se proučavanje potencijalnih ravanskih strujanja nestišljivog fluida svodi na iznalaženje funkcija φ i ψ vezanih jednačinama (16). Praktično se nalazi jedna od ovih funkcija rešavanjem Laplace-ove jednačine sa odgovarajućim graničnim uslovima,a druga se dobija integriranjem jednačina (16). Jednačine (16) imaju isti oblik kao i Cauchy-Riemann-ove jednačine koje predstavljaju potreban i dovoljan uslov da funkcija $w = \varphi + i\psi$ bude analitična. Funkcija w se tada naziva kompleksnim potencijalom i za njegovu analizu se koristi teorija analitičnih funkcija. Time Mehanika fluida dobiva snažan matematički aparat koji omogućuje uspešno rešavanje veoma važnih i komplikovanih problema iz oblasti strujanja fluida.

Medjutim, savršen fluid ne postoji i uvodjenje ovoga pojma opravdano je samo u izuzetnim slučajevima. Predpostavka o nevrtložnosti je još manje prihvatljiva jer je rot $\vec{v}$ različit od nule pri strujanju realnog fluida. Vrtloženje uvek postoji i samo može biti izraženo u slabijoj ili jačoj meri. To znači da se proučavanje polja brzine realnog fluida posredstvom Laplace-ovog polja može prihvatiti samo kao prvo približenje stvarnosti. Nekad i ovo približenje daje sasvim prihvatljive rezultate za praksu, ali isto tako može dovesti i do pogrešnih zaključaka o raznim veličinama koje karakterišu jedno odredjeno strujanje. Na osnovu ovoga može se izvesti zaključak da svako polje brzine realnog fluida, manje ili više, odstupa od Laplace-ovog polja. S obzirom da se za proučavanje Laplace-ovog polja mogu koristiti analitične funkcije, prirodno je bilo predpostaviti da postoje i takve kompleksne funkcije koje se mogu koristiti za proučavanje polja brzine realnog fluida. Istovetnost Cauchy Riemann-ovih jednačina i onih koje odredjuju ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida pokazuje da se vektor $\vec{B}$, ili kompleksna funkcija B, može smatrati istovremeno i kao mera odstupanja nekog strujnog polja od Laplace-ovog polja[2]. Time je veličina B dobila i svoje fizičko značenje.

Primećuje se da je i polje vektora $\vec{B}$, u opštem slučaju, složeno polje jer se iz jednačine (9) dobija

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{div} \vec{B} = \Delta \varphi \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \Delta \psi \, \vec{k} \, .$$

Polje vektora $\vec{B}$ biće Laplace-ovo polje samo onda kad su φ i ψ harmonijske funkcije. Medjutim, ovo ne znači da je i polje brzine Laplace-ovo polje i da je $\varphi + i\psi$ analitična funkcija. Ove dve funkcije i kad su harmonijske mogu da ne budu povezane Cauchy-Riemann-ovim jednačinama. Naime, polje brzine je Laplace-ovo polje samo onda kad je vektor $\vec{B}$ jednak nuli jer su tada φ i ψ spregnute harmonijske funkcije pa je i funkcija $\varphi + i\psi$ analitična.

2° U navedenom radu Bilimovića[6] pokazana je primena vektora $\vec{B}$ u kompleksnom obliku za izvodjenje nekih zaključaka u slučaju laganog ravanskog strujanja viskoznog nestišljivog fluida. Navier-Stokes-ove jednačine se ovom prilikom mogu svesti na oblik

$$(18) \qquad U+iV = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \mu(\Delta v_x + i\Delta v_y)$$

gde su

$$U = \varsigma\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - F_x\right),$$
$$V = \varsigma\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} - F_y\right).$$

Kako je na osnovu jednačine kontinuiteta i izraza za vrtlog ,

$$\Delta v_x = -2\frac{\partial \omega}{\partial y} \quad i \quad \Delta v_y = 2\frac{\partial \omega}{\partial x} \quad ,$$

to se jednačina (18) može napisati kao

$$U+iV = -\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial y}\right) - 2i\mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right] .$$

Desna strana ove jednačine predstavlja odstupanje od analitičnosti neanalitične funkcije $p - 2i\mu\omega$ pa se može staviti da je

$$(19) \qquad B = -(U+iV) .$$

Uzmu li se u obzir Stokes-ove predpostavke da je strujanje stacionarno a fluid vooma viskozan i da se spoljašnje sile mogu zanemariti tada je $U+iV=0$ odnosno $B=0$ pa je funkcija $p - 2i\mu\omega$ analitična i može se pisati u obliku

$$(20) \qquad p - 2i\mu\omega = f(z) .$$

To znači da su pritisak p i vrtlog 2ω harmonijske funkcije i da zadovoljavaju Laplace-ovu jednačinu : $\Delta p = 0$ i $\Delta(2\omega) = 0$.

Kako je $2\omega = -\Delta\psi$, gde je ψ strujna funkcija, to se konačno dolazi do poznate jednačine $\Delta\Delta\psi = 0$ koja govori da je tada ψ biharmonijska funkcija.

3° K.Voronjec(2) je primenio vektor $\vec{B}$ na proučavanje izvesnih svojstava potencijalnog strujanja stišljivog fluida. U ovom slučaju uslov nevrtložnosti i jednačina kontinuiteta,

$$(21) \qquad \mathrm{rot}\,\vec{v} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\vec{v}\right) = 0 \quad ,$$

dovode do sledećih veza

$$(22) \qquad v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad , \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

u kojima su φ i ψ potencijal brzine i strujna funkcija. Gustine ϱ i ϱ_0 odgovaraju brzinama v i $v_0 = 0$. Dakle, i u slučaju stišljivog fluida problem se svodi na iznalaženje funkcija φ i ψ pošto je odnos ϱ/ϱ_0 poznat iz uslova barotropnosti kao funkcija brzine. Ako se zanemari uticaj spoljašnjih sila, tada iz Bernoullijeve jednačine

$$(23) \qquad \int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2}v^2 = 0$$

sleduje odnos $\varrho/\varrho_0 = f(v^2)$. Oblik funkcije f zavisi od vrste promene stanja fluida za vreme strujanja. Praktično u obzir dolaze dva termodinamička procesa: izotermski, $p/\varrho = p_0/\varrho_0 = \mathrm{const.}$, za koji se iz (23) dobija zavisnost

$$(24) \qquad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \exp\left(-\frac{1}{2}v^2/c_0^2\right)$$

i adijabatski, $p/\varrho^{\varkappa} = p_0/\varrho_0^{\varkappa} = \mathrm{const.}$, za koji iz (23) sleduje

$$(25) \qquad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \left[1 - \frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{v}{c_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{\varkappa-1}} \quad .$$

Ovde je sa c označena brzina zvuka, a sa c_0 njena vrednost za $v_0 = 0$. Za izotermne procese je $c^2 = p/\rho = p_0/\rho_0 = \text{const.}$ a za adijabatske $c^2 = \varkappa \frac{p}{\rho}$.

Iz jednačina (22) se vidi da kompleksni potencijal $\varphi + i\psi$ ne predstavlja analitičnu funkciju jer nisu zadovoljeni Cauchy-Riemann-ovi uslovi. Prema tome, može se formirati vektor $\vec{B}$ odstupanja od analitičnosti funkcije w, koji će istovremeno pokazivati i odstupanje potencijalnog strujnog polja stišljivog fluida od Laplace-ovog polja. Iz jednačine (9) i veza (22) dobija se

$$\vec{B} = (1 - \frac{\rho}{\rho_0})\,\vec{v} = \left[1 - f(v^2)\right]\vec{v} \quad , \tag{26}$$

odakle se vidi da je vektor $\vec{B}$ uvek kolinearan sa brzinom strujanja stišljivog barotropnog fluida i da njegova veličina zavisi samo od intenziteta brzine strujanja. Vektor $\vec{B}$ je uvek različit od nule kad god je gustina promenljiva. Korišćenjem jednačine (21), iz (26) se lako nalazi

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\rho_0}\left(\vec{v}\,,\ \operatorname{grad}\frac{\rho}{\rho_0}\right) , \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \Delta\psi\,\vec{k} = \left[\vec{v}\,,\ \operatorname{grad}\frac{\rho}{\rho_0}\right] . \end{aligned} \tag{27}$$

Primećuje se da $\operatorname{div}\vec{B}$ i $\operatorname{rot}\vec{B}$ ne mogu istovremeno biti jednaki nuli pri strujanju stišljivog fluida.

Ako je $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ tada je potencijal φ harmonijska funkcija i istovremeno odgovara strujanju stišljivog i nestišljivog fluida. U ovom slučaju su vektori $\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi$ i $\operatorname{grad}\frac{\rho}{\rho_0}$ upravni pa se linije $\varphi = \text{const.}$ i $\frac{\rho}{\rho_0} = \text{const.}$ poklapaju. Kako je $\frac{\rho}{\rho_0} = f(v^2)$ to se i linije $v = \text{const.}$ poklapaju sa predhodnim linijama te se zaključuje da je $\varphi = F(v)$. Pokazano je da postoji samo jedno takvo strujanje, a to je strujanje u polju osamljenog vrtloga. Na taj način se dolazi do poznatog zaključka da polje osamljenog vrtloga ima istovetne strujnice i ekvipotencijalne linije u slučaju stišljivog i nestišljivog fluida. Potencijal je isti a strujne funkcije zavise jedna od druge.

Ako je rot $\vec{B} = 0$ tada je ψ harmonijska funkcija i istovremeno odgovara strujanju stišljivog i nestišljivog fluida. Uslov za ovo strujanje je paralelnost vektora $\vec{v} = \mathrm{grad}\,\varphi$ i $\mathrm{grad}\frac{\rho}{\rho_0}$, odakle neposredno sleduje da je potencijal $\varphi = F(v)$. Jedino polje koje zadovoljava ovaj uslov je polje osamljenog izvora ili ponora. Strujna slika je ista u oba slučaja, ali brzine nisu iste jer im se potencijalne funkcije razlikuju.

4° Iz dosadašnjeg izlaganja o strujanju stišljivog fluida vidi se da u opštem slučaju funkcije φ i ψ nisu harmonijske. Upravo, svaka od njih zadovoljava nelinearnu parcijalnu jednačinu drugog reda, čije je rešavanje veoma otežano. Zato su od interesa i približna rešenja koja zadovoljavaju postavljene uslove. Naime, iz jednačine (26) sleduje da je vektor $\vec{B}$ srazmeran izrazu $(1-\rho/\rho_0)$ i kad je odnos ρ/ρ_0 mali prema jedinici onda se on može zanemariti. Jednačine (24) i (25) pokazuju da tada mora biti v/c_0 malo prema jedinici te se odnos ρ/ρ_0 može razviti u red po stepenima v/c_0. Ako se u tom razvijanju zadrže samo prva dva člana onda se u oba slučaja dobija da je

$$1 - \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c_0}\right)^2$$

odakle se vidi da je vektor $\vec{B}$ srazmeran, u prvom približenju, izrazu $v^2/2c_0^2$. Ako se ovaj količnik može zanemariti onda će se stišljiv fluid pri strujanju ponašati kao nestišljiv. Ustvari se na ovaj način proširuje domen primene analitičnih funkcija i na slučaj strujanja stišljivog fluida. Razume se, dobijena rešenja su tačna za nestišljiv a približna za stišljiv fluid.

Medjutim, često se količnik $v^2/2c_0^2$ ne može zanemariti i ako je odnos v/c_0 manji od jedan, ali se, možda, može zanemariti ovaj odnos na četvrtom i višem stepenu. Razume se, ovim se malo dobija u pogledu rešavanja nelinearnih jednačina za funkcije φ i

ψ ako se one posmatraju u ravni x, y. Ali ako se strujanje posmatra u ravni hodografa brzine, u kojoj su jednačine za φ i ψ linearne, onda zanemarivanjem odnosa v/c_o na četvrtom i višem stepenu jednačine (22) postaju Cauchy-Riemann-ove i dopuštaju uvodjenje analitičnih funkcija. U ovome se i sastoji ideja S.A.Čaplygina. On je prvo transformisao jednačine (22) na ravan $\Omega = -\ln v + i\Theta$, gde je v intenzitet brzine a Θ ugao koji ona gradi sa x-osom. Zatim je umesto promenljive v uveo novu promenljivu

$$\sigma = \int_{v_o}^{v} f(v^2)\,\frac{dv}{v} + \text{const.}$$

i jednačine (22) sveo na sledeći oblik :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = K\,\frac{\partial\psi}{\partial\Theta}\ ,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\Theta} = -\,\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} \tag{28}$$

gde je

$$K = \left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^2 \left[\,1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right].$$

Jednačine (28) nisu Cauchy-Riemann-ove i kompleksni potencijal $\varphi + i\psi$ u ravni $\sigma + i\Theta$ nije analitična funkcija pa se može formirati vektor odstupanja(2) od analitičnosti te funkcije. Dobija se da je

$$\vec{E} = (K-1)\,\frac{\partial\psi}{\partial\Theta}\,\vec{\sigma}_o$$

odakle se vidi da je on srazmeran izrazu $(K-1)$ i jednak je nuli samo za $K=1$. Ako se sa v_{kr} označi kritična brzina jednaka brzini zvuka u istoj tački ($v_{kr}=c_o$ za izotermne procese i $v_{kr}^2=2c_o^2/(\varkappa+1)$ za adijabatske procese) onda je

$$K = \left[1-(v/v_{kr})^2\right]\,\exp(v/v_{kr})^2 \tag{29}$$

u slučaju izotermne promene stanja , i

$$(30) \qquad K = \left[1-(v/v_{kr})^2\right]\left[1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}(v/v_{kr})^2\right]^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}$$

u slučaju adijabatske promene stanja.

Kad se izrazi (29) i (30) razviju u red po stepenima v/v_{kr} videće se da su drugi članovi u tim razvijanjima srazmerni količniku $(v/v_{kr})^4$. Ako se ovaj količnik može zanemariti onda je $K=1$ pa je vektor $\vec{B}$ jednak nuli i funkcija $\varphi+i\psi$ je analitična u ravni $\sigma+i\theta$. Prema tome, Čaplyginovom metodom se znatno proširuje domen primene analitičnih funkcija.

Treba napomenuti da se za $K=1$ dobija zakon barotropnosti koji ne odgovara ni jednom fizičkom zakonu na Zemlji. Ipak, Čaplyginovo uprošćenje se ne kosi sa Fizikom, jer dobijeni zakon barotropnosti predstavlja tangentu u proizvoljnoj tački izentropske adijabate. To znači da se izentropska promena stanja gasa pri strujanju, koja u sistemu $p-\rho$ predstavlja eksponencijalnu krivu, zamenjuje linearnim zakonom.

PRIMENA NEANALITIČNIH KOMPLEKSNIH FUNKCIJA U RAVANSKOM STRUJANJU NESTIŠLJIVOG FLUIDA

Navier-Stokes-ove jednačine

1° Proučavanje ravanskog strujanja nestišljivog fluida svodi se na rešavanje tri skalarne jednačine. Prva jednačina je jednačina kontinuiteta

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{31}$$

koja je ista i za savršen i za viskozan fluid i u kojoj su sa v_x i v_y označene projekcije brzine $\vec{v}$ u pravcima osa x i y. Druge dve jednačine su Navier-Stokes-ove dinamičke jednačine

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right) &= 2\omega v_y - 2\nu \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right) &= -2\omega v_x + 2\nu \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned} \tag{32}$$

koje odgovaraju ustaljenom strujanju u polju konzervativnih sila, $\vec{F}$=grad U. U njima je p pritisak, ρ gustina i ν koeficijent kinematske viskoznosti. Sa 2ω označen je intenzitet vrtloga :

$$2\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} .$$

Gustina i koeficijent viskoznosti su konstantne veličine, a projekcije brzine i pritisak su funkcije koordinata x i y.

Ako se fluid može smatrati neviskoznim, onda je koeficijent ν jednak nuli i Navier-Stokes-ove jednačine prelaze u Euler-ove jednačine. Za slučaj potencijalnog strujanja Euler-ove jednačine su automatski zadovoljene, a kinematski deo problema svodi se na iznalaženje dveju harmonijskih funkcija : potencijalne i strujne funkcije. Ranije je navedeno da su ove dve funkcije vezane

Cauchy-Riemann-ovim jednačinama i da se za proučavanje potencijalnih polja mogu koristiti analitične funkcije.

2^o U slučaju vrtložnog strujanja vrtlog 2ω je različit od nule i zadatak je mnogo komplikovaniji. Jednačine (32) više nisu automatski zadovoljene, a oblik im pokazuje da treba da bude ispunjen i uslov njihove kompatibilnosti : izvodi desnih strana tih jednačina, prve po y a druge po x, moraju biti medjusobno jednaki. Zbog jednačine kontinuiteta, uslov kompatibilnosti može da se napiše kao

$$(33) \qquad v_x \frac{\partial 2\omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial 2\omega}{\partial y} = \nu \Delta 2\omega \ .$$

Ako se fluid može smatrati neviskoznim, onda se uslov kompatibilnosti postaje

$$(\vec{v} \ , \ \mathrm{grad}\ 2\omega) = 0$$

i pokazuje da je gradijent intenziteta vrtloga upravan na brzini strujanja. Odavde sleduje da se linije 2ω =const. i ψ =const. poklapaju odnosno da je 2ω funkcija od ψ. Dakle, duž strujnice intenzitet vrtloga zadržava istu vrednost.

Kako je $2\omega = -\Delta\psi$, to se jednačina (33) može napisati u obliku

$$(34) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} + \nu\Delta\Delta\psi = 0$$

odnosno kao

$$(35) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} = 0 \ ,$$

ako se fluid može smatrati neviskoznim.

Na taj način, zadatak se svodi na odredjivanje funkcije ψ iz jednačine (34) odnosno (35). Kao što se vidi, zadatak je veoma komplikovan i u opštem slučaju nerešljiv. Zato su od interesa razna partikularna rešenja tih jednačina, koja odgovaraju, na primer, nekim unapred predpostavljenim svojstvima funkcije ψ . Naročito je ovo važno u pogledu jednačine (34) jer se zna da za savršen fluid potencijalno strujanje često predstavlja sasvim dobru aproksimaciju, ali da viskozan fluid ne može da struji sa potencijalom brzine. U literaturi su poznate razne specijalne vrednosti funkcije ψ koje zadovoljavaju gornje jednačine, ali je njihov broj veoma ograničen. Ovde će se navesti samo neke klase tačnih rešenja jednačine (34) dobijenih na razne načine.

Osim jednosmernih pravolinijskih strujanja i kružnih strujanja oko nepokretne ose poznat je niz tačnih rešenja Navier-Stokes-ovih jednačina dobijenih metodom Hamel-a. Hamel[7] uvodi krivolinijske koordinate ξ i η umesto x i y i posmatra izometrijsku mrežu koordinatnih linija. Tada funkcija

$$\zeta = \xi(x,y) + i\,\eta(x,y)$$

predstavlja analitičnu funkciju kompleksne promenljive $z=x+iy$, a promenljive ξ i η zadovoljavaju Laplace-ovu jednačinu i Cauchy-Riemann-ove uslove. Ako se jednačina (34) transformiše posredstvom novih promenljivih, onda se mogu dobiti partikularna rešenja predpostavljajući, na primer, da strujna funkcija zavisi samo od ξ ili samo od η . Jasno je da će se strujnice ovog strujanja poklapati sa strujnicama nekog potencijalnog strujanja, ali će strujanje biti vrtložno ukoliko je $\Delta\psi \neq 0$. Hamel je našao rešenje kada ψ zavisi samo od ξ i dobio da su to logaritamske spirale koje u specijalnom slučaju prelaze u koncentrične krugove ili u prave linije.

Oseen[8] je uopštio Hamel-ov postupak predpostavljajući da se funkcija ψ može izraziti kao

$$\psi = f(\xi) + C\eta \quad ,$$

gde je C konstanta. Kako je η harmonijska funkcija, to ψ predstavlja zbirno strujanje koje se sastoji iz vrtložnog strujanja duž logaritamskih spirala i potencijalnog strujanja duž njima ortogonalnih logaritamskih spirala.

Rosenblatt[9] je posmatrao još opštiji slučaj kad je strujna funkcija oblika

$$\psi = f(\xi) + \eta^m f_1(\xi) \quad ,$$

gde je m pozitivan broj, a Berker[10] je proučio rešenje

$$\psi = f(\xi) + f_1(\eta) \ .$$

Sledeća klasa tačnih rešenja dobijena je uz predpostavku da vrtlog $2\omega = -\Delta\psi$ ima unapred odredjena svojstva. Specijalan slučaj 2ω =const.= k zadovoljava uslov kompatibilnosti bez obzira da li se posmatra strujanje savršenog ili viskoznog fluida. Sva strujanja sa konstantnim vrtlogom u celom fluidnom prostoru mogu da se napišu u obliku

$$\psi(x,y) = \psi_1(x,y) + \frac{k}{2} x^2$$

ili

$$\psi(x,y) = \psi_2(x,y) + \frac{k}{4}(x^2 + y^2)$$

gde su ψ_1 i ψ_2 harmonijske funkcije. Dakle, strujanja sa konstantnim vrtlogom sastoje se iz proizvoljnog potencijalnog strujanja i vrtložnog strujanja duž paralelnih pravih, odnosno duž koncentričnih krugova. Projekcije brzine ovih strujanja su takodje harmonijske funkcije ali takve da su v_x i $v_y + kx$ konjugovane.

Jeffery[11] je proširio ovu klasu strujanja predpostavljajući da je intenzitet vrtloga konstantan duž jedne od izometrijskih linija, tj. da je

$$\Delta\psi = f(\xi) \ .$$

Pokazalo se da ove izometrijske linije mogu da budu samo paralelne prave ili koncentrični krugovi. Jeffery je našao rešenje oba ova slučaja, a Hamel je, nezavisno od njega, našao rešenje u drugom slučaju primenom svoje metode. Strujna funkcija za slučaj koncentričnih krugova kao izometrijskih linija glasi

$$(36) \qquad \psi(r,\theta) = B\nu\theta + Cr^{B+2} + E \ln r$$

za $B \neq -2$, i

$$(37) \qquad \psi(r,\theta) = -2\nu\theta + C(\ln r)^2 + E \ln r$$

za $B = -2$. Ovde su C i E integralske konstante. Oba rešenja predstavljaju spirale koje se uvijaju oko koordinatnog početka.

Mogućno je tražiti rešenje jednačine (34) predpostavljajući za strujnu funkciju izraz

$$\psi(x,y) = f_1(x)y + f_2(x) .$$

Jedno rešenje ovog tipa pripada Rjabušinskom[12].

U literaturi su navedena ova tačna rešenja kao i metode sa kojima su se služili autori da bi došli do tih rešenja. Ovde će se u daljem izlaganju prikazati jedna metoda koja,takodje,omogućuje da se dodje do partikularnih rešenja jednačine (34). Ova metoda počiva na primeni neanalitičnih funkcija. Izvesni rezultati dobijeni ovom metodom nalaze se u radu K.Voronjca i M.Bašića : " O nekim primenama neanalitičnih funkcija u ravanskom strujanju nestišljivog fluida"(u štampi).

3° Strujna funkcija ψ zavisi od x i y . Mogu se umesto tih promenljivih uvesti kompleksni izrazi $z=x+iy$ i $\bar{z}=x-iy$ i posmatrati ψ kao funkcija od z i $\bar{z}$. Razume se, izvodjenje raznih operacija,kao što su diferenciranje i integriranje,zahteva od te funkcije da zadovoljava poznate uslove,koji su u ovom radu ispunjeni. Izvod neanalitične funkcije ψ po promenljivoj z vezan je za kompleksnu brzinu $\bar{v}$ jednačinom

$$(38) \qquad \bar{v} = v_x - iv_y = 2i \frac{\partial\psi}{\partial z} .$$

U slučaju vrtložnog strujanja kompleksna brzina je neanalitična funkcija i zavisi od promenljivih z i $\bar{z}$. Kasnije će se pokazati da je odstupanje ove funkcije od analitičnosti srazmerno intenzitetu obrtanja fluidnih delića za vreme kretanja. Naime, što je odstupanje kompleksne brzine od analitičnosti veće to je vrtlog intenzivniji.

Uslovi kompatibilnosti (34) i (35) izraženi posredstvom promenljivih z i $\bar{z}$ glase :

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^3\psi}{\partial z\partial\bar{z}^2}-\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}}+2i\nu\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2}=0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^3\psi}{\partial z\partial\bar{z}^2}-\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}}=0\ . \tag{40}$$

Analiza jednačina (39) i (40) nije lakša od analize jednačina (34) i (35). Zbog toga će se i ovde tražiti partikularna rešenja gornjih jednačina,koja odgovaraju specijalnim oblicima funkcije ψ . U tu svrhu koristiće se ranije izložena teorija o neanalitičnim funkcijama i vektor $\vec{B}$ u kompleksnom obliku,koji,kao što je rečeno,može istovremeno da služi i kao mera odstupanja polja brzine nekog strujanja od Laplace-ovog polja koje odgovara potencijalnom strujanju. Koristiće se i odstupanja višeg reda koja su analizirana napred. Prvo će se posmatrati najprostiji slučajevi koji odmah dovede do rezultata,a zatim će se preći na iznalaženje opšteg rešenja jednačine (39) uz uslov da N-to odstupanje kompleksne brzine od analitičnosti bude jednako nuli.

4° Umesto funkcije (38) posmatraće se u daljem radu samo dvostruki izvod funkcije ψ po z , tj.

$$B_o = 2\frac{\partial\psi}{\partial z} = -i(v_x - iv_y) \tag{42}$$

koji je uvek različit od nule jer, bi, inače , fluid bio u miru. U opštem slučaju je B_o neanalitična funkcija pa se za nju može formirati odstupanje od analitičnosti kao

$$(43) \qquad B_1 = 2\frac{\partial B_o}{\partial \bar{z}} = -2\omega - i\,\mathrm{div}\,\vec{v} \quad .$$

Odavde se vidi da je B_1 jednako nuli samo ako je istovremeno

$$2\omega = 0 \qquad i \qquad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \quad ,$$

tj. kada je strujanje nevrtložno a fluid nestišljiv. Tada je Ψ harmonijska funkcija, kompleksna brzina je analitična i uslov kompatibilnosti (40) je automatski zadovoljen.

Ostupanje drugog reda od analitičnosti funkcije B_o odredjeno je izrazom

$$(44) \qquad B_2 = 2\frac{\partial B_1}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{v}}{\partial x} + \frac{\partial 2\omega}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{v}}{\partial y} - \frac{\partial 2\omega}{\partial x}\right)$$

i uslov $B_2 = 0$ dovodi, u slučaju nestišljivog fluida, do

$$2\omega = -\Delta\Psi = \mathrm{const.}$$

Uslov kompatibilnosti je zadovoljen kako za savršen tako i za viskozan fluid. Strujna funkcija Ψ predstavlja zbirno strujanje koje se sastoji iz proizvoljnog potencijalnog strujanja i vrtložnog strujanja duž koncentričnih krugova ili pravih linija.

Uslov da je odstupanje trećeg reda od analitičnosti funkcije B_o jednako nuli dovodi za nestišljiv fluid do

$$(45) \qquad B_3 = 2\frac{\partial B_2}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial^2 \Delta\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Delta\Psi}{\partial y^2}\right) - 2i\,\frac{\partial^2 \Delta\Psi}{\partial x \partial y} = 0 \ ,$$

odnosno do

$$(46) \qquad \frac{\partial^2 \Delta\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Delta\Psi}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \Delta\Psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad .$$

Iz druge jednačine (46) sledujo da $\Delta\Psi$ predstavlja zbir dve proizvoljne funkcije, jedne samo od x a druge samo od y. Prva jednačina (46) odredjuje te funkcije kao polinome drugog stepena pa se može staviti da je

(47) $$\Delta \Psi = a_1(x^2 + y^2 + a_2 x + a_3 y + a_4) \quad ,$$

gde su $a_i (i=1,..,4)$ konstante. Pogodnim izborom početka koordinatnog sistema i uvodjenjem polarnih koordinata r i Θ može se jednačina (47) svesti na

(48) $$\Delta \Psi = a_1 r^2 + a_5 \quad ,$$

odakle se vidi da je vrtlog funkcija samo potega r . Očigledno je da se funkcija Ψ može napisati kao

(49) $$\Psi = \Psi_1 + \frac{1}{16} a_1 r^4 + \frac{1}{4} a_5 r^2$$

gde je Ψ_1 harmonijska funkcija. Ugao Θ može da udje u izraz za harmonijsku funkciju, ali ne može da se pojavi u ostalom delu desne strane jednačine (49) jer u bezgraničnom prostoru brzina mora da bude jednoznačna.

Izraz (49) za funkciju Ψ mora da zadovoljava uslov kompatibilnosti (34) odnosno (39). Pošto se ovaj izraz može napisati posredstvom promenljivih z i $\bar{z}$ u obliku

(50) $$\Psi(z,\bar{z}) = \Psi_1(z,\bar{z}) + \frac{1}{16} a_1 z^2 \bar{z}^2 + \frac{1}{4} a_5 z\bar{z}$$

to se posle izračunavanja odgovarajućih izvoda funkcije Ψ po z i $\bar{z}$ i unošenja tih izvoda u (39) dobija diferencijalna jednačina

(51) $$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} z - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \bar{z} + 2i\nu = 0$$

koja odredjuje funkciju Ψ_1 kao

(52) $$\Psi_1(z,\bar{z}) = - i \nu \ln(z/\bar{z}) \quad .$$

Koeficijent a_5 može biti jednak nuli ili srazmeran funkciji oblika $\ln(z\bar{z})/z\bar{z}$. Ako se uzme da je koeficijent a_5 srazmeran ovoj funkciji, onda se rešenje (50) može napisati u obliku

(53) $$\Psi(z,\bar{z}) = -i\nu \ln(z/\bar{z}) + \frac{1}{16} a_1 z^2 \bar{z}^2 + K' \ln(z\bar{z}) \quad ,$$

odnosno u polarnom sistemu

$$\psi(r,\theta) = 2\gamma\theta + \frac{1}{16}a_1 r^4 + 2K'\ln r \ . \tag{54}$$

Kasnije će se pokazati da ovo rešenje sleduje iz opšteg izraza za funkciju ψ za $N=3$, a takodje se može primetiti da se ono poklapa sa rešenjem (36) Jeffery-a za $B=2$.

5° Prelazi se na iznalaženje opšteg oblika funkcije ψ koja treba da zadovoljava sledeće uslove :

a) da je odstupanje N-og reda od analitičnosti njenog izvoda po z jednako nuli, tj.

$$\frac{\partial^{N+1}\psi}{\partial z\partial\bar{z}^N} = 0 \ , \tag{55}$$

b) da zadovoljava uslov kompatibilnosti (39)

c) da je funkcija ψ realna .

Prvi uslov pokazuje da se za izvode funkcije ψ mogu napisati sledeći izrazi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial z} &= \sum_{n=1}^{N} \bar{z}^{n-1} a'_{n-1}(z) \ , \\
\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a_{n-1}(z) + b'_o(\bar{z}) \ , \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\bar{z}} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a'_{n-1}(z) \ , \\
\frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a''_{n-1}(z) \ , \\
\frac{\partial^3\psi}{\partial z\partial\bar{z}^2} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\bar{z}^{n-3} a'_{n-1}(z) \ , \\
\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\bar{z}^{n-3} a''_{n-1}(z) \ ,
\end{aligned} \tag{56}$$

pod predpostavkom da je $N > 2$. Ovde su $a'_{n-1}(z)$ i $a''_{n-1}(z)$ prvi i drugi izvod funkcije $a_{n-1}(z)$ $(n=1,2,3,..,N)$, a $b'_o(\bar{z})$ izvod funkcije $b_o(\bar{z})$. Ove funkcije će se odrediti iz uslova b) i c).

Zamenom parcijalnih izvoda (56) u uslov kompatibilnosti (59) dobija se jednačina

$$(57) \quad \sum_{n=1}^{N} \bar{z}^{n-1} a'_{n-1} \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\bar{z}^{n-3} a'_{n-1} - \left[\sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a_{n-1} + b'_o\right] \sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a''_{n-1} + 2i\nu \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\bar{z}^{n-3} a''_{n-1} = 0 ,$$

koja se može rešiti po b'_o kao

$$(58) \quad b'_o = \frac{\sum_{n=1}^{N} \bar{z}^{n-1} a'_{n-1} \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\bar{z}^{n-3} a'_{n-1}}{\sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a''_{n-1}} + \frac{2i\nu \sum_{n=1}^{N} (n-1)(n-2)\bar{z}^{n-3} a''_{n-1}}{\sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a''_{n-1}} - \sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a_{n-1} .$$

U poslednjim dvema jednačinama pisano je a'_{n-1} , a''_{n-1} , a_{n-1} i b'_o umesto $a'_{n-1}(z)$, $a''_{n-1}(z)$, $a_{n-1}(z)$ i $b'_o(\bar{z})$ jer su izrazi veoma glomazni. Primećuje se da desna strana jednačine (58) ne sme da zavisi od z jer je leva strana funkcija samo od $\bar{z}$. Kako je u broiocu jednačine (58) polinom reda $2N-4$ po z , a u imenicu polinom reda $N-2$ po istoj promenljivoj, to se deljenjem može izdvojiti polinom reda $N-2$ po $\bar{z}$ i , zatim , spojiti sa polinomom istog reda koji je predstavljen poslednjim članom jednačine (58). Funkcija $a_o(z)$ ne ulazi u ovaj polinom jer se ona množi sa polinomom reda $N-3$ po $\bar{z}$. Isto tako u taj polinom ne ulaze ni članovi koji zavise od koeficijenta viskoznosti ν , jer se i oni množe sa polinomom reda $N-3$ po $\bar{z}$. Na taj način može da se napiše sledeći izraz za funkciju $b_o(\bar{z})$:

$$b'_o=\sum_{n=1}^{N}(n-1)\bar{z}^{n-2}A_{n-1}(z)+\frac{\sum_{n=1}^{N}(n-1)(n-2)\bar{z}^{n-3}D_{n-1}(z)}{\sum_{n=1}^{N}(n-1)\bar{z}^{n-2}a''_{n-1}(z)} \tag{59}$$

pri čemu sve funkcije $A_{n-1}(z)$ $(n=2,3,..,N)$ moraju biti jednake konstantama. Da bi razlomak u (59) bio nezavisan od z moraju svi $a''_{n-1}(z)$,za sve vrednosti n od 2 do N,biti medjusobno srazmerni. Tada se oni u imeniocu mogu izvući kao zajednički faktor.Isto takav faktor treba da se pojavi i u brojiocu da bi se skratio sa onim u imeniocu. Primera radi izračunaće se dva najstarija člana polinoma dobijenog deljenjem. Izjednačenjem koeficijenata uz $\bar{z}$ na stepenu $2N-4$ u izrazima (58) i (59) dobija se

$$(N-1)(N-2)a'^{2}_{N-1}-(N-1)^2a_{N-1}a''_{N-1}=(N-1)^2A_{N-1}a''_{N-1}\quad ,$$

što posle integriranja daje

$$(N-1)(N-2)(a_{N-1}+A_{N-1})=C_1(z-z_o)^{N-1}$$

gde su C_1 i z_o integralske konstante.

Iz uporedjenja koeficijenata uz $\bar{z}$ na stepenu $2N-5$ sleduje diferencijalna jednačina

$$2(N-2)a'_{N-1}a'_{N-2}-(N-1)\left[(a_{N-2}+A_{N-2})a''_{N-1}+(a_{N-1}+A_{N-1})a''_{N-1}\right]=0.$$

Posle unošenja u ovu jednačinu vrednosti za a_{N-1} i integriranja dobija se

$$(N-1)(N-2)(a_{N-2}+A_{N-2})=C_2(z-z_o)^{N-1}+C_3(z-z_o)^{N-2}\ .$$

Integralska konstanta C_2 je proizvoljna a konstanta C_3 jednaka je nuli jer a''_{N-2} mora da bude srazmerno a''_{N-1} . Izlazi,dakle,da su svi polinomi $a''_{n-1}(z)$ $(n=2,3,...,N)$ srazmerni $(z-z_o)^{N-3}$,te se može napisati da je

$$a''_{n-1}(z)=k_{n-1}(z-z_o)^{N-3}\ ,\quad (n=2,3,..,N)\ . \tag{60}$$

Na kraju, uslov pod c) znači da su funkcije $\Psi(z,\bar{z})$ i njena konjugovana vrednost, koja će se označiti sa $\bar{\Psi}(\bar{z},z)$, istovetne. Zaista, svaka funkcija $f(z,\bar{z})$ može da se napiše kao

$$f(z,\bar{z}) = f_1(x,y) + if_2(x,y)$$

gde su f_1 i f_2 realne funkcije. Kako je u posmatranom slučaju $f(z,\bar{z})$ realna funkcija, to je

$$f(z,\bar{z}) = f_1(x,y) \quad , \quad f_2(x,y) = 0 \ .$$

Zato će vrednost konjugovane funkcije biti

$$\bar{f}(\bar{z},z) = f_1(x,y) = f(z,\bar{z}) \quad .$$

Isto se odnosi i na funkcije $\partial^2\Psi/\partial z\partial\bar{z}$, $\partial^4\Psi/\partial z^2\partial\bar{z}^2$ i uopšte na izvode $\partial^{2m}\Psi/\partial z^m\partial\bar{z}^m$. Konjugovana vrednost izvoda $\partial\Psi/\partial z$ jednaka je izvodu $\partial\Psi/\partial\bar{z}$, a isto važi i za izvode $\partial^3\Psi/\partial z^2\partial\bar{z}$ i $\partial^3\Psi/\partial z\partial\bar{z}^2$. Iz ovoga takodje sleduje da su sve funkcije $a_{n-1}(z)$ $(n=2,3,\ldots,N)$ polinomi najviše reda $N-1$ po z . Medjutim, funkcije $a_o(z)$ i $b_o(\bar{z})$ ostaju za sada potpuno proizvoljnog oblika .

Ako se izraz (60) unese u poslednju jednačinu sistema (56) dobiće se vrednost

$$\frac{\partial^4\Psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} = (z-z_o)^{N-3} \sum_{n=3}^{N} (n-1)(n-2)k_{n-1}\bar{z}^{n-3} \quad ,$$

pri čemu je donja granica u zbiru promenjena zbog faktora $(n-1)(n-2)$. Zamišlja se da je polinom

$$\sum_{n=3}^{N} (n-1)(n-2)k_{n-1}\bar{z}^{n-3}$$

razvijen u red po stepenima $\bar{z}-\bar{z}_o$. Taj se polinom množi sa $z-z_o$ na stepenu $N-3$ i mora da zadrži istu vrednost kada se "i" zameni sa "-i". Zato su u tom razvijanju jednaki nuli svi članovi osim najstarijeg člana, srazmernog $\bar{z}-\bar{z}_o$ na stepenu $N-3$. Na taj način može da se napiše da je

(61) $$\frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = C'(z-z_o)^{N-3}(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-3}$$

gde je C' realna konstanta.

Sa ovim su odredjeni svi koeficijenti k_{n-1} za n od 3 do N a da koeficijent k_1 (za $n=2$) nije odredjen. Kako se izraz za $\bar{z}-\bar{z}_o$ na stepenu $N-3$ može napisati u obliku

$$(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-3} = \sum_{n=3}^{N} \frac{(N-3)!}{(n-3)!(N-n)!} (-z_o)^{N-n} z \bar{z}^{n-3} ,$$

to se posle uporedjivanja koeficijenata uz opšte članove dobija

$$k_{n-1} = C' \frac{(N-3)!(-z_o)^{N-n}}{(n-1)!(N-n)!} , \quad (n=3,4,..,N) .$$

Može se predpostaviti da i koeficijent k_1 zadovoljava isti obrazac sa tačnošću do aditivne konstante k_o , tj.može se staviti

$$k_1 = \frac{C'}{N-2}(-z_o)^{N-2} + k_o .$$

Integriranjem izraza (61) može se doći do ostalih parcijalnih izvoda potrebnih za analizu uslova kompatibilnosti. Medjutim, odredjivanje proizvoljnih funkcija od z i od $\bar{z}$, koje se tada javljaju,bilo bi otežano. Zato se direktno posmatra četvrta jednačina sistema (56)

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}} = (z-z_o)^{N-3} \sum_{n=2}^{N} (n-1) k_{n-1} \bar{z}^{n-2}$$

koja posle uvodjenja vrednosti za k_{n-1} i izvesnih transformacija postaje

(62) $$\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}} = \frac{C'}{N-2}(z-z_o)^{N-3}(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-2} + k_o(z-z_o)N-3 .$$

Kako izvod $\partial^3 \psi / \partial z \partial \bar{z}^2$ predstavlja konjugovanu vrednost izvoda $\partial^3 \psi / \partial z^2 \partial \bar{z}$, to se iz (62) neposredno dobija

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial z\partial\bar{z}^2} = \frac{C'}{N-2}(z-z_o)^{N-2}(z-z_o)^{N-3} + \bar{k}_o(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-3} . \tag{63}$$

Do izraza za vrtlog dolazi se integriranjem jednačina 62) i (63). Kako rezultat ne sme da se promeni kad se "i" zameni sa "-i" , to izlazi da je

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{C'}{(N-2)^2}(z-z_o)^{N-2}(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-2} + \tag{64}$$

$$+ \frac{1}{N-2}k_o(z-z_o)^{N-2} + \bar{k}_o(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-2} + C_1' ,$$

de je C_1' nova realna konstanta. Na kraju, prvi izvodi funkcije ψ dobijaju se ponovnim integriranjem kao

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{C'}{(N-1)(N-2)^2}(z-z_o)^{N-2}(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-1} +$$

$$+ \frac{k_o}{N-2}(z-z_o)^{N-2}(\bar{z}-\bar{z}_o) + \frac{\bar{k}_o}{(N-1)(N-2)}(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-1} +$$

$$+ C_1'(\bar{z}-\bar{z}_o) + a_o'(z) \tag{65}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = \frac{C'}{(N-1)(N-2)^2}(z-z_o)^{N-1}(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-2} +$$

$$+ \frac{\bar{k}_o}{N-2}(z-z_o)(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-2} + \frac{k_o}{(N-1)(N-2)}(z-z_o)^{N-1} +$$

$$+ C_1'(z-z_o) + b_o'(\bar{z})$$

de su $a_o'(z)$ i $b_o'(\bar{z})$ izvodi funkcija $a_o(z)$ i $b_o(\bar{z})$.

Dobijene izvode za funkciju ψ potrebno je uneti u jednačinu kompatibilnosti i pokušati da se ta jednačina zadovolji pogodnim izborim funkcija $a_o(z)$ i $b_o(\bar{z})$ i konstanata koje su ostale neodredjene. Dobija se izraz koji se ovde ne navodi i koji zahteva , da bi bio jednak nuli , da konstanta k_o bude jednaka nuli. U tom slučaju se uslov kompatibilnosti svodi na

$$(z-z_o)a_o'(z) + i(N-2)\nu = (\bar{z}-\bar{z}_o)b_o'(\bar{z}) - i(N-2)\nu.$$

Kako je leva strana ove jednačine funkcija od z a desna od $\bar{z}$, to se svaka od njih može izjednačiti sa proizvoljnom konstantom K. Na taj način izlazi da su

$$a_o'(z) = \frac{K-i(N-2)\nu}{z-z_o} \quad , \quad b_o'(\bar{z}) = \frac{K+i(N-2)\nu}{\bar{z}-\bar{z}_o}$$

odakle posle integriranja sleduje

$$a_o(z) = [K-i(N-2)\nu] \ln(z-z_o) \quad ,$$
$$b_o(\bar{z}) = [K+i(N-2)\nu] \ln(\bar{z}-\bar{z}_o) \quad .$$

Radi odredjivanja funkcije ψ potrebno je integrirati jednačine (65) koje za $k_o = 0$ postaju

$$(66) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial z} &= \frac{C'}{(N-1)(N-2)^2}(z-z_o)^{N-2}(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-1} + C_1'(\bar{z}-\bar{z}_o) + a_o'(z) \\ \frac{\partial\psi}{\partial \bar{z}} &= \frac{C'}{(N-1)(N-2)^2}(z-z_o)^{N-1}(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-2} + C_1'(z-z_o) + b_o'(\bar{z}) \end{aligned}$$

Rezultat integriranja glasi

$$(67) \qquad \psi = \frac{C'}{(N-1)^2(N-2)^2}(z-z_o)^{N-1}(\bar{z}-\bar{z}_o)^{N-1} + C_1'(z-z_o)(\bar{z}-\bar{z}_o) + $$
$$+ K'\ln(z-z_o)(\bar{z}-\bar{z}_o) - i(N-2)\nu \ln\frac{z-z_o}{\bar{z}-\bar{z}_o} \quad ,$$

pri čemu je umesto kompleksne konstante K stavljen njen realan deo K' jer je funkcija ψ realna . Dobijeno rešenje zadovoljava sve postavljene uslove .

6° Radi lakše analize rešenja (67) pomera se početak koordinatnog sistema u tačku z_o . Ako se, zatim ,uvedu polarne koordinate r i Θ ,onda se izraz (67) može napisati kao

$$(68) \qquad \psi = \frac{C'}{(N-1)^2(N-2)^2} r^{2N-2} + C_1'r^2 + 2K'\ln r +$$
$$+ 2(N-2)\nu\,\Theta \ .$$

Radijalna i kružna brzina iznose

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\Theta} = 2(N-2)\frac{\nu}{r} \ ,$$

(69)

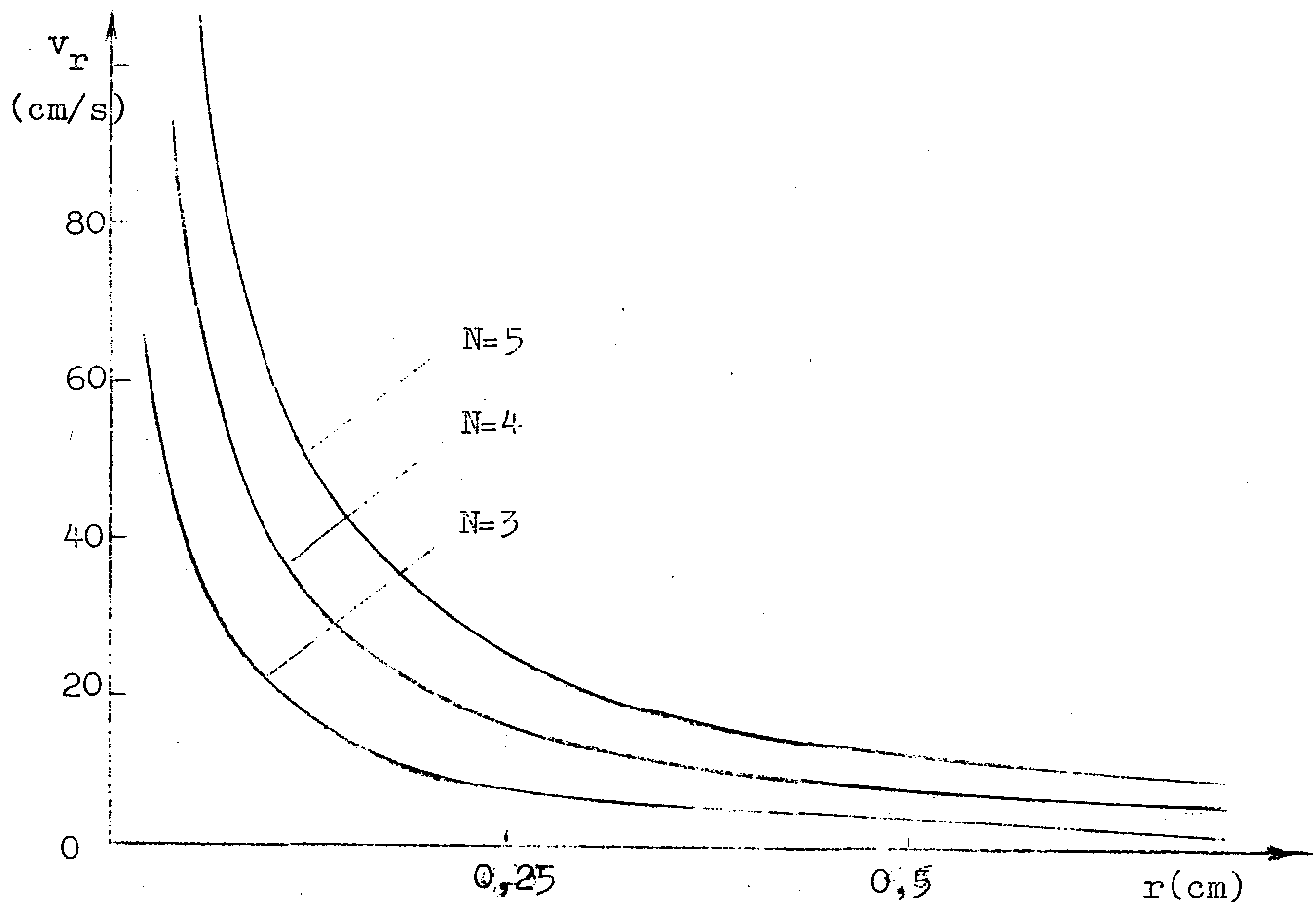
$$v_\Theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -\frac{2C'}{(N-1)(N-2)^2}\, r^{2N-3} - 2C_1' r - 2\frac{K}{r} \ ,$$

odakle se vidi da je ispunjen uslov njihove uniformnosti u celom fluidnom prostoru.

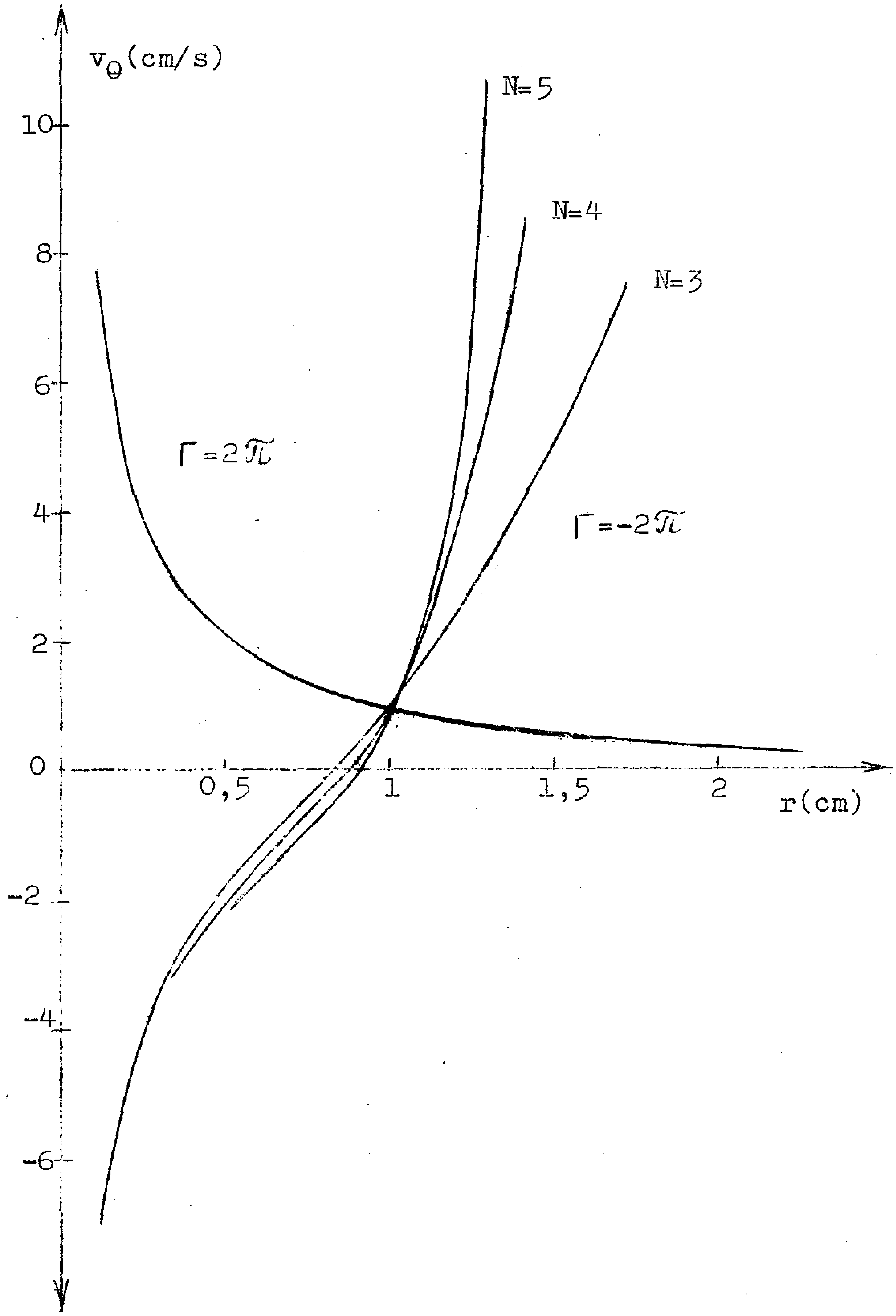
Do rešenja (68) za strujnu funkciju Ψ došao je Jeffery u citiranom radu[11], polazeći od predpostavke da je vrtlog funkcija potega r a da ne zavisi od polarnog ugla Θ. Izvodjenje posredstvom neanalitičnih funkcija, koje je ovde primenjeno, dovodi do istog rezultata uz predpostavku da je N-to odstupanje kompleksne brzine od analitičnosti jednako nuli. Zato su ove dve predpostavke ekvivalentne i kao jedino rešenje javlja se slučaj kada je vrtlog srazmeran nekom stepenu potega r sa tačnošću do aditivne konstante. Treba zapaziti da konstanta N nije ovde apstraktna matematička konstanta kao konstanta B kod Jeffery-a. Naime, konstanta N ima fizičko značenje i predstavlja red odstupanja kompleksne brzine od analitičnosti i zato je moguće vršiti uporedjivanje raznih strujanja zavisno od njihovog odstupanja od potencijalnog strujanja za koje je kompleksna brzina analitična funkcija. Primećuje se da je konstanta C_1' u mnogim slučajevima jednaka nuli što proizlazi iz uslova da pritisak mora da bude uniformna funkcija u fluidnom prostoru. U daljoj analizi rezultata uzeće se da je ova konstanta jednaka nuli.

Strujnice odredjene izrazom (68) su spiralnog oblika, jer prvi članovi odgovaraju kruženju fluidnih delića po koncentričnim krugovima a poslednji član daje strujanje iz izvora duž polupravih koje prolaze kroz tačku z_0. Kako je konstanta K' potpuno proizvoljna, a može da bude jednaka i nuli, to se posmatranom vrtložnom strujanju može dodati potencijalni vrtlog proizvoljne cirkulacije a da uslov kompatibilnosti bude ispunjen. Medjutim, potencijalni izvor uvek postoji jer je $N > 2$, i njegova izdašnost zavisi od reda odstupanja kompleksne brzine od analitičnosti. Ukoliko je red odstupanja kompleksne brzine od analitičnosti veći utoliko je izdašnost izvora veća.

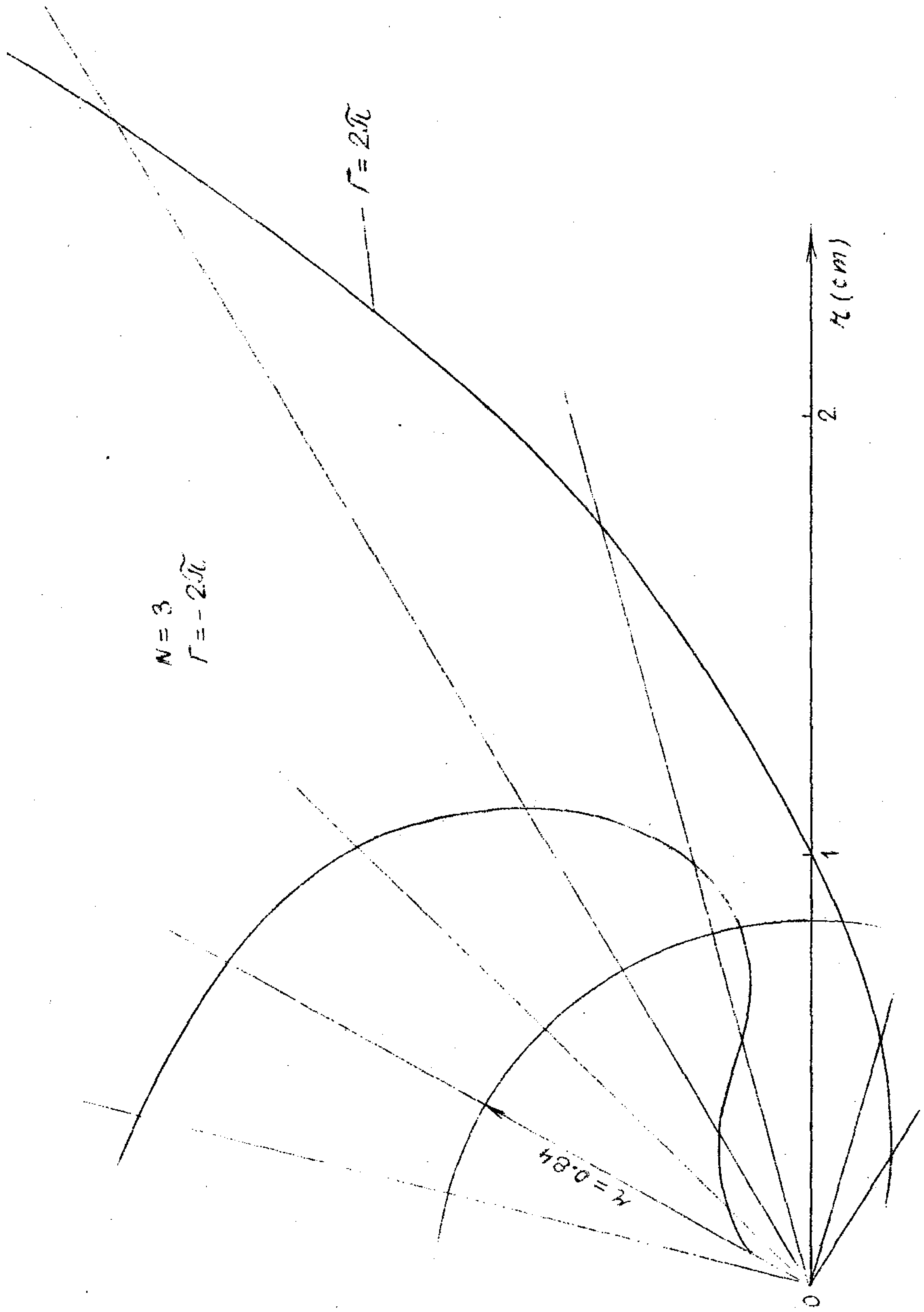
Iz izraza (69) za projekcije brzine, vidi se da radijalna brzina opada a da kružna brzina raste kad se rastojanje od izvora povećava, tako da strujanje u beskonačnosti teži da postane kružno. Sa slike 1 i 2 , koje prikazuju promenu projekcija v_r i v_θ u zavisnosti od potega r i reda odstupanja N , vidi se da na istom rastojanju od izvora obe projekcije brzine rastu kad se red odstupanja povećava. Kako radijalna brzina raste linearno sa N a kružna eksponencijalno, to za veće vrednosti N strujnice - spirale postaju sve više povijene prema unutrašnjosti u odnosu na logaritamske spirale koje odgovaraju potencijalnom strujanju. Povijanje spirala prema unutrašnjosti u odnosu na logaritamske spirale prikazano je na slici 3 za dve vrednosti broja N .



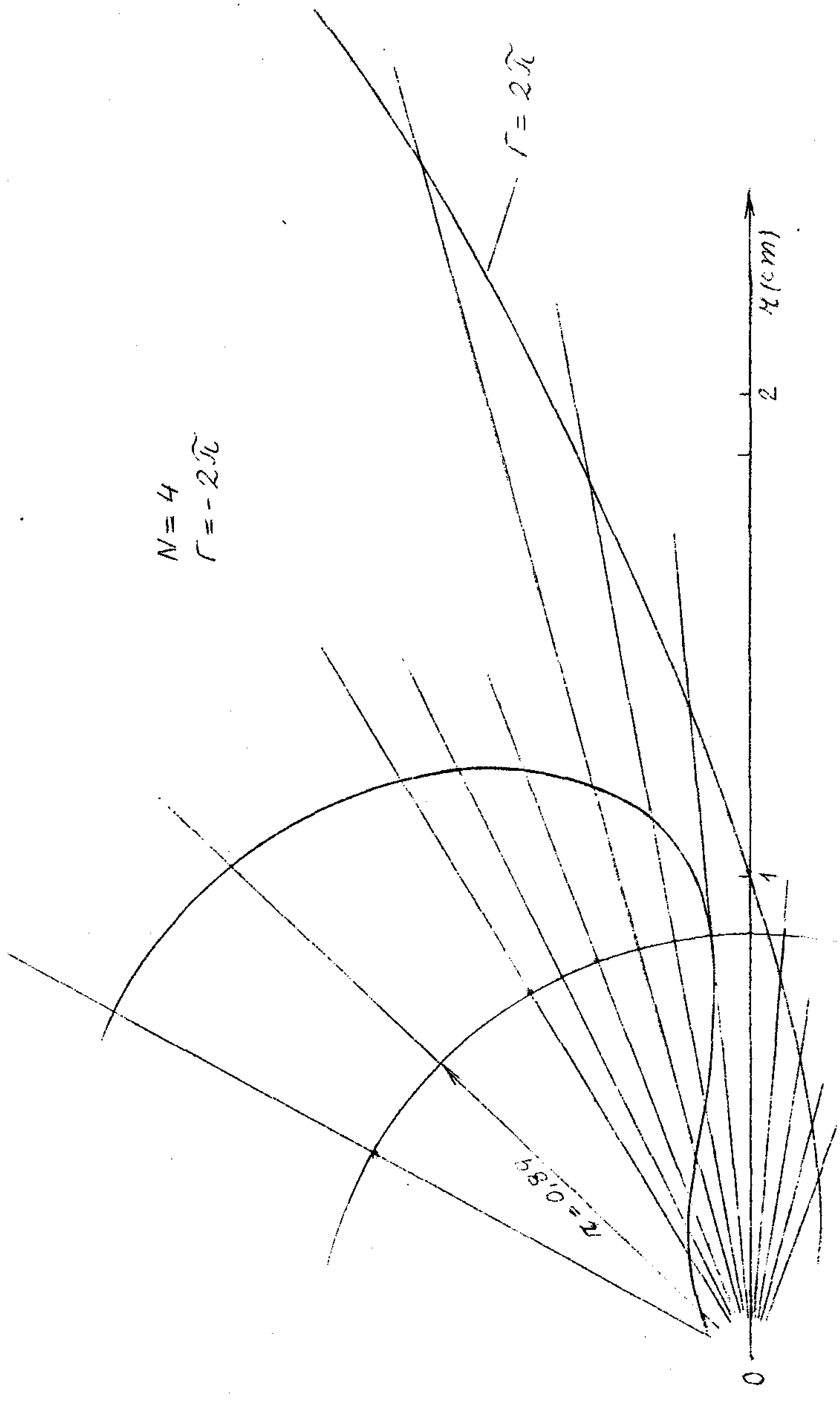
Slika 1


v_θ(cm/s)
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
N=5
N=4
N=3
$\Gamma = 2\pi$
$\Gamma = -2\pi$
0,5
1
1,5
2
r(cm)

Slika 2



Slika 3



Slika 3

Slike su nacrtane prema izrazima :

$$\psi = \frac{\Gamma - 2\pi}{4\pi(N-1)} r^{2N-2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + 2(N-2)\nu\,\theta \ ,$$

(70)

$$v_r = 2(N-2)\,\frac{\nu}{r} \ , \quad v_\theta = -\frac{\Gamma - 2\pi}{2\pi} r^{2N-3} + \frac{\Gamma}{2\pi r} \ ,$$

koji su dobijeni iz (68) i (69) odredjivanjem konstante C' iz uslova da je $v_\theta = 1$ cm/s za $r = 1$ cm. Umesto konstante $2K'$ stavljeno je $-\Gamma/2\pi$ jer član $2K' \ln r$ predstavlja potencijalni vrtlog. Za koeficijent kinematske viskoznosti uzeta je vrednost $1\ cm^2/s$. Izraz za vrtlog u ovom slučaju glasi

$$(71) \qquad 2\omega = -\frac{(\Gamma - 2\pi)(N-1)}{\pi} r^{2N-4} \ ,$$

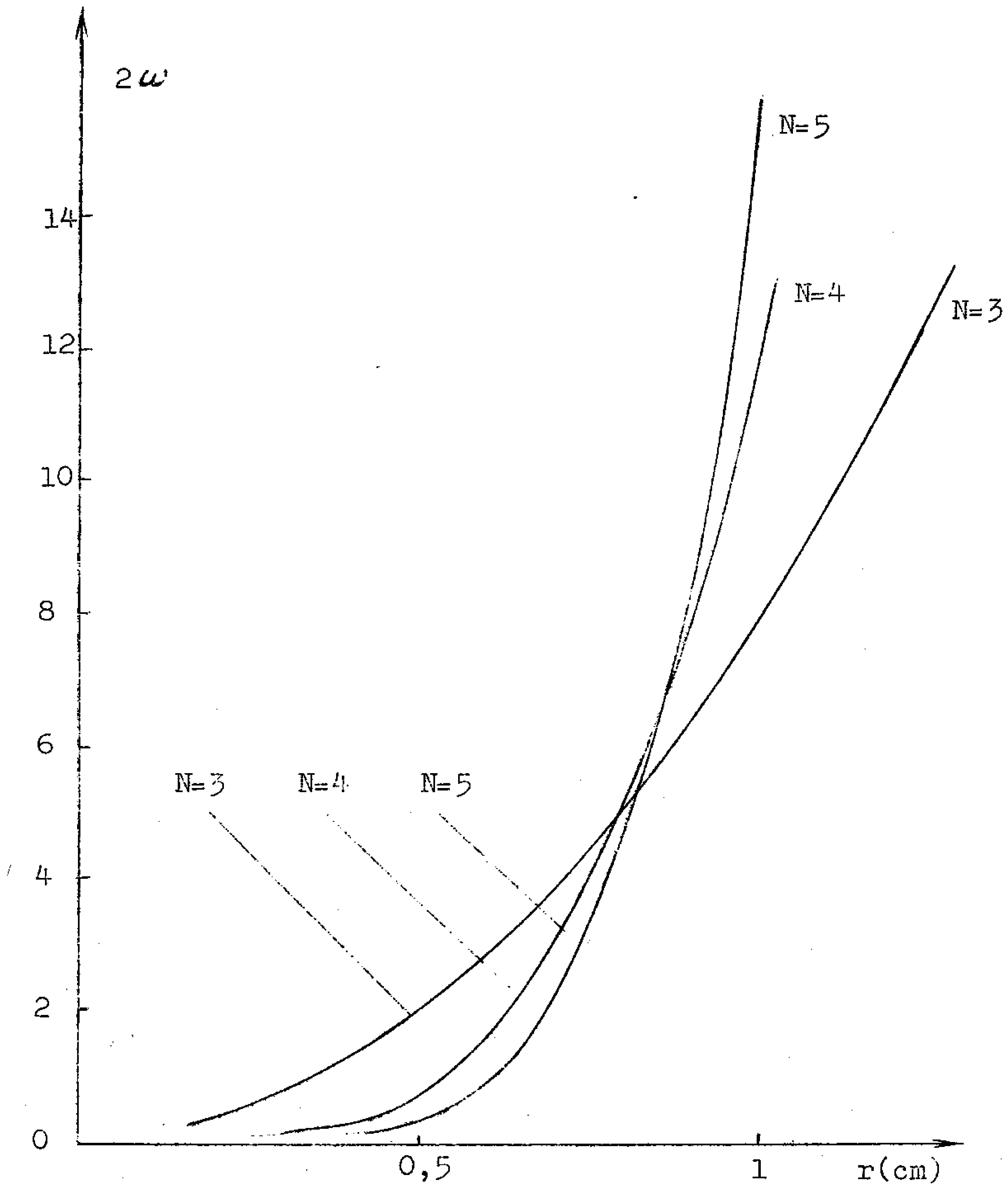
i iz njega se vidi da je strujanje potencijalno za $\Gamma = 2\pi$. Radi uporedjivanja brzinskog polja sa potencijalnim, uzeta je vrednost $\Gamma = -2\pi$ i , zatim , na priloženim slikama date su promene projekcija v_r i v_θ ,kao i položaj strujnica vrtložnog kretanja u odnosu na logaritamske spirale, za par vrednosti broja N .

Primećuje se da postoji jedna vrednost potega r za koju je v_θ jednaka nuli. Ta vrednost iznosi

$$r^{2N-2} = \frac{\Gamma}{\Gamma - 2\pi}$$

i povećava se kad N raste. U ovom slučaju je $r = 0{,}84$ cm za $N = 3$ i $r = 0{,}89$ cm za $N = 4$. Ustvari r teži ka jedinici kad N raste, ali je ne dostiže jer je N ograničeno.

Sa slika 3, na kojima su date samo po jedna strujnica potencijalnog i vrtložnog strujanja, vidi se da se strujnice vrtložnog strujanja dvojako ponašaju s obzirom na vrednost r za koji je $v_\theta = 0$. Kada je $r > 0{,}84$ cm, odnosno $r > 0{,}89$ cm, strujnice vrtložnog strujanja sve više odstupaju od strujnica potencijalnog strujanja što je vrednost broja N veća. Suprotno ovome, za vrednosti r koje su niže od ovih, strujnice vrtložnog strujanja se sve više prižavaju po svojoj formi strujnicama potencijalnog strujanja što vrednost potega manja. Iz izraza (71) za vrtlog i dijagrama na ci 4 vidi se da vrednost vrtloga raste kad se N povećava sa za r koje je veće od 0,84 cm odnosno 0,89 cm. Intenzitet vrga opada kad N raste za vrednosti r koje su manje od gornjih.



Slika 4

Primećuje se da je izraz (68) za strujnu funkciju ψ izveden uz uslov da je red odstupanja kompleksne brzine od analitičnosti N ceo broj i veći od 2 , jer za $N=0$ fluid miruje, za $N=1$ funkcija ψ je harmonijska i strujanje je potencijalno, a za $N=2$ vrtlog 2ω je konstantnog intenziteta što znači da se vrtložnom strujanju može dodati proizvoljno potencijalno strujanje. Medjutim, mogućno je odbaciti uslov da je N-to odstupanje kompleksne brzine od analitičnosti jednako nuli, jer izraz (68) za funkciju ψ zadovoljava uslov kompatibilnosti dinamičkih jednačina za ma kakve realne vrednosti konstante N . Ako se ostave po strani pozitivne vrednosti N kao već proučeni slučajevi, onda su od interesa vrednosti $N<0$ jer one odredjuju raspored brzine koji je fizički opravdaniji. Naime, za $N<0$ brzina opada kada se rastojanje od tačke z_0 povećava i isčezava u beskonačnosti. Istovremeno potencijalni izvor postaje ponor. Takodje i intenzitet vrtloga opada kada se poteg r povećava.

7° Ako se podje od izraza (64) za vrtlog, kako je to učinio Jeffery, onda se može dobiti jedno specijalno rešenje za ψ koje odgovara vrednosti $N=1$. Kad se u (64) stavi $k_0=0$ i $N=1$ dobija se

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{C'}{(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)} + C_1'$$

odakle se lako nalaze parcijalni izvodi funkcije ψ koji su potrebni za analizu uslova kompatibilnosti :

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{C'}{z-z_0}\ln(\bar{z}-\bar{z}_0) + C_1'(\bar{z}-\bar{z}_0) + a_0'(z) ,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = \frac{C'}{\bar{z}-\bar{z}_0}\ln(z-z_0) + C_1'(z-z_0) + b_0'(\bar{z}) ,$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}} = -\frac{C'}{(z-z_0)^2(\bar{z}-\bar{z}_0)} ,$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial z\partial\bar{z}^2} = -\frac{C'}{(z-z_o)(\bar{z}-\bar{z}_o)^2} \quad ,$$

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} = \frac{C'}{(z-z_o)^2(\bar{z}-\bar{z}_o)^2} \quad .$$

Ako se ovi izrazi unesu u uslov kompatibilnosti (39), onda se posle sredjivanja dobija

$$C'\ln(z-z_o)-(z-z_o)a_o'(z)+i\nu = C'\ln(\bar{z}-\bar{z}_o)-(\bar{z}-\bar{z}_o)b_o'(\bar{z})-i\nu \quad ,$$

odnosno

$$a_o'(z) = C'\frac{\ln(z-z_o)}{z-z_o} - \frac{K'-i\nu}{z-z_o} \quad ,$$

$$b_o'(\bar{z}) = C'\frac{\ln(\bar{z}-\bar{z}_o)}{\bar{z}-\bar{z}_o} - \frac{K'+i\nu}{\bar{z}-\bar{z}_o} \quad ,$$

jer se obe strane gornje jednačine mogu izjednačiti sa proizvoljnom konstantom K'. Posle integriranja izlazi da su

$$a_o(z) = \frac{C'}{2}\ln^2(z-z_o) - (K'-i\nu)\ln(z-z_o) \quad ,$$

$$b_o(\bar{z}) = \frac{C'}{2}\ln^2(\bar{z}-\bar{z}_o) - (K'+i\nu)\ln(\bar{z}-\bar{z}_o) \quad .$$

Strujna funkcija ψ odredjuje se integriranjem prvih izvoda $\partial\psi/\partial z$ i $\partial\psi/\partial\bar{z}$, što dovodi do jednačine

$$\psi = \frac{C'}{2}\ln^2(z-z_o)(\bar{z}-\bar{z}_o) + C_1'(z-z_o)(\bar{z}-\bar{z}_o) - $$

$$- K'\ln(z-z_o)(\bar{z}-\bar{z}_o) - i\nu\ln\frac{z-z_o}{\bar{z}-\bar{z}_o} \quad .$$

Pomeranjem koordinatnog početka u tačku z_o i uvodjenjem polarnih koordinata r i θ dolazi se do sledećeg izraza za ψ :

$$\psi = 2C'\ln^2 r + C_1'r^2 - 2K'\ln r - 2\nu\theta \quad ,$$

odakle se nalaze projekcije brzine kao

$$v_r = -\frac{2\nu}{r} \quad , \quad V_\theta = 2C_1'r + \frac{2}{r}(K' - 2C'\ln r) \quad .$$

8° Predložena metoda može korisno da posluži za rešavanje raznih zadataka iz vrtložnog strujanja kako savršenog tako i viskoznog fluida. Ona omogućuje da se nadju veoma jednostavni izrazi za razne veličine koje karakterišu strujanja. Na primer, za iznalaženje pritiska iz jednačina (32) potrebno je izračunati kvadrat brzine koji se javlja kao

$$v^2 = 4 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}$$

i može se lako naći posredstvom izraza (66) .

Normalni i tangentni napon se izražavaju posredstvom izvoda strujne funkcije ψ po promenljivim z i $\bar{z}$ kao

$$p_x + p = 2 \varrho \nu \frac{\partial v_x}{\partial x} = 2 \varrho \nu \, i \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} \right) ,$$

$$p_y + p = 2 \varrho \nu \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2 \varrho \nu \, i \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} \right) ,$$

$$\tau_{xy} = \varrho \nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = -2 \varrho \nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} \right) .$$

Izraz za disipaciju energije, koja se javlja pri strujanju viskoznog fluida,

$$E_d = \varrho \nu \left[2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right] ,$$

posle uvodjenja izvoda funkcije ψ po promenljivim z i $\bar{z}$ svodi se na sledeći oblik

$$E_d = 16 \varrho \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} ,$$

i za funkciju ψ datu jednačinom (67) iznosi

$$E_d = \frac{16 \varrho \nu}{r^4} \left\{ \left[\frac{C'}{(N-1)(N-2)} r^{2N-2} - K' \right]^2 + (N-2)^2 \nu^2 \right\} .$$

Dakle, i disipativna energija raste pri istom potegu r kad se red odstupanja kompleksne brzine od analitičnosti povećava.

Oseen-ove jednačine

1° Iz predhodnog izlaganja vidi se da je do danas nadjen relativno mali broj tačnih rešenja Navier-Stokes-ovih jednačina. Teškoće koje se javljaju prilikom njihovog rešavanja velike su i najčešće nepremostive. Zbog toga se prišlo uprošćavanju ovih jednačina i stvaranju približnih jednačina kretanja viskoznog nestišljivog fluida. Uprošćavanje je izvršeno na osnovu vrednosti Reynolds-ovog broja. Ako je ovaj broj mnogo manji od jedan onda se sile inercije mogu zanemariti prema silama viskoznosti i Navier-Stokes-ove jednačine postaju linearne. Njih je uveo sam Stokes i upotrebio ih kao primer za iznalaženje polja brzine i pritiska u fluidnom prostoru kroz koji se kreće lopta malom i konstantnom brzinom. Pokazalo se da ovo rešemje odgovara stvarnosti kad se radi o strujnom polju u neposrednoj blizini oko lopte,ali je sve netačnije kad se rastojanje od lopte povećava. To je i razumljivo kad se ima u vidu da se poremećaj pri kretanju lopte sve manje ispoljuje sa porastom rastojanja i da su na nekom rastojanju od lopte sile inercije i sile viskoznosti istog reda.

Oseen je zapazio ovu pojavu i uspeo je da "poboljša" Stokes-ovo rešenje za loptu postavljajući nove jednačine kretanja koje delimično uzimaju u obzir i sile inercije. U literaturi[13] se navodi jedna metoda za rešavanje Oseen-ovih jednačina,koja se zasniva na razlaganju polja brzine na potencijalni i na vrtložni deo. U ovom delu rada koristi se za rešavanje Oseen-ovih jednačina ranije izložena metoda koja se zasniva na primeni neanalitičnih funkcija. Razume se,posmatra se ravansko ustaljeno kretanje jer su kompleksne funkcije vezane za ravan.

Oseen-ove jednačine u slučaju ravanskog ustaljenog strujanja nestišljivog fluida i jednačina kontinuiteta glase :

$$
(72) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho U \frac{\partial v_x}{\partial x} - \rho\nu \frac{\partial 2\omega}{\partial y} \quad ,\\
\frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho U \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho\nu \frac{\partial 2\omega}{\partial x} \quad ,\\
\operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad ,
\end{aligned}
$$

gde je U konstantna brzina fluida u beskonačnosti koja ima pravac x-ose,a ostale veličine imaju značenje kao i ranije. Prve dve jednačine sistema (72) pokazuju da vrtlog 2ω mora da zadovoljava uslov kompatibilnosti

$$(73) \qquad 2\omega = \frac{Re}{L} \frac{\partial 2\omega}{\partial x}$$

gde je $Re = UL/\nu$ i L neka karakteristična dužina u strujnom polju. Treća jednačina je zadovoljena strujnom funkcijom ψ ,pri čemu je $2\omega = -\Delta\psi$. Zato se uslov kompatibilnosti može napisati kao

$$(74) \qquad \Delta\Delta\psi = \frac{Re}{L} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} \ .$$

Dakle,problem se svodi na iznalaženje strujne funkcije ψ iz jednačine (74). Razume se,i ova jednačina je u opštem slučaju nerešiva i danas su poznata samo neka njena partikularna rešenja od kojih je i ono koje je Oseen dobio za kretanje lopte. U ovom delu rada se takodje traže partikularna rešenja jednačine (74) korišćenjem teorije o odstupanju brzinskog polja viskoznog fluida od Laplaceovog polja,koje odgovara potencijalnom strujanju.nestišljivog fluida.

2° Sad će se posmatrati ψ kao funkcija promenljivih $z=x+iy$ i $\bar{z}=x-iy$ i jednačina (74) transformisati na oblik

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} = \frac{Re}{4L} \left(\frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}} + \frac{\partial^3\psi}{\partial z\partial\bar{z}^2} \right) .$$

Ako se uvedu nove promenljive $z_1 = \frac{Re}{4L} z$ i $\bar{z}_1 = \frac{Re}{4L}\bar{z}$, onda se gornja jednačina može napisati kao

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial z_1^2 \partial \bar{z}_1^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial z_1^2 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1^2} \quad . \tag{75}$$

Prema tome, i ovde je zadatak naći funkciju ψ iz jednačine (75) koja nije ni na prvi pogled prostija od jednačine (74), ali je pogodnija s obzirom na metodu koja se primenjuje za njeno rešavanje. U daljem radu će se izostaviti indeks 1, ali će se o tome voditi računa prilikom povratka na promenljive z i $\bar{z}$ u samom rešenju. Od funkcije ψ zahteva se da, pored jednačine (75), zadovoljava i ova dva dopunska uslova :

$$\frac{\partial^{N+1} \psi}{\partial z \partial \bar{z}^N} = 0 \quad , \quad \psi(z,\bar{z}) = \bar{\psi}(\bar{z},z) \quad . \tag{76}$$

Prvi uslov pokazuje da je N-to odstupanje kompleksne brzine od analitičnosti jednako nuli. Ovaj uslov predstavlja ograničenje i odredjuje takvu klasu strujanja čije polje brzine slabije ili jače odstupa od potencijalnog polja, što zavisi od reda odstupanja definisanog brojem N. Drugi uslov pokazuje da je ψ realna funkcija i ne predstavlja ograničenje već je nametnut fizičkim značenjem funkcije ψ.

Prvi uslov (76) dovodi do sledećih jednačina za parcijalne izvode funkcije ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}} &= \sum_{n=2}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a''_{n-1}(z) \quad , \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial \bar{z}^2 \partial z} &= \sum_{n=3}^{N} (n-1)(n-2)\bar{z}^{n-3} a'_{n-1}(z) \quad , \\ \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} &= \sum_{n=3}^{N} (n-1)(n-2)\bar{z}^{n-3} a''_{n-1}(z) \quad , \end{aligned} \tag{77}$$

u kojima su $a'_{n-1}(z)$ i $a''_{n-1}(z)$ prvi i drugi izvod funkcije $a_{n-1}(z)$. Primećuje se da n ide od 1 do N i donje granice u ovim sumama su pomerene zbog faktora $(n-1)$ i $(n-1)(n-2)$. To znači da je funkcija $a_o(z)$, za $N=1$, za sada proizvoljna. Što se tiče ostalih funkcija $a_{n-1}(z)$, za $n=2,3,..,N$, one će se tako odrediti da bude zadovoljena jednačina (75) i drugi uslov (76).

Posle zamene parcijalnih izvoda (77) u jednačinu (75) i pomeranja donje granice u sumi koja počinje od $n=2$ dobija se

$$\sum_{n=3}^{N}(n-2)\left[(n-1)(a''_{n-1}-a'_{n-1})-a''_{n-2}\right]\bar{z}^{n-3}-(N-1)\bar{z}^{N-2}a''_{N-1}=0 ,$$

odakle sleduje rekurzivni sistem od $(N-1)$-e jednačine :

$$\begin{aligned} &a''_{N-1}=0 \\ (78)\qquad &(n-1)(a''_{n-1}-a'_{n-1})-a''_{n-2}=0 \qquad (n=3,4,..,N) . \end{aligned}$$

Uvodjenjem smene $k!a_k(z)=b_k(z)$ $(k=1,2,..,N-1)$ sistem (78) postaje nešto prostiji i glasi

$$\begin{aligned} &b''_{N-1}=0 \\ (79)\qquad &b''_{n-1}-b'_{n-1}-b''_{n-2}=0 \qquad (n=3,4,..,N) . \end{aligned}$$

Jednačine (79) su rekurzivne i rešenja prvih nekoliko jednačina glase :

$$\begin{aligned} &b''_{N-1}=0 \\ &b'_{N-1}=C_{N-1} \\ &b_{N-1}=C_{N-1}z+D_{N-1} \\ &b''_{N-2}=-C_{N-1} \\ (80)\qquad &b'_{N-2}=-C_{N-1}z+C_{N-2} \\ &b_{N-2}=-\tfrac{1}{2}C_{N-1}z^2+C_{N-2}z+D_{N-2} \\ &b''_{N-!}=C_{N-1}z-(C_{N-1}+C_{N-2}) \\ &b'_{N-3}=\tfrac{1}{2}C_{N-1}z^2-(C_{N-1}+C_{N-2})z+C_{N-3} \\ &b_{N-3}=\tfrac{1}{6}C_{N-1}z^3-\tfrac{1}{2}(C_{N-1}+C_{N-2})z^2+C_{N-3}z+D_{N-3} \quad . \end{aligned}$$

Na osnovu ovih nekoliko rešenja zaključuje se da su $b''_k(z)$ polinomi čiji je najviši stepen $(N-3)$. Istog su stepena i polinomi $a''_k(z)$, $(k=1,2,3,...,N-1)$.

Za dalji rad uvodi se ješ jedna smena :

$$(n-1)(n-2)a''_{n-1}(z) = d''_{n-1} \quad (n=3,4,\dots,N) \tag{81}$$

i posmatra poslednja jednačina (77) koja u razvijenom obliku glasi

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = \bar{z}^{N-3} d''_{N-1} + \bar{z}^{N-4} d''_{N-2} + \bar{z}^{N-5} d''_{N-3} + \dots + \bar{z}^{N-m-2} d''_{N-m} + \dots + \bar{z}^2 d''_4 + \bar{z}\, d''_3 + d''_2 \; . \tag{82}$$

Kako su i $d''_{n-1}(z)$ polinomi istog stepena kao i $a''_{n-1}(z)$, to se za razne vrednosti n mogu napisati sledeće jednačine :

$$
\begin{aligned}
d''_{N-1} &= 0 \\
d''_{N-2} &= {}_{N-2}K_o \\
d''_{N-3} &= {}_{N-3}K_o + {}_{N-3}K_1 z \\
d''_{N-4} &= {}_{N-4}K_o + {}_{N-4}K_1 z + {}_{N-4}K_2 z^2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
d''_{N-m} &= {}_{N-m}K_o + {}_{N-m}K_1 z + \dots + {}_{N-m}K_{N-m} z^{N-m} + \dots + {}_{N-m}K_{m-3} z^{m-3} + {}_{N-m}K_{m-2} z^{m-2} \\
&\dots\dots\dots\dots \\
d''_5 &= {}_5K_o + {}_5K_1 z + {}_5K_2 z^2 + \dots + {}_5K_{N-m} z^{N-m} + \dots + {}_5K_{N-7} z^{N-7} \\
d''_4 &= {}_4K_o + {}_4K_1 z + {}_4K_2 z^2 + \dots + {}_4K_{N-m} z^{N-m} + \dots + {}_4K_{N-7} z^{N-7} + {}_4K_{N-6} z^{N-6} \\
d''_3 &= {}_3K_o + {}_3K_1 z + {}_3K_2 z^2 + \dots + {}_3K_{N-m} z^{N-m} + \dots + {}_3K_{N-7} z^{N-7} + {}_3K_{N-6} z^{N-6} + {}_3K_{N-5} z^{N-5} \\
d''_2 &= {}_2K_o + {}_2K_1 z + {}_2K_2 z^2 + \dots + {}_2K_{N-m} z^{N-m} + \dots + {}_2K_{N-7} z^{N-7} + {}_2K_{N-6} z^{N-6} + {}_2K_{N-5} z^{N-5} + \\
&\quad + {}_2K_{N-4} z^{N-4} .
\end{aligned}
\tag{83}
$$

U diferencijalnim jednačinama (83) ima $\frac{1}{2}(N-1)(N-3)$ koeficijenta koji se mogu prikazati u obliku matrice :

$$\begin{array}{llllllll}
{}_{N-2}K_o & & & & & & & \\
{}_{N-3}K_o & {}_{N-3}K_1 & & & & & & \\
{}_{N-4}K_o & {}_{N-4}K_1 & {}_{N-4}K_2 & & & & & \\
{}_{N-5}K_o & {}_{N-5}K_1 & {}_{N-5}K_2 & {}_{N-5}K_3 & & & & \\
- - - & & & & & & & \\
{}_{N-m}K_o & {}_{N-m}K_1 & {}_{N-m}K_2 & {}_{N-m}K_3 \;\cdot\cdot & {}_{N-m}K_{N-m} \;\cdot\cdot & {}_{N-m}K_{m-3} & {}_{N-m}K_{m-2} & \\
- - - & & & & & & & \\
{}_5K_o & {}_5K_1 & {}_5K_2 & {}_5K_3 \;\cdot\cdot & {}_5K_{N-m} \;\cdot\cdot & {}_5K_{N-7} & & \\
{}_4K_o & {}_4K_1 & {}_4K_2 & {}_4K_3 \;\cdot\cdot & {}_4K_{N-m} \;\cdot\cdot & {}_4K_{N-7} & {}_4K_{N-6} & \\
{}_3K_o & {}_3K_1 & {}_3K_2 & {}_3K_3 \;\cdot\cdot & {}_3K_{N-m} \;\cdot\cdot & {}_3K_{N-7} & {}_3K_{N-6} & {}_3K_{N-5} \\
{}_2K_o & {}_2K_1 & {}_2K_2 & {}_2K_3 \;\cdot\cdot & {}_2K_{N-m} \;\cdot\cdot & {}_2K_{N-7} & {}_2K_{N-6} & {}_2K_{N-5} \;\; {}_2K_{N-4}
\end{array} \qquad (84)$$

Izraz za funkciju ψ dobija se integriranjem jednačine (82) kad se u nju predhodno ubace funkcije $d''_{n-1}(z)$ date jednačinama (83). Dakle, treba integrirati izraz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} = & {}_{N-2}K_o\bar{z}^{N-4} + \\
& +({}_{N-3}K_o+{}_{N-3}K_1 z)\bar{z}^{N-5} + \\
& +({}_{N-4}K_o+{}_{N-4}K_1 z+{}_{N-4}K_2 z^2)\bar{z}^{N-6} + \\
& +({}_{N-5}K_o+{}_{N-5}K_1 z+{}_{N-5}K_2 z^2+{}_{N-5}K_3 z^3)\bar{z}^{N-7} + \\
& + - - - - - - - - + \\
& +({}_{N-m}K_o+{}_{N-m}k_1 z+\ldots+{}_{N-m}K_{N-m}z^{N-m}+\ldots+{}_{N-m}K_{m-2}z^{m-2})\bar{z}^{N-m-2} + \\
& + - - - - - - - - + \\
& +({}_5K_o+{}_5K_1 z+{}_5K_2 z^2+\ldots+{}_5K_{N-7}z^{N-7})\bar{z}^3 + \\
& +({}_4K_o+{}_4K_1 z+{}_4K_2 z^2+\ldots+{}_4K_{N-7}z^{N-7}+{}_4K_{N-6}z^{N-6})\bar{z}^2 + \\
& +({}_3K_o+{}_3K_1 z+{}_3K_2 z^2+\ldots+{}_3K_{N-7}z^{N-7}+{}_3K_{N-6}z^{N-6}+{}_3K_{N-5}z^{N-5})\bar{z} + \\
& +({}_2K_o+{}_2K_1 z+{}_2K_2 z^2+\ldots+{}_2K_{N-7}z^{N-7}+{}_2K_{N-6}z^{N-6}+{}_2K_{N-5}z^{N-5}+{}_2K_{N-4}z^{N-4})
\end{aligned}$$

Rezultat integriranja glasi :

$$
\begin{aligned}
\Psi = {} & {}_{N-2}K_o \frac{z^2}{2} \frac{\bar{z}^{N-2}}{(N-3)(N-2)} + \qquad\qquad (85) \\
& + \left({}_{N-3}K_o \frac{z^2}{2} + {}_{N-3}K_1 \frac{z^3}{6} \right) \frac{\bar{z}^{N-3}}{(N-4)(N-3)} + \\
& + \left({}_{N-4}K_o \frac{z^2}{2} + {}_{N-4}K_1 \frac{z^3}{6} + {}_{N-4}K_2 \frac{z^4}{12} \right) \frac{\bar{z}^{N-4}}{(N-5)(N-4)} + \\
& + \left({}_{N-5}K_o \frac{z^2}{2} + {}_{N-5}K_1 \frac{z^3}{6} + {}_{N-5}K_2 \frac{z^4}{12} + {}_{N-5}K_3 \frac{z^5}{20} \right) \frac{\bar{z}^{N-5}}{(N-6)(N-5)} + \\
& + - + \\
& + \Big[{}_{N-m}K_o \frac{z^2}{2} + {}_{N-m}K_1 \frac{z^3}{6} + {}_{N-m}K_2 \frac{z^4}{12} + \cdot\cdot + {}_{N-m}K_{N-m} \frac{z^{N-m+2}}{(N-m+1)(N-m+2)} + \\
& + \cdot\cdot\cdot + {}_{N-m}K_{m-3} \frac{z^{m-1}}{(m-2)(m-1)} + {}_{N-m}K_{m-2} \frac{z^m}{(m-1)m} \Big] \frac{\bar{z}^{N-m}}{(N-m-1)(N-m)} + \\
& + - + \\
& + \Big[{}_5K_o \frac{z^2}{2} + {}_5K_1 \frac{z^3}{6} + \cdot\cdot + {}_5K_{N-7} \frac{z^{N-5}}{(N-6)(N-5)} \Big] \frac{\bar{z}^5}{20} + \\
& + \Big[{}_4K_o \frac{z^2}{2} + {}_4K_1 \frac{z^3}{6} + \cdot\cdot + {}_4K_{N-7} \frac{z^{N-5}}{(N-6)(N-5)} + {}_4K_{N-6} \frac{z^{N-4}}{(N-5)(N-4)} \Big] \frac{\bar{z}^4}{12} + \\
& + \Big[{}_3K_o \frac{z^2}{2} + {}_3K_1 \frac{z^3}{6} + \cdot\cdot + {}_3K_{N-7} \frac{z^{N-5}}{(N-6)(N-5)} + {}_3K_{N-6} \frac{z^{N-4}}{(N-5)(N-4)} + \\
& \qquad + {}_3K_{N-5} \frac{z^{N-3}}{(N-4)(N-3)} \Big] \frac{\bar{z}^3}{6} + \\
& + \Big[{}_2K_o \frac{z^2}{2} + {}_2K_1 \frac{z^3}{6} + \cdot\cdot + {}_2K_{N-7} \frac{z^{N-5}}{(N-6)(N-5)} + {}_2K_{N-6} \frac{z^{N-4}}{(N-5)(N-4)} + \\
& \qquad + {}_2K_{N-5} \frac{z^{N-3}}{(N-4)(N-3)} + {}_2K_{N-4} \frac{z^{N-2}}{(N-3)(N-2)} \Big] \frac{\bar{z}^2}{2} + \\
& + z f_1(\bar{z}) + \bar{z} F_1(z) + f_2(\bar{z}) + F_2(z) \quad .
\end{aligned}
$$

Analiza uslova kompatibilnosti (75) pokazuje da su funkcije $f_2(\bar{z})$ i $F_2(z)$ proizvoljne i da funkcije $f_1(\bar{z})$ i $F_1(z)$ moraju biti polinomi (N-1)-og stepena po $\bar{z}$ odnosno po z . Koeficijenti ovih polinoma su sastavljeni od koeficijenata matrice (84) koji ulaze urešenje (85). Medjutim, drugi uslov (76) zahteva od proizvoljnih funkcija sledeće jednakosti : $f_1(\bar{z})=\bar{F}_1(\bar{z})$ i $f_2(\bar{z})=\bar{F}_2(\bar{z})$.

Dakle, rešenje (85) za strujnu funkciju dato je u obliku polinoma po $\bar{z}$ čiji su koeficijenti polinomi po z. Stepen ovih polinoma zavisi od reda odstupanja kompleksne brzine od analitičnosti i mogu biti najviše $(N-2)$-og stepena.

Kako brzina u beskonačnosti mora biti $U=\text{const.}$ to rešenje (85) mora da se ograniči na konačan fluidni prostor na čijim je granicama brzina jednaka brzini $U=\text{const.}$

Napominje se da u rešenju (85) treba da stoji $\frac{Re}{4L}z$ i $\frac{Re}{4L}\bar{z}$ umesto z i $\bar{z}$.

Kasnije će se pokazati da poslednja četiri člana u rešenju (85) predstavljaju rešenje Stokes-ovih približnih jednačina. Zbog toga se izrazi ispred poslednja četiri člana mogu smatrati kao korekcioni članovi koji "poboljšavaju" Stokes-ovo rešenje.

3° Sad će se pokazati da koeficijenti matrice (84) nisu medjusobom nezavisni već se mogu izraziti posredstvom koeficijenata jedne vrste ili kolone. Ovo je veoma važno s obzirom na ukupni broj konstanata koji se javlja u rešenju pri odredjenoj vrednosti broja N. Ne treba gubiti iz vida da su koeficijenti matrice (84) još i kompleksne konstante. Da bi se otkrila zavisnost medju koeficijentima treba poći od jednačina

$$d''_{N-1} = 0$$

$$(n-3)(d''_{n-1} - d'_{n-1}) - d''_{n-2} = 0 \qquad (n=3,4,..,N)$$

koje sleduju iz (78) i (81). Ako se u gornjim jednačinama pomeri indeks, pri čemu se stavlja $N-m$ umesto $n-1$, dobija se

$$\begin{aligned} &d''_{N-1} = 0 \\ (86)\qquad &(N-m-2)(d''_{N-m} - d'_{N-m}) - d''_{N-m-1} = 0 \qquad (m=1,2,..,N-2)\ . \end{aligned}$$

Kako je prema (83)

$$(87)\qquad d''_{N-m} = {}_{N-m}K_o + {}_{N-m}K_1 z + {}_{N-m}K_2 z^2 + {}_{N-m}K_3 z^3 + \dots + {}_{N-m}K_{m-4} z^{m-4} + {}_{N-m}K_{m-3} z^{m-3} + {}_{N-m}K_{m-2} z^{m-2}$$

to se, posle integriranja nalazi

$$(88)\qquad d'_{N-m} = {}_{N-m}K_{-1} + {}_{N-m}K_o z + {}_{N-m}K_1 \frac{z^2}{2} + {}_{N-m}K_2 \frac{z^3}{3} + \dots + {}_{N-m}K_{m-4} \frac{z^{m-3}}{m-3} + {}_{N-m}K_{m-3} \frac{z^{m-2}}{m-2} + {}_{N-m}K_{m-2} \frac{z^{m-1}}{m-1} .$$

Najzad, ako se u (87) stavi $m+1$ umesto m dobija se

$$(89)\qquad d''_{N-m-1} = {}_{N-m-1}K_o + {}_{N-m-1}K_1 z + {}_{N-m-1}K_2 z^2 + {}_{N-m-1}K_3 z^3 + \dots + {}_{N-m-1}K_{m-4} z^{m-4} + {}_{N-m-1}K_{m-3} z^{m-3} + {}_{N-m-1}K_{m-2} z^{m-2} + {}_{N-m-1}K_{m-1} z^{m-1} .$$

Posle zamene (87), (88) i (89) u (86) i sredjivanja dolazi se do

$$(N-m-2)\Big[({}_{N-m}K_o - {}_{N-m}K_{-1}) + ({}_{N-m}K_1 - {}_{N-m}K_o) z + ({}_{N-m}K_2 - \tfrac{1}{2}\,{}_{N-m}K_1) z^2 + ({}_{N-m}K_3 - \tfrac{1}{3}\,{}_{N-m}K_2) z^3 + \dots + ({}_{N-m}K_{m-4} - \tfrac{1}{m-4}\,{}_{N-m}K_{m-5}) z^{m-4} + ({}_{N-m}K_{m-3} - \tfrac{1}{m-3}\,{}_{N-m}K_{m-4}) z^{m-3} + ({}_{N-m}K_{m-2} - \tfrac{1}{m-2}\,{}_{N-m}K_{m-3}) z^{m-2} + \tfrac{1}{m-1}\,{}_{N-m}K_{m-2} z^{m-1}\Big] - \Big[{}_{N-m-1}K_o + {}_{N-m-1}K_1 z + {}_{N-m-1}K_2 z^2 + \dots + {}_{N-m-1}K_{m-3} z^{m-3} + {}_{N-m-1}K_{m-2} z^{m-2} + {}_{N-m-1}K_{m-1} z^{m-1}\Big] = 0 ,$$

odakle, izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene po z, sledujo sistem algebarskih jednačina :

$$({}_{N-m}K_o - {}_{N-m}K_{-1})(N-m-2) = {}_{N-m-1}K_o$$

$$({}_{N-m}K_1 - {}_{N-m}K_o)(N-m-2) = {}_{N-m-1}K_1$$

$$({}_{N-m}K_2 - {}_{N-m}K_1)(N-m-2) = {}_{N-m-1}K_2$$

$$({}_{N-m}K_3 - {}_{N-m}K_2)(N-m-2) = {}_{N-m-1}K_3$$

$$({}_{N-m}K_4 - {}_{N-m}K_3)(N-m-2) = {}_{N-m-1}K_4$$

(90) $$- - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$({}_{N-m}K_{m-4} - \frac{1}{m-4}\, {}_{N-m}K_{m-5})(N-m-2) = {}_{N-m-1}K_{m-4}$$

$$({}_{N-m}K_{m-3} - \frac{1}{m-3}\, {}_{N-m}K_{m-4})(N-m-2) = {}_{N-m-1}K_{m-3}$$

$$({}_{N-m}K_{m-2} - \frac{1}{m-2}\, {}_{N-m}K_{m-3})(N-m-2) = {}_{N-m-1}K_{m-2}$$

$$(- \frac{1}{m-1}\, {}_{N-m}K_{m-2})(N-m-2) = {}_{N-m-1}K_{m-1}$$

$(m=1,2,3,\ldots,N-2)$.

Iz sistema (90) nalaze se redom koeficijenti :

$${}_{N-m}K_{m-2} = -\frac{m-1}{N-m-2}\, {}_{N-m-1}K_{m-1}$$

$${}_{N-m}K_{m-3} = -\frac{m-2}{N-m-2}\left[(m-1)\, {}_{N-m-1}K_{m-1} + {}_{N-m-1}K_{m-2}\right]$$

$${}_{N-m}K_{m-4} = -\frac{m-3}{N-m-2}\left[(m-1)(m-2)\, {}_{N-m-1}K_{m-1} + (m-2)\, {}_{N-m-1}K_{m-2} + {}_{N-m-1}K_{m-3}\right]$$

$${}_{N-m}K_{m-5} = -\frac{m-4}{N-m-2}\Big[(m-1)(m-2)(m-3)\, {}_{N-m-1}K_{m-1} +$$

$$+ (m-2)(m-3)\, {}_{N-m-1}K_{m-2} + (m-3)\, {}_{N-m-1}K_{m-3} + {}_{N-m-1}K_{m-4}\Big]$$

$$- -$$

Posle očiglednih transformacija gornje jednačine prela u

$${}_{N-m}K_{m-2} = -\frac{(m-1)!}{(N-m-2)(m-2)!}\, {}_{N-m-1}K_{m-1}$$

$${}_{N-m}K_{m-3} = -\frac{(m-1)!}{(N-m-2)(m-3)!}\, {}_{N-m-1}K_{m-1} - \frac{(m-2)!}{(N-m-2)(m-3)!}\, {}_{N-m-1}K_{m-2}$$

$${}_{N-m}K_{m-4} = -\frac{(m-1)!}{(N-m-2)(m-4)!}\, {}_{N-m-1}K_{m-1} - \frac{(m-2)!}{(N-m-2)(m-4)!}\, {}_{N-m-1}K_{m-2} -$$

$$- \frac{(m-3)!}{(N-m-2)(m-4)!}\, {}_{N-m-1}K_{m-3}$$

$${}_{N-m}K_{m-5} = -\frac{(m-1)!}{(N-m-2)(m-5)!}\, {}_{N-m-1}K_{m-1} - \frac{(m-2)!}{(N-m-2)(m-5)!}\, {}_{N-m-1}K_{m-2} -$$

$$- \frac{(m-3)!}{(N-m-2)(m-5)!}\, {}_{N-m-1}K_{m-3} - \frac{(m-4)!}{(N-m-2)(m-5)!}\, {}_{N-m-1}K_{m-4}$$

$$- -$$

Na osnovu poslednjih jednačina može se napisati opšti obrazac koji daje sve koeficijente oblika ${}_{N-m}K_{m-s}$ sadržanih u matrici (84),odnosno u rešenju (85) . Taj opšti obrazac glasi :

$$ (91) \qquad {}_{N-m}K_{m-s} = -\frac{1}{(N-m-2)(m-s)!}\sum_{j=1}^{s-1}(m-j)!\,{}_{N-m-1}K_{m-j} $$

$$ (s=2,3,\dots,m) \quad , \quad (m=2,3,\dots,N-2) \; . $$

Naime, za $s=2$ i $m=2,3,..,N-2$ obrazac (91) da je sve koeficijente glavne dijagonale matrice (84). Za $s=3$ i $m=3,4,\dots,N-2$ dobijaju se svi koeficijenti dijagonale ispod glavne dijagonale matrice (84) , itd.

Sad će se pokazati da su koeficijenti u pojedinim dijagonalama medjusobom srazmerni što znači da se svi koeficijenti matrice(84) mogu izraziti posredstvom koeficijenata samo jedne kolone ili jedne vrste. Ovde će se svi koeficijenti matrice (84),koji se nalaze iznad poslednje vrste,izraziti posredstvom koeficijenata poslednje vrste : ${}_2K_0$, ${}_2K_1$, ${}_2K_2$, ... , ${}_2K_{N-5}$, ${}_2K_{N-4}$. Ovo,na kraju,znači da levi indeks neće biti ni potreban.

Obrazac (91) za $s=2$ i $m=N-3,N-4,N-5,\dots,2$ daje :

$$ s=2 \qquad {}_{N-m}K_{m-2} = -\frac{m-1}{N-m-2}\,{}_{N-m-1}K_{m-1} $$

$$ m=N-3 \qquad {}_3K_{N-5} = -\frac{N-4}{1}\,{}_2K_{N-4} = -\frac{(N-4)!}{1!(N-5)!}\,{}_2K_{N-4} $$

$$ m=N-4 \qquad {}_4K_{N-6} = -\frac{N-5}{2}\,{}_3K_{N-5} = \frac{N-5}{2}\,\frac{N-4}{1}\,{}_2K_{N-4} = \frac{(N-4)!}{2!(N-6)!}\,{}_2K_{N-4} $$

$$ m=N-5 \qquad {}_5K_{N-7} = -\frac{N-6}{3}\,{}_4K_{N-6} = -\frac{N-6}{3}\,\frac{N-5}{2}\,\frac{N-4}{1}\,{}_2K_{N-4} = -\frac{(N-4)!}{3!(N-7)!}\,{}_2K_{N-4} $$

$$ m=N-6 \qquad {}_6K_{N-8} = -\frac{N-7}{4}\,{}_5K_{N-7} = \frac{N-7}{4}\,\frac{N-6}{3}\,\frac{N-5}{2}\,\frac{N-4}{1}\,{}_2K_{N-4} = \frac{(N-4)!}{4!(N-8)!}\,{}_2K_{N-4} $$

- -

Na osnovu ovoga može se napisati opšti obrazac koji daje koeficijente glavne dijagonale izražene posredstvom ${}_2K_{N-4}$ kao poslednjeg koeficijenta zadnje vrste. Taj obrazac glasi :

$$(92) \qquad {}_{N-m}K_{m-2}=(-1)^{N-m}\frac{(N-4)!}{(N-m-2)!\,(m-2)!}\,{}_2K_{N-4}$$

$$(m=2,3,\ldots,N-3)\ .$$

Koeficijenti druge dijagonale izražavaju se posredstvom koeficijenata ${}_2K_{N-4}$ i ${}_2K_{N-5}$ poslednje vrste i to na ovaj način :

$$s=3 \qquad {}_{N-m}K_{m-3}=-\frac{m-2}{N-m-2}\left[(m-1)\,{}_{N-m-1}K_{m-1}+{}_{N-m-1}K_{m-2}\right]$$

$$m=N-3 \qquad {}_3K_{N-6}=-\frac{N-5}{1}\left[(N-4)\,{}_2K_{N-4}+{}_2K_{N-5}\right]=-\frac{(N-5)!}{1!\,(N-6)!}\left[(N-4)\,{}_2K_{N-4}+{}_2K_{N-5}\right]$$

$$m=N-4 \qquad {}_4K_{N-7}=-\frac{N-6}{2}\left[(N-5)\,{}_3K_{N-5}+{}_3K_{N-6}\right]=\frac{(N-5)!}{2!\,(N-7)!}\left[2(N-4)\,{}_2K_{N-4}+{}_2K_{N-5}\right]$$

$$m=N-5 \qquad {}_5K_{N-8}=-\frac{N-7}{3}\left[(N-6)\,{}_4K_{N-6}+{}_4K_{N-7}\right]=-\frac{(N-5)!}{3!\,(N-8)!}\left[3(N-4)\,{}_2K_{N-4}+{}_2K_{N-5}\right]$$

$$m=N-6 \qquad {}_6K_{N-9}=-\frac{N-8}{4}\left[(N-7)\,{}_5K_{N-7}+{}_5K_{N-8}\right]=\frac{(N-5)!}{4!\,(N-9)!}\left[4(N-4)\,{}_2K_{N-4}+{}_2K_{N-5}\right]$$

- -

Dakle, opšti obrazac za koeficijente druge dijagonale, koji se izražavaju posredstvom koeficijenata ${}_2K_{N-4}$ i ${}_2K_{N-5}$, je

$$(93) \qquad {}_{N-m}K_{m-3}=(-1)^{N-m}\frac{(N-5)!}{(N-m-2)!\,(m-3)!}\left[(N-m-2)(N-4)\,{}_2K_{N-4}+{}_2K_{N-5}\right]$$

$$(m=3,4,\ldots,N-3)\ .$$

Na isti se način došlo i do opštih obrazaca za koeficijente treće, četvrte, pete i šeste dijagonale, a koji će se ovde dati bez izvodjenja. Njihov oblik je :

$$(94) \qquad {}_{N-m}K_{m-4}=\frac{(-1)^{N-m}(N-6)!}{(N-m-2)!\,(m-4)!}\left[\frac{1}{2!}(N-m-2)(N-m-1)(N-4)(N-5)\,{}_2K_{N-4}+\right.$$
$$\left.+\,(N-m-2)(N-5)\,{}_2K_{N-5}+{}_2K_{N-6}\right]$$

$$(m=4,5,\ldots,N-3)\ .$$

(95)
$$ {}_{N-m}K_{m-5} = \frac{(-1)^{N-m}(N-7)!}{(N-m-2)!(m-5)!}\Big[\frac{1}{3!}(N-m-2)(N-m-1)(N-m)\cdot $$
$$ \cdot(N-4)(N-5)(N-6)\,{}_2K_{N-4} + \frac{1}{2!}(N-m-2)(N-m-1)\cdot $$
$$ \cdot(N-5)(N-6)\,{}_2K_{N-5} + (N-m-2)(N-6)\,{}_2K_{N-6} + {}_2K_{N-7}\Big] $$

(96)
$$ {}_{N-m}K_{m-6} = \frac{(-1)^{N-m}(N-8)!}{(N-m-2)!(N-6)!}\Big[\frac{1}{4!}(N-m-2)(N-m-1)(N-m+1)\cdot $$
$$ \cdot(N-m+1)(N-4)(N-5)(N-6)(N-7)\,{}_2K_{N-4} + $$
$$ + \frac{1}{3!}(N-m-2)(N-m-1)(N-m)(N-5)(N-6)(N-7)\,{}_2K_{N-5} + $$
$$ + \frac{1}{2!}(N-m-2)(N-m-1)(N-6)(N-7)\,{}_2K_{N-6} + $$
$$ + (N-m-2)(N-7)\,{}_2K_{N-7} + {}_2K_{N-8}\Big] $$

(97)
$$ {}_{N-m}K_{m-7} = \frac{(-1)^{N-m}(N-9)!}{(N-m-2)!(m-7)!}\Big[\frac{1}{5!}(N-m-2)(N-m-1)(N-m)\cdot $$
$$ \cdot(N-m+1)(N-m+2)(N-4)(N-5)(N-6)(N-7)(N-8)\,{}_2K_{N-4} + $$
$$ +(\frac{1}{4!}(N-m-2)(N-m-1)(N-m)(N-m+1)(N-5)(N-6)\cdot $$
$$ \cdot(N-7)(N-8)\,{}_2K_{N-5} + \frac{1}{3!}(N-m-2)(N-m-1)(N-m)\cdot $$
$$ \cdot(N-6)(N-7)(N-8)\,{}_2K_{N-6} + \frac{1}{2!}(N-m-2)(N-m-1)\cdot $$
$$ \cdot(N-7)(N-8)\,{}_2K_{N-7} + (N-m-2)(N-8)\,{}_2K_{N-8} + {}_2K_{N-9}\Big] $$

Na osnovu izraza (92) do (97) može se, posle jedne duže ali nimalo teške računice, pokazati da se svi koeficijenti matrice (84) iznad poslednje vrste mogu izraziti posredstvom koeficijenata poslednje vrste kao

(98)
$$ {}_{N-m}K_{m-s} = \frac{(-1)^{N-m}}{(N-m-2)!(N-m-3)!(m-s)!}\sum_{j=0}^{s-2}\frac{(N-m+j-3)!(N+j-2-s)!}{j!}\,K_{N+j-2-s} $$

$$ (s=2,3,\dots,m)\,,\quad (m=2,3,\dots,N-2)\,,\quad N\geqslant 3\,. $$

Levi indeks kod koeficijenata ${}_2K_{N-4}$, ${}_2K_{N-5}$, .. , je izostavljen jer je sad nepotreban.

S obzirom na izvedeni obrazac (98) u rešenju (85) za strujnu funkciju Ψ može da se pojavi samo N-3 kompleksne konstante umesto $\frac{1}{2}(N-1)(N-3)$ koliko ih je u početku bilo. Primera radi, neka je red odstupanja $N=9$, pa je tada broj konstanata $N-3=6$ umesto $\frac{1}{2}(N-1)(N-3)=24$.

4° Očigledno je da se iz opšteg izraza (85) za strujnu funkciju dobijaju razna rešenja za Ψ zavisno od reda odstupanja kompleksne brzine od analitičnosti, koje je definisano pozitivnim i celim brojem $N\geqslant 3$. Tako se, na primer, za $N=3$ dobija strujna funkcija

$$\Psi = zf_1(\bar{z}) + \bar{z}F_1(z) + f_2(\bar{z}) + F_2(z)$$

koja, kako je već konstatovano, predstavlja rešenje Stokes-ovih približnih jednačina. Funkcije $f_1(\bar{z})$ i $F_1(z)$ su polinomi drugog stepena po $\bar{z}$ odnosno z, a $f_2(\bar{z})$ i $F_2(z)$ su proizvoljne ali konjugovane funkcije i predstavljaju strujnu funkciju potencijalnog strujanja. One su, upravo, rešenje Laplace-ove jednačine.

Za $N=4$ iz (85) sleduje

$$\Psi = {}_2K_0 \frac{z^2}{2}\frac{\bar{z}^2}{2} + zf_1(\bar{z}) + \bar{z}F_1(z) + f_2(z) + F_2(z) .$$

Prema (98) je ${}_2K_0=K_0$ i uslov kompatibilnosti (75) odredjuje funkcije $f_1(\bar{z})$ i $F_1(z)$ u obliku

$$F_1(z)=-\frac{1}{6}K_0z^3+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}K_0-C)z^2+C_1z+C_3$$

$$f_1(\bar{z})=-\frac{1}{6}K_0\bar{z}^3+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}K_0+C)\bar{z}^2+C_2z+C_4 .$$

Zamenom ovih funkcija u izraz za Ψ i korišćenjem uslova (76) da je Ψ realna funkcija nalaze se vrednosti konstanata :

$$K_0=K_0' \;(K_0''=0) \;,\; C=iC'' \;(C'=0) \;,\; C_4'=C_3' \;,$$
$$C_4''=-C_3'' \;,\; C_2''=-C_1'' \;,\; f_2(\bar{z})=\bar{F}_2(\bar{z}) \;,$$

tako da konačan oblik strujne funkcije Ψ, za $N=4$, glasi

$$\psi = \frac{1}{4}K_o'(z^2\bar{z}^2 - \frac{2}{3}z\bar{z}^3 - \frac{2}{3}z^3\bar{z} + z^2\bar{z} + z\bar{z}^2) +$$
$$+ \frac{1}{2}iC''(\bar{z}^2 z - z^2\bar{z}) + (C_1' + C_2')z\bar{z} + C_3'(z+\bar{z}) -$$
$$- iC_3''(z-\bar{z}) + \bar{F}_2(\bar{z}) + F_2(z) \quad .$$

Ovde je $F_2(z)$ proizvoljna analitična funkcija i ako se uzme , na primer , da je

$$F_2(z) = (C_3' - iC_3'')z \quad ,$$

što predstavlja uniformno pravolinijsko strujanje sa potencijalom brzine, onda se gornji izraz za funkciju ψ uprošćuje i postaje

$$\psi = \frac{1}{4}K_o'(z^2\bar{z}^2 - \frac{2}{3}z\bar{z}^3 - \frac{2}{3}z^3\bar{z} + z^2\bar{z} + z\bar{z}^2) + \frac{1}{2}iC''(\bar{z}^2 z - z^2\bar{z}) +$$
$$+ (C_1' + C_2')z\bar{z} = (x^2+y^2)\left[\frac{1}{12}K_o(7y^2 - x^2 + 6x) + 2C''y + (C_1' + C_2')\right] \quad .$$

Na ovaj način se mogu dobiti i ostala rešenja iz (85) za razne vrednosti konstante N . Ovde se još samo navodi rešenje za $N=5$ i ono glasi :

$$\psi = \frac{1}{4}K_o'(z^2\bar{z}^2 + \bar{z}^2 z + z^2\bar{z} + \frac{2}{3}\bar{z}^3 z - \frac{2}{3}z^3\bar{z}) +$$
$$+ \frac{i}{12}K_1''(z^3\bar{z}^2 - z^2\bar{z}^3 + \frac{1}{2}\bar{z}^4 z - \frac{1}{2}z^4\bar{z} - 2\bar{z}^3 z + 2z^3\bar{z}) +$$
$$+ \frac{i}{2}C''(\bar{z}^2 z - z^2\bar{z}) + (C_1' + C_2')z\bar{z} + C_3'(z+\bar{z}) -$$
$$- iC_3''(z-\bar{z}) + F_2(z) + \bar{F}_2(\bar{z}) \quad .$$

5° Jednačine (72) mogu se uvodjenjem strujne funkcije ψ svesti i na sledeći oblik :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\varrho\nu\Delta\psi - \varrho U \frac{\partial\psi}{\partial x}) \quad ,$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(\varrho\nu\Delta\psi - \varrho U \frac{\partial\psi}{\partial x}) \quad ,$$

koji, ustvari, predstavlja Cauchy-Riemann-ove jednačine te je

$$p + i(\varrho\nu\Delta\psi - \varrho U \frac{\partial\psi}{\partial x})$$

analitična funkcija kompleksne promenljive $z=x+iy$. Kako je ova analitična funkcija proizvoljna može se uzeti da je ona jednaka, na primer, kompleksnoj brzini nekog potencijalnog strujanja, tj. može se staviti da je

$$(99) \qquad p + i\left(\varrho\nu\Delta\psi - \varrho U\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\varrho U(V_x - iV_y) ,$$

gde su V_x i V_y projekcije brzine potencijalnog strujanja. Ako se sa $\varphi_1(x,y)$ označi potencijal ove brzine a sa $\psi_1(x,y)$ strujna funkcija potencijalnog strujanja, onda se mogu postaviti veze

$$(100) \qquad V_x = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\psi_1}{\partial y} , \qquad V_y = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial x} .$$

Konačno, iz (99) i (100) dobija se da je

$$(101) \qquad \left(p + \varrho U\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right) + i\left(\varrho U\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \varrho\nu\Delta\psi_2\right) = 0 ,$$

gde je $\psi_2 = \psi_1 - \psi$. Iz (101) sleduje

$$(102) \qquad p = -\varrho U\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} , \qquad \Delta\psi_2 = \frac{U}{\nu}\frac{\partial\psi_2}{\partial x} . \qquad (103)$$

Projekcije brzine viskoznog fluida nalaze se posredstvom izraza

$$(103) \qquad \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} , \\ v_y &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} . \end{aligned}$$

Prema tome, odredjivanje polja brzine i pritiska na ovaj način posredstvom Oseen-ovih jednačina svodi se na rešavanje Laplace-ove jednačine ($\Delta\varphi_1 = 0$) i jednačine (103).

Prenego što se predje narešavanje jednačine (103) , zapaža se da se brzina $\vec{v}$ viskoznog fluida može napisati kao

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi_1 - \left[\operatorname{grad}\psi_2 , \vec{k}\right]$$

što ne predstavlja ništa drugo nego vektor odstupanja od analitičnosti neanalitične funkcije

$$w(z,\bar{z}) = \Psi_1(x,y) + i\,\Psi_2(x,y) \ .$$

Dakle, realni deo ove neanalitične funkcije predstavlja harmonijsku funkciju a imaginarni deo zadovoljava jednačinu (103). Očigledno je da se ovde radi o jednoj specijalnoj klasi neanalitičnih funkcija o kojima je bilo reči u matematičkom delu rada i koje su obuhvaćene jednačinom (7).

6° Ako se Ψ_2 posmatra kao funkcija promenljivih z i $\bar{z}$, onda jednačina (103) postaje

$$\lambda \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}} \tag{105}$$

gde je $\lambda = \frac{4\nu}{U}$. Od funkcije Ψ_2 se zahteva, kao i ranije od funkcije Ψ, da zadovoljava jednačinu (105) i ova dva uslova :

$$\frac{\partial^{N+1} \Psi_2}{\partial z \partial \bar{z}^N} = 0 \quad , \quad \Psi_2(z,\bar{z}) = \bar{\Psi}_2(\bar{z},z) \ . \tag{106}$$

Integriranjem prvog uslova dolazi se do parcijalnih izvoda

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} &= \sum_{n=1}^{N} \bar{z}^{n-1} a'_{n-1}(z) \ , \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a_{n-1}(z) + b'_o(\bar{z}) \ , \\ \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z \partial \bar{z}} &= \sum_{n=1}^{N} (n-1)\bar{z}^{n-2} a'_{n-1}(z) \ , \end{aligned} \tag{107}$$

u kojima će se funkcije $a_{n-1}(z)$ i $b_o(\bar{z})$ odrediti tako da bude zadovoljena jednačina (105) i drugi uslov (106).

Ubacivanjem izvoda (107) u jednačinu (105) i rešavanjem dobijenog izraza po funkciji $b'_o(\bar{z})$ nalazi se

$$b_o'(\bar{z}) = \sum_{n=1}^{N}\left[(n-1)(\lambda a_{n-1}' - a_{n-1})\bar{z}^{n-2} - a_{n-1}'\bar{z}^{n-1}\right] \; . \tag{108}$$

Ovde se neće tražiti opšte rešenje za funkciju Ψ_2 već će se odmah posmatrati slučajevi za razne vrednosti N . Za $N=1$ $(B_1 = 0)$ i strujna funkcija Ψ_2 odredjuje potencijalno strujanje, a za $N=2$ vrtložno strujanje sa konstantnim vrtlogom u celom fluidnom prostoru. Naime, za $N=2$ iz (108) sleduje

$$b_o'(\bar{z}) = (\lambda a_1' - a_1 - a_o') - a_1'\bar{z}$$

a odavde da mora biti

$$a_1'(z) = k_1 \quad , \quad \lambda a_1' - a_1 - a_o' = k_o \quad ,$$

gde su k_1 i k_o konstante. Poslednja jednačina (107) za $N=2$ daje

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z \partial \bar{z}} = a_1'(z) = k_1'$$

gde je umesto kompleksne konstante k_1 stavljen njen realan deo k_1' jer ovaj izvod mora biti realan. Integriranjem poslednjeg izraza dolazi se do ostala dva izvoda potrebna za analizu uslova kompatibilnosti, odnosno jednačine (105) :

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = k_1'\bar{z} + f_1'(z) \quad , \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}} = k_1' z + f_2'(\bar{z}) \; . \tag{109}$$

Ubacivanjem ovih izvoda u (105) dolazi se do jednačine

$$\frac{1}{2}\lambda k_1' - k_1' z - f_1'(z) = -\frac{1}{2}\lambda k_1' + k_1'\bar{z} + f_2'(\bar{z}) \quad ,$$

koja će biti zadovoljena ako su

$$f_1(z) = -\frac{1}{2}k_1' z^2 + (\frac{1}{2}\lambda k_1' + C)z \quad , \quad f_2(\bar{z}) = -\frac{1}{2}k_1'\bar{z}^2 + (\frac{1}{2}\lambda k_1' - C)\bar{z} \quad ,$$

gde je C konstanta. Funkcija Ψ_2 nalazi se ponovnim integriranjem jednačina (109) u obliku :

$$\psi_2 = k_1' z\bar{z} + f_1(z) + f_2(\bar{z}) =$$
$$= -\frac{1}{2}k_1'(z-\bar{z})^2 + iC''(z-\bar{z}) + \frac{1}{2}\lambda k_1'(z+\bar{z}) =$$
$$= 2k_1'y^2 - 2C''y + \lambda k_1'x \quad ,$$

gde je umesto kompleksne konstante uzet njen imaginaran deo iC'' jer je ψ_2 realna funkcija.

Ako se harmonijska funkcija $\varphi_1(x,y)$ uzme u obliku

$$\varphi_1(x,y) = Ux + Vy$$

tada projekcije brzine, prema (104), iznose

$$v_x = U - 4k_1'y + 2C'' \quad , \quad v_y = V + \lambda k_1' \quad .$$

Može se uzeti $V = -\lambda k_1'$ tako da je $v_y = 0$, a konstante k_1' i C'' odrediti iz uslova da je $v_x = 0$ za $y=0$ i $v_x = U$ za $y=h$. Dobija se da je $k_1' = -U/4h$ i $C'' = -U/2$, pa je

$$v_x = U\frac{y}{h} \quad ,$$

što predstavlja promenu brzine izmedju dve paralelne ploče na rastojanju h, za slučaj da se jedna (na rastojanju h od ravni Oxz) kreće konstantnom brzinom U a druga (u ravni Oxz) miruje.

Uslov da je odstupanje trećeg reda jednako nuli ($N=3$, $B_3=0$) iz jednačine (108) daje

$$b_o'(\bar{z}) = [1(\lambda a_1' - a_1) - a_o'] + [2(\lambda a_2' - a_2) - a_1']\bar{z} - a_2'\bar{z}^2$$

odakle sleduje

$$-a_2' = k_2 \quad , \quad 2(\lambda a_2' - a_2) - a_1' = k_1 \quad , \quad 1(\lambda a_1' - a_1) - a_o' = k_o \quad ,$$

gde su k_2, k_1 i k_o konstante. Treća jednačina (107), posle zamene funkcija a_2' i a_1' iz gornjih jednačina, postaje

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial \bar{z}} = 2k_2(z-\bar{z}) - (2\lambda k_2 + 2C_2 + k_1) \quad .$$

Zbog realnosti ovog izvoda mora biti

$$k_2=ik_2'' \quad (k_2'=0) \quad , \quad 2\lambda ik_2''=-2iC_2''-ik_1'' \quad ,$$

tako da je

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z\partial\bar{z}} = 2ik_2''(z-\bar{z})-(2C_2'+k_1') \quad .$$

Odavde se integriranjem nalazi

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=-ik_2''(z-\bar{z})^2+(2C_2'+k_1')(z-\bar{z})+f_1'(z) \quad ,$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial\bar{z}}= ik_2''(z-\bar{z})^2-(2C_2'+k_1')(z-\bar{z})+f_2'(\bar{z}) \quad .$$

Jednačina (105) odredjuje funkcije $f_1(z)$ i $f_2(\bar{z})$ u obliku

$$f_1(z)= i\lambda k_2''z^2+\left[C-\frac{1}{2}\lambda(2C_2'+k_1')\right]z \quad ,$$

$$f_2(\bar{z})=-i\lambda k_2''\bar{z}^2-\left[C+\frac{1}{2}\lambda(2C_2'+k_1')\right]\bar{z} \quad .$$

Integriranjem predposlednjih jednačina dobija se ψ_2 kao

$$\psi_2=-\frac{1}{3}ik_2''(z-\bar{z})^3+\frac{1}{2}(2C_2'+k_1')(z-\bar{z})^2+f_1(z)+f_2(\bar{z}) \quad ,$$

koja posle zamene funkcija $f_1(z)$ i $f_2(\bar{z})$ glasi

$$\psi_2=-\frac{1}{3}ik_2''(z-\bar{z})^3+\frac{1}{2}(2C_2'+k_1')(z-\bar{z})^2+iC''(z-\bar{z})+$$
$$+i\lambda k_2''(z^2-\bar{z}^2)-\frac{1}{2}\lambda(2C_2'+k_1')(z+\bar{z}) \quad .$$

U Dekartovom sistemu je

$$\psi_2=-\frac{8}{3}k_2''y^3-2(2C_2'+k_1')y^2-2C''y-4\lambda k_2''xy-\lambda(2C_2'+k_1')x \quad .$$

Uzme li se harmonijska funkcija φ_1 u obliku

$$\varphi_1(x,y)=m(x^2-y^2) \quad ,$$

gde je m realna konstanta, tada projekcije brzine prema (104) glase

$$v_x=2mx+8k_2''y^2+4(2C_2'+k_1')y+4\lambda k_2''x+2C'' \quad , \quad v_y=-2my-4\lambda k_2''y-\lambda(2C_2'+k_1')$$

Za $2C_2'+k_1'=0$ i $2m=-4\lambda k_2''$ projekcija v_y jednaka je nuli a v_x dobija oblik

$$v_x = 8k_2''y^2 + 2C'' ,$$

u kojoj se konstante k_2'' i C'' mogu odrediti iz graničnih uslova : $v_x=U$ za $y=0$ i $v_x=0$ za $y = \pm h$. Izlazi da je $C''=0$ i $k_2''=-U/8h^2$, pa je

$$v_x = U\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$

što predstavlja raspored brzine izmedju dve paralelne ploče koje se nalaze na rastojanju $\pm h$ od ravni Oxz i nepokretne su.

Razume se, može se rešenje jednačine (103) tražiti i na drugi način. Tako se ona smenom $\psi_2(x,y)=e^{kx}f(x,y)$, gde je $k=U/2\nu$, svodi na jednačinu Helmholtz-a

$$\Delta f - k^2 f = 0 ,$$

a ova na Bessel-ovu modificiranu diferencijalnu jednačinu

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - k^2 f(r) = 0 ,$$

kad funkcija $f(x,y)$ zavisi samo od potega r $(r^2=x^2+y^2)$. Opšte rešenje modificirane Bessel-ove diferencijalne jednačine poznato je i dato je njegovim modificiranim funkcijama prve i druge vrste.

Stokes-ove jednačine

Zanemarivanjem inercijalnih sila Navier-Stokes-ove jednačine postaju linearne i za slučaj ravanskog ustaljenog strujanja nestišljivog fluida,uz odsustvo spoljašnjih sila, glase

$$(110) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \varrho \nu \Delta v_x \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varrho \nu \Delta v_y \; .$$

Ove se jednačine pripisuju Stokes-u jer ih je on prvi upotrebio kao primer za proučavanje polja brzine i pritiska u neograničenoj fluidnoj sredini kroz koju se translatorno kreće lopta malom i konstantnom brzinom. Jednačinama (110) pridodaje se još i jednačina kontinuiteta za nestišljiv fluid ,

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \; ,$$

posredstvom koje se uvodi strujna funkcija ψ ($\Delta\psi = -2\omega$), tako da se stokes-ove jednačine svode na parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$(111) \qquad \Delta\Delta\psi = \frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} = 0 \; .$$

Prema tome, strujna funkcija ψ je biharmonijska dok je pritisak harmonijska funkcija, što se može lako pokazati kad se jednačine (110) još jednom diferenciraju i , zatim , iskoristi jednačina kontinuiteta .

Poznato je da se veliki broj problema u teoriji elastičnosti svodi na parcijalnu jednačinu (111), pri čemu se umesto strujne funkcije javlja funkcija napona ili "Airy" funkcija.Zbog toga se rešavanju jednačine (111) posvetilo dosta vremena,a i danas je predmet istraživanja mnogih naučnika. Dovoljno je spomenuti radove Kolosov-a[14], Stevenson-a[15], Pompeiu-a[16], Volterra-[17], Mushelišvili-a[18], Mindlin-a[19] i drugih, pa da se vidi važnost ove jednačine u teoriji elastičnosti.

Ništa manje nije interesantna jednačina (111) i za Mehaniku fluida. Zato se i u ovom radu analiziraju neka njena rešenja. Naime, opšte rešenje jednačine (111) našao je još 1898 g. Goursat[20] u obliku

(112) $$2\Psi(z,\bar{z}) = \bar{z}\,\varphi(z) + z\,\overline{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \overline{\chi}(\bar{z})$$

gde su $\varphi(z)$ i $\chi(z)$ proizvoljne analitične funkcije, a $\overline{\varphi}(\bar{z})$ i $\overline{\chi}(\bar{z})$ njihove konjugovane vrednosti. Vidi se da je Ψ neanalitična funkcija. Njen izvod po promenljivoj z, koji predstavlja kompleksnu brzinu strujnog polja viskoznog fluida, takodje je neanalitična funkcija pa se iz opšteg rešenja (112) može izdvojiti specijalna klasa strujnih polja koja se mogu uporedjivati sa potencijalnim poljem korišćenjem ranije definisanog vektora $\overrightarrow{B}$ kao mere tog odstupanja. Naime, može se zahtevati od funkcije Ψ da zadovoljava i uslov

$$\frac{\partial^{N+1}\Psi}{\partial z\,\partial\bar{z}^{N}} = 0 \quad ,$$

tj. da je areolarni izvod reda N po promenljivoj $\bar{z}$ kompleksne brzine kao neanalitične funkcije jednak nuli. Drugim rečima, da je $(N-1)$-i izvod kompleksne brzine po promenljivoj $\bar{z}$ analitična funkcija. Analiza gornjeg uslova pokazuje da u tom slučaju funkcija $\varphi(z)$ nije proizvoljna već mora biti polinom $(N-1)$-og stepena po z. Samim tim je $\overline{\varphi}(\bar{z})$ polinom istog stepena po $\bar{z}$. Medjutim, funkcija $\chi(z)$ ostaje i dalje proizvoljna. Kako zbir $\chi(z)+\overline{\chi}(\bar{z})$ predstavlja rešenje Laplace-ove jednačine, to se vrtložnom strujanju može uvek dodati proizvoljno potencijalno strujanje i dinamičke jednačine (110) biće zadovoljene.

Ako se stavi da su

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{N} c_{n-1}z^{n-1}\quad,\qquad \overline{\varphi}(\bar{z})=\sum_{n=1}^{N}\bar{c}_{n-1}\bar{z}^{n-1}\quad,$$

onda rešenje (112) postaje

$$2\psi(z,\bar{z})=\bar{z}\sum_{n=1}^{N}c_{n-1}z^{n-1}+z\sum_{n=1}^{N}\bar{c}_{n-1}\bar{z}^{n-1}+$$

$$+\chi(z)+\bar{\chi}(\bar{z})\ .$$

U odeljku o Oseen-ovim jednačinama zapaženo je da se rešenje (85) svodi na gornje rešenje Stokes-ovih jednačina kad se na oba mesta stavi $N=3$, jer je i tamo funkcija $F_1(z)$ polinom drugog stepena po z kao i funkcija $\varphi(z)$ ovde. Medjutim, za svako celo $N>3$ kod rešenja (85) pojavljuju se dopunski članovi za koje se ono razlikuje od gornjeg rešenja za tu vrednost broja N. Zbog toga se i može uzeti da ti dopunski članovi u rešenju (85) predstavljaju korekciju Stokes-ovog rešenja kad se posmatraju ove specijalne klase strujanja. Što je red odstupanja kompleksne brzine od analitičnosti veći, to se i Oseen-ovo rešenje razlikuje od Stokes-ovog rešenja za veći broj članova.

II D E O

PRIMENA MONOGENIH KVATERNION-FUNKCIJA U MEHANICI FLUIDA

K v a t e r n i o n i .

Veličina koja predstavlja zbir skalara i vektora zove se, prema Hamilton-u (T.Andjelić[21]), kvaternion i može se napisati kao

$$(113) \qquad Q = q_o + \vec{q} \quad ,$$

gde je q_o skalarni deo kvaterniona, a $\vec{q}$ njegov vektorski deo. Iz definicije (113) sleduje : prvo, kvaternion se ne može predstaviti geometrijski i drugo, skalari i vektori mogu da se smatraju kao specijalni slučajevi kvaterniona.

Ako se sa q_x , q_y , q_z označe projekcije vektora $\vec{q}$ na ose x , y , z a sa 1 , c_x , c_y , c_z osnovne kvaternionske jedinice, onda se svaki realni kvaternion može prikazati sa

$$(114) \qquad Q = q_o + c_x q_x + c_y q_y + c_z q_z \quad .$$

Dakle, osnovne kvaternionske jedinice c_x , c_y , c_z igraju ulogu jediničnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Kvaternion je jednak nuli samo onda kad mu je jednak nuli istovremeno skalarni i vektorski deo.

Dva kvaterniona su medjusobno jednaka kad su im posebno jednaki skalarni i vektorski delovi.

Sabiranje-oduzimanje kvaterniona svodi se na sabiranje-oduzimanje njihovih skalarnih i vektorskih delova.

Množenje kvaterniona je od fundamentalnog značaja za račun sa kvaternionima. Ono je definisano tako da se kao rezultat dobija kvaternion, da množenju odgovara obrnuta operacija-deljenje i da važi zakon asocijacije. Komutativni zakon ne važi, osim u slučaju kad su vektorski delovi kvaterniona kolinearni. Proizvod dva kvaterniona definisan je kao

$$Q_1 \wedge Q_2 = q_{o1}q_{o2} + q_{o1}\vec{q}_2 + q_{o2}\vec{q}_1 + \vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2 \tag{115}$$

gde

$$\vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2 = -(\vec{q}_1\vec{q}_2) + [\vec{q}_1\vec{q}_2] \tag{116}$$

označuje kvaternionski proizvod vektora $\vec{q}_1$ i $\vec{q}_2$, koji se sastoji iz skalarnog i vektorskog dela da bi proizvod dva kvaterniona bio uvek kvaternion. Znakom $\wedge$ označeno je kvaternionsko množenje. Prema tome, u opštem slučaju je

$$Q_1 \wedge Q_2 \neq Q_2 \wedge Q_1 .$$

Na osnovu (116) može se za kvaternionsko množenje osnovnih jedinica postaviti sledeća šema :

	1	c_x	c_y	c_z
1	1	c_x	c_y	c_z
c_x	c_x	-1	c_z	$-c_y$
c_y	c_y	$-c_z$	-1	c_x
c_z	c_z	c_y	$-c_x$	-1

Tako je, na primer, $c_x \wedge c_x = -1$, $c_x \wedge c_y = c_z$ itd.

Svakom kvaternionu $Q = q_o + \vec{q}$ odgovara konjugovani kvaternion $\tilde{Q} = q_o - \vec{q}$. Lako je pokazati da je

$$Q \wedge \tilde{Q} = q_o^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = N$$

gde je N norma kvaterniona. Izraz $r = +\sqrt{N}$ naziva se, po analogiji sa vektorima i kompleksnim brojevima, modulom kvaterniona.

Ako je norma N kvaterniona jednaka jedinici, onda se kvaternion naziva jediničnim kvaternionom i može se napisati kao

$$Q_o = \cos \vartheta_o + \vec{a}_o \sin \vartheta_o ,$$

gde je $\vec{a}_o$ jedinični vektor vektorskog dela kvaterniona.

Delenje kvaterniona svodi se na množenje recipročnom vrednošću delioca. Delenje nije jednoznačno odredjeno, jer se množenje recipročnom vrednošću delioca može obaviti sa desne ili sa leve strane. Prema tome je

$$Q_1 \wedge \frac{1}{Q_2} \neq \frac{1}{Q_2} \wedge Q_1 \quad .$$

M o n o g e n e kvaternion-funkcije.

Ako su q_o, q_x, q_y, q_z realne funkcije nezavisnih promenljivih x, y, z, t onda izraz (113) ili (114) predstavlja realnu kvaternion-funkciju, hiperkompleksnu funkciju ili kompleksnu funkciju višeg reda. Pretpostavlja se da funkcije q_o, q_x, q_y, q_z imaju neprekidne izvode prvog reda. Poznato je da kvaternion-funkcije ne poseduju klasičnu analitičnost i ako neke od njih mogu imati pojedina svojstva analogna svojstvima analitičnih funkcija. Ovde se neće analizirati problem analitičnosti kvaternion-funkcija jer to nije cilj ovoga rada. Taj problem je dosta proučavan i može se naći u radovima Fueter-a[(22)], Fréchet-a[(23)], Moisil-a[(24)], Bilimovića[25], Misicu-a[(26)] i drugih. Za Mehaniku fluida i ovaj rad je važno da postoje izvesne klase kvaternion-funkcija koje mogu korisno da posluže za proučavanje prostornih strujanja fluida. To su monogene kvaternion-funkcije, monogene u smislu kako je to definisao Moisil. Naime, pod monogenom kvaternion-funkcijom u jednostruko povezanom prostoru E podrazumeva se kvaternion-funkcija, uniformna u E, koja je monogena u svim tačkama prostora E. Napominje se da pod monogenom kvaternion-funkcijom razni pisci podrazumevaju različite klase kvaternion-funkcija.

Prema Moisil-u je kvaternion-funkcija monogena ako zadovoljava uslov

$$D \wedge Q = 0 \quad , \tag{117}$$

gde je sa D označen operator kvaternionske prirode :

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + c_x \frac{\partial}{\partial x} + c_y \frac{\partial}{\partial y} + c_z \frac{\partial}{\partial z} \quad . \tag{118}$$

Ako kvaternion-funkcija ne zavisi od promenljive t , tada operator (118) dobija oblik

$$\nabla = c_x \frac{\partial}{\partial x} + c_y \frac{\partial}{\partial y} + c_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{119}$$

i analogan je Hamilton-ovom operatoru za koji važe pravila vektorske algebre i diferenciranja. Operator (119) primenjen na kvaternion-funkciju (113) dovodi do jednačine

$$\nabla \wedge Q = \text{grad } q_o - \text{div } \vec{q} + \text{rot } \vec{q}$$

koja uz uslov monogenosti, $\nabla \wedge Q = 0$,daje jednu skalarnu i jednu vektorsku jednačinu :

$$\text{div } \vec{q} = 0 \quad , \quad \text{grad } q_o + \text{rot } \vec{q} = 0 \; . \tag{120}$$

Predhodne jednačine su ekvivalentne sa ove četiri skalarne jednačine :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \; , \quad \frac{\partial q_o}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z} = 0 \; , \\ &\frac{\partial q_o}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial x} = 0 \; , \quad \frac{\partial q_o}{\partial z} + \frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y} = 0 \; . \end{aligned} \tag{121}$$

Primećuje se da je i svaka kvaternion-funkcija oblika

$$Q_1 = Q + \text{grad}\,\varphi = q_o + (\vec{q} + \text{grad}\,\varphi) \tag{122}$$

monogena ako je Q monogena i ako funkcija $\varphi(x,y,z)$ zadovoljava Laplace-ovu jednačinu. Jednačine (120) predstavljaju uslov monogenosti i za kvaternion-funkciju (122) jer je $\text{div grad}\,\varphi = 0$ i $\text{rot grad}\,\varphi = 0$. Ovo svojstvo monogenih kvaternion-funkcija može da se iskoristi za uprošćavanje njihovog vektorskog dela podesnim izborom harmonijske funkcije φ . Na primer, može se φ odrediti tako da bude $q_x=0$. Dovoljno je staviti

$$q_x = - \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

što je uvek mogućno i što odredjuje φ sa tačnošću do aditivne funkcije promenljivih y i z :

$$\varphi = - \int_0^x q_x dx + \varphi_1(y,z) .$$

Kako je $\Delta\varphi = 0$ to se iz predhodnog izraza dobija

$$- \frac{\partial q_x}{\partial x} - \int_0^x \left(\frac{\partial^2 q_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q_x}{\partial z^2} \right) dx + \Delta\varphi_1 = 0 ,$$

odakle sleduje da φ_1 mora da zadovoljava jednačinu

$$\Delta\varphi_1 = \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)_{x=o} ,$$

pošto je $\Delta q_x = 0$. Očigledno je da se tako odredjenoj funkciji φ_1 može dodati proizvoljna harmonijska funkcija promenljivih y,z.

Ako se prihvati ovo i uzme $q_x = 0$, onda izraz

$$Q = q_o(x,y,z) + c_y q_y(x,y,z) + c_z q_z(x,y,z)$$

predstavlja redukovanu kvaternion-funkciju za koju je uslov monogenosti (120) prostiji i jednačine (121) prelaze u

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 , \quad \frac{\partial q_o}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z} = 0 ,$$

(123)

$$\frac{\partial q_o}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial q_o}{\partial z} + \frac{\partial q_y}{\partial x} = 0 .$$

Generalizacija vektora $\vec{B}$ na prostor od tri dimenzije .

U prvom delu rada je analiziran i korišćen vektor $\vec{B}$ kao mera odstupanja nekog ravanskog brzinskog polja viskoznog fluida od Laplace-ovog polja. U radu K.Voronjeca[2] generalisan je vektor $\vec{B}$ na prostor od tri dimenzije i, zatim , doveden u vezu sa odstupanjem trodimenzijskog-brzinskog polja od Laplace-ovog polja. Zaista, uslovi za potencijalno strujanje nestišljivog fluida,

$$\text{rot}\,\vec{v} = 0 \quad , \quad \text{div}\,\vec{v} = 0 \quad , \tag{124}$$

pokazuju da se mogu uvesti funkcije φ, ψ_1 i ψ_2 jednačinama :

$$\vec{v} = \text{grad}\,\varphi = \left[\text{grad}\,\psi_1 \ , \ \text{grad}\,\psi_2\right] \ . \tag{125}$$

Funkcija φ predstavlja potencijal brzine,a ψ_1 i ψ_2 strujne funkcije. Upravo, ove dve poslednje odredjuju strujne površine u prostoru u čijim presecima leže strujnice.

Uvodjenjem funkcionalnih determinanata,jednačina (125) može da se napiše kao

$$\begin{gathered} v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(y,z)} \quad , \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(z,x)} \quad , \\ v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,y)} \quad . \end{gathered} \tag{126}$$

Za slučaj ravanskog strujanja je $\psi_2 = z$ a ψ_1 zavisi samo od x i y i jednačine (126) dovode do Cauchy-Riemann-ovih jednačina. Zato se jednačine (126) mogu tumačiti i kao uopštene Cauchy-Riemann-ove jednačine.

Medjutim,ako je strujanje vrtložno onda je $\text{rot}\,\vec{v} \neq 0$ i postoji samo druga jednačina (124) koja je zadovoljena izrazom

$$\vec{v} = \left[\text{grad}\,\psi_1 \ , \ \text{grad}\,\psi_2\right] \ . \tag{127}$$

Može se i u ovom slučaju sa funkcijama ψ_1 i ψ_2 povezati neka funkcija ψ, ali koja ne predstavlja potencijal brzine $\vec{v}$. Za ove tri funkcije može se obrazovati vektor analogan vektoru odstupanja kao

$$(128) \qquad \vec{B} = \text{grad}\,\varphi - [\text{grad}\,\psi_1 \,,\, \text{grad}\,\psi_2]$$

koji ima sve tri projekcije na koordinatnim osama i koji se može tumačiti kao odstupanje nekog trodimenzijskog-brzinskog polja od Laplace-ovog polja. Ako je $\vec{B}=0$ brzinsko polje je Laplace-ovo i jednačina (128) prelazi u (125).

Primećuje se da je druga jednačina (124) zadovoljena i izrazom

$$(129) \qquad \vec{v} = -\,\text{rot}\,\vec{A} \;,$$

gde je $\vec{A}$ vektorski potencijal, pa se vektor $\vec{B}$ može dati i u obliku

$$(130) \qquad \vec{B} = \text{grad}\,\varphi + \text{rot}\,\vec{A} \;.$$

Jednačina (129) ne odredjuje vektor $\vec{A}$ u potpunosti, jer se vektoru $\vec{A}$ može dodati gradijent proizvoljne funkcije ψ_3 i brzina se neće promeniti a druga jednačina (129) biće i dalje zadovoljena. Medjutim, funkcijom ψ_3 može se nametnuti neki novi uslov koji će u odredjenom momentu biti od koristi. Na primer, može se ψ_3 odrediti tako da bude

$$(131) \qquad \text{div}\,\vec{A} = 0 \;.$$

Jednačine (127) i (129) dovode do izraza

$$\vec{v} = -\,\text{rot}\,\vec{A} = [\text{grad}\,\psi_1 \,,\, \text{grad}\,\psi_2]$$

koji će biti zadovoljen kad se vektorski potencijal uzme, na primer, u obliku

$$2\vec{A} = \psi_2 \operatorname{grad} \psi_1 - \psi_1 \operatorname{grad} \psi_2 + \operatorname{grad} \psi_3 \quad .$$

Ako se zahteva da vektor $\vec{A}$ ispunjava uslov (131), onda funkcija ψ_3 mora da zadovoljava jednačinu

$$\Delta \psi_3 = \psi_1 \Delta \psi_2 - \psi_2 \Delta \psi_1 \quad .$$

Kvaternionski potencijal prostornog strujanja .

Jednačine (130) i (131) pokazuju da se vektor $\vec{B}$ može izraziti kao

$$\vec{B} = \nabla \wedge (\varphi + \vec{A}) \ , \tag{132}$$

gde je ∇ operator definisan jednačinom (119). Naime, vektor $\vec{B}$ se dobija kad se operator (119) kvaternionski primeni na kvaternion $\varphi + \vec{A}$. Razume se, pri tome mora biti zadovoljena jednačina (131). Za slučaj potencijalnog strujanja vektor $\vec{B}$ je jednak nuli i jednačina (132) pokazuje da je tada kvaternion-funkcija $\varphi + \vec{A}$ monogena u ranije prihvaćenom smislu. Po analogiji sa kompleksnim potencijalom kod ravanskog strujanja, može se kvaternion-funkcija

$$W = \varphi + \vec{A} \tag{133}$$

nazvati kvaternionskim potencijalom[27] prostornog strujanja. Ovaj potencijal igra istu ulogu pri proučavanju prostornog strujanja kao i kompleksni potencijal u slučaju ravanskog strujanja. Iz ovoga se da naslutiti da kvaternion-funkcija (133) treba da poseduje bar neka svojstva analogna svojstvima analitičnih funkcija kompleksne promenljive $x+iy$.

Dakle, za slučaj potencijalnog prostornog strujanja nestišljivog fluida mogu se napisati jednačine

$$\text{grad}\,\varphi + \text{rot}\,\vec{A} = 0 \quad , \quad \text{div}\,\vec{A} = 0 \quad , \tag{134}$$

koje se poklapaju sa jednačinama (120) kad se stavi $\varphi = q_0$ i $\vec{A} = \vec{q}$. Prema tome, na osnovu istog rezonovanja kao i tamo, može se vektoru $\vec{A}$ dodati gradijent proizvoljne harmonijske funkcije i uprostiti njegov oblik pogodnim izborom te funkcije. Na primer, može se harmonijska funkcija odrediti tako da bide projekcija A_x jednaka nuli. Jednačine (134) tada imaju oblik jednačina (123), pri čemu je $\varphi = q_0$, $A_y = q_y$, $A_z = q_z$. Ustvari, kvaternionski potencijal je redukovan na ravan i glasi

$$W = \varphi + c_y A_y + c_z A_z \quad . \tag{135}$$

Potencijal φ i projekcije A_y i A_z zavise od promenljivih x, y, z.

Kvaternionske nezavisne promenljive .

Poznato je da se Cauchy-Riemann-ove jednačine mogu izvesti na razne načine. Na primer, obrazuje se diferencijal kompleksne funkcije $w(z, \bar{z})$,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial z}\, dz + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} \quad ,$$

i , zatim , zahteva da on ne zavisi od priraštaja $d\bar{z}$. Dolazi se do uslova

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

koji je ekvivalentan sa Cauchy-Riemann-ovim jednačinama. Ovaj uslov pokazuje da je areolarni izvod funkcije $w(z, \bar{z})$ po promenljivoj $\bar{z}$ jednak nuli. Pojam areolarnog izvoda uveo je Théodoresco[28] , a prema nekimmautorima još Pompeiu ..

Ako se uvedu kvaternionske nezavisno promenljive ζ_1, ζ_2, ζ_3, koje su sa x,y,z vezane linearnim homogenim transformacijama, onda se na isti način može obrazovati diferencijal kvaternion-funkcije Q,

$$dQ = dx\,\frac{\partial Q}{\partial x} + dy\,\frac{\partial Q}{\partial y} + dz\,\frac{\partial Q}{\partial z} \quad , \tag{136}$$

i zahtevati da dQ ne zavisi, na primer, od priraštaja $d\zeta_3$. Parcijalni izvodi $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$ imaju oblik

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial q_o}{\partial x} + c_x\,\frac{\partial q_x}{\partial x} + c_y\,\frac{\partial q_y}{\partial y} + c_z\,\frac{\partial q_z}{\partial z} \; .$$

Ovaj problem je detaljno analiziran u navedenom radu[27] i ovde će se samo izložiti rezultati te analize. Za linearne homogene transformacije uzete su jednačine

$$\begin{aligned} x &= \zeta_1 a_{11} + \zeta_2 a_{12} + \zeta_3 a_{13} \\ y c_z &= \zeta_1 a_{21} + \zeta_2 a_{22} + \zeta_3 a_{23} \\ -z c_y &= \zeta_1 a_{31} + \zeta_2 a_{32} + \zeta_3 a_{33} \end{aligned} \tag{137}$$

gde su $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ konstante i biraju se tako da njihova determinanta bude različita od nule kako bi se sistem (137) mogao rešiti po ζ_1, ζ_2, ζ_3. Ako se iz (137) izračunaju diferencijali dx, dy, dz i unesu u jednačinu (136) dobiće se diferencijal kvaternion-funkcije :

$$dQ = d\zeta_1 \wedge M_1 + d\zeta_2 \wedge M_2 + d\zeta_3 \wedge M_3 \quad , \tag{138}$$

$$M_1 = a_{11}\,\frac{\partial Q}{\partial x} - a_{21}c_z \wedge \frac{\partial Q}{\partial y} + a_{31}c_y \wedge \frac{\partial Q}{\partial z} \quad ,$$

$$M_2 = a_{12}\,\frac{\partial Q}{\partial x} - a_{22}c_z \wedge \frac{\partial Q}{\partial y} + a_{32}c_y \wedge \frac{\partial Q}{\partial z} \quad ,$$

$$M_3 = a_{13}\,\frac{\partial Q}{\partial x} - a_{23}c_z \wedge \frac{\partial Q}{\partial y} + a_{33}c_y \wedge \frac{\partial Q}{\partial z} \quad .$$

Uslov da dQ ne zavisi od $d\zeta_3$ je $M_3=0$. Ako je $a_{13}=a_{23}=a_{33}=a$ izraz za M_3 se svodi na

$$M_3=-ac_x\wedge\nabla\wedge Q \quad ,$$

i biće jednak nuli ako je $\nabla\wedge Q=0$. Drugim rečima,kad je kvaternion-funkcija Q monogena onda njen diferencijal dQ neće zavisiti od priraštaja $d\zeta_3$. Ovo znači da se diferencijal monogene kvaternion-funkcije,a time i diferencijal kvaternionskog potencijala, može napisati u obliku

$$(139) \qquad dQ = d\zeta_1\wedge M_1 + d\zeta_2\wedge M_2 \; .$$

Medjutim, u pogledu daljih zaključaka treba biti oprezan jer kvaternion-funkcije nisu monogene u punom smislu te reči. Naime,izvod kvaternion-funkcije odredjen je diferencijalnim količnikom, a deljenje kvaterniona nije jednoznačno, pa se zato M_3 ne može smatrati jedinstvenim parcijalnim izvodom Q po ζ_3 .

Ovim postupkom su odredjene samo konstante $a_{13}=a_{23}=$ $=a_{33}=a$. Može se bez ograničenja uzeti $a=1$. Detaljna analiza ostalih konstanata u transformacijama (137) izvršena je u citiranom radu u kome je pokazano da se transformacije (137) mogu uzeti u obliku

$$(140) \qquad x=\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3 \quad , \quad yc_z=\zeta_1+\zeta_3 \quad , \quad -zc_y=\zeta_2+\zeta_3 \quad ,$$

odakle sleduje

$$(141) \qquad \zeta_1=x+zc_y \quad , \quad \zeta_2=x-yc_z \quad , \quad \zeta_3=-x+yc_z-zc_y \; .$$

Neke metode za konstrukciju monogenih kvaternion-funkcija.

Iz jednačina (134), koje predstavljaju uslove monogenosti kvaternion-funkcije $\varphi + \vec{A}$ u vektorskim oznakama, primenom operatora divergencije i rotora sleduje :

$$(142) \qquad \Delta\varphi = 0 \ , \ \Delta A_x = 0 \ , \ \Delta A_y = 0 \ , \ \Delta A_z = 0 \ .$$

Dakle, skalarni i vektorski deo monogene kvaternion-funkcije zadovoljava Laplace-ovu jednačinu. Prema tome, ako se raspolaže sa harmonijskim funkcijama koje zadovoljavaju jednačine (134) može se uvek formirati monogena kvaternion-funkcija, a time i kvaternionski potencijal nekog prostornog strujanja. Razume se, na ovaj način bi se dobili najopštiji oblici kvaternionskog potencijala. Specijalni oblici kvaternionskog potencijala mogu se dobiti kad se podje od izvesnih ograničenja.

U radu K.Voronjeca[27] analizirani su uslovi pod kojima će izrazi M_1 i M_2 predstavljati jedinstvene izvode kvaternion funkcije Q po ζ_1, i ζ_2, ako Q ne zavisi od ζ_3. Nadjeno je da moraju biti ispunjeni uslovi :

$$d\zeta_1 \wedge M_1 = M_1 \wedge d\zeta_1 \quad , \quad d\zeta_2 \wedge M_2 = M_2 \wedge d\zeta_2 \quad ,$$

iz kojih sleduje, uz korišćenje izraza za $M_1, M_2, d\zeta_1, d\zeta_2$, da tada kvaternion-funkcija predstavlja zbir dve funkcije od kojih jedna zavisi samo od ζ_1 a druga samo od ζ_2. Rezultat je donekle trivijalan, jer se svaka od ovih funkcija može smatrati kompleksnim potencijalom ravanskog strujanja u odgovarajućoj ravni. Očigledno je da se ovom metodom ne mogu dobiti sva prostorna strujanja sa potencijalom brzine.

Druga metoda je opštija od predhodne, ali se odnosi na konstrukciju redukovanih kvaternion-funkcija koje su date jednačinom (135). Uslovi monogenosti za redukovanu kvaternion-funkciju su prostiji jer ne sadrže jednu komponentu vektorskog dela. Pokazano je da se ovi uslovi mogu zadovoljiti sa jednom harmonijskom funkcijom, pri čemu se komponente kvaternion-funkcije dobijaju diferenciranjem te funkcije po odgovarajućim promenljivim. Ako se sa f obeleži harmonijska funkcija, onda su

$$(143) \qquad \varphi = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad A_x = 0, \quad A_y = -\frac{\partial f}{\partial z}, \quad A_z = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Funkcije φ, A_y, A_z zavise od sve tri promenljive jer je $f(x,y,z)$.

Ovim radom se prilaže još jedan postupak za konstrukciju kvaternionskog potencijala. Polazi se od toga da funkcije φ, A_x, A_y, A_z ne zavise od z. Može se lako pokazati, kad se jednačine (134) napišu u skalarnom obliku, da je tada potrebno poznavati dve harmonijske funkcije u ravni. Jedna je $\varphi(x,y)$ a druga, proizvoljna, $F(x,y)$, pri čemu je

$$(144) \qquad A_x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad A_y = -\frac{\partial F}{\partial x},$$

dok se A_z dobija integriranjem Cauchy-Riemann-ovih jednačina :

$$(145) \qquad \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Dakle, u ovom slučaju su $A_y + iA_x$ i $A_z + i\varphi$ analitične funkcije kompleksne promenljive $x+iy$. Kvaternionski potencijal je

$$(146) \qquad W = \varphi + c_x A_x + c_y A_y + c_z A_z .$$

PRIMENA MONOGENIH-KVATERNION-FUNKCIJA U STRUJANJU SA POTENCIJALOM VRTLOGA

Svojstva strujanja sa potencijalom vrtloga.

Poznato je da se Navier-Stokes-ove jednačine u vektorskom obliku razlikuju od Euler-ovih jednačina za član

$$\nu \Delta \vec{v} = \nu(\text{grad div } \vec{v} - \text{rot rot } \vec{v})$$

koji je u ovom slučaju jednak nuli jer je

$$\text{rot } \vec{v} = - \text{grad } \phi \quad , \tag{147}$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad . \tag{148}$$

S obzirom da viskoznost ne ulazi ni u jednu ovu kinematičku jednačinu izlazi da strujanja sa potencijalom vrtloga odredjuju iste jednačine bez obzira da li se posmatra neviskozan ili viskozan fluid. Razume se, granični uslovi se razlikuju u ova dva slučaja i njihovo zadovoljenje ostaje jednim od najtežih problema u Mehanici fluida.

Primećuje se da je član $\nu \Delta \vec{v}$ jednak nuli i kad brzina ima potencijal, pa na prvi pogled izgleda da se potencijalna strujanja odnose istovremeno i na strujanja viskoznog fluida i na strujanja neviskoznog fluida. Medjutim, potencijal brzine za slučaj neviskoznog fluida potpuno je odredjen Laplace-ovom jednačinom i uslovom da su na površini tela medjusobno jednake normalne projekcije brzine fluidnih delića i odgovarajućih tačaka tela. Tangentne projekcije brzine ne moraju biti jednake, jer delići neviskoznog fluida mogu da klize po čvrstim površinama.

Suprotno ovome, delići viskoznog fluida lepe se za čvrste površine te moraju biti jednake i normalne i tangentne projekcije brzine izmedju fluidnih delića i odgovarajućih tačaka tela. Poznato je da Laplace-ova jednačina, uopšte uzev , nema takvo rešenje koje bi zadovoljilo ova dva nezavisna granična uslova. Medjutim, na osnovu ovoga ne može se unapred tvrditi da su i strujanja sa potencijalom vrtloga nemogućna. Ovde se harmonijska funkcija odnosi na vrtlog a ne na brzinu i granični uslovi nisu tako oštri, jer vrtlog na površini tela ne mora da bude jednak nuli. Naprotiv, rešeni problemi pokazuju da je vrtloženje najjače u blizini tela.

Ako se problem posmatra samo sa kinematičke tačke gledišta, onda je očigledno da jednom Laplace-ovom polju vrtloga odgovara bezbroj raznih strujanja koja se medjusobno razlikuju dopunskim potencijalnim strujanjem. Zaista, ako je $\vec{v}_1$ brzina nekog potencijalnog strujanja, onda se ona može dodati brzini $\vec{v}$ i jednačine (147) i (148) neće se promeniti. Ovo svojstvo kinematičkih jednačina, koje ujedno predstavljaju i uslove monogenosti kvaternion-funkcije $W=\phi+\vec{v}$, može da se iskoristi za izvesno uprošćavanje problema. Može se dopunska brzina $\vec{v}_1$, odnosno harmonijska funkcija koja nju odredjuje, tako izabrati da jedna od projekcija rezultujuće brzine bude jednaka nuli. Ovde se neće analizirati uslov koji tada harmonijska funkcija mora da ispuni jer je to učinjeno napred u odeljku o monogenim kvaternion-funkcijama. Tamo su posmatrane jednačine (120) koje se poklapaju sa jednačinama (147) i (148) jer je $q_0=\phi$ i $\vec{q}=\vec{v}$. Naime, u pomenutom odeljku je pokazano da se tim postupkom dolazi do redukovanih kvaternion-funkcija. Taj postupak primenjen na jednačine (147) i (148) dovodi do kvaternionskog potencijala

$$W=\phi+\vec{v}=\phi+c_y v_y+c_z v_z \quad , \tag{149}$$

koji odredjuje osnovno brzinsko polje sa potencijalom vrtloga. Dodavanjem raznih potencijalnih strujanja ovom osnovnom brzinskom polju mogu se dobiti razna trodimenzijska brzinska polja čiji vrtlozi imaju potencijal. Projekcije brzine osnovnog brzinskog polja zavise od sve tri nezavisne promenljive te je i ono prostorno i ako ima samo dve projekcije brzine. Primećuje se da se osnovno brzinsko polje poklapa sa pseudo-ravanskim strujanjem I vrste kad i ovo poslednje ima potencijal vrtloga. Naime, pod pseudoravanskim brzinskim poljem I vrste podrazumeva se polje brzine koje daje samo dve projekcije brzine, ali te projekcije zavise od sve tri promenljive.

U radu K.Voronjeca[(30)] analizirana su pseudo-ravanska strujanja I vrste sa potencijalom vrtloga i nadjen je čitav niz primera koji zadovoljavaju sve postavljene uslove.

Pseudo-ravanska strujanja II vrste sa potencijalom vrtloga.

To su strujanja kod kojih brzina ima sve tri projekcije, ali one zavise samo od dve nezavisne promenljive. Neka su

$$v_x = v_x(x,y) \;,\; v_y = v_y(x,y) \;,\; v_z = v_z(x,y) \;, \tag{150}$$

projekcije brzine pseudo-ravanskog strujanja II vrste sa potencijalom vrtloga. Uslovi monogenosti kvaternion-funkcije

$$W = \phi + \vec{v} = \phi + c_x v_x + c_y v_y + c_z v_z \tag{151}$$

u ovom slučaju dovode do jednačina

$$\begin{gathered} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \;,\; \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \;, \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \;,\; \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \;. \end{gathered} \tag{152}$$

Poslednja jednačina (152) zadovoljena je strujnom funkcijom ψ posredstvom veza

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \;,\; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \;, \tag{153}$$

a treća se svodi na $\frac{\partial\phi}{\partial z} = \Delta\psi$ odakle sleduje

$$(154) \qquad \phi = Cz + f(x,y) \quad ,$$

jer prve dve jednačine (152) zahtevaju $\Delta\psi = C$, odnosno

$$(155) \qquad \psi = \psi_1(x,y) + \frac{C}{4}(x^2+y^2) \ .$$

Ovde je ψ_1 harmonijska funkcija, a C realna konstanta. Ako je polje vrtloga ravansko ($\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$) , onda je konstanta C jednaka nuli i brzina ima potencijal u ravni Oxy.

Kako potencijal ϕ vrtloga zadovoljava Laplace-ovu jednačinu, to se iz (154) dobija da je i $f(x,y)$ harmonijska funkcija. Prema tome, za konstrukciju kvaternionskog potencijala(151, potrebno je znati dve harmonijske funkcije : $\psi_1(x,y)$ i $f(x,y)$. Tada je potencijal vrtloga odredjen jednačinom (154), a projekcije v_x i v_y brzine jednačinama (153) i (155). Projekcija v_z nalazi se integriranjem prvih dveju jednačina (152) koje se posredstvom funkcije $f(x,y)$ mogu napisati kao

$$(156) \qquad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = - \frac{\partial f}{\partial x} \ .$$

Medjutim, polje brzine mora da zadovoljava i dinamičke jednačine koje , za slučaj pseudo-ravanskog strujanja II vrste sa potencijalom vrtloga, mogu da se napišu u obliku

$$(157) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\varrho} - U\right) &= -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \ , \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\varrho} - U\right) &= \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \ , \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\varrho} - U\right) &= -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial v_z}{\partial y} \ . \end{aligned}$$

U ovim jednačinama pojedine oznake imaju isto značenje kao i ranije. Lako je pokazati da su prve dve jednačine kompatibilne jer je

ψ_1 harmonijska funkcija. Desne strane dinamičkih jednačina ne zavise od z te im leve strane moraju biti funkcije samo od x i y. Prema tome je i

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\varrho} - U\right) = F_1(x,y) \quad ,$$

odnosno

$$\frac{p}{\varrho} - U = C_1 z + F(x,y) \quad , \tag{158}$$

jer iz prvih dveju jednačina (157) sleduje $F_1(x,y)=C_1$. Funkcija $F(x,y)$, odnosno generalisani pritisak, nalazi se integriranjem prvih dveju jednačina (157) u kojima su desne strane poznate funkcije od x i y pošto se odredi funkcija $\psi(x,y)$. Konstanta C_1 može biti jednaka nuli i tada generalisani pritisak ne zavisi od z. U opštem slučaju je $C_1 \neq 0$ i treća jednačina (157), posle korišćenja (155) i (156), može da se napiše u obliku

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{C}{2}x\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \frac{C}{2}y\right)\frac{\partial f}{\partial y} = -C_1 \quad . \tag{159}$$

Odavde se vidi da $f(x,y)$ nije proizvoljna harmonijska funkcija. Ona mora da zadovoljava i linearnu parcijalnu jednačinu (159).

U specijalnom slučaju polje vrtloga može biti ravansko pa je tada $\Delta\psi = 0$, tj. strujna funkcija ψ je harmonijska. Ako još i generalisani pritisak ne zavisi od z, onda je i $C_1 = 0$ pa treća jednačina (157) dovodi do izraza

$$\frac{D(\psi,\, v_z)}{D(x,y)} = 0 \qquad \text{tj.} \qquad v_z = v_z(\psi) \ .$$

Kako je v_z harmonijska funkcija, to se iz predhodne jednačine, korišćenjem uslova $\Delta\psi = 0$, dolazi do zavisnosti

$$v_z = k\,\psi \quad , \tag{160}$$

gde je k realna konstanta.

Potencijal ϕ vrtloga se ovom prilikom dobija integriranjem jednačina (152) koje zbog (160) prelaze u

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= -\frac{\partial v_z}{\partial y} = -\frac{dv_z}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y} = -kv_x \ , \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{dv_z}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -kv_y \ .\end{aligned} \tag{161}$$

Prema tome, za konstrukciju kvaternionskog potencijala (151) potrebno je poznavati samo jednu harmonijsku funkciju : strujnu funkciju $\psi(x,y)$.

Kao primer uzima se harmonijska funkcija

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + C \quad , \quad r^2=x^2+y^2 \ ,$$

koja za slučaj potencijalnog strujanja predstavlja strujnu funkciju osamljenog vrtloga. Prema (160) je

$$v_z = -\frac{k\Gamma}{2\pi}\ln r + kC \quad .$$

Konstante Γ i C odrediće se iz graničnih uslova : $v_z=v_o$ za $r=a$ i $v_z=0$ za $r=b$. Izlazi da su

$$\frac{k\Gamma}{2\pi} = \frac{v_o}{\ln(b/a)} \quad , \quad kC = \frac{v_o \ln b}{\ln(b/a)} \quad .$$

Prema tome je

$$v_z = \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} v_o \quad .$$

Projekcije v_x i v_y nalaze se posredstvom veza

$$v_x=-v_\theta \sin\theta \quad , \quad v_y=v_\theta\cos\theta \quad ,$$

gde je v_θ kružna brzina i ima vrednost

$$v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{v_o}{k\ln(b/a)}\frac{1}{r} \quad .$$

Jednačine (161) glase :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{v_o}{\ln(b/a)} \frac{y}{x^2+y^2} ,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = - \frac{v_o}{\ln(b/a)} \frac{x}{x^2+y^2} ,$$

odakle se posle integriranja nalazi

$$\phi(x,y) = \frac{v_o}{\ln(b/a)} \text{ arc tg } \frac{x}{y} + \text{const.}$$

Ovaj primer odredjuje polje brzine, sa potencijalom vrtloga, izmedju dva koaksijalna kružna cilindra čije sevosovine poklapaju sa z-osom. Unutrašnji cilindar, prečnika a, klizi u pravcu z-ose konstantnom brzinom v_o i obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω_1, a spoljni cilindar, prečnika b, obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω_2. Odnos ugaonih brzina je

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{b}{a} \right)^2 .$$

Pseudo-osnosimetrična strujanja II vrste sa potencijalom vrtloga.

Kod ovih strujanja brzina ima sve tri projekcije, ali one zavise samo od promenljivih r i z. Prema tome je

$$v_r = v_r(r,z) \ , \quad v_\Theta = v_\Theta(r,z) \ , \quad v_z = v_z(r,z) \ .$$

Uslovi monogenosti (147) i (148) kvaternion-funkcije $W = \phi + \vec{v}$ izraženi posredstvom koordinata r i z glase :

$$(162) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\Theta)}{\partial z} = 0 \ , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\Theta} + \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \ , \\ &\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\Theta)}{\partial r} = 0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0 \ . \end{aligned}$$

Na osnovu poslednje jednačine (162) je

$$(163) \qquad v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z} \ , \quad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \ ,$$

pri čemu je $\psi = \psi(r,z)$. Ostale tri jednačine (162) daju

$$(164) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial z} \; , \quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -D^2\psi \; , \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} \; ,$$

gde je

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \; .$$

Iz jednačina (164) sleduju dva uslova njihove kompatibilnosti :

$$(165) \qquad D^2(rv_\theta) = 0 \quad , \quad D^2\psi = C = \text{const.}$$

Dinamičke jednačine pseudo-osnosimetričnog strujanja II vrste sa potencijalom vrtloga mogu se , posredstvom izraza (163) napisati u obliku

$$(166) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) &= \frac{1}{r}\frac{D(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z})}{D(r,z)} + \frac{1}{r}v_\theta^2 + \frac{\nu}{r}\frac{\partial(D^2\psi)}{\partial z} \; , \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) &= \frac{1}{r}\frac{D(\psi, rv_\theta)}{D(r,z)} + \nu D^2(rv_\theta) \; , \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) &= -\frac{1}{r}\frac{D(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r})}{D(r,z)} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial(D^2\psi)}{\partial z} \; , \end{aligned}$$

koje zbog (165) glase

$$(167) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) &= \frac{1}{r}\frac{D(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z})}{D(r,z)} + \frac{1}{r}v_\theta^2 \; , \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) &= \frac{1}{r}\frac{D(\psi, rv_\theta)}{D(r,z)} \; , \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) &= -\frac{1}{r}\frac{D(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r})}{D(r,z)} \; . \end{aligned}$$

Desne strane jednačina (167) zavise samo od r i z , te je iz druge

$$\frac{p}{\rho} - U = F_1(r,z)\theta + F_2(r,z) \; .$$

Uniformnost pritiska zahteva $F_1 = 0$, pa je konačno

$$\frac{p}{\varrho} - U = F_2(r,z) \; .$$

Zbog poslednje zavisnosti sada druga jednačina (167) daje

(168) $$rv_\Theta = F(\psi) \; .$$

Uslov kompatibilnosti prve i treće jednačine (167) glasi

(169) $$\frac{D(\psi,\ r^{-2}D^2\psi)}{D(r,z)} + \frac{2}{r}\, v_\Theta \frac{\partial v_\Theta}{\partial z} = 0 \quad ,$$

i zbog drugog uslova (165) može da se napiše kao

$$v_\Theta \frac{\partial v_\Theta}{\partial z} + Cr^{-2}\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad ,$$

odakle sleduje

$$v_\Theta^2 + \frac{2C\psi}{r^2} = h(r)$$

odnosno

(170) $$rv_\Theta = \sqrt{r^2 h(r) - 2C\psi} \quad .$$

Kad se uporede zavisnosti (168) i (170) vidi se da $r^2h(r)$ mora biti funkcija od ψ , odnosno ψ funkcija od r . Drugim rečima , mora biti i

(171) $$rv_\Theta = g(r) \quad .$$

Kako ψ zavisi samo od r , to druga jednačina (165) prelazi u običnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = C \quad ,$$

čije je rešenje

(172) $$\psi = \frac{C}{2}\, r^2 \ln r + \frac{1}{2}\left(C_1 - \frac{C}{2}\right) r^2 + C_2 \quad ,$$

gde su C_1 i C_2 integralske konstante .

Može se uzeti da je $C_2 = 0$ jer je funkcija ψ odredjena sa tačnošću do aditivne konstante. Iz (172) sleduju projekcije brzine

(173) $$v_r = 0 \quad , \quad v_z = -C \ln r - C_1 \quad .$$

Kad se izraz (171) unese u prvi uslov kompatibilnosti (165) dobija se diferencijalna jednačina

(174) $$g''(r) - \frac{1}{r} g'(r) = 0 \quad ,$$

čije je jedno od rešenja $g(r)=\text{konst.}=k$ pa je

(175) $$rv_\theta = k \; .$$

Konstante C i C_1 u izrazu za v_z mogu da se odrede iz graničnih uslova : $v_z = 0$ za $r=b$ i $v_z = v_o$ za $r=a$. Dobija se da su

$$C = \frac{v_o}{\ln(b/a)} \quad , \quad C_1 = -v_o \frac{\ln b}{\ln(b/a)} \quad ,$$

pa je

$$v_z = v_o \frac{\ln b - \ln r}{\ln b - \ln a} \quad .$$

Projekcije vrtloga glase :

$$2\omega_r = 0 \quad , \quad 2\omega_\theta = \frac{v_o}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} \quad , \quad 2\omega_z = 0 \; .$$

Medjutim, opšte rešenje jednačine (174) je

$$g(r) = \tfrac{1}{2}k_1 r^2 + k \quad ,$$

pa je

$$rv_\theta = \tfrac{1}{2}k_1 r^2 + k \; .$$

Odavde se vidi da je $rv_\theta = k$ specijalan slučaj koji se dobija iz gornjeg izraza za $k_1 = 0$. Iz uslova da je $v_\theta = a\omega_1$ za $r=a$ i $v_\theta = b\omega_2$ za $r=b$ nalaze se vrednosti konstanata :

$$\frac{1}{2}k_1 = \frac{b^2\omega_2 - a^2\omega_1}{b^2 - a^2} \quad , \quad k = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}(\omega_1 - \omega_2) \quad ,$$

pa je

$$v_\Theta = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}\left(\frac{b^2\omega_2 - a^2\omega_1}{a^2b^2}\, r + \frac{\omega_1 - \omega_2}{r} \right) .$$

Projekcije vrtloga u ovom slučaju iznose :

$$2\omega_r = 0 \quad , \quad 2\omega_\Theta = \frac{v_o}{\ln(b/a)}\frac{1}{r} \quad , \quad 2\omega_z = 2\,\frac{b^2\omega_2 - a^2\omega_1}{b^2 - a^2} .$$

Za slučaj da je $\omega_2 = 0$ $(\omega_1 = \omega)$ dobivaju se :

$$v_\Theta = \frac{a^2\omega}{b^2 - a^2}\,\frac{b^2 - r^2}{r} \quad , \quad 2\omega_r = 0 \quad , \quad 2\omega_\Theta = \frac{v_o}{\ln(b/a)}\frac{1}{r} \quad ,$$

$$2\omega_z = -\frac{2a^2\omega}{b^2 - a^2} .$$

Ovaj primer daje raspored brzina i vrtloga izmedju dva koaksijalna cilindra poluprečnika a i b ($a < b$) kad se unutrašnji pomera sa konstantnom brzinom v_o u pravcu z-ose i ujedno obrće konstantnom ugaonom brzinom ω u spoljnem cilindru koji miruje.

Pseudo-osnosimetrična strujanja I vrste sa potencijalom vrtloga.

Brzina ima dve projekcije koje zavise od promenljivih r, Θ, z. Dakle, ovde je

$$v_r = v_r(r,\Theta,z) \quad , \quad v_\Theta = 0 \quad , \quad v_z = v_z(r,\Theta,z).$$

Uslovi monogenosti (147) i (148) u ovom slučaju daju sledeće jednačine :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\Theta} = 0 \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta} + \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad ,$$

(176)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\Theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0 .$$

Na osnovu poslednje jednačine (176) može se staviti

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad , \quad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad , \tag{177}$$

u kojima je $\psi = \psi(r,\theta,z)$. Posredstvom ovih veza ostale tri jednačine (176) mogu da se napišu kao

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -D^2\psi \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\theta} \quad , \tag{178}$$

gde je D^2 operator :

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ .$$

Iz jednačina (178) sleduju uslovi kompatibilnosti :

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(D^2\psi + r^{-2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) = 0 \quad , \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(D^2\psi + r^{-2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) + 2r^{-3}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0 \ . \end{gathered} \tag{179}$$

Dinamičke jednačine za pseudo-osnosimetrična strujanja I vrste mogu se , posredstvom izraza (177) , napisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) = \frac{1}{r}\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{D(r,z)} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(D^2\psi + r^{-2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) = 2\nu r^{-2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\theta} \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) = -\frac{1}{r}\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{D(r,z)} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(D^2\psi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} .$$

Zbog uslova (179) ove se jednačine uprošćuju i postaju

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) = \frac{1}{r}\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{D(r,z)} \ , \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) = -\frac{1}{r}\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}{D(r,z)} \ , \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) = 0 \ . \end{gathered} \tag{180}$$

Treća jednačina (180) pokazuje da $\frac{p}{\varrho} - U$ ne zavisi od promenljive θ , tako da je

$$(181) \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{D(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z})}{D(r,z)}\right] = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{D(\psi, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r})}{D(r,z)}\right] = 0 \quad .$$

Uslov kompatibilnosti prve i druge jednačine (180) glasi :

$$(182) \qquad \frac{D(\psi, r^{-2}D^2\psi)}{D(r,z)} = 0 \quad .$$

Dakle, zadatak se svodi na odredjivanje funkcije $\psi(r,\theta,z)$ koja treba da zadovoljava uslove kompatibilnosti : (179),(181) i (182). Na osnovu prve jednačine (177) i (179) zaključuje se da v_r ne zavisi od θ , tj. da je

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = rv_r(r,z)$$

odakle je

$$(183) \qquad \psi = \psi_1(r,z) + \psi_2(r,\theta)$$

Ostala dva uslova (179) zbog (183) postaju

$$(184) \qquad \frac{\partial}{\partial z}(D^2\psi_1) = 0 \quad ,$$

$$(185) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(D^2\psi_1 + D^2\psi_2) + r^{-2}\frac{\partial^3\psi_2}{\partial r\partial\theta^2} = 0 \; .$$

Uslovi kompatibilnosti dinamičkih jednačina dobijaju oblik

$$(186) \qquad \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r\partial\theta} = 0$$

$$(187) \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r\partial z}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \frac{\partial\psi_1}{\partial z}(D^2\psi_2)\right] = 0$$

$$(188) \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left[r^{-2}D^2\psi_1 + r^{-2}D^2\psi_2\right]\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = 0 \quad .$$

Prema tome, treba odrediti funkcije $\psi_1(r,z)$ i $\psi_2(r,\Theta)$ tako da budu zadovoljene jednačine (184) do (188). Na primer, jedno takvo rešenje je

$$\psi = \frac{1}{2}C_1 r^2 + (C_2 \cos\Theta + C_3 \sin\Theta)r + C_4 \ .$$

Projekcije brzine i vrtloga u ovom slučaju glase :

$$v_r = 0 \quad , \quad v_\Theta = 0 \quad , \quad v_z = -(C_1 + \frac{C_2\cos\Theta + C_3\sin\Theta}{r}) \quad ,$$

$$2\omega_r = \frac{C_2\sin\Theta - C_3\cos\Theta}{r^2} \quad , \quad 2\omega_\Theta = \frac{C_2\cos\Theta + C_3\sin\Theta}{r^3} \quad ,$$

$$2\omega_z = 0 \ .$$

Kinematičke jednačine (147) i (148) strujanja sa potencijalom vrtloga su svojim oblikom sugerirale primenu monogenih kvaternion-funkcija u ovoj vrsti problema. Već na prvi pogled se lako primećuje da ove jednačine istovremeno predstavljaju i uslove monogenosti kvaternion-funkcije $Q=\emptyset+\vec{v}$. Medjutim, ove se funkcije mogu korisno upotrebiti i za proučavanje drugih prostornih strujanja koja imaju neka odredjena svojstva. U sledećem poglavlju se navodi mogućnost primene monogenih kvaternion-funkcija pri rešavanju približnih jednačina kretanja viskoznog nestišljivog fluida.

PRIMENA MONOGENIH KVATERNION-FUNKCIJA PRI REŠAVANJU PRIBLIŽNIH JEDNAČINA KRETANJA

Stokes-ovo lagano strujanje.

1° Kad je strujanje sporo a fluid veoma viskozan mogu se za odredjivanje brzine i pritiska u strujnom polju, prema Stokes-u, koristiti približne jednačine kretanja :

$$0 = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p + \nu\Delta\vec{v}\quad ,\quad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0\quad .$$

Za nestišljiv fluid je $\Delta\vec{v} = -\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = -\,\mathrm{rot}(2\vec{\omega})$, pa se prva jednačina može napisati u obliku

$$\mathrm{grad}\,\frac{p}{\rho\nu} + \mathrm{rot}(2\vec{\omega}) = 0\ . \tag{189}$$

Kako je ispunjen i uslov

$$\mathrm{div}(2\vec{\omega}) = 0\ , \tag{190}$$

to jednačine (189) i (190) pokazuju da je

$$Q = \frac{p}{\rho\nu} + 2\vec{\omega} \tag{191}$$

monogena kvaternion-funkcija. Prema tome, može se reći da svakoj monogenoj kvaternion-funkciji odgovara neko mogućno Stokes-ovo strujanje. Njen skalarni deo odredjuje pritisak a vektorski deo vrtlog u strujnom polju. Kako su komponente monogene kvaternion-funkcije harmonijske funkcije, to su zadovoljene i jednačine :

$$\Delta\left(\frac{p}{\rho\nu}\right) = \Delta(2\omega_x) = \Delta(2\omega_y) = \Delta(2\omega_z) = 0\quad . \tag{192}$$

Ranije je pokazano da se svakoj monogenoj kvaternion-funkciji može dodati gradijent proizvoljne harmonijske funkcije i ova tako izabrati da jedna od komponenata vektorskog dela kvaternion-funkcije bude jednaka nuli. Zaista, ako se sa $U(x,y,z)$ označi ta harmonijska funkcija, onda je i

$$(193)\qquad Q_1 = \frac{p}{\varrho\nu} + 2\vec{\omega} + \text{grad } U$$

monogena kvaternion-funkcija pošto je

$$(194)\qquad \begin{aligned} \text{grad } \frac{p}{\varrho\nu} + \text{rot}(2\vec{\omega} + \text{grad } U) &= 0 \\ \text{div}(2\vec{\omega} + \text{grad } U) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Jednačine (194) su istovetne sa jednačinama (189) i (190) jer je rot grad U = 0 i div grad U = 0 . Ako se harmonijska funkcija U izabere tako da je $\frac{\partial U}{\partial z} = -2\omega_z$, onda jednačine (194) dopuštaju rešenje u obliku :

$$(195)\qquad 2\omega_x + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \,,\quad 2\omega_y + \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} \,,\quad \frac{p}{\varrho\nu} = -\frac{\partial f}{\partial z} \,,$$

uz uslov da funkcija f(x,y,z) zadovoljava Laplace-ovu jednačinu

$$(196)\qquad \Delta f(x,y,z) = 0 \,.$$

Primećuje se da funkcija f ima i svoje fizičko značenje. Ona , upravo , predstavlja strujnu funkciju vrtloga , a izraz f=const. odredjuje jednačinu vrtložnih linija koje leže u ravnima z=const.

Dakle, na ovaj način se ustvari dobilo pseudo-ravansko polje vrtloga I vrste , a za kvaternion-funkciju kaže se da je redukovana . Prema tome , pseudo-ravansko polje vrtloga I vrste Stokes-ovog strujanja dobija se kad se prostornom polju vrtloga doda gradijentsko polje vrtloga čije je polje brzine odredjeno jednačinama :

$$(197)\qquad \text{rot } \vec{v}_1 = \text{grad } U \,,\quad \text{div } \vec{v}_1 = 0 \,.$$

Ako se sa $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ označi brzina koja odgovara pseudo-ravanskom polju vrtloga, tj. redukovanoj kvaternion-funkciji (193), a $\vec{v}\,(v_x, v_y, v_z)$ je brzina koja odgovara prostornom polju vrtloga , tj. neredukovanoj kvaternion-funkciji (191), onda se mogu postaviti ove jednakosti :

$$(198) \qquad \text{rot}\, \vec{V} = 2\vec{\omega} + \text{grad}\, U \quad , \quad \text{rot}\, \vec{v} = 2\vec{\omega} \; ,$$

S obzirom na prvu jednačinu (197), izmedju brzina $\vec{V}$, $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ postoji veza $\vec{v} = \vec{V} - \vec{v}_1$. Kako prva jednačina (198), uz korišćenje izraza (195), dopušta rešenje u obliku

$$(199) \qquad \vec{V} = \text{grad}\, \varphi + f\, \vec{k}$$

uz uslov

$$(2oo) \qquad \Delta \varphi = - \frac{\partial f}{\partial z} \; ,$$

to je konačno

$$(2o1) \qquad \vec{v} = \text{grad}\, \varphi + f\, \vec{k} - \vec{v}_1 \; .$$

Dakle, u najopštijem slučaju Stokes-ovog strujanja brzina se nalazi rešavanjem jednačina (196),(2oo) i (197). Prva jednačina je Laplace-ova, druga Poisson-ova a trećoj odgovaraju ove četiri skalarne jednačine :

$$(197') \qquad \begin{array}{ll} \dfrac{\partial v_{1z}}{\partial y} - \dfrac{\partial v_{1y}}{\partial z} = \dfrac{\partial U}{\partial x} \; , & \dfrac{\partial v_{1x}}{\partial z} - \dfrac{\partial v_{1z}}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y} \; , \\ \dfrac{\partial v_{1y}}{\partial x} - \dfrac{\partial v_{1x}}{\partial y} = \dfrac{\partial U}{\partial z} \; , & \dfrac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \dfrac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \dfrac{\partial v_{1z}}{\partial z} = 0 \; . \end{array}$$

Što se tiče rešavanja jednačina (197′), može se posmatrati polje brzine $\vec{v}_1$ kao pseudo-ravansko I ili II vrste. Ako se, na primer, uzme da je polje brzine $\vec{v}_1$ pseudo-ravansko I vrste, onda se rešenje jednačina (197′) može tražiti u obliku :

$$(2o2) \qquad v_{1x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \; , \quad v_{1y} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \; , \quad v_{1z} = 0 \; , \quad U = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \; ,$$

uz uslov da funkcija $\Psi_1(x,y,z)$ zadovoljava Laplace-ovu jednačinu :

(2o3) $$\Delta \Psi_1(x,y,z) = 0 \ .$$

Ako se uzme da je polje brzine $\vec{v}_1$ pseudo-ravansko II vrste, tada su

(2o4) $$v_{1x} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \ , \quad v_{1y} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \ ,$$

gde je $\Psi_1(x,y)$ rešenje jednačine

(2o5) $$\Delta \Psi_1(x,y) = \text{const.} = C \ .$$

Projekcija v_{1z} nalazi se integriranjem parcijalnih jednačina

(2o6) $$\frac{\partial}{\partial x}(v_{1z}) = -\frac{\partial U}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial}{\partial y}(v_{1z}) = \frac{\partial U}{\partial x} \ ,$$

u kojima je funkcija U data izrazom

(2o7) $$U = -Cz + F(x,y) \ , \quad \Delta F = 0 \ .$$

2° U praktičnim problemima polje vrtloga retko ima sve tri projekcije, dok je brzinsko polje najčešće osnosimetrično ili je ravansko, odnosno pseudo-ravansko. Na primer, ako se posmatra opstrujavanje lopte jednolikom strujom viskoznog fluida koja u beskonačnosti ima pravac ose z, tada je, posmatrano u sfernim koordinatama R, Θ, ϑ, jedino projekcija vrtloga $2\omega_\Theta$ različita od nule. U ovom slučaju kvaternion-funkcija

$$Q = \frac{p}{\varrho\gamma} + 2\omega_\Theta c_\Theta$$

predstavlja istovremeno i redukovan i najopštiji oblik. Brzinsko polje je odredjeno jednačinom (199) u kojoj se funkcije f i Ψ nalaze rešavanjem jednačina (196) i (2oo). Rešenje jednačine (196) u ovom slučaju nije teško naći kad se ima u vidu da je f strujna funkcija vrtloga i da se vrtložne linije $f=\text{const.}$ na lopti poklapaju sa paralelama. Zbog toga je f funkcija samo od R u ravnima $z=\text{const}$, i jedino rešenje tog oblika koje zadovoljava jednačinu (196) je $f = \frac{C}{R}$. Kako je dalje

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -CR^{-2}\frac{\partial R}{\partial z} = -CR^{-2}\cos\vartheta ,$$

to jednačina (2oo) u sfernom sistemu ima oblik

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = CR^{-2}\cos\vartheta ,$$

čije je rešenje

$$\varphi = (AR^{-2} + BR - \frac{C}{2})\cos\vartheta ,$$

gde su A i B integralske konstante. Kad se jednačina (199) projektuje na pravce $\vec{R}_o$ i $\vec{\vartheta}_o$ dobija se

$$V_R = \frac{\partial\varphi}{\partial R} + f\cos\vartheta = (-2AR^{-3} + B + \frac{C}{R})\cos\vartheta ,$$

$$V_\vartheta = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} - f\sin\vartheta = -(AR^{-3} + B + \frac{C}{2R})\sin\vartheta .$$

Ako se sa "a" označi poluprečnik lopte a sa V_∞ brzina jednolike struje u beskonačnosti, onda granični uslovi

$$V_R = 0 \quad , \quad V_\vartheta = 0 \qquad \text{za } R=a$$

$$V_R = V_\infty\cos\vartheta \quad , \quad V_\vartheta = -V_\infty\sin\vartheta \qquad \text{za } R=\infty$$

odredjuju konstante A, B i C kao

$$A = -\frac{1}{4}a^3V_\infty \quad , \quad B = V_\infty \quad , \quad C = -\frac{3}{2}aV_\infty .$$

Prema tome, projekcije brzine iznose

$$V_R = V_\infty\left[1 - \frac{3}{2}\frac{a}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\cos\vartheta ,$$

$$V_\vartheta = -V_\infty\left[1 - \frac{3}{4}\frac{a}{R} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right]\sin\vartheta .$$

Pritisak se menja po zakonu

$$p = -\varrho\nu \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{3}{2}\varrho\nu a V_\infty \frac{\cos\vartheta}{R^2} \quad .$$

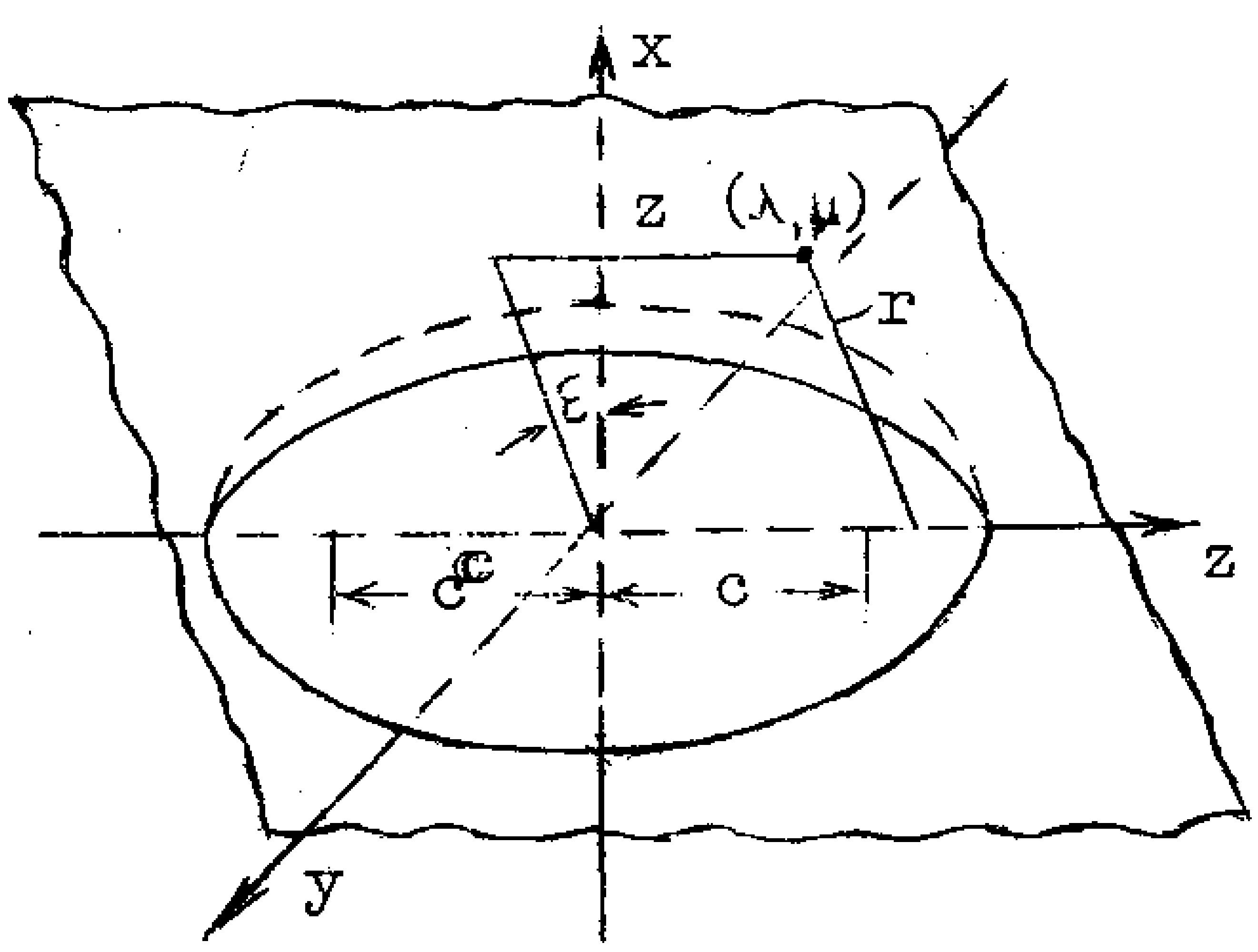
Ovi izrazi za V_R , V_ϑ i p dobijeni su i ranije rešavanjem Stokes-ovih jednačina u vreme kad su one nastale. Medjutim, ako se uporedi onaj postupak dobijanja rešenja za loptu sa ovim, onda se lako mogu sagledati sve prednosti ovog postupka koji bazira na primeni monogenih kvaternion-funkcija. Ovaj postupak je mnogo kraći i lakši s obrirom na diferencijalne jednačine koje se javljaju prilikom rešavanja problema. Istina, nije ni ovaj postupak uvek tako lak kao što to izgleda za slučaj opstrujavanja lopte. Na primer, ako se umesto lopte posmatra podužno opstrujavanje obrtnog elipsoida, onda se predhodno mora odrediti vrtlog iz jednačine

$$\text{rot rot } 2\vec{\omega} = 0$$

čiji je skalarni oblik u eliptičnim koordinatama, $z = c\,\text{ch}\xi\cos\eta$ i $r = c\,\text{sh}\xi\sin\eta$ ($0\leq\xi\leq\infty$, $0\leq\eta\leq 2\pi$) ,

$$(\lambda^2-1)\frac{\partial^2(2\omega r)}{\partial\lambda^2} + (1-\mu^2)\frac{\partial^2(2\omega r)}{\partial\mu^2} = 0 \quad ,$$

gde su $\lambda = \text{ch}\xi$ i $\mu = \cos\eta$ ($1\leq\lambda\leq\infty$, $-1\leq\mu\leq 1$) .



Posle iznalaženja vrtloga 2ω , funkcija f se dobija rešavanjem jednačine (196), pri čemu se i ova jednačina i komponente monogene kvaternion-funkcije (191) moraju izraziti u eliptičnom sistemu koordinata. Medjutim, već rešavanje predhodne jednačine, koja je u ovom problemu samo pomoćna, zadaje prilične teškoće. Naime, njeno se rešenje može tražiti u obliku

$$2\omega r = F(\lambda)H(\mu)$$

i ona svesti na dve obične diferencijalne jednačine drugog reda Jacobi-jevog tipa ,

$$F''(\lambda) - \frac{k}{\lambda^2-1} F(\lambda) = 0 ,$$

$$H''(\mu) + \frac{k}{1-\mu^2} H(\mu) = 0 ,$$

koje se mogu integrirati samo ako se zna njihov "prvi posredni" integral. Mogu se ove jednačine smenama

$$F(\lambda) = \exp \int u \, d\lambda , \quad H(\mu) = \exp \int v \, d\mu ,$$

na diferencijalne jednačine prvog reda Riccati-jevog tipa ,

$$\frac{du}{d\lambda} + u^2 = \frac{k}{\lambda^2-1} , \quad \frac{dv}{d\mu} + v^2 = \frac{k}{1-\mu^2} ,$$

koje se , opet , ne mogu integrirati bez poznavanja partikularnog rešenja. Prema tome, ostaje jedino da se problem rešava numeričkim putem ili traženjem rešenja u obliku reda. Međutim, to nije cilj ovog rada. i rešenje ovog problema predstavljaće predmet daljih istraživanja.

Oseen - ovo strujanje .

1. Jednačine koje odredjuju ovo strujanje , takodje , spadaju u grupu približnih jednačina kretanja viskoznog nestišljivog fluida. Oseen-ove jednačine daju nešto tačnije rezultate od Stokes-ovih jednačina, jer delimično uzimaju u obzir i sile inercije. Ako se za pravac jednolike struje viskoznog fluida uzme x osa, onda Oseen-ova jednačina sa jednačinom kontinuiteta može da se napiše kao

$$(2o8) \qquad U \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \ .$$

Poznato je da se rešenje jednačina (2o8), za slučaj kada vrtlog leži u ravni upravnoj na brzini U , može tražiti u obliku

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{2\lambda} \operatorname{grad} \chi - \vec{i} \chi \ ,$$

pri čemu su $\varphi(x,y,z)$ i $\chi(x,y,z)$ rešenja jednačina

$$\Delta \varphi = 0 \quad , \quad \Delta \chi - 2\lambda \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \ .$$

Ovde je $\lambda = U/2\nu$. Pritisak se nalazi posredstvom izraza

$$p = -\rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ .$$

Vrtlog zaista leži u ravni Oyz jer je

$$2\omega_x = 0 \quad , \quad 2\omega_y = -\frac{\partial \chi}{\partial z} \quad , \quad 2\omega_z = \frac{\partial \chi}{\partial y} \ .$$

Primećuje se da u ovom slučaju brzina ima potencijal u ravni Oyz i da funkcija χ predstavlja strujnu funkciju vrtloga.

Medjutim, može se pri rešavanju jednačina (2o8) poći od toga da je jednačina kontinuiteta zadovoljena vektorskim potencijalom $\vec{A}$ posredstvom jednačine

$$(2o9) \qquad \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A} \ ,$$

kome se uvek može dodati gradijent neke skalarne funkcije i zahtevati da bude ispunjen uslov

(210) $$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad .$$

Na primer, može se uzeti

$$2\vec{A} = \psi_1 \operatorname{grad} \psi_2 - \psi_2 \operatorname{grad} \psi_1 + \operatorname{grad} \phi$$

i uslov (210) biće zadovoljen ako je ϕ rešenje jednačine

$$\phi = \psi_2 \Delta \psi_1 - \psi_1 \Delta \psi_2 \quad .$$

Ovde su ψ_1 i ψ_2 strujne površine u čijim presecima leže strujnice , jer je jednačina kontinuiteta istovremeno zadovoljena i sa izrazom

$$\vec{v} = \left[\operatorname{grad} \psi_1 \ , \ \operatorname{grad} \psi_2 \right] \quad .$$

Kako je

$$U \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = U \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot}\left(U \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right) \quad ,$$

$$\vec{v} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot}(\Delta \vec{A}) \quad ,$$

to se prva jednačina (208) može napisati kao

(211) $$\operatorname{grad} \frac{p}{\varrho \nu} + \operatorname{rot}\left(\frac{U}{\nu} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - \Delta \vec{A} \right) = 0 \quad .$$

Zbog jednačine (210) ispunjen je i uslov

(212) $$\operatorname{div}\left(\frac{U}{\nu} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - \Delta \vec{A} \right) = 0 \quad ,$$

što pokazuje da je

(213) $$Q = \frac{p}{\varrho \nu} + \left(\frac{U}{\nu} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - \Delta \vec{A} \right)$$

monogena kvaternion-funkcija. Prema tome, može se reći da svakoj monogenoj kvaternion-funkciji odgovara neko moguće Oseen-ovo strujanje. Vektorsi deo ove funkcije odredjuje potencijal $\vec{A}$, čiji rotor daje brzinu strujanja, a skalarni deo daje pritisak u strujnom polju.

Dakle, u najopštijem slučaju Oseen-ovog strujanja treba da se reše četiri skalarne jednačine koje sleduju iz uslova monogenosti (211) i (212) kvaternion-funkcije (213). Rešavanje ovih jednačina je veoma teško čak i u specijalnim slučajevima. Kao specijalan slučaj može da se smatra onaj kad je vektorski deo kvaternion-funkcije (213) redukovan na ravan, tj. kad je na primer

$$\frac{U}{\nu}\frac{\partial A_z}{\partial x} - \Delta A_z = 0 \quad . \tag{214}$$

Tada jednačine (211) i (212) dopuštaju rešenje u obliku

$$\frac{U}{\nu}\frac{\partial A_x}{\partial x} - \Delta A_x = \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{U}{\nu}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \Delta A_y = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad ,$$
$$p = -\varrho\nu\frac{\partial f}{\partial z} \quad , \tag{215}$$

pod uslovom da funkcija $f(x,y,z)$ zadovoljava jednačinu

$$\Delta f = 0 \quad . \tag{216}$$

Znači, u ovom slučaju se problem svodi na rešavanje jednačina (216),(214) i (215). Pri tome treba imati u vidu da je $\Delta\vec{A} = -2\vec{\omega}$.

2° S obzirom na linearnost jednačina (2o8) može se brzinsko polje Oseen-ovog strujanja rastaviti na potencijalni i na vrtložni deo ,

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi + \vec{v}_2 \quad , \quad \Delta\varphi = 0 \quad , \tag{217}$$

i jednačine (2o8) napisati u obliku

$$\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\varrho} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + U\frac{\partial\vec{v}_2}{\partial x} = \nu\Delta\vec{v}_2 \quad , \quad \operatorname{div}\vec{v}_2 = 0 \quad . \tag{218}$$

Kako se i ovde može staviti $v_2 = \operatorname{rot}\vec{A}$, to se iz (2o8) dobijaju uslovi monogenosti

$$\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \operatorname{rot}\left(U \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - \nu \Delta \vec{A} \right) = 0 \ ,$$

$$\operatorname{div}\left(U \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - \nu \Delta \vec{A} \right) = 0 \ ,$$

koji pokazuju da je i

$$Q = \left(\frac{p}{\rho} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(U \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - \nu \Delta \vec{A} \right)$$

monogena kvaternion-funkcija. Njene komponente zadovoljavaju jednačine

$$\Delta\left(\frac{p}{\rho} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \ , \qquad \left(\Delta \vec{A} - \frac{U}{\nu} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right) = 0 \ ,$$

čija su trivijalna rešenja

$$p = -\rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ , \qquad \Delta \vec{A} - \frac{U}{\nu} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = 0 \ . \tag{219}$$

Dakle, u ovom slučaju se problem svodi na rešavanje Lapalace-ove jednačine ($\Delta\varphi = 0$) i tri skalarne jednačine (219). Ove poslednje se odgovarajućim smenama mogu svesti na talasnu jednačinu. I ovde je $\Delta \vec{A} = -2\vec{\omega} = -\operatorname{rot} \vec{v} = -\operatorname{rot} \vec{v}_2$.

3° Najzad , može se u vezi sa Oseen-ovim jednačinama postaviti i ovakav zadatak : pod kojim će uslovima Oseen-ova popravka prouzrokovati samo promenu pritiska u rešenjima Stokes-ovih jednačina ? Drugim rečima, pod kojim će uslovima biti

$$U \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p' \ , \tag{220}$$

gde je p' pritisak prouzrokovan Oseen-ovom popravkom.

Pre svega, zbog jednačine (209) iz (220) izlazi da je

$$\operatorname{rot} \frac{U}{\nu} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = -\operatorname{grad} \frac{p'}{\rho\nu} \ ,$$

pa uslovi monogenosti (211) i (212) prelaze u

(221) $$\operatorname{grad}\frac{p-p'}{\varrho\nu} + \operatorname{rot} 2\vec{\omega} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} 2\vec{\omega} = 0 \quad ,$$

jer je $\Delta\vec{A} = -2\vec{\omega}$. Sad se jednačine (221) mogu prihvatiti i kao uslovi monogenosti kvaternion-funkcije kojoj odgovara Stokes-ovo strujanje sa pritiskom $p-p'$, dok je p pritisak u Oseen-ovom strujnom polju. Primenom operatora divergencije i rotora na jednačinu (22o) dobija se da je p' harmonijska funkcija i da vrtlog $2\vec{\omega}$ ne zavisi od promenljive x , tj. da je

$$\Delta p' = 0 \quad , \quad 2\omega = 2\omega(y,z) \quad .$$

Može se staviti da je

(222) $$-\frac{p}{\varrho U} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

odakle je funkcija $f(x,y,z)$ odredjena kao

$$f = -\frac{1}{\varrho U}\int_0^x p' dx + f_1(y,z) \quad .$$

Ako je aditivna funkcija f_1 rešenje jednačine

$$\Delta f_1 = \left(\frac{1}{\varrho U}\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_{x=o} \quad ,$$

onda je f harmonijska funkcija i zadovoljava jednačinu

(223) $$\Delta f(x,y,z) = 0 \quad .$$

S obzirom na izraz (222), iz (22o) sledu je

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad ,$$

odakle je posle integriranja

$$v_x = \frac{\partial f}{\partial x} + v_x'(y,z) \quad , \quad v_y = \frac{\partial f}{\partial y} + v_y'(y,z) \quad ,$$

$$v_z = \frac{\partial f}{\partial z} + v_z'(y,z) \quad ,$$

odnosno

(224) $$\vec{v} = \operatorname{grad} f + \vec{v}\,'(y,z) \quad .$$

Znači, brzina $\vec{v}$ Stokes-ovog strujanja u ovom slučaju sastoji se iz brzine potencijalnog strujanja ($\vec{v}_1$=grad f) i brzine $\vec{v}'(y,z)$ pseudo-ravanskog strujanja II vrste. Zbog jednačine (223) je i div $\vec{v}' = 0$, odnosno

$$v'_y = \frac{\partial \psi'}{\partial z} \quad , \quad v_z = -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \quad , \quad \psi' = \psi'(y,z) \quad ,$$

pa je $\Delta \vec{v} = -\text{rot rot } \vec{v}' = \Delta v'_x(y,z)\,\vec{i} + \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial z}\vec{j} - \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y}\vec{k}$, što zamenom u Stokes-ove jednačine daje

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p-p'}{\varrho\gamma}\right) = \Delta v'_x(y,z) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p-p'}{\varrho\gamma}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\Delta \psi'(y,z) \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p-p'}{\varrho\gamma}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\Delta \psi'(y,z) \quad .$$

Iz prve jednačine sleduje

$$\frac{p-p'}{\varrho\gamma} = \Delta v'_x(y,z)x + f_1(y,z)$$

i kako je $\Delta(p-p')=0$, to mora biti $\Delta\Delta v'_x = 0$ i $\Delta f_1=0$ odnosno

$$(226) \qquad \Delta v'_x(y,z) = \text{const.} = C \quad .$$

Dakle, pritisak Oseen-ovog strujanja iznosi

$$(227) \qquad \frac{p}{\varrho\gamma} = Cx - \frac{U}{\gamma}\frac{\partial f}{\partial x} + f_1(y,z) \quad ,$$

gde su f i f_1 harmonijske funkcije. Kako je $2\omega_x = -\Delta\psi'$ i $\Delta(2\omega_x)=0$, to je ψ' biharmonijska funkcija i zadovoljava jednačinu

$$(228) \qquad \Delta\Delta\psi'(y,z) = 0 \quad .$$

Prema tome, ako se brzina $\vec{v}$ odredjena jednačinom (224) nadje rešavanjem jednačina (223),(226) i (228) onda će Oseen-ova popravka prouzrokovati samo promenu pritiska u rešenjima Stokes-ovih jednačina.

Kratak sadržaj rada .

U prvom delu rada rešavaju se jednačine kretanja viskoznog nestišljivog fluida korišćenjem teorije A.Bilimovića(1) o odstupanju neanalitičnih kompleksnih funkcija od analitičnosti i teorije K.Voronjeca(2) o odstupanju brzinskog polja nekog strujanja od Laplace-ovog polja. Kao neanalitična funkcija posmatrana je kompleksna brzina u strujnom polju viskoznog fluida i nadjena su opšta rešenja Navier-Stokes-ovih, Oseen-ovih i Stokes-ovih jednačina, pod uslovom da je N-to odstupanje kompleksne brzine od analitičnosti jednako nuli. Za neka od ovih rešenja dati su dijagrami promene projekcija brzine i izgledi strujnih slika sa kojih se vidi odstupanje brzinskog polja viskoznog fluida od Laplace-ovog popolja koje odgovara potencijalnom strujanju nestišljivog fluida . Zapaža se da se ovo odstupanje povećava kada red odstupanja kompleksne brzine od analitičnosti raste.

U drugom delu rada proučavaju se pseudo-ravanska i pseudo-osnosimetrična strujanja sa potencijalom vrtloga primenom monogenih kvaternion-funkcija. Zatim se ove funkcije povezuju sa laganim strujanjima koja se mogu proučavati posredstvom Oseen-ovih i Stokes-ovih približnih jednačina kretanja. Pri tome je korišćena teorija K.Voronjeca(27) o kvaternionskom potencijalu prostornog strujanja i na nizu primera pokazana prednost ovog postupka rešavanja problema nad klasičnim postupkom.

L i t e r a t u r a

(1) A.Bilimovitch, Sur la mesure de déflexion d'une fonction non-analytique par rapport à une fonction analytique. C.R.Acad.des Sci.t.237,(1953),p.694-695.

Sur la mesure de déflexion d'une fonction non-analytique pa rapport à une fonction analytique. Extrait des Publications de l'Institut mathématique t.VI, Beograd 1954.

O meri odstupanja neanalitične funkcije od analitičnosti. Glas SAN CCXXI, Beograd 1956.

(2) K.Voronjec, Odstupanje brzinskog polja nekog strujanja od Lapalace-ovog polja. Iz Zbornika radova Mašinskog instituta Srpske akademije nauka,tom LX,knjiga 8, Beograd 1959.

(3) S.Fempl, O neanalitičnim funkcijama čije je odstupanje od analitičnosti analitična funkcija. Glas SAN,CCLIV,1963.

(4) S.Fempl, O neanalitičnim funkcijama čije je drugo odstupanje od analitičnosti analitična funkcija. Vesnik Društva matematičara i fizičara SR Srbije,XV,1-4, Beograd 1963.

(5) S.Fempl, Areolarni polinomi kao klasa neanalitičnih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije. Matematički vesnik, 1(16), Beograd 1964.

(6) A.Bilimovitch, Application en Hydromécanique de la mesure de déflexion d'analyticité d'une fonction non-analytique. Extrait du Bulletin,t.X.No 2,Classe de l'Académie Serbe des Sciences, Beograd 1956.

(7) G.Hamel, Spiralförmige Bewegungen zähen Flüssigkeiten. Jber.dtsch.Math.-Ver.25,(1916).

(8) C.Oseen, Exakte Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen. Ark.Mat.Astronom.Fys.No 14,No 22,(1927/28).

(9) A.Rosenblatt, Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux. Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc.72(1935).

(10) R.Berker, Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible.Paris-Lille, 1936.

(11) G.Jeffery, Phil.Mag.(6)29,455-465(1915.

(12) D.Riabouchinsky, C.R.Acad.Sci.Paris, 179(1924).

(13) A.Slezkin, Dinamika vjaskoj neszimaemoj židkosti.Moskva 1955.

H.Lamb, Hydrodynamics, sixth edition, New York 1945.

N.E.Kočin, I.A.Kibel, N.V.Roze, Teoretičeskaja gidromehanika, Moskva 1963.

Handbuch der Physik, R.Berker, Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible.Band VIII

(14) G.Kolosov, Ob odnom priloženii teorii funkcij kompleksnogo peremenogo k ploskoj zadače matematičeskoj teorii uprugosti. Yurev.Izd.Universi.1909.

(15) A.Stevenson, Some Boundary Problems of Two-dimensional Elasticity. Phil.Mag.1943,347,No 238,766-793.

(16) D.Pompeiu, Sur une classe de fonctions d'une variable complexe. Rend.Circolo mat. Palermo,1912,33,108-113.

(17) V.Volterra, Sur l équilibre des corps élastiques multiplement connexes. Ann.Sci.Ecole norm.supér.1907,245,401-517.

(18) N.I.Musheliśvili, Nekotorie osnovnie zadači matematičeskoj teorii uprugosti. Akad.nauk SSSR,1963.

(19) R.D.Mindlin, Complex Representation of Displacements and Stresses in plane Strain [illegible] couple-stresses. IUTAM, (Applications of the Theory [illegible] Functions in Continuum Mechanics),Moskva 1965.

(20) E.Goursat, Sur l'équation $\Delta\Delta u=0$. Bull.Soc.math.,France, 1898,26,236-237.

(21) T.Andjelić, Teorija vekto[illegible]d 1949.

(22) R.Fueter, Analytische Funktionen einer Quaternionenvariablen Comment.Mathemat.Helvetici.Vol.4,p.9,1932.

(23) M.Fréchet, Sur deux familles des fonctions analogues à la famille de fonctions analytiques. C.R.Acad.Sci.235(1952).

(24) C.Moisil, Sur les quaternions monogénes. Bull.des Sci.math. Paris,II serie,(1931),55,p.168.

(25) A.Bilinović, Odstupanje neanalitične kvaternion-funkcije od analitičnosti. Glas SAN, CCXXVIII,No 13o1957).

Diferencijalni elementi geometrijske teorije neanalitičnih funkcija. Glas SAN,CCXLII,No 19(1960).

O nekim integralnim teorèmama u geometrijskoj teoriji neanalitičnih funkcija. Glas SAN,CCLXIII,No 28(1966).

(26) M.Misicu, Über die Anwendung analytischer Funktionen auf dreidimensionale Probleme der Mechanik verformbarer Körper. Rev.de Méc.App.t.I,No 2, Bukarest (1956).

Reprezentarea ecuatiilor echilibrului elastic prin functii monogene de cuaternioni. Bul.Sti.Tomul IX,No 2(1957).

(27) K.Voronjec, O kvaternionskom potencijalu prostornog strujanja. Zbornik radova Mašinskog fakulteta za 1956-58 godinu, Beograd 1958.

(28) N.Théodoresco, La dérivée areolaire et ses applications dans la physique mathématique. Thése, Paris, 1931.

(29) K.Voronjec, Primena monogenih kvaterniona u Mehanici fluida. Glas SAN, CCXVII,No 5(1961).

(30) K.Voronjec, Monogeni kvaternioni u strujanju sa potencijalom vrtloga. U štampi.