ВЛАСТИМИР СТАЈИЋ

АЛГЕБРА

ЗА

ПЕТИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ДРУГО ИЗДАЊЕ

Овај уџбеник препоручио је Главни просветни савет Сбр. 517 од 23 априла 1936 год. и одобрио г. Министар Просвете одлуком Сибр. 15722 од 27 јуна 1936 г.

ИЗДАЊЕ
КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА
БЕОГРАД 1936

ПРЕДГОВОР

1. Ученику се препоручује да ову књигу добро чува и одржава у исправном стању, пошто ће следећих година често бити упућиван на поједине ставове из ње.

2. Кад ученик рачуна на табли, мора непрестано да говори и да сваки поступак објашњава. Ћутање на табли је чамотиња у разреду.

ШТАМПАРИЈА ДРАГ. ПОПОВИЋА — БЕОГРАД, ЛУЈА БАРТУА 3 — ТЕЛ. 22-413

ГЛАВА I

Декадни бројни систем

Постанак броја

1. — На мисао о **броју** човек је дошао посматрањем више предмета здружених у једну **скупину.** Ти предмети обично имају по неку заједничку особину, на основу које су здружени. Кад се могу бројити, обично имају исто име.

У учионици су такви предмети клупе, ученици, капе, прозори, књиге итд.

Број нам долази као одговор на питање **колико** има клупа у учионици, колико ученика, колико књига, колико прозора.

Сваки предмет засебно зове се *јединица.*

2. — Једну скупину предмета можемо саставити на овај начин. Метнемо на једно место један предмет, њему придружимо још један такав исти, затим њима додамо још један, и тако редом. Рећи ћемо да смо поступно здружили *један, два, три, четири* предмета итд. *Један, два, три, четири* су бројеви. Поступак којим налазимо бројеве зовемо *бројење.*

Јасно је још и то да ћемо увек добити исти број, ма којим редом бројили предмете. *Број предмета је независан од реда којим бројимо.*

Напомена. — Један предмет очевидно не чини скупину, али је опште усвојено да се и *један сматра као број.*

3. — Малочас кад смо образовали скупину, нисмо изговарали имена предмета. Значи да су бројеви независни од природе самих предмета. Један исти број може одговарати двема скупинама различитих предмета. Можемо рећи пас има *четири* ноге, кола имају *четири* точка.

4. — Кажемо да је број предмета у једној скупини *једнак* броју предмета у другој скупини, ако сваком пред-

Ми ћемо сад јасно знати од колико се динара састоји скупина, кад кажемо да она садржи седам кеса и четири динара.

12. — Ако је број добијених кеса већи од десет, ми можемо поступити са овим кесама исто онако, како смо претходно поступили са динарима. Узети десет кеса и све их ставити у једну већу кесу итд. Претпоставимо да смо напунили пет великих кеса и да су престале још седам малих. Како смо већ оставили настрану још четири динара, можемо рећи да се гомила састоји од пет великих кеса, од седам малих кеса и од четири динара.

13. — У овом примеру видимо да се једна скупина сматра као да је састављена од других скупина, *које познајемо.* Ове нарочито *познате скупине* зову се у декадном бројном систему:

десетица	састављена	од десет предмета;
стотина	„	од десет десетица;
хиљада	„	од десет стотина;
десетица хиљада	„	од десет хиљада;
стотина хиљада	„	од десет десетица хиљада;
милион	„	од десет стотина хиљада;
		итд.

Обично се један предмет зове *проста јединица,* или *јединица првога реда,* десетице се зову *јединице другога реда,* стотине *јединице трећег реда* итд. При овом именовању може се рећи да је **свака сложена јединица збир од десет јединица непосредно нижега реда.**

14. — Да бисмо именовали један број, довољно је да искажемо колико он садржи јединица разних редова. *При том никад не можемо имати више од девет јединица једнога реда.* На тај начин, осим имена првих десет бројева, имаћемо само да измислимо нове речи да бисмо означили јединице разних редова.

Још је и тај број потребних речи за бројење смањен груписањем јединица у класе, које су образоване од по три реда. Узето је да су у свакој класи први ред јединице, други десетице, трећи стотине. Тако имамо:

Прва класа просте јединице	јединице	1 ред
	десетице	2 ред
	стотине	3 ред
друга класа хиљаде	јединице хиљада	4 ред
	десетице хиљада	5 ред
	стотине хиљада	6 ред
трећа класа милиони	јединице милиона	7 ред
	десетице милиона	8 ред
	стотине милиона	9 ред
четврта класа милијарде	јединице милијарди	10 ред
	десетице милијарди	11 ред
	стотине милијарди	12 ред

15. — Из овога што смо рекли произилази да можемо помоћу малог броја речи да изговоримо све бројеве. При том треба да се старамо да при изговору разних јединица почнемо са јединицама највишега реда.

Који ранг број заузима у природном бројном реду разазнаћемо, ако имамо још на уму и следећа правила:

1. *Један број је утолико већи, уколико почиње са јединицама вишега реда.*

2. *Ако два броја имају у почетку јединице истога реда, већи је онај, који их има више. А ако имају подједнак број јединица овога реда, треба упоредити на исти начин јединице непосредно нижега реда итд.*

Ова правила произилазе из самог начина, на који су образоване јединице различитих редова, а из чињенице да никад не можемо имати више од девет јединица једнога реда.

Напомена. — У пракси увукле су се неке неправилности при изговарању бројева, нарочито код бројева састављених од десетица и јединица.

Уместо *десетица* кажемо *десет.* Место *десетица и један,* или *десет и један, десет и два* итд. кажемо *једанаест, дванаест* итд.

Место *две десетице, три десетице* итд. изговарамо *двадесет, тридесет* итд.

Поред *стотина, две стотине, три стотине* употребљава се и *сто, двеста, триста.*

Реч *хиљаду* чује се чешће, неголи *хиљада.*

Писање бројева

16. — Уместо да пишемо речи један, два, три, као што смо то досада чинили, ми их претстављамо нарочитим знацима, који се зову *цифре:*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Бројеве један, два итд. може разумети само познавалац српскохрватског језика. Бројеве претстављене цифрама разуме сваки културан човек човечанства.

17. — Да бисмо разумели како се помоћу ових знакова (и знака 0) могу претставити сви бројеви, замислимо да имамо једну хартију на којој смо нацртали стубове, на чијем су челу написана имена јединица различитих редова. Написаћемо у сваком стубу цифру која показује колико посматрани број има одговарајућих јединица. Тако број 5214 садржи пет хиљада, две стотине, једну десетицу и четири је-

4 ред	3 ред	2 ред	1 ред
5	2	1	4
3		6	8

динице; број три хиљаде шездесет и осам, три хиљаде, шест десетица и осам јединица. Ти се бројеви пишу као што је горе назначено.

Сад избришимо црте које раздвајају стубове. Ми ипак можемо знати ком су стубу припадале цифре првога броја. Пада у очи да је ранг цифре у броју исти као и ранг стуба, или њен ранг у броју је исти као и ред јединица у стубу.

18. — Моћи ће дакле да се напише један број, ако се напишу редом све цифре које одговарају јединицама разних редова. Ранг се броји с десна налево.

Тако кад напишемо први број.

5 214,

цифра 2, која има трећи ранг, претставља јединице трећега реда, тј. стотине.

19. — Може се десити, као у другом броју, да нема јединица извесног реда. Ако се служимо хартијом са нацртаним стубовима, ми у одговарајући стуб нећемо ништа уписати. Али ако цифре напишемо једну до друге, неће остати трага од тог стуба, а неке цифре би помакле свој ранг за један, тако да се ранг и ред не би подударали.

Да би се избегле грешке које из тога могу произићи, уведен је нарочити знак, 0, који се изговара *нула,* и који се ставља код ранга, који би требао да заузме стуб јединице, која не постоји у броју. На овај начин свака цифра заузима тачно исти ранг као и одговарајући стуб, те постоји подударност између ранга цифре и реда одговарајуће јединице.

Тако број три хиљаде шездесет и осам је изражен помоћу

3068.

Напомена. — Раније смо ово исто изражавали тако, што смо рекли да свака цифра у броју има своју **цифарну** и своју **месну вредност.** Закон по коме се овако пишу бројеви зове се **позициони закон.**

20. Практично упутство за читање бројева. — *Ако број има највише три цифре, треба почевши од највише, изговарати редом сваку цифру са именом реда који та цифра претставља. Ако број има више од три цифре, онда се он најпре подели у класе, почевши с десна налево. У сваку класу долазе по три цифре. Последња класа налево може имати две или само једну цифру. Свака таква класа чита се редом као засебан број, тј. у њој се увек читају стотине, десетице и јединице, и притом изговори име класе. Прва класа, почевши с десна налево, претставља просте јединице, друга хиљаде, трећа милионе, четврта милијарде итд.*

21. Практично упутство за писање изговорених бројева. — *Ако број садржи само просте јединице, онда се редом напишу цифре стотина, десетица и јединица, при чему се јошваља старати да се напише нула онде где недостају јединице извесног реда.*

Ако број има више од три цифре, онда се редом пише свака класа, почевши са највишом. У случају да неке класе нема, њено место попуни се са три нуле.

Напомена 1. — Овакав начин читања и писања бројева, дељењем у класе од по три цифре употребљава се у Француској и у Сједињеним Америчким Државама. У Немачкој и Енглеској једна класа садржи *шест цифара.* Због тога и имена великих бројева не значе исто.

У Француској је *билион* исто што и милијарда, *једна хиљада милиона*. У Немачкој је билион *милион милиона.* Француски билион је 1 000 000 000 или 10^9, а немачки 1 000 000 000 000 или 10^{12}.

Француски трилион је хиљада билиона или 10^{12}, немачки трилион је милион билиона или 10^{18}.

Због оваквог неједнаког читања бројева ми на пр. не бисмо знали колико је то, кад неко изговори *шест трилиона*. Требали бисмо још да знамо да ли је то немачки или енглески начин читања, или француски.

Напомена 2. — Даљи називи за поједине класе после трилиона јесу *квадрилион, квинтилион, секстилион, септилион, октилион, нонилион, децилион, ундецилион, дуодецилион* итд.

Бројни системи

22. — Принцип десетног бројења резултира из разлагања једне скупине у делимичне скупине разних редова, *тако да је и свака делимична скупина збир од десет скупина нижега реда*. Отуда и име *десетно бројење, десетни бројни систем, декадни бројни систем. (Дека* је грчка реч и значи десет.)

Очевидно је да бисмо могли основати и друге бројне системе осим декадног. Могли бисмо образовати систем у коме би *јединица ма кога реда били збир од две јединице нижега реда*. То би био *дијадни* систем. Могли бисмо образовати систем где би свака јединица вишега реда била састављена од три јединице најближег нижег реда, итд.

Јасно је да се може поновити за сваки систем све оно, што је речено за декадни систем. Једина разлика која постоји међу њима је у саставу јединица разних редова, који је карактеристичан за сваки систем.

23. — Уопште зовемо *основа* (или *база*) једног система број јединица једног броја, чији збир образује јединицу вишега реда.

Очевидно је да, ако не рачунамо нулу, број цифара потребних за један систем је једнак основи умањеној за један.

24. Дијадни систем. — У систему са основом два има само цифра 1 поред нуле. У њему су први бројеви:

један (1), два (10), три (11), четири (100), пет (101), шест (110) седам (111), осам (1000) и тако редом.

Као што видимо овај систем има ту незгоду, што је за писање и најмањих бројева потребан велики број цифара.

С друге стрне овај систем нам казује да се само помоћу два знака 1 и 0 може написати сваки број.

25. Систем дуодецимални. — У овом систему је основа 12. Да бисмо означили бројеве 10 и 11 употребићемо за њих грчка слова α и β као цифре. Према томе цифре које се употребљавају у систему са основом 12 биће

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta \text{ и } 0.$$

Тако ће поједини бројеви бити: дванаест (10), тринаест (11), четрнаест (12), ... , двадесет и један (19), двадесет и два (1α,) двадесет и три (1β), двадесет и четири (20), ... , сто четрдесет и три ($\beta\beta$), сто четрдесет и четири (100),.... итд.

Напомена. — Постоји мишљење да би дуодецимални систем био згоднији од декадног, пошто број 12 има више чинилаца од броја 10.

26. Преобраћање бројева из једног система у други. — Можемо решавати задатке да један број преобратимо из једног система у други.

Пример 1. — Кад је један број дат у ма ком систему, написати га у декадном систему.

Решење. — Најпре се број растави на његове јединице разних редова. Затим се израчуна колико вреди свака од њих у декадном систему.

Нека је број 425 написан у систему са основом 8. Овај број садржи

5 јединица првога реда,
2 јединице другога реда,
4 јединице трећега реда.

Јединица другога реда вреди 8 јединица првога реда.

Јединица трећега реда вреди 8 јединица другога реда, или 64 јединице првога реда.

Број садржи дакле 5 јединица првога реда, 2 пута 8 јединица и 4 пута 64 јединице. Он је збир од 5 јединица, 16 јединица и 256 јединица. Тај број се пише у декадном систему

277.

Пример 2. 729 из декадног система да се напише у систему са основом 7.

Решење. — Овај проблем се своди на то да се групишу 729 предмета у скупине од по 7 предмета.

Кад 729 поделимо са 7 добијамо 104 групе и један предмет, или говорећи језиком бројења, 104 јединице другога реда и једну јединицу првога реда.

Кад даље поделимо 104 са 7 видимо да се може образовати 14 јединица трећега реда и да претичу 6 јединица другога реда.

14 јединица трећега реда дају тачно 2 јединице четвртога реда.

Број 729 је, дакле, састављен у систему са основом 7, од

2 јединице четвртог реда,
0 јединица трећега реда,
6 јединица другога реда,
1 јединица првога реда.

Број ћемо написати у систему са основом 7 овако

2061.

27. — Сваки број декадног бројног система већи од 10 може да се напише као један уређени полином по степенима од 10, где су коефициенти цифре 1, 2, 3. . . . . , а могу бити и 0. На пример

$$3054 = 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4.$$

Општи облик једног петоцифреног броја био би

$$e \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a,$$

где a, b, c, d, e, значе ма који од знакова 0, 1, 2, 3, 4,.....9. Само e не сме бити нула, кад број треба да буде петоцифрен.

28. — На исти начин, у облику уређеног полинома, може се написати број из ма ког система. На пример

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$$
$$(2102)_3 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2.$$

Бројеве недекадних система смо заградили и поред заграде ставили знаке, да се види ком систему припадају. То треба увек чинити, да те бројеве не побркамо са бројевима из декадног система.

29. — Сад кад смо написали бројеве овако у облику полинома, можемо их брже преобраћати из једнога система у други. Тако за горње бројеве имамо.

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 8 + 2 + 1 = 11$$
$$(2102)_3 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2 = 2 \cdot 27 + 9 + 2 = 65.$$

Ако бисмо имали да број преобратимо из декадног система у неки други, ми ћемо тај број поделити највишим степеном нове основе, који се у њему може садржати, остатак најближим нижим степеном итд.

Нека имамо на пр. декадни број 2897 да изразимо бројем из система са основом 8. Најпре ћемо образовати узастопне степене од 8.

	$2897 : 512 = 5$
$8^1 = 8$	$337 : 64 = 5$
$8^2 = 64$	$17 : 8 = 2$
$8^3 = 512$	$1 : 1 = 1$

$$2897 = 5 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 1 = (5521)_8.$$

Напомена 1. — Ми смо овде последњи остатак 1 делили са 1. При том смо узели да је $8^0 = 1$. До 8^0 дошли смо спуштајући поступно степен од 8, тј. 8^3, 8^2, 8^1, 8^0. Да је $8^0 = 1$ показаћемо доцније.

Напомена 2. — Да бисмо прешли из једног недекадног система у неки други недекадни, најпростије је прво прећи у декадни систем, па из овога у тај други.

За писмено вежбање

1. Колико има петоцифрених бројева?

2. Колико има бројева од n цифара?

3. Једна књига има 534 стране. Колико је цифара потребно за нумерисање свих страна?

4. Претпоставимо да смо написали редом бројеве природног бројног реда и да их при том нисмо никаквим знацима раздвајали. Која је цифра на 1263-ћем месту? Која на стотом, која ни хиљадитом?

Решење. Да бисмо написали природни бројни ред морамо најпре написати првих 9 бројева или 9 цифара. Затим имамо $99-9=90$ двоцифрених бројева, за чије је писање потребно

$$90 \cdot 2 = 180 \text{ цифара.}$$

За троцифрене бројеве чији је број

$$999 - 99 = 900$$

потребно је $900 \cdot 3 = 2700$ цифара.

Сад видимо да је потребно за све бројеве од 1 до 999 свега цифара

$$9 + 180 + 2700 = 2889.$$

Видели смо још да је за бројеве од 1 до 99 потребно

$$9 + 180 = 189 \text{ цифара.}$$

Број 1263, ранг тражене цифре налази се између бројева 189 и 2889. Та цифра припада неком броју који се налази између бројева 99 и 999. Она дакле припада једном троцифреном броју.

Ранг тражене цифре у овом низу троцифрених бројева добићемо, ако од 1263 одузмемо број цифара који припада једноцифреним и двоцифреним бројевима, тј. број 189.

$$1263 - 189 = 1074.$$

Овај број цифара, 1074, садржи сад у себи само цифре троцифрених бројева. Тих троцифрених бројева има свега

$$1074 : 3 = 358.$$

Одавде видимо да је 1074-та цифра, последња цифра 358-ог троцифреног броја по реду почев од 100.

358-ми троцифрени број је

$$99 + 358 = 457.$$

Тражена цифра је 7.

5. Да бисмо написали све бројеве редом од 1 до n закључно, потребно је 2905 цифара. Који је број n?

6. Преобрати следеће бројеве у декадни систем:

$(11)_2$; $(111)_2$; $(110)_2$; $(1111)_2$; $(101010)_2$; $(1001001)_2$; $(1011101)_2$;

7. Да се преобрати у декадни систем:

$(21220)_3$; $(1032)_4$; $(12345)_6$; $(8329)_{12}$

8. Да се напишу у декадном систему следећи бројеви:

$\alpha\,130\,\beta$ (основа 12)
134501 (основа 11)
$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ (основа 20)

γ значи цифру 12, δ цифру 13.

9. Који је најмањи двоцифрени број у бројном систему са основом 2; 5; 11; 12; 60; n?

10. Који је највећи двоцифрен број у претходним системима?

11. Како гласе следећи бројеви из система са основом 4 у декадном систему: $(13)_4$; $(123)_4$; $(300)_4$; $(333)_4$; $(1022)_4$?

12. Да се преобрате у декадни систем бројеви система са основом 12: $(317)_{12}$; $(8\,\beta\,0)_{12}$; $(700\,\alpha)_{12}$; $(\alpha\alpha)_{12}$.

13. Како се пишу следећи декадни бројеви у систему са основом 7: 32; 21; 37; 49; 87; 100; 700; 8 941?

14. Број 3645 написан је у декадном систему. Да се напише у систему са основом 4.

15. Декадни број 3457 да се преобрати у систем са основом 2, затим у систем са основом 3.

16. Преобрати декадни број 2 897 у систем са основом 6; са основом 7; са основом 9!

17. Преобрати декадни број 32 847 у систем са основом 2; 3; 4; 5!

18 Преобрати број $(1000)_{12}$ у систем са основом 2; 3; 4; 6!

19. Како се пише број $(10000)_9$ у систему са основом 12?

20. Изведи следеће радње у датим системима и начини пробу преобраћањем и датих бројева и добијених резултата у декадни бројни систем:

$$(2234)_8 + (1604)_8;\ (34105)_6 - (25131)_6;$$
$$(2222)_3 \cdot (21)_3;\ (1010)_2 : (10)_2!$$

21. $(317)_{12} + (80\beta)_{12} + (700\,\alpha)_{12} =$

22. $(8243)_{12} + (90\beta)_{12} + (7430)_{12} + (1581\alpha)_{12} =$

23. $(783)_{12} - (415)_{12} =$

24. $(845)_{12} - (97)_{12} =$

25. $(647\alpha)_{12} - (\alpha\,\beta\,7)_{12} =$

26. $(\beta\,\alpha\,0\,0)_{12} - (1234)_{12} =$

27. $(8)_{12} \cdot (7)_{12} =$

28. $(9)_{12} \cdot (17)_{12} =$

29. $(25)_{12} \cdot (7\,\beta)_{12} =$

30. $(81)_{12} \cdot (\alpha\,3)_{12} \cdot (200)_{12} =$

31. $(33)_{12} : (11)_{12} =$

32. $(34)_{12} : (10)_{12} =$

33. $(\beta\,\beta)_{12} : (13)_{12} =$

34. Покажи да је број (121) потпун квадрат у сваком систему, са ма којом основом b!

35. У ком бројном систему је број 13 написан у облику 31?

ГЛАВА II

Дељивост

(Понављање и допуњавање)

30. — За један број a кажемо да је дељив неким другим бројем b, ако је a производ броја b и једног другог целог броја c тј. ако је

$$a = b \cdot c.$$

Тада је број b *чинилац* или *мера* броја a, а a *садржалац* броја b. Тако је на пр.

$$28 = 7 \cdot 4.$$

Број 7 је чинилац броја 28, број 28 је садржалац броја 7. 7 се садржи без остатка у 28. Број 28 је *дељив* са 7.

31. — Код дељивости одмах у почетку треба да искажемо два важна правила:

I. *Ако су два броја a и b дељиви једним трећим бројем d, онда је и њихов збир и њихова разлика дељива тим бројем.*

Из $a = d \cdot a_1$ и $b = d \cdot b_1$ следује

$$a + b = d \cdot (a_1 + b_1).$$
$$a - b = d \cdot (a_1 - b_1).$$

Примери. Бројеви 63 и 35 дељиви су са 7. Тада је и њихов збир

$$63 + 35 = 7 \cdot 9 + 7 \cdot 5 = 7 \cdot (9 + 5) = 98$$

и њихова разлика $63 - 35 = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5 = 7 \cdot (9 - 5) = 28$ дељиви са 7.

II. *Ако је неки број a дељив једним бројем d* онда је и садржалац броја a дељив тим бројем d.

Нека је $a = d \cdot a_1$.

Ако обе стране ове једначине помножимо бројем m добићемо

$$a \cdot m = d \cdot a_1 \cdot m \text{ или}$$
$$a \cdot m = d \cdot (a_1 \cdot m).$$

Одавде се види да је $a \cdot m$ производ броја d и броја $a_1 \cdot m$.

Пример. — Број 15 је дељив бројем 5. Тада су и садржаоци броја 15, бројеви 30, 45, 60 итд. дељиви са 5.

За писмено вежбање

1. Докажи следећа правила и објасни их на посебним примерима:

a) Кад је збир два броја паран број тј. дељив са 2, онда су ти бројеви или оба парни, или оба непарни.

Исто тако важи и за разлику.

b) Производ два броја је само онда непаран, кад су оба броја непарни бројеви.

c) Израз $n + (n + 1) + (n + 2)$ увек је дељив са 3. — Искажи правило и обичним говором!

d) Израз $n\,(n + 1)\,(n^2 + 2)$ увек је дељив са 6. Правило искажи и обичним говором!

e) Израз $n\,(n + 1)\,(2n + 1)$ увек је дељив са 6. (Види Алгебру за III разред стр. 48 зад. 126!)

f) Производ $n\,(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3)$ дељив је са 24.

g) Производ $n\,(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3)\,(n + 4)$ дељив је са 120.

2. Један број је чинилац бројева a и b. Може ли он бити већи од $a - b$?

3. Изведи помоћу споменутог важног правила I следећа правила о дељивости појединих бројева:

a) Један број дељив је са 2, ако је цифра јединица дељива са 2.

То исто важи и за 5.

b) Број је диљв са 4, кад је његов двоцифрени број састављен од десетица и јединица дељив са 4.

То исто важи и за 25.

c) Број је дељив са 8, ако је троцифрени број, састављен од његових стотина, десетица и јединица дељив са 8.

Исто то важи и за 125.

4. Којим од бројева 2, 4, 5, 8, 10, 25, 100, 125, 1000 су дељиви следећи бројеви:

215, 326, 512, 465, 810, 3 876, 7 100, 7 675, 8 125, 8 725, 8 728, 13 464, 14 125, 33 375, 94 500, 43 625, 504 000?

5. Покажи да се сваки број који је дељив са 4 може претставити као збир од два узастопна непарна броја!

6. Покажи да је од два узастопна парна броја један увек дељив са 4!

7. Да ли је збир два узастопна парна броја дељив са 4?

Напомена. — Слично проби са 9 може се вршити и проба са 11.

15. Да се пронађу правила дељивости у систему са основом 12 за бројеве 2, 3, 4, 6, 8, 11 и 13.

Дељивост са 7, 13, 17, 19, 23

31. Сасвим је природно да се ученик пита да ли постоје правила дељивости и за бројеве 7, 13, 17 итд. За ове бројеве постоје правила дељивости, само нису тако проста као она која смо досада проучили. Тих правила има много чак и за један исти број. Ми ћемо изнети она, која су нам позната као најпростија за практичну примену.

При том ћемо сваки број писати у облику

$$10\,a + b,$$

где су b јединице, а a број десетица. На пр.:

$$947 = 10 \cdot 94 + 7$$
$$12743 = 10 \cdot 1274 + 3.$$

Један број облика $10a + b$ дељив је
са 7, ако је израз $a - 2b$ дељив са 7;
са 13, ако је израз $a + 4b$ дељив са 13;
са 17, ако је израз $a - 5b$ дељив са 17;
са 19, ако је израз $a + 2b$ дељив са 19;
са 23, ако је израс $a + 7b$ дељив са 23.

Примери. Број 49 дељив је са 7, јер је $4-2 \cdot 9 = 4-18 = -14$. Број 403 дељив је са 13, јер је $40 + 4 \cdot 3 = 40 + 12 = 52$ дељиво са 13. Број 1785 дељив је са 17, јер је $178 - 5 \cdot 5 = 178 - 25 = 153$; $15 - 5 \cdot 3 = 15 - 15 = 0$.

Пробај ова правила на следећим примерима:
за 7: 63, 91, 119, 343, 525, 1736;
за 13: 26, 169, 429, 546, 2223, 2769;
за 17: 68, 221, 306, 1802, 4897, 6699;
за 19: 57, 152, 361, 418, 6859, 10977;
за 23: 92, 138, 529, 759, 1288, 2047.

Прости и сложени бројеви

32. — Један број који је дељив само са 1 и са самим собом зове се *прост број.* Сви други бројеви зову се *сложени бројеви.* Број један је прост. Али како ће нам се убудуће прости бројеви јављати најчешће као чиниоци производа, а уводити број један у производ је бескорисно, то ћемо број један оставити настрану у даљем раду.

33. Распознавање простих бројева. — Нека имамо један број N да испитамо да ли је прост број. Тога ради делићемо га редом простим бројевима 2, 3. 5, 7 итд. То пробање има своју границу, јер, пробајући, ми ћемо добијати количнике или исте, или све мање и мање. Тако можемо доћи до једног броја p, да при дељењу добијемо количник мањи од делиоца p. После тога не вреди даље испитивање, ако дотле ни једно дељење није било без остатка. Јер ако би се нашао неки број већи од p који би се тачно садржао у N, количник би морао бити неки од бројева 2, 3, 5, 7 итд. А ми смо се прво уверили пробањем, да ови бројеви нису чиниоци броја N Онда имамо ово **практично упутство** за распознавање простих бројева: *Треба дати број делити редом простим бројевима 2, 3, 5, 7, 11 итд., док се не добије количник који је мањи од употребљеног делиоца. Ако сва дељења дотле буду са остатком, онда је број који испитујемо прост број.*

34. — Из начина на који смо добили ово правило произилази *да сваки сложени број мора имати као чинилац бар један прост број.* Јер ако испитујемо поступно делиоце 2, 3, 4, 5, 6... немогућно је, да при првом дељењу без остатка делилац буде сложен број. Морала би и пре тога да се изврши једна деоба без остатка. *Тако је најмањи чинилац једнога сложеног броја увек прост број.*

35. Ератостеново сито. — Да бисмо нашли редом све просте бројеве у природном бројном реду до једног датог броја, можемо применити следећи механички поступак, који је познат под именом *Ератостеново сито.* Испишу се сви непарни бројеви до n заједно са бројем 2. Затим се почев од 3 прецрта сваки трећи број, почев од 5 сваки пети, од 7 сваки седми итд., док сви садржаоци не отпадну. (Види Аритметику за II р. стр. 14!)

36. Низ простих бројева је бескрајан. — Ово значи да кад нам је дат један прост број, увек постоји један други прост број, већи од овога. Према томе постоји један прост број већи и од овог другог, један нов прост број већи и од овог трећег итд. *бескрајно.*

Да бисмо доказали да је низ простих бројева бескрајан, довољно је да докажемо да постоји један прост број већи

8. Докажи следећа правила:

a) Квадрат једног парног броја увек је дељив са 4.

b) Квадрат једног непарног броја има облик $8n + 1$.

9. Које остатке дају разни степени од 10, кад их делимо са 9? Изведи из тога правило о дељивости:

Један број дељив је са 3 или 9, кад му је збир цифара дељив са 3 или 9.

10. Који су од ових бројева дељиви са 3 или 9:

684, 374, 508, 7206, 34 015, 26 502, 20 471, 24 075, 407 245, 502 034, 14 706, 123 456, 112 020 408?

11. Зашто је разлика бројева који се састоје из истих цифара увек дељива са 9? На пр. 46 183 — 13 468 = 32 715.

12. **Проба са 9.** — Под *деветичним остатком* једнога броја разумемо његов остатак, кад га поделимо са 9.

Како се најлакше добија деветични остатак једнога броја?

За деветични остатак важе ова правила, која се лако доказују:

1. Ако a има деветични остатак r_1, b деветични остатак r_2, то је деветични остатак збира $a + b$ једнак деветичном остатку збира $r_1 + r_2$.

Пример. Деветични остатак збира $52 + 13 = 65$ једнак је деветичном остатку збира $7 + 4 = 11$, тј. броју 2.

2. Деветични остатак разлике $a - b$ је исти као и разлике $r_1 - r_2$.

Пример. $52 - 13 = 39$ има исти деветични остатак као и $7 - 4 = 3$ тј. број 3.

3. Деветични остатак производа $a \cdot b$ је исти као и производа $r_1 \cdot r_2$.

Пример. $52 \cdot 13 = 676$ има исти деветични остатак као и $7 \cdot 4 = 28$, тј. број 1.

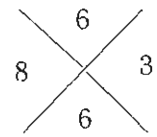
4. Деветични остатак дељеника a једнак је производу деветичних остатака делиоца b и количника q.

Ако при дељењу постоји и остатак дељења, онда је деветични остатак дељеника a једнак производу од деветичног остатка делиоца b и количника q, увећаном за деветични остатак остатка дељења r.

Пример. $57 = 13 \cdot 4 + 5$. Деветични остатак броја 57 једнак је деветичном остатку збира $4 \cdot 4 + 5$ тј. број 3.

На овоме се заснива позната *проба са 9.* Одредимо на пр. у случају множења два броја $2132 \cdot 741$ деветични остатак ових бројева тј. 8 и 3. Образујемо њихов производ 24, одредимо његов деветични остатак 6 и сравнимо га са деветичним остатком израчунатог производа њиховог 1 579 812. Ако су тако добијени деветични остаци различити, рачун је сигурно погрешан. Ако су исти, вероватно је да је рачун исправан. (Види Алгебру за III разред стр. 126!)

Уобичајена шема за пробу са 9 је у овом примеру



Проба са 9 може понегде и да изневери. У следећим примерима проба са 9 казује да су резултати тачни, иако то није случај.

$$\begin{array}{r} 3\,784 \\ 371 \\ \hline 3784 \\ 26488 \\ 11352 \\ \hline 1493864 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 15\,724 \\ 307 \\ \hline 110068 \\ 47172 \\ \hline 581788 \end{array}$$

Напомена 1. — На исти начин може да се врши проба и код дељења, сабирања и одузимања.

Напомена 2. — Слично проби са 9 може се вршити проба са **3**.

Ученик да покаже да се слично овоме не може успешно вршити проба са 2 и 5.

13. Који су деветични остаци бројева 785^2 и $127\ 831^2$?

14. Које остатке дају узастопни степени од 10, кад их делимо са 11? Из тога изведи правило дељивости са 11:

Један број је дељив са 11, кад је разлика између збира цифара на непарним местима и збира цифара на парним местима нула или дељива са 11.

Испитај који су од следећих бројева дељиви са 11:

473, 2981, 56 782, 4 492, 148 093, 20 466, 31 724, 987 657, 34 028, 548 231, 3 690 775.

од датог простог броја p. Због тога ћемо образовати производ

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p$$

свих простих бројева до p закључно, и додати том производу 1. Тада ћемо добити број

$$N = 1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p.$$

Овај број N је већи од p и није дељив ниједним простим бројем мањим од p. Кад број N делимо бројевима 2, 3, 5... остатак је увек 1. Према томе ако је N прост број, он је већи од p. Ако је N сложен број, он мора имати за делиоца један прост број, који је опет већи од p.

У оба случаја доказали смо да постоји један прост број већи од p, *а тиме и да је низ простих бројева бескрајан.*

Напомена. — Овај врло прост доказ, сасвим у овом облику, дао је још славни математичар старих Грка *Еуклид.*

37. Прости чиниоци. — Сваки сложен број може да се претстави као производ простих бројева, који се у том случају зову прости чиниоци. Тако је на пр.

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Да бисмо извршили ово растављање на просте чиниоце, поделимо број 60 најмањим простим чиниоцем који се у њему садржи, тј. бројем 2, затим количник 30 његовим најмањим простим чиниоцем тј. са 2 итд. Уобичајена шема је

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Напомена. — Код мањих бројева растављање треба извршити усмено. (Види Аритметику за II раз. стр. 20!)

Ма како да се изврши ово растављање на просте чиниоце, увек се добија исти резултат. Због тога имамо ово важно правило:

Сваки сложен број може само на један начин да се претстави у облику производа простих чинилаца.

За писмено вежбање

1. Испитај да ли су следећи бројеви прости бројеви: 151, 317, 607, 911, 1229, 1559, 1901, 2309!

2. Нађи помоћу Ератостеновог сита све просте бројеве до 200.

3. Покажи да се сваки прост број изузев 2 и 3, може написати у облику

$$6n \pm 1.$$

Напомена. — Обрнуто од овог не важи тј. један број облика

$$6n + 1 \text{ или } 6n - 1$$

не мора бити прост број. На пр.

$$25 = 6 \cdot 4 + 1$$
$$35 = 6 \cdot 6 - 1.$$

4. Претстави све просте бројеве испод 100 као збир од квадрата других бројева. Тих квадрата не сме бити више од четири.

5. Може ли један прост број имати облик $n^2 - 1$, где је n цео број?

6. Растави на просте чиниоце бројеве: 243, 512, 875, 912, 1440, 1580, 2079, 3135, 4908, 5356, 9840, 14 850, 79 092, 381 280!

7. Растави на просте чиниоце $10n - 1$ за $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$!

8. Одреди све чиниоце бројева 16, 18, 30, 180, 196, 200, 216, 360, 450, 540, 1260 и *Платоновог броја* 5040!

Да ученик у раду не би пропустио који чинилац, може се служити поступком, који ћемо овде показати.

Узмимо на пр. број 360 и раставимо га на просте чиниоце:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Сви чиниоци броја 360 садрже ове просте чиниоце, негде са мањим изложиоцима, а негде са истим.

Напишимо у првом реду бројеве

$$1,\ 2,\ 2^2\ 2^3. \qquad (1)$$

Они су, заједно са чиниоцем 1, чиниоци који не садрже ниједан други чинилац осим 2.

У другом реду написаћемо бројеве

$$1,\ 3,\ 3^2. \qquad (2)$$

Помножићемо бројеве првог реда сваким од бројева из другога реда. Тако ћемо образовати бројеве.

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2 & 2^3, \\ 1 \cdot 3, & 2 \cdot 3, & 2^2 \cdot 3, & 2^3 \cdot 3, \\ 1 \cdot 3^2. & 2 \cdot 3^2, & 2^2 \cdot 3^2, & 2^3 \cdot 3^2 \end{array}$$

који су заједно са бројем 1 сви чиниоци броја 360, а ту нема других простих чинилаца осим 2 и 3.

Најзад кад све ове бројеве помножимо сваким од бројева

$$1,5 \qquad (3)$$

ми ћемо, с једне стране, множећи са 1, поновити све раније добијене чиниоце, а с друге добити све оне који садрже и чинилац 5. Тако ћемо добити бројеве

$$\begin{array}{l} 1,2,2^2,\ 2^3,\ 3,2 \cdot 3,2^2 \cdot 3,\ 2^3 \cdot 3.\ 3^2,\ 2 \cdot 3^2.\ 2^2 \cdot 3^2,\ 2^2 \cdot 3^2. \\ 5,2 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 5,\ 2^3 \cdot 5,\ 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5,2^3 \cdot 3 \cdot 5.\ 3^2 \cdot 5, \\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,\ 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5. \end{array}$$

или

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 19, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Ако хоћемо унапред да одредимо колики ће бити број чинилаца, то видимо да је тај број једнак производу бројева, по колико их има у првом, другом и трећем реду. У првом реду има четири броја, а у другом три и у трећем два тј.

$$4 \cdot 3 \cdot 2,$$

а то је у ствари производ изложилаца повећаних за 1, тј.

$$(3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 24.$$

Напомена. — Кад овако одређујемо број чинилаца ту подразумевамо и чиниоце 1 и сам број 360.

10. Одреди све чиниоце бројева $10n - 1$ за $n = 1, 2, 3, 4$!

11. **Савршени бројеви.** — Бројеви који имају особину да су сами једнаки збиру свих својих чинилаца, подразумевајући ту и 1, зову се *савршени* бројеви. (Види Аритметику за II р. стр. 22!)

Испитај да ли су бројеви 496 и 8128 савршени бројеви!

12. Који је најмањи цео број којим треба помножити 840, да производ постане потпун квадрат?

13. Којим најмањим бројем треба помножити 90, да нови број буде потпун куб?

14. Којим најмањим бројем треба помножити 96, да нови број буде потпун четврти степен неког целог броја?

Највећи заједнички чинилац и најмањи заједнички садржалац

38. Највећи заједнички чинилац. — Ако је d чинилац и броја a и броја b, зове се заједнички чинилац за a и b. Тако на пр. број 16 и 28 имају заједничке чиниоце 1, 2, 4. Напротив бројеви 25 и 32 немају заједничких чинилаца изузев броја 1. Бројеви који изузев 1 немају других заједничких чинилаца зову се *релативно прости бројеви.*

Међу заједничким чиниоцима најважнији је **највећи заједнички чинилац,** краће н. з. ч. Он је дељив свима другим заједничким чиниоцима.

Да бисмо одредили заједничке чиниоце за бројеве 360 и 756 раставићемо их на њихове просте чиниоце.

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Највиши степен од 2, који је заједнички чинилац за оба броја јесте 2^2, највиши заједнички степен од 3 је 3^2. Тада је $2^2 . 3^2 = 36$ заједнички чинилац, и то још и највећи. Сви други заједнички чиниоци, тј. $1, 2, 2^2, 3, 3^2, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3. 2 \cdot 3^2$ садрже се у овом највећем заједничком чиниоцу. Ми ћемо то означавати овако:

$$\text{н з.ч. } (360,756) = 36.$$

39. Верижно дељење. — Има бројева чији се чиниоци тешко налазе. Такви су на пр. бројеви 437 и 667. У таквом случају за одредбу н. з. ч. употребљавамо један други поступак тзв. *верижно дељење.*

Практично упутство гласи: *Поделимо већи број мањим, па добијеним остатком мањи број. Деобу продужимо тако, делећи увек новим остатком претходни делилац, док не добијемо дељење без остатка. Последњи делилац је н. з. ч.*

Пример. — Да се одреди н. з. ч. за бројеве 437 и 667.

Решење: 667 : 437 : 230 : 207 : 23
230 207 23 0
23 је н. з. ч.

Пошто сабирци 207 и 23 имају н. з. ч. 23, то се мора тај чинилац садржати у њиховом збиру 230. Даље сабирци 230 и 207 имају заједнички чинилац 23, па тај чинилац припада и њиховом збиру 437. Пошто он припада бројевима 437 и 230, припашће и њиховом збиру 667, тако, да бројеви 437 и 667 имају последњи делилац 23 као н. з. ч.

40. — Да бисмо одредили н. з. ч. за три броја, на пр. за бројеве 48, 360, 2024, верижним дељењем, потражимо помоћу верижног дељења најпре н. з. ч. (360,48) а то је 24; затим н. з. ч. (24,2024) = 8.

Сличан поступак имамо и за више бројева од три.

41. Најмањи заједнички садржалац. — Ако је један број N дељив сваким од бројева $a, b, c, \ldots$ то се он тада зове *заједнички садржалац* ових бројева. Један такав број је на пр. производ

$$N = a \cdot b \cdot c \ldots\ldots$$

Број заједничких садржалаца за дате бројеве је неограничен. Јер сваки садржалац броја N је опет један заједнички садржалац датих бројева.

Међу свима заједничким садржаоцима најважнији је *најмањи заједнички садржалац*. Бележићемо га н.з.с. $(a, b, c, \ldots)$.

Најмањи заједнички садржалац је производ свих простих чинилаца, који се уопште јављају у датим бројевима. При том сваки прост чинилац треба узети са највишим степеном, који се у датим бројевима јавља. На пр.

$$24 = 2^3 \cdot 3$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

н. з. с. $(24, 36, 60, 100) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$.

За писмено вежбање

1. Да се одреди растављањем на просте чиниоце н. з. ч. ових бројева: 240, 360; 216, 258; 320, 540; 813, 1062, 1228, 4800; 525, 1155; 45, 72, 162; 48, 216, 258; 252, 378, 1176; 342, 575, 684, 1002.

2. Одреди помоћу верижног дељења н. з. ч. за бројеве: 493, 1363; 890, 2869; 553, 3634; 247, 294, 1593, 1888; 1111, 11, 111; 2744, 13, 721; 4998, 3381, 4116; 420, 360, 2640, 8580!

Напомена. — За одређивање заједничких чинилаца можемо користити познато правило: кад је d чинилац бројева a и b, он је чинилац и њихове разлике $a - b$, и не може бити већи од $a - b$. На пример:

Један број који је чинилац бројева 493 и 1363 чинилац је и њихове разлике 1363—493 = 870. То је дакле заједнички чинилац и бројева 870 и 493, те и њихове разлике 870 — 493 = 377. Тај број је заједнички чинилац бројева 493 и 377, па и њихове разлике 493—377 = 116. Тај број је чинилац и бројева 377 и 116, па и њихове разлике 377 — 116 = 261. Тражени број је заједнички чинилац бројева 261 и 116, па и њихове разлике 261—116 = 145. Тај број је чинилац бројева 145 и 116, па и њихове разлике 145—116 = 29. Број 29 се садржи у 116 без остатка, па се тако исто садржи без остатка у 1363 и 493.

3. Одреди растављањем на просте чиниоце н. з. с. за бројеве: 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28; 4, 5, 20, 40, 50, 100, 125!

4. Покажи растављањем на просте чиниоце да је производ н. з. ч. и н. з. с. два броја једнак производу ова два броја! Пример 720 и 960.

5. Покажи растављањем на просте чиниоце да ако поделимо два или више бројева њиховим н. з. ч. добијени количници ће бити релативно прости бројеви. Пример 989 и 2220.

6. Ако је d н. з. ч. два броја a и b, онда је

$$a = d \cdot a_1 \qquad\qquad b = d \cdot b_1$$

где су a_1 и b_1 релативно прости бројеви.

Тада је н. з. с. за a и b дат изразом:

$$\text{н. з. с. } (a,b) = d \cdot a_1 \cdot b_1 = \frac{ab}{d}.$$

При том се н. з. ч. може да одреди верижним дељењем. На пр.

$$\text{Н. з. ч. } (4068,1921) = \frac{4068 \cdot 1921}{113} = 69\,156,$$

при чему је н. з. ч. (4068,1921) = 113.

Да се одреди верижним дељењем н. з. ч. и н. з. с. за бројеве: 5544, 7128; 459, 544, 595; 4896, 1656, 1064; 61 320, 114 464, 18 951.

ГЛАВА III

Дељивост код алгебарских израза

Растављање на чиниоце

42. Мономи. — И алгебарске изразе можемо растављати на чиниоце. Прости чиниоци су изрази, који се не могу даље растављати у изразе нижега степена, као на пр. a, $x-3$, $2a-5b$, $x+1$, a^2+b^2 итд.

Кад је један алгебарски израз изражен као производ од његових чинилаца, каже се да је растављен на чиниоце.

Према томе *моном се раставља на просте чиниоце*, кад се бројни коефицент растави на просте чиниоце. На пр.

$$72a^3b^2x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot x.$$

43. Полиноми у којима сви чланови имају заједнички чинилац. — Имали смо већ једначину

$$n(a+b-c) = an+bn-cn.$$

Ако је обрнемо, биће

$$an+bn-cn = n(a+b-c).$$

Тако можемо један полином, у коме сви чланови имају један *заједнички чинилац*, написати у облику производа по овом **практичном упутству:** *треба извадити напред тај заједнички чинилац и помножити га полиномом од чланова који су сад без тог чиниоца.*

За усмено вежбање

Који изрази треба да буду у следећим заградама:

1. $4a+8=4\cdot($a+2$)$ 2. $3x-9=3\cdot($x-3$)$

Растави на чиниоце:

3. $5a+5b$; $8x-8y$; $-4p-4^2$; $9x-9^2$.
4. $ax+ay$; $12m-18n$; $35a+21b$; a^2+a.

5. t^2-t; b^3-b^2; a^3-3ax; $25a^3-20xy$.
6. $\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}a$; $0{,}5m-\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}mn-\frac{7}{2}np$; $\frac{3}{4}x^3+0{,}75x$.

За писмено вежбање

3(x+y-1)

1. $3x+3y-3$; $ax+ay-az$; $16a-24b+32c$.
2. $49m^5n^7+56m^4n^8+91m^9n^3-77m^6n^6=$
3. $30x^2yz-54xy^2z+48xyz^2-18x^2y^2z^2=$
4. $2{,}7x^2y^2+5{,}4x^3y-1{,}8xy^3=$
5. $m(a+b)+n(a+b)=$
6. $x(r-s)-y(r-s)-z(r-s)=$

Скрати следеће разломке:

7. $\frac{4a^2b}{2ab}$; $\frac{5a^2b^2}{10a^2b^2}$; $\frac{-3ab^2}{2a^2b}$; $\frac{3a^2bc}{3ab^2c^2}$; $\frac{9a^2b}{15a^2b^2c^2}$;
8. $\frac{3a-3b}{6a+6b}$; $\frac{5m-5n}{9m-9n}$; $\frac{7-7a}{5-5a}$; $\frac{an-bn}{an+bn}$; $\frac{an-bn+cn}{ay-by+cy}$;

Напомена. — Скраћивање може бити само тада, ако је у бројиоцу и имениоцу *производ*.

9. $\frac{n^2+ny}{n^2-ny}$; $\frac{a^2+a}{1+a}$; $\frac{4a-8b}{6a-12b}$; $\frac{5a^2-10ab}{5a-10b}$.

$\frac{n(n+y)}{n(n-y)}=\frac{n+y}{n-y}$ $\frac{a(a+1)}{}=a$ $\frac{4(a-2b)}{6(a-2b)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Примена код једначина

1. $ax+bx=c$

Решење. — У овој једначини имамо слова. Сматраћемо као и досада x за *непознату*, а остала слова a, b и c, као *познате*.

Ако на левој страни извучемо x као заједнички чинилац, имаћемо

$$x(a+b)=c.$$

И ако обе стране поделимо са $a+b$, добићемо

$$x=\frac{c}{a+b}.$$

2. $ax - b = cx$ 3. $ax - b^2 = ab - bx$
4. $x + mx = mn + n$ 5. $(a + b)\,x - 2b = (a - b)x$
6. $ax + b + (b - a)\,x = a - bx + (b + a)\,x$

44. Триноми облика $a^2 \pm 2ab + b^2$. —

Пример. $m^2 - 6m + 9 = m^2 - 2 \cdot 3 \cdot m + 3^2 = (m - 3)^2$

За писмено вежбање

Растави на чиниоце триноме:

1. $x^2 - 2x + 1$ 2. $4p^2 + 4p + 1$
3. $1 + 2b + b^2$ 4. $16a^2 - 40ab + 25b^2$
5. $9x^2 + 66xy + 121y^2$ 6. $25p^2 - 40pq + 16q^2$
7. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ 8. $4a^4 - 12a^2b^2 + 9b^4$
9. $4p^6 + 12p^3q^2 + 9q^4$ 10. $4x^8 - 12x^4y^4 + 9y^8$
11. $0{,}01a^2 + 2ab + 100b^2$ 12. $4x^2 - 0{,}8xy + 0{,}04y^2$

Скрати разломке:

13. $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b}$; $\dfrac{m^2 - 2m + 1}{m - 1}$; $\dfrac{91\,(a^2 - 2ab + b^2)}{13\,(a - b)}$

45. Триноми облика $x^2 \pm (a \pm b)x \pm ab$. Извршимо следећа множења:

I $(x + 2)\,(x + 3) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6,$
II $(x - 2)\,(x - 3) = x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6,$
III $(x + 2)\,(x - 3) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6,$
IV $(x - 2)\,(x + 3) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6.$

Резултати су као што видимо различити облици тринома

$$x^2 + px + q.$$

У сваком случају запажамо следеће:

1. Коефициент уз x тј. p је алгебарски збир других чланова чинилаца.

2. q је производ других чланова.

Тако

у I случају имамо $p = 2 + 3 = 5$, $q = 2 \cdot 3 = 6$,
у II „ „ $p = -2 - 3 = -5$, $q = (-2) \cdot (-3) = +6$,
у III „ „ $p = 2 - 3 = -1$, $q = 2 \cdot (-3) = -6$,
у IV „ „ $p = -2 + 3 = +1$, $q = (-2) \cdot 3 = -6$.

Ако хоћемо обрнути поступак, тј. да нађемо чиниоце једног израза $x^2 + px + q$, ми морамо потражити таква два броја, чији је збир p а производ q.

Примери: $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$, јер је овде $p = 3 + 4 = 7, q = 3 \cdot 4 = 12$.

$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$, јер је $p = -3 - 4 = -7$, $q = (-3) \cdot (-4) = +12$.

$x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$, јер је $p = 3 - 4 = -1$, $q = 3 \cdot (-4) = -12$.

$x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$, јер је $p = -3 + 4 = +1$, $q = (-3) \cdot 4 = -12$.

У општем облику горњи изрази се могу овако написати:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a) \cdot (x + b),$$
$$x^2 - (a + b)x + ab = (x - a) \cdot (x - b),$$
$$x^2 + (a - b)x - ab = (x + a) \cdot (x - b),$$
$$x^2 - (a - b)x - ab = (x - a) \cdot (x + b).$$

Множењем се можемо уверити да је све ово тачно.

За писмено вежбање

Растави на чиниоце:

1. $x^2 + 9x + 20$ 2. $x^2 - 9x + 20$ 3. $x^2 - x - 20$
4. $x^2 + x - 20$ 5. $x^2 + 11x + 30$ 6. $x^2 - 11x + 30$
7. $x^2 - x - 30$ 8. $x^2 + x - 30$ 9. $x^2 - 2x - 48$
10. $x^2 + 12x + 35$ 11. $x^2 - 10x + 24$ 12. $x^2 - 10x + 21$

Напомена. — Кад хоћемо да раставимо на овај начин трином $x^2 + px + q$, треба најпре посматрати члан q.

46. Триноми облика $abx^2 \pm (a \pm b)x \pm 1$. — Множењем се можемо уверити да важе следеће једначине:

$$abx^2 + (a + b)x + 1 = (ax + 1) \cdot (bx + 1),$$
$$abx^2 - (a + b)x + 1 = (ax - 1) \cdot (bx - 1),$$
$$abx^2 - (a - b)x - 1 = (ax + 1) \cdot (bx - 1),$$
$$abx^2 + (a - b)x - 1 = (ax - 1) \cdot (bx + 1).$$

Примери. $6x^2 + 5x + 1 = (2x + 1) \cdot (3x + 1),$
$6x^2 - 5x + 1 = (2x - 1) \cdot (3x - 1),$
$6x^2 + x - 1 = (2x + 1) \cdot (3x - 1),$
$6x^2 - x - 1 = (2x - 1) \cdot (3x + 1).$

За писмено вежбање

Да се раставе на просте чиниоце алгебарски изрази:

1. $12x^2 + 7x + 1$ 2. $12x^2 - 7x + 1$ 3. $12x^2 + x - 1$
4. $12x^2 - x - 1$ 5. $20x^2 + 9x + 1$ 6. $20x^2 - 9x + 1$
7. $20x^2 + x - 1$ 8. $20x^2 - x - 1$ 9. $2x^2 + 3x + 1$

47. Полином од четири члана. — Један полином од четири члана може често да се растави на чиниоце груписањем по два члана.

Пример 1. $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b) \cdot (x + y).$

Пример 2. $6ax - 8bx + 15ay - 20by =$
$= 2x(3a - 4b) + 5y(3a - 4b) =$
$= (3a - 4b) \cdot (2x + 5y).$

Пример 3. Слично овоме могли бисмо поступити и са триномом $x^2 + (a + b)x + ab$.

$$x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab = x(x + a) + b(x + a) = (x + a) \cdot (x + b).$$

За писмено вежбање

Да се раставе на чиниоце изрази:

1. $2x - bx + 2y - by$ 2. $ax - 3x - ay + 3y$
3. $48ax - 56ay - 54bx + 63by$
4. $48ax - 60ax^2 + 72ax^2 - 90ax^3$
5. $40ax^2y - 60a \cdot y - 50bx^2y + 75bxy$
6. $21ab - 15an - 20mn + 28\,bm.$ (3a-4n)(5n+7b)

48. Разлика два квадрата. — Знамо да је

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

Одавде видимо: ако се један израз може да напише као разлика два квадрата, ми га одједном можемо раставити на чиниоце.

Пример. $25a^2 - 9b^2 = (5a)^2 - (3b)^2 = (5a + 3b) \cdot (5a - 3b).$

За усмено вежбање

Растави на чиниоце простим посматрањем:

1. $x^2 - 9$; $25 - x^2$; $1 - b^2$; $1 - 4t^2$; $9m^2 - 1$.
2. $a^2 - 0{,}25$; $625b^2 - 144$; $81x^2 - 1$; $\frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{25}y^2$.
3. $12^2 - 10^2$; $18^2 - 12^2$; $45^2 - 15^2$; $1001^2 - 1$.
4. $x^2 - 10\,000$; $x^2y^2 - 81a^4$; $1 - 121a^4$; $\frac{64}{100}a^4b^2 - \frac{121}{144}a^6b^4$.

49. Збир или разлика кубова $a^3 \pm b^3$. Да се израчуна

$$(a^3 + b^3) : (a + b)$$
$$\text{и} \quad (a^3 - b^3) : (a - b).$$

Из добијених резултата обртањем имамо

$$a^3 + b^3 = (a + b) \, . \, (a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b) \, . \, (a^2 + ab + b^2).$$

Збир два куба дељив је збиром основа.
Разлика два куба дељива је разликом основа.

Пример 1. $8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 =$
$= (2a + 3b)\,[(2a)^2 - 2a \cdot 3b + (3b)^2] =$
$= (2a + 3b) \cdot (4a^2 - 6ab + 9b^2).$

Пример 2. $64a^3 - 125b^3 = (4a)^3 - (5b)^3 =$
$= (4a - 5b) \cdot [(4a)^2 + 4a \cdot 5b + (5b)^2] =$
$= (4a - 5b) \cdot (16a^2 + 20ab + 25b^2).$

За писмено вежбање

Да се раставе на чиниоце изрази:

1. $x^3 + y^3$; $t^3 - u^3$; $1 - m^3$; $1 + m^3$; $m^3 - 27$.
2. $125 + 8b^3$; $27a^3 - 64$; $1000x^3 + 1$; $512x^3 - 1$.
3. $729p^3 - 8q^3$; $216x^3 - y^3$; $343r^3 + s^3$; $1 - 729x^6$.

Напомена. — О разлагању на чиниоце збирова и разлика степена виших од 3 и о општем случају говорићемо касније код партије о *степеновању*.

50. — После свега овога, кад добијемо један алгебарски израз да раставимо на чиниоце, поступаћемо редом по овом **практичном упутству:**

1. *Најпре гледамо да ли* **сви чланови имају један заједнички чинилац** *или да ли се могу по групама од два или више чланова извући заједнички чиниоци.*

2. *Једна разлика може се раставити на чиниоце само ако је разлика два степена са једнаким изложиоцима. На пр.* $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$ итд.

3. *Један двочлани збир може се раставити само тада, ако је то збир два степена са изложиоцима једнаким и непарним.* На пр. $a^3 + b^3$, $a^5 + b^5$ итд.

Напомена. $a^2 + b^2$ не може се раставити на чиниоце.

4. *Код тринома најпре се испита да није* **потпун квадрат каквог збира или разлике.** *Ако то није, онда да ли је облика*

$$x^2 \pm (a \pm b)x \pm ab$$

или

$$abx^2 \pm (a \pm b)x \pm 1.$$

У првом случају треба најпре посматрати трећи члан ab. *Из њега се одређују најпре бројеви* a *и* b *као његови чиниоци и њихов знак. Ако је члан* ab *позитиван, бројев* a *и* b *су једнако означени, ако је негативан, они су различито означени.*

Из истих разлога у другом случају најпре се посматра коефициент првога члана ab, *затим знак трећега члана, броја 1.*

Напомена 1. — Како се раставља на чиниоце трином облика $ax^2 + bx + c$, где a, b и c могу бити ма какви бројеви, ученик ће слушати касније.

Напомена 2. — Ради занимљивости изнећемо још два случаја дељивости полинома.

1. Један полином у коме се налази само једно слово, на пр. x, дељив је са $(x - 1)$, ако је алгебарски збир његових коефицијената једнак нули.

На пример полином $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Збир његових коефицијената је $1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Тај полином је дељив са $x - 1$.

2. Полином у коме се налази само једно слово, на пр x, дељив је са $(x + 1)$, ако је алгебарски збир коефицијената непарних степена од x једнак алгебарском збиру коефицијената парних степена.

На пример полином $2x^3 + x^2 - 7x - 6$. Збир коефицијената са непарним степенима је $2 - 7$, збир коефицијената са парним степенима је $1 - 6$. Та два збира су једнака.

$$2 - 7 = 1 - 6.$$

Тај полином је дељив са $x + 1$.

Мешовити задаци за понављање

Растави на просте чиниоце:

1. $x^4 - y^4$! *Решење.* $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2) = (x^2 + y^2) \cdot (x + y) \cdot (x - y)$.

2. $t^4 - 625$; $16x^{12} - y^8$; $81m^6 - 256$; $1296a^4 - 1$.

Израчунај растављањем на просте чиниоце.

3. $365^2 - 35^2$; $995^2 - 52^2$; $459^2 - 159^2$; $396^2 - 186^2$.

4. Од једног картона облика квадрата, чија је страна $10{,}^{cm}61$, отсечен је квадрат са страном од $9{,}^{cm}24$. Колика је преостала површина?

5. Хипотенуза једног правоуглог троугла је 91cm, једна катета 84 *cm*, колика је друга катета?

6. $\mathbf{2x^2 - 288}$. *Решење.* $2x^2 - 288 = 2(x^2 - 144) = 2 \cdot (x + 12) \cdot (x - 12)$.

7. $4 - 4b^2$; $3m^2 - 12n^2$; $45a^2b^2 - 80a^2c^2$; $11 - 99x^2$,

8. $\mathbf{(a + b)^2 - (c + d)^2}$.

Решење. $(a + b)^2 - (c + d)^2 = [(a + b) + (c + d)] \cdot [(a + b) - (c + d)] = (a + b + c + d) \cdot (a + b - c - d)$.

9. $(x - y)^2 - z^2$; $m^2 - (n + p)^2$; $(a - b)^2 - 4c^2$.

10. $(t + 2u)^2 - 9s^2$; $b^2 - (2q - r)^2$; $(a + 1)^2 - (a - 1)^2$.

11. $(2a + 5)^2 - (2a - 3)^2$; $(a + x)^2 - (a - x)^2$.

12. $100x^2 - 4(7x - 2y)^2$; $(a + 3b)^2 - 9(b - c)^2$.

13. $9(2a - d)^2 - 4(3a - x)^2$; $(4a + 3b)^2 - 16(a - x)^2$.

14. $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}$.

Решење. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$.

15. $a^2 - 2a + 1 - b^2$

16. $4x^2 - 4xy + y^2 - z^2$

17. $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$

18. $9a^2 - b^2 - 2bc - c^2$

19. $16a^2 - 6pq - 9p^2q^2 - 1$

20. $25a^2 - c^2 + 10a + 1$

21. $1 - 4a^2 - b^2 + 4ab$

22. $1 - a^2 - 2ab - b^2$

23. $x^2 - y^2 - 9(x - y)$

24. $x^2 - y^2 - (9x - 9y)$

25. Растави на чиниоце.
$(x^2 + 3x - 4)^2 - (x^2 - 3x - 4)^2$
и нађи количник, кад се тај израз подели са $6x + 12$!

26. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2$

Решење. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2 = (a + b)^2 - (c - d)^2 = (a + b + c - d)(a + b - c + d)$.

27. $9a^2 - 6ab + b^2 - x^2 - 2tx - t^2$

28. $5\frac{19}{25}x^4y^4 + 5\frac{3}{5}x^2y^2z^2 + 1\frac{13}{36}z^4$

29. $4{,}41\frac{m^4}{n^4} - 6{,}3 + 2{,}25\frac{n^4}{m^4}$

30. $x^3 + 8x^2 + 15x$; $3x^3 - 30x^2 + 72x$; $5ax^2 + 25ax - 70a$

31. $y^2 - (3a + b + 1)y + (3a + b)$

32. $ax - bx + cx + ay - by + cy$

33. $(7a - 3x)(5c - 2d) - (6a - 2x)(5c - 2d)$

34. $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$. *Упутство.* Напиши израз у облику $(a^3 + b^3) + (2a^2b + 2ab^2)$!

35. $a^3 + 3a^2b + 6ab^2 - 8b^3$

36. $p^2 + q^2 - r^2 - s^2 + 2(pq + rs)$

37. $k^2 - m^2 + l^2 - n^2 - 2(kl - mn)$

38. $4a^2x + c^2y - 4a^2y - c^2x$

39. $cx^3 + 2ay^3 - cy^3 - 2ax^3$

40. $(a + 2b)a^3 - (2a + b)b^3$

41. $3(x^3 + y^3) - xy(1 + 9xy)$

42. Ако је $x + 3$ један чинилац тринома $x^2 + ax + 15$, колико је a?

43. Ако је $x + 2$ један чинилац трином $x^2 - ax + 18$, нађи a!

44. Ако је $z + 2$ један чинилац тринома $z^2 + 12z + b$, нађи b!

45. Ако је $m - 5$ један чинилац тринома $m^2 - 12m + c$, нађи c!

46. Покажи растављањем на чиниоце да је
$(x^2 - 5x - 14)(x^2 + 2x - 3) = (x^2 - 8x + 7)(x^2 + 5x + 6)$!

47. Исто тако да је
$(x^2 + x - 12)(x^2 - x - 12) = (x^2 - 9)(x^2 - 16)$.

48. Растављањем на просте чиниоце одреди квадратни корен израза:
$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 5x + 6)$!

Скрати следеће разломке:

49. $\frac{5a^2b - 5ab^2}{5a^2c - 5ac^2}$; $\frac{3a^2x - 2ax^2}{2a^2x - 3ax^2}$; $\frac{5x^2y - 4xy^2}{5x^2y + 4xy^2}$; $\frac{3a - 6b}{8b - 4a}$.

50. $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$; $\frac{x + y}{x^2 - y^2}$; $\frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2}$; $\frac{(a + b)^2}{a + b}$

51. $\frac{(x + 1)^2}{x^2 - 1}$; $\frac{(x - y)^2}{x^2 - y^2}$; $\frac{6x^2 - 6xy}{3(x - y)^2}$; $\frac{a^2x - ax^2}{x^2 - a^2}$.

52. $\frac{m^2 - p^2}{m^2 - 2mp + p^2}$; $\frac{1 + x}{1 + 2x + x^2}$.

53. $\frac{(a - b)^2}{(b - a)^2}$; $\frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 - 12ab + 9b^2}$.

54. $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$; $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2}$.

55. $\frac{x^3 + 1}{(x + 1)^3}$; $\frac{(x - 3)^3}{x^3 - 27}$; $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$; $\frac{3a^3 - 24}{3a^2 + 9a - 30}$.

56. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$; $\frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$.

57. $\frac{(3a^2 - 48) \cdot (4a^2 - 16a + 12)}{(2a^2 + 2a - 24) \cdot (8a^2 - 16a - 24)}$.

58. $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$.

У следећим примерима да се најпре дељеник растави на просте чиниоце:

59. $(ax-bx):(a-b)=$; $(am-m):(a-1)=$
60. $(ax-ay+bx-by):(x-y)=$
61. $(6am-9an-4bm+6bn):(3a-2b)=$
62. $(2ax-6bx+8cx-ay+3by-4cy):(2x-y)=$
63. $(x^2+xy-2y^2):(x-y)=$
64. $(3m^2+mn-2n^2):(3m-2n)=$
65. $(x^2-7x+12):(x-3)=$ 66. $(x^2-8x+15):(x-5)=$
67. $(a^3+b^3):(a+b)=$ 68. $(a^3-b^3):(a-b)=$

Примена код једначина

1. $ax+b^2=bx+a^2$ 2. $a^2+bx=b^2-ax$
3. $9n^2+4mx=3nx+16m^2$ 4. $ax+3x-9+6a=a^2$
5. $9a^2=121b^2+3ax+11bx$
6. $bx+cx-dx+a^2=b^2+ax+cx-dx$
7. $(a+b)x+(a-b)=(a-b)x+(a+b)$
8. $(a+b)x-2b=(a-b)x$
9. $ax+b+(b-a)x=a-bx+(b+a)$
10. $4a(a+x)-2b(x-2a)-b^2=x(3a-b)+2a(b+3a)-a^2$

Највећи заједнички чинилац алгебарских израза

51. — Највећи заједнички чинилац за два или више алгебарских израза је производ њихових заједничких чинилаца.

Пример 1. — Да се одреди н. з. ч. израза $54a^4b^3c^2d$ и $45a^3b^6c^5e^2$.

Решење. — Кад раставимо оба израза на просте чиниоце добијамо

$$54a^4b^3c^2d=2\cdot 3^3\cdot a^4\cdot b^3\cdot c^2\cdot d$$
$$45a^3b^6c^5e^2=3^2\cdot 5\cdot a^3\cdot b^6\cdot c^5\cdot e^2.$$

Заједнички чиниоци су 3^2, a^3, b^3 и c^2. Према томе н. з. ч. је

$$3^2\cdot a^3\cdot b^3\cdot c^2=9a^3b^3c^2.$$

Пример 2. — Да се одреди н. з. ч. за изразе $30a^2bx^2-45ab^2x^2$ и $10a^2by^2-15ab^2y^2$.

Решење. $30a^2bx^2-45ab^2x^2=3\cdot 5\cdot a\cdot b\cdot x^2\cdot(2a-3b)$.
$10a^2by^2-15ab^2y^2=5\cdot a\cdot b\cdot y^2\cdot(2a-3b)$.

Заједнички чиниоци су 5, a, b и $2a-3b$. Према томе н. з. ч. је

$$5ab(2a-3b).$$

Пример 3. a^2-2a+1, a^2+2a-3.

$$a^2-2a+1=(a-1)^2$$
$$a^2+2a-3=(a-1)\cdot(a+3).$$

Н. з. ч. је $(a-1)$.

За писмено вежбање

Да се одреди н. з. ч. за изразе:

1. $10a^2b^3c$; $24ab^2c^2$; $18x^5y^2z^3$, $24x^3y^4z$; $18ab^4c^3$, $12a^3b^2c^3$.
2. $6x^2y$, $3xy^2$, $9x^2y^2$; $3a^2b^6$, $27a^4b^4$, $48a^3b^2$.
3. $26x^3y^2$, $13x^2z^3$, $39x^2y^2z^2$; $3abc^2$, $5a^2bc$, $7abc^2$, $9abcd$.
4. $35a^6b^4c^2d^3$, $20a^5c^3d^4$, $45a^3b^2d$, $10a^7b^4cd^7$.
5. $6a^2-9ab$, $8ab-12b^2$; $8x^2-12xy$, $6x^2-4xy$.
6. x^2-5x+6, x^2-2x; x^2+5x+6, x^2+4x+4.
7. $x^2+(a+b)x+ab$, $x^2+(a+c)x+ac$.
8. x^3-3x^2+2, x^3+4x^2-5. *Упутство*: код оба тринома је алгебарски збир коефицијената једнак нули.
9. x^3+3x^2+5x+3, x^3+x^2+x-3. *Упутство*: код првог полинома је збир коефицијената непарних степена једнак збиру коефицијената парних степена; код другог је алгебарски збир коефицијената једнак нули.
10. $x^3+8x^2+10x+21$, x^3+6x^2-8x-7.

Решење. — Кад се полиноми не могу лако да раставе на чиниоце, може се и онда применити метод **верижног дељења,** слично ономе како смо имали код целих бројева.

$$(x^3+8x^2+10x+21):(x^3+6x^2-8x-7)=1$$
$$\frac{x^3+6x^2-8x-7}{2x^2+18x+28}$$

Сад треба остатком $2x^2+18x+28$ делити претходни делилац. Видимо још да остатак има чинилац 2, али пошто делилац x^3+6x^2-8x-7 нема чиниоца 2, то ми тај чинилац из остатка можемо избацити, јер он не утиче на н. з. ч. Тако смо још у могућности да лакше делимо, јер бисмо делећи x^3 са $2x^2$ добили разломак.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 6x^2 - 8x - 7) : (x^2 + 9x + 14) = x - 3 \\
\underline{x^3 + 9x^2 + 14x} \\
\quad -3x^2 - 22x - 7 \\
\quad \underline{-3x^2 - 27x - 42} \\
\qquad\qquad 5x + 35
\end{array}
$$

Даље треба претходни делилац $x^2 + 9x + 14$ да поделимо новим остатком $5x + 35$. У остатку има чинилац 5, који треба одбацити, јер не утиче на н. з. ч., пошто израз $x^2 + 9x + 14$ нема тог чиниоца.

$$
\begin{array}{l}
(x^2 + 9x + 14) : (x + 7) = x + 2 \\
\underline{x^2 + 7x} \\
\qquad 2x + 14 \\
\qquad \underline{2x + 14} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Напомена. — Ми смо могли да скратимо рад тиме, што бисмо код израза $x^2 + 9x + 14$ могли одмах рећи да су његови чиниоци $x + 2$ и $x + 7$. Да $x + 2$ није чинилац датих полинома, види се јасно из њихових последњих чланова.

Деобом полинома $x^3 + 6x^2 - 8x - 7$ налазимо да је $x + 7$ највећи заједнички чинилац.

11. $x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 14x - 20$, $x^3 - 8x^2 + 20x - 25$

Решење. —

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 14x - 20) : (x^3 - 8x^2 + 20x - 25) = x + 3 \\
\underline{x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 25x} \\
\quad 3x^3 - 22x^2 + 39x - 20 \\
\quad \underline{3x^3 - 24x^2 + 60x - 75} \\
\qquad\qquad 2x^2 - 21x + 55
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 8x^2 + 20x - 25) : (2x^2 - 21x + 55) = \frac{x}{2} + \frac{5}{4} \\
\underline{x^3 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{55x}{2}} \\
\quad \frac{5}{2}x^2 - \frac{15}{2}x - 25 \\
\quad \underline{\frac{5}{2}x^2 - \frac{105}{4}x + \frac{275}{4}} \\
\qquad \frac{75}{4}x - \frac{375}{4} = \frac{75}{4}(x - 5)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(2x^2 - 21x + 55) : (x - 5) = 2x - 11 \\
\underline{2x^2 - 10x} \\
\quad -11x + 55 \\
\quad \underline{-11x + 55}
\end{array}
$$

Н. з. ч. оба полинома јесте $x - 5$.

Напомена 1. — Као што видимо није неопходно потребно да се први члан делиоца тачно садржи у првом члану дељеника.

Напомена 2. — Рекли смо да је заједнички чинилац два броја у исто време и чинилац њихове разлике. Знајући ово ми можемо скратити поступак за одређивање н. з. ч. за два полинома.

12. $5x^3 + 16x^2 + 23x - 5148$, $3x^3 + 48x^2 - 103x - 5148$.

Разлика ових израза је

$$
\begin{aligned}
&2x^3 - 32x^2 + 126x = \\
&= 2x\ (x^2 - 16x + 63) = \\
&= 2x\ (x - 7)\ (x - 9).
\end{aligned}
$$

Чиниоци разлике су $2, x, x - 7$ и $x - 9$. Очевидно је да 2 и x нису заједнички чиниоци горњих полинома, нити $x - 7$, јер 5148 није дељиво са 7. Према томе $x - 9$ мора бити н. з. ч., ако горња два полинома имају уопште заједнички чинилац.

Да се одреди верижним дељењем н. з. ч. полинома:

13. $x^3 - 8x^2 + 26x - 33$, $x^3 - 9x^2 + 31x - 44$
14. $6m^3 - 6m^2 - 11m - 2$, $2m^3 - 7m^2 - 8m - 4$
15. $t^4 + t^3 + t^2 + 11t + 10$, $t^3 + t^2 - 4t - 4$
16. $a^4 + 4a^3 - 26a^2 - 65a - 50$, $a^3 + 6a^2 - 17a + 10$
17. $x^4 - 7x^3 + 7x - 1$, $x^5 - 8x^4 + 11x^3 - 17x^2 - 32x + 5$

Скрати разломке:

18. $\dfrac{5x^2 - 5y^2}{x^3 + y^3}$; $\dfrac{1 + 2x + x^2}{4x - 4x^3}$; $\dfrac{x^2 - 121}{x^2 + 12x + 11}$.

19. $\dfrac{(x+2)^2 - y^2}{4 - (x+y)^2}$; $\dfrac{27 + a^3}{9 + 3a}$; $\dfrac{4a^2 - (b+c)^2}{(2a+b)^2 - c^2}$.

Примена код једначина

1. $5{,}6abx + 0{,}32b^2(20x + 1{,}6b) = 0{,}7a^2(0{,}49a - 7x)$

2. $\dfrac{m^3 - n^3}{m - n} - \dfrac{m^2n + mn^2}{x} = m^2$

3. $a^2 + b^2 = \dfrac{a^3 + b^3}{a + b} - \dfrac{ab(a+b)}{x}$

4. $\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3}\right)^2 = \dfrac{\dfrac{a^3}{8} - \dfrac{b^3}{27}}{\dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{3}} + \dfrac{3a^2b + 2ab^2}{36x}$

Најмањи заједнички садржалац алгебарских израза

52. — Најмањи заједнички садржалац за два или више алгебарских израза је онај алгебарски израз у коме се садрже сви дати алгебарски изрази и који је најнижег степена.

Н. з. с. за abx^3, a^2b^3x и $a^3b^2x^2$ је $a^3b^3x^3$,
за n^4, n^2, n, n^8 је n^8,
за $8t^3$ и $9t^2$ је $72t^3$.

Пример 1. — Наћи н. з. с. за $12a^5b^2c^4$, $18a^4b^5c^3$, $40ab^3c$.

$$12a^5b^2c^4 = 2^2 \cdot 3 \cdot a^5 \cdot b^2 \cdot c^4$$
$$18a^4b^5c^3 = 2 \cdot 3^2\, a^4 \cdot b^5 \cdot c^3$$
$$40ab^3c = 2^3 \cdot 5 \cdot a \cdot b^3 \cdot c.$$

Најмањи заједнички садржалац је производ свих простих чинилаца узетих са највишим степеном на коме се јављају, а то је

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot a^5 \cdot b^5 \cdot c^4 = 360a^5b^5c^4.$$

Примдр 2. — Да се одреди н. з. с. алгебарских израза: $am - 2bm$, $3a^2 - 12b^2$, $4a^2 - 16ab + 16b^2$.

$$am - 2bm = m \cdot (a - 2b)$$
$$3a^2 - 12b^2 = 3 \cdot (a^2 - 4b^2) = 3 \cdot (a - 2b) \cdot (a + 2b)$$
$$4a^2 - 16ab + 16b^2 = 4 \cdot (a^2 - 4ab + 4b^2) = 2^2 \cdot (a - 2b)^2$$

Најмањи заједнички садржалац је

$$2^2 \cdot 3 \cdot m \cdot (a - 2b)^2 \cdot (a + 2b).$$

Напомена 1. — Често ће се десити у примени н. з. с. код разломака и једначина, да је згодније да се чиниоци не измноже, већ да остане облик производа, као што је горе учињено.

Напомена 2. — Ако су алгебарски изрази релативно прости, тј. ако немају заједничких чинилаца, њихов производ је у исто време и њихов н. з. с. На пр. за изразе $a^2 - b^2$ и $x^2 - y^2$ н. з. с. је

$$(a^2 - b^2) \cdot (x^2 - y^2).$$

За писмено вежбање

Да се одреди н. з. с. следећих израза:

1. $2x$, $3y$, $5z$; $4y^3$, $10y^5$, $20y^4$.
2. $38x^4y^4z^4$, $57x^3y^4z^6$; $58m^2n^4x^9$, $87m^9n^4x^2$.
3. $x^3 + 1$, $x^2 - 1$; $x^3 + x$, $x^4 - 1$; $x^2 + 2x$, $x^2 - 4$.
4. $x^2 - 3x + 2$, $x^2 - 5x + 6$; $m^2 + 12m + 36$, $m^2 + 2m - 24$.
5. $6a^2 - 6ab$, $9a^2 - 18ab + 9b^2$; $10p^2q + 20pq^2$, $p^2 + pq - 2q^2$.
6. $3x^2 + 4xy$, $9x^2 - 16y^2$; $x^2 + 13x + 40$, $5x^2 + 40x$.
7. $x^2 - y^2$, $(x - y)^2$, $(x + y)^2$,
8. $m^2 - 8mn + 16n^2$, $m^2 - 16n^2$, $m^2 - 4mn$.

ГЛАВА IV

Рационални разломци

53. Сабирање и одузимање разломака. — Имали смо једначину:

$$\frac{a + b - c}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n}.$$

Кад је обрнемо, имаћемо

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a + b - c}{n}.$$

Отуда имамо ово **практично упутство** за сабирање и одузимање разломака са једнаким имениоцима:

Разломци са једнаким имениоцима сабирају се и одузимају, кад се полином њихових бројилаца подели заједничким имениоцем.

За усмено вежбање

1. $\frac{a}{4}+\frac{3a}{4}=;\ \frac{2b}{5}+\frac{3b}{5}=;\ \frac{7x}{12}-\frac{5x}{12}=$

2. $\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}=;\qquad \frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}=$

3. $\frac{a}{4}-\frac{b}{4}+\frac{c}{4}=;\ \frac{3x}{5}-\frac{4x}{5}+\frac{9x}{5}+\frac{7x}{5}=.$

За писмено вежбање

1. $\frac{5a}{11b}+\frac{7a}{11b}-\frac{3a}{11b}+\frac{4a}{11b}-\frac{9a}{11b}=$

2. $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=$

3. $\frac{8x^2}{10y^3}+\frac{5x^2}{10y^3}+\frac{7x^2}{10y^2}+\frac{9x^2}{10y^3}$

4. $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=$

5. $\frac{5m-4n}{3m}+\frac{9m+7n}{3m}-\frac{11m-16n}{3m}-\frac{6m+19n}{3m}=$

6. $\frac{(4a-5b)^2}{7a}-\frac{(3a+7b)^2}{7a}+\frac{2b(12b+13a)}{7a}=$

7. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=$

8. $\frac{a+b}{a-2b}-\frac{2a-b}{a-2b}+\frac{3a-b}{a-2b}=$

9. $\frac{2a+5y}{a+x}-\frac{3x-4y}{a+x}+\frac{4x-9y-a}{a+x}=$

10. $\frac{3x-5y}{5(x+y)}+\frac{4x+3y}{5(x+y)}+\frac{3x+7y}{5(x+y)}$

54. *Ако су разломци различитих именилаца, морају се најпре довести на исте имениоце.*

Главни именилац је најмањи заједнички садржалац за све имениоце и налази се по упутству које смо имали у аритметици.

Пример 1. $\frac{5a}{21}+\frac{6a}{35}-\frac{9a}{14}-\frac{7a}{30}=\frac{50a+36a-135a-49a}{210}=$

$$=\frac{86a-184a}{210}=\frac{-98a}{210}=-\frac{7a}{15}$$

Пример 2. $\frac{m}{24abx^3}-\frac{n}{36a^2bx^2}+\frac{p}{40ab^2x^2}=$

Да бих одредио н.з.с. за имениоце, растављам их најпре на просте чиниоце.

$$24abx^3=2^3\cdot 3\cdot a\cdot b\cdot x^3$$
$$36a^2bx^2=2^2\cdot 3^2\cdot a^2\cdot b\cdot x^2$$
$$40ab^2x^2=2^3\cdot 5\cdot a\cdot b^2\cdot x^2$$
$$\text{Н. з. с}=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot a^2\cdot b^2\cdot x^3$$

$$\frac{m}{24abx^3}-\frac{n}{36a^2bx^2}+\frac{p}{40ab^2x^2}=\frac{15abm-10bnx+9apx}{360a^2b^2x^3}$$

Пример 3. $\frac{4a-7b}{18a^2-12ab}+\frac{5a+3b}{12ab+8b^2}-\frac{45a^2+21ab-2b^2}{108a^2b-48b^3}=$

Решење. —

$$18a^2-12ab=6a\cdot(3a-2b)$$
$$12ab+8b^2=4b(3a+2b)=2^2\cdot b\cdot(3a+2b)$$
$$108a^2b-48b^3=12b\,(9a^2-4b^2)=2^2\cdot 3\cdot b\cdot(3a+$$
$$+2b)\cdot(3a-2b).$$

Н. з. с. је $2^2\cdot 3\cdot a\cdot b\cdot(3a-2b)\cdot(3a+2b)$.

Да би се лако видело колико пута се стари имениоци садрже у новом, не треба у главном имениоцу извршивати назначено множење. Боље је да остане тако растављен на чиниоце. Затим да се испод старих именилаца испишу исти имениоци растављени на чиниоце, а изнад бројилаца да се напишу одговарајући изрази, којима треба множити те бројиоце, водећи при том рачуна и о знаку испред разломачке црте, тако да ученик не мора више да се брине о том знаку после извршеног множења.

$$\overset{\substack{6ab+4b^2\\ 2b\,(3a+2b)}}{\underset{2\cdot 3a(3a-2b)}{\frac{4a-7b}{18a^2-12ab}}} + \overset{\substack{9a^2-6ab\\ 3a\cdot(3a-2b)}}{\underset{2^2b(3a+2b)}{\frac{5a+3b}{12ab+8b^2}}} - \overset{-a}{\underset{2^2\cdot 3b(3a+2b)(3a-2b)}{\frac{45a^2+21ab-2b^2}{108a^2b-48b^3}}} =$$

$$= \frac{24a^2b-42ab^2+16ab^2-28b^3+45a^3+27a^2b-30a^2b-18ab^2-45a^3-21a^2b+2ab^2}{12ab\,(3a-2b)\,(3a+2b)}$$

$$= \frac{-42ab^2-28b^3}{12ab\,(3a-2b)\,(3a+2b)} = \frac{7b}{6a(2b-3a)}.$$

За усмено вежбање

1. $a-\frac{a}{2}=$; $\frac{a}{2}+\frac{a}{4}=$; $\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=$; $a+\frac{a}{2}=$;

2. $\frac{x}{3}-\frac{x}{6}=$; $\frac{2a}{3}-\frac{a}{5}=$; $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=$; $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=$

За писмено вежбање

1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{2x}=$; $\frac{a}{x}+\frac{a}{3x}-\frac{a}{2x}=$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=$

2. $\frac{a}{b}+1=$; $\frac{3x}{2y}-4=$; $\frac{5a}{6b}+\frac{4b}{9a}=$; $\frac{m}{35a^6}-\frac{n}{40a^9}=$

3. $\frac{1}{ax}+\frac{1}{bx}-\frac{1}{cx}=$; $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}=$; $\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}=$

4. $\frac{17a}{15}-\frac{5a}{12}-\frac{3a}{20}=$; $\frac{5m}{12}+\frac{7m}{18}+\frac{m}{9}+\frac{7m}{20}+\frac{9m}{10}=$

5. $\frac{5x^2}{28}-\frac{13x^2}{36}-\frac{32x^2}{63}+\frac{19x^2}{21}+\frac{25x^2}{14}=$

6. $\frac{2y-3}{3}+\frac{y-2}{2}=$; $\frac{3a+4}{6}-\frac{2(a-1)}{9}=$

7. $\frac{4a-5b}{9}-\frac{2a+3b}{6}-\frac{7b-6a}{27}+\frac{4a+9b}{18}=$

Провери следеће једначине:

8. $\frac{1-p}{p}-\frac{1-2p}{2p}-\frac{1-3p}{3p}=\frac{1+6p}{6p}$

9. $\frac{2x+1}{3x}-\frac{3x+2}{5x}-\frac{1}{15}=-\frac{1}{15x}$

10. $\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}+\frac{a-b}{ab}=0$

11. $\frac{2}{x^4}-\frac{9}{x^3}+\frac{7}{x^2}-\frac{8}{x}=$; $\frac{7m}{315z^4}-\frac{3n}{144z^6}+\frac{11p}{120z^9}=$

12. $\frac{5m-3n}{15mn^2}+\frac{5x-2m^2}{20m^3x}-\frac{2-3n}{6n^2}-\frac{n+2m^2}{4m^2n}+$
$+\frac{mn+4x}{10mnx}=$

13. $\frac{8a^2-3bx^3}{24abx^3}-\frac{3x-2a}{12abx}+\frac{9b^2+8a^2}{72ab^2}-\frac{2ax^2+9b^2}{18b^2x^2}+$
$+\frac{x^2-a^2}{4abx^2}-\frac{2a-3bx}{6bx^3}=$

14. $\frac{6a+c}{6bc}-\frac{5a-4b}{4ac}-\frac{3b-5c}{5ab}+\frac{3}{5a}-\frac{1}{6b}+\frac{5}{4c}=$

15. $\frac{2}{3a}-\frac{1}{2b}-\frac{2a+3}{6a^2}+\frac{1}{2b^2}+\frac{3a-2b}{6ab}=$

16. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=$; $\frac{1}{x-y}+\frac{2x-y}{x^2-y^2}=$

17. $\frac{1}{1-2x}-\frac{2x}{1-4x^2}=$; $\frac{a-b}{c-d}-\frac{b-a}{d-c}=$

18. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}+\frac{2a}{a^2-b^2}=$

19. $\frac{1}{1-3x}+\frac{1}{1+3x}+\frac{1}{1-9x^2}=\frac{3}{1-9x^2}$

20. $\frac{1}{3(x-3)}+\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{2(x+3)}=$

Провери следеће једначине:

21. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}=0$

№ 3. с. $(1-3x)(1+3x)$

$$\frac{1}{1-3x}+\frac{1}{1+3x}-\frac{1}{1-9x^2}=\frac{1}{1-9x^2}$$

$$\frac{1}{3(x-3)}+\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{2(x+3)}=\frac{21-x}{6(x^2-9)}$$ № 3.с $6(x-3)(x+3)$

24. $$\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{2a^2b^2}{a^4-b^4}$$

Упутство: најпре сведи прва три разломка!

25. $$\frac{3}{x-a}-\frac{1}{x-3a}-\frac{3}{x+a}+\frac{1}{x+3a}=\frac{-48a^3}{(x^2-a^2)(x^2-9a^2)}$$

Упутство: најпре сведи први и трећи, затим други и четврти и напослетку добијене резултате!

26. $$\frac{7}{x^2+x-12}-\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{6}{(x+4)(x-2)}$$

27. $$\frac{1}{x^2-11x+30}-\frac{10}{x^2-2x-24}+\frac{9}{x^2-x-20}=0$$

28. $$\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a-b}=$$

Множење и дељење разломка једним бројем

55. Множење разломка једним бројем.

$$\frac{a}{b}\cdot m=\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\dots+\frac{a}{b}}_{m \text{ сабирака } \frac{a}{b}}=\frac{\overbrace{a+a+a\dots+a}^{m \text{ сабирака } a}}{b}=\frac{a\cdot m}{b}$$

дакле $\frac{a}{b}\cdot m=\frac{a\cdot m}{b}$.

Практично упутство искажи обичним говором!

56. Дељење разломка једним бројем. — Израз $\frac{a}{b}:m$ је количник, коме се вредност не мења, ако и дељеник и делилац помножимо једним истим бројем, на пр. бројем b:

$$\frac{a}{b}:m=\left(\frac{a}{b}\cdot b\right):(m\cdot b)=a:(m\cdot b)=\frac{a}{b\cdot m},$$ дакле

$$\frac{a}{b}:m=\frac{a}{b\cdot m}.$$

Искажи обичним говором практично упутство!

За усмено вежбање

1. $\frac{3}{11}\cdot 5=$; $\frac{x}{11}\cdot 5=$; $\frac{5}{12}\cdot 3=$; $\frac{x}{12}\cdot 4=$; $\frac{a}{3}\cdot 3=$; $\frac{a}{c}\cdot c=$

2. $\frac{4}{7}:2=$; $\frac{2x}{7}:2=$; $\frac{x}{3}:2=$; $\frac{m}{n}:m=$; $\frac{1}{x}:y=$

3. $\frac{1}{x}\cdot x=$; $\frac{m}{n}\cdot mn=$; $\frac{1}{8b}\cdot(-4b)=$; $\frac{1}{15a}\cdot 5a=$

4. $\frac{5a^2}{3bx}:3bx=$; $\frac{24a^3b^2}{7xy^2}:8a^2xy^2=$; $\frac{15a^2}{4bx}:3a=$

Реши једначине:

5. $\frac{x}{5}=-\frac{2}{5}$; $-\frac{x}{8}=\frac{1}{12}$; $2x=-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{10}=\frac{x}{2}$!

За писмено вежбање

1. $\frac{3a^2b}{8m^3n^2}\cdot m^2n=$; $\frac{48p^4q^2}{65a^4b^5c^2}\cdot 26a^6b^7c^3=$

2. $\frac{15x^8y^4}{76a^5b^7c^9}\cdot 57a^4b^5c^6=$; $\frac{0{,}26ab^2}{0{,}0119x^{25}y^2}\cdot 24{,}5x^{12}y^{25}=$

3. $\frac{6ab}{a^2-b^2}\cdot(a-b)=$; $\frac{3x-y}{4x+2y}\cdot(2x+y)=$

4. $\frac{ax-ay}{bx^2-by^2}\cdot b\cdot(x+y)=$; $\frac{13ab}{36(x^2+xy)}\cdot 48(x^2+2xy+y^2)=$

5. $\frac{12ax^2}{7y}:4y^3=$; $\frac{42a^4b^6}{5c^4d^2}:49a^2b^2c^2d^2=$

6. $\frac{a+b}{a-b}:(a^2-b^2)=$; $\quad \frac{15a^2x-15a^2y}{7(x+y)}:3a^2y=$

7. $\frac{x^2-u^2}{x-v}:[(x-u)(x-v)]=$; $\quad \frac{x^2y^4-x^4y^2}{3(y^2-xy)}:3a^2y=$

Множење и дељење разломком

57. Множење разломком. —

У производу $c\cdot\frac{a}{b}$ чиниоци могу да промене места, па ову врсту множења сводимо на оно, што нам је већ познато.

$$c\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}=\frac{c\cdot a}{b}, \text{ дакле}$$

$$c\cdot\frac{a}{b}=\frac{c\cdot a}{b}$$

Практично упутство искажи обичним говором!

58. — Често наилазимо на задатак: међусобно помножити два или више разломака. На пример:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}\cdot m\right):n=\frac{a\cdot m}{b\cdot n}, \text{ дакле}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a\cdot m}{b\cdot n}.$$

Искажи практично упутство обичним језиком!

59. Реципрочни бројеви. — За два броја кажемо да су реципрочни, ако је њихов производ 1.

$$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{a}{a}=1.$$

Које су реципрочне вредности бројева: t; $\frac{1}{2a}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{1}{2}$;

3; $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}$; $7\frac{1}{5}$; 4,25; 0,0001; z^3; $\frac{1}{bc}$; $\frac{m}{n}$; $\frac{a^2}{b^3}$; $(a+b)$?

60. Дељење разломком. — Количник $a:\frac{b}{c}$ се не мења, ако га проширимо са c.

$$a:\frac{b}{c}=(a\cdot c):\left(\frac{b}{c}\cdot c\right)=(a\cdot c):b=\frac{a\cdot c}{b}, \text{ дакле}$$

$$a:\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c}{b}.$$

Искажи практично упутство обичним говором!

За два разломка имамо из тога:

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a\cdot n}{b\cdot m}.$$

За усмено вежбање

1. $m\cdot\frac{m}{a}=$; $a\cdot\frac{b}{a}=$; $6y\cdot\frac{1}{8y}=$; $15p^2q\cdot\left(-\frac{1}{20p}\right)=$
2. $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}=$; $\frac{1}{3}$ од $\frac{x}{2}$; $\frac{2a}{7}\cdot\frac{7}{10}=$; $\frac{m}{y}\cdot\frac{y}{m}=$
3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{a}=$; $\frac{8m}{9n}\cdot\frac{3n}{10m}=$; $\frac{12b}{25y}\cdot\left(-\frac{35y}{18b}\right)=$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^3=$; $\left(\frac{x}{y}\right)^2=$; $\left(\frac{3x}{4y}\right)^2=$; $\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2=$
5. $a:\frac{a}{x}=$; $m:\frac{1}{m}=$; $x:\frac{1}{y}=$; $\frac{36n}{4}:\frac{3}{4}=$
6. $4am:\left(-\frac{2a}{3m}\right)=$; $8x^2:\frac{12x^5}{5y}=$; $2a^2b:\frac{4a^2}{6x}=$
7. $\frac{x}{y}:\frac{z}{y}=$; $\frac{a}{m}:\frac{a}{n}=$; $\frac{1}{p}:\frac{1}{q}=$; $\frac{m}{n}:\frac{n}{m}=$

Реши једначине простим посматрањем:

8. $\frac{3x}{4}=1$	9. $\frac{5x}{4}=10$	10. $\frac{6y}{5}=-18$
11. $\frac{2t}{3}=6$	12. $\frac{5z}{7}=\frac{15}{14}$	13. $\frac{7u}{9}=-21$
14. $\frac{3}{4}v=\frac{9}{2}$	15. $\frac{3}{4}=-\frac{z}{12}$	16. $\frac{2t}{3}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
17. $\frac{x}{4}+\frac{17}{18}=0$	18. $\frac{y-3}{8}=0$	19. $3(z-1)=3$
20. $\frac{x-1}{4}=1$		21. $\frac{2x-3}{3}=3$

22. $\frac{3x+5}{7}=2$

23. $\frac{2x}{3}-\frac{5}{6}=0$

24. $\frac{2}{3}\,5x-5)=0$

25. $\frac{3}{8}(3x+6)=0$

26. $\frac{23}{208}(6x+18)=0$

27. $\frac{3}{x}=\frac{1}{5}$

28. $\frac{3}{x}=7$

29. $2=\frac{1}{x}$

За писмено вежбање

1. $15a^9b^{12}\cdot\frac{4m^3n}{35a^7b^{14}}=;\ 24x^4y^3z^2\cdot\frac{1}{21x^2y^5z^3}=$

2. $35(8b^2-4ab+50a^2)\cdot\frac{39x^5y^4}{91(8b^2-4ab+50a^2)}=$

3. $\frac{4a_2}{9b^2}\cdot\frac{3b^3}{2a^4}=;\ \frac{24a^3b}{35xy^2}\cdot\frac{7xy}{6a^2b}=;\ \frac{6a^2bx^3}{7p^2q}\cdot\frac{216p^3}{8a^2x^2q}=$

4. $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{x}=;\ \frac{19a^3x}{14m^2n^3}\cdot\frac{35an^4}{12x^5m}\cdot\frac{8x^4m^3}{25a^5n}=$

5. $\frac{9a^2b}{4x-2}\cdot\frac{8x-4}{3ab^2}=;\ \frac{x^2-x^3}{x^4+x^5}\cdot\frac{x^3-x^3}{(1-x)^2}=$

6. $\frac{16x-20}{9x-12}\cdot\frac{18x-24}{10x-15}\cdot\frac{4x-6}{12x-15}=$

7. $35m^4n^2p^3:\frac{14m^3np^2}{3q}=;\ (49x^2y^3-28x^4y^6):\frac{7x^2y^2}{11p^2q}=$

8. $36x^3y^3:\frac{18x^2y-27xy}{5x-4y}=$

9. $(30a^2b^3x-55a^5b):\frac{360ab^6x^3-1210a^7b^2x}{48b^3x^3+88a^3bx^2}=$

10. $\frac{8}{5}a^3:\frac{6}{25}a=;\ \frac{27a^2x^3}{20y^2}:\frac{36a^4}{25xy}=$

11. $\frac{5a-7b}{3a+2b}:\frac{35a-49b}{9a+6b}=$

12. $\frac{42a^3m^5n^7}{55x^{14}y^3z^3}:\frac{77m^7y^2n^4}{25a^2n^7z^{10}}=$

13. $\frac{6a-6b}{5a+10b}:\frac{9a-9b}{20a+10b}=$

14. $\frac{27a^3-18a^2b}{60ab^3-75b^4}:\frac{81a^4-24ab^3}{160a^2b-400ab^2+250b^3}=$

15. $\frac{25x^2+30xy+36y^2}{16x^4-28x^2y^2+49y^4}:\frac{125x^3-216y^3}{64x^6+343y^6}=$

16. $\frac{5(a+2b)-7x(a+2b)}{3(a-3b)+4x(a-3b)}:\frac{a+2b}{a-3b}=$

Провери следеће једначине:

17. $\frac{6a^2}{5bc}\cdot\frac{10b^2}{9ac}:\frac{3ab}{4c^2}=\frac{16}{9}$

18. $\frac{a^2-9}{a^2+3a}:\frac{a^2+a-12}{a^2+4a}=1$

19. $\frac{x+7}{x-6}\cdot\frac{2x+10}{3x+21}:\frac{5x+25}{x^2-6x}=\frac{2x}{15}$

20. $\frac{m^2+4m-21}{m+4}\cdot\frac{m^2-16}{m^2+9m+14}:\frac{m-4}{m+2}=m-3$

21. $\frac{(a+c)^2-b^2}{(a+b)^2-c^2}:\frac{ab-b^2+bc}{a^2+ab-ac}=\frac{a}{b}$

22. $\frac{a^2b}{x^2}\cdot\left[\frac{b^2}{ax^2}:\left(\frac{a^2b^2}{x}\cdot\frac{b}{ax}\right)\right]=\frac{1}{x^2}$

23. $\frac{10ax^2}{63b^3}\cdot\left[\frac{99x}{40ax^4}:\left(\frac{55x}{72a^2b^3}:\frac{35b^3}{18a^2x^2}\right)\right]=\frac{b^4}{x^4}$

24. $\frac{(a-b)^2}{ab+b^2}:\left[\frac{a^2b-b^3}{2a^2-4ab}:\left(\frac{3ab+6b^2}{3a-3b}\cdot\frac{(a+b)^2}{2a^2-8b^2}\right)\right]=\frac{a}{b}$

25. $\frac{a^2}{bx^3}:\left\{\frac{x^2}{a^3b}\cdot\left[\left(\frac{a^2}{b^2x}:\frac{x^2}{ab}\right)\cdot\frac{a^2b}{x^3}\right]\right\}=x$

26. $\frac{35}{102}\cdot\left\{\frac{52}{63}:\left[\frac{26}{27}\cdot\left(\frac{9}{56}:\frac{153}{280}\right)\right]\right\}=1$

27. $\frac{2a}{x}:\left\{\left[\frac{yz}{2x}:\left(\frac{3}{2a}:\frac{6}{xy}\right)\right]\cdot\frac{2x}{z}\right\}=\frac{1}{2}$

Сложени разломци

61. — Ако у бројиоцу и имениоцу једног разломка имамо опет разломке, онда такав разломак зовемо *сложен разломак*.

Појединих разломака у бројиоцу и имениоцу ослобађамо се, кад бројилац и именилац главног разломка помножимо н. з. с. свих делимичних именилаца.

Пример, $$\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4b^2}}{\frac{1}{2b}+\frac{1}{a}}=\frac{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4b^2}\right)\cdot 4a^2b^2}{\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{a}\right)\cdot 4a^2b^2}=\frac{4b^2-a^2}{2a^2b+4ab^2}=$$

$$=\frac{(2b+a)(2b-a)}{2ab(a+2b)}=\frac{2b-a}{2ab}.$$

За усмено вежбање

1. $\dfrac{2\frac{1}{4}}{4\frac{1}{2}}=;\quad \dfrac{x}{\frac{1}{2}}=;\quad \dfrac{2x}{\frac{3}{4}}=;\quad \dfrac{5y}{1\frac{1}{4}}=;\quad \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{4}}=$

2. $\dfrac{\frac{2}{3}m}{\frac{1}{6}}=;\quad \dfrac{7a}{\frac{7}{3}}=;\quad \dfrac{11n}{2\frac{3}{4}}=;\quad \dfrac{2\frac{1}{2}x}{1\frac{1}{4}}=;\quad \dfrac{4\frac{1}{3}y}{2\frac{3}{5}}=$

За писмено вежбање

$\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}=;\quad \dfrac{\frac{a}{2}+\frac{x}{3}}{\frac{a}{4}-\frac{x}{3}}=;\quad \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=;\quad \dfrac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}=$

Провери следеће једначине:

1. $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}}{x+y-1}=\dfrac{1}{xy}$

2. $\dfrac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}}=\dfrac{x+1}{x-1}$

3. $\dfrac{\frac{x+2}{x+1}-\frac{1}{x+3}}{\frac{1}{x+1}+\frac{x+2}{x+3}}=1$

4. $\dfrac{\frac{x+4}{7}-\frac{x+4}{x+5}}{\frac{x-2}{4}+\frac{x-2}{x}}=\dfrac{4x}{7(x+5)}$

5. $\dfrac{\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b}{\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b}=;\quad \dfrac{\frac{2x}{3yz}+\frac{5y}{7x^2}}{\frac{2x}{5yz}+\frac{5y}{9xz}}=;\quad \dfrac{\frac{1}{14x^3}-\frac{b}{6a^2x^2}}{\frac{5x}{84ab^2}+\frac{d}{10a^2x}}=$

6. $\dfrac{2-\frac{a-b}{a+b}}{\frac{3a+5b}{a+b}-2}=;\quad \dfrac{1-\frac{1}{x+1}}{1+\frac{x}{1-x}}=;\quad \dfrac{\frac{2}{a}-\frac{2}{2a+b}}{\frac{2}{b}+\frac{6}{a-2b}}=$

7. $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}=;\quad \dfrac{\frac{1}{4bc}-\frac{1}{8ac}-\frac{a}{12bc}+\frac{1}{24c}}{\frac{1}{2cx}-\frac{1}{6ax}-\frac{a}{6cx}+\frac{1}{18x}}=$

Провери следеће једначине:

8. $\dfrac{\frac{x+1}{y}-\frac{y+1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}}=x-y$

9. $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\dfrac{y-x}{y+x}$

10. $\dfrac{3}{2x+3-\dfrac{3}{1-\frac{x}{x+6}}}=\dfrac{2}{x}$

11. $\dfrac{1-\dfrac{1}{1+\frac{x}{1-x}}}{1-\dfrac{1}{1-\frac{x}{1+x}}}=-1$

12. $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4x}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{x}}\cdot\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{2}{x}}{\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{8x}}=\dfrac{4x}{3(2+x)}$

13. $\dfrac{1+\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}}:\dfrac{\frac{b}{a}+1}{\frac{b}{a}-1}=1$

Упутство. Најпре сложене разломке преобрати у просте!

ГЛАВА V

Примена разломака код једначина

62. — Кад у једначини имамо разломке, треба најпре да их се ослободимо. Разломака треба да се ослобађамо и онда, кад у имениоцима нема непознате.

Разломака се најлакше ослобађамо, кад и леву и десну страну једначине помножимо најмањим заједничким садржаоцем свих именилаца.

Пример 1. $\frac{7x-1}{25}-\frac{x+3}{20}=\frac{4x+9}{10}-\frac{x+5}{5}$.

Решење. — Овде је н. з. с. 100. Ако обе стране помножимо са 100, добијамо:

$$\left(\frac{7x-1}{25}-\frac{x+3}{20}\right)\cdot 100=\left(\frac{4x+9}{10}-\frac{x+5}{5}\right)\cdot 100$$

$$4(7x-1)-5(x+3)=10(4x+9)-20(x+5).$$

Даљим множењем и свођењем сличних чланова добија се

$$28x-4-5x-15=40x+90-20x-100$$

$$23x-19=20x-10$$

$$3x=9$$

$$\mathbf{x=3.}$$

Проба. $\frac{7\cdot 3-1}{25}-\frac{3+3}{20}=\frac{4\cdot 3+9}{10}-\frac{3+5}{5}$

$$\frac{20}{25}-\frac{6}{20}=\frac{21}{10}-\frac{8}{5}$$

$$\frac{80}{100}-\frac{30}{100}=\frac{21}{10}-\frac{16}{10}$$

$$\frac{50}{100}=\frac{5}{10}.$$

Решење је тачно, јер је једначина задовољена за $x=3$.

Пример 2. $\frac{7}{x}+\frac{1}{3}=\frac{23-x}{3x}+\frac{7}{12}-\frac{1}{4x}$.

Решење. — Н. з. с. је $12x$. Множењем обеју страна са $12x$ добијамо:

$$84+4x=92-4x+7x-3$$

$$\mathbf{x=5.}$$

Пример 3. $\frac{3x-5}{x+2}+\frac{7x-10}{x+1}+\frac{x+99}{x^2+3x+2}=10$

Решење. — Пошто је

$$(x+2)(x+1)=x^2+3x+2,$$

то је x^2+3x+2 н. з. с. Множењем обеју страна са $(x+2)(x+1)$ добијамо

$(3x-5)(x+1)+(7x-10)(x+2)+x+99=10(x^2+3x+2)$, а одавде

$$\mathbf{x=2}$$

Пример 4. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}$.

Решење. Ако извршимо назначене радње на левој и десној страни, добијамо

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x-5)(x-3)}.$$

Ови разломци су једнаки. Њихови бројиоци су такође једнаки. Значи и њихови имениоци морају бити једнаки, па имамо

$$(x+1)(x+3)=(x-5)(x-3).$$

Одавде је

$$\mathbf{x=1.}$$

За писмено вежбање

1. $\frac{x}{3}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}x-\frac{2}{3}$ 2. $\frac{9}{8}t-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}t-1\frac{1}{6}$

3. $3\frac{1}{2}+\frac{2}{7}r-6+\frac{1}{5}r=\frac{24}{35}r-2\frac{3}{5}$

4. $7s-\frac{4s}{7}+2(s-1)=8s+1$

5. $\frac{1}{3}\left(v-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(v+\frac{1}{12}\right)$ 6. $\frac{t-8}{4}=\frac{t-7}{6}$ t = 10

7. $\frac{5}{3}\left(\frac{4}{3}w-\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{7}\left(\frac{5}{6}w-\frac{1}{3}\right)=9\frac{5}{6}$

8. $\frac{9(1-x)}{4}=\frac{6(1-2x)}{5}$ 9. $\frac{3}{2}(3r-5)-9-\frac{8}{3}r=0$

10. $\frac{7t}{6}-\frac{5(3t-4)}{4}=\frac{46}{3}$ 11. $\frac{x-2}{4}-\frac{x+5}{8}=2$ x=25

12. $\frac{4v-2}{3}-\frac{1+3v}{5}=7-\frac{v-4}{2}$

13. $3y+\frac{7y-9}{2}=28-\frac{2y-7}{3}+\frac{2y-3}{7}$

14. $\frac{3(y+2)}{4}+\frac{5(2y-1)}{6}=\frac{7(y+7)}{8}-\frac{5}{6}$ y = 3

15. $\frac{4x-5}{7}-\left(\frac{2x+1}{5}-\frac{x-3}{2}\right)=\frac{x}{6}$

16. $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{5}-\frac{x-3}{2}\right)=\frac{x}{6}$

17. $\frac{4(3m+1)}{5}-\frac{5m-3}{6}=\frac{3(11m+7)}{10}-\frac{21(16m-3)}{15}$

18. $6y-\frac{1}{2}\left(\frac{3y+4}{4\frac{1}{2}}-\frac{8y-4}{1{,}5}\right)=\frac{y-2}{3}+\frac{6y+1}{9}$

19. $5{,}4r-7{,}3-1{,}3r+2{,}7=3{,}6r-1{,}8$

20. $6{,}4s-4{,}6-7{,}3s-7{,}8=3{,}6s+1{,}1$

21. $3(2x-0{,}3)=0{,}6+5(x-0{,}1)$

22. $7(1{,}8x-3)-3{,}9=11{,}1x-3(2x-5)$

23. $\frac{5x-0{,}4}{0{,}3}+\frac{1{,}3-3x}{2}=\frac{1{,}8-8x}{1{,}2}$

24. $\frac{5x-1{,}5}{7}-\frac{5(0{,}4-2x)}{6}=\frac{9x-0{,}78}{4}-\frac{7x-1{,}1}{3}$

25. $\frac{9}{x}+\frac{1}{2}=\frac{10}{x}+\frac{4}{9}$ x = 18

26. $\frac{7}{t}+7-\frac{3}{t}+3=5-\frac{5}{t}-11\frac{1}{2}$

27. $\frac{4}{5x}+\frac{2}{3x}-\frac{5}{9x}-\frac{30+11x}{45x}=0$

28. $\frac{8}{t}-\frac{10-t}{7t}+\frac{2+t}{5t}-2\frac{2}{3}=0$

29. $\frac{6}{x+1}=\frac{1}{3}$ x = 17 30. $\frac{3}{4y-3}=\frac{2}{3y-5}$

31. $\frac{11r}{r+20}+\frac{24}{r}=11+\frac{88}{r(r+20)}$

32. $\frac{22x-5}{5(3x+5)}+\frac{5x-1}{6x-15}-\frac{7x+5}{10x-25}=1\frac{3}{5}$

33. $\frac{5}{2x-1}-1=\frac{7}{2x-1}+\frac{11}{1-2x}$

34. $\frac{2x^2}{2x-1}-1-\frac{1-2x}{3}=\frac{10x^2}{6x-3}+\frac{3x}{1-2x}+\frac{4}{3-6x}$

35. $\frac{5w}{2-w}-\frac{6w}{2+w}=\frac{11w^2-50}{4-w^2}$

36. $\frac{3n-1}{20n-15}-\frac{5n-2}{8n+6}=\frac{13-6n^2}{16n^2-9}-\frac{1}{10}$

37. $\frac{10n-18}{12n^2-27}-\frac{1}{2n+3}+\frac{4}{18n-27}-\frac{5}{9n}=0$

38. $\frac{2x-3}{6x-36x^2}-\frac{5x-7}{9x+54x^2}=\frac{2(35x^2-12)}{3x-108x^3}+\frac{1}{2x}$

39. $\frac{y-4}{y-5}-\frac{y-2}{y-3}=\frac{y-10}{y-11}-\frac{y-8}{y-9}$

40. $\frac{4-2x}{3}-\frac{4}{6x-3}=\frac{1{,}5x}{x-0{,}5}-\frac{4x^2}{3(2x-1)}$

41. $\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x+3}+2=\frac{2x^2-3}{x^2+x-6}$

42. $\frac{13}{x^2-x-30}=\frac{15}{x^2+13x+40}-\frac{18}{x^2+2x-48}$

43. $\frac{5}{3+\frac{1}{x}}=1$ 44. $\frac{x+\frac{2}{3}}{x-\frac{2}{3}}=\frac{x+\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{4}}$

45. $\frac{2t-7}{5\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}(3-t)}{\frac{1}{3}}=0$ 46. $\frac{x}{\frac{3}{4}}-\frac{x-10}{\frac{2}{3}}+\frac{2\frac{1}{3}x}{2}=0$

47. $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{\frac{2}{x}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{2}{x}+1\frac{1}{3}}{\frac{4}{x}+7\frac{1}{4}}$ 48. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}}-\frac{1\frac{1}{3}}{1-1\frac{1}{3}x}=2\frac{1}{2}$

Неки специјални случајеви решавања једначина

63. Први случај. — *Пример 1.* $\frac{10x-14}{2x-3} = \frac{15x-24}{3x-5}$

Решење: Ова једначина може и овако да се напише:

$$\frac{5(2x-3)+1}{2x-3} = \frac{5(3x-5)+1}{3x-5},$$

или

$$5 + \frac{1}{2x-3} = 5 + \frac{1}{3x-5},$$

или

$$\frac{1}{2x-3} = \frac{1}{3x-6}$$

$$2x-3 = 3x-5$$

$$x = 2.$$

Пример 2. $\frac{x+5}{x+4} - \frac{x+7}{x+6} = \frac{x+10}{x+9} - \frac{x+12}{x+11}.$

Решење. Једначина се може овако написати:

$$\frac{(x+4)+1}{x+4} - \frac{(x+6)+1}{x+6} = \frac{(x+9)+1}{x+9} - \frac{(x+11)+1}{x+11}.$$

или ако извршимо дељење:

$$1 + \frac{1}{x+4} - 1 - \frac{1}{x+6} = 1 + \frac{1}{x+9} - 1 - \frac{1}{x+11}, \text{ тј.}$$

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+11}.$$

Ако извршимо одузимање на обема странама, добијамо:

$$\frac{(x+6)-(x+4)}{(x+4)(x+6)} = \frac{(x+11)-(x+9)}{(x+9)(x+11)}, \text{ тј.}$$

$$\frac{2}{(x+4)(x+6)} = \frac{2}{(x+9)(x+11)}.$$

Одавде је

$$(x+4)(x+6) = (x+9)(x+11)$$

$$x^2 + 10x + 24 = x^2 + 20x + 99$$

$$x = -7{,}5.$$

За писмено вежбање

1. $\frac{x-3}{x-5} - \frac{x-1}{x-3} = \frac{x-7}{x-9} - \frac{x-5}{x-7}$

2. $\frac{5x-34}{x-7} + \frac{3x-26}{x-9} = \frac{5x-24}{x-5} + \frac{3x-32}{x-11}$

3. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-2} + \frac{x+2}{x-1} = 3$

4. $\frac{2x+3}{x+1} - \frac{2x+9}{x+4} = \frac{3x+7}{x+2} - \frac{3x+16}{x+5}$

64. Други случај. —

Пример. $3 - \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}x + 4\right) + 5\right] + 7\right\} = 1.$

Решење. — У овој једначини јавља се x само на једном месту, и то у загради, која је највише унутра. Природније је да ослобађање од заграда отпочне од спољних заграда. Најпре се од обе стране одузме 3, а потом обе стране поделе са $-\frac{1}{5}$. На тај начин отпадне спољна заграда. За овим поново се одузме 7 од обе стране итд.

Овде је $x = 6$.

За писмено вежбање

1. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x + 1\right) + 3\right] = 2$

2. $\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{4}x - \left[x - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}x - 3\right)\right]\right\} = \frac{1}{6}$

3. $4\left\{3\left[2(x+1) - 3\right] - 5\right\} = 34$

4. $\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(x-1) + 1\right] - 1\right\} + 1 = \frac{4}{5}$

65. Трећи случај.

Пример. $3 \cdot \frac{5x+7}{9} - 2 \cdot \frac{5x+7}{9} = 21 - \left(\frac{5x+7}{9} + 15\right.$

Решење. — У овој једначини јавља се непозната x више пута у истом алгебарском изразу

$$\frac{5x+7}{9}$$

и то увек у истом споју. У оваквим случајевима долазимо лакше до резултата, кад место овог алгебарског израза уведемо једну помоћну непознату u, тј. ако ставимо

$$\frac{5x+7}{9}=y. \qquad (1)$$

Тада горња једначина постаје

$$3y-2y=21-(y+15).$$

Њеним решењем добијамо:

$$y=3.$$

Ако сад у *супституционој* једначини (1) ставимо ову вредност за y, добићемо

$$\frac{5x+7}{9}=3.$$

Решењем ове једначине добијамо:

$$x=4.$$

Отуда имамо ово **практично упутство:** *Ако се непозната јавља више пута у истом алгебарском изразу и само у том споју, треба место тог алгебарског израза увести једну нову непознату.*

За писмено вежбање

1. $6\cdot\frac{3x-2}{5}+7\cdot\frac{3x-2}{5}-3\cdot\frac{3x-2}{5}-2=0$

2. $\frac{1}{5(x-3)}+\frac{1}{2(x-3)}-\frac{7}{10}=0$

3. $\frac{7}{2}\cdot\frac{x+\frac{7}{5}}{2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x+\frac{7}{5}}{2}=\frac{7}{4}\cdot\frac{x+\frac{7}{5}}{2}-\frac{1}{8}$

4. $2\cdot\frac{2n+3}{n-1}+8\cdot\frac{2n+3}{n-1}-\frac{\frac{26}{3}}{\frac{13}{21}}=3\cdot\frac{2n+3}{n-1}+\frac{0{,}5}{\frac{1}{70}}$

Спајање свих правила о решавању једначина

66. — Према ономе како смо досада решавали једначине, можемо поставити следеће **практично упутство:**

1. *Ако се непозната јавља више пута у истом алгебарском изразу и само у овом споју, тада се уместо тог алгебарског израза уведе нова непозната.*

2. О поступку кад је непозната под кореним знаком говорићемо касније.

3. *Ако се непозната јавља у имениоцима, морамо се именилаца ослободити множењем обеју страна једначине најмањим заједничким садржаоцем свих именилаца.*

4. *Ако се непозната јавља у заградама, морамо се ослободити од заграда.*

5. *Једначина се мора уредити. Треба све непознате чланове пребацити на једну, а познате на другу страну.*

67. — Код сваке једначине коју добијемо на решавање, треба најпре испитати *прво* правило из практичног упутства; ако ово не може онда *друго;* ако и ово не може онда *треће,* затим *четврто* и напослетку *пето.*

Напомена 1. — Ученик треба да се стара да се овог реда тачно придржава.

Напомена 2. — Ових правила треба се придржавати и код једначина са више непознатих и код једначина вишег степена.

68. — Преображајем дате једначине по претходним правилима, дође се увек напослетку до једначине облика

$$ax=b.$$

У њој се непозната јавља само на првом степену, те се због тога и зове **једначина првог степена са једном непознатом.**

Овакав облик једначине I степена зове се *нормалан облик*. Пише се још и у облику

$$ax-b=0.$$

Али како b може бити позитиван или негативан број, то није ништа важан знак испред b те се једначина пише у облику

$$ax+b=0.$$

Ово је **најопштији облик једначине првог степена са једном непознатом, сведене на нулу.**

Дискусија једначине $ax+b=0$

69. — Видели смо да се свака једначина I степена може да доведе на облик

$$ax+b=0,$$

где су a и b два ма каква броја. *Дискутовати* ову једначину значи проучити разне околности, које могу наступити за решење, према томе какве вредности добијају a и b. a и b могу бити позитивни или негативни бројеви, или чак и број 0.

70. *Први случај.* — Претпоставимо најпре да број a није једнак нули. Тада се једначина може овако написати

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Имамо само једно решење, и то потпуно одређено, па можемо исказати ово правило:

Кад коефицијенат а непознате x није једнак нули, једначина

$$ax + b = 0$$

има само једно решење и то потпуно одређено.

71. *Други случај.* — Претпоставимо сад да је a једнако нули. Ми онда можемо рећи да тада немамо једначину, пошто и x ишчезне. Овај случај очевидно не може да наступи све докле радимо са једначинама, где су коефициенти одређени бројеви. Кад нема x ми не можемо ни имати једначину о којој говоримо. Али кад су коефициенти слова, може нас по неки проблем довести до околности да посматрамо и такве случајеве где a узима и вредност нулу. Онда стављамо себи задатак да одредимо какво ће решење проблем имати и у овом специјалном случају.

Претпоставимо најпре да док је a једнако нули, b остане различито од нуле. Тада не постоји ни један број x који помножен са a (нулом) даје број b. Једначина је *противречна*. Можемо само рећи да кад се a смањује, кад бива врло мало, количник $\frac{b}{a}$ по апсолутној вредности биће врло велики, и утолико већи, уколико је a мање. Сасвим је природно ако кажемо да у том случају решење постаје *бескрајно велико.*

72. *Трећи случај.* — Претпоставимо напослетку да оба броја a и b постану једнаки нули. Тада сваки број задовољава једначину, јер сваки број помножен нулом даје за производ нулу:

$$0 \cdot x = 0.$$

У овом случају кажемо да је једначина *неодређена.* Решење је *ма који број.*

Пример 1. — Нека имамо да решимо једначину

$$mx - 2 = m - x,$$

у којој је m један дати број.

Ако једначину уредимо, имаћемо

$$mx + x = m + 2$$

или

$$(m + 1)x = m + 2.$$

Ако $m + 1$ није једнако нули, тј. *ако m није једнако — 1,* једначина има решење

$$x = \frac{m+2}{m+1}.$$

Ако је $m = -1$, једначина добија облик

$$0 \cdot x = 1,$$

па имамо случај противречности.

Пример 2. Нека имамо да решимо једначину.

$$mx + 1 = x + m^2.$$

Можемо је написати у облику:

$$(m - 1)x = m^2 - 1.$$

Ако $m - 1$ није једнако нули, тј. ако m није 1, једначина има решење

$$x = \frac{m^2 - 1}{m - 1}$$

тј.

$$x = m + 1.$$

Ако је $m = 1$, једначина добија облик

$$0 \cdot x = 0,$$

па имамо случај *неодређености.*

73. — Резултате ове дискусије можемо прегледно претставити овом табелом:

Претпоставке	решење	кажемо једначина је
$a \neq 0$	једно једино $x = -\frac{b}{a}$	одређена
$a=0$ $b \neq 0$	не постоји	противречна
$a=0$ $b=0$	ма који број	неодређена

Неједначине првог степена

74. — Да бисмо могли да извршимо разне дискусије, слично овоме што смо већ изложили, треба да проучимо *неједначине.*

Неједначина се зове математички израз који казује да је једна величина већа или мања од неке друге величине.

На пр. кад хоћемо да изразимо да је 3 веће од 2, или 2 мање од 3, пишемо

$$3 > 2,$$
$$2 < 3.$$

За ове две неједначине кажемо да су *супротног смисла.* Слично ономе код једначина, израз на левој страни зовемо *лева страна* неједначине, израз на десној страни *десна страна* неједначине.

Очевидно је да можемо *разменити стране неједначине под условом да се обрне знак, тј. да се промени смисао неједначине.*

Сетимо се још и оног што смо учили у аритметици и алгебри за трећи разред, стр. 64, да је *сваки негативан број мањи од нуле,* и да је од два негативна броја *већи онај чија је апсолутна вредност мања.*

Тако имамо на пр.:

$$-3 < 0$$
$$-5 < -2$$
$$-8 < 1.$$

75. — За решавање неједначина примењујемо слична правила, која смо имали код једначина.

1. Знак неједнакости се не мења, ако лево и десно додамо или одузмемо један исти број, тј. ако је

$$a > b$$

то је и $\quad a + c > b + c.$

Пример. $\quad 5 > 4$

$$5 + 1 > 4 + 1.$$

2. Знак неједнакости се не мења, ако леву и десну страну помножимо или поделимо једним истим **позитивним** *бројем,* тј. ако је

$$a > b,$$

то је и $\quad a \cdot c > b \cdot c$

и $\quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c},$

под условом да је $c > 0.$

Пример. $\quad 5 > 4$

$$5 \cdot 2 > 4 \cdot 2,$$
$$\frac{5}{2} > 2.$$

3. Знак неједнакости се окрене, ако и леву и десну страну помножимо или поделимо једним истим негативним бројем, тј. ако је

$$a > b$$

и ако је $\quad c < 0,$

биће $\quad ac < bc$

и $\quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$

Пример $\quad 5 > 4$

$$5 \cdot (-2) < 4 \cdot (-2)$$

је јер одиста $\quad -10 < -8.$

$$\frac{-5}{2} < -2,$$

јер је $\quad -2\frac{1}{2} < -2.$

76. — **Неједначина првог степена** је неједначина у којој се налази поред познатих величина и једна непозната или променљива, на пр. x, на првом степену.

На пример $\quad 4x + 3 > \frac{7}{8}x - 14.$

Решити неједначину значи одредити за које вредности x је задовољена. При том радимо корак по корак као и код једначина. Само треба добро пазити да се обрне знак неједнакости, кад се множи или дели *негативним* бројем.

Пример. — $\quad 2x - 7 > 3x + 4.$

Ако од обе стране одузмемо по 3x, добићемо

$$-x - 7 > 4.$$

Ако обема странама додамо по 7, имамо

$$-x > 11.$$

Ако обе стране помножимо са -1, добићемо

$$x < -11.$$

Обрнули смо знак неједнакости, пошто је -1 негативан број. Дакле неједначину задовољавају сви бројеви мањи од -11.

За усмено вежбање

1. $x + 7 > 3$	2. $4 + y > 9$	3. $10 > z + 3$
4. $6t - 2 > 3$	5. $8 - y > 8$	6. $9 > 7 - x$
7. $2x < 6$	8. $5 > 4x$	9. $5 < 8y$
10. $-3x > 12$	11. $-2x < 6$	12. $-2x < -18$

77. Графичко решавање неједначина I степена са једном непознатом. — Нека имамо да решимо графички неједначину

$$ax + b > 0. \qquad (1)$$

Претпостављамо да a није једнако нули, и означимо са x_0 корен једначине

$$ax + b = 0.$$

Тада имамо

$$ax_0 + b = 0,$$

одакле добијамо

$$b = -ax_0.$$

Ако место b ставимо ову вредност у неједначини (1), добијамо

$$ax - ax_0 > 0,$$

или
$$a(x - x_0) > 0.$$

Пошто производ на левој страни неједначине треба да буде позитиван, морају оба чиниоца a и $x - x_0$ бити једнако означени. Дакле разлика $x - x_0$ треба да има исти знак као и коефициент a.

Ако је a позитивно, треба да буде $x > x_0$.

Ако је a негативно, треба да буде $x < x_0$.

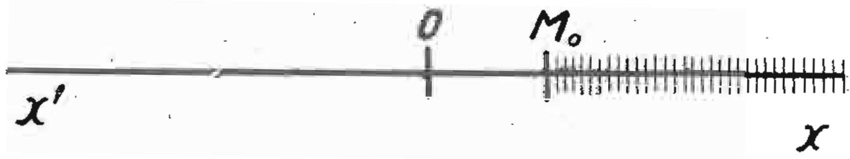
Претпоставимо да је a позитивно. Можемо претставити графички резултат на овај начин:

Нацртамо саму апсцисну осовину xx' са почетком 0, и нека је M_0 тачка чија је апсциса x_0.

Сл. 1.

Тачке M_1 чије су апсцисе веће од x_0 налазе се десно од тачке M_0. Ми ћемо извући сав део који се налази лево од тачке M_0. Та област не важи.

Друга слика претставља на исти начин случај $x < x_0$.



Сл. 2.

78. Случај више неједначина. — Овај графички поступак је нарочито користан, кад имамо више неједначина, које треба да буду задовољене једновремено, *симултано*. За сваку се поступи на исти начин, како смо већ радили, и ако све резултате претставимо на истој осовини, крајњи резултат се може на осовини прочитати.

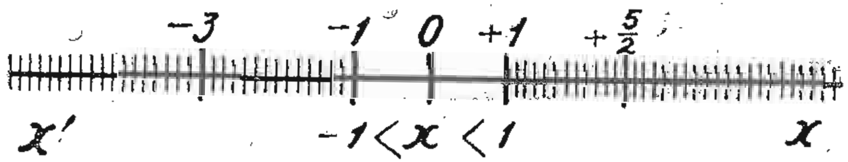
Пример 1. — Да се реше симултане неједначине:

$$x + 3 > 0$$
$$x + 1 > 0$$
$$2x - 5 < 0$$
$$x - 1 < 0.$$

Решења појединих неједначина су:

$$x > -3$$
$$x > -1$$
$$x < \frac{5}{2}$$
$$x < 1.$$

Ови резултати се виде на сл. 3.



Сл. 3.

Крајњи резултат је

$$-1 < x < 1.$$

Сасвим је разумљиво да ово графичко претстављање није неопходно. Оно је међутим врло угодно и доводи нас до резултата брзо и на начин врло јасан.

Пример 2. — Да се реши систем симултаних неједначина

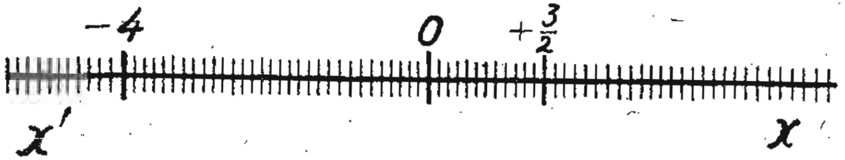
$$x + 4 < 0$$
$$2x - 3 > 0.$$

Решења су:

$$x < -4$$

$$x > +\frac{3}{2}.$$

Ови резултати налазе се на слици 4.



Сл. 4.

Слика показује да ове неједначине не могу постојати једновремено. То не могу бити симултане неједначине. За такав систем кажемо да је *инкомпатибилан*.

Напомена. — Решења неједначине

$$ax + b < 0 \qquad (1)$$

су, према знаку коефицијента a, вредности за x веће или мање од корена једначине

$$ax + b = 0. \qquad (2)$$

Да бисмо решили неједначину (1) можемо најпре да решимо једначину (2) и да се ограничимо на то, да пробамо један ма који број, да ли је он решење неједначине (1), или не. Из овакве једне пробе могуће је извести потребан закључак.

Тако на пр. решимо неједначину

$$2x - 5 < 0. \qquad (3)$$

Најпре решимо једначину

$$2x - 5 = 0,$$

$$x = \frac{5}{2}.$$

Сад пробамо да ли је неједначина (3) задовољена на пр. за $x = 0$. Неједначина је задовољена. Како је нула мања од $\frac{5}{2}$, решење неједначине (3) су бројеви мањи од $\frac{5}{2}$.

Овај поступак се не може сматрати да је нешто виши од обичног алгебарског поступка, пошто неједначина (3) даје такође

$$2x < 5$$

$$x < \frac{5}{2}.$$

Међутим видећемо касније, у случају неједначина са две непознате, да овај графички метод чини и највеће услуге.

За писмено вежбање

Задаци да се решавају рачунски и графички.

1. $3x - 2 < 10$
2. $-x + 4 > 7$
3. $4x - 6 > 2x + 8$
4. $2x - 1 < x + 1$
5. $x + 2 < x - \frac{3x}{2} + 4$
6. $\frac{4x - 3}{2} + \frac{1}{2} > x$
7. $\frac{12x - 2}{5} > \frac{8x - 1}{4}$
8. $\frac{2x + 8}{3} < \frac{3 - x}{3}$
9. $(2x + 3)^2 > 4x(x - 5)$
10. $x(x - 1) < 0$
11. $\frac{1}{x - 1} + 4 < 3 - \frac{2x}{x - 1}$
12. $\frac{x}{4x + 2} + \frac{2}{5} > 3 - \frac{5}{16x + 8}$

Наћи вредности за x које једновремено задовољавају две неједначине:

13. $2x + 1 > x - \frac{3}{2}$
 $2x - 1 < 1 - 3x$
14. $x - \frac{1}{3} < \frac{3}{2}x - 1$
 $4x - 5 > 2 - 5x$
15. $3 - \frac{2x}{5} + \frac{7}{2} < 5 - 3x + \frac{x}{6}$
 $\frac{x - 3}{4} + \frac{2x - 5}{5} < 1 - 3x$
16. $\frac{x}{2} - 3 > 3x - 5$
 $\frac{x - 1}{2} + \frac{3x}{4} > 1 - 4x$

17. Наћи вредност за x која задовољава једновремено све четири неједначине из задатака 15 и 16.

Да се изврши дискусија следећих једначина, тј. да се испита за које специјалне вредности коефицијената једначина неће имати ни један корен, имаће само један корен, или бескрајно много решења.

18. $(m - 1)x + m = 0$
19. $(n - 1)x + (n^2 - 1) = 0$
20. $\frac{cx + d}{e} = m$ (e у сваком случају да буде различито од нуле!)
21. $\frac{mx + n}{px} = r \quad (p \neq 0)$
22. $\frac{mx}{nx + p} = q \quad (n \neq 0,\ p \neq 0)$
23. $(x + m)(x - 4m) = (x + 2m)(x + 3m)$
24. $(x - 3m)(x - 7m) = (x - 5m)^2.$

Разноврсни примери једначина за понављање

1. $3mx - 7a - 5b = mx + 2b + 7c - 5mx$
2. $7(a - x) = (6b - x)$ 3. $(a - 1)x = b - x$
4. $3(5x - 7) + 7(3a - 5b) + 5(3b - 7x) = 0$
5. $ax - bx = c$ 6. $ax + bx + cx = d$
7. $a - bx = cx - x$ 8. $ax = b(c - x)$
9. $a + bx + a^2 = b + ax - b^2$
10. $ax + b + x(b - a) = a + b - x(a - b)$
11. $2(a - x) + ax = 6(a + 1)ax - x(a + 5)$
12. $(a - x)(1 - x) = x^2 - b$
13. $(x - a)(x - b) = x^2 - a$
14. $(ax - b)(m - n) + b(m - n) = a(m + n)$
15. $m(a + b - x) = x(a + b - x)$
16. $2(m - n)[5x - 8(m + n)] + 2nx = 9m^2 - (5m - 4n)(3 - x)$
17. $(a + x - b)(a - x - b) = (a - x)(b + x) - ab$
18. $\frac{x}{a} - b = c$ 19. $\frac{a}{x} - b = c$
20. $\frac{x}{a} - \frac{2x}{a} = 1 - \frac{x}{b}$ 21. $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = c$
22. $\frac{a - b}{x} = a - \frac{a + b}{x}$ 23. $\frac{ax}{ab - ax} - \frac{bx}{a^2x} - \frac{b}{a} - \frac{1}{a^2} = 0$
24. $2\{2[2(2x - 1) - 1] + 2\} - 1 = 1$
25. $1 - \frac{9}{10}\left\{\frac{7}{8} - \frac{5}{6}\left[\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} - x\right)\right]\right\} = \frac{13}{16}$
26. $\frac{5}{2x - 1} - 1 = \frac{3\frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} + \frac{11}{1 - 2x}$
27. $\frac{7\frac{1}{3}}{2x + 11} + \frac{3\frac{1}{2}}{5 - 4x} + 1\frac{1}{3} = \frac{8x}{6x + 33} - \frac{1\frac{2}{3}}{8x - 10}$
28. $\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} + \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1 - x}{1 + x} + \frac{1}{6}$

29. $\frac{4a + 3x}{4b - 3x} - \frac{4a - 3x}{4b + 3x} = \frac{16ab}{16b^2 - 9x^2}$
30. $\frac{2x + 1}{3x - 3} = \frac{7x - 1}{6x + 6} - \frac{2x^2 - 3x - 45}{4x^2 - 4}$
31. $\frac{1}{6x} + \frac{5x - 6}{25x^2 - 4} = \frac{4x - 5}{20x^2 + 8x} - \frac{18 - 5x}{30x^2 - 12x}$
32. $\frac{4x^3 + 50x^2 + 150x + 126}{48x^3 - 162} - \frac{5x - 2}{6x - 9} = \frac{1}{2} - \frac{10x^2 + 14x - 5}{8x^2 + 12x + 18}$
33. $\frac{x + a}{2x - 2a} - \frac{2x^2 - ax + 3a^2}{3x^2 + 3ax + 3a^2} = \frac{6ax^2 - 5x^3}{3x^3 - 3a^3} + \frac{3}{2}$
34. $\frac{2}{\frac{3x + 2\frac{1}{4}}{2x - \frac{1}{4}} + 2} = \frac{3}{2 \cdot \frac{3x + 2\frac{1}{4}}{2x - \frac{1}{4}} + 2\frac{1}{2}}$

35. У једначини $4x + m = (m - 1)x + 4$ да се m одреди тако да решење једначине буде $x = 2$.

36. У једначини $\frac{2x}{m} - 3 = \frac{1 + x}{m} + \frac{1}{3}$ да се m одреди тако да сви корени једначине буду већи од 3.

37. У једначини $m^2x + 1 = m^2 + 5$ да се m одреди тако да корен једначине буде 5.

38. У једначини $m^2x + 2 = 4x - m$ да се m одреди тако да решење буде $x = -7$.

У следећим једначинама да се m одреди тако да постану I степена. Затим да се једначине реше:

39. $x^2 + 7 = (5 - m)x^2 + 3x - 4$
40. $x^3 + mx^2 - 5 = m^2x^3 + x^2 + 2x$

За које вредности од m следећи парови једначина имају исто решење? Одреди та решења!

41. $x + 8 = 2x + 1$ и $3x + 2m = 6m - x$
42. $2x + 5 = x + m^2$ и $4x + 6 = m^2 + x$
43. За које ће вредности m бити решења једначина

$$4+\frac{x}{m}=5x+3 \text{ и } \frac{2}{m}+\frac{3}{x}=\frac{3}{5}$$

реципрочна једно другом?

44. За које вредности m ће једначине

$$3x-m=4+x \quad \text{и} \quad \frac{2}{5}x+\frac{m}{2}=3$$

имати решења, чији је збир 4; за које вредности m ће решења имати разлику 3?

Дискутовати следеће једначине:

45. $3x+8=mx+5$ 46. $6x-\frac{2}{m}=mx+4$

47. $m^2x+4=x+4m$ 48. $m^2x+3=mx+3m$

ГЛАВА VI

Системи једначина I степена са две и више непознатих

79. Системи са две непознате. — Нама је већ познато од прошле године како се решавају системи од две једначине са две непознате. Сад ћемо ради понављања израдити неколико примера, где су коефицијенти разломци и општи бројеви.

Пример 1. $$\frac{3x-2y}{3}+\frac{3(5x-4)}{4}=14$$

$$\frac{5y-3}{2}-\frac{7x-4y+2}{6}=3.$$

Ако у првој једначини обе стране помножимо са 12, а у другој са 6, добићемо

$$4(3x-2y)+9(5x-4)=168$$
$$3(5y-3)-(7x-4y+2)=18.$$

Кад се ослободимо заграда и сведемо сличне чланове добићемо

$$57x-8y=204$$
$$-7x+19y=29,$$

За решење овог система употребимо метод *замене*. Тога ради решимо прву једначину по y

$$y=\frac{57x-204}{8}, \qquad (1)$$

па нађену вредност ставимо место u у другој једначини

$$-7x+19\cdot\frac{57x-204}{8}=29.$$

Кад се ослободимо разломка и извршимо назначено множење, добијамо

$$-56x+1083x-3876=232$$

или

$$1027x=4108$$
$$x=4.$$

Другу непознату y одредићемо из супституционе једначине (1), кад место x ставимо 4.

$$y=\frac{57\cdot 4-204}{8}=\frac{228-204}{8}=\frac{24}{8}=3.$$

Проба. — Пробу треба вршити заменом нађених вредности само у првобитним једначинама.

$$\frac{12-6}{3}+\frac{3\cdot(20-4)}{4}=2+12=14$$

$$\frac{15-3}{2}-\frac{28-12+2}{6}=6-3=3.$$

Пример 2. $$(a+b)x+(a-b)y=2a^3$$
$$(a+b)x-(a-b)y=2b^3.$$

Овде видимо да су коефицијенти непознате y једнаки а супротно означени. Због тога ћемо применити *метод једнаких* коефицијената. Ако леве и десне стране једначина саберемо, имамо

$$2(a+b)x=2a^3+2b^3$$

или

$$(a+b)x=a^3+b^3$$

$$x=\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2.$$

Одузимањем имамо

$$2(a-b)y=2a^3-2b^3.$$

или

$$(a-b)y=a^3-b^3$$

$$y=\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2.$$

Пример 3. $\frac{2}{x+2y}+\frac{1}{x-2y}=\frac{1}{2}$

$$\frac{8}{x+2y}-\frac{2}{x-2y}=\frac{1}{2}.$$

У овом примеру, ако бисмо покушали да се ослобађамо разломака, наишли бисмо на велике тешкоће. Али како се овде непознате x и y јављају у истим алгебарским изразима

$$\frac{1}{x+2y} \text{ и } \frac{1}{x-2y}$$

и то само у овом споју, то можемо место ових израза увести нове непознате, тј. ставићемо да је

$$\frac{1}{x+2y}=u \qquad \frac{1}{x-2y}=v. \qquad (1)$$

Тада горњи систем добија облик

$$2u+v=\frac{1}{2}$$

$$8u-2v=\frac{1}{2}$$

или

$$4u+2v=1 \qquad (2)$$
$$16u-4v=1.$$

Ради понављања решимо га методом упоређивања. Одредимо из обеју једначина v:

$$v=\frac{1-4u}{2} \qquad (3)$$

$$v=\frac{16u-1}{4}.$$

Одавде добијамо једначину

$$\frac{1-4u}{2}=\frac{16u-1}{4}.$$

Њеним решењем налазимо

$$u=\frac{1}{8}.$$

Заменом ове вредности у једној од једначина (3), добијамо

$$v=\frac{1}{4}.$$

Кад овим вредностима сменимо u и v у супституционим једначинама (1), добијамо систем

$$\frac{1}{x+2y}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x-2y}=\frac{1}{4}.$$

Његовим решењем добија се

$$x=6$$
$$y=1.$$

Пробу изврши у првобитним једначинама!

Напомена 1. — Очевидно је да бисмо систем (2) могли много лакше и брже решити методом једнаких коефициената.

Напомена 2. — Један извежбан ученик могао би и првобитни систем решити методом једнаких коефицијената.

80. Општи систем од две једначине са две непознате. Дискусија. — Пошто извршимо сва могућа упрошћавања једног система од две једначине са две непознате, тј. пошто се ослободимо разломака и заграда, пошто извршимо пребацивање непознатих на једну, а познатих на другу страну и сведемо што се може свести, добијамо у најопштијем случају једначине овог облика

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2,$$

где су нам величине a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, познате.

Овај систем најлакше се решава методом једнаких коефицијената. Множећи у једном случају прву једначину са b_2, а другу са $-b_1$, отпада y, а одреди се x. У другом случају множимо горњу једначину са $-a_2$, а доњу са a_1. Тада отпада x, а одреди се y. Радећи тако добијамо решења

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$y=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Дискусију ћемо изводити слично ономе, како смо радили код опште једначине I степена са једном непознатом.

Разликоваћемо ове случајеве:

1. — Узећемо да је именилац $a_1b_2-a_2b_1$ различит

од нуле. У овом случају за x и y имамо само по *једно решење*, и то потпуно *одређено* и *коначно*.

2. Случај противречности и неодређености. — Узмимо да је именилац једнак нули, тј.

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$
$$\text{или } a_1b_2 = a_2b_1.$$

Ако обе стране ове једначине поделимо са a_1b_1 добићемо

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}.$$

Означимо заједнички количник са q, па ћемо имати

$$a_2 = q \cdot a_1$$
$$b_2 = q \cdot b_1.$$

После овога првобитне једначине добијају овај облик

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$q(a_1x + b_1y) = c_2.$$

Ако овде није и $c_2 = q \cdot c_1$ онда је очевидно да су ове две једначине *противречне*. Не постоје никакве вредности за x и y које би биле *заједничка решења* за ове две једначине. Имамо случај *противречности*.

Пример. $2x + 3y = 10$, $2x + 3y = 15$ или $x - 2y = 8$, $5x - 10y = 1$.

Ако је $c_2 = q \,.\, c_1$ онда видимо да је друга једначина постала из прве множењем са q. Она је зависна од прве једначине. У том случају имамо бескрајно много решења. Имамо случај *неодређености*.

Пример. — $2x - 3y = 5$, $8x - 12y = 20$.

81. Системи од три и више једначина. — За решавање система од више једначина користимо исте методе које смо имали за системе са две непознате.

Пример 1.

$$2x + 3y + 4z = 16$$
$$5x - 8y + 2z = 1$$
$$3x - y - 2z = 5.$$

6x+6+4z=16

4z=16-6-6

Основна мисао лежи у томе да се систем од три једначине са три непознате сведе на систем од две једначине са две непознате, који знамо да решимо. Примениемо метод замене.

Ако прву једначину решимо по z, имаћемо

$$z = \frac{16-2x-3y}{4}. \qquad (1)$$

Кад ову вредност ставимо место z у другим двема једначинама, добићемо:

$$5x-8y + \frac{2(16-2x-3y)}{4} = 1$$
$$3x-y - \frac{2(16-2x-3y}{4} = 5,$$

или, кад их упростимо

$$8x-19y = -14$$
$$8x+y = 26.$$

Добили смо систем од две једначине са две непознате. Из прве једначине даље имамо:

$$y = \frac{14+8x}{19}, \qquad (2)$$

па друга онда постаје

$$8x + \frac{14+8x}{19} = 26, \text{ тј.}$$
$$152x+14+8x = 494$$
$$160x = 480$$
$$x = 3.$$

Кад ову вредност ставимо место x у једначини (2) имамо

$$y = \frac{14+24}{19} = \frac{38}{19} = 2.$$

Стављајући нађене вредности за x и y у једначини (1) добијамо

$$z = \frac{16-6-6}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Пример 2.

$$\text{I} \quad 2x+3y-4z+u=20 \mid -3 \mid 2 \mid 4$$
$$\text{II} \quad 5x-y-7z+3u=26$$
$$\text{III} \quad x+2y-3z-2u=4$$
$$\text{IV} \quad -4x+5y+z-4u=-5.$$

Применићемо метод једнаких коефицијената. Ради лакшег изражавања обележећемо једначине редом римским бројевима.

Кад се u избаци из I и II једначине, из I и III и из I и IV, добије се систем једначина:

$$\begin{aligned} &\text{V} \quad -x - 10y + 5z = -34 \mid 5 \mid 4 \\ &\text{VI} \quad 5x + 8y - 11z = 44 \\ &\text{VII} \quad 4x + 17y - 15z = 75. \end{aligned}$$

Сада се избаци x из V и VI и из V и VII једначине. Тако се добија систем једначина

$$\begin{aligned} &\text{VIII} \quad -42 + 14z = -126 \\ &\text{IX} \quad -23y + 5z = -61, \end{aligned}$$

или кад обе стране једначине VIII поделимо са 14

$$\begin{aligned} &\text{VIII} \quad -3y + z = -9 \mid -5 \\ &\text{IX} \quad -23y + 5z = -61 \end{aligned}$$

Избацивањем z добијамо.

$$\begin{aligned} -8y &= -16 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Заменом добија се из једначине VIII

$$z = -9 + 6 = -3.$$

Из једначине V имамо

$$\begin{aligned} -x &= 20 + 15 - 34 = 1 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Из I једначине имамо

$$u = 20 + 2 - 6 - 12 = 4,$$

За писмено вежбање

1. $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{2} = 14$, $\quad \dfrac{x}{9} - \dfrac{y}{5} = 3$

2. $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{8} + 9 = 0$, $\quad \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{10} + 9 = 0$

3. $3x - \dfrac{y-3}{5} = 6$, $\quad 4y + \dfrac{x-2}{3} = 12$

4. $\dfrac{7x+2}{6} - (y-3) = 4$, $\quad \dfrac{7y+3}{6} - (x+2) = -3$

5. $\dfrac{x-2}{5} - \dfrac{10-x}{3} = \dfrac{y-10}{4}$, $\quad \dfrac{2y+4}{3} - \dfrac{2x+y}{8} = \dfrac{x+13}{4}$

6. $\dfrac{x+4}{7} - \dfrac{x-y-1}{4} = 2x - 4$, $\quad 2y - 4 - \dfrac{3x-2y}{3} = 3x$

x = 10

7. $0{,}3x + 4y = 11$, $\quad 0{,}2x + 3y = 8$

8. $1{,}2x + 0{,}6y = 0{,}6$, $\quad 0{,}3x - 0{,}2y = 0{,}01.$

9. $0{,}6x + 0{,}7y + 3{,}95 = 0$, $\quad \dfrac{x}{0{,}5} + \dfrac{y}{0{,}7} + 10 = 0$

10. $0{,}03x + 0{,}06y = 0{,}05$, $\quad 0{,}09y - 0{,}03x = 0{,}05$

11. $\dfrac{3x-2y}{4} - \dfrac{2x+3y}{12} = 1$, $\quad \dfrac{7x+2y}{10} - \dfrac{11x-4y}{25} = 6$

12. $\dfrac{4x-5y+12}{6} - \dfrac{7x-8y+4}{7} = 1$, $\quad \dfrac{5x-4y+7}{4} + \dfrac{6x+y-4}{10} = 7$

13. $ax + by = c$, $\quad ax - by = d$

14. $ax + by = c$, $\quad bx - ay = d$

15. $ax + by = c$, $\quad a^2x + b^2y = c^2$

16. $a^2x + ay = 1$, $\quad b^2x + by = 1$

17. $a^2x + y = a^3$, $\quad b^2x + y = b^3$

18. $ax + by = a^2 + b^2$, $\quad bx + ay = 2ab$

19. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, $\quad \dfrac{x}{a-b} - \dfrac{y}{a+b} = 1$

20. $(a^2-b^2)(x+y) = a^2 + b^2$, $\quad \dfrac{bx}{a} - \dfrac{ay}{b} = \dfrac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$

Изабери m тако да у следећим једначинама наступи случај противречности!

21. $(1-m)x + 3y = 1$, $\quad x + 3y = 4$

22. $6x + (3m+1)y = 15$, $\quad 3x + 5y = 7$

У следећим једначинама да се m изабере, тако да добијемо случај неодређености.

23. $x + (m-2)y = 8$, $\quad 2x + 4y = 16$

24. $(m+1)x - 5y = 12$, $\quad (3m-1)x - 10y = 24.$

Реши и дискутуј следеће системе:

25. $x + 3y = 1$, $\quad mx - 3y = -1$

26. $5x - 3y = 2$, $\quad x - my = 5$

27. $3x + my = 1$, $\quad mx + 3y = 2$

28. $2x + my = 3$, $\quad mx + 18y = 18$

29. $x + my = 5$, $\quad 4x + (m-1)y = 2$

30. $x + my = m + 3$, $\quad (m+1)x - my = 3$

31. $3x - 2y = 3$
$(2m + 1)\,x + (m - 1)\,y = 5$. Одреди m, тако да вредности са x и y буду једнаке.

32. $(m - 2)x + (m + 1)y = 3$
$(m - 1)x + (m + 2)y = 5$. Одреди m тако да вредност за y буде двапута већа од x.

33. Бројеве a и b одреди тако да систем

$$\begin{aligned}(a - 3)x + (b - 2)y - a &= 0\\ (a + 3)x + (b + 2)y + b &= 0\end{aligned}$$

има решења $x = 3, y = -2$.

34. $$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{2}{y} &= 12\\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} &= 4\end{aligned}$$

35. $$\begin{aligned}\frac{4}{x+1} + \frac{3}{y-1} &= 1{,}6\\ \frac{6}{x+1} - \frac{5}{y-1} &= 0{,}5\end{aligned}$$

36. Реши систем

$$\begin{aligned}3x + (1 + m)y + 1 - 2m &= 0\\ 2x + (1 - m)y + 1 + 2m &= 0\end{aligned}$$

Између којих граница може варирати m да би нађене вредности за x и y биле негативне?

37. $$\begin{aligned}2x - 3y + z &= 1\\ 3x + 2y - z &= 3\\ 4x + 5y - z &= 7\end{aligned}$$

38. $$\begin{aligned}6x - y + 2z &= 10\\ 4x + 2y - 3z &= -1\\ 5x + 4y - z &= 10\end{aligned}$$

39. $$\begin{aligned}6x - 4y - 5z &= 8\\ 3x + 8y + 10z &= -1\\ 9x + 2y + 4z &= 11\end{aligned}$$

40. $$\begin{aligned}12a - 7b - 25c &= 0\\ 10a - 42b + 5c &= 0\\ a - 7b + 4c &= 3\end{aligned}$$

41. $$\begin{aligned}\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{7}z &= 13\\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z &= 17\\ \frac{1}{10}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{14}z &= 7\end{aligned}$$

42. $$\begin{aligned}\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y - \frac{7}{10}z &= 4\\ \frac{5}{6}x - \frac{7}{12}y + \frac{4}{15}z &= 15\\ \frac{3}{4}y - \frac{4}{5}z &= -21\end{aligned}$$

43. $$\begin{aligned}9x + 12y + 8z &= 91\tfrac{1}{2}\\ 6x - 8y &= 10\tfrac{3}{7}\\ 16y + 10z &= 12\tfrac{4}{7}\end{aligned}$$

44. $$\begin{aligned}x + 2y &= 2{,}4\\ y + 2z &= 2{,}76\\ 2x + z &= 2{,}4\end{aligned}$$

45. $$\begin{aligned}5x - 6y &= 2\tfrac{5}{7}\\ 5y - 6z &= 1\tfrac{4}{7}\\ -6x + 5z &= 21\end{aligned}$$

46. $$\begin{aligned}7y - 5z &= 1\\ -7x + z &= -10\\ 5x - y &= 7\end{aligned}$$

47. $$\begin{aligned}3(8x - y) + 5(2z - x) - 2(y + 4z) &= 24\\ 5(2x - 3y) - 4(3z - 2x) + 3(7y + 3z) &= -6\\ 4(4x + 3y) - 2(4y + 9z) - 11(3x - 2z) &= 147\end{aligned}$$

48. $$\begin{aligned}\frac{5x - 2y}{3} - \frac{6z - 5x}{2} + \frac{7z - 5y}{6} &= -4\tfrac{1}{2}\\ \frac{3x - 2z}{5} - \frac{2y - 5z}{4} + \frac{3x - 2y}{20} &= -3{,}55\\ \frac{2x + 5y}{15} - \frac{9z + x}{21} - \frac{9y - 5z}{35} &= \frac{9}{35}\end{aligned}$$

49. $$\begin{aligned}x + y &= a\\ x + z &= b\\ y + z &= c\end{aligned}$$

50. $$\begin{aligned}x + y - z &= c\\ -x + y + z &= a\\ x - y + z &= b\end{aligned}$$

51. $$\begin{aligned}x + y &= 2a\\ ay + z &= a^2\\ bx - z &= b^2\end{aligned}$$

52. $$\begin{aligned}x + y + z &= 1\\ ax + by + cz &= m\\ a^2x + b^2y + c^2z &= m^2\end{aligned}$$

53. $$\begin{aligned}(a - b)x + (a - b)y - (a + b)\,z &= 0\\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 2a + 2b\\ (a + b)x - (a - b)z &= a^2b + 2ab^2 - 2b^3\end{aligned}$$

54. $$\begin{aligned}(a + b)x + (a + b)y - (a + b)z &= 2b\,(a^2 + b^2)\\ (a - b)x + (a + b)y &= (a - b)z - 2a\,(a^2 - b^2)\\ bx + ay &= 2a^2b\end{aligned}$$

55. $$\begin{aligned}\frac{7}{x+1} - \frac{5}{y-2} + \frac{2}{z} &= 1\\ \frac{2}{y-2} + \frac{6}{z} &= 2\\ \frac{6}{x+1} + \frac{4}{y-2} + \frac{2}{z} &= 3\end{aligned}$$

56. $$\begin{aligned}\frac{25}{x+y+4} + \frac{7}{z} &= 6\\ \frac{3}{x-z-4} + \frac{8}{z} &= 7\\ \frac{6}{x+y+4} + \frac{6}{x-z-4} - \frac{3}{z} &= 8\end{aligned}$$

57. $x + 3y - z - t = 1$
$x - y + z + t = 2$
$x - y - z = 6$
$x + t = 0$

58. $y + z + t = 20$
$z + t + x = 30$
$t + x + y = 40$
$x + y + z = 50$.

59. $a + b + 2c - 3d = 3$
$2a - b + c - d = 4$
$3a + 2b - 3c - 2d = 11$
$4a - 3b + 2c + d = 11$

60. $m - 2n + 3p + q = -20$
$5m + 3n - p - 4q = -47$
$2m + 4n - 3p + 2q = 28$
$3m - n + 4p - 5q = -76$

61. $\frac{3}{x - y + 6} = \frac{5}{2y - x + 6}$
$7[2y - (x + 1)] = 2[3x - 2(y - 3)]$

62. $\frac{x-1}{x+y} = \frac{1}{x+y} + \frac{2}{7}$; $\frac{4}{1-3y} = \frac{1}{y-x-1}$

63. $\frac{4x + 3y + 2}{4(x+y)(5-3x)} = \frac{1}{12x+12y} + \frac{1}{9x - 15}$
$25x + 25y = -28$

64. $\frac{a}{b+y} = \frac{b}{3a+x}$; $ax + 2by = d$

65. $3(x-a) - 2(y-b) = -\frac{2(3a + 2b)}{ab}$
$bx + ay = 2ab - 3(a - b)$

66. $x+y = \frac{4}{3}(a+1)$
$\frac{x}{y} = \frac{3a+1}{a+3}$

67. $x+y = \frac{(a+b)(a+b+1)-1}{ab}$
$\frac{x}{y} = \frac{a + b - 1}{(a+b)^2}$

68. $a(x - y + a) + b(x + y + b) = (a + b)^2$
$(x - y - b)(2a + 3b) = 2b(a - b - 2y)$

69. $a(x + y) - b(x - y) = 2a(a^2 - b^2)$
$\frac{x-y}{2b} + \frac{x+y}{a} = 3a$

70. $\frac{2a^2}{x^2-y^2} = \frac{a}{x-y} - \frac{b}{x+y}$
$\frac{x+y}{ab} - \frac{2b}{a} = \frac{2a}{b} - \frac{x-y-2ab}{b^2}$

71. $\frac{4m^2 - 16}{x} - \frac{9m^2 - 18m + 9}{y} = 1 - 5m$
$\frac{6m + 12}{x} + \frac{15m^2 - 15}{y} = 21 + 15m$

72. $\frac{1}{x + \frac{2}{y + \frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{x - \frac{2}{y - \frac{1}{1-x}}}$
$2y - \frac{1}{1-x} = 2$

73. $\frac{4}{4x + 3y + 2} + \frac{5}{5x + 4y + 3} = 1$
$\frac{20}{4x + 3y + 2} + \frac{5}{5x + 4y + 3} = 4$

74. $\frac{16}{5x + 12y - 6} - \frac{7}{9x + 8y + 10} = 16$
$\frac{4}{15x+36y-18} + \frac{3}{36x+32y+40} = -\frac{4}{3}$

75. $\frac{5}{4x - 5y} - \frac{5x - 6y}{3} = 0$
$\frac{4}{4x - 5y} - \frac{5x - 6y}{15} = 1\frac{1}{2}$

76. $\frac{1}{x + y - 1} + \frac{1}{x - y + 1} = 1$
$\frac{1}{\frac{1}{x + y - 1} + \frac{2}{x - y + 1}} = \frac{2}{3}$

77. $\frac{12}{5x + 2y - 8} + \frac{28}{3x + 4y - 12} = 3$
$\frac{5x + 2y + 8}{3} = \frac{3x + 4y}{2} - 6$

ГЛАВА VII

Проблеми првог степена

82.— При решавању проблема имамо углавном три момента:

1. Избор непознате и постављање једначине.
2. Решавање једначине.
3. Дискусија добијених решења.

83. Избор непознате. — У простијим примерима обично се јасно види шта треба узети за непознату. Вежбање на многобројним и разноврсним примерима оспособиће ученика да у извесним случајевима узме неке величине за непознате пре неголи друге, што често доводи до знатних упрошћења и олакшања.

Кад се одреде величине које треба узети за непознате, треба их ближе одредити. Рецимо ако су то дужине, треба утврдити шта је узето за *јединицу*. Ми као решење увек добијемо један неименован број, па је потребно да знамо јединицу, да бисмо разумели његово значење.

Поред тога треба још покаткад утврдити и *почетак*, ако је на пр. непознато *време*.

У многим проблемима су непознате величине такве природе, да их можемо сматрати као позитивне или негативне. Потребно је дакле, једновремено са избором јединице, да се једном конвенцијом прецизира и знак сваке од ових величина. Кад добијемо решење, ми ћемо према утврђеној конвенцији прецизирати његово стварно значење:

Нека имамо на пример следећи проблем:

Лице А има 30 година и 10 месеци, лице В 12 година. Кад ће лице А бити двапута старије од лица В?

Природно је да се за непознату узме време које ће протећи *од сада* до момента, када ће старост лица А бити једнака двострукој старости лица В. На тај начин одредили смо *почетак* времена. То је садашњи тренутак. Уз то треба назначити и *јединицу* времена. Можемо узети за јединицу месец или годину. Најзад треба утврдити које је време позитивно, да ли оно које је протекло или оно које ће наступити. Тако смо утврдили потребне конвенције, да би се проблем могао *поставити*, тј. изразити помоћу једначине.

84. Постављање једначине. — Поставити проблем значи написати алгебарским језиком односе који постоје између познатих и непознатих величина у проблему. При том треба добро пазити, пре него што ћемо написати ове односе, да све величине исте врсте буду изражене истом јединицом, и ако је и то потребно, са истим почетком и истом конвенцијом о знаку. Ако не водимо довољно рачуна о овоме, написане једначине могле би да не значе ништа, и могли би смо начинити крупне грешке.

Посматрајмо малопређашњи пример. Узмимо за непознату x време, које ће протећи од сада до момента кад ће лице А бити 2 пута старије од лица В. Време које је протекло да се узме као негативно, а оно које долази као позитивно. За јединицу узећемо месец.

После x месеци старост лица А биће $370 + x$, старост лица В биће $144 + x$, па између њих треба да постоји једначина

$$370 + x = (144 + x) \cdot 2.$$

85. Решавање једначине. — Кад смо проблем поставили, остаје нам да решимо једначину или једначине. Ми знамо да решавамо једначине, кад су непознате првога степена.

86. Дискусија решења. — Кад смо из једначине или једначина нашли вредност непознатих, тиме задатак још нисмо свршили. Нама није дато да решимо једну једначину, или један систем једначина. Ми треба да решимо проблем. Једначине које смо увели служе само да олакшају решење. Треба дакле још видети да ли се резултати могу примити, да ли одговарају проблему. Другим речима морамо решење *дискутовати*.

Решење једначине или једначина једног проблема може бити *одређено, противречно* или *неодређено*. У случају кад је решење одређено, може бити претстављено бројевима *целим* или *разломцима, позитивним* или *негативним*.

Дискутовати проблем значи истражити да ли добијена решења једначине одговарају свима условима исказаним у проблему.

На пр. претпоставимо да слово x претставља број људи у једној скупини и да смо нашли за одредбу x једну *противречну* једначину. Тада је и проблем *немогућан*. Или претпоставимо да смо дошли до једне једначине чије је решење $x = \frac{2}{3}$ или $x = -8$. Ако нисмо учинили грешку у рачуну, проблем је опет немогућан.

Пример 1. Отац има 42 године, а син 14 година. После колико година ће отац имати m пута више година од сина?

Решење. — Обележимо са x време, број година, бројених *почев* од данас. Узећемо да је позитивно оно време, које ће тек наступити.

У времену x, старост очева биће $42 + x$ година, старост сина $14 + x$. Према задатку треба да буде

$$42 + x = m(14 + x).$$

Решењем ове једначине добијамо

$$x = \frac{14(3 - m)}{m - 1}.$$

Проба. — После x година старост очева биће

$$42 + x = 42 + \frac{14(3 - m)}{m - 1} = \frac{28m}{m - 1}.$$

Старост синовљева биће

$$14 + x = 14 + \frac{14(3 - m)}{m - 1} = \frac{28}{m - 1}.$$

Отац, дакле, има m пута више година.

Дискусија. — Да би решење одговарало проблему треба најпре да оно одиста постоји. Затим да нађени бројеви година оца и сина буду позитивни.

1. Да би решење постојало треба $m - 1$ да буде различито од нуле. Јер ако је $m - 1 = 0$, тј. $m = 1$, једначина постаје

$$42 + x = 14 + x$$

или

$$0 \cdot x = 28,$$

па имамо случај противречности. Ово је било лако предвидети. Проблем би у том случају био: ако отац има 42 године, а син 14 година, кад ће они имати исти број година. Очевидно проблем је немогућан.

2. Ако је $m < 1$, вредност нађена за старост сина била би негативна, па се не може примити. Једначина има једно решење, али то решење не задовољава проблем. Проблем је немогућан.

Претпоставимо да је $m > 1$. Нађене вредности за доба старости су позитивне и проблем има једно решење.

Другим речима пошто је старост очева у овом моменту већа од старости сина.

неће се никад десити да она буде m пута већа, кад је $m < 1$

и десиће се увек једанпут, ако је $m > 1$.

Сад да видимо да ли се је овај догађај десио у прошлости, или ће се десити у будућности. То зависи од знака израза

$$\frac{14(3 - m)}{m - 1},$$

који смо нашли за x. Потражимо тај знак.

Именилац овога разломка $m - 1$ је позитиван, те његов знак зависи само од бројиоца. Ако хоћемо да видимо за које ће вредности m бројилац бити позитиван, треба да решимо неједначину

$$14(3 - m) > 0.$$

Њеним решењем добијамо

$$m < 3.$$

Горњи разломак ће бити позитиван, кад је $m < 3$.

Слично овоме налазимо да ће горњи разломак бити негативан за $m > 3$.

Ако је $m = 3$, x је нула, тј. садашња старост очева 3 пута је већа од старости синовљеве.

За прошлост треба да је $m > 3$, тј. у прошлости је старост очева била већа од 3 пута. (На пр. могла је бити 4,5 пута већа.)

За будућност треба да је $m < 3$, па ће старост очева бити мања од 3 пута. Разуме се остајући увек већа од старости сина.

Целу дискусију можемо резимирати у следећој табели:

Претпоставке о m	Закључци
$m \leqq 1$	Проблем немогућан
$1 < m < 3$	Једно решење у будућности.
$m = 3$	Једно решење у садашњости.
$m > 3$	Једно решење у прошлости.

Пример 2. — Број 45 написан је у декадном бројном систему. У ком бројном систему се пише у облику $3a$? a је цифра у непознатом систему.

Решење. — Нека је x основа траженог система. Број $3a$ може тада да се напише у облику

$$3x + a,$$

где је x сад написано у декадном систему. Према томе треба да постоји једначина

$$3x + a = 45.$$

Решењем ове једначине имамо

$$x = \frac{45 - a}{3}.$$

Дискусија. — Број x треба да буде цео и позитиван. Осим тога пошто је a цифра у сестему са основом x, x мора бити веће од a. Пошто је x веће од a, то је у овоме садржан и услов да мора бити и позитивно.

Изразимо неједначином да је x веће од a:

$$\frac{45 - a}{3} > a.$$

Решењем ове неједначине имамо

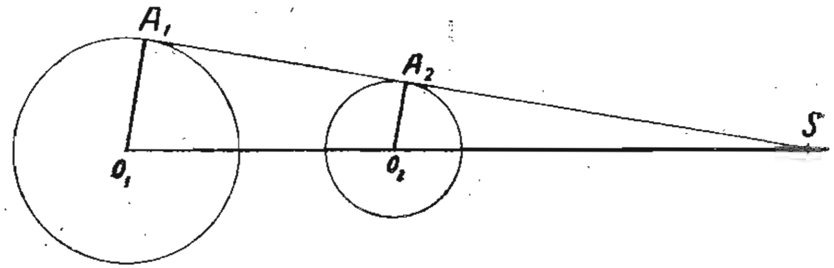
$$a < \frac{45}{4}.$$

a је дакле број, који највише сме бити 11.

Изразимо да је x цео број. Треба и довољно је да $45 - a$ буде дељиво са 3. Пошто је 45 садржалац броја 3, треба и a да буде садржалац броја 3, или нула. То ће бити један од бројева 0, 3, 6, 9. Овим бројевима одговарају вредности за x

15,14, 13, 12.

Пример 3. — Дата су два круга чији су полупречници R и r. Да се одреди пресечна тачка S спољашње тангенте са централом ова два круга. Централна раздаљина је c.



Сл. 5.

Избор непознате. — Нека су 0_1 и 0_2 средишта ових кругова. Одмах претпостављамо да су један изван другога. Затим узимамо да постоји заједничка тангента која сече централу у тачки S, а додирује кругове у тачкама A_1 и A_2. Она је одређена ако знамо тачку S и ако је ова тачка изван оба круга. Претпостављамо да се она налази на истој страни круга 0_1 на којој је и круг 0_2. Та тачка ће бити одређена дужином 0_2S. Ми ћемо ову дужину узети за непознату x.

При том дужине R, r, c и x морају бити мерене истом јединицом. Пошто положај тачке S зависи само од узајамног положаја кругова, и од њихове величине, то није нужно овде утврдити почетак и поставити конвенцију за знак.

Постављање једначине. Из геометрије нам је познато да су троугли SO_1A_1 и SO_2A_2 слични, пошто су стране тих троуглова O_1A_1 и O_2A_2 паралелне као нормале па истој правој SA_2A_1. Из те сличности имамо.

$$\frac{SO_2}{SO_1} = \frac{O_2A_2}{O_1A_1}.$$

Како је $SO_2 = x$, $SO_1 = c + x$. $O_2A_2 = r$, $O_1A_1 = R$, то горња једначина прелази у

$$\frac{x}{c + x} = \frac{r}{R}.$$

Решавање једначине. Ако обе стране једначине помножимо са $R(c + x)$, при чему $c + x$ треба да је различито од нуле, добијамо

$$Rx = r(c + x)$$

или

$$Rx = rc + rx.$$

И ако непознате пребацимо на леву страну

$$x(R - r) = cr.$$

Одакле је

$$x = \frac{cr}{R - r},$$

при чему смо узели да је $R \neq r$.

Дискусија. — Нађени број $\frac{cr}{R - r}$ одређује потпуно тачку S. Да бисмо из ове тачке могли повући тангенту, треба да је $\frac{cr}{R - r}$ веће од r тј. чинилац $\frac{c}{R - r}$ броја r у $\frac{cr}{R - r}$ треба да буде већи од 1. То је у ствари и тако, пошто је $c > R - r$, јер кругови нису један у другом.

Напомена. — У дискусији нисмо узели претпоставку $R = r$, јер смо већ у самом почетку морали претпоставити да су полупречници различити. Без тога не бисмо могли ни почети проблем, јер би праве A_1A_2 и O_1O_2 биле паралелне. А да о томе нисмо у почетку повели рачуна, нас би решење једначиве навело на ту мисао. Кад претпоставимо да је $R = r$ једначина добија облик

$$0 \cdot x = cr.$$

Али је ипак корисно да се мало позабавимо овом немогућношћу проблема. Замислимо да у решењу

$$x = \frac{cr}{R-r}$$

r бива по вредности све ближе вредности R. Вредност x ће бивати све већа, јер бројилац разломка расте, а именилац се смањује. Тачка S ће се све више удаљавати од тачке O_2. Кажемо кад *r тежи према R, x расте бесконачно*, и решење

$$\frac{cr}{R-r}$$

које за $r = R$ нема никаквог смисла, утврђује на неки начин последњи, гранични положај тангенте, кад r тежи ка R. У том смислу кажемо покаткад да једначина има један *корен бескрајно велики*. Раздаљина O_2S постане *бесконачно велика*. Тачка S оде у бескрајност. Праве се секу у бесконачности. Оне постану паралелне. У овом случају за означавање раздаљине x употребљава се знак ∞.

Пример 4. — Да се одреде стране равнокраког троугла, кад је дат обим $2s$ и висина h, која одговара основици.

Решење. — Ако са x обележимо основицу и са y крак, обим ће бити

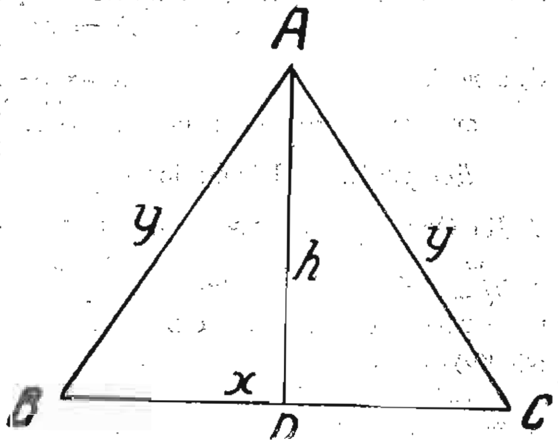
$$x + 2y = 2s.$$

Ако је AD висина, која одговара основици, онда имамо по Питагорином правилу

$$y^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2.$$

Непознате x и y одредићемо, кад решимо систем

$$x + 2y = 2s$$
$$y^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2.$$



Сл. 6.

Решења овог система су

$$x = \frac{s^2 - h^2}{s}$$

$$y = \frac{s^2 + h^2}{2s}.$$

Дискусија. — Да би проблем имао решење, треба да

буду нађене вредности за x и y позитивне. Затим треба да постоји могућност да се са тим дужима конструише равнокрак троугао, тј. треба основица x да буде мања од збира кракова $2y$.

Кад погледамо нађену вредност за y, видимо да је увек позитивна. Да би нађена вредност за x била позитивна треба да је

$$\frac{s^2 - h^2}{s} > 0$$

тј.

$$s^2 > h^2 \text{ или } s > h.$$

Најзад треба да буде

$$x < 2y$$

тј.

$$\frac{s^2 - h^2}{s} < \frac{s^2 + h^2}{s}$$

Ова неједначина важи увек.

Једини услов за могућност проблема остаје дакле

$$s > h.$$

Половина обима треба да буде већа од висине.

Пример 5. Збир два броја је 16, њихова разлика је 2. Који су ти бројеви?

Овај пример узимамо само зато, да бисмо показали да се понеки проблем може решити и помоћу две или више једначина и помоћу једне једине. Зависи од метода, којим се служимо.

1. Ако један непознати број обележимо са x, други са y, имамо систем једначина:

$$x + y = 16$$
$$x - y = 2.$$

Тражени бројеви су $x = 9$, $y = 7$.

2. Ако се x обележимо један непознати број, онда је других $16 - x$, па имамо једначину

$$x - (16 - x) = 2.$$

И помоћу ове једначине успевамо да решимо проблем.

Пример 6. Кад се квадрату једног броја дода 7, добија се исто толико, као кад се од троструког квадрата тога броја одузме 11.

Овај пример узимамо да бисмо показали да се понеки проблем може да реши и квадратном једначином и једначином првога степена.

1. Ако са x обележимо непознати број, имамо једначину

$$x^2 + 7 = 3x^2 - 11.$$

Њеним решењем добијамо

$$x^2 = 9,$$

или $$x = 3,\ x = -3.$$

2. Ако квадрат непознате обележимо са y, имамо једначину.

$$y + 7 = 3y - 11,$$

чијим решењем добијамо исти резултат као и малочас.

Пример 7. Случај противречности. — Да се одреди основица и висина једног правоугаонка, кад знамо да је њихов збир 30m, и кад се основица повећа за 5m, а висина за 4m, површина се повећава за $100 m^2$.

Решење. — Ако основицу означимо са x, висина ће бити $30 - x$ па имамо једначину

$$(x + 5)\ (34 - x) = x\ (30 - x) + 100.$$

Решењем једначине добијамо

$$x = 70.$$

Дискусија. Пошто је збир основице и висине 30m, очевидно основица не може бити већа од 30m. Проблем је дакле немогућан.

Ако бисмо израчунали висину, нашли бисмо

$$30 - 70 = -40.$$

И из овог негативног решења видимо да је проблем немогућан.

Пример 8. Случај неодређености. — Наћи број чије су три десетине једнаке разлици између половине и петине тога броја.

Решење. Ако са x означимо непознати број, биће

$$\frac{3}{10}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}x.$$

Кад се ослободимо разломака и уредимо једначину, добијамо

$$0 \cdot x = 0.$$

Дискусија. Сваки број задовољава једначину. Из тога закључујемо да горњи задатак исказује једну особину која је заједничка свима бројевима. Уосталом ово је лако проверити.

За писмено вежбање

1. Растави број 67 на два сабирка од којих ће један бити за 13 већи од другога!

2. Растави број 63 на три сабирка од којих ће први бити 3 пута мањи од другога, а за 13 мањи од трећега!

3. Два лица имају укупно 13 620 динара. Трострука сума првога лица већа је за 100 динара од суме коју има друго лице.

4. Један господар обећа своме слуги за једну годину службе 800 динара и једно одело. После десет месеци он га отпусти и плати му 650 динара и одело. Колико је рачунато одело?

5. Пошто је неко прешао $\frac{4}{7}$ пута, треба да пређе још $\frac{1}{3}$ и још $2\frac{1}{2}$ km. Колики је цео пут?

6. Ако једном броју додамо $5\frac{1}{2}$, збир поделимо са $7\frac{3}{4}$, количник одузмемо од $4\frac{4}{7}$ и тако добијену разлику поделимо са $5\frac{2}{5}$, добијамо $\frac{4}{7}$. Који је тај број?

7. Који број има особину да добијемо $\frac{3}{5}$, кад од тог броја одузмемо $\frac{3}{5}$, остатак поделимо са $\frac{3}{5}$, од тога још одузмемо $\frac{3}{5}$ и остатком поделимо $\frac{3}{5}$?

8. Који је тај број чији је квадрат за 95 мањи од квадрата броја који је већи за 5?

9. Један ученик поређа своје орахе у облику потпуног квадрата. Пошто му тако претекну 59 ораха, он повећа страну квадрата за 2 ораха. Сад му недостају 13 ораха, па да начини потпун квадрат. Колико је имао ораха?

10. Један отац је $4\frac{1}{4}$ пута старији од сина. Оба заједно

имају $\frac{3}{5}$ пута више година од седамдесетогодишњег деде. По колико година имају отац и син?

11. Три лица поделе 20 000 динара. Прво лице добије 50% више од другог, друго 20% више од трећег. По колико добије свако лице?

12. У једној округлој алеји налазе се у три концентрична круга 135 биљака. У спољњем кругу има 12 биљака мање од двоструког броја биљака унутрашњег круга. У средњем кругу има половина од онога броја биљака, што садрже оба друга круга заједно. По колико биљака има у сваком кругу?

13. Пет лица поделе 659 динара. В добије половину од А и 40 динара; С $\frac{4}{5}$ од В; D трећину од А, В и С мање 10 дин; Е половину од В и С. Колико добије свако лице?

14. Један сопственик има 120 ha поља за обрађивање и шуме заједно. Он размени шуму за поље и прими за 7 ha шуме 3ha поља. После размене има свега 80ha. Колико је шуме имао у почетку?

15. У једном друштву има 3 пута више људи од жена. Кад су 8 људи отишли са својим женама, остало је пет пута више људи неголи жена. Колико је било људи а колико жена у том друштву?

16. За један посао потребно је 12 дана рада. Ако се узме један радник мање, потребно је 16 дана. Колико је било радника?

17. Једном раднику потребно је било да сврши један посао 36 дана. Другом раднику потребно је 38 дана. Али пошто они заједно раде, и још трећи помаже, који дневно изради 5 комада више од другога радника, они сврше посао за 12 дана. Колико су комада имали да израде?

18. Један базен напунио би се из једне цеви за a часова, а кроз другу испразнио би се за b часова.

1. Базен је празан и отворе се обе цеви. Кад ће се базен напунити? Дискусија!

2. Базен је пун и отворе се обе цеви једновремено. Кад ће се базен испразнити? Дискусија!

19. Од четири цеви сама прва напунила би резервоар за 2,4(a) часова, друга сама за 6 (b) часова; напротив кроз трећу цев испразнио би се за 4,5 (c) часова, кроз четврту цев испразнио би се за 9(d) часова. За које ће се време базен напунити, кад се отворе све четири цеви једновремено? Дискусија!

20. Два брата заједно наследе 64 680 динара, али неједнаке делове. Али пошто је један свој капитал пласирао по $3\frac{1}{2}$%, а други по 4%, добијају годишње исти интерес. По колико је наследио сваки?

21. Једно лице пласира извесну суму новаца по 5% за 1 годину 7 месеца. После овог времена он здружи капитал и интерес, па $\frac{3}{5}$ изда по 4%, а остатак по 3%. После две године он прими 4662 динара интереса. Колики је био почетни капитал?

22. Два правоугаоника имају за димензије 12m и 7m, 15m и 6m. За колико треба повећати или смањити ове димензије, да нови правоугаоници буду једнаки?

23. Предњи точак једног велосипеда има 1m у пречнику, задњи $0^m,8$. Колики пут треба прећи, да мањи точак начини 55 обрта више?

24. Који број треба додати броју a да разлика квадрата тих бројева буде 9?

25. Један веслач кад весла низ реку креће се брзином v на минут, а кад весла уз реку, креће се брзином $\frac{2}{3}v$ на минут. До које даљине уз воду може да иде и да се врати за $1h$ 44 mn?

26. Који број треба додати бројиоцу разломка $\frac{43}{74}$, а одузети од имениоца, да нови разломак буде реципрочна вредност првога?

27. Једно лице има на расположењу време t, да учини једну шетњу. На поласку попне се у једна кола, чија је брзина V. На којој даљини треба да се скине с кола, да би враћајући се брзином v, стигао у назначено време?

28. Један сат оде напред за дан m минута. Данас у подне показује x часова. После ког времена ће показати тачан број часова.

29. У ком бројном систему се број 37 пише у облику $4a$, где је a цифра траженог система.

30. Дат је разломак $\frac{a}{5}$. Који број треба додати бројиоцу и имениоцу овог разломка, или одузети, да се добије разломак $\frac{2a}{7}$?

31. У $9h$ $35mn$ два пешака пођу из истог места и у истом правцу са брзином $4km$ и $5km$ на сат. У $10h$ $40mn$ једна кола пођу из истог места у истом правцу брзином $16,^{km}2$ на сат. У колико сати ће кола бити подједнако удаљена од оба пешака?

32. Колика је куповна и продајна цена робе, на којој је реализована добит 17% од куповне цене за $144,^{дин}50$. мања од 17% продајне цене?

33. Један рентијер подели своју имовину на два дела. Први део који је $\frac{7}{8}$ другога пласира по 4%. Други по 5%. Знајући да тромесечни интерес другога дела превазилази за 630 динара интерес првога дела, да се одреди колико је износила његова имовина у моменту пласирања.

34. За колико треба да се повећа полупречник једнога круга, да обим порасте за 1 метар?

35. Ако са r обележимо полупречник земље, полупречник сунца је $109\,r$. Отстојање средишта њихових износи $23\,400r$.

1. Да се одреди као функција од r отстојање од центра земљиног до врха купе сенке коју земља баца, кад је сунце осветљава.

2. Да се ова раздаљина израчуна у километрима, кад знамо да је $r = 6366$ km.

36. Који број треба додати бројиоцу и имениоцу разломка $\frac{a}{b}$, да се добије разломак $\frac{b}{a}$? Дискусија!

37. Наћи страну једног квадрата, знајући да кад се она повећа за a, површина се повећа за b^2? Дискусија!

38. Два лица пођу заједно из места A у место B. Прво лице прелази на сат 4 km, друго 5 km. Друго лице стигне у B, одмори се 10 минута и враћа се натраг. На ком отстојању од A ће се срести?

39. Да се у троугао ABC упише квадрат, кад је дата основица $BC = a$, и висина $AD = h$. Једна страна квадрата да буде на основици, а по једно теме на странама AB и AC.

Специјално $a = 6$ cm, $h = 5$ cm.

40. Који је угао n пута већи од његовог суплементног угла?

41. Који је то број чији m-ти и n-ти део заједно износе p?

42. A, B и C треба да поделе извесну суму новаца. A добије 200 динара мање од $\frac{2}{5}$ целе суме, B 700 динара мање од $\frac{2}{3}$ суме, C 330 динара више од $\frac{1}{4}$ целе суме. Колика је сума коју треба поделити, и по колико добије сваки?

43. Три лица A, B и C треба да поделе a динара, тако да B добије b динара мање од A, и C да добије c динара више од B.

44. Који број треба додати бројиоцу и имениоцу разломка $\frac{a}{b}$, да се као резултат добије квадрат овога разломка?

45. Суму новаца од 50 000 динара поделе на 4 лица. Пошто је прво лице примило свој део, друго добије $\frac{2}{3}$ остатка; треће прими $\frac{3}{4}$ од онога што је затим преостало; најзад сума која припадне последњем 2 пута је већа од онога што је добило прво лице. По колико је добило свако лице?

46. По апсцисној осовини крећу се два тела брзинама c_1 и c_2. У овом тренутку њихове апсцисе су a и b. Пита се кад ће се срести. Дискусија!

Специјални случај: $a = 3km$, $b = -500m$, $c_1 = -20km$ на сат, $c_2 = 10m$ у секунду.

47. Четвртина једног броја и $\frac{1}{3}$ једног другог броја дају заједно 16; $\frac{1}{6}$ првог броја и $\frac{1}{3}$ другог износи за 4 више од $\frac{1}{9}$ збира оба броја.

48. Два броја чији је збир 34 имјау особину да њихов производ остане непромењен, кад један повећамо за 4, а други смањимо за 4. Који су ти бројеви?

49. Ако додамо трећем делу једног за 5 повећаног

броја пети део једног другог за 4 повећаног броја, добијамо први број. Други пак добијамо, кад половини за 7 повећаног првог броја додамо четвртину за 5 повећаног другог броја. Колики је сваки број?

50. Лице A рече лицу B: Дај ми 10 динара, па ћу имати исто толико, колико и ти! Не, одговори B, боље дај ти мени 10 динара, па ћу имати 2 пута више од тебе.

51. Два дечка играла су ораха. У првој игри добије B 7 ораха. Он имађаше сада $\frac{6}{5}$ пута толико колико A и поједе 6 комада. У другој игри он изгуби 10 ораха. Сад му је остало само половина од онога што има A. По колико је имао сваки у почетку?

52. Неко има два бурета и у сваком извесну количину вина. Да би у оба добио једнаке количине он наспе из првог у друго онолико вина, колико је већ било у њему. Затим из другог наспе у прво онолико, колико је у њему било сада. Најзад поново из првог у друго толико, колико је у другом преостало. Напослетку он има у сваком бурету по 16 l вина. По колико је било у почетку у сваком бурету?

53. Један трговац прода једну робу са добити, а другу са губитком, тако да кад од прве прода за 4290 динара, а од друге за 1547 динара, он у целини заради 1170 динара. А ако од прве прода за 6435 динара, а од друге за 4420 динара, он претрпи штету од 1950 динара. Колико % износи добит, односно штета на свакој сорти робе?

54. Два капитала доносе годишње једнак интерес, ако се један изда по $3\frac{1}{3}\%$ а други по 5%. А ако се први изда по $3\frac{1}{5}\%$, а други по $4\frac{1}{2}\%$, то ће први донети 117 динара интереса више од другог. Колики су ови капитали?

55. Један капитал издат је под интерес по извесни процент и нарастао је на 5800 динара за 10 година. Да је за $\frac{1}{2}\%$ скупље издат, нарастао би већ за 8 година на 5600 динара. Колики је капитал и колики је процент?

56. У кругу чији је пречник d лежи једна тачка А чија је средишна раздаљина a. Колико је њено најмање и највеће удаљење од периферије?

57. Периферије два концентрична круга имају своје највеће удаљење a, а најмање b. Колики су полупречници тих кругова?

58. У производу $(ax^2 + bx + c)\ (x^2 + mx + n)$ да се одреде m и n, тако да коефицијенти уз x^3 и x буду једнаки нули.

59. Један учитељ даде своме ученику да подели два броја. Ученик добије количник 57, остатак 52. Он изврши пробу. Помножи делилац и количник и том производу дода остатак. Тако добије 17 380. Није се сложило. Ученик је при множењу у делиоцу на другом месту с десна прочитао једну шестицу као нулу. Колики су делилац и дељеник?

60. Учитељ даде двојици ученика задатак да помноже два броја. Затим да изврше пробу дељењем производа мањим чиниоцем. Рачун се код обојице није сложио. Први добије количник 575 и остатак 227; други 572 и остатак 308. Сваки је заборавио при множењу да дода задржано 1, али на разним местима. Тако је први у производу добио 100 мање, а други 1000 мање. Које су бројеве множили?

61. Два тела која су удаљена 700 m једно од другог, крећу се једно за другим; ако задње крене 4 мин. раније, стићи ће претходно за 46 мин.; ако крене 1 минут раније, стићи ће га за 64 минута. Коју брзину има свако тело?

62. A и B који су удаљени један од другог 61km, иду један другом у сусрет. Ако A пође $1\frac{1}{2}$ часа раније, сретну се 6 часова после поласка лица B; али ако B пође $4\frac{2}{7}$ часова раније, сретну се $4\frac{5}{7}$ часова после поласка лица A. По колико километара прелазе на сат?

63. Да би прешао један пут од $31\frac{1}{2}$ km за $5\frac{1}{3}$ часова хоће неко прве $\frac{2}{3}$ пууа да пређе на колима, а остатак пешице. Али пошто се већ после прве трећине кола покваре, а он даље мораде ићи пешице, то је њему било потребно за сав пут $6\frac{1}{6}$ часова. Колико је прелазио за час пешице, а колико колима?

64. Од A до B потребно је некоме при извесној брзини извесно време. Ако он пређе за час $\frac{2}{3}$ km мање, то је њему потребно $1\frac{4}{5}$ часа дуже; а ако пређе $\frac{1}{2}$ km више, требаће му 1 час мање. Са којом се брзином кретао првобитно, и колико му је времена требало од A до B? Колико је далеко од A до B?

65. Једном брзом возу потребно је, да би стигао од А до В, 5 часова мање неголи путничком возу, јер овај брзи воз прелази на час 20 km више од путничког. Једном теретном возу, који на час прелази 10 km мање од путничког воза, потребно је за ту стазу 5 часова више неголи путничком. Колико km прелази брзи воз на сат, и колика је даљина АВ?

66. Број 28 треба поделити на четири дела, тако да други буде аритметичка средина између I и III, а трећи аритметичка средина између II и IV, а количник збира I и II, и збира III и IV да буде $\frac{5}{9}$.

67. Два дечка играју се ораха. А добије најпре 7 ораха и пошто сада има $2\frac{1}{2}$ пута толико колико има В, он поједе неколико. Потом он изгуби 11 ораха, и сад имају обојица подједнако. Сад поједе В толико исто ораха као и претходно А и добије још 4, тако да опет имају једнак број ораха. Колико је свако имао у почетку и колико је ораха поједено?

68. У производу (a^2+2a+5) $(a^2x+ay+z)$ да се x, y и z одреде тако да коефициенти уз, a^3, a^2 и a буду једнаки нули.

69. У три кесе налази се по извесна сума новаца. Ако метнемо 20 дин из прве у другу, то садржи она 4 пута толико новаца колико остане у првој. А ако ставимо из друге у трећу 60, то је у њој $1\frac{3}{4}$ пута толико колико преостане у другој. А ако метнемо из треће у прву 40 дин., то у трећој остаје ипак још $2\frac{7}{8}$ пута толико, колико је сада у првој. По колико је било у свакој кеси?

70. Три зидара А, В, С, треба заједно да сазидају један зид. А и В заједно би сазидали зид за 12 (a) дана, В и С би сазидали зид за 20 (b) дана, А и С за 15 (c) дана. Колико би времена требало сваком појединцу да сазида зид, а колико је времена требало свој тројици, кад раде заједно?

71. Три дечка играју ораха. Најпре добије А половину од онога што имају В и С и сад има двапут толико, колико В и С уједно. Затим добије С и то по половину од онога што сад имају А и В и има за 10 ораха мање од двоструког броја дечка А. Потом А добије још једанпут половину од онога што имају В и С укупно и сад има 90 ораха. По колико је имао сваки у почетку?

72. Колике су стране једног троугла, кад су збирови од по две стране 17 cm, 18 cm, 25 cm?

73. Помножи полиноме

$$ax^3+bx^2+cx+d$$
$$x^3+ux^2+vx+w$$

и одреди u, v и w, тако да у производу коефициенти уз x^5, x^3 и x буду једнаки нули. Дискусија!

74. Три тела крећу се једно за другим у истом правцу. Напред је С, 30m иза њега је В, и 20m иза В је А. А стигне В за 20 секунада, В стигне С за 30 секунада. Али да је С кренуло за $2\frac{1}{2}$ сек. доцније, то би њега А и В стигли у исто време. Којом се брзином креће свако тело?

75. Два тела А и В крену за телом С које је испред њих за 30 m. С је стигнуто од В после 10 секунада, а од А после 30 секунада. Да је А отпочело своје кретање само за минут касније, то би В већ после 5 секунада било исто толико иза С, колико и испред А. Да се одреди којом се брзином креће свако тело.

76. Два тела А и В следују за једним телом С, које је испред њих за 30 m. После 10 секунада је В исто толико иза С колико испред А. После 20 секунада је В исто толико далеко испред С колико је А иза С. Али да је А своје кретање отпочело само за један секунд доцније, В би ово своје последње место постигло тек после 21 секунада. Колику брзину има свако тело?

77. Да се одреди један четвороцифрени број, кад знамо да је збир његових цифара 16; да је трећа цифра једнака збиру првих двеју; да је друга 2 пута већа од четврте;

да је разлика овог броја и броја, написаног истим цифрама само обрнутим редом, 729.

78. Круна краља Хиерона из Сиракузе била је тешка 20 фуната. Потопљена у воду изгубила је од своје тежине 1 фунту и $\frac{1}{4}$. Колико је у њој морало бити злата, и колико сребра, кад се зна да 19 фуната и $\frac{1}{4}$ злата губе у води 1 фунту, а $10\frac{1}{2}$ фуната сребра губе у води 1 фунту.

79. Неодређени коефицијенти. — У алгебри се често јавља потреба, да се један полином изрази у другом, датом облику. На пр. имамо задатак да полином

$$x^2 + 8x + 2 \qquad (1)$$

напишемо у облику

$$A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C. \qquad (2)$$

Овде је очевидно задатак да се одреде коефициенти A, B и C.

Решење. Према задатку треба изрази (1) и (2) да буду *идентички једнаки*, што се изражава овом једначином:

$$x^2 + 8x + 2 \equiv A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C.$$

Ако на десној страни извршимо назначена множења и скупимо уједно чланове са x^2, x и без x, добићемо:

$$x^2 + 8x + 2 \equiv Ax^2 - (3A - B)x + (2A - 2B + C).$$

Пошто су обе стране по претпоставци идентички једнаке, то су на обема странама коефициенти уз x^2, x и без x једнаки, па имамо

$$A = 1$$
$$3A - B = -8$$
$$2A - 2B + C = 2.$$

Решењем овог система од три једначине са три непознате добијамо:

$$A = 1$$
$$B = 11$$
$$C = 22.$$

Решење проблема је.

$$x^2 + 8x + 2 \equiv (x-1)(x-2) + 11(x-2) + 22.$$

Ова једначина важи, па ма какву вредност ми дали броју x.

80. Ако је $\frac{2x-7}{(2x-1)(x-2)} \equiv \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-2}$; да се одреде A и B.

Решење. Ако на десној страни извршимо сабирање добијамо:

$$\frac{2x-7}{(2x-1)(x-2)} \equiv \frac{A(x-2) + B(2x-1)}{(2x-1)(x-2)}$$
$$\frac{2x-7}{(2x-1)(x-2)} \equiv \frac{(A+2B)x - (2A+B)}{(2x-1)(x-2)}.$$

Одавде следује:

$$2x - 7 \equiv (A + 2B)x - (2A + B) \text{ и даље}$$
$$A + 2B = 2$$
$$2A + B = 7.$$

Решењем овог система добијамо

$$A = 4$$
$$B = -1.$$

У следећим примерима да се A, B, C и D одреде, тако да важе идентичне једначине.

81. $4x - 5 \equiv A(x-3) + B(x-2)$

82. $15 - 2x \equiv A(x-5) + Bx$

83. $x^2 - 2x - 3 \equiv A(x-2)(x-4) + B(x-2) + C$

84. $3x^2 + 5x - 4 \equiv A(x+2)(x-5) + B(x+2) + C$

85. $6x^3 + x^2 - 3x - 5 \equiv A(x-1)(x+1)(x-3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1) + D$

86. $x^2 + 7x - 3 \equiv A(x-2)^2 + B(x-2) + C$

87. $4x^2 + 7x - 2 \equiv A(x+2)^2 + B(x+2) + C$

88. $x^3 + 5x^2 + 2x - 3 \equiv A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D$

89. $\frac{8x+8}{(x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ 90. $\frac{21-x}{(x+3)(x-3)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$

91. $\frac{x^2-10x-13}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

92. $\frac{35}{2x^2-5x-3} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+1}$

93. $\frac{30-5x}{(x-1)^2(x+4)} \equiv \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

94. $\frac{2x+13}{x^3-1} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

ГЛАВА VIII

Проучавање функције $y = ax + в$. Графичко решавање једначина и неједначина

87. Променљива и функција. — Посматрајмо једначину

$$y = 2x + 3. \qquad (1)$$

Она омогућује да израчунамо y, кад место x узмемо једну одређену вредност. При том x може добити вредност ма коју. Увек ћемо моћи да израчунамо одговарајући број y.

Ову чињеницу изражавамо у математици тиме, што кажемо да је *y функција од x*. То пак има овај смисао: променљива x може узети разне вредности, овде апсолутно ма које; y је функција од x, јер можемо израчунати y, кад је x утврђено.

Једначина

$$y = \sqrt{x}$$

дефинише такође y као функцију од x. Овде променљива може имати само позитивне вредности. Функција не постоји, ако је x негативно.

Уопште можемо рећи: једна једначина чија је лева страна y, а десна један алгебарски израз који садржи променљиву x, дефинише y као функцију од x, пошто можемо помоћу дате једначине израчунати y, кад је x утврђено.

Кад нам није потребно да изразимо начин на који су везане променљива и функција, а хоћемо ипак да означимо њихову узајамну зависност, пишемо

$$y = f(x).$$

Каже се да је то општа веза између x и y.

88. Промене или варијације функције $y = 2x + 3$. —

1. *Смисао варијације.* — Претпоставимо да променљива x узима вредности све веће и веће. Због тога ће и изрази $2x$ и $2x + 3$ бивати све већи и већи. Према томе ако x непрестано расте, одговарајућа ведност за y ће такође непрестано расти.

Тада кажемо да је *y растућа функција.*

2. *Вредност за y, кад x добије вредности позитивне а врло велике.* — Претпоставимо да x добије једну врло велику позитивну вредност. Функција $y = 2x + 3$ добиће једну позитивну вредност још већу.

Говорећи мало одређеније, питајмо се да ли је могућно наћи такве вредности за x, за које y може прећи милион. Да то видимо, треба да решимо неједначину

$$2x + 3 > 1\ 000\ 000.$$

Њеним решењем добијамо

$$x > \frac{999\ 997}{2}.$$

Да смо узели милијарду уместо милиона, нашли бисмо, на исти начин, и такве вредности за x, за које би функција y прешла милијарду.

Могућно је дакле дати променљивој x једну бројну вредност довољно велику, да добијена вредност за y буде већа од сваког броја, који нам буде унапред дат, па ма како велики он био.

Ово исто у математици исказује кондензованије, краће: *функција y тежи ка плус бесконачном кад x тежи плус бесконачном.*

Уместо плус бесконачно пишемо $+\infty$.

3. *Вредности које добија y, кад x добије негативне вредности чија је апсолутна вредност врло велика.*

Претпоставимо да x добије једну негативну вредност, која је по својој апсолутној вредности врло велика; $2x$ ће такође бити негативно и по апсолутној вредности врло вехико. Исти је случај и са $2x + 3$.

Говорећи мало одређеније потражимо још да ли је могућно да функција y добије једну бројну вредност, негативну, чија ће апсолутна вредност бити већа од милиона. Због тога треба да решимо неједначину:

$$2x + 3 < -1\ 000\ 000.$$

Њеним решењем добијамо:

$$x < -\frac{1\ 000\ 003}{2}.$$

На исти начин бисмо радили, кад место милиона узмемо десет милиона, милијарду итд.

Постоји могућност дакле да променљива x добије једну негативну вредност, довољно велику по њеној апсолутној вредности, да добијена вредност за y буде негативна и већа по својој апсолутној вредности од сваког броја датог унапред, па ма колико он био велики.

И ово изражавамо конрензованије говорећи да *функција у тежи ка минус бесконачном кад x тежи ка минус бесконачном.*

Место минус бесконачно пишемо $-\infty$.

Резиме. — Све оно што је претходило рећи ћемо кратко:

Функција $y = 2x + 3$ *расте од* $-\infty$ *до* $+\infty$ *код x расте од* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Потсетимо се још једном да ова реченица има само овај смисао:

1. Кад x расте и y расте.

2. Можемо x изабрати довољно велико и позитивно, да y премаша сваки број дат унапред, ма колико он био велики.

3. Можемо x изабрати да буде негативно и довољно велико по апсолутној вредности, да y добије апсолутну вредност већу од сваког броја датог унапред, па ма колико био он велики.

Напомена. — Функција $y = 2x + 3$ поништава се, кад имамо

$$2x + 3 = 0,$$

$$\text{одакле је} \qquad x = -\frac{3}{2}.$$

Пошто је функција растућа, она је позитивна кад је x веће од $-\frac{3}{2}$, а негативна кад је мање од $-\frac{3}{2}$.

89. Варијације функције $y = -2x + 3$.

1. *Смисао варијације.* Сетимо се најпре оног правила код неједначина, да, кад је

$$a > b$$

и ако обе стране неједначине помножимо негативним бројем -2, знак неједнакости ће се обрнути

$$-2a < -2b.$$

Због тога ако дајемо броју x вредности све веће и веће, вредности израза $-2x$ биће све мање и мање, па је исти случај и са вредностима израза $-2x + 3$. Према томе ако ће x по својој бројној вредности расти, y ће по својој бројној вредности опадати.

Тада кажемо да је y *опадајућа функција.*

2. *Вредности које добија y, кад x добија позитивне вредности врло велике.* — Претпоставимо да x добије једну позитивну вредност врло велику. Израз $-2x$ добиће тада једну негативну вредност, врло велику по својој апсолутној вредности. Исто ће то бити и са $-2x + 3$.

Питајмо се као и раније да ли је могућно наћи такве вредности за x за које ће y бити негативно и веће по апсолутној вредности од 100 000. Због тога треба да решимо неједначину

$$-2x + 3 < -100\,000.$$

Њеним решењем добијамо

$$x > \frac{100\,003}{2}.$$

Могућно је дакле наћи за x једну вредност позитивну довољно велику да вредност y постане негативна и по апсолутној вредности већа од сваког **броја који нам је дат унапред.**

Рећи ћемо дакле да функција y тежи ка $-\infty$, кад x тежи ка $+\infty$.

3. *Вредности за y кад x добија негативне вредности, а по апсолутној вредности врло велике.* — Претпоставимо да је x негативно и врло велико по апсолутној вредности. Тада је $-2x$ позитивно и врло велико. Исто тако и $-2x + 3$.

Питајмо се сада да ли можемо броју x дати такве вредности да y буде позитивно и веће од десет милиона. Тога ради треба да решимо неједначину

$$-2x + 3 > 10\,000\,000,$$

$$\text{Решење је } x < -\frac{9\,999\,997}{2}.$$

Могућно је дакле дати броју x једну негативну вредност довољно велику по апсолутној вредости, да вредност коју добије y буде позитивна и већа од сваког броја унапред датог.

Рећи ћемо да функција y тежи ка $+\infty$, кад x тежи ка $-\infty$.

Резиме. — Ово претходно излагање резимираћемо, ако кажемо:

Функција $y = -2x + 3$ *опада од* $+\infty$ *до* $-\infty$, *кад x расте од* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Опоменимо се још једанпут да ова реченица има само овај смисао:

1. Кад x расте, y опада.

2. Можемо изабрати x довољно велико и позитивно да y буде негативно и да премаша по апсолутној вредности сваки број дат унапред, па ма колико био он велики.

3. Можемо изабрати x негативно и довољно велико по апсолутној вредности, да y премаша сваки број дат унапред, па ма колико он био велики.

Напомена. — Функција $y = -2x + 3$ се поништава кад је

$$-2x + 3 = 0,$$

одакле имамо

$$x = \frac{3}{2}.$$

Пошто је функција опадајућа, она је негативна за x веће од $\frac{3}{2}$, и она је позитивна за x мање од $\frac{3}{2}$.

90. Растућа и опадајућа функција. Пошто смо проучили ове бројне примере, можемо исказати ове дефиниције.

За једну функцију y кажемо да је растућа функција од x, ако она добија све веће и веће вредности, кад број x расте.

За једну функцију y кажемо да је опадајућа функција од x, ако она добија вредности све мање и мање, кад број x расте.

91. Константна функција. — *За једну функцију кажемо да је константна, ако задржава увек исту вредност.*

Таква је на пр. функција $y = 1$.

92. Промењива или функција која тежи ка $-\infty$. За једну промењиву или функцију кажемо да тежи ка $-\infty$, ако су вредности које она добија негативне, и превазилазе по својој апсолутној вредности сваки број који је дат унапред, па ма колико био велики тај број.

Кад једна промењива x може да има ма коју вредност, кажемо да она варира између $-\infty$ и $+\infty$.

93. **Функција $y = ax + b$.**

1. *Смисао варијације.* — Стављамо себи у задатак да проучимо како варира функуија $y = ax + b$. За бројеве a и b препостављамо да су познати, x је промењива.

Дајмо броју x две различите вредности x_1 и x_2 и претпоставимо да је

$$x_1 < x_2. \qquad (1)$$

Одговарајуће вредности функције означимо са y_1 и y_2. Тако ће бити

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b.$$

Ако прву једначину одузмемо од друге, добићемо

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Због неједначине (1) разлика $x_2 - x_1$ је позитивна. Отуда излази да знак разлике $y_2 - y_1$ зависи од знака коефицента a.

1. Претпоставимо да је $a > 0$. Тада је разлика $y_2 - y_1$ позитивна, па према томе y_2 веће од y_1. Дакле кад x расте, y расте такође. Функција је растућа.

2. Претпоставимо да је $a < 0$. Тада је разлика $y_2 - y_1$ негативна, па према томе y_2 мање од y_1. Кад x расте, y опада. Функција је опадајућа.

3. Претпоставимо да је $a = 0$. У овом случају је

$$y = b.$$

Функција је константна.

Из свега овога можемо извести ово *опште првило*:

Функција $y = ax + b$ је

1. растућа, ако је a позитивно,
2. опадајући, ако је a негативно,
3. константна, ако је a једнако нули.

94. Вредност функције y за врло велике вредности x. — Ако броју x дамо једну врло велику и позитивну вредност, вредност израза ax зависиће од знака коефицента a.

1. Претпоставимо да је $a > 0$. Вредност израза ax је тада врло велика и позитивна. То исто важи и за израз $ax + b$.

Поврх тога потражимо једну вредност за x за коју ће функција превазићи сваки број A, који је дат унапред, па ма колики он био. Довољно је да решимо неједначину

$$ax + b > A.$$

Из ове неједначине имамо

$$ax > A - b.$$

Пошто је број A изабран толико велики колико год хоћемо, то је и број $A - b$ велики колико год хоћемо.

Одатле имамо, пошто је a позитивно

$$x > \frac{A - b}{a}.$$

Могућно је дакле дати броју x једну позитивну вредност, довољно велику, да y буде веће од броја A, па ма колико да је он велики.

Функција тежи према $+\infty$, ако x тежи према $+\infty$.

2. $a < 0$. У овом случају ако је x позитивно и врло велико, ax је негативно и врло велико по апсолутној вредности. Исти је случај и са $ax + b$.

Потражимо још такве вредности за x, за које ће y бити негативно и превазићи по апсолутној вредности један позитиван број А. Довољно је да решимо неједначину

$$ax + b < -A,$$

коју можемо написати

$$ax < -A - b,$$

или

$$ax < -(A + b).$$

Број A можемо изабрати толико велики, да и број $A + b$ буде велики коликогод хоћемо и позитиван.

Како је a негативно, то кад обе стране поделимо негативним бројем, добијамо

$$x > -\frac{A + b}{a}$$

и број на десној страни неједначине је позитиван.

Могућно је дакле дати промењљивој x једну вредност позитивну, довољно велику, да y буде негативно и да апсолутна вредност функције y премаша број A, па ма колико да је велики.

Функција y тежи према $-\infty$, кад x тежи према $+\infty$, па ћемо исказати правило:

Функција $y = ax + b$ тежи према $+\infty$ или према $-\infty$, према томе да ли је a позитивно или негативно, кад x тежи према $+\infty$.

3. Вредности за y, кад x добија негативне вредности, по апсолутној вредности врло велике. — Дајмо промењљивој x једну негативну вредност врло велику по апсолутној вредности. Знак израза ax и овде зависи од знака коефицијента a.

1. $a > 0$. Вредност израза ax је тада негативна и врло велика по апсолутној вредности. Исти је случај и са вредношћу израза $ax + b$.

Потражимо вредности за x, за које ће вредност функције y бити негативна и да превазилази по апсолутној вредности сваки позитиван број A, па ма колико он био велики. Довољно је да решимо неједначину

$$ax + b < -A.$$

Одавде имамо $ax < -A - b$,

или $ax < -(A + b)$.

Број A можемо изабрати довољно велики, да број $A + b$ буде позитиван и толико велики колико хоћемо.

Пошто је a позитивно, из неједначине добијемо:

$$x < -\frac{A + b}{a}.$$

Број који фигурише на десној страни је негативан.

Могућно је дакле дати промењљивој x једну негативну вредност, довољно велику по апсолутној вредности, да y буде негативно и да по апсолутној вредности буде веће од сваког броја A, ма колико он био велики.

Функција тежи према $-\infty$, кад x тежи према $-\infty$.

2. $a < 0$. И у овом случају ако је x негативно и врло велико по апсолутној вредности, ax ће бити позитивно и врло велико. Исти је случај и са $ax + b$.

Потражимо такве вредности за x за које ће y бити веће од сваког позитивног броја A, па ма колики он био. Биће довољно да решимо неједначину:

$$ax + b > A.$$

Одатле добијамо

$$ax > A - b$$

и ми можемо број A изабрати довољно велики да $A - b$ буде позитивно и велико коликогод хоћемо.

Ако обе стране неједначине поделимо негативним бројем a, знак неједнакости ће се обрнути, па имамо

$$x < \frac{A - b}{a}.$$

Број на десној страни неједначине је негативан.

Могућно је дакле изабрати x негативно и по апсолутној вредности довољно велико да y превазиђе број A, па ма колико он био велики.

Функција тежи према $+\infty$, ако x тежи према $-\infty$, па имамо правило:

Функција $y = ax + b$ тежи ка $-\infty$ или $+\infty$, кад x тежи ка $-\infty$ према томе да ли је a позитивно или негативно.

Резиме. Све оно што смо говорили о променама функције $y = ax + b$, можемо кондензовати у следеће **опште правило:**

функција y = ax + b

1. расте од $-\infty$ до $+\infty$, кад x расте од $-\infty$ до $+\infty$, кад је a позитивно.

2. опада од $+\infty$ до $-\infty$, кад x расте од $-\infty$ до $+\infty$, кад је a негативно.

3. је константна, ако је a једнако нули.

Напомена. — Функција $y=ax+b$ поништава се, кад је

$$ax + b = 0,$$

одакле имамо:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Према томе кад је a позитивно, а функција растућа, она је позитивна, кад је $x > -\frac{b}{a}$, а негативна, кад је $x < -\frac{b}{a}$.

У противном, кад је a негативно, и пошто је функција опадајућа, она је негативна, кад је $x > -\frac{b}{a}$, позитивна, кад је $x < -\frac{b}{a}$.

Графичко претстављање функције y = ax + b

95. Једначина праве линије. — Ако у функцији $y = ax + b$ промењивој x дамо разне одређене вредности, и израчунамо одговарајуће вредности функције y, па те парове вредности сматрамо као координате појединих тачака и унесемо их у један координатни систем, видећемо да све оне леже на једној правој линији. О овоме смо опширно говорили и прошле године. (Види алгебру за четврти разред!)

Због тога кажемо да су промене или варијације функције $y = ax + b$ *графички претстављене правом линијом.* Ова функција се зато назива још и *линеарна функција.*

Једначина $y = ax + b$ зове се још и *једначина праве линије.*

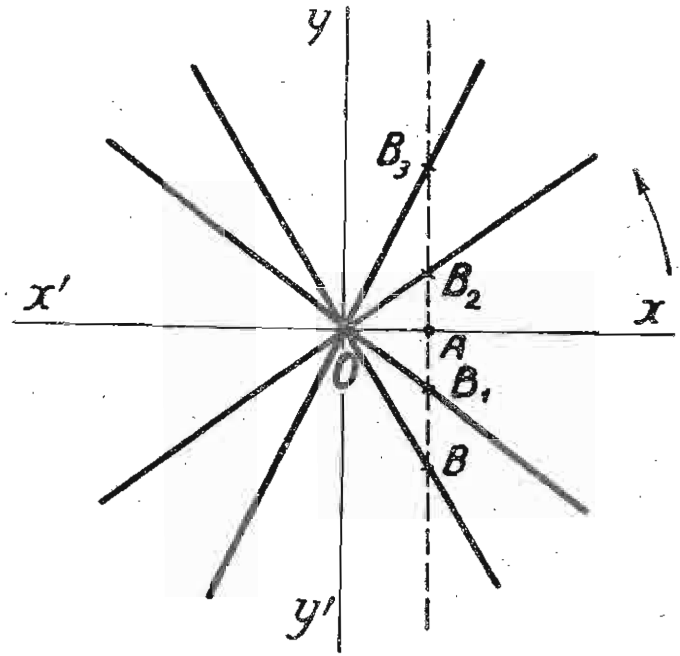
Задатак. Ученик да испита какве ће праве линије претстављати функција $y = ax + b$

1. кад је $b = 0$;
2. кад је $a = 1$, $b = 0$;
3. кад је $a = -1$, $b = 0$;
4. кад је $a = 0$, $b \neq 0$;
5. кад је $a = 0$, $b = 0$.

96. — Коефициент правца или нагиб праве линије. — Посматрајмо праву линију $y = ax$. То је права која пролази кроз координатни почетак и кроз тачку $x = 1$, $y = a$.

Ако за a узимамо разне вредности, тачка $(1, a)$, којој апсциса увек остаје 1, помераће се по правој линији паралелној са ординатном осовином (сл. 7), а која пролази кроз тачку A.

Узимамо да a расте. Онда ће једна тачка B на тој правој да се креће у позитивном правцу навише заузимајући



Сл. 7.

редом положаје B, B_1, B_2, B_3 итд. У исто време права која претставља варијације функције $y = ax$ обртаће се око почетка у смислу како је то показано стрелицом на слици.

Угао који та права гради са позитивним правцем апсцисне осовине мења се такође. Познавање броја a одређује овај угао. Због тога кажемо да је a *коефициент правца или угаони коефициент,* или још и *нагиб* посматране праве.

Шта је коефициент правца праве $y = ax + b$?

Кад су две праве паралелне? Примери!

97. Графичко решавање једначина I степена. — Права линија дата једначином

$$y = ax + b$$

сече апсцисну осовину у извесној тачки, чија ордината добија вредност нулу. Апсциса те пресечене тачке, ако је обележио са x_0 јесте, дакле, она вредност за коју y, тј $ax + b$ постаје једнако нули. Та апсциса према томе задовољава једначину

$$ax + b = 0.$$

Вредност x_0 је решење ове једначине Отуда имамо ово **практично упутство** за графичко решавање једначине I степена $ax + b = 0$. *Треба леву страну једначине ставити да је једнака y, па онда функцију*

$$y = ax + b$$

претставити графички и потражити пресек добијене праве са апсцисном осовином. Апсциса пресечне тачке је тражено решење једначине.

Напомена 1. — Овакво решавање једначина је обилазно и оно нам служи као припрема за доцније слично решавање система једначина и неједначина.

Напомена 2. — При том још треба имати у виду да графичко решавање даје, обично, само приближне вредности. Ова ће приближна вредност бити утолико тачнија, уколико се брижљивије црта и уколико се одабере већа јединица за апсцисе и ординате.

98. Графичко решавање система од две једначине са две непознате првог степена:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Решити овај систем значи одредити такве вредности за x и y које задовољавају једновремено обе једначине.

Ако обе једначине решимо по y, добијамо

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$$

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}.$$

Видимо да су обе једначине облика

$$y = ax + b.$$

Отуда имамо ово **практично упутство** за решавање система једначина I степена са две непознате: *Треба нацртати праве линије, графичке претставнике тих једначина. Координате њихове пресечне тачке дају тражено решење.*

Напомена. — Ученик треба решење увек да провери пробом.

Пример. Да се графички реши систем:

$$3x - 5y + 1 = 0$$
$$4x - 3y - 6 = 0.$$

Ради лакше конструкције једначине ћемо решити по y:

$$y = \frac{3x + 1}{5}$$

$$y = \frac{4x - 6}{3}.$$

За обе праве линије одредићемо по две тачке.

Из прве имамо:

Кад је $x = 0$, $y = 0{,}2$; кад је $x = -2$, $y = -1$.

Треба да конструишемо тачке $A\ (0;\ 0{,}2)$ и $B\ (-2, -1)$.

Из друге имамо:

Кад је $x = 0$, $y = -2$; кад је $x = 1{,}5$ $y = 0$,

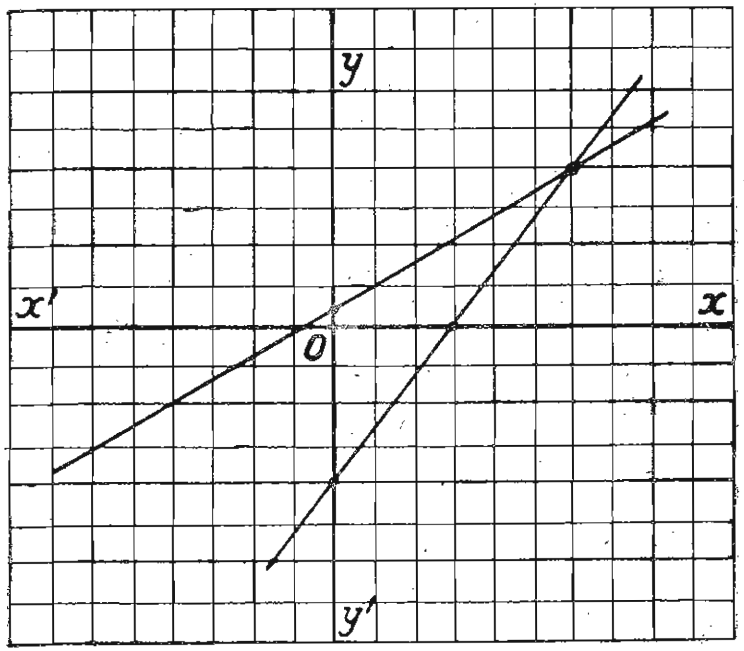
Треба да конструишемо тачке $M\ (0, -2)$ и $N\ (1{,}5;\ 0)$.

Добијене праве линије секу се у тачки чије су координате

$$x = 3 \qquad y = 2.$$

То су у исто време решења система. (Сл. 8).

Дискусија. — Видели смо да су решења система од две једначине са две непознате I степена и проблем пресека двеју правих тесно везани. Ово друго је само геометриско тумачење првога.



Сл. 8

Две праве кад су у једној равни могу се сећи, бити паралелне, или се поклопити. Ова три разна случаја треба да одговарају оним трима случајевима, које смо раније имали при дискусији општег система од две једначине са две непознате: решење једно једино, случај противречности и случај неодређености (Чланак 80.)

То ћемо сад и показати.

Узмимо исте ознаке као и раније. Нека имамо систем

$$\text{I} \quad \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Ако претпоставимо да су b_1 и b_2 различити од нуле, имаћемо, кад решимо обе једначине по y:

$$\text{II} \quad \begin{aligned} y &= -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \\ y &= -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \end{aligned}$$

Ове две праве ће се сећи, ако су им коефициенти правца различити. Овај услов је потребан и довољан. Систем ће дакле имати једно једино решење, ако је

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2},$$

или ако је $-a_1b_2 \neq -a_2b_1$

или још ако је $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$

Поново налазимо исти услов да систем има једно једино решење.

Праве су паралелне, ако су им коефициенти правца једнаки, тј. ако је

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

Ако су им отсечци на ординатним осовинама различити, праве су различите и немају никакве заједничке тачке. Систем у овом случају нема никакво решење.

Ако су, напротив, отсечци на ординатној осовини једнаки, праве се стапају у једну. Имају бескрајно много заједничких тачака и систем има бескрајно много решења. Координате сваке тачке на правој су решења система.

Потражимо сад случај у коме се праве поклапају. Треба најпре да буде

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

Ова једначина исказује паралелизам и може још да се напише у облику.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}.$$

С друге стране треба да имамо

$$\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}.$$

Ова једначина казује да су отсечци на ординатним осовинама једнаки. Може да се напише у облику

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1},$$

Дакле систем је неодређен, ако је

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}.$$

И овде наилазимо на исти услов као што смо га и раније нашли.

99. Неједначине I степена са две непознате. — *Пример.* — Да се реши неједначина:

$$2x - y + 3 > 0.$$

Неједначина (1) може да се напише:

$$y < 2x + 3'.$$

Утврдимо за x једну вредност x_0 и ставимо

$$y_0 = 2x_0 + 3.$$

Јасно је да ако бисмо узели да је

$$y_1 < y_0,$$

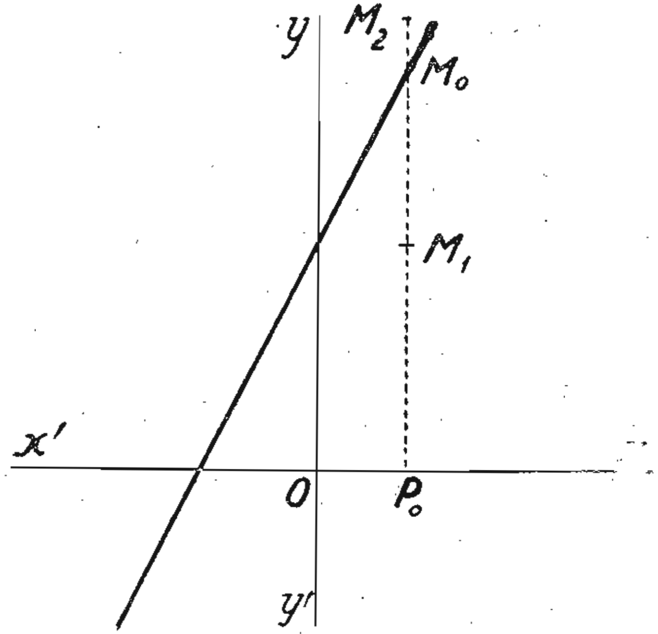
систем од два броја x_0 и y_1 је једно решење неједначине.

100. — Овај рачун може да добије и једно геометриско тумачење.

Нацртајмо координатни систем и у њему праву линију чија је једначина:

$$y = 2x + 3.$$

Тачка M_0 са кординатама x_0, y_0 налази се на овој правој. Ако узмемо једну тачку M_1 чија је апсцеса x_0 а ордината y_1 мања од y_0, онда су координате тачке M_1 једно решење неједначине.



Сл. 9.

На исти начин можемо размишљати па ма каква била апсцеса x_0. С тога долазимо до овог резултата:

Решење неједначине (1) су координате свих тачака у оном делу равни од те праве у коме се налази почетак.

Напомена. — Ако је y_2 ордината једне тачке M_2, која се налази у равни с друге стране праве линије, овога пута имамо

$$y_2 > y_0,$$

па према томе ова тачка задовољава неједначину супротног смисла.

Другим речима за тачке које се налазе у делу равни, у коме је тачка M_2 у односу на дату праву, имамо

$$2x - y + 3 < 0.$$

Тако права линија чија је једначина

$$2x - y + 3 = 0$$

дели раван на две области. Ако су x и y координате једне тачке у њима, израз

$$2x - y + 3$$

није нула. За једну област овај израз је позитиван, за другу је негативан.

101. Општи случај. — Да се реши неједначина

$$ax + by + c > 0. \qquad (1)$$

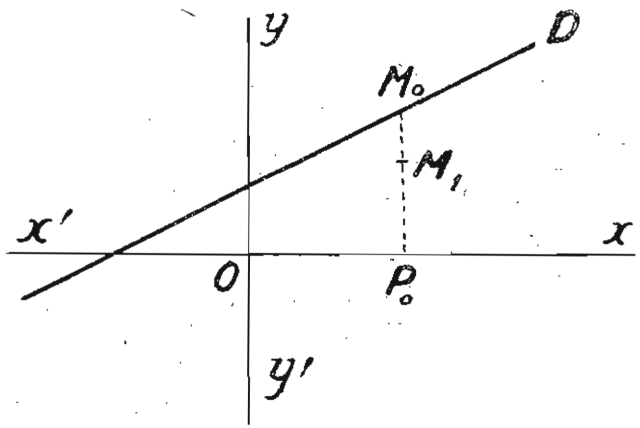
Узмимо да су x_0 и y_0 једно решење једначине

$$ax + by + c = 0. \qquad (2)$$

Имамо дакле:

$$ax_0 + by_0 + c = 0. \qquad (3)$$

Ако конструишемо праву линију D, чија је једначина (2), тачка M_0 чије су координате x_0 и y_0 налази се на тој правој (сл. 10).



Сл. 10.

Нека је M_1 тачка чија је апсциса x_0 а ордината y_1, па образујмо израз:

$$A = ax_0 + by_1 + c.$$

Из једначине (3) имамо:

$$ax_0 + c = - by_0,$$

па можемо написати:

$$A = by_1 - by_0,$$

или

$$A = b\ (y_1 - y_0).$$

Ми хоћемо да A буде позитивно. Разлика $y_1 - y_0$ треба дакле да буде истог знака као и b. Знак ове разлике треба да буде сталан. То значи да тачка M_1 треба да буде на извесној страни праве линије.

Ако се тачка M_1, налази с друге стране, знак разлике $y_1 - y_0$ мења се, па и знак израза A.

Долазимо дакле до овог резултата:

Права линија $ax + by + c = 0$ дели раван на две области. Ако су x и y координате једне тачке у ма којој од тих области, израз $ax + by + c$ није једнак нули. Тај је израз позитиван за све тачке у једној од ових области, а негативан за све тачке у другој.

Пример 1. Да се реши неједначина

$$x - 2y + 8 > 0. \qquad (1)$$

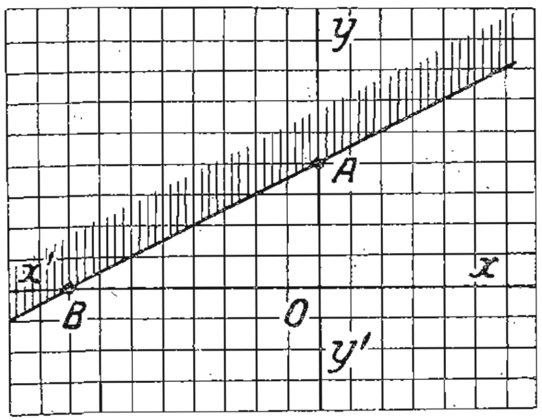
Конструишимо праву

$$x - 2y + 8 = 0.$$

Кад је $x = 0$ $y = 4$, имамо тачку A (0,4).

Кад је $y = 0$ $x = - 8$, имамо тачку B (— 8,0).

Нацртајмо праву AB. Ова права дели раван на две области. За једну од њих је $x - 2y + 8 > 0$, а за другу $x - 2y + 8 < 0$. Ако пробамо координатни почетак (0,0), посматрани израз добија вредност 8, што значи да је позитиван. Дакле област у којој је почетак O одговара неједначини (1). Област која не одговара извучена је тамно.



Сл. 11.

Слика нам врло очигледно и јасно даје сва решења дате неједначине. То су координате свих тачака у светлој области.

Пример 2. Решити неједначину:

$$2x + y < 0.$$

И овога пута конструисаћемо праву

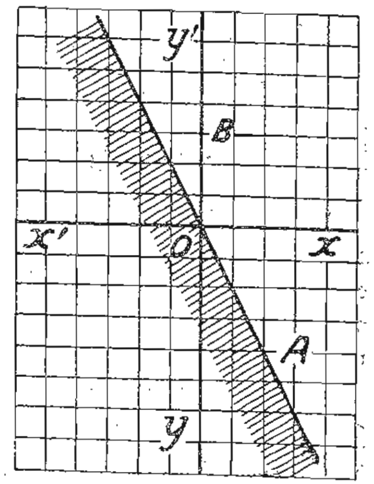
$$2x + y = 0,$$

која везује почетак са тачком A (2, — 4). Ова права дели раван на две области.

За једну од њих је $2x + y > 0$, за другу $2x + y < 0$.

Учинимо пробу. Испитајмо да ли на пр. тачка B (0, 3) задовољава неједначину. За ову тачку израз $2x + y$ добије вредност 3. Он је дакле позитиван, неједначина је задовољена. Област на слици извучена не садржи у себи тачку B, она не одговара неједначини.

Решења су координате разних тачака у светлој области.



Сл. 12.

102. *Специјалан случај.* — Претпоставимо да неједначина

$$ax + by + c > 0 \qquad (1)$$

има само једну непознату.

На пример претпоставимо да је $b = 0$. Неједначина се своди на

$$ax + c > 0. \qquad (2)$$

Једначина $\quad ax + c = 0$

претставља једну праву линију паралелну са ординатном осовином.

Ова права (сл. 13) пролази кроз тачку M_0 чија је апсциса x_0 тако да је

$$ax_0 + c = 0.$$

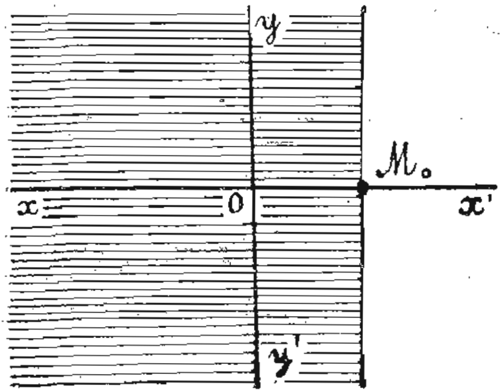
Слика 13 није ништа друго до слика 1 употпуњена ординатном осовином и паралелном повученом кроз тачку M_0. Тачке чије апсцисе задовољавају неједначину (2) су с једне стране ове паралелне, на пример с десне стране.

Да смо претпоставили $a = 0$, неједначина (1) постали би

$$by + c > 0. \qquad (3)$$

Једначина $\qquad by + c = 0$

претставља овога пута једну паралелну са апсцисном осовином. Исто размишљање показује да се тачке чије ординате задовољавају неједначину (3) налазе с једне отране ове права.



Сл. 13.

Напомена. — Видели смо раније да је, у случају само једне непознате, довољно само једна осовина да се геометриски претставе резултати. Сад смо видели да ако хоћемо можемо употребити и две осовине. Ово може бити нарочито корисно, ако имамо да решимо више неједначина, од којих неке садрже само једну непознату.

103. Случај од више неједначина са више непознатих. — Свакој неједначини одговара по једна права, и с једне стране те праве по једна област која не одговара неједначини. Ако конструишемо све ове праве у истом координатном систему, и ако напослетку преостане област у целој равни која неће бити тамно извучена, координате разних тачака ове области су системи решења датих неједначина. Ако напротив цела раван буде тамно извучена, систем датих једначина је инкомпатибилан.

Пример 1. Да се реши систем неједначина:

$$x + 4 > 0 \qquad (1)$$
$$3x + 5y - 15 < 0 \qquad (2)$$
$$4x - 7y - 28 < 0 \qquad (3)$$

1. Нацртајмо праву

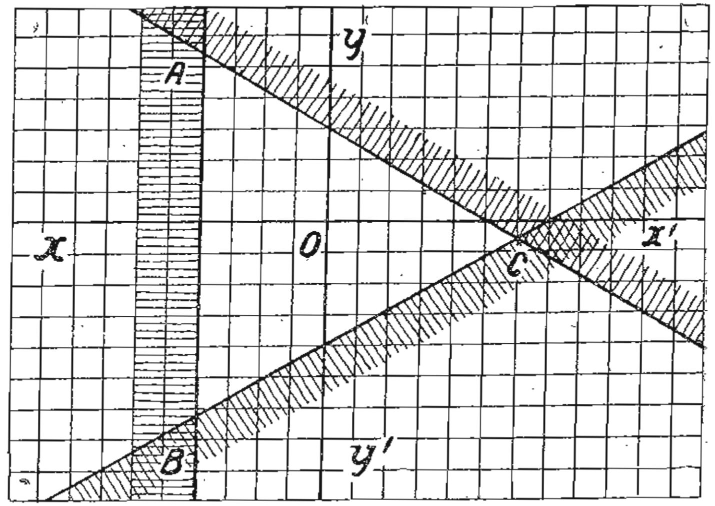
$$x + 4 = 0.$$

То је права AB на сл. 14. Област која не одговара неједначини (1) је она у којој се не налази почетак.

2. Нацртајмо праву

$$3x + 5y - 15 = 0.$$

То је права AC. Неважећа област која одговара неједначини (2) је такође она, која не обухвата почетак.



Сл. 14.

3. Најзад конструишимо праву

$$4x - 7y - 28 = 0.$$

То је права BC. Неважећа област за неједначину (3) је такође она која не садржи почетак.

Видимо из слике да је унутрашњост троугла ABC остала светла. Координате разних тачака у унутрашњости овога троугла су дакле решења датог система.

Пример 2. Да се реши систем неједначина:

$$2x - 5y - 10 > 0 \qquad (4)$$
$$2x - 5y + 10 < 0 \qquad (5)$$

1. Нацртајмо праву

$$2x - 5y - 10 = 0.$$

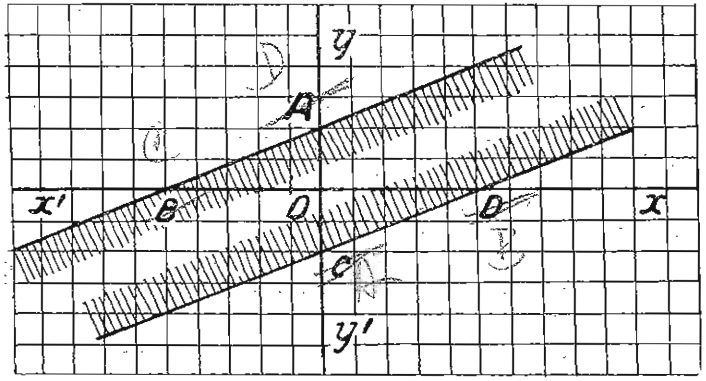
Ово је права AB (сл. 15). За почетак (0,0) неједначина (4) није задовољена. Неважећа област је прецртана.

2. Нацртајмо исто тако праву

$$2x - 5y + 10 = 0.$$

Ово је права CD. За почетак (0,0) неједначина (5) није задовољена. Неважећа област је прецртана.

Дати систем је инкомпатибилан.



Сл. 15.

За писмено вежбање

1. За које вредности x функција

$$y = \frac{x}{80} + 3$$

превазилази 1 000 000?

Конструиши праве које претстављају варијације функција:

2. $y = -2x - 5$ 3. $y = -x + 2$ 4. $y = -\frac{1}{3}x - 2$

5. $y = \frac{x}{4} + 1$ 6. $y = -3x - 1$ 7. $y = \frac{1}{2}x + 3$!

8. Конструиши праву чији је нагиб 2, а отсечак на ординатној осовини -2! Која је то функција, чије су промене претстављене овом правом?

9. Конструиши тачку A (3,5)! Споји ту тачку са координатним почетком! Која функција одговара правој OA?

10. Конструиши тачке $A(4,0)$ и $B(0,4)$! Повуци праву AB! Која функција одговара овој правој?

11. Дата је тачка M_0 (x_0, y_0). Једна права има нагиб m и пролази кроз ову тачку. Која функција одговара овој правој? Одреди m тако да права пролази кроз почетак!

12. Дате су две тачке M_1 и M_2 са координатама 2, -3 и -3, 7. Која функција одговара правој, која пролази кроз ове две тачке? Колики је нагиб ове праве?

Реши графички једначине:

13. $x - 3 = -7$ 14. $6x + 21 = 3$ 15. $-19 = 6 + 5x$

16. $\frac{x}{2} + 6 = 8$ 17. $\frac{3}{4}x - 6 = -3$ 18. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}$ 19. $\frac{1}{3}(x - 6) = \frac{1}{5}(x - 8)$

20. $\frac{3}{2}(4x + 1) + \frac{5}{4}(x - 2) = 13\frac{1}{2}$

Следећи системи да се реше графички:

21. $x - 3y + 7 = 0$, $x + 3y - 11 = 0$ 22. $x - y + 3 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$

23. $x - 2y + 6 = 0$, $x + y - 6 = 0$ 24. $2x - y + 3 = 0$, $x - 3y - 2 = 0$

Јесу ли следећи системи компатибилни:

25. $2x - y - 2 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $3x - 2y - 1 = 0$ 26. $x + y - 6 = 0$, $x + 2y - 10 = 0$, $2x + y = 0$

Реши следеће неједначине:

27. $x - 2y + 4 > 0$ 28. $x + y - 5 < 0$

29. $5x - y + 3 > 0$ 30. $x + 3y - 11 < 0$

31. $3x - 2y - 5 > 0$ 32. $0{,}3x - 0{,}6y - 3 < 0$

33. $2x + y + 2 > 0$ 34. $x > 3y + 1$

Реши системе неједначина:

35. $x + 2y - 1 < 0$, $x - y + 3 > 0$, $3x - y - 6 < 0$ 36. $2x + 5y - 1 < 0$, $x + 3y - 2 > 0$

37. $x - 4y + 3 < 0$, $2x - 5y + 1 > 0$.

38. Нацртај на полуосама Ox, Oy, Ox', Oy' тачке A, B, C и D, које су удаљене од почетка за 3 јединице. Напиши систем од четири неједначине I степена са две непознате, који ће бити задовољен за све тачке у унутрашњости квадрата.

39. Конструиши тачке $A(2,0)$, $B(0,2)$, $C(4,4)$! Нацртај праве BC, CA, AB!

Да се помоћу једног система неједначина I степена са две непознате дефинише део равни у унутрашњости троугла ABC.

40. Са подацима из претходног вежбања да се дефи-

нишу поступне области равни ограничене странама троугла, где се налазе средишта уписаних кругова споља.

41. Још увек са подацима из задатка 39 да се дефинишу поступно преостале три области равни, ограничене странама троугловим, а које још нису проучене.

За које вредности m ће следећи системи бити инкомпатибилни:

42. $x+y+1>0$
$x-y+2>0$
$x+2y-m<0.$

43. $2x-y+3>0$
$x+y-2<0$
$x-2y-m>0.$

44. Да се у равни одреде тачке које ће задовољавати следеће односе:

45. $2x+y-1=0$
$x-y>0$

46. $x+y-6=0$
$1-x+y>0$
$1+x-y<0.$

47. $x-y>0$
$2x-y>0$
$2y-x-10=0.$

Следећи проблеми да се реше најпре графички, затим да се резултати провере алгебарски.

48. Једна цев може да напуни базен за 5 часова, друга за 7 часова. Кад ће базен бити напуњен, кад се отворе обе цеви једновремено?

49. Један радник може да сврши један посао за 4 дана, други за 6 дана. Кад ће посао бити свршен, кад обојица раде једновремено?

50. Две цеви заједно могу да напуне каду за 4 минута, а сама једна за $6\frac{1}{2}$ минута. Колико је времена потребно да сама друга цев напуни каду?

51. Један базен може једна цев да напуни за 3 часа, друга за 5 часова, трећа за 7 часова. За које ће се време базен напунити, кад се отворе све три цеви једновремено? Резултат да се прочита до на пола часа.

52. Два тркача трче на стази од 4000 m. Други крене 24 секунда после првога и стигне 16 секунада пре првога. Где је други стигао првога?

53. Два пешака крену у подне један другом у сусрет из места A и B. Отстојање AB је 40 km. Први прелази на сат 4 km., други 6 km. Кад и где ће се они срести?

Из истог цртежа ученик да види колико су они били удаљени у 13h 30mn и кад су били удаљени један од другога 12 km?

54. Један коњаник пређе пут од 48 km, прелазећи на сат 8 km. Један бициклист пође из истог места сат касније истим путем и на путу проведе 3 часа мање од коњаника.

Да се нацрта дијаграм њихових кретања и из дијаграма да се одреди:

1. Кад и где је бициклист стигао коњаника;

2. њихово отстојање после пута бициклиста од $2\frac{1}{2}$ часа;

3. време кад су били удаљени 4 километра.

55. Једна кола пођу у подне брзином 16 km на сат. При завршетку сваког сата возар одмара коње по пола сата. За колима крене један аутомобил у 14h 30 mn брзином 40 km на сат. Он се на путу нигде не задржава. Где и кад ће аутомобил стићи кола?

56. Два тела крећу се по једној кружној стази дужине 1 km. Једно прелази 2 km на сат, друго 3 km. Оба крену из истог места у исто време у супротним правцима. Одреди времена, у којима ће се срести прва четири пута!

Упутство. — Треба имати на уму да оба тела пређу заједно један километар од сусрета до сусрета. Затим кад се једно кретање заврши, друго почиње изнова. За свако ново кретање црта се друга права линија паралелно са ранијом. Прво тело обиђе стазу за 30 минута. Скала нека буде 10 минута $\sim$ 2 cm, 1 km $\sim$ 4 cm.

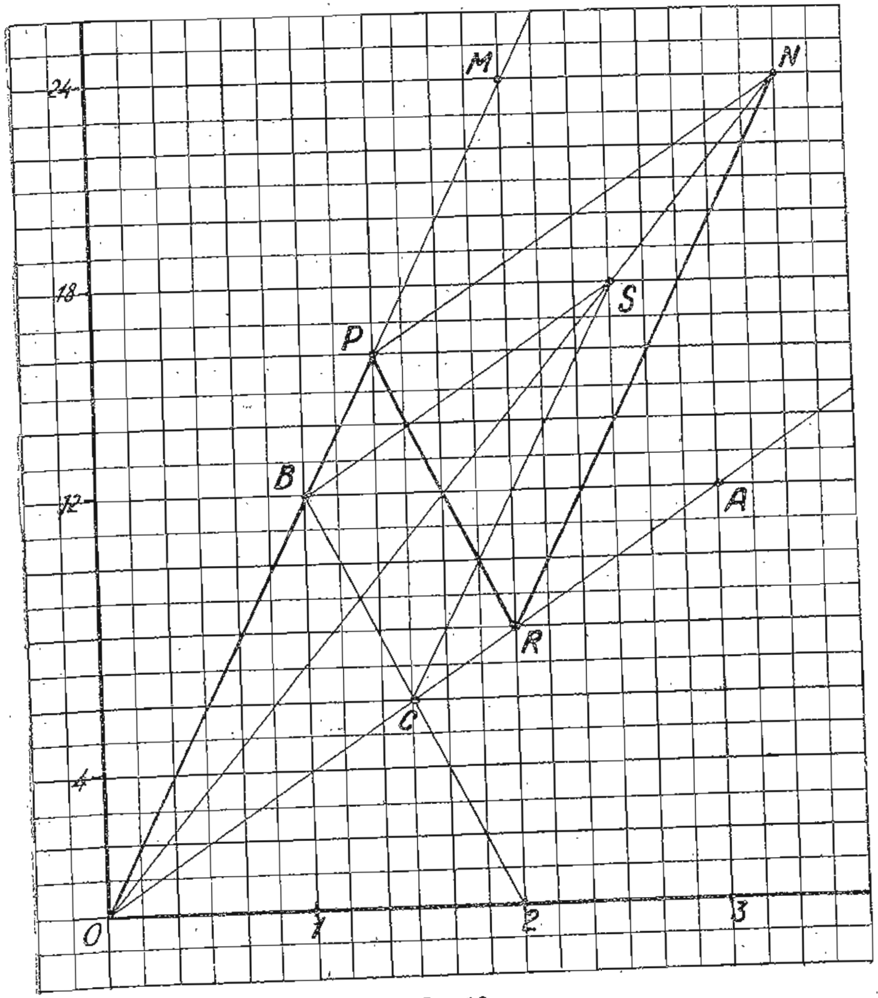
57. Један радник радио је дневно толико, да је могао да сврши посао за 10 дана. После рада од 4 дана он се одмори 2 дана. После овога он настави рад и сада је радио брже. Због тога он ипак посао доврши за 10 дана. За које би време свршио посао, да је радио оном брзином, којом је завршио посао?

58. У трчању на 100 метара тркач A туче B са 11 метара, а C са 19 метара. Одреди округло (на метре) са колико може B тући C на 100 метара!

59. Три путника желе да што пре стигну у једно место удаљено 24 km. Али они имају само једна кола са два места. Они се сложе да двојица оду колима, а један да пође

пешице у исто време кад и кола. Кола ће на извесном от-
стојању оставити прву двојицу који ће имати остатак пута
да пређу пешице, а вратиће се да узму првога и њега ће
одвести до циља, тако да сва три путника стигну у исто
време. Пешаци прелазе на сат 4 km кола 12 km. Пита се:

1. Колико ће трајати цео пут;



Сл. 16.

2. после ког времена су прва два путника сишла с кола;

3. на ком су отстојању од полазне тачке сишла с кола та два путника;

4. после ког времена су кола срела последњег путника;
5. на ком отстојању су кола срела овог путника;
6. колико времена су путници ишли пешице;
7. по колико су путници прешли пешице?

Решење. — По апсцисној осовини преносићемо часове и то 3 сантиметра да претстављају 1 час. По ординатној осовини преносићемо километре, 1 km $\sim$ 5 mm.

На слици тачки A одговара апсциса 3 часа а ордината 12 km. Ако спојимо тачке O и A, права OA је графички претставник кретања пешака.

Тачки M одговара апсциса 2 часа, ордината 24 km. Права OM је графички претставник кретања кола.

Узмимо привремено да су кола ишла 1 час па се вратила у сусрет пешаку. Графички преставник кретања кола натраг биће права $B2$.

Од тог момента прва два путника иду пешице и графички претставник њиховог кретања је права BS паралелна правој OA.

Тачка C одређује место и време сусрета кола са задњим путником.

Пошто кола крену поново напред, графички претставник тог кретања биће права CS паралелна правој OM.

Ако кола оставе прва два путника у B а приме трећег у C, онда ће сви заједно стићи у исто време у S. Из дијаграма се види да је тачка S удаљена 18 km од полазне тачке. Према томе тачка S не даје решење задатка. Путници треба да стигну једновремено у место удаљено 24 километра.

Продужимо OS до N, до пресека са правом

$$y = 24.$$

Повуцимо NP паралелно са OA и NR паралелно са OM. Тада ако кола оставе прву двојицу у P а приме трећег путника у R, сви ће заједно у исто време стићи у **N**. Из дијаграма се виде ови одговори:

1. Цео пут трајаће 3h 20 mn;
2. прва два путника сишла су с кола после 1h 20mm;
3. прва два путника сишла су после 16 km;
4. кола су срела последњег путника после 2h;
5. кола су срела задњег путника после 8 km;
6. путници су пешачили по 2 часа;
7. путници су прешли пешице по 8 km.

60. Три друга треба да стигну што пре у једно место удаљено 16 km. Они имају на расположењу један мотоцикл, на коме има само једно место позади управљача. Због тога они одлуче да један пође пешице. Мотоцикл однесе једног до извесне даљине, па га остави да продужи пешице, а врати се да прими другога. Све удесе тако да сви заједно стигну у исто време до циља. Пешаци прелазе 4 км на сат, а мотоцикл 20 km. Иста питања и одговори, као и у претходном задатку.

ГЛАВА IX

Једначине у облику пропорција

104. — Две величине на пр. висина куће (a) и висина дрвета (b) могу се упоредити на два начина:

1. или имамо да видимо за *колико* је висина куће *већа* од висине дрвета;

2. или да одредимо *колико пута* је висина куће *већа* од висине дрвета тј. колико пута се висина дрвета *садржи* у висини куће.

У првом случају образује се *разлика* $a - b$ и називамо је *аритметичка размера* двеју величина.

У другом случају образујемо количник $a : b$ или $\frac{a}{b}$ и називамо га *геометриска размера* тих величина.

Ова друга размера је важнија. С тога кад се кратко каже размера, увек се мисли на геометриску размеру.

Напомена. — За образовање размера могу се користити само истоимене величине.

105. — Пошто су чланови једне размере или оба неименовани бројеви, или оба истоимени, то је размера увек један неименован број. Због тога је боље да се имена изоставе и да се на пр. пише 20 : 8 уместо 20m : 8m.

20 је први члан или предњи члан, а 8 други или задњи. Ако је први члан већи од другог размера је падајућа. Обрнуто каже се растућа размера.

Пошто се размера може да схвати као количник истоимених бројева, то се она може проширивати и скраћивати. Тако горњу размеру 20 : 8 можемо написати и у облику 5 : 2.

Из овога следује да се свака размера може преобратити у размеру целих бројева.

За усмено вежбање

Следеће размере да се преобрате у размере са најмањим целим бројевима:

1. 24 : 84; 100 : 750; 25 : 10 000.

2. $2\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} : 1\frac{7}{8}$; $\frac{2}{3} : \frac{3}{2}$.

3. 0,5 : 4,5; 0,02 : 1; $\frac{1}{5}$: 0,05.

4. 1dm : 1cm; 1cm : 1mm; 1cm : 1km.

5. $1m^2 : 1cm^2$; $0,^{a}1 : 1dm^2$; $0,^{ha}04 : 4m^2$.

6. $1m^3 : 10dm^3$; $10cm^3 : 1dm^3$; $1l : 100mm^3$.

7. $\frac{1}{2}$l : $25cm^3$; 1hl : 0,8l; 1hl : $1cm^3$.

8. $\frac{1}{8}$kg : 100g; 1kg : 300g; 1 товар : 1g.

9. $\frac{3}{4}$ часа : 5 мин.; 1h : 10sec; $\frac{1}{2}$h : $\frac{1}{2}$mn.

10. Следеће размере претворити у размере да први члан буде 1 :

5 : 24; $\frac{1}{6}$: 3,6; 0,2 : 9; $\frac{3}{5}$: 0,8.

11. Следеће размере да се преобрате у такве да задњи члан буде 100 :

7 : 25; 27 : 1000; 7 : 2000; 1 : 8.

12. У каквој је размери брзина минутне казаљке према брзини сатне казаљке?

13. Страна једног квадрата је 8cm, страна другог је 12 cm. У којој су размери стране, а у којој површине ова два квадрата?

14. Пречник једног круга је 1m. Његов обим је (приближно) $3m\,\frac{1}{7}$. Изрази у целим бројевима однос између пречника и обима!

106. — Помоћу размера можемо решавати расноврсне задатке.

Пример 1. Два брата имају један 80 динара, други 100 динара. У којој су размери њихове имовине?

Решење. Размера њихових имовина је

80 дин : 100 дин. = 4 : 5.

Стварне имовине су 80 динара и 100 динара. Бројеви одговарајуће размере су 4 и 5. Њих смо добили скраћивањем са 20. Обрнуто из бројева размере, у овом случају из бројева 4 и 5, можемо одредити праве величине, овде 80 дин. и 100 дин. Треба оба члана размере помножити једним истим чиниоцем. Обично овај чинилац не знамо и рачуном га одређујемо. Онда га као непознатог обележавамо са x, y, z итд.

Пример 2. Две дужи стоје у размери као 5 : 9. Њихов збир износи 9 cm, 8. Колика је свака дуж?

Решење. Размера ових дужи је 5 : 9. Да бисмо добили стварну величину ових дужи, проширићемо размеру са x:

$$5x : 9x.$$

Једна дуж је $5x$ cm, друга $9x$ cm.

С друге стране имамо да је њихов збир $9{,}^{cm}8$, па је

$$5x + 9x = 9{,}8$$
$$14x = 9{,}8$$
$$x = 0.7.$$

Тражени чинилац је 0,7.

Прва дуж износи $5 \cdot 0{,}7 = 3^{cm}{,}5$.

Друга дуж износи $9 \cdot 0{,}7 = 6^{cm}{,}3$.

Пример 3. Размера цена пшенице према ражи је 6 : 5. Колика је цена једног товара пшенице, кад један товар ражи вреди 265 динара?

Решење. Размера цена је 6 : 5. Да бисмо видели стварне цене, треба размеру проширити са x, па имамо

$$6x : 5x.$$

С друге стране имамо да је цена ражи 265 динара, што значи да је

$$5x = 265,$$
$$x = 53.$$

Тражени чинилац је 53.

Цена пшенице биће $6 \cdot 53 = 318$ динара.

За писмено вежбање

Следеће размере да се изразе најмањим бројевима:

1. $625 : 1200 =$; $875 : 200 =$; $10\,000 : 800 =$

2. $3\frac{3}{8} : 18 =$; $1\frac{7}{8} : \frac{6}{7} =$; $3 : 5\frac{1}{7} =$
3. $\frac{4}{9} : \frac{5}{6} =$; $1\frac{5}{12} : \frac{17}{20} =$; $3 : 0{,}016 =$
4. $0{,}9 : 0{,}08 =$; $2{,}7 : 4{,}05 =$; $0{,}8 : 0{,}0016 =$
5. $2^{m}{,}25 : 80$ mm; $\frac{1}{8}$ km : $6\frac{1}{4}$ m =
6. 1 t : 3 товара 20 kg =; 3 kg 200 g : $\frac{1}{8}$ товара =
7. $6^{h}\,45^{mn} : \frac{3}{4}$ дана; 1000 sec : 1 дана =
8. У којој размери стоје дужине река

   Саве и Неретве које износе 712 и 218 km;
   Дунава и Рајне „ „ 2780 и 1300 km;
   Мисисипе и Амазона „ 6600 и 6500 km;
9. Дужина једне собе има се према ширини као 3 : 2. Колика је дужина, кад је ширина $5^{m}{,}40$? Колика је површина патоса?
10. У којој размери је нацртана карта једне државе, кад на њој отстојању два места од 20 km одговара дужина 5 cm? Колику површину заузима једна област, која је на карти претстављена правоугаоником дужине $2\frac{1}{4}$ cm и ширине 15 mm?
11. У једном правоуглом троуглу оштри углови су у размери 1 : 3,5. Колики су ти оштри углови?

117. Продужена размера. — Ако хоћемо међусобно да упоредимо више величина, тада добијамо једну *продужену* размеру. На пр. 3 : 5 : 7. У таквој једној продуженој размери увек се садржи један низ простих размера. На пр. 3 : 5, 3 : 7, 5 : 7.

Кад знамо просте размере више величина, увек је могућно згодним проширивањем саставити продужену размеру.

Пример 1. $a : b = 2 : 5$
$b : c = 5 : 6.$

Овде проширивање није потребно. Имамо

$$a : b : c = 2 : 5 : 6$$

Пример 2. $a : b = 2 : 5$
$b : c = 6 : 11.$

Прву размеру проширићемо са 6, другу са 5.

$$a : b = 12 : 30$$
$$b : c = 30 : 55$$

Одавде добијамо продужену пропорцију:

$$a : b : c = 12 : 30 : 55.$$

Пример 3. 425 динара треба поделити у размери 3 : 5 : 9. Колики је сваки део?

Решење. Треба сваки члан размере помножити једним истим чиниоцем x, па имамо размеру

$$3x : 5x : 9x.$$

Поједини делови дакле износе 3x динара, 5x динара и 9x динара.

Како је њихов збир 425 динара, то имамо једначину

$$3x + 5x + 9x = 425$$
$$17x = 425$$
$$x = 25.$$

Први део износи $3 \cdot 25 = 75$ динара,
други „ „ $5 \cdot 25 = 125$ динара,
трећи „ „ $9 \cdot 25 = 225$ динара.

За писмено вежбање

Преобрати у продужене размере:

1. $a : b = 4 : 9 \quad a : b = 13 : 34 \quad a : b = 5 : 7$
   $b : c = 12 : 7 \quad b : c = 51 : 28 \quad a : c = 15 : 8$

2. $a : b = 1\frac{2}{3} : \frac{4}{5} \quad a : b = 1.2 : 1 \quad a : b = 8 : 3$
   $b : c = 2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{3} \quad c : b = 4 : 5 \quad c : a = 5 : 2\frac{1}{3}.$

3. Углови једног троугла су у размери 2 : 3 : 4. Одредите углове!

Напомена. — Продужену размеру $a : b : c$ треба разликовати од количника $a : b : c$, који је исто што и $\frac{a}{b \cdot c}$

108. Обрнута размера. — Обрнута размера више бројева је размера њихових реципрочних вредности.

На пр. обрнута размера бројева 4, 5 и 6 је

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{4} \cdot 60\right) : \left(\frac{1}{5} \cdot 60\right) : \left(\frac{1}{6} \cdot 60\right) = 15 : 12 : 10.$$

Код обрнуте размере само два броја може се уместо реципрочних вредности ставити размера у којој чланови промене места. На пр. ако имамо бројеве 7 и 11, њихова обрнута размера је

$$\frac{1}{7} : \frac{1}{11} = \left(\frac{1}{7} \cdot 77\right) : \left(\frac{1}{11} \cdot 77\right) = 11 : 7.$$

За писмено вежбање

1. Два разломка имају једнаке бројиоце. Њихови именioци су 12 и 14. У којој су размери њихове вредности.

2. Дужина, ширина и висина једног правоуглог паралелопипеда су у размери 3 : 2 : 5.

a) Дужина је 12 cm, колика је ширина и висина?

b) Ширина је 8 cm, колика је дужина и висина?

c) Висина је 16 cm, колика је дужина и ширина?

3. Један цртеж је у размери 3 : 8.

a) Колика је линија на предмету која одговара линији од 8 cm на цртежу;

b) колика је линија на цртежу, која одговара линији од 1 m,65 на предмету?

4. Карта једне земље израђена је у размери 1 : 200 000. Која дужина на карти претставља 1 km у природи? Колика је дужина једне реке, кад је њена дужина на карти приближно 23 cm?

Пропорције

109. — Кад се говори о пропорцијама, мисли се увек на геометриске пропорције. Једна геометриска пропорција је једначина између две геометриске размере, на пример

$$a : b = c : d,$$

што се чита „a према b као c према d“

Пропорција има четири члана. Два из прве, а два из друге размере. Први чланови a и b зову се и *предњи чланови*, c и d *задњи чланови*. a и c, исто тако b и d зову се *хомологи чланови*; a и d зову се још *спољашњи*, а b и c *унутрашњи чланови*; d се назива четврта пропорционала за a, b и c.

Пропорција

$$a : x = x : b$$

у којој су унутрашњи чланови једнаки, зове се *непрекидна пропорција*.

Члан x зове се *средња пропорционала*, или *геометриска средина* за оба спољашња члана a и b.

110. — Пошто се горња пропорција може да напише и у облику

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

те множећи обе стране са bd добијамо

$$a\,d = b\,c,$$

најважније правило пропорције: **у свакој пропорцији је производ спољашњих чланова једнак производу унутрашњих.**

Обрнуто можемо увек образовати пропорцију, кад су нам дата два једнака производа. При том чиниоце једног производа треба узети за спољашње, а чиниоце другога за унутрашње чланове.

Напомена. — Кад на овај начин хоћемо да саставимо пропорцију, згодно је да се најпре напише шема пропорције у облику

. . . . . . : . . . . . = ... : . . . . . .

Затим се попуне четири места према претходном правилу.

111. — У једначини

$$a\,b = c\,d$$

могу производи да промене места. Затим могу и поједини чиниоци у производима да мењају места.

Задатак. Изврши све могуће промене у горњој једначини! После тога из свака два једнака производа напиши одговарајућу пропорцију!

Тада добијамо ова правила о пропорцијама:

Не мењајући исправност једне пропорције можемо:

1) **разменити унутрашње чланове;**
2) **разменити спољашње чланове;**
3) **разменити саме размере;**
4) **читати пропорцију натрашке;**
5) **обе размере једновремено обрнути;**
6) **ставити унутрашње чланове за спољашње, а спољашње за унутрашње.**

За писмено вежбање

Испитај да ли су следеће пропорције исправне:

1. $17 : 9 = 28 : 36$
2. $525 : 44 = 26 : 22$
3. $147 : 99 = 57 : 38$
4. $9 : 7 = 42 : 32\frac{2}{3}$
5. $25 : 28 = 18 : 26$
6. $\frac{1}{10} : \frac{1}{8} = \frac{1}{5} : \frac{1}{4}$
7. $3{,}5 : 14 = 1{,}5 : 6$
8. $0,125 : 0,04 = 0,1 : 0,2$
9. $(1 - a^2) : (2a - a^2 - 1) = (a^2 - a - 2) : (a^2 - 3a + 2)$
10. $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) : \frac{m+n}{5mn} = \frac{1}{m} : \frac{1}{5m}$
11. $\left(1 - \frac{1}{x}\right) : \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \left(1 - x\right) : \left(1 + x\right)$

Решавање пропорција

Кад је један члан пропорције непознат, може се одредити помоћу остала три. Тада кажемо да смо *решили пропорцију.*

Пример 1. $x : b = c : d$ или

$$\frac{x}{b} = \frac{c}{d}.$$

Одавде је $$x = \frac{b \cdot c}{d}$$

т. ј. *непознати спољашњи члан одређује се кад се производ унутрашњих чланова подели спољашњим познатим чланом.*

Пример 2. $a : x = b : c$, или

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c}, \text{ или}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{b}.$$

$$x = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Како гласи правило за одредбу унутрашњег члана?

За писмено вежбање

У следећим пропорцијама одреди x згодним проширивањем:

1. $\frac{x}{12} = \frac{1}{16}$ 2. $\frac{3}{4} = \frac{x}{60}$ 3. $\frac{18}{x} = \frac{6}{5}$

4. $\frac{x}{8m} = \frac{1}{4}$ 5. $\frac{2}{11a} = \frac{x}{121a^2}$ 6. $\frac{27ab}{4} = \frac{243a^2b^2}{x}$

7. $x : \frac{2}{7} = \frac{7}{8} : \frac{3}{4}$ 8. $\frac{5}{10} : \frac{1}{4} = 15 : x$

9. $2 : x = a : 1$ 10. $x : 3a^3 = 48b^5 : 36a^6b^2$

11. $b : (a - b) = a : x$ 12. $(b + a) : a = x : (a - b)$

13. $(a^3b - a^2b^2) : (a^2b^2 - ab^3) = (a^2b + ab^2) : x$

14. $(a^2 - a^3) : (a - a^3) = x : (a + a^2)$

15. $x : \left(\frac{2}{a} + 1\right) = (3 - a) : \left(a - 1 - \frac{6}{a}\right)$

28. Да се одреди средња пропорционала између бројева 18 и 2; 16 и 4; 9 и 16; 5 и 45; 5 и 125; 12 и 48.

Примена пропорција на задацима правила тројног

112. Просто правило тројно директно. — Ако су две величине као на пр. број метара платна и број динара једна мењајући се постане n пута већа, због тога и друга или цена платна тако зависне једна од друге, да кад на пр. постане n пута већа, онда кажемо да су ове величине *директно пропорционалне*.

Ако број метара једанпут обележимо са a_1 а другипут са a_2, цену једанпут са b_1, а другипут са b_2 и нека је

$$a_2 = n \cdot a_1 \text{ и } b_2 = n \cdot b_1$$

онда је

$$\frac{a_2}{a_1} = n = \frac{b_2}{b_1}$$

или

$$a_2 : a_1 = b_2 : b_1.$$

Имамо директне размере.

Пример 1. Три метра платна стају 24 динара. Пошто су четири метра тог истог платна?

Решење. — Раније смо учили да се овакав задатак решава свођењем на јединицу.

Кад $3m$ стају 24

$1m$ стаће $\frac{24}{3}$

$4m$ стаће $\frac{24}{3} \cdot 4.$

Много се брже долази до резултата применом пропорције.

$$\frac{x}{24} = \frac{4}{3}.$$

Размера динара једнака је размери метара. Одавде је

$$x = \frac{4 \cdot 24}{3} = 32.$$

Напомена. — Раније смо већ рекли да чланови размере морају имати исто име. Ово је x мерено истом мером, као и дата цена, која је била 24 динара. Тражена цена је дакле 32 динара.

Пример 2. За 2500 *kg* угља плаћено је 1750 динара. Колико треба да се плати за 16 тона?

Решење. $\frac{x}{1750} = \frac{16}{2,5}$

$$x = 11\,200 \text{ динара.}$$

113. — Просто правило тројно обрнуто. — Ако су напротив две величине, на пр. број радника и број дана рада за један исти одређени посао, тако зависне једна од друге, да кад једна мењајући се постане n пута већа, друга због тога постане n пута мања, тада су те две величине, број радника и број радних дана, обрнуто пропорционалне.

Ако је број радника једанпут r_1 другипут r_2, а број дана једанпут d_1 другипут d_2 и нека је

$$r_2 = n \cdot r_1 \text{ и } d_2 = \frac{d_1}{n}$$

то је

$$\frac{r_2}{r_1} = n = \frac{d_1}{d_2}$$

а одатле

$$r_2 : r_1 = d_1 : d_2 = \frac{1}{d_2} : \frac{1}{d_1}.$$

Имамо обрнуте размере.

Пример 1. 6 радника сврше један посао за 8 часова
8 радника свршиће тај посао за x часова.

Решење. Пошто су време трајања рада и број радника за један исти посао, обрнуто пропорционалне величине то имамо

$$\frac{x}{8} = \frac{6}{8}.$$

Одавде је $x = \frac{6 \cdot 8}{8} = 6.$

Осам радника свршиће посао за 6 часова.

114. Сложено правило тројно. — Често се дешава да једна променљива величина зависи од више других величина. На пример интерес зависи од капитала, од времена и од процента. Другим речима интерес ће бити утолико већи, уколико је капитал већи, у колико је дуже време и уколико је већи процент.

Задаци сложеног правила тројног решавају се по овом *практичном упутству: Кад је једна величина пропорционална са више других величина, онда је размера двају њених стања једнака производу размера одговарјућих стања других величина. Размере ових других величина су директне или обрнуте, према томе да ли су дотичне величине директно или обрнуто пропорционалне са првом величином.*

Пример 1. Да се одреди интерес који ће донети капитал k по p процената за t дана.

Решење. — Овај се задатак другим речима овако исказује: Кад 100 динара донесу за 1 годину p динара интереса, колико ће донети k динара за t дана. Ако интерес обележимо са i, два стања интереса су i и p, одговарајућа два стања капитала су k и 100, времена t и 360, па имамо

$$\frac{i}{p} = \frac{k}{100} \cdot \frac{t}{360},$$

пошто су капитал и време директно пропорционални интересу. Даље имамо.

$$i = \frac{k \cdot p \cdot t}{36\,000}.$$

Добили смо већ познати образац из интересног рачуна.

Пример 2. Један гарнизон од 300 војника потрошио је за 15 дана 4500 kg. хране. Колико би се људи могло хранити 12 дана са 4 800kg хране.

Решење. Задатак се исписује овако:

4500 kg. дана 300 војника
4800 kg. 12 дана x војника

Број војника и број дана су обрнуто пропорционалне величине, па имамо:

$$\frac{x}{300} = \frac{15}{12} \cdot \frac{4800}{4500}$$

$$x = \frac{15 \cdot 4800 \cdot 300}{4500 \cdot 12} = 400.$$

За писмено вежбање

1. Кад $1,^{ha}5$ земљишта вреди 6000 динара, пошто су $2,^{ha}25$?

2. Да сазидају један зид од 5 метара дужине, 4 радника радила су 18 часова. Колико ће часова бити потребно да 12 радника сазидају зид од 16 метара дужине? Узмимо да висина и дебљина зида остану исте, као и у првом случају.

3. Пет радника зараде за 9 дана 1215 динара. Колико ће под истим условима рада зарадити 8 радника за 6 дана?

4. Пет радника сврше једна посао за 7 дана, радећи дневно $10\frac{1}{2}$ часова. За које би време тај исти посао свршили 6 таквих радника при десеточасовном радном времену?

5. Колико часова дневно морају радити 150 војника да ископају за 8 дана један шанац, кад је пре тога за толики исти посао употребљено 80 људи, и они радили 9 дана, сваког дана по 10 часова?

6. За 8 метара платна, чија је ширина пола метра, плати се 60 динара. Колико треба платити за 12 метара платна исте каквоће, ширине $0,^{m}6$?

7. Педесет људи исхрањено је 40 дана са 18 000 динара. Колико ће се потрошити да се исхрани 30 људи за време од 100 дана, ако су се цене намирницама удвостручиле?

8. Четири радника покосе једну ливаду величине $1,^{ha}35$ за време од три и четврт ујутру до 10 часова пре подне. Колико радника треба најмити за идући дан, кад треба да се покоси једна ливада од 60 ара за 6 часова?

9. Једна књига има 153 стране, свака страна има по 36 редова, а у сваком реду по 45 слова. Колики би био број страна, кад би на свакој страни било по 34 реда а у сваком реду по 45 слова?

10. Једна греда дужине 4m, ширине 20cm, висине 30 cm тежи 100 kg. Пита се колико ће бити тешка једна друга греда дужине 5m, ширине 30 cm, висине 40 cm, кад се још зна да $2m^3$ дрвета ове друге греде теже исто толико, колико $3m^3$ дрвета прве греде.

11. Једну улицу дужине 1.km 2 треба да израде 80 радника за 7 месеци, радећи дневно 9 часова. После $2\frac{1}{2}$ месеца дођу нових 10 радника и радно време се повећа за 1 час, пошто је по новијем плану улица требала да буде за $\frac{1}{8}$ дужа. Кад ће цео посао бити завршен?

Хомолога сабирања и одузимања

115. — Кад се пропорција $a : b = c : d$ напише у облику

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (1)$$

можемо из ње извести још неке особине пропорција. Ако лево и десно у овој једначини додамо или одузмемо 1, или ако обе стране једначине одузмемо од 1, добијамо нове једначине

$$(2)\ \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \qquad (3)\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \qquad (4)\ \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d}$$

и из ових једначина дељењем

$$(5)\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \qquad (6)\ \frac{b-a}{a+b} = \frac{d-c}{c+d}.$$

Обртањем размера у пропорцији (1)

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

и сличним извођењем као малочас добијамо још три нове једначине. Које су те нове једначине?

116. — Овако посталих девет једначина могу се написати и непосредно из дате пропорције (1) тзв. *хомологим* (одговарајућим) сабирањем и одузимањем по овом **практичном упутству:** *треба у пропорцији изнад хомологих чланова ставити римске цифре I и II тј. написати*

$$\overset{\mathrm{I}}{a} : \overset{\mathrm{II}}{b} = \overset{\mathrm{I}}{c} : \overset{\mathrm{II}}{d}$$

Затим промислити који ће се од следећих израза образовати на левој и десној страни а према природи задатка:

$$(\mathrm{I} + \mathrm{II}) : \mathrm{I} \qquad \mathrm{I} : (\mathrm{II} - \mathrm{I})$$
$$(\mathrm{I} + \mathrm{II}) : \mathrm{II} \qquad (\mathrm{I} + \mathrm{II}) : (\mathrm{I} - \mathrm{II})$$

итд.

Напослетку ставити место римских цифара одговарајуће алгебарске изразе.

Пример 1. $\overset{\mathrm{I}}{(119 - x)} : \overset{\mathrm{II}}{119} = \overset{\mathrm{I}}{6} : \overset{\mathrm{II}}{7}$.

Решење. Овде је потребно да x остане само, као члан. Због тога ћемо на обема странама образовати израз.

$$(\mathrm{II} - \mathrm{I}) : \mathrm{II}.$$

Кад место римских цифара ставимо одговарајуће вредности, добићемо

$$x : 119 = 1 : 7$$
$$x = 17.$$

Пример 2. $7 : (9 + 2x) = 4 : (9 - 2x)$.

Решење: Да бисмо могли применити хомолого сабирање и одузимање, најпре ћемо спољашњим члановима да променимо места, па имамо:

$$(9 - 2x) : (9 + 2x) = 4 : 7.$$

Затим ћемо применити израз:

$$(\mathrm{II} + \mathrm{I}) : (\mathrm{II} - \mathrm{I}).$$

Кад место римских цифара ставимо одговарајуће вредности, добићемо:

$$18 : 4x = 11 : 3$$
$$x = \frac{18 \cdot 3}{11 \cdot 4} = \frac{27}{22}.$$

За писмено вежбање

1. Искажи обичним језиком следећа правила о пропорцијама:

$$\text{ако је } a : b = c : d, \text{ то је и}$$
$$am : bm = c : d$$
$$(a : m) : (b : m) = c : d$$
$$am : bm = cn : dn$$
$$am : b = cm : d$$
$$a : bm = c : dm!$$

Напомена. — И ова правила треба користити при решавању пропорција.

2. Из пропорција

$$a : b = c : d \text{ и}$$
$$m : n = p : q$$

следује $\quad am : bn = cp : dq$

или $\quad \dfrac{a}{m} : \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{p} : \dfrac{d}{q}.$

Искажи речима ова правила!

Примени ова правила за решење овог задатка: Кад је $a : b = 2 : 3$, колико је $a^2 : b^2$ и $a^3 : b^3$?

Одреди непознате из следећих пропорција

3. $x : (x + 3) = 4 : 5$ $\qquad$ 4. $y : 3{,}6 = (y - 8{,}5) : (-27$

5. $16\frac{11}{12} : 26\frac{1}{4} = \left(2\frac{1}{4} - z\right) : 2\frac{1}{4}$ $\qquad$ 6. $(4 + t) : 4 = t : 3$

7. $\frac{1}{9} : \left(u - \frac{1}{2}\right) = 1\frac{2}{9} : \left(u + \frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ 8. $(2x - 3) : (3x + 4) = 3 : 4$

9. $(2x - 3) : (2x + 3) = (4x - 3) : (4x + 11)$

10. $x : (a - x) = b : c$ $\qquad$ 11. $y : m = (a + y) : n$

12. $p : q = (z + b) : b$ $\qquad$ 13. $p : (r - t) = q : t$

14. $a : b = (x - c) : (c + x)$ $\qquad$ 15. $(m - t) : n = (m + t) : p$

16. Кад је $a - m = m - b$ онда се m зове *аритметичка средина* са бројеве a и b.

Кад је $a : m = m : b$, m је *геометриска средина* за бројеве a и b.

Кад је $a - m : m - b = a : b$, m је *хармониска средина* између a и b.

a) Израчунај све три средње вредности кад је $a = 4, b = 9$!

b) Докажи да је m аритметичка, геометриска или хармониска средина бројева a и b према томе да ли је

$$(a - m) : (m - b) = a : a$$
$$(a - m) : (m - b) = a : m$$
$$(a - m) : (m - b) = a : b.$$

c) Докажи да је геометриска средина два броја a и b у исто време и геометриска средина аритметичке и геометриске средине бројева a и b!

d) Реципрочна вредност броја $a + b$ је хармониска средина реципрочних вредности бројева a и $a + 2b$.

Да се одреде x и y, кад је

a) $x : y = 7 : 9$ и $x + y = 1$

b) $x : y = 4 : 3$ и $x - y = 12$

c) $x : y = a : b$ и $x + y = c$

d) $x : y = m : n$ и $y - x = p$.

c) $x : y = \left(a + b - \dfrac{ab}{a + b}\right) : \left(a - b + \dfrac{ab}{a - b}\right)$ и $x + y = 2a^3$

18. Да се одреди размера $x : y$ из следећих пропорција:

a) $(x + y) : x = 7 : 3$ $\quad$ b) $(x - y) : y = 4 : 9$

c) $(x + y) : (x - y) = 4 : 5$ $\quad$ d) $(mx + ny) : (mx - ny) = a : b$.

Следеће једначине да се реше хомологим додавањем и одузимањем:

19. $\dfrac{x + 1}{x - 1} = \dfrac{9}{4}$ $\qquad$ 20. $\dfrac{3x + 4}{3x - 4} = \dfrac{13}{5}$

21. $\dfrac{2x + 3}{2x - 3} = \dfrac{a + b}{a - b}$ $\qquad$ 22. $\dfrac{3a + bx}{3a - bx} = \dfrac{7a + 3b - 2bc}{7a - 3b + 2bc}$

23. $\dfrac{3x - b}{3x - 5b} = \dfrac{3a - 4b}{3a - 8b}$ $\qquad$ 24. $\dfrac{a - l}{a + l} = \dfrac{x - a}{x + a}$

25. $\dfrac{5a + 7x}{5m + 3n - 2p} = \dfrac{5a - 7x}{5m - 3n + 2p}$ $\qquad$ 26. $\dfrac{9a - 11x}{3a - 2c} = \dfrac{9a + 11x}{3a + 2c}$

27. $\dfrac{m + x}{m - x} = n$ $\qquad$ 28. $\dfrac{m - x}{x - n} = \dfrac{m}{n}$

Реши једначине:

29. $(x - 2) : (x - 5) = (x + 3) : (x - 1)$

30. $(a - x) : (a - x + 1) = (a + x + 1) : (x + 1)$

Реши системе једначина:

31. $(x - 46) : (55 - y) = 3 : 2$

$\quad (5x - y - 8) : (3x + 2y + 10) = 3 : 4$

32. $(6x - 7y - 1) : (2x - 3y - 1) : (y - x) = 25 : 15 : 8$

33. $(2x - 3y - 2) : (y - x) : (3x - 4y - 2) = 19 : 16 : 13$

ГЛАВА X

Степеновање

117. Множење и дељење степена истих основа. — Шта значи a^5 Један врло чест одговор је „a помножено самим собом 5 пута“! Разуме се да ово није тачно. Овде има 5 чинилаца, а само 4 множења. a^5 *је производ од 5 чинилаца једнаких броју* a.

Шта значи a^n?

Како се чита a^n?

Како се зове a, како n, како a^n?

Како се читају a^2 и a^3? Зашто?

Докажи да је

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}! \tag{1}$$

Докажи да је

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ кад је } m > n \tag{2}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ кад је } m < n!$$

Кад обрнемо једначину (1) имамо

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

Одатле добијамо ово **практично упутство** за степеновање једног броја збиром: *Број се степенује збиром, кад се степенује сваким сабирком, па добијени степени помноже.*

Пример: $a^{2+3} = a^2 \cdot a^3$.

Обртањем једначине (2) добијамо

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n},$$

одакле имамо **практично упутство:** *Број се степенује разликом, кад се степенује најпре умањеником, па умањиоцем, па први степен подели другим.*

Пример $\qquad a^{7-3} = \dfrac{a^7}{a^3}$.

118. — Специјалан случај код дељења степена истих основа имамо кад је $m = n$. Тада се добија резултат a^0. Овај резултат према дефиницији степена нема смисла. Али како је

$$a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1,$$

то ми узимамо да је

$$a^0 = 1.$$

Сваки број степенован нулом даје резултат 1.

Напомена. — О случају 0^0 ученик ће слушати доцније.

119. Случај негативних основа. — По дефиницији степена имамо:

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = +a^2$$
$$(-a)^3 = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = -a^3,$$
$$(-a)^4 = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = +a^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-a)^{2n} = +a^{2n}$$
$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Одавде имамо **практично упутство** за степеновање негативних бројева: *Ако је изложилац паран број, резултат ће бити позитиван; ако је изложилац непаран број, резултат ће бити негативан.*

120. Степеновање степена. — По дефиницији степена је

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots\cdots a^m}_{n \text{ чинилац } a^m} = \overbrace{a^{m+m+m+\cdots\cdots m}}^{n \text{ сабирака } m} = a^{mn}, \text{ дакле је}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}. \tag{1}$$

Одавде имамо **практично упутство:** *Степен се степенује једним бројем, кад се основа степенује производом тог броја и изложиоца.*

Пример: $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$.

Обртањем једначине (1) имамо

$$a^{m \cdot n} = (a^m)^n.$$

121. Степеновање производа и количника. — По дефиницији степеновања је

$$(ab)^n = \underbrace{ab.\ ab.\ ab. \ldots\ldots\ldots ab}_{n \text{ чинилац } ab.} =$$

$$= \underbrace{a.\ a.\ a \ldots\ldots a}_{n \text{ чинилаца } a} \cdot \underbrace{b.\ b.\ b \ldots\ldots b}_{n \text{ чинилаца } b} = a^n \cdot b^n, \text{ дакле}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Одатле имамо **практично упутство** за степеновање производа једним бројем: *Производ се степенује једним бројем, кад се сваки чинилац степенује тим бројем, па добијени степени помноже.*

Пример. $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$.

Слично претходном имамо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Практично упутство за степеновање количника гласи: *Количник (разломак) се степенује једним бројем, кад се дељеник (бројилац) и делилац (именилац) степенује тим бројем, па степен дељеника (бројиоца) подели степеном делиоца (имениоца).*

Пример: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

Искажи речима обрнута правила од претходних:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

За усмено вежбање

1. $a \cdot a^3 =$; $b^2 \cdot b^5 \cdot b^7 =$; $c \cdot c^3 \cdot c^4 \cdot c^6 =$; $d^m \cdot d^n \cdot d$
2. $m^5 : m^2 =$; $n^{20} : n^6 =$; $p^9 : p^7 =$; $q^x : q^y =$
3. $x^3 : x^5 =$; $y^7 : y^9 =$; $z^{16} : z^4 =$; $t^{p+2} : t^p =$
4. $x^{a+b} =$; $x^{a+b+c} =$; $y^{a-b} =$; $y^{a+b-c} =$
5. $x^6 : x^6 =$. $x^{b-b} =$; $19^0 =$; $5^0 \cdot 13^0 =$; $(1{,}8)^0 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)$
6. $(-2)^3 =$; $(-3)^2 =$; $(-x)^5 =$; $(-x)^{10} =$; $(-t)^{21} =$
7. $(-3)^3 \cdot (-1)^2 =$; $(-4)^3 \cdot (-8)^0 =$; $(-8)^2 : (-4)^0 =$
8. $(2^3)^2 =$; $(2^2)^3 =$; $(x^3)^5 =$; $(a \cdot a^2)^4 =$; $(b^4)^3 \cdot b^2 =$
9. $(5^0)^a =$; $(5^a)^0 = (5^0)^0 =$: $(1^0)^2 =$; $(-2^2)^3 =$; $(-2^3)^2$
10. $(abc)^2 =$; $(2mx)^3 =$; $(-3b)^2 \cdot (4b)^3 =$; $(abxy)^0 =$
11. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 =$; $\left(\frac{1}{5}\right)^4 =$, $(0{,}5)^3 =$; $(0{,}02)^4 =$
12. $2^3 \cdot 5^3 =$; $4^2 \cdot 25^2 =$; $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 =$
13. $2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$; $3^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 =$; $\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n =$

Реши следеће једначине:

14. $2^x = 8$	15. $5^x = 625$	16. $7^x = 1$
17. $2^x = \frac{1}{16}$	18. $5^x - 25 = 0$	19. $2^{x-1} - \frac{1}{32} = 0$
20. $a^x = a^4$	21. $a^{x+3} = a^5$	22. $a^{x-2} = 1$

Степени са негативним изложиоцима

122. — Питајмо се какво значење има израз

$$2^{-3}.$$

По дефиницији степена овакав израз нема никаквог смисла. Ми ћемо ставивши да је

$$-3 = 0 - 3$$

ипак успети да горњи израз протумачимо. Тако је

$$2^{-3} = 2^{0-3} = \frac{2^0}{2^3} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Слично имамо кад радимо са општим бројевима:

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ дакле је}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

тј. *степен са негативним изложиоцем једнак је реципрочној вредности истог степена са позитивним изложиоцем, или једнак је реципрочној вредности основе степеноване позитивним изложиоцем.*

Како је још

$$\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n$$

то имамо правило: *сваки степен може се као чинилац пренети из бројиоца у именилац, или из имениоца у бројилац, кад се промени знак његовог изложиоца.*

Напомена 1. — Раније смо имали да је $0^n = 0$. Ако бисмо се питали шта значи 0^{-n}, дошли бисмо до резултата $0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$. Треба 1 поделити нулом, а такво дељење је немогућно. С тога нула као основа степена може имати само позитивне изложиоце.

Напомена 2. — Сва рачунска правила изведена за степене са позитивним изложиоцима важе и за степене са негативним изложиоцима и за степене са изложоцем нулом.

За усмено вежбање

1. $3^{-2} =$; $4^{-3} =$; $\frac{1}{5^{-2}} =$; $7^3 \cdot 7^{-2} =$; $\frac{2^3}{2^{-2}} =$; $\frac{1}{a^{-3} \cdot x^{-3}}$
2. $b^{-n} \cdot b^0 =$; $(b^0)^{-n} =$; $(3^{-2})^{-3} =$; $a^5 : a^{-3} =$; $x^0 : x^{-8}$

3. $a^4 \cdot a^{-3} =$; $b^{-2} \cdot b^{-3}$; $c^4 \cdot c^{-6} =$; $x^{-a} \cdot x^{-b} =$
4. $y^5 : y^{-3} =$; $z^{-4} : z^2 =$; $m^{-1} : m^{-2} =$; $n^{-a} : n^{-b} =$.

Биномни образац

123. — Нама је већ познато како се добија квадрат бинома. Сад можемо видети како се добија ма који степен бинома. Због тога ћемо редом исписати неколико степена бинома. До тих резултата може се доћи обичним множењем.

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a-b)^1 = a - b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Посматрањем ових једначина запажамо следеће:

1. Ако је други члан бинома позитиван, сви чланови десно имају знак $+$.
2. Ако је други члан бинома негативан, чланови десно имају наизменично знаке $+$ и $-$.
3. У погледу изложилаца чланови на десној страни су симетрични. Збирови изложилаца свих чланова су једнаки почетном изложиоцу. Тако образовани чланови зову се хомогени.
4. И коефицијенти су симетрични. Они се одређују по Паскаловом троуглу:

```
1
1  1
1  2   1
1  3   3   1
1  4   6   4   1
1  5  10  10   5  1
1  6  15  20  15  6  1
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
```

Сабирањем по два узастопна члана претходног реда добијају се чланови потоњег реда. (Види Аритметику за I разред стр. 22!).

124. Квадрат полинома. — Користећи обрасце

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

можемо лако одредити квадрат ма каквог полинома.

Пример 1. $(a+b+c)^2 =$

Решење. — Сматраћемо $(a+b)$ као један члан, па ћемо имати $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\cdot c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, или још згодније написано:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Пример 2. — Радећи слично малопређашњем, добијамо $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$.

За писмено вежбање

1. Рекли смо још у почетку да постоје два начина читања и писања великих бројева. Да би се избегла забуна и да би се избегло изговарање великог броја речи при читању великих бројева, затим да би се избегло писање великог броја цифара, у природним наукама се велики бројеви најчешће пишу у облику степена од 10.

Тако је у науци јединица за мерење дужине сантиметар, па је на пр.

1 km $= 10^5$ cm

Квадрант $= 10^9$ cm (квадрант $= \frac{1}{4}$ земљиног меридијана).

По данашњим мерењима дужина земаљског меридијана је 40 007 km, а екватора 40 076 km.

Брзина кретања земље око сунца је $3 \cdot 10^6$ cm.

Дужина земљине путање је $936 \cdot 10^{11}$ cm.

За мерење већих даљина може се узети за јединицу даљина

$$a = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}.$$

То је пут који светлост пређе у празном простору за 1 секунд. Тада је отприлике даљина Сунца од Земље $500a$, отстојање Нептуна од Сунца 15 $000a$.

За мерење још већих даљина употребљава се даљина коју светлост пређе за једну годину, отприлике $b = 10^{18}$ cm. Тада је отстојање Поларне Звезде од Земље отприлике $43b$.

Најважније мање јединице од сантиметра су, осим милиметра, још и

Стоти део од милиметра $= 10^{-3}$ cm. Бољи нонијус хвата ову величину.

Микрон (μ) $= 10^{-4}$ cm. Најбољи микроскопи могу да разликују као одвојене две тачке удаљене за $0\mu,2$.

Најмање бактерије имају дужину 1μ.

Хиљадити део од микрона ($m\mu$ или $\mu\mu$) $= 10^{-7}$ cm. То је ред величине молекуларних димензија.

Ангстремова јединица (AJ) $= 10^{-8}$ cm употребљава се за изражавање дужина светлосних таласа.

Све горње бројеве изражене степенима ученик да прочита и напише обичним правилима за читање и писање бројева.

2. За површине имамо

$$1\,\text{m}^2 = 10^4\ \text{cm}^2.$$

Изрази слично овоме ар, хектар, квадратни километар, површину Југославије, Европе, површину целе Земље!

3. Површина Сунца је $6 \cdot 10^{22}\text{cm}^2$. Изрази ову површину у километрима квадратним!

4. За запремине имамо

$$1\ \text{dm}^3 = 10^3\text{cm}^3$$
$$1\ \ \text{m}^3 = 10^6\text{cm}^3.$$

Запремина Земље је $1{,}083 \cdot 10^{27}\,\text{cm}^3$. Изрази овај број најпре у кубним метрима, затим у кубним километрима!

5. Јединица за мерење тежине је грам (g). Тежина Земље је $6 \cdot 10^{27}$g, тежина Сунца је $1{,}8 \cdot 10^{33}$g. Изрази ове тежине у тонама!

6. Тежина једног атома водониковог је $1{,}64 \cdot 10^{-24}$g. Како се овај број може друкчије да напише?

---

7. $m^3 \cdot n^6 \cdot m^{10} \cdot n^{13} \cdot m^5 \cdot n^{19} =$; $a^3b^3 \cdot a^8b^{44} \cdot a^{65} \cdot a^{52} \cdot b =$

8. $x^n \cdot x =$; $x^{2-a} \cdot x^a =$; $a^{x-8} \cdot a^{2x+5} \cdot a^{3-3x} =$

9. $a^{m+n-7} \cdot a^{2m-n+8} \cdot a^{11-3m} =$

$$p^{2x-3y+5} \cdot p^{3x+2y-5} \cdot p^{x+6y-4} =$$

---

10. $(m-n)^{n-2} \cdot (m-n)^{3-y} \cdot (m-n)^{x-1} \cdot$
$\cdot\,(m-n)^{y-2x} =$

11. $(-a)^7 =$; $(-b)^8 =$; $(-c)^{2x} =$; $(-d)^{2a-1} =$
$(-e)^{4n-2} =$

12. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 +$
$+ (-1)^6 =$

13. $(-5)^4 =$; $-5^4 =$; $(-0{,}1)^4 =$; $-0{,}1^4 =$

14. $(-a)^8 \cdot (-a)^5 \cdot (-a)^9 =$; $(-b)^2 \cdot (-b)^4 \cdot (-b)^6$

15. $x^{15} : x^7 =$; $(-y)^{24} : (-y)^{37} =$; $x^9y^{19} : x^4y^{12} =$

16. $a^{x-1} : a =$; $a^{x+1} : a =$; $a^8 : a^{x+2} =$; $x^2 : x^{n-1} =$

17. $\dfrac{a}{a^{n-1}} =$; $\dfrac{b^{m+n}}{b^n} =$; $\dfrac{c^{a+1}}{c^a} =$; $\dfrac{d^{n-1}}{d^n} =$

18. $p^{5a}q^{3b}r^{7c-8} : p^{2a}q^{4b}r^{7c-9} =$; $m^{3-4x}n^{5+x} : m^{1-6x}$

19. $(a^{3x} + a^{2x}b + a^xb^2 + b^3)\,(a^x - b) =$

20. $(a^{n-2m} + b^{4n-3m})\,(a^{2m+5n} - b^{3m-2n}) =$

21. $(m^{4x} - m^{3x+y} + m^{2x+2y} - m^{x+3y} + m^{4y}) \cdot (m^x + m^y) =$

22. $\dfrac{2a^3x^5}{3b^2y^4} \cdot \dfrac{6ay^3}{5bx^4} \cdot \dfrac{by}{a^2x^2} =$; $\dfrac{21\,a^{19}}{25\,b^{12}} \cdot \dfrac{15b^{10}x^{14}}{32a^{11}} \cdot \dfrac{80b^4}{27a^7x^{11}} =$

23. $\dfrac{a^x}{b^x} \cdot \dfrac{a^{x-2}}{b^{x-1}} \cdot \dfrac{b^{x-2}}{a^{x-3}} =$; $\dfrac{(a+b)^{x+2}}{(a-b)^{2y+1}} \cdot \dfrac{(a-b)^{2+2y}}{(a+b)^{x+1}} =$

24. $\dfrac{45m^{13x-10y}}{56n^{15x+20y}} : \dfrac{72n^{5x-10y}}{32m^{7x-5y}} =$; $\dfrac{72x^{12}(-y)^{30}}{35(-b)^{15}} : \dfrac{108x^{15}y^{26}}{49(-b)^{17}} =$

25. $\dfrac{1}{x^8} + \dfrac{1}{x^6} - \dfrac{1}{x^2} =$; $\dfrac{1}{x^n} - \dfrac{1}{x^{n-1}} + \dfrac{1}{x^{n-2}} =$

26. $\dfrac{1}{a^{2n-5}} - \dfrac{2a^2+2}{a^{2n-3}} - \dfrac{a^4-1}{a^{2n-1}} =$

27. $\dfrac{a^3-x^3}{a^4+x^4} - \dfrac{a^3+x^3}{a^4-x^4} =$; $\dfrac{a^x+b^x}{a^x-b^x} - \dfrac{a^x-b^x}{a^x+b^x} =$

28. $(a^6 - b^6) : (a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3) =$

29. $(ax^m + bx^n + cx^{m+n}) : x^{m-n} =$

30. $[a^{3x-4y} + a^{2y-3x} + a^{3(x-y)}] : a^{4x-5y} =$

31. $(a^n - b^n) : (a-b) =$; $(a^{2n} - b^{2n}) : (a+b) =$;
$(a^{2n+1} + b^{2n+1}) : (a+b) =$

Какве правила добијамо одавде?

Да се одмах напишу резултати следећих количника:

32. a) $(a^6 - b^6) : (a+b)$ b) $(m^7 - n^7) : (m-n)$
c) $(x^9 + y^9) : (x+y)$ d) $(p^8 - q^8) : (p-q)$

33. Следећи изрази да се раставе на чиниоце:
a) $a^5 - b^5$ b) $a^5 + b^5$ c) $a^7 - b^7$
d) $a^7 + b^7$ e) $a^{10} - b^{10}$ f) $\dfrac{1}{32}m^5 + 1024n^5$

34. $(a^3)^4 =$; $(-b^5)^5 =$; $(c^{a-b})^x =$; $(-d^{2n})^2 =$; $(-b^2)^{2n-1} =$

35. $\dfrac{(a^3)^2 \cdot (b^4)^3}{(a^4)^4 \cdot (b^5)^2} =$; $\dfrac{(-m^4)^3 \cdot (-n^7)^2 \cdot (-p^5)^3}{(-p^2)^4 \cdot (m^3)^3 \cdot (n^2)^5} =$

36. $(a^2)^4(b^3)^2 + 3(a^3)^4(b^2)^4 - 2(a^6)^2(b^4)^2 - (a^4)^2(b^2)^3 =$

37. $(3^2)^2[(a^2)^3]^2 - (2^3)^2[(a^3)^2]^2 - (2^3)^2[(a^2)^2]^3 =$

38. $\dfrac{(a^3)^4}{(a^3)^3} - 4\,\dfrac{(a^5)^3}{(a^3)^4} - 5\,\dfrac{(a^6)^4}{(a^3)^7} + 9\,\dfrac{(a^2)^9}{(a^3)^5} =$

39. $(a^{x+y})^{x+y} =$; $(c^{a+b})^{a-b} =$

40. $(a^{2x})^{2x-4} \cdot (a^{3x-1})^4 \cdot (a^{1-2x})^{2x+3} \cdot a^2 =$

41. $\dfrac{(a^2)^{x-1}}{(b^{z-x})^3} : \left[\dfrac{(a^{x-1})^{x-2}}{(b^{x-2})^{x-3}} : \dfrac{(a^{x-2})^{x-2}}{(b^{x+1})^{x-2}}\right] =$

42. Следећи изрази да се раставе на чиниоце:

a) a^9-b^9 b) $a^{2x}-b^{2x}$ c) $m^{3x}+n^{3x}$

43. $(ax)^{10} =$; $(a^2x^1)^4 =$; $(-4a^3b^2c^2)^2 =$; $(-a^x b^y)^{11} =$

44. $(-ax)^4 \cdot (-by^3) \cdot (abxy)^{x-3} =$; $(a^{x-1}b^{x+1})^2 =$

45. $\left(6\dfrac{2}{3}\right)^2 =$; $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^3 =$; $1{,}25^2 =$; $\left(-\dfrac{3}{8}\right)^3 =$ $(-0{,}125)^4 =$

46. $\left(\dfrac{a^5}{b^4}\right)^2 =$; $\left(\dfrac{m^3x^4}{p^2q}\right)^7 =$; $\left(\dfrac{x^2y^3}{ac^2}\right)^x =$; $\left(-\dfrac{5x^p y^q}{7z^u w^v}\right)^3 =$

47. $(-2m)^5 \cdot (-3p)^3 =$; $(-5a^4) \cdot (-4a)^6 =$

48. $(-0{,}2x)^{10} \cdot (-5x)^3 =$; $\left(-\dfrac{2}{3}m\right)^9 \cdot \left(-\dfrac{9}{8}m\right)^4 =$

49. Следеће биноме подигни на квадрат, пошто претходно извучеш заједничке чиниоце:

$(2a-2b)^2 =$; $(3a^4b-12a^3b^3)^2 =$; $(5ab^2-10a^2b)^2 =$

50. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{7}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{6}{7}\right)^2 =$; $\left(\dfrac{9}{16}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{8}{25}\right)^2 : \left(\dfrac{10}{3}\right)^5 =$

51. $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{a^3b^2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{b^5}{a}\right)^2 =$; $\left[\dfrac{(-a)^3 \cdot (-b)^2}{(-c)^4 \cdot (-d)^5}\right]^5 =$

52. $\dfrac{\left(4\dfrac{1}{5}\right)^4 : 7^2}{\left(\dfrac{9}{10}\right)^3\left(1\dfrac{1}{14}\right)^2} =$; $\dfrac{13^2 : \left(1\dfrac{4}{11}\right)^3}{(11 \cdot 13)^2 : (2 \cdot 15)^3} =$

53. $\left(\dfrac{m^{3x-2y}\ n^{x+4y}}{m^{5y-2x}\ n^{3y+4x}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{m^{5x-3y}\ n^{4x+6y}}{m^{3x-2y}\ n^{2y+3x}}\right)^3 =$

54. $\dfrac{(12a-12b)^5}{(27a+45b)^2} \cdot \dfrac{(12a+20b)^3}{(8a-12b)^6} \cdot \dfrac{(4a-6b)^2}{(9a+15b)^3} =$

55. $\dfrac{(x+x^2)^5}{(x^2-x^3)^2} : \dfrac{(x^2+2x^3+x^4)^4}{(x^3-x^5)^3}$

56. $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{x}\left(\dfrac{x}{3}\right)^3 - 16\left[\dfrac{(3x^2)^2}{(2x)^3}\right]^2 =$

57. $\left[\dfrac{(1-x)^3}{(1-x^2)^3}\right]^4 : \left[\dfrac{1-2x+x^2}{(1+2x+x^2)^2}\right]^2 =$

58. $2^5 \cdot 5^5 =$; $8^2 \cdot 5^2 =$; $25^8 \cdot 4^8 =$; $\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot 2^3 =$

59. $125^3 \cdot 8^3 \cdot 3^3 =$; $0{,}25^4 \cdot 0{,}4^4 \cdot 3^4 =$; $0{,}625^3 \cdot 0{,}8^3 =$

60. $\left(\dfrac{22}{39}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{39}{44}\right)^4 =$; $\left(1\dfrac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(1\dfrac{1}{2}\right)^3 =$; $\left(1\dfrac{1}{14}\right)^4 \cdot \left(2\dfrac{1}{10}\right)^4$

61. $(2m-3n)^y \cdot (9n^2+4m^2)^y \cdot (2m+3n)^y =$

62. $(50^m - 30^m + 18^m) \cdot (5^m + 3^m) =$

63. $\left(\dfrac{a}{b}-1\right)^3 \cdot \left(\dfrac{a}{a-b}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^3 =$

64. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^5 \cdot \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^5 =$

65. $15^3 : 5^3 =$; $5{,}6^4 : 2{,}8^2 =$; $(-62{,}5)^4 : (-1{,}25)^4 =$

66. $\left(19\dfrac{4}{5}x^3\right)^6 : \left(4\dfrac{2}{5}x^4\right)^6 =$; $\left(\dfrac{3{,}9p^3}{1{,}05q^4}\right)^3 : \left(\dfrac{6{,}5p}{4{,}2q^2}\right)^3 =$

67. $(81m^4 - 121n^6)^x : (9m^2 - 11n^3)^x =$

68. $(10a^2 - 23ab + 12b^2)^m : (5a-4b)^m =$

69. Напиши у облику децималних бројева

$10^{-1}\quad 10^{-2}\quad 10^{-3}\quad 10^{-4}\quad 10^{-5}$!

70. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} =$; $\left(1\dfrac{1}{3}\right)^{-3} =$; $0{,}01^{-1} =$; $0{,}1^{-6} =$; $0{,}02^{-5} =$

71. $1 : 3^{-2}$; $1 : 2^{-7} =$; $3 : 3^{-3} =$; $5 : 5^{-2} =$

72. $(-3)^{-2} =$; $(-4)^{-3} =$; $(-x)^{-6} =$; $(-u)^{-3} =$

73. $(-0{,}2)^{-5} =$; $(-0{,}25)^{-2} =$; $(-0{,}625)^{-1} =$

74. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-1} =$; $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-1} =$; $\left(\dfrac{c}{d}\right)^{-3} =$; $\dfrac{a}{b^{-4}} =$

75. $7^0 =$; $2^0 + 3 =$; $5^0 - 4^0 =$; $6^0 \cdot 3 =$; $2^0 \cdot 3^0 =$

76. $8^0 : 2 =$; $1 : a^0 =$; $x^0 : b =$; $a^{p-q} \cdot a^{q-p} =$

77. $x^{-m} : a^0 =$; $m^0 : c^{-m} =$; $a^{-x} : b^0 =$; $x^b : a^0 \cdot x^b =$

78. $2^{-2} \cdot 2^{-3} =$; $3^{-2} \cdot 3^{-1} =$; $-4^{-3} \cdot 4^0 =$; $a^5 \cdot a^{-11} =$

79. $a^0 \cdot a^{-9} =$; $9 \cdot 3^{-2} =$; $a^8 \cdot a^{-8} =$; $b^{-4} : b^{-9} =$

80. $a^m : a^{-n} =$; $b^{n-3} : b^{-5} =$; $x^{-n} : x^{n-2} =$; $a^{-2}a^2 : x^4y^{-5}$

81. У следећим примерима да се уклоне негативни изложиоци:

a) $\dfrac{7a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{8a^{-2}b^{-3}c^{-4}}$ b) $\dfrac{3{,}6a^0b^{-4}}{24a^{-1}b^3c^{-4}}$ c) $\dfrac{18x^{-4}y^{-5}z}{24x^{-3}y^8z^{-1}}$

82. Следећи количници да се напишу као производи:

a) $\dfrac{3a^2b^3c^4d^8}{5x^3y^2z^5u^{10}}$ b) $\dfrac{19m^4x^6t^{15}}{7x^8y^{12}z^3}$

83. $\dfrac{2a^4b^{-3}}{3x^4y^{-3}} \cdot \dfrac{6a^{-4}b^4}{5x^{-5}y^3} =$; $\dfrac{a^4x^{-3}}{a^{-2}x^2} \cdot \dfrac{a^{-1}x}{a^3x^{-2}} =$

41. $\dfrac{(a^2)^{x-1}}{(b^{z-x})^3} : \left[\dfrac{(a^{x-1})^{x-2}}{(b^{x-2})^{x-3}} : \dfrac{(a^{x-2})^{x-2}}{(b^{x+1})^{x-2}}\right] =$

42. Следећи изрази да се раставе на чиниоце:

a) $a^9 - b^9$ b) $a^{2x} - b^{2x}$ c) $m^{3x} + n^{3x}$

43. $(ax)^{10} =$; $(a^2x^1)^4 =$; $(-4a^3b^2c^2)^2 =$; $(-a^x b^y)^{11} =$

44. $(-ax)^4 \cdot (-by^3) \cdot (abxy)^{x-3} =$; $(a^{x-1}b^{x+1})^2 =$

45. $\left(6\dfrac{2}{3}\right)^2 =$; $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^3 =$; $1{,}25^2 =$; $\left(-\dfrac{3}{8}\right)^3 =$ $(-0{,}125)^4 =$

46. $\left(\dfrac{a^5}{b^4}\right)^2 =$; $\left(\dfrac{m^3x^1}{p^2q}\right)^7 =$; $\left(\dfrac{x^2y^3}{ac^2}\right)^x =$; $\left(-\dfrac{5x^p y^q}{7z^u w^v}\right)^3 =$

47. $(-2m)^5 \cdot (-3p)^3 =$; $(-5a^4) \cdot (-4a)^6 =$

48. $(-0{,}2x)^{10} \cdot (-5x)^3 =$; $\left(-\dfrac{2}{3}m\right)^9 \cdot \left(-\dfrac{9}{8}m\right)^4 =$

49. Следеће биноме подигни на квадрат, пошто претходно извучеш заједничке чиниоце:

$(2a - 2b)^2 =$; $(3a^4b - 12a^3b^3)^2 =$; $(5ab^2 - 10a^2b)^2 =$

50. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{7}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{6}{7}\right)^2 =$; $\left(\dfrac{9}{16}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{8}{25}\right)^2 : \left(\dfrac{10}{3}\right)^5 =$

51. $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{a^3b^2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{b^5}{a}\right)^2 =$; $\left[\dfrac{(-a)^3 \cdot (-b)^2}{(-c)^4 \cdot (-d)^5}\right]^5 =$

52. $\dfrac{\left(4\dfrac{1}{5}\right)^4 : 7^2}{\left(\dfrac{9}{10}\right)^3\left(1\dfrac{1}{14}\right)^2} =$; $\dfrac{13^2 : \left(1\dfrac{4}{11}\right)^3}{(11 \cdot 13)^2 : (2 \cdot 15)^3} =$

53. $\left(\dfrac{m^{3x-2y}\ n^{x+4y}}{m^{5y-2x}\ n^{3y+4x}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{m^{5x-3y}\ n^{4x+6y}}{m^{3x-2y}\ n^{2y+3x}}\right)^3 =$

54. $\dfrac{(12a - 12b)^5}{(27a + 45b)^2} \cdot \dfrac{(12a + 20b)^3}{(8a - 12b)^6} \cdot \dfrac{(4a - 6b)^2}{(9a + 15b)^3} =$

55. $\dfrac{(x + x^2)^5}{(x^2 - x^3)^2} : \dfrac{(x^2 + 2x^3 + x^4)^4}{(x^3 - x^5)^3}$

56. $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{x}\left(\dfrac{x}{3}\right)^3 - 16\left[\dfrac{(3x^2)^2}{(2x)^3}\right]^2 =$

57. $\left[\dfrac{(1 - x)^3}{(1 - x^2)^3}\right]^4 : \left[\dfrac{1 - 2x + x^2}{(1 + 2x + x^2)^2}\right]^2 =$

58. $2^5 \cdot 5^5 =$; $8^2 \cdot 5^2 =$; $25^8 \cdot 4^8 =$; $\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot 2^3 =$

59. $125^3 \cdot 8^3 \cdot 3^3 =$; $0{,}25^4 \cdot 0{,}4^4 \cdot 3^4 =$; $0{,}625^3 \cdot 0{,}8^3 =$

60. $\left(\dfrac{22}{39}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{39}{44}\right)^4 =$; $\left(1\dfrac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(1\dfrac{1}{2}\right)^3 =$; $\left(1\dfrac{1}{14}\right)^4 \cdot \left(2\dfrac{1}{10}\right)^4$

61. $(2m - 3n)^y \cdot (9n^2 + 4m^2)^y \cdot (2m + 3n)^y =$

62. $(50^m - 30^m + 18^m) \cdot (5^m + 3^m) =$

63. $\left(\dfrac{a}{b} - 1\right)^3 \cdot \left(\dfrac{a}{a - b}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^3 =$

64. $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^5 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{x^2}{x^2 - 1}\right)^5 =$

65. $15^3 : 5^3 =$; $5{,}6^4 : 2{,}8^2 =$; $(-62{,}5)^4 : (-1{,}25)^4 =$

66. $\left(19\dfrac{4}{5}x^3\right)^6 : \left(4\dfrac{2}{5}x^4\right)^6 =$; $\left(\dfrac{3{,}9p^3}{1{,}05q^4}\right)^3 : \left(\dfrac{6{,}5p}{4{,}2q^2}\right)^3 =$

67. $(81m^4 - 121n^6)^x : (9m^2 - 11n^3)^x =$

68. $(10a^2 - 23ab + 12b^2)^m : (5a - 4b)^m =$

69. Напиши у облику децималних бројева

10^{-1} 10^{-2} 10^{-3} 10^{-4} 10^{-5}!

70. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} =$; $\left(1\dfrac{1}{3}\right)^{-3} =$; $0{,}01^{-1} =$; $0{,}1^{-6} =$; $0{,}02^{-5} =$

71. $1 : 3^{-2}$; $1 : 2^{-7} =$; $3 : 3^{-3} =$; $5 : 5^{-2} =$

72. $(-3)^{-2} =$; $(-4)^{-3} =$; $(-x)^{-6} =$; $(-u)^{-3} =$

73. $(-0{,}2)^{-5} =$; $(-0{,}25)^{-2} =$; $(-0{,}625)^{-1} =$

74. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-1} =$; $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-1} =$; $\left(\dfrac{c}{d}\right)^{-3} =$; $\dfrac{a}{b^{-4}} =$

75. $7^0 =$; $2^0 + 3 =$; $5^0 - 4^0 =$; $6^0 \cdot 3 =$; $2^0 \cdot 3^0 =$

76. $8^0 : 2 =$; $1 : a^0 =$; $x^0 : b =$; $a^{p-q} \cdot a^{q-p} =$

77. $x^{-m} : a^0 =$; $m^0 : c^{-m} =$; $a^{-x} : b^0 =$; $x^b : a^0 \cdot x^b =$

78. $2^{-2} \cdot 2^{-3} =$; $3^{-2} \cdot 3^{-1} =$; $-4^{-3} \cdot 4^0 =$; $a^5 \cdot a^{-11} =$

79. $a^0 \cdot a^{-9} =$; $9 \cdot 3^{-2} =$; $a^8 \cdot a^{-8} =$; $b^{-4} : b^{-9} =$

80. $a^m : a^{-n} =$; $b^{n-3} : b^{-5} =$; $x^{-n} : x^{n-2} =$; $a^{-2} a^2 : x^4y^{-5}$

81. У следећим примерима да се уклоне негативни изложиоци:

a) $\dfrac{7a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{8a^{-2}b^{-3}c^{-4}}$ b) $\dfrac{3{,}6a^0b^{-4}}{24a^{-1}b^3c^{-4}}$ c) $\dfrac{18x^{-4}y^{-5}z}{24x^{-3}y^3z^{-1}}$

82. Следећи количници да се напишу као производи:

a) $\dfrac{3a^2 b^3 c^4 d^8}{5x^3 y^2 z^5 u^{10}}$ b) $\dfrac{19m^4 x^6 t^{15}}{7x^8 y^{12} z^3}$

83. $\dfrac{2a^4 b^{-3}}{3x^4 y^{-3}} \cdot \dfrac{6a^{-4} b^4}{5x^{-5} y^3} =$; $\dfrac{a^4 x^{-3}}{a^{-2} x^2} \cdot \dfrac{a^{-1} x}{a^3 x^{-2}} =$

90. $3^{-4} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{10} =$; $m^{-x} \cdot n^{-x} =$; $4^{-7} \cdot 4 : 4^{-5} =$

91. $(-2)^{-4} \cdot 5^{-4} =$; $(-8)^{-2} \cdot (-125)^{-2} =$

92. $(a^{-3})^2 =$; $(b^5)^{-4} =$; $[(0{,}5)^{-4}]^2 =$; $[(0{,}02)^{-3}]^5 =$

93. $(m^{-a})^0 =$; $(a^0)^0 =$; $(314a^{-7})^2 =$; $(m^0)^{-12} =$

94. $\frac{4}{15a^{-4}b^{-x}c} \cdot \frac{9}{8a^2b^{x-1}c^{-x}} =$;

$$\frac{3{,}5a^{-9}\,b^{-4}c^{-5}}{0{,}68x^{-6}y^8z^{-3}} \cdot \frac{105a^{-11}x^7y^{-6}}{10{,}2z^{-6}x^8b^{-2}} =$$

95. $(5a^2b^{-3} - 4a^{-2}b^3) \cdot (5a^2b^{-3} + 4a^{-2}b^3) =$

96. $(x^{-6m} - y^{-3x}) : (x^{-4m} + x^{-2m}y^{-3x} + y^{-6x}) =$

97. $\left(\frac{x^{-1}y^2}{2v^3w^{-2}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4x^3y^{-2}}{3v^{-4}w^3}\right)^{-2} : \left(\frac{3^{-3}x^3y^{-2}}{2^{-2}v^{-2}w}\right)^{-2} =$

98. $\left(3\frac{2}{11}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{16}{45}\right)^{-4} \cdot \left(1\frac{5}{28}\right)^{-4} - \left(\frac{65}{144}\right)^{-3} : \left(\frac{13}{48}\right)^{-3} =$

99. $\left|\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}\right|^{-1} + \left|\left\{\left[\left(0{,}5\right)^{0}\right]^{-2}\right\}^{-3}\right|^{-1} =$

100. $\{[(-a)^3])^4{}^{-5} =$; $[(-a)^{-3}]^{-5} =$; $\{[(-a)^{-4}]^{-6}\}^{-1}$

101. $\frac{a^{-4}y^{-3}}{b^{-2}x^3} : \frac{y^{-8}x^{-3}}{a^4b^{-3}} =$; $-\left\{-\left[-\left(-a\right)^2\right]^3\right\}^{-1} =$

102. $3(-a)^2 - 4(-a)^3 \cdot a^{-1} - 5a^{-2} : (-a)^{-4} =$

103. $[2(-a)^{-3}]^{-2} - [4(-\frac{1}{2}a)^2]^3 + (-2)^{13}[-(4a^{-1})^{-2}]^3 =$

104. $\frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}} \cdot \frac{1 - ab^{-1}}{1 + a^2b^2} =$; $\frac{x^{-1} - 1}{x^{-2} - x} : \frac{x^{-1} + 1}{x^{-1} - x} =$

105. $\frac{3x^{-1} - y^{-1}}{2^{-1}x^{-1} + y^{-2}} : \left(\frac{2y^{-2} + x^{-1}}{1 - 3^{-1}xy^{-1}}\right)^{-1} =$

106. $\left(\frac{b^{-1} + a^{-1}}{ab^{-4} + ba^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}} =$

107. $(12 - 2)^4 =$; $(2 + 3)^5 =$; $(2x + 3y)^4 =$; $(3a - 2b)^5 =$

Задаци да се реше по биномном обрасцу.

108. Колика је разлика између

$(9 + 5)^3$ и $9^3 + 5^3$; $(5 - 3)^4$ и $5^4 - 3^4$?

109. $(3p - q)^3 - (p - 2q)^3 =$; $(4e + 5f)^4 - (e + 2f)^4 =$

110. $(3r + 4s)^5 - (5s - 2r)^5 =$; $(u + v)^6 - (u - v)^6 =$

111. $[x + (a - b)]^2 =$ 112. $[x - (a + b)]^2 =$

113. $(x^2 + 2x + 1)^2 =$ 114. $(a + b + c - d)^2 =$

115. $(a - b + c - d)^2 =$ 116. $(0{,}5a + 0{,}3b - 0{,}2c)^2 =$

117. $(0{,}4x + 0{,}1y - 0{,}2z - 0{,}5a)^2 =$

ГЛАВА XI

КОРЕНОВАЊЕ

Степен са разломљеним изложиоцем, појам корена

125. — Досада смо већ имали случајеве да изложилац степена

$$a^m$$

постане нула или негативан број. Иако по дефиницији степена такви изрази a^0 или a^{-2} немају никаквог смисла, ми смо ипак успели да такве степене протумачимо. Рекли смо још да све рачунске радње са степенима важе и онда, кад су изложиоци нуле и негативни бројеви.

Остаје нам још да испитамо случај, кад је изложилац разломак. Узмимо најпростији случај

$$a^{\frac{1}{2}}.$$

По дефиницији степена ово нема смисла. Али ако овај степен степенујемо са 2 по обрасцу

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

добићемо

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2} \cdot 2} = a^1 = a.$$

$a^{\frac{1}{2}}$ је онај број, који подигнут на квадрат даје а.

И како је по дефиницији квадратног корена

$$(\sqrt{a})^2 = a,$$

то ћемо ми због тога узети **да је исто $\sqrt{a}$ и $a^{\frac{1}{2}}$.**

Слично размишљамо и за степен $a^{\frac{1}{n}}$.

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

$a^{\frac{1}{n}}$ је онај број, који степенован са n даје а.

Ако ставимо

$$a^{\frac{1}{n}} = x,$$

то је $$x^n = a, \qquad (2)$$

па је $$x = a^{\frac{1}{n}}$$

у ствари решење једначине (2).

Раније смо већ видели (види Алгебру за III р. стр. 86!) да је решење једначине $x^2 = a$ дато у облику

$$x = \sqrt{a}.$$

Слично томе пишемо решење једначине $x^n = a$ и у облику

$$x = \sqrt[n]{a}.$$

и изговарамо „n-ти корен из a".

126. — Једначина $x^n = a$ захтева да се одреди онај број x, који степенован са n даје a. Њено решење можемо написати на два начина:

или као степен са разломљеним изложиоцем

$$x = a^{\frac{1}{n}}$$

или као n-ти корен

$$x = \sqrt[n]{a}.$$

Дакле $\sqrt[n]{a}$ **значи исто што и** $a^{\frac{1}{n}}$.

Ми ћемо радити или са кореном или са степеном са разломљеним изложиоцем, према томе како се рачун покаже удобнији и лакши.

127. — Ако радимо са кореном, онда називамо рачунску радњу којом се извлачи n-ти корен **корeновање.** Она је **обрнута радња степеновању.** Према једначини $x^n = a$ познат је степен и изложилац, а тражи се основа.

Број **a** *кореновати бројем* **n** *значи тражити онај број који степенован са* **n** *даје* **a.** **a** *се зове* **радиканд,** *n* **корени изложилац,** *а резултат* **корен.**

$$\sqrt[\text{корени изложилац}]{\text{радиканд}} = \text{корен}.$$

128. — Ставимо ли у једначини $x^n = a$ место x нађену вредност $x = \sqrt[n]{a}$, добијамо

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,$$

тј. *ако корен степенујемо његовим кореним изложиоцем, добијамо радиканд.*

Исто тако добијамо непосредно из појма корена

$$\sqrt[m]{a^m} = a,$$

тј. ако коренујемо степен његовим изложиоцем, добијамо основу.

Напомена. — Са радњом извлачењем n-тог корена

решен је и проблем: *да се један број растави на n једнаких чинилаца.*

129. — **Специјални корени.** —

$\sqrt[1]{a} = a$, тј. **први корен** из једног броја је сам тај број.

Други корен $\sqrt[2]{a}$ зове се **квадратни корен.** Код њега се корени изложилац не пише, дакле само $\sqrt{a}$.

Трећи корен $\sqrt[3]{a}$ зове се и **кубни корен.**

Напомена. — Оним очигледним правилима, која смо користили за решавање једначина можемо додати још и ово:

Кад се једнаке величине степенују или коренују једнаким бројевима, добијају се једнаки резултати.

За усмено вежбање

1. $4^{\frac{1}{2}} =$; $8^{\frac{1}{3}} =$; $16^{\frac{1}{4}} =$; $32^{\frac{1}{5}} =$; $27^{\frac{1}{3}} =$; $64^{\frac{1}{3}} =$

2. $4^{-\frac{1}{2}} =$; $\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$; $16^{\frac{1}{2}}$ $16^{\frac{1}{2}} =$; $25^{\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} =$

3. $1 : 3^4 =$; $1 : 3^{-4} =$; $1 : 4^{\frac{1}{2}} =$; $1 : 4^{-\frac{1}{2}} =$

4. $0{,}36^{\frac{1}{1}} =$; $0{,}49^{-\frac{1}{2}} =$; $0{,}64^{0.5} =$; $81^{0{,}25} =$

5. $0{,}01^{\frac{1}{2}} =$; $0{,}0625^{-\frac{1}{4}} =$; $0{,}0001^{0{,}5} =$; $0{,}00001^{-0{,}2} =$

6. $\sqrt[3]{1\,000\,000} =$; $\sqrt[6]{1\,000\,000} =$; $\sqrt[6]{64} =$; $\sqrt[5]{243} =$

7. $\sqrt[n]{0} =$; $\sqrt[n]{1} =$; $\sqrt[3]{-1} =$; $\sqrt[5]{-1} =$

8. $\left(\sqrt{5}\right)^2 =$; $\left(\sqrt[3]{27}\right)^3 =$; $\sqrt[3]{27^3} =$; $\sqrt[4]{16^4} =$; $\left(\sqrt[4]{16}\right)^4 =$

9. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} =$; $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a} =$; $\left(\sqrt{mn}\right)^2 =$; $\sqrt{(a-b)^2} =$

10. $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} =$; $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} =$.

11. Број 128 да се растави на 7 једнаких чинилаца. Колики је сваки чинилац?

12. Број 729 да се растави на 6 једнаких чинилаца.
13. Број a да се растави на n једнаких чинилаца.
14. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} =$; $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} =$
15. $(a^2 - 6ab^3 + 9b^4)^{-\frac{1}{2}} =$; $\sqrt{a^{2m} + 2a^m b^n + b^{2n}} =$
16. Чиме треба помножити

a) $\sqrt{3}$ да се добије 3,

b) $\sqrt{a}$ да се добије a,

c) $\sqrt[3]{2}$ да се добије 2,

d) $\sqrt[3]{b}$ да се добије b?

Рачунске радње са коренима

130. — Општи случај са разломљеним изложиоцем. — Питајмо се најзад шта значи

$$8^{\frac{2}{3}}.$$

Овај степен можемо израчунати на овај начин:

$$8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3} \cdot 2} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4.$$

$8^{\frac{2}{3}}$ значи кубни корен из 8 подигнут на квадрат.

Очевидно је да смо могли доћи до истог резултата, да смо најпре број 8 подигли на квадрат, па из резултата извукли кубни корен:

$$8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3} \cdot 2} = \left(8^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Из овога дакле излази да је

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 \quad \text{или}$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}.$$

Слично размишљамо и у случају општих бројева.

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \quad \text{или}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{тј.}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Одавде имамо ово **практично упутство** за степеновање броја разломком: *Број се степенује разломком, кад се степенује бројиоцем и коренује имениоцем тог разломка произвољним редом.*

Напомена 1. — Ми ћемо и даље израз

$$\sqrt[n]{a^m}$$

звати просто *корен*. Број n зваћемо *корени изложилац*, а број m *степени изложилац*.

После овога ми знамо сваки степен са разломљеним изложиоцем да претворимо у корен, и обрнуто сваки корен да претворимо у степен.

Искажи практично упутство како се корен претвара у степен!

Напомена 2. — Једначина:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

читана с лева надесно и с десна налево даје нам **практична упутства** *како се корен степенује и како се степен коренује.*

За усмено вежбање

Следећи степени да се претставе у облику корена, а где је могућно и да се израчунају.

1. $16^{\frac{3}{2}} =$; $64^{\frac{2}{3}} =$; $81^{\frac{3}{4}} =$; $27^{-\frac{2}{3}} =$; $32^{-\frac{3}{5}} =$
2. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-0,5} =$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{-1,5} =$; $\left(\frac{16}{81}\right)^{-0,75} =$; $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} =$
3. $a^{\frac{2}{5}} =$; $b^{\frac{2}{7}} =$; $c^{\frac{3}{8}} =$; $d^{1\frac{1}{5}} =$; $x^{\frac{p}{q}} =$

Следећи корени да се изразе као степени:

4. $\sqrt[3]{a^2} =$; $\sqrt{b^3} =$; $\sqrt[4]{c^3} =$; $\sqrt[3]{d^{-4}} =$; $\sqrt[5]{e^{-6}} =$
5. $\sqrt[m]{x^p} =$; $\sqrt[p]{y^m} =$; $\sqrt[r]{a+b} =$; $\sqrt[3]{(a-b)^r} =$

За писмено вежбање

1. Разломак $\frac{m}{n}$ може да се произвољним бројем прошири и скрати. Због тога имамо:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot x}{n \cdot x}} = a^{\frac{m : y}{n : y}}.$$

Ако место степена са разломљеним изложиоцем напишемо одговарајући корен, имамо

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[n:y]{a^{m:y}}$$

тј. *један корен се не мења, ако и корени изложилац и степени изложилац помножимо или поделимо једним истим бројем.*

Да се ово правило примени на следећим задацима:

$$\sqrt[6]{a^4} = ;\quad \sqrt[8]{b^6} = ;\quad \sqrt[5]{c^{10}} = ;\quad \sqrt[9]{d^{12}} = ;\quad \sqrt[21]{e^{14}} =$$

2. Помоћу овог правила могу се корени са разним кореним изложиоцем довести на исти корени изложилац.

Да се следећи корени доведу на најмањи заједнички корени изложилац:

a) $\sqrt{a}$ и $\sqrt[3]{a}$

b) $\sqrt{m}$, $\sqrt[3]{m}$, $\sqrt[5]{m}$

c) $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n^2}$, $\sqrt[4]{n^3}$, $\sqrt[6]{n}$.

3. $\sqrt[3]{(a+b)^6} = ;\quad \sqrt[6]{(m-n)^{12}} = ;\quad \sqrt{(x^2+2xy+y^2)^3} =$

4. $\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2} = ;\quad \sqrt[6]{m^2+2mn+n^2} =$

5. $\sqrt[n]{a^{2n}} = ;\quad \sqrt[2m]{b^{6m}} = ;\quad \sqrt[5]{e^{5r-10}} = ;\quad \sqrt[11]{d^{22s-33}} =$

131. — Кад смо овако научили да преобраћамо корене у степене ми можемо све рачунске радње са коренима да преокренемо у рачунске радње са степенима, у рачунске радње које су нам већ познате.

Ми ћемо, ипак, интереса ради, изложити и рачунске радње са коренима.

132. Множење и дељење истоимених корена. —

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab},$$ дакле је

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

одакле имамо ово **практично упутство** за множење корена, чији је корени изложилац исти: *Истоимени корени множе се, кад се производ радиканада коренује заједничким кореним изложиоцем.*

Пример. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6.$

Слично овоме имамо

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

одакле имамо ово **практично упутство** за дељење истоимених корена: *Један корен дели се истоименим кореном, кад се количник радиканада коренује заједничким кореним изложиоцем.*

Пример. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2.$

Како гласе обрнута правила од претходних:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}?$$

133. Множење и дељење разноимених корена. — Ако су корени разноимени, треба их најпре довести на исто име. Заједнички корени садржалац треба да буде најмањи.

Пример. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[9]{8} = \sqrt[18]{2^6} \cdot \sqrt[18]{4^3} \cdot \sqrt[18]{8^2} =$

$$= \sqrt[18]{2^6 \cdot 4^3 \cdot 8^2} = \sqrt[18]{2^6 \cdot 2^6 \cdot 2^6} = \sqrt[18]{2^{18}} = 2.$$

134. Кореновање корена. —

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a},$$ дакле је $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

одакле имамо ово **практично упутство** за кореновање корена: *Корен се коренује, кад се радиканд коренује производом оба корена изложиоца.*

Обрнуто је

$$\sqrt[mn]{a} = a^{\frac{1}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}},$$ с тога је $$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Искажи речима практично упутство како се корен коренује производом!

Напомена. — Ако треба један број кореновати са више бројева, онда је ред којим ће се то извршити произвољан.

135. Уклањање корена из именилаца. — Ако се у имениоцу једног разломка налази корен, ирационалан број, он се обично уклања из имениоца. Ирационалним бројем је тешко делити кад има само 2 до 3 децимала, акамоли кад их има више. На пример ако узмемо познати образац из геометрије за висину равностраног троугла

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

где је a страна равностраног троугла, па из њега одредимо страну a, добијамо

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

Ми овај образац не остављамо у овом облику. Јер кад бисмо хтели да га применимо, морали бисмо да делимо бројем $\sqrt{3} = 1,73205....$

Ако бројилац и именилац горњег разломка помножимо са $\sqrt{3}$ добијемо

$$a = \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}.$$

Бројем 3 је лако делити, а $\sqrt{3}$ се лако множи.

Уклањањем корена из имениоца ми учинимо да именилац постане *рационалан*. Поступак којим се то ради зове се *рационализирање именилаца*.

Узећемо два случаја.

Први случај. — У имениоцу се налази само један корен и то као чинилац, никако као збир или разлика. У овом случају треба разломак проширити, тако да се добије у имениоцу степен из кога се лако извлачи корен.

Пример 1. $\frac{m}{\sqrt[3]{x^2}}$. Извршићемо проширивање са $\sqrt[3]{x^{3-2}} = \sqrt[3]{x}$. Тада је

$$\frac{m}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{m\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{m\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{m\sqrt[3]{x}}{x}$$

Пример 2. $$\frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{b}.$$

У оваквом случају треба увек вршити проширивање са $\sqrt[m]{b^{m-n}}$

Пример 3. $$\sqrt[5]{\frac{3}{8^2}} = \sqrt[5]{\frac{3\cdot 8^{5-2}}{8^2\cdot 8^{5-2}}} = \sqrt[5]{\frac{3\cdot 8^3}{8^5}} = \frac{\sqrt[5]{3\cdot 512}}{8} = \frac{\sqrt[5]{1536}}{8}.$$

Пример 4. $$\sqrt[m]{\frac{x^p}{y^q}} = \sqrt[m]{\frac{x^p\cdot y^{m-q}}{y^m}} = \frac{\sqrt[m]{x^p\, y^{m-q}}}{y}.$$

Пример 5. $$\sqrt[7]{\frac{m^5}{n^{10}}} = \sqrt[7]{\frac{m^5}{n^7\cdot n^3}} = \frac{1}{n}\sqrt[7]{\frac{m^5}{n^3}} = \frac{1}{n}\sqrt[7]{\frac{m^5n^4}{n^3\, n^4}} = \frac{1}{n}\sqrt[7]{\frac{m^5\, n^4}{n^7}} = \frac{1}{n^2}\sqrt[7]{m^5n^4}.$$

Други случај. — Именилац је збир или разлика у којима се јавља један или више **квадратних корена.**

Именилац постаје рационалан кад се разломак прошири или збиром или разликом истих израза, да именилац постане разлика квадрата.

Пример 1. $$\frac{a}{\sqrt{b}+c} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{(\sqrt{b}+c)(\sqrt{b}-c)} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{b-c^2}.$$

Пример 2. $$\frac{x}{m\sqrt{a}+n\sqrt{b}} = \frac{x(m\sqrt{a}-n\sqrt{b})}{(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})\,(m\sqrt{a}-n\sqrt{b})} = \frac{x(m\sqrt{a}-n\sqrt{b})}{am^2-bn^2}.$$

136. Знак корена. — Према ономе што смо већ говорили о знацима степена постоје ове једначине:

$(+1)^{2n} = +1$ $\quad$ $(+1)^{2n+1} = +1$

$(-1)^{2n} = +1$ $\quad$ $(-1)^{2n+1} = -1$

Обрнуто од овога имамо:

$\sqrt[2n]{+1} = +1$ или -1 $\quad$ $\sqrt[2n+1]{+1} = +1$

$\sqrt[2n+1]{-1} = -1.$

Пошто и $+1$ и -1 степеновано парним бројем даје увек $+1$, и никад -1, то *обрнуто из -1 не може се* *извући никакав парни корен.* — Таквим бројевима као на пр. $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$, не одговара на бројној линији никакав позитиван или негативан број. Због тога су они названи **имагинарни** или **уображени бројеви.** Бројеви са којима смо досада радили, за разлику од ових, зову се **реални** или **стварни** бројеви. То су бројеви који испуњавају целокупну бројну линију.

О имагинарним бројевима ученик ће идуће године чути више.

Напомена. — Рекли смо да је израз $\sqrt[n]{a}$ решење једначине $x^n = a$ и досада смо сматрали да $\sqrt[n]{a}$ има само једну вредност. То међутим није тачно. Ученик ће доцније слушати да $\sqrt{a}$ као корен једначине $x^n = a$ има n различитих вредности. Ми смо досада мислили само на једну.

Уосталом говорећи о квадратном корену из једног броја, ми смо још тада рекли да сваки квадратни корен има две вредности једнаке по апсолутној вредности, а супротног знака. Тако је било.

$$\sqrt{4} = +2 \text{ или } -2.$$

(Види Алгебру за III р. стр. 87!)

Правила о знацима су:

I $\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}$, *непаран корен из позитивног броја је позитиван број.*

II $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$, *непаран корен из негативног броја је негативан број.*

III $\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}$, *паран корен из позитивног броја може бити позитиван или негативан.*

IV $\sqrt[2n]{-a}$ *не постоји,* тј. *парни корен из негативног броја је имагинарна величина.*

Напомена. — Парни корен добија само онда двоструки знак, *кад се незна начин на који је постала поткорена величина.*

На пример $a^2-2ab+b^2$ може постати из $(a-b)^2$ и из $(b-a)^2$. Због тога је $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$ или $+(a-b)$ или $-(a-b)$.

Напротив $\sqrt{(+m)^2}$ је једнак само $+m$, и $\sqrt{(-m)^2}$ је само $= -m$.

173. Случај $\sqrt[-n]{a}$ **и** $\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$. —

I $\sqrt[-n]{a} = \sqrt[(-n)\cdot(-1)]{a^{1\cdot(-1)}} = \sqrt[n]{a^{-1}}$, тј.

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

II $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[\frac{n}{m}\cdot m]{a^m} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

За писмено вежбање

1. $\sqrt[5]{1024} =$; $\sqrt[6]{0{,}000064} =$; $\sqrt[5]{0{,}03125} =$

2. Број 4096 да се растави на 12 једнаких чинилаца; број 59049 на 10, број 390 625 на 8 једнаких чинилаца.

Следећи корени да се претставе у облику степена:

3. $\sqrt[7]{a} =$; $\sqrt[x]{b} =$; $\sqrt[\frac{1}{2}]{a} =$; $\sqrt[\frac{1}{3}]{b} =$

4. $\sqrt[4]{(1-x)^4} + 3\sqrt{(1-x)^2} - 4\sqrt[3]{(1-x)^3} =$

5. $2a\sqrt[3]{(a+b)^3} - 2b\sqrt{a^2-2ab+b^2} + 3b^2\sqrt[5]{(1+\frac{a}{b})^5} =$

6. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) =$; $(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m}) =$

7. Израз $a-b$ сматрај као разлику квадрата два броја и растави га на чиниоце!

Исто тако и изразе $5-t$, $9x^2-y$!

8. $\sqrt{(5+1)(\sqrt{5}-1)} =$; $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})\cdot(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}) =$

9. $\sqrt[x]{(1-x)^2} - \frac{x}{3}\sqrt[3]{(1+x)^3} - x^4\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x^2}\right)^4} =$

10. $(\sqrt[7]{12})^4 \cdot (\sqrt[7]{12})^3 - (\sqrt{9})^{-5} \cdot (\sqrt{9})^6 =$

Да се напише у облику корена:

11. $a^{\frac{7}{9}} =$; $b^{2\frac{2}{5}} =$ $c^{0{,}6} =$; $d^{2{,}75} =$; $e^{0{,}05} =$

12. $(a+b)^{\frac{3}{5}} =; \ (x+y)^{-\frac{2}{3}} =; \ (2x+3y)^{-3\frac{1}{3}}$

13. $\sqrt[3]{(a+x)^6} =; \ \sqrt[4]{(m+n)^2} =; \ \sqrt[3]{(1+x)^9} +$

14. $\sqrt[12]{27^4} =; \ \sqrt[2x+4]{a^{3x+6}} =; \ \sqrt[3r]{m^{6r-9rx}} =$

Доведи на исто име корене:

15. $\sqrt[3]{a}, \ \sqrt[5]{b}; \ \sqrt[4]{a}, \ \sqrt[3]{b}, \ \sqrt[5]{x};$

16. $\sqrt[4]{3}, \ \sqrt[3]{4a}, \ \sqrt[6]{5b}, \ \sqrt{2ab}!$

17. $5\sqrt[15]{a^{20}} + 3\sqrt[21]{a^{28}} - 4\sqrt[6]{a^8} + 2\sqrt[36]{a^{48}} =$

18. $17\sqrt[45]{a^{27}} - 12\sqrt[25]{a^{15}} + 3\sqrt[35]{a^{28}} - 5\sqrt[60]{a^{36}} + 7$

19. $3\sqrt[12]{4} - 4\sqrt[15]{27} + 8\sqrt[24]{16} + 5\sqrt[20]{v81} - 11\sqrt[30]{32}$

20. $\sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{121 \cdot 225} =; \ \sqrt{0{,}36 \cdot 0{,}04} =; \ \sqrt{625 \cdot 729}$

21. $\sqrt{0{,}0049 \cdot 0{,}0121} =; \ \sqrt{1{,}69 \cdot 0{,}0196} =: \ \sqrt{4a^2 \cdot 49b^2} =$

22. $\sqrt[3]{8a^3b^6} =; \ \sqrt[4]{16m^4n^8p^{24}} =; \ \sqrt[5]{32x^5y^{10}z^{15}t^{20}} =$

23. $\sqrt{12} =; \ \sqrt{4 \cdot 3} =; \ \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

24. $\sqrt{18} =; \ \sqrt{48} =; \ \sqrt{x^3} =; \ \sqrt[3]{y^5} =; \ \sqrt[4]{x^9} =$

25. $\sqrt{ab^2} =; \ \sqrt{x^5y^2} =; \ \sqrt[3]{a^4b^2} =; \ \sqrt[4]{3m^4} =$

26. $\sqrt[5]{256x^7y^{14}} =; \ \sqrt[5]{32 \cdot 8 \cdot x^5 \cdot x^2y^{10} \cdot y^4} =$
$2xy^2\sqrt[5]{8x^2y^4}$.

27. $\sqrt[3]{0{,}001x^5y^3} =; \ \sqrt{0{,}09\,x^7y^6z^{11}} =; \ \sqrt[3]{0{,}027x^5y^6z^{13}}$

28. $\sqrt{0{,}9;} =; \ \sqrt{9 \cdot 0{,}1} =; \ 3\sqrt{0{,}1} =; \ \sqrt{0{,}99} =; \ \sqrt{0{,}004}$

29. $\sqrt[3]{108} + 2\sqrt[3]{500} - 5\sqrt[3]{385} - \sqrt[3]{256} + 8\sqrt[3]{6}$

30. $\sqrt{a^3+a^2b} - \sqrt{a^3-a^2b} + \sqrt{ab^2+b^3} - \sqrt{ab^2-b^3} =$

31. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =; \ \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} =; \ \sqrt{5} \cdot \sqrt{45} =$

32. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} =; \ \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} =$

33. $\sqrt{4x} \cdot \sqrt{9x^3} =; \ \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{(a+b)^5} =$

34. $\sqrt[4]{3x^2} \cdot \sqrt[4]{27x^6} =; \ \sqrt[3]{11p^4q^5} \cdot \sqrt[3]{121p^2q} =$

35. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} =; \ \sqrt{7} \cdot \sqrt{21} =; \ \sqrt{15} \cdot \sqrt{5} =$

36. $\sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt[3]{m^4} =; \ \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^5} =;$

37. $\sqrt[n]{x^{2-3n}} \cdot \sqrt[n]{x^{2n+3}} \cdot \sqrt[n]{x^{3n-4}} =; \ \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^3b} \cdot \sqrt[3]{b} =$

38. $(2\sqrt{18} - \sqrt{8} - \sqrt{50}) \cdot \sqrt{2} =$

39. $(7\sqrt[3]{500} - 5\sqrt[3]{4} - 8\sqrt[3]{32} - 4\sqrt[3]{108}) \cdot \sqrt[3]{2} =$

40. $(\sqrt[4]{24} - \sqrt[4]{36})\ (2\sqrt[4]{54} - 3\sqrt[4]{36}) =$

41. $(m\sqrt{m} + n\sqrt{n})(\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}) =$

42. $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) =$

43. $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{-4}} \cdot \sqrt[n]{a^{5n-4}b^{3-4n}} \cdot \sqrt[n]{a^{3-2n}b^{1+6n}} =$

44. $\sqrt{\sqrt{41} - 4} \cdot \sqrt{\sqrt{41} + 4} =$

45. $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} =$

У следећим примерима чинилац да се унесе под корени знак:

46. $a\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n x}$.

47. $3\sqrt{5} =; \ 5\sqrt[3]{7} =; \ 0{,}5\sqrt[4]{48} =; \ 2\sqrt[5]{0{,}625} =$

48. $2\sqrt[3]{\frac{5}{4}} =; \ 0{,}2\sqrt[5]{\frac{1}{0{,}00016}} =; \ \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{81}{32}} =; \ \frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} =$

49. $(a+x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} =; \ (x-y)\sqrt[3]{\frac{x+y}{x^2-2xy+y^2}} =$

50. $\frac{3{,}5x}{a^2}\sqrt{\frac{4 \cdot 4a^6}{5{,}39x^2}} =; \ \frac{m^{-2}n^{-5}}{p^{-6}}\sqrt[5]{p^{-29}m^{12}n^{28}}$

51. $(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2(10-2\sqrt{5})} =$
$= \sqrt{(6+2\sqrt{5})\ (10-2\sqrt{5})} = \sqrt{2(3+\sqrt{5}) \cdot 2(5-\sqrt{5})} =$
$= 2\sqrt{15+5\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5} = 2\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

52. $(\sqrt{3}+2)\sqrt{2-\sqrt{3}} =; \ (2-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}} =$

53. $\sqrt{\frac{0{,}0625}{441}} =; \ \sqrt{\frac{1296}{3025}} =; \ \sqrt{3\frac{1}{16}} =; \ \sqrt{6\frac{19}{25}} =$

54. $\sqrt{\frac{a^6}{b^4}} =; \sqrt[4]{\frac{x^{12}}{y^8}} =; \sqrt{\frac{0{,}04a^{2r}}{256x^{6r}}} =; \sqrt[5]{\frac{32a^{15}}{100\,000x^{15}}}$

55. $\sqrt[3]{0{,}125\frac{m^9}{n^{21}}} =; \sqrt{0{,}0001\frac{a^{4m}}{b^{12n}}} =; \sqrt[3]{0{,}027\frac{p^{3x+3}}{q^{6x+9}}} =$

56. $\sqrt{\frac{9a^4}{64}} - \sqrt[3]{\frac{8b^3}{729x^6}} + \sqrt{\frac{25b^2}{144x^4}} - \sqrt[4]{\frac{a^8}{256}} =$

57. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} =; \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} =; \frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} =; \frac{\sqrt[3]{1715}}{\sqrt[3]{5}} =; \frac{\sqrt[4]{56{,}7x}}{\sqrt[4]{0{,}8x}}$

58. $\frac{\sqrt[5]{0{,}00024}}{\sqrt[5]{0{,}75}} =; \frac{\sqrt[6]{0{,}0056}}{\sqrt[6]{87{,}5}} =; \frac{\sqrt[7]{14\frac{2}{9}}}{\sqrt[7]{243}} =; \frac{\sqrt[3]{135a}}{\sqrt[3]{40a^4}} =$

59. $(5\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + 9\sqrt{8} - 4\sqrt{72}) : \sqrt{2} =$

60. $(12\sqrt[3]{135} + 18\sqrt[3]{40} - 6\sqrt[3]{525} - 4\sqrt[3]{320}) : 2\sqrt[3]{5}$

61. $(\sqrt{15} - \sqrt{10} + \sqrt{21} - \sqrt{14}) : (\sqrt{3} - \sqrt{2}) =$

62. $(15a^2\sqrt{a} + 17a^2 - 39a\sqrt{a} + 7a) : (5a - \sqrt{a}) =$

63. $(x^3 - 4x^2 + 12x\sqrt{x} - 9x) : (x\sqrt{x} - 2x + 3\sqrt{x}) =$

64. $(\sqrt{a} + b\sqrt{b}) : (\sqrt{a} + \sqrt{b}) =$

65. $(x^2 - y^2) : (x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2y^2} + y\sqrt[3]{y}) =$

66. $(a^5 + b^5) : (a^2\sqrt[3]{b} + b^2\sqrt[3]{a}) =$

67. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a} =; \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[3]{b} =; \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} =$

68. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5} =; \sqrt[5]{0{,}2} \cdot \sqrt[3]{0{,}5} =; \sqrt[9]{a^7} \cdot \sqrt[12]{\frac{b^{11}}{a^5}} =$

69. $3 : \sqrt{3} =; 2 : \sqrt[3]{2} =; \sqrt[3]{5} : \sqrt{2} =$

Напомена. — Рачун је прегледнији и често и простији кад се уместо корена уведу степени са разломљеним изложиоцима. Ово још нарочито у случају, кад је радиканд неки степен.

70. $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} =; y^{2} \cdot y^{-2} =; a^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{12}} =; b^{-\frac{3}{5}} \cdot b^{-\frac{1}{15}}$

71. $a^0 \cdot a^{\frac{1}{2}} =; a^0 \cdot a^{-\frac{1}{2}} =; a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-0{,}25} =; a \cdot a^{-\frac{4}{3}} =$

72. $a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a} =; b^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{b} =; c^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{c} =; d^{0{,}6} \cdot \sqrt[5]{d^{-3}}$

73. $ab^{\frac{1}{2}}c \cdot a^{\frac{1}{2}}bc^{\frac{1}{3}} =; x^{\frac{3}{8}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{8}}y^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}} =$

74. $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} =; b^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{4}} =; c^{\frac{1}{2}} : \sqrt{c} =; d^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{d} =$

75. $\sqrt[3]{x^2} : x^{\frac{1}{6}} =; \sqrt[4]{x^3} : x^{\frac{2}{3}} =; a^{0{,}4} : c^{0{,}6} =$

76. $a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} =; x^{\frac{4}{5}} \cdot y^{0{,}8} =; \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(3\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} =$

77. $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{ab^3} =; 9ab\sqrt[3]{18a^2b} =$

78. $\sqrt[5]{a^3b^2} \cdot \sqrt[10]{a^7b^3} \cdot \sqrt[15]{a^{14}b^{21}} =; \sqrt{2a} \cdot \sqrt[4]{2a^3} \cdot \sqrt{3a} =$

79. $\sqrt[10]{a^7} : \sqrt[15]{a^4} =; \sqrt[15]{x^{11}} : \sqrt[20]{x^3} =; \sqrt[18]{m^{13}} : \sqrt[24]{m^7} =;$

80. $\sqrt[4]{0{,}125m^3} : \sqrt[6]{0{,}25m} =; \sqrt[12]{\frac{2}{3}x^4} : \sqrt[45]{\frac{4}{9}x^2} =$

81. $a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{1\frac{3}{4}} \quad a^{-\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{3}{20}} =; a^{2.5} \cdot a^{-5.4} \cdot a^{-2.35}\, a^{4,25} =$

82. $\left(a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{3}{4}}c^{\frac{8}{15}}\right) : \left(a^{\frac{7}{9}}b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{9}{10}}\right) =$

83. $\dfrac{25^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{8}}z^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{1}{100}\right)^{-\frac{5}{7}}x^{\frac{7}{12}}y^{-\frac{1}{6}}z^{\frac{11}{16}}} =$

84. $\left(m^{-\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{2}}\right)\left(m^{\frac{3}{4}} - m^{\frac{5}{6}}\right) =$

85. $\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt[6]{x^5}\right) =$

86. $\left(a^3 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} - a^{2\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 2b^{1\frac{1}{2}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}\right) =$

87. $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 =; \left(\sqrt{a}\right)^6 =; \left(\sqrt[4]{m}\right)^{12} =; \left(\sqrt[5]{0{,}00032}\right)^3$

88 $\left(\sqrt[4]{a}\right)^6 =; \left(\sqrt[15]{a^2}\right)^3 =; \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^6 =; \left(\sqrt[3]{27a^6}\right)^2 =$

89. $\left(\sqrt[10]{ay^2z^4}\right)^{15} =; \left[\left(\sqrt[12]{x}\right)^2\right]^3 =; \left[\left(\sqrt[3m]{a^4}\right)^2\right]^m =$

90. $\sqrt{16^3} =; \sqrt{169^3} =; \sqrt[3]{8^2} =; \sqrt[3]{125^2} =, \sqrt[4]{16^3} =$

91. $\sqrt[5]{32^3} =; \sqrt[5]{243^3} =; \sqrt[6]{0{,}000064^5} =$

92. $\sqrt[4]{0{,}0625^3} + \sqrt[7]{0{,}0000128^4} + \sqrt[6]{0{,}000001^3} =$

93. $\sqrt[3]{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} - \sqrt[3]{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)}$

94. $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}} =$; $\left(\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^8}}\right)^5 =$; $\left(\sqrt[5]{\sqrt[6]{32}}\right)^6 =$

95. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$; $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 =$

96. $(m - \sqrt{n} + \sqrt{p})^2 =$; $(\sqrt{a} + \sqrt{x} + \sqrt{ax})^2 =$

97. $(1 + \sqrt{x})^3 =$; $(\sqrt{a} - \sqrt{x})^3 =$; $(7a\sqrt{x} - 5x\sqrt{a})^4$

Напомена. — И овде се степени могу корисно упо-
ребити.

Да се одреди следећи степени.

98. $100^{3,5}$; $81^{1,25}$; $0,25^{0,5}$; $0,125^{-\frac{4}{3}}$; $0,000\,001^{\frac{7}{6}}$.

99. $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-1,25}$; $0,04^{-1,5}$; $0,0001^{-0,5}$; $0,00000256^{-0,625}$.

100. $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^8 =$; $\left(b^{\frac{2}{5}}\right)^{10} =$; $\left(y^{-\frac{11}{24}}\right)^{-16} =$; $\left(z^{-\frac{4}{55}}\right)^{77} =$

101. $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^9}\right)^3 =$

102. $\sqrt{\sqrt{a}} =$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}} =$; $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}} =$; $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}} =$

103. $\sqrt[4]{36} =$; $\sqrt[4]{25} =$; $\sqrt[9]{a^3} =$; $\sqrt[12]{b^8} =$; $\sqrt[10]{c^5} =$

104. $\sqrt[7]{\sqrt[12]{10}} + 14\sqrt[21]{\sqrt[4]{10}} - 5\sqrt[6]{\sqrt[14]{10}} + 11\sqrt[3]{\sqrt[28]{10}} =$

105. $\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3 \cdot a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^4}} = \sqrt[3]{a^2}$

106. $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} =$; $\sqrt{x\sqrt{a}} =$; $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} =$; $\sqrt{6\sqrt{2}} =$

107. $\sqrt[3]{b^2\sqrt[4]{b}} =$; $\sqrt[4]{c\sqrt[3]{c}} =$; $\sqrt[4]{d\sqrt[5]{d^8}} =$; $\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x^2}} =$

108. $x\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^{-1}}} =$, $y\sqrt[3]{y^{-2}\sqrt[3]{y^{-2}}} =$; $a\sqrt[4]{a^{-3}\sqrt[4]{a^{-3}}}$

Израчунај:

109. $\sqrt[4]{65536}$; $\sqrt{4\,194\,304}$; $\sqrt[4]{43\,046\,721}$!

110. $\sqrt[6]{4096}$; $\sqrt[6]{531\,441}$; $\sqrt[6]{224\,140\,625}$!

111. $\sqrt{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2}}} =$; $\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{a\sqrt{a^2}}} =$; $3\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}} =$

112. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{81}{625}a^4b^{12}}} =$; $\sqrt[3]{\sqrt{0,008m^{15}n^9p^6}} =$; $\sqrt[15]{\sqrt[n]{a^{14m}}} =$

Увек имати у виду да је употреба степена са разломље-
ним изложиоцима врло корисна.

113. $(a^6)^{\frac{1}{2}} =$; $(b^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} =$; $(c^{-\frac{1}{2}})^4 =$; $(d^{\frac{1}{3}})^{-3} =$; $(e^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$

114. $(a^{-0,625})^{-1,6} =$; $(a^2b^3)^{\frac{1}{6}} =$; $(a^5b^{\frac{1}{2}})^{\frac{5}{2}} =$

115. $(0,000\,000\,512x^{\frac{3}{8}}y^{\frac{9}{4}})^{-\frac{4}{9}} =$

116. Отприлике је $10^{0,30103} = 2$. Напиши као степене од 10 ове бројеве: 4, 8, 16, 5, 25, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$!

117. Отприлике је $10^{0,47712} = 3$. Напиши као степене од 10 бројеве: 30, 3000, 3 000 000; 0,3; 0,03; 0,0003!

118. $\left(1\frac{4}{35}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(1,024\right)^{\frac{1}{4}} : \left(2,4 \cdot 1\frac{9}{56}\right)^{\frac{1}{4}} =$

119. $\sqrt[3]{a^{4\frac{1}{2}}} =$; $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} =$; $\sqrt{b^{0,5}} =$; $\sqrt[5]{x^{\frac{3}{2}}} =$

120. $\sqrt[9]{m^{-22,5}} =$; $\sqrt[3]{a^{2\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[6]{a^{3\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[12]{a^8} =$

121. $\sqrt[5]{a^{2\frac{2}{3}}} \cdot \sqrt[6]{a^{-5\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{a^{1,5}} \cdot \sqrt[4]{a^{-3\frac{2}{5}}} =$

122. $\sqrt[6]{729m^{2\frac{2}{5}}n^{2\frac{2}{11}}m^{-3\frac{3}{5}}n^{-1\frac{1}{11}}} =$

123. $\sqrt[3]{\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}\sqrt{a^{13}}}} =$; $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{ab}}} =$

Код следећих разломака да се уклоне корени из име-
нилаца.

124. $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$; $\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$; $\sqrt[5]{\frac{4}{25}}$; $\sqrt[7]{\frac{20}{81}}$.

125. $\frac{1}{\sqrt{3}} =$; $\frac{2}{\sqrt[3]{4}} =$; $\frac{5}{\sqrt[5]{25}} =$; $\frac{8}{\sqrt{6}} =$; $\frac{18}{\sqrt[3]{9}} =$

126. $\frac{x}{\sqrt{xy}} =$; $\frac{m}{\sqrt[3]{m}} =$; $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}} =$; $\frac{b}{\sqrt[n]{b}} =$

127. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=;\quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=;\quad \frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{15}}=;\quad \frac{2\sqrt{15}}{3\sqrt{10}}=$

128. $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}+\sqrt[3]{\frac{3}{16}}-\sqrt[3]{\frac{343}{144}}-\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{0,5}}+\sqrt[3]{\frac{81}{2}}=$

129. $9x\sqrt{\frac{a}{9x}}-\frac{6a}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4a}}-\frac{5x}{2a}\sqrt{\frac{a^3}{x}}+6x\sqrt{\frac{4a}{25x}}=$

130. $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}+3\sqrt{1\frac{1}{2}}\right)\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{\frac{1}{6}}\right)=$

Упутство. Најпре треба извршити рационализацију именилаца.

131. $\left(\sqrt{1\frac{7}{8}}+5\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\left(\sqrt{\frac{5}{12}}-5\sqrt{\frac{1}{15}}\right)=$

132. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}=;\quad \frac{1}{3-\sqrt{7}}=;\quad \frac{3}{3+\sqrt{6}}=$

133. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=;\quad \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=;\quad \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$

134. $\frac{110}{4+\sqrt{5}+\sqrt{11}}=;\quad \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=$

135. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}=;\quad \frac{\sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}=$

136. $\frac{m}{\sqrt{m-n}-\sqrt{m+n}}=;\quad \frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}=$

137. $\frac{a}{\sqrt{\sqrt{b}-\sqrt{c}}}=\frac{a\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{c}}}{\sqrt{b-c}}=$

$=\frac{a\sqrt{(b-c)(\sqrt{b}+\sqrt{c})}}{b-c}.$

138. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}=;\quad \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}=;\quad \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$

139. $\frac{6}{\sqrt{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}}=;\quad \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{5}-1}}}$

Да се одреде знаци следећих корена.

140. $\sqrt{16};\quad \sqrt{25x^2};\quad \sqrt[4]{81m^4n^{12}};\quad \sqrt[6]{64x^{12}y^{18}}$

141. $\sqrt[3]{-8};\quad \sqrt[5]{-243};\quad \sqrt[7]{-0,0000128};\quad \sqrt[3]{-\frac{343}{512}}$

142. $\sqrt[3]{(-m)^5\cdot(-m)^9\cdot(-m)^7};\quad \sqrt[5]{(-p)^{-7}\cdot(-p)^{-11}\cdot(-p)^{33}}$

143. $\sqrt{(-b)^2};\quad \sqrt{(+25)^2};\quad \sqrt{[-(a^2-b^2)]^2};\quad \left[\sqrt{(-7)^2}\right]^3.$

138. Квадратни корен из полинома. — Поступак по коме се извлачи квадратни корен из посебних бројева може се пренети потпуно и на полиноме. Само треба пазити да се полином уреди по растућим или падајућим степенима једнога слова.

Пример.

$$\sqrt{25a^4-30a^3b+49a^2b^2-24ab^3+16b^4}=5a^2-3ab+4b^2$$

$$\begin{array}{lll}
25a^4 & & \\
\hline
-30a^3b+49a^2b^2 & & (:2\cdot 5a^2) \\
-30a^3b+9a^2b^2 & & (10a^2-3ab)\cdot(-3ab) \\
\hline
 & 40a^2b^2-24ab^3+16b^4 & (:10a^2-6ab) \\
 & 40a^2b^2-24ab^3+16b^4 & (10a^2-6ab+4b^2)\cdot 4b^2 \\
\hline
 & 0. &
\end{array}$$

За писмено вежбање

Да се одреди квадратни корен следећих полинома:

1. $a^4+2a^3+3a^2+2a+1$
2. $4b^4+4b^3+5b^2+2b+1$
3. $9m^4-12m^3+34m^2-20m+25$
4. $4a^2+25b^2+16c^2-20ab-40bc+16ac$
5. $16t^6+6t^3+17t^4+t^2+24t^5$
6. $\frac{4m^4}{25}-\frac{4m^2}{5}+\frac{19}{15}-\frac{2}{3m^2}+\frac{1}{9m^4}$
7. $\frac{x^4}{9}+\frac{2x^3}{3}+\frac{4x^2}{3}+x+\frac{1}{4}.$

139. Експоненцијалне једначине. — Кад се у једначини непозната јавља у изложиоцу, једначина се зове *експо-*

нцијална. Ове се једначине решавају на основу очигледног авила:

Кад је $a^m = a^n$, *мора бити* $m = n$.

За писмено вежбање

1. $a^{x+3} = a^4$.

Решење. Кад је $a^{x+3} = a^4$, мора бити

$$x + 3 = 4$$
$$x = 1.$$

Да се реше следеће експоненцијалне једначине:

2. $m^{x-7} = m$ 3. $n^3 = n^{9-x}$ 4. $p^{7x-7} = p^{17-x}$

5. $2^{-x} = 16$ 6. $3^{-x} = 81$ 7. $2^{-x} = \frac{1}{8}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^7$ 9. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7-x}$ 10. $\left(0,8\right)^{2-3x} = \left(1,25\right)^{3-4x}$

11. $0,25^x = 2^{10}$ 12. $4^x = 0,125$ 13. $8^{2x+1} = 0,125^{4-3x}$

14. $\sqrt[3]{a^{17-x}} = a^{x-5}$ 15. $\sqrt[4]{a^{13x-2}} = \sqrt[3]{a^{7x+4}}$

16. $\sqrt[x-3]{a^7} = \sqrt[x-7]{a^3}$ 17. $\sqrt[x-2]{a^{x-3}} = \sqrt[x+3]{a^{x+1}}$

18. $\sqrt{a^{7-3x}} : \sqrt[3]{a^{x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{5x-7}} \cdot \sqrt[5]{a^{7-3x}} = 1$

19. $a^x \cdot a^y = a^4$ 20. $a^y : a^x = a^5$

$a^x \cdot a^{3y} = a^8$ $a^{3y} \cdot a^x = a^7$

21. $m^{\frac{x}{3}} \cdot m^y = m$ 22. $\dfrac{n^{\frac{3}{x}}}{n^{\frac{7}{y}}} = n^9$

$m^{\frac{x}{5}} \cdot m^{\frac{y}{2}} = \frac{1}{m^4}$ $n^{\frac{4}{x}} \cdot n^{\frac{3}{y}} = n^{11}$

23. $\sqrt{a^x} \cdot \sqrt[3]{a^y} = a^8$ 24. $\sqrt[3]{a^{2x-1}} \cdot \sqrt[4]{a^{3y-1}} = a^8$

$\sqrt[3]{b^x} \cdot \sqrt{b^y} = b^7$ $\sqrt[4]{b^{3x+5}} \cdot \sqrt[4]{b^{2y+1}} = b^{10}$

25. $\sqrt[x]{p} \cdot \sqrt[y]{p} = \sqrt{p^5}$ 26. $\sqrt[x]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^y} = a^3$

$\sqrt[x]{q^2} \cdot \sqrt[y]{q^3} = q^2$ $\sqrt[x]{b^6} \cdot \sqrt{b^y} = b^5.$

140. Ирационалне једначине. — Једначина у којој се непозната налази под кореним знаком зове се *ирационална једначина.*

Ирационалне једначине решавају се степеновањем обеју страна једним истим бројем, обично кореновим изложиоцем онога корена, који се јавља у једначини.

При том ако у једначини има само један корен, он се сам оставља на једној страни, а сви други чланови преносе на другу страну. Ако има два корена, треба један оставити на једној, а други пренети на другу страну.

Кад у једначини има два или више корена, једно степеновање није довољно да се ослободимо корена. Морамо степеновање поновити, пошто се јављају нови корени.

Напомена. — Код сваке ирационалне једначине треба извршити пробу. Дешава се да покоја ирационална једначина нема корена. Ми коректно извршимо све радње, али добијено решење не задовољава једначину. То долази отуда, што парни корени могу имати оба знака + и —. Згодним стављањем знака испред корена у једначини, можемо ипак удесити да једначина буде идентички задовољена.

Пример 1.

$$4 + \sqrt{x} = 1$$
$$\sqrt{x} = -3$$
$$x = 9.$$

Ова вредност не задовољава горњу једначину, а задовољава једначину

$$4 - \sqrt{x} = 1.$$

Пример 2.

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$$
$$\sqrt{x-1} = 9 - \sqrt{x+8}$$
$$x-1 = 81 - 18\sqrt{x+8} + x + 8$$
$$18\sqrt{x+8} = 90$$
$$\sqrt{x+8} = 5$$
$$x + 8 = 25$$
$$x = 17.$$

За писмено вежбање

1. $\sqrt{x+8} = 3$ 2. $\sqrt[3]{9-x} = 2$ 3. $\sqrt[4]{x-7} = 3$

4. $\sqrt[4]{a^4+x} = a$ 5. $\frac{3}{4}\sqrt{x} = 4\frac{1}{2}$ 6. $3\frac{1}{8}\sqrt{7x} = 43\frac{3}{4}$

7. $3\frac{1}{4}\sqrt{78-7x}=19\frac{1}{2}$ 8. $2\sqrt{5x}=3\sqrt{7x}$

9. $4\sqrt{x+3}=3\sqrt{x+10}$ 10. $5\sqrt{x-a}=8\sqrt{a-x}$

11. $\sqrt{x}-4=3$ 12. $7-3\sqrt{x}=1$

13. $6\sqrt{2x}-8=\sqrt{2x}+3$ 14. $11(3+\sqrt{5x})=5(6-\sqrt{5x})$

15. $7=\sqrt{19+3x}=17$ 16. $29-3\sqrt{13-2x}=20$

17. $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=3$ 18. $\dfrac{9}{7+2\sqrt{x}}=\dfrac{8}{13-5\sqrt{x}}$

19. $\dfrac{29-5\sqrt{x}}{9}=\dfrac{39-5\sqrt{x}}{19}$ 20. $\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}=\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-5}$

21. $(7-\sqrt{x})(8-\sqrt{x})=x+11$

22. $(3\sqrt{x}-1)^2+(4\sqrt{x}-7)^2=(5\sqrt{x}-6)^2$

23. $\sqrt{9x^2+4x-1}=3x+5$ 24. $\sqrt{x-3}=3-\sqrt{x}$

25. $7\sqrt{3x+4}=63-2\sqrt{3x+4}$

26. $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$

27. $3\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-13}=5\sqrt{x-10}$

28. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-6}=\sqrt{8x-39}$

29. $\sqrt{36-x\sqrt{x^2+5x-1}}=6-x$

30. $\sqrt{x-9}-\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}+\sqrt{x}=0$

31. $\sqrt{x+\sqrt{3x+6}}-\sqrt{x-\sqrt{3x-6}}=2$

32. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+14}+\sqrt{x-7}$

33. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+19}-\sqrt{x+10}$

Да се реше системи једначина:

34. $4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=6$
$3\sqrt{x}-4\sqrt{y}=1$

35. $3\sqrt{x}+13\sqrt{y}=60$
$7\sqrt{x}+17\sqrt{y}=100$

36. $2\sqrt{x+5}-3\sqrt{y-2}=3$
$3\sqrt{x+5}-4\sqrt{y-2}=3$

37. $4\sqrt{x+7}-5\sqrt{y-7}=7$
$3\sqrt{x+7}-7\sqrt{y-7}=2$

38. $\dfrac{7}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{y}}=4$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=1$

39. $\dfrac{8}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{3}{\sqrt{y+3}}=1$
$\dfrac{4}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{9}{\sqrt{y+3}}=4$

ГЛАВА XII

Графичко одређивање квадратног корена

141. — Функција $y=x^2$. — Ученик треба што чешће да црта линију, која је графички претставник једначине

$$y=x^2.$$

Са овом линијом ће следећих година имати много да ради.

Конструишимо линију $y=x^2$!

Кад је

x	0	±1	±2	±3	±4	±5	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{3}{2}$	....
y	0	1	4	9	16	25	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	....

Кад спојимо ове тачке, добијамо траженог графичког претставника, који је, као што се из слике види, једна *крива линија*.

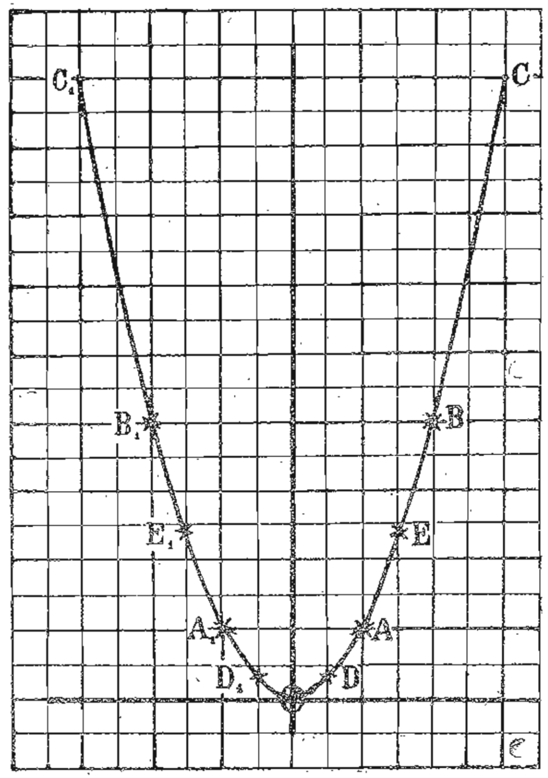
142. — Варијације функције $y=x^2$. — Кад један позитиван број расте, расте и његов квадрат.

Кад један негативан број расте, његова апсолутна вредност се смањује, па се и његов квадрат смањује.

Из овога можемо закључити:

Функција $y=x^2$ је растућа, кад је x позитивно и расте, а опадајућа, кад је x негативно и расте.

Потражимо који услов треба да испуни позитивно x, па да буде задовољена неједначина



Сл. 17

$$x^2 > A, \qquad (1)$$

: је A један позитиван број, толико велики, колико хо-
мо. Очевидно биће довољно да узмемо

$$x > \sqrt{A}.$$

Рећи ћемо дакле да y тежи ка $+\infty$, кад x тежи ка ∞.

Очевидно је исто тако да кад узмемо x негативно то-
ко да буде

$$x < -\sqrt{A},$$

једначина (1) биће такође задовољена.

Рећи ћемо да y тежи ка $+\infty$, када x тежи ка $-\infty$.
зо се лепо види из слике 17.

Најзад приметимо да ако променљивој x дамо две су-
отне вредности $+a$ и $-a$, y добија исту вредност a^2.

После свега имамо овај резултат:

*Функција $y=x^2$ опада од $+\infty$ до нуле, кад x расте
$-\infty$ до нуле; она расте од нуле до $+\infty$, кад x расте
нуле ка $+\infty$. За две супротне вредности x, y добија
:ту вредност.*

143. — На слици линија десно од ординатне осовине
ретставља промене функције за позитивне вредности x. Ли-
ија лево од ординатне осовине претставља промене функ-
ије за негативне вредности x.

Обе гране ове криве линије састају се само у коорди-
атном почетку.

Апсцисна осовина је тангента на кривој линији.

Како свакој вредности y одговарају две једнаке а су-
ротно означене вредности x, то је крива линија симетрич-
а у односу на ординатну осовину.

Ова крива линија зове се *парабола*.

144. Графичко одређивање квадратног корена. —
асада ћемо параболу користити да из ње читамо квадрат-
е корене разних бројева.

При конструкцији горње параболе узели смо за једи-
ицу двоструку дужину стране једног квадратића. При том
ада у очи да кад је x веће од 1, вредности за y расту мно-
о брже, неголи вредности за x. То ће се још боље видети
з следеће табеле одговарајућих вредности за x и y:

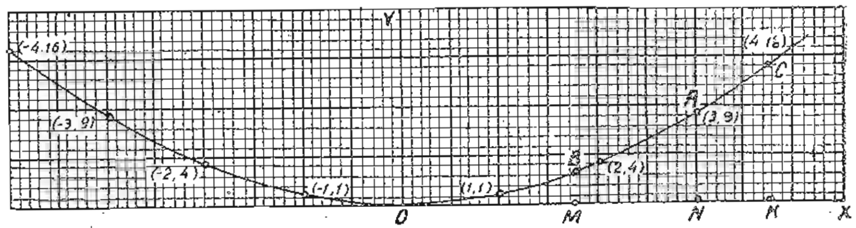
x	6	7	8	9	10	11	12	. . . .
y	36	49	64	81	100	121	144	. . . .

Линија се пење сувише стрмо. А пошто нам је потреб-

но да из ње читамо квадратне корене или квадрате, морамо потражити неки њен згоднији облик.

Бољу ћемо линију добити, ако узмемо десетоструку страницу квадратића за јединицу апсциса, а једну страну квадратића за јединицу ордината.

Употребљавајући ове јединице, добијамо овакву линију:



Сл. 18.

Тако је у тачки А апсциса $ON = 30$ пута страница квадрата $= 3$ јединице. Ордината $AN = 9$ пута страна квадратића $= 9$ јединица.

Ефекат од употребе разних јединица за x и y је исти, као да смо равномерно развукли хартију у правцу паралелно са апсцисном осовином. Кад би смо узели већу јединицу за y, било би као да смо хартију развукли паралелно са ординатном осовином.

Покаткад ће бити потребно да се за x узме још већа јединица.

У вези са квадратним кореном важно је да утврдимо ово: **пошто је $y=x^2$ или $x = \sqrt{y}$, то је за сваку тачку на кривој линији апсциса квадратни корен одговарајуће ординате.**

У горњој линији узмимо тачку B, чија је ордината 3, и повуцимо ординату BM!

Знамо да за сваку тачку криве важи однос $y+x^2$. Према томе у тачки B је $3 = OM^2$, јер је ту $y = 3$, $x = OM$. Значи да је

$$OM = \sqrt{3}.$$

Из слике видимо да OM лежи између 1,7 и 1,8 и то нешто ближе вредности 1,7 неголи вредности 1,8. Према томе је

$$\sqrt{3} = 1{,}7$$

тачно на један децимал.

Исто тако узмимо тачку C, где је ордината $CK=14$.

$$14 = OK^2.$$

Према томе је $\sqrt{14} = OK = 3,7$ тачно на 1 децимал.

145. — Функција $y = ax^2$. — Ако поредимо прву кри-
/ линију $y=x^2$ (сл. 17) са овом другом, (сл. 18), видимо да
/ то исте линије, само смо код друге ординате смањили у
змери 1:10. Ми смо у другом случају конструисали параболу

$$y = \frac{1}{10}x^2.$$

Ако бисмо конструисали криву $y = 3x^2$, видели бисмо
:а је она још стрмија од криве $y = x^2$. Код ње су ординате
увећане у размери 3 : 1.

Параболе са *умањеним* ординатима су *отвореније, ши-
ре*. Параболе са *увећаним* ординатима су *затвореније, уже*.

Уопште *крива $y=ax^2$ добија се из параболе $y=x^2$, кад
е њене ординате повећају a пута.*

Ако је a негативно, онда је парабола окренута наниже,
j. параболе

$$y = ax^2 \quad \text{и}$$
$$y = -ax^2$$

су симетричне у односу на апсцисну осовину.

Координатни почетак им је заједничко теме, апсцисна
осовина заједничка тангента.

146. — Геометриско одређивање квадратног корена. —
Пример. Да се одреди вредност $\sqrt{5}$.

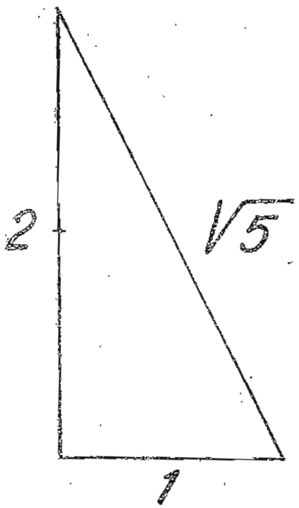
Овај задатак решићемо на три разна начина.

Први начин. — Користићемо Питагорино правило, пошто је

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{2^2+1}.$$

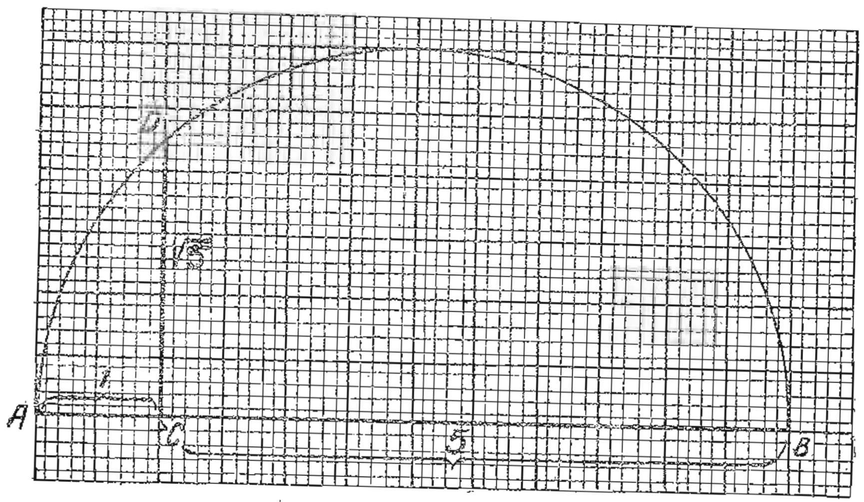
Нацртаћемо правоугли троугао у коме је једна страна 2, друга 1. Хипотенуза ће бити $\sqrt{5}$.

Напомена. — Овде смо број 5 раставили на збир од два квадрата 2^2 и 1^2. При одређивању $\sqrt{n}$ десиће се покаткад да се број n растави на збир од више квадрата. Само тај број квадрата не треба да буде већи од четири, као што смо то већ и раније утврдили.



Сл. 19.

Други начин. — Нацртаћемо дуж AB од 6 јединица и над њом као над пречником описати полукруг. У тачки C, која је за 1 удаљена од тачке A, подићи ћемо нормалу до пресека са полукругом. Дужина те нормале је $\sqrt{5}$.



Сл. 20.

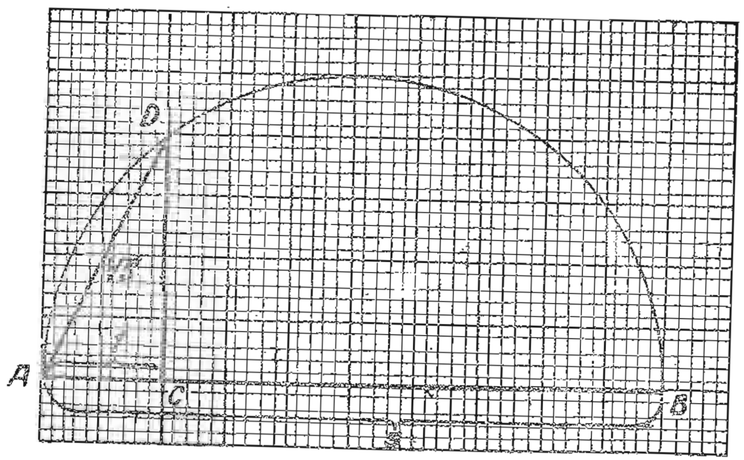
Из геометрије знамо да је

$$CD^2 = AC \cdot BC = 5 \cdot 1.$$

С тога

$$CD = \sqrt{5}.$$

Трећи начин. — Нацртаћемо дуж AB од 5 јединица и



Сл. 21.

над њом као над пречником конструисати полукруг. У тачки

C, која је за јединицу удаљена од тачке A, повући ћемо нормалу до пресека D са полукругом. Тада је дуж $AD = \sqrt{5}$.

Из геометрије знамо да је

$$AD^2 = AB \cdot AC = 5 \cdot 1.$$

С тога је $\qquad AD = \sqrt{5}.$

Графичко одређивање кубног корена

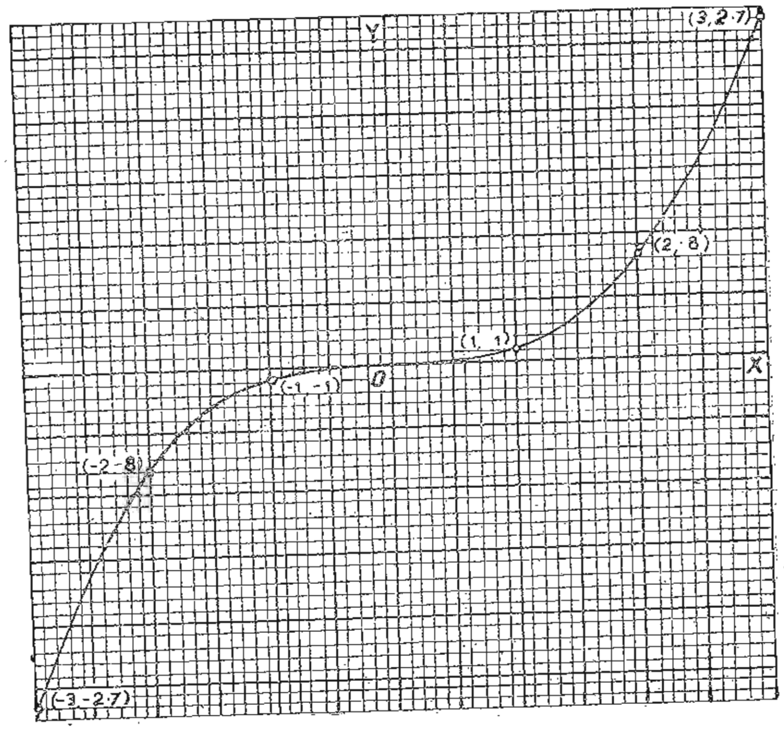
147. Треба конструисати криву линију $y = x^3$. Узећемо јединицу за ординате 10 пута мању од јединице апсциса

Кад је

x	. .	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+0{,}8$	$-0{,}8$	. . .
y	. .	-27	-8	-1	0	1	8	27	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$+0{,}512$	$-0{,}512$	. . .

Место 0,512 узећемо приближну вредност 0,5 или $\frac{1}{2}$.

Ако конструишемо редом ове тачке и спојимо их, добијамо ову криву линију:



Сл. 22.

148. Варијације функције $y = x^3$ — Кад је један број позитиван и расте и његов куб је позитиван и расте.

Кад је број негативан и расте, његова апсолутна вредност бива све мања. Куб његов је негативан и апсолутна вредност му бива све мања. Кад је број негативан и расте, његов куб такође расте.

Одавде имамо врло прост закључак:

Функција $y = x^3$ је растућа функција. Кад x расте од $-\infty$ ка $+\infty$, функција y расте од $-\infty$ ка $+\infty$.

149. — Линија цела лежи у првом и трећем квадранту. Гране криве линије у оба квадранта су сличне. Крива линија је симетрична у односу на координатни почетак. Зовемо је **кубна парабола.**

За вредности x које су веће од 1 мање од -1, кад x расте y расте много брже. Обрнуто се дешава кад x варира између -1 и $+1$. Због овога можемо рећи да је апсцисна осовина тангента ове криве у координатном почетку.

Из ове линије можемо читати кубове и кубне корене разних бројева.

Слично овоме што смо рекли за функцију $y = x^3$, можемо рећи за функцију $y = ax^3$. Наша горња слика је у ствари графички претставник једначине

$$y = \frac{1}{10}x^3.$$

Функција $y = 2^x$

150. Графичко претстављање функције $y = 2^x$. —

Кад је

x	. . . .	-3	-2	-1	0	1	2	3	. . .
y	. . . .	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	. . .

Кад конструишемо ове тачке и спојимо их добијамо линију на сл. 23.

151. Варијације функције $y = 2^x$. — Кад је x позитивно и расте y такође расте.

Кад је x негативно и расте, његова се апсолутна вредност смањује. Из ова два низа бројева видимо шта бива са y

$$x = -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1$$

$$y = \frac{1}{64},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}.$$

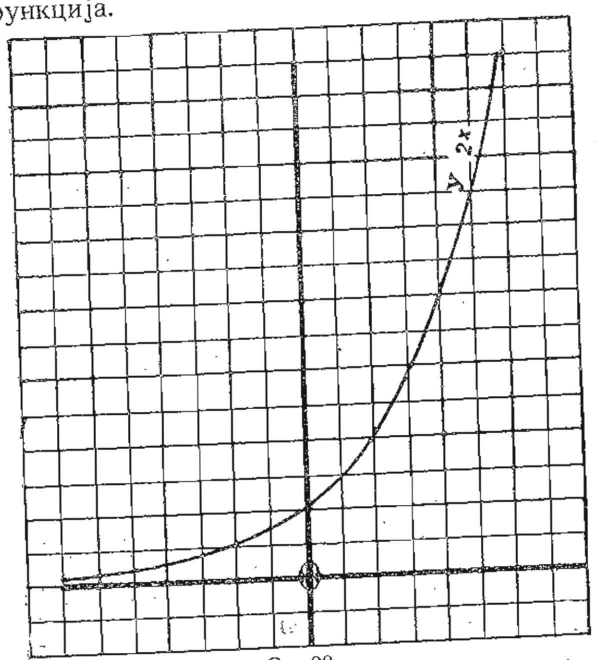
Дакле кад је x негативно и расте, y је позитивно и расте. Кад је x негативно и опада, y је позитивно и опада. Кад x опадајући тежи ка $-\infty$, y опада, остајући позитивно, и тежи ка нули.

Из овога имамо овај прост резултат:

Функција $y=2^x$ *је растућа. Кад* x *расте од* $-\infty$ *ка* $+\infty$, *функција* y *расте од* 0 *ка* $+\infty$.

То се уосталом врло лепо види из слике.

Оваква функција зове се **изложилачка** или **експоненцијална** функција.



Сл. 23.

За писмено вежбање

Конструиши следеће праве линије, али тако да јединица за x буде двапута већа од јединице за y.

1. $3x+4y=12$ 2. $3x-4y=12$ 3. $y=2x$
4. $y+3x=0$ 5. $5x-2y=1$ 6. $3x+2y+2=0$.

Конструиши следеће праве линије да ордината буде умањена 10 пута.

7. $x+y=11$ 8. $x-2y=20$ 9. $20x+y=0$,

10. Да се конструише крива $y=x^2$ са умањеном ординатом 5 пута; са увећаном ординатом 2 пута.

11. Да се конструише крива $y=4x^2$, кад су јединице за x а y једнаке; кад је ордината умањена 4 пута, кад је ордината увећана 4 пута. Узми за јединицу апсциса 10 cm!

12. Конструиши линију из које ће се моћи прочитати квадратни корен између 16 и 25 тачно на 2 децимала!

Упутство. Нацртај параболу са ординатама умањеним 50 пута! Разуме се да се може нацртати само део параболе који лежи између апсциса 4 и 5.

13. Пут који тело пређе за t секунада, кад слободно пада, одређује се из обрасца

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

где је g убрзање земљине теже и износи приближно 10m.

Да се графички претстави пут као функција времена. Из криве линије да се прочита пређени пут после 1,5; 2,9; 3,7; 4,8; 5,3 секунада.

После колико секунада је пређени пут 15, 30, 60, 100, 150, 190 m? (1 sec $\sim$ 2 cm, 10 m пута $\sim$ 1 cm.)

14. Нацртај део линије $y=x^3$ из кога ће се моћи прочитати кубни корени бројева између 8 и 27!

Прочитај из тога кубне корене бројева 15 и 21 тачно на 2 децимала!

15. Испитај варијације експоненцијалних функција:

$$y=4^x,\ y=\left(\frac{1}{4}\right)^x!$$

Конструиши одговарајуће линије!

16. Конструиши линију $y=\sqrt{x}$!

17. Конструиши $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$!

САДРЖАЈ