МИЛАН С. НЕДИЋ

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

ЗА
VII и VIII РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ДРУГО ИЗДАЊЕ
(ИЗРАЂЕНО ПО НОВОМЕ ПРОГРАМУ)

По препоруци Главног просветног савета С. бр. 225 од 3 јула 1931 године одобрена за уџбеник одлуком Господина Министра просвете С. н. бр. 23118 од 20 јула 1931 године.

БЕОГРАД
ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА ГЕЦЕ КОНА
1 КНЕЗ МИХАИЛОВА УЛИЦА 1
1931

ОД ИСТОГ ПИСЦА:

ТРИГОНОМЕТРИЈА
ЗА VII РАЗРЕД
И
ИНФИНИТЕЗИМАЛНИ РАЧУН
ЗА VIII РАЗРЕД

ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА
ГЕЦЕ КОНА

БЕОГРАД
За Штампарију „ПРИВРЕДНИК“, Кнез Михаилова бр. 3.
БЛАГОЈЕВИЋ Д. ЖИВОЈИН, Кондина бр. 10.
1931

НАПОМЕНА

Одељци за реалке обележени су речима „Одељак за реалке“, сложеним из црних слова, или звездицом у почетку наслова.

Задаци за реалке обележени су звездицом.

М. С. Н.

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

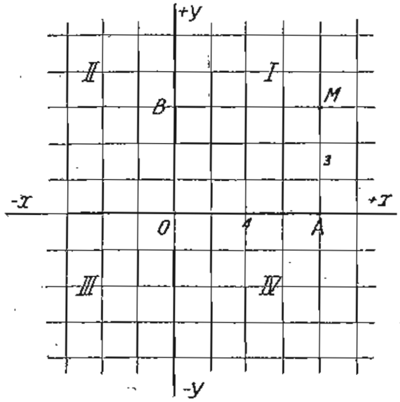
од професора М. С. НЕДИЋА

I. — УВОД

КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ

Правоугли координатни систем. — Њега знамо из раније. То су две осовине под правим углом (сл. 1). Њихов пресек зове се почетак и обележава се писменом *O*. (То је прво слово латинске речи origo = почетак). Једна осовина зове се апсцисна осовина. Њу обележавамо са $-X$ и $+X$. Друга је осовина управна на првој. Она се зове ординатна осовина. Њу обележавамо са $-Y$ и $+Y$.

Положај једне тачке (н. пр. тачке *M* са слике 1) одређујемо њеним растојањем од обеју осовина. Растојање од ординатне осовине ($BM = OA$) зовемо апсциса. Растојање једне тачке од апсцисне осовине ($AM = OB$) зовемо ордината. Свака тачка има своју апсцису и своју ординату. Апсциса и ордината једне тачке зову се једним именом координате те тачке. Координате су отсечци на осовинама које граде управне спуштене из дате тачке на обе осовине. Зато су координате сваке тачке изражене релативним бројевима.



Сл. 1.

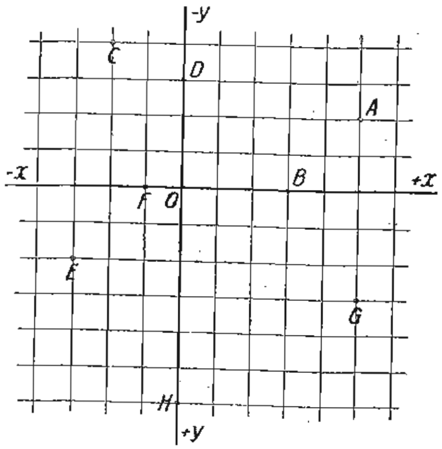
Правоугли координатни систем дели целу раван на четири квадранта, као што показује слика 1.

При писању координата најпре пишемо апсцису, па ординату. Координате раздвајамо запетом. Координате тачке *M* са сл. 1 обележавамо овако: $M(4,3)$.

Слика 2 показује координате ових тачака:

A (5 , 2) B (3 , 0) C (—2 , 4) D (0 , 3) E (—3 , —2)
F (— 1, 0) G (5 , —3) H (0 , —6).

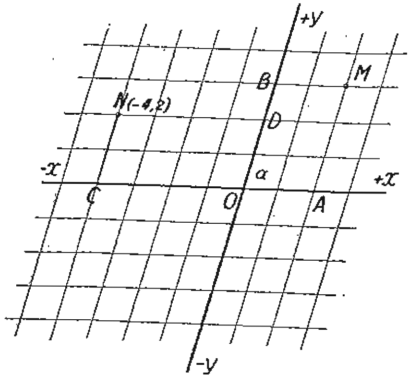
Свакој тачци на равни одговарају два релативна броја. То су правоугле координате те тачке. Свака два релативна броја одређују положај тачке на равни. Н. пр. бројеви $+5$ и $+2$ одређују положај тачке *A* (сл. 2). Координате једне тачке обележавају положај те тачке на равни. Апсцису обично обележавамо са *x*, ординату са *y*. Н. пр. координате тачке *C* можемо обележити овако:



Сл. 2.

$$C \begin{cases} x = -2 \\ y = +4 \end{cases}$$

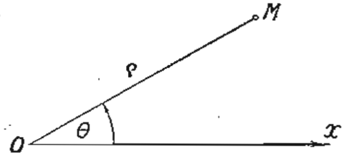
Косоугли координатни систем. — Положај једне тачке можемо одредити и другојачим координатним системом. Повучемо две осовине које се секу под произвољним углом (сл. 3, угао α). Опет је једна ($+X$, $-X$) апсцисна, а друга ($+Y$, $-Y$) ординатна осовина. Њихов је пресек опет координатни почетак. Положај једне тачке (*M*, сл. 3) одређује се овако:



Сл. 3.

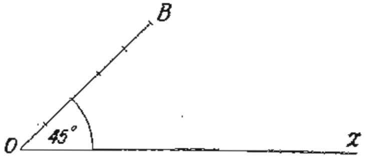
Повуку се из дате тачке паралелне с осовинама до пресека с њима. Те паралелне граде отсечке на осовинама. Ти отсечци су координате дате тачке. Координате тачке *M* са слике 3 су *OA* и *OB*. Координате тачке *N* су *OC* и *OD*. То можемо овако написати: *N* (—*4* , *2*).

Поларни координатни систем. — Узмимо једну полуправу *OX* (сл. 4) Положај једне тачке *M* можемо одредити овако: њеним растојањем од *O* и углом Θ (*ш̅е̅ш̅а̅*) што га то растојање ρ (*ро*) заклапа с полуправом *OX*. Тачка *O* на полуправој *OX* зове се пол; полуправа *OX* зове се поларна осовина; угао ρ зове се поларни угао; растојање *OM* зове се потег.



Сл. 4.

Ако изаберемо јединицу мере, можемо увек одредити положај једне тачке у равни помоћу двеју координата: потега и поларног угла. Такве координате зову се поларне координате. Н. пр. да обележимо тачку чије су поларне координате *5*, и *45⁰*. То ће бити тачка *B* (сл. 5). Овакав координатни систем зове се поларни координатни систем.



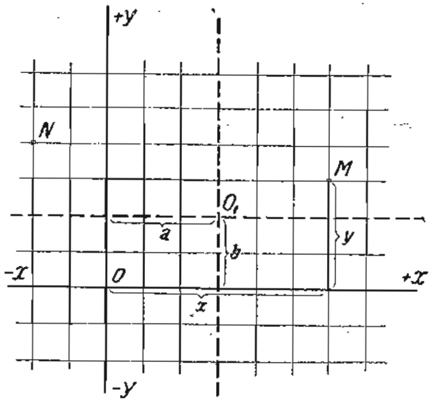
Сл. 5.

Координатних система има више. Ми смо споменули само три, а употребљаваћемо, у главном, само правоугли координатни систем.

22 - [illegible]

ПРОМЕНА КООРДИНАТА

На правоуглом координатном систему узимамо једну тачку *M* чије су координате *x* и *y*. Нека сад наш координатни систем *O* (сл. 6) изврши транслацију и то: апсцисна осовина за $+a$, ординатна осовина за $+b$. То значи да ће координатни почетак доћи у тачку 0_1, чије су координате *a* и *b*. Колике ће бити координате тачке *M* у новоме координатном систему? Нека су координате тачке *M* у новоме координатном систему x_1 и y_1. Тада ће бити:



Сл. 6.

$$x_1 = x—a \text{ и } y_1 = y—b.$$

Да одмах проверимо. Са слике се види да је: $x = 6$, $y = 3$, $a = 3$, $b = 2$. Координате тачке *M* у старом координатном систему су *M* (*6* , *3*). У новоме координатном систему биће:

$$x_1 = x—a = 6—3 = 3$$
$$y_1 = y—b = 3—2 = 1$$

И збиља је у новом координатном систему $M\ (3\ ,\ 1)$.

Тачка N има у староме систему координате $N\ (-\ 2\ ,\ 4)$. У новоме систему биће $x_1 = x - a = -2 - 3 = -5$

$y_1 = y - b = 4 - 2 = 2$.

ВЕЖБАЊА

1. — Дата је тачка M_1 (5, 6). Написати њене координате у систему чији почетак има координате O_1 (2, 3).

2. — Написати координате тачке M_2 (— 5, 6) у новом систему O_1 (— 2, 4).

3. — Исто за тачку M_3 (4, 6) у новом систему O_1 (— 5, 8).

4. — Исто за тачку N (—3, —5) и нови систем O_1 (—3, —5).

5. — » » » M (—4, —7) и » » O_1 (0, 5)

6. — » » » M (—7, +9) и » » O_1 (—7, —0).

7. — » » » M (4, —6) и » » O_1 (0, — 6).

8. — Ово су координате темена једног троугла: A (1, 5) B (7, 4) и C (5, 8). Координатни систем је транслацијом померен и нови почетак је сад у А. Напиши сад координате темена тога троугла.

*9. — Координате једне тачке M јесу (+3, 4). Координатни се систем обрне око почетка за угао $\alpha = 30^0$. Колике су координате тачке M у новоме систему?

[Обележимо апсцису 3 = ОА, ординату 4 = АМ. Из M спустимо управну МВ на нову апсцисну осовину OX^1. Из О ићи ћемо у М овим путевима: ОАМ и ОВМ. Пројекције оба та пута на осовини ОХ биће једнаке. Пројекција пута ОАМ је ОА = 3. Пројекција пута ОВМ је ОВ $\cos \alpha$ + ВМ $\cos (\alpha + 90^0)$. Обележимо ОВ = x, ВМ = y.

Тада је:

(1) $\quad 3 = x \cos 30^0 - y \sin 30^0$

Ако оба пута пројектујеш на осовини ОУ, па то изразиш једначином, добићеш:

(2) $\quad 4 = x \sin 30^0 + y \cos 30^0$.

Из (1) и (2) имаш координате тачке М у новоме систему:

$$x = 3 \cos 30^0 + 4 \sin 30^0$$

$$y = 4 \cos 30^0 - 3 \sin 30^0.$$

Да извршимо пробу.

$$OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 = (3 \cos 30^0 + 4 \sin 30^0)^2 +$$

$$+ (4 \cos 30^0 - 3 \sin 30^0)^2 = 9 \cos^2 30^0 + 24 \cos 30^0 \sin 30^0$$
$$+ 16 \sin^2 30^0 + 16 \cos^2 30^0 - 24 \cos 30^0 \sin 30^0 +$$
$$9 \sin^2 30^0 = 9 (\cos^2 30^0 + \sin^2 30^0) + 16 (\sin^2 30^0 +$$
$$+ \cos^2 30^0) = 9 + 16 = 25$$
$$OM = 5.$$

Добро је.]

***10**. — Координате тачке М су (— 3 , 4). Координатни се систем обрне око 0 за угао од (60^0). Колике су координате тачке М у новоме систему?

***11**. — Координате тачке М су (— 2, — 5). Координатни се систем обрне за $\alpha = 45^0$. Колике су координате тачке М у новоме систему?

***12**. Тачка М има координате (2 , 5). Координатни се систем транслаторно помери у тачку N (1 , 3), а затим се обрне око N за угао $\alpha = 30^0$. Колике су координате тачке М у новоме систему?

[Биће $x = 2 \cos 30^0 + 5 \sin 30^0 - 1$

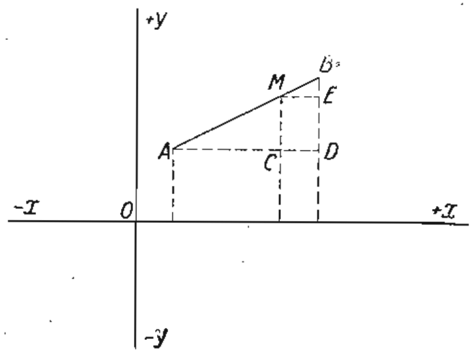
$y = 5 \cos 30^0 - 2 \sin 30^0 - 3$].

КООРДИНАТЕ ТАЧКЕ КОЈА ДЕЛИ ДУЖ

Одељак за реалке

Нека су дате координате крајњих тачака једне дужи AB (сл. 7): $A\ (x_1\ ,\ y_1)$ $B\ (x_2, y_2)$. Наћи координате тачке која дату дуж AB дели у размери $m : n$.

Нека је то тачка M. Обележимо њене координате за x и y. Према задатку имамо: $AM : MB = m : n$. Имамо и сличне троугле AMC и MBE. Отуда је:



Сл. 7.

AC : ME = AM : MB = m : n, То је даље

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = m : n$$
$$nx - nx_1 = mx_2 - mx$$
$$mx + nx = mx_2 + nx_1$$

(1) $$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

Из сличности троуглова АМС и МВЕ имамо и ово:

$$MC : BE = AM : MB = m : n.$$
$$MC : BE = m : n$$

$(y - y_1) : (y_2 - y) = m : n$. Одатле је:

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \qquad (2)$$

ВЕЖБАЊА

1. — Одреди координате тачке која дату дуж [*A* (5, 10) и *B* (10, 5)] дели у размери 2:3.

2. — Одредити координате тачке која дату дуж *CD* [*C* (5, 6) *D* (2, 8)] дели у размери 1:3.

3. — Изведи обрасце за координате тачке која полови дату дуж.

[Какви су онда међу собом *m* и *n* у обрасцима (1) и (2)?]

4. — Нађи координате тачке која полови дуж *MN* [*M* (—4, 7) *N* (4, 9)].

5. — Исто за дуж *PQ* [*P* (0, 8; *Q* (—8, 6)].

6. — Исто за дуж *LK* [*L* (—10, —4) *K* (5, 10)].

7. — Израчунати површину троугла *ABC*, кад су ово координате његових темена: *A* (2, 3), *B* (7, 5), *C* (4, 9).

[Спусти ординате из сва три темена. Добићеш на апсцисној осовини тачке A_1, B_1, C_1. Твој троугао $ABC = A_1\,CB_1\,CA + C_1B_1\,BC - A_1\,C_1\,BA$. Чему је равна површина трапеза $A_1\,C_1\,CA$? Знаш ли његову висину $A_1\,C_1$?

8. — Израчунај површину троугла чије су координате *A* $(x_1\ y_1)$, *B* $(x_2\ y_2)$ и *C* $(x_3\ y_3)$. Упрости добивени резултат.

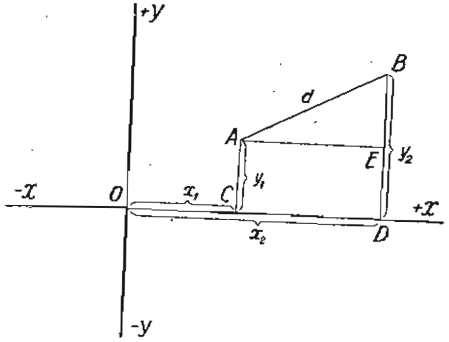
9. — Израчунај површину четвороугла чије су координате *A* (3, 3), *B* (9, 5), *C* (7, 9) и *D* (6, 7).

РАСТОЈАЊЕ ДВЕЈУ ТАЧАКА

Нека су дате две тачке *A* (x_1, y_1) и *B* $(x_2\ y_2)$ — сл. 8. Кад спустимо обе ординате и из *A* паралелну с апсцисном осовином, добићемо правоугли троугао *AEB*. У њему је *AB* = *d* (растојање тачака *A* и *B*), $AE = (x_2 - x_1)$, *EB* $(y_2 - y_1)$. Знамо да мора бити $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2$. То значи да је

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

То је образац за растојање двеју тачака.



Сл. 8.

ВЕЖБАЊА

Нађи растојање ових двеју тачака:

1. *A* (2, 3) и *B* (4, 6) **2.** *A* (—3, 8) и *B* (—8, 10)
3. *A* (—4, —6) и *B* (—5, —9) **4.** *B* (—4, 6) и *B* (—5, —19)
5. *A* (6, —5) и *B* (4, —7) **6.** *A* (—3, —3) и *B* (—6, —2).

7. — Кад хоћемо да израчунамо растојање двеју тачака, коју ћемо узети за прву, а коју за другу? Је ли то свеједно? По чему се то види? Је ли $a - b = b - a$?

8. — Израчунај површину троугла чије су координате *A* (2, 3), *B* (7, 3), *C* (5, 8).

[Израчунај му најпре све три стране!]

9. — Израчунај површину троугла чије су координате *A* (3, 4), *B* (5, 6), *C* (4, 10).

10. — Растојање двеју тачака *A* (3, 2) и *B* (x, 6) јесте 5. Колика је апсциса тачке *B*?

11. — Растојање двеју тачака *A* (l, y) и *B* (3, 9) јесте $\sqrt{13}$. Колика је ордината тачке *A*?

12. — Израчунај растојање тачке M_1 од координатног почетка.

[Опет имаш да израчунаш растојање двеју тачака. Колике су координате координатног почетка?]

13. — Изведи образац за израчунавање растојања једне тачке од координатног почетка.

14. — Квадрат чија је страна *a*=4 cm. има центар у координатноме почетку а стране паралелне са осовинама. Израчунај координате његових темена.

15. — Координате два наспрамна квадратова темена јесу *A* (2, 7) и *C* (5, 11). Израчунати површину круга описаног око тога квадрата. Конструисати тај квадрат.

16. — Дата је тачка *A* (3, 5). Напиши координате тачака симетричних са њом према једној и другој осовини.

17. — Правилан шестоугаоник са страном *a*=6cm. налази се изнад апсцисне осовине тако, да му једно теме лежи у координатном почетку, а једна страна пада по апсцисној осовини. Израчунати координате његових темена.

18. — Нађи дужину дијогонале у паралелограму чија су три узастопна темена *A* (4, 2), *B* (8, 4), *C* (9, 7).

[Ако пројектујеш на апсцисну осовину стране *AB* и *CD*, какве ће бити међу собом те две пројекције? Изрази то помоћу апсциса тачака *A*, *B*, *C* и *D*. Пројектуј сад *AB* и *CD* на ординатну осовину].

19. — Одреди координате центра описаног круга око троугла *ABC*, кад су ово координате темена: *A* (2, 3), *B* (7, 5), *C* (5, 9).

20. — Докажи да је равнокрак троугао чија су темена: A (3, 2), B (7, 2) и C (5, 6).

***21.** — Дате су координате темена једног троугла: A (2, 1), B (7, 2) и C (5, 4). Докажи да је то правоугли троугао.

[Види чему је раван квадрат његове највеће стране).

22. — Дате су координате темена једног троугла: A (1, 0), B (5, 1), C (3, 4). На AB обележена је тачка D тако да је $AD = \frac{1}{4} AB$. На AC је тачка E тако да је $AE = \frac{1}{4} AC$. Докажи да је $DE = \frac{BC}{4}$.

23. — Одредити на ординатној осовини тачке које су од M (3, 4) удаљене за $d = \sqrt{10}$.

[Колико их има? Колике су апсцисе тачака на ординатној осовини?].

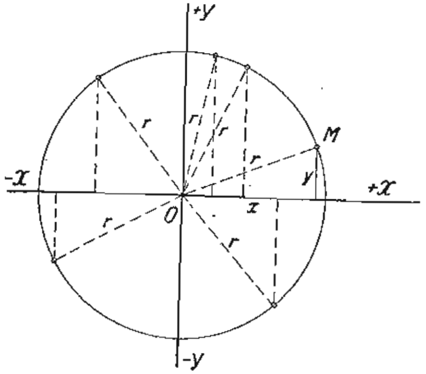
22-6-[illegible]

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

Први задатак аналитичне геометрије. — Аналитична геометрија има овај задатак:

Кад су познате геометриске особине једне криве линије, да из тих особина изведе једначину те криве — служећи се координатама. Шта то значи, показаћемо одмах на једноме примеру.

Знамо да је круг крива линија која је геометриско место тачака подједнако удаљених од једне сталне тачке која се зове центар. Из те геометриске особине ми ћемо извести једначину круга.



Сл. 9.

Узмимо да је центар једног круга (сл. 9) у координатном почетку. Опишимо полупречником r круг из тога центра. Узмимо на кругу једну тачку M. Знамо да је њено растојање од координатног почетка:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

па ма какве биле координате те кружне тачке.

Нека сад наша тачка крене по кругу. Увек ће њено растојање од центра бити $d = \sqrt{x^2 + y^2} = r$. Добијамо једначину:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \qquad (1)$$

Ова једначина каже да претставља криву чије је растојање од центра $(\sqrt{x^2 + y^2})$ увек исто и једнако r. Па то може бити

само круг описан из O полупречником r. Једначину круга (1) ми пишемо обично овако:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Други задатак аналитичне геометрије. — Аналитична геометрија има и овај задатак:

Кад је дата једначина једне криве, да испита геометриске особине те криве и покаже њену конструкцију — служећи се координатама.

И то ћемо објаснити на примеру.

Какву криву претставља једначина

$$x^2 + y^2 = 9?$$

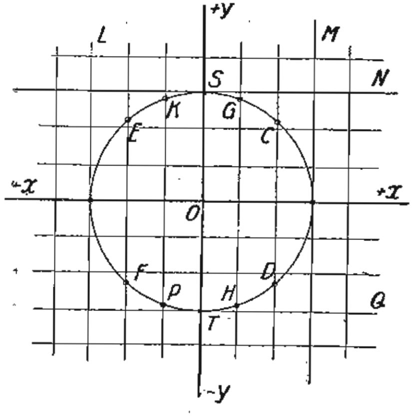
Решимо ову једначину по y. Добићемо:

$$y = \pm \sqrt{9 - x^2}.$$

Знамо да x претставља апсцисе, а y ординате. У нашем случају вредност ордината дата је једним квадратним кореном. Под кореном је разлика. Та разлика ће бити позитивна, кад је по апсолутној вредности

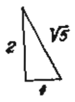
$$x^2 < 9 \quad \text{тј.} \quad x \angle 3.$$

Ако је $x > 3$, биће $9 - x^2 < 0$ и ипсилон уображено. Значи, наша крива нема ниједне тачке чија је апсциса већа од (+ 3), ни мања од (— 3). Можемо да кажемо да наша крива лежи између правих L и M (сл. 10). Између правих L и M узмимо неколико произвољних апсциса и израчунајмо ординате.

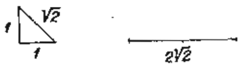


Сл. 10.

x	y	
$+3$	0	. . . . тачка у прес. праве M и апсц. ос.
-3	0	. . . . тачка у „ „ L „ „ „
$+2$	$\pm\sqrt{5}$	. . . . . . тачка C и тачка D (види сл. 11)
-2	$\pm\sqrt{5}$	. . . . . . тачке E и F
1	$\pm 2\sqrt{2}$	. . . . . тачке G и H (види сл. 12)
-1	$\pm 2\sqrt{2}$	. . . . . тачке K и P.



Сл. 11.



Сл. 12.

Решимо сад дату једначину по x:

$$x = \pm \sqrt{9 - y^2}$$

Ова разлика под кореном биће позитивна, ако је

$$9 > y^2, \text{ т. ј. } y < 3 \text{ (по апсолутној вредности)}$$

Ако је $y = 3$, имамо:

$$x = \pm\sqrt{9 - 9} \quad \text{тј.} \quad x = 0.$$

Добијамо тачку S (0, 3).

Ако је $y = -3$, имамо: $x = 0$. Добијамо тачку T (0, — 3).

Пошто ипсилон не сме бити веће од 3, наша се крива налази и између правих N и Q (сл. 10).

Како ћемо конструисати ову криву? Можемо тачку по тачку. Овако:

Знамо да наша крива нема тачака чије су координате веће од + 3, ни мање од (— 3). Из једначине видимо још и ово:

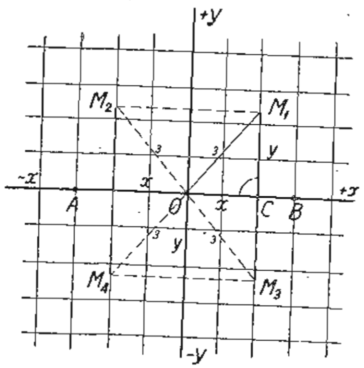
$$x^2 + y^2 = 9.$$

Значи, увек имамо ово: збир квадрата апсцисе и ординате износи увек 9. То даље значи да су апсциса и ордината стране правог угла, а 3 хипотенуза. Сад ћемо конструисати тачку по тачку. Обележимо најпре ове две крајње тачке: $A(-3, 0)$ и $B(+3, 0)$ — слика 13. Узећемо једну тачку на апсцинској осовини између — 3 и + 3. Рецимо тачку C, чија је апсциса $+ 2$. Дигнемо управну и из O пресечемо полупречником 3. Добијемо тачку M_1. Како бисмо одмах добили тачку M_2? За $x = 2$ имамо $y = \sqrt{9 - 4}$ тј. $y = \sqrt{5}$. Ту је за $x = 2, y = +\sqrt{5}$ тачка M_1; за $x = 2, y = -\sqrt{5}$ тачка M_3

За $x = -2$ имамо $y = \pm\sqrt{9-4}$ т ј. $y = \pm\sqrt{5}$.

Ту је за $x = -2, y = \sqrt{5}$ тач. M_2

за $x = -2, y = -\sqrt{5}$ тач. M_4



Сл. 13

Значи да је наша крива симетрична према апсцисној осовини.

За $y = \sqrt{5}$ имамо:

$$x = \pm\sqrt{9 - (\sqrt{5})^2}$$

$$x = \pm 2.$$

Отуда ове две тачке:

M_1 (+ 2 , $\sqrt{5}$) и M_2 (— 2 , $\sqrt{5}$).

Види се да је наша крива симетрична и према ординатној осовини.

Конструкција нам је сад знатно олакшана. Ми конструишемо једну тачку (M_1) у I квадранту. Затим конструишемо симетричне тачке у II и IV квадранту. Најзад конструишемо симетричну тачку тачке M_2 према апсцисној осовини. То значи конструишемо тачку M_4.

Али овакав би рад био веома заметан. Наша једначина ће нам показати много краћи пут.

Имамо једначину:

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Ми ћемо то овако написати:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3.$$

Одавде видимо да све тачке наше криве имају исто растојање од координатног почетка. То могу бити само тачке на кругу чији је полупречник 3, а центар у координатном почетку. Тај круг је лако описати.

ВЕЖБАЊА

1\. — Написати једначину једне линије, кад се зна да је ордината сваке њене тачке 4. (Нацртај).

2\. — Написати једначину једне линије, кад се зна да је апсциса сваке њене тачке 3. (Нацртај).

3\. — Написати једначину једне линије, кад се зна да је ордината сваке њене тачке једнака са својом апсцисом (Нацртај).

4\. — Написати једначину једне линије, кад се зна да је ордината сваке њене тачке три пута већа од апсцисе.

5\. — Написати једначину једне линије, кад се зна да је апсциса сваке њене тачке четвртина своје ординате.

6\. — Написати једначину једне линије, кад се зна да је ордината сваке њене тачке за 1 мања од своје удвојене апсцисе.

7\. — Написати једначину једне линије, кад се зна да је апсциса сваке њене тачке за 3 већа од своје петоструке ординате.

8\. — Написати једначину једне линије, кад се зна да је свака њена тачка удаљена од координатног почетка за 3 подеока.

9\. — Исто за удаљеност од 5 поделака.

10\. — Дата је једначина једне линије:

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Испитати особине те линије.

11\. — Исто за једначину $x + y = 10$.

II. — ПРАВА ЛИНИЈА

ЈЕДНАЧИНА I СТЕПЕНА С ЈЕДНОМ ИЛИ ДВЕМА ПРОМЕНЉИВИМА

Једначина $Ax + By + C = O$. — Ми смо раније видели да једначина I степена с двема промењивим претставља праву линију. Најпре један пример.

Узмимо једну такву једначину:

$$2x + 3y + 6 = 0.$$

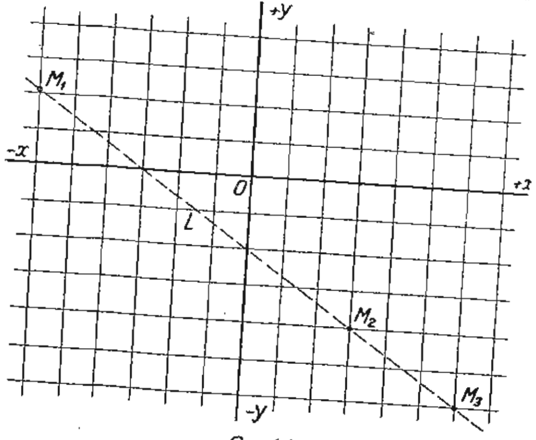
Нека се једна тачка креће тако, да у свакоме своме положају својим координатама задовољава горњу једначину. Узмимо три таква њена положаја (сл. 14): $M_1(-6,2)$ $M_2(+3,-4)$ $M_3(+6,-6)$. Координате ових трију тачака задовољавају горњу једначину $2x + 3y + 6 = 0$.

$2 . (-6) + 3 . 2 + 6 = 0$ за тачку M_1

$2 . 3 + 3 . (-4) + 6 = 0$ за тачку M_2

$2 . 6 + 2 . (-6) + 6 = 0$ за тачку M_3

Кад обележимо те три тачке и кроз њих положимо лењирску ивицу, видимо да ове три тачке леже на правој линији L.



Сл. 14.

Сад ћемо доказати да једначине I степена с двема променљивима, облика $Ax+By+C=O$ претстављају праву линију.

Нека се једна тачка креће тако, да у свакоме своме положају својим координатама задовољава једначину

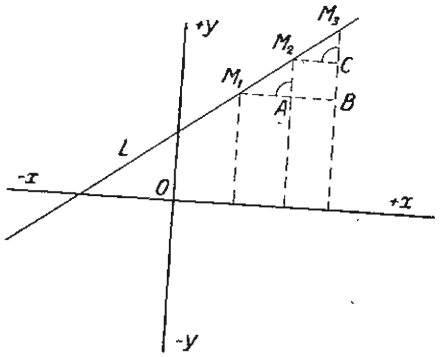
$$Ax+By+C=O. \quad (1)$$

Узмимо координате три њена положаја (сл. 15):

$M_1\ (x_1\ y_1)$

$M_2\ (x_2\ y_2)$

$M_3\ (x_3\ y_3)$



Сл. 15.

Пошто све три тачке својим координатима задовољавају горњу једначину биће:

I $Ax_1 + By_1 + C = 0$

II $Ax_2 + By_2 + C = 0$

III $Ax_3 + By_3 + C = 0$

Отуда је:

из III и II

$$Ax_3 + By_3 + C - (Ax_2 + By_2 + C) = 0$$
$$Ax_3 - Ax_2 + By_3 - By_2 = 0$$
$$A\,(x_3 - x_2) + B\,(y_3 - y_2) = 0$$

$$(2) \qquad \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = -\frac{A}{B}$$

из II и I:

$Ax_2 + By_2 + C - (Ax_1 + By_1 + C) = 0.$ Одатле је:

$$(3) \qquad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{A}{B}$$

Пошто су у (2) и (3) једнаке десне стране, морају бити једнаке и леве:

$$(4) \qquad \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Кад погледамо на слику 15, видимо да једначина (4) значи ово:

$$(5) \qquad \frac{\overline{CM_3}}{\overline{CM_2}} = \frac{\overline{AM_2}}{\overline{AM_1}}$$

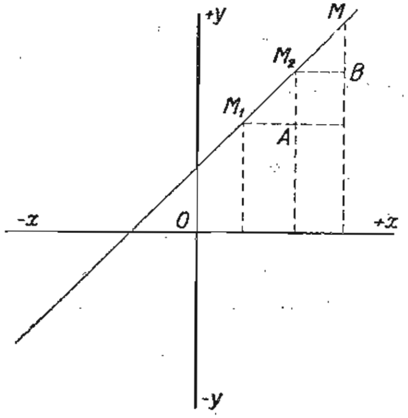
У троуглима AM_2M_1 и M_2CM_3 једнаки су углови A и C (прави су). С обзиром на једначину (5) значи да су та два троугла слична. Отуда је $\sphericalangle\ C\,M_2\,M_3 = AM_1\,M_2$. Пошто је $AM_2 \parallel CM_3$ морају бити и $M_1\,M_2 \parallel M_2\,M_3$. Али пошто имају једну заједничку тачку (M_2), та два правца морају пасти на исту праву. Значи да $M_1\,M_2$ и $M_2\,M_3$ леже на једној правој линији. Све три тачке леже на једној правој линији.

Обрнут доказ. — Узмимо једну праву линију (L, сл. 15) и на њој три тачке $M_1\ (x_1\ y_1)$ $M_2\ (x_2\ y_2)$ $M_3\ (x_3\ y_3)$. Доказаћемо ово:

Ако се једна тачка креће по правој линији, координате свих њених положаја морају задовољавати једну једначину I степена овога облика:

$$Ax + By + C = 0.$$

Узмимо две сталне тачке M_1 и M_2. Њихове координате биће стални бројеви $x_1\ y_1$ и $x_2\ y_2$ (сл. 16). Узмимо још и једну ма коју покретну тачку M на тој правој. Пошто је она покретна, њене координате биће променљиве количине x и y. Из M_1, M_2 и M повуцимо паралелне с осовинама. Добићемо троугле AM_1M_2 и BM_2M. Пошто су у њима сви углови једнаки, они морају бити слични. Отуда је:



Сл. 16.

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BM_2}} = \frac{\overline{AM_2}}{\overline{AM_1}}.$$

То значи:

$$(6) \quad \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Кад се ослободимо разломака и извучемо заједничко *x* и заједничко *y*, имаћемо:

$$(7) \qquad y\,(x_2 - x_1) - x\,(y_2 - y_1) = x_2\,y_1 - x_1\,y_2$$

То је даље:

$$x\,(y_1 - y_2) + y\,(x_2 - x_1) + (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)$$

Овде су стални бројеви:

$$y_1 - y_2 \qquad x_2 - x_1 \quad и \quad x_1\,y_2 - x_2\,y_1$$

Њих ћемо сменити сталним количинама *A*, *B* и *C*. Сад једначину (7) можемо написати овако:

$$Ax + By + C = 0.$$

КАД ЈЕ ОДРЕЂЕНА ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ ЛИНИЈЕ?

Једначина праве линије одређена је кад јој знамо сва три сачиниоца *A*, *B* и *C*. Да бисмо их знали сва три, довољно је да знамо два односа између ових сачинилаца.

Први пример. — Написати једначину праве линије кад се зна да је

$$(1) \qquad \frac{A}{B} = 3 \quad и \quad (2) \quad \frac{A}{C} = 2.$$

Из (1) имамо:

$$(3) \qquad A = 3\,B$$

Из (2) имамо:

$$(4) \qquad C = \frac{A}{2} = \frac{3B}{2}$$

Општи облик једначине праве линије јесте: $Ax + By + C = 0$. Унесимо у ту једначину резултате из (3) и (4). Добићемо:

$$3\,Bx + By + \frac{3B}{2} = 0$$

$$6\,Bx + 2\,By + 3\,B = 0.$$

$$6\,x + 2\,y + 3 = 0$$

Видимо да је $A = 6$, $B = 2$, $C = 3$. Једначина је одређена.

Други пример. — Написати једначину праве кад је:

$$(5) \qquad \frac{A}{B} = 2 \qquad\qquad (6) \qquad \frac{C}{B} = 0{,}3.$$

Из (5) имамо $A = 2\,B$. Из (6) имамо $C = 0{,}3\,B$. Унесемо те вредности у једначину праве $Ax + By + C = 0$ и добијамо:

$$2\,Bx + By + 0{,}3\,B = 0$$

$$2\,x + y + 0{,}3 = 0$$

$$20\,x + 10\,y + 3 = 0$$

Раније смо учили да је права одређена:

1) кад знамо две тачке на њој;

2) кад знамо једну тачку с те праве и угао што га она заклапа с другом датом правом;

3) кад знамо растојање на коме је наша права паралелна с неком датом правом.

Види се да су потребна два испуњена услова, па да права буде одређена у геометрији. Малочас смо видели да аналитична геометрија то потврђује. Потребно је да буду испуњена два услова, па да једначина праве буде одређена.

КОНСТРУКЦИЈА ПРАВЕ ЛИНИЈЕ

Показаћемо један лак начин конструкције праве линије. Он се састоји у овоме:

Одреде се координате двеју произвољних њених тачака, па се кроз те тачке нацрта права линија.

Пример. — Конструисати праву $2x - 3y + 4 = 0$.

Узећемо произвољно *x*, па израчунати *y*.

x	y	
0	$\frac{4}{3}$	. . . . . . тачка M_1
1	2	. . . . . . тачка M_2

[Да ли си у алгебри видео неки бржи начин?]

за дом

ВЕЖБАЊА

1. — Доказати да једначина $3x - 7y + 5 = 0$ претставља праву линију.

2. — Исто за једначину $mx + ny + p = 0$.

3. — Исто за једначину $mx - 3y + 7 = 0$.

4. — Кад се једна тачка креће по правој линији, докажи да једначина њене путање мора да има овај облик: $Ax + By + C = 0$.

5. — Зна се да између сачинилаца A, B и C једне једначине постоје ови односи: $\frac{A}{C}=\frac{1}{2}$ $\frac{B}{C}=\frac{3}{4}$. Написати једначину те праве.

6. — Исти задатак за $\frac{A}{C}=\frac{1}{8}$ и $\frac{C}{B}=2$.

7. — Исти задатак за $\frac{A}{C}=-\frac{2}{7}$ $\frac{B}{C}=\frac{1}{9}$.

8. — Исти задатак за $\frac{A}{C}=0{,}2$ $\frac{B}{C}=-0{,}4$.

9. — „ „ „ $A=B$ и $B=\frac{C}{2}$.

10. — „ „ „ $A=C$ и $C=2A$.

11. — „ „ „ $A=B=C$.

Конструисати ове праве линије:

12. $2x-3y+6=0$

13. $4x+3y=12$

14. $\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=2$

15. $0{,}2\,x+\frac{2}{3}y=-7$

16. $\frac{1}{3}x-0{,}3\,y=2$

17. $2y-3x+10=0$

18. $2y=3x$

19. $y=x$

20. $y=-x$

21. $y=x-11$

22 $11y-x=1$

23. $x=2$

24. $y=2\frac{1}{2}$

25. $0{,}3\,y-0{,}6\,x=0{,}18$

26. — Да ли тачка M (2,3) лежи на правој $4x-y=5$?

27. — Да ли тачка N (4, — 2) лежи на правој $8x-7y=46$? (Лежи)

28. — Исто питање за P (— 3, — 1) и $5x-3y+12=0$. (Лежи)

29. — Исто питање за Q (3, 7) и $2x+3y-7=0$. (Не лежи).

30. — Исто питање за C (— 1, — 1) и $x-3y-2=0$.

31. — Исто питање за D (— 4, 9) и $2x+5y-6=0$.

32. — У једначини $2x+3y+C=0$ одреди C тако, да тачка K (4, — 3) лежи на тој правој. [*Резултат:* $C=1$]

33. — У једначини $2x+3B+6=0$ одреди B тако, да тачка P (— 6, — 5) лежи на тој правој.

34. — У једначини $Ax+3y-7$ одреди A тако, да тачка S (— 2, 9) лежи на тој правој.

35. — У једначини $4x-5y+4C=0$ одреди C тако, да тачка N (5, 6) лежи на тој правој.

РАЗНИ ПОЛОЖАЈИ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ

Права линија може бити у овим разним положајима на координатном систему:

I — *Права сече обе осовине и не пролази кроз координатни почетак* (сл. 17).

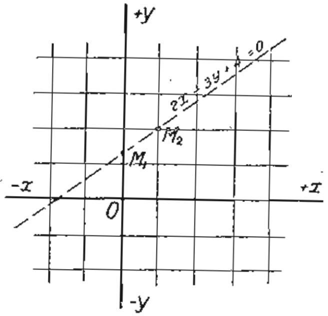
Тада је њена једначина

$$(1)\quad Ax+By+C=0.$$

Да права (1) не пролази кроз координатни почетак можемо се лако уверити. Координате координатног почетка су O (0,0). Унесимо их у једначину (1).

$$0\cdot x+0\cdot y+C\neq 0$$

Једначина није задовољена. Координатни почетак не лежи на правој (1):



Сл. 17.

Пример. — Да ли координатни почетак лежи на правој $2x-3y+4=0$?

$$2\cdot 0-3\cdot 0+4\neq 0 \qquad \text{Не лежи.}$$

II — *Права сече обе осовине и пролази кроз координатни почетак.*

Да би права пролазила кроз координатни почетак, мора њена једначина бити задодољена вредностома $x=y=0$.

Да видимо сад кад ће једначина праве линије бити задовољена тим вредностима. Решимо општу једначину праве линије $Ax+By+C=0$ по y.

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

Ако је $x=0$, биће:

$$y=-\frac{C}{B}.$$

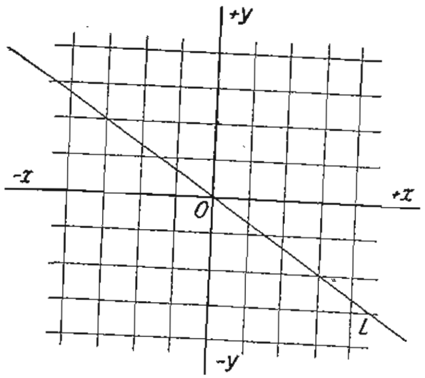
Да би могло бити и $y = 0$, мора бити

$$-\frac{C}{B} = 0. \qquad \text{То ће бити кад је } C = 0.$$

Отуда је ово општа једначина праве која сече обе осовине и пролази кроз координатни почетак:

$$Ax + By = 0.$$

Права $2x + 3y = 0$ пролази кроз координатни почетак, јер је задовољавају предности $x = y = 0$. То је права L са слике 18.



Сл. 18.

III. — *Права паралелна с апсцисном осовином.*

Ако је права паралелна с апсцисном осовином, све њене тачке имају сталне, једнаке ординате. На сл. 19 све тачке праве L имају ординату d_1, а све тачке праве N ординату d_2.). Да одредимо једначину праве у том случају.

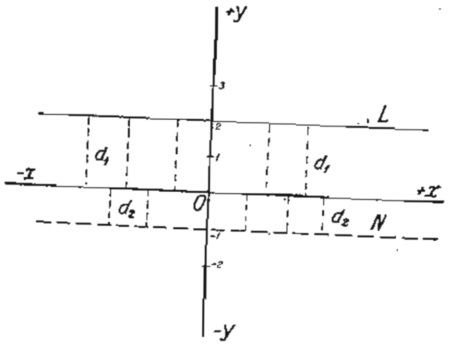
Решимо општу једначину по y:

$$(1) \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Да би y било сталан број, мора да отпадне члан с променљивом x. Мора да отпадне члан $-\frac{A}{B}x$. Да би он отпао, мора бити:

$-\frac{A}{B} = 0$. Одатле је $A = 0$, а $y = -\frac{C}{B}$ (сталан број). Одатле је

$$By + C = 0.$$



Сл. 19.

То је општи облик једначине праве линије паралелне с апсцисном осовином.

Једначина праве L са слике 19 биће $y = 2$, једначина праве N са исте слике биће $y = -1$.

IV — *Права паралелна с ординатном осовином.*

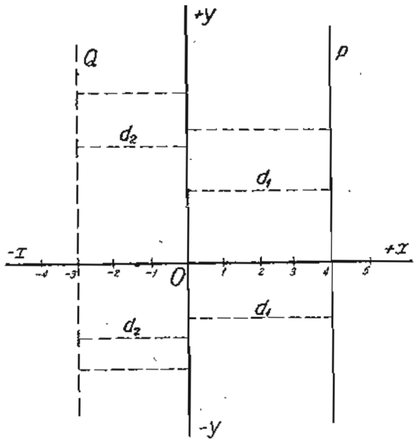
Ако је права паралелна с ординатном осовином, све њене тачке имају сталне, једнаке апсцисе.

Решимо општу једначину $Ax + By + C = 0$ по x:

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}.$$

Ако x мора да буде стално, који члан мора да отпадне? Изведи сад сам једначину праве паралелне са ординатном осовином.

На слици 20 једначина праве P биће $x = 4$, једначина праве Q биће $x = -3$.

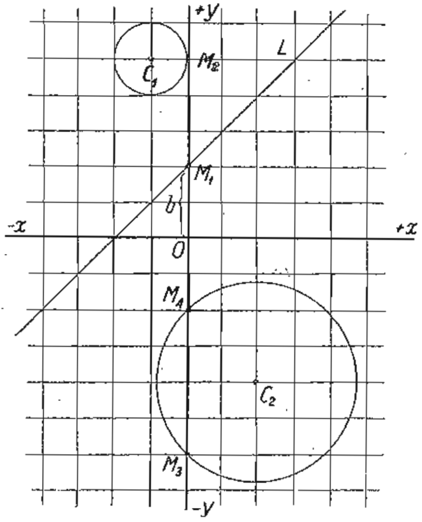


Сл. 20,

РАЗНИ ОБЛИЦИ ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ КОЈА ПРЕСЕЦА ОСОВИНЕ ВАН КООРДИНАТНОГ ПОЧЕТКА

Једначина решена по y. — Решимо по y једначину $Ax + By + C = 0$. Добићемо:

$$(1) \qquad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$



Сл. 21.

Тачка у којој једна крива додирује или пресеца ординатну осовину има апсцису $x = 0$. Права L (сл. 21) сече ординатну осовину у тачци M_1. Координате те тачке су $(0, +2)$. Круг C_1 додирује ординатну осовину у тасци M_2. Координате те тачке су M_2 (0,5). Круг C_2 сече ординатну осовину у тачкама M_3 и M_4. Њихове су координате M_3 $(0, -6)$ и M_4 $(0, -2)$.

Наша права (1) сече ординатну осовину. У пресечној тачци мора биту $x = 0$. Унесимо $x = 0$ у (1), па ћемо добити ординату:

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Ту ординату до тачке где права пресеца ординатну осовину зовемо **отсечак на ординатној осовини** и обележавамо га са b (сл. 21):

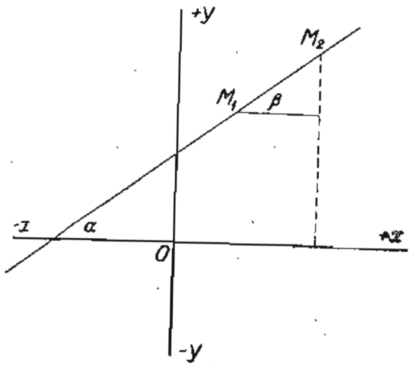
$$-\frac{C}{B} = b.$$

Ако узмемо две тачке на правој линији: M_1 $(x_1 y_1)$ и M_2 $(x_2 y_2)$, сл. 22 биће:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Одатле је:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{A}{B}.$$



Сл. 22.

Ако загледамо на слику 22 видимо да је:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \operatorname{tg}\beta$$

Пошто је $\beta = \alpha$, биће:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha.$$ Отуда је:

$$-\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\alpha.$$

$-\frac{A}{B}$ претставља тангенс угла који права заклапа с позитивним смислом апсцисне осовине. Тај тангенс зваћемо **угловни сачинилац** и обележаваћемо га са a. Зато ће наша једначина (1) добити сад овај облик:

$$y = ax + b.$$

Први пример. — Под којим углом сече апсцисну осовину права $2x - 3y - 6 = 0$?

Најпре ћемо написати једначину у облику решеном по y:

$$y = ax + b$$
$$2x - 3y - 6 = 0$$
$$-3y = 6 - 2x$$
$$3y = 2x - 6$$
$$y = \frac{2}{3}x - 2.$$

Овде је $a = \frac{2}{3}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$$
$$\log \operatorname{tg}\alpha = \log 2 + \operatorname{colog} 3$$

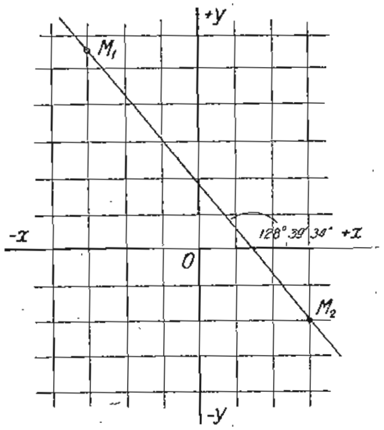
Одатле је $\alpha = 33^0\ 41'\ 24''$.

Други пример. — Под којим углом сече апсцисну осовину права $5x + 4y - 7 = 0$?

Овде је $a = -\frac{5}{4} = -1{,}25$.

$$\operatorname{tg}\alpha = -1{,}25$$
$$-\operatorname{tg}\alpha = 1{,}25$$
$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = 1{,}25$$
$$\log \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \log 1{,}25$$
$$\log \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = 0{,}09691$$
$$\pi - \alpha = 51^0\ 20'\ 25{,}6''$$
$$\alpha = 128^0\ 39'\ 34{,}4''.$$

Наша слика 23 показује дату праву. Види се туп угао који она заклапа с позитивним смислом апсцисне осовине.



Сл. 23.

В Е Ж Б А Њ А

Одредити угао под којим дата права сече апсцисну осовину:

1. $2y - 2x + 3 = 0$ [Резултат је $\alpha = 45^0$]
2. $3x + 3y = 7$
3. $3y - x\sqrt{3} + 5 = 0$ [Резултат је $\alpha = 30^0$]
4. $y\sqrt{5} + 2x - 8 = 0$
5. $15{,}05\,x + 13{,}07\,y = 11$
6. $2\frac{3}{7}x - 7\frac{2}{3}y + 1 = 0$
7. $4\frac{3}{7}y - 2{,}05\,x = 9$ [Резултат је $\alpha = 24^0 50' 22''$]
8. $-4\sqrt{7}\,y - 2\sqrt{6}\,x = 3\sqrt{2}$

9. — Ако су у једначини $Ax + By + C = 0$ сачиниоци A и B стални, хоће ли промене сачиниоца C утицати на промену угла који права заклапа с позитивним смислом апсцисне осовине?

10. — Какав однос мора постојати међу сачиниоцима A, B и C у једначини $Ax + By + C = 0$, ако хоћемо да права сече апсцисну осовину под углом од 45^0? [Види 1 вежбање.]

11. — Исто питање за $\alpha = 135^0$.

12. — Какви морају бити по знаку A и B у једначини $Ax + By + C = 0$, ако хоћемо да буде $\alpha < 90^0$?

13. — Исто питање за $90^0 < \alpha < 180^0$.

14. — Ако све сачиниоце у једначини $Ax + By + C = 0$ помножимо или поделимо једним сталним бројем који није нула, мењамо ли α? По чему се то види?

15. — Која два сачиниоца у једначини $Ax + By + C = 0$ смемо множити или делити истим сталним бројем, па да тиме не покваримо угао α?

16. — Ако у једначини $Ax + By + C = 0$ помножимо или поделимо сачинилац A, јесмо ли променили и угао и отсечке?

17. — Ако у једначини $Ax + By + C = 0$ мењамо само сачинилац A, какво кретање врши та права?

18. — Исто питање за B.

19. — Исто питање за C.

20. — Исто питање за A и B уједно.

21. — Исто питање за B и C уједно.

22. — У једначини $2x + 3y + 20 = 0$ множимо 2 бројем 4. Израчунати величину кретања које због те промене мора да изврши дата права.

23. — У једначини $3x - 4y - 8 = 0$ множимо сачинилац (-4) бројем (-3). Израчунати величину кретања, које због те промене мора да изврши дата права.

24. — Дате су једначине двеју паралелних правих:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0.$$

Како ћеш помоћу њихових сачинилаца изразити да су те две праве паралелне?

$$[\alpha = \alpha_1 \qquad tg\alpha = tg\alpha_1]$$

25. — У коме су међусобном положају ове две праве:?

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad Amx + Bmy + C = 0?$$

26. — У коме су међусобном положају ове две праве:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad Amx + Bmy + Cm = 0?$$

[У 25 и 26 вежбању m није нула].

27. — Секу ли се ове две праве:

$2x + 3y + 7 = 0$ и $2x + 3y + 9 = 0$? [Не]

28. — Секу ли се ове две праве:

$4x + 5y - 6 = 0$ и $3x + 4y - 6 = 0$? [Секу се]

29. — Секу ли се ове две праве:

$8x - 9y + 23 = 0$ и $9y = 20 + 8x$?

Једначина са отсечцима. — Општу једначину праве линије написаћемо тако, да на десној страни буде 1.

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax + By = -C$$

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$$

$$(1) \qquad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Отсечци које права гради на координатним осовинама су дужи од координатног почетка до пресека праве и осовине. Сад ћемо их одредити.

У тачци где права пресеца апсцисну осовину ордината је нула. Ако у једначини (1) ставимо $y = 0$, добићемо апсцису (x) оне тачке где права сече апсцисну осовину.

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + 0 = 1.$$

Одатле је $x = -\frac{C}{A}$.

То је отсечак на апсцисној осовини. Њега ћемо обележити са p:

$$-\frac{C}{A} = p.$$

Знамо да је:

$-\frac{C}{B} = b$ отсечак на ординатној осовини. Зато једначину (1) можемо написати овако:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{b} = 1$$

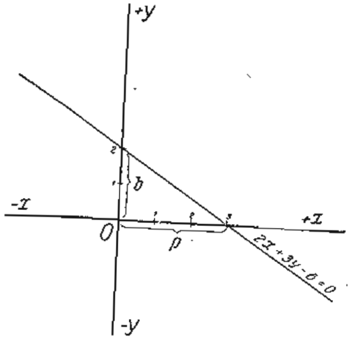
То је једначина с отсечцима. Из ње се одмах виде отсечци које права гради на осовинама.

Први пример. — Написати једначину с отсечцима ове праве:

$$2x + 3y - 6 = 0.$$

Најпре да буде 1 на десној страни:

$$2x + 3y = 6$$



Сл. 24.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$$

$$p = 3, \quad b = 2$$ (сл. 24).

Други пример. — Написати једначину с отсечцима ове праве:

$$3x - 5y + 7 = 0.$$

$$3x - 5y = -7$$

$$-\frac{3}{7}x + \frac{5}{7}y = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{7}{3}} + \frac{y}{\frac{7}{5}} = 1.$$

$$p = -\frac{7}{3}, \qquad b = \frac{7}{5}.$$

В Е Ж Б А Њ А

Написати дате једначине у облику решеном по y и у облику са отсечцима; одредити отсечке на осовинама и помоћу њих нацртати дате праве:

1. $2y + 3x = 6$
2. $3x + 4y = 12$
3. $5x - 4y = 9$
4. $2x - 5y = 1$
5. $7x - 8y = 11$
6. $10x + 7y = 8$
7. $4x + 9y - 1 = 0$
8. $5x + 6y = 7$
9. $7x - 15y = 2$ [*Резултат је* $p = \frac{2}{7}, b = -\frac{2}{15}$]

10. — Дата је једначина $-4x + 2y + 3\lambda = 0$. Колико треба да је λ, па да права отсече на апсцисној осовини отсечак (-5)?

[Оваква променљива количина зове се **параметар.** Овде је параметар обележен грчким словом *ламбда*. *Резултат овога задатка је* $\lambda = -3\frac{2}{3}$.]

11. — Дата је једначина $2x - 3\lambda y + 5\frac{2}{3} = 0$. Колики треба да је параметар λ, па да права отсече на ординатној осовини отсечак 7?

12. — Дата је једначина $3\lambda x - 5y = -6$. Колико треба да је, λ па да права отсече на апсцисној осовини отсечак $\left(-2\frac{1}{7}\right)$?

13. — Дата је једначина $2\lambda x - 5y + 5 = 0$. Колико треба да је, λ па да права отсече једнаке отсечке на осовинама? А ако хоћемо да буде $p = b = 5$?

14. — Дата је једначина $\lambda x + 3y = 4\lambda^2$. Колико треба да је λ, па да збир отсечака на осовинама буде $2\frac{1}{3}$?

[*Резултат* $\lambda_1 = 0{,}5 \qquad \lambda_2 = -3{,}5$].

15. — Дата је једначина праве $3\lambda x + 2\lambda y = 6\lambda$. Одредити λ тако, да буде $p = b = 10$.

[Пази добро! Од чега зависе отсечци у овој једначини? Јесу ли стални, или променљиви?]

За дате отсечке на осовинама написати једначину праве:

16. $b = 7, \; p = 4.$
17. $b = -3, \; p = 2.$
18. $b = -8, \; p = 6.$
19. $b = -\frac{2}{3}, \; p = \frac{1}{7}.$
20. $b = 12\frac{1}{3}, \; p = -4$
21. $b = 2{,}07, \; p = 1{,}04$
22. $b = 0{,}08 \quad p = 0{,}2$ [*Резултат* $10x + 25y - 2 = 0$].

23. — Какав однос мора постојати између сачинилаца A, B и C у једначини $Ax + By + C = 0$, ако хоћемо да права отсече једнаке отсечке на осовинама?

24. — Какав однос мора постојати између сачинилаца A, B и C, ако хоћемо да отсечак на апсцисној осовини буде два пута већи од отсечка на ординатној осовини?

25. — Ако се у једначини $Ax + By + C = 0$ мења само сачинилац A, утичу ли његове промене на оба отсечка на осовинама?

ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ КРОЗ ЈЕДНУ ТАЧКУ

Једна тачка не одређује праву линију. То ће нам потврдити и аналитичка геометрија.

Узмимо једну тачку $M_1 (x_1, y_1)$. Нека она лежи на правој

(1) $\qquad y = ax + b$

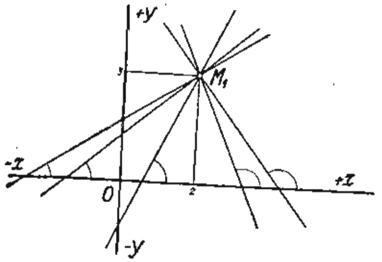
Та тачка мора тада задовољавати својим координатима једначину (1):

(2) $\qquad y_1 = ax_1 + b$

Удузмимо (2) од (1):

$$y_1 - y_1 = a (x - x_1$$

То је једначина праве која пролази кроз тачку M_1. Откуд знамо да тачка M_1 лежи на тој правој? Колико има правих што пролазе кроз тачку M_1? Да ли се то види и из добивене једначине?



Сл. 25.

Пример. — Написати једначину правих које иду кроз тачку М (3,2).

$$y - y_1 = a\,(x - x_1)$$
$$y - 2 = a\,(x - 3)$$

То је тражена једначина. Она је неодређена, јер остаје непознат сачинилац *a*. Он је остао непознат, јер праве које иду кроз M_1 заклапају разне углове с позитивним смислом апсцисне осовине (сл. 25).

ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ КРОЗ ДВЕ ТАЧКЕ

Две тачке потпуно одређују једну праву. То ће нам потврдити и аналитична геометрија.

Нека су дате две тачке $M_1\,(x_1, y_1)$ и $M_2\,(x_2, y_2)$. Хоћемо да изведемо једначину праве која пролази кроз те две тачке. Узећемо облик решен по y:

(1) $$y = ax + b$$

Ако тачка M_1 лежи на овој правој, мора бити:

(2) $$y_1 = ax_1 + b$$

Ако и тачка M_2 лежи на тој правој, мора бити:

(3) $$y_2 = ax_2 + b$$

Одузмимо (2) од (1):

(4) $$y - y_1 = a\,(x - x_1)$$

Одузмимо (2) од (3):

(5) $$y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1)$$

Поделимо (4) са (5):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{a\,(x - x_1)}{a(x_2 - x_1)}\,.$$ То је даље:

(6) $$\mathbf{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)}.$$ То је једначина праве кроз две тачке.

Је ли ова једначина праве одређена? Је ли сачинилац уз *x* потпуно одређен? А остала два сачиниоца? Да ли на правој (6) леже тачке M_1 и M_2?

Пример. — Написати једначину праве која пролази кроз тачке M_1 (2,7) и M_2 (— 6,9).

У једначини (6) сменићемо x_1 са 2, y_1 са 7, x_2 са (—6), y_2 са 9. Добићемо:

$$y - 7 = \frac{9 - 7}{-6 - 2}\,(x - 2)$$
$$y - 7 = \frac{2}{-8}\,(x - 2)$$
$$4y - 28 = -x + 2$$

$4y + x - 30 = 0$. [Провери да ли обе дате тачке леже на тој правој].

ВЕЖБАЊА

Изведи једначину правих које пролазе кроз ову тачку:

1. (1,2) 2. (0,0) 3. (—3,4)

4. (—5, —6) 5. $\left(-\frac{1}{3}, -2\right)$ 6. $\left(5\frac{1}{8}, 2\frac{3}{7}\right)$

7. (—10, + 10)

8. (—8, —4) *[Резултат је $y = ax + 8a - 4$]*

9. — Извести једначину праве која пролази кроз тачку M_1 (2,3), а отсеца на ординатној осовини отсечак $b = 5$.

10. — Исто за тачку *N* (—5,7) и отсечак на апсцисној осовини $p = -4$.

11. — Извести једначину праве која пролази кроз тачку *M* (—7,8), а сече апсцисну осовину под углом $\alpha = 45^0$.

12. — Исто за *M* (4, —9) и $\alpha = 135^0$.

13. — „ „ *M* (—2, —7) и $\alpha = 60^0$.

14. — „ „ *M* (– 2, 6) и $\alpha = 30^0$.

15. — Извести једначину правих које су паралелне с правом $2x - 3y = 0$.

16. — Извести једначину праве која пролази кроз тачку *M* (—4, 7), а паралелна је с правом $3y - 7x + 1 = 0$.
[Резултат је $3y - 7x - 49 = 0$].

17. — Извести једначину праве која пролази кроз тачку *M* (—7, 3), а на ординатној осовини отсеца исти отсечак као и права $7x - 6y + 5 = 0$.

Извести једначину праве која пролази кроз ове две тачке:

18. A (3, 4) B (4, — 7) **19.** C (— 9, — 10), D (— 1, — 8)

20. E (— 4, 5), F (— 5, 4)

21. $G - \left(2\frac{3}{7}, 8\frac{4}{9}\right), H\left(3\frac{7}{19}, -2\frac{3}{17}\right)$

22. K (— 7, 05 | 4, 08), L (2, 03 | — 4, 2)

23. M (— 0, 02 | 0, 07), N (10, 07 | — 2, 8)

24. — Извести једначину праве која иде кроз тачку M (3,25 | 7) и сече праву $2x - 3y - 4 = 0$ у тачци чија је апсциса (+ 3).

25. — Извести једначину праве која пролази кроз тачку A (3,5 | — 8), а сече праву $3x - 4y - 5 = 0$ у тачци N која је од ординатне осовине далеко за (+ 3).

ПРЕСЕК ДВЕЈУ ПРАВИХ

Праве се секу. — Нека су дате једначине двеју правих:

$$Ax + By + C = 0 \text{ и } A_1x + B_1y + C_1 = 0.$$

Нека се оне секу у тачци M. Тада M мора својим координатама задовољити обе једначине. Према томе, ако решимо горњи систем I степена, добићемо координате пресечне тачке M. Решење горњег система је:

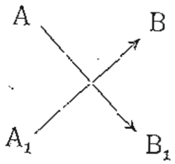
$$x = \frac{BC_1 - CB_1}{AB_1 - BA_1} \qquad y = \frac{CA_1 - AC_1}{AB_1 - BA_1}$$

Како ћемо брзо добити решење горњег система?

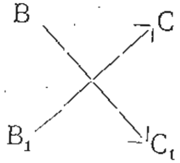
Написаћемо све сачиниоце овако:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{array}$$

Узећемо прва два реда:

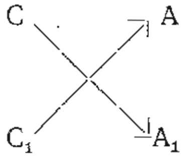


Помножићемо дијагонално и добити ову разлику: $AB_1 - BA_1$. То ће бити именилац и за x и за y. Бројилац за x добијамо овако:



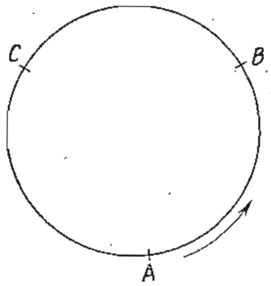
Бројилац за x јесте $BC_1 - CB_1$.

Бројилац за y је:



Бројилац за y је $CA_1 - AC_1$.

Нацртајмо круг и на њему три тачке A, B и C (сл. 26). Крећемо се од A ка B у смислу стрелице. За именилац: A и B; за бројилац икса: B и C, за бројилац ипсилона C и A.



Сл. 26.

Праве су паралелне. – Узмимо горња решења:

$$x = \frac{BC_1 - CB_1}{AB_1 - BA_1} \quad \text{и}$$

$$y = \frac{CA_1 - AC_1}{AB_1 - BA_1}.$$

Нека је у овим разломцима само именилац нула $AB_1 - BA_1 = 0$. Тада је $x = \infty$ и $y = \infty$. Значи да се наше праве не секу у коначности. Оне су онда паралелне.

$$AB_1 - BA_1 = 0. \text{ Одатле је } -\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1}$$

То значи да су угловни сачиниоци тих правих једнаки. Значи да оне под истим углом секу апсцисну осовину. Тада су те две праве паралелне.

Услов да две праве буду паралелне јесте:

$$\mathbf{\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}}$$

Праве се поклапају. — Ако су у оним разломцима једновремено нуле и бројиоци и имениоци, добијамо:

$$x = \frac{0}{0} \text{ и } y = \frac{0}{0}$$

И x и y су дати **неодређеним изразом** $\frac{0}{0}$. Пресек наших двеју правих је неодређен. Шта то значи? То ће нам казати сачиниоци тих правих. Имамо:

$AB_1 - BA_1 = 0 \quad BC_1 - CB_1 = 0 \quad CA_1 - AC_1 = 0$. Одатле је:

$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$. Ставимо да су ови количници k:

$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = k$. Одатле је:

(1) $A = kA_1$ $B = kB_1$ $C = kC_1$

Имамо ове две једначине:

(2) $Ax + By + C = 0$ и (3) $A_1x + B_1y + C_1 = 0.$

У једначину (2) унесимо вредности из (1):

$$A_1kx + B_1ky + C_1k = 0, \quad \text{тј.} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0.$$

Наше две једначине претстављају једну исту праву. Наше се две праве поклапају.

Пример I. — Наћи пресек ових двеју правих:

$$2x - 3y - 7 = 0 \quad и \quad 4x - 6y + 9 = 0.$$

$$\frac{A}{A_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{B}{B_1} = \frac{(-3)}{(-6)} = \frac{1}{2}$$

Ове две праве могу бити паралелне, ако се не поклапају.

$$\frac{C}{C_1} = -\frac{7}{9} \neq \frac{A}{A_1}.$$

Праве се не поклапају. Паралелне су.

Пример II. — Наћи пресек ових двеју правих:

$$2x - 5y - 1 = 0 \quad и \quad 4x - 10y - 2 = 0.$$

$\frac{A}{A_1} = \frac{1}{2}$ $\frac{B}{B_1} = \frac{1}{2}$ $\frac{C}{C_1} = \frac{1}{2}$. Праве се поклапају.

Пример III. — Наћи пресек ових двеју правих:

$$5x - 3y - 11 = 0 \quad и \quad 5y + 2x - 23 = 0$$

$\frac{A}{A_1} = \frac{5}{2}$ $\frac{B}{B_1} = -\frac{3}{5}$ Секу се. Координате пресека биће:

$$x = \frac{(-3)(-23) - 5(-11)}{25 - 2 . (-3)} \qquad y = \frac{(-11) . 2 - (-23) . 5}{31}$$

$$x = \frac{69 + 55}{31} \qquad y = \frac{-22 + 115}{31}$$

$x = 4$ $y = 3$. То су координате пресека тих двеју правих.

ВЕЖБАЊА

Наћи координате пресека ових двеју правих:

1. $2x - 3y + 7 = 0$
   $4x + 5y - 1 = 0$
2. $3x + 2y + 11 = 0$
   $4x - 8y + 7 = 0$
3. $2x + 7y + 10 = 0$
   $4x - y = 11$
4. $5x + 7y + 9 = 0$
   $2x - 3y - 3 = 0$
5. $3\frac{3}{5}y - 2{,}5x + 1 = 0$
   $3{,}1x - 7{,}08y + 5 = 0$
6. $2{,}3y - 4{,}1 + 2{,}7x = 0$
   $y = 3x - 7\frac{1}{2}$

7. $2x + 3y + 5 = 0$
   $x + 1{,}5y - \frac{7}{2} = 0$
8. $4x - 5y = 9$
   $5 + x - 1\frac{1}{4} = 0$
9. $3x - 4y + 12 = 0$
   $x - 1\frac{1}{3}y + 4 = 0$
10. $12x - 6y + 5 0$
    $5 + 2{,}4x - 1{,}1 y = 0$

ПРЕСЕК ТРИЈУ ПРАВИХ

Одељак за реалке

Нека су дате три праве линије:

(1) $y = a_1 x + b_1$

(2) $y = a_2 x + b_2$

(3) $y = a_3 x + b_3$

Нека све три пролазе кроз једну тачку *M* (*x*, *y*). Тада све три горње једначине морају бити задовољене истим вредностима за *x* и *y*.

Из (1) и (2) имамо:

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \qquad y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2}$$

То су координате тачке *M*. Пошто та тачка лежи и на трећој правој, мора својим координатима задовољавати и једначину треће праве:

$$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2} = a_3 \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_3$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_3 b_2 - a_3 b_1 + a_1 b_3 - a_2 b_3$$

Додаћемо с обе стране $a_1 b_1$ и написати овим редом

$$a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_3 + a_2 b_3 = a_1 b_1 - a_3 b_1 - a_1 b_2 + a_3 b_2 \ .$$

Сад даље:

$$b_1 (a_1 - a_2) - b_3 (a_1 - a_2) = b_1 (a_1 - a_3) - b_2 (a_1 - a_3)$$

$$(a_1 - a_2)(b_1 - b_3) = (a_1 - a_3)(b_1 - b_2)$$

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3} = \frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3}$$

То је услов да три праве пролазе кроз једну тачку.

Пример. — Испитати да ли се дате три праве секу у једној тачци:

$$2y - 7x - 21 = 0$$
$$3x + 5y - 32 = 0$$
$$4x - y + 11 = 0$$

Решићемо све три једначине по y:

$$y=\frac{7}{2}x+\frac{21}{2}\qquad y=-\frac{3}{5}x+\frac{32}{5}$$

$$y=4x+11$$

Да би се секле у једној тачци, мора бити:

$$\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}=\frac{b_1-b_2}{b_1-b_3}$$

$$\frac{\frac{7}{2}+\frac{3}{5}}{\frac{7}{2}-4}\qquad\frac{\frac{21}{2}-\frac{32}{5}}{\frac{21}{2}-11}$$

$$\frac{\frac{41}{10}}{-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{41}{10}}{-\frac{1}{2}}$$

Све три праве пролазе кроз једну тачку.

Координате пресека наћи ћеш, ако решиш систем ма којих двеју датих једначина.

ВЕЖБАЊА

Испитати да ли се секу у једној тачци ове три, праве:

1. $2x-3y+1=0$
$4x-2y-2=0$
$5x-9y+4=0$

2. $2x-3y+7=0$
$5x-9y+10=0$
$7x-10y+100=0$

3. $4x-5y-6=0$
$7x+8y+9=0$
$10x-11y+12=0$

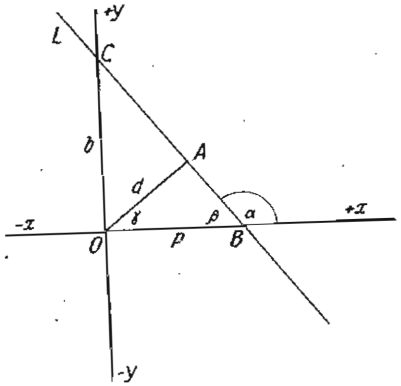
4. $2x+7y+14=0$
$5x-3y+6=0$
$5x-7+3y=3$

5. $3x+5y-9=0$
$2y-9x+27=0$
$7y-4x+12=0$

6. $3x-2y+1=0$
$x+2y+3=0$
$3-2y+4x=0$

НОРМАЛНИ ОБЛИК ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ

Узмимо једну праву L (сл. 27). Спустимо на њу управну $OA=d$ из координатног почетка. Угао који права OA заклапа с позитивним смислом апсцисне осовине обележимо са γ. Тада је из троугла OAB:



Сл. 27.

$$\frac{d}{p}=\cos\gamma$$

$$(1)\qquad p=\frac{d}{\cos\gamma}$$

Из троугла OAC имамо:

$$\frac{d_0}{b}=\sin OCA=\sin\gamma$$

$$(2)\qquad b=\frac{d}{\sin\gamma}$$

Ако ове вредности (1) и (2) унесемо у једначину с отсечцима биће:

$$\frac{x}{\frac{d}{\cos\gamma}}+\frac{y}{\frac{d}{\sin\gamma}}=1\qquad\text{т. ј.}$$

$$\mathbf{x\cos\gamma+y\sin\gamma-d=0}$$

Овај облик једначине праве линије зове се нормални облик (или Хесеов облик).

Довођење опште једначине на нормални облик. — Да бисмо једначину $Ax+By+C=O$ довели на нормални облик $x\cos\gamma+y\sin\gamma-d=O$, радићемо ово. Израчунаћемо $\cos\gamma$, $\sin\gamma$ и d помоћу сачинилаца A, B и C, па ћемо те вредности унети у нормални облик једначине праве.

Дату једначину $Ax+By+C=0$ написаћемо најпре у облику са отсечцима:

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1$$

Знамо да је $tg\alpha=-\frac{A}{B}$ (сл. 27).

$$\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=$$

$$\frac{-\frac{A}{B}}{\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}}=\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Са слике 27 види се да је:

$\alpha = \gamma + 90^0$. Отуда је:

$\gamma = \alpha - 90^0$.

(3) $\sin\gamma = \sin(\alpha - 90^0) =$
$\sin\alpha \cos 90^0 - \cos\alpha \sin 90^0 =$
$= -\cos\alpha = \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(4) $\cos\gamma = \cos(\alpha - 90^0) = \cos\alpha \cos 90^0 + \sin\alpha \sin 90^0 =$
$= \sin\alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Сад ћемо израчунати d помоћу сачинилаца A, B и C. Са слике 27 види се да је

(5) $OA = d = p. \cos\gamma = -\frac{C}{A} \cdot \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Уносимо вредности (3), (4) и (5) у нормални облик и добијамо:
Нормални облик .... $x \cos\gamma + y \sin\gamma - d = 0$

После смене .... $x. \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + y. \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}} -$
$- \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$

То пишемо овако:

(6) $$\frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Тиме смо општи облик једначине праве [$Ax + By + C = 0$] довели на нормални облик. Да проверимо добивени резултат.

У нормалном облику постоји овај однос између сачинилаца уз x и y:

$\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$. [Збир квадрата сачинилаца уз x и y је 1], Да видимо је ли тако и у једначинн (6).

Сачинилац уз x .... $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Сачинилац уз y .... $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 = \frac{A^2}{A^2 + B^2} +$$
$$+ \frac{B^2}{A^2 + B^2} = \frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2} = 1.$$

Пример. — Довести на нормални облик ову једначину праве линије:

$$3x - 4y + 12 = 0.$$

Из облика (6) видимо да треба целу једначину поделити са $\sqrt{A^2 + B^2}$. Овде је $A = 3$, $B = -4$, $A^2 + B^2 = 9 + 16 = 25$, $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{25} = \pm 5$.

$$\frac{3x}{\pm 5} - \frac{4y}{\pm 5} + \frac{12}{\pm 5} = 0.$$

Хоћемо ли делити са (+ 5), или са (— 5)? Независан члан (члан који не садржи ни x ни y) **мора увек бити негативан.** Да би он био негативан, делићемо са (— 5):

$$\frac{3x}{-5} - \frac{4y}{-5} + \frac{12}{-5} = 0.$$

Добијамо једначину у нормалном облику:

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5} = 0.$$

Овде је $\cos\gamma = \frac{-3}{5}$, $\sin\gamma = \frac{4}{5}$, $d = \frac{12}{5}$.

Да нађемо угао гама:

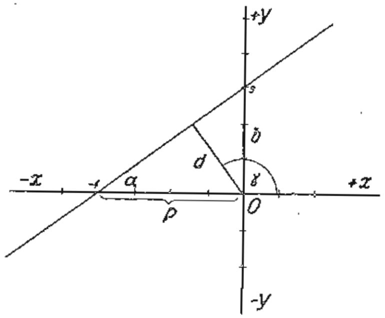
$\sin\gamma = \frac{4}{5}$
$\log \sin\gamma = 0{,}8$
$\log \sin\gamma = \bar{1}{,}90309$
$\overline{\qquad\frac{1}{8}}\ \ldots\ldots \qquad 53^0\, 7'$
$\gamma = 53^0\, 7'\, 48''$

Знамо да сам синус не одређује угао. Знамо и то да га синус и косинус заједно потпуно одређују. Код нашега угла γ синус је позитиван $(\frac{4}{5})$, али је косинус негативан $(-\frac{3}{5})$. Значи да је наш угао у II квадранту. Отуда је: $\gamma = 180^0 - 53^0\, 7'\, 48'' = 126^0\, 52'\, 12''$.

Да проверимо и то. Конструишимо дату праву

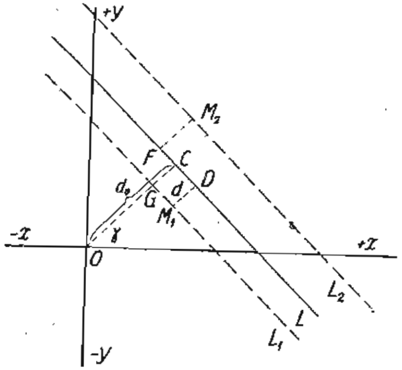
$3x - 4y + 12 = 0$.

Добијамо слику 28. Са ње се види да је угао γ туп.



Сл. 28.

РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ ОД ПРАВЕ



Сл. 29.

Нека је дата права L (сл. 29). Хоћемо да израчунамо колико је тачка M_1 $(x_1 y_1)$ далеко од те праве. Тражимо растојање d. Нека је једначина праве L:

$$(1) \quad x \cos\gamma + y \sin\gamma - d_0 = 0.$$

Кроз M_1 повуцимо праву L_1 паралелну са L. Из O спустимо управну на L. Она ће у исто време бити управна и на L_1. Управне спуштене из координатног почетка на L и L_1 заклапају исти угао γ. Зато ће се једначине тих двеју правих разликовати само у независном члану. Једначина праве L_1 биће:

$$(2) \quad x \cos\gamma + y \sin\gamma - (d_0 - d) = 0.$$

Тачка M_1 лежи на правој L_1. Зато њене координате морају задовољити једначину те праве (2):

$$x_1 \cos\gamma + y_1 \sin\gamma - d_0 + d = 0.$$

Одатле је:

$$d = -(x \cos\gamma + y \sin\gamma - d_0).$$

Узмимо сад тачку M_2 $(x_2\ y_2)$ и повуцимо кроз њу праву L_2 паралелну са L. Из M_2 спустимо управну $M_2 F$ на L. Једначина праве L_2 биће:

$$x \cos\gamma + y \sin\gamma - d_2 = 0$$

где је d_2 растојање праве L_2 од координатног почетка.

Али горњу једначину можемо и овако написати:

$$x \cos\gamma + y \sin\gamma - (OC + M_2F) = 0, \text{ т. ј.}$$

$$x \cos\gamma + y \sin\gamma - (d_0 + M_2F) = 0$$

Одатле је:

$$(3) \qquad M_2F = +(x \cos\gamma + y \sin\gamma - d_0)$$

То је растојање тачке M_2 од праве L.

Кад обрасце (2) и (3) скупимо у један образац, добијамо:

$$(4) \qquad \mathbf{d = \pm (x \cos\gamma + y \sin\gamma - d_0)}$$

То је образац за израчунавање растојања једне тачке од праве.

Ако је једначина праве дата у општем облику $Ax + By + C = 0$, ово ће бити образац за растојање тачке $M_1 (x_1, y_1)$ од праве:

$$d = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ако је једначина праве решена по y, $[y = ax + b]$ растојање тачке M_1 од те праве биће:

$$d = \frac{(y_1 - ax_1 - b)}{\pm \sqrt{1 + a^2}}$$

Видели смо да је:

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = x\cos\gamma + y\ \text{Sin}\gamma - d$$

Одатле је:

$$\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -d.$$

Број d није релативан број, већ апсолутан. Значи, десна страна је увек негативна. То даље значи, да C и онај корен морају бити *неједнако означени.*

Пример. — Израчунати растојање тачке M_1 (3, 1) од праве $5x - 12y + 7 = 0$.

$$d = \frac{(5x - 12y + 7)}{-13} = \frac{(5 \,.\, 3 - 12 \,.\, 1 + 7)}{-13} = -\frac{10}{13}$$

Узели смо у имениоцу знак (—), јер је у једначини дате праве независан члан (+ 7), а тај члан мора у нормалноме облику да буде негативан.

Пример II. — Да израчунамо растојање те исте тачке од праве $y = 6 - x$.

$$d = \frac{(y_1 - 6 + x_1)}{\pm\sqrt{1 + 1^2}} = \frac{(y_1 - 6 + x_1)}{\pm\sqrt{2}} = \frac{(1 - 6 + 3)}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Пред кореном смо узели знак (+), пошто је независан члан (— 6) негативан, а мора да остане негативан.

Нађено растојање је негативно. Растојање тачке од праве увек је негативно, кад је тачка према правој с исте стране с које и координатни почетак.

Пример III. — Израчунати растојање тачке M (1,3) од праве 5x — 12y + 7 = 0.

$$d = \frac{5x - 12y + 7}{\pm\sqrt{13}}$$

$$d = \frac{5 \,.\, 1 - 12 \,.\, 3 + 7}{-13}$$

Узимамо знак (—) пред кореном, пошто је $C = +7 > 0$.

$$d = \frac{5 - 36 + 7}{-13}$$

$$d = \frac{-24}{-13}$$

$$d = +\frac{24}{13}$$

Растојање је позитивно. Значи да је наша тачка *са супротне стране* координатног почетка *према датој правој*. (Нацртај, те се увери!).

ПОЗИТИВНО И НЕГАТИВНО ПОЉЕ

Како ћемо, без цртежа, познати је ли тачка према правој с исте стране с које и координатни почетак?

Свака права нацртана на координатном систему дели целу раван на два поља: позитивно и негативно.

Узмимо праву

$$(1) \qquad y = 6 - x.$$

Написаћемо је овако:

$$(2) \qquad y - 6 + x = 0.$$

Видимо по ономе (— 6) да координатни почетак не лежи на овој правој.

Унесимо његове координате у полином једначине (2):

$$f(x, y) = y - 6 + x$$

$$f(0, 0) = 0 - 6 + 0 = -6 < 0.$$

Координатни почетак је у негативном пољу ове праве. Ако је и тачка M_1 (3,1) у негативном пољу, она је с исте стране те праве с које и координатни почетак.

$$f(3,1) = 1 - 6 + 3 = -2 < 0.$$

И тачка M_1 (3,1) налази се у негативном пољу. Значи да су та тачка (M_1) и координатни почетак с исте стране наше праве. То се лепо види и са слике 29. (Обе тачке су лево, ако гледамо по правој од D ка F, а обе десно, ако гледамо од F ка D). Је ли тачка M_2 (4,6) с исте стране с које и координатни почетак?

Видели смо да је координатни почетак у негативном пољу праве $y = 6 - x$. Пробаћемо сад тачку M_2.

$$f(4,6) = 6 - 6 + 4 = +4 > 0.$$

Тачка M_2 је у позитивном пољу. То значи да права $y = 6 - x$ пролази између те тачке и кординатног почетка.

Пошто она није с исте стране с које и координатни почетак, њено растојање од дате праве мора бити позитивно.

$$d = \frac{(y - 6 + x)}{\pm\sqrt{2}}$$

Узећемо пред кореном знак (+), пошто је независан члан негативан (— 6), а мора да остане негативан.

$$d = \frac{(6 - 6 + 4)}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

ВЕЖБАЊА

Напиши у нормалноме облику ове једначине:

1. $3x - 4y + 1 = 0$
2. $x - y\sqrt{3} - 8 = 0$
3. $x\sqrt{3} - y\sqrt{6} + 7 = 0$
4. $19x - 180y + 90 = 0$
5. $2x - y\sqrt{6} - 1 = 0$
6. $3x - y\sqrt{7} + 5 = 0$.

За дату тачку и дату праву најпре одреди знак растојања тачке од праве, па затим израчунај растојање:

7. M (2,3) $3x - 4y + 1 = 0$
8. N (7,4) $5x - 12y - 10 = 0$
9. A (3, — 8) $7x + 9y - 14 = 0$
10. C (— 4, — 5) $7x + 24y - 9 = 0$
[Резултат: d = — 6,28]
11. D (— 3, 9) $6x - 5y + 1 = 0$
12. E (4, — 7) $x + y - 1 = 0$
13. O (0,0) $3x + 8y + 5 = 0$
14. O (0,0) $2x - 5y + 7 = 0$
15. O (0,0) $2x - 8 = 0$
16. O (0,0) $3x + 4y = 0$

Одреди позитивно и негативно поље за ове праве:

17. $x + y = 1$
18. $x + y + 1 = 0$
19. $x - y = 5$
20. $x - y = -5$

Колико су далеко једна од друге ове две праве:

21. $3 - x - y = 0$
$x + y + 2 = 0$
22. $4x - 3y + 5 = 0$
$2 - 4x + 3y = 0$
23. $x + y + 1 = 0$
$2x + 2y - 7 = 0$
24. $3x - 4y - 6 = 0$
$2y - 1,5x + 9 = 0$

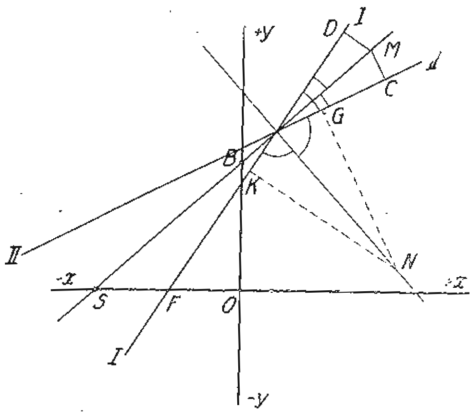
[У коме су међусобном положају по две дате праве из вежбања 21—24? *Резултат у вежбању 23 јесте $d = 3\sqrt{2}$.*]

УГЛОВНА СИМЕТРАЛА

Одељак за реалке

Задатак. — Извести једначину симетрале угла који међу собом заклапају праве

$$A x + B y + C = 0$$
$$A_1 x + B_1 y + C = 0.$$



Сл. 30.

Нека су на слици 30 те две праве, праве I и II. Симетрала њиховог угла је права *N*. Угловна симетрала је геометријско место тачака подједнако удаљених од кракова.

Узмимо на симетрали произвољну тачку *N*. Знамо да мора бити:

$$NK = NG.$$

$$NK = \frac{Ax + B_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$NG = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

То је једначина симетрале *N*.

Како ћемо добити једначину симетрале *M*? Ту је растојање *MD* негативно, а *MC* позитивно. Та два растојања смемо уједначити само тако, ако једноме од њих променимо знак. Овако:

$$MD = - MC$$

$$\frac{(Ax + By + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = - \frac{(A_1x + B_1y + C_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

То је једначина симетрале *AM*. Како се добијају једначине симетрала угла?

Једначина симетрале угла у коме је координатни почетак добија се кад уједначе нормални облици датих правих. Симетрала његовог суплементног налеглог угла добија се, кад се нормални облик једне праве уједначи с негативним нормалним обликом друге праве.

Пример. — Одредити симетралу угла који граде ове две праве:

$$3x - 4y + 12 = 0 \quad \text{и} \quad 5x + 12y - 15 = 0.$$

$$\text{I} \quad \frac{3x - 4y + 12}{-5} = \frac{5x + 12y - 15}{13}, \text{ т.j. } 64x + 8y + 81 = 0.$$

$$\text{II} \quad \frac{3x - 4y + 12}{-5} = - \frac{5x + 12y - 15}{15}, \text{ т.j. } 14x - 112y + 231 = 0.$$

ВЕЖБАЊА

1. — Одредити симетрале углова које граде ове две праве:
$x - y\sqrt{3} + 2 = 0$ и $4x + 3y = 0$

2. — Исто за ове две праве:
$3x - 5y = 6$ и $2x - y = 1$

3. — Исто за ове две праве:
$4x - 7y + 5 = 0$ и $2y + 3x - 4 = 0.$

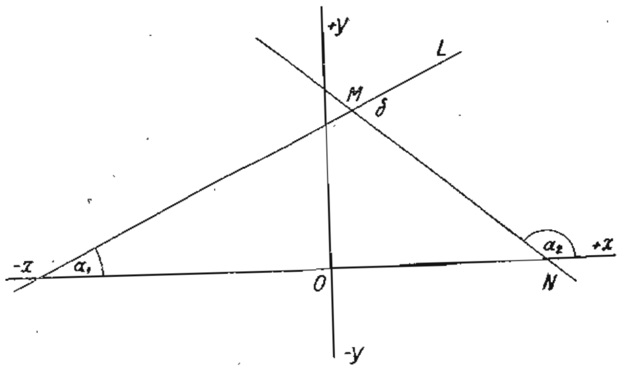
4. — Одредити координате центра уписаног круга у троуглу чија су темена *A* (1,2) *B* (7,3) *C* (3,12)

5. — Исто за *A* $(-2, \frac{1}{3})$ *B* (4,8) *C* $(\frac{2}{3}, 10)$.

6. — Израчунај површину уписаног круга у троуглу чија су темена: *A* (— 7,2) *B* (— 4,7) *C* (3,15).

УГАО ДВЕЈУ ПРАВИХ

Угао двеју правих. — Узмимо две праве *L* и *N* (сл. 31) које се секу у тачци *M*. Хоћемо да израчунамо угао δ (делта) под којим се оне секу. Са слике се види да је:



Сл. 31.

$$\delta = \alpha_1 + (180^0 - \alpha_2), \text{ т. ј.}$$

$$\delta = (\alpha_1 - \alpha_2) + 180^0. \text{ Сад је даље:}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} [(\alpha_1 - \alpha_2) + 180^0]$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2) + \operatorname{tg} 180^0}{1 - \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{tg} 180^0}$$

Пошто је $\operatorname{tg} 180^0 = 0$, биће даље:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}$$

Обележимо овако: $\operatorname{tg} \alpha_1 = a_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = a_2$, па сменимо у (1). Добићемо:

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \delta = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}.$$

То је образац за одређивање угла између двеју правих.

Пример. — Права L са слике 31 има ову једначину:

$$\frac{x}{-8} + \frac{y}{4} = 1, \text{ т. ј.} \qquad x - 2y + 8 = 0$$

Права N са исте слике има ову једначину:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1, \text{ т. ј.} \qquad 5x + 6y - 30 = 0.$$

Под којим се углом секу те две праве?

Написаћемо једначине обеју правих у решеноме облику. У томе се облику одмах види угловни сачинилац.

$$(L) \qquad y = \frac{x}{2} + 4 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

$$(N) \qquad y = \frac{-5}{6} x + 5 \qquad \alpha_2 = \frac{-5}{6}.$$

Тангента пресечног угла биће:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{-5}{6}\right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-5}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{12}} =$$

$$= \frac{\frac{6}{12} + \frac{10}{12}}{\frac{12}{12} - \frac{5}{12}} = \frac{16}{7}$$

$$\log \operatorname{tg} \delta = \log 16 - \log 7 \qquad 1{,}20412$$

$$\log \operatorname{tg} \delta = 1{,}20412 - 0{,}84510 \qquad \underline{0{,}84510}$$

$$\log \operatorname{tg} \delta = 0{,}35902 \qquad 0{,}35902$$

$$\underline{894} \ldots\ldots 66^0\ 22'$$

$$8 \qquad 8 : 0{,}57 = 800 : 57 = 14$$

$$\delta = 66^0\ 22'\ 14''$$

Управне праве. — Ако су две праве управне једна на другој, њихов пресечни угао биће 90^0. Пошто је $\operatorname{tg} 90^0 = \pm \infty$, биће:

$$(1) \qquad \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} = \infty$$

Разломак тежи бесконачно великоме кад му бројилац тежи бесконачно великом, или кад му именилац тежи нули. У разломку (1) бројилац је коначан. Значи да ће бити:

$$1 + a_1 a_2 = 0.$$

Одатле је:

$$a_1 = -\frac{1}{a_2} \qquad \left(\text{или } a_2 = -\frac{1}{a_1}\right)$$

То значи: две праве су управне једна на другој, кад је угловни сачинилац једне праве једнак с негативном реципрочном вредношћу угловног сачиниоца друге праве.

Пример I. — Ево једначина двеју правих које се секу под правим углом:

$$y = 3x - 7 \qquad a_1 = 3$$

$$y = -\frac{1}{3} x + 10 \qquad a_2 = -\frac{1}{3}$$

Пример II. — Одредити једначину праве која на правој L ($y = x + 3$) стоји управно у тачци M (2,5).

Тражена права мора да пролази кроз тачку M. Зато ће њена једначина бити:

$$(1) \qquad y - 5 = a (x - 2)$$

Али тражена права мора да стоји управно на датој правој. Зато њен угловни сачинилац мора бити негативна реципрочна вредност угловног сачиниоца дате праве.

Угловни сачинилац дате праве је: $+ 1$.

Угловни сачинилац тражене праве биће: $- 1$.

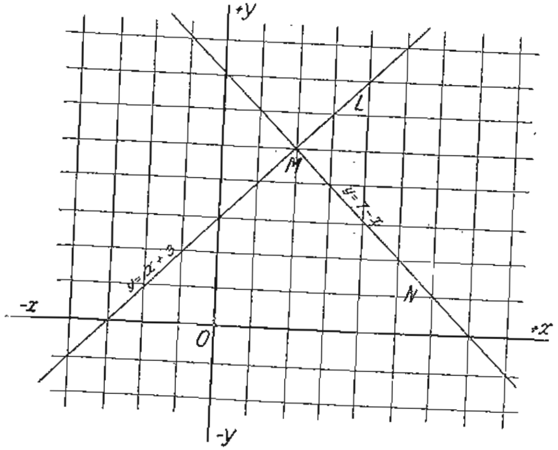
Једначина тражене праве биће:

$$y - 5 = (-1)(x - 2)$$

$$y - 5 = 2 - x$$

$$y = 7 - x. \qquad \text{То је једначина тражене праве.}$$

Кад конструишемо праву $y = 7 - x$, видимо да пролази кроз M (сл. 32) и да стоји управно у тој тачци на датој правој.



Сл. 32.

Паралелне праве. — Ако су две праве међу собом паралелне, оне међусобно заклапају угао нула. Тада је:

$$\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} = \operatorname{tg} 0^0 = 0.$$

Одатле је $a_1 = a_2$.

Пример. — Одредити једначину праве која пролази кроз тачку M (1,2), а паралелна је с правом $2x - 3y + 7 = 0$.

Једначина праве кроз M:

$$y - 2 = a\,(x - 1)$$

Угловни сачинилац дате праве $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ јесте $a = \frac{2}{3}$ Толики исти мора бити и угловни сачинилац тражене, паралелне праве.

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$3y - 6 = 2x - 2$$

$$3y - 2x - 4 = 0.$$ (Тражена једначина).

ВЕЖБАЊА

Одредити међусобни угао ових двеју правих:

1. $2x - 3y + 4 = 0$
$3x - 5y - 7 = 0$

2. $4x - 5y - 1 = 0$
$1 - x - y = 0$

3. $3 - 2x - 2y = 0$
$4x + 2y + 2 = 0$

4. $7x - 9y = 0$
$4x + 3y - 5 = 0$

5. $x = 6$
$y = 8$

6. $3x = 2y$
$x + y = 1$

7. $2x + 3y + 7 = 0$
$3x - 2y + 5 = 0$

8. $4x - 2y + 3 = 0$
$3 - 2x + 4y = 0$

9. $2x - 4y + 5 = 0$
$12{,}3 - 2y + x = 0$

10. $4 - 3x - 5y = 0$
$5 - x - 1 + y = 0.$

---

11. — Извести једначину праве која на правој $3x - 7y + 5 = 0$ стоји управно у тачци чија је апсциса 2.

12. — Извести једначину праве која је паралелна с правом $2 - x - y = 0$, а пролази кроз тачку N (3,4).

13. — Извести једначину симетрале дужи AB, кад су ово координате тачака A и B: A (3,5) и B (10,7).

14. — Исто за дуж CD, кад је C (— 10,3), D (2,4).

15. — Исто за дуж EF, кад је $E\left(-2\frac{3}{7}, -4\right)$, F (4,3).

16. — Дате су две једначине:

$$2x - 3y + 5 = 0$$
$$4x - 7\lambda y + 9 = 0.$$

Одредити λ тако, да те две праве буду паралелне међу собом.

17. — Дате су две једначине:

$$2\lambda x - 4\lambda y + 7 = 0$$
$$3x + 5y = 9.$$

Одредити λ тако, да те две праве буду међусобно паралелне, (Пази!).

18. — Дате су две једначине:

$$\lambda x - 3y + 1 = 0$$
$$2x - 4\lambda y + 5 = 0.$$

Одредити λ тако, да те две праве буду паралелне.

19. — Дате су две праве:

$$3x - 4y + 8 = 0$$
$$5y - 4\lambda x - 7 = 0.$$

Одредити λ тако, да оне буду управне једна на другој.

20. — Исто за:

$$2x - 3\lambda x + 5 = 0$$
$$4 - 2y - x = 0.$$

21. — Исто за:

$$5x - \lambda y + 1 = 0$$
$$4y - 3x + 2 = 0.$$

22. — Дате су праве:

$$2x - y\lambda + 5 = 0$$
$$4x - 3y + 1 = 0.$$

Израчунати λ тако, да се те две праве секу под углом од 45°.

23. — Дате су праве:

$$3y + x - 4 = 0$$
$$\lambda x + 2y - 5 = 0.$$

Одредити λ тако, да се те две праве секу под углом од 60°.

24. — За колики угао треба да се обрне права $3x + 4y - 12 = 0$ око свога пресека с ординатном осовином, па да прође кроз тачку $N\,(-3, -3)$?

25. — За колики угао треба да се обрне права $x + y + 2 = 0$ око своје тачке чија је апсциса (-2), па да прође кроз тачку $A\,(3, 7)$?

26. — Наћи једначину праве која је паралелна с правом $x + y + 5 = 0$, а отсеца на апсцисној осовини отсечак $p = -7$.

ТРАНСФОРМАЦИЈА КООРДИНАТА

27. — Дата је права $2x + 3y - 6 = 0$. Координатни почетак је транслацијом премештен у тачку $A\,(-3, 4)$. Како сад гласи једначина дате праве? (Нацртај у оба система. Добивене праве треба да се поклопе. Координате у новоме систему биће:

$$x_1 = x - a \qquad y_1 = y - b$$

Значи, у датој једначини праве треба сменити x са $x_1 + a$, а y са $y_1 + b$. Добијаш једначину $2x + 3y = 0$).

28. — Дата је права $x + y + 1 = 0$. Написати једначину те праве у координатном систему где је координатни почетак у $A\,(-1, 0)$.

29. — Исто за праву $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y + 3 = 0$ и нови почетак B (–4,5 и 0).

30. Ако координатни почетак транслацијом пренесемо у једну тачку на правој $ax + by + c = 0$, какав облик добија њена једначина?

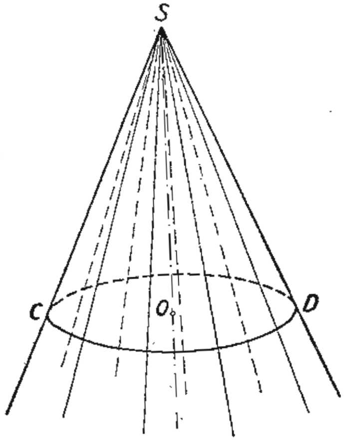
III. — СТЕРЕОМЕТРИСКИ ПРЕГЛЕД КУПИНИХ ПРЕСЕКА

Купасти простор. — Кад се једна полуправа утврђена у својој почетној тачци (S, сл. 33) обрће око једне осовине (SO) коју сече у S, гради једну криву површину, која се зове *купаста* површина. Та површина ограничава један простор који се зове купасти простор.

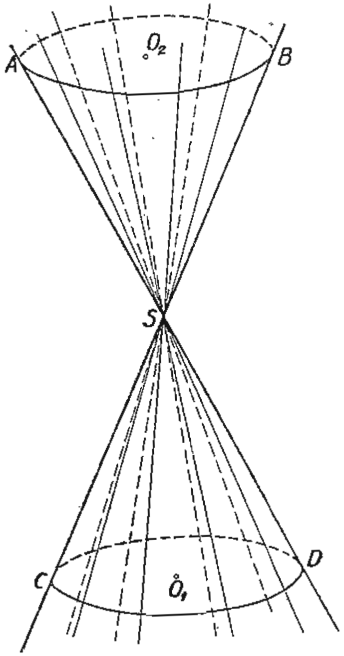
Обртна купа. — Ако тај простор пресечемо једном равни управном на OS, добићемо тело које се зове *обртна купа* (Тело SCD, сл. 33).

Двојни купасти простор. — Ако се једна права, утврђена у једној тачци (S) обрће око једне осовине (SO_1) коју сече у S, гради криву површину која ограничава двојни купасти простор (сл. 34).

Двојна купа. — Ако овај двојни купасти простор пресечемо с двеју страна од тачке S паралелним равнима управним на $O_1\,O_2$ добићемо *двојну обртну купу* $ABSCD$ (сл. 34). Тачка S је теме двојне купе.



Сл. 33.



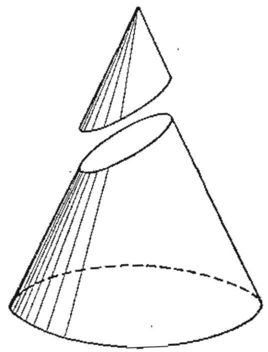
Сл. 34.

КУПИНИ ПРЕСЕЦИ

Круг. — Ако пресечемо обртну купу једном равни управном на осовини, али тако, да раван не иде кроз теме, та раван ће пресећи купу по једној кривој (CD, сл. 33) која се зове круг. Основна је особина круга да су све његове тачке подједнако далеко од једне сталне тачке која се зове центар или средиште.

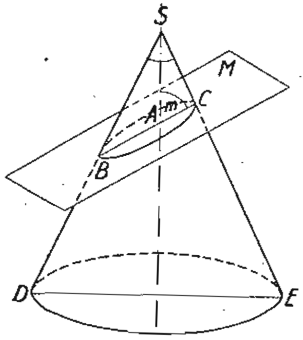
Елипса. — Пресецимо обртну купу једном равни која сече осовину под косим углом (сл. 35), али тако да раван сече осовину под углом m који је већи од полуотвора купиног:

$$\sphericalangle m > \sphericalangle \frac{S}{2} \qquad \text{(сл. 36).}$$



Сл. 35.

Угао m је спољашњи угао за троугао ABS. Отуда је



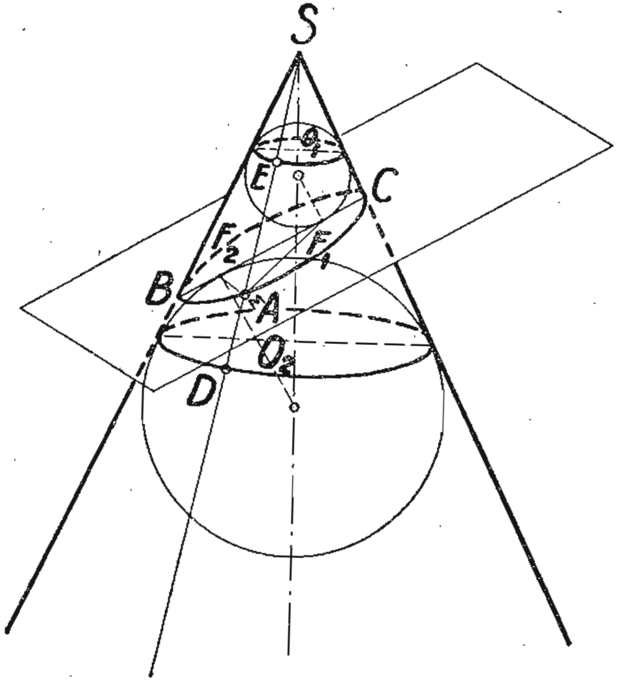
Сл. 36.

$$\sphericalangle m = \sphericalangle B + \sphericalangle \frac{S}{2}$$

$$\sphericalangle m > \sphericalangle \frac{S}{2}.$$

Тада пресечна раван сече све ивице ове купе. Пресек је једна крива линија која није круг.

Раван M сече купу на два дела. Узмимо једну лопту која додирује омотач ове купе по једноме кругу и пресек купин у тачци F_1 на BC (сл. 37). Узмимо другу лопту коју додирује омотач ове купе по једноме кругу и пресек у тачци F_2 на BC.



Сл. 37.

Узмимо на купином пресеку једну произвољну тачку на пресечној кривој (тачку M, сл. 37). Спојмо је с додирним тачкама F_1 и F_2. Тада је:

$MF_1 = ME$ (пошто су оне обе дирке на мањој лопти).

$MF_2 = MD$ (пошто су оне обе дирке на већој лопти). Отуда је:

$MF_1 + MF_2 = DE$

Дуж DE је бочна ивица обртне зарубљене купе чије су основе кругови O_1 и O_2. Та бочна ивица има сталну вредност. Тачке F_1 и F_2 су такође сталне. Значи да је наша крива, добивена овим косим пресеком, једна затворена крива која има ову особину:

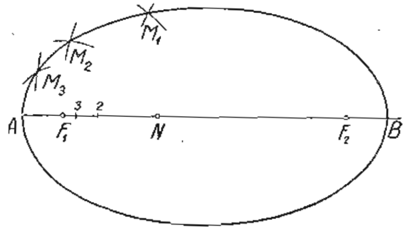
Збир растојања ма које њене тачке од двеју њених унутрашњих сталних тачака јесте сталан.

Таква крива зове се **елипса**. Две унутрашње сталне тачке зову се **жиже**.

Конструкција елипсе. — Са слике 37 видимо да је

$$MF_1 + MF_2 > F_1F_2.$$

Узећемо произвољно две тачке F_1 и F_2 (сл. 38). Узећемо сад једну произвољну дуж AB, али тако да је $AB > F_1F_2$. Та дуж AB претстављаће нам збир растојања сваке елипсине тачке до жижа. Узмимо сад у отвор шестара произвољну дуж $AN < AB$. Из F_1 опишимо лук отвором AN. Из F_2 опишимо лук отвором NB. Добијамо тачке M_1 и M'_1. (Где лежи тачка M'_1? Цртај, па ћеш је лако добити. Како леже M_1 и M'_1 према правој AB? Откуд знаш?) Из конструкције се види да је



Сл. 38.

$$M_1F_1 + M_1F_2 = AN + NB = AB.$$

$$M'_1F_1 + M'_1F_2 = AN + NB = AB.$$

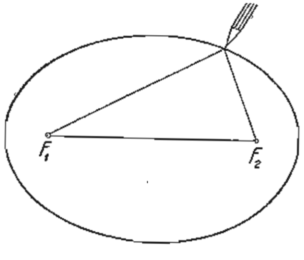
Сад ћемо из F_2 описати лук отвором AN, а из F_1 лук отвором NB. Добијамо опет две елипсине тачке.

Најлакше ћеш конструисати елипсу овако:

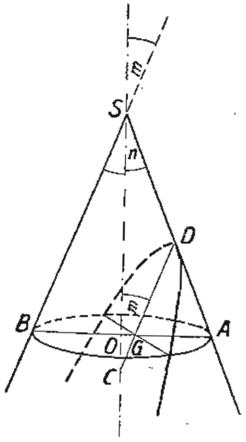
Узмеш кончић. Крајеве утврдиш чиодама у двема тачкама (F_1 и F_2, сл. 39) Затегнеш конац оштром писаљком и вучеш писаљку по хартији пазећи да конац буде једнако затегнут.

Парабола. — Пресецимо купу једном равни која сече осовину под углом m који је једнак с полуотвором купиним:

$$\sphericalangle m = \sphericalangle n = \sphericalangle \frac{S}{2}$$



Сл. 39.



Сл. 40.

Тај пресек не може пресећи ивицу SB (сл. 40).

У троуглу COG је угао $OGC = 90^0 - m = \sphericalangle AGD$.

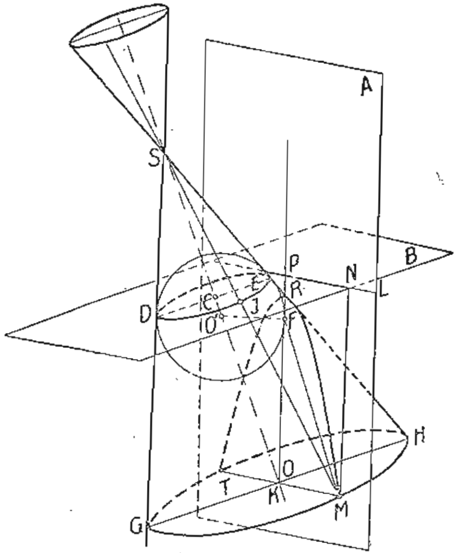
У троуглу OBS је угао $B = 90^0 - n$.

Пошто је $m = n$, мора бити угао $AGD = \sphericalangle B$. Значи ово: пресечна раван и ивица SB секу праву SC под једнаким угловима у истоме смислу. Онда су оне паралелне. Пресечна раван не сече ивицу SB. Чим пресечна раван не сече све ивице, пресечна се крива не затвара. Она је отворена крива.

Пресецимо опет купу једном равни која сече осовину под углом који је једнак с полуотвором купиним. Видели смо да је пресек те равни паралелан с ивицом SG (раван A паралелна са SG, сл. 41).

Постоји свега једна лопта O' која додирује купин омотач по кругу (круг C, сл. 41) и пресечну раван A. Нека та лопта додирује пресечну раван у F. Тада је A лоптина додирна раван, те мора бити:

$$O'F \perp A.$$



Сл. 41.

Пошто $O'F$ лежи на осовинском пресеку SGH, мора бити:

$$A \perp SGH.$$

Круг по коме лопта додирује купу лежи у равни B. Равни A и B се секу по правој LP. Та је права управна на осовинском пресеку SGH:

$$KPL = 90^0.$$

Пресек равни A и доњег круга O јесте права KM. Она је управна на SGH:

$$KM \perp SGH$$

Пресек равни A и B је права LP. И она је управна на SGH:

$PL \perp SGH.$ Значи да је:

$KM \parallel PL$

Раван A и купин омотач секу се по кривој MRT. Из тачке M те криве повуцимо

(1) $MN \parallel KP$. Тада је $KMNP$ правоугаоник.

Спојимо M и F. Тада је:

(2) $MF = MJ$ (дирке на лопти O' из тачке M).

Али MJ је бочна ивица праве зарубљене купе $GHDE$. Отуда је:

(3) $MJ = GD$

Али ми знамо да је $GKPD$ паралелограм. Отуда је:

(4) $GD = KP$.

Из (1) и (4) имамо:

(5) $GD = MN$. Из (3) и (5) имамо:

(6) $MN = MJ$. Из (2) и (6) имамо:

$MN = MF$.

Права LP је стална права. Тачка F је стална тачка. Значи да пресечна крива MRT има ову особину:

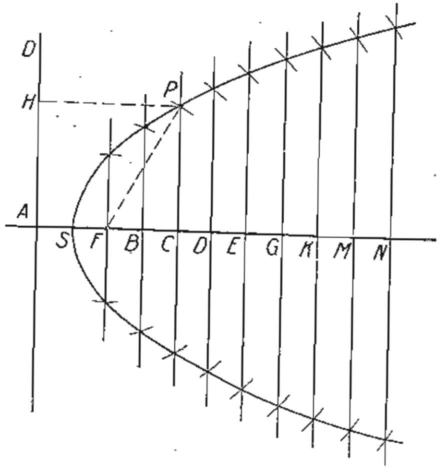
Растојања сваке њене тачке од једне сталне тачке (F) и од једне сталне праве (LP) једнака су.

Оваква крива зове се **парабола.** Стална тачка (F) зове се **жижа**. Стална права (LP) зове се **водиља** (или, страном речи, директриса).

Конструкција параболе. — Нека је дата жижа F (сл. 42) и водиља (D), па се тражи да конструишемо параболу. Из F спустимо управну на водиљу D. Добијемо тачку A. Права која пролази кроз жижу и стоји управно на водиљи јесте паработина **осовина.** Преполовимо растојање AF. Добијамо тачку

S. Видимо да је $FS = SA$ и $SA \perp AH$. Значи да тачка S лежи на параболи. Узмимо сад неколико тачака на осовини (B, C, D, E, G, K, M, N). Дигнимо у њима управне на осовину. Из F сецимо те управне луцима чији су полупречници AB, AC, AD, AE, AG итд.). Добијамо увек по две параболине тачке.

Хоћемо да проверимо да ли тачка P лежи на параболи. Са слике се види да је $PH = AC$. Ми смо нацртали $FP = AC$. Значи да је $FP = PH$. Тачка је на параболи.



Сл. 42.

Хипербола. — Пресецимо обртну купу једном равни која сече осовину под углом мањим од купиног полуотвора. Таква ће раван сећи двојну купу (сл. 43).

Раван P сече купу по двема раздвојеним гранама једне исте криве.

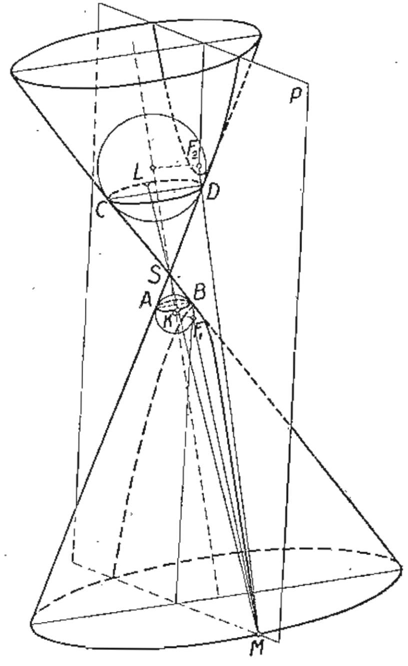
Узмимо у обема купама лопту која додирује купин омотач по кругу (кругови AB и CD) а пресечну раван P додирује у једној тачци (F_1 и F_2). Узмимо произвољну тачку M с пресечне криве. Спојмо је и са F_1 и са F_2. Имаћемо:

$$MF_2 - MF_1 = ML - MK = KL.$$

Дуж KL је бочна ивица двојне купе $ABSCD$. Значи да је KL стална количина. То даље значи да наша крива има ову особину:

Разлика растојања ма које тачке ове криве од двеју сталних тачака стална је.

Оваква крива зове се **хипербола.**

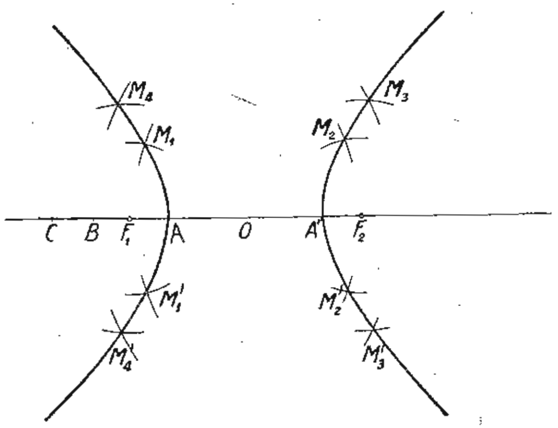


Сл. 43.

Две сталне тачке зову се **жиже.**

Конструкција хиперболе. — Нека су дате две хиперболине жиже (тачке F_1 и F_2, сл. 44) и AA' као разлика растојања до жижа. Хоћемо да конструишемо хиперболу.

Преполовићемо жижно растојање F_1F_2. Добићемо тачку O. Пола датога растојања AA' пренећемо десно од O, а пола лево. Добијамо тачке A и A'. Оне обе леже на хиперболи:



Сл. 44.

$$AF_2 - AF_1 = AF_2 - A'F_2 = AA'$$
$$A'F_1 - A'F_2 = A'F_1 - AF_1 = AA'.$$

Права која пролази кроз обе жиже јесте хиперболина **осовина.** Хиперболине тачке које леже на осовини зову се **темена.** Тачке A и A' јесу хиперболина темена.

Узећемо ван дужи F_1F_2, а на осовини, произвољну тачку B. Из F_2 описаћемо лук отвором $A'B$. Из F_1 пресећи ћемо тај лук отвором AB. Добијамо тачку M_1. Сад је

$$F_2M_1 - F_1M_1 = A'B - AB = AA'.$$

У исто време добијамо и тачку M'_1

Сад из F_1 опишемо лук отвором $A'B$, а из F_2 отвором AB. Добијамо тачке M_2 и M'_2. Затим узимамо тачку C. Из F_1 лук отвором $A'C$. Из F_2 лук отвором AC. Добијамо тачке M_3 и M'_3. Сад из F_1 лук отвором AC, а из F_2 лук отвором $A'C$. Добијамо тачке M_4 и M'_4. Итд.

ВЕЖБАЊА

1. — Шта бива с купиним пресецима кад се купин отвор шири?

2. — Шта бива с купиним пресецима, кад се купин отвор сужава?

3. — Шта бива с купиним пресецима, кад се купино теме све више удаљава од основе?

4. — Каква је то купа чије је теме у бескрајности?

5. — Испитај ваљкове пресеке.

*6. — Можемо ли круг сматрати као управну пројекцију елипсе? (То се види на косом пресеку правог обртног ваљка).

7. — Конструиши елипсу кад је $MF_1 + MF_2 = 7$ cm., a $F_1F_2 = 5$ cm.

8. — Конструиши елипсу кад је $MF_1 + MF_2 = 8$ cm., a $F_1F_2 = 5$ cm.

9. — Конструиши елипсу кад је $MF_1 + MF_2 = 10$ cm., a $F_1F_2 = 5$ cm.

10. — Шта бива са елипсом кад расте збир растојања њених тачака од жижа?

11. — Шта бива с елипсом кад опада збир растојања њених тачака од жижа?

12. — Конструиши елипсу кад је $F_1F_2 = 4$ cm., $MF_1 + MF_2 = 12$ cm.

13. — Конструиши елипсу кад је $F_1F_2 = 6$ cm., $MF_1 + MF_2 = 7$ cm.

Конструиши параболу кад је растојање FA од жиже до водиље:

14. 10 cm. **15.** 9 cm. **16.** 7 cm. **17.** 4 cm.

18. — Шта бива с параболом кад јој опада растојање од жиже до водиље?

19. — Шта бива с параболом кад јој расте растојање од жиже до водиље?

20. — Шта бива с елипсом кад јој расте растојање између жижа?

21. — Шта бива с елипсом кад јој опада растојање између жижа?

Конструисати хиперболу кад је:

22. — Жижно растојање 6 cm., разлика растојања до жижа 5 cm.,

23. — Жижно растојање 6 cm. разлика растојања до жижа 4 cm.,

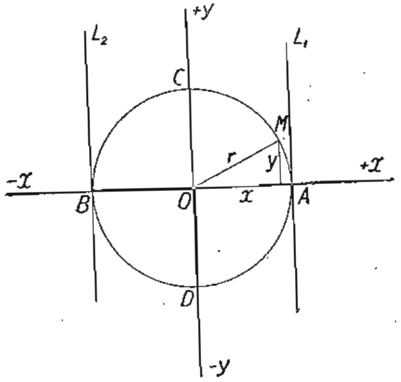
24. — Жижно растојање 6 cm., разлика растојања до жижа 3 cm.

25. — Шта бива с хиперболом кад јој опада разлика растојања до жижа?

IV. — КРУГ

Средишна једначина круга. — Нека је круг описан из координатног почетка полупречником r. Видели смо да је растојање ма које тачке од координатног почетка

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Сл. 45.

У нашем случају растојање ма које тачке на кругу биће равно полупречнику

$$(1) \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Једначина (1) изражава основну особину кружне линије: све њене тачке подједнако су далеко од једне сталне тачке. Зато једначина (1) претставља једначину круга. Једначину (1) ми пишемо:

$$(I) \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Једначину (I) зовемо средишна једначина круга. Она претставља круг чији је центар у координатном почетку.

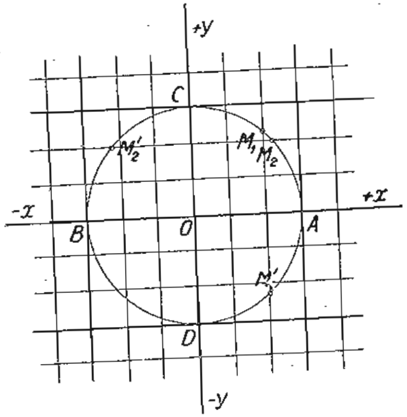
Анализа средишне једначине. — Хоћемо да испитамо ову једначину. Ми смо то већ урадили на странама 12 до 15. Сад ћемо се ограничити само на један случај.

Узмимо круг $x^2 + y^2 = 9$ (сл. 46).

Решимо по y:

$$y = \pm \sqrt{9 - x^2}$$

Видимо да је крива симетрична према апсцисној осовини. (Свакоме иксу одговарају две супротне вредности за y).



Сл. 46.

Видимо да крива нема тачака за x мање од (—3), ни веће од (+ 3).

Решимо по x:

$$x = \pm \sqrt{9 - y^2}.$$

Видимо да је крива симетрична према ординатној осовини.

Видимо да нема тачака за ординате мање од (−3), и веће од (+ 3).

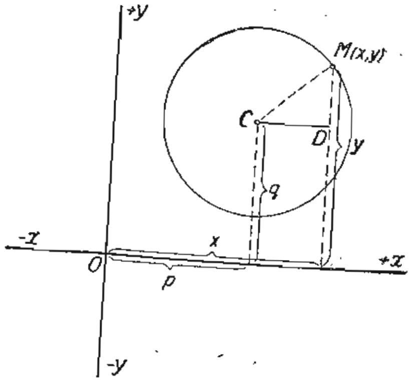
[Конструиши тачке ове криве за $x = \pm 1$ и $x = \pm 2$.]

Пример. — Конструиши круг чија је једначина $x^2 + y^2 = 5$.

Овде је центар у координатном почетку, а полупречник $r = \sqrt{5}$.
[Полупречник ћеш овако конструисати: $r = \sqrt{2^2 + 1^2}$]

ОПШТА ЈЕДНАЧИНА КРУЖНЕ ЛИНИЈЕ

Узмимо круг описан из тачке C чије су координате p и q. Нека му је полупречник R (сл. 47).



Сл. 47.

Свака тачка тога круга биће за R удаљена од C. Координате ма које тачке M јесу x и y. Координате тачке C су p и q. Растојање тих двеју тачака је:

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2}.$$

Ово растојање увек је једнако R:

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2} = R.$$

Ако степенујемо са 2, биће:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = R^2. \quad (1)$$

То је једначина круга чији је центар ван координатног почетка.

Знаци распознавања кружне једначине. — Општа једначина кривих другог степена гласи:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (2)$$

Да видимо по чему се познаје једначина круга. Извршимо означено степеновање у једначини (1) и пребацимо на леву страну R^2. Добијамо:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 - R^2 = 0. \quad (3)$$

Кад упоредимо (3) са (2) видимо ово:

1) Једначина круга у правоуглом координатном систему нема члана са xy.

$$B = 0.$$

2) Сачиниоци уз x^2 и y^2 једнаки су:

$$A = C.$$

Зато можемо овако написати општу једначину круга:

$$A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Пример I. — Круг чији је полупречник $R = 2$ описан је из тачке C (2,3). Како гласи његова једначина?

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ или:
$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 4$ или даље:
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0.$

Пример II. — Нацртати круг чија је једначина:

$$x^2 - 6x + y^2 + 8y - 1 = 0.$$

Да бисмо га могли нацртати, треба да му знамо координате средишта и полупречник. Све се то лепо види, ако једначину круга напишемо у облику:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = R^2.$$

То ћемо овако написати:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = R^2.$$

У нашем задатку је:

$-2px = -6x$ Одатле је $p = 3.$
$-2qy = +8y$ Одатле је $q = -4.$

Једначина датог круга добија сад овај облик:

$$(x - 3)^2 - 3^2 + [y - (-4)]^2 - (-4)^2 - 1 = 0.$$
$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 26.$$

$\left.\begin{array}{l} p = 3 \\ q = -4 \end{array}\right\}$ Центар траженога круга.

$R = \sqrt{26}$ [За конструкцију ће бити: $R = \sqrt{5^2 + 1^2}$]

Напомена. — Ако је у једначини (1) количина $R^2 = 0$, тада је једначина

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = 0 \quad (4)$$

задовољена само за вредности $x = p$ и $y = q$. Значи да једначина (4) претставља једну тачку.

Ако је у једначини (1) количина $R < 0$, можемо једначину (1) написати овако:

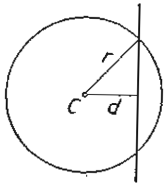
$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = (Ri)^2. \quad (5)$$

Пошто лева страна претставља квадрат растојања ма које тачке на кругу од кружног средишта, лева страна је увек позитивна, те не може бити равна негативној десној страни. Зато једначина (5) **не** претставља ниједно геометриско место које ми досад познајемо.

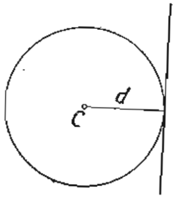
КРУГ И ПРАВА

Три разна положаја. — Знамо из ранијег да круг и права могу бити у једноме од ова три положаја:

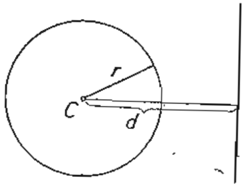
1) Права сече круг. Тада права има две заједничке тачке с кругом. Тај случај наступа кад је средишно растојање (d, сл. 48) мање од полупречника ($d < r$.)



Сл. 48.



Сл. 49.



Сл. 50.

2) Права додирују круг. Тада се две пресечне тачке праве и круга поклапају. Тај случај наступа кад је $d = r$ (сл. 49.)

3) Права је спољна за дати круг. Тада права и круг немају заједничких тачака. Тај случај наступа кад је $d > r$ (сл. 50).

Кружна сечица. — Нека права L сече дати круг (сл. 51). Обележимо пресечне тачке са M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2). Тачке M_1 и M_2 леже на кругу. Зато оне својим координатама морају задовољавати једначину круга:

$$(x_1-p)^2+(y_1-q)^2=R^2$$

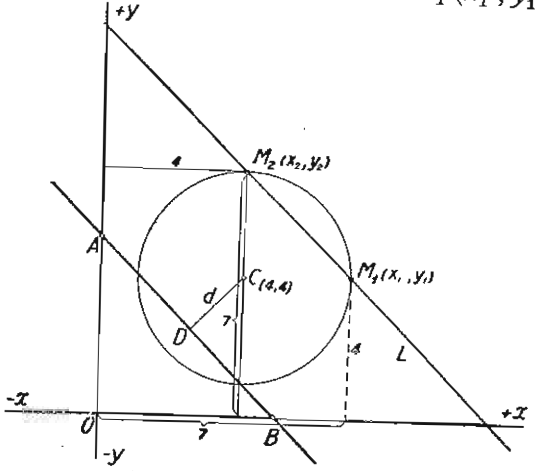
и

$$(x_2-p)^2+(y_2-q)^2=R^2.$$

Али тачке M_1 и M_2 леже и на правој L. Зато оне својим координатима морају задовољавати и једначину те праве:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$ и

$$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$



Сл. 51.

Значи да су x_1, y_1 и x_2, y_2 решења овога система:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^3$$

$$Ax + By + C = 0.$$

Како се одређују координате пресека праве и круга? Узмемо дате једначине круга и праве као систем једначина. Ако добијемо два различита решења дата је права сечица. [Добијена решења су кординате пресечних тачака].

Пример I. — Наћи координате пресека

(1) круга $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$ и

(2) праве $x + y = 11$.

Решићемо овај систем.

Из (2) $y = 11 - x$. Смена у (1):

$$x^2 + (11 - x)^2 - 8x - (11 - x) + 23 = 0.$$

Одатле добијамо:

$x_1 = 7$ $x_2 = 4$.

Решење датога система је:

$x_1 = 7$ $x_2 = 4$.

$y_1 = 4$ $y_2 = 7$.

Дата права сече круг у тачкама M_1 (7,4) и M_2 (4,7). (Види сл. 51).

Пример II. — Је ли права $y = 5 - x$ сечица на кругу $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$?

Први начин. — Ако је ова права сечица на кругу, њено средишно растојање мора бити мање од полупречника овога круга.

Једначина нашег круга гласи:

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

Види се да су координате средишта C (4,4) и $R = 3$.

Колико је далеко права $y = 5 - x$ од центра C?

$$d = \frac{(y + x - 5)}{\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{(4 + 4 - 5)}{\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$d = 1{,}5\sqrt{2}$ $R = 3$. $3 > 1{,}5\sqrt{2}$. Права је сечица (сл. 51, права AB).

Други начин. — Решићемо једначину праве по y. Добивену вредност сменићемо у једначини круга, па добивену једначину решити по x.

$$y = 6 - x$$

$x^2 + (6 - x)^2 - 8x - 8(6 - x) + 23 = 0$. То је даље:

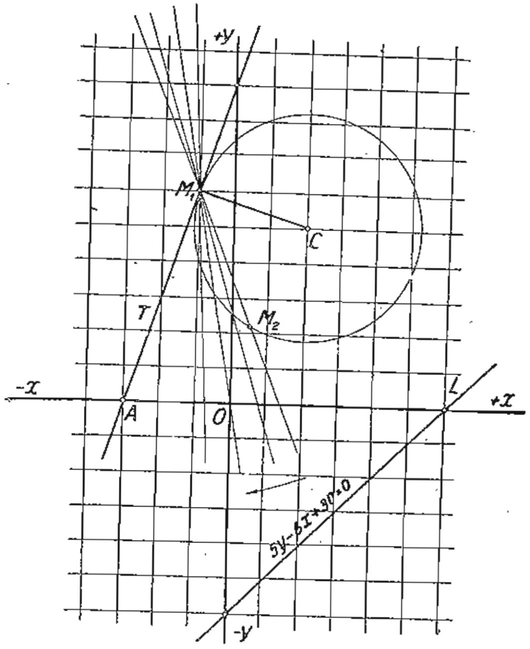
$$2x^2 - 12x + 11 = 0.$$

Дискриминанта је

$$(-12)^2 - 4 . 2 . 11 = 144 - 88 > 0.$$

Корени су стварни и неједнаки. Дата права је сечица.

Дирка на кругу. — Узмимо сечицу $M_1 M_2$ (сл. 52). Пустимо је да се обрће око M_1 у смислу који показује стрелица. При томе обртању друга пресечна тачка M_2 све ближе прилази првој пресечној тачци M_1. Кад M_2 тежи да падне на M_1, сечица $M_1 M_2$ тежи да падне на дирку T. Према томе, дирку можемо сматрати као гранични правац коме тежи сечица, кад једна њена тачка тежи другој. [Кад M_2 падне на M_1, сечица $M_1 M_2$ постаје дирка T].



Сл. 52.

Видели смо да се пресечне тачке круга и праве добијају, кад се реши систем једначина који сачињавају једначина круга и једначина праве. Сад смо видели да се дирка добија кад се пресечне тачке поклопе. Значи, ако добијемо два једнака решења при решавању система, добивено решење претставља додирну тачку дирке на кругу.

Пример. — Испитати однос праве $y - 3x = 9$ *и круга* $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0.$

Да видимо каква решења даје овај систем.

$$y = 9 + 3x$$

$$x^2 + (81 + 54x + 9x^2) - 4x - 90 - 30x + 19 = 0.$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1.$$

Наша права је дирка. У којој тачци додирује круг

Имали смо $y = 9 + 3x$. Ставимо $x = -1$. Добијамо $y_1 = y_2 = 6$. Наша права је дирка у тачци $x = -1$, $y = 6$ (сл. 52).

Провери ово решење помоћу средишног растојања праве $y - 3x = 9$ и R.

Спољна права. — Ако права нема ниједне заједничке тачке с кругом, она ће бити спољна права за тај круг. Пошто у томе случају нема заједничких тачака, не постоје тачке које својим координатама задовољавају и једначину круга и једначину праве. Значи да не може бити стварних решења, кад решимо систем једначине круга и једначине праве.

Пример. — Испитати однос праве $5y - 6x + 30 = 0$ *према кругу* $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0.$

Из једначине праве имамо:

$$y = \frac{6}{5} x - 6.$$ Сменимо то у једначини круга.

Добићемо:

$$x^2 + \frac{36}{25} x^2 - \frac{72}{5} x + 36 - 4x - 12x + 60 + 19 = 0.$$

$$61x^2 - 760x + 2875 = 0.$$

Дискриминанта је

$$(-760)^2 - 4.61.2875 < 0.$$

Решења су уображена. Права је спољна за дати круг (Види сл. 52, праву L).

Израчунај растојање дате праве од средишта датог круга, те се увери да је средишно растојање дате праве веће од полупречника.

ЈЕДНАЧИНА ДИРКЕ

Узмимо круг $x^2 + y^2 = R^2$ и две тачке на њему (M_1 и M_2, сл. 53). Хоћемо да изведемо једначину дирке у тачци M_1. Узећемо најпре сечицу $M_1 M_2$. Њена једначина је

$$(1) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Од ове ће сечице постати дирка, кад тачка M_2 падне на M_1. Тада је

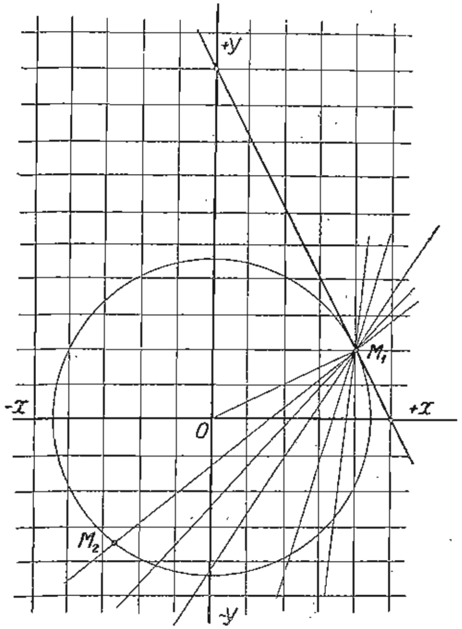
$$x_2 = x_1 \text{ и } y_2 = y_1.$$

Ако то ставимо у једначину (1), добијамо:

$$y - y_1 = \frac{0}{0} (x - x_1)$$ $\frac{0}{0}$ је неодређен израз.

Његову вредност можемо овде овако израчунати.

Тачка M_1 лежи на кругу. Зато мора бити:



Сл. 53.

$$(2) \quad x_1^2 + y_1^2 = R^2$$

Тачка M_2 лежи на кругу. Зато мора бити:

$$(3) \quad x_2^2 + y_2^2 = R^2.$$

Ако одузмемо (2) од (3) добијамо:

$$(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) = 0.$$

То је даље:

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0.$$

$$(x_2 + x_1) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(y_2 + y_1) = 0$$

$$(4) \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$$

Ако вредност (4) унесемо у (1), добићемо:

$$(5) \quad y - y_1 = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

Пустимо сад тачку M_2 да падне на M_1. Тада једначина (5) постаје:

$$(6) \quad y - y_1 = -\frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1).$$ То је даље:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$ Знамо да је $x_1^2 + y_1^2 = R^2$.

$$\mathbf{xx_1 + yy_1 = R^2.}$$

То је једначина дирке на круг $x^2 + y^2 = R^2$.

Овако бисмо одредили једначину дирке помоћу извода:

Дирка пролази кроз тачку M_1:

$$y - y_1 = a\,(x - x_1).$$ Треба само одредити a.

Знамо да је угловни сачинилац дирке на некој кривој први извод (y') једначине те криве.

Једначина круга:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$ Одатле је:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$ Ставимо $R^2 - x^2 = z$.

$$y = \sqrt{z}$$

$$y = z^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} Z^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

За дирку у тачци M_1 биће:

$$y = -\frac{x_1}{y_1}$$

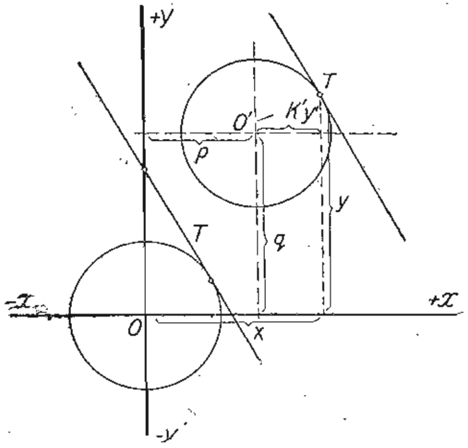
Отуда једначина дирке:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x).$$ То је даље:

$$xx_1 + yy_1 = R^2.$$

Дирка на кругу $(x - p)^2 + (y - q)^2 = R^2$. — Узмимо круг O (сл. 54). Његова је једначина

$$x^2 + y^2 = R^2.$$



Сл. 54.

Преместимо транслацијом координатне осовине тако, да почетак дође у O'. Нове апсцисе обележимо са x'; нове ординате са y'. У новоме координатном систему једначина круга биће:

$$x'^2 + y'^2 = R^2.$$

а његова дирка биће:

$$(1) \quad x'x_1 + y'y_1 = R^2.$$

Између старих и нових координата постоји овај однос:

$$x = p + x'$$
$$y = q + y'.$$ Одатле је:

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= x - p \\ y' &= y - b. \end{aligned}$$

Кад вредности (2) унесемо у (1), добијамо једначину дирке на кругу O', али у систему O:

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = R^2.$$

То је једначина дирке на круг чији центар није у координатном почетку.

Пример I. — Одредити дирку у тачци M_1 (4 , 2) на кругу $x^2 + y^2 = 20$.

Да проверимо најпре да ли дата тачка лежи на кругу.

$4^2 + 2^2 = 20.$ Лежи на кругу.

Једначина дирке:

$$xx_1 + yy_1 = R^2.$$

Тражена дирка:

$$x . 4 + y . 2 = 20, \text{ т. ј. } 2x + y = 10 \text{ (сл. 53).}$$

[Сад реши систем једначине круга и једначине добивене праве, да се увериш да имаш два једнака решења.]

Пример II. — Одредити једначину дирке у тачци M_1 (5,6) на круг

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0.$$

Најпре се увери да дата тачка лежи на кругу.

Једначина дирке:

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = R^2.$$

Код датог круга је: $p = 3$, $q = 5$ и $R = \sqrt{5}$.

Тражена дирка:

$$(x - 3)(x_1 - 3) + (y - 5)(y_1 - 5) = 5.$$
$$(x - 3)(5 - 3) + (y - 5)(6 - 5) = 5$$
$$2(x - 3) + y - 5 = 5$$
$$2x - 6 + y - 10 = 0$$
$$2x + y - 16 = 0. \text{ (сл. 54).}$$

Добивено решење провери на два начина (средишним растојањем и решавањем система).

НОРМАЛА

Права која у додирној тачци једне дирке на једној кривој стоји управно на тој дирци зове се нормала те криве (за ту тачку).

На слици 55 права *N* је нормала на кругу у тачци M_1.

И дирка и нормала пролазе кроз додирну тачку $M_1 (x_1, y_1)$. Значи, њихове једначине морају овако да гласе:

дирка $y - y_1 = a_1 (x - x_1)$

нормала $y - y_1 = a_2 (x - x_1)$.

Дирка и нормала не заклапају једнаке углове с апсцисном осовином. Зато a_2 није једнако са a_1. Оне стоје управно једна на другој. Зато мора бити:

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}.$$

Једначина дирке:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

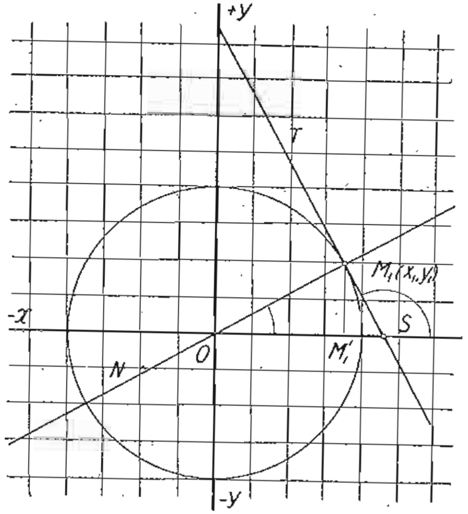
Једначина нормале:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1), \text{ или:}$$
$$yx_1 - x_1 y_1 = xy_1 - x_1 y_1$$
$$\mathbf{xy_1 - y\,x_1 = 0}. \qquad \text{Једначина нормале.}$$

Једначина нормале за круг $(x - p)^2 + (y - q)^2 = R^2$ биће:

$$(x - p)(y_1 - q) + (y - q)(x_1 - q) = 0 .$$

Пример. — Одредити једначину дирке и нормале за круг $x^2 + y^2 = 16$ *у тачци чија је ордината* $y_1 = 2$ (сл. 55), *а апсциса позитивна.*



Сл. 55.

Да нађемо најпре апсцису додирне тачке.

$$x_1^2 + y_1^2 = 16$$
$$x_1^2 + 4 = 16$$
$$x_1^2 = 12$$
$$x_1 = + 2\sqrt{3}.$$

Додирна тачка је *M* $(2\sqrt{3}, 2)$.

Наша дирка

$$2x\sqrt{3} + 2y = 16 \text{ т. ј.}$$
$$(1) \quad x\sqrt{3} + y = 8.$$

Једначина нормале:

$$xy_1 - yx_1 = 0.$$

Наша нормала:

$$2x - 2y\sqrt{3} = 0, \text{ т. ј.}$$
$$(2) \quad x - y\sqrt{3} = 0.$$

Изврши пробу. [Праве (1) и (2) треба да пролазе кроз додирну тачку и да стоје управно једна на другој].

ТАНГЕНТА, НОРМАЛА, ПОТАГЕНТА И ПОДНОРМАЛА

Дужина кружне тангенте. — Дужину тангенте рачунамо од додирне тачке (M_1, сл. 55) до тангентиног пресека с апсцисном осовином (*S*, сл. 55). На слици 55 тангентина дужина је $M_1 S$. Да бисмо израчунали дужину тангенте, потребно нам је да знамо координате пресечне тачке (*S*).

Пример. — Израчунати дужину тангенте на кругу $x^2 + y^2 = 16$ у тачци M_1 $(2\sqrt{3}, 2)$.

Најпре једначину дирке. Малочас смо видели да је она:

$$x\sqrt{3} + y = 8.$$

Где ова дирка сече апсисну осовину? Онде где је $y = 0$.

$$x\sqrt{3} + y = 8$$

$$x\sqrt{3} + 0 = 8$$

$$x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Дужина дирке SM_1 биће:

$$t = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}\right)^2 + (2-0)^2}$$

$$t = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

Дужина нормале. — Дужину нормале рачунамо од додирне тачке до нормалиног пресека с апсцисном осовином. На слици 55 дужина нормале је $n = OM_1$.

Пример. — Наћи дужину нормале за круг $x^2 + x^2 = 16$ у тачци M_1 $(2\sqrt{3}, 2)$.

$x - y\sqrt{3} = 0$. (Једначина нормале кроз тачку M_1).

Где нормала сече апсцису осовину? Сече је у тачци O (0, 0).

Дужина нормале:

$$n = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2}$$

$$n = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$n = 4$ $[n = R]$ (Зашто је $n = R$?)

Потангента. — Потангента је дуж која претставља пројекцију дирке на апсцисној осовини. На слици 55 потангента је дуж $M'_1 S$.

Поднормала. — Поднормала је пројекција нормале на апсцисној осовини. На слици 55 поднормала је дуж OM'_1.

Изведи сам правило како се израчунавају дужине потангенте и поднормале.

МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈИ ДВА КРУГА

Како се испитује међусобни положај два круга, показаћемо на примерима.

Пример I. — Испитати међусобни положај ова два круга:

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0 \text{ и}$$

$$x^2 + y^2 - 14x - 18y + 120 = 0$$

Сматраћемо ове две једначине као систем. Ако се ови кругови секу, овај систем мора да дâ два стварна нееднака решења. Ако се они додирују, систем мора да дâ два стварна, једнака решења. Ако ови кругови немају заједничких тачака, овај систем мора да дâ уображена решења.

Одузмимо другу једначину од прве:

(1) $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$

(2) $\underline{\pm x^2 \pm y^2 \mp 14x \mp 18y \pm 120 = 0}$

$10x + 10y - 120 = 0$, т. ј.

(3) $x + y = 12$. Одатле је:

(4) $y = 12 - x$. Сменом у (1) добијамо:

$x^2 - 10x + 24 = 0$. Одатле је:

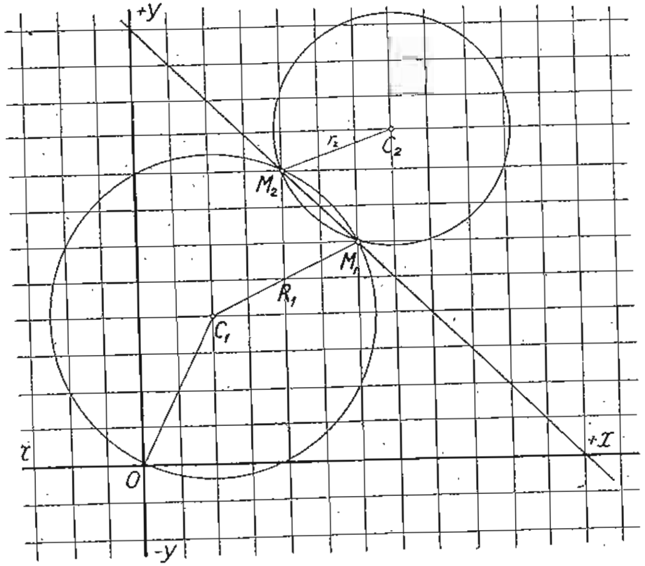
$x_1 = 6$ $x_2 = 4$.

Сменом ових вредности у (4) добијамо:

$y_1 = 6$ $y_2 = 8$.

Кругови имају две заједничке тачке:

M_1 (6 , 6) и M_2 (4 , 8) — слика 56.



Сл. 56.

[Зар овај систем даје само два решења? Објасни то.]

Заједничка сечица. — Кроз добијене две тачке иде заједничка сечица ова два круга, права $M_1 M_2$.

Кад напишемо једначину праве кроз те две тачке, добијамо једначину

(5) $x + y = 12.$

Па ми смо већ били добили једначину ове заједничке сечице. Ено је горе под бројем (3). Како смо је добили? Како се може добити заједничка сечица два круга?.

Пример II. — Испитати међусобни положај ова два круга:

(1) $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$

(2) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 24 = 0.$

Одредићемо најпре једначину њихове заједничке сечице. Добићемо је, ако одузмемо једну једначину од друге, да бисмо избацили квадрате. Кад то урадимо, добијамо једначину сечице:

(3) $x + y - 12 = 0$

Да ли је то њихова заједничка сечица? Да је опробамо на првоме кругу. Ако има с њим две заједничке тачке, сечица је. Али тада она мора бити сечица и за други круг. (Зашто?). Тада ћемо знати да се кругови секу.

Из (3) имамо $y = 12 - x$. Сменом у (1) добијамо:

$x^2 - 12x + 36 = 0.$ Одатле је:

$x_1 = x_2 = 6.$

Сменом у (3) добијамо:

$y_1 = y_2 = 6.$

Добивена права је дирка на два дата круга. Кругови се додирују у тачци M (6, 6).

[Како се добија заједничка дирка два круга? Је ли то унутрашња или спољашња заједничка дирка? Како ћеш у овоме задатку да провериш је ли овде спољашњи, или унутрашњи додир два круга? Може ли се то проверити помоћу централе и растојања додирне тачке од оба центра?

Помоћу позитивног и негативног поља добивене дирке одреди јесу ли центри датих кругова с исте стране добивене дирке. На тај начин можеш видети је ли овде спољни или унутарњи додир.

Да би одредио позитивно и негативно поље, ради овако. Узми једну тачку за коју знаш да је унутарња. Њене координате унеси у једначину круга. Види какву вредност добија полином кружне једначине за координате те тачке. Знак полинома биће знак унутарњег поља. Тада узми једну тачку за коју знаш да је спољашња, па с њеним координатама уради исто што и малопре.]

ВЕЖБАЊА

Објасни шта претставља дата једначина и конструиши криву:

1. $x^2 + y^2 = 4$ 2. $x^2 + y^2 = 25$ 3. $x^2 + y^2 = 1$

4. $x^2 + y^2 = 3$ 5. $x^2 + y^2 = 7$ 6. $x^2 + y^2 = 2,25$

7. $x^2 + y^2 = 10$

Написати једначину круга кад је:

8. центар C (3, 7), а полупречник R = 8
9. центар C (3, 4), а полупречник R = 5
10. „ C (2, — 4) „ R = 2 cm.
11. „ C (5, — 7) „ 12 cm.
12. „ C (—, 5) „ 2 cm.
13. „ C (— 2, — 4) „ 4 cm.
14. „ C (— 3, — 5) „ 3 cm.

15. — Испитај позитивно и негативно поље за кругове из вежбања 1, 4, 9, 12.

[Узми једну спољну и једну унутрашњу тачку. Види какав знак добија вредност полинома кружне једначине за унутрашњу, а какав за спољашњу тачку. Сети се како си то радио код праве линије.]

Испитати и конструисати криву чија је једначина:

16. $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 3 = 0$
17. $x^2 - 2x + y^2 - 10y + 1 = 0$
18. $x^2 - x + y^2 - 2y + \frac{1}{4} = 0$
19. $x^2 - 3x + y^2 + 4y = 0$
20. $2x^3 - 4x + 2y^2 - 3y + 2 = 0$
21. $3x^2 - 5x + 3y^2 + 6y + 2\ \frac{1}{3} = 0$
22. $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$
23. $x^2 + 4x + y^2 = 0$
24. $x^2 + y^2 - 6y = 0$
25. $x^2 - 4 + y^2 - 4y + 4 = 0$
26. $y^2 + 6x + x^2 + 6y + 9 = 0$

Наћи координате пресека ових двеју линија:

27. $x - y - 1 = 0$ и $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 20 = 0$
28. $2x - y + 3 = 0$ и $x^2 - 2x + y^2 - 8y + 1 = 0$
29. $3x - 2y + 6 + 0$ и $x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2,75 = 0$
30. $x + y + 2 = 0$ и $x^2 + 4x + y^2 + 10y + 4 = 0$
31. $2x + 3y - 4 = 0$ и $x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0$

Испитати међусобни положај ових двеју линија:

32. $x^2 + y^2 = 5$ и $x + 2y - 5 = 0$

33. $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ и $x - y\sqrt{15} + 2\sqrt{15} + 13 = 0$

34. $x^2 + y^2 = 6$ и $2x + y\sqrt{2} = 6$

35. $x^2 - 3x + y^2 + 4y + 4 = 0$ и $3x - 2y + 5 = 0$

36. $x^2 - 4x + y^2 = 0$ и $x + y = 7$

37. $x^2 - x + y^2 - y = 0$ и $x + y = 2$

38. $x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0$ и $x - y = 20$

39. $x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$ и $2x + y = 3$

40. $x^2 + 4x + y^2 + 6y - 4 = 0$ и $2x + 5y = 7$

41. $x^2 - 2x + y^2 = 0$ и $3y - 2x = 10$

Одредити једначину дирке на ове кругове у датој додирној тачци T:

42. $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ за T (2,1)

43. $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ T (— 1,5)

44. $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 24 = 0$ T (— 2,4)

45. $x^2 + 6x + y^2 + 2y + 6 = 0$ T (—3,1)

46. — Одреди једначину дирке на кривој $x^2 - 6x + y^2 - 0$ у тачци чија је апсциса 5.

47. — Исто за криву $x^2 + y^2 - 8y = 0$ и тачку чија је ордината $y = 2$.

48. — Одреди дирку на кривој $x^2 + y^2 = 4$ у тачци T $(1, -\sqrt{3})$.

49. — „ „ „ „ $x^2 + y^2 = 9$ „ „ T $(2\sqrt{2}, 1)$

50. — Одредити дирку на кривој $x^2 + y^2 = 25$ у тачци T $(\sqrt{3}, \sqrt{22})$.

51. — Одредити дирке на кривој $x^2 + y^2 = 1$ у тачци чија је ордината $y = \frac{1}{2}$.

52. — Одредити дирку на кривој $x^2 + y^2 = 16$ у тачци чија је апсциса $x = 2{,}5$.

53. — Извести једначину дирке повучене из тачке M (3,4) на круг $x^2 + y^2 = 1$.

[Дирка $xx_1 + yy_1 = 1$ пролази кроз M зато мора бити $3x_1 + 4y_1 = 1$. На којој још линији лежи додирна тачка T (x_1, y_1)? Колико имаш једначина са x_1 и y_1? Израчунај из њих x_1 и y_1. Добивене вредности смени у једначини дирке.]

54. — Извести једначину дирке повучене из тачке M (—5,6) на круг

$$y^3 + x^2 = 4.$$

[Дирка иде кроз M. Зато њена једначина мора бити

$$y - 6 = a\,(x + 5).$$

Та права и дати круг додирују се у тачци T (x_1, y_1). Систем њихових једначина мора дати два стварна, једнака решења. У једначини праве реши по y. Ту вредност ипсилона унеси у једначину круга. Реши по x. Пошто та квадратна једначина мора да да̂ два једнака решења, каква јој мора бити дискриминанта? Изрази то. Добићеш једну нову једначину из које можеш израчунати оно *a* у једначини дирке. Чим одредиш *a*, имаш и тражену једначину дирке.]

55. — Извести једначину дирке повучене из тачке M (— 4, — 7) на круг

$$x^2 + y^2 = 9.$$

56. — Извести једначину дирке повучене из тачке M (3 , 4) на круг

$$(x + 5)^2 + (y + 6)^2 = 4.$$

57. — Извести једначину дирке повучене из тачке M (3 , 7) на круг

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

58. — Извести једначину дирке повучене из тачке M (—4 , 8) на круг

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10.$$

59. — Извести једначину дирке повучене из тачке M (7 , 5) на круг

$$x^2 + 10x + y^2 = 0.$$

60. — Исто за спољну тачку M (25, 7) и круг $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

61. — За колики угао треба да се обрне права $x + y - 4 = 0$ око свога пресека с ординатном осовином, да би постала дирка на кругу $x^2 + y^2 = 1$? (Два решења).

62. — Одреди параметар λ у једначини $3x + 4y = 7\lambda$ тако, да та права постане дирка на кругу $x^2 + y^2 = 4$.

[Имаш два решења. Види вежбање 54]

63. — Одредити једначину дирке и нормале на кругу $x^2 + y^2 = 4$ у тачци $x = 1$.

64. — Исто круг $x^2 + y^2 = 9$ и тачку на кругу $y = 2$.

65. — Исто за круг $x^2 - 2x + y^2 - 6y = 3$ и тачку T (2 , 7).

66. — Исто за круг $x^2 + 6x + y^2 + 10y = 2$ и тачку $x = 1$.

Одредити тангенту, нормалу, потангенту и поднормалу за дати круг у датој додирној тачци *T*:

67. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ и T $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

68. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ и T $(x,1)$. [Одреди најпре апсцису].

69. $x^2 + y^2 - 5 = 0$ и T $(2,y)$. [Одреди најпре ординату].

70. $x^2 + y^2 - 7 = 0$ и T $(\sqrt{3}, -2)$

71. $x^2 + y^2 - 10 = 0$ и T $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

72. $x^2 + y^2 - 19 = 0$ и T $(\sqrt{10}, -3)$

73. — Извести једначину праве која отсеца на ординатној осовини отсечак $b = 10$ а паралелна је с дирком повученом на круг $x^2 + y^2 = 4$ из тачке M (6,7).

74. — Извести једначину праве која иде кроз координатни почетак, а управна је на дирци повученој из тачке M (5, —6) на круг $x^2 - 4x + y^2 = 0$. (Два решења).

75. — Извести једначину дирке на кругу $x^2 + y^2 = 4$ паралелне с правом $x - y = 0$. [Два решења].

76. — Извести једначину дирке на кругу $x^2 + y^2 - 6y = 0$ управне на правој $2x - 3y + 5 = 0$. [Два решења].

77. — Извести једначину праве која на дирци T повученој из тачке M (3,5) на круг $(x - 7)^2 + (y - 8)^2 = 1$ стоји управно у тачци где T пресеца апсцисну осовину.

78. — Одредити параметар λ тако, да права $2x + \lambda y = 9$ буде дирка на кругу $x^2 + y^2 = 9$. [Два решења].

79. — Под којим се углом види из тачке M (7,8) круг $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$?

80. — На кругу из претходног вежбања израчунати површине оба отсечка на које апсцисна осовина сече круг.

81. — На круг из вежбања 79 повучене су дирке у тачкама чије су апсцисе 1 и 3, а ординате су позитивне. Под којим се углом секу те дирке? Колика је површина кружног исечка који је ограничен луком између додирних тачака T_1 и T_2 и полупречницима OT_1 и OT_2?

Испитати међусобни положај ова два круга:

82. $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$. [Секу се].

83. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$. и
$x^2 - 18x + y^2 - 2y + 52 = 0$. (Секу се.)

84. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$. и
$x^2 - 12x + y^2 - 12y + 70 = 0$. (Додирују се споља).

85. $x^2 + 2x + y^2 - 14y + 42 = 0$. и
$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 18 = 0$. (Додирују се споља).

86. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$ и
$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 18 = 0$. (Унутрашњи додир)

87. $x + 6x + y^2 + 8x = 29$ и $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8$

88. $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ и $(x - 9)^2 + (y + 7)^2 = 4$.

89. — Под којим се углом секу кругови у вежбању 82?

[То је угао што га међу собом заклапају дирке повучене на оба круга у истој пресечној тачци].

90. — Исто питање за кругове из вежбања 83.

91. — Одредити једначину заједничке сечице за ова два круга
$x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.

Мешовита вежбања за праву и круг.

92. — Израчунати површину мањег кружног отсечка на кругу $x^2 + y^2 = 9$ који гради права што пролази кроз кружне тачке чије су апсцисе — 2 и 1, а ординате негативне.

93. — Написати једначину круга који додирује апсцисну осовину, а има полупречник $R = 8$.

94. — Исто за ординатну осовину и $R = 3$.

95. — Исто за обе осовине и $R = 4$.

96. — Изведи општу једначину круга који пролази кроз координатни почетак.

97. — Извести једначину круга који пролази кроз тачку M (5,6), полупречник му је $R = 3$, а додирује праву $x + y = 5$.

98. — Изведи једначину круга који на правој $y - x = 7$ отсеца отсечак од 7 поделака, а центар му је у координатном почетку.

99. — Извести једначину круга кроз ове три тачке: A (2,3), B (5,4) и C (4,7).

100. — Одреди за круг $x^2 + y^2 = 9$ позитивно и негативно поље.

101. — Дата је једначина круга $x^2 - 4x + y^2 - 10y + 25 = 0$. Координатни систем извршио је транслацију тако, да је координатни почетак дошао у тачку M (2,5). Напиши једначину овога круга у новоме систему.

102. — Извести једначину праве која ће пролазити кроз тачку M (—3, —7) и половити дуж AB, кад су координате A (3,5), B (8,7).

103. — Израчунати дужину тетиве коју на правој $y - x = 2$ отсеца круг $x^2 + y^2 = 16$.

104. — Кад је одређена једначина круга? Колико је услова потребно задовољити? Да ли се то слаже с оним што смо раније учили у геометрији о томе кад је круг одређен? Показати на примерима.

105. — Утврђена су два темена једног троугла, ABC: теме A (—3,0), B (3,0). Треће се теме креће тако, да је увек $AC \perp CB$. Извести једначину линије по којој се креће C.

[Обележимо променљиве координате тачке C са X и Y. Тада права AC иде кроз тачке A (—3,0) и C (X, Y). Тада ће једначина праве AC бити:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x) \quad \text{т.j.}$$

$$y - 0 = \frac{Y - 0}{X - (-3)} [x - (-3)]$$

То је даље

$$y = \frac{Y}{X + 3} (x + 3) \qquad \text{Једначина праве AC.}$$

Исто тако добићемо једначину праве BC:

$$y = \frac{Y}{X - 3} (x - 3)$$

Према задатку те две праве морају бити управне једна на другој.

$$\frac{Y}{X + 3} = - \frac{X - 3}{Y}. \text{ Одатле je:}$$

$$X^2 + Y^2 = 9.$$

То је однос између координата покретне тачке C. По каквој се линији креће тачка C? Како ћеш проверити добивено решење?]

106. — Тачка M се креће око тачке C (2,3) тако, да је увек за 5 удаљена од ње. Изведи једначину путање тачке C.

107. — Дате су координате оба темена на основици AB равностраног троугла ABC: теме A (— 7,3), B (— 4,5). Одредити координате темена C кад је висина $CD = 5$ cm. Колико има решења?

108. — Докажи помоћу аналитичне геометрије да је један угао у равностраном троуглу 60°.

[Узми да темена на основици леже на апсцисној осовини симетрично према координатном почетку.]

*109. — Докажи да се симетрале два суплементна налегла угла секу под правим углом.

110. — Колика је моћ тачке M (5,6) на круг $x^2 + y^2 - 2x = 0$?

111. — Извести једначину круга који пролази кроз тачке A (—3,8) и B (2 5), а средиште му је на правој $2x - 3y + 5 = 0$.

112. — Извести једначину круга чији је полупречник $R = 8$, а додирује праве $2x + y = 7$ и $y - 3x = 6$.

113. — Извести једначину круга који пролази кроз координатни почетак, а отсеца на апсцисној осовини отсечак $m = 5$, на ординатној осовини $n = 2$.

114. — Извести једначину круга који има полупречник $R = 4$, а под правим угловима сече круг $x^2 + y^2 = 4$ у тачци чија је апсциса 1,5.

---

115. — Написати једначину свих кругова чији центри леже на правој $y - x = 1$, а споља додирују круг $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 24 = 0$.

116. — Напиши једначину круга који додирује праву $x + y - 1 = 0$ и пролази кроз тачке M (3,4), N (5,7).

*117. — Израчунај полупречник уписаног круга у ромбу чији је један угао 60°, а координате два узастопна темена имају ове вредности: A (1,3), B (3,4).

118. — Шта претставља једначина која се добија сабирањем једначина два круга?

119. — Шта претставља једначина која се добије кад се једначина једног круга одузме од једначине другог круга?

120. — Шта претставља једначина која се добија сабирањем једначина двеју правих?

121. — Шта претставља једначина која се добија кад се једначина једне праве одузме од једначине друге праве?

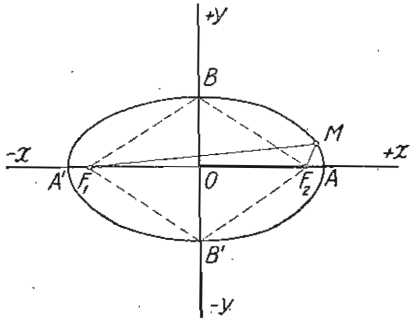
122. — Докажи да кружна нормала увек пролази кроз кружни центар и да иде по полупречнику.

V. — ЕЛИПСА

23-12 704

Видели смо раније (стр. 51—53) шта је елипса и како се она конструише.

Елипсине осовине. — Нека је дата елипса AB $A'B'$ и нека су обележене жиже F_1 и F_2 (сл. 57). Ми ћемо поставити елипсу тако, да њена осовина иде по апсцисној осовини, а да средина жижног растојања F_1 F_2 падне у координатни почетак. Жижни размак обележићемо овако:



Сл. 57.

$$F_1 \ F_2 = 2c.$$

Тада ће бити $F_1O = c$ и $OF_2 = c$.

Тачка A лежи на елипси. Зато мора бити:

$$(1) \qquad AF_2 + AF_1 = k,$$

где је k једна стална дужина (сталан број).

И тачка A' лежи на елипси. За њу мора бити:

$$(2) \qquad A'F_1 + A'F_2 = k$$

Пошто су у (1) и (2) једнаке десне стране, морају бити једнаке и леве:

(3) $AF_2 + AF_1 = A'F_1 + A'F_3.$

Једначину (3) написаћемо овако:

$$AF_2 + (AF_2 + 2c) = A'F_1 + (A'F_1 + 2c).$$

То је даље:

$2AF_2 = 2A'F_1$. Одатле је

$$AF_2 = A'F_1.$$

Пошто је $OF_1 = OF_2$, и $AF_2 = A'F_1$, биће:

$OA = OA'$. (Крајње тачке елипсине на осовини подједнако отстоје од средине жижног размака).

Тачке A и A' у којима елипса сече осовину зову се темена. Размак AA' између темена обележићемо са $2a$:

$$AA' = 2a.$$

Пошто је теме A на осовини, биће:

$AF_1 + AF_2 = k$, т. ј. $AF_2 + 2c + AF_2 = k$.

То је даље:

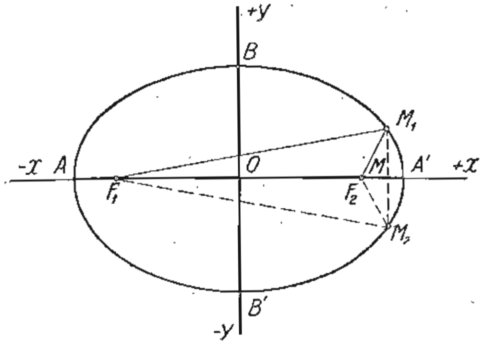
$$AF_2 + 2c + A'F_1 = k$$
$$2a = k.$$

Видимо да је збир жижних растојања једне тачке на елипси једнак са $2a$. Кад то важи за A, важиће и за сваку другу тачку:

$MF_1 + MF_2 = 2a$ (сл. 57).

Растојање $2a$ зовемо **велика осовина.** Зашто велика? Зато што елипса има и малу осовину.

Ако у средини жижног размака (0) дигнемо управну на велику осовину, (управну BB'), та ће управна сећи елипсу у двему тачкама које су подједнако удаљене од велике осовине. Троуглови F_1OB и F_2OB симетрични су према OB. Отуда је $F_1B = F_2B = a$. Исто тако лако је доказати да је $F_1B' = F_2B' = a$. Отуда је $F_2B = F_2B' = a$. Одатле излази да је троугао OF_2B подударан с троуглом OF_2B'. Отуда је $OB = OB'$. Обележимо $BB' = 2b$. Тада је $OB = b = OB'$. Дуж $2b$ зове се **мала осовина.**



Сл. 58.

Симетриске осовине. — Ако поставимо елипсу тако да јој пресек осовина лежи у координатном почетку, велика осовина по апсцисној осовини, а мала по ординатној, добијамо елипсу са слике 58.

Узмимо на апсцисној осовини једну произвољну елипсину унутрашњу тачку. Нека је то тачка M (сл. 58). Показаћемо да за апсцису OM елипса има две тачке (M_1 и M_2) симетричне према великој осовини. (M_1 изнад апсцисне осовине и M_2 испод апсцисне осовине).

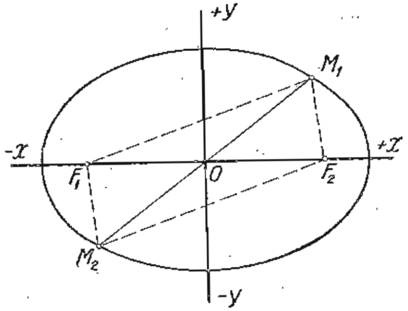
Из M дигнимо управну на апсцисну осовину. Нека тачка M_1 са те управне лежи на елипси. Доказаћемо да и M_2 са те управне лежи на елипси кад је $MM_1 = MM_2$.

Троуглови MF_2M_1 и MF_2M_2 симетрични су према AA'. Отуда је $M_1F_2 = M_2F_2$. Троуглови MF_1M_1 и MF_1M_2 симетрични су према AA'. Отуда је $M_1F_1 = M_2F_1$. Значи да за тачку M_2 постоји овај однос: $M_2F_2 + M_2F_1 = M_1F_2 + M_1F_1 = 2a$. Тада M_2 лежи на елипси. Симетрична тачка M_2 тачке M_1 са елипсе лежи на елипси. Значи да је велика осовина симетриска елипсина осовина. [Докажи да је и мала осовина симетриска осовина]. Елипса има две симетриске осовине.

Из троугла OBF_1 види се да је

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2.}$$

Елипсин центар. — Пресек елипсиних осовина јесте елипсин центар симетрије. Узмимо *на елипси* тачку M_1 и тачку M_2 симетричну са M_1 према O. Доказаћемо да и M_2 мора лежати на елипси (сл. 59).



Сл. 59.

Троуглови OF_1M_2 и OF_2M_1 симетрични су према O. Из те симетрије излази: $F_1M_2 = M_1F_2$. Из централне симетрије троуглова OF_1M_1 и OF_2M_2 излази да је $M_1F_1 = M_2F_2$. Отуда је:

$$M_2F_1 + M_2F_2 = M_1F_2 + M_1F_1 = 2a.$$

Тачка M_2 је на елипси. Пресек осовина је елипсин центар симетрије.

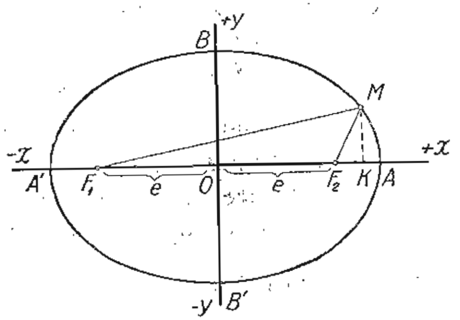
Централна једначина елипсе.—На елипси $ABA'B'A$ (сл. 60) узмимо произвољну тачку M (x, y). Знамо да мора бити:

(1) $MF_1 + MF_2 = 2a.$

Помоћу координата израчунаћемо MF_1 и MF_2.

Из троугла MKF_1 имамо:

$$\overline{MF_1}^2 = \overline{MK}^2 + \overline{F_1K}^2$$



Сл. 60.

(2) $MF_1^2 = y^2 + (c + x)$

Из троугла MF_2K имамо:

(3) $\overline{MF_2}^2 = y^2 + (x - c)^2$.

Кад одузмемо (3) од (2) имамо:

$$\overline{MF_1}^2 - \overline{MF_2}^2 = (c + x)^2 - (x - c)^2$$

$$(MF_1 + MF_2)(MF_1 - MF_2) = 4cx.$$

Знамо да је

$MF_1 + MF_2 = 2a$. Зато је даље:

$$2a(MF_1 - MF_2) = 4cx.$$

(4) $$MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a}.$$

Из (1) и (4) добијамо:

(5) $$MF_1 = a + \frac{cx}{a},$$

Кад вредност (5) унесемо у (2), добијамо:

$(a + \frac{cx}{a})^2 = y^2 + (c + x)^2$. То је даље:

$$a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

$$a^4 + c^2x^2 = a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Знамо да је $a^2 = b^2 + c^2$.

Одатле је $c^2 - a^2 = - b^2$.

$$- b^2x^2 - a^2y^2 = - a^2b^2.$$

То је даље:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Деобом са a^2b^2 добијамо:

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

То је једначина елипсе чији је центар у координатном почетку, велика осовина по апсцисној осовини, а мала по ординатној. Ова једначина зове се централна елипсина једначина.

Колики су сачиниоци уз x^2 и y^2? Можемо ли централну једначину круга написати овако: $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$? Чиме се онда разликује централна једначина елипсе од централне једначине круга?

Дискусија централне једначине. — Решимо централну једначину по y:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Ако је $x < a$, по апсолутној вредности, y је стварно. Тада свакој таквој вредности икса одговарају две супротне вредности за y. Значи, наша је крива симетрична према апсцисној осовини.

За $x = \pm a$ имамо $y = 0$. Значи, крива сече апсцисну осовину у тачкама $A(a, 0)$ и $A'(-a, 0)$ — сл. 60.

Ако је $x > a$ (по апсолутној вредности), y је уображено. Значи, крива нема тачака преко A и A'.

Ако је $x = 0$, биће $y = \pm b$. Крива сече ординатну осовину у B и B' (сл. 60).

Решимо сад једначину по x:

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Ако је $y < b$ по апсолутној вредности, x је стварно. Тада свакој таквој вредности ипсилона одговарају две супротне вредности за x. Значи, наша је крива симетрична према ординатној осовини.

За $y = \pm b$, имамо $x = 0$. Значи, наша крива сече ординатну осовину у B и B'. (То смо већ видели).

Ако је $y > b$, (по апсолутној вредности), x је уображено. Крива нема тачака преко B и B'.

Наша је крива непрекидна. За свако x између 0 и $\pm a$ имамо два коначна и одређена ипсилона.

Наша је крива затворена крива. О томе ћемо се овако уверити:

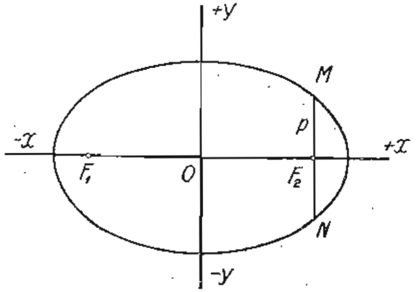
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Кад x тежи нули било од неке негативне, било од неке позитивне своје вредности, израз $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ тежи вредности b или $- b$. Значи да се две веома блиске тачке тачци B поклопе у B кад је $x = 0$.

Параметар. — Елипсина ордината у жижи зове се параметар. Обележићемо га са p.

$$F_2M = p.$$

$$MN = 2p. \quad (\text{сл. } 61).$$



Сл. 61.

Како ћемо израчунати параметар p? То је ордината тачке M. Апсциса тачке M. је $x = c$. Ставићемо ту вредност у једначину елипсе и израчунати y.

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \text{Одатле је:}$$

$$y = p = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Параметар показује елипсин облик. Ако параметар расте, мора или b да расте, или a да опада. Елипса се пупчи. (Шта бива ако параметар опада?).

Бројни ексцентрицитет. — Однос $\frac{c}{a}$ зове се елипсин бројни ексцентрицитет. Обележаваћемо га са e:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Бројни је ексцентрицитет увек мањи од јединице. Ако би он био раван јединици, имали бисмо: $c = a$. Тада елипса не би постојала, јер би било:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 0.$$

И бројни ексцентрицитет показује елипсин облик. Ако је он врло мали, елипса је јако пупчаста и ближи се кругу. Ако је он велики, т. ј. близу јединице, елипса је јако спљоштена. То се овако види:

Узмимо да је $e = \frac{c}{a} = \frac{19}{20}$. Тада ће бити $c = \frac{19a}{20}$. Према томе биће: $b = \sqrt{\left(a^2 - \frac{19a}{20}\right)^2} = \frac{a}{20}\sqrt{39} \approx 0,31\ a$. Таква елипса је јако спљоштена.

Ставићемо сад

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2 e^2} = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Одатле се види да је b све веће, што је e мање. Значи, кад e опада, b се све више приближује вредности a.

За $e = 0$ имамо $b = a$. Елипса постаје круг.

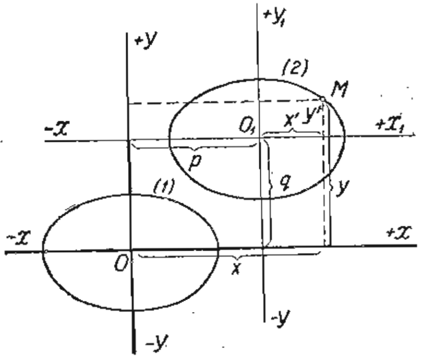
***Општа једначина елипсе.** — Ако елипсин центар пренесемо у таку O_1, а њене осовине положимо паралелно с координатним осовинама, добићемо нову једначину елипсе.

Замислимо да је координатни систем O транслацијом осовина премештен у O_1. Једначина елипсе O_1 (сл. 62) у систему O_1 биће:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Са слике се види да је $x' = x - p$ и $y' = y - q$. Зато ће једначина елипсе O_1 у систему O бити:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$



Сл. 62.

То је једначина елипсе чији је центар ван координатног почетка, а осовине су јој паралелне с координатним осовинама.

***Обележја елипсине једначине.** — Ако ову једначину развијемо, добићемо:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2b^2 px - 2a^2 qy + b^2 p^2 + a^2 q^3 - a^2 b^2 = 0.$$

Знамо да је општи облик кривих линија другог степена:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Видимо да је у једначини елипсе $B = 0$ (нема члана са xy). Њена једначина овако изгледа:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

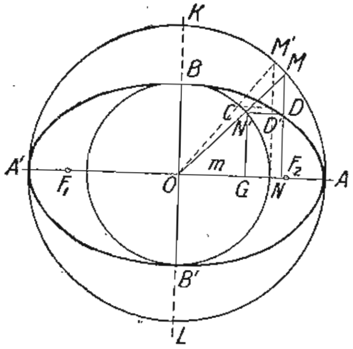
Одатле видимо ово:

Једначина елипсе у правоуглом координатном систему, кад су јој осовине паралелне с координатним осовинама, јесте једначина другог степена по x и y која не садржи члан са xy и у којој чланови са x^2 и y^2 имају сачиниоце неједнаке по апсолутној вредности, али једнаке по знаку.

(Упореди је с општом једначином круга).

Велики и мали круг на елипси. — Круг описан из елипсиног центра великом полуосовином као полупречником зове се велики круг. То је круг AA' са слике 63. Круг описан из елипсиног центра малом полуосовином као полупречником зове се мали круг. То је круг BB' на слици 63.

***Елипса као управна пројекција круга.** — Узмимо једну елипсу, па опишимо велики и мали круг (сл. 63). Из једне унутрашње елипсине тачке (N) на апсцисној осовини дигнимо управну на ту осовину. Она ће пресећи елипсу у D, а велики круг у M. Обе те тачке имају исту апсцису ON. Обележимо $ON = x_1$, $ND = y_1$, $NM = Y_1$.



Сл. 63.

Пошто D лежи на елипси, мора бити:

$$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2_1}$$

Пошто M лежи на кругу, мора бити:

$$Y_1 = \sqrt{a^2 - x^2_1}. \qquad \text{(Пошто је } r = a\text{).}$$

Однос ових двеју ордината биће:

$$(1) \qquad \frac{y_1}{Y_1} = \frac{b}{a}.$$

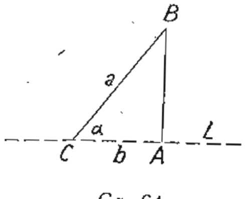
$\frac{b}{a}$ је однос двеју дужина.

Нацртајмо овако: a као хипотенузу, b као њену пројекцију на правој L (сл. 64). Тада можемо написати:

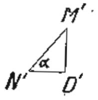
$$(2) \qquad \frac{b}{a} = \cos\alpha.$$

Увек можемо одредити угао α, кад су дати b и a. Према томе угао α увек постоји док је $b \leqslant a$. Сад у (1) можемо ставити:

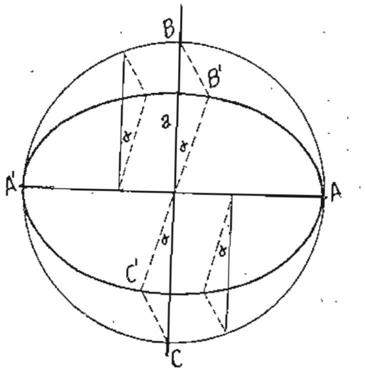
$$\frac{y_1}{Y_1} = \cos\alpha. \qquad \text{Одатле је:} \qquad y_1 = Y_1 \cos\alpha.$$



Сл. 64.



Сл. 65.



Сл. 66.

На нашој слици 63 биће:

$ND = NM \cos\alpha$. То можемо сад овако нацртати: сл. 65.

Значи ово:

Елипсине су ординате пројекције ордината великога круга чија је раван нагнута над елипсином равни под углом α, који је такав, да је $\cos\alpha = \frac{b}{a}$. (сл. 66).

[То ћеш овако најлакше видети. Нацртај на картону елипсу и оба круга као на слици 63. Добићеш два полумесеца. Оштрим ножићем исеци обиме полумесеца, али не баш сасвим до тачака A и A'. Затим издигни из равни цртања горњи полумесец, а спусти доњи. Кроз K провуци иглу и дижи полумесец све дотле, док игла провучена кроз K и B не падне у B управно на елипсину раван (сл. 66). Дижући полумесеце ми смо у ствари издизали раван круга. Кад игла спуштена из K у B падне управно на раван елипсе, тада је B пројекција тачке K. Кад то постигнемо, добијамо правоугли троугао KBO. У њему је хипотенуза $OK = a$, једна управна страна $OB = b$. Оне заклапају један угао α, (сл. 66). Његов је косинус $\frac{b}{a}$. То значи да је то угао под којим треба да стоји велики круг према елипсиној равни, па да елипса буде управна пројекција великога круга. Кроз сваку тачку кружне периферије можемо забости једну тачку управно на елипсину раван и увек ћемо наћи по једну елипсину тачку која је пројекција те тачке с круга.]

***Сродне криве.** — Видели смо да елипса и круг, кад је $2a = 2R$ и кад им се центри поклапају, имају ову особину: све њихове тачке имају исте апсцисе, а све њихове ординате имају сталан однос. Обележимо апсцисе кругових тачака са X, апсцисе елипсиних тачака са x; ординате кругових тачака са Y, ординате елипсиних тачака са y. Имаћемо:

$$x = X \qquad\qquad y = \frac{b}{a} Y$$

Такве две криве зову се сродне криве (афине криве). Осовина OX зове се осовина сродности (осовина афинитета). Однос ордината (овде $\frac{b}{a}$) зове се однос сродности или афинитетни однос.

Ако је дата једначина круга описаног над великом осовином

$$X^2 + Y^2 = a^2$$

овако ћемо добити једначину сродне криве:

Ставимо $X = x$ и $Y = \frac{ay}{b}$. Добијамо:

$$x^2 + a^2 \frac{y^2}{b^2} = a^2$$ Одатле је

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Једначина елипсе.

[Како ћеш из дате једначине елипсе извести једначину сродног круга?]

Други начин конструкције елипсе. — Опишимо на елипси оба круга (сл. 63). Из центра повуцимо произвољан полупречник *OM*. Он сече мали круг у *N'*. Из *M* ордината *MN*. Из *N'* паралелна с апцисном осовином (права *N'D*). Тачка *D* лежи на елипси.

Да се уверимо. Тачка *D* лежи на елипси ако је $DN = \frac{b}{a} Y$.
Обележимо: $OM = a$, $ON' = b$, $ON = x$, $MN = Y$.
Троугли *ONM* и *N'DM* су слични. Отуда је:

$$Y : MD = a : (a - b) \quad \text{и} \quad MD = (a - b) \frac{Y}{a}.$$

Ордината тачке *D* је $MN - MD = Y - (a - b) \frac{Y}{a} = \frac{b}{a} Y$.

Тачка *D* збиља лежи на елипси.

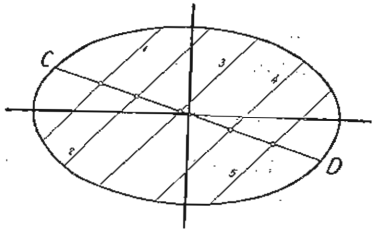
***Површина елипсе.** — Површина великога круга на елипси јесте: πa^2. Елипсина је површина пројекција површине великога круга. Зато је њена површина *p*:

$$p = \pi a^2 \cos\alpha.$$

$$p = \pi a^2 . \frac{b}{a}$$

$$p = \pi\, ab.$$

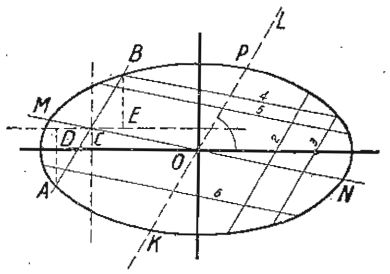
***Елипсини пречници.** — Дуж која спаја две централно симетричне тачке зове се пречник (или дијаметар). На слици 59 тачке M_1 и M_2 леже симетрично према *O*. Зато је дуж $M_1 M_2$ елипсин пречник. Елипса има безброј тачака симетричних према центру. Отуда има и безброј пречника. (Који је највећи? Који је најмањи?)



Сл. 67.

***Елипсина тетива.** — Дуж која спаја две ма које тачке на елипси, јесте њена тетива. Средине свих међусобно паралелних тетива леже увек на једноме пречнику. (Средине тетива 1, 2, 3, 4, 5 леже на пречнику *CD*, сл. 67).

***Једначина пречника.** — Хоћемо да одредимо једначину пречника *MN* (сл. 68). Он полови тетиву *AB*. Нека је њена једначина
$$y = mx + n.$$



Сл. 68.

Тачка *C* је средина тетиве *AB*. Нека су њене координате *p* и *q*. Пренесимо координатни почетак у *C*. Тада једначина наше елипсе постаје:

$$b^2 (x - p)^2 + a^2 (y - q)^2 = a^2 b^2$$

Једначина праве *AB* постаје

$$y = mx \quad \text{(Зашто?)}$$

Та права сече елипсу у *A* и *B*. Апсцисе *CE* и *CD* морају бити супротни бројеви. (Зашто?)

$$\overline{CE} + \overline{CD} = 0.$$

Ако хоћемо координате пресека праве *AB* и елипсе, решићемо овај систем:

(1) $$b^2 (x - p)^2 + a^2 (y - q)^2 = a^2 b^2$$

(2) $$y = mx.$$

Сменом (2) у (1) добијамо:

(3) $$(b^2 + a^2 m^2)\, \mathbf{x}^2 - (2b^2 p + 2a^2 mq)\, \mathbf{x} - bp^2 - a^2 q^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Решења ове квадратне једначине морају бити супротни бројеви. Значи да је

$$x_1 + x_2 = 0.$$

У квадратној једначини

$$ax_2 + bx + c = 0$$ јесте

$$x_1 + x_1 = -\frac{b}{a}$$

Значи да у нашој једначини (3) мора бити:

$$\frac{2b^2\, p + 2a^2\, mq}{b^2 + a^2\, m^2} = 0.$$ Одатле је:

$$b^2\, p + a^2\, mq = 0.$$

Шта претстављају p и q? Координте средине ма које тетиве паралелне са правом $y = mx$.

Обележимо их са *x* и *y*. Добијамо:

(4) $$b^2\, x + a^2\, my = 0.$$ Једначина праве MN, сл. 68.

То је једначина елипсиног пречника који полови тетиве чији је угловни сачинилац *m*.

Ово је једначина праве линије. Значи, линија која спаја средину тетива паралелних с неком правом (правом *L*, сл. 68) јесте права линија.

Једначина (4) нема независног члана. Значи да права (4) пролази кроз елипсин центар. Пречник *MN* иде кроз елипсин центар.

***Спрегнути пречници.** — Пречник *MN* (сл. 68) полови тетиве паралелне с пречником *KP* (тетиве 1, 2, 3). Пречник *KP* полови тетиве паралелне с пречником *MN* (тетиве 4, 5, 6....). Два елипсина пречника који тако леже да један полови тетиве паралелне с оним другим, а други полови тетиве паралелне с првим, зову се спрегнути пречници (или коњуговани дијаметри),

Нека је једначина пречника *KP*:

$$y = m\ x.$$

Тада је једначина пречника *MN*:

$$b^2 x + a^2 m\ y = 0 \qquad \text{(Види горе једначину 4).}$$

Позитивно и негативно поље код елипсе. — У полином елипсине једначине:

$$16\ x^2 + 25\ y^2 - 400 = 0 \qquad \text{(сл. 69)}$$

унесимо координате координатног почетка 0 (0 , 0). Добићемо:

$$16.0 + 25.0 - 400 = - 400 < 0.$$

Значи да је унутарње елипсино поље негативно. Онда је спољне поље позитивно. [Узми још неколико тачака, унутрашњих и види какве вредности добија елипсин полином].

Елипса и права. — У коме су односу елипса и права сазнајемо решавањем система једначине елипсе и праве.

Пример I. — У коме су односу елипса

$$\text{I} \quad 16x^2 + 25y^2 - 400 = 0 \qquad \text{и права}$$

$$\text{II} \quad x - y = 7 \ ?$$

Решимо доњу једначину по *x* и сменимо у горњој. — Добијамо:

$$16\ (7 + y)^2 + 25y^2 - 400 = 0$$

То је даље:

$$41y^2 + 14.16y + 49.16 - 400 = 0$$

Дискриминанта ове једначине:

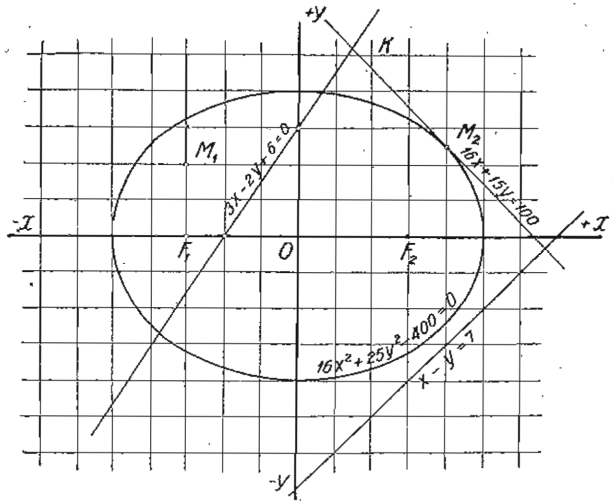
$$D = (14.16)^2 - 4.41.\ (49.16 - 25.16)$$

$$D = 14^2..6 \ . \ 4 \ . \ 4 - 4 \ . \ 41 \ . \ 16\ (49 - 25)$$

$$D = 64\ (784 - 41 \ . \ 24)$$

$$D < 0.$$

Дискриминанта је мања од нуле. Решења су уображена. Дата права и дата елипса немају заједничких тачака. (сл. 69).



Сл. 69.

Пример II. — Испитати међусобни однос праве и елипсе:

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$$

Из прве једначине имамо:

$$x = \frac{2}{3}\ y - 2. \quad \text{Сменом у другој добијамо:}$$

$$16\ (\frac{2}{3}\ y - 2)^2 + 25y^2 - 400 = 0$$

$$16\ (\frac{4}{9}\ y^2 - \frac{8}{3}\ y + 4) + 25y^2 - 400 = 0.$$

$$16\ (4y^2 - 24y + 36) + 25 \ . \ 9y^2 - 3600 = 0$$

$$(64 + 25 \ . \ 9)\ y^2 - 16 \ . \ 24y + (16 \ . \ 36 - 3600) = 0.$$

Пошто су у овој једначини сачинилац уз y^2 и независан члан неједнако означени, корени морају бити стварни и неједнаки. Дата права сече елипсу (сл. 69, права *K*).

Пример III. — Испитати међусобни однос ових двеју линија:

$$16x + 15y = 100$$

$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

Из прве имамо:

$$y = \frac{20}{3} - \frac{16}{15}\ x. \quad \text{Сменом у другој добијамо:}$$

$$16x^2 + 25\left(\frac{20}{3} - \frac{16}{15}x\right)^2 = 400.$$

$$16x^2 + 25\left(\frac{400}{9} - \frac{128}{9}x + \frac{256}{225}x^2\right) - 400 = 0$$

$$16 \,.\, 225x^2 + 25\,(400 \,.\, 25 - 128 \,.\, 25\,x + 256\,x^2) - 400 \,.\, 225 = 0$$

Делимо са 25:

$$16 \,.\, 9\,x^2 + 400 \,.\, 25 - 128 \,.\, 25\,x + 256\,x^2 - 400 \,.\, 9 = 0$$

Делимо са 16:

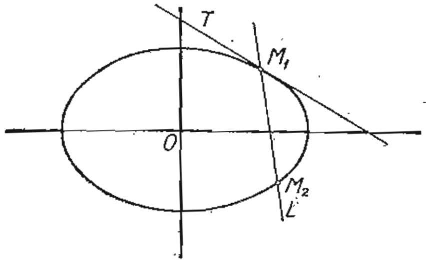
$$9x^2 + 625 - 200x + 16x^2 - 225 = 0$$
$$25x^2 - 200x + 400 = 0$$
$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

Дискриминанта:

$$D = 8^2 - 4 \,.\, 16 = 0.$$

Систем даје два стварна једнака решења. Дата је права дирка на елипси (сл. 69).

Једначина дирке на елипси. — Ако се сечица $M_1\,M_2$ (сл. 70) обрће око M_1 и M_2 тежи да падне на M_1, сечица L тежи да постане дирка T.



Сл. 70.

Обе пресечне тачке леже на елипси. Зато мора бити:

$$(1) \quad b^2x_1 + a^2y_1^2 = a^2b^2$$
$$b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2$$

Једначина сечице L биће:

$$(2) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Хоћемо једначину дирке.

У изразу $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ мењају се x_2 и y_2 док се L обрће око M_1 Они теже ка x_1 и y_1. Граница горњег израза биће:

$$\lim_{\substack{y_2 \to y_1 \\ x_2 \to x_1}} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0}$$

Добијамо неодређени израз $\frac{0}{0}$. Ми ћемо онда горњем изразу дати други облик, да бисмо му лако одредили границу.

Из система (1) добијамо:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = - \frac{b^2\,(x_2 + x_1)}{a_2\,(y_2 + y_1)}$$

Сад ће даље бити:

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_2 \to y_1}} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_2 \to y_1}} \left[- \frac{b^2\,(x_2 + x_1)}{a^2\,(y_2 + y_1)} \right] = - \frac{b^2 \,.\, 2x_1}{a^2 \,.\, 2y_1} = - \frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,.$$

Зато ће једначина дирке бити:

$$y - y_1 = - \frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,(x - x_1)$$

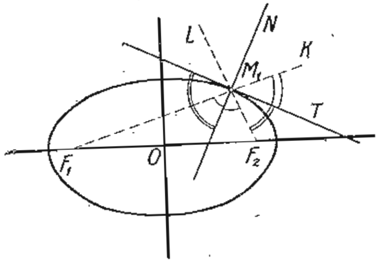
Кад се то упрости добија се овај облик једначине елипсине дирке:

$$\mathbf{b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2.}$$

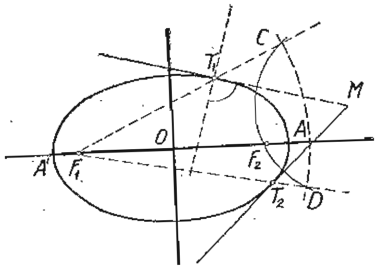
*Ако је елипсин центар ван координатног почетка, рецимо у тачци $M\,(p\,,q)$, а њене осовине паралелне с координатним осовинама, једначина дирке биће:

$$b^2\,(x - p)\,(x_1 - p) + a^2\,(y - q)\,(y_1 - q) = a^2\,b^2.$$

***Конструкција елипсине дирке у датој тачци.** — Хоћемо дирку у M_1 (сл. 71). Из обеју жижа повлачимо полуправе кроз M_1. (K и L). Дирка је симетрала угла F_2M_1K.



Сл. 71.



Сл. 72.

Симетрала угла $F_1\,M\,F_2$ јесте нормала у M.
[Зашто је то тако?]

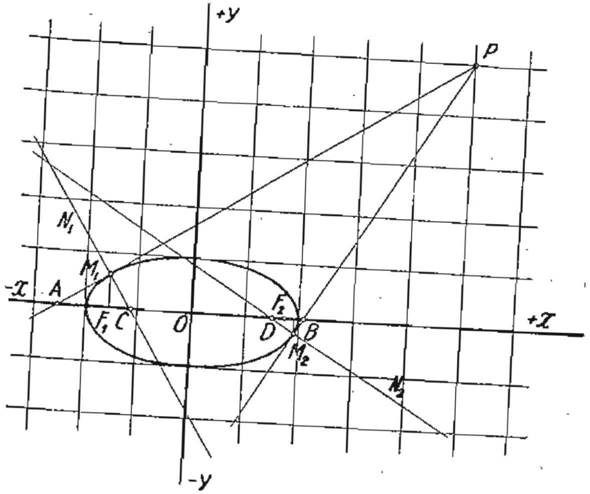
***Конструкција дирке из спољне тачке.** — Хоћемо дирку из M (сл. 72). Лук из M отвором MF_2. Лук из F_1 отвором $2a$ (велика осовина). Секу се у C и D. Спајамо C и D са F_1. Спојнице секу елипсу у додирним тачкама T_1 и T_2.

Једначина елипсине нормале. — Нормала пролази кроз додирну тачку и управна је на дирци. Зато је њена једначина

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{a^2\,y_1}{b^2\,x_1}\,(x - x_1).}$$

Пример

Из тачке P (5,5) повучена је дирка на елипсу $x^2 + 4y^2 = 4$ (сл. 73). Одредити једначине дирке и нормале, дужине дирке, нормале, потангенте и поднормале.



Сл. 73.

Једначине дирки

$$b^2 xx_1 + a^2 yy_1 = a^2 b^2$$

У нашем случају биће:

$$xx_1 + 4yy_1 = 4.$$

Ова дирка иде кроз P:

(1) $$5x_1 + 4 \cdot 5y_1 = 4$$

Додирна тачка M_1 лежи на елипси:

(2) $$\begin{cases} x_1^2 + 4y_1^2 = 4 \\ 5x_1 + 20y_1 = 4 \end{cases} \quad \text{и на правој}$$

Решићемо овај систем и добити координате додирних тачака.

$$x_1 = \frac{4}{5} - 4y_1$$

$$\left(\frac{4}{5} - 4y_1\right)^2 + 4y_1^2 = 4$$

Одатле добијамо:

$$y'_1 = \frac{3}{5}$$

$$y''_1 = -\frac{7}{25}$$

Отуда ове вредности за x_1:

$$x'_1 = -\frac{8}{5}$$

$$x''_1 = \frac{48}{25}$$

Добијамо координате двеју додирних тачака:

M_1 (—1,6 и 0,6) и M_2 (1,92 и — 0,28).

Зато имамо и две дирке:

I $\quad 3y - 2x = 5$

II $\quad 12x - 7y = 25.$

[Изврши пробу!]

Једначине нормала

Једначина нормале N_1:

$$y - 0{,}6 = -\frac{3}{2}\,(x + 1{,}6).$$

То је најзад:

$$10y + 15x = -18.$$

Једначина нормале N_2:

$$y + 0{,}28 = -\frac{7}{12}\,(x - 1{,}92)$$

То је најзад:

$$12y + 7x = 10{,}08.$$

Дужине дирки

Најпре координате пресека дирки с апсцисном осовином. Стављамо $y = 0$ у једначинама обеју дирки:

I $\quad 3y - 2x \quad 5 \qquad$ за $y = 0$ имамо $\qquad x = -2{,}5$

II $\quad 12x - 7y = 25 \qquad$ за $y = 0$ имамо $\qquad x = \frac{25}{12}.$

Прва дирка сече апсцисну осовину у тачци A (сл. 73), чије су координате (—2,5 и 0). Друга сече апсцисну осовину у тачци $B(\frac{25}{12}$ и 0). Тада ће бити

дужина прве дирке: $AM_1 = \sqrt{(x_1 - 2{,}5)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{1{,}17}.$

дужина друге дирке: $BM_2 = \sqrt{(x_2 - \frac{25}{12})^2 + (y_2 - 0)^2} =$

$= \frac{1}{300}\sqrt{9457}$

Дужине нормала

Најпре координате пресека нормала с апсцисном осовином. Стављамо $y = 0$ у једначиинама обеју нормала:

$$\text{I} \quad 10y + 15x = -18 \quad \text{за } y = 0 \text{ имамо } \quad x = -\frac{6}{5} = -1{,}2$$

$$\text{II} \quad 12y + 7x = 10{,}08 \quad \text{за } y = 0 \text{ имамо } \quad x = 1{,}44.$$

Прва нормала сече апсцисну осовину у тачци $C\,(-1{,}2 \mid 0)$. Друга сече апсцисну осовину у тачци $D\,(1{,}44 \mid 0)$. Зато ће бити:

дужина прве нормале: $M_1C = \sqrt{(x_1 + 1{,}2)^2 + {y_1}^2} = 0{,}2\sqrt{13}.$

дужина друге нормале: $DM_2 = \sqrt{(x_2 - 1{,}44)^2 + y^2_2} = 0{,}12\sqrt{21}.$

**Дужине поднормала*

I Разлика апсциса прве додирне тачке и пресека прве нормале с апсцисном осовином:

$$x_1 - (-1{,}2) = -1{,}6 + 1{,}2 = -0{,}4$$

$$\text{II} \; x_2 - 1{,}44 = 1{,}92 - 1{,}44 = 0{,}48.$$

**Дужине потангената*

$$\text{I} \quad x_1 - (-2{,}5) = -1{,}6 + 2{,}5 = 0{,}9$$

$$\text{II} \quad x_2 - \frac{25}{12} = 1{,}92 - \frac{25}{12} = -\frac{49}{300}$$

Напомена. — Код потангената и код поднормала водимо рачуна само о апсолутној вредности.

**Пример II. — Израчунати површину елипсе $3x^2 + 5y^2 = 7$.*

Најпре да одредимо a и b.

$$\frac{3x^2}{7} + \frac{5y^2}{7} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{7}{3}} + \frac{y^2}{\frac{7}{5}} = 1$$

$$a = \sqrt{\frac{7}{3}} \qquad b = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

Површина ће бити:

$$P = \pi ab \approx 3{,}14 . \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{\frac{7}{5}} \approx 3{,}14 . \sqrt{\frac{49}{15}} \approx \frac{21{,}98}{15}\sqrt{15}.$$

ВЕЖБАЊА за 10-X 39

1. — Нацртај елипсу код које је $2a = 10$, $2c = 6$.
2. — „ „ „ „ „ $2a = 10$, $2c = 4$.

3. — Нацртај елипсу код које је $2a = 10$, $2c = 2$.
4. — Шта бива с елипсом код које је $2a$ стално, а $2c$ опада?
5. — Нацртај елипсу код које је $2a = 8$, $2c = 2$.
6. — „ „ „ „ „ $2a = 8$, $2c = 6$.
7. — „ „ „ „ „ $2a = 8$, $2c = 7$.
8. — Шта бива с елипсом код које је 2a стално, а 2c расте?
9. — Чему тежи елипса, кад 2c тежи нули?
10. — Чему тежи елипса, кад 2c тежи ка 2a?
11. — Докажи да је осовина кроз жиже већа од оне друге осовине.
12. — Спој жиже с једним теменом (B) на малој осовини. Чему је равно F_1B? Кад су дате дужине 2a и 2c конструиши b.
13. — Кад је $2a = 26$, $2c = 10$ израчунај b.
14. — Конструиши елипсу кад је $2a = 10$cm., $2b = 8$cm.
15. — „ „ „ „ $2a = 10$cm., $2b = 9$cm.
16. — „ „ „ „ $2a = 10$cm., $2b = 9{,}5$cm.
17. — Шта бива с елипсом кад је $2a$ стално, а $2b$ расте?
18. — Кад је $2a$ стално, а $2b$ расте, шта бива са жижама?
19. — Кад се жиже ближе једна другој на сталној великој осовини, шта бива с малом осовином?
20. — Кад се на сталној великој осовини жиже размичу, шта бива с малом осовином?
21. — Конструиши елипсу кад су дата сва четири темена.
22. Шта бива с елипсом кад 2b тежи ка 2a? Шта бива у том случају са жижама?
23. — Шта бива с елипсом кад 2b тежи нули? Шта бива у том случају са жижама?
24. — Ако једна тачка M има координате m и n, какве координате мора имати тачка централно симетрична с њом према координатном почетку?
25. — Да ли се из једначине елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ види да та крива има центар симетрије? По чему?
26. Да ли се из елипсине једначине види да елипса има симетриских осовина? По чему?
27. — Дате су: дужина 2p двојног елипсиног параметра и дужина велике осовине. Конструисати елипсу.
28. — Шта бива са елипсом кад расте параметар?
29. — Шта бива са елипсом кад опада параметар?
30. — Кад ће параметар расти?
31. — Кад ће параметар опадати?

Проучити елипсу, одредити обе осовине, жиже, параметар и конструисати криву:

32. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **33.** $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

34. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **35.** $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{5} = 1.$

36. $2x^2 + 3y^2 = 6$ **37.** $x^2 + 2y^2 - 2 = 0.$

38. $3x^2 + 4y^2 - 5 = 0$ **39.** $5x^2 + 6y^2 - 1 = 0$

Одредити бројни ексцентрицитет ових елипси:

40. $3x^2 + 4y^2 = 12$ **41.** $2x^2 + 7y^2 = 14$

42. $x^2 + 2y^2 - 3 = 0$ **43.** $x^2 + 4y^2 = 4$

44. $5x^2 + 6y^2 - 8 = 0$ **45.** $10x^2 + 16y^2 - 1 = 0$

Написати једначину елипсе кад је:

46. $2a = 8$, $2b = 6$ **47.** $2a = 10$, $2b = 4$ **48.** $2a = 7$, $2b = 5$

49. $2a = 9$, $2b = 5$

50. — Написати средишну једначину елипсе кад она пролази кроз тачку M_1 (2, 3), а има велику осовину $2a = 8$.

51. — Исто за $M_2 (2, \frac{2}{3} \sqrt{3})$ и $2b = 6$.

52. — Написати средишну једначину елипсе која иде кроз ове две тачке: $M_1 (1 \frac{1}{2}, \sqrt{3})$ и $M_2 (\sqrt{5}, 1 \frac{1}{3})$.

53. — Исто за ове две тачке: M_1 (3 и 1,6) и M_2 (4 и 1,2).

Одредити координате центра, осовине, жижно растојање и параметар ових елипси, па их нацртати:

***54.** $4 (x - 3)^2 + 9 (y - 4)^2 = 36$

***55.** $3 (x + 2)^2 + 4 (y + 1)^2 = 12$

***56.** $4 (x - 3)^2 + 9 (y + 1)^2 = 36$

***57.** $4x^2 - 32x + 9y^2 - 18y = 2$

***58.** $9x^2 - 36x + 25y^2 - 100y = 89$

***59.** $4y^2 - 16y + x^2 - 2x + 13 = 0$

***60.** $4y^2 - 24y + x^2 - 8x = 0$

***61.** $2x^2 - 6x + 4y^2 - 12y + 10 = 0$

***62.** — Напиши општу једначину елипсе која додирује апсцисну осовину.

***63.** — Напиши општу једначину елипсе која додирује ординатну осовину.

64. — Напиши општу једначину елипсе која има центар и велику осовину на апсцисној осовини, а додирује ординатну осовину.

[Једначина коју добијеш у овоме вежбању зове се *темена једначина*]

***65.** — Напиши општу једначину елипсе која додирује обе осовине.

66. — Испитај једначину $4x^2 - 24x + 9y^2 = 0$

67. — „ „ $9x^2 - 90x + 25y^2 = 0$

68. — „ „ $x^2 + 4y^2 - 8y = 0$

69. — „ „ $x^2 + 9y^2 - 18y = 0$

70. — „ „ $(x - 2)^2 + 4y^2 = 4$

71. — Шта бива са елипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ако у њеној једначини сменимо x са y, а y са x?

72. — Шта бива са кругом $x^2 + y^2 = r^2$, ако у његовој једначини сменимо x са y, а y са x? Мења ли се штогод?

Изведи нови облик елипсине једначине кад координатни почетак транслацијом осовина дође у дату тачку.

***73.** M (3,4) за елипсу из вежбања 54.

***74.** M (—2, —1) „ „ „ „ 55-

***75.** M (2,2) „ „ „ „ 58.

***76.** M (4,3) „ „ „ „ 60.

***77.** — Куда треба пренети координатни почетак, ако желимо да једначина елипсе $b^2 (x - p)^2 + a^2 (y - q)^2 = a^2 b^2$ добије облик $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$?

78. — Куда треба пренети координатни почетак, ако желимо да општа једначина елипсе добије темени облик?

Конструисати елипсу помоћу малог и великог круга кад је:

***79.** $2a = 8$, $2b = 6$ ***80.** $2a = 7$, $2b = 3$

***81.** $2a = 10$, $2b = 8$ ***82.** $2a = 12$, $2b = 4$

***83.** — Нацртај сродну криву правој $Y = 2X$, кад је однос сродности $\frac{Y}{y} = 2$.

[Какву линију добијаш? У коме су положају те две линије?]:

***84.** — Исто за праву $2X + 3Y = 6$ $\frac{Y}{y} = 3$

***85.** — Исто за праву $Y = 4$ $\frac{Y}{y} = 5$

***86.** — Нацртај сродну криву круга $X^2 + Y^2 = 4$ $\frac{Y}{y} = 4$

***87.** — Нацртај сродну криву круга $X^2 + Y^2 = 9$ $\frac{Y}{y} = 2$

***88.** — Прав ваљак с кружном основом $R = 5$ *cm.* пресечен је једном равни која сече висину под углом $\alpha = 30^0$. Колика је површина тога пресека?

***89.** — Исто за $\alpha = 75^0$, $R = 8$ *cm.*

***90.** — Исто за $\alpha = 47^0 22'$, $R = 8{,}2$ *cm.*

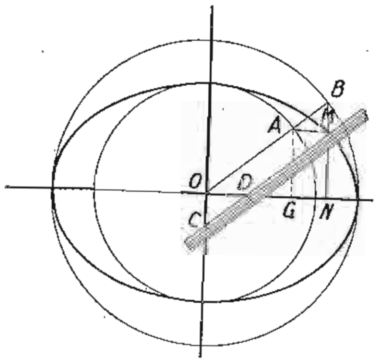
***91.** — Израчунај површину елипсе кад је $2a = 14$ *cm.*, $2b = 8$ *cm.*

***92.** — Израчунај површину елипсе кад је $2a = 10$ *cm.*, $2c = 6$ *cm.*

***93.** — Израчунај површину елипсе која пролази кроз ове три тачке:

$$M_1 (1 \text{ и } 1{,}2 \sqrt{6}) \quad M_2 (\sqrt{5},\ 1\frac{1}{5} \sqrt{5}) \quad M_3 \ (2 \text{ и } 0{,}6 \sqrt{21}).$$

***94.** — Повучен је полупречник *OB* (сл. 74). С њим је повучена паралелно из елипсине тачке *M* дуж *CM*. Овде је $\triangle OGA \cong \triangle DNM$. Отуда је $OA = DM = b$. Пошто је *OCMB* паралелограм, значи да је $CM = OB = a$. Отуда је: $CM = a$, $DM = b$. Померај лењирић тако, да је *C* увек на ординатној осовини, а *D* на апсцисној. *M* ће описивати елипсу. Изведи одатле један лак начин конструкције елипсе.



Сл. 74.

Докажи ово: Кад се из једне елипсине тачке *M* повуче паралелна са полупречником великога круга помоћу кога је добивено *M*, та паралелна сече апсцисну осовину у тачци која је од *M* далеко за *b*.

[Други доказ. — Нека су координате тачке *M* (*x,y*). Тада је $\frac{OD}{DN} = \frac{CD}{DM}$. Сад даље: $OD = x - DN$, $DN = \sqrt{b^2 - y^2}$, $CD = a - b$, $DM = b$ итд.]

***95.** — Израчунати запремину правог ваљка елиптичне основе кад је $H = 15$ *cm.*, највећа ширина 8 *cm.*, а најмања 6 *cm.*

***96.** — Исто за $H = 40$ *cm.*, највећу ширину 10 *cm.* а најмању 4 *cm.*

***97.** — За елипсу из вежбања 32. — одредити једначине спрегнутих пречника и конструисати их кад је један од њих паралелан с правом $x + y = 1$.

***98.** — Исто за праву $3x - 7y + 5 = 0$

***99.** — За елипсу из вежбања 33 и праву $2x + 3y - 6 = 0$.

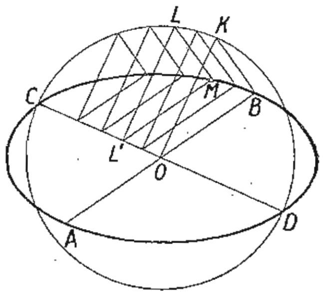
***100.** — Исто за елипсу из вежбања 34 и праву $x - y = 2$.

***101.** — Исто за елипсу из вежбања 35 и праву $3x—2y—1=0$.

102. — За елипсу из вежбања 32 конструиши спрегнути пречник пречнику $y = 2x$. Како ћеш то најбрже учинити без икаквих рачуна?

***103.** — Конструиши елипсу кад су дата њена два спрегнута пречника (сл. 75).

[Над *CD* круг. На *CD* управна *OK* из *O*. Са кружне периферије управне на *CD*. Из подножја управних паралелне с другим пречником *AB*. Из *L* паралелна са *BK*. Пресек је тачка *M* на елипси. Зашто је тачка *M* на елипси?]



Сл. 75.

***104.** — За елипсу из вежбања 56 испитај је ли тачка $M\ (4,\frac{1}{2})$ унутрашња или спољашња.

***105.** — За елипсу из вежбања 59 испитај је ли тачка *M* (— 3 , 4) спољашња.

106. — Испитати међусобни однос ове праве и елипсе: $x + y = 1$ и $4x^2 + 9x^2 = 36$.

107. — Исто за $2x - y = 20$ и $x^2 + 3y^2 = 3$.

108. — Израчунај једначине дирке и нормале на елипсу из вежбања 32 за елипсину тачку чија је апсциса $\sqrt{5}$.

109. — Исто за елипсу из вежбања 33 и тачку на њој $y = \sqrt{15}$.

110. — Исто за елипсу из вежбања 34 и тачку на њој $x = \sqrt{3}$.

111. — Исто за елипсу из вежбања 35 и тачку на њој $y = 0{,}1$.

112. — Исто за елипсу из вежбања 41 и тачку на њој $y = \sqrt{\frac{3}{5}}$

***113.** — Исто за елипсу из вежбања 54 и тачку на њој $x = 1$.

114. — Израчунај једначине дирке и нормале повучене на елипсу из вежбања 32, а из тачке M (9 , 10).

115. — Исто за елипсу из вежбања 34 и тачку M (– 7, – 8).

116. — Исто за елипсу из вежбања 67 и тачку M (14 , 10).

117. — Исто за елипсу из вежбања 69 и тачку M (8 , 12).

Израчунај све четири додирне количине за тачку M на датој елипси:

118. $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$ и M (1, y).

119. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ и M ($\sqrt{2}$, y)

120. $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ и M (0,3 и y).

***121.** $x^2 - 8x + 4y^2 - 24y = 0$ и M (3, y).

***122.** — Један пречник елипсе $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ иде по правој $2y = x$. Кроз његову крајњу тачку чија је апциса позитивна повучена је дирка. У коме су међусобном положају та дирка и спрегнути пречник?

***123.** — Доказати да је дирка повучена кроз крајњу тачку једног прочника паралелна са спрегнутим пречником.

124. — Одредити једначину дирке на елипси из вежбања 32, кад је дирка паределна с правом $2x + 3y - 4 = 0$. (Два решења).

125. — Одредити једначину дирке на елипси из вежбања 33 кад ја дирка управна на правој $x + y - 7 = 0$. (Два решења).

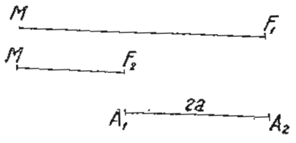
VI. — ХИПЕРБОЛА

Дефиниција. — Хипербола је геометриско место тачака у равни чија је разлика раздаљина од двеју сталних тачака стална.

То смо видели раније код купиних пресека. Видели смо и како се конструише хипербола. Знамо да се две сталне тачке зову жиже.

Хиперболина симетриска осовина. — Жиже обележавамо са F_1 и F_2. Њино растојање обележавамо са $2c$: $F_1 F_2 = 2c$.

Да се потсетимо конструкције хиперболе. Узмимо две дужине тако да је њихова разлика $MF_1 - MF_2 = 2a$. (сл. 76). Из F_1 круг полупречником MF_1 (сл. 77) .Из F_2 круг полупречником MF_2. Секу се у M и M_3. То су хиперболине тачке. То су у исто време и пресеци два круга. Ти пресеци су симетрични према централи F_1F_2. Значи да је права F_1F_2 симетриска осовина хиперболиних тачака.

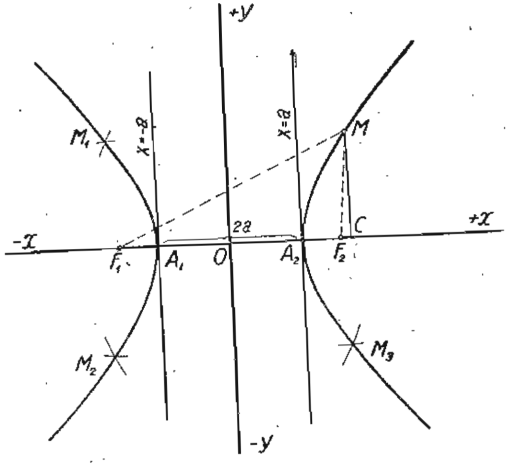


Сл. 76.

Средишна хиперболина једначина. — Нацртајмо хиперболу (сл. 77) тако да се осовина F_1F_2 поклапа са апсцисном осовином, а координатни почетак O падне у средину жижног растојања.

Пренесимо десно и лево од координатног почетка дуж a. Добићемо тачке A_1 и A_2. Оне леже на хиперболи. Те две тачке морају пасти између F_1 и F_2. [Из троугла $MF_1 - MF_2 < F_1 F_2$. $2a < 2c$].

Узмимо произвољну тачка M на хиперболи. Из троугла F_1MC имаћемо:



Сл. 77.

$$\overline{MF_1^2} = \overline{MC^2} + \overline{F_1C^2} \text{ т. ј.}$$

$$\overline{MF_1^2} = y^2 + (c + x)^2 \tag{1}$$

Из троугла MF_2C имаћемо:

$$\overline{MF_2^2} = \overline{MC^2} + \overline{F_2C^2}$$

$$\overline{MF_2^2} = y^2 + (x - c)^2 \tag{2}$$

Кад одузмемо (2) од (1) биће:

$$\overline{MF_1^2} - \overline{MF_2^2} = (c + x)^2 - (x - c)^2 \text{ т. ј.}$$

$$(MF_1 - MF_2)\,(MF_1 + MF_2) = 4cx. \tag{3}$$

Знамо да је $MF_1 - MF_2 = 2a$. Сменимо то у (3). Добијамо:

$$MF_1 + MF_2 = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}. \tag{4}$$

Имамо сад овај систем:

$$MF_1 - MF_2 = 2a.$$

$$MF_1 + MF_2 = \frac{2cx}{a}$$

Одатле добијамо одузимањем:

$$2MF_2 = \frac{2cx}{a} - 2a$$

$$MF_2 = \frac{cx}{a} - a \tag{5}$$

Кад резултат (5) сменимо у (2) добијамо:

$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = y^2 + (x - c)^2$$ Сад даље:

$$\frac{(cx - a^2)^2}{a^2} = y^2 + x^2 - 2cx + c^2.$$ Најзад добијамо:

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2) x^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

Знамо да је $c > a$. Зато је и $c^2 > a^2$. Значи да је разлика $(a^2 - c^2)$ негативна. Ставимо овако:

$$a^2 - c^2 = - b^2.$$

Наша ће једначина тада добити ове облике:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$ Средишна једначина хиперболе.

Посматрање хиперболине једначине. — Решимо ову једначину по y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Одавде видимо ово:

1) За свако x веће од a по апсолутној вредности имамо две супротне ординате. Наша је крива симетрична према апсцисној осовини.

2) Кад x расте по апсолутној вредности почевши од a, y једнако расте. Кад x тежи бесконачноме и y тежи бесконачном. Значи да је наша крива отворена крива линија.

3) Кад x опада по апсолутној вредности, опада и y.

4) Кад је $x = \pm a$, ипсилон је нула. Наша крива сече апсцисну осовину у двема тачкама (A_1 и A_2) симетричним према ординатној осовини. Те су тачке удаљене од координатног почетка за половину сталне разлике $2a$.

5) За x мање од a по апсолутној вредности, биће y уображено. Крива нема тачака између правих $x = a$ и $x = - a$ (сл. 77). Значи, она има две потпуно раздвојене гране које иду у бесконачност.

6) Кад је $x = 0$ имамо $y = \pm bi$. Хипербола не сече ординатну осовину.

Решимо сад једначину по x:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

Одатле видимо ово:

1) За свако стварно и одређено y имамо две супротне стварне вредности за x. Значи да је и ординатна осовина симетриска осовина.

2) Кад y тежи бесконачноме и x тежи бесконачном. Опет се уверавамо да је ова крива отворена крива.

3) Збир под кореном $(b^2 + y^2)$ позитиван је за све стварне вредности ипсилона. Која му је најмања вредност? Најмања вредност позитивне количине јесте нула. Пошто b није нула, значи да ће најмања вредност за x бити кад је $y = 0$. Тада је $x = \pm a$. Опет се уверавамо да је најмања апсолутна вредност за x ова: $x = a$. Значи да крива нема тачака између $x = a$ и $x = - a$. Опет се уверавамо да крива има две потпуно раздвојене гране.

Осовине и темена. — Наша крива сече апсцисну осовину у двема тачкама: A_1 и A_2. Те су тачке хиперболина темена. Хипербола има два темена. Растојање је њених темена $2a$.

Наша крива не сече ординатну осовину. За $x = 0$ имамо

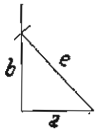
$$y = \pm bi.$$

Кад су дати a и c дужину b можемо увек конструисати (сл. 78).

$$a^2 - c^2 = - b^2.$$ Одатле је

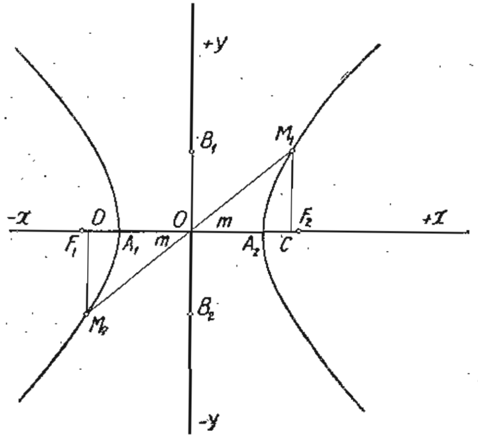
$$b^2 = c^2 - a^2$$

Ми можемо обележити тачке B_1 $(0, + bi)$ и B^2 $(0, - bi)$ — сл. 79.



Сл. 78.

Растојање $B_1 B_2$ зовемо **уображена осовина**. Растојање $A_1 A_2 = 2a$ зовемо **стварна осовина**. Уображена осовина има дужину $2b$.



Сл. 79.

Центар. — Средина стварне осовине је хиперболин центар. Узмимо тачку M_1. Нека су њене координате x_1 и y_1. Кад тачци M_1 нацртамо центрично симетричну тачку M_2 (према центру O), њене координате биће $x_2 = - x_1$ и $y_2 = - y_1$. Али ако је хиперболина једначина задовољена за вредности x_1 и y_1, она мора бити задовољена и за вредности $- x_1$ и $- y_1$. (Зашто?). Значи да и тачка M_2 лежи на хиперболи. Тачка O је хиперболин центар симетрије.

Ексцентрицитет. — Линиски ексцентрицитет је c. Бројни ексцентрицитет је $e = \frac{c}{a} > 1$.

Ако ексцентрицитет расте, тада или расте c, или опада a, или се дешава и једно и друго. Али ако расте c, а опада a, расте b. [Зато што је $c^3 - a^2 = b^2$]. Тада је, за исту апсцису, y све веће $[y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}]$. Хипербола се шири.

Шта бива ако ексцентрицитет опада?

Ако e тежи јединици, a тежи ка c. Тада b тежи нули. Наша хипербола тежи правој $y = 0$. Хиперболе нема за $e = 1$. Бројни ексцентрицитет мора бити већи од 1.

Параметар. — Ордината у жижи зове се параметар. Жижина апсциса је $x = c$. Зато је параметар:

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Асимптоте. — Код хиперболе имамо да испитамо неке нарочите линије које нисмо имали код круга и елипсе.

У једначини хиперболе ставимо да је десна страна нула:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{1}$$

Је ли и то једначина хиперболе?

У једначини (1) можемо леву страну овако да напишемо:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = 0.$$

(2) $(bx - ay)(bx + ay) = 0$ Тада можемо ставити:

$$bx - ay = 0 \quad \text{и} \quad bx + ay = 0.$$

То су једначине двеју правих. Једначина (1) не претставља хиперболу, већ две праве линије. Нацртајмо их обе (сл. 80). Те праве иду по дијагоналама правоугаоника чије су стране $2a$ и $2b$.

Да ли права ON сече хиперболу?

Једначина праве ON jесте ово:

$$y = \frac{b}{a} x.$$

Хиперболина једначина је:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

У тачци A_2 дигнимо управну $A_2 C_2$. Обележимо ординату на хиперболи са y, ординату на правој ON са Y. Тада је за тачку A_2:

ордината на правој ON jесте $Y = b$

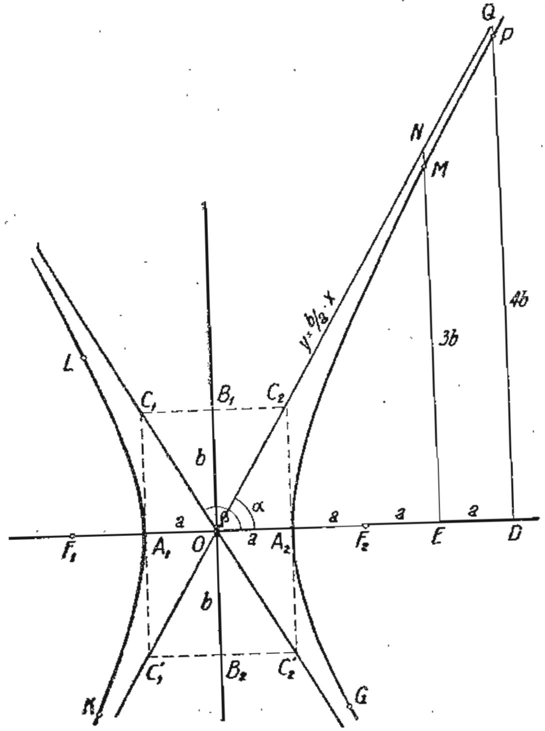
ордината на хиперболи jесте $y = 0$.

$$Y - y = b.$$

Дигнимо управну у тачци E (3a, 0) Добијамо:

ордината на правој ON jесте $Y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \cdot 3a = 3b$,

ордината на хиперболи jесте $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \sqrt{9 a^2 - a^2}$



Сл. 80.

$$= \frac{b}{a} \cdot 2a \sqrt{2} = 2b \sqrt{2} \approx 1,8\, b.$$

$$Y - y = 3b - 1,8\, b \approx 1,2\, b.$$

Дигнимо управну у тачци D $(4a, 0)$. Добијамо ово:

ордината на правој ON jесте $Y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \cdot 4a = 4b$,

ордината на хиперболи $y = \frac{b}{a} \sqrt{16a^2 - a^2} = b\sqrt{15} \approx 3,87b$

$$Y - y = 4b - 3,87b \approx 0,13b.$$

Разлика ордината опада. Чему тежи?

$$Y^2 - y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2$$

$$Y^2 - y^2 = b^2.$$

Одатле је:

$$Y - y = \frac{b^2}{Y+y}.$$

Чему тежи ова разлика кад x тежи бескрајном?

$$\lim_{x \to \infty}(Y - y) = \lim_{x \to \infty}\frac{b^2}{Y+y} = 0.$$

Разлика ордината тачака с праве ON и хиперболе тежи нули. Значи, тачке с хиперболе све су ближе правој ON и теже да падну на њу.

Права којој се бескрајно приближује хипербола тако, да разлика њихових ордината тежи нули, зове се **асимптота** хиперболе. Хипербола има две асимптоте:

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x.$$

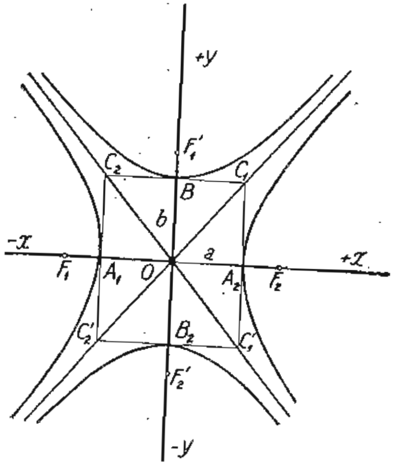
Из једначина асимптота видимо да је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{tg}\beta = -\frac{b}{a}$$

(сл. 80). Значи да је $\beta = (\pi - \alpha)$

Грана GA_2M захваћена је крацима угла C'_2OC_2.
Грана KA_1L захваћена је крацима угла C'_1OC_1.

Брза конструкција хиперболе. — Кад нам је потребно да брзо нацртамо хиперболу и приближно, нацртамо асимптоте и у њихове углове уцртамо хиперболине гране.



Сл. 81.

Спрегнуте хиперболе. — Две хиперболе које имају исти центар и исте осовине али тако, да је стварна осовина једне уображена осовина за ону другу, а уображена осовина прве стварна осовина оне друге, зову се спрегнуте (коњуговане) хиперболе. За хиперболу F_1F_2 (сл. 81) стварна осовина је A_1A_2, уображена осовина B_1B_2. За хиперболу $F'_1F'_2$ уображена је осовина A_1A_2, стварна B_1B_2. Хипербола $F'_1F'_2$ је спрегнута хипербола хиперболе F_1F_2 и обрнуто.

Једначина спрегнуте хиперболе. — Са слике се види да за свако y хиперболе $F'_1F'_2$ немамо увек два стварна икса. (За ординате од 0 до $+b$ и од 0 до $-b$ крива нема стварних апсциса).

Узмимо једначину хиперболе F_1F_2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из ње је:

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$$

Видимо да хипербола F_1F_2 има увек стварне апсцисе за свако стварно и коначно y. Да би апсцисе могле бити уображене, мора под кореном да буде разлика. Ставићемо место b^2 израз $(-b^2)$. Добићемо:

$$(1) \qquad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{-b^2 + y^2}.$$

Видимо да је x уображено докле год је $y < b$ (по апсолутној вредности). Ту особину има спрегнута хипербола $F_1'F_2'$.

Ако једначину (1) развијемо, добијамо једначину:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Једначина спрегнуте хиперболе.

Две спрегнуте хиперболе имају заједничке асимптоте, пошто им је заједнички правоугаоник конструисан над осовинама.

Равнострана хипербола. — Кад су осовине 2a и 2b једнаке, хипербола се зове равнострана. Њена је једначина:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

или $x^2 - y^2 = a^2$.

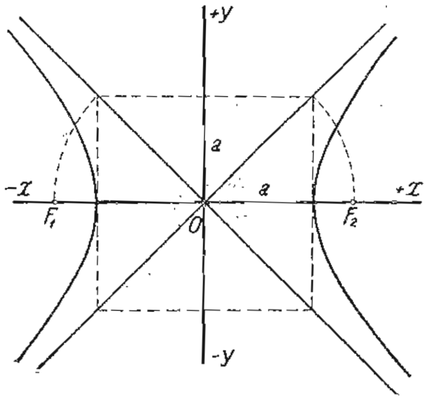
(Чиме се разликује од једначине круга чији је полупречник a?)

Асимптоте су јој:

$$y = \frac{a}{a}x$$

$$\text{и } y = -\frac{a}{a}x, \text{ т. ј.}$$

$$y = x \text{ и } y = -x.$$



Сл. 82.

(Секу се под правим углом. Зашто?) Слика 82.

*** Једначина хиперболе чије су осовине паралелне с координатним осовинама.** — Нека је центар такве хиперболе у *C* (*p*, *q*). Тада њена једначина гласи:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad \text{Општа једначина хиперболе.}$$

Кад се ослободимо разломака и заграда имамо:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = 2b^2 px + 2a^2 qy + (b^2 q^2 - a^2 b^2) = 0.$$

Кад ову једначину упоредимо с општом једначином кривих другог степена

$$Ax^2 + 2B\,xy + C\,y^2 + 2Dx + 2Ey + F = O,$$

видимо да је у једначини хиперболе:

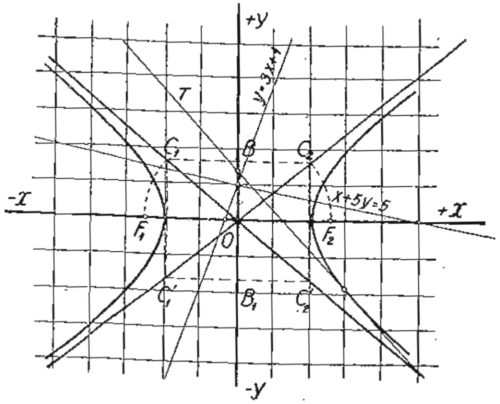
B = O и да су A и C неједнако означени.

Хипербола и права. — Права може сећи хиперболу у двема тачкама, додиривати је, или бити спољна за њу. Кад ће бити једно, друго, или треће зависи од природе решења овога система:

$$Ax + By + C = O \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решења стварна и неједнака — права је сечица; решења стварна и једнака — права је дирка; решења уображена — права је спољна.

Пример I. — Испитати међусобни положај праве $y = 3x + 1$ и хиперболе $3x^2 - 4y^2 = 12$.



Сл. 83.

$$y = 3x + 1$$

$$3x^2 - 4(3x+1)^2 = 12$$

Одатле је:

$$33x^2 + 24x + 16 = 0$$

$$D = 24^2 - 4.33.16 < 0.$$

Решења су уображена. Права је спољна за хиперболу. (Сл. 83).

Пример II. — Испитати међусобни положај праве $x + 5y = 5$ и хиперболе $3x^2 - 4y^2 = 12$.

$$x = 5 - 5y$$

$3(5-5y)^2 - 4y^2 = 12.$ Одатле је даље:

$$71y^2 - 150y + 63 = 0.$$

$$D = 150^2 - 4.63.71 > 0.$$

Решења су стварна и неједнака. Права сече хиперболу у двема тачкама. (Види слику 83).

Пример III. — Испитати међусобни однос праве $9x + 2y\sqrt{15} - 12 = 0$ и хиперболе $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$.

Из једначине праве: $9x = 12 - 2y\sqrt{15}$

$$3x = 4 - \frac{2}{3}y\sqrt{15}$$

$$9x^2 = \left(4 - \frac{2}{3}y\sqrt{15}\right)^2$$

Из једначине хиперболе: $9x^2 = 12y^2 + 36$

Кад уједначимо десне стране, имамо:

$$\left(4 - \frac{2}{3}y\sqrt{15}\right)^2 = 12y^2 + 36$$

Одатле је:

$$4y^2 + 4y\sqrt{15} + 15 = 0$$

$$D = (4\sqrt{15})^2 - 16.15 = 16.15 - 16.15 = 0.$$

Имамо два једнака решења:

$$y_1 = -\frac{\sqrt{15}}{2} \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Права је дирка. (Права T, сл. 83).

Једначина хиперболине дирке. — Једначина дирке изводи се на исти начин као код круга и елипсе.

Ако је

једначина хиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, биће

једначина њене дирке $\dfrac{xx_1}{a^2} - \dfrac{yy_1}{b^2} = 1.$

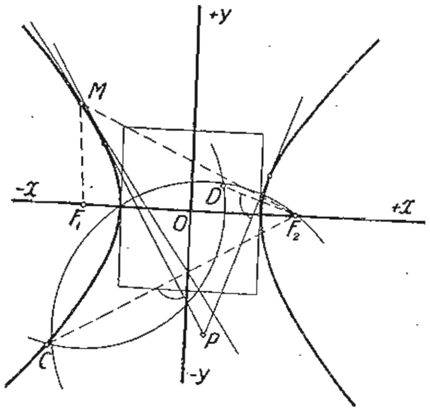
* Ако је

једначина хиперболе $\dfrac{(x-p)^2}{a^2} - \dfrac{(y-q)^2}{b^2} = 1$, биће:

једначина њене дирке $\dfrac{(x-p)(x_1-p)}{a^2} - \dfrac{(y-q)(y-q)}{b^2} = 1.$

Конструкција хиперболине дирке. — *Први пример.* — Конструисати дирку на хиперболи у њеној тачци *M* (сл. 84). Спојимо

M с обема жижама. Симетрала добивеног угла $F_1 M F_2$ јесте тражена дирка.



Сл. 84.

Други пример — Повући дирку на хиперболу из дате тачке P. (сл. 84). Из F_1 лук полупречником $2a$. Из P лук полупречником PF_2. Пресеке та два лука (тачке C и D) спојимо с теменом кроз које смо описали круг (теме F_2). Добијемо праве CF_2 и DF_2. Из P спустимо управне на CF_2 и DF_2. То су тражене дирке.

Једначина хиперболине нормале. — Пошто нормала пролази кроз додирну тачку (x_1, y_1), а стоји управно на дирци, њена ће једначина бити:

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

ВЕЖБАЊА

Нацртај хиперболу кад је

1. 2a = 4 cm., $F_1 F_2$ = 6 cm.

2. 2a = 4 cm., $F_1 F_2$ = 10 cm.

3. — Кад је $2a$ стално, а $2c$ расте, шта бива с хиперболом?

4. — Кад је $2a$ стално, а $2c$ тежи бесконачноме, чему тежи хипербола?

5. — Кад је $2a$ стално, а $2c$ опада и тежи ка $2a$, чему тежи хипербола?

6. — Шта бива с хиперболом кад c расте?

7. — Шта бива с хиперболом кад c опада?

8. — Кад су дати a и b, како се може конструисати c?

9. — Да ли се по хиперболнној једначини $\frac{x^2}{a^3} - \frac{y^2}{b^3} = 1$ одмах види да та крива има центар? По чему се види?

10. — Да ли се по хиперболиној једначини одмах види да је ординатна осовина симетриска осовина те криве? По чему?

11. — Исто питање за апсцисну осовину.

12. — Шта бива с хиперболом, кад у њеној једначини ставимо x место y и y место x?

13. — Напиши једначину хиперболе кад је $2a = 10$, $2c = 12$.

14. — Колико тачака једне хиперболе треба да знамо, па да можемо написати њену средишну једначину? По чему то познајеш?

15. — Напиши средишну једначину хиперболе, која пролази кроз тачке M_1 (— 2, и $3\sqrt{2}$) и M_2 (1 ,$5\sqrt{13}$ и 3).

Одредити осовине, жижно растојање, бројни ексцентрицитет и параметар ових кривих:

16. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

17. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

18. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

19. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

20. $3x^2 - 9y^2 = 27$

21. $4x^2 - 16y = 64$

22. $x^2 - 2y^2 = 2$

23. $x^2 - 4y^2 = 4$

24. $2x^2 - 3y^2 = 4$

25. $3x^2 - 4y^2 = 5$

Одреди једначине асимптота и брзо нацртај приближну слику ових хипербола:

26. $4y^2 - 9y^2 = 36$

27. $4x^2 - 25y^2 = 100$

28. $5x^2 - 7y^2 = 35$

29. $6x^2 - 9y^2 = 54$

30. $9x^2 - 20y^2 = 100$

31. $4x^2 - 8y^2 = 10$

32. — Нацртај спрегнуту хиперболу хиперболе из вежбања 16.

33. — Исто за хиперболу из вежбања 18.

34. — Исто за хиперболу из вежбања 20.

Испитај ове једначине и нацртај криве:

35. $x^2 - y^2 = 4$

36. $2x^2 - 2y^2 = 5$

37. $3x^2 - 3y^2 = 10$

38. $4x^2 - 4y^2 = 15$

Одреди координате центра, осовине, жижно растојање, бројни ексцентрицитет и параметар ових кривих, па их конструиши:

* 39. $x^2 - 2y^2 - 4x + 2 = 0$

* 40. $x^2 - 2y^2 + 8x + 3 = 0$

* 41. $x^2 - 2y^2 + 12y - 20 = 0$

* 42. — Какав облик добија хипербола из вежбања 23 кад координатни почетак транслацијом осовина дође у тачку M (2,0)?

* 43. — Исто питање за хиперболу из вежбања 22 и тачку M(3,2).

* 44. — Исто „ „ „ „ „ 19 и тачку M(0,3).

***45.** — Какав облик добија једначина праве $y = ax$, кад координатни почетак дође транслацијом осовина у тачку $M\ (p,q)$? Како гласе једначине асимптота за хиперболу

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1?$$

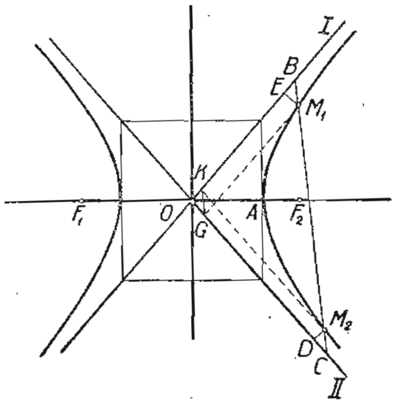
***46.** — Наћи једначине асимптота за криву $x^2 - 4y^2 - 8y = 0$.

47. — Под којим се углом секу асимптоте криве $x^2 - 10y^2 - 2 = 0$?

48. — По чему ћемо познати је ли једна тачка спољашња или унутрашња за хиперболу?

49. — Испитај положај ових тачака према хиперболи: $4x^2 - 9y^2 = 36$

$M\ (4,1)$ $N\ (-5,1)$ $E\ (1,1)$ $G\ (-1,4)$ $P\ (5,2\frac{2}{3})$ $L\ (-\sqrt{15}, \frac{2}{3}\sqrt{6})$



Сл. 85.

50. — Из хиперболиних тачака M_1 и M_2 повучене су паралелне с асимптотама. Докажи (сл. 85) да паралелограми M_1EOG и M_2DOK имају једнаке површине и да та површина не зависи од координата тачака M, већ је сталан број.

51. — Докажи ово: Свака права која пролази кроз две хиперболине тачке M_1 и M_2 сече хиперболу тако, да је од M_1 до ближе асимптоте исто растојање као од M_2 до њој ближе асимптоте.

[Из M_1 и M_2 повуци паралелне с асимптотама. Искористи троуглове OKG и EM_1B и CDM_2.]

Ако су дате осовине, одмах можемо написати једначину хиперболе, конструисати асимптоте, израчунати координате једне тачке (за произвољну апсцису) и обележити је. Тада кроз M_1 праву BC између асимптота. Кад знамо BM_1 и C, дуж BM_1 пренета од C по правој BC даје једну хиперболину тачку (M_2). Изведи одатле нов начин конструкције хиперболе.

52. — Помоћу сечице конструиши хиперболу $x^2 - 4y^2 = 4$.

53. — Докажи једначинама оно што се тражи у вежбању 51.

54. — Дате су једначине асимптота једне хиперболе:

$$y = \frac{2}{3}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{2}{3}x$$

и стварна осовина $2a = 12$. Конструиши ту хиперболу и одреди јој једначину.

Испитати однос дате праве и дате хиперболе:

55. $2x + 3y = 0$ и $x^2 - 4y^2 = 4$

56. $x - y - 1 = 0$ и $2x^2 - 3y^2 = 6$

***57.** $2x^2 - 8x - 4y^2 + 24y = 34$ и $3x + 2y - 7 = 0$

58. $x^2 - 8y^2 = 8$ и $x - y - 2 = 0$.

Одредити једначину дирке и нормале за дату хиперболу у датој тачци на њој:

59. $x^2 - 2y^2 = 1$ у тачци чија је апсциса $x = 3$.

60. $2x^2 - 9y^2 - 18 = 0$ за $x = 6$.

61. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ за $x = 10$.

62. $5x^2 - 6y^2 - 30 = 0$ за $x = 3$.

63. $7x^2 - 8y^2 - 56 = 0$ за $x = 4$.

64. — У једначини $\lambda x + 2y - 3 = 0$ одредити λ тако, да дата права буде дирка на хиперболи $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$.

65. — Напиши једначину дирке на хиперболу $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$ паралелну с правом $2x + 3y - 6 = 0$.

66. — Одреди једначину дирке на хиперболу $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ управну на правој $7y - x + 35 = 0$.

67. — Одреди једначину оне дирке на хиперболи $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ чија нормала иде кроз жижу.

68. — Додирна тачка M_1 дирке T спојена је са жижама. Докажи да дирка полови угао $F_1\ M_1\ E_2$.

69. — Наћи међусобни однос ових двеју кривих:

$$x^2 - 4y^2 - 4 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 9y^2 = 9.$$

70. — Под којим се углом секу ове две криве:

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{и} \quad x^2 - y^2 = 4?$$

Из дате тачке M повучена је дирка на дату хиперболу. Одреди јој једначину.

71. $x^2 - 4y^2 = 4$ $M\ (1,7)$

72. $4x^2 - 9y^2 = 36$ $M\ (2,-7)$

73. $9x^2 - 25y^2 = 225$ $M\ (3,10)$

74. $2x^2 - 3y^2 = 7$ $M\ (1,7)$

75. — Може ли се повући дирка из тачке $M\ (6,1)$ на хиперболу из вежбања 71? Зашто?

76. — Кроз тачку M из претходног вежбања повуци тетиву тако, да она отсече на ординатној осовини отсечак 5,5 и израчунај дужину те тетиве.

77. — Дата је права $y = \lambda x$, где је λ позитивно и једнако расте. При томе та права једнако остаје асимптота једне променљиве хиперболе. Шта бива са жижама те хиперболе?

78. — Докажи ово: Додирна тачка полови део тангенте захваћен асимптотама. Да ли се одатле може извести нов начин конструкције дирке на хиперболу у датој тачци?

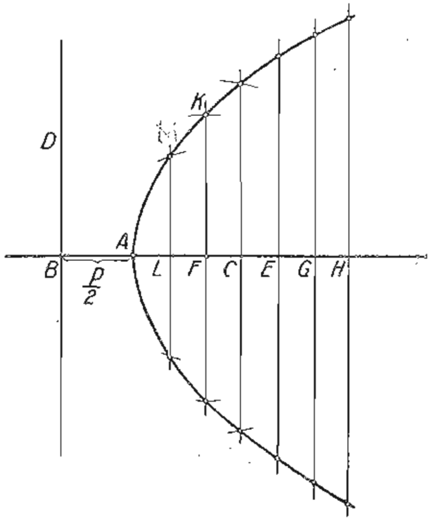
79. — Права $x + y = 10$ обрће се у негативном смислу око своје пресечне тачке с хиперболом $x^2 - 5y^2 = 5$. Колика је величина тога обртања, кад сечица треба да постане дирка? [Колико има решења?]

80. — Да ли су поља захваћена левом и десном граном хиперболе $x^2 - 4y^2 = 4$ истога знака? А како је то код хиперболе уопште?

1-XI-1930

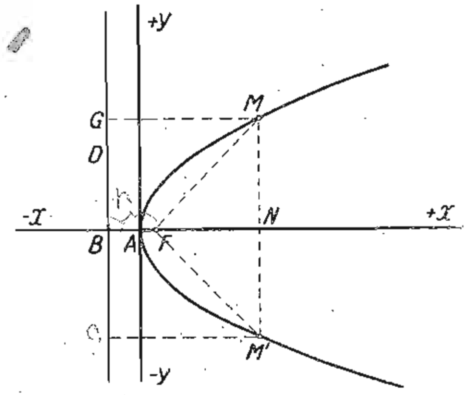
VII. — ПАРАБОЛА

Дефиниција. — Парабола је геометриско место тачака подједнако удаљених од једне сталне тачке и једне сталне праве. Сталну тачку зовемо жижа и обележавамо је са F. Сталну праву зовемо водиља или директриса и обележаваћемо је са D (сл. 86).



Сл. 86.

Параболина симетриска осовина. — Из жиже спустимо управну FB на водиљу D. Узмимо једну тачку на параболи (сл. 87). Спустимо из те тачке M управну MN на FB и пренесемо $MN = NM'$. Добијамо симетричну тачку M' тачке M (према FB). И тачка M' лежи на параболи. Ево зашто. Троугао MNF симетричан је са $M'NF$ према FB. (Зашто?). Отуда је $MF = M'F$. Тачке M и M' имају једнако растојање од жиже. Из M' спустимо $M'C$ управно на водиљу D. Четвороугао $CM'MG$ је правоугаоник. Отуда је $CM' = MG$. Пошто је $M'F = FM = MG$, биће: $M'F = CM'$. Тачка M је подједнако удаљена од жиже и водиље. Она онда мора лежати на параболи. Пошто за сваку тачку на параболи можемо показати једну симетричну тачку на параболи према правој FB, права FB мора бити параболина симетриска осовина. Права која пролази кроз жижу и стоји управно на водиљи јесте параболина симетриска осовина.



Сл. 87.

Растојање жиже од водиље зовемо осовина и обележавамо га са p:

$$BF = p \text{ (сл. 86).}$$

Парабола има једно теме. То је тачка A (сл. 86). Теме лежи на средини осовине p. (Откуд знамо?)

Парабола је отворена крива. — Што се више удаљујемо од водиље, жижно растојање MF расте. С њим расту и управне MN (сл. 87). Значи, крива се све више удаљава од своје симетриске осовине. Она је отворена крива. Зато може имати само једно теме. (А како хипербола има два? То ћеш сад видети).

Конструкција параболе. — То смо већ раније видели. Сад ћемо се само потсетити. На осовини узмемо произвољне тачке (C, E, G, H и т. д. сл. 86). Из њих дигнемо управне на осовину. Из F пресечемо управну у C полупречником BC, управну у E полупречником BE и т. д. Пресеци су параболине тачке.

Темена једначина параболе. Знамо да је:

(1) $MF = MG$ (сл. 87). То важи за сваку параболину тачку. Израчунаћемо MF и MG помоћу координата. Добивене

вредности смениhемо у (1). Тако ћемо добити једначину параболе.

$$MF = \sqrt{MN^2 + FN^2} \text{ (сл. 87)}$$

$$MF = \sqrt{y^2 + (AN - AF)^2}$$

$$(2) \quad MF = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$MG = NB = NA + AB$$

$$(3) \quad MG = x + \frac{p}{2}$$

Вредности (2) и (3) уносимо у (1) и добијамо:

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}. \quad \text{То је даље:}$$

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$\mathbf{y^2 = 2px}$. Темена једначина параболе.

То је једначина параболе чија осовина лежи на апсцисној осовини, а ординатна осовина јој пролази кроз теме.

Проучавање параболине једначине. — Решимо једначину по *y*: $y = \sqrt{2px}$.

Одавде видимо ово:

1) Израз *2p* је увек позитиван. Зато ће поткорена количина бити позитивна само онда, кад је *x* веће од нуле. Крива нема тачака са негативним апсцисама.

2) За $x = 0$ биће $y = 0$.

Наша крива пролази кроз координантни почетак.

3) Што је *x* веће, *y* је све веће.

Наша је крива отворена крива линија.

4) Свакоме стварном и позитивноме *x* одговарају две стварне вредности за *y*.

Наша је крива симетрична према апсцисној осовини.

За овакву параболу кажемо да се отвара у позитивном смислу апсцисне осовиве.

Параметар. — Ордината у жижи зове се параметар (*FK*, сл. 86). Параметар добијамо кад у једначини параболе ставимо $x = \frac{p}{2}$. Добијамо:

$y = \pm p$. Параметар је p.

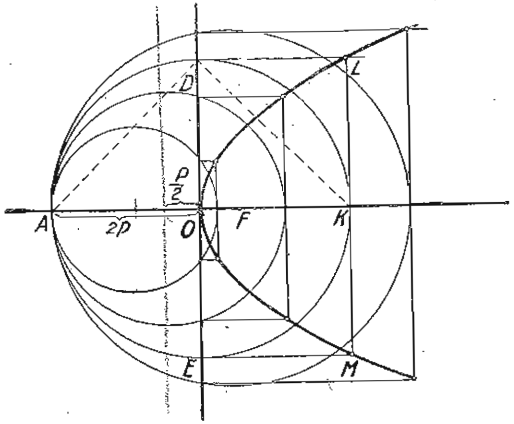
Други начин конструкције параболе. — Из једначине параболе види се ово:

$$2p : y = y : x.$$

То значи: ордината сваке параболине тачке јесте средња пропорционала између двогубог параметра и апсцисе те тачке.

Из те параболине особине може се извести нов начин параболине конструкције.

На осовини се (лево од темена, сл. 88) пренесе дуж $OA = 2p$. Узмимо произвољну тачку на осовини десно од *O*. Рецимо *K*. Над *AK* описујемо круг. Он сече ординатну осовину у *D* и *E*. Из *D* и *E* управне на ординатну осовину, а из *K* управну на апсцисну осовину. Где се оне секу ту су параболине тачке *L* и *M*.



Сл. 88.

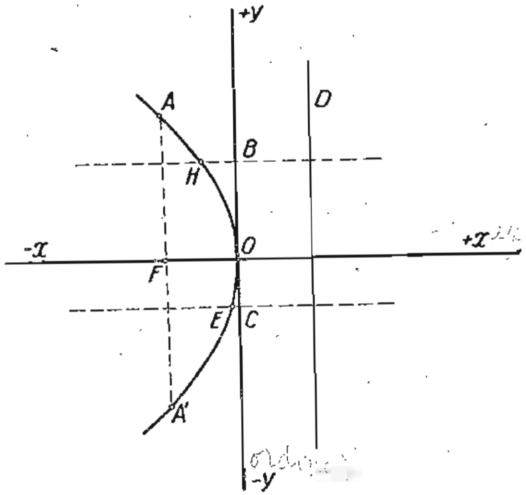
Откуд знамо да *L* лежи на параболи? [*OD* је хипотенузина висина у правоуглом троуглу *ADK*. И т. д.]

Парабола која се отвара у негативном смислу апсцисне осовине. — Узмимо параболу *AOA'*. Видимо да свакоме стварном и негативном иксу одговарају две стварне и супротне вредности за *y*. Значи да је *y* на другом степену:

$$y^2 =$$

Видимо даље да свакој ординати одговара само једна апсциса. (Ординати *OB* одговара на кривој само апсциса *HB*. — сл. 89). Значи да је *x* на првом степену:

$$y^2 = \ldots x$$

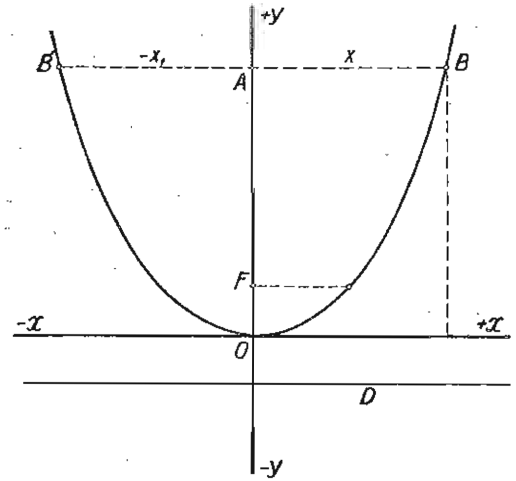


Сл. 89.

Видимо да само за негативне вредности икса имамо стварне ординате. Зато мора бити:

$\mathbf{y^2 = -2px}$. [Изврши дискусију ове једначине].

Парабола која се отвара у позитивном смислу ординатне осовине. — Ако се парабола отвара у позитивном смислу ординатне осовине (сл. 90), мораћемо добити две супротне вредности за x за свако стварно и одређено y. На слици 90 ординати OA одговарају две супротне вредности за x и то ове: $x_1 = AB$ и $x_2 = AB'$.



Сл. 90.

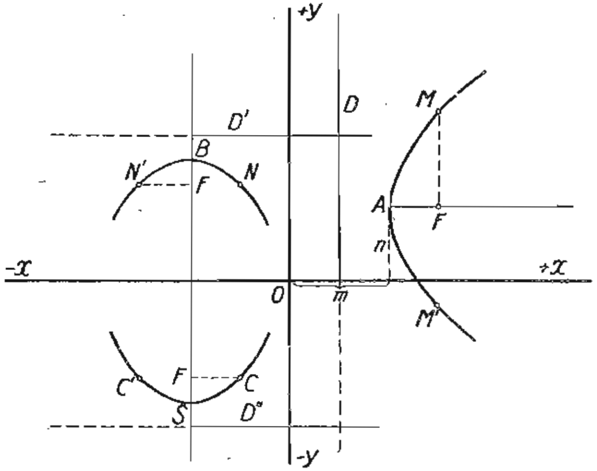
Да би то могло да буде, мора у једначини параболе x бити на другом степену.

Једначина овакве параболе гласи:

$$\mathbf{x^2 = 2py.}$$ [Изврши дискусују те једначине].

Општа једначина параболе. — Ако је теме A у тачци A (m, n), а осовина паралелна с апсцисном осовином, једначина параболе биће:

$$\mathbf{(y - n) = 2p\ (x - n)}$$



Сл. 91.

То је парабола која лежи као парабола MAM' са слике 91.

Једначина параболе $M'AM$ са слике 91 биће:

$$(y - 3)^2 = 2 \,.\, 4\ (x - 4)$$

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 32$$

$$(1) \qquad y^2 - 6y - 8x + 41 = 0.$$

Једначина параболе NBN' са слике 91 биће:

$(x + 4)^2 = -4\ (y - 5)$. То је даље:

$$(2) \qquad x^2 + 8x + 4y - 4 = 0.$$

Једначина параболе $C'SC$ са слике 91 биће:

$(x + 4)^2 = + 4\ (y + 5)$. То је даље:

$$(3) \qquad x^2 + 8x - 4y - 4 \quad 0.$$

Општа једначина кривих другог степена гласи:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

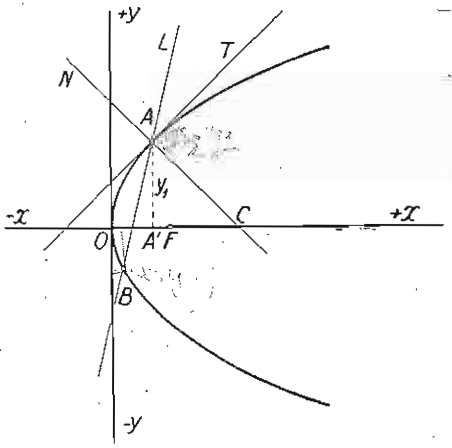
Ако је упоредимо с једначинама $y^2 = 2px$ и једначинама (1), (2) и (3), видимо ово:

Општа једначина кривих другог степена претставља параболу чија је осовина паралелна с једном координатном осовином кад је:

1) $B = 0$
2) $A = 0$, или $C = 0$.

ЈЕДНАЧИНЕ ДИРКЕ И НОРМАЛЕ

Једначина дирке. — Узмимо параболину сечицу L (сл. 92). Од ње ће постати дирка кад се она буде обртала око A $(x_1\ y_1)$ тако, да B тежи ка A и падне на A. Гранични положај обртања праве L биће тада дирка T. Обележимо координате тачке B са x_2 и y_2. Тада је једначина праве AB:



Сл. 92.

$$(1) \qquad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Треба израчунати количник

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Пошто A $(x_1\ y_1)$ лежи на параболи $y = 2px$, биће:

$$(2) \qquad y_1^2 = 2px_1.$$

Пошто и B $(x_2\ y_2)$ лежи на параболи, биће:

$$(3) \qquad y_2^2 = 2px_2$$

Одузимањем (3) од (2) добијамо:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p\ (x_2 - x_1)$$

$$(y_2 - y_1)\ (y_2 + y_1) = 2p\ (x_2 - x_1),$$ Одатле је:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$$

Сменом у (1) добијамо:

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}\ (x - x_1).$$

Гранични је положај ове праве дирке T. Наћи ћемо границу израза $\frac{2p}{y_2 + y_1}$.

$$\lim_{y_2 \to y_1} \frac{2p}{y_2 + y_1} = \frac{2p}{2y_1} = \frac{p}{y_1}.$$

Зато је једначина параболине дирке:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}\ (x - x_1).$$ То је даље:

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1.$$

Пошто је из (2)

$$y_1^2 = 2px_1,$$ биће даље:

$$yy_1 - 2px_1 = px - px_1$$

$$yy_1 = px + px_1$$

$$\mathbf{yy_1 = p\ (x + x_1)}.$$

То је једначина дирке на параболи $y^2 = 2px$ у тачци чије су координате x_1 и y_1.

Једначина нормале. — Једначина нормале у тачци $A\ (x_1\ y_1)$ има ове особине:

1) Пролази кроз $A\ (x_1\ y_1)$. Зато њена једначина мора бити:

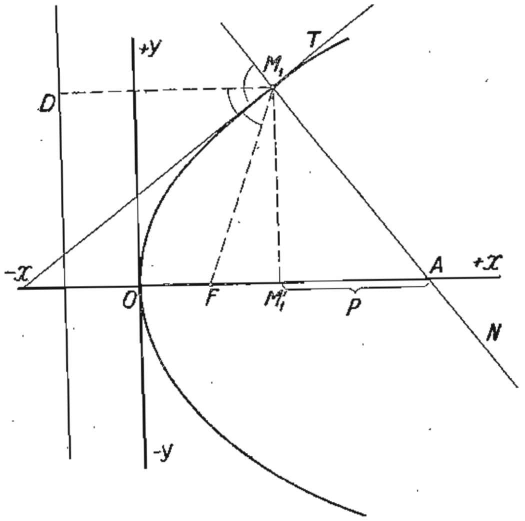
$$y - y_1 = a\ (x - x_1).$$

2) Стоји управно на дирци. Зато мора бити:

$$a = -\frac{y_1}{p}.$$ Отуда је ово једначина нормале:

$$\mathbf{y - y_1 = -\frac{y_1}{p}\ (x - x_1)}.$$

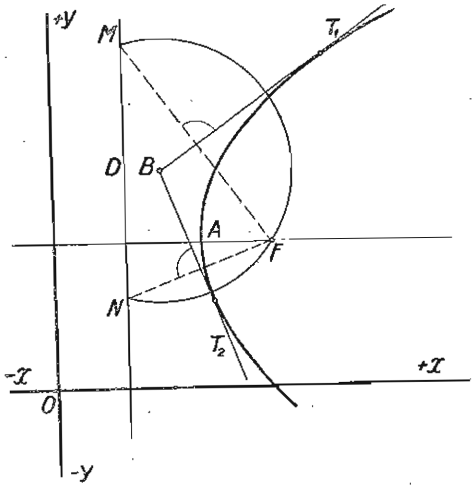
Конструкција дирке и нормале у датој тачци. — Хоћемо да повучемо дирку и нормалу на датој параболи у датој тачци M_1 (сл. 93). Спустимо управну $M_1 M'_1$ из дате тачке на осовину. Од M_1' одмеримо $M_1' A = p$. Нормала је права AM_1. У M_1 дигнемо управну на N. То је дирка T.



Сл. 93.

Други начин конструкције дирке. — Спојимо M_1 са F. Из M_1 спустимо управну $M_1\ D$ на водиљу D. Добијамо угао $DM_1\ F$. Његова је симетрала дирка T.

Конструкција дирке из спољне тачке. — Дата је једна тачка B (сл. 94). Из ње треба повући дирке на дату параболу.



Сл. 94.

Описаћемо круг из B полупречником BF. Он сече водиљу у тачкама M и N. Спојмо M и N са F. Из B спустимо управне на MF и NF. те управне су дирке T_1 и T_2.

Парабола нема асимптота. — Да би једна права била асимптота једне криве, треба да је граница разлике њихових ордината за исту апсцису равна нули.

Узмимо параболу $y^2 = 2px$ и праву $Y = ax + b$. Разлика њихових ордината за исту апсцису x биће:

$$Y - y = ax + b - \sqrt{2px}.$$ То је даље:

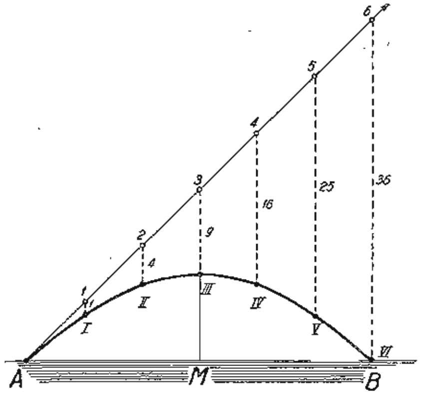
$$Y - y = x\ (a + \frac{b}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{2px})$$

$$Y - y = x\,(a + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2px}{x^2}}\,)$$

$$Y - y = x\left(a + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2p}{x}}\right)$$

Граница ове разлике није нула. Права није асимптота.

*КОС ХИТАЦ



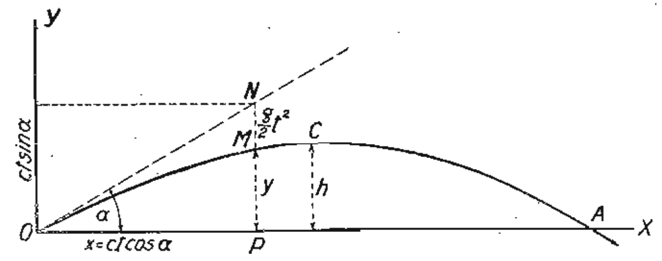
Сл. 95.

„Тешко тело, бачено почетном брзином *c* у правцу *A*6, косо нагнуто према хоризонталној равни *AB* (сл. 95) врши једно сложено кретање. Под утицајем почетне брзине оно би се по закону инерције кретало у правцу *A*6, и за 1, 2, 3, 4, ... секунада прешло путеве *A*1,*A*2,*A*3,*A*4 . . . . . , где је *A*1 = *c*, *A*2 = 2*c* . . . . . Ну услед једновременог дејства теже оно би се кретало, по закону слободног падања, вертикално наниже, и прешло би у томе правцу, у првој секунди, пут 1I $= \frac{g}{2}\, 1^2$, у другој 2 *II* $= \frac{g}{2}\, 2^2$, у трећој 3 *III* $= \frac{g}{2} \cdot 3^2$ . . . и т. д. По закону, независности кретања, тачке стварне путање I, II, III, IV . . . добијају се конструктивно, ако се замисли, да тело прво изврши једно, а затим друго од оба кретања. Путања је онда крива линија *A*I II III IV V *B*".

„Ако полазну тачку *O* узмемо за координатни почетак, а хоризонталан правац *OX* и вертикалан *OY*, оба у равни кретања, за координатне осовине правоуглог координатног система, и ако је *ON* правац бацања, онда је $\measuredangle\, \alpha = NOX$, елевациони угао (сл. 96). Нека је $ON = ct$ пут услед почетне брзине за *t* секунада, а $NM = \frac{gt^2}{2}$ пут који би тело прешло за треме *t* кад би слободно пало из тачке *N*, онда *M* лежи на стварној путањи. Координате *OP* и *MP* те тачке означићемо са *x* и *y*. Тада је

$$(1) \qquad x = ct\cos\alpha \qquad y = PN - NM = ct\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.\text{"} \quad (2)$$

[Два одељка под наводницама узети су из Физике професора др. Милорада Поповића, по пишчевој дозволи].



Сл. 96.

Из (1) имамо:

$$t = \frac{x}{c\cos\alpha}$$

Сменом у (2) добијамо:

$$y = c.\ \frac{x}{c\cos\alpha}\ \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{c^2\cos^2\alpha}$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}\, x^2$$

Ово је парабола. Написаћемо је тако да се виде координате њеног темена.

$$\frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}\, x^2 - x\ \mathrm{tg}\alpha = -\, y$$

$$x^2 - \frac{2c^2\cos^2\alpha\mathrm{tg}\alpha}{g}\, x = -\, \frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}\, y$$

$$(x - \frac{c^2\cos^2\alpha\mathrm{tg}\alpha}{g})^2 - (\frac{c^2\cos^2\alpha\mathrm{tg}\alpha}{g})^2 = -\, \frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}\, y$$

Пошто је $\cos^2\alpha\mathrm{tg}\alpha = \cos\alpha\ \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$, биће даље:

$$(x - \frac{c^2\sin2\alpha}{2g})^2 = -\frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}\ y + \frac{c^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{g^2}$$

$$-\ (x - \frac{c^2\sin2\alpha}{2g})^2 = \frac{2c^2}{g}\ \cos^2\alpha\ (y - \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g})$$

Види се ово:

Координате темена ове параболе:

апсциса $X = \frac{c^2\sin2\alpha}{2g}$

ордината $Y = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g}$

осовина: $x = \frac{c^2\sin2\alpha}{2g}$

Крива се отвара у негативном смислу ординатне осовине, пошто јој је сачинилац уз x^2 негативан. Значи, теме јој је највиша тачка изнад апсцисне осовине. Висину темена показује његова ордината:

$$Y = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Она зависи само од c и α. Кад је дата брзина, висина зависи само од нагибног угла α („елевационог угла“). Што је α веће, бацићемо тело на све већу висину, јер у првоме квадранту синус расте кад угао расте.

Кад ће се постићи највећа висина при косом хицу? Кад Y достигне максимум. Оно ће достићи максимум кад буде $\sin\alpha$ достигло максимум. То ће бити за $\sin\alpha = 1$, т. ј. за $\alpha = 90^0$. Највећа се висина постиже при вертикалном хицу.

Под којим се углом постиже највећа даљина домета? Значи: Кад ће OA са слике 96 достићи свој максимум? Шта је OA? То је апсциса пресека наше криве и апсцисне осовине. Да бисмо добили апсцису те тачке, ставићемо у једначини криве да је $y = 0$ и израчунати x. Добићемо:

$$x = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g} \pm \sqrt{\frac{c^4 \sin^2 2\alpha}{4g}}$$

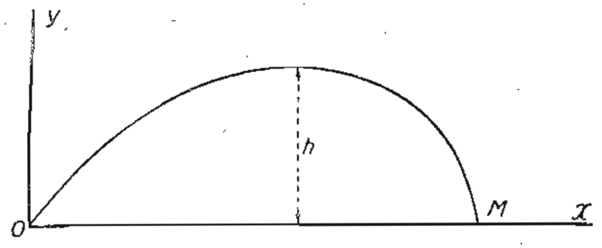
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{(Апсциса тачке } A\text{).}$$

Кад ће x_2 достићи максимум? Кад буде $\sin 2\alpha = 1$, т. ј. $2\alpha = 90^0, \alpha = 45^0$.

Највећи је домет под углом од 45^0. За угао већи или мањи од 45^0 добијамо краћи домет.

Балистичка линија. — Линија по којој се креће зрно из топа личи на параболу, али није парабола. Није због тога што отпор ваздуха дејствује и мења облик путање. Зрно испаљено из топа креће се по једној кривој која се зове балистичка линија. Једна балистичка линија види се на слици 97. [Шта примећујеш на њој?]



Сл. 97.

ВЕЖБАЊА

За дату вредност удвојеног параметра конструисати параболу чија осовина иде по апсцисној осовини:

1. $2p = 8$
2. $2p = 7$. (За 1 , 2 теме је у координатном почетку)
3. теме у тачци $M(4,0)$ $2p = 10$
4. теме у тачци $M(3,0)$ $2p = 6$
5. теме у тачци $M(-5,0)$ $2p = 5$
6. теме у тачци $M(-6,0)$ $2p = 9$.

Конструиши параболу чија је осовина паралелна с апсцисном осовином, а теме јој је у датој тачци M:

7. $M(3,4)$ $2p = 6$ 8. $M(-3,4)$ $2p = 8$
9. $M(-3, -5)$ $2p = 12$.

[Колико решења имају вежбања 7, 8, 9?]

Конструиши ове криве:

10. $y^2 = 4x$ 11. $y^2 = 7x$
12. $y^2 = 2x$ 13. $y^2 = x$

14. — Шта бива с параболом $y^2 = 2px$ кад p расте?

15. — Шта бива с параболом $y^2 = 2px$ кад p опада?

16. — Шта бива с параболом $y^2 = 2\lambda x$ кад λ постане мање од нуле?

Конструиши ове криве:

17. $y^2 = -10x$ 18. $y^2 = -4x$
19. $y^2 = -2x$ 20. $y^2 = -x$

21. — Кад у једначини параболе сменимо x са y и y са x, какву криву добијамо? Може ли се нова крива поклопити са старом?

Конструиши ове криве:

22. $x^2 = 4y$ 23. $x^2 = 6y$
24. $x^2 = -8y$ 25. $x^2 = -y$

Објасни положај ових кривих:

26. $(y-3)^2 = 4(x-2)$ 27. $y^2 - 6y - 3x + 15 = 0$
28. $2y^2 + 4y - 5x + 7 = 0$ 29. $3y^2 - 6y - 6x + 5 = 0$
30. $4y^2 + 8y - 2x + 9 = 0$ 31. $x^2 - 4x - 3y + 5 = 0$
32. $x^2 + x - y - 1 = 0$ 33. $3x^2 - 4x + 6 - y = 0$
34. $y = x^2 + 2x + 1$ 35. $x = y^2 - 4y - 7$
36. $x - y - y^2 + 3 - 0$

37. — Напиши једначину параболе из вежбања 7.

38. — Напиши једначину параболе из вежбања 9.

39. — Како изгледа једначина параболе из вежбања 26, кад координатни почетак транслацијом осовина дође у тачку $M(3,2)$?

40. — Исто питање за параболу из вежбања 35 и нови координатни почетак у тачци M $(-11{,}2)$.

41. — Напиши једничину параболе чија је осовина паралелна са апсцисном осовином, теме у тачци A $(2,3)$, а парабола се отвара у позитивном смислу апсцисне осовине.

42. — Напиши једначину параболе чија је осовина паралелна са апсцисном осовином, теме у тачци B $(-3,4)$, а парабола се отвара у негативном смислу апсцисне осовине.

43. — Напиши једначину параболе чија је осовина паралелна с ординатном осовином, теме у тачци C $(3, -2)$, $2p = 6$, а отвор у негативном смислу.

Напиши једначину параболе чија је осовина L паралелна с означеном осовином, теме S у датој тачци, а парабола се отвара у означеном смислу:

44.	S $(1,2)$	$2p = 6$	$L \parallel YY'$	отвор $+$.
45.	S $(-3,2)$	$2p = 8$	$L \parallel YY'$	отвор $-$.
46.	S $(-4,-5)$	$2p = 11$	$L \parallel XX'$	отвор $+$.
47.	S $(0,-1)$	$2p = 3$	$L \parallel XX'$	отвор $-$.
48.	S $(-3,0)$	$2p = 5$	$L \parallel YY'$	отвор $-$.
49.	S $(-4,-3)$	$2p = 10$	$L \parallel XX'$	отвор $+$.

50. — Да ли се по једначинама $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$ познаје да те криве немају центра? По чему?

***51.** — Да ли се по једначинама $(y - n)^2 = 2p\,(x - m)$ и $(x - m)^2 = 2p\,(y - n)$ познаје је ли прва крива симетрична према правој $y = n$, а друга према правој $x = m$? По чему се познаје?

***52.** — Одреди једначину симетриске осовине за криву $x = y^2 - 6y + 2$.

***53.** — Исто за $y = x^2 - 8x + 5$

***54.** — Исто за $y - 1 = 3x^2 - 6x$.

Испитај је ли дата тачка спољна или унутарња за дату параболу:

55. — Тачка M $(2,1)$, парабола из вежбања 1.

56. — Тачка M $(-3,4)$, парабола из вежбања 2.

57. — Тачка M $(-2,3)$, парабола из вежбања 17.

58. — Тачка M $(4,1)$, парабола из вежбања 20.

59 — По чему ћемо, без цртежа, одредити је ли једна тачка спољна или унутарња за параболу?

60. — Какав знак добија полином параболине једначине за тачке на параболи?

Испитати међусобни положај дате праве и дате параболе:

61. $y - 2x = 20$ и $y^2 = 4x$ **62.** $y - x = 10$ и $y^2 = x$

63. $y = x + 3$ и $y^2 = 8x$ **64.** $2y\sqrt{3} - 4x - 12 = 0$ и $y^2 = 8x$

У параболиној тачци за коју је дата апсциса или ордината одредити једначине дирке и нормале:

65. $y^2 = 6x$ M $(3,y)$ **66.** $y^2 = -8x$ M $(-2,y)$

67. $y = \frac{x^2}{3}$ M $(x,3)$ **68.** $x^2 = -5y$ M $(x, -4)$

***69.** $x^2 - 6x - 3y = 9$ M $(x,9)$

***70.** $y^2 - 3y - 2x - 5 = 0$ M $(7,y)$

***71.** $2x^2 + 4x - 4y - 7 = 0$ M $(x,3)$.

72. — Израчунај дужину поднормале на пароболи $y^2 = 2px$ у тачци M (m, n). Зависи ли дужина поднормале од положаја тачке M?

73. — Да ли је резултатом из претходног вежбања објашњена конструкција дирке на параболи у датој тачци?

74. — Произвољна тачка M са параболе $y^2 = 2px$ спојена је са жижом F и из M је спуштена управна на водиљу D. (Дужи MF и MD). Докажи да дирка полови угао DMF.

Из дате тачке M конструисати дирку на дату параболу, одредити једначину дирке и нормале:

75. M $(-3, 4)$ $y^2 = 4x$ ***76.** M $(-3, -7)$ $y^2 = 3\,(x - 1)$

***77.** M $(-2, 5)$ $y^2 = 6x - 9$ ***78.** M $(2, 3)$ $y + 3 = x^2 + 6x$

***79.** — У једначини $2x - 3\lambda\,y + 5 = 0$ одредити λ тако, да права постане дирка на параболи $y^2 - 3y - x + 4 = 0$.

80. — Одредити једначину дирке на параболи $x^2 = 3y$ тако, да дирка отсече на апсцисној осовини отсечак -2.

***81.** — Одредити једначину дирке на параболи $3x - x^2 + 2y = 0$ тако, да дирка отсече отсечак $+3$ на ординатној осовини.

***82.** — Одредити једначину параболе која има теме у тачци S $(2, 3)$, а осовина јој је паралелна с ординатном осовином, али тако, да парабола додирује праву $2x + 3y = 12$. [Колико има решења?]

83. — Одредити координате тачке M на параболи $y^2 = 6x$, кад је дирка у тој тачци паралелна с правом $y = 6x$.

84. — Кроз параболину тачку чије су координате 3 и y повући сечицу тако, да тетива буде $d = 7$. [Једначина параболе $y^2 = 6x$].

85. — Одредити једначину дирке на параболи $y^2 = 6x$ тако да дирка буде паралелна с правом $2x - 3y = 12$.

***86.** — Одредити једначину дирке на параболи $2x - x^2 + 3 - 2y = 0$ тако, да дирка буде управна на правој $2x + 3y = 4$.

87. — Под којим се углом секу ове две криве?

$$y^2 = 6x \quad \text{и} \quad x^2 = 3y$$

***88.** — Исто питање за:

$$4x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \quad \text{и} \quad x - x^2 = 2y.$$

89. — Колико је далеко од праве $2x + 3y = 7$ права L која је с њом паралелна, а дирка је на параболи $y^2 = 5x$?

***90.** — Одреди положај тачке M на ординатној осовини, кад се зна да је из ње повучена дирка на параболу $y^2 - 2y - x + 5 = 0$ тако, да дирка заклапа угао од 150^0 с позитивним смислом ординатне осовине.

91. — Одреди угао под којим се секу дирке повучене из тачке $M(2, 3)$ на параболу $y^2 = -3x$.

92. — На параболу $x^2 - 4x + 3 = 3y$ повучена је дирка MT у тачци M чија је апсциса — 3. Одредити једначину дирке која је управна на дирци MT.

***93.** — Један командир батерије гађа из топова под углом од 30^0. Други командир гађа из истих топова под углом од 60^0. Ко ће имати већи домет? (Не узимамо у обзир отпор ваздуха).

Напомена. — За гађање из топова израчунати су сви углови за све потребне даљине. Цев се диже помоћу даљинара. На команду „2000!“ помоћник нишанџије обрће ручицу даљинара. Кад дотера на 2000, цев је дигнута за угао који је потребан да се зрно баци на 2000 m.

***94.** — Под којим углом треба да стоји цев пољског топа, да би се зрно бацило на 3500 m, кад је почетна брзина топовског зрна 500 m.? [Колико има таквих углова? Кад би се гађало под једним, а кад под другим углом?]

***95.** — На игралишту баца један играч лопту брзином од 5 m у секунди, а под углом од 30^0. Докле ће добацити?

***96.** — Кад не би било ваздушног отпора, докле би најдаље могао добацити брзометни пољски топ, кад је почетна брзина његовог зрна 500 m?

МЕШОВИТА ВЕЖБАЊА

Напомена. — Овде сам унео и неке своје писмене задатке које сам давао ученицима у Државној другој мушкој реалној гимназији у Београду. Ти задаци имају у загради обележен редни број разреда и означену школску годину.

1. — Докажи помоћу аналитичне геометрије да ће све три троуглове висине секу у једној тачци.

[Узми да је једно теме у координатном почетку, а друго на апсцисној осовини].

2. — Исто за све три симетрале троуглових страна.

***3.** — Исто за симетрале углова.

4. — Докажи да центар круга описаног око правоуглог троугла лежи на средини хипотенузе.

5. — Из центра елипсе $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ описујемо круг полупречником $r = a.$, па из ма које тачке на елипсиној великој осовини дижемо управну до пресека са елипсом и кругом. Нека су пресеци M_1 и M_2. (круг). Њихове ће ординате имати увек овај стални однос: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}\cdot$ [*V*III р. 1927—28]

6. — Дате су праве $2x - y = 1$ и $3y - 2\lambda x = O$. Одредити λ тако, да се те две праве пресеку под углом од 20^0.

7. — Одредити заједничку тетиву ових двеју кривих:

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \text{и} \quad y^2 = 8x.$$

8. — Крива $x^2 + 4y^2 = 4$ и парабола имају заједничку жижу чија је апсциса позитивна. Параболино је теме у елипсином центру. Одредити једначину те параболе.

9. — Хипербола $4x^2 - 16y^2 = 64$ и парабола имају заједничку жижу чија је апсциса позитивна. Параболино је теме у хиперболином темену чија је апсциса негативна. Одредити једначину те параболе. За колико се разликују ординате тих кривих у тачци чија је апсциса 10?

10. — Хипербола и парабола имају заједничку жижу чија је апсциса позитивна. Параболино је теме у хиперболином темену чија је апсциса позитивна. Кад је хиперболина једначина $x^2 - 9y^2 = 9$, како гласи параболина једначина? Чије ординате брже расту? За колико се разликују ординате у тачци чија је апсциса 4?

11. — Одредити једначину круга који пролази кроз тачке $A(3,1)$, $B(5,3)$ и кроз тачке симетричне датим тачкама према апсцисној осовини. Израчунати површину четвороугла који образују те четири тачке.

***12.** — Велика осовина једне елипсе лежи на апсцисној осовини. Теме $A(6,0)$. Крива додирује праву $6y = x\sqrt{3}$, у тачци чија је апсциса 3. Израчунати осовине те елипсе и конструисати је.

13. — Хипербола има центар у координатном почетку, а стварна осовина јој је на апсцисној осовини. Асимптота јој је $3y = 2x$. Крива пролази кроз $M\ (10,5\frac{1}{3})$. Одредити осовине.

14. — Под којим углом сече апсцисну осовину права $2y\sqrt{3} - 3x - 2\sqrt{3} = 0$?

15. — Дате су две праве:

$$(1) \qquad 2x + 3y - 5 = 0 \quad \text{и} \quad 4x - 5y + 1 = 0 \qquad (2)$$

Колики је најмањи угао за који треба да се обрне права (2) око међусобног пресека, да би постала управна на правој (1)?

16. — Дата је права $y = mx + 5$. Одредити m тако, да права постане дирка на кругу $x^2 + y^2 = 7$.

17. — Дате су координате два узастопна темена једнога квадрата: $A\ (2,4)$ $B\ (6,1)$. Написати једначину круга уписаног у томе квадрату. [Колико решења?]

***18.** — Доказати да се у сваком троуглу може уписати круг.

19. — Израчунати параметар λ у једначини $2y\sqrt{3} + \lambda x = 4$ тако, да права постане дирка на елипси $4y^2 + x^2 = 4$ у тачци $M_1\ (1,\frac{1}{2}\sqrt{3})$. Извести једначину дирке на тој елипси паралелне с дирком у тачци M_1 (VIII, 1927-28).

20. — Из тачака на апсцисној осовини $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ дигнуте су управне на ту осовину. Оне секу елипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ у тачкама M_1 и M_2. Одредити површину елипсиног исечка OM_1M_2, где је O центар елипсин. (VIII, 1927-28).

21. — Дата је права $x + y = 4$. Она сече апсцисну осовину у A, ординатну у B. Колику ротацију треба она да изврши око A, па да постане дирка на елипси $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$? Израчунати површину AA_1B_1B где су A_1 и A пресеци позитивног крака апсцисне осовине са елипсом и датом правом, а B_1 и B пресеци позитивног крака ординатне осовине са елипсом и са датом правом. [VIII р., 1927 - 28].

22. — Испитати аналитички је ли права која је за $d = 2$ удаљена од праве $x + y - 10 = 0$ дирка на кривој $4x^2 + 9y^2 = 36$. Колико има решења? [VIII, 1929 - 30].

23. — У једначини $y^2 = 2px$ одредити p тако, да парабола додирује праву $2y - x = 8$.

24. — Може ли се парабола сматрати као граница елипсе код које су стални једно теме и једна жижа (A' и F_1, сл. 60), а друго се теме одмиче од F_1 тако да размак $F_1 F_2$ тежи бесконачноме?

[Ставимо транслацијом координатни почетак у A'. Тада једначина наше елипсе постаје:

$$b^2 (x - a)^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Одатле је:

$$(1) \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)$$

Рекли смо да се $A'F_1$ не мења. Знамо да је:

$$A'\ F_1 = a - c = a - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ставимо $A'\ F_1 = d$. Тада ће бити:

$$d = a - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Одатле је:

$$b^2 = 2ad - d^2.$$

Унесимо то у једначину (1):

$$y^2 = \frac{(2ad - d^2)}{a^2} (2ax - x^2). \qquad \text{Сад даље:}$$

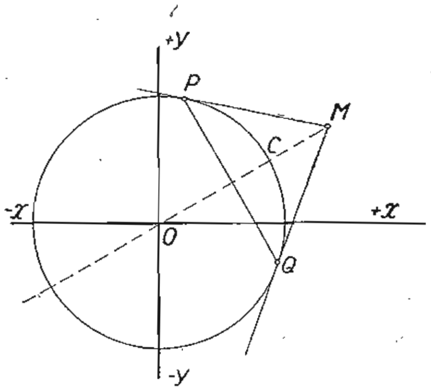
$$y^2 = \frac{2\ (2ad - d^2)}{a}\ x - \frac{2ad - d^2}{a^2}\ x^2$$

$$(2) \quad y^2 = (4d - \frac{2d^2}{a})\ x - (\frac{2d}{a} - \frac{d^2}{a^2})\ x^2$$

Кад a тежи бесконачноме, чему теже разломци у заградама? А коме облику тежи једначина (2)? Коју криву претставља њен гранични облик?]

25. — Под којим се углом секу елипса и хипербола које имају заједничке жиже?

*VIII. — ПОЛ И ПОЛАРА



Сл. 98.

Из једне тачке ван круга повуцимо дирке на круг (сл. 98). Добијамо дирке MP и MQ. Нека су координате тачке M (x', y'), тачке $P\ (x_1\ y_1)$, а тачке $Q\ (x_2\ y_2)$. Једначине дирки:

$$(1) \quad xx_1 + yy_2 = r^2$$

$$(2) \quad xx_2 + yy_2 = r^2$$

Права (1) пролази кроз M. Зато мора бити:

$$(3) \quad x'x_1 + y'y_1 = r^2.$$

Али и права (2) иде кроз

M. Зато мора бити:

(4) $x'x_2 + y'y_2 = r^2$,

Кад загледамо (3) и (4) видимо да је једначина

(5) $x'x + y'y = r^2$

задовољена координатама тачке *P* [једначина 3] и тачке *Q* [једначина (4)]. Па то онда (5) претставља праву *PQ*. Права *PQ* која пролази кроз додирне тачке тангената повучених из *M* зове се **полара** тачке *M*. Тачка се *M* зове **пол**.

Чему нам служи полара? Ако одредимо њену једначину, можемо ту једначину решити с једначином круга и одмах добити координате додирних тачака.

Пример. — Одредити једначину дирки повучених на круг $x^2 + y^2 = 4$ из тачке M (3, 1).

Најпре полара:

$$x'x + y'y = r^2$$

$$3x + y = 4 \qquad \text{(пошто је } y' = 1)$$

Сад њени пресеци с кругом.

$$y = 4 - 3x$$

$$x^2 + 16 - 24x + 9x^2 = 4$$

$$10x^2 - 24x + 12 = 0$$

$$5x^2 - 12x + 6 = 0$$

$$x_1 = 1,2 + 0,2\sqrt{5} \qquad y_1 = 0,4 - 0,6\sqrt{5}$$

$$x_2 = 1,2 - 0,2\sqrt{5} \qquad y_2 = 0,4 + 0,6\sqrt{5}$$

Дирке:

I $(1,2 + 0,2\sqrt{5})x + (0,4 - 0,6\sqrt{5})\,y = 4$

II $(1,2 - 0,2\sqrt{5})x + (0,4 + 0,6\sqrt{5})\,y = 4$

Полара је управна на правој која спаја с центром тачку из које су повучене дирке. — Једначина праве *OM* биће:

$$y - y' = a\,(x - x')$$

$$y - y' = \frac{y'}{x'}\,(x - x')$$

$$y - y' = \frac{xy'}{x'} - y'$$

$$x'y - x\,y' = O \qquad \text{Одатле је:}$$

$$y = \frac{y'}{x'}\,x.$$

Једначина поларе:

$$y = -\frac{x'}{y'}\,x + \frac{r^2}{y'}. \qquad \text{Види се да су управне.}$$

Ако из ма које тачке са *CM* повучемо дирке, полараће опет бити управна на *CM*. Значи да ће све поларе бити међу собом паралелне за дирке повучене с исте праве.

На исти начин изводе се једначине полара и за елипсу, хиперболу и параболу, те ћемо их само навести.

Једначина поларе на елипсу:

$$b^2\,x'x + a^2y'y = a^2b^2$$

Једначина поларе на хиперболу:

$$b^2x'x - a^2y'y = a^2b^2.$$

Једначина поларе на параболу:

$$y'y = p\,(x' + x).$$

ВЕЖБАЊА

Помоћу поларе реши означене задатке:

1. — Страна 74, вежбање 53. [Је ли лакше помоћу поларе?]
2. — „ „ „ 54.
3. — 75 „ „ 55.
4. — „ „ „ 58.
5. — „ „ „ 60.
6. — Је ли код елипсе полара управна на правој која спаја елипсин центар с правом из које се повлаче дирке?

Помоћу поларе реши означене задатке:

7. — Страна 102, вежбање 114.
8. — „ „ „ 115.
9. — „ „ „ 116.
10. — „ „ „ 117.
11. — Када се пол одмиче од центра, да ли се полара примиче, или одмиче?

[Испитати и за круг и за елипсу].

12. — Докажи да су дирке, повучене у крајњим тачкама једног елипсиног пречника паралелне међу собом.

13. — Помоћу поларе реши задатак на страни 102 у вежбању 123.

[Једначина је поларе $b^2x'x + a^2y'y = a^2b^2$. Једначина пречника који је с њом паралелан биће: $b^2x'x + a^2y'y = 0$ (Пошто пречник иде кроз центар, а центар лежи у координатном почетку). Где овај пречник сече елипсу? Напиши једначину дирке кроз ту тачку. Напиши једначину спрегнутог пречника. Загледај угловне сачиниоце].

Помоћу поларе реши означене задатке:

14. — Страна 115, вежбање 71.
15. — „ „ „ 72
16. — „ „ „ 73
17. — „ „ „ 74
18. — „ 129, „ 75
19. — „ „ „ 76
20. — „ „ „ 77
21. — „ „ „ 78.

* IX. — ПОГОДБА ДА ПРАВА $y = mx + n$ БУДЕ ДИРКА НА КУПИНОМ ПРЕСЕКУ.

Погодба да права буде дирка на кругу.

Узмимо круг $x^2 + y^2 = R^2$ и праву (L) $y = mx + n$. Да би L била дирка, мора систем ових двеју једначина дати два једнака решења.

$$y = mx + n$$
$$x^2 + (m^2x^2 + 2mnx + n^2) = R^2$$
$$(1 + m^2)\, x^2 + 2mnx + (n^2 - R^2) = 0.$$

Дискриминанта мора бити равна нули:

$$(2mn)^2 - 4\,(1 + m^2)\,(n^2 - R^2) = 0.$$ Одатле је:

$$R^2 = \frac{n^2}{1 + m^2}$$

То је услов да права L буде дирка на датом кругу.

Пример. — Испитати је ли права $2x + y = 10$ дирка на кругу $x^2 + y^2 = 20$.

$$m = -2$$
$$n = 10$$
$$R^2 = 20$$

$$\frac{n^2}{1 + m^2} = \frac{100}{5} = 20 = R^2.$$ Права је дирка . (Види стр. 86, пример I).

Други пример. — Испитати је ли права $x + 2y\sqrt{2} = 4\,(3 + 2\sqrt{2})$ дирка на кругу $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 16 = 0$.

Одредићемо координате центра:

$$p = 3 \qquad q = 4.$$

Пренећемо координатни почетак у центар круга. Значи, смењујемо и у једначини праве и у једначини круга x са $(x + 3)$, y са $(y + 4)$. Једначина праве постаје:

$$x + 3 + 2\,(y + 4)\sqrt{2} = 12 + 8\sqrt{2}$$
$$x + 2y\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 9 + 8\sqrt{2}$$
$$(1) \qquad x + 2y\sqrt{2} = 9.$$

Једначина је круга била:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$ Сад постаје:

$$[(x + 3) - 3]^2 + [(y + 4) - 4]^2 = 9$$
$$(2) \qquad x^2 + y^2 = 9.$$

$$m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$n = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{n^2}{1 + m^2} = \frac{\frac{81}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{81}{9} = 9$$

$$R^2 = 9.$$

Права је дирка.

Погодба за дирку на елипси

Узмимо елипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и праву (L) $y = mx + n$.

$$b^2x^2 + a^2\,(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$$
$$(b^2 + a^2m^2)\,x^2 + 2a^2mnx + (a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

Дискриминанта мора бити нула:

$$4a^4m^2n^2 - 4\,(b^2 + a^2m^2)\,(a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$
$$a^4m^2n^2 - (a^2b^2n^2 + a^4m^2n^2 - a^2b^4 - a^4b^2m^2) = 0$$
$$- a^2b^2n^2 + a^2b^4 + a^4b^2m^2 = 0$$
$$n^2 - b^2 - a^2m^2 = 0.$$

То је услов да права L буде дирка на датој елипси.

Пример. — Испитати је ли права $3y - 2x = 5$ дирка на елипси $x^2 + 4y^2 = 4$.

$$a = 2 \qquad b = 1 \qquad m = \frac{2}{3} \qquad n = \frac{5}{3}$$

$$n^2 - b^2 - a^2m^2 = \frac{25}{9} - 1 - 4.\ \frac{4}{9} = \frac{25}{9} - \frac{9}{9} - \frac{16}{9} = 0.$$

Права је дирка. (Види стр. 94).

Погодба за дирку на хиперболи

Узмимо праву $y = mx + n$ и хиперболу $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

$$b^2x^2 - a^2\ (mx + n)^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2\ (m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mnx - (a^2n^2 + a^2b^2) = 0$$
$$(b^2 - a^2m^2)\ x^2 - 2a^2mnx - (a^2n^2 + a^2b^2) = 0.$$

Дискриминанта мора бити равна нули:

$$(2a^2\ mn)^2 + 4\ (b^2 - a^2\ m^2)\ (a^2\ n^2 + a^2\ b^2) = 0$$
$$4a^4\ m^2\ n^2 + 4\ (a^2\ b^2\ n^2 - a^4\ m^2\ n^2 + a^2\ b^4 - a^4\ b^2\ m^2) = 0$$
$$a^2\ b^2\ n^2 + a^2\ b^4 - a^4\ b^2\ m^2 = 0$$
$$n^2 + b^2 - a^2\ m^2 = 0.$$

То је услов да права буде дирка на хиперболи.

Пример. — Испитати је ли права $9x + 2y\sqrt{15} - 12 = 0$ *дирка на хиперболи* $3x^2 - 4y^2 = 12$.

$$9x + 2y\sqrt{15} - 12 = 0$$
$$2y\sqrt{15} = 12 - 9x$$
$$y = \frac{12}{2\sqrt{15}} - \frac{9}{2\sqrt{15}}x$$
$$y = 6\ .\ \frac{\sqrt{15}}{15} - 9\ .\ \frac{\sqrt{15}}{2 \cdot 15}\ x$$
$$y = 2\ .\ \frac{\sqrt{15}}{5} - 3\ .\ \frac{\sqrt{15}}{10}\ x$$
$$a^2 = 4 \qquad b^2 = 3 \qquad m^2 = \frac{9\ .\ 15}{100} = \frac{135}{100} = 1{,}35$$
$$n^2 = \frac{4\ .\ 15}{25} = \frac{60}{25} = \frac{240}{100} = 2{,}40$$
$$n^2 + b^2 - a^2\ m^2 = 2{,}40 + 3 - 4\ .\ 1{,}35 = 5{,}40 - 5{,}40 = 0.$$

Права је дирка. (Види стр. 111).

Погодба за дирку на параболи

Узмимо праву $y = mx + n$ и параболу $y^2 = 2px$.

$$(mx + n)^2 = 2px$$
$$m^2\ x^2 + 2mnx + n^2 = 2px$$
$$m^2\ x^2 + 2\ (mn-p)\ x + n^2 = 0$$

Дискриминанта мора бити равна нули.

$$4\ (mn-p)^2 - 4m^2\ n^2 = 0.$$
$$m^2\ n^2 - 2mnp + p^2 - m^2\ n^2 = 0$$
$$p^2 - 2mnp = 0$$
$$p - 2mn = 0$$

То је услов да дата права буде дирка на датој параболи.

Пример. — Испитати је ли права $y - 3x - 4 = 0$ *дирка на параболи* $y^2 - 48x$.

$$m = 3 \qquad n = 4 \qquad p = 24$$
$$24 - 2\ .\ 3\ .\ 4 = 0.$$

Права је дирка. Да проверимо.

$$y^2 = 48x$$
$$y = 3x + 4$$
$$(3x + 4)^2 = 48x$$
$$9x^2 + 24x + 16 = 48x$$
$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$
$$(3x - 4)^2 = 0$$
$$x_1 = x_2 = \frac{4}{3}$$
$$y_1 = y_2 = 8.$$

Права је дирка у тачци $M\ (\frac{4}{3}, 8)$.

ВЕЖБАЊА

Испитај је ли дата права дирка на датоме кругу:

1. — Страна 74, вежбање 32.

2. $x^2 + y^2 = 7$ и $x + y = \sqrt{7}$

3. $x^2 + y^2 = 16$ и $x - 2y = 3$

4. — Страна 74, вежбање 36.

5. „ „ „ 37

6. „ „ „ 38

7. „ „ „ 41.

Провери добивене резултате у означеном вежбању:

8. — Страна 75, вежбање 55.

9. — Страна 75, вежбање 56

10. „ „ „ 57.

11. — У једначини $y = 3x + n$ одреди n тако да права буде дирка на кругу $x^2 + y^2 = 4$.

12. — У једначини $2y + 3mx = 7$ одреди m тако да права буде дирка на кругу $x^2 + y^2 = 9$.

13. — У једначини $2y - 3mx = 4$ одреди m тако да права буде дирка на кругу $5x^2 + 5y^2 = 12$.

14. — У једначини $3y + 4x - 3n = 0$ одреди n тако да права буде дирка на кругу $2x^2 + 2y^2 = 9$.

Испитај је ли дата права дирка на датој елипси:

15. $2y + 3y - 5 = 0$ и елипса из вежбања 32 на стр. 98.

16. $3 + 4x - y = 0$ „ „ „ „ 33 „ „ „

17. $1 - y = x$ „ „ „ „ 34 „ „ „

18. $2y - 3x + 4 = 0$ „ „ „ „ 35 „ „ „

19. $3 - 3x - 4 = 0$ и елипса из вежбања 36 на стр. 98.
20. — Провери добивене резултате у 108 вежбању на страни 101.
21. „ „ „ „ 109 „ „ „ „
22. „ „ „ „ 110 „ „ „ „
23. „ „ „ „ 111 „ „ „ „

24. — Дато је $2y - 3mx + 7 = 0$. Одреди m да права буде дирка на елипси из вежбања 36, стр. 98.

25. — Исто за n у једначини $2n - 3x + 8y = 0$ и елипсу у вежбању 37, стр. 98.

26. — Исто за m у једначини $3m + y + 11 = 0$ и елипсу у вежбању 38 стр. 98.

27. — Исто за n у једначини $12n - 3x + y = 0$ и елипсу у вежбању 39 стр. 98.

Испитати је ли дата права дирка на датој хиперболи:

28. — Страна 115, вежбање 55. **29.** — Страна 115, вежбање 56.
30. — „ „ „ 57. **31.** — „ „ „ 58.

32. — У једначини $3x + 4y + n = 0$ одредити n тако, да права буде дирка на хиперболи са стране 115, вежбање 59.

33. — Исто за n у једначини $2x + 3n - 5y = 0$ и хиперболу из вежбања 60, стр. 115.

34. — Исто за m у једначини $4mx + 6 - 5y = 0$ и хиперболу из вежбања 61, стр. 115.

35. — Исто за m у једначини $4 - 2mx - 3 = 0$ у хиперболу из вежбања 62, стр. 115.

Испитати је ли дата права дирка на датој параболи:

36. — Права и парабола из вежбања 61 на страни 129.
37. — „ „ „ „ „ 62 „ „ „
38. — „ „ „ „ „ 63 „ „ „
39. — „ „ „ „ „ 64 „ „ „

40. — У једначини $3my + 4y - 5 = 0$ одреди m тако, да права буде дирка на параболи $y^2 = 6x$.

41. — Исто за m у једначини $2mx - 5y + 1 = 0$ и параболу $y^2 = 8y$.

42. — Исто за n у једначини $2y - 3y + 2n = 0$ и параболу $x^2 = -7y$.

43. — Исто за n у једначини $3x + 9y - 7n = 0$ и параболу $y^2 = -5x$.

* X. — ДИСКУСИЈА ОПШТЕ ЈЕДНАЧИНЕ КУПИНИХ ПРЕСЕКА

Општа једначина гласи:

(1) $$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

Пошто ми посматрамо само оне купине пресеке, чије су осовине паралелне с координатним осовинама, биће:

$$\mathrm{B} = 0,$$

Тада једначина (1) постаје:

(2) $$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

Решимо је по y:

$$y = \frac{-2\mathrm{E} \pm \sqrt{4\mathrm{E}^2 - 4\mathrm{C}(\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{D}x + \mathrm{F})}}{2\mathrm{C}}$$

$$y = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{C}} \pm \frac{1}{\mathrm{C}}\sqrt{\mathrm{E}^2 - \mathrm{AC}x^2 - 2\mathrm{CD}x - \mathrm{CF}}$$

(3) $$y = -\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{C}} \pm \frac{1}{\mathrm{C}}\sqrt{-\mathrm{AC}x^2 - 2\mathrm{CD}x + (\mathrm{E}^2 - \mathrm{CF})}$$

Ставимо

(4) $$z = \frac{1}{\mathrm{C}}\sqrt{-\mathrm{AC}x^2 - 2\mathrm{CD}x + (\mathrm{E}^2 - \mathrm{CF})}$$

Ако бисмо хтели да конструишемо криву (3), видимо да бисмо за свако x имали две тачке за y. Једанпут бисмо на $-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{C}}$ имали да додамо z, а други пут да га одузмемо. Значи да је права $y = -\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{C}}$ симетриска осовина те криве. Како ће изгледати та крива, све зависи од z. Међутим z може имати стварну вредност, бити нула, или бити уображено. Све зависи од израза

(5) $$-\mathrm{AC}x^2 - 2\mathrm{CD}x + (\mathrm{E}^2 - \mathrm{CF})$$

Решићемо једначину:

(6) $$-\mathrm{AC}x^2 - 2\mathrm{CD}x + (\mathrm{E}^2 - \mathrm{CF}) = 0$$

$$x = \frac{2\mathrm{CD} \pm \sqrt{4\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2 + 4\,\mathrm{AC}\,\mathrm{E}^2 - \mathrm{CF})}}{-2\mathrm{AC}}$$

Ми ћемо у реалци посматрати само случај кад су корени једначине (6) стварни и неједнаки, т. ј. кад је:

$$\mathrm{C}^2\mathrm{D}^2 + \mathrm{AC}\ \mathrm{E}^2 - \mathrm{CF}) > 0$$

Нека су корени једначине (6) x_1 и x_2. Тада (5) можемо написати овако:

(7) $$-\mathrm{AC}\ x - x_1)\ (x - x_2) = 0$$

Тада (3) можемо написати овако:

$$(8) \qquad y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-AC\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$$

Шта све овде може бити? Претпоставили смо да су x_1 и x_2 стварни и неједнаки. Овде могу наступити три случаја.

Први случај. — Нека је $AC > O$. Тада $-AC < O$. Зато је поткорени израз у (8) позитиван само за вредности између корена x_1 и x_2. Тада имамо стварне ординате само за

$$x_1 < x < x_2.$$

Ван тога размака између корена ординате су уображене. Па то је случај код елипсе. Крива претставља елипсу кад је $AC > O$.

То значи да ћемо имати елипсу кад су A и C једнако означени.

Други случај. — Нека је $AC < O$. Тада је $-AC > O$. Зато је поткорени израз у (8) позитиван само за вредности икса ван корена. Стварне вредности имамо само кад је

$$x < x_1 < x_2 \qquad \text{или} \qquad x > x_2 > x_1$$

Значи: од $x = x_1$ до $x = x_2$ ординате су уображене, а иначе су увек стварне. Па то је случај само код хиперболе. Крива претставља хиперболу само кад је

$$AC < O.$$

То значи да ћемо имати хиперболу кад су A и C неједнако означени.

Трећи случај. Нека је $AC = O$. Тада је и $-AC = O$. Тада једначина (3) добија овај облик:

$$(9) \qquad y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-2CDx + (E^2 - CF)}$$

Обележимо корен поткорене количине са x_1. Тада (9) можемо написати овако:

$$(10) \qquad y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-2CD\,(x - x_1)}$$

Овде могу наступити три потслучаја:

Први потслучај:

$$(11) \qquad 2CD > O$$

Тада је $-2CD < O$. Зато је поткорена количина у (10) позитивна за све вредности икса мање од x_1. Па то онда крива (10) претставља само параболу. Из (11) се види да C не може бити нула.

Пошто је $AC = 0$, значи да мора бити $A = 0$. Значи: крива претставља параболу кад је $A = 0$, а $C \neq 0$.

Други потслучај:

$$(12) \qquad 2CD < O.$$

Тада је $-2CD > O$. Тада је поткорена количина у (10) позитивна за све вредности веће од x_1. Тада крива (10) може опет претстављати само параболу: Опет се види да C не може бити нула.

Крива (10) претставља параболу кад A и C нису једновремено нуле.

Трећи потслучај. — Он наступа кад је $2CD = O$. Ми тај случај нећемо испитивати овде. Само ћемо додати да у томе потслучају крива (2) не претставља ни један купин пресек.

Да сведемо. — Да би једначина (2) претстављала један купин пресек, потребно је да буде:

$$C^2 D^2 + AC\,(E^2 - CF) > O.$$

[Одатле се види да не могу бити једновремено нуле A и C, нити A и D].

Тада ће бити:

за $AC > O$ *елипса*

за $AC < O$ *хипербола*

за $AC = O$ *парабола* (увек сем случаја $A = C = O$).

Први пример. — Испитати шта претставља ова крива:

$$2x^2 - 6x + 3y^2 - 8y - 10 = 0.$$

Најпре

$$C^2D^2 + AC\,(E^2 - CF) = 9.9 + 2.3\,(16 + 3.10) = 81 + 6\,.\,46 = 357 > 0.$$

$$AC = 2.3 = 6 > 0.$$

Дата једначина претставља елипсу.

Други пример. — Испитати шта претставља ова крива:

$$5y^2 - 8y - 3x^2 + 4x - 20 = 0.$$

Најпре:

$$C^2D^2 + AC\,(E^2 - CF) = 25.4 + (-3).5.\,[16 - 5\,(-20)] = 100 - 15\,(16 + 100)$$
$$= 100 - 15.116 < 0.$$

Дата једначина за нас још не претставља ништа.

Напомена: — Даљи развој ове дискусије видећеш на универзитету.

ВЕЖБАЊА

Шта претстављају ове једначине:

1. $x^2 - 6x + 8y^2 - 12y + 10 = 0$

2. $x^2 - 4x - 6y^2 - 6y = 12$

3. $3x^2 + 4x - 5y^2 - 6y + 7 = 0$

4. $3x - 5x^2 + 6y^2 - 8y - 17 = 0$

5. $4x - 8x^2 + 8y^2 - 6y - 30 = 0$

6. $6y^2 - 7y + 5x^2 + 4x - 1 = 0$

7. $5x^2 - 6x + 3y^2 - 7y + 1 = 0$

8. $6x^2 - 7x + 8y^2 - 6y + 2 = 0$

9. $4x^2 - 9x + y^2 - 7y + 9 = 0$
10. $x^2 - 3x + y - 7 = 0$
11. $y^2 - 4x + 8y - 9 = 0$
12. $3x - 2y^2 + 3y - 7 = 0$
13. $6y^2 - 9x^2 + 8y - 9x - 11 = 0$
14. $y^2 - 16x^2 + 9x + 7y - 12 = 0$
15. $2y^2 - 5x + 4y + 2 = 0.$

КРАТАК ИСТОРИСКИ ПРЕГЛЕД ПРЕЂЕНОГ ГРАДИВА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ

ПРВИ ТРАГОВИ

Старе грађевине Мисираца и Вавилонаца јасно казују да су и у веома далекој древној старини људи знали много што-шта из геометрије. Потреба за грађењем навела их је на мерење и посматрање основних геометриских слика. Мисирци су морали мерити своју плодну земљу веома често, због тога што ју је Нил плавио и мењао постављене границе имања. Та су мерења стварала потребу за основним знањем из геометрије. Њега је несумњиво било одавно. Трагови геометриског знања виде се и на једноме веома староме писаноме документу из Мисира. Мисирци су обично писали на папирусу. То је била нека врста хартије справљена од биљке папирус која је некад у обиљу расла поред Нила, а сад је тамо нема. Око половине прошлога века пронашао је у Мисиру енглески научник Ринд један свитак папируса. Дугачак је 20 метара, а широк 30 сантиметара. Чува се у британском музеју у Лондону. Тај је папирус писао неки Ахмес између 1800 и 1600 год. пре Хр. Зове се **Риндов папирус**. Тај је спис нека врста практичног математичког упутства. У њему се налазе и геометриске слике и упутства за израчунавање њихове површине. Ту стоји да се површина равнокраког троугла израчунава, кад се производ основице и крака подели са 2. (Је ли то тачно?) Ту се налази и упутство за израчунавање површине круга. По њему изгледа да је наш данашњи број $\pi = 3,16$.

Али ти стари геометриски трагови показују да на 2000 г. пр. Хр. није у ствари ни било проучавања геометрије, већ су само бележена проста запажања на геометриским сликама.

Праву, научну, геометрију, геометрију с доказима, створили су Грци. Зато ћемо овде прегледати радове неколико великих грчких математичара.

ГРЧКИ МАТЕМАТИЧАРИ

Талес из Милета. — Први грчки математичар на кога наилази историја математике јесте *Талес* из малоазиске вароши Милета (624—548 г. пр. Хр.). Он је један од седам грчких мудраца. Оснивалац је чувене Јонске школе. Он је био у Мисиру и тамо је од мисирских свештеника много научио. Њему се приписује да је доказао ова тврђења из геометрије: пречник полови круг, углови на основици равнокраког троугла једнаки су међу собом, троугао уписан у полукругу правоугли је. Он се бавио сличним троуглима и утврдио њихове особине. Помоћу теорије о сличним троуглима он је решио ова два задатка: Одредио је висину пирамиде помоћу њене сенке и из пристанашта израчунао растојање лађе на мору. (Како би ти решио та два задатка?)

Питагора. — Мисли се да је рођен око 586 г. пр. Хр. За њега се зна да је рођен на острву Самосу и да се учио у Мисиру. Са Самоса је побегао од тиранина Поликрата. Дошао је у Кротон у „Велику Грчку" (Јужна Италија). Ту је основао школу. Зна се да су се у тој школи училе аритметика, музика, геометрија и астрономија. Шта је урадио он лично, а шта његови ученици, не зна се тачно (пошто су његови ученици били обавезни да чувају у тајности оно што у школи науче). Зато се може говорити само о раду Питагорејаца, а не о раду самога Питагоре.

Они су утврдили да се раван може покрити само једном од ових трију мрежа: мрежом равностраних троуглова, квадратном мрежом, и мрежом правилних полигона. (Којих?). Њима се приписује да су утврдили да може бити свега пет правилних испупчених тела. Они су доказали да збир углова у троуглу износи два права угла. Њима се приписује да су доказали да је квадрат хипотенузе једнак са збиром квадрата страна правог угла. („Питагорино правило"). Данас се зна да је та особина правоуглог троугла била много раније позната старим народима (н. пр. Мисирцима).

Њихова је заслуга што су поставили геометрију на научну основу (тачни докази). Због тога се Питагора сматра праоцем модерне математике.

Платон. — (429—348 г. пре Хр.). — Син једне отмене и богате атинске породице он је у младости добио највише образовање које се могло дати младићу тога времена. Био је ученик чувеног грчког философа Сократа. Ишао је на науке у „Велику Грчку" (грчка колонија у Јужној Италији) и у Мисир. При повратку с наука основао је у своме родноме месту високу философску школу, коју је назвао „Академија". Колико је он ценио математику види се по томе, што је над врата своје школе ставио натпис: „Нека не улази нико ко не зна геометрију".

Он је усавршио и уопштио аналитичку методу у математичким доказима и проблемима. То значи ово: претпоставља се да је један проблем већ решен, па се раставља на друге проблеме који су већ решени. Значи, прво се изврши анализа, па се тек онда прилази конструкцији.

Он је усавршио теорију о геометриским местима и потпуно их објаснио.

Еуклид. — Рођен је у Александрији и живео у њој. У највећој је слави био око 300 г. пр. Хр. Мисли се да је математичко знање стекао у Атини од Платонових ученика. Основао је у Александрији једну високу школу у којој је предавао математику. То је чувени писац „Елемената". То је његово најважније дело. У томе се делу налази скупљено све дотадање знање из математике. Шта је у њему тачно Еуклидово, а шта туђе, данас још није одређено. Заслуга је Еуклидова што је све то раније знање покупио и изнео га у веома научном облику. То је прво математичко научно дело старога века. У њему је чиста математичка теорија. У њему су доказима утврђиване математичке истине. Садржи у себи геометрију и аритметику. Многе ствари из геометрије уче се и данас у школи тачно онако како их је Еуклид написао пре 22 века! „Елементи" су подељени на 13 књига. Ово је њихов садржај.

I књига: тачка, и права, углови, троугли, једнакост површина и Питагорина теорема. II књига: у геометрискоме облику решавање једначина 2 степена. III књига: круг, праве и углови на њему. IV књига: уписани и описани правилни полигони. V књига: у геометрискоме облику изнета теорија о несамерљивим бројевима. VI књига: сличност троуглова, геометриске сразмере. VII књига: теорија бројева. VIII и IX књига: степени, корени, геометриски редови. X књига: ирационални бројеви. XI књига: увод у стереометрију, правилна тела. XII књига: однос површина два круга и сличних полигона, однос површина и запремина код тела. XIII књига: правилни полигони и правилна тела (њихова конструкција и уписивање у лопту).

У почетку I књиге Еуклид је изнео 5 поставки (постулата) који се не могу доказати. Пета таква поставка гласи: „Ако једна права која пресеца друге две праве, начини унутрашње углове с исте стране мање од два права, те две праве линије, неограничено продужене, секу се с оне стране пресечнице с које су углови мањи од два права“. Модерним математичким језиком ми то данас кажемо: „Кроз једну тачку ван праве, а у равни коју одређују тачка и права, може се повући само једна паралелна с том правом“. То је чувени „Еуклидов постулатум“. Математичари су вековима покушавали да га докажу. Најзад је из тих покушаја изашао доказ (почетак XIX века) да се могу створити и геометрије независне од Еуклидовог постулата. (Геометрија која се оснива на Еуклидовом постулату зове се „Еуклидова геометрија“. То је ова геометрија што је ми учимо у средњим школама. Сем ње постоје и „Нееуклидове геометрије“, о којима овде нећемо говорити.) „Елементи“ су писани у научном духу тако, да и данас изазивају дивљење. Они су преведени скоро на све светске језике и претстављају најраспрострањенију књигу после Светог писма.

Архимед. — Највећи математичар старога века и један од највећих твораца у историји математике. Рођен је 287 г. пр. Хр. у Сиракузи на Сицилији и у њој погинуо 212 г. кад су Римљани напали и освојили Сиракузу. И он је ишао у Александрију на науке. Еуклид је, у главном, писао да учи друге. У својим „Елементима“ дао је математички уџбеник за високе школе. Архимед је писао да унапреди саму математичку науку. Споменућемо само нека његова математичка дела.

I. — *О мерењу круга.* У томе своме раду одредио је да је однос кружне периферије и пречника мањи од $3\,\frac{10}{71}$, а већи од $3\,\frac{1}{7}$. Као што се види, он је дао број π са два децимала тачно $\frac{22}{7} = 3{,}142\ldots$, док је $\pi = 3{,}1415\ldots$). Међутим, вредност за π коју је Архимед израчунао са два децимала тачно, ми и данас употребљавамо у школи као приближно мању вредност тога броја ($\pi \approx 3{,}14$). II. — *О лопти и ваљку.* — Ту је израчунао површину омотача правог ваљка, праве и зарубљене купе и запремине тих тела. Ту је израчунао површину и запремину лопте. III. — *О квадратури параболе.* — Ту је Архимед израчунао тачно површину параболиног отсечка. Довео је до обрасца до кога ми данас долазимо кад интегралним рачуном израчунавамо површину параболиног отсечка. (То је израчунао пре 22 века! Интегрални рачун пронађен је тек после 20 векова!).

Сем ових математичких радова он има својих великих проналазака из физике и механике. Он је највећи инжињер старога века. Напоменућемо још само то, да се и сад у школама учи (у физици) његов закон о привидном губљењу тежине тела потопљеног у течност.

Аполоније из Перге. — Рођен је у Малој Азији у вароши Перги (265 г. пр. Хр.) а умро је 170 год. И он је ишао у Александрију на науке.

Најважније је његово дело о купиним пресецима. Ту је најпре навео шта се до њега знало о купиним пресецима, а затим је он наставио. Он је први показао елипсу, хиперболу и параболу на истој купи. Показао је како треба да стоји пресечна раван према купиној осовини, па да се добије једна од тих трију кривих. Он им је дао и њихова садања имена. Испитао је њихове пречнике и дирке. Показао је асимптоте код хиперболе.

Пошто смо поменули главне творце геометрије, прелазимо на градиво у појединостима.

ПЛАНИМЕТРИЈА

Главно градиво из планиметрије што га учимо у средњој школи налази се готово све у Еуклидовим „Елементима“.

Троугли. — О троуглима је Еуклид писао опширно. Он је дао и три правила о подударности троуглова. Четврто је додато тек у XVIII веку.

Четвороугли. — И о њима је скоро све дао Еуклид. Допунили су неки грчки математичари (Архимед и др.).

Полигони. — И о њима је Еуклид писао опширно. Нарочито о правилним полигонима).

Историја броја π. — Још у најстарија времена покушавали су људи да израчунају однос кружног обима и пречника. Поменули смо да се у Риндовом папирусу налази површина круга тако да је $\pi = 3{,}16$. Вавилонци су сматрали да је $\pi = 3$. Грци су покушавали да конструишу квадрат чија је површина једнака с површином круга. Разуме се да нису успели. Поменули смо да је Архимед израчунао да је $\pi = 3{,}142\ldots$ У књизи „Практика геометрије“ од *Леонарда Пизана* (1220 г. после Христа) стоји да је $\pi = 3{,}141818$ (а оно је $3{,}141592\ldots$). У XVI веку математичари су се веома много занимали проучавањем круга. Због тога је број пи добијао све више тачних децимала. У то је доба Рудолф ван Колен (Немци га зову фон Цојлен) израчунавао обиме уписаног и описаног полигона. Пошао је од шестоугаоника, па је ишао до полигона од 192 стране. Тако радећи нашао је 35 тачних децимала за број пи, у почетку XVII века. Тек у другој половини XVII века утврђено да је пи ирационалан број. Немачки математичар Ојлер и француски математичар Лежандр изнели су крајем XVIII века своје тврђење, да пи није алгебарски ирационалан број. Међутим све до краја XIX века трајао је посао око одређивања природе броја пи и тачног начина његовог израчунавања.

Израчунавање површина. — И то је стара ствар. У Риндовом се папирусу налазе тачно израчунате неке површине. Еуклид се бавио само испитивањем односа површина двеју слика или два тела, док је **Херон** из Александрије (из доба рођења Христова) показао израчунавање површина геометриских слика.

СТЕРЕОМЕТРИЈА

Површине и запремине тела. — Еуклид је упоређивао површине и запремине тела, али их је Херон израчунавао. Површину и запремину лопте израчунао је **Архимед**. Доцније су на израчунавању површина и запремина тела радили многи математичари. Међу њима талијански математичар **Кавалијери** (почетак XVII века).

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Тригонометрија је створена за астрономске потребе. Отуда је прво пронађена сферна тригонометрија. Њу је први почео највећи грчки астроном **Хипарх** (око 150 г. пр. Хр.). При решавању троуглова увек их је уписивао у круг, па је њихове стране израчунавао као функције полупречника. Косоугли сферни троугао растављао је на правоугле сферне троугле, па их је онда решавао. Око 100 г. после Хр. бавио се проучавањем сферних троуглова астроном **Менелај** из Александрије, који је живео у Риму. После њега писао је тригонометрију Птоломеј (око 150 г. после Хр.). И он је као и његови претходници, узимао тетиву као синус датога лука. Он је продужио Хипархов посао и израдио таблицу синусних вредности.

Арапи су пренели тригонометрију у Западну Европу у XIII веку. **Региомонтанус** (XV век) је написао једно дело о тригонометрији и учинио да се тригонометрија потпуно одвоји од астрономије за коју је дотле била везана. Модерни облик дао је тригонометрији славни немачки математичар Ојлер (XVIII век).

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

Координате су биле познате још и старим народима. За њих су знали Мисирци. Њихови су геометри употребљавали једну мрежу квадратића да на њој одреде положај појединих места у Мисиру. Хипарх је одређивао положај места према родоском меридијану (јер је он радио на острву Родосу). Употребљавао је географску дужину и ширину. Грци су знали за правоугли координатни систем.

Први је **Леонардо Пизано** (1220 г.) довео алгебру у везу с геометријом. Доцније је тај посао настављен, али праве аналитичке геометрије задуго није било. Године 1637 објавио је француски математичар **Декарт** своју **Геометрију**. Њом је ударио основе аналитичној геометрији.

САДРЖАЈ

Страна

1. — Увод 5
2. — Права линија 15
3. — Стереометриски преглед купиних пресека . . . 50
4. — Круг 59
5. — Елипса 79
6. — Хипербола 102
7. — Парабола 116
8. — Пол и полара 133
9. — Погодба да права буде дирка на купином пресеку 136
10. — Дискусија опште једначине купиних пресека . . 141

Кратак историски преглед пређеног градива из геометрије 145