ВЛАСТИМИР СТАЈИЋ
ПРОФ. II БЕОГР. ГИМНАЗИЈЕ

АРИТМЕТИКА

ЗА

ДРУГИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ПЕТО ИЗДАЊЕ

БЕОГРАД
ИЗДАЊЕ КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА
1933

ПРЕДГОВОР

1. Ученику се препоручује да ову књигу добро чува, да је одржава у исправном стању, пошто ће следећих година бити често упућиван на поједине ставове из ње.

2. Кад ученик рачуна на табли, мора непрестано да говори и да објашњава сваки поступак. Ћутање на табли је чамотиња у разреду.

ГЛАВА I

Читање и писање бројева до милијарде

1. Практично упутство за читање написаних бројева: *Ако број има највише три цифре, треба изговорити редом сваку цифру са именом реда, који та цифра претставља. Ако број има више од три цифре, онда се он најпре подели у класе, почевши с десна налево. У сваку класу долазе по три цифре. Последња класа налево може имати две или и једну цифру. Свака таква класа чита се редом као засебан број, тј. у њој се увек читају стотине, десетице и јединице, а при том изговара име класе. Прва класа, почевши с десна налево, претставља просте јединице, друга хиљаде, трећа милионе, четврта милијарде итд.*

Број 42|345|704 чита се четрдесет и два милиона три стотине четрдесет и пет хиљада седам стотина четири.

Практично упутство за писање изговорених бројева: *Ако број садржи само просте јединице, онда се редом напишу цифре стотина, десетица и јединица, при чему се још ваља старати, да се напише нула онде где недостају јединице извесног реда. Ако број има више од три цифре, онда се редом пише свака класа, почевши са највишом. У случају да неке класе нема, њено место попуни се са три нуле.*

Број тридесет и два милиона три стотине осам пише се: 32 000 308.

Напомена 1. — Треба избегавати уобичајено стављање тачке поред хиљада и запете поред милиона. Ако ипак треба да имамо бољу прегледност, ми ћемо поједине класе писати мало више размакнуте.

Напомена 2. — Реч милион је талијанског, а милијарда француског порекла.

Ово што смо рекли о читању и писању бројева, боље и прегледније се види из приложене табеле:

Прва класа *просте јединице*	јединице	1-ви ред
	десетице	2-ги —
	стотине	3-ћи —
друга класа *хиљаде*	јединице хиљада	4-ти —
	десетице хиљада	5-ти —
	стотине хиљада	6-ти —
трећа класа *милиони*	јединице милиона	7-ми —
	десетице милиона	8-ми —
	стотине милиона	9-ти —
четврта класа *милијарде*	јединице милијарди	10-ти —
	десетице милијарди	11-ти —
	стотине милијарди	12-ти —

У пракси се, углавном, употребљавају само ове четири класе.

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Напиши:

1. Један милион двеста шездесет хиљада пет стотина четрдесет и седам.

2. Двадесет милиона тридесет и шест хиљада четири стотине.

3. Један милион четрдесет хиљада и четрнаест.

4. Један милион и један; један милион једна хиљада и један; један милион сто један; један милион десет.

5. Тридесет и пет милиона седам стотина и две хиљаде.

6. Сто једанаест милиона један; један милион десет хиљада и један.

7. Три милиона и две стотине петнаест.

8. Један ученик нека чита, један нека пише на табли, а остали да пишу на својим свескама ове бројеве: 10 900 019, 160 000 006, 10 001 101, 304 040 000, 10 300 003, 11 011 011, 3 050 204, 90 008 007, 290 000 092.

9. Једна милијарда двеста педесет девет милиона седам стотина шездесет хиљада пет стотина седамсет и четири

10. $(72000 - 6785) + (120\,000\,000 - 94\,785\,023) =$

11. $(779\,859 + 357\,084 + 780\,463) - (109\,437 + 73\,902) =$

12. Површина целе земље је 510 000 000 квадратних километара. Европа има 9 700 000km², Азија 44 200 000, Африка 29 700 000, Америка 38 500 000, Аустралија са Полинезијом 9 000 000 и поларни предели 12 000 000 квадратних километара.

а) Колико квадратних километара покрива вода?

б) За колико је површина суве земље мања од површене воде?

13. Кад је пречник Земље 12 740 километара, а отстојање Сунца од Земље 11 700 Земљиних пречника, колико километара има од Земље до Сунца?

14. Израчунај производ од више чинилаца: $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$! Шта нам претставља овај производ?

15. Израчунај производе:

$292\,000 \cdot 83\,607 =$ $\qquad 650\,437 \cdot 96\,580 =$

$9980 \cdot 795 \cdot 42 =$ $\qquad 3864 \cdot 5600 \cdot 802 =$

16. $(8276 + 512) \cdot (900 + 886 + 637) =$

17. $(67\,843 - 59\,670) \cdot (11\,345 - 1\,287) =$

18. $(17\,835 + 1\,996) \cdot (162\,371 - 39\,864) =$

19. Колики је квадрат бројева 4 873, 6 555, 11 111?

20. Колики је куб бројева 108, 321, 432, 1054?

21. Дељеник је 3 136 338 делилац 648, колики је количник и остатак?

22. Производ је 3 491 060, један чинилац 2835, колики је други чинилац?

23. Колико је x у једначини

$$x \cdot 825 = 2\,679\,600\,?$$

24. На Земљи живи отприлике 1 800 000 000 људи. Дали би било места за све људе у једном кубном километру, ако се рачуна да је за једног човека довољно простора 50 cm дужине, 50 cm ширине и 2m висине?

25. **Слуга који одлично рачуна.** — Погађајући се са газдом слуга рече: „Не тражим велику месечну плату. Платићете ми овако: за први дан једну пару, за други две

паре, за трећи 4 паре итд., за сваки наредни дан два пута више од претходног дана. Колико је изнела та његова мала плата за месец дана?

26. Колика је разлика између производа бројева 1568 и 6024 и количника бројева 4 488 333 и 638?

27. $[(4\,829\,099 - 809\,798) : 347 + 947] : 40 + 77 \cdot 22 =$

28. $[(12\,444\,452 : 1\,438 - 371\,995 : 65) : 977 \cdot 333 + 1\,001] : : 200 - 50 =$

29. $[(18\,812\,725 : 479 + 2\,005 \cdot 105) : 4\,996 + 50 \cdot 39] : 40 - 38 =$

30. $(20\,777 : 79 + 49\,737) : \{[15 \cdot (7\,000 - 3\,333) : 18\,335] \cdot \cdot 100\} =$

РАЗЛОМЦИ

ГЛАВА II

УВОД

О потреби нових бројева
(За читање)

2. — На мисао о броју долазимо, кад посматрамо више ствари, које су стављене једна до друге, те чине једну *скупину*. Кад један дечак добије одједанпут од свог оца, више динара, он се пре свега интересује да види **колико** је добио. Исто тако кад добије јабука, ораха, кад купи кликера итд.

Колико има динара у новчанику, колико прозора на учионици, колико оваца у једном стаду, колико војника у једном одреду? Одговор на сва ова питања је **број**, или да кажемо још одређеније један *природни* број.

3. — Предмети које гледамо око себе нису сви потпуно исти као што су на пример динари, али се ипак по неким њиховим особинама могу стављати у скупине. Јабуке нису све исте боје, нису ни исте величине, нити истог укуса, али то су ипак све јабуке. Крушке се јасно разликују од јабука, али и једно и друго су воћке. Пси нису потпуно слични један другом, а можемо их врло лако разликовати од мачака, али их све можемо ставити у једну класу животиња. Слова у једној речи се разликују, али су то ипак све слова.

Кад водимо рачуна о једној нарочитој особини предмета и по тој особини их скупимо, ето нам скупине! При том једна околност треба да падне јасно у очи: да су поједини предмети у скупини *потпуно одвојени и цели*. На пр. у скупини јабука постоји за себе једна јабука, затим још једна, одвојено као целина, затим још једна итд.

Ако у скупини не водимо рачуна који су предмети, онда за сваки предмет кажемо да је то једна *јединица*.

4. — Очевидно је да једној скупини коју већ имамо, не можемо додавати по један нов предмет исте врсте у бесконачност. Тако је у *пракси* природни бројни ред *крајан*, ограничен. Увек у бројењу морамо негде стати. Али у мислима ми можемо сваком броју, код кога смо стали, додати нову јединицу, и тако природни бројни ред продужити. Значи да је ипак тај ред бескрајан, као што смо то већ прошле године утврдили.

5. — Кад данас споменемо један број, на пр. 17, 67, ми врло често немамо заједно са бројем и слику скупине, тј. у нашој свести није јасно да ли су то 17 динара или 17 јабука, или нешто друго, него просто 17 јединица. Број који је никао из посматрања скупине, ослободио се, у току времена, конкретних предмета. Рачунамо $17+5=22$, без обзира на то, шта је 17 и шта је 5. Кажемо да смо ми број *апстраховали*. Нешто слично томе је већ спомињано раније. Бројеве смо делили на именоване и неименоване. Ми сада можемо рећи за именоване бројеве да су то *конкретни бројеви*, а за неименоване *апстрактни бројеви*.

6. — Ово апстраховање броја јавило се из несумњиве потребе, а видимо колико је корисно. Без тога тешко да би се дошло до рачунских радњи, које смо већ проучили.

Ако бисмо хтели да нађемо збир од две или више скупина, ми бисмо морали све те скупине ставити на једну гомилу, и тако најпре *направити* збир тих скупина, па затим бројити. Тако су људи у старо време и морали радити. Ми можемо лако замислити колико је то био тежак посао. Слично томе бисмо радили при одузимању и множењу. Код дељења морало би се од скупине — дељеника — одузимати по један или више предмета.

Кажемо да се овако радило у старо време. Међутим још увек се тако ради код непросвећеног света. Знамо и како мала деца деле међу собом, једнако, колаче. Скупе се сва у једну гомилу, па једно од њих дели: првом један, другом један, трећем један итд.

Данас су све четири рачунске радње веома упрошћене. Свако сабирање сводимо на додавање само једноцифрених бројева; свако одузимање на одузимање само једноцифрених бројева; код множења множимо само једноцифрене бројеве: при дељењу количник је увек једноцифрен број.

7. Нови бројеви. — Са скупинама, како смо их већ претставили, можемо без тешкоћа изводити рачунске радње сабирање, одузимање и множење. Можемо више разних скупина спојити у једну, или од једне веће издвојити другу мању, или више једнаких саставити заједно, па добити производ, а да не наиђемо на тешкоће. Али тај случај није са дељењем. Ту се у много случајева наилази на тешкоће. На пример кад треба 4 друга да поделе 13 јабука. Ми смо већ решавали задатке 13:4. Према томе како смо досада учили, рекли бисмо количник је 3, а остатак 1. Само, кад је реч о јабукама, сваки би се интересовао шта ће бити са оном једном јабуком, која се јавља као остатак дељења. Решење је просто. Сигурно је неће бацити. Један од другова ће узети нож и јабуку расећи *на 4 једнака дела*, па сваком поделити још по једну **четвртину** јабуке. Овде се већ јавља потреба за новим бројем, јер се још увек питамо *колико* је јабука добио један друг. Сваки је добио по *3 целе јабуке и једну четвртину.* То се може овако написати:

$$3+\tfrac{1}{4}.$$

Ми смо могли на још један начин да извршимо деобу. Могли смо претходно сваку јабуку поделити на 4 једнака дела. Тада бисмо имали од 13 јабука 52 четвртине, што је лако поделити четворици. Сваки ће добиту по 13 четвртина. То можемо овако написати:

$$\frac{13}{4},$$

па кажемо да је $\frac{13}{4}$ *разломак*, као нешто различито од досадањих бројева. Исто тако је и $\frac{1}{4}$ разломак.

8. — Одмах настаје и питање, да ли је разломак број. Да ли је он добијен из посматрања скупине? Може ли се до њега доћи бројењем разних предмета једне скупине? Кажемо 13 четвртина, очигледно је да се до тога може доћи бројењем. Можемо на једну гомилу ставити само четвртине јабука, па их бројити, сматрајући сваку четвртину као једну јединицу. Тада се бројењем дође до 13. Само овде не бројимо *природне* јединице, него јединице, које смо сами начинили. У природи се јавља као јединица цела јабука, а не четвртина. На дрвету висе целе јабуке, а не четвртине. Бројеви које добијамо кад бројимо целе јабуке су природни бројеви, а кад бројимо делове од целих, тада имамо *разломке*. У првом случају имамо *целе бројеве*. Цели бројеви су, можемо рећи, Богом дани бројеви, а разломци бројеви, које је човек гоњен својим личним потребама, сам створио.

9. — Један други начин, да се дође до броја, јесте *мерење*. Оно што меримо зовемо *величина*. При раду са величинама се у много већој мери јавља потреба за разломцима.

Кад говоримо о једној величини претстављеној бројем, увек претпостављамо да смо извршили избор једног таквог стања ове величине, које нам служи као *тип* (јединица) са којим поредимо друге. Ове друге величине су онда у истини скупине јединица, и због тога се оне и могу претставити бројевима, а на њихове се комбинације могу применити рачуни са целим бројевима.

Али има и таквих стања величина, која се не могу сматрати као скупине јединица. То су она стања, која су мања од јединице, која су између једне и две јединице итд. На таква стања величина не може се применити рачун са целим бројевима.

Овде би се могао наћи један излаз, да се избегну разломци: јединица се може произвољно бирати. Тако јединица за дужину може бити час метар, час лакат, час стопа итд. Подесним избором јединице могли бисмо још известан број величина подвргнути рачуну. У том случају примена рачуна зависила би од *конвенције*, коју бисмо могли мењати и прилагођавати нашој потреби. Само тако бисмо довели до забуна и нереда код мера, па би нам и рачуни били од мале користи.

Уместо да се модификује јединица величине, ми стварамо нове бројеве. Они нам показују да је једна величина састављена од *делова јединице*. Можемо јединицу делити на 2, 3, 4, . . . једнаких делова, па те делове сабирати и тако градити нова стања величина, која одговарају новим бројевима, разломцима.

Да бисмо, дакле, добили једно од нових стања величине помоћу јединице, потребне су две операције: дељење ове јединице на 2, 3, . . . једнаких делова, за тим спајање неколико оваквих делова. Тако ми можемо узети пантљику од 1 метра, савити је на двоје, да крајеви дођу један на други и пресећи је, да добијемо две једнаке пантљике. Свака од њих зваће се **половина** метра. Радећи то исто са сваком половином направићемо четвртине од метра. Продужујући то исто са четвртинама, добићемо **осмине** итд.

Ако сад можемо покрити једну другу пантљику, стављајући једну до друге 5 четвртина метра, моћи ћемо да кажемо да њена дужина износи 5 четвртина од метра, што пишемо:

$$\frac{5}{4}.$$

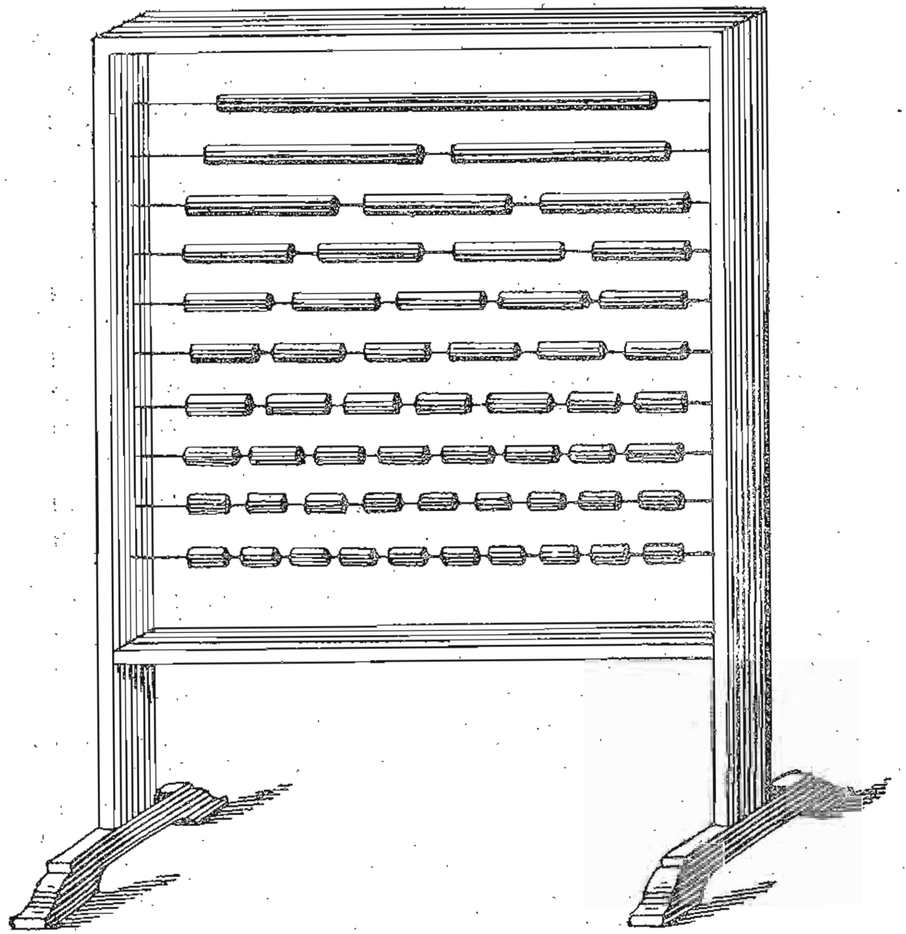
10. — Показало се као много практичније да се утврђене јединице за мерење не мењају, него да се задржи једна јединица, а по потреби рачуна са разломцима. Исто је тако и код скупина. Кад делимо 13 јабука четворици, боље је дати сваком по 3 целе, а само једну сећи, неголи *сећи* све јабуке. Остаје још само да се проуче радње са разломцима онако исто, као и радње са целим бројевима.

11. — Од интереса је споменути да има делова од целих, који потпуно личе на целе, као што је случај са пантљиком, и делова, који ни мало не личе на целе, као што су делови јабуке, погаче итд. Динар се уопште не дели. Граде се мањи делови од истог материјала, као што је *пола динара*. Могу се начинити мањи делови од динара по вредности, али од јевтинијег материјала, него што је сребро. Тада се може десити да једна **четвртина** или **десетина** буде по величини већа од самога динара, али мања по вредности.

12. — Има величина које се могу произвољно делити, тј. на колико хоћемо делова. Тај је случај са концем, пантљиком итд. Ми један конац можемо поделити на 2, 3, 4, 5, 6, 7, итд. једнаких делова. Ово су *произвољно дељиве величине*.

Постоје још величине, које не можемо произвољно делити. На пример један разред од 50 ученика. Можемо га поделити на 2 једнака дела, на 3 не можемо, на 4 не можемо, на 5 можемо, на 1000 не можемо итд.

13. — Ми смо са разломцима већ имали посла прошле године, само је то било мало скривено. То су очевидно *децимални бројеви*. Ту смо већ имали делове од целих јединица. Али то је био само један нарочити случај: јединицу смо делили на десете, стоте, хиљадите . . . . делове. Зато се децимални бројеви још зову *децимални* или *десетни разломци*.



Слика нам показује једну просту машину за рачунање разломцима. Такву справу може ученик сам да направи. На слици се види *једно цело, две половине, три трећине, четири четвртине итд.*

14. — Разломке треба увек очигледно претстављати и цртати. За цртање разломака најчешће се употребљавају дужи, кругови и правоугаоници. За очигледно претстављање неки употребљавају и лопту. Врло згодно је пресавијати или сећи пантљику од хартије, ломити палидрвца итд. Потребно је да ученик носи и за час аритметике све своје справе за цртање, нарочито лењир и шестар. Најбоље свеске су са квадрираном хартијом, управо онакве, какве су свеске државног издања.

ПРВИ ДЕО

Теорија бројева

ГЛАВА III

Прости и сложени бројеви

15. — Пре него што пређемо на проучавање рачунских радњи са разломцима, упознаћемо се са неким деловима из тзв. *теорије бројева*, са појмовима, који су нам потребни за рад са разломцима. То су *прости и сложени бројеви, дељивост бројева, растављање бројева на просте чиниоце, највећи заједнички чинилац и најмањи заједнички садржалац*.

16. — Каква је разлика између ова два дељења:

17 : 3 и 15 : 3 ?

Кажемо да је један ма који број А *дељив* неким бројем В, ако се број В садржи у А тачан број пута, тј. без остатка. Тада се број А зове *садржалац* или *дељеник* броја В; број В се зове *чинилац* или *делилац* броја А. Каже се још да је број В мера број А.

Ми ћемо звати број А **садржалац**, а број В **чинилац** броја А. За број А врло је згодан назив „вишекратник“, који се употребљава код Хрвата.

15 је дељиво са 3; 15 је садржалац броја 3, 3 је чинилац број 15.

Има бројева који немају никаквих чинилаца. Такав је на пример број 17. За њега се обично каже да има за чиниоце број 1 и самог себе. Такви бројеви зову се **прости бројеви**.

Бројеви, који осим 1 и самог себе садрже и друге чиниоце зову се **сложени бројеви**.

Именуј неколико простих бројева!

Питања и вежбања

1. Сви су парни бројеви сложени бројеви. Постоји само један који је прост. Именуј га!

2. Зашто су сви парни бројеви сложени бројеви?

3. Сви једноцифени непарни бројеви су прости бројеви изузев једног. Који је тај?

4. Следеће сложене бројеве растави на чиниоце: 6, 10, 14, 21, 22, 26, 38, 49, 58, 69, 87, 91, 121!

За писмено вежбање

1. Ератостеново сито. — Одредити све просте бројеве од 1 до 100. Овај задатак је први решио научник из времена старих Грка, Ератостен. (Живео је у Александрији од 276—194 год. пре Хр. р.) По њему је тај поступак и назван Ератостеново сито.

Напишу се сви непарни бројеви од 1 до 100, заједно са бројем 2: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99. Затим се прецртају сви бројеви који садрже 3, а број 3 се не прецрта. Потом сви бројеви који садрже 5. Многи од ових бројева су већ прецртани као садржаоци броја 3. Напослетку то исто урадимо и са 7. Резултат је тада овај: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Кроз сито смо просејали све сложене бројеве, остали су само прости.

Напомена. — При овом поступку ученик треба нарочито да запази чињеницу, да је множење сабирање једнаких сабирака.

2. Нацртај 1 dm^2 и подели га на cm^2! Замисли да се у сваком квадрату налази по један број почевши од 1 до 100, али упиши само просте бројеве у одговарајућа поља. Кад посматраш разне ступце, видећеш извесну правилност. Колико има свега простих бројева између 1 и 100? У ком ступцу има највише? Колико стубаца има само са једним бројем? Колико стубаца има без иједног броја? Објасни зашто ту нема простих бројева!

Напомена 1. — Прости бројеви су врло важни и играју велику улогу у теорији бројева. Они су били предмет испитивања многих математичара свих времена. Ератостенов поступак је значајан по томе, што се ни до данас није нашла једна општа формула за просте бројеве.

Напомена 2. — Простих бројева има бескрајно много.

Напомена 3. — Данас има таблица простих бројева до 9 милиона.

17. — Ми смо прошле године имали овакву једначину:

$$16 \cdot 10 + 16 \cdot 4 = 16 \cdot (10+4).$$

Одатле можемо прочитати ово важно правило: *Ако је сваки сабирак једнога збира дељив једним бројем, онда је тим бројем дељив и збир.* У овом случају сабирци су 16 10 и $16 \cdot 4$ или 160 и 64; и један и други дељиви су бројем 16, па је и збир $16 \cdot (10+4)$, или 224 дељив бројем 16.

То исто могли бисмо рећи и за разлику. *Ако су умањеник и умањилац једне разлике дељиви неким бројем, онда је и разлика дељива тим истим бројем.* На пример: 48 — 32. И 48 и 32 дељиви су са 8, па је и њихова разлика 16 дељива са 8.

Доказ: $48 - 32 = 8 \cdot 6 - 8 \cdot 4 = 8 \cdot (6 - 4)$.

ГЛАВА IV

ДЕЉИВОСТ БРОЈЕВА

18. — 1. Је ли број 3373 дељив са 2?

2. Да ли је број 3683 дељив са 3?

3. Садржи ли се број 8 у 638 без остатка? Према ономе што досада знамо, на ова питања није лако одговорити. Најчешће бисмо морали да пробамо. Међутим постоје правила, помоћу којих се може лако видети кад је један број дељив са 2, 3, 4 итд.

Бројеви дељиви са 2. — *Број је дељив са 2, ако се свршава са 0, 2, 4, 6 или 8.*

Пример: Број 356 је дељив са 2, јер се завршава са 6.

Доказ: $356 = 35 \cdot 10 + 6$. Производ $35 \cdot 10$ дељив је са 2, јер му је чинилац $10 = 2 \cdot 5$ дељив са 2. Тако дељивост зависи само од цифре на месту јединица, у овом случају 6.

Напомена. — Овај исти доказ, као и оне што следују, треба поновити на што већем броју произвољно изабраних примера.

19. Дељивост са 5. — *Број је дељив са 5, ако на месту јединица има 5 или 0.*

Пример: Број 435 је дељив са 5, јер му је последња цифра 5.

Доказ: $435 = 43 \cdot 10 + 5$. Први сабирак је дељив са 5, јер је то производ $43 \cdot 10$, у коме је чинилац $10 = 5 \cdot 2$ дељив са 5. Тако дељивост зависи само од последње цифре 5.

20. Дељивост са 9 и 3 — *Број је дељив са 9, ако му је збир цифара дељив са 9. Исто такво правило важи и за 3.*

Пример: Број 234 је дељив са 9 и 3, јер је збир цифара овог броја $2 + 3 + 4 = 9$.

Доказ: $234 = 200 + 30 + 4 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4$. Уместо 100 можемо написати $99 + 1$, место 10, $9 + 1$. Тада имамо:

$$234 = 2 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 4$$
$$234 = 2 \cdot 99 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 4$$
$$234 = (2 \cdot 99 + 3 \cdot 9) + (2 + 3 + 4).$$

Прва заграда на десној страни горње једначине је збир, у коме су оба сабирка $2 \cdot 99$ и $3 \cdot 9$ дељиви са 9, према томе и збир у тој загради је дељив са 9. Остаје само да се испита збир у другој загради. Ако је он дељив са 9, онда је сигурно и број 234. А тај други збир је у ствари збир цифара заданог броја 234.

Напомена 1. — Пошто је број 3 чинилац броја 9, то је природна последица, да се 3 садржи у сваком броју, у коме се већ садржи број 9.

Напомена 2. — Кад се пажљивије загледа у ово правило дељивости бројева са 9, може се мало прићи објашњењу пробе са 9, код множења и делења, о којој смо говорили прошле године.

На сличан начин помоћу броја 9 може се вршити проба сабирања и одузимања.

Задаци: Докажи да су бројеви 75, 444 и 762 дељиви са 3, и бројеви 135 и 333 дељиви са 9!

21. Бројеви дељиви са 4. — *Број је дељив са 4, ако је двоцифрен број, који образују цифре десетица и јединица дељив са 4.*

Пример: Број 216 је дељив са 4, јер се 4 садржи у 16.

Доказ: $216 = 2 \cdot 100 + 16$.

22. Дељивост са 6. — *Број је дељив са 6, ако се може поделити без остатка са 2 и 3. Зашто?*

23. Дељивост са 8. — *Број је дељив са 8, ако је троцифрени број, који образују цифре стотина, десетица и јединица, дељив са 8.*

Пример: Број 2104 дељив је са 8, јер је $104 = 8 \cdot 13$.

Доказ: $2104 = 2 \cdot 1000 + 104$.

Напомена 1. — Постоје правила дељивости и за бројеве 7, 11, 13 итд., али је засада лакше извршити пробу дељењем, неголи памтити та правила.

Напомена 2. — Кад смо проучили дељивост са 2, 3, 5, лако је сада распознати да ли је један број прост, кад је мањи од 100. Само треба приметити да су $49 = 7 \cdot 7$, $77 = 7 \cdot 11$, $91 = 7 \cdot 13$ једини бројеви мањи од 100, који нису прости, а при том нису дељиви ни са 2, ни са 3, нити са 5. Отуда имамо ово **практично упуство за распознавање простих бројева мањих од 100.** *Ако задани број није дељив ни са 2, ни са 3, нити са 5, а при том тај број није 49, 77 и 91, онда је то сигурно прост број.*

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Испитај да ли су ови бројеви дељиви са 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9: 64, 108, 112, 117, 120, 144, 204, 360, 1040, 1728!

2. Искажи сам један број који је дељив са 2; са 3; са 4; са 5; са 6; са 8; са 9!

3. Реци један број који је дељив са 2 и 3; са 2, 3 и 5; са 2, 3, 5 и 9!

4. Видети да ли су следећи бројеви прости бројеви; ако неки од њих то није, показати којим је једноцифреним бројевима дељив тај сложени број: 39, 49, 53, 63, 67, 69, 83, 93, 101, 107, 111, 119, 129, 188, 199, 201, 335, 441, 555, 2990.

Практично упутство за распознавање простих бројева уопште: *треба дати број делити редом простим бројевима*

2, 3, 5, 7, 11 итд., док се не добије количник који је мањи од употребљеног делиоца. Ако сва дељења дотле буду са остатком, онда је број који испитујемо прост број.

5. Пробањем покажи који су од ових бројева дељиви са 7: 133, 146, 162, 176, 185, 203, 259, 8638, 5929, 3157!

6. Којом цифром треба сменити нулу у бројевима 202, 1 046, 6 022, 30 111, 402 555, па да нови бројеви буду дељиви са 9?

7. Шта треба ставити на место цифре јединица у броју 2 347, па да тај број буде дељив са 2, са 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9?

8. Која је од ових година преступна: 1420, 1560, 1770, 1834, 1900, 1928?

9. Именуј један двоцифрени број, који је у исто време дељив са 3, 4 и 5; са 2, 4, 6, 8 и 9; са 2, 4, 8, и 11; са 3, 5, 6 и 10; са 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30!

10. Подели редом бројеве 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 са 3 и 9! Каква се правилност може запазити код количника и остатка?

11. Разлика цифара једног двоцифреног броја је 5, а број је дељив са 9. Који је тај број? Колико има таквих бројева?

ПИТАЊА

1. Кад кажемо да је један број А дељив неким бројем В?
2. Шта је садржалац једног броја?
3. Шта је чинилац једног броја?
4. Шта су прости, а шта сложени бројеви?
5. Зашто морају сви прости бројеви изузев 2, бити непарни бројеви?
6. Како сад можемо *дефинисати* парне и непарне бројеве?
7. Чиме се завршавају парни бројеви?
8. Који је број дељив са 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9?
9. Који су бројеви дељиви са 10?
10. Који су двоцифрени бројеви дељиви са 25?
11. Којим бројем је дељива 0, ако се сматра као број?
12. Који су то бројеви, који имају за чиниоце само бројеве 2 и 5?
13. Сваки број, који је дељив са 8, може се поделити без остатка са 2 и 4. Објасни зашто! Важи ли и обрнуто правило? Примери!

14. Кад се један број подели са 5, добије се исти остатак, као кад поделимо само његове јединице бројем 5. Зашто? Објасни то на примерима!

15. Изреци слично правило за број 4!

16. Може ли један непаран број бити дељив парним бројем? Примери!

17. Може ли паран број бити дељив непарним бројем? Примери!

18. Када се од једног произвољног броја одузме збир његових цифара, добијамо један нови број, који је дељив са 3 и 9. Објасни то на примерима, које ћеш сам изабрати! Покушај да изведеш доказ на исти начин, као што смо радили, објашњавајући дељивост са 3 и 9!

19. Узми један двоцифрен број и напиши цифре обрнутим редом! Добићеш два броја чија је разлика увек дељива са 9. Покушај да ово објасниш на примерима!

Напомена. — Разлика код троцифрених бројева може се лако погодити! Средња цифра је увек 9, а збир прве и треће такође 9. Овај случај може послужити као друштвена игра *погађање једног броја*. При томе се једном из друштва каже: напиши један троцифрени број; напиши још један са истим цифрама, само да цифре иду обрнутим редом; одузми мањи од већег; кажи ми прву цифру остатка; ја ћу погодити цео број. На пример 348, када се обрне 843, разлика је 495, прва цифра је 4, средња 9, а трећа допуна прве до 9.

24. Прости чиниоци. — Једна од првих примена простих бројева јесте растављање сложених бројева на просте чиниоце.

Број 36 има ове чиниоце: 2, 3, 4, 6, 9, 12 и 18. Сви се ови бројеви садрже у 36 без остатка. Међу њима има простих бројева 2 и 3, и сложених 4, 6, 9, 12 и 18. Нас нарочито интересују прости чиниоци, јер је сваки сложени број производ простих бројева, производ *простих чинилаца*. Број 36 се може овако написати:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3,$$

дакле састоји се из простог чиниоца 2, који се јавља 2 пута и простог чиниоца 3, који се јавља такође 2 пута. Ако сложени број поделимо једним његовим простим чиниоцем, количник ће бити производ осталих простих чинилаца.

25. — Растављање бројева на просте чиниоце. — Практично упутство: *Да бисмо један број раставили на просте чиниоце, треба да га поделимо његовим најмањим простим чиниоцем, затим добијени количник његовим најмањим простим чиниоцем, и тако продужимо, док не добијемо као последњи количник 1.*

Кад имамо посла са једноцифреним, двоцифреним и троцифреним бројевима, ми ћемо то растављање најчешће извршити усмено, пишући одмах просте чиниоце.

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

При том се говори: $420 = \mathbf{2} \cdot 210$; $210 = \mathbf{2} \cdot 105$; $105 = \mathbf{3} \cdot 35$; $35 = \mathbf{5} \cdot \mathbf{7}$.

Пишу се само чиниоци црње оштампани.

Пример 2. — Број 1260 раставити на просте чиниоце.

Решење. — $1260 = 2 \cdot 630$
$630 = 2 \cdot 315$
$315 = 3 \cdot 105$
$105 = 3 \cdot 35$
$35 = 5 \cdot 7$

Овако се говори, а пише се само

$$1260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Напомена 1. — У појединим случајевима лакше је и удобније, да се број најпре растави на сложене чиниоце, а потом на просте.

Пример: 260 раставити на просте чиниоце.

Решење: $260 = 26 \cdot 10 = 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13.$

Напомена 2. — Производе од више једнаких чинилаца можемо писати у облику степена. На пример:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$1\,260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Напомена 3. — Неки зову растављање на просте чиниоце *обрнута таблица множења*. Према томе не може се ни замислити успешно растављање на чиниоце, ако ученик не влада сигурно таблицом множења.

26. — Из ових растављања произилази да је један број, кад је дељив са више простих бројева, дељив и њиховим производом.

Пример: Број $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ дељив је и са $2 \cdot 3 = 6$, и са $2 \cdot 5 = 10$ и са $3 \cdot 5 = 15$.

Важи ли ово правило и за сложене чиниоце?

Може ли се на пример један број, који је дељив са 3 и 9, поделити без остатка и са $3 \cdot 9$?

Ако је један број дељив неким други бројем, онда је и сваки садржалац првог дељив другим бројем.

Пример: Пошто је 15 дељиво са 5, то се може и $15 \cdot 8$ или 120, поделити са 5 без остатка.

$$15 = 5 \cdot 3; \quad 120 = 5 \cdot 24.$$

27. — Ако треба раставити на просте чиниоце број од више цифара, онда се ради по истом практичном упутству, само се количници исписују. Поступак се види из примера које наводимо. Узећемо један троцифрен и један петоцифрен број.

450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

19 992	2
9 996	2
4 998	2
2 499	3
833	7
119	7
17	17
1	

$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ $\qquad$ $19\,992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 17.$

Питања и усмена вежбања

1. Шта су сложени, а шта прости чиниоци једнога броја?

2. Како гласи практично упутство за растављање бројева на просте чиниоце?

Растави на просте чиниоце:

3. 26, 34, 38, 39, 46, 57, 58, 65, 74, 77, 87, 91, 93, 95, 111, 115, 129, 159, 187, 209, 221, 237!

4. 12, 16, 18, 24, 30, 36, 42, 45, 48, 50, 60, 70, 90, 100!

5. Именуј двоцифрене бројеве, чији су сви прости чиниоци 2!

6. Именуј двоцифрене бројеве, који имају просте чиниоце само тројке или петице!

7. Међу двоцифреним бројевима има их 4 који се могу раставити на 5 простих чинилаца, а два који се могу раставити на 6 простих чинилаца. Који су ти бројеви?

8. Именуј све чиниоце бројева 12, 16, 18, 70, 90, 100, 150!

9. Који је број једнак производу $2 \cdot 5 \cdot 7$; $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$; $3^2 \cdot 5^2$; $2^2 \cdot 5^2 \cdot 13$; $2 \cdot 5 \cdot 3^3$; $2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^4$?

10. Колико пута један број треба да садржи чинилац 2, да би био дељив са 8, са 16, са 32? Колико пута чинилац 3, да би био дељив са 9, са 27, са 81?

11. Број 24 дељив је са 4 и 8; зашто није дељив са $4 \cdot 8$?
„ 30 „ „ „ 3 и 6; „ „ „ „ $3 \cdot 6$?
„ 40 „ „ „ 8 и 10; „ „ „ „ $8 \cdot 10$?

За писмено вежбање

1. Претстави у облику производа простих чинилаца: 120, 144, 160, 330, 360, 420, 625, 847, 880, 9, 99, 999, 9999, 119, 121, 132, 168, 243, 512, 1025, 1100, 1560, 1008, 8712, 1568, 6534, 7488, 1150!

2. Испиши оне бројеве између 100 и 400, који се могу раставити на два једнака проста чиниоца!

3. Потражи онај број који садржи 1) чинилац 2 три пута, а чинилац 3 два пута; 2) чинилац 2 три пута, чинилац 3 два пута, чинилац 5 једанпут!

4. Именуј све чиниоце бројева: 60, 98, 128, 384, 540!

Напомена 1. — Познато нам је већ да је број 60 некада код старих народа Месопотамије, служио као основа бројног система, исто тако као данас број 10. Постоје више тумачења откуда је та наклоност старих народа према томе броју. Једно тумачење је у томе, што број 60 има много чинилаца: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30.

Напомена 2. — Број свих чинилаца једнога броја једнак је производу за 1 повећаних изложилаца појединих простих чинилаца.

Пример. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Број чинилаца је $(2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Ту се рачуна и број 1 и сам број 60.

5. **Спријатељени бројеви.** — Још пре 25 столећа називани су спријатељени бројеви таква два броја, од којих је један једнак збиру свих чинилаца другог броја, подразумевајући ту и 1. Докажи да су бројеви 220 и 284 спријатељени бројеви!

6. **Савршени бројеви.** — Такви су бројеви који су сами једнаки збиру свих својих чинилаца, рачунајући ту и 1. Покажи да су такви бројеви 6, 28, 496!

7. **Изобилни и оскудни бројеви.** — Изобилни су бројеви који су мањи од збира свих својих чинилаца. Оскудни бројеви су већи од збира свих својих чинилаца. Нађи такве бројеве!

8. Одреди број n тако да буде:

$$n \cdot (n+1) = 42.$$

9. Нађи таква два броја x и y да имамо:

$$(x+y) \cdot (x-y) = 7.$$

12. Заједнички чиниоци. — Један број, који се у више датих бројева садржи без остатка, зове се заједнички чинилац тих бројева.

Пример: **48** је дељиво са	2	3	4		6	8		12		16		24	
60 је дељиво са	2	3	4	5	6		10	12	15		20		30

Заједнички чиниоци бројева 48 и 60 јесу 2, 3, 4, 6 и 12.

Који су заједнички чиниоци за 18 и 24, 42 и 56?

Међу заједничким чиниоцима два или више бројева од нарочите је важности онај, који је највећи.

29. Релативно прости бројеви. — Ако два или више бројева немају ни један заједнички чинилац (изузев 1), онда се они зову *релативно прости бројеви*, или *бројеви без заједничких чинилаца*. На пример: 9 и 10, или 20 и 21.

30. Највећи заједнички чинилац. — Највећи заједнички чинилац за два или више бројева, (краће н. з. ч.), је највећи број, којим се могу сви ти бројеви поделити без остатка.

Практично упутство за одређивање највећег заједничког чиниоца: *Треба дате бројеве раставити на просте чиниоце, па подвући оне који су заједнички, затим подвучене чиниоце једнога од бројева помножити.* Тако добијени производ биће н. з. ч.

1 *пример.* — Потражи н. з. ч. за бројеве 60 и 90!

Решење. $60 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}$

$90 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot \underline{5}$

Н. з. ч. је $2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{30}$.

2 *пример.* — Нађи н. з. ч. бројева 126 и 180!

Решење. $126 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 7$

$180 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 5$

Н. з. ч. је $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Поред тога што одређивање н. з. ч. има много примене код разломака, видећемо сад, а и доцније у вежбањима, да има велику примену и код задатака из практичног живота.

3 пример. — Имамо 36 белих и 48 црвених ружа. Желимо да од њих начинимо највећи могући број букета, тако да у сваком букету буде исти број белих и подједнак број црвених ружа. Колики ће бити број букета, и по колико ће ружа од обе боје доћи у сваки букет?

Решење. — Тражени број букета мора бити у исто време чинилац броја 36 и броја 48. Тај број треба да буде и највећи могући. То је дакле н. з. ч. бројева 36 и 48. Растављам ове бројеве на просте чиниоце:

$$36 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3$$

$$48 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3}$$

Подвлачим заједничке чиниоце. Н. з. ч. је $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Број букета биће 12 а у сваком ће бити по три беле и 4 црвене руже.

Напомена. — Ако је од два броја већи дељив мањим, онда је мањи број у исто време н. з. ч. за оба броја. На пример за 51 и 17 је н. з. ч. број 17.

31. Верижно дељење. — Има бројева чији се чиниоци врло тешко налазе. Такви су на пр. бројеви 437 и 667. У таквом случају за одредбу н. з. ч. употребљавамо други један поступак тзв. *верижно дељење.*

Практично упутство гласи: *Поделимо већи број мањим, па добијеним остатком мањи број. Деобу продужимо тако, делећи увек новим остатком претходни делилац, док не добијемо дељење без остатка. Последњи делилац је н. з. ч.*

Пример: Да се одреди н. з. ч. за бројеве 437 и 667.

Решење: 667 : 437 : 230 : 207 : 23
230 207 23 0
23 је н. з. ч.

За доказ примењујемо раније споменуто правило о дељивости збира, а бројеве 667 и 437 рашчланимо овако:

$$667 = 437 \cdot 1 + 230$$
$$437 = 230 \cdot 1 + 207$$
$$230 = 207 \cdot 1 + 23$$
$$207 = 23 \cdot 9.$$

Пошто сабирци $207 \cdot 1$ и 23 имају н. з. ч. 23, то се мора тај чинилац садржати у њиховом збиру 230. Даље сабирци $230 \cdot 1$ и 207 имају заједнички чинилац 23, па тај чинилац припада и њиховом збиру 437; пошто он припада бројевима 437 и 230, припашће и њиховом збиру 667, тако да бројеви 437 и 667 имају последњи делилац 23 као н. з. ч.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Именуј н. з. ч. за бројеве:

1. 4 и 6; 6 и 8; 6 и 9; 8 и 12; 12 и 18.
2. 6 и 14; 8 и 14; 10 и 15; 8 и 18; 10 и 24; 10 и 25.
3. 15 и 25; 18 и 27; 21 и 28; 14 и 42; 32 и 48; 36 и 60.
4. 44 и 66; 75 и 125; 98 и 147; 60 и 75; 39 и 78; 48 и 72.
5. 50 и 125; 60 и 105; 84 и 148; 60 и 75; 39 и 91; 48 и 96.
6. 240 и 360; 250 и 750; 360 и 400; 600 и 900; 400 и 1000; 900 и 1000; 1200 и 6000; 2400 и 6600; 4000 и 6400.
7. Ако горње парове бројева поделимо њиховим н. з. ч. биће добијени количници релативно прости бројеви. Зашто?
8. Именуј све заједничке чиниоце бројева 72 и 120; 84 и 105; 90 и 150; 720 и 960! Који су њихови н. з. ч.?
9. Кажи оне парове двоцифрених бројева, који имају број 25 као н. з. ч.!
10. Имамо две кесе ораха, у једној 45, а у другој 18 комада. Ми хоћемо ове орахе из прве и друге кесе да разделимо у мање кесе, али да у свима њима буде исти број ораха. Колико највише може бити ораха у свакој новој кеси?
11. 48 ученика II разреда добију за игру 72 лопте. Они треба да се поделе у једнаке групе и да на сваку групу дође подједнак број лопти. Ученици треба да се поделе у највећи могући број група. По колико ће ученика доћи у једну такву групу, и колико ће лопти добити свака група?

ПИТАЊА

1. Шта су заједнички чиниоци два или више бројева?
2. Шта је н. з. ч.?
3. Како гласи практично упутство за одређивање н. з. ч.?
4. Како се одређује н. з. ч. помоћу верижног дељења?
5. Шта су релативно прости бројеви?
6. Јесу ли два проста броја и релативно прости бројеви?
7. Именуј два сложена броја, који су релативно прости бројеви!
8. Именуј један сложен и један прост број, који ће имати заједнички чинилац! Који број то мора бити?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Нађи највећи заједнички чинилац за бројеве:

1. 45 и 72; 45 и 81; 72 и 162; 48 и 216; 128 и 224.
2. 142 и 165; 72 и 480; 45 и 162; 147 и 525; 168 и 504.
3. 180 и 396; 216 и 258; 320 и 540; 312 и 408; 720 и 960; 936 и 2925.
4. 231 и 273; 715 и 660; 755 и 1057; 429 и 6942; 813 и 1062; 999 и 2220.
5. 318 и 265; 432 и 720; 728 и 637; 611 и 376; 1024 и 4000; 617 и 1175.
6. 3575 и 4950; 2744 и 3773; 1248 и 4800; 3915 и 8100.
7. 9025 и 8909; 1111 и 111111; 4851 и 5733; 10353 и 14857.
8. Кад су 720 енглеских миља = 1152 km, који је најмањи број миља једнак тачном (целом) броју километара?
9. Имамо на расположењу 174 јабуке и 290 крушака. Од нас се тражи да начинимо највећи могући број пакета и да у сваком пакету буде исти број јабука и исти број крушака. Нађи колики ће бити број пакета и број јабука и крушака у сваком пакету!
10. Два лењира дугачка су 145 cm и 205 cm; треба да их поделимо на делове, који ће имати једнаку дужину. Колика ће бити највећа могућа дужина тих делова, кад треба да садрже тачан број сантиметара? По колико ће таквих делова имати сваки лењир?
11. Нађи највећи могући број, којим се могу поделити бројеви 1625 и 2281, тако да у првом случају добијемо остатак 8, а у другом остатак 4.

12. Два комада земље величине 12 ha 75 a и 17 ha 85 a треба да се поделе на једнаке делове. Ако се затражи да ти делови буду највећи могући, колики ће бити сваки део?

32. Заједнички садржалац. — Један број, у коме се више датих бројева садрже без остатка, зове се *заједнички садржалац* или *заједнички дељеник* тих бројева. *Пример:*

Садржаоци броја 4 јесу:	8	12	16		20	24	28		32	36
„ „ 6 „		12		18		24		30		36

Заједнички садржаоци за 4 и 6 јесу: 12, 24, 36, 48... Као што видимо има их бескрајно много. Од нарочите је важности онај заједнички садржалац, који је најмањи. У овом случају је 12.

33. Најмањи заједнички садржалац за више бројева је онај *најмањи* број, у коме се сви дати бројеви садрже без остатка. (Краће н. з. с.)

Н. з. с. више бројева је производ њихових простих чинилаца при чему се сваки прост чинилац узима онолико пута, колико се јавља у броју, који га највише садржи.

34. Одређивање н. з. с. — Практично упутство: *Ако су дати бројеви релативно прости бројеви онда је њихов производ н. з. с.*

Пример: За 4, 5 и 7 је $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$ н. з. с.

Ако дати бројеви нису релативно прости, поступак ће се видети из овог примера:

I *пример:* потражи н.з.с. за 15, 24 и 36!

Решење: $15 = 3 \cdot \underline{5}$

$$24 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 3 \quad \text{или} \quad 24 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot \underline{3 \cdot 3} \quad \text{или} \quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$$

Н.з.с. је $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{360}$. Или $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Треба све бројеве раставити на просте чиниоце, затим подвући чиниоце и то код оног броја, где се један чинилац највише јавља. Чинилац 2 се јавља код 24 и 36. Подвукли смо га код 24, јер се ту више пута јавља. Чинилац 3 се јавља код сва три броја, подвлачимо га код 36. Чинилац 5 се јавља само на једном месту и ту га подвлачимо.

Производ подвучених чинилаца је н. з. с. *Или производ простих чинилаца, кад се сваки узме са највишим степеном, којим се јавља.*

2 пример из практичног живота. — Два бициклиста обилазе једну кружну стазу. Први обиђе цео обим за 15 минута, други за 18 минута. Они пођу из исте тачке. После кога ће се времена обојица поново наћи на полазној тачки?

Решење: Први стиже на полазну тачку после $1 \cdot 15, 2 \cdot 15, 3 \cdot 15 \ldots$ минута; други долази на почетну тачку сваких $1 \cdot 18, 2 \cdot 18, 3 \cdot 18 \ldots$ минута. Тражено време биће изражено једним бројем минута, који ће у исто време садржати и 15 и 18.

Прво заједничко стизање на полазну тачку биће, према томе, дато бројем, који је н.з.с. за 15 и 18. Растављам на просте чиниоце 15 и 18:

$$15 = 3 \cdot \underline{5}$$
$$18 = \underline{2} \cdot \underline{3 \cdot 3}.$$

Подвлачим незаједничке и заједничке чиниоце, и то заједничке на оном месту где се највише јављају.

Производ подвучених чинилаца је $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$.

Бициклисти ће бити први пут заједно на полазној тачки после 90 минута. Тада је први обишао стазу 6 пута, други 5 пута.

Напомена. — Одређивање н. з. с. се знатно упрошћује, ако оне од датих бројева, који се у другима садрже, при раду просто изоставимо. Ако је на пр. један број дељив са 15, онда се сигурно и чиниоци броја 15,5 и 3 садрже у том броју без остатка.

Пример: Наћи н.з.с. за бројеве: 6, 9, 24, 30, 60 и 90.

Решење: Бројеве 6, 9, и 30 треба прецртати пошто се они садрже у понеком од осталих, те се само непрецртани бројеви имају раставити на чиниоце:

$$24 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 3$$
$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underline{5}$$
$$90 = 2 \cdot \underline{3 \cdot 3} \cdot 5$$

Н. з. с. је $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$.

35. **Метод вешала.** — Има још један начин одређивања н. з. с. названи *метод вешала.* Он је врло практичан, али од ученика не захтева много размишљања, него више механички рад. Због тога се тај метод не препоручује много. Почећемо са примером и шемом, па ће ученик, гледајући шему и читајући текст испод ње, разумети поступак.

Задатак: Да се одреди н. з. с. за бројеве 9, 10, 15, 16 и 20.

9,	10,	15,	16,	20	2
9,		15,	8,	10	2
9,		15,	4,	5	3
3,		5,	4,		

Десет треба прецртати, јер се садржи у 20. Бројеви 2, 2 и 3, десно од црте, су прости чиниоци, који су заједнички за два или више бројева. У сваком реду делимо таквим једним простим чиниоцем бројеве, који су њиме дељиви. Почињемо увек са најмањим простим чиниоцем, па их узимамо редом по величини. При томе се може десити да се један исти чинилац јави више пута. Испод бројева које можемо поделити, пишемо добијене количнике, а остале просто преписујемо непромењене. У трећој линији треба прецртати број 5, јер је чинилац броја 15. У четвртој линији имамо 3 релативно проста броја.

Н. з. с. $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 720$.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Именуј н. з. с. за бројеве:

1. 2 и 3; 2 и 4; 4 и 8; 2 и 6; 4 и 6; 7 и 9; 6 и 18.
2. 10 и 40; 20 и 30; 14 и 21; 24 и 36; 2, 3 и 7; 2, 3 и 4.
3. 30 и 45; 40 и 60; 100 и 150; 200 и 250; 2, 3 и 5; 3, 4 и 5.
4. 3, 5 и 7; 2, 3 и 8; 3, 2 и 6; 2, 5 и 8; 3, 4 и 10; 2, 6 и 8.
5. 5, 8 и 10; 4, 5 и 10; 6, 7 и 12; 10, 40 и 60; 5, 14 и 15; 6, 12 и 24.
6. 7, 10 и 14; 6, 10 и 18; 8, 16 и 24; 15, 30 и 60; 7, 14 и 21; 22, 44 и 88.
7. 26, 39 и 78; 40, 50 и 200; 100, 150 и 200; 250, 200 и 500.
8. 2, 3, 4, 5, 8; 3, 5, 6, 10, 20; 12, 24, 60, 72, 144.
9. 10, 20, 30, 40, 60; 100, 150, 200, 300, 600, 1800.
10. Предњи точкови на колима имају 3m у обиму, а задњи 4m. Колики најмањи пут треба кола да пређу, па да сваки точак начини тачан број обрта?
11. Остатак дељења једног броја са 6 и 15 је 3. Који је тај број?
12. Известан број куглица може да се поређа у редове, да у сваком реду буде по 15; исти број куглица може да се поређа у редове од по 9. Наћи најмањи број куглица који има ову особину!

13. Један ученик има у двема кутијама исти број кликера. Он вади из једне и из друге кутије, и то из прве по 12 одједанпут, а из друге по 20. Пошто је тако вадио кликере, док је могао, остало му је пет комада у свакој кутији. Нађи најмањи могући број кликера у свакој кутији!

ПИТАЊА

1. Шта је садржалац или дељеник једног броја?
2. Колико садржалаца може имати један број?
3. Шта је заједнички садржалац?
4. Колико може бити з. с.?
5. Шта је н. з. с.?
6. Шта је н. з. с. за релативно просте бројеве?
7. Како се одређује н. з. с.?
8. Који су бројеви дељиви са 100, 1000, 10 000?
9. Колико има двоцифрених бројева, којима је садржалац број 225?
10. Ако је један број дељив са 25, његове последње две цифре морају бити 00, 25, 50 или 75. Објасни зашто!
11. Један број множимо са 125, кад му допишемо 3 нуле, па га затим поделимо са 8. Образложи ово правило!

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Нађи н. з. с. за бројеве:

1. 28 и 80; 54 и 126; 48 и 180; 60 и 96; 75 и 120; 8, 12 и 20.
2. 9, 12 и 21; 18, 20 и 30; 12, 30 и 45; 18, 60 и 20; 30, 48 и 144; 14, 22 и 77.
3. 18, 36, 60 и 72; 18, 36, 45 и 81; 18, 56, 50 и 72.
4. 12, 36, 72 и 120; 16, 18, 35 и 63; 26, 33, 39 и 44.
5. 16, 21, 49 и 72; 7, 17, 68 и 238; 8, 12, 20, 30 и 80.
6. 3, 5, 12, 36 и 45; 9, 12, 16, 18 и 27; 21, 45, 60, 84 и 90; 12, 18, 27, 30 и 40.
7. 8, 12, 18, 24, 27 и 30; 4, 12, 18, 20, 48 и 72; 4, 12, 40, 48 и 60.
8. 28, 42, 63, 126, 189; 6, 9, 15, 18, 24, 30, 45 и 60.
9. 10, 12, 27, 48, 54, 72, 90, 120.
10. 3, 5, 7, 11, 13; 14, 25, 9, 17.
11. 24, 32, 36, 160, 200, 300, 540.
12. 80, 90, 100, 180, 240, 300, 450, 600, 800.
13. 81, 135, 216, 243, 270, 324, 1080.

14. 63, 84, 105, 126, 168, 196, 420, 525.
15. 20, 24, 25, 32, 40, 48, 75, 96, 108, 120, 192.
16. 33, 36, 55, 72, 99, 165, 270, 330, 540, 720.
17. На једним колима има предњи точак 168 cm, а задњи 216 cm у обиму. Колики пут начине кола, док оба точка начине цео број обрта?
18. Два зупчаста точка залазе један у други; први има 30 зубаца, други 24. По колико ће обрта сваки од њих начинити, док не дођу поново у додир два зупца, од којих је кретање отпочело?
19. Пароброди једне паробродске линије полазе из пристаништа сваких 12 дана, пароброди једне друге линије крећу са пристаништа сваких 28 дана. Знајући да је један заједнички полазак био 1 јануара 1929, пита се кад ће први пут после тога лађе да отпутују у исти дан.
20. Један пословни човек посети сваког 15 дана муштерију А, сваког 20 дана муштерију В, и сваког 24 дана муштерију С. Кад ће он први пут имати да посети све три муштерије истог дана? Колико је он посета тада учинио лицима А, В и С.
21. Нађи најмањи могући број, који подељен са 12,20 и 27, даје увек остатак 4.
22. **Јупитерови пратиоци.** — Планета Јупитер има 9 пратилаца. Међу њима има четири које је открио Галилеј, пошто је пронашао дурбин 1610 године. Та четири пратиоца обиђу своје путање за 42, 85, 172 и 400 часова. После ког ће времена ти пратиоци бити на истом месту, где су и сад? По колико обилажења начини за то време сваки од њих?

ДРУГИ ДЕО

Обични и десетни разломци

ГЛАВА V

Постанак обичних разломака

Нацртај једну дуж и подели је на 2 једнака дела! Како се зове сваки такав део? Како се пише? Ако сад сваки део поново преполовимо, колико делова тада добијамо? Какао се зове сваки такав део? Како ћеш добити тим путем $\frac{1}{8}$?

2. Шта значи $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{3}$?

3. Како се зове сваки део, кад се једно цело подели на 5, 9, 12, 60 једнаких делова?

4. На колико делова треба поделити 1 m, да бисмо добили 1 cm? Напиши 1 cm као део од метра!

За вежбање: 1 mm = cm (који део од), напише се $1\ mm = \frac{1}{10}\ cm$; 1 m = km; 1 dm² = m²; 1 m² = a; 1 m² = ha; 1 cm² = dm²; 1 l = hl; 1 пара = дин; 1ʰ = дана; 1ᵐⁿ = h?

37. Бројилац и именилац. —

Дуж AB подељена је на 10 једнаких делова AC, CD, DE итд. Отуда имамо AD = AC + CD = 1 десети део + 1 десети део = 2 десета дела. Начин писања је $\frac{2}{10}$. Исто тако је $CF = \frac{3}{10}$.

Колико је према томе AE, AF, AH, AK, CE, CG, EJ, FB?

Под обичним разломком разумемо један или више једнаких делова од целог.

Број који казује на колико је делова подељено цело зове се **именилац;** он стоји испод разломачке црте. Број који казује колико таквих делова треба узети, зове се **бројилац;** његово је место изнад разломачке црте.

$$\textbf{разломак} = \frac{\textbf{бројилац}}{\textbf{именилац}}$$

Напомена. — При писању разломака увек треба најпре написати разломачку црту.

Задатак. — Колико су часова $\frac{3}{4}$ дана?

Решење. — Треба један дан поделити на 4 једнака дела и од тога узети 3. Пошто је $\frac{1}{4}$ дана = 6 часова, то су $\frac{3}{4}$ дана 18 часова.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Потребни подаци се исписују на табли. Ученици затворе књиге.

1. Које разломке добијамо, кад се једно цело подели на 12 једнаких делова па узмемо 1 део, 2, 3, 7, 11 делова?

2. Како постају разломци $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{15}$? Претставити их очигледно пресавијањем или сечењем једне пантљике од хартије!

3. На колико се половина, четвртина, деветина, дванаестина може да подели једно цело?

4. Прочитај ове разломке: $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{6}{19}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{23}{42}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{41}{190}$, $\frac{81}{320}$, $\frac{43}{64}$, $\frac{14}{65}$, $\frac{148}{231}$, $\frac{163}{178}$, $\frac{263}{145}$! Прва четири претстави помоћу дужи и круга! Круг дели повлачењем полупречника из центра!

Практично упутство за читање разломака. — *Најпре се прочита бројилац, па се онда искажу делови, које казује именилац.*

5. Колико пута треба сипати течности једним судом од $\frac{1}{4}$ *l*, да би се напунио суд од једног литра?

6. Изрази разломком следеће ноте:

7. Како се пишу у облику разломка:

25 пара	као	део	од 1 дин		200 mm	као	део	од	1 m
12 mn	„	„	„ 1 h		5 h	„	„	„	1 дана
39 m²	„	„	„ 1 a		49 m²	„	„	„	1 ha
165 g	„	„	„ 1 kg		41 dm³	„	„	„	1 m³
90 *l*	„	„	„ 1 hl		5 ком.	„	„	„	1 туцета?

8. Претвори у паре: $\frac{1}{2}$ дин; $\frac{1}{4}$ дин; $\frac{3}{5}$ дин; $\frac{19}{10}$ дин!

9. Колико су cm: $\frac{3}{5}$ m, $\frac{7}{10}$ m, $\frac{9}{20}$ m, $\frac{4}{5}$ dm, 7 mm?

10. Колико минута су: $\frac{1}{3}$ h, $\frac{3}{4}$ h, $\frac{3}{5}$ h, $\frac{9}{20}$ h?

11. Колико месеци су: $\frac{1}{3}$ године, $\frac{1}{6}$ г, $\frac{3}{4}$ г, $\frac{7}{9}$ г?

12. $\frac{1}{4}$ km = (колико метара); $\frac{3}{5}$ km = m; $\frac{37}{100}$ km = m?

13. $\frac{1}{2}$ a = m², $\frac{7}{20}$ m² = dm²; $\frac{13}{50}$ dm² = cm²!

14. $\frac{3}{10}$ dm² = cm²; $\frac{19}{20}$ ha = a; $\frac{83}{50}$ ha = a!

15. $\frac{1}{2}$ m³ = dm³, $\frac{7}{10}$ dm³ = cm³, $\frac{19}{20}$ cm³ = mm³; $\frac{4}{5}$ hl = *l*; $\frac{87}{100}$ t = kg; $\frac{3}{8}$ m³ = *l*?

16. $\frac{3}{10}$ kg = g; $\frac{1}{50}$ kg = g; $\frac{5}{8}$ kg = g; $\frac{29}{50}$ kg = g; $\frac{29}{50}$ zt = kg?

17. $\frac{3}{4}$ године = месеци: $\frac{3}{4}$ h = mn; $\frac{3}{4}$ mn = sec?

18. 1 месец = година (написати 1 месец = $\frac{1}{12}$ године); 1 h = дана; 1 mn = h; 1 sec = mn; 7 мес. = год; 9 h = дана; 13 mn = h; 6 s = mn?

19. 97 m = km; 75 cm = m; 587 mm = m?

20. 245 m = km; 32 m² = a; 9 a = ha; 999 m² = ha, 77 dm² = m²; 55 cm² = dm²; 55 cm³ = m³?

21. 17 l = hl; 37 dm³ = m³; 277 cm³ = dm³?

22. Кад 1 l вина стаје 10 динара, пошто су $\frac{3}{4}l, \frac{3}{5}l, \frac{8}{10}l, \frac{11}{20}l$?

23. $\frac{3}{4}$ неког броја износе 9, колика је $\frac{1}{4}$? Колики је цео број?

У следећим примерима ученик сам да постави питање:

24. $\frac{4}{5}$ неког броја износе 24; $\frac{7}{8}$ неког броја износе 35

25. $\frac{8}{7}$ неког броја износе 18; $\frac{5}{12}$ неког броја износе 65.

26. $\frac{8}{13}$ неког броја износе 128; $\frac{6}{7}$ неког броја износе 276.

27. Један ученик има 32 кликера. Он у игри изгуби $\frac{3}{4}$ од тог броја. Колико му још остало?

28. У $\frac{2}{3}$ једне кесе могу стати 18 ораха. Колико може стати у целој кеси?

ПИТАЊА

1. Шта нам казује разломак?
2. Шта су бројилац и именилац?
3. Како се пише разломак?
4. Како се чита разломак?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Од 80 дрвета у једном воћњаку су $\frac{2}{5}$ јабуке, $\frac{5}{16}$ крушке, $\frac{3}{20}$ трешње, остало шљиве. Колико има од сваке врсте?

2. Један чиновник има годишњу плату 45 000 динара. Од тог он употреби $\frac{1}{2}$ за кирију, $\frac{1}{9}$ за одело и обућу, $\frac{1}{15}$ за дуван, $\frac{3}{50}$ за огрев, $\frac{1}{25}$ за осветлење. Колико му остаје за исхрану и друге потребе?

3. Неко остави после своје смрти 72 000 динара. Од тога добије жена $\frac{1}{3}$, свако од 5 деце по $\frac{1}{8}$, а остатак да се подједнако подели на 5 сродника. По колико добија сваки?

4. Нацртај једну дуж од 8 cm; измери $\frac{5}{8}$ ове дужи! Колико још преостаје? Отсеци од остатка још $\frac{1}{10}$!

5. Нацртај једну дуж од 6 cm, продужи је за $\frac{2}{3}$ њене дужине, затим од тако добијене дужи одузми $\frac{3}{10}$!

6. Нацртај дуж од 48 mm, продужи је налево за $\frac{1}{2}$, надесно за $\frac{5}{12}$, затим отсеци $\frac{3}{4}$ нове дужи!

7. Нацртај 6 једнаких дужи једну испод друге, па прву сматрај као $\frac{2}{3}$ неке друге веће дужи; другу као $\frac{3}{4}$, трећу као $\frac{6}{7}$, четврту као $\frac{4}{9}$, пету као $\frac{5}{12}$, а шесту као $\frac{3}{10}$ неке дужи! Затим нацртај 6 већих дужи знајући њихове делове!

8. Обим цифарника једног часовника је 76 cm 8 mm. Колики је пут описао врх сатне сказаљке, почевши од 12^h, кад је 4^h? Колико има cm између врхова обеју казаљки у 3^h, $5\frac{1}{2}$h?

9. Један ученик добије од оца за излет 32 динара. $\frac{1}{4}$ од тог платио је за вожњу, $\frac{3}{5}$ за храну, 2 динара дао другу на зајам. Колико је новаца вратио кући?

10. Један крчмар купи 9 hl 60 l вина; од тога он прода прве недеље $\frac{2}{15}$, друге $\frac{1}{4}$, треће $\frac{7}{24}$, а четврте остатак. Колико је сваке недеље пазарио, кад је један литар продавао по 8 динара?

11. Израчунај: $\frac{5}{12}$ од 4 km 44 m; $\frac{4}{15}$ од 14 ha 70 a;

12. $\frac{11}{60}$ од 79 hl 20 l; $\frac{11}{84}$ од 23 m³ 436 dm³;

13. $\frac{37}{100}$ од 8 дана 8^h; $\frac{25}{48}$ од 5 товара 76 kg;

14. $\frac{4}{15}$ од 4050 дин, 3600 kg, 2040 m!

15. $\frac{13}{45}$ од 42 дин 75 пара = дин пара?

16. $\frac{19}{70}$ од 63 cm = m cm; $\frac{17}{40}$ од 140 km = km m?

17. $\frac{7}{200}$ од 19 ha = a m²?

18 $\frac{3}{125}$ од 80 kg = g; $\frac{7}{500}$ од 17 m³ = dm³?

19. Израчунај: $\frac{2}{3}$ од 27, 120, 480, 900, 1500;
$\frac{3}{4}$ од 8, 20, 48, 72, 104, 172, 320, 396;
$\frac{3}{8}$ од 24, 32, 56, 112, 128, 144, 200;

$\frac{9}{20}$ од 60, 140, 260, 320, 880, 1000;
$\frac{11}{60}$ од 240, 540, 780, 1020, 1260, 1500?

20. Реши ове задатке (најчешће усмено):

$\frac{1}{5}$ једног броја је 16, који је тај број?
$\frac{2}{3}$ „ „ су 18, „ „ „ „ ?
$\frac{4}{5}$ „ „ „ 28, „ „ „ „ ?
$\frac{7}{9}$ „ „ „ 63, „ „ „ „ ?
$\frac{11}{12}$ „ „ „ 121, „ „ „ „ ?
$\frac{29}{60}$ „ „ „ 116, „ „ „ „ ?
$\frac{37}{80}$ „ „ „ 444, „ „ „ „ ?
$\frac{59}{100}$ „ „ „ 767, „ „ „ „ ?

21. Кад 1 *l* вина стаје 10 дин 50 пара, пошто су $\frac{2}{3}$ *l*; $\frac{3}{5}$ *l*; $\frac{7}{10}$ *l*?

22. Неко прими $\frac{4}{7}$ од 350 динара, а плати $\frac{2}{11}$ од 638 дин; колико му је преостало?

ПРОБЛЕМИ

1. Пошто је неко ишао већ 20 km, прешао је $\frac{5}{8}$ пута. Колико km има још да иде?

2. Колико година има један ученик, кад $\frac{5}{6}$ његове старости износе 10 година и 10 месеци?

3. Израчунај цену 1 *l* вина, кад једна боца од $\frac{3}{4}$ *l* стаје 1 дин 80 пара; 2 дин 40 пара; 2 дин 70 пара; 3 дин 60 пара; 4 дин и 50 пара.

4. Кад $\frac{4}{10}$ *l* пива стају 2 дин и 60 пара, пошто је 1 *l*?

5. Кад се у једно буре наспе 135 *l* течности, напуни се $\frac{3}{4}$. Колико литара може стати у то буре?

6. При картању један играч изгуби $\frac{3}{5}$ свога новца. Тако му остану свега 3 600 динара. Колико је новаца имао? Колики је његов губитак?

7. Кад се на $\frac{5}{6}$ једног броја дода још 15, добије се 200. Који је тај број?

8. Пошто је отсечено од једног комада платна $\frac{13}{20}$, остало је 28 m. Колико је m било у комаду?

9. Неко исплати $\frac{3}{5}$ свога дуга са 2 610 дин. Колики је цео његов дуг?

10. Један брод је прешао 225 km, тј. $\frac{5}{9}$ целог пута. Постави сам питање и одговори!

11. Једно лице потроши $\frac{2}{5}$ од свога новца. Преостало му је још 75 дин.

Напомена. — *Ученик нека покуша да и сам саставља овакве проблеме.*

ПОДЕЛА ОБИЧНИХ РАЗЛОМАКА

38. — Обични разломци деле се у две групе:

1. Привидни разломци, то су разломци, код којих је бројилац или једнак имениоцу, или је бројилац садржалац имениоца. На пр. $\frac{4}{4}, \frac{4}{2}, \frac{16}{8}$. Такав разломак у ствари није разломак, већ цео број, само написан у облику разломка.

Разломак, код кога су бројилац и именилац једнаки, има за вредност 1. На пр. $\frac{3}{3} = 1$.

Сваки цео број може се на безброј начина написати као привидан разломак.

Пример: $3 = \frac{18}{6}$.

Доказ: Пошто 1 цело има 6 шестина, то ће три цела имати $\frac{18}{6}$.

2. Истински разломци, код којих именилац није уопште чинилац бројиоца.

Истински разломци могу бити:

прави кад је бројилац мањи од имениоца, пр. $\frac{3}{7}$, и

неправи, кад је бројилац већи од имениоца, пр. $\frac{9}{7}$.

Вредност једног правог разломка мања је од 1, вредност неправог разломка већа је од 1.

Напомена. — Један цео број може да се изрази у облику разломка на тај начин, што се он сам узме као бројилац, а 1 као именилац. На пр. $8 = \frac{8}{1}$.

39. Мешовит број. — Збир од једног целог броја и једног правог разломка зове се *мешовит број.* Он се пише тако да се изостави знак сабирања. На пример: $2\frac{3}{5}$ уместо $2+\frac{3}{5}$.

Напомена 1. — При писању мешовитих бројева треба пазити да цели буду исто толико велики колико и разломак, а да разломачка црта дође код средине целих.

Напомена 2. — Доцније ћемо видети да се у математици практикује изостављање знака множења. Једини изузетак је код мешовитих бројева. Ту се изоставља знак сабирања.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Претвори најпре 1, а затим 3, 6, 9, 12 целих у половине, трећине, петине, дванаестине, шездесетине, стоте делове!

2. Колико целих има у 18 половина; у 69 трећина; 45 петина; 60 петнаестина; 108 дванаестина; 320 двадесетина?

3. Именуј један прави разломак, чији је именилац 3, 9, 12, 15, 30! Реци коме је бројилац 3, 5, 7, 10, 13, 40!

4. Реци један неправи разломак са имениоцом 2, 6, 12, 15!

5. Именуј неколико мешовитих бројева, који се налазе између 3 и 7!

6. 25 хлебова раздељени су тако, да је свако лице примило по $\frac{1}{4}$ хлеба. Колико је лица примило хлеба?

7. 112 m^3 дрва раздељени су сиротињи тако да је свако лице добило по $\frac{1}{8}$ m^3. Колико лица добију дрва?

8. Преобрати у паре: $1^{\text{дин}}\frac{1}{4}$, $2^{\text{дин}}\frac{3}{4}$, $8^{\text{дин}}\frac{1}{2}$!

9. Претвори у минуте: $1^{h}\frac{1}{4}$, $3^{h}\frac{7}{12}$, $\frac{2}{5}^{h}$, $10^{h}\frac{1}{15}$, $11^{h}\frac{3}{20}$!

10. $1^{\text{год}}\frac{1}{4}=$ месеца; $3^{\text{мес}}\frac{2}{5}=$ дана; $4^{\text{дана}}\frac{3}{4}=h$; $2^{\text{дана}}\frac{7}{8}=h$; $5\frac{1}{2}\,mn=sec$; $6^{mn}\frac{1}{20}=sec$?

11. Колико су cm: $2^{m}\frac{2}{5}$, $3^{m}\frac{3}{5}$, $4^{m}\frac{7}{20}$, $35^{m}\frac{3}{10}$, $36\frac{1}{2}\,dm$?

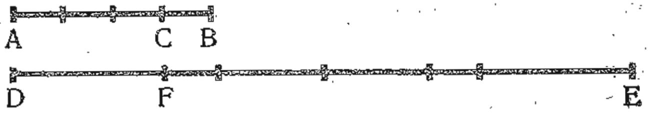
12. $2^{km}\frac{1}{2}=m$; $3^{km}\frac{3}{20}=m$; $4^{km}\frac{11}{100}=m$; $5^{m}\frac{2}{5}=dm$; $6^{cm}\frac{7}{10}=mm$; $7^{dm}\frac{4}{5}=mm$?

13. $2^{ha}\frac{3}{10}=a$; $3^{a}\frac{2}{3}=m^2$; $4^{m^2}\frac{9}{20}=dm^2$?

14. $2^{m^3}\frac{1}{10}=dm^3$; $3^{dm^3}\frac{37}{1000}=cm^3$; $4^{l}\frac{1}{3}=cm^3$; $5^{hl}\frac{9}{20}=l$; $6^{hl}\frac{13}{100}=l$; $7^{cm^3}\frac{3}{1000}=mm^3$?

РАЗЛОМАК ИСТО ШТО И КОЛИЧНИК

40. — Према ономе што смо досада рекли значи на пр. $\frac{3}{4}$ да једну јединицу треба поделити на 4 једнака дела и од тог узети 3 таква дела. Исти резултат добијамо, кад 3 целе јединице поделимо на 4 једнака дела, па узмемо један такав део. На слици дуж AB је једно цело, AC је $\frac{3}{4}$. DE је три пута



веће од AB, три цела. DF је четвртина од DE, тј. $\frac{1}{4}$ од 3 цела, AC = DF.

Пример: $\frac{7}{10}\,m=7\,dm$; то исто имамо, кад 7 m поделимо са 10, тј. $7\,m:10=70\,dm:10=7\,dm$.

Један разломак може се сматрати као количник, у коме је дељеник бројилац, делилац именилац.

Напомена 1. — Ово у ствари за нас није ништа ново. Ми смо још прошле године употребљавали положену црту као знак дељења.

Напомена 2. — Због тога многи, потпуно оправдано, разломке читају као дељење. На пр. $\frac{3}{5}$ чита се 3 подељено са 5. Чак се и реч „подељено" изоставља, па се краће каже *три са пет*, $\frac{14}{17}$ чита се *четрнаест са седамнаест*.

ПРЕТВАРАЊЕ НЕПРАВОГ РАЗЛОМКА У МЕШОВИТ БРОЈ

41. — Пример: $\frac{25}{3}=\frac{24}{3}+\frac{1}{3}=8+\frac{1}{3}=8\frac{1}{3}$, или $25:3=8+\frac{1}{3}=8\frac{1}{3}$. Тако неправ разломак $\frac{25}{3}$ даје мешовит број $8\frac{1}{3}$.

Обрнуто, један мешовит број може се претворити у разломак, кад се најпре цели претворе у разломак, по бројиоцу овог разломка дода бројилац правог разломка.

Пример: $3\frac{3}{8}=\frac{24}{8}+\frac{3}{8}=\frac{27}{8}$.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Који разломци постају, кад се 5 подели са 14, или 25 са 8; кад се узме шести део од 5, или 12 део од 17?

2. Колики је један део, кад се 8 подели на 15 једнаких делова, или 90 на 20, 50 на 27?

3. Један канап 3 m дужине исечен је на 8 једнаких делова. Колико је дугачак један комад?

4. 3 kg чаја раздељено је у 20 једнаких пакета. Колико је сваки пакет тежак?

5. Колико има целих у 48 половина; у 42 трећине; у 56 осмина; у 52 тринаестине; у 175 двадесетпетина; у 1125 стодвадесетпетина?

6. Колико има целих у разломцима: $\frac{21}{4}$, $\frac{19}{5}$, $\frac{84}{9}$, $\frac{124}{11}$. Како налазиш?

7. Претвори ове неправе разломке у мешовите бројеве: $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{21}{5}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{13}{5}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{26}{7}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{57}{2}$, $\frac{34}{3}$!

8. Претвори у године: 19 мес, 37 мес, 79 мес, 89 мес!

9. Колико су месеци: 47 дана, 71 д, 103 д, 149 д?

10. Колико су дана: 29 h, 41 h, 53 h, 79 h, 100 h, 145 h?

11. Колико је zt: 37 kg, 75 kg, 105 kg, 163 kg?

12. Какво двојако значење имају разломци: $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{11}{20}$, кад је њихово цело час? По колико минута имамо у сваком случају?

13. Претвори у неправе разломке: $1\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{4}{5}$, $7\frac{1}{7}$, $9\frac{5}{12}$!

14. Код следећих разломака да се промене места бројиоца и имениоца, тј. да се напише њихова **реципрочна** вредност (реципрочна = обрнута): $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{5}{26}$, $\frac{1}{290}$, $\frac{14}{55}$, $\frac{1}{314}$!

15. Која је реципрочна вредност за 2, 5, $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{5}$, $9\frac{5}{9}$?

16. 27 mm = cm (треба написати 27 mm = $\frac{27}{10}$ cm = $2^{cm}\ \frac{7}{10}$!) 137 cm = m; 3739 mm = m; 2043 cm = m; 10589 mm = m?

17. 3 m 17 cm = m; 4 m 61 mm = m; 5 m 1 dm 7 cm = m?

18. 381 dm^2 = m^2; 4309 cm^2 = dm^2; 6 m^2 3 dm^2 = m^2?

19. 207 a = ha; 2 ha 1 a = ha; 7 ha 3 a 77 m^2 = a?

20. 5381 dm^3 = m^3; 4 dm^3 139 cm^3 = dm^3; 2 m^3 53 dm^3 5 cm^3 = dm^3?

21. *Шала*: Ком разломку, различитом од јединице, остане иста вредност, кад га преокренемо?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Претвори у неправе разломке: $5\frac{11}{12}$, $17\frac{3}{4}$, $19\frac{5}{6}$, $21\frac{2}{9}$!

2. Претвори у мешовите бројеве: $\frac{101}{12}$, $\frac{179}{17}$, $\frac{200}{19}$, $\frac{3153}{30}$, $\frac{4247}{36}$!

2. Колико су простих година 130 недеља? 909 дана?

4. Који мешовит број добијамо, кад 5585 поделимо са 97?

5. Напиши као мешовит број 1000 део од 2987, 6071, 35 001, 100 232!

6. Колико g су: $\frac{1}{9}$kg, $\frac{5}{13}$kg, $\frac{8}{17}$kg, $\frac{17}{24}$kg, $\frac{53}{69}$kg?

7. Пошто је 1 m, кад 17 m вреде 195 пара; 11m 2 дин; 24 m 7 дин 70 пара; 60 m 29 дин 30 пара?

8. Напиши у облику мешовитог броја који изражава m: 7 m 33 cm; 8 m 1 dm 3 cm; 5 m 6 mm; 4 m 4 dm 4 cm 4 mm; 13 m 9 cm; 7 mm; 2 km 347 m 4 dm; 1 km 2 m 3 cm; 1 km 1 mm!

9. Колико m^2 су: 595 dm^2; 6100 cm^2; 4 m^2 9 dm^2; 1 m^2 1000 cm^2; 2 m^2 23 dm^2 24 cm^2; 4 m^2 3 dm^2 28 cm^2; 8 m^2 88 cm^2; 1 a 27 m^2 58 dm^2; 3 a 4 m 17 dm^2; 9 a 3 300 cm^2; 1 ha 24 a 35 m^2 26 dm^2?

10. Колико m^3 су 2 347 dm^3; 30 003 dm^3; 57 000 cm^3; 2 m^3 433 dm^3; 1 m^3 27 000 cm^3?

11. Колико kg су: 5 423 g; 7 007 g; 35 ℔; 2 kg 977 g; 1 ℔ 333 g; 3 ℔ 223 g; 14 zt 2 ℔; 1 zt 1 ℔ 1 g?

12. Колико година су 1777 дана, 407 недеља, 296 месеци?

ПРОШИРИВАЊЕ И СКРАЋИВАЊЕ РАЗЛОМАКА

42. — Израчунај 1) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ од 40 динара;
2) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$ од 60 m;
3) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{4}{20}$ од 120 kg!

Какве промене претрпи вредност разломка $\frac{1}{5}$, кад се са 2, 3 и 4 помножи 1) бројилац, 2) именилац, 3) и бројилац и именилац?

Последица од 3) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$; $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$; $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$.

Кад је 1 петина исто што и 4 двадесетине, онда су три петине три пута по четири двадесетине, тј. 12 двадесетина $\frac{3}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3\ .\ 4}{5\ .\ 4}$. Делови су додуше ситнији, 4 пута мањи, али их зато има 4 пута више, тако да се вредност разломка није променила.

Нацртај 3 једнаке дужи, једну испод друге, и подели прву на 2, другу на 4, а трећу на 6 једнаких делова! Колико четвртина има 1 половина дужи, колико шестина?

Кад и бројилац и именилац једног разломка помножимо једним истим бројем, кажемо да смо **проширили** разломак.

Како се добија од $\frac{12}{20}$ исто толика вредност $\frac{3}{5}$, како од $\frac{3}{15}$ добијамо $\frac{1}{5}$, како $\frac{2}{3}$ од $\frac{4}{6}$?

Овај поступак зове се **скраћивање** разломака.

Разломак се не мења, ако се бројилац и именилац помноже или поделе једним истим бројем.

Корист од проширивања разломака је углавном у томе, што се на тај начин више произвољних разломака могу довести на исти именилац. Тада се разломци зову *истоимени*. Једнаки именилац мора бити садржалац свих датих именилаца. Ради лакшег рада бира се увек најмањи заједнички садржалац датих именилаца. Он се зове **главни именилац**.

Пример: Разломке $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{17}{36}$, довести на исти именилац.

Решење: Заједнички именицац је н. з. с. за 8, 12, 16 и 36, дакле $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$. Сад треба све горње разломке проширити тако, да им именилац постане 72. Први ћемо проширити бројем $72 : 8 = \mathbf{9}$, други бројем $72 : 12 = \mathbf{6}$, трећи бројем **4**, а четврти са **2**.

Истоимени разломци су: $\frac{45}{72}$, $\frac{42}{72}$, $\frac{52}{72}$, $\frac{34}{72}$.

Практично упутство за довођење разломака на исти именилац:

Да бисмо довели два или више разломака на исти именилац, треба их најпре скратити на најпростији облик. Затим одредити н. з. с. за имениоце тих несводљивих разломака. То ће бити заједнички именилац. Бројиоце појединих нових разломака добићемо, кад заједнички именилац редом делимо старим имениоцима, па добијеним количницима множимо одговарајуће старе бројиоце.

Напомена 1. — Обично се каже, кад проширимо један разломак, да смо узели ситније делове, да смо га *уситнили*. Кад скратимо разломак, кажемо да смо узели крупније делове. Корист од скраћивања је у томе, што тада радимо са мањим бројевима, а боље и разумемо сам разломак! Нама је јасније, кад кажемо $\frac{2}{3}$ неголи $\frac{1600}{2400}$. Кад смо разломак скратили, ми смо га **упростили.**

Напомена 2. — Разломак који се не може скратити зваћемо *несводљив* разломак. Он се познаје по томе, што су му бројилац и именилац релативно прости бројеви.

Напомена 3. — Кад кажемо да се скрати један разломак, ми обично мислимо да се тај разломак доведе на несводљив облик, на најпростији облик. То се најбрже постиже, кад бројилац и именилац поделимо њиховим н. з. ч.

43. Упоређивање разломака по величини. — Кажемо да је један разломак већи од неког другог, ако је величина претстављена првим већа од величине претстављене другим разломком.

Ако два разломка имају исти именилац, онда је очевидно да је већи онај, чији је бројилац већи.

Пример: $\frac{4}{5}$ веће је од $\frac{3}{5}$.

Ако разломци немају исте имениоце, доводимо их најпре на исте имениоце, па затим упоредимо нове бројиоце.

Да бисмо упоредили $\frac{17}{21}$ и $\frac{13}{15}$ ми тражимо н. з. с. за 15 и 21, а то је 105.

Тада имамо:

$$\frac{17}{21} = \frac{17 \cdot 5}{105} = \frac{85}{105}$$
$$\frac{13}{15} = \frac{13 \cdot 7}{105} = \frac{91}{105}.$$

Пошто је 91 веће од 85, други разломак је већи од првог.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Потребни подаци увек се исписују, а ученици затворе књиге.

1. Претвори $\frac{1}{2}$ у четвртине, шестине, десетине, шеснаестине, двадесетине, стоте!

2. Преобрати у шездесетине: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{17}{30}$!

3. Колико има дванаестина у: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{3}$?

Да се $\frac{2}{3}$ претворе у разломак са имениоцем 9, 12, 18, 27, 33, 42, 48, 60, 72, 84!

5. $\frac{3}{5}$ да се изразе разломком чији ће бројилац бити: 6, 9, 18, 21, 24, 33, 42, 48, 60, 90, 120!

6. Изрази као разломак од године: 9 месеци, 60 дана, (једна година да се рачуна 360 дана), 72 дана, 270 д, 23 недеље, 32 недеље, 39 недеља!

7. Колико су часова: 72 mn, 90 mn, 102 mn, 144 mn, 200 mn, 48 s, 840 s, 1800 s?

8. Претвори у године: 60 недеља, 100 н, 32 месеца, 80 месеци, 100 месеци, 400 дана, (година = 365 дана), 1000 дана!

59 9. *Почађали рукописи.* Попуни нестале цифре: $\frac{3}{5} = \frac{.}{15}$, $\frac{5}{8} = \frac{.}{40}$, $\frac{7}{11} = \frac{.}{55}$, $\frac{9}{16} = \frac{.}{80}$, $\frac{19}{30} = \frac{.}{150}$, $\frac{7}{48} = \frac{.}{192}$, $\frac{20}{25} = \frac{.}{200}$, $\frac{8}{73} = \frac{.}{365}$.

59 10. $\frac{2}{3} = \frac{6}{.}$; $\frac{3}{8} = \frac{12}{.}$; $\frac{7}{9} = \frac{28}{.}$; $\frac{11}{15} = \frac{88}{.}$; $\frac{19}{24} = \frac{95}{.}$; $\frac{23}{36} = \frac{115}{.}$, $\frac{1}{60} = \frac{20}{.}$, $\frac{3}{100} = \frac{300}{.}$.

11. Скрати следеће разломке: $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{12}{28}$, $\frac{15}{27}$, $\frac{12}{27}$, $\frac{18}{32}$, $\frac{24}{39}$, $\frac{18}{36}$, $\frac{32}{56}$, $\frac{21}{35}$, $\frac{45}{48}$, $\frac{26}{39}$, $\frac{28}{42}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{15}{75}$, $\frac{36}{99}$, $\frac{48}{72}$, $\frac{42}{60}$, $\frac{56}{98}$!

12. Упрости: $\frac{27}{63}$, $\frac{15}{65}$, $\frac{27}{45}$, $\frac{36}{48}$, $\frac{48}{72}$, $\frac{65}{91}$, $\frac{75}{90}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{72}{96}$, $\frac{52}{91}$, $\frac{75}{105}$!

13. Следеће разломке најпре скрати, па затим претвори у мешовит број: $\frac{12}{8}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{27}{15}$, $\frac{32}{12}$, $\frac{40}{24}$, $\frac{42}{12}$, $\frac{60}{8}$, $\frac{60}{18}$, $\frac{60}{24}$, $\frac{60}{32}$, $\frac{60}{54}$!

14. Претвори у неправ разломак, пошто претходно извршиш потребна скраћивања: $2\frac{4}{22}$, $3\frac{10}{30}$, $4\frac{15}{18}$, $2\frac{8}{40}$, $10\frac{39}{52}$!

15. Изрази у динарима: 20 пара, 35 п, 40 п, 95 п, 125 п, 180 п, 230 п, 1005 п, 2190 п, 3001 п, 5550 п!

16. Неко троши од спремљене хране $\frac{1}{12}$ дневно. После колико дана ће му остати половина? Кад ће имати само четвртину?

17. Једна цев напуни $\frac{1}{20}$ резервоара за 1 сат. За које ће време напунити $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{10}$ тог резервоара?

18. Кажи по један нов разломак који ће бити једнак са следећим разломцима: $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{6}{19}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{23}{42}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{9}{36}$, $\frac{15}{25}$, $\frac{40}{100}$!

19. Доведи следеће разломке на исте имениоце: $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{8}$ и $\frac{9}{16}$; $\frac{11}{12}$ и $\frac{7}{15}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ и $\frac{7}{10}$; $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{25}$ и $\frac{29}{50}$!

20. Упореди по величини разломке: $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$, $\frac{17}{23}$ и $\frac{19}{23}$, $\frac{4}{7}$ и $\frac{4}{9}$; $\frac{8}{3}$ и $\frac{8}{5}$; $\frac{265}{148}$ и $\frac{265}{132}$, $\frac{14}{17}$ и $\frac{14}{19}$, $\frac{148}{185}$ и $\frac{224}{37}$, $\frac{117}{180}$ и $\frac{13}{20}$!

21. Колико половина литра су: 5 l, $7\frac{1}{2}$ l, $12 l \frac{2}{4}$, $6\frac{1}{4}$ hl, $1\frac{1}{3}$ hl, $\frac{6}{4}$ l, $\frac{45}{10}$ l, $\frac{1}{200}$ hl?

22. Претвори у m^2: 204 dm^2, 1200 cm^2, 12000 cm^2, $12^a\frac{1}{10}$, $\frac{1}{40}$ a, 1 a 8 m^2 185 dm^2!

23. 15 дин 60 пара = дин; 5 пара = дин; 1 m 15 cm = m; 2 km 625 m = km; 1750 m = km; 2 ha 56 a = ha; 2 a 5 m^2 = a; 17 000 m^2 = ha; 2 ha 36 a 90 m^2 = a; 3 m^3 125 dm^3 = m^3; 2 450 000cm^3 =m^3

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Нацртај круг и преполови га једним пречником. Повуци други пречник нормално на првом! Покажи да је $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$! Даљом деобом круга покажи да је $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$!

2. Нацртај један правоугаоник, чија је дужина 6 cm, a ширина 4 cm; раздели га на 24 cm^2! Извуци линијама првих 6 хоризонталних поља, која леже једно до другога! Колика је исечена површина у односу на цео правоугаоник? Сад извуци следећих 6 поља! Колико још преостаје од првобитне површине? Продужујући даље исти поступак, покажи, да је $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$!

3. Једна гимназија има 374 ученика; од тог броја налазе се у другом разреду 88 ученика; изрази тај број разломком од целокупног броја ученика!

4. Један чиновник, који има месечну плату 2400 динара, плаћа стан месечно 1600 динара. Који део од своје плате има да изда за стан?

5. Шта треба ставити на место x у једначинама: $\frac{x}{5} = \frac{3}{5}$! $\frac{x}{120} = \frac{1}{8}$; $\frac{15}{x} = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{2} = \frac{x}{16}$; $\frac{1}{3} = \frac{6}{x}$?

Напомена. — Кад овако помоћу једначине одредимо непознату величину x, кажемо да смо **решили једначину.**

6. Реши ове једначине: $\frac{24}{x} = \frac{1}{5}$; $\frac{7+x}{20} = \frac{1}{2}$; $\frac{60+x}{60} = \frac{3}{4}$; $\frac{8}{x+8} = \frac{1}{3}$; $\frac{6}{x+3} = \frac{2}{3}$; $\frac{x}{x+5} = \frac{1}{2}$; $\frac{x+2}{x+14} = \frac{1}{5}$; $\frac{10}{79+x} = \frac{1}{10}$.

7. Преобрати у 84-те делове: $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{9}{14}, \frac{16}{21}, \frac{37}{42}$!

8. „ „ 120 „ „ : $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{15}, \frac{19}{24}, \frac{29}{40}, \frac{59}{60}$!

9. „ „ 360 „ „ : $\frac{7}{2}, \frac{8}{15}, \frac{13}{18}, \frac{19}{30}, \frac{29}{40}, \frac{53}{60}, \frac{211}{180}$!

10. „ „ 1000 „ „ : $\frac{5}{8}, \frac{17}{20}, \frac{9}{40}, \frac{47}{50}, \frac{187}{200}, \frac{199}{250}, \frac{387}{500}$!

11. Следеће разломке довести на заједнички именилац $\frac{3}{16}, \frac{7}{20}, \frac{17}{30}, \frac{3}{8}, \frac{11}{15}, \frac{4}{90}; \frac{5}{6}, \frac{8}{21}, \frac{17}{28}, \frac{25}{56}; \frac{7}{8}, \frac{11}{15}, \frac{19}{50}, \frac{17}{60}$!

12. Доведи на исто име ове разломке: $\frac{1}{30}, \frac{7}{50}, \frac{10}{75}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{13}{42}$ и $\frac{25}{63}$; $\frac{5}{6}, \frac{7}{10}, \frac{21}{18}, \frac{19}{30}, \frac{47}{60}$ и $\frac{61}{90}$!

13. Упрости ове разломке: $\frac{75}{165}, \frac{455}{850}, \frac{880}{1440}, \frac{888}{925}, \frac{2000}{3600}$!

14. Претвори у мешовите бројеве: $\frac{1000}{640}, \frac{625}{400}, \frac{1204}{500}, \frac{2222}{550}$!

15. Колико има шестина у $1\frac{2}{3}$, 24-тих у $3\frac{5}{8}$, 60-на у $1\frac{5}{12}$?

16. „ „ осмина у $7\frac{1}{2}$, 120-тих у $1\frac{3}{4}$, стотих у $2\frac{3}{50}$?

17. Претвори $1\frac{1}{4}$ у 200-те делове; $3\frac{1}{3}$ у 300-те; $1\frac{1}{8}$ у 1000-те!

18. Скрати одмах н. з. чиниоцем: $\frac{140}{364}, \frac{294}{504}, \frac{945}{2520}, \frac{527}{1207}$!

19. Изрази разломком, па потом изврши скраћивање: 18 дин : 84 дин; 364 дин : 150 дин; 900 дин : 1620 дин!

20. 24 m : 84 m; 423 m : 750 m; 84 km : 288 km.

21. 145 m² : 29 m²; 111 a : 370 a; 2 ha : 320 a.

22. 650 g : 1 kg; 160 g : 1 ℔; 1 t : 625 g.

23. Који је део од 1 динара, 1 дин 60 пара; од 10 дин, 7 дин 50 пара?

24. Који је део од 45m, 11^m, 25? од 2m, 1^m, 375?

25. „ „ „ „ 1 ha, 6^a, 25; од 4 hl, 2 hl 80 *l*?

26. „ „ „ „ 1 m², 7500 cm; од 8 kg, 3 kg 360 g?

27. „ „ „ „ 1 дана, 7h 30 mn; од 1 недеље, 4д 9h?

28. Претвори у разломке са имениоцем 24: $\frac{3}{4}$, 2, $2\frac{2}{3}$, 5, $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, $1\frac{11}{12}$, 8, $8\frac{5}{6}$, 25!

29. Претвори у стоте делове: $\frac{11}{20}, 1\frac{1}{2}, \frac{27}{50}, \frac{5}{4}, \frac{46}{200}, \frac{75}{500}, \frac{160}{2000}$!

Изрази мешовитим бројем:

30. $\frac{143}{25}, \frac{186}{27}, \frac{264}{55}, \frac{300}{42}, \frac{365}{100}, \frac{600}{64}, \frac{729}{108}, \frac{1000}{625}$!

Претвори у неправе разломке:

31. $6\frac{2}{3}$, $24\frac{11}{35}$, $58\frac{14}{17}$, $36\frac{13}{15}$, $4\frac{23}{36}$, $47\frac{29}{60}$, $29\frac{9}{29}$.

32. $48\frac{12}{16}$, $3\frac{36}{60}$, $207\frac{75}{109}$, $87\frac{126}{365}$, $3\frac{720}{1200}$, $12\frac{1200}{1500}$.

33. Упореди, и ако има више од два разломка, уреди по величини: $\frac{3}{14}$ и $\frac{5}{14}$; $\frac{7}{16}, \frac{11}{26}$; $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$; $\frac{12}{7}$ и $\frac{12}{5}$; $\frac{13}{8}$ и $\frac{13}{10}$; $\frac{5}{8}$ и $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{9}$ и $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{24}$ и $\frac{11}{48}$; $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}$, и $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{9}, \frac{5}{16}, \frac{7}{24}, \frac{17}{48}$; $\frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{40}, \frac{17}{80}$!

34. Уреди следеће разломке по величини с тим, да се почне са најмањим: $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{3}{5}, \frac{4}{15}$; $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{19}{60}, \frac{11}{20}, \frac{13}{40}$; $\frac{5}{16}, \frac{7}{12}, \frac{11}{18}, \frac{13}{27}, \frac{17}{36}, \frac{29}{84}, \frac{35}{72}$!

35. Уреди по величини почев од највећег: $\frac{41}{60}, \frac{11}{36}, \frac{7}{12}, \frac{17}{45}, \frac{19}{72}, \frac{37}{90}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$!

36. Који разломци са имениоцем 24 између $\frac{12}{24}$ и $\frac{21}{24}$ могу да се скрате? Чиме?

37. Следећи разломци да се претворе у разломке са имениоцем 10, 100 и 1000: $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{18}{25}, \frac{31}{50}, \frac{1}{40}, \frac{7}{8}, \frac{81}{200}, \frac{44}{125}$.

38. Следећи разломци да се скрате, а да се претходно не извршује множење: $\frac{2 \cdot 7}{35}$; $\frac{3 \cdot 5}{40}$, $\frac{6 \cdot 13}{91}$, $\frac{2 \cdot 15}{7 \cdot 45}$, $\frac{15 \cdot 16}{30 \cdot 48}$, $\frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{21 \cdot 35 \cdot 42}$, $\frac{12 \cdot 17 \cdot 4}{6 \cdot 51 \cdot 18}$, $\frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{32 \cdot 45}$, $\frac{15 \cdot 17 \cdot 18}{24 \cdot 68 \cdot 45}$, $\frac{10 \cdot 36 \cdot 56}{54 \cdot 84 \cdot 30}$, $\frac{3200 \cdot 45 \cdot 4}{100 \cdot 360}$

39. Нађи разломак који ће бити једнак разломку $\frac{6}{11}$, а да у новом разломку буде збир бројиоца и имениоца 51!

40. Нађи разломак који ће бити једнак са $\frac{45}{61}$, да разлика између имениоца и бројиоца буде 80!

41. Којим бројем би била претстављена дужина од 18 m, кад би за јединицу узели 5 m?

42. Који разломак претставља дужину месеца јануара, ако се за јединицу узме 1) дужина 1921 године; 2) дужина 1924 године?

43. Нађи у метрима дужину, коју претставља разломак $\frac{18}{51}$, ако је за јединицу узета дужина од 17 m!

44. Једну дужину претставља разлломак $\frac{17}{21}$. Којим бројем би била претстављена та иста дужина, кад би узели 3 пута већу јединицу од претходне?

45. Једна дужина AB представљена је бројем $\frac{2}{3}$, једна друга дужина CD претстављена је бројем $\frac{4}{15}$. Који ће разломак претстављати дужину CD, ако се AB узме за јединицу!

46. *Шала*: Један ученик добије задатак да скрати разломке $\frac{26}{65}$ и $\frac{16}{64}$. Пошто није добро разумео скраћивање разломака, он прецрта шестице!? Изврши ти боље и сравни резултате!

47. Пробањем показати да су разломци $\frac{n}{2n+1}$ и $\frac{n+1}{2n+1}$ увек неосводљиви, кад се на место n стави ма који цео број. (2n значи производ броја 2 и броја n, тј. $2 \cdot n$.)

ГЛАВА VI

САБИРАЊЕ ОБИЧНИХ РАЗЛОМАКА

44. — Разликоваћемо два случаја:

1. Разломци са истим имениоцима. — Сабери $\frac{1}{7}$ и $\frac{3}{7}$! Претстави збир цртежом, у коме ће једна дуж бити подељена на 7 једнаких делова! Продужи нацртану дуж и пренеси даље још $\frac{2}{7}$! Колико је тада: $\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\frac{5}{7}$!

Израчунај: 1) $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$; 2) $\frac{3}{20}+\frac{7}{20}+\frac{4}{20}$; 3) $\frac{11}{60}+\frac{19}{60}+\frac{1}{60}$; 4) $\frac{87}{100}+\frac{40}{100}+\frac{23}{100}$; 5) $1\frac{2}{7}+3\frac{3}{7}$!

Практично упутство: *Разломци са истим имениоцима сабирају се, кад се њихови бројиоци саберу, па тај збир поделе заједничким имениоцем.*

Ако поред разломака има и целих и мешовитих бројева онда се најпре цели саберу.

Пример: $2+4\frac{1}{15}+3\frac{8}{15}+\frac{3}{15}=9\frac{12}{15}=9\frac{4}{5}$

2. Разломци са различитим имениоцима. —

Пример: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$?

Ми смо већ научили сабирање разломака са истим имениоцима. Раније смо се вежбали у довођењу разноимених разломака на исте имениоце. Према томе који је поступак у најтешњој вези са сабирањем разноимених разломака?

Решење: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$.

2 *пример:* $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{12+4+9+10}{24}=\frac{35}{24}=1\frac{11}{24}$.

Практично упутство: *Разломци са различитим имениоцима сабирају се, кад се најпре доведу на исти именилац, па потом саберу.*

Напомена: Пре сабирања треба све разломке скратити до најпростијег облика. Ако се међу сабирцима налазе неправи разломци, треба их најпре претворити у мешовите бројеве. При сабирању мешовитих бројева треба прво целе сабрати.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Потребни подаци исписују се на табли, а по потреби и делимични резултати.

1. $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=$; $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=$; $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=$; $\frac{4}{11}+\frac{10}{11}+\frac{8}{11}=$

2. $3\frac{7}{18}+2\frac{11}{18}=$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=$

3. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=$; $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=$; $\frac{1}{4}+\frac{7}{20}=$; $\frac{2}{3}+\frac{7}{12}=$

4. $\frac{11}{12}+\frac{3}{4}=$; $\frac{29}{50}+\frac{7}{100}=$; $\frac{11}{30}+\frac{1}{120}=$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=$

5. $\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=$

6. $2\frac{1}{4}+3\frac{2}{5}=$; $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}=$; $\frac{5}{4}+\frac{3}{8}=$

7. $\frac{35}{100}+\frac{24}{60}=$; $3\frac{1}{10}+\frac{19}{45}=$; $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{7}{12}=$

8. Који је разломак за $\frac{1}{3}$ већи од $\frac{8}{15}$?

9. Који је разломак за $\frac{1}{18}$ већи од $\frac{7}{30}$?

10. Кћи има 10 година и $\frac{3}{4}$, син је за $1\frac{1}{2}$ годину старији. Колико година има син ?

11. У један празан суд насуто је најпре $\frac{1}{2}$ *l*, потом $\frac{1}{4}$ *l* и најзад $\frac{1}{6}$ *l* воде. Колико има сад у њему воде?

12. Један путник прешао је пре подне $12^{km}\frac{3}{4}$, а по подне $15^{km}\frac{1}{5}$. Колико је прешао за цео дан?

13. Сабери $(4+\frac{3}{7})+(2+\frac{1}{7})$; $(5+\frac{11}{19})+(6+\frac{8}{19})$!

14. Повећај збир од $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4}$ за $\frac{1}{8}$!

15. $\frac{2}{3}\,m + \frac{8}{15}\,m + \frac{3}{4}\,m =$; $1^{km}\,\frac{1}{5} + 2^{km}\,\frac{7}{12} =$

16. Колико је x, када је $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 10$; $\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}x = 19$; $\frac{7}{8}x + \frac{2}{9}x = 79$; $\frac{1}{6}x + \frac{7}{9}x = 51$; $\frac{3}{4}x + \frac{11}{12}x = 100$?

ПИТАЊА

1. Како се сабирају разломци са истим имениоцима?
2. Које су радње у тесној вези са сабирањем разломака различитих именилаца?
3. Како гласи практично упутство за сабирање разломака са неједнаким имениоцима?
4. Како се сабирају неправи разломци и мешовити бројеви?
5. За колико се повећа један разломак, кад му се бројилац повећа за онолико јединица, колики је именилац?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Ученик да се вежба да унапред процењује резултате!

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} =$? Задатак потом решити цртежом, помоћу правоугаоника дужине 6 cm, ширине 5 cm, који је подељен на 30 cm^2, а поља која су избројена извући.

Провери ове једначине:

2. $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{5}{14} + \frac{9}{28} + \frac{17}{40} = 2\frac{51}{280}$.

3. $\frac{7}{11} + \frac{11}{18} + \frac{3}{22} + \frac{1}{36} = 1\frac{9}{22}$.

4. $\frac{5}{18} + \frac{6}{7} + \frac{5}{36} + \frac{2}{21} = 1\frac{31}{84}$.

5. $\frac{3}{16} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2} = 1\frac{47}{144}$.

6. $\frac{2}{5} + \frac{7}{12} + \frac{5}{8} + \frac{13}{30} + \frac{24}{40} = 2\frac{77}{120}$.

7. $\frac{24}{30} + \frac{30}{36} + \frac{44}{60} + \frac{48}{90} = 2\frac{11}{22}$.

8. $1\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + 3\frac{7}{9} + \frac{13}{15} + 5\frac{1}{20} = 14\frac{7}{9}$.

9. $\frac{1}{27} + \frac{5}{18} + \frac{4}{81} + \frac{11}{36} = \frac{217}{324}$.

10. $\frac{26}{65} + \frac{13}{39} + \frac{91}{78} + \frac{130}{104} = 3\frac{3}{20}$.

11. $\frac{2}{11} + \frac{3}{55} + \frac{7}{10} + \frac{9}{40} = 1\frac{71}{440}$.

12. $1\frac{1}{9} + 2\frac{11}{15} + \frac{40}{42} + \frac{72}{60} = 5\frac{3}{5}$.

13. $9\frac{13}{36} + 4\frac{9}{14} + 8\frac{4}{45} + 5\frac{2}{35} = 27\frac{3}{20}$.

14. $(7\frac{9}{20} + 2\frac{4}{5}) + (4\frac{7}{12} + \frac{9}{40}) = 24\frac{21}{60}$

15. $(7\frac{3}{8} + 9\frac{11}{15}) + 4\frac{1}{12} + (2\frac{7}{10} + 9) = 32\frac{107}{120}$.

16. $(3\frac{5}{6} + 1\frac{8}{21} + \frac{5}{18}) + (2\frac{11}{14} + \frac{8}{63} + 5\frac{1}{6}) = 13\frac{4}{7}$.

17. $(7\frac{4}{9} + \frac{19}{72} + 8\frac{17}{90} + \frac{103}{120}) + (1\frac{11}{48} + \frac{203}{360}) = 18\frac{79}{144}$.

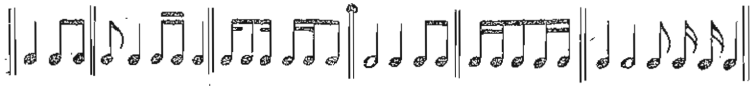
18. $\frac{60}{24} + 2\frac{27}{45} + \frac{39}{78} + \frac{100}{8} + \frac{125}{100} + \frac{140}{84} + \frac{200}{15} + \frac{119}{51} = 36\frac{41}{60}$.

19. Колико се добија, кад се изврши сабирање $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$, а колико је $\frac{2+3}{3+5}$?

20. Шта се добија, кад се сабере петина, осмина, дванаестина и петнаестина од 4? ($1\frac{9}{10}$.)

21. Који се збир добије, кад се саберу 24 део од 40, 25 део од 45 и 100 део од 65? ($4\frac{7}{60}$.)

22. Следеће ноте изрази обичним разломком и одреди дужину појединих тактова:



23. Који је број за $2\frac{14}{30}$ већи од збира $7\frac{2}{3} + 3\frac{14}{24} + 5\frac{11}{45}$?

24. Збиру $3\frac{7}{8} + 4\frac{11}{15} + 1\frac{11}{36}$ додати број за $\frac{7}{18}$ већи од $\frac{2}{3}$.

25. Повећај $\mathbf{2\frac{2}{3}}$ за $\mathbf{1\frac{7}{8}}$ и додај томе још збир $\mathbf{1}\frac{39}{100}+\mathbf{2}\frac{77}{120}$!

26. А сврши за један дан $\frac{3}{20}$, В $\frac{4}{25}$, С $\frac{1}{5}$, D $\frac{3}{10}$ једног посла. Који део посла ће свршити сви заједно за један дан?

27. Од три цеви напуни за један сат прва $\frac{1}{6}$, друга $\frac{2}{15}$ и трећа $\frac{1}{8}$ неког резервоара. Који део резервоара ће се напунити за 1 сат, кад се све три цеви пусте у исто време?

28. Један трговац отсече од једног комада платна $\mathbf{2}\frac{1}{2}$m, $4^{m}\frac{3}{5}$, 9 m 2 cm, 9 m 80 cm, $\mathbf{9}^{m}\frac{9}{10}$. Колико је свега m отсекао? Ради пробе изврши сабирање, али да избегнеш обичне разломке!

29. Неко потроши првог дана $\frac{1}{8}$, другог $\frac{4}{15}$, трећег $\frac{1}{12}$ спремљене хране. Колико је од хране потрошено, и колико му још остаје?

30. Један дужник исплати прве године $\frac{1}{12}$, друге $\frac{2}{15}$, треће $\frac{11}{30}$, четврте $\frac{1}{6}$ свог дуга. Колико је тиме отплатио?

31. Колики је збир четири мешовита броја, код којих је први $\mathbf{3\frac{3}{4}}$ а сваки следећи за $\mathbf{1\frac{2}{3}}$ већи од претходног?

ПРОБЛЕМИ

1. Нађи број од кога $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{9}$ и $\frac{7}{15}$ укупно износе 120!

Решење: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{9}$ и $\frac{7}{15}$ једнога броја износе (кад се саберу та три разломка) $\frac{1}{5}+\frac{2}{9}+\frac{7}{15}=\frac{9+10+21}{45}=\frac{40}{45}$. Кад $\frac{40}{45}$ једног броја износе 120, онда $\frac{1}{45}$ изнеће 40 пута мање, дакле $\frac{120}{40}=3$. Кад $\frac{1}{45}$ неког броја износи 3, онда тај цео број, тј. $\frac{45}{45}$ изнеће 45 пута више тј. $3 \cdot 45 = 135$. Тражени број је 135.

2. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{9}$ од запремине једног бурета износе за 1 [illegible] l више од 1 hl; колико литара хвата буре?

3. Нађи број који премаша за 10 збир од своје трећине и четвртине.

Решење: $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ неког броја износе $\frac{7}{12}$ тог броја. Сам број је већи за 10 од својих $\frac{7}{12}$ тј. кад се на $\frac{7}{12}$ тог броја дода 10 добије се сам број. Али с друге стране, ми можемо добити сам број, ако на $\frac{7}{12}$ додамо $\frac{5}{12}$, што значи да $\frac{5}{12}$ броја износе 10. Кад $\frac{5}{12}$ једног броја износе 10, $\frac{1}{12}$ изнеће 5 пута мање, дакле, $\frac{10}{5}=2$. Кад $\frac{1}{12}$ износи 2, онда цео број, или $\frac{12}{12}$ изнеће 12 пута више, дакле $2 \cdot 12 = 24$. Тражени број је 24.

Проба: $\frac{1}{3}$ од 24 је 8, $\frac{1}{4}$ износи 6. Збир од трећине и четвртине је $8+6=14$. Сам број 24 већи је од овог збира за 10.

Напомена. — Код проблема треба увек извршити пробу.

4. Нађи број који је утростручен једнак својој половини увећаној за петину тог броја и још за 46.

5. Једно лице се коцка и у првој партији изгуби $\frac{2}{5}$ од свог новца; у другој партији добије 40 динара; затим се повуче без добитка и губитка. Колико је новаца то лице имало у почетку?

6. Два радника радећи засебно свршили би један посао, први за 15 дана, други за 10 дана. За које ће време посао бити готов, кад раде заједно?

Решење: Питамо се најпре који ће део посла бити свршен за 1 дан, кад раде обојица. Кад први сврши цео посао за 15 дана, за један дан израдиће $\frac{1}{15}$ од целог посла. Други ће за један дан израдити $\frac{1}{10}$ од посла. Обојица за један дан ће свршити $\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{2+3}{30}=\frac{1}{6}$. Кад за један дан ураде $\frac{1}{6}$ целог посла, онда ће, очевидно, сав посао свршити за 6 дана.

7. **Задаци цеви и базена.** — Још стари грчки математичари **Херон** и **Диофант** решавали су задатке *цеви* и *базена.* Мисли се да су они творци те врсте задатака. Тачно се не зна какви су били њихови задаци, јер су се они у току времена мењали, а слично тим задацима стварани су и други. На пр. малопређашњи задатак бр. 6 личи на задатак цеви и базена. Ови задаци спадају међу најлепше и много помажу вежбању и развијању оштроумља код ученика. На **пример:**

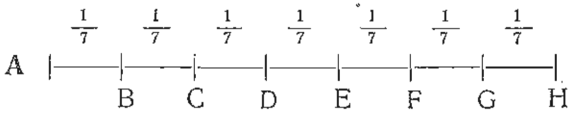
У један базен тече вода из две цеви. Сама прва цев напунила би базен за 4 часа, сама друга за 12 часова. За које ће се време напунити базен, ако отворимо обе цеви одједанпут? Решење слично проблему бр. 6.

8. Један базен може да се пуни кроз 3 цеви. Прва сама напунила би га за 6 часова, друга за 8, а трећа за 12 часова. Кад се пусте све три цеви одједанпут, за време од 2 сата, у базен утече 435 *l* воде. Колика је запремина базена.

ГЛАВА VII

ОДУЗИМАЊЕ РАЗЛОМАКА

45. Разломци истих именилаца. —

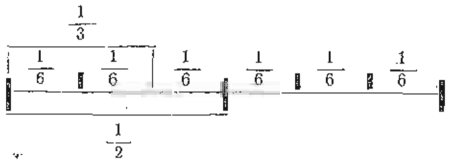


На слици је $AF = \frac{5}{7}$ и $AC = \frac{2}{7}$; која дуж одговара тада разлици $\frac{5}{7} - \frac{2}{7}$? Шта треба додати делу $AB = \frac{1}{7}$, да се добије $AE = \frac{4}{7}$? Колико седмина треба одузети од дужи AH, да се добије дуж AD?

Колико је: $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$; $\frac{7}{11} - \frac{3}{11}$; $\frac{13}{20} - \frac{9}{20}$; $\frac{29}{40} - \frac{19}{40}$?

Практично упутство: *Разломци са истим имениоцима одузимају се, кад се од бројиоца умањеника одузме бројилац умањиоца, па се добијена разлика подели заједничким имениоцем.*

46. Разломци различитих именилаца. —



1. Колика је на горњој слици разлика $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$?

2. Претстави једним цртежом разлику $\frac{4}{5} - \frac{7}{10}$ помоћу правоугаоника, чије су стране 5 cm и 2 cm, поделивши га на 10 cm^2! Најпре се извуку последња 2 cm, тако, да остану $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, затим још 7 cm^2 тако, да последњи cm^2 претставља тражену разлику између $\frac{4}{5}$ и $\frac{7}{10}$.

3. Израчунај $\frac{3}{4} - \frac{7}{12}$! Размишљај на исти начин као код сабирања разломака са неједнаким имениоцима!

Практично упутство: *Разломци са неједнаким имениоцима одузимају се, кад се најпре доведу на једнаке имениоце, па потом изврши одузимање.*

Напомена. — При одузимању мешовитих бројева треба најпре одузети *целе*.

1 пример : $\frac{5}{12} - \frac{5}{18} = \frac{15 - 10}{36} = \frac{5}{36}$.

2 пример : $5 - \frac{5}{16} = 4\frac{16}{16} - \frac{5}{16} = 4\frac{11}{16}$.

3 пример : $6\frac{2}{3} - 2\frac{3}{4} = 4\frac{8-9}{12} = 3\frac{20-9}{12} = 3\frac{11}{12}$.

Напомена. — У трећем примеру, пошто су $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ или $9 > 8$ узели смо од целих умањеника једну јединицу и претворили је у дванаестине, па додали разломку умањеника и дибили $\frac{8}{12} + \frac{12}{12} = \frac{20}{12}$, те на тај начин омогућили одузимање.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. $1 - \frac{1}{2} =$; $1 - \frac{1}{3} =$; $3 - \frac{5}{6} =$; $\frac{33}{50} - \frac{17}{50} =$

2. $3\frac{11}{24} - 1\frac{7}{24} =$; $2\frac{7}{100} - \frac{50}{100} =$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$; $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} =$

3. $\frac{7}{10} - \frac{69}{100} =$; $\frac{11}{1000} - \frac{1}{100} =$, $\frac{59}{100} - \frac{21}{50} =$; $\frac{79}{360} - \frac{13}{60} =$

4. $13\frac{83}{120} - 20\frac{71}{102} = ; 48\frac{122}{500} - 35\frac{72}{500} = ; \ 6 - 4\frac{7}{8} =$

5. $\frac{5}{9} - \frac{1}{3} = ; \ \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = ; \ \frac{5}{16} - \frac{1}{8} = ; \ \frac{1}{4} - \frac{1}{5} =$

6. $\frac{5}{8} - \frac{2}{5} = ; \ \frac{7}{12} - \frac{3}{8} = ; \ \frac{11}{24} - \frac{19}{72} = ; \ \frac{3}{20} - \frac{3}{25} =$

7. $8 - 5\frac{13}{20} = ; \ 24 - 11\frac{17}{50} = ; \ 49 - 12\frac{5}{12} =$

8. $3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{10} = ; \ 5\frac{7}{8} - 3\frac{1}{4} = ; \ 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$

9. $3\frac{3}{8} - 2\frac{1}{4} = ; \ 7\frac{1}{8} - 4\frac{11}{60} = ; \ 8 - 4\frac{13}{16} = ; 5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} =$

Реши следеће једначине:

10. $x + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}; \ x - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}; \ 1 - x = \frac{7}{12}; \ \frac{1}{5} - x = \frac{1}{10}$!

11. $x + \frac{9}{20} = 2; \ \frac{2}{3} + x = \frac{7}{9}; \ x = 2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{12}; \ x = 2\frac{1}{6} - \frac{1}{3}; \ 9\frac{4}{15} - 1\frac{5}{6} = x.$

12. Колико се мора одузети од следећих разломака, да би се добила $\frac{1}{2}$: $\frac{5}{6}, \frac{9}{10}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{5}{9}, \frac{43}{60}$?

13. Допуни до $\frac{3}{4}$ разломке: $\frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{17}{24}, \frac{41}{60}, \frac{74}{100}, \frac{299}{400}$!

14. Разлика између $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ једног броја износи 2. Који је тај број?

15. $\frac{4}{5}$ једнога броја за 6 су веће од његове половине. Који је то број?

16. $\frac{8}{15}$ једнога броја веће су за 34 од $\frac{1}{4}$ његове. Који је тај број?

17. Да ли је $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$?

18 Колико је: $\frac{3}{5} - 2 - \frac{2}{5} + 1 + \frac{4}{5}; \ \frac{6}{11} + 2 - \frac{3}{11} - 1; \ 7 + \frac{3}{5} + (2 - \frac{1}{5}) - (3 + \frac{1}{5}); \ 6 - (\frac{1}{5} + 2) - (3 - \frac{3}{5} + \frac{1}{5})$?

ПИТАЊА

1. Како гласи практично упутство за одузимање разломака са једнаким и неједнаким имениоцима?

2. Како се одузимају мешовити бројеви?

3. Шта морамо радити, кад је разломак умањиоца већи од разломка умањениковог?

4. Један неправ разломак налази се између 2 и 3; колико пута можемо одузети именилац од бројиоца таквог разломка?

5. Нађи два разломка тако да им именилац буде 17, да се разликују за 1, а да им бројиоци не пређу 18!

6. Шта ће бити са разломком $\frac{4}{9}$, кад му се бројилац и именилац повећа за 1? Да ли ће порасти или се смањити?

7. Пробај то исто са разломком $\frac{15}{7}$!

8. Пробај то исто са више правих и неправих разломака, па изведи правило!

9. Шта ће бити са разломцима, ако им бројиоце и имениоце смањујемо за 1?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. $\frac{1}{9} - \frac{1}{12} = ; \frac{35}{36} - \frac{5}{27} = ; \frac{12}{35} - \frac{5}{21} = ; \frac{1}{36} - \frac{1}{18} =$

2. $5\frac{11}{20} - \frac{7}{8} = ; 9\frac{4}{15} - \frac{5}{6} ; \ 16\frac{3}{8} - 1\frac{7}{12} =$

3. $18\frac{1}{10} - 6\frac{5}{12} = ; \ 27\frac{5}{21} - 16\frac{11}{35} = ; \ 20\frac{11}{30} - 13\frac{7}{12} = ; 15\frac{15}{16} - 12\frac{9}{20} =$

4. $8 - 4\frac{2}{5} = ; 10 - 2\frac{9}{17} = ; \ 2\frac{7}{30} - 1\frac{13}{55} = ; 9\frac{37}{360} - 3\frac{59}{540} =$

5. $4\frac{1}{21} - 3\frac{9}{14} = ; 5\frac{3}{16} - 1\frac{7}{12} = ; 7\frac{4}{27} - 6\frac{5}{18} =$

6. $20\frac{43}{209} - 17\frac{9}{38} = ; 5\frac{5}{25} + (9 - 6\frac{1}{15}) =$

7. Нађи разлику бројева $23\frac{9}{10}$ и $14\frac{11}{12}$!

8. Умањеник је $2\frac{5}{6}$, умањилац $1\frac{4}{7}$, колика је разлика?

9. Разлика два броја износи $3\frac{1}{6}$. Већи број је $10\frac{1}{9}$, колики је мањи?

10. Који је од разломака $\frac{13}{26}$ и $\frac{42}{65}$ већи и за колико?

11. За колико се повећа или смањи разломак $\frac{77}{95}$, кад се бројиоцу и имениоцу дода 5, или од истих одузме 5?

12. За колико је већи 50 део од 169, од 12 дела од 25?

13. За колико је мањи 15 део од 178, од 16 дела од 200?

14. $150 - (62\frac{13}{81} - 45\frac{17}{54}) = ; (11 - 8\frac{5}{24}) - (1 - \frac{1}{32}) =$

15. $(27\frac{11}{63} - 19\frac{29}{84}) - (1\frac{5}{12} + 2\frac{2}{9} + 3\frac{4}{11}) =$

16. $(\frac{11}{111} - \frac{2}{74}) + (\frac{3}{4} - \frac{17}{37}) + (3 - \frac{133}{222} + \frac{35}{148}) =$

17. За колико треба повећати збир бројева $8\frac{1}{9}$ и $2\frac{1}{15}$, да бисмо добили 18?

18. За колико треба смањити збир бројева $3\frac{1}{8}$ и $\frac{11}{12}$, да би се добила разлика тих бројева?

19. Да се од 10 одузме $6\frac{5}{12}$, а добијеној разлици да се дода број за $\frac{1}{4}$ већи од $\frac{3}{8}$?

20. Колико треба одузети од збира бројева $3\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{12}$ да бисмо добили број, који је за $\frac{3}{5}$ мањи од $1\frac{7}{20}$?

21. Колико недостаје до 20 целих. кад саберемо $8\frac{5}{18}$ и $4\frac{1}{12}$?

22. Збир углова у троуглу је 180^0. Кад је први угао $87^0\frac{1}{3}$, други $49^0\frac{5}{12}$, колики је трећи?

23. Збир углова у четвороуглу је 360^0. Од њих је први $90^0\frac{5}{12}$, други $45^0\frac{4}{15}$, трећи је толики колико износи збир прва два. Колики је четврти угао?

24. Обим једног троугла је $7^m\frac{3}{4}$. Једна страна је $2\frac{5}{8}$m, друга $1\frac{13}{20}$m. Колика је трећа страна?

25. Разлика два броја је $3\frac{5}{21}$. Колики је умањеник, кад је умањилац једнак збиру $\frac{5}{14} + \frac{5}{49}$?

26. Разлика два броја је $7\frac{3}{4}$. Умањеник је за $5\frac{4}{9}$ мањи од 16. Одреди умањилац!

27. Кад се од извесног броја одузме разлика $17 - (\frac{11}{12} - \frac{3}{8})$ остаје $2\frac{3}{4}$. Који је тај број?

28. Одреди x из следећих једначина: $6\frac{7}{24} + x = 7\frac{2}{3}$; $12\frac{1}{2} = 5\frac{1}{6} + x$; $x - 6\frac{7}{12} = 3\frac{5}{8}$; $7\frac{19}{30} - x = 2\frac{3}{4}$!

29. $6\frac{15}{16} - x = 9 - 3\frac{19}{40}$; $3\frac{2}{9} = 13\frac{1}{4} - x$; $x - (6\frac{7}{15} - 3\frac{11}{12}) = 4\frac{1}{12} + \frac{13}{56}$; $x + (68\frac{5}{8} + 47\frac{5}{6}) = 132\frac{7}{12}$.

30. За колико постане већи разломак $\frac{2}{3}$, кад се бројиоцу и имениоцу дода 6?

31. За колико постане мањи разломак $\frac{15}{16}$, кад се од бројиоца и имениоца одузме 12?

32. За колико се повећају $\frac{7}{15}$, кад се бројилац повећа за 4, а именилац за толико исто смањи?

ГЛАВА VIII

АГРЕГАТИ РАЗЛОМАКА И МЕШОВИТИХ БРОЈЕВА

47. — Пример: $9\frac{1}{7} - 4\frac{3}{14} + 1\frac{5}{6} - 5\frac{1}{21} = 1\frac{6-9+35-2}{42} = 1\frac{41-11}{42} = 1\frac{30}{42} = 1\frac{5}{7}$.

Из примера можемо извести ово **практично упутство:** *Треба сабрати целе позитивних чланова, у овом случају $9 + 1 = 10$; потом целе негативних чланова, у овом случају $4 + 5 = 9$; од збира позитивних одузети збир негативних $10 - 9 = 1$. Затим разломке довести на исти именилац и написати их, како је то учињено, да бројиоци граде за себе један агрегат, па тај агрегат бројилаца израчунати.*

Напомена. — Агрегат се друкчије зове *алгебарски збир.* Ми ћемо касније видети, кад будемо говорили о *негативним* бројевима, како је могућно да се овакав израз зове збир, кад у њему има бројева, које треба одузети.

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. $2 - 1\frac{3}{16} - \frac{9}{40} =$; $\frac{5}{12} - \frac{7}{18} + \frac{19}{24} + \frac{3}{20} - \frac{1}{6} =$

2. $\frac{7}{8} + \frac{11}{12} - \frac{1}{4} - 1\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + 2\frac{3}{4} - 1\frac{5}{8} =$

Провери ове једначине:

3. $9\frac{7}{16} + 16\frac{11}{80} - 10\frac{1}{2} - 1 = 14\frac{3}{40}$.

4. $\frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{30} = 0$

5. $\frac{3}{4} - \frac{17}{50} + \frac{38}{100} - \frac{4}{5} + \frac{5}{16} - \frac{27}{80} + \frac{1}{40} = 0$.

6. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{7}{15}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{11}{40}-\frac{5}{12}=2.$

7. $47\frac{5}{27}-3\frac{2}{3}-31\frac{5}{54}-2\frac{5}{6}-\frac{43}{216}=10.$

8. $1\frac{1}{9}-2\frac{7}{27}-3\frac{5}{18}+7\frac{1}{3}+\frac{53}{36}=4\frac{41}{108}.$

9. Од једног комада платна од 90m дужине отсечено је најпре $26^{m}\frac{1}{4}$, потом $8^{m}\frac{7}{10}$, најзад 11 m 75 cm. Колико је преостало?

10. Један комад земље има $1^{ha}4^{a}\frac{3}{4}$; од тога се прода за три плаца и то $20^{a}\frac{2}{5}$, $27^{a}\frac{3}{20}$ и $28^{a}\frac{3}{8}$; још има да се уступи за улицу $8^{a}\frac{17}{20}$. Колико је преостало?

11. У један базен утиче вода из две цеви за сат $15^{hl}\frac{1}{8}$ и $17^{hl}\frac{2}{3}$, док једновремено на два места истиче по $9^{hl}\frac{7}{20}$ и $10^{hl}\frac{13}{20}$. Колико ће у базену бити hl после једног сата, кад је у њему већ било $5^{hl}\frac{1}{10}$?

12. Збир три броја износи 24. Разлика прва два је $2\frac{1}{16}$, већи је од њих за $1\frac{7}{12}$ мањи је од 100. Израчунај трећи број!

13. Збиру бројева $43\frac{8}{15}$ и $21\frac{11}{18}$ додај разлику између $39\frac{1}{4}$ и $21\frac{3}{5}$! Затим добијени резултат допуни до 100!

14. Од 4 члана једног агрегата, који су по реду $437\frac{11}{200}$, $59\frac{37}{80}$, $329\frac{19}{40}$ и $186\frac{137}{250}$, два средња су негативна. Колика је вредност тог агрегата?

15. Напиши агрегат од 5 чланова, где су други и пети негативни, а чланови су по реду $5\frac{1}{32}$, $5\frac{7}{8}$, $9\frac{13}{16}$, $\frac{31}{70}$ и $1\frac{21}{40}$! Потом одреди његову вредност!

ГЛАВА IX

МНОЖЕЊЕ И ДЕЉЕЊЕ РАЗЛОМАКА ЦЕЛИМ БРОЈЕМ

46. Множење разломака целим бројем. —

Пример: $\frac{4}{15}\cdot 3=$? Овај задатак можемо решити на два начина:

1. Нацртај правоугаоник дужине 5^{cm}, ширине 3^{cm} и подели га на 15 $^{cm^2}$! Извуци три пута по четири поља, која се налазе једно до другога, дакле 3 пута по $\frac{4}{15}$ од целог правоугаоника! Колика је извучена површина у односу на цео правоугаоник?

2. Начин: $\frac{4}{15}\cdot 3=\frac{4}{15}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{4+4+4}{15}=\frac{4\cdot 3}{15}=\frac{4}{5}.$

Овде немамо ништа ново. Множење целим бројем своди се на сабирање једнаких сабирака.

Практично упутство. — *Разломак се множи целим бројем, кад се бројилац тог разломка помножи целим бројем, а именилац задржи непромењен.*

Напомена. — Пре него што се приступи множењу треба обратити пажњу, да ли именилац разломка и цео број којим множимо имају заједничких чинилаца. У случају да имају, треба скратити н. з. ч.

1 *пример*: $\frac{11}{24}\cdot 16=\frac{11}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=\frac{11\cdot 2}{3}=7\frac{1}{3}.$

2 *пример*: $\frac{7}{18}\cdot 6=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$

3 *пример*: $\frac{5}{8}\cdot 8=5$. Какво се правило одавде може прочитати?

49. Множење мешовитог броја. — Пошто је мешовит број збир од целог броја и једног правог разломка, то треба помножити оба сабирка. Често је лакше да се мешовит број претвори у неправ разломак.

Пример: $2\frac{3}{5}\cdot 3=(2+\frac{3}{5})\cdot 3=6+1\frac{4}{5}=7\frac{4}{5}$;

или: $2\frac{3}{5}\cdot 3=\frac{13}{5}\cdot 3=\frac{39}{5}=7\frac{4}{5}.$

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=$; $\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=$; $\frac{2}{7}\cdot 3=$

2. $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=$; $\frac{3}{8}\cdot 5=$; $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=$

3. $\frac{2}{15}\cdot 2=$; $\frac{5}{28}\cdot 9=$; $\frac{5}{12}\cdot 11$; $\frac{79}{80}\cdot 16=$; $\frac{72}{225}\cdot 35=$

4. $\frac{13}{42}\cdot 6=$; $\frac{17}{63}\cdot 9=$; $\frac{5}{21}\cdot 49=$; $\frac{500}{222}\cdot 37=$

5. $5\frac{1}{4} \cdot 4 =$; $4\frac{2}{3} \cdot 7 =$; $6\frac{4}{5} \cdot 12 =$; $3\frac{9}{20} \cdot 5 =$

6. $2\frac{6}{7} \cdot 14$; $33\frac{1}{3} \cdot 27 =$; $2\frac{7}{20} \cdot 60 =$

7. $\frac{5}{12} \cdot 60 =$; $4\frac{19}{200} \cdot 400 =$; $1\frac{17}{9000} \cdot 18000 =$

8. $\frac{8}{15} \cdot 10 =$; $\frac{11}{20} \cdot 25 =$; $\frac{10}{21} \cdot 14 =$; $\frac{7}{36} \cdot 24 =$

9. Одреди збир 8 једнаких сабирака, од којих је сваки $3\frac{3}{4}$!

10. Колико износе укупно четвороструки и шестоструки број $\frac{17}{60}$?

11. Помножи са 12: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{17}{36}$, $\frac{29}{60}$!

12. „ „ 18: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{54}$, $\frac{13}{90}$, $\frac{17}{180}$!

13. „ „ 40; $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{50}$, $\frac{11}{80}$, $\frac{19}{720}$!

14. „ „ 120: $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{15}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{20}$, $\frac{87}{120}$!

15. $\frac{7}{8}$ године = месеци; $8\frac{1}{6}$ год = мес; $\frac{5}{8}$ мес = дана?

16. $\frac{5}{8}$ дана $= h$; $3^h\frac{1}{3} = mn$; $\frac{17}{30}h = mn$; $2^{mn}\frac{1}{12} = sec$?

17. Кад $\frac{1}{8}$ m платна стаје $\frac{3}{4}$ дин, пошто су 8m, 24 m?

18. Кад 1 *l* вина стаје 8 дин $\frac{1}{4}$, пошто су 6*l*, 12*l* 18*l*?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Ученик да се вежба у процењивању резултата!

1. $\frac{5}{14} \cdot 21 =$; $\frac{2}{27} \cdot 18 =$; $\frac{103}{120} \cdot 12 =$; $\frac{229}{3000} \cdot 9 =$

2. $\frac{90}{355} \cdot 145 =$; $\frac{37}{60} \cdot 144 =$; $7\frac{7}{79} \cdot 79 =$

3. $\frac{91}{120} \cdot 300 =$; $2\frac{7}{24} \cdot 32 =$; $5\frac{89}{120} \cdot 72 =$

4. $\frac{87}{800} \cdot 160 =$; $\frac{203}{225} \cdot 45 =$; $\frac{581}{1000} \cdot 40 =$

5. $20\frac{43}{111} \cdot 6 \cdot 37 =$; $\frac{29}{360} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 =$

6. Колико је x, кад је $\frac{x}{6} = 4\frac{2}{9}$; $x:12 = 3\frac{\ }{8}$; $x : 25 = \frac{14}{15} \cdot 9$; $\frac{x}{30} = 9\frac{1}{6} \cdot 4$; $\frac{x}{36\frac{11}{12}} = 1\frac{2}{55}$?

7. Један зупчаст точак има 78 зубаца, који су на растојању од $2^{cm}\frac{5}{12}$. Колики је обим точка?

8. Кад једна пећ троши дневно $16^{kg}\frac{1}{4}$ угља, колико је угља потребно за три зимска месеца?

9. Један извор даје за минут $4^l\frac{1}{20}$ воде. Колику количину воде даје за $1^h\frac{3}{5}$?

10. У једној породици троши се просечно $\frac{3}{20}$ m^3 дрва за једну недељу. Колико се троши гориво за четврт године кад се кубни метар рачуна по 220 динара?

11. Помножи $2\frac{11}{60}$ са 2, 4, 8, 32! Како се може један резултат добити из претходног? Пробај!

50. ДЕЉЕЊЕ РАЗЛОМКА ЦЕЛИМ БРОЈЕМ

1. Преполови једну погачу, па од половине узми поново половину! Који део од целе погаче претставља такав један део?

2. Нацртај једну дуж, подели је на 7 једнаких делова и одреди $\frac{6}{7}$! Колика је од тог половина, трећина, шестина?

Реши на сличан начин: $\frac{8}{9} : 4$; $\frac{10}{11} : 5$! Какво правило се може одатле извести?

3. Али како ћемо поступити, ако бројилац није дељив целим бројем? На пример: $\frac{5}{7} : 2$! Може ли се и овај пример некако довести у везу са ранијим примерима? Решење: $\frac{5}{7} : 2 = \frac{10}{14} : 2 = \frac{5}{14}$.

Израчунај на исти начин: $\frac{6}{13} : 5$; $\frac{8}{15} : 3$; $\frac{9}{20} : 7$!

Како се може врло просто из $\frac{5}{7} : 2$ добити резултат $\frac{5}{14}$?

4. Нацртај једну дуж и одреди од ње $\frac{3}{4}$! Колика је половина овог комада? Пробај да узмеш $\frac{5}{6}$ дужи и да одредиш половину од тога!

Покажи једним цртежом да је одиста $\frac{5}{7} : 2 = \frac{5}{14}$!

Све претходне резултате можемо скупити у ово **практично упутство** за дељење разломака целим бројем: *Један разломак дели се са целим бројем, кад се, или именилац помножи, а бројилац задржи, или бројилац подели тим бројем. а именилац задржи непромењен.*

Напомена. — При дељењу *мешовитих* бројева поступа се на исти начин као и код множења.

Пример: $6\frac{4}{5} : 2 = 3\frac{2}{5}$; $6\frac{4}{5} : 17 = \frac{34}{5} : 17 = \frac{2}{5}$.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Подели $2\frac{2}{5}$ са 2, 3, 4, 6, 8, 12 и 24!
2. Подели $3\frac{3}{7}$ са 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24!
3. $3\frac{3}{5}$: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18!
4. $4\frac{2}{7}$: 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 24, 30.
5. $\frac{3}{5} : 4 =$; $\frac{2}{9} : 3 =$; $\frac{12}{13} : 4 =$; $\frac{4}{19} : 8 =$; $\frac{15}{18} : 5 =$
6. $2\frac{1}{2} : 5 =$; $3\frac{3}{4} : 3 =$; $3\frac{1}{2} : 7 =$; $2\frac{2}{3} : 4 =$
7. $\frac{9}{40} : 50 =$; $\frac{7}{37} : 25 =$; $\frac{9}{11} : 47 =$; $\frac{1}{100} : 100 =$
8. $11\frac{1}{9} : 100 =$; $\dfrac{\frac{5}{3}}{10} =$; $\dfrac{\frac{3}{7}}{12} =$; $\dfrac{\frac{7}{20}}{14} =$; $\dfrac{\frac{8}{9}}{24} =$
9. $\dfrac{3\frac{1}{5}}{16} =$; $\dfrac{7\frac{1}{7}}{10} =$; $\dfrac{6\frac{2}{3}}{40} =$; $\dfrac{333\frac{1}{3}}{2000} =$
10. $\frac{3}{4}m : 2 =$; $\frac{7}{8}m^2 : 15 =$; $2l\frac{1}{4} : 12 =$; $6^{kg}\frac{5}{6} : 4 =$
11. Претвори у године: $\frac{1}{2}$ месеца; $\frac{2}{3}$ мес; 2 мес $\frac{1}{4}$!
12. Изразима у месецима: $\frac{1}{3}$ дана; $2\frac{1}{2}$ д; $3^{д}\frac{1}{3}$; 3д; 3 h!
13. Колико m су: $7\frac{1}{2}$ dm, $2^{dm}\frac{1}{4}$, $6^{cm}\frac{2}{3}$, $37\frac{1}{2}$cm?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. $7\frac{3}{5} : 9 =$; $3\frac{3}{4} : 7 =$; $8\frac{2}{3} : 11 =$; $5\frac{2}{9} : 8 =$

3. $2\frac{3}{5} : 13{,}38$ и 95 $19\frac{19}{24} : 19 =$; $27\frac{27}{30} : 27 =$; $913\frac{1}{2} : 36 =$

3. $4\frac{2}{9} : 19{,}38$ и 95; $101\frac{1}{99} : 19 =$; $5\frac{167}{365} : 332 =$; $20\frac{4}{7} : 12 =$
4. Претвори у метре: $47\frac{1}{2}$ cm; $18^{cm}\frac{3}{4}$; $112\frac{1}{2}$ mm!
5. Колико m^2 су: $8^{dm2}\frac{8}{9}$, $4^{dm2}\frac{1}{16}$, $18^{dm2}\frac{3}{4}$?
6. „ m^3 „ : $111^{dm3}\frac{1}{9}$ $14l\frac{2}{7}$, $10l\frac{10}{19}$?
7. „ месеци „ : 16 дана и $\frac{4}{11}$, $20^{д}\frac{10}{13}$, 18 h?
8. „ дана „ : $28^{h}\frac{4}{5}$, $13^{h}\frac{5}{7}$, 48 mn?
9. „ часова „ : $17\frac{1}{2}$ mn, $12^{mn}\frac{12}{19}$, 54 mn?
10. 15^{h} 45^{mn} = дана; 1000^{mn} = дана; 1^{mn} = дана?
11. Реши следеће једначине: $17 \cdot x = 43\frac{5}{7}$; $100 \cdot x = 52\frac{12}{19}$; $\dfrac{16\frac{1}{4}}{x} = 26$; $11 \cdot x = 8\frac{4}{5} : 12$; $4\frac{1}{2} : x = 35$; $\frac{x}{6} = 1\frac{7}{18} : 4$!
12. Један радник сврши један посао за 16 недеља и $\frac{1}{3}$ Колико би радили на истом послу 15 подједнако вредних радника?
13. Седам једнаких бројева заједно износе $123\frac{1}{15}$. Колики је један од њих?
14. Дељеник је $257\frac{1}{7}$, делилац 360. Колики је количник?
15. Производ два броја је $631\frac{1}{9}$. Један од њик је 16. Колики је други?

ГЛАВА X

МНОЖЕЊЕ И ДЕЉЕЊЕ РАЗЛОМКОМ

51. Множење разломком. — Разликоваћемо два случаја.

1. *Множење целог броја разломком.* Рекли смо да је множење сабирање једнаких сабирака. Тако на пр:

$$\frac{1}{7} \cdot 4 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}.$$

Може ли се $3 \cdot \frac{1}{8}$ претставити као збир? Шта је $\frac{1}{8}$ од 3? $\frac{1}{8}$ од $3 = \frac{3}{8}$, тј. $\frac{3 \cdot 1}{8}$, па се сматра да је *узети осмину од једног броја исто, што и помножити га са* $\frac{1}{8}$.

Шта онда значи множење са $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ итд.?

Ако имамо множење $12 \cdot \frac{3}{4}$, онда најпре напишемо $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot 3$, па ћемо имати:

$$12 \cdot \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3$$

што значи да најпре треба узети једну четвртину од 12, па то помножити са 3. Дакле.

$$12 \cdot \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{12}{4} \cdot 3 = \frac{12 \cdot 3}{4} = 3 \cdot 3 = 9.$$

Или можемо овако размишљати: $\frac{3}{4}$ од неке величине значи да ту величину треба поделити на 4 једнака дела, па од тога узети 3. Кад 12 поделимо на 4 једнака дела, сваки део износи 3, а $3 \cdot 3 = 9$.

Из овог видимо да, кад хоћемо да одредимо $\frac{3}{4}$ од неког броја, треба само тај број да помножимо са $\frac{3}{4}$. *Уопште задатак да се одреди* $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{37}$ ... *од неког броја, решава се множењем тог броја са* $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{37}$ ...

Практично упутство: *Цео број се множи разломком, кад се тај број помножи бројиоцем разломка, па добијени производ подели имениоцем.*

2. **Множење разломка разломком.** — Ако је множеник разломак на пример:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$$

можемо рећи да треба наћи $\frac{5}{7}$ од $\frac{2}{3}$ тј. седми део од $\frac{2}{3}$ треба узети 5 пута. Према томе је

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \left(\frac{2}{3} : 7\right) \cdot 5 = \frac{2}{3 \cdot 7} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

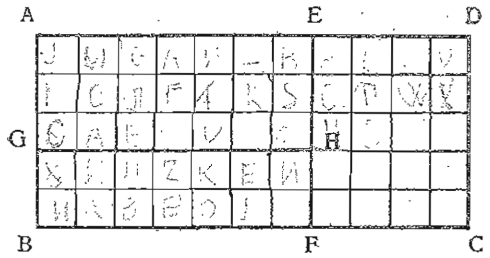
Отуда ово **практично упутство:** *Разломак се множи разломком, кад се бројилац бројиоцем, а именилац имениоцем помножи, па се производ бројилаца подели производом именилаца.*

Напомена 1. — Пре него што се приступи множењу, треба између бројилаца и именилаца извршити сва могућа скраћивања.

Напомена 2. — Мешовити бројеви множе се, кад се најпре претворе у неправе разломке, па затим помноже као разломци.

Пример: $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{18}{5} = 9.$

52. **Графичко претстављење производа разломака.** — Графичко претстављање то је претстављање сликом. Слика коју добијемо зове се **дијаграм.** На приложеној слици дијаграм илуструје нам множење $\frac{7}{11}$ са $\frac{3}{5}$.



Правоугаоник ABCD садржи 55 квадрата у 11 стубаца од 5 квадрата. Правоугаоник ABFE састављен је од 7 таквих стубаца. Правоугаоник ABFE $= \frac{7}{11}$ од ABCD. Од $\frac{7}{11}$ треба узети $\frac{3}{5}$.

Правоугаоник ABFE састоји се од 5 редова од по 7 квадрата, а правоугаоник AGHE састоји се од 3 таква реда. Према томе AGHE $= \frac{3}{5}$ од ABFE. Али ABFE је $\frac{7}{11}$ од ABCD, па је AGHE $\frac{3}{5}$ од $\frac{7}{11}$ ABCD.

Али AGHE $= \frac{21}{55}$ од ABCD, пошто у њему има 21 квадратића, а ABCD их има 55. Отуда је $\frac{3}{5}$ од $\frac{7}{21}$ од неке ствари $= \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{21}{55}$ од те ствари.

53. Производ од више чинилаца. Степен. — Кад имамо производ од више разломака, поступићемо као и са производом од више целих бројева.

1 пример: $\frac{7}{11} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 1}{11 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{21}{110}$.

2 пример: $3\frac{1}{5} \cdot 5\frac{5}{8} \cdot 3\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{22} \cdot 2 = \frac{16}{5} \cdot \frac{45}{8} \cdot \frac{32}{9} \cdot \frac{3}{22} \cdot 2.$

Овде треба извршити скраћивање између бројилаца и именилаца. Скраћени бројеви се прецртавају. При томе се говори: Скраћујем 16 и 8 са 8; 8 у 16, 2; 8 у 8, 1, које се не пише; даље скраћујем 2 и 22; 2 у 2, 1; 2 у 22, 11; скраћујем 45 и 9 са 9; 9 у 45, 5; 9 у 9, 1; даље скраћујем 5 и 5 са 5. Тако да нам преостаје:

$$\frac{32 \cdot 3 \cdot 2}{11} = \frac{192}{11} = 17\frac{5}{11}.$$

Напомена. При скраћивању на овај начин постоји велика опасност да се задатак забрља и да наступи збрка и пометња. Због тога ученик мора чисто и читко да пише.

Степен разломка дефинише се исто као и степен целог броја: то је производ једнаких чинилаца.

Пример: $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$ пише се краће $\left(\frac{4}{9}\right)^2$, $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \left(\frac{4}{9}\right)^3$.

Даље имамо $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 9} = \frac{4^2}{9^2} = \frac{16}{81}$.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{4^3}{9^3} = \frac{64}{729}.$$

Практично упутство. — *Да би смо добили квадрат или куб једнога разломка, треба подићи на квадрат или куб и бројилац и именилац тога разломка.*

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. $6 \cdot \frac{5}{12} =$; $10 \cdot \frac{7}{6} =$; $7 \cdot \frac{5}{27}$; $20 \cdot \frac{5}{8} =$; $24 \cdot \frac{5}{12} =$
2. $6 \cdot \frac{5}{6} =$; $13 \cdot \frac{8}{13} =$; $22 \cdot \frac{17}{22} =$; $5 \cdot \frac{1}{25} =$
3. $12 \cdot \frac{5}{18} =$; $15 \cdot \frac{9}{10} =$; $24 \cdot \frac{1}{36} =$; $60 \cdot \frac{17}{90} =$
4. $10 \cdot 1\frac{6}{7} =$; $25 \cdot 1\frac{1}{9} =$; $8 \cdot 1\frac{3}{4} =$; $10 \cdot 2\frac{2}{5} =$
5. $8 \cdot \frac{5}{6} =$; $35 \cdot 1\frac{3}{70} =$; $10 \cdot 1\frac{13}{20} =$; $45 \cdot 7\frac{1}{9} =$
6. $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} =$; $\frac{40}{81} \cdot \frac{3}{8} =$; $\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{15} =$; $\left(\frac{8}{9}\right)^2 =$; $\left(\frac{12}{13}\right)^2 =$
7. Наћи квадрат и куб ових разломака: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$!
8. $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} =$; $\frac{10}{17} \cdot \frac{9}{10} =$; $\frac{13}{50} \cdot \frac{5}{13} =$; $\frac{44}{60} \cdot \frac{30}{44} =$
9. $\frac{11}{12} \cdot \frac{8}{11} =$; $\frac{23}{24} \cdot \frac{15}{23} =$; $\frac{8}{10} \cdot \frac{10}{96} =$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} =$
10. $2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2} =$; $\left(3\frac{1}{2}\right)^2 =$; $\left(1\frac{1}{4}\right)^3 =$
11. Колико износе $\frac{5}{8}$ од 8, 10, 12, 20, 32, 48, 72?
12. „ „ $\frac{7}{12}$ од 6, 10, 18, 24, 48, 96, 240?
13. Шта стају $2^{m}\frac{1}{4}$ по 5 дин; $3^{l}\frac{3}{4}$ по 3 дин; $\frac{2}{5}$kg по $\frac{3}{4}$д?
14. Колико је: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Помножи $\frac{5}{6}$ са $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{10}$ и покушај да множење представиш графички!

2. $37 \cdot \frac{19}{240} =$; $23 \cdot \frac{17}{300} =$; $83 \cdot \frac{5}{17} =$; $96 \cdot 4\frac{5}{4} =$

3. $\frac{15}{32}$ од $7\frac{1}{9} =$; $\frac{36}{145}$ од $\frac{87}{128} =$; $14\frac{3}{5}$ од $\frac{8}{365} =$

Провери ове једначине:

4. $2\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{35} \cdot 3\frac{1}{3} = 2\frac{6}{7}$; $17\frac{1}{7} \cdot 1\frac{13}{36} \cdot \frac{16}{35} = 10\frac{2}{3}$.

5. $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} = 4\frac{17}{60} \cdot \frac{8}{19} \cdot 4\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{34} \cdot 1\frac{3}{20} = \frac{23}{80}$.

6. $\frac{11}{5} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = 82\frac{2}{15}$.

7. Шта стају $13^{l}\frac{1}{4}$ по 28 дин; $19^{kg}\frac{1}{3}$ по 56 пара?

8. Израчунај: $\frac{1}{2}$ од $\frac{4}{7} \cdot \frac{9}{11}$; $\frac{4}{7}$ од $8\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{7} \cdot 9\frac{4}{5}$!

9. Реши једначине: $x : 2\frac{3}{16} = \frac{20}{49}$; $x : 48 = \frac{5}{16} \cdot \frac{11}{12}$; $x : 1\frac{1}{2} = 2\frac{3}{16} \cdot 3\frac{1}{2}$!

10. $5 \cdot x = 17 \cdot 2\frac{2}{9}$; $12 \cdot x = \frac{5}{8} \cdot 2\frac{2}{7}$; $\frac{x}{\frac{7}{20}} = 8\frac{3}{4}$; $x \cdot \frac{12}{11} = 8\frac{4}{7}$!

11. Израчунај $\frac{3}{5}$ од $\frac{2}{7}$ од четвртине од 510!

12. Наћи број чије $\frac{3}{5}$ од $\frac{4}{7}$ износе 120!

13. Обим круга је приближно $3\frac{1}{7}$ пута већа од пречника. Колики су обими кругова, чији су пречници 21cm; 1 m 5cm, $15^{m}\frac{3}{4}$, $10^{m}\frac{3}{5}$?

14. Једна учионица дугачка је $9^{m}\frac{3}{4}$, широка $7^{m}\frac{1}{5}$, а висока $4\frac{1}{2}$ m. Колико ваздуха садржи? Колико је тежак сав тај ваздух, кад 1 m^3 тежи $1^{kg}\frac{3}{10}$?

15. Једно двориште, облика квадрата, дугачко је $22^{m}\frac{3}{4}$. Колика је његова површина? То двориште треба да се

огради са три стране. За ограду се плаћа $30^{\text{дин}}\frac{3}{4}$ по метру. Колико ће се платити за ограду?

16. Једна соба дугачка је $7\frac{1}{2}$ m; ширина је $\frac{3}{5}$ дужине, висина износи $\frac{4}{5}$ од ширине. Колика је њена запремина?

17. Једна правоугла камена плоча дугачка је $2^{\text{m}}\frac{1}{5}$, широка $6^{\text{dm}}\frac{1}{5}$, дебела $\frac{7}{10}$ dm. Колика је њена тежина, кад 1 dm^3 тежи $3^{\text{kg}}\frac{1}{5}$?

18. Кад један радник заради за један дан $31\frac{1}{2}$ дин, колико зараде 6 таквих радника за 4 дана и $\frac{2}{3}$?

19. **Збир једнак производу.** Кад се броју $1\frac{2}{25}$ дода $13\frac{1}{2}$, добије се исто, као кад та два броја помножимо.

54. Дељење разломком. — Најлакше ћемо доћи до потребног правила, ако дељење узмемо у смислу *мерења* или *садржавања.*

Пример 1. $\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = 9$ десетина: 3 десетине $= 3$.

Питамо се 3 десетине у 9 десетина колико пута се садрже.

Пример 2. $15 : \frac{3}{4} = 60$ четвртина : 3 четвртине $= 20$.

До истог резултата бисмо дошли, ако место да делимо 15 са $\frac{3}{4}$, ми помножимо 15 са $\frac{4}{3}$, **реципрочном** вредношћу.

$$15 : \frac{3}{4} = 15 \cdot \frac{4}{3} = \frac{60}{3} = 20.$$

Исто тако је $\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{3} = 3$.

Пример 3. $\frac{2}{5} : \frac{7}{8} = \frac{16}{40} : \frac{35}{40} = 16$ четрдесетина: 35 четрдесетина $= \frac{16}{35}$. Разломке смо најпре довели на исте имениоце. До истог резултата бисмо дошли, ако деленик $\frac{2}{5}$ помножимо реципрочном вредношћу делиоца:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{16}{35}.$$

Отуда имамо ово **практично упутство** за дељење разломком: *Један број дели се разломком, кад се тај број помножи реципрочном вредношћу тог разломка.*

Напомена 1. — Ако се при дељењу разломка разломком може без остатка да подели бројилац бројиоцем, а именилац имениоцем, онда се дељење тако изврши. Пример:

$$\frac{15}{16} : \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Напомена 2. — Мешовити бројеви се претходно претварају у неправе разломке.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. $6 : \frac{1}{9} =$; $5 : \frac{3}{8} =$; $7 : \frac{7}{12} =$; $13 : \frac{2}{3} =$

2. $100 : 3\frac{1}{3}$; $100 : 6\frac{1}{4}$; $100 : 12\frac{1}{2}$; $100 : 11\frac{1}{9} =$

3. $\frac{6}{25} : \frac{2}{5}$; $\frac{3}{10} : \frac{1}{5}$; $\frac{4}{27} : \frac{2}{9}$; $\frac{20}{77} : \frac{5}{11} =$

4. $\frac{3}{4} : \frac{1}{6}$; $\frac{7}{8} : \frac{7}{9}$; $\frac{5}{24} : \frac{7}{12}$; $\frac{1}{30} : \frac{4}{5} =$

5. Колико пута се садржи $\frac{1}{8}$ у $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{15}$ у $\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{2}$ у 15; $3\frac{1}{3}$ у 20; $33\frac{1}{3}$ у 100; $\frac{1}{25}$ у 25?

6. Колико се одела могу начинити од 26 m штофа, кад је за једно одело потребно $3^{\text{m}}\frac{1}{4}$?

7. Колико се чаша од $\frac{4}{10}$ могу напунити од 12 l неке течности?

8. $\dfrac{5}{\frac{5}{8}} =$; $\dfrac{7}{\frac{2}{7}} =$; $\dfrac{3}{3\frac{1}{3}} =$; $\dfrac{15}{3\frac{3}{4}} =$; $\dfrac{20}{7\frac{1}{2}} =$; $\dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{11}} =$

9. Колико је x, кад је: $3\frac{1}{3} : x = 20$; $x \cdot 2\frac{1}{2} = 15$; $x = 1\frac{3}{4} : 3\frac{3}{4}$; $1\frac{3}{4} : 2\frac{3}{4} = x$; $6 : x = \frac{1}{3}$; $3\frac{1}{2} : x = 7$?

10. $\dfrac{\frac{17}{20}}{\frac{17}{25}} =$; $\dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{3}{20}} =$; $\dfrac{3\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} =$; $\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{15}} =$; $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{6}{5}} =$; $\dfrac{1\frac{7}{8}}{1\frac{1}{4}} =$

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. $\frac{13}{14}$ поделити са $\frac{13}{15}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{4}{15}$.

2. $\frac{21}{25} : \frac{14}{15}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{14}{25}$, $\frac{8}{19}$; $50 : \frac{4}{13}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{11}{21}$.

3. $4\frac{1}{5} : \frac{7}{15} =$; $39\frac{6}{25} : \frac{9}{125} =$; $7\frac{9}{17} : 1\frac{11}{51} =$; $1\frac{5}{12} : \frac{8}{9} =$

4. $\dfrac{18}{18\frac{7}{8}} = ;\ \dfrac{25}{6\frac{13}{27}} = ;\ \dfrac{1}{1 : 2\frac{3}{8}} = ;\ \dfrac{7 : \frac{4}{7}}{1 : 14\frac{2}{7}} =$

5. Колико је x, кад је: $x \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$; $3\frac{1}{2} \cdot x = \frac{7}{10}$; $4\frac{1}{2} : x = \frac{3}{8}$; $x : 2\frac{1}{2} = 1 : 1\frac{1}{8}$; $\dfrac{x}{\frac{5}{6}} = \frac{7}{10}$; $x = 3\frac{11}{17} : 6\frac{4}{5}$?

6. Чиме треба помножити $8\frac{5}{8}$ да се добије $100\frac{5}{8}$?

7. Кад један воз пређе за 3 сата и 8 минута $133^{km}\frac{1}{6}$, колики пут пређе за 1 сат?

8. Колики је пречник круга, чији је обим $17^{m}\frac{3}{5}$?

9. Чиме треба поделити $17\frac{1}{2}$, да се добије 14?

10. Којим бројем морамо помножити $6\frac{1}{8}$, да добијемо толико исто, као кад би $1\frac{3}{4}$ поделили са $2\frac{2}{5}$?

11. Једна свилена буба градећи свој мехур испрела је конац дужине $365\frac{1}{2}$ m за 4 дана и $\frac{1}{4}$. Колико просечно дође на један дан?

12. **Препливавање канала Ламанша.** Немачка Американка Едерле препливала је канал Ламанш (34 km 300 m) за $14^{h}\frac{3}{4}$; Немац Фиркетер за $12^{h}\ 42^{mn}$; Данкиња Карсон за $16^{h}\frac{3}{4}$. Колика је просечна брзина на сат за свако лице?

13. Од две локомотиве, једна пређе $37\frac{1}{2}$ km за $\frac{3}{4}$ h, друга $67^{km}\frac{1}{5}$ за $1^{h}\frac{1}{3}$. Која има већу брзину?

ПИТАЊА

1. Шта је производ једне величине и једног целог броја?
2. Производ једне величине А и једног разломка је величина претстављена тим истим разломком, кад се А узме за јединицу. Тако производ од А и $\frac{2}{3}$ биће величина која се добија, кад узмемо 2 пута трећину од А. Објасни ово и на другим примерима!
3. Како се разломак множи целим бројем?
4. Шта бива са разломком, ако му бројилац помножимо са 2, 3, 4, 5 итд.?
5. Шта бива са разломком, ако именилац множимо са 2, 3, 4, 5.....?

6. Шта ће бити са разломком, ако именилац поделимо једним целим бројем?
7. Шта смо урадили са разломком $\frac{15}{19}$, ако именилац помножимо са 2, а бројилац поделимо са 5?
8. Како се множи разломак разломком?
9. Како се множе два мешовита броја?
10. Како се добија производ више разломака?
11. Како се добија квадрат и куб једног разломка?
12. Кад је разломак мањи од 1 да ли је његов квадрат већи од 1?
13. У ком ће случају квадрат разломка бити већи од самог разломка?
14. Како се дели разломак целим бројем?
15. Како се дели разломком?
16. Како се дели мешовитим бројем?
17. Ако два разломка имају исте имениоце, њихов количник једнак је количнику њихових бројилаца. Доказ!
18. Ако разломци имају исте бројиоце, њихов количник једнак је обрнутом количнику именилаца.
19. Значи ли множење увек увећавање? А дељење?

ГЛАВА XI

СЛОЖЕНИ РАЗЛОМЦИ

55. — Један разломак коме је бројилац или именилац такође разломак, или и једно и друго разломци, зваћемо **сложен разломак.**

За упрошћавање сложених разломака користићемо познато правило: да се вредност разломка не мења, кад се бројилац и именилац једним истим бројем помноже. Поступак при томе видеће се из следећих примера:

Пример 1. Упрости $\dfrac{3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{4} + \frac{5}{6}}$!

Решење: Помножићемо и бројилац и именилац са 12, са н.з.с. за имениоце 2, 3, 4 и 6. Тако успевамо да, наместо разломака и мешовитих бројева у бројиоцу и имениоцу, добијемо одмах целе бројеве. Имамо: $3\frac{1}{2} \cdot 12 = 42$; $2\frac{1}{3} \cdot 12 = 28$; $3\frac{1}{4} \cdot 12 = 39$; $\frac{5}{6} \cdot 12 = 10$.

$$\frac{3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{4} + \frac{5}{6}} = \frac{42 - 28}{39 + 10} = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}.$$

Пример 2. — Да се упрости $\dfrac{1\frac{1}{2}}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$!

Решење: Најпре помножимо са 4 бројилац и именилац разломка $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}$ и добијемо $\frac{4}{5}$. Тада горњи разломак постаје

$$\frac{1\frac{1}{2}}{1 + \frac{4}{5}}.$$

Множећи бројилац и именилац последњег разломка са 10, добијамо

$$\frac{15}{10 + 8} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$$

Разломци ове врсте зову се *продужени* или *верижни разломци*.

МЕШОВИТИ ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ

1. Колика је разлика између
$(3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{2}) : 1\frac{2}{3}$ и $3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{2} : 1\frac{2}{3}$?
2. Колика је разлика између
$3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} + 5\frac{6}{7}$ и $(3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{2}) \cdot (1\frac{2}{3} + 5\frac{6}{7})$?
3. Нађи разлику између
$3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3} - \frac{5}{6}$ и $3\frac{1}{4} - (1\frac{2}{3} - \frac{5}{6})$!
Ученик да процени унапред, који ће резултат бити већи!
4. Изврши на два начина
$(15\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) \cdot 7\frac{3}{4} =$; $(7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) \cdot \frac{2}{3}$!

Провери следеће једначине:

5. $15\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot 7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3} = 13\frac{3}{4}$.
6. $(15\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) \cdot 7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3} = 116\frac{11}{16}$.
7. $15\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 15\frac{35}{36}$.

8 $(15\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) \cdot (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 23\frac{7}{8}$.
9. $15\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 4\frac{19}{36}$.
10. $(15\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 15\frac{115}{144}$.
11. $15\frac{1}{4} + \frac{2}{3} : 7\frac{3}{4} = 15\frac{125}{372}$. 12. $(15\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) : 7\frac{3}{4} = 2\frac{5}{93}$.
13. $15\frac{1}{4} - \frac{2}{3} : 7\frac{3}{4} = 15\frac{61}{372}$. 14. $(15\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) : 7\frac{3}{4} = 1\frac{82}{93}$.
15. $15\frac{1}{4} - \frac{2}{3} : 7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3} = 8\frac{85}{372}$.
16. $(15\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) \cdot (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 14\frac{2}{3}$.
17. $15\frac{1}{4} + \frac{2}{3} : (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 15\frac{45}{52}$.
18 $(15\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) : (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 13\frac{6}{13}$.

Почађали рукописи. Пронађи цифре које су нестале:

19. $\frac{4}{27} + \frac{1}{\cdot} + \frac{5}{63} = \frac{10}{27}$
20. $1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} - \frac{\cdot}{\cdot} - \frac{1}{12} = 3\frac{1}{2}$
21. $7\frac{1}{5} - \cdot\frac{1}{19} = 2\frac{\cdot}{5}$
22. $4\frac{3}{17} + \cdot\frac{\cdot}{\cdot\,\cdot} - 7\frac{9}{187} - 2\frac{5}{33} = 3\frac{3}{187}$
23. $\cdot\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{\cdot} = 8$ 24. $\cdot\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{\cdot} = 9$
25. $5\frac{8}{27} \times \cdot\frac{6}{13} = 18\frac{1}{\cdot}$ 26. $4\frac{\cdot}{27} \times \cdot\frac{\cdot}{16} = 35$
27. $30\frac{\cdot}{17} : \cdot\frac{20}{51} = 6\frac{\cdot}{7}$ 28. $10\frac{4}{\cdot\,\cdot} : \cdot\frac{2}{27} = 9\frac{9}{17}$

29. Ако потрошим $\frac{2}{3}$ од свог новца, затим $\frac{3}{7}$ остатка, колико ми још остаје?

30. Ако је делилац $\frac{4}{7}$, а количник $\frac{3}{8}$ од делиоца, колики мора бити дељеник?($\frac{6}{49}$)

31. Колико пута се садржи $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+$ у $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$? $\left(\frac{3}{4}\right)$.

32. Да се броју 10 дода збир бројева $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{4}$. $\left(18\frac{1}{4}\right)$.

33. Да се разлика бројева $15\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$ подели разликом $7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}$. (Рез. $13\frac{6}{13}$)

34. Поделити производ бројева $1\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{8}$ са $\frac{15}{16}$. (Рез. $\frac{3}{5}$)

35. Разлику бројева $1\frac{3}{4}$ и $\frac{17}{16}$ поделити производом бројева $3\frac{1}{4}$ и $2\frac{1}{2}$. (Рез. $\frac{33}{42}$)

Провери ове једначине:

36. $\dfrac{1\frac{4}{7}-\frac{2}{3}}{\frac{4}{49}\cdot 7\frac{7}{12}} = 1\frac{6}{13}$. 37. $5+\dfrac{6}{5+\frac{2}{5}} = 6\frac{1}{9}$.

38. $\dfrac{4\frac{2}{9}-2\frac{1}{4}}{3\frac{3}{4}-3\frac{1}{3}+\frac{11}{144}}$. 39. $\frac{10}{9}\cdot\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}-\frac{15}{32}} = 2\frac{2}{3}$.

40. Од четвороструког мешовитог броја $7\frac{7}{18}$ одузми петоструки број $2\frac{7}{15}$!

41. Да се двострука разлика између 6 и $2\frac{9}{16}$ одузме од четвороструког збира бројева $3\frac{5}{12}$ и $2\frac{7}{30}$. $\left(16\frac{7}{120}\right)$

42. Помножи $\frac{7}{20}$ са 13. од производа одузми $2\frac{17}{30}$, добијену разлику помножи са 30 и одузми од производа половину од 37.

43. Четвртом делу броја $67\frac{1}{2}$ додај трећину тога броја, па затим добијени збир подели са 63. $\left(\frac{5}{8}\right)$

44. Производ од $17\frac{11}{17}$ и 34 подели са 48, па од добијеног количника нађи пети део!

45. Од производа бројева $3\frac{5}{7}$ и $3\frac{3}{4}$ одузми седмоструку њихову разлику!

46. Подигни на квадрат $6\frac{1}{4}$, додај том квадрату производ бројева $4\frac{2}{5}$ и $\frac{15}{16}$, па добијени збир подели са 130! $\left(\frac{5}{16}\right)$

47. Три наследника поделила су 35000 динара. Први је примио $\frac{2}{5}$ целе суме, други $\frac{3}{4}$ од дела првога. Који део наследства припада трећем? Колики је део свакога од њих?

48. Један трговац зарађује на роби $\frac{3}{5}$ од куповне цене. Када је продао робу за 640 динара, колику је суму зарадио?

49. Један отац и син, прости радници, зараде заједно за једну годину 16 000 динара. Идуће године плата сина повећа се за једну четвртину, а очева остане непромењена. Ове године они приме 17 200 динара. По колико су примили отац и син у првој и другој години?

50. *Нађи разлику између*:

1) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ и $\frac{2+4}{3+5}$; 2) $\frac{4}{7}-\frac{1}{3}$ и $\frac{4-1}{7-3}$;

3) $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}$ и $\frac{3\cdot 7}{4\cdot 8}$; 4) $\frac{9}{25}:\frac{3}{5}$ и $\frac{9:3}{25:5}$;

5) $\frac{3}{5}+\frac{3}{10}$ и $\frac{3+3}{5+10}$; 6) $\frac{5}{12}-\frac{4}{11}$ и $\frac{5-4}{12-11}$;

7) $2\frac{2}{7}\cdot 3\frac{3}{5}$ и $2\cdot 3+\frac{2\cdot 3}{7\cdot 5}$; 8) $8\frac{4}{9}:2\frac{2}{3}$ и $8:2+\frac{4:2}{9:3}$;

9) $8\frac{4}{9}:2$ и $8:2+\frac{4}{9}:2$; 10) $2\frac{1}{3}\cdot 4$ и $2\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot 4$!

ГЛАВА XII

ДЕСЕТНИ РАЗЛОМЦИ

56. — Разломци чији су имениоци 10, 100, 1000. . . . или ма који степен од 10, зову се **десетни** или **децимални разломци.**

За ове разломке је усвојено нарочито писање. Ово простије писање засновано је на овоме, што ћемо сада рећи. Посматрајмо разломак: $\frac{124\,039}{10\,000}$.

Знамо већ да је:

$124\,039 = 100\,000 + 20\,000 + 4\,000 + 30 + 9.$

Према томе имамо:

$$\frac{124\,039}{10\,000} = \frac{100\,000}{10\,000} + \frac{20\,000}{10\,000} + \frac{4\,000}{10\,000} + \frac{30}{10\,000} + \frac{9}{10\,000} =$$
$$= 10 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{1000} + \frac{9}{10\,000}.$$

Тако се сваки десетни разломак може да претстави у облику збира једног целог броја и *простих десетних разломака*, који имају за бројиоце бројеве мање од 10, а за имениоце различите степене од 10. Један такав разломак се овако пише:

$$12{,}4039$$

где број 12, лево од запете, сачињава *цели део*. Цифре које долазе после запете претстављају редом десете, стоте, хиљадите итд., децималне јединице редом 10 пута мање. Нула означава место стотих. Видимо да смо овај *децимални број* добили од датог десетног разломка, кад смо у бројиоцу, идући с десна на лево, одвојили запетом онолико цифара, колико у имениоцу има нула.

57. — Писање и читање децималних бројева, може се рећи, почива на истим начелима, која смо проучили и за целе бројеве, управо једно проширење тих начела:

1. *Прва цифра лево од запете претставља просте јединице.*

2. *Од две цифре, она која се налази с десне стране, претставља јединице десет пута мање од јединица, које претставља цифра с леве стране.*

3. *Ако нема јединица извесног реда, њихово се место обележи нулом, да би остале цифре сачувале свој ранг. Ако целих уопште нема, наместо простих јединица треба ставити нулу, па до нуле запету.*

Пример. — Цифре броја 1256,893 означавају: 1 хиљаде, 2 стотине, 5 десетице, 6 јединице, 8 десете, 9 стоте, 3 хиљадите. То можемо и овим низом претставити:

Х	С	Д	Ј		д	с	х
1	2	5	,6		8	9	3

Цифре с десне стране запете звали смо *децимали* или *десетна места*. Често пута све те цифре скупа зову се *мантиса*.

58. — Ваља споменути да се при читању децималних бројева чују више начина. Ми ћемо овде рећи оне, који се најчешће чују, а који су врло практични. Узмимо за пример број 3,1416.

Најпре се прочитају цели, у колико их има, затим

или 1. сваки децимал изговарајући његову месну вредност, дакле *3 цела 1д 4с 1х 6дх;*

или 2. сваки децимал, не казујући месну вредност, дакле *8, кома, један, четири, један, шест;* (кома = запета);

или 3. прочита се број десно од запете без икаквог имена, дакле *3, кома хиљада четири стотине шеснаест;*

или 4. прочита се број десно од запете, при чему се он изрази јединицама најнижег реда, дакле *3 цела 1416 десетхиљадитих.*

Напомена. — Неки задржавају назив *децималан број* за бројеве као што је 12,355, тј. за бројеве који су већи од 1, а *десетни или децимални разломак* за бројеве, као што су 0,352 или 0,034, чији је цели део нула. Овакво разликовање не доноси никакве користи, а има ту незгоду, што неко може да помисли да један *десетни разломак* није *број.*

ПИТАЊА И ВЕЖБАЊА

Одговор на многа питања налази се у аритметици за I разред.

1. Шта је десетни разломак?

2. Како се може десетни разломак да претстави у облику збира?

3. Како се простије пишу десетни разломци?

4. Има ли каква разлика између десетног разломка и децималног броја?

5. Како се читају децимални бројеви?

6. Како се пишу децимални бројеви?

7. Прочитај: 2,816; 0,30103; 100,01; 70,01; 0,001293; 3,001; 1010,0101; 0,34035; 1,01005; 0,0002741

8. Колико децимала има један децималан број који а) треба да изрази стоте; б) хиљадите; в) стохиљадите; г) милионите?

9. Шта значи треће децимално место, шта четврто, седмо?

10. Шта значи друга цифра лево од запете, шта друга десно од запете?

11. Између које две цифре стоји запета?

12. Које децимале претстављају десети, десетхиљадити, милионити?

13. Напиши: 5Д 7Ј 8д 2с 7х; 3С 3Д 3д; 7Ј 7д 7х; 8д 3с 5х; 2Д 3д 4с; 2Ј 4с 7 дх; 7с; 2х; 27дх; 106 сх!

14. Напиши у облику децималног броја: $1\frac{3}{10}$, $27\frac{33}{100}$, $\frac{91}{100}$, $\frac{128}{1000}$, $\frac{17}{1000}$, $\frac{492}{10000}$, $\frac{393}{10}$, $\frac{7}{10}$, $31\frac{17}{100000}$, $\frac{1}{1000000}$!

15. *Шала*: Шта је веће: нула кома 9, или нула кома 10?

16. Стави запету на њено место код

216,	кад	цифра	2	треба	да	изражава	десетице;
5712,	„	„	5	„	„	„	стотине
398,	„	„	8	„	„	„	десете;
27,	„	„	7	„	„	„	десетхиљадите!
1934,	„	„	4	„	„	„	милионите!

17. Постоји ли каква разлика између 0,8 и 0,800?

18. Шта бива са децималним бројем, ако му с десне стране дописујемо нуле? Шта ће бити, ако с десне стране бришемо нуле? Да ли се ово може назвати проширивање и скраћивање?

19. Шта ће бити са децималним бројем, ако запету померамо удесно и улево?

20. Који број постаје, кад се код 36,45 запета помакне за 2 места удесно; за 3 места удесно; за 2 места улево; за 4 места улево?

21. Колико свега десетих има у 6,9; колико хиљадитих у 0,38?

22. Колико свега десетих има у 1,38; колико дх у 0,00597?

23. Колико пута је веће 58 од 0,58; 26,2 од 2,62?

24. „ „ „ „ 1 од 0,0001; 0,5 од 0,0005?

25. Како се децималан број множи и дели са 10, 100, 1000..?

59. — Децимални бројеви зову се истоимени, кад имају једнак број децимала. Разноимени децимални бројеви доводе се на истоимене, кад се места која недостају попуне нулама.

Један цео број може увек да се напише као децималан број као на пр. 7=7,0000.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Доведи на исто име: 2,24 и 0,806; 3,2 и 1,0734!
2. Следеће бројеве исписати са 3 децимала: 0,36; 0,9.
3. Изрази у c: 0,2; 2,6; 0,070; 2,8800; 0,80000!
4. Напиши у најпростијем облику: 3,60; 30,0300; 3,000040!
5. Колико су m: 2m 54cm; 3m 5dm 1cm; 48cm; 3m 4cm; 9dm; 252cm; 4dm 5cm 66mm; 628mm; 57mm; 9mm; 2100mm; 1km 1m 1cm 1mm?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Изрази у km: 7km 237m 40cm; 10km 15m 7cm!
2. $2,^{m}458 =$ m dm cm mm; $0,^{m}902 =$ cm mm?
3. $0,^{m}274 =$ cm mm; $2,^{m}3 =$ m cm; $0,^{m}04 =$ mm?
4. Колико m^2 су: $4m^2\ 48dm^2$; $2735cm^2$; $4m^2\ 6dm^2$; $2m^2\ 2cm^2$?
5. $0,^{m^2}9 = dm^2$; $4,^{m^2}07 = mm^2$; $0,^{m^2}08 = cm^2$?
6. $0,^{ha}3456 = a\ m^2$; $3,^{a}2 = m^2$; $0,^{ha}0415 = m^2$?
7. 34a = ha; 7280 m^2 = a; 7280 m^2 = ha?
8. Колико m^3 су: $345dm^3$; $68dm^3$; $2dm^3$; $4m^3\ 44dm^3$?
9. „ hl су: 125 l; 90 l; 2 hl 60 l; 345 l?
10. „ kg су: 1200 g; 750 g; 2 g?
11. Прочитај: $7,^{m}052$; $5,^{km}0832$; $0,^{km}752248$; $10,^{km}3$!
12. Прочитај: $17,^{m^2}2433$; $0,^{a}295348$; $2,^{ha}07326$!
13. $1,^{m^3}244607$; $1,^{m^3}2$; $0,^{m^3}88890$; $11,^{dm^3}383$; $104\,000,^{cm^3}42$; $13,^{l}09$; $2,^{kg}375$; $1,^{m^3}345\,600$!
14. Колико kg и g су тешке ове количине воде: $2,^{l}75$; $0,^{hl}084$; $1,^{hl}2859$; $1350cm^3$; $54,^{dm^3}5$; 2*l* 20 cm^3; 1 hl 1*l* 100 cm^3?
15. Колики простор заузима вода, кад њена тежина износи: $2,^{kg}408$; $0,^{kg}95$; $0,^{kg}0084$; $743,^{g}5$; 17g 18cg; 1g 800mg?
16. Једна празна флаша тешка је 700g. Кад је напунимо водом, она тежи $2,^{kg}84$. Колико *l* хвата та флаша?

60. Сабирање и одузимање. — Правила по којима се рачуна са децималним бројевима потпуно су слична правилима за целе бројеве. Доказивање тих правила могло би бити исто, као код целих бројева. Међутим краће је, ако користимо правила, која смо већ доказали код обичних разломака.

Практично упутство за сабирање и одузимање децималних бројева: *Ради се као и са целим бројевима, само још треба пазити:*

1. *Кад исписујемо бројеве, запете да дођу у исти вертикални ступац.*

2. *Да дописујемо бар у мислима потребан број нула иза децималних цифара, да бисмо у свима бројевима имали исти број децимала.*

3. *Да у резултату напишемо запету испод ступца запета.*

Доказ. Нека је задано да одредимо збир:

$$3{,}5 + 12 + 0{,}003 + 0{,}3571.$$

Ако ове бројеве напишемо као разломке, имаћемо:

$$\frac{35}{10} + 12 + \frac{3}{1000} + \frac{3571}{10000},$$

или ако их доведемо на исти именилац:

$$\frac{35000}{10000} + \frac{120000}{10000} + \frac{30}{10000} + \frac{3571}{10000}.$$

Према томе, поступајући по практичном упутству, ми у ствари сабирамо бројиоце разломака, који су доведени на исте имениоце.

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ 12 \\ 0{,}003 \\ 0{,}3571 \\ \hline 15{,}8601 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}5000 \\ 12{,}0000 \\ 0{,}0030 \\ 0{,}3571 \\ \hline 15{,}8601 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35000 \\ 120000 \\ 30 \\ 3571 \\ \hline 158601 \end{array}$$

Да би све ово било јасније, ми смо лево извели сабирање како се то обично ради; у средини смо дописали нуле, а десно сабирали целе бројеве, који носе назив десетхиљадити, тј. сабирали смо бројиоце горњих разломака. Резултат је дакле:

$$\frac{158\,601}{10\,000}.$$

Практично упутство за одузимање доказује се на исти начин.

61. Множење. — Практично упутство: *Да бисмо одредили производ два децимална броја, треба да их помножимо као целе бројеве, не обазирући се на запету; затим да у производу одвојимо онолико десетних места, колико има свега децимала у оба чиниоца.*

Доказ. Нека нам је задано да помножимо бројеве 3,147 и 2,05. Ово се своди на множење десетних разломака

$$\frac{3147}{1000} \text{ и } \frac{205}{100}$$

тј. $3{,}147 \cdot 2{,}05 = \frac{3147}{1000} \cdot \frac{205}{100} = \frac{3147 \cdot 205}{100 \cdot 1000} = \frac{645\,135}{100\,000} = \mathbf{6{,}45135}.$

Као што се види множење се свело на множење бројилаца 3 147 и 205.

2 пример: $1{,}12 \cdot 0{,}025 = \frac{112}{100} \cdot \frac{25}{1000} = \frac{112 \cdot 25}{100000} = \frac{2800}{100000} =$

$$0{,}02800 = 0{,}028.$$

При том је поступак овакав:

$$\begin{array}{r} 3{,}147 \\ 2{,}05 \\ \hline 15735 \\ 62940 \\ \hline 6{,}45135 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3147 \\ 205 \\ \hline 15735 \\ 62940 \\ \hline 645135 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}12 \\ 0.025 \\ \hline 560 \\ 224 \\ \hline 0{,}02800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 112 \\ 25 \\ \hline 560 \\ 224 \\ \hline 2800 \end{array}$$

Напомена. — При одвајању децимала треба водити рачуна о нулама, које се налазе с десне стране, и по потреби да се допише довољан број нула с леве стране, да се добије место за запету.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. 3,4 + 2,2=; 0,9 + 0,7=; 2,8 + 0,8=; 0,12 + 1,3=
2. 3,1+ 0,05=; 0,8 + 0,18=; 17,04 + 1,05=
3. 0,1 + 0,01=; 0,3 + 0,03=; 0,125 + 0,4=
4. 105,036+202,45; 363,85+122,0017; 0,2 + 0,02 + 0,002=
5. Који децималан број добијамо сабирањем 12д и 7д; 9 с и 48 с; 6 д и 7 с; 4 д и 76 с; 99 с и 1д; 2Ј, 4 д и 1 с; 8 Д, 4 д и 5 с?
6. Број од 0,7 до 8,7 по 0,8; од 0,8 до 2 по 0,12!
7. 0,7—0,5=; 1,2—0,9=; 1,7—0,7=; 0,47—0,37=
8. 1,04—0,99=; 3—2,7=; 3—2,07=; 1,2—0,8=
9. 0,7—0,07; 0,1—0,01; 1,1—0,99; 0,5—0,375; 1—0,999=
10. 5,75—1,05; 31,08—1,04; 1,1 — 1,001=
11. 1—0,3—0,03; 0,8—0,45—0,15; 0,5+0,6—1=
12. 1—0,7—0,17; (0,8+0,9)—1,5; (5—2,9)—1=
13. Колика је разлика између: 1 и 0,9; 6д и 47с; 58д и 57 с.
14. Број уназад од 4 до 0,5 по 0,7; од 2 до 0,4 по 0,16; од 1 до 0 по 0,125!
15. Шта треба додати броју 2,4 да се добије 4,2; броју 5,9 да се добије 8,2; броју 0,45 да се добије 2; од 0,08 до 0,8?
16. $0,^{m}7 - 0,^{m}07 =$ cm; $0,^{km}04 - 39,^{m}8 =$ m; 1 km— — $998,^{m}4 =$ m?
17. 1 m — $0,^{m}91 =$ cm; 2dm — $0,^{m}11 =$ cm; $0,^{m}8 -$ — $0,^{m}787 =$ mm?

18. $0,^{m^2}8 - 0,^{m^2}79 = dm^2$; $2,^{a}2 - 2a\ 16m^2 = m^2$; $0,^{ha}9 - 89,^{a}8 = a$?

19. $8m^2\ 1dm^2 - 2,^{m^2}12 = m^2$; $1,^{kg}2 - 800g = g$?

---

20. $0{,}1 \cdot 9$; $0{,}2 \cdot 7$; $1{,}4 \cdot 8$; $1{,}08 \cdot 9$; $3{,}7 \cdot 5 =$

21. $3{,}052 \cdot 100$; $0{,}075 \cdot 10$; $0{,}00304 \cdot 1000$; $4{,}5 \cdot 2 =$

22. $0{,}05 \cdot 0{,}2$; $0{,}002 \cdot 45$; $0{,}005 \cdot 24$; $0{,}036 \cdot 25$; $0{,}3 \cdot 4 \cdot 5 =$

23. $25{,}02 \cdot 0{,}2$; $40{,}2 \cdot 0{,}5$; $2{,}5 \cdot 0{,}4 =$

24. $0{,}028 + 0{,}028 + 0{,}028 + 0{,}028 + 0{,}028 =$

25. $1{,}2^2$; $2{,}1^2$; $0{,}5^2$; $0{,}03^2$; $0{,}2^3$; $0{,}4^3$; $0{,}1^4$; $0{,}2^5 =$

26. $0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7$; $0{,}15^2$; $0{,}01 \cdot 0{,}1$; $0{,}01^2 + 0{,}001^2 =$

---

27. $2{,}44 \cdot 10$; $0{,}08 \cdot 10$; $1{,}576 \cdot 100$; $0{,}0593 \cdot 10000 =$

28. $3{,}2 \cdot 1000$; $0{,}004 \cdot 10000$; $0{,}00001 \cdot 100000 =$

29. $2{,}2 \cdot 1000000$; $1000 \cdot 0{,}79$; $100 \cdot 0{,}0004 \cdot 10 =$

30. $0{,}32 \cdot 0{,}4 \cdot 1000$; $0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 1000$; $1{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 100 =$

31. $3 \cdot 0{,}003 \cdot 100000$; $3{,}14159 \cdot 100000$; $10 \cdot 0{,}00356 \cdot 100 =$

32. Колико пута је веће 0,3 од 0,003; 0,26 од 0,026?

33. Чиме треба помножити 0,1 да се добије 10; 2,7 да се добије 2700; 0,00024 да се добије 0,024; 0,000001 да се добије 10?

ПИТАЊА

1. Кад су децимални бројеви истоимени?
2. Како се децимални бројеви доводе на исто име?
3. Како се децимални бројеви упоређују по величини?
4. Како гласи практично упутство за сабирање и одузимање децималних бројева? Како се множе децимални бројеви? Доказ!
5. Колико има десетних места у производу два децимална броја? Овај број места може ли бити мањи у неким случајевима?
6. Колико има децимала у производу од 3 броја, кад сваки од њих има по 2 децимала? Шта ће бити ако се први свршава са 2, а други са 5?
7. Шта у ствари бива са једним бројем, кад га помножимо са 0,1; 0,01; 0,001 итд.?

8. Шта значи у ствари помножити један број са 0,05; са 0,25; са 0,125?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Изврши сабирање:

1. $4{,}753 + 3{,}504 + 703{,}2$; $54{,}02 + 3{,}075 + 125{,}7$.
2. $405{,}031 + 0{,}752 + 4{,}71$; $0{,}003 + 0{,}075 + 0{,}701$.

3.	4.	5.	6.
1,30103	4,583	5	3,89
0,47712	0,84	7,952	5
0,90309	5,006	4,027	1,703
0,49715		9,4022	2,2
			0,949

7. $(0{,}97 + 0{,}097 + 9{,}7) + (7 + 0{,}709 + 9{,}07) + 2{,}454 =$

8. $1,^{km}479 + 3,^{km}8 + 0,^{km}048 + 5,^{km}02 + 0,^{km}001 + 2\ km\ 8m + 850m = km$?

9. $10,^{m}08 + 3m\ 48\ cm + 1200\ mm + 0,^{m}9 + 2m\ 400\ mm + 5m + 960\ mm = m$?

10. $2,^{kg}902 + 0,^{kg}348 + 3460g + 2g + 1\ kg\ 90g = kg$?

11. Пошто је од једног броја одузето најпре 3,245, затим 0,98, преостаје још 4,175. Који је тај број?

12. Једна сеоска кућа заузима површину 204 m^2; споредне зграде заузимају 4a 57m^2; уз то има једна башта од 3^{a}, 15 и један воћњак од $0,^{ha}6529$. Колико износи површина овог сеоског добра?

13. Од 4 бурета прво хвата $2,^{hl}85$, друго за $0,^{hl}4$ више, треће $1,^{hl}05$, а четврто за 45 више од трећег. Колико пива може стати у сва четири бурета?

14.				
	3,4682	+ 0,12	+ 3,00975	+ 23,8942 =
	+ 0,9	+ 3,448	+ 7,100	+ 2,0007 =
	+ 1,043	+ 5,8206	+ 0,59845	+ 3 =
		+	+	+

15.					
	7,208	+ 1.8	+ 0,04	+ 1	+ 0,0027
	+ 3,52	+ 2,75	+ 3,908	+ 0,5	+ 4,592
	+ 0,0403	+ 6,493	+ 3,7	+ 2,594	+ 7,252

Изврши одузимање:

16. $6{,}853 - 3{,}17$; $87{,}8705 - 82{,}007$; $0{,}06 - 0{,}045$; $2{,}22 - 1{,}934$.

17. 48,707 — 0,897; 34,706 — 33,098; 7,003 — 0,0871; 9 — 6,0432.

18.

0,60206	3,45	10	3,90309
— 0,47712	— 1,8957	— 5,07943	— 1,77815

19. (12,597—4,193) — (10,684—7) =; 10,4 — (7—1,6626)=

20. Допуни 0,048 до 0,85; 2,0091 до 5; 0,009 до 0,9!

21. $(1,^{m^2}\ 234\ -\ 87^{dm^2}\ 40^{cm^2}) + (1^{m^2} - 7856^{cm^2}) = m^2$?

22. Разлика два броја је 0,835; умањеник је 3,3792. Колики је умањилац?

23. Дужина клатна, које изврши једно клаћење за сваки секунд, износи на екватору 991mm, на 45° сев. ширине $99,^{cm}$ 357 и на северном полу (по рачуну) $99,^{cm}615$. За колико је дужина овог клатна већа од дужина прва два?

24. Један литар чисте дестилисане воде на температури 4°C тежак је 1kg; на 0°C $0,^{kg}$ 99987, на 10°C $0,^{kg}99975$ на 20° $0,^{kg}$ 99826. За колико грама је вода на 4° тежа, неголи на осталим топлотним степенима?

25. 1 литар ваздуха тежак је (на 660^{mm} барометарског стања и 0° температуре) $1,^{g}$ 293, 1 *l* кисеоника $1,^{g}$ 429, 1 *l* водеоника $0,^{g}0895$. За колико грама је 1 *l* водоника лашки од 1 *l* прва два гаса?

26. 2,718 · 42; 0,30103 · 26;4,05 · 3,12; 43,95 · 1,7 =

27. Израчунај следеће производе и изврши пробу са 9: 34,21 · 122; 9,832 · 175; 60,0076 · 475; 0,00607 · 237; 364,31 · 270; 68,0076 · 407004; 0,5506 · 4500; 65,417 · 308060; 96,007 · 181000; 2,25 · 4000; 9003 · 4500; 100,057 · 8100000!

28. Претвори у месеце, дане, часове и минуте: $0,^{год}$ 84; $1,^{год}$ 35; $0,^{год}$ 09; $8,^{мес}$ 78!

29. Колико kg тежи $3,^{dm^3}456$ бакра, кад 1^{dm^3} тежи $8,^{kg}8$; $0,^{m^3}$ 045 мермера, кад 1^{dm^3} тежи $2,^{kg}8$; $2,^{l}$ 075 сумпорне киселине по $1,^{kg}8$; $88,^{cm^3}25$ злата по $19,^{g}3$; $77,^{m^3}785$ ваздуха; кад 1 *l* ваздуха тежи $1,^{g}293$?

Тежина 1 cm^3 неког тела, изражена грамовима, зове се *специфична тежина* тога тела (или тежина $1dm^3$ изражена килограмима).

30. Брзина звука у ваздуху је $337,^{m}$ 2 у секунду. Ми чујемо грмљавину на $5,^{s}$ 4, пошто смо видели севање. Колико је далеко облак, ако претпоставимо да је светлост стигла одмах?

Под *брзином* се у науци разуме пређени пут за 1 секунд.

31. Једна жица од калаја издужи се, кад се загреје за 1 степен, за 0,000018782 њене дужине. Она је дугачка, $5,^{m}$ 51 на 0 степени. Колика је њена дужина на 1°, 5?

32. Шта стаје једно туце прозорских окана, висине $0,^{m}$ 85, а ширине $0,^{m}$ 42, кад се уједно и за намештање плаћа $75,^{дин}$ 60 од 1 m^2?

33. Колико се m^3 дрва добије од 5 правоугло исечених греда, дужине $6,^{m}40$, ширине 28 cm и висине 2 dm?

34. Колико kg тежи једна камена коцка, чија је ивица $0,^{m}$ 24, кад 1 dm^3 тежи $2,^{kg}$ 24?

35. 0,003 665 · 100 · 300; 0,01993 · 500 · 20.

36. Један брзи воз прелази $16,^{m}$ 8 за секунд. Колико km пређе за 1 сат?

37. Дужина корака једног пешака је $0,^{m}$ 72. Колико km пређе, док начини 1700 корака?

38. Колико су тешка $4,^{m^3}$ 75 дрвета, кад 1 dm^3 тежи $0,^{kg}$ 34? Колико теже $0,^{m^3}$ 8, код 1 dm^3 тежи $0,^{kg}$ 675?

39. 1 cm^3 алуминијума тежи $2,^{g}$ 6, док 1 cm^3 олова је тежак 11, ^{g} 03. За колико kg је dm^3 олова тежи од 1 dm^3 алуминијума?

40. 1 dm^3 леда тежак је $0,^{kg}$ 91, док је један литар морске воде $1,^{kg}03$. За колико је санта леда од 1^{m^3}, 245 лакша од исто толике количине морске воде?

41. На једној генералштабној карти, на којој је размера 1:100 000 отстојање двеју тачака износи $4,^{cm}7$. Колико km је стварно отстојање?

42. На плану једног града су 2 тачке удаљене $7,^{cm}$ 2. Колико је истинско отстојање тих тачака, кад је план нацртан у размери 1 : 5 000?

43. На једном плану је једно земљиште дугачко $10,^{cm}4$, а широко $7,^{cm}$ 2. Колико ара је у ствари величина тог земљишта, када су дужине на цртежу 590 пута мање од оних у природи?

44. Тачно трајање једне године је $365,^{дана}$ 242217. За колико смо у закашњењу после 50 година, ако узмемо да је дужина године 365 дана?

45. Ако рачунамо преступне године по 366 дана, да ли **смо у** закашњењу, или смо отишли напред, после 100 година? Колика је грешка?

АГРЕГАТИ

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Потребни подаци исписују се, а по потреби и делимични резултати.

Израчунај кад је могућно на више начина:

1. $1,7+1,8+1,6$; $2,8+2,5-1,9$; $5,8-2,8+2,9$; $7,6-5-1,6$.
2. $2+3,1+4,9-3,4-2,5$; $0,7-2,4+3,8$.
3. $1,5-2,5-3,5+4,6$; $0,7+0,17-0,27+0,4$.
4. 12 дин $- 7,^{\text{дин}}\,20 + 3,^{\text{дин}}\,20 + 5,^{\text{дин}}\,10 - 12,^{\text{дин}}\,10 =$
5. $3^{m} - 1,^{m}90 - 0,^{m}85$; $10^{km} - 5,^{km}\,8 - 4,^{km}\,8 =$
6. $77,^{l}\,4 - 7,^{l}\,04; + 0,^{l}\,64$; $31^{hl} - 6,^{hl}\,9 + 7,^{hl}\,9 - 20^{hl} =$

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Израчунај:

1.
$$\begin{array}{r} 7,2 \\ -\ 1,038 \\ -\ 0.94 \\ -\ 2,1382 \\ -\ 1,7338 \\ \hline \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 36,597 \\ -\ 17,02 \\ -\ 8,8814 \\ -\ 3,7296 \\ -\ 0,43552 \\ \hline \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ 12,58 \\ -\ 0,327 \\ -\ 27,4 \\ -\ 26,003 \\ -\ 0,08 \\ \hline \end{array}$$

Решење првог задатка. Да би нам било јасније, дописаћемо потребан број нула.

$$\begin{array}{r} 7,2000 \\ -\ 1,0380 \\ -\ 0,9400 \\ -\ 2,1382 \\ -\ 1,7338 \\ \hline = 1,3500 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7,2000 \\ -\ 5,8500 \\ \hline = 1,3500 \end{array}$$

Треба сабрати негативне чланове и одмах тај збир одузети од броја 7,2000, тј. не треба писати одвојено, као што је то назначено десно, него све радње свршавати на првом ступцу.

При томе се говори, почињући сабирање одоздо: 8 и 2, 10 и 0 (која се пише испод црте, као резултат и сабирања и одузимања) 10; 1 задржано и 3,4 и 8,12 и 8,20 и 0,20; 2 задржано и 3,5 и 3,8 и 4,12 и 3,15 и 5,20; 2 задржано и 7,9 и 1,10 и 9,19 и 3,22; 2 задржано и 1,3 и 2,5 и 1,6 и 1, 7.

У горња три примера имамо агрегате, где је један члан позитиван, а сви остали негативни. Израчунавање агрегата вршили смо једним потезом. Слично томе можемо чинити и кад има више позитивних и негативних чланова. Уопште можемо рећи да је могућно једним замахом сабрати и одузети више бројева. Овај рачун је за ученике врло занимљив, те ћемо покушати да га што боље објаснимо. Пошто такав начин рада важи и за целе бројеве, ми ћемо најпре са целим и радити.

Нека нам је дато да извршимо одузимање:

$$2461 - 738.$$

Најпростији поступак је, да умањилац потпишемо испод умањеника и да извршимо одузимање као обично.

$$\begin{array}{r} 2461 \\ -738 \\ \hline 1723. \end{array}$$

Али пошто је $738 = 1000 - 262$, то можемо написати

$$2461 - 738 = 2461 - (1000 - 262).$$

Међутим пробањем се можемо уверити да је:

$$2461 - (1000 - 262) = 2461 + 262 - 1000.$$

Разлика се може одузети од неког броја, кад се том броју дода умањилац, па од добијеног збира одузме умањеник.

Ми смо у овом случају одузимање свели на сабирање, јер се умањеник 1000 врло лако одузима. Остаје нам само да видимо како се брзо долази до броја 262. Његове ћемо цифре упоредити са цифрама броја 738. Напишимо их једно испод другога ради лакшег прегледа:

$$\begin{array}{r} 738 \\ 262. \end{array}$$

Питамо се како ћемо из цифара броја 738 добити цифре броја 262. Види се јасно да је прва цифра, с десне стране, броја 262 допуна до 10 прве цифре броја 738, а остале су цифре допуне до 9. То допуњавање се лако врши усмено, тако да се број 262 не мора исписивати. Горње одузимање тада изгледа овако:

$$\begin{array}{r} 2461 \\ -738 \\ \hline 2723 - 1000 = 1723. \end{array}$$

При томе се говори; 1 и допуна од 8 до 10, 2 јесу 3; 6 и допуна од 3 до 9, 6 јесу 12, 2 пишем један задржавам; 1 задржано и 4,5 и допуна од 7 до 9, 2 јесу 7; 2 преносим; кад од 2723 одузмем 1000 остаје 1723.

Кад се ученик мало извежба, онда говори краће: 1 и 2,3; 6 и 6,12, 2 пишем 1 задржавам; 1 задржано и 4,5 и 2,7; 2 мање 1,1. На тај начин се одмах напише резултат, без накнадног одузимања броја 1000. Кад треба да се одузме 1, показује нам знак минус.

Све ово изгледа обилазно, кад радимо само са два броја. Међутим кад имамо много бројева, овим поступком са знатно брже дође до резултата. Узмимо за пример овај агрегат:

$$26318 - 4156 + 343 - 217 + 948 - 44 - 18.$$

Решење: Чланове ћемо потписати један испод другог, пазећи при том строго да одговарајуће цифре дођу тачно у исти стубац, а да знаци одузимања дођу испод прве следеће цифре. Затим поступимо по овом практичном упутству: *Цифре позитивних чланова сабирамо као обично, кад наиђемо на цифре негативних чланова, додајемо допуне, и то код првих цифара допуне до 10, а кад осталих допуне до 9; кад наиђемо на знак минус, одузимамо 1; на писање знака — мора се обратити велика пажња.*

$$\begin{array}{r} 26318 \\ -4156 \\ 343 \\ -217 \\ 948 \\ -44 \\ -18 \\ \hline 23174 \end{array}$$

При томе се говори: 8 и 4,12 и 3, 15 и 3, 18 и 8,26 и 6,32 и 2,34; 4 пишем а 3 задржавам; 3 задржано и 1,4 и 4,8 и 4,12 и 8,20 и 4,24 и 5,29 и 8,37; 7 пишем а 3 задржавам; 3 задржано и 3,6 и 8,14 и 3, 17 и 7, 24 и 9,33 мање 1,32, мање 1,31; 1 пишем а 3 задржавам; 3 задржано и 6,9 и 5,14 мање 1,13; 3 пишем, а 1 задржавам; 1 задржано и 2,3 мање 1,2.

Исто тако се ради и са децималним бројевима, само је згодно увек дописати потребне нуле, пошто се без дописаних нула може лако да погреши.

Пример: $3{,}09 - 7{,}7852 + 6{,}429 - 0{,}0158$.

$$\begin{array}{r} 3{,}0900 \\ -7{,}7852 \\ 6{,}4290 \\ -0{,}0158 \\ \hline 1{,}7180 \end{array}$$

Напомена 1. — Ако се неки од негативних чланова свршава нулама, онда се нуле не узамају у обзир, него се прва следећа цифра, различита од нуле, допуни до 10, а остале до 9.

Напомена 2. — Ако се деси да метод изда због оваквог потписивања знака минус, тј. да нема од чега да се одузме 1, онда се знак — помери за једно место улево, а његово првобитно место попуни нулом, која се сматра као остале цифре броја, те се и она допуњује до 9.

$$\begin{array}{r} 4.\quad 438{,}62 \\ +\ 23{,}49 \\ -\ 377{,}02 \\ +\ 59{,}74 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5.\quad 10{,}6739 \\ -\ 2{,}484 \\ -\ 6{,}9974 \\ +\ 5{,}3122 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6.\quad 329{,}076 \\ -\ 188{,}4 \\ +\ 112{,}559 \\ -\ 204{,}506 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7.\quad 4532{,}8872 \\ +\ 2029{,}0123 \\ -\ 1742{,}6678 \\ -\ 2465{,}8954 \\ \hline \end{array}$$

8. $(0{,}99+0{,}9)+(0{,}99-0{,}9)-(1-0{,}9)-(1-0{,}9+0{,}91)=$
9. $25-[36{,}44-(2-1{,}995)-30{,}465]=$
10. $(0{,}5+0{,}03+0{,}003)+(1-0{,}003)-(0{,}3-0{,}03)=$
11. $[(2-1{,}88715)-0{,}00245]+(1{,}1-1{,}001)=$
12. $(25+0{,}1+0{,}00006)-(10{,}55+0{,}5+3{,}05+0{,}0007)=$
13. $9-[(2{,}6-1{,}2)-0{,}08]+2{,}908-(3{,}6-2{,}004)=$
14. $24{,}56+(0{,}08-0{,}002)-(2{,}3-0{,}3125)-0{,}4945=$
15. Збиру бројева 5,6 и 2,018 да се дода њихова разлика, затим да се тако добијени збир умањи за онај број, који је за 0,017 мањи од 1.
16. Разлика између 7д и 7с да се смањи за 0,5 затим добијена разлика да се допуни до 1.
17. Од ког броја треба одузети збир (1,09 + 2,743) да би се добила разлика између 4,8 и 2,735?
18. Место А је од најближег места В удаљено 5,^{km}995; место В од С 7,^{km}085. Колико је С удаљено од следећег места D, кад је отстојање AD тачно 30 km?
19. Од једне железничке станице А кренула су 2 воза, једнаке брзине истим правцем. Први је већ удаљен од А за 7,^{km}47, а други 2,^{km}995. Кад први воз уђе у станицу В, која је од А удаљена 20 km, колико је тада други воз удаљен од В?
20. Колика је грешка, кад се уместо 0,216 узме 0,21 или 0,22?
21. Која је грешка мања, кад се

место	2,944	узме 2,94	или 2,95,
„	0,776	„ 0,77	„ 0,78;
„	3,14159	„ 3,1415	„ 3,1416;
„	0,9996	„ 1	„ 0,999?

22. $13{,}5\cdot 0{,}26+7\cdot 0{,}052-(1-0{,}854)\cdot 2{,}6=$
23. $(8{,}4-7{,}68)\cdot 9{,}6-2{,}24\cdot(3-2{,}099)=$
24. $9{,}278\cdot 14+21\cdot 0{,}004+9\cdot 0{,}004-0{,}020\cdot 40=$
25. $40{,}04-0{,}4\cdot 17{,}8+2{,}5\cdot 7{,}9;\ 2{,}4^2\cdot 3{,}14-2{,}25\cdot 1{,}73=$
26. Збир 4 једнака сабирка, од којих је сваки 2,718 да се помножи разликом бројева 1 и 0,84.

27. Шта се мора додати производу бројева 1,4 и 0,14, да се добије њихова разлика?

28. Шта се мора одузети од збира бројева 9,6 и 0,90, да остане њихов производ?

29. Да се збир бројева 3,092 и 2,707 помножи њиховом разликом и од производа одузме двострука разлика између 1,2 и 0,864.

30. Да се од производа бројева 3,745 и 2,98 одузме њихова разлика.

31. За колико је 0,3-струка разлика бројева 17,26 и 15,948 мања од 6-тоструког збира $0,9 + 3,047$?

Реши ове једначине:

32. $x = 5,25 \cdot 8,14 - 14,852$; $x + 6,6 \cdot 0,55 = 4,63$; $\frac{x}{4,8} = \frac{4,5}{4,8}$!

33. $x - 0,32 \cdot 5,4 = 0,272$; $\frac{x+2}{0,4} = 8,5$; $\frac{6-x}{0,6} = 0,04$.

Израчунај на најпростији начин:

34. $2,77915 \cdot 7 + 2,77915 \cdot 17$; $0,29715 \cdot 35 - 0,29715 \cdot 22$.

35. $3,1416 \cdot 6 + 3,1416 \cdot 13 - 3,1416 \cdot 16 =$

36. Колико треба додати 100-струкој разлици бројева 5,4 и 4,800 да се добије 60-струко 1,082?

37. Један точак на колима има у обиму $3^m,55$ и начини сваког секунда по један обртај. Колико km пређе за $\frac{3}{4}$ h?

ГЛАВА XIII

ДЕЉЕЊЕ ДЕЦИМАЛНИХ БРОЈЕВА

62. — Разликоваћемо два случаја:

1. — *Дељеник је децималан број, делилац цео број.* Имали смо прошле године ово **практично упутство:** *Ако хоћемо да поделимо један децималан број целим бројем, радићемо као кад делимо цео број; само треба да пазимо да у количнику ставимо запету, пре него што спустимо прву децималну цифру.*

Пример 1. $76,15 : 5 = 15,23$.

Доказ: $\frac{7615}{100} : 5 = \frac{7615 : 5}{100} = \frac{1523}{100} = 15,23$.

Пример 2. $1,0076 : 11 = 0,0916$.

Доказ: $\frac{10076}{10000} : 11 = \frac{10076 : 11}{1000} = \frac{916}{10000} = 0,0916$.

Пример: 3. $0,00176 : 44 = 0,00004$.

Доказ: $\frac{176}{100000} : 44 = \frac{176 : 44}{100000} = \frac{4}{100000} = 0,00004$.

2. Дељеник и делилац су децимални бројеви. Имали смо прошле године **практично упутство:** *Да бисмо одредили количник два децимална броја, прецртамо запету у делиоцу, а запету у дељенику помакнемо за онолико места удесно, колико је децимала у делиоцу. Ако дељеник има мањи број децимала од делиоца, допише му се потребан број нула. Ако је дељеник цео број, допише му се толико нула, колико има децимала у делиоцу.*

Затим се дељење врши као са целим бројевима, пазећи да се у количнику стави запета, чим се спусти прва децимална цифра од оних, што су у дељенику преостале. Ако у дељенику нестане децималних цифара, а добије се остатак, онда се остатку допише нула, а дељење настави.

Пример: 1. $17,28 : 3,6 = 172,8 : 36 = 4,8$.

```
172,8 : 36 = 4,8
 288
   0
```

Доказ: $\frac{1728}{100} : \frac{36}{10} = \frac{1728}{100} \cdot \frac{10}{36} = \frac{1728}{10} \cdot \frac{1}{36} = 172,8 : 36$.

Пример: 2. $0,0011355 : 0,003 = 1,1355 : 3 = 0,3785$.

Доказ: $\frac{11355}{10000000} : \frac{3}{1000} = \frac{11355}{10000000} \cdot \frac{1000}{3} = \frac{11355}{10000} \cdot \frac{1}{3} = 1,1355 : 3$.

Пример: 3. $12,5 : 0,000025 = 12500000 : 25 = 500000$.

Доказ: $\frac{125}{10} : \frac{25}{1000000} = \frac{125}{10} \cdot \frac{1000000}{25} = \frac{12500000}{25} = 12500000 : 25$.

Пример: 4. $504 : 0,042 = 504000 : 42 = 12000$.

Доказ: $504 : \frac{42}{1000} = 504 \cdot \frac{1000}{42} = \frac{504000}{42} = 504000 : 42$.

Пример: 5. $3 : 0,16 = 300 : 16 = 18,75$

```
300 : 16 = 18,75
140
 120
   80
    0
```

Доказ: $3 : 0,16 = 3,000.... : 0,16 = 300,000.... : 16$.

Најкраће: **Децималним бројем не делимо, него учинимо да он постане цео број.**

Напомена. — При сабирању, одузимању и множењу децималних бројева добијамо увек тачан резултат, који је најчешће и сам децималан број. Код дељења није тај случај. Количник је најчешће нетачан или како се то у математици каже **приближан.**

У задацима из практичног живота често није ни потребно да се ради са потпуно тачним бројевима. Допуштено је, да се тачни бројеви замене бројевима, који се од њих врло мало разликују. Тако ако имамо да наплатимо суму од 300 динара и неколико пара, ми ове паре можемо занемарити. Кад трговац прода $3,^{m}20$ штофа, он сигурно при мерењу учини грешку за који милиметар, али кројач који ради одело ту грешку обично и не примети.

У горњим примерима дељења децималних бројева количник је тачан број. Али то су примери нарочито удешени. Најчешћи је случај, да количник није тачан, него само приближан. На пример 5 : 0,3. Ако приступимо дељењу према горњем практичном упутству, имаћемо:

50 : 3 = 16,666 . . .
20
 20
  20 . . .

Видимо да се у количнику јављају 16 целих, а као децимали увек шестице. Дељење бисмо могли продужити докле хоћемо, никада га не бисмо могли завршити. Увек се као остатак јавља број 2. Пошто је очевидно да негде морамо стати, ми увек унапред одредимо до ког десетног места треба ићи. Тада обично кажемо да се количник одреди на 1, 2, 3, 4 . . . децимала. Разуме се да је количник утолико тачнији, уколико узмемо већи број децимала.

Када се зауставимо на извесном децималу, обично поступамо двојако. Последњу цифру или оставимо непромењену, или је повећамо за један. Како треба поступити казује нам цифра, која долази иза последњег децимала. Ако је та цифра већа од 4, онда се последња, коју узимамо, повећа за један. То чинимо због тога, што хоћемо да нам грешка буде што мања.

Узмимо да нам је задато да горњи количник 5 : 0,3 одредимо на 3 децимала. Решење је 16,667, а не 16,666. Који је од ова два броја тачнији најбоље ћемо видети, ако их напишемо са 4 децимала, и упоредимо са количником на 4 децимала. Пошто се ови бројеви сматрају у рачунима као крајни, кад се узму на три децимала, то први можемо написати 16,6670, а други 16,6660. Ради боље прегледности напишимо их овако:

16,6670
16,6666
16,6660.

Сад видимо да се први број разликује од правог за 4 дх, а други за 6 дх. Према томе први број 16,667 је са мањом грешком.

Ако бисмо у место 16,6666 узели 16,6667 што је тачније, онда је грешка код броја 16,667 још мања (3дх), а грешка код 1,666 још већа (7дх).

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. 9,6 : 4 =; 18,9 : 7=; 13,5 : 15=; 7,2 : 24=; 0,084: : 12 =
2. 26,2 : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12; 0,108 : 12; 44,44 : 11 =
3. 1,8 : 7; 0,3 : 5; 6,9 : 6; 30,2 : 5; 14,4 : 8; 18,4 : 8 =
4. Које дец. бројеве добијамо кад поделимо са 7, 4,20; 105 са 30; 130 са 40; 260 са 50?
5. Колика је половина од 0,3; 1,3; 0,05; 0,99?
6. 34,7 : 10; 34,7 : 100; 34,7 : 1000; 3587,5 : 1000.
7. 216 : 200; 35 : 500; 8 : 80000; 135 : 90.
8. $4,^{dm}2 = m$; $2,^{cm}25 = m$; $0,^{mm}9 = m$?
9. 4,5 : 1,5; 0,126 : 0,21; 0,121 : 1,1; 0,4 : 0,008.
10. 18 : 0,5; 1 : 0,025; 0,12 : 0,0024; 33 : 0,11.
11. Колико пута се садржи 1,5 у 12; 0,1 у 40; 0,01 у 1000?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. 45,25 : 25; 1,113 : 21; 3,33333 : 111 =
2. 0,0808 : 16; 1,536 : 48; 784,95 : 116 =
3. Израчунај количник, чији је дељеник 19,845, а делилац 35!
4. Који број морамо узети 19 пута као сабирак, да бисмо добили 5,966?
5. Чиме морамо да поделимо 90,48, да добијемо 104?
6. Пуцањ једнога топа чуо се на даљини $4,^{km}986$, на 10^{sec} после окидања. Колики пут пређе звук за 1^{sec}?
7. Претвори у дане : $8,^{h}4$; $15,^{h}6$; $78,^{h}48$!
8. Претвори у године : $41,^{мес}4$; $3,^{мес}286$; $31,^{мес}5$!
9. 3,30103 : 1000; 297,5 : 100000; 104,1 : 2100 =
10. 1051,1 : 23000; 7,8 : 60000; 1600 : 64000 =
11. Подели 365 десетих са 5000!
12. Претвори у kg: 1224 g; $48,^{g}3$; $0,^{g}2$!
13. „ „ „ km: $567,^{m}8$; 2140cm, 16000 mm!
14. „ „ ha: $45,^{a}62$; $5,^{a}9$; 5a 8 m^2; 95 m^2!
15. Којим бројем се мора поделити 1,8 да би се добило 0,18; 36,5 да се добије 0,0365; 0,124 да се добије 0,00124?
16. Колико часова су: 1014^{mn}; 10080^{s}; $2354,^{s}4$; $37,^{mn}2$?
17. Израчунај x из ових једначина: $2000 \cdot x = 172,4$; $0,288 = 180 \cdot x$; $389,6\,x = 1600$; $\frac{0,864}{x} = 360$!

18. 50,24 : 1,6; 4,2588: 4,2; 0,24384 : 0,96; 0,2 : 0,032 =

19. (7,5654 : 23,35) : 0,27; 46,3232 : 6,16 : 0,366 =

20. У следећим примерима одреди количник најпре на 1 дец., а затим на 3 дец.: 3 : 42; 0,3 : 0,12; 0,003 : 0,0045; 0,0001 : 0,3!

21. У овим примерима да се одреди количник на 3 дец.: 23,746 : 0,0059; 0,185 : 34,06; 15,125 : 17,5; 0,78 : 361,059.

22. Колико сабирака дају збир 86, кад је сваки 3,44?

23. За колико часова ће се напунити један резервоар од 3,^{m3}2412 кроз цев која за минут даје 14, *l* 6 воде?

24. Један воз има средњу брзину 10,^{m}75. За колико h и mn ће стићи у станицу, која је удаљена 108,^{km}36?

ПИТАЊА

1. Како се дели децималан број целим бројем? Доказ!
2. Како се дели цео број децималним бројем? Доказ!
3. Како се дели децималан број децим. бројем? Доказ!
4. Шта су приближни количници?
5. Како се поступа са последњим децималом код приближних количника?
6. Покажи да је исто помножити један број са 10 или поделити га са 0,1!
7. Шта у ствари значи дељење једног броја са 0,01 и 0,001?
8. Како се брже дели са 0,5; 0,25; 0,125; са 0,05 и 0,005?

ГЛАВА XIV

ПРЕТВАРАЊЕ ОБИЧНИХ РАЗЛОМАКА У ДЕСЕТНЕ

63. — Коначан и бесконачан десетни разломак. — Из свега што смо досада проучили јасно се види да је много лакше рачунање са десетним разломцима, неголи са обичним. У практичном животу ради се готово само са десетним разломцима, са обичним врло ретко. Због тога је потребно да проучимо како ћемо претворити обичне разломке у десетне.

Кад хоћемо један обичан разломак да претворимо у десетни, треба да га тако проширимо, да му именилац постане 10,100,1000 итд. Али пошто су ови бројеви састављени само из простих чинилаца 2 и 5, то ово претварање успева само у случају, кад именилац обичног разломка нема других простих чинилаца осим 2 и 5. У овом случају добија се *коначан* десетни разломак.

Напомена. — Пре претварања треба обичан разломак довести на несводљив облик.

Пример: Претвори у десетне разломке $\frac{2}{5}$, $\frac{17}{25}$, и $\frac{13}{16}$.

Решење: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$; $\frac{17}{25} = \frac{68}{100} = 0{,}68$.

$\frac{13}{16} = \frac{13 \cdot 625}{16 \cdot 625} = \frac{8125}{10000} = 0{,}8125$. У овом последњем случају до резултата се брже долази, ако просто бројилац поделимо имениоцем.

```
13: 16 = 0,8125
130
  20
   40
    80
     0
```

Отуда имамо ово **практично упутство:** *Обичан разломак претвара се у десетни, кад се бројилац подели имениоцем.*

Ако се у имениоцу једног обичног разломка налазе и други прости чиниоци, као 3, 7, 11 итд., онда се при претварању добије један *бесконачан* или *бескрајан* десетни разломак. Он не изражава тачну вредност датог обичног разломка. Али грешка је утолико незнатнија, уколико се узме већи број децимала. Последње место које се узме у рачун повећа се за 1, ако је следећи децимал већи од 4.

Примери: $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$, на 2 места гласи 0,67;

$\frac{7}{12} = 0{,}58333\ldots$, на 4 места гласи 0,5833.

64. Број десетних места. — У малопређашњем примеру $\frac{2}{5}$, $\frac{17}{25}$ и $\frac{13}{16}$ видимо да у првом случају имамо 1 место, у другом два, а у трећем четири. Занимљиво је да ли можемо број децимала одредити унапред. Узмимо ове примере:

1. $\frac{3}{4} = 0{,}75$; 2. $2\frac{17}{125} = 2{,}136$; 3. $\frac{29}{80} = 0{,}3525$; 4. $\frac{277}{800} = 0{,}28375$.

Први разломак је дао 2 места, његов именилац је $4=2^2$;
други " " " 3 " , " " " $125=5^3$;
трећи " " " 4 " , " " " $80=2^4\,5$;
четврти " " " 5 " , " " " $800=2^5\cdot5^2$.

Кад посматрамо изложиоце горњих степена, видимо да је број места једнак већем изложиоцу чиниоца 2 или 5. Отуда имамо ово **практично упутство,** за одређивање броја децимала код коначних десетних разломака: *Треба именилац раставити на просте чиниоце. Тада већи изложилац чиниоца 2 или 5 казује колико ће бити десетних места.*

65. Периодични разломци. — При претварању једног обичног разломка у десетни примети се убрзо да се поједини децимали, или читаве групе децимала, стално понављају. Групе бројева које се тако понављају зову се **периоди.**

Примери: $2\frac{3}{11} = 2,272727 \ldots\ldots \frac{35}{60} = \frac{7}{12} = 0,58333\ldots$

Код 2,272727 ..... почиње период непосредно иза запете. Такав разломак зове се **чист периодичан разломак.** Код 0,58333 ... долази период тек после два децимала. Такав десетни разломак зове се **мешовит периодичан разломак.**

66. — Лако можемо распознати који обични разломци дају чисте периодичне десетне разломке. Треба именилац раставити на просте чиниоце. *Ако међу чиниоцима нема никако бројева 2 и 5, добиће се чист периодичан разломак. Ако се међу осталим чиниоцима јаве и бројеви 2 и 5, добиће се мешовит периодичан разломак.*

Пример 1: $\frac{2}{11} = 0,181818\ldots;\ \frac{1}{33} = 0,030303\ldots$

Пример 2: $\frac{5}{6} = 0,8333\ldots\ldots;\ \frac{9}{88} = 0,102272727\ldots$

Имамо правила помоћу којих се може унапред видети колико ће бити цифара у једном периоду, тј. да се види колика ће бити дужина периода. Ми у та правила не можемо улазити, само ћемо једно напоменути. *Број цифара једног периода мора бити мањи од имениоца разломка, који претварамо.* Ако је на пр. именилац 7, период може имати највише 6 цифара. То се може лако разумети. При дељењу бројиоца са 7 могу као остаци бити само ових 6 бројева:

1, 2, 3, 4, 5 и 6. При продужењу деобе мора неки од ових остатака да се понови.

Број цифара претпериода, код мешовитих периодичних разломака, одређује се слично оном, што смо рекли о броју цифара код коначних десетних разломака. *Тај број једнак је већем изложиоцу чинилаца 2 или 5.*

У горњим примерима именилац је $6 = 2\cdot3$, претпериод има једну цифру, именилац $88 = 2^3\cdot12$, претпериод има 3 цифре.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Претворити у десетни разломак, при чему унапред да се одреди број десетних места:

1. $\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, $10\frac{1}{5}$, $\frac{9}{20}$, $2\frac{2}{25}$, $\frac{13}{50}$, $\frac{9}{200}$.
2. $\frac{21}{40}$, $\frac{111}{250}$, $\frac{1}{125}$, $19\frac{17}{2000}$, $\frac{1}{5000}$.
3. $\frac{7}{2}$, $\frac{19}{4}$, $\frac{28}{5}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{25}{8}$, $\frac{93}{20}$, $\frac{99}{50}$.
4. $\frac{9}{6}$, $\frac{21}{35}$, $1\frac{84}{96}$, $\frac{102}{24}$, $\frac{111}{148}$, $\frac{36}{150}$.
5. Претвори у године (дес. разл.): 3 мес, 90 мес, 72 дана, (1 год = 360 д), 180 дана!
6. Претвори у месеце (1 мес = 30 дана): 21 д, 201 д, $\frac{1}{48}$ г, $\frac{7}{20}$ г!
7. Изрази у часовима: $2^h\ 24^{mn}$, $1^д\ 7^h\ 45^{mn}$!

ПИТАЊА

1. Како се претвара обичан разломак у десетни?
2. Може ли сваки обичан разломак да се претвори у десетни?
3. Шта су периодични разломци?
4. Какви има периодичних разломака?
5. Шта је период?
6. Шта је претпериод?
7. Како се унапред може одредити број децимала код коначних разломака?
8. Може ли се унапред одредити дужина периода?
9. Како се заокругљују периодични разломци?
10. Какве десетне разломке добијамо претварањем обичних, чији су имениоци: 160, 168, 175, 178, 201, 240, 256, 300?

11. Које бројеве можемо узети између 50 и 100 за имениоце, па да од таквих обичних разломака добијемо чисте периодичне?

12. Нађи имениоце између 19 и 30, који ће дати мешовите периодичне разломке! Колико децимала претходе периоду у сваком таквом случају?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Претвори у десетне разломке:

1. $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{11}{64}$, $\frac{9}{80}$, $\frac{11}{128}$, $\frac{44}{160}$, $\frac{49}{256}$, $\frac{111}{320}$.
2. $\frac{1}{400}$, $9\frac{9}{1200}$, $\frac{1243}{1600}$, $\frac{489}{4000}$, $\frac{1111}{2500}$.
3. $2^{km}\frac{3}{8} + 5,^{km}37 + \frac{1}{40}$ km $+ 5^{km}\frac{37}{125} + 367$m $=$ km?
4. $(2^{kg}\frac{7}{8} - 0,^{kg}815) + (5,^{kg}724 - 3^{kg}\frac{243}{500}) + 456$ g $=$ $=$ kg?
5. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{1}{24}$ (на 4 дец.)
6. $3\frac{19}{30}$, $\frac{5}{48}$, $\frac{59}{70}$, $6\frac{29}{120}$, $\frac{7}{180}$ (на 5 дец.)
7. $\frac{10}{12}$, $\frac{39}{81}$, $\frac{80}{130}$, $\frac{2000}{875}$ (на 3 дец.)
8. Колико (на 3 дец.) су: $2^{m}\frac{4}{9}$, $\frac{1}{6}$ m, $\frac{7}{300}$km, $13^{cm}\frac{1}{3}$?

ПРЕТВАРАЊЕ ДЕСЕТНИХ РАЗЛОМАКА У ОБИЧНЕ

67. — Претвори усмено у обичне разломке и изврши потребна скраћивања: 9,6; 0,16; 1,25; 0,48; 6,75; 4,075; 2,225; 0,08; 8,375; 0,0025; 7,625; 5,5555; 2,0405; 0,0005!

Претвори писмено: 2,575; 0,15625; 2,1728; 0,01716; 0,000768; 0,2525; 0,00366; 5,04625; 0,001275!

68. — Чисти периодични разломци. — Практично упутство. — *Чист периодичан разломак претвара се у обичан, кад се за бројилац узме период, а за именилац број састављен од онолико деветица, колико период има цифара.*

Доказ. Нека имамо 0,216 216 216.. да претворимо у обичан разломак. Ако овај чист периодичан десетни разломак помножимо са 1000, пошто период има три цифре, то ће нови број 216,216 216 216... имати исте децимале. Ако први одузмемо од овог 1000 пута већег, имаћемо

1000-струка вредност од 0,216 216 216... = 216,216 216 216..
1-струка „ од 0,216 216 216.. = 0,216 216 216..
999-струка „ од 0,216 216 216... = 216

Пошто је 0,216 216 216 . . . · 999 = 216, то је само

$$0{,}216\ 216\ 216\ldots = \frac{216}{999} = \frac{24}{111} = \frac{8}{37}.$$

Напомена. Овај метод издаје код броја 0,999....

69. — Мешовит периодичан разломак. — Практично упутство. — *Напише се број који садржи цифре претпериода и периода. Од њега се одузме број претстављен претпериодом. Овој разлици се потпишу као именилац онолико деветица, колико има цифара период, а толико нула, колико има цифара испред периода.*

Доказ. — Узећемо број 0,863 63 63.... да претворимо у обичан разломак. Обележићемо га ради краткоће са x и помножити са 1 000, пошто период има две цифре, а претпериод једну, затим са 10 пошто претпериод има једну цифру. Тада имамо:

$$0{,}863\ 63\ 63\ldots = x$$

1000-струко x = $1000\ x = 863{,}63\ 63\ 63\ \ldots$
10-струко x = $10\ x = 8{,}63\ 63\ 63\ \ldots$
Одузимањем $990\ x = 863 - 8$

$$\text{само } x = 0{,}8636363\ \ldots = \frac{863 - 8}{990},$$

а то смо и имали да докажемо.

Даље имамо: $\frac{863 - 8}{990} = \frac{855}{990} = \frac{19}{22}$

ЗА ПИСМЕНО БЕЖБАЊЕ

Претвори у обичне разломке и скрати:

1. 0,555 . . ; 0,36 36 36 . . . ; 4,003 003. . . ; 0,09 09 09 . . .
2. 3,1001 1001 1001...; 8,142 875 142 857...; 4,04950495...
3. 0,1666...; 0,4333...; 0,08222...; 0,1636363. .; 6,5090909...
4. 1,020 30 30...; 9,504684684...; 1,07272727...; 12,4097222..
5. $(4\frac{1}{2} - 1{,}83333\ldots) \cdot 4{,}44\ldots$; $(0{,}31818\ldots + \frac{2}{11}) \cdot 0{,}054054\ldots$

СПАЈАЊЕ ОБИЧНИХ И ДЕСЕТНИХ РАЗЛОМАКА

70. — Рекли смо већ да је угодније рачунање са десетним разломцима, неголи са обичним. Због тога се најчешће обичан претвара у десетни. Ученик треба да мотри да ли ће се у следећим примерима наићи на случај, где је згодније урадити обрнуто.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. $\frac{1}{2} + 0{,}9$; $\frac{3}{4} + 0{,}09$; $\frac{1}{8} + 0{,}875$; $\frac{1}{2} + 0{,}8$; $\frac{9}{10} + 0{,}34 =$

2. $\frac{1}{2} - 0{,}1$; $0{,}8 - \frac{3}{5}$; $\frac{7}{10} - 0{,}2$; $\frac{3}{4} - 0{,}7$; $\frac{4}{5} - 0{,}79 =$

3. $0{,}5 + \frac{1}{3}$; $0{,}3 + \frac{4}{15}$; $0{,}75 + \frac{1}{6}$; $0{,}75 - \frac{2}{3}$; $1{,}5 - \frac{5}{6} =$

4. $0{,}333\ldots + \frac{4}{15}$; $0{,}666\ldots - \frac{7}{18}$; $2{,}222\ldots + 7\frac{7}{9} =$

5. $0{,}5 \cdot \frac{2}{5}$; $\frac{1}{2} \cdot 0{,}6$; $\frac{3}{4} \cdot 0{,}25$; $0{,}5 \cdot \frac{3}{7}$; $0{,}75 \cdot \frac{2}{3} =$

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. $7\frac{1}{5} + 0{,}9865 + 3\frac{7}{40} + 0{,}94 =$

2. Израчунај x из ових једначина: $x + 2\frac{9}{40} = 3{,}024$;

$\left(2{,}175 + 3\frac{5}{8}\right) - x = 0{,}8$; $x : \frac{15}{16} = 8 - 2{,}592$; $\left(2\frac{2}{7} \cdot 0{,}14\right) : x = 1{,}6$; $\left(1\frac{19}{50} - 0{,}18\right) \cdot x = 120$; $x - \frac{1}{22} + 2{,}982 = \frac{1{,}8}{2\frac{1}{4}}$.

3. $3\frac{2}{3} + 3{,}7833 - 0{,}45 =$ Упутство: претвори $\frac{2}{3}$ у дес. разломак са 4 дец!

4. $0{,}7956 \times \frac{1}{4} =$ Упутство: подели са 4! $0{,}1728 \cdot \frac{11}{12} =$

5. $$\frac{17{,}2954 : 0{,}42 + 5\frac{7}{9} \cdot 0{,}7 - 7{,}3285}{4{,}696 : \frac{7}{200} + 5\frac{19}{35}} = \text{(4 д.)}$$

6. Који децимални број треба додати разлици између 0,4 и $\frac{3}{8}$, да се добије $\frac{3}{4}$?

7. Који број треба поделити са 0,27 да количник буде десет пута мањи од $2\frac{2}{9}$?

8. Број 2,97 да се растави на 2 чиниоца, од којих је један $4\frac{2}{7}$.

9. Број 1,8 да се растави на два дела, тако да већи део буде $1\frac{2}{7}$ пута већи од 0,84. Колики је мањи део?

10. Од производа бројева 2,727272 . . . и $1\frac{16}{17}$ да се одузме количник бројева 0,666 . . . и $\frac{8}{27}$.

11. Помножи 0,296296 . . . са $60\frac{3}{4}$, подели добијени производ са 0,01 и додај количнику разлику између 8,818181... и $4\frac{9}{11}$! *Коју значајну годину у нашој историји претставља резултат?*

ТРЕЋИ ДЕО

Пропорционалне величине

Грађански и трговачки рачуни

ГЛАВА XV

ПРАВИЛО ТРОЈНО

71. — Величине обично зависе једна од друге. На пример површина квадрата зависна је од дужине стране. Пут који пређу једна кола зависи од дужине времена, које кола проведу у кретању. Начин на који зависи једна величина од друге је врло разнолик и немогуће је у том погледу поставити никакво опште правило.

Тако кад једна дуж постане 2, 3, 4. . . пута већа, површина квадрата конструисаног над том дужи, биће 4, 9, 16... пута већа. Запремина коцке конструисане над том дужи постаће 8, 27, 64 . . . пута већа.

Аритметика не проучава како су међусобно везане разне величине. Она нас учи само како ћемо израчунати поједине величине, кад је веза између њих довољно проста. Сад ћемо испитати најпростије случајеве, који могу наступити.

72. Величине директно пропорционалне. — *Кажемо да су две величине директно пропорционалне, ако је њихова међу-*

собна зависност таква да, кад једна, мењајући се, постане 2, 3, 4 . . пута већа, и друга такође постане 2, 3, 4 . . . пута већа.

Цена једнога штофа директно је пропорционална његовој дужини, ако претпоставимо да је ширина увек иста. Кад 1 m штофа вреди 100 динара, 2 m вредеће 200 динара, 3 m 300 динара.

Тежина једног тела је директно пропорционална његовој запремини. Овај закон утврђен је у физици. Ми га зато спомињемо, што пропорционалност не важи увек, већ под извесним условима. Тако се запремина тела може повећати грејањем, пошто се сва тела на топлоти шире. Кад се телу повећа запремина грејањем, онда му се тежина не повећа. Овде пропорционалност постоји само под *условом* да температура тела остаје непромењена, као и у случају штофа што имамо услов, да ширина остане непромењена. У примерима које ћемо имати, ови *други* услови се обично не помињу, те се прећутно узима да су они испуњени.

73. Величине обрнуто пропорционалне. — *Кажемо да су две променљиве величине обрнуто пропорционалне, ако су међусобно тако везане, да кад једна постане 2, 3, 4 . . . пута већа, друга постане 2, 3, 4 . . . пута мања..*

Број радника потребан за један посао је обрнуто пропорционалан времену трајања, ако претпоставимо да сви радници раде подједнако брзо.

74. — Једна величина A може зависити и од више других величина B, C итд. Тако површина правоугаоника зависна је од његове дужине и ширине. Ако оставимо дужину непромењену, површина ће се мењати пропорционално само ширини, а ако оставимо ширину непромењену, површина ће се мењати пропорционално дужини. Исто тако време трајања једног посла зависно је од броја радника и од величине посла. Ако је број радника непроменљив, време је директно пропорционално величини посла. Ако посао остаје исти, време је обрнуто пропорционално броју радника.

Из ових примера види се, да наилазимо на велики број случајева, посматрајући разне величине. Мало касније видећемо како се сви задаци из области оваквих величина могу свести на један исти тип.

ПРОСТО ПРАВИЛО ТРОЈНО

75. — *Пример 1.* 4 радника могу изаткати 56 метара једнога штофа. Колико ће метара изаткати 3 радника за исто време?

Претпоставимо да сви радници раде посао са истом брзином.

Решење: 4 радника израде 56 метара,

1 радник израдиће, за исто врем, 4 пута мање тј. $\frac{56}{4}$,

3 радника израдиће за исто време, 3 пута више, неголи један радник, или $\frac{56}{4} \cdot 3 = 42$.

Три радника израдиће 42 метра.

Пример 2. 15 радника сврше један посао за 12 часова. Колико ће бити потребно радника, да се тај исти посао сврши за 9 часова.

Узимамо да сви радници раде подједнако брзо.

Решење: Да се сврши посао за 12 часова потребно је 15 радника.

Да се сврши посао за 1 час требало би 12 пута већи број радника, или $15 \cdot 12$.

Да би се посао свршио за 9 часова требаће 9 пута мање радника, него што је потребно за 1 час, или

$$\frac{15 \cdot 12}{9} = 20.$$

Биће потребно 20 радника.

Напомена 1. — У свима задацима правила тројног можемо разликовати два дела, управо два става: *погодбени став* и *упитни став.* Препоручљиво је при писменом решавању задатака, да се ова два става напишу један испод другог тако, да величине исте врсте дођу једна испод друге. Тражено стање једне величине, као непознато, обележи се са x.

Пример 3. Кад 20 kg брашна стају 80 дин, пошто су 13 kg?

Решење: погодбени став $\quad$ 20 kg $\quad$ 80 дин
упитни став $\quad$ 13 kg $\quad$ x дин

$$x = \frac{80 \cdot 13}{20} = 52.$$

13 kg стају 52 динара.

Напомена 2. — Има задатака ове врсте, код којих размишљање, *закључивање*, не мора да иде преко јединице, него се од множине из погодбеног става одмах пређе на множину упитног става.

Пример 1. Кад 6 јаја стају 9 динара, пошто су 18 комада?

Решење: Троструком броју јаја одговара и троструки број динара: 9 дин $\times$ 3 = 27 динара.

Пример 2. 1 kg неке робе стаје 2,$^{\text{дин}}$ 40. Колико ће се добити за 60 пара?

Решење: За четвртину куповне цене добија се четвртина робе. За 60 пара добије се $\frac{1}{4}$ kg.

Напомена 3. — Не треба никако губити из вида да се у задацима са пропорционалним величинама може покаткад доћи до бесмислених резултата, до правих апсурда. Морамо водити рачуна да *практично узев пропорционалност има смисла дотле, док посматране величине не пређу извесне границе.* Кад оне постану сувише велике, или сувише мале, резултат теоријског рачуна је увек аритметички тачан, али за праксу он је нетачан, пошто тада пропорционалност не постоји. Ми тада немамо право да закључујемо, као да она постоји.

Пример 1. 2 радника могу да сазидају један зид за 8 часова. За које ће време сазидати тај зид 7200 радника? Лако је израчунати да је резултат 8 секунада. Овај резултат практично је бесмислен. Због сувише великог броја радници би у раду сметали један другом. Тако би сваки од њих радио лошије него ли кад је сам. Ту дакле нема пропорционалности.

Пример 2. У једној покрајини вредност земљишта је 500 динара хектар. За коју суму се може купити 1 квадратни метар? Резултат је 5 пара. Овај резултат је тачан, али је

јасно да у пракси нико не може постати сопственик само 1 квадратног метра земљишта.

Напомена 4. — Кад радимо са величинама директно пропорционалним, имамо задатак из *простог правила тројног директног.*

Ако радимо са величинама обрнуто пропорционалним, имамо задатак из *простог правила тројног обрнутог.*

Напомена. — Зависне величине у математици зову се **функције**.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. 4 m стају 48 дин, пошто су 6 m; 5 l стају 36 дин 25 пара, пошто су 3 l?

2. $\frac{1}{20}$ m стаје 20 п, пошто су $4\frac{1}{2}$ m; $\frac{1}{5}$ kg стаје 90 пара, пошто су $2^{\text{kg}}\frac{1}{5}$?

3. Један извор даје за 6^{mn} 13 l воде, колико ће дати за 1^{h}?

Један извор даје за 2^{h} 3600 l воде, колико ће дати за 45^{mn}?

5. За које ће време свршити посао 10 радника, кад 5 радника сврше тај исти посао за $2\frac{1}{2}$ дана?

6. Колико су тешки $1^{\text{hl}}\frac{1}{4}$ јечма, кад 1 l тежи 800g; колико 30 l пшенице, кад 1 hl тежи 90 kg; колико $\frac{1}{10}$m^3 гвожђа, кад су 100 cm^3 750 g?

7. Кад 4 степена Реомирових износе 5 степени Целзијусових

x	„	„	„	15	„	„
28	„	„	„	x	„	„
x	„	„	„	100	„	„

8. Један тркачки коњ пређе 60 метара за 5^{s}. Колико пређе за $0,^{\text{mn}}5$; за 5^{mn}; за $2\frac{1}{2}$ mn?

9. *Шала*: Кад два друга стигну од Београда до Авале за 4 сата, за које ће време стићи 4 друга?

10. Са 49 l вина можемо напунити 70 једнаких боца. Колико је боца потребно за 7, 21, 42, 63, 77, 91 l вина?

11. 33 комада робе стају 77 динара. Пошто су 11, 55, 88, 121, 165 комада?

12. 102 пера стају 36 динара. Пошто су 17, 51, 85, 119, 187 комада?

13. 36 берберских сапуна стају 60 динара. Пошто су 9, 27, 45, 63, 81, 108 комада?

14. 184 грама глицерина заузимају 152 cm³ простора. Колики простор заузимају 23, 69, 115, 138, 230 грама глицерина?

15. Један путник пређе за 8 дана 232 километра. За колико ће дана прећи 29, 87, 145, 204, 319 километара?

16. Извесна количина хране за 35 лица трајаће 36 дана. Колико би трајала иста количина хране за 70, 140, 105, 315, 45 лица?

17. Један аутомобил, кад вози брзином од 90 km на сат пређе извесну стазу за један сат. За које ће време прећи исти пут кад вози брзином од 45, 30, 15, 36, 72, 108, 135 km на сат? (По потреби часове треба претворити у минуте.)

ПИТАЊА

1. Кажи неколико зависних величина!
2. Које су величине директно пропорционалне? Примери!
3. Које су величине обрнуто пропорционалне? Примери!
4. Може ли једна величина бити зависна од више других величина?
5. Шта је функција?
6. Шта је просто правило тројно директно?
7. Шта је просто правило тројно обрнуто?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Ученик треба да се вежба у процењивању резултата, пре него што приступи рачунању.

1. 45 m неке материје продати су за 751,$^{\text{дин}}$50. Пошто су 65 m исте материје?

2. Кад један пешак прелази 8 m за 5^{s}, колико му времена треба да пређе 6,^{km}4?

3. Једно дрво високо 14$^{m}\frac{2}{5}$ баца сенку дугачку 9m. Колика је у исто време сенка другог дрвета, које је високо 10m?

4. Мерење висина помоћу сенке. Једна усправна мотка висока 1,^{m}35 баца сенку дугачку 2,^{m}80. Колика је висина једне куле, која у исто време даје сенку дужине 42 m?

5. Кад један степен Целзијусов износи 0,°8 Реомирових, колико степени R су 22°C и колико степени C су 22°R?

6. Нула C термометра је 32 степена Фаренхајтовог термометра, и 180°F износе 100°C. Коју температуру показује C термометар, кад се на F прочита 74 степена?

7. Један минерал садржи метала 21% од своје тежине. Колико треба прерадити минерала, да се добије 82,^{kg}95 метала?

Напомена. $21\% = \frac{21}{100}$, или од 100 kg минерала добије се 21 kg метала?

8. У два суда имамо једнаке тежине живе и сумпорне киселине. Запремина ове друге је 21 l, 75. Колика је запремина живе, кад знамо да је густина живе 13,6, а густина сумпорне киселине 1,86? (Тачно на mm.)

9. Кад један пароброд прелази дневно 168 морских миља, може да стигне на обалу за $7\frac{1}{2}$ дана. Колико морских миља мора прелазити више на дан, да би за $\frac{1}{2}$ дана раније стигао?

10. Један капитал донесе за годину дана 37,$^{\text{дин}}$80 интереса. Колики је интерес за 4 месеца и 18 дана?

11. Један пут пење се на 77 m дужине за 30,^{cm}8. Колико је пењање на 1 km?

12. Кад један ученик троши просечно дневно 1 дин 20 пара, његов месечни џепарац траје 25 дана. За колико би дана раније потрошио свој новац, кад би дневно трошио 30 пара више?

13. Четрнаест радника могу да ископају један јарак за 20 дана. Пошто су радили 6 дана, буде отпуштено 4 радника. За које време је свршен посао?

14. Брзи воз, који прелази на сат 64 km, треба да стигне у једну станицу за $3^h 35^{mn}$. После вожње од $1^h \frac{1}{4}$ морао је непредвиђено чекати 13^{mn}. По колико km треба он после тога да прелази на сат, да би ипак стигао на време?

15. Један надничар може да покоси $\frac{2}{3}$ ливаде за $5^h 20^{mn}$. Колико му је времена потребно за $\frac{5}{8}$ ливаде?

16. У један празан базен, који хвата 94 hl, тече вода из 3 цеви. Из прве истиче за 2^h, 9 hl, из друге за $1^h \frac{2}{3}$ 10 hl, из треће за 50^{mn}, 3 hl. За које ће време напунити базен, кад се отворе све три цеви једновремено?

17. 3 радника треба да подигну зид од $19^{m3} \frac{5}{8}$. Први може за два дана да сврши $2\frac{1}{2}$ m^3, други за $4\frac{1}{2}$ дана 6 m^3, а трећи за $5^д \frac{1}{4}$, $9^{m3} \frac{1}{3}$. За које ће време бити готови са зидањем, кад сва тројица раде заједно?

18. 16 радника могу да израде један насип за 15 дана. После $4\frac{1}{2}$ дана рада разболе се 2 радника. За колико, због тога, закасни довршење посла?

19. Од два трансмисиона точка једна начини $7\frac{1}{2}$ обрта, док други изврши 6. Колики је обим овог другог, кад је обим првог $1\frac{1}{2}$ m?

20. Од две цеви једна даје на минут $4\ l\ \frac{1}{5}$, а друга за четвртину овог износа више. За које би време прва напунила базен, кад је другој за то потребно $1^h \frac{1}{3}$?

ГЛАВАХ VI

ПРОЦЕНТНИ РАЧУН

76. — 1. У једној шуми обори ветар 16 дрвета. Може ли се утврдити да ли је непогода била велика или мала?

2. У једној школи од 500 ученика понављају разред 50 ученика. У другој од 1100 ученика понављају разред 120. У трећој од 800 ученика понављају 72. У којој школи је најгори успех?

Да бисмо ово утврдили, морамо да израчунамо колико је поноваца на једнак број ученика, тј. могли бисмо узети колико је поноваца на 500 ученика, на 50, на 10 итд. Данас је свуда усвојено да се за такво упоређивање узима број 100.

Од сто каже се латински *pro centum*. Одатле је потекла реч *процент*, а пише се %. Покаткад се узима за поређење и број 1000. *Од хиљаде* каже се латински *pro mille*. Отуда назив *промиле* и пише се ‰.

Израчунај 1 % од 600 дин, 500m, 950a, 800m^3, 34t!

Из ових примера следује $1\% = \frac{1}{100}$.

Колико стотих су према томе 2%, 3%, 5%, 10%, 20% 50%, 100%?

$100\% = \frac{100}{100} =$ цело (основна вредност).

Процент треба увек схватити као стоти део.

77. При сваком процентном рачуну имамо посла са три величине:

1. Основна вредност, то је број који треба делити на стоте делове, или број од кога треба узети проценте.

2. Процент или процентна стопа, то је број *стотих* које треба узети.

3. Процентни износ, који се добија из основне вредности и датих процената.

Пример: 4% од 1800 динара су 72 динара.

1800 динара су основна вредност, 4 процент, а 72 динара процентни износ.

Ако су познате две од ових величина, трећа се може рачуном одредити.

Према томе која је од ових величина непозната, разликоваћемо три случаја.

1. Израчунавање процентног износа. — *Пример.* — Неко је од своје имовине, која износи 8400 дин потрошио путујући 15%.

Колики је путни трошак?

1 *решење*: 100% основне вредности 8400
15% „ „ x

Закључивање је исто као код простог правила тројног.

$$x = \frac{8400 \cdot 15}{100} = 1260.$$

Путни трошак је 1260 динара.

2 *решење*: Од 100 динара потрошено је 15

„ 8400 „ „ „ x

$$x = \frac{15 \cdot 8400}{100}.$$

3 *решење*: 15% од 8400 је $\frac{15}{100}$ од 8400 тј.

$$\frac{15}{100} \cdot 8400 = 1260.$$

2. Израчунавање процента. — *Пример*: Од 128 древета једног врта осушило се 24. Колико је то %?

1 *решење*: 120 древета 100% основне вредности

24 „ x% „ „

$$x = \frac{100 \cdot 24}{128} = 18\frac{3}{4}.$$

24 древета су 18,75% од 128 древета.

2 *решење*: Од 128 древета осушило се 24

„ 100 „ „ „ x

$$x = \frac{24 \cdot 100}{128}.$$

3 *решење*: Ако број непознатих процената означимо са x% тј. са $\frac{x}{100}$, онда је $\frac{x}{100}$од 128=24, или $\frac{x}{100} \cdot 128 = 24$. У овој једначини познат нам је производ 24 и један чинилац 128, тражи се други чинилац $\frac{x}{100}$. Тај непознати чинилац добија се, кад се производ подели познатим чиниоцем. С тога имамо $\frac{x}{100} = \frac{24}{128}$. Кад је стоти део од x $\frac{24}{128}$, онда је само $x = \frac{24}{128} \cdot 100$.

Напомена. — Често пута се при решавању оваквих задатака може закључити одмах *на стотину*, уместо да се иде посредно *преко јединице*. *Пример*: Број становника једног места попео се од 800 на 848. Колики је пораст у %?

Решење: Кад на 800 становника повећање износи 48, на једну стотину износиће 6. Пораст становника је 6%.

3. Израчунавање основне вредности. *Пример.* — Из једног бурета истекло је 12 литара, што износи 8% првобитне количине. Колика је почетна количина?

1 *решење*:

8% осн. вр. = 12 l
100% „ „ = x l

$$x = \frac{12 \cdot 100}{8} = 150.$$

У бурету је било 150 l.

2 *решење*:

8 l истеклих долазе на 100 l
12 l „ „ „ x l.

$$x = \frac{100 \cdot 12}{8} = 150.$$

3 *решење:* Ако основну вредност, као непознату, обележимо са x, имамо 8% од x, тј. $\frac{8}{100}$ од x, или $\frac{8}{100} \cdot x = 12$.

Одавде је $x = 12 : \frac{8}{100} = \frac{12 \cdot 100}{8}$.

Напомена: Ми смо свуда изнели по 3 начина решавања. Ученик може изабрати начин, који му је најподеснији. Очевидно је најбоље, ако би научио да користи сва три начина.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. 1% од 800 дин; од 7,50; од 90 пара; од 1 km; од 60 m; од 6,^{m}4; од 135 mm; 2% од 95 дин = ?

2. $4\frac{1}{2}$% од 700 дин; $6\frac{1}{4}$% од 40 дин; $1\frac{1}{4}$% од 28,^{m}5?

3. $\frac{1}{5}$% од 20 000 дин; 3% од 4 kg; $\frac{1}{4}$% од 13 kg; 5% од 37 kg?

4. 7% од 86 m; 90% од 2 kg; $\frac{1}{4}$% од 3 km; $\frac{1}{8}$% од 1 ha?

5. 2‰ од 12 000 дин; $\frac{1}{4}$‰ од 12 000; $\frac{1}{5}$‰ од 12 000 дин?

6. Од броја 360 израчунај 3%, 2%, $\frac{1}{4}$%, 1%, 5%!

7. Изрази у процентима $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{7}$ $\frac{7}{12}$, од основне вредности!

8. У једном возу налазе се 300 путника. Од тога 6% у првој класи, 24% у другој, а остатак у трећој класи. По колико путника има у свакој класи?

9. Који је број за 40% већи од 500; за 8% мањи од 150?

10. Колико % су 60 дин од 1200 дин; 54 cm од 18 m; 20 m од 0,^{m}8; 50 l од 6 hl; $1\frac{1}{2}$ l од 0,^{hl}9?

11. Колико $^0/_{00}$ су 4 дин од 4000; 3,^{дин} 60 од 24 000 динара?

12. Број ученика једне гимназије износио је једне године 320, а идуће 384. Колики је прираштај у $^0/_0$?

13. $4^0/_0$ једног броја износе 36, који је тај број?

14. $10^0/_0$ „ „ „ 5,9, „ „ „ „ ?

15. У једном разреду разболе се 8 ученика, што износи $20^0/_0$ од целокупног броја. Колика је јачина тог разреда?

ПИТАЊА

1. Које делове означавају процент и промиле?

2. Колико је то $100^0/_0$?

3. Шта је основна вредност, процентна стопа и процентни износ?

4. Који део од основне вредности износе процентне стопе:
$10^0/_0$, $20^0/_0$, $5^0/_0$, $2\frac{1}{2}\ ^0/_0$, $40^0/_0$, $60^0/_0$, $80^0/_0$, $120^0/_0$, $50^0/_0$, $25^0/_0$, $12\frac{1}{2}\ ^0/_0$, $6\frac{1}{4}\ ^0/_0$, $33\frac{1}{3}\ ^0/_0$, $16\frac{2}{3}\ ^0/_0$, $8\frac{1}{3}\ ^0/_0$, $66\frac{2}{3}\ ^0/_0$?

5. Колико пута је већи један број од своја $2^0/_0$, од својих $5^0/_0$, од $12\frac{1}{2}\ ^0/_0$, од $20^0/_0$?

6. За колико је већи један број од своја $2^0/_0$, од $5^0/_0$, од $12\frac{1}{2}\ ^0/_0$, од $20^0/_0$?

7. Образложи $3\frac{1}{5}\ ^0/_0 = 3\ ^0/_0 + \frac{1}{5}\ ^0/_0$; $\frac{3}{4}\ ^0/_0 = 1^0/_0 - \frac{1}{4}\ ^0/_0$!

8. Јесу ли основна вредност, процент и процентни износ пропорционалне величине и како?

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Ученик да се вежба у процењивању резултата.

1. Надница једног радника, која је до сада износила 21,^{дин}60, повећана је за $15^0/_0$. Колика ће бити после тога?

2. Једна улица на дужини од 4,^{km}8 пење се за $2\frac{1}{4}\ ^0/_0$. За колико је њен завршетак виши од почетне тачке?

3. Једно речно корито има пад $0,6^0/_0$ на дужини 10^{km}, 72. Колико метара износи водени пад на овој дужини?

4. Један трговац спусти цену једној роби $40^0/_0$. Пошто је сад 1 комад, кад је раније маркиран 1,^{дин}65?

5. Једна жичана железница дугачка је 3,^{km}380, а њено средње пењање износи $46,8^0/_0$. До које висине се пење та железница?

6. Ваздух је смеша $21^0/_0$ кисеоника и $79^0/_0$ азота. Колико има од оба гаса у једној учионици, чија је дужина 9,^{m} 6, ширина 7,^{m} 5, а висина 4,^{m} 8?

7. Кад кромпир садржи $16^0/_0$ штирка, колико штирка има у 10 zt кромпира?

8. Кад у пиву има $4\frac{1}{2}\ ^0/_0$ алкохола, колико cm^3 алкохола унесе у себе неко, који попије 4 l пива?

9. Чим је на трамвајима смањена тарифа за $50^0/_0$ број путника повећао се за $100^0/_0$. Има ли ту општина каквог губитка? Бројни примери!

10. Разлика између $75,5^0/_0$ и $\frac{2}{3}$ једног пута износи 10,^{km}6. Колика је дужина целог пута?

11. Израчунај агрегат $\frac{1}{2} + \frac{13}{4} - 1\frac{1}{8} - \frac{1}{25} - \frac{1}{60}$, али најпре сваки члан изрази у процентима!

12. Од 45 ученика једног разреда пређе у старији разред 39. Колико је то $^0/_0$?

13. Закупнина једног стана повећана је од 840 на 900 динара. Колико износи повећање у $^0/_0$?

14. Један брдски пут попне се на 5^{km},4 за 405 m. Један други на 1650 m за 132 m. Који је стрмији?

15. Један поверилац прими од дужника, уместо 4800 дин, само 2800 динара. Колики је губитак у $^0/_0$?

16. Од целокупне земљине површине узима се да је копно 144 542 147 km^2? Површина под водом износи 365 409 000 km^2? Колико процената је сува земља, а колико је $^0/_0$ под водом?

17. *Процењуј од ока дужине појединих предмета у твојој соби и учионици! Затим измери тачно те дужине и одреди грешке у процентима! Обрати пажњу на разлику између грешака при оцењивању хоризонталних дужина и вертикалних дужина!*

18. Од ког броја износе $6^0/_0$ 46,8; $3\frac{3}{4}\ ^0/_0$ 43,2; $2,8^0/_0$ 6,3?

19. Колика је дужина једне стазе, која при пењању од $3\frac{1}{4}\ ^0/_0$ изводи на висину од 19^m,5?

20. Дневница једног радника повећана је за 1 дин 80 пара,

а то је 8%. Колика је била дневница, а колика је после повишице?

21. Од једног пука војске пуштено је кућама 520 људи што је изнело 40%. Колика је јачина тог пука?

22. Један поверилац прими уместо целе суме 180 дин, што износи 40%. Колико је требао да прими?

Израчунавање основне вредности, кад је дат процент и основна вредност повећана или смањена за процентни износ.

1. Месечна кирија једног стана повећана је за 8%, тако да износи 918 динара. Колика је била пре тога?

1 решење:

108% осн вр. 918

100% „ „ x

$$x = \frac{918 \cdot 100}{108} = 850.$$

2 решење:

На 108 дин сад. вр. долазе 100 пр. вр.

„ 917 „ „ „ „ x „ „

$$x = \frac{100 \cdot 918}{108}.$$

2. Једна роба плаћена је заједно са превозом, који износи $1\frac{1}{2}$% њене вредности, 591,^дин^ 60. Колика је њена цена без превоза?

3. У једном суду налазе се 23 литра млека, а млеко је са 15% воде. Колико има у суду чистог млека?

4. За време рата смањио се број становника једног града за 12%, тако да је на свршетку рата било 11 560 душа. Колико је становника имао град пре рата?

5. У једној фабрици отписано је од вредности машина $12\frac{1}{2}$%, тако да се сад рачунају у вредности од 455 000 дин. Пошто су купљене машине?

КУПОВИНА И ПРОДАЈА. ДОБИТАК И ГУБИТАК

78. Добит и губитак обично се дају у стотим деловима, у процентима од куповне цене. Ту је куповна цена основна вредност (100%).

Пример 1. Једна роба купљена је за 35 динара и продата са 8% добити. Израчунај продајну цену!

Решење: Куповна цена је 35 динара.

Добит 8%, тј. $\frac{8}{100} \cdot 35 = 2{,}80$.

Продајна цена је 37,80.

Пример 2. 1 m платна купљен је за 16,^дин^ 80, а продат за 32,^дин^ 20. Колико процената износи добит? (Добит је 32,20 — 16,80.)

Решење: 16,80 = 100% осн. вредности.

15,40 = x% „ „

$$x = \frac{100 \cdot 15{,}40}{16{,}80} = 91{,}666\ldots = 91\frac{6}{9} = 91\frac{2}{3}.$$

Добит износи $91\frac{2}{3}$%.

Пример 3. Једна роба продата је са 6% губитка за 14,^дин^10. Пошто је купљена?

Решење: 94% осн. вр. = 14,10

100% „ „ = x

$$x = \frac{14{,}10 \cdot 100}{94} = 15.$$

Куповна цена је 15 динара.

4. Неко изгуби на једном послу 18%. Са којом сумом је радио кад губитак износи 4050 динара?

5. На једној роби заради се 9,^дин^ 60, што износи 6%. Колика је куповна цена?

6. Једна кућа продата је испод куповне цене за 6%. Колика је куповна цена кад губитак износи 44 100 динара?

7. Продајна цена једне робе износи 22,^дин^ 68, при чему је добит 5%. Израчунај куповну цену!

8. Једна кола продата су за 1320 динара са губитком од 40%. Пошто су купљена?

9. Кад се једна роба прода за 21,^дин^65, губитак је $6\frac{1}{4}$%. Пошто би је требало продати да би зарада изнела исто толико %?

10. Ако се 1 *l* вина продаје по 8,^дин^ 40, добит је 5%. Колика би морала бити продајна цена да би зарада била 10%?

11. Једно одело које је раније коштало 990 динара, сад се продаје по 816,^дин^ 20. За колико % је пала цена?

12. Неко купи 30 метара платна по 4,^{дин} 80. Од тога прода $\frac{2}{3}$ са 15% добити, а остатак са 30% губитка. Колика је његова зарада или штета?

13. А уступи једну балу памука коју је купио за 375 дин лицу В са 8% зараде. Овај прода ту балу лицу С за 386,^{дин} 90. Колико процената губи В?

ТРОШКОВИ, ПРОВИЗИОН, РАБАТ, ПРЕМИЈА, ДИВИДЕНДА

79. — *Трошкови* су издаци који се учине док се роба из радње преда купцу, као на пр. паковање, пренос, превоз итд. Рачунају се у процентима од цене робе.

Провизион (комисион) је награда која се даје извесном лицу, *комисионару*, коме се повери да сврши неки посао, обично да купи или да прода извесну робу.

Рабат је попуст који се даје обично при куповини робе за готов новац. Рабат се увек даје при распродајама. *Шконт* је одбитак од извесног рачуна кад се рачун плати у готову, или у извесном одређеном року. Код шконта је износ рачуна основна вредност, код рабата је назначена цена.

Премија је годишња сума новаца која се уплаћује код осигуравајућих друштава. Рачуна се у % и ‰ од осигуране суме.

Дивиденда је део добити који припада свакоме који својим капиталом узме учешћа у каквом послу. *Тантиема* је један део добити који се намењује персоналу предузећа.

ЗА УСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај трошкове од $4\frac{1}{2}$% на 360 дин; од $1\frac{1}{4}$% на 10 800 дин!

2. Израчунај провизион од $\frac{1}{4}$% на 9600 дин; од 0,8% на 150 дин!

3. Колика је премија осигурања 1‰ на 17 000; $1\frac{1}{5}$‰ на 36 000; $\frac{7}{8}$‰ на 12 800; $1\frac{2}{5}$‰ на 25 000?

4. Израчунај дивиденду по 8% од 3 600 дин; $5\frac{1}{2}$‰ од 6 000 дин!

5. Колико износи тантиема по 1% од 545 900 дин; $2\frac{1}{2}$% од 300 000; 6‰ од 200 000; $\frac{4}{5}$‰ од $\frac{1}{2}$ милиона?

6. Одреди $3\frac{1}{4}$% рабата од 6 дин; 4% од 57 динара; $2\frac{1}{2}$% од 300 дин; $6\frac{1}{4}$% од 240 дин; $\frac{1}{2}$% од 10 800!

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

1. Колика је куповна цена једне робе кад фактура гласи на 254,^{дин}50, при чему су трошкови рачунати $1\frac{4}{5}$%?

2. Цена једне робе је 40,^{дин}80 и повиси се због трошкова за 1,^{дин}20. Колико процента износе трошкови?

3. Једно акционарско друштво може на завршетку пословне године да подели акционарима 156 000 динара чисте добити. Уплаћени капитал је 2 400 000 динара. Колико % дивиденде ће бити раздељено? Колико добија један акционар који има 5 акција по 1200 динара?

4. Неко плаћа за осигурање намештаја премију од 108,^{дин}80. На коју суму је намештај осигуран кад се премија рачуна $1\frac{1}{8}$%?

5. Један комисионар купи $4\frac{1}{2}$ zt јечма, kg по 2,^{дин}30. Провизион је $3\frac{1}{2}$%. Који ће износ ставити у рачун свом наредбодавцу?

6. Неко изврши једну куповину и једну продају. Обе износе по 1350 динара. У оба случаја је узео провизион $3\frac{1}{3}$%. Које износе је унео у рачун?

7. На коју суму ће се повисити цена роби од 2870 динара кад су трошкови $2\frac{1}{2}$% и има да се плати провизион 5%?

8. Један сопственик мора да плаћа за осигурање своје зграде годишњу премију од 147,^{дин}50, што је $2\frac{1}{4}$‰. Колика је сума осигурања? Своју земљу осигурао је од града на 9800 динара, при чему је рачунато $\frac{5}{8}$‰. Колика је годишња премија?

9. Неко се осигура код осигуравајућег друштва на 31 500 динара, за што плаћа годишњу премију од 22,^{дин}05. Колико ‰ је рачунато?

10. Колико $^0|_0$ рабата даје један трговац који узима од својих муштерија 57,^{дин}30 уместо 60 дин?

11. Један рачун је по одбитку $2\frac{1}{2}{}^0|_0$ шконта исплаћен сумом 140,^{дин}40. На коју је суму гласио тај рачун?

12. Један издавач даје књижару $30^0|_0$ рабата и од сваких 20 књига једну бесплатно. Пошто дође књижару једна књига, кад је дућанска цена књизи 25 динара?

Бруто, нето, дара

80. *Бруто* је тежина једне робе заједно са оним у чему се роба налази (сандук, канта, џак, буре итд.)

Нето је тежина саме робе, *дара* тежина сандука, џака бурета итд. Отуда имамо:

бруто = нето + дара.

Дара се обично даје у процентима од бруто тежине.

Пример:	Б	Д	Н
	$100^0\|_0$	$4^0\|_0$ осн. вр,	$96^0\|_0$ осн. вр.

ЗА ПИСМЕНО ВЕЖБАЊЕ

Искажи речима ове задатке и одреди непознате величине:

	Б	Д у$^0\|_0$	Д	Н
1.	4 zt	10	x	x
2.	140 kg	$7\frac{1}{2}$	x	x
3.	150 g	x	x	130
4.	4 dz	x	36 ℔	x
5.	x	10	$7\frac{1}{2}$ kg	x
6.	x	$12\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{4}$	x
7.	x	x	15 kg	75 kg
8.	x	x	260 g	3,^{kg}250

Статистика

1. У Другој мушкој реалној гимназији у Београду било је на крају школске 1931|2 године свега ученика 1081. Од тога броја било је одличних $6{,}65^0|_0$, врло добрих $19{,}04^0|_0$, добрих $28{,}37^0|_0$, полажу поправни испит $23{,}75^0|_0$, понављају разред $12{,}18^0/_0$. Колико је било одличних ученика? Колики број полаже поправни испит и колико ученика понављају разред?

2. У једном разреду од 49 ученика одличних је 5, врло добрих 12, добрих 16, полажу поправни испит 10, понављају разред 6. Изрази ову статистику у процентима!

3. У нашој држави од 14 милиона становника има $83^0|_0$ Југословена, осталих народности $17^0|_0$.

4. По вероисповести православних има $47^0|_0$, католика $38^0|_0$, муслимана $15^0|_0$.

ГЛАВА XVII

ПРОБЛЕМИ

81. — Пошто се за решавање проблема не могу поставити никаква нарочита правила, то износимо, поред ранијих, још неколико примера. Способност за решавање проблема ученик ће постићи решавањем што већег броја задатака.

Пример 1. Један ученик потроши $\frac{2}{3}$ од свог новца, затим $\frac{2}{3}$ од остатка. После тога остало му је још 3 дин 50 пара. Колико је имао у почетку?

Решење: Кад је потрошио $\frac{2}{3}$ од целе суме, остало му је још $\frac{1}{3}$. Затим је потрошио $\frac{2}{3}$ од остатка, тј. $\frac{2}{3}$ од $\frac{1}{3}$. Пошто је потрошио $\frac{2}{3}$ остатка, остало му је још само $\frac{1}{3}$ остатка, тј. $\frac{1}{3}$ од $\frac{1}{3}$, или $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ од целокупне суме. Кад $\frac{1}{9}$ од целокупне суме износи 3 дин и 50 пара, или $3\frac{1}{2}$ дин, цела сума износи:

$$3\frac{1}{2}\cdot 9 = 31\frac{1}{2}.$$

Ученик је у почетку имао 31 дин и 50 пара.

Други начин. Почетну суму, коју незнамо, можемо означити са x.

Тада је $\frac{2}{3}$ од x, или $\frac{2}{3} \cdot x$ број динара потрошен први пут;

$\frac{1}{3}$ од x, или $\frac{1}{3} \cdot x$ је остатак;

$\frac{2}{3}$ од $\frac{1}{3} \cdot x$, или $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x$ је број динара потрошен други пут;

и $\frac{1}{3}$ од $\frac{1}{3} \cdot x$, или $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x$ оно што је напослетку остало, тј. 3 дин 50 пара.

Према томе је $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x = 3\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{9} \cdot x = 3\frac{1}{2}$. У овој једначини познат је производ $3\frac{1}{2}$ и један чинилац $\frac{1}{9}$, тражи се други чинилац x. Чинилац x добићу кад производ поделим познатим чиниоцем $\frac{1}{9}$, према томе је:

$$x = 3\frac{1}{2} : \frac{1}{9} = \frac{7}{2} \cdot 9 = \frac{63}{2} = 31\frac{1}{2}.$$

Напомена. — Први начин решавања зове се *аритметички*. Други начин, употребом слова, зове се *алгебарски* начин решавања. Овај други начин је лакши од првога. Ученику се засада препоручује да задатке решава аритметички, без употребе слова.

Пример 2. Радник А свршио би један посао за 15 дана ако ради 8 часова дневно. Радник В свршио би тај исти посао за 12 дана радећи дневно 11 часова. Трећем раднику С, ако ради дневно 10 часова, било би потребно 11 дана. За тај посао употребе сва три радника. За колико су дана ти радници свршили посао?

Решење: Број часова потребних раднику А да сврши посао је:

$$8 \cdot 15 = 120 \text{ часова,}$$

он ће дакле свршити за један час $\frac{1}{120}$ посла.

Исто тако радник В ће за 1 час свршити $\frac{1}{132}$, а радник С $\frac{1}{110}$ део од целог посла.

Део посла који ће свршити за један час сва три радника биће: $\frac{1}{120} + \frac{1}{132} + \frac{1}{110} = \frac{11+10+12}{1320} = \frac{33}{1320} = \frac{1}{40}$.

Кад радници сврше за 1 час $\frac{1}{40}$ посла, за цео посао треба ће им 40 часова. Радећи дневно по 10 часова, да сврше цео посао, биће потребно

$$40 : 10 = 4 \text{ дана.}$$

Primer 3. Natpis na nadgrobnom spomeniku Diofanta koji je sa grčkog jezika prepevao g. dr. Toma Maretić:

Ovaj Diofanta pokriva grob — o veliko čudo!
Spomenik kazuje sam, koliko življaše on.
Bog mu šestinu dade života u detinjstvu živjet,
A dvanaestinu dâ maljava lica mu bit.
Zatim mu sedminu doda i zapali vjenčani luč mu.
A iza godina pet da mu, te rodi se sin.
Jao ljubljeno čedo, al jadno! kada života
Očeva navrši po, uze ga strahotni Ad.
Četiri ljeta iza tog u tuzi se tješeći svojoj
Mudrosti napokon kraj dođe života mu tad.

Rešenje: Spomenik kazuje sam koliko življaše on. U detinjstvu i u mladosti (maljava lica) Diofant je proveo šestinu više dvanaestinu života, tj. $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ svoga života.

Zatim je proveo još $\frac{1}{7}$ života, pa se oženi (zapali vjenčani luč), a posle pet godina dobije sina. Prema tome od svog rođenja, pa do rođenja njegovog sina, Diofant je proveo $\frac{1}{4} + \frac{1}{7}$ više 5 godina, ili $\frac{7}{28} + \frac{4}{28} = \frac{11}{28}$ života više pet godina.

Od rođenja do smrti svoga sina Diofant je proveo polovinu svoga života (kada života očeva navrši po uze ga strahotni Ad), tj. $\frac{1}{2} = \frac{14}{28}$, tako da u momentu smrti svoga sina Diofant beše proveo $\frac{11}{28}$ više $\frac{14}{28}$ ili ukpno $\frac{25}{28}$ svog života više 5 godina. Pošto je Diofant nadživeo svog sina za 4 godine (četiri ljeta iza tog), izlazi da se njegov ceo život sastoji od njegovih $\frac{25}{28}$ više 5 godina, više 4 godine, ili $\frac{25}{28}$ više 9 godina. Dakle $\frac{3}{28}$, koliko je potrebno od 25 do 28 osmina života Diofantova, trajale su 9 godina, $\frac{1}{28}$ trajala je $\frac{9}{3}$ ili 3 godine, a doba do koga je dostigao, ili $\frac{28}{28}$, iznosi

$$3 \cdot 28 = 84 \text{ godine.}$$

Proba. Razne faze Diofantovog života su $\frac{84}{6}$ ili 14 godina, $\frac{84}{12}$ ili 7 godina, $\frac{84}{7}+5$ ili 17 godina, $\frac{84}{2}$ ili 42 godine i najzad 4 godine. Prema tome je:

$$14 + 7 + 17 + 42 + 4 = 84.$$

Пример 4. Сатне казаљке поклапају се у подне. *У колико сати ће се први пут поново поклопити?*

Решење: Велика казаљка обиђе цео круг за један час. За то време мала казаљка пређе само 5 од 60 поделака означених на часовнику.

У један сат по подне, мала казаљка је на цифри I, велика је на XII. Мала казаљка је испред велике за 5 поделака.

Даље, за један минут велика казаљка пређе један поделак. Мала казаљка за сат пређе 5 поделака, а за минут 60 пута мање, тј. $\frac{5}{60}$ или $\frac{1}{12}$ од једног подеока. *Велика казаљка се приближава мањој за $\frac{11}{12}$ од једног подеока за 1 минут.* Број минута потребних да се велика казаљка приближи малој за 5 поделака добиће се, кад видимо колико се пута $\frac{11}{12}$ садрже у 5, тј.

$$5 : \frac{11}{12} = \frac{5 \cdot 12}{11} = 5\text{mn}\, \frac{5}{11}.$$

Овоме треба да се дода још 1 час. Биће потребно 1h 5mn$\frac{5}{11}$ да се казаљке поново поклопе. Друго поклапање биће у 2h 10mn$\frac{10}{11}$ итд.

Пример 5. Једна сума од 35 000 динара подељена је неједнако између два лица. Прво лице потроши $\frac{5}{6}$ свога дела а друго $\frac{7}{8}$ свога. Остану им после тога исте суме. Колико је свако лице добило првобитно?

Решење: Пошто је прво лице потрошило $\frac{5}{6}$ од своје суме, остало му је $\frac{1}{6}$. Другоме лицу остало је $\frac{1}{8}$ његовог дела. Пошто оба лица треба да имају исте суме, то значи да $\frac{1}{6}$ суме првога износи исто толико колико $\frac{1}{8}$ суме другога. Дакле, цели део првога лица износи 6 пута по осмину дела другога.

Цели други део, или $\frac{8}{8}$ тога дела, и први део, који износи $\frac{6}{8}$ другога, укупно износе 35 000 динара. Другим речима, $\frac{14}{8}$ другога дела износе 35 000 динара. Кад 14 осмина другог дела износе 35 000 динара, једна осмина изнеће $\frac{35000}{14}$, а цели други део, тј. његових $\frac{8}{8}$, изнеће 8 пута више тј.

$$\frac{35000}{14} \cdot 8 = \frac{35000 \cdot 4}{7} = 5000 \cdot 4 = 20\,000.$$

Део првога износи 15 000, део другога 20 000 динара.

Пример 6. Једно буре садржи 100 l вина. Из њега оточе 20 l, које замене са 20 l воде. Затим оточе још 20 l па опет долију 20 l воде. И то се понови трећи пут. Пита се колико има тада у бурету вина, а колико воде.

Решење: Кад је из бурета оточено први пут 20 l вина, да се замене водом, онда после тога остаје у бурету 80 l вина и доливених 20 l воде.

Кад се оточе 20 l ове смеше воде и вина, оточи се 20 l од 100 литара или $\frac{20}{100}$ од целе садржине, или $\frac{1}{5}$. Узме се дакле $\frac{1}{5}$ вина и $\frac{1}{5}$ воде. Остаје у бурету $\frac{4}{5}$ од 80 l вина и $\frac{4}{5}$ од 20 l воде, или $\frac{4}{5} \cdot 80 = 64 l$ вина, $\frac{4}{5} \cdot 20 = 16\, l$ воде.

Кад додамо 20 l воде, тада има 64 l вина и $16 + 20 = 36$ или $100 - 64 = 36$ l воде.

Оточи се 20 l од ове нове смеше, тј. опет $\frac{1}{5}$. Остаје у бурету $\frac{4}{5}$ од 64 литра вина и $\frac{4}{5}$ од 36 l воде, дакле: $\frac{4}{5} \cdot 64 = \frac{256}{5} = 51\, l\, \frac{1}{5}$ вина, $\frac{4}{5} \cdot 36 = \frac{144}{5} = 28\, l\, \frac{4}{5}$ воде.

Ако се још једанпут дода 20 l воде, тада ће у бурету бити 51 l $\frac{1}{5}$ вина и 48 l $\frac{4}{5}$ воде. Буре ће увек бити пуно.

Све ово можемо краће и прегледније овако претставити:

после првог поступка

литара вина 80 литара воде 20

после другог поступка

литара вина 64 литара воде $16 + 20$

после трећег поступка

литара вина $51\frac{1}{5}$ литара воде $28\frac{4}{5} + 20$.

МЕШОВИТИ ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ. ПРОБЛЕМИ

1. Скрати разломак $\frac{2157}{3741}$!
2. Колики је збир бројева $\frac{38}{60}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{17}{100}$?
3. Колико треба додати броју $\frac{115}{244}$ да се добије 3?
4. Колико треба одузети од $\frac{5}{8}$ да се добије $\frac{2}{5}$?

5. Чиме треба помножити број $9\frac{2}{3}$ да се добије производ 24?

6. Чиме треба поделити $\frac{31}{97}$ да се добије количник $\frac{2}{5}$?

7. Једно лице потроши у првом дућану $\frac{1}{3}$ свог новца, у другом $\frac{3}{5}$ остатка, у трећем $\frac{4}{7}$ новог остатка. Који му је део од првобитне суме преостао? $\left(\frac{4}{35}\right)$

8. Једном дечку, пошто је позајмио једном другу $\frac{1}{4}$ свог џепарца, а другом $\frac{7}{8}$ остатка, остало је свега 3 динара. Колико је имао у почетку?

9. $\left(\frac{17}{45}+\frac{29}{40}\right)\cdot 120$; $\left(12\frac{11}{44}+3\frac{7}{60}\right)\cdot 72$. (На два начина!)

10. Израчунај на најпростији начин: $\frac{49}{120}\cdot 10+\frac{49}{120}\cdot 7$; $3\frac{11}{30}\cdot 5+3\frac{11}{30}\cdot 4$; $\frac{23}{72}\cdot 6+\frac{23}{72}\cdot 18$; $\frac{23}{45}\cdot 8-\frac{23}{45}\cdot 7$.

11. $2\frac{13}{60}\cdot 8+2\frac{13}{60}\cdot 68-2\frac{13}{60}\cdot 16$.

12. $\left(7\frac{1}{2}-17\frac{1}{2}:40\right)-\left(43\frac{1}{5}:144+3\frac{3}{25}:156\right)$.

13. Од производа бројева $7\frac{1}{9}$ и $2\frac{5}{8}$ одузми 10 и подели добијену разлику са 13!

14. Разлику између 6 и $3\frac{10}{39}$ помножи са $1\frac{6}{7}$, затим добијени производ одузми од $7\frac{1}{2}$!

15. Три лица треба да поделе $87\frac{1}{2}$ дин, тако да А добије $\frac{3}{5}$ од те суме, В $\frac{2}{7}$ а С остатак. По колико добије свако?

16. Кад један капитал доноси годишње интереса 77 дин и 50 пара, колико ће интереса донети два пута већи капитал за 3 године и 4 месеца?

17. Три госпође купе 50 m платна; А узме $\frac{1}{30}$, В $\frac{3}{8}$, а С остатак. Колико свака има да плати, кад 1 m стаје 20 динара и $\frac{2}{5}$?

18. $\frac{5}{8}-\frac{4}{5}:1\frac{3}{5}+3\frac{1}{4}=$

19. $\left(\frac{3}{8}+\frac{4}{5}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=$

20. $\left(2-2\cdot\frac{7}{13}\right)\cdot\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{16}\right]\cdot\left(5-3\frac{2}{9}\right)=$

21. Неко остави за собом $7\frac{1}{2}$ пута веће имање него што је имао у почетку, тако да сваки од 4 наследника добије по 120 000 динара. Колико је имао у почетку?

22. Производ два броја је за $1\frac{2}{3}$ мањи од 50. Један чинилац је $7\frac{1}{4}$. Одреди други!

23. Ако се повећа производ неког броја и $2\frac{4}{7}$ за $\frac{3}{5}$, добиће се $4\frac{1}{5}$. Који је тај број?

24. Ако се производ неког броја и $3\frac{24}{29}$ смањи за $1\frac{1}{2}$ остаће 3. Који је тај број?

25. Који број треба помножити производом бројева $13\frac{11}{12}$ и $\frac{52}{225}$ да би смо добили 100?

26. Да се збир бројева $2\frac{2}{11}$ и $1\frac{5}{12}$ подели са $8\frac{3}{7}$, па затим количник допуни до 1.

27. Разлику $7-1\frac{3}{10}$ помножи збиром $\frac{5}{9}+\frac{5}{19}$, а производ смањи за половину од $5\frac{1}{2}$!

28. У једном врту дужине $18^{m}\frac{3}{4}$, ширине $17^{m}\frac{3}{5}$, нападало је кише 2211 *l*. Колико *l* долази на $1 m^2$?

29. Један брзи воз прешао је стазу од 88 km и 350 m за време од 8 h и 40 mn до 10 h и 15 mn без заустављања. Колика је била његова просечна брзина?

30. Одузми од збира бројева $3\frac{17}{24}$ и $7\frac{19}{56}$ разлику између 20 и $9\frac{59}{84}$!

31. Разлици између $20\frac{1}{20}$ и $11\frac{14}{30}$ додај збир бројева $7\frac{11}{36}$, $2\frac{7}{9}$ и $5\frac{29}{60}$!

32. Збир два броја је $17\frac{7}{11}$; један од њих једнак је разлици између $7\frac{2}{3}$ и $4\frac{5}{22}$; који је други број?

33. За колико износи збир 20, 25 и 30 дела од 35 више него ли збир 4 и 6 дела од 9?

Провери следеће једначине:

34. $\left(2-1\frac{13}{18}\right)-\left(1\frac{1}{4}-\frac{19}{30}\right)+\left(2\frac{1}{8}+\frac{13}{15}\right)=1\frac{119}{120}$.

35. $2\frac{7}{12}+\left(5-9\frac{8}{15}+12\frac{7}{12}\right)-\left(1\frac{50}{60}-\frac{43}{55}\right)=9\frac{43}{70}$.

36. $\left(\frac{66}{99}-\frac{88}{96}+1\frac{30}{120}\right)-\left(\frac{30}{135}+\frac{45}{180}\right)=\frac{2}{3}$.

37. $\left(\frac{675}{162}-\frac{600}{1044}\right)+\left(10-\frac{555}{407}\right)+\frac{1000}{132}=26\frac{95}{286}$.

38. $4\frac{1}{15}-\left[2\frac{1}{5}-\left(3\frac{101}{120}-1\frac{1}{3}-2\right)-1\frac{3}{10}\right]+2\frac{5}{8}=6$.

39. $19\frac{7}{12} - [3\frac{1}{5} - (1\frac{1}{5} - \frac{1}{3}) + \frac{5}{6}] - (4\frac{1}{4} + 2\frac{1}{6}) = 10.$

40. Један извор даје за минут $4l\frac{1}{20}$ воде. Колику количину воде даје за $1^h\frac{3}{5}$?

41. Покажи да је аритметичка средина бројева $2\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{6}$ и $8\frac{1}{2}$ број $5\frac{3}{16}$!

Провери следеће једначине:

42. $1\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) : \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$

43. $\frac{0{,}125 \cdot 1{,}6 + 0{,}8}{0{,}25 \cdot 0{,}4} = 10.$ 44. $\frac{2{,}5 \cdot 1007}{0{,}02^2} = 6293{,}75.$

45. $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}} : 1\frac{9}{14} = 2.$ 46. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \cdot \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} : \frac{1}{3}} = \frac{5}{9}.$

47. $0{,}428 \cdot 1000 - 0{,}528 \cdot 40 + 0{,}000925 \cdot 8000 =$

48. $(0{,}0924 \cdot 20 \cdot 50 + 0{,}018 \cdot 400) \cdot (0{,}09 \cdot 20 - 0{,}01 \cdot 100) =$

49. Колико треба додати 100-струкој разлици бројева 5,4 и 4,806 да се добије 60-струко 1,082?

50. За колико треба смањити производ бројева 0,772 и 1700 да се добије 200-струко 0,322?

51. Један минерални извор даје просечно за дан $134,^{hl}40$ воде. Од овога се искористи ујутру $\frac{1}{12}$, увече $\frac{1}{15}$. Осим тога на пуни се 500 флаша од литра. Колико литара воде одиће бескорисно?

52. $30{,}03 : 700 + 700 : 1{,}75 - 0{,}02574 : 0{,}6 =$

Провери следеће једначине:

53. $\dfrac{(22{,}17 + 0{,}009 + 14{,}221) \cdot (1{,}5 - 0{,}93)}{1 : 0{,}2 - 5{,}53} = 84.$

54. $\dfrac{1}{1 : (0{,}8 - 0{,}75)} + \dfrac{4 + 3 : 0{,}75}{0{,}9 \cdot 3{,}2 : 0{,}018} = 20{,}05.$

55. $(10{,}28 - 15{,}304 + 7{,}216) : 1{,}37 + (3 - 2{,}25) : 0{,}1875 = 20.$

56. Подели производ бројева 2,45 и 0,19 двоструком разликом између 4,2 и 2,87! (0,175.)

57. Да се половина збира бројева 5,9 и 4,72 подели двоструком разликом између 4,2 и 2,87. (2.)

58. За један плац дужине $31,^{m}84$, а ширине $19,^{m}5$, плаћено је $52\,774,^{дин}80$. Пошто је $1m^2$?

59. Колико је висока једна соба кад је њена запремина $133,^{m^3}164$, дужина $6,^{m}50$, а ширина $5,^{m}40$?

60. Колика је дебљина једне школске табле кад је њена дужина $1,^{m}25$, висина 90 cm, а запремина 18 dm^3?

Колико је тешка кад 1 dm^3 дрвета од кога је начињена тежи $0,^{kg}55$?

61. Количник бројева $11\frac{1}{9}$ и $\frac{4}{63}$ да се помножи збиром бројева $\frac{2}{25}$ и $1\frac{3}{7}$.

62. Збир бројева $2\frac{2}{11}$ и $1\frac{4}{15}$ да се подели њиховом разликом, а добијени количник да се помножи бројем $11\frac{2}{5}$.

63. У ком броју се $7\frac{1}{2}$ толико исто пута садржи као и $8\frac{7}{8}$ у $30\frac{1}{2}$?

64. Којим бројем треба поделити 25, да се добије исти количник као кад се подели $22\frac{1}{2}$ са $9\frac{3}{4}$?

65. $(2{,}615 - \frac{4}{5}) : 1\frac{3}{5} + 3\frac{1}{4}.$

66. $6\frac{4}{9} : (3\frac{3}{4} - 2\frac{7}{8}) - (1 - 2 : 3\frac{2}{5}).$

67. $(3\frac{7}{12} + 2\frac{13}{15}) \cdot 1\frac{7}{8} + 5\frac{5}{12} - \frac{7}{12} : 2\frac{4}{5}.$

68. $(10\frac{1}{8} - 3\frac{5}{6}) : (4\frac{3}{4} + 6\frac{23}{40}) + (6\frac{2}{3} - 4\frac{1}{2}) \cdot 4.$

69. $3\frac{2}{3} : 4\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) \cdot 2\frac{4}{7}.$

70. $(\frac{1}{20} - \frac{1}{72}) \cdot (\frac{1}{30} : \frac{1}{300} + 3\frac{1}{3}) : \frac{5}{8}.$

71. $(\frac{9}{70} - \frac{1}{28}) : (1\frac{3}{4} - \frac{5}{14}) + 2\frac{3}{5} \cdot (1 - \frac{1}{16}).$

72. $[(4\frac{1}{2} - 2 : 1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3}) \cdot 10 - 6\frac{1}{3}] : 4 - 5.$

73. Додај броју $7\frac{1}{2}$ трећи део од $13\frac{1}{2}$, добијеном збиру допиши једну нулу и подели тако добијени број разликом између $7\frac{1}{5}$ и $3\frac{9}{20}$! **(32.)**

74. Дата су 4 разломка $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{12}$ и $\frac{2}{15}$. Одузми од збира

прва два разлику друга два и подели резултат производом сва четири разломка! $(39\frac{1}{2}.)$

75. $\frac{1}{12}$ једнога броја је $3\frac{3}{4}$. Израчунај $\frac{11}{25}$ од тог броја!

76. За колико је деветоструки 5 део од 8 већи од седмоструког 20 дела од 19?

77. Подели 3 део од 13 са 6, затим 5 део од 18 са 3. Сабери потом оба количника и одузми од добијеног збира 15 део од $11\frac{1}{8}$!

78. Подели 12 део од 15 са 40 и 40 део од 12 са 15, затим потражи $\frac{8}{9}$ разлике оба количника!

79. Да се седмострукој разлици бројева $2\frac{1}{8}$ и $1\frac{7}{12}$ дода количник разломака $\frac{16}{21}$ и $\frac{9}{35}$.

80. Збир бројева $3\frac{7}{12}$ и $2\frac{1}{5}$ да се подели њиховом разликом, а добијени количник да се одузме од 7.

81. Чиме треба поделити количник бројева $5\frac{2}{5}$ и $4\frac{7}{20}$ да се добије $7\frac{7}{40}$?

82. Шта мора да се дода половини збира бројева $29\frac{1}{4}$ и $57\frac{3}{5}$ да се добије 50?

83. За колико је већи четвороструки збир бројева $2\frac{2}{3}$ и $2\frac{7}{20}$ од половине разлике између $11\frac{1}{5}$ и $7\frac{5}{8}$?

84. За колико је разлика бројева $12\frac{1}{4}$ и $7\frac{19}{60}$ мања од броја који се добија кад се збир $1\frac{5}{6} + 2\frac{1}{8}$ помножи са $3\frac{1}{2}$?

85. Колико се пута производ бројева $11\frac{1}{4}$ и $6\frac{2}{5}$ садржи у $273\frac{3}{5}$?

86. $2\frac{5}{8} - \frac{4}{5} : (1{,}6 + 3\frac{1}{4})$.

87. $(5\frac{1}{9} \cdot 1\frac{7}{24} - 4\frac{7}{8}) \cdot \frac{7}{43} + \frac{5}{8} \cdot (6 - 4\frac{1}{3})$.

88. $[5\frac{1}{4} - (\frac{17}{30} : \frac{5}{6} + \frac{5}{12} : \frac{5}{6}) \cdot \frac{7}{48} - 4\frac{1}{9}] \cdot 100$.

89. $[(3\frac{1}{2} - 2 : 1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3}) \cdot 10 - 6\frac{1}{3}] : 2 - 2$.

90. $2\frac{1}{3} : (4 - 2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + \frac{1}{3} : \frac{1}{2})$.

91. Један правоугаоник, дужине $6\frac{1}{2}$m, ширине $4^{m}\frac{1}{4}$ да се нацрта у размери 50 : 1. Израчунај дужину, ширину и површину слике! Колика је стварна површина?

92. Неко купи 6 комада за 40 пара, а прода стотину за 8 динара. Колико комада треба да прода да би зарадио 20 динара?

93. Сабери 5 разломака, од којих је први $1\frac{3}{5}$, а сваки потоњи половина од претходног!

94. Узми половину од $\frac{3}{5}$ и петину од $2\frac{2}{3}$, сабери ове количнике и збир подели производом коме је један чинилац $\frac{3}{4}$ а други разлика између 3 и $1\frac{1}{8}$!

95. Одузми од 10 производ броја $2\frac{1}{2}$ са збиром бројева $1\frac{1}{20}$ и $\frac{4}{5}$, па добијену разлику подели двоструким производом разломака $\frac{3}{10}$ и $\frac{1}{8}$!

96. У једном рибњаку, који је дугачак $12\frac{1}{2}$m, а половину од тога широк, стоји вода високо 1m 20 cm. Колико ту има m^3 воде? За колико часова та вода може да се испусти кроз једну цев кад просечно за минут истече $2\frac{1}{2}$hl?

97. Из једног бурета од $52\frac{1}{2}$ *l* вина оточено је најпре $\frac{1}{5}$, затим од остатака $\frac{1}{6}$. Вино које је још преостало треба преручити у флаше од $\frac{3}{4}$ *l*. Колико је за то потребно флаша?

98. Једна соба дужине $6m\frac{3}{4}$ и $4m\frac{4}{5}$ ширине треба да се патоше даскама дужине $2m\frac{1}{4}$ ширине 36 cm. Колико је дасака потребно? (40.)

99. Од једног канала који треба да буде дугачак $10\frac{1}{2}$ km, ископано је већ 6km 216m. За које ће време бити готов остатак, кад се просечно за дан сврши $11^{m}\frac{9}{11}$?

100. Један чиновник има годишњи приход 28 000 динара. $\frac{11}{15}$ од тога је његова плата, $\frac{7}{60}$ износи његов приход од књижевног рада, остатак је интерес од уложеног новца. Колики му је уложени новац кад интерес износи $\frac{1}{25}$ од уложене суме?

101. Од две цеви једна даје за 3mn 5hl, друга за 5mn 7hl воде. За колико сати ће оне заједно напунити један базен за пливање чија је запремина $41m^{3}\frac{2}{5}$?

102. **Површина целе земље**. Од целокупне површине земаљске кугле вода покрива $\frac{11}{14}$. Површина Азије износи $\frac{121}{24}$ Европе, површина Африке је $\frac{22}{7}$, Америке $\frac{37}{10}$ и Океаније $\frac{31}{27}$ Европе. Да се израчуна површина појединих делова и целокупна површина земљине кугле, ако се узме да је површина Африке 29 800 000 km².

103. Испиши све просте бројеве између 100 и 160!

104. Именуј све чиниоце броја 180!

105. Потражи н. з. ч. бројева 666 и 925!

106. Именуј усмено, и не исписујући их н. з. с. за бројеве 240 и 360; 480 и 720; 750 и 1000; 1400 и 2100!

107. Који број садржи просте бројеве 2, 3 и 5 по 2 пута?

108. Два зупчаста точка A и B налазе се на истој осовини, а имају 12 и 15 зубаца. A залази у зупчаст точак C, који има 17 зубаца, B залази у зупчаст точак D, који има 21 зубац. Колико пута се сваки од њих окрене кад они стигну поново у положај у коме су били у почетку?

109. Три тркача трче по једној кружној стази. Први је обиђе за 72 секунда, други за 80, а трећи за 88 секунада. Они заједно крену из исте тачке. После ког времена ће они поново бити сви заједно на полазној тачки?

110. Кад поделимо бројеве 396, 939 и 3517 једним истим бројем, добијамо одговарајуће остатке 6, 3 и 6. Која је највећа вредност делиоца?

111. Кад поделимо бројеве 1627, 3571, 4219 једним истим бројем добијамо стално остатак 7. Која је највећа вредност тог делиоца?

112. Кад поделимо бројеве 273, 635, и 721 једним истим бројем, добијамо остатке 3, 5 и 1. Који су количници, знајући да је делилац највећи могући?

113. Седам војника пуцају у једну мету, и то први после свака 2 минута, други после свака 3 минута и тако редом остала петорица у размаку од 5, 7, 10, 12 и 14 минута. Ако они првипут опале сви заједно, после колико часова ће се догодити да опет пуцају сви плотуном?

114. Обим предњих точкова на једним колима је $2^{m}\frac{3}{4}$, обим задњих је $3^{m}\frac{5}{6}$. Који је најмањи пут који кола треба да пређу, па да сви точкови начине цео број обрта? Колики је број тих обрта?

115. Који су остаци дељења кад поделимо са 2, 3, 4, 5, 9 и 25 следеће бројеве: 36, 375, 2003, 3651, 434, 257, 32 578, 111 111, 1111, 122, 123, 456, 789, 987, 654, 321?

116. Покажи да су бројеви 11, 99, 1001, 9999, 100001, 999999 дељиви са 11. Из тога изведи правило дељивости са 11.

117. Одредити н.з.ч. бројева: 65 531 и 23 451, 10 000 001 и 10 001, 1 000 000 001 и 1 000 001.

118. Нађи н. з. с. за бројеве 9, 99, 999 и 9 999!

119. Покажи растављањем на просте чиниоце да је производ од н. з. с. и н. з. ч. два броја једнак производу та два броја!

120. Колико пута се прост чинилац 3 јавља у производу првих 50 бројева?

121. *Шала*: Колико пута се јавља прост чинилац 3 у производу првих 50 простих бројева?

122. Нађи најмањи број којим треба помножити 156 да би производ био садржалац броја 72!

123. Да ли је број 5041 прост број?

124. У извесном броју пакета налазе се или само јабуке, или само крушке, али број комада је у сваком пакету исти. Јабука има свега 684, а крушака 432. Ако је број од обе врсте пакета највећи могући, нађи колико има свега пакета!

125. Двоцифреним бројевима 16, 26, 39,60, 55, 88, стави напред по једну цифру, али тако да сваки добијени троцифрени број буде дељив са 9!

126. Нађи најмањи број у коме се садрже сви парни бројеви између 2 и 12!

127. Потражи најмањи број у коме се садрже свих 9 једноцифрених бројева!

128. Нађи н. з. ч. бројева 180 и 315. Покажи затим да и збир и разлика та два броја садрже тај чинилац!

129. Израчунај усмено н. з. с. бројева 8,9 и 11!

130. Један зупчаст точак A снабдевен је са 28 зубаца, точак B са 15 зубаца и залази зупцима у први точак; један точак C има 20 зубаца и залази у точак B. Колико је обрта сваки од њих начинио кад се нађу поново у почетном положају?

131. Предњи точкови на једним колима имају у обиму 24 dm, задњи 36 dm. Колики су пут прешла кола за време док су предњи точкови начинили 1000 обрта више од задњих?

132. Растави 1001 на просте чиниоце!

133. Напиши поред једног троцифреног броја, на пр. 265, исти број још једанпут; тада мора добијени број бити дељив са 7, 11 и 13. Доказ!

Упутство: Растави шестоцифрени број на два чиниоца од којих је један 1001!

134. **Леонардо из Пизе** бројио је између 11 и 97 просте бројеве и нашао да их има 21. Да ли је то тачно?

135. **Платонов број.** Број 5040 дељив је са првих 10 бројева природног бројног реда. Доказ! Грчки филозоф Платон (†348 г. пре Хр. р.) тврдио је да број 5040 има укупно 59 чинилаца. Колико чинилаца ти налазиш у том броју?

136. Ако се у збиру $x^2 + x + 17$ наместо x стављају редом бројеви 0, 1, 2 . . . до 15, увек ћемо добити прост број. На пример за $x = 0$, горњи збир постаје $0^2 + 0 + 17 = 17$; за $x = 3$ збир постаје $3^2 + 3 + 17 = 9 + 3 + 17 = 29$; за $x = 10$ имамо $10^2 + 10 + 17 = 127$.

137. **Проблем басамака.** (Домаћи задатак на неодређено време.) Од колико се басамака састоје једне степенице кад, пењући се уз њих, прелазимо све по два и два басамака, на врху претекне један басамак; пењући се по три претекну два, пењући се по четири претекну три, по пет претекну 4, по 6 претекну 5, по 7 не претекне ниједан?

---

138. Нађи две дужине које се разликују за 42 cm, да једна износи $\frac{2}{3}$ од друге!

139. Кад се од једног броја одузму $\frac{3}{19}$ тог броја затим од остатка $\frac{2}{5}$ остатка, добије се 96. Који је тај број?

140. Један ученик рече: кад од својих година одузмем половину, затим седмину, остаје још 5 година. Колико је година том ученику?

141. Једна госпођа узела је из корпе са јајима најпре $\frac{2}{3}$ целокупног броја, затим $\frac{1}{4}$ остатка, после чега је остало још $2\frac{1}{2}$ туцета. Колико је јаја било у почетку у корпи? Једно туце = 12 комада.

142. Један туриста пошто је прешао првог дана $\frac{1}{5}$, другог $\frac{1}{4}$, трећег $\frac{1}{3}$ пута, имао је да маршује четвртог дана још 26 km. Колики је пут прешао за 4 дана?

143. У једној четвороразредној гимназији, у I разреду налазе се $\frac{3}{7}$ целокупног броја ученика, у II $\frac{1}{4}$, у III $\frac{1}{6}$, у четвртом осталих 12 ученика. Колико има ученика у осталим одељењима?

144. Један мајстор и две калфе сврше један посао и за то добију 123 дин и 30 пара. Како ће се ова зарада поделити, кад мајстор узме за себе $2\frac{1}{2}$ пута више од једног калфе?

145. Збир два броја је 48. Један је за $3\frac{3}{4}$ већи од другог. Који су ти бројеви?

146. Збир два броја је $17\frac{3}{4}$. Један од њих је $\frac{4}{5}$ другога. Који су ти бројеви?

147. Разлика два броја је $345\frac{11}{17}$. Један од њих је $\frac{7}{11}$ другога. Који су ти бројеви?

148. Збир два броја је $\frac{31}{42}$, њихова разлика $\frac{1}{42}$. Који су ти бројеви?

149. Ако додамо $\frac{3}{5}$ једнога броја на $\frac{2}{7}$ другог, добијемо $\frac{146}{17}$. Први број је 3 пута већи од другог. Који су ти бројеви?

150. Поделити између 3 лица суму од 45 141 дин, тако да део првога буде $\frac{2}{7}$ дела другога, а део другога да буде $\frac{3}{4}$ дела трећега.

151. Поделити између два лица 58 750 дин, тако да део другога буде за 460 динара већи од $\frac{2}{3}$ дела првога.

152. Једна еластична кугла отскаче на висину која износи $\frac{3}{7}$ од оне са које је пуштена. Она падне са висине од 343cm. До које ће се висине попети пошто отскочи трећи пут?

153. Једна еластична кугла отскаче на висину која износи $\frac{3}{5}$ од оне са које је пуштена. Пошто је отскочила 2 пута, попне се на висину која је за 32 cm мања од оне са које је пуштена.

154. У једном бурету има 228 l вина. Одатле оточе 40 l, па то вино замене са 40 l воде. Затим оточе 57 l ове смеше и понова долију 57 l воде. Колико је још вина остало у бурету?

155. Једна флаша садржи 1 l вина. Једно лице одаспе $\frac{1}{10}$ од тога, па флашу допуни водом. Друго лице такође одаспе $\frac{1}{10}$ флаше и допуни је водом. Треће лице уради то исто, затим четврто итд. Колико је вина остало у флаши после шесте овакве операције?

156. Један трговац купи робе за 2121 динар. Од тога он прода $\frac{2}{3}$ са $\frac{1}{2}$ добити. Он затим прода остатак са $\frac{1}{7}$ губитка. Колико је добио?

157. $\frac{2}{3}$ од $\frac{4}{5}$ неког броја су за 44 мање од двоструког тог броја. Који је тај број?

158. Кад узмемо $\frac{1}{3}$ од $\frac{4}{5}$ неког броја, па томе додамо 10, тај резултат поделимо са 14, добићемо количник 1 а остатак 12. Који је тај број? 24 h

159. Један ученик проводи просечно $\frac{5}{24}$ дана у школи, $\frac{5}{96}$:24 на одлазак у школу и долазак кући, $\frac{1}{9}$ дана на спремање лекција код куће и $\frac{1}{36}$ на обеде. Колико му часова остаје за спавање и одмор?

160. Један предузимач располаже извесном сумом новца за грађење једне куће. Кад је сазидао $\frac{2}{3}$ од куће, он констатује да је потрошио $\frac{3}{4}$ новца. Који ће део куће моћи да сагради са целом сумом?

161. Утврђено је да $\frac{2}{3}$ ha земљишта у селу вреде толико исто као $\frac{1}{2}$ m^2 у центру у Београду. Колико ha земљишта би се могло купити у селу за цену од $56 m^2 \frac{2}{3}$ у Београду?

162. Два лица имају извесне суме новца. Збир тих сума износи 46 200 динара. Пошто је прво лице потрошило $\frac{2}{7}$ од свог дела, а друго $\frac{1}{7}$ свога дела, остало им је подједнако. Колико је новаца имало свако лице?

163. Два лица наследила су заједно суму од 18 300 динара. Пошто је прво лице потрошило $\frac{2}{5}$ свога дела, а друго $\frac{3}{7}$ свога, остало је првоме два пута више неголи другоме. Колико је свако лице наследило?

164. Један трговац прода $\frac{2}{5}$ једног комада платна једном купцу. Другом купцу прода $\frac{1}{3}$ остатка. Он прими за све 120 динара. Колика је цена целог комада?

165. Ако узмемо $\frac{3}{5}$ једног броја повећаног за 10 и $\frac{2}{7}$ тог истог броја умањеног за 14, добићемо резултате који се разликују за 32. Који је тај број?

166. Већи точак једног бициклета има 2 m у обиму. Обим мањег точка износи $\frac{6}{7}$ већег. Колики пут је пређен кад већи точак начини 4530 обрта мање од другог точка?

167. Обим једног часовника је 50 cm; колика раздаљина раздваја врхове двеју казаљки у 12^{30}?

168. Један часовник иде напред за 5 секунада и $\frac{1}{3}$ дневно. Регулисан је данас у подне. Кад ће отићи напред за 1 минут?

169. Сатне казаљке поклапају се тачно у подне. Кад ће први пут бити једна казаљка у продужењу друге?

170. Неко купи два комада платна. Дужина првог комада износи $\frac{2}{3}$ другог. Цена једног метра првог комада износи $\frac{4}{5}$ цене једног метра другог комада. Трошкови се пењу до $\frac{1}{99}$ од целокупне цене. Колика је цена сваког комада кад знамо да трошкови износе 2 динара?

171. Једно лице уложи своју имовину у једно предузеће које доноси $\frac{3}{49}$ капитала годишње. После два месеца оно повуче $\frac{2}{5}$ своје имовине. На крају године прими као зараду 2000 динара. Колика је његова имовина кад се узме да се за 2 месеца добије $\frac{1}{6}$ од онога што се добије за 1 годину?

172. Један газда обећа своме слуги 1 300 динара годишње и једно одело. После седам месеци га отпусти и плати му 700 динара и одело. Пошто је рачунато одело?

173. Један отац остави по $\frac{1}{4}$ свог имања сваком сину. Тројица од њих имају, и то први 3, други 4, а трећи 7 деце. Сваки син подели своје имање деци, подједнако сваком детету. Четврти син подели своје имање на 14 нећака, сваком подједнако. Да се одреди део свакога, кад се још зна да деца у породици од 3 добију још по 1200 динара више од деце у породици од 4.

ПРОБЛЕМИ КРЕТАЊА

174. Једна лисица која направи за секунд 2 корака и $\frac{1}{3}$ већ је начинила 30 корака и $\frac{3}{4}$ кад за њом појури један пас, који прави $4\frac{1}{2}$ корака у секунду. После ког времена ће пас стићи лисицу? Кад ће пас стићи лисицу ако узмемо да 3 корака пса вреде колико 2 корака лисице?

175. Два пријатеља који су један од другог удаљени $39^{km}\frac{9}{10}$ крену једновремено у 6^h ујутру, један другом у сусрет. Један пређе за сат $4\frac{1}{2}$ km, други 5 km. Колико су удаљени у 7^h ? У 9^h ? Кад ће се срести? Колики је пут тада сваки прешао?

Напомена. При решавању проблема кретања треба увек цртати слику.

176. *А* и *В*, који су удаљени један од другога $34\frac{1}{2}$ km уговоре сусрет. Обојица крену у $5^h\ 40^{mn}$. *А* прелази $4^{km}\frac{3}{4}$ на сат. *В* 5 km 600 m. Кад ће се срести? Колико km је сваки прешао?

177. Из два места која су удаљена $45^{km}\frac{3}{4}$ крену једновремено два лица једно другом у сусрет. Прво лице пређе за 3 сата 17 km, друго за минут 75 m. Кад и на ком отстојању од В ће се срести?

178. Два пријатеља, који су удаљени $107^{km}\frac{1}{5}$ путује један другоме у сусрет. Један прелази за минут просечно $87\frac{1}{2}$m, други за исто време начини 100 корака од по 80 cm. За колико km се они приближе са 1 сат? После ког времена ће се срести?

179. Један пешак и једне двоколице крену у 7^h ујутру на истом месту. Пешак прелази за сат $4^{km}\frac{3}{4}$, а двоколице $7^{km}\frac{4}{5}$. Кад двоколице стигну у $\frac{1}{2}10^h$ ујутру, колико је далеко пешак од циља? Кад он стиже?

180. Један пешак крене у $\frac{1}{2}7^h$ ујутру и прелази за сат 5 km. У 9^h крене за њим из истог места један бициклист, који прелази за сат 15 km. Кад ће стићи пешака?

Упутство: За колико је у 9^h пешак већ измакао? Колико km бициклист прелази више за сат?

181. Један лопов украде велосипед и почне да бежи брзином од $8^m\frac{1}{4}$ (у секунду). За њим појури један жандарм, $1^{mn}\frac{4}{5}$ касније на точку брзином 10 m. После ког времена ће га стићи?

182. Неко је отпутовао у $5^h\ 10^{mn}$ и прелази на сат $4^{km}\frac{3}{4}$. У $8^h\ 32^{mn}$ крене за њим из истог места аутомобил, који за сат прелази 38 km. У колико сати ће га стићи?

183. За једним гласником који се кренуо у $5^h\ 36^{mn}$ брзином $4^{km}\frac{3}{4}$, пошаљу један аутомобил у 10^h, који га у 12 стигне. Колико је km аутомобил прелазио на сат?

184. Два пријатеља удаљена 70 km путују један другом у сусрет. А пређе пешице за сат $5^{km}\frac{3}{10}$, В на точку за четврт сата просечно 3km $\frac{7}{10}$. Колико су они удаљени у 10^h ујутру, кад се крену у $6^h\ 40^{mn}$ ујутру? Колики је тада пут прешао А?

ПРОБЛЕМИ ЦЕВИ И БАЗЕНА

185. Један базен може да се пуни кроз 3 цеви. Прва цев напунила би га за 3 часа, друга за 5, а трећа за 7 часова. Који део базена може свака цев напунити за 1 сат? Колико напуне све три цеви за 1 сат? За које ће се време напунити базен кад све три цеви теку једновремено?

186. Један извор напунио би базен за 8^h, други за 6^h, а трећи за 4^h. За које ће време сва три извора напунити базен, ако се пусте да теку једновремено?

187. Једна када може да се напуни помоћу две славине А и В, за 10 односно 12 минута, а може да се испразни помоћу С за 15 минута. Ако отворимо све цеви једновремено, кад ће се када напунити?

188. Један базен има две цеви за пуњење, а једну за отицање. Кроз једну цев може да се напуни за 5^h, кроз

другу за $4^h 30^{mn}$, а кроз трећу може да се испразни за 3^h. Кад се све три цеви отворе једновремено, за које ће се време базен напунити?

189. А може да сврши један посао за 15 дана, В за 12 дана. Који део посла може свако од њих свршити за 1 дан? Колико ураде обојица за 1 дан? За које ће време свршити посао кад заједно раде?

190. А може покосити једну ливаду за 8h, В би то исто урадио за $7\frac{1}{2}$h, а С за 6 h$\frac{2}{3}$. Ако сад сва тројица једновремено косе, за које ће време свршити посао?

191. Да би се свршио један посао потребно је једном раднику 2 дана и $\frac{3}{4}$, од 10^h, другом раднику $3\frac{1}{2}$ дана од 12^h, трећем 4 дана од 9^h, четвртом $3\frac{5}{8}$ од 8^h. Колико ће часова рада бити потребно да се сврши исти посао кад сва четири радника раде једновремено?

192. Два тестераша могу да исеку једну гомилу дрва за $2^h 14^{mn}$. Један од њих би сам свршио цео посао за $4^h\frac{3}{4}$. Колико би времена требало оном другом за исти посао?

193. **Бронзани делфин.** Један делфин служећи као украс у фонтани, на тргу, носио је овакав натпис: Ја могу да избацујем воду кроз очи, кроз ноздрве и на уста. Ако отворим само очи, напуниће се базен за 2 сата и $\frac{2}{5}$; ако отворим само ноздрве, базен ће се напунити за 3 сата и $\frac{3}{4}$, а ако отворим уста, базен би се напунио за $4\frac{1}{2}$ сата. Ако једновремено отворим очи, ноздрве и уста, реци посматрачу, за колико сати ће се базен напунити!

194. $\dfrac{4\frac{2}{3} \text{ од } 5\frac{1}{7} \text{ од } 8}{28\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{75}} = ; \dfrac{3\frac{2}{3} : 1\frac{3}{8}}{6\frac{2}{5} : 8\frac{1}{3}} =$

195. $\dfrac{1\frac{5}{24} - 7\frac{13}{45} + 8\frac{11}{18}}{4\frac{49}{60}} - \dfrac{\frac{1}{9}}{13\frac{1}{3} : 40} =$

196. $\dfrac{\left(3\frac{3}{4} - 1\frac{5}{6} : \frac{7}{12}\right) \cdot \left(2\frac{11}{12} \cdot \frac{9}{10} - 2\right)}{\left(4\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{91} - 1 : 3\frac{1}{2}\right) \cdot \left(14\frac{2}{3} - 1\frac{7}{8} : \frac{9}{14}\right)} =$

197. *Следећи бројни израз даје годину која је врло важна у нашој народној историји:*

$$\frac{2\frac{1}{2} : 7\frac{1}{7} + \frac{5}{9} \cdot 18 - 7\frac{1}{9} : 32 - \frac{23}{180}}{9\frac{1}{4} - 23\frac{5}{6} + 20\frac{1}{20} - 4\frac{7}{15}} + 33\frac{8}{11} \cdot 56\frac{4}{7}.$$

198. $\dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1 + \frac{3}{5}}} = ; \dfrac{5}{6 + \dfrac{7}{8 + \frac{10}{11}}} = ; \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \frac{1}{5}}} =$

СТАРИ ПРОБЛЕМИ

199. Најстарији познати математички рукопис написао је Египћанин Ахмес. Тај се рукопис чува у Британском музеју у Лондону, под именом Papyrus Rhind. Мисли се да је написан на 18 столећа пре Хр. р. У том рукопису се налазе овакве једначине:

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42};\ \frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}.$$

Провери да ли су Египћани добро знали да рачунају са разломцима!

200. У том древном рукопису налазе се и ови задаци:

$$\frac{1}{42} + \frac{1}{88} + \frac{1}{729} + \frac{1}{301} = ;\ \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610} = ;\ \frac{1}{40} + \frac{1}{325} +$$
$$+ \frac{1}{536} = ;\ \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365} = ;\ \frac{1}{60} + \frac{1}{327} + \frac{1}{131} + \frac{1}{790} =$$

201. На 3000 година после, у византиској рачуници од Ахмима, нађени су слични задаци са Ахмесовим:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28};\ \frac{239}{6460} = \frac{1}{63} + \frac{1}{85} + \frac{1}{95}.$$

202. **Арабљански проблем.** Један стари Арабљанин имао је 17 камила а 3 сина. Пред смрт одреди да најмлађи син добије половину од свих камила, средњи $\frac{1}{3}$, а најстарији $\frac{1}{9}$. Синови се никако нису могли сложити при деоби, јер је део свакога од њих био претстављен разломком $\frac{17}{2}$, $\frac{17}{3}$, $\frac{17}{9}$.

Кадија коме су се обратили да пресуди поклони им једну камилу и изврши деобу. Пошто је сад било 18 камила, први добије $\frac{1}{2}$, тј. 9 камила, други 6, а трећи 2, и кадија узме своју камилу натраг. Синови оду задовољни кући, јер је сваки добио више него што му је отац оставио.

Објасни у чему је заблуда!

203. **Други арабљански проблем.** Два Арабљанина, један носећи 5 хлебова, а други 3 хлеба, сретну у пустињи једног путника богатог, а гладног. Они ручају заједно и поједу све хлебове. Путник им за ручак плати 8 златника. Како ће они поделити овај новац?

Први затражи за себе 5 златника. Други је захтевао деобу на једнаке делове, тј. по 4 златника, а он би један хлеб накнадио првоме. Пошто се нису сложили оду кадији. Он не пресуди ни по жељи једног нити другога, већ како налаже рачун.

204. **Проблем четири извора.** Један базен може да се напуни из 4 извора. Први извор би сам напунио базен за 1 дан, други за 2, трећи за 3, а четврти за 4 дана. За које ће се време напунити базен кад се пусти вода из сва четири извора једновремено?

205. **Лав, вук и пас.** Још код Јована Видмана, 1489 године, налази се овај задатак: Лав вук и пас једу заједно једну овцу. Сам лав би био готов са овцом за 1 сат, сам вук пождерао би је за 5 сати, а самом псу би било потребно 6 сати. За које ће време они бити готови са својим ручком кад овако једу заједно?

206. **Кухињски проблем.** Један кувар изда половину јаја и половину једног јајета свом првом помоћнику. Другом помоћнику изда половину остатка више половину једног јајета. Трећем помоћнику половину новог остатка и још једну половину јајета. Колико је кувар имао јаја и како је радио а да при том није имао потребу да разбије ни једно јаје?

207. **Први проблем оваца.** Један сточарски трговац прода првом купцу половину својих оваца и пола овце више. Другом купцу прода половину остатка више половину једне овце. Трећем половину новог остатка и пола овце више. Тако је распродао све овце. Колико је имао оваца?

208. **Други проблем оваца.** (Домаћи задатак на неодређено време). Један трговац купи 11 оваца по 35 динара комад. Известан број оваца му пропадне, а остатак прода повећав цену за сваки комад онолико пута по 5 динара колики је број изгубљених оваца.

Знајући да тако трговац није ништа ни зарадио ни изгубио, пита се колико је оваца пропало? (Упутство: Продајна цена мора бити чинилац броја $11 \cdot 35 = 385$.)

209. **Кинески проблем.** (Домаћи задатак на неодређено време.) У једном кавезу налазе се фазани и питоми зечеви. Животиње имају 35 глава и 94 ноге. По колико има од сваке врсте животиња? (Решавати пипањем, пробањем.)

210. **Мазга и магарица.** (Домаћи задатак на неодређено време.) Једна магарица носаше вино у друштву са једном мазгом, и, преморена под тежином терета, горко се жалила на своју судбину. Тада мазга учини крај њеном јадиковању рекавши јој: „Шта имаш да се жалиш, као да си мала девојчица, теткице? Ако бих ја узела од тебе једну мерицу, мој товар би постао два пута већи од твога; а ако би ти од мене узела једну мерицу, тада бисмо носиле подједнаке терете.“ Реци ми, учени математичару, по колико је мерица носила свака од њих!

211. **Проблем кућевласника.** Један кућевласник плаћа порез за једну кућу $\frac{1}{11}$ од целокупне кирије. Порез се попне на $\frac{1}{10}$ кирије. За колико треба да повећа кирију да му чист приход остане исти као и раније?

---

212. Један трговац купи 11 туцета играчака по 17,$^{\text{дин}}$25 комад. Уз то добије на свако туце по један комад бесплатно. Колика је његова добит ако он играчке препрода по 18,$^{\text{дин}}$50?

213. Један трговац помеша 285 l вина од 8,$^{\text{дин}}$25 литар и 372 l од 6,$^{\text{дин}}$75. Он продаје литар смеше по 9 динара.

Колико зарађује?

214. Треба поделити 457,$^{\text{дин}}$25 на три лица тако да прво добије 32,$^{\text{дин}}$15 више од другог, а друго 22,$^{\text{дин}}$15 више од трећег.

215. Сваки ученик у једном пансиону попије дневно по 0,^{l}145 млека. Пансион има 84 ученика. Годишње има 46 дана кад је половина ученика отсутна. Има и 57 дана распуста, кад у пансиону остаје симо по $\frac{1}{6}$ ученика. Колико се годишње троши на млеко кад је 1 литар 2,^{дин} 50?

216. Један трговац купи комад платна од 35 метара по 28,^{дин} 65 метар. Учине му попуст од $\frac{1}{25}$. Он препрода платно по 45,^{дин} 50. Колику је добит реализовао?

217. Помешајмо три литра алкохола и 2 литра воде на температури 16°. Густина алкохола је 0,795, густина воде 0,998549. Колика је тежина смеше? *Густина једног тела је тежина једног литра изражена килограмима.*

218. Један бакалин купи једно буре зејтина, које тежи бруто 24 kg. Буре садржи 20 *l* зејтина. Куповна цена је 4,^{дин}50 килограм, а продајна цена 8,^{дин}50 литар. Густина зејтина је 0,915. Колика је зарада и колика тежина празног бурета?

219. Један трговац купи 285 метара платна по 18,^{дин} 50 метар. Он је продао $\frac{3}{5}$ са добити од $\frac{20}{100}$, а остатак са губитком од $\frac{3}{32}$. Колико је добио или изгубио?

220. Изврши ове радње: $3,15 \cdot 0,5^2 - 1,2 \cdot 0,06$; $(28,03 - 0,6)^2$; $(3,14 + 0,75)^2 \cdot (74,2 - 68,75)$!

221. При једној велосипедској трци победилац је прешао стазу од 4,^{km} 572 за 5^{mn} 25^{s}. Колика је била његова средња брзина? За колико је mn и sec доцније стигао други победилац, кад је његова средња брзина била 14,^{m} 80?

222. Скрати следеће разломке, а потом одреди њихову вредност: $\frac{5,7 \cdot 0,8}{0,19}$; $\frac{2,4^2}{0,27 \cdot 80}$; $\frac{4,05 \cdot 6,2 \cdot 1,4}{9 \cdot 2,7}$; $\frac{0,45^2}{9 \cdot 0,09 \cdot 0009}$; $\frac{4 \cdot 1,05^2 \cdot 3,14}{3 \cdot 1,05 \cdot 0,628}$; $\frac{1,12 \cdot 2,4 \cdot 13,3 \cdot 2,48}{0,19 \cdot 0,8 \cdot 5,6}$.

223. Одреди количник: 0,^{a} 16 : 10,^{m2} 24; 20,^{m} 008 : 36,^{cm} 5.

224. $1,084 \cdot 500 - 600 \cdot 0,629 =$; $2,567 \cdot 640 - 2,567 \cdot 440 =$

225. $0,0427 \cdot 1000 - 0,528 \cdot 40 + 0,000925 \cdot 8000 =$

226. $(0,0924 \cdot 20 \cdot 50 + 0,018 \cdot 400) \cdot (0,09 \cdot 20 - 0,01 \cdot 100) =$

227. Колико треба додати 100-струкој разлици бројева 5,4 и 5,806 да се добије 60 струко 1,082?

228. За колико треба смањити производ бројева 0,792 и 170 да се добије 200-струко 0,322?

229. $(20 - 9,76) : 45$; $(60,94 + 24,17) : 37$; $\frac{19,352 + 8,8}{36} =$

230. Да се производ бројева 2,21 и 6,2 подели са 93.

231. Један минерални извор даје просечно за дан 135,^{hl}40 воде. Од овога се искористи ујутру $\frac{1}{12}$, увече $\frac{1}{15}$. Осим тога напуни се 500 флаша од литра. Колико литара воде одиће бескорисно?

232. Израчунај: $\frac{5}{8}$ од 1,^{m} 727; $\frac{4}{5}$ од 1,^{km}459; $\frac{11}{12}$ од 9,^{hl} 999.

233. $(1964,2 : 20) : 700$; $0,403 \cdot 200 : 170$; $(5 - 4,71) : 290 =$

234. $(100 - 27,82) : (0,23 + 0,0106)$; $49 \cdot 9,42 : 0,00588 =$

235. $30,02 : 700 + 700 : 1,75 - 0,03574 : 0,6 =$

236. $0,251 \cdot 9,61 - 0,21 : 0,043 =$

Провери следеће једначине:

237. $56,903^2 - 45,76^2 = (56,903 - 45,76) \cdot (56,903 + 45,76)$.

238. $0,609^2 - 0,593^2 = (0,609 + 0,593) \cdot (0,609 - 0,593)$.

Посматрањем горњих једначина реши следеће задатке:

239. $97,3^2 - 75,63^2 =$; $0,2763^2 - 0,5761^2 =$

240. $83,246^2 - 16,754^2 =$; $47,38^2 - 46,38^2 =$

241. Број 1 да се подели количником броја 2 и разлике бројева 1,9 и 1,895.

242. Од броја 0,918 да се одузме производ бројева 0,17 и 0,73; добијена разлика да се подели разликом између броја 0,9 и производа бројева 1,3 и 0,691.

243. Од броја 19 да се одузме количник бројева 797,048 и 800, па та разлика да се подели са 0,03.

244. Један трговац купи комад платна од 49^{m} по 40,^{дин} 50 метар. $\frac{1}{7}$ комада се исквари и не може се продати. Пошто трговац треба да продаје метар да не би ништа изгубио?

245. Потребно је да се два лењира поделе на делове једнаких дужина. Дужина једног лењира је 1,^{m} 20, другог 0,^{m} 8. Колики су ти делови кад се тражи да њихова дужина буде највећа могућа?

246. Неко купи 6 kg чоколаде и 3 kg каве за 259,^{дин} 20; други пут купи 6 kg исте чоколаде и 4,^{kg}5 исте каве за 316,^{дин}80. Пошто је килограм чоколаде и килограм каве?

247. Надница једне раднице износи 28,^{дин}50. Она за

своје издржавање троши просечно 24 дин дневно. Да ли ће што уштедети и колико, од 1 марта до 30 марта закључно, кад недељом не ради, а 1 март је у суботу? Колико би требало да зарађује дневно, па да уштеди 150 динара месечно?

248. Две даме купе заједнички 40 m свиле за 960 динара. При плаћању једна од њих плати 96 динара више од друге. По колико је метара свака од њих купила?

249. Густина живе је 13,6. Колико литара износи запремина 4 kg живе? (На 3 дец.)

250. Једна правоугла просторија има у обиму 312 m. Треба је обележити на тај начин, што ће се као знак поставити по један камен на извесном отстојању. Уз то, да по један знак буде на сваком темену правоугаоника. Треба метнути најмањи могући број знакова. Колико ће их бити кад је дужина правоугаоника 95,^{m}5? Отстојање међу знацима мора бити једнако.

251. $\dfrac{16000 \cdot (713{,}5 - 597{,}8)}{713{,}5 + 597{,}8} =$; $\dfrac{720}{1 + 0{,}00018 \cdot 24{,}5} =$

252. Израчунај $\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{2a}{b}$ за $a = 2{,}95$ и $b = 1{,}9$!

253. Израчунај $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b+c}{d} + \dfrac{a^2}{b+a}$ за $a = 2$, $b = 0{,}4$, $c = 0{,}2$, $d = \frac{5}{8}$!

254. $\left(\dfrac{2ac}{3a+b} - \dfrac{c}{2a+b}\right) : \left(\dfrac{2c}{\frac{2}{a} - b} - \dfrac{24bd}{2a+12d}\right)$ за $a = 2{,}4$, $b = 0{,}2$, $c = \frac{3}{4}$, $d = 7$.

255. Израчунај овај количник: дељеник је 30-струка разлика између 1,54 и $1\frac{1}{2}$, делилац половина збира $11{,}2 + 4{,}16$!

256. За колико се мора повећати половина разлике бројева 6,712 и 0,938 да се добије збир тих истих бројева?

257. Производ два броја је 8,84. Један чинилац је количник коме је дељеник збир бројева 4,705 и $\frac{5}{8}$, а делилац разлика између 4,7 и $\frac{3}{5}$. Одреди други чинилац!

258. Смањи 10 за 7,264, подели добијену разлику са 0,36 и количник допуни до 15!

259. За колико се разликује 7-струки количник бројева 27,39 и 74 од половине збира тих истих бројева?

260. Чиме треба помножити збир бројева $2\frac{7}{8}$ и 0,905 да се добије збир 9 једнаких сабирака, сваки 2,268?

261. Који број треба поделити разликом између 4,1 и 2,735 да се добије 20 део од 4,784?

262. Збир бројева 15,964 и 5,636 да се подели са 10, од добијеног количника да се одузме производ $1{,}44 \cdot 2{,}5$.

263. Производ два броја је 225. Један чинилац је једнак разлици између 6 и 2,875. Колики је други чинилац?

264. Чиме треба да се подели 9,36 да се добије количник између 1,8 и $1\frac{1}{2}$?

265. Чиме треба помножити 10-струки количник бројева 3,6915 и 3,45 да добијемо 0,107?

266. У једној фабрици добије радник на сат 6 динара, радница 4,^{дин}50. За колико часова зараде 9 радника исто толико, колико 10 радница за 18 часова?

267. У једном троуглу једна страна дугачка је 2,^{m}45, друга је 0,8-струка прва, а трећа $\frac{5}{9}$ пута колико друге две уједно. Одреди обим тога троугла!

268. Кад А потроши $\frac{3}{8}$ свог новца, а В 0,3 од свог, остаје сваком по 10,^{дин}50. Колико је сваки имао у почетку?

269. Неко поручи 45 l белог вина по 7,^{дин}30 и 22 l црног вина. Пошто је литар црног вина кад се за целокупну пошиљку исплати 540 динара, при чему је урачунато и 37,^{дин}70 за превозне трошкове?

270. Збир два броја износи 16,2. Један је за 0,84 већи од другог. Колики су ти бројеви?

271. 2 бурета заједно хватају 1,^{hl}24; запремина првог је за 5,^{l}8 мања од запремине другог. Колико хвата свако?

272. А и В треба да поделе 112,^{дин}50, тако да В добије 8 дин више од А.

273. При једној вожњи обрне се точак на колима 3857 пута. Колики је пређени пут кад је пречник точка 1,^{m}448? (Обим круга је 3,14 пута већи од пречника.)

274. Један точак на колима обрне се на путу од 8,^{km}5 2000 пута. Колики је његов пречник? (На 3 дец.)

275. Колика је дебљина једног стабла које има у обиму 2,^{m}54? (Тачно на mm.)

276. Један трговац купи један комад платна по 15,^{дин}80 метар, а прода га по 20,^{дин}40 метар. Тако оствари добит од 205,^{дин}50. Колико је метара у том комаду?

277. Два брата имају један 100 дин, други 81,30. Први троши недељно 5,40, други 4,^{дин}30. После колико дана ће обојица имати подједнако?

278. 2 радника, од којих један добије за дан 3,^{дин}60 више од другог, зараде за недељу дана 439,^{дин}20. Колико зарађује сваки?

279. Тело, кад слободно пада, пређе у првом секунду 4,^{m} 9, у другом 4,^{m} 9 · 3, у трећем 4,^{m} 9 · 5. Колики пут пређе за три секунда? Најпростији начин рачунања!

280. Пошто је један трговац продао 7 десетина од целокупног вина за 34 675,^{дин}20, остало му је још 25,^{hl} 8. Пошто је продавао 1 *l*?

281. Два пријатеља удаљена 53,^{km}9 иду један другом у сусрет. Један прелази за сат 4,^{km}5, други 3,^{km}3. После колико часова ће се срести кад се обојица крену у исто време? Колики је пут тада сваки од њих прешао?

282. Један јахач и један бициклист иду један другом у сусрет. Први прелази на сат 8,^{km}4, а други за секунд 4,^{m} 2. После ког времена ће се срести, кад су у почетку удаљени 52,^{km}92, кад крену једновремено, а ако сваки пре сусрета употреби по пола сата на одмор? За колико је km прешао бициклист већи пут у моменту сусрета?

283. Један пароброд отпутује у $\frac{1}{2}$ 8^{h} и прелази просечно 8,^{m}75 за секунд. За њим пође у 9^{18}, из истог пристаништа, истим правцем, један брзи пароброд са брзином 9$\frac{1}{2}$ m. Кад ће и на којој даљини од пристаништа да се сустигну?

284. Од једног комада земљишта, које износи 1 ha 11 m^2, има да се уступи за улицу 0,^{ha}5026, а остатак да се подели на плацеве за грађење кућа, сваки по 3,^{a}59. Колико ће бити таквих плацева?

285. $33{,}1 : 0{,}5 \cdot [6{,}375:(0{,}875-0{,}25)] =$

286. $[(50{,}2-20{,}002)\cdot(100-99{,}8)+0{,}1404]:0{,}5-4{,}06=$

287. Неко хтеде да напуни један резервоар за воду од 2,^{hl} 27, помоћу две славине, од којих прва даје 29 *l* за 4^{mn} а друга за секунд 150 cm^3. После 12^{mn} примети да друга цев није отворена. Колико још морају, после овога, бити отворене обе цеви, док се резервоар напуни?

288. Два дијаманта тешка су један 3, а други 5 карата. Други вреди 1350 динара. Колика је вредност првог кад се зна да је вредност дијаманта пропорционална квадрату тежине? (*Напомена*: 1 карат $=\frac{1}{5}$ грама.)

289. Зна се да је пређени пут, кад један камен слободно пада, пропорционалан квадрату броја секунада који протекну од почетка падања. Кад камен начини за 3 секунда пут од 44,^{m} 1, колики ће пут прећи за 5^{s}?

290. Под утицајем топлоте чврста тела се шире. Повећање једне дужине пропорционално је величини те дужине и повишењу температуре. При повишењу температуре за 10^{0}, један метар алуминијума издужи се за 0,^{cm}022. Колика ће бити дужина једне шипке од алуминијума на 85^{0} кад је дужина на 12^{0} 2,^{m} 5?

291. Под утицајем топлоте алкохол повећава своју запремину пропорционално својој запремини и повишењу температуре. Колика је запремина једне количине алкохола на 4^{0}, ако је запремина те исте количине на 44^{0} 1, *l* 4, кад се 2 литра алкохола повећају за 35 cm^3 повишењем температуре од 15^{0}?

292. Густина алкохола на 0 је 0,79. Колика је густина на 32^{0}. (Види претходно вежбање!)

293. Следеће разломке претвори у десетне на 3 децимала и одреди њихов збир:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9}!$$

294. То исто уради са следећим разломцима:

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \frac{1}{243}!$$

295. Дужина једног чаршава већа је од ширине за 0,^{m}68. Да би га опшили дуж целог обода, потребно је да се купи чипке за 24,^{дин} 20 по 2,^{дин} 75 метар. Које су димензије чаршава?

296. Два комада платна имају исте дужине. 7 m првога вреде колико 5m другога. Целокупна вредност првога и 5m другога је 273 динара. Други комад стаје 63 динара више

од првога. Пошто је метар сваког комада? Одреди дужину оба комада!

297. Једна пантљика продаје се по 5,^{дин}95 метар. Колико ће се платити за 30 cm ове пантљике?

298. Један сељак набере 626 крушака. За себе задржи 50. Трећину остатка прода по 3 комада за 1,^{дин} 05. Пошто треба да продаје 1 туце од оних што су још преостале да би свега за крушке добио 182,^{дин} 40?

299. Један радник зарађује годишње 9 295 динара. Колико може да троши недељно?

300. Један радник зарађује дневно 31,^{дин} 50, а ради годишње 297 дана. Он троши $\frac{2}{3}$ своје зараде за стан и храну $\frac{2}{3}$ остатка за одело. Колико му преостане на крају године?

301. Вредност два имања је 14 820,^{дин}75. Један ар првога, које има три пута већу површину од другога вреди 75 динара, док један ар другога вреди 90 динара. Одреди површину сваког од ова два имања!

302. Провери једначину:

$$0{,}345 \cdot (21{,}56 - 19{,}6) + \frac{14}{25} = 1{,}388!$$

303. Седам лица треба да плате заједнички суму од динара 681,90. Неколико од њих нису у могућности да плате и због тога остали морају платити сваки по динара 73,05. Колико их има који не могу платити? (3.)

304. Децималан број делимо са 5 ако га помножимо са 2, па запету померимо за једно место улево. Објасни то на једном примеру који ћеш сам изабрати!

305. Децималан број делимо са 25 кад га помножимо са 4, па запету помакнемо за 2 места улево. Објасни то на произвољно изабраним примерима!

306. Децималан број делимо са 125 кад га помножимо са 8, па запету помакнемо за 3 места улево.

307. Један радник зарађује дневно 47,^{дин} 50. Он троши дневно 27,^{дин}50 и кад ради и кад не ради. После 36 дана имао је уштеђених 102,^{дин}50. Колико је имао радних дана, а колико беспослице? (23,13.)

308. Два ортака поделе извесну суму новаца. Први треба да прими динара 445,85, а други три пута колико први, мање динара 246,45. Колики је део другога? (1091,10.)

309. Докажи да је

$$\frac{2}{3} + \frac{9}{14} + \frac{5}{12} - \frac{3}{11} = 1{,}435 \text{ (На 3 децимала.)}$$

310. Један комад платна од 11,^{m}25 стаје трговца 170 динара. Пошто треба да прода 6,^{m}30 овога платна, кад треба да заради 2,^{дин}25 од метра? (109,375.)

311. Једно буре пуно воде тежи 10,^{kg}2 више неголи кад је пуно зејтина, јер литар зејтина тежи 0,^{kg}915. Колика је вредност зејтина којим је напуњено ово буре, кад знамо да се килограм зејтина плаћа 17,^{дин}50? (1921,50.)

312. Знајући да је извесна запремина воде 773 пута тежа од исте запремине ваздуха, нађи колика је тежина једног литра ваздуха! Одреди колика је тежина кисеоника који се налази у литру ваздуха, кад знамо да ваздух садржи кисеоника 0,23 од целокупне своје тежине! (Тежина 1 литра ваздуха на 3 дец. 1,^{g} 293; кис. 1,^{g} 29739.)

313. Од две дужине, мања износи $\frac{6}{21}$ од веће, која је превазилази за 3,^{m}25. Колике су ове две дужине? (4,55; 1,30.)

314. Један штафетист добије налог да однесе заповест једној колони која је измакла за 9,^{km}900. Његова брзина је 10 km на час, колона прелази 4 km на час. После ког времена ће штафетист стићи колону? (1^{h} 39^{mn}.)

315. Један човек пређе 10 m док начини 15 корака. Колико km пређе за један час ако начини 100 корака на 1 минут? (4 km.)

316. Да ли је боље купити 48 литара зејтина на литар или на кило, кад се литар плаћа 16,^{дин}50, а килограм 17,^{дин}50? Узмимо да литар зејтина тежи 0,^{kg}91. Колико се уштеди при повољнијој куповини? (27,60.)

317. У једном килограму морске воде има 0,^{kg}035 соли. Колико има соли у 1600 литара морске воде кад знамо да литар морске воде тежи 1,^{kg}026? (57,456.)

318. Два комада платна продата су за 4 431 динар. Прво платно је продато по 48 динара метар. Друго чија дужина износи само $\frac{4}{5}$ дужине првога, продато је по 45 динара метар. Колика је дужина сваког комада?

319. Један калфа уштедео је $\frac{3}{25}$ од своје зараде, а остатак, који износи 8190 динара потрошио је. Он је зарађивао дневно динара 12,50. Колико је имао радних дана?

320. Како је боље купити јаја: 804 динара хиљаду или 10 динара туце?

321. Поделити 10 000 динара на 4 лица тако да део првога буде $\frac{9}{20}$ дела другога, да део другога буде $\frac{8}{10}$ дела трећега, и део трећега да буде $\frac{7}{10}$ дела четвртога. Добијене суме заокругли, да се могу исплатити!

322. Један кубни метар ваздуха тежи 1293 грама. Колика је тежина ваздуха у једној соби дужине $9,^m10$, ширине $3,^m25$, висине $2,^m60$?

323. Наћи два броја кад знамо да је њихов збир $\frac{3}{7}$, а разлика њихова $\frac{4}{25}$. Јесу ли ова два броја децимални бројеви?

324. Један децималан број написан је са две цифре које су раздвојене запетом. Кад цифре овог броја промене места, број се повећа за 3,6. Који је то број кад знамо да је збир цифара 6?

325. Један шраф покрене се за $\frac{3}{20}$ mm кад начини 7 обрта. Колико обрта треба да начини да би се покренуо за $4,^{mm}5$?

326. Кад се страна једног квадрата повећа за 1 m, површина његова порасте за $16m^2$. Колика је страна овог квадрата?

327. Један војник начини за минут 120 корака од $0,^m75$. Колика је његова брзина у километрима на час?

328. Једна парна машина кад функционише 14 часова дневно, потроши за 27 дана 10 350 килограма угља. Колико ће она потрошити угља за 300 дана, ако дневно функционише 12 часова? Тона угља се плаћа 400 динара.

329. Један гарнизон од 1 800 људи има хране за 230 дана. После 52 дана добије појачање од 326 војника. Колико ће још дана моћи да се храни цео гарнизон? (150).

330. Плаћено је 1300 динара за пренос 30 тона робе, на даљину од 85 km. Колико треба да се плати за пренос 17 тона на 97 km? (776.)

331. 1558 kg минерала дали су 900 kg гвожђа. Колику количину минерала треба употребити, да се добије 1 тона гвожђа?

332. Један путник прелази $1,^{km}8$ за 12 минута. Пита се колики пут је прешао кад пешачи од 8^h ујутру до 5^h увече и кад знамо да се у подне одмарао $1^h\,\frac{3}{4}$. (65,25.)

333. Две екипе радника могу да сврше исти посао, једна за 12 дана, друга за 16 дана. За рад узму $\frac{1}{3}$ радника од прве и $\frac{4}{7}$ од друге. За колико ће дана бити посао свршен? ($51\frac{3}{4}$.)

334. $100^{kg}\frac{1}{3}$ пшенице дају 100 kg брашна. 60 kg брашна, кад им се дода вода, дају 90 kg теста. 23 kg теста после печења сведу се на 20 kg хлеба. Пита се колико бисмо добили килограма хлеба од хектолитра пшенице, кад један декалитар просечно тежи $7,^{kg}770$. (75,326.)

335. Један литар ваздуха садржи 210 кубних сантиметара кисеоника. Колика је запремина ваздуха која садржи 1 m^3 кисеоника?

336. Један трговац купује платно по 21 динар метар, а продаје га по 29 динара метар. Колико је зарадио кад је продао овог платна за динара 2972,50?

337. 25 радника могу да сврше један посао за 42 дана. После 15 дана додаду им још 20 нових радника. За које ће време сад посао бити свршен?

338. Плаћено је туце поморанџи $13,^{дин}80$. Пошто је једна стотина?

339. Један путник у возу утврди да је воз прешао 53 километра за 35 минута и 30 секунада. Колика је средња брзина воза, у километрима на час?

340. 100 грама морске воде садрже $2,^g5$ соли. Кад се ради у соланама, не добије се више од $\frac{8}{10}$ ове соли. Колико је литара морске воде потребно, да се издвоји 10 kg соли? Густина морске воде је 1,025. (Тј. један литар морске воде тежи $1,^{kg}025$.)

341. Један пешак који прелази на сат $4,^{km}5$, прешао је један пут за 3 часа. За које ће време овај исти пут прећи аутомобил кад прелази 30 km на сат?

342. 15 радника сврше један посао до половине за 20 дана. После тога четворица напусте посао. За које ће време остали довршити посао?

343. Тркач А може дати 10 метара форе тркачу В, а 15

метара тркачу C, на стази од 100 метара. Колико би могао тркач B дати форе тркачу C, на стази од 150 m?

Решење: A може да претрчи 100 метара док B претрчи 90,
и A „ „ „ 100 „ „ C „ 85,
B „ „ „ 90 „ „ C „ 85,
B „ „ „ 30 „ „ C „ $\frac{85}{3}$,
B „ „ „ 150 „ „ C „ $\frac{85 \cdot 5}{3}$,
B „ „ „ 150 „ „ C „ $141\frac{2}{3}$.

Тркач B може дати тркачу C $8^{m}\frac{1}{3}$ форе на стази од 150 метара.

344. Ако A може да туче B са 20 m, а B може да туче C са 5 m, на стази од 100 m, са колико може A да туче C на 200 m?

345. Ако A може да туче B са 31 m, а C са 18 m, на стази од 200 m, са колико ће C тући B на 350 m?

346. У које време ће, између 4^h и 5^h, казаљке на часовнику градити 1) прав угао; 2) бити у истој правој линији? (4^h $21^{mn}\frac{9}{10}$; 4^h $54^{mn}\frac{6}{11}$.)

347. Доведи на несводљив облик разломак $\frac{4785}{12892}$!

348. Који децималан број треба помножити са 125 да се добије збир бројева $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{3}{4}$, 0,09375 и 2,46? (0,04293.)

349. Нађи најмањи број који кад се подели са 9, 16, 42, 63, 14 или 72, даје увек остатак 1! (1009.)

350. Одреди н.з.ч. за бројеве 111 540, 42 330, и 76 392! (67 989 430 080.)

351. $(8{,}72^2 - 6{,}9^2) : (8{,}72 + 6{,}9) =$

352. $(42{,}75^2 - 6{,}95^2) : (42{,}75 - 6{,}95) =$

353. $21{,}5 - 5 : 0{,}8 =$; $(21{,}5 - 5\ ) : 0{,}8 =$

354. $61{,}2 + 22 : 1{,}6 =$; $(61{,}2 + 22) : 1{,}6 =$

355. $(7{,}05 + 0{,}091) : 0{,}4 =$; $7{,}05 + 0{,}091 : 0{,}4 =$

356. $(2{,}05 + 6{,}6 + 9{,}34 + 0{,}4964 + 0{,}12 + 3{,}56) : 9{,}6 =$.

357. $\frac{70 - 0{,}3 \cdot 141}{0{,}901 : 0{,}17 - 5{,}271} =$; $\frac{5 : 1{,}6 - 1{,}25}{2{,}5 - 18{,}75 : 10} =$

358. $\frac{15{,}3 - 7{,}1}{4 - 3{,}927} =$; $\frac{28 - 1{,}75}{73{,}5 : 12 - 0{,}35 : 0{,}1} =$

359. $\frac{360{,}4 : 530 - 0{,}18 : 1{,}5}{2{,}52 : 1{,}4 - 40 \cdot 0{,}04} =$; $\frac{0{,}07 \cdot 300 - 10\frac{1}{2}}{4{,}5 - 0{,}75} =$

Провери следеће једначине:

360. $\frac{1}{5}$ од $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + 7 \cdot \left(\frac{1}{35} + \frac{1}{36}\right) - \frac{1}{12} : \left(\frac{11\frac{1}{12}}{15\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = \frac{223}{360}$.

361. $\frac{7\frac{1}{6} \cdot 5\frac{1}{7}}{7\frac{1}{5} - 5\frac{1}{7}} : \frac{5\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{5}}{5\frac{1}{3} - 3\frac{1}{5}} = 9.$

362. $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}} = 24.$ 363. $\frac{2}{3 + \frac{4}{5 - \frac{6}{7}}} = \frac{58}{115}.$

364. $4\frac{2}{9} \cdot 6\frac{3}{7} : \frac{2\frac{1}{2}}{7} = 76.$ 365. $\frac{3{,}346^2 - 2{,}654^2}{7{,}346 - 2{,}654} = 10.$

366. $\frac{5}{12} + \frac{7}{24} : \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1\frac{31}{120}$; $\left(\frac{5}{12} + \frac{7}{24}\right) : \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1\frac{61}{120}.$

367. $\frac{5}{12} + \frac{7}{24} : \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\right) = \frac{17}{24}$; $\left(\frac{5}{12} + \frac{7}{24}\right) : \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\right) = \frac{17}{24}.$

368. $\frac{5}{12} + \frac{7}{24} : \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1\frac{31}{120}$; $\left(\frac{5}{12} + \frac{7}{24} : \frac{5}{8}\right) : \frac{3}{8} = 1\frac{31}{130}.$

369. $\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{12}{25}} = 1\frac{1}{9}.$ 370. $\frac{1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{15}{16}} = 1.$

371. $\frac{\frac{3}{7} : \frac{4}{5}}{\frac{45}{}} = \frac{7}{12}.$ 372. $\frac{4\frac{1}{2} : \frac{4}{9}}{10\frac{1}{8}} = 1.$

373. $\left(2\frac{2}{9} + 4\frac{13}{18}\right) \cdot \frac{2}{5} + 9\frac{1}{2} = 9\frac{29}{90}.$

374. **Поштански коњи.** — Има једна анегдота о некадашњем спроводнику поште на колима. Једном упитан колико је коња поручио за смену, одговорио је: „Половину свих коња и још пола коња употребиће за вожњу краљ; половину остатка и још пола од једног коња употребиће министри; са половином новог остатка и $\frac{1}{2}$ коња више возиће

се слуге. Једног коња који још преостаје јахаће вођа јахач".

375. Да се разлика бројева 24 и 9,6 помножи бројем 2,1, добијени производ да се подели количником броја 0,588 и разлике бројева 2,1 и 0,14.

376. Разлика бројева 17 и 15,93 да се помножи разликом бројева 8,61 и 5,1. Добијени производ да се подели изразом (0,18921 — 0,31 · 0,191) : 80.

377. $\frac{29,4 - (3,15 - 1,4) : (1,85 - 0,06 : 0,1)}{4,725 : 6,75} = 0,7.$

ГЛАВА XVIII

ДОДАТАК ЗА ЧИТАЊЕ. ИСТОРИСКИ ПОДАЦИ

82. Почеци писања бројева. — О томе што су знали стари народи о бројевима и рачуну, сазнајемо испитивањем старих грађевина, споменика и записа. Подаци које добијамо из ових докумената воде нас нешто мало даље од 4000 година пре Хр. р. Одломке математичких дела Египћана и Вавилоњана налазимо тек из треће хиљаде година пре Хр. Али ови одломци математичких знања могу се сматрати као последњи резултати једног дугог поступног развитка ове науке. Величанствене пирамиде египатске, као и неугледне таблице пронађене у долини Еуфрата, али из којих се могу прочитати већ извесна знања из теорије бројева, јасно могу одвести наше духовно око у врло далеку, тамом обавијену прошлост, кад су никле прве клице стварања људског духа.

83. Прва посматрања неба. — Из посматрања неба поникла је наука *астрономија*. Ма колико да идемо далеко у прошлост старих народа, стално ћемо наилазити код њих на богатства у познавању астрономије која изненађују. Та су знања толико чудесна, да су многи дошли на мисао како та знања потичу од једне људске расе, која ја претходила садашњој. Она је достигла један висок ступањ цивилизације, па је изненада пропала у неким страшним променама које су се збиле на кори Земљиној.

За ову легенду знао је још велики грчки филозоф Платон. Успомена на њу сачувана нам је под именом *Атлантиде*.

Ова се претпоставка не може одржати. Многобројна факта, међутим, упућују нас да почетак свима наукама тражимо у практачним потребама човековим, у тежњи његовој да задовољи своје потребе, да живот учини што је могуће више угодним.

Још од првих времена човек је био принуђен да своју пажњу обрати на небеске појаве које регулишу периодично обнављање његових потреба. Морао је повести рачуна о дану и ноћи, лепом времену и непогоди, о лету и зими итд. Самим тим наметала са потреба за мерењем, управо за дељењем времена. Деоба времена најбоље се могла вршити посматрањем појава на небу. Ето нам узрока првих зачетака науке.

84. Најстарије науке. — Историја нам казује да су најстарије науке, данашњим језиком речено, аритметика, геометрија, философија и астрономија. Интересује нас само да ли се може одредити која је између најстаријих наука најстарија. Ако желимо и најмањи напредак, морамо знати да бројимо. *Аритметика је најстарија наука.* Први пастир је већ морао осетити потребу да броји своје овце. Тако сви народи, па и они на најнижем ступњу развитка, најпримитивнији, имају свој систем бројења, и то обично систем са основом десет, врло вероватно због тога, што се обично бројење почиње ни прстима. Овакву претпоставку је заступао и стари грчки филозоф и научник Аристотело.

После појма о броју, најближи и најнепосреднији је појам облика каквог предмета. Дете и дивљак једва ако знају да броје до десет, а већ могу разликовати разна тела по њиховом облику. Речи *округао*, *шиљат* . . . могу се чути и у најпримитивнијим језицима. Још у *камено доба* могу се наћи доста правилни геометриски облици. После аритметике геометрија је најстарија наука. Због тога не треба ни мало да нас чуди, што ми још и данис учимо геометрију онако како је њене законе изложио стари грчки математичар *Еуклид* пре 2200 година.

Мисли се још да је *философија* старија од астрономије. Моћ и нагон за размишљање развија се у човеку врло рано. Данас нема, тако рећи, ниједног дивљег племена које не би имало свој систем верски и своје нарочите погледе на свет и васиону.

Ове старе науке нису биле строго одељене једна од друге. Један учен човек старог времена обично се бавио свим тим наукама.

85. Најстарије рачунање. — Као што видимо човек се не може замислити без доста појмова о броју, ни на најнижем ступњу развитка. Вероватно је да је већ имао јасне претставе о броју и величини још у преисториском времену *дилувијуму*. Појам броја постојао је још и пре почетка говора и писања. Најстарија математичка активност човекова, бројење, потпуно је независно од природе групе предмета, и даје само једно једино обележје те групе њен *број*. Да се та особина изрази, није био потребан никакав гласни говор, довољно је била само мимика. Тако можемо претпоставити да су се најстарији људи за бројење служили прстима на рукама и ногама. Сваком прсту приреди се по један предмет онако исто као што данас броје деца и мало просвећен свет. Овим средствима могли су они претставити најпростије бројеве, па чак да изврше и неко мало сабирање, одузимање и множење. Тако можемо рећи да почеци рачунања падају уједно са првим почецима мишљења уопште.

Па и касније, кад су већ људи увелико говорили и познавали писмено претстављање бројева, били су често принуђени, неписменом свету у пракси, у трговини, у промету, да очигледно претстављају бројеве мимиком и прстима. Тако су Египћани, Римљани и сви источни народи знали начин да пружањем и савијањем прстију и руку претставе бројеве до једног милиона. Ово очигледно бројење и рачунање на прстима протегло се кроз цео Средњи век, па се сусреће и данас код света на нижем ступњу културе.

86. Најстарија рачуница. — Најстарије досад познато дело о аритметици је староегипћанска рачуница, коју је према још старијим списима саставио научник Ахмес (грчки назив Амазис). Мисли се да је ово дело написано у времену између 20 и 17 столећа пре Хр. р. Ова ручна књига Ахмесова, овај дивљења достојни споменик људског знања, пронађен је у једној плеханој кутији, и види се да је брижљиво чуван. Сад се налази под именом Papyrus Rhind у Британском музеју у Лондону. Састоји се из једног смотуљка жутомркког папируса од 20 m дужине и 30 cm ширине.

Из тог рукописа се види један невероватно висок ступањ знања из области аритметике. Његова садржина не протеже се само на четири врсте рачуна са именованим и неименованим бројевима, већ обухвата и науку о обичним разломцима. При том долазе у обзир само разломци чији су бројиоци 1, тзв. *јединични* или *основни* разломци.

Значајно је да су Египћани скоро искључиво употребљавали јединичне разломке. Једна пракса на коју, касније, поново наилазимо код Грка. За писање оваквих разломака употребљавали су јероглиф за уста . Тај знак се изговарао *ро*. Тај знак је тачно оно што данас претставља 1 и испод тога разломачка црта. На пример $= \frac{1}{100}$.

Као што видимо Египћани нису наилазили на тешкоће при писању разломака. Код Ахмеса, који је већ могао лакше и тачније писати, који више није морао као његови претходници, да пише по зидовима, горњи знак је прешао у тачку. За писање $\frac{1}{2}$, која се често понављала, имали су засебан знак .

Оно што је код Египћана било типично, то је да нису били у стању да пишу разломке чији би бројиоци били већи од 1. Они су несумњиво имали појам таквих разломака; само, кад су хтели да их претставе, морали су их растављати на јединичне разломке. Тако да би претставили $\frac{2}{5}$ писали су $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Начин најобилазнији што се може замислити. Само за писање разломка $\frac{2}{3}$ имали су засебан знак .

87. Вавилоњани. — Поред Египћана живо су се бавили науком и Вавилоњани. Они су се нарочито много бавили астрономијом. Из двојаког привидног кретања Сунца извели су меру за време: дан, са поделом на часове, и годину. Годишња путања сунчева подељена је на 360 степени, исто онако као што је година подељена на 360 дана. (Даља подела на „минуте и секунде“ постала је тек доцније, из латинских превода partes minutae primae et secundae.) Вавилоњани су Сунцу, Месецу, Меркуру, Јупитеру, Венери и Сатурну одредили по један дан, једно за другим, и на тај начин постала је недеља (седмица). Да је овако порекло недеље, показују најбоље имена појединих дана у недељи у разним језицима.

Пада у очи да су Вавилоњани радили само са шездесетичним разломцима, тј. са разломцима чији су имениоци 60, или који степен од 60. Било је још знакова за шестине, дакле за $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$. Са сигурношћу можемо тврдити да је било разломака оваквог облика:

$$\frac{2}{60} + \frac{17}{60^2} + \frac{4}{60^3} + \frac{48}{60^4} + \frac{63}{60^5} + \frac{20}{60^6}.$$

Овај разломак се јавља у рачунима о месецу. Само имениоци, уопште, нису писани, него су бројиоци стављани један до другог. Пример 10 4 11 32. Из целине може се видети шта значе поједини бројиоци. Рецимо да су 10 цели, одмах затим дођу $\frac{4}{60}$, затим је једна знатна празнина. Јасно је да ту недостају делови 60^2. Број би изгледао овако:

$$10 + \frac{4}{60} + \frac{11}{60^3} + \frac{32}{60^4}.$$

88. Грци. — Грци, чија научна и уметничка дела изазивају дивљење, мало су се бавили аритметиком. Изузетак чини само *Питагора* (око 600 пре Хр.), који је бројевима придавао управо божански смисао. Он их је сматрао за биће свих ствари. Десет му је био најсветији број, јер је он једнак збиру прва четири броја. Питагори и његовим ученицима се приписује подела бројева на парне и непарне, на просте и сложене, као и проналазак спријатељених и савршених бројева. На њега се надовезује и познавање односа између бројних размера и музичких интервала.

Разломке су писали на разне начине. По примеру Египћана, Грци су често један разломак разлагали у разломке са бројиоцем 1. Такви јединични разломци обично су претстављени само њиховим имениоцима, који су обележени још са једном или са две запете (у облику наших акцената). На пр. і $\beta' = \frac{1}{12}$. Код других разломака писани су бројилац и именилац један до другога на пр. νε, ρϛβ″ $= \frac{55}{192}$. У Хероновој геометрији именилац је писан два пута, дакле κγ′λγ″λγ″ $= \frac{23}{33}$. Диофант је писао именилац изнад бројиоца на пр. $\overset{\lambda}{\varepsilon} = \frac{5}{3}$.

За разломке $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$ имали су, као и Египћани, засебан знак. У астрономским рачунима употребљавали су Грци, по примеру Вавилоњана, од 2 столећа пре Хр. р., шездесетичне разломке, код којих су писани само бројиоци, а имениоци су распознавани по акцентима, на пр. μοιρων (= степен) μΖμβ′μ″ = 47° 42′ 40″.

89. Индијанци. — Као најдаровитији народ старога доба за рачун показали су се Индијанци. Њихова дела из рачуна позната су тек од 5 столећа после Хр. р. Познати научници из тога времена су Аријабата, Брамагупта и Баскара. Индијанцима имамо да захвалимо за данашње цифре и за декадни бројни систем. Исто тако и неопходна и врло корисна нула је свакако њихов проналазак. Они су извели основне рачунске радње исто онако како се то данас ради. Множили су само бројем 2, па делимичне производе сабирали. Изузетак је са дељењем, које је код њих доста обилазно. Познато им је било и правило тројно и нешто интересног рачуна. Нарочито су били мајстори у усменом рачунању. Употребљавали су јединичне разломке, а у астрономији шездесетичне. Разломке су писали у облику $\frac{a}{b}$, без разломачке црте. Мешовите бројеве писали су тако да цели не дођу испред разломка, већ изнад разломка, на пр.

$$4\frac{3}{8} = \begin{matrix}4\\3\\8\end{matrix}.$$

90. Арабљани. — Од Индијанаца су научили њихове методе писања бројева и рачунања Арабљани. Како су били, с једне стране, у додиру са Грцима, а с друге стране у додиру са Индијанцима, они су учили и код једних и код других, и те две математике: грчку геометрију и индијску аритметику слили у једну. Имали су пет рачунских радњи: сабирање, одузимање, множење, половљење и дељење. Најзнатнију арабљанску рачуницу написао је астроном Мухамед ибн Муса Алхваризми (око 829 после Хр. р.). Овај његов надимак Алхваризми доцније је латинизиран у реч Algorithmus, па су тако називани сви они који су били вешти у рачунању: *алгоритмици.* Арабљанска математичка знања и стварања су врло богата и разноврсна како у области аритметике тако и геометрије. И код њих се могло наћи овакво писање мешовитих бројева и разломака:

$$\begin{matrix}14\\2\\9\end{matrix} = 14\frac{2}{9}, \begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix} = \frac{1}{2}, \begin{matrix}0\\7\\8\end{matrix} = \frac{7}{8}.$$

Међутим, Арабљани су стварни проналазачи разломачке црте.

91. Западна Европа. — Арабљани су своју науку пренели и у Европу, нарочито у Шпанију. Прву књигу са индоарабљанским рачунским методима издао је Талијан *Леонардо из Пизе.* Књига се звала liber abaci, а појавила се 1202 године (liber = књига; abacus = сто или табла за рачунање).

Ова знања из аритметике беху талијанским трговцима од велике користи. Тада је трговина у Италији нарочито процветала. Онда су пронађени методи за удобније израчунавање интереса, рабата, дисконта, даре итд. (Све ове речи су италијанског порекла.) У Италији се први пут осетило колико су боље и згодније арапске цифре од римских.

У најистакнутије аритметичаре Средњег века убраја се Јорданус Немораријус (1278). Он је један читав низ аритметичких закона исказао на јасан начин. На пр. „Обични разломци множе се кад се бројилац бројиоцем, а именилац имениоцем помножи". Сличан поступак он је применио и на дељење, који, разуме се, мало отступа од данашњег. Он дели разломке делећи бројилац бројиоцем, а именилац имениоцем. Данас се овај начин дељења примењује само у изузетним случајевима, кад се дељење бројилаца и именилаца може извршити без остатка. Он препоручује као пробу за тачност рачуна примену обрнуте рачунске радње. У истом 13 столећу написао је у Паризу расправу о вештини рачунања Јован де Сакробоско. То је једна збирка правила за практично рачунање са целим бројевима, која је доцније столећима служила као основа за наставу рачунања.

Немац Јован Видман употребио је у својој рачуници (1489) први пут знаке „+" и „−", не објаснивши њихово

порекло. Још тада су ти знаци изговарани плус и минус. Као велики немачки мајстор у рачуну важи Адам Ризе (1492 до 1559). Његова је заслуга што је дао одлична упутства за темељно проучавање аритметике.

Његови списи се не истичу само садржином, него и методски. Код њега се увек види поступни прелаз од конкретног ка апстрактном, од простог ка сложеном. Ризе нарочито велику пажњу поклања на стално и непрекидно вежбање ученика. Он је неисцрпан у примамљивим примерима, који старом материјалу дају непрестано нови изглед, ново лице. Његове књиге су биле врло популарне, веома распрострањене и биле у употреби 200 година. Његов савременик Михаел Штифел утврдио је правила за дељивост бројева од 2 до 10. Он је увео *негативне бројеве, који су по његовом објашњењу мањи од нуле,* и дао је правило за дељење два обична разломка, које је и данас у употреби.

Холандски инжењер Стевин, за кога смо прошле године рекли да је први увео у рачун децималне бројеве, идући далеко испред свог времена, препоручивао је тадашњој управи своје земље да уведе десетни систем за мере новца, дужине и тежине.

Један енглеск свештеник, Роберт Отред (1574—1660), увео је као знак за множење „×". Две тачке као знак дељења и тачка као знак множења потичу од славног немачког филозофа Лајбница (1646—1716), док се разломачка црта већ налази код Леонарда из Пизе. Знак једнакости је пронашао Енглез Рекорд (1510—1558). За непознату количину у једној једначини најпре је Француз Декарт употребио слово x. Француз Виет проналазач рачунања са словима (1540—1603). Он је први увео заграде. Знак % постао је од талијанског cto=cento. Талијанска реч brutto значи нечист, сиров, netto = чист. Дара (tara) изведена је од арабљанске речи taraha = одбацити.

Једна знатна олакшица у рачунању са именованим бројевима наступила је од увођења метарског система мера и тежина. На тај начин су потиснуте разноврсне вештачке мере у разним државама.

$\frac{4}{14} : \frac{6}{16} = \frac{3}{5} : \frac{6}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{6}$

Напомена 1. — Код децималних бројева име броја пишемо између целих и децимала, горе изнад запете. Такво писање и читање у свему одговара духу нашег језика. Кад напишемо $3,^{m}25$ ми читамо 3 метара и 25 стотих, или 25 сантиметара. Исти начин писања усвојен је и за мешовите бројеве. Пишемо $3^{m}\frac{1}{4}$ и читамо 3 метра и једна четвртина.

Научно најбоље и најтачније писање је кад се име стави испред броја, на пр. динара 3,25, метара или m 3,25.

Напомена 2. — Ученик ће мере научити најбоље практичним радом. Треба сам да мери. Још најбоље је ако претходно процени „отприлике" дужине, тежине итд., па после тачним мерењем утврди за колико је погрешио.

Исправке:

1. На страни 82 десети ред одоздо иза речи *производу* треба додати *с десна улево.*

2. Практично упутство на страни 83 могло би да гласи и овако:

Да бисмо поделили десетним разломком цео број или десетни разломак претходно треба и дељеник и делилац помножити таквом декадном јединицом да *делилац* постане *цео број*, па затим делити било цео број, било десетни разломак.

Ако се дели цео број, па остане која цела јединица, онда се у количник стави десетна запета, па целине у остатку претворе у десетне делове и даље продужи дељење док се не сврши без остатка, или докле се хоће.

Ако се пак дели десетни разломак, онда се прво поделе целине, па кад се дође до десетне запете, онда се десетна запета напише у количнику, па се даље продужи дељење као и при дељењу целих бројева.

3. На стр. 103 чланак 72 почетак би могао и овако гласити:

Кад упоређујемо две врсте количине и кад испитујемо како се мењају, ако једна врста количине постаје 2, 3, 4.... пута *мања*, па и друга врста у исто време постаје 2, 3, 4 пута *мања* и обрнуто, онда кажемо да су те две врсте количине **директно пропорционалне.**

$\frac{2}{14} : \frac{2}{16} = \frac{2}{14} \times \frac{16}{2}$?

САДРЖАЈ
