РИСТА КАРЉИКОВИЋ
директор гим. у пензији

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА ВИШЕ РАЗРЕДЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА

ДРУГИ ДЕО

СТЕРЕОМЕТРИЈА

Овај је уџбеник препоручен од Главног просветног савета С.бр. 1553/35 од 14 јануара 1936 год. и одобрен од Г. Министра просвете одлуком С.н.бр. 3090 од 13 марта 1936 год.

ДРУГО ИЗДАЊЕ

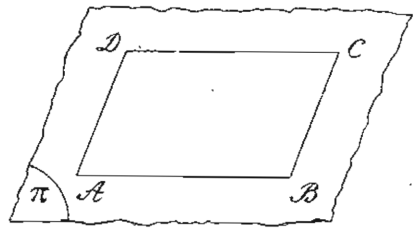
ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ РАДОМИРА Д. ЋУКОВИЋА
БЕОГРАД — ТЕРАЗИЈЕ

ШТАМПАРИЈА „ДАВИДОВИЋ", ПАВЛОВИЋА И ДРУГА
БЕОГРАД, 1936 — ТАКОВСКА 32

СЕДМИ ОДЕЉАК

ПРАВЕ ЛИНИЈЕ И РАВНИ У ПРОСТОРУ

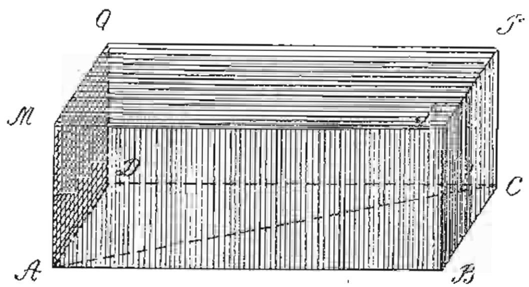
§ 102. — Одређивање равнине. — Равна површина, равнина, или *раван* је она површина коју може једна права додиривати са свима својим тачкама, па ма у коме положају лежала та права. Сваку раван можемо замислити неограничену, и као таква дели простор на два једнака дела. Међутим, и најмањи део једне равни назива се опет равнином. Стога се раван обично претставља једним паралелограмом, који је у ствари само део те равни. Тако, на сл. 273, паралелограм $ABCD$ претставља раван π. Ова раван једина је која пролази: или кроз тачке A, B и D, или кроз пресечне праве AB и AD, или кроз праву AB и тачку D, или кроз паралелне праве AB и DC. Из овога закључујемо да је једна раван одређена:



Сл. 273

1) *Трима тачкама које не леже на једној правој;*
2) *Двема правама које се секу;*
3) *Једном правом и једном тачком ван те праве*; и
4) *Двема паралелним правама.*

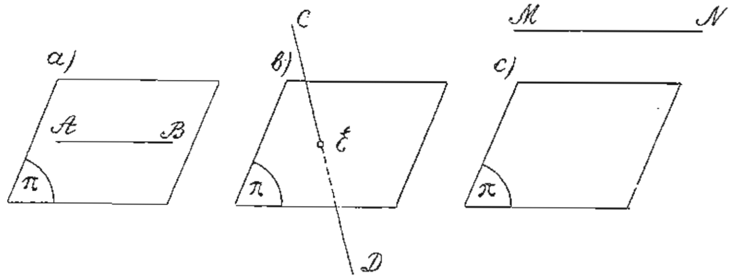
§ 103. — Положај двеју правих у простору. — Две праве у простору могу имати тројак међусобни положај, и то: а) могу бити паралелне (праве PQ и AB на сл. 274); *b*) могу се сећи у једној тачци, ако се довољно продуже (MQ и MN, сл. 274); с) могу се укрштавати, ако нису ни паралелне, нити се секу (NP и DC, сл.



Сл. 274

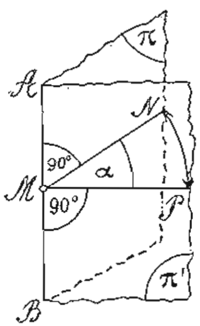
274). У првом и другом случају могу се праве налазити у једној равни, а у трећем случају налазе се у разним равнима.

§ 104. — Положај праве и равни у простору. — Једна права и једна раван могу имати такође три узајамна положаја, и то: а) може права сва лежати у равни (AB, сл. 275); b) може да сече раван, ако се довољно продужи (CD, сл. 275); и c)



Сл. 275

може да буде према равни паралелна, ако је никако не сече, па ма колико продужили праву, и раван проширили (MN, сл. 275). Када права не лежи у равни, нити је с њом паралелна, онда она може продрети раван *само у једној тачци*. Јер, ако претпоставимо да права продире раван још у једној тачци, онда би она сва била у равни, на основу аксиоме: *кроз две тачке може се повући само једна права.* Продорна тачка зове се *траг* праве. Када права сече раван, сече је *косо* или *управно*, према томе да ли гради косе или праве углове са ма којом правом што лежи у равни а пролази кроз продорну тачку.

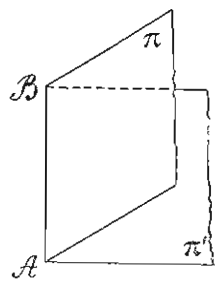


Сл. 276

§ 105. — Положај двеју равни у простору. — Две равни могу имати такође три узајамна положаја, и то: а) могу се поклапати и тада чине једну раван; b) могу бити паралелне, ако се не секу, па ма колико их проширили; и c) могу се сећи, ако их довољно продужимо. Кад се равнине секу, онда је њихов пресек *права линија*. Пресечне равнине могу се сећи *косо* или *управно*, према томе да ли граде нагибне углове косе или праве. Под нагибним углом двеју равни разумемо онај угао између тих

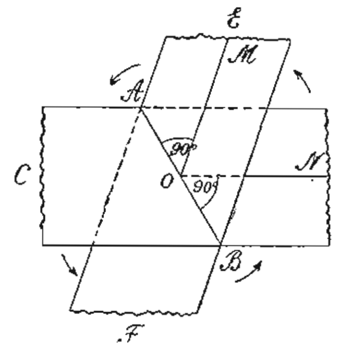
равни који граде две управне на пресеку равнина, у ма којој његовој тачци, а од којих једна лежи у једној равни, а друга у другој. Тако, за равни π и π' (сл. 276) нагибни је угао α, а добија се када учинимо $MN \perp AB$ и $MP \perp AB$, с тим да MN лежи у π а MP у π'.

§ 106. — О диједрима. — *Угао диједар*, или просто *диједар*, зове се фигура добивена пресеком двеју равни. Једна отворена књига, или два зида која се секу, дају диједар. Равни које дају диједар јесу његове *стране* (π и π', сл. 277), а заједнички пресек зове се *ивица* (AB, сл. 277). Диједар се да̑ замислити да је постао обртањем једне равни око једне њене граничне линије. Првобитни и потоњи положај обртне равни, јесу стране диједра. *Диједар је у ствари величина обртања, изражена у степенима, ма које тачке равни од њеног првобитног до потоњег положаја.* Диједар се означава на следећи начин: ако је усамљен, као што је случај на сл. 277, онда се означава само својом ивицом *(AB)*. Али, ако више диједара имају заједничку ивицу (сл. 278), онда се сваки од њих означава са четири слова, од којих су два ивична, а друга два се пишу код сваке диједрове стране. Тако, диједри на сл. 278 јесу: $N(AB)E$, $E(AB)C$, $C(AB)F$ и $F(AB)N$.



Сл. 277

Два диједра јесу *суседна*, ако имају заједничку ивицу, заједничку страну, а друге две стране леже и с једне и с друге стране заједничке стране. Суседни диједри јесу *упоредни*, ако незаједничке стране леже у истој равни. Такви су диједри $N(AB)E$ и $E(AB)C$ на сл. 278. Два диједра јесу *унакрсна*, ако су стране једнога диједра продужене стране другога диједра преко њихове заједничке ивице. Такви су диједри $N(AB)E$ и $C(AB)F$ на сл. 278.

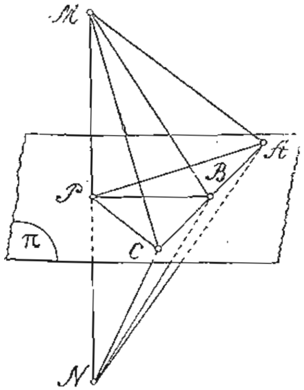


Сл. 278

Под нагибним углом једног диједра разумемо угао чије се теме налази на ивици диједра, краци му леже на странама диједра, а управни су на ивици. Тако, нагибни угао диједра $N(AB)E$ је $\sphericalangle NOM$. Нагибни део диједра има исту величину, па ма у којој тачци ивице диједра повукли нормале — краке нагибног угла. Стога, величина једнога диједра замењује се величином његовог нагибног угла, јер једнаки диједри имају једнаке нагибне угле, и обрнуто, о чему се уверавамо њиховим поклапањем. Две равни су управне једна на другој, ако им је нагибни угао прав.

§ 107. — Нормалне праве и равнине. — Теореме које се односе на нормалност правих и равни у простору јесу ове:

Теорема 129. — **Права која је нормална на двема правама у једној равни, а које пролазе кроз њен траг, нормална је и на свакој правој која лежи у тој равни а пролази кроз њен траг.** Нека је $MP \perp AP$ и $MP \perp CP$; а AP, BP и CP леже у равни π (сл. 279). Учинимо да је $MP = PN$ и спојимо тачке A и C са тачкама M и N, а тачка B нека је пресек праве BP и праве AC.



Сл. 279

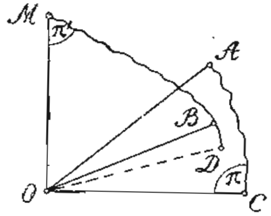
Тада је $\triangle MPA \cong \triangle NPA$, јер је $MP = PN$, PA је заједничка страна и $\sphericalangle MPA = \sphericalangle APN = 90^0$. Стога је $AM = AN$. Тако исто, $\triangle MPC \cong \triangle NPC$, те је $MC = NC$. Тада је и $\triangle ACM \cong ACN$, пошто су им стране једнаке, те је $\sphericalangle MAB = \sphericalangle BAN$. Кад се ово зна, онда је и $\triangle BAM \cong \triangle BAN$, пошто имају по две стране и захваћене углове једнаке, те је $MB = NB$. Најзад, $\triangle MPB \cong NPB$, јер су им стране једнаке. Из подударности ових троуглова имамо $\sphericalangle MPB = \sphericalangle NPB = 90^0$, пошто оба ова угла износе 180^0.

Напомена — Очигледни доказ ове теореме увиђамо и у разреду, који се дâ заменити правоуглим паралелопипедом на сл. 274. Овде је ивица MA нормална на ивицама AD и AB, па је нормална и на дијагонали пода AC, као и на свакој другој правој која лежи на поду а пролази кроз траг A.

На основу ове теореме, кад је нека права нормална на двема правама које се секу, онда је она нормална и на равни одређеној тим двема правама.

Теорема 130. — **Кад је нека права нормална на трима**

правама у њиховом заједничком пресеку, онда су те три праве у једној равни. — Нека је MO нормала на OA, OB и OC (сл. 280). Ако претпоставимо да права OB не лежи у равни π, у којој леже остале две праве OA и OC, већ да је ван ње, онда постављамо раван π', која пролази кроз праве OM и OB, а која сече раван π по пресеку OD. Тада је по претходној теореми права MO нормална на OD, те је $\sphericalangle MOD = 90^0$. Међутим, ово је немогуће, јер је дато да је $\sphericalangle MOB$, који лежи у истој равни π' и који је део угла MOD, прав. Стога наша претпоставка, да права OB лежи ван равни π, као нетачна, отпада.

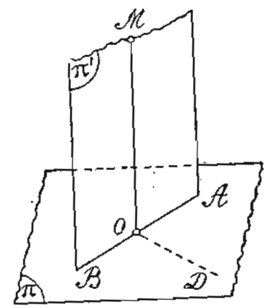


Сл. 280

Очигледан доказ имамо на сл. 274. Овде је MA нормална на ивицама AD и AB и на дијагонали AC, па видимо да се све три ове праве налазе на базису паралелопипеда (на поду учионице).

Теорема 131. — **Кад је нека права нормална на некој равни, онда је нормална на тој равни и свака раван која пролази кроз ту праву.** — Нека је $MO \perp \pi$ (сл. 281) и нека раван π' пролази кроз праву MO, а учинимо да је $OD \perp AB$.

Како је $MO \perp \pi'$, то је права MO нормална и на свакој правој у тој равни која пролази кроз њен траг O. Стога је $\sphericalangle MOD = 90^0$. Међутим, овај угао је нагибни за пресечне равни π и π', пошто су OM и OD нормалне на пресеку AB. Па како је овај угао прав, то је и раван $\pi' \perp \pi$.



Сл. 281

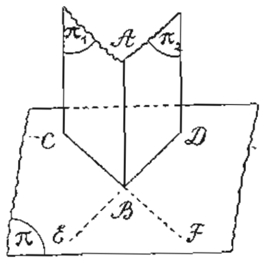
Очигледан доказ. — На сл. 274 је ивица DQ нормална на базису $ABCD$, па су нормалне на истом базису и равни $ADQM$ и $DCPQ$, које пролазе кроз ивицу DQ.

Последице ове теореме су следеће:

1) *Кад су две равни нормалне, па се у једној од њих повуче нормала на њихов пресек, онда је та нормала нормална и на другој равни;* и

2) *Кад су две равни нормалне, па се у једној тачци њиховог пресека повуче нормала на једну од тих равни, онда она мора сва лежати у другој равни.*

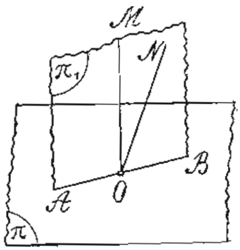
Теорема 132. — **Кад су две равни које се секу нормалне на некој трећој равни, онда је и њихов пресек нормалан на тој равни.** — Нека су равни π_1 и π_2 (сл. 282) нормалне на равни π, а BC и BD нека су њихови пресеци са π. Учинимо да је $BE \perp BC$ и $BF \perp BD$, а да BE и BF леже у π. Тада је $BE \perp \pi_1$, а $BF \perp \pi_2$, према првој последици претходне теореме. Стога су BE и BF нормалне и на AB, која лежи у равни π_1, односно у π_2, а пролази кроз продорну тачку B. Па како је AB нормална и на BE и на BF, то је она нормална и на раван π, која је одређена овим двема правама.



Сл. 282

Очигледан доказ. — Код сл. 274 равни $ADQM$ и $DCPQ$ нормалне су на базису $ABCD$, па и њихов пресек DQ нормалан је на томе базису.

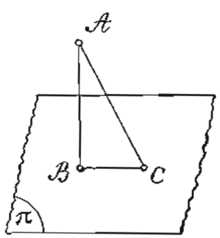
Теорема 133. — **Из једне тачке на једној равни можемо подићи само једну нормалу на тој равни.** — Нека је права $MO \perp \pi$. Ако претпоставимо да је и права $NO \perp \pi$, и да раван π_1, одређена правама MO и NO, сече раван π по AB, онда бисмо имали две праве MO и NO нормалне на AB у тачци O. Па како је ово немогуће (теорема 13, § 14), то наша претпоставка да је и $NO \perp \pi$, као нетачна, отпада.



Сл. 283

Остаје једино да је само $MO \perp \pi$.

Последица. — *У једној тачци неке праве могућна је само једна нормална раван на ту праву.* Заиста, у тачци O праве MO (сл. 283) једина је раван π нормална на MO.



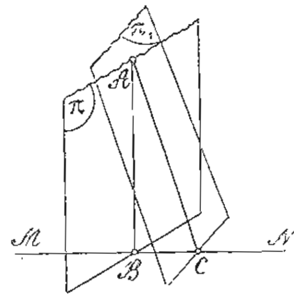
Сл. 284

Теорема 134. — **Из једне тачке ван неке равни може се повући само једна нормала на ту раван.**

Ако претпоставимо да је, поред праве AB, и права AC нормална на π (сл. 284), па подножне тачке B и C спојимо, онда бисмо добили $\triangle ABC$ са два права угла код B и C. Па како је ово немогуће, то наша претпоставка да је и $AC \perp \pi$, као нетачна, отпада. Остаје једино да је $AB \perp \pi$.

Теорема 135. — **Из једне тачке ван једне праве могућна је само једна раван нормална на ту праву.**

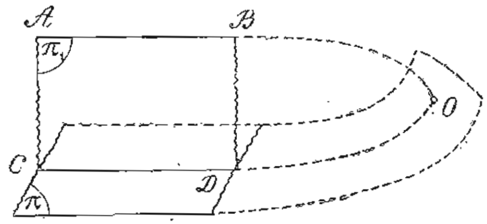
Ако претпоставимо да је поред равни π, и раван π^1 нормална на MN (сл. 285), онда спајањем трагова B и C праве MN са тачком A, кроз коју пролазе обе равни, добили бисмо троугао ABC са два права угла код B и C. Па како је ово немогуће, значи да π' није нормална на MN.



Сл. 285

§ 108. — Паралелне праве и равнине. — Теореме које се односе на паралелност само правих, само равни, или правих и равни у простору јесу ове:

Теорема 136. — **Кад је једна права ван неке равни паралелна с неком правом у равни, онда је та права паралелна и са равнином.** — Нека је права AB паралелна са правом CD (сл. 286) у равни π. Ако претпоставимо да права AB није паралелна са равнином π, онда она, продужена, сече раван. Нека је њихова пресечна тачка O. Тада би се тачка O налазила у равни π' одређеној паралелним правама AB и CD. Тачка O била би тада заједничка тачка за равни π и π_1, а налазила би се и на продужењу њиховог пресека CD. Према томе, тачка O била би пресечна тачка правих CD и AB, за које знамо да су паралелне. Како је ово немогуће, то права AB не сече раван π, већ је с њом паралелна.



Сл. 286

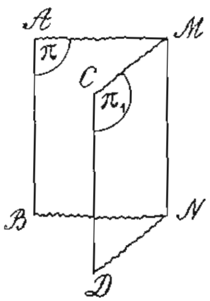
Очигледан доказ — Из сл. 274 имамо: $QP \parallel DC$, па је QP паралелна и са базисом $ABCD$.

Теорема 137. — **Кад је права у простору паралелна с неком равнином, онда је она паралелна и са оном правом у равни која је пресек дате равни и равни која пролази кроз дату праву у простору.** — Нека је $AB \parallel \pi$ (сл. 286). Ако претпоставимо да права AB није паралелна с правом CD, која је пресек равни

π и π_1, онда се те две праве секу, пошто се обе налазе у истој равни π_1. Ако узмемо да је њихов пресек тачка O, онда ће ова тачка бити заједничка тачка равнине π и праве AB, т ј. права AB секла би раван π, што се коси с оним што је дато. Стога права AB не сече праву CD, те је с њом паралелна.

Очигледан доказ. — Из сл. 274 видимо да је ивица QP паралелна са базисом $ABCD$, те је $QP \parallel DC$, која је пресек базиса $ABCD$ и стране $QPCD$.

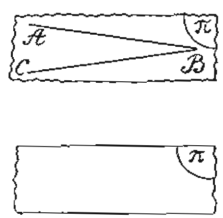
Теорема 138. — **Кад су две праве у простору паралелне, па се кроз сваку постави по једна раван, онда је и пресек тих равни паралелан и с једном и с другом правом.** — Нека је $AB \parallel CD$, а MN пресек равни π и π_1 (сл. 287), које пролазе кроз праве AB и CD. Тада је, по 156 теореми, права CD паралелна са равнином π, а по 137 теореми ова права је паралелна и са пресеком MN. Тако исто увиђамо да је права AB паралелна и са равнином π_1 и са пресеком MN. Стога је пресек MN паралелан и са правом AB и са правом CD.



Сл. 287

Последица. — Кад су две праве у простору паралелне с трећом правом, а нису све три у истој равни, онда су оне паралелне и међу собом.

Теорема 139. — **Кад је нека раван паралелна с двема правама које се секу, онда је она паралелна и са равнином одређеном тим двема правама.** — Нека је $AB \parallel \pi$ и $BC \parallel \pi$ (сл. 288). Ако претпоставимо да раван π није паралелна са равнином π_1 одређеном правама AB и BC, онда би се те две равни секле. Њихов пресек био би права линија, а налазио би се и на једној и на другој равни. Тада бисмо имали две праве, AB и CB, које пролазе кроз тачку B равнине π_1, а обе да су паралелне са пресеком у истој равни π_1. Па како је ово немогуће, пошто се коси са аксиомом: кроз једну тачку ван неке праве можемо повући само једну паралелну с том правом. Према овоме, равни π и π_1 не секу се, већ су паралелне.

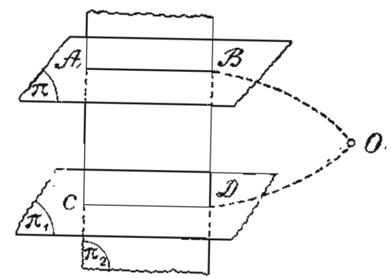


Сл. 288

Очигледан доказ — На сл. 274 базис $ABCD$ паралелан је са ивицама MQ и MN, па је паралелан и га страном $MNPQ$, која је одређена ивицама MQ и MN.

Теорема 140. — **Кад се две паралелне равни пресеку трећом, онда су њихови пресеци паралелни.**

Нека је $\pi \parallel \pi_1$, а раван π_2 нека сече обе равни π и π_1 (сл. 289). Ако претпоставимо да пресеци AB и CD нису паралелни, већ да се секу и да је њихов пресек тачка O, онда би се секле иравни π и π_1, пошто се пресеци налазе у тим равнима. Тачка O била би тада на пресеку равни π и π_1. Па како је ово немогуће, јер се коси с оним што је дато, то наша претпоставка да се праве AB и CD секу, као нетачна, отпада. Остаје једино да је $AB \parallel CD$, пошто обе леже на равни π_2.



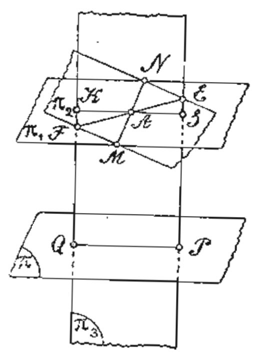
Сл. 289

Очигледан доказ. — На сл. 274 паралелне су стране $ABCD$ и $MNPQ$, а сече их страна $ADQM$, па су пресеци AD и MQ паралелни.

Теорема 141. — **Паралелне дужи између паралелних равни јесу једнаке.** — Нека је $AC \parallel BD$ и $\pi \parallel \pi_1$ (сл. 289) и нека раван π_2 пролази кроз праве AC и BD. Њени пресеци са равнима π и π_1 јесу AB и CD. Ови пресеци, према претходној теореми, јесу паралелни. Стога је четвороугао $ABCD$ паралелограм, и као такав има супротне стране AC и BD једнаке.

Теорема 142. — **Кроз једну тачку ван неке равни може се поставити само једна раван паралелна датој равни.**

Нека раван π_1 пролази кроз тачку A и нека је паралелна са равни π (сл. 290). Ако претпоставимо да је и раван π_2, која пролази кроз A, паралелна са равни π, а да раван π_3 сече равни π_1 и π_2 и пролази кроз A, али не и кроз пресек MN равни π_1 и π_2, онда би пресек равни π_3 са π_1 био KS, а са π_2 био би EF. Ови пресеци пролазе кроз тачку A, а били би паралелни с пресеком QP (теорема 140). Међутим, ово је немогуће, пошто праве KS и EF не могу пролазити кроз исту тачку A, а да обе буду паралелне с правом QP, која се налази у истој равни π_3. Стога раван π_2 није паралелна са π, већ је једино $\pi_1 \parallel \pi$.



Сл. 290

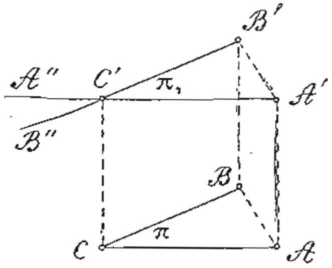
Последице ове теореме јесу: 1) *Геометриско место свих правих које су повучене кроз дату тачку паралелно са неком равни, јесте раван паралелна датој равни;*

2) *Кад су две равни паралелне, па нека трећа раван сече једну од њих, онда она сече и другу;* и

3) *Кад је једна раван паралелна с другим двема равнима, онда су и те две равни међу собом паралелне.*

Теорема 143. — **Кад се два угла налазе у простору, а краци су им паралелни, онда су: а) углови једнаки, ако су им краци у истом или у супротном смислу паралелни; b) суплементни, ако су им два крака у истом, а два у супротном смислу паралелна; и с) равнине тих углова јесу паралелне.**

а) Нека је $AC \parallel A'A''$ и $BC \parallel B'B''$ (сл. 291). Учинимо да је $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$, а затим повучемо дужи AA', BB', CC', AB и $A'B'$. Тада је из паралелограма $ACC'A'$: $AA' = CC'$ (1), а из паралелограма $BCC'B'$ је $BB' = CC'$ (2). Из једначина (1) и (2) имамо $AA' = BB'$. Тада је и четвороугао $ABB'A'$ паралелограм, те је $AB = A'B'$. У том случају је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, пошто су им стране једнаке. Из њихове подударности излази да је $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B$. Па како је $\sphericalangle A'C'B = \sphericalangle A''C'B''$ као унакрсни, то је и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A''C'B''$.



Сл. 291

в) Како је $\sphericalangle A''C'B' + \sphericalangle B'C'A' = 180^0$, онда заменом угла $B'C'A'$ са њему једнаким углом ACB, добијамо:

$$\sphericalangle A''C'B' + \sphericalangle ACB = 180^0.$$

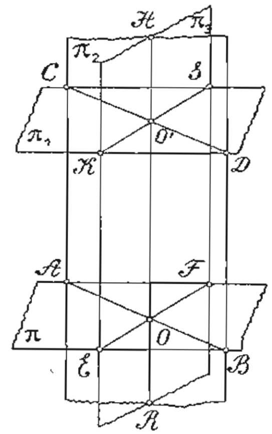
с) Како је $AC \parallel \pi_1$ и $BC \parallel \pi_1$, то је по 139 теореми $\pi \parallel \pi_1$.

Напомена. — Под углом двеју правих које се укрштају, разумемо онај угао који се добива када из једне произвољне тачке у простору повучемо две праве паралелно укрштеним правама. Раван овога угла увек је паралелна обема укрштеним правама.

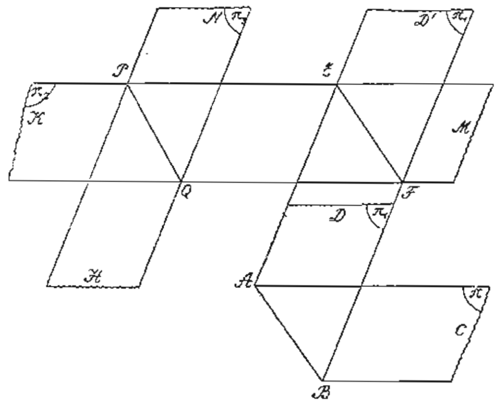
§ 109. — Нагиби правих и равнû. — Теореме које говоре о нагибности правих у простору према равнима, или о нагибности равнинâ у простору, јесу ове:

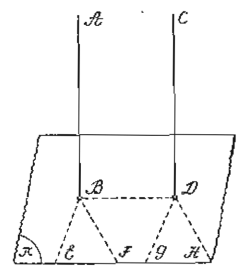
Теорема 144. — **Раван која сече две паралелне равни, гради с њима једнаке нагибне углове.** — Нека је $\pi \parallel \pi_1$, а π_2 сече

π и π_1, а π_3 управна на њене пресеке CD и AB (сл. 292). Тада су пресеци CD и AB, а тако исто KS и EF, према 140 теореми, паралелни. Стога су углови $HO'S$ и HOF једнаки; пошто су им краци у истом смислу паралелни. Па како су ови углови једновремено и нагибни углови које гради раван π_2 са равнинама π и π_1, то заиста раван π_2 гради једнаке нагибне углове са π и π'.


Сл. 292

Теорема 145. — **Кад су стране једнога диједра у истом или у супротноме смислу паралелне, онда су ти диједри једнаки.** — Нека је $\pi \parallel \pi_2$ и $\pi_1 \parallel \pi_3$ (сл. 293). Да бисмо доказали да су диједри $C(AB)D$ и $M(PQ)N$, једнаки, или $C(AB)D = H(PQ)K$, треба страну π_1 да продужимо док не пресече страну π_2. Тада су диједри $C(AB)D'$ и $M(EF)D'$ једнаки, према претходној теореми. Тако исто су једнаки диједри $M(EF)D'$ и $M(PQ)N$, према истој теореми. Стога су


Сл. 293

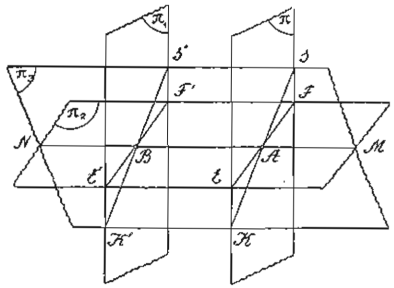

Сл. 294

једнаки и диједри $C(AB)D$ и $M(PQ)N$. Па како су диједри $M(PQ)N$ и $H(PQ)K$ једнаки као унакрсни, то су једнаки и диедри $C(AB)D$ и $H(PQ)K$.

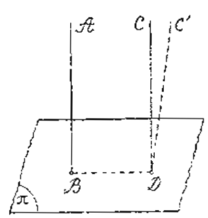
Теорема 146. — **Кад су две праве паралелне, а једна од њих стоји нормално на некој равни, онда је и друга права нормална на тој равни.** — Нека је $AB \parallel CD$ и $AB \perp \pi$ (сл. 294). Да бисмо доказали да је и $CD \perp \pi$, повлачимо најпре у π

праве BE и BF у произвољним правцима, а затим повлачимо $DG \parallel BE$ и $DH \parallel BF$. Тада су углови ABE и ABF прави, пошто је $AB \perp \pi$. Па како су углови CDG и CDH једнаки са угловима ABE и ABF, јер су им краци у истом смислу паралелни (теорема 143), то су и углови CDG и CDH прави. Стога је и $CD \perp \pi$ на основу теореме 129.

Теорема 147. — **Кад су две равни паралелне, а једна од њих стоји нормално на некој правој, онда је и друга раван нормална на тој правој.** — Нека је $\pi \parallel \pi_1$ и $\pi \perp MN$ (сл. 295). Да бисмо доказали да је и $\pi_1 \perp MN$, треба да повучемо кроз праву MN равни π_2 и π_3 тако да секу равнине π и π_1. Тада пресеци EF и $E'F'$, а тако исто и пресеци KS и $K'S'$ јесу паралелни, према теореми 140, а углови: MAF, MAK, MAS и MAE јесу прави, пошто је $MN \perp \pi$. Па како су ти углови једнаки са угловима: MBF', MBK', MBS' и MBE' из разлога што су им краци у истом смислу паралелни, то су и ови последњи углови прави, те је MN нормална и на равни π_1, или обрнуто, раван $\pi_1 \perp MN$.


Сл. 295

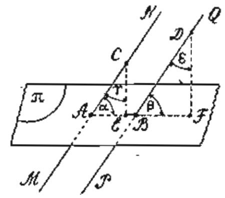
Теорема 148. — **Кад су две праве на једној равни нормалне, онда су оне паралелне.** — Нека је $AB \perp \pi$ и $CD \perp \pi$ (сл. 296). Ако претпоставимо да AB и CD нису паралелне, већ да је $C'D \parallel AB$, онда би $C'D$ била нормална на π (теорема 146). Међутим, ово је немогуће, јер се коси са теоремом 133. Стога наша претпоставка, да је $C'D \parallel AB$, као нетачна, отпада и остаје једино да је $CD \parallel AB$.


Сл. 296

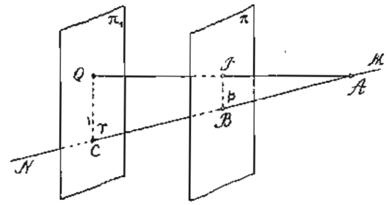
Теорема 149. — **Кад су две равни нормалне на једној правој, онда су оне паралелне.** Нека је $\pi \perp MN$ и $\pi' \perp MN$ (сл. 295). Ако претпоставимо да π није паралелна са π', већ да се продужене секу, онда везивањем ма које тачке њиховог пресека са продорним тачкама A и B, добио би се троугао са два права угла код A и B. Па како је ово немогуће,

то π и π_1 не могу се сећи, већ остаје једино да су паралелне.

Теорема 150. — **Две паралелне праве које секу неку раван, нагнуте су према њој под једнаким угловима.** — Нека су MN и PQ две паралелне праве које секу раван π (сл. 297) у тачкама A и B. Ако на овим правама узмемо две произвољне тачке C и D из којих спуштамо на π нормале CE и DF, добијамо два правоугла троугла ACE и BDF, чији су оштри углови γ и δ једнаки (теорема 143). Тада и нагибни углови α и β, као и њихови комплементни углови, јесу једнаки.

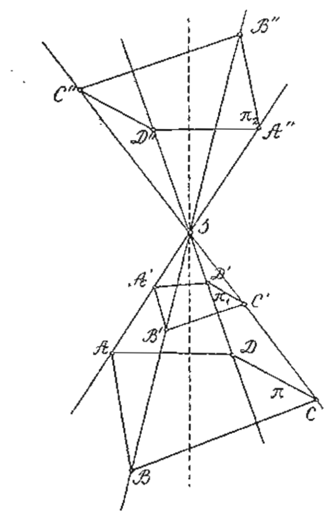

Сл. 297

Теорема 151. — **Две паралелне равни граде са једном истом правом једнаке нагибне углове.** — Нека је $\pi \parallel \pi_1$, а права MN их сече у тачкама B и C (сл. 298). Ако из произвољне тачке A праве MN спустимо нормалу на раван π, онда ће та нормала бити нормална и на π_1. Тада раван, одређена правама AQ и AN (раван AQC) сече равнине π и π_1 по пресецима BP и CQ, који су паралелни (теорема 140). Стога су нагибни углови β и γ, као сагласни, једнаки.


Сл. 298

§ 110. — Свежањ зракова. — Свежањ зракова је скуп правих у простору, које све пролазе кроз исту тачку, звану *теме* свежња.

Теорема 152. — **Две паралелне равни секу зраке једнога свежња пропорционално.** — Нека су равни π, π_1 и π_2 (сл. 299), које секу свежањ S, паралелне. Како свака два зрака свежња дају по једну раван која сече паралелне равнине π, π_1 и π_2, то су пресеци: AB и $A'B'$ $(A''B'')$, BC и $B'C'$ $(B''C'')$, CD и $C'D'$ $(C''D'')$, AD и $A'D'$ $(A''D'')$ паралелни (тео-


Сл. 299

рема 140). Тада на основу теореме 73 из пропорционалности дужи (§ 54), имамо: $SA:SA' = SB:SB' = SC:SC' = SD:SD'$,

или $SA:SA'' = SB:SB'' = SC:SC'' = SD:SD''$, или

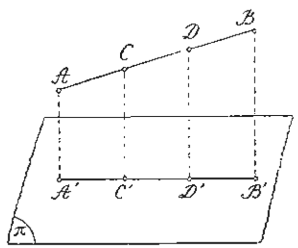
$$SA:AA' = SB:BB' = SC:CC' = SD:DD',$$

чиме је и ова теорема доказана.

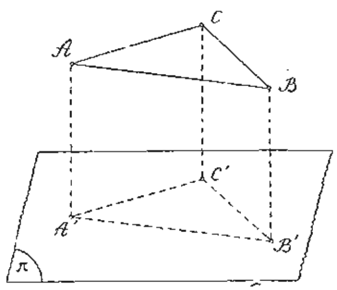
Теорема 153. — **Две равни које пропорционално секу зраке неког свежња јесу паралелне.** — Нека је на сл. 299: $SA:SA' = SB:SB' = SC:SC' = SD:SD'$. Тада је, на основу 76 теореме из пропорционалности дужи (§ 54): $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$ и $AD \parallel A'D'$. Тада су углови ABC и $A'B'C'$, а тако исто и остали углови код темена̂ C и C', D и D', A и A', једнаки. Стога и равни које пролазе кроз краке ових углова јесу паралелне (теорема 143, под c).

Теорема 154. — **Кад се зраци каквог свежња пресеку двема паралелним равнима, па се пресечне тачке у једној равни вежу дужима по истом реду као у другој равни, онда се добијају две сличне слике.** — Нека су равни π, π_1 и π_2 (сл. 299) паралелне. Тада су пресеци: AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CD и $C'D'$, AD и $A'D'$ паралелни и пропорционални (теорема 74, § 54) са отсечцима зракова свежња. Стога су углови A и A', B и B', C и C', D и D' једнаки. Па како слике $ABCD$ и $A'B'C'D'$ имају једнаке углове и пропорционалне стране, то су оне сличне.

§ 111. — О пројекцијама. — Под пројекцијом једне тачке у простору на некој равни, разумемо ону тачку у тој равни, у којој управна, спуштена из тачке у простору на раван,



Сл. 300



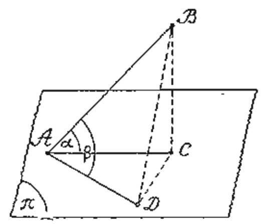
Сл. 301

продире раван. Тако, тачка A' је пројекција тачке A на равни π, ако је $AA_1 \perp \pi$ (сл. 300). Раван у којој се пројектује нека тачка зове се *пројекцијска раван.* Под пројекцијом једне

линије, праве или криве, на једној равни, разумемо ону линију у тој равни, на којој се налазе пројекције свих тачака прве линије. Тако права $A'B'$ (сл. 300) је пројекција праве AB на равни π. Пројекција једне тачке, или једне линије која се налази у самој пројекцијској равни, јесте сама та тачка, односно линија. Под пројекцијом једне равне слике на некој равни, разумемо ону слику у тој равни, која је ограничена пројекцијама граничних линија дате слике. Тако, $\triangle A'B'C'$ (сл. 301) је пројекција $\triangle ABC$ на равни π.

Теорема 155. — **Пројекција једне дужи, неуправне на некој равни, опет је дуж.** — Нека су: A', C', D', B' (сл. 300) пројекције тачака: A, C, D, B дужи AB у равни π. Како су праве AA', CC', DD' и BB' управне на π, то су оне међу собом паралелне (теорема 148), и све те праве леже у равни одређеној правама AA' и AB. Њихова подножја налазе се на пресеку ове равни са пројекцијском равни π. Па како је пресек двеју равни права линија, значи и пројекција AB је опет дуж $A'B'$. Изузетак је сама пројекција неке дужи која нормално стоји на пројекцијској равни. Пројекција такве дужи је тачка.

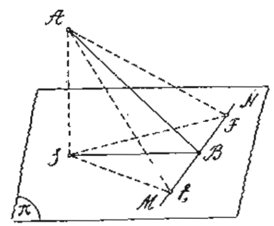
Теорема 156. — **Угао између неке дужи и њене пројекције на некој равни најмањи је између свих углова које та дуж захвата с правама повученим у пројекцијској равни кроз њен траг.** —



Сл. 302

Нека је $BC \perp \pi$ (сл. 302). Тада је AC пројекција дужи AB на равни π. Нека је дуж AD у тој равни. Ако најпре учинимо $AD = AC$, а затим вежемо D и C, па B и D, добијамо правоугли троугао BCD, чија је страна BD, као хипотенуза, већа од BC. Посматрањем затим троуглова ABC и ABD увиђамо, да имају по две једнаке стране (AB заједничка и $AC = AD$), а треће су им стране неједнаке. Стога је $\sphericalangle\ \beta$ у троуглу ABD, који је наспрам стране BD, већи од $\sphericalangle\ \alpha$ у троуглу ABC, наспрам мање стране BC. Угао између једне дужи и њене пројекције зове се *нагибни угао* те дужи и узима се као мера нагибу те дужи према пројекцијској равни.

Теорема 157. — **Ако је нека дуж у простору нормална на једној правој у каквој равни, онда је и пројекција те дужи нормална на правој у равни.** — Нека је MN права у равни π (сл. 303), а дуж $AB \perp MN$. Да бисмо доказали да је њена пројекција SB у π нормална на правој MN, узимамо на MN, и с једне и с друге стране тачке B, тачке E и F на једнаком отстојању од B и везујемо их и са A и са S. Тада је AB симетрала дужи EF, те је $AE=AF$. Међутим, троуглови ASF и ASE јесу подударни, пошто имају по две стране и углове наспрам већих страна једнаке ($AS = AS$, $AE = AF$, $\sphericalangle ASF = \sphericalangle ASE = 90^0$). Из подударности ових троуглова имамо $SE=SF$. Тада је $\triangle SEF$ равнокрак, а SB, пројекција дужи AB, средња је линија основице EF, и као таква нормална је на EF, односно нормална је на MN.

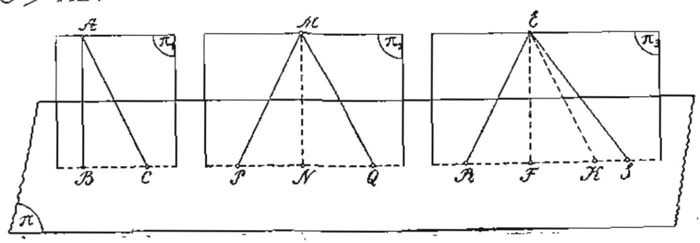


Сл. 303

Обрнута теорема овој теореми гласи: **Кад је пројекција неке дужи управна на некој правој у пројекцијској равни, онда је и дуж у простору, чија је она пројекција, такође управна на правој у равни** (*Теорема 158*). Доказ је истоветан као код претходне теореме само обрнутим путем.

Теорема 159. — **Ако се из једне тачке ван неке равни повуку до те равни нормала и више косих дужи, онда је: 1) између свију тих дужи нормала најкраћа; 2) дужи које имају једнаке пројекције на тој равни једнаке су међу собом; и 3) од две косе дужи, чије су пројекције неједнаке, већа је она која има већу пројекцију.**

1) Нека је $AB \perp \pi$ (сл. 304), а AC нека сече π косо. Повлачењем равни π_1 кроз AB и AC, добијамо правоугли троугао ABC, у коме је AC хипотенуза а AB катета. Стога је $AC > AB$.



Сл. 304

2) Нека је $NP = NQ$, које су дужи пројекције дужи MP и MQ на равни π. Повлачењем равни π_2 кроз MP и MQ, добијамо два подударна правоугла троугла MNP и MNQ. Ти су троуглови подударни због једнакости њихових катета. Стога је $MP=MQ$.

3) Нека је $FR < FS$, које су дужи пројекције дужи ER и ES на равни π. Повлачењем равни π_3 кроз ER и ES, добијамо два правоугла троугла EFR и EFS. Обртањем троугла EFR за 180^0 око EF, он заузима положај EFK тако да је $ER=EK$. Троугао ESK је тупоугли, те је у њему $ES>EK$, или заменом EK са ER, имамо $ES > ER$.

Обрнута теорема овој теореми гласи:

1) Ако су две косе дужи повучене из једне тачке ван равни на ту раван једнаке, онда су им једнаке и њихове пројекције; 2) ако су две косе дужи повучене из једне тачке ван пројекцијске равни неједнаке, онда су им неједнаке и пројекције, и то већа дуж има већу пројекцију. (*Теорема 160*). — Доказ је истоветан као код претходне теореме, али иде обрнутим путем.

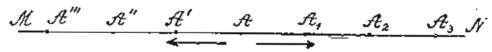
Врло корисне последице ове теореме јесу ове:

1) Кад се из једне тачке ван неке равни повуку до те равни једнаке косе дужи, онда се њихови трагови налазе на кругу чије је средиште траг нормалне праве повучене из исте тачке на раван; и

2) Геометриско место свих тачака једнако удаљених од три тачке у простору, а које не леже на једној правој, јесте права која пролази кроз средиште круга одређеног тим трима тачкама, а нормална је на равни тога круга.

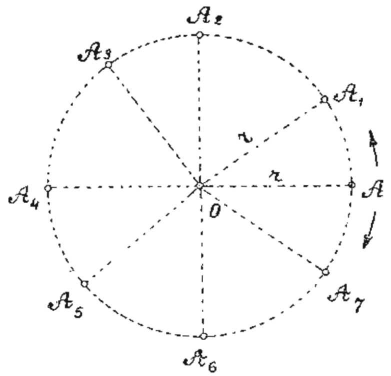
§ 112. — Транслација и ротација

1) *Транслаторно (праволиниско) и ротационо (кружно) кретање једне тачке.* — За једну тачку каже се да се креће транслаторно, ако се сви њени доцнији положаји налазе на једној правој линији, или ако се креће по једној утврђеној правој линији, било у позитивном или негативном смислу. Код овог кретања је тачка све више удаљена од свог првобитног положаја када кретање дуже траје (сл. 305).



Сл. 305

Напротив, ако се једна покретна тачка креће око једне утврђене тачке тако да је сваки њен доцнији положај увек подједнако удаљен од утврђене тачке, па после извесног кретања опет дође у свој првобитни положај, онда се каже да се тачка креће ротационо кружно. Код овога кретања тачка се креће по обиму једнога круга у позитивном или негативном смислу (сл. 306). Утврђена тачка је центар круга, а покретна тачка удаљена је увек од утврђене тачке за полупречник



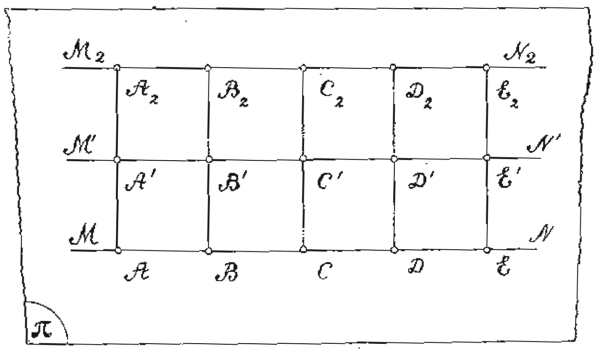
Сл. 306

круга. Врх сказаљке на часовнику има ротационо кретање

II) *Транслаторно и ротационо кретање једне праве.* — За једну праву каже се да се креће транслаторно, ако она клизи по једној утврђеној правој у некој равни (сл. 307), или ако се креће у једној равни тако да свака њена тачка даје праву линију (сл. 308). У овом другом случају, сваки доцнији положај праве паралелан је с њеним првобитним положајем, а све је удаљенији, уколико се права дуже креће. За једну праву каже се да се креће ротационо око једне утврђене праве, зване *осовина ротације*, ако се свака њена тачка креће ротационо, тј. по обуму једнога круга чија је раван нормална на ротационој основи. Тако се креће права MN око осовине ротације SS' код слика: 309, 310, 311 и 312. Тачке A, B, C,... праве MN дају кругове: O, O_1, O_2... чије су равни нормалне на SS'.

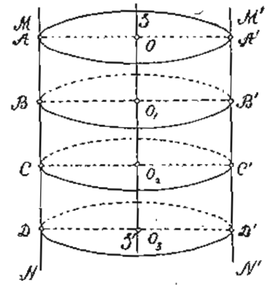
Сл. 307

Код сл. 311 ови су кругови концентрични, али је њихова заједничка раван опет нормална на SS'.

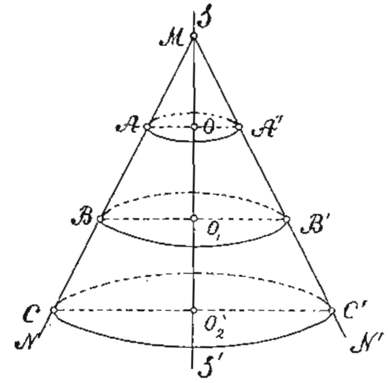


Сл. 308

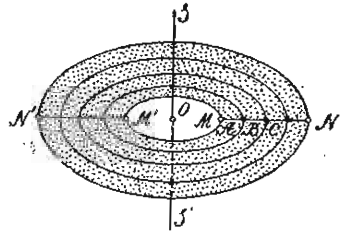
III) *Транслаторно и ротационо кретање једне равни.* — За једну раван π_1 (сл. 313) каже се да се креће транслаторно по некој утврђеној равни π, ако она клизи по тој равни тако да се покретна раван увек поклапа са утврђеном равни и да је сваки њен доцнији положај паралелан првобитном положају. У овом случају свака тачка покретне равни даје праву линију. Транслаторно креће се раван π_1 (сл. 314), ако се поступно удаљује од равни π тако да је сваки њен доцнији положај увек паралелан



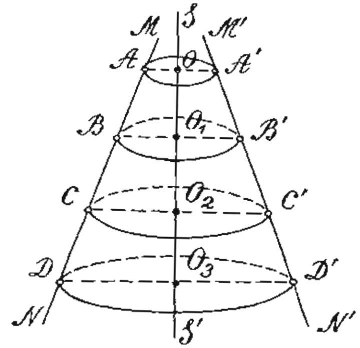
Сл. 309



Сл. 310

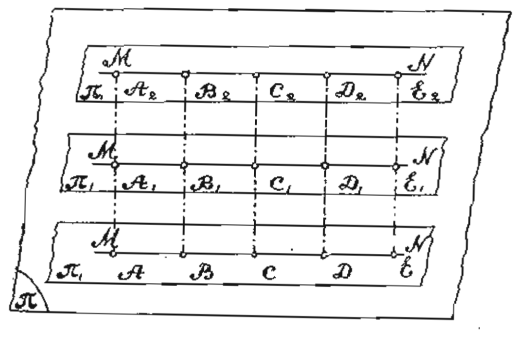


Сл. 311

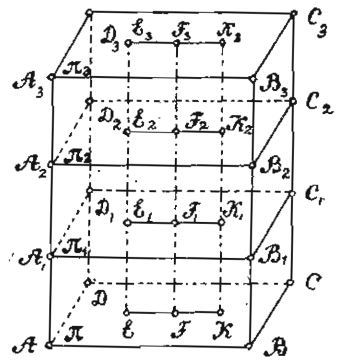


Сл. 312

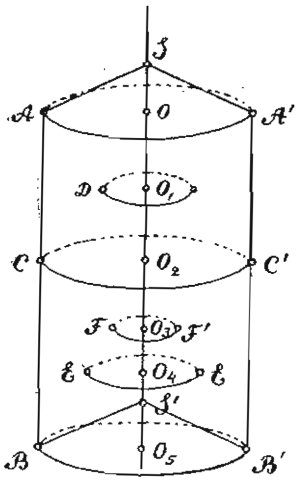
равни π, јер се и у овом случају свака тачка покретне равни креће транслаторно, тј. даје праву линију.



Сл. 313



Сл. 314



Сл. 315

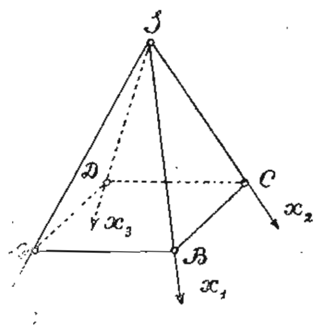
За једну раван каже се да се креће ротационо око једне утврђене праве у тој равни, око *осовине ротације*, ако се свака њена тачка креће ротационо, тј. по обиму једнога круга чија је раван управна на осовини ротације. Тако на сл. 315, раван $SABS'$, обртањем око стране SS', која се узима за осовину ротације, креће се ротационо, јер свака њена тачка A, D, C, F, E, B) даје круг (O, O_1, O_2, O_3, O_4, O_5), чије су равнине управне на осовини ротације SS'. При отварању врата једне собе, или крила једног прозора, имамо ротационо кретање. Овде је осовина ротације ивица врата (прозора) на којој су утврђене шарке. Воденични камен, или камен за оштрење ножева, креће се ротационо око своје осовине, јер свака тачка било на површини, било у унутрашњости камена, даје круг, чији је центар на осовини, а његова је површина управна на њој.

Напомена. — На основу свега онога што је казато о транслаторном кретању, можемо извести овакву дефиницију о паралелности двеју правих или двеју равни: две су праве (равни) паралелне, ако их можемо довести до поклапања транслаторним кретањем.

ОСМИ ОДЕЉАК

РОГЉЕВИ

§ 113. — Постанак и врсте рогљева. — Кад се зрак AX (сл. 316) обрће око своје почетне тачке S тако да једновремено клизи и по обиму каквог полигона (троугла, четвороугла, петоугла итд.), а чија раван не пролази кроз почетну тачку S зрака, онда тај зрак производи равни које само делимично ограничавају простор. Тако делимично ограничен простор зове се *рогаљ*. Зрак који производи рогаљ зове се *изводница (генератриса)* (SX), а полигон, по чијем обиму изводница клизи, зове се *водиља (директриса)*, ($ABCD$). Код рогља разликујемо *теме*,



Сл. 316

ивице, *ивичне углове* или *стране* и најзад *углове* рогља. Стална тачка S око које се обрће изводница зове се теме. Пресеци граничних равни, које дају рогаљ, или положаји изводнице када она пролази кроз темена водиље (SX, SX_1, SX_2, SX_3) зову се ивице рогља. Угао између двеју узастопних ивица ($\sphericalangle XSX_1$, $\sphericalangle X_1SX_2$, $\sphericalangle X_2SX_3$, $\sphericalangle X_3SX$) зове се ивични угао или страна рогља. Нагибни угао између двеју узастопних рогљевих страна зове се угао рогља [$B(AS)D$, $C(BS)A$, $D(CS)B$ и $A(SD)C$].

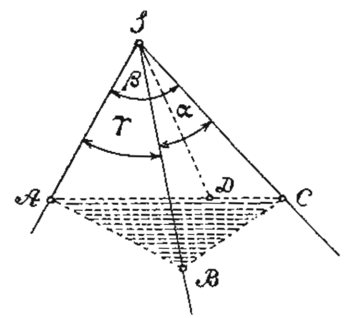
Сваки рогаљ има онолико ивица колико и страна, а толико исто и углова. Према њиховом броју рогљеви могу бити: *тространи*, *четворострани*, *петострани* итд. Према томе да ли су сви ивични углови једнога рогља једнаки или неједнаки, рогљева имамо *равностраних* и *неравностраних*. Рогљеви могу бити *равноугли* и *неравноугли* према томе да ли су им сви углови једнаки или не.

За један рогаљ каже се да је *правилан*, ако су му једнаке све стране (ивични углови) и сви углови. Један рогаљ може бити *конвексан* и *конкаван*. Он је конвексан, ако се цео налази само с једне стране ма које његове стране (ивичног угла), а у противном случају он је конкаван. Кад се конвексан рогаљ пресече равнином која сече све његове ивице, пресек је увек конвексан полигон. *Свакиростран рогаљ је конвексан.* Тространи рогаљ који има само један, два, или сва три ивична угла права, зове се: *правоугли*, *би-правоугли* и *три-правоугли*. Тако, два суседна зида једне собе и таванице дају један три-правоугли рогаљ.

§ 114. — Особине тространих рогљева. — Особине тространих рогљева исказане су помоћу ових теорема:

Теорема 161. — **У сваком тространом рогљу је збир двеју страна већи од треће стране, а разлика двеју страна је мања од треће стране.**

а) Ако је страна ASC (сл. 317) највећа код рогља $SABC$, онда у тој страни треба повући SD тако да је $ASB = ASD$, а поред тога удешавамо да је



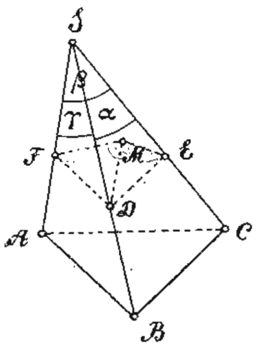
Сл. 317

$SD = SB$. Затим повлачимо кроз тачке B и D раван која сече ивице SA и SC у тачкама A и C. Тада троуглови ABS и ADS јесу подударни, пошто имају по две стране и захваћене углове једнаке. Из њихове подударности налазимо да је $AB = AD$. Па како је у троуглу ABC $AB + BC > AC$, или $AB + BC > AD + DC$, то је $BC > DC$, пошто се једнаке количине AB и AD потиру. Најзад испитивањем троуглова BCS и DCS налазимо да имају по две стране једнаке, а треће стране BC и DC нису једнаке, и то $BC > DC$. Стога и углови тих троуглова наспрам неједнаких страна јесу такође неједнаки, а већи је онај који се налази наспрам веће стране. Дакле је: $\sphericalangle BSC > \sphericalangle DSC$, или $\sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC - \sphericalangle ASD$, или $\sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC - \sphericalangle ASB$, или $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC$, што смо и хтели да докажемо.

в) Ако у неједначини $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC$ одузмемо и с једне и с друге стране количину $\sphericalangle BSC$, добијамо: $\sphericalangle ASB > \sphericalangle ASC - \sphericalangle BSC$, чиме је доказан и други део теореме.

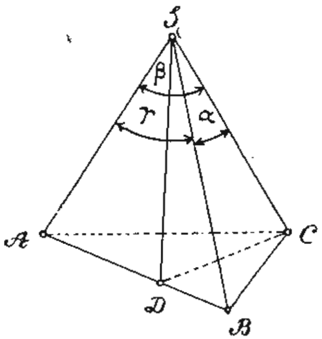
Исто важи и за остале стране. Тако је: $ASB + ASC > BSC$; $ASC + BSC > ASB$; $ASB > ASC - BSC$; и $BSC > ASC - ASB$.

Теорема 162. — **Наспрам једнаких углова у тространом рогљу леже једнаке стране.** — Нека су једнаки углови $B(SA)C$ и $B(SC)A$ (сл. 318). Да бисмо доказали да су и наспрамне стране α и γ једнаке, спуштамо из произвољно узете тачке D на ивици SB нормалу DM на страну β, а на ивице SC и SA нормале DE и DF. Тада је ME пројекција од DE, а MF пројекција од DF на страни β. Па како је $DF \perp SA$, то је и њена пројекција $MF \perp SA$ (теорема 157). Исти је случај и са пројекцијом ME, која је нормална на SC. Углови: DFM и DEM јесу, дакле, нагибни углови, а дато је да су једнаки. Тада су правоугли троуглови DMF и DME подударни, пошто имају катету DM заједничку и оштре углове DFM и DEM једнаке. Из подударности ових троуглова излази да је $DF = DE$. У том случају и правоугли троуглови DFS и DES јесу такође подударни (SD заједнички, $DF = DE$), те је $\gamma = \alpha$.



Сл. 318

Теорема 163. — **Наспрам већег угла у тространом рогљу лежи већа страна.** — Нека је $B(SC)A > B(SA)C$ (сл. 319). Да бисмо доказали да је тада и $\sphericalangle\gamma > \sphericalangle\alpha$, треба кроз ивицу SC да повучемо раван DSC тако да она заклапа са равнином ASC угао једнак углу $B(SA)C$. Тада је према претходној теореми $\sphericalangle ASD = \sphericalangle DSC$. Па како је у рогљу $SDBC$, према 161 теореми, $\sphericalangle BSD + \sphericalangle DSC > \sphericalangle BSC$, онда, заменом у овој неједначини $\sphericalangle DSC$ са $\sphericalangle ASD$, добијамо: $\sphericalangle BSD + \sphericalangle ASD > \sphericalangle BSD$, или $\sphericalangle\gamma > \sphericalangle\alpha$.



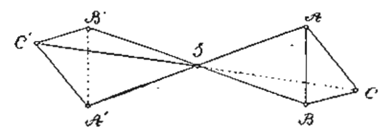
Сл. 319

Теорема 164. — **Наспрам једнаких страна тространог рогља леже једнаки углови.** — Дато: $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle\alpha$ (сл. 318); доказати: $B(SC)A = B(SA)C$. Ако претпоставимо најпре да је $B(SC)A > B(SA)C$, онда би био, по претходној теореми, $\sphericalangle\gamma > \sphericalangle\alpha$, што се коси с оним што је дато. Ако претпоставимо затим да је $B(SC)A < B(SA)C$, онда би било $\sphericalangle\gamma < \sphericalangle\alpha$, што се опет коси с оним што је дато. Па како угао $B(SC)A$ нити је већи, нити мањи од угла $B(SA)C$, то остаје једино да су ти углови једнаки.

Теорема 165. — **Наспрам веће стране тространог рогља лежи већи угао.** — Дато: $\sphericalangle\gamma > \sphericalangle\alpha$ (сл. 319); доказати: $B(SC)A > C(SA)B$. Ако најпре претпоставимо да је $B(SC)A = C(SA)B$, онда би био по 162 теореми $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle\alpha$, што се коси с оним што је дато. Ако затим претпоставимо да је $B(SC)A < C(SA)B$, онда би био по 153 теореми $\sphericalangle\gamma < \sphericalangle\alpha$, што се опет коси с оним што је дато. Па како угао $B(SC)A$ нити је једнак, нити је мањи од угла $C(SA)B$, то једино остаје да је $B(SC)A > C(SA)B$.

§ 115. — Унакрсни, подударни, симетрични и поларни рогљеви.

— а) Рогаљ, чије су ивице продужења ивицâ другог рогља преко његовог темена, зове се *унакрсан* тога другог рогља. Такви су рогљеви $SABC$ и $SA'B'C'$ (сл. 320).

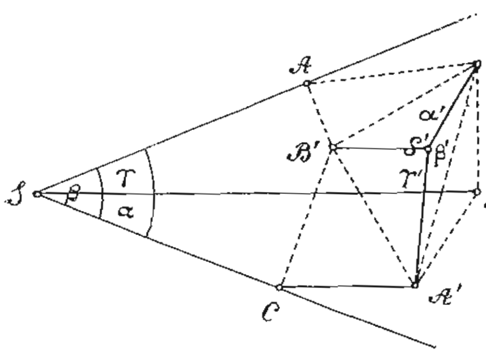


Сл. 320

b) Два су рогља *подударна*, кад се потпуно поклапају, тј. кад се могу положити један у други тако да им се поклапају све ивице и све стране. Да би рогљеви били подударни, морају имати не само све стране и све углове једнаке, већ морају стране и углови у оба рогља бити поређани у *истом смислу обртања*.

c) Ако су само стране и углови једнога рогља једнаки са одговарајућим странама и угловима другога рогља, али нису у истом смислу обртања, већ у супротном, онда рогљеви нису подударни, јер такви рогљеви не могу се положити један на други. Овакви рогљеви јесу *симетрични*. Тако, унакрсни рогљеви, код којих су стране и углови у супротноме смислу обртања, јесу симетрични, и ако имају по два и два угла и по две и две стране једнаке. *Међутим, кад су два рогља симетрична с трећим рогљем, онда су они подударни, а кад су два рогља подударна, па је један од њих симетричан с неким трећим рогљем, онда је и други рогаљ симетричан с трећим рогљем.*

d) Рогаљ, чије су ивице усправне на странама другога рогља, зове се *поларни* или суплементни за други рогаљ. Тако, рогаљ $S'A'B'C'$ (сл. 321) биће поларан рогљу $SABC$, ако је $S'A' \perp CSB$, $S'B' \perp CSA$ и $S'C' \perp BSA$. Теореме које се односе на поларне рогљеве јесу следеће:



Сл. 321

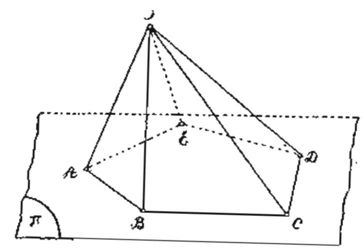
Теорема 166. — **Свaки је рогаљ поларни рогаљ своме поларном рогљу.** — Како је $S'A' \perp \alpha$, то је и раван $S'A'CB'$, према 131 теореми (§ 107), нормална на α. Тако исто, раван $S'A'CB' \perp \beta$, пошто је $S'B' \perp \beta$. Нашли смо, дакле, да су равни α и β нормалне на равни $S'A'CB'$. Тада је, према 132 теореми, и пресек SC равни α и β нормалан на $S'A'CB'$, тј. ивица SC рогља $SABC$ нормална је на страни γ' његовог поларног рогља $S'A'B'C'$. Истим путем налазимо да је $SB \perp \beta'$ и $SA \perp \alpha'$.

Теорема 167. — **Кад су два рогља узајамно поларна, онда су стране (ивични углови) једнога суплементни угловима (диједрима) другога рогља.** — Нека су рогљеви $SABC$ и $S'A'B'C'$ (сл. 321) поларни. Како је $S'A' \perp \alpha$, онда је $S'A'$ нормална и на $A'C$ и $A'B$, које праве леже у равни CSB и пролазе кроз траг A'. Па како је по претходној теореми $SC \perp \gamma'$ и $SB \perp \beta'$, то је $SC \perp A'C$ и $SB \perp A'B$. Стога су углови SCA' и SBA' прави. Тада у четвороуглу $SCA'B$ имамо два права угла код C и B, те је збир осталих његових углова 180^0, тј. $\sphericalangle CSB + \sphericalangle CA'B = 180^0$. Па како је $\sphericalangle CSB$ страна α рогља $SABC$, а $\sphericalangle CA'B$ диједар другог рогља $S'A'B'C'$ на ивици $S'A'$, то је $\alpha + \sphericalangle CA'B = 180^0$. Истим путем нашли бисмо да је

$$\beta + \sphericalangle AB'C = 180^0 \quad \text{и} \quad \gamma + \sphericalangle AC'B = 180^0.$$

§ 116. — Опште особине свију рогљева. — Следеће две теореме дају нам опште особине рогљева:

Теорема 168. — **У сваком је n-тостраном конвексном рогљу збир свију страна (ивичних углова) мањи од 360°.** — Ако се n-тострани рогаљ (сл. 322) пресече равнином π тако да му сече све ивице, онда је пресек n-тострани полигон $ABCDE$, а од страна рогља добијамо n троуглова. Ако нам s значи збир свих углова у тим троугловима поређаних око темена S, а s' збир свих углова истих троуглова поређаних изнад пресека, код темена A, B, C, D, E, онда је:



Сл. 322

$$s + s' = n \cdot 180^0 \ldots (1).$$

Па како је збир свака два угла изнад пресека $ABCDE$, код сваког његовог темена, већи од угла пресека код дотичног темена (теорема 161, § 114), а збир унутрашњих углова пресека $ABCDE$ износи $(n-2) \cdot 180^0$, то је:

$$s' > (n-2) \cdot 180^0, \quad \text{или} \quad s' > n \cdot 180^0 - 360^0 \ldots (2).$$

Заменом у неједначини (2) члана $n \cdot 180$ са $s + s'$, према једначини (1), добијамо:

$$s' > s + s' - 360^0, \text{ а одавде је } s < 360^0,$$

што смо и желели да докажемо.

Напомена. — Да је заиста збир ивичних углова маког конвексног рогља мањи од 360°, можемо се уверити и на следећи начин. — Ако претпоставимо да је тај збир једнак 360^0, тада би сви ивични углови били поређани један поред другога у истој равни и тиме би чинили једну раван а не рогаљ.

Теорема 169. — **Збир свих углова n-тостраног рогља већи је од (n-2)·180^0, а мањи од n·180^0.** — Ако нам s' значи збир свих углова једног n-тостраног, а s'' збир ивичних углова његовог поларног рогља, онда је по 167 теореми:

$$s' + s'' = n \cdot 180^0 \ldots . \quad (1).$$

Тада је из ове једначине јасно да је $s' < n \cdot 180^0$.. (2). Па како је према претходној теореми $s'' < 360^0$ ... (3), то одузимањем неједначине (3) од једначине (1), добијамо:

$$s' > n \cdot 180^0 - 360^0, \text{ или } s' > (n\text{-}2) \cdot 180^0 \ldots (4).$$

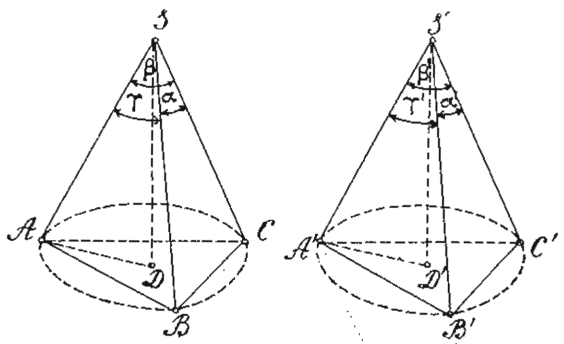
Неједначине (2) и (4) показују нам тачност ове теореме.

Напомена. — Према овој теореми, збир углова тространог рогља већи је од 180^0 а мањи од 540^0.

§ 117. — Подударност и симетричност тространих рогљева*)

Да бисмо дознали да ли су два тространа рогља подударна или симетрична, није нужно да знамо да су све три стране (ивични углови) и сва три угла (диједри) једнога рогља једнаки са одговарајућим странама и угловима другога рогља. Њихова подударност, односно симетричност, биће зајемчена, ако знамо да су само *три* елемента (странâ и углова) једнога рогља једнака са одговарајућим трима елементима другога рогља. Отуда имамо шест правила о подударности, односно симетричности, тространих рогљева, и то:

I правило. — **Два су тространа рогља подударна или симетрична, када су две стране и захваћени угао једног рогља по истом или обрнутом реду једнаки са двема странама и захваћеним углом другог рогља** (*Теорема* 170). — a) Нека је $\gamma = \gamma'$, $\alpha = \alpha'$ и $\sphericalangle A(SB)C = A'(S'B')C'$ (сл. 323). Ако рогаљ $S'A'B'C'$ ставимо у рогаљ $SABC$ тако да се стране γ и γ' поклопе, што мора бити, пошто су једнаке, онда се ивица $S'A'$ поклапа са ивицом SA, а ивица $S'B'$ поклапа се са ивицом SB. Тада се и



Сл. 323

*) Само за ученике реалке.

$\sphericalangle A'(S'B')C'$ поклапа са $\sphericalangle A(SB)C$ као једнаки, а страна α' поклапа α, пошто су и оне једнаке. Тада се и ивица $S'C'$ поклапа са ивицом SC. У том случају страна β' поклапа страну β, пошто се кроз две праве које се секу може поставити само једна раван. Према овоме, рогљеви се потпуно поклапају, те и остале елементе имају једнаке, тј. рогљеви су подударни.

b) Ако су дати једнаки елементи рогљева $SABC$ и $S'A'B'C'$ поређани у супротноме смислу, онда је рогаљ $S'A'B'C'$ подударан са унакрсним рогљем рогља $SABC$, па је стога рогаљ $S'A'B'C'$ симетричан с рогљем $SABC$.

II правило. — **Два су тространа рогља подударна или симетрична, кад су два угла и страна између њих у једноме рогљу једнаки са два угла и страном између њих у другом рогљу истим или обрнутим редом** (*Теорема* 171). — Нека је $\sphericalangle C(SA)B = \sphericalangle C'(S'A')B'$, $\sphericalangle C(SB)A = \sphericalangle C'(S'B')A'$ и $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \gamma'$ (сл. 323). Ако рогаљ $S'A'B'C'$ увучемо у $SABC$ тако да се страна γ поклапа са страном γ', што мора бити, пошто су једнаке, онда ивица $S'A'$ поклапа ивицу SA, а ивица $S'B'$ поклапа ивицу SB. Па како су диједри $C(SA)B$ и $C'(S'A')B'$, а тако исто и диједри $C(SB)A$ и $C'(S'B')A'$ једнаки, то се они поклапају. У том случају стране β и β', а тако исто стране α и α', падају једна на другу, пошто узимају исти правац. Тада се ивица $S'C'$ мора поклапати са ивицом SC, пошто ова ивица ($S'C'$) лежи и у равни β и у равни α, тј. у њиховом пресеку SC. Рогљеви се, дакле, потпуно поклапају, те имају и остале елементе једнаке, тј. рогљеви су подударни.

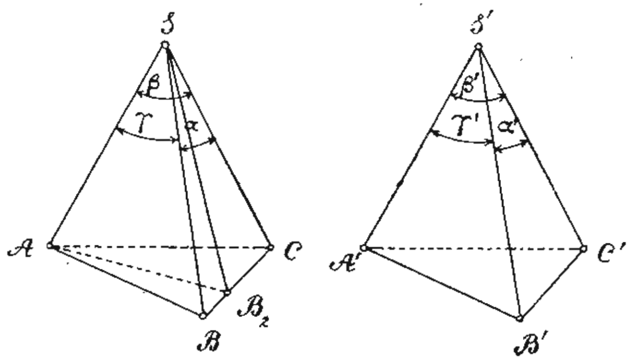
Доказ за симетричност истоветан је као код I правила.

Напомена. — Ово правило дâ се доказати и на следећи начин. — Пошто рогљеви $SABC$ и $S'A'B'C'$ имају по два диједра са захваћеним странама једнака, то ће њихови поларни рогљеви, на основу теореме 167, морати имати по две стране са захваћеним диједрима једнаке. Тада су ови поларни рогљеви, по I правилу о подударности тространих рогљева, подударни. Па како ови поларни рогљеви морају тада имати једнаке и остале диједре и трећу страну, онда ће дâти рогљеви имати одговарајуће стране и одговарајући диједар једнаке, и због тога су подударни.

III правило. — **Два су тространа рогља подударна или симетрична, кад су у једном рогљу две стране и угао наспрам једне од тих страна по истом или обрнутом реду једнаки с двема странама и углом наспрам једне стране у другом рогљу, а под условом да углови наспрам другог пара једнаких страна нису суплементни** (*Теорема 172*).

Нека је $\gamma = \gamma'$, $\beta = \beta'$, диједар $A(SC)B$ = диједру $A'(S'C')B'$ и $A(SB)C + A'(S'B')C' \gtrless 180^0$ (сл. 324). Ако рогаљ $S'A'B'C'$ увучемо у рогаљ $SABC$ тако да се стране β и β' поклопе, онда ће се, услед једнакости ових ивичних углова, ивице $S'A'$ и SA, а тако исто ивице $S'C'$ и SC, поклапати. Па како су диједри $A'(S'C')B'$ и $A(SC)B$ једнаки, они се поклапају, а страна α' пада на страну α. У том случају ивица $S'B'$ мора поклапати ивицу SB, јер, ако претпоставимо противно, тј. да ивица $S'B'$ не поклапа SB, већ заузима правац SB_2, онда би по I правилу рогаљ SAB_2C био подударан с рогљем $S'A'B'C'$, из чије подударности бисмо имали да је $A(SB_2)C = A'(S'B')C'$ и да је $\sphericalangle AB_2S = \sphericalangle \gamma' = \sphericalangle \gamma$. Тада би, на основу 165 теореме, био и диједар $A(SB)B_2$ = диједру $A(SB_2)B$. Па како је збир диједара $A(SB_2)B$ и $A(SB_2)C$, као упоредних, 180^0, тј. $A(SB_2)B +$

$+ A(SB_2)C = 180^0$ или, заменом у овој једначини $A(SB_2)C$ са $A'(S'B')C'$ и $A(SB_2)B$ са $A(SB)B_2$, за које смо нашли да су једнаки по нашој претпоставци, имали бисмо:
$A(SB)B_2 + A'(S'B')C' = 180^0$, или $A(SB)C + A'(S'B')C' = 180^0$, што се коси с оним што је дато. Према томе, наша претпоставка, да ивица $S'B'$



Сл. 324

може заузети на страни α други правац, а не правац SB, као нетачна отпада. Према овоме, ивица $S'B'$ мора се поклапати са ивицом SB, те се и стране γ' и γ, као једнаке, поклапају. Рогљеви $S'A'B'C'$ и $SABC$ поклапају се, дакле, потпуно, те су подударни. Доказ за симетрију истоветан је као у I правилу.

IV *правило.* — **Два су тространа рогља подударна или симетрична, кад су у једном рогљу два угла и страна наспрам једног од њих по истом или обрнутом реду једнаки са два угла и страном наспрам једног угла у другом рогљу, а под условом да стране наспрам оног другог пара једнаких углова нису суплементне.** *(Теорема 173).* — Како дати рогљеви (сл. 323) имају по два угла и по једну наспрамну страну једнаке, онда ће њихови поларни рогљеви имати, према 167 теореми, по две стране и по један угао наспрам једне од тих страна једнаке. Тада су по III правилу ти поларни рогљеви подударни, односно симетрични, тј. морају имати и треће стране једнаке, а тако исто и остала два диједра. У том случају, према истој 167 теореми, дати рогљеви морају имати и одговарајуће треће диједре и оне друге две стране једнаке, што значи да су подударни. Доказ за симетрију истоветан је као у I правилу.

V *правило.* — **Два су тространа рогља подударна или симетрична, ако су им стране по истом или обрнутом реду једнаке** *(Теорема 174).* — Нека је $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ и $\gamma = \gamma'$ (сл. 323). Да бисмо доказали подударност, односно симетричност, ових рогљева, удешавамо најпре да је $SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C'$, затим кроз тачке: A, B и C, а тако исто кроз тачке: A', B' и C', повлачимо равни на које, најзад, спуштамо усправне SD и $S'D'$. Ако се опишу кругови око троуглова ABC и $A'B'C'$, онда се њихови центри поклапају са подножним тачкама D и D' нормала SD и $S'D'$ (последица под I, теореме 159). Тада су троуглови: ASB и $A'S'B'$, BSC и $B'S'C'$, ASC и $A'S'C'$ подударни, пошто имају по две стране и захваћене углове једнаке. Из њихове подударности излази да је $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $AC = A'C'$. Ове једнакости обелодањују нам подударност троуглова ABC и $A'B'C'$. Из подударности ових троуглова излази да су једнаки и полупречници њихових описаних кругова, тј. да је $AD = A'D'$. Тада су правоугли троуглови ASD и $A'S'D'$ подударни, пошто су им хипотенузе SA и $S'A'$, а тако исто и катете AD и $A'D'$, једнаке. Из подударности ових троуглова излази да је $SD = S'D'$. Кад се ово зна, разумљиво је да се при увлачењу рогља $S'A'B'C'$ у рогаљ $SABC$, троуглови ABC и $A'B'C'$ и њихови описани кругови поклапају, па и њихови центри D и D'. А како се у тачци D може повући само једна нормала на раван ABC, то ће и висина $S'D'$ пасти на висину SD. А како је $SD = S'D'$, по томе S' пада на теме S и тиме се поклапају све ивице и стране рогљева. Рогљеви се, дакле, потпуно поклапају, те имају и диједре једнаке, тј. рогљеви су подударни.

Доказ за симетрију истоветан је као и у I правилу.

VI *правило.* — **Два су тространа рогља подударна или симетрична, ако су им по реду углови једнаки** *(Теорема 175).* — Нека рогљеви на сл. 323 имају углове (диједре) једнаке. Тада ће њихови поларни рогљеви, према 167 теореми, имати стране једнаке. А када ти поларни рогљеви имају стране једнаке, онда ће они имати, према претходном правилу, и углове (диједре) једнаке. Кад се ово зна, онда ће и дати рогљеви, према 167 теореми, имати стране једнаке. Стога су дати рогљеви подударни, јер, поред углова, имају и стране једнаке.

Доказ за симетрију истоветан као у I правилу.

ДЕВЕТИ ОДЕЉАК*)

РЕШАВАЊЕ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА ПОМОЋУ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ ФУНКЦИЈА СА УПОТРЕБОМ ЛОГАРИТАМСКИХ ТАБЛИЦА

(Поновити најпре параграфе: 56, 57 и 59)

§ 118. — Логаритми гониометриских функција

Под логаритмом једне гониометриске функције разумемо логаритам вредности размере коју функција претставља. Тако, под $\log \sin 60^0$ треба да разумемо логаритам од $\frac{\sqrt{3}}{2}$, јер је $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Стога је $\log \sin 60^0 = \log \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\log 3}{2} - \log 2 = \frac{0{,}47712}{2} - 0{,}30103 = \overline{1}{,}93753$. Тако исто $\log \cos 45^0 = \log \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\log 2}{2} - \log 2 = \overline{1}{,}84949$.

*) Овај одељак прећи после партије о логаритмима у Алгебри.

Истим путем израчунали бисмо логаритам ма које гониометриске функције, ако нам је позната њена вредност. Од овога рада ослобођени смо, пошто су логаритми гониометриских функција свих оштрих углова израчунати и скупљени у нарочите таблице. Остаје нам само да се упознамо са упутством како ћемо наћи у таблицама логаритам неке функције када нам је познат угао, и обрнуто, угао, ако нам је познат логаритам неке његове функције.

А) Изналажење логаритма функције када је угао познат. **I случај.** — *Угао има само степене и минуте.* — Ако угао има само степене и минуте, онда се логаритми његових функција налазе непосредно у таблицама, и то у колони дотичне функције наспрам минутâ датог угла. Ако је угао мањи од 45^0, онда се логаритам једне његове функције тражи у колони у којој је та функција *горе* означена, а кад је угао већи од 45^0, онда се логаритам једне функције тражи одоздо навише, у колони код које је *доле* означена дотична функција. Ово стога, што су функције свију оштрих углова мањих од 45^0 једнаке са кофункцијама њихових комплементних углова, па и логаритми функција углова мањих од 45^0 јесу једнаки са логаритмима кофункција комплементних углова. Према томе, синусна колона, у којој се налазе логаритми синуса свију оштрих углова мањих од 45^0 истовремено је косинусна колона и бројеви у тој колони јесу логаритми косинуса одговарајућих комплементних углова већих од 45^0; тангентна колона углова мањих од 45^0 истовремено је котангентна њихових комплементних углова; котангентна истовремено је тангентна; и косинусна је истовремено синусна.

Примери:

1. $\log\sin 25^0 38' = \overline{1},63610$	5. $\log tg\ 44^0 25' = \overline{1},99116$
2. $\log\sin 72^0 32' = \overline{1},97950$	6. $\log tg\ 78^0 58' = 0,71000$
3. $\log\cos 28^0 54' = \overline{1},94224$	7. $\log cotg\ 8^0 52' = 0,80688$
4. $\log\cos 48^0 27' = \overline{1},82169$	8. $\log cotg\ 59^0 27' = \overline{1},77101$

II случај. — *Угао има степене, минуте и секунде.*

Ако дати угао има и секунде, онда, као у првом случају, налазимо најпре у таблицама логаритам функције само за степене и минуте, а за секунде израчунавамо *поправку.* Та се поправка код логаритама синуса и тангенса додаје, а код логаритама косинуса и котангенса одузима, јер су синус

и тангенс већи, што је угао већи, а напротив, косинус и котангенс су мањи, кад је угао већи.

Поправка је производ од броја секунада и *табличке диференције* подељен са 60. Под табличком диференцијом разумемо разлику између два логаритма једне исте функције углова који се разликују само за један минут. Та табличка диференција израчуната је и налази се у колони где горе пише „D". Ове колоне са табличким диференцијама налазе се поред колона логаритама функцијā углова од степена и минута, и то: једна је поред синусне колоне, друга поред косинусне, а трећа је у средини, између тангентне и контангентне колоне и заједничка је за обе функције. Ако је табличка диференција D, број секунда S, поправка P, онда је $P = \frac{D \cdot S}{60}$.

Извођење обрасца за поправку. — Ако се углови разликују за $1''$, онда се логаритми неке њихове функције разликују за D (јединица петог десетног места), а кад се углови разликују за S секунда, или $\frac{S}{60}$ минута, онда ће се логаритми те функције разликовати за P. Тада је поправка P толико пута већа од диференције D, колико су пута већи S секунада од $1''$, тј. $P : D = \frac{S}{60} : 1$. Одавде је $P = \frac{D \cdot S}{60}$.

Примери:

1. *Наћи log sin* $28^0 37' 42''$. Најпре налазимо $\log\sin 28^0 38' = \overline{1},68029$. Табличка је диференција $D = 23$ (налази се поред синусне колоне с десне стране, а мало ниже од логаритма $\overline{1},68029$). Тада је поправка $P = \frac{D \cdot S}{60} = \frac{23 \cdot 42}{60} = 16$ (6 је пети а 1 четврти децимал мантисе). Стога је $\log\sin 28^0 37' 42'' = \overline{1},68029$
$$\begin{array}{r} +16 \\ \hline = \overline{1},68045 \end{array}$$

2. *Наћи log sin* $55^0 27' 34''$.
$$\left.\begin{array}{r} \log\sin 55^0 27' = \overline{1},91673 \\ +5 \\ \hline \log\sin 55^0 27' 34'' = \overline{1},91678 \end{array}\right\} \begin{array}{l} D = 9,\ S = 34''; \\ P = \frac{9 \cdot 34}{60} = 5. \end{array}$$

3. *Наћи log tg* $25^0 7' 24''$.
$$\left.\begin{array}{r} \log tg\ 25^0 7' = \overline{1},670\ 98 \\ +13 \\ \hline \log tg\ 25^0 7' 24'' = \overline{1},67111 \end{array}\right\} \begin{array}{l} D = 33;\ S = 24''; \\ P = \frac{33 \cdot 24}{60} = 13. \end{array}$$

4. <u>*Наћи log tg* 73⁰ 52′ 40″.</u>

$$\left.\begin{array}{rr} \log tg\ 73^0 52' = & 0{,}538\,70 \\ & +32 \\ \hline \log tg\ 73^0 52' 40'' = & 0{,}589\,02 \end{array}\right\} \begin{array}{l} D=48,\ S=40''; \\ P=\dfrac{48\cdot 40}{60}=32. \end{array}$$

5. <u>*Наћи log cos* 37⁰ 25′ 50″</u>

$$\left.\begin{array}{rr} \log \cos 37^0 25' = & \overline{1},899\,95 \\ & -8 \\ \hline los \cos 37^0 25' 50'' = & \overline{1},899\,87 \end{array}\right\} \begin{array}{l} D=10,\ S=50''; \\ P=\dfrac{10\cdot 50}{60}=8. \end{array}$$

6. <u>*Наћи log cos* 81⁰ 20′ 20″.</u>

$$\left.\begin{array}{rr} \log \cos 81^0 20' = & \overline{1},178\,07 \\ & -28 \\ \hline los \cos 81^0 20' 20'' = & \overline{1},177\,79 \end{array}\right\} \begin{array}{l} D=83,\ S=20''; \\ P=\dfrac{83\cdot 20}{60}=28. \end{array}$$

7. <u>*Наћи log cotg* 8⁰ 15′ 28″.</u>

$$\left.\begin{array}{rr} \log cotg\ 8^0 15' = & 0{,}838\,65 \\ & -42 \\ \hline \log cotg\ 8^0 15' 28'' = & 0{,}838\,23 \end{array}\right\} \begin{array}{l} D=89,\ S=28''; \\ P=\dfrac{89\cdot 28}{60}=42. \end{array}$$

8. <u>*Наћи log cotg* 70⁰ 35′ 48″.</u>

$$\left.\begin{array}{rr} \log cotg\ 70^0 35' = & \overline{1},547\,14 \\ & -33 \\ \hline \log cotg\ 70^0 35' 48'' = & \overline{1},546\,81 \end{array}\right\} \begin{array}{l} D=41,\ S\ 48''; \\ P=\dfrac{41\cdot 48}{60}=33\,. \end{array}$$

В) Изналажење вредности функције неког угла помоћу логаритама. — Треба наћи логаритам дотичне функције, а затим наћи *нумерус* тога логаритма, који нам претставља вредност дате функције.

Примери:

1) <u>*Наћи sin* 60⁰.</u>

$\log \sin 60^0 = \overline{1},93753$, а $\sin 60^0 = N\overline{1,93753} = 0{,}86602$

(Заиста је $\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1{,}7321\ldots\ldots}{2} = 0{,}8660\ldots$).

2) <u>*Наћи sin 40⁰ 34′ 10″.*</u>

$\log \sin\ 40^0 34' 10'' = \overline{1},81316$, а $\sin\ 40^0 34'\ 10'' = N\overline{1,81316} = 0{,}65037\ldots$

3) <u>*Наћи cos 54⁰ 20′.*</u>

$\log\ \cos\ 54^0 20' = \overline{1},76572$, а $\cos\ 54^0 20' = N\overline{1,76572} = 0{,}58307\ldots$

4) <u>*Наћи tg 70⁰ 35′ 42″.*</u>

$\log\ tg\ 70^0 35'42'' = 0{,}45315$, а $tg\ 70^0 35' 42'' = N\overline{0,45315} = 2{,}8388\ldots$

С) Изналажење угла кад је познат логаритам неке његове функције. — Да бисмо нашли угао када је познат логаритам неке његове функције, треба најпре да сравнимо дати логаритам са логаритмом исте функције угла од 45⁰. Ово је потребно ради сазнања да ли је тражени угао већи или мањи од 45⁰. Треба, дакле, дати логаритам да сравнимо са $\overline{1},84949$, који је број логаритам синуса и косинуса угла од 45⁰, или са *О*, колики је логаритам тангенса и котангенса истог угла.

I случај. — Ако се зна логаритам синуса неког угла, онда, да бисмо нашли угао, треба да упоредимо дани логаритам са бројем $\overline{1},84949$. Ако је дани логаритам мањи од овога броја, значи да је тражени угао мањи од 45⁰, јер мањем логаритму одговара мањи синус, а мањем синусу мањи угао. Напротив, ако је дани логаритам већи од $\overline{1},84949$, значи да је тражени угао већи од 45⁰, јер већем логаритму одговара већи синус, а већем синусу већи угао. Тако, ако је $\log \sin x = \overline{1},42756$, онда је $\sin x < \sin 45^0$, јер је $\overline{1},42756 < \overline{1},84949$, па је стога $x < 45^0$. Према томе, непознати угао *x* треба тражити одозго наниже, а његов логаритам у колони где горе пише „sinus“. Ако се дани логаритам налази у тој колони, онда угао *x* има само степене и минуте. Ако се дани логаритам не налази у колони, значи да угао *x*, поред степена и минута, има још и секунде. У овом случају налазимо у синусној колони најближи мањи логаритам даном логаритму, узимамо њему одговарајуће степене и минуте, а секунде израчунавамо, када разлику између данога и приближно мањега логаритма (поправку *P*) помножимо најпре са 60, а затим добивени производ поделимо табличком диференцијом. $\left(\text{Из}\ \ P = \dfrac{D\cdot S}{60}\ \ \text{излази}\ S = \dfrac{60\,P}{D}\right)$.

Примери:

1) <u>*Наћи угао x чији је log sin x = $\overline{1}$,58924.*</u>

Овде је $x < 45^0$, па се дани логаритам тражи у синусној колони одозго.

$x = arcus$-у чији је $\log \sin\ \overline{1},58924 = 22^0 51'10''$

Приближно мањи $\overline{1},58919$

$$P = 5\,,\quad D = 30;\quad S = \frac{5\cdot 60}{30} = 10''.$$

2) *Наћи угао x чији је $\log \sin x = \bar{1},94256$.*

Овде је $x > 45^0$, па се дани логаритам тражи у синусној колони одоздо

$x = arcus$-у, чији је $\log \sin \bar{1},94256 = 61^0\, 10'34''$

$$\frac{-52}{P = 4,} \quad D = 7; \quad S = \frac{4 \cdot 60}{7} = 34''.$$

3) *Наћи x, када је* $\sin x = \frac{3}{5}$.

Тада је $\log \sin x = \log 3 - \log 5 = \bar{1},77815$.

Овде је $x < 45^0$, па се дани логаритам тражи у синусној колони одозго.

$x = arcus$-у, чији је $\log \sin \bar{1},77815 = 36^0 52'11''$

$$\frac{-12}{P = 3,} \quad D = 17; \quad S = \frac{3 \cdot 60}{17} = 11''.$$

II случај. — Ако је дат логаритам тангенса неког угла, онда, да бисмо нашли угао поступамо исто као у претходном случају с том разликом што дани логаритам упоређујемо са O, која је $\log tg\, 45^0$ и што га тражимо у тангентној колони.

Примери:

1) *Наћи угао x чији је $\log tg\, x = 0,52347$.*

Овде је $x > 45^0$, па се дани логаритам тражи у тангентној колони одоздо.

$x = arcus$-у, чији је $\log tg\; 0,52347 = 73^0\, 19'20''$

$$\frac{-32}{P = 15,} \quad D = 46; \quad S = \frac{15 \cdot 60}{46} = 20''.$$

2) *Наћи угао x чији је $\log tg\, x = \bar{1},52348$.*

Како је број $\bar{1},52348$, као негативан, мањи од O, то је $x < 45^0$, па се дани логаритам тражи одозго.

$x = arcus$-у, чији је $\log tg\; \bar{1},52348 = 18^0 27'31''$

$$\frac{-26}{P = 22,} \quad D = 42; \quad S = \frac{22 \cdot 60}{42} = 31''.$$

3) *Наћи угао x, када је $tg\, x = 0,25$.*

Тада је $\log tg\, x = \log 0,25 = \bar{1},397\,94$. Овде је $x < 45^0$.

$x = arcus$-у, чији је $\log tg\; \bar{1},39794 = 14^0\, 2'\, 10''$

$$\frac{-85}{P = 9,} \quad D = 53; \quad S = \frac{9 \cdot 60}{53} = 10''.$$

III случај. — Ако је дат логаритам косинуса неког угла, онда, да бисмо нашли непознати угао, упоређујемо дани логаритам са $\bar{1},84949$, који је једнак логаритму $\cos 45^0$. Ако нађемо да је дани логаритам већи од овога броја, значи да је тражени угао мањи од 45^0, јер већем косинусу одговара мањи угао. Ако нађемо да је дани логаритам мањи од $\bar{1},84949$, значи да је тражени угао већи од 45^0, јер мањем логаритму одговара мањи косинус, а мањем косинусу већи угао. Ако се дани логаритам не налази у косинусној колони, значи да тражени угао, поред степена и минута, има још и секунде. У овоме случају у колони за косинус налазимо најпре најближи већи логаритам, узимамо њему одговарајуће степене и минуте, а секунде израчунавамо када разлику између приближно већега и данога логаритма (поправку P) помножимо најпре са 60, а затим добивени производ делимо табличком диференцијом.

Примери:

1) *Наћи угао x чији је $\log \cos x = \bar{1},85323$.*

Како је $\bar{1},85324 > \bar{1},84949$, то је $\cos x > \cos 45^0$, па је угао $x < 45^0$. Стога дани логаритам тражимо у косинусној колони одозго и узимамо непосредно већи.

$$\overset{36}{}$$

$x = arcus$-у чији је $\log \cos \bar{1},853\,24 = 44^0\, 29'\, 55''$

$$P = 12, D = 13; S = \frac{12 \cdot 60}{13} = 55''.$$

2) *Наћи угао x чији је $\log \cos x = \bar{1}.79948$.*

Овде је $x > 45^0$, па се дани логоритам тражи у косинусној колони одоздо.

$$\overset{50}{}$$

$x = arcus$-у чији је $\log \cos \bar{1},79948 = 50^0\, 56'8''$

$$P = 2, D = 16; \; S = \frac{2 \cdot 60}{16} = 8''.$$

3) *Наћи угао x, кад је* $\cos x = \frac{7}{12}$.

Тада је $\log \cos x = \log 7 - \log 12 = \bar{1},76592$, а $x = 54^0\, 18'50''$.

IV случај. — Ако је дат логаритам котангенса, онда, да бисмо нашли угао, поступамо као у трећем случају, само са том разликом што дани логоритам упоређујемо са O, која је $\log cotg\, 45^0$, и што га тражимо у котангентној колони.

Примери:

1) *Наћи угао x чији је $\log cotg\, x = 0,25734$.*

Како је број 0,25734 $> O$, то је $cotg\ x > cotg\ 45^0$, па је $x < 45^0$ и тражи се дани логаритам у котангентној колони одозго.

44

$x = arcus$-у чији је $log\ \ cotg\ \ 0{,}25734 = 28^0\ 56'\ 20''$

$$P = 10,\ D = 30;\ S = \frac{10 \cdot 60}{30} = 20''.$$

2) *Наћи угао x чији је $log\ \ cotg\ \ x = \bar{1},42755$.*

Како је број 1,42755 < 0, то је $cotg\ x < cotg\ \ 45^0$, те је $x > 45^0$.

$x = arcus$-у чији је $log\ cotg\ \bar{1},42755 = 75^0\ \ 1'$.

3) *Наћи угао x, кад је $cotg\ x = 3\frac{5}{7}$.*

Овде је $log\ \ cotg\ x = log\ 26 - log\ 7 = 0{,}56938$, а $x = 15^0\ 4'\ 6''$.

Д) Задаци за вежбу:

Наћи у логаритамским таблицама:

1) $log\ \ sin\ \ 41^0\ 25'\ 35''$;
2) $log\ \ sin\ \ 72^0\ 19'\ 40''$;
3) $log\ \ cos\ \ 36^0\ 18'\ 50''$;
4) $log\ \ cos\ \ 65^0\ 55'\ 38''$;
5) $log\ \ tg\ \ 18^0\ 15'\ 55''$;
6) $log\ \ tg\ \ 80^0\ 40'\ 20''$;
7) $log\ \ cotg\ \ 26^0\ 13'\ 15''$;
8) $log\ \ cotg\ \ 68^0\ 25'\ 25''$;

Наћи угао x када је:

9) $log\ \ sin\ \ x = \bar{1},64356$;
10) $log\ \ sin\ \ x = \bar{1},92650$;
11) $log\ \ tg\ \ x = 0{,}87636$;
12) $log\ \ tg\ \ x = \bar{1},30313$;
13) $log\ cos\ x = 1{,}10647$;
14) $log\ cos\ x = \bar{1},97706$;
15) $log\ cotg\ x = 0{,}56424$;
16) $log\ cotg\ x = \bar{1},89343$;
17) $sin\ x = \sqrt{\frac{5}{6}}$;
18) $cos\ x = 0{,}7$;
19) $tg\ \ x = \frac{6}{5}$;
20) $tg\ \ x = 1\frac{8}{9}$;
21) $cotg\ \ x = 2{,}3$;
22) $tg\ \ x = sin\ 12^0\ 24'\ 44''$;
23) $cotg\ x = \frac{5}{6}$;
24) $sin\ x = cotg\ 72^0\ 5'\ 6''$.

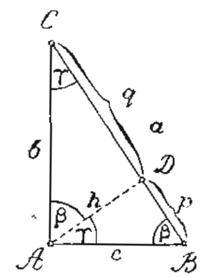
Наћи вредност функције:

25) $sin\ \ 20^0\ 36'\ 40''$; 26) $cotg\ \ 57^0\ 5'\ 25''$; 27) $cos\ \ 77^0\ 35'$; 28) $tg\ \ 44^0\ 15'$.

§ 119. — Решавање правоуглог троугла. — У параграфу 59 изнета су правила по којима решавамо правоугли троугао помоћу природних вредности гониометриских функција, а у овоме параграфу примењујемо иста правила, али употребом логаритама гониометриских функција.

I) Главни случајеви решавања правоуглог троуга

1) *Позната је хипотенуза $a = 53\ cm$ и катета $b = 40\ cm$; наћи остале елементе* (сл. 176).



Сл. 176

1) $sin\ \beta = \frac{b}{a} = \frac{40}{53}$; $log\ sin\ \beta = log\ 40 - log\ 53 = \bar{1},87778$; $\beta = 49^0$.

2) $\gamma = 90^0 - \beta = 41^0$. 3) $c = a\ sin\ \gamma$, или $c = a\ cos\ \beta$, или $c = b\ tg\ \gamma$, или $c = b \cdot cotg\ \beta$, или $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)\ (a-b)} = \sqrt{93 \cdot 13} = \sqrt{1209}$;

$$log\ c = \frac{log\ 1209}{2} = 1{,}54121;$$

$c = N\overline{1{,}54121} = 34{,}7732\ \ cm = 34{,}77\ cm$.

4) Из $\triangle ADC$ је: $q = b\ cos\ \gamma = 40 \cdot cos\ 41^0$; $log\ q = log\ 40 + log\ cos\ \ 41^0 = 1{,}47984$; $q = N\overline{1{,}47984} = 30{,}18\ cm$.

5) $p = a - q = 53 - 30{,}18 = 22{,}82\ cm$. 6) $h = b\ sin\ \gamma = 40 \cdot sin\ 41^0$; $log\ h = log\ 40 + log\ sin\ 41^0 = 1{,}41900$; $h = N\overline{1{,}41900} = 26{,}24\ cm$.

7) $P = \frac{bc}{2} = \frac{40 \cdot 34{,}77}{2} = 695{,}40\ cm^2$.

2) *Позната је хипотенуза $a = 122\ cm$ и угао $\gamma = 42^0 15' 35''$; наћи остале елементе* (сл. 176).

1) $\beta = 90^0 - 42^0\ 15'\ 35'' = 47^0\ 44' 25''$. 2) $b = a\ sin\ \beta = 125 \cdot sin\ 47^0\ 44'\ 25''$;

$$log\ b = log\ 125 + log\ sin\ 47^0\ 44'\ 25'' = 1{,}96620.$$

$b = N\overline{1{,}96620} = 92{,}5\ cm$. 3) $c = a\ sin\ \gamma = 125 \cdot sin\ 42^0\ 15' 35''$;

$$log\ c = log\ 125 + log\ sin\ 42^0\ 15'\ 35'' = 1{,}92460;$$

$$c = N\overline{1{,}92460} = 84{,}06\ cm.$$

Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

3) *Позната је катета $b = 22\ cm$ и угао $\beta = 35^0\ 50'$; наћи остале елементе* (сл. 176).

1) $\gamma = 90^0 - \beta = 54^0\ 10'$. 2) $c = b \cdot tg\ \gamma = 22 \cdot tg\ 54^0\ 10'$; $log\ c = log\ 22 + log\ tg\ 54^0\ 10' = 1{,}48382$; $c = N\overline{1{,}48382} = 30{,}47$.

3) Из $b = a\ sin\ \beta$ имамо $a = \frac{b}{sin\ \beta} = \frac{22}{sin\ 35^0\ 50'}$;

$log\ a = log\ 22 - log\ sin\ 35^0\ 50' = 1{,}34242 - \bar{1},76747 = 1{,}57495$; $a = N\overline{1{,}57495} = 37{,}57\ cm$.

Остале елементе израчунавамо као у првом случају.

4) *Позната је катета $b = 8\ cm$ и катета $c = 6\ cm$; наћи остале елементе* (сл. 176).

1) $tg\,\beta = \frac{b}{c} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$; $log\,tg\,\beta = log\,4 - log\,3 = 0{,}12494$; $\beta = 53^0\,7'\,48''$.

2) $\gamma = 90^0 - \beta = 36^0\,52'\,12''$. 3) Хипотенузу a можемо израчунати из једне од једначина: $b = a\,sin\,\beta$, $b = a\,cos\,\gamma$, $c = a\,sin\,\gamma$ и $c = a\,cos\,\beta$, али је најподесније у овом случају израчунати је по Питагорином правилу. Овде је:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10\ cm.$$

Остале елементе налазимо као у првом случају.

Напомена. — При израчунавању непознатих елемената препоручује се да се за те елементе нађу изрази који претстављају њихове величине, а у којима постоје дати елементи.

II. Споредни случајеви решавања правоуглог троугла. — То су случајеви решавања правоуглог троугла, када је познат један главан (страна или угао) и један споредан елеменат, или два споредна елемента. Сви ти случајеви своде се на један од главних случајева, чим нађемо, применом планиметриских и тригонометриских теорема, два главна елемента.

1) *Позната је хипотенуза a и висина h; наћи остале елементе* (сл. 176). — Ако је отсечак $q = x$, онда је $x : h = h : (a - x)$. Одавде је $x = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4h^2}\right)$ (Узми решење које је $< a$, а веће одбаци). Затим из пропорције $a : b = b : q$ имамо $b = \sqrt{aq}$ и тиме се задатак своди на први главни случај.

2) *Дата је једна катета (b) и неналегли отсечак (p).* — Из пропорције $a : b = b : q$, или $a : b = b : (a - p)$ имамо: $a = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 + 4\,b^2}\right)$. Узми у обзир решење $a < p$, а после се задатак своди на први главни случај.

3) *Дати су отсечци p и q.* — Тада је хипотенуза $a = p + q$, а затим из пропорције $a : b = b : q$ имамо $b = \sqrt{aq} = \sqrt{(p+q)\,q}$, чиме се задатак опет своди на први главни случај.

4) *Дата је висина h и површина P.* — Из $P = \frac{ah}{2}$ имамо $a = \frac{2P}{h}$, а из пропорције $p : h = h : (a - p)$ имамо $p = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4h^2}\right)$ [Узми само $p < a$]. Најзад из $tg\,\beta = \frac{p}{h}$ налазимо β, чиме се задатак своди на други главни случај.

5) *Дата је површина P и један оштар угао (β).* — Тада је $\gamma = 90^0 - \beta$, а из $P = \frac{bc}{2} = \frac{b^2 tg\gamma}{2}$ (пошто је $c = b\,tg\gamma$) имамо $b = \sqrt{\frac{2P}{tg\gamma}}$, чиме се задатак своди на трећи главни случај.

Напомена. — Остали споредни случајеви јесу, кад се зна: 6) хипотенуза a и један отсечак (p или q); 7) хипотенуза a и површина P; 8) једна катета и належни отсечак хипотенузин (b и q, или c и p); 9) једна катета (b или c) и висина h; 10) једна катета и површина; 11) један отсечак (p или q) и један оштар угао (β или γ); 12) висина h и један отсечак (p или q); 13) висина h и један оштар угао (β или γ). Сви ови случајеви своде се на један од главних, а лакши су од показаних споредних случајева. Код правоуглог троугла постоје још и елементи R и r (полупречници описаног и уписаног круга), за које знамо да су $R = \frac{a}{2}$ и $r = \frac{P}{s}$ (s полуобим троугла), а исто тако и тежишне линије $t_{(a)}$, $t_{(b)}$ и $t_{(c)}$, које елементе израчунавамо по обрасцима наведеним у § 79 под c).

III) Задаци за вежбу

1) Решити правоугли троугао када су познате: a) хипотенуза 237,5 m, а катета 194,35 m; b) хипотенуза 150,25 m и један оштар угао $62^0\,25'\,40''$; c) катете 320 и 280 m; d) једна катета 89 m и један оштар угао $52^0\,7'\,45''$.

2) Решити правоугли троугао (сл. 176) када су познате: a) хипотенуза $a = 25\ m$ и отсечак $p = 9\ m$; b) хипотенуза $a = 275\ m$ и површина $P = 24750\ m^2$; c) катета $b = 28\ m$ и отсечак $q = 17\ m$; d) катета $c = 325\ m$ и висина $h = 280\ m$; e) катета $c = 50\ m$ и површина $P = 1500\ m^2$; f) отсечак $q = 17\ m$ и угао $\beta = 57^0\,30'\,50''$; g) висина $h = 13\ m$ и отсечак $p = 12\ m$; h) висина $h = 38\ m$ и угао $\beta = 40^0\,35'\,50''$; i) висина $h = 8 m$ и површина $P = 72\ m^2$; j) отсечци $q = 8\ m$ и $p = 7\ m$; k) катета $b = 92\ m$ и отсечак $p = 37\ m$; l) хипотенуза $a = 10\ m$ и висина $h = 4{,}8\ m$.

3) Израчунати углове правоуглог троугла, када је размера катета 6 : 7.

4) Решити правоугли троугао када је: a) хипотенуза $a = 27\ m$ а $\beta : \gamma = 3 : 5$; b) катета $b = 58\ m$ а $\beta : \gamma = 6 : 7$; c) хипотенуза $a = 10\ m$, а размера катета $b : c = 4 : 3$; d) збир катета 14, а размера катета 4 : 3; e) катета $b = 80\ m$, а размера друге катете и хипотенузе 3 : 5; f) обим 24 m а површина 24 m^2.

5) Наћи углове ромба чије су дијагонале 16 m и 12 m.

6) Решити равнокраки троугао код кога је: a) основица 72 m и угао на врху $53^0\,17'\,40''$; b) основица 2,75 m а угао на основици $55^0\,35'\,40''$; c) крак 6,2 m и угао на основици $43^0\,12'\,15''$; d) основица 47 m а крак 59 m.

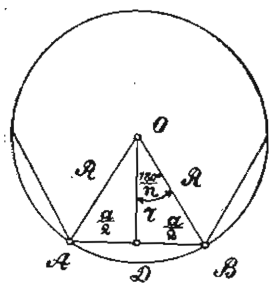
7) Решити равнокраки троугао код кога је: a) основица 32 m а њена висина 24 m; b) основичина висина 12 m и угао на врху $40^0\,7'\,52''$; c) висина крака 10 m и угао на врху $53^0\,13'\,40''$.

8) Решити равнокраки троугао код кога је: a) основица 54 m а површина 2160 m^2; b) висина основице 60 m, а површина 1800 m^2; c) висина крака 15 m, а површина 300 m^2; d) површина 2600 m^2 а угао на основици $82^0\,13'\,28''$; e) крак 50 m а његова висина 30 m; f) крак 580 m а основичина висина 340 m.

9) Код ромба је обим 40 m и једна дијагонала 16 m; наћи његове углове и другу дијагоналу.

§ 120. — Решавања код правилних полигона. — Када центар описаног, односно уписаног круга, код правилног n-тоугла спојимо са његовим теменима, полигон се дели на онолико равнокраких троуглова колики је број његових страна. Сви су ти троуглови подударни. Крак ма кога од тих троуглова је у ствари полупречник R описаног круга, основица је страна правилног полигона, а висина основичина је полупречник r уписаног круга у полигону. Угао на темену једнога од тих троуглова увек је познат и једнак $\frac{360^0}{n}$, где n значи број страна правилног полигона (сл. 325). Стога се решавања код правилних многоуглова своде на решавања код равнокраког троугла, односно правоуглог троугла, пошто r дели равнокраки троугао ABO на два правоугла троугла, чије су катете $\frac{a}{2}$ и r, хипотенуза R и један оштар угао (код врха O) $\frac{180^0}{n}$.

Код задатака из правилних многоуглова познат је ј дан од елемената: a (страна), R (полупречник описаног круга), r (полупречник уписаног круга), и P (површина), а траже се остали елементи. Један је елеменат довољан зато што је увек познат број страна n и угао код средишта $\frac{360^0}{n}$.



Сл. 325

Стога код правилних полигона имамо само четири случаја решавања, и то:

1) *Дата је страна a правилног n-тоугла; наћи полупречник описаног и уписаног круга, R и r, и површину P* (сл. 325). — Из правоуглог троугла BDO имамо:

1) $\frac{a}{2} = R \sin\frac{180^0}{n}$, а $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}$.

2) $\frac{a}{2} = r \cdot tg\frac{180^0}{n}$, а $r = \frac{a}{2\,tg\frac{180^0}{n}}$; и

3) $P = \frac{nar}{2} = \frac{na}{2}\cdot\frac{a}{2\,tg\frac{180^0}{n}} = \frac{na^2}{4\,tg\frac{180^0}{n}}$.

2) *Познат је полупречник R једног круга; наћи страну уписаног правилног n-тоугла, полупречник уписаног круга у томе многоуглу и површину многоугла* (сл. 325). — Из правоуглог троугла BDO имамо:

1) $\frac{a}{2} = R\sin\frac{180^0}{n}$, а $a = 2R\sin\frac{180^0}{n}$; 2) $r = R\cos\frac{180^0}{n}$;

и 3) $P = \frac{nar}{2} = \frac{n}{2}\cdot 2R\sin\frac{180^0}{n}\cdot R\cos\frac{180^0}{n} = nR^2\sin\frac{180^0}{n}\cdot\cos\frac{180^0}{n}$.

3) *Познат је полупречник једног круга r; наћи страну описаног правилног n-тоугла, његову површину P и полупречник R описаног круга око тог многоугла* (сл. 325). — Из правоуглог троугла BDO имамо:

1) $\frac{a}{2} = r\cdot tg\frac{180^0}{n}$, или $a = 2r\,tg\frac{180^0}{n}$; 2) $r = R\cos\frac{180^0}{n}$,

а $R = \frac{r}{\cos\frac{180^0}{n}}$; и 3) $P = \frac{nar}{2} = \frac{nr}{2}\cdot 2r\,tg\frac{180^0}{n} = n r^2\,tg\frac{180^0}{n}$.

4) *Позната је површина правилног n-тоугла; наћи његову страну a и полупречнике описаног и уписаног круга, R и r* (сл. 325).

1) Из $P = \frac{na^2}{4\,tg\frac{180^0}{n}}$ имамо $a = 2\sqrt{\frac{P}{n}\ tg\frac{180^0}{n}}$;

2) Из $P = nR^2\sin\frac{180^0}{n}\cos\frac{180^0}{n}$ имамо $R = \sqrt{\frac{P}{n\sin\frac{180^0}{n}\cos\frac{180}{n}}}$;

и 3) Из $P = nr^2 tg\frac{180^0}{n}$ имамо

$$r = \sqrt{\frac{P}{n\,tg\frac{180^0}{n}}} = \sqrt{\frac{P}{n}\cdot cotg\frac{180^0}{n}}.$$

Бројни примери:

1. $n = 8$, $a = 35\,cm$;
2. $n = 12$, $a = 17\,cm$;
3. $n = 10$, $a = 15\,cm$;
4. $n = 12$, $R = 20\,cm$;
5. $n = 15$, $R = 18\,cm$;
6. $n = 20$, $R = 38\,cm$;
7. $n = 9$, $r = 12\,cm$;
8. $n = 14$, $r = 50\,cm$;
9. $n = 10$, $P = 1800\,cm^2$;
10. $n = 12$, $P = 2700\,m^2$.

ДЕСЕТИ ОДЕЉАК

РОГЉАСТА ТЕЛА—ПОЛИЕДРИ

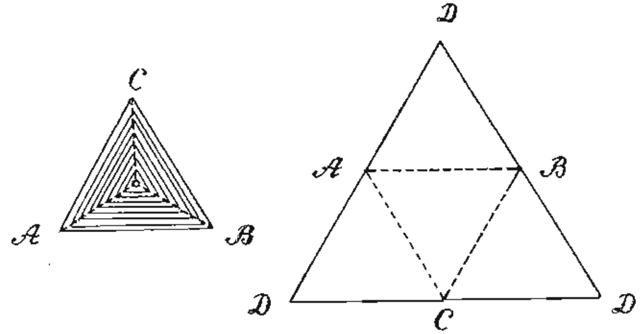
§ 121. — **О телима уопште.** — Део простора ограничен са свију страна зове се тело. Свако је тело ограничено површинама. Према томе да ли је тело ограничено само равним површинама, једном кривом површином, или кривим и равним, тела делимо на *рогљаста* и *ваљкаста*. Рогљасто је тело ограничено само равним површинама, а ваљкасто је ограничено једном кривом, или кривим и равним површинама. Тако, коцка спада у рогљаста, а лопта и ваљак у ваљкаста тела. Код сваког рогљастог тела, које се зове још *полиедром*, разликујемо: *стране*, *ивице*, *темена* и *дијагонале*. Стране су површине које тело ограничавају, ивице су пресеци стра̂на тога тела; темена су пресеци ивица̂, чији број мора бити најмање три, а дијагонале јесу дужи које спајају два темена полиедра која се налазе на једној истој страни.

Под *површином* једног тела разумемо збир површина̂ свију његових страна којима је оно ограничено, а под *запремином* или *волуменом* разумемо величину простора обухваћеног његовим граничним површинама. Као јединица запреминске мере узима се *кубни метар* ($1\,m^3$), тј. коцка чија је ивица $1\,m$. Делови кубног метра јесу *кубни десиметар* ($1\,dm^3$), *кубни сантиметар* ($1\,cm^3$) и *кубни милиметар* ($1\,mm^3$).

Однос ових мера је: $1\,m^3 = 1000\,dm^3$, $1\,dm^3 = 1000\,cm^3$, $1\,cm^3 = 1000\,mm^3$.; $1\ l = 1\,dm^3$, $100\,l = hl$.

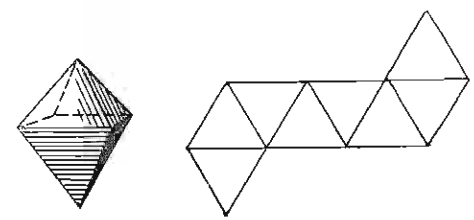
Сва рогљаста тела делимо на *правилна* и *неправилна*. Рогљасто тело је правилно, ако су му све стране подударне правилне равне слике, тј. ако су му све стране равне слике са једнаким странама и једнаким угловима (равнострани троуглови, квадрати, правилни многоугли). Најзначајнија рогљаста тела јесу: *призме* и *пирамиде*, а од облих јесу: *купе*, *облице* и *лопта*.

§ 122. — **Правилни полиедри.** — Како су правилни полиедри ограничени подударним равним правилним сликама, то су ивице ових полиедара једнаке. Број правилних полиедара је

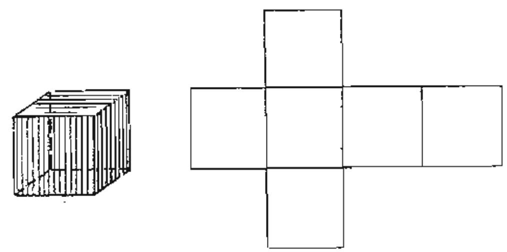


Сл. 326

свега *пет*, и то: *тетраедар* (сл. 326), *октоедар* (сл. 327), *икосаедар* (сл. 329), *хексаедар* или *коцка* (сл. 328), и *додекаедар* (сл. 330). Прва три тела ограничена су с а м о равностраним троугловима, и то: тетраедар са четири, октоедар са осам, а икосаедар са двадесет равностраних троуглова. Хексаедар или коцка ограничен је са 6 квадрата, а додекаедар са 12 правилних петоуглова. Мреже ових тела нацртане су поред њих.

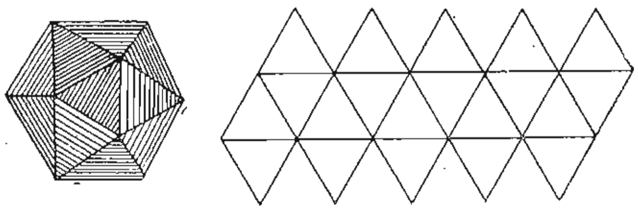


Сл. 327



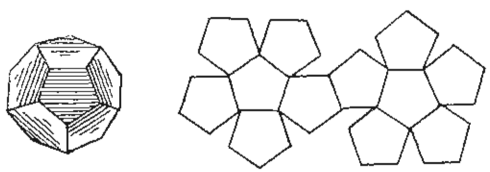
Сл. 238

Број ивица код тетраедра је 6, код октоедра 12, код икосаедра 30, хексаедра 12, а код додекаедра 30. Да број правилних полиедара не може бити већи од пет, уверавамо се употребом теореме 168, по којој је збир ивичних углова једнога рогља мањи од 360° и да најмање три стране дају рогаљ. Имајући ово у виду, може се од равностраних троуглова, код којих је сваки угао по 60^0, склопити рогаљ само са по три, четири и пет троуглова код сваког темена, јер је само $3 \cdot 60^0$, $4 \cdot 60^0$ и $5 \cdot 60^0$ мање од 360^0. Према овоме, могу постојати само



Сл. 329

три правилна полиедра ограничена равностраним троугловима, и то: тетраедар са по три, октоедар са по четири и икосаедар са по пет ивичних углова од по 60^0 код сваког темена. Хексаедар је једино тело ограничено квадратима, и то по три код сваког темена, јер је само $3 \cdot 90^0 < 360^0$. Не постоји друго тело ограничено квадратима, јер ако замислимо да постоји



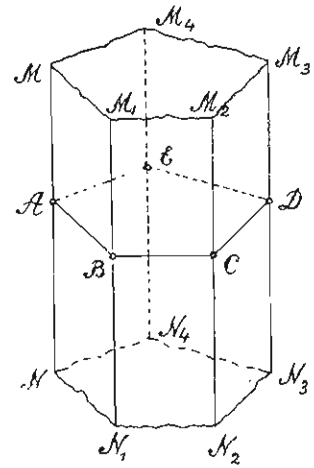
Сл. 330

такво тело са по 4 права угла код сваког темена, онда је $4 \cdot 90^0 = 360^0$, а не мање од 360^0. Тако исто додекаедар је једино тело ограничено правилним петоугловима, и то по три угла код сваког темена, јер је само $3 \cdot 108^0 < 360^0$.

Не постоји друго тело ограничено правилним петоугловима, а по 4 код сваког темена, јер је $4 \cdot 108^0 > 360^0$. Тако исто не постоји ни једно правилно тело ограничено правилним шестоугловима, седмоуговима итд., јер, како је потребно најмање три стране код сваког рогља, а један угао код правилног 6-угла износи 120^0, код правилног 7-угла $125\frac{5^0}{7}$, код правилног осмоугла 135^0 итд., сваки од производа: $3 \cdot 120^0$, $3 \cdot 125\frac{5^0}{7}$, $3 \cdot 135^0$,.... већи је од 360^0.

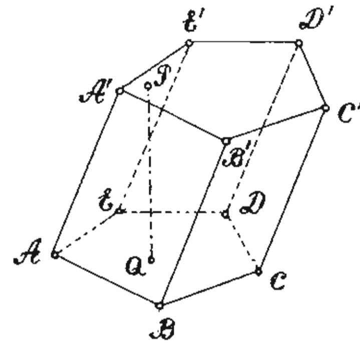
I. ПРИЗМЕ

§ 123. — Постанак и врсте призама. — Ако се права MN (сл. 331) креће транслаторно по обиму праволиниске равне слике $ABCDE$, па дође понова у свој првобитни положај, онда даје простор који је наоколо затворен равним површинама, а са две стране отворен. Такав простор зове се *призматичан*. Права MN зове се *изводница*, а обим слике $ABCDE$ зове се *водиља*. Кад се призматичан простор пресече двема паралелним равнима које секу све могуће положаје изводнице, добија се тело које се зове *призма*.



Сл. 331

Призма је, дакле, рогљасто тело код кога су две супротне стране подударни и паралелни полигони, а са стране ограничено је паралелограмима (сл. 332). Паралелни пресеци $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ зову се *основе* или *базиси* призме. Код сваке призме основе су подударне равне слике. Остале граничне површине: $ABA'B'$, $BCC'B'$,... зову се *бочне стране*. Оне су код свију призама паралелограми. Код једне призме разликујемо двојаке ивице: *основне* и *бочне*. Прве су пресеци основа са бочним странама, а друге су пресеци бочних страна. Све су бочне ивице једнаке.



Сл. 332

На сл. 332 бочне су ивице: AA', BB', CC', DD' и EE', а основне су: AB, BC, CD, DE и AE на доњој основи, а $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$ и $A'E'$ на горњој. Раздаљина PQ између основа призме јесте *висина* призме.

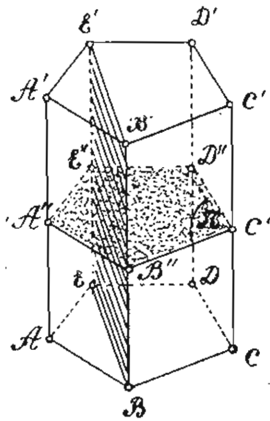
Према броју бочних ивица, или према облику базиса, призме делимо на: *тростране*, *четворостране*, *петостране* итд., а према томе да ли су бочне ивице управне или косе према базисима, призме делимо на *праве* и *косе*. Код праве призме бочне су стране правоугли паралелограми, а код косе косоугли. Код праве призме висина је увек једнака бочној ивици, а код косе мања је од бочне ивице.

Према томе да ли су основе једне призме правилне или неправилне слике, призме делимо на *правилне* и *неправилне*. Правилна је, дакле, она призма чије су основе правилни полигони (равнострани троугао, квадрат, правилан петоугао итд.). Према овоме, једна призма може бити: правилна и права, правилна и коса, неправилна а права, и неправилна и коса. Од свију разних врста призама најглавнију улогу имају призме *паралелопипеди*. То су призме чије су основе паралелограми. Ако је основа правоугли паралелограм (квадрат, правоугаоник), паралелопипед се зове *правоугли*, а ако је основа косоугли паралелограм (ромб, ромбоид), онда је паралелограм *косоугли*. И паралелопипеди, као и остале призме, могу бити: прави, коси, правилни и неправилни. Код правилног и правог паралелопипеда, бочне су стране подударни правугаоници, а код правог паралелопипеда, чија је основа правоугаоник, једнаке су само супротне бочне стране, које су такође правоугаоници. Под *димензијама* једнога правоуглога правог паралелопипеда разумемо три његове ивице које се стичу у једно теме, тј. дужину, ширину и висину његову. *Коцка* је правилан и прав правоугли паралелопипед чије су све ивице једнаке.

§ 124. — Особине призама. — Опште и посебне особине призама исказане су помоћу ових теорема:

Теорема 176. — **Када се призма пресече равнином паралелном основама, добија се пресек подударан основама.** — Нека је раван $\pi \parallel ABCDE$ (сл. 333). Тада је на основу теореме 140 (§ 108): $A''B'' \parallel AB$, $B''C'' \parallel BC$, $C''D'' \parallel CB$, $D''E'' \parallel DE$ и $A''E'' \parallel AE$. Стога су: $ABB''A''$, $BCC''B''$, $CDD''C''$,... паралелограми, те је: $AB = A''B''$, $BC = B''C''$, $CD = C''D''$ итд. Па како су једнаки и углови: A и A'', B и B'', C и C'', D и D'', E и E'', према теореми 143, то је заиста пресек $A''B''C''D''E''$ подударна слика са основама.

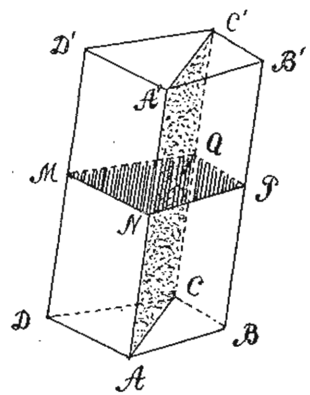
Последица. — Кад се призма пресече двема паралелним равнима које секу све њене бочне ивице, онда су пресеци подударне слике, ако су обе равне повучене паралелно са равнима базиса. Ти су пресеци заиста подударни, јер је сваки од њих подударан базису.



Сл. 333

Напомена. — Осим паралелних пресека код једне призме имамо и *управних пресека*, а код четворострaних и многостраних призама и *дијагоналних пресека*. Управни пресек добивамо када призму пресечемо равнином управном на бочне ивице, а сече све те ивице. Такви су пресеци $A''B''C''D''E''$ (сл. 333) и $MNPQ$ (сл. 334). Дијагонални пресек добијамо када раван прелази кроз две неузастопне бочне ивице. Такви су пресеци $BEE'B'$ (сл. 333) и $ACC'A'$ (сл. 334). Дијагонални пресек код призама је увек паралелограм, чије су две супротне стране бочне ивице призмине, а остале јесу две одговарајуће дијагонале обеју основа. Код праве призме, свака основа и сваки њој паралелни пресек, јесу управни пресеци. Два или више управних пресека једне призме јесу увек подударни полигони, пошто имају једнаке по две и две одговарајуће стране и по два и два одговарајућа угла.

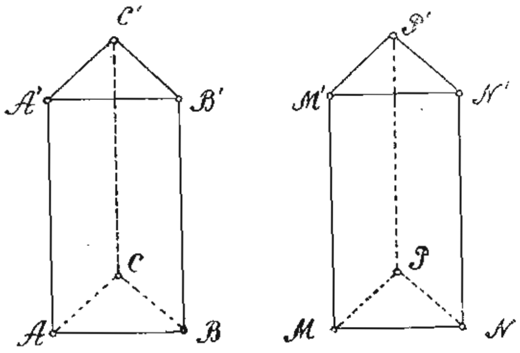
Теорема 177. — **Бочна површина једне призме једнака је производу од њене бочне ивице и обима једног њеног управног пресека.** — Нека је $MNPQ$ (сл. 334) један управни пресек косе призме $ABCDA'B'C'D'$. Како је бочна страна $ABB'A'$ паралелограм, чије су стране AA' и BB' управне на раван $MNPQ$, то су те стране управне и на NP. Стога је NP висина бочног паралелограма $ABB'A'$. Исто тако нашли бисмо да су MN, PQ и MQ висине осталих бочних страна. Тада је бочна површина $M = AA' \cdot NM + BB' \cdot NP + CC' \cdot PQ + DD' \cdot MQ$, или $M = AA' \cdot NM + AA' \cdot NP + AA' \cdot PQ + AA' \cdot MQ = AA'(NM + NP + PQ + MQ)$. Ако са O означимо обим управног пресека, а са s бочну ивицу, онда је бочна површина ма које призме $\boldsymbol{M = O \cdot s}$.



Сл. 334

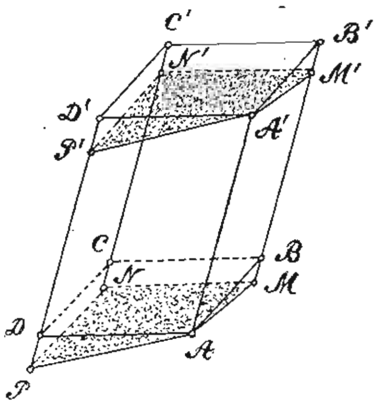
Како је код сваке праве призме базис један управни пресек, онда је бочна површина праве призме једнака производу од обима базиса и бочне ивице.

Теорема 178. — **Две праве призме које имају подударне базисе и једнаке висине јесу једнаке.** — Нека призме на сл. 335 имају подударне базисе и једнаке висине. Ако другу призму пренесемо на прву, онда им се базиси ABC и MNP поклапају а тако исто им се поклапају и бочне ивице: AA' и MM', BB' и NN', CC' и PP', пошто су управне на базису, а све су једнаке. Призме се, дакле, потпуно поклапају, па су једнаке запремине.



Сл. 335

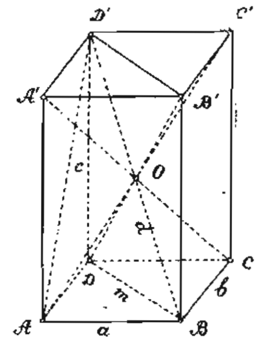
Теорема 179. — **Свака коса призма једнака је оној правој призми чији је базис једнак управном пресеку косе призме, а висина јој је једнака бочној ивици косе призме.** — Ако се коса призма $ABCDA'B'C'D'$ (сл. 336) пресече двема паралелним равнима, које су управне на њене бочне ивице, а пролазе кроз крајње тачке A и A' једне од бочних ивица, онда добивени управни пресеци $AMNP$ и $A'M'N'P'$ јесу основе праве призме $AMNP$ и $A'M'N'P'$ чија је висина једнака бочној ивици AA'. Да бисмо доказали једнакост дате косе и добивене праве призме, довољно је доказати једнакост њихових делова $AMNPDCB$ и $A'M'N'P'D'C'B'$, пошто им је део $ABCDA'M'N'P'$ заједнички. Ти делови су једнаки, јер су у ствари две пресечене праве призме са једнаким основама $AMNP$ и $A'M'N'P'$ и једнаким бочним ивицама (теорема 178). Ови делови се потпуно поклапају, ако их ставимо један на други, пошто им се основе поклапају, а тако исто и ивице: PD са $P'D'$, NC са $N'C'$ и MB са $M'B'$. Па како додавањем ових делова заједничком делу $ABCDA'M'N'P'$ добијамо дату



Сл. 336

косу и добивену праву призму, то је заиста коса призма $ABCDA'B'C'D'$ једнака правој призми $AMNPA'M'N'P'$.

Теорема 180. — **У сваком паралелопипеду дијагонале се секу у једној тачци и узајамно се полове.** — Нека је $ABCD\,A'B'C'D'$ (сл. 337) један паралелопипед. Ако га пресечемо равнином која пролази кроз ивице AB и $D'C'$, добија се пресек $ABC'D'$, који је паралелограм и у коме су паралелопипедове дијагонале AC' и BD' једновремено и његове дијагонале. Стога се ове дијагонале заиста секу у истој тачци и узајамно се полове. Ако паралелопипед пресечемо равнином која пролази кроз ивице BB' и DD', добија се пресек паралелограм $BDD'B'$, чије су дијагонале BD' и DB' истовремено паралелопипедове дијагонале. Стога се и ове две дијагонале секу у тачци O и узајамно се полове. Како дијагонале DB' и AC' полове дијагоналу BD' значи да све ове три дијагонале пролазе кроз исту тачку O.



Сл. 337

Теорема 181. — **Код правоуглог паралелопипеда дијагонале су једнаке.** — Нека је паралелопипед $ABCDA'B'C'D'$ (сл. 337) правоугли. Тада су паралелограми $ABC'D'$ и $BB'D'D$ правоугаоници, чије се дијагонале поклапају са дијагоналама паралелопипеда. Па како су код правоугаоника дијагонале једнаке, то су једнаке и дијагонале правоуглог паралелопипеда.

Теорема 181. — **Код правоуглог паралелопипеда је квадрат једне дијагонале једнак збиру квадрата трију ивица које се стичу у једно теме.** — Нека је паралелопипед $ABCDA'B'C'D'$ (сл. 337) правоугли. Тада је $\triangle\, BDD'$ правоугли, те је $BD_1^2 = DD_1^2 + BD^2$, или $d^2 = c^2 + m^2$ (1). Па како је из правоуглог троугла $ABD: m^2 = a^2 + b^2$, то заменом у (1) m^2 са $a^2 + b^2$, добијамо: $\boldsymbol{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$, чиме је ова теорема доказана.

Како су код коцке све три ивице a, b и c једнаке, то је код коцке $d^2 = 3a^2$, а $\boldsymbol{d = a\sqrt{3}}$.

§ 125. — Израчунавање површине призама. — На основу теореме 177 претходног параграфа, бочну површину M ма које призме израчунавамо када обим управног пресека O

помножимо са бочном ивицом s. Па како је код праве призме управни пресек идентичан са базисом, то се површина омотача ма које праве призме израчунава када обим базиса помножимо дужином бочне ивице. Ако је права призма правилна, чији је базис један правилан n-тоугао стране a, онда је обим базиса $\boldsymbol{O = na}$, а бочна површина $\boldsymbol{M = Os = nas}$.

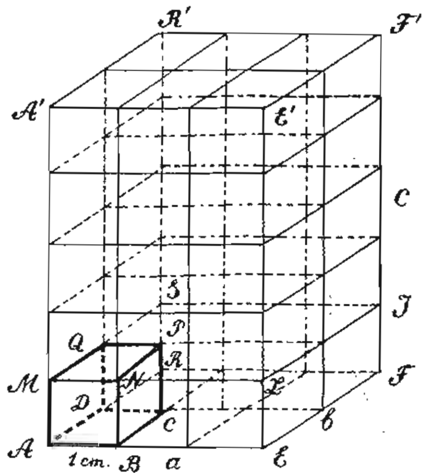
Па како је свака призма, поред омотача M, ограничена још и са два подударна базиса површине B, то је општи образац за површину P ма које призме:

$$\boldsymbol{P = 2B + M.}$$

§ 126. — Израчунавање запремина призама. — Израчунавање запремина призама оснива се на овим теоремама:

Теорема 182. — **Два тела постављена на једну раван имају једнаке запремине, ако су им пресеци са сваком паралелном равнином једнаки** *(Кавалеријево правило)*. — Ако замислимо да су оба тела паралелним равнима исечена на бесконачно много врло танких плочица, онда су оне по две и две једнаке. Стога морају и збирови тих плочица, тј. оба тела, бити једнаки, имати исту запремину.

Теорема 183. — **Запремина правоуглог правог паралелопипеда једнака је производу његових димензија.** — Ако замислимо да је m заједничка мера дужине $\boldsymbol{a}$, ширине $\boldsymbol{b}$ и висине $\boldsymbol{c}$ паралелопипеда на сл. 338, и ако се m садржава у a 3 пута, у b 2 пута, а у c 5 пута, онда повлачењем равнинâ кроз сваку деону тачку дужине паралелно бочној страни $EFE'F'$, затим повлачењем равнинâ кроз сваку деону тачку ширине паралелно страни $AEA'E'$, и најзад повлачењем равнинâ кроз сваку деону тачку висине паралелно с базисима, онда се запремина овог правоуглог паралелопипеда дели на коцке ивице m. Узимајући



Сл. 338

да је m 1 m, 1 dm, 1 cm,... ове су коцке кубни метри, кубни

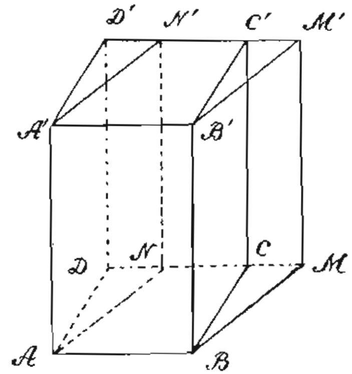
десиметри, кубни сантиметри итд. Па како у слоју $AEFRMLJS$ има 6 коцака, а у целом паралелопипеду има 5 таквих слојева, то се цела паралелопипедова запремина састоји од $5 \cdot 6 = 30$ коцака величине $ABCDMNPQ$, тј. од $30m^3$, 30 dm^3, 30 cm^3 итд., што зависи од тога да ли су димензије паралелопипеда дате у метрима, десиметрима, сантиметрима итд. До резултата 30 дошли бисмо, када мерне бројеве димензија помножимо, јер је $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$. Према овоме, запремина $\boldsymbol{V}$ правоуглог паралелопипеда дужине $\boldsymbol{a}$, ширине $\boldsymbol{b}$ и висине $\boldsymbol{c}$ једнака је

$$\boldsymbol{V = abc.}$$

Како је код овога паралелопипеда $ab = B$ и $c = H$, то је $\boldsymbol{V = BH}$, тј. запремина правоуглог паралелопипеда једнака је производу од површине базиса и паралелопипедове висине.

Како је код коцке $a = b = c$, то је код ње $V = a^3$, а одавде је $\boldsymbol{a = \sqrt[3]{V}}$.

Теорема 184. — **Сваки косоугли прав паралелопипед има једнаку запремину с правим правоуглим паралелопипедом истог (једнаког) базиса и висине.** — Нека је паралелопипед $ABCDA'B'C'D'$ (сл. 339) правоугли, а паралелопипед $ABMNA'B'M'N'$ косоугли, а оба да су прави. Како су њихови базиси паралелограми једнаких основица и висинâ, то су ти базиси једнаки (теорема 111, § 71). Оба ова паралелопипеда имају заједнички део $ABCNA'B'C'N'$, а њихови остаци призме: $ANDA'N'D'$ и $BMCB'M'C'$ јесу једнаке запремине, пошто имају подударне базисе и једнаке висине (теорема 178). Стога оба паралелопипеда јесу једнаке запремине. Па како је запремина правоуглог паралелопипеда $\boldsymbol{V = B \cdot H}$ према предходној теореми, а $B = B'$, где је B' површина базиса $ABMN$, то је и

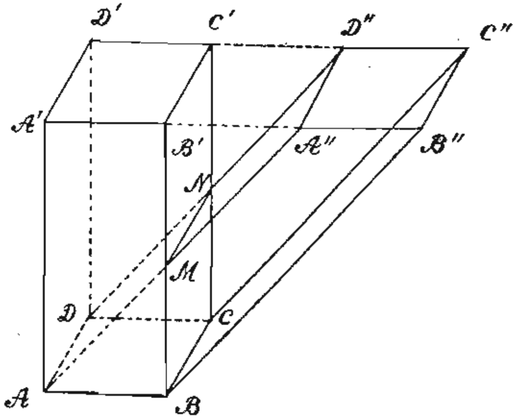


Сл. 339

запремина косоуглог правог паралелопипеда једнака производу од површине базиса и висине паралелопипедове $\boldsymbol{(V = B' \cdot H)}$.

Теорема 185. — **Сваки кос паралелопипед има једнаку запремину с правим паралелопипедом исте (једнаке) основице и висине.** Нека су паралелопипеди $ABCDA'B'C'D'$ и

$ABCDA''B''C''D''$ правоугли и то први прав а други кос



Сл. 340

(сл. 340), и нека ти паралелопипеди имају заједнички базис $ABCD$ и једнаке висине. Оба ова паралелопипеда имају заједнички део тространу призму $ABMDCN$ (њени су базиси ABM и DCN). Да бисмо доказали једнакост датих паралелопипеда, довољно је да докажемо једнакост њихових остатака: $A'B'C'D'AMND$ и $A''B''C''D''BCNM$. Једнакост ових остатака доказујемо помоћу једнакости тространих призама: $AA''A'DD''D'$ и $BB''B'CC''C'$, који су једнаке по запремини, пошто имају подударне базисе и једнаке висине (теорема 178). Када од ових двеју призама одузмемо њихов заједнички део тространу призму $MA''B'ND''C'$, њихови су остаци једнаки. А како су ови остаци у ствари остаци датих паралелопипеда, то је доказана једнакост остатака, а тиме и једнакост датих паралелопипеда. Исти је доказ када су дати паралелопипеди косоугли.

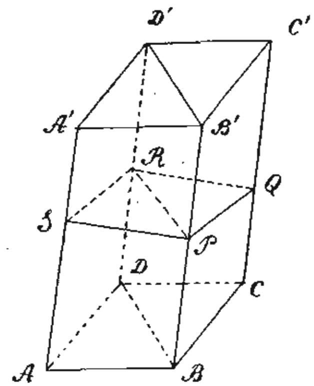
Па како је запремина V правога паралелопипеда једнака производу $B \cdot H$, то је запремина косог паралелопипеда, према овој теореми, једнака производу од његовог базиса и паралелопипедове висине.

На основу ове теореме, сви коси паралелопипеди једнаких базиса и висинâ имају једнаке запремине, пошто је сваки од њих једнак правом паралелопипеду истог базиса и висине.

Напомена. — Обе претходне теореме дају се згодно (брже и лакше) доказати помоћу Кавалеријевог правила. Овде су ови пресеци са паралелним равнима (базису) једнаки према теореми 111 (§ 71).

Теорема 186. — **Свака тространа призма половина је по запремини од паралелопипеда исте висине а чији је базис двапут већи од њеног базиса.** — Нека је дата тространа призма $ABDA'B'D'$ (сл. 341) и паралелопипед $ABCDA'B'C'D'$, који има

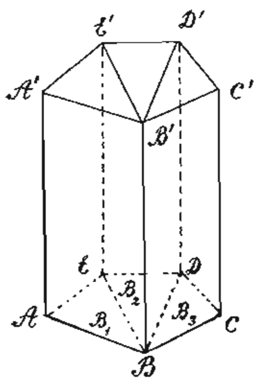
исту висину са тространом призмом, а базис $ABCD$ двапута је већи од базиса тростране призме (теорема 122, § 71). Дијагоналним пресеком $BDD'B'$ овај је паралелопед подељен на две једнаке тростране призме $ABDA'B'D'$ и $BCDB'C'D'$. Да су ове призме заиста једнаке, можемо се уверити на овај начин: 1) Ако је паралелопипед $ABCDA'B'C'D'$ прав, онда су и призме праве, а једнаке су по запремини, пошто имају једнаке базисе и исту висину (теорема 178). 2) Ако је овај паралелопипед кос, онда, пресеком паралелопипеда једном равнином управном на бочним ивицама, добијамо управни пресек $PQRS$, једнак збиру управних пресека PQR и PRS тространих призама. Тада је призма $ABDA'B'D'$ једнака правој призми чији је базис управни пресек PRS, а висина бочна ивица BB' (теорема 179), а призма $BCDB'C'D'$, на основу исте



Сл. 341

теореме, једнака је правој призми базиса PQR а висине BB'. Па како обе ове праве тростране призме имају једнаке базисе PRS и PQR и исту висину BB', то су оне једнаке запремине (теорема 178). Стога су и тростране косе призме $ABDA'B'D'$ и $BCDB'C'D'$ једнаке запремине. Па како обе ове призме дају паралелопипед $ABCDA'B'C'D'$, то је свака од њих половина паралелопипеда, чиме је ова теорема доказана. Ако је H заједничка висина паралелопипеда и тростране призме $ABDA'B'D'$, онда је запремина паралелопипеда $V = ABCD \cdot H$, а запремина тростране призме

$$V' = \frac{V}{2} = \frac{ABCD}{2} \cdot H = \triangle ABD \cdot H\,.$$



Сл. 342

Према овоме, и запремина тростране призме једнака је производу од површине базиса и њене висине. На основу ове теореме, све тростране призме једнаких базиса и висинâ јесу једнаке запремине.

Теорема 187. — **Запремина ма које призме једнака је производу од површине базиса и њене висине.** — Призма $ABCDE$ $A'B'C'D'E'$ (сл. 342) подељена је дијагоналним пресецима $BEE'B'$ и $BDD'B'$ на тростране призме исте висине H. Ако су површине базиса тространих призама B_1, B_2 и B_3, онда је запремина дате петостране призме:

$$V = B_1 H + B_2 H + B_3 H = (B_1 + B_2 + B_3) H = BH.$$

Истим путем бисмо нашли и запремину ма које n-тостране призме, па била она права или коса. Према овој теореми, све призме истог или једнаких базиса и висинâ јесу једнаке по запремини.

§ 127. — **Однос запремина код призама.** *Теорема 189.* — **Запремине двеју призама једнаких базиса а различитих висина имају се као висине.** — Нека је код прве призме базис B, висина H а запремина V, а код друге призме базис B, висина H' а запремина V'. Тада је $V = BH$ и $V_1 = B \cdot H'$. Деобом ових једначина добијамо:

$$V : V' = H : H'.$$

Теорема 190. — **Запремине двеју призама различитих базиса а једнаких висина имају се као и базиси.** — Нека је код прве призме базис B, висина H и запремина V, а код друге базис B', висина H и запремина V'. Тада је $V = B \cdot H$ и $V' = B' \cdot H$, Деобом ових једначина добијамо:

$$V : V' = B : B'.$$

Теорема 191. — **Запремине двају правих паралелопипеда различитих димензија имају се као производи њихових димензија.** — Ако први паралелопипед има димензије: a, b и c, а други: a', b' и c', а њихове запремине јесу V и V', онда је $V = abc$ и $V' = a'b'c'$. Деобом ових једначина добијамо:

$$V : V' = abc : a'b'c'.$$

За $a = a'$ биће $V : V' = bc : b'c'$; за $a = a'$ и $b = b'$ биће $V : V' = c : c'$.

На основу ове теореме, запремина двеју коцака различитих ивица имају се као кубови ивица. Заиста, ако су ивице коцака a и a_1, а запремине V и V', онда је $V = a^3$ и $V' = a_1^3$. Деобом ових једначина добијамо: $V : V' = a^3 : a_1^3$.

Напомена. — На основу теореме 190, запремине двеју правилних n-тостраних призама, основиних ивица a и a', а једнаких висина, имају се као квадрати основичиних ивица. Заиста је овде:

$$V : V' = B : B' = \frac{na^2}{4} \; cotg \; \frac{180^0}{n} : \frac{na_1^2}{4} \; cotg \; \frac{180^0}{n} = a^2 : a_1^2.$$

§ 128. — Задаци за вежбу из призама*)

I. Код коцке. — (a ивица, m дијагонала базиса, d дијагонала коцке, p површина дијагоналног пресека, P површина коцке, V запремина коцке).

1) Зна се једна од количина: a, m, d, p, P и V; наћи остале количине ($a = 3\,m\ 4\,dm\ 5\,cm$; $m = 7{,}05\,dm$; $d = 10{,}38\,m$; $p = 14{,}1\,m^2$, $P = 37{,}5\,m^2$; $V = 50{,}653\,m^3$).

2) Наћи површину и запремину коцке, кад је обим њеног дијагоналног пресека $S = 48{,}2\,m$.

3) Колика је тежина коцке, кад је њена ивица $a = 4{,}75\,cm$, а специфична тежина њене материје $S = 10{,}51$?

4) Наћи дијагонални пресек коцке тежине 620 gr, кад је специфична тежина њене материје $S = 12{,}5$.

5) Од $q\,gr$ једнога метала специфичне тежине s и $q'\,gr$ другог метала специфичне тежине s' саливена је коцка; колика је њена ивица?

6) Колика је ивица сребрне коцке тежине 1 kgr, када је специфична тежина сребра 10,51 ?

7) *Наћи угао нагиба коцкине дијагонале према базису.*

II. Из паралелопипеда

8) Наћи дијагоналу правоуглог паралелопипеда, чије су димензије 12, 15 и 16 cm (одговор: 25 cm).

9) Површина једног правоуглог паралелопипеда је 1714 m^2, а основне су му ивице 14 и 25; наћи бочну ивицу (одговор: 13 m).

10) Површина правилне и праве четворостране призме је 8928 cm^2, а бочна јој је ивица 44 cm; наћи основну ивицу (одговор: 36 cm).

11) Основна ивица правог паралелопипеда је ромб, чији је један угао 30^0, а површина му је 2025 cm^2. Наћи основну ивицу, када је висина 14 cm (одговор: 25 cm).

12) Бочна површина једне правилне и праве четворостране призме, основне ивице 5 cm, јесте 240 cm^2; наћи њену запремину (одговор: 300 cm^3).

13) Наћи димензије правоуглог правог паралелопипеда, чија је запремина 216 m^3, када се зна да је збир думензија 19 m, а једна је од њих средња геометриска пропорционала између других двеју.

14) Наћи запремину правоуглог паралелопипеда с квадратном основом, чија је основна ивица 3,2 dm а површина 52,48 dm^2.

15) Израчунај површину, запремину и површину дијагоналног пресека правог правоуглог паралелопипеда, кад му је размера његових ивица 3 : 2 : 5, а дијагонала бочне стране између дужине и висине $2\sqrt{33}\,cm$.

16) Размера димензија правог правоуглог паралелопипеда је 6 : 4 : 9, а запремина му је 1920 cm^3; израчунај ивице.

17) Израчунај површину и запремину правоуглог паралелопипеда, кад је збир његових ивица 74,4 cm, а њихова је размера 5 : 4 : 3.

18) Гомила дрва облика правоуглог правог паралелопипеда дужине је 12,40 m, ширине 4,30 m, а висине 6,5 m. Колико стера дрва има у тој гомили?

*) У овим задацима узимати ирационалне бројеве $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ према њиховим приближним вредностима: 1,41; 1,73; 2,236; и 2,4496. Задаци курзивом решавају се употребом тригонометриских функција.

19) Димензије једног правог правоуглог паралелопипеда имају се као 5 : 3 : 1, а површина му је 2254 cm^2. Наћи његову запремину (одговор: 5145 cm^3).

20) Основичине ивице једног правоуглог правог паралелопипеда јесу 25 и 14 cm, а површина му је 1714 cm^2. Наћи његову запремину (одговор: 4550 cm^3).

21) Површина правоуглог правог паралелопипеда је 3932 cm^2, запремина му је 16632 cm^3, а једна основна ивица 28 cm. Наћи његову бочну површину (одговор: 2700 cm^2).

22) Површина једне праве призме с квадратном основом је 800 m^3, а висина јој је 5 пута већа од основичине ивице; наћи њену запремину (одговор: 1500 m^3).

23) Санта леда облика правоуглог правог паралелопипеда плива на мору. Бочна ивица санте је 10,5 m, а основне су ивице 15,75 m и 20,45 m. Густина леда на 0° је 0,93 а морске воде 1,026. За колико метара тоне санта? (одговор: 9,517 m).

24) *Основне ивице једног косоуглог правог паралелопипеда јесу 15 и 20 cm а угао на основици 56° 18′. Наћи његову површину и запремину, када му је бочна ивица 30 cm.*

25) *Основна ивица једног правог паралелопипеда, који има за основу ромб, је 18 cm, а један угао на основици 50° 35′ 40″; наћи његову површину и запремину, када му је бочна ивица 25 cm.*

26) *Кос правоугли паралелопипед с квадратном основом има за основну ивицу 15 cm а за бочну 25 cm; наћи његову запремину, када му је бочна страна нагнута према базису под углом од 48° 50′.*

27) *Наћи угао нагиба дијагонале правоуглог правог паралелопипеда, чије су основне ивице 6 и 8 cm, а бочна ивица 15 cm.*

28) *Основна ивица косог паралелопипеда, чији је базис ромб, износи 12 cm. Кад је један угао базиса 55° 38′, а бочна ивица дужине 30 cm је нагнута према базису под углом од 62° 10′, израчунај запремину тога паралелопипеда.*

III. Из осталих призама

29) Наћи површину и запремину правилне и праве n-тостране призме, када је основна ивица $a = 10\,cm$ а обична 18 cm (за $n = 3, 4, 6$; *5, 7, 8, 9, 10, 12, 15*).

30) Од правог призматичног дрвеног стуба, коме је основа правилан шестоугао, истесана је највећа правилна тространа призма; колика је запремина отпадака, ако је основна ивица шестостране призме 25 cm а бочна 60 cm.

31) Позната је површина P правилне равноивичне призме; колика је њена ивица, ако је призма: *a)* тространа, *b)* шестострана?

32) Позната је тежина Q равноивичне шестостране призме; израчунај ивицу, кад је специфична тежина S.

33) Наћи запремину праве равноивичне тростране призме ивице 15 cm.

34) Колика је ивица равноивичне тростране праве призме, чија је: *a)* површина 1 m^2; *b)* запремина 1 m^3?

35) Један басен, чији је базис правилан осмоугао стране 2 m, садржи 10000 hl воде; наћи његову дубину.

36) Бочна површина правилне и праве шестостране призме је 50 m^2 а основна ивица 3,8 m; наћи њену запремину.

37) Бочна површина правилне и праве шестостране призме је 13 m^2 а њена запремина 5,3 m^3; наћи њену основну и бочну ивицу.

38) Наћи запремину призме, чији је базис равностран троугао уписан у кругу полупречника 1 m, а има за висину страну овог троугла.

39) Висина једне правилне и праве тростране призме је 66 m, а површина њеног базиса 792 m^2. Наћи њену бочну површину (одг. 8 468 m^2).

40) Висина једне праве тростране призме је 38 m, а две основне ивице јесу 67 и 73 m. Наћи трећу основну ивицу, ако је бочна површина 8 360 m^2 (одговор: 80 m).

41) Основа једне праве призме је равнокрак троугао чија је основица 16 cm а крак 21 cm. Наћи њену висину, ако је њена бочна површина 986 cm^2 (одговор: 17 cm).

42) Бочна површина косе тростране призме је 18 067 cm^2, и стране једног њеног управног пресека јесу 63, 69 и 71 cm. Наћи њену бочну ивицу (одговор: 89 cm).

43) Наћи запремину праве призме, чија је основа равностран троугао уписан у кругу полупречника 2 m, а висина призме једнака је страни правилног шестоугла описаног око истог круга (одговор: 12 m^3).

44) Површине бочних страна једне праве тростране призме јесу: 25 m^2, 29 m^2, и 36 m^2, а површина базиса 10 m^2. Наћи запремину ове призме (одговор: 60 m^3).

45) *Наћи запремину косе правилне n-тостране призме основне ивице $a = 15\,cm$ а бочне $s = 20\,cm$, када је нагибни угао једне бочне стране према базису 65° 40′ 50″ ($n = 3, 6, 8, 10, 12$ и 15).*

46) Израчунати ивице правоуглог паралелопипеда, кад се зна да су оне у аритметичној прогресији, да му је бочна површина 94 m^2 и да је збир ивица 48 m (Београд, I мушка, 1908).

47) Основа праве призме је правоугли троугао, чије катете стоје у размери 24 : 7; хипотенуза основе са висином призме стоји у размери 5:2; омотач призме је 140 dm^2. Одредити запремину призме (Крушевац, 1931).

48) Наћи запремину праве четворостране призме, кад је њена основа трапез са странама $a = 41\,cm$, $b = 5\,cm$, $c = 25\,cm$ и $d = 29\,cm$, а омотач је једнак 15 dm^2 (c и d су краци трапеза). (Вршац, 1930).

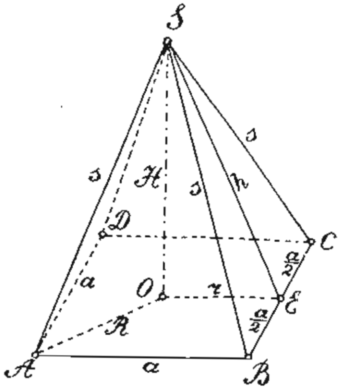
49) Права четворострана призма има за базис ромб, чије се дијагонале разликују за 10 cm. Продужи ли се краћа дијагонала за 2, а дужа скрати за 4 cm, површина ромба се не мења. Наћи запремину призме, ако је њена висина једнака страни ромба (Ниш, 1933).

50) Задане су површине бочних страна праве тростране призме $p_1 = 210\,m^2$, $p_2 = 100\,m^2$, $p_3 = 170\,m^2$ и површина базиса $B = 84\,m^2$. Колике су ивице ове призме? (Карловац, 1931).

51) Дијагонала правоуглог паралелопипеда је $\sqrt{78}$. Висина паралелопипеда износи колико обе основне ивице. Већа основна ивица је за 1 cm дужа од двоструке мање ивице. Колико литара воде стаје у паралелопипеду? (Бјеловар, 1933).

II. ПИРАМИДЕ

§ 129. — Постанак и врсте пирамида. — Пирамида је рогљасто тело које има са базис полигон, а бочне су му стране троуглови чије су основице стране базиса, а њихова се темена стичу у једну исту тачку у простору. Пирамиду добијамо када рогаљ пресечемо равнином која сече све његове ивице. Код једне пирамиде разликујемо: *теме, основу (базис), основне* и *бочне ивице* и *стране*. *Основа* је површина пресека добивеног пресеком рогља равнином; граничне површине јесу *бочне стране;* пресеци страна јесу *бочне ивице;* а пресеци страна с базисом јесу *основне ивице*. Заједнички пресек бочних ивица је *врх* пирамиде, а његово отстојање до базиса *висина*. Код сваке пирамиде бочне су стране троуглови. Код пирамиде на сл. 343 основа је $ABCD$; бочне су стране: ASB, BSC, CSD и DSA; бочне су ивице: SA, SB, SC и SD; основне ивице јесу: AB, BC, CD и DA; врх је тачка S, а висина SO.



Сл. 343

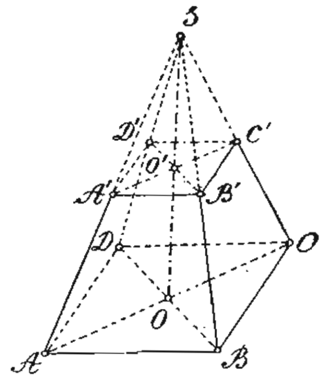
Према броју основних ивица, пирамиде делимо на: *тростране, четворостране* и *многостане*. Тространа пирамида је најпростији полиедар и назива се *тетраедар*, пошто је ограничена свега са четири стране, од којих се свака може узети за базис. Пирамиде делимо још на *праве* и *косе*, према томе да ли су све бочне ивице једнаке или различите. Код праве пирамиде бочне стране јесу *равнокраки троуглови*, а код косе нису.

На основу прве последице теореме 159 (§ 111), код праве пирамиде базис мора бити тетиван полигон. Стога код ове пирамиде висина продире базис у центру описаног круга око базиса.

Пирамида код које је базис правилан полигон зове се *правилна*. Код правилне и праве пирамиде бочне су стране подударни равнокраки троуглови, а висина сваког таквог троугла зове се *бочна висина* пирамидина. Код правилне и праве пирамиде висина продире базис и у центру описаног круга око базиса и у центру уписаног круга. Таква је пирамида на

сл. 343. Пирамида код које су све ивице једнаке зове се *равноивична*. Свака равноивична пирамида је правилна и права. Код ње су бочне стране равнострани троуглови. На основу теореме 168 (§ 116) равноивична пирамида може имати највише пет бочних страна. Према овоме, постоје само три равноивичне пирамиде, и то: тространа, четворострана и петострана, код којих су базиси: равностран троугао, квадрат и правилан петоугао.

Кад се пирамида пресече равнином паралелном с базисом, а која сече све њене бочне ивице, онда од пирамиде добијамо два дела. Онај део између базиса и пресека зове се *зарубљена пирамида*, а део од пресека до врха пирамидиног, зове се *допуна* зарубљене пирамиде. Зарубљена пирамида ограничена је са два паралелна слична полигона као основама, а с бока са онолико трапеза колико страна има један од базиса. Таква је пирамида на сл. 344. Раздаљина између пресека и базиса зарубљене пирамиде (OO' на сл. 344) зове се *висина* те пирамиде. Код праве пирамиде бочне су стране равнокраки трапези, а код правилне и праве, ти су трапези равнокраки и подударни. Код правилне и праве зарубљене пирамиде висина ма које бочне стране зове се *бочна висина* те пирамиде. Да ли се паралелним пресеком добија само права, или правилна и права зарубљена пирамида, зависи од тога да ли се сече само права, или правилна и права пирамида. Раван која пролази кроз две неузастопне бочне ивице једне пирамиде сече пирамиду тако да је добивени пресек троугао, ако је пирамида цела, а трапез, ако је пирамида зарубљена. Такви се пресеци зову *дијагонални* (BDS и $BDD'B'$ на сл. 344), зато што секу базис по дијагонали.



Сл. 344

§ 130. — Опште особине пирамида. — *Теорема 192.* — **Бочна површина правилне и праве пирамиде једнака је половини производа обима базиса и бочне висине.** — Бочна површина правилне и праве пирамиде састоји се од онолико равнокраких, међу собом подударних троуглова, колико има базис страна. Како сви ови троуглови имају једнаке основице a и једнаке висине h, то је површина свију троуглова омотача правилн и праве n-тостране пирамиде:

$$M = n \cdot \frac{ah}{2} = \frac{nah}{2} = \frac{O \cdot h}{2},$$

где O значи обим базиса.

Теорема 193. — **Кад се пирамида пресече равнином паралелном с базисом, онда је: а) пресек сличан базису; b) површине пресека и базиса стоје у размери као квадрати раздаљина од врха.**

а) Тачност првог дела ове теореме увиђамо посматрањем сл. 344. Овде је раван $A'B'C'D' \parallel ABCD$, те је по 140 теореми пресек $A'B'C'D'$ сличан с базисом $ABCD$.

b) Тачност другог дела ове теореме увиђамо опет посматрањем исте слике. Раван која пролази кроз висину SO и бочну ивицу SA сече пресек и базис тако да су пресеци $A'O'$ и AO паралелни (теорема 140). Тада, из сличности троглова SOA и $SO'A'$, имамо:

$$SO : SO' = SA : SA' \quad (1),$$

а из сличности троуглова ABS и $A'B'S'$ имамо:

$$AB : A'B' = SA : SA' \quad (2).$$

Из пропорцијâ (1) и (2), чије су десне стране једнаке, имамо:

$$AB : A'B' = SO : SO' \quad (3).$$

Подизањем на квадрат свих чланова ове пропорције добијамо:

$$AB^2 : A_1B_1^2 = SO^2 : SO_1^2 \quad (4).$$

Па како су пресек и базис сличне слике, а површине сличних слика се имају као квадрати двеју хомологих страна, то је:

$$B : b = AB^2 : A_1B_1^2 \quad (5),$$

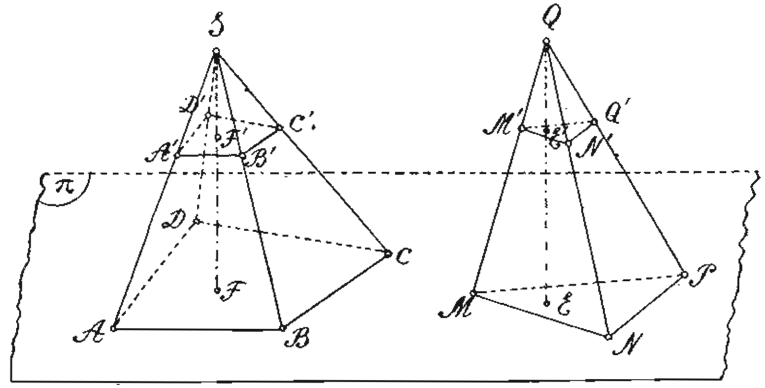
где је B површина базиса а b површина пресека.

Из пропорције (4) и (5) имамо:

$$\boldsymbol{B : b = SO^2 : SO_1^2},$$

чиме је доказан и други део ове теореме.

Теорема 194. — **Кад се две пирамиде једнаких висина пресеку паралелним равнима с њиховим базисима на једнаким отстојањима од врхова, добијају се пресеци чије су површине пропорционалне с површинама базиса.** — Нека су висине SF и QE пиримиде на сл. 345 једнаке и нека су ове пирамиде пресечене



Сл. 345

равнима тако да су $SF' = QE'$ и да су пресеци паралелни с базисима. Тада је по претходној теореми:

$$A'B'C'D' : ABCD = SF_1^2 : SF^2 \text{ и } M'N'P' : MNP = QE_1^2 : QE^2.$$

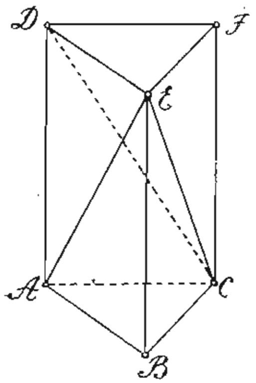
Из ових пропорција, чије су десне стране једнаке, имамо:

$$A'B'C'D' : ABCD = M'N'P' : MNP, \text{ или } A'B'C'D' : M'N'P' = ABCD : MNP,$$ чиме је ова теорема доказана.

Последица. — Ако су базиси $ABCD$ и MNP једнаки, онда су на основу ове теореме, једнаки и пресеци $A'B'C'D'$ и $M'N'P'$.

Теорема 195. — **Две пирамиде једнаких основа и висинâ имају запремине једнаке.** — Нека пирамиде на сл. 345 имају једнаке базисе и једнаке висине. Тада, према претходној теореми, пресеци ових пирамида, чији базиси леже на истој равни π, добивени једном ма којом равнином паралелном с базисима, јесу једнаки. Обе су пирамиде у том случају тела на која се може применити Каваљеријева теорема (теорема 182, § 126), па су стога једнаке запремине.

Теорема 196. — **Свака тространа пирамида трећина је тростране призме исте основе и висине.** — Када тространу призму $ABCDEF$ (сл. 346) пресечемо равнином која пролази кроз дијагонале AE и CE и кроз основну ивицу AC, добијамо тространу пирамиду чији је базис ABC и теме E, и четворострану пирамиду чија је основа $ACFD$ а тема E. Дијагоналним пресеком DCE, ова се четворострана пирамида дели на две тростране пирамиде: $ACD(E)$ и $DCF(E)$. Ове две пирамиде јесу једнаке, према претходној теореми, пошто имају једнаке основе и исту висину. Међутим, пирамида $AED(C)$ једнака је с пирамидом $ABE(C)$, опет према претходној теореми. А како је пирамида $AED(C)$ у ствари пирамида $ACD(E)$, а пирамида $ABE(C)$ у ствари пирамида $ABC(E)$, онда су пирамиде: $ABC(E)$, $ACD(E)$ и $DCF(E)$ једнаке. Па како њихов збир даје призму $ABCDEF$, значи да је ма која од тих пирамида трећина призме. Стога је пирамида $ABC(E)$, која има исту основу и исту висину с призмом $ABCDEF$, трећина ове призме.



Сл. 346

§ 131. — Израчунавање површинâ код пирамида. — a) Целокупна површина P једне правилне и праве n-тостране пирамиде једнака је збиру од површине базиса B и бочне површине M. Па како је код сваке правилне пирамиде $B = \frac{nar}{2} = \frac{Or}{2}$, а по 192 теореми претходног параграфа је $M = \frac{Oh}{2}$, то је целокупна површина:

$$P = B + M = \frac{Or}{2} + \frac{Oh}{2} = \frac{O(r+h)}{2}.$$

Површина базиса B код правилне тростране пирамиде је $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; код правилне четворостране пирамиде је a^2, код шестостране је $6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, или $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; а код осталих правилних пирамидâ је $B = \frac{na^2}{4} \, cotg \, \frac{180^0}{n}$ (§ 120).

b) Површину једне целе неправилне, праве или косе, пирамиде израчунавамо када израчунамо површину сваке бочне стране понаособ, а затим добивене површине сабирамо. Добивени збир даје нам бочну површину M. Кад се овој површини дода још површина базиса B, добија се целокупна површина пирамидина $P = B + M$.

c) Бочну површину зарубљене правилне и праве n-тостране пирамиде израчунавамо када полузбир обима базиса и пресека помножимо бочном висином. Заиста, ако је O обим базиса, O' обим пресека, а h бочна висина, онда, како се бочна површина састоји од n равнокраких подударних трапеза, то је $M = np$ (1), где је p површина једног од тих трапеза. Па како је $p = \frac{(a+a')\,h}{2}$, где нам a значи основна ивица базиса, а a' основна ивица пресека, то заменом у (1), добијамо:

$$M = n \cdot \frac{(a+a')h}{2} = \frac{(na+na')h}{2} = \frac{(O+O')\,h}{2}.$$

Целокупну површину правилне и праве зарубљене n-тостране пирамиде добијамо када бочној површини M додамо површину базиса B и површину пресека b. Стога је:

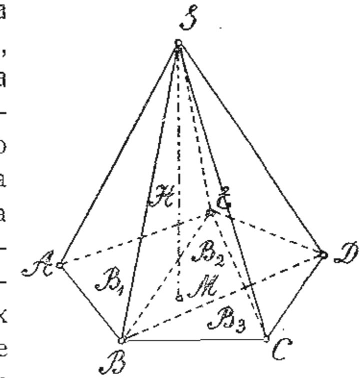
$$P = B + b + M = \frac{Or}{2} + \frac{O'r'}{2} + \frac{(O+O')h}{2} = \frac{O(r+h)+O'(r'+h)}{2}.$$

d) Целокупну површину једне неправилне зарубљене пирамиде израчунавамо када нађемо понаособ површину сваке њене бочне стране, чији нам збир даје бочну површину M, па томе збиру додамо још B и b.

§ 132. — Израчунавање запреминâ код пирамида. — *Теорема 197.* — **Запремина једне тростране пирамиде једнака је трећини производа од површине њенога базиса и висине.** — Ако је B површина базиса тростране пирамиде, а H њена висина, онда производ BH претставља нам запремину тростране призме истог базиса и висине. Према 196 теореми, трећина овог производа претставља запремину пирамиде. Дакле, V код тростране пирамиде је:

$$V = \frac{BH}{3}.$$

Теорема 198. — **Запремина ма које многостране пирамиде, праве или косе, такође је једнака трећини производа од површине базиса и висине пирамидине.** — Како се свака n-тострана пирамида дијагоналним пресецима дели на тростране пирамиде, то је запремина многостране пирамиде једнака збиру запремина добивених тространих пирамида. Стога је запремина петостране пирамиде на сл. 347:

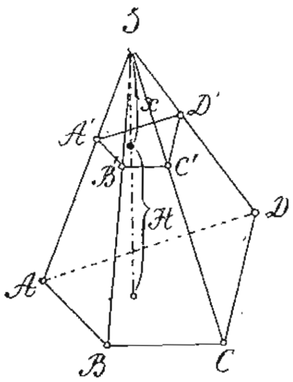


Сл. 347

$$V = \frac{B_1H}{3} + \frac{B_2H}{3} + \frac{B_3H}{3} = (B_1 + B_2 + B_3)\,\frac{H}{3} = \frac{\mathbf{BH}}{\mathbf{3}}\,,$$

где нам B претставља површину базиса ове пирамиде.

Теорема 199. — **Запремина зарубљене пирамиде једнака је збиру запремина трију пирамида, чије су висине једнаке висини зарубљене пирамиде, а њихови су базиси: код прве већи базис, код друге мањи базис (пресек), а код треће средња геометриска пропорционала оба базиса зарубљене пирамиде.** — Запремина зарубљене пирамиде $ABCDA'B'C'D'$ (сл. 348) једнака је разлици запремина целе пирамиде $SABCD$ и допуне $SA'B'C'D'$. Ако је B површина базиса, b површина пресека, H висина зарубљене пирамиде, а x висина допуне, онда је запремина зарубљене пирамиде:



Сл. 348

$$v = \frac{B(H+x)}{3} - \frac{bx}{3} = \frac{BH}{3} - \frac{x(B-b)}{3} \quad (1).$$

Висину допуне x одређујемо из пропорције:

$$B : b = (H+x)^2 : x^2 \quad \text{(теорема 193)}.$$

Извлачењем квадратног корена из свих чланова ове пропорције имамо:

$$\sqrt{B} : \sqrt{b} = (H+x) : x, \text{ а одавде је } x = \frac{H\sqrt{b}\,(\sqrt{B}+\sqrt{b}\,)}{B-b}.$$

Заменом у (1) добијамо: $v = (\mathbf{B} + \sqrt{\mathbf{Bb}} + \mathbf{b})\,\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{3}}$, што смо и хтели да докажемо.

Напомена. — Из свега што је казато о пирамидама излази:

1) Да је свака пирамида трећина призме једнаке основе и висине;

2) Да су две пирамиде једнаке, ако имају једнаке основе и висине;

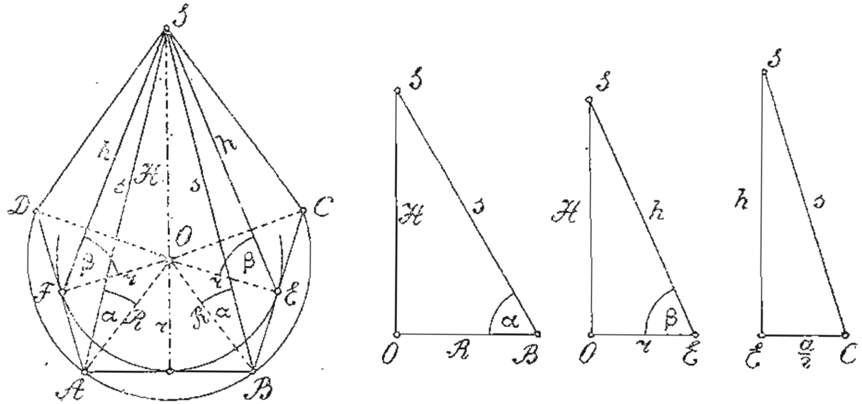
3) Да се запремине двеју пирамида једнаких базиса имају као њихове висине;

4) Да се запремине двеју пирамида једнаких висина имају као њихови базиси; и

5) Да су две пирамиде једнаке ако су њихове висине обрнуто пропорционалне с њиховим базисима.

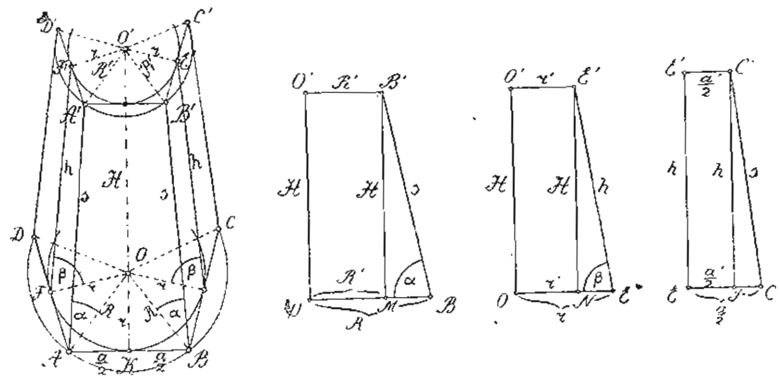
Доказ за 5 правило. — За $H : H' = B' : B$, биће $BH = B'H'$, или $\frac{BH}{3} = \frac{B'H'}{3}$, или $V = V'$.

§ 133. — Однос између елемената правилних и правих пирамида. — При решавању задатака из правилних и правих



Сл. 349

n-тостраних пирамида, целих или зарубљених, треба имати увек у виду релације које нам дају однос између елемената; бочне ивице s, основне ивице a, висине пирамиде H, бочне висине h, полупречника R описаног круга око базиса и полупречника r уписаног круга у базису. Ове релације изводимо код целих пирамида из правоуглих троуглова: SOA (или SOB, $SOC, \ldots$), и SOE (или $SOF, \ldots$), који су у пирамиди, и из троуглова BES $(CES, \ldots)$, који су на бочној страни (сл. 349), а код



Сл. 350

зарубљене пирамиде из правоуглих трапеза $O'OBB'$ $(O'OAA'$, $O'OCC', \ldots)$, $O'OEE'$ $(O'OFF', \ldots)$, који су у пирамиди, и из правоуглих трапеза $BEE'B'$ $(E'ECC', \ldots)$, који су на боку (сл. 350). Ови троуглови, односно трапези, издвојени су поред поменутих слика.

Код целих пирамида те су релације:

а) Из $\triangle$ ***SOB:*** 1) $s^2 = H^2 + R^2$; 2) $H = s \cdot \sin\alpha = R \cdot tg\,\alpha$;

3) $R = s \cdot \cos\alpha = H \cdot cotg\,\alpha$; и 4) $s = \dfrac{H}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\cos\alpha}$.

b) Из $\triangle$ ***SOE:*** 1) $h^2 = H^2 + r^2$; 2) $H = h \cdot \sin\beta = r \cdot tg\,\beta$;

3) $r = h \cdot \cos\beta = H \cdot cotg\,\beta$; и 4) $h = \dfrac{H}{\sin\beta} = \dfrac{r}{\cos\beta}$.

c) Из $\triangle$ ***SEC:*** $s = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$ $\left(h = \sqrt{s^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2},\right.$

$\left. a = 2\sqrt{s^2 - h^2}\right)$.

Код зарубљених пирамида те су релације:

а) Из $\triangle$ ***B'MB:***

$$
\begin{aligned}
&1)\ s^2 = H^2 + (R - R')^2; \\
&2)\ H = s \cdot \sin\alpha = (R - R')\,tg\,\alpha; \\
&3)\ R - R' = s \cdot \cos\alpha = H \cdot cotg\,\alpha; \\
&4)\ s = \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{R - R'}{\cos\alpha}.
\end{aligned}
$$

b) Из $\triangle$ ***E'NE:***

$$
\begin{aligned}
&1)\ h^2 = H^2 + (r - r')^2; \\
&2)\ H = h \cdot \sin\beta = (r - r')\,tg\,\beta; \\
&3)\ r - r' = h \cdot \cos\beta = H \cdot cotg\,\beta; \\
&4)\ h = \frac{H}{\sin\beta} = \frac{r - r'}{\cos\beta}.
\end{aligned}
$$

c) Из $\triangle$ ***C'PC:*** $s^2 = h^2 + \left(\dfrac{a - a'}{2}\right)^2$.

Поред ових релација треба имати у виду и релације које постоје између елемената: a, R и r (a', R' и r') код правилних полигона, а изведених у § 120.

§ 134. — Задаци за вежбу из пирамида*)

1) Одредити површину и запремину правилне и праве n-тостране пирамиде, кад се зна: *а)* основна ивица $a = 5$ *cm* и бочна ивица $s = 9$ *cm*; *b)* основна ивица $a = 6$ *cm* и висина пирамидина $H = 10$ *cm*; *c)* основна ивица $a = 4$ *cm* и бочна висина $h = 7$ *cm*; *d) основна ивица $a = 12$ cm и нагибни угао бочне ивице према базису $\alpha = 38^0\,25'$; e) основна ивица $a = 15$cm и нагибни угао бочне стране према базису $\beta = 50^0\,10'$ (n=3, 4, 6; 5, 8, 10 и 15).*

2) Одредити површину и запремину правилне и праве n-тостране пирамиде, кад се зна: *а)* висина пирамидина $H = 8$ *cm* и бочна ивица $s = 15$ *cm*; *b)* висина пирамидина $H = 10$ *cm* и бочна висина $h = 16$ *cm*; *c) висина пирамидина $H = 9$ cm и нагибни угао бочне ивице према базису $\alpha = 40^0\,25'$; d) висина парамидина $H = 18$ cm и нагибни угао бочне стране према базису $\beta = 52^0\,42'$ (n = 3, 4, 6; 5, 8, 9, 10, 12 и 15).*

3) Одредити површину и запремину правилне и праве n-тостране пирамиде, кад се зна: *а)* бочна ивица $s = 10$ *cm* и бочна висина $h = 8$ *cm*; *b) бочна ивица $s = 12$ cm и њен нагибни угао $\alpha = 48^0\,45'$ према базису (n = 3, 4, 6, 8 и 10).*

4) Колика је основна ивица правилне и праве n-тостране пирамиде, чија је запремина V а висина пирамидина H ($n = 3, 4, 6$ и 8).

5) *Одредити површину и запремину правилне и праве n-тостране пирамиде, кад се зна бочна висина $h = 10$ cm и њен нагибни угао према базису $\beta = 63^0\,20'$* ($n = 3$, 4, 5, 6 и 12).

6) Одредити површину и запремину правилне и праве n-тостране зарубљене пирамиде, кад се зна: *a)* основна ивица a, бочна s и висина H (или a', s и H); *b)* основна ивица a, бочна s и бочна висина h (или a', s и h); *c)* бочна ивица s, висина H и бочна висина h ($n = 3$, 4 и 6).

7) Висина једне правилне и праве четворостране пирамиде је 30 *cm*, а бочна површина је 2176 cm^2. Наћи основну ивицу (одговор: 32 *cm*).

8) Површина једне правилне и праве четворостране пирамиде је 4704 cm^2, а бочна јој ивица је 35 *cm*. Наћи њену висину (одговор: 28 *cm*).

9) Разлика основних ивица једне правилне и праве четворостране зарубљене пирамиде је 6 *cm*, а висина јој је 4 *cm*. Наћи основне ивице, ако је њена површина 168 cm^2.

10) Површине базисâ правилне и праве четворостране зарубљене пирамиде јесу 3249 и 961 cm^2, а целокупна јој је површина 29670 cm^2. Наћи њену висину.

11) Правилна и права шестострана пирамида висине 25 *cm*, а основне ивице 5 *cm*, пресечена је равнином паралелном са базисом тако да се добија пресек површине $6\sqrt{3}\,cm^2$. На ком је отстојању од врха пресечена ова пирамида?

12) Висина једне зарубљене пирамиде је 6 *cm*, а површине њених основа 18 и 8 cm^2. Ова прирамида пресечена је равнином паралелном с базисима на половини висине. Наћи површину пресека (одг. 12,5 cm^2.).

13) Дат је рогаљ *SABC*, чији су ивични углови прави. На његовим ивицама одређене су дужине $SA = 12$ *cm*, $SB = 15$ *cm* и $SC = 18$ *cm*. Кроз тачке A, B и C повучена је раван. Наћи запремину пирамиде *SABC*, кад је њена висина $H = 8$ *cm*.

14) Бочна површина правилне и праве четворостране пирамиде је 20 m^2, а висина пирамиде је 1,5 *m*. Наћи запремину ове пирамиде.

15) Наћи бочну површину и запремину једне правилне и праве шестостране пирамиде чија је висина 6 *m*, а бочна ивица гради с висином угао од 30^0 (одговор: $48\sqrt{3}\,m^2$ и 48 m^3).

16) Правилна и права 6-тострана зарубљена пирамида има запремину 3627 cm^3. Наћи њену висину, кад су основне ивице 23 *cm* и 17 *cm* (одговор: $2\sqrt{3}$ *cm*).

17) Запремина једне правилне и праве 6-тостране зарубљене пирамиде је 10,5 m^3, висина јој је $\sqrt{3}$, а основна ивица доњег базиса 2 *m*. Наћи основну ивицу горњег базиса (одговор: 1 *m*).

18) Позната је површина P праве и правилне тростране пирамиде. Колика је њена основна ивица, ако је висина пирамидина двапута већа од те ивице?

19) Наћи површину и запремину правилне и праве тростране пирамиде основне ивице 10 *cm*, кад се зна да су бочне ивице једна на другој нормалне.

20) Наћи површину и запремину праве тростране пирамиде чије су основне ивице 13, 14 и 15 *cm*, а бочна ивица 25 *cm*.

*) Задаци курзивом решавају се употребом тригонометриских функција.

21) Зарубљена пирамида има висину H, а запремину V. Израчунај њене базисе посебице, ако је њихов збир S.

22) Зарубљена пирамида има основе B и b, а висина њене допуне h. Наћи запремину зарубљене пирамиде.

23) Наћи бочну површину правилне и праве 6-тостране пирамиде чија је висина $H = 1{,}3\,m$, а полупречник уписаног круга у базису $r = 0{,}6\,m$.

24) Колика је површина пресека једне пирамиде основе $238\,m^2$, а бочне ивице $13\,m$, кад је ова пирамида пресечена равнином паралелном с базисном тако да је бочна ивица допуне $9\,m$.

25) Наћи висину зарубљене праве и правилне 6-тостране пирамиде чија је запремина $12\,m^3$, а ивице њених основа јесу $2\,m$ и $1\,m$.

26) Наћи запремину оне правилне и праве 6-тостране пирамиде основне ивице a код које је бочна површина двапута већа од површине базиса.

27) Основа једне праве пирамиде је правилан 6-тоугао стране $1\,m$; колика је дужина бочне ивице ове пирамиде кад је њена запремина $1\,m^3$?

28) Наћи површину и запремину правилне и праве четворостране пирамиде чији је базис уписан у кругу полупречника $1\,m$ и кад јој је бочна ивица једнака основној.

29) Да се подели запремина једне зарубљене пирамиде основâ B и b паралелном равнином с базисом на таква два дела који се имају као $m : n$.

30) Једна пирамида висине H подељена је паралелним равнима с базисом на три дела, који се имају као $m : n : p$. Наћи отстојање ових пресека од врха.

31) Наћи висину правилне и праве четворостране зарубљене пирамиде, кад су основине ивице $7{,}5$ и $2{,}5\,m$, а зна се да је бочна површина једнака збиру површина њених базиса.

32) Запремина једне пирамиде је $81\,m^3$, а њена је основа правоугаоник обима $26\,m$, а разлика двеју основних ивица је $5\,m$. Наћи висину пирамиде.

33) На странама једне коцке налазе се правилне и праве пирамиде једнаких висина. Ивица коцке је a, а права која везује врхове двеју супротних пирамида је b. Наћи запремину тела тако добивеног.

34) Пирамида има за основу правоугаоник у коме су стране $a = 16\,m$ и $b = 18\,m$, а свака бочна ивица је $c = 38\,m$. У којој раздаљини од врха паралелно са основом треба пресећи пирамиду, па да делови буду једнаки? (Београд, II мушка, 1902).

35) Једне праве квадратне зарубљене пирамиде је доња основа a^2, горња b^2, а површина једне стране је c. Колика је површина и запремина оне пирамиде од које је ова зарубљена један део? (Београд, III мушка, 1908).

36) Дата је правилна шестострана пирамида чија је основна ивица a, а целокупна површина $\frac{9}{2}a^2\sqrt{3}$. Одредити запремину те пирамиде и запремину оне зарубљене пирамиде која се добија кад се дата пирамида пресече равнином паралелном основи на отстојању a од ње (Београд, Реалка, 1933).

37) Основа пирамиде је квадрат око кога се може описати круг полупречника $2\,m$. Бочне стране су равнострани троуглови. Колика је површина и запремина? (Петровград, 1929).

38) Права пирамида висине $H = 10\,dm$ има за основу правоугаоник дијагонале $d = 5\,dm$. Израчунати стране правоугаоника и површину пирамиде, кад се зна да је њена запремина $V = 40\,dm^3$ (Битољ, 1932).

39) Пирамида $SABC$ има за базис правоугли троугао површине $P = 135\,cm^2$. Бочне ивице пирамиде једнаке су са хипотенузом правоуглог троугла. Израчунати катете и хипотенузу базиса, површину и запремину пирамиде, кад се зна да је једна катета $\frac{5}{13}$ хипотенузе (Битољ, 1930).

40) Обим базиса једне правилне и праве тростране пирамиде је $72\,cm$, а запремина $4000\,cm^3$. Ако је пирамида пресечена паралелно с базисом, на растојању $5\,cm$ од врха, колика је површина и запремина отсечене пирамиде? (Крагујевац, 1934).

41) Висина једне правилне четворостране зарубљене пирамиде износи $15\,cm$. Кад се већа основна ивица повећа за $3\,cm$, а мања за $5\,cm$, тада је разлика површинâ основâ иста, док се запремина тела повећава за $705\,cm^3$. Колике су основне ивице? (Ужице, 1933).

42) Права квадратна зарубљена пирамида има доњу основу $B = 12{,}96\,cm^2$, горњу основу $b = 5{,}76\,cm^2$, а површину једне бочне стране $p = 22{,}5\,cm^2$. Колика је површина и запремина зарубљене, а колика целе пирамиде? (Тетово, 1930).

43) Основне ивице једне тростране пирамиде су $a = 15\,cm$, $b = 14\,cm$ и $c = 13\,cm$. На којим отстојањима од врха треба пирамиду пресећи са равнима паралелним са основом, да би се добила три тела једнаких запремина, ако је запремина задате пирамиде $420\,cm^3$? (Суботица, м. 1933).

44) Основа једне праве четворостране пирамиде је правоугаоник. Колике су његове стране, кад је запремина пирамиде $V = 784\,cm^3$, висина $h = 14\,cm$, а раван пресек кроз врх и супротна темена основе има површину $p = 175\,cm^2$? (Београд, III мушка, 1922).

§ 135. — Површина правилних полиедара. — Како је сваки правилан полиедар ограничен само странама које су правилни полигони, то се површина правилног полиедра налази, кад се одреди површина једне његове стране па се ова површина помножи бројем страна тога полиедра.

Па како су тетраедар, октоедар и икосаедар ограничени равностраним троугловима, а површина равностраног троугла је $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где је a његова страна, то је:

a) Површина тетраедра $\boldsymbol{P} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{a^2\sqrt{3}}$;

b) „ октоедра $\boldsymbol{P} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{2a^2\sqrt{3}}$; и

c) „ икосаедар $\boldsymbol{P} = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{5a^2\sqrt{3}}$.

Површина хексаедра (коцке) ивице a је $\boldsymbol{P = 6a^2}$.

Површина додекаедра ивице a је 12 пута већа од површине правилног петоугла стране a. Па како је површина правилног петоугла $\frac{5a\,r}{2}$, где је r полупречник уписаног круга $= \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$, то је: $\boldsymbol{P} = 12 \cdot \frac{5ar}{2} = 30\,ar = 30\,a \cdot \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} =$ $= \boldsymbol{3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 20{,}646\,a^2}$. Употребом тригонометриских функција налазимо да је површина правилног петоугла $\frac{5a^2}{4}\,cotg\,36^0$, а површина додекаедра је $P = 12 \cdot \frac{5a^2}{4}\,cotg\,36^0 = 15a^2\,cotg\,36^0 = 15a^2 \cdot 1{,}37638 = 20{,}646\,a^2$.

Задаци за вежбу:

1) Нађи површину и запремину правилног: а) тетраедра, б) октоедра, кад је ивица $a = 6{,}5\ cm$.

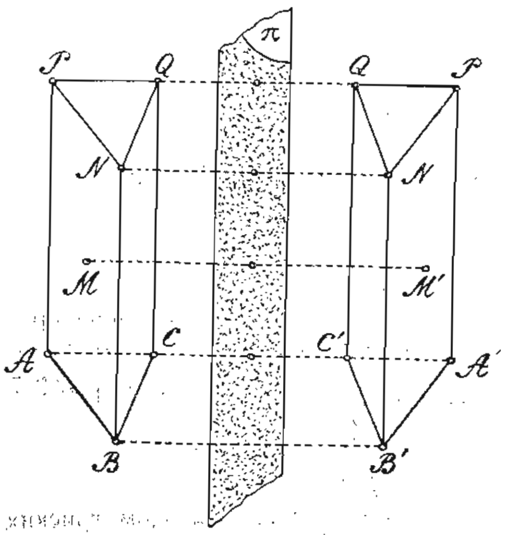
2) Нађи површину: а) додекаедра, б) икосаедра, кад је ивица $a = 3{,}75\ dm$.

3) Нађи ивицу: а) тетраедра, b) октоедра, с) додекаедра, d) коцке и е) икосаедра, ако је површина $1\ m^2$.

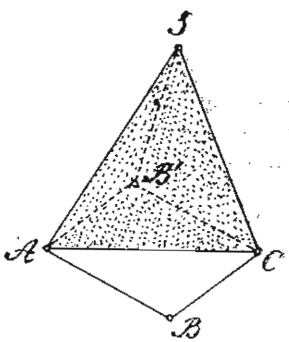
III. ПОДУДАРНОСТ, СИМЕТРИЧНОСТ И СЛИЧНОСТ РОГЉАСТИХ ТЕЛА

§ 136. — Подударност рогљастих тела. — За два тела каже се да су подударна кад се могу једно у друго положити тако да им се стране и углови поклапају. Такве су призме на сл. 335. Код подударних тела једнаке су: 1) две и две одговарајуће дужи (ивице, дијагонале, осе, висине, полупречници); 2) два и два одговарајућа угла; 3) подударне су две и две одговарајуће површине (бочне стране, базиси, дијагонални пресеци); и 4) подударни су два и два одговарајућа рогља.

§ 137. — Симетричност рогљастих тела. — За два тела каже се да су симетрична, ако се могу положити с једне и



Сл. 351

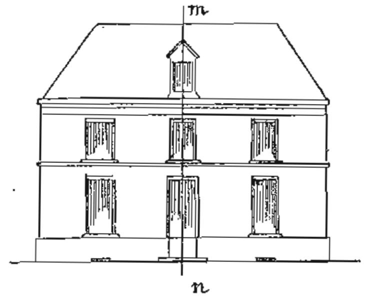


Сл. 352

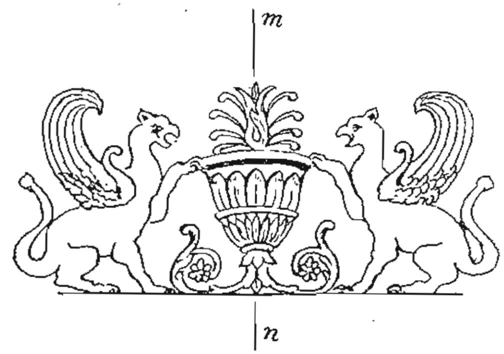
с друге стране једне равни тако да дужи које везују две и две одговарајуће тачке тих тела, а које се тачке налазе у или на

телима, стоје на тој равни нормално и њоме су преполовљене. Такве су тела призме на сл. 351 и пирамиде $SABC$ и $SAB'C$ на сл. 352. На сл. 351 раван π, а на сл. 352 дијагонални пресек SAC, зову се симетриске равни.

За једно тело каже се да је симетрично, ако се да̂ поделити једном равни на две половине тако да свака тачка

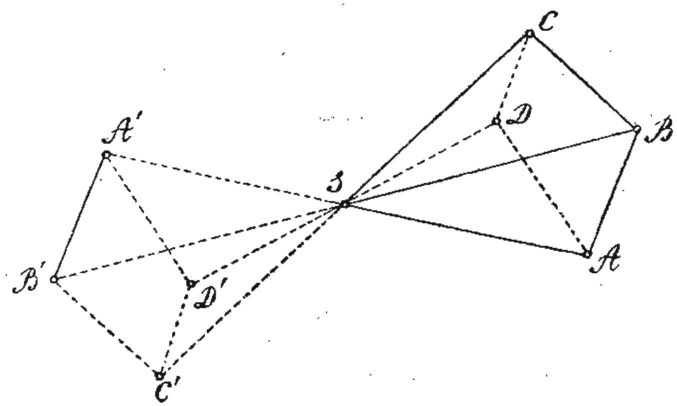


Сл. 353



Сл. 354

једне половине има своју симетричну тачку у другој половини. Таква су тела фасада куће (сл. 353) и украс на сл. 354. Код *симетрично једнаких* тела, као и код подударних, две и две



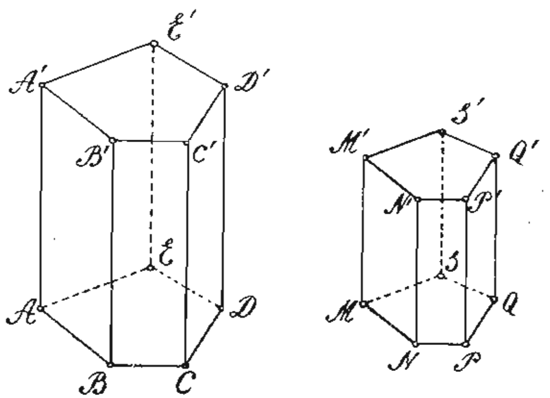
Сл. 355

одговарајуће дужи, или два и два одговарајућа угла, јесу једнака, две и две одговарајуће површине јесу подударне, али одговарајући рогљеви нису подударни, већ симетрично једнаки.

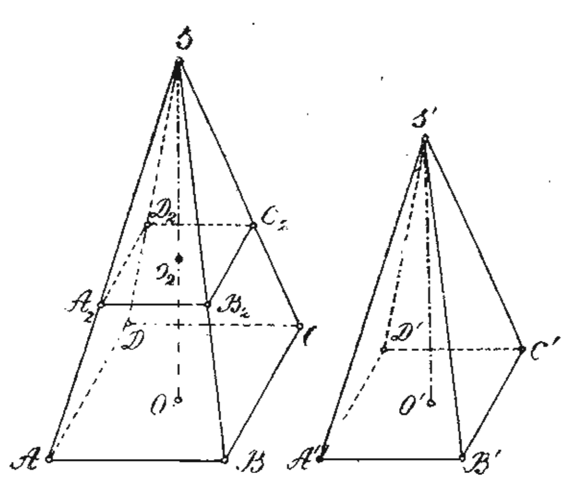
Да бисмо једноме полиедру нашли његов симетрични полиедар, треба ивице једнога рогља првога полиедра продужити с друге стране темена, па на продужењима преносити редом одговарајуће ивице датог полиедра (сл. 355). За таква два полиедра каже се да су симетрични према заједничком темену S (симетричног према тачци), а теме S је тачка симетрије. Рогаљ $S'A'B'C'D'$ (сл. 355) симетричан је рогаљу $SABCD$, пошто имају одговарајуће ивице и углове једнаке, а ти су рогљеви у симетричном положају.

Код човека, лева и десна рука, лева и десна нога, јесу у симетричном положају. Симетрична су тела: коцка, правоугли паралелопипед, правилно човечије тело, инсекти итд.

§ 138. — Сличност рогљастих тела. — За два полиедра каже се да су слични, ако имају одговарајуће углове (диједре) једнаке, а одговарајуће стране, које граде те углове, сличне. Одговарајући елементи сличних тела, зову се *хомологи*. Код сличних полиедара су, дакле, хомологи диједри једнаки, хомологе ивице (дијагонале, осе, висине, полупречници) пропорционалне, а хомологе површине (стране) сличне. Таква су тела призме на сл. 356 и пирамиде на сл. 357. Слични се полиедри увек могу ставити с једне стране у једном свежњу зракова у перспективан положај, или на разним странама од темена S свежња (сл. 358). Да бисмо нашли слични полиедар полиедру $ABCD$ (сл. 358), треба га ставити у свежањ зракова тако да по један зрак пролази кроз свако његово теме. Затим повлачимо ивице паралелне са ивицама датога полиедра између одговарајућих зракова, и то: на истој или на супротној страни темена свежња S. Тиме добијамо полиедре $A'B'C'D'$ и $A_2B_2C_2D_2$, који су слични с полиедром $ABCD$, пошто су им хомологе ивице пропорционалне, хомологе



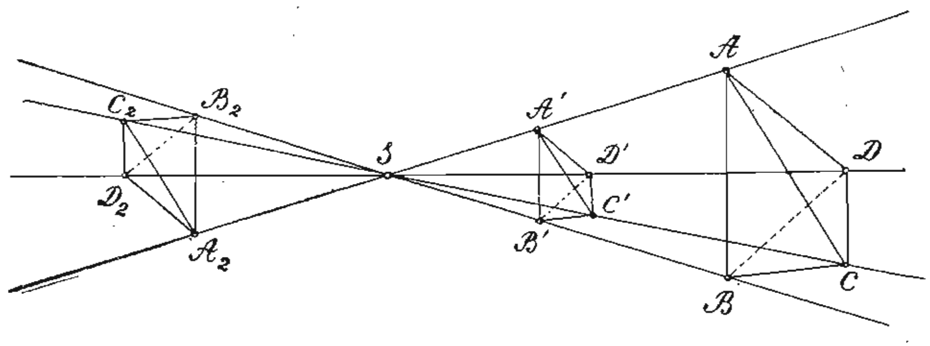
Сл. 356



Сл. 357

стране сличне и хомологи углови једнаки. Што се тиче хомологих рогљева ових полиедара, увиђамо да су код полиедара $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подударни, а код полиедара $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$ симетрични. Дакле, рогљеви су подударни код сличних полиедара који се налазе на истој страни свежња, а симетрични код оних сличних полиедара који се налазе на супротним странама свежња, или тачке сличности S. Стога два тела могу бити слична и симетрично слична према томе да ли се налазе на истој страни, или на супротним странама од тачке сличности.

Стална размера од два отсечка једнога зрака који пролази кроз два хомолога темена двају сличних полиедара $\left(\frac{SA}{SA'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{SC}{SC'}=\ldots\right)$ зове се *модуо сличности*. Ако је модуо сличности $+1$, онда се сличност претвара у подударност, а ако је модуо -1, онда се симетрична сличност претвара у симетричну једнакост. Према овоме, два су полиедра подударна, ако је модуо њихове сличности $+1$, а симетрично једнака, ако им је модуо сличности -1.



Сл. 358

Теорема 200. — **Површине двају сличних полиедара имају се као квадрати двеју њихових хомологих ивица.** — Како су код сличних полиедара хомологе ивице пропорционалне, а хомологе стране сличне, а знамо да се површине сличних слика имају као квадрати двеју хомологих страна, које су код полиедара ивице, то, ако означимо са P_1, P_2, P_3... P_n површине појединих страна једнога полиедра, а са p_1, p_2, p_3.... p_n површине хомологих страна њему сличног полиедра, а са L и l дужине ма којих двеју хомологих ивица, имамо:

$$\frac{P_1}{p_1}=\frac{L^2}{l^2}; \qquad \frac{P_2}{p_2}=\frac{L^2}{l^2}; \qquad \frac{P_3}{p_3}=\frac{L^2}{l^2};.... \text{ и } \frac{P_n}{p_n}=\frac{L^2}{l^2}$$

Одавде је: $\frac{P_1}{p_1}=\frac{P_2}{p_2}=\frac{P_3}{p_3}=---=\frac{P_n}{p_n}$, или:

$$\frac{P_1+P_2+P_3+....+P_n}{p_1+p_2+p_3+....+p_n}=\frac{P_1}{p_1}=\frac{L^2}{l^2}, \text{ или:}$$

$\frac{P}{p}=\frac{L^2}{l_2}$, где је $P=P_1+P_2+P_3+...+P_n$, а $p=p_1+$ $+p_2+p_3+....+p_n$.

Теорема 201. — **Запремине сличних полиедара имају се као кубови двеју хомологих ивица.** — Најпре увиђамо тачност ове теореме код двеју сличних пирамида, а затим код осталих сличних полиедара. Нека су пирамиде $SABCD$ и $S'A'B'C'D'$ (сл. 357). Ако замислимо да смо пирамиду $S'A'B'C'D'$ увукли у пирамиду $SABCD$, и претпоставимо да је заузела положај $SA_2B_2C_2D_2$, онда базис $A'B'C'D'$ заузима положај $A_2B_2C_2D_2$, који је паралелан базису $ABCD$ (теорема 193). Ако означимо сн V и v запремине пирамидâ $SABCD$ и $SA_2B_2C_2D_2$, са B и b површине њихових базиса, а са H и h њихове висине, онда је: $V=\frac{BH}{3}$ и $v=\frac{bh}{3}$.

Дељењем ових једначина добијамо пропорцију:

$$V:v=BH:bh\ ...\ (1).$$

Па како је по 193 теореми $B:b=H^2:h^2$, то заменом у (1) добијамо:

$$V:v=H^3:h^3 \quad (2).$$

Најзад, како је $H:h=SO:SO_2=SA:SA_2=SB:SB_2=AB:$ $:A_2B_2$, то је и $V:v=SA^3:SA_2^3=AB^3:A_2B_2^3=L^3:l^3$, где нам L и l претстављају ма које две хомологе ивице сличних пирамидâ $SABCD$ и $SA_2B_2C_2D_2$, односно $SABCD$ и $S'A'B'C'D'$.

Ова теорема је у важности и за ма која два слична полиедра запреминâ V и v, јер ако замислимо да су ти полиедри подељени на сличне пирамиде запреминâ: V_1, V_2, V_3.... V_n и v_1, v_2, v_3.... v_n, онда је $\frac{V_1}{v_1}=\frac{L^3}{l^3}$, $\frac{V_2}{v_2}=\frac{L^3}{l^3}$; $\frac{V_3}{v_3}=\frac{L^3}{l^3}$; $\frac{V_n}{v_n}=\frac{L^3}{l^3}$. Одавде је $\frac{V_1}{v_1}=\frac{V_2}{v_2}=\frac{V_3}{v_3}=...=\frac{V_n}{v_n}=\frac{L^3}{l^3}$.

Тада је и:

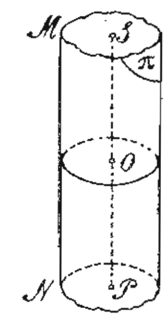
$$\frac{V_1+V_2+V_3+---+V_n}{v_1+v_2+v_3+---+v_n}=\frac{L^3}{l^3}, \text{ или } \frac{V}{v}=\frac{L^3}{l^3}.$$

ЈЕДАНАЕСТИ ОДЕЉАК

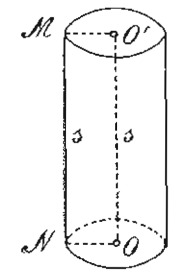
ВАЉКАСТА ИЛИ ОБЛА ТЕЛА

I. ОБЛИЦА

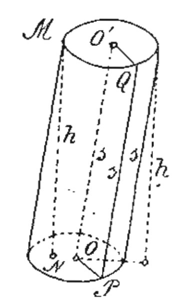
§ 139. — Постанак и врсте облица. — Када права клизи ротационо по обиму једнога круга тако да је сваки њен доцнији положај паралелан ранијем, па дође у свој првобитни положај, онда та права описује криву површину, звану *цилиндарска површина* (сл. 359). Права MN која производи ову површину зове се *изводница*, а круг O по коме она клизи зове се *линија водиља* (директриса). Права SS', која пролази кроз центар водиље, а паралелна је изводници, зове се *осовина цилиндарске површине*. Кад се цилиндарска



Сл. 359



Сл. 360



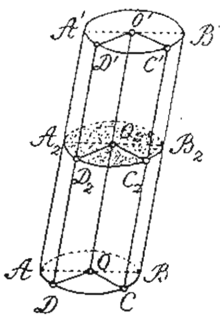
Сл. 361

површина пресече двема паралелним равнима с њеном водиљом, добија се тело које се зове *облица* или *ваљак*. Добивени равни пресеци јесу подударни кругови, а зову се *основе* или *базиси*. Део цилиндарске површине који је ограничен базисима зове се *омотач*. Дуж OO' (сл. 360 и 361) која везује центре базиса, зове се *осовина*, а раздаљина MN од једног базиса до другог зове се *висина* облице.

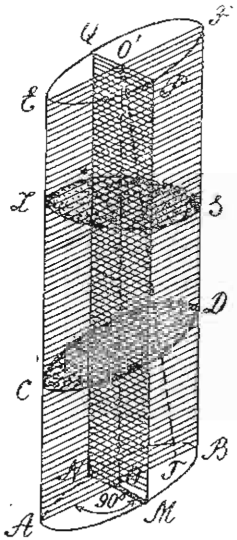
Пресек PQ омотача и равни која пролази кроз осовину обличину, зове се страна облице. Према томе да ли је осовина једне облице нормална или коса према базисима, облице делимо на *праве* и *косе*. Код праве облице висина је једнака осовини или страни (сл. 360), а код косе облице, висина је мања од осовине или стране. Било код праве, било код косе облице, све су стране и паралелне и једнаке са осовином. Облицу сматрамо као призму од бесконачно много страна, а права облица може се сматрати да је постала и обртањем једнога правоугаоника ($NOO'M$ на сл. 360) око једне његове стране. Ова је страна осовина код облице, а њој супротна страна, која производи омотач, јесте страна обличина. Облица, код које је страна једнака пречнику базиса, зове се *равнострана*.

§ 140. — Пресеци код облице

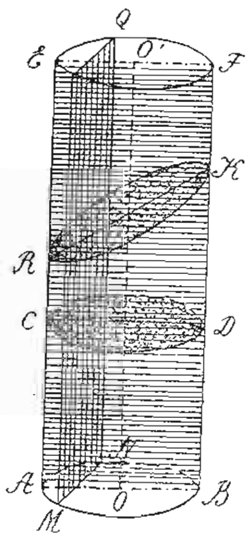
Теорема 202. — **Кад се облица пресече равнином паралелном базисима, добива се за пресек круг подударан базисима.** — Нека је $A_2D_2C_2B_2$ (сл. 362)



Сл. 362



Сл. 363



Сл. 364

пресек облице добивен када се она пресече равнином паралелном базисима O и O'. Овај пресек сече осовину у тачци O_2. Када се кроз QO_2 и

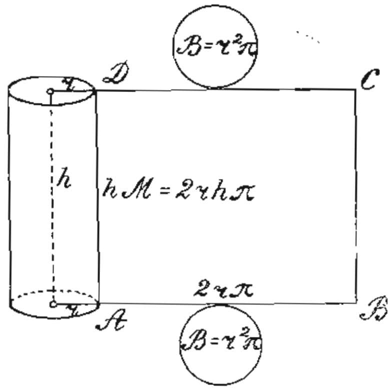
тачке A_2, D_2, C_2, и B_2, ... поставе равни, онда оне секу цилиндарску површину, по правама: AA_2, DD_2, CC_2, BB_2, ... Тада су OO_2, AA_2, DD_2, CC_2, BB_2, ... паралелне. Па како су паралелне и праве: OA и O_2A_2, OD и O_2D_2, OC и O_2C_2, OB и O_2B_2 ...., то су четвороуглови AOO_2A_2, COO_2C_2, DOO_2D_2, BOO_2B_2, ... паралелограми. Стога је: $O_2A_2 = OA$, $O_2C_2 = OC$, $O_2D_2 = OD$, $O_2B_2 = OB$ ..... А како су десне стране ових једначина једнаке, то су једнаке и њихове леве стране, тј. $O_2A_2 = O_2D_2 = O_2C_2 = O_2B_2 = \ldots.$ Ове једначине доказују нам да се тачке: A_2, C_2, D_2, B_2 ... налазе на једној кружној линији чији је центар на осовини. Пресек је, дакле, круг подударан базису, пошто имају једнаке полупречнике.

Теорема 203. — **У облице је сваки осовински пресек паралелограм.** — Раван $ABFE$ (сл. 363 и 364), која даје осовински пресек, пролази кроз осовину OO', а сече омотач облице по двема странама. Па како су ове стране (AE и BF) једнаке и паралелне, то су једнаке и паралелне дужи које везују њихове крајње тачке (AB и EF). Стога је, заиста, осовински пресек било праве, било косе облице, увек паралелограм. Код праве облице сви су осовински пресеци подударни правоугаоници, нормални на базису, а стране су им пречник базиса $2r$ и страна омотача s. Код косе облице осовински су пресеци уопште косоугли паралелограми. Онај осовински пресек косе облице који се добива када раван пролази кроз осовину и њену пројекцију на базису, зове се *значајни паралелограм* косе облице. Само овај осовински пресек је нормалан на базису, а сви остали стоје косо према базису. Коса облица има само један осовински пресек, који је правоугаоник. То је онај пресек који се добива када раван пролази кроз осовину, а нормална је на равни значајног паралелограма. На сл. 363 је значајни паралелограм $ABFE$ а $MNQP$ је правоугаоник.

Напомена. — Поред паралелних и осовинских пресека код једне облице, имамо још *косих* и *управних*, а и пресека добивених равнином која не пролази кроз осовину, али је с њом паралелна. Најзад имамо пресека, када раван није паралелна нити базисима нити осовини, а сече само известан број страна̂ облице. *Кос* пресек добива се када раван сече све стране обличине, али није паралелна базисима (RK на сл. 364). Део праве облице ($ABKR$ на сл. 364) између базиса и косог пресека, зове се *труп* облице, а OO_2 његова осовина. *Управан* пресек код косе облице зове се онај који се добива равнином која је управна на осовини (LS на сл. 363). Овај је пресек увек круг, који је код праве облице подударан базису, а код косе није. Пресек $MNQP$ (сл. 364) добива се када облицу пресечемо равнином паралелном осовини.

§ 141. — Површина облице. — Како се облица сматра као гранична вредност између уписане и описане призме, кад број страна призама бескрајно расте, тј. како је, дакле, облица призма од бескрајно много страна, то су за облицу у важности све теореме које се односе на израчунавање површине и запремине призама и њихових делова. Те теореме код облице гласиће:

Теорема 204. — **Површина омотача праве облице једнака је производу обима базиса и висине облице** (Аналога теореми 177). — Како је код облице обим основе $2r\pi$ а висина h, то је омотач $M = 2rh\pi$. До истога обрасца дошли бисмо множењем дужине и ширише правоугаоника $ABCD$ (сл. 365), који се добива од омотача облице, кад се ова развије и положи у једној равни.



Сл. 365

Укупна површина облице је:

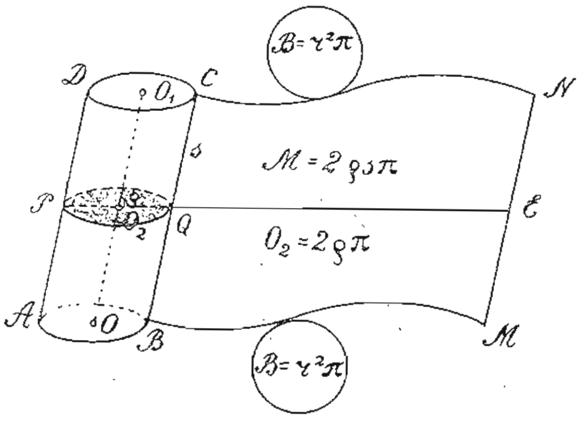
$$P = 2B + M = 2r^2\pi + 2rh\pi = 2r\pi\,(r + h).$$

Површина равностране облице. — Како је код ове облице $h = 2r$, то је површина њеног омотача

$$M = 2r\pi h = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi$$

а целокупна површина $P = 2B + M = 2r^2\pi + 4r^2\pi = 6r^2\pi$, тј. *површина омотача равностране праве облице већа је 4 пута од површине базиса, а цела површина ове облице је 6 пута већа од базиса.*

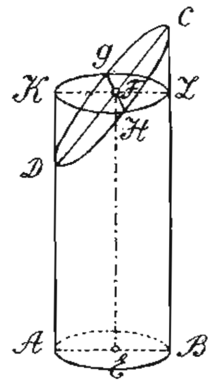
Теорема 205. — **Површина омотача косе облице једнака је производу из обима једног њеног управног пресека и стране облице. — (Аналога теореми 177).** Нека је круг O_2 (сл. 366) управни пресек облице $ABCD$, чији је обим $O_2 = 2\rho\pi$. Тада је по 177 теорема: $M = 2\rho s\pi$, а цела површина косе облице је: $P = 2B + M = 2r^2\pi + 2\rho s\pi = 2\pi\,(r^2 + \rho s)$.



Сл. 366

Развијањем косе облице добија се њена мрежа облика сл. 366. Њен омотач има облик слике $BMNC$, а обим управног пресека O_2 је права QE.

Теорема 206. — **Површина омотача трупа праве облице једнака је производу од обима базиса и осовине трупа.** —

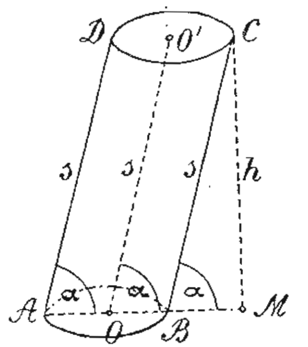


Сл. 367

Нека је $ABCD$ (сл. 367) труп једне праве облице. Кад се овај труп пресече равнином која пролази кроз највећу страну BC и најмању AD, онда она сече базис по пречнику AB а пресек трупа по правој CD. Осовина трупа EF везује средине непаралелних страна трапеза $ABCD$, те је $EF = \frac{1}{2}\,(AD + BC)$. Раван која пролази кроз тачку F, а паралелна је базису, сече труп тако да је $ABLK$ облица. Доказивањем да ова облица има једнак омотач и једнаку запремину с трупом, ова теорема биће доказана. То ћемо успети, ако само докажемо да је део трупа $GHLC$ једнак делу облице $GHDK$. Да су ти делови заиста једнаки, уверавамо се на овај начин: Обртањем дела $GHLC$ око GH за 180°, полукруг GHL поклопиће полукруг GHK, диједар $L(GH)C$ поклопиће диједар $K(GH)D$, пошто су једнаки као унакрсни и најзад, раван GHC поклопиће раван GHD. Потпуним поклапањем делова $GHLC$ и $GHDK$ доказује се њихова једнакост, а тиме и једнакост облице $ABLK$ и трупа $ABCD$. Па како је код облице $ABLK$ површина омотача $M = 2r\pi \cdot EF$, то нам овај образац даје и површину омотача трупа $ABCD$.

§ 142. — Запремина облице. — Како је облица у ствари призма од безконачно много страна, то су и за облицу у важности све теореме које се односе на израчунавање запремине призама.

Теорема 207. — **Запремина облице једнака је производу од површине њеног базиса и висине облице.** (Аналога теорема 187).



Сл. 368

a) Како је код праве облице површина базиса $B = r^2\pi$, а висина h, то је њена запремина

$$V = Bh = r^2\pi h.$$

b) Запремина равностране праве облице биће $V = r^2\pi h = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$.

c) Запремину косе облице израчунавамо, према теореми 187, као и код праве облице, када површину базиса помножимо са висином. Образац за запремину косе облице је, дакле, $V = r^2\pi h$. Ако је, место висине h, дата страна облице s (или осовина $OO' = s$) и њен нагибни угао α према базису, онда је, из правоуглог троугла BMC, $h = s \cdot \sin\alpha$, а $V = r^2\pi h = r^2\pi \cdot s \cdot \sin\alpha = r^2 s\pi \sin\alpha$.

d) Запремину трупа једне косо пресечене праве облице, на основу теореме 206 из пређашњег параграфа, израчунавамо када површину базиса помножимо осовином трупа. Тако је запремина трупа $ABCD$ (сл. 367), која је једнака запремини облице $ABLK$: $V = r^2\pi \cdot EF$.

Напомена. — Како се може код једне облице да опише и упише ма која призма, то треба утврдити да је бочна ивица било описане било уписане призме једнака страни облице и да је базис призме описан или уписан полигон код базиса облице, па треба применити израчунавања код тетивних и тангентних полигона. Ако су уписане и описане призме правилне, онда треба применити израчунавања правилних полигона (§ 120).

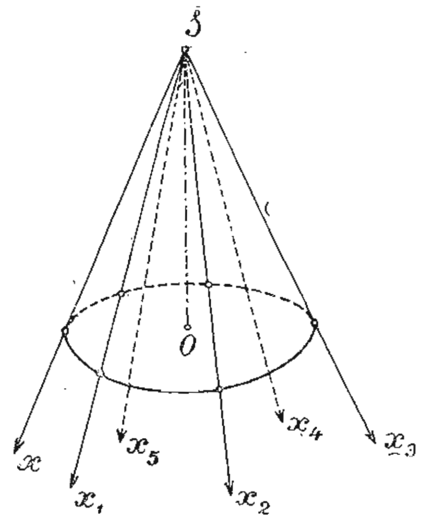
§ 143. — Задаци за вежбу из облице

1) Наћи површину и запремину облице кад је полупречник основе $5\,cm$ а висина $12\,cm$ ($P = 533{,}8\,cm^2$, $V = 942\,cm^3$).
2) Површина једне праве облице је $409{,}77\,cm^2$, а полупречник базиса $4{,}5\,cm$; наћи њену висину и запремину.
3) Наћи висину и површину облице, чија је запремина $785\,cm^3$, а обим базиса $31{,}4\,cm$.
4) Наћи полупречник базиса једног правог цилиндра чија је висина $5\,m$ а површина $10\,m^2$.
5) Полупречник базиса једног цилиндра је $20\,cm$, а запремина му је $12\,560\,cm^3$; наћи површину (одговор: $3768\,cm^2$).
6) Наћи полупречник базиса једног правог цилиндра висине $8\,cm$, кад му је запремина једнака запремини коцке, чија је дијагонала $7\,cm$.
7) Пречник базиса једне облице је $16\,cm$, а површина јој је $1\,507{,}2\,cm^2$; наћи запремину (одговор: $4\,421{,}12\,cm^3$).
8) Запремина једне облице чија је висина двапута већа од пречника базиса је $1\,m^3$. Наћи њену висину.
9) Пречник базиса једне праве облице је трипут мањи од висине, а површина јој је $12\,m^2$; наћи њену запремину.
10) Наћи тежину цилиндарске цеви од гвожђа, ако је унутарњи пречник $17\,cm$, спољашњи $18\,cm$, а дужина цеви $74\,cm$, кад је специфична тежина гвожђа 7,7.
11) Наћи површину и запремину цилиндра који је постао обртањем правоугаоника $ABCD$ око стране AB, кад је $AB = 5\,cm$, а $AC = 7\,cm$.
12) Наћи димензије једног литра када он има облик правог цилиндра, а висина му је трипута већа од пречника базиса.
13) Која је дужина колута од сребра тежине $25\,gr$, а чији је пречник $0{,}037\,m$, када је специфична тежина сребра 10,47?
14) Шупаљ цилиндер празан тежак је $140\,gr$. Ако се у њега сипа жива висине $10\,cm$, тежина постаје $256\,gr$; наћи унутарњи пречник овог цилиндра, када је специфична тежина живе 13,59.
15) Пречник базиса и висина правог цилиндра имају се као $4:7$, а површина омотача је $87\,dm^2$. Наћи његове димензије.
16) Пречник базиса трупа правог цилиндра је $0{,}25\,m$; најмања страна трупа је $0{,}30\,m$ а највећа $0{,}54\,m$. Наћи површину омотача овог трупа и његову запремину.
17) Обим базиса цилиндарске вазе је $1{,}43\,m$, а површина њеног осовинског пресека је $1{,}35\,m^2$; наћи запремину ове вазе.
18) Од развијеног омотача једног правог цилиндра добија се правоугаоник дијагонале $3\,m$. Наћи запремину цилиндра, ако је његова висина $1{,}3\,m$.
19) Који је пречник пресека жице од гвожђа дужине $100\,m$, тежине $500\,gr$, кад је специфична тежина гвожђа 7,7?
20) Израчунај полупречник равностране облице кад се зна: а) површина омотача $150\,dm^2$, b) запремина $30{,}456\,dm^3$.
21) Израчунај запремину цилиндарске цеви кад је спољашњи полупречник $30\,cm$, унутрашњи $25\,cm$, а дужина $2{,}5\,m$, b) дебљина $4\,cm$, дужина $3\,m$, а спољашњи полупречник $24\,cm$.
22) Израчунај дебљину цилиндарске цеви кад је позната запремина V, дужина h и спољашњи полупречник R.
23) Колики је полупречник равностране облице чија је запремина $1\,hl$?

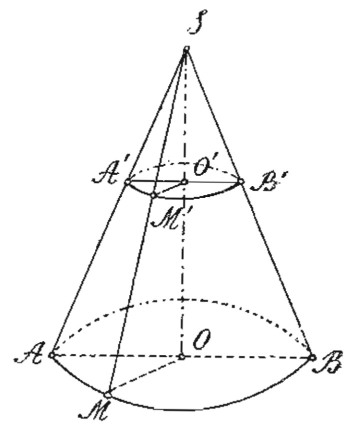
24) Колика је дебљина жице од бакра $1\,km$ дужине, када је њена тежина $10\,kgr$, а специфична тежина бакра 8,9?
25) Стране једног парчета лима облика правоугаоника стоје у размери $3:5$. Оно се може на два начина савити тако да се добија омотач облице. У којој размери стоје запремине добивених облица?
26) *Наћи запремину косе облице кад је полупречник базиса $r = 6\,cm$, страна $s = 13\,cm$, а њен нагибни угао према базису $\alpha = 50^0 40'$.*
27) Пресек управне облице који је паралелан са њеном осовином има дијагоналу $d = 17\,cm$, површину $p = 120\,cm^2$, а даљину од центра основе $c = 3\,cm$. Колики је волумен (запремина) те облице? (Ср. Карловци, 1934).
28) Шупљи цилиндар (горе отворен) има спољашњу висину $h_1 = 15\,cm$ а унутарњу $h_2 = 12\,cm$. Спољашњи му пречник $d_1 = 10\,cm$ а унутарњи $d_2 = 9\,cm$. Колико ће уронити пливајући у води (4^0C), кад је специфична тежина материје цилиндра $S = 1{,}5$? (Сињ, 1934).
29) Један спроводник дебљине $1{,}2\,cm$ и дужине $5\,km$ има да се обложи оловом $3\,mm$ дебљине. Колико је потребно олова, чија је специфична тежина 11,4? (Београд, Реалка 1923).

II. КУПА

§ 144. — Постанак и врсте купа. — Када зрак Sx (сл. 369) клизи по обиму круга O, а стално пролази кроз свој почетак па поново дође у свој првобитни положај, онда он описује криву површину, која се зове *купаста* или *конусна* површина.



Сл. 369

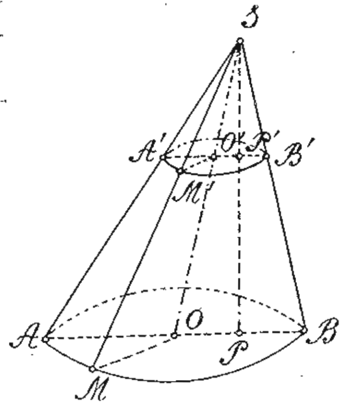


Сл. 370

Зрак који ствара ову површину зове се *изводница*, а обим круга по коме се изводница креће зове се *линија водиља*.

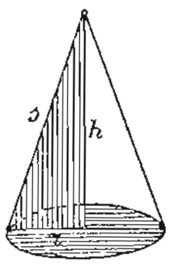
Почетна тачка S зрака зове се *врх* купасте површине. Кад се купаста површина пресече равнином која је паралелна равнини линије водиље, добија се тело које се зове *купа* или *конус*. Пресек купасте површине и паралелне равни с линијом водиљом је круг. Површина оног круга зове се *основа* или *базис*, а део купасте површине ограничен обимом базиса, зове се *омотач* купе. Дуж SO, која везује теме са центром базиса, зове се *осовина*. Пресек SM (сл. 370) омотача купе и равни која пролази кроз осовину, зове се *страна* купе. Раздаљина SP (сл. 371) од врха до базиса, зове се *висина*.

Према томе да ли је осовина SO управна или коса према базису, купе делимо на *праве* (сл. 370) и *косе* (сл. 371). Код праве купе све су стране једнаке, а висина јој се поклапа са осовином. Стране код косе купе нису једнаке. Најдужа и најкраћа страна косе купе налазе се на ономе осовинском пресеку (△ ABS на сл. 371) који се добива када ову купу пресечемо равнином која пролази кроз осовину SO и њену пројекцију OP на базису.



Сл. 371

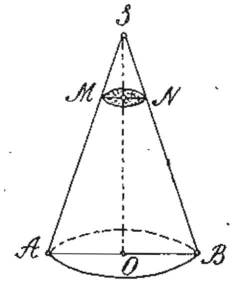
Кад се купа пресече равнином паралелном базису, онда се дели на два дела. Део купе између пресека и базиса зове се зарубљена купа ($ABB'A'$ на сл. 370), а део $A'B'S$ од пресека до врха, *допуна* зарубљене купе. Зарубљена купа ограничена је двема неједнаким кружним површинама и оним делом омотача купе који се налази између обима базиса и пресека. Дуж OO' је осовина зарубљене купе, а сваки пресек њеног омотача и равни која пролази кроз осовину, зове се *страна* зарубљене купе. Отстојање између пресека и базиса зове се *висина* зарубљене купе. И зарубљена купа може бити *права* ($ABB'A'$ на сл. 370) или *коса* ($ABB'A'$ на сл. 371), према томе да ли је добивена од једне праве или косе купе. Код праве зарубљене купе све су стране једнаке, а висина јој је једнака са осовином. Код косе купе стране, осим две, нису једнаке, а осовина је већа од висине.



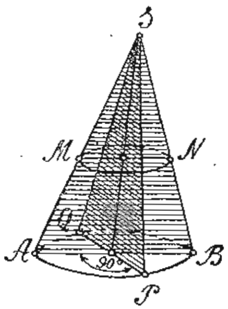
Сл. 372

Сваку купу можемо сматрати као пирамиду од бескрајно много страна. Права купа може се сматрати да је постала обртањем правоуглог троугла око једне своје катете. Ова катета је осовина (висина) праве купе, друга је катета полупречник базиса, а хипотенуза је њена страна (сл. 372).

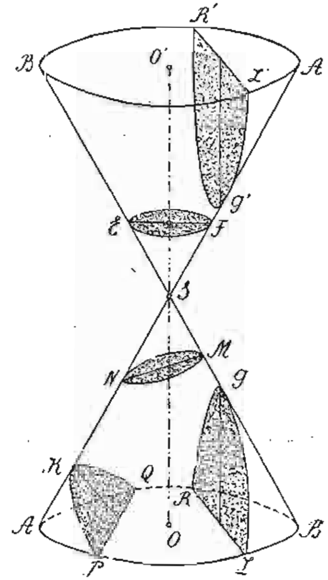
§ 145. — Пресеци и мреже купâ. — Код купе све пресеке можемо поделити на две главне групе: *осовинске* и *неосовинске*. Осовински се пресек добива пресеком купе равнином која пролази кроз осовину. Овај је пресек код целе купе троугао, и то: *равнокрак* код праве купе (ABS на сл. 373), а *разностран* код косе купе (ABS на сл. 374). Код зарубљене купе осовински је пресек трапез, и то: *равнокрак* код праве купе ($ABNM$ на сл. 373), а *разностран* код косе купе ($ABNM$ на сл. 374). Код праве купе сви су осовински пресеци подударни троуглови и сви нормално стоје према базису. Код косе купе осовински су пресеци, осим једног, разнострани троуглови. Само један од њих стоји нормално према базису, а тај се пресек добива када раван пролази кроз осовину и њену пројекцију на базису. Остали пресеци стоје косо према базису. Овај нормални пресек зове се *значајни троугао* (ABS на сл. 374). У њему су стране најдужа и најкраћа страна купина, и пречник базиса. Од свију осовинских пресека косе купе, само један је равнокрак троугао, а то је онај који се добива када раван пролази кроз осовину а управна је према равнини значајног троугла (PQS на сл. 374).



Сл. 373



Сл. 374

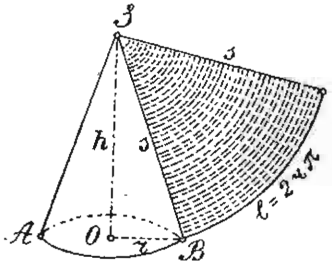


Сл. 375

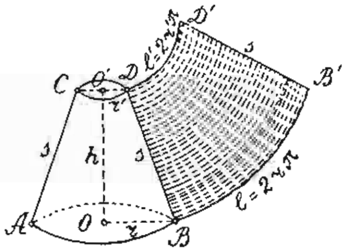
Неосовински пресеци јесу: *круг*, *елипса*, *хипербола* и *парабола*. Пресек је *круг*, ако раван сече све стране купе а паралелна је базису (EF на сл. 375); он је *елипса*, ако раван није паралелна базису, али сече све купине стране (MN на сл. 375); *хипербола* је пресек добивен од двеју унакрсних купа равнином која је паралелна или непаралелна осовини ($RGLR'G'L'$

сл. 375); и најзад парабола се добива када је раван паралелна страни купе (PKQ, сл. 375). Ови се пресеци једним именом зову *купини или конусни пресеци*.

Мреже омотача развијене купе претстављене су сли-

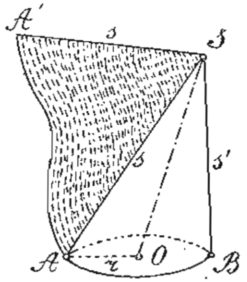


Сл. 376

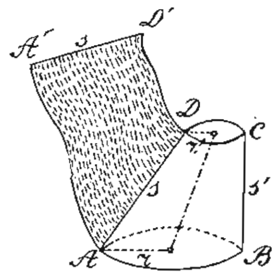


Сл. 377

кама, и то: сликом 376 мрежа целе праве, сликом 377 зарубљене праве, сликом 378 косе целе и сликом 379 зарубљене косе.



Сл. 378



Сл. 379

Теорема 208. — **Кад се купа пресече равнином паралелном базису, онда је: а) тај пресек круг; b) површине пресека и базиса стоје у размери као квадрати њихових раздаљина од купиног врха.**

а) Нека је на сл. 370 и 371 раван $A'M'B'$ паралелна базису и нека је осовина SO продире у тачци O'. Ако на пресеку узмемо тачке $A' M', B' \ldots.$ и кроз те тачке поставимо равни које пролазе и кроз осовину, онда ће оне сећи омотач по правама: $SA, SM, SB \ldots.$, а пресек и базис по паралелним правама: $O'A'$ и OA, $O'M'$ и OM, $O'B'$ и $OB \ldots.$ Стога је: $O'A' : OA = SO' : SO$; $O'M' : OM = SO' : SO$; $O'B' : OB = SO' : SO$. Из ових пропорција, чије су десне стране једнаке, имамо:

$$O'A' : OA = O'M' : OM = O'B' : OB = \ldots.$$

Па како су други чланови: $OA, OM, OB, \ldots.$ ове продужне пропорције једнаки као полупречници базиса, то су једнаки

и њени први чланови, тј. $O'A' = O'M' = O'B' = \ldots.$ Ове једначине показују нам да су тачке: $A', M', B', \ldots.$ подједнако удаљене од тачке O', тј. да се налазе на периферији круга чији је центар O'.

b) Раван која пролази кроз SO и висину SP купе SAB (сл. 371) сече пресек и базис по правама $O'P'$ и OP. Ови су пресеци паралелни, те је: $SP' : SP = SO' : SO$, или $SP_1^2 : SP^2 = SO_1^2 : SO^2$. Па како је и $O_1M_1^2 : OM^2 = SO_1^2 : SO^2$, а површине кругова се имају као квадрати њихових полупречника, тј. $b : B = O_1M_1^2 : OM^2$, то је заиста:

$$b : B = SP_1^2 : SP^2.$$

Теорема 209. — **Кад раван сече купу и пролази кроз осовину, добивени пресек је троугао.** — Пошто свака раван која пролази кроз осовину сече базис по једном пречнику, а омотач по двема дужима, то је заиста осовински пресек увек троугао.

Теорема 210. — **Осовински пресек зарубљене купе је увек трапез.** — Овај је пресек заиста трапез, пошто раван која пролази кроз осовину сече базис и пресек по паралелним али неједнаким пречницима, а омотач по двема непаралелним дужима.

§ 146. — Површина купе. — Како се купа сматра као пирамида од бескрајно много страна, то за њу вреде све оне теореме које се односе на израчунавање површине и запремине пирамида.

Теорема 211. — **Површина омотача праве купе једнака је половини производа обима базиса и стране купе** (Аналога теореми 192).

а) Ако је r полупречник базиса а s страна купе, онда је обим основе $2r\pi$. Стога је површина омотача праве купе, према овој теореми:

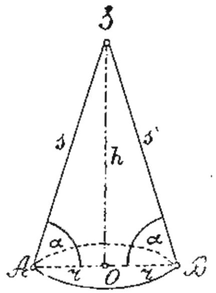
$$\boldsymbol{M} = \frac{2r\pi \cdot s}{2} = \boldsymbol{r\, s\, \pi}.$$

До овога обрасца можемо доћи израчунавањем површине кружног исечка добивеног развијањем купе (сл. 376). Како је лук овог исечка $l = 2r\pi$, а полупречник му је s, то је његова површина $M = \frac{ls}{2} = \frac{2r\pi \cdot s}{2} = rs\pi$. Целокупна површина праве купе биће: $\boldsymbol{P} = B + M = r^2\pi + rs\pi = \boldsymbol{r}\pi\,(\boldsymbol{r} + s)$.

b) Код равностране купе је $s = 2r$, те је: површина омотача $\boldsymbol{M} = rs\pi = r\pi \cdot 2r = \boldsymbol{2r^2\pi}$, а целокупна површина $\boldsymbol{P} = B + M = r^2\boldsymbol{\pi} + 2r^2\pi = \boldsymbol{3r^2}\pi$, тј. *површина омотача равно-*

стране купе двапута је већа од површине базиса, а цела је површина трипута већа.

c) При решавању задатака треба водити рачуна код праве купе (сл. 380) о релацијама:

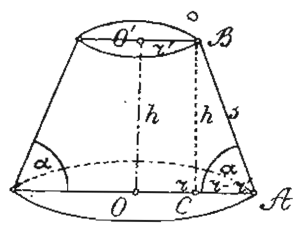


Сл. 380

1) $s^2 = h^2 + r^2$; 2) $h = s \cdot \sin\alpha = r \cdot tg\,\alpha$; 3) $r = s \cdot \cos\alpha = h \cdot cotg\,\alpha$, где нам s претставља страну купе, h њену висину, r полупречник базиса, а α нагибни угао бочне стране према базису. Кад год су познате ма које две од количина: s, h, r и α, употребом горњих релација, налазимо остале две. Код равностране купе је: $s = 2r$, $h = \frac{s}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$, а $\alpha = 60^0$.

Напомена. — Површину омотача косе купе не можемо израчунати по обрасцу $M = rs\pi$, јер развијањем ове купе не добија се кружни исечак, већ слика облика у сл. 378, чију површину можемо израчунати само приближно тачно.

Теорема 212. — **Површина омотача зарубљене купе једнака је половини производа од збира обима њених основа и стране купе.** — Пошто се ова купа сматра као зарубљена пирамида од бескрајно много страна, то је према § 131 под *c)*, обим доњег базиса $o = 2r\pi$, горњег $o' = 2r'\pi$, а s страна купина. Стога је:



Сл. 381

$$M = \frac{o + o'}{2} \cdot s = \frac{2r\pi + 2r'\pi}{2} \cdot s = (r + r')s\pi.$$

Целокупна површина зарубљене купе биће:

$$P = B + b + M = r^2\pi + r_1^2\pi + (r + r')s\pi = [r^2 + r_1^2 + (r + r_1)s]\,\pi.$$

При решавању задатака треба водити рачуна код зарубљене купе (сл. 381) о релацијама: 1) $s^2 = h^2 + (r - r')^2$; 2) $h = s \cdot \sin\alpha = (r - r')\,tg\,\alpha$; и 3) $r - r' = s \cdot \cos\alpha = h\,cotg\,\alpha$, које су изведене из правоуглог троугла ABC.

§ 147. — Запремина купе. — *Теорема 213.* — **Запремина праве или косе купе једнака је трећини производа од површине базиса и висине купе.** — Како је ова теорема аналога теореми 198 (§ 132) из пирамида, то је заиста запремина купе

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{r^2\pi h}{3}.$$

Запремина равностране купе, код које је $h = r\sqrt{3}$, је:

$$V = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{r^2\pi \cdot r\sqrt{3}}{3} = \frac{r^3\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Теорема 214. — **Запремина зарубљене купе једнака је збиру запремина трију купа исте висине као у зарубљене купе, а њихови су базиси: код прве већи базис, код друге мањи, а код треће средња пропорционала оба базиса зарубљене купе.** — Како је ова теорема аналога теореми 199 из пирамида, то је запремина зарубљене купе:

$$V = (B + \sqrt{Bb} + b)\,\frac{h}{3} = (R^2\pi + Rr\pi + r^2\pi)\frac{h}{3} = (R^2 + Rr + r^2)\frac{h\pi}{3}.$$

Напомена. — Ако је код једне праве купе описана или уписана правилна n-тострана пирамида, онда је: а) *код описане пирамиде:* базис купе уписан круг у правилном n-тоуглу, а страна купе је једнака бочној висини пирамидној; b) *код уписане пирамиде:* базис купе је описан круг око правилног n-тоугла, а страна купе једнака је бочној ивици пирамидиној. Исти је случај и са зарубљеним пирамидама које су описане или уписане код једне праве зарубљене купе. Висина купе поклапа се са висинама и описане и уписане пирамиде.

§ 148. — Задаци за вежбу из купе*)

1) Наћи површину и запремину праве купе висине $5\,m$, а полупречника базиса $2{,}6\,m$.

2) Наћи полупречник базиса праве купе висине $7\,m$ кад је бочна површина $18\,m^2$.

3) Наћи полупречник базиса праве купе висине $10\,cm$ кад је запремина $376{,}8\,cm^3$.

4) Наћи површину и запремину купе поја постаје обртањем правоуглог троугла катетâ 6 и 8 m, најпре око једне, а затим око друге катете.

5) Наћи површину и запремину тела које постоје обртањем правоуглог троугла, катетâ $3\,m$ и $4\,m$, око хипотенузе.

6) Наћи површину и запремине праве купе висине $16\,cm$ а стрáне $20\,cm$.

7) Наћи страну праве купе висине $6{,}5\,m$ а запремине $74{,}5\,m^3$.

8) Наћи површину једне праве купе чија је запремина $301{,}44\,cm^3$, кад је полупречник базиса $6\,cm$ (одговор: $301{,}44\,cm^2$).

9) Наћи површину праве купе висине $30\,cm$, кад је површина једног њеног осовинског пресека $480\,cm^2$ (одговор: $2512\,cm^2$).

10) Осовински пресек једне праве купе има обим $160\,cm$, а висина купе је $40\,cm$. Наћи њену површину и запремину ($P = 1256{,}4\,cm^2$, $V = 4188\,cm^3$).

11) Шта стаје златна права купа стране $0{,}5\,cm$ а полупнечника базиса $0{,}3\,cm$, кад је специфична тежина злата 19,325, а један $kgr.$ злата стаје 30000 динара?

*) Задаци курзивом решавају се употребом тригонометриских функција.

12) Наћи запремину праве купе када је површина омотача 427,04 cm^2 а цела површина 628 cm^2 (одговор: 1004,8 cm^3).

13) Запремина једне праве купе је 2 m^3, а висина јој је 4 m; наћи површину пресека и површину допуне зарубљене купе када се дата купа пресече равнином паралелном базису на отстојању 1,5 m од врха.

14) Доказати да је запремина праве купе једнака производу од омотача и $\frac{1}{3}$ отстојања центра базиса до стране купине.

15) Наћи размеру површинâ базиса и омотача оне купе чија је висина једнака пречнику базиса.

16) Права купа 6,5 m висине и 1,5 m полупречника базиса развијена је. Наћи угао добивеног кружног исечка.

17) Поделити омотач праве купе на: a) два једнака дела; b) три једнака дела; c) два дела по размери 3:4.

18) Наћи површину и запремину зарубљене купе висине 5 m, када су полупречници њених базиса 3 m и 2 m.

19) Површина омотача праве зарубљене купе је 30 m^2. Полупречник једног њеног базиса је 3 m, а страна 2 m; наћи полупречник другог базиса и висину ове купе.

20) Наћи висину зарубљене купе чија је запремина 60 m^3, а полупречници њених базиса јесу 6 m и 4 m.

21) Купа 8 m висине, а полупречника базиса 3 m, пресечена је равнином паралелном базису на 3 m отстојања од врха; наћи запремину добивене зарубљене купе.

22) Наћи полупречнике базиса зарубљене праве купе, кад се зна запремина, страна и висина.

23 Бокал облика зарубљене праве купе има за пречник дна 28 cm, пречник отвора 18 cm, а страна му је 20 cm; наћи његову запремину.

24) Ако се стави 1 l воде у бокал из претходног задатка, која је висина воде у бокалу?

25) Висина једне зарубљене купе једнака је пречнику већег базиса, а полупречник мањег базиса је трећина висине. Наћи њене димензије, ако је њена површина 1 m^2.

26) Наћи димензије купе из претходног задатка, ако је њена запремина 1 m^3.

27) Купа добивена је од кружног исечка полупречника 0,5 m, а средишњег угла 80⁰. Наћи њену запремину.

28) Висина једне праве купе је 20 m, а запремина 387 m^3. Отсећи од ове купе паралелном равнином базису купу, чија је запремина 95 m^3.

29) Висина једне праве купе је 10 m, а полупречник базиса 5 m. На ком остојању од базиса треба пресећи ову купу паралелном равнином базису, да би се добила зарубљена купа запремине 20 m^3?

30) Течност чија је специфична тежина 1,72 испуњава вазу чија је унутрашњост зарубљена купа висине 0,25 m, а полупречници базиса 0,2 m и 0,15 m. Наћи тежину течности у вази.

31) Косоугли троугао чије су стране 4, 6 и 8 m обрће се око једне, затим око друге и најзад око треће стране; израчунај запремину телâ која обртањем постају.

32) Израчунај запремину купе, кад је r полупречник њеног базиса, а развијен омотач је: a) квадрант, b) секстант, c) октант.

33) Страна зарубљене праве купе је 12 cm, а површина њеног омотача 7536 cm^2, наћи полупречник горњег базиса, кад је полупречник доњег базиса 13 cm (одговор: 7 cm).

34) Зарубљена купа чија је висина 27 cm, а полупречници базиса 10 m и 4 cm, пресачена је двема равнима које су паралелне с базисима. Наћи запремине добивених делова (одг. 2898,48 cm^3; 1394,16 cm^3; 715,92 cm^3).

35) Полупречници базиса једне зарубљене праве купе јесу 14 и 2 cm, а висина јој је 18 cm. На ком отстојању од већег базиса треба пресећи ову пирамиду равнином паралелном базисима тако да је површинâ добивеног пресека једнака половини збира површинâ базиса?

36) *Наћи површину и запремину праве купе кад се зна: a) полупречник основе и нагибни угао* α *бочне стране према базису; b) висина* h *и нагибни угао* α *бочне стране према базису; c) стране* s *и њен нагибни угао према базису* α*; d) полупречник базиса* r *и угао на врху осовинског пресека* γ.

37) *Наћи површину и запремину зарубљене купе, кад се зна: a) полупречници базиса* R *и* r *и нагибни угао* α *бочне стране према доњем базису; b) висина* h*, полупречник доњег базиса* R *и нагибни угао* α *бочне стране према базису; c) висина* h*, полупречник горњег базиса* r *и нагибни угао* α *бочне стране према базису; d) стране* s*, висина* h *и полупречник доњег базиса* R*; e) страна* s*, њен нагибни угао према базизу* α *и полупречник доњег базиса* R.

38) Зарубљена купа, којој су полупречници основâ $R = 9$ и $r = 4$, а $h = 6{,}5$, пресечена је равнином паралелном основама тако да је површина пресека геометриска средина између површинâ основâ. У којој размери стоје површине и запремине делова? (Београд, I мушка, 1906).

39) На већој основи праве зарубљене купе, у које се полупречници основа разликују за 14 cm, стоји права купа чија запремина према запремина зарубљене купе стоји у размери као 27 : 13. Колики су полупречници основа, када права купа има трипута већу висину од висине зарубљене купе (Београд, III мушка, 1930).

40) Једној правој купи висина је $H = 10\ dm$, а полупречник основе $R = 4\ cm$; да се та купа пресече једном равни паралелном са основом тако да оба дела буду једнака по запремини. На ком растојању од основе треба је пресећи? (Београд, III мушка, 1903).

41) Над разностраним троуглом, чије су стране 14, 18 и 26 cm, конструисана је купа тако да је њен базис уписан у овом троуглу. Тражи се површина и запремина ове купе, ако је њена висина једнака збиру корена једначине $x^2 + 112 = 22\,x$ (Панчево, 1933).

42) Једна равнина сече купу волумена $\frac{200\pi}{3}\ dm^3$ паралелно с базисом на удаљености $a = 3dm$ од базиса. Друга равнина сече паралелно с првом равнином на удаљености $b = 2dm$ од ње. Колики је волумен настале зарубљене купе између оба пресека, ако је карактеристични пресек задате купе површине 40 dm^2? (Сарајево, шеријетска, 1931).

43) У правој зарубљеној купи ($R = 3$, $r = 2$, $h = 5$) налазе се две купе, и то тако да им се базиси поклапају са базисима зарубљене купе, а

врх им је заједнички и налази се на осовини зарубљене купе. Нађи висине ових двеју купа, њихове волумене и волумен преосталог тела, ако ове две купе изрежемо (Сарајево, женска 1932).

44) Волумен зарубљене купе је 2580 cm^3. Њена је висина 15 cm и износи $\frac{3}{8}$ висине целе купе. Нађи полупречнике базиса (Сушак, женска 1934).

45) Нађи површину праве купе чији је полупречник основе страна правилног десетоугла уписаног у кругу полупречника $r = 5\,cm$, а висина јој је једнака полупречнику тога круга (Загреб, приватна 1934).

46) Нађи запремину праве купе, кад је њена страна $s = 12{,}5\,cm$, а нормала спуштена из средишта основе на ту страну износи 6 cm (Београд, III мушка, 1925).

47) Дат је један круг од хартије полупречника $R = 28\,cm$. Из њега се исече један исечак AOA_1 од 90^0, па се онда споје полупречници OA и OA_1. На тај начин добија се једна купа чија се површина и запремина тражи (Београд, Реалка, 1921).

48) Дата је висина $h = 4\,m$ и полупречник $r = 3\,m$ основе једне праве купе. На којој раздаљини од врха треба пресећи ту купу равнином која је паралелна са њеном основом, па да целокупна површина добијене мале купе буде равна површини омотача велике купе?

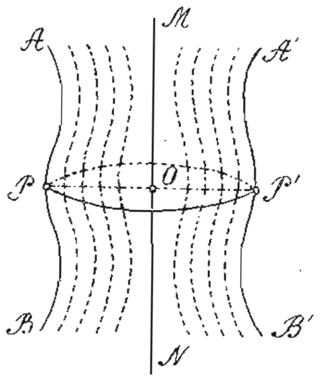
(Београд, Реалка, 1922).

49) Плехана чаша од 1 литра има облик праве зарубљене купе, чији је однос између њене дубине, пречника дна и пречника отвора 7 : 6 : 10. Нађи величину површине од које је чаша сграђена.

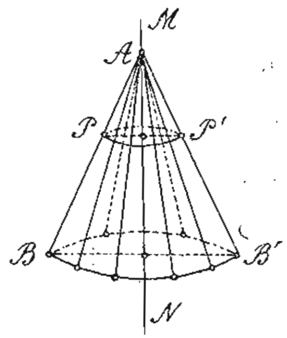
(Београд, I мушка, 1922).

III. ОБРТНЕ ПОВРШИНЕ И ЗАПРЕМИНЕ

§ 149. — Постанак обртне површине. — Под *обртном*



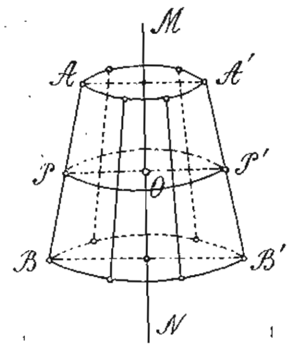
Сл. 382



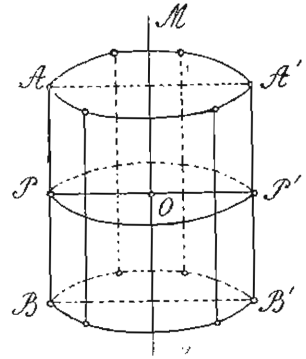
Сл. 383

површином разумемо ону површину која се добива обртањем ма које линије (праве, криве или изломљене) око једне сталне

праве MN. Линија која се обрће зове се линија изводница (AB), а стална права око које се изводница обрће зове се *осовина абртања* (MN). Линија изводница AB у сталном је односу према осовини обртања MN. Тако, ако на изводници узмемо тачку P, па из ње спустимо на осовину нормалу PO, онда, при обртању изводнице, не мења се нити дужина ове нормале, нити величина угла MOP, нити положај тачке O.



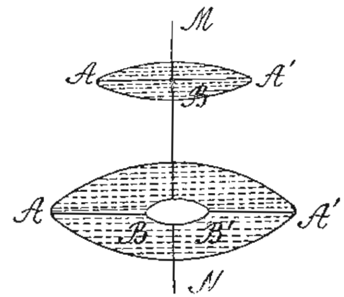
Сл. 384



Сл. 385

Стога свака тачка изводнице при обртању описује круг чија је раван нормална на осовини обртања, а центар му је на тој осовини, тј. свака тачка изводнице креће се ротационо око осовине обртања или осовине ротације.

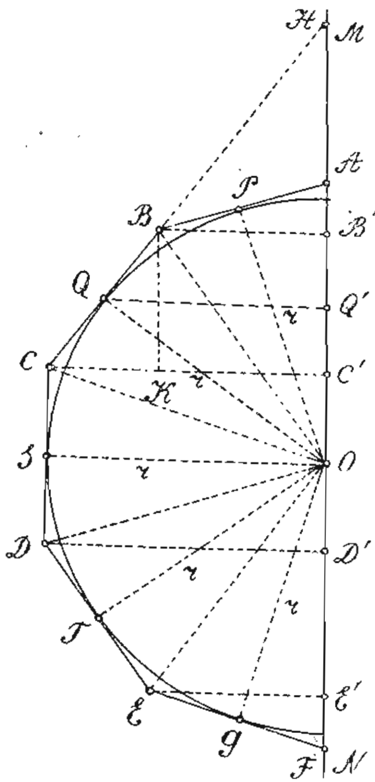
Свака раван која пролази кроз осовину обртања, зове се *меридијана*, а њен пресек са обртном површином зове се *меридијан*. Сви су меридијани једнаки, пошто сваки од њих при обртању пролази кроз исти положај у коме је био сваки други меридијан.



Сл. 386

Обртну површину добијамо када се и једна равна слика обрће око једне своје стране или дијагонале. Та страна, односно дијагонала, је у овом случају осовина ротације, а тело ограничено обртном површином зове се *обртно тело*.

Кад се дуж обрће око обртне осовине која се налази у истој равни, онда је обртна површина те дужи: или омотач једне целе купе (сл. 383), или омотач зарубљене купе (сл. 384), или омотач облице (сл. 385), или је најзад кружна површина (сл. 386), према томе да ли та дуж има једну своју крајњу тачку на обртној осовини, или је ван обртне осовине али није с њом паралелна, или је дуж паралелна са обртном осовином, или је дуж нормална на обртној осовини. У овом последњем случају, ако дуж нема са обртном осовином заједничке тачке, обртна површина је кружни прстен дебљине обртне дужи. Кад се разломљена линија обрће око обртне осовине која се налази у истој равни, онда је добивена обртна површина једнака збиру обртних површина добивених од појединих дужи те разломљене линије.



Сл. 387

§ 150. — Израчунавање обртне површине. — Израчунавање величине обртне површине оснива се на овој теореми:

Теорема 215. — **Обртна површина полуобима правилног многоугла с парним бројем страна, а чија се дијагонала поклапа са обртном осовином, једнака је производу од обима уписаног у многоуглу круга и пројекције полуобима многоугла на обртној осовини.** — Спајањем средишта O (сл. 387) правилног многоугла са његовим теменима, многоугао се дели на равнокраке троуглове. Неке од основица ових троуглова имају једну своју граничну тачку на осовини MN друге немају заједничке тачке али продужене секу осовину, и најзад, треће су паралелне са осовином. Стога неке од тих основица производе обртањем омотач целе купе, друге омотач зарубљене купе, а треће омотач облице.

Ако је r *полупречник уписаног круга у многоуглу, онда је површина ма кога од ових омотача једнака производу од* $2r\pi$ *и пројекције основице (која ствара дотични омотач) на обртној осовини.* Да је ово тачно уверавамо се на следећи начин:

a) Како страна AB производи обртањем омотач целе купе, то је обртна површина од AB, према 211 теореми (§ 146):

$$M_{(AB)} = \pi \cdot BB' \cdot AB \ldots (1).$$

Међутим, $\triangle ABB' \sim \triangle OPA$, пошто имају једнаке углове, те је:

$$AB' : AP = BB' : OP, \text{ или } AB' : \frac{AB}{2} = BB' : r.$$

Одавде је $BB' \cdot AB = 2r \cdot AB'$. Заменом у (1) добијамо:

$$\boldsymbol{M_{(AB)} = 2r\pi AB'} \ldots (\mathrm{I}).$$

b) Обртна површина од BC према 212 теореми је:

$$M_{(BC)} = (CC' + BB') \cdot BC \cdot \pi \ldots (2).$$

Међутим, из сличности троуглова OQQ' и BCK, имамо:

$$BC : OQ = BK : QQ', \text{ или } BC : r = B'C' : QQ', \text{ или}$$

$$BC : r = B'C' : \frac{CC' + BB'}{2}.$$

Одавде је $(CC' + BB') \cdot BC = 2r \cdot B'C'$. Заменом у (2) добијамо:

$$\boldsymbol{M_{(BC)} = 2r\pi \cdot B'C'} \ldots (\mathrm{II}).$$

c) Обртна површина од CD, према 204 теореми (§ 140) је:

$$\boldsymbol{M_{(CD)} = 2DD'\pi \cdot CD = 2r\pi \cdot C'D'} \ldots (\mathrm{III}).$$

Из једнакости: I, II и III увиђамо да основица равнокраког троугла, абртањем троугла око осовине, која пролази кроз његов врх, производи површину једнаку површини омотача оне облице чији је полупречник базиса једнак основичиној висини равнокраког троугла, а висина је обличина једнака пројекцији основице на обртној осовини.

Према једначини (II) биће обртна површина од DE:

$$\boldsymbol{M_{(DE)} = 2r\pi \cdot D'E'} \ldots (\mathrm{IV}),$$

а према једначини (I) биће обртна површина од EF:

$$\boldsymbol{M_{(EF)} = 2r\pi \cdot E'F} \ldots (\mathrm{V}).$$

Сабирајући површине које производе основице свих равнокраких троуглова обртног полуобима правилног многоугла, добијамо целу обртну површину. Код нашег примера биће:

$$\boldsymbol{P}_{(ABCDEF)} = 2r\pi\,(AB' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F) =$$
$$= 2r\pi \cdot AF = 2r\pi \cdot 2R = \boldsymbol{4Rr\pi},$$

пошто је $AF = 2R$, тј. пречнику описаног круга око правилног многоугла. На основу ове теореме је:

$P_{(ABC)} = 2r\pi\cdot AC'$ (добија се сабирањем једнакости I и II),
$P_{(ABCD)} = 2r\pi\cdot DA'$ („ „ „ „ I, II и III), тј.
обртна површина једнога дела правилног полигона једнака је производу од $2r\pi$ и пројекције тога дела на обртној осовини.

§ 151. — Израчунавање обртне запремине. — Израчунавање обртне запремине оснива се на овој теореми:

Теорема 216. — **Запремина тела које постаје обртањем половине правилног многоугла око своје дијагонале, која спаја крајње тачке полуобима, једнака је производу од трећег дела добивене обртне површине и полупречника уписаног круга у многоуглу.** — И код ове теореме, као у претходној, разликујемо три случаја према томе да ли основица равнокраког троугла има са осовином једну заједничку тачку, или је ван ње, паралелна или непаралелна.

a) Обртањем равнокраког троугла OAB (сл. 387) око осовине MN, добијамо две купе, које имају заједнички базис полупречника BB'. Стога је:

$$V_{(AOB)} = \frac{1}{3}\pi BB'^2\cdot AO \qquad \ldots\ldots (1).$$

Па како је из сличности троуглова AOP и ABB': $OA : AB = OP : BB'$, или $OA\cdot BB' = OP\cdot AB$, то заменом у (1) добијамо:

$$V_{(AOB)} = \frac{1}{3}\pi BB'\cdot OP\cdot AB = \pi\cdot BB'\cdot AB\cdot\frac{1}{3}OP.$$

Израз $\pi\cdot BB'\cdot AB$ претставља површину омотача купе описане од AB, тј. обртну површину $P_{(AB)}$, те је:

$$V_{(AOB)} = P_{(AB)}\cdot\frac{1}{3}OP = P_{(AB)}\cdot\frac{r}{3} \qquad \ldots\ldots (I).$$

b) Ако основицу CB равнокраког троугла OBC продужимо до пресека H са осовином MN, онда је обртна запремина, произведена обртањем троугла OBC, једнака разлици обртних запремина произведених обртањем око исте осовине MN троуглова OHC и OHB. Стога је:

$$V_{(OBC)} = V_{(OHC)} - V_{(OHB)} \qquad \ldots\ldots (2).$$

Па како је према случају под a): $V_{(OHC)} = P_{(HC)}\cdot\frac{r}{3}$ и $V_{(OHB)} = P_{(HB)}\cdot\frac{r}{3}$, то заменом у (2) добијамо:

$$V_{(OBC)} = P_{(HC)}\cdot\frac{r}{3} - P_{(HB)}\cdot\frac{r}{3} = (P_{(HC)} - P_{(HB)})\cdot\frac{r}{3} = P_{(BC)}\cdot\frac{r}{3} \quad (II).$$

c) Обртање троугла OCD, чија је основица паралелна са основицом MN, производи обртну запремину, која је две трећине од обртне запремине, произведене обртањем правоугаоника $CDD'C'$ око исте осовине. Да је ово тачно, уверавамо се на следећи начин. — Запремина купе која је постала обртањем троугла OCC' око MN јесте трећина од запремине облице добивене обртањем правоугаоника $OC'CS$ око MN, пошто имају једнаке базисе и висине. Стога је запремина тела произведеног обртањем троугла OCS око MN две трећине запремине поменутог цилиндра, тј.

$$V_{(OCS)} = \frac{2}{3}\pi r^2\cdot CS \;\ldots (3).$$

Истим путем нашли бисмо да је:

$$V_{(ODS)} = \frac{2}{3}\pi r^2\cdot SD \;\ldots (4).$$

Сабирањем једначинâ (3) и (4) добијамо:

$$V(OCD) = V(OCS) + V(ODS) = \frac{2}{3}\pi r^2 (CS + SD) = \frac{2}{3}\pi r^2 . CD \ldots (5).$$

Па како је $CD = C'D'$ а $2r\pi . C'D' = P_{(CD)}$, то заменом у (5) добијамо:

$$V_{(OCD)} = P_{(CD)}\cdot\frac{r}{3} \;\ldots (III).$$

Према случају под b) је: $V_{(ODE)} = P_{(DE)}\cdot\frac{r}{3}$ . . . . (IV), а према случају под a) је: $V_{(OEF)} = P_{(EF)}\cdot\frac{r}{3}$ . . . . (V). Сабирањем једначина I, II, III, IV и V добијамо:

$$V_{(ABCDEF)} = \left[P_{(AB)} + P_{(BC)} + P_{(CD)} + P_{(DE)} + P_{(EF)}\right]\cdot\frac{r}{3}, \text{ или}$$

$$V_{(ABCDEF)} = P_{(ABCDEF)}\cdot\frac{r}{3},$$

чиме је и ова теорема доказана. Сабирањем само једначинâ I и II добијамо:

$$V_{(ABC)} = P_{(ABC)}\cdot\frac{r}{3},$$

а сабирањем само једначина I, II и III добијамо:

$$V_{(ABCD)} = P_{(ABCD)}\cdot\frac{r}{3}, \text{ тј.}$$

обртна запремина једног дела правилног многоугла, који се обрће око дијагонале која спаја два супротна темена једнака је трећини производа од обртне површине тога дела и полупречника уписаног круга у томе многоуглу.

IV. ЛОПТА

§ 152. — Постанак лопте. — Кад се полукруг обрће око свога пречника, па дође у свој првобитни положај, онда се производи крива површина, звана *лоптина површина*. Тело ограничено лоптином површином зове се *лопта*. Центар круга који лопту производи је једновремено и центар лопте, пошто су све тачке лоптине површине подједнако удаљене од тога центра. Дуж која везује центар лопте са ма којом тачком лоптине површине, зове се *полупречник*, а дуж која везује две тачке лоптине површине и пролази кроз центар, зове се *пречник*. Сваки је пречник два пута већи од полупречника. Па како су сви полупречници једнаки, то су једнаки и сви пречници једне лопте. Крајње тачке једнога пречника лопте зову се *супротне лоптине тачке*. Лоптина површина је једно геометриско место, пошто све тачке ове површине одговарају једној истој погодби: да су подједнако удаљене од центра лопте.

§ 153. — Узајамни положаји тачке, праве, равни и лопте, и двеју лоптâ.

а) *Тачка и лопта* могу имати три узајамна положаја, што зависи од тога да ли је тачка ван лопте, на лопти или у лопти. Остојање неке тачке до средишта лопте зове се *централна раздаљина те тачке*. Ако је c та централна раздаљина, а r полупречник лопте, онда је тачка ван лопте за $c > r$, на лопти за $c = r$, а у лопти за $c < r$.

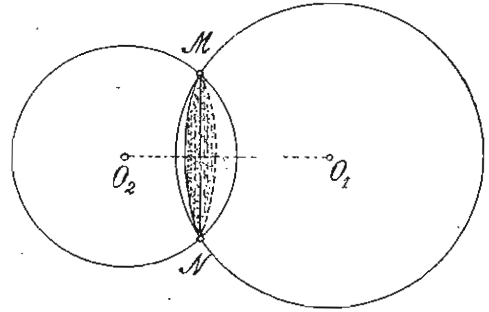
b) *Права и лопта* такође могу заузимати три узајамна положаја према томе да ли је права ван лопте, додирује лопту, или је сече. Нормално отстојање центра лопте до праве, зове се *централна раздаљина те праве*. Ако ову централну раздаљину означимо са c, а полупречник лопте са r, онда је права ван лопте за $c > r$, додирује лопту за $c = r$, а сече лопту за $c < r$. Ако права додирује лопту, онда она има с лоптом само једну заједничку тачку, звану *додирна тачка*, а таква права зове се *дирка* или *тангента*. Полупречник додирне тачке зове се додирни полупречник. Угао између додирног полупречника и дирке је прав, пошто се у овоме случају додирни полупречник поклапа са централном раздаљином дирке, а ова увек гради са својом правом прав угао. Права која сече лопту зове се *сечица*. Она има с лоптином површином две заједничке тачке.

c) *Раван и лопта* тако исто могу имати три узајамна положаја према томе да ли је раван ван лопте, додирује лопту, или је сече. Нормално отстојање центра лопте до равнине зове се *централна раздаљина равни*. Ако је та централна раздаљина c, а полупречник лопте r, онда је раван ван лопте за $c > r$, додирује лопту за $c = r$, а сече је за $c < r$. Када раван додирује лопту, онда има с лоптом само једну заједничку тачку, звану *додирна тачка равни*, а таква раван зове се *додирна*. И у овоме случају додирни полупречник захвата са додирном равнином прав угао, пошто се и овде додирни полупречник поклапа се централном раздаљином додирне равни. Када раван сече лопту, онда с лоптом има више заједничких тачака и све се те тачке налазе на периферији једнога круга чији је центар продорна тачка централне раздаљине те равни.

d) *Две лопте* могу бити *концентричне* или *ексцентричне* према томе да ли имају заједнички центар или различите центре. Дуж која везује центре двеју лоптâ, зове се *централна раздаљина* тих лоптâ. Ако је c централна раздаљина двеју лоптâ полупречника r_1 и r_2, онда:

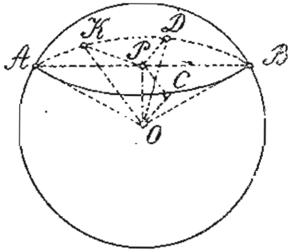
За $c > r_1 + r_2$ лопте се налазе један ван друге;
„ $c = r_1 + r_2$ „ „ додирују споља;
„ $c = r_1 - r_2$ „ „ „ изнутра;
„ $c < r_1 + r_2$ „ „ секу;
„ $c < r_1 - r_2$ „ „ налазе једна у другој, али нису концентричне; и за $c = 0$ лопте су концентричне.

Кад се две лопте секу, онда је њихов пресек круг (сл. 388). Тај круг постаје обртањем заједничке тетиве MN око централне раздаљине O_1O_2, која је управна на равни тога круга. Кад се лопте додирују било споља било изнутра, имају у додирној тачци своју заједничку тангенту и заједничку тангентну раван, а њихова централна раздаљина пролази кроз додирну тачку. Она гради са тангентом и тангентном равнином прав угао.



Сл. 388

§ 154. — Пресеци код лопте. — *Теорема 217.* — **Кад се лопта пресече равнином, добија се за пресек круг.** — Да бисмо доказали да је пресек $ABCD$ (сл. 389) круг, треба из центра лопте O да спустимо нормалу OP на тај пресек, а затим да спојимо подножну тачку P са неколико тачака пресека. Тада су троуглови: APO, DPO, CPO..., правоугли и подударни, пошто су им хипотенузе: OA, OC, OD... једнаке као полупречници лопте, а катета OP им је заједничка. Из њихове подударности излази да је: $AP=CP=DP=$... Ове нам једнакости показују да је тачка P подједнако удаљена од свију тачака пресека, тј. да се тачке: A, C, B, D... налазе на периферији круга чији је центар P. Пресек $ACBD$ зове се *лоптин круг*, а његово отстојање OP од центра *централна раздаљина*. Ако је r полупречник лопте, ρ полупречник лоптиног круга, а d његова централна раздаљина, онда је њихова релација:



Сл. 389

$$r^2=\rho^2+d^2.$$

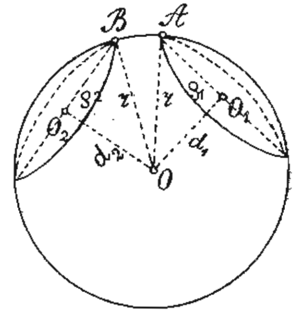
Теореме које се односе на лоптине кругове јесу ове:

Теорема 218. — **Дуж која спаја центар лопте са центром лоптиног круга, нормална је на равни тога круга.** — Ако је OP (сл. 389) та дуж и ако спојимо центре O и P са двема крајњим тачкама једнога пречника лоптиног круга (A и B), онда су троуглови OPA и OPB подударни, пошто су им стране једнаке. Из њихове подударности излази да је $\sphericalangle APO=$ $=\sphericalangle OPB$. Па како је збир ових углова 180^0, то су они прави, чиме је теорема доказана.

Теорема 219. — **Нормала спуштена из центра лопте на раван лоптиног круга, пролази кроз центар овог круга.** — Ако је P (сл. 389) подножје нормалино, па тачке A и C спојимо са P и O, добијамо подударне троуглове APO и OPC ($AO=OC$, OP заједничка, $\sphericalangle APO=\sphericalangle OPC=90^0$). Из подударности ових троуглова излази да је $AP=CP$. Па како је само центар у кругу једина тачка подједнако удаљена од тачака периферије, значи да је P центар лоптиног круга.

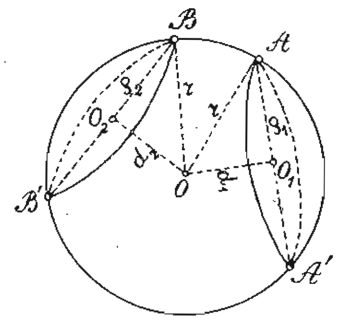
На основу претходних двеју теорема јасна је теорема: **Права која је у центру лоптиног круга нормална на његовој равни, пролази кроз лоптин центар** (Теорема 220).

Теорема 221. — **Једнаки лоптини кругови имају једнаке централне раздаљине, и обрнуто.** — a) Ако су лоптини кругови O_1 и O_2 (сл. 390) једнаки, онда су им једнаки и полупречници ρ_1 и ρ_2. Тада су троуглови OAO_1 и OBO_2 подударни, пошто је $OA=OB$, $BO_2=AO_1$ и $\sphericalangle O_1=\sphericalangle O_2=90^0$. Из њихове подударности излази да је $OO_1=OO_2$, тј. $d_1=d_2$. — b) Ако је дато да је $d_1=d_2$, онда су опет троуглови OBO_2 и OAO_1 подударни ($d_1=d_2$, $r=r$ и $\sphericalangle O_1=\sphericalangle O_2=90^0$). Стога је $\rho_1=\rho_2$, у коме су случају и лоптини кругови једнаки.

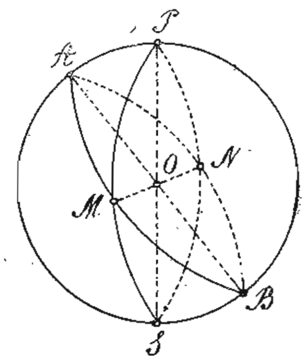


Сл 390

Теорема 222. — **Већи лоптин круг има мању централну раздаљину, и обрнуто.** — a) Нека је круг O_2 већи од круга O_1 (сл. 391). Тада је $\rho_2>\rho_1$, те је тетива BB' већа од тетиве AA'. Па како већој тетиви одговара мања централна раздаљина, то је заиста $d_2>d_1$. b) Ако је дато да је $d_2<d_1$, онда је и тетива BB' већа од тетиве AA'. Тада је и половина тетиве BB' већа од половине тетиве AA', или $\rho_2>\rho_1$, те је круг O_2 већи од круга O_1. Према овој теореми, највећи лоптин круг биће онај чија је централна раздаљина једнака нули, тј. чији се центар поклапа са центром лопте. Овај се круг зове *највећи* или *главан лоптин круг*. Овакав се круг добива када лопту пресечемо равнином која пролази кроз центар лопте. Полупречник главног лоптиног круга једнак је с полупречником лопте. Према овоме, сви главни лоптини кругови имају једнаке полупречнике, па тиме и пречнике. Равнине



Сл. 391



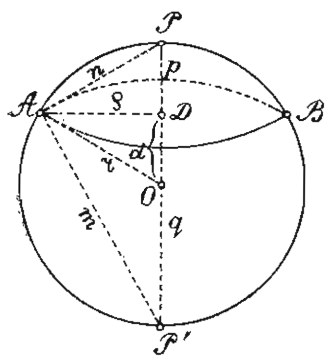
Сл. 392

пошто раван два главна круга пролазе кроз центар лопте
и њихова пресечна линија пролази кроз центар лопте

** Пошто све [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] одређују раван.

двају главних лоптиних кругова секу се и једна другу полови.* Њихов је пресек лоптин пречник. Тако на сл. 392 три главна лоптина круга су: $PASB$, $AMBN$, $PMSN$, који се узајамно полове и њихови су пресеци пречници AB, PS и MN. Две тачке на ** лоптиној површини, ако нису супротне, одређују положај једног главног лоптиног круга. Тако на сл. 392 тачке A и P одређују круг $APBS$, тачке A и M одређују круг $AMBN$, тачке M и S круг $MSNP$ итд. Мањи лук главног лоптиног круга који пролази кроз две тачке лоптине површине зове се *сферна раздаљина* тих тачака. Код сл. 392 сферна раздаљина тачака A и M је $\widehat{AM}$, тачака M и P је мањи лук $\widehat{PM}$ итд.

§ 155. — Полови лоптиних кругова. — Под половима једног лоптиног круга разумемо супротне тачке оног лоптиног пречника који је нормалан на равни тога лоптиног круга. Тако на сл. 393 полови лоптиног круга D јесу тачке P и P'. Центар лопте O, центар лоптиног круга D и оба пола P и P' налазе се увек на истом пречнику. Свака права која везује ма које две од ових четири тачака, пролази и кроз друге две. Управна спуштена из ма које од ових четири тачака на раван лоптиног круга, пролази и кроз остале три тачке.

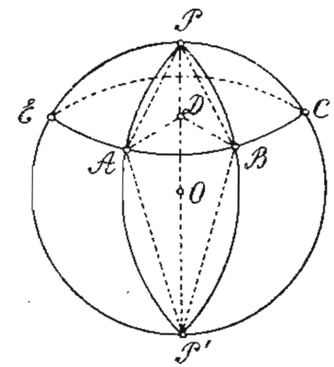


Сл. 393

Спајањем ма које тачке периферије лоптиног круга са центром тога круга и његовим половима, добија се правоугли троугао, код кога је полупречник лоптиног круга висина хипотенузина. Стога постоје између количина: r, ρ, p, q, d, m и n (сл. 393) следеће релације, које имају честу примену при решавању задатака из лопте:

1) $p : \rho = \rho : q$, или $\rho^2 = pq$;
2) $m^2 = \rho^2 + q^2$; 3) $r^2 = \rho^2 + d^2$;
4) $2r : m = m : q$, или $m^2 = 2rq$;
5) $2r : n = n : p$, или $n^2 = 2rp$;
6) $n^2 = \rho^2 + p^2 = \rho^2 + (r - d)^2 = \rho^2 + (2r - q)^2$; итд.

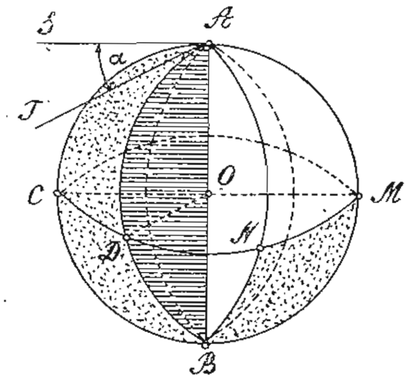
Теорема 223. — **Све тачке периферије лоптиног круга јесу подједнако удаљене од једнога, а тако исто и од другога пола тога круга.** — Права PP' (сл. 394) која везује полове лоптиног круга D, пролази кроз центар тога круга и центар лопте. Спајањем тачака A и B на периферији лоптиног круга са половима и центром круга, добијамо подударне троуглове ADP и DBP, ADP' и BDP'. Из њихове подударности излази да је $AP = BP$ и $AP' = BP'$, чиме је ова теорема доказана.



Сл. 394

Па како су сви главни лоптини кругови једнаки, а једнаким тетивама ових кругова одговарају једнаки луци, то су луци AP и BP једнаки, а тако исто и луци AP' и BP', тј. сваки пол има исту сферну раздаљину од свих тачака на периферији његовог лоптиног круга. Стога се полови лоптиног круга зову још *сферним средиштима* лоптиног круга.

§ 156. — Делови лоптине површине и запремине. — Делови лоптине површине јесу: *капе* или *калоте*, *лоптини појасови* или *зоне*, *сферни двоугли* и *сферни троугли*, а делови лоптине запремине јесу: *лоптини отсечци* или *сегменти*, *лоптини слојеви*, *лоптини сектори* или *исечци*, *лоптина кришка* и *лоптин клин*.



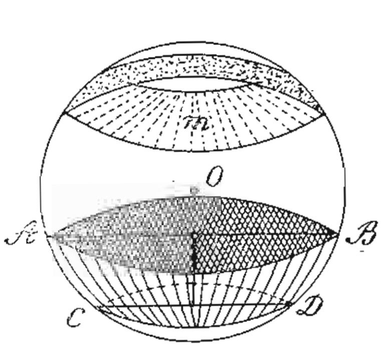
Сл. 395

a) *Калота* је део лоптине површине изнад једног лоптиног круга (ABC, сл. 397). Кад се лопта пресече равнином, стварају се од лоптине површине две калоте ограничене периферијом лоптиног круга.

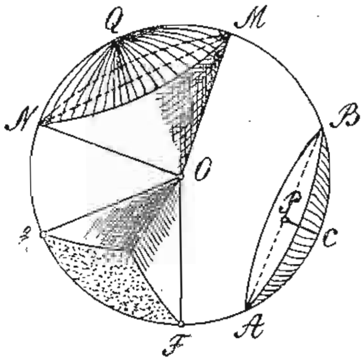
b) *Лоптин појас* или *зона* је део лоптине површине између периферија двају паралелних лоптиних кругова (m, сл. 396).

c) *Сферни двоугао* је део лоптине површине између два полукруга двају главних лоптиних кругова ($ABCD$, сл. 395).

d) *Сферни троугао* је део лоптине површине ограничен трима луцима трију главних лоптиних кругова (BMN, сл. 395). Лукови: BM, BN и MN јесу стране сферног троугла. Те стране су стране другог сферног троугла, који са првим једновремено даје лоптину површину. Ако није нарочито наглашено, узимамо у посматрање онај сферни троугао који је мањи од полулопте.



Сл. 396



Сл. 397

e) *Лоптин отсечак* или *сегмент* је део лоптине запремине ограничен равнином једног лоптиног круга и калотом над тим кругом (APBC, сл. 397). Кружна је површина заједничка основа и сегмента и његове калоте. Део пречника (PC) између највише тачке калотине и њене основе, зове се висина сегмента и калоте.

f) *Лоптин слој* је део лоптине запремине између равнина двају паралелних лоптиних кругова и лоптиног појаса између њих (ABDC, сл. 396).

g) *Лоптин исечак* или *сектор* је део лоптине запремине, који постаје обртањем једног исечка главног лоптиног круга око једнога свога полупречника (NOMQ, сл. 397). Лоптин исечак је тело састављено од једног лоптиног сегмента и од једне купе, чије је теме у центру лопте, а има са сегментом заједнички базис.

h) *Лоптина кришка* је део лоптине запремине ограничен једним сферним двоуглом и полуравнима његових лоптиних кругова (BOACD, сл. 395). Под сферним углом једне лоптине кришке разумемо нагибни угао између равнина њених главних лоптиних кругова. Он се мери луком CD (сл. 395), који је за 90° удаљен од сваког пресека (A и B) оба главна лоптина круга. Па како лук CD има онолико степена колико и његов средишњи угао COD, а овај је угао једнак углу SAT између дирака оба главна лоптина круга у њиховоме пресеку A, то лук CD, или угао SAT, претставља нам сферни угао лоптине кришке.

i) *Лоптин клин* је део лоптине запремине ограничен једним сферним троуглом и трима кружним исечцима, чији је заједнички центар лоптин центар, а луци су им стране

сферног троугла (*FESO*, сл. 397). Он је у ствари један тростран рогаљ, чије је теме у центру лопте, а ивични су му углови једнаки са странама сферног троугла.

§ 157. — Површина лопте и њених делова

a) Површина лопте. — Како лоптина површина постаје обртањем једнога полукруга око свога пречника, а полукруг се сматра као полуобим једног правилног многоугла од бесконачно много страна, то је, на основу теореме 215 [§ 150), површина лопте једнака производу од $2r\pi$ и пројекције полукруга на обртној осовини. Па како је ова пројекција $2r$, то је површина лопте:

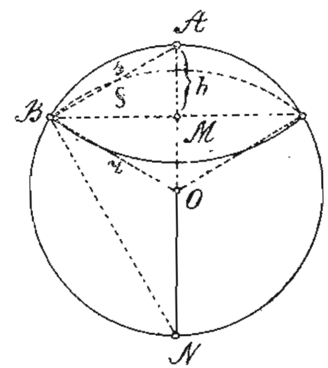
$$P = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi,$$

тј. *површина лопте четири пута је већа од површине једног њеног главног круга.*

Ако је R полупречник једне лопте, а r полупречник друге, а P и P' њихове површине, онда је $P = 4R^2\pi$ и $P' = 4r^2\pi$.

Деобом ових двеју једначина добијамо:
$P : P' = 4R^2\pi : 4r^2\pi$, или $P : P' = R^2 : r^2$, тј. *површине двеју лопта имају се као квадрати њихових полупречника.*

b) Површина калоте. — Како калота постаје обртањем лука $\widehat{AB}$ око пречника AN (сл. 388), а лук се сматра као део обима правилног многоугла од бесконачно много страна, то је на основу теореме 215 (§ 150), обртна површина од лука AB, т.ј. површина калотина једнака је производу од $2r\pi$ и пројекције лука на обртној осовини. Па како је ова пројекција висина калотина h, то је површина калотина:



Сл. 388

$$P = 2r\pi h \ldots (1).$$

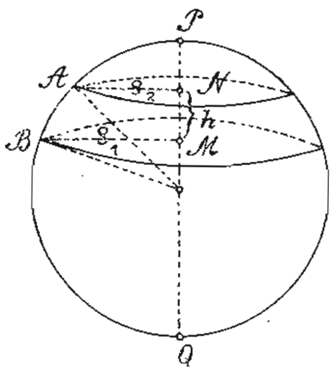
Међутим, из $\triangle ABN$ имамо: $MN : MB = MB : MA$, или $(2r - h) : \rho = \rho : h$, а $\rho^2 = (2r - h)h$, или $2rh = \rho^2 + h^2$. Заменом у (1) добијамо други образац за површину калотину:

$$P = (\rho^2 + h^2)\pi \ldots (2).$$

Па како је из правоуглог троугла ABM: $s^2 = \rho^2 + h^2$, то заменом у (2) добијамо трећи образац за површину калотину:

$$P = s^2\pi \ldots (3).$$

c) Повшина лоптиног појаса или зоне. — Како лоптин појас постаје обртањем лука AB (сл. 389), око пречника PQ, то је, на основу теореме 215 (§ 150), обртна површина овога лука, тј. површина појаса, једнака производу од $2r\pi$ и пројекције обртног лука на обртној осовини. Па како је ова пројекција висина појаса h, то је површина појаса:



Сл. 399

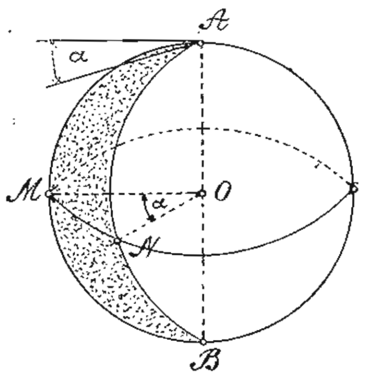
$$P = 2r\pi h \; . \; . \; . \; (1)$$

Ако није позната зонина висина h, већ полупречник доњег базиса ρ_1 и полупречник горњег базиса ρ_2, онда је:

$h = ON - OM = \sqrt{r^2 - \rho_2{}^2} - \sqrt{r^2 - \rho_1{}^2}$. Заменом r (1) добијамо: $P = 2r\pi\left(\sqrt{r^2 - \rho_2{}^2} - \sqrt{r^2 - \rho_1{}^2}\right)$.

d) Површина сферног двоугла. — Да бисмо нашли површину сферног двоугла $AMBN$ (sл. 400), чији је сферни угао α, служимо се очевидно теоремом: *да су површине двају сферних двоуглова у истој размери као њихови сферни углови.* На основу ове теореме, површина P сферног двоугла $AMBN$ има се према површини лопте $4r^2\pi$, као што се има сферни угао α према 360^0, тј. $P : 4r^2\pi = \alpha : 360^0$. Одавде је

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{90^0}.$$

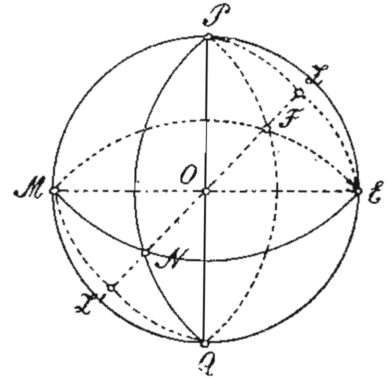


Сл. 400

e) Површина сферног троугла. — Израчунавање површине сферног троугла оснива се на израчунавању троугла површине сферног двоугла, а уз помоћ ове теореме:

Теорема 244. — Супротни сферни троуглови јесу једнаки. — Супротни сферни троуглови јесу они код којих су темена једнога супротне тачке теменâ другога троугла. Такви су троуглови MQN и PEF (сл. 401). Да бисмо доказали једнакост ових троуглова, треба да опишемо лоптине кругове око њих. Ови кругови јесу једнаки пошто су описани кругови око два равна подударна троугла, чије су стране тетиве странâ супротних сферних троуглова.

Ако су тачке L и L' сферна средишта (полови) ових лоптиних кругова, онда су на основу теореме 223, једнаке сферне раздаљине: LP,



Сл. 401

LF и LE, а тако исто и $L'M$, $L'N$ и $L'Q$. Тада су троуглови: LPE, LPF и LFE, а тако исто троуглови: $L'MQ$, $L'QN$ и $L'MN$ равнокраки. Стога су, имајући једнаке стране, прва три троугла подударна са друга три троугла. Тада и збирови тих троуглова, тј. троуглови PFE и MNQ јесу једнаки, чиме је теорема доказана.

Да бисмо нашли површину сферног троугла MNQ (сл. 401), треба да му знамо углове M, N и P и полупречник лопте r. Па како сферни троуглови MNP и NPE дају сферни двоугао, то је:

$MNP + NPE = r^2\pi \cdot \frac{M}{90^0} \; . \; . \; . \; (1)$. Тако исто:

$$MNP + MNQ = r^2\pi \cdot \frac{P}{90^0} \; . \; . \; . \; (2).$$

Па како је према горњој теореми троугао QNE једнак супротном троуглу MPF, то је и:

$$MNP + QNE = r^2\pi \cdot \frac{N}{90^0} \; . \; . \; . \; (3).$$

Сабирањем једначинâ (1), (2) и (3) добијамо:

$$2MNP + (MNP + NPE + MNQ + QNE) = r^2\pi \cdot \frac{M+N+P}{90^0}, \text{ или}$$

$$2\,MNP + 2r^2\pi = r^2\pi \cdot \frac{M+N+P}{90^0}, \text{ или}$$

$$MNP - r^2\pi \cdot \frac{M+N+P}{180^0} - r^2\pi, \text{ или } MNP = r^2\pi \cdot \frac{M+N+P-180}{180^0}.$$

Ако површину троугла означимо са P, а са e увек позитивну разлику: $M + N + P - 180^0$, која се зове сферни *ексцес* или *сферни сувишак*, онда је површина сферног троугла MNP:

$$P = \frac{r^2\pi \cdot e}{180^0}.$$

§ 158. — Запремина лопте и њених делова

a) Запремина лопте. — Како лопта постаје обртањем полукруга око свога пречника, а полукруг се сматра као полуобим правилног многоугла од бесконачно много страна, то је, према теореми 216 (§ 151), обртна запремина, тј. запремина лопте једнака трећини производа од обртне површине и полупречника r. Стога је:

$$V = P \cdot \frac{r}{3} = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3} r^3\pi.$$

Ако су полупречници двеју лоптâ r_1 и r_2, а њихове запремине V_1 и V_2, онда је: $V_1 = \frac{4}{3} r_1^3\pi$ и $V_2 = \frac{4}{3} r_2^3\pi$.

Деобом ових једначина добијамо:

$$V_1 : V_2 = r_1^3 : r_2^3, \text{ тј.}$$

Запремине двеју лопта̑ имају се као кубови њихових полупречника.

b) — Запремина лоптиног исечка (сектора). — На основу теореме 216 (§ 151), запремина лоптиног исечка који постаје обртањем кружног исечка ABO (сл. 398) једнака је:

$$V = P_{(AB)} \cdot \frac{r}{3} = 2r\pi h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3} r^2 \pi h, \text{ тј.}$$

Запремина лоптиног исечка једнака је са запремином оне купе чија је основа калота, а висина лоптин полупречник. У овоме обрасцу h је висина колотина, а r полупречник лопте.

c) — Запремина лоптиног отсечка (сегмента). — Ако је лоптин сегмент мањи од полулопте, онда је његова запремина једнака разлици запремине лоптиног исечка и купе чија се основа поклапа са основом сегмента, а висина јој је раздаљина до лоптиног центра.

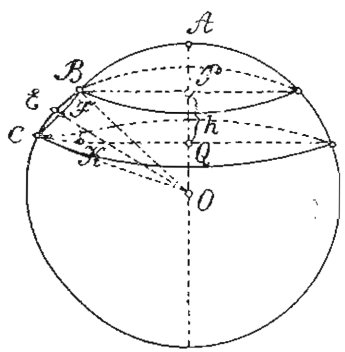
Ако је лоптин сегмент већи од полулопте, онда је његова запремина једнака збиру лоптиног исечка и купе.

Ако је r полупречник лопте, ρ полупречник основе сегмента, а h његова висина, онда је његова запремина:

$$V = \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \rho^2 \pi (r - h), \text{ или,}$$

заменом ρ^2 са $(2r - h)\, h$, као висина хипотенузина правоуглог троугла ABN (сл. 388), добијамо:

$$V = \frac{1}{3} h^2 (3r - h) \pi.$$



Сл. 402

Овај образац вреди и када је сегмент већи од полулопте, пошто је у овоме случају висина сегмента h већа од полупречника r, а висина одговарајуће купе није $r - h$, већ је $h - r$. Стога је:

$$V = \frac{2}{3} r^2 \pi h + \frac{1}{3} \rho^2 (h - r) \pi =$$

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h + \frac{1}{3} h (2r - h)(h - r) \pi =$$

$$= \frac{1}{3} h^2 (3r - h) \pi.$$

d) — Запремина тела које постаје обртањем једног кружног

отсечка. — Кад се обрће кружни отсечак $BECF$ (сл. 402) око пречника AD, онда постаје тело, чија је запремина једнака разлици запремина̑ између тела која постају обртањем кружног исечка $BECO$ и троугла BCO око истог пречника AD.

Тада за $PQ = h$ и $BC = s$, имамо:

$$V = P(\widehat{BC}) \cdot \frac{OE}{3} - P(\overline{BC}) \cdot \frac{OF}{3} = 2r\pi h \cdot \frac{r}{3} - 2\pi \cdot OF \cdot h \cdot \frac{OF}{3} = \frac{2}{3} r^2 \pi h -$$

$$- \frac{2}{3} \pi h \cdot OF^2 = \frac{2}{3} \pi h (r^2 - OF^2) \ldots (1).$$

Па како је из троугла OBF: $BO^2 - OF^2 = BF^2 = \frac{s^2}{4}$, или $r^2 - OF^2 = \frac{s^2}{4}$, или $OF^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$, то заменом у (1) добијамо:

$$V = \frac{2}{3} \pi h \cdot \frac{s^2}{4} = \frac{s^2 \pi h}{6}.$$

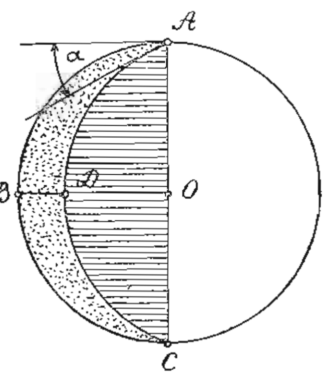
e) — Запремина лоптиног слоја. — Запремина лоптиног слоја између лоптиних кругова P и Q (сл. 402), чији су полупречници ρ_1 и ρ_2, а висина слоја h, једнака је збиру запремина̑ праве зарубљене купе димензија̑: ρ_1, ρ_2 и h и обратног тела које производи кружни отсечак $BECFB$. Стога је:

$$V = \frac{\pi h s^2}{6} + \frac{h\pi}{3} (\rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2) \ldots (1).$$

Па како је из троугла BKC: $s^2 = h^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2$, то заменом у (1) добијамо:

$$V = \frac{h^3 \pi}{6} + \frac{h\pi}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2).$$

f) — Запремина лоптине кришке. — Како се запремина двеју лоптиних кришака имају као њихови одговарајући сферни двоугли, или одговарајући сферни углови, то се запремина кришке $ABCOADC$ (сл. 403) има према запремини целе лопте, као што се има површина њеног сферног двоугла $ABCDA$ према површини лопте, или као што се има $\alpha : 360°$. Стога је:



Сл. 403

a) $V : \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{r^2\pi\alpha}{90°} : 4r^2\pi$, a $V = \frac{r^3\pi\alpha}{270°}$;

и b) $V : \frac{4}{3} 4^3\pi = \alpha : 360°$, а

$$V = \frac{r^3\pi\alpha}{270°}, \text{ тј.}$$

запремина лоптине кришке једнака је трећини производа од површине њеног сферног двоугла и полупречника лопте.

g) — Запремина сферног клина. — Да бисмо нашли запремину сферног клина, поступамо као и при израчунавању површине сферног троугла, имајући у виду да два упоредна сферна клина дају једну сферну кришку. Из сл. 401 имамо:

$$PMNO + PNEO = \frac{r^3\pi \cdot M}{270^0},$$

$$PMNO + MNQO = \frac{r^3\pi \cdot P}{270^0},$$

$$PMNO + NQEO\,(MPFO) = \frac{r^3\pi \cdot N}{270^0}.$$

Сабирањем ових једначина добијамо:

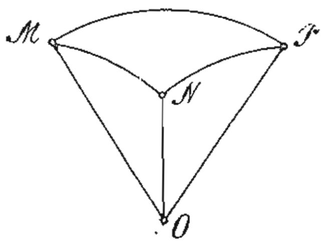
$$2 \cdot PMNO + (PMNO + PNEO + MNQO + NQEO) = \frac{r^3\pi}{270^0}(M+N+P), \text{ или}$$

$$2 \cdot PMNO + \frac{4r^3\pi}{6} = \frac{r^3\pi}{270^0} = (M+N+P), \text{ или } 2V = \frac{r^3\pi}{270^0}(M+N+P) - \frac{2r^3\pi}{3}, \text{ а}$$

$$V = \frac{r^3\pi\,(M+N+P)}{540^0} - \frac{r^3\pi}{3} = \frac{r^3\pi e}{540^0} = \frac{r^2\pi e}{180^0} \cdot \frac{r}{3}, \text{ тј.}$$

Запремина сферног клина једнака је трећини производа сд површине његовог сферног троугла и полупречника лопте.

Допуна. — Лоптин клин у ствари је један рогаљ, чије се теме налази у центру лопте, а стране су му идентичне са странама сферног троугла. Кад се из лопте на сл. 401 извуче сферни клин $OMNP$, па се усправи, добијамо рогаљ $OMNP$ (сл. 404). Ивични углови (стране) овог рогља мере се странама $\widehat{MN}$, $\widehat{NP}$ и $\widehat{MP}$ његовог сферног троугла, а углови тога рогља исти су што и углови сферног троугла. Стога, између страна и углова сферног троугла постоје исти односи, као и односи између страна и углова тространог рогља. Према овоме све теореме о особинама, подударности и симетричности (§ 114, 114) тространих рогљева, у важности су и за сферне троуглове. Ове теореме овде би гласиле:



Сл. 404

1) Свака страна сферног троугла већа је од разлике а мања од збира других двеју страна;

2) Збир све три стране мањи је од 360^0;

3) Збир сва три угла већи е од 180^0 а мањи од 540^0;

4) Наспрам једнаких углова леже једнаке стране;

5) Наспрам веће стране лежи већи угао;

6) Наспрам једнаких страна леже једнаки углови;

7) Наспрам већег угла лежи већа страна; итд.

И сферне троуглове делимо према странама на: *равностране, равнокраке и разностране*, а према угловима на: *косоугле* и *правоугле*. Косоугли је онај сферни троугао у коме нема ни један прав угао, а правоугли је онај који има прав угао.

§ 159. — Задаци за вежбу з лопте:

1) Наћи полупречник лоптиног круга добивеног пресеком равнине централне раздаљине $2m$, кад је полупречник лопте $6m$.

2) Полупречник једне лопте је 4 dm. Из једне произвољне тачке на њеној површини, узете за пол, нацртан је круг отвором шестара 3 dm. Наћи површину овог круга.

3) Којим отвором шестара треба описати круг у претходном задатку да би површина круга била 23 dm^2?

4) Којим отвором шестара треба описати круг код лопте полупречника 0,40 m да бисмо добили круг чији је обим 1,5 m?

5) Пречник једне лопте је 3 m. Тај је пречник подељен на 5 једнаких делова и кроз деоне тачке повучене су управне равнине на пречнику. Наћи површине кругова добивених на лопти поменутим равнинама.

6) Полупречници двеју лоптâ јесу 4 m и 3 m, а њихова је централна раздаљина 5 m. Наћи површину круга који је пресек ових двеју лоптâ.

7) Две лопте A и B удаљене су 8 m. Наћи геометриско место с.ију тачака удаљених од A 5 m а од B 7 m.

8) Две лопте полупречника R и r јесу концентричне. Наћи површину лоптиног круга спољашње лопте добивеног равнином која је тангентна унутрашњој лопти.

9) Полупречници двају паралелних лоптиних кругова јесу ρ_1 и ρ_2 а њихово је отстојање d; наћи полупречник лопте.

10) Полупречник једне лопте је 15 cm. Наћи њену површину (одговор: 2826 cm^2).

11) Наћи полупречник лопте чија је повшина 341 cm^2 (одг. 5 cm).

12) Наћи површину и запремину лопте чији је пречник 12 cm (одговор: $P = 452{,}16\ cm^2$; $V = 904{,}32\ cm^3$).

13) Површина једне лопте је 4069,44 m^2. Наћи њену запремину (одговор: 24416,64 cm^3).

14) Наћи површину калоте висине 20 cm кад је полупречник лопте 45 cm (одговор: 565,2 cm^2).

15) Полупречник једног лоптиног круга је 12 cm. Наћи површину мање калоте, ако је полупречник лопте 13 cm (одговор: 652, 12 cm^2).

16) Наћи површину лоптиног појаса кад су полупречници његових основа 12 и 9 cm, а полупречник лопте 15 cm (одговор: 282,6 cm^2).

17) Наћи запремину лоптиног сегмента висине 8 cm, када је пречник његове основе 40 cm (одговор: 5291,95 cm^3).

18) Наћи запремину лоптиног слоја висине 8 cm, када су полупречници његових основа 24 и 20 cm (одговор 12193,17 cm^3).

19) Шта стаје позлаћивање једне лопте полупречника 5 cm, ако се за 1 cm^2 плаћа 2,5 дин.?

20) Наћи полупречник лопте чија је површина једнака збиру површина двеју лоптâ пречникâ 20 и 30 cm.

21) Полупречник Месеца је $^3/_{11}$ полупречника Земље, а полупречник Сунца је 112 пута већи од полупречника Земље. У ком односу стоје њихове запремине?

22) Наћи тежину шупље лопте од бакра чији је унутрашњи пречник 14 cm, а дебљина 3 cm, кад је специфична тежина бакра 8,89?

23) Лопта од гвожђа обрнула се 336 пута на путу од 88 m. Наћи њену тежину, ако је специфична тежина гвожђа 7,79.

24) За колико се смањује: a) површина, b) запремина лопте, ако се њен пречник смањи 5 пута?

25) Од једне шупље лопте чији је унутрашњи полупречник 15 cm, а дебљина 5 cm, начињена је друга шупља лопта, чији је унутрашњи полупречник 18 cm. Наћи дебљину љуске нове лопте.

26) Наћи запремине двеју лопта̂ када се њихове површине имају као 9 : 4, а разлика њихових полупречника је 0,5 m.

27) Површина једног лоптиног појаса је 1,56 m^2, а полупречник лопте је 1 m; наћи висину појаса.

28) Површина једног лоптиног појаса је 8 m^2, а њена је висина 3 dm; наћи полупречник лопте.

29) Пречник једне лопте је 4 m. Тај је пречник подељен на 5 једнаких делова, а кроз деоне тачке повучене су равни управне на пречнику; наћи површине добивених појасова.

30) Наћи висину зоне једне лопте чија је површина једнака површини једног главног лоптиног круга.

31) Наћи површину лопте чија је запремина 1 m^3.

32) Разлика полупречника̂ двеју лопта̂ је 0,2 m, а разлика њихових запремина је 10 m^3; наћи њихове површине.

33) Лопта, чији је полупречник 3 m, пресечена је једном равнином на отстојању 1,5 m од центра; наћи запремине добивених отсечака.

34) Запремина тела које постаје обртањем кружног сегмента око пречника је 1,63 m^3, а дужина сегментове тетиве је 3,6 m; наћи пројекцију ове тетиве на пречнику.

35) Наћи површину сферног троугла који припада лопти полупречника 2 m, кад су његови углови 75^0, 60^0 и 68^0. Наћи запремину његовог клина.

36) Наћи угао између Париског и Лондонског меридијана, кад је површина сферног двоугла земљиног који дају ти меридијани 386,7 km^2.

37) Метална шупља лопта, којој је спољашњи пречник 24 cm а дебљина 3 cm, претопљена је у масивну; колики је пречник ове лопте?

38) Колика се површина на Земљи може видети са висине од 1000 m, кад је полупречник Земље 6378 km?

39) Полупречник лопте је 7 m; наћи висину оне калоте чија је површина 5 пута већа од њеног основног пресека.

40) Светла тачка удаљена је од средишта једне лопте полупречника 2 m за 15 m; колика је осветљена површина?

41) Калота има површину 150 cm^2, а висина јој је 5 cm; израчунај површину основног круга и запремину лоптиног отсечка калотом ограниченог.

42) Висина лоптиног слоја са једнаким основама једнака је половини полупречника лопте; који део лоптине запремине заузима тај слој?

43) На којој би се даљини од средишта морала пресећи лопта полупречника $r = 6$, па да добивена калота буде $\frac{3}{2}$ површине круга пресека? (Београд, Реалка, 1934).

44) Лопту полупречника R сече друга лопта полупречника r тако да се њен центар налази на површини прве лопте. Површина калоте прве лопте $p = 2450$ m^2. Наћи полупречник друге лопте (Вел. Кикинда, 1933).

45) На колику висину треба да се уздигне аероплан, са кога би се могла видети толика површина колика је површина наше државе (250.000 km^2). Полупречник земље је 6370 km. (Вел. Кикинда, 1932).

46) Задате су две лопте $R = 12\ cm$ и $r = 5\ cm$., а њихова је централна раздаљина $A = 21\ cm$. Ако је мања лопта светла, колика је површина веће лопте осветљена мањом лоптом? (Загреб, I. мушка 1933).

47) Две једнаке лопте секу се тако да граде бикомвексно сочиво. Колика је запремина сочива, ако је његова дебљина $d = 2\ cm$, и пречник лопте $2r = 12\ cm$? (Београд, II женска, 1921).

§ 160. — Мешовити задаци из стереометрије. —

1) Збир запремине од два слична полиедра је V, а две хомологе њихове ивице имају се као $m : n$; наћи њихове запремине.

2) У правој купи висине 12 cm уписана је лопта полупречника 3 cm. Наћи запремину купе (одг. 226,08 cm^3).

3) Наћи однос између запремина зарубљене пирамиде и призме исте висине, када призма има за основу пресек пирамидин, који је паралелан основама, а налази се на подједнаком отстојању од њих.

4) Полупречници основа зарубљене купе јесу R и r. Наћи полупречник базиса оне облице, која има исту запремину и исту висину h са зарубљеном купом.

5) Наћи обртну површину и запремину која постаје обртањем правилног n-то угла стране $3m$ око пречника описаног круга ($n = 5$, 6, 8, 10, 12, 15).

6) Стране једнога троугла јесу $a = 5\ m$, $b = 6\ m$ и $c = 9\ m$; наћи запремину тела које постаје обртањем троугла око стране c.

7) Наћи површину и запремину лопте: a) описане око коцке ивице 1 dm; b) уписане у коцки ивице 1 dm; c) описане око правилног тетраедра ивице 1 dm.

8) Наћи запремину лопте описане око коцке ивице 30 cm.

9) Наћи запремину тела које постаје обртањем правилног шестоугла стране 7 cm око своје стране.

10) Наћи запремину тела које постаје обртањем квадрата стране 1 m око једне праве, која пролази кроз једно његово теме и нормална је на дијагонали која пролази кроз исто теме.

11) Доказати да је запремина лопте $\frac{2}{3}$ од запремине око ње описане облице и да је површина лопте $\frac{2}{3}$ од површине исте облице.

12) У цилиндарски суд, у коме има нешто воде, спуштена је лопта која тоне. Спуштањем лопте, вода се у суду пење за 4 cm. Наћи полупречник лопте, када је унутрашњи пречник суда 10 cm.

13) Ако се у полукругу упише полуправилан многоугао од парног броја страна, а такав се исти полу-многоугао опише, па се круг и многоуглови обрћу око пречника, онда је обртна површина круга средња пропорционала између обртних површина које постају од полу-многоуглова.

14) Површина дијагоналног пресека једне коцке је $35{,}25\ cm^2$; наћи: a) разлику између запремина описане и уписане лопте; b) разлику њихових површина; c) површину уписане облице; d) запремину описане облице; e) запремину купе, чији је базис уписан у базису коцке, а теме јој је у средини горњег базиса.

15) Зна се површина дијагоналног пресека $p = 45 m^2$ једног правог правоуглог паралелопипеда основних ивица $a = 4\ m$, $b = 3\ m$; наћи a) запремину и површину описане лопте око паралелопипеда; b) површину и запремину описане облице; c) запремину купе исте висине а чији је базис описан круг око базиса паралелопипедовог.

16) Једна пирамида чија је основа: a) равностран троугао, b) квадрат, c) правилан 6-тоугао, d) правилан n-тоугао, уписана је у правој купи висина 20 cm а полупречника базиса 5 cm, а друга таква пирамида је описана око исте купе; израчунај површине и запремине тих пирамида.

17) Код зарубљене купе висине 12 dm а полупречника базиса 5 dm и 3 dm описана је и уписана је пирамида, чије су основе: a) равнострани троуглови, b) квадрати, c) правилни шестоугли, d) правилни n-тоуглови; израчунај запремине тих пирамида.

18) У равностраној облици, чији је полупречник $r = 8\ cm$ описана је правилна a) тространа, b) четворострана, c) шестострана, d) n-то страна призма, а друга таква иста призма је уписана; наћи запремине тих призама.

19) Рогљеви једне коцке одрубљени су равнима које пролазе кроз средине њених ивица. Одреди површину и запремину тако добивеног тела.

20) Прав паралелопипед и правилна права пирамида имају исту висину, а за заједничку базу квадрат стране 12 cm. Наћи њихове висине ако је бочна површина једне призмине стране 2 пута већа од пирамидине стране.

21) У каквој размери стоје површине равностране купе и равностране облице, ако имају једнаке запремине?

22) Наћи површину и запремину тела које постаје обртањем равнокраког трапеза a) око веће паралелне стране, b) око мање паралелне стране, ако је висина трапезова 8 cm, а паралелне стране 15 cm и 20 cm.

23) У равностраној облици уписана је лопта и права купа; у каквој размери стоје запремине тих тела?

24) Око лопте описана је равнострана облица и равнострана купа; у каквој размери стоје a) површине, b) запремине тих тела?

25) Ивице правоуглог паралелопипеда стоје у размери као $2:3:5$. Наћи запремину описане a) лопте, b) цилиндра, кад је прва ивица 8 cm.

26) Обим базиса једног правоуглог паралелопипеда је 14 m, а разлика двеју суседних страна на базису је 3 m. Наћи површину коцке, чија је запремина једнака запремини паралопипеда, када је висина паралелопипеда 8 m.

27) Базис једне праве призме је равнокрак трапез, чије су паралелне стране 48 cm и 18 cm, а крак 25 cm. Наћи њену запремину, ако јој је површина 2784 m^2.

28) Наћи површину цилиндра уписаног у коцки ивице $a = 10\ cm$.

29) Наћи запремину цилиндра описаног око коцке ивице $a = 15\ cm$.

30) Наћи разлику бочних површина једнога цилиндра и уписане у њему правилне шестостране призме, кад се зна да је њихова заједничка висина 7 пута већа од стране базиса призминог и да је збир висине и полупречника базиса цилиндра 16 m.

31) Наћи размеру a) површина, b) запремина облица, које постају обртањем правоугаоника око дужине a и ширине b.

32) Над основама једнога цилиндра висине h, са унутрашње стране, конструисане су две купе, чије су висине једнаке полупречнику базиса r. Наћи површину и запремину тела које је обухваћено бочним површинама цилиндра и купа.

33) Површина једне купе, чији је полупречник базиса r једнака је бочној површини једне облице. Наћи запремину купе, кад је висина облице 2 пута мања од висине купе, а полупречник базиса облице 4 пута је већи од полупречника базиса купе.

34) Наћи запремину купе која постаје обртањем равнокраког правоуглог троугла око једне своје катете дужине 1 m.

35) Наћи површину коцке једнаке по запремини оној купи, чији је осовински пресек равнокрак троугао основице 14 m а висина 21 m.

36) Наћи размеру a) бочних површина, b) запремина купа добивених обртањем правоуглог троугла катета b и c најпре око једне а затим око друге катете.

37) Наћи бочну површину и запремину зарубљене купе уписане у правилне тростране зарубљене пирамиде, чија је висина h, а основне су јој ивице a и a^1.

38) У једној зарубљеној купи изрезана је облица тако да им се осовине поклапају. Наћи запремину добивеног тела, када су полупречници базиса купе 5,6 и $5{,}11 m$, полупречник базиса облице $5{,}04 m$, а страна купина је $12{,}01 m$.

39) Висина праве купе је h, а њена је страна s. Наћи висину цилиндра уписаног у купи, кад се зна да је бочна површина цилиндра једнака бочној површини купе $\left(\text{одг. } \frac{sh}{s+2h}\right)$.

40) Кров једне куле има облик зарубљене купе, чија је страна $5m$ збир полупречника базиса је $7m$, а њихова је размера $2:5$. Колико је плочица лима потребно за покривање овог крова, ако је свака плочица дугачка $40 cm$ а широка $15 cm$, а притом се зна да се при покривању губи од плочица 10%.

41) Од једне облице изрезана је зарубљена купа тако, да има са облицом заједничку доњу основу и заједничку осовину. Наћи полупречник горњег базиса купе, кад се зна да је њена запремина половина запремине облице, чији је полупречник базиса $2{,}732 m$. (одг. 1 m).

42) Од једне облице, чија је висина једнака полупречнику базиса r, изрезана је полулопта која има исту основу са облицом. Наћи полупречник базиса друге облице, која је по запремини једнака запремини добивеног тела, а висина јој је једнака висини дате облице $\left(\text{одг. } \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$.

43) Једна катета правоуглог троугла је $4m$, а супротни јој угао 30^0. У којој су размери запремине тела добивених обртањем овог троугла око сваке своје стране? $\left(\text{одг. } 1:2:\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

44) Око једног круга полупречника R описан је квадрат и равностран троугао, чија се основа поклапа са основом квадрата. Наћи размеру а) површина, b) запремина тела добивених обртањем поменуте фигуре око висине троугла (одг. 4:6:9).

45) У једном кругу уписан је квадрат и равностран троугао, чија је једна страна паралелна са страном квадрата. Наћи размеру а) површина b) запремина лопте, облице и купе добивених обртањем поменуте фигуре око пречника, који је нормалан на паралелним странама квадрата и троугла (Одг. а) $9:12:16$; b) $9:\sqrt{2}:32$).

46) Наћи запремину тела које постаје обртањем равностраног троугла стране a око праве, која пролази кроз једно његово теме, а паралелна је са супротном страном $\left(\frac{1}{2}\pi a^3\right)$.

47 Осовински пресек једне праве купе је равнокрак троугао, чији је обим 160 cm а висина основице 40 cm. Наћи висину облице, чији је полупречник једнак полупречнику купе, а по запремини је једнака лопти уписане у истој купи (одг. 5 cm).

48) На ком отстојању од центра једне лопте чији је полупречник 2,425 m, треба да повучемо раван тако, да је однос између површине мање калоте и бочне површине купе, која има са калотом заједничку основу, а тиме јој у центру лопте, као $1:4$?

49) Ромб, чија је страна 3 m а мања дијагонала $d = 2\ m$, окреће се око осовине која пролази кроз крајњу тачку веће дијагонале и стоји нормално на једној страни. Израчунати површину и запремину обртног тела (Београд, I мушка 1932).

50) Да се израчуна површина једне пирамиде, која са једном правом квадратном призмом има заједничку основу a^2, а теме јој лежи у средишту горње основе призмине. Зна се основна ивица призмина $a = 31\ cm$ и бочна ивица $c = 46,8\ cm$ (Београд, I мушка 1901).

51) Равнокракоме троуглу крак је 2,5 m, основица 1,4 m. У њему је уписан и око њега описан круг. Тај систем слика обрће се око основичине висине. Наћи однос у коме стоје површине и запремине тих трију обртних тела (Београд, I мушка 1900).

52) У троуглу ABC где је $A = 90^0$, хипотенузина висина $h = 10$, а хипотенуза $a = 30$. Троугао се најпре обрће око стране AB, а затим око стране AC. Израчунати разлику запремина та два обртна тела (Београд II мушка 1933).

53) Израчунати површину и запремину обртног тела које се добива кад се дати квадрат стране a обрће око осовине, која пролази кроз једно квадратово теме паралелно дијагонали (Београд, II мушка 1912).

54) Осовински пресек правог ваљка има дијагоналу 75 cm; размера је висине тога пресека према његовој основици 4:3; у доњој основи ваљковој уписан је квадрат, који је основа пирамиде са теменом у средишту горње основе ваљкове. Израчунати запремину ове пирамиде (Београд, II мушка 1909).

55) Страна равностране облице дата је једначином $\sqrt{2x+2} + \sqrt{7+6x} = \sqrt{7x+72}$. У тој облици уписане су права купа и лопта. Одредити површине и запремине сва три тела и испитати како им се имају површине а како запремине (Београд, II мушка 1902).

56) На којој раздаљини од темена равностраног троугла треба повући паралелну са супротном страном, па да се обртањем троугла око те праве добије 4 пута веће тело од онога, које би се добило обртањем његовим око осовине, која пролази кроз теме, а паралелна је супротној страни (Београд, III мушка, 1911).

57) Шестокрака звезда, која постаје симетричним укрштањем двају подударних равностраних троуглова, обрће се око симетрале која пролази кроз два супротна врха. Тражи се обртна површина и запремина тако добивеног тела, кад је страна троуглова $a = 345,67\ m$ (Београд, III мушка, 1909).

58) У равнокраком троуглу ABC основица $AB = h(c) = 10,358\ m$, над висином као пречником описан је круг. Систем се обрће око висине $h(c)$. На којој даљини од темена купе треба повући раван паралелно основи купиној, па да пресек купин буде једнак с калотом испод равни? (Београд, III мушка, 1907).

59) Из бакарне лопте чији је полупречник $r = 20\ cm$ изради се жица пречника 1 mm. Колика ће бити дужина жице? (Београд. IV мушка, 1914).

60) Коцка и права парамида имају заједничку основу; висина пирамиде двапута је већа од ивице коцке. Израчунати површину пресека пирамиде са коцком, кад је позната ивица коцке a (Београд, реалка, 1910).

61) Дата је права квадратна пирамида основне ивице a и бочне s. Колика је дужина облице, чија је основа круг уписан у основи пирамидиној, кад је запремина те облице једнака са запремином дате пирамиде? (Београд, реалка, 1907).

62) Запремина октоедра је за $5m^3$ већа од запремине у њему уписане лопте. Наћи ивицу октоедра и полупречник лопте (Београд, реалка, 1906).

63) У правилну четворострану пирамиду основне ивице $a = 10\ cm$ а бочне ивице $s = 13\ cm$ уписана је лопта, а друга је око ње описана. Израчунај полупречнике тих лопта (Бјелина, 1930).

64) Из правилне и праве осмостране призме, чија је основна ивица 12 cm а висина 35 cm, извађен је ваљак, уписан у призму; колика је запремина тако добивеног ваљка? (Беране, 1931).

65) Израчунати површину и запремину тела које постаје обртањем правоуглог троугла мање катете a, веће $2a$, око осе која пролази кроз теме правог угла, а нормална је на симетрали тога угла (Београд, I женска, 1931).

66) Од једног правоуглог паралелопипеда, чија је висина $2a$, а основа квадрат стране a, отсечени су рогљеви равнинама које пролазе кроз средине ивица које се стичу у једном темену. Наћи запремину тела које се добива отсецањем рогљева (Београд, I женска, 1930).

67) Обим детоида је 64 cm, једна дијагонала је 16 cm, а друга дијагонала, која је уједно и симетрала детоида, је 21 cm. Израчунати: а) стране делтоида и в), површина и запремена тела које постаје ротацијом тога делтоида око веће дијагонале. (Лесковац, 1931)

68) Код трапеза $ABCD$, где је $BC \parallel AD$, дато је: $\sphericalangle BAD = 60^0$, $AB = 8\ dm$, $AD = 15\ dm$ и $BC = CD$. Одредити запремину тела које се добија обртањем поменутог трапеза око стране AD (Решавати без употребе тригонометрије, Крушевац, 1933).

69) Ромб, чија је страна a и чији је оштар угао 60^0, обрће се око праве која пролази кроз теме оштрог угла и стоји нормално на ромбовој страни. Наћи површину и запремину обртног тела. (Крушевац, 1932).

70) Око праве купе описана је тространа пирамида. Површина пирамидине основе је $B = 360\,cm^2$, а површине њених бочних страна су: $p_1 = 435\,cm^2$, $p_2 = 375\,cm^2$ и $p_3 = 540\,cm^2$; колика је висина и полупречник основе код купе? (Крушевац, 1930).

71. Равностран троугао са страном $a = 6{,}2\,dm$ обрће се око нормале подигнуте на основици у темену B; наћи површину и запремину тако добивеног обртног тела. (Зајечар, 1927).

72) На којој раздаљини мора бити тачка P од центра лопте, чији је полупречник $r = 6\,cm$, да би површина омотача купе описане око лопте, а чији се врх налази у тачци P, била једнака са површином веће лоптине калоте која има заједничку основицу са купом. (В. Кикинда, 1934).

73) Трапез се обрће прво око веће затим око мање од паралелних страна; запремине тако добивених тела стоје у размери $5:7$; у којој размери стоје паралелне стране. (Неготин, 1934).

74) У једном ваљку уписана је лопта, а над њом купа тако, да се врх купе налази у средишту горње основе ваљка. Полупречник основе ваљка је $r = 16\,cm$. Размера запремина купе и лопте је $3:5$. Колика је запремина празног простора? (Нови Сад, 1927).

75) У правој купи, чији је полупречник базе $R = 6\,cm$ а висина $H = 9\,cm$. уписана је облица, чији је омотач једнак кружном прстену који на купиној основи одређује обличина основа. Наћи запремину уписане облице. (Ниш, 1934).

76) Правоугли троугао чије су катете $5\,cm$ и $12\,cm$ обрће се око осе паралелне са хипотенузом и удаљене од ње за $8\,cm$. Наћи површину и запремину обртног тела. (Панчево, 1933).

77) Запремина лопте је $904{,}32\,cm^3$, а обим једног споредног лоптиног круга је $12{,}56\,cm$. Ако је површина одговарајућег мањег лоптиног исечка једнака с површином тетраедра, онда колика је запремина тетраедра? (Крагујевац, 1931).

78) У правилној и правој четвоространој зарубљеној пирамиди висине $h = 6\,cm$ и запремине $v = 350\,cm^3$, површина једне основе четири пута је већа од површине друге основе. Наћи запремину највеће зарубљене праве купе која се може истесати из ове пирамиде. (Крагујевац, мушка 1930).

79) Равнокраки троугао обрће се око једног крака као осовине; израчунати површину и запремину обртних тела, кад је крак $b = 5{,}2\,cm$ а основица $c = 3{,}4\,cm$. (Крагујевац, мушка, 1908).

80) Суд облика равностране купе која је окренута врхом доле и стоји вертикално, напуњен је водом у којој је потопљена лопта највеће запремине. Колика ће висина воде бити у суду ако се лопта извади из воде кад је полупречник основе $r = 23\,cm$? (Крагујевац, мушка, 1906).

81. У лопти уписана је равнострана купа запремине $v = 36\sqrt{12}\,\pi$. Базис те купе сече лопту на два отсечка. Израчунати површину мањег отсечка (калоте). (Пљевље, 1934).

82) Равнокраки трапез ротира наизменично око својих паралелних страна, па се запремине насталих тела односе као $3:4$, а површине као $3:5$. Колике су стране тога трапеза ако му је обим $24\ cm$? (Сарајево, II мушка, 1931).

83) Обим правоуглог троугла је $O = 24$, а збир полупречника описаног и уписаног круга 7. Колики је волумен тела које настаје ротацијом троугла око осе која пролази кроз врх B а стоји нормално на хипотенузи? (Сарајево, II мушка, 1932).

84) У лопти чија је површина $P = 256\,\pi$ уписана је коса купа чија је највећа страна $S = 15$ а најмања $s = 12$. Колика је запремина те купе? (Сарајево, II мушка, 1934).

85) Права купа висине $h = 9\,cm$, $r = 6\,cm$ постављена је на врх и делимично напуњена водом. Ако се у воду потпуно зарони лопта полупречника $3\,cm$, вода се дигне до руба купе. Колико се је дигла вода? (Сарајево, I мушка, 1934).

86) Карактеристични пресек косог конуса задан је са најмањом страном $b = 61$, најдужом $a = 109$, а полупречник базе $\rho = 51$. Колика је дебљина оне шупље лопте чија је запремина једнака запремини заданог конуса, ако се полупречници лопте односе као $5:2$? (Сарајево, I м. 1929).

87) Исечак, чији је лук шести део кружне периферије, обрће се око праве која пролази кроз центар круга, а нормална је на једном од граничних полупречника исечка. Наћи запремину обртног тела, кад је полупречник круга $r = 18\,cm$. (Скопље, 1933).

88) Око правоуглог паралелопипеда описана је лопта. Ивице паралелопипеда стоје у размери као $8:9:12$, а површина му је $P = 2207\,cm^2$. Колика би била тежина лопте, кад би била од сребра (спец. тежина 10,5)? (Скопље, женска, 1934).

89) Равнокраки трапез с парарелним странама $a = 20\,cm$, $b = 12\,cm$ и краком $c = 9\,cm$ обрће се око замишљене осе XY паралелна са основицом a удаљена од ње $2{,}5\,cm$. Наћи површину и запремину тако добивеног обртног тела. (Скопље, женска, 1932).

90) Одредити површину лоптине капе и запремину лоптиног отсечка, кад је лоптина површина једнака површини обртног тела, које постаје обртањем равнокраког трапеза око веће основице, а висина капе (отсечка) је $\frac{1}{3}$ лоптиног полупречника. Трапезове основице су корени једначине $x^2 - 26x + 160 = 0$, а висина му је квадратни корен из веће основице. Мерне бројеве изразити у cm. (Ћуприја, 1933).

91) Збир ивица двеју коцака износи $7\,m$, а збир њихових запремина $91\,m^3$. Израчунати полупречник основе и висину праве облице, чија је запремина $300\,m^3$, а омотач раван збиру површина поменутих коцака. (Сомбор, 1933).

92) У кругу полупречника r уписан је квадрат, а затим описан је квадрат чије стране тангирају круг у теменима уписаног квадрата. Оба квадрата и круг ротирају око дијагонале уписаног квадрата. Како се имају волумени и површине посталих тела? (Сушак, женска, 1933).

93) Основне ивице тростране праве пирамиде $a = 37\,cm$, $b = 20\,cm$ и $c = 51\,cm$, а висина је задана целим кореном једначине $\sqrt{5x + 19} - \sqrt{x - 14} = 9$; за колико је волумен описане купе већи од волумена уписане? (Сушак, женска, 1930).

94) Ако су из тачке која је од средишта лопте волумена $V=58\,459{,}45\,m^3$ удаљена за $r+7$ повучене тангенте, добива се купасто тело омеђено омотачем купе и калатом лопте. Израчунати волумен тога тела без примене тригонометрије. (Сушак, 1932).

95) Ваљак $(r=18\,cm)$ продире централно лопту $(R=30\,cm)$; колика је површина и запремина прстенастог тела омеђеног омотачем ваљка и површином лопте. (Сисак, 1930).

96) У лопти полупречника $r=10$ уписан је прав конус чија је висина једнака пречнику базиса. Нађи у каквој су размери волумени лопте и уписаног конуса? (Вуковар, 1933).

97) Око лопте полупречника $r=10$ има се описати купа чија је запремина једнака троструког запремини лопте. Израчунати полупречник базиса и висину купе. (Вуковар, 1930).

98) У кругу обима $O=20\,cm$ уписан је равностран троугао, а над њим подигнут је тетраедар. Колика је запремина лопте уписане у том тетраедру? (Загреб, II женска, 1932).

99) Правоугли троугао ротира око обеју катета и производи два тела чије се запремине имају као $3:4$. Ако тај троугао ротира око хипотенузе постаје тело чија је запремина $1200\,\pi\,m^3$. Колике су површине појединих тела? (Загреб, II женска, 1930).

100) У правој купи $r=39\,cm$ и $h=52\,cm$ уписан је ваљак; колика је висина тога ваљка а колики полупречник, ако се његов омотач има према омотачу купе као $64:169$? (Загреб, II мушка, 1933).

101) У коцки, чија је површина $384\,cm^2$, налази се правилна четвострана пирамида, чија се основа поклапа са доњом основом коцке, а чији се врх налази у тачци пресека коцкиних дијагонала. У тој истој тачци налази се и врх праве купе чија је основа круг уписан у горњој основи коцке. Нађи површину и запремину те пирамиде и те купе, и докажи да је однос површина ових тела једнак односу њихових запремина. (Шабац, 1934).

102) Од једне оловне лопте чији је пречник $4{,}66\,cm$ треба исећи коцку тако да се темена налазе на површини лопте. Од одпадака је саливена нова лопта. Колики мора бити њен полупречник? (Београд, I жен. 1927).

103) Полупречници основа праве зарубљене купе једнаки су са полупречницима једне шупље облице исте висине; дебљина зида облице је $3\,cm$, а запремина зарубљене купе према запремини шупље облице стоји у размери као $73:51$. Колики су полупречници купе? (Београд, III м. 1921).

104) Паралелне стране једног правоуглог трапеза јесу $5\,m$ и $3\,m$, а висина му је $4\,m$; нађи запремину зарубљене купе која се добива обртањем трапеза око своје висине и запремину купе која се добива обртањем правоуглог троугла добивеног продужењем непаралелних страна трапезових. (Београд, III мушка, 1923).

105) Дуж од $10\,dm$ подељена је по непрекидној пропорцији (по златном пресеку) и од делова конструисан је правоугаоник. Нађи површину и запремину тела које се добива обртањем овога правоугаоника око своје веће стране. (Београд, III мушка, 1925).

106) У крајњој тачци A пречника AB једнога круга повучена је тангентна, а у средишту O полупречник OC нормално на AB, па је дуж BC продужена до пресека E са тангентом. Цела фигура обрће се око пречника AB као осовине. Израчунати запремину обртног тела које производи површина AEC, кад је полупречник круга $R=13\,549\,m$. (Београд, III мушка, 1926).

107) Равнокрак троугао, чија је основица $a=12\,cm$ и висина $h=10\,cm$, обрће се око осовине, која је паралелна са основицом. Одредити отстојање обртне осовине од основице тако да обртне површине основице и висине буду једнаке. Затим израчунати обртну површину и обртну запремину самог троугла. (Београд, III мушка, 1929).

108) Лопта полупречника R и једна права купа полупречника основе R и висине $2R$, налазе се на једној равни (купа лежи на својој основи). Та два тела пресечена су једном равни на растојању x од прве равни паралелно с њом. Одредити растојање x тако, да површине пресека купе и лопте буду једнаке. (Београд, Реалка, 1923).

109) Лук главног лоптиног круга има 44^0 и дуг је $0{,}2\,m$ колика је запремина коцке уписане у лопти? (Београд, II женска, 1920).

110) У правој и правилној четвоространој зарубљеној пирамиди висина је $h=15\,cm$, а запремина $V=406{,}25\,cm^3$. Површина једне основе 9 пута је већа од површине друге основе. Нађи површину и запремину зарубљене купе, која се може описати око ове пирамиде. (Београд, II женска, 1933)

111) У равнокраком троуглу чији је крак $b=17\,cm$ и основица $a=30\,cm$ уписан је и описан круг. Цео се систем обрће око висине основичине. У каквој су размери површине, а у каквој запремине тако добивених тела? (Београд, I мушка, 1924).

112) Око лопте полупречника $r=5\,m$ описана је зарубљена купа тако, да је њена запремина двапут већа од запремине лопте. Нађи полупречнике базиса. (Београд, I мушка, 1925).

113) Ромб $ABCD$, чија је страна a и мања дијагонала $BD=a$, обрће се око праве xy паралелне са BD на отстојању a од темена C. Израчунати површину и запремину обртног тела. (Београд, I мушка, 1925).

114) Правилан шестоугаоник са страном $4\,m$ обрће се око осовине која је нормална на дијагонали и пролази кроз њено теме; нађи P и V обрнутог тела. (Београд, I мушка, 1925).

115) Лопту од бакра чија је површина $729\,cm^2$, треба претопити у праву облицу тако, да површина обличиног омотача буде једнака површини лопте. Израчунати колики полупречник и висина те облице треба да буду. (Београд, II мушка, 1933).

116) У праву зарубљену купу може да се упише лопта полупречника ρ, чија је запремина једнака n-том делу запремине те зарубљене купе. Ако је $\rho=2m$ и $n=2\frac{5}{8}$, израчунати: а) површину те праве зарубљене купе; в) разлику запремина зарубљене купе и лопте. (Београд, II м. 1934).

ДРУГИ ДЕО

СТЕРЕОМЕТРИЈА.

СЕДМИ ОДЕЉАК.

Праве линије и равни у простору

ОСМИ ОДЕЉАК.

Рогљеви.

ДЕВЕТИ ОДЕЉАК.

Решавање правоуглог троугла помоћу тригонометриских функција са употребом логаритамских таблица

ДЕСЕТИ ОДЕЉАК

Рогљаста тела — полиедри.

ЈЕДАНАЕСТИ ОДЕЉАК.

Ваљкаста или обла тела