МИЛАН С. НЕДИЋ

ТРИГОНОМЕТРИЈА
РАВНА И СФЕРНА
ЗА VII РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

По препоруци Главног просветног савета С. бр. 225 од 3 јула 1931 године одобрена за уџбеник одлуком Господина Министра просвете С. н. бр. 23118 од 20 јула 1931 године.

БЕОГРАД
ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА ГЕЦЕ КОНА
1 КНЕЗ МИХАИЛОВА УЛИЦА 1
1931

ОД ИСТОГ ПИСЦА:

АЛГЕБРА
ЗА VII РАЗРЕД

И

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА
ЗА VII и VIII РАЗРЕД

ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА
ГЕЦЕ КОНА

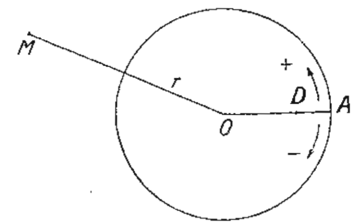
БЕОГРАД
За Штампарију „ПРИВРЕДНИК", Кнез Михаилова бр. 3.
БЛАГОЈЕВИЋ Д. ЖИВОЈИН, Ковдина бр. 10.
1931

ТРИГОНОМЕТРИЈА У РАВНИ
од проф. М. С. НЕДИЋА

I. — ПОСМАТРАЊЕ И ЦРТАЊЕ ФУНКЦИЈА SIN X, COS X, TANG X, COTANG X
— ТРИГОНОМЕТРИСКИ КРУГ И НОВЕ ДЕФИНИЦИЈЕ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА —

ЛУЧНЕ АПСЦИСЕ

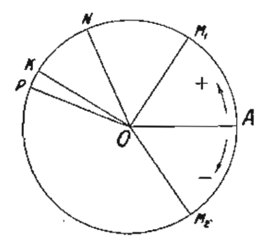
Тригонометриски круг. — Круг на коме је обележен почетак кретања и смисао кретања и на коме је полупречник узет за јединицу за мерење дужина зове се тригонометриски круг (сл. 1). На нашој слици кретање ће се рачунати од тачке A. Она ће претстављати почетак кретања. У супротном смислу кретања сахатне казаљке биће позитивно кретање, а у смислу кретања сахатне казаљке негативно кретање. Полупречник OA биће јединица за мерење дужина. То значи да ће дужина OA имати мерни број 1. Дужина OD имаће мерни број $\frac{2}{3}$, пошто износи $\frac{2}{3}$ нашег полупречника OA. Дужина OM имаће мерни број 2, пошто је 2 пута већа од нашег полупречника.



Сл. 1.

Лучне апсцисе. — Лучно растојање једне тачке од почетка кретања јесте њена лучна апсциса. Узмимо тачке M_1 и M_2 које су за 1 радијан далеко од почетне тачке A. Њихове лучне апсцисе биће (сл. 2):

за тачку M_1 $\quad +1$
за тачку M_2 $\quad -1$



Сл. 2.

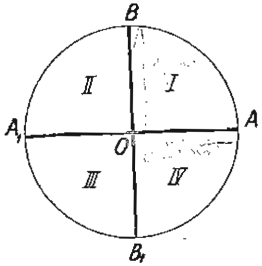
Пошто се лучне апсцисе рачунају од почетне тачке кретања, та тачка се зове почетак апсциса. Лучне су апсцисе увек изражене релативним бројем.

Пример. — Апсциса тачке N је $+2$ (у радијанима) или $-4,28$ (опет у радијанима).

Апсциса тачке K је 148^0 или -212^0

Апсциса тачке P је $+$ 174,44 града али — 225,56 гради.

Важне тачке на тригонометрискоме кругу. — На триго-
нометрискоме су кругу важне тачке A, B, A_1 и B_1 (сл. 3). Оне деле круг
на четири једнака дела. Сваки такав део
зове се квадрант. Квадранти иду оним
редом како су обележени на слици. Ово
су апсцисе тих важних тачака:



Сл. 3.

Лучна апсциса тачке A је 0^0 или 0
гради или 0 радијана.

Лучна апсциса тачке B је 90^0 или 100
гради или $\frac{\pi}{2}$ радијана.

Лучна апсциса тачке A_1 је 180^0 или 200 гради или π радијана.

Лучна апсциса тачке B_1 је 270^0 или 300 гради или $\frac{3\pi}{2}$ радијана.

Лучна апсциса тачке A је 360^0 или 400 гради или 2π радијана.

Лучна апсциса тачке A је 360^0 или 400 гради или 2π радијана. Њена апсциса
(Тачка A има апсцису 0 ако није било кретања. Њена апсциса
је 360^0 ако је нека тачка обишла кружну периферију једанпут,
почевши од A).

Вишеструке лучне апсцисе. — Нека се једна тачка M
кретала од тачке A у позитивном смислу (сл. 2), прошла кроз
тачке B, A_1, B_1, A и наставила кретање, па дошла у тачку M_1.
Колика је сад њена лучна апсциса? Лучна апсциса једне тачке је
пут који је тачка прешла док је од почетка кретања дошла на
своје садање место. Колики је пут прешла наша тачка M? Прешла
је цео круг. То значи

2π. Зато је сад

Сем тога прешла је, по други пут, лук од A до M_1. Зато је сад
лучна апсциса тачке M_1 ово: $2\pi + AM_1$ или у радијанима: $2\pi + 1$.

Лучна апсциса већа од 2π (од кружне периферије) зове се
вишеструка лучна апсциса. Апсциса $2\pi + 1$ је једна таква више-
струка лучна апсциса.

Тачка M_1 има апсцису 1 (у радијанима) ако је било кретања
само од A до M_1. Она има лучну апсцису $2\pi + 1$, ако је извршен
један кружни обрт, а затим се ишло од A до M_1. Она има апсцису
$2 \cdot 2\pi + 1$, ако су извршена 2 кружна обрта, а затим се ишло од
A до M_1. Она има апсцису $3 \cdot 2\pi + 1$, ако су извршена 3 кружна
обрта, а затим се ишло од A до M_1. Тачка M_1 има апсцису
$2k\pi + 1$, ако су извршена k кружних обрта, а затим се ишло
од A до M_1.

Тачка M_2 има апсцису -1, ако се ишло само од A до M_2 у негативном смислу. Она има апсцису $(-2\pi - 1)$, ако је најпре од A извршен један негативни кружни обрт, а затим се од A ишло до M_2. Тачка M_2 има апсцису $(-4 \cdot 2\pi - 1)$, ако су најпре извршена 4 негативна кружна обрта, па се затим ишло од A до M_2.

Апсциса тачке M_1 (сл. 2) јесте $(2k\pi + 1)$, ако је било k кружних обрта, а затим се дошло из A у M_1. Ако је k цео број већи од нуле, значи да су најпре извршена k обрта у позитивноме смислу. Ако је k цео број мањи од нуле, значи да су најпре извршена k обрта у негативном смислу.

ВЕЖБАЊА

Обележи на тригонометрискоме кругу тачке чије су апсцисе:

1.	$+30^0$	**2.**	-60^0
3.	-135^0	**4.**	$+50$ гр.
5.	-150 гр.	**6.**	$\frac{3}{2}\pi$
7.	$\frac{\pi}{4}$	**8.**	$\frac{\pi}{8}$
9.	$\frac{3}{4}\pi$	**10.**	$-\frac{\pi}{4}$
11.	$-\frac{2}{3}\pi$	**12.**	$-\frac{2}{3}\pi$ и $+\frac{4}{3}\pi$
13.	$\frac{3}{4}\pi$ и $-\frac{5}{4}\pi$	**14.**	$\frac{5}{2}\pi$ и $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{3}{2}\pi$

15. — Може ли се лучна апсциса једне тачке обележити и позитивним и негативним бројем? Наведи примере.

16. — Може ли се лучна апсциса једне тачке означити са два разна позитивна броја? Наведи примере.

17. — Може ли се лучна апсциса једне тачке обележити са два разна негативна броја? Наведи примере.

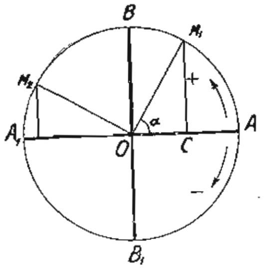
18. — Неко је обележио лучну апсцису једне тачке са a. Ако сад апсцису те тачке обележимо са $(a + 2k\pi)$, какво треба да је k, па да наша тачка не промени своје место?

19. — Узми у првоме квадранту произвољан лук l_1, па обележи тачку чија је апсциса $2k\pi + l_1$ за $k = 3$ и за $k = -4$.

20. — Узми у IV квадранту лук од -1 радијана, па обележи тачку чија је апсциса $-2k\pi - 1$ за $k = 2$ и за $k = -3$.

НОВЕ ДЕФИНИЦИЈЕ СИНУСА И КОСИНУСА

Правоугле координате. — На слици 4 имамо и тригонометриски круг и правоугли координатни систем. Свака тачка на кругу има своју лучну апсцису и своје правоугле координате. Тачка M_1 има лучну апсцису AM_1, али и своје праволиниске координате OC и CM_1. Кад се та тачка креће по кругу, мења се њена лучна апсциса, али се мењају и њене правоугле координате. Ако тачка дође из M_1 у M_2, има нову лучну апсцису, али и нове правоугле координате. (Покажи их на слици).



Сл. 1.

Косинус. — Праволиниска апсциса крајње тачке једног лука на тригонометриском кругу зове се косинус тога лука:

$$\overrightarrow{OC} = \cos\alpha$$

Синус. — Ордината крајње тачке једног лука на тригонометриском кругу зове се синус тога лука. То се пише овако:

$$\overrightarrow{CM_1} = \sin\alpha.$$

Мерни бројеви синуса и косинуса. — Колики је овде косинус? Ми смо на тригонометриском кругу. На њему се све дужине мере полупречником. Зато ће мерни број нашег косинуса бити:

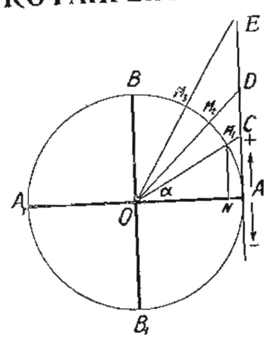
$$\cos\alpha = \frac{OC}{OM_1}.$$

Мерни број нашег синуса биће:

$$\sin\alpha = \frac{CM_1}{OM_1}.$$

НОВЕ ДЕФИНИЦИЈЕ ТАНГЕНТЕ И КОТАНГЕНТЕ.

Тангента. — Пустимо једну тачку да се креће по тригонометриском кругу у првоме квадранту. Нека полази од A (сл. 5) и нека долази у разне положаје M_1, M_2 M_3 итд. Повуцимо дирку у тачци A. Кроз M_1, M_2, M_3 продужимо полупречнике све до дирке. Добићемо дирке AC, AD, AE. Што је лук већи, дирка је овде све већа. Свакоме луку одговара једна дирка. Наше дирке су отсечци на осовини AD повученој паралелно с ординатном осовином. Дирка која



Сл. 5.

одговара једноме луку зове се тангента тога лука. Тангенте лукова обележавамо овако:

$$\tan\widehat{AM_1} = \overrightarrow{AC} \text{ или } \operatorname{tg}\widehat{AM_1} = \overrightarrow{AC}$$

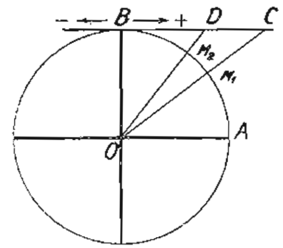
$$\tan\widehat{AM_3} = \overrightarrow{AE} \text{ или } \operatorname{tg}\widehat{AM_3} = \overrightarrow{AE}$$

Колика је бројна вредност тангенте? Јединица за мерење је полупречник OA. Зато је $\operatorname{tg}\widehat{AM_1} = \frac{AC}{OA}$ и $\operatorname{tg}\widehat{AM_3} = \frac{AE}{OA}$.

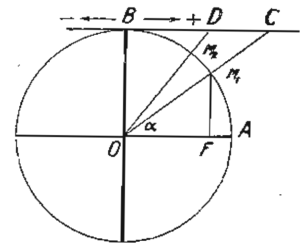
Је ли тригонометриска тангента исто што и тангенс? Очевидно јесте, јер ми знамо да је у правоуглом троуглу OAC:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{OA}.$$

Котангента. — Опет пустимо једну тачку да се креће по I квадранту тригонометрискога круга. Повуцимо дирку паралелну са апсцисном осовином (сл. 6). Повуцимо из O полуправе кроз M_1 и M_2. до пресека с дирком. Добићемо на дирци отсечке BC и BD.



Сл. 6.



Сл. 7.

Свакоме луку одговара један отсечак. Отсечак на дирци паралелној с апсцисном осовином који одговара једноме луку на тригонометрискоме кругу зове се котангента тога лука. Котангенту обележавамо овако:

$$\operatorname{cotang}\widehat{AM_1} = \overrightarrow{BC} \text{ или } \operatorname{cotg}\widehat{AM_1} = \overrightarrow{BC}$$

$$\operatorname{cotang}\widehat{AM_2} = \overrightarrow{BD} \text{ или } \operatorname{cotg}\widehat{AM_2} = \overrightarrow{BD}.$$

Бројна вредност котангенте је $\operatorname{cotang}\widehat{AM_1} = \frac{BC}{OB}$. (Пошто је $r = OB$, а полупречник је јединица мере).

Је ли тригонометриска котангента исто што и котангенс? Да видимо то.

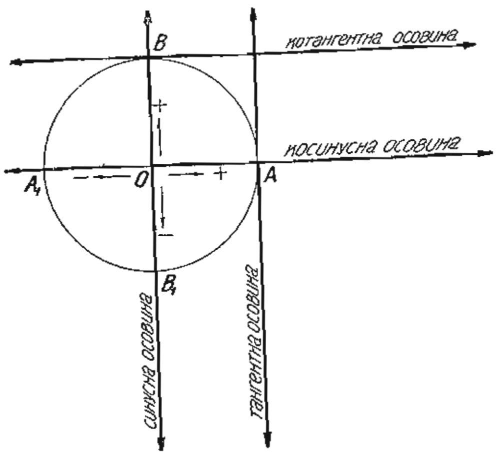
Спустимо из M_1 са слике 6 управну M_1F (сл. 7). Тада је $\triangle OBC \sim \triangle OFM_1$. ($\sphericalangle OFM_1 = \sphericalangle OBC = 90^0$, $\sphericalangle COA = \sphericalangle OCB$). Отуда је $\frac{OF}{FM_1} = \frac{BC}{OB}$.

Знамо из ранијег да је из правоуглог троугла OFM_1

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{OF}{FM_1}.$$

Сад смо видели да је

$$\frac{OF}{FM_1} = \frac{BC}{OB} = \text{cotg}\ \widehat{AM_1} = \text{cotg}\alpha.$$



Сл. 8.

Напомена. — Пошто је тангенс исто што и тригонометриска тангента, а котангенс исто што и котангента, ми ћемо употребљавати сва четири имена.

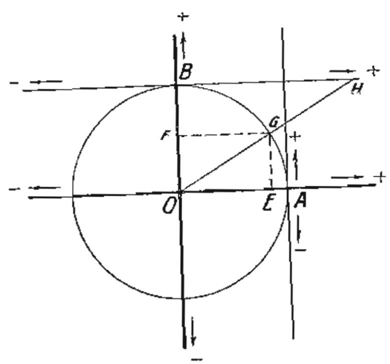
Четири осовине. — Сад имамо 4 осовине које показује слика 8. Кад знамо ове 4 осовине, можемо рећи овако:

Синус је отсечак на синусној осовини који одговара крајњој тачци једног лука (OF, сл. 9).

Косинус је отсечак на косинусној осовини који одговара крајњој тачци једног лука (OE, сл. 9).

Тангента је отсечак на тангентној осовини који одговара крајњој тачци једног лука (AG, сл. 9).

Котангента је отсечак на котангентној осовини који одговара крајњој тачци једног лука (BH, сл. 9).



Сл. 9.

Кружне функције. — Синус, косинус, тангента и котангента зависе од лука. Кад се лук мења мењају се и синус и косинус и тангента и котангента. Пошто је овај лук на кругу, синус, косинус, тангента и котангента зову се и кружне функције.

Синус, косинус, тангенс и котангенс су неименовани бројеви.

Напомена. — Ове четири функције зову се још и угловне функције, јер зависе од угла. Зову се и гониометриске функције што опет значи угловне функције (Од грчких речи *гониа* = угао и *метрон* = мера). Зову се и тригонометриске функције, пошто се употребљавају за решавање троуглова. (Опет од грчких речи *тригонос* = троугао и *метрон* = мера).

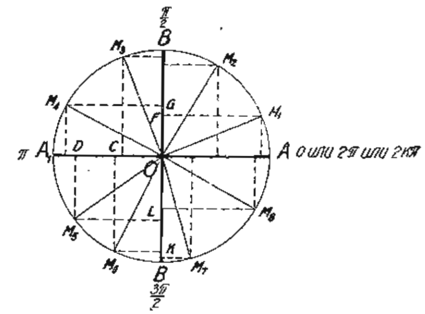
ПРОМЕНЕ КРУЖНИХ ФУНКЦИЈА ПРИ ПРОМЕНИ ЛУКОВА

ПРОМЕНЕ СИНУСА И КОСИНУСА

Промене вредности синуса. — Узмимо функцију $x = \sin x$, где је x промењљиви лук.

Први квадрант. — У првоме крадранту синус је позитиван и расте (сл. 10). За лук AB синус је $\overrightarrow{OB} = r = +1$. Отуда је

$$\sin\frac{\pi}{2} = +1.$$



Сл. 10.

Други квадрант. — У другоме квадранту синус је позитиван и опада од $+1$. За лук ABA_1 синус је нула. Отуда је

$$\sin\pi = 0.$$

Трећи квадрант. — У трећем квадранту синус је негативан и опада. (Сећаш се да је код негативних бројева мањи онај чија је апсолутна вредност већа. Зато је $\overrightarrow{CM_6} < \overrightarrow{DM_5}$, тј. $\sin ABA_1M_6 < \sin ABA_1M_5$). За лук ABA_1B_1 (угао од 270^0) синус је $\overrightarrow{OB_1}$. Отуда је

$$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

Четврти квадрант. — У четвртом квадранту синус је негативан и расте. За лук ABA_1B_1A синус је нула. Отуда

$$\sin 2\pi = \sin 0 = 0.$$

Синус вишеструких лучних апсциса. — Ако наставимо кретање, видећемо да ће се понављати вредности синуса.

$$\sin(2\pi + AM_1) = \sin AM_1 = \overrightarrow{OF}.$$
$$\sin(2\pi + ABM_4) = \sin ABM_4 = \overrightarrow{OG}.$$
$$\sin(2\pi + ABA_1M_6) = \sin ABA_1M_6 = \overrightarrow{OK}$$
$$\sin(2\pi + ABA_1B_1M_8) = \sin ABA_1B_1M_8 = \overrightarrow{OL}$$

Значи, кад је наша тачка M извршила цело обртање по кругу и наставила кретање, понављају се за синус старе вредности, које смо већ имали. Овај лук после кога почиње понављање функцијине вредности зове се **периода**. За синус је периода лук од 2π. Функција која има периоду зове се периодична функција. Синус је периодична функција с периодом од 2π.

Ако 2 пута обиђемо круг, па наставимо кретање, имаћемо:

$$\sin(2\,.\,2\pi + AM_1) = \sin \widehat{AM_1}$$

Према томе можемо овако да напишемо:

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha. \quad \text{(Овде је } k \text{ ма какав цео број.)}$$

Синус негативних лукова. — Са слике 10 се види да је:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3}{2}\pi = -1$$

$$\sin(-\pi) = \sin\pi = 0$$

$$\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = +1$$

$$\sin(-2\pi) = \sin 0 = \sin 2\pi = 0.$$

Таблица синусних вредности. — Из свега овога што смо досад видели можемо извести ову таблицу:

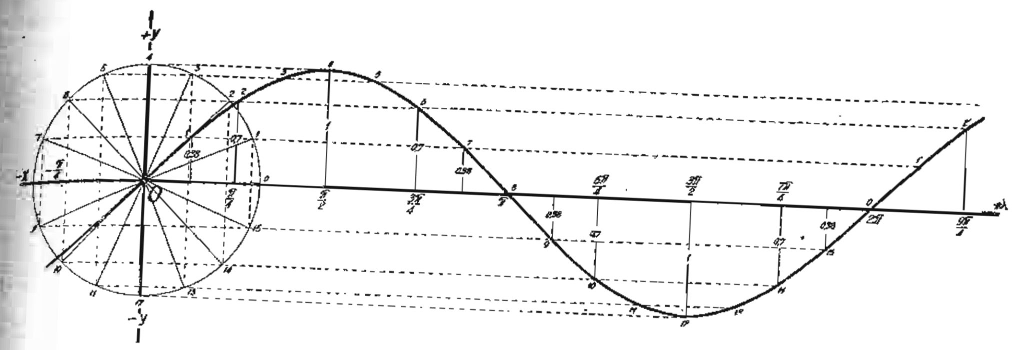
Лук	0	позитиван, расте	$\frac{\pi}{2}$	позитиван, расте	π	позитиван, расте	$\frac{3\pi}{2}$
Синус	0	позитиван, расте	$+1$	позитиван, опада	0	негативан, опада	-1

Лук	позитиван, расте	2π	позитиван, расте	$\frac{5\pi}{2}$	позитиван, расте	3π	
Синус	негативан, расте	0	позитиван, расте	$+1$	позитиван, опада	0	итд.

Лук	0 нег. опада	$-\frac{\pi}{2}$	нег. опада	$-\pi$	нег. опада	$-\frac{3\pi}{2}$	нег. опада	-2π
Синус	0 нег. опада	-1	нег. расте	0	поз. расте	$+1$	поз. опада	0

Синусоида. — Да нацртамо сад функцију $y = \sin x$. Узећемо x у радијанима, а y у полупречницима. (Да ли је то једно исто?) Нека је $r = 1$. (сл. 11). Тада је $\pi \approx CD$. Кад нацртамо криву, добијамо слику 12. Крива која претставља функцију $y = \sin x$ зове се синусоида. Наша слика 12 представља једну синусоиду.

Сл. 11.



Сл. 12.

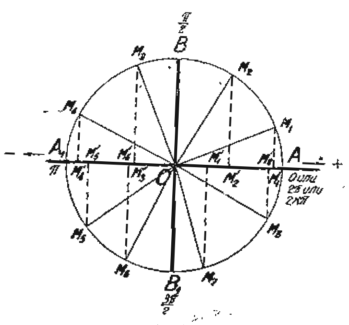
Промене косинуса. — Узмимо функцију $y = \cos x$, где је x један променљиви лук.

Први квадрант. — У првоме квадранту косинус је позитиван и опада (сл. 13). За лук AM_1 косинус је $\overrightarrow{OM'}_1$; за лук AM_2 косинус је $\overrightarrow{OM'}_2$; за лук AB косинус је нула, пошто је тада отсечак на косинусној осовини нула. Значи да је

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Други квадрант. — За лук AM_3 косинус је $\overrightarrow{OM'}_3$; за лук AM_4 косинус је $\overrightarrow{OM'}_4$. (Негативан је, а расте по апсолутној вредности). У другоме квадранту косинус је негативан и опада. За лук ABA_1 отсечак на косинусној осовини је OA_1, пошто је сама тачка A_1 отсекла тај отсечак. Види се да је

$$\cos\pi = -1.$$



Сл. 13.

Трећи квадрант. — За лук AM_5 косинус је $\overrightarrow{OM'}_5$; за лук AM_6 косинус је $\overrightarrow{OM'}_6$. У трећем квадранту косинус је негативан и расте. За лук ABA_1B_1 отсечак на косинусној осовини је нула. Отуда:

$$\cos\frac{3}{2}\pi = 0.$$

Четврти квадрант. — За лук $ABA_1B_1M_7$ косинус је $\overrightarrow{OM'}_7$; за лук $ABA_1B_1M_8$ косинус је $\overrightarrow{OM'}_8$.

У четвртоме квадранту косинус је позитиван и расте. Кад дођемо опет у тачку A, имамо отсечак AO. Отуда:

$$\cos 2\pi = \cos O = +1.$$

Ако наставимо кретање, видећемо да ће се понављати вредности косинуса:

$$\cos(2\pi + AM_1) = \cos AM_1$$

$$\cos(2\pi + AM_2) = \cos AM_2$$

$$\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos(2\pi + \pi) = \cos\pi = -1$$

$$\cos\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi\right) = \cos\frac{3}{2}\pi = 0$$

$$\cos(2\pi + 2\pi) = \cos 2\pi = +1.$$

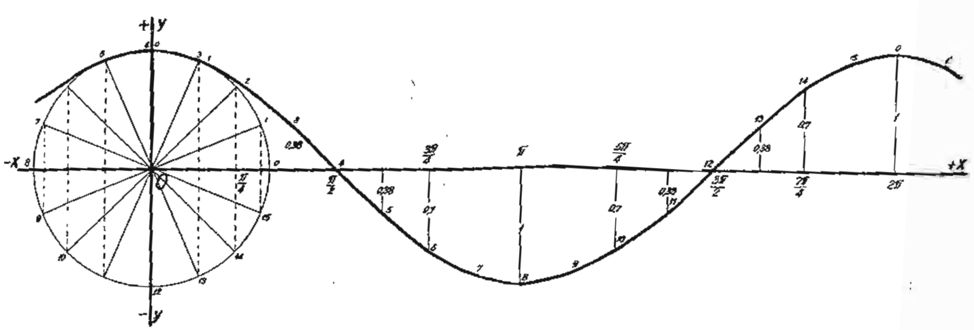
Значи да је и косинус периодична функција с периодом од 2π.

Таблица косинусних вредности. — Узмимо неколико вредности за функцију $y = \cos x$. Начинимо од њих ову таблицу:

x	-2π	нег. расте	$\frac{-3}{2}\pi$	нег. р.	$-\pi$	нег. р.	$\frac{-\pi}{2}$	нег. р.	0	$\frac{+\pi}{2}$	поз. р.
y	+1	поз. опад.	0	нег. опад.	−1	нег. р.	0	поз. р.	+1	0	нег. опад.

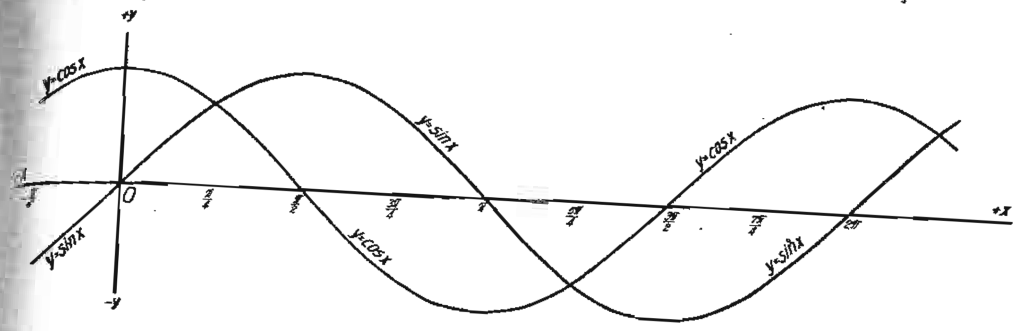
x	π	поз. р.	$\frac{3}{2}\pi$	поз. р.	2π	поз. р.	$\frac{5}{2}\pi$	поз. р.	3π	поз. р.	$\frac{7}{2}\pi$
y	−1	нег. р.	0	поз. р.	+1	поз. опад.	0	нег. опад.	−1	нег. р.	0

Косинусна линија. — Кад нацртамо ову функцију, добијамо слику 14. Та се линија зове косинусна линија.



Сл. 14.

Кад нацртамо заједно синусну и косинусну линију, добијамо слику 15.



Сл. 15.

ВЕЖБАЊА

1. — Проучити промене синуса у III квадранту.

2. — Какав је по знаку синус у IV квадранту?

3. — У којим је квадрантима синус негативан?

4. — Исто питање за косинус.

5 — Ако пређемо из другог у трећи квадрант, која ће функција променити знак?

6. — Ако пређемо из I у II квадрант, која ће функција променити знак?

7. — Колика је вредност икса, кад је $x = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$?

8. — „ „ „ „ „ „ $x = \sin\left(2\pi + \frac{5}{4}\pi\right)$?

9. — „ „ „ „ „ „ $x = \sin\left(5\frac{3}{4}\pi\right)$?

10. — „ „ „ „ „ „ $x = \sin 6\frac{1}{6}\pi$?

11. — „ „ „ „ „ „ $x = \sin 7\frac{1}{3}\pi$?

12. — „ „ „ „ „ „ $x = \sin 4\frac{1}{3}\pi$?

13. — „ „ „ „ „ „ $x = \sin\frac{\pi}{6} + \sin 5\frac{5}{6}\pi$?

Посматрати промене ових функција и нацртати их:

14. $y = 1 + \sin x$ **15.** $y = 1 - \sin x$

(Ако је већ нацртана функција $y = \sin x$, како се могу на истоме цртежу брзо нацртати функције из вежбања 14 и 15?)

16. $y = -1 + \sin x$ **17.** $y = 2 + \sin x$ **18.** $y = 2 - \sin x$

19. $y = 2 \sin x$ **20.** $y = \sin 2x$ **21.** $y = \sin 3x$

22. $y = 1 + \sin 2x$ **23.** $y = 1 - \sin 2x$

24. $y = \sin (2\pi + x)$ **25.** $y = \sin (\pi - x)$

26. — Подели круг на квадранте, па обележи где је синус позитиван, а где негативан. (Добро упамти ту слику).

27. — Исто за косинус.

28. — Колика је вредност икса, кад је $x = \cos (2\pi + \frac{3}{4}\pi)$?

29. „ „ „ „ „ „ $x = \cos (2\pi + \frac{\pi}{4})$?

30. „ „ „ „ „ „ $x = \cos (3\pi + \frac{\pi}{4})$?

31. „ „ „ „ „ „ $x = \cos 4\frac{1}{2}\pi$?

32. „ „ „ „ „ „ $x = \cos 3\frac{1}{4}\pi$?

33. „ „ „ „ „ „ $x = \cos 5\frac{2}{3}\pi$?

34. — Колика је вредност икса, кад је $x = \cos 2\frac{1}{3}\pi + \cos 5\frac{1}{3}\pi$?

35. „ „ „ „ „ „ $x = \cos 3\frac{1}{3}\pi - \cos 4\frac{2}{3}\pi$?

36. „ „ „ „ „ „ $x = \cos 5\frac{3}{4}\pi + \sin 3\frac{1}{4}\pi$?

37. „ „ „ „ „ „ $x = \sin\frac{2}{3}\pi - \cos\frac{7}{4}\pi$?

Посматрати промене ових функција и нацртати их:

38. $y = 1 + \cos x$ **39.** $y = \frac{1 - \cos x}{2}$ **40.** $y = -1 + \cos x$

41. $y = -1 - \cos x$ **42.** $y = \cos 2x$ **43.** $y = 1 + 2 \cos x$

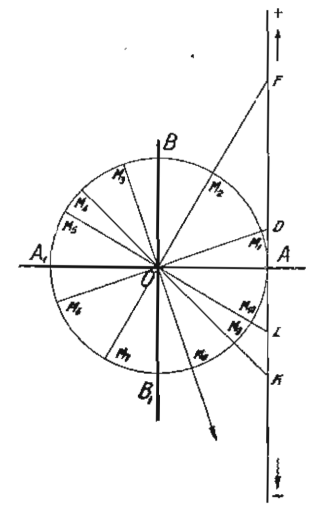
44. $y = \cos (\pi + x)$ **45.** $y = 1 - \cos (2\pi - x)$

ПРОМЕНЕ ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА

Промене тангенса. — Узмимо функцију $y = \mathrm{tg}x$, где је x промењљиви лук.

Први квадранш. — За лук AM_1 тангента је $\overrightarrow{AD}$. За лук AM_2 тангента је $\overrightarrow{AF}$ (сл. 16). У првом квадранту тангента је позитивна и расте. Што се M више ближи тачци B, дирка је све већа и нагло расте. Кад тачка M дође у B, праве AF (дирка) и OB постају паралелне и секу се у бескрајности горе и доле. Отуда је:

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2} = \pm\infty$$



Сл. 16.

Други квадранш. — Кад тачка M пређе у други квадрант, дирка постаје негативна и има веома велику апсолутну вредност док је тачка M у близини тачке B. (Полуправа OM_3 сече дирку веома далеко од тачке A). Кад M настави кретање, дирка је једнако негативна и има све мању апсолутну вредност. Значи, дирка је негативна и расте. У тачци A_1 полуправа A_1O сече дирку у A. Отуда је:

$$\mathrm{tg}\,\pi = 0$$

Трећи квадранш. — Кад тачка M пређе у III квадрант, дирка је опет позитивна. (За лук ABA_1M_6 дирка је $\overrightarrow{AD}$; за лук ABA_1M_7 дирка је $\overrightarrow{AF}$). Наилазимо опет на вредности које смо имали у I квадранту. Функција се понавља кад пређемо у III квадрант. Значи да је и тангента периодична функција. Њена периода је π, јер после лука π почињу се понављати раније вредности функције. Кад покретна тачка M дође у B_1, опет су паралелне права BB_1 и дирка. Отуда:

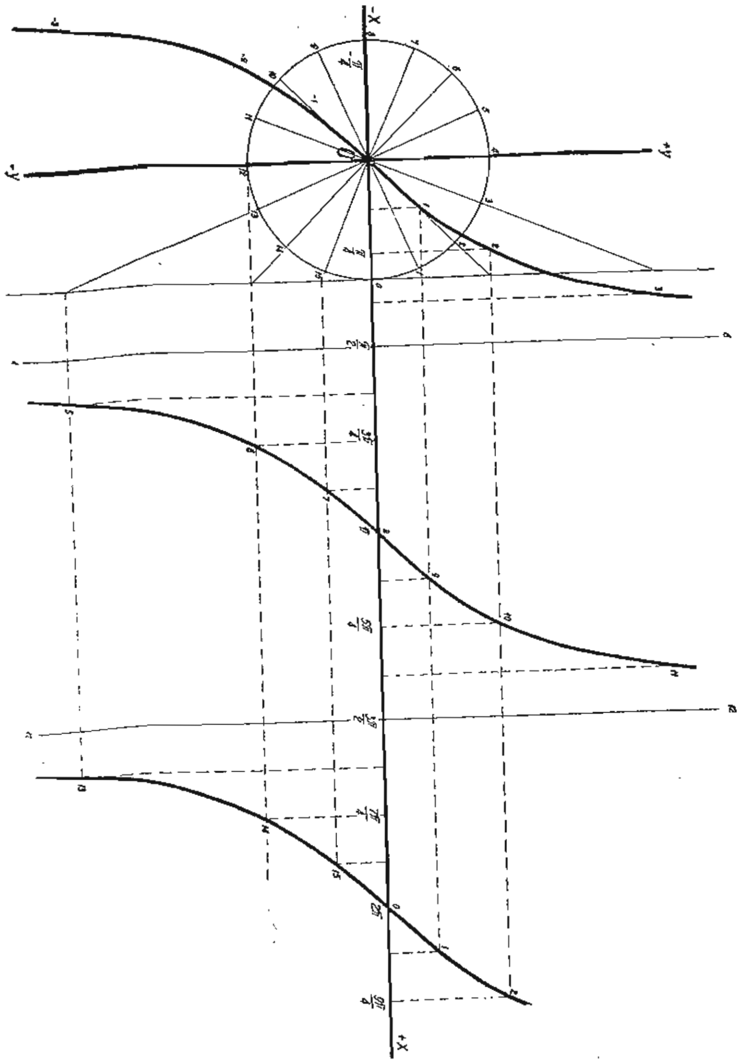
$$\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\pi = \pm\infty$$

Четврши квадранш. — У четвртом се квадранту понављају вредности из II квадранта:

$$\mathrm{tg}ABM_8 = \mathrm{tg}ABM_3;\ \mathrm{tg}ABM_{10} = \mathrm{tg}ABM_5 = \overrightarrow{AL}$$

У четвртом квадранту тангента је негативна и расте Кад покретна тачка M дође у тачку A биће:

$$\mathrm{tg}2\pi = \mathrm{tg}0 = 0$$



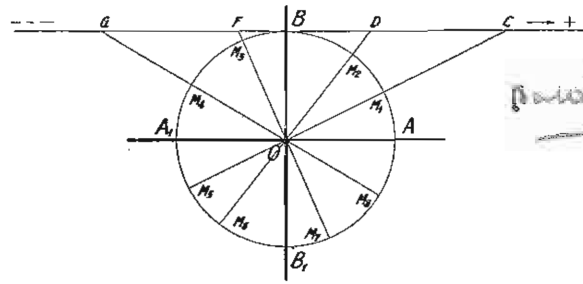
Сл. 17.

Таблица тангентних вредности. — Узмимо неколико вредности за функцију $y = tgx$ и ставимо их у једну таблицу:

x	0	+ расте	$\frac{\pi}{2}$	+ расте	π	+ расте	$\frac{2}{3}\pi$	+ расте	2π	+ расте	$\frac{5}{2}\pi$
y	0	+ расте	$\pm\infty$	— рст.	0	+ рст.	$\pm\infty$	— рст.	0	+ рст.	$\pm\infty$

Тангентна линија. — Кад нацртамо ову линију, добијамо тангентну линију са слике 17. на стр. 16.

Промене вредности котангенте. — Узмимо функцију $y = \text{cotg } x$, где је x промењиви лук. — *Први квадрант.* — За лук AM_1 (сл. 18) котангента је $\overrightarrow{BC}$; за лук AM_2 котангента је $\overrightarrow{BD}$. У I квадранту котагента је позитивна и опада. Што се M више ближи тачци B, котангента је све мања. У тачци B отсечак на котангентној осовини је нула. Отуда је



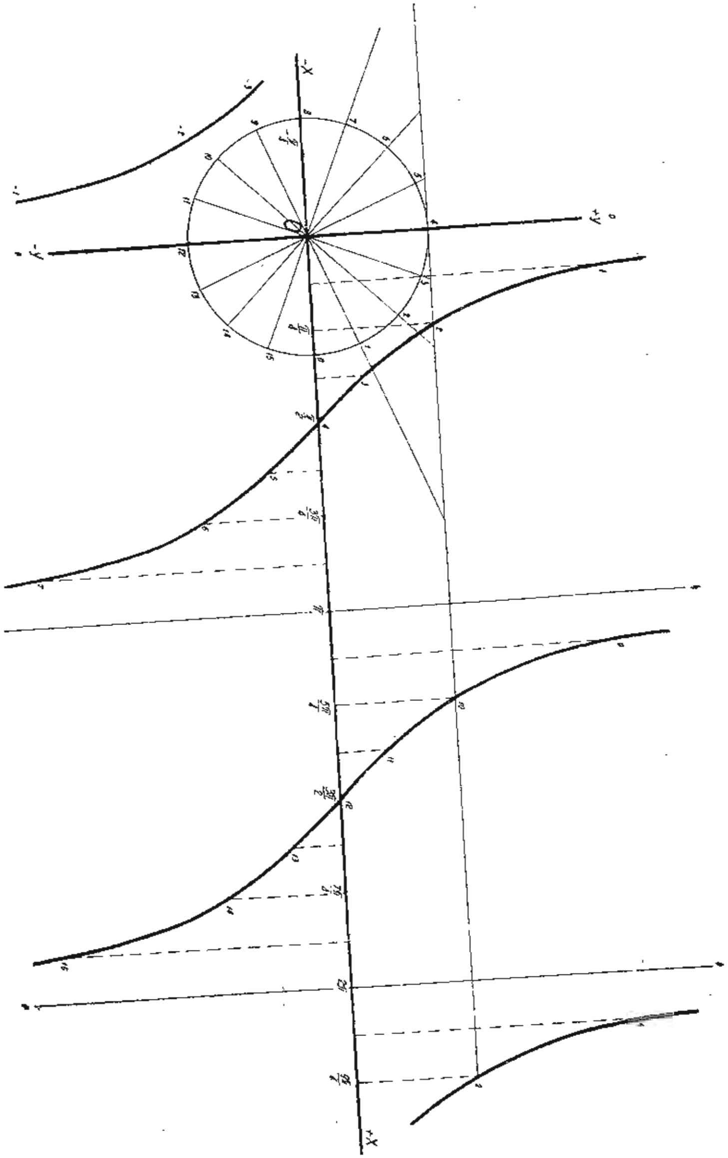
Сл. 18.

$$\text{cotg } \frac{\pi}{2} = 0.$$

Други квадрант. — Кад тачка M пређе у II квадрант, котангента постаје негативна и опада. $\overrightarrow{BG} < \overrightarrow{BF}$. Кад M дође у A_1, права OA_1 и котангентна осовина секу се у бескрајности. Котангента има 2 вредности: $-\infty$ и истовремено $+\infty$:

$$\text{cotg}\pi = \pm\infty$$

III квадрант. — Кад покретна тачка M пређе у III квадрант, котангента је опет позитивна. (За лук ABM_5 котангента је $\overrightarrow{BC}$; за лук ABM_6 котангента је $\overrightarrow{BD}$). Наилазимо опет на вредности које смо имали и у I квадранту. То значи да се функција понавља у III квадранту. То даље значи да је и котангента периодична функција. Њена периода је π, јер се после лука π почињу понављати раније вредности ове функције. Кад покретна тачка M дође



Сл. 19.

у B_1, полуправа B_1O сече котангенту осовину у тачци B и гради на тој осовини отсечак нула. Отуда је:

$$\operatorname{cotg} \frac{3}{2}\pi = 0$$

IV квадрант. — У IV квадранту понављају се вредности из II квадранта:

$$\operatorname{cotg} ABA_1M_7 = \operatorname{cotg} ABM_3 = \overrightarrow{BF}$$

$$\operatorname{cotg} ABA_1M_8 = \operatorname{cotg} ABM_4 = \overrightarrow{BG}$$

У четвртом квадранту котангента је негативна и опада. Кад покретна тачка M дође у тачку A, биће:

$$\operatorname{cotg} 2\pi = \operatorname{cotg} 0 = \operatorname{cotg} \pi = \pm\infty.$$

Таблица котангентних вредности. — Узмимо неколико вредности за функцију $y = \operatorname{cotg} x$ и унесимо их у једну таблицу:

x	0	расте	$\frac{\pi}{2}$	π	расте	$\frac{3}{2}\pi$	расте	2π	$\frac{5}{2}\pi$	расте	3π	$\frac{7}{2}\pi$
y	$\pm\infty$	+ опд.	0	$\pm\infty$	+ опд.	0	— опд.	$\pm\infty$	0	— опд.	$\pm\infty$	0

Котангентна линија. — Кад нацртамо функцију $y = \operatorname{cotg} x$, добијамо слику 19. на стр. 18. Она претставља котангентну линију.

ВЕЖБАЊА

1. — Проучити промене тангенте у III квадранту.

2. — Каква је по знаку тангента у II квадранту?

3. — У којим квадрантима је тангента позитивна, а у којим негативна?

(Нацртај круг и означи позитивне и негативне квадранте за тангенту знацима + и —. Добро упамти ту слику).

4. — У којим квадрантима тангента расте? У којима опада? (Пази добро!)

5. — Колика је вредност икса кад је x tg $(2\pi + \frac{\pi}{2})$

6. — Исто питање за $x = \operatorname{tg} (4\pi - \frac{\pi}{2})$

7. — „ „ „ $x = \operatorname{tg} (3\pi - \frac{\pi}{3})$

8. — Исто питање за $x = tg 3{,}75\pi$

9. — „ „ „ $x = tg 5{,}75\pi$

10. — „ „ „ $x = tg 2\pi - tg 2{,}50\pi$

11. — „ „ „ $x = tg 3\frac{1}{3}\pi + tg 4\frac{1}{4}\pi$

12. — „ „ „ $x = 2 tg 2{,}25\pi - 3 tg 6\frac{1}{3}\pi$

Посматрати промене ових функција и нацртати их:

13. $y = 1 + tg x$ 14. $y = -1 + tg x$ 15. $y = 2 tg x$

16. $y = tg 2x$ 17. $y = tg(\pi - x)$ 18. $y = tg 3x$

19. $y = 2 - tg 2x$ 20. $y = tg(x - \pi)$

21. — Проучити промене котангенте у III квадранту.

22. — У коме квадранту котангента опада? У којима расте? (Пази!).

23. — У којим је квадрантима котангента позитивна, а у којима је негативна?

(Нацртај круг и то обележи на њему. Добро упамти ту слику).

24. — Колика је вредност икса кад је $x = cotg(2\pi + \frac{\pi}{4})$?

25. — Исто питање за $x = cotg(3\pi - \frac{\pi}{4}\pi)$

26. — „ „ „ $x = cotg 4\frac{1}{4}\pi$.

27. — „ „ „ $x = cotg 3\frac{1}{3}\pi$.

28. — „ „ „ $x = cotg 5\frac{2}{3}\pi$.

29. — „ „ „ $x = cotg 6\frac{1}{3}\pi - cotg 2\frac{1}{4}\pi$.

30. — „ „ „ $x = cotg 7\frac{1}{2}\pi - cotg 6\pi$.

Посматрати промене ових функција и нацртати их:

31. $y = 1 + cotg x$ 32. $y = -1 + cotg x$

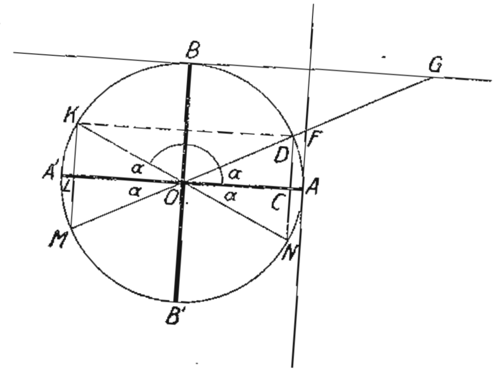
33. $y = cotg 2x$ 34. $y = 1 + cotg(\pi + x)$.

II. — СВОЂЕЊЕ НА I КВАДРАНТ

Узмимо један угао α у I квадранту (сл. 20). Биће:

$\sin\alpha = \overrightarrow{CD}$ $\cos\alpha = \overrightarrow{OC}$

$tg\alpha = \overrightarrow{AF}$ $cotg\alpha = \overrightarrow{BG}$



Сл. 20.

I — Ако место α ставимо $(\pi - \alpha)$, имаћемо лук ABK у другоме квадранту. Тада ће бити:

$\Delta OCD \cong \Delta OKL$. Отуда је:

$\sin(\pi - \alpha) = \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{CD} = \sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = \overrightarrow{OL} = -\overrightarrow{OC} = -\cos\alpha$.

Отуда је:

$$tg(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -tg\alpha.$$

$$cotg(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -cotg\alpha$$

II — Ако на лук α додамо π, имаћемо лук ABM из III квадранта. Пошто је $\Delta OCD \cong \Delta OLM$, биће:

$\sin(\pi + \alpha) = \overrightarrow{LM} = -\overrightarrow{CD} = -\sin\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = \overrightarrow{OL} = -\overrightarrow{OC} = -\cos\alpha$

$tg(\pi + \alpha) = \overrightarrow{AF} = tg\alpha$

$cotg(\pi + \alpha) = \overrightarrow{BG} = cotg\alpha$.

III — Ако ставимо место α лук $(2\pi - \alpha)$, имаћемо лук $ABMN$. Пошто је $\Delta OCN \cong \Delta OCD$, биће:

$\sin(2\pi - \alpha) = \overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{CD} = -\sin\alpha$

$\cos(2\pi - \alpha) = \overrightarrow{OC} = \cos\alpha$. Отуда је:

$tg(2\pi - \alpha) = -tg\alpha$

$cotg(2\pi - \alpha) = -cotg\alpha$.

Примери. I — Свести на I квадрант: $\sin 130^0$, $\cos 140^0$, $tg 170^0$ и $cotg 160^0$.

Најпре синус, јер он не мења знак при прелазу из I у II квадрант.

$\sin 130^0 = \sin (180^0 - 50^0) = \sin 50^0 = \cos 40^0.$
$\cos 140^0 = \cos (180^0 - 40^0) = - \cos 40^0$
$\operatorname{tg} 170^0 = \operatorname{tg} (180^0 - 10^0) = - \operatorname{tg} 10^0$
$\operatorname{cotg} 160^0 = \operatorname{cotg} (180^0 - 20^0) = - \operatorname{cotg} 20^0.$

II — Свести на I квадрант: $\sin 230^0$, $\cos 250^0$, $\operatorname{tg} 260^0$, $\operatorname{cotg} 210^0$.
$\operatorname{tg} 260^0 = \operatorname{tg}(180^0 + 80^0) = \operatorname{tg} 80^0 = \operatorname{cotg} 10^0$
$\operatorname{cotg} 210^0 = \operatorname{cotg}(180^0 + 30^0) = \operatorname{cotg} 30^0$
$\sin 230^0 = \sin(180^0 + 50^0) = - \sin 50^0 = - \cos 40^0$
$\cos 250^0 = \cos(180^0 + 70^0) = - \cos 70^0 = - \sin 20^0.$

III — Свести на I квадрант: $\sin 290^0$, $\cos 320^0$, $\operatorname{tg} 350^0$, $\operatorname{cotg} 310^0$.
$\cos 320^0 = \cos(360^0 - 40^0) = \cos 40^0$
$\sin 290^0 = \sin(360^0 - 70^0) = - \sin 70^0 = - \cos 20^0.$
$\operatorname{tg} 350^0 = \operatorname{tg}(360^0 - 10^0) = - \operatorname{tg} 10^0$
$\operatorname{cotg} 310^0 = \operatorname{cotg}(360^0 - 50^0) = - \operatorname{cotg} 50^0 = - \operatorname{tg} 40^0.$

IV — Свести на I квадрант: $\sin (-70^0)$, $\cos (-170^0)$, $\operatorname{tg} (-56^0)$, $\operatorname{cotg} (-220^0)$.
$\sin (-70^0) = - \sin 70^0 = - \cos 20^0$ (Нацртај, те се увери)
$\cos (-170^0) = - \cos 10^0$
$\operatorname{tg} (-56^0) = - \operatorname{tg} 56^0 = - \operatorname{cotg} 34^0$
$\operatorname{cotg} (-220^0) = \operatorname{cotg} 140^0 = \operatorname{cotg} (180^0 - 40^0) = - \operatorname{cotg} 40^0.$

ВЕЖБАЊА

Свести на I квадрант:

1. $\sin 170^0$	**2.** $\cos 165^0$	**3.** $\operatorname{tg} 145^0$
4. $\operatorname{cotg} 135^0$	**5.** $\sin 105^0$	**6.** $\cos 150^0$
7. $\operatorname{tg} 120^0$	**8.** $\operatorname{cotg} 140^0$	**9.** $\sin 210^0$
10. $\cos 240^0$	**11.** $\operatorname{tg} 225^0$	**12.** $\operatorname{cotg} 242^0$
13. $\sin 310^0$	**14.** $\cos 300^0$	**15.** $\operatorname{tg} 290^0$
16. $\operatorname{cotg} 350^0$	**17.** $\sin (2\pi + \frac{\pi}{3})$	**18.** $\cos 2\frac{1}{2}\pi$
19. $\operatorname{tg} 3{,}25\pi$	**20.** $\operatorname{cotg} 7{,}75\pi$	**21.** $\sin 95^0$
22. $\cos 100^0$	**23.** $\operatorname{tg} 110^0$	**24.** $\operatorname{cotg} 101^0$
25. $\sin 2375^0$	**26.** $\cos 765^0$	**27.** $\sin (-150^0)$
28. $\cos (-80^0)$	**29.** $\operatorname{tg} (-100^0)$	**30.** $\operatorname{cotg} (-280^0)$
31. $\sin (-220^0)$	**32.** $\cos (-340^0)$	**33.** $\sin (-30^0)$
34. $\operatorname{tg} (-45^0)$	**35.** $\operatorname{cotg} (-10^0)$	**36.** $\sin (-153^0)$
37. $\cos (-140^0)$	**38.** $\cos (-120^0)$	**39.** $\cos (-133^0)$
	40. $\operatorname{tg} (-144^0)$	

41. — Зна се да је синус једнога угла B из II квадранта 0,35678. Израчунати косинус, тангенс и контангенс угла A из I квадранта, кад је $\sin A = \sin B$.

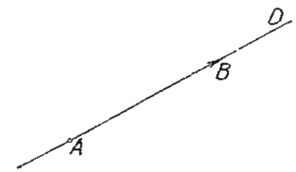
42. — Одредити све лукове од 0^0 до 1000^0 чији синус има вредност $\frac{1}{2}$.

43. — Одредити све лукове од 0^{gr} до 1500^{gr} чији косинус има вредност $\frac{1}{2}$.

44. — Одредити све лукове од 0^0 до 800^0 чија тангента има вредност 1.

III. — ТРИГОНОМЕТРИСКЕ ФУНКЦИЈЕ ЗВИРА ИЛИ РАЗЛИКЕ ДВА ЛУКА

Вектор. — Вектор је део AB неке праве, са почетком у A и са крајњом тачком у B, а са означеним смислом. Тај смисао долази отуда, што се замишља да се једна тачка креће од A ка B. Вектор се црта овако: полазна тачка (A) обележи се само тачком, а долазна тачка (B) стрелицом (сл. 21.).



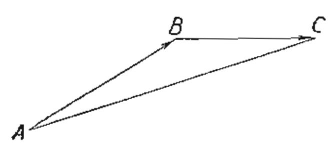
Сл. 21.

Кад се пише један вектор, прво се напише полазна, па долазна тачка и озго се стави срелица од полазне ка долазној тачци. На пр. вектор са слике 21 написаћемо овако: $\overrightarrow{AB}$.

Вектор има ове састојке: 1. — почетак (тачку A); 2. — правац што показује права D која пролази кроз његову полазну и долазну тачку; 3. — смисао. (То је смисао кретања од A ка B) и 4. — величину коју претставља дуж AB. Отуда је $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

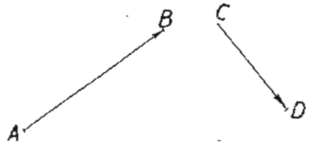
Збир два вектора. — Узмимо два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (сл. 22). Њихов збир (или њихова резултанта) је вектор $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Сл. 22.

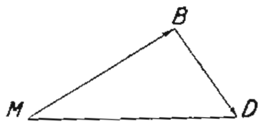
Нека су дата два вектора који немају заједничке тачке. (Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са слике 23). Ми ћемо из произвољне тачке M нацртати два вектора једнака са $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Тада



Сл. 23.

је вектор $\overrightarrow{MD}$ збир два дата вектора (сл. 24.)

Пројекција вектора на осовини. — Пројекција вектора добија се на некој осовини, кад се на њу пројектују крајње тачке тога вектора. За вектор $\overrightarrow{AB}$ (сл. 25) управна пројекција на осовини L јесте отсечак $A'B'$.

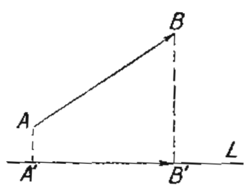


Сл. 24.

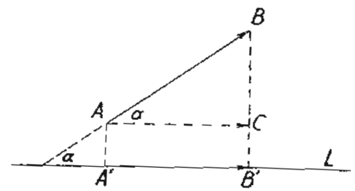
Израчунавање пројекције датога вектора. — Нека правац датог вектора $\overline{AB}$ (сл. 26) заклапа са осовином L оштар угао α. Тада ће његова пројекција бити:

$$\overline{A'B'} = \overline{AC} = \overline{AB} \cos\alpha.$$

Ако правац датога вектора $\overrightarrow{AB}$ заклапа са осовином туп угао α (сл. 27), његова пројекција биће отсечак $\overline{A'B''}$. Тај отсечак



Сл. 25.

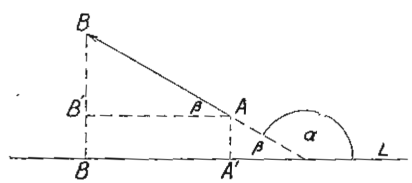


Сл. 26.

је негативан. Како је и косинус тупог угла негативан и овде ће за пројекцију важити малопређашњи образац:

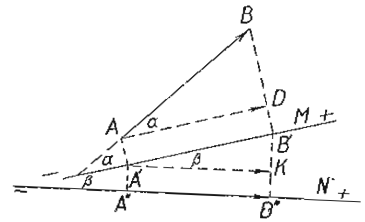
$$\text{пројекција } \overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cos\alpha.$$

Дакле овако: алгебарска вредност векторове пројекције једнака је с производом апсолутне вредности датог вектора и косинуса угла што га правац вектора заклапа с осовином на коју се пројектује.



Сл. 27.

Пројектовање с једне осовине на другу. — Ако пројекцију једнога вектора пројектујемо на нову осовину, нова пројекција равна је производу старе пројекције и косинуса угла што га заклапају осовине својим позитивним смислом. Биће (сл. 28):



Сл. 28.

Пројекција вектора $\overrightarrow{AB}$ на осовини M:

$$\overline{A'B'} = \overline{AD} = \overline{AB} \cos\alpha;$$

пројекција отсечка $\overline{A'B'}$ на осовини N:

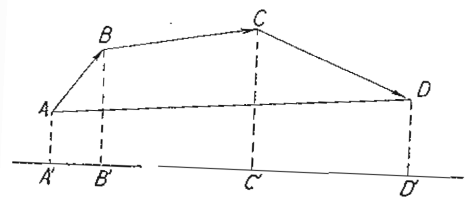
$$\overline{A''B''} = \overline{A'K} = \overline{A'B'} \cos\beta;$$

пројекција вектора $\overrightarrow{AB}$ на осовини N:

$$\overline{A''A''} = \overline{AB} \cos\alpha \cos\beta.$$

Пројекција векторског збира. — Пројекција на некој осовини једног векторског збира равна је збиру пројекција вектора сабирака — на тој осовини.

Нека је $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ (сл. 29).



Сл. 29.

На осовнни $B'C'$ нацртајмо пројекцију вектора $\overrightarrow{AD}$. На тој осовини нацртајмо пројекције и свих сабирака. Са слике се види да је:

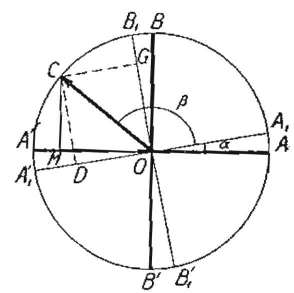
$$\overline{A'D'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'}.$$

Косинус збира. — Нека су дате вредности за $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, где су α и β произвољни луци. Хоћемо да одредимо вредност за $\cos(\alpha + \beta)$.

На тригонометрискоме кругу узмимо два произвољна лука α и β, па нацртајмо $\cos(\alpha + \beta)$. Добићемо са слике 30 да је:

$$\cos(\alpha + \beta) = \overline{OM}$$

Али $\overline{OM}$ је пројекција вектора $\overrightarrow{OC}$ на косинусној осовини $A'A$. Тај вектор $\overrightarrow{OC}$ је збир вектора $\overrightarrow{OG}$ и $\overrightarrow{GC}$:



Сл. 30.

$$(1) \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$$

Ако око O обрнемо за угао α синусну и косинусну осовину, добићемо нову косинусну осовину $A'_1 A_1$ и нову синусну осовину $B'_1 B_1$. На тим осовинама је:

$$\overline{OG} = \sin\beta \text{ и } \overline{GC} = \overline{OD} = \cos\beta$$

Сад ћемо сва три вектора из једначине (1) да пројектујемо на стару косинусну осовину AA'. Пројекција збира вектора $\overrightarrow{OC}$ мора бити једнака са збиром пројекција оба сабирка.

Пројекција збира $\overrightarrow{OC}$ јесте отсечак $\overline{OM} = \cos(\alpha + \beta)$

Пројекција сабирка $\overrightarrow{OG}$ јесте $\sin\beta \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, пошто осовина $B_1 B'_1$ заклапа угао $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ са осовином AA' на коју сад пројектујемо.

Пројекција сабирка $\overrightarrow{GC}$ јесте $\cos\beta \cdot \cos\alpha$, пошто осовина $A'_1 A_1$ заклапа угао α са осовином $A' A$. Отуда је:

$$\text{пројекција } \overrightarrow{OC} = \text{пројј. } \overrightarrow{OG} + \text{пројј. } \overrightarrow{OD} \text{ тј.}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\sin\beta \sin\alpha + \cos\beta \cos\alpha.$$

Тај образац ћемо написати овако:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

Да проверимо овај образац на једноме примеру.

Знамо да је $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$.

$$\cos(30^0 + 60^0) = \cos 30^0 \cos 60^0 - \sin 30^0 \sin 60^0$$

$$\cos 90^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 90^0 = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

$$\cos 90^0 = 0$$

Косинус разлике. — Ако у обрасцу за косинус збира ставимо место β угао $(-\beta)$, имаћемо:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta)$$

Знамо да је $\cos(-\beta) = \cos\beta$ и $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Зато је даље:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha\,(-\sin\beta)$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}$$

Синус збира. — Ако у овоме обрасцу сменимо α са $\frac{\pi}{2} - \alpha$, имаћемо:

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta \text{ тј.}$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \text{ тј.}$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$$

Синус разлике. — Ако у овоме обрасцу сменимо β са $(-\beta)$, имаћемо:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta)$$

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}$$

Тангента збира. — Знамо да је

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)}. \text{ Отуда је:}$$

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

Да бисмо место ових синуса и косинуса добили тангенте, поделићемо и бројилац и именилац са $\cos A \cos B$. Добићемо:

$$\boxed{\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}{1 - \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B}}$$

Тангента разлике. — Ако у овоме обрасцу ставимо угао $(-B)$ место B, имаћемо:

$$\boxed{\operatorname{tg}(A - B) = \frac{\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B}{1 + \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B}}$$

Котангента збира. — Знамо да је

$$\operatorname{cotg}(A + B) = \frac{1}{\operatorname{tg}(A + B)}. \text{ Отуда је:}$$

$$\operatorname{cotg}(A + B) = \frac{1 - \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}. \text{ То је даље:}$$

$$\operatorname{cotg}(A + B) = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B}}{\frac{1}{\operatorname{cotg}A} + \frac{1}{\operatorname{cotg}B}}$$

То је даље:

$$\boxed{\operatorname{cotg}(A + B) = \frac{\operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B - 1}{\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B}}$$

Сад сâм изведи образац за $\operatorname{cotg}(A - B)$.

ВЕЖБАЊА

1. — Израчунај вредност за $\cos 75^0$. $(75 = 45 + 30)$
2. — „ „ „ $\cos 15^0$. $(15 = 45 - 30)$
3. — Кад је $\cos a = -\frac{1}{4}, \sin b = \frac{2}{3}$, израчунати вредност за $\cos(a - b)$. Одредити величину лукова a и b и лука $(a - b)$.
4. — Израчунај $\cos 225^0$ помоћу синуса и косинуса углова од 180^0 и 45^0.
5. — Упрости израз $\cos(\pi - 60^0) - \cos(\pi + 60^0)$.
6. — Доказати идентичност:
$$\cos(a + b)\cos(a - b) \equiv \cos^2 a - \sin^2 b.$$
7. — Доказати ово:
Ако је $a + b = 90^0$, мора бити $\cos^2 a + \cos^2 b = 1$.
8. — Израчунај $\sin 75^0$.
9. — Израчунај $\sin 150^0$ помоћу функција углова 90^0 и 60^0.
10. — Израчунај $\sin 270^0$ помоћу синуса и косинуса углова од 225^0 и 45^0.
11. — Кад је $\sin a = \frac{1}{2}, \cos b = \frac{1}{3}$ израчунати вредност за $\sin(a + b)$.
12. — Зна се да је $a < 90^0$ и $b < 90^0$, а уз то и $\sin a = 0{,}4$ $\sin b = 0{,}3$. Израчунати $\sin(a - b)$.
13. — Упростити израз $\sin(n + 30^0) + \sin(n - 30^0)$.
14. — Наћи x из ове једначине:
$$2\sin(150^0 - x) - 3\sin x = 0.$$
15. — Развити израз
$$\sin(a + b + c).$$
(Стави овако: $\sin[(a + b) + c]$)
16. — Доказати да је
$$\sin a + \sin(a + 120^0) + \sin(a + 240^0) = 0.$$
17. — Доказати ово:
Ако је $a + b = 90^0$, мора бити $\sin^2 a + \sin^2 b = 1$.
18. — Кад је $\operatorname{tg} a = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg} b = \frac{1}{4}$, израчунати вредност за $\operatorname{tg}(a + b)$.
19. — Упростити израз $\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$
20. — Упростити израз $\operatorname{tg}(m + 45^0) - \operatorname{tg}(m - 45^0)$.
21. — Израчунај $\operatorname{tg} 75^0$.
22. — Развити израз $\operatorname{tg}(a + b + c)$.
23. — Кад је $a + b + c = \pi$, мора бити $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c$.

[Стави $a + b = \pi - c$, па нађи $\operatorname{tg}(a + b)$]. Како би гласило ово тврђење, кад би се применило на углове у троуглу?

24. — Израчунај $\operatorname{cotg} 15^0$.
25. — Кад је $\operatorname{tg} a = \frac{2}{3}, \operatorname{tg} b = \frac{3}{5}$, израчунај вредност за $\operatorname{cotg}(a - b)$.
26. — Дато је $\sin a = \frac{2}{3}$, $\sin b = 0{,}8$; израчунај $\sin(a - b)$.
27. — Са истим подацима израчунај $\cos(a - b)$.
28. — „ „ „ „ $\operatorname{tg}(a - b)$.
29. — „ „ „ „ $\operatorname{cotg}(a - b)$.
30. — Доказати идентичност:
$$\sin(a + b)\sin(a - b) \equiv \sin^2 a - \sin^2 b.$$
31. — Доказати идентичност:
$$\operatorname{tg}(45 + a) \equiv \frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a}.$$

IV. — УГЛОВНЕ ФУНКЦИЈЕ УДВОЈЕНИХ УГЛОВА И ПОЛУ-УГЛОВА

Косинус удвојеног угла. — У обрасцу
$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
ставимо $B = A$. Добићемо:
$$\cos(A + A) = \cos 2A = \cos A \cos A - \sin A \sin A$$
$$\boxed{\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A.}$$

Синус удвојеног угла. — Ако у обрасцу
$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
ставимо $B = A$, добићемо:
$$\boxed{\sin 2A = 2\sin A \cos A.}$$

Тангента удвојеног угла. — Изведи сâм. Добићеш овај резултат:
$$\boxed{\operatorname{tg} 2A = \frac{2\operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}.}$$

Котангенс удвојеног угла. — У обрасцу
$$\operatorname{cotg}(A + B) = \frac{\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B - 1}{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B}$$
стави да је $B = A$. Добићеш:
$$\boxed{\operatorname{cotg} 2A = \frac{\operatorname{cotg}^2 A - 1}{2\operatorname{cotg} A}}$$

ВЕЖБАЊА

1. — Изрази $\cos 2A$ као функцију од $\cos A$.
2. — Изрази $\cos 2A$ као функцију од $\sin A$.
3. — Израчунати $\cos 3A$, кад је $\cos A = 0{,}2$.
   $[\cos 3A = \cos(2A + A)]$
4. — Развити израз $\cos 4m$.
5. — Изразити $\sin 2q$ као функцију од $\sin q$.
6. — „ „ „ „ „ $\cos q$.
7. — Развити израз $\sin 3w$.
8. — Израчунати $\sin 3x$, кад је $\operatorname{tg} x = 2$.
9. — Израчунати $\sin 4f$, кад је $\sin f = 0{,}5$.
10. — Провери ову идентичност:
    $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
11. — Упростити израз
    $$\frac{\sin 2k}{1 - \cos 2k}.$$
12. — Проверити идентичност
    $\cos^4 C - \sin^4 C = \cos 2C$.
13. — Проверити идентичност
    $$\frac{\sin 2a}{\cos^2 a} = 2\operatorname{tg} a.$$
14. — Доказати идентичност
    $\cos 4y = 1 - 2\sin^2 2y$
15. — Израчунати $\operatorname{tg} 2b$ као функцију од $\sin b$.
16. — Кад је $\operatorname{tg} x = 3$, колико је $\operatorname{tg} 2x$?
17. — Развити израз $\operatorname{tg} 3a$.
18. — Израчунати $\operatorname{tg} 4c$, кад је $\operatorname{tg} c = 2$.
19. — Израчунати $\operatorname{cotg} 2a$ као функцију од $\operatorname{tg} a$.
20. — Развити израз $\operatorname{cotg} 3a$.
21. — Израчунати $\operatorname{cotg} 4a$, кад је $\operatorname{tg} a = 1$.

КРУЖНЕ ФУНКЦИЈЕ ПОЛУ-УГЛОВА

Сад ћемо решавати овакав задатак:

Израчунати вредности угловних функција полу-углова, кад су дате вредности тих функција целих углова.

Косинус полу-угла. У обрасцу

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

сменимо a са $\frac{a}{2}$. Добићемо:

$$\cos\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \quad \text{тј.}$$

$$(1) \qquad \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}.$$

Али ми знамо да је

$$(2) \qquad 1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}$$

Саберимо стране ових двеју једначина:

$$1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$$

Одатле је

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

Синус полу-угла. — Одузмимо стране једначине (1) од страна једначине (2):

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} \\ \cos a &= \cos^2 a \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \\ \hline 1 - \cos a &= 2\sin^2 \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Одатле је:

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

Тангенс полу-угла. — Тангенс полу-угла биће:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}}. \text{ Отуда је:}$$

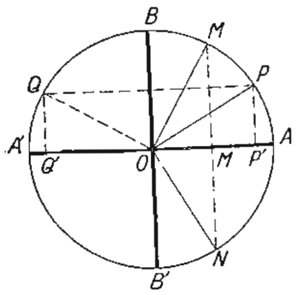
$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

Котангенс полу-угла. — Пошто је

$$\operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}, \text{ биће: } \operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}}$$

Једна кружна функција не одређује лук. — Је ли једнозначно одређен лук a, кад знамо да је $\cos a = \frac{1}{2}$? Тај косинус имају ова два лука: AM и AN (сл. 31):

$$\widehat{AM} = \widehat{AM} \qquad \widehat{AN} = (2\pi - \widehat{AM}).$$



Сл. 31.

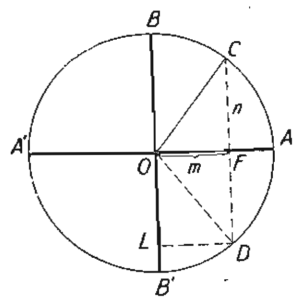
Половина лука AM је лук AP. Половина лука AN је лук $(\pi - \frac{\widehat{AM}}{2})$ тј. лук $(\pi - \widehat{AP})$, тј. лук APQ.

Косинус лука AP је OP'. Косинус лука $APQ = - OQ' = - OP'$.

Дата вредност косинуса не одређује лук. Постоје две тачке на кругу чији луци имају једнаке косинусе. Зато постоје и два полулука, а зато постоје две супротне вредности за косинус полу-угла.

Две кружне функције истог лука одређују лук. — Нека је дато $\cos a = m$ (сл. 32). Тада може бити: $a = \widehat{AC}$ и $a = \widehat{ABA'D}$. Сем њих постоје још и безброј лукова чији је косинус раван m. Они су сви обухваћени овим изразом:

$$m = \cos(2k\pi \pm a).$$



Сл. 32.

Лук a је неодређен.

Али ако нам је дато (сл. 32):

$$\cos a = \frac{3}{5} \text{ и } \sin a = \frac{4}{5}$$

лук а биће потпуно одређен. Одмах ћемо се уверити у то.

Из датих вредности види се ово:

1) Косинус је позитиван. То значи да крајња тачка лука a може бити или тачка C из I квадранта, или тачка D из IV квадранта.

2) Синус је позитиван. $(\frac{4}{5} > 0)$. Према томе, тачка D има да отпадне, пошто је синус лука $ABA'D$ негативан. (Његов је синус $\overrightarrow{OL}$).

Наш лук може бити само лук $a = \widehat{AC}$. Лук је једнозначно одређен.

ВЕЖБАЊА

1. — Израчунати $\cos 45^0$ помоћу $\cos 90^0 = 0$
2. — „ $\cos 22^0 30'$ „ $\cos 45^0$
3. — „ $\cos 11^0 15'$ „ $\cos 22^0 30'$
4. — Израчунати $\sin 15^0$ помоћу $\cos 30^0$.
5. — Израчунати $\sin 22^0 30'$ помоћу $\sin 45^0$.
6. — Кад је $\cos a = 0{,}35467$, израчунати $\sin\frac{a}{2}$ и $\cos\frac{a}{2}$.
7. — Израчунати вредност за $\operatorname{tg} 11^0\ 15'$.
8. — Кад је $\operatorname{tg} a = 2$, израчунати вредност за $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.
9. — Кад је $\cos b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, израчунати $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$.
10. — Израчунати $\operatorname{cotg} 15^0$ помоћу $\cos 30^0$.
11. — Кад је $\sin x = \frac{1}{5}$, израчунати $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ и x.
12. — Зна се да је $\sin f = -0{,}5$ и да f припада трећем квадранту. Израчунати $\sin\frac{f}{2}$, $\cos\frac{f}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{f}{2}$ и $\operatorname{cotg}\frac{f}{2}$. (Колико има решења?)
13. — Проверити идентичност:
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$
14. — Проверити идентичност:
$$\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

V. — ТРАНСФОРМАЦИЈА ТРИГОНОМЕТРИСКИХ ИЗРАЗА ЗА ЛОГАРИТМИСАЊЕ

При рачунању с угловним функцијама обично се служимо логаритмима тих функција. Угловне функције се обично налазе у неком математичком изразу. Пошто се служимо логаритмима тих функција, морамо логаритмисати израз у коме се налазе те функције. Да бисмо те изразе могли одмах логаритмисати, ми их тако подешавамо, да добију облике монома. Како се то ради показаћемо на примерима.

Збир синуса. — Нека је дат израз

$$\sin a + \sin b.$$

Он се не може непосредно логаритмисати. Зато ћемо ми овај израз трансформисати (дати му други облик).

Ставимо

(1) $a = p + q$ и $b = p - q$. Тада је:

$$\sin a + \sin b = \sin(p+q) + \sin(p-q) = \sin p\cos q + \cos p\sin q + \sin p\cos q - \sin p\cos q = 2\sin p\cos q.$$

Из (1) имамо:

$$p = \frac{a+b}{2};\quad q = \frac{a-b}{2}.$$ Зато је:

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

Наш малопређашњи бином добио је сад облик монома. Његов логаритам је сад раван збиру логаритама:

$$\log(\sin a + \sin b) = \log 2 + \log\sin\frac{a+b}{2} + \log\cos\frac{a-b}{2}.$$

Разлика синуса. — Нека је дат израз

$$\sin a - \sin b.$$

Хоћемо да га подесимо за логаритмисање. Ставићемо опет $a = p + q$, $b = p - q$. Тада ће бити:

$$\sin a - \sin b = \sin(p+q) - \sin(p-q) = \sin p\cos q + \cos p\sin q - \sin p\cos q + \cos p\sin q = 2\cos p\sin q = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

Збир косинуса. — Нека је дат израз $\cos a + \cos b$. Хоћемо да га подесимо за логаритмисање. Ставићемо опет $a = p + q$, $b = p - q$. Тада ће бити:

$$\cos a + \cos b = \cos(p+q) + \cos(p-q) = \cos p\cos q - \sin p\sin q + \cos p\cos q + \sin p\sin b = 2\cos p\cos q = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

Разлика косинуса. — Кад употребиш исту смену, добићеш

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$ или:

$$\cos a - \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\left(-\frac{a-b}{2}\right).$$ То је даље:

$$\cos a - \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}$$

Збир тангената. — Нека је дат израз: $\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b$. То је даље:

$$\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\cos a\cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}.$$

Разлика тангената. — На исти начин добијамо:

$$\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}.$$

Збир котангената. — На исти начин добијамо:

$$\mathrm{cotg}a + \mathrm{cotg}b = \frac{\cos(a-b)}{\sin b\cos a}.$$

Разлика котангената. — На исти начин добијамо:

$$\mathrm{cotg}a - \mathrm{cotg}b = \frac{\cos(a+b)}{\sin b\cos a}.$$

Збир синуса и косинуса. — Нека је дат израз

(1) $\sin a + \cos b.$

Хоћемо да га спремимо за логаритмисање. Знамо да је:

$$\cos b = \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right).$$

Зато наш израз (1) можемо овако написати:

$$\sin a + \cos b = \sin a + \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = 2\sin\frac{a + b + \frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{a - b - \frac{\pi}{2}}{2}$$

или:

$$\sin a + \cos b = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a+b}{2}\right)\cos\left[-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b-a}{2}\right).$$

Разлика синуса и косинуса. — На исти начин добијамо:

$$\sin a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2}\right).$$

Збир синуса сва три угла једног троугла. — Нека су a, b и c углови једног троугла. Збир синуса тих углова биће:

$$\sin a + \sin b + \sin c = (\sin a + \sin b) + \sin c =$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin c =$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin[\pi - (a+b)] =$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\pi\cos(a+b) - \cos\pi\sin(a+b) =$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 0.\cos(a+b) + 1.\sin(a+b) =$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin(a+b) =$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\left(2\,.\,\frac{a+b}{2}\right) =$$
$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right) =$$
$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\,.\,2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} =$$
$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right)\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} =$$
$$= 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\,.$$

ВЕЖБАЊА

Дате изразе подесити за логаритмисање:

1. $\sin 60^0 + \sin 30^0$ 2. $\sin 45^0 + \sin 60^0$
3. $\sin 60^0 - \sin 45^0$ 4. $\sin 60^0 - \sin 30^0$
5. $\sin 78^0 + \sin 42^0$ 6. $\sin 120^0 - \sin 60^0$
7. $\cos 62^0 + \cos 58^0$ 8. $\cos 75^0 - \cos 15^0$
9. $\cos 45^0 + \cos 30^0$ 10. $\cos 70^0 - \cos 10^0$
11. $\mathrm{tg}\, 80^0 + \mathrm{tg}\, 10^0$ 12. $\mathrm{tg}\, 100^0 - \mathrm{tg}\, 10^0$
13. $\mathrm{cotg}\, 60^0 + \mathrm{cotg}\, 30^0$ 14. $\mathrm{cotg}\, 110^0 - \mathrm{cotg}\, 20^0$
15. $\sin 50^0 + \cos 40^0$ 16. $\sin 20^0 + \cos 40^0$
17. $\sin 75^0 - \cos 15^0$ 18. $\sin(30^0 + x) + \sin(30^0 - x)$
19. $\cos(60^0 - x) + \cos(60^0 + x)$ 20. $1 + \cos a$ 21. $1 - \cos a$
22. $1 + \sin a$ 23. $1 - \sin a$ 24. $\sin 2a + \sin 3a + \sin 4a$
25. $\mathrm{tg}\, 30^0 + \mathrm{tg}\, 40^0 + \mathrm{tg}\, 50^0$ 26. $1 + \cos x + \sin x$
27. $\cos a + \cos(120^0 + a) + \cos(240^0 + a)$ 28. $\dfrac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a}$
29. $\dfrac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$ 30. $1 + \mathrm{tg}^2 a$ 31. $\sin^2 a - \cos^2 b$
32. $1 - \sin^2 a - \sin^2 b$ 33. $1 + \mathrm{tg}\, a$ 34. $\dfrac{1 - \mathrm{tg}^2 a}{1 + \mathrm{tg}^2 a}$
35. $1 - \sin^2 a$ 36. $1 - \cos^2 a$

37. — Израчунати помоћу логаритма угао x дат овим изразом:
$$\sin x = \sin 18^0\,20'\,43'' + \sin 48^0\,25'\,31''$$

38. — Исто за израз:
$$\mathrm{tg}\, x = \cos 23^0\,18'\,52'' + \cos 43^0\,18'\,20''$$

39. — Исто за x у овоме изразу:
$$\mathrm{cotg}\, x = \sin 35^0\,18'\,19'' + \cos 43^0\,23'\,11''$$

40. — Исто за z из овога израза:
$$5\cos z = \mathrm{tg}\, 18^0\,19'\,42'' + \mathrm{tg}\, 23^0\,18'\,27''$$

41. — Исто за y из овога израза:
$$\cos^2 y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot \quad (\text{Стави } \sqrt{5} = \mathrm{tg}\, a \text{ и } \sqrt{3} = \mathrm{tg}\, b)$$

42. — Исто за x из овога израза:
$$\mathrm{tg}^3 x = \frac{1 - \mathrm{tg}\, 17^0\,18'}{1 + \mathrm{tg}\, 53^0}\cdot \quad (\text{Стави } 1 = \mathrm{tg}\, 45^0)$$

43 — Израчунати помоћу логаритама x дато овим изразом:
$$\mathrm{cotg}^2 x = \frac{1 - \cos 40^0\,25'}{1 + \sin 50^0\,42'}$$

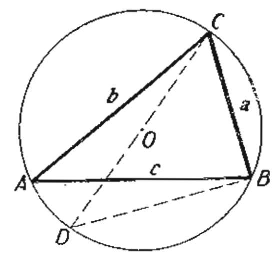
(Знаш да је $1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}\cdot$ Може ли се добити косинус полу-угла у имениоцу?).

VI. — РЕШАВАЊЕ КОСОУГЛОГ ТРОУГЛА

Решити троугао значи из датих комада који га одређују израчунати његових 6 елемената (3 стране и 3 угла).

Да бисмо могли израчунати тражене комаде помоћу датих морамо имати једначине у којима су везани углови са странама.

Веза помоћу синуса. — Нека је дат троугао ABC (сл. 33). Опишимо круг око њега. Из темена C повуцимо пречник CD. Тачку D спојимо са теменом B. Тада је:

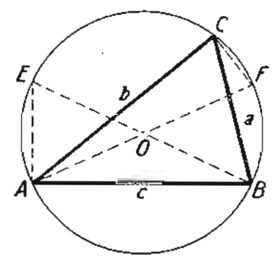


Сл. 33.

$\sphericalangle DBC = 90^0$ (угао у полукругу)
$\sphericalangle BDC = \sphericalangle A$ (периферски углови над луком BC).

Из троугла BCD имамо:

$$\frac{a}{2R} = \sin D = \sin A, \text{ тј. } \frac{a}{\sin A} = 2R \qquad (1)$$



Сл. 34.

У истоме троуглу ABC повуцимо пречник из темена B (сл. 34). Тада је:

$\sphericalangle BAE = 90^0$ и $\sphericalangle AEB = \sphericalangle C$.

Из троугла ABE имамо:

$$\frac{c}{2R} = \sin E = \sin C. \quad \text{Отуда је:}$$

$$(2) \qquad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Ако сад из темена A повучемо пречник и спојимо тачку F са C (сл. 34), имаћемо из троугла ACF:

$$\frac{b}{AF} = \sin F, = \sin B \text{ тј. } \frac{b}{2R} = \sin B. \text{ Одатле је:}$$

$$(3) \quad \frac{b}{\sin B} = 2R$$

Кад спојимо (1), (2) и (3), имамо:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

Пример I — Решити троугао ABC, кад је $A = 42^0\,34'$, $B = 70^0 18'$ *и* $AB = c = 18$.

Дати елементи потпуно одређују троугао.

Хоћемо најпре да одредимо страну a.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$. Одатле је даље: $a = c\,\frac{\sin A}{\sin C}$

$$C = 180^0 - 112^0\,52' = 67^0\,8'$$

$$a = 18 \cdot \frac{\sin 42^0\,34'}{\sin 67^0\,8'}$$

$\log a = \log 18 + \operatorname{logsin} 42^0\,34' + \operatorname{cologsin} 67^0\,8'$

$\log a = 1{,}25527 + \bar{1}{,}83023 + 0{,}03555$

$\log a = 1{,}12105$

$a = N\overline{1{,}12105}$

$a = 13{,}21455$

Сад ћемо израчунати страну b.

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad b = c\frac{\sin B}{\sin C}$

$\log b = \log c + \operatorname{logsin} B + \operatorname{cologsin} C$

$\log b = \log 18 + \operatorname{logsin} 70^0\,18' + \operatorname{cologsin} 67^0\,8'$

$\log b = 1{,}25527 + \bar{1}{,}97381 + 0{,}03555$

$\log b = 1{,}26463$

$b = N\overline{1{,}26463}$

$b = 18{,}39208$

Види се ово:

$a < c < b$

Тако и мора да буде, јер је:

$A < C < B$

Пример II — Израчунати површину круга описаног око троугла ABC, кад је $\measuredangle A = 37^0\,23'$, $a = 204$.

Знамо да је

$2R = \frac{a}{\sin A}$. Одатле је, у овоме задатку:

$R = \frac{204}{2\sin 37^0\,23'}$, тј.

$R = \frac{102}{\sin 37^0\,23'}$.

Површина круга је $R^2\pi$. Зато ће тражена површина бити:

$p = R^2\pi$, тј.

$p = \frac{102^2}{\sin^2 37^0\,23'} \cdot 3{,}14159$

$\log p = 2\log 102 + \log 3{,}14159 + 2 \operatorname{cologsin} 37^0\,23'$

$\log p = 2 \cdot 2{,}00860 + 0{,}49715 + 2 \cdot 0{,}21671$

$\log p = 4{,}01720 + 0{,}49715 + 0{,}43342$

$\log p = 4{,}94777$

$p = N\overline{4{,}94777}$

$p = 88668$

Пример III. — Решити троугао ABC, кад је $B = 72^0 54' 15''$, $a = 137$, $b = 205$.

Наћи ћемо најпре још један угао. Који можемо одмах наћи? Па онај угао, према коме знамо страну. То је овде угао A.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\sin A = a\,\frac{\sin B}{b}$

$\log \sin A = \log 137 + \log \sin 72^0\,54'\,15'' + \operatorname{colog} 205.$

$\log \sin A = 2{,}13672 + \bar{1}{,}98037 + \bar{3}{,}68825$

$\log \sin A = \bar{1}{,}80534$

$A = 39^0\,42'$

Угао C биће: $C = 180^0 - (39^0\,42' + 72^0\,54'\,15'')$

$C = 67^0\,23'\,45''$

Страну c израчунаћемо овако:

$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$

$c = b\,\frac{\sin C}{\sin B}$

$\log c = \log 205 + \log \sin 67^0\,23'\,45'' + \operatorname{colog} \sin 72^0\,54'\,15''$

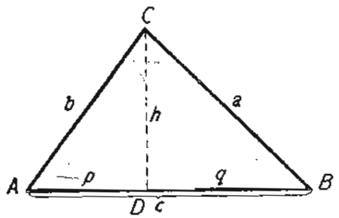
$\log c = 2{,}31175 + \bar{1}{,}96529 + 0{,}01963$

$\log c = 2{,}29667$

$c = 198$

Веза помоћу косинуса. Сад ћемо показати једну везу која помоћу косинуса спаја троуглове стране.

Узмимо троугао ABC (сл. 35). Висина h дели основицу c на 2 отсечка: p и q. Из троугла ADC имамо:



Сл. 35.

(1) $h^2 = b^2 - p^2$

Из троугла BDC имамо:

(2) $h^2 = a^2 - q^2$

Кад спојимо (1) и (2), добијамо:

(3) $b^2 - p^2 = a^2 - q^2$

Пошто је $p = (c - q)$, биће:

$$b^2 - (c - q)^2 = a^2 - q^2$$
$$b^2 - c^2 + 2cq - q^2 = a^2 - q^2$$
$$b^2 - c^2 + 2cq = a^2$$

(4) $b^2 = a^2 + c^2 - 2cq$

Из троугла BDC имамо:

$\frac{q}{a} = \cos B$, тј. $q = a\cos B$. Сменом у (4) добијамо:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

Исто тако можемо лако добити и ове једначине:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}}$$

Ове једначине можемо овако изразити речима:

Квадрат једне троуглове стране једнак је збиру квадрата других двеју страна умањеном за двоструки производ тих двеју страна и косинуса њима захваћеног угла.

Пример I. — Решити троугао DEF, кад је $\measuredangle D = 43^0\,18'$, $f = 12m$, $e = 14m$.

Најпре ћемо израчунати страну d.

$$d^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos 43^0\,18'.$$
$$d^2 = 14^2 + 12^2 - 2\,.\,14\,.\,12\,.\,\cos 43^0\,18'$$
$$d^2 = 196 + 144 - 336\cos 43^0\,18'$$

Ставићемо:

$x = 336\cos 43^0\,18'$. Даље ће бити:

$d^2 = 340 - x.$ $\quad \log x = \log 336 + \log\cos 43^0 18'$

$$\log x = 2{,}52634 + \bar{1}{,}86200$$
$$\log x = 2{,}38834$$
$$x = 244{,}53333$$

$$d^2 = 340 - 244{,}53333$$
$$d^2 = 95{,}46667$$
$$2\log d = \log 95{,}46667$$
$$2\log d = 1{,}97985$$
$$\log d = 0{,}98993$$
$$d = 9{,}7708$$
$$d = 9{,}771\ m.$$

Углове бисмо овако израчунали:

$$\frac{f}{\sin F} = \frac{d}{\sin D}$$
$$\sin F = f\,\frac{\sin D}{d}$$

$\log\sin F = \log 12 + \log\sin 43^0\,18' + \operatorname{colog} 9{,}7708$ итд.

Веза помоћу тангенте. — Знамо да постоји овај однос између троуглових елемената:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Тај однос можемо даље овако мењати:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$$
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$
$$\frac{a+b}{a-b} = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{A-B}{2}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}}$$

Исто се тако добија:

$$\boxed{\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}}$$

$$\boxed{\frac{a+c}{a-c}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-C}{2}}}$$

Пример. — *Решити троугао ABC, кад је* $\measuredangle A = 67^0\,38'\,20''$, $b = 39m$, $c = 28m$.

Најпре ћемо одредити углове.

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}}$$

$$B + C = 180^0 - 67^0\,38'\,20''$$

(1) $\quad B + C = 112^0\,21'\,40''$

$$\frac{B+C}{2} = 56^0\,10'\,50''$$

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}} = \frac{b+c}{b-c}$$

$$\frac{\mathbf{tg\,56^0 10' 50''}}{\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}} = \frac{67}{11}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{11\ \operatorname{tg} 56^0 10' 50''}{67}$$

$$\log\ \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \log 11 + \log \operatorname{tg} 56^0 10' 50'' + \operatorname{colog} 67$$

$$\log\ \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = 1{,}04139 + 0{,}17397 + \overline{2}{,}17393$$

$$\log\ \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \overline{1}{,}38929$$

$$\frac{B-C}{2} = 13^0 46' 12{,}1''$$

(2) $\quad B - C = 27^0 32' 24{,}2''$

Кад саберемо (1) и (2) имамо:

$2B = 139^0 54' 4{,}2''$. Одатле је:

$B = 69^0 57' 2{,}1''$

Кад одузмемо (2) од (1), добијамо:

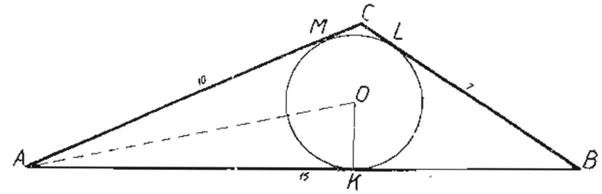
$2C = 84^0 49' 15{,}8''$

$C = 42^0 24' 37{,}9''$

Да извршимо пробу.

$$\begin{array}{rl} A = & 67^0 38' 20'' \\ B = & 69^0 57'\ 2{,}1'' \\ C = & 42^0 24' 37{,}9'' \\ \hline A + B + C = & 178^0 119' 60{,}0'' \\ A + B + C = & 178^0 120' \\ A+B+C = & 180^0 \end{array}$$

Израчунавање угла кад су дате стране. — Нека су стране ABC дужине $a = 7\ cm$, $b = 10\ cm$, $c = 15\ cm$. Решити тај троугао.



Сл. 36

Нацртајмо тај троугао (сл. 36). Упишимо круг у њему. Нека су додирне тачке K, L и M. Збир страна обележимо са $2s$:

$$a + b + c = 2s$$

Знамо да је тада: $AK = s - a$. Зато ће бити:

(1) $\quad \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{s-a}$

Али ми знамо да је троуглова површина:

(2) $\quad p = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \quad$ и $\quad p = rs \quad$ (3)

Из (3) је $r = \dfrac{p}{s}$, тј.

(4) $\quad r = \dfrac{\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{s}$. То је даље:

$$r = \sqrt{\frac{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s^2}}$$

(5) $\quad r = \sqrt{\dfrac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$

Кад ову вредност (5) унесемо у (1), добијамо:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{\dfrac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}}{(s-a)}$$

Кад се именилац унесе под корен и упрости двојни разломак под кореном, добије се ова вредност за тангенс полу-угла A:

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}}$$

На исти се начин добијају и ови обрасци:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned}}$$

У овим обрасцима узимамо само позитиван знак, пошто су A, B и C углови у троуглу.

Пример. — Решити троугао ABC, као да је $a = 10$ *cm*, $b = 18$ *cm*, $c = 12$ *cm*.

Да нађемо најпре угао A.

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Споредни радови:

$$2s = 10 + 18 + 12$$
$$2s = 40$$
$$s = 20$$
$$s - a = 20 - 10 = 10$$
$$s - b = 20 - 18 = 2$$
$$s - c = 20 - 12 = 8$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 8}{20 \,.\, 10}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{8}{100}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{0{,}08}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \log 0{,}08$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\bar{2}{,}90309}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \bar{1}{,}45154$$

$$\frac{A}{2} = 15^{0}47'35''$$

$$\boxed{A = 31^{0}35'10''}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{10 \,.\, 8}{20 \,.\, 2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \log 2$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{0{,}30103}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 0{,}15052. \text{ Одатле је: } \boxed{B = 109^{0}28'18''}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{10 \,.\, 2}{20 \,.\, 8}}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \log \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \log 0{,}125$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\bar{1}{,}09691}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \bar{1}{,}54846$$

$$\boxed{C = 38^{0}\ 56'\ 32''}$$

Проба. — Знамо да мора бити: $A + B + C = 180^{0}$.

31^{0}	$35'$	$10''$
109^{0}	$28'$	$18''$
38^{0}	$56'$	$32''$
178^{0}	$119'$	$60''$
178^{0}	$120'$	$0''$
180^{0}	$0'$	$0''$.

$A + B + C = 180^{0}$.

Још једна проба. — Дате стране иду овим редом:

$$a < c < b$$

Израчунати углови иду истим редом:

$$A < C < B$$

$(31^{0}\ 35'\ 10'' < 38^{0}\ 56'\ 32'' < 109^{0}\ 28'\ 18'')$.

ВЕЖБАЊА

1. — Решити троугао кад је $a = 23$ cm, $B = 67^{0}43'$, $C = 32^{0}34'$.
2. — Исто за $b = 78$ cm, $A = 49^{0}22'18''$, $B = 78^{0}20'11''$.
3. — „ „ $c = 123$ m, $A = 97^{0}44'31''$, $B = 48^{0}43'20''$.
4. — „ „ $a = 432$ m, $b = 398$ m, $A = 56^{0}49'26''$.
5. — „ „ $b = 77$ m, $c = 60$ m, $B = 100^{0}20'50''$.
6. — „ „ $a = 234$ m, $c = 188$ m, $A = 72^{0}23'42''$.

7. — Исто за $a = 23$ $b = 87$, $B = 42^0 25'47''$.
8. — „ „ $a = 567$ m, $c = 749$ m, $C = 76^0 54'29''$.
9. — „ „ $A = 22^0 32'6''$, $B = 67^0 32'18''$, $b = 654$ m.
10. — „ „ $B = 87^0 42'39''$, $C = 28^0 30'40''$, $c = 764$ m.
11. — „ „ $A = 23^0 42'8''$, $C = 49^0 56'20''$, $a = 1256{,}40$ m.
12. — „ „ $B = 62^0 22'34''$, $C = 76^0 21'12''$, $c = 432$ m.

13. — У троуглу ABC је страна $BC = 10$ *cm.* Решити троугао, кад је $B = 65^0 18'20''$, а страна AB је половина стране AC.

14. — У једноме троуглу постоји ова сразмера за стране a и b: $a : b = 8 : 5$. Површина је $p = 100$ cm², а угао $A = 2B$. Решити тај троугао.

15. — Две стране једног троугла чине сразмеру са $2 : 3$. Њихови наспрамни углови чине сразмеру са $1 : 2$. Трећа страна је 47 cm. Решити тај троугао.

16. — Решити троугао кад је $h_c = 10$ cm, $b : a = 3 : 4$ и $A + B = 100^0 10'10''$.

17. — Исто за $a = 47$ cm, $b = 48$ cm, $C = 47^0 25'46''$.
18. — „ „ $a = 74$ cm, $b = 47$ cm, $C = 105^0 54'40''$.
19. — „ „ $b = 1056$ m, $c = 946$ m, $A = 142^0 18'24''$.
20. — „ „ $b = 175\frac{3}{7}$ m, $c = 196\frac{4}{9}$ m, $A = 69^0 18'20''$.
21. — „ „ $a = 24785$, $c = 15762$, $B = 100^0 23'40''$.
22. — „ „ $a = 7{,}354$ m, $b = 6{,}654$ m, $C = 72^0 65'42''$.

23. — Решити троугао кад је однос двеју страна $a : b = 2 : 5$, њихов збир $a + b = 105$ cm, а њима захваћени угао $C = 34^0 42'30''$.

24. — Решити троугао кад је дато:
$a : b = 7 : 9$, $C = 67^0 18'19''$ и површина $p = 407{,}20$ cm².

25. — Решити троугао кад је $A - B = 10^0 20'17''$, $a - b = 17$ cm, $c = 109$ cm.

26. — Решити троугао кад је $A = 40^0\ 18'\ 20''$, $B - C = 15^0\ 18'\ 36''$, а $h_a = 70$ cm.

27. — Решити троугао кад је $a + b = 200$ cm, $h_a - h_b = 17$ cm и $C = 64^0 18'30''$.

28. — У коме су односу површина уписаног и површина описаног круга код троугла, кад је $a = 50$ cm, $b = 21$ cm, $C = 76^0 23'50''$?

29. — Израчунати дужину дирке повучене из темена A на уписани круг у троуглу, кад је $A = 25^0 34'23''$, $B - C = 20^0 12'32''$ и $a = 25$ cm.

30. — Израчунати површину троугла, кад је $a = 18$ cm, $b = 24$ cm, $C = 68^0 32'54''$.

31. — Знамо да је у троуглу $a = 2R\ \sin A$, $b = 2R\ \sin B$, $c = 2R \sin C$. Изрази помоћу синуса троуглових углова вредност овога разломка:

$$\frac{a+b}{c}.$$

[Води рачуна о овоме:
1) увек скрати разломак кад год се може;
2) $\sin A + \sin B = 2 \sin \ldots.$;
3) $C = 180^0 - (A + B)$;
4) $\sin (A + B) = \sin (2 \cdot \frac{A+B}{2})$;
5) $\frac{A+B}{2} = \ldots\ldots.$

Добићеш овај резултат:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\Bigg].$$

32. — На исти начин изрази и $\frac{a-b}{c}$. Добићеш овај резултат:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

Једначине које добијаш као резултат у вежбањима 31 и 32 зову се *Молвајдове једначине.* Чему би оне могле послужити? Сад знаш неколико образаца који ти омогућавају да решиш троугао, кад су ти дате две стране и захваћени угао. Који би ти најрадије употребио? Зашто?

33. — Помоћу Молвајдових једначина одреди углове у овоме троуглу:

$$a = 5cm,\ b = 6cm,\ C = 54^0\ 32'\ 20''.$$

34. — Исто за троугао $a = 43cm$, $b = 50cm$, $C = 76^0\ 55'\ 20''$.
35. — „ „ „ $b = 107cm$, $c = 289cm$, $A = 43^0\ 21'\ 10''$.
36. — „ „ „ $b = 1{,}003m$, $c = 0{,}997m$, $A = 42^0\ 20'\ 10''$.

37. — Решити троугао кад је $a = 9cm$, $b = 6cm$, $c = 5cm$.
38. — „ „ „ $a = 18cm$, $b = 27cm$, $c = 12cm$.
39. — „ „ „ $a = 2\sqrt{3}\,cm$, $b = 5cm$, $c = 3cm$.
40. — „ „ „ $a = 12\sqrt{3}\,cm$, $b = 4\sqrt{7}cm$. $c = 15cm$.

41. — Решити троугао кад је $a = 2(4-\sqrt{2})$, $b = 3(3+\sqrt{2})$, $c = 12cm$.

42. — Решити троугао кад је $a = 0,437\ m$, $b = 1,567\ m$, $c = 1,276\ m$.

43. — Решити троугао чије стране стоје у овој продуженој сразмери:

$$a : b : c = 5 : 6 : 7.$$

44. — Основица равнокраког троугла је 20 cm, а крак 15cm. Основица је издељена на 5 једнаких делова и деоне су тачке спојене с теменом. Израчунати свих 5 углова на темену. (Цртеж).

45. — Две силе, једна од 60 кг, друга од 40 кг, дејствују на једну тачку под углом од $43^0\ 18'\ 12''$. Колика је резултанта? Колики угао заклапа са сваком силом посебице?

46. — Дата је површина p једнога троугла и два његова угла A и B. Решити тај троугао.

47. — Површина једног троугла је $p = 40\sqrt{2}\ cm^2$, а два угла су му: $A = 31^0\ 35'\ 10''$ и $C = 38^0\ 56'\ 32''$. Колике су стране тога троугла?

48. — Колики је обим троуглов кад је једна страна $b = 39cm$, а углови $A = 67^0\ 38'\ 20''$ и $C = 42^0\ 24'\ 37,9''$.

49. — Површина троугла је $p = 79834\ m^2$, а стране су $b = 698\ m$, $c = 824\ m$. Колики су углови тога троугла?

50. — Колике су стране једнога троугла код кога је обим $2s = 35,771\ m$, једна страна $a = 9,662\ m$, а њен наспрамни угао $A = 43^0\ 18'$?.

51. — Израчунати све три висине троуглове, кад је једна страна $a = 25\ cm$, а два угла $B = 18^0\ 25'\ 40''$ и $C = 50^0\ 25'\ 40''$.

52. — У троуглу је $h_a = 19\ cm$, $C = 43^0\ 25'$, $B = 58^0\ 17'$. Колике су му стране?

53. — Испитај је ли тачан овај образац за израчунавање троуглове површине помоћу полупречника описаног круга и синуса свих углова:

$$p = 2R^2 \sin A\ \sin B\ \sin C.$$

54. — Израчунај стране и површину троугла у коме су углови $A = 42^0\ 28'$, $C = 63^0\ 24'$, а полупречник описаног круга $R = 12cm$.

55. — Израчунај површину троугла у коме су углови $A = 30^0\ 28'$, $B = 45^0\ 32'$, а полупречник описаног круга $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\ m$.

56. — Реши троугао кад је $p = 74856\ m^2$., $A = 38^0\ 47'\ 23''$, $B = 76^0\ 25'\ 12''$.

57. — Стране једног троугла су $a = 17589m$, $b = 12496m$, $c = 14999m$. Колика је површина уписаног круга?

58. — Провери је ли тачан овај образац за израчунавање полупречника уписаног круга у троуглу:

$$r = s\ \mathrm{tg}\frac{A}{2}\ \mathrm{tg}\frac{B}{2}\ \mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

59. — Реши троугао кад је $A = 18^0\ 23'\ 14''$, $C = 100^0\ 20'31''$ $s = 12m$.

60. — Може ли се решити троугао, кад су дати r, R и A?

61. — Може ли се решити троугао, кад су дати r, R и c?

VII. — ПРИМЕНА ТРИГОНОМЕТРИЈЕ

ПРИМЕНА НА ПЛАНИМЕТРИЈУ

Кад нам је дато да израчунамо углове или дужине на некој слици, трудићемо се да ту слику раставимо на троугле. Како се то ради, показаћемо на примерима.

ЧЕТВОРОУГАО

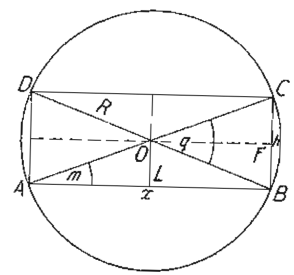
Правоугаоник. — Узмимо правоугаоник $ABCD$ (сл. 37). Ако повучемо дијагоналу, добијамо 2 подударна правоугла троугла. Нека је дата висина h и угао m. Из троугла ABC имамо:

$$\frac{h}{x} = tgm. \qquad \text{Одатле је:}$$

$$x = \frac{h}{tgm}.$$

$$\log x = \log h + \mathrm{colog}\ \mathrm{tg}\ m.$$

Нека су сад дати: основица AB и угао између дијагонала (q). q, можемо израчунати h и m:



Сл. 37.

$$q = 2m \qquad m = \frac{q}{2}$$

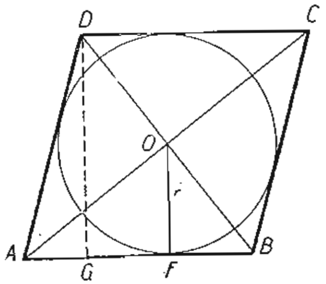
$$h = AB\ .\ \mathrm{tg}\ \frac{q}{2}\ \text{итд.}$$

У правоугаонику имамо ове троуглове у којима можемо вршити израчунавања:

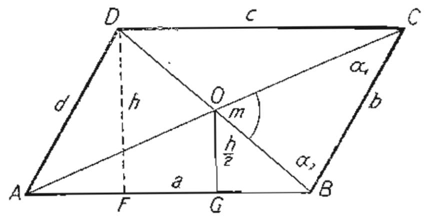
ABC, ABO, BOC, и OLB.

Ромб. — У ромбу (сл. 38) имамо ове троуглове из којих можемо вршити израчунавања:

ABC, AOB, AOF и *AGD.*



Сл. 38.



Сл. 39.

Знамо да дијагонале стоје управно једна на другој и полове углове у које улазе.

Ромбоид. — У ромбоиду (сл. 39) имамо ове троуглове:

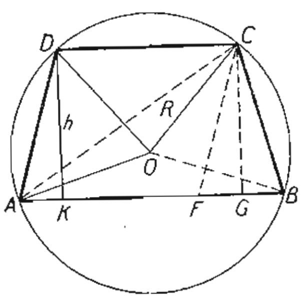
ABC, ABO, BOC, ADF и *AOG.*

Знамо да дијагонале **не** полове углове у које улазе.

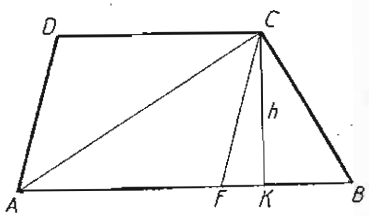
Равнокраки трапез. — У равнокраком трапезу имамо ове троуглове (сл. 40): *BCF* (страна $CF \parallel AD$), $CGB \cong GCF \cong AKD$, *OCD, OAD, AOB, ABC, BCD* и *ACG.*

$\sphericalangle A = \sphericalangle B$, $\sphericalangle C = \sphericalangle D$, $\sphericalangle A + \sphericalangle D = \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^0$

и $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D.$



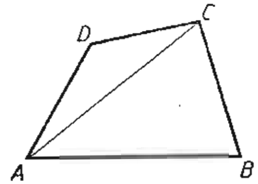
Сл. 40.



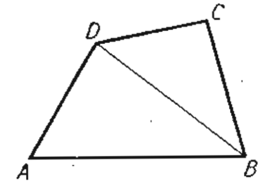
Сл. 41.

Разнокраки трапез. — У њему (сл. 41) имамо ове троуглове:

FBC, KBC, FKC, ABC и *BCD.*



Сл. 42.

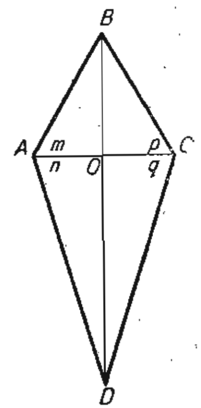


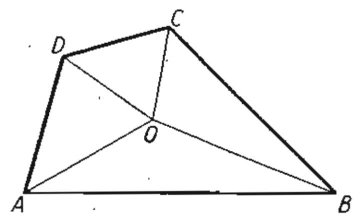
Сл. 43.

Трапезоид. — У њему (сл. 42) имамо ове троуглове: *ABC* и *ACD* или ове (сл. 43): *ABD* и *BCD*, или ова четири (сл. 44): *ABO, BOC, COD, DOA* (где је *O* произвољна унутрашња тачка трапезоидова).

Делтоид. — У њему (сл. 45) имамо ове троуглове: *ABD, ACB, ACD, AOB, DOA.*

Знамо да је $\sphericalangle AOD = \sphericalangle COB = \sphericalangle COD = \sphericalangle BOA = 90^0$. Знамо да је





Сл. 44.

Сл. 45.

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC$. Знамо да је: $\sphericalangle m \neq \sphericalangle n$ и $\sphericalangle p \neq \sphericalangle q$.

ВЕЖБАЊА

1. — Колике су стране једног правоугаоника чија је дијагонала $d_1 = 8\ cm$, а угао између дијагонала $q = 42^0\ 18'\ 23''$?

2. — Под којим се углом секу дијагонале у правоугаонику чије су стране $a = 12\ cm$ и $b = 5\ cm$.?

3. — Колика је површина круга описаног око правоугаоника чија је већа страна $a = 112\ mm$, а угао између дијагонала $115^0\ 16'$?

4. — Колике су дијагонале у правоугаонику чија је висина $h = 107,42\ m$, а угао $q = 47^0\ 22'\ 14''$ (сл. 37)?

5. — Израчунати површину уписаног круга у ромбу чије су дијагонале $14\frac{3}{7}\ m$ и $18\frac{4}{9}\ m$.?

6. — Израчунати површину ромба (сл. 38) у коме је угао $BAC = 30^0$, а мања дијагонала има $12\frac{14}{17}$ m.

7. — У коме су односу површина ромба и површина круга уписаног у њему, кад је један ромбов угао $A = 72^0\ 18'\ 34''$, а већа дијагонала $AC = 17{,}004$ m?

8. — Колике су стране једног ромба чији је полупречник уписаног круга 17 cm, а један угао $120^0\ 52'\ 34''$?

9. — Израчунати углове једног ромба чија је страна 12 cm, а полупречник уписаног круга 5 cm.

10. — У паралелограму су две суседне стране $a = 18$cm, $b = 25$cm, а угао који оне заклапају износи $105^0\ 18'\ 32''$ Колика је површина? Колике су дијагонале?

11. — Израчунати углове у паралелограму, кад су дијагонале $d_1 = 28$cm, $d_2 = 35$cm, а једна страна 20cm.

(Колико има решења? Где може да лежи дата страна?)

12. — Дијагонале једнога паралелограма јесу $d_1 = 38$cm, $d_2 = 14$cm. Оне се секу под углом од $35^0\ 3'\ 54''$. Колика је површина тога паралелограма?

13. — Страна једног паралелограма је $AB = 117$m, (сл. 39) дијагонала је $AC = 217$m, а угао према тој дијагонали $B = 110^0\ 20'\ 14''$. Колика је површина тога паралелограма?

14. — Колики су углови једнога паралелограма (сл. 39), кад су му стране $AB = 214$m, $BC = 117$m, а дијагонале се секу под углом $BOC = 53^0\ 25'\ 40''$?

15. — Дата је страна једног паралелограма $AB = 25$cm (сл. 39) и један његов угао $A = 57^0\ 22'\ 13''$. Кад се дијагонале секу под углом $BOC = 32^0\ 18'\ 17''$, колике су стране и површина тога паралелограма?

16. — Колика је површина једнога паралелограма (сл. 39) чија је дијагонала $BD = 300$m, а углови $A = 62^0\ 18'\ 20''$ и $BOC = 70^0\ 20'\ 40''$?

17. — У паралелограму са слике 39 дати су углови $BAC = 32^0\ 18'\ 14''$ и $CAD = 50^0\ 42'\ 10''$ и висина $DF = h = 26$ cm. Колике су стране и површина?

18. — Сила од 56 kg има да се растави на две компоненте чији правци треба да заклапају с правцем дате силе углове од $10^0\ 8'\ 6''$ и $42^0\ 2'\ 54''$. Колике су те компоненте?

19. — Две силе, једна од 800 kg, друга од 700 kg, дејствују под извесним углом на тачку P. Те две силе треба да буду замењене у тачци P силом од 1000 kg Под којим углом према правцу прве силе треба поставити ту нову силу?

20. — О једно разапето уже обешено је у његовој средини тело тешко 30 kg Колики терет има да савлађује сваки крак тога ужета посебице, кад краци тога ужета под оптерећењем граде угао од 110^0, а један крак ужета заклапа с правцем обешеног тела угао од 70^0?

21. — У свакоме паралелограму чије су стране a, b, c и d, а дијагонале d_1 и d_2 постоји овај однос:

$$2\,(a^2 + b^2) = d^2_1 + d^2_2$$

[На слици 39 нека је $AC = d_1$, $BD = d_2$. Тада је из троугла BOC:

$$b^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2 - 2\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\cos m.$$

Из троугла: AOB биће:

$$a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2 + 2\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\cos m. \text{ итд.}]$$

22. — Нека у троуглу ABC дуж CD спаја средину D стране AB са супротним теменом C. Обележимо $CD = m_c$. Тада је

$$(2m_c)^2 = 2\,(a^2 + b^2) - c^2.$$

[Нацртани троугао ABC доцртај до паралелограма тако, да CD буде пола његове дијагонале].

23. — У равнокраком трапезу (сл. 40) дате су три стране: $AB = 70$ cm, $BC = 20$ cm, $CD = 60$ cm. Израчунати му углове и површину описаног круга.

24. — Исти задатак за $AB = 17\frac{3}{7}$ cm, $BC = 14\ \frac{3}{8}$ cm, $AC = 21,\ 40$ cm.

25. — Израчунати углове равнокраког трепеза кад је (сл. 40) $AB = 18{,}007$ m, $CD = 14{,}343$ m, $h = 12{,}034$ m.

26. — Израчунати углове равнокраког трапеза кад је $AB = 146$ m, $BC = 98{,}312$ m, $h = 48\frac{3}{7}$ m.

27. — Израчунати стране равнокраког трапеза (сл. 40) кад је $A = 52^0$, $AC = 60$ m, $CG = h = 25$ m.

28. — Израчунати стране и углове равнокраког трапеза кад је $AC = 107{,}346$ m, $BC = 87{,}224$ m, $h = 59{,}363$ m.

29. — Израчунати стране и углове равнокраког трапеза кад је $A = 62^0\ 44'\ 12''$, $CG = 6$ m, а површина $p = 300$ m².

30. — Израчунати површину описаног круга око равнокраког трапеза кад је $BAC = 42^0\ 18'\ 32''$, $DBC = 18^0\ 30'\ 40''$ и $CG = h = 25{,}032$ m.

31. — Израчунати површину разнокраког трапеза (сл. 41) кад је $A = 82^0\ 32'\ 23''$, $B = 42^0\ 13'\ 32''$, $AB = 175$ m, $BC = 74$ m.

32. — Израчунати дијагонале разнокраког трапеза кад је $AB = 74$ m, $BC = 32$ m, $B = 56^0\ 23'\ 40''$, $D = 110^0\ 14'\ 35''$.

33. — Израчунати површину разнокраког трапеза кад је $AD = 17$cm, $AB = 32$cm, $CD = 23$cm, $A = 73^0\ 20'\ 5''$.

34. — Израчунати углове, дијагонале и површину трапеза чије су ово стране: $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm, $CD = 8{,}75$ cm, $AD = 7{,}5$cm.

35. — У трапезоиду су дате стране (сл. 42) $AB = 74$ cm, $BC = 61$cm, $CD = 58$cm, и углови $A = 72^0\ 18'\ 24''$, $B = 79^0\ 56'\ 8''$. Израчунати му остале углове и дијагонале.

36. — У трапезоиду је (сл. 43) страна $AB = 17$cm, дијагонала $BD = 15$cm и три угла: $A = 56^0\ 18'\ 20''$, $B = 70^0\ 32'\ 43''$, $C = 83^0\ 32'\ 40''$. Израчунати му другу дијагоналу и површину.

37. — Из једне унутрашње тачке трапезоидове (O, сл. 44) види се страна $AB = 149$ m под углом $BOA = 110^0\ 17'\ 20''$, страна BC под углом $BOC = 100^0\ 10'\ 10''$, страна CD под углом $COD = 82^0\ 46'\ 53''$; из тачке B види се дужина AC под углом од $73^0\ 4'\ 2''$, а дужина CD под углом од $40^0\ 8'\ 5''$. Из тачке C види се BD под углом од $112^0\ 10'\ 20''$. Колика је површина тога трапезоида? Колико је далеко тачка O од свих темена посебице? Ако је уклоњена значка која је на земљишту обележавала тачку O, како би се поново могла обележити та тачка?

38. — Израчунати углове и површину једног трапезоида кад је $AB = 59$ cm (сл. 42), $BC = 22$ cm, $AD = 31$ cm, $AC = 43$ cm, $BD = 69$ cm.

39. — Израчунати углове и површину једног трапезоида (сл. 42) кад је $AB = 214$ cm, $BC = 170$ cm, $BCD = 120^0\ 18'\ 30''$, $AD = 110$ cm. $BD = 200$ cm.

40. — Израчунати површину делтоида (сл. 45) кад је $m = 57^0\ 6'\ 3''$, $n = 67^0\ 4'\ 20''$, $AB = 12$ cm.

41. — У делтоиду је један угао $42^0\ 34'\ 50''$, а дијагонала (мања) која лежи према томе углу је 7 cm. Колика је површина тога делтоида?

42. — Израчунати површину делтоида помоћу дијагонала.

43. — За које четвороугле важи овај образац за површину:

$$p = \frac{d_1\, d_2}{2}$$? Како се добија тај образац?

44. — У вези с вежбањем 43 докажи да је површина ма каквог паралелограма дата обрасцем:

$$p = \frac{d_1\, d_2}{2} \sin\, m$$

где су d_1 и d_2 дијагонале, а m угао између њих.

45. — Провери предњи образац на ромбу.

46. — Изведи образац за површину трапеза кад је непозната висина.

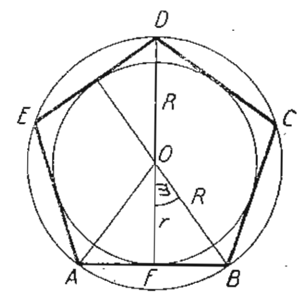
МНОГОУГАОНИЦИ

Правилни многоугаоници. — Код њих се служимо полигоналним исечком (троугао ABO, сл. 46). То је равнокраки троугао у коме су краци $AO = BO = R$, а висина $h = r$. У томе исечку имамо 2 правоугла троугла: AFO и FBO. Угао на врху овог равнокраког троугла ABO јесте угао

$$AOB = \frac{360^0}{n}.$$

Број n значи број многоугаоникових страна. На нашој слици 46 биће:

$$AOB = \frac{360^0}{5} = 72^0.$$



Сл. 46.

У правоуглом троуглу BFO биће:

$$m = \frac{1}{2} AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^0}{n} = \frac{360^0}{2n} = \frac{180^0}{n}.$$

На нашој слици 46 биће $m = 36^0$.

Један угао правилнога n-тоугаоника је:

$$ABC = \frac{(n-2) \cdot 180^0}{n}.$$

Сем тога је $\measuredangle\ ABO = \frac{1}{2} ABC$.

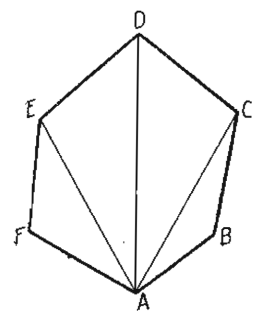
На нашој слици биће:

$$ABC = \frac{(n-2) \cdot 180^0}{n} = \frac{(5-2) \cdot 180^0}{5} = 3.36 = 108^0.$$

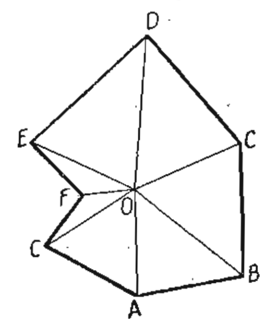
Неправилни многоугаоници. — Неправилне многоугаонике делимо на два начина на троуглове:

1) дијагоналама из једног темена (сл. 47) и

2) повлачећи дужи до свих темена од једне произвољне унутрашње многоугаоникове тачке (O, сл. 48).



Сл. 47.



Сл. 48

ВЕЖБАЊА

1. — Израчунати површину правилног деветоугаоника уписаног у кругу $r = 10$ cm.

2. — Исто за седмоугаоник и $r = 12$ cm.

3. — Исто за дванаестоугаоник и $r = 14$ cm.

4. — Исто за петоугаоник и $r = 19$ cm.

5. — Израчунати површину правилног једанаестоугаоника за $r = 4$ cm.

6. — Израчунати разлику површина описаног и уписаног круга код правилног двадесетоугаоника чија је страна a.

7. — Исто за правилни многоугаоник од 40 страна са страном a.

8. — Исто за правилни многоугаоник од 80 страна са страном a.

Изради сва три вежбања 6, 7 и 8, па загледај добивене резултате.

9. — Израчунај разлику површина описаног и уписаног круга правилнога n-тоугаоника са страном a. Загледај добро добивени резултат, па одговори на ова питања:

Чему тежи разлика описаног и уписаног круга правилнога многоугаоника кад n (број страна) једнако расте? По чему се то види? Шта бива са углом m са слике 46 код правилнога многоугаоника, кад n једнако расте? А шта бива онда са угловном функцијом коју си ти употребио при израчунавању површине тога многоугаоника? А шта бива са r? Шта бива са R? А шта бива са $(R - r)$? Површина многоугаоника налази се између површина описаног и уписаног круга. Па чему тежи његова површина, кад му број страна једнако расте? Чему тежи његов обим? Да ли одатле можеш некако извести вредност за број π?

10. — Израчунај површину неправилног шестоугаоника (сл. 47), кад је $A = 120^0\,14'\,23''$, $B = 130^0\,2'\,4''$, $C = 100^0\,2'\,5''$, $D = 95^0\,18'\,40''$, $E = 150^0\,40'\,20''$, $AB = 12$ cm, $AC = 18$ cm, $AD = 26$ cm, $AE = 14$ cm.

11. — Израчунати површину неправилнога седмоугаоника (сл. 48), кад се из једне његове унутрашње тачке (O) види AB под углом од $47^0\,2'\,3''$, BC под углом од $53^0\,18'\,9''$, CD под углом од $83^0\,40'\,50''$, DE под углом од $70^0\,20'\,40''$, EF под углом од $25^0\,43'\,7''$, GF под углом од $20^0\,20'\,20''$ и кад је $GF = 14$ m, а угао $F = 245^0\,30'\,40''$, $GFO = 109^0\,20'\,30''$. (Одакле ћеш почети израчунавање површине?).

КРУГ

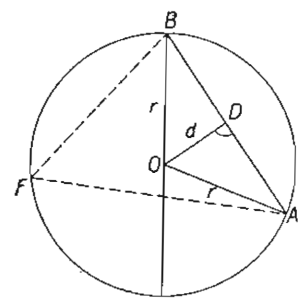
Средишно растојање. — На кругу се можемо послужити овим троуглима:

ABO (равнокрак), AOD (правоугли) — слика 49. Угао $AOB = 2.\,AFB$.

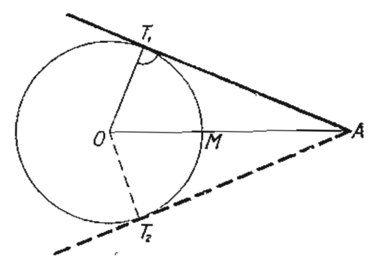
Дуж d је средишно растојање тетиве AB.

Угао $AOD = \frac{1}{2}\,AOB$.

Спољна тачка. — **Дирка.** — Кад повучемо дирке из спољне тачке A на круг O (сл. 50), имамо правоугле троугле AT_1O и AT_2O. (Где су прави углови? Зашто?)

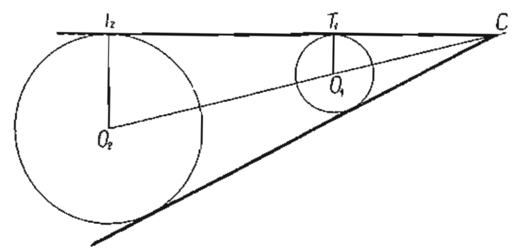


Сл. 49.



Сл. 50.

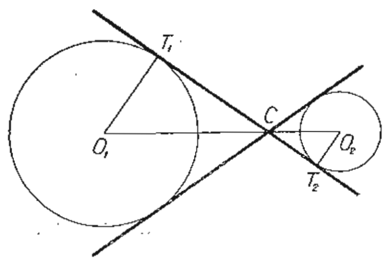
Заједничка дирка. — Кад повучемо заједничке дирке на два друга (дирке на кругове O_1 и O_2, сл. 51) и доведемо те дирке до пресека (C), добијамо спољни центар хомотетије за та два



Сл. 51.

круга (спољни центар сличности). Ту имамо два слична правоугла троугла ($CO_1\ T_1$ и $CO_2\ T_2$).

Ако повучемо две унутрашње дирке (сл.52), добијамо унутрашњи центар хомотетије (C). Опет имамо два слична правоугла троугла. (Нађи их сам, Докажи да су слични).



Сл. 52.

ВЕЖБАЊА

1\. — На кругу $r = 18$ cm, средишном углу од $110^0\ 10'5''$ припада тетива AB. Колика је? (сл. 50).

2\. — Тетиви од 7cm одговара перифериски угао од $42^0 30' 20''$. Колика је површина круга на коме су та тетива и тај угао?

3\. — Ако на кругу $r = 12$cm хоћемо тетиву од 10cm колики средишни угао треба да узмемо?

(Може ли се та тетива конструисати без тога средишног угла?)

4\. — Из тачке A види се круг под углом од $56^0 7' 40''$. Колика је површина тога круга, кад најкраће растојање тачке A до круга износи 15m.?

5\. — Два круга O_1 ($r = 8$cm) и O_2 ($R = 15$cm) имају средишно растојање (сл. 51) $O_1 O_2 = 40$cm. Под којим углом се види круг O_1 из спољнег центра хомотетије?

6\. — Под којим се углом види круг O_2 (вежбање 5) из унутарњег центра хомотетије?

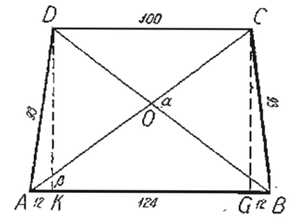
7\. — Једна спољна тачка (A, сл. 50) далеко је од кружног центра 23cm, а из ње се види тај круг под углом од $53^0 40' 40''$. Колико је растојање додирних тачака дирки повучених из те тачке на круг?

8\. — Три се круга додирују споља. Средишна растојања су им: $O_1 O_2 = 17$cm, $O_2 O_3 = 12$cm. Та два средишна растојања секу се под углом од $47^0 32' 24''$. Колика је површина сваког круга посебице? Колика је површина између тих кругова?

9\. — Три се круга додирују споља ($r_1 = 8$cm, $r_2 = 6$cm, $r_3 = 7$cm). Под којим се углом види центар O_1 из центра O_2?

10\. — Кругови O_1 ($r_1 = 18$cm) и O_2 ($r_2 = 20$cm) са средишним растојањем $O_1 O_2 = 30$cm секу се у A и B. Под којим се углом види AB из O_1?

11\. — У тетивном четвороуглу $ABCD$ дата је стране $AD = 19cm$ и угао $A = 115^0\ 23'\ 20''$, и полупречник описаног круга $R = 12cm$. Израчунати угао под којим се секу дијагонале тога четвороугла.



Сл. 53.

12\. — Израчунати површину описаног круга око равнокраког трапеза (сл. 53) чије су основице 124 cm и 100 cm, а један крак 93 cm.

13\. — Израчунати површину четвороугла у коме су стране $AB = 75\ cm$, $BC = 20\ cm$, $CD = 40\ cm$, и полупречник описаног круга $R = 50$ cm.

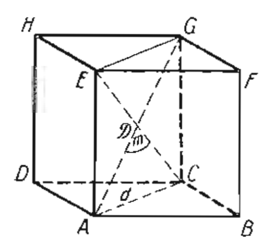
14\. — Израчунати углове четвороугла $ABCD$ описаног око круга O, кад је $AB = 32\ cm$, $BC = 10$ cm, $A = 46^0\ 20'\ 10''$, $B = 75^0\ 30'\ 40''$. Колика је површина уписаног круга?

(Какав је ово четвороугао? Какву особину он има? Спој центар с теменима. Спусти полупречник. Страна AB је збир двеју дирки.)

ПРИМЕНА НА СТЕРЕОМЕТРИЈУ

ПРИЗМА

Коцка. — Под којим се углом секу на основици дијагонала и страна? Под којим се углом секу дијагонале на основици? Под којим углом пада коцкина дијагонала на основицу?



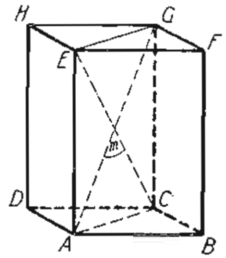
Сл. 54.

Коцкин дијагонални пресек је $ACGE$ (сл. 54). У њему имамо правоугли троугао ACG, из кога се могу вршити потребна израчунавања.

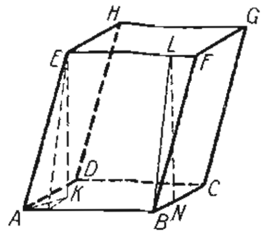
Правоугли паралелепипед. — И његов је дијагонални пресек правоугаоник (сл. 55). И у њему имамо правоугли троугао (ACG).

Правилна n-страна призма. — У њеним дијагоналним пресецима имамо увек правоугаонике и у њима правоугле троугле.

Коса призма. — Нека је дата призма $ABCDEFGH$ (сл. 56). Спустимо призмину висину EK. Добићемо правоугли троугао AKE



Сл. 55.

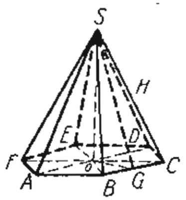


Сл. 56.

у коме је угао A нагибни угао бочне ивице AE према основи. Како ћемо израчунати нагибни угао стране $ABFE$ према основици? Из K и E спусти управне на AB добијеш правоугли троугао. У њему угао према страни EK претставља нагибни угао равни $ABFE$ према $ABCD$.

ПИРАМИДА

Правилна пирамида. — Узмимо једну правилну шестострану пирамиду (сл. 57). Њена висина (SO) пада увек у центар на основи (O). Ту су нам важни ови троуглови:

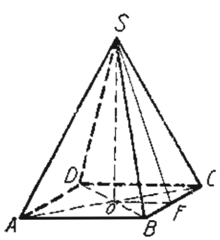


Сл. 57.

I — Троугао OBS. То је правоугли троугао. У њему је OS пирамидина висина, $OB = R$ полупречник круга описаног око основице и SB бочна ивица.

II — Троугао OGS. И то је правоугли троугао. У њему је OS пирамидина висина, SG бочна висина, $OG = r$ полупречник круга уписаног на основици.

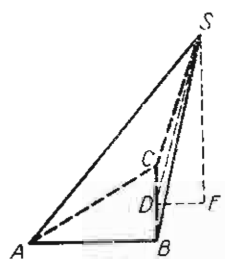
Права пирамида. — Знамо да су код праве пирамиде бочне ивице једнаке. Узмимо праву четворострану пирамиду (сл. 58). Код ње су важни троуглови OFS и OBS.



Сл. 58.

Коса пирамида. — Узмимо једну косу пирамиду (сл. 59). Код ње су важни троуглови:

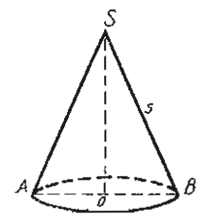
1) SDB. У њему је бочна висина SD стране BCS; 2) DFS. У њему је пирамида висина SF и нагибни угао FDS стране BCS према основи.



Сл. 59.

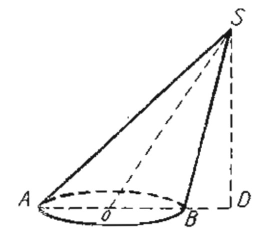
КУПА

Права купа. — Узмимо праву купу ABS (сл. 60). У њој су важни ови троуглови: 1) OBS и 2) ABS. Угао ASB зове се купин отвор.



Сл. 60.

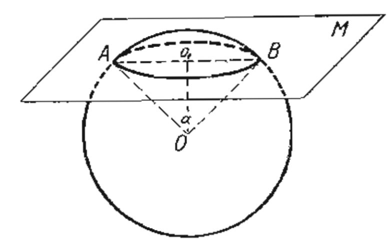
Коса купа. — Узмимо једну косу купу (сл. 61). У њој су важни ови троуглови: 1) ADS. Он је правоугли. У њему је хипотенуза дуж AS која претставља најдужу купину ивицу. У њему је угао DAS. То је најмањи нагибни угао што га купина ивица заклапа са основом. 2) BDS. У њему је хипотенуза дуж BS, најмања купина ивица. У њему је угао DBS. То је највећи угао што га бочна ивица заклапа с основом. 3) ODS. У њему је купина осовина OS. 4) ABS. То је најважнији осовински пресек.



Сл. 61.

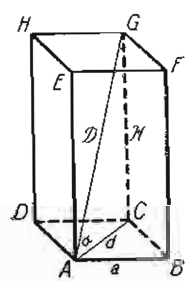
ЛОПТА

Кад пресечемо лопту једном равни (раван M, сл. 62) која не пролази кроз лоптин центар, добијамо један мали лоптин круг (AB). Кад лоптин центар спојимо с крајњим тачкама једнога пречника малога круга, добијамо угао AOB. Ако повучемо и пречник AB, добијамо равнокраки троугао AOB. Његов угао AOB је отвор купе AOB.



Сл. 62.

ПРИМЕРИ



Сл. 63.

Први пример. — Дијагонала правог паралелепипеда с квадратном основом је $D = 17\ cm$. Она пада на основицу под углом од $72^0\,47'$. Колика је запремина тога паралелепипеда?

Нека је то паралелепипед са слике 63.

$$V = B\,.\,H$$

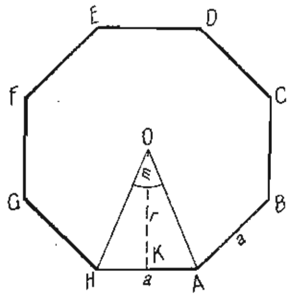
$$V = a^2\,.\,H \qquad \text{или} \qquad V = \frac{d^2}{2}\,.\,H$$

$$V = \frac{(D\cos 72^0\,47')^2}{2}\cdot D\sin 72^0\,47'$$

$$d = D \cos 72^0\ 47'$$
$$H = D \sin 72^0\ 47'$$
$$\log V = \operatorname{colog} 0{,}5 + 3 \log 17 + 2 \log \cos 72^0\ 47' + \log \sin 72^0\ 47' \text{ итд.}$$

Други пример. — Израчунати површину правилне осмостране пирамиде чија је висина $H = 10$ cm, а нагибни угао бочне ивице према основи $64^0\ 46'$.

$$P = B + M.$$



Сл. 64.

Обележимо основну ивицу са a (сл. 64, а бочну висину са H_1 (SG, сл. 57). Тада ће бити (сл. 64):

$$B = 8\ AOH = 8 . \frac{a}{2} . OK = 4a . r =$$
$$= 4a . OA \cos \frac{m}{2} = 4a . R \cos 22^0\ 30'.$$

Из троугла OSA (сл. 57) израчунаћемо $R = OA$.

$$R = H \operatorname{cotg} 64^0\ 46'.$$

Из троугла AOK (сл. 64) израчунаћемо $\frac{a}{2}$.

$$\frac{a}{2} = R \sin 22^0\ 30'. \qquad \text{Одатле је:} \quad a = 2R \sin 22^0\ 30'.$$
$$B = 4 .\ 2R \sin 22^0\ 30' .\ R \cos 22^0\ 30'.$$
$$B = 4 .\ R^2 \sin 45^0$$
$$B = 4\ (H \operatorname{cotg} 64^0\ 46')^2 \sin 45^0$$
$$B = 4\ (10 \operatorname{cotg} 64^0\ 46')^2 \sin 45^0$$
$$B = 400 \operatorname{cotg}^2 64^0\ 46' \sin 45^0.$$
$$B = 200 \sqrt{2} \operatorname{cotg}^2 64^0\ 46'$$
$$\log B = \log 200 + \frac{1}{2} \log 2 + 2 \log \operatorname{cotg} 64^0\ 46' \qquad \text{итд.}$$

Сад омотач. Ако је основна ивица a, бочна висина H_1, овде ће површина омотача бити:

$$M = 8 . \frac{a}{2} . H_1 = 4a\ H_1 = 8H \operatorname{cotg} 64^0\ 46' \sin 22^0\ 30' .\ H_1$$
$$H_1^2 = SB - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ (сл. 57)}$$
$$SB = \frac{H}{\sin 64^0\ 46'}.$$

ВЕЖБАЊА

1\. — Да ли код свих коцки дијагонала пада под истим углом на основицу? (Доказ. Од чега зависи тај угао?)

2\. — Израчунати угао под којим се секу коцкине дијагонале. Је ли тај угао сталан за све коцке? По чему се то може видети?

3\. — Дијагонала $D = 2{,}3$ m правоуглог паралелепипеда с квадратном основом сече бочну ивицу под углом од $23^0\ 8'\ 5''$. Колике су површина и запремина тога тела?

4\. — Израчунати угао под којим се секу дијагонале правоуглог паралелепипеда чија је висина $H = 20$ cm, а стране на основи $a = 7$ cm, $b = 4$ cm.

5\. — Колике су површина и запремина правоуглог паралелепипеда с квадратном основом, кад је висина $H = 42$ cm, а дијагонале му се секу под углом од $42^0\ 4'\ 6''$?

6\. — Бочна ивица косе четворостране праве призме с квадратном основом ($a = 7$ cm) сече основу под углом од $75^0\ 43'\ 32''$. Колика је запремина те призме?

7\. — Основица равнокраког троугла ABC који лежи на равни M јесте $AB = 9$ cm, а висина му је $h = 10$ cm. Раван M нагнута је према равни N под углом од $63^0\ 42'\ 38''$. Колика је површина пројекције троугла ABC на равни N?

8\. — Постоји ли равноивична шестострана пирамида? А равноивична шестострана права призма? Зашто?

9\. — Основна ивица правилне тростране пирамиде је $a = 27$ cm, а бочна ивица је страна квадрата уписаног у кругу $R = 60$ cm. Колики је нагибни угао бочне стране према основи?

10\. — Основа правилне шестостране пирамиде уписана је у кругу $R = 15$ cm, а страна је нагнута према основи под углом од $70^0\ 10'\ 40''$. Колике су површина и запремина те пирамиде?

11\. — Код правилне четворостране пирамиде висина h ($= 24$ cm) и бочна ивица s секу се под углом од $32^0\ 16'\ 24''$. Колике су површина и запремина те пирамиде?

12\. — Правоугаоник чија основица $a = 16$ cm заклапа с дијагоналом угао од $17^0\ 25'\ 47''$ обрће се око осовине која му пролази кроз страну a. Израчунати површину и запремину обртног тела.

13\. — Троугао ABC чије се стране $AB = 17$ cm, $AC = 10$ cm секу под углом од $16^0\ 25'\ 5''$, обрће се око осовине која пролази кроз AB. Израчунати површину и запремину обртног тела.

14\. — Троугао има страну $a = 14$ cm и на њој углове $B = 67^0\ 18'\ 20''$ и $C = 37^0\ 2'\ 45''$. Он се обрће око осовине која иде кроз страну c. Колике су површина и запремина обртног тела?

15\. — Правилан дванаестоугаоник са страном $a = 4$ cm обрће се око једне своје симетрале која му пролази кроз два темена. Израчунати површину и запремину обртног тела.

16. — Код једне косе купе осовина од 10 cm сече највећу ивицу $s = 25$ cm под углом од $43^0\ 6'\ 7''$. Израчунати запремину те купе, дужину најмање ивице, површину осовинског пресека чије су бочне ивице једнаке, отвор купин у томе пресеку.

17. — Површина купиног осовинског пресека у коме су најмања ивица $s = 10$ cm и највећа ивица $S = 17$ cm износи 68 cm² Израчунати запремину те купе.

18. — Површина осовинског пресека праве зарубљене купе је 150 cm², висина $H = 10$ cm, а бочна ивица $s = 5\sqrt{5}$ cm. Колике су површина и запремина праве зарубљене шестостране пирамиде уписане у тој купи?

19. — Права зарубљена купа има ове полупречнике на основама: $r = 8$ cm, $R = 14$ cm. Бочна ивица јој је нагнута према основи под углом од $72^0\ 35'\ 50''$. Колике су јој површина и запремина?

20. — Ромб чија је страна $a = 14$ cm, а један угао $A = 110^0\ 20'\ 30''$, обрће се око једне своје стране. Израчунати површину и запремину обртног тела

21. — Лопта $R = 12$ cm пресечена је једном равни тако, да отвор лоптиног исечка износи $62^0\ 20'\ 4''$. Колике су површина и запремина лоптиних отсечака?

22. — Израчунати површину умереног земљиног појаса.

23. — Логаритам земљиног полупречника дат је обрасцем: $\log R = 9{,}9992695 + 0{,}0007324 \cos 2\varphi - 0{,}0000019 \cos 4\varphi$ (φ је грчко слово фи). Угао φ претставља географску ширину појединих места за које се рачуна земљин полупречник. Кад је географска ширина Београда приближно $44^0\ 48'\ 6''$, колики је полупречник земље код Београда?

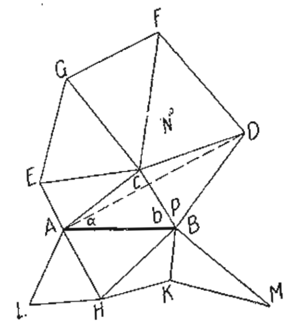
24. — У лопти полупречника R уписана је права купа са отвором 2α. Колике су површина и запремина те купе?

ТРИЈАНГУЛАЦИЈА

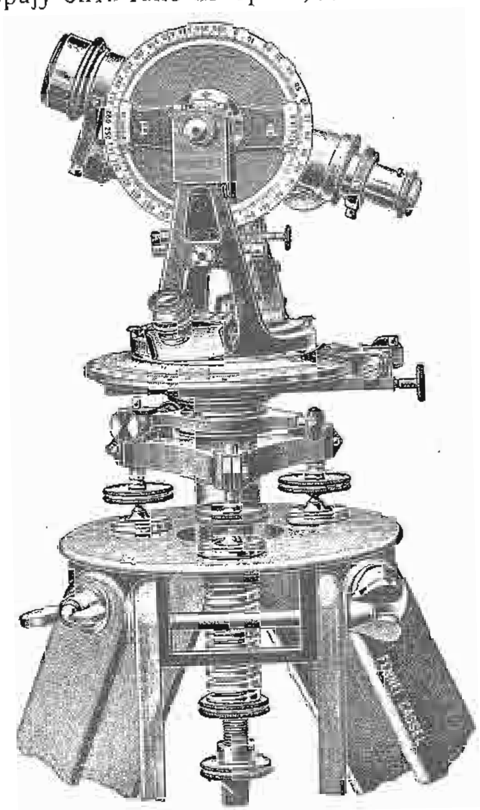
Прављење планова. — План једнога земљишта је смањена слична слика тога земљишта. Разуме се да су на плану убележене само важне тачке и важни предмети са тога земљишта. План се ради увек у извесној размери; рецимо у размери 1:10000. Та размера се увек означава на плану. Нека је размера 1:10000. Тада 1 mm на плану претставља 10 *m* у природи. Обрнуто, 10 *m* из у природе претстављени су једним милиметром на плану.

Тријангулација. — Да би се нацртао план једног земљишта, ради се најпре ово:

Изаберу се на томе земљишту најпре две тачке, које, по могућству, леже на хоризонталном земљишту. Те две тачке морају бити изабране тако, да се из једне тачке може правом линијом прићи оној другој. Затим се челичном пантљиком измери праволиниско растојање између тих двеју тачака. Замишљена дуж између тих двеју тачака (A и B, сл. 65) јесте **основа** за даља премеравања. Сем тих двеју тачака изаберу се на земљишту још повише важних тачака. Нека су то тачке $CDEFG$ (сл. 65). Кад замислимо да су све по три тачке спојене дужима, видимо да ће цело то земљиште бити покривено замишљеним троуглима. Тачке на земљишту морају бити тако изабране, да се из сваког троугловог темена (рецимо C), виде она друга два темена (F и G) и да се из сваке тачке у унутрашњости тога троугла виде сва три темена. (Да се, на пр. из N виде и C и D и F). Затим се постепено решавају сви ти троугли редом.

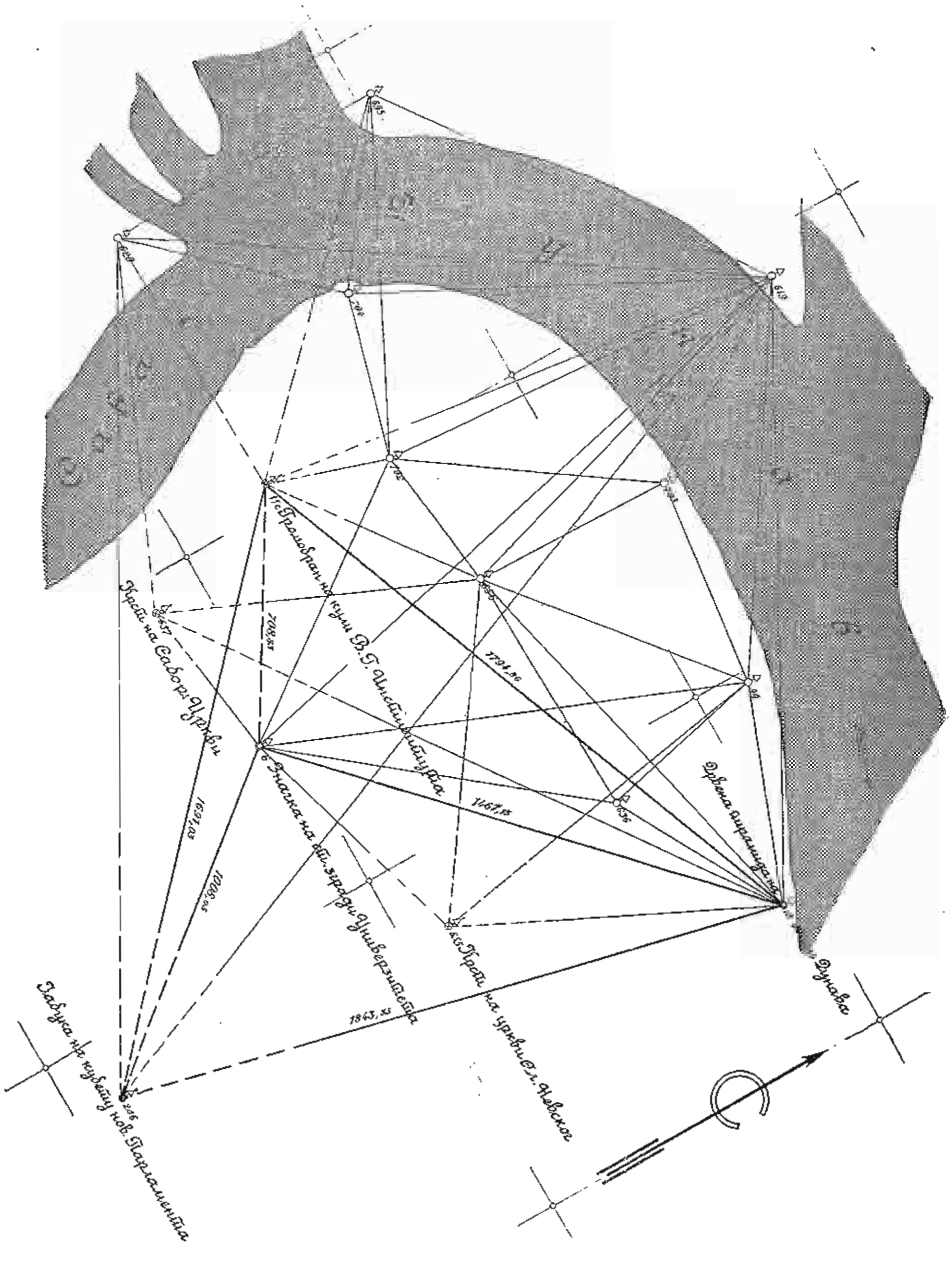


Сл. 65.


Сл. 66.

Најпре троугао ABC. Из A се измери угао a. То се ради једном справом која се зове **теодолит.** Њу приказује слика 66. Затим се пређе у тачку B и измери угао b. Сад у троуглу ABC знамо основицу AB и два угла на њој. Можемо сад израчунати стране BC и AC.

Кад су израчунате стране AC и BC, можемо прећи на троугао BCD, или на троугао ACE. Ако пређемо на троугао BCD,



Сл. 67.

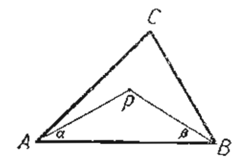
измерићемо код B угао p, а код C угао BCD. Сад у троуглу BCD знамо основицу BC и углове p и BCD. Можемо израчунати стране BD и CD. Кад израчунамо CD, прелазимо на троугао CDF. Итд. Најзад израчунамо дуж AE.

Контрола у току рада. — Да би се проверили добивени резултати, врши се контрола у току рада. Из троугла ABC израчуна се BC. Из троугла BCD израчуна се BD. Затим се BD израчуна из ABD. Добивена два резултата морају се потпуно слагати.

Крајња контрола. — Кад су решени сви троуглови и израчуната последња дужина AE, та дужина се још и измери. Рачунски резултат и мерни резултат морају се слагати.

Премеравање земљишта помоћу земљишних троуглова које образују изабране и обележене тачке на земљишту зове се тријангулација (од латинске речи triangulus = троугао).

Цртање плана. — Кад се израчунају стране свих троуглова ти троуглови се нацртају у датој размери. Добије се једна мрежа од троуглова. Та се мрежа зове тригонометриска мрежа или тријангулациони план. Такав тријангулациони план око Београдске тврђаве, у размери 1:20000, имамо на слици 67. Троуглови се после попуњавају тачкама које су нам још потребне.

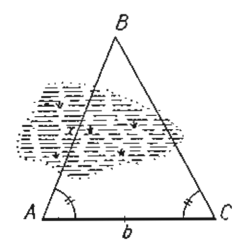


Сл. 68.

Нека је потребно да у троуглу ABC (сл. 68) убележимо и тачку P. Рекли смо да су тачке A, B и C тако изабране, да се из сваке унутрашње тачке виде сва три темена. Ми ћемо код A измерити угао α (сл. 67), код B угао β. Израчунаћемо AP и BP и тиме тачно одредити положај тачке P.

ПРИМЕРИ

Први пример. — Од тачке A (сл. 69) види се тачка B, али се услед непроходног земљишта не може правом линијом доћи од A у B. Израчунати растојање AB.

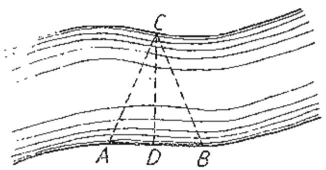


Сл. 69.

Узећемо тачку C тако, да се из ње виде A и B и да се од C може доћи правом линијом у A. Измерићемо дужину AC, углове A и C, па ћемо израчунати AB.

Други пример. — Измерити ширину реке, а не прелазити на другу обалу.

Нека слика 70 претставља ту реку. Узећемо на самој обали реке две тачке A и В тако, да се може правом линијом доћи од A до В. На супротној обали изабраћемо једну тачку C тако, да њена пројекција на АВ пада између А и В. (Зашто?). Тачка C мора бити тако изабрана, да се види и из А и из B. Измерићемо АВ и углове А и В. Затим ћемо израчунати висину CD.

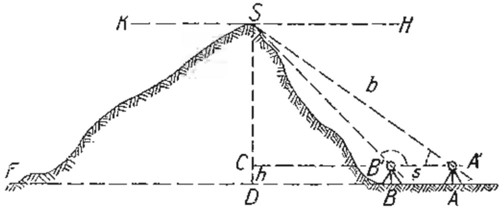


Сл. 70.

Напомена. — Овај задатак се може решити без икаквих рачуна једном справом која се зове *шелемешар*. Њом се мере растојања од једне тачке код које се налазимо, до друге тачке коју гледамо. Она се нарочито употребљава у војсци.

Трећи пример. — Нека слика 71 претставља вертикални пресек једног брда. Наш задатак је да израчунамо висину тога брда.

Измерићемо на падини једну праву дужину $AB = A'B'$. Поставићемо теодолит у A и из A' измерити угао $B'A'S$. Поставићемо



Сл. 71.

теодолит у B и из B' измерити угао $A'B'S$. Обележимо $A'B' = AB = s$, $A'S = b$. Тада је:

$$b = \frac{s \sin B'}{\sin S}$$

Из троугла SCA' имамо: $SC = b \sin A'$, тј.

$$SC = \frac{s \sin A' \sin B'}{\sin S}.$$ Висина овог брда биће:

$SD = SC + h$ (висина нашег теодолита) тј. $SD = \dfrac{s \sin A' \sin B'}{\sin S} + h.$

ВЕЖБАЊА

1. — Из тачака A и B види се ван праве AB једна тачка C. Утврдити положај тачке C тако, да се она може увек наћи кад су обележене тачке A и B.

2. — Одредити растојање између двеју неприступних тачака A и C, кад се из A види C.

3. — Са обале се види утврђење на једноме острву. Зна се да је острво далеко од обале 5 километара. Како ће се израчунати дужина утврђења?

4. — Из тачке A не види се B. Како ће се израчунати растојање тих двеју тачака?

5. — Три тачке образују на земљишту један троугао чија је страна $BC = 472{,}56m$. У продужењу стране AB, налази се једна неприступна, али видљива тачка D. Из B се види DC под углом $114^0\ 23'\ 45''$ а из C се види BD под углом од $22^0 17' 20''$. Колико је далеко D од B и C?

6. — Измерена је дужина $CD = 645{,}56m$ (сл. 41). Из C и D се виде две неприступне тачке A и B. Колико је растојање AB, кад се из C види AD под углом од $32^0 18' 10''$, AB под углом од $100^0 14' 22''$; из D се види BC под углом од $43^0 20' 40''$, а AB под углом од $58^0 42' 30''$?

7. — На земљишту се налази један троугао ABC чије су стране $AB = 400m$, $BC = 500m$. Ван тога троугла налази се тачка D која не лежи у продужењу ниједне стране тако, да је $CD = 300m$. Из D се види AB под углом од $106^0\ 8'\ 2'$, BC под углом од $62^0 28' 40''$. Дуж која би везивала C и D секла би страну AB. Колико је далеко D од сваког троугловог темена посебице?

8. — Са једног равног и правог дела неког друма види се црква у правцу друма. На томе месту одмерена је друмом дужина од $100m = AB$. Из тачке A која је даље од цркве види се врх торња под углом од $22^0 48' 30''$, а из ближе тачке B под углом $42^0 17' 18''$. Колико је врх цркве висок над местом са кога се мери?

9. — Кроз једно брдо (сл. 71) треба да се пробије тунел. Железничка пруга иде од A ка B и треба код B да уђе у тунел, а код F да изађе. На врху брда нађена је једна тачка тако да је SD вертикална права. Из S су измерени углови $BSH = 52^0 30' 30''$, $ASH = 23^0 4' 45''$ и $FSK = 47^0 22' 35''$. Кад је $AB = 200m$, колики ће бити тај тунел?

10. — Са севера и југа једне долине налази се по један вис. Како би се могло израчунати праволиниско растојање та два врха?

11. — При једноме мерењу на земљишту узета је основа $AB = 400m$ и измерени су углови $a = 57^0 18' 20''$ и $b = 70^0 42' 14''$ (сл. 65). Код B и C мерени су углови за тачку D и нађено је код C $100^0 14' 20''$, а код B $42^0 40' 10''$. Мерење је настављено и код C

и D за тачку F, па је нађено да је код C угао $62^0 42'8''$, код D угао $72^0 25'52''$. Израчунај шта ти треба, па нацртај малу тригонометриску мрежу у размери 1:5000.

12. — Са основице $AB = 320{,}46m$ (сл. 65) из тачке A визирана је тачка C и тачка B. (То значи дурбин је управљен најпре на C, па на B, те је измерен угловни размак тих двеју тачака, тј. угао BAC). Затим је то рађено из тачке B. Код A је нађен угао од $46^0 28'2''$, код B угао $52^0 12'40''$. Затим је из A и C визирана тачка E и нађено је: код A $38^0 48'23''$, код C $23^0 28'10''$. Израчуната је страна EC. Затим је, ради проверавања, визирана тачка E из B и C и нађено код B $36^0 25'20''$. Кад из C визирамо на тачке B и E, под којим се углом оне морају видети?

На слици 67 мерени су ови углови:

I Код станице бр. 6:

тачка	18	0⁰	0′	0″
„	655	26⁰	36′	19″
„	246	94⁰	26′	44″
„	637	215⁰	14′	24″
„	702	277⁰	9′	40″
„	619	300⁰	11′	46″
„	94	335⁰	30′	52″
„	636	351⁰	57′	7″

II Станица бр. 18:

тачка	6	0⁰	0′	0″
„	637	8⁰	4′	58″
„	636	14⁰	47′	17″
„	11c	22⁰	20′	7″
„	656	30⁰	17′	37″
„	94	63⁰	47′	31″
„	619	71⁰	48′	7″

III Станица бр. 11*c*:

тачка	18	0⁰	26′	32″
„	246	64⁰	12′	39″

IV Станица бр. 94:

тачка	18	0⁰	0′	0″
„	636	56⁰	49′	36″
„	655	59⁰	52′	39″
„	6	91⁰	43′	21″
„	656	120⁰	36′	42″
„	703	166⁰	27′	53″
„	619	192⁰	26′	34″

V Станица бр. 619:

тачка	18	0⁰	0′	0″
„	94	4⁰	25′	57″
„	703	28⁰	31′	17″
„	246	39⁰	24′	54″
„	656	44⁰	52′	57″
„	6	48⁰	23′	37″
„	702	65⁰	29′	5″
„	11c	68⁰	47′	18″
„	704	88⁰	54′	3″
„	620	94⁰	39′	43″
„	695	115⁰	49′	45″

VI Станица бр. 620:

тачка	695	144⁰	20′	6″
„	619	177⁰	28′	41″
„	704	187⁰	50′	28″
„	11c	233⁰	10′	56″
„	637	258⁰	8′	4″
„	246	263⁰	41′	53″

VII Станица бр. 636:

тачка	18	0⁰	0′	0″
„	6	157⁰	9′	50″
„	656	207⁰	6′	45″
„	94	285⁰	50′	12″

VIII Станица бр. 656:

тачка	18	0⁰	0′	0″
„	636	11⁰	36′	14″
„	655	47⁰	45′	47″
„	637	126⁰	27′	27″
„	11c	156⁰	45′	9″
„	702	185⁰	54′	45″
„	619	266⁰	23′	25″
„	703	284⁰	58′	12″
„	94	334⁰	6′	33″

IX Станица бр. 702:

тачка	11c	0^0	$0'$	$0''$
„	704	86^0	$57'$	$12''$
„	695	98^0	$17'$	$23''$
„	619	165^0	$37'$	$49''$
„	703	196^0	$27'$	$42''$
„	656	244^0	$32'$	$59''$
„	6	305^0	$30'$	$30''$

X Станица бр. 703:

тачка	656	0^0	$0'$	$0''$
„	702	32^0	$51'$	$12''$
„	619	145^0	$3'$	$31''$
„	94	274^0	$59'$	$33''$

XI Станица бр. 704:

тачка	702	0^0	$0'$	$0''$
„	620	118^0	$13'$	$11''$
„	695	200^0	$57'$	$59''$
„	619	282^0	$5'$	$47''$

XII Станица бр. 695:

тачка	11c	0^0	$0'$	$0''$
„	620	45^0	$20'$	$49''$
„	619	279^0	$39'$	$35''$
„	702	341^0	$58'$	$24''$
„	704	351^0	$36'$	$9''$

13. — Изабери сам једну од измерених дужина, узми углове на њој, па рачунај стране.

14. — Израчунај дужину од станице 702 до 704
15. — „ „ „ „ 6 до 637
16. — „ „ „ „ 704 до 695
17. — „ „ „ „ 11c до 620
18. — „ „ „ „ 655 до 637
19. — „ „ „ „ 6 до 94
20. — „ „ „ „ 18 до 655

МЕШОВИТА ВЕЖБАЊА

1. — Дато је $\sin x = \frac{1}{3}$, $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{5}$. Одредити вредности за $\sin(x+y)$.

2. — У троуглу ABC уписан је круг. На тај круг повучене су три дирке, свака паралелна с једном троугловом страном. На тај је начин код сваког темена добијен по један мали троугао. У сва три мала троугла уписани су кругови. Доказати да је збир полупречника та три мала круга раван полупречнику круга уписаног у троуглу ABC. У коме су односу површина уписаног круга у ABC и збир површина малих уписаних кругова?

3. — Једно троугласто земљиште је на некој равници. Види се са свих страна, али је неприступачно са свих страна. Израчунати му површину.

4. — Дата је вредност $3\operatorname{tg} 2x = 5$. Израчунати вредност за $(\operatorname{cotg} 2x + \sin 3x)$.

5. — Израчунати запремину праве тростране пирамиде кад је бочна ивица $s = 17cm$ нагнута према основи под углом од $78^0 20' 40''$, а две основне ивице $a = 6cm$ и $b = 4cm$ секу се под углом од $72^0 20' 42''$.

6. — Спремити за логаритмисање израз
$$\sin A + \sin B - \sin C \quad \text{кад је} \quad A + B + C = 2\pi.$$

7. — Реши једначину
$$\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$$

8. — Наћи угао за чије угловне функције важи овај однос:
$$\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 3$$

9. — У троуглу чија једна страна $a = 7$ cm, и углови на њој $B = 42^0 32' 20''$ и $C = 56^0 40' 28''$ уписан је круг. Колика је дирка повучена на тај круг из темена A?

10. — У правом ваљку ($r = 15$ cm) налази се уписана права тространа призма. На основи те призме углови су $A = 47^0 32' 58''$ и $B = 79^0 45' 23''$. Висина ваљкова једнака је с полупречником круга уписаног у призминој основи. Колика је запремина и површина те призме?

11. — Решити троугао, кад му је обим 100 cm, полупречник уписаног круга $r = 5\sqrt{3}$ cm, а један угао $38^0 12' 10''$.

12. — Стави $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = t$, па изрази $\sin a$ као функцију од t.

13. — „ „ „ „ „ $\cos a$ „ „ „ „

14. — „ „ „ „ „ $\operatorname{tg} a$ „ „ „ „

15. — Колико разних вредности може имати $\sin\frac{k\pi}{5}$, кад k добија све целе вредности од (-20) до $(+20)$?

16. — Одреди колико треба да је α, па да израз $\sin(40^0 - \alpha)$ достигне свој максимум.

17. — Одреди α тако, да израз $2 \sin 2 (30^0 + \alpha)$ достигне максимум.

18. — Одреди α тако, да израз $\cos 3 (\frac{2}{3} \pi - \alpha)$ достигне максимум.

19. — Испитати шта бива с луком A у изразу

$$\operatorname{tang} A = \frac{1 - m}{1 + m}$$

кад m добија све целе вредности од (-10) до (-2).

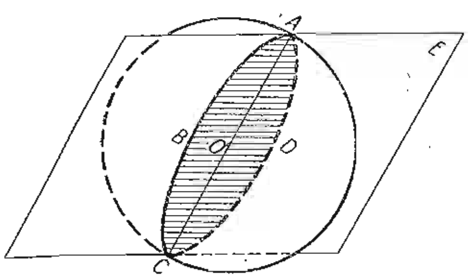
20. — Кад је $\cos x = 0{,}34567$, израчунати вредност за $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

21. — На кругу је повучен пречник $AB = 10$ cm, и тетива $CD = 7$ cm која сече тај пречник под углом од $46^0 20' 40''$. Израчунати дужину тетиве која је паралелна са AB, а преполовљена тетивом CD.

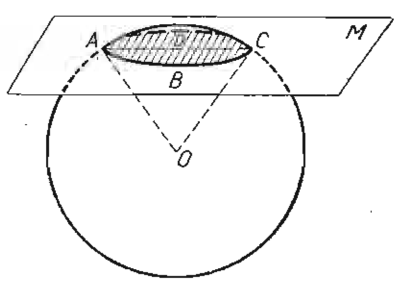
22. — Решити троугао кад му је један угао $A = 61^0 20' 30''$, полупречник уписаног круга $r = 10$ cm, а висина $h_a = 28$ cm.

СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА

Велики и мали лоптин круг. — Круг који се добија кад се лопта пресече једном равни кроз центар, зове се велики лоптин круг ($ABCD$, сл. 72). Круг који се добија кад се лопта пресече једном равни која не иде кроз центар зове се мали лоптин круг ($ABCD$, сл. 73).

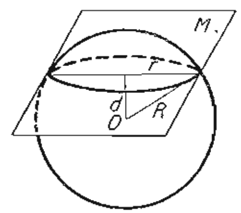


Сл. 72.

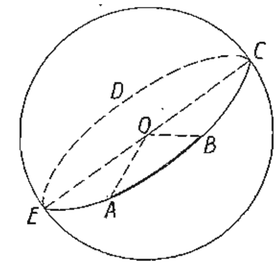


Сл. 73.

Нека је средишно растојање равни на којој се налази мали лоптин круг једнако d (сл. 74), а полупречник малога круга r. Тада је $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



Сл. 74.



Сл. 75.

Види се да је полупречник малога круга све већи, што је средишно растојање d мање. Зато су мали лоптини кругови на истој лопти једнаки само онда, кад су им средишна растојања једнака.

Две тачке на лопти. — Две тачке на лопти увек леже на периферији једног великог лоптиног круга. Тачке A и B (сл. 75) леже на великом лоптином кругу $ABCDE$.

Сфера. — Лопта се грчки зове сфера.

Сферно растојање. — Растојање двеју тачака на лопти мери се мањим луком између тих двеју тачака, а на великоме кругу на коме се оне налазе.

Лучно растојање двеју тачака на лопти зове се сферно растојање тих двеју тачака. Сферно растојање тачака A и B на слици 75 је пуни лук AB.

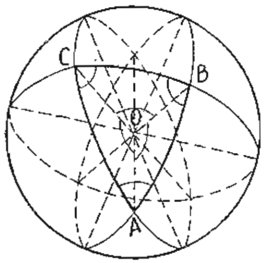
Сферни троугао. — Спојимо луцима великих кругова три тачке на лопти које не леже на истоме великоме кругу. Добићемо 8 троуглова на лопти. Међу њима је и троугао ABC (сл. 76). Троугао на лопти зове се сферни троугао. Његове су стране луци великих кругова.

На слици 76 страна AB је угао AOB; страна BC је угао BOC; страна AC је угао AOC.

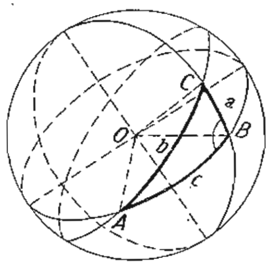
Углови сферног троугла су углови диједри двеју равни на којима леже велики кругови који се секу.

Угао A у сферном троуглу ABC (сл. 76) јесте угао диједар равни ABO и равни ACO; угао B јесте угао диједар равни BOA и CBO; угао C је угао диједар равни COA и CBO.

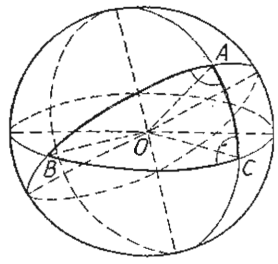
Правоугли сферни троугао. — Ако је у сферном троуглу само један угао прав, троугао је сферни правоугли троугао. На слици 77 троугао ABC је сферни правоугли троугао. Прав угао је код B.



Сл. 76.



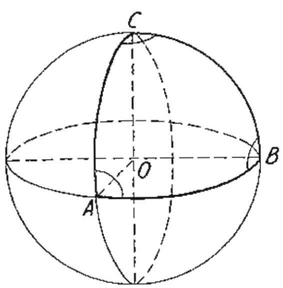
Сл. 77.



Сл. 78.

Двоправоугли сферни троугао. — Сферни троугао може имати и два права угла. Троугао ABC са слике 78 има два права угла: A и C. Такав троугао зваћемо двоправоугли сферни троугао.

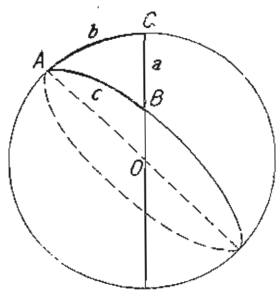
Троправоугли сферни троугао. — Сферни троугао може имати и три права угла. Троугао ABC са слике 79 има три права угла. Такав троугао зваћемо троправоугли сферни троугао.



Сл. 79.

Сферна тригонометрија. — Сферна тригонометрија је један део геометрије који се бави решавањем сферних троуглова. Ми ћемо се сад бавити само решавањем сферних правоуглих троуглова.

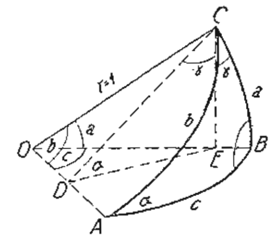
Хипотенуза сферног правоуглог троугла. — Видели смо да је у равном правоглом троуглу хипотенуза страна према правом углу. Она је највећа страна у равном правоуглом троуглу. И у сферном правоуглом троуглу страна према правом углу зове се хипотенуза. Само што у сферном привоуглом троуглу хипотенуза не мора да буде највећа страна. У њему хипотенуза може бити мања од стране правог угла. На слици 77 је хипотенуза $b > a$ и $b > c$. На слици 80 је хипотенуза $c<b$. (Хипотенуза мања од стране правог угла).



Сл. 80.

ОСНОВНИ ОБРАСЦИ ЗА СФЕРНИ ПРАВОУГЛИ ТРОУГАО

Нацртајмо засебно један сферни правоугли троугао (сл. 81). Узмимо лоптин полупречник за јединицу мере. Дакле, $r = 1$. Стране нашег троугла су луци $AC = b$ (хипотенуза), $BC = a$ и $AB = c$ (стране правог угла B).



Сл. 81.

I Правило

Хипотенузин косинус једнак је производу косинуса оних других двеју страна.

Из темена C спустимо управне на лоптине полупречнике AO и BO. Добићемо дужи CD и CE. Пошто је $OA = OB = r = 1$, биће:

(1) $OD = \cos b$. (То је у кружном исечку OAC).

У кружноме исечку OBC биће:

(2) $OE = \cos a$.

У равноме правоуглом троуглу ODE биће:

(3) $\dfrac{OD}{OE} = \cos c$.

Кад вредности из (1) и (2) заменимо у (3), имаћемо:

$$\frac{\cos b}{\cos a} = \cos c. \qquad \text{Одатле је:}$$

$$\boxed{\cos b = \cos a \cos c.}$$

II Правило

Синус једне стране правог угла једнак је производу синуса насрамног угла и синуса хипотенузе.

Са слике 81 види се да је:

(1) $\sin \alpha = \dfrac{EC}{DC}$

Из кружног исечка OBC видимо да је

(2) $EC = \sin a$.

Из кружног исечка OAC видимо да је

(3) $DC = \sin b$.

Кад вредности (2) и (3) унесемо у (1) добијамо:

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin b}.$$

То ћемо написати овако:

$$\boxed{\sin a = \sin \alpha \sin b}$$

Исто тако ће бити:

$$\boxed{\sin c = \sin\gamma \sin b.}$$

III Правило

Косинус једног косог угла једнак је количнику тангената налегле стране и хипотенузе.

Узмимо косинус угла α. (Сл. 81).

(1) $$\cos\alpha = \frac{DE}{DC}.$$

У добивеноме разломку поделимо и бројилац и именилац са OD:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{DE}{OD}}{\frac{DC}{OD}}.$$ Са слике се види да је то даље:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{tg\,c}{tg\,b}}$$

IV Правило

Косинус једног косог угла једнак је производу косинуса насрамне стране и синуса другог косог угла.

Узмимо опет косинус угла α. (сл. 81). Употребићемо образац III:

(1) $\cos\alpha = \frac{tg\,c}{tg\,b}$ и применићемо II образац на угао гама:

(2) $$\sin\gamma = \frac{\sin c}{\sin b}.$$

Поделићемо (1) са (2):

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{tg\,c}{tg\,b} : \frac{\sin c}{\sin b}.$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{1}{\cos c} : \frac{1}{\cos b}.$$

(3) $$\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\cos b}{\cos c}.$$

Применићемо образац I:

$\cos b = \cos a \cos c.$ Одатле је:

(4) $\frac{\cos b}{\cos c} = \cos a.$ Кад (4) сменимо у (3), добијамо:

$\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} = \cos a.$ Одатле је:

$$\boxed{\cos\alpha = \cos a \sin\gamma.}$$

V Правило

Тангента једног косог угла једнака је с количником тангенте насрамне стране и синуса налегле стране.

Узмимо угао γ.

(1) $$tg\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}.$$

Из обрасца II имамо за угао γ:

(2) $$\sin\gamma = \frac{\sin c}{\sin b}.$$

Из обрасца IV имамо за угао γ:

(3) $\cos\gamma = \cos c \sin\alpha$

Кад у (1) унесемо вредности из (2) и (3), добијамо:

(4) $$tg\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sin c}{\sin b} : \cos c \sin\alpha = \frac{\sin c}{\cos c \sin b \sin\alpha} = \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \frac{1}{\sin b \sin\alpha}.$$

Из обрасца II имамо:

(5) $\sin b \sin\alpha = \sin a$. Кад ову вредност унесемо у (4), добијамо:

$$tg\gamma = \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \frac{1}{\sin a} = tg c \cdot \frac{1}{\sin a} = \frac{tg c}{\sin a}.$$

$$\boxed{tg\gamma = \frac{tg\,c}{\sin a}}$$

VI Правило

Косинус хипотенузе једнак је производу котангената налеглих косих углова.

Знамо да је

(1) $\cos b = \cos a \cos c.$ Знамо из IV да је

(2) $$\begin{cases} \cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} \\ \cos c = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} \end{cases}$$

Кад сменимо (2) у (1), добијамо:

$\cos b = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}.$ То је даље:

$$\cos b = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$\boxed{\cos b = \cot g\alpha \cot g\gamma.}$$

Неперово правило

Свих ових 6 образаца могу се изразити овим правилом које се зове Неперово правило:

Косинус сваког елемента (сем правог угла) једнак је:

1) производу синуса насрамних елемената или

2) производу котангената налеглих елемената, при чему се место страна правог угла морају узети њихови комплементни углови.

Да је ово Неперово правило тачно, видели смо при доказу VI обрасца.

Да га опробамо на I обрасцу.

I $\quad \cos b = \cos a \cos c.$

Кад узмемо комплементне углове, биће:

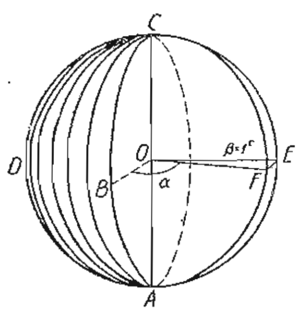
$$\cos b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right). \quad \text{Одатле је:}$$

$$\cos b = \sin a \sin c.$$

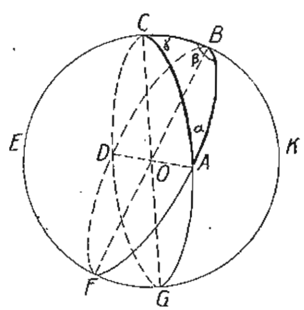
ПОВРШИНА СФЕРНОГ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

Сферни двоугао. — Површина коју ограничавају два велика лоптина круга зове се лоптин двоугао. Површина $ABCDA$ са слике 82 претставља један лоптин двоугао. Полукрузи лоптиних великих кругова зову се стране двоуглове. У двоуглу $ABCDA$ стране су ABC и ADC. Угао који заклапају равни у којима леже двоуглове стране зове се двоуглов угао.

Површина сферног двоугла. — Замислимо да је лоптин обим издељен на 360° и да су кроз сваки поделак повучени ве-



Сл. 82.



Сл. 83.

лики полукругови. Добили бисмо 360 лоптиних двоуглова чији су сви углови по 1 степен. Нека је један такав двоугао $AFCEA$.

Његова површина биће $\frac{1}{360}$ лоптине површине. Обележимо ту површину са p_{1°. Тада ће бити:

$$p_{1^\circ} = \frac{4R^2\pi}{360} = \frac{R^2\pi}{90}.$$

Узмимо сад двоугао $AECBA$. Нека је његов угао α. Он ће бити α пута већи од двоугла $AECFA$. Обележимо његову површину са p. Тада ће бити:

(1) $\qquad p = \frac{R^2\pi}{90}\cdot\alpha$ ако је угао дат у степенима.

Ако је угао дат у радијанима, површина ће бити:

$$p = \frac{R^2\pi}{\frac{\pi}{2}}\cdot\alpha \quad \text{тј.} \qquad p = 2R^2\alpha.$$

Површина сферног троугла. — Хоћемо да израчунамо површину сферног троугла ABC. Обележимо његову површину са p. Тада ће бити: (сл. 83).

$$p + DCBD = \text{двоугао } DCABD = \frac{R^2\pi\alpha}{90}.$$

$$p + ACEFA = \quad " \quad FABEF = \frac{R^2\pi\beta}{90}.$$

$$p + AGKBA = \quad " \quad GKCAG = \frac{R^2\pi\gamma}{90}.$$

Кад саберемо, добијамо:

(1) $\quad 3p + (DCBD + ACEFA + AGKBA) = (\alpha + \beta + \gamma)\cdot\frac{R^2\pi}{90}.$

Са слике видимо да је $DCBD = AFGA$. Зато можемо даље да пишемо:

$(p + AFGA + ACEFA + AGKBA) = 2R^2\pi$ (површи-полулопте), тј.

$p + (DCBD + ACEFA + AGKBA) = 2R^2\pi$. Одатле је:

(2) $\qquad DCBD + ACEFA + AGKBA = 2R^2\pi - p.$

Кад вредност из (2) сменимо у (1), добијамо:

$$3p + 2R^2\pi - p = (\alpha + \beta + \gamma).\frac{R^2\pi}{90}.$$

$$2p = (\alpha + \beta + \gamma).\frac{R^2\pi}{90} - 180\,\frac{R^2\pi}{90}$$

$$2p = (\alpha + \beta + \gamma - 180).\ R^2\frac{\pi}{90}$$

$$p = (\alpha + \beta + \gamma - 180).\ R^2\frac{\pi}{180}$$

То је образац за случај кад су углови дати у степенима. Ако су углови дати у радијанима, образац гласи овако:

$$p = (\alpha + \beta + \gamma - \pi).\ R^2$$

Површина правоуглог сферног троугла. — Ако је троугао правоугли, један угао је прав. Нека је то угао β. Тада изведени обрасци за површину гласе:

(I) $p = (\alpha + \gamma - 90).\ R^2 \dfrac{\pi}{180}$ ако су углови дати у степенима,

а (II) $p = (\alpha + \gamma - \dfrac{\pi}{2}).\ R^2$ ако су углови дати у радијанима.

Површина двоправоуглог сферног троугла. — У њему су два угла права, те ће горњи обрасци добити овај облик:

(I′) $p = R^2 \dfrac{\pi\alpha}{180}$ (углови у степенима)

(II′) $p = R^2\alpha$ (углови у радијанима).

Површина сферног троправоуглог троугла. — Ако је и трећи угао прав, горњи обрасци добијају овај облик:

$p = 90\ R^2 \dfrac{\pi}{180}$ тј. (I″) $p = R^2 \dfrac{\pi}{2}$ (степени)

$p = \dfrac{\pi}{2}.\ R^2$ тј. (II″) $p = R^2 \dfrac{\pi}{2}$ (радијани).

(Зашто су сад ова два обрасца једнака? Који је део лоптине површине површина сферног троправоуглог троугла? Да ли сви троправоугли на истој лопти имају једнаке површине?)

ВЕЖБАЊА

Израчунати површину сферног правоуглог троугла кад је:

1.	$R = 17\ cm$,	$\alpha = 25^0 14'$	$\gamma = 78^0 40'$	$\beta = 90^0$.
2.	„ 28 cm,	„ $56^0 23'$	„ $117^0 28'$	„ „
3.	„ 14 cm,	„ $125^0 28'$	„ $59^0 52'$	„ „
4.	„ 17,9 cm,	„ $147^0 28' 20''$	„ $100^0 23' 10''$	„ „
5.	„ 56,47 cm,	„ $117^0 40' 30''$	„ 90^0	„ „
6.	„ $17\frac{3}{7}\ dm$,	„ $56^0 28' 19''$	„ „	„ „
7.	„ 157,209 m,	„ $119^0 29' 36$	„ „	„ „
8.	„ 217,56 m,	„ 90^0	„ „	„ „
9.	„ 1,078 m,	„ „	„ „	„ „
10.	„ 24 cm,	„ $\frac{1}{5}\pi$	„ $\frac{2}{3}\pi$	„ $\frac{\pi}{2}$

РЕШАВАЊЕ СФЕРНОГ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

Како се решава сферни правоугли троугао, показаћемо на 6 главних случајева. У свима случајевима претпостављамо да је троугао обележен као на слици 81.

ПРВИ СЛУЧАЈ

Даће су стране правог угла $a = 70^0 20' 50''$, $c = 67^0 18' 23''$. *Решити тај троугао.* Знамо да је:

$$\cos b = \cos a \cos c.$$
$$\cos b = \cos 70^0 20' 50 \ \cos 67^0 18' 23''$$
$$\log \cos b = \log \cos 70^0 20' 50'' + \log \cos 67^0 18' 23''$$
$$\log \cos b = \overline{1},52675 + \overline{1},58636$$

$$77 \ldots\ldots 82^0 32'$$
$$\log \cos b = \overline{1},11311$$
$$\underline{66}$$
$$\underline{b = 82^0 32' 41''}$$

$$\overline{1},52675$$
$$\underline{\overline{1},58636}$$
$$\overline{1},11311$$

$$66 : 1,61 = 41$$

Сад ћемо израчунати углове:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{tg}a}{\sin c}$$
$$\log \mathrm{tg}\alpha = \log \mathrm{tg}\, 70^0 20' 50'' + \mathrm{colog} \sin 67^0 18' 23''$$
$$\log \mathrm{tg}\alpha = 0,44718 + 0,03500$$
$$\log \mathrm{tg}\alpha = 0,48218$$
$$\underline{181} \ldots\ldots\ldots 71^0 45' \qquad 37 : 0,71 = 52$$
$$37$$
$$\underline{\alpha = 71^0 45' 52''}$$

Сад ћемо тражити угао γ.

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{\mathrm{tg}\, c}{\sin a}$$
$$\log \mathrm{tg}\gamma = \log \mathrm{tg}\, 67^0 18' 23'' + \mathrm{colog} \sin 70^0 20' 50''$$
$$\log \mathrm{tg}\gamma = 0,37864 + 0,02606$$
$$\log \mathrm{tg}\gamma = 0,40470$$
$$\underline{60} \ldots\ldots\ldots 68^0 30'$$
$$10$$
$$\underline{\gamma = 68^0 30' 16''}$$

$$0,37864$$
$$\underline{0,02606}$$
$$0,40470$$

$$10 : 0,62 = 16$$

ДРУГИ СЛУЧАЈ

Дата је страна правог угла и њен налегли коси угао. — Решити троугао кад је $c = 52^0 24' 28''$, $\alpha = 47^0 8' 12''$.

Најпре ћемо израчунати гама.

$$\cos\gamma = \cos c \sin\alpha$$
$$\log\cos\gamma = \log\cos 52^\circ 24' 28'' + \log\sin 47^\circ 8' 12''$$
$$\log\cos\gamma = \overline{1},78535 + \overline{1},86509$$
$$\log\cos\gamma = \overline{1},65044$$
$$\gamma = 63^\circ 26' 24''$$

Да израчунамо сад страну a. Имамо:

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg}\gamma}$$
$$\log\sin a = \log\operatorname{tg} 52^\circ 24' 28'' + \operatorname{colog}\operatorname{tg} 63^\circ 26' 24$$
$$\log\sin a = 0,11357 + \overline{1},69887$$
$$\log\sin a = \overline{1},81244$$
$$\frac{40}{4} \ldots\ldots\ 40^\circ 29' \qquad 4 : 0,25 = 16$$
$$a = 40^\circ 29' 16''.$$

Сад ћемо израчунати хипотенузу b.

$$\cos b = \cos a \cos c$$
$$\log\cos b = \log\cos 40^\circ 29' 16'' + \log\cos 52^\circ 24' 28''$$
$$\log\cos b = \overline{1},88112 + \overline{1},78535$$
$$\log\cos b = \overline{1},66647$$
$$b = 62^\circ 21' 28''.$$

Проверавање добивених резултата

Знамо да је косинус у I квадранту позитиван, а у II негативан. Из обрасца $\cos b = \cos a \cos c$ видимо ово:

I $\cos b > 0$ Тада је $\cos a > 0$ и $\cos c > 0$ или $\cos a < 0$ и $\cos c < 0$.

То значи ово:

1) Ако је $a < 90^\circ$ и $c < 90^\circ$, тада мора бити и $b < 90^\circ$.
2) Ако је $a > 90^\circ$ и $c > 90^\circ$, и тада мора бити $b < 90^\circ$.

II $\cos b < 0$. То ће бити у ова два случаја:

1) $\cos a > 0$ $\cos c < 0$
2) $\cos a < 0$ $\cos c > 0$.

То значи ово:

1) Ако је $a < 90^\circ$, а $c > 90^\circ$, тада је $b > 90$.
2) Ако је $a > 90^\circ$, а $c < 90^\circ$, тада је $b > 90$.

Одатле се види ово:

Ако су обе стране правог угла мање од 90° и хипотенуза је мања од 90°; ако су обе стране правог угла веће од 90°, опет је хипотенуза мања од 90°; ако је једна страна правог угла већа од 90° а друга мања од 90°, хипотенуза је већа од 90°.

Да ли решења нашег задатка испуњавају горње услове? Да видимо.

Стране правог угла:

$$a = 40^\circ 29' 16'' < 90^\circ$$
$$c = 52^\circ 24' 28'' < 90^\circ$$

Мора бити $b < 90^\circ$. И збиља је $b = 62^\circ 21' 28'' < 90^\circ$.

Из обрасца $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\operatorname{tg} c}{\sin a}$ имамо:

$$(1) \qquad \sin a = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

Синус је позитиван у I и II квадранту. Наше стране су увек мање од 180°. Значи, у обрасцу (1) лева страна је увек позитивна То даље значи да разломак на десној страни мора увек да буде позитиван. То ће бити у ова два случаја:

1) $\operatorname{tg} c > 0$ и $\operatorname{tg}\gamma > 0$. Тада је $c < 90^\circ$ и $\gamma < 90^\circ$.
2) $\operatorname{tg} c < 0$ и $\operatorname{tg}\gamma < 0$. Тада је $c > 90^\circ$ и $\gamma > 90^\circ$.

Одатле се види ово:

Страна правог угла и њен насрамни угао увек су или обоје мањи од 90°, или обоје већи од 90°.

ТРЕЋИ СЛУЧАЈ

Решити сферни правоугли троугао, кад је дата једна страна правог угла (a) *и њен насрамни угао* (α).

Нека је $a = 140^\circ 20'$ и $\alpha = 125^\circ 10'$.

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin b}. \text{ Одатле је: } \sin b = \frac{\sin a}{\sin\alpha}.$$

Да би b постојало, мора бити

$\sin a < \sin\alpha$. Да проверимо то.

$$\sin a = \sin 140^\circ 20' = \sin(180^\circ - 39^\circ 40') = \sin 39^\circ 40'.$$
$$\sin\alpha = \sin 125^\circ 10' = \sin(180^\circ - 54^\circ 50') = \sin 54^\circ 50'.$$

Збиља је $\sin a < \sin\alpha$. Сем тога види се да је α између $(\pi - a)$ и a, тј. између $39^\circ 40'$ и $140^\circ 20'$.

$$\sin b = \frac{\sin a}{\sin\alpha}$$
$$\log\sin b = \log\sin 39^\circ 40' + \operatorname{colog}\sin 54^\circ 50'.$$
$$\log\sin b = \overline{1},80504 + 0,08752 \qquad \begin{array}{r} \overline{1},80504 \\ 0,08752 \\ \hline \overline{1},89256 \end{array}$$
$$\log\sin b = \overline{1},89256$$
$$b = 51^\circ 20' 12''.$$

Али и суплементна страна стране b има исти синус као и страна b. Зато имамо још једно решење:

$$\underline{b' = 180^0 - b = 128^0\,39'\,48''}$$

Сад ћемо израчунати страну c. Узећемо V образац:

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin c}$. Одатле је:

$$\sin c = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Због синуса на левој страни, мора бити:

$\operatorname{tg} a < \operatorname{tg}\alpha$ (по апсолутној вредности) и $\sin c > 0$ (пошто је c у I или II квадранту).

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 140^0\,20' = \operatorname{tg}(180^0 - 39^0\,40') = -\operatorname{tg} 39^0\,40'.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 125^0\,10' = \operatorname{tg}(180^0 - 54^0\,50') = -\operatorname{tg} 54^0\,50'.$$

$$\sin c = \frac{\operatorname{tg} 39^0\,40'}{\operatorname{tg} 54^0\,50'}.$$

$$\log \sin c = \log \operatorname{tg} 39^0\,40' + \operatorname{colog} \operatorname{tg} 54^0\,50'.$$

$$\log \sin c = \bar{1},91868 + \bar{1},84791. \qquad \begin{array}{r} \bar{1},91868 \\ \bar{1},84791 \\ \hline \bar{1},76659 \end{array}$$

$$\log \sin c = \bar{1},76659$$

$$\begin{array}{l} 42 \;.\;.\;.\; 35^0\,44' \\ \underline{17} \end{array} \qquad 17 : 0,29 = 58,6$$

$$\underline{c = 35^0\,44'\,58,6''}$$

Али и суплементна страна добивене стране c има исти синус као и страна c. Зато ћемо имати још једно решење за c:

$$\underline{c' = 180^0 - 35^0\,44'\,58,6'' = 144^0\,15'\,1,4''}$$

Сад ћемо израчунати угао γ. Употребићемо IV образац.

$$\sin \gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos a}.$$

Морамо бити $\cos\alpha < \cos a$ и оба косинуса морају бити једнако означени, пошто је γ у I или II квадранту, а ту је синус позитиван.

$\cos \alpha = \cos 125^0\,10' = -\cos 54^0\,50'$.

$\cos a = \cos 140^0\,20' = -\cos 39^0\,40'$. Оба услова су испуњена.

$$\log \sin \gamma = \log \cos 54^0\,50' + \operatorname{colog} \cos 39^0\,40'.$$

$$\log \sin \gamma = \bar{1},76039 + 0,19496 \qquad \begin{array}{r} \bar{1},76039 \\ 0,19496 \\ \hline 1,95535 \end{array}$$

$$\log \sin \gamma = \bar{1},95535$$

$$\frac{1}{4} \;.\;.\;.\;.\;.\; 64^0\,27'$$

$$\underline{\gamma = 64^0\,27'\,40''}. \qquad 4 : 0,10 = 40.$$

Али и суплементни угао добивеног угла има исти синус. Зато имамо још једно решење за γ:

$$\gamma' = 180^0 - 64^0\,27'\,40'' = 115^0\,32'\,20''.$$

Како да поређамо ова решења?

$$\begin{array}{ll} a = 140^0\,20' & \alpha = 125^0\,10' \\ c = 35^0\,44'\,58,6'' & \gamma = 64^0\,37'\,40'' \\ b = 51^0\,20'\,12'' & \beta = 90^0 \end{array}$$

Видели смо ове контроле:

I — Ако су стране правог угла исте врсте, хипотенуза је мања од 90^0.

(Значи обе стране веће, или обе стране мање од 90^0).

II — Ако су стране правог угла разних врста, хипотенуза је већа од 90^0.

III — Свака страна правог угла и њен наспрамни угао су исте врсте.

Подаци које смо горе поређали не могу да издрже II контролу. Мора бити $b > 90^0$. Зато ћемо овако поређати добивена решења:

$$\left.\begin{array}{ll} a = 140^0\,20' & \alpha = 125^0\,10' \\ c = 35^0 44^0 58,6'' & \gamma = 64^0\,27'40'' \\ b = 128^0 39' 48'' & \beta = 90^0 \end{array}\right\}\mathrm{I} \quad \left.\begin{array}{ll} a = 140^0\,20' & \alpha = 125^0\,10' \\ c = 144^0 15' 1,4'' & \gamma' = 115^0 32' 20'' \\ b = 51^0 20' 12'' & \beta = 90^0. \end{array}\right\}\mathrm{II}$$

Да ли се из I и II контроле види колико тупих страна може бити у сферном правоуглом троуглу? Изведи одатле нову контролу.

ЧЕТВРТИ СЛУЧАЈ

Дата је хипотенуза и једна страна правог угла. Решити сферни правоугли троугао кад је хипотенуза $b = 38^0\,40'$, $a = 160^0\,40'$.

Употребићемо образац $\cos c = \dfrac{\cos b}{\cos a}$.

Да би c постајало, мора бити по апсолутној вредности $\cos b$ мање од $\cos a$. Да проверимо је ли то овде случај.

$\cos b = \cos 38^0\,40'$

$\cos a = \cos 160^0\,40' = \cos(180^0 - 19^0\,20') = -\cos 19^0\,20'$.

Збиља је по апсолутној вредности $\cos b$ мање од $\cos a$.

$$\cos c = \frac{\cos 38^0\,40'}{(-\cos 19^0\,20'.)}$$

$$-\cos c = \frac{\cos 38^0\,40'}{\cos 19^0\,20'}$$

$$-\cos c = \cos(180^0 - c)$$

$$\cos(180^0 - c) = \frac{\cos 38^0\ 40'}{\cos 19^0\ 20'}$$

$$\log\ \cos(180 - c) = \log\ \cos 38^0\ 40' + \text{colog}\ \cos\ 19^0\ 20'$$

$$\log\ \cos(180 - c) = \overline{1},89254 + 0,02521 \qquad \begin{array}{r} \overline{1},89254 \\ 0,02521 \\ \hline \end{array}$$

$$81 \ldots .\ 34^0\ 9'' \qquad \overline{1},91775$$

$$\log\ \cos(180^0 - c) = \overline{1},91775$$

$$6 \qquad 6\ .\ 0,14 = 42,\ 9$$

$$180^0 - c = 34^0\ 9'\ 42,\ 9''$$

$$\underline{c = 145^0\ 50'\ 17,\ 1''}$$

Сад ћемо израчунати угао γ.

$$\sin \gamma = \frac{\sin c}{\sin b}$$

Гама је у I или II квадранту. У оба случаја мора бити $\sin\gamma$ веће од нуле. То значи да морају $\sin c$ и $\sin b$ бити једнако означени. Пошто су c и b у I или II квадранту, тај услов је испуњен.

Сем тога мора бити по апсолутној вредности $\sin c$ мање од $\sin b$. Значи, b мора бити између c и $180^0 - c$.

$$c = 145^0\ 50'\ 17,\ 1'' \qquad 180^0 - c = 32^0\ 9'\ 42{,}9''.$$

$$b = 38^0\ 40'$$

Види се да је b збиља између $(180^0 - c)$ и c.

Постављени услов је задовољен.

$$\log\ \sin\ \gamma = \log\ \sin\ 145^0\ 50'\ 17,\ 1'' + \text{colog}\ \sin\ 38^0\ 40'$$

$$\log\ \sin\ \gamma = \overline{1},93044$$

$$\underline{\gamma = 58^0\ 25'\ 46''} \qquad \underline{\gamma' = 121^0\ 34'14''}$$

Израчунаћемо сад коси угао α.

$$\cos\alpha = \frac{\text{tg}\, c}{\text{tg}\, b}$$

Мора бити апсолутна вредност тангенса c мања од апсолутне вредности тангенса b. Видели смо да је b између $(180^0 - c)$ и c. (Нацртај то на тригонометриског кругу). Значи да мора бити тангенс b већи од тангенса c.

$$\cos\alpha = \frac{\text{tg}\ 145^0\ 50'\ 17,\ 1''}{\text{tg}\ 38^0\ 40'}$$

$$\cos\alpha = -\frac{\text{tg}\ 34^0\ 9'\ 42,\ 9''}{\text{tg}\ 38^0\ 40'}$$

$$-\cos\alpha = \frac{\text{tg}\ 34^0 9' 42'',9}{\text{tg}\ 38^0 40'}$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = \frac{\text{tg}\ 34^0 9' 42'',9}{\text{tg}\ 38^0 40'}$$

$$\log\ \cos(180^0 - \alpha) = \log\ \text{tg}\ 34^0 9' 42{,}9'' + \text{colog}\ \text{tg}\ 38^0 40'$$

$$\log\ \text{tg}\ 34^0 9' 42{,}9'' = \overline{1},83163$$

$$\text{colog}\ \text{tg}\ 38^0 40' = \underline{0,09680}$$

$$\overline{1},92843$$

$$\log \cos(180^0 - \alpha) = \overline{1},92843$$

$$180 - \alpha = 31^0 59' 53{,}8''$$

$$\underline{\alpha = 148^0 0' 6{,}2''}$$

Проверавање:

$a = 160^0 40'$ $\qquad \alpha = 148^0 0' 6{,}2''$

$c = 145^0 50' 17{,}1''$ $\qquad \gamma = 121^0 34' 14''$

$b = 38^0 40'$ $\qquad \beta = 90^0$

Сви контролни услови су задовољени. Добро је. Зашто одбацујемо решење $\gamma = 58^0 25' 46''$?

ПЕТИ СЛУЧАЈ

Дата је хипотенуза и један коси угао. Решити сферни правоугли троугао кад је $b = 112^0$, $\alpha = 60^0$.

Израчунаћемо најпре страну a.

$$\sin\ \alpha = \frac{\sin a}{\sin b}$$

$$\sin\ a = \sin\ \alpha\ \sin\ b$$

$$\sin\ a = \sin 60^0\ \sin\ 112^0$$

$$\sin\ a = \sin\ 60^0\ \sin\ 68^0$$

$$\log\ \sin\ a = \log\ \sin\ 60^0 + \log\ \sin\ 68^0$$

$$\log\ \sin\ a = \overline{1},93753 + \overline{1},96717 \qquad \begin{array}{r} \overline{1},93753 \\ \overline{1},96717 \\ \hline \end{array}$$

$$\log\ \sin\ a = 1{,}90470 \qquad \overline{1},90470$$

$$\frac{62}{8} \ldots\ldots\ 53^0 24'$$

$$\underline{a = 53^0 24' 50''} \qquad 8 : 0{,}16 = 50$$

$$\underline{a' = 180^0 - a = 126^0 35' 10''}$$

Сад ћемо израчунати страну c.

$$\cos\alpha = \frac{\text{tg} c}{\text{tg} b}.\ \text{Одатле је:}$$

$$\text{tg}\ c = \text{tg}\ b\ \cos\ \alpha$$

$$\text{tg}\ c = \text{tg}\ b\ \cos\ \alpha$$

$$\operatorname{tg} c = -\operatorname{tg} 68^0 \cos 60^0$$
$$\operatorname{tg} (180^0 - c) = \operatorname{tg} 68^0 \cos 60^0$$
$$\log \operatorname{tg} (180^0 - c) = \log \operatorname{tg} 68^0 + \log \cos 60^0$$
$$\log \operatorname{tg} (180^0 - c) = 0{,}39359 + \bar{1}{,}69897 \qquad \begin{array}{r} 0{,}39359 \\ \underline{\bar{1}{,}69897} \\ 0{,}09256 \end{array}$$
$$\log \operatorname{tg} (180^0 - c) = 0{,}09256$$
$$\begin{array}{l} \underline{41} \ldots\ldots 51^0 3' \\ 15 \end{array} \qquad 15 : 0{,}43 = 34{,}9$$
$$\underline{180^0 - c = 51' 3' 34{,}9''}$$
$$\underline{c = 128^0 56' 25{,}1''}$$

Сад ћемо израчунати угао гама.

$$\cos b = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \gamma$$
$$\cos b = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma} \quad \text{Одатле је:}$$
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\cos b \operatorname{tg} \alpha}$$
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\cos 112^0 \operatorname{tg} 60}$$
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{(-\cos 68^0) \operatorname{tg} 60^0}$$
$$\operatorname{tg} (180^0 - \gamma) = \frac{1}{\cos 68^0 \operatorname{tg} 60^0}$$
$$\log \operatorname{tg} (180^0 - \gamma) = \operatorname{colog} \cos 68^0 + \operatorname{colog} \operatorname{tg} 60^0$$
$$\log \operatorname{tg} (180^0 - \gamma) = 0{,}42642 + \bar{1}{,}76144 \qquad \begin{array}{r} \bar{1}{,}76144 \\ \underline{0{,}42642} \\ 0{,}18786 \end{array}$$
$$\log \operatorname{tg} (180^0 - \gamma) = 0{,}18786$$
$$\begin{array}{l} \underline{76} \ldots . 57^0 1' \\ 10 \end{array} \qquad = 10 : 0{,}46 = 21{,}7$$
$$180 - \gamma = 57^0 1' 21{,}7''$$
$$\underline{\gamma = 122^0 58' 38{,}3''}$$

Резултат:

$$a = 53^0 24' 50'' \qquad a' = 126^0 35' 10'' \qquad \alpha = 60^0$$
$$c = 128^0 56' 25{,}1 \qquad \gamma = 122^0 58' 38{,}3''$$
$$b = 112^0 \qquad \beta = 90^0.$$

Пошто је хипотенуза $b > 90^0$ и $c > 90^0$, мора бити $a < 90^0$. Зато одбацујемо решење a'.

ШЕСТИ СЛУЧАЈ

Дата су два коса угла. Решити сферни правоугли троугао кад су дати углови $\alpha = 75^0\ 20'$ *и* $\gamma = 42^0 30'$.

Наћићемо најпре хипотенузу.

$$\cos b = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \gamma$$
$$\cos b = \operatorname{cotg} 75^0 20' \operatorname{cotg} 42^0 30'.$$
$$\log \cos b = \operatorname{logcotg} 75^0\ 20' + \log \operatorname{cotg} 42^0\ 30$$
$$\log \cos b = \bar{1}{,}41784 + 0{,}03795 \qquad \begin{array}{r} \bar{1}{,}41784 \\ \underline{0{,}03795} \\ \bar{1}{,}45579 \end{array}$$
$$89 \ldots\ldots 73^0\ 24'$$
$$\log \cos b = \underline{\bar{1}{,}45579}$$
$$10 \qquad\qquad 10 : 0{,}71 = 14$$
$$\underline{b = 73^0\ 24'\ 14''}$$

Сад ћемо наћи страну a.

$$\cos \alpha = \cos a \sin \gamma$$
$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}$$

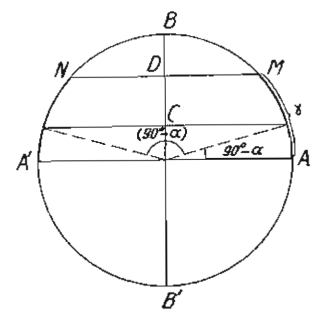
Мора бити $\cos \alpha < \sin \gamma$ по апсолутној вредности.

Изразићемо косинус синусом, да бисмо могли упоређивати углове α и γ.

$$\cos \alpha < \sin \gamma$$
$$\sin (90^0 - \alpha) < \sin \gamma$$

Нацртајмо та два синуса (сл. 84). Нека је $OC = \sin (90 - \alpha)$ и $OD = \sin \gamma$. Види се да је тада угао γ између угла $(90 - \alpha)$ и суплементног угла $[180 - (90^0 - \alpha)] = (90^0 + \alpha)$. Мора бити:

$$90^0 - \alpha < \gamma < 90^0 + \alpha \qquad \text{тј.}$$
$$90^0 < \gamma + \alpha$$
$$90^0 < (42^0\ 30' + 75^0\ 20')$$
$$(90^0 - 75^0\ 20') < 42^0\ 30' < (90^0 + 75^0\ 20')$$



Сл. 84.

Оба услова су испуњена.

$$\cos a = \frac{\cos 75^0\ 20'}{\sin 42^0\ 30'}$$
$$\log \cos a = \log \cos 75^0\ 20' + \operatorname{colog} \sin 42^0\ 30'$$
$$\log \cos a = \bar{1}{,}40346 + 0{,}17032 \qquad \begin{array}{r} \bar{1}{,}40346 \\ \underline{0{,}17032} \\ \bar{1}{,}57378 \end{array}$$
$$89 \ldots\ldots 67^0\ 59'$$
$$\log \cos a = \underline{\bar{1}{,}57378}$$
$$11 \qquad\qquad 11 : 0{,}52$$
$$\underline{a = 67^0\ 59'\ 21''}$$

Сад ћемо израчунати страну c.

$$\cos \gamma = \cos c \sin \alpha$$

$$\cos c = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}$$

$$\cos c = \frac{\cos 42^\circ 30'}{\sin 75^\circ 20'}$$

$$\log \cos c = \log \cos 42^\circ 30' + \operatorname{colog} \sin 75^\circ 20'$$

$$\log \cos c = \bar{1},86763 + 0,01439$$

$$\begin{array}{r} \bar{1},86763 \\ 0,01439 \\ \hline \bar{1},88202 \end{array}$$

$$12 \ldots\ldots\ldots 40^\circ\ 20'$$

$$\log \cos c = \bar{1},88202 \qquad \overline{10} \qquad 10 : 0,18 = 55,6$$

$$c = 40^\circ\ 20'\ 55,6''$$

Да проверимо резултате:

$a = 67^\circ\ 59'\ 21''$	$\alpha = 75^\circ\ 20'$
$c = 40^\circ\ 20'\ 55,6''$	$\gamma = 42^\circ\ 30'$
$b = 73^\circ\ 24'\ 14''$	$\beta = 90^\circ$

На крају III случаја, на страни 87 извесно си већ извео закључак да у сферном правоуглом троуглу могу бити или две тупе стране или ниједна. Из добивених решења у овоме случају видимо ово:

1) Тупих страна нема.

2) Стране a и c су исте врсте. Хипотенуза b је мања од 90°.

3) $a < 90^\circ$ и $\alpha < 90^\circ$; $c < 90^\circ$ и $\gamma < 90^\circ$. Добро је.

ВЕЖБАЊА

Решити сферни правоугли троугао кад је:

1. $a = 56^\circ\ 20'$ $c = 78^\circ\ 43'$ **2.** $a = 115^\circ\ 20'$ $c = 130^\circ\ 17'$

3. $a = 63^\circ\ 40'$ $c = 135^\circ\ 18'$ **4.** $a = 147^\circ\ 30'$ $c = 80^\circ\ 30'$

5. $a = 47^\circ\ 35'\ 40''$ $c = 110^\circ 23' 50''$ **6.** $a = 112^\circ\ 40' 40''$ $c = 32^\circ\ 18' 10''$

7. $c = 47^\circ\ 18'$ $\alpha = 70^\circ\ 40'$ **8.** $c = 112^\circ\ 12'$ $\alpha = 140^\circ\ 20'$

9. $c = 38^\circ\ 14'$ $\alpha = 113^\circ\ 20'$ **10.** $c = 125^\circ\ 27'$ $\alpha = 57^\circ\ 37'$

11. $c = 49^\circ\ 23'\ 14''$ $\alpha = 156^\circ\ 42' 30''$ **12.** $c = 163^\circ\ 12'\ 20''$ $\alpha = 70^\circ\ 20' 20''$

13. $a = 47^\circ\ 20'$ $\alpha = 74^\circ\ 30'$ **14.** $a = 110^\circ\ 12'$ $b = 130^\circ\ 42'$

15. $a = 149^\circ 20' 30''$ $\alpha = 172^\circ 10' 10''$ **16.** $a = 73^\circ 23' 14''$ $b = 80^\circ 32' 40''$

17. $a = 152^\circ 17' 37''$ $\alpha = 125^\circ 14' 45''$ **18.** $a = 79^\circ 29' 37''$ $b = 24^\circ 37' 29''$

19. $a = 47^\circ\ 32'$ $b = 72^\circ\ 45'$ **20.** $a = 128^\circ\ 30,$ $b = 135'\ 47'$

21. $a = 73^\circ\ 28'$ $b = 143^\circ\ 14'$ **22.** $a = 115^\circ\ 20'$ $b = 75^\circ\ 10'$

23. $a = 53^\circ\ 10' 17''$ $b = 114^\circ 49' 50''$ **24.** $a = 138^\circ\ 14'\ 45''$ $b = 37^\circ 7' 28''$

25. $b = 52^\circ\ 18'$ $\alpha = 43^\circ\ 20'$ **26.** $b = 115^\circ\ 20'$ $\gamma = 32^\circ\ 24'$

27. $b = 137^\circ\ 25'$ $\alpha = 43^\circ\ 20'$ **28.** $b = 75^\circ\ 18'$ $\gamma = 150^\circ\ 10'\ 10''$

29. $b = 70^\circ 19' 28''$ $\alpha = 112^\circ 12' 12''$ **30.** $b = 147^\circ 47' 47''$ $\gamma = 53^\circ 50' 38''$

31. $\alpha = 75^\circ\ 15'$ $\gamma = 56^\circ\ 20'$ **32.** $\gamma = 110^\circ\ 20'$ $\alpha = 135^\circ\ 20'$

33. $\alpha = 73^\circ\ 54'$ $\gamma = 137^\circ\ 14'$ **34.** $\gamma = 83^\circ\ 28'$ $\alpha = 156^\circ\ 40'$

35. $\alpha = 47^\circ 20' 35''$ $\gamma = 117^\circ 18' 27''$ **36.** $\gamma = 71^\circ 17' 54''$ $\alpha = 119^\circ 19' 45''$

37. — Из датих шест образаца за решавање сферног правоуглог троугла изведи обрасце за решавање сферног двоправоуглог троугла.

38. — Како би изгледали ти обрасци кад би се применили на троправоугли сферни троугао?

39. — Ако је сферни правоугли троугао равнокрак, морају ли му коси углови бити једнаки? Докажи то.

40. — Из датих образаца изведи обрасце за решавање сферног равнокрако-правоуглог троугла.

41. — Израчунај површину троугла из вежбања 5.

42. — Исто за вежбање 6.

43. — Исто за вежбање 23.

44. — Може ли у сферном правоуглом троуглу једна страна правог угла имати 90°? Одакле се то види?

45. — Земља није ни лопта, ни елипсоид. Она је спљоштена на половима. Полупречник земљин на екватору износи 6356,909 km. Полупречник земљин за поједина места израчунава се по овоме обрасцу:

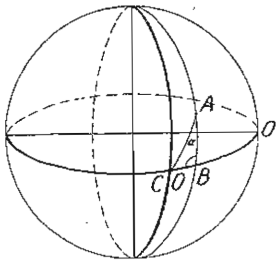
$$\log R = 9{,}9992695 + 0{,}0007324 \cos 2\varphi - 0{,}0000019 \cos 4\varphi$$

(φ је грчко слово фи и претставља у овоме обрасцу географску ширину места на коме хоћемо да израчунамо земљин полупречник).

Израчунај земљин полупречник за Београд, кад је географска ширина $44^\circ 48' 5''$.

45. — Израчунај земљин полупречник код Загреба, кад је географска ширина Загреба $45^\circ 48' 54''$.

46. — Израчунај земљин полупречник за Љубљану, кад она има географску ширину $46^0 2' 58''$.



Сл. 85.

47. — Брод полази из места A (сл. 85) чија је географска ширина $\widehat{BA} = \varphi = 42^0 20'$. са курсом од $\alpha = 35^0 18'$ у југозападном правцу. На којој географској дужини λ мора он пресећи екватор?

(Морнари зову курс онај угао, што га правац пута њиховог брода заклапа с меридијаном што пролази кроз место из кога они полазе. Како се бродови крећу увек по обиму великих кругова, то имаш правоугли троугао CAB с правим углом код B (пошто меридијан сече екватор под правим углом). — (Да ли кроз свако место пролази меридијан?)

48. — Из Лисабона (географска ширина $+ 38^0 44'$, географска дужина $9^0 19'$), одлази брод на југозапад с курсом од $42^0 15'$. Где ће пресећи екватор?