Универзитет у Београду
Математички факултет

Марија Ивановић

Теорија игара -
Игре тражења и игре сусретања

Дипломски – мастер рад

Б е о г р а д
2012.

Ментор:	Проф. др Ђорђе Дугошија Математички факултет у Београду
Коментор:	Проф. др Милан Дражић Математички факултет у Београду
Члан комисије:	Доц. др Зорица Станимировић Математички факултет у Београду

Датум одбране: ______________________

Резиме:

У кратком уводном делу приказан је историјат теорије игара као и класификација игара. Наведена је и основна фон Нојманова теорема о матричним играма, а као пример дата је игра звана дилема затвореника. Друго поглавље посвећено је играма тражења на правој, графу и дрвету. У трећем поглављу обрађене су игре сусретања на правој са и без додатних ограничења. У четвртом поглављу приказано је уопштење у коме није познато да ли скривач жели да буде пронађен. У петом поглављу представљен је проблем сусретања за дводимензионални простор.

Кључне речи: Теорија игара, Игре тражења, Игре сусретања.

Abstract:

A short introductory section reviews the history of game theory and the classification of games. After is given the basic von Neumann's theorem on matrix games, and as an example a game called the prisoner dilemma. The second chapter is devoted to the search games on a line, graph and tree. The third chapter deals with the rendezvous game on the line with and without additional constraints. In the fourth chapter is given generalization of problem where is not known if hider wants to be found. In the fifth chapter is presented rendezvous problem of the two-dimensional space.

Key words: Game theory, Search theory, Rendezvous theory

ПРЕДГОВОР

Рад се састоји из шест поглавља и списка литературе.

Уводно и прво поглавље садрже, поред основних информација о настанку и развоју теорије игара као области у математици, дефиниције, класификацију и основне податке потребне за даљи рад.

Игре тражења и игре сусретања тема су другог и трећег поглавља.

Четврто поглавље представља везу између игара тражења и игара сусретања на правој. Игре сусретања у дводимензионалном простору као додатак представљене су у петом поглављу. Закључак је изложен у последњем поглављу заједно са списком литературе.

Увод

Теорија игара представља грану математике која своју примену налази у многим областима нашег живота. Игре попут шаха, покера, фудбала, компјутерских игара се могу представити математичким моделом који играчима може сугерисати како да се понашају да би постигли најбољи резултат. Наведене игре се користе као разонода али права примена теорије игара је у социологији, економији, биологији, инжењерингу, политичким наукама, рачунским наукама, психологији и другим областима свакодневног живота. Преговори, такмичење међу фирмама за превласт на тржишту, пласирање новог бренда само су неке од примена ове области.

Неки проблеми из теорије игара спомињу се још у V веку ове ере. Наиме, збирка древне традиције и закона, *The Babylonian Talmud,* формирана током првих пет векова нове ере, која служи као основа јеврејске вере, кривичног и грађанског права садржи, између осталог, проблем тзв. брачног уговора у коме се наводи следеће: Човек који је за живота склопио брачни уговор три пута, након смрти, својим женама оставља по 100, 200 односно 300 тадашњих новчаних јединица (скраћено н.ј). У случају да укупно наслеђе износи само 100 н.ј тада се међу женама сугерише једнака подела тог наслеђа, док је за укупно наслеђе од 300 н.ј расподела пропорционална првобитном правилу и износи 50, 100 и 150 н.ј. Мистерија настаје када је укупно наслеђе 200 н.ј. које се распоређује тако да жене добијају по 50, 75 и 75 н.ј. Дуго се постављало питање, како је дефинисна последња подела и да ли је она коректна. Проблем је демистификован тек 1985.год. када се дошло до закључка да свака подела одговара језгру коректно дефинисане кооперативне игре.

Са друге стране, прве забележене дискусије о теорији игара су из 1713.год. када је *James Waldegrave* у свом писму написао прву познату минимакс мешовиту стратегију за каратшку игру *Le Her*. Следи рад *Augustin Cournot*-а на тему дуопола објављен 1838.год. који садржи концепт решења једне верзије Нешове равнотежне тачке, затим рад *Ernst Zermelo*-а који нуди одговор на питање да ли у шаху бели играчи могу увек да обезбеде победу односно нерешену игру, па радови *Emil Borel*-а из периода 1921-1927. када је објављена прва модерна формулација мештовите стратегије односно минимакс решење игре за два играча са две или више могућих стратегија. *Borel* је у почетку тврдио да игре са више могућих стратегија немају минимакс решење да би 1927.год ово оставио као отворено питање јер сам решење није могао да пронађе. *John von Neumann* 1928.год. објављује доказ минимакс теореме где доказује да се за сваку игру са нултом сумом за два играча и коначним бројем стратегија може наћи победник, уз то да ако су дозвољене мешовите стратегије, постоји тачно једно решење. *John Von Neumann* се иначе сматра творцем теорије игара, а књига коју је написао у сарадњи са економистом *Oskar Morgenstern*-ом, „Теорија игара и понашање у економији" [25] се наводи као прва такве врсте.

Значајан допринос, поред поменутих аутора, имали су *John Nash* који је развио *Nash equilibrium* и *Thomas Schelling* коме је дело *The Strategy of Conflict* [28] донело Нобелову награду, затим *John Owen*, *Shmuel Gal*, *Steve Alpern* и још многи други.

1. ТЕОРИЈА ИГАРА – ОСНОВНИ ПОЈМОВИ, ДЕФИНИЦИЈЕ И ПОДЕЛА -

Под појмом игре подразумевамо модел реалне конфликтне ситуације са једним или више учесника. Теорију игара дефинишемо као научну дисциплину за решавање проблема конфликтних ситуација. Игру могу чинити један или више играча, тимови, групе, предузећа. Поред њих, на исход игре могу да утичу и други фактори који ту игру описују. Учесник игре, када на њега дође ред да игра, повлачи потез који се састоји у избору елемента из неког скупа. Сваки учесник располаже неком информацијом о томе шта други могу да изаберу и шта им је циљ, односно колико ће свако добити након повучених потеза, тј. по завршетку игре. Основно питање у теорији игара је које потезе учесници треба да повлаче да би остварили свој циљ и шта ће бити резултат ако свако игра најбоље могуће. Циљ игре се дефинише функцијом исплате која представља нумерички израз добитка односно губитка учесника неке игре. Поред потеза учесника, постоје и случајни потези који такође утичу на функцију исплате.

На почетку игре сваки играч има своју почетну позицију. На свакој позицији играч располаже скупом различитих алтернатива (скуп алтернатива обележавамо са $a = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$) које ће га довести до краја игре, односно до наредне позиције. Избор једне од алтернатива називамо потезом. Играч своје потезе бира од почетка до краја игре а изабрани низ називамо пут. При сваком понављању игре, играч може да бира друге потезе уколико му скуп алтернатива то дозвољава и да формира другачије путеве, нпр: (a_2, a_4, a_5, a_{12}), (a_3, a_4, a_7, a_{12}). Пут који играч изабере од почетка до краја игре називамо стратегијом и обележавамо са $A_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, .., a_{i_m}), a_{i_k} \in a, i_k = 1, 2, .., n$. Стратегија представља централни појам теорије игара и њом се унапред дефинишу могући избори различитих алтернатива од стране играча за које се они могу определити у сваком стадијуму игре и за сваку могућу историју игре од њеног почетка до њеног краја. Стратегија мора да садржи комплетан план који ће узети у обзир све случајеве који се могу десити у току игре и да предвиди исход за сваку информацију која би се могла добити у току игре. Приликом формирања стратегије од играча се очекује да размишљају рационално и да доносе одлуке које су најбоље за њих. У сваком стадијуму игре играч има могућност да размисли о свом наредном потезу или да пре самог почетка игре испланира, независно од потеза осталих учесника игре, како ће се игра одвијати до краја. Скуп свих стратегија једног играча називамо простором стратегија.

Постоје различите врсте игара при чему се као критеријуми за класификацију узимају број учесника, број потеза учесника, доступност информација, функција исплата и други. Да би се формирао модел неке конфликтне или кооперативне ситуације неопходно је учешће најмање два учесника док постојање три или више учесника отвара могућност стварања тзв. коалиција, односно могућности да се играчи усклађујући своје интересе координисано опредељују у избору стратегија. Најчешће се проучавају игре са два играча обзиром да је са већим бројем играча проблем моделирања сложенији док игре са једним играчем спадају у екстремне случајеве.

У зависности од броја стратегија разликујемо коначне и бесконачне игре. Игре у којима учесници имају право на само један потез називамо једнопотезним (енг. *one-shot*), у супротном вишепотезним играма. Код игара које се понављају играчи имају могућност да се предомисле и да при сваком понављању бирају другачије потезе. Уколико се одређени потези бирају са вероватноћом $p = 1$ такву стратегију називамо чистом стратегијом (енг. *pure strategy*) док су мешовите стратегије (енг. *mixed strategy*) оне стратегије у којима се чисте стратегије $(a_{i_1}, .., a_{i_m})$ комбинују са вероватноћом

$$p = \{(p_1, p_2, .., p_m) \in R^m \mid \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \forall i = 1,..,m\},\ s = p_1 a_{i_1} + p_2 a_{i_2} + .. + p_m a_{i_m}.$$

Тотално мешовитом стратегијом дефинише се стратегија у којој играч свим својим чистим стратегијама додељује строго позитивну вероватноћу.

Стратегију која *i*-том играчу одређује који потез из скупа алтернатива да направи у датом тренутку обележавамо са s_i. Кажемо да игра има стратегију $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ ако су са $s_1, s_2, .., s_n$ обележене стратегије свих *n* играча. Ознаку s_{-i} користимо за стратегију игре која не садржи стратегију *i*-тог играча. Оптималном стратегијом сматрамо ону стратегију играча која му при вишеструком понављању игре обезбеђује максимални могући средњи добитак. Добитак који *i*-ти играч осваја играњем стратегије A_i одређен је функцијом исплате *f*, тј. кажемо да је *i*-ти играч добио износ $f_i = f(A_i)$. Концепт решења игре и оптималних избора играча јасан је у само малом броју конфликтних ситуација.

Према карактеру функције плаћања све игре делимо на игре са нултом сумом[1] (енг. *zero-sum*) и игре са ненултом сумом (енг. *nonzero-sum*). Игра са нултом сумом представља игру у којој сваки играч гарантује одређени износ (исплату) као исход игре независно од осталих играча и њихових стратегија тако да победник игре добија све загарантоване износе док су поражени на губитку за износ који су гарантовали а укупна сума исплата свих учесника игре износи нула,

$$\sum_{i=1}^{n} f(A_1, A_2, ..., A_n) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i) = 0.$$

Односно „да би неко победио у игри, неко други мора да изгуби“. Поред овог, загарантованог износа, нема других трошкова или добитака. Игре у којима су интереси играча сукобљени називамо антагонистичким играма. Игре са ненултом сумом често немају оптималну стратегију и дефинишу се као игре код којих се апсолутне вредности сума позитивних и сума негативних исплата разликују, односно сума свих исплата није једнака нули. Игра са ненултом сумом са n играча се додавањем једног играча може превести на игру са нултом сумом са $(n+1)$-им играчем.

У зависности од међусобног односа играча, све игре делимо на кооперативне и некооперативне. Кооперативне игре представљају такву врсту игара у којима играчи формирањем коалиције и усклађивањем избора појединачних стратегија имају за циљ постизање најповољнијих резултата за коалицију којој припадају. Уколико је сваки играч изабрао стратегију тако да ниједан не може да профитира променом своје стратегије под претпоставком да остали играчи не мењају своје стратегије тада кажемо да тренутни скуп изабраних стратегија, и одговарајућих добитака представља Нешов еквилибријум (енг. *Nash equilibrium*). Односно концепт решења игре у коме је сваки играч донео најбољу могућу одлуку узевши у обзир одлуке свих осталих играча називамо равнотежном стратегијом. Код формирања равнотежних стратегија треба узети у обзир то да оне не морају постићи највећу збирну добит за све играче. Често играчи могу да повећају своју добит ако би некако могли да се договоре око симултане промене своје стратегије. Пример таквих договора је код конкурентних трговаца. Уколико у току игре не постоји координација у понашању од стране учесника, за такву игру кажемо да је некооперативна[2], тј. антагонистичка.

Једна од класификација игара зависи од доступности информација па тако разликујемо игре код којих не постоји потпуна информисаност играча о потенцијалним одговорима противника на њихов избор појединачних стратегија за који је

[1] Наведени тип игара први је поменуо *Rufus Isaacs* [22] 60их година прошлог века а на њиховом развоју су радили *S. Alpern* [1], *J.G. Foreman* [32] и *M. Zelinkin* [33]. Највећи допринос је имао *S. Gal* [18].

[2] *John Nash*, *John Harsanyi* и *Reinhard Selten* су 1994. године добили Нобелову награду из економије за рад у области некооперативне теорије игара.

карактеристично да се резултат свих потеза обрачунава тек на крају игре, када се одигра предвиђени број потеза, односно реализује једна партија. Наведени тип игара има екстензивну форму (енг. *Extensive form*) и обично се представља преко одговарајућег стабла. Други поступак представљања и анализирања игре примењује се у ситуацији тзв. пуне информисаности о потенцијалним резултатима одабраних стратегија од стране играча. Код овакве врсте игре, коју називамо игром у нормалној форми за све алтернативне комбинације одабраних стратегија од стране играча унапред су позната плаћања, односно резултат игре. Поред екстензивне форме, игре могу имати коалициону и стратегијску форму. Код коалиционих модела подаци о стратегијама су небитни, битне су коалиције и вредности тих коалиција. Претпоставља се да свака коалиција може да гарантује својим члановима одређени износ, који називамо вредност коалиције. Коалиционе игре припадају кооперативној теорији, и једно од главних питања је како ће се коначни исход поделити у гранд коалицији коју чине сви играчи. Минимум вредности који ће свака коалиција примити називамо jezgro (енг. *core*). До сада је дефинисано више начина поделе укупне вредности међу играчима а неки од њих су Шеплијева вредност (енг. *Shapley value*) и језгро (енг. *nucleus*). Основни елементи стратегијског модела су стратегије и исходи тих стратегија. Стратегијски модел је формиран тако да сваки играч из скупа алтернатива бира једну а исход игре зависи од скупа свих изабраних стратегија. Приликом избора, сваки играч размишља о потезима других играча и њиховим могућим стратегијама како би на основу укупног утиска себи изабрао најповољнију стратегију. Играчи бирају своје стратегије истовремено. Након избора стратегија игра се завршава и сваки играч добија одређену добит. Коначна добит сваког играча зависи од свих изабраних стратегија. Стратегијски модели игре се још називају и нормалним моделима.

Анализираћемо најједноставнију игру са два играча чији су интереси директно супротстављени. Обојици играча познати су скупови могућих избора X и Y, као и функција плаћања, $f : X \times Y \to R$. Игра има прост ток. Први играч бира елемент x из свог скупа могућих избора X. Други играч, не знајући шта је први изабрао, бира један елемент y из свог скупа могућих избора Y. Затим први играч добија износ $f(x, y)$ а други $-f(x, y)$. Циљ сваког играча је да добије што више. Како је збир добитака нула, колико један од играча добије, толико други изгуби. Стога је циљ другог играча, заправо, да први играч добије што мање. Овакав тип игре је антагонистички, односно ово је игра са нултом сумом за два играча. Први играч може себи да гарантује добитак u ако је за неко $x \in X$, $f(x, y) \geq u, \forall y \in Y$. Највећи добитак који може да оствари први играч, без обзира како је други играо, је оптимална вредност проблема

$$\max u \quad \text{п.о.} \quad x \in X \ \text{ и } \ f(x, y) \geq u, \forall y \in Y \tag{1}$$

Слично, други играч може да ограничи добитак првог играча на оптмалну вредност проблема

$$\min v \quad \text{п.о.} \quad y \in Y \ \text{ и } \ f(x, y) \leq v, \forall x \in X \tag{2}$$

Ако су (x,u) и (v, y) произвољне допустиве тачке проблема (1) и (2) онда је и $u \leq f(x, y)$ и $f(x, y) \leq v$ па је и $u \leq v$. Стога оптимална вредност проблема (1) није већа од оптималне вредности проблема (2).

У случају да су оптималне вредности (1) и (2) једнаке, постоји реалан број w такав да први играч може да гарантује добитак w без обзира како је други играо, док други играч може да гарантује да први не може добити више од w ма како играо. Такав број w се назива вредност игре. Избори $\hat{x}$ и $\hat{y}$ такви да су $(\hat{x}, w)$ и $(w, \hat{y})$ оптимална решења проблема (1) и (2), називају се оптимална стратегија првог, односно оптимална стратегија другог играча.

Описан случај односи се на избор чистих стратегија играча. Сличан резултат може се постићи формирањем мештовитих стратегија при вишеструком понављању игре а следећа теорема нам гарантује оптималност игре.

Минимакс теорема[3]: За сваку коначну игру са нултом сумом са два играча

1) постоји број w који се назива вредност игре,
2) постоји мешовита стратегија првог играча тако да очекивана вредност игре буде најмање w независно од потеза другог играча и
3) постоји мешовита стратегија другог играча тако да његов очекивани губитак буде највише w независно од потеза првог играча.

Ако је број w једнак нули, кажемо да је игра фер (енг. *Fair*). За позитивну вредност броја w кажемо да игра фаворизује првог играча док се за негативно w фаворизује други играч. Функцију исплате за коначне стратегијске игре са два играча најлакше је представити матрично па се често такве игре називају матричним играма.

Дефиниција 1.1: Матрична игра је игра за два играча која на располагању имају m, односно n стратегија ($m, n \in N,\ m, n > 1$) дефинисана на следећи начин: Играчи се договарају да ли ће њихове страгегије бити представљене колонама или врстама матрице тако да елементи матрице буду исплате за одговарајући избор стратегија, тј. ако је играч чије су стратегије представљене врстама изабрао стратегију x а играч чије су стратегије представљене колонама изабрао стратегију y тада вредност $f(x, y)$ представља одговарајућу исплату.

Пример 1: (Писмо - глава) Два играча истовремено бацају новчић. Уколико код оба играча падне писмо или код оба играча падне глава, први играч добија новчић од другог играча. Ако падну различите стране исплата је обрнута. Решити матричну игру.

Матрица исплате представљена је табелом бр. 1.1.

Матрица исплате, Табела бр. 1.1

		Други играч	
		Писмо	*Глава*
Први играч	*Писмо*	1	-1
	Глава	-1	1

Оптимална вредност проблема (1) је -1 док је оптимална вредност проблема (2) 1 те игра нема вредност. Уколико се игра понавља више пута, добијени резултати се могу „поправити“ и може се добити вредност игре. Претпоставимо да се глава и писмо бацају са једнаким вероватноћама, $p(писмо) = p(глава) = 1/2$. Први играч, уз претпоставку да ће други бацити *писмо* може постићи оптималну вредност $f(x, писмо) = 1 \cdot p(писмо) + (-1) \cdot p(глава) = 0$, односно $f(x, глава) = (-1) \cdot p(писмо) + 1 \cdot p(глава) = 0$ ако је други бацио *главу*. Слично, оптимална вредност игре за другог играча уз претпоставку да први баца *писмо* износи $f(писмо, y) = (-1) \cdot p(писмо) + 1 \cdot p(глава)$, односно $f(глава, y) = 1 \cdot p(писмо) + (-1) \cdot p(глава)$ уз претпоставку да први баца *главу*. Приметимо да су оптималне вредности оба проблема једнаке, па тако игра има вредност која износи $w = 0$.

У већини случајева игре нису са нултом сумом и исплате које играчи добијају не морају да зависе једна од друге. Код таквих игара се за сваког играча посебно формира матрица исплате, односно код игара са два играча уместо две матрице може да се користи једна биматрица при чему први елемент поља матрице представља исплату за првог играча а други елемент исплату за другог играча.

[3] Доказ минимакс теореме се може наћи у [7], страна 291-293.

Пример 2: Двојица лопова су након почињеног прекршаја ухваћена и доведена на саслушање. Саслушање се изводи за сваког починиоца прекршаја посебно а како полиција нема довољно података да их оптужи за прекршај нуди следећи договор: Онај лопов који пристане да сарађује биће ослобођен кривице док ће његов саучесник служити казну у трајању од 12 месеци затвора. Уколико оба лопова пристану на сарадњу и признају кривицу, осуђују се на казну у трајању од 3 месеца, односно уколико ни један од лопова не буде сарађивао услед недостатака доказа биће осуђени на 1 месец затвора за неке друге ситне прекршаје за које полиција има доказа. Ако се претходно нису договорили, како да се лопови понашају након ове понуде тако да себи обезбеде минималну дужину затворске казне?

Описан проблем познат је као *Дилема затвореника*. Дужина трајања казне представљена је биматрицом исплате, у табели број 1.2.

Биматрица исплате, Табела бр. 1.2

		Лопов 2	
		Не сарађује	*Сарађује*
Лопов 1	*Не сарађује*	(1,1)	(12,0)
	Сарађује	(0,12)	(3,3)

Лопови не знају како ће њихов саучесник да се понаша и желе да постигну најбољи договор за себе. Уколико сарађују лоповима се отвара могућност служења казне у трајању од 0 или 3 месеца што је бољи резултат од оног који би постигли када не би сарађивали (дужина трајања казне била би 1 или 12 месеци). Пре него што наставимо анализу проблема уводимо појам доминантности.

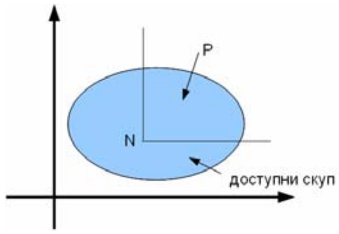
Дефиниција 1.2: Кажемо да *i*-та врста матрице $A_{m\times n}$ доминира над *k*-том врстом ако је $f(i,j)\ge f(k,j)$ за свако *j*. Кажемо да *i*-та врста строго доминира над *k*-том врстом ако је $f(i,j)>f(k,j)$ за свако *j*. Слично, *j*-та колона матрице $A_{m\times n}$ доминира (строго доминира) над *k*-том колоном ако је $f(i,j)\le f(i,k)$ $(f(i,j)<f(i,k))$ за свако *i*.

Ако *i*-та врста доминира над *k*-том врстом, *k*-ту врсту можемо да обришемо обзиром да она не утиче на коначни исход игре. Аналогно, ако *j*-та колона доминира над *l*-том колоном, *l*-та колона се такође може обрисати па се тако димензија матричне игре може смањити. Мешовите стратегије такође могу да буду доминантне.

Коришћењем особине доминантности следи да ће оба лопова сарађивати (елиминисати колону *не сарађује*) што ће их довести у тзв. *lose-lose* ситуцију и затворску казну у трајању од 3 месеца. Да су имали могућност договора, лопови би себи могли да обезбеде казну у трајању од 1. месеца. Стратегије (*не сарађује, не сарађује*) и (*сарађује, сарађује*) се називају равнотежним стратегијама.

Преговори су једна од примена теорије игара. Дилема затвореника је дефинисана тако да се од лопова очекује да ће изабрати опцију *сарађуј* Пре него што наставимо са анализом и решавањем игара, задржимо се на преговорима и на претпоставкама које се иначе односе на њихове учеснике. Најпре претпоставља се да су играчи *савршено рационални* појединци који настоје да максимизују своју добит, односно да постигну што бољи резултат који одговара њиховим властитим критеријумима. Под рационалним понашањем подразумевамо да се одлука доноси и на основу предвиђања (антиципације) могућих потеза противника. Играчи ће често замишљати да се налазе на месту свог конкурента како би могли да предвиде његове потезе и у складу са тим прогнозама одреде своју стратегију. Да би то било могуће, претпоставља се да не постоје интелектулане, искуствене и друге разлике између играча, односно у питању су играчи који се сматрају равноправним противницима. Такође се претпоставља да играчи располажу потпуном информацијом о могућим стратегијама и резутатима које свако од њих остварује. Да закључимо, да су лопови рационално сагледали своју и ситуацију свог саиграча определили би се за опцију *не сарађуј* и мање времена провели у затвору.

Два рационална појединца, уколико добровољно ступају у преговоре на основу ранијих искустава и договора знају све могуће исходе тих преговора па им могу приписати одређене нумеричке вредности као ниво корисности. Скуп свих резултата које појединци могу да остваре представњају тзв. *доступну област*. На почетку се из доступног скупа одређује једно решење проблема, без претходних договора преговарача. Такво решење називамо *status quo* (нпр. (x^*, y^*)). Из доступног скупа, обзиром да су савршено рационални, преговарачи неће посматрати сва решења већ само она која су *парето оптимална*[4]. Из тако одређене недоговорене позиције позитивним линеарним трансформацијама играчи долазе до позиција које ће им омогућити већу корисност, па ће договорена стратегија уједно бити и парето максимална.



Слика бр. 1.1, Преговачки скуп

На слици бр.1.1 приказани су доступни скуп, недоговорена позиција *N* и *преговарачки скуп P*. Преговарачки скуп чине они стратегијски парови који ће играчима донети већу добит од оне која им следује у случају да нису постигли договор. Ако је исплата у договорној стратегији уређени пар $(\hat{x}, \hat{y})$ следи да ће играчи постизањем договора поправити свој резултат за износ $\hat{x} - x^*$, односно износ $\hat{y} - y^*$. Ако скуп *P* садржи само један избор стратегија, тада је проблем тривијалан и договор ће одмах бити постигнут. Уз претпоставку да се у преговарачком скупу налазе најмање две алтернативе које играчи различито преферирају добијамо проблем одређивања договорне стратегије.

Претпоставимо да важе следеће аксиоме:

А1: Договорна стратегија $(\hat{x}, \hat{y})$ припада преговарачком скупу, $(\hat{x}, \hat{y}) \in P$.

А2: Договорна стратегија обезбеђује играчима већу добит од *status quo* стратегије, $f(x^*, y^*) \le f(\hat{x}, \hat{y})$.

А3: Договорна стратегија је парето максимална за дефинисан скуп *P*.

А4: Ако је $P_1 \subset P$, и $(\hat{x}, \hat{y}) \in P$ тада је $(\hat{x}, \hat{y}) \in P_1$

А5: Линеарним трансформацијама стратегијског скупа *P* у скуп *S*,

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1$$
$$y' = \alpha_2 y + \beta_2$$

где су $\alpha_1, \alpha_2 > 0,\ \beta_1, \beta_2$ произвољне константе, договорна стратегија $(\hat{x}, \hat{y})$ се трансформише у стратегију $(\alpha_1 \hat{x} + \beta_1, \alpha_2 \hat{y} + \beta_2)$.

А6: Ако *P* има симетрију по некој координати, тада симетрични играчи добијају исте износе.

Неш је показао да важи следећа теорема:

Теорема 1.3: Ако су задовољени услови А1-А6 тада постоји тачно једна тачка договора $(\hat{x}, \hat{y})$ у преговарачком скупу *P* која је решење проблема

$$\max\ (x^* - x)(y^* - y)\ \text{ п.о. }\ x, y \in P,\ x > x^*,\ y > y^*. \qquad (3)$$

[4] Парето оптимална су она решења у којима оба игрча постижу боље исходе у односу на не-ефикасна решења. Скуп свих парето оптималних тачака чини тзв. преговарачки скуп *P*

Добијена стратегија се назива равнотежном стратегијом.

Претпоставимо сада да два играча, која имају на располагању две стратегије могу да понове игру више пута. Коју стратегију при сваком понављању игре играчи треба да бирају како би у просеку постигли најбољи резултат?

Нека је нови проблем представљен биматрицом исплата дефинисном табелом бр. 1.3 и нека играчи бирају своје стратегије са вероватноћама p_1 и p_2, односно са вероватноћама $1-p_1$ и $1-p_2$. Играчи повлаче потезе гарантујући да њихова исплата неће зависити од избора стратегије другог играча.

Биматрица исплате, Табела бр. 1.3

		Други играч	
		Стратегија А	*Стратеија Б*
Први играч	*Стратегија А*	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})
	Стратегија Б	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})

Исплата првог играча при избору стратегије *А* у просеку износи $f(A,y)=[a_{11}]p_2+[a_{12}](1-p_2)$ односно $f(Б,y)=[a_{21}]p_2+[a_{22}](1-p_2)$ при избору стратегије *Б*. Слично, исплата другог играча при избору стратегије *А* у просеку износи $f(x,A)=[b_{11}]p_1+[b_{21}](1-p_1)$ док исплата за изабрану стратегију *Б* у просеку износи $f(x,Б)=[b_{12}]p_1+[b_{22}](1-p_1)$. Изједначавањем исплата за сваког играча посебно добијамо вероватноће избора стратегија и очекиване исплате:

$$p_1=\frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}},\quad f(x,\cdot)=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}},$$

$$p_2=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}},\quad f(\cdot,y)=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}{b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}}.$$

Поступак и тежина налажења најбоље стратегије најчешће зависи од димензија и врста матрица. Коришћењем особине доминантности (дефиниција 1.2) матрице димензија $m\times n$ се могу превести у матрице димензија $(m-1)\times n$ или $m\times(n-1)$ а понављањем овог поступка се у неким случајевима може добити матрица димензије 1×1 која би представљала решење датог проблема. Проблеме чије су матрице исплата димензије $2\times n,\ n>2$ или $m\times 2,\ \mathrm{m}>2$ најчешће решавамо графичким путем.

2. ИГРЕ ТРАЖЕЊА (*SEARCH GAME*)

Претпоставимо да се на неком подручју претраге налазе два играча (проблем се може проширити на игру са више од два играча), назовимо их трагач (енг. *searcher*) и скривач (енг. *hider*). Скривач може бити фиксиран или покретан и његов задатак је да се сакрије односно креће тако да га трагач не пронађе. За трагача је неопходно да буде покретан и његов циљ је да у што краћем року пронађе скривача. Циљ скривача је максимизација времена претраге (у најбољем случају је време претраге бесконачно) док је циљ трагача минимизација тог времена. Како су циљеви играча супростављени игра је антагонистичког типа. Уколико игра броји више од два играча, преостали играчи могу бити или трагачи или скривачи. Два или више трагача могу бити или конкуренти или у коалицији. За n трагача који нису у коалицији и једног скривача игра се своди на n игара са два играча (трагач и скривач). Циљ сваког трагача је да пронађе скривача пре свих осталих. За трагаче који су у коалицији посматрамо удружене стратегије. Игра која има m скривача и једног трагача може да се посматра као m игара са два играча. Скривачи такође могу бити у коалицији с'тим да се исход игре неће променити, осим у случају када се траже сви скривачи. Скривачи који су у коалицији могу да обезбеде дуже време трајања игре бољим почетним распоредом.

Простор претраге (Π) може бити конвексно или неконвексно поље, ограничено или неограничено. Ако је Π ограничено, очекује се да је период тражења коначан број, док је код неограничених подручја претраге овај проблем знатно сложенији и игра често није коначна. Почетне позиције играча обележићемо словима S и H (*searcher* и *hider*). Игра почиње у тренутку $t_0 = 0$. Путање играча представљамо непрекидним функцијама $s(t)$ и $h(t)$, $t \geq t_0$ које дефинишемо на следећи начин:

$$s(t):[0,+\infty) \to \Pi, \;\; h(t):[0,+\infty) \to \Pi$$

$$s(t_0) = S \in \Pi, \;\; h(t_0) = H \in \Pi$$

Пут који играчи прелазе од почетка до краја игре називамо стратегијом. Обележимо скуп свих алтернатива трагача са $\boldsymbol{S}$ а скуп свих алтернатива скривача са $\boldsymbol{H}$. Стратегије играча су непрекидне функције. Сматра се да је игра завршена када се трагач нађе у ε околони скривача: $d(s(t),h(t)) \leq \varepsilon$ [5] (ε је обично неки мали број а најчешће једнак нули). Нека је вредност игре υ уједно и износ који осваја победник. Описана игра има нулту суму и може се додефинисати до игре са ненултом сумом увођењем константе T (коначан број) и дефинисањем функције исплате $C:[0,\infty) \to (\upsilon_1, \upsilon_2)$ на следећи начин:

$$C(t) = \begin{cases} (\upsilon, 0), & t \in [0, \; T/2) \\ (\upsilon_1, \upsilon_2), \;\; \upsilon_1 + \upsilon_2 \leq \upsilon, & t \in [T/2, \; T) \\ (0, \upsilon), & t \geq T \end{cases}$$

Другим речима, трагачу се, уколико пронађе скривача до тренутка $T/2$, исплаћује износ υ, односно ако пронађе скривача након тог тренутка, а најкасније за време T, исплата умањује по неком унапред одређеном правилу. Када је време тражења дуже од T сматра се да је скривач победио и он добија износ υ док трагач остаје без исплате. Дефинисањем функције исплате на овај начин обезбеђено је коначно време трајања игре. Функцију циља трагача можемо дефинисати као најмање време потребно да се играчи нађу у ε околони:

$$c(s,h) = \min\{\, t \;:\; d(s(t),h(t)) \leq \varepsilon\}, \;\; s \in \mathrm{S}, \;\; h \in \mathrm{H}\,.$$

---

[5] Растојање *d(x,y)* између било које две тачке *x* и *y* пољу Π дефинишемо као најкраће растојање између тих тачака.

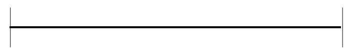
Функцију исплате можемо представити на још један начин, $C(s,h)\ :\ \mathrm{S}\times\mathrm{H}\rightarrow(\upsilon_1,\upsilon_2)$. У наставку ћемо претпоставити да се трагач креће највише јединичном брзином (брзина је једнака јединици пређеног пута, $\omega_S \leq 1$) и да скривач није бржи од трагача ($\omega_H \leq \omega_S$) а затим, у зависности од тога да ли је скривач фиксиран или има могућност кретања, одредити њихове оптималне стратегије.

2.1. Скривач је фиксиран ($\omega_H = 0$)

Проблем тражења фиксираног скривача решавамо тако што тражимо најбољу стратегију за сваког играча посебно. Играчи на почетку игре бирају своје почетне позиције. Трагач први бира позицију из свог скупа алтернатива а затим, на основу информације о почетној позицији трагача и свог скупа алтернатива, скривач бира своју. Како је скривач фиксиран, почетна позиција коју изабере је уједно и његова стратегија ($h \in \mathbf{H}$, $h(t) = H$ за свако t). Циљ скривача је да изабере стратегију која ће му обезбедити максимално време трајања игре. Трагач нема информације о избору почетне позиције скривача, он из своје почетне позиције (тачка S) бира стратегију $s \in \mathbf{S}$ тако да за сваку стратегију скривача време трајања игре буде минимално. Каже се још да су ове игре мин-макс типа. Избор стратегија пре свега зависи од простора претраге.

Претпоставимо прво да се претрага одвија на дужи Π што је уједно и најједноставнији задатак. Нека је Π дужине δ и нека су све тачке дате дужи истовремено и алтернативне позиције играча.

1. случај: Нека је почетна позиција трагача један крај дужи (Слика 2.1)



Слика 2.1 (Подручје претраге за 1. случај)

Почетна позиција скривача може бити било која друга тачка дужи Π (различита од S) изабрана на основу неке функције расподеле, која може бити позната трагачу. Информација о функцији расподеле по којој скривач бира своју почетну позицију је корисна за трагача и може му помоћи у формирању стратегија које ће га брже довести до циља. Уколико трагач не може да одреди по ком правилу скривач бира своју почетну позицију онда он све тачке дужи Π посматра равноправно, па су његове стратегије непрекидне функције које полазе из тачке S, претражују све тачке дужи Π и завршавају се њеном другом крају (нпр. у тачки А). Таквих функција има бесконачно много (нпр. кретање „цик-цак" у произвољним тачкама дужи) а циљ трагача је да изабере ону функцију која има најмању дужину. Претпоставимо да скуп скривачевих стратегија чине три тачке, $\mathbf{H} = \{A, B, C\}$ и да су оне распоређене тако да важи A-B-C-S (слика бр 2.2).

Слика 2.2. (Простор претраге за 1.случај са дефинисаним почетним позицијама скривача)

Трагач ће прећи најкраћи пут и обићи све потенцијалне позиције скивача ако се буде кретао по правилу $s = (S - C - B - A)$, а најкраће време ће постићи уколико се по тој путањи буде кретао максималном брзином. Очекивано време сусрета износи:

$T_1 = T(A, s) = a,\ a = d(A, S)$ ако се скривач налази у тачки А,

$T_2 = T(B, s) = b,\ b = d(B, S)$ ако се скривач налази у тачки В,

$$T_3 = T(C,s) = c,\ c = d(C,S) \text{ ако се скривач налази у тачки C.}$$

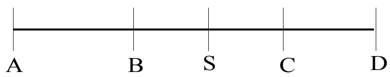
Уколико се игра понавља више пута а скривач може да комбинује своје чисте стратегије са неком вероватноћом, тада очекивано време тражења скривача износи:

$$T = p_A T_1 + p_B T_2 + p_C T_3$$

где су $p_A = p(H = A)$, $p_C = p(H = B)$ и $p_C = p(H = C)$ вероватноће избора почетних позиција скривача. Пошто су тачке дужи П уређене тако да важи $S-C-B-A$ следи да је $a > b > c$, па очекујемо да ће скривач увек бирати тачку A као своју почетну. Оваквим избором скривач гарантује да неће бити пронађен пре времена a независно од потеза трагача, а како је $a = \delta$ следи да са овако изабраном стратегијом неће бити пронађен пре времена δ. При сваком понављању игре трагач може да промени своју стратегију како би у просеку постигао најбољи резултат. Осим описане стратегије трагача, ни једна друга чиста стратегија неће обезбедити бољи резултат па тако ни једна мештовита стратегија не може да обезбеди краће време трајања игре.

2. случај: Нека је почетна позиција трагача нека тачка дужи П која није крајња (нпр. тачка S која се налази на растојању a, $a < \delta$ од једног краја дужи, односно тачке A)

Скуп алтернатива скривача **H** је као и у претходном случају скуп свих осталих тачака дужи П (различитих од S). За исти избор почетне позиције време трајања игре је једнако нули. Претпоставимо поново да се тачке скупа **H** бирају на основу неке функције расподеле. Скуп стратегија **S** је скуп свих путања које пролазе кроз све тачке скупа **H** а као оптималну стратегију трагача узимамо ону која је најмање дужине.



Слика 2.3. (Подручје претраге за 2. случај)

Ради лакшег рачуна, уместо да посматрамо све тачке дужи П посматраћемо само четири произвољно изабране тачке као могуће стратегије скривача. Обележимо их са A, B, C и D тако да су тачке A и B са једне стране тачке S а C и D су са друге стране (тачке су уређене по правилу $A-B-S-C-D$) и налазе се на растојању су a, b, c и d (тим редом) од тачке S (слика 2.3). Нека скривач бира почетну позицију из скупа $\mathrm{H} = \{A,B,C,D\}$ са вероватноћама $p_H(A) = p_1$, $p_H(B) = p_2$, $p_H(C) = p_3$ и $p_H(D) = p_4$. Скуп алтернатива трагача чине све непрекидне путање која полазе из тачке S и пролазе кроз ове четири тачке. Трагач, са вероватноћом $p_S(s_i) = q_i$ из скупа $\mathrm{S} = \{s_i : i = 1,..,6\}$, бира једну од стратегија:

$$s_1 = (SB-BC-CA-AD),\ s_2 = (SB-BA-AC-CD),$$
$$s_3 = (SB-BC-CD-DA),\ s_4 = (SC-CB-BD-DA),$$
$$s_5 = (SC-CD-DB-BA),\ s_6 = (SC-CB-BA-AD)$$

а очекивано време тражења зависи од избора оба играча. Проблем се може матрично приказати (табела 2.1а). Представимо стратегије скривача врстом, а стратегије трагача колоном. Поља матрице садрже очекивано време сусрета за одређени пар стратегија.

Табела 2.1а (Матрица исплата за 2.случај)

		Скривач			
		A	B	C	D
Трагач	s_1	$a+2b+2c$	b	$2b+c$	$2a+2b+2c+d$
	s_2	a	b	$2a+c$	$2a+d$
	s_3	$a+2b+2d$	b	$2b+c$	$2b+d$
	s_4	$a+2b+2c+2d$	$b+2c$	c	$2b+2c+d$
	s_5	$a+2d$	$b+2d$	c	d
	s_6	$a+2c$	$b+2c$	c	$2a+2c+d$

Решавањем система ниже добићемо стратегију скривача:

$$
\begin{aligned}
&(a+2b+2c)p_1 + bp_2 + (2b+c)p_3 + (2a+2b+2c+d)p_4 \geq \upsilon \\
&ap_1 + bp_2 + (2a+c)p_3 + (2a+d)p_4 \geq \upsilon \\
&(a+2b+2d)p_1 + bp_2 + (2b+c)p_3 + (2b+d)p_4 \geq \upsilon \\
&(a+2b+2c+2d)p_1 + (b+2c)p_2 + cp_3 + (2b+2c+d)p_4 \geq \upsilon \\
&(a+2d)p_1 + (b+2d)p_2 + cp_3 + dp_4 \geq \upsilon \\
&(a+2c)p_1 + (b+2c)p_2 + cp_3 + (2a+2c+d)p_4 \geq \upsilon \\
&p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1
\end{aligned}
$$

Искористимо доминантност стратегија $h = A$ и $h = D$ како би елиминисали стратегије $h = B$ и $h = C$. Елиминисањем друге и треће колоне можемо уочити да над стратегијама s_1, s_3, s_4 и s_6 доминирају стратегије s_2 и s_5. Брисањем прве, треће, четврте и шесте врсте почетни проблем се своди на проблем димензије $2x2$ (табела 2.1б) који се лако може решити.

Табела 2.1б (Матрица исплата након елиминисања доминантних стратегија, 2.случај)

		Скривач	
		A	D
Трагач	s_2	a	$2a+d$
	s_5	$a+2d$	d

Посматрамо системе:

$$
\begin{aligned}
&ap_1 + (2a+d)p_4 \geq \upsilon & & aq_2 + (a+2d)q_5 \leq \upsilon \\
&(a+2d)p_1 + bp_4 \geq \upsilon & \text{и} \quad & (2a+d)q_2 + dq_5 \leq \upsilon \\
&p_1 + p_4 = 1,\ p_2 = p_2 = 0 & & q_2 + q_5 = 1,\ q_1 = q_3 = q_4 = 0
\end{aligned}
$$

Решавањем система добијамо мешовите стратегије које ће скривачу омогућити да не буде пронађен пре времена υ а трагачу да време претраге неће трајати дуже од времена υ:

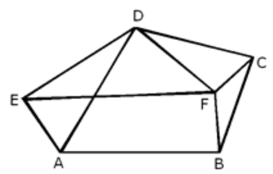
$$
h^* = \left(\frac{a}{a+d}, 0, 0, \frac{d}{a+d}\right), \quad q^* = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right).
$$

Коначно, добијене стратегије гарантују да ће време претраге бити $T = a + d = \delta$.

Дакле, трагач независно од свог почетног положаја на дужи П и независно од стратегије скривача гарантује да постоји стратегија која му обезбеђује очекивано време тражења не дуже од δ, док скривач гарантује да постоји стратегија таква да неће бити пронађен пре тог времена.

Напомена 2.1: Ако је почетна позиција трагача средиште дужи а све остале тачке те дужи алтернативе за скривача, тада са вероватноћом ½ трагач бира смер кретања, долази до једне крајње тачке дужи и ако на том путу не пронађе скривача, мења смер кретања и наставља ка другој крајњој тачки дужи када ће сигурно наћи скривача. Очекивано време сусрета за дуж дужине δ и овако формулисан проблем износи $3\delta / 2$.

Нека је простор П мрежа. Под појмом мреже подразумевамо скуп лукова међусобно повезаних преко својих крајева које називамо чворовима мреже. Два чвора могу бити повезана преко више лукова док је степен чвора одређен бројем лукова који га садрже (Слика бр. 2.4).



Слика бр. 2.4

Укупну дужину мреже коју добијамо као суму дужина свих лукова називамо мером мреже и обележавамо са μ. Скуп алтернатива скривача $\mathbf{H}$, на мрежи се састоји из свих елемената те мреже док скуп алтернатива трагача $\mathbf{S}$ садржи непрекидне путање које посећују све елементе скупа $\mathbf{H}$. Стратегија трагача је да пронађе ону путању која ће имати најмању дужину. Пре него што почнемо да анлизирамо претрагу на мрежи увешћемо неколико нових појмова. Путању $s(t)$ називамо затвореном ако за свако $t,\ 0 \le t \le \tau$ важи $s(0) = s(\tau)$. Затворену путању која посећује све чворове мреже називамо туром. Мрежу називамо Ојлеровом мрежом ако на њој постоји тура дужине μ и такву туру називамо Ојлеровом туром. Путања која пролази кроз све лукове мреже за μ времена назива се Ојлеровом путањом. Ојлерова путања не мора да буде затворена.

Може се доказати да је Π Ојлерова мрежа ако и само ако је степен свих чворова паран број, а ако Ојлерова путања почиње у тачки O онда су само чворови O и неки други чвор A непарног степена с'тим да путања мора да се заврши у том чвору A. Затворена трајекторија која пролази кроз све чворове мреже и прелази најмању путању назива се Путањом кинеског поштара (користимо ознаку L). Време потребно да се обиђе цела путања L обележавамо са $\bar{\mu}$.

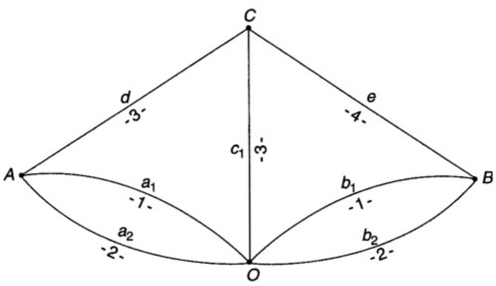
Теорема 2.2: Време потребно да се пронађе фиксирани скривач на мрежи мере μ износи $\mu/2$ ако и само ако је мрежа Ојлерова.[6]

Стратегија трагача која пролази целу путању L са једнаком вероватноћом у оба смера се назива Произвољном путањом кинеског поштара.

Лема 2.3: Свака минимална тура задовољава услов $\bar{\mu} \le 2\mu$. Једнакост важи само када Π има форму дрвета[7].

Дакле, скуп стратегија трагача се састоји из свих Ојлерових путања формираних над мрежом Π, док је оптимална она стратегија чија је дужина најмања. Најпознатији пример налажења најкраће путање на мрежи је Ојлеров проблем моста (Ojler Koninsberg bridge проблем, узет из [1]) и дефинисан на следћи начин:

Пронаћи минималну туру која обилази све чворове мреже Π. Мрежа има 4 чвора и сви чворови су непарног степена а дужина лукова и њихов распоред дати су на слици бр. 2.5.



Слика бр. 2.5

Решење проблема се састоји у duплирању лукова како би чворови добили паран степен а чиме би се добила Ојлерова мрежа за коју смо већ рекли да има оптимално решење. Могуће је дуплирати један од следећих скупова лукова:

- (a_1, b_1, c_1) (Ојлерова мрежа са крајњим чворовима A и B или O и C)
- (b_1, d) (Ојлерова мрежа са крајњим чворовима O и B или A и C)
- (a_1, e) (Ојлерова мрежа са крајњим чворовима A и B или B и C).

[6] Доказ се може наћи у [18], стр. 18.
[7] Доказ се може наћи у [18], стр. 19.

Дуплирањем чворова, дужина мреже би се повећала за 5, 4 или 5. Како тражимо минималну трајекторију дуплираћемо лукове (b_1, d). Одговарајућа минимална трајекторија за тако дуплиране чворове са укупном дужином $\mu^* = 20$ је

$$Ob_1 Bb_1 Ob_2 BeCdAa_1 Oa_2 AdCc_1 O$$

Циљ проблема је налажење мин-макс трајекторије. Јасно је да би се бољи резултат постигао дуплирањем лукова a_1 и e (сви чворови осим „почетног и крајњег“ добили би паран степен) чиме би тражена мин-макс трајекторија била дужине 18 и имала следећи облик:

$$Ob_1 Bb_1 Ob_2 BeCdAa_1 Oa_1 Aa_2 Oc_1 C$$

Ако узмемо да је дужина минималне трајекторије μ^*, добићемо горњу границу за вредност игре тражења фиксираног скривача.

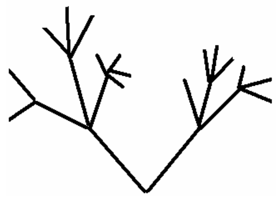
Последица 2.4: Време трајања игре, υ када је мрежа Ојлерова а скривач фиксиран, задовољава неједнакост:

$$\mu / 2 \le \upsilon \le \mu^* / 2 \le \mu \, .$$

Доња граница се достиже ако и само ако је *П* Ојлерова мрежа. Горња граница се достиже ако и само ако је *П* дрво.

Ојлер је 1736.год решио проблем познат као проблем *Седам мостова Кенигсберга*, данашњег Калињграда. Град се налазио на реци Прегел и између осталог чинила су га два велика ратна острва која су била повезана са остатком града и међусобно помоћу седам мостова. Поставило се питање да ли је могуће поћи из једне тачке и, вратити се у њу тако да се сваки мост пређе тачно једном. Како описан граф није Ојлеров, тако можемо да закључимо да не постоји Ојлеров граф и самим тим се преко једног моста мора прећи два пута. Ово решење се сматра првом теоремом теорије графова.

Нека је простор претраге Π дрво које се може представити као унија два дрвета (слика бр.2.6), Π_1 и Π_2 и нека је μ_i мера *i*-тог дрвета а p_i вероватноћа којом скривач то дрво узима за своју почетну позицију.



Слика бр.2.6

Претпоставимо да је трагачу, путањом кинеског поштара потребно $2\mu_1$ времена да претражи дрво Π_1 и да се врати у тачку *O* а затим још μ_2 времена да претражи дрво Π_2. Очекивано време сусрета дато је следећом једначином:

$$p_1\mu_1 + p_2\left(2\mu_1 + \mu_2\right) = \mu_1 + p_2\left(\mu_1 + \mu_2\right)$$

односно, ако је претраживање текло обрнутим редоследом, време трајања претраге износи $\mu_2 + p_1\left(\mu_1 + \mu_2\right)$.

Коначно, ако су p_i познате величине, трагач може да гарантује да ће време трајања игре бити највише

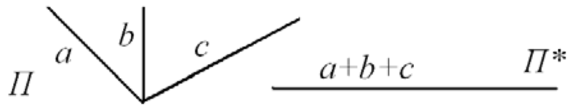
$$\min\{\mu_1 + p_2\left(\mu_1 + \mu_2\right), \mu_2 + p_1\left(\mu_1 + \mu_2\right)\}$$

при чему је вероватноћа избора дрвета Π_i следећа:

$$p_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \; p_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \, .$$

Приметимо да је вероватноћа скривања на поддрвету сразмерна његовој дужини што одговара вероватноћи скривања на луковима код мрежа.

Доказано је да заменом дрвета Π дрветом $\Pi *$ које има исту дужину али само једну грану (слика бр. 2.7) очекивано време претраге на дрвету $\Pi *$ не може бити веће од очекиваног времена претраге по дрвету Π (Лема 3.20 [1]).



Слика бр.2.7.

Да резимирамо, скуп стратегија трагача чини скуп свих путева који доводе до терминалних чворова а најпознатија путања која гарантује да ће скривач бити пронађен јесте Путања кинеског поштара[8]. Ако је дрво дужине μ, онда трагач користећи путању кинеског поштара гарантује да време претраге неће бити веће од 2μ.

Игре у којима скривач жели да буде пронађен а нема могућност кретања припада играма сусретања и тада се стратегија трагача састоји у детаљном претраживању простора Π и назива *Wait for mommy* (WFM) стратегијом.

2.2. Скривач има могућност кретања ($\omega_H \neq 0$)

Решавамо проблем тражења мобилног скривача. Такви проблеми се називају *потрага за бегунцем* и спадају у NP тешке проблеме[9]. Проблем решавамо тако што тражимо најбољу стратегију за сваког играча посебно.

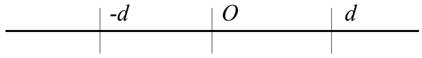
Најчешће су ситуације у којима скривач има бар неке информације о кретању трагача. Разликујемо ситуације у којима скривач у сваком тренутку има информације о тренутном положају трагача и ситуације у којима је та информација недоступна. Уколико скривач има информације о тренутном положају трагача и креће се истом или већом брзином од њега, очигледно је да ће се игра увек завршити у корист скривача осим у ситуацијама када је простор Π ограничен и када трагач својом стратегијом може да доведе скривача у „клопку“. У даљем раду претпоставићемо да играчи немају информације о међусобном положају и да се је брзина трагача већа или једнака брзини скривача.

Проблем тражења мобилног скривача се може поделити на *n* потпроблема тако што ће се простор Π поделити на *n* једнаких делова (ћелија) уз претпоставку да се свака ћелија може претражити за највише Δt времена ($\Delta t = \mu / \rho n$, μ - мера простора Π, ρ - мера ћелије). Стратегија трагача је да изабере ћелију, претражи је и након Δt времена пређе у другу. Једна од алтернатива скривача је да мења ћелију на сваких Δt времена. *Alpern* и *Gal* [7] су показали да је код неограничених игара вероватноћа да до сусрета неће доћи пре тренутка *t* за фиксираног скривача једнака $p(T > t) \sim 1 - \rho t / \mu$, $0 \leq t < \mu / \rho$ односно једнака $p(T > t) \sim e^{-\rho t / \mu}$, $0 \leq t < \infty$ за мобилног скривача.

Поново разматрамо најједноставнији случај. Нека је простор претраге оријентисана права и нека се трагач на почетку игре налази у тачки O(0) а скривач на растојању *d* од

[8] Путањом кинеског поштара се кроз сваку грану дрвета пролази тачно 2 пута.
[9] Детаљније о NP тешким проблемима се може наћи у књизи Michael R. Garey и David S. Johnson-a, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*

њега односно, нека је избор почетне позиције скривача из скупа $Y=\{-d,d\}$ једнако вероватан.



Слика 2.8 (Подручје претраге је права)

Играчи знају да се налазе на почетном одстојању *d*. Без обзира у којој се тачки скривач налази, своје кретање може да започне у једном од два смера (*лево* и *десно*). Кажемо да скривач има четири алтернативе па се његова стратегија $h=h(t)$ може интерпретирати на 4 различита начина. Дефинишимо алтернативе скривача:

$$\begin{aligned} &A_1: a_1(t)=-d-h(t),\ A_2: a_2(t)=-d+h(t) \\ &A_3: a_3(t)=d-h(t),\ A_4: a_4(t)=d+h(t) \end{aligned}.$$

Стратегија трагача се састоји у „пресретању“ свих алтернатива скривача. Обележимо стратегију трагача словом s. Како и трагач може да бира смер кретања, рећиćемо да његова стратегија има две алтернативе, које можемо да обележимо са s и $-s$. Алтернативе трагача формирају се тако да за што краће време пресретну све четири алтернативе скривача. Израчунајмо очекивано време трајања игре за све стратегијске парове:

$$\begin{aligned} &T(\pm s,A_1)=\min\{t:\ \pm s(t)=-d-h(t)\},\ T(\pm s,A_2)=\min\{t:\ \pm s(t)=-d+h(t)\} \\ &T(\pm s,A_3)=\min\{t:\ \pm s(t)=d-h(t)\},\ T(\pm s,A_4)=\min\{t:\ \pm s(t)=d+h(t)\} \end{aligned}.$$

Нека су $p_{ij},\ i,j=1,2,\ \sum_{i,j}p_{ij}=1$ вероватноћа са којом скривач бира смер кретања и почетну позицију а $q_k,\ k=1,2,\ q_1+q_2=1$ вероватноћа са којом трагач бира смер кретања. Очекивано време сусрета играча који се налазе на почетном одстојању d тада износи:

$$\begin{aligned} T^*=q_1\Big[&p_{11}\min\{t:-s(t)=-d-h(t)\}+p_{12}\min\{t:-s(t)=-d+h(t)\} \\ &+p_{21}\min\{t:-s(t)=d-h(t)\}+p_{12}\min\{t:-s(t)=d+h(t)\}\Big] \\ +q_2\Big[&p_{11}\min\{t:s(t)=-d-h(t)\}+p_{12}\min\{t:s(t)=-d+h(t)\} \\ &+p_{21}\min\{t:s(t)=d-h(t)\}+p_{12}\min\{t:s(t)=d+h(t)\}\Big] \end{aligned}$$

У наставку ћемо конструисати стратегије играча.

Обележимо стратегије трагача са $s_1(t)=s(t)$ и $s_2(t)=-s(t)$. Ради лакшег рачуна узећемо да је почетно одстојање играча $d=1$. Обележимо стратегије скривачевих алтернатива са: $h_1(t)=1-h(t)$, $h_2(t)=1+h(t)$, $h_3(t)=-1+h(t)$ и $h_4(t)=-1-h(t)$ и претпоставимо да се трагач креће јединичном брзином ($\omega_S=1$) док је скривач нешто спорији ($0<\omega_H<1$). Обележимо тренутке пресека стратегија трагача (који усваја стратегију s_1) и алтернативних стратегија скривача са $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$ ($t_1\le t_2\le t_3\le t_4$). Претпоставићемо да је први сусрет настао у тренутку a:

$$t_1=a=\frac{1}{1+\omega_H},\ (0\le a<1,\ x_1=a).$$

$$h_1(t_1)=1-a,\ h_2(t_1)=1+a,\ h_3(t_1)=-1+a,\ h_4(t_1)=-1-a$$

У тренутку t_1 на основу њихове конструкције, стратегије s_1 и h_1 се први пут секу. Обележимо тачку пресека са x_1. Ова тачка је уједно и тачка потенцијалног сусрета играча. Уколико играчи наставе кретање својих алтернатива у започетом смеру, у тренутку t_2 се на основу њихових конструкција очекује сусрет стратегија s_1 и h_2. Обележимо другу тачку потенцијалног сусрета са x_2 и одредимо време сусрета и потенцијалне позиције играча ако до сусрета није дошло:

$$x_2=1+t_2\omega_H=t_2\cdot 1\quad\Rightarrow\quad t_2=\frac{1}{1-\omega_H},\quad x_2=\frac{1}{1-\omega_H}\quad\left(\frac{x_2-h_2(t_1)}{\omega_H}=x_2-x_1\right).$$

$h_3(t_2) = (2\omega_H - 1)/(1-\omega_H)$ и $h_4(t_2) = -\omega_H/(1-\omega_H)$.

Уколико се сусрет није догодио до тренутка t_2 следи да је скривач изабрао погрешну алтернативу, и да се на почетку игре скривач налазио на позицији $(-1,0)$ ка којој скривач наставља своје кретање. Израчунаћемо преостала два сусрета:

$$t_3 = t_2 + \frac{x_2 - h_3(t_2)}{1+\omega_H} = \frac{3-\omega_H}{(1+\omega_H)(1-\omega_H)}, \quad x_3 = \frac{3\omega_H - 1}{(1+\omega_H)(1-\omega_H)}$$

$$h_3(t_3) = -1 + t_2\omega_H = -1 + \frac{1}{1-\omega_H}\omega_H = \frac{-1+2\omega_H}{1-\omega_H}$$

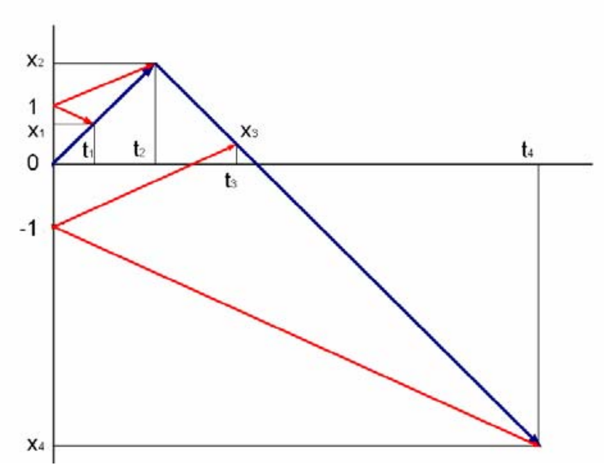
$$h_4(t_3) = -1 - t_3\omega_H$$

$$t_4 = t_3 + (x_3 - x_4) \ \wedge \ (x_3 - x_4)\omega_H = h_4(t_3) - x_4 \quad \Rightarrow \quad t_4 = \frac{3-\omega_H}{(1-\omega_H)^2}.$$

Очекивано време сусрета за описан проблем износи:

$$T^* = \frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\omega_H} + \frac{1}{1-\omega_H} + \frac{3-\omega_H}{(1+\omega_H)(1-\omega_H)} + \frac{3-\omega_H}{(1-\omega_H)^2}\right) = \frac{2-\omega_H}{(1+\omega_H)(1-\omega_H)^2}$$

Различитим величинама ω_H одговарају различите вредности T^*, тј. за $\omega_H = 0.1$ добићемо да је $T^* = 2.1324$, односно за $\omega_H = 0.9$ је $T^* = 57.8947$. На слици бр. 2.9. плавом бојом обележене су трајекторије трагача, а црвеном бојом трајекторије скривачевих алтернатива.



Слика бр. 2.9 (Стратегије трагача и скривачевих агената за проблем тражења)

Проблем тражења мобилног скривача се може проширити на просторе облика мреже или на неке вишедимнезионалне просторе. Више детаља се може наћи у радовима [6], [26], [23], [20] и [28].

3. ИГРЕ СУСРЕТАЊА (*RENDEZVOUS GAME*)

Игре у којима је циљ играча да се сретну за што краће време називамо играма сусретања. Игре сусретања су кооперативног типа. Уколико су играчи раздвојени услед неких природних непогода кажемо да је природа имала први потез и игра је тада антагонистичког типа са природом на једној страни и играчима који сарађују на другој.

Први који је формулисао проблем сусретања је *Thomas Schelling*. *Schelling* је разматрао ситуацију у којој два падобранца након што су слетела на непознато подручје желе да се што пре сретну [28]. Основни проблем се временом проширивао увођењем додатних услова и ограничења чиме добијамо нове проблеме као што су: проблем сусретања на бесконачној линији или кругу, проблем сусретања за више од два играча, проблем сусретања са ограниченим ресурсима, игре избегавања сусрета и слично.

Игре сусретања могу бити асиметричног и симетричног типа. Код асиметричних игара играчи могу да користе међусобно различите стратегије па је корисно да се пре почетка игре договоре о расподели улога (нпр. Први играч претражује простор док други мирује). Код симетричних игара се подразумева да играчи користе исту стратегију. Информације које су доступне играчима могу бити симетричне и асиметричне. Информације су асиметричне уколико играчи немају исте информације или исту количину информација (нпр. један играч зна која је почетна позиција другог док други играч зна само почетно одстојање од првог али не зна где се он налази) односно симетричне (оба играча знају своје почетне позиције и почетне позиције другог играча). Игре се још могу поделити на оријентисане и неоријентисане (нпр. играчи поседују или не поседују компас). Код оријентисаних игара играчи могу да договоре да се један креће у смеру казаљке на сату а други у супротном док је код неоријентисаних такав договор немогућ.

Кажемо да се игра завршила ако су се играчи срели. У зависности од „степена видљивости“ сусрет дефинишемо на следећи начин:

- Играчи се налазе у потпуном мраку и сматра се да је до сусрета дошло оног тренутка када се нађу на истој локацији („нулта видљивост“),
- Играчи нису у потпуном мраку и довољно је да се налазе на некој удаљености r како би се препознали (удаљеност r називамо радијусом детекције или радијусом препознавања).

3.1. Играчима је познато почетно међусобно одстојање

Нека је дат следећи проблем:

Два играча се налазе на праволинијској обали мора на међусобном растојању d без могућности комуникације. Они се могу кретати њима познатим брзинама које не прелазе u односно v, а виђење је могуће када се нађу на растојању r, $r \le d$.

Које стратегије својих кретања играчи треба унапред да договоре да би се што пре видели?

Уместо обале мора, можемо претпоставити да се играчи налазе на оријентисаној правој којој обојица знају оријентацију а на растојању d. Нека је положај првог играча координатни почетак бројевне осе у коју се дата права претвара избором јединичне дужи. Тада је почетни положај другог играча тачака d односно тачка $-d$. Означимо са $x(t)$ положај на оси првог играча у тренутку t, а са $y(t)$ положај другог играча на оси у тренутку t, ако се у почетку налазио у тачки d. Уколико се други играч на почетку игре налазио у тачки $-d$, у тренутку t биће у тачки $y(t)-2d$. Договорна стратегија играча је пар $(x(t), y(t)),\ t \geq 0$ непрекидних део по део диференцијабилних функција $x(t),\ t \geq 0$ и $y(t),\ t \geq 0$ које задовољавају $|\dot{x}(t)| \leq u,\ x(0)=0$ и $|\dot{y}(t)| \leq v$ у тачкама где су ови изводи дефинисани. То одговара избору непрекидних део по део диференцијабилних путања $P_1 = \{(x(t), y(t)) \mid t \geq 0\}$ с почетном тачком $(0, d)$ односно $P_2 = \{(x(t), y(t)-2d), t \geq 0\}$ с почетном тачком $(0, -d)$ у некој координатној равни xOy. Важи и обратно, избор оваквих путања одговара унапред договореној стратегији играча. Нека је T_1 најмање ненегативно t за које је $y(t) = x(t) + r$ за тачке прве путање а T_2 најмање ненегативно t за које је $y(t) = x(t) - r$ за тачке друге путање. У случају да нека од путања нема заједничких тачака са својом одговарајућом правом њој одговарајуће $T_i,\ i=1,2$ је $+\infty$. Гарантовано време виђења играча је $T = \max\{T_1, T_2\}$. Играчи треба да договоре стратегију којом гарантују минималност времена T. Како се играчи стално могу кретати највећом брзином, да би време виђања било најмање треба да бирају најкраћу описану путању и да је пређу максимално могућом брзином. Дакле проблем се своди на одређивање најкраће непрекидне део по део диференцијабилне путање $\{(x(t), y(t)), t \geq 0\}$, $(x(0), y(0)) = (0, d)$ у равни xOy која задовољава услове $|\dot{x}(t)| \leq u,\ |\dot{y}(t)| \leq v$ свуда осим у коначно много тачака, такве да и она и њен транслат $\{(x(t), y(t)-2d), t \geq 0\}$, имају заједничку тачку са појасом $\{(x, y) \mid\ |x-y| \leq r\}$. Путање које задовољавају ове услове (без услова минималности) називамо *допустиве путање*.

Докажимо да је дужина сваке допустиве путање најмање $\frac{d-r}{u+v}\sqrt{u^2+v^2}$, односно $3\frac{d-r}{u+v}\sqrt{u^2+v^2}$:

Због симетрије можемо претпоставити да је $T_1 \leq T_2$, односно да кретањем по првој путањи најпре стижемо до појаса. Тада део прве путање за $t \in [0, T_1]$ није краћи од дужине најкраћег допустивог пута од тачке $(0, d)$ до праве $y = x + r$, а део друге путање за $t \in [T_1, T_2]$ није краћи од дужине најкраћег допустивог пута од тачке $(x(T_1),\ y(T_1)-2d)$ до праве $y = x - r$. Отуда, гарантовано време виђања не може бити мање од збира ових дужина подељеног са максималном брзином $\sqrt{u^2+v^2}$.

Ради одређивања ових дужина решавамо проблем оптималног управљања

$$\min \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

при ограничењима:

$$\begin{aligned} &|\dot{x}| \leq u,\ \ |\dot{y}| \leq v, \\ &x(0) = 0,\ \ y(0) = d \end{aligned} \qquad (1)$$

Означимо са $F[x, y] = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$ функцију коју желимо да минимизујемо и претпоставимо да је решење проблема уређени пар $(\overline{x}(t), \overline{y}(t))$. Тада, за било који избор $(x(t), y(t))$ важи $F[\overline{x}(t), \overline{y}(t)] \leq F[x(t), y(t)]$. Претпоставимо да су парови $(x(t), y(t))$ варијације уређеног пара $(\overline{x}(t), \overline{y}(t))$, односно за сваке две произвољно изабране непрекидно диференцијабилне функције $\eta(t)$ и $\mu(t)$ које задовољавају услове $\eta(a) = \eta(b) = 0$ и $\mu(a) = \mu(b) = 0$ и за свака два броја $\varepsilon \to 0$ и $\tau \to 0$ можемо да их запишемо као

$x(t)=\overline{x}(t)+\varepsilon\eta(t)$ и $y(t)=\overline{y}(t)+\tau\mu(t)$. Како стратегија $(\overline{x}(t),\overline{y}(t))$ минимизује функцију F важе релације

$$F[\overline{x},\overline{y}]\le F[\overline{x}+\varepsilon\eta,\overline{y}]$$
$$F[\overline{x},\overline{y}]\le F[\overline{x},\overline{y}+\tau\mu]$$

и парцијални изводи функције $F[\overline{x}+\varepsilon\eta,\overline{y}+\tau\mu]$ по ε (односно τ) биће једнаки нули за $\varepsilon=0$ (односно $\tau=0$):

$$\frac{dF[\overline{x}+\varepsilon\eta,\overline{y}]}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int_a^b\frac{d}{d\varepsilon}\left(\sqrt{(\dot{\overline{x}}+\varepsilon\dot{\eta})^2+\dot{\overline{y}}^2}\right)dt \tag{2}$$

$$\frac{dF[\overline{x},\overline{y}+\tau\mu]}{d\tau}\Big|_{\tau=0}=\int_a^b\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{\dot{\overline{x}}^2+(\dot{\overline{y}}+\tau\dot{\mu})^2}\right)dt \tag{3}$$

Решавамо релацију (2), релација (3) се рачуна аналогно:

$$\left.\frac{dF[\overline{x}+\varepsilon\eta,\overline{y}]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_a^b\frac{d}{d\varepsilon}\left(\sqrt{(\dot{\overline{x}}+\varepsilon\dot{\eta})^2+\dot{\overline{y}}^2}\right)dt$$

$$=\int_a^b\frac{(\dot{\overline{x}}+\varepsilon\dot{\eta})\dot{\eta}}{\sqrt{(\dot{\overline{x}}+\varepsilon\dot{\eta})^2+\dot{\overline{y}}^2}}dt\quad(\varepsilon=0)$$

$$=\int_a^b\frac{\dot{\overline{x}}\dot{\eta}}{\sqrt{\dot{\overline{x}}^2+\dot{\overline{y}}^2}}dt\qquad\left(\int_a^b\left(\frac{\dot{\overline{x}}\eta}{\sqrt{\dot{\overline{x}}^2+\dot{\overline{y}}^2}}\right)'dt=\int_a^b\frac{\ddot{\overline{x}}\cdot\dot{\overline{y}}^2}{\left(\dot{\overline{x}}^2+\dot{\overline{y}}^2\right)^{3/2}}\eta dt+\int_a^b\frac{\dot{\overline{x}}\dot{\eta}}{\sqrt{\dot{\overline{x}}^2+\dot{\overline{y}}^2}}dt\right)$$

$$=-\int_a^b\frac{\ddot{\overline{x}}\cdot\dot{\overline{y}}^2}{\left(\dot{\overline{x}}^2+\dot{\overline{y}}^2\right)^{3/2}}\eta dt\qquad\left(\int_a^b\left(\frac{\dot{\overline{x}}\eta}{\sqrt{\dot{\overline{x}}^2+\dot{\overline{y}}^2}}\right)'dt=\frac{\dot{\overline{x}}\eta(b)}{\sqrt{\dot{\overline{x}}^2+\dot{\overline{y}}^2}}-\frac{\dot{\overline{x}}\eta(a)}{\sqrt{\dot{\overline{x}}^2+\dot{\overline{y}}^2}}=0\right)$$

Користимо следећу лему:

Лема 3.1: Нека је функција f из класе C^k и нека је *k*-пута непрекидно диференцијалбилна на интервалу $[a,b]$. Претпоставимо да за сваку функцију h из класе $C^k[a,b]$ са особином $h(a)=h(b)=0$ важи

$$\int_a^b f(x)h(x)dx=0$$

тада је $f(x)\equiv0\ \forall x\in[a,b]$.

Доказ:

Претпоставимо да функција f задовољава услове леме. Обзиром да је функција h непрекидна и задовољава услов $h(a)=h(b)=0$ можемо је дефинисати као $h(x)=-f(x)(x-a)(x-b)$ (функција f је непрекидна па је самим тим и функција h непрекидна). Важи још, $f(x)h(x)\ge0$ на интервалу $[a,b]$ ($f(x)h(x)=-f^2(x)(x-a)(x-b)$).

Вредност одређеног интеграла ненегативне функције једнак је нули уколико је вредност подинтегралне функције једнака нули. Долазимо до следећег закључка:

$$0=f(x)h(x)=[f(x)]^2[-(x-a)(x-b)]$$

Односно, како је $-(x-a)(x-b)>0$ на (a,b) следи да је $[f(x)]^2=0$ на $[a,b]$ и коначно, из релације $[f(x)]^2=0$ на $[a,b]$ следи да је $f(x)=0$ на $[a,b]$.

Дакле, $\int_a^b\frac{\ddot{\overline{x}}\cdot\dot{\overline{y}}^2}{\left(\dot{\overline{x}}^2+\dot{\overline{y}}^2\right)^{3/2}}\eta dt=0$ повлачи да је $\frac{\ddot{\overline{x}}\cdot\dot{\overline{y}}^2}{(\dot{\overline{x}}^2+\dot{\overline{y}}^2)^{3/2}}\equiv0$, то јест

$$\ddot{\overline{x}}\cdot\dot{\overline{y}}^2=0 \tag{4}$$

Аналогним поступком из релације (3) добијамо да је

$$\dot{\bar{x}}^2 \cdot \ddot{\bar{y}} = 0 . \qquad (5)$$

Систем који чине једначине (4) и (5) има 4 решења

1. $\ddot{\bar{x}} = 0 \ \wedge\ \dot{\bar{x}} = 0,\ y$ произвољна функција,
2. $\dot{\bar{x}} = 0 \ \wedge\ \dot{\bar{y}} = 0$,
3. $\dot{\bar{y}} = 0 \ \wedge\ \ddot{\bar{y}} = 0,\ x$ произвољна функција,
4. $\ddot{\bar{x}} = 0 \ \wedge\ \ddot{\bar{y}} = 0$

од којих прва 3 одбацујемо обзиром да не задовољавају услове (1). Решење система (4-5) је $\ddot{\bar{x}} = 0 \ \wedge\ \ddot{\bar{y}} = 0$, односно:

$$\begin{matrix}\ddot{\bar{x}} = 0 \\ \ddot{\bar{y}} = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\bar{x}(t) = At + B \\ \bar{y}(t) = Ct + D\end{matrix} \Rightarrow \left(\bar{x}(0) = 0, \bar{y}(0) = d\right) \Rightarrow \begin{matrix}\bar{x}(t) = At \\ \bar{y}(t) = Ct + d\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\bar{x}(T_1) - \bar{y}(T_1) = -r\right) \Rightarrow T_1 = \frac{d-r}{A-C}$$

$$\Rightarrow \left(|\dot{x}| \le u, |\dot{y}| \le v\right) \Rightarrow \begin{matrix}|A| \le u \\ |C| \le v\end{matrix}$$

Како је вредност датог интеграла $\int_0^{T_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = T_1 \sqrt{A^2 + C^2}$ следи да се $\min \int_0^{T_1} \sqrt{\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2}\, dt$ достиже за најмање T_1, односно за максимално $A - C$, то јест за $A = u$ и $C = -v$. На овај начин смо добили путање

$$\begin{matrix}\bar{x}(t) = ut \\ \bar{y}(t) = -vt + d\end{matrix} \quad \text{за} \quad t \in [0, T_1],\ T_1 = \frac{d-r}{u+v}$$

Уколико се играчи нису срели за време T_1 следи да је почетна позиција била тачка $(x, y) = (0, -d)$, односно да ће се у тренутку T_1 налазити на позицији

$$(x, y) = \left(\frac{d-r}{u+v} u, -\frac{d-r}{u+v} v + d\right)$$

када ће играчи наставити по новим путањама.

$$\begin{matrix}\ddot{\bar{x}} = 0 \\ \ddot{\bar{y}} = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\bar{x}(t) = At + B \\ \bar{y}(t) = Ct + D\end{matrix} \Rightarrow \left(\bar{x}(T_1) = \frac{d-r}{u+v} u, \bar{y}(T_1) = -\frac{d-r}{u+v} v - d\right) \Rightarrow \begin{matrix}\bar{x}(t) = At + \frac{d-r}{u+v}(u - A) \\ \bar{y}(t) = Ct - \frac{d-r}{u+v}(v + C) - d\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\bar{x}(T_2) - \bar{y}(T_2) = r\right) \Rightarrow (A - C) T_2 + \frac{d-r}{u+v}(u + v + C - A) = r - d$$

$$\Rightarrow (A - C) T_2 + \frac{d-r}{u+v}(u - A + v + C) = -(d - r)$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{-(d-r) - \frac{d-r}{u+v}(u + v - A + C)}{A - C} = \frac{-(d-r)\left(2 + \frac{-A+C}{u+v}\right)}{A - C}$$

$$\Rightarrow T_2 = -2\frac{d-r}{A-C} + \frac{d-r}{u+v} \quad \left(T_2 > T_1 = \frac{d-r}{u+v}\right) \Rightarrow A - C < 0$$

Минимално време T_2 (а самим тим и минималну вредност интеграла $\int_{T_1}^{T_2} \sqrt{\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2}\, dt = (T_2 - T_1)\sqrt{A^2 + C^2}$) добијамо за максимално $-A + C$, то јест за $A = -u$ и $C = v$. На овај начин смо добили путање

$$\begin{matrix}\bar{x}(t) = -ut + 2u\frac{d-r}{u+v} \\ \bar{y}(t) = vt - 2v\frac{d-r}{u+v} - d\end{matrix} \quad \text{за} \quad t \in [T_1, T_2], T_2 = 3\frac{d-r}{u+v} .$$

Коначно, ако су се играчи у тренутку $t = 0$ налазили на позицији $(0, d)$ и ако су се кретали својим максималним брзинама, очекивано време сусрета, кретањем по уређеној путањи $(\bar{x}, \bar{y})$ биће $T_1 = \frac{d-r}{u+v}$, односно ако су се играчи у тренутку $t=0$ налазили на позицији $(0,-d)$ исти избор путања обезбеђује време сусрета $T_2 = 3\frac{d-r}{u+v}$.

Стратегија кретања се може слично записати ако играчи претпоставе да је њихова почетна позиција $(0,-d)$, односно ако решавамо проблем:

$$\min \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

при ограничењима:

$$\begin{aligned} &|\dot{x}| \le u, \quad |\dot{y}| \le v, \\ &x(0) = 0, \quad y(0) = -d, \end{aligned} \qquad (1')$$

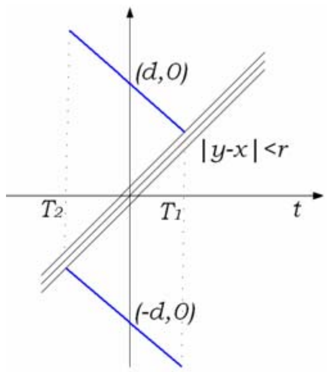
Решење проблема (1') је следећа путања:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}(t) &= -ut \\ \bar{\bar{y}}(t) &= vt - d \end{aligned} \qquad t \in [0, T_1],\ T_1 = \frac{d-r}{u+v}$$

односно

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}(t) &= ut - 2u\frac{d-r}{u+v} \\ \bar{\bar{y}}(t) &= -vt + 2v\frac{d-r}{u+v} + d \end{aligned} \quad , \quad t \in [T_1, T_2],\ T_2 = 3\frac{d-r}{u+v} \qquad .$$

На основу описаних кретања можемо закључити да време сусрета, независно од почетног положаја играча, не може бити краће од $T_1 = \frac{d-r}{u+v}$ ако је њихово међусобно почетно одстојање d са радијусом виђања r али не мора ни бити веће од $T_2 = 3\frac{d-r}{u+v}$, а стратегије којима се то време постиже имају облик изломљене линије (слика 3.1).



Слика 3.1 (Стратегија играча када је познато почетно растојање)

Коначно, играчима који су се нашли на обали мора на растојању d саветујемо да, уколико могу да се договоре о стратегијама, усвоје стратегију (1) односно (1') а очекивано време сусрета би за $u = v = 1$ износило $d - r$. Уколико један од играча не може да се креће, тада би се усвојена стратегија могла записати на следећи начин:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} ut, \ t \in \left[0, \frac{d-r}{u}\right] \\ (d-r) - ut, \ t \in \left[\frac{d-r}{u}, \ 3\frac{d-r}{u}\right] \end{cases} \qquad \bar{y}(t) = \pm d \quad (v = 0) \qquad (2)$$

а очекивано време сусрета би износило $2(d-r)$. Стратегија (2) је позната као Wait For Mommy (WFM[10]) стратегија.

[10] WFM (Wait For Mommy) стратегија дефинише како да мама претражује простор како би се сусрет са дететом које мирује остварио за најмање времена. Више информација се може наћи у [7]

Претпоставимо да играчи јесу мобилни али да не могу да се оријентишу. WFM стратегија, иако не зависи од оријентације, није оптимална[11] али је зато модификована WFM стратегија оптимална и очекивано време сусрета износи $13d/8$ за $u=v=1$, $r=0$. Више о модификованој WFM стратегији се може наћи у [7].

Дефиниција 3.2 (MWFM - Modified Wait For Mommy): MWFM стратегија за проблем сусретања на линији за два играча која се налазе на растојању d а крећу се јединичном брзином јесте стратегија у којој један играч (нпр. мама) тражи другог играча (нпр. дете) по следећем правилу: Мама бира смер кретања и прелази растојање d и ако на том путу не пронађе дете, окреће се и у супротном смеру прелази растојање $2d$ (WFM стратегија). Дете прелази растојање $d/2$ такође у произвољном смеру и уколико на том путу не сретне маму, враћа се у своју почетну позицију где поново бира смер кретања, прелази растојање d и ако на том путу не сретне маму, враћа се у своју почетну позицију. Сусрет маме и детета је могућ у тренуцима $d/2$, d, $2d$, $3d$.

Дакле, ако се оба играча крећу јединичном брзином, са радијусом детекције $r=0$ и ако могу пре раздвајања да се договоре око избора стратегије, очекивано време сусрета зависиће од могућности оријентације и износиће или $T^*=13d/8$ или $T^*=d$.

Претпоставимо да се играчи нису договорили ко ће усвојити стратегију $\overline{x}(t)$. Усвајањем стратегије $\overline{x}(t)$ сусрет је могућ само ако су играчи кренули један другом у сурет, односно немогућ ако се крећу у истом смеру. Коју стратегију својих кретања играчи треба унапред да договоре да би се што пре видели? Односно, како би изгледала стратегија коју ће оба играча усвојити и која ће им без обзира на избор смера кретања омогућити сусрет?

Кажемо да је играч направио један *корак* ако је максималном брзином у датом смеру прешао растојање $D=d/2$. Број корака који играч направи крећући се „у смеру десно“ обележавамо словима n_iA (n_i– број корака, *A– ahead*), односно „у смеру лево“ n_jB (n_j– број корака, *B– backward*). Стратегију играча записујемо тако да наизменично стоји број корака и смер кретања, нпр. стратегију „два корака напред, један назад па три корака напред“ обележавамо са *2A1B3A*. Нека је $u=v=1$, $r=0$.

Претпоставимо да играчи са вероватноћом ½ бирају смер кретања. Стратегија у којој ће играчи направити један корак у произвољно изабраном смеру а затим се вратити на почетну позицију се сматра најједноставнијом стратегијом. Вероватноћа да су играчи кренули један другом у сусрет износи ¼ а то је уједно и вероватноћа да ће се играчи срести. Уколико до сусрета није дошло, игра се понавља. Очекивано време сусрета за овако дефинисане стратегије играча износи:

$$T^*=\frac{1}{4}(D)+\frac{3}{4}(2D+T^*),\quad T^*=7D=7d/2 \qquad .$$

Дакле, ако стратегија $x='1A1B'$ ($x='1B1A'$) која се састоји из само два корака није обезбедила сусрет, игра се понавља. Да ли би се са већим бројем корака обезбедио бољи резултат?

Нека је дата стратегија $x='1A2B'$[12]. Ако се играчи нису срели у трентуку $T_1=D$ или $T_2=3D$ следи да су играчи на почетку изабрали исти смер па се, након одигране стратегије, опет налазе на истом растојању као и на самом почетку игре. Вероватноћа да се играчи неће срести је ½ (играчи бирају исти смер кретања), док је вероватноћа да ће се срести у тренутку *D* једнака ¼ (кренули један другом у сусрет) колико износи и вероватноћа сусрета у тренутку *3D* (изабрали смерове тако да су се на првом кораку

[11] Доказао Gal, S. [17], стр. 974-976.
[12] Дефинисали су је S. Alpern и S. Gal [7]

удаљили један од другог). Дакле, ако се сусрет није догодио до $t=3D$ игра се понавља а на почетку сваког *i*-тог понављања игре (тренутак $t=3(i-1)$, *i=1,2,3...*) растојање између играча износи *2D.* Коначно, очекивано време сусрета за стратегију $x='1A2B'$ ($x='1B2A'$) износи:

$$T^*=\frac{1}{4}(D)+\frac{1}{4}(3D)+\frac{1}{2}(3D+T^*),\;\; T^*=5D=5d/2.$$

Anderson и *Essegaier* [11] су показали да $'1A2B'$ није најбоља стратегија и предлажу да играчи, уместо да понављају једну чисту стратегију, користе 4 чисте: $x_1='2A4B', x_2='1A3B2A'$, $x_3='1A2B1A2B'$, $x_4='1A1B1A3B'$. Табела бр. 3.1.♦ садржи преглед сусрета играча у зависности од изабраних чистих стратегија и смера кретања.

Резултат се односи за почетни положај $(0,-d)$ (почетни положај $(d,0)$ даје симетричне резултате). Примећујемо да се сусрет може догодити само у тренуцима *D*, *2D*, *3D*, *4D*, *5D*, *6D* у супротном се нису срели. Ако се играчи нису срели након 6 корака, игра се понавља. При сваком понављању играчи произвољно бирају смер кретања и своју стратегију независно један од другог и од претходног избора.

Табела бр.3.1 (Табела исхода *Anderson-Essegaier*-ове стратгије)

			Први играч							
			2A4B		*1A3B2A*		*1A2B1A2B*		*1A1B1A3B*	
			десно	лево	десно	лево	десно	лево	десно	лево
Други играч	*2A4B*	Десно	0/2D	D	2D	D	2D	D	2D	D
		Лево	5D	0/2D	4D	6D	5D	0/2D	5D	0/2D
	1A3B2A	Десно	6D	D	0/2D	D	6D	D	6D	D
		Лево	4D	2D	3D	0/2D	3D	4D	4D	3D
	1A2B1A2B	Десно	0/2D	D	4D	D	0/2D	D	0/2D	D
		Лево	5D	2D	3D	6D	3D	0/2D	5D	3D
	1A1B1A3B	Десно	0/2D	D	3D	D	3D	D	0/2D	D
		Лево	5D	2D	4D	6D	5D	0/2D	5D	0/2D

Очекивано време сусрета када играчи бирају своје чисте стратегије са једнаком вероватноћом износи:

$$T^*=\frac{16}{64}D+\frac{6}{64}2D+\frac{8}{64}3D+\frac{6}{64}4D+\frac{8}{64}5D+\frac{6}{64}6D+\frac{14}{64}(6D+T^*)=4.72D=2.36d$$

Baston [14] сматра да играчи могу да постигну још боље резултате ако користе другачију мешовиту стратегију. Он је „поправио“ стратегију *Anderson* и *Essegaier*-а [11] и груписао чисте стратегије по следећем принципу:

$$\alpha_1=\text{1A2B2A1B} \quad \beta_1=\text{1A1B1A3B}$$

$$\alpha_2=\text{1A3B2A} \quad \beta_2=\text{2A4B}$$

Ако се играчи нису срели до тренутка *3D* следи да су изабрали исти смер кретања и исту ознаку стратегије (α или β). Конкретно, ако су се одлучили за стратегију са ознаком α следи да је играч који се налази испред изабрао стратегију α_1 док је играч који се налази иза изабрао стратегију α_2 (ситуација је иста ако су користили стратегију за ознаком β). Играч који је изабрао стратегију са ознаком β при следећем понављању игре стартује два места лево од претходне почетне позиције. На сличан начин као и што смо рачунали код *Anderson* и *Essegaier*-ове стратегије можемо одредити која комбинација стратегија неће омогућити сусрет и да их побољшамо тако што ћемо играча који се на крају одигране стратегије налази два корака испред вратити један

♦ Време потребно да се играчи сретну коришћењем описане стратегије. Ако се играчи нису срели стоји ознака 0/ново растојање) корак уназад, а оног који се налази два корака иза померити за један корак унапред. На овај начин добијамо нову мешовиту стратегију коју чине 4 чисте стратегије са по 7 корака:

$$\alpha_1 = 1A2B2A2B,\ \alpha_2 = 1A3B3A,\ \beta_1 = 1A1B1A3B1A,\ \beta_2 = 2A5B$$

Ако се играчи нису срели до тренутка *7D*, следи да су усвојили исту стратегију и исти правац кретања па се игра понавља. Оптимизацију расподеле вероватноће којом мешовита стратегија користи наведене чисте стратегије проучавао је *Baston* [14].
Табела 3.2 садржи преглед сусрета играча у зависности од изабраних чистих стратегија и смера кретања.

Табела бр 3.2. (Табела исхода *Baston*-ове стратегије)

			Први играч							
			1A2B2A2B		1A3B3A		1A1B1A3B1A		2A5B	
			десно	лево	десно	Лево	десно	лево	десно	лево
Други играч	1A2B 2A2B	Десно	0/2D	D	4D	D	5D	D	5D	D
		Лево	3D	0/2D	3D	7D	6D	3D	6D	2D
	1A3B3A	Десно	7D	D	0/2D	D	6D	D	6D	D
		Лево	3D	5D	3D	0/2D	4D	3D	4D	2D
	1A1B1A 3B1A	Десно	3D	D	3D	D	0/2D	D	7D	D
		Лево	6D	5D	4D	6D	5D	0/2D	5D	2D
	2A5B	Десно	3D	D	3D	D	2D	D	0/2D	D
		Лево	6D	5D	4D	6D	5D	7D	5D	0/2D

Избор чистих стратегија са једнаком вероватноћом, обезбеђује очекивано време сусрета:

$$T^* = \frac{16}{64}D + \frac{4}{64}2D + \frac{10}{64}3D + \frac{5}{64}4D + \frac{9}{64}5D + \frac{8}{64}6D + \frac{8}{64}(6D + T^*) = 3.66D = 1.83d.$$

Остало је да покажемо да стратегија кретања корацима дужине $d/2$ доминира било коју другу стратегију (померање са промењливим дужинама корака или корацима дужине која није $d/2$)

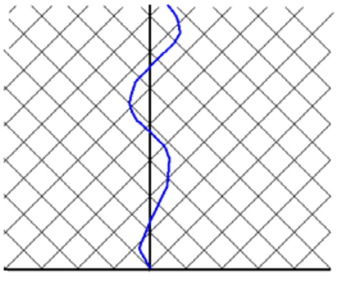
Нека је s^* стратегија са кораком D (играч се креће праволинијски и у сваком тренутку $t = k/2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ са једнаком вероватноћом бира смер у коме ће наставити своје кретање).

Теорема 3.3: Постоје стратегије облика s^* такве да за сваки пар (s_1, s_2) чистих стратегија важи:

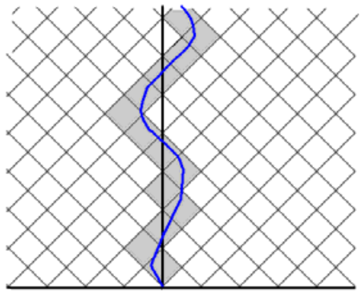
$$T(s_1, s_2) \geq T(s_1^*, s_2^*)$$

Доказ:

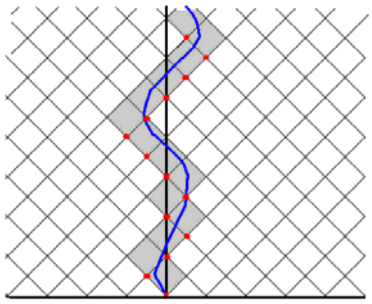
Дефинишимо прво облик стратегије s^*. Обележимо стратегију играча са *s*. Посматрамо криву $C(t) = (s(t), t)$ и дијагоналну мрежу чија су поља квадрати са дијагоналом дужине $\sqrt{2}/2$ (слика 3.2а).



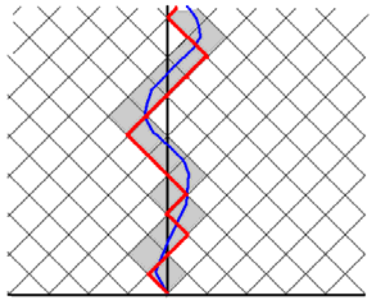
Слика 3.2
а (лево)
б (десно)



Осенчити сва поља мреже кроз која пролази крива C при чему, у случају да крива прелази из једног поља ка другом преко њиховог заједничког угла, треба осенчити и поље које се налази са њихове леве стране и са њима има по једну заједничку ивицу (Слика 3.2б). Обележити најнижи угао сваког осенченог квадрата (Слика бр. 3.2в). Нека је C^* део по део линеарна крива која спаја узастопне осенчене углове и нека је s^* таква крива да је $C^*(t) = (s^*(t), t)$ (Слика бр. 3.2г).



Слика 3.2
в (лево)
г (десно)



За сваке две дате стратегије s_1 и s_2 треба показати да важи $T(s_1, s_2) \geq T(s_1^*, s_2^*)$. Довољно је да показати да је за свако $i, j = \pm 1$, $T^{ij}(s_1, s_2) \geq T^{ij}(s_1^*, s_2^*)$. Ако је $T^{ij}(s_1, s_2) = \infty$ очигледно је да теорема важи. Нека је $t_0 = T^{ij}(s_1, s_2)$ и нека је $x_0 = is_1(t_0) = js_2(t_0) + 1$ (путање is_1 и $js_2 + 1$ се секу у тачки x_0 у тренутку t_0). Обележимо са Π_0 поље мреже у коме се налази тачка (x_0, t_0) и нека је (x_1, t_1) најнижи угао тог поља Π_0. На основу конструкције, две криве (is_1^*, t) и $(js_2^* + 1, t)$ се срећу у тачки (x_1, t_1). Коначно, $is_1^* = js_2^* + 1$ а самим тим је и $T\left(is_1^*, js_2^*\right) \leq t_1 \leq t_0$.

3.2. Играчима није познато почетно међусобно растојање

Нека је дат следећи проблем:

Нека су се два играча нашла на праволинијској обали мора на растојању које не могу да одреде а које није веће од неке коначне вредности (нпр: растојање d се добија на основу неке функције F и није веће од унапред задате величине μ).

Које стратегије играчи треба да усвоје ако је почетно растојање d непознато?

Као што је то био случај у 3.1. претпоставимо да се уместо обале мора, играчи налазе на оријентисаној правој. Нека је положај првог играча координатни почетак бројевне осе у коју се дата права претвара избором јединичне дужи. Тада почетни положај другог играча може бити било која тачка $\pm\varepsilon$, $\pm 2\varepsilon$, $\pm 3\varepsilon, \ldots, \pm k\varepsilon$ за довољно мало ε и $|k\varepsilon| \leq d$, $k \in \mathrm{N}$. Означимо стратегије играча са $x(t)$ и $y(t)$. Функције $x(t)$ и $y(t)$, су непрекидне, део по део диференцијабилне и задовољавају услове $|\dot{x}(t)| \leq u$, $x(0) = 0$ и $|\dot{y}(t)| \leq v$ у тачкама где су ови изводи дефинисани а u и v су максималне брзине кретања играча. Играчи треба да бирају најкраћу путању из скупа допустивих путања и да је пређу максимално могућом брзином како би време виђања било минимално.

Обележимо са r радијус виђања и нека је $r < \varepsilon$. Стратегија играча се формира тако да се за сваки избор почетних позиција обезбеди сусрет.

Ако је почетна позиција играча једна од тачака $(0,\pm\varepsilon)$ тада се сусрет може обезбедити усвајањем стратегије описане у поглављу 3.1. ($x(t)=\overline{x}(t),\ y(t)=\overline{y}(t)$, x_0 и y_0 су почетне позиције, $d=\varepsilon$) а очекивано време сусрета је $T_1=\frac{\varepsilon-r}{u+v}$ односно $T_2=3\frac{\varepsilon-r}{u+v}$. Ако до сусрета није дошло, следи да је почетна позиција играча била нека од тачака $(0,\pm i\varepsilon),\ i=2,...,k$. У наставку следе стратегије за $k\le 4$.

Нека је $k=2$, позиција другог играча може бити било која од тачака $\pm\varepsilon,\ \pm 2\varepsilon$ и оне се могу посетити по следећем редоследу[13]:

$(2-1)\ \varepsilon,\ -\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ -2\varepsilon$

$(2-2)\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ -\varepsilon,\ -2\varepsilon$

$(2-3)\ -\varepsilon,\ \varepsilon,\ -2\varepsilon,\ 2\varepsilon$

$(2-4)\ -\varepsilon,\ -2\varepsilon,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon$

Претпоставимо да први играч своју стратегију бира тако да посета могућих почетних позиција прати наведени редослед. Како други играч има на располагању 4 различите позиције, рећићемо да је његова стратегија $y(t)$ и да она одговара позицији $y_0\in\{-2\varepsilon,-\varepsilon,\varepsilon,2\varepsilon\}$). Можемо рећи да се други играч помера заједно са својим транслатима и да се игра завршава када их први играч све сретне.

Стратегија (2-1)

$$x(t)=\begin{cases} ut+x_0 & t\in[0,T_1]\\ -u(t-T_1)+x_1 & t\in[T_1,T_2]\\ u(t-T_2)+x_2 & t\in[T_2,T_3]\\ -u(t-T_3)+x_3 & t\in[T_3,T_4]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases} -vt+y_0 & t\in[0,T_1]\\ v(t-T_1)+y_1 & t\in[T_1,T_2]\\ v(t-T_2)+y_2 & t\in[T_2,T_3]\\ -v(t-T_3)+y_3 & t\in[T_3,T_4]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(5\varepsilon-4r)/(u+v)$.

Стратегија (2-2)

$$x(t)=\begin{cases} ut+x_0 & t\in[0,T_1]\\ u(t-T_1)+x_1 & t\in[T_1,T_2]\\ -u(t-T_2)+x_2 & t\in[T_2,T_3]\\ -u(t-T_3)+x_3 & t\in[T_3,T_4]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases} -vt+y_0 & t\in[0,T_1]\\ -v(t-T_1)+y_1 & t\in[T_1,T_2]\\ v(t-T_2)+y_2 & t\in[T_2,T_3]\\ v(t-T_3)+y_3 & t\in[T_3,T_4]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(7\varepsilon-4r)/(2(u+v))$.

Ако стратегије $x(t)$ и $y(t)$ запишемо као $-x(t),-y(t)$ добићемо стратегије које одговарају случајевима (2-3) и (2-4).

Приметимо да стратегија (2-1) има бољи резултат од стратегије (2-2) само за $y_0=-\varepsilon$. У наставку је приказано време трајања игре у зависности од изабраног стратегијског пара и почетне позиције играча за $k=2$:

		стратегијски пар играча			
		$\varepsilon,\ -\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ -2\varepsilon$	$\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ -\varepsilon,\ -2\varepsilon$	$-\varepsilon,\ \varepsilon,\ -2\varepsilon,\ 2\varepsilon$	$-\varepsilon,\ -2\varepsilon,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon$
почетна позиција другог играча	-2ε	$\frac{10\varepsilon-7r}{u+v}$	$\frac{6\varepsilon-3r}{u+v}$	$\frac{6\varepsilon-5r}{u+v}$	$\frac{2\varepsilon-r}{u+v}$
	$-\varepsilon$	$3\frac{\varepsilon-r}{u+v}$	$\frac{5\varepsilon-3r}{u+v}$	$\frac{\varepsilon-r}{u+v}$	$\frac{\varepsilon-r}{u+v}$
	ε	$\frac{\varepsilon-r}{u+v}$	$\frac{\varepsilon-r}{u+v}$	$3\frac{\varepsilon-r}{u+v}$	$\frac{5\varepsilon-3r}{u+v}$
	2ε	$\frac{6\varepsilon-5r}{u+v}$	$\frac{2\varepsilon-r}{u+v}$	$\frac{10\varepsilon-7r}{u+v}$	$\frac{6\varepsilon-3r}{u+v}$

[13] Позиције другог играча се могу посетити на бесконачан број начина, ми наводимо само оне које их доминирају.

Дакле, ако знамо да играчи нису на растојању већем од $\mu = 2\varepsilon$, и ако се крећу њима максималним брзинама, нпр. $u = v = 1$ стратегијом (2-2) или стратегијом (2-4) може се постићи да време трајања игре буде највише 3μ, односно највише 5μ коришћењем стратегија (2-1) и (2-3) (за $r = 0$).

Нека је $k = 3$, позиције другог играча могу се бирати на један од следећих начина[14]:

(3-1) $\varepsilon,\ -\varepsilon, 2\varepsilon,\ -2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ -3\varepsilon$

(3-2) $\varepsilon,\ -\varepsilon, 2\varepsilon,\ -3\varepsilon,\ 3\varepsilon$

(3-3) $\varepsilon,\ -\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ -3\varepsilon$

(3-4) $\varepsilon,\ -2\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ -3\varepsilon, 3\varepsilon$

(3-5) $\varepsilon,\ -2\varepsilon, 3\varepsilon,\ -3\varepsilon$

(3-6) $\varepsilon,\ -3\varepsilon,\ 3\varepsilon$

(3-7) $2\varepsilon,\ -\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ -3\varepsilon$

(3-8) $2\varepsilon,\ -2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ -3\varepsilon$

(3-9) $2\varepsilon,\ -3\varepsilon,\ 3\varepsilon$

(3-10) $3\varepsilon,\ -3\varepsilon$

(3-11) $-\varepsilon,\ \varepsilon,\ -2\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ -3\varepsilon,\ 3\varepsilon$

(3-12) $-\varepsilon,\ \varepsilon,\ -2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ -3\varepsilon$

(3-13) $-\varepsilon,\ \varepsilon,\ -3\varepsilon,\ 3\varepsilon$

(3-14) $-\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ -2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ -3\varepsilon$

(3-15) $-\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ -3\varepsilon,\ 3\varepsilon$

(3-16) $-\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ -3\varepsilon$

(3-17) $-2\varepsilon,\ \varepsilon,\ -3\varepsilon,\ 3\varepsilon$

(3-18) $-2\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ -3\varepsilon,\ 3\varepsilon$

(3-19) $-2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ -3\varepsilon$

(3-20) $-3\varepsilon,\ 3\varepsilon$

Стратегије (3-11)-(3-20) су симетричне стратегијама (3-1)-(3-10) тако да њих нећемо детаљно анализирати.

Стратегија (3-1)

$$x(t) = \begin{cases} ut + x_0 & t \in [0, T_1] \\ -u(t - T_1) + x_1 & t \in [T_1, T_2] \\ u(t - T_2) + x_2 & t \in [T_2, T_3] \\ -u(t - T_3) + x_3 & t \in [T_3, T_4] \\ u(t - T_4) + x_4 & t \in [T_4, T_5] \\ -u(t - T_5) + x_5 & t \in [T_5, T_6] \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} -vt + y_0 & t \in [0, T_1] \\ v(t - T_1) + y_1 & t \in [T_1, T_2] \\ -v(t - T_2) + y_2 & t \in [T_2, T_3] \\ v(t - T_3) + y_3 & t \in [T_3, T_4] \\ -v(t - T_4) + y_4 & t \in [T_4, T_5] \\ v(t - T_5) + y_5 & t \in [T_5, T_6] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^* = (28\varepsilon - 18r) / (3(u + v))$.

Стратегија (3-2)

$$x(t) = \begin{cases} ut + x_0 & t \in [0, T_1] \\ -u(t - T_1) + x_1 & t \in [T_1, T_2] \\ u(t - T_2) + x_2 & t \in [T_2, T_3] \\ -u(t - T_3) + x_3 & t \in [T_3, T_4] \\ -u(t - T_4) + x_4 & t \in [T_4, T_5] \\ u(t - T_5) + x_5 & t \in [T_5, T_6] \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} -vt + y_0 & t \in [0, T_1] \\ v(t - T_1) + y_1 & t \in [T_1, T_2] \\ -v(t - T_2) + y_2 & t \in [T_2, T_3] \\ v(t - T_3) + y_3 & t \in [T_3, T_4] \\ v(t - T_4) + y_4 & t \in [T_4, T_5] \\ -v(t - T_5) + y_5 & t \in [T_5, T_6] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^* = (24\varepsilon - 16r) / (3(u + v))$.

Стратегија (3-3)

$$x(t) = \begin{cases} ut + x_0 & t \in [0, T_1] \\ -u(t - T_1) + x_1 & t \in [T_1, T_2] \\ u(t - T_2) + x_2 & t \in [T_2, T_3] \\ u(t - T_3) + x_3 & t \in [T_3, T_4] \\ -u(t - T_4) + x_4 & t \in [T_4, T_5] \\ -u(t - T_5) + x_5 & t \in [T_5, T_6] \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} -vt + y_0 & t \in [0, T_1] \\ v(t - T_1) + y_1 & t \in [T_1, T_2] \\ -v(t - T_2) + y_2 & t \in [T_2, T_3] \\ -v(t - T_3) + y_3 & t \in [T_3, T_4] \\ v(t - T_4) + y_4 & t \in [T_4, T_5] \\ v(t - T_5) + y_5 & t \in [T_5, T_6] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^* = (21\varepsilon - 14r) / (3(u + v))$.

[14] За $k>2$ недоминантне стратегије биће изостављене.

Стратегија (3-4)

$$x(t)=\begin{cases} ut+x_0 & t\in[0,T_1] \\ -u(t-T_1)+x_1 & t\in[T_1,T_2] \\ -u(t-T_2)+x_2 & t\in[T_2,T_3] \\ u(t-T_3)+x_3 & t\in[T_3,T_4] \\ -u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5] \\ u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases},\quad y(t)=\begin{cases} -vt+y_0 & t\in[0,T_1] \\ v(t-T_1)+y_1 & t\in[T_1,T_2] \\ v(t-T_2)+y_2 & t\in[T_2,T_3] \\ -v(t-T_3)+y_3 & t\in[T_3,T_4] \\ v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5] \\ -v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(24\varepsilon-14r)/(3(u+v))$.

Стратегија (3-5)

$$x(t)=\begin{cases} ut+x_0 & t\in[0,T_1] \\ -u(t-T_1)+x_1 & t\in[T_1,T_2] \\ -u(t-T_2)+x_2 & t\in[T_2,T_3] \\ u(t-T_3)+x_3 & t\in[T_3,T_4] \\ u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5] \\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases},\quad y(t)=\begin{cases} -vt+y_0 & t\in[0,T_1] \\ v(t-T_1)+y_1 & t\in[T_1,T_2] \\ v(t-T_2)+y_2 & t\in[T_2,T_3] \\ -v(t-T_3)+y_3 & t\in[T_3,T_4] \\ -v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5] \\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(41\varepsilon-24r)/(6(u+v))$.

Стратегија (3-6)

$$x(t)=\begin{cases} ut+x_0 & t\in[0,T_1] \\ -u(t-T_1)+x_1 & t\in[T_1,T_2] \\ -u(t-T_2)+x_2 & t\in[T_2,T_3] \\ -u(t-T_3)+x_3 & t\in[T_3,T_4] \\ u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5] \\ u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases},\quad y(t)=\begin{cases} -vt+y_0 & t\in[0,T_1] \\ v(t-T_1)+y_1 & t\in[T_1,T_2] \\ v(t-T_2)+y_2 & t\in[T_2,T_3] \\ v(t-T_3)+y_3 & t\in[T_3,T_4] \\ -v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5] \\ -v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(18\varepsilon-10r)/(3(u+v))$.

Стратегија (3-7)

$$x(t)=\begin{cases} ut+x_0 & t\in[0,T_1] \\ u(t-T_1)+x_1 & t\in[T_1,T_2] \\ -u(t-T_2)+x_2 & t\in[T_2,T_3] \\ u(t-T_3)+x_3 & t\in[T_3,T_4] \\ -u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5] \\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases},\quad y(t)=\begin{cases} -vt+y_0 & t\in[0,T_1] \\ -v(t-T_1)+y_1 & t\in[T_1,T_2] \\ v(t-T_2)+y_2 & t\in[T_2,T_3] \\ -v(t-T_3)+y_3 & t\in[T_3,T_4] \\ v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5] \\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(23\varepsilon-10r)/(3(u+v))$.

Стратегија (3-8)

$$x(t)=\begin{cases} ut+x_0 & t\in[0,T_1] \\ u(t-T_1)+x_1 & t\in[T_1,T_2] \\ -u(t-T_2)+x_2 & t\in[T_2,T_3] \\ -u(t-T_3)+x_3 & t\in[T_3,T_4] \\ u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5] \\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases},\quad y(t)=\begin{cases} -vt+y_0 & t\in[0,T_1] \\ -v(t-T_1)+y_1 & t\in[T_1,T_2] \\ v(t-T_2)+y_2 & t\in[T_2,T_3] \\ v(t-T_3)+y_3 & t\in[T_3,T_4] \\ -v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5] \\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(21\varepsilon-10r)/(3(u+v))$.

Стратегија (3-9)

$$x(t)=\begin{cases} ut+x_0 & t\in[0,T_1] \\ u(t-T_1)+x_1 & t\in[T_1,T_2] \\ -u(t-T_2)+x_2 & t\in[T_2,T_3] \\ -u(t-T_3)+x_3 & t\in[T_3,T_4] \\ -u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5] \\ u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases},\quad y(t)=\begin{cases} -vt+y_0 & t\in[0,T_1] \\ -v(t-T_1)+y_1 & t\in[T_1,T_2] \\ v(t-T_2)+y_2 & t\in[T_2,T_3] \\ v(t-T_3)+y_3 & t\in[T_3,T_4] \\ v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5] \\ -v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^* = (17\varepsilon - 8r)/(3(u+v))$.
Стратегија (3-10)

$$x(t) = \begin{cases} ut + x_0 & t \in [0, T_1] \\ u(t-T_1) + x_1 & t \in [T_1, T_2] \\ u(t-T_2) + x_2 & t \in [T_2, T_3] \\ -u(t-T_3) + x_3 & t \in [T_3, T_4] \\ -u(t-T_4) + x_4 & t \in [T_4, T_5] \\ -u(t-T_5) + x_5 & t \in [T_5, T_6] \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} -vt + y_0 & t \in [0, T_1] \\ -v(t-T_1) + y_1 & t \in [T_1, T_2] \\ -v(t-T_2) + y_2 & t \in [T_2, T_3] \\ v(t-T_3) + y_3 & t \in [T_3, T_4] \\ v(t-T_4) + y_4 & t \in [T_4, T_5] \\ v(t-T_5) + y_5 & t \in [T_5, T_6] \end{cases},$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^* = (5\varepsilon - 2r)/(u+v)$.

Дакле, ако знамо да играчи нису на растојању већем од $\mu = 3\varepsilon$, и ако се крећу њима максималним брзинама, нпр. $u = v = 1$ бирањем стратегије (3-10) може се постићи да време трајања игре буде највише 3μ, односно 7μ бирањем стратегије (3-1) (за $r = 0$).
Нека је $k = 4$, позиције другог играча могу се бирати на један од следећих начина:

(4-1) $\varepsilon, -\varepsilon, 2\varepsilon, -2\varepsilon, 3\varepsilon, -3\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-2) $\varepsilon, -\varepsilon, 2\varepsilon, -2\varepsilon, 3\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-3) $\varepsilon, -\varepsilon, 2\varepsilon, -2\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-4) $\varepsilon, -\varepsilon, 2\varepsilon, -3\varepsilon, 3\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-5) $\varepsilon, -\varepsilon, 2\varepsilon, -3\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-6) $\varepsilon, -\varepsilon, 2\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-7) $\varepsilon, -\varepsilon, 3\varepsilon, -2\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-8) $\varepsilon, -\varepsilon, 3\varepsilon, -3\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-9) $\varepsilon, -\varepsilon, 3\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-10) $\varepsilon, -\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-11) $\varepsilon, -2\varepsilon, 2\varepsilon, -3\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-12) $\varepsilon, -2\varepsilon, 2\varepsilon, -3\varepsilon, 3\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-13) $\varepsilon, -2\varepsilon, 2\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-14) $\varepsilon, -2\varepsilon, 3\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-15) $\varepsilon, -2\varepsilon, 3\varepsilon, -3\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-16) $\varepsilon, -2\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-17) $\varepsilon, -3\varepsilon, 2\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-18) $\varepsilon, -3\varepsilon, 3\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-19) $\varepsilon, -3\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-20) $\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-21) $2\varepsilon, -\varepsilon, 3\varepsilon, -2\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-22) $2\varepsilon, -\varepsilon, 3\varepsilon, -3\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-23) $2\varepsilon, -\varepsilon, 3\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-24) $2\varepsilon, -\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-25) $2\varepsilon, -2\varepsilon, 3\varepsilon, -3\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-26) $2\varepsilon, -2\varepsilon, 3\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-27) $2\varepsilon, -2\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-28) $2\varepsilon, -3\varepsilon, 3\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-29) $2\varepsilon, -3\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-30) $2\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-31) $3\varepsilon, -\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-32) $3\varepsilon, -2\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-33) $3\varepsilon, -3\varepsilon, 4\varepsilon, -4\varepsilon$
(4-34) $3\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon$
(4-35) $4\varepsilon, -4\varepsilon$

Симетрично стратегијама (4-1)-(4-35) може се формирати још 35 различитих стратегија које, као и у претходним ситуацијама, нећемо детаљно анализирати.
Стратегија (4-1)

$$x(t) = \begin{cases} \text{стратегија } x(t) \text{ (3-1)}, & t \in [0, T_6] \\ u(t-T_6) + x_6 & t \in [T_6, T_7] \\ -u(t-T_7) + x_7 & t \in [T_7, T_8] \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} \text{стратегија } y(t) \text{ (3-1)}, & t \in [0, T_6] \\ -v(t-T_6) + y_6 & t \in [T_6, T_7] \\ v(t-T_7) + y_7 & t \in [T_7, T_8] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^* = (15\varepsilon - 8r)/(u+v)$.
Приметимо да за $t \in [0, T_6]$ стратегија (4-1) има исти облик као и стратегија (3-1). Слична ситуација биће и са осталим стратегијама.
Стратегија (4-2)

$$x(t) = \begin{cases} \text{стратегија } x(t) \text{ (3-1)}, & t \in [0, T_6] \\ -u(t-T_6) + x_6 & t \in [T_6, T_7] \\ u(t-T_7) + x_7 & t \in [T_7, T_8] \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} \text{стратегија } y(t) \text{ (3-1)}, & t \in [0, T_6] \\ v(t-T_6) + y_6 & t \in [T_6, T_7] \\ -v(t-T_7) + y_7 & t \in [T_7, T_8] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^* = (27\varepsilon - 15r)/(2(u+v))$.

Стратегија (4-3)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}1),\ \ t\in[0,T_5]\\ u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}1),\ \ t\in[0,T_5]\\ -v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_5,T_6]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(23\varepsilon-14r)/(2(u+v))$.

Стратегија (4-4)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}2),\ \ t\in[0,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}2),\ t\in[0,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(13\varepsilon-7r)/(u+v)$.

Стратегија (4-5)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}2),\ \ t\in[0,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}2),\ t\in[0,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(23\varepsilon-14r)/(2(u+v))$.

Стратегија (4-6)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}2),\ t\in[0,T_5]\\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}2),\ t\in[0,T_5]\\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(41\varepsilon-26r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-7)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}3),\ t\in[0,T_5]\\ u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}3),\ t\in[0,T_5]\\ -v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(49\varepsilon-26r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-8)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}3),\ t\in[0,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}3),\ t\in[0,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(45\varepsilon-26r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-9)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}3),\ t\in[0,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}3),\ t\in[0,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(45\varepsilon-26r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-10)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}3),\ t\in[0,T_4]\\ u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5]\\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}3),\ t\in[0,T_4]\\ -v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5]\\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(35\varepsilon-19r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-11)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t) \ \text{(3-4)},\ t\in[0,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \text{(3 - 4)},\ t\in[0,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(12\varepsilon-6r)/(u+v)$.

Стратегија (4-12)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t) \ \text{(3-4)},\ t\in[0,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \text{(3 - 4)},\ t\in[0,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(27\varepsilon-13r)/(2(u+v))$.

Стратегија (4-13)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t) \ \text{(3-4)},\ t\in[0,T_5]\\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \text{(3 - 4)},\ t\in[0,T_5]\\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(43\varepsilon-22r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-14)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t) \ \text{(3-5)},\ t\in[0,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \text{(3 - 5)},\ t\in[0,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(83\varepsilon-42r)/(8(u+v))$.

Стратегија (4-15)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t) \ \text{(3-5)},\ t\in[0,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \text{(3 - 5)},\ t\in[0,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(95\varepsilon-44r)/(8(u+v))$.

Стратегија (4-16)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t) \ \text{(3-5)},\ t\in[0,T_5]\\ u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \text{(3 - 5)},\ t\in[0,T_5]\\ -v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(35\varepsilon-18r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-17)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t) \ \text{(3-6)},\ t\in[0,T_5]\\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \text{(3 - 6)},\ t\in[0,T_5]\\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(45\varepsilon-20r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-18)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t) \ \text{(3-6)},\ t\in[0,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\ y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \text{(3 - 6)},\ t\in[0,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(41\varepsilon-18r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-19)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}6),\ t\in[0,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}6),\ t\in[0,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(35\varepsilon-16r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-20)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}6),\ t\in[0,T_4]\\ -u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5]\\ u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}6),\ t\in[0,T_4]\\ v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5]\\ -v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(29\varepsilon-14r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-21)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}7),\ t\in[0,T_5]\\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}7),\ t\in[0,T_5]\\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(53\varepsilon-24r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-22)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}7),\ t\in[0,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}7),\ t\in[0,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(49\varepsilon-22r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-23)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}7),\ t\in[0,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}7),\ t\in[0,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(43\varepsilon-20r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-24)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}7),\ t\in[0,T_4]\\ u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5]\\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}7),\ t\in[0,T_4]\\ -v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5]\\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(39\varepsilon-18r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-25)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}8),\ t\in[0,T_6]\\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}8),\ t\in[0,T_6]\\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(49\varepsilon-20r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-26)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија } x(t)\ \ (3\text{-}8),\ t\in[0,T_6]\\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7]\\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија } y(t)\ \ (3\text{-}8),\ t\in[0,T_6]\\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7]\\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(43\varepsilon-18r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-27)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ x(t)\ \ \text{(3-8)},\ t\in[0,T_5] \\ u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7] \\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ \ y(t)\ \text{(3-8)},\ t\in[0,T_5] \\ -v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7] \\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(19\varepsilon-8r)/(2(u+v))$.

Стратегија (4-28)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ x(t)\ \ \text{(3-9)},\ t\in[0,T_6] \\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7] \\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ \ y(t)\ \text{(3-9)},\ t\in[0,T_6] \\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7] \\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(41\varepsilon-16r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-29)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ x(t)\ \ \text{(3-9)},\ t\in[0,T_6] \\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7] \\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ \ y(t)\ \text{(3-7)},\ t\in[0,T_6] \\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7] \\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(35\varepsilon-14r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-30)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ x(t)\ \ \text{(3-9)},\ t\in[0,T_5] \\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7] \\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ \ y(t)\ \text{(3-6)},\ t\in[0,T_5] \\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7] \\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(15\varepsilon-6r)/(2(u+v))$.

Стратегија (4-31)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ x(t)\ \ \text{(3-10)},\ t\in[0,T_4] \\ u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5] \\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7] \\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ \ y(t)\ \text{(3-7)},\ t\in[0,T_4] \\ -v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5] \\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7] \\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(41\varepsilon-16r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-32)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ x(t)\ \ \text{(3-10)},\ t\in[0,T_5] \\ u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7] \\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ \ y(t)\ \text{(3-10)},\ t\in[0,T_5] \\ -v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7] \\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(39\varepsilon-14r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-33)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ x(t)\ \ \text{(3-10)},\ t\in[0,T_6] \\ u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7] \\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ \ y(t)\ \text{(3-7)},\ t\in[0,T_6] \\ -v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7] \\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(35\varepsilon-12r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-34)

$$x(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ x(t)\ \ \text{(3-10)},\ t\in[0,T_6] \\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7] \\ u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases},\quad y(t)=\begin{cases}\text{стратегија}\ \ y(t)\ \text{(3-10)},\ t\in[0,T_6] \\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_6,T_7] \\ -v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_7,T_8]\end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(29\varepsilon-10r)/(4(u+v))$.

Стратегија (4-35)

$$x(t)=\begin{cases} x(t) \text{ стратегија (3-10)} & t\in[0,T_3] \\ u(t-T_3)+x_3 & t\in[T_3,T_4] \\ -u(t-T_4)+x_4 & t\in[T_4,T_5] \\ -u(t-T_5)+x_5 & t\in[T_5,T_6] \\ -u(t-T_6)+x_6 & t\in[T_6,T_7] \\ -u(t-T_7)+x_7 & t\in[T_7,T_8] \end{cases},\quad y(t)=\begin{cases} y(t) \text{ стратегија (3-10)} & t\in[T_2,T_3] \\ -v(t-T_3)+y_3 & t\in[T_3,T_4] \\ v(t-T_4)+y_4 & t\in[T_4,T_5] \\ v(t-T_5)+y_5 & t\in[T_5,T_6] \\ v(t-T_6)+y_6 & t\in[T_4,T_5] \\ v(t-T_7)+y_7 & t\in[T_5,T_6] \end{cases}$$

Очекивано време сусрета за описан пар стратегија износи $T^*=(13\varepsilon-4r)/(2(u+v))$.
Приметимо да стратегија (4-35) гарантује сусрет играча за $T=(12\varepsilon-3r)/(u+v)$ и има најмање очекивано време сусрета. Можемо рећи да ова стратегија доминира над осталим стратегијама за $\mu=4\varepsilon$.
Аналогно се могу наћи стратегије за $k\geq 5$, а очекиване тачке сусрета биће тачке скупа

$$\{\pm\frac{\varepsilon-r}{u+v}u,\ \pm\frac{2\varepsilon-r}{u+v}u,\ \pm\frac{3\varepsilon-r}{u+v}u,\ \pm\frac{4\varepsilon-r}{u+v}u,...,\ \frac{k\varepsilon-r}{u+v}u\}$$

за играча са стратегијом $x(t)$, односно тачке скупа

$$\{y_0\pm\frac{\varepsilon-r}{u+v}v,\ y_0\pm\frac{2\varepsilon-r}{u+v}v,\ y_0\pm\frac{3\varepsilon-r}{u+v}v,\ y_0\pm\frac{4\varepsilon-r}{u+v}v,...,\ y_0\pm\frac{k\varepsilon-r}{u+v}v\}$$

за играча са стратегијом $y(t)$.
Можемо рећи да су оне фокалне и да ће играчи прво тежити ка њима, а оптималним путањама сматраћемо оне путање којима се до фокалних тачака долази најкраћом путањом.

Стратегије (2-2), (3-10), (4-35) гарантују да време трајања игре неће бити дуже од 3μ док дужина трајања игре код стратегија (2-1), (3-1), (4-1) зависи од почетног међусобног одстојања играча и износи 5μ ($\mu=2\varepsilon$), 7μ ($\mu=3\varepsilon$) и 9μ ($\mu=4\varepsilon$), односно $3\mu\leq T\leq(2k+1)\mu$ за $\mu=k\varepsilon$. Дакле, независно од међусобне удаљености, играчи се могу срести за 3μ времена тако што један играч по најкраћој путањи прво претражује све фокалне тачке са једне своје стране а затим са друге док други играч осцилује око своје почетне позиције и при сваком парном повратку у њу осциловање наставља са већим интензитетом[15].

Baston и *Gal* [19] су показали да очекивано време сусрета када је један играч фиксиран, а није познато међусобно одстојање, није веће од 6.8μ, али да се то време може смањити на 5.7μ ако се оба играча крећу коришћењем чистих стратегија. Усвајањем мешовитих стратегија, први резултат се може поправити до 4.8μ, док се други резултат може поправити до 4.42μ. Ситуација је другачија ако се играчи одлуче за исту стратегију (симетрични случај) и тада је очекивано време сусрета $\left(7+2\sqrt{10}\right)\mu\approx 13.33\mu$ и оно се односи само на мешовите стратегије обзиром да избор исте стратегије играче држи на константном међусобном одстојању. Више детаља о овом проблему се може наћи у [19].

[15] MWFM стратегија

3.3. Игра са ограниченим ресурсима

Нека је дат следећи проблем:

Два возача се налазе на праволинијској обали мора без могућности комуникације и желе да се што пре сретну. Возач, уколико му ауто остане без горива, не може да настави кретање. Коју стратегију возачи треба да усвоје како би се срели за најмање времена, ако је максимална дужина пута коју *i*-ти возач може да пређе k_i?

Намеће се питање да ли возачи могу да се сретну уколико је њихово кретање ограничено дужином пређеног пута и која је доња граница за такво ограничење. Уколико је сусрет уз наведено ограничење могућ, тражимо стратегију која ће то омогућити у очекиваном времену, у супротном максимизирамо вероватноћу сусрета.

<u>Разликујемо следеће</u>:

А) Проблем у коме су оба ограничења довољно велика или су $k_1 = \infty$ и $k_2 = \infty$, односно проблем сусретања на линији (изложен у раду [8]).

Б) Проблем у коме један возач не може да се креће ($k_1 = 0,\ k_2 > 0$ или $k_2 = 0,\ k_1 > 0$) односно проблемом тражења

са ограничењем за $k_1 < \infty$ или $k_2 < \infty$,

без ограничења за $k_1 = \infty$ или $k_2 = \infty$ (детаљно описан у [20]).

В) Проблем у коме оба возача могу да се крећу али су ограничена неким коначним величинама $k_1 = a < \infty$, $k_2 = b < \infty$, $a \geq b$, тј. игра са ограниченим ресурсима.

Већ смо показали да је време потребно да се два играча, која се налазе на међусобном одстојању d и крећу без ограничења у дужини пређеног пута, могу срести за највише $3d$ времена а да је MWFM оптимална стратегија. Дакле, ако је $a \geq b \geq 3d$ сусрет је могућ и очекивано време сусрета износи $T^* = 13d/8$.

Стратегије возача зависе од ограничења a и b па ће се, самим тим, и очекивано време сусрета мењати. На пример: ако је $a = b = 0$ јасно је да је очекивано време сусрета $T^* = \infty$.

Нека се два играча налазе на оријентисаној правој и нека је положај првог играча (назовимо га I_1) координатни почетак бројевне осе у коју се дата права претвара избором јединичне дужи. Положај другог играча (I_2) је или тачка x или тачка y, $0 < x \leq y$. Претпоставимо да се I_1 креће у позитивном смеру бројевне осе и да му је скуп почетних положаја I_2 познат. Претпоставимо да I_2 не може да одреди свој положај и, уколико се налази у тачки x, своју стратегију започиње у негативном смеру, односно у позитивном уколико му је почетни положај тачка y. Нека је максимално растојање које играчи могу да пређу одређено величинама a и b (нпр. први играч може да пређе највише растојање a). Описан проблем називамо проблемом са асиметричним информацијама и ограниченим кретањем играча и обележавамо са $\Gamma_{a,b}(x,y)$.

Лема 3.4: Проблем $\Gamma_{a,b}(x,y)$ има решење (играчи се могу срести) за $a \geq x/2$ ако и само ако је

1) $a \geq y$, b произвољно,

2) $x \leq a < y \leq b + a$ или

3) $a < x$ и $b \geq 2x + y - 3a$.

и при том важи $3a + b \geq 2x + y$. Очекивано време сусрета играча износи

$$T_\Gamma = \begin{cases} (4x+3y-3a-b)/4, & a \le (x+y)/2 \text{ и } b \le x+y-a \\ (3x+2y-2a)/4, & a \le (x+y)/2 \text{ и } b \ge x+y-a \\ (5x+3y-2b)/8, & a \ge (x+y)/2 \text{ и } (x+y)/2 \ge b \ge (y-x)/2 \\ (2x+y)/4, & a \ge (x+y)/2 \text{ и } b \ge (x+y)/2 \\ (x+y-b)/2, & a \ge (x+y)/2 \text{ и } b \le (y-x)/2 \end{cases}$$

Доказ:
На основу дефиниције проблема $\Gamma_{a,b}(x,y)$ I_1, независно од почетног положаја I_2, своје кретање почиње у позитивном смеру и креће се све док не пронађе I_2 или док не остане без горива. Стратегију за I_1 можемо да запишемо као $s_1 = \min\{t,a\}$. I_2 не може да одреди да ли се налази испред или иза I_1 па је његова стратегија осциловање око своје почетне позиције. Правило по коме I_2 осцилује око своје почетне позиције одређујемо у наставку доказа.
Ограничења ($a \ge y$, b-произвољно) или ($x \le a < y$, $b \ge y-a$) су тривијална и не утичу на исход решења. За прво ограничење стратегије играча су такве да I_2 мирује док се I_1 до тренутка $t=y$ креће у његовом смеру. Други услов захтева да I_2 мирује до тренутка $t=a$ (чека да га I_1 пронађе) а затим да се креће у смеру $y-t$ (ако га I_1 није пронашао у тачки x).
Нека је $a<x$ (треће ограничење):
Стратегија I_1 је да се креће максималном брзином (нпр. максимална брзина кретања играча је јединична) у смеру ка I_2 све док не остане без горива, дакле I_1 након a времена постаје фиксиран. Посматрајмо зато проблем из угла I_2: Нека је почетна позиција I_2 координатни почетак бројевне праве, док је почетна позиција I_1 или тачка x или тачка $-y$ (на основу формулације проблема $\Gamma_{a,b}(x,y)$). Ради лакшег рачуна рећи ћемо да I_1 има два агента и да један агент креће из тачке x (A_1) док је почетна позиција другог агента (A_2) тачка $-y$. Оба агента усвајају исту стратегију: кретање у правцу координатног почетка максималном брзином све док се не остане без горива. Након a времена A_1 ће бити на позицији $x-a$ док ће се A_2 налазити у тачки $-(y-a)$[♦]. Као што је и раније био случај, стратегија I_2 је да за што краће време пронађе оба агента играча I_1. Да би остварио циљ, I_2 се прво максималном брзином креће ка оном агенту чија му је почетна позиција ближа (други играч се прво креће ка A_1: $|x-a|<|y-a|$) да би након сусрета са њим променио смер кретања и упутио се ка другом агенту. Укупан пут који I_2 прелази користећи описану стратегију износи $2(x-a)+(y-a)$ а то је уједно и најмања дужина коју I_2 мора да пређе како би обезбедио сусрет. Дакле, мора да важи $2(x-a)+(y-a) \le b$ што је еквивалентно изразу $3a+b \ge 2x+y$. Коначно, играчима је сусрет омогућен уз ограничење $a<x$ само ако је $3a+2b \ge 2x+y$ (као што смо и захтевали у трећем услову). Израчунајмо најмање очекивано време сусрета ако је сусрет могућ:

Претпоставимо да је $a \le (x+y)/2$.

Одређујемо најмање очекивано време сусрета уз задато ограничење за a. Наводимо стратегије за преформулисан проблем:

[♦] Играчи се крећу јединичним брзинама.

$$s_1(t)=\begin{cases} x-\min\{t,a\} & ,A_1 \\ -y+\min\{t,a\} & ,A_2 \end{cases} \quad (A_1 \text{ и } A_2 \text{ су агенати првог играча})$$

s_2: стратегија I_2 има две пресечне тачке са стратегијом s_1 и дужину пута која није већа од унапред задате величине b. Одредимо s_2.

Ако је ограничење b довољно велико, I_2 ће кренути агенту ка A_1 кога ће срести у тренутку $x/2$ (из услова $a \geq x/2$ и стратегије $x-\min\{t,a\}$ агента A_1) односно у тачки $x/2$ а затим променити смер кретања и доћи до друге могуће позиције I_1, до тачке $y-a$, у тренутку $t = x+(y-a)$:

$$s_2(t)=\begin{cases} t, & 0 \leq t \leq x/2 \\ x-t, & x/2 \leq t \end{cases}$$

Коначно, за $b \geq x+(y-a)$ очекивано време сусрета износи:

$$T=\frac{x/2+(x+(y-a))}{2}=\frac{3x+2y-2a}{4}.$$

Ако је $2(x-a)+(y-a)=2x+y-3a \leq b \leq x+(y-a)$ I_2 може да обезбеди сусрет тако што ће прво мировати на својој почетној позицији до тренутка c а затим поновити поменуту стратегију. У случају „чекања c времена" играчи ће се срести у тачки $(x-c)/2$ након $(x+c)/2$ времена (док I_2 мирује, I_1 прелази растојање c чиме растојање, након c времена, између играча постаје $x-c$). Ако до сусрета није дошло, I_2 мења смер кретања и креће се ка другој могућој позицији I_1. Он среће A_2 у тренутку $(x+c)+(y-a)$ прелазећи укупно растојање $(x-c)+(y-a)$.

Можемо, без умањења општости, рећи да је укупан пређени пут I_2 уједно и максимално растојање које он може прећи, па из релације $b=(x-c)+(y-a)$ следи да је $c=x+y-a-b$ (очекивано време чекања). Очекивано време сусрета за дате услове:

$$T=\frac{\frac{x+c}{2}+((x-c)+(y-a))}{2}=\frac{3x+2y-2a-c}{4}=\frac{4x+3y-3a-b}{4}$$

Односно, оптимална стратегија I_2 је:

$$s_2(t)=\begin{cases} 0, & t \leq c \\ t, & \mathrm{c} \leq t \leq \frac{x+c}{2} \\ x-t, & \frac{x+c}{2} \leq t \end{cases}$$

Нека је $a \geq (x+y)/2$

Аналогно претходном поступку претпостављамо да се I_2 прво креће ка тачки x и у тренутку сусрета са A_1 мења смер кретања и своју путању наставља ка тачки $-y$. Сусрет I_2 и A_1 биће у тренутку $t = x/2$. Следећи сусрет (сусрет I_2 и A_2) биће у тренутку $(y+x)/2$ односно тачки $(x-y)/2$ чиме је укупан пређени пут за I_2:

$$b=2(x/2)+(y-x)/2=(x+y)/2.$$

Очекивано време сусрета и оптимална стратегија за I_2 су:

$$T=\frac{\frac{x}{2}+\frac{x+y}{2}}{2}=\frac{2x+y}{4}$$

$$s_2(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le \frac{x}{2} \\ x-t, & \frac{x}{2}\le t \end{cases}$$

Нека је $(y-x)/2\le b\le (x+y)/2$.

Тражимо очекивано време сусрета и оптималну стратегију I_2 уз задато ограничење за b. I_2 мирује $t=c$ времена а затим понавља стратегију описану у случају 2). Описаном стратегијом сусрет I_2 и A_1 ће се догодити у тренутку $(x+c)/2$, у тачки $(x-c)/2$, а сусрет са A_2 у тренутку $(x+y)/2$, у тачки $(y-x)/2$. Укупно растојање које I_2 прелази износи:

$$b=2(x-c)/2+(y-x)/2=(y+x-2c)/2.$$

Одавде следи да је $2c=y+x-2b$. Очекивано време сусрета и оптимална стратегија I_2 су:

$$T=\frac{\frac{x+c}{2}+\frac{x+y}{2}}{2}=\frac{2x+y+c}{4}= =\frac{4x+2y+2c}{8}=\frac{5x+3y-2b}{8}, \quad s_2(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le c \\ t, & c\le t\le \frac{x+c}{2} \\ x-t, & \frac{x+c}{2}\le t \end{cases}$$

Нека је $(y-x)/2\ge b$.

Ради лакшег рачуна ставићемо да је $b=(y-x)/2-u$, $u\ge 0$ $(2u=y-x+2b)$. Стратегију I_2 описујемо на следећи начин: I_2 прво чека да A_1 дође до његове позиције а затим се са њим креће све док не остане без горива. Сусрет I_2 и A_1 обележавамо са t_1, $t_1=x$. У интервалу $[t_1,t_1+b]$ I_2 се креће у смеру ка A_2 да би га на сегменту $[-b,0]$ срео или остао без горива. За наведени временски интервал A_2 се налази између тачака $-y+x$ и $-y+x+b$. Како дати сегменти немају заједничких тачака, следи да ће I_2 остати без горива пре него што га A_2 пронађе. У тренутку када он остане без горива, његово растојање од A_2 износи:

$$d=d(I_2,A_2)=|(-y+x+b)-(-b)|=|y-x-2b|= =|y-x-2((y-x)/2-u)|=2u$$

Дакле, I_2 ће сачекати да A_2 дође до њега, а сусрет ће се догодити у тренутку $t_2=(-y+x+b)+2u$. Очекивано време сусрета и оптимална стратегија I_2 износе:

$$T=\frac{x+(b+2u)}{2}=\frac{x+b+2u}{2}= =\frac{x+b+(y-x+2b)}{2}=\frac{y+3b}{2}, \quad s_2(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le x \\ x-t, & x\le t\le b \\ -b, & t\ge b \end{cases}.$$

•

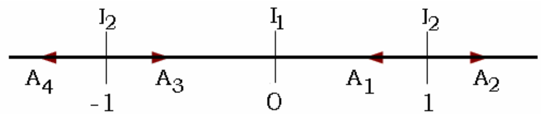
Теорема 3.5: Нека су два играча, назовимо их I_1 и I_2, произвољно распоређена на линији, са почетним међусобним растојањем $d=1$, тако да ни један играч не зна у ком се смеру налази други играч. Претпоставимо још да се играчи могу кретати највише јединичном брзином и да им је кретање ограничено величинама a и b које представљају максимална растојања које могу да пређу ($a\ge b$, a је ограничење за I_1 док је величина b ограничење за I_2). Играчи могу да гарантују сусрет само ако је

$5a+3b \geq 15$. За овако задата ограничења, најмање очекивано време сусрета задовољава следеће услове:

$$T_{a,b} = \begin{cases} (31-5a-3b)/8, & 2a+b \leq 6 \\ (19-a-b)/8, & 2a+b \geq 6 \text{ и } a \leq 3 \\ (16-b)/8, & b \leq 3 \leq a \\ 13/8, & 3 \leq b \end{cases}$$

Доказ:

Претпоставимо да се I_1 налази у координатном почетку а да је позиција I_2 једна од тачака $(\pm 1, 0)$. Обележићемо сусрете I_1 и агената другог играча са t_1, t_2, t_3, t_4 ($t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$). Анализирајмо прво сусрете t_1 и t_2. Ако обележимо стратегију I_2 са $h(t)$ тада стратегије његових агената који полазе из тачке (1,0) можемо записати као $h_1(t) = 1 - h(t)$ и $h_2(t) = 1 + h(t)$.

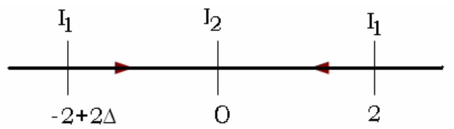


Слика 3.3 (Почетне позиције и смерови кретања првог играча и агената другог играча)

Уводимо ознаке $z_1 = 1 - t_1$ и $z_2 = t_2 - t_1$. У тренутку t_1 I_1 среће једног од агената (A_1 или A_2, слика 3.3) у тачки $1 - z_1$ а у тренутку t_2 другог агента у тачки $1 + z_1 - z_2$. Ако је $z_1 \leq 1/2$ и $z_1 \leq z_2 \leq 2z_1$ (ставимо да је $\Delta = z_2 - z_1$) следи да је $0 \leq \Delta = z_2 - z_1 \leq z_1 \leq 1/2$. Претпоставимо даље да у тренутку t_2 играчи имају могућност да преиспитају своје одлуке и да промене стратегије. I_1, који се налази на локацији $g(t_2) = 1 - \Delta$ зна да је I_2 на једној од локација $-1 \pm h(t_2) = -1 \pm \Delta$, односно I_1 зна правац на коме се I_2 налази и зна да је њихово међусобно растојање $(1-\Delta) - (-1 \pm \Delta)$ односно $2 - 2\Delta$ или 2. I_2 зна да је I_1 или на растојању 2 испред њега или на растојању $2 - 2\Delta$ иза. I_1 је прешао укупно растојање $1 - \Delta$ док је I_2 прешао укупно растојање $z_1 + z_2$. Коначно, након описана два сусрета, наш проблем се своди на проблем са асиметричним информацијама $\Gamma_{a,b}(x, y)$ дефинисан раније[16] (нове вредности за асиметрични проблем су записане великим словима):

$$\begin{matrix} A = a - 1 + \Delta \\ B = b - z_1 - z_2 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} X = 2 - 2\Delta \\ Y = 2 \end{matrix}$$

Дакле, у наставку решавамо асиметрични проблем $\Gamma_{AB}(X, Y)$ (слика 3.4).



Слика 3.4. (Позиције играча након t_2 времена)

Потребно је да прилагодимо услове Леме 3.4. новим ознакама:

1) $A \geq Y \iff a + \Delta \geq 3$

2) $\begin{matrix} X \leq A < Y \\ B \geq Y - A \end{matrix} \iff \begin{matrix} (3-a)/3 \leq \Delta \leq 3 - a \\ a + b \geq 3 + 2z_1 \end{matrix}$

[16] Лема 3.4

$$z_1 \geq \Delta \geq (3-a)/3 \;\Rightarrow\; \left(a+b \geq 3+2z_1 \;\Leftrightarrow\; a+b \geq 3+2\left((3-a)/3\right)\right)$$

$$\Rightarrow 5a+3b \geq 15$$

3) $\begin{matrix} A < X \\ B \geq 2X+Y-3A \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a < 3-3\Delta \;\Rightarrow\; -3\Delta > a-3 \\ b+3a \geq 9-7\Delta+(z_1+z_2) \geq \end{matrix}$

$$\geq 9-(6\Delta+z_2-z_1)+(z_1+z_2)$$

$$\geq 9-6\Delta+2z_1 \geq 9-4\Delta$$

$$\geq 9-4\frac{a-3}{3} \quad /*3$$

$$3b+9a \geq 27+4(a-3) \;\Leftrightarrow\; 3b+5a \geq 15$$

Други и трећи услов се своде на исто ограничење $5a+3b \geq 15$. Приметимо да је добијено ограничење управо оно ограничење које смо и хтели да добијемо на основу поставке Леме 3.4. Остало је да докажемо ограничења по питању очекиваног времена сусрета:

Претпоставимо да је $a \geq b$ и да стратегијски пар задовољава услов $5a+3b \geq 15$. Узећемо даље да је $b < 3$ (већ смо рекли да услов $a \geq b \geq 3$ представља проблем сусретања без ограничења и да је очекивано време сусрета 13/8). Описали смо стратегије играча до тренутка t_2 и рекли да ако се до тог тренутка играчи не сретну онда посматрамо подигру $\Gamma_{AB}(X,Y)$ (енг. *subgame*) и очекујемо да ће се сусрет догодити за време t_2+T_Γ. Дакле, очекивано време сусрета рачунамо као:

$$T^* = (t_1+t_2)/4+(t_2+T_\Gamma)/2$$

$$T^* = \frac{(1-z_1)+(1+\Delta)}{4}+\frac{1+\Delta+T_\Gamma}{2}$$

Нека су $a \leq 3$ и $a+b \leq 5$:

$$\begin{cases} A \leq (X+Y)/2 = (2-2\Delta+2)/2 = 2-\Delta \\ A = a-1+\Delta \end{cases} \Rightarrow a \leq 3-2\Delta \leq 3$$

$$\begin{cases} A+B = a-1+\Delta+b-z_1-z_2 \\ X+Y = 2+2-2\Delta \end{cases} \Rightarrow a+b-2z_1 \leq 4-2\Delta \Rightarrow a+b \leq 4-2z_2 \leq 5$$

Ако узмемо већ израчунате вредности за T_Γ из Леме 3.4 добијамо да је:

$$4T_\Gamma = 4X+3Y-3A-B = 8-8\Delta+6-3a+3-3\Delta-b+z_1+z_2$$

$$= 17-10\Delta-3a-b+2z_1$$

$$8T^* = 8+6\Delta-2z_1+4T_\Gamma$$

Следи даље:

$$8T^* = 25-3a-b-4\Delta$$

Сада се проблем минимизације времена своди на проблем максимизовања вредности Δ. Из услова $A \leq (X+Y)/2$ леме 3.4. следи да је

$$A \leq (X+Y)/2$$

$$a-1+\Delta \leq \left((2-2\Delta)+2\right)/2 \;\Rightarrow\; \Delta \leq (3-a)/2$$

Даље, из услова $a+b \geq 3+2z_1$ и $\Delta \leq z_1$ имамо да је $\Delta \leq z_1 \leq \frac{a+b-3}{2}$, па комбинујући последња два решења следи да је:

$$\Delta \leq \begin{cases} \dfrac{a+b-3}{2}, & 2a+b \leq 6 \\ \dfrac{3-a}{2}, & 2a+b \geq 6 \end{cases}$$

Заменом у формулу за T* добијамо вредности $T^* = \begin{cases} (31-5a-3b)/8, & 2a+b \leq 6 \\ (19-a-b)/8, & 2a+b \geq 6 \end{cases}$

Остало је још да одредимо стратегије којима ће се достићи очекивано време сусрета: Претпоставимо да је $a \geq b$ и да стратегијски пар задовољава услов $5a+3b \geq 15$. Нека важи додатни услов да је $2a+b \leq 6$. Уводимо нове ознаке: $d_1 = (a+b-3)/2$ и $x_1 = 6-2a-b$. Очекивано време сусрета $T(g_1,h_1) = (31-5a-3b)/8$ постижемо ако стратегијски пар (g_1,h_1) дефинишемо на следећи начин:

$$g_1(t) = \begin{cases} t, & t \leq 1-d_1 \\ 1-d_1, & 1\text{-}d_1 \leq t \leq 1+d_1 \\ 2-t, & 1+d_1 \leq t \leq a+2d_1 \\ 2-a-2d_1, & a+2d_1 \leq t \end{cases}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} t, & t \leq d_1 \\ d_1, & d_1 \leq t \leq 1-d_1 \\ 1-t, & 1-d_1 \leq t \leq 1+d_1 \\ -d_1, & 1+d_1 \leq t \leq 3-d_1 \\ t-3, & 3-d_1 \leq t \leq 3+d_1 \end{cases}$$

За овако дефинисане стратегије, сусрет између I_1 и агената I_2 ће се догодити у тренуцима $t_1 = 1-d_1$, $t_2 = 1+d_1$, $t_3 = 3-d_1$, $t_4 = 3+d_1$ $t_4 = 3+d_1$ што нам даје очекивано време $(31-5a-3b)/8$. Ако је стратегија I_1 $g_1(t)$ онда је стратегија I_2 $\pm 1 \pm h_1(t)$.

Нека је сада $2a+b \geq 6$. Уводимо ознаке $d_2 = (3-\min\{a,3\})/2$ и $x_2 = (b-1)/2$. Као и за претходни услов, дефинишимо оптимални стратегијски пар са (g_2,h_2) на следећи начин:

$$g_2(t) = \begin{cases} t, & t \leq 1-d_2 \\ 1-d_2, & 1\text{-}d_2 \leq t \leq 1+d_2 \\ 2-t, & 1+d_2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} t, & t \leq 0.5 \\ 1-t, & 0.5 \leq t \leq 1+x_2 \\ 1+x_2, & 1+x_2 \leq t \leq 3-x_2 \\ t-3, & 3-x_2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

За овако дефинисане стратегије, сусрет између I_1 и агената I_2 ће се догодити у тренуцима $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1+d_2$, $t_3 = 3-d_2$, $t_4 = 3$ што нам у просеку даје $(19-a-b)/8$. Ако је стратегија првог $g_2(t)$ онда је стратегија другог $\pm 1 \pm h_2(t)$.

Почетне позиције играча бирају се на основу неке функције расподеле *F*. Са променом функције *F* мењаће се и стратегије играча као и очекивано време сусрета. Више информација се може наћи код *Alpern*-а и *Beck*-а [5].

3.4. Проблем сусретања за више од два играча

Нека је дат следећи проблем:

На праволинијској обали мора без могућности комумникације налази се n играча који желе да се што пре сретну. Коју стратегију играчи треба да усвоје како би се у једном тренутку сви налазили на истом месту?

Стратегија играча у којој је унапред договорено место сусрета је тривијална. Нека су играчи, уместо на обали мора, распоређени на оријентисаној правој и нека су њихови почетни положаји тачке d_i, $i = 1,2,..,n$ бројевне осе у коју се дата права претрвара избором јединичне дужи. Одредимо фокалну тачку у којој би време потребно да се играчи сретну било минимално и обележимо је са θ:

$$\theta = (\max\{d_i : i = 1,2,..,n\} + \min\{d_j : \mathrm{j} = 1,2,..,n\}) / 2$$

Стратегија у којој би се сви играчи кретали ка тачки θ има очекивано време сусрета:

$$T^* = \max\left\{\left|\max\left\{d_i : i = 1,2,..,n\right\} - \theta\right|, \left|\min\left\{d_j : \mathrm{j} = 1,2,..,n\right\} - \theta\right|\right\}.$$

Претпоставимо да играчима није позната фокална тачка и претпоставимо још да су они произвољно распоређени у тачкама $1,2,..,n$. Како је између играча који су на позицијама 1 и n растојање $n-1$, сусрет се неће догодити пре тренутка $(n-1)/2$ (време потребно да играчи јединичном брзином дођу до тачке $(n-1)/2$). Коју стратегију играчи треба да усвоје ако не могу да одреде своју почетну позицију и ако је растојање између свака два узастопна играча $d = 1$.

Представићемо статегију коју су *Lim*, *Alpern* и *Beck* [24] изложили као једну могућност за симетричне игре сусретања са n играча распоређена тако да је између свака два суседна играча растојање $d = 1$. Стратегија се састоји из три фазе и једног правила за играче. Поново користимо појам корака дужине 1/2 као што то је био случај раније.

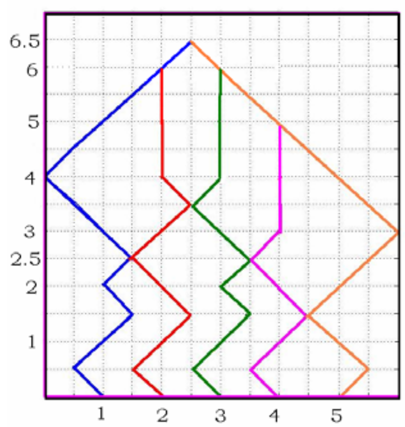
<u>Правило</u>: Пратити оног играча који то буде тражио.

<u>Фаза 1</u>: Изабрати смер кретања независно од осталих играча и од претходног избора а затим у том смеру прећи растојање ½ и вратити се на почетну позицију, проћи је и доћи на растојање од ½ од почетне позиције али са друге стране да би се опет вратили на почетак. Фаза 1 траје 2 временске јединице. Поновити фазу 1 све док се не сретне неки играч после чега се они играчи који су се срели враћају у своју почетну позицију и започињу фазу 2.
Играчи се у првој фази враћају на своје почетне позиције у тренуцима $t = 1$ или $t = 2$ после чега или понављају прву или почињу другу фазу.

<u>Фаза 2</u>: Кретати се јединичном брзином у смеру супротном оном у коме се догодио сусрет из прве фазе. Растојање које се прелази у том смеру не сме бити веће од 1 и ако се на том путу сретне неки други играч (у року од $t = 1/2$ или $t = 1$ од почетка Фазе 2) вратити се на своју почетну позицију и чекати. Уколико се ни један други играч не сретне прећи на фазу 3.

<u>Фаза 3</u>: Као смер кретања бирати онај на коме се налази почетна позиција. Кретати се у том смеру јединичном брзином и све играче који се сретну на том путу позвати да се придруже. Игра се прекида када се два крајња играча сретну.

Пример:
Путање играча обележимо различитим бојама (Слика 3.5). Приметимо да ће играчи који се налазе на најудаљенијим тачкама (плави и наранџасти) окупити све остале играче:



Слика 3.5 (Стратегије играча који желе да се сретну)

Посматрамо прво стратегију плавог играча:

Плави играч произвољно бира смер кретања у првој фази. Како никога није срео до тренутка $t = 2$ понавља прву фазу. При понављању прве фазе плави играч поново бира смер кретања (нпр. десни) и среће црвеног играча у тренутку $t = 2.5$, враћа се на своју почетну позицију и започиње другу фазу. У другој фази се креће у смеру супротном оном где је срео црвеног и прелази растојање 1 а како никога не среће на том путу друга фаза се завршава и почиње трећа. У трећој фази се плави играч креће у смеру своје почетне позиције (коју пролази) и све играче које сретне уз пут позива да му се придруже. Црвени играч такође никога не среће у својој првој фази коју мора да понови. Приликом понављања прве фазе, он среће плавог, мења смер и започиње другу фазу. Обзиром да у другој фази црвени среће зеленог играча, он се враћа у своју почетну позицију и чека да га неко покупи. Наранџасти играч већ у првом извођењу прве фазе среће љубичастог и прелази у другу фазу у којој никога не среће што га аутоматски пребацује на трећу фазу. У трећој фази, као што је то био случај са плавим играчем, он се креће у смеру своје почетне позиције, пролази је и наставља своје кретање ка плавом играчу позивајући уз пут све друге играче које сретне (љубичастог и зеленог) да му се придруже. Игра се завршава када се плави и нараџасти играчи сретну ($t = 6.5$).

Стратегија играча (фаза 2) је осмишљена тако да они сами препознају да ли су њихове позиције крајње или не. Ако јесу крајње позиције онда је њихов циљ да покупе све остале и сретну се са играчем чија је почетна позиција била на другом крају. Ако позиције играча нису крајње било какво кретање је непотребно, те стога они мирују.

Израчунајмо време које је, користећи описану стратегију, играчима потребно да се сретну. Обележимо играче са $I_1, I_2, ..., I_n$. Обележимо са t_i тренутак када се I_i играч врати у своју почетну позицију а да је у међувремену срео неког другог играча. Ако се играчи никада нису срели, тада је $t_i = \infty$ али вероватноћа таквог догађаја је једнака нули (у нашем примеру $t_{ПЛАВИ} = 3$, $t_{НАРАНЏАСТИ} = 2$). Приметимо да за свака два узастопна играча важи $|t_i - t_{i+1}| \leq 1$ ($t_{ЦРВЕНИ} = 3$, $t_{ЗЕЛЕНИ} = 3$, $t_{ЉУБИЧАСТИ} = 2$) па можемо да закључимо да је $|t_n - t_1| \leq n-1$. Дакле, занима нас када ће се I_1 и I_n срести, обзиром да је њихов задатак да окупе и све остале играче. Оно што можемо да приметимо је да ће I_1 у тренутку $t_1 + 1$ бити на позицији 0, док ће I_n у трентуку $t_n + 1$ бити на позицији $n+1$. Ово је последица фазе 2 и чињенице да су први играчи које ће I_1 и I_n срести управо I_2 и I_{n-1}. На основу дефиниције фазе 3, позиција I_1 у тренутку t, $t \geq t_1$ биће $I_1(t) = t - (t_1 - 1)$ док ће позиција I_n у том тренутку бити $I_n(t) = n + 1 - \left[t - (t_n + 1)\right]$, што значи да ће се ова два играча срести када буде била задовољена релација $I_1(t) = I_n(t)$, односно:

$$T^* = \frac{n + 3 + t_1 + t_n}{2}$$

Остало је да проценимо време сусрета t_1 и t_n. Нека је $t_1{}^*$ очекивано време сусрета за t_1. Да би израчунали $t_1{}^*$ довољно је да посматрамо само I_1 и I_2 који ће се срести са вероватноћом ¼ до тренутка $t = 1$, са вероватноћом ¼ до тренутка $t = 2$ и са вероватноћом ½ после времена $t = 2$. Дакле:

$$t_1{}^* = \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{2}(2 + t_1{}^*) \;\Rightarrow\; t_1{}^* = 7/2 \geq t_1.$$

Исто решење добијамо и за t_n па је очекивано време сусрета за описане стратегије

$$\frac{(n-1)}{2} \leq T^* \leq \frac{n+3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{n}{2} + 5$$

Lim, *Alpern* и *Beck* [24] су показали да се ове границе могу померити, и да је

$$\frac{n}{2} \leq T^* \leq \frac{n+3}{2} + e_n$$

где e_n варира у зависности од броја играча (табела ниже даје вредности за e_n у зависности од броја играча који треба да се сретну)

N	2	3	4	5	6	7	8	9
e_n	3.5	2.5	2.34	2.31	2.3087	2.30832	2.30828	2.30828

Дефиниција 3.6: Нека се *n* играча налази на линији *П* и нека су њихове почетне позиције *n* узастопних тачака те линије (тачке узимају вредности које одговарају скупу природних бројева). Сваки од играча сам бира смер кретања као почетни. Мин-макс време M_n је најмање време потребно да се сви играчи сретну у једној тачки.

Већ смо показали, да стратегијом MWFM 2 играча могу себи да обезбеде мин-макс време 3 ($M_2 = 3$). Показаћемо у даљем раду да је $M_3 = 3.5$.

<u>Нека је број игрча 3, *n = 3*</u>.

Претпоставимо да су родитељи кренули са дететом у мега маркет и у једном тренутку се раздвојили. Сво троје желе да се што пре сретну. Стратегија родитеља је да пронађу дете или да бар пронађу један другог па да затим заједно пронађу дете. Стратегија детета је да пронађе једног родитеља или да чека да они њега пронађу. У случају да дете чека да буде пронађено, можемо рећи да је његова позиција фокална тачка и да је циљ родитеља управо налажење те тачке. Са друге стране, ако се и дете одлучило за претрагу и стратегија родитеља се мења..

Дакле, решавамо проблем за три играча која су произвољно распоређена на правој *П* и желе да се што пре сретну. Означимо играче са I_1, I_2 и I_3 и претпоставимо да су њихове почетне позиције *1*, *2* и *3* (најједноставнији сценарио). Сваки играч може да бира свој смер кретања независно од осталих играча. Хоћемо да покажемо да играчи себи могу да обезбеде да очекивано време сусрета буде 3.5. *Alpern* и *Lim* [10] су представили *Baston*-ово решење проблема (случај када су сва три играча мобилна) на следећи начин: Стратегију играча чине две фазе (за разлику од случаја када имамо *n* играча и 3 фазе). Прва фаза дефинише понашање играча пре било каквог сусрета док друга фаза дефинише понашање играча након сусрета.

<u>Фаза 1</u>: Играчи се крећу у произвољно изабраном смеру све док не сретну неког другог играча (када за њих почиње фаза 2) или не прође $t=1$ времена.

<u>Фаза 2</u>: Сусрети се, на основу дефинисаних позиција играча, могу догодити само у тренуцима $t=k/2$, $k=1,2,3,...$. Обележимо стратегију *i*-тог играча са $s_i=(x_1,x_2,..,x_j)$ где је $x_i=\{+1,-1\}$ (ознаке +1 и -1 користимо уместо *A* - *ahead*, *B* - *backward*). Ако претпоставимо да је почетна позиција *i*-тог играча тачка 0, тада је његова позиција у тренутку *t* (у првој фази стратегије) тачка

$$s_i(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{[2t]}x_i+x_{[2t]+1}\left(\frac{2t-[2t]}{2}\right).$$

Нпр. $s_i=(AABAA)=(1,1,-1,1,1)$, $s_i(2,2)=1.2$

Са друге стране, ако је почетна позиција *i*-тог играча била тачка d_i, онда ће његова позиција у тренутку *t* бити $d_i+x_is_i(t)$.

Претпоставићемо да су се сва три играча на почетку игре определила за исти смер кретања, нпр: A (у супротном ће већ у тренутку $t=1/2$ доћи до првог сусрета). Први сусрет било која два играча обележићемо са $T_0=k/2$, $k\in N^+$. Кажемо да је у тренутку T_0 почела друга фаза игре за играче који су се срели (нпр. срели су се I_1 и I_2). Играч који је и после тренутка T_0 у првој фази игре (I_3) може да закључи да је његова почетна позиција била или испред или иза преостала два играча. I_1 и I_2, на основу својих стратегија и почетних позиција, могу да процене где се I_3 налази у тренутку T_0. Обележимо са T_+ максимално растојање које би они прешли у позитивном смеру како би сигурно срели I_3, односно са T_- максимално растојање које би прешли у негативном смеру. Друга фаза стратегије за I_1 и I_2 се састоји у следећем: један од играча (нпр. I_1) се максималном брзином (јединичном у нашем случају) креће у позитивном правцу T_+ времена и ако до тада не пронађе трећег играча мења смер и наставља своје кретање у супротном смеру. I_2 се максималном брзином креће у негативном смеру и ако не пронађе I_3 за време T_-, мења смер и наставља своје кретање. Претпоставља се да ће онај играч (I_1 или I_2) који сретне I_3 заједно са њим променити смер и кренути ка другом играчу. Овако описане стратегије гарантују да ће се играчи који су се већ једном срели поново срести до тренутка $T_0+T_++T_-$ када ће један од њих довести са собом и трећег играча.

Лема 3.7: Два играча, која су се срела у тренутку T_0 не могу да гарантују да ће се сво троје срести пре времена $T_0+T_++T_-$ (T_+ и T_- су дефинисани горе).

Доказ:
Претпоставимо да су све три величине T_0, T_+ и T_- позитивне (ситуација када је нека од наведених величина једнака нули је тривијална). Ако узмемо да се први сусрет играча (тренутак T_0) догодио у тачки 0, очекујемо да ће трећи играч у тренутку $t=T_0+T_+$ бити на позицији T_+ или у тренутку $t=T_0+T_-$ бити на позицији T_-. То значи да ће се у првом случају за $\forall t$, $t\geq T_0+T_+$ I_3 налазити у некој тачки скупа $H_+=\{x:t+x\geq T_0+2T_+\}$ односно, у другом случају, за $\forall t$, $t\geq T_0+T_-$ I_3 ће припадати некој тачки скупа $H_-=\{x:t-x\geq T_0+2T_-\}$. Стратегија I_1 и I_2 треба да пролази кроз пресек наведена два скупа, односно кроз $H_+\cap H_-$:

$$\begin{cases} t \geq T_0 + 2T_+ - x \\ t \geq T_0 + 2T_- + x \end{cases} \Rightarrow 2t \geq 2T_0 + 2T_- + 2T_+ \Rightarrow t \geq T_0 + T_- + T_+ \quad .$$

Сада знамо најмање време за другу фазу игре. *Alpern* и *Lim* [10] су показали да је $M_3 = 4$. Baston [14] је поставио стратегију којом се мин-макс време смањује на 3.5:

Baston-ова стратегија

Baston-ову стратегију за три играча који желе да се сретну на линији *П* дефинишемо преко Фазе 1 (период пре сусрета са било којим другим играчем) и Фазе 2 (период након сусрета).

Играчима су на располагању следеће три стратегије:

'2A5B', '1A2B2A2B', '1A2B1A1B2A'

Два играча, пошто се сретну могу да размене информације о томе које су њихове почетне позиције и које су стратегије до сада користили, па тако могу да одреде позицију трећег играча.

Фаза 1:

а) Играч који је изабрао стратегију '2A5B' (назовимо га I_1) бира произвољно своју оријентацију и стратегију. Ако I_1 има бар једног играча испред себе, тада ће се први сусрет два играча догодити или у тренутку $t = 1/2$ (срела су се друга два играча или се I_1 срео са оним играчем који је директно испред њега) или $t = 1$ (I_1 се срео са играчем који је директно испред њега).

б) Ако играч кога смо назвали I_1 нема ни једног играча испред себе, тада ће се први сусрет два играча догодити за $t = 1/2$, $t = 3/2$ или $t = 5/2$. Прва два термина су искључиво везана за сусрет друга два играча (I_2 и I_3) и односе се на случај када су се та два играча определила за супротне оријентације. Уколико I_2 и I_3 имају исту оријентацију, тада ће се они или срести у тренутку $t = 5/2$ или ће један од њих срести I_1 у тренутку $t = 5/2$ па онда заједно са I_1 кренути ка последњем играчу. Сусрет сва три играча биће у средишњој тачки дужи коју чине почетне позиције I_2 и I_3 и тај сусрет се може догодити најкасније до тренутка $t = 7/2$.

Фаза 2:

Када се два играча сретну, своје кретање настављају по већ дефинисаној путањи с'тим да се играч коме је ово први сусрет залепи за другог играча и са њим настави кретање.

а) Ако су се I_2 и I_3 први срели и време сусрета је мање од $t = 1/2$ тада се за време $t = 1$ оба играча враћају до своје почетне позиције а онда опет до тачке сусрета у којој чекају да их I_1 пронађе.

Овај случај је могућ само ако I_1 не почиње игру из средишње тачке (тачка 2) па самим тим следи да ће се сва три играча срести до тренутка $t = 3/2$ ако је I_1 изабрао оријентацију ка I_2 и I_3, односно до тренутка $t = 7/2$ ако је изабрао супротну оријентацију.

б) Ако су се I_2 и I_3 први срели и сусрет се догодио након времена $t = 1/2$, тада они остају фиксирани на месту сусрета и чекају да I_1 дође до њих.

Описан случај је могућ ако I_1 није почео своју игру у средишњој тачки и изабрао је оријентацију која је супротна I_2 и I_3. Како се I_2 и I_3 срећу у тачки која се налази на средини између њихове две почетне позиције у тренутку који је најкасније $t = 5/2$, тада је сусрет сва три играча у тренутку $t = 5/2$.

в) Ако су се прво срели играчи I_1 и I_2 и време сусрета је $t = 1/2$, тада се оба играча користећи своју почетну оријентацију крећу три корака уназад а затим три корака унапред. Један од играча I_1 или I_2 ће током померања назад-напред срести и трећег играча, па је укупно време потребно да се сва три играча сретну $t = 7/2$.

г) Ако су се прво срели играчи I_1 и I_2 и време сусрета је $t = 1$ тада, пратећи своју почетну оријентацију, I_2 се прво помера корак напред а затим 4 корака назад, док се I_1 помера 4 корака уназад а затим један напред. (I_2: '1A4B', I_1: '4B1A')

Овај случај може да се догоди само ако су I_1 и I_2 користили исту оријентацију и ако је I_2 као почетну тачку имао средишњу, те се почетна позиција за I_3 налази испред почетне позиције I_2 и I_3 је користио исту оријентацију као I_1 и I_2. Ако је I_2 почео игру као средишњи играч, тада ће се I_2 и I_3 срести до тренутка $t = 5/2$, а ако је I_1 почео игру као средишњи играч, тада ће се играчи I_1 и I_3 срести до тренутка $t = 3$. У сваком случају, сва три играча ће се окупити у року од $t = 7/2$.

д) Ако су се прво срели I_1 и I_2 и време сусрета је 5/2, тада се обоје померају уназад два корака користећи оријентацију коју има I_1.

Последњи случај може да се догоди само ако је I_2 почео игру као средишњи играч и сви играчи користе исту стратегију. На основу случаја б) из прве фазе, сва три играча ће се срести најкасније за време $t = 7/2$.

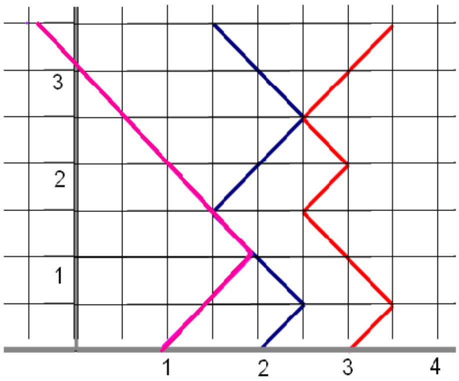
Случајеви у којима се I_1 и I_3 први срећу се аналогно показују као в), г) и д) с тим да се у случају д) I_2 и I_3 морају кретати супротном оријентацијом од оријентације коју користи I_1.

Коришћењем правила а) и б) лако се може показати да смо покрили све ситуације које се могу догодити коришћењем описаних стратегија и да ће се сусрет догодити најкасније за $t = 7/2$. Како су *Alpern* и *Lim* [10] већ показали да је $M_3 \geq 3.5$ можемо рећи да важи следећа теорема:

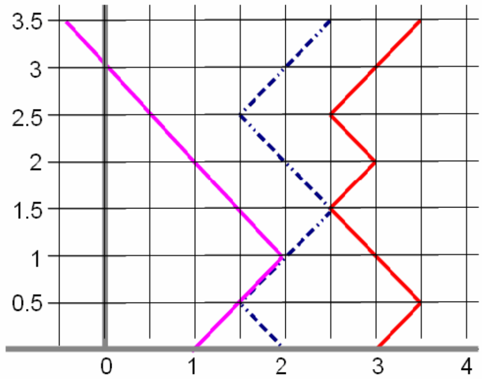
Теорема 3.8: Три играча, произвољно распоређена на линији *П* са почетним позицијама које чине три узастопна природна броја, могу да обезбеде да ће се сво троје срести у истој тачки најкасније за $t = 7/2$ ако користе Baston-ову стратегију (тј. коришћењем Baston-ове стратегије могу себи да обезбеде време $M_3 = 3.5$).

Означићемо љубичастом бојом стратегију '2A5B', плавом стратегију '1A2B2A2B', црвеном стратегију '1A2B1A1B2A'. Стратегије чија је почетна оријентација нагативна узимају исте боје као и одговарајуће позитивно оријентисане стратегије али су нацртане испрекиданом линијом. Дакле, имамо 3 различите стратегије које се могу изабрати на 3! начина при чему свака стратегија бира две оријентације што нам укупно даје $3!2^3 = 48$ комбинација. Користимо ознаку „+1+2+3“ за комбинацију стратегија при чему „+“ означава оријентацију а бројеви 1, 2 и 3 представљају љубичасту, плаву и црвену (тим редом) стратегију. У наставку су приказане стратегије у којима играчи I_1, I_2 и I_3 бирају стратегије 1, 2 и 3 тим редом.

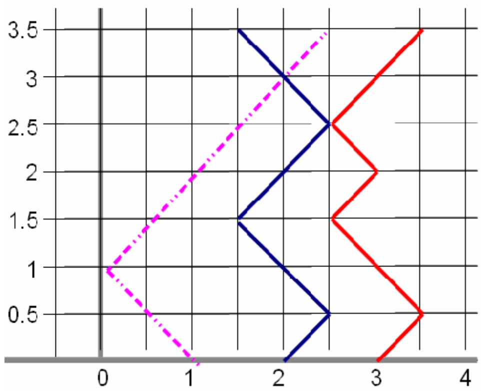
"+1+2+3"



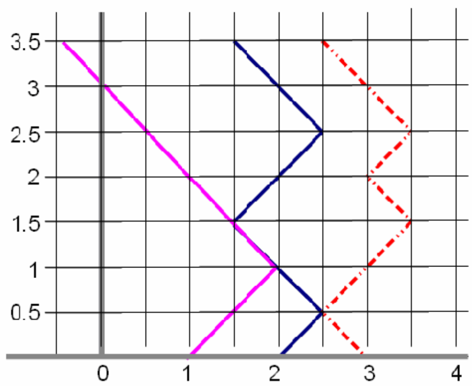
"+1-2+3"



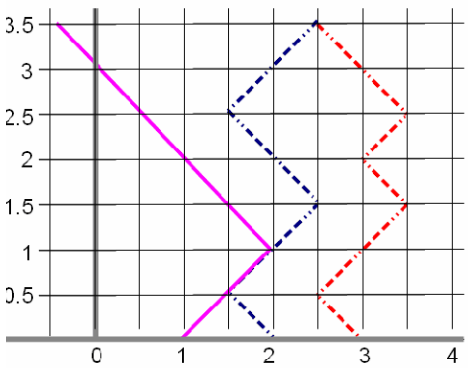
"-1+2+3"



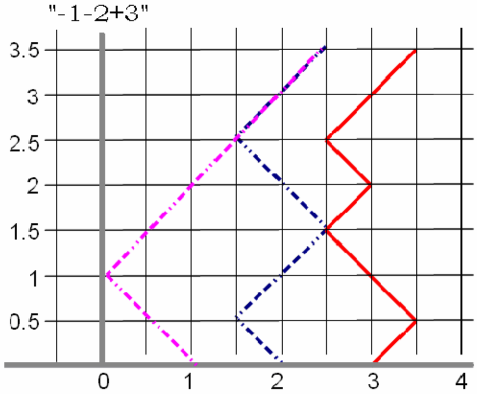
"+1+2-3"



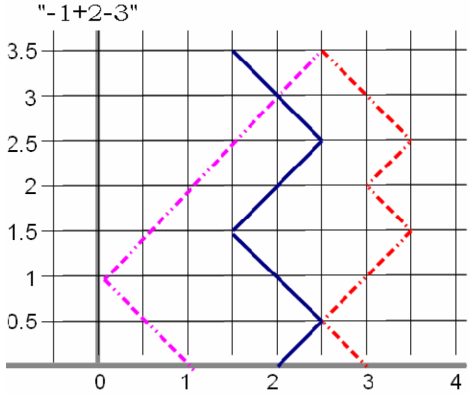
"+1-2-3"



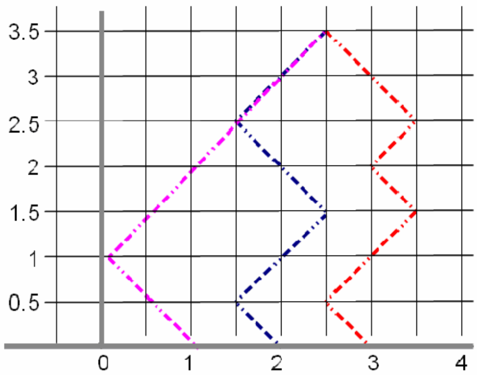
"-1-2+3"



"-1+2-3"



"-1-2-3"



4. ПРИМЕР ПРЕТРАГЕ КАДА НЕ ЗНАМО ДА ЛИ ДРУГИ ИГРАЧ ЖЕЛИ ДА БУДЕ ПРОНАЂЕН

У претходна два поглавља решавали смо проблем тражења и проблем сусретања на правој *П* и разматрали случајеве када играчи желе да се сретну, односно када желе да избегну сусрет. Описане моделе можемо објединити и рећи да нашу игру чине два играча (или два тима). Назовимо их трагач и скривач. Скривач има две могућности: жели да сарађује и да га трагач пронађе или не жели да буде пронађен. Обележимо вероватноћу са којом скривач одлучује да ли ће или неће сарађивати са p, односно $(1-p)$. Ако претпоставимо да су се играчи договорили како ће се понашати у случају да се раздвоје скривач, у зависности од тога да ли жели да сарађује ($p=1$) или не ($p=0$) може да искористи договор у своју корист. На пример: трагач ће, ма шта скривач одлучио, увек покушавати да га пронађе, док ће скривач у зависности од величине p поштовати договор и кретати се унапред дефинисаном путањом или искористити договор и формирати нову путању базирану на претпоставкама како ће се трагач кретати.

У поглављима 2.1, 2.2 и 3.1 решавали смо проблем када се два играча налазе на правој *П* са међусобним растојањем d али не знају смер у коме се налазе. У наставку ћемо пронаћи очекивано време сусрета комбиновањем резултата добијених у 2.2 и 3.1. и одредити очекивано време сусрета када не знамо да ли други играч игра кооперативно (други играч игра кооперативно са вероватноћом p).

Други играч може бити и трагач и скривач, обележимо га са I_2 а првог играча са I_1. Уколико се I_2 одлучи за сарадњу, примениће стратегију коришћену у 3.1. у супротном, стратегију описану у 2.2. На овај начин I_2 ће имати 8 алтернатива (4 у којима сарађује и 4 у којима не сарађује). Кажемо да I_2 има 8 агената и да се сваки од њих креће по једној од алтернатива. I_1, без обзира на одлуку коју је I_2 донео, формира стратегију којом ће остварити пресек са свим скривачевим алтернативама. Обележимо потенцијалне сусрете играча са t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8. Обележимо максималну брзину кретања I_2 са ω_2. Стратегије агената I_2 који играју кооперативно обележавамо са h^+ (скривач који жели да буде пронађен, ${I_2}^+$). Аналогно, стратегија агената I_2 који не сарађују (скривач који не жели бити пронађен, ${I_2}^-$) се обележавају са h^-. Стратегије ${I_2}^-$ дефинишемо као $h^-(t)=\pm 1\pm\omega_2 t$ док су стратегије ${I_2}^+$ нешто сложеније (${I_2}^+$ мења смер кретања у одређеним тренуцима).

Нека је I_1 изабрао смер *десно* као почетни. У тренутку t_1 I_1 ће срести агента I_2 који му је кренуо у сусрет а чија је почетна позиција била тачка (1,0). Као што је то био случај раније, нека је $t_1=a=1/(1+\omega_2)$ ($h_1^+(t_1)=s(t_1)$). Узимамо даље да сви агенти ${I_2}^+$ у тренутку t_1 мењају смер кретња. Наредни сусрет I_1 и ${I_2}^+$ биће у тренутку

$$t_2=t_1+\frac{2(1-a)}{1+\omega_2}=\frac{a\omega_2-a+2}{1+\omega_2}\left(=\frac{3\omega_2+1}{(1+\omega_2)^2}\right)$$

(сусрет са другим агентом ${I_2}^+$ који је кренуо из тачке $(1,0)$). I_1 сада може да промени смер кретања и да тражи агенте ${I_2}^+$ који су кренули из тачке $(-1,0)$ или да настави кретање у истом смеру како би пронашао агенте ${I_2}^-$ чија је почетна позиција такође била $(1,0)$. Разликујемо случај када I_1 два пута мења смер кретања и случај када то ради само једном.

А) I_1 два пута мења смер кретања.

Нека је у тренуку t_2 I_1 променио смер кретања и упутио се ка тачки $(-1,0)$. На свом путу, ка агентима I_2^+ (који су мењали смер кретања у тренуцима t_1 и t_2) I_1 ће прво срести агента I_2^- који је своју стратегију почео у тачки $(-1,0)$ и није мењао смер кретања ($h_3^-(t) = -1 + \omega_2 t$). У тренутку t_2 I_1 и I_2^- су се налазили на одстојању $x_2 - h_3^-(t_2)$. Можемо да израчунамо у ком тренутку и којој тачки ће се они срести:

$$h_3^-(t_2) = -1 + t_2\omega_2 = -1 + \frac{a\omega_2 - a + 2}{1+\omega_2}\omega_2 = \frac{a\omega_2^2 - a\omega_2 + \omega_2 - 1}{1+\omega_2}$$

$$x_2 - h_3^-(t_2) = \frac{-a\omega_2^2 + 2a\omega_2 - \omega_2 - a + 3}{1+\omega_2}$$

$$t_3 = t_2 + \frac{x_2 - h_3^-(t_2)}{1+\omega_2} = \frac{2a\omega_2 + \omega_2 - 2a + 5}{(1+\omega_2)^2} \quad \left(= \frac{\omega_2^2 + 8\omega_2 + 3}{(1+\omega_2)^3} \right)$$

$$x_3 = -1 + t_3\omega_2 = x_2 - (t_3 - t_2)$$

$$x_3 = \frac{a\omega_2^2 - a\omega_2 + 3\omega_2 - 1}{1+\omega_2}$$ (сусрет између I_1 и I_2^-)

Даље, следи сусрет са преосталим агентима I_2^+ (агенти који су кренули из тачке $(-1,0)$):

$$h_3^+(t_2) = -a - \omega_2(t_2 - t_1) = \frac{a\omega_2 - 2\omega_2 - a}{1+\omega_2}$$

$$t_4 = t_2 + \frac{x_2 - h_3^+(t_2)}{1+\omega_2} = t_2 + \frac{2}{1+\omega_2} = \frac{a\omega_2 - a + 4}{1+\omega_2} \quad \left(= \frac{5\omega_2 + 3}{(1+\omega_2)^2} \right)$$

$$x_4 = h_3^+(t_4) = h_3^+(t_2) + (t_4 - t_2)\omega_2 = \frac{a\omega_2 - a}{1+\omega_2}$$

$$h_4^+(t_2) = -2 + a + (t_2 - t_1)\omega_2 = -2 + a + \frac{2(1-a)}{1+\omega_2}\omega_2 = \frac{-a\omega_2 + a - 2}{1+\omega_2}$$

$$h_4^+(t_4) = h_4^+(t_2) - (t_4 - t_2)\omega_2 = \frac{-a\omega_2 - 2\omega_2 + a - 2}{1+\omega_2}$$

Агент h_4^+ мења смер кретања у тренутку t_4. Рачунамо сусрет између њега и I_1:

$$t_5 = t_4 + \frac{x_4 - h_4^+(t_4)}{1+\omega_2} = \frac{a\omega_2^2 + 2a\omega_2 + 6\omega_2 - 3a + 6}{(1+\omega_2)^2} \quad \left(= \frac{7\omega_2^2 + 14\omega_2 + 3}{(1+\omega_2)^3} \right)$$

Остало је још да I_1 пронађе агенте I_2^- чије су стратегије $h_2^-(t) = 1 + h^-(t)$ и $h_4^-(t) = -1 - h^-(t)$. I_1 ће прво потражити агента чија је стратегија h_4^-. Израчунајмо време њиховог сусрета:

$$x_5 = x_4 - (t_5 - t_4) = \frac{a\omega_2^2 - 2a\omega_2 - 2\omega_2 + a - 2}{(1+\omega_2)^2}$$

$$-1 - t_6\omega_2 = x_2 - (t_6 - t_2) \;\Rightarrow\; t_6 = \frac{x_2 + t_2 + 1}{1-\omega_2} = \frac{2x_2 + 1}{1-\omega_2}$$

$$t_6 = \frac{2a\omega_2 - 2a + \omega_2 + 5}{(1-\omega_2)(1+\omega_2)} \quad \left(= \frac{\omega_2^2 + 8\omega_2 + 3}{(1-\omega_2)(1+\omega_2)^2} \right)$$

$$x_6 = -1 - t_6\omega_2 = -1 - \frac{2a\omega_2 - 2a + \omega_2 + 5}{(1-\omega_2)(1+\omega_2)}\omega_2 = \frac{-2a\omega_2 + \omega_2^2 + 2a - \omega_2 - 6}{(1-\omega_2)(1+\omega_2)}$$

Сада ће I_1 променити смер кретања и упутити се ка агенту h_2^- кога ће срести у тренутку t_7:

$$1 + t_7\omega_2 = x_6 + (t_7 - t_6) \;\Rightarrow\; t_7 = \frac{1 - x_6 + t_6}{1 - \omega_2}$$

$$t_7 = \frac{2a\omega_2 - 2a - \omega_2 + 7}{(1-\omega_2)^2} \quad \left(= \frac{-\omega_2^2 + 8\omega_2 + 5}{(1-\omega_2)^2(1+\omega_2)} \right)$$

Остало је још само да запишемо да се сусрет агента h_1^- и I_1 догодио у трентуку

$$t_8 = \frac{1}{1+\omega_2}.$$

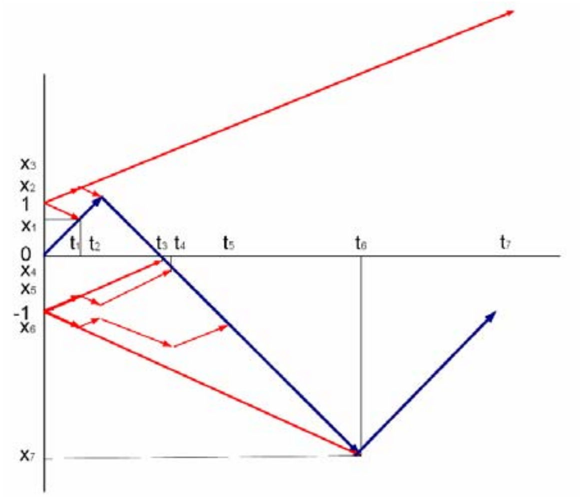
Коначно, очекивано време сусрета је:

$$T^* = p\frac{(t_1 + t_2 + t_4 + t_5)}{4} + (1-p)\frac{(t_3 + t_6 + t_7 + t_8)}{4}$$

$$T^* = p\frac{4\omega_2^2 + 7\omega_2 + 2}{(1+\omega_2)^3} + (1-p)\frac{3\omega_2^3 + 10\omega_2^2 + 17\omega_2 + 6}{2(1-\omega_2)^2(1+\omega_2)^3}$$

Вредност $\frac{4\omega_2^2 + 7\omega_2 + 2}{(1+\omega_2)^3}$ одговара просечном очекиваном времену добијеном у 3.1. када a заменимо са $\frac{1}{1+\omega_2}$.

На слици 4.1. су приказане стратегије I_1, I_2^+ и I_2^- за сваки њихов избор стратегија (стратегије I_2 су приказане црвеном бојом док су стратегије I_1 плавом).



Слика 4.1 (Стратегија трагача који два пута мења смер кретања)

Б) I_1 <u>мења смер кретања само једном</u>.

У трентутку $t_1 = a = 1/(1+\omega_2)$ I_1 среће агенте h_1^+ и h_1^-. У том истом тренутку агенти I_2^+ мењају смер кретања, а h_2^+ је сада први који ће срести I_1. Овај сусрет смо већ раније израчунали, $t_2 = \left(1 + 3\omega_2\right) / \left(1 + \omega_2\right)^2$.

$$h_2^+(t_2) = x_2 = 1 + t_1\omega_2 - (t_2 - t_1)\omega_2 = s_1(t_2) = t_2$$
$$\Rightarrow\ 1 + 2t_1\omega_2 = t_2(1+\omega_2)$$
$$\Rightarrow\ t_2 = \frac{3\omega_2 + 1}{(1+\omega_2)^2}$$

I_1, за разлику од претходног случаја, не мења смер кретања и наставља своју путању ка агенту h_2^-. Сусрет I_1 са агентом h_2^- ће се догодити у тренутку $t_3 = \frac{1}{1-\omega_2}$ у тачки $x_3 = \frac{1}{1-\omega_2}$ ($1 + t_3\omega_2 = t_3 \ \Rightarrow\ t_3 = \frac{1}{1-\omega_2}$). Агенти који желе да сарађују (агенти I_2^+), мењају свој смер кретања у тренуцима t_1 и t_2. До тренутка t_3 I_1 је пронашао све агенте чија је почетна позиција била тачка $(1,0)$ и зато он сада мења смер кретања, односно креће се ка тачки $(-1,0)$. На свом путу, I_1 ће прво срести агента I_2^-. Обележимо тај сусрет са t_4:

$$-1 + t_4\omega_2 = x_3 - (t_4 - t_3) \ \Rightarrow\ t_4 = \frac{x_3 + t_3 + 1}{1+\omega_2} = \frac{3-\omega_2}{(1-\omega_2)(1+\omega_2)}$$

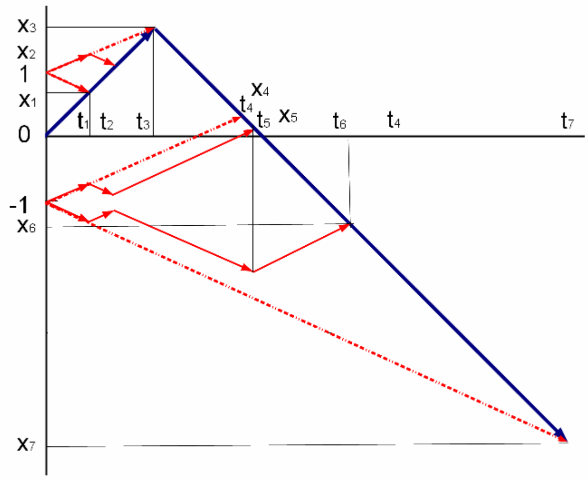
а затим и остале агенте I_2 (h_3^+, h_4^+, h_4^-):

$$t_5 = \frac{-3 - 5\omega_2 - 5\omega_2^2 + 5\omega_2^3}{(1+\omega_2)^3(\omega_2 - 1)}$$
$$t_6 = \frac{7\omega_2^4 - 10\omega_2^3 - 12\omega_2^2 - 14\omega_2 - 3}{(1+\omega_2)^4(\omega_2 - 1)},$$
$$t_7 = \frac{3-\omega_2}{(\omega_2 - 1)^2}$$ (h_3^+ и h_4^+ су мењали смер кретања у тренуцима t_1 и t_2).

Коначно, очекивано време сусрета када I_1 само једном мења смер кретања износи:

$$T^{**} = p\frac{(t_1 + t_2 + t_5 + t_6)}{4} + (1-p)\frac{(t_1 + t_3 + t_4 + t_7)}{4}$$
$$T^{**} = p\frac{(4\omega_4 - \omega_2^3 - 6\omega_2^2 - 7\omega_2 - 2)}{(1+\omega_2)^4(\omega_2 - 1)} + (1-p)\frac{2-\omega_2}{(1+\omega_2)(1-\omega_2)^2}.$$

На слици 4.2 су приказане стратегије I_1, I_2^+ и I_2^- за сваки њихов избор стратегија (стратегије I_2 су приказане црвеном бојом док су стратегије I_1 плавом).



Слика 4.2 (Стратегија трагача који једном мења смер кретања)

5. ДОДАТАК – ИГРЕ СУСРЕТАЊА ЗА ДВОДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРОБЛЕМ

Раније смо споменули да оптималне трајекторије играча највише зависе од подручја *П*. Уколико је *П* мрежа са нултим степеном видљивости, оптималне стратегије играча се могу представити као апроксимације стратегија у којима је *П* раван или граф. Такве проблеме је проучавао Alpern. Најчешћа примена проблема сусретања је у операцијама трагања за лоповима или путницима потонулог брода, срушеног авиона и слично. *Thomas* и *Hulme* [29] су симулирали различите стратегије за проблем сусретања особе која се изгубила на неком подручју и посматрали како те стратегије утичу на коначни исход игре. За одређене проблеме можемо претпоставити да играчи имају неке информације о почетној позицији другог играча (нпр: оба играча знају у ком делу се срушио авион). Видећемо да постоје ситуације у којима особе које треба спасити могу најбоље да допринесу потрази ако остану на месту на коме су доживеле несрећу.

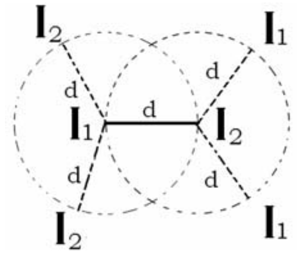
Претпоставимо да два играча, која се налазе на неком простору Π желе да се сретну прелазећи најмање растојање. Простор на коме се играчи налазе можемо да посматрамо као раван, а њихове почетне положаје као тачке те равни. Обележимо играче са I_1 и I_2 и нека је почетни положај првог играча тачка $O=(0,0)$, а почетни положај другог нека тачка коначног скупа *Y*. Сматраћемо да се све тачке скупа *Y* бирају на основу дате функције расподеле *F* (нпр. униформна расподела) и да је скуп *Y* коначан.

Услов да је скуп *Y* коначан постављен је како би информација која се прослеђује играчима на почетку игре била коректно дефинисана, односно да би спречили да време трајања игре постане бесконачно. Обележимо стратегије играча са s_1 и s_2. Играчи не могу да одреде своје позиције, па своју позицију посматрају као тачку $O=(0,0)$. Зато ћемо рећи да се други играч налази у тачки $O=(0,0)$ подручја Π^*. Дакле, посматраћемо стратегије играча из њиховог угла и из угла њиховог саиграча. Стратегија другог играча у подручју Π се добија коришћењем функције *g*, која представља композицију ротације и транслације. Кажемо да су се играчи срели када је $s_1(t)=g(s_2(t))$.

Претпоставимо да су све тачке равни Π равноправне, односно ни једна тачка равни нема неки посебан статус (није фокална). Разликоваћемо случај када је игра оријентисана и када није, као и случај да ли је играчима познато почетно растојање или не.

5.1. Играчима је познато почетно међусобно одстојање

У овом поглављу разматрамо случај у коме оба играча имају информацију о почетном међусобном растојању d, али не знају правац на коме се налазе. Претпоставићемо да су сви правци једнако вероватни, што значи да се из угла сваког играча, као почетна позиција другог играча, могу изабрати све тачке круга радијуса d на основу неке функције расподеле (Слика 5.1). Сматра се да су се играчи срели ако се у истом тренутку налазе на истој позицији (нулта видљивост). Такође претпостављамо да је игра оријентисана. Ово је најједноставнији случај.



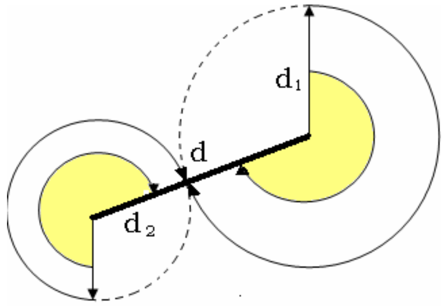
Слика 5.1 (Стратегије играча у равни Π на међусовном одстојању d)

Нека су максималне брзине кретања играча ω_1 и ω_2 и нека је $\omega_1 \neq \omega_2$. Када би се играчи кретали истим брзинама, могли би да им заменимо места. Претпоставимо да су оба играча изабрала позитиван смер кретања. Обележићемо најмање време потребно да се играчи сретну са

$$t_d = \frac{d}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Постоји једноставна асиметрична стратегија за играче: Други играч мирује док први играч претражује (WFM стратегија). Ова стратегија даје најлошије резултате: очекивано време сусрета је $(d/\omega_1)(1+\pi)$ а играчи ће се сигурно срести најкасније за $(d/\omega_1)(1+2\pi)$ времена.

Лема 5.1: Постоји стратегија која играчима омогућује да ће се срести најкасније за $t_d(1+2\pi)$ времена. Наведена стратегија се зове стратегија „приљубљених кругова“ (eng. kissing circles) и гарантује очекивано време сусрета од $t_d(1+\pi)$.



Слика 5.2 (Стратегија приљубљених кругова)

Доказ:
Нека су путање играча описане на слици 5.2.
I_1, крећући се праволинијски ка северу, прелази одстојање $d_1 = d\omega_1/(\omega_1+\omega_2)$, у тренутку $t_d = d_1/\omega_1$ мења начин кретања тако што почиње да кружи око своје почетне позиције. Слично, I_2 се креће праволинијски ка југу прелазећи одстојање $d_2 = d\omega_2/(\omega_1+\omega_2)$ да би, у тренутку $t_d = d_2/\omega_2$ почео да кружи око своје почетне позиције, крећући се такође у позитивном смеру ($d_1 + d_2 = d$). У тренутку $t \geq t_d$ i-ти играч је прешао угао $\varphi_i = (\omega_i/d_i)(t-t_d)$. Обележимо са φ_c позитиван угао између почетног правца кретања I_1 и правца на коме су се играчи налазили на почетку игре (на слици 5.2 је тај угао осенчен). Очигледно је да је угао између почетног правца кретања играча I_2 и правца на коме су се играчи налазили на почетку игре такође φ_c. Како је $\omega_i/d_i = (\omega_1+\omega_2)/d$ следи да ће оба играча прелазити исти угао у сваком тренутку, односно угао φ_c до тренутка $t = (1+\varphi_c)d/(\omega_1+\omega_2)$ када ће се кругови додирнути. Процењено време представља најлошије очекивано време.

.

Теорема 5.2: Стратегија приљубљених кругова садржи оптимално максимално време трајања игре, као и очекивано време за проблем сусретања.

Доказ:
Желимо да покажемо да не постоји стратегија која ће омогућити време сусрета мање од $t_d(1+2\pi)$ односно очекивано време сусрета мање од $t_d(1+\pi)$. Претпоставимо да су координате I_2 фиксиране и да се I_1 креће брзином $\omega_1+\omega_2$. Нека се први играч налази у координатном почетку а други играч негде на кругу *C* полупречника d. Да би се први играч срео са другим, прво мора да пређе одстојање d како би дошао до кружнице, а затим да опише круг око своје почетне позиције како би претражио све тачке круга *C*. Дакле, укупно време потребно да I_1 претражи све тачке круга *C* је:

$$t=(d+2d\pi)/(\omega_1+\omega_2)=d(1+2\pi)/(\omega_1+\omega_2)=t_d(1+2\pi)$$

Претраживање круга *C* се може извршити у смеру казаљке на сату као и у супротном смеру те је очекивано време сусрета $d(1+\pi)/(\omega_1+\omega_2)=t_d(1+\pi)$.

5.2. Игра са ограниченим ресурсима

Нека су играчи у ауту и нека су ограничени дужином пута који могу да пређу. Слично као код једнодимензионалног проблема, *i*-ти играч може да прелази највише растојање f_i пре него што остане без горива. Циљ проблема је да се максимизује вероватноћа да ће се играчи срести пре него што обоје остану без горива. У наставку ћемо приказати стратегију која има оптималну вероватноћу сусрета.

Лема 5.3: Постоји стратегијски пар $s=(s_1,s_2)$ такав да је вероватноћа сусрета два играча (под условом да је $f_1+f_2\geq d$) једнака $\min\{(f_1+f_2-d)/2\pi d,\ 1\}$. Услов да ће доћи до сусрета повлачи да најлошије очекивано време сусрета може бити $\max\{f_1/\omega_1, f_2/\omega_2\}$. Ако је $\{f_j/\omega_j\geq f_i/\omega_i\}$ тада је очекивано време сусрета:

$$T^*=\begin{cases}\dfrac{(f_i^2/\omega_i)+(f_j^2/\omega_j)-dt_d}{2(f_i+f_j-d)}, & f_i/\omega_i\geq t_d\\ (f_j-f_i+d)/2\omega_j, & \text{иначе}\end{cases}$$

Доказ:
Нека је $t_j=(f_j/\omega_j)\geq(f_i/\omega_i)=t_i$. Оба играча су усвојила *kissing circle* стратегију по којој се крећу све док *i*-ти играч не остане без горива (тренутак t_i). Кажемо да ће од тог тренутка играч *i* мировати на позицији $s_i(t_i)$.

У тренутку t_i играч *j* мења своју стратегију, па уместо да кружи око своје почетне позиције $s_j(0)$ по кругу радијуса d_j, он своје кретање наставља по кругу радијуса d са центром у тачки $S^*=s_j(0)+s_i(t_i)-s_i(0)$ (Слика 5.3).

Ако је $f_i\geq d_i$ на пример, $t_i\geq t_d$ и оба играча су већ започела стратегију kissing circles када је *i*-ти играч остао без горива. То значи да је на основу конструкције стратегије *kissing circles*:

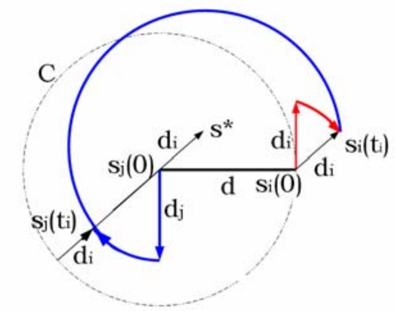
$$\begin{aligned}\|s_j(t_j)-S^*\| &= \|(s_j(t_i)-s_j(0))-(s_i(t_i)-s_i(0))\|\\ &=\|s_j(t_i)-s_j(0)\|+\|s_i(t_i)-s_i(0)\|=d_j-d_i=d\end{aligned}$$

Дакле, нови круг по коме j-ти играч наставља кретање има исту тангенту у тачки $s_j(t_i)$ као и круг по коме је започео стратегију приљубљених кругова.
Ако је $f_i \le d_i$ тада j-ти играч наставља да се креће по правој линији све док укупан пређени пут за оба играча не достигне вредност d, а затим мења начин кретања тако што почиње да кружи по кругу полупречника d са центром у тачки S*. Како је j-ти играч прешао пут дужине $f_i\omega_j / \omega_i$ за време t_i, а i-ти растојање f_i, почетно растојање између играча у тренутку t_i износи $d - f_i(1+\omega_j / \omega_i)$.
Нека је C круг радијуса d описан око тачке $s_j(0)$. Ако се играчи нису срели до тренутка t_i тада се i-ти играч налази у тачки $C + s_i(t_i) - s_i(0)$, односно на кругу радијуса d описаног око тачке S^* који j–ти играч претажује. Коначно, ако је $2\pi d \ge f_1 + f_2 \ge d$, описана стратегија гарантује сусрет на кругу са вероватноћом $(f_1 + f_2 - d)/2\pi d$, што је и требало показати. Сада посматрамо скуп позиција у којима може доћи до сусрета. У најгорем случају, у тренутку $t_j = f_j / \omega_j$ и j-ти играч остаје без горива. Да би одредили очекивано време сусрета, прво посматрамо случај у коме је $t_i \ge t_d$. Током времена $t_i - t_d = f_i / \omega_i - t_d$ оба играча укупном брзином $\omega_1 + \omega_2$ претражују лук круга C и прелазе укупну дужину од $l_1 = (\omega_1 + \omega_2) f_i / \omega_1 - d$, док се остатак времена само један играч креће брзином ω_2. Пут који други играч сада прелази износи $l_2 = f_j - f_i\omega_j / \omega_i$. Наведени подаци нам дају очекивано време сусрета:

$$T^* = \frac{\frac{t_d + t_i}{2} l_1 + \frac{t_i + t_j}{2} l_2}{l_1 + l_2} = \frac{\left(t_d + \frac{f_i}{\omega_i}\right)\left(f_i \frac{\omega_i + \omega_j}{\omega_i} - d\right) + \left(\frac{f_i}{\omega_i} + \frac{f_j}{\omega_j}\right)\left(f_j - f_i \frac{\omega_j}{\omega_i}\right)}{2(f_1 + f_2 - d)}$$
$$= \frac{(f_i^2 / \omega_i) + (f_j^2 / \omega_j) - dt_d}{2(f_i + f_j - d)}$$

Сада посматрамо случај када је $t_d > t_i$. J-ти играч долази до круга за време $t_i - (d - t_i(\omega_i + \omega_j))/\omega_j$. Круг претражује брзином ω_j током времена t_j. Очекивано време сусрета у том случају износи:

$$T^* = \frac{t_i + \frac{d}{\omega_j} - f_i \frac{\omega_i + \omega_j}{\omega_i \omega_j} + t_j}{2} = \frac{\frac{f_i}{\omega_i} + \frac{d}{\omega_j} - \frac{f_i}{\omega_j} - \frac{f_i}{\omega_i} + \frac{f_j}{\omega_j}}{2} = \frac{f_j - f_i + d}{2\omega_j}.$$

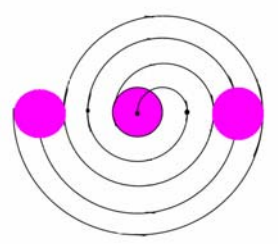


Слика 5.3 (Стратегија за игру са ограниченим ресурсима)

5.3. Проблем сусретања са непознатим почетним растојањем

Пре него што приступимо решавању проблема са коначним скупом почетних позиција, направићемо кратак осврт на ситуацију у којој оба играча не знају вероватноћу са којом се одређује њихово почетно међусобно растојање d. Као и у претходним случајевима, могуће је превести проблем сусретања на стандардни проблем тражења. Проблем тражења је решен за једнодимензионални случај који су проучавали *Beck* и *Newman*. Опис и дефиниција проблема се могу наћи код *Gal*-а [18].

Прво ћемо претпоставити да постоји не-нула радијус детекције r, $r < d$. Очекивано време сусрета можемо представити као функцију од d, обзиром да смо очекивано време сусрета за задато d већ одредили. Ако са L_d обележимо најмање време потребно да се играчи чије је међусобно одстојање d сретну, тада очекивано време сусрета за непознато d можемо записати као $(1+\varepsilon_d)L_d$ (ε_d тежи нули како d расте), Anderson и Fekete [12].



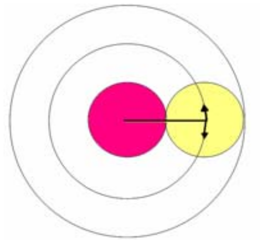
Слика 5.4

На слици 5.4 приказана је полукружна спирала, односно трајекторија тражења коју су Anderson и Fekete [12] предложили као асимптотски оптималну за најлошији случај и очекивано време. Са почетком у координатном почетку, трајекторија се састоји из полукругова полупречника r, $2r$, $3r$,... Растојање између свака два узастопна полукруга износи $2r$.

Лако се види да се сваки део (осим скупа тачака мере нула које се налазе на ивицама полукругова) по овако описаној стратегији прелази само једном. Прелажењем растојања L претражујемо простор величине $2rL - \pi r^2$. Ово нам говори да нам је потребно да претражимо најмање простор $(\pi d^2 - \pi r^2)/2r$ да би претражили све тачке у оквиру радијуса d. Јасно се види да се трајекторијом облика полукружне спирале претражује круг полупречника d, док се прелази растојање $(\pi d^2 + O(d))/2r$ $(=\mu/\rho)$. Одавде следи да је ова трајекторија асимптотски оптимална.

Потреба за овом асимптотском оптималношћу код стратегија не произилази из услова да полукружна спирала не претражује ни једну тачку простора два пута, већ из чињенице да је простор који се претражује више пута знатно мањи у односу на дужину пређеног пута. Бољи резултат се може постићи ако се унапред зна колико је почетно растојање *d*.

Пример: Нека је $d = 3r$, r – радијус детекције, спирала коју смо навели прелази растојање $6\pi r$, а стратегија у којој би прво прелазили растојање $2r$ а онда описали круг полупречника $2r$ око почетне позиције представља боље решење обзиром да је укупан пређени пут дужине $(2+4\pi)r$ (слика 5.5).



Слика 5.5 (Претрага на кругу полупречника $2r$ где r представља радијус детекције)

5.4. Сусретање са познатим почетним позицијама

Претпоставимо да су дата два играча, I_1 и I_2 и да је почетна позиција првог тачка $O=(0,0)$ док се за скуп почетних позиција другог узима скуп $Y=\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ који је коначан. Циљ игре је минимизација најлошијег времена потребног за сусрет. Претпоставимо да већ имамо најкраћу путању која полази из $O(0,0)$ и обилази све тачке скупа *Y*. Можемо повезати решење овог проблема са путањом трговачког путника с тим да у овом случају нема потребе за враћањем у почетну позицију.

Претпоставимо да су тачке скупа *Y* обележене тако да их најкраћа путања посећује по следећем редоследу: прво y_1, па затим y_2, па y_3 и тако даље до тачке y_k. Нека је a_j вектор који дефинишемо на следећи начин $a_j = y_j - y_{j-1}$, $j=2,3,...,k$ и нека је $a_1 = y_1$.

Лема 5.4: Нека је стратегија I_1 дефинисана на следећи начин: I_1 се креће у правцу a_1 да би затим наставио у правцу a_2 и тако редом до правца a_k (у правцу a_j се креће за време $|a_j|/(\omega_1+\omega_2)$). Стратегије I_2 у којој се он креће по истом правилу као I_1, али са супротном оријентацијом, минимизује најлошије време потребно за сусрет.

Доказ:

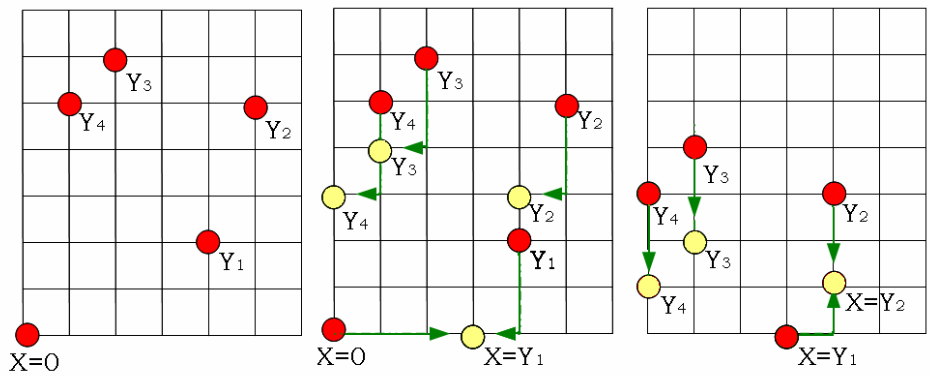
Посматрамо најједноставнији сценарио: Нека је кретање играча дозвољено само по линијама јединичне квадратне мреже (*П* је облика јединичне квадратне мреже), брзине играча јединичне $\omega_1 = \omega_2 = 1$ а тачке скупа *Y* чворови јединичне квадратне мреже. Пошто је почетна позиција I_1 тачка О, претпоставићемо да су потенцијалне почетне позиције I_2 тачке скупа *Y* које су на парном одстојању од О. На овај начин желимо да избегнемо ситуацију да су се играчи мимоишли. Кажемо да се сусрет догодио оног тренутка када се оба игача налазе на истој позицији. Тачке које су на парном одстојању дефинишемо као скуп тачака са следећом особином:

$$\{(a,b),\ a+b \text{ је паран број}\}$$

Претпоставићемо, као раније, да најкраћа путања из тачке О, која посећује све тачке скупа *Y*, постоји и да се чворови посећују по следећем редоследу: $y_1, y_2, ..., y_k$. Дефинишимо зато са $p(a,b)(t)$ најкраћу путању на јединичној квадратној мрежи која повезује тачке a и b ($t \in [0,\ d(a,b)]$, $d(a,b)$ - најкраће растојање између тачака a и b).

Претпоставимо да је $x_1 = 0$. Дефинишимо стратегије играча: I_1 прво следи путању $p(x_1, y_1)$ да би се у тренутку $t_1 = d(x_1, y_1)/2$ налазио на позицији $x_2 = p(x_1, y_1)(t_1)$, затим се креће путањом $x_2 - y_1 + p(y_1, y_1)$ све до тренутка $t_2 = t_1 + d(y_1, y_2)/2$ и тако даље. У току i-те фазе, I_1 иде у правцу путање $x_i - y_{i-1} + p(y_{i-1}, y_i)$ да би за $t_i = t_{i-1} + d(y_{i-1}, y_i)/2$ био у тачки $x_{i+1} = x_i - y_{i-1} + p(y_{i-1}, y_i)(t_i - t_{i-1})$. У међувремену, за свако i I_2 прати другу половину путање $p(y_{i-1}, y_i)$. Према томе, I_2 се креће по путањи $p(0, y_1)(d(0, y_1 - t))$, за време $t \in (0, t_1)$ а у сваком тренутку $t \in (t_j, t_{j+1})$ своје кретање наставља у правцу $(d/dt)p(y_{j-1}, y_j)(d(y_{j-1}, y_j) - t)$ (слика 5.6).

Јасно је да описани пар трајекторија не излази са квадратне мреже. Приметимо да су, обзиром да су сва растојања парни природни бројеви, сви временски тренуци $t_1, t_2, ..., t_k$ такође природни бројеви. Дакле, ако је путања играча у тренутку t_i на мрежи, то значи да је тачка x_i чвор мреже, а одатле следи да је и тачка $x_i - y_{i-1} + p(y_{i-1}, y_i)$ такође чвор мреже. Трајекторија за I_1 остаје на мрежи. Аналогно показујемо да је и трајекторија за I_2 на мрежи: у свакој фази j I_2 се креће по путањи $p(y_{i-1}, y_i)(d(y_{i-1}, y_i) - t)$ а како је сваки тренутак t_i природан број, I_2 се на крају сваке фазе налази на чвору мреже.



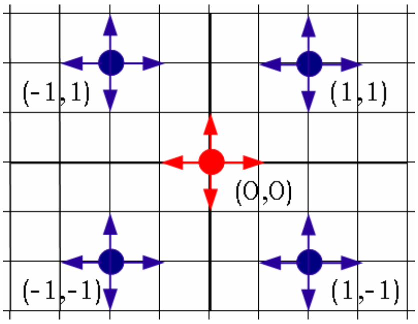
Слика 5.6 (положаји играча у тренуцима 0, t_1 и t_2 - стари положаји су обележени црвеном а нови жутом бојом)

Остало је још да покажемо да на основу описане стратегије, играчи минимизују максимално време потребно за сусрет. Ако претпоставимо да је I_2 фиксирани играч и да се I_1 креће по путањи кинеског поштара, тада I_1 прелази укупно растојање од $d(0, y_1) + \sum_{i=1}^{k-1} d(y_i, y_{i+1})$ (половина путање кинеског поштара). Ако се I_2 налази у тачки y_i, дужина пређеног пута је $d(0, y_1) + \sum_{i=2}^{j} d(y_i, y_{i+1})$. Са друге стране, користећи описане стратегије за мобилног I_2, сусрет играча, ако се I_2 налази у тачки y_1, ће се догодити у тренутку t_1 у тачки x_1, ако се I_2 налази у тачки y_2 тада ће се он у тренутку t_1 налазити у тачки $x_1 - y_1 + y_2$, па ће се сусрет догодити у тренутку t_2 у тачки x_2 и тако редом. Сусрет између I_1 и I_2 који је у тачки y_j биће у тренутку $t_j = \sum_{i=1}^{j-1} d(y_i, y_{i+1})/2$, односно укупно пређено растојање за I_1 ће износити $\sum_{i=1}^{j-1} d(y_i, y_{i+1})/2$ што чини половину резултата добијеног путањом кинеског поштара

.

Лема 5.4 важи у случају да играчи користе исти појам оријентације. У наставку ћемо претпоставити да се играчи крећу јединичном брзином и да је подручје на коме се налазе јединична квадратна мрежа.

Нека је скуп $Y = \{(1,1),(1,-1),(-1,-1),(-1,1),\}$. Претпоставимо да је I_1 у тачки О а I_2 у некој од тачака скупа *Y*. Дакле, оба играча знају да се налазе дијагонално један од другог али не знају правац на коме се налазе (неоријентисан случај, слика 5.7).



Слика 5.7 (Проблем сусретања на мрежи, неоријентисан случај)

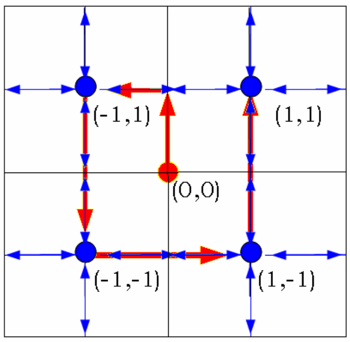
На основу конструкције скупа *Y* видимо да су потенцијалне позиције за I_2 парни чворови и да смо избегли могућност мимоилажења. Ако претпоставимо да се играчи могу срести на луковима, следи да ће се сусрет догодити у неком термину који није цео број што је немогуће обзиром да су играчи на парном одстојању и крећу се јединичном брзином. Дакле, сви сусрети, ако се догоде, могу бити једино у чворовима мреже.

Теорема 5.5: Стратегијски пар, у коме оба играча произвољно бирају један од четири правца за север а затим бирају стратегије „СЗЈЈИИСС“ и „СЈСЈСЈСЈ“ (С – север, И – исток, З – запад, Ј - југ), минимизира очекивано време сусрета.

Наведени стратегијски пар је познатији као A-F стратегија (Anderson – Fekete, слика 5.7)

Доказ:
Прво ћемо дефинисати оријентацију на подручју *П* тако што ћемо усвојити оријентацију првог играча (без обзира на то да ли је његов правац „север“ заправо „исток“, „запад“ или „југ“). Други играч има 4 потенцијалне позиције и из сваке од тих позиција може да крене у 4 различита правца, дакле други играч има 16 могућих стратегија. Поново ћемо користити појам агента и рећи да други играч има 16 агената а очекивано време рачунамо као време које је потребно да први играч сретне свих 16 агената (Слика 5.8).
Сусрет I_1 и 16 агената I_2 се одвија по следећем правилу:

2 сусрета за t = 1, 3 сусрета за t = 2, 1 сусрет за t = 3,
3 сусрета за t = 4, 1 сусрет за t = 5, 3 сусрета за t = 6,
1 сусрет за t = 7 и 2 сусрета за t = 8.



Слика 5.8 (Стратегије играча за проблем сусртања на мрежи)

Представићемо шему сусрета у сваком тренутку са $(2,3,1,3,1,3,1,2)$, добијену на основу описаног пара стратегија. У наставку ћемо показати да ни један пар стратегија не може постићи боље резултате и самим тим дати мање очекивано време сусрета.
Прво, било који стратегијски пар, не може да обезбеди да се у једном тренутку I_1 сретне са више од 3 агента I_2. Претпоставимо супротно: Нека је у неком тренутку t I_1 срео више од 3 агента I_2. Ако је I_1 срео агенте у њиховој почетној позицији разликујемо ситуације у којима је I_2 фиксиран или мобилан. Случај када је I_2 фиксиран одбацујемо обзиром да смо раније рекли да WFM никада није оптимална стратегија. Како је I_1 срео агенте у њиховој почетној позицији следи да може да сретне највише 4 агента на том месту, али обзиром да смо претпоставили да се I_2 креће, следи да су сви поменути агенти морали да се врате у своју почетну позицију из различитих праваца, што нам говори да је I_1 пре тог сусрета морао да сретне једног од њих и да заједно са њим сретне преостала три агента. Дакле, број сусрета у почетној позицији I_2 може бити највише 3. Претпоставимо сада да се сусрет догодио у почетној позицији I_1. Аналогно претходном доказу, да би се сусрет I_1 и више од 3 агента I_2 догодио у тачки О, I_1 би до ње морао доћи заједно са једним агентом I_2. На основу почетних позиција I_2 јасно је да се сусрет са више од 3 агента, чије почетне позиције нису исте, не може остварити. Изводимо закључак да је троструки сусрет могућ само у почетним позицијама или I_1 или I_2. Након троструког сусрета, I_1 наставља своје кретање по неком унапред одређеном правцу а како је већ срео три агента, на том правцу он може срести још највише једног агента. Дакле, троструки сусрет претходи једноструком сусрету. У првом тренутку, I_1 може највише да сретне 2 агента, па наш образац сусрета мора да садржи 2 на почетку а затим низ (3,1) који се понавља, и на крају обрасца се мора поново наћи 2, да би укупан број агената био дељив бројем 4 (број агената који полазе из исте почетне позиције). Дакле стратегија, чији је образац сусрета облика $(2,3,1,3,1,3,1,2)$, је оптимална. Како стратегија коју смо представили задовољава дати образац, следи да она минимизира максимално време сусрета.

У наставку је дата табела (табела бр. 5.1) која садржи време сусрета I_1 са једним од агената I_2 у зависности од почетне позиције I_2, од његовог избора правца кретања и од пара стратегија (I_1, I_2) = („СЗЈЈИИСС“, „CJCJCJCJ“).

Табела бр 5.1. (Време сусрета I_1 са једним од агената I_2 у зависности од његове почетне позиције)

	I_1 - „СЗЈЈИИСС“			
I_2 - „CJCJCJCJ“	С	И	З	J
(1,1)	8	8	8	7
(-1,1)	2	1	2	2
(-1,-1)	3	4	4	4
(1,-1)	6	6	5	6

Описаном стратегијом I_1 ће прећи највише пут дужине *8* док ће очекивано време сусрета за описани пар стратегија износити:

$$T^* = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 3 + 7\cdot 1 + 8\cdot 2}{16} = 4.3125$$

Можемо приметити да је стратегија I_1 „кружење“ око своје почетне позиције и да она одговара стратегији коју смо за I_1 представили у поглављу 5.3 (случај када је I_1 заиста кружио око своје почетне позиције). У овом примеру кружење није могуће обзиром да је кретање дозвољено само по луковима јединичне квадратне мреже, па можемо рећи да је ова описана стратегија апроксимација стратегије описане у поглављу 5.3. Пример из 5.3 је као простор претраживања имао круг полупречника $d = 3r$ (r – радијус детекције) а оптимална стратегија I_1 је била да се помери за растојање $2r$ од своје почетне позиције а затим да кружи око ње (слика 5.4) прелазећи укупно одстојање од $(2 + 4\pi)r$.

Битно је нагласити да се ова оптимална стратегија може представити као MWFM стратегија: први играч се креће оптималном трајекторијом, док се други играч у одређеним временским тренуцима помера из своје почетне позиције са циљем да помогне у трагању. Ако на том путу не сретне првог играча враћа се у своју почетну позицију, поново у одређеним временским интервалима у којима би и први играч требало да дође до ње.

6. ЗАКЉУЧАК

Видели смо да у зависности од тога да ли један играч жели да буде пронађен или не постоје две чисте стратегије другог играча. Честа је ситација да неки играч мора да обезебеди стратегију независно од тога да ли други жели да сарађује или не. На пример: лопови су се након неке пљачке раздвојили. Њихов циљ је сада да се поново окупе (како би поделили зараду) а да их при том не пронађе полиција. Дакле, истовремено желе да их неко пронађе али и да са неком другом онемогуће тај сусрет. Проблем се може проширити увођењем неких нових параметара. На пример: за лоповима је организована потрага и нуди се велика награда свакоме ко помогне у њиховом хапшењу. Овај податак нам говори да лопови сада могу да верују својим познаницима или пријатељима тек са неком вероватноћом p_n. Ако се буду дуго задржавали на некој локацији, постоји могућност да их људи који ту живе пријаве док, са друге стране, ризикују да буду ухваћени приликом мењања тих локација. Полиција, на пример, може да има стратегију која се састоји у налажењу неког од лопова или стратегију која се заснива на постављању клопки.

Описан проблем су решавали *Owen* и *McCormick* [26], с'тим да су они претпоставили да лопови мењају своје локације са одређеним ризиком да ће при промени положаја бити пронађени и да полиција добија информације о томе где су последњи пут били смештени али не и о томе где се тренутно налазе, односно куда су се упутили.

Полиција може да постави клопку лоповима, то јест да их чека на одређеним локацијама (нпр. на раскрсницама). Највећи број објављених радова се бави расподелом „снаге“ полиције [23], и одређује колико времена полиција треба да проведе у претраживању одређених локација (улица, зграда), док се мало тога радило на одређивању позиције клопке (где сачекати лопове).

У овом раду је изнет проблем претраге на дужи и бројевној правој. Видели смо да се стратегија тражења састоји из непрекидних функција које максималним брзинама по најкраћим путањама претражују све потенцијалне тачке другог играча или се формирају тако да имају пресечних тачака са стратегијом другог играча за што мање t.

Литература

[1] Alpern, S. - *Rendezvous search: A personal perspective*, Oper.Res. Vol 50, No 5, pp.772-795.

[2] Alpern, S. Baston, V. and S.Gal - *Network search games with immobile hider, without a designated searcher starting point*, Int. J. Game Theory (2008) 37, pp. 281-302.

[3] Alpern, S. and Beck, A. - *Pure strategy asymmetric rendezvous in the line with an unknown initial distance*, Oper. Res. Vol 48. No 3, May-June 2000. pp. 498-501.

[4] Alpern, S. and Beck, A. - *Rendezvous search on the line with bounded resources: expected time minimization*, European Journal of Oper. Res. 101 (1997) pp. 588-597.

[5] Alpern, S. and Beck, A. - *Rendezvous search on the line with limited resources maximizing the probability of meeting*, Operation Research Vol 47, No 6, November-December 1999. pp. 849-861.

[6] Alpern, S. and Gal, S. - *Searching for an agent who may or may not want to be found*, SIAM J. Control Optim. 33, 1270-1276.

[7] Alpern, S. and Gal, S. - *The theory of search games and rendezvous*, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.

[8] Alpern, S. and Gal, S. - *Rendezvous search on the line with indistinguishable players*, SIAM J. Con. and Optim. 33/4 1270-1276.

[9] Alpern, S. and Howard, J.V. - *Allternating search at two locations*, London School of Economics, Houghton St., London WC2A 2AE U.K.

[10] Alpern, S. and Lim, W.S. - *Rendezvous of three agents on the line*, Naval Research Logistics, Vol 49 (2002) pp. 244-255.

[11] Anderson, E.J. and Essegaier, S. - *Rendezvous search on the line with indistinguishable players*, SIAM J. Control Optim. 33 pp. 1673-1642.

[12] Anderson, E.J. and Fekete, S.P. - *Two dimensional rendezvous search*, Oper. Res. 49 (2001), pp. 107-118.

[13] Anderson, E.J. and Weber, R.R. - *The Rendezvous Problem on discrete locations*, J Appl. Probab. 28. (1990), pp. 839-851.

[14] Baston, V.J. - *The rendezvous problem on a line*, Naval Res. Logist 46. pp. 335-340.

[15] Beck, A. - *On the linear search problem*, Israel Journal of Mathematics. 2, 221-228. (1964) .

[16] Дугошија, Ђ. – Проблем три тачке (радни материјал).

[17] Gal, S. - *Rendezvous on the line*, Oper. Res. Vol 47. No 6, November-December 1999. pp. 974-976.

[18] Gal, S. - *Search games*, Academic Press, New York, 1980.

[19] Gal, S. and Baston, V. -*Rendezvous on the line when the players' initial distance is given by an unknown probability distributions*, SIAM J. Control Optim. 36. (1998) pp. 1880-1889.

[20] Hohyaki, R. and Koji, I. -*A search game when a search path is given*, European J. of Operat. Res. 124 (2000) 114-124.

[21] Howard, J.V. - *Rendezvous search on the interval and the circle*, Oper. Res. Vol 47. No 4, July-August 1999. pp. 550-558.

[22] Isaacs, R (1965). *Differential Games*, Wiley, New York

[23] Kikuta, K. and Baston, V. - *An ambush game with an unknown number of infiltrators*, Oper. Res. Vol 52. No 4, July-Aug 2004 597-605

[24] Lim, W.S. Alpern, S. and Beck, A. - *Rendezvous search on the line with more than two players*, Oper. Res.Vol 45. No 3, May-June 1997

[25] Neumann, J. Von and Morgenstern, O. - *Theory of games and economic behavior*, John Wiley & Sons Inc, 1953. 642 p.

[26] Owen, G. and McCormick, G.H. - *Finding a moving fugitive. A game theoretic representation of search*, Computers & Operations Research 35 (2008) pp. 1944-1962.

[27] Ruckle, W.H. and Kikuta, K. - *Rendezvous search on a star graph with exmination costs*, European Journal of Oper. Res. 181 (2007) pp. 298-304.

[28] Schelling, T. - *The strategy of conflict*, Harvard University Press, Cambridge.

[29] Thomas, L. C. and Hulme, P.B. - *Searching for targets who want to be found*, J.OR Soc. 48, Issue 1, 44-50.

[30] Ferguson, T.S. - *Game Theory*, University of California at Los Angeles.

[31] Foley, R.D. Hill, T.P. and Spruill, M.C. - *Linear Search with bounded resources*, Naval Research Logistics 38, pp. 555-565.

[32] Foreman, J.G. (1977). *The prinecess and monster on the circle.* In *Differential Games and Control Theory* (E.O. Roxin, P.T.Liu and R.L. Sternberg, eds), pp. 231-240, Dekker, New York.

[33] Zelikin, M. 1. (1972). *On a differential game with incomplete information.* Soviet Math. Dokl. 13, pp. 228-231.

САДРЖАЈ