МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ДИЈАНА ЛЕКИЋ

# ЗАКОН ВЕЛИКИХ БРОЈЕВА И ЈАКИ ЗАКОН ВЕЛИКИХ БРОЈЕВА

**Мастер рад**

**Београд, 2012.**

## Садржај

# Предговор

Као математичка дисциплина, теорија вероватноће је почела да се развија у XVI веку. Прву књигу из те области "Liber de ludo aleae" написао је 1526. године италијански математичар Girolamo Cardano. Поред Кардана и други математичари тог времена су покушавали да реше разне проблеме у вези игара на срећу. Веома значајан допринос развоју вероватноће дао је швајцарски научник Jacob Bernoulli. Његова "Златна теорема", објављена 1713. године, представља прву граничну теорему у теорији вероватноће. Познатија је под називом Бернулијев закон великих бројева. Према том закону, ако се дати експеримент понавља велики број пута, онда је вероватноћа да фреквенција појављивања одређеног догађаја одступи од вероватноће успеха $p$ за више од позитивног броја $\varepsilon$ мала,тј. тежи ка нула. У општем случају, закон великих бројева тврди да аритметичка средина великог броја реализованих вредности тежи ка очекиваној вредности.

Циљ овог рада је да се прикаже значај закона великих бројева у вероватноћи, а тиме и у различитим доменима људског деловања, у којима вероватноћа налази своје примене.

У првом делу дефинисани су разни типови конвергенције низа случајних величина. Дата су тврђења која говоре о односу различитих видова конвергенције. Такође су наведена и тврђења која се односе на конвергенцију реда случајних величина. Све овде дате дефиниције и теореме биће коришћене даље у раду.

У другом делу дата је формулација закона великих бројева. Доказане су различите верзије закона великих бројева како за низ случајних величина које имају исту расподелу, тако и за низ случајних величина које не морају бити из исте расподеле. Дат је велики број примера који илиструју примену наведених тврђења.

У трећем делу дата је формулација јаког закона великих бројева. Доказан је Колмогоровљев закон великих бројева који важи за низ независних случајних величина које не морају имати исту расподелу. Примерима је показана неопходност и довољност услова дате теореме. Формулисан је и доказан јаки закон великих бројева за низ случајних величина које су независне у паровима. Такође су наведена и одговарајућа тврђења која се односе на случај бесконачних момената првог, односно другог реда.

Четврти део представља примене закона великих бројева,тј. примене одређених теорема из другог и трећег дела рада. Приказан је Бернштајнов доказ Вајерштрасове теореме о апроксимацији непрекидне функције, којим се илуструје примена закона великих бројева у Чебишовљевој форми. Затим је описан Санктпетербуршки парадокс и коришћењем закона великих бројева одређена је цена за понављање исте игре $n$ пута. Описан је и решен Coupon collector’s problem. Помоћу јаког закона великих бројева доказана је фундаментална теорема у теорији процеса обнављања.

Најлепше се захваљујем свом ментору проф. др Павлу Младеновићу на указаном поверењу, корисним предлозима, стрпљењу и разумевању које је имао за мене.Такође, велику захвалност желим да изразим проф. др Весни Јевремовић и мр Марку Обрадовићу, јер су у кратком року прочитали текст овог рада и дали корисне предлоге за побољшање. Посебно се захваљујем својим родитељима на подршци која никада није изостала.

У Београду, септембра 2012. Дијана Лекић

# 1. Конвергенција низова случајних величина и редова случајних величина

Нека су случајне величине $X_1, X_2, \dots$ дефинисане на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

**Дефиниција 1.1.** Низ случајних величина $(X_n)$ конвергира у вероватноћи ка случајној величини $X$ ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0.$$

Конвергенција у вероватноћи означава се са $X_n \xrightarrow{P} X, n \to \infty$.

**Дефиниција 1.2.** Низ случајних величина $(X_n)$ конвергира скоро сигурно ка случајној величини $X$ ако важи:

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1.$$

Скоро сигурна конвергенција означава се са $X_n \xrightarrow{\text{с.с.}} X, n \to \infty$.

**Дефиниција 1.3.** Низ случајних величина $(X_n)$ конвергира у средњем реда $p$ , при чему $0 < p < \infty$ , ка случајној величини $X$ ако важи:

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^p = 0.$$

Специјално, за $p = 2$ имамо средњеквадратну конвергенцију. Конвергенција у средњем реда $p$ означава се са $X_n \xrightarrow{L_p} X, n \to \infty$.

**Дефиниција 1.4.** Низ случајних величина $(X_n)$ конвергира у расподели ка случајној величини $X$ ако за сваку ограничену и непрекидну функцију $f: R \to R$ важи:

$$\lim_{n\to\infty} E\big(f(X_n)\big) = E(f(X)).$$

Конвергенција у расподели означава се са $X_n \xrightarrow{D} X, n \to \infty$.

**Теорема 1.1.** (*Борел - Кантелијева лема*)

*(а) Ако је $(A_n)$ произвољан низ догађаја и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, онда важи*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0.$$

*(б) Ако је $(A_n)$ низ независних догађаја и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, онда важи*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=1.$$

*Доказ:* (а) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<+\infty$. Пошто важи

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\supset\left(\bigcup_{k=2}^{\infty}A_k\right)\supset\cdots\supset\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\supset\cdots,$$

то је

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right).$$

Из $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<+\infty$ следи $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)=0$, као реп конвергентног реда.

Дакле,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)=0.$$

(б) Како из независности догађаја $A_1,A_2,\ldots$ следи независност догађаја $\bar{A}_1\bar{A}_2,,\ldots$ , то за $m\ge n$ имамо

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{m}\bar{A}_k\right)=\prod_{k=n}^{m}P(\bar{A}_k). \qquad (1.1.)$$

Користећи једнакост (1.1.) добијамо

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\bar{A}_k\right)=\lim_{m\to\infty}P\left(\bigcap_{k=n}^{m}\bar{A}_k\right)=\lim_{m\to\infty}\prod_{k=n}^{m}P(\bar{A}_k)=\prod_{k=n}^{\infty}P(\bar{A}_k).$$

Означимо $f(x)=\ln(1-x)+x$. Пошто важи

$$f(0)=0,$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{1-x}=-\frac{x}{1-x}\ ,$$

то је за $0\le x<1$, $f(x)\le 0$, односно

$$\ln(1-x)\le -x. \qquad (1.2.)$$

На основу неједнакости (1.2.) добијамо

$$\ln \prod_{k=n}^{\infty} P(\bar{A}_k) = \ln \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k))$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \ln\big(1 - P(A_k)\big)$$

$$\leq - \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k).$$

$\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = +\infty$, као реп дивергентног реда, па важи

$$\ln \prod_{k=n}^{\infty} P(\bar{A}_k) = -\infty.$$

Дакле, за сваки природан број $n$ је $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = \prod_{k=n}^{\infty} P(\bar{A}_k) = 0$, па имамо

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k\right) = 0,$$

тј.

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1. \blacksquare$$

**Теорема 1.2.** *Из* $X_n \xrightarrow{\text{с.с.}} X, n \to \infty$, *следи* $X_n \xrightarrow{P} X, n \to \infty$.

*Доказ:* Како $X_n \xrightarrow{\text{с.с.}} X, n \to \infty$, то је

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall m) P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall m) \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall m) \lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \sup_{k\geq n}|X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \sup_{k\geq n}|X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Из последње једнакости следи да за свако $\varepsilon > 0$ важи

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0,$$

тј. $X_n \xrightarrow{P} X, n \to \infty$. ■

**Теорема 1.3.** *Из* $X_n \xrightarrow{L_p} X, n \to \infty$, *следи* $X_n \xrightarrow{P} X, n \to \infty$.

*Доказ:* За $\varepsilon > 0$ важи

$$E|X_n - X|^p = \int_{\Omega} |X_n - X|^p \, dP$$

$$= \int_{\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}} |X_n - X|^p \, dP + \int_{\{|X_n - X| < \varepsilon\}} |X_n - X|^p \, dP$$

$$\geq \int_{\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}} |X_n - X|^p \, dP$$

$$\geq \varepsilon^p \int_{\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}} dP = \varepsilon^p P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}.$$

На основу тога, следи

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|X_n - X|^p}{\varepsilon^p}.$$

Пошто $X_n \xrightarrow{L_p} X, n \to \infty$, то $E|X_n - X|^p \to 0, n \to \infty$, па је

$$\lim_{n\to\infty} P\{\,|X_n - X| > \varepsilon\} = 0. \blacksquare$$

**Теорема 1.4.** *Из* $X_n \xrightarrow{D} C, n \to \infty$, *где је* $C$ *константа, следи* $X_n \xrightarrow{P} X, n \to \infty$.

*Доказ:* Нека је $F_n(x) = P\{X_n \leq x\}$ . Из $X_n \xrightarrow{D} C, n \to \infty$, следи $F_n \to F, n \to \infty$, при чему је

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < C \\ 1, & x \geq C \end{cases}.$$

Даље, за произвољно $\varepsilon > 0$ важи

$$\begin{aligned} P\{|X_n - C| > \varepsilon\} &= 1 - P\{|X_n - C| \leq \varepsilon\} \\ &= 1 - P\{C - \varepsilon \leq X_n \leq C + \varepsilon\} \\ &= 1 - F_n(C + \varepsilon) + F_n(C - \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 + 0 = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Приликом доказивања конвергенције реда случајних величина од фундаменталног значаја је следећа неједнакост, до које је дошао руски математичар Андреј Колмогоров.

**Теорема 1.5.** *Нека су* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *независне случајне величине, такве да за* $j \in \{1,2,\dots,n\}$ *важи* $E(X_j) = 0$, $D(X_j) < +\infty$ *и нека је* $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ . *Тада за свако* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$P\left\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{E(S_n)^2}{\varepsilon^2}.$$

*Доказ:* Нека је $\varepsilon > 0$ произвољан број. Означимо

$$A = \left\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right\},$$

$$A_1 = \{|S_1| \geq \varepsilon\},$$

$$A_k = \{|S_1| < \varepsilon, \dots, |S_{k-1}| < \varepsilon, |S_k| \geq \varepsilon\}, \qquad k = 2, \dots, n.$$

Догађаји $A_1, A_2, \dots, A_n$ су међусобно дисјунктни и важи $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Ако са $I_A$ означимо индикатор догађаја $A$, онда важи $ES_n^2 \geq E(S_n^2 I_A)$ и $I_A = \sum_{k=1}^{n} I_k$, при чему је $I_k$ индикатор догађаја $A_k$. Према томе,

$$ES_n^2 \geq E(S_n^2 I_A) = E\left(S_n^2 \sum_{k=1}^{n} I_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 I_k).$$

Даље је

$E(S_n^2 I_k) = E((S_k + X_{k+1} + \cdots + X_n)^2 I_k) = E\left(S_k^2 I_k + 2S_k I_k \sum_{j=k+1}^n X_j + I_k\left(\sum_{j=k+1}^n X_j\right)^2\right)$

$\qquad = E(S_k^2 I_k) + 2E\left(S_k I_k \sum_{j=k+1}^n X_j\right) + E\left(I_k\left(\sum_{j=k+1}^n X_j\right)^2\right).$

Пошто су случајне величине $X_1, X_2, \dots, X_n$ независне и $E(X_j) = 0, j = 1,2, \dots, n$ , имамо

$$E\left(S_k I_k \sum_{j=k+1}^n X_j\right) = E(S_k I_k) E\left(\sum_{j=k+1}^n X_j\right) = 0.$$

Дакле,

$E(S_n^2 I_k) = E(S_k^2 I_k) + E\left(I_k\left(\sum_{j=k+1}^n X_j\right)^2\right) \geq E(S_k^2 I_k),$

па добијамо

$$E(S_n^2) \geq E(S_n^2 I_A) = \sum_{k=1}^n E(S_n^2 I_k) \geq \sum_{k=1}^n E(S_k^2 I_k) \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n P(A_k) = \varepsilon^2 P(A),$$

тј.

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{E(S_n)^2}{\varepsilon^2} . \blacksquare$$

**Теорема 1.6.** *Нека су* $X_1, X_2, \dots$ *независне случајне величине и такве да важи* $E(X_n) = 0,$ *за* $n = 1,2, \dots$ *Ако је* $\sum_{n=1}^\infty D(X_n) < +\infty$*, онда* $\sum_{n=1}^\infty X_n(\omega)$ *конвергира скоро сигурно.*

*Доказ:* Нека је $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$. На основу теореме 1.5. имамо да за произвољно $\varepsilon > 0$ важи

$$P\left\{\max_{M \leq m \leq N} |S_m - S_M| > \varepsilon\right\} \leq \frac{D(S_N - S_M)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=M+1}^N D(X_n).$$

При $N \to \infty$, добијамо

$$P\left\{\sup_{m \geq M} |S_m - S_M| > \varepsilon\right\} \leq \sum_{n=M+1}^N D(X_n).$$

Како $\sum_{n=1}^\infty D(X_n) < +\infty$, то $\sum_{n=M+1}^N D(X_n) \to 0$, кад $M \to \infty$, па је

$$\lim_{M \to \infty} P\left\{\sup_{m \geq M} |S_m - S_M| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Означимо $s_M = \sup_{m,n \geq M} |S_m - S_n|$ . Даље имамо $s_M \downarrow$ кад $M \uparrow$ и

$$P\{s_M > 2\varepsilon\} \le P\left\{\sup_{m \ge M} |S_m - S_M| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0.$$

На основу претходне неједнакости, кад $M \to \infty, s_M \to 0$ скоро сигурно. Из $s_M \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$ следи да је $(S_n)$ Кошијев низ у $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}$ је комплетан метрички простор, па постоји $\lim_{n\to\infty} S_n$ , тј. $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$ конвергира скоро сигурно. ■

Веза између конвергенције реда случајних величина и јаког закона великих бројева дата је теоремом која следи.

**Теорема 1.7.** *(Кронекерова лема)*

*Нека је* $(a_n)$ *растући низ реалних бројева, такав да* $a_n \to \infty, n \to \infty$ *и нека* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n}$ *конвергира. Тада је*

$$\frac{1}{a_n}\sum_{m=1}^{n} x_m \to 0, n \to \infty.$$

*Доказ:* Нека је $a_0 = 0,\ b_0 = 0,\ b_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k}{a_k}$ , за $m \ge 1$. Тада је $x_m = a_m(b_m - b_{m-1})$ и важи

$$\frac{1}{a_n}\sum_{m=1}^{n} x_m = \frac{1}{a_n}\sum_{m=1}^{n} a_m(b_m - b_{m-1})$$

$$= \frac{1}{a_n}\left(\sum_{m=1}^{n} a_m\, b_m - \sum_{m=1}^{n} a_m b_{m-1}\right)$$

$$= \frac{1}{a_n}\left(a_n b_n + \sum_{m=1}^{n-1} a_m\, b_m - \sum_{m=1}^{n} a_m b_{m-1}\right)$$

$$= \frac{1}{a_n}\left(a_n b_n + \sum_{m=2}^{n} a_{m-1}\, b_{m-1} - \sum_{m=1}^{n} a_m b_{m-1}\right)$$

$$= b_n - \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m - a_{m-1}}{a_n} b_{m-1}. \qquad (1.3.)$$

Како $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n}$ конвергира, то постоји $\lim_{m\to\infty} b_m$. Означимо

$$b = \lim_{m\to\infty} b_m,$$

$$B = \sup_{n \in N} |b_n|.$$

Даље имамо $|b_m - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ , за $m \geq M$. Изаберемо $N$ тако да важи $\frac{a_M}{a_n} < \frac{\varepsilon}{4B}$ , за $n \geq N$. Према томе,

$$\left| \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m - a_{m-1}}{a_n} b_{m-1} - b \right| \leq \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m - a_{m-1}}{a_n} |b_{m-1} - b|$$
$$= \sum_{m=1}^{M} \frac{a_m - a_{m-1}}{a_n} |b_{m-1} - b| + \sum_{m=M+1}^{n} \frac{a_m - a_{m-1}}{a_n} |b_{m-1} - b|$$
$$\leq \frac{a_M}{a_n} 2B + \frac{a_n - a_M}{a_n} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Како важи $a_0 = 0$ и $(a_n)$ растући низ, то је $\frac{a_n - a_M}{a_n} < 1$. На основу претходног, за $n \geq N$ добијамо

$$\left| \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m - a_{m-1}}{a_n} b_{m-1} - b \right| < \frac{\varepsilon}{4B} 2B + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2},$$

тј.

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{a_m - a_{m-1}}{a_n} b_{m-1} \to b, n \to \infty \,. \tag{1.4.}$$

Из (1.3.), (1.4.) и $b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b$, следи

$$\frac{1}{a_n} \sum_{m=1}^{n} x_m \to 0, n \to \infty. \blacksquare$$

## 2. Закон великих бројева

Нека је $X_1, X_2, \dots$ низ случајних величина које су дефинисане на истом простору вероватноћа. Посматрајмо низ парцијалних сума $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ , $n = 1,2, \dots$ Ако постоје низови реалних бројева $(a_n)$ и $(b_n)$, такви да је $b_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и

$$\frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - a_n\right) \xrightarrow{P} 0, n \to \infty,$$

онда кажемо да за низ случајних величина $(X_n)$ важи закон великих бројева.

**Теорема 2.1.** *(Хинчинов закон великих бројева)*

*Ако је $X_1, X_2, \dots$ низ независних случајних величина са истом расподелом и коначним математичким очекивањем, онда за тај низ важи закон великих бројева.*

*Доказ:* Нека је $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Приметимо да за карактеристичну функцију $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t)$ важи

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}}(t) = \varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n,$$

где је $\varphi(t)$ карактеристична функција случајне величине $X_i$ , $i = 1,2, \dots, n$ .

Означимо $E(X_i) = m$, $i = 1,2, \dots$ Како важи

$$\varphi(t) = E\left(e^{itX_i}\right) = E\left(1 + itX_i + o(t)\right) = 1 + itm + o(t), \qquad t \to 0,$$

то је

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \left(1 + \frac{itm}{n} + o(t)\right)^n.$$

Према томе, при $n \to \infty$, $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \to e^{itm}$ , тј.

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{it\frac{S_n}{n}}\right) = e^{itm} ,$$

па добијамо

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{D} m, \qquad n \to \infty.$$

На основу теореме 1.4. следи

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} m, \qquad n \to \infty,$$

односно за низ $X_1, X_2, \ldots$ важи закон великих бројева. ■

**Теорема 2.2.** *(Чебишовљева неједнакост)*

*Нека је* $X$ *случајна величина са коначном дисперзијом. Тада за свако* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

*Доказ:* На основу својстава математичког очекивања имамо:

$$\begin{aligned} E|X - EX|^2 &= \int_{\Omega} |X - EX|^2 dP = \int_{\{|X-EX|<\varepsilon\}} |X - EX|^2 dP + \int_{\{|X-EX|\geq\varepsilon\}} |X - EX|^2 dP \\ &\geq \int_{\{|X-EX|\geq\varepsilon\}} |X - EX|^2 dP \geq \int_{\{|X-EX|\geq\varepsilon\}} \varepsilon^2 dP = \varepsilon^2 \int_{\{|X-EX|\geq\varepsilon\}} dP \\ &= \varepsilon^2 P\{|X - EX| \geq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|X - EX|^2}{\varepsilon^2},$$

односно

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \blacksquare$$

**Пример 2.1.**

Нека је $X_1, X_2, \ldots$ низ независних случајних величина, таквих да

$$X_n : \begin{pmatrix} -n^{\alpha} & n^{\alpha} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тада је

$$E(X_n) = \frac{-n^{\alpha}}{2} + \frac{n^{\alpha}}{2} = 0,$$

$$D(X_n) = EX_n^2 = n^{2\alpha}.$$

Применом Чебишовљеве неједнакости добијамо

$$P\left\{\left|\frac{X_1+\cdots+X_n-E(X_1+\cdots+X_n)}{n}\right|\geq\varepsilon\right\}$$
$$=P\{|X_1+\cdots+X_n-E(X_1+\cdots+X_n)|\geq n\varepsilon\}$$
$$\leq\ \frac{D(X_1+\cdots+X_n)}{n^2\varepsilon^2}\,. \qquad (2.1.)$$

Пошто су случајне величине $X_1, X_2, \dots$ независне, онда важи

$$D(X_1+\cdots+X_n)=D(X_1)+\cdots+D(X_n)=\ 1^{2\alpha}+2^{2\alpha}+\cdots+n^{2\alpha}<n\cdot n^{2\alpha}\,. \quad (2.2.)$$

Из неједнакости (2.1.) и (2.2.) следи

$$P\left\{\left|\frac{X_1+\cdots+X_n-E(X_1+\cdots+X_n)}{n}\right|\geq\varepsilon\right\}<\ \frac{n^{2\alpha+1}}{n^2\varepsilon^2}\,.$$

Према томе, ако је $2\alpha+1<2$ , онда

$$\frac{n^{2\alpha+1}}{n^2\varepsilon^2}\to 0, n\to\infty.$$

Другим речима, ако је $\alpha<\frac{1}{2}$, онда за низ $X_1, X_2, \dots$ важи закон великих бројева.

**Теорема 2.3.** *(Чебишовљев закон великих бројева)*

*Нека је $X_1, X_2, \dots$ низ независних случајних величина са равномерно ограниченим дисперзијама. Ако је $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ , онда важи*

$$\frac{S_n-E(S_n)}{n}\xrightarrow{P}0, n\to\infty\,.$$

*Доказ:* Користећи теорему 2.2. имамо следеће

$$P\left\{\left|\frac{X_1+\cdots+X_n-E(X_1+\cdots+X_n)}{n}\right|\geq\varepsilon\right\}=P\{|X_1+\cdots+X_n-E(X_1+\cdots+X_n)|\geq n\varepsilon\}$$
$$\leq\ \frac{D(X_1+\cdots+X_n)}{n^2\varepsilon^2}=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)}{n^2\varepsilon^2}\,. \qquad (2.3.)$$

Како случајне величине $X_1, X_2, \dots$ имају равномерно ограничене дисперзије, то постоји $C\geq 0$, тако да важи

$$|D(X_i)|\leq C, i=1,2,\dots \qquad (2.4.)$$

Даље, из неједнакости (2.3.) и (2.4.) следи

$$P\left\{\left|\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{nC}{n^2\varepsilon^2}\,,$$

тј.

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty \,. \blacksquare$$

Један специјалан случај теореме 2.3. је Бернулијев закон великих бројева:

**Теорема 2.4.** *(Бернулијев закон великих бројева)*

*Нека је* $X_1, X_2, \ldots$ *низ Бернулијевих случајних величина са вероватноћом успеха* $p$ *и нека је* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. *Тада*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p, \quad n \to \infty \,.$$

*Доказ:* Пошто су $X_1, X_2, \ldots$ Бернулијеве случајне величине, то за $i = 1,2, \ldots$ важи

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

$$E(X_i) = p,$$

$$D(X_i) = p(1-p).$$

Даље је

$$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = np \,.$$

Из независности случајних величина $X_1, X_2, \ldots$ следи

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n) = np(1-p).$$

Применом теореме 2.2. добијамо

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = P\{|S_n - np| \geq n\varepsilon\} = P\{|S_n - E(S_n)| \geq n\varepsilon\} \leq \frac{D(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

односно

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p, \quad n \to \infty \,. \blacksquare$$

**Пример 2.2.**

Изводи се низ Бернулијевих експеримената са вероватноћом успеха $p$. Нека је

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ако је } i - \text{ти и } (i+1) - \text{ви експеримент завршен успешно} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Приметимо да за $i = 1,2,\ldots$ важи

$$X_i:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p^2 & p^2 \end{pmatrix},$$

$$E(X_i) = p^2,$$

$$D(X_i) = p^2 - p^4 = p^2(1-p^2).$$

Означимо $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Тада је

$$E(S_n) = np^2,$$

$$D(S_n) = np^2(1-p^2).$$

Дакле, $X_1, X_2, \ldots$ су Бернулијеве случајне величине са вероватноћом успеха $p^2$, па на основу теореме 2.4. имамо

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p^2, n \to \infty.$$

**Теорема 2.5.** *Нека је* $X_1, X_2, \ldots$ *низ независних случајних величина са коначним дисперзијама* $\sigma_i^2, i = 1,2,\ldots$ *Ако* $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \to 0, n \to \infty$, *онда за низ* $X_1, X_2, \ldots$ *важи закон великих бројева.*

*Доказ:* Нека је $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Како за независне случајне величине $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са дисперзијама $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, редом, важи

$$D(S_n) = D(X_1 + \cdots + X_n) = D(X_1) + \cdots + D(X_n) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2,$$

то применом Чебишовљеве неједнакости имамо

$$P\left\{\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2.$$

Из $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \to 0, n \to \infty$, следи

$$P\left\{\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

тј.

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0, \ n \to \infty. \blacksquare$$

**Пример 2.3.**

Нека је $X_1, X_2, \ldots$ низ независних случајних величина, при чему

$$X_n \colon \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{1}{2n^2} & 1-\frac{1}{2n^2} & \frac{1}{2n^2} \end{pmatrix}, \qquad n \in N.$$

Тада је

$$E(X_n) = -n\frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) + n\frac{1}{2n^2} = 0, \qquad n \in N,$$

$$D(X_n) = n^2\frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) + n^2\frac{1}{2n^2} = 1, \qquad n \in N.$$

Дакле, дисперзије $D(X_i),\ i = 1,2,\ldots$ су коначне и важи

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} \to 0,\ \ n \to \infty,$$

па на основу теореме 2.5. следи да за низ случајних величина $X_1, X_2, \ldots$ важи закон великих бројева.

Ако се у теореми 2.3. услов независности случајних величина замени слабијим условом, закон великих бројева и даље важи. О томе говори следеће тврђење које је доказао Бернштајн.

**Теорема 2.6.** *Нека је* $X_1, X_2, \ldots$ *низ независних случајних величина са равномерно ограниченим дисперзијама, при чему* $cov(X_i, X_j) \to 0$, *кад* $|i-j| \to \infty$.*Тада за низ* $X_1, X_2, \ldots$ *важи закон великих бројева.*

*Доказ:* Нека је $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Тада важи

$$\begin{aligned} D(S_n) &= D(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1 + \cdots + X_n)^2 - (E(X_1 + \cdots + X_n))^2 = \\ &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{n} X_i X_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} EX_i\right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{n} E(X_i X_j) - \sum_{i=1}^{n} (EX_i)^2 - \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{n} E(X_i)E(X_j) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^{n} cov(X_i, X_j) \, .$$

Применом Чебишовљеве неједнакости имамо

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{D(S_n)}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} D(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^{n} cov(X_i, X_j)\right).$$

Даље је

$$\left|\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) + \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^{n} cov(X_i, X_j)\right| \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}|D(X_i)| + \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left|\sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^{n} cov(X_i, X_j)\right|. \quad (2.5.)$$

Пошто случајне величине $X_1, X_2, \dots, X_n$ имају равномерно ограничене дисперзије, онда је

$$|D(X_i)| \leq C, \qquad i = 1,2, \dots \, , \quad (2.6.)$$

$$\left|cov(X_i, X_j)\right| \leq \sqrt{D(X_i)} \cdot \sqrt{D(X_j)} \leq C, \qquad i \neq j. \quad (2.7.)$$

Према томе, имамо

$$\left|\sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^{n} cov(X_i, X_j)\right| = \left|\sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j, \\ |i-j| \leq [\sqrt{n}]}}^{n} cov(X_i, X_j) + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j, \\ |i-j| > [\sqrt{n}]}}^{n} cov(X_i, X_j)\right|$$

$$\leq \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j, \\ |i-j| \leq [\sqrt{n}]}}^{n} \left|cov(X_i, X_j)\right| + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j, \\ |i-j| > [\sqrt{n}]}}^{n} \left|cov(X_i, X_j)\right| .$$

Број сабирака који садржи $\sum^{n}_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j, \\ |i-j| \leq [\sqrt{n}]}} \left|cov(X_i, X_j)\right|$ је

$$2\left(n - 1 + n - 2 + \cdots + n - [\sqrt{n}]\right) = 2\left(n[\sqrt{n}] - \frac{[\sqrt{n}]\left([\sqrt{n}] + 1\right)}{2}\right) < 2n[\sqrt{n}] \, . \quad (2.8.)$$

Користећи неједнакости (2.7.) и (2.8.) добијамо

$$\left|\sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{n} cov(X_i,X_j)\right| \leq 2Cn[\sqrt{n}] + \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j,\\ |i-j|>[\sqrt{n}]}}^{n} \left|cov(X_i,X_j)\right|.$$

Приметимо да када $n \to \infty$, $\sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j,\\ |i-j|>[\sqrt{n}]}}^{n} \left|cov(X_i,X_j)\right|$ има коначан број сабирака од којих сваки тежи ка 0, односно

$$\sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j,\\ |i-j|>[\sqrt{n}]}}^{n} \left|cov(X_i,X_j)\right| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

На основу неједнакости (2.5.) и (2.6.) важи

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2} nC + \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left|\sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{n} cov(X_i,X_j)\right|,$$

тј.

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} + \frac{2Cn[\sqrt{n}]}{n^2\varepsilon^2} + \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j,\\ |i-j|>[\sqrt{n}]}}^{n} \left|cov(X_i,X_j)\right| \to 0, n \to \infty.$$

Како $\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right) \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$, то за низ $X_1, X_2, \ldots$ важи закон великих бројева. ■

**Теорема 2.7.** *Нека је* $X_1, X_2, \ldots$ *низ независних случајних величина са истом расподелом. Нека је* $a_1, a_2, \ldots$ *равномерно ограничен низ ненегативних бројева.Нека је* $Y_i = a_i X_i, i = 1,2, \ldots$ *и нака за низ* $X_1, X_2, \ldots$ *важи закон великих бројева. Тада за низ случајних величина* $Y_1, Y_2, \ldots$ *такође важи закон великих бројева.*

*Доказ:* Пошто случајне величине $X_1 - E(X_1), X_2 - E(X_2), \ldots$ задовољавају услове теореме, то без смањења општости можемо претпоставити да је $E(X_i) = 0, i = 1,2, \ldots$ Тада је и

$E(Y_i) = E(a_i X_i) = a_i E(X_i) = 0$. Користећи независност случајних величина $X_1, X_2, \dots$ и својства карактеристичне функције имамо

$$\varphi_{a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n}(t) = \varphi_{a_1 X_1}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{a_n X_n}(t) = \varphi_{X_1}(a_1 t) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(a_n t).$$

За довољно мало $\delta > 0$ и за $0 < t < \delta$, функција $\left|\varphi_{X_i}(t)\right|, i = 1,2, \dots$ је нерастућа и таква да важи

$$\varphi_{a_i X_i}(t) = E\left(e^{ita_i X_i}\right) = E\left(1 + ita_i X_i - \frac{t^2 a_i^2 X_i^2}{2} + o(t^2)\right) = 1 - \frac{t^2 a_i^2 \sigma_i^2}{2} + o(t^2), \qquad t \to 0,$$

где је $D(X_i) = \sigma_i^2$ .

$a_1, a_2, \dots$ је равномерно ограничен низ ненегативних бројева, па постоји $C > 0$ тако да важи

$$a_i \leq C, \qquad i = 1,2, \dots$$

Према томе, за $0 < t < \delta$ важи

$$\left|\varphi_{CX_i}(t)\right| \leq \left|\varphi_{a_i X_i}(t)\right|, \qquad i = 1,2, \dots$$

Како је

$$\varphi_{\frac{CX_1 + \cdots + CX_n}{n}}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{ct}{n}\right) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}\left(\frac{ct}{n}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{ct}{n}\right)\right)^n,$$

то добијамо

$$\left|\varphi_{X_1}\left(\frac{ct}{n}\right)\right|^n \leq \left|\varphi_{\frac{a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n}{n}}(t)\right| \leq 1.$$

Са друге стране, из $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$, следи $\varphi_{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}}(t) \to 1, n \to \infty$, тј.

$\left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \to 1,\ n \to \infty$. На основу тога даље следи

$$1 \leq \left|\varphi_{X_1}\left(\frac{ct}{n}\right)\right|^n \leq \left|\varphi_{\frac{a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n}{n}}(t)\right| \leq 1,$$

односно

$$\varphi_{\frac{a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n}{n}}(t) \to 1, n \to \infty .$$

Према теореми 1.4. закључујемо да $\frac{a_1X_1+\cdots+a_nX_n}{n} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$, тј. за низ $Y_1, Y_2, \ldots$ , где је $Y_i = a_iX_i, i = 1,2, \ldots$ важи закон великих бројева. ■

**Пример 2.4.**

Нека је $X_i = (-1)^i X,\ i = 1,2, \ldots$ , где је $X$ произвољна случајна величина за коју је $E(X) = 0$. Нека је $a_i,\ i = 1,2, \ldots$ низ такав да важи

$$a_{2i} = 1, \qquad i = 1,2, \ldots,$$

$$a_{2i-1} = 0, \quad i = 1,2, \ldots$$

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Означимо $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ . Тада је

$$E(S_n) = E(X_1 + \cdots + X_n) = 0,$$

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{X}{n}, & n = 2k-1 \end{cases}, \qquad k = 1,2, \ldots$$

Према томе, за $n = 2k,\ k = 1,2, \ldots$ имамо

$$P\left\{\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| > \varepsilon\right\} = 0,$$

а за $n = 2k-1,\ k = 1,2, \ldots$ је

$$P\left\{\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| > \varepsilon\right\} = P\left\{\frac{|X|}{n} > \varepsilon\right\} \le \frac{E|X|}{n\varepsilon} \to 0, n \to \infty.$$

Дакле, за низ $X_1, X_2, \ldots$ важи закон великих бројева. Даље, нека је $Y_i = a_iX_i,\ i = 1,2, \ldots$ Приметимо да тада важи

$$E(Y_i) = a_iE(X_i) = 0, \qquad i = 1,2, \ldots,$$

$$P\left\{\left|\frac{Y_1 + \cdots + Y_n - E(Y_1 + \cdots + Y_n)}{n}\right| > \varepsilon\right\} = P\left\{\frac{\left[\frac{n}{2}\right]|X|}{n} > \varepsilon\right\}.$$

Пошто је за довољно мало $\varepsilon > 0$ $P\left\{\frac{\left[\frac{n}{2}\right]|X|}{n} > \varepsilon\right\} = 1$, то за низ $Y_1, Y_2, \ldots$ не важи закон великих бројева.

На основу претходног примера видимо да је у теореми 2.7. услов независности случајних величина $X_1, X_2, \ldots$ неопходан.

**Пример 2.5.**

Нека је $X_1, X_2, \ldots$ низ независних случајних величина таквих да важи

$$X_n : \begin{pmatrix} -2^n & -1 & 1 & 2^n \\ \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Означимо $A = \left\{\omega : \left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right| > \varepsilon\right\}$, $B = \{\omega : X_1 = 1, X_2 = 2^2\}$.

Како је $A \cap B = \left\{\omega : X_1 = 1, X_2 = 2^2, \left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right| > \varepsilon\right\}$ и $(A \cap B) \subseteq A$, то важи следеће

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} &\geq P\left\{X_1 = 1, X_2 = 2^2, \left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \\ &= P\{X_1 = 1, X_2 = 2^2\} \cdot P\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right| > \varepsilon \,\middle|\, X_1 = 1, X_2 = 2^2\right\} \\ &= P\{X_1 = 1, X_2 = 4\} \cdot P\left\{\left|\frac{1 + 4 + X_3 + \cdots + X_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \\ &= P\{X_1 = 1\} \cdot P\{X_2 = 4\} \cdot 1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Према томе, за низ $X_1, X_2, \ldots$ не важи закон великих бројева. Даље приметимо да је

$$E(X_n) = 0, \qquad n = 1,2, \ldots$$

$$D(X_n) = EX_n^2 = \frac{2^{2n}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2^{2n}}{2^{n+1}} = 2^n + 1 - \frac{1}{2^n} \to \infty, n \to \infty.$$

Дакле, у теореми 2.1. је неопходан услов да случајне величине имају исту расподелу, а у теореми 2.3. је неопходно да случајне величине имају коначне дисперзије.

Одређени број класичних граничних теорема односи се на низове случајних величина облика $X_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, $n = 1,2, \ldots$ и на понашање њихових парцијалних сума $S_n = X_{n,1} + X_{n,2} + \cdots + X_{n,n}$, када $n \to \infty$.

Сада ћемо навести тврђење које представља уопштење теореме 2.5.

**Теорема 2.8.** *Нека је* $\mu_n = E(S_n)$, $\sigma_n^2 = D(S_n)$. *Нека је* $(b_n)$ *низ реалниих бројева такав да важи* $b_n > 0$ *и* $b_n \to \infty$, $n \to \infty$. *Ако* $\frac{\sigma_n^2}{b_n^2} \to 0$, $n \to \infty$, *онда*

$$\frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty.$$

*Доказ:* Како $\frac{\sigma_n^2}{b_n^2} \to 0$, $n \to \infty$, то добијамо

$$E\left(\frac{S_n-\mu_n}{b_n}\right)^2=\frac{E(S_n-\mu_n)^2}{b_n^2}=\frac{D(S_n)}{b_n^2}\to 0, \qquad n\to\infty\,.$$

На основу теореме 1.3. имамо да важи

$$\frac{S_n-\mu_n}{b_n}\xrightarrow{P} 0, \qquad n\to\infty. \blacksquare$$

**Дефиниција 2.1.** Нека је $C>0$ константа и нека је $X$ произвољна случајна величина. Тада се случајна величина дата на следећи начин

$$\bar{X}=\begin{cases}X, & |X|\le C\\ 0, & |X|>C\end{cases}$$

зове усечена случајна величина.

**Теорема 2.9.** *Нека су за свако $n\in N$ случајне величине $X_{n,k}$, $1\le k\le n$ независне. Нека је $b_n>0$, $b_n\to\infty$, $n\to\infty$, $\bar{X}_{n,k}=X_{n,k}I\{|X_{n,k}|\le b_n\}$. Претпоставимо да при $n\to\infty$ важи:*

$$1^\circ\ \sum_{k=1}^{n}P\{|X_{n,k}|>b_n\}\to 0,$$

$$2^\circ\ \frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n}E\bar{X}_{n,k}^2\to 0.$$

*Нека је $S_n=X_{n,1}+X_{n,2}+\cdots+X_{n,n}$ и $a_n=\sum_{k=1}^{n}E(\bar{X}_{n,k})$. Тада*

$$\frac{S_n-a_n}{b_n}\xrightarrow{P} 0, \qquad n\to\infty\,.$$

*Доказ:* Нека је

$$\overline{S}_n=\bar{X}_{n,1}+\bar{X}_{n,2}+\cdots+\bar{X}_{n,n},$$

$$A=\left\{\omega:\ \left|\frac{S_n(\omega)-a_n}{b_n}\right|>\varepsilon\right\},$$

$$B_1=\{\omega:\ S_n(\omega)\neq\overline{S}_n(\omega)\},$$

$$B_2=\{\omega:\ S_n(\omega)=\overline{S}_n(\omega)\}.$$

Како важи $A=AB_1\cup AB_2$, то имамо

$$P\left\{\left|\frac{S_n-a_n}{b_n}\right|>\varepsilon\right\}=P\left\{\left|\frac{S_n-a_n}{b_n}\right|>\varepsilon, S_n\neq\bar{S}_n\right\}+P\left\{\left|\frac{S_n-a_n}{b_n}\right|>\varepsilon, S_n=\bar{S}_n\right\}.$$

Према томе, користећи $AB_1 \subseteq B_1$, добијамо

$$P\left\{\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} \leq P\{S_n \neq \bar{S}_n\} + P\left\{\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\}.$$

Даље, приметимо да важи

$$P\{S_n \neq \bar{S}_n\} \leq P\left\{\bigcup_{k=1}^{n}\{\bar{X}_{n,k} \neq X_{n,k}\}\right\} \leq \sum_{k=1}^{n} P\{|X_{n,k}| > b_n\} \to 0, \qquad n \to \infty. \quad (2.9.)$$

Применом Чебишовљеве неједнакости имамо

$$P\left\{\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{E(\bar{S}_n - a_n)^2}{\varepsilon^2 b_n^2} = \frac{D(\bar{S}_n)}{\varepsilon^2 b_n^2}. \qquad (2.10.)$$

Из независности случајних величина $X_{n,k}$ , $1 \leq k \leq n$ и неједнакости (2.10.) следи

$$P\left\{\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\bar{X}_{n,k}^2 \to 0, \qquad n \to \infty. \qquad (2.11.)$$

На основу неједнакости (2.9.) и (2.11.) закључујемо да важи

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right\} = 0,$$

тј.

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty. \blacksquare$$

# 3. Јаки закон великих бројева

Нека је $(X_n)$ низ случајних величина које су дефинисане на истом простору вероватноћа. Ако са вероватноћом 1 важи

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} E(X_k)\right) \to 0, n \to \infty,$$

тј. ако

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} E(X_k)\right) \overset{\text{с.с.}}{\to} 0, n \to \infty,$$

онда за низ $(X_n)$ важи јаки закон великих бројева.

На основу теореме 1.2. видимо да ако за низ случајних величина $(X_n)$ важи јаки закон великих бројева, онда за тај низ важи и закон великих бројева.

**Лема 3.1.** *Ако за свако* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} < +\infty,$$

*онда низ случајних величина* $(X_n)$ *скоро сигурно ковергира ка случајној величини* $X$ .

*Доказ:* Према доказу теореме 1.2. имамо да је услов $X_n \overset{\text{с.с.}}{\to} X,\ n \to \infty$ еквивалентан са

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P\left\{\sup_{k\geq n}|X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\} = 0 .$$

Како важи

$$P\left\{\omega : \sup_{k\geq n}|X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\} = P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty}\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right\}$$
$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} P\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} ,$$

а $\sum_{k=n}^{\infty} P\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \to 0,\ n \to \infty$, као реп конвергентног реда, то следи

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \sup_{k\geq n}|X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Другим речима, доказ леме је завршен. ■

Специјално, ако важи $(\forall \varepsilon > 0)\ \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq \varepsilon\} < +\infty$ , онда $X_n \xrightarrow{\text{с.с.}} 0, n \to \infty$.

**Теорема 3.1.** *(Колмогоровљев закон великих бројева)*

*Нека је* $(X_n)$ *низ независних случајних величина такав да важи* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < +\infty$ *.Тада је*

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - E(X_k)\big) = 0\right\} = 1.$$

*Доказ:* Без смањена општости разматрања можемо претпоставити да за свако $j$ важи $E(X_j) = 0$. Означимо $Y_n = \max_{1\leq k\leq 2^n}\left|\sum_{j=1}^{k} X_j\right|$ . За $2^{n-1} \leq k \leq 2^n$ важи следећа неједнакост

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} X_j\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \max_{1\leq k\leq 2^n} \left|\sum_{j=1}^{k} X_j\right| = \frac{Y_n}{2^{n-1}}\,. \qquad (3.1.)$$

Користећи теорему 1.5. добијамо

$$P\left\{\frac{Y_n}{2^n} > \varepsilon\right\} = P\{Y_n > 2^n\varepsilon\} \leq \frac{1}{2^{2n}\varepsilon^2} E\left(\sum_{j=1}^{2^n} X_j\right)^2.$$

Приметимо да је $E(X_iX_j) = 0, i \neq j$, због независности случајних величина $X_1, X_2, \ldots$ и претпоставке да је $E(X_j) = 0$, за све $j$. На основу тога имамо

$$P\left\{\frac{Y_n}{2^n} > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{2^{2n}\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{2^n} E(X_j^2) = \frac{1}{2^{2n}\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{2^n} D(X_j)\,. \qquad (3.2.)$$

Применом неједнакости (3.2.) даље је

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{Y_n}{2^n} > \varepsilon\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{2^n} D(X_j) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n:j\leq 2^n} \frac{1}{4^n} D(X_j) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{\infty} D(X_j) \sum_{n:j^2\leq 2^{2n}} \frac{1}{4^n}$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{\infty} D(X_j) \frac{1}{j^2} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \leq \frac{4}{3\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D(X_j)}{j^2} < +\infty\,.$$

Из $\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{Y_n}{2^n} > \varepsilon\right\} < +\infty$, на основу леме 3.1. , следи $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{\text{с.с.}} 0,\ n \to \infty$. Користећи овај резултат и неједнакост (3.1.) закључујемо да за низ случајних величина $(X_n)$ важи јаки закон великих бројева. ■

**Пример 3.1.**

Нека је $(X_n)$ низ независних случајних величина и таквих да $X_n$ има густину

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}} e^{-\frac{(x-c^n)^2}{\sqrt{n}}}, \qquad n \in N.$$

Тада за сваки природан број $n$ важи

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}} e^{-\frac{(x-c^n)^2}{\sqrt{n}}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (t + c^n) \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{\sqrt{n}}} dt$$

$$= c^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{\sqrt{n}}} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{\sqrt{n}}} dt .$$

Означимо $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{\sqrt{n}}} dt$, $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{\sqrt{n}}} dt$. Приметимо да је $I_2 = 0$, као интеграл непарне функције на симетричном интервалу. Сменом $\frac{t}{\sqrt{\sqrt{n}}} = y$, интеграл $I_1$ се своди на

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}} e^{-y^2} \cdot \sqrt{\sqrt{n}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1 .$$

Како је $I_1 = 1$ и $I_2 = 0$ , то је $E(X_n) = c^n$ . Даље је

$$D(X_n) = E(X_n - EX_n)^2 = E(X_n - c^n)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - c^n)^2 \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}} e^{-\frac{(x-c^n)^2}{\sqrt{n}}}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{\sqrt{n}}}\, dt .$$

Након смене $\frac{t}{\sqrt{\sqrt{n}}} = \frac{y}{\sqrt{2}}$, добијамо

$$D(X_n) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi\sqrt{n}}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{n}}}{\sqrt{2}}\, dy = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, e^{-\frac{y^2}{2}} dy .$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$, као дисперзија случајне величине из $\mathcal{N}(0,1)$ расподеле, па следи $D(X_n) = \frac{\sqrt{n}}{2}$ . Пошто важи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(X_n)}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<+\infty,$$

то према теореми 3.1. имамо да за низ $(X_n)$ важи јаки закон великих бројева.

Сада ћемо навести пример који показује да је услов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(X_n)}{n^2}<+\infty$ у теореми 3.1. неопходан.

**Пример 3.2.**

Нека је $(\sigma_n^2)$ низ ненегативних бројева и таквих да важи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}=+\infty$. Нека је $(X_n)$ низ независних случајних величина чије су расподеле вероватноћа дате са:

$$X_n:\begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{\sigma_n^2}{2n^2} & 1-\frac{\sigma_n^2}{n^2} & \frac{\sigma_n^2}{2n^2}\end{pmatrix},\quad \text{ако је } \sigma_n^2\le n^{\,2},$$

$$X_n:\begin{pmatrix} -\sigma_n & \sigma_n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad \text{ако је } \sigma_n^2> n^{\,2}\,.$$

Пошто је $E(X_n)=0$ и $D(X_n)=\sigma_n^2$ , то важи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(X_n)}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}=+\infty$. Означимо $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$. Претпоставимо да за низ $(X_n)$ важи јаки закон великих бројева, односно да $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\text{с.с.}}0, n\to\infty$. При таквој претпоставци даље имамо

$$\frac{X_n}{n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{n}=\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\xrightarrow{\text{с.с.}}0,\qquad n\to\infty.$$

Приметимо да важи следеће

$$P\{|X_n|\ge n\}=1,\qquad \text{за}\quad \sigma_n^2>n^{\,2},$$

$$P\{|X_n|\ge n\}=P\{X_n=n\}+P\{X_n=-n\}=\frac{\sigma_n^2}{2n^2}+\frac{\sigma_n^2}{2n^2}=\frac{\sigma_n^2}{n^2}\ ,\quad \text{за}\quad \sigma_n^2\le n^{\,2},$$

па је

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{|X_n|\ge n\}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}=+\infty\,.$$

Из претходне неједнакости, на основу теореме 1.1., следи да је

$$P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_n| \geq n\}\right\} = 1.$$

Према томе, са вероватноћом 1 се реализује бесконачно много догађаја $\{|X_n| \geq n\}$, што је у контрадикцији са $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{с.с.}} 0,\ n \to \infty$ . Дакле, за низ $(X_n)$ не важи јаки закон великих бројева.

**Лема 3.2.** *Нека је X ненегативна случајна величина. Тада важи неједнакост*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\} \leq E(X).$$

*Доказ:* Означимо $A_k = \{\omega : k \leq X(\omega) < k+1\},\ k = 0,1,2, \ldots$ Тада је

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(A_k)\,.$$

Применом претходне једнакости и својстава математичког очекивања добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\} = \sum_{k=1}^{\infty} kP(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} kdP \leq \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} XdP = \int_{\Omega} XdP = E(X). \blacksquare$$

Следећа теорема, коју је доказао Nasrollah Etemadi 1981. године, представља јаки закон великих бројева за низ случајних величина које су независне у паровима и имају исту расподелу. Одговарајуће тврђење за низ случајних величина облика $(X_{n,k}), 1 \leq k \leq n, n = 1,2, \ldots$ се може наћи у раду [3].

**Теорема 3.2.** *Нека је* $(X_n)$ *низ случајних величина које су независне у паровима и имају исту расподелу. Нека је* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. *Тада*

$$E|X_1| < +\infty \ \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{с.с.}} EX_1\,, \quad n \to \infty\,.$$

*Доказ:* За свако $n \in N$ означимо

$$X_n^+ = \begin{cases} X_n, & X_n > 0 \\ 0, & X_n \leq 0 \end{cases}, \qquad X_n^- = \begin{cases} 0, & X_n \geq 0 \\ -X_n, & X_n < 0 \end{cases}.$$

Видимо да низови $(X_n^+)$ и $(X_n^-)$ задовољавају услове теореме и $X_n = X_n^+ - X_n^-$ , па без смањења општости разматрања можемо претпоставити да је $X_n \geq 0$. Нека је $Y_n = X_n I\{X_n \leq n\}$ и $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Даље, нека је $k_n = [\alpha^n]$, при чему је $\alpha > 1$. Приметимо да за произвољну случајну величину $X$ и $r > 0$ важи

$$E|X|^r = \int\limits_{\Omega} |X|^r \, dP = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{|X|} rx^{r-1} dx \, dP = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{+\infty} rx^{r-1} I\{|X| > x\} \, dx dP \, . \qquad (3.3.)$$

Применом Фубинијеве теореме имамо

$$E|X|^r = \int\limits_{0}^{+\infty} rx^{r-1} \left( \int\limits_{\Omega} I\{|X| > x\} \, dP \right) dx = \int\limits_{0}^{+\infty} rx^{r-1} P\{|X| > x\} \, dx \, .$$

Користећи једнакост (3.3.) и Чебишовљеву неједнакост, за $\varepsilon > 0$ добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ \left| \frac{S_{k_n}^* - E(S_{k_n}^*)}{k_n} \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(S_{k_n}^*)}{k_n^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} D(Y_i) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{EY_i^2}{i^2}$$

$$= \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{k=1}^{i} \int\limits_{k-1}^{k} yP\{|Y_1| > y\} dy \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{k=1}^{i} \int\limits_{k-1}^{k} yP\{|X_1| > y\} dy \, .$$

Када применимо Фубинијеву теорему добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ \left| \frac{S_{k_n}^* - E(S_{k_n}^*)}{k_n} \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{k-1}^{k} yP\{|X_1| > y\} dy \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i^2} \, . \qquad (3.4.)$$

Како за $k \geq 2$ важи

$$\sum_{i=k}^{\infty} i^{-2} \leq \int\limits_{k-1}^{+\infty} x^{-2} \, dx = \frac{1}{k-1} \leq 1,$$

то се неједнакост (3.4.) своди на

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ \left| \frac{S_{k_n}^* - E(S_{k_n}^*)}{k_n} \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{k-1}^{k} yP\{|X_1| > y\} dy = CE|X_1| < +\infty,$$

где је $C = \frac{2}{\varepsilon^2}$ . На основу леме 3.1. закључујемо $\frac{S_{k_n}^*}{k_n} \xrightarrow{\text{с.с.}} E(Y_1)$, $n \to \infty$ . Из $E(X_1) < +\infty$, $|Y_n(\omega)| \leq X_1(\omega)$, $\lim_{n\to\infty} Y_n = X_n$, према теореми о доминантној конвергенцији, следи

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_n) = E\left( \lim_{n\to\infty} Y_n \right) = E(X_1),$$

тј. $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{k_n}^*}{k_n} = E(X_1)$ скоро сигурно. Користећи лему 3.2. добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \neq Y_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n > n\} \leq E(X_n) < +\infty\,.$$

Пошто $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \neq Y_n\} < +\infty$, онда на основу теореме 1.1. имамо да се са вероватноћом 0 реализује бесконачно много догађаја $\{\omega : X_n(\omega) \neq Y_n(\omega)\}$. Другим речима, можемо сматрати да је $X_n = Y_n$ и $\frac{S_{k_n}}{k_n} \xrightarrow{\text{с.с.}} EX_1,\ n \to \infty$ .

Низ $(S_n)$ је растући, па за $k_n \leq m \leq k_{n+1}$ важи

$$\frac{S_{k_n}}{k_{n+1}} \leq \frac{S_m}{m} \leq \frac{S_{k_{n+1}}}{k_n},$$

односно

$$\frac{S_{k_n}}{k_n}\frac{k_n}{k_{n+1}} \leq \frac{S_m}{m} \leq \frac{S_{k_{n+1}}}{k_{n+1}}\frac{k_{n+1}}{k_n}\,. \tag{3.5.}$$

Како је $k_n = [\alpha^n]$ , то важи следеће

$$\alpha^n - 1 < [\alpha^n] \leq \alpha^n,$$

$$\alpha^{n+1} - 1 < [\alpha^{n+1}] \leq \alpha^{n+1}\,,$$

$$\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha^n} < \frac{[\alpha^{n+1}]}{[\alpha^n]} < \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n - 1},$$

$$\alpha - \frac{1}{\alpha^n} < \frac{[\alpha^{n+1}]}{[\alpha^n]} < \frac{\alpha^{n+1} - \alpha + \alpha}{\alpha^n - 1},$$

$$\alpha - \frac{1}{\alpha^n} < \frac{[\alpha^{n+1}]}{[\alpha^n]} < \alpha + \frac{\alpha}{\alpha^n - 1}\,.$$

Из последње неједнакости следи $\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = \alpha$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_{n+1}} = \frac{1}{\alpha}$ . На основу тога и неједнакости (3.5.) имамо

$$\frac{1}{\alpha} EX_1 \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{S_m}{m} \ \leq\ \limsup_{m\to\infty} \frac{S_m}{m} \leq \alpha\, EX_1, \qquad \text{скоро сигурно.}$$

$\alpha > 1$ је произвољно, чиме је доказ теореме завршен. ■

Претходно тврђење показује да ако се у теореми 2.1. услов независности случајних величина замени условом независности у паровима, закон великих бројева и даље важи.

Као директну последицу теореме 3.2. добијамо Борелов закон великих бројева.

**Последица 3.1.** *(Борелов закон великих бројева)*

*Нека је* $(S_n)$ *број успеха у* $n$ *независних експеримената, при чему је вероватноћа успеха у сваком експерименту једнака* $p$ . *Тада, при* $n \to \infty$ *са вероватноћом* 1 *важи*

$$\frac{S_n}{n} \to p\,.$$

*Доказ:* Довољно је да приметимо да се $S_n$ може представити на следећи начин:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

где су $X_1, X_2, \dots, X_n$ независне случајне величине чија је расподела дата са

$$X_n\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, n = 1,2,\dots \ \blacksquare$$

Теореме које следе не представљају класичне јаке законе великих бројева, али говоре о брзини конвергенције низа парцијалних сума $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ , када $n \to \infty$. У теорми коју су доказали Marcinkiewicz и Zygmund разматра се случај када је $EX_i^2 = +\infty$, а $E|X_i|^p < +\infty$ , за $1 < p < 2$ .

**Теорема 3.3.** *Нека су* $X_1, X_2, \dots$ *независне случајне величине са истом расподелом, при чему је* $EX_1 = 0$, $E|X_i|^p < +\infty$, *за* $1 < p < 2$ *и* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. *Тада*

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{\text{с.с.}} 0, \qquad n \to \infty.$$

*Доказ:* Нека је $Y_k = X_k I\{|X_k| \le k^{1/p}\}$ и $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Тада важи

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_k \ne X_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{|X_k| > k^{1/p}\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{|X_k|^p > k\}.$$

Пошто је на основу леме 3.2. $\sum_{k=1}^{\infty} P\{|X_k|^p > k\} \le E|X_k|^p$, то је $\sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_k \ne X_k\} \le E|X_k|^p < +\infty$. Дакле, $\sum_{k=1}^{\infty} P\{|X_k|^p > k\} < +\infty$, па на основу Борел-Кантелијеве леме имамо да је вероватноћа да се реализује бесконачно много догађаја $\{\omega : Y_k(\omega) \ne X_k(\omega)\}$ једнака 0. Према томе, довољно је доказати $\frac{T_n}{n^{1/p}} \to 0$, $n \to \infty$.

Приметимо да за произвољну случајну величину $X$ и $r > 0$ важи

$$E|X|^r = \int_{\Omega} |X|^r \, dP = \int_{\Omega} \int_0^{|X|} r x^{r-1} dx \, dP = \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} r x^{r-1} I\{|X| > x\} \, dx dP\,.$$

Применом Фубинијеве теореме имамо

$$E|X|^r = \int_0^{+\infty} rx^{r-1}\left(\int_{\Omega} I\{|X| > x\}\,dP\right)dx = \int_0^{+\infty} rx^{r-1}P\{|X| > x\}\,dx\,. \qquad (3.6.)$$

Користећи једнакост (3.6.) , Фубинијеву теорему и неједнакост

$P\{|Y_m| > y\} \le P\{|X_1| > y\}$, добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} D\left(\frac{Y_m}{m^{1/p}}\right) &\le \sum_{m=1}^{\infty}\frac{EY_m^2}{m^{2/p}} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}\int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}}\left(\frac{2yP\{|Y_m| > y\}}{m^{2/p}}\right)dy\\ &\le \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}\int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}}\left(\frac{2yP\{|X_1| > y\}}{m^{2/p}}\right)dy\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}}\left(\sum_{m=n}^{\infty}\frac{2y}{m^{2/p}}P\{|X_1| > y\}\right)dy\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}} 2yP\{|X_1| > y\}\,dy\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^{2/p}}\,.\end{aligned}$$

Како је

$$\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^{2/p}} \le \int_{n-1}^{+\infty} x^{-2/p}\,dx = \frac{p}{2-p}(n-1)^{\frac{p-2}{p}}\,,$$

то за $y \in \left[(n-1)^{1/p},\ n^{1/p}\right]$ важи $\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^{2/p}} \le Cpy^{p-2}$, где је $C = \frac{1}{2-p}$ . Даље је

$$\sum_{m=1}^{\infty} D\left(\frac{Y_m}{m^{1/p}}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2C\int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}} py^{p-1}P\{|X_1| > y\}\,dy = 2CE|X_1|^p < +\infty\,.$$

Нека је $\mu_m = E(Y_m)$ . На основу теореме 1.6. и теореме 1.7. следи

$$\frac{\sum_{m=1}^{n}(Y_m - \mu_m)}{n^{1/p}} \xrightarrow{\text{с.с.}} 0, n \to \infty.$$

Потрбно је још показати да $\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{m=1}^{n}\mu_m \to 0,\ n \to \infty$. Из

$$EX_m = E\big(X_m I\{|X_m| \le m^{1/p}\}\big) + E\big(X_m I\{|X_m| > m^{1/p}\}\big),$$
$$EX_m = 0, \quad \mu_m = E\big(X_m I\{|X_m| \le m^{1/p}\}\big),$$

следи $\mu_m = -\,E\big(X_m I\{|X_m| > m^{1/p}\}\big)$ . Применом Јенсенове неједнакости даље добијамо

$$|\mu_m| = \left|E\big(X_m I\{|X_m| > m^{1/p}\}\big)\right| \le E\big(|X_m| I\{|X_m| > m^{1/p}\}\big) = m^{1/p} E\left(\frac{|X_m|}{m^{1/p}} I\{|X_m| > m^{1/p}\}\right)$$
$$\le m^{1/p} E\left(\frac{|X_m|^p}{m} I\{|X_m| > m^{1/p}\}\right) = m^{-1+\frac{1}{p}} E\big(|X_m|^p I\{|X_m| > m^{1/p}\}\big) .$$

Пошто важи $\sum_{m=1}^{n} m^{-1+1/p} \le p n^{1/p}$ и $E\big(|X_m|^p I\{|X_m| > m^{1/p}\}\big) \to 0,\ m \to \infty$, онда

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{m=1}^{n} \mu_m \to 0, \qquad n \to \infty. \blacksquare$$

Feller је 1946. године доказао тврђење које се односи на ситуације у којима је

$$E|X_1| = +\infty.$$

**Теорема 3.4.** *Нека су $X_1, X_2, \dots$ независне случајне величине са истом раасподелом и такве да је $E|X_1| = +\infty$. Нека је $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $(a_n)$ низ позитивних бројева и $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ растући низ. Тада, ако је $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \ge a_n\} < +\infty$, онда $\operatorname{limsup}_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{a_n} = 0$, а ако је $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \ge a_n\} = +\infty$, онда $\operatorname{limsup}_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{a_n} = +\infty$.*

*Доказ:* Пошто је $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ растући низ, то важи

$\dfrac{a_n}{n} \le \dfrac{a_{kn}}{kn}, \qquad k \in N, \qquad$ тј.

$$k a_n \le a_{kn}, \qquad k \in N. \tag{3.7.}$$

Користећи неједнакост (3.7.) , као и $(a_n)\uparrow$, добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \ge k a_n\} \ge \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \ge a_{kn}\} \ge \frac{1}{k} \sum_{m=k}^{\infty} P\{|X_1| \ge a_m\} .$$

Ако је $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \ge a_n\} = +\infty$, онда важи $\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{|X_1|}{a_n} \ge k\right\} = +\infty$. Према теореми 1.1. следи да се са вероватноћом 1 реализује бесконачно много догађаја $\left\{\omega : \frac{|X_1(\omega)|}{a_n} \ge k\right\}$, а $k \in N$ је произвољно, па је $\operatorname{limsup}_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{a_n} = +\infty$. Даље је

$$\max\{|S_{n-1}|, |S_n|\} \geq |S_{n-1}|,$$

$$\max\{|S_{n-1}|, |S_n|\} \geq |S_n|,$$

$$2 \cdot \max\{|S_{n-1}|, |S_n|\} \geq |S_{n-1}| + |S_{n-1} + X_n| \geq |S_{n-1} - (S_{n-1} + X_n)|,$$

$$\max\{|S_{n-1}|, |S_n|\} \geq \frac{|X_n|}{2}.$$

Из последње неједнакости и чињенице $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{a_n} = +\infty$ следи $\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{a_n} = +\infty$. Другим речима, доказали смо

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \geq a_n\} = +\infty \;\Rightarrow\; \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{a_n} = +\infty.$$

Сада претпоставимо да је $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \geq a_n\} < +\infty$. Приметимо да важи

$$\sum_{m=1}^{\infty} mP\{a_{m-1} \leq |X_i| < a_m\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} P\{a_{m-1} \leq |X_i| < a_m\},$$

па применом Фубинијеве теореме имамо

$$\sum_{m=1}^{\infty} mP\{a_{m-1} \leq |X_i| < a_m\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P\{a_{m-1} \leq |X_i| < a_m\}, \quad \text{тј.}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} mP\{a_{m-1} \leq |X_i| < a_m\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_i| \geq a_{n-1}\}. \tag{3.8.}$$

Нека је $Y_n = X_n I\{|X_n| < a_n\}$ и $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Нека је $a_0 = 0$. Даље, применом Фубинијеве теореме добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\left(\frac{Y_n}{a_n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{EY_n^2}{a_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} \sum_{m=1}^{n} \int\limits_{[a_{m-1}, a_m)} y^2\, dF(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{[a_{m-1}, a_m)} y^2\, dF(y) \sum_{n=m}^{\infty} a_n^{-2}.$$

Како важи $\frac{a_n}{n} \geq \frac{a_m}{m}$, то је $\sum_{n=m}^{\infty} a_n^{-2} \leq m^2 a_m^{-2} \sum_{n=m}^{\infty} n^{-2}$. Са друге стране је $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} n^{-2} = 0$, јер $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, па за свако $\varepsilon > 0$ постоји $M > 0$ тако да важи $|\sum_{n=M}^{\infty} n^{-2}| < \varepsilon$ и при томе је $m \leq M$. Према томе, имамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\left(\frac{Y_n}{a_n}\right) \leq C \sum_{m=1}^{\infty} m a_m^{-2} \int\limits_{[a_{m-1}, a_m)} y^2 dF(y) \leq C \sum_{m=1}^{\infty} m \int\limits_{[a_{m-1}, a_m)} dF(y) =$$

$$= C\sum_{m=1}^{\infty} mP\{a_{m-1} \le Y_1 < a_m\}, \quad \text{где је} \quad C = M\varepsilon\,.$$

Према претпоставци је $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \ge a_n\} < +\infty$ и $Y_n = X_n I\{|X_n| < a_n\}$, па на основу теореме 1.1. закључујемо да је $X_n = Y_n$ скоро сигурно, тј. важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\left(\frac{Y_n}{a_n}\right) \le C\sum_{m=1}^{\infty} mP\{a_{m-1} \le |X_1| \le a_m\} \le C\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \ge a_{n-1}\} < +\infty\,.$$

Из $\sum_{n=1}^{\infty} D\left(\frac{Y_n}{a_n}\right) < +\infty$, према теореми 1.6., следи $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{a_n} < +\infty$ скоро сигурно, па је, према теореми 1.7., довољно још доказати $\frac{ET_n}{a_n} \to 0,\ n \to \infty$.

Приметимо да ако је $E|X_1| = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \ge a_n\} < +\infty$ и $\left(\frac{a_n}{n}\right)\uparrow$, тада важи $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty$. Применом Јенсенове неједнакости добијамо

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{a_n}\sum_{m=1}^{n} E(Y_m)\right| &\le \frac{n}{a_n}\sum_{m=1}^{n} E(|X_m| I\{|X_m| < a_m\}) \\
&= \frac{n}{a_n}\sum_{m=1}^{N} E(|X_m| I\{|X_m| < a_m\}) + \frac{n}{a_n}\sum_{m=N+1}^{n} E(|X_m| I\{|X_m| < a_m\}) \\
&\le \frac{na_N}{a_n} + \frac{n}{a_n} E(|X_1| I\{a_N \le |X_1| < a_n\}) \\
&\le \frac{na_N}{a_n} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{m}{a_m} E(|X_m| I\{a_{m-1} \le |X_1| < a_m\}) \\
&\le \frac{na_N}{a_n} + \sum_{m=N+1}^{\infty} mP\{a_{m-1} \le |X_1| < a_m\}\,.
\end{aligned}$$

Користећи једнакост (3.8.) имамо да је

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} mP\{a_{m-1} \le |X_1| < a_m\} = 0, \qquad \text{као реп конвергентног реда.}$$

Са друге стране, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = 0$. Дакле, за довољно велико $N$ је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ET_n}{n} = 0. \blacksquare$$

# 4. Примене закона великих бројева

## 4.1. Бернштајнов доказ Вајерштрасове теореме о апроксимацији

Једну теоријску примену закона великих бројева представља конструктивни доказ чувене Вајерштрасове теореме о апроксимацији непрекидне функције, који је дао Sergei Natanovich Bernstein 1911. године. Бернштајн је дошао до закључка да се било која непрекидна функција $f:[0,1] \to R$ може апроксимирати полиномом облика

$$B_n(p;f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

**Теорема 4.1.1.** *Нека је* $f:[0,1] \to R$ *непрекидна функција и нека је за свако* $n \in N$ $B_n(p;f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ *полином* $n$ *–тог реда који је придружен функцији* $f$. *Тада низ* $B_n(p;f)$ *равномерно конвергира на* $[0,1]$ *ка* $f(p)$.

*Доказ:* Претпоставимо да је $f \in C[0,1]$ и да се изводи $n$ независних експеримената са вероватноћом успеха $p$ у сваком. Нека је $S_n$ број успешно завршених експеримената. Тада је $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, при чему су $X_1, X_2, \dots, X_n$ Бернулијеве случајне величине са параметром $p$. Другим речима, $S_n$ има $\mathcal{B}(n,p)$ расподелу, па је

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Приметимо да за полином $B_n(p;f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ важи $B_n(p;f) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$. Применом Јенсенове неједнакости добијамо да за свако $p \in [0,1]$ важи

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(p)\right| \le E\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(p)\right|. \qquad (4.1.)$$

За свако $\delta > 0$ означимо са $\omega_f(\delta)$ модул непрекидности функције $f$, односно

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|.$$

Користећи неједнакост (4.1.) даље добијамо

$$
\begin{aligned}
&\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f(p)\right| \\
&\qquad \le E\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(p)\right| I\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\delta\right\}+E\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(p)\right| I\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\ge\delta\right\} \\
&\qquad \le \omega_f(\delta)+2\|f\|P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\ge\delta\right\}, \qquad (4.2.)
\end{aligned}
$$

где је $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ . Како је $D(S_n) = np(1-p)$, то на основу Чебишовљеве неједнакости важи

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\ge\delta\right\} \le \frac{np(1-p)}{n^2\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Из последње неједнакости и неједнакости (4.2.) следи

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f(p)\right| \le \omega_f(\delta)+\frac{\|f\|}{2n\delta^2}.$$

Пошто је функција $f$ непрекидна на $[0,1]$, онда је она равномерно непрекидна на $[0,1]$, па за свако $\varepsilon > 0$ можемо изабрати $\delta > 0$ тако да важи $\omega_f(\delta) < \varepsilon$ . Са овако изабраним $\delta > 0$, за довољно велико $n$ ће бити $\frac{\|f\|}{2n\delta^2} < \varepsilon$. Дакле, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да при $n \to \infty$ важи

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f(p)\right| < 2\varepsilon, \text{ тј.}$$

$$B_n(p;f) \to f(p), \text{ равномерно на } [0,1] \text{ кад } n \to \infty . \blacksquare$$

## 4.2.Санктпетербуршки парадокс

Размотримо следећу игру: баца се симетричан новчић све до појаве прве главе. Ако је глава први пут пала у $j$-том бацању, играч освоји $2^j$ динара. Поставља се питање која је "фер" цена коју играч треба да плати да би играо ову игру. Општеприхваћена формула за одређивање реалне цене било које игре је математичко очекивање добитка који та игра пружа. Међутим, у овом случају очекивани добитак је

$$2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+\cdots=+\infty,$$

што целу ствар чини парадоксалном. Другим речим, ако би неко желео да опроба срећу на овај начин, требао би да уложи сав капитал којим располаже.

Први подстицај за решавање овог проблема дао је швајцарски математичар Nikolaus Bernoulli 1713. године. Николас је пошао од претпоставке да се догађаји са изузетно малим вероватноћама могу сматрати немогућим, тј. можемо их занемарити. Како је $2^{13} < 10\,000 < 2^{14}$, тада гледајући на догађаје чија је вероватноћа $\leq \frac{1}{10\,000}$ као на практично немогуће, искључује се могућност да у сваком од првих 14 бацања новчића падне писмо. На тај начин се добија да је математичко очекивње

$$\sum_{k=1}^{14} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = 14\,.$$

Прихватљивије решење дао је Daniel Bernoulli, такође швајцарски математичар. Данијел је своје решење изложио у раду "Теорија о мерењу ризика", који је објавила Санктпетербуршка академија наука 1738. године, по којој је парадокс и назван. Решење се заснива на мерењу корисности тренутне имовине играча помоћу функције корисности $u(x)$. Данијел је уместо очекиваног добитка, рачунао очекивану корисност. Претпоставка да је корисност савког уложеног динара обрнуто пропорционална имовини коју је играч поседовао до улагања истог, навела га је да за функцију корисности изабере логаритам имовине играча.

Нека је $a$ почетни капитал играча. Очекивана корисност је тада

$$\sum_i p_i \log(a + x_i).$$

Према томе, цена игре би била она вредност $v$ чија је корисност једнака очекиваној корисности игре, тј. она вредност за коју важи следеће

$$\log(a + v) = \sum_i p_i \log(a + x_i),$$

$$v = \prod_i (a + x_i)^{p_i} - a\,.$$

Занимљивост у вези овог решења је та да добитак зависи од почетног капитала играча. То је објашњење зашто неке игре на срећу могу бити профитабилне и за играча и за казино, баш као и полиса осигурања за клијента и осигуравајућу компанију. Решење које је предложио Данијел Бернули се сматра првим моделом у економској теорији корисности, јер садржи функцију корисности, претпоставку очекиване корисности и претпоставку опадања граничне корисности новца.

Око 200 година након објављивања Бернулијевог решења, Фелер је доказао да је одређивње фер цене игре на срећу повезано са законом великих бројева. Претпоставимо да се иста игра понавља више пута. Ако је цена по једној игри само нешто мања од очекиване, онда након одређеног времена,тј. након одређеног броја понављања, игра постаје профитабилна за играча. Међутим, може се догодити да играч не доживи да велики добитак постане већи од укупног претходног губитка.

Сада ћемо одредити цену за понављање дате игре $n$ пута. Посматрајмо случајне величине $X_1, X_2, \ldots$ које су независне и такве да важи

$$P\{X_i = 2^j\} = \frac{1}{2^j}\,, \qquad j \geq 1\,.$$

Приметимо најпре да за произвољно $m \in N$ важи

$$P\{X_1 > 2^m\} = \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j} = \frac{1}{2^m}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{m-1}}\,.$$

Нека је $m(n) = \log_2 n + K(n)$, где $K(n) \to \infty$, $n \to \infty$ и изабрано је тако да $m(n)$ буде цео број. Означимо $b_n = 2^{m(n)}$. Даље добијамо

$$nP\{X_1 \geq b_n\} = nP\{X_1 \geq 2^{m(n)}\} = n \cdot 2^{-m(n)+1} = 2^{-K(n)+1} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Узимајући $X_{n,k} = X_k$, на основу претходне једнакости имамо да је испуњен услов 1° теореме 2.9. Да бисмо показали да је испуњен и услов 2°, претпоставимо да је $\bar{X}_{n,k} = X_k I\{|X_k| \leq b_n\}$. Тада важи

$$E\bar{X}_{n,k}^2 \leq E(X_k^2 I\{|X_k| \leq b_n\}) = \sum_{j=1}^{m(n)} 2^{2j}\frac{1}{2^j} = \sum_{j=1}^{m(n)} 2^j = 2^{m(n)}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2^{m(n)+1} = 2b_n.$$

Из $E\bar{X}_{n,k}^2 \leq 2b_n$ следи $\frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\bar{X}_{n,k}^2 \leq \frac{2n}{b_n}$ . Како $\frac{2n}{b_n} \to 0$, $n \to \infty$, то важи услов 2° теореме 2.9. Даље је

$$E\bar{X}_{n,k} = \sum_{j=1}^{m(n)} 2^{-j}2^j = m(n), \quad \text{па је} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} E\bar{X}_{n,k} = n \cdot m(n).$$

Ако изаберемо $K(n)$ тако да $\frac{K(n)}{\log_2 n} \to 0$, $n \to \infty$, онда важи

$$\frac{a_n}{n\log_2 n} = \frac{n\big(\log_2 n + K(n)\big)}{n\log_2 n} = 1 + \frac{K(n)}{\log_2 n} \to 1, \qquad n \to \infty\,.$$

Према теореми 2.9. имамо

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} = \frac{S_n - a_n}{n \cdot 2^{K(n)}} \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty.$$

Ако још претпоставимо да је за $n$ велико $K(n) \leq \log_2 \log_2 n$ , онда

$$\left|\frac{S_n}{n \log_2 n} - \frac{a_n}{n \log_2 n}\right| \leq \left|\frac{S_n - a_n}{n \cdot 2^{K(n)}}\right|, \qquad \text{па}$$

$$\frac{S_n}{n \log_2 n} \xrightarrow{P} 1, \qquad n \to \infty.$$

Опширнији историјски осврт на решавање санктпетербуршког парадокса се може видети у раду [5].

## 4.3.Coupon collector's problem

Претпоставимо да имамо $n$ различитих купона. Вероватноћа избора било којег од њих је $\frac{1}{n}$. Купони се бирају са враћањем. Поставља се питање колико треба да чекамо на потпуну колекцију,тј. колико купона треба узети са враћањем тако да сваки из колекције буде изабран бар једном.

Нека су $X_1, X_2, \ldots$ независне случајне величине са униформном расподелом на скупу $\{1,2,\ldots,n\}$. Претпоставимо да се $i$-ти купон бира на случајан начин, независно од претходно изабраних. Означимо $\tau_k^n = \inf\{m : \ |\{X_1, \ldots, X_m\}| = k\}$, тренутак у којем је први пут изабрано $k$ различитих купона. Занима нас асимптотско понашање $T_n = \tau_n^n$,где је $T_n$ тренутак у којем смо комплетирали колекцију. Приметимо да је $\tau_1^n = 1$. Даље, нека је $\tau_0^n = 0$. Означимо за $1 \leq k \leq n$, $X_{n,k} = \tau_k^n - \tau_{k-1}^n$. Дакле, $X_{n,k}$ је случајна величина која има геометријску расподелу са параметром $\frac{n-(k-1)}{n}$ и независна је од случајних величина $X_{n,j}$, $1 \leq j < k$. Како важи

$$T_n = \tau_n^n = (\tau_n^n - \tau_{n-1}^n) + (\tau_{n-1}^n - \tau_{n-2}^n) + \cdots + (\tau_1^n - \tau_0^n) = X_{n,n} + X_{n,n-1} + \cdots + X_{n,1},$$

то је

$$E(T_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_{n,k}) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-(k-1)} = n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}.$$

$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$ је хармонијски број, односно $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \sim \ln(n)$, па следи $E(T_n) \sim n \cdot \ln(n)$. Даље је

$$D(T_n) \leq ET_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{\left(n-(k-1)\right)^2} = n^2 \sum_{m=1}^{n} m^{-2} \leq n^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}.$$

За израчунавање $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}$ користимо Парсевалову једнакост за функцију $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$ :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx\,.$$

Према томе, имамо

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\cos(nx) - i \cdot \sin(nx))\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(nx)\, dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(nx)\, dx = -\frac{i}{2\pi} \cdot 2 \int_{0}^{\pi} x \cdot \sin(nx)\, dx$$
$$= -\frac{i}{\pi} \cdot \left( \frac{-x \cdot \cos(nx)}{n} \Big|_{x=0}^{\pi} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_{x=0}^{\pi} \right) = \frac{\pi \cdot \cos(n\pi)}{n\pi} i - \frac{\sin(n\pi)}{n^2 \pi} i$$
$$= \frac{\cos(n\pi)}{n} i - \frac{\sin(n\pi)}{\pi n^2} i\,.$$

Како за $n \in N$ важи $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$, то је $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Претпоставомо да је $a_0 = 0$. Тада важи

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Користећи $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ и узимајући $a_n = n \cdot \ln(n)$, добијамо

$$\frac{D(T_n)}{a_n^2} \le \frac{n^2 \frac{\pi^2}{6}}{n^2 (\ln(n))^2} \to 0, \quad n \to \infty\,.$$

Према теореми 2.8. имамо

$$\frac{T_n - E(T_n)}{a_n} \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty.$$

Из $E(T_n) \sim n \cdot \ln(n)$ следи $\frac{E(T_n)}{n \cdot \ln(n)} \sim 1$, па важи

$$\frac{T_n}{n \cdot \ln(n)} \xrightarrow{P} 1, \ \ n \to \infty.$$

Рецимо, ако је $n = 365$ (број дана у години), на основу претходног закључујемо да је потребно да упознамо $365 \cdot \ln(365) \approx 2\ 154$ особе тако да сваки дан у години буде рођендан бар једног нашег познаника.

## 4.4.Јаки закон великих бројева и процеси обнављања

Процесима обнављања моделирају се догађаји који се дешавају у тренуцима који су случајни, али такви да се времена између узастопних догађаја могу апроксимирати независним и једнако расподељеним случајним величинама.

Нека је $X_0, X_1, X_2, \ldots$ низ ненегативних и независних случајних величина са истом расподелом. Дефинишемо процес обнављања на следећи начин:

$$\{T_n, \ \ n \geq 0\}, \qquad \text{где је } T_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n \,.$$

$T_n$ представља $n$-ти моменат обнављања. Нека је $\{N_t, t \geq 0\}$ процес који броји обнављања, при чему је $N_t = \sup\{n : \ T_n \leq t\}$ број обнављања до тренутка t.

**Теорема 4.4.1.** *Нека је $E(X_1) = \mu \leq +\infty$. Ако је $X_0 < +\infty$ скоро сигурно, онда важи*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{\text{с.с.}} \frac{1}{\mu}, \quad t \to \infty.$$

*Доказ:* Ако је $\mu < +\infty$, онда на основу теореме 3.2. важи $\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{с.с.}} \mu, \ n \to \infty.$

Претпоставимо сада да је $\mu = +\infty$. Нека је $M > 0$ и $X_i^M = \min\{X_i, M\}$. Овако дефинисане случајне величине $X_1^M, X_2^M, \ldots$ су независне , имају исту расподелу и при томе је $E|X_i^M| < +\infty$ . Означимо $T_n^M = X_1^M + \cdots + X_n^M$. Тада према теореми 3.2. следи $\frac{T_n^M}{n} \xrightarrow{\text{с.с.}} EX_i^M$, $n \to \infty$ . Како је $X_i \geq X_i^M$, то важи следећа неједнакост

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{T_n^M}{n} = EX_i^M.$$

Приметимо још да $X_i^M \uparrow X_i$, па применом теореме о монотоној конвергенцији имамо

$$\lim_{M\to\infty} EX_i^M = E\left(\lim_{M\to\infty} X_i^M\right) = EX_i = +\infty.$$

Дакле, у случају када је $EX_1 = +\infty$,тада $\frac{T_n}{n} \to \infty, n \to \infty$ скоро сигурно. Даље, према дефиницији $N_t$, важи

$$T(N_t) \leq t < T(N_t + 1),$$

$$\frac{T(N_t)}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{T(N_t+1)}{N_t},$$

$$\frac{T(N_t)}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{T(N_t+1)}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N_t}.$$

Пошто $N_t \to \infty$, $t \to \infty$, то $\frac{N_t+1}{N_t} \to 1$, $t \to \infty$ и $\frac{T_{N_t}}{N_t} \to \mu$, $t \to \infty$. Према томе,

$$\frac{t}{N_t} \xrightarrow{\text{с.с.}} \mu, \quad t \to \infty, \quad \text{тј.}$$

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{\text{с.с.}} \frac{1}{\mu}, \quad t \to \infty. \blacksquare$$

# Литература

[1] Младеновић, П. (2008) *Вероватноћа и статистика,* Математички факултет, Београд

[2] Durrett, R. (2010) *Probability: Theory and Examples*

[3] Etemadi, N. (1981) An elementary proof of the strong law of large numbers, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete,* 55, 119-122

[4] Sury, B. (2011) Weierstrass's theorem – leaving no 'stone' unturned, *Resonance,* April, 341-355

[5] Dehling, H. (1997) Daniel Bernoulli and the St. Petersburg paradox, *Nieuw Archief voor Wiskunde,* Vierde serie Deel 15 No. 3, 223-227

[6] Прохоров, А.В, Ушаков, В.Г, Ушаков Н.Г. (1986) *Задачи по теории вероятностей,* Наука, Москва