Jovan P. Lazović

# VAŽNIJE OSOBENOSTI U KRETANJU KVAZIKOMPLANARNIH PLANETOIDA

(Doktorska disertacija)

# S A D R Ž A J

Str.

## UVOD



## I DEO

## GEOMETRIJSKO-KINEMATIČKE OSOBENOSTI KVAZIKOMPLANARNIH PLANETOIDA



## II DEO

## DINAMIČKI USLOVI I VAŽNIJE POSLEDICE KONJUNKCIJA PLANETOIDA OKO POLOŽAJA PROKSIMITETA

## III DEO

## ZAKLJUČAK



## P r i l o z i



---

U tekstu : 6 tablica na str. 17, 22, 38, 39, 49, 54;
4 slike na str. 18, 20, 53.

## UVOD

1. <u>Kratak istorijat odredjivanja fizičkih konjunkcija i proksimiteta planetoida.</u> - Za dva planetoida se kaže da se nalaze u fizičkoj konjunkciji kad se nadju, sa iste strane u odnosu na Sunce, u istoj poluravni normalnoj na osnovnoj koordinatnoj ravni (ekliptičkoj, ekvatorskoj). Kraćeg izražavanja radi, pod terminom fizičke konjunkcije podrazumeva se još i kako definisani položaj, tako i trenutak kad se planetoidi u tom položaju nadju.

Proksimitetom dva planetoida nazivaju se tačke njihovih putanja koje se jedna od druge nalaze na najmanjoj udaljenosti. I ovde ćemo, pod ovim pojmom, podrazumevati kako položaje na putanjama tako i trenutke kad se planetoidi nadju u tim položajima (ako se uopšte mogu naći).

Odmah se vidi, prema tome, da se odredjivanje kako fizičkih konjunkcija tako i proksimiteta dvaju planetoida sastoji iz dva problema. Prvi je čisto geometrijski; drugi kinematički, koji se svodi na odredjivanje trenutka kad pomenuta pojava nastaje. Najčešće se trenuci fizičkih konjunkcija i proksimiteta poklapaju; no ne obavezno. Zato se i njihovo odredjivanje često svodi na jedno izračunavanje.

Problem odredjivanja proksimiteta nije nov. On je pažnju astronoma privukao još sredinom prošloga veka, kad je broj otkrivenih planetoida dostizao svega petnaestak objekata. Problem su prvi uočili B. A. G o u l d i L. D' A r r e s t. No prvo njegovo strogo rešenje potiče od nemačkog astronoma G r u n e r t -a. Ovaj autor je posmatrao opšti slučaj i pokušao da odredi tačke ukrštanja dvaju konusnih preseka u prostoru. Zatim je proučio slučaj ukrštanja u prostoru dvaju konusnih preseka sa zajedničkom žižom. Dao je i opšte izraze za odredjivanje tačaka ukrštanja, ali su ovi toliko glomazni i komplikovani da su za praksu neupotrebljivi /1, 2/.

Od 1835. ovim problemom počeo se baviti poznati nemački astronom i kasniji direktor Bečke opservatorije K a r l v o n L i t t r o w. Za dve decenije, koliko se ovim problemom bavio, objavio je o njemu čitav niz studija i memoara /3/. Možemo istaći da je, u prvom rešenju, Litrov za promenljive uzeo ekscentrične anomalije ($E$ i $E_1$) planetoida u pitanju. Za odredjivanje anomalija traženog proksimiteta Litrov je u prvi mah koristio jednačine:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \alpha \sin(E + B) - a^2e^2 \sin 2E + \alpha' \sin(E + B')\cos E_1 + \\ &\qquad + \alpha'' \sin(E + B'')\sin E_1, \\ 0 &= \beta \sin(E_1 + C) - a_1^2e_1^2 \sin 2E_1 + \beta' \sin(E_1 + C')\cos E + \\ &\qquad + \beta'' \sin(E_1 + C'')\sin E, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

gde: $a$, $e$, $a_1$, $e_1$ označavaju velike poluose i ekscentričnosti dotičnih putanja, a $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\beta$, $\beta'$, $\beta''$, $B$, $B'$, $B''$, $C$, $C'$, $C''$ predstavljaju pomoćne veličine odn. funkcije putanjskih elemenata uočenih planetoida. Ovo rešenje ga, medjutim, nije zadovoljavalo, jer nije omogućavalo da, na jednostavan i dovoljno brz način, otkrije parove planetoida čije se putanje jedna drugoj dovoljno približuju. Zato je, prvo, pokušao da, pomoću dimenzionisanih modela od žice planetoidskih putanja, prethodno otkrije parove planetoida čije se putanje dovoljno jedna drugoj približuju. Ovakav postupak mu je ujedno omogućavao da nadje i približne vrednosti heliocentričnih longituda položaja proksimiteta. Ako se ovako nadjena vrednost longitude nije mnogo razlikovala od longitude relativnog čvora, Litrov je za približnu vrednost longitude položaja proksimiteta uzimao nadjenu vrednost longitude. Tačniju vrednost položaja proksimiteta odredjivao je sukcesivnim aproksimacijama: bile grafički, bilo interpolacijama. Isto tako je odredjivao i samu udaljenost tačaka proksimiteta. No, kao što se vidi, ova metoda je za odredjivanje svakog proksimiteta zahtevala prilično i vremena i računa.

Treći nemački astronom, koji se ovim problemom bavio, bio je L i n s s e r. Njegov postupak se svodio na izračunavanje, u ekvidistantnim razmacima, heliocentričnih longituda (l), heliocentričnih latituda (b) i potegâ (r) uočenih planetoida. Zatim, uporedjivanjem izračunatih potega i latituda i izdvajanjem onih parova za koje su razlike ovih vrednosti padale ispod usvojenih granica, odredjivao je vrednosti longituda proksimiteta. Orijentacije radi, napominjemo da su Litrov i Linser kao interesantnu granicu proksimiteta bili usvojili 0.1 astronomske jedinice.

Četvrti nemački astronom koji se ovim problemom pozabavio, i to u svojoj doktorskoj disertaciji /4/, bio je A. G a l l e (sin astronoma Galea koji je otkrio Neptuna). On je pošao od uslova za minimum rastojanja putanjâ, izražena uslovnim jednačinama:

$$\left\{\begin{aligned} &2a^2(1-\sin\varphi\cos E)\sin\varphi\sin E + 2aa_1/\cos\varepsilon(\cos E_1-\sin\varphi_1)\sin E +\\ &+\cos\zeta\cos\varphi_1\sin E\sin E_1-\cos\vartheta\cos\varphi(\cos E_1-\sin\varphi_1)\cos E -\\ &\qquad -\cos\eta\cos\varphi\cos\varphi_1\sin E_1\cos E/ = 0,\\ &2a_1^2(1-\sin\varphi_1\cos E_1)\sin\varphi_1\sin E_1 + 2aa_1/\cos\varepsilon(\cos E -\\ &-\sin\varphi)\sin E_1+\cos\zeta\cos\varphi\sin E_1\sin E-\cos\vartheta\cos\varphi_1\cdot\\ &\cdot(\cos E-\sin\varphi)\cos E_1-\cos\eta\cos\varphi_1\cos\varphi\sin E\cos E_1/ = 0,\end{aligned}\right. \tag{2}$$

gde veličine a, $\varphi$, E – sa i bez indeksa – označavaju velike poluose, uglove ekscentričnosti i ekscentrične anomalije uočenih planetoida, a veličine $\varepsilon$, $\zeta$, $\vartheta$, $\eta$ odredjene su jednačinama:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varepsilon &= \cos V\cos V_1+\sin V\sin V_1\cos J,\\ \cos\zeta &= \cos V\sin V_1-\sin V\cos V_1\cos J,\\ \cos\vartheta &= \cos V_1\sin V-\sin V_1\cos V\cos J,\\ \cos\eta &= \sin V\sin V_1+\cos V\cos V_1\cos J,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

u kojima: V i $V_1$ predstavljaju prave anomalije relativnog uzlaznog čvora, dakle računate od perihela jedne i druge putanje, a J medjusobni nagib putanjâ. Jednačine (2) Gale je, u svom radu, čitavim nizom smena i transformacija, sveo na

$$\left.\begin{aligned} \lambda \sin(E_1 + \Lambda) &= \frac{a}{2a_1} \sin^2\varphi \sin 2E + \alpha \sin(E + A), \\ \lambda' \sin(E + \Lambda') &= \frac{a_1}{2a} \sin^2\varphi_1 \sin 2E_1 + \alpha' \sin(E_1 + A'), \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

gde: $\lambda$, $\lambda'$, $\Lambda$, $\Lambda'$, $\alpha$, $\alpha'$, A, A' predstavljaju pomoćne veličine, ustvari prilično komplikovane izraze koje ne smatramo za potrebno da navodimo. Iz sistema (4) Gale je nepoznate E i $E_1$ izračunavao sukcesivnim aproksimacijama, uzimajući za polazne vrednosti ekscentričnih anomalija one dobivene pomoću relativnog čvora. Sa nadjenim vrednostima ekscentričnih anomalija za položaje proksimiteta izračunavao je zatim samo rastojanje, a, potom, i epohu, kao i trajanje proksimiteta.

U vreme, kad se Gale ovim problemom bavio, broj otkrivenih planetoida iznosio je 232. Da bi ilustrovao svoju metodu na jednom primeru, on je bio izabrao par planetoida 48 Doris i 202 Chryseis. Relativni nagib putanja ovih planetoida iznosio je J = $6^{\circ}$ 27ʹ.0; razlike pravih anomalija izmedju relativnog čvora i položaja proksimiteta za jednu i drugu putanju iznosile su 14°.8 i 14°.3; a za vrednost rastojanja u proksimitetu našao je <u>0.00 719</u> AJ. Gale je, ujedno, izračunao da će uočeni planetoidi ostati u granicama 0.05 AJ oko svog proksimiteta 14.34 dana. Možemo još i to napomenuti da je Gale numerički rad obavljao logaritmima sa četiri decimale.

Peti i poslednji astronom, koji se najiscrpnije ovim problemom posebavio, bio je direktor Opservatorije u Nici G. F a y e t sa svojim saradnicima Laugier, Fabre, Patry, Cailliatte i Rapian /5, 6/. On je u svom radu ispitao, tj. efektivno odredio: 1) uzajamne proksimitete 800 planetoidskih putanja; 2) proksimitete putanja periodičnih kometa i velikih planeta; 3) uzajamne proksimitete putanja periodičnih kometa; 4) proksimitete putanja periodičnih kometa i 150 najvećih planetoida. Sem geometrijskih proksimiteta, autor je odredio u svojoj studiji i epohe proksimiteta. Ali je istakao da, zbog dejstva poremećaja kojima podleže srednja siderička dnevna kretanja planetoida, date epohe imaju samo prolazni, orijentacioni značaj.

I Faje je rešavao problem sukcesivnim aproksimacijama. On je polazio od hipoteze da su u proksimitetu dveju eliptičnih putanja heliocentrične longitude jednake, što, strogo uzev, ne mora biti. S obzirom da putanjski elementi planetoida, koje je ispitivao, nisu bili podjednako tačni, Faje se ograničio na one samo proksimitete kod kojih je minimalna udaljenost dveju putanja bila manja od 0.01 AJ. Ovim ograničenjem je ujedno odredio i razliku u heliocentričnim longitudama u proksimitetu posmatranih planetoida. Za ovu granicu je našao da leži ispod $0\overset{\circ}{.}3$, pošto se većina posmatranih planetoida kreće oko Sunca u pojasu izmedju 2.5 i 3.5 AJ.

Princip metode kojom se Faje služio u svom radu i računima nije nov. On se ustvari koristio postupkom koji je, 60 godina ranije, izložio engleski astronom A. M a r t h /7/. Suština Martova postupka, izložena u najsažetijem obliku, sastoji se u ovome. Mesto samih putanja u prostoru, čiji se proksimitet traži, posmatraju se tragovi koje bi one ostavile u poluravni, normalnoj na ekliptičkoj ravni, kad bi ove izvršile obrt oko normale na ekliptičkoj ravni, povučenoj kroz Sunčev položaj. Ovi tragovi nazvani su ekliptičkim intersektima. To su manje ili više pravilne, zatvorene krive. Izračunavanjem, sa svakih, recimo, $10^{\circ}$ heliocentrične longitude, prvo, vrednosti potega i heliocentričnih latituda planetoida; zatim vrednosti r sin b i r cos b - što će reći pravouglih koordinata tačaka u pomenutoj normalnoj poluravni na ekliptici - dobiva se niz tačaka u toj poluravni koje, spojene neprekidnom linijom, predstavljaju intersekt dotičnog planetoida.

Izračunavane tačke intersekata Faje je nanosio na milimetarsku hartiju, što je moguće preciznije, u razmeri 100 mm za jednu astronomsku jedinicu. Sa ovako konstruisanih intersekata on je neposredno dobivao približne položaje proksimiteta; a, zatim, jednostavno izračunavao i približne vrednosti i udaljenosti tačaka proksimiteta. Pri tome je za približne ~~[illegible]~~ vrednosti položaja proksimiteta uzimao preseke intersekata kojima su odgovarale vrlo približno jednake vrednosti longituda. Dodajmo da je Faje, sa svojih grafika, vrednost longitude proksimiteta mogao da oceni sa tačnošću od $0\overset{\circ}{.}5 - 1^\circ$. Tako je približnu vrednost udaljenosti proksimiteta odredjivao sa aproksimacijom od $\pm$ 0.003 AJ.

Za popravku prve približne, sa grafika nadjene, vrednosti longitude proksimiteta, $l_o$, Faje se poslužio diferencijalnom metodom. U tu svrhu obeležava sa **a** i **b** popravke, za promenu od $1^\circ$ heliocentrične longitude, koordinatâ $x = r \cos b$ i $y = r \sin b$; zatim, označavajući veličine svake od putanja, odnosno intersekata, indeksima 1 i 2, stavlja:

$$x_1 - x_2 = r_1 \cos b_1 - r_2 \cos b_2 = F,$$
$$y_1 - y_2 = r_1 \sin b_1 - r_2 \sin b_2 = G,$$
$$a_1 - a_2 = f, \quad b_1 - b_2 = g. \quad f^2 + g^2 = D.$$

Označivši, zatim, sa $\eta$ popravku u stepenima polazne vrednosti heliocentrične longitude proksimiteta, $l_o$, dobiva za popravljenu daljinu, $\rho_1$, položaja proksimiteta:

$$\rho_1^2 = (F + f\eta)^2 + (G + g\eta)^2. \qquad (5)$$

Odavde nalazi

$$\rho_1 \frac{d\rho_1}{d\eta} = (F + f\eta)f + (G + g\eta)g.$$

Iz uslova za minimum daljine, $\rho_1$, nalazi za popravku:

$$\eta = -\frac{Ff + Gg}{f^2 + g^2} = -\frac{Ff + Gg}{D}. \qquad (6)$$

Za popravljene vrednosti heliocentričnih longituda proksimiteta dobiva

$$l_1 = l_o + \eta,$$

a vrednosti najmanje daljine u proksimitetu – iz (5). Ako bi popravka bila veća, recimo preko $1^{o}$, postupak se mora ponoviti.

Strogo uzev, Fajeov postupak ne rešava konačno sâm problem. Ni poslednja njegova aproksimacija ne daje t a č n u vrednost najmanje daljine, jer pretpostavlja da ova mora ležati u ravni normalnoj na ekliptičkoj ravni, što, strogo uzev, nije slučaj ili ne mora da bude.

U dve sveske in $4^{o}$, od po 400 strana, Faje je objavio, za 800 planetoida, sve potrebne podatke za konstruisanje intersekata za svaki od ovih planetoida. Na temelju ovih podataka on je, sa svojim saradnicima, ispitao oko 320 000 parova intersekata. Ograničivši se samo na proksimitete kod kojih je najmanja daljina pedala ispod 0.015 AJ, našao je ukupno 11 661 takav slučaj. Medju ovima je naišao na šest parova, kod kojih daljina medju planetoidima, u položaju proksimiteta, ne premaša 0.0004 AJ, što znači da je daljina medju planetoidima, u tom trenutku, manja od 50 000 km.

2. Značaj proksimiteta. - Autori prvih radova na ovom problemu imali su pred očima, u prvom redu, raspored ili medjusobne položaje putanja pronadjenih planetoida; a, u drugom, poreklo ovih tela u svetlosti poznate Olbersove hipoteze. Tek se kod K. v. Littrow -a pojavljuje ideja da bi proksimitet mogao, ako bi tela u tom trenutku jedno drugom prilazila dovoljno blizu, imati uticaja i na kretanje tih planetoida. Tako se došlo i na ideju da se, iz ovako proisteklih poremećaja u kretanju uočenih planetoida - pod uslovom da svi ostali mogući poremećaji (od strane velikih planeta) budu što tačnije odredjeni i njihovo kretanje, za trajanje proksimiteta, što tačnije pratimo - pokuša doći do, ma samo i približnih, podataka o masama planetoida. Za ovaj problem od značaja su bili naročito proksimiteti koji su nešto duže trajali; drugim rečima, kod kojih su se uočeni planetoidi izvesno vreme otprilike paralelno kretali.

Medjutim, ni Littrow, ni Galle, ni Fayet nisu se, u svojim radovima, zaustavljali na problemu ocenjivanja masâ planetoida.

Oni su se ograničavali isključivo na odredjivanje proksimiteta, to jest njegovih položaja, epoha i trajanja. Jedini koji se pozabavio problemom mase bio je poznati danski astronom i direktor Kopenhaške opservatorije E. S t r ö m g r e n. Zaključak njegove studije /8/ bio je negativan. On je pokazivao da proksimiteti planetoida, čak ni onih krupnijih, pri daljinama od po nekoliko s t o t i h astronomske jedinice, nisu dovoljni da proizvedu merljive poremećaje, iz kojih bi bilo mogućno izvesti pouzdanije zaključke o masama ovih tela.

Problematikom planetoidskih proksimiteta kod nas su se bavili nekadanji Astronomsko-numerički institut Srpske akademije nauka i, kasnija, Astronomsko-numerička sekcija Matematičkog instituta Srpske akademije nauka i umetnosti /9, 10/. Da bi olakšao izbor slučajeva proksimiteta, koji bi mogli biti pogodni za (eventualnu) procenu mase, profesor V. V. M i š k o v i ć je obradu ograničavao samo na slučajeve planetoida koji su se kretali u približno istoj ravni; drugim rečima na slučajeve planetoida sa približno jednakim čvorovima i nagibima putanja. Ovakve parove, ili grupe, planetoida nazvao je kvazikomplanarnim planetoidima. U ovim slučajevima su znatno i olakšana i ubrzana bila odredjivanja kako samih heliocentričnih položaja (longituda) i najmanjih daljinâ, tako i epohâ i trajanjâ - proksimiteta.

Iz skupa kvazikomplanarnih parova planetoida, sa dovoljno tačno poznatim putanjskim elementima, profesor Mišković mi je skrenuo pažnju na par planetoida 589 i 1564 . Ovaj par je, pored značaja zbog kvazikomplanarnosti svojih putanja, za nas još iz dva razloga od posebnog interesa: prvo, što oba planetoida nose nazive naših dveju najvećih republika - 589 Croatia i 1564 Srbija - a, drugo, što je 1564 Srbija prvi planetoid pronadjen na Beogradskoj astronomskoj opservatoriji. Prirodno je bilo, dakle, kad je već slučaj hteo da se ova dva „naša" planetoida skoro u istoj ravni oko Sunca kreću, da se ispitaju sve važnije pojedinosti, kao i osobenosti u njihovim medjusobnim položajima, koje iz tih okolnosti proističu; odrede svi podaci njihovih proksimiteta; prouče eventualne posledice ovih osobenosti na njihova kretanja; i, najzad, ako je mogućno, izvuku zaključci od opštijeg značaja za ovakve i slične slučajeve planetoida, ili uopšte tela, čija nas kretanja interesuju i koja možemo da posmatramo.

U ovom radu, koji predstavlja piščevu doktorsku disertaciju, izložena su ispitivanja pobrojanih problema i pitanja, kao i iz njih izvedeni rezultati i zaključci. Rad je podeljen u tri dela. U prvom su ispitane geometrijsko-kinematičke osobenosti kvazi-komplanarnih eliptičnih putanja, uopšte, i uočenog para „naših" planetoida, 589 i 1564, posebno. U drugom delu su proučene dinamičke pojedinosti i važnije posledice za trajanja proksimiteta uočenih planetoida. Treći deo je zaključak, u kojem je istaknut značaj dobivenih rezultata i zaključaka.

I DEO

## GEOMETRIJSKO-KINEMATIČKE OSOBENOSTI KVAZIKOMPLANARNIH PLANETOIDA

3. Odredjivanje proksimiteta eliptičnih putanja. – Vektor položaja planetoida na njegovoj heliocentričnoj putanji dat je izrazom

$$\vec{r} = r \cos v \, \vec{P} + r \sin v \, \vec{Q},$$

gde su $\vec{P}$ i $\vec{Q}$ jedinični vektori u putanjskoj ravni, prvi usmeren ka perihelu, drugi normalan na prvom u smeru pravca odredjena pravom anomalijom $v = 90^0$. Komponente vektora $\vec{P}$ i $\vec{Q}$, ili t. zv. planetoidove vektorske konstante, u heliocentričnom ekliptičkom pravouglom sistemu, u funkciji putanjskih elemenata ($\omega$, $\Omega$, i) date su jednačinama:

$$\left.\begin{aligned}
P_x &= \cos\omega \cos\Omega - \sin\omega \sin\Omega \cos i, \\
P_y &= \cos\omega \sin\Omega + \sin\omega \cos\Omega \cos i, \\
P_z &= \sin\omega \sin i; \\
Q_x &= - \sin\omega \cos\Omega - \cos\omega \sin\Omega \cos i, \\
Q_y &= - \sin\omega \sin\Omega + \cos\omega \cos\Omega \cos i, \\
Q_z &= \cos\omega \sin i.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Ako se poslužimo poznatim relacijama,

$$r \cos v = a(\cos E - e) = a(\cos E - \sin\varphi),$$

$$r \sin v = b \sin E = a \cos\varphi \sin E,$$

gornji izraz za $\vec{r}$ prelazi u

$$\vec{r} = \vec{A}(\cos E - e) + \vec{B} \sin E, \qquad (8)$$

gde su

$$e = \sin\varphi, \quad b = a\sqrt{1 - e^2} = a \cos\varphi; \qquad (9)$$

$$\vec{A} = a\,\vec{P},\quad \vec{B} = b\,\vec{Q};\quad |\vec{A}| = a,\quad |\vec{B}| = b. \tag{10}$$

S obzirom na jednačine (8) i (10) dobivaju se, za pravougle koordinate, u ekliptičkom heliocentričnom pravouglom koordinatnom sistemu, u funkciji ekscentrične anomalije, E, izrazi:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_x(\cos E - e) + B_x \sin E,\\ y &= A_y(\cos E - e) + B_y \sin E,\\ z &= A_z(\cos E - e) + B_z \sin E, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

/11/ gde su :

$$\left.\begin{aligned} A_x &= a\,P_x,\ A_y = a\,P_y,\ A_z = a\,P_z\ ;\\ B_x &= b\,Q_x,\ B_y = b\,Q_y,\ B_z = b\,Q_z\ ; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = a^2,\ B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = b^2,\ A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z = 0. \tag{13}$$

Ako pretpostavimo da su nam dati putanjski elementi dvaju planetoida, njihovi položaji, u izvesnom trenutku, odredjeni su koordinatama oblika

$$x_j = f_{jx}(E_j),\ y_j = f_{jy}(E_j),\ z_j = f_{jz}(E_j),\ (j = 1,\ 2), \tag{14}$$

gde su :

$$\left.\begin{aligned} f_{jx}(E_j) &= A_{jx}(\cos E_j - e_j) + B_{jx}\sin E_j,\\ f_{jy}(E_j) &= A_{jy}(\cos E_j - e_j) + B_{jy}\sin E_j, \quad (j = 1,\ 2)\\ f_{jz}(E_j) &= A_{jz}(\cos E_j - e_j) + B_{jz}\sin E_j. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Pri tome su $E_1$ i $E_2$ dva nezavisna parametra.

Traži se sad najmanje rastojanje izmedju putanja dvaju uočenih planetoida, od kojih svaki opisuje svoju Keplerovu elipsu. Primećujemo da se, u gornjim jednačinama, menjaju samo veličine $E_j$ $(j = 1,\ 2)$. Rastojanje, $\rho$, izmedju ovih putanja biće, takodje, funkcija samo veličinâ $E_j$ $(j = 1,\ 2)$; za njegov kvadrat imamo

$$\begin{aligned} \rho^2 = {} & /f_{1x}(E_1)-f_{2x}(E_2)/^2 + /f_{1y}(E_1)-f_{2y}(E_2)/^2 +\\ & + /f_{1z}(E_1)-f_{2z}(E_2)/^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Kako je $\rho$ stalno pozitivno, Min $\rho$ će biti kad i Min $\rho^2$. I tako se uslovne jednačine, u slučaju najmanjeg rastojanja između dveju eliptičnih putanja, dobivaju iz jednačina :

$$\frac{\partial(\rho^2)}{\partial E_1} = 0, \quad \frac{\partial(\rho^2)}{\partial E_2} = 0. \tag{17}$$

Zbog (16) one postaju, pošto podelimo prvu sa 2, a drugu sa -2,

$$\left\{\begin{aligned} &/f_{1x}(E_1) - f_{2x}(E_2)/\, f'_{1x}(E_1) + /f_{1y}(E_1) - f_{2y}(E_2)/\, f'_{1y}(E_1) + \\ &\qquad + /f_{1z}(E_1) - f_{2z}(E_2)/\, f'_{1z}(E_1) = 0, \\ &/f_{1x}(E_1) - f_{2x}(E_2)/\, f'_{2x}(E_2) + /f_{1y}(E_1) - f_{2y}(E_2)/\, f'_{2y}(E_2) + \\ &\qquad + /f_{1z}(E_1) - f_{2z}(E_2)/\, f'_{2z}(E_2) = 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Iz (15) dobivamo :

$$\left.\begin{aligned} f'_{jx}(E_j) &= - A_{jx}\sin E_j + B_{jx}\cos E_j, \\ f'_{jy}(E_j) &= - A_{jy}\sin E_j + B_{jy}\cos E_j, \qquad (j = 1, 2) \\ f'_{jz}(E_j) &= - A_{jz}\sin E_j + B_{jz}\cos E_j. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Zbog (15) i (19) jednačine (18) postaju :

$$\left\{\begin{aligned} &/A_{1x}(\cos E_1 - e_1) + B_{1x}\sin E_1 - A_{2x}(\cos E_2 - e_2) - B_{2x}\sin E_2/\cdot \\ &/- A_{1x}\sin E_1 + B_{1x}\cos E_1/ + /A_{1y}(\cos E_1 - e_1) + B_{1y}\sin E_1 - \\ &- A_{2y}(\cos E_2 - e_2) - B_{2y}\sin E_2//-A_{1y}\sin E_1 + B_{1y}\cos E_1/ + \\ &+ /A_{1z}(\cos E_1 - e_1) + B_{1z}\sin E_1 - A_{2z}(\cos E_2 - e_2) - B_{2z}\sin E_2/\cdot \\ &\quad /-A_{1z}\sin E_1 + B_{1z}\cos E_1/ = 0, \\ &/A_{1x}(\cos E_1 - e_1) + B_{1x}\sin E_1 - A_{2x}(\cos E_2 - e_2) - B_{2x}\sin E_2/\cdot \\ &/-A_{2x}\sin E_2 + B_{2x}\cos E_2/ + /A_{1y}(\cos E_1 - e_1) + B_{1y}\sin E_1 - \\ &- A_{2y}(\cos E_2 - e_2) - B_{2y}\sin E_2//-A_{2y}\sin E_2 + B_{2y}\cos E_2/ + \\ &+ /A_{1z}(\cos E_1 - e_1) + B_{1z}\sin E_1 - A_{2z}(\cos E_2 - e_2) - B_{2z}\sin E_2/\cdot \\ &\quad /-A_{2z}\sin E_2 + B_{2z}\cos E_2/ = 0. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Ako u ovim jednačinama izvršimo naznačena množenja i uzmemo u obzir jednačine (13), koje odgovaraju prvoj, odn. drugoj putanji, jednačine (20), posle očiglednih sredjivanja, postaju :

$$\left.\begin{aligned} f(E_1, E_2) \equiv {} & (H_1 + D\sin E_2 + C\cos E_2)\sin E_1 + (K_1 - G\sin E_2 - \\ & - F\cos E_2)\cos E_1 - Z_1\sin E_1\cos E_1 = 0, \\ g(E_1, E_2) \equiv {} & (H_2 + F\sin E_1 + C\cos E_1)\sin E_2 + (K_2 - G\sin E_1 - \\ & - D\cos E_1)\cos E_2 - Z_2\sin E_2\cos E_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

gde smo za konstantne veličine uveli oznake :

$$\left.\begin{aligned} & A_{1x}A_{2x} + A_{1y}A_{2y} + A_{1z}A_{2z} = C, \quad a_1^2e_1 - Ce_2 = H_1, \\ & A_{1x}B_{2x} + A_{1y}B_{2y} + A_{1z}B_{2z} = D, \quad a_2^2e_2 - Ce_1 = H_2, \\ & A_{2x}B_{1x} + A_{2y}B_{1y} + A_{2z}B_{1z} = F, \quad Fe_2 = K_1, \quad a_1^2e_1^2 = Z_1, \\ & B_{1x}B_{2x} + B_{1y}B_{2y} + B_{1z}B_{2z} = G, \quad De_1 = K_2, \quad a_2^2e_2^2 = Z_2. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Izrazi (22) izračunavaju se, pomoću poznatih putanjskih elemenata uočenih planetoida, iz jednačina (7), (9) i (12).

Tako smo za odredjivanje najmanjeg rastojanja dveju eliptičnih putanja, dakle za rešenje postavljenog geometrijskog problema, dobili jednačine (21). Njih možemo kraće napisati u obliku :

$$\left.\begin{aligned} f(E_1, E_2) \equiv X_2\sin E_1 + Y_2\cos E_1 - Z_1\sin E_1\cos E_1 = 0, \\ g(E_1, E_2) \equiv X_1\sin E_2 + Y_1\cos E_2 - Z_2\sin E_2\cos E_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

gde su :

$$\left.\begin{aligned} H_2 + F\sin E_1 + C\cos E_1 = X_1 = X_1(E_1), \\ K_2 - G\sin E_1 - D\cos E_1 = Y_1 = Y_1(E_1), \\ H_1 + D\sin E_2 + C\cos E_2 = X_2 = X_2(E_2), \\ K_1 - G\sin E_2 - F\cos E_2 = Y_2 = Y_2(E_2). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Rešavanje jednačina (23) - koje važe i u opštem slučaju - znatno je olakšano i pojednostavljeno kad se radi o putanjama kvazikomplanarnih planetoida. Kako su ovo transcendentne jednačine, mogu se rešavati sukcesivnim aproksimacijama, polazeći od dovoljno približnih vrednosti, $E_{10}$ i $E_{20}$, nepoznatih, i odredjuju se uzastopno, i to sve manje i manje, popravke : $\Delta E_{10}$, $\Delta E_{20}$; $\Delta E_{11}$, $\Delta E_{21}$; ...; $\Delta E_{1(k-1)}$, $\Delta E_{2(k-1)}$ dok se ne odrede, za svaki sistem, tj. za svako ukrštanje putanja, vrednosti

$$E_{1k} = E_{1(k-1)} + \Delta E_{1(k-1)} \quad i \quad E_{2k} = E_{2(k-1)} + \Delta E_{2(k-1)},$$

koje zadovoljavaju polazne simultane jednačine, sa tačnošću sa kojom se to želi.

Ovakvih sistema biće za rešavanje, kod svakog para planetoida, onoliko koliko se puta njihove putanje ukrštaju, odnosno jedna drugoj približuju; dakle, najčešće dva, a najviše četiri sistema.

U slučaju kvazikomplanarnih planetoida rešavanje je utoliko pojednostavljeno, što se sa grafika mogu lako odrediti već dovoljno približne vrednosti pravih anomalija, $v_{10}$ i $v_{20}$, a iz ovih $E_{10}$ i $E_{20}$.

Popravke ovako nadjenih polaznih približnih vrednosti odredjuju se iz jednačina koje se dobivaju ako se leve strane jednačina (23) razviju u Tajlorov red, pa zanemare članovi sa stepenima višim od prvog i proizvodima veličina $\Delta E_{10}$ i $\Delta E_{20}$. Ovo možemo učiniti jer su - kao što je već rečeno - polazne vrednosti već vrlo približne. Prve popravke se odredjuju, dakle, iz jednačina oblika :

$$\left.\begin{aligned} f_0 + \Delta E_{10}\frac{\partial f}{\partial E_{10}} + \Delta E_{20}\frac{\partial f}{\partial E_{20}} &= 0, \\ g_0 + \Delta E_{10}\frac{\partial g}{\partial E_{10}} + \Delta E_{20}\frac{\partial g}{\partial E_{20}} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

gde su uvedene oznake : $f_0 = f(E_{10}, E_{20})$, $g_0 = g(E_{10}, E_{20})$, i

$$\frac{\partial f}{\partial E_{10}} = \left(\frac{\partial f}{\partial E_1}\right)_{E_1=E_{10},\ E_2=E_{20}}; \quad \frac{\partial f}{\partial E_{20}} = \left(\frac{\partial f}{\partial E_2}\right)_{E_1=E_{10},\ E_2=E_{20}};$$

$$\frac{\partial g}{\partial E_{10}} = \left(\frac{\partial g}{\partial E_1}\right)_{E_1=E_{10},\ E_2=E_{20}}; \quad \frac{\partial g}{\partial E_{20}} = \left(\frac{\partial g}{\partial E_2}\right)_{E_1=E_{10},\ E_2=E_{20}}.$$

Rešavanjem sistema (25) dobivamo za nepoznate vrednosti približnih popravaka, zbog učinjenih zanemarivanja kod razvijanja u red :

$$\Delta E_{10} = \frac{g_0\frac{\partial f}{\partial E_{20}} - f_0\frac{\partial g}{\partial E_{20}}}{\frac{\partial f}{\partial E_{10}}\frac{\partial g}{\partial E_{20}} - \frac{\partial f}{\partial E_{20}}\frac{\partial g}{\partial E_{10}}}, \quad \Delta E_{20} = \frac{f_0\frac{\partial g}{\partial E_{10}} - g_0\frac{\partial f}{\partial E_{10}}}{\frac{\partial f}{\partial E_{10}}\frac{\partial g}{\partial E_{20}} - \frac{\partial f}{\partial E_{20}}\frac{\partial g}{\partial E_{10}}}. \tag{26}$$

Ove popravke dobivaju se u radijanima. Da bismo ih dobili u stepenima, treba te vrednosti pomnožiti vrednošću radijana u stepenima. Ovako dobivene popravke mogu se sad, na sličan način, još popraviti, i dobiti približnija rešenja :

$$E_{12} = E_{11} + \Delta E_{11}, \quad E_{22} = E_{21} + \Delta E_{21}.$$

Postupak se ponavlja dok se aproksimacija ne zaustavi, tj. ne dobiju iste vrednosti ekscentričnih anomalija u dvema uzastopnim aproksimacijama. Postupak je vrlo konvergentan : sa dve, najviše tri, aproksimacije dolazi se do traženog rešenja.

Parcijalni izvodi u izrazima (26) odredjuju se iz jednačina (23) i (24) i dobivaju :

$$\left.\begin{aligned} f'_{E_1} &= \frac{\partial f}{\partial E_1} = X_2\cos E_1 - Y_2\sin E_1 + Z_1(\sin^2 E_1 - \cos^2 E_1),\\ f'_{E_2} &= \frac{\partial f}{\partial E_2} = \chi_2\sin E_1 - \psi_2\cos E_1;\\ g'_{E_1} &= \frac{\partial g}{\partial E_1} = \chi_1\sin E_2 - \psi_1\cos E_2,\\ g'_{E_2} &= \frac{\partial g}{\partial E_2} = X_1\cos E_2 - Y_1\sin E_2 + Z_2(\sin^2 E_2 - \cos^2 E_2); \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

gde su :

$$\left.\begin{aligned} \chi_1 &= F\cos E_1 - C\sin E_1, \quad \psi_1 = G\cos E_1 - D\sin E_1;\\ \chi_2 &= D\cos E_2 - C\sin E_2, \quad \psi_2 = G\cos E_2 - F\sin E_2. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Sa ovako nadjenim parovima vrednosti ekscentričnih anomalija izračunavaju se, pomoću jednačina (11), pravougle heliocentrične ekliptičke koordinate za tačke ukrštanja putanja oba planetoida. Zatim, pomoću (16), za svaku tačku ukrštanja putanja, izračunavaju se vredn sti $\rho$ i, iz tako dobivenih, uzima se manja od dveju, ili najmanja o četiri. Tako se dobiva najmanje rastojanje dveju eliptičnih putanja. Sa vrednostima ekscentričnih anomalija za položaj proksimiteta možemo preći na vrednosti pravih anomalija, a, potom, izračunati i sferne heliocentrične ekliptičke koordinate što odgovaraju položajima proksimiteta dveju putanja planetoida.

## 4. Kvazikomplanarnost planetoida (589) Croatia i (1564) Srbija

. - Kao što je već i u Uvodu pomenuto, u ovoj studiji ćemo ispitati osobenosti kvazikomplanarnosti dvaju planetoida : (589) Croatia i (1564) Srbija, koji su za nas - kao što rekosmo - od posebnog interesa i značaja.

Prvi od ovih planetoida otkrio je A. Kopff, u vreme dok je bio astronom Hajdelberške opservatorije, 3. marta 1906, /12/. Do numerisanja označavan je kao 1906 TM. Iste godine dobio je svoj redni broj : 589, /13/. Naziv Croatia dobio je 1909, /14/.

Drugi je prvi pronadjen planetoid na Beogradskoj astronomskoj opservatoriji. Pronašao ga je, 15. oktobra 1936, M. Protić, onda opservator. Do numerisanja označavan je kao 1936 TB. Svoj redni broj, 1564, i naziv Srbija dobio je, po predlogu profesora V. V. Miškovića (1952).

Za ispitivanja koja će biti predmet ovoga rada poslužili smo se sistemima putanjskih elemenata iz 1938. godine. Izabrali smo te sisteme iz obzira homogenosti : što su, za oba planetoida, isti izvedeni bili uzimajući u obzir poremećaje Jupitera.

Svedeni na ekvinokcij i ekliptiku za 1950.0, kao polazni elementi dvaju planetoida usvojeni su sistemi /15, 16/ :

<u>I tablica</u>

| Planetoid | (589) Croatia | (1564) Srbija |
|---|---|---|
| Epoha | 1925. januar 1.0 UT | 1936. novembar 12.0 UT |
| M | 273°.075 | 349°.8107 |
| $\omega$ | 217.136 | 230.3606 |
| $\Omega$ | 179.296 | 178.7569 |
| i | 10.782 | 10.9857 |
| $\varphi$ | 2.282 | 12.2161 |
| e | 0.039 8179 | 0.211 5994 |
| $\mu$ | 639".369 | 634".8996 |
| a | 3.1345 | 3.1492 |

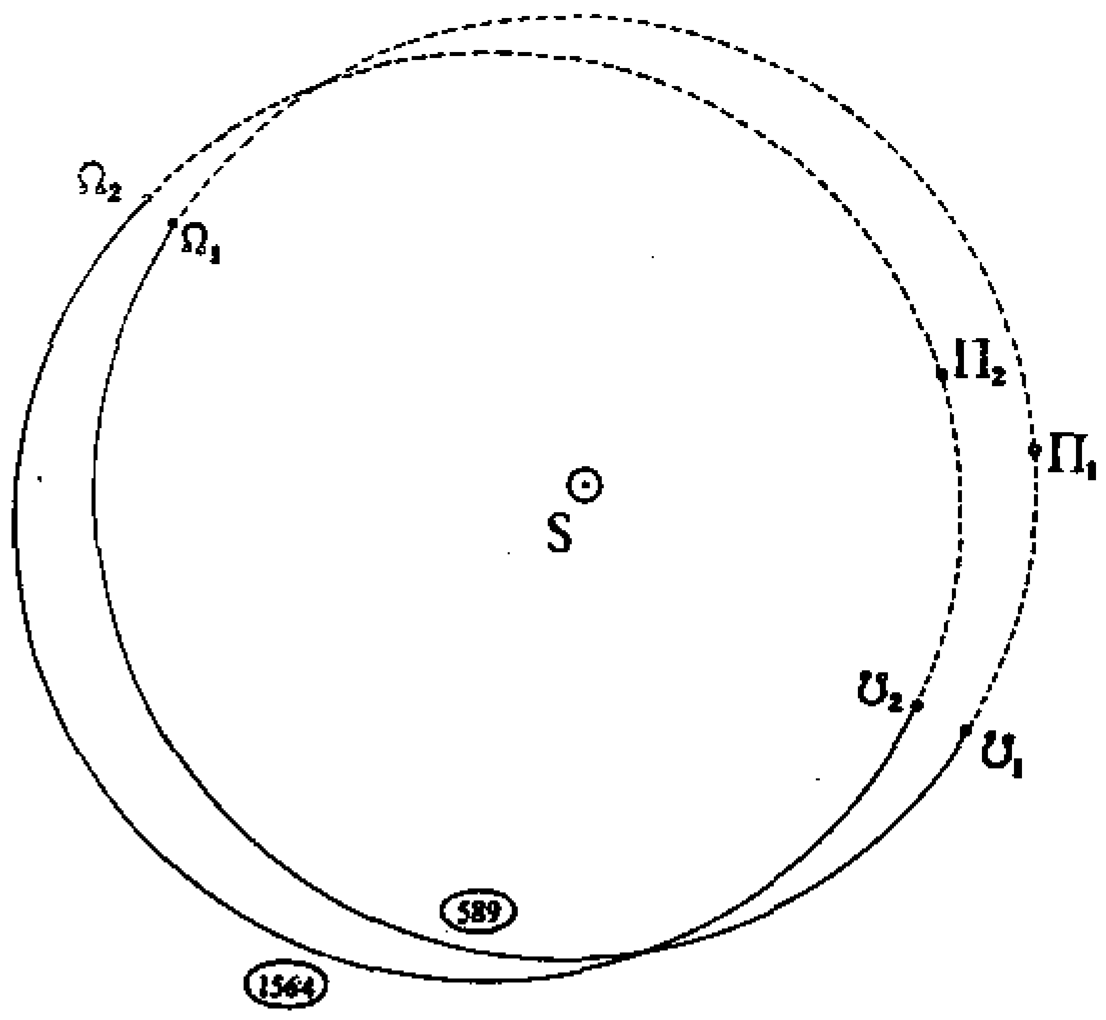
Da bismo pojednostavili pisanje, obeležavaćemo u daljem tekstu planetoide samo njihovim rednim brojevima, a razne veličine i podatke koji se na njih odnose indeksima : 1 za (589) Croatia, 2 za (1564) Srbija. Kvazikomplanarnost, kao i razlike ostalih elemenata „naših" planetoida mogu se videti iz ovih podataka :

| Planetoidi | $\Delta\Omega$ | $\Delta i$ | $\Delta\omega$ | $\Delta\varphi$ | $\Delta e$ | $\Delta\mu$ | $\Delta a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (589) - (1564) | 0°.539 | -0°.204 | -13°.225 | -9°.934 | -0.17178 | 4".469 | -0.0147 |

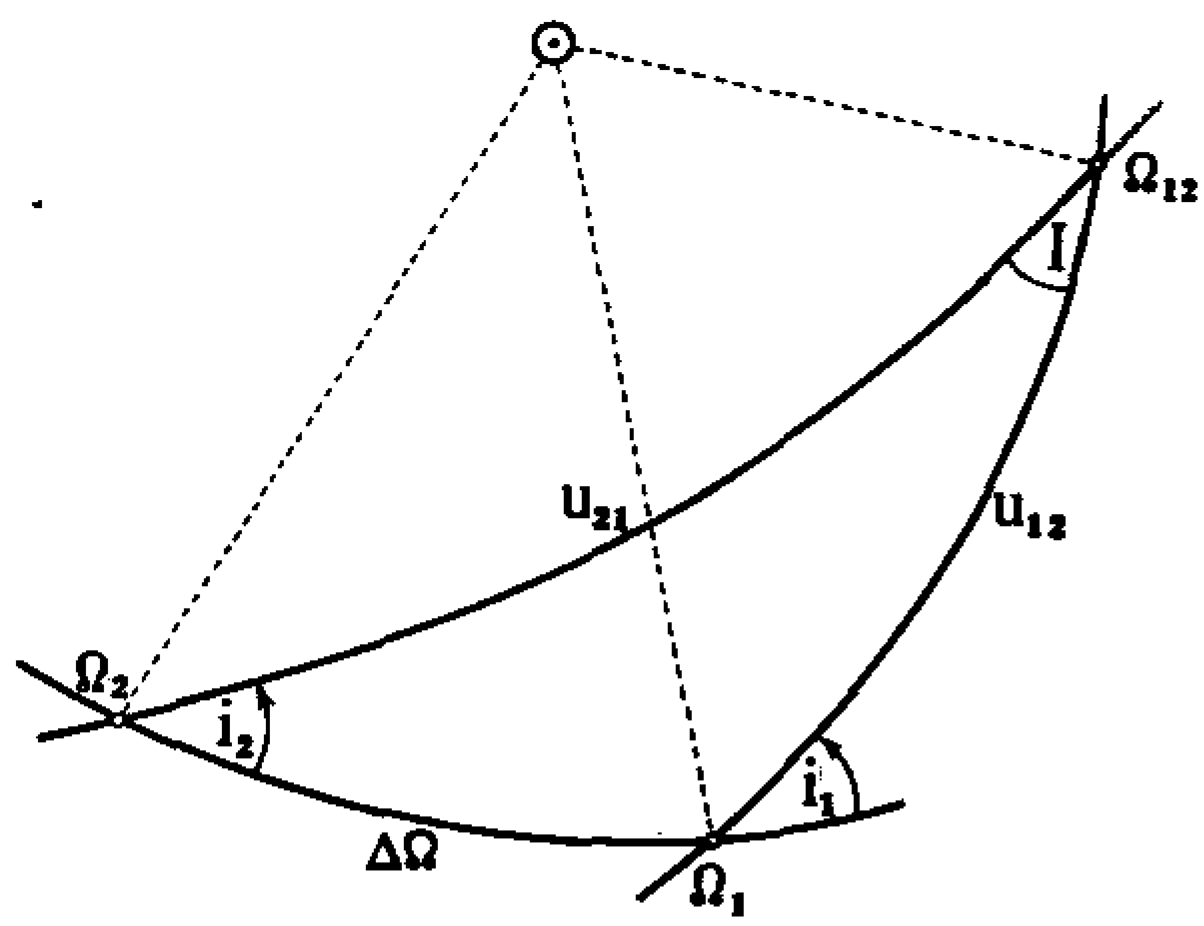
Ovi podaci pokazuju da se putanje „naših" planetoida najviše razlikuju u njihovoj ekscentričnosti, dakle elementu $\varphi$, ili <u>e</u>. Interesantno je za problem kojim ćemo se mi ovde pozabaviti i način kretanja dvaju planetoida da su im putanje dosta približno podjednake i orijentisane i, približno, istih dimenzija (v. sliku 1)

5. <u>Relativni položaji putanja i planetoida</u>. - Na slici 2, kojom su šematski predstavljeni, na nebeskoj sferi, položaji projekcija delova putanja uočenih planetoida, i jedne prema drugoj, i

ve tačke, uglovi i
odredjivanju relativ-
jima.




ložaja putanja. -
ekliptiku) uzlaznih
žvnog uzlaznog, odn.




rugog planetoida; I
vrednostima $i_1$, $i_2$
zmi čvor putanje pr-

vog prema drugom nalazi iznad ekliptičke ravni, a relativni silazni čvor ispod ekliptičke ravni. Uglovne daljine od uzlaznih čvorova uzlaznog relativnog čvora su $u_{12}$ i $u_{21}$, a silaznog $\underline{u}_{12} = u_{12} + 180^\circ$ i $\underline{u}_{21} = u_{21} + 180^\circ$.

Pomoću Neperovih analogija :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{u_{21}+u_{12}}{2} &= \sin\frac{i_1+i_2}{2}\operatorname{cosec}\frac{i_1-i_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta\Omega}{2}, \\ \operatorname{tg}\frac{u_{21}-u_{12}}{2} &= \cos\frac{i_1+i_2}{2}\sec\frac{i_1-i_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta\Omega}{2}, \\ \operatorname{tg}\frac{I}{2} &= \sin\frac{u_{21}-u_{12}}{2}\operatorname{cosec}\frac{u_{21}+u_{12}}{2}\operatorname{tg}\frac{i_1+i_2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

nalazimo za vrednosti koje karakterišu relativne položaje putanja naših dvaju planetoida :

$$\begin{aligned} I &= 0^\circ\, 13'\, 39.''79 = 0.^\circ 22\,772, \\ u_{12} &= 153.^\circ 183, \quad u_{21} = 153.^\circ 712 \quad \text{(relat. uzl. čvor).} \end{aligned} \qquad (30)$$

Vrednosti za relativni silazni čvor dobivaju se dodavanjem $180^\circ$ nadjenim vrednostima za relativni uzlazni čvor.

Ako se, sad, od ovih vrednosti oduzmu odgovarajuće, poznate, vrednosti argumenata latituda perihela ($\omega_1$, $\omega_2$), dobivaju se za prave anomalije relativnog uzlaznog čvora vrednosti :

$$v_{12} = 296.^\circ 047, \quad v_{21} = 283.^\circ 352\,. \qquad (31)$$

Dodavanjem $180^\circ$ nalazimo vrednosti pravih anomalija uočenog relativnog silaznog čvora.

Heliocentrične ekliptičke koordinate relativnih čvorova izračunavaju se iz elemenata putanja (I tablica) i vrednosti (30) pomoću obrazaca :

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u, \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega). \qquad (32)$$

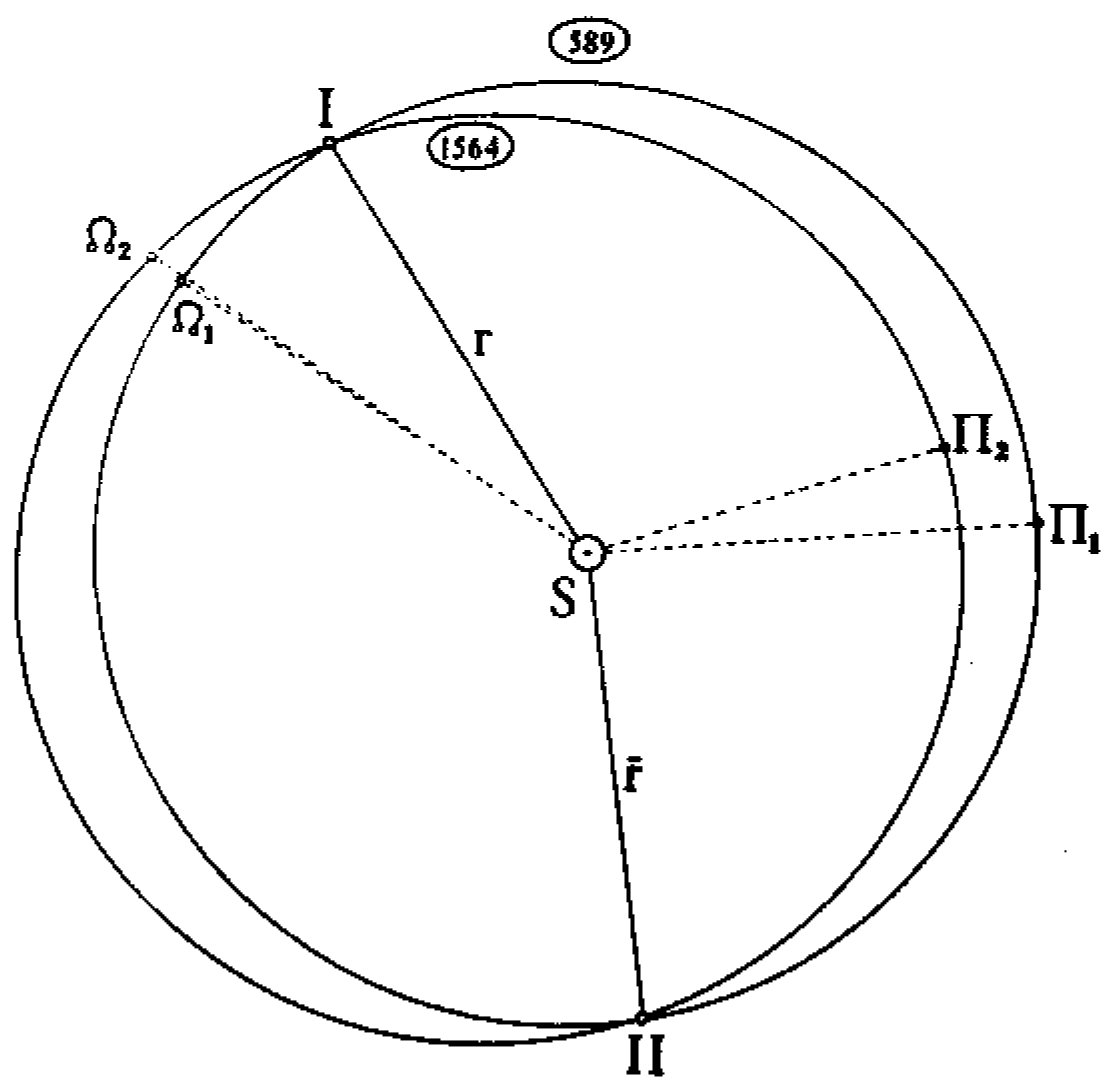
I dobivaju se za njihove vrednosti :

$$\begin{aligned} &.887, \quad b = +\,4.841 \quad \text{(relat. uzl. čvor),} \\ 332\quad \underline{l} &= 152.887, \quad \underline{b} = -\,4.841 \quad \text{(relat. sil. čvor).} \end{aligned} \qquad (33)$$

b) Odredjivanje polaznog položaja u proksimitetu. - Za odredjivanje najmanjeg rastojanja, ili položaja proksimiteta, dvaju putanja, trebalo bi poznavati položaje tačaka na svakoj od putanja ovog proksimiteta. Kako su naši planetoidi kvazikomplanarni, moći ćemo približne vrednosti pomenutih nepoznatih uglova lako sa grafika odrediti.

Zbog malih razlika u vrednostima longituda uzlaznih čvorova i nagiba putanja, a s obzirom da ni razlika u ekscentričnosti nije prevelika, možemo očekivati da će se položaji traženog proksimiteta nalaziti oko jednog od relativnih čvorova, što ćemo kasnije i pokazati.

Kako je i relativni nagib, I, malen, uzećemo kao da se putanje oba planetoida nalaze u istoj ravni. Ako sa poznatim putanjskim elementima konstruišemo dovoljno precizno i u dovoljno velikoj razmeri obe putanje, u istoj ravni, moći ćemo, sa tog crteža, neposredno pročitati i broj svih ukrštanja putanja i - što




Sl. 3

je naročito važno - dovoljno približne, polazne, vrednosti pravih anomalija tačaka ukrštanja; dakle položaja mogućih proksimiteta.

Za ove tačke ukrštanja možemo odrediti sa grafika i približne vrednosti potegâ.

Sa crteža u razmeri 85 mm za 1 astronomsku jedinicu dobili smo, za naše planetoide, dva preseka putanja, za koje su, sa crteža (sl. 3), pročitane približne vrednosti pravih anomalija i potega :

$$\begin{aligned} &\text{za prvu tačku: } v_{10}=118^\circ\!.6,\ v_{20}=105^\circ\!.4;\ r=271.5 \text{ mm, ili } 3.194 \text{ AJ;} \\ &\text{za drugu tačku: } \bar{v}_{10}=273^\circ\!.8,\ \bar{v}_{20}=260^\circ\!.6;\ \bar{r}=265.5 \text{ mm, ili } 3.124 \text{ AJ.} \end{aligned} \quad (34)$$

Uporedimo li vrednosti (34) sa vrednostima (31), tj. prave anomalije nadjenih tačaka preseka „putanja" sa onima za relativne čvorove, vidimo da je uzlaznom čvoru bliža druga tačka preseka, a silaznom relativnom čvoru bliža prva tačka. Za razlike pravih anomalija dobivaju se, u smeru

$$\begin{aligned} &\text{relat. uzl. čvor - druga tačka: } \Delta\bar{v}_1=22^\circ\!.2,\ \Delta\bar{v}_2=22^\circ\!.8; \\ &\text{prva tačka - relat. sil. čvor : } \Delta v_1= 2^\circ\!.6,\ \Delta v_2= 2^\circ\!.0\ . \end{aligned} \quad (35)$$

Po donjim razlikama (35), koje su znatno manje od gornjih, može se zaključiti da će proksimitet, u našem slučaju, biti oko prve tačke preseka (na grafiku) i u blizini relativnog silaznog čvora. Ovaj zaključak će, kasnije, biti i potvrdjen.

Na ovom mestu možemo konstatovati i istaći da je postupak, kojim su gornji položaji i približne vrednosti, koje ih odredjuju, nadjeni, neuporedivo brži i jednostavniji od dosadanjih i, u isti mah, i bar isto onoliko tačan koliko i postupak zasnovan na izvlačenju intersekata.

Prema napred rečenome, vrednosti za drugu tačku nemaju više značaja za sâm problem. No mi ćemo ih, ipak, zadržati, da bismo i na njima proverili ranije izvedene zaključke. Ako sa pravih anomalija (34), za prvu i drugu tačku, na obema putanjama, predjemo na ekscentrične, nalazimo

$$\begin{aligned} &\text{za prvu „tačku" : } E_{10} = 116^\circ\!.577,\quad E_{20} = 93^\circ\!.277; \\ &\text{za drugu „tačku" : } \bar{E}_{10} = 276.074,\quad \bar{E}_{20} = 272.866, \end{aligned} \quad (36)$$

gde je indeksom $o$ označeno da se radi o približnim polaznim vrednostima položaja proksimiteta putanja. Oznakom „tačka" hteli smo da istaknemo i upozorimo da su to, u stvari, dve tačke u prostoru.

Sa grafika smo mogli izvući još jedan interesantan podatak : naime, iznos za koliko treba otprilike očekivati da će položaji proksimiteta biti udaljeni od uzlaznih čvorova. U našem slučaju je, uglomerom, ocenjeno da je prva tačka, oko koje se može očekivati najmanje rastojanje, udaljena od uzlaznih čvorova planetoida :

$$589 \;\ldots\ldots\; 24\overset{\circ}{.}5, \qquad 1564 \;\ldots\ldots\; 24\overset{\circ}{.}0\;. \tag{37}$$

To su najmanje uglovne daljine, ovde računate od čvorova u retrogradnom smeru. Dakle, i ovi podaci idu u prilog prednosti postupka sa grafikom.

6. <u>Izračunavanje najmanjeg rastojanja putanja.</u> - Numerički rad je izvršen sa putanjskim elementima iz I tablice, pomoću jednačina (7), (9), (12), i, iz njih izvedenih potrebnih konstanata i podataka, naime :

<u>II tablica</u>

| Planetoid | 589 | 1564 | | 589 | 1564 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_x$ | 0.804 4313 | 0.654 2038 | a | 3.1345 | 3.1492 |
| $P_y$ | 0.583 2113 | 0.741 9450 | b | 3.132 014 | 3.077 891 |
| $P_z$ | -0.112 9375 | -0.146 7485 | $A_x$ | 2.521 4899 | 2.060 2186 |
| $Q_x$ | -0.594 0412 | -0.756 3071 | $A_y$ | 1.828 0758 | 2.336 5332 |
| $Q_y$ | 0.790 4896 | 0.642 8220 | $A_z$ | -0.354 0026 | -0.462 1404 |
| $Q_z$ | -0.149 1353 | -0.121 5710 | $B_x$ | -1.860 5454 | -2.327 8309 |
| e | 0.039 8179 | 0.211 5994 | $B_y$ | 2.475 8245 | 1.978 5361 |
| $\cos\varphi$ | 0.999 2069 | 0.977 3564 | $B_z$ | -0.467 0938 | -0.374 1823 |

Sa vrednostima iz gornje tablice, pomoću jednačina (22), dobivaju se za konstante sistema (23) :

$$
\begin{aligned}
C &= 9.629\ 7791, & H_2 &= 1.715\ 0911,\\
D &= -2.120\ 2266, & K_1 &= 0.458\ 6584,\\
F &= 2.167\ 5788, & K_2 &= -0.084\ 4230, \qquad (38)\\
G &= 9.404\ 3215, & Z_1 &= 0.015\ 5777,\\
H_1 &= -1.646\ 4410, & Z_2 &= 0.444\ 0474.
\end{aligned}
$$

U poglavlju 5. b) dobivena su dva para polaznih vrednosti za ekscentrične anomalije (36). Za svaki par račun je izveden posebno, pomoću obrazaca : (22), odn. vrednosti (38); (24), (23); $\underline{f}$ i $\underline{g}$ su leve strane uslovnih jednačina (23) za proksimitet. Njihovi iznosi nam služe kao merilo za približnost iskorišćenih vrednosti ekscentričnih anomalija. A zatim su korišćeni obrasci : (28), (27), (26) i izrazi za $E_{1k}$ i $E_{2k}$ ($k=1, 2, 3, \ldots$) sa str. 14. Napominjemo da se kod ekscentričnih anomalija obeleženih sa dva indeksa, prvi odnosi na planetoid, a drugi na redni broj aproksimacije iz koje je ta vrednost dobivena. Dobivene vrednosti u računu sa drugim parom ekscentričnih anomalija obeležavane su još i položenom crtom iznad slova.

Za prvi par, <u>I aproksimacija</u> (numerička) dala je :

$E_{10} = 116^\circ.577$, $\sin E_{10} = 0.894\ 3339$, $\cos E_{10} = -0.447\ 4001$;

$E_{20} = 93.277$, $\sin E_{20} = 0.998\ 3648$, $\cos E_{20} = -0.057\ 1633$;

$X_{10} = -0.654\ 7338$, $X_{20} = -4.313\ 6706$; $\underline{f_0 = 0.088\ 3461}$

$Y_{10} = -9.443\ 6161$, $Y_{20} = -8.806\ 3792$; $\underline{g_0 = -0.088\ 4932}$;

$\chi_{10} = -9.582\ 0129$, $\chi_{20} = -9.492\ 8333$;

$\psi_{10} = -2.311\ 3039$, $\psi_{20} = -2.701\ 6164$;

$f'_{E_{10}} = 9.815\ 1215$, $f'_{E_{20}} = -9.698\ 4661$;

$g'_{E_{10}} = -9.698\ 4662$, $g'_{E_{20}} = 9.906\ 7460$;

$g_0 f'_{E_{20}} - f_0 g'_{E_{20}} = -0.016\ 9740\ 73$, $f_0 g'_{E_{10}} - g_0 f'_{E_{10}} = 0.011\ 7498\ 45$,

$$f'_{E_{10}} g'_{E_{20}} - f'_{E_{20}} g'_{E_{10}} = 3.175\ 6700;$$

$\Delta E_{10}$ = - 0.005 3450 rad, dakle $\underline{\Delta E_{10} = -\ 0^{\circ}.3062}$,

$\Delta E_{20}$ = 0.003 7000 rad, dakle $\underline{\Delta E_{20} = \ 0^{\circ}.2120}$;

$E_{11} = 116^{\circ}.2708$,

$E_{21} = \ 93.4890$.

Na sličan način dala je $\underline{\text{II aproksimacija}}$ :

$f_1 = -\ 0.000\ 0405$, $g_1 = 0.000\ 0519$;

$\Delta E_{11}$= - 0.000 0339 rad, ili $\underline{\Delta E_{11} = -\ 0^{\circ}.0019}$,

$\Delta E_{21}$= - 0.000 0385 rad, ili $\underline{\Delta E_{21} = -\ 0^{\circ}.0022}$;

$$E_{12} = 116^{\circ}.2[illegible]89, \qquad (39)$$

$E_{22} = \ 93^{\circ}.4868$.

Pokazalo se da su ove vrednosti (39) dovoljne. Znači, sa dve aproksimacije dobivena su tražena rešenja (sa prvim parom polaznih vrednosti), jer je za ove vrednosti :

$f_2 = 0.000\ 0059$, $g_2 = -\ 0.000\ 0058$;

$\Delta E_{12}$ = - 0.000 0007 rad, ili $\underline{\Delta E_{12} = 0^{\circ}.0000}$,

$\Delta E_{22}$ = - 0.000 0001 rad, ili $\underline{\Delta E_{22} = 0^{\circ}.0000}$ .

Uzimajući da su $\underline{E_{12} = E_1}$ i $\underline{E_{22} = E_2}$ nalazimo (za prvi par položaja) :

$\sin E_1 = 0.896\ 7268$, $\cos E_1 = -0.442\ 5845$, $(\cos E_1 - e_1) = -0.482\ 4024$;

$\sin E_2 = 0.998\ 1488$, $\cos E_2 = -0.060\ 8186$, $(\cos E_2 - e_2) = -0.272\ 4180$.

Sa ovim vrednostima (i onima iz II tablice), pomoću jednačina (11), nadjene su, za heliocentrične ekliptičke pravougle koordinate planetoidâ :

$$x_1 = -\ 2.884\ 7737, \quad x_2 = -\ 2.894\ 7622,$$
$$y_1 = \ 1.338\ 2700, \quad y_2 = \ 1.338\ 3597,$$
$$z_1 = -\ 0.248\ 0838; \quad z_2 = -\ 0.247\ 5942;$$

a za njihove razlike :

$$x_2 - x_1 = 0.000\ 0115,$$
$$y_2 - y_1 = 0.000\ 0897,$$
$$z_2 - z_1 = 0.000\ 4896;$$

i za rastojanje putanja :

$$\underline{\rho = 0.\ 000\ 496\ \text{AJ}}\ . \qquad (40)$$

Što iznosi, približno,

$$74\ 500\ \text{km} \approx 0.2 \text{ srednjeg rastojanja Zemlja - Mesec} \approx \approx 6 \text{ Zemljinih ekvatorskih prečnika.} \qquad (40')$$

Za drugi par, <u>I aproksimacija</u> dala je :

$E_{10} = 276^\circ.074,$ $\quad \underline{\bar{f}_0 = 0.085\ 2784,\ \bar{g}_0 = -0.081\ 1609;}$

$E_{20} = 272.866;$

$\Delta E_{10} = -0.021\ 2465$ rad, ili $\underline{\Delta \bar{E}_{10} = -1^\circ.2173},$

$\Delta E_{20} = -0.012\ 6346$ rad, ili $\underline{\Delta E_{20} = -0^\circ.7239};$

$E_{11} = 274^\circ.8567,$

$E_{21} = 272.1421.$

<u>II aproksimacija</u> :

$\underline{\bar{f}_1 = -0.000\ 3201},\ \underline{\bar{g}_1 = 0.000\ 0613};$

$\Delta E_{11} = 0.000\ 8834$ rad, ili $\underline{\Delta E_{11} = 0^\circ.0509},$

$\Delta E_{21} = 0.000\ 8649$ rad, ili $\underline{\Delta E_{21} = 0^\circ.0496};$

$E_{12} = 274^\circ.9076,$

$E_{22} = 272.1917.$

<u>III aproksimacija</u> :

$\underline{\bar{f}_2 = -0.000\ 0092},\ \underline{\bar{g}_2 = 0.000\ 0091};$

$\Delta E_{12} = 0.000\ 00095$ rad, ili $\underline{\Delta E_{12} = 0^\circ.0001},$

$\Delta E_{22} = 0.000\ 00002$ rad, ili $\underline{\Delta E_{22} = 0^\circ.0000};$

$\bar{E}_{13} = 274^\circ\!.9077,$

$\bar{E}_{23} = 272.1917.$

Ove vrednosti su i usvojene, kao konačne, za drugi par. Sa njima su uslovne jednačine zadovoljene :

$\underline{\bar{F}_3 = 0.000\ 0086,}\quad \underline{\bar{G}_3 = -\ 0.000\ 0085.}$

Tako se, za drugi par, dobiva :

$\bar{E}_1 = 274^\circ\!.9077,\ \sin\bar{E}_1 = -0.996\ 3338,\ \cos\bar{E}_1 = 0.085\ 5508,\ (\cos\bar{E}_1 - e_1) = 0.045\ 7329;$

$\bar{E}_2 = 272.1917, \sin\bar{E}_2 = -0.999\ 2685, \cos\bar{E}_2 = 0.038\ 2430, (\cos\bar{E}_2 - e_2) = -0.1733564;$

$\bar{x}_1 = 1.969\ 0393,\quad \bar{x}_2 = 1.968\ 9760,\quad \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = -\ 0.000\ 0633,$

$\bar{y}_1 = -2.383\ 1444,\quad \bar{y}_2 = -2.382\ 1418,\quad \bar{y}_2 - \bar{y}_1 = \ 0.001\ 0026,$

$\bar{z}_1 = 0.449\ 1917;\quad \bar{z}_2 = 0.454\ 0236;\quad \bar{z}_2 - \bar{z}_1 = \ 0.004\ 8319;$

$$\underline{\bar{\rho} = 0.0049\ \text{AJ}}\ .$$

Vidimo da je ova vrednost oko deset puta veća od one za prvi par, te zato ovu odbacujemo. Tako nam, za najmanje rastojanje putanja planetoida 589 i 1564 , ostaje vrednost (40), za tačke na putanjama odredjene vrednostima ekscentričnih anomalija (39).

7. **Odredjivanje trenutka prolaza planetoidā kroz položaje proksimiteta.** – Pošto su ovako odredjeni, prvo, položaji na putanjama na kojima bi se naši planetoidi našli na najmanjem medjusobnom rastojanju; zatim, odredjeno i samo to približno rastojanje; i nadjeno – što je naročito interesantno i važno – da je ono (sa gledišta kosmičkih daljina) vrlo maleno, – prirodno se postavlja pitanje : mogu li se ti planetoidi, uopšte, naći na tom rastojanju, dakle stići zajedno u položaje proksimiteta; i kad će stići ?

Samo odredjivanje tog trenutka ne bi predstavljalo nikakvu teškoću. Kako srednja siderička dnevna Keplerovska kretanja naših planetoida nisu komensurabilna, može se očekivati da će se planetoidi moći zajedno naći, i mimoići, na izračunatom najmanjem rastojanju. Pitanje je samo da li je taj trenutak dovoljno blizak eposi (ili epohama) za koju (ili za koje) vrede polazni sistemi elemenata. Ako taj trenutak pripadao on već prošlosti, ili tek budućnosti - ne bi padao daleko od epoha elemenata, on bi još i mogao biti smatran kao stvarno rešenje, koje i nas interesuje i koje bi nam moglo poslužiti kao oslonac za dalja ispitivanja. Ali ako bi taj trenutak padao daleko od epohe za koju važe polazni sistemi elemenata, izračunavanje trenutka može se, i moralo bi se, izračunavati samo oslanjajući se na dejstvo poremećaja koje bi u nadjenom razmaku, tj. do trenutka prolaza kroz proksimitet, proizvele velike planete na putanje naših planetoida.

Vidimo, dakle, da se u svakom slučaju mora odrediti najbliži trenutak „susreta" planetoida na položajima proksimiteta - bio on u prošlosti ili u budućnosti. Za odredjivanje ovog trenutka može se iskoristiti postupak koji je dao profesor N. K a š a n i n /17/.

Kako su nam, naime, poznate vrednosti ekscentričnih anomalija proksimiteta, za vrednosti srednjih anomalija proksimiteta nalazimo :

$$M_1 = 114^\circ\!.223, \quad M_2 = 81^\circ\!.386 \; . \qquad (41)$$

Ako sad, kao polaznu, usvojimo kasniju od dveju epoha elemenata, to jest epohu planetoida 1564 i označimo je sa $T_o$, biće

$$T_o = 1936.\ \text{novembar}\ 12.0\ \text{UV, ili}\ 2\,428\,484.5\ \text{JD}\ . \qquad (42)$$

Svedemo li na ovu epohu i položaj na putanji planetoida 589, imaćemo za srednje anomalije, za epohu 1936. nov. 12.0 UV,

$$\begin{aligned} M_{10} &= 322^\circ\!.627, & \mu_1 &= 639''\!.369; \\ M_{20} &= 349.811, & \mu_2 &= 634.900. \end{aligned} \qquad (43)$$

Sa vrednostima iz (41), (42) i (43) dobivamo da su kroz položaje nadjenog proksimiteta naši planetoidi prošli prvi put posle $T_o$ :

589 : u trenutku $T_1$=1939.marta 15 u $14^h$UV, ili 2 429 338.1 JD;
1564 : u trenutku $T_2$=1938.aprila 15 u $6^h$UV, ili 2 429 003.8 JD. (44)

Dakle u razmaku od

$$t = T_1 - T_2 = 334.3 \text{ dana}; \tag{45}$$

i to : 589 iza 1564 .

Ako sad, po postupku izloženom u /17/, razvijemo prvo odnos srednjih sideričkih dnevnih kretanja planetoida $\mu_1/\mu_2$, u verižni razlomak; zaustavimo se pri tome na četvrtoj reduiti (8441/8382), kao njegovoj približnoj vrednosti, nalazimo, ako usmemo da razmak u prolazima planetoida kroz položaje proksimiteta ne sme biti veći od jednog dana, da 589 treba da izvrši 2980 punih obilazaka oko Sunca, računatih od $T_1$, a planetoid 1564 2950 punih obilazaka, računatih od epohe $T_2$. Bitno je za nas da bi do prolaza planetoida u usvojenom (dovoljno kratkom) razmaku trebalo s u v i š e d u g o čekati ! Zato pokušajmo da vidimo da li bi se prolaz planetoida kroz položaje proksimiteta, ma i u nešto malo većem razmaku, mogao dogoditi u bližoj budućnosti.

Ako podjemo od trajanja sideričkih revolucija naših planetoida :

$$P_1 = 2\,026.998 \text{ dana, ili } 5.54\,974 \text{ tropskih godina;}$$
$$P_2 = 2\,041.266 \text{ dana, ili } 5.58\,881 \text{ tropskih godina,} \tag{46}$$

za trajanje sinodičke revolucije, S, i iznos srednjeg dnevnog sinodičkog kretanja planetoidâ nalazimo :

$$S = 289\,997.76 \text{ dana, ili } 793.9876 \text{ tropskih godina i } \mu_s = 4''.469. \tag{47}$$

Znači, drugim rečima, srednja (zaokružena) vrednost vremenog razmaka izmedju dvaju uzastopnih istoimenih relativnih položaja naših planetoida iznosi 794 godine.

Označimo sa T epohu proksimiteta. Ako do zajedničkog nailaska u položaj proksimiteta planetoid 589 treba da obavi $k_1$ sideričkih revolucija, računatih od $T_1$, a planetoid 1564 $k_2$, računatih od epohe $T_2$, imaćemo :

$$\mathfrak{T} = T_1 + k_1P_1 = T_2 + k_2P_2. \tag{48}$$

Traženu epohu proksimiteta, $\mathfrak{T}$, nalazimo iz Diofant -ove jednačine

$$k_2P_2 - k_1P_1 = t, \tag{49}$$

u kojoj rešenja $k_1$ i $k_2$ treba da su celi brojevi, sa pozitivnim predznakom za budućnost, negativnim za prošlost.

Ako sad, za približnu vrednost odnosa $P_1/P_2$, razvijena u verižni razlomak, uzmemo reduitu trećeg ranga, dakle 145/146, dobivamo da je $k_1 = k_2 = 24$. Znači, naši planetoidi bi trebalo da načine po 24 puna obilaska oko Sunca, računatih od trenutka $T_1$ odn. $T_2$, pa da se približno nadju u konjunkciji oko izračunateg proksimiteta. Tako nalazimo da bi planetoidi kroz položaje proksimiteta prošli :

589 : julijanskog dana 2 477 986, ili godine 2072. maja 22;
1564 : julijanskog dana 2 477 988, ili godine 2072. maja 24; (50)

dakle, u razmaku od dva dana, i to 1564 iza, ili posle, 589 . Ovo bi trebalo, prema nadjenoj, samo približnoj, proceni očekivati k r o z 109 g o d i n a, računate od 1963. godine.

II DEO

## DINAMIČKI USLOVI I VAŽNIJE POSLEDICE KONJUNKCIJA PLANETOIDA OKO POLOŽAJA PROKSIMITETA

8. Promene rastojanja u proksimitetu u funkciji putanjskih elemenata. - Nadjene vrednosti i epohe i rastojanja, na način napred izložen, približne su samo. Epoha je približna jer su putanjski elementi planetoida sa kojima su izvodjeni računi, pa, dakle, i izračunati trenutak ukrštanja, bili samo približni. A veličina rastojanja u proksimitetu približna je jer, prvo, epoha mimoilaženja nije tačna; a, drugo, i podaci pomoću kojih je dobivena ta vrednost bili su samo približni. Znači, stvarna epoha ukrštanja je ili nešto ranija, ili nešto kasnija od nadjene; i stvarno rastojanje u proksimitetu je ili nešto veće ili nešto manje od nadjenog. Za naša dalja ispitivanja bilo bi od interesa ako bi stvarno rastojanje putanja u proksimitetu bilo m a n j e od dobivene vrednosti.

Za odredjivanje tačnih pomenutih vrednosti trebalo bi : ili raspolagati tačnim opštim teorijama kretanja obaju planetoida - kao što je poznata Leveaux -ova teorija kretanja planetoida 4 Vesta - ili poznavati, bar dovoljno približno, epohu ukrštanja putanja. U prvom slučaju se mogu izračunati, za sâm trenutak ($\mathfrak{T}$) proksimiteta, poremećeni putanjski elementi, uzastopnih redova, uočenih planetoida; zatim, iz tako popravljenih elemenata, odrediti tačni položaji planetoida za trenutak $\mathfrak{T}$; pa, konačno, izračunati i samo traženo tačno rastojanje. U drugom slučaju, moguće je, i treba - pomoću dovoljno pouzdanih putanjskih elemenata - propratiti kretanja oba planetoida, na dovoljno dugim lucima obeju putanja, do položaja proksimiteta, uzimajući pri tome u obzir što tačnija dejstva na njihova kretanja svih poremećajnih planeta. Na ovaj način bi se došlo do dovoljno tačnih: bilo samih putanjskih elemenata, bilo pravouglih heliocentričnih koordinata uočenih planetoida, za trenutak (T) proksimiteta, pa iz njih moglo odrediti traženo tačno rastojanje u proksimitetu.

Naši planetoidi, posmatrani izdvojeni i svaki za sebe, ničim ne privlače na sebe pažnju, te je sasvim razumljivo što ne postoje teorije njihovih kretanja. Drugo rešenje - ma da, samo po sebi, izlazi iz okvira ovoga rada - nije primenljivo, jer se epoha ukrštanja, ako je iole udaljenija od polazne epohe, ne može ni približno odrediti.

Za problem koji rešavamo bilo bi, medjutim, od presudnog značaja da se zna, dovoljno unapred : prvo, pod kojim bi uslovima mogla nadjena vrednost rastojanja u proksimitetu još da se smanji; i, drugo, kad bi, otprilike, taj povoljniji, bliži, proksimitet mogao naići. Možemo odmah reći da drugo pitanje ne predstavlja teškoću, kad se znaju srednja siderička dnevna kretanja planetoida. Odgovor na prvo pitanje nije, medjutim, ni jednostavan ni lak.

Mesto samog rešenja, mi ćemo pokušati da vidimo za koliko bi se smanjivalo i smanjilo se nadjeno rastojanje u proksimitetu, ako menjamo polazne putanjske elemente naših planetoida, sa kojima je rastojanje izračunato, za odredjene (verovatne) iznose.

Pri iznosu verovatnih promena polaznih elemenata oslonili smo se na promene koje su ti elementi pretrpeli otkako se prati kretanje ranije otkrivenog od naših dvaju planetoida, dakle planetoida 589 . U razmaku od okruglo 46 godina, koliko je proteklo od 1906, kada su izračunati prvi elementi ovog planetoida /18/, pa do 1951, kada su izračunati njegovi najnoviji elementi (koji se i danas, 1963, navode u Efemeridama malih planeta /19/), promene u pojedinim elementima su dostizale (u apsolutnim vrednostima) :

$$\Delta\Omega < 0\overset{\circ}{.}5, \quad \Delta i < 0\overset{\circ}{.}03, \quad \Delta\omega < 18^\circ, \quad \Delta\mu < 1\overset{''}{.}3 .$$

Ako primetimo da na rastojanja najneposrednije utiču promene položaja putanjske ravni, dakle $\Delta\Omega$ i $\Delta i$, a uzmemo u obzir da, prema gornjim podacima, najveće promene, u toku vremena, pokazuje argument latitude perihela, dakle $\omega$, - možemo se zadovoljiti iznalaženjem pomenutih promena u nadjenom rastojanju putanja u funkciji promena s a m o ovih triju elemenata. Zadržaćemo se samo na priraštajima elemenata prvog reda; znači, više stepene od prvog, kao i proizvode priraštaja zanemarićemo.

Za izvodjenje pomenutih izraza poslužićemo se jednačinama (16), (11), (12) i (7).

a) <u>Promena rastojanja u funkciji promena longituda uzlaznih čvorova.</u> - Promena rastojanja dveju putanja pri datim promenama longituda uzlaznih čvorova putanja odredjena je izrazom

$$\Delta\varrho_{\Omega_1, \Omega_2} = \frac{\partial\varrho}{\partial\Omega_1}\Delta\Omega_1 + \frac{\partial\varrho}{\partial\Omega_2}\Delta\Omega_2 . \tag{51}$$

Za parcijalne izvode na desnoj strani imamo :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varrho}{\partial\Omega_1} &= -\frac{1}{\varrho}/(x_2-x_1)\frac{\partial x_1}{\partial\Omega_1} + (y_2-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial\Omega_1}/, \\ \frac{\partial\varrho}{\partial\Omega_2} &= \frac{1}{\varrho}/(x_2-x_1)\frac{\partial x_2}{\partial\Omega_2} + (y_2-y_1)\frac{\partial y_2}{\partial\Omega_2}/, \end{aligned} \tag{52}$$

gde su :

$$\frac{\partial x_j}{\partial \Omega_j} = a_j(\cos E_j - e_j)\frac{\partial P_{xj}}{\partial \Omega_j} + b_j \sin E_j \frac{\partial Q_{xj}}{\partial \Omega_j},$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial \Omega_j} = a_j(\cos E_j - e_j)\frac{\partial P_{yj}}{\partial \Omega_j} + b_j \sin E_j \frac{\partial Q_{yj}}{\partial \Omega_j}, \quad (j=1,\ 2) \tag{53}$$

$$\frac{\partial z_j}{\partial \Omega_j} = 0.$$

Kako za parcijalne izvode vektorskih konstanata imamo, iz (7) :

$$\frac{\partial P_{xj}}{\partial \Omega_j} = -\cos\omega_j \sin\Omega_j - \sin\omega_j \cos\Omega_j \cos i_j = -P_{yj},$$

$$\frac{\partial P_{yj}}{\partial \Omega_j} = \cos\omega_j \cos\Omega_j - \sin\omega_j \sin\Omega_j \cos i_j = P_{xj},$$

$$\frac{\partial P_{zj}}{\partial \Omega_j} = 0;$$

$$(j=1,2) \tag{54}$$

$$\frac{\partial Q_{xj}}{\partial \Omega_j} = \sin\omega_j \sin\Omega_j - \cos\omega_j \cos\Omega_j \cos i_j = -Q_{yj},$$

$$\frac{\partial Q_{yj}}{\partial \Omega_j} = -\sin\omega_j \cos\Omega_j - \cos\omega_j \sin\Omega_j \cos i_j = Q_{xj},$$

$$\frac{\partial Q_{zj}}{\partial \Omega_j} = 0,$$

jednačine (53), zbog (54) i (12), postaju :

$$\frac{\partial x_j}{\partial \Omega_j} = -A_{yj}(\cos E_j - e_j) - B_{yj}\sin E_j,$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial \Omega_j} = A_{xj}(\cos E_j - e_j) + B_{xj}\sin E_j, \quad (j=1,2) \tag{55}$$

$$\frac{\partial z_j}{\partial \Omega_j} = 0 .$$

b) <u>Promene rastojanja u funkciji promena nagibâ.</u> - Promena rastojanja dveju putanja pri datim promenama nagibâ putanja odredjena je izrazom

$$\Delta\rho_{\,i_1,i_2} = \frac{\partial \rho}{\partial i_1}\Delta i_1 + \frac{\partial \rho}{\partial i_2}\Delta i_2 . \tag{56}$$

Za parcijalne izvode na desnoj strani imamo :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial i_1} &= -\frac{1}{\rho}\,/(x_2-x_1)\frac{\partial x_1}{\partial i_1} + (y_2-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial i_1} + (z_2-z_1)\frac{\partial z_1}{\partial i_1}/, \\ \frac{\partial \rho}{\partial i_2} &= \quad \frac{1}{\rho}\,/(x_2-x_1)\frac{\partial x_2}{\partial i_2} + (y_2-y_1)\frac{\partial y_2}{\partial i_2} + (z_2-z_1)\frac{\partial z_2}{\partial i_2}/, \end{aligned} \qquad (57)$$

gde su :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial i_j} &= a_j(\cos E_j - e_j)\frac{\partial P_{xj}}{\partial i_j} + b_j \sin E_j \frac{\partial Q_{xj}}{\partial i_j}, \\ \frac{\partial y_j}{\partial i_j} &= a_j(\cos E_j - e_j)\frac{\partial P_{yj}}{\partial i_j} + b_j \sin E_j \frac{\partial Q_{yj}}{\partial i_j}, \quad (j=1,2) \\ \frac{\partial z_j}{\partial i_j} &= a_j(\cos E_j - e_j)\frac{\partial P_{zj}}{\partial i_j} + b_j \sin E_j \frac{\partial Q_{zj}}{\partial i_j}. \end{aligned} \qquad (58)$$

Kako za parcijalne izvode vektorskih konstanata imamo, iz (7) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{xj}}{\partial i_j} &= \quad \sin\omega_j \sin\Omega_j \sin i_j = P_{zj}\sin\Omega_j, \\ \frac{\partial P_{yj}}{\partial i_j} &= -\sin\omega_j \cos\Omega_j \sin i_j = -P_{zj}\cos\Omega_j, \\ \frac{\partial P_{zj}}{\partial i_j} &= \quad \sin\omega_j \cos i_j; \qquad\qquad (j=1,2) \\ \frac{\partial Q_{xj}}{\partial i_j} &= \quad \cos\omega_j \sin\Omega_j \sin i_j = \quad Q_{zj}\sin\Omega_j, \\ \frac{\partial Q_{yj}}{\partial i_j} &= -\cos\omega_j \cos\Omega_j \sin i_j = -Q_{zj}\cos\Omega_j, \\ \frac{\partial Q_{zj}}{\partial i_j} &= \quad \cos\omega_j \cos i_j, \end{aligned} \qquad (59)$$

jednačine (58), zbog (59) i (12), postaju :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial i_j} &= \quad A_{zj}(\cos E_j - e_j)\sin\Omega_j + B_{zj}\sin\Omega_j \sin E_j, \\ \frac{\partial y_j}{\partial i_j} &= -A_{zj}(\cos E_j - e_j)\cos\Omega_j - B_{zj}\cos\Omega_j \sin E_j, \quad (j=1,2) \\ \frac{\partial z_j}{\partial i_j} &= a_j \sin\omega_j \cos i_j(\cos E_j - e_j) + b_j \cos\omega_j \cos i_j \sin E_j. \end{aligned} \qquad (60)$$

c) Promena rastojanja u funkciji promena argumenata latituda perihela. - Promena rastojanja dveju putanja pri datim promenama argumenata latituda perihela putanja odredjena je izrazom

$$\Delta\rho_{\omega_1,\omega_2} = \frac{\partial\rho}{\partial\omega_1}\Delta\omega_1 + \frac{\partial\rho}{\partial\omega_2}\Delta\omega_2. \qquad (61)$$

Za parcijalne izvode na desnoj strani imamo :

$$\frac{\partial\rho}{\partial\omega_1} = -\frac{1}{\rho}/(x_2-x_1)\frac{\partial x_1}{\partial\omega_1} + (y_2-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial\omega_1} + (z_2-z_1)\frac{\partial z_1}{\partial\omega_1},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\omega_2} = \frac{1}{\rho}/(x_2-x_1)\frac{\partial x_2}{\partial\omega_2} + (y_2-y_1)\frac{\partial y_2}{\partial\omega_2} + (z_2-z_1)\frac{\partial z_2}{\partial\omega_2}/, \qquad (62)$$

gde su :

$$\frac{\partial x_j}{\partial\omega_j} = a_j(\cos E_j - e_j)\frac{\partial P_{xj}}{\partial\omega_j} + b_j\sin E_j\frac{\partial Q_{xj}}{\partial\omega_j},$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial\omega_j} = a_j(\cos E_j - e_j)\frac{\partial P_{yj}}{\partial\omega_j} + b_j\sin E_j\frac{\partial Q_{yj}}{\partial\omega_j}, \quad (j=1,2) \qquad (63)$$

$$\frac{\partial z_j}{\partial\omega_j} = a_j(\cos E_j - e_j)\frac{\partial P_{zj}}{\partial\omega_j} + b_j\sin E_j\frac{\partial Q_{zj}}{\partial\omega_j}.$$

Kako za parcijalne izvode vektorskih konstanata imamo, iz (7) :

$$\frac{\partial P_{xj}}{\partial\omega_j} = -\sin\omega_j\cos\Omega_j - \cos\omega_j\sin\Omega_j\cos i_j = Q_{xj},$$

$$\frac{\partial P_{yj}}{\partial\omega_j} = -\sin\omega_j\sin\Omega_j + \cos\omega_j\cos\Omega_j\cos i_j = Q_{yj},$$

$$\frac{\partial P_{zj}}{\partial\omega_j} = \cos\omega_j\sin i_j = Q_{zj}; \quad (j=1,2) \qquad (64)$$

$$\frac{\partial Q_{xj}}{\partial\omega_j} = -\cos\omega_j\cos\Omega_j + \sin\omega_j\sin\Omega_j\cos i_j = -P_{xj},$$

$$\frac{\partial Q_{yj}}{\partial\omega_j} = -\cos\omega_j\sin\Omega_j - \sin\omega_j\cos\Omega_j\cos i_j = -P_{yj},$$

$$\frac{\partial Q_{zj}}{\partial\omega_j} = -\sin\omega_j\sin i_j = -P_{zj},$$

jednačine (63), zbog (64) i (12), postaju :

$$\frac{\partial x_j}{\partial \omega_j} = L_{xj}(\cos E_j - e_j) - N_{xj}\sin E_j,$$
$$\frac{\partial y_j}{\partial \omega_j} = L_{yj}(\cos E_j - e_j) - N_{yj}\sin E_j, \qquad (j=1,2) \tag{65}$$
$$\frac{\partial z_j}{\partial \omega_j} = L_{zj}(\cos E_j - e_j) - N_{zj}\sin E_j,$$

gde su :

$$L_{xj}=a_jQ_{xj},\ L_{yj}=a_jQ_{yj},\ L_{zj}=a_jQ_{zj};\ N_{xj}=b_jP_{xj},\ N_{yj}=b_jP_{yj},\ N_{zj}=b_jP_{zj};$$
$$L^2_{xj}+L^2_{yj}+L^2_{zj}=a^2_j,\ N^2_{xj}+N^2_{yj}+N^2_{zj}=b^2_j,\ L_{xj}N_{xj}+L_{yj}N_{yj}+L_{zj}N_{zj}=0,\ (j=1,2). \tag{66}$$

Tako, dakle, iz jednačina (51), (56) i (61) možemo odrediti promene rastojanja u funkcijama datih promena jednog, više, ili svih elemenata : $\Delta\Omega_j$, $\Delta i_j$, $\Delta\omega_j$ $(j=1,2)$, gde svaka od ovih promena može biti $>0$, ili $<0$.

9. Izračunavanje bližih proksimiteta usled povoljnih varijacija promena elemenata. - Sa putanjskim elementima, koji su dati u I tablici (poglavlje 4), izvedeno je za rastojanje u proksimitetu $\rho = 498\times10^{-6}$ AJ. No ono se menja sa vremenom, jer sami putanjski elementi planetoida podleže neprekidnim promenama. Za problem pred kojim se nalazimo bilo bi, medjutim - kao što je napred već rečeno - od osobitog značaja kad bi se moglo znati : treba li u d o g l e d n o m v r e m e n u očekivati da se nadjeni proksimitet osetnije s m a n j i, usled pogodnih varijacija promena putanjskih elemenata. Ovo možemo ispitati pomoću izraza za promene iz prethodne tačke.

Prva ispitivanja smo izvršili uzimajući za promene elemenata :

$$\Delta\Omega_j = \pm 0^\circ\!.1, \qquad \Delta i_j = \pm 0^\circ\!.1, \qquad \Delta\omega_j = \pm 1^\circ,$$
$$= \pm 0.001\,7453, \qquad = \pm 0.001\,7453, \qquad = \pm 0.017\,4533, \qquad (j=1,2). \tag{67}$$

Uzete su vrednosti koje se mogu očekivati nakon, recimo, narednih nekoliko decenija.

Za obe putanje dobivene su za konstante L i N, pomoću obrazaca (66) i vrednosti iz II tablice, vrednosti :

$$
\begin{aligned}
L_{x1} &= -1.862\,0221, & L_{y1} &= 2.477\,7897, & L_{z1} &= -0.467\,4646;\\
L_{x2} &= -2.381\,7623, & L_{y2} &= 2.024\,3750, & L_{z2} &= -0.382\,8514;\\
N_{x1} &= 2.519\,4901, & N_{y1} &= 1.826\,6260, & N_{z1} &= -0.353\,7218;\\
N_{x2} &= 2.013\,5681, & N_{y2} &= 2.283\,6259, & N_{z2} &= -0.451\,6759.
\end{aligned}
\tag{68}
$$

Za dobiveni proksimitet imali smo :

$$\sin E_1 = 0.896\,7268, \quad \cos E_1 - e_1 = -0.482\,4024;$$
$$\sin E_2 = 0.998\,1488, \quad \cos E_2 - e_2 = -0.272\,4180.$$

Sa ovim vrednostima, onima iz II tablice i iz (68), a pomoću jednačina (55), (60) i (65), nalazimo za vrednosti parcijalnih izvoda heliocentričnih ekliptičkih praveuglih koordinata planetoidâ u nadjenom proksimitetu :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial \Omega_1} &= -1.338\,2700, & \frac{\partial y_1}{\partial \Omega_1} &= -2.884\,7737, & \frac{\partial z_1}{\partial \Omega_1} &= 0;\\
\frac{\partial x_1}{\partial i_1} &= -0.003\,0482, & \frac{\partial y_1}{\partial i_1} &= -0.248\,0651, & \frac{\partial z_1}{\partial i_1} &= -1.302\,7241;\\
\frac{\partial x_1}{\partial \omega_1} &= -1.361\,0504, & \frac{\partial y_1}{\partial \omega_1} &= -2.833\,2762, & \frac{\partial z_1}{\partial \omega_1} &= 0.542\,6978;\\
\frac{\partial x_2}{\partial \Omega_2} &= -1.338\,3597, & \frac{\partial y_2}{\partial \Omega_2} &= -2.884\,7622, & \frac{\partial z_2}{\partial \Omega_2} &= 0;\\
\frac{\partial x_2}{\partial i_2} &= -0.005\,3714, & \frac{\partial y_2}{\partial i_2} &= -0.247\,5359, & \frac{\partial z_2}{\partial i_2} &= -1.275\,4616;\\
\frac{\partial x_2}{\partial \omega_2} &= -1.361\,0057, & \frac{\partial y_2}{\partial \omega_2} &= -2.830\,8747, & \frac{\partial z_2}{\partial \omega_2} &= 0.555\,1354.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Napominjemo da su sa polaznim sistemima bile dobivene vrednosti :

$$x_2 - x_1 = 0.000\,0115, \; y_2 - y_1 = 0.000\,0897, \; z_2 - z_1 = 0.000\,4896;$$
$$\rho = 0.000\,498. \qquad (7$$

Iz (69) i (70), a na osnovi obrazaca (52), (57) i (62) nalazimo za vrednosti parcijalnih izvoda, koji u toku daljih računa ostaju konstantni,

$$\frac{\partial\rho}{\partial\Omega_1} = 0.550\ 5020,\ \frac{\partial\rho}{\partial i_1} = 1.325\ 5020,\ \frac{\partial\rho}{\partial\omega_1} = 0.008\ 2129;$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial\Omega_2} = -0.550\ 5020,\ \frac{\partial\rho}{\partial i_2} = -1.298\ 6586,\ \frac{\partial\rho}{\partial\omega_2} = 0.004\ 4378. \qquad (71)$$

Množenjem vrednosti (71) odgovarajućim promenama (67) izračunali smo, pomoću obrazaca (51), (56) i (61), promene proksimiteta za sve moguće varijacije promena elemenata, i tako našli varijacije, tj. spregove priraštaja putanjskih elemenata, za koje se dobivaju proksimiteti m a n j i od prvobitno izračunatog.

Ovde navodimo, orijentacije radi, promene proksimiteta, koje se dobivaju iz (67), (71), (51), (56) i (61), za svaku pojedinu od izabranih promena elemenata (indeks iza zagrade označava na koju se putanju odnosi odgovarajuća promena elementa) :

$$(\Delta\rho_{\Omega})_1 = \pm 0.000\ 9608,\ (\Delta\rho_i)_1 = \pm 0.002\ 3134,\ (\Delta\rho_{\omega})_1 = \pm 0.000\ 1433;$$
$$(\Delta\rho_{\Omega})_2 = \mp 0.000\ 9608,\ (\Delta\rho_i)_2 = \mp 0.002\ 2665,\ (\Delta\rho_{\omega})_2 = \pm 0.000\ 0775. \qquad (72)$$

Iz skupa svih ovako izračunatih mogućnih proksimiteta, manjih od prvobitno izračunatog (70), našli smo, za navedene varijacije promena elemenata u priloženoj III tablici, ove negativne povoljnije promene u daljinama putanja, pa, prema tome, i daljine u proksimitetu m a n j e od nadjene, poredjane po veličinama :

III tablica

| $\Delta\Omega$ (1) | $\Delta\Omega$ (2) | $\Delta i$ (1) | $\Delta i$ (2) | $\Delta\omega$ (1) | $\Delta\omega$ (2) | $-\Delta\rho$ u jed. $10^{-7}$ | AJ u jed. $10^{-6}$ | $\rho$ km | Zemljina ekvatorska poluprečnika |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +0°.1 | −0°.1 | −0°.1 | − | − | − | 3918 | 106 | 15 847 | 2.48 |
| +0.1 | −0.1 | − | +0°.1 | −1° | +1° | 4107 | 87 | 13 006 | 2.04 |
| +0.1 | −0.1 | − | +0.1 | − | −1 | 4224 | 76 | 11 362 | 1.78 |
| +0.1 | −0.1 | −0.1 | − | −1 | +1 | 4576 | 40 | 5 980 | 0.94 |
| +0.1 | −0.1 | −0.1 | − | − | −1 | 4693 | 29 | 4 336 | 0.68 |
| +0.1 | −0.1 | − | +0.1 | −1 | − | 4882 | 10 | 1 495 | 0.23 |

Izvršili smo ova ispitivanja još i za promene elemenata :

$$\Delta\Omega_j = \pm 0\overset{\circ}{.}5, \qquad \Delta i_j = \pm 0\overset{\circ}{.}1, \qquad \Delta\omega_j = \pm 5^\circ, \tag{73}$$
$$= \pm 0.008\ 72665, \qquad = \pm 0.001\ 7453, \qquad = \pm 0.087\ 2665,$$
$$(j=1,2).$$

Orijentacije radi navodimo, za ova ispitivanja, promene nadjenog proksimiteta, koje se dobivaju iz (73), (71), (51), (56) i (61), za svaku pojedinu od izabranih promena elemenata (crtom iznad slova označavamo da su to promene koje se odnose na druga ispitivanja, tj. sa (73)):

$$(\overline{\Delta\rho_\Omega})_1 = \pm 0.004\ 8040, \ (\overline{\Delta\rho_i})_1 = \pm 0.002\ 3134, \ (\overline{\Delta\rho_\omega})_1 = \pm 0.000\ 7167; \tag{74}$$
$$(\overline{\Delta\rho_\Omega})_2 = \mp 0.004\ 8040, \ (\overline{\Delta\rho_i})_2 = \mp 0.002\ 2665, \ (\overline{\Delta\rho_\omega})_2 = \pm 0.000\ 3873.$$

Iz skupa svih ovako izračunatih mogućnih proksimiteta, manjih od prvobitno izračunatog (70), našli smo, za navedene varijacije promene elemenata, u drugim ispitivanjima, u priloženoj IV tablici, ove negativne povoljnije promene u daljinama putanja, pa, prema tome, i daljine u proksimitetu m a n j e od nadjene, poredjane po veličinama :

IV tablica

| $\Delta\Omega$ (1) | $\Delta\Omega$ (2) | $\Delta i$ (1) | $\Delta i$ (2) | $\Delta\omega$ (1) | $\Delta\omega$ (2) | $-\Delta\rho$ u jed. $10^{-7}$ | AJ u jed. $10^{-6}$ | $\rho$ km | Zemljina ekv. poluprečnika |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | - | $-0\overset{\circ}{.}1$ | $-0\overset{\circ}{.}1$ | $-5^\circ$ | $+5^\circ$ | 3763 | 122 | 18 239 | 2.86 |
| $\pm 0\overset{\circ}{.}5$ | $\pm 0\overset{\circ}{.}5$ | -0.1 | -0.1 | -5 | +5 | 3763 | 122 | 18 239 | 2.86 |
| - | - | - | - | - | -5 | 3873 | 111 | 16 594 | 2.60 |
| ±0.5 | ±0.5 | - | - | - | -5 | 3873 | 111 | 16 594 | 2.60 |
| ±0.5 | ±0.5 | -0.1 | -0.1 | - | -5 | 4342 | 64 | 9 568 | 1.50 |
| +0.5 | - | -0.1 | +0.1 | -5 | - | 4926 | 5 | 748 | 0.12 |
| - | -0.5 | -0.1 | +0.1 | -5 | - | 4926 | 5 | 748 | 0.12 |

Podvlačimo, medjutim, da je malo verovatno, čak vrlo malo, da upravo neku od varijacija, iz poslednjih dveju tablica, pretrpe elementi naših planetoida, i to još u vreme oko epohe kad se planetoidi budu približavali položaju proksimiteta. Ali - nisu ni nemoguće te varijacije, u toku razmaka do narednog proksimiteta. Za nas je dovoljno i ovoliko da znamo, da bismo mogli pristupiti ispitivanjima : može li i kakve promene proizvesti u putanjskim elementima manjeg planetoida dejstvo onog većeg za vreme njihovog prolaza kroz položaj proksimiteta ?

10. <u>Pregled obrazaca za izračunavanje poremećaja.</u> - Nepokretni koordinatni sistem je heliocentrični ekliptički pravougli, a pokretni je trenutni heliocentrični pravougli određen trenutnom oskulacionom putanjom poremećenog planetoida, tako da se trenutna $\xi\eta$ ravan pokretnog sistema poklapa sa oskulacionom ravni putanje u tom trenutku, dok je trenutna $\zeta$ osa normalna na trenutnoj oskulacionoj ravni. Prema tome je $\xi$ osa usmerena u pravcu heliocentričnog položaja poremećenog planetoida, $\eta$ osa je normalna na prvoj računajući u direktnom smeru ($v=90^\circ$).

Treba da ispitamo dejstvo poremećaja na putanjske elemente planetoida 1564 (označavana indeksom 2), koje bi moglo proizvesti prisustvo planetoida 589 (označavana indeksom 1).

Napominjemo da se heliocentrično ekliptičke pravougle koordinate ($x_1$, $y_1$, $z_1$) poremećajnog planetoida izračunavaju iz (7), (9), (12) i (11), gde samo treba uvesti indeks 1; a položaj poremećenog planetoida na trenutnoj putanji odredjujemo iz :

$$M = E - e \sin E, \quad a^3 = (k'' : \mu'')^2, \quad k = \text{Gauss-ova konstanta},$$
$$p = a\cos^2\varphi, \quad r\sin v = a\cos\varphi\sin E, \quad r\cos v = a(\cos E - \sin\varphi), \quad (75)$$
$$u = \omega + v, \quad \omega = \pi - \Omega, \quad r = a(1 - \sin\varphi\cos E).$$

„Kosinusi pravaca" koji odredjuju položaj trenutnog koordinatnog sistema, u odnosu na nepokretni - ekliptički koordinatni sistem dati su izrazima :

$$a_1 = \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i, \quad b_1 = -\cos\Omega\sin u - \sin\Omega\cos u\cos i,$$
$$a_2 = \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i, \quad b_2 = -\sin\Omega\sin u + \cos\Omega\cos u\cos i, \quad (76)$$
$$a_3 = \sin u\sin i\,; \qquad b_3 = \cos u\sin i\,;$$
$$c_1 = \sin\Omega\sin i, \quad c_2 = -\cos\Omega\sin i, \quad c_3 = \cos i.$$

Ako koordinate poremećajnog planetoida transformišemo i iz nepokretnog koordinatnog sistema predjemo u pokretni, za koordinate poremećajnog planetoida u pokretnom koordinatnom sistemu imaćemo, /20/,

$$\xi_1 = a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1, \quad \eta_1 = b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1, \quad \zeta_1 = c_1x_1 + c_2y_1 + c_3z_1. \tag{77}$$

Ako sa w označimo, u srednjim danima, vremeni interval u kojem ćemo računati izvode elemenata, za pomoćne veličine, u sistemu diferencijalnih jednačina u kojima figurišu komponente poremećajne sile, duž osa pokretnog koordinatnog sistema, imamo izraze:

$$\{\Omega : W\} = \frac{r}{p}\sin u \operatorname{cosec} i; \qquad \{\tilde{\pi} : S\} = -\operatorname{cosec}\varphi \cos v,$$

$$\{i : W\} = \frac{r}{p}\cos u; \qquad \{\tilde{\pi} : T\} = (1 + \frac{r}{p})\sin v \operatorname{cosec}\varphi,$$

$$\{\varphi : S\} = \sec\varphi \sin v, \qquad \{\tilde{\pi} : W\} = \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}; \tag{78}$$

$$\{\varphi : T\} = \sec\varphi(\cos v + \cos E); \qquad \{M_o : S\} = \cos\varphi(\cos v \operatorname{cosec}\varphi - 2\frac{r}{p})$$

$$\{\mu : S\} = -\frac{3\,k\,w}{p\sqrt{a}}\sin\varphi \sin v, \qquad \{M_o : T\} = -(1 + \frac{r}{p})\operatorname{ctg}\varphi \sin v.$$

$$\{\mu : T\} = -\frac{3\,k\,w}{r\sqrt{a}};$$

Kod izračunavanja poremećaja prvog reda, dok su poremećaji mali, u gornjim izrazima (78) menja se samo v, odn. u i E.

Rastojanje poremećajnog i poremećenog planetoida, $\rho$, odredjeno je jednačinom

$$\rho^2 = (\xi_1 - r)^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \tag{79}$$

koje proveravamo pomoću

$$\rho^2 = r_1^2 + r^2 - 2\xi_1 r, \tag{80}$$

pri čemu je $r_1$ odredjeno jednačinom

$$r_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \tag{81}$$

jer u pokretnom koordinatnom sistemu su : $\vec{r}_1 = \{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}$.

$\vec{r}_2 = \vec{r} = \{r, 0, 0\}$, $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}$.

Komponente poremećajne sile, S, T i W, duž osa pokretnog koordinatnog sistema, tj. u pravcima heliocentričnog radius-vektora poremećenog planetoida, normalno na ovom pravcu u putanjskoj ravni i normalno na ravni oskulacione putanje poremećenog planetoida, homogene su funkcije mase poremećajnog planetoida, $m_1$, što će, u našem slučaju, biti olakšavajuća okolnost, kao što ćemo kasnije videti. Uvedimo smene :

$$K = \rho^{-3} - r_1^{-3},$$
$$N = k'' w m_1 \sqrt{p}, \tag{82}$$

gde je Gauss -ova konstanta uzeta u lučnim sekundama, jer ćemo i poremećaje izražavati u toj meri. Ona se inače može ovde uzeti i u stepenima, kada bi poremećaji bili izražavani u stepenima; medjutim, u jednačinama (78) $\underline{k}$ treba uzeti neimenovano. Poremećajna sila je odredjena komponentama :

$$S = N(K\xi_1 - r\rho^{-3}), \quad T = NK\eta_1, \quad W = NK\zeta_1. \tag{83}$$

Za diferencijalne jednačine oskulacionih elemenata, kojima ćemo se koristiti sa uvedenim oznakama imamo, /11/ :

$$w\frac{d\Omega}{dt} = \{\Omega : W\}\, W, \qquad w\frac{d\pi}{dt} = \{\pi : S\}\, S + \{\pi : T\}\, T + \{\pi : W\}\, W,$$
$$w\frac{di}{dt} = \{i : W\}\, W, \qquad w^2\frac{d\mu}{dt} = \{\mu : S\}\, S + \{\mu : T\}\, T,$$
$$w\frac{d\varphi}{dt} = \{\varphi : S\}\, S + \{\varphi : T\}\, T, \quad w\frac{dM_o}{dt} = \{M_o : S\}\, S + \{M_o : T\}\, T; \tag{84}$$
$$M = M_o + \mu_o(t - t_o) + \delta M, \quad \delta M = \int_{t_o}^{t} \frac{dM_o}{dt}\, dt + \iint_{t_o}^{t} \frac{d\mu}{dt}\, dt^2 .$$

Ove jednačine smo rešavali mehaničkim kvadraturama, primenjujući Gauss - Encke -ovu šemu tabličnih razlika i njihove obrasce za izračunavanje jednostrukog i dvostrukog odredjenog integrala numeričkim integraljenjem, preko t.zv. centralnih tabličnih razlika, /21/ :

$$\frac{1}{w}\int_{a}^{a+iw} f(t)\,dt = {}^{I}f(a+iw) - \frac{1}{12} f^{I}(a+iw) + \frac{11}{720} f^{III}(a+iw) -$$

$$- \frac{191}{60480} f^{V}(a+iw) + \frac{2497}{3628800} f^{VII}(a+iw) - \dots + \dots, \tag{85}$$

$${}^{I}f(a-\frac{w}{2}) = -\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{12} f^{I}(a) - \frac{11}{720} f^{III}(a) + \frac{191}{60480} f^{V}(a) -$$

$$- \frac{2497}{3628800} f^{VII}(a) + \dots ;$$

$$\frac{1}{w^2}\iint_{a}^{a+iw} f(t)\,dt^2 = {}^{II}f(a+iw) + \frac{1}{12} f(a+iw) - \frac{1}{240} f^{II}(a+iw) +$$

$$+ \frac{31}{60480} f^{IV}(a+iw) \pm \dots , \tag{86}$$

$${}^{II}f(a) = -\frac{1}{12} f(a) + \frac{1}{240} f^{II}(a) - \frac{31}{60480} f^{IV}(a) + \dots .$$

11. Izračunavanje veličina koje se javljaju u obrascima za odredjivanje poremećaja. - U ispitivanjima kretanja poremećenog pod dejstvom poremećajnog planetoida ograničićemo se ovde samo na razmak koji obuhvata i proksimitet ovih planetoida, to jest trenutak u koji bi ova dva planetoida dospela na najmanju medjusobnu daljinu. Zato je i za srednji trenutak vremenog intervala, na koji će biti primenjeni prethodni obrasci, izabran trenutak proksimiteta. Taj trenutak smo označili kao 0 i od njega uzeli intervale od po 26 dana ranije (-) i kasnije (+). Same integrale, to jest poremećaje u elementima 1564 , računali smo za razmake : od 20 dana pre do 20 dana posle prolaza planetoida kroz položaj proksimiteta. Za vremeni razmak u šemi za integraljenje uzeto je w = 2 srednja dana.

Tablične preglede nekih izračunatih veličina, koje se javljaju u obrascima za odredjivanje poremećaja, dali smo na kraju ovoga rada, no na njihovoj analizi zadržaćemo se u narednom poglavlju. Računi su uglavnom izvodjeni sa sedam decimala, a, gde je to bilo potrebno, i sa više od sedam, dok su rezultati davani samo na šest. Kod veličina $\rho^{-3}$, kao i onih zavisnih i od mase poremećajnog planetoida (za koju je, radi pojednostavljenja računskih radnji, prvo uzeta vrednost jedinične mase) decimale nisu uzimane u obzir.

Ma da nam sâm nulti trenutak nije (i ne može biti) tačno poznat - razlog smo ranije naveli - to za nas ne umanjuje značaj procene dejstva u proksimitetu jednog planetoida na drugi.

Iz vrednosti za velike poluose uočenih planetoida, a i iz izračunatih vrednosti njihovih heliocentričnih daljina, vidi se da se naši planetoidi, uglavnom, kreću sredinom planetoidskog prstena; drugim rečima, dovoljno daleko i od Jupitera i od Marsa (od Jupitera čak i nešto dalje no od Marsa). Ovo nam je omogućilo da se pri ispitivanjima poremećaja u kretanju 1564 , u pomenutom razmaku oko nadjenog proksimiteta, ograničimo samo na dejstvo planetoida 589 kao masivnijeg. Drukčije rečeno, mi smo zanemarili poremećaje od strane pomenutih velikih planeta u razmaku oko proksimiteta.

Izvode elemenata putanje poremećenog planetoida (Srbija) izračunali smo pošavši od datih njegovih elemenata kao konstanata. I kako smo, zatim, integraljenjem dobili neznatne poremećaje, zaključili smo da ćemo se moći zadovoljiti specijalnim poremećajima prvoga reda.

Rezultati pojedinih etapa izvršenih izračunavanja pokazuju, ujedno, koliko su efikasni naša grafička metoda (kojom smo se poslužili za odredjivanje polaznih i ostalih vrednosti) i metoda naših numeričkih aproksimacija. Tako vidimo da su, za polazni (nulti) trenutak, dobivene vrednosti :

$r_1 = 3.189\,739,\qquad r_2 = r = 3.189\,734,\quad \rho = 0.000\,498,$

$v_1 = 118^\circ\!.29\,738,\qquad v_2 = 105^\circ\!.60\,220,$

$u_1 = 335.43\,338,\qquad u_2 = 335.96\,280,$

$\alpha = 360^\circ - u_1 = 24^\circ\!.56\,662,\ \beta = 360^\circ - u_2 = 24^\circ\!.03\,720, \qquad (87)$

$l_1 = 155^\circ\!.11\,300,\qquad l_2 = 155^\circ\!.11\,148,$

$b_1 = -\,4.46\,072;\qquad b_2 = -\,4.45\,191;$

Uporedjenjem ovih vrednosti za položaje proksimiteta sa vrednostima (30) i (31) (v. i napomene ispod ovih vrednosti) za relativne čvorove vidimo da je, doista, proksimitet oko relativnog silaznog čvora. Za razlike argumenata latituda silaznog relativnog čvora i položaja proksimiteta imamo iznose :

$$\underline{u}_{21} - \underline{u}_{12} = 0\overset{\circ}{.}529, \quad u_2 - u_1 = 0\overset{\circ}{.}52\,942 .$$

Razlikama pravih anomalija položaja planetoidâ u proksimitetu i relativnog silaznog čvora odredjene su uglovne daljine planetoidâ od relativnog silaznog čvora, kada se oni nadju u položaju najmanjeg rastojanja putanja. Njihove su vrednosti : $v_1 - \underline{v}_{12} = u_1 - \underline{u}_{12} = 2\overset{\circ}{.}251$, $v_2 - \underline{v}_{21} = u_2 - \underline{u}_{21} = 2\overset{\circ}{.}251$ . Za ovoliko su (računajući u direktnom smeru) planetoidi uglovno daleko od pomenutog čvora, kad se na svojim putanjama nadju u proksimitetu. Uporedimo li ove vrednosti sa onima iz (35), vidimo koliko je grafički način za početni račun precizan. Za razliku pravih anomalija u proksimitetu nalazimo $\Delta v = v_1 - v_2 = 12\overset{\circ}{.}69\,518$, dok razlika argumenata latituda perihelâ uočenih putanja iznosi $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 13\overset{\circ}{.}225$; tako da je $\Delta u = \Delta\omega - \Delta v = 0\overset{\circ}{.}529 = u_2 - u_1$ .

Vrednostima $\alpha$ i $\beta$ , iz (87), odredjene su najmanje uglovne daljine (računate u retrogradnom smeru) od uzlaznih čvorova jednog i drugog planetoidâ, kada se nadju u položajima proksimiteta. Uporedimo li ih sa vrednostima (37), dobivenim grafički, vidimo da se podudaraju na jednu decimalu stepena.

Za razlike izmedju ekliptičkih koordinata planetoida u položajima proksimiteta i onih relativnog silaznog čvora, iz (87) i (33), nadjemo su vrednosti :

$$l_1 - \underline{l} = 2\overset{\circ}{.}226, \quad b_1 - \underline{b} = 0\overset{\circ}{.}381; \quad l_2 - \underline{l} = 2\overset{\circ}{.}224, \quad b_2 - \underline{b} = 0\overset{\circ}{.}389;$$

a izmedju heliocentričnih radius - vektora 589 i 1564 za položaje proksimiteta razlika iznosi $r_1 - r_2 = 0.000\,005$; dakle, oko proksimiteta može se smatrati kao da se oba planetoida kreću po sferi sa poluprečnikom $r = r_2 \approx r_1$; izmedju njihovih ekliptičkih koordinata u proksimitetu razlike su :

$$l_1 - l_2 = \Delta l = 0\overset{\circ}{.}00\,152, \quad b_2 - b_1 = \Delta b = 0\overset{\circ}{.}00\,881. \quad (88)$$

Pomoću poslednjih razlika možemo izračunati ugao izmedju heliocentričnih radija-vektora planetoidâ u proksimitetu. Označimo li ga sa $\psi$, imaćemo

$$\psi = \sqrt{(\Delta l \cos b_1)^2 + (\Delta b)^2} = 0\overset{\circ}{.}00\,894 = 32\overset{''}{.}2 \,. \qquad (89)$$

Vidimo da je, na četiri decimale stepena, $\psi \approx \Delta b$. Znači da je proksimitet vrlo blizu heliocentrične konjunkcije u longitudi planetoidâ.

Iz razlika ekliptičkih koordinata zaključujemo da ćemo oba planetoida - ako bi u vreme prolaza kroz proksimitet bili i pristupačni posmatranjima - moći više uzastopnih dana posmatrati zajedno u polju vida. Dakle moći ćemo ih posmatrati i apsolutno i relativno - što je, inače, redak slučaj, i što će omogućiti vrlo korisnu kontrolu svih nadjenih vrednosti i podataka.

12. <u>Pregled i objašnjenje izračunatih vrednosti</u>. -

a) Tablica 1 (na str. 58 ) sadrži vrednosti $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, koordinatâ poremećajnog planetoida, koje omogućuju da se dobije predstava o medjusobnom položaju planetoidâ oko njihova proksimiteta. Vidimo da vrednosti $\xi_1$ stalno rastu; da su i do oko osmog dana posle proksimiteta jednake (na šest decimala) sa heliocentričnim radijima poremećajnog planetoida; kao i da su do proksimiteta veće od odgovarajućih vrednosti heliocentričnih radija poremećenog planetoida, a, zatim, manje od r. Znači, razlike ($\xi_1$ - r) su u razmaku $-20^d$ do 0 pozitivne, a od 0 do $+20^d$ negativne. Koordinata $\eta_1$ je negativna do proksimiteta, pozitivna posle. Poremećajni planetoid je, dakle, prvo i z a poremećenog, do proksimiteta; zatim počinje prednjačiti. Po vrednostima koordinate $\zeta_1$ zaključujemo da je 589 u početku iznad, tj. sa severne strane oskulacione ravni planetoida 1564 ; negde u razmaku od 14. -og do 12. -og dana pre proksimiteta prolazi kroz ovu ravan, da, zatim, predje na južnu stranu te ravni.

Radiji-vektori planetoidâ oko proksimiteta rastu, što se moglo videti i po vrednostima v i E za proksimitet. Vidimo, osim toga, i da je heliocentrični radije-vektor poremećenog planetoida pre proksimiteta manji, posle toga veći od radija-vektora poremećajnog planetoida, što se može lepo videti po utabličenim razlikama $(r_1 - r)$.

U tablici 1 date su, za posmatrani interval, i vrednosti rastojanja $\varrho$, sa dnevnim promenama; zatim vrednosti $\varrho^{-3}$, čije su promene nagle oko 0 -og trenutka i simetrične u odnosu na ovaj trenutak. Kao osobenost konstatujemo da se : <u>K ponaša kao $\varrho^{-3}$</u>. Potsetimo da veličina K figuriše u izrazima (83) za komponente poremećajne sile, koja je funkcija i veličine $\varrho^{-3}$. Zato smo i dali tablični pregled dobivenih vrednosti za $\varrho^{-3}$. Iste te vrednosti imamo, s obzirom na broj zadržanih vrednosnih cifara, i za veličinu K. Napominjemo da su ove vrednosti date u jedinicama $10^4$, kao i komponente poremećajne sile, za jediničnu masu. Vrednosti izvodâ elemenata, opet za jediničnu masu poremećajnog planetoida, dati su u jedinicama $10^6$. Ovo je učinjeno da bismo pojednostavili izražavanje, imajući u vidu da će se, kasnije, pojaviti u računima masa poremećajnog planetoida sa faktorom $10^{-\nu}$ .

b) U Tablici 2 (na str. 60 ) date su vrednosti koeficijenata, koji se pojavljuju u diferencijalnim jednačinama oskulacionih elemenata, a kojima treba množiti odgovarajuće komponente poremećajne sile da bi se dobili izvodi.

c) Tablica 3 (na str. 62) sadrži vrednosti komponenata (za jediničnu masu) poremećajne sile u oskulacionoj ravni : S - duž potega poremećenog planetoida Srbija, T - normalne na ovoj, i W - normalne na oskulacionoj ravni. Iz ovih će se dobiti stvarne njihove vrednosti množenjem istih vrednošću mase poremećajnog planetoida - koja nam je nepoznata. Kasnije ćemo joj proceniti verovatnu vrednost, tako da ćemo, u konačnim izrazima za poremećaje, moći ipak uzeti i njegovo verovatno dejstvo u obzir. Kvalitativan tok dejstava ovih komponenata neće se medjutim menjati.

Iz utabličenih vrednosti vidimo da komponenta S ostaje pozitivna do oko drugog dana posle proksimiteta. Oko samog proksimiteta njene promene se naglo povećavaju; dva dana otprilike pre proksimiteta dostižu svoj maksimum, dva dana posle proksimiteta minimum. U samom proksimitetu S ima pozitivnu vrednost, ali nešto manju od polovine maksimalne vrednosti, dva dana ranije.

Komponenta T se ponaša, bar u pogledu smera, suprotno od komponente S. Apsolutno uzevši, njene vrednosti su manje od onih komponente S : u proksimitetu oko šest puta; dostižu minimum oko dva dana pre, maksimum oko dva dana posle proksimiteta.

Komponenta W je, u ovom slučaju, najinteresantnija. Oko četrnaestog dana pre proksimiteta ona menja znak, pozitivan u negativan; <u>u trenutku proksimiteta dostiže svoju najveću (negativnu) vrednost</u>, i to znatno veću od vrednosti drugih dveju komponenata.

Ova osobenost, to jest da je poremećajno dejstvo najveće u pravcu normalnom na oskulacionoj ravni kad su planetoidi u proksimitetu, posledica je medjusobnog položaja naših planetoida. Po ranije nadjenim vrednostima za $\Delta l$, $\Delta b$ i $\Psi$ vidi se lepo da se naši planetoidi, u trenutku proksimiteta, nalaze jedan 1564 nad drugim 589 . Kao posledicu ove okolnosti treba očekivati da će i najveću promenu, u trenutku proksimiteta, pretrpeti oni putanjski elementi čije promene zavise od dejstva komponente, W. A to su elementi $\Omega$, $\underline{i}$ i $\omega$ , dakle i $\tilde{\pi}$ , jer je $\tilde{\pi} = \Omega + \omega$ .

Interesantno je da su na početku i završetku intervala vrednosti komponente W znatno manje od vrednosti drugih dveju komponenata poremećajne sile.

d) U Tablici 4 (na str. 63) dat je, prvo, tablični pregled : izvodâ putanjskih elemenata izmnoženih vremenskim intervalom, w = 2 dana, sa jediničnu masu; sem toga, vrednosti članova prvog sumacionog niza, a kod $\mu$ i drugog sumacionog niza. Iz pregleda ovih vrednosti se može videti tok promenâ poremećaja.

e) U narednoj, V tablici, izdvojene su vrednosti poremećaja putanjskih elemenata poremećenog planetoida pod dejstvom poremećajnog planetoida jedinične mase, dobivene numeričkim integraljenjem, pomoću (85) i (86), i to odvojeno u razmacima: od -20 do +20 dana, od -20 do 0 i od 0 do +20 dana.

<u>V tablica</u> (Za $m_1$ = 1, u jedinicama $10^{10}$)

| Interval / Poremećaj | $-20^d$ do $+20^d$ | $-20^d$ do 0 | 0 do $+20^d$ |
|---|---|---|---|
| $\delta\Omega$ | $+ 11''.3434$ | $+ 5''.6636$ | $+ 5''.6798$ |
| $\delta\omega$ | − 11.1314 | − 5.5175 | − 5.6139 |
| $\delta i$ | − 4.8468 | − 2.4200 | − 2.4268 |
| $\delta\pi$ | + 0.2120 | + 0.1461 | + 0.0659 |
| $\delta M$ | − 0.1111 | − 0.4547 | + 0.3436 |
| $\delta\varphi$ | + 0.0524 | + 0.2042 | − 0.1518 |
| $\delta\mu$ | − 0.000 0592 | − 0.000 1716 | + 0.000 1124 |

Iznosi poremećaja pojedinih elemenata dati su u ovoj tablici po redu njihovih veličina.

Vrednosti su date samo sa četiri decimale i faktorom $10^{10}$, a kod $\mu$ sa tri decimale više, kao što je uobičajeno, što je sasvim dovoljno, ako se uzme u obzir da je masa poremećajnog planetoida - kao što ćemo se kasnije uveriti - reda veličine prilično manjeg od $10^{-10}$ Sunčeve mase.

Da bismo dobili tražene, dakle stvarne, poremećaje, treba gornje ~~vrednosti izmnožiti masom poremećajnog planetoida.~~

Tako bismo dobili veličine poremećaja koje bi proizveo masivniji planetoid, 589 , u kretanju manje masivnog planetoida, 1564 , za trajanja njihovih prolaza kroz položaje proksimiteta.

13. <u>Procena verovatnih iznosa poremećaja oko proksimiteta u kretanju (1564) pod dejstvom (589)</u>. - Napred je bilo već rečeno da su nam tačne vrednosti masa planetoida, i to ne samo naših već uopšte, nepoznate. Strogo uzevši, nije nam dovoljno poznat čak ni red veličine masa ovih tela. Znamo toliko samo da su posve neznatne. Stoga, ako bi nam, i pored toga, ovaj podatak bio potreban, pribegavamo procenama njegovih najverovatnijih vrednosti. Prema tome i kad su u pitanju poremećaji, koje bi jedan planetoid mogao proizvesti u kretanju drugog, za vreme prolaza kroz okolinu njihova proksimiteta - kao što je ovde slučaj - moramo se zadovoljiti procenom samo v e r o v a t n i h iznosa tih poremećaja.

Nepoznate su nam i do danas ostale mase ovih tela, jer im ne znamo ni pravi oblik, ni dimenzije (sem prvih četiri), ni sastav, dakle ni gustinu. Za svaki od ovih podataka, kad nam i gde zatreba, služimo se manje više verovatnim, hipotetičkim, vrednostima, izvedenim iz empirijskih relacija. Tako, na pr., o obliku ovih tela obično se (izrično ili ćutke) pretpostavlja da je sferan, što, naročito kod sitnijih planetoida, sigurno nije slučaj. O dimenzijama se zna samo da su im „poluprečnici" manji od 500 km. /22/. O sastavu se pretpostavlja da mora biti približno sličan sastavu meteorita. Ova nas tela, medjutim - kao što znamo - posećuju s vremena na vreme. Znači njihov sastav i ostale fizičke osobine, dakle i gustinu, možemo smatrati dovoljno poznatima. Na njima se, dobrim delom, i zasnivaju empirijske relacije, iz kojih izvodimo manje više verovatne vrednosti raznih podataka o prirodi i planetoida.

Do podataka o verovatnoj vrednosti mase (m) nekog planetoida, izražene u jedinicama Sunčeve mase, mogli bismo, na pr., doći pomoću relacije

$$m = \left(\frac{R}{R_s}\right)^3 \frac{\sigma}{\sigma_s}, \tag{90}$$

kad bi nam bili poznati R poluprečnik i $\sigma$ gustina planetoida, pošto su nam poluprečnik ($R_s$) i gustina ($\sigma_s$) Sunca poznati. Za gustinu planetoida uzima se da se mora kretati izmedju 3.0 i 3.5 g $cm^{-3}$, /23, 24/. Imajući u vidu da Mesečeva srednja gustina iznosi 3.34 g $cm^{-3}$, može se, kao verovatna, usvojiti za srednju gustinu planetoida vrednost 3.3 g $cm^{-3}$.

Za poluprečnik planetoida dobiva se (u km) verovatna vrednost iz poznatog empirijskog obrasca /23/ :

$$[R] = 3.3135 - 0.2\ g, \tag{91}$$

gde je uglastom zagradom označen logaritam vrednosti poluprečnika, a sa *g* zvezdana veličina planetoida, kad bi se ovaj nalazio na daljini od jedne astronomske jedinice od Sunca i od Zemlje. Obrazac je izveden uz pretpostavku da se odbojna sposobnost planetoidske površine može, dovoljno tačno, okarakterisati vrednošću albeda 0.20 - 0.23 (ustvari srednja vrednost izmedju albeda četiri prva planetoida ),/23/.

Za veličinu *g*, u gornjem obrascu, izvedene su za naše planetoide, iz vizuelnih i fotografskih merenja zvezdanih veličina, vrednosti,/25/,

$$\text{za } 589 \ : g_1 = 9.98, \qquad \text{za } 1564 \ : g_2 = 12.05. \tag{92}$$

Prema tome se njihove najverovatnije „poluprečnike" dobivaju se vrednosti

$$\text{za } 589 \ : R_1 = 20.8 \text{ km}, \qquad \text{za } 1564 \ : R_2 = 8.0 \text{ km}. \tag{93}$$

Prema obrascu (90) i onome što je ranije rečeno, za masu većeg i masivnijeg od naših planetoida, dakle planetoida 589 , dobiva se kao najverovatnija, u jedinicama Sunčeve mase, vrednost

$$m_1 = 6 \times 10^{-14}. \qquad (94)$$

Očigledno je da se od ovoliko neznatne mase poremećajnog planetoida ne bi moglo, i ne može, očekivati neko merljivo dejstvo u kretanju poremećenog planetoida. Sem, eventualno, u izuzetno povoljnim slučajevima : ako bi se, recimo, oba tela mogla jedno drugom dovoljno približiti. Drugim rečima, ako bi, u našem slučaju, elementi putanja uočenih planetoida ovima omogućavali dovoljno blizak proksimitet. Stoga smo i smatrali za potrebno da, u tački 9, ispitamo da li bi se mogao ranije nadjeni proksimitet - sam po sebi već malen - i pod kojim uslovima, još smanjiti i, tako, olakšati da poremećajno dejstvo u kretanju, pri prolazu kroz proksimitet, dodje do merljivog izražaja.

Ovo pitanje nas je pobudilo i da - pošto nam je sad verovatna vrednost mase poremećajnog planetoida poznata - odredimo veličinu (tačnije, poluprečnik) sfere njegova dejstva. To je, kao što znamo, sfera oko poremećajnog planetoida u čijoj je unutrašnjosti njegovo privlačno dejstvo jače od Sunčeva. Vrednost tog poluprečnika, ako ga označimo sa D, dobiva se iz obrasca, /26/,

$$D = m_1^{0.4}\, r_1 (1 + 3\cos^2\theta)^{-0.1}, \qquad (95)$$

gde je sa $m_1$ označena masa poremećajnog planetoida, a sa $\theta$ ugao kod $m_1$ (v. sl. 4), a čija se vrednost odredjuje, pomoću poznatih veličina, iz obrasca

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{(s - r_1)(s - \rho)}{s(s - r_2)}}\,, \quad s = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2 + \rho). \qquad (96)$$

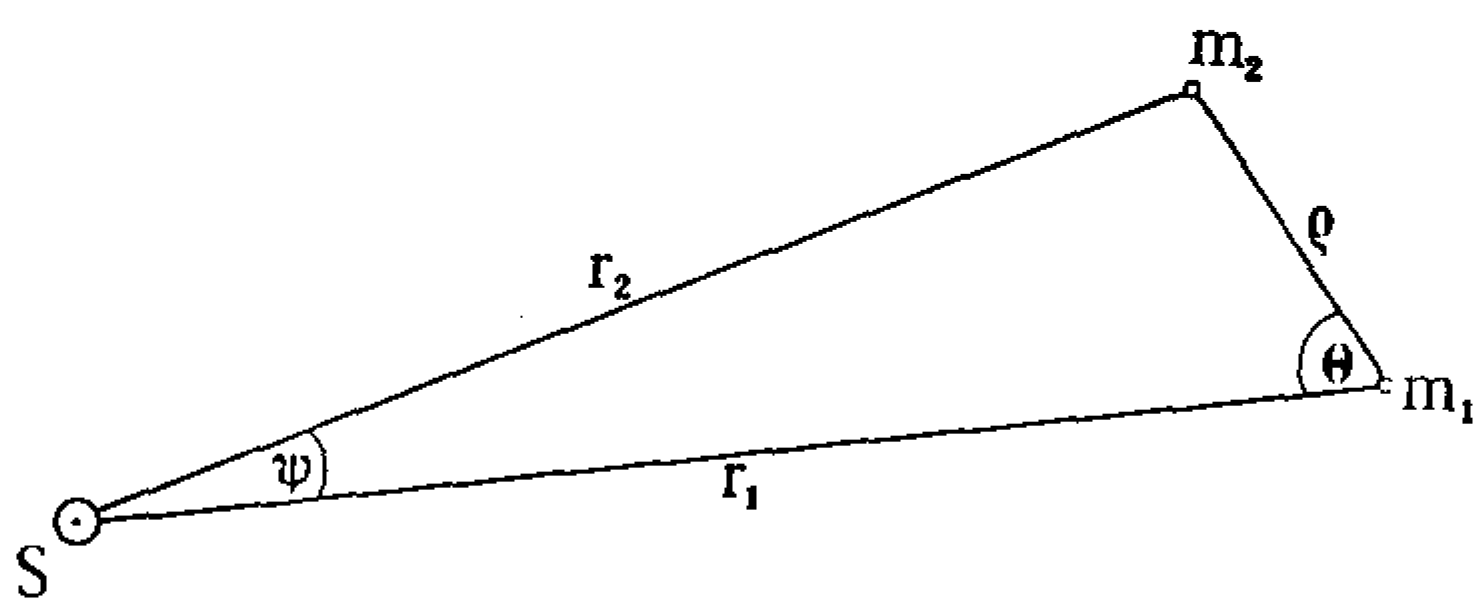
Za naše planetoide nalazimo, u trenutku prolaza kroz proksimitet,

$$\theta = 89\overset{\circ}{.}4 \; . \qquad (97)$$

I tako se za poluprečnik sfere dejstva poremećajnog planetoida dobiva

$$D = 16 \times 10^{-6} \text{ AJ} \approx 2\,440 \text{ km}. \qquad (98)$$

Ovo je jedva oko tridesetog dela rastojanja naših planetoida u proksimitetu, dobivenom sa njihovim polaznim putanjskim elementima.




Sl. 4

Ako primetimo da smo u tački 9, pri spregu sasvim verovatnih relativno malih promena elemenata, našli da bi se daljina putanja u proksimitetu naših planetoida mogla smanjiti na svega $1 \times 10^{-5}$, ili 1 495 km (0.23 $R_{♁}$), vidimo da bi se prolaz kroz proksimitet naših planetoida mogao dogoditi čak i u unutrašnjosti sfere dejstva masivnijeg planetoida.

No vratimo se proceni verovatnih vrednosti poremećaja polaznih elemenata oko proksimiteta. Sa nadjenom, verovatnom, vrednošću mase poremećajnog planetoida 589 nalazimo za verovatne iznose poremećaja drugog od naših planetoida, dakle 1564, za vreme prolaza kroz njihov proksimitet :

VI tablica

| Poremećaj \ Interval | $-20^d$ do $+20^d$ | $-20^d$ do 0 | 0 do $+20^d$ |
|---|---|---|---|
| $\delta\Omega$ | $+0''.007$ | $+0''.003$ | $+0''.003$ |
| $\delta i$ | $-0.003$ | $-0.001$ | $-0.001$ |
| $\delta\omega$ | $-0.007$ | $-0.003$ | $-0.003$ |
| $\delta\pi$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| $\delta\varphi$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| $\delta M$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| $\delta\mu$ | 0.000 00 | 0.000 00 | 0.000 00 |

Vrednosti iz VI tablice su date sa jednom decimalom više nego što je to praksa. I vidimo da nadjeni verovatni iznosi poremećaja - n i s u pristupačni merenjima; drugim rečima na kretanju naših planetoida nisu primetni, te se m o g u z a n e - m a r i t i !

III DEO

ZAKLJUČAK

14. Rezultati i njihov značaj. - U radu su podrobno proučene geometrijske, kinematičke i dinamičke osobine i osobenosti u putanjama i načinu kretanja dvaju planetoida iz grupe sa kvazikomplanarnim putanjama : (589) Croatia i (1564) Srbija - na koje mi je pažnju skrenuo profesor V. V. Mišković - koji su nam dosad poznati bili samo kao planetoidi sa nazivima naših dveju najvećih republika, a drugi, kasnije numerisani medju njima, još i kao prvi otkriveni planetoid na Beogradskoj astronomskoj opservatoriji.

U prvom delu rada utvrdjeno je :

1) da putanje ovih planetoida, na jednoj od svojih dveju raskrsnica, dostižu najmanju medjusobnu daljinu od svega 0.000 5 AJ, ili oko 75 000 km (dakle, oko petinu Mesečeve daljine od Zemlje), što je za kosmičke, pa i interplanetarne, daljine i vrlo malo i velika retkost; kao i da se, s obzirom na putanjske elemente naših planetoida, ovi na tom položaju - koji smo nazvali proksimitetom - mogu sresti u istom, ili vrlo približno istom trenutku;

2) da se prvi naredni prolaz planetoidâ kroz nadjeni proksimitet može očekivati za, otprilike, 109 godina, dakle u doglednoj budućnosti, što je povoljno, jer se može iskoristiti u naučne svrhe, ako se dogodi na položaju pristupačnom posmatranjima sa Zemlje.

U drugom delu rada nadjeno je :

3) da se pod izvesnim uslovima, sasvim verovatnim i lako ostvarljivim - tačnije, pri odredjenoj kombinaciji relativno neznatnih promenâ polaznih putanjskih elemenata naših planetoida - može daljina putanja oko proksimiteta smanjiti na svega - j e d a n sto hiljaditi deo astronomske jedinice, dakle na oko 1 500 km.

Zatim su dati :

4) rezultati poremećajâ u kretanju (manje masivnog) planetoida 1564 pod dejstvom (masivnijeg) 589, za vreme (od 20 dana pre do 20 dana posle) prolaza kroz nadjeni proksimitet, i pokazano je da to dejstvo, za trajanja prolaza, n e m o ž e u elementima poremećenog planetoida proizvesti merljive promene koje bi dostizale iznose i u njegovu kretanju;

5) potrebni podaci koji omogućuju da se, za ove kvazikomplanarne planetoide, proceni daljina sa koje bi pomenuto poremećajno dejstvo, bar u nekim od putanjskih elemenata, za trajanja prolaza planetoidâ kroz proksimitet, dostiglo iznose čije bi posledice po kretanje bile pristupačne merenjima.

*

Tako je u ovoj studiji, pre svega, prvi put istaknut značaj grupe kvazikomplanarnih objekata : planetoida, prirodnih i veštačkih satelitâ, višestrukih zvezda, za iznalaženje njihovih proksimiteta, a, naročito, onih kod kojih se ti objekti duže vreme zadržavaju jedan kraj drugog i za to vreme osetno dejstvuju jedan na drugi.

Zatim je, prvi put, primenjen jedan jednostavan i vrlo precizan postupak za odredjivanje broja raskrsnica na putanjama i približnih položaja proksimiteta objekata, poznatih putanjskih elemenata, kao i za izračunavanje same vrednosti proksimiteta, što, svakako, predstavlja koristan doprinos ne samo za problematiku planetoida, već i za problematiku sistema prirodnih planetskih i veštačkih satelita i višestrukih svezda.

U studiji su, prvi put, odredjene i granice daljinâ pri kojima bi dejstvo, specijalno planetoida, tela sa tako reći potpuno zanemarljivim masama, moglo proizvesti promene u polaznim putanjskim elementima, čije bi posledice mogle biti posmatranjima pristupačne. Znači, ako bi se našao par kvazikomplanarnih planetoida kod kojih bi daljina proksimiteta dostizala pomenutu granicu, ovakav slučaj bi predstavljao povoljnu priliku za rešenje problema, koji je dosad smatran za nerešljiv, tj. da se, iz posmatranih posledica poremećaja u njihovu kretanju, odredi masa poremećajnog planetoida.

U ovoj studiji su, najzad, proučena i data približna rešenja za pojedinosti koje bi se mogle i verovatno će se pojavljivati i u problematici o kretanju veštačkih satelita.

*

Profesoru V. V. Miškoviću izražavam zahvalnost za rukovodjenje pri izradi ove doktorske disertacije.

**Tablica 1** (U jedinicama $10^{-6}$) 

| $t$ | $\xi_1$ | $\eta_1$ | $\zeta_1$ | $r_1$ | $r$ | $r_1 - r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 180 000 + | | | 3 180 000 + | 3 100 000 + | |
| $-20^d$ | 2 814 | -1732 | 262 | 2 814 | 48 997 | 33 817 |
| -18 | 3 516 | -1736 | 186 | 3 516 | 53 097 | 30 420 |
| -16 | 4 215 | -1705 | 110 | 4 216 | 57 191 | 27 025 |
| -14 | 4 913 | -1635 | 34 | 4 914 | 61 280 | 23 634 |
| -12 | 5 609 | -1525 | - 42 | 5 609 | 65 363 | 20 246 |
| -10 | 6 302 | -1369 | - 118 | 6 302 | 69 440 | 16 862 |
| - 8 | 6 994 | -1174 | - 194 | 6 994 | 73 511 | 13 483 |
| - 6 | 7 683 | - 942 | - 270 | 7 683 | 77 576 | 10 107 |
| - 4 | 8 370 | - 671 | - 346 | 8 370 | 81 635 | 6 735 |
| - 2 | 9 056 | - 355 | - 422 | 9 056 | 85 688 | 3 368 |
| 0 | 9 739 | - 1 | - 498 | 9 739 | 89 734 | 5 |
| + 2 | 10 419 | 391 | - 574 | 10 419 | 93 773 | - 3 354 |
| + 4 | 11 098 | 821 | - 650 | 11 098 | 97 805 | - 6 707 |
| + 6 | 11 774 | 1294 | - 725 | 11 774 | 101 813 | -10 057 |
| + 8 | 12 447 | 1804 | - 801 | 12 448 | 105 850 | -13 402 |
| +10 | 13 119 | 2352 | - 877 | 13 120 | 109 862 | -16 742 |
| +12 | 13 788 | 2935 | - 952 | 13 789 | 113 866 | -20 077 |
| +14 | 14 454 | 3562 | -1028 | 14 456 | 117 863 | -23 407 |
| +16 | 15 118 | 4225 | -1104 | 15 121 | 121 853 | -26 732 |
| +18 | 15 779 | 4925 | -1180 | 15 783 | 125 835 | -30 052 |
| +20 | 16 438 | 5672 | -1255 | 16 443 | 129 809 | -33 366 |

| $-z$ | $\varrho$ | $\Delta\varrho$ za 1 dan | $\varrho^{-3}$ (u jed. $10^4$) |
|---|---|---|---|
| 3 817 | 33 862 | | 3 |
| | | -1697 | |
| 0 420 | 30 469 | | 4 |
| | | -1695 | |
| 27 025 | 27 078 | | 5 |
| | | -1694 | |
| 23 634 | 23 690 | | 8 |
| | | -1693 | |
| 20 246 | 20 304 | | 12 |
| | | -1693 | |
| 16 862 | 16 918 | | 21 |
| | | -1691 | |
| 13 483 | 13 535 | | 40 |
| | | -1691 | |
| 10 107 | 10 154 | | 96 |
| | | -1688 | |
| 6 735 | 6 777 | | 321 |
| | | -1682 | |
| 3 368 | 3 413 | | 2 515 |
| | | -1458 | |
| 5 | 498 | | 811 030 |
| | | 1464 | |
| - 3 354 | 3 425 | | 2 490 |
| | | 1682 | |
| - 6 707 | 6 789 | | 320 |
| | | 1689 | |
| -10 057 | 10 166 | | 95 |
| | | 1690 | |
| -13 402 | 13 547 | | 40 |
| | | 1691 | |
| -16 742 | 16 930 | | 21 |
| | | 1692 | |
| -20 077 | 20 314 | | 12 |
| | | 1694 | |
| -23 407 | 23 701 | | 8 |
| | | 1694 | |
| -26 732 | 27 090 | | 5 |
| | | 1695 | |
| -30 052 | 30 480 | | 4 |
| | | 1697 | |
| -33 366 | 33 873 | | 3 |

**Tablica 2** (U jedinicama $10^{-6}$) 

| t | $\{\Omega : W\}$ | $\{i : W\}$ | $\{\tilde{\pi} : S\}$ | $\{\tilde{\pi} : T\}$ | $\{\tilde{\pi} : W\}$ | $\{\varphi : S\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | -2 000 000 | 900 000 + | 1 000 000 + | 9 000 000 + | -40 000 | 1 000 000 |
| $-20^d$ | -531 441 | 29 024 | - 1 417 | 454 608 | -6389 | + 66 |
| -18 | -505 355 | 33 120 | +26 326 | 448 440 | -5911 | - 1 251 |
| -16 | -479 175 | 37 180 | 53 958 | 441 941 | -5431 | - 2 601 |
| -14 | -452 900 | 41 206 | 81 482 | 435 111 | -4950 | - 3 983 |
| -12 | -426 533 | 45 195 | 108 897 | 427 952 | -4467 | - 5 397 |
| -10 | -400 078 | 49 150 | 136 200 | 420 468 | -3982 | - 6 842 |
| - 8 | -373 533 | 53 069 | 163 395 | 412 658 | -3496 | - 8 319 |
| - 6 | -346 899 | 56 953 | 190 479 | 404 528 | -3007 | - 9 827 |
| - 4 | -320 177 | 60 802 | 217 453 | 396 075 | -2518 | -11 366 |
| - 2 | -293 372 | 64 615 | 244 314 | 387 306 | -2027 | -12 934 |
| 0 | -266 483 | 68 393 | 271 066 | 378 223 | -1534 | -14 533 |
| + 2 | -239 510 | 72 136 | 297 706 | 368 823 | -1040 | -16 162 |
| + 4 | -212 457 | 75 844 | 324 233 | 359 114 | - 544 | -17 820 |
| + 6 | -185 324 | 79 516 | 350 650 | 349 094 | - 46 | -19 508 |
| + 8 | -158 111 | 83 152 | 376 954 | 338 766 | + 452 | -21 224 |
| +10 | -130 822 | 86 754 | 403 147 | 328 133 | 952 | -22 970 |
| +12 | -103 456 | 90 320 | 429 349 | 317 198 | 1454 | -24 743 |
| +14 | - 76 014 | 93 851 | 455 195 | 305 960 | 1957 | -26 545 |
| +16 | - 48 499 | 97 347 | 481 049 | 294 423 | 2461 | -28 374 |
| +18 | - 20 912 | 100 807 | 506 790 | 282 589 | 2966 | -30 231 |
| +20 | + 6 746 | 104 232 | 532 419 | 270 460 | 3473 | -32 115 |

| S } | {$\varphi$ : T} | {$\mu$ : S} | {$\mu$ : T} | {$M_0$ : S} | {$M_0$ : T} | t |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | | -3900 | -18 000 | -3 000 000 | -9 000 000 | |
| 66 | -215 874 | -99 | -470 | - 22 171 | -240 520 | -20 d |
| 51 | -228 175 | -94 | -446 | - 51 950 | -236 492 | -18 |
| 01 | -240 444 | -88 | -422 | - 81 616 | -228 140 | -16 |
| 83 | -252 682 | -82 | -398 | -111 175 | -221 465 | -14 |
| 97 | -264 886 | -77 | -374 | -140 622 | -214 468 | -12 |
| 42 | -277 058 | -71 | -351 | -169 956 | -207 153 | -10 |
| 19 | -289 196 | -65 | -327 | -199 180 | -199 520 | - 8 |
| 27 | -301 302 | -59 | -304 | -228 293 | -191 574 | - 6 |
| 66 | -313 374 | -53 | -280 | -257 294 | -183 312 | - 4 |
| 34 | -325 412 | -47 | -257 | -286 180 | -174 743 | - 2 |
| 33 | -337 416 | -40 | -234 | -314 955 | -165 865 | 0 |
| 62 | -349 385 | -34 | -211 | -343 616 | -156 678 | + 2 |
| 20 | -361 320 | -27 | -188 | -372 163 | -147 188 | + 4 |
| 08 | -373 221 | -20 | -165 | -400 598 | -137 396 | + 6 |
| 24 | -385 086 | -14 | -142 | -428 918 | -127 301 | + 8 |
| 70 | -396 917 | - 7 | -120 | -457 124 | -116 909 | +10 |
| 43 | -408 738 | 0 | - 97 | -485 334 | -106 221 | +12 |
| 45 | -420 471 | + 8 | - 74 | -513 192 | - 95 238 | +14 |
| 74 | -432 194 | 15 | - 52 | -541 054 | - 83 962 | +16 |
| 31 | -443 882 | 22 | - 30 | -568 800 | - 72 396 | +18 |
| 15 | -455 533 | 30 | - 8 | -596 430 | - 60 542 | +20 |

**Tablica 3** (Za $m_1$=1, u jedinicama $10^4$)

| t | S | T | W |
|---|---|---|---|
| | " | " | " |
| $-20^d$ | 1 072 | − 55 | 8 |
| −18 | 1 324 | − 76 | 8 |
| −16 | 1 675 | − 106 | 7 |
| −14 | 2 188 | − 151 | 3 |
| −12 | 2 977 | − 224 | − 6 |
| −10 | 4 286 | − 348 | − 30 |
| − 8 | 6 693 | − 583 | − 96 |
| − 6 | 11 882 | − 1 107 | − 317 |
| − 4 | 26 622 | − 2 653 | − 1 368 |
| − 2 | 104 262 | −10 975 | − 13 058 |
| 0 | 49 232 | − 7 986 | −4 968 154 |
| + 2 | −102 760 | 11 975 | − 17 577 |
| + 4 | − 26 388 | 3 229 | − 2 555 |
| + 6 | − 11 782 | 1 515 | − 850 |
| + 8 | − 6 635 | 893 | − 397 |
| +10 | − 4 247 | 596 | − 222 |
| +12 | − 2 948 | 431 | − 140 |
| +14 | − 2 164 | 329 | − 95 |
| +16 | − 1 655 | 262 | − 68 |
| +18 | − 1 307 | 214 | − 51 |
| +20 | − 1 057 | 180 | − 40 |

**Tablica 4** (Za $m_1 = 1$, u jedinicama $10^6$)

| $t$ | $w\frac{d\Omega}{dt}$ | $I_f$ | $w\frac{di}{dt}$ | $I_f$ | $w\frac{d\varpi}{dt}$ | $I_f$ | $w\frac{d\varphi}{dt}$ | $I_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | " | " | " | " | " | " | " | " |
| | | 0 | | 0 | | − 16 | | − 29 |
| $-26^d$ | 0 | | 0 | | + 4 | | + 6 | |
| | | 0 | | 0 | | − 12 | | − 23 |
| −24 | 0 | | 0 | | + 4 | | + 8 | |
| | | 0 | | 0 | | − 8 | | − 15 |
| −22 | 0 | | 0 | | + 5 | | + 9 | |
| | | 0 | | 0 | | − 3 | | − 6 |
| −20 | 0 | | 0 | | + 6 | | + 11 | |
| | | 0 | | 0 | | + 3 | | + 5 |
| −18 | 0 | | 0 | | + 6 | | + 13 | |
| | | 0 | | 0 | | + 9 | | + 18 |
| −16 | 0 | | 0 | | + 8 | | + 17 | |
| | | 0 | | 0 | | + 17 | | + 35 |
| −14 | 0 | | 0 | | + 9 | | + 22 | |
| | | 0 | | 0 | | + 26 | | + 57 |
| −12 | 0 | | 0 | | + 12 | | + 30 | |
| | | 0 | | 0 | | + 38 | | + 87 |
| −10 | + 1 | | 0 | | + 16 | | + 44 | |
| | | + 1 | | 0 | | + 54 | | + 131 |
| − 8 | + 2 | | − 1 | | + 23 | | + 68 | |
| | | + 3 | | − 1 | | + 77 | | + 199 |
| − 6 | + 7 | | − 3 | | + 37 | | + 121 | |
| | | + 10 | | − 4 | | + 114 | | + 320 |
| − 4 | + 32 | | − 13 | | + 75 | | + 272 | |
| | | + 42 | | − 17 | | + 189 | | + 592 |
| − 2 | + 299 | | − 126 | | + 273 | | +1065 | |
| | | + 341 | | − 143 | | + 462 | | +1657 |
| 0 | +112 602 | | −48 111 | | +1940 | | + 512 | |
| | | +112 943 | | −48 254 | | +2402 | | +2169 |
| + 2 | + 394 | | − 171 | | − 204 | | −1053 | |
| | | +113 337 | | −48 425 | | +2198 | | +1116 |
| + 4 | + 57 | | − 25 | | − 46 | | − 269 | |
| | | +113 394 | | −48 450 | | +2152 | | + 847 |
| + 6 | + 19 | | − 8 | | − 17 | | − 121 | |
| | | +113 413 | | −48 458 | | +2135 | | + 726 |
| + 8 | + 9 | | − 4 | | − 8 | | − 68 | |
| | | +113 422 | | −48 462 | | +2127 | | + 658 |
| +10 | + 5 | | − 2 | | − 4 | | − 44 | |
| | | +113 427 | | −48 464 | | +2123 | | + 614 |
| +12 | + 3 | | − 1 | | − 2 | | − 31 | |
| | | +113 430 | | −48 465 | | +2121 | | + 583 |
| +14 | + 2 | | − 1 | | − 1 | | − 22 | |
| | | +113 432 | | −48 466 | | +2120 | | + 561 |
| +16 | + 1 | | − 1 | | 0 | | − 17 | |
| | | +113 433 | | −48 467 | | +2120 | | + 544 |
| +18 | + 1 | | − 1 | | 0 | | − 14 | |
| | | +113 434 | | −48 468 | | +2120 | | + 530 |
| +20 | + 1 | | 0 | | 0 | | − 11 | |
| | | +113 435 | | −48 468 | | +2120 | | + 519 |
| +22 | + 1 | | 0 | | + 1 | | − 9 | |
| | | +113 436 | | −48 468 | | +2121 | | + 510 |
| +24 | 0 | | 0 | | + 1 | | − 8 | |
| | | +113 436 | | −48 468 | | +2122 | | + 5[illegible] |
| +26 | 0 | | 0 | | + 1 | | − 7 | |
| | | +113 436 | | −48 468 | | +2123 | | + [illegible] |

| | $w\frac{dM_o}{dt}$ | $I_f$ | $w^2\frac{d\kappa}{dt}$ | $I_f$ | $II_f$ | t |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | (U jedinicama $10^3$) | | | |
| | " | " | " | " | " | |
| 9 | - 17 | + 72 | - 22 | + 90 | - 125 | $-26^d$ |
| 3 | - 19 | + 55 | - 24 | + 68 | - 57 | -24 |
| 5 | - 23 | + 36 | - 28 | + 44 | - 13 | -22 |
| 6 | - 27 | + 13 | - 33 | + 16 | + 3 | -20 |
| 5 | - 33 | - 14 | - 39 | - 17 | - 14 | -18 |
| 8 | - 42 | - 47 | - 47 | - 56 | - 70 | -16 |
| 5 | - 54 | - 89 | - 59 | - 103 | - 173 | -14 |
| 7 | - 73 | - 143 | - 77 | - 162 | - 335 | -12 |
| 7 | - 104 | - 216 | - 106 | - 239 | - 574 | -10 |
| 1 | - 160 | - 320 | - 159 | - 345 | - 919 | - 8 |
| 9 | - 282 | - 480 | - 268 | - 504 | - 1 423 | - 6 |
| 0 | - 623 | - 762 | - 567 | - 772 | - 2 195 | - 4 |
| 2 | -2419 | -1385 | -2111 | -1339 | - 3 534 | - 2 |
| 7 | - 900 | -3804 | - 484 | -3450 | - 6 984 | 0 |
| 9 | +2339 | -4704 | +1862 | -3934 | -10 918 | + 2 |
| 6 | + 594 | -2365 | + 449 | -2072 | -12 990 | + 4 |
| 7 | + 262 | -1771 | + 187 | -1623 | -14 613 | + 6 |
| 6 | + 146 | -1509 | + 98 | -1436 | -16 049 | + 8 |
| 8 | + 92 | -1363 | + 58 | -1338 | -17 387 | +10 |
| 4 | + 64 | -1271 | + 37 | -1280 | -18 667 | +12 |
| 3 | + 46 | -1207 | + 25 | -1243 | -19 910 | +14 |
| 1 | + 35 | -1161 | + 17 | -1218 | -21 128 | +16 |
| 4 | + 27 | -1126 | + 12 | -1201 | -22 329 | +18 |
| 0 | + 22 | -1099 | + 9 | -1189 | -23 518 | +20 |
| 9 | + 18 | -1077 | + 6 | -1180 | -24 698 | +22 |
| 0 | + 15 | -1059 | + 4 | -1174 | -25 872 | +24 |
| 2 | + 12 | -1044 | + 3 | -1170 | -27 042 | +26 |
| 5 | | -1032 | | -1167 | | |

L i t e r a t u r a

/1/ G r u n e r t, Über die Proximitäten der Bahnen der Planeten und Cometen; Sitzb. d. math.-naturw. Cl. der k. Ak. d. Wiss., Wien, 1854, Bd. XIII.

/2/ G r u n e r t, Directe Bestimmung der Durchnittspunkte der Bahnen zweier in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Weltkörper; Denkschr. d. Ak. d. Wiss. in Wien, 1861, Bd. XIX.

/3/ K a r l v o n L i t t r o w, Bahnnähen zwischen den periodischen Gestirnen des Sonnensystems; Sitzb. d. Math. Naturw. Cl. der k. Ak. d. Wiss., Wien, 1854, Bd. XIII. Većina kasnijih njegovih radova po ovom pitanju pojavila se u volumima XXIX, XLIII, XLV, XLVII, XLIX, LI, LIV, LVI istog zbornika.

/4/ A n d r e a s G a l l e, Zur Berechnung der Proximitäten von Asteroiden-Bahnen; Inaugural Dissertation, Breslau, 1883.

/5/ G. F a y e t, Contribution à l'étude des proximités d'orbites dans le système solaire; Ann. Bur. des Long., t. XII, Centre National de la Rech. Scient., Paris, 1949.

/6/ G. F a y e t, Petites Planètes, Tables de coordonnées héliocentriques et données concernant les oppositions; Université de Paris, Observatoire de Nice, Paris, T. I, 1932; T. II, 1933.

/7/ A. M a r t h, Data for a Graphical Representation of the Solar System; Monthly Notices R. A. S., 1885, XLV, 348, 483.

/8/ Elis Strömgren, Über die gegenseitigen Störungen zweier einander nahekommenden kleinen Planeten; A. N. 165 (1904), 17-24.

/9/ Godišnjak Srpske akademije nauka, LXV, za 1958, 138.

/10/ Reports on Astronomy, Transactions of the International Astronomical Union, Vol. XI, 1961, 180.

/11/ G. Stracke, Bahnbestimmung der Planeten und Cometen; J. Springer, Berlin, 1929, 41, 224, 277-280.

/12/ A. N., 170 (1906), 354.

/13/ A. N., 172 (1906), 389.

/14/ A. N., 183 (1910), 16.

/15/ Kleine Planeten, 1939.

/16/ V. V. Michkovitch, Opposition de 1938 de la planète 1936 TB; Bulletin de l'Observatoire Astronomique de l'Université de Belgrade, III, 1938, No 2, 5.

/17/ R. Kašanin, Sur les positions relatives de deux astéroïdes; Mémoires III, Publications de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, 1936, 5-9.

/18/ A. N., 174 (1907), 57.

/19/ Efemeridi malih planet, 1963, 25, 43, 22.

/20/ Explanatory Supplement ..., St. Office, London, 1961, 27-28, 489-490.

/21/ Julius Bauschinger, Gustav Stracke, Tafeln zur teoretischen Astronomie; Leipzig, 1934, 184.

/22/ I. I. Putilin, Malie planeti; Moskva, 1953, 198, 207.

/23/ V. V. Šaronov, Prireda planet; Moskva, 1958, 145, 297, 300, 304-305.

/24/ C. W. A l l e n, Astrophysical Quantities; University of London, 1955, 159, 193, 195.

/25/ T. G e h r e l s, Mean photographic magnitudes of the ephemeris asteroids and their weights; Transactions I. A. U., X, 305, 309, 316. Cambridge, 1960.

/26/ H. C. P l u m m e r, An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy; II Ed., Dover Publ., New York, 1960, 151, 234-235.