JEDNA KLASA MULTIFORMNIH PRESLIKAVANJA SA PRIMENOM NA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Doktorski rad Rada Dacića, asistenta Gradj. fak. u Beogradu

U V O D

Dve su osnovne teme koje se rasmatraju u ovom radu. Prvu temu predstavljaju multiforma preslikavanja dakle proučavanja koja ulaze u okvir teorije skupova i teoretsko skupovne / opšte / topologije. Drugu temu sačinjavaju rešavanja / običnih / diferencijalnih jednačina u smislu distribucija, i uopšte diferencijalne jednačine i diferenciranje u linearnim topološkim prostorima što ulazi u domen proučavanja matematičke analize / uglavnom / u onom modernizovanom obliku te grane matematike koji je dao L. Schwartz.

Naravno ovo nije jedini rad u kojem se tretiraju multiforma preslikavanja. U poslednje vreme ona zanimaju veliki broj pisaca medju kojima se nalaze Ponomarjov i Michael. Mnogi istaknuti matematičari u samu definiciju preslikavanja uključuju njegovu multiformnost / videti Kurepa [1] i Berge [1] /.

Multiforma preslikavanja uvedena i proučavana u ovom radu su takva da / prvo / njihova primena na izvedena proučavanja u analizi su prirodna i / drugo / daju mogućnost daljeg proširenja domena proučavanja analize. Da bih učinio jasnom ovu svoju misao navešću jedan primer. Pojam izvoda je jedan od osnovnih pojmova matematičke analize koji je nastao upravo kad i analiza kao samostalna matematička disciplina. Poznato je da svaka funkcija ne mora imati izvod u svakoj tački svoje oblasti definisanosti i čak da ima funkcija/ neprekidnih/ koje nemaju izvod ni u jednoj svojoj tački. Šta više skup funkcija koje nemaju izvod ni u jednoj svojoj tački je druge kategorije u prostoru svih neprekidnih funkcija. Težnja da se nadje druga definicija izvoda koja bi bila uopštenje postojeće definicije i prema kojoj bi svaka neprekidna funkcija imala izvod u tom opštijem smislu pojavljuje se sasvim prirodno.Do tog proširenja došao je L.Schwartz : izvod u smislu distribucija u D / Schwartz [1] / uvek postoji.Kako je Schwartz to postigao? On nije pošao direktno od prostora neprekidnih funkcija u kojem bi vršio željenu generalizaciju.On je išao sasvim drugim putem pri čemu je obilno koristio dostignuća moderne matematike i posebno jedno od najvažnijih dostignuća- matematičku identifikaciju.Šta se pod tim podrazumeva? Uočavanjem odredjenog skupa osobina jednog matematičkog objekta postiže se jednostavnije proučavanje tog objekta jer je pažnja skoncentrisana na jedan ograničen broj njegovih svojstava a odbačena su sva ona /uslovno/ nebitna svojstva.Matematički objekti sa istim osobinama iz uočenog skupa osobina smatraju se identičnim.Tako se u topologiji identifikuju medjusobno homeomorfni prostori, u algebri se smatraju identičnim svi oni skupovi snabdeveni izomorfnim algebarskim strukturama.Jednom takvom identifikacijom prostora neprekidnih funkcija /ili još više prostora lokalno integrabilnih funkcija/ postigao je Schwartz da svaka neprekidna funkcija ima izvod u smislu distribucija.Identifikacija o kojoj je reč prestaje kad se već uočenom skupu osobina s obzirom na koju je izvršena doda još neka osobina.Takooispada da se dve izomorfne grupe ne mogu identifikovati ili da dva homeomorfna topološka prostora predstavljaju dva različita matematička bića. Kao primer za ovo mogu poslužiti Banach-ovi prostori l_p i l_q /$p \neq q$/ koji su homeomorfni ali ne i linearno izomorfni.Tako i Schwartz-ova identifikacija ne obuhvata sve osobine neprekidnih funkcija te izvod koji je on definisao ne mora biti prepreka za proučavanje diferencijabilnosti slika jednog linearnog topološkog prostora i u nekom drugom smislu.To je upravo razlog što je u ovom radu

/§11 / uvedena jedna definicija diferencijabilnosti, povezana sa operacijom neodredjenosti definisanom u prvom paragrafu i pokazano kako see prostor distribucija D može reprodukovati kao atherencija skupa rešenja specijalnog tipa diferencijalnih jednačina čiji se izvodi uzimaju u tom "formalnom" smislu.

§1. Sadrži osnovne definicije koje karakterišu operacije neodredjenosti, zatim primere kao i utvrdjivanje mogućnosti uvodjenja tih operacija u vektorske sisteme čime se ispoljava težnja da se ta preslikavanja upotrebe u analizi.

U §2. posmatra se ona specijalna klasa operacija neodredjenosti koja na prirodan način inducira jednu relaciju poretka u skupu svih multiformnih preslikavanja skupa E u sama sebe i rasmatra restrikcija ne po domenu definisanosti već po skupu operatora.

U §3. posmatra se skup operatora jedne Abel-ove grupe i izvode zaključci o tom skupu na osnovu pojedinih svojstava dejstva tih operatora na grupu. Specijalno se zaključuje kad taj skup i sam ima grupno svojstvo.

U §4. rasmatraju se uslovi pod kojima je operacija neodredjenosti asocijativno i komutativno multiformno preslikavanje.

U §5. ispituju se uslovi slaganja jednoznačnih presikavanja i operacije neodredjenosti i, specijalno, kada je jedno linearno preslikavanje regularizacija za operaciju neodredjenosti.

U §6. uvedena je jedna relacija poretka u skupu struktura nad jednim ili više skupova, definisane neke elementarne operacije u jednom takvom skupu struktura i postavljen zahtev kakve uslove treba da zadovoljava jedno multiformno preslikavanje definisano na skupu snabdevenom izvesnim strukturama sa vrednostima u partitivnom skupu nekog drugog skupa koji takodje poseduje strukture sa odredjenim osobinama.Osnovna svrha zahteva je u tome da se multiformna preslikavanja u linearnim prostorima mogu sabirati.

§6' sadrži najopštije napomene o multiformnim preslikavanjima. U §7 tretiraju se binarne relacije nad partitivnim skupom datog skupa sa posebnim akcentom na relacijama manje finim od inkluzije nazvanim relacije tipa inkluzije.Obraćena je pažnja na to kad binarne relacije generiraju topologiju i pod kojim uslovima operacija neodredjenosti inducira relaciju ekvivalencije. Binarne relacije u topologiji prvi je kako izgleda koristio Freudental a Csaszar je pomoću njih stvorio teoriju koja objedinjuje razne topološke strukture.

§8 podeljen je na tri dela.U prvom delu rasmatra se mogućnost uvodjenja unutrašnjih operacija u partitivnom skupu date Abel-ove grupe.Uvedene su tri takve operacije.Prvu je inducirala jedna familija operacija neodredjenosti i nosila je takodje grupni karakter a posmatrane operacije neodredjenosti ispunjavale su zahtev §6.Druga je tipa "množenja podskupova" i rasprostranjena je po celom partitivnom skupu.Treća je takodje definisana na celom partitivnom skupu i ima obeležje iskazano stavom 8.3 .Drugi deo istog paragrafa sadrži rasmatranja saglasnosti operacije neodredjenosti sa strukturom skupa u kojem je uvedena ne uzimajući pritom u obzir strukture na partitivnom skupu.Treći deo paragrafa tretira topologije na partitivnom skupu date Abel-ove grupe. Uvedene su dve različite topologije: jedna nad diskretnom grupom druga nad proizvoljnom topološkom grupom.Pritom je bitno korišćena grupna struktura a nije se išlo uobičajenim putem kao na primer kod Michael-a (Michael [1]).

Celokupna linearna analiza zasniva se na jednoznačnim preslikavanjima. §9 ovog rada daje nagoveštaj kako bi se mogla zasnovati linearna analiza multiformnih preslikavanja tipa operacije neodredjenosti.

§10 sadrži rešavanja diferencijalnih jednačina u smislu distribucija i čini jednu celinu za sebe. Posmatrane su jednačine Fuks-ovog tipa mada se ista metoda može primeniti i na druge klase jednačina. (Autor raspolaže još nekim rezultatima te vrste koji nisu ušli u sadržaj ovog rada). Ako bi se uspostavila veza izmedju rešenja diferencijalnih jednačina u smislu distribucija u singularnim tačkama i jednoznačnosti klasičnih rešenja tih jednačina van singularnih tačaka to bi dalo posebnu važnost istraživanjima ove vrste.*)

Postoji ogromna literatura o integraciji u apstraktnim prostorima. Što se tiče diferenciranja malo je šta uradjeno izvan okvira Banach-ovih prostora. U slučaju poslednjih razvitku diferencijalnog računa najviše su doprineli Hildebrandt i Graves. Za slučaj lokalno konveksnih prostora razvitkom teorije bavio se S. e Silva (videti bibliografiju).

Svako uopštenje pojma izvoda zasniva se na isticanju nekog svojstva izvoda funkcija realne nezavisno promenljive jer je nemoguće preneti sve osobine poslednjeg na izvod definisan u nekom apstraktnom prostoru. U §11 ovog rada data je jedna definicija izvoda u linearnim topološkim prostorima. Ovde definisan izvod nazvan je "formalnim" jer se posmatra kao formalno invertovanje integrala pri čemu pod integralom u ovom slučaju treba podrazumevati operaciju neodredjenosti.

U poslednjem paragrafu ovog rada pokazano je kako se pomoću tih formalnih izvoda može reprodukovati prostor distribucija a možda i neki drugi linearni topološki prostori.

*)

Svi oni matematički pojmovi i stavovi koji su obuhvaćeni programom matematičkih studija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu uključujući i obavezne kurseve studija trećeg stepena ovde se podrazumevaju kao poznati.Ostali pojmovi ili stavovi za čije je objašnjenje ili navodjenje bilo potrebno više prostora čitalac može naći u bibliografiji na kraju rada.Upoznavši samo navedene pojmove čitalac može sa razumevanjem čitati ovaj rad i bez detaljnog poznavanja teorije iz koje je odgovarajući pojam uzet.Tako,na primer,i bez detaljnog poznavanja teorije distribucija čak i bez poznavanja te teorije posle vrlo kratkog upoznavanja sa njenim osnovama matematičar će razumeti bez teškoća šta je ovde radjeno u skladu sa teorijom distribucija.

Čitalac koji želi da se upozna sa osnovama teorije distribucija ima veliki izbor pogodnih publikacija da ostvari tu svoju želju.U bibliografiji na kraju ovog rada navedene su samo tri: Schwartz [1] Geljfand-Šilov [1] i Bouix [2] .

§1. DEFINICIJA OPERACIJA NEODREDJENOSTI

Mnoge operacije u matematici definišu se inverzijom drugih već definisanih operacija. Medjutim, već uvedene operacije su obično svuda definisane i jednoznačne, dok inverzne operacije ne moraju biti svuda definisane niti moraju biti jednoznačne. Najprostiji primer za tu konstataciju jeste operacija diferenciranja u prostoru beskonačno diferencijabilnih funkcija i njoj inverzna operacija - integracija. Beskonačno mnogo različitih funkcija imaju isti izvod; dve izmedju njih razlikuju se za jednu konstantu. Manje uobičajen primer predstavlja delenje distribucija sa x za koje važi sledeća teorema:

ako je S data distribucija nad R^1 postoji beskonačno mnogo distribucija T koje zadovoljavaju jednačinu $xT = S$, dve izmedju njih razlikuju se za proizvoljan multipl $c\delta$ Diracove mere δ .

U ovom radu mi uvodimo jedno preslikavanje skupa D (ili $D\times D$) u skup delova od D, $P(D)$, izomorfno jednoj unutrašnjoj kompoziciji u $P(D)$, koju nazivamo operacijom neodredjenosti i ispitujemo neka njena osnovna svojstva.

Neka je $(D,+)$ Abelova grupa $(C,\dot{+})$ grupoid i $\circ : C\times D \to D$ eksterna (spoljašnja) kompozicija u D, za koju ćemo najčešće tražiti da zadovoljava sledeće uslove:

1. $\alpha \circ (a+b) = \alpha \circ a + \alpha \circ b, \qquad a,b \in D, \qquad \alpha \in C$
2. $(\alpha \dot{+} \beta) \circ a = \alpha \circ a + \beta \circ B \qquad a \in D \quad , \alpha, \beta \in C$
3. $\theta \circ a = a$, za svako $a \in D$ ako interna kompozicija grupoida C ima neutralni element θ .

Definicija 1.1 . Neka je $(D,+)$ Abelova grupa, $(C,\dot{+})$ grupoid i $\{C_i \, ; \, i \in I\}$ jedna particija skupa C. Neka je dalje $A \subset D \times D$ i $\circledast : A \to P(D)$. Preslikavanje $\circledast$ nazvaćemo C - operacijom neodredjenosti u D s obzirom na $d_o \in D$ ako za svaki par $(a,b) \in A$ postoji bar jedan indeks $i(a,b) \in I$ takav da je $a \circledast b = \{c + \alpha \circ d_o ; \alpha \in C_{i(a,b)}\}$ a kardinalni broj bar jednog od skupova C_i veći od jedinice, pri čemu je elemenat $\underline{c}$ potpuno odredjen.

Napomena. Simbol $i(a,b)$ u definiciji 1.1 ne znači da svi različiti parovi (a,b) iz A moraju imati različite odgovarajuće indekse $i(a,b)$ već samo egzistenciju jednog takvog indeksa za svaki par (a,b).

Definicija 1.2 . C - operaciju neodredjenosti $\circledast$ nazivamo C-operacijom totalne neodredjenosti ako se skup indeksa I svodi na jedinicu. Imamo dakle

$a \circledast b = \{c + \alpha \circ d_o ; \alpha \in C\}$ za svaki par $(a,b) \in A$ ako je $\circledast$ C-operacija totalne neodredjenosti.

Elemenat $\underline{c}$ u definicijama 1.1 i 1.2 je potpuno odredjen i naziva se " stabilnom vrednošću" operatora neodredjenosti $\circledast$ u tački (a,b) dok je skup $\{\alpha \circ d_o ; \alpha \in C_i(a,b)\}$ njegov "nestabilni deo".

U uvodnom delu navedeni primeri iznalaženja primitivne funkcije i delenja distribucija sa $\underline{x}$ mogu služiti kao primeri operacija totalne neodredjenosti u skupu neprekidnih funkcija, odnosno distribucija, gde ulogu elementa d_o iz definicije igraju :funkcija $f(x) = 1$ (u prvom primeru), odnosno Diracova distribucija δ (u drugom primeru).

Ako je operacija neodredjenosti definisana na skupu $A = \{(a,b) ; a \in D\}$ (gde je $\underline{b}$ fiksirani element iz D) tada je skup A izomorfan sa D i u tom slučaju kažemo da je u D definisana unarna operacija neodredjenosti. Operacije neodredjenosti date definicijama 1.1 i 1.2 mogle bi se u tom slučaju nazivati binarnim . U daljem tekstu mi ćemo upotrebljavati termin "operacija neodredjenosti" bilo da se radi o binarnoj ili unarnoj operaciji neodredjenosti, sem kad iz teksta nije jasno o kojoj se operaciji govori.

Navešćemo jedan primer preslikavanja naznačenog tipa. Neka je dat skup

$\mathcal{A} = \{ A_1 = (1,1),\ A_2 = (-1,1),\ A_3 = (-1,1),\ A_4 = (1,-1) \}$ i neka je u $\mathcal{A}$ uvedena unutrašnja kompozicija na sledeći način

$A_i + A_j = (x_i x_j,\ y_i y_j),\quad A_i = (x_i,\ y_i)$. Tada je $(\mathcal{A}, +)$ Abelova grupa s obzirom na uvedeno sabiranje. Neka je C skup od dva elementa -1 i $+1$ i neka je izmedju tih elemenata uspostavljena kompozicija $\dot{+}$: $1 \dot{+} 1 = (-1) \dot{+} (-1) = 1$, a $(-1) \dot{+} 1 = 1 \dot{+} (-1) = -1$. Tada je $(C, \dot{+})$ grupoid. Uvedimo preslikavanje $\circledast : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to P(\mathcal{A})$ na sledeći način: $A_i \circledast A_j = \{ A_i + A_j + \alpha \circ A_i \}$ gde je $\alpha \circ A_i = (\alpha x_i,\ y_i)$ za $C = \{-1, 1\}$. Tada imamo

$$A_1 \circledast A_1 = \{A_1 + A_2, A_1 + A_1\} = \{A_2, A_1\}$$

$$A_1 \circledast A_2 = \{A_2 + A_2, A_2 + A_1\} = \{A_1, A_2\}$$

$$A_1 \circledast A_3 = \{A_3 + A_2, A_3 + A_1\} = \{A_4, A_3\}$$

$$A_1 \circledast A_4 = \{A_4 + A_2, A_4 + A_1\} = \{A_3, A_4\}$$

$$A_2 \circledast A_1 = \{A_2 + A_2, A_2 + A_1\} = \{A_1, A_2\}$$

$$A_2 \circledast A_2 = \{A_1 + A_2, A_1 + A_1\} = \{A_2, A_1\}$$

$$A_2 \circledast A_3 = \{A_4 + A_2, A_4 + A_1\} = \{A_3, A_4\}$$

$$A_2 \circledast A_4 = \{A_3 + A_2, A_3 + A_1\} = \{A_4, A_3\}$$

$$A_3 \oplus A_1 = \{A_3 + A_2 \,,\; A_3 + A_1\} = \{A_4, A_4\}$$

$$A_3 \oplus A_2 = \{A_4 + A_2 \,,\; A_4 + A_1\} = \{A_3, A_4\}$$

$$A_3 \oplus A_3 = \{A_1 + A_2 \,,\; A_1 + A_1\} = \{A_2, A_1\}$$

$$A_3 \oplus A_4 = \{A_2 + A_2 \,,\; A_2 + A_1\} = \{A_1, A_2\}$$

$$A_4 \oplus A_1 = \{A_4 + A_2 \,,\; A_4 + A_1\} = \{A_3, A_4\}$$

$$A_4 \oplus A_2 = \{A_3 + A_2 \,,\; A_3 + A_1\} = \{A_4, A_3\}$$

$$A_4 \oplus A_3 = \{A_2 + A_2 \,,\; A_2 + A_1\} = \{A_1, A_2\}$$

$$A_4 \oplus A_4 = \{A_1 + A_2 \,,\; A_1 + A_1\} = \{A_2, A_1\}$$

Navedeni primer je istovremeno i primer jedne komutativne binarne operacije neodredjenosti.

Stav.1.1 . U svakom vektorskom prostoru D moguće je definisati bar jednu unarnu operaciju neodredjenosti kojom će se D preslikati u Γ (D) .

Dokaz: Neka je D Abelova grupa i Φ polje skalara vektorskog prostora D. Podelimo skup Φ na (disjunkne) delove Φ^i tj $\Phi = \bigcup \Phi^i$; $i \in I\}$ i $\Phi^i \cap \Phi^{i'} = \phi$ za $i \neq i'$. Neka je f bilo kakvo (nekonstantno) preslikavanje (celog) skupa D u skup D. Pridelićemo preslikavanju f jedno drugo preslikavanje f_n na sledeći način: $f_n(x) = f(x) + \alpha_i \circ d_o$ gde je d_o utvrdjen element iz D različit od neutralnog elementa 0, a α_i neki (bilo koji) element iz Φ^i. Za sve elemente $\alpha_i \in \Phi^i$ smatrajmo $f(x) + \alpha_i \circ d_o$ slikom istog elementa x pomoću preslikavanja f_n. Tada je prema definiciji f_n jedna Φ- operacija neodredjenosti, s obzirom na d_o definisana na onim parovima iz DxD čija je druga koordinata d_o. Kako je skup takvih parova izomorfan sa D stav je dokazan.

Prethodni stav utvrdjuje mogućnost uvodjenja bar jedne operacije neodredjenosti u bilo kojem vektorskom sistemu. Iz dokaza istog stava vidi se da za mnoge konkretne vektorske sisteme, naprimer one čije je polje skalara skup realnih brojeva takvih mogućnosti ne samo da ima više, već ih može biti i beskonačno. Moguće bi bilo možda utvrditi i kardinalni broj skupa svih takvih operacija pri zadatom kardinalnom broju skupa skalara, ali nas ovde ne zanimaju rezultati takve prirode. Medjutim, nisu od interesa sve te operacije čija je egzistencija utvrdjena. Kao što izmedju svih preslikavanja jednog skupa u drugi biramo ona koja ispunjavaju i druge dopunske uslove (naprimer svojstva koja su zajednička za mnoge matematičke discipline, ili služe kao osnova za razvitak neke matematičke specijalnosti koja je od značaja za druge matematičke discipline - naprimer preslikavanja koja ulaze u definiciju topološkog prostora, tzv. operator Kuratovskog, unutrašnje kompozicije algebarskih struktura itd. - ili su se pokazale od značaja u primeni, tako i izmedju operacija neodredjenosti u datom skupu D nas, razumljivo, interesuju one koje se usled drugih svojih osobina pokazuju korisnim ili se pojavljuju kao prirodno povezane sa nekom drugom operacijom nesumnjivog značaja. U ovom radu čitalac će naći baš takve operacije neodredjenosti koje je pojavljuju u jednoj značajnoj grani matematike i koje je , po našem mišljenju, nužno proučavati. Postojanje strukture vektorskog sistema nije medjutim nužno za mogućnost uvodjenja (ne samo jedne) operacije neodredjenosti u datu Abelovu grupu. Kao primer za to može služiti gore navedeni primer operacije neodredjenosti u grupi $\mathcal{A}$.

§2. OPERACIJE NEODREDJENOSTI TIPA pC

Neka je C neki skup operatora Abelove grupe D i neka je pC jedan deo od C. Za $d_o \in D$ moguće je onda definisati bar jednu pC - operaciju totalne neodredjenosti s obzirom na d_o. Za različite delove pC od C imamo različite operacije totalne neodredjenosti. Bilo koju od tih operacija nazivaćemo operacijom neodredjenosti tipa pC. Predpostavimo da za $p_1C \subset p_2C$ imamo dve operacije tipa p_1C i p_2C, Φ_{p_1} i Φ_{p_2} tako da je domen definisanosti operacije Φ_{p_2} nadskup domena definisanosti operacije Φ_{p_1} i da je $\underline{a}\ \Phi_{p_1}\ \underline{b} \subset \underline{a}\ \Phi_{p_2}\ \underline{b}$. Operaciju $\Phi\ p_1$ nazvaćemo tada <u>restrikcijom po C operacije</u> Φ_{p_2}. Moguće je medjutim ovakva predpostavka: za C_1 i $C_2 \subset C$ takve da je $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ i $C_1 \not\subset C_2$ i $C_2 \not\subset C_1$ definisane su C_1 odnosno C_2 - operacije totalne neodredjenosti u D s obzirom na d_o, ali su skupovi $\{c' + \alpha \circ d_o\ ; \alpha \in C_1 \cap C_2\}$ i $\{c'' + \alpha \circ d_o ; \alpha \in C_1 \cap C_2\}$, gde su c' odnosno c'' stabilne vrednosti operatora neodredjenosti Φ_2, odnosno Φ_1, različiti. Rećićemo tada da su Φ_1 i Φ_2 nesaglasne u restrikcijama po C; u protivnom Φ_1 i Φ_2 su saglasne u restrikcijama po C.

Neka je $\Theta = \{\Phi_i\ ;\ i \in I\}$ familija operacija neodredjenosti tipa pC saglasnih u restrikcijama po C. Stavimo $\Phi_{i_0} \prec \Phi_{i_1}$ tada i samo tada kada je $\underline{a}\ \Phi_{i_0}\ \underline{b} \subset \underline{a}\ \Phi_{i_1}\ \underline{b}$. Očigledno je $\prec$ jedna relacija poretka u Θ. Neka je Θ' proizvoljan podskup od Θ. Tada svakoj operaciji neodredjenosti Φ_i odgovara definicioni skup $C_i' \subset C$. Označimo sa $C_\cup'$ ($C_\cap'$) uniju (presek) skupova C_i' a sa Φ_M (odnosno Φ_m) operacije neodredjenosti tipa pC čiji je definicioni skup operatora $C_\cup'$ (odnosno $C_\cap'$)./Predpostavka je da su sve posmatrane operacije neodredjenosti uzete u odnosu na isti element d_o iz D/. i takve su da je familija $\Theta' \cup \{\Phi_M\} \cup \{\Phi_m\}$ jedna familija operacija neodredjenosti saglasnih u restrikcijama po C. Tada se nije teškoa uveriti da je $\Phi_i \prec \Phi_M$ i $\Phi_m \prec \Phi_i$ za svako $\Phi_i \in \Theta'$. Dakle svaka podfamilija familije svih operacija neodredjenosti tipa pC saglasnih u restrikcijama po C ima maksimum i minimum. Drugim rečima dokazali smo

Stav 2.1. Familija svih operacija neodredjenosti u D $\{$ s obzirom na d_o tipa pC saglasnih u restrikcijama po C čini kompletnu latisu.

§3. O grupoidima

Definicija 3.1. Neka je C grupoid i $C' \subset C$. Neka je D Abelova grupa za koju je C skup operatora. Za C' kažemo da je kvazisimetričan, s obzirom na $D' \subset D$ ako za svako $d \in D'$ i bar jedno $\alpha \in C'$ postoji $\alpha' \in C'$ tako da je $\alpha' \circ d = -\alpha \circ d$.

Primer. Neka je (D, +) aditivna grupa realnih brojeva $D' = [0,1]$ i neka se C sastoji od svih realnih polinoma sa unutrašnjom kompozicijom slaganja $(P \circ Q)(x) = P[Q(x)]$. Neka je C' skup polinoma oblika $a x^n$. Tada je C' kvazisimetričan, s obzirom na D' jer za $x \in D'$ i, naprimer, $\alpha \circ x = a x^n$ imamo $\alpha' \circ x = -ax^n$. Ako je C skup endomorfizama onda je C' kvazisimetričan uvek kada je simetričan kao deo grupe endomorfizama, tj. kada iz $\alpha \in C'$ sledi $-\alpha \in C'$. Navedeni primer pokazuje da pojam uveden gornjom definicijom nije prazno uopštenje pojma simetričnosti.

Stav 3.1. Ako je D (Abel-ova) grupa, D' simetričan podskup od D i ako se $C' \subset C$ (C je neki skup operatora grupe D) sastoji od svih permutacija skupa D' tada je C' kvazisimetričan s obzirom na D.

Navedeni stav iskazuje dovoljne uslove pa ostaje kao interesantnije pitanje jedne vrste inverzije toga stava. Reč je naime o sledećem. Ako je $\alpha \circ a = \beta \circ a$ za svako $a \in D'$, $a \neq 0$ i ako iz te jednakosti sledi $\alpha = \beta$ rećićemo da je D' deljiv podskupom $C' \subset C$ za čije elemente je moguće izvesti gornji zaključak. Ostaje kao otvoreno sledeće pitanje: ako je Abel-ova grupa D deljiva grupoidom C dali je i pod kojim uslovima C grupa?

<u>Stav</u> 3.2. Ako je bar jedan elemenat <u>a</u> Abelove grupe D deljiv celim grupoidom C i ako je <u>a</u> distributivan s obzirom na operaciju $\dot{+}$ u grupoidu C tada je C semigrupa.

Dokaz. Kako je D grupa važi asocijativni zakon pa je

$$(\alpha \circ a + \beta \circ a) + \gamma \circ a = \alpha \circ a + (\beta \circ a + \gamma \circ a)$$

Zbog distributivnosti imamo:

$(\alpha \circ a + \beta \circ a) + \gamma \circ a = (\alpha \dot{+} \beta) \circ a + \gamma \circ a = [(\alpha \dot{+} \beta) \dot{+} \gamma] \circ a$ i slično $\alpha \circ a + (\beta \circ a + \gamma \circ a) = [\alpha \dot{+} (\beta \dot{+} \gamma)] \circ a$ pa iz pretpostavke o deljivosti celim C sledi da za svaku trojku elemenata α, β, γ iz C važi $(\alpha \dot{+} \beta) \dot{+} \gamma = \alpha \dot{+} (\beta \dot{+} \gamma)$ tj. C je semigrupa.

<u>Napomena</u>. Svaka distributivna operacija je endomorfizam to iz distributivnosti u opštem slučaju ne sledi deljivost, jer je deljivost sa distributivnošću za svako $a \in D$ ekvivalentna sa izomorfizmom.

Nazovimo <u>a - ekvivalentnim nuli</u> svaki onaj elemenat iz C čiji je proizvod sa $a \in D$ $(a \neq 0)$ jednak nuli u D. Kad je α a - ekvivalentno nuli za svako $a \in D$ rećićemo prosto da je α ekvivalentno nuli.

<u>Stav</u>. 3.3. Ako je grupoid C kvazisimetričan s obzirom na svaki simetričan podskup D' (Abelove) grupe D i ako je bar jedno $a \in D$ distributivno s obzirom na C i deljivo sa C tada je C (Abelova) grupa.

Dokaz: Posmatrajmo podskup D = $\{a, -a\}$. Kako je C' kvazisimetričan to imamo $\alpha' \circ a = -\alpha \circ a$ ili $(\alpha \dot{+} \alpha') \circ a = 0$, tj. $\alpha \dot{+} \alpha'$ je a - ekvivalentan nuli. Kako je to ispunjeno za svako $a \in D$, element $\alpha \dot{+} \alpha'$ je ekvivalentan nuli. Stavimo $\alpha_0 = \alpha \dot{+} \alpha'$. Po pretpostavci svaki par (α, α') dobijen iz pretpostavke o kvazisimetričnosti ima "zbir" ekvivalentan nuli. Neka su α_0 i α_0' dva elementa ekvivalentna nuli, tada je i njihov "zbir" ekvivalentan nuli, jer je zbog distributivnosti

$(\alpha_0 \dotplus \alpha') \circ a = \alpha_0 \circ a + \alpha_0' \circ a = 0$. Zbog deljivosti elemenat $\underline{a}$ iz D sa C imamo da su svi elementi ekvivalentni nuli jednaki medju sobom. Postoji, dakle, samo jedan elemenat ekvivalentan nuli. Uverimo se da je to neutralni elemenat kompozicije $\dotplus$. Neka je α neki elemenat iz C koji nije ekvivalentan nuli i α_0 elemenat iz C koji to jeste. Tada iz pretpostavke o deljivosti i distributivnosti imamo iz $(\alpha \dotplus \alpha_0) \circ a = \alpha \circ a$, zaključak $\alpha \dotplus \alpha_0 = \alpha$ i slično $\alpha_0 \dotplus \alpha = \alpha$ tj. α_0 je zaista neutralni elemenat kompozicije $\dotplus$.

Za dato α elemenat α' koji " sabran" sa α daje neutralni element je inverzan i sa leva i sa desna, dakle inverzan. Treba se uveriti još i da je inverzni element α' za svako α jedinstven. To medjutim sledi iz pretpostavke o deljivosti, jer ako bi bilo $\alpha \dotplus \alpha' = \alpha_0$ i $\alpha \dotplus \alpha_1' = \alpha_0$ množeći te jednakosti sa $a \in D$ $(a \neq 0)$ sa koje smo pretpostavili da je deljivo celim C imali bismo $(\alpha \dotplus \alpha') \circ a = 0$ i $(\alpha' \dotplus \alpha_1') \circ a = 0$ i dalje $\alpha \circ a = -\alpha' a$ i $\alpha \circ a = -\alpha_1' \circ a$ pa iz jednakosti levih strana sledi $\alpha' \circ a = \alpha_1' \circ a$ a iz deljivosti još i $\alpha' = \alpha_1'$. Uverimo se da je $(C, \dotplus)$ Abelova grupa. Posmatrajmo $\alpha \dotplus \alpha_1$ i $\alpha_1 \dotplus \alpha$ pri čemu pretpostavljamo da α i α_1 nisu jedan drugom inverzni niti je bilo koji od njih neutralni element kompozicije $\dotplus$. Kad ta dva elementa pomnožimo sa već uočenim $\underline{a}$ iz D imamo

$$(\alpha \dotplus \alpha_1) \circ a = \alpha \circ a + \alpha_1 \circ a = \alpha_1 \circ a + \alpha_0 \circ a = (\alpha_1 \dotplus \alpha) \circ a ,$$

tj. $\alpha \dotplus \alpha_1 = \alpha_1 \dotplus \alpha$.

<u>Stav</u>. 3.4. Da element $-d_0$ bude sadržan u nestabilnom delu operacije neodredjenosti $\oplus$ za svaki par $(a, b) \in A$ potrebno je i dovoljno da je particija $\{C_i ; i \in I\}$ kvazisimetrična s obzirom na $\{d_0\}$.

Jasno je šta se podrazumeva pod kvazisimetričnom particijom: svaki element particije kvazisimetričan je u smislu definicije 3.1. Da je ovaj stav ekvivalentan definiciji 3.1. za $D' = \{d_0\}$ iz definicije lako se uveriti pa je taj dokaz izostavljen.

Sledeća konstatacija je očigledna ali je njen sadržaj od interesa.

K. Neka je kardinalni broj skupa indeksa I veći od 1. Da neutralni elemenat 0 Abelove grupe D bude sadržan u nestabilnom delu operacije neodredjenosti $\oplus$ za svaki par $(a,b) \in A$ potrebno je i dovoljno da za svako $i \in I$ postoji $\alpha_i \in C^i$ takvo da je $\alpha_i \circ d_o = 0$.

Definicija 3.2. Neka je data trojka elemenata (a,b,c) i trojka parova (a,b), (b,c) i (a,c) kojima se operacija neodredjenosti $\oplus$ korespondiraju sledeći podskupovi od C: $C_{i(a,b)}$, $C_{i(b,c)}$ i $C_{i(a,c)}$; za trojku (a,b,c) kažemo da je d_o - kompatibilna ako postoje elementi α, β, γ $(\alpha \in C_{i(a,b)}, \beta \in C_{i(b,c)}, \gamma \in C_{i(a,c)})$ takvi da je $\alpha \circ d_o = \beta \circ d_o = \gamma \circ d_o$.

Ako je svaka trojka parova d_o - kompatibilna rećićemo da je kompatibilna operacija neodredjenosti $\oplus$ u D.

Operacija totalne neodredjenosti u D je očigledno kompatibilna u D.

Definicija 3.3. Neka je D topološka Abelova grupa snabdevena C - operacijom neodredjenosti u D s obzirom na d_o, $\oplus$. Za $\oplus$ rećićemo da je B - generativna operacija neodredjenosti ako je nestabilni deo operacije neodredjenosti $\oplus$ u svakoj tački (a, b) u kojoj je definisana jedan Borelov skup iz D.

§4. Komutativnost i asocijativnost operacija neodredjenosti

Jedna C operacija neodredjenosti (totalne neodredjenosti) ne mora biti ni komutativna ni asocijativna. Kasnije ćemo navesti primere za to. Sada ćemo sa sledeća dva stava konstatovati mogućnosti uvodjenja komutativnih i asocijativnih operacija neodredjenosti u skupove odredjene vrste.

<u>Stav</u> 4.1. U linearnom prostoru D (nad poljem C) čija aditivna grupa ima više od jednog generatornog elementa, uvek je moguće definisati bar jednu komutativnu C-operaciju totalne neodredjenosti.

Dokaz. Kako Abelova grupa (D, +) ima više od jednog generatornog elementa postojaće d_o, $d \in D$ takvi da ni jedan od njih nije multipl drugog. Posmatrajmo bilo koju simetričnu funkciju sa dva argumenta x i y, f (x, y), definisanu na D x D, sa vrednostima u D. Definišimo jedno drugo preslikavanje $f_n : D \times D \longrightarrow D$ na sledeći način: $f_n (x, y) = f_n (y, x) = f (x, y) + \alpha \circ d_o$. Smatrajući sve elemente oblika $f (x, y) + \alpha \circ d_o$, $\alpha \in C$ slikom istog para (x, y) imamo jednu komutativnu operaciju totalne neodredjenosti. Najprostija forma funkcije f (x , y) bilo bi x + y. Zahtev da Abelova grupa sadrži više od jednog generatornog elementa obezbedjuje u opštem slučaju egzistenciju više od jednog elementa oblika $a + \alpha \circ d_o$ a time i egzistenciju tražene operacije neodredjenosti.

<u>Stav</u>. 4.2. Pod uslovima prethodnog stava uvek je moguće definisati bar jednu asocijativnu C operaciju totalne neodredjenosti.

D-okaz se izvodi konstrukcijom sličnom dokazu prethodnog stava. Beležeći sa + unutrašnju kompoziciju Abelove grupe, dovoljno je uzeti na primer f (x, y) = a + x + y a f_n definisati na gornji način pa će f_n biti asocijativna C - operacija totalne neodredjenosti.

Iz prethodnih stavova sledi da se u svakom vektorskom prostoru (nad poljem Φ) čija Abelova grupa ima više od jednog generatornog elementa, može definisati jedna asocijativna i komutativna Φ - operacija totalne neodredjenosti. Za dokaz dovoljno je uzeti, napr. $f(x, y) = a + x + y$ i definisati $f_n(x, y)$ kao u dokazima prethodnih stavova.

Posmatraćemo sada operacije neodredjenosti homogene po obema koordinatama, tj.

$$\alpha_1 \circ x_1 \oplus \alpha_2 \circ x_2 = (\alpha_1 \dot{+} \alpha_2) \circ (x_1 \oplus x_2)$$

Napomena: pod simbolom $\alpha \circ (x_1 \oplus x_2)$, budući da je $x_1 \oplus x_2$ u opštem slučaju skup elemenata iz D, treba podrazumevati onaj podskup od E čiji se svaki elemenat dobija množenjem sa α elemenata iz $x_1 \oplus x_2$.

Stav 8.3. Da homogena C - operacija totalne neodredjenosti u D s obzirom na d_0, bude asocijativna, potrebno je i dovoljno da bude asocijativna u $D \setminus \{\alpha \circ d_0 ;\ \alpha \in C\}$ i da za svako $a \in D$ važi $a \oplus d_0 = d_0 \oplus a = d_0$.

Dokaz: za $x, y, z \in D$ imamo $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus \{u + \alpha \circ d_0 ;\ \alpha \in C\} = \{x \oplus u + \alpha \circ (x \oplus d_0)\} = \{\{u' + \alpha' \circ d_0\} + \alpha \circ \{u'' + \alpha'' \circ d_0\}\} = \{u' + \alpha \circ u'' + \alpha_1 \circ d_0\}$ . . . . (1)

gde je stavljeno $\alpha' \dot{+} \alpha'' = \alpha_1$ i uzeta u obzir protpostavka $a \oplus d_0 = d_0 \oplus a = d_0$

I slično

$(x \oplus y) \oplus z = \{v' + \alpha \circ v'' + \alpha_1 \circ d_0\}$ . . . . (2)

Iz (1) i (2) sledi da je jednakost

$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ moguća tada i samo tada kada je $u' = v'$ i $u'' = v'' = d_0$, što upravo i jeste tvrdjenje stava, jer prva od ovih jednakosti je tvrdjenje da je operacija $\oplus$ asocijativna na $D \setminus \{\alpha \circ d_0 ;\ \alpha \in C\}$.

§5. Regularizujuće operacije

Definicija 5.1. Mi nazivamo regularnom operacijom u D preslikavanje $f : D \times D \to \mathcal{P}(D)$ $[$ili $f : D \to P(D)]$ ako se slika pomoću f bilo kojeg elementa iz $D \times D$ (ili D) uvek sledi na jednočlan podskup od D.

Prema definiciji operacija neodredjenosti nije regularna operacija.

Sledeći stav daje odnos izmedju regularnih operacija i operacija neodredjenosti definisanih nad istim skupom D.

Stav 5.1. Neka je $\oplus$ C – operacija neodredjenosti u D s obzirom na d a f linearno i regularno preslikavanje od D u D takvo da je $f(d_0) \neq 0$. Tada je

$f \circ \oplus$ C – operacija neodredjenosti u D s obzirom na d_0.

Napomenimo da pod linearnim preslikavanjem grupe s operatorima D u D podrazumevamo preslikavanje sa osobinom
$f(\alpha \circ x + \beta \circ y) = \alpha \circ f(x) + \beta \circ f(y)$

Neka je za neki par $(x, y) \in D \times D$, $x \oplus y = \{z + \alpha \circ d_0 ; \alpha \in C_1\}$

Posmatrajmo dva različita elementa iz D, $z_1 = z + \alpha' \circ d_0$ i $z_2 = z + \alpha'' \circ d_0$, što se može naći bar za jedno $i_0 \in I$ jer je $\oplus$ operacaja neodredjenosti. Budući da je f linearno važi $f(z_1) = f(z) + \alpha' \circ f(d_0)$ i $f(z_2) = f(z) + \alpha'' \circ f(d_0)$.

S obzirom da je D grupa i da nema pravih delitelja nule i da je $\alpha' \neq \alpha''$ a $f(d_0) \neq 0$ sledi $f(z_1) \neq f(z_2)$ tj. $\{z + \alpha \circ d_0\}$ ne sastoji se iz samo jednog elementa bar za jedno i_0 te je $f \circ \oplus$ C – operacija neodredjenosti u D s obzirom na d_0.

Definicija 5.2. Operator f u skupu D snabdevenom znanom operacijom neodredjenosti $\oplus$ nazivamo regularizujućim tada i samo tada kada je $f \circ \oplus$ regularan operator u D.

To znači da je f regularizujući operator za operator neodredjenosti Θ ako se za svako $x \in D$ ~~za koje je Θ definisano~~ ceo skup $\Theta(x)$ preslikava operatorom f u jednu jedinu tačku.

Stav. 5.2. Linearni operator f je regularizujući za C - operator neodredjenosti Θ s obzirom na d_o u linearnom prostoru D tada i samo tada kada je $f(d_o) = 0$.

Dokaz. Posmatrajmo skupove oblika $\{u + \alpha_i \circ d_o\}$ gde je $u \in D$ utvrdjeno i $\alpha_i \in C^1$ pretpostavljajući da se pri tom menja i $i \in I$. Neka je $x \in D$ i $\Theta(x) = \{u + \alpha_i \circ d_o : \alpha_i \in C^1\}$. Imaćemo $f[\Theta(x)] = \{f(u) + \alpha_i \circ f(d_o)\}$, jer je f linearno preslikavanje. Zbog $f(d_o) = 0$ i $\alpha_o \circ 0 = 0$ proizilazi da se skup $\{f(u) + \alpha_i \circ f(d_o)\}$ sastoji iz samo jednog elementa. Pretpostavimo sada da je $f(d_o) \neq 0$. Tada za $\alpha_i \neq \alpha_{i'}$ sledi $\alpha_i \circ f(d_o) \neq \alpha_{i'} \circ f(d_o)$, budući da je D linearni prostor, te se bar za jedno $i \in I$ skup $\{f(u) + \alpha_i \circ f(d_o)\}$ ne sastoji od samo jednog elementa pa operator f ne može biti regularizujući.

Ranije smo naveli deljenje distribucija sa x za primer operatora neodredjenosti. Imajući u vidu da je $x^\alpha \delta_{(x)} = 0$ za svako $\alpha > 0$ primećujemo da je za operator neodredjenosti deljenja distribucija sa x regularizujući operator množenje funkcijama x^n, $n \in N$. Šta više za istu operaciju neodredjenosti regularizujući operator je množenje bilo kojom beskonačno diferencijabilnom funkcijom koja ima nulu u tački $x = 0$.

§6. Jedan logički zahtev

Posmatrajmo dve algebarske ili topološke strukture (ili opštije dve bilo kakve matematičke strukture) definisane u opštem slučaju na različitim skupovima X i Y. U skupu uočenih struktura iste vrste, nezavisno od toga da li su definisane na istom skupu ili nisu, uspostavićemo relaciju poretka na sledeći način: rećićemo da je struktura P grublja od strukture Q i pisati $P \prec Q$ ako struktura Q ispunjava sve zahteve potrebne za definiciju strukture P. Dve strukture bez zajedničkih svojstava smatramo neuporedivim. Tako napr. struktura kvazi grupe grublja je od strukture grupe.

Za dve strukture P i Q koje ispunjavaju uslov $P \prec Q$ i $Q \prec P$ rećićemo da su ekvivalentne. Pritom ne treba shvatiti da ekvivalentne strukture moraju biti i izomorfne. Ciklične grupe od 3 i 4 elementa nisu izomorfne; medjutim strukture tih grupa su ekvivalentne u smislu uvedene definicije. Isto tako diskretne topologije skupova od m i n elemenata $(m \neq n)$ su ekvivalentne u smislu naše definicije, dok ta dva prostora nisu homeomorfna. Uvedena relacija ekvivalencije sadrži u sebi u izvesnom smislu univerzalne zahteve za objedinjavanje jednog skupa struktura dopuštajući pritom slobodu njihovih individualnih varijacija.

Neka su $P_1, \ldots, P_n$ strukture. Pod $\bigcap_{i=1}^{n} P_i$ podrazumevaćemo strukturu koja poseduje svojstva svake od struktura P_i. Slično $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ znači strukturu čije je svako svojstvo istovremeno svojstvo bar jedne od struktura P_i.

Neka je (E, P) skup E snabdeven strukturom P i $(P(E), Q)$ partitivni skup skupa E snabdeven strukturom Q. Pretpostavimo da su P i Q uporedive u smislu uredjenja koje smo u nekom skupu struktura gore uveli. Posmatrajmo preslikavanja od (E, P) u (P (E), Q) označimo sa F jedan skup takvih preslikavanja i sa R jednu strukturu u F iste prirode kakve su strukture P i Q. Radi kraćeg izražavanja par (E, P) sastavljen od skupa E i strukture P na njemu nazivaćemo "prostorom" nezavisno od toga da li je taj par čini prostor u već ustaljenom smislu (vektorski prostor, topološki prostor) ili ne. Sa tom konvencijom (F, R) je prostor. Za prostor (F, R) rećićemo da je regularan ako je $P \cap Q \prec R$, što znači da struktura R poseduje bar ona svojstva koja su zajednička strukturama P i Q. Slično tome, ako imamo više prostora (E, P_i) i (P (E), Q_i), i = 1, ..., n prostor (F, R) će biti regularan samo tada, kada je $\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i \right) \prec R$.

Sada možemo uvesti naš osnovni logički zahtev.

(L) Prostor (F, R) mora biti regularan.

Zahtev (L) nas ograničava u proizvoljnosti uvodjenja preslikavanja $f: E \to P (E)$ i daje orijentaciju u kom smeru moraju biti orijentisane naše težnje kad želimo da uvedemo neku strukturu u skupu $F = \{ f \}$.

§6' O multiformnim preslikavanjima

Pojam multiformne funkcije može se naći u mnogim starijim knjigama, mada je često lišen preciznog smisla. Karakteristično svojstvo funkcije ili preslikavanja je u tome, da jednom elementu u definicionom skupu (skupu koji preslikavamo) odgovara samo jedan elemenat u skupu slici. Precizan smisao multiformnih funkcija sastoji se u tome, što se dati skup preslikava u partitivni skup nekog drugog datog skupa. Dakle, svakom elementu jednog skupa odgovara potpuno odredjen podskup drugog skupa. Multiformna preslikavanja u novije vreme najintenzivnije je proučavao Panomarjov i dokazao čitav niz dubokih teorema. Njegova proučavanja odnose se medjutim na opšte topološke prostore, ne pretpostavljajući skupove sa složenijim sastavom struktura. Za nas medjutim, od interesa su samo ona preslikavanja, u skupu kojih je moguće uvesti bar neke od onih algebarskih operacija koje poseduje skup original ili skup slika. Najmanji zahtev koji postavljamo jednom skupu multiformnih preslikavanja sastoji se u tome, da se u tom skupu može uvesti " sabiranje" s obzirom na koje je taj skup semi-grupa. Pritom ni to sabiranje ne može biti proizvoljno, već se mora poklapati sa već uobičajenim sabiranjima tzv. " prirodnih " preslikavanja. Objasnićemo primerom na koje se to preslikavanje misli, kada se kaže prirodno preslikavanje. Neka je G topološka grupa, N jedna od njenih normalnih podgrupa i G/N odgovarajuća kvocijent grupa. Preslikavanje $f : G \to G/N$ definisano tako, da je za $x \in G$, $f(x) = X$ gde je $X \in G/N$ i $x \in X$ je homomorfizam topološke grupe G na topološku grupu G/N i nosi uobičajeni naziv " prirodni " homomorfizam ". U teoriji topoloških grupa postoje mnoga preslikavanja koja nose naziv prirodnih (videti napr. Pontrjagin, Topološke grupe). Sva ta preslikavanja su u suštini multiformna preslikavanja i familija multiformnih preslikavanja F koju mi posmatramo, mora sadržati i ta " prirodna " preslikavanja.

Mi u ovim razmatranjima polazimo od skupa E snabdevenog strukturom grupe (topološke grupe) ili bilo kojim drugim sastavom algebarskih i topoloških struktura, pa s obzirom na ciljeve kojima idemo, imamo dvojak zadatak 1° $P(E)$ snabdeti sličnim strukturama tako da strukture na E i na $P(E)$ budu uporedive; i

2° odabrati što je moguće širu klasu multiformnih preslikavanja F takvih da prostor (F, R) bude regularan tj. da bude ispunjen logički zahtev (L).

Eksplicitnije problem je u sledećem: u partitivnom skupu date semi-grupe (topološke semi-grupe) ili grupe (topološke grupe) ili modula (ili topološkog modula) ili vektorskog prostora (vektorskog topološkog prostora) nad nekim prstenom ili poljem, definisati odgovarajuće strukture čiji će " podprostori " (u smislu prethodnog stava) biti već poznate kvocijent strukture i tako da je moguće uvesti familiju F multiformnih preslikavanja koja će sadržavati i sva "prirodna " preslikavanja i pritom će biti ispunjen zahtev (L).

Evo jednog primera " prenošenja " unutrašnje kompozicije o grupe G (pretpostavka je da je kompozicija o svuda definisana) sa G u P (G). Neka je ρ relacija ekvivalencije u G saglasna sa unutrašnjom kompozicijom o. Tada je G/ρ deo od P (G) i čini grupu s obzirom na unutrašnju kompoziciju $\odot$ ovako definisanu.

$\rho(x) \odot \rho(y) = \rho(x \circ y)$, gde $\rho(x)$ znači klasu ekvivalencije kojoj pripada elemenat x iz G . Tako je relacija ekvivalencije ρ indicirala jednu grupnu operaciju u P (G). Preslikavanje $f : G \to G/\rho$ koje svakom elementu x iz G pridružuju klasu ekvivalencije kojoj x pripada svakako je jedan primer multiformnog preslikavanja.

Skup svih homomorfizama grupe G u grupu G' čini grupu dakle istu strukturu kojom su snabdeveni skupovi G i G' i primer je skupa preslikavanja koje ispunjava zahtev (L).

§ 7. BINARNE RELACIJE

Neka je E topološka grupa ili opštije topološki prostor. Označimo sa ρ binarnu relaciju definisanu na familiji $\mathcal{O}$ otvorenih skupova topološkog prostora E; ρ je po definiciji podskup od $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$. Ponekad se posmatraju binarne relacije nad partitivnim skupom datog skupa E. Posmatranja binarnih relacija nad familijom otvorenih skupova datog topološkog prostora su opštija jer ne isključuju pretpostavku da posmatrana topologija bude i diskretna. Jedna proizvoljna binarna relacija nad diskretnom topologijom datog skupa, tj. nad partitivnim skupom datog skupa definiše jednu topologiju nad tim skupom ako binarna relacija ρ ispunjava sledeće uslove:

1. $\emptyset \, \rho \, \emptyset$ i $E \, \rho \, E$
2. Iz $A \rho B$ i $A' \rho B'$ $\Rightarrow A \cap A' \, \rho \, B \cap B'$
3. Iz $A_i \, \rho \, B_i$ $(i \in I) \Rightarrow (\bigcup_{i\in I} A_i) \, \rho \, (\bigcup_{i\in I} B_i)$

Binarna relacija ρ koja poseduje ova tri svojstva odredjuje jednu topologiju na E. Ta topologija se može definisati na sledeći način: nazovimo otvorenim one potskupove od E koji su u relaciji sa sobom i neka je $\mathcal{O}$ familija tih skupova; tada imamo:

1° $\emptyset \in \mathcal{O}$ i $E \in \mathcal{O}$ (sledi iz 1.)

2° Iz $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{O}$ (sledi iz 2.), što se naravno proširuje na konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{O}$.

3° $A_i \in \mathcal{O}$ $(i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$ (sledi iz 3.)

Nazovimo relacijom <u>tipa inkluzije</u> svaku onu binarnu relaciju na partitivnom skupu jednog skupa koja je manje fina od inkluzije. Tako, naprimer, binarna relacija $A \rho B \iff A \cap B = \emptyset$ ili relacija $A \rho B \iff A$ je komplement od B nisu relacije tipa inkluzije. Iz već izloženog i činjenice da je $A \rho B \iff A \subset \operatorname{Int} B$ binarna relacija tipa inkluzije zaključujemo:

Stav 7.1. Restrikcija binarne relacije ϱ koja ispunjava uslove 1.- 3. na dijagonalu proizvoda $P(E) \times P(E)$ je relacija tipa inkluzije.

Ovde ostaje otvoreno drugo pitanje daleko interesantnije i značajnije: da li je svaka relacija ϱ sa osobinama 1.- 3. relacija tipa inkluzije, ili opštije koji su potrebni i dovoljni uslovi da jedna binarna relacija na $P(E)$ bude relacija tipa inkluzije. Odgovor na to pitanje bio bi od velikog interesa zbog značaja koji imaju relacije tipa inkluzije.

Binarne relacije nad partitivnim skupom su specifične po karakteru. Dok kod binarnih relacija nad skupom čiji su elementi tačke ne možemo na neki prirodan način datoj tački pridelititi neku drugu tačku, pa proučavati za par tačaka koje su u relaciji odgovarajući par pridel̂jenih, kod relacija nad partitivnim skupom korespondencija zadatom paru elemenata nekog drugog para elemenata može se izvesti na prirodan način i to višestruko. Na taj način je moguće polazeći od zadate relacije nad partitivnim skupom dobiti drugu relaciju i da u izvesnim slučajevima poznavanje osobina jedne od njih olakšava poznavanje osobina druge.

Definicija 7.1. Neka je na $P(E)$ zadata binarna relacija ϱ Za relaciju ϱ_c rećićemo da je C - dualna (za razliku od uobičajenih dualnih relacija) ako iz $A \varrho B$ sledi $CA \ \varrho_c \ CB$.

Definišimo C-dualnu relaciju ϱ_c relaciji ϱ sa osobinama 1.- 3. Ona očigledno ispunjava uslov.

1' $\emptyset \ \varrho_c \ \emptyset$ i $E \ \varrho_c \ E$

Neka je $A_1 \ \varrho \ B_1$ i $A_2 \ \varrho \ B_2$. Na osnovu 2. tada je $A_1 \cap A_2 \varrho B_1 \cap B_2$. C-dualna relacija relaciji ϱ sadrži parove koji su komplementi skupova čiji parovi pripadaju relaciji ϱ. Parovima (A_1, B_1) i (A_2, B_2) korespondentni su (CA_1, CB_1) i (CA_2, CB_2) a paru $(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2)$ odgovara par$(CA_1 \cup CA_2, CB_1 \cup CB_2)$ pa izostavljajući oznaku komplementa možemo napisati zaključak

2' Iz $A_i \varrho_c B_i \implies (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \varrho_c (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$

Sličnim rezonovanjem dolazimo do zaključka da je za

C-dualnu relaciju relaciji ρ sa osobinama 1. - 3. karakteristična i sledeća osobina

$3'$ Iz $A_i \, \rho_c \, B_i \quad (i \in I) \Longrightarrow (\bigcap_{i \in I} A_i) \, \rho_c \, (\bigcap_{i \in I} B_i)$ za proizvoljan skup indeksa I. Važi dakle:

Stav 7.2. C-dualna relacija relaciji ρ sa osobinama 1.- 3. je relacija ρ_c sa osobinama $1'$ - $3'$. Nazivajući zatvorenim svaki onaj skup koji je u relaciji ρ_c sa sobom zaključujemo da relacija ρ_c sa osobinama $1'$ - $3'$ takodje čini od E topološki prostor.

Iz dokazanog lako je uveriti se da je relacija ρ tipa inkluzije ne samo kod skupova koji su u ρ relaciji sa sobom već i kod komplemenata takvih skupova.

Neka je D snabdeven jednom C-operacijom neodredjenosti s obzirom na d_o koju ćemo označavati sa $\oplus$. Tada svakom paru $(a,b) \in A$ $[A \subset D \times D$ je oblast definisanosti operacije neodredjenosti $\oplus]$ odgovara indeks $i(a,b)$ takav da je $a \oplus b = \{c + \alpha_i o d_o \; ; \; \alpha_i \in C^i\}$. Za odredjeno i potpuno je odredjen skup $C^i \subset C$. Uvedimo sada u D binarnu relaciju ρ na sledeći način:

Rećićemo da je

(*) $\quad a \, \rho \, b$ tada i samo tada kada je $a - b = \alpha_i o \, d_o, \quad \alpha_i \in C^i$.

Od najvećeg interesa je slučaj kada je uvedena relacija jedna relacija ekvivalencije.

Stav 7.3. Neka je u linearnom prostoru D definisana Φ- operacija totalne neodredjenosti s obzirom na $d_o \in D$ (gde je Φ polje skalara vektorskog prostora D). Tada relacija ρ definisana sa (*) predstavlja jednu relaciju ekvivalencije.

Dokaz se svodi na jednostavnu proveru aksioma koji definišu relaciju ekvivalencije.

Stav 7.4. Neka je $\oplus$ kompatibilna C-operacija neodredjenosti u D s obzirom na $d_o \in D$, $\{C^i\}$ disjunktna podela skupa C takva da je za svako $i \in I$ C^i kvazisimetričan s obzirom na $\{d_o\}$ i neka se C sastoji od neparnih permutacija skupa D. Tada je relacija ρ uvedena pomoću (*) relacija ekvivalencije.

Dokaz. Iz predpostavke da se C sastoji iz neparnih permutacija sledi da za svako $i \in I$ neutralni element Abelove grupe D pripada skupu $C^i \circ d_o$ a odatle proizilazi $\underline{a}\ \rho\ \underline{a}$ za svako $a \in D$.

Kako je C^i $(i \in I)$ kvazisimetričan s obzirom na d_o to iz $a - b = \alpha \circ d_o$ i $b - a = -\alpha \circ d_o$ sledi da postoji $\alpha' \in C^i$ takvo da je $b - a = -\alpha' \circ d_o$ tj. da iz $a \rho b$ sledi i $b \rho a$.

Neka je za trojku (a,b,c) ispunjeno $a \rho b$ i $b \rho c$. Kako je operacija neodredjenosti $\oplus$ kompatibilna ta trojka je d_o - kompatibilna pa proizilazi da je tada ispunjeno i $a \rho c$, što dokazuje da je uvedena binarna relacija stvarno relacija ekvivalencije

§8. STRUKTURE U PARTITIVNOM SKUPU

1. Najčešće sretane algebarske operacije definisane u (ili na) partitivnom skupu datog skupa E su one koje definišu unija i presek (ili razlika, simetrična razlika), a najčešće sretane algebarske strukture definisane tim operacijama su Bool-ov prsten i Bool-ova algebra. Isto tako često nailazi se na sledeću operaciju u partitivnom skupu. Ako je E grupa i ρ relacija ekvivalencije saglasna sa strukturom grupe onda u $E/_\rho \subset P(E)$ definiše se sabiranje klasa ekvivalencije koje takodje ima grupni karakter. To je dakle jedna mogućnost uvodjenja operacije u partitivnom skupu. Ukoliko je E vektorski prostor isto će biti i $E/_\rho$ kao deo od $P(E)$.

Predmet našeg proučavanja su operacije neodredjenosti, dakle po samoj svojoj definiciji, jedna vrsta multiformnih preslikavanja. Sledeći stav ima pomoćni karakter. Neka je E Abelova grupa i C neki skup operatora u E. Neka je dalje E' simetričan podskup od E (tj. iz $d \in E'$ sledi $-d \in E'$). Označimo sa $F' = \left\{ f_i \ ; \ i \in I \right\}$ familiju C - operacija neodredjenosti u E s obzirom na $d_i \in E'$.

Definicija 8.1. Familiju C-operacija neodredjenosti F nazivamo konačnim proširenjem familije F' C-operacija neodredjenosti, ako je svaki element iz F C-operacija neodredjenosti s obzirom na zbir od konačno mnogo elemenata iz F'.

Očigledno je $F \supset F'$.

Stav 8.1. Neka su θ_1 i θ_2 dve C-operacije totalne neodredjenosti u istom skupu D, s obzirom na d_1 i d_2 respektivno. Neka su ρ_1 i ρ_2 relacije ekvivalencije generisane tim operacijama neodredjenosti. Tada je $\rho_1 \cup \rho_2$ takodje relacija ekvivalencije i identična je onoj relaciji ekvivalencije koju generiše C-operacija totalne neodredjenosti u D, s obzirom na d_1+d_2.

Dokaz. Klase ekvivalencije u ρ_1 su oblika $\{c+\alpha \circ d_1\}$ gde je c stabilna vrednost operatora neodredjenosti θ_1. Klase ekvivalencije u ρ_2 su oblika $\{c'+\alpha \circ d_2\}$ (c' označava stabilnu vrednost operatora neodredjenosti θ_2). Klase ekvivalencije trećeg operatora neodredjenosti su oblika $\{c'' + \alpha \circ (d_1 + d_2)\}$. Da bi se sve označene klase u okviru iste relacije ekvivalencije razlikovale medju sobom, ne može biti $c = \alpha \circ d_1$, $c' = \alpha' \circ d_2$ i $c'' = \alpha'' \circ d_1 + \alpha'' \circ d_2$. Da bi unija ρ_1 i ρ_2 činila relaciju ekvivalencije, ne može biti c ni $\alpha \circ d_1$ ni $\alpha' \circ d_2$ za bilo kakvo α i α' pa ni za $\alpha = \alpha'$ tj. sve moguće unije klasa ekvivalencije iz ρ_1 i ρ_2 čine disjunktne skupove koji se poklapaju sa skupovima oblika $\{c_1 + \alpha \circ d_1 + \alpha \circ d_2\}$.

Stav 8.2. Neka je E vektorski prostor i ρ_α, $\alpha \in A$ familija svih relacija ekvivalencije na E saglasnih sa strukturom vektorskog prostora E. Neka je E^0 neutralni element u odgovarajućem količnik prostoru E/ρ_α. Tada je $\bigcap_{\alpha \in A} E^0_\alpha = \{0\}$, gde je 0 neutralni element vektorskog prostora E.

Dokaz. Neka je, suprotno tvrdjenju, $\bigcap_{\alpha \in A} E^0_\alpha \neq \{0\}$. Označimo sa $[a]$ vektorski podprostor prostora E generisan elementom a iz E. Tada za $0 \neq a \in \bigcap_{\alpha \in A} E^0_\alpha$ sledi da je $[a] \subset \bigcap_{\alpha} E^0_\alpha$. Neka je $b \in E$, $b \neq a$. Tada za neko α_0 identični su prostori

E/ρ_{α} i $E/[b]$. Medjutim je $[a] \cap [b] = \{0\}$ pa je nemoguća predpostavka da je $0 \neq a \in \bigcap_{\alpha} E^{0}_{\alpha}$.

Dogovorimo se da C-operaciju neodredjenosti f' s obzirom na $-d_0$ nazivamo simetričnom jednoj drugoj C-operaciji neodredjenosti s obzirom na d_0 (označimo je sa f) ako je za svako $x \in E$ stabilni deo od $f'(x)$ inverzni elemenat stabilnog dela od $f(x)$ u Abelovoj grupi E. U slučaju binarne operacije neodredjenosti potrebno je dopuniti ove uslove još i zahtevom da se oblasti definisanosti obeju operacija neodredjenosti poklapaju. Neka je sada $F = \{ f_i \ ; \ i \in I \}$ familija homogenih C-operacija totalne neodredjenosti koja predstavlja konačno proširenje familije F' definisane u odnosu na simetričan podskup E' od E i ima osobinu da iz $f \in F$ sledi da i simetričan elemenat od f pripada F. Označimo sa ρ_i relaciju ekvivalencije induciranu operacijom neodredjenosti f_i. Neka je $P'(E) \subset P(E)$ skup čiji su elementi klase ekvivalencije iz ρ_i za svako $i \in I$. Uzmimo još da je skup operatora C takav da svaki elemenat iz C predstavlja neparnu permutaciju od E' i konačnih zbirova elemenata iz E'. Poslednje će sigurno biti kada je C' distributivan u E'.

U $P'(E)$ uvedimo unutrašnju kompoziciju $\boxplus$ na sledeći način

$$\{u + \alpha \circ d_{i_0}\} \boxplus \{u' + \alpha \circ d_{i_1}\} = \{(u+u') + (d_{i_0}+d_{i_1})\}$$

Jasno je iz predpostavki o F i iz definicije $P'(E)$ da je $\boxplus$ stvarno unutrašnja kompozicija u $P'(E)$. Dakle za svaki par f_{i_0}, $f_{i_1} \in F$ i svako $x \in E$ (odnosno $(a,b) \in A$) ima smisla simbol $f_{i_0}(x) \boxplus f_{i_1}(x)$. Pored toga $P'(E)$ snabdeven tako uvedenom kompozicijom $\boxplus$ čini Abelovu grupu. S obzirom da je E Abelova grupa $\boxplus$ je očigledno asocijativna i komutativna operacija u $P'(E)$. Neutralni element je $\{o\}$ (o je neutralni element iz E; da o pripada $P'(E)$ sledi iz predpostavke o simetričnosti familije preslikavanja F), a inverzni element elementu $\{u+\alpha\circ d\}$ je $\{-u + \alpha\circ d\}$.

Ako je E vektorski prostor isto će biti i $P'(E)$, ukoliko je samo spoljašnje množenje uvedeno na sledeći način: za $A \in P(E)$ je $\alpha A = \{ \alpha a;\ a \in A \}$.

Dobra strana ovako uvedene algebarske strukture u partitivnom skupu je u tome što je ona ista kao i algebarska struktura polaznog skupa. Rdjava strana sastoji se u tome što se uvedena operacija ne prostire po celom partitivnom skupu već je njen domen jedan deo partitivnog skupa (tačnije kvadrata dela partitivnog skupa).

Jasno je da je nemoguće snabdeti ceo $P(E)$ grupnom operacijom koja bi inducirala grupne operacije kod kvocijent grupa grupe E, jer bi, prema stavu 1 ovog paragrafa, neutralni element grupe E morao biti i neutralni element od $P(E)$, pa je nemoguće da za bilo koju relaciju ekvivalencije ρ u E saglasnu sa strukturom grupe E E/ρ bude podgrupa $P(E)$ jer bi i E/ρ moralo imati isti neutralni elemenat što je nemoguće.

Navešćemo još dva načina uvodjenja unutrašnje operacije u $P(E)$.

U skupu F operacija neodredjenosti definisanom na početku ovog paragrafa uvedimo sabiranje + stavljajući

$$(f_{i_0} + f_{i_1}) x = f_{i_0} x + f_{i_1} x$$

Lako se uveriti da tako uvedeno sabiranje čini od F Abelovu grupu.

Familija operacija neodredjenosti koja je inducirala u $P'(E)$ grupnu operaciju ispunjava dakle zahtev (L) iz §6.

Prvi način uvodjenja "sabiranja" u partitivnom skupu jedne Abelove grupe E, trivijalan u tom smislu što dolazi kao prvi odgovor na pitanje kako se jedan takav skup može snabdeti svuda definisanom unutrašnjom operacijom je sledeći.

Za $A, B \in P(E)$ stavimo

$$A + B = \{ a + b;\ a \in A,\ b \in B \}$$

Operacija + definisana je očigledno na celom $P(E)$. Imamo još

$$(A + B) + C = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\} + C =$$

$$\{(a + b) + c;\ a \in A,\ b \in B,\ c \in C\} = \{a + (b + c)\} =$$

$$= A + \{b + c;\ b \in B,\ c \in C\}$$

$$= A + (B + C)$$

tj. uočeno sabiranje je asocijativno.

Zbog komutativnosti grupe E ono je i komutativno. To je medjutim sve što se može tim putem dobiti jer očigledno uvedena operacija ne poseduje ostala grupna svojstva.

Ovakvo sabiranje je tipa "množenja podskupova" kakvim se bavio Dubreil u radu [1].

Neka su sada ρ_α, $\alpha \in A$ sve mogućе relacije ekvivalencije u Abelovoj grupi E saglasno je sa strukturom grupe E. Za dato α neka su H_α^s, $s \in S = S(\alpha)$ klase u koje ρ_α deli skup E. Uočimo H_α^s i H_β^t. Posmatrajmo sve moguće zbirove $a_\alpha^s + a_\beta^t$, gde $a_\alpha^s \in H_\alpha^s$ i $a_\beta^t \in H_\beta^t$.

Neka je H_γ^r klasa ekvivalencije u ρ_γ gde je $\gamma \in A$ čiji je predstavnik element $a_\alpha^s + a_\beta^t$. Ako sa S i T označimo indeks skupove od H_α^s i H_β^t imamo da je $r \in S \times T$. Stavimo

$$H_\alpha^s \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} H_\beta^t = \bigcup_{r,\gamma} H_\gamma^r, \quad r \in S \times T, \quad \gamma \in A$$

Ako je A neka klasa ekvivalencije a B nije stavićemo $A \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} B = A$. Ako ni A ni B nisu klase ekvivalencije stavljamo $A \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} B = \{0\}$.

Kako je uniranje skupova asocijativna i komutativna operacija nezavisno od broja unikata važi

$$(A \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} B) \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} C = A \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} (B \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} C) \text{ i } A \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} B = B \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} A$$

za svako $A, B, C \in P(E)$, tj. $(P(E), \mathbin{\triangle\!\!\!\!+})$ je komutativna semigrupa. Zvaćemo je <u>Q - semigrupa grupe E</u>.

Posmatrajmo podskup od $P(E)$ koji se sastoji od klasa induciranih jednom proizvoljnom relacijom ekvivalencije. Prema načinu definisanja operacije u Q - semigrupi grupe E imamo $H_\alpha^s \mathbin{\triangle\!\!\!\!+} H_\alpha^t = H_\alpha^r$, tj. dobijamo količnik grupu E/ρ_α. Važi dakle

<u>Stav</u> 8.3. Svaka kvocijent grupa grupe E podgrupa je Q - semigrupe grupe E.

2. Do sada smo posmatrali Abelovu grupu D i zanimali se samo algebarskim osobinama operacije neodredjenosti $\oplus$ koju smo u D uveli. Išči smo i dalje sa predpostavkama uzimajući da je skup D snabdeven strukturom vektorskog prostora. Medjutim, mi se nismo interesovali za druge (nealgebarske) strukture kojima D može biti snabdeveno. Sada ćemo predpostaviti da je D snabdeveno jednom topološkom strukturom. Pritom, bitan zahtev koji postavljamo toj topološkoj strukturi sastojaće se u tome da sve algebarske operacije kojima operišemo moraju biti neprekidne u smislu posmatrane topologije. One topologije na skupu D koje ne budu ispunjavale taj zahtev nas neće interesovati. Slično tome uvodjenje novih algebarskih operacija u D snabdeveno takvom topologijom biće u opštem slučaju onemogućeno jer je prirodno očekivati da te nove operacije ne budu saglasne sa postojećom topologijom. Predpostavimo dakle da je u skupu (D, +) uvedena topologija $\mathcal{T}$ saglasna sa operacijom + . Osnovno pitanje koje se nameće jeste: da li je operacija neodredjenosti saglasna sa već postojećom topologijom.

Posmatrajmo skup D i jednu njegovu particiju D_s, $s \in S$ za čije različite elemente ne predpostavljamo da su disjunktni. Usvojimo termin <u>Kvocijentizacija</u> za sledeći postupak: Uklanjanjem elemenata $D_{s'}$, $s' \in S' \subset S$ skup $\{D_s\}$ je disjuntna particija skupa D (ukoliko je naravno taj postupak izvodljiv).

<u>Definicija</u> 8.2. Neka je $\oplus$ C-operacija neodredjenosti u D (D je topološka grupa) takva da familija skupova $\mathcal{D} = \{a \oplus b;\ (a,b) \in D \times D\}$ čini particiju od D.

Za $\oplus$ rećićemo da je saglasna sa strukturom topološke grupe ako je svaka kvocijentizacija od D topološki količnik u kvocijent skupu dobijenom tom kvocijentizacijom. Drugim rečima ako jednu odredjenu kvocijentizaciju označimo sa ρ_α onda je operacija neodredjenosti Θ saglasna sa topologijom topološke grupe D ako je projekcija od D u D/ρ_α neprekidna za svako α iz skupa indeksa svih mogućih kvocijentizacija.

Stav 8.4. Neka je D vektorski topološki prostor i Θ operacija totalne neodredjenosti u D. Tada je Θ saglasna sa topologijom u D. Ako je topologija iz D Hausdorffova isto je i topologija u D/ρ gde je D/ρ proizvoljna kvocijentizacija iz definicije 8.2.

Dokaz. Posmatrajmo skup $D' = \{\alpha \circ d_0,\ \alpha \in C\}$. Taj skup je linearni potprostor od D jer za $a_1, a_2 \in D'$ sledi

$$\alpha_1 \circ a_1 + \alpha_2 \circ a_2 = \alpha_1 \circ (\alpha_1' \circ d_0) + \alpha_2 (\alpha_2' \circ d_0)$$

$$(\alpha_1 \dot{+} \alpha_1')\circ d_0 + (\alpha_2 \dot{+} \alpha_2')\circ d_0 = [(\alpha_1 \dot{+} \alpha_1') \dot{+} (\alpha_2 \dot{+} \alpha_2')] \circ d_0 \in D'.$$

Od ranije je poznato da je $\mathcal{D}$ iz definicije 8.2 kvocijentskup. Treba dokazati ~~da~~ još da je topologija koju inducira D u $\mathcal{D}$ saglasna sa strukturom vektorskog prostora $\mathcal{D}$ (predpostavljamo da je poznata ta činjenica o strukturi $\mathcal{D}$ s obzirom na jedinstvenost kvocijentizacije ρ i na prirodu njenog nastanka). Radi toga primetimo da su elementi skupa $\mathcal{D}$ oblika $x + D'$ pa je na osnovu teoreme 5.7. (Kelley [1]) topologija skupa $\mathcal{D}$ koju inducira projekcija iz D saglasna sa strukturom vektorskog prostora, a iz predpostavke da je D Hausdorffov sledi da je to i $\mathcal{D}$ snabdeven količnik topologijom.

Svrha definicije 8.2. bila je da se definicijom saglasnosti operacije neodredjenosti sačuva neprekidnost projekcija topološke grupe u bilo koju od njenih kvocijent grupa. Opšta definicija saglasnosti izmedju operacije neodredjenosti i topologije skupa u kojem je uvedena doćiće docnije kad bude uzeta u obzir topologija partitivnog skupa. Definicija 8.2. kazuje šta pod saglasnošću treba podrazumevati bez predpostavke o postojanju bilo kakve topologije na partitivnom skupu. Dokazani stav takodje daje samo jedan dovoljan (mada veoma važan) uslov a ne predstavlja rešenje problema u opštem slučaju.

Rešavanje tog problema u opštem slučaju ostavljamo za drugu priliku.

3. Sada ćemo partitivni skup date Abelove grupe E topologizirati. U tom cilju koristićemo metod uvodjenja topologije pomoću binarnih relacija, slično postupku iz prethodnog paragrafa.

Definisaćemo na partitivnom skupu P(E) Abelove grupe E binarnu relaciju ϱ na sledeći način

(1) Za A, B $\subset$ P(E) kazaćemo da su u relaciji ϱ ako postoji $C_{[A,B]} \subset$ E, tj. C $\in$ P(E) takav da za svako $A' \in A$ i $B' \in B$ i svaki par $(a,b) \in A' \times B'$ važi $a - b \in C$.

Nazovimo "zatvorenim" one podskupove od P(E) koji ispunjavaju sledeće uslove

(2) 1^o Svaki od "zatvorenih" skupova u relaciji je sa samim sobom, tj. $A \varrho A$.

2^o Korespondentni skup $C[A, B]$ sadrži kao potskup podgrupu grupe E, koja nije trivijalna za svaki par (A, B) iz relacije tj. nesastoji se ~~samo~~ iz $\{o\}$.

Stav 8.5. Binarna relacija (1) na P(E) pomoću klase podskupova od P(E) izdvojenih sa (2) odredjuje u P(E) jednu topologiju.

Radi dokaza dovoljno je uveriti se da klasa "zatvorenih" skupova zadovoljava uslove koji se zahtevaju od familije zatvorenih skupova u jednom topološkom prostoru. Pre svega je P(E) element te familije (koju ćemo označiti sa $\mathfrak{F}$) kojem korespondiramo samu grupu E, jer je za svako $A', B' \in$ P(E) $a-b \in E$ za svaki par $(a,b) \in A' \times B'$ budući da je operacija koju koristimo unutrašnja za E. Pored toga nećemo doći u protivrečnost ako stavimo $\emptyset \in \mathfrak{F}$. Treba dokazati da je unija konačno mnogo elemenata iz $\mathfrak{F}$ takodje elemenat iz $\mathfrak{F}$. Radi toga dovoljno je uzeti samo dva elementa jer dalji dokaz ide indukcijom.

Elementima A i B iz $\mathfrak{F}$ odgovaraće podskupovi od E (tj. elementi P(E)) C [A, A] (kraće C [A]) i C [B, B] (kraće C [B]) takvih da C [A] i C [B] sadrže po jednu podgrupu od E kao svoj podskup. Uzmimo proizvoljne $A' \in A$ i $B' \in B$. Za $a \in A'$ i $b \in B'$ razlika $a - b$ pripadaće jednom skupu C koji izvesno sadrži onu podgrupu od E koja je sadržana u C [A] i onu podgrupu od E koja je sadržana u C [B] jer to mora biti slučaj za parove $(a, a') \in A' \times A'$ i $(b, b') \in B' \times B'$ a to prema uslovu (2) znači da je $A \cup B \in \mathfrak{F}$.

Treba dokazati još da presek proizvoljnog mnoštva elemenata iz $\mathfrak{F}$ pripada $\mathfrak{F}$. Neka su $A_i \in \mathfrak{F}$, $i \in I$. Tada $A' \in \bigcap_i A_i$ pripada svakom A_i i odgovarajući C [A_i] sadrži podgrupu E_i od E. Svaki$(a, b) \in A' \times A'$ ispunjava uslov $a - b \in C [A_i]$. Iz $C [A_i] \supset E_i$ sledi $\bigcap_i C [A_i] \supset \bigcap_i E_i$ pa kako je presek proizvoljnog mnoštva podgrupa od E takodje podgrupa od E to sledi da skup C [A] korespondiran preseku $A = \bigcap_i A_i$ takodje sadrži podgrupu od E, tj. $A \in \mathfrak{F}$.

Q - semigrupa grupe E snabdevena na gornji način definisanom topologijom $\mathfrak{I}$ naziva se topološka ϱQ-semigrupa topološke grupe E.

Definisana topologija $\mathfrak{I}$ nije diskretna (sledi iz 2^{0}) ali je previše bogata otvorenim skupovima i sem toga svojstva ovako uvedene topologije nisu ni u kom pogledu indusirana svojstvima topologije u E.

U partitivnom skupu jedne topološke grupe uvešćemo sada jednu drugu topologiju indusiranu na izvestan način topologijom te topološke grupe. Neka je $A = \{\alpha\}$ indeks skup svih mogućih relacija ekvivalencije ϱ_α u E saglasni sa strukturom topološke grupe. Označimo sa H^i_α proizvoljnu klasu ekvivalencije iz E/ϱ_α. Neka je O bilo koji otvoren skup topološke grupe E i $I(\alpha) = \{i_\alpha\}$ indeks skup svih onih klasa ekvivalencije iz E/ϱ_α koje seku skup O. Za elemente subbaze topologije na P(E) uzmimo sledeće podskupove od $P(E)$ $\left\{ \bigcup_{i\in I(\alpha)} H^{i}_{\beta} \cup \{o\} \right\}$ kojima po potrebi možemo dodati i još neke druge potskupove od $P(E)$.

Definicija 8.3. Partitivni skup $P(E)$ topološke grupe E snabdeven unutrašnjom kompozicijom Q-semigrupe grupe E i na gornji način uvedenom topologijom nazivamo topološkom Q-semigrupom grupe E.

Definiciju 8.3. treba opravdati i to dvojako: 1° dokazati da je $P(E)$ snabdeven strukturom Q-semigrupe i topološkom strukturom uvedenom na gornji način stvarno topološka semigrupa tj. da je operacija koja definiše Q-semigrupu neprekidna u smislu uvedene topologije i 2° treba opravdati oznaku Q koja je ranije bila sugerisana sadržajem stava 8. 5 . Nužno je dakle dokazati sledeći

Stav 8.6. Neka je (E, T) Abelova topološka grupa i $(P(E), \mathcal{T}_p)$ njoj odgovarajuća topološka Q-semigrupa. Tada:

1° Operacija $\triangle$ u Q-semigrupi grupe E neprekidna je u smislu topologije $\mathcal{T}_p$ i

2° Sve moguće topološke kvocijent grupe E/ρ_α grupe E topološke su podgrupe topološke Q-semigrupe grupe E, $(P(E), \mathcal{T}_p)$.

Dokaz. Neka su $A, B \in P(E)$. Razlikujmo dva slučaja

1. i A i B su klase ekvivalencije za neki par $(\alpha,\beta) \in \in A \times A$

2. A i B ne predstavljaju nikakvu klasu ekvivalencije ni za jedno α.

Posmatrajmo u slučaju 1. proizvoljnu okolinu O_P od $A \triangle B$ u $(P(E), \mathcal{T}_p)$. Za neko $a \in A \subset E$ i $b \in B \subset E$ okolina O_P je prema načinu na koji je uvedena unutrašnja operacija $\triangle$ i topologija u $P(E)$ inducirana nekom okolinom O elementa $a + b$ iz E. Kako je E topološka grupa postoje okoline O_a i O_b elemenata a i b respektivno takve da je $O_a + O_b \subset O$. Okolina O_a odnosno O_b sigurno inducira u $(P(E), \mathcal{T}_p)$ okolinu O_A (odnosno O_B). Jasno je da je otvoren skup u $\mathcal{T}_p$ induciran otvorenim skupom $O_a + O_b$ iz T potskup otvorenog skupa u $\mathfrak{T}_p$ koji indducira O. Neka se $O_a \triangle O_b$ ne svodi na $\{o\}$ lako je tada videti da je $O_a \triangle O_b \subset O_p$. U slučaju kada je $O_a \triangle O_b = \{o\}$ odgovarajuća inkluzija je očigledna po samoj definiciji topologije $\mathfrak{T}_p$ čime je za slučaj 1^o dokazana neprekidnost operacije $\triangle$ u smislu topologije $\mathfrak{T}_p$.

U slučaj 2. sličnim rezonovanjem utvrdjuje se tačnost stava 8.6 pod 1^o.

Iz pretpostavke da je E Asbelova grupa sledi da su sve njenje podgrupe invarijantne. Pored toga svaka relacija ekvivalencije u grupi E saglasna sa strukturom grupe E je ekvivalencija po modulu neke invarijantne podgrupe od E. Neka je O otvoren skup topološke grupe E i A proizvoljan podskup od E. Iz teorije topoloških grupa (videti naprimer Pontrjagin [1]) da je tada $O \circ A$ (ili $A \circ O$) otvoren skup.

Posmatrajmo preslikavanje $f : E \to P(E)$ definisano na sledeći način: za $x \in E$ je $f(x) = \bigcup_{\alpha \in A} H_\alpha^x$, tj. slika od $x \in E$ je unija svih klasa ekvivalencije kojima x pripada u količnik skupovima E/ρ_α. Restrikcija preslikavanja f po njegovoj drugoj koordinati na E/ρ_α nije ništa drugo do projekcija od E na E/ρ_α. Iz definicije toplogije T_p i gornjih razmatranja sledi da je preslikavanje f otvoreno pa je to isto i projekcija topološke grupe E u topološki prostor E/ρ_α, kao podprostor od $(P(E), T_p)$. U teoriji topoloških prostora poznat je sledeći stav: Ako je f neprekidno i otovreno preslikavanje topološkog prostora (X, T) <u>na</u> topološki prostor (Y, T') onda je (Y, T') topološki količnik od (X, T). Da dokažemo drugi deo stava potrebno je dakle još dokazati da je projekcija neprekidno preslikavanje topološke grupe E u topološki prostor E/ρ_α kao podprostor od $(P(E), T_p)$. Dokazaćemo više od toga da je na gornji način definisano preslikavanje f neprekidno. Neka je O_p (otvorena) okolina tačke $f(x)$ ($x \in E$, $f(x) \subset E$). Ta okolina je inducirana nekom okolinom O tačke x iz E. Posmatrajmo bilo koju drugu okolinu O' od x takvu da je $O' \subset O$. Iz načina na koji je definisana topologija $\mathcal{T}_p$ i preslikavanja f sledi da je $f(O') \subset O_p$ te je f neprekidno preslikavanje topološkog prostora (E, T) u topološki prostor $(P(E), \mathcal{T}_p)$. Odatle sledi da je i projekcija od E na E/ρ_α neprekidno preslikavanje za svako $\alpha \in A$ pa je E/ρ_α kao podprostor od $(P(E), \mathcal{T}_p)$ topološki količnik od E. Time je stav u potpunosti dokazan.

Sada smo u mogućnosti da damo definiciju saglasnosti operacije neodredjenosti sa strukturom grupe u kojoj je uvedena.

Definicija 8. 4. Za C-operaciju neodredjenosti $\oplus$ rećićemo da je saglasna sa strukturom grupe E ako je kao preslikavanje od (E x E, T x T) ili (E, T) u $(P(E), \mathcal{T}_p)$ neprekidna.

Ova definicija uključuje u sebe kao specijalan slučaj definiciju 8.2.

§9. Θ_n-proširenje linearnih operatora

Primetimo najpre da je jedan C - operator neodredjenosti u X s obzirom na d_0 regularan operator u X ako se samo iz $P(X)$ isključe podskupovi skupa $\{\alpha_\theta d_0;\ \alpha \in C\}$

Za regularizaciju r operatora neodredjenosti Θ kažemo da je normalna ako ona predstavlja jednu od inverzija regularnog operatora Θ u $X - X'$, gde je $X' = \{\alpha \circ d_0;\ \alpha \in C\}$.

Stav 9.1. Svaki operator neodredjenosti ima bar jednu normalnu regularizaciju.

Sa već uobičajenim oznakama uvedimo preslikavanje f' sa sledećom osobinom

$$f'(\alpha \circ d_0) = 0 \quad \text{za svako} \quad \alpha \in C.$$

Ako smo sa f označili posmatranu operaciju neodredjenosti onda se tražena normalna regularizacija od f dobija proizvoljnim izborom jedne od inverzija preslikavanja f na skupu $X - X'$ tako da se proširenje te inverzije na celo X poklapa sa f' u tačkama skupa X'.

Utvrdjena činjenica omogućuje nam uvodjenje proširenja linearnih diferencijalnih operatora.

Definicija 9.1. Neka je $P(D)$ 1 - 1 linearni diferencijalni operator definisan u nekom linearnom topološkom prostoru X sa koeficijentima definisanim svuda izuzev u jednom retkom skupu (interior njegovog komplementa gust je u X), X_0. Operator $\overline{P}(D)$ nazvaćemo Θ_n-proširenjem linearnog diferencijalnog operatora $P(D)$ ako je svakom $x_0 \in X_0$ moguće korespondirati $d_0 \in X$ tako da je $\overline{P}(D)$ operator neodredjenosti s obzirom na d_0 i pritom se svaka normalna regularizacija od $\overline{P}(D)$ u $X - X_0$ poklapa sa inverzijom od $P(D)$.

Drugim rečima svaka normalna regularizacija od $\overline{P}(D)$ predstavlja (ako se poslužimo terminologijom uobičajenom u teoriji običnih diferencijalnih jednačina u R^1) jedan "integral" od $\overline{P}(D)$, gde pod integralom podrazumevamo original slike dobijene pomoću diferencijalnog operatora.

Napomena. Definicija 9.1. odnosi se na linearne diferencijalne operatore. Proširenje njome dato može se medjutim dati za proizvoljne linearne operatore. Evo modifikacije definicije 9.1.

Neka je f 1 – 1 linearni operator u nekom linearnom topološkom prostoru X definisan svuda izuzev u jednom retkom skupu X_0 u X. Operator $\bar{f}$ nazvaćemo Θ_m-proširenjem linearnog operatora f ako je svakom $x_0 \in X_0$ moguće korespondirati $d_0 \in X$ tako da je $\bar{f}$ unarna operacija neodredjenosti s obzirom na d_0 i pritom se svaka normalna regulizacija od $\bar{f}$ poklapa u $X - X_0$ sa inverzijom od f.

Kao primer Θ_m-proširenja linearnih operatora navešćemo Θ_m-proširenje linearnih funkcionela.

Neka je E lokalno konveksan linearni topološki prostor snabdeven jednom unarnom operacijom neodredjenosti f_n saglasnom sa strukturom vektorskog topološkog prostora E. To znači da je $f_n(x + y) = f_n(x) + f_n(y)$ gde $f_n(x) + f_n(y)$ znači "zbir" definisan u (E) na ranije uvedeni način (videti § 3). Budući da je E lokalno konveksan postoji netrivijalna funkcionela definisana na E. Za f ćemo pretpostaviti da je E – generativna (videti definiciju 3.5.). Neka je za $x \in E$, E_x nestabilna vrednost operatora neodredjenosti f_n. Označimo sa $\mu(E_x)$ jednu μ – meru skupa E_x. Definišimo linearnu funkcionelu $f^*(x)$ na sledeći način:

$$f^*(x) = f(x) + i\,\mu(E_x)$$

gde je f(x) netrivijalna funkcionela, a $\mu(E_x)$ posmatrana mera skupa. Pri ovom pretpostavljamo da $\mu(E_x)$ nije beskonačno za svako $f^*(x)$. Za operaciju neodredjenosti pretpostavljamo da je takva da različitim elementima x i y iz E odgovaraju isti ili različiti podskupovi od C i da je $\mu(\{d_0\}) = 0$. Na taj način i mera će biti u izvesnom smislu saglasna te je na gornji način definisana funkcionela dobro definisana.

Proučavanje Θ_m– proširenja diferencijalnih operatora mogu se dalje vršiti prema postojećim modelima teorije linearnih operatora što može predstavljati predmet posebnog proučavanja i na njemu se u ovom radu nećemo više zadržavati.

§ 10. REŠENJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA U SMISLU DISTRIBUCIJA

U ovom paragrafu ispituju se rešenja običnih diferencijalnih jednačina u smislu distribucija. Operacije sabiranja distribucija, množenja distribucija diferencijabilnim funkcijama i diferenciranja u prostoru distribucija omogućile su formiranje diferencijalnih izraza oblika:

$$y^{n} + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n y - z$$

gde su: p_i – diferencijalbilne funkcije a y i z distribucije. Izjednačivši sa nulom jedan takav izraz, dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu.

Postavlja se pitanje kakvo je rešenje jedne takve jednačine?

U slučaju kada su koeficijenti beskonačno diferencijabilne funkcije (bez singulariteta) rešenja diferencijalne jednačine u smislu distribucija ne razlikuje se od klasičnog rešenja jedne takve jednačine (videti Geljfand – Šilov [1] str.58).

U slučaju kad koeficijenti imaju singularitete, mogu se pojavljivati i nova rešenja u smislu distribucija, a mogu isčezavati i klasična (videti primere u istom delu na str.61).

U ovom paragrafu posmatrane su upravo takve jednačine. Pretpostavlja se radi uprošćenja da svi koeficijenti imaju iste singularitete ili ih neki od koeficijenata uopšte nemaju, a da bi stvar ispala što jednostavnija, pretpostavlja se da se skup singulariteta svodi na jednu tačku, a da je ta tačka početak koordinatnog sistema u kompleksnoj ravni.

U literaturi se takva ispitivanja ne vrše suviše često, jer proširenje gore navedenih operacija na skup singulariteta koeficijenata nije dovoljno dobro obrazloženo. Smatram da je najispravniji put proučavanje takvih jednačina iznalaženje njihovih formalnih rešenja u smislu poslednjih paragrafa ovog rada. Ispitivanje kada je Dirac-ova distribucija rešenje diferencijalnih jednačina ipak su vrlo često i zanimljiva. (naročito u fizici). Tim pitanjem se bavio i M.Bouix u radu[1]).

Ovde se posmatraju uglavnom jednačine Fuks-ovog tipa sa koordinatnim početkom, kao jedinim singularitetom koeficijenata.

U teoriji običnih diferencijalnih jednačina dobro je poznat sledeći stav: jedine singularne tačke rešenja diferencijalne jednačine

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0 \; (\alpha)$$

su (eventualno) singularne tačke koeficijenata p_i. Na osnovu toga interesantno je ispitati da li diferencijalna jednačina ( ) ima za rešenje distribuciju, čiji je nosač singularitet nekih ili svih koeficijenata p_i. Takva distribucija po Schwartz -u (videti Schwartz- [1]teor. XXXV , gl. III str.100) predstavlja linearnu kombinaciju Diracove distribucije i njenih izvoda do izvesnog reda n. Oblik rešenja našeg problema je poznat . Potrebno je naći način da se ono efektivno dobije. Taj način je pokazan u dokazu sledećeg stava:

Stav 10.1. Neka je data diferencijalna jednačina

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + P_o(x)\, y = 0 \quad \dots\dots (10.1)$$

gde su: $P_s(x)$ ($s = 0,1\dots,n-1$) meromorfne funkcije takve da $P_s(x)$ ima u koordinatnom početku pol. ($n - s$) - og reda,dakle $P_s(x) = x^{s-n} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^s x^\nu$ i neka je $p_o^s \neq 0$ ($s = 0,1,\dots, n-1$); tada jednačina (10.1) ima netrivijalno rešenje u prostoru distribucija date formulom:

$$y = c_o \delta + c_1 \delta' + \dots + c_N \delta^{(N)} + y_k$$

gde je y_k klasično rešenje jednačine (10.1), Diracova distribucija a koeficijenti $c_1,\dots,c_N$ su potpuno odredjeni do na proizvoljan kompleksni množitelj c_o, pod uslovom da izmedju koeficijenata p_o^s postoji veza.

$$(-1)^n (N+n)! + \sum_{s=0}^{n-1} p_o^s (-1)^s (N+s)! = 0 \quad (10.2)$$

Dokaz: stavimo

$$y = \sum_{k=0}^{N} r_k \, x^k \, \delta^{(N)} \tag{10.3}$$

Diferencirajući jednačinu (10.3) s - puta po x dobijamo:

$$y^{(s)} = \sum_{\ell=0}^{s} \binom{s}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k \, k(k-1)\ldots(k-\ell+1)\, x^{k-\ell} \delta^{(N+s-\ell)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} r_k \, x^k \, \delta^{(N+s)} + \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k \, k(k-1)\ldots(k-\ell+1) \, . \, x^{k-1} \delta^{(N+s-1)}$$

([illegible])

$$(s = 0, 1, \ldots, n).$$

Smenom vrednosti za $y^{(s)}$ u jednačinu (10.1) dobijamo:

$$\sum_{k=0}^{N} r_k \, x^k \delta^{(N+n)} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k \, k\,(k-1)\ldots(k-\ell+1) \, . \, x^{k-1} \delta^{(N+n-1)} + x^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^{n-1} x^\nu \Big[\sum_{k=0}^{N} r_k \, x^k \delta^{(N+n-1)} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k \, k(k-1)\ldots(k-\ell+1) \, x^{k-\ell} \, {}^{(N+n-1)} \Big] +$$

$$+ x^{s-n} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^{s} x^\nu \Big[\sum_{k=0}^{N} r_k \, x^k \delta^{(N+s)} + \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k \, k$$

$$(k-1)\ldots(k-\ell+1) \, x^{k-1} \delta^{(N+s-1)} \Big] + \ldots + x^{-n} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^{0} x^\nu$$

$$\sum_{k=0}^{N} r_k \, x^k \delta^{(N)} = 0 \tag{10.4}$$

Imajući u vidu formulu (10.5).

$$x^k \delta^{(m+k)} = (-1)^k \frac{(m+k)!}{m!} \delta^{(m)}$$

jednačinu (10.3) možemo napisati u obliku:

$$\sum_{k=0}^{N} r_k (-1)^n \frac{(N+n)!}{N!} x^{k-n} \delta^{(N)} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k \cdot$$

$$\cdot k(k-1)\ldots(k-\ell+1)(-1)^{n-1} \frac{(N+n-\ell)!}{N!} x^{k-n} \delta^{(N)} +$$

$$+ x^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^{n-1} x^\nu \Big[\sum_{k=0}^{N} r_k (-1)^{n-1} \frac{(N+n-1)!}{N!} x^{k-n+1} \delta^{(N)} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k k(k-1)\ldots(k-\ell+1)(-1)^{n-\ell-1} \frac{(N+n-\ell-1)!}{N!}$$

$$\cdot x^{k-n+1} \delta^{(N)} \Big] + \ldots + x^{s-n} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^s x^\nu \Big[\sum_{k=0}^{N} r_k (-1)^s \frac{(N+s)!}{N!} \cdot$$

$$\cdot x^{k-s} \delta^{(N)} + \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k k(k-1)\ldots(k-\ell+1)(-1)^{s-\ell} \cdot$$

$$\cdot \frac{(N+s-1)!}{N!} x^{k-s} \delta^{(N)} \Big] + \ldots + x^{-n} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^o x^\nu \sum_{k=0}^{N} r_k x^k \cdot$$

$$\cdot \delta^N = 0 \qquad (10.6)$$

Pošto pomnožimo jednačinu (10.6) sa x^n i oslobodimo se uglastih zagrada dobijamo:

$$\sum_{k=0}^{N} r_k x^k (-1)^n \frac{(N+n)!}{N!} \delta^{(N)} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k k(k-1) \cdot$$

$$\ldots (k-\ell+1)(-1)^{n-\ell} \frac{(N+n-\ell)!}{N!} x^k \delta^{(N)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^{n-1} x^\nu \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{N} r_k (-1)^{n-1} \frac{(N+n-1)!}{N!} x^k \delta^{(N)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^{n-1} x^\nu \cdot \sum_{\ell=1}^{n-1}$$

$$\binom{n-1}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k\, k\,(k-1)\ldots(k-\ell+1)\,(-1)^{n-\ell-1} \frac{(N+n-\ell-1)\,!}{N!}\, x^k \delta^{(N)}$$

$$+\ldots+\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^s\, x \sum_{k=0}^{N} r_k\, (-1)^s \frac{(N+s)!}{N!}\, x^k \delta^{(N)} +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^s\, x^\nu \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} \sum_{k=0}^{N} r_k\, k\,(k-1)\ldots(k-\ell+1)\,(-1)^{s-1} \frac{(N+s-\ell)}{N!}$$

$$x^k \delta^{(N)} +\ldots+ \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^o\, x^\nu \sum_{k=0}^{N} r_k\, x^k \delta^{(N)} = 0 \qquad (10.7)$$

Budući da je $x\,\delta = 0$ iz (10.5) može se izvesti:

$$x^{m+n} \delta^{(m)} = 0 \text{ za } m > 0 \qquad (10.8)$$

Imajući u vidu (10.8) lako je zaključiti da jednačina (10.7) ostaje zadovoljena kada se beskonačni redovi $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^s x^\nu$ ($s = 0,1,\ldots, n-1$) zamenå polinomima $\sum_{\nu=0}^{N} p_\nu^s x^\nu$ ($s = 0,1,\ldots, n-1$). Izvršivši u tako transformisanoj jednačini naznačeno množenje dobijamo:

$$\delta^{(N)} \Big\{ \sum_{k=0}^{N} r_k (-1)^n \frac{(N+n)!}{N!}\, x^k + \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=0}^{N} r_k\, k\,(k-1)\ldots$$

$$(k-\ell+1)\,(-1)^{n-\ell} \frac{(N+n-\ell)!}{N!}\, x^k \sum_{k=0}^{2N} x^k \sum_{\nu=0}^{k} r\,(-1)^{n-1}$$

$$\frac{(N+n-1)!}{N!}\, p_{k-\nu}^{n-1} + \sum_{k=0}^{2N} x^k \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{n-1} r_k\, \nu\,(\nu-1)\ldots(\nu-\ell+1)$$

$$(-1)^{n-\ell-1} \Big(\frac{N+n-\ell-1)!}{N!}\, p_{k-\nu}^{n-1} +\ldots+ \sum_{k=0}^{2N} x^k \sum_{\nu=0}^{k} r_\nu\, (-1)^s$$

$$p_{k-\nu}^{s} \frac{(N+s)!}{N!} + \sum_{k=0}^{2N} x^k \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} r_\nu\, \nu\,(\nu-1)\ldots$$

$$(\nu-\ell+1)\,(-1)^{s-\ell}\,\frac{(N+s-\ell)!}{N!}\,p^{s}_{k-\nu}+\dots+\sum_{k=0}^{2N}x^{k}\sum_{\nu=0}^{k}r\,p^{o}_{k-\nu}\Bigg)$$

$=0$ (10.9), što posle ponovne primene obrasca (10.5) i sredjivanja postaje:

$$\delta^{(N)}\Bigg(\sum_{k=0}^{N}x^{k}\Bigg\{r_k\,(-1)^{n}\,\frac{(N+n)!}{N!}+\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}r_k\,k(k-1)\dots(k-\ell+1)\,(-1)^{n-1}\,\frac{(N+n-1)!}{N!}+\sum_{\nu=0}^{k}r_\nu(-1)^{n-1}\,\frac{(N+n-1)!}{N!}\,p^{n-1}_{n-\nu}+\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}r_\nu\,\nu(\nu-1)\dots(\nu-\ell+1)\,(-1)^{n-\ell-1}$$

$$\frac{(N+n-\ell-1)!}{N!}\,p^{n-1}_{n-\nu}+\dots+\sum_{\nu=0}^{k}r_\nu(-1)^{s}\,\frac{(N+s)!}{N!}\,p^{s}_{k-\nu}+\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{s}\binom{s}{\ell}r_\nu\,\nu(\nu-1)\dots(\nu-\ell+1)\,(-1)^{s-\ell}\,\frac{(N+s-1)!}{N!}\,p^{s}_{k-\nu}+\dots$$

$$+\sum_{\nu=0}^{k}r_\nu\,p^{o}_{k-\nu}\Bigg\}\Bigg)=0 \qquad (10.10)$$

Po pretpostavci N je prirodan broj ili nula i $p^{s}_{o}\neq 0$ pa je identičnost (10.10) ekvivalentna sledećem sistemu algebarskih jednačina sa r_k kao nepoznatim veličinama.

$$r_k\,(-1)^{n}\,\frac{(N+n)!}{N!}+\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}r_k\,k(k-1)\dots(k-\ell+1)\,(-1)^{n-\ell}\,\frac{(N+n-\ell)!}{N!}+\sum_{\ell=0}^{k}r_\nu(-1)^{n-1}\,\frac{(N+n-\ell)!}{N!}\,p^{n-1}_{k-\nu}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}r_\nu\,\nu(\nu-1)\dots(\nu-\ell+1)\,(-1)^{n-\ell-1}\,\frac{(N+n-\ell-1)!}{N!}$$

$$\cdot\,p^{n-1}_{k-\nu}+\dots\sum_{\nu=0}^{k}r_\nu(-1)^{s}\,\frac{(N+s)!}{N!}\,p^{s}_{k-\nu}+\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{s}\binom{s}{\ell}r_\nu\cdot$$

$$\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\ell+1)\ (-1)^{s-\ell}\ \frac{(N+s-\ell)!}{N!}\ p^{s}_{k-\nu}\ +\ldots$$

$$+\sum_{\nu=0}^{k} r_\nu\, p^{o}_{k-\nu} = 0. \qquad (10.11)$$

$k = 0,1,\ldots, N$, što se (posle množenja sa $N!$) može i sažetije napisati:

$$r_k(-1)^n\,(N+n)!\ +\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell} r_k\, k\,(k-1)\ldots(k-\ell+1)\,(-1)^{n-\ell}$$

$$(N+n-\ell)!\ +\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{k} r_\nu\, p^{s}_{k-\nu}\,(-1)^{s}\,(N+s)!\ +$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{s}\binom{s}{\ell}\, r_\nu\, p^{s}_{k-\nu}\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\ell+1)\,(-1)^{s-\ell}$$

$$(N+s-\ell)! = 0 \qquad (10.12)$$

$$k = 0,1,\ldots, N.$$

Za $k=0$ imamo:

$$r_o\left\{(-1)^n\,(N+n)! + \sum_{s=0}^{n-1} p^{s}_{o}\,(-1)^{s}\,(N+s)!\right\} = 0$$

(10.13)

Kasnije ćemo se uveriti da zaključak $r_o = 0$ dovodi do trivijalnog rešenja jednačine (10.1) te prema tome r_o ostaje proizvoljno a izmedju koeficijenata p^{s}_{o} postoji veza

$$(-1)^n\,(N+n)! + \sum_{s=0}^{n-1} p^{s}_{o}\,(-1)^{s}\,(N+s)! = 0 \quad (10.1$$

Naš je zadatak da ispitamo rešivost i, ako je moguće, nadjemo rešenje sistema (10.12) za $k = 1,\ldots,N$. U tom cilju sistem(10.12) napisaćemo u pogodnijem obliku

r_k

$$r_k \Big\{ (-1)^n (N+n)! + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} k(k-1)\dots(k-\ell+1)\ (-1)^{n-\ell}$$

$$(N+n-\ell)! + \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s p_o^s (N+s)! + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} p_o^s$$

$$k(k-1)\dots(k-\ell+1)\,(-1)^{s-\ell}\,(N+s-\ell)! \Big\} + \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{k-1} r_\nu p_{k-\nu}^s$$

$$(-1)^s (N+s)! + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} r_\nu p_{k-\nu}^s \nu(\nu-1)\dots(\nu-\ell+1)$$

$$(-1)^{s-\ell} (N+s-\ell)! = 0. \qquad (10.15)$$

Sistem (10.12) jednačina po r_k ($k = 1,\dots,N$) ima tu osobinu da su u k-oj jednačini različiti od nule samo koeficijenti uz $r_1,\dots r_k$ a svi ostali su jednaki nuli. Determinanta sistema je, dakle, trougaona (svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki su nuli) te je vrednost determinante sistema jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

$$D = \prod_{k=1}^{N} \Big\{ (-1)^n (N+n)! + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} k(k-1)\dots(k-\ell+1)$$

$$(-1)^{n-\ell} (N+n-\ell)! + \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s p_o^s (N+s)! +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} k(k-1)\dots(k-\ell+1)\ (-1)^{s-1} p_o^s (N+s-\ell)!$$

što se s obzirom na (10.14) može napisati u obliku:

$$D = \prod_{k=1}^{N} \Big\{ \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} k(k-1)\dots(k-\ell+1)\,(-1)^{n-\ell} (N+n-\ell)! +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{s} \binom{s}{\ell} k(k-1)\dots(k-\ell+1)\,(-1)^{s-\ell} (N+s-\ell)!\ p_o^s \Big\}$$

(10.16).

Slobodni članovi sistema (10.12) su:

$$\sum_{s=0}^{n-1} r_o \, p_k^s \, (-1)^s \, (N+s)! \quad (k = 1, \ldots, N) \qquad (10.17)$$

Rešenje sistema (10.12) je :

$r_k = \frac{Dr_k}{D}$ gde je Dr_k determinanta oblika

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \ldots & b_1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} \ldots & b_2 & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & b_n & 0 \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (10.18)$$

Označimo sa a_{kk} koeficijenat uz r_k u sistemu(10.12) a sa b_k

slobodan član u k-oj jednačini sistema (10.12) tj. stavimo

$$a_{kk} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} k(k-1)\ldots(k-\ell+1) \, (-1)^{n-\ell} (N+n-\ell)! +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} k(k-1)\ldots\ldots(k-\ell+1) \, (-1)^{s-\ell}$$

$$(N+s-\ell)! \, p_o^s$$

$$b_k = \sum_{s=0}^{n-1} r_o \, p_k^s \, (-1)^s \, (N+s)! \qquad k=1,\ldots,N \text{ i do-}$$

bićemo:

$$r_k = \frac{\sum_{\nu=1}^{N} (-1)^{k+\nu-1} b_\nu}{a_{kk} \left(\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{N} a_{\nu\nu} + 1 \right)} \qquad (10.19)$$

Primenjujući na članove zbira (10.3) formulu (10.5) dobijamo:

$$y = \sum_{k=0}^{N} r_k \; (-1)^k \; \frac{N!}{(N-k)!} \; \delta^{(N-k)} \qquad (10.20)$$

gde je r_o proizvoljno, a koeficijenti r_k za k o dati su obrascem (10.19)

<u>Stav</u> 10.2 . Neka je data diferencijalna jednačina

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_n}{x^n} y = 0 \qquad (10.22)$$ gde su

$a_i \neq o$ ($i = 1,\dots,n$) konstante; tada se u skupu distribucija rešenje jednačine (10.22) može napisati u obliku ~~xxxxxxxxxxx~~ $y = c\,\delta^{(N)} + y_k$ gde je c proizvoljna konstanta , y_k klasično rešenje jednačine (10.22) a N se odredjuje iz uslova

$$(-1)^n\,(N+n)! + \sum_{s=0}^{n-1} a_s\,(-1)^s\,(N+s)! = 0$$

Stav 10.2 je specijalni slučaj stava 10.1 i proizilazi iz njegovog dokaza. Zaista, primetimo da su koeficijenti $r_1,\dots,r_N$ homogene funkcije koeficijenata p_1^s , p_2^s ,..., p_k^s Tejlorovih razvitaka za $P_s(x)$ iz jednačine (10.1), a kako su pod pretpostavkama stava 10.2 svi $p_i^s = 0$, za $i > 1$ i $s = 0,1,\dots,n-1$ ostaje jedino od nule različit koeficijenat uz $\delta^{(N)}$. Kako je prema dokazu stava 10.1 taj koeficijenat proizvoljan, stav 10.2 je dokazan.

Od posebnog interesa je slučaj kada jednačina Fuksovog tipa ima za rešenje Diracovu distribuciju.

<u>Stav</u> 10.3 . Ako su u diferencijalnoj jednačini

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + P_o(x)\, y = 0 \qquad (10.23)$$

$$P_s(x) = \frac{1}{x^{n-s}}\, p_s(x)$$

gde su: $p_s(x)$ holomorfne funkcije u celoj kompleksnoj ravni tj. $p_s(x) = p_o^s + p_1^s\, x + \dots$ ($s = 0,1,\dots, n-1$) i ako izmedju koeficijenata p_o^s postoji veza

$$(- 1)^n n! + \sum_{s=0}^{n-1} (- 1)^s p_o^s s! = 0 \quad (10.24)$$

tada je Diracova distribucija rešenje diferencijalne jednačine (10.23).

Napomenimo da pod uslovima (10.24) sem Diracove distribucije nijedna druga distribucija čiji je nosač tačka $x = 0$ ne može zadovoljavati jednačinu 10.23. Dokaz te činjenice zasniva se na stavu o opštem obliku distribucije čiji je nosač samo jedna tačka(Schwarz [1] str.100) i postupku primenjenog pri dokazu stava 10.1.

Interesantno je na ovom mestu navesti još jednu činjenicu, čiji dokaz nećemo izvoditi.

Stav 10.4 . Ma koliki bio prirodan broj N postoji Fuksova jednačina drugog reda, čije je rešenje distribucija $\delta^{(N)}$.

§10' DIFERENCIJALNI OPERATORI U PROSTORU DISTRIBUCIJA I OPERACIJE NEODREDJENOSTI

Pitanje da li se jedan diferencijalni operator može invertovati nije (koliko je poznato autorovog rada) dosad bilo proučavano. Ni ovde se to pitanje ne rešava u svom najopštijem obliku, već se pomoću rezultata §10 dolazi do nekih specijalnih zaključaka. Dokazi sledećih stavova predstavljaju u stvari interpretaciju rezultata paragrafa 10 uz korišćenje definicije 1.2.

Stav 10'.1. Neka je dat diferencijalni linearni operator

$$R(D) = D^n + P_1(x) D^{n-1} + \dots + P_n(x) D^0 \quad \dots\dots (10'.1).$$

$$\left(D^k = \frac{d^k}{dx^k} \right)$$

čiji su koeficijenti $P_i(x)$ oblika

$P_i(x) = x^{-i} \; p_i(x)$, gde su p_i funkcije holomorfne u celoj kompleksnoj ravni tj. $p_i(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^i x^\nu$ i neka izmedju koeficijenata $p_0^1, \dots, p_0^n$ postoji veza.

$$(-1)^n (N+n)! + \sum_{i=0}^{n-1} p_0^i (-1)^i (N+i)! = 0 \quad \dots\dots (10'.2).$$

Tada je inverzija operatora $R(D)$ jedan C-operator totalne neodredjenosti u prostoru distribucija $\mathcal{D}'$ s obzirom na $I = \alpha_0 \delta + \alpha_1 \delta' + \dots + \alpha_N \delta^{(N)}$, gde je C - polje kompleksnih brojeva, a koeficijenti $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ su potpuno odredjeni kompleksni brojevi dati formulama (10.19) i (10.20).

Stav 10'.2. Neka je dat diferencijalni linearni operator

$$R(D) = D^n + \frac{a_1}{x} D^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{x^n} D^0 \quad (10'. 3)$$

gde su a_i ($i = 1, \dots, n$) konstante, i neka izmedju koeficijenata a_i postoji veza.

$$(-1)^n (N+n)! + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (-1)^i (N+i)! = 0 (10'.4).$$

Tada je inverzija operatora (10'.3) jedan operator totalne neodredjenosti s obzirom na $\delta^{(N)}$.

<u>Stav</u> 10'.3. Neka je dat diferencijalni linearni operator

$$R(D) = D^{n} + P_1(x)\, D^{n-1} + \dots + P_n(x)\, D^{0} \qquad (10'.5)$$

čiji su koeficijenti $P_i(x)$ oblika:

$$P_i(x) = x^{-i}\, \cancel{p_i(x)} \;\text{tj}\; P_i(x) = x^{i} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{\nu}^{i}\, x^{\nu}$$

i neka izmedju koeficijenata p_0^{i} postoji veza.

$$(-1)^{n}\, n! + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i}\, p_0^{i}\, i! = 0 \qquad (10'.6)$$

tada je inverzija operatora (10'.5) jedan operator totalne neodredjenosti u prostoru distribucija $\mathcal{D}'$ s obzirom na Diracovu distribuciju δ.

§11. FORMALNA REŠENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Neka je E linearni topološki prostor nad poljem skalara C, E_1 jedan podprostor od E i neka je u E definisana jedna unarna operacija totalne neodredjenosti s obzirom na $d_o \in E_1$ (koju označavamo sa f) čiji skup vrednosti uključujući tu i nestabilne delove operacije neodredjenosti pokriva E_1. Neka uz to skup stabilnih vrednosti posmatrane operacije neodredjenosti ne pokriva E_1. Pretpostavimo da postoji linearno preslikavanje f' od E_1 u E definisano na sledeći način: ako je $a \in E_1$ stabilna vrednost operatora neodredjenosti f u tački a stavićemo $f'(a_1) = a$, inače uzimamo $f'(a) = 0$.

Definicija 11.1. Preslikavanje f' nazivamo formalnim diferenciranjem u E asociranim unarnoj operaciji neodredjenosti f, a sliku $f'(x) \in E$ tačke $x \in E_1$ formalnim izvodom elementa x ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° Ako je x' E izvod od $x \in E_1$, tada u E_1 postoji niz koji konvergira ka x' u smislu topologije od E, pri čemu svi ti nizovi čine klase ekvivalencije u skupu konvergentnih nizova u E sa relacijom " konvergirati ka jednoj tački iz E."

2° Ako je u E zadana je jedna svuda definisana unutrašnja kompozicija $*$ tada E_1 čini algebru i važi pravilo

$$f'(a * b) = f'(a) * b + a * f'(b) \quad ....(11.1)$$

3° Ako je E prostor neprekidnih funkcija zadatih na intervalu $[a, b]$ tada je E_1 prostor diferencijabilnih funkcija, f' se poklapa sa uobičajenim diferenciranjem, konvergentni niz se sastoji od uspona funkcije f (x) tj. od izraza oblika $\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}, \ldots \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}, \ldots$ i formula (11.1) predstavlja uobičajeno pravilo za izvod proizvoda.

Od svih dosad definisanih izvoda klasični izvod# funkcije jedne realne promenljive ima najveći značaj, pa je svrha uslova 3^{o} da definicija formalnog izvoda ne ispusti upravo taj najvažniji slučaj.

Preslikavanje definisano na gornji način je restrikcija homomortizma (budući da je po pretpostavci linearno). Jezgro tog homomorfizma iz E_1 za koje smo pretpostavili da se ne svodi na nulu naziva se skupom konstanata.

Stav 11.1. Neka je E_1 algebra. Tada je skup konstanata podalgebra algebre E_1.

Dokaz: Neka su a i b konstante, α i β skalari; tada su konstante i αa i βb i $\alpha a + \beta b$ jer je zbog linearnosti f'

$$f' (\alpha a + \beta b) = \alpha f' (a) + \beta f' (b) = 0.$$

Skup konstanata je dakle linearni potprostor od E bez ikakvih daljih pretpostavki o E_1. Da je taj skup algebra sledi iz formule (11.1) i činjenice da je E_1 algebra.

Ako je neko $b \in E_1$, izvod elementa a iz E_1 , tj. ako je $b = a'$ pisaćemo $b' = a''$ i zvaćemo b' izvodom drugog reda vektora a. Slično možemo zvati izvodom n-og reda i pisati $a^{(n)}$ izvod prvog reda izvoda (n - 1)-og reda tj. $a^{(n)} = (a^{n-1})'$.

Napomena 1. Za E_1 ne pretpostavljamo da je maksimalan u sledećem smislu: ako elemenat a iz E ima izvod (ili čak n-ti izvod) u smislu uvedene definicije, da tada obavezno to a pripada E_1, što znači da je dopuštena mogućnost da neki " diferencijabilni" elemenat ne pripada E_1. Drugim rečima ne isključuje se mogućnost proširenja izvoda sa skupa E_1 u kojem je definisan na neki širi skup rukovodeći se pri tom jedinim principom da to proširenje inducira ista ona operacija neodredjenosti koja je indicirala izvod u E_1

makar način tog proširenja bio i nepoznat (recimo usled neispitanosti strukture celog E_1).

Učinimo sad neke primedbe povodom formule (11.1).

Primedba 1. $0' = 0$. Dokaz:

$$0' = (0 + 0)' = 0' + 0' \Rightarrow 0' = 0$$

Primedba 2: Ako postoji neutralni elemenat 1 za množenje, tada je $1' = 0$ i za a E_1 koje ima inverzni elemenat u E_1 važi:

$$(a^{-1})' = - a^{-1} a' a^{-1}. \text{ Dokaz:}$$

$$(a a^{-1})' = a' a^{-1} + a (a^{-1})' = 0, \text{ odakle}$$

$$(a^{-1})' = -a^{-1} a' a^{-1}.$$

Primedba 3. Ako je E komutativni prsten sa jedinicom za koje je definisano diferenciranje i ako bar jedan element b ima inverzni tada važi pravilo za izvod količnika:

$$(a b^{-1})' = (a' b - ab') . (b^{-1})^2. \text{ Dokaz:}$$

$$(a b^{-1})' = a' b^{-1} + a (b^{-1})' = a' b^{-1} - a b^{-1} b' b^{-1} = (a' b - a b') . (b^{-1})^2.$$

Primedba 4. Ako je E komutativni prsten sa jedinicom u kojem je moguće diferenciranje do reda n važi Leibnitz-ova formula za diferenciranje proizvoda

$$(a. b)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{(i)} b^{(n-i)}, \text{ gde je } a^{(o)} = a.$$

Neka je u E zadana još jedna spoljašnja operacija elementima iz nekog F. Ako je E snabdeveno još jednom unutrašnjom kompozicijom s obzirom na koju je E_1 algebra možemo staviti F = E. Tada za

$p_1 , p_2 , \dots , p_n \in F$ i $y, y', \dots, y^{(n)} \in E$ ima smisla izraz

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y - q \quad (11. 2)$$

kao potpuno odredjen elemenat iz E. Drugim rečima u E je uveden jedan diferencijalni operator

$$P(D) = D^{n} + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1} D' + p_n D^{o} \quad (11.3).$$

<u>Definicija</u> 11.2. Neka je u linearnom topološkom prostoru definisana operacija formalnog diferenciranja i izraz oblika (11.2). Tada se svaki element iz E koji se pomoću operatora (11.3) preslikava u fiksirani element q iz E naziva <u>formalnim rešenjem</u> diferencijalne jednačine

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = q \quad (11.4)$$

$$p_1, \dots p_n, q \quad F$$

Napomena 2. Definicija (11.2) ne zahteva da formalno rešenje diferencijalne jednačine (11.4) pripada skupu E_1. Štaviše skup formalnih rešenja može činiti linearni prostor (potprostor od E) koji sa E_1 ima samo jedan zajednički elemenat – nulu, čak i u slučaju da svaki p_i pripada E_1. U to će nas uveriti rezultat sledećeg stava ovog paragrafa, koji se može shvatiti kao nekakav " strani " elemenat (pripada dosad nepoznatom prostoru) koji zadovoljava "običnu" diferencijalnu jednačinu (čiji su koeficijenti analitičke funkcije.

Posmatrajmo jedan linearni topološki prostor $E_{U,a}$ dobijen kao direktna suma sledećih topoloških prostora:

1. E_U je topološki prostor analitičkih funkcija kompleksne promenljive z definisanih u domenu U kompleksne ravni (z) sa polom (eventualnim) u tački $a \in U$ koji je jedina ~~tačka~~ singularna tačka;

2. E_a, je linearni prostor nad poljem kompleksnih brojeva generiran jednim jedinim elementom δ_a, snabdeven jednom lokalno konveksnom topologijom i takav da element δ_a ima sledeća svojstva:

1^{o} δ_a ima izvod (u gore definisanom smislu) bilo kog reda;

2^{o} definisan je komutativan proizvod $\varphi(z) \circ \delta_a$, gde je $\varphi(z)$

holomorfna funkcija kompleksne promenljive z u celoj ~~konačnoj~~ oblasti U, na sledeći način:

$$\varphi(z) \circ \delta_a = \varphi(a)$$

Posledica uslova 2^o je $(z - a) \circ \delta_a = 0$ za $z \in U$.

Pretpostavimo da je tačka a početak ($z = 0$) i da domen U sadrži početak; tada ćemo umesto δ_o pisati prosto δ.

Primenjujući Leibnitz-ovu formulu (na isti način kako je to urađjeno u radu [1] M. Bouix) zaključujemo:

$$z^h \delta^{(p+h)} = (-1)^h \frac{(p+h)!}{p!} \delta^{(p)} \qquad (11.5)$$

<u>Stav</u> 11.2 . Neka je data diferencijalna jednačina:

$$y^{(n)} + P_o y^{(n-1)} + \dots + P_n y = 0 \dots\dots\dots (11.6)$$

čiji su koeficijenti $P_o, P_1, \dots, P_n$ uniforme funkcije sa polom u početku takve da je

$$P_s(z) = x^{-s-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^s x^\nu, \quad s = 0,1,\dots,n, \quad p^s \not\leq 0.$$

Tada jednačina (11.6) ima formalno rešenje koje pripada vektorskom topološkom prostoru $E_{V,a}$ (gde je U kompleksna ravan), i to rešenje je dato u obliku:

$y_f = a_o \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \delta^{(k)}$, gde je a_o proizvoljan kompleksan broj a koeficijenti α_k su potpuno odredjeni od nule različiti kompleksni brojevi, ako je ispunjen uslov

$$(-1)^n (N+1)! + \sum_{s=0}^{n-1} p_o^s (-1)^s (N+s)! = 0 \dots\dots (11.7)$$

Dokaz ovog stava je identičan dokazu stava 10.1 pa bi njegovo izvodjenje pretstavljalo ponavljanje već izvedenog dokaza.

Prostor E je jedan potprostor prostora distribucija (u šta se lako uveriti) do kojeg smo došli bez ikakvih pretpostavki o poznavanju prostora distribucija. Moguće je medjutim postići i više od toga: prostor distribucija reproduktovati skupom formalnih rešenja izvesnih klasa diferencijalnih <u>jednačina.</u>

§ 12. $\mathcal{L}$ - generativan tip formalnih diferencijalnih operatora

Pre nego što predjemo na definiciju $\mathcal{L}$ - generativnog tipa formalnih diferencijalnih operatora preciziraćemo smisao izvesnih pojmova.

Pod formalnim diferencijalnim operatorom podrazumevaćemo svaki diferencijalni operator (linearnu kombinaciju formalnih izvoda) sa koeficijentima koji pripadaju jednom potpuno odredjenom linearnom topološkom prostoru. Za familiju formalnih diferencijalnih operatora kažemo da čini tip formalnih diferencijalnih operatora, ili da svi članovi te familije pripadaju istom tipu, ako koeficijenti svih tih linearnih diferencijalnih operatora obrazuju potpuno odredjen linearni topološki prostor $\mathcal{L}'$.

Definicija 12.1. Za jedan tip $\{ D_\alpha ; \alpha \in A \}$ formalnih diferencijalnih operatora kažemo da je - generativan ako je skup formalnih rešenja diferencijalnih jednačina

$$D_\alpha \; y = 0, \quad \alpha \in A$$

gust u linearnom topološkom prostoru i pritom je podprostor od $\mathcal{L}$.

Stav 12.1 . Neka je $\mathcal{L}$ Banach-ov prostor svih neprekidnih funkcija. Tada je skup jednačina Fuksovog tipa $\mathcal{L}$-generativan . To znači da se svaki elemenat iz $\mathcal{L}$ može sa proizvoljnom tačnošću aproksimirati elementima iz $\mathcal{L}$ koji predstavljaju (formalna) rešenja jednačina Fuksovog tipa.

Dokaz će biti potpun ako se uverimo da se svaki polinom može dobiti kao rešenje jedne diferencijalne jednačine Fuksovog tipa, a radi toga posmatrajmo polinom $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ i specijalno odabramo jednačinu Fuksovog tipa:

$$\alpha_n x^n y^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 x y' +$$

$$+ \alpha_0 y = \beta \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (12. 1).$$

Da bi polinom P_n zadovoljavao jednačinu (12.1) dovoljno je da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\alpha_0 \quad a_0 = 0$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_0 + 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0$$

....

$$\alpha_0 + n\alpha_1 + n(n-1)\alpha_2 + \ldots + n(n-1)\ldots 3\cdot\alpha_{n-1} + n(n-1)\ldots 3.2\alpha_n = 0 \ldots \quad (12.2).$$

Sistem (12.2) očigledno ima rešenja (determinantna sistema različita je od nule), a to znači da se svaki polinom može dobiti kao rešenje diferencijalne jednačine Fuksovog tipa. Kako se po klasičnom Weierstrass -ovom stavu svaka neprekidna funkcija može sa proizvoljnom tačnošću aproksimirati polinomima stav je dokazan.

Stav 12.2. Neka je $\mathcal{D}'$ prostor distribucija. Tada je skup jednačina Fuksovog tipa $\mathcal{D}'$- generativan.

Dokaz će se sastojati iz dva dela. Prvo ćemo dokazati sledeći pomoćni stav: Bilo kakva da je linearna kombinacija Diracove distribucije i njenih izvoda do reda n zaključno postoji jednačina Fuksovog tipa čije je rešenje ta linearna kombinacija. Da to dokažemo posmatraćemo jednačinu

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1}P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + xP_1(x)y' + P_0(x)y = 0 \quad (12.3)$$

$$P_s(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu^s x^\nu \quad , \quad s = 0,1, \ldots, n$$

Stavimo $$y = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)} \quad (12.4)$$

Zadatak nam je da ispitamo mogućnosti odredjivanja koeficijenata p_ν^s tako da izraz (12.4) zadovoljava jednačinu (12.3). To je zadatak obrnut od onog iz § 10. Postupak sličan onom provedenom u dokazu stava 10.1 dovodi do sledećeg sistema linearnih jednačina po p_j^i $(i,j = 0,1, \ldots, n)$

$$\left.\begin{aligned}
&(-1)^n n!\, a_o + \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} p_j^{n-i} (-1)^{n-i+j}(n-i+j)! = 0\\
&(-1)^n(1+n)!\, a_1 + \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} p_{j-1}^{n-i} (-1)^{n-i+j-1}(n-i+j)! = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(-1)^n(k+n)!\, a_k + \sum_{j=k}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} p_{j-k}^{n-i} (-1)^{n-i+j-k}(n-i+j)! = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(-1)^n(2n)!\, a_n + a_n \sum_{i=1}^{n} p_o^{n-i} (-1)^{n-i}(2n-i)! = 0
\end{aligned}\right\} \quad (12.5)$$

čija je matrica

$$\left(\begin{array}{llllllll}
a_o(n-1)! & a_o(n-2)! \ldots & a_o 0! & a_1 n! & a_1(n-1)! & \ldots a_1 1! \\
a_1 n! & a_1(n-1)! \ldots & a_1 1! & a_2(n+1)! & a_2(n! \ldots & a_2 2! \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-1}(2n-2)! & a_{n-1}(2n-3)! \ldots & a_{n-1}(n-1)! & a_n(2n-1)! & a_n(2n-2)! & \ldots a_n n! \\
a_n(2n-1)! & a_n(2n-2)! & \ldots a_n n! & 0 & 0 & \ldots 0
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lllll}
\ldots & a_n(2n-1)! & a_n(2n-2)! & \ldots a_n(n+1)! & a_n n! \\
\ldots & 0 & 0 & \ldots \; 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots & 0 & 0 & \ldots \; 0 & 0
\end{array}\right) \quad (12.6)$$

Slobodni članovi sistema (12.5) su

$(-1)^n\ (k+1)!\, a_k$, $k = 0,1,2, \ldots, n$.

U diskusiji rešivosti sistema (12,5) možemo razlikovati dva slučaja: kada su svi a_k različiti od nule i kada je s između njih (označimo ih sa $a_{k_1}, \ldots, a_{k_s}$) jednako nuli. U prvom od ta dva slučaja odmah se vidi da matrica (12,6) i ta ista matrica proširena slobodnim članovima imaju isti rang. Do istog zaključka se, posle jednostavnih razmatranja, dolazi i u drugom slučaju. Prema tome sistem (12,5) uvek ima rešenja te za bilo koju linearnu kombinaciju Diracove distribucije i njenih izvoda do reda n zaključno uvek postoji jednačina Fuksovog tipa koju ta linearna kombinacija zadovoljava. Posmatrajmo sada za bilo koje kompleksno a Diracovu distribuciju δ_a i izvedimo isti zaključak kao i u slučaju $a = 0$. Na osnovu Schwartz-ove teoreme o aproksimaciji (Schwartz [1], str. 100) sledi da je tako dobijeni skup formalnih rešenja gust u $\mathcal{D}'$.

BIBLIOGRAFIJA

C.Berge
[1] Topological Spaces, Multi-valued Functions, Vektor Spaces and Convexity, London 1963.

M.Bouix
[1] La fonction de Heaviside et la distribution de Dirac dans le plan komplexe, Alger Math., Tom VI, 1959.

[2] Les distribution d'ordre fini d'une variable, Annales des Telecomunikations, 1959.

I.M.Geljfand i G.E.Šilov
[1] Obobščonije funkciji 1, Moskva 1959.

P.Dubreil
[1] Contribution a la theorie des demi-groupes III, Bull. Soc. Math. France, 81 (1953) 289-306.

J.L.Kelley, I.Namioka
[1] Linear Topological Spaces, New York 1963.

D.Kurepa
[1] Teorija skupova, Zagreb 1951.

E.Michael
[1] Topologies onspaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951).

L.Pontrjagin
[1] Topological Groups, Prinston 1946.

J.Sebastião e Silva
[1] Le calcul differential et integral dans les espaces lokalement convexes, Atti Accad. Naz. Lincei, Rendiconti XX-2 (1956) 40-45, XX-2 (1956) 743-750.

L.Schwartz
[1] Theorie des Distributions. Actualites Scientifique et industrielles N° 1091, Hermann et Cie, Paris 1951.

H.Freudenthal
[1] Neuaufbau der Endentheorie, Ann. Math. 43, 261-279 (1942).

T.H.Hildebrandt and L.M.Graves
[1] Implicit functions and their differetials in general analisis, Tran. Amer. Math. Soc. 29 (1927) 127-153.

A.Csaszar
[1] Sur une clsse de structures, Revue Math. Pures Appl. 2 (1957) 399-407.

S A D R Ž A J