

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ, УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Неки нелинеарни моделі временских серија и њихова примена

Мастер рад

Ментор:
др Весна Јевремовић

Студент:
Александра Блазнавац
1035/2010

Београд, септембар 2012.

Садржај

Предговор.....	i
1. Уводни део.....	1
1.1. Случајни процес	1
1.2. Линеарна регресија.....	4
1.3. Модели покретних просека	5
1.4. Ауторегресиони модели временских серија.....	6
1.5. Ауторегресиони модели покретних просека	6
1.6. Лаплас-Стилтјесова трансформација.....	7
2. Нелинеарни модели временских серија.....	8
2.1. Билинеарни модел.....	10
2.2. Класа модела са праговима	11
2.2.1 TAR (<i>eng. threshold AR models</i>) модел	11
2.2.2 SETAR (<i>eng. Self-exciting</i>) модел.....	12
2.2.3 Мултиваријантни SETAR модел.....	20
2.2.4 STAR модел.....	23
2.3. Ауторегресиони модели са експоненцијалном расподелом	24
2.3.1 Модел EAR(1)	24
2.3.2 Модел TEAR(1).....	27
2.3.3 Модел NEAR(1).....	29
2.3.4 Модел AREX(1).....	31
3 Примена.....	35
ЗАКЉУЧАК	53
ЛИТЕРАТУРА.....	54

Предговор

Многи процеси, посебно они који се јављају у природним наукама и инжењерству, испољавају неки облик нелинеарног понашања. Ово понашање укључује неке особине које нису могуће код Гаусовских линеарних процеса, као на пример, псеудо циклични образац код којег вредности узорка расту до њиховог максимума а затим опадају, или се појављују као аутлајери посматране серије. Овакво понашање је довело до развоја и интересовања за поједине типове нелинеарних модела временских серија, као што су билинеарни, модели са праговима (TAR) и модели са случајним коефицијентима.

У уводном делу овог рада упознаћемо се са појмовима који су неопходни за разумевање нелинеарних модела временских серија који се разматрају.

Нелинеарни модели временских серија су дати у другој глави, и то тако што су подењени на три поглавља. У првом поглављу 2.1 је описан билинеарни модел временских серија. Друго поглавље 2.2 говори о моделима са праговима, где су и наведени неки од њих, TAR, SETAR, мултиваријантни SETAR и STAR модел. У трећем поглављу 2.3 разматрају се модели који припадају класи нелинеарних модела са случајним коефицијентима. Утврђују се услови при којима модели имају одређену маргиналну расподелу, у овом случају су разматрани модели који имају експоненцијалну маргиналну расподелу.

У трећој глави дат је познати пример о канадским рисовима.

На крају рада је списак коришћене литературе.

1. Уводни део

У овој глави биће наведени основни појмови који су коришћени у даљем раду и који омогућавају боље разумевање модела о којима ће касније бити речи.

1.1. Случајни процес

Дефиниција 1. Ω је скуп свих исхода једног експеримента. Елементи овог скупа се означавају са $\omega_i, i = 1, 2, \dots$ и називају се елементарни догађаји.

Дефиниција 2. (Аксиома σ -поље) Подскуп \mathcal{F} партитивног скупа $\wp(\Omega)$ је σ -поље (σ -алгебра) над Ω ако важе услови:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
- $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Дефиниција 3. (Аксиома вероватноће) Нека је Ω је скуп свих елементарних догађаја и \mathcal{F} σ -поље над Ω . Функција $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ се зове вероватноћа на простору (Ω, \mathcal{F}) ако задовољава услове:

- $P(\Omega) = 1$
- Ако $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i = 1, 2, \dots$ онда

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Простор вероватноћа је уређена тројка (Ω, \mathcal{F}, P) .

Дефиниција 4. Нека је (Ω, \mathcal{F}, P) простор вероватноћа. Пресликавање $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ се зове случајна променљива ако $\forall B \in \mathcal{B}$ важи да је

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

где је \mathcal{B} Борелова σ -алгебра. За X кажемо да је \mathcal{F} -мерљиво.

Дефиниција 5. Фамилија случајних променљивих $\{X_t(\omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ дефинисан над истим простором вероватноће (Ω, \mathcal{F}, P) се зове случајни (стохастички) процес са индексним скупом T .

Променљива ω се често изоставља у запису, па се уместо тога случајни процес означава са $\{X_t, t \in T\}$. За свако фиксирано $t_0 \in T$, X_{t_0} је једна одређена случајна променљива коју зовемо засек. За фиксирано $\omega_0 \in \Omega$,

$X_t(\cdot)$ је функција дефинисана на скупу T која се назива реализација или трајекторија случајног процеса. За фиксиране $t_0 \in T$ и $\omega_0 \in \Omega$, X_{t_0} је реалан број или једна реализација случајног процеса.

Свака случајна променљива има свој закон расподеле, који је одређен одговарајућом функцијом расподеле

$$F_{X_t}(x) = P\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) < x\} = P\{X_t < x\}.$$

У општем случају, неопходно је знати и расподеле вишедимензионалних засека. Нека је фиксирано n временских тренутака t_1, t_2, \dots, t_n . Сваком од тих тренутака одговара по једна случајна променљива. Тако добијамо n случајних променљивих $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$, које можемо посматрати као координате n -димензионалног случајног вектора $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$. То је један n -димензионални засек случајног процеса X . Расподела n -димензионалног засека одређена је n -димензионалном функцијом расподеле:

$$F_n(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2, \dots, X_{t_n} < x_n\}.$$

Конечнодимензионалне расподеле случајног процеса задовољавају следећа два услова:

- Услов симетрије - функција F_n је инваријантна у односу на пермутације свих n парова, тј. за сваку пермутацију (j_1, j_2, \dots, j_n) скупа $(1, \dots, n)$

$$F_n(t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_n}; x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}) = F_n(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- Услов сагласности

$$F_n(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n; x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \infty) = F_{n-1}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}; x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Нека је $\{X_t, t \in T\}$ случајни процес. Тада је:

- средња вредност случајног процеса

$$E(X_t) = \mu_t, \quad t \in T$$

- варијанса случајног процеса

$$\text{var}(X_t) = \sigma_t^2, \quad t \in T$$

- коваријанса случајног процеса

$$\gamma_X(r, s) = \text{cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))], \quad r, s \in T$$

➤ коефицијент корелације случајног процеса

$$\rho_X(r, s) = \frac{\text{cov}(X_r, X_s)}{\sqrt{\text{var}(X_r)\text{var}(X_s)}}$$

Дефиниција 6. Случајни процес $\{X_t, t \in T\}$ је строго стационаран ако су његове коначнодимензионалне расподеле инваријантне у односу на транслацију времена, односно ако за $t_i, t_i + h \in T, i = 1, 2, \dots$ важи

$$F_n(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = F_n(t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h; x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ако је случајни процес строго стационаран, функција расподеле случајне променљиве X_t је иста у свакој тачки из индексног скупа.

Ако је $\{X_t, t \in T\}$ строго стационаран случајни процес са $E(|X_t|) < \infty$, тада очекивана вредност од X_t је константна за свако $t \in T$, пошто је функција расподеле иста за свако $t \in T$. Слично, ако је $E(X_t^2) < \infty$ тада је дисперзија од X_t је константна за свако $t \in T$.

Дефиниција 7. Случајни процес $\{X_t, t \in T\}$ је слабо стационаран ако је :

1. $E(X_t) = \text{const}$ за свако $t \in T$,
2. $E(X_t^2) < \infty$ за свако $t \in T$,
3. коваријанса од X_t и X_{t+h} зависи само од разлике h :

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_t, X_{t+h}) &= E[(X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h}))] = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h}) \\ &= \gamma(h). \end{aligned}$$

Очигледно је да увек из строге стационарности следи слаба стационарност случајног процеса. Услови строге и слабе стационарности су еквивалентни ако је заједничка расподела разматраног случајног низа нормална. Такав случајан низ се назива Гаусовски случајан процес.

Процес бели шум ћемо означити са $\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots$. Дати случајан процес поседује следећа својства:

1. $E(\varepsilon_t) = 0, t = 1, 2, \dots$
2. $\text{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 = \text{const}, t = 1, 2, \dots$
3. $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$, за све $s \neq t$.

Процес бели шум представља низ некорелисаних случајних променљивих са нултом средњом вредношћу и константном дисперзијом. Уколико наведеним условима додамо и услов да су чланови низа бели шум

независне случајне променљиве, чија је заједничка расподела нормална, тада је разматрани случајни процес Гаусовски бели шум.

Дефиниција 8. Случајни процес $\{X_t, t \in T\}$ са пребројивим индексним скупом T зове се временска серија.

Обично се за индексни скуп T узима скуп целих бројева \mathbb{Z} . Временска серија се може схватити и као једна реализација случајног процеса.

1.2. Линеарна регресија

Линеарна регресија показује да ли између две променљиве постоји линеарна (праволинијска) веза и ако постоји која је њена јачина при чему је битно која је зависна променљива Y , а која је независна променљива X . Најједноставнији облик функционалне зависности је линеарна зависност:

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

где се зависна променљива Y изражава преко независне променљиве X , док је ε грешка коју правимо приликом линеарне регресије. Ово је модел просте линеарне регресије. Такав приступ је у пракси оправдан јер смо најчешће у немогућности да сагледамо све утицаје на величину Y , па узимамо у обзир само најбитније.

Могуће је да смо анализом закључили да је Y у значајној линеарној зависности од више променљивих, па би тада одређивали модел облика

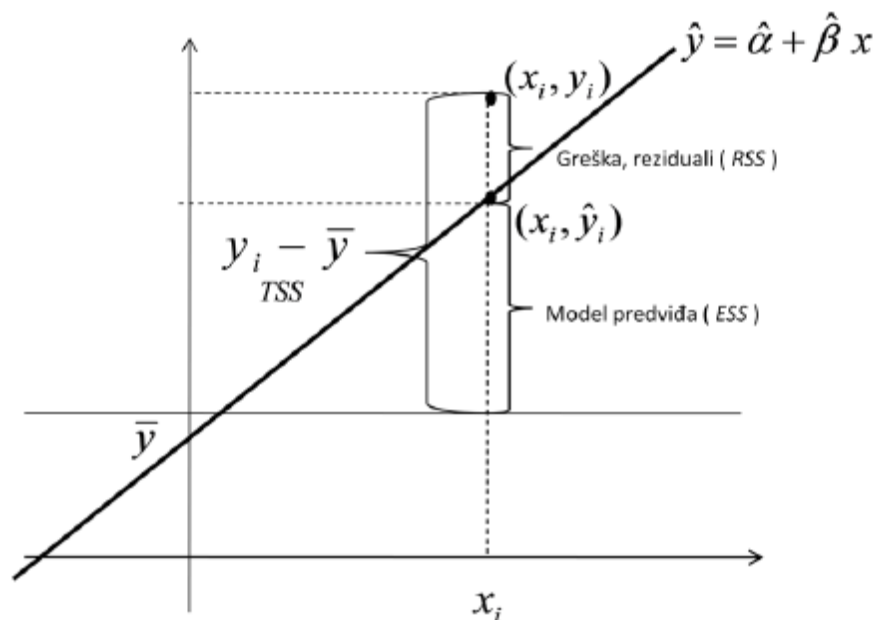
$$Y = \alpha + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon, \quad \alpha, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, k$$

а ово је модел вишеструке линеарне регресије.

На Слици 1. приказана је права линеарне регресије и аритметичка средина \bar{y} променљиве y , једна тачка из узорка (x_i, y_i) и тачка (x_i, \hat{y}_i) оцењена регресионим моделом. Одступање вредности y_i од аритметичке средине \bar{y} означили смо као *total*. То одступање може да се подели на два дела, део који представља одступање оцењене вредности \hat{y}_i од \bar{y} (модел) и одступање вредности из узорка y_i од оцењене вредности \hat{y}_i (грешка, резидуали). Ако бисмо посматрали квадрате одступања свих тачака из узорка и свих оцењених вредности, на основу модела, од \bar{y} и сумирали их, после одређених трансформација добили бисмо:

$$\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2$$

где је прва сума TSS (*eng. total sum of square*) укупна грешка коју правимо регресионим моделом, друга сума ESS (*eng. explained sum of square*) се односи на део података у који се може објаснити моделом и трећа сума RSS (*eng. reziduals sum of square*) се односи на део података у које приписујемо грешки модела.



Слика 1.

1.3. Модели покретних просека

Дефиниција 9. Процес покретних просека реда q , у ознаци $MA(q)$ дефинише се на следећи начин:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

где је ε_t бели шум, $\mu = E(X_t)$ и $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ могу бити било који реални бројеви.

Очекивање процеса X_t је дато са:

$$E(X_t) = \mu + E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) + \dots + \theta_q E(\varepsilon_{t-q}) = \mu.$$

Дисперзија $MA(q)$ процеса је:

$$\text{var}(X_t) = \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2).$$

Коваријациона функција и коефицијент корелације су

$$\gamma_k = \begin{cases} 0 & k > q \\ \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}, & 1 \leq k \leq q \end{cases}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 0 & k > q \\ \frac{\sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}}{\sum_{j=0}^q \theta_j^2}, & 1 \leq k \leq q \end{cases}$$

Како је $E(X_t) < \infty$, $var(X_t) < \infty$ и $\gamma_k = f(k)$ процес покретних просека је увек слабо стационаран.

1.4. Ауторегресиони модели временских серија

Дефиниција 10. Случајни низ $\{X_t, t \in T\}$, $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ за који важи

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t \in T \quad (1)$$

где су $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p \in \mathbb{R}$, $\phi_p \neq 0$, а $\{\varepsilon_t\}$ бели шум, назива се ауторегресиони преоцес реда p , у ознаци $AR(p)$.

Коваријациона функција је :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k > 0.$$

Коефицијент корелације је :

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k > 0.$$

Парцијални аутокорелациони коефицијент, ϕ_{kk} , дефинише се као k -ти ауторегресиони параметар модела (1). Овај коефицијент показује реакцију зависне променљиве X_t на јединичну промену објашњавајуће променљиве X_{t-k} , уз услов да је утицај осталих објашњавајућих променљивих $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1})$ константан.

1.5. Ауторегресиони модели покретних просека

Општи облик ауторегресионих модела покретних просека је

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2)$$

За ове моделе користи се ознака $ARMA(p, q)$, где је p ред ауторегресионе компоненте и q ред компоненте покретних просека и $\{\varepsilon_t\}$ је бели шум. Стационарност овако дефинисане временске серије одређена је стационарношћу одговарајуће ауторегресионе компоненте.

Коваријациона функција ове временске серије је дата са:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p},$$

док је коефицијент корелације дат са:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \text{ за } k > q.$$

1.6. Лаплас-Стилтјесова трансформација

Дефиниција 11. Нека је F функција расподеле вероватноћа случајне променљиве X са вредностима на $(0, \infty)$. Лаплас-Стилтјесова трансформација случајне променљиве X , односно њене функције расподеле F је функција $\phi_X(s)$ одређена са

$$\phi_X(s) = E(e^{-sX}),$$

при чему је $\phi_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \varphi(x) dx$ у случају постојања густине расподеле $\varphi(x)$.

Особине Лаплас-Стилтјесове трансформације неопходне за даљи рад су:

1) ако је c константа, онда је

$$\phi_{cX}(s) = E(e^{-scX}) = \phi_X(cs)$$

2) ако су X и Y независне случајне променљиве, онда је

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(s) &= E(e^{-s(X+Y)}) = E(e^{-sX} e^{-sY}) = E(e^{-sX}) E(e^{-sY}) \\ &= \phi_X(s) \phi_Y(s) \end{aligned}$$

3) разним случајним променљивима одговарају разне Лаплас-Стилтјесове трансформације.

2. Нелинеарни модели временских серија

Посматрајмо временску серију са једнако расподељеним временским интервалима $\{Z_t, t = 1, 2, \dots, N\}$, где је N обим узорка. Чиста стохастичка временска серија Z_t је линеарна ако се може представити у следећем облику

$$Z_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}, \quad (3)$$

где је μ константа, ψ_i су реални бројеви, при чему је $\psi_0 = 1$, и $\{a_t\}$ је низ независних и једнако расподељених случајних величина са датом функцијом расподеле. Претпоставимо да је расподела од $\{a_t\}$ непрекидна и да је $E(a_t) = 0$. У многим случајевима, даље претпостављамо да је $var(a_t) = \sigma_a^2$, или чак да је $\{a_t\}$ Гаусовски процес. Ако је $\sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$, онда је Z_t слабо стационарна временска серија. Било који стохастички процес који не задовољава услов (3) је нелинеаран. Ова дефиниција нелинеарности важи за чисто стохастичке временске серије. Математички, модел чисто стохастичке временске серије Z_t је функција низа независних и једнако расподељених случајних величина

$$Z_t = f(a_t, a_{t-1}, \dots). \quad (4)$$

Из линеарности модела у једнакости (3), следи да је $f(\cdot)$ линеарна функција својих аргумената. Било каква нелинеарност функције $f(\cdot)$ резултује нелинеарни модел. Нелинеарни модел у (4) није директно применљив јер садржи превише параметара.

Да би нелинеарни модел био доступан, записујемо га преко условних момената. Нека је Y_{t-1} σ -поље генерисано доступним информацијама у тренутку $t - 1$. Y_{t-1} означава колекцију линеарних комбинација елемената из $\{Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots\}$ и $\{a_{t-1}, a_{t-2}, \dots\}$. Условно очекивање и дисперзија од Z_t под условом Y_{t-1} су

$$\mu_t = E(z_t | Y_{t-1}) \equiv g(Y_{t-1}), \quad \sigma_t^2 = var(z_t | Y_{t-1}) \equiv h(Y_{t-1}), \quad (5)$$

при чему су $g(\cdot)$ и $h(\cdot) > 0$ добро дефинисане функције. Тако имамо модел

$$Z_t = g(Y_{t-1}) + \sqrt{h(Y_{t-1})} \epsilon_t,$$

где је $\epsilon_t = a_t/\sigma_t$. Ако је $g(\cdot)$ нелинеарна функција, за Z_t се каже да је нелинеарна у очекивању. Ако функција $h(\cdot)$ варира у времену, за Z_t се каже да је нелинеарна у дисперзији. На основу Волдове декомпозиције¹, слабо стационарне и чисто стохастичке временске серије, могу бити представљене као линеарне функције некорелисаних величина. За стационарне нестабилне серије, ове величине су некорелисане, али су зависне. Модели објашњени у поглављима 2.1 и 2.2 представљају облик нелинеарности, који произилази из модификације једначине условног очекивања (5). Основна идеја ових нелинеарних модела је допуштање условном очекивању μ_t да се развија током времена опонашајући неку једноставну нелинеарну функцију.

Многи нелинеарни ARMA модели могу се представити као специјални случајеви следеће уопштене формуле [1]:

$$\begin{aligned} Z_t - \phi_1(Y_{t-1})Z_{t-1} - \dots - \phi_p(Y_{t-1})Z_{t-p} \\ = \theta_0(Y_{t-1}) + a_t - \theta_1(Y_{t-1})a_{t-1} - \dots - \theta_q(Y_{t-1})a_{t-q} \end{aligned}$$

где је

$$Y_{t-1} = (Z_{t-1}, \dots, Z_{t-p}, a_{t-1}, \dots, a_{t-q})'$$

и $\phi_i(Y_{t-1})$ и $\theta_i(Y_{t-1})$ су функције „вектора стања (*eng. state vector*)“ Y_{t-1} у тренутку $t - 1$. За конкретне случајеве представимо билинеарни, TAR, SETAR, мултиваријантни SETAR и STAR модел.

Други типови нелинеарних модела су модели са случајним коефицијентима међу којима постоји зависност. У поглављу 2.3 ће се разматрати модели временских серија ауторегресионог типа првог реда. За постављени модел временске серије и претпостављену маргиналну расподелу посматраног процеса потребно је одредити услове при којима ће иновациони процес имати неку расподелу и уједно се та расподела одређује.

¹ Процес $\{X_t, t \in T\}$ може се представити као збир

$$X_t = V_t + \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j \epsilon_{t-j}$$

где су:

- V_t детерминистичка компонента
- $\{\epsilon_t, t \in T\}$ је процес белог шума
- $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_j^2 < \infty, \chi_0 = 1$
- $E(\epsilon_t, V_t) = 0$.

2.1. Билинеарни модел

Линеарни модел дат једначином (3) представља Тејлоров развој првог реда функције (4). Основна идеја билинеарних модела јесте да се у проширењу до нелинеарности искористе вишедимензионалне случајне величине. Нека су ϕ_i константе, и нека је $\theta_j(Y_{t-1}) = b_j + \sum_{i=1}^k b_{ij} z_{t-i}$. Тада имамо модел реда (p, q, k, s)

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \dots - \phi_p Z_{t-p} = \theta_0 + a_t - \sum_{j=1}^q b_j a_{t-j} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s b_{ij} Z_{t-i} a_{t-j}.$$

Еквивалентно, са ознакама $p^* = \max(p, k)$, $\phi_i = 0$, $i > p$, $b_{ij} = 0$, $i > k$ и $\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^q b_{ij} a_{t-j}$ претходну једнакост можемо записати на следећи начин

$$Z_t - \sum_{i=1}^{p^*} [\phi_i - \alpha_i(t)] Z_{t-i} = \theta_0 + a_t - \sum_{j=1}^q b_j a_{t-j}$$

и тада је представљена у облику ARMA модела са случајним коефицијентима за AR параметре, који су линеарне функције претходних (прошлых) вредности процеса иновација a_t . Овај модел су увели Granger и Andersen (1978).

Услове стационарности као и друга својства уопштеног билинеарног модела изучавали су Лиу² и Броквел³. На пример, посматрајмо билинеарни модел првог реда $Z_t - \phi_1 Z_{t-1} = a_t - b_{11} Z_{t-1} a_{t-1}$. Утврђено је да је услов стационарности другог реда оваквог процеса дат са $\phi_1^2 + \sigma_a^2 b_{11}^2 < 1$, и коваријанса од Z_t под условом стационарности, задовољиће $\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1}$ за $j > 1$. Према томе, ови процеси ће, у суштини, имати исту структуру коваријансе као и ARMA(1,1) процес, и овај пример указује на чињеницу да су углавном потребни моменти већи од другог реда да би се направила разлика између линеарних и нелинеарних модела.

² Chen, R. Liu

³ P. J. Brockwell

2.2. Класа модела са праговима

2.2.1 TAR (eng. *threshold AR models*) модел

Овај модел је настао због неколико нелинеарних карактеристика које се често појављују у пракси, као што су асиметрија у обрасцу пада и раста процеса. Модел користи по деловима линеарне моделе да би се добила боља апроксимација једначине условног очекивања. Међутим, за разлику од традиционалног по деловима линеарног модела који допушта да се измене модела дешавају у „временском“ простору, TAR модел користи простор прагова да би побољшао линеарну апроксимацију. Овај модел је предложио Тонг⁴ (1978), а детаљно су га описали Тонг и Лим⁵ (1980). Основни TAR модел може се посматрати као по деловима линеарни AR модел, са донекле, наглим променама из једне једначине или „режима“ на други у зависности од тога да ли је или не вредност прага r_j премашила Z_{t-d} .

Нека је $\theta_i = 0, i \geq 0$, и за целобројно временско кашњење (временску доцњу) d и неку „threshold“ константу r

$$\phi_i(Y_{t-1}) = \begin{cases} \phi_i^{(1)} & \text{ако је } Z_{t-d} \leq r \\ \phi_i^{(2)} & \text{ако је } Z_{t-d} > r \end{cases}$$

$$\theta_0(Y_{t-1}) = \begin{cases} \theta_0^{(1)} & \text{ако је } Z_{t-d} \leq r \\ \theta_0^{(2)} & \text{ако је } Z_{t-d} > r \end{cases}$$

Тада имамо модел

$$Z_t = \begin{cases} \theta_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} Z_{t-i} + a_t^{(1)} & \text{ако је } Z_{t-d} \leq r \\ \theta_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(2)} Z_{t-i} + a_t^{(2)} & \text{ако је } Z_{t-d} > r \end{cases} \quad (6)$$

где су $\{a_t^{(1)}\}$ и $\{a_t^{(2)}\}$ бели шумови са дисперзијама σ_1^2 и σ_2^2 , редом. Константа r се назива праг, а d параметар кашњења. Овај модел се лако проширује на „ l -праг“ модел који је дат следећом једначином

$$Z_t = \theta_0^{(j)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(j)} Z_{t-i} + a_t^{(j)} \quad \text{ако је } c_{j-1} < Z_{t-d} < c_j \quad j = 1, \dots, l$$

⁴ Howell Tong (рођен 1944 у Хонг Конгу)

⁵ K. S. Lim

са праговима $r_1 < r_2 < \dots < r_{l-1}$ (и $r_0 = -\infty, r_l = +\infty$), који дефинишу поделу на реалној правој на l подинтервала. Ауторегресиони модел са праговима првог реда,

$$Z_t = \theta_0^{(j)} + \phi^{(j)} Z_{t-1} + a_t^{(j)} \text{ ако је } r_{j-1} < Z_{t-1} < r_j$$

на пример, може се сматрати по деловима линеарном апроксимацијом општег нелинеарног модела првог реда $Z_t = g(Z_{t-1}) + a_t$, где је $g(\cdot)$ нека општа нелинеарна функција.

2.2.2 SETAR (eng. Self-exciting) модел

Класа SETAR модела (Тонг 1978,1983) је широко коришћена у литератури да објасни различите емпиријске проблеме у посматраним временским серијама. На пример, користили су је Тонг и *Yeung* за загађеност воде на плажама, *Watier* и *Richardson* за епидемиолошки приказ, *Lewis* и *Ray* за температуру морске површине, *Montgomery* за U.S. незапосленост, *Fuecht* за медицинска истраживања, *Clements* и *Smith* за промену курса. Популарност ових модела је због њихове једноставности да се одреде, процене и интерпретирају у односу на друге нелинеарне моделе временских серија. Форма SETAR($d; p_1, p_2, \dots, p_k$) модела са k режима је

$$Z_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{j=1}^{p_1} \phi_j^{(1)} Z_{t-j} + a_t^{(1)}, & \text{ако } Z_{t-d} \leq r_1 \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{j=1}^{p_2} \phi_j^{(2)} Z_{t-j} + a_t^{(2)}, & \text{ако } r_1 < Z_{t-d} \leq r_2 \\ \vdots & \vdots \\ \phi_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{p_k} \phi_j^{(k)} Z_{t-j} + a_t^{(k)}, & \text{ако } r_{k-1} < Z_{t-d} \end{cases} \quad (7)$$

при чему је d параметар кашњења (eng. delay parameter) и p_i је ред ауторегресионог модела у i -том режиму. Јасно је да се AR модели разликују у зависности од режима, иначе, број режима би се смањило. Прагови r_1, \dots, r_{k-1} задовољавају ограничење $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_{k-1} < r_k = \infty$. Низ случајних величина $a_t^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, k$ има нормалну расподелу са параметрима $(0, \sigma_i^2 < \infty)$. Ако се претпостави једнакост дисперзија, тзв. хомоскедастичност у режимима ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma_\varepsilon^2$), заједничка дисперзија се може израчунати из обједињеног узорка. У оквиру сваког режима претпоставља се да понашање променљиве у временској серији опонаша линеарни ауторегресиони процес. Режим који се примењује, у сваком тренутку t , зависи од посматране историје самог модела $\{Z_t\}$,

посебно од вредности Z_{t-d} . Из тог разлога Тонг и Лим (1980) су процес (7) назвали самопобуђујући (*eng. self-exciting*) TAR модел.

Моделирање [8]

Постоји много начина за моделирање SETAR модела, али су поступци које је дао Цај⁶ (1989) далеко једноставнији од осталих. То укључује фазе спецификације модела, процену и дијагностичку проверу.

Тестирање на нелинеарност и спецификација модела

Веома је важно имати тест који је валидан при доношењу одлуке да ли је бољи линеарни ARMA или нелинеарни SETAR модел за описивање динамике серије која се проучава. За тестирање нелинеарности користи се тест који је повезан са портманто тестом, који је заснован на уређеној ауторегресији и предвиђеним резидуалима. Ипак, два теста се разликују у начину на који се нека својства предвиђених резидуала користе.

Посматрајмо 2-режимни SETAR модел

$$Z_t = \begin{cases} \theta_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} Z_{t-i} + a_t^{(1)} & \text{ако је } Z_{t-d} \leq r_1 \\ \theta_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(2)} Z_{t-i} + a_t^{(2)} & \text{ако је } Z_{t-d} > r_1 \end{cases}$$

где је $t \in (p+1, \dots, n)$, n је број опсервација. Сада поређајмо опсервације у растућем поретку. Нека је π_i индекс i -те најмање опсервације, тада модел можемо записати у следећем облику

$$Z_{\pi_i+d} = \begin{cases} \theta_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} Z_{\pi_i+d} + a_{\pi_i+d}^{(1)} & \text{ако је } i \leq s \\ \theta_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(2)} Z_{\pi_i+d} + a_{\pi_i+d}^{(2)} & \text{ако је } i > s \end{cases} \quad (8)$$

при чему је $i \in (p+1-d, \dots, n-d)$ и s задовољава $Z_{\pi_s} < r_1 \leq Z_{\pi_{s+1}}$. Ово је уређена ауторегресија где се првих s случајева налази у првом режиму, а остали у другом. Уређена ауторегресија групише податке у два режима, тако да све опсервације у једној групи представљају исти AR процес. Приметимо да раздвајање података не захтева прецизну вредност r_1 . Само број опсервација у свакој групи зависи од r_1 .

⁶Ruey S. Tsay

За уређену ауторегресију (8), нека је $\hat{\beta}_m$ вектор оцена добијених методом најмањих квадрата добијених на основу првих m случајева, P_m је придружена $X'X$ инверзна матрица, и x_{m+1} вектор регресора следеће опсервације за улазак у ауторегресију, односно $Z_{\pi_{m+1}+d}$. Тада, рекурзивне оцене добијене методом најмањих квадрата могу бити ефикасно израчунате помоћу

$$\hat{\beta}_{m+1} = \hat{\beta}_m + K_{m+1}[Z_{\pi_{m+1}+d} - x'_{m+1}\hat{\beta}_m],$$

$$D_{m+1} = 1.0 + x'_{m+1}P_mx_{m+1},$$

$$K_{m+1} = \frac{P_mx_{m+1}}{D_{m+1}},$$

и

$$P_{m+1} = \left(I - P_m \frac{x_{m+1}x'_{m+1}}{D_{m+1}} \right) P_m$$

и предвиђени и стандардизовани предвиђени резидулаи помоћу

$$\hat{a}_{\pi_{m+1}+d} = Z_{\pi_{m+1}+d} - x'_{m+1}\hat{\beta}_m \quad (9)$$

$$\hat{e}_{\pi_{m+1}+d} = \hat{a}_{\pi_{m+1}+d} / \sqrt{D_{m+1}} \quad (10)$$

Сада посматрајмо SETAR модел дат једначином (7). Када је $p_1 = p_2 = \dots = p_k = p$ и $\phi_i^{(1)} = \phi_i^{(2)} = \dots = \phi_i^{(k)}$ за $i = 0, 1, \dots, p$, SETAR модел постаје линеарни ауторегресиони процес реда p . Нека је $p = \max\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ и $d \leq p$, за посматрану временску серију $\{Z_1, \dots, Z_n\}$. Нека је π_i индекс i -те најмање опсервације из $\{Z_{p+1-d}, \dots, Z_{n-d}\}$. Форма уређене ауторегресије

$$\begin{pmatrix} Z_{\pi_1+d} \\ Z_{\pi_2+d} \\ \vdots \\ Z_{\pi_j+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_{\pi_1+d-1} & \dots & Z_{\pi_1} & \dots & Z_{\pi_1+d-p} \\ 1 & Z_{\pi_2+d-1} & \dots & Z_{\pi_2} & \dots & Z_{\pi_2+d-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & Z_{\pi_j+d-1} & \dots & Z_{\pi_j} & \dots & Z_{\pi_j+d-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \dots \\ \phi_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{\pi_1+d} \\ a_{\pi_2+d} \\ \dots \\ a_{\pi_j+d} \end{pmatrix} \quad (11)$$

се успешно фитује, односно, прилагођује подацима, при чему је $j = m, m+1, \dots, n-p$, и m је број опсервација са којима се започиње уређена ауторегресија. Tsay (1989) је предложио коришћење $m \approx (n/10) + p$.

Следећи пример се користи да покаже кључне кораке у добијању уређене ауторегресије. Табела 1 представља временску серију са $n = 24$.

Претпоставимо да је $p = 3$ и $d = 1$. Симбол π_i представља индекс i -те најмање опсервације из $\{Z_3, \dots, Z_{23}\}$. Вредности π_i су израчунате у Табели 1.

Табела 1

Хипотетички подаци временске серије

t	Z_t	π_i	t	Z_t	π_i	t	Z_t	π_i
1	101		9	154	(21)=9	17	83	(13)=17
2	82		10	125	(18)=10	18	132	(20)=18
3	66	(10)=3	11	85	(14)=11	19	131	(19)=19
4	35	(7)=4	12	68	(12)=12	20	118	(17)=20
5	31	(6)=5	13	38	(8)=13	21	90	(15)=21
6	7	(1)=6	14	23	(4)=14	22	67	(11)=22
7	20	(3)=7	15	10	(2)=15	23	60	(9)=23
8	92	(16)=8	16	24	(5)=16	24	47	

У Табели 2 су приказани подаци уређене ауторегресије дужине $j = n - p = 21$. Променљиве Z_t у Табели 2 су уређене према $t = \pi_i + d$, за $d = 1$ и $i = 1, \dots, 21$. Регресори (*eng. regressors*) $\{1, Z_{t-1}, Z_{t-2}, Z_{t-3}\}$ су уређени према $\{1, Z_{\pi_i+d-1}, Z_{\pi_i+d-2}, Z_{\pi_i+d-3}\} = \{1, Z_{\pi_i}, Z_{\pi_i-1}, Z_{\pi_i-2}\}$ за $d = 1$ и $i = 1, \dots, 21$. И на крају је матрица уређена према регресору Z_{t-1} (погледати шесту колону Табеле 2).

Табела 2

Матрица података уређене ауторегресије ($p = 3$ и $d = 1$)

Временски индекси			Независна променљива Z_{π_i+d}	Регресори			
i	π_i	$\pi_i + d$		1	Z_{π_i+d-1}	Z_{π_i+d-2}	Z_{π_i+d-3}
1	6	7	20	1	7	31	35
2	15	16	24	1	10	23	38
3	7	8	92	1	20	7	31
4	14	15	10	1	23	38	68
5	16	17	83	1	24	10	23
6	5	6	7	1	31	35	66
7	4	5	31	1	35	66	82
8	13	14	23	1	38	68	85
9	23	24	47	1	47	67	90
10	3	4	35	1	60	82	101
11	22	23	60	1	67	90	118
12	12	13	38	1	68	85	125
13	17	18	132	1	83	24	10
14	11	12	68	1	85	125	154
15	21	22	67	1	90	118	131
16	8	9	154	1	92	20	7
17	20	21	90	1	118	131	132
18	10	11	85	1	125	154	92
19	19	20	118	1	131	132	83
20	18	19	131	1	132	83	24
21	9	10	125	1	154	92	20

Уопште, ауторегресија дата једначином (8) се сортира на основу променљиве Z_{t-d} , која је индикатор режима SETAR модела. За свако j из једначине (8), можемо израчунати, за један корак унапред, стандардизовану предвиђену грешку $\hat{e}_{\pi_{j+1}+d}$. Ако би разматрани модел био линеарни $AR(p)$ процес, стандардизоване грешке не би биле само независне и идентично расподелјене, већ би постојала и ортогоналност са регресорима $\{Z_{\pi_{j+1}+d-1}, \dots, Z_{\pi_{j+1}+d-p}\}$. Ако би модел био нелинеарни SETAR процес, онда би ортогоналност била нарушена. Tsay (1989) разматра ово својство и посматра регресију

$$e = Z\beta + \eta \quad (12)$$

где је $e = (\hat{e}_{\pi_{m+1}+d}, \dots, \hat{e}_{\pi_{n-p}+d})'$, Z је матрица регресора $\{Z_{\pi_{j+1}+d-1}, \dots, Z_{\pi_{j+1}+d-p}\}$ за $j = m, \dots, n-p-1$, β је p -димензиони вектор параметара и η је вектор грешака. За тестирање ортогоналности, па тако и SETAR нелинеарности, користи се F -статистика

$$F(p, d) = \frac{(\sum_{t=p+1}^n \hat{e}_t^2 - \sum_{t=p+1}^n \hat{\eta}_t^2) / (p + 1)}{\sum_{t=p+1}^n \hat{\eta}_t^2 / (n - 1 - 2p - m)} \quad (13)$$

са претпоставком $H_0: \beta = 0$.

Теорема 1. Претпоставимо да је Z_t линеарни стационарни AR процес реда p . Тада Z_t представља SETAR модел са $k = 1$ (k -број режима). За велико n тест статистика $F(p, d)$ апроксимативно одговара F -расподели са $(p + 1)$ и $(n - 1 - 2p - m)$ степени слободе.

Главни проблем моделирања TAR модела јесте спецификација прага, који игра главну улогу у нелинеарности модела. За модел (7) спецификација подразумева и одређивање параметра кашњења d . Тонг и Лим користе *Akaike* информациони критеријум (AIC; 1974) за одређивање овог параметра након одабира свих осталих. Постоји и друга процедура која одређује d пре проналажења прагова. Ова процедура је заснована на перформансама Ф-статистике. Претпоставља се да је AR ред p дат. За дат TAR процес и AR ред p , бира се оцена параметра кашњења d_p таква да важи

$$\hat{F}(p, d_p) = \max_{\delta \in S} (\hat{F}(p, \delta)) \quad (14)$$

где је $\hat{F}(p, \delta)$ тест статистика дефинисана са (13), индекс p означава да оцена параметра d може зависити од p , и S је скуп позитивних вредности, тј. колекција могућих вредности за d . Због једноставности претпоставимо да све тест статистике $\hat{F}(p, \delta)$ из (14) имају исти број степени слободе. То може бити постигнуто одговарајућим избором почетне вредности m рекурзије. Када су степени слободе различити, може се израчунати p вредност F -статистике и одабрати d_p на основу минимума резултујућих p вредности.

Приметимо да је избор параметра d_p у (14) заснован на идеји да ако су TAR модели потребни, онда би се могло почети са параметром кашњења који даје најзначајнији резултат при тестирању нелинеарности прага. Опрезнији аналитичари могу желети да испробају неколико вредности параметра d , као што су максимум и други максимум од $\hat{F}(p, d)$.

Код TAR модела потребно је посебну пажњу посветити оцењивању прагова. Да бисмо ово објаснили, претпоставимо да је $k = 2$ и права вредност r_1 задовољава $Z_{\pi_s} < r_1 \leq Z_{\pi_{s+1}}$. Тада је било која вредност из интервала $[Z_{\pi_s}, Z_{\pi_{s+1}}]$ довољно добра у обезбеђивању оцене r_1 , јер све дају исти резултат код фитовања одређеног TAR модела. Дакле, како одабрати оцену r_1 са добрим особинама од бесконачно много могућности, остаје као велики проблем. Уопште, може се обезбедити интервал оцена за сваку вредност

прага или користити узорачке перцентиле као вредности оцена. Користићемо ово друго, тј. користићемо адаптиран приступ Tong и Lim (1980) који користи емпиријске перцентиле као кандидате за вредности прагова. Али, уместо да се унапред одређује скуп коначних бројева од узорачких перцентила са којима би се радило, претраживаћемо међу перцентилима како би лоцирали вредности прагова. Једино ограничење јесте то да праг није превише близу 0ог или 100ог перцентила. За ове екстремне вредности нема довољно опсервација које би дале ефикасну оцену.

Метода којом би се пронашли прагови је дијаграм распршења разних статистика у односу на одређени праг. Иако график није формално испитивање и оцењивање статистика, ипак пружа корисне информације о проналажењу прагова. Графици који се користе су а) дијаграм распршења стандардизованих предвиђених резидуала (10) или обичних предвиђених резидуала (9) у односу на Z_{t-d_p} , и б) дијаграм распршења t односа рекурзивних оцена AR коефицијента у односу на Z_{t-d_p} .

У оквиру уређене ауторегресије, TAR модел се састоји од различитих промена модела које се дешавају на свакој вредности прага r_j . Дакле, предвиђени резидуали су засновани на праговима. Дијаграм распршења стандардизованих предвиђених резидуала у односу на променљиву прага на тај начин може открити позицију вредности прага TAR модела. С' друге стране, за линеарне временске серије дијаграм распршења је случајан, осим на почетку рекурзије.

У случају дијаграма распршења t односа рекурзивних оцена AR коефицијента у односу на променљиву прага Z_{t-d_p} , t односи имају две функције: а) они показују значајност посебног AR коефицијента, и б) када је коефицијент значајан, t односи постепено и глатко конвергирају ка фиксној вредности како се рекурзија наставља. Посматрајмо обични TAR модел

$$Z_t = \begin{cases} \phi_1^{(1)} Z_{t-1} + a_t^{(1)} & \text{ако је } Z_{t-d} \leq r_1 \\ \phi_1^{(2)} Z_{t-1} + a_t^{(2)} & \text{ако је } Z_{t-d} > r_1 \end{cases} \quad (15)$$

где су $\phi_1^{(1)}$ и $\phi_1^{(2)}$ различити. Нека је $\hat{\phi}_1$ рекурзивна оцена лаг-1 AR коефицијента у уређеној ауторегресији (8). t односи од $\hat{\phi}_1$ се понашају тачно као они из линеарне временске серије пре него што рекурзија достигне вредност прага r_1 . Када се r_1 једном достигне, оцена $\hat{\phi}_1$ почиње да се мења и t односи почињу да одступају. Образац постепене конвергенције t односа је уништен. У ствари, t однос почиње да се окреће, и можда мења правац на грничној вредности (вредности прага). За модел (15), $\hat{\phi}_1$ почиње да се мења када Z_{t-d} достигне r_1 и коначно је то компромис између $\phi_1^{(1)}$ и $\phi_1^{(2)}$. Ово

понашање се такође појављује и код удружених t односа показујући вредности r_1 . Уопште, промена t односа је значајна када се два AR коефицијента значајно разликују.

Након одређивања AR реда p и параметра кашњења d_p , можемо прецизирати ред за сваки режим и вредност прага на основу AIC. AIC се рачуна за различите вредности p и за сваку потенцијалну вредност прага. Овај критеријум је дефинисан са

$$AIC(p) = N \cdot \log(RSS/N) + (p + 1) \cdot \log(N)$$

RSS је сума квадрата резидуала, N ефективан број опсервација и p је број независних параметара у моделу.

Сада је потребно одрадити процедуру моделовања TAR модела коју је предложио Цај у [8]. Процедура се састоји из неколико корака, али је сваки корак релативно лак у поређењу са оним које су Тонг и Лим представили.

Корак 1. Одредити AR ред p и скуп могућих заостатака (лагова) прага S .

Корак 2. Фитовати уређену ауторегресију за дато p и сваки члан d скупа S , а затим применити тест нелинеарности $\hat{F}(p, d)$. Ако је откривена нелинеарност процеса, одредити параметар d_p , као што је претходно описано.

Корак 3. За дато p и d_p , пронаћи прагове користећи дијаграм распршења.

Корак 4. Прецизирати AR ред и прагове, ако је неопходно, за сваки режим користећи технике линеарне ауторегресије.

У Кораку 1. AR ред p може бити одређен разматрањем парцијалне аутокорелационе функције PACF Y_t или неким критеријумом, као што је Акаике информациони критеријум (AIC; 1974).

2.2.3 Мултиваријантни SETAR модел

Посматрајмо s -димензиону временску серију $Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{st})'$. S -димензиони SETAR($d; p_1, \dots, p_k$) модел са k режима је дефинисан са

$$Y_t = \begin{cases} C_0^{(1)} + \sum_{j=1}^{p_1} \phi_j^{(1)} Y_{t-j} + \varepsilon_t^{(1)}, & \text{ако } z_{t-d} \leq r_1 \\ C_0^{(2)} + \sum_{j=1}^{p_2} \phi_j^{(2)} Y_{t-j} + \varepsilon_t^{(2)}, & \text{ако } r_1 < z_{t-d} \leq r_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ C_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{p_k} \phi_j^{(k)} Y_{t-j} + \varepsilon_t^{(k)}, & \text{ако } r_{k-1} < z_{t-d} \end{cases} \quad (16)$$

где су $C_0^{(i)}$ ($s \times 1$)-димензиони константни вектори и $\phi_j^{(i)}$ ($s \times s$)-димензиона матрица параметара за $i = 1, \dots, k$. Иновациони вектори i -тог режима задовољавају $\varepsilon_t^{(i)} = \sum_i^{1/2} a_t$, при чему су $\sum_i^{1/2}$ симетричне позитивно дефинисане матрице и $\{a_t\}$ низ серијских некорелираних нормалних случајних вектора са очекивањем 0 и матрицом коваријације I . Претпоставља се да је праг променљива z_{t-d} стационарна; зависи од прошлости Y_{t-d} . На пример, можемо да поставимо

$$z_{t-d} = \omega' Y_{t-d},$$

при чему је ω дефинисан као ($s \times 1$)-димензиони вектор. Када је $\omega = (1, 0, \dots, 0)'$, праг променљива је $z_{t-d} = y_{1,t-d}$. Када је $\omega = \left(\frac{1}{s}, \frac{1}{s}, \dots, \frac{1}{s}\right)'$, праг променљива је средња вредност свих елемената у Y_{t-d} .

Моделирање

Аналогно, Цај (1989) процедури за моделирање униваријантног SETAR модела, Цај (1998) даје и метод за мултиваријантну ситуацију.

Нека је дато $p = \max\{p_1, \dots, p_k\}$ и $d \leq p$, и посматрајмо вектор временских серија $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$. Цај (1998) је разматрао мултиваријантну генерализацију уређене регресије одређене једначином (11). Треба напоменути да праг променљива z_{t-d} у једначини (16) може узети вредности само из $Z = \{z_{p+1-d}, \dots, z_{n-d}\}$. Нека је (i) индекс i -те најмање опсервације у Z . Форма уређене мултиваријантне ауторегресије

$$\begin{pmatrix} Y'_{(1)+d} \\ Y'_{(2)+d} \\ \vdots \\ Y'_{(j)+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Y'_{(1)+d-1} & \cdots \\ 1 & Y'_{(2)+d-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & Y'_{(j)+d-1} & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'_{(1)+d-p} \\ Y'_{(2)+d-p} \\ \vdots \\ Y'_{(j)+d-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_0 \\ \phi'_1 \\ \vdots \\ \phi'_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_{(1)+d} \\ \varepsilon'_{(2)+d} \\ \vdots \\ \varepsilon'_{(j)+d} \end{pmatrix} \quad (17)$$

успешно фитована, где је $j = m, m + 1, \dots, n - p$, и m је број почетних опсервација у уређеној ауторегресији. Цај предлаже за m опсег $(3\sqrt{n}, 5\sqrt{n})$. Различите вредности m могу бити коришћене за испитивање осетљивости резултата моделирања у односу на избор. Треба напоменути уређена ауторегресија (17) је сортирана у односу на променљиву z_{t-d} , која представља индикатор режима у мултиваријантном SETAR моделу.

Нека $\hat{e}_{(m+1)+d}$ означава један корак напред стандардизовани предвиђени резидуал мултиваријантне регресије (17) за $j = m$. Цај 1998. обезбеђује директну рачунску формулу за $\hat{e}_{(m+1)+d}$. Уколико је основни модел линеарни вектор ауторегресионог процеса, онда предвиђени резидуали чине бели шум, и они су некорелисани са регресором $X'_t = \{1, Y'_{t-1}, Y'_{t-2}, \dots, Y'_{t-p}\}$. Међутим, ако Y_t прати процес прага, онда су предвиђени резидуали корелисани са регресором. Tsay (1998) користи ово својство поново, и посматра мултиваријантну регресију

$$\hat{e}'_{(l)+d} = X'_{(l)+d}\beta + w'_{(l)+d} \quad (18)$$

за $l = m + 1, \dots, n - p$. Проблем тестирања нелинеарности је трансформисан у тестирање хипотезе $H_0: \beta = 0$ у регресији изнад. Цај користи тест статистику

$$C(d) = (n - p - m - kp - 1)\{\ln|S_0| - \ln|S_1|\}, \quad (19)$$

при чему $|A|$ означава детерминанту матрице A и

$$S_0 = \frac{1}{n - p - m} \sum_{l=m+1}^{n-p} \hat{e}_{(l)+d} \hat{e}'_{(l)+d},$$

$$S_1 = \frac{1}{n - p - m} \sum_{l=m+1}^{n-p} \hat{w}_{(l)+d} \hat{w}'_{(l)+d},$$

где је \hat{w}_t најмањи квадратни резидуал регресије (18). Под нултом претпоставком, да је Y_t линеарно, Цај показује да је $C(d)$ асимптотски χ^2 случајна променљива са $(pk^2 + k)$ степени слободе.

Спецификација модела, оцењивање и дијагностичка провера

Да би се извршио $C(d)$ тест нелинеарности у једначини (19), вредности p и d морају бити дате. У пракси, можемо одабрати p из PAM (*eng. partial*

autoregression matrix) од Y_t . Тиао⁷ и Бокс⁸ (1981) су дефинисали PAM са лагом l , што се означава са $\Pi(l)$, да буде последња матрица коефицијената који су фитовани вектору ауторегресивног процеса реда l . Матрица $\Pi(l)$ линеарног вектора $AR(p)$ је једнака нули за $l > p$. Ово својство пружа веома корисне информације за идентификацију реда p . Када је p једном изабрано, d се бира тако да добијемо најзначајнију $C(d)$ статистику.

Код униваријантног SETAR модела, број режима и прагове смо одређивали помоћу дијаграма распршивања. Нажалост, код мултиваријантног SETAR модела ови графици нису погодни за добијање тих вредности. Из тог разлога, користимо AIC за проналажење тих вредности.

Нека су дати p , k , d и $\mathcal{R}_k = \{r_1, \dots, r_{k-1}\}$, уређена мултиваријантна ауторегресија у једначини (17) може бити подељена на режиме. За j -ти режим података, имамо општи линеарни модел облика

$$Y_j = A_j \Phi^{(j)} + \varepsilon_j,$$

при чему је

$$Y_j = \left(Y'_{(\pi_{j-1}+1)+d}, \dots, Y'_{(\pi_j)+d} \right)',$$

$$\Phi^{(j)} = \left(c'_0, \Phi'_1^{(j)}, \dots, \Phi'_p^{(j)} \right)',$$

$$\varepsilon_j = \left(\varepsilon'_{(\pi_{j-1}+1)+d}, \dots, \varepsilon'_{(\pi_j)+d} \right)',$$

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 & Y'_{(\pi_{j-1}+1)+d-1} & \cdots & Y'_{(\pi_{j-1}+1)} & \cdots & Y'_{(\pi_{j-1}+1)+d-p} \\ 1 & Y'_{(\pi_{j-1}+2)+d-1} & \cdots & Y'_{(\pi_{j-1}+2)} & \cdots & Y'_{(\pi_{j-1}+2)+d-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & Y'_{(\pi_j)+d-1} & \cdots & Y'_{(\pi_j)} & \cdots & Y'_{(\pi_j)+d-p} \end{pmatrix}$$

где је π_j највећа вредност од j за коју важи $\{r_{j-1} < z_{(j)} \leq r_j\}$, за $j = 1, \dots, k-1$. Дефинишимо $\pi_0 = 0$ и $\pi_k = n - p$. Број опсервација у j -том ежиму је $n_j = \pi_j - \pi_{j-1}$. Оцена најмањих квадрата од $\Phi^{(j)}$ може се израчунати мултиваријантним методом најмањих квадрата:

$$\hat{\Phi}^{(j)} = (A'_j A_j)^{-1} (A'_j Y_j)$$

и матрица резидуала варијансе-коваријансе за j -ти режим може се израчунати на следећи начин

⁷ George S. Tiao

⁸ G. E. P. Box

$$\hat{\Sigma}_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n_j} \left\{ \hat{\varepsilon}_{(\pi_{j-1}+t)+d} \hat{\varepsilon}'_{(\pi_{j-1}+t)+d} \right\}.$$

AIC мултиваријантног фитованог SETAR модела из једначине (16) је дефинисан са

$$AIC(p, d, k, \mathcal{R}_k) = \sum_{j=1}^k \{n_j \ln|\hat{\Sigma}_j| + 2k(kp + 1)\}.$$

С обзиром на p и d , можемо одредити параметре k и \mathcal{R}_k минимизирањем AIC. Због сложености израчунавања и могућности тумачења крајњег модела, обично се k ограничава на мале бројеве, као што су 2 и 3. За прагове \mathcal{R}_k , делимо податке у подгрупе на основу емпиријских перцентила z_{t-d} , и користимо AIC за одређивање r вредности. Коначно, AIC се користи да прецизира AR ред ($p_k \leq p$) за сваки режим.

Да би се спречило погрешно одређивање модела, препоручује се детаљна дијагностичка анализа резидуала. То обухвата испитивање графика стандардизованих резидуала и узорачку матрицу корелације резидуала.

2.2.4 STAR модел

Генерализација која омогућава мање нагли прелазак из једне једначине (режима) модела у другу развијена је у класи ауторегресионих модела глатке транзиције, познатих као STAR (*eng. smooth transition AR*) модели. У случају када је $l = 1$, основни облик STAR модела дат је са

$$z_t = \theta_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} z_{t-i} + \left(\theta_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(2)} z_{t-i} \right) F\left(\frac{z_{t-d} - \Delta}{s}\right) + a_t$$

где је d параметар кашњења, Δ и s параметри који представљају локацију и скалу модела транзиције, $F(\cdot)$ функција глатке промене, при чему је $F(z) = 1/[1 + \exp\{-\gamma(z - c)\}]$ у случају логистичког STAR модела и у случају нормалног STAR модела $F(z) = \Phi(\gamma(z - c))$, при чему је $\Phi(\cdot)$ једнака кумулативној функцији стандардне нормалне расподеле. Пуштајући да $\gamma \rightarrow \infty$, функција $F(z)$ тежи функцији индикатор, и уобичајени TAR модел (6) може се добити као специјални случај. Условно очекивање STAR модела је једнако линеарној комбинацији следеће две једначине:

$$\mu_{1t} = \theta_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} z_{t-i}$$

$$\mu_{2t} = (\theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)}) + \sum_{i=1}^p (\phi_i^{(1)} + \phi_i^{(2)}) z_{t-i}.$$

Предност STAR модела у односу на TAR модел је то што је функција условног очекивања диференцијабилна. Међутим, искуство показује да се параметри транзиције Δ и s STAR модела тешко процењују.

2.3. Ауторегресиони модели са експоненцијалном расподелом

У овом поглављу разматрају се модели временских серија ауторегресионог типа првог реда. Циљ је да се да што детаљнија слика посматране класе процеса и тиме омогући њихова примена. За постављени модел временске серије и претпостављену маргиналну расподелу посматраног процеса одређују се услови при којима ће иновациони процес имати неку расподелу и уједно се та расподела одређује.

Основна особина нелинеарних модела је експоненцијална маргинална расподела за свако X_t . Значи, X_t има експоненцијалну расподелу са параметром λ ($\lambda > 0$), тј. има густину

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

Математичко очекивање и дисперзија за случајну променљиву X_t која има експоненцијалну расподелу су

$$E(X_t) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X_t) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Лаплас-Стилтјесова трансформација за експоненцијалну расподелу је

$$\begin{aligned} \phi_X(s) &= E(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} dx = \\ &= -\frac{\lambda}{\lambda+s} e^{-(s+\lambda)x} \Big|_0^{\infty} = -\frac{\lambda}{\lambda+s} (0 - 1) = \frac{\lambda}{\lambda+s} \end{aligned} \quad (21)$$

2.3.1 Модел EAR(1)

Нека је низ $\{X_t, t \in T\}$ дефинисан са

$$X_t = \beta X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (22)$$

где је $\beta \in (0,1)$ (Gaver and Lewis, 1980). Иновациони низ $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ је строги бели шум, тако изабран да X_t има експоненцијалну $\varepsilon(\lambda)$ расподелу. Такође, претпостављамо да су X_t и ε_t независне ако је $t < s$.

Модел (22) је EAR(1) модел (*Exponential AutoRegressive Model*).

Према томе, користећи чињеницу да је очекивање производа две независне случајне променљиве једнако производу очекивања тих случајних променљивих, у овом случају X_{t-1} и ε_t , добијамо да је Лаплас-Стилтјесова трансформација ϕ_{X_t} за расподелу X_t (за $s > 0$)

$$\begin{aligned}\phi_{X_t}(s) &= E(e^{-sX_t}) = E(e^{-s(\beta X_{t-1} + \varepsilon_t)}) = E(e^{-s\beta X_{t-1}})E(e^{-s\varepsilon_t}) \\ &= \phi_{X_{t-1}}(\beta s)\phi_{\varepsilon_t}(s).\end{aligned}$$

Претпостављајући да је низ $\{X_t\}$ стационаран, следи да је

$$\phi_X(s) = \phi_X(\beta s)\phi_\varepsilon(s).$$

Одавде следи

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{\phi_X(s)}{\phi_X(\beta s)}. \quad (23)$$

Ако захтевамо да X_t буду позитивне случајне променљиве, тада ако је β негативно то је и βX_{t-1} негативно. То значи да нам треба такав иновациони низ ε_t који је независан од X_{t-1} и који ће случајну променљиву X_t учинити позитивном. Дакле, за позитивне случајне променљиве очигледно неће постојати решење једначине (23) за $\beta < 0$.

Замењујући (23) у (21), добијамо да је

$$\begin{aligned}\phi_\varepsilon(s) &= \frac{\phi_X(s)}{\phi_X(\beta s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda + s}}{\frac{\lambda}{\lambda + \beta s}} = \frac{\lambda + \beta s}{\lambda + s} = \frac{\lambda + \beta s + \beta\lambda - \beta\lambda}{\lambda + s} = \\ &= \frac{\beta(\lambda + s) + \lambda(1 - \beta)}{\lambda + s} = \beta + (1 - \beta)\frac{\lambda}{\lambda + s}.\end{aligned}$$

Дакле, ε_t је увек мешавина дискретне компоненте 0 са вероватноћом β и експоненцијалне ξ_t са вероватноћом $(1 - \beta)$. То изражавамо на следећи начин

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 0 & \text{са вероватноћом } \beta \\ \xi_t & \text{са вероватноћом } (1 - \beta), \end{cases} \quad (24)$$

где је ξ_t низ независних и идентички расподељених случајних променљивих са експоненцијалном $\varepsilon(\lambda)$ расподелом. Тада можемо писати да за процес X_t важи

$$X_t = \begin{cases} \beta X_{t-1} & \text{са вероватноћом } \beta \\ \beta X_{t-1} + \xi_t & \text{са вероватноћом } (1 - \beta), \end{cases} \quad (25)$$

где је $0 < \beta < 1$.

Такође, то је модел са случајним коефицијентима и може бити представљен у следећем облику:

$$X_t = \beta X_{t-1} + I_t \varepsilon_t, \quad (26)$$

где је расподела случајне променљиве I_t дата са:

$$I_t: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

и I_t је независно од X_m и ε_m за свако t и m .

Ако би дозволили да је $\beta = 0$ тада би низ $\{X_t, t \in T\}$ био дефинисан са $X_t = \varepsilon_t$, а иновациони низ $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ са $\varepsilon_t = \xi_t$.

Напомена: У даљем тексту, у формулама типа (24) којима се дефинишу процеси које проучавамо, изостављамо речи „са вероватноћом“ јер су сви процеси формиран на сличан начин и из контекста је јасно да су одговарајући параметри вероватноће.

Из модела (22) добијамо да је

$$E(\varepsilon_t) = \frac{1 - \beta}{\lambda}, \quad D(\varepsilon_t) = \frac{1 - \beta^2}{\lambda^2},$$

јер знамо да X_t има експоненцијалну расподелу и

$$E(X_t) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X_t) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Коваријациона функција EAR(1) процеса је

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(X_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}) \\ &= E(\beta X_{t-1} X_{t-h} + \varepsilon_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta E(X_{t-1}X_{t-h}) + E(\varepsilon_t)E(X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}) - \beta E(X_{t-1})E(X_{t-h}) \\
&\quad + \beta E(X_{t-1})E(X_{t-h}) = \\
&= \beta\gamma(h-1).
\end{aligned}$$

Даље се лако закључује да је

$$\gamma(h) = \beta^h \gamma(0), h > 0.$$

Корелациона функција EAR(1) процеса је

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \beta^h, h > 0.$$

Напомена: Модел EAR(1) је један од првих проучаваних нелинеарних модела уопште и многи каснији модели су користили идеје из овог модела.

2.3.2 Модел TEAR(1)

Други експоненцијални ауторегресиони модел првог реда TEAR(1) (Lawrence and Lewis, 1981) је добијен:

1. заменом места независних и идентички расподељених променљивих X_{t-1} и ε_t у моделу EAR(1),
2. заменом $1 - \alpha$ уместо β .

Сад имамо модел

$$X_t = \begin{cases} (1 - \alpha)\varepsilon_t & , \quad 1 - \alpha \\ (1 - \alpha)\varepsilon_t + X_{t-1} & , \quad \alpha \end{cases} \quad (27)$$

где је $t \in T$.

Овде су X_s и ε_t независне случајне променљиве за $s < t$.

Нека су $\phi_{X_t}(s)$ и $\phi_{\varepsilon_t}(s)$ Лаплас-Стилтјесове трансформације маргиналних расподела од X_t и ε_t . Примењујући Лаплас-Стилтјесову трансформацију на обе стране модела TEAR(1), уз претпоставку да је низ X_t стационаран, имамо:

$$\phi_X(s) = (1 - \alpha) \cdot \phi_\varepsilon((1 - \alpha)s) + \alpha \cdot \phi_\varepsilon((1 - \alpha)s) \cdot \phi_X(s)$$

Одавде је:

$$\phi_{\varepsilon}((1-\alpha)s) = \frac{\phi_X(s)}{(1-\alpha) + \alpha \cdot \phi_X(s)}$$

Ако претпоставимо да $X_t: \varepsilon(\lambda)$, имамо

$$\phi_{\varepsilon}((1-\alpha)s) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-\alpha + \frac{\alpha\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{\lambda + (1-\alpha)s}. \quad (28)$$

Значи ε_t има експоненцијалну расподелу са параметром λ .

Такође, то је модел са случајним коефицијентима и може бити представљен у следећем облику:

$$X_t = (1-\alpha)\varepsilon_t + I_t X_{t-1}, \quad (29)$$

где је расподела случајне променљиве I_t дата са:

$$I_t: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

и I_t је независно од X_m и ε_m за свако t и m .

Пошто X_t и ε_t имају експоненцијалну расподелу, биће

$$E(X_t) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X_t) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad E(\varepsilon_t) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(\varepsilon_t) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Коваријациона функција TEAR(1) процеса је:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(X_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}) = \\ &= E\left((1-\alpha)[(1-\alpha)\varepsilon_t X_{t-h}] + \alpha[(1-\alpha)\varepsilon_t X_{t-h} + X_{t-1} X_{t-h}]\right) \\ &\quad - E(X_t)E(X_{t-h}) = \\ &= E\left((1-\alpha)\varepsilon_t X_{t-h} + \alpha X_{t-1} X_{t-h}\right) - E(X_t)E(X_{t-h}) - \alpha E(X_{t-1})E(X_{t-h}) + \\ &\quad + \alpha E(X_{t-1})E(X_{t-h}) = \\ &= \alpha\gamma(h-1) + (1-\alpha)\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda} + \alpha\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda} \\ &= \alpha\gamma(h-1). \end{aligned}$$

Даље се лако закључује да је

$$\gamma(h) = \alpha^h \gamma(0), \quad h > 0.$$

Корелациона функција TEAR(1) процеса је

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \alpha^h, \quad h > 0.$$

2.3.3 Модел NEAR(1)

Основна особина модела NEAR(1) (*New Exponential AutoRegressive model*-Lawrance and Lewis, 1981) је да је то двопараметарски модел ауторегресионе временске серије првог реда са експоненцијалном маргиналном расподелом за X_t .

$$X_t = \begin{cases} \varepsilon_t & , \quad 1 - \alpha \\ \beta X_{t-1} + \varepsilon_t & , \quad \alpha \end{cases} \quad (30)$$

где је $t \in T$, $0 < \alpha, \beta < 1$ и низ $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ је низ независних и идентички расподелених случајних променљивих. такође, претпостављамо да су X_s и ε_t независне случајне променљиве за $s < t$.

Нека су $\phi_{X_t}(s)$ и $\phi_{\varepsilon_t}(s)$ Лаплас-Стилтјесове трансформације маргиналних расподела од X_t и ε_t . Примењујући Лаплас-Стилтјесову трансформацију на обе стране модела NEAR(1), уз претпоставку да је низ $\{X_t\}$ стационаран, имамо:

$$\phi_X(s) = (1 - \alpha) \cdot \phi_\varepsilon(s) + \alpha \cdot \phi_\varepsilon(s) \cdot \phi_X(\beta s)$$

Одавде је:

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{\phi_X(s)}{(1 - \alpha) + \alpha \cdot \phi_X(\beta s)}.$$

Ако претпоставимо да $X_t: \varepsilon(\lambda)$, имамо

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda + s}}{1 - \alpha + \frac{\alpha\lambda}{\lambda + \beta s}} = \frac{\lambda(\lambda + \beta s)}{(\lambda + s)[\lambda + (1 - \alpha)\beta s]}. \quad (31)$$

Рационална функција (31) има следећи развој по елементарним рационалним функцијама

$$\phi_\varepsilon(s) = A \frac{\lambda}{\lambda + s} + B \frac{\lambda}{\lambda + (1 - \alpha)\beta s},$$

где је

$$A = \frac{1 - \beta}{1 - (1 - \alpha)\beta}, \quad B = \frac{\alpha\beta}{1 - (1 - \alpha)\beta}.$$

Дакле, рационалну функцију $\phi_\varepsilon(s)$ можемо написати у облику

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{1 - \beta}{1 - (1 - \alpha)\beta} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + s} + \frac{\alpha\beta}{1 - (1 - \alpha)\beta} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + (1 - \alpha)\beta s},$$

одакле се види да је ε_t мешавина две експоненцијалне расподеле.

$$\varepsilon_t = \begin{cases} \xi_t & , \quad A = \frac{1 - \beta}{1 - (1 - \alpha)\beta} \\ (1 - \alpha)\beta\xi_t & , \quad B = \frac{\alpha\beta}{1 - (1 - \alpha)\beta} \end{cases}$$

где је ξ_t низ независних и идентички расподељених случајних променљивих са експоненцијалном $\varepsilon(\lambda)$ расподелом.

Такође, NEAR(1) је модел са случајним коефицијентима и може бити представљен у следећем облику:

$$X_t = U_t X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad ,$$

где је расподела случајне променљиве U_t дата са:

$$U_t : \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Узимајући очекивање обе стране једнакости (30) имамо:

$$E(X_t) = \alpha\beta E(X_{t-1}) + \alpha E(\varepsilon_t) + (1 - \alpha)E(\varepsilon_t) = \alpha\beta E(X_{t-1}) + E(\varepsilon_t),$$

односно

$$E(\varepsilon_t) = \frac{1 - \alpha\beta}{\lambda}.$$

Узимајући дисперзију обе стране једнакости (30) имамо:

$$D(X_t) = \alpha\beta^2 D(X_{t-1}) + \alpha D(\varepsilon_t) + (1 - \alpha)D(\varepsilon_t) = \alpha\beta^2 D(X_{t-1}) + D(\varepsilon_t),$$

односно

$$D(\varepsilon_t) = \frac{1 - \alpha\beta^2}{\lambda^2}.$$

Коваријациона функција NEAR(1) процеса је:

$$\gamma(h) = E(X_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}) =$$

$$\begin{aligned}
&= E((\beta X_{t-1} + \varepsilon_t)X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}) = \\
&= E((1 - \alpha)\varepsilon_t X_{t-h} + \alpha[\varepsilon_t X_{t-h} + \beta X_{t-1} X_{t-h}]) - E(X_t)E(X_{t-h}) = \\
&= E(\varepsilon_t X_{t-h} + \alpha\beta X_{t-1} X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}) - \alpha\beta E(X_{t-1})E(X_{t-h}) + \\
&\quad + \alpha\beta E(X_{t-1})E(X_{t-h}) = \\
&= \alpha\beta\gamma(h-1) + \frac{1-\alpha\beta}{\lambda} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} + \alpha\beta \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} \\
&= \alpha\beta\gamma(h-1).
\end{aligned}$$

Даље се лако закључује да је

$$\gamma(h) = (\alpha\beta)^h \gamma(0), h > 0.$$

Корелациона функција NEAR(1) процеса је

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = (\alpha\beta)^h, h > 0.$$

Као специјални случајеви модела NEAR(1) могу се добити следећи модели:

- $\alpha = 1$ -EAR(1) модел,
- $\beta = 1$ -TEAR(1) модел.

2.3.4 Модел AREX(1)

Нека је низ $\{X_t, t \in T\}$ дефинисан на следећи начин:

$$X_t = \begin{cases} \varepsilon_t & p_0 \\ \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t & p_1 \\ \beta X_{t-1} & q_1 \end{cases} \quad (32)$$

где је $0 \leq p_0, p_1, q_1 \leq 1, p_0 + p_1 + q_1 = 1, 0 < \alpha, \beta < 1$.

Низ $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ је низ независних и идентички расподељених случајних променљивих. Такође, претпостављамо да су $\{X_t\}$ и $\{\varepsilon_t\}$ независне ако је $t < s$. Потребно је утврдити да ли постоји расподела за иновациони низ $\{\varepsilon_t\}$ за коју је маргинална расподела низа $\{X_t\}$ експоненцијална.

Нека су $\phi_{X_t}(s)$ и $\phi_{\varepsilon_t}(s)$ Лаплас-Стилтјесове трансформације маргиналних расподела од X_t и ε_t .

$$\phi_{X_t}(s) = E(e^{-sX_t}), \phi_{\varepsilon_t}(s) = E(e^{-s\varepsilon_t}) \quad (33)$$

Примењујући Лаплас-Стилтјесову трансформацију на обе стране модела AREX(1), уз претпоставку да је низ $\{X_t\}$ стационаран, имамо:

$$\phi_X(s) = p_0 \cdot \phi_\varepsilon(s) + p_1 \cdot \phi_\varepsilon(s) \cdot \phi_X(\alpha s) + q_1 \cdot \phi_X(\beta s).$$

Одавде је:

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{\phi_X(s) - q_1 \cdot \phi_X(\beta s)}{p_0 + p_1 \cdot \phi_X(\alpha s)}.$$

Замењујући Лаплас-Стилтјесове трансформације за експоненцијалну расподелу добијамо:

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda + s} - q_1 \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \beta s}}{p_0 + p_1 \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \alpha s}} = \frac{\lambda(\lambda + \alpha s)[\lambda(p_0 + p_1) + s(\beta - q_1)]}{(\lambda + s)(\lambda + \beta s)[\lambda(p_0 + p_1) + p_0 \alpha s]} \quad (34)$$

Рационална функција (34) има следећи развој по елементарним рационалним функцијама

$$\phi_\varepsilon(s) = B_0 \frac{\lambda}{\lambda + s} + B_1 \frac{\lambda}{\lambda + \beta s} + B_2 \frac{\lambda}{\lambda(p_0 + p_1) + p_0 \alpha s}.$$

Одатле се добија:

$$B_0 = \frac{1 - \alpha}{p_0 + p_1 - p_0 \alpha}, B_1 = \frac{q_1(\alpha - \beta)}{(p_0 + p_1)\beta - p_0 \alpha},$$

$$B_2 = (p_0 + p_1) \frac{\alpha p_1(\beta - q_1 p_0 \alpha)}{(p_0 + p_1 - p_0 \alpha)(p_0 \beta + p_1 \beta - p_0 \alpha)}$$

што даје

$$B_0 + B_1 + \frac{B_2}{p_0 + p_1} = 1.$$

Закључује се да су B_0, B_1 и $\frac{B_2}{p_0 + p_1}$ вероватноће ако и само ако је $p_1 \leq \alpha < \beta$ и $\alpha > p_0 \beta + p_1$. Тада је расподела за $\{\varepsilon_t\}$ мешавина експоненцијалне расподеле

$$\varepsilon_t = \begin{cases} \xi_t & B_0 \\ \beta \xi_t & B_1 \\ \frac{p_0 \alpha}{p_0 + p_1} \xi_t & \frac{B_2}{p_0 + p_1} \end{cases}$$

са $\xi_t: \varepsilon(\lambda), \lambda > 0$.

Узимајући очекивање са обе стране (32) имамо:

$$E(X_t) = p_0 E(\varepsilon_t) + p_1 \alpha E(X_{t-1}) + p_1 E(\varepsilon_t) + q_1 \beta E(X_{t-1}).$$

Следи да је:

$$E(\varepsilon_t) = \frac{1 - (p_1 \alpha + q_1 \beta)}{(p_0 + p_1) \lambda}.$$

Узимајући дисперзију обе стране (32) имамо:

$$D(X_t) = p_0 D(\varepsilon_t) + p_1 \alpha^2 D(X_{t-1}) + p_1 D(\varepsilon_t) + q_1 \beta^2 D(X_{t-1}).$$

Следи да је:

$$D(\varepsilon_t) = \frac{1 - (p_1 \alpha^2 + q_1 \beta^2)}{(p_0 + p_1) \lambda^2}.$$

Коваријациона функција AREX (1) процеса је:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(X_t X_{t-h}) - E(X_t) E(X_{t-h}) = \\ &= E(p_0 \varepsilon_t X_{t-h} + p_1 (\alpha X_{t-1} X_{t-h} + \varepsilon_t X_{t-h}) + q_1 \beta X_{t-1} X_{t-h}) - E(X_t) E(X_{t-h}) \\ &= (p_1 \alpha + q_1 \beta) \gamma(h-1) \end{aligned}$$

Даље се лако закључује да је

$$\gamma(h) = (p_1 \alpha + q_1 \beta)^h \gamma(0), h > 0.$$

Корелациона функција AREX (1) процеса је

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = (p_1 \alpha + q_1 \beta)^h, h > 0.$$

Као специјални случајеви модела AREX (1) могу се добити следећи модели:

- $p_0 = q_1 = 0, \alpha = \beta$ -EAR(1) модел,
- $q_1 = 0, \alpha = 1$ -TEAR(1) модел,
- $q_1 = 0, \alpha = \beta$ -TEAR(1) модел.

3 Примена

Примена неких од претходно описаних модела биће приказана кроз наредни пример о канадским рисовима. Подаци су узети са сајта www.encyclopediaofmath.org/index.php/Canadian_lynx_data#References.

Обрађиваће се подаци који садрже годишњи број канадских рисова ухваћених у области Мекензи реке у периоду од 1821. до 1934. године.

Први пут модел ове временске серије је поставио Моран⁹ 1953 у „*The statistical analysis of the Canadian lynx cycle. I: structure and prediction*“. Он је приметно да је циклус веома асиметричан са оштрим и великим врховима и релативно глатким и малим дном. Логаритамска трансформација даје серију која је симетрична око очекивања. Како стварни број рисова није тачно пропорционалан са бројем ухваћених, боља репрезентација се може добити укључивањем додатне грешке посматрања, која резултује знатно компликованији модел. Логаритамска трансформација знатно умањује ефекат настао игнорисањем ове грешке, па стога, и након Морана, скоро све анализе ове временске серије користе логаритамску трансформацију. Моран је за ову серију предложио AR(2) модел.

Касније, 1977 Тонг је у раду „*Some comments on the Canadian lynx data—with discussion*“ поставио AR(11) модел на основу Акаике информационог критеријума.

Користећи податке о канадским рисовима као студију, Тонг и Лим су у раду „*Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data (with discussion)*“ поставили класу нелинеарних модела SETAR за логаритамски трансформисане податке о рисовима. Они су показали да овај модел има занимљиве карактеристике у нелинеарним осцилацијама. У дискусији њиховог рада, Рао¹⁰ и Габр¹¹ предложили су подскуп билинеарног модела SBL(11) за првих 100 лог трансформисаних података и SBL(9) за првих 100 оригиналних података о рисовима. Користећи оцену максималне веродостојности комбиновану са Акаике информационом критеријумом, они су 1981. године, предложили SBL(12) модел за првих 100 лог трансформисаних података. Њихов модел је био у могућности да произведе мале вредности варијансе шума и средње квадратне грешке у предвиђањима један корак унапред, али није могао да открије „наслеђено“ понашања података.

Хаген¹² и Озаки¹³ су у раду „*Modelling non-linear random vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series model*“ предложили

⁹ P.A.P. Moran

¹⁰ T. Subba Rao

¹¹ M.M. Gabr

¹² V. Haggan

експоненцијални ауторегресиони модел EXPAR(11). Озаки је сматрао да скоро симетрична серија генерисана овим моделом није задовољавајућа. Након тога, 1982. године, предложио је још два експоненцијална ауторегресиона модела за цео скуп лог трансформисаних података са обрисаним очекивањем. Један од њих, EXPAR(2), је могао да представи асиметричну структуру циклуса података, док је за други, EXPAR(9), са мањим варијансама фитованих резидуала, веровао да је погоднији за предвиђање.

У раду „*Threshold models in non-linear time series analysis*“, Тонг је одредио SETAR(2;5,2) модел за првих 100 логаритамски трансформисаних података и SETAR(2;7,2) модел за скуп свих логаритамски трансформисаних података на следећи начин :

$$\begin{aligned} X_t &= 0.546 + 1.032X_{t-1} - 0.173X_{t-2} + 0.171X_{t-3} - \\ &= 0.431X_{t-4} + 0.332X_{t-5} - 0.284X_{t-6} + \\ &= 0.210X_{t-7} + a_t^{(1)} \text{ ако је } X_{t-2} \leq 3.116 \end{aligned}$$

$$X_t = 2.632 + 1.492X_{t-1} - 1.324X_{t-2} + a_t^{(2)} \text{ ако је } X_{t-2} > 3.116$$

При чему је $var(a_t^{(1)}) = 0.0258$, $var(a_t^{(2)}) = 0.0505$ (заједничка варијанса је 0.0360).

Овај модел је био у могућности да опише биолошке карактеристике канадских рисова као што су:

- Циклично понашање на 9-10 година
- Дуже периоде успона неко пада у циклусима
- Параметар кашњења 2 је повезан са биолошким циклусом канадских рисова, односно, они су потпуно одрасли у јесен у њиховој другој години и рађањем младунчади (1-4 по леглу) на пролеће.

Цај је 1989. године поставио SETAR(3;1,7,2) модел са два прага када је и предложио нову процедуру за тестирање и изградњу TAR модела.

Лаи¹⁴ је 1996. Године у раду „*Comparison study of AR models on the Canadian lynx data: A close look at BDS statistic*“ утврдио да је најпогоднији модел заправо SETAR(2;7,2) модел, који је предложио Тонг.

Временска серија, названа lynx, доступна је у R-у:

¹³ Т. Ozaki

¹⁴ D. Lai

R-kod

Str(lynx)

Издаз

Time-Series [1:114] from 1821 to 1934: 269 321 585 871 1475 ...

R-kod

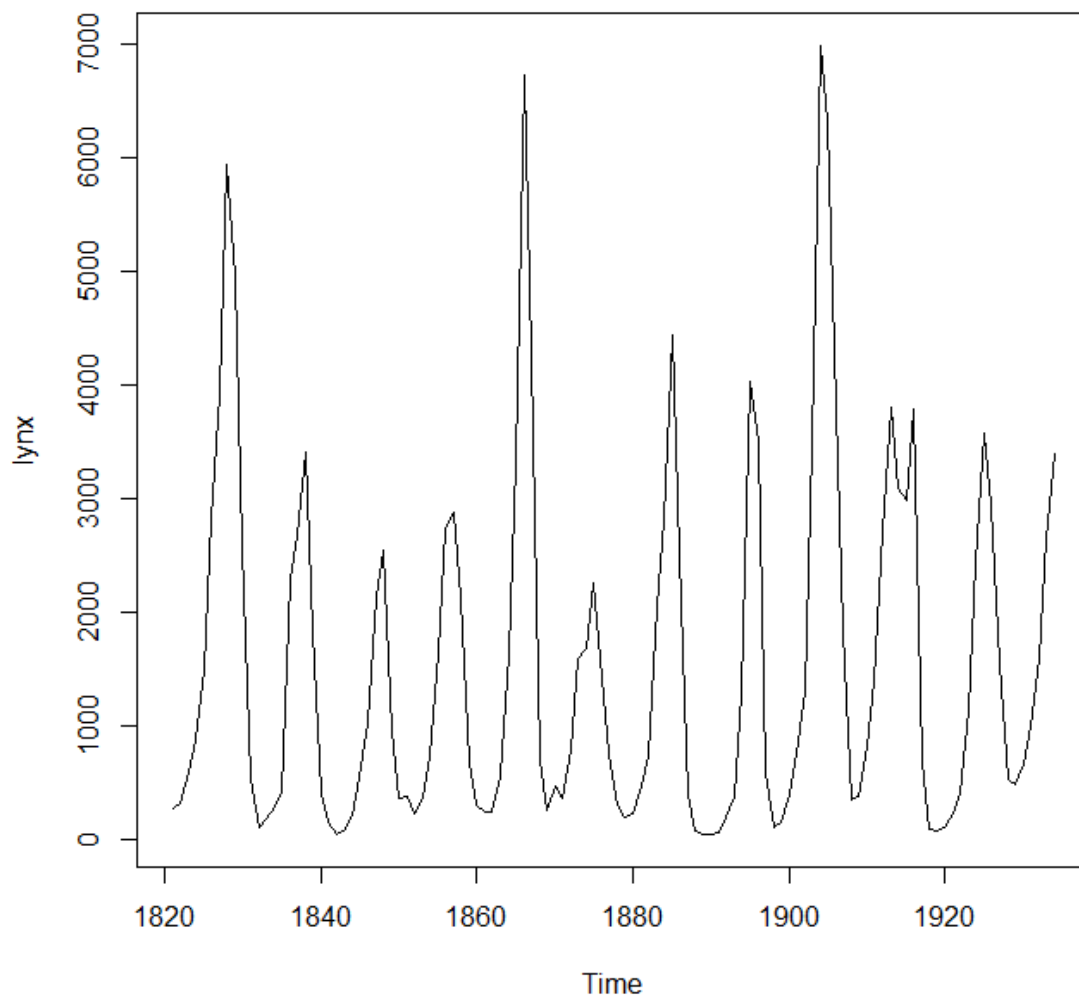
summary(lynx)

Издаз

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
39.0	348.2	771.0	1538.0	2567.0	6991.0

R-kod

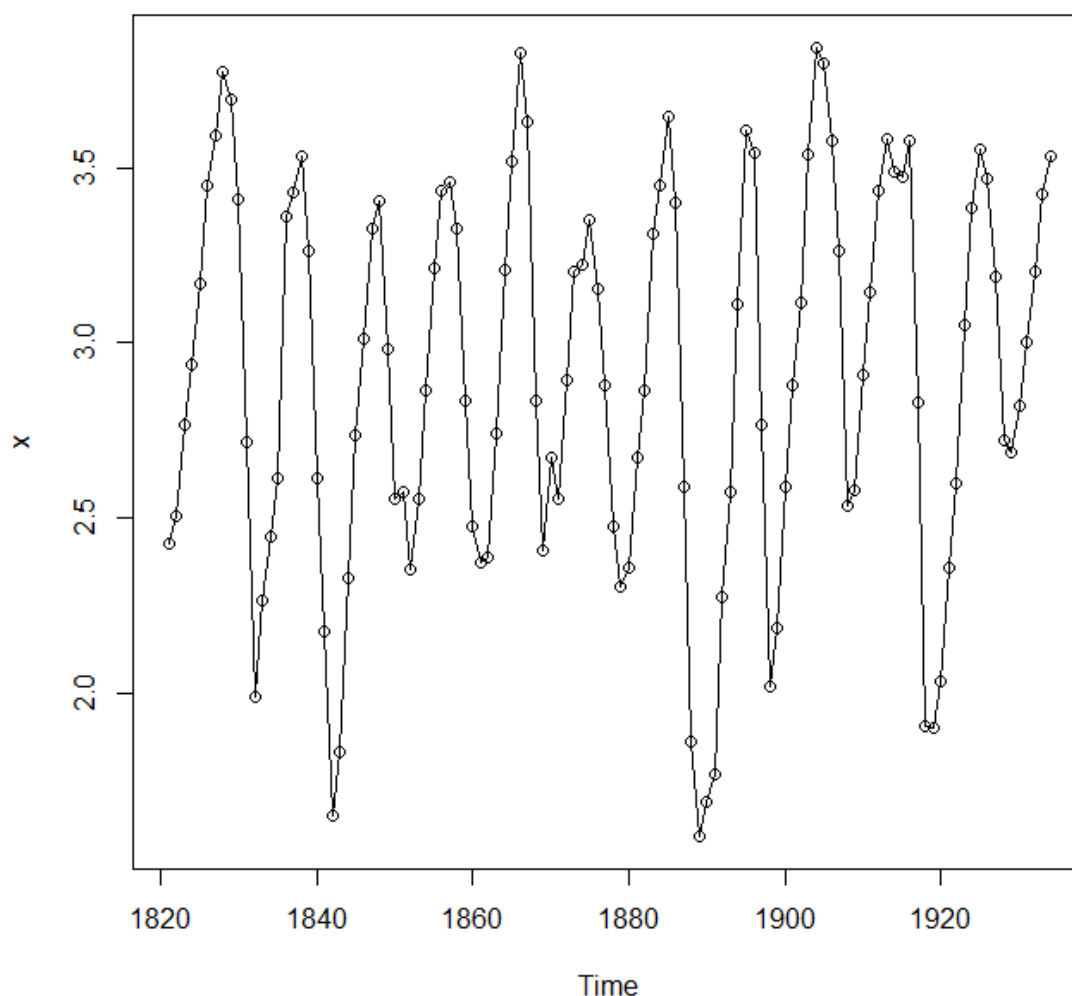
plot(lynx)



Користићемо \log_{10} трансформацију, означену са X_t , $t = 1, 2, \dots, n$ ($n = 114$).

R-kod

```
x<-log10(lynx)
plot(x, type="o")
```

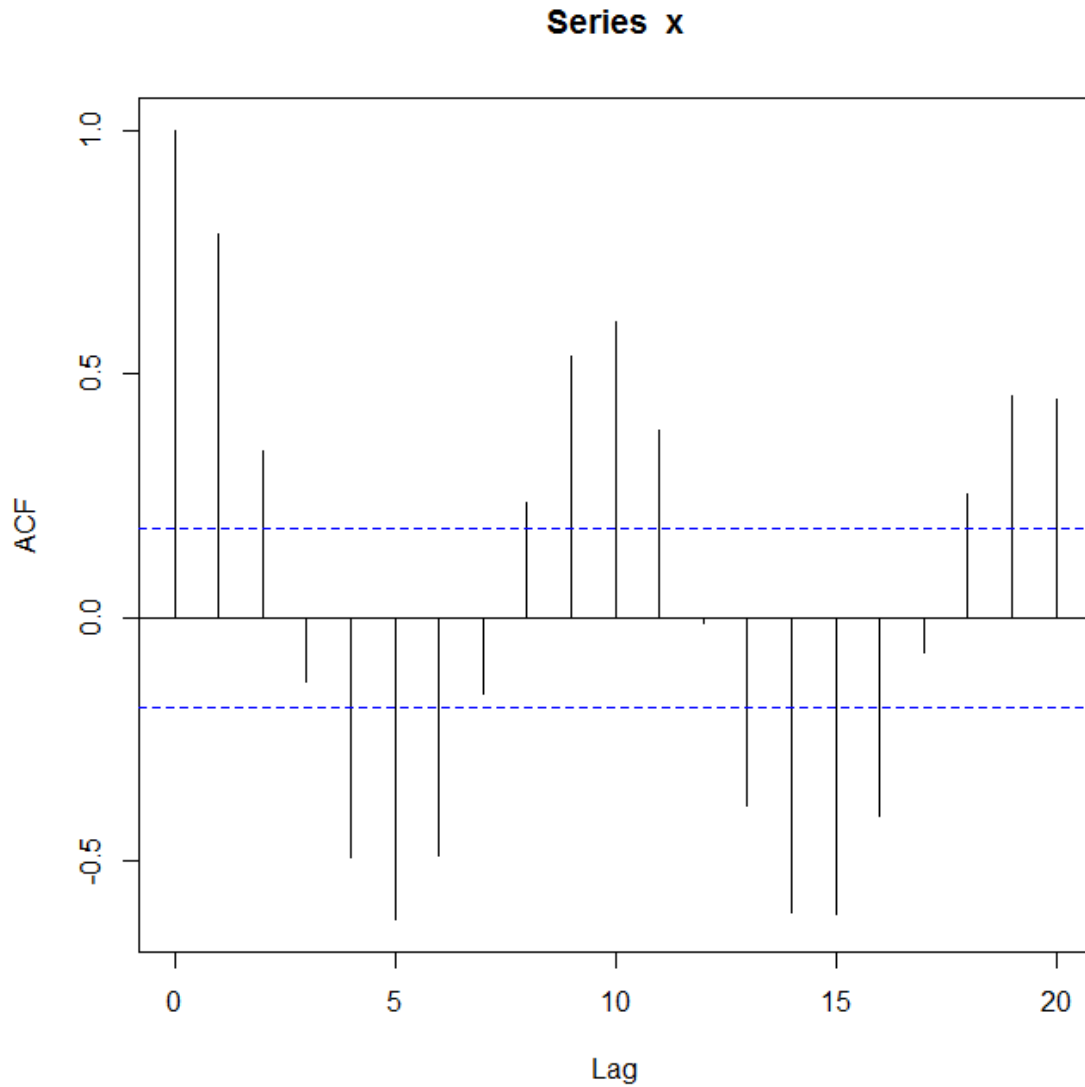


Приказ временске серије X_t на слици показује веома изражено циклично понашање, са периодом од око 10 година. Такође, може се приметити да вредности у узорку расту до својих највиших вредности много спорије него што опадају до минималних вредности (шестогодишњи периоди раста и четворогодишњи периоди пада вредности). Ова карактеристика је изражена код многих нелинеарних процеса. Постоје многа разматрања која би подржала нелинеарни процес, поготово механизам са прагом.

Узорачки ACF серије $\{X_t\}$ такође показује циклично својство.

R-kod

acf(x,plot=T)



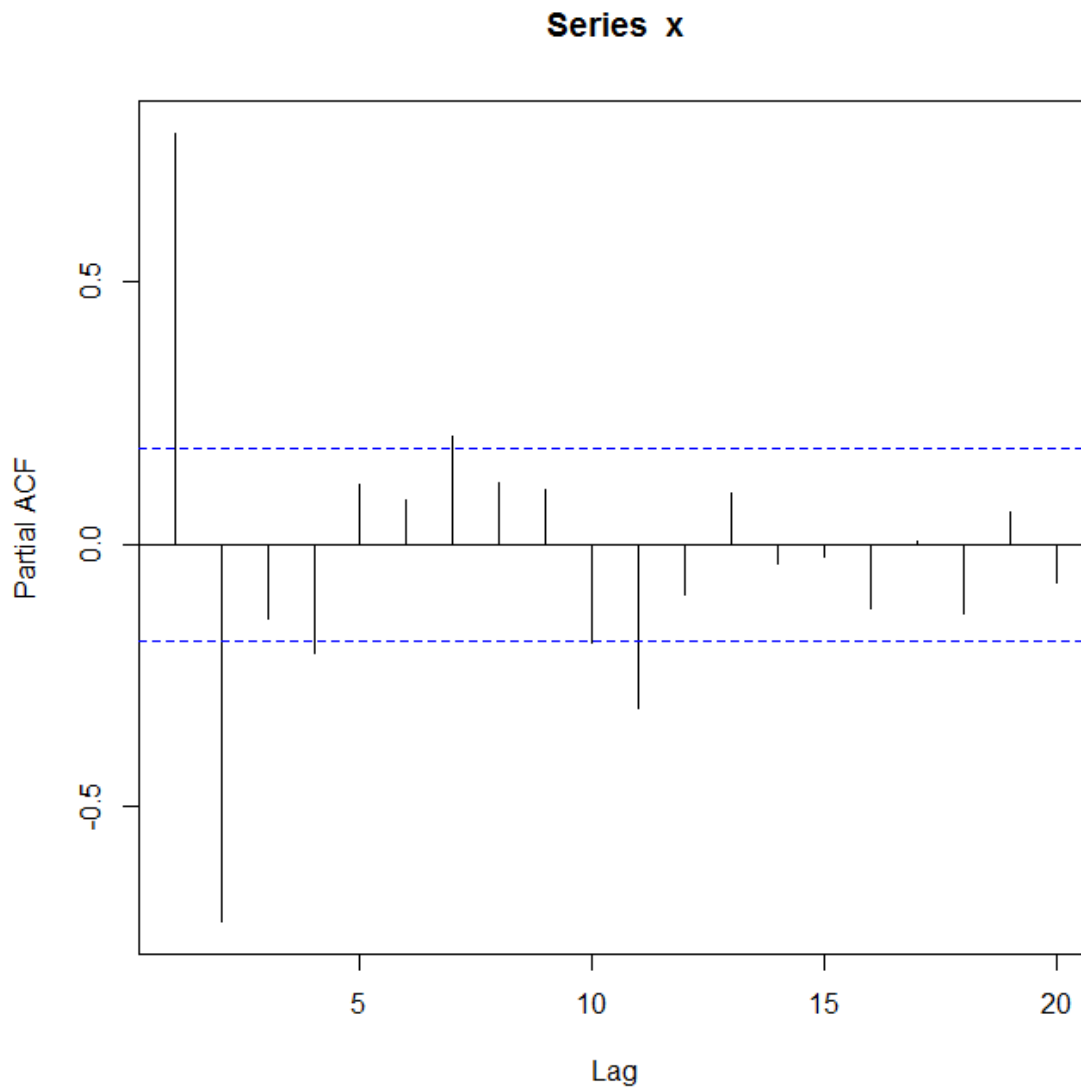
R-kod

acf(x,plot=F)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.000	0.785	0.340	-0.132	-0.494	-0.621	-0.488	-0.158	0.235	0.537	0.606
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0.383	-0.012	-0.385	-0.607	-0.610	-0.407	-0.073	0.253	0.455	0.446

R-kod

pacf(x,plot=T)



R-kod

pacf(x,plot=F)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.785	-0.720	-0.143	-0.206	0.115	0.085	0.208	0.118	0.103	-0.187	-0.311
12	13	14	15	16	17	18	19	20		
-0.096	0.097	-0.036	-0.022	-0.121	0.006	-0.133	0.062	-0.074		

Одабир модела

Први модел који се у литератури предлаже за ове податке, јесте AR(2) модел:

R-kod

mod.ar<-linear(x,m=2)

summary(mod.ar)

Излаз

Non linear autoregressive model

AR model

Coefficients:

const	phi.1	phi.2
1.0576005	1.3842377	-0.7477757

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.58414891	-0.13409850	0.02792821	0.14675526	0.51480330

Fit:

residuals variance = 0.05072, AIC = -334, MAPE = 6.802%

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
const	1.057600	0.120837	8.7523	2.957e-14 ***
phi.1	1.384238	0.063332	21.8569	< 2.2e-16 ***
phi.2	-0.747776	0.063385	-11.7973	< 2.2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Дакле, модел ће имати облик

$$X_t = 1.05 + 1.4X_{t-1} - 0.75X_{t-2} + a_t.$$

Сада ћемо посматрати AR(11) модел:

R-kod

mod.ar11<-linear(x,m=11)
summary(mod.ar11)

Излаз

Non linear autoregressive model

AR model

Coefficients:

const	phi.1	phi.2	phi.3	phi.4	phi.5
1.11482019	1.14925299	-0.53635299	0.28005506	-0.33059375	0.17125674
phi.6	phi.7	phi.8	phi.9	phi.10	phi.11
-0.16475276	0.07197207	-0.02907267	0.14805128	0.19607974	-0.34223130

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.46458065	-0.13700043	0.01252775	0.12260095	0.49670209

Fit:

residuals variance = 0.03293, AIC = -365, MAPE = 5.592%

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
const	1.114820	0.294382	3.7870	0.0002733 ***
phi.1	1.149253	0.092137	12.4733	< 2.2e-16 ***
phi.2	-0.536353	0.143287	-3.7432	0.0003179 ***
phi.3	0.280055	0.152025	1.8422	0.0687082 .
phi.4	-0.330594	0.153981	-2.1470	0.0344538 *
phi.5	0.171257	0.156722	1.0927	0.2773900
phi.6	-0.164753	0.156632	-1.0518	0.2956552
phi.7	0.071972	0.157305	0.4575	0.6483795
phi.8	-0.029073	0.154838	-0.1878	0.8514811
phi.9	0.148051	0.152523	0.9707	0.3342790
phi.10	0.196080	0.143891	1.3627	0.1763405
phi.11	-0.342231	0.091133	-3.7553	0.0003049 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Предвиђање вредности ове серије за следећих 90 периода, уколико она задовољава овај модел може се видети на наредном графику :

_____ R-kod _____
ar(x)

_____ Излаз _____

Call:

ar(x = x)

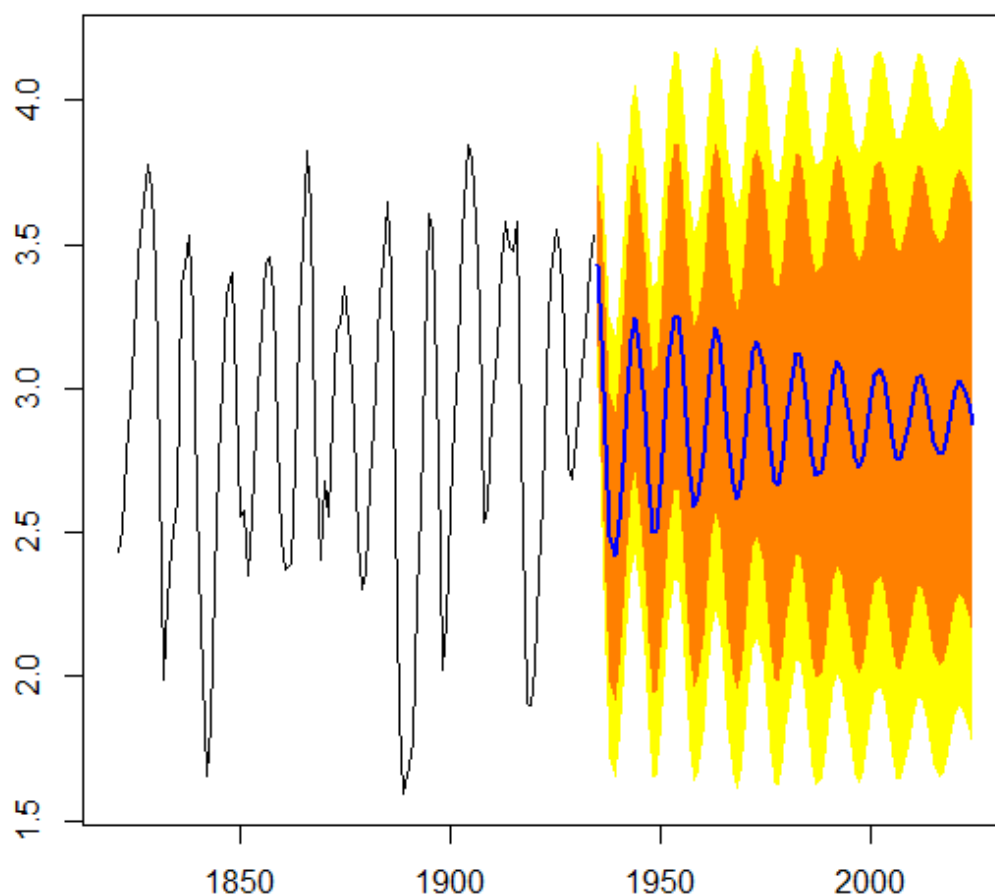
Coefficients:

1	2	3	4	5	6	7	8
1.1387	-0.5080	0.2127	-0.2702	0.1127	-0.1240	0.0677	-0.0400
9	10	11					
0.1337	0.1853	-0.3110					

Order selected 11 sigma² estimated as 0.04771

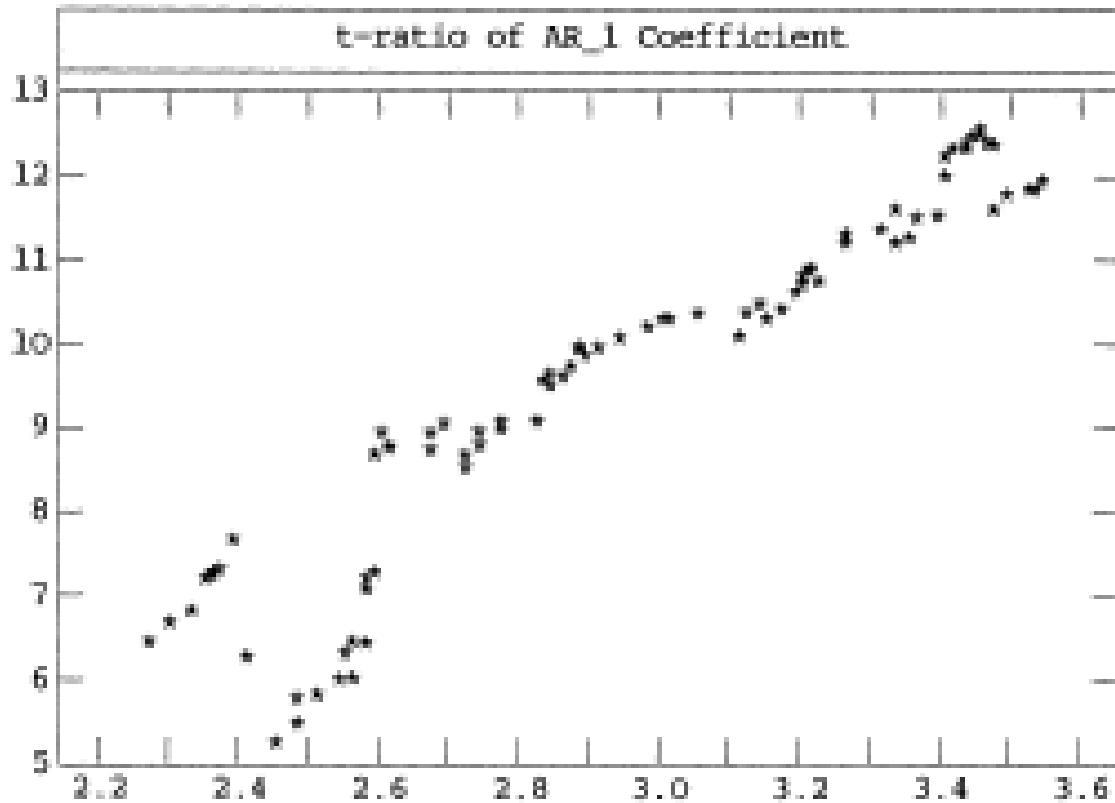
_____ R-kod _____
plot(forecast(ar(x),90))

Forecasts from AR(11)

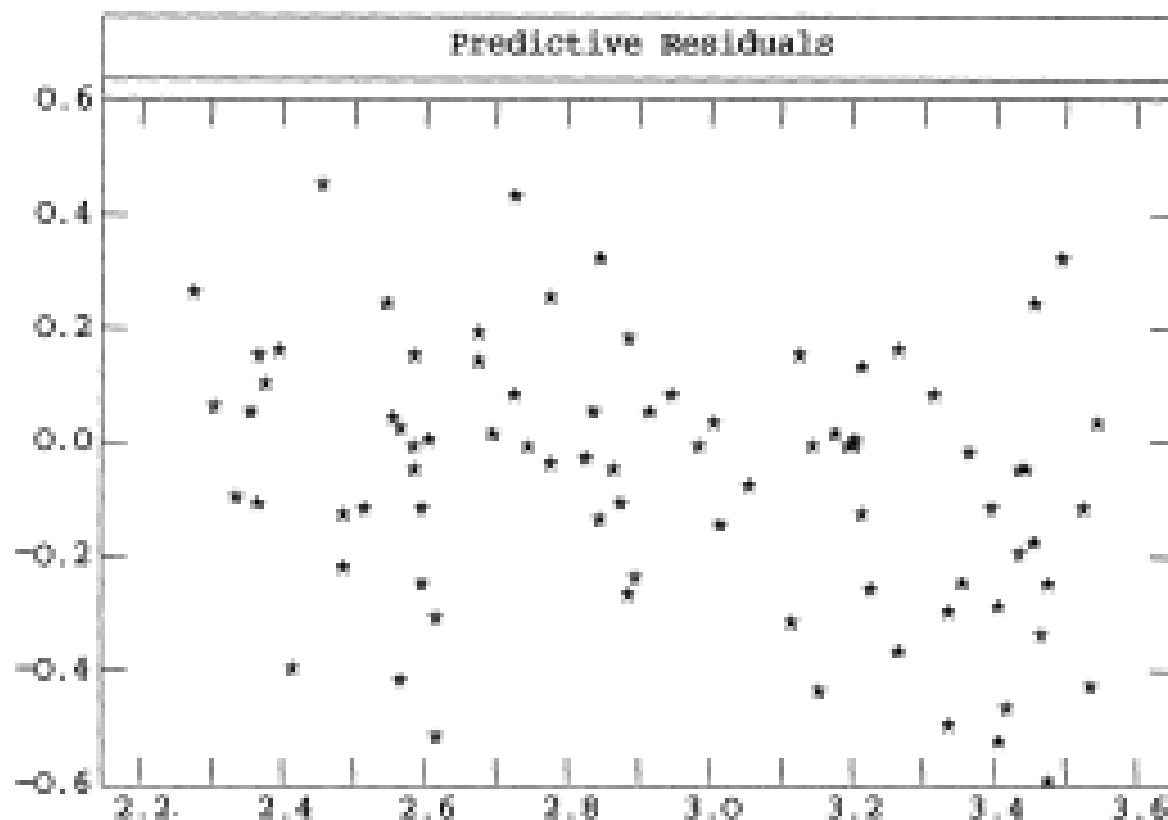


Као побољшање ових модела, можемо размотрити SETAR модел.

Како серија X_t има само 114 опсервација, Цај у [8] предлаже да се почне са $p = 3$ и $S = \{1,2,3\}$ у кораку 1 предложене процедуре моделовања, која је раније наведена у поглављу 2.2.2. F-статистике теста нелинеарности су редом 4.7, 6.13 и 4.46. Тако да је $p = 3$ и $d = 2$ за сада довољно добро. На наредној фигури представљен је дијаграм распршења t односа лаг1 AR коефицијената, са којег се добија праг $r_1 = 2.4$, који се јасно види. Дијаграм, такође, показује велики скок око $X_{t-2} = 2.6$. Међутим, ова тачка се не третира као праг из два разлога. Први, скок је у основи због три тачке. Други, ту је само неколико опсервација X_{t-2} између 2.4 и 2.6 што чини раздвајање тешко за процену.



Следи дијаграм распршења предвиђених резидуала у односу на уређену X_{t-2} . Са дијаграма се може видети да предвиђени резидуали почињу да одступају око $X_{t-2} = 3.1$, сугеришући још једну вредност прага. Стога, имамо два могућа прага за процес. Сада користимо AIC у кораку 4 да побољшамо модел и одредимо прагове $r_1 = 2.373$ и $r_2 = 3.154$. AR редови су 1, 7 и 2, док су бројеви опсервација 21, 42 и 45 [8].



Финални модел је

$$X_t = 0.083 + 1.096X_{t-1} + a_t^{(1)} \text{ ако је } X_{t-2} \leq 2.373$$

$$X_t = 0.63 + 0.96X_{t-1} - 0.11X_{t-2} + 0.23X_{t-3} - 0.61X_{t-4} +$$

$$= 0.48X_{t-5} - 0.39X_{t-6} + 0.28X_{t-7} + a_t^{(2)} \text{ ако је } 2.373 < X_{t-2} \leq 3.154$$

$$= 2.323 + 1.530X_{t-1} - 1.266X_{t-2} + a_t^{(3)} \text{ ако је } X_{t-2} > 3.154.$$

Можемо посматрати и SETAR(2;2,2) :

R-kod

```
mod.setar<-setar(x,m=2,mL=2,mH=2,thDelay=1)
```

```
mod.setar
```

Излаз

 Non linear autoregressive model

SETAR model (2 regimes)

Coefficients:

Low regime:

phiL.1	phiL.2	const L
1.2642793	-0.4284292	0.5884369

High regime:

phiH.1	phiH.2	const H
1.599254	-1.011575	1.165692

Threshold:

-Variable: $Z(t) = + (0) X(t) + (1)X(t-1)$

-Value: 3.31

Proportion of points in low regime: 69.64% High regime: 30.36%

Стога, добијени модел може бити записан

$$X_t = 0.588 + 1.264X_{t-1} - 0.428X_{t-2} + a_t^{(1)} \text{ ако је } X_{t-2} \leq 3.31$$

$$= 1.166 + 1.599X_{t-1} - 1.012X_{t-2} + a_t^{(1)} \text{ ако је } X_{t-2} > 3.31.$$

Сада можемо упоредити линеарни и нелинеарни модел.

R-kod

```

mod<-list()
mod[["linear"]] <- linear(x, m=2)
mod[["setar"]] <- setar(x, m=2, thDelay=1)
sapply(mod,AIC)

```

Излаз

linear	setar
-333.8737	-358.3740

На основу добијених резултата, може се рећи да је SETAR модел бољи.

Детаљнију анализу добијамо:

R-kod

```
summary(mod[["setar"]])
```

Излаз

 Non linear autoregressive model

SETAR model (2 regimes)

Coefficients:

Low regime:

phiL.1	phiL.2	const L
1.2642793	-0.4284292	0.5884369

High regime:

phiH.1	phiH.2	const H
1.599254	-1.011575	1.165692

Threshold:

-Variable: $Z(t) = + (0) X(t) + (1) X(t-1)$

-Value: 3.31

Proportion of points in low regime: 69.64% High regime: 30.36%

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.571121	-0.109431	0.017641	0.116468	0.516270

Fit:

residuals variance = 0.03814, AIC = -358, MAPE = 5.649%

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
const L	0.588437	0.143307	4.1061	7.844e-05 ***
phiL.1	1.264279	0.065256	19.3741	< 2.2e-16 ***
phiL.2	-0.428429	0.077487	-5.5291	2.260e-07 ***
const H	1.165692	0.876606	1.3298	0.1863928
phiH.1	1.599254	0.108966	14.6767	< 2.2e-16 ***
phiH.2	-1.011575	0.265011	-3.8171	0.0002255 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

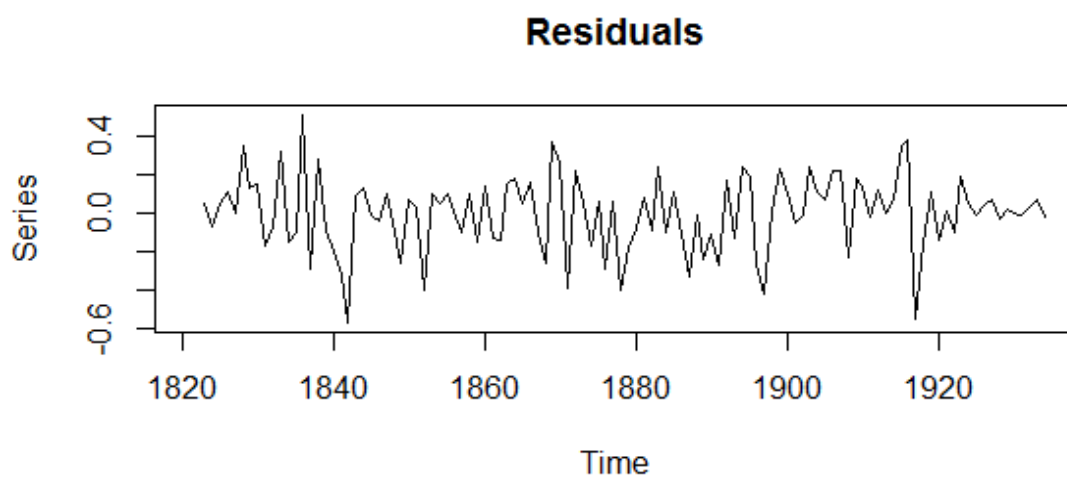
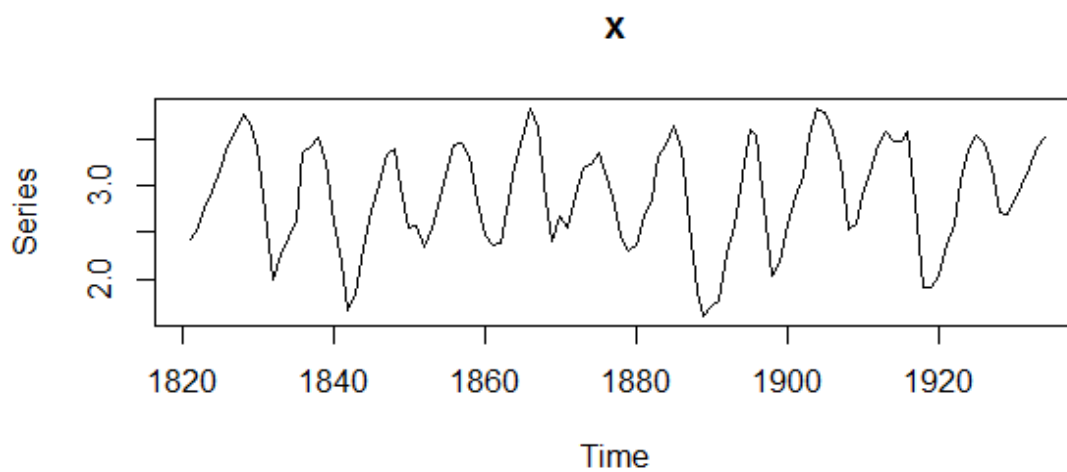
Threshold

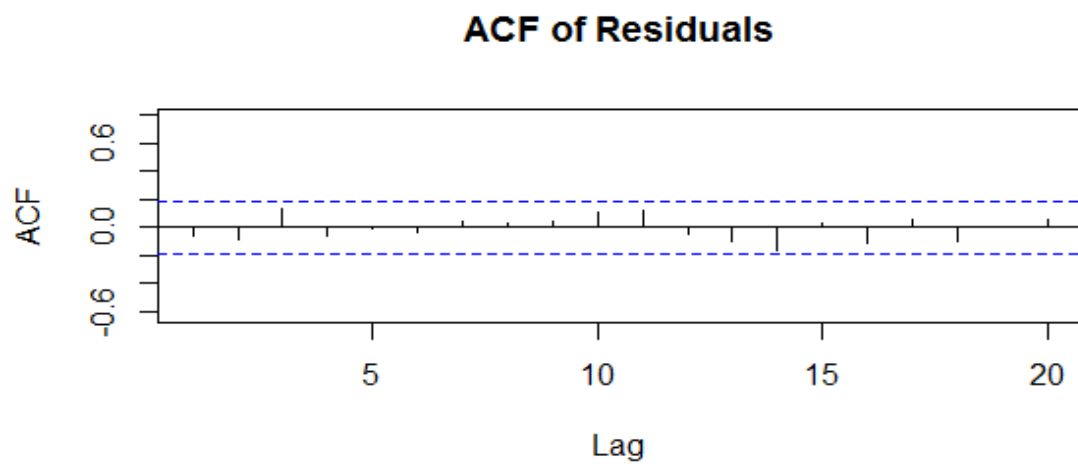
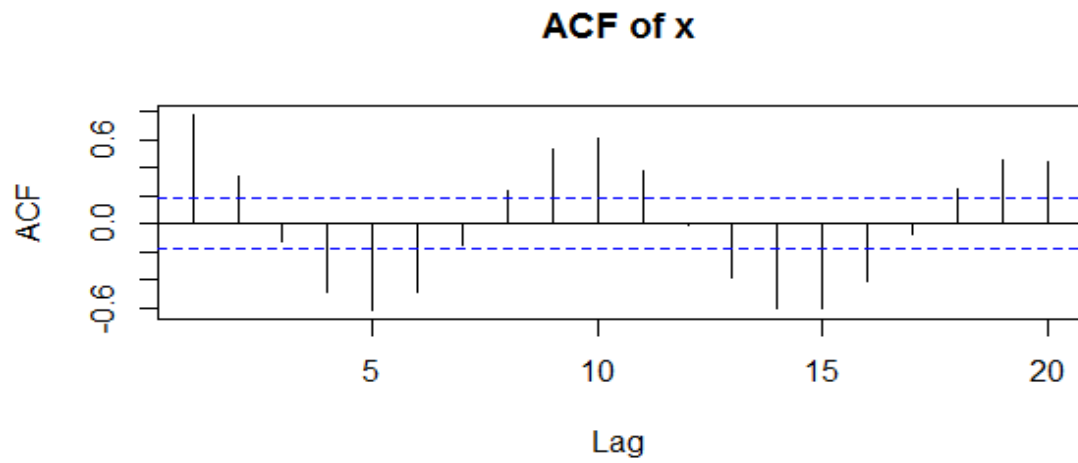
Variable: $Z(t) = + (0) X(t) + (1) X(t-1)$

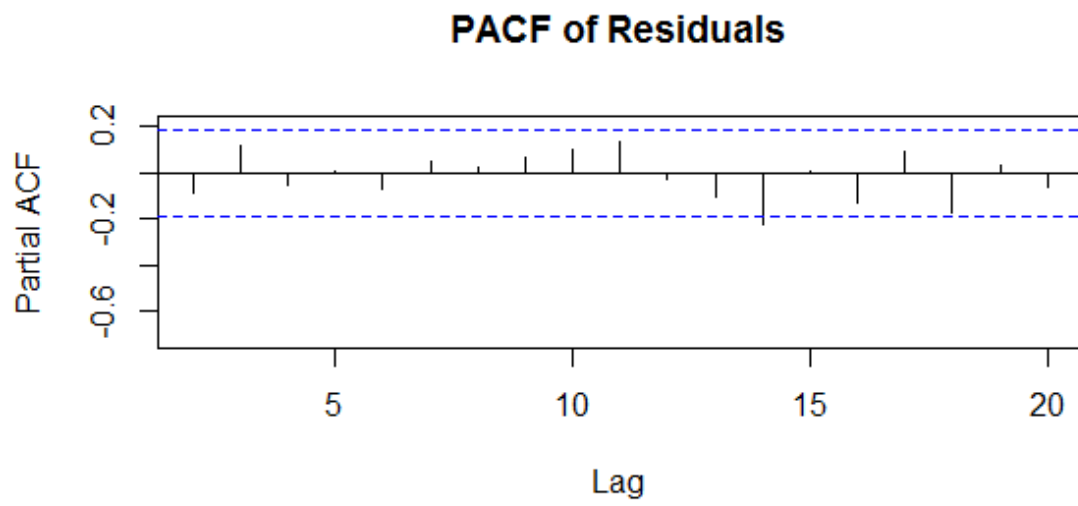
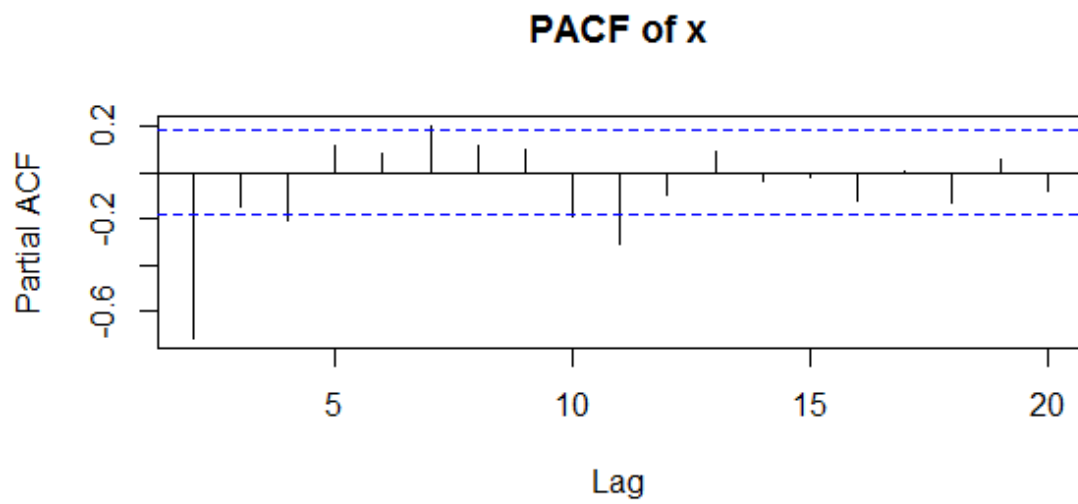
Value: 3.31

R-kod

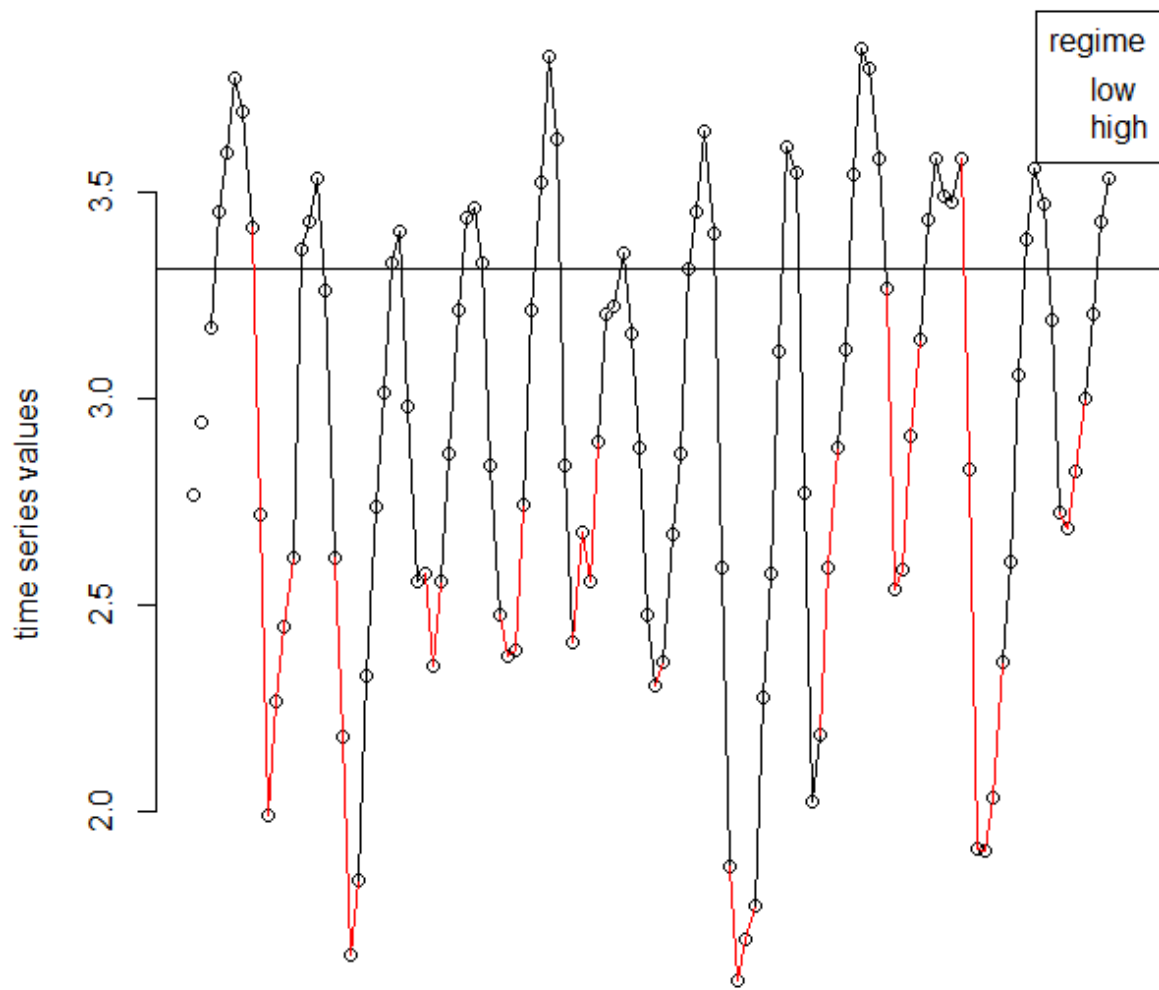
`plot(mod[["setar"]])`



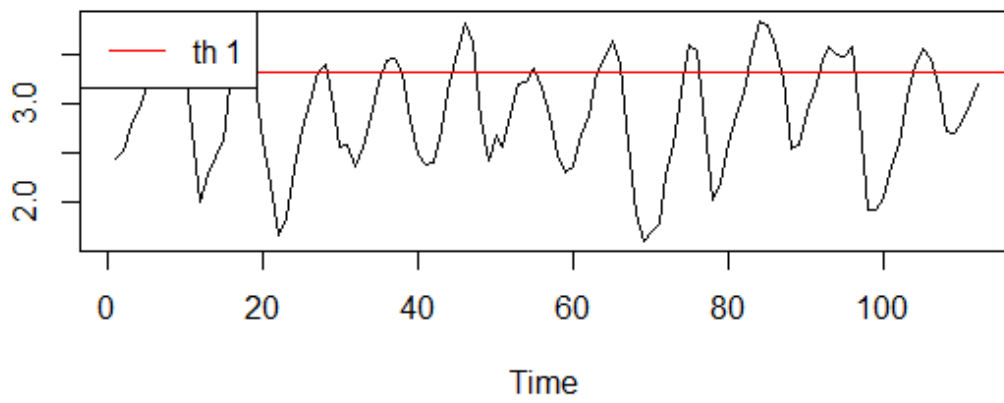




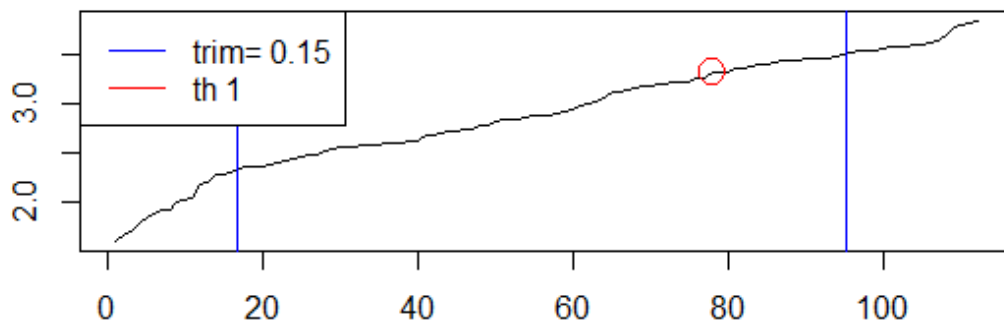
Regime switching plot



Threshold variable used



Ordered threshold variable



ЗАКЉУЧАК

Овим радом смо приказали неке од неллинеарних модела временских серија, веома применљивих у разним областима економије и природних наука. Оно што потврђује њихову активност јесте велики број развијених модела, а најпознатији су модели са праговима, који су у раду и детаљно представљени.

Добро изабран теоријски модел омогућава не само прецизно изучавање постојеће серије података већ и прогнозу њеног будућег тока.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Box, G.E.P., G.M. Jenkins and G.C. Reinsel (2008), *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Wiley, 4th edition.
- [2] Новковић Момчило Б., *Нелинеарни модели временских серија : допринос теорији и пракси*, Нови Сад : Факултет техничких наука, 2002
- [3] Tsay, R.S.(2002), *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, New York
- [4] Јован Малишић, Весна Јевремовић, *Случајни процеси и временске серије*, Београд : Математички факултет, 2008
- [5] Весна Јевремовић, Јован Малишић, *Статистичке методе у метеорологији и инжењерству*, Београд : Савезни хидрометеоролошки завод, 2002
- [6] Петровић Љиљана, *Теоријска статистика : теорија статистичког закључивања*, Београд : Центар за издавачку делатност Економског факултета, 2006
- [7] Hamilton James D., *Time series analysis*, Princeton University Press, 1994
- [8] Ruey S. Tsay, *Testing and modeling threshold autoregressive processes*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 84, No. 405.(Mar.,1989), pp.231-240
- [9] Wai-Sum Chan, Albert Wong, Howell Tong, *Some nonlinear threshold autoregressive time series models for actuarial use*, North American Actuarial Journal, Oct. 2004
- [10] Simon M. Potter, *Nonlinear Time Series Modelling: An Introduction*, Journal of Economic Surveys 13, no. 5 (December 1999): 505-28
- [11] https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Canadian_lynx_data#References
- [12] <https://cran.r-project.org>
- [13] <https://www.soa.org>
- [14] <https://www1.maths.leeds.ac.uk>