ГЕОМЕТРИЈА

за VI разред средњих школа

ПРИРЕДИО
ВЛАДИМИР ЛАПАЈНЕ
професор I. држ. реалне гимназије у Љубљани.

са 109 слика

ПРВО ИЗДАЊЕ

Ова књига је одобрена одлуком Министра просвете С.н.бр. 21177 од 13 јула 1937 године, а по препоруци Главног просветног савета Сбр. 38 од 27 маја 1937 године.

ИЗДАЊЕ
КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА
БЕОГРАД 1937

Српскохрватско издање приредио

ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ

проф. II мушке реалне гимназије у Београду

1 9 3 7

Штампарија „С О К О“ Миливоја Ј. Трајковића Београд
Космајска 14а Телефон 20-268

САДРЖАЈ

Страна

IV. РОГЉЕВИ

V. ОПШТЕ ОСОБИНЕ ТЕЛА. СИМЕТРИЈА

VI. РЕШАВАЊЕ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

VII. ПРИЗМА

VIII. ВАЉАК

Страна

IX. ПИРАМИДА И ЗАРУБЉЕНА ПИРАМИДА

X. КУПА И ЗАРУБЉЕНА КУПА

XI. ОБРТНА ТЕЛА

XII. ЛОПТА

Напомена: Са звездицом * означени одељци и задаци намењени су за реалке.

I. ОДНОСИ ПРАВЕ И РАВНИ

§ 1. Раван и права у равни

Раван је основни појам.

Кроз две ма које тачке равни повучена права лежи потпуно у равни; стога права има све тачке заједничке са равни. Отуда следује:

Аксиом 1. *Ако права има са равни две тачке заједничке, тада има са њом све тачке заједничке и лежи потпуно у равни.*

Две праве, које леже у равни, одређују потпуно положај равни, пошто свака права која сече обе праве лежи у тој равни, јер има с њом две заједничке тачке. Праве у истој равни или се секу (пресечнице) или су паралелне (паралеле). Две праве, које се секу, одређене су трима тачкама и то пресечном тачком обе праве и по једном ма којом тачком једне и друге праве. Отуда следује:

Став 1. *Раван је одређена: a) трима тачкама, b) двема правима које се секу, c) правом и тачком која не лежи на тој правој и d) двема паралелним правима.*

За две праве, које се не секу и нису паралелне, каже се да се *укрштају* или *мимоилазе.*

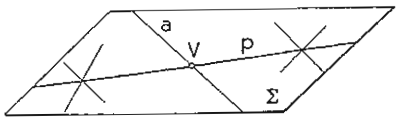
Праве које се укрштају не одређују раван. (Зашто? Види став 1).

* Повуцимо у равни ма коју праву и тој правој паралеле. Све паралеле потпуно покривају раван. Пошто свака права има ∞^1 тачака, а свих паралела има ∞^1, покрива раван $\infty^1 \cdot \infty^1 = \infty^2$ тачака.

* **Став 2.** *Раван покрива ∞^2 тачака.*

Кроз одређену тачку равни повучене праве чине прамен зрака или само прамен.

Заједничку тачку зовемо т е м е или ц е н т а р п р а м е н а. Ако се теме прамена налази у бесконачности, говоримо о п а р а л е л н о м п р а м е н у. Постанак прамена замишљамо и тако, што спојимо одређену тачку са свима тачкама произвољне праве која не иде кроз ту тачку. Пошто права има ∞^1 тачака и пошто кроз сваку тачку иде по једна права прамена, он има ∞^1 правих.



Слика 1

* У равни Σ изаберемо ма коју праву p; свака тачка те праве нека буде теме прамена (слика 1). Ма која права a те равни сече праву p у тачки V. Пошто је тачка V теме прамена, права a припада том прамену. Отуда следује, да свака произвољна права равни Σ припада прамену чије теме је пресечна тачка те праве са правом p.

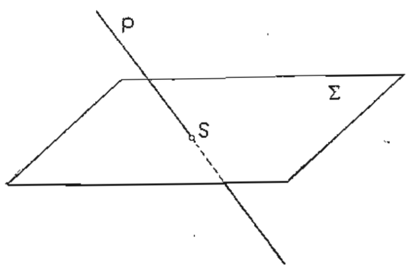
* Сви прамени с теменима на правој p дају све праве које леже у равни Σ. Пошто се сваки прамен састоји из ∞^1 правих, а носилац темена прамена из ∞^1 тачака, следује, да раван има $\infty^1 \cdot \infty^1 = \infty^2$ правих.

* **Став 3.** *Раван покривају ∞^2 правих.*

* Свака права равни има само једну бескрајно удаљену тачку која лежи на бескрајно удаљеној правој равни. Ако би раван имала две или више бескрајно удаљених правих, тада би свака права равни морала сећи све те бескрајно удаљене праве. Отуда следује, да би права морала имати две или више бескрајно удаљених тачака, што је немогуће.

* **Став 4.** *Раван има само једну бескрајно удаљену праву.*

§ 2. Положај праве ван равни



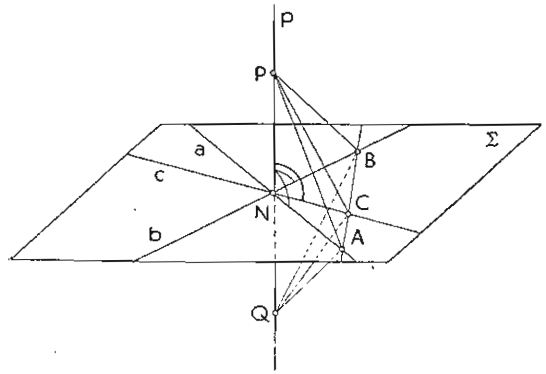
Слика 2

I. Права која у коначности има са равни једну заједничку тачку сече (продире) раван у тој тачки. Праву зовемо п р е с е ч н и ц а, а заједничку тачку п р о д о р или т р а г.

Пресечница стоји на равни у п р а в н о (н о р м а л н о) или к о с о. Пресек нормале са равни зовемо п о д н о ж ј е нормале. Права стоји управно на равни тада, кад стоји управно на свима правима повученим у равни кроз њен продор. Да то буде испуњено, довољан је услов:

Став 5. *Права стоји управно на равни, ако стоји управно на двема правима повученим кроз њено подножје.*

Д о к а з (слика 3): а) П о д а ц и: Права p стоји управно на правима a и b равни Σ које иду кроз њено подножје N.



Слика 3

b) Т в р ђ е њ е: Права p стоји управно на свакој правој равни Σ која иде кроз подножје N.

c) Д о к а з: Узмемо на правој p произвољне тачке P и Q тако, да леже симетрично у односу на продор N праве p са равни Σ. Праве a и b су симетрале дужи $\overline{PQ}$, зато што у средини N те дужи стоје управно на њој. Стога је ма која тачка A праве a једнако удаљена од обе крајње тачке P и Q дужи ($\overline{AP} = \overline{AQ}$). Исто тако је и ма која тачка B праве b једнако удаљена од P и Q ($\overline{BP} = \overline{BQ}$). Ако спојимо још A са B, добијамо троугле ABP и ABQ који имају све три стране једнаке и стога су по 4 $\cong$ подударни.

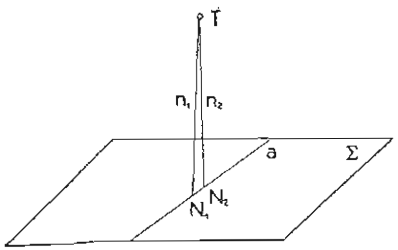
Узмемо произвољну тачку C на дужи AB и спојимо је са тачкама P и Q. Из подударности оба троугла ABP и ABQ следује $\overline{CP} = \overline{CQ}$. Пошто су растојања тачке C од крајњих тачака P и Q дужи PQ једнака, то је тачка C на симетрали дужи $\overline{PQ}$; друга тачка те симетрале је средина N те дужи. Како симетрала стоји управно на дужи, то стоји спојница $CN = c$ управно на правој p.

Пошто је тачка C ма која тачка праве AB, важи за сваку тачку те праве и њену спојницу са продором N праве p исти исказ. Другим речима, све праве равни Σ, које иду кроз продор N праве p, стоје управно на правој p. Права p стоји управно на свима правима које су у равни повучене кроз њен продор N; стоји стога управно на равни и продор N је њено подножје.

Тачке P и Q леже на истој нормали на разним странама равни Σ тако, да имају једнака растојања од те равни. Кажемо, да тачке P и Q леже симетрично у односу на раван Σ. Раван Σ зовемо раван симетрије тачака P и Q.

d) Последице: 1. Три праве, које се секу у једној тачки, леже у истој равни, ако имају заједничку нормалу.

2. Кроз тачку, која лежи ван дате равни, може се повући на раван само једна нормала.



Слика 4

Доказ (слика 4): Ако би биле могуће две нормале n_1 и n_2 из тачке T на раван Σ, ми бисмо тада имали два подножја N_1 и N_2. Спојница $N_1 N_2 = a$ би била права на коју би из једне тачке повукли две нормале што је немогуће.

3. Ако спојимо све тачке равни с одређеном тачком ван равни, од свих спојница је нормала најкраћа. Називамо је растојање тачке од равни.

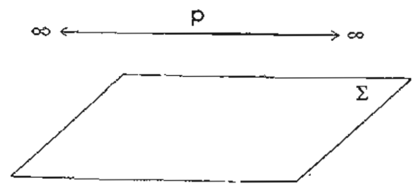
Доказ (слика 3): У правоуглим троуглима PNA, PNB, $PNC \ldots$ је PN катета, а PA, PB, $PC \ldots$ су хипотенузе. Због тога је нормала $\overline{PN}$ краћа од дужи $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC} \ldots$

4. У одређеној тачки равни могућа је на ту раван само једна нормала. Докажи.

5. Ако од две паралеле једна стоји управно на равни, стоји и друга управно на истој равни. Докажи.

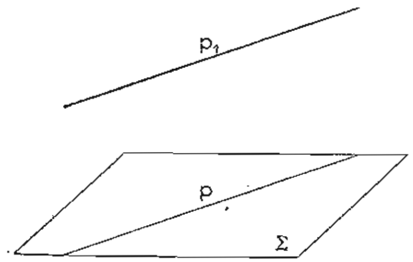
II. Кажемо, да је права, која сече раван у бесконачности, паралелна равни. Такву праву зовемо паралела равни. Паралела нема са равни у коначности ниједне заједничке тачке.

Паралела има са равни само у бесконачности једну заједничку тачку. Кад би паралела имала са равни два продора у бесконачности (види сл. 5), тада би по аксиому 1. морала да лежи у равни што се противи претпоставци, да је права ван равни. Горња дефиниција паралеле је и у складу са дефиницијом праве која има само једну бесконачно удаљену тачку. Та тачка се достиже, ако се ма која тачка на правој креће у једном или супротном смеру у бесконачност.



Слика 5

Нацртајмо у равни Σ произвољну праву p и повуцимо ван равни ма коју паралелу p_1 тој правој (слика 6). Права p_1 сече праву p у бесконачности. Пошто p лежи у равни Σ, сече права p_1 раван Σ само у бесконачности. По горњој дефиницији је права p_1 паралелна равни Σ.



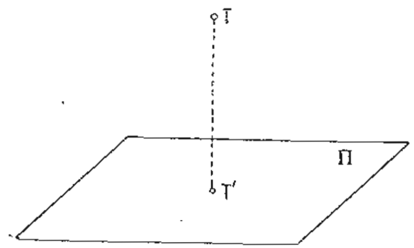
Слика 6

Став 6. *Права ван равни је паралелна равни, ако је паралелна ма којој правој те равни.*

§ 3. Ортогонална пројекција тачке, дужи и праве на раван

I. Пројекција тачке

Подножје нормале, повучене кроз одређену тачку T на одређену раван Π, зовемо нормални траг или ортогонална пројекција тачке T на раван Π (слика 7). Раван Π зовемо пројекциска раван, нормалу TT' на пројекциску раван Π пројекциски зрак. Ако смо тачки T одредили нормални траг T', кажемо, да смо тачку T пројицирали на раван Π.

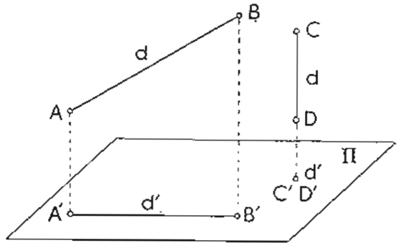


Слика 7

Ако тачка лежи у равни пројекције, њена пројекција је идентична са самом тачком.

II. Пројекција дужи

Ако пројицирамо све тачке дужи на одређену раван Π, чине сви пројекциски зраци у општем случају раван (пројектујућу раван) и пресек те равни са равни Π је дуж (слика 8). Зовемо је **нормални траг** дужи. Нормални трагови крајева дужи су крајеви нормалнога трага дужи. Гранични пројекциски зраци $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$, дуж d и њена пројекција d' чине пројекциски трапез $AA'B'B$, па су углови код A' и B' прави углови.



Слика 8

У случају да дуж стоји нормално на равни пројекције, њена пројекција је тачка. $d = \overline{CD} \perp \Pi;\ d' =$ тачка.

Став 7. *Ако из дате тачке T ван равни Π повучемо косе дужи на раван Π, припадају:*

а) једнаким пројекцијама једнаке косе дужи и једнаким косим дужима једнаке пројекције;

b) већој пројекцији већа коса дуж и већој косој дужи већа пројекција.

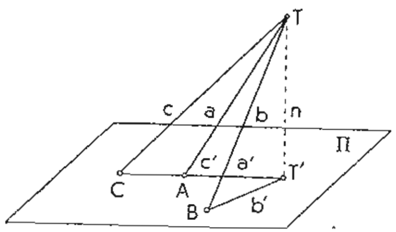
Доказ првога дела (слика 9):

а) Дато: $a' = b'$.

Доказ: Правоугли троугли $AT'T$ и $BT'T$ имају обе катете једнаке ($n \equiv n$ и $a' = b'$). Због тога су подударни по 2 $\cong$ и хипотенузе су једнаке ($a = b$).

b) Дато: $a = b$.

Доказ: Правоугли троугли $AT'T$ и $BT'T$ имају једнаке по једну катету ($n \equiv n$) и хипотенузе ($a = b$). Због тога су подударни по 3 $\cong$ и $a' = b'$.



Слика 9

Доказ другога дела (слика 9):

а) Дато: $c' > b'$. Начинимо $a' = b'$.

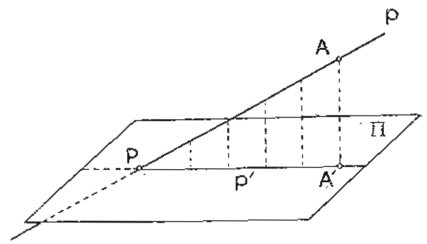
Доказ: У троуглу TAT' је угао у темену A оштар; његов упоредни (суплементни суседни) угао је туп и угао троугла CAT у темену A. Стога је њему наспрамна страна c најдужа страна тога троугла. Отуда следује, да је дуж c дужа од стране a, па дакле дужа и од стране b.

b) Дато: $c > b$. Начинимо $a = b$.

Доказ: Правоугли троугли $CT'T$ и $AT'T$ имају заједничку катету; дужина друге катете зависи од хипотенузе и и то тако, да што је хипотенуза дужа, тим је дужа и друга катета. Стога је $c' > a'$ и, пошто је по првом делу става $a' = b'$, ако је $a = b$, то је и $c' > b'$.

III. Пројекција праве

Правој p одређујемо нормалну пројекцију p' на раван Π, ако пројицирамо све њене тачке (слика 10). При томе чине пројекциски зраци раван (**пројектујућу раван**) која сече раван пројекције Π по правој p'. Пројекција праве p на раван је уопште опет права. (Изузетак је само, кад права стоји управно на раван; тада је њена пројекција тачка).



Слика 10

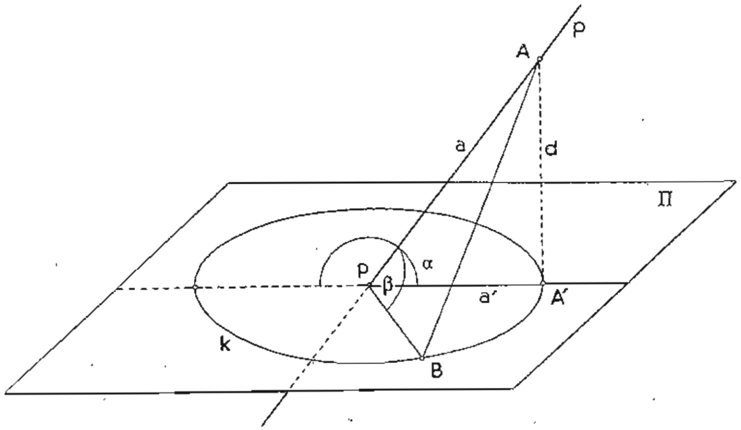
За одређивање пројекције праве довољно је ако одредимо пројекције двеју њених тачака. По обичају се узима поред ма које тачке A на правој p још продор те праве са пројекциском равни. Правоугли троугао APA' зовемо **пројекциски троугао**.

§ 4. Нагибни угао праве

Нагибни угао праве према равни је угао који права чини са својом пројекцијом на ту раван. Тај угао мери од 0^0 до 90^0. Код 0^0 је права паралелна равни пројекције, код 90^0 пак стоји нормално на пројекциској равни. Праве које са пројекциском равни чине нагибне углове, који су већи од 0^0, а мањи од 90^0 зовемо **косе праве**.

Нагибни угао дужи је нагибни угао праве чији део је та дуж.

За одређивање нагибног угла праве употребљавамо пројекциски троугао; то је правоугли троугао чија су темена продор праве, произвољна тачка A на правој и њен нормални траг A' (слика 11).



Слика 11

Ако је $\overline{PA} = a$ (дуж), $\overline{PA'} = a'$ (пројекција дужи) и $\overline{AA'} = d$ (растојање тачке A од равни пројекције), тада је

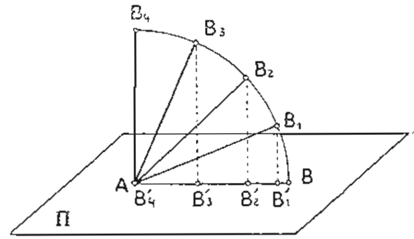
$$\sin\alpha = \frac{d}{a},\ \cos\alpha = \frac{a'}{a} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{a'} .$$

Став 8. *Нагибни угао косе праве према одређеној равни је најмањи од свих углова које та права чини са свима правима повученим у равни кроз њен продор.*

Доказ (слика 11): Нацртамо у равни Π круг k са средиштем у продору P и полупречником $r = a'$ ($a' =$ пројекција дужи a). Ако спојимо произвољну тачку B кружнога обима са тачкама P и A, добијамо троугао APB с углом β у темену P. Троугли APA' и APB имају по две стране једнаке: заједничку страну $\overline{PA}$ а стране $\overline{PA'} = \overline{PB} = a'$. Стога величина углова α и β, које чине једнаке стране троуглова, зависе од страна које леже насупрот тих углова. Та страна је у троуглу APA' нормала из тачке A на Π, у другом троуглу APB је та страна коса дуж из исте тачке A. Стога је страна $\overline{AA'}$ краћа од стране $\overline{AB}$. По ставу, да према краћој страни лежи

мањи угао, следује, да је угао α, који лежи према страни $\overline{AA'}$, мањи од угла β који лежи према страни $\overline{AB}$.

Пројекција и нагибни угао одређене дужи зависе једно од другога. Што већи нагибни угао мања је пројекција (сл. 12). Ако је нагибни угао 0^0 пројекција је једнака дужи; код 90^0 прелази пројекција дужи у тачку.



Слика 12

Задаци:

1. Зашто две праве које се укрштају, тј. не секу и нису паралелне, не одређују раван?

2. *a*) Колико равни се може положити кроз 4 тачке, тако да у свакој равни леже по три тачке?

b) Колико равни се може положити кроз 4 праве које иду кроз једну тачку, тако да у свакој равни леже по две праве.

3. *a*) Колико равни се може положити кроз 5 тачака, тако да леже по три тачке у свакој равни?

b) Колико равни се може положити кроз 5 правих које иду кроз једну тачку, тако да у свакој равни леже по две праве?

4. Шта је растојање паралеле од равни и како је одређујемо?

5. Шта је геометриско место свих тачака у простору које су једнако удаљене од две тачке?

6. Шта је геометриско место свих тачака које су једнако удаљене од три тачке?

7. Израчунај дужину нормалнога трага дужи $a = 6\ cm$, за нагибне углове:

a) $\alpha = 30^0,\ 45^0,\ 60^0$;
b) $\alpha = 23^0,\ 42^0,\ 72^0$;
c) $\alpha = 31^0\,25',\ 68^0\,18'$.

8. Колики је нагибни угао дужи $a = 6\ cm$, ако је њена пројекција:

a) $a' = 3\ cm$, *b*) $a' = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ cm$, *c*) $a' = 3\sqrt{2}\ cm$,
d) $a' = 4\ cm$, *e*) $a' = 2\ cm$?

9. Четири разне дужи a, b, c и d нагнуте су према равни пројекције за углове:

a) $\alpha_1 = 0^0$, $\alpha_2 = 30^0$, $\alpha_3 = 45^0$, $\alpha_4 = 60^0$;

b) $\alpha_1 = 17^0$, $\alpha_2 = 25^0\,15^1$, $\alpha_3 = 56^0$, $\alpha_4 = 69^0\,18'$ и имају једнаке пројекције: $a' = b' = c' = d' = 5{,}12\ m$. Колике су те дужи?

* 10. Крајње тачке дужи $\overline{AB}$ су 3 $(10\frac{1}{2})$ m, односно 2,3 $(4\frac{1}{2})$ m, удаљене од равни пројекције, а пројекција те дужи мери 2, 4 (9, 1) m; *a)* колика је дуж $\overline{AB}$? *b)* колико је растојање средине дужи од пројекциске равни? *c)* за колико треба продужити дуж $\overline{AB}$, да сече раван пројекције? *d)* колика је пројекција тога продужетка? *e)* колики је нагибни угао?

* 11. У средишту равностранога троугла стоји нормала једнака страни троугла; колика је коса дуж повучена од крајње тачке нормале до темена троугла (на пр. $a = 6\ cm$)?

* 12. У средишту квадрата стоји нормала једнака половини дијагонале; колика је коса дуж повучена од крајње тачке нормале до темена квадрата? (Октаедар).

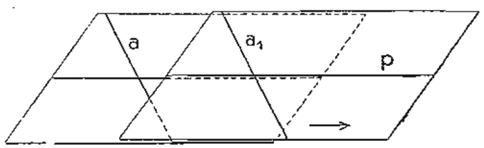
* 13. Стране разностранога троугла мере 104, 112 и 120 cm; колико растојање од равни троугла има нека тачка у простору која је од сваког троугловог темена удаљена по 109 cm?

14. Колике углове чини коса права са правима повученим кроз продор праве у равни П? Кад је угао најмањи, кад највећи и кад прав угао? Узми у обзир слику 11.

II. ТРАНСЛАЦИЈА И РОТАЦИЈА

§ 5. Транслација у равни

На лист хартије за цртање, притврђен на дасци за цртање, положимо прозирну хартију. Горња страна хартије за цртање и доња страна прозирне хартије чине заједно једну раван. Ако се прозирна хартија помера по хартији за цртање, кажемо, да се заједничка раван помиче п о с а м о ј с е б и. Кад будемо говорили о кретању равни п о с а м о ј с е б и, увек ћемо замишљати две равни положене једна по другој, од којих је једна непомична, а друга покретна.



Слика 13

Нацртајмо на хартији за цртање

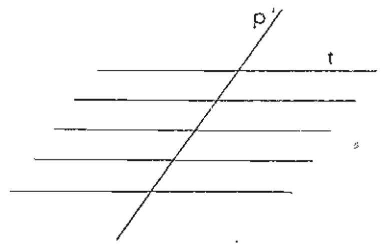
произвољну праву p и на прозирну хартију другу праву тако, да покрива прву. Нека се прозирна хартија сад помера по хартији за цртање тако, да обе праве остану покривене (слика 13).

Раван се опет помиче по самој себи, али не више произвољно, већ њено кретање има одређени смер. Такво кретање зовемо т р а н с л а т о р н о к р е т а њ е или т р а н с л а ц и ј а. Права, која одређује правац кретања, креће се по самој себи.

Очевидно је, да се при транслаторном кретању равни удаљују све тачке равни подједнако од свога првобитнога положаја; ако зауставимо само једну тачку, заустављамо све тачке равни. Растојања тачака од првобитних положаја су после транслаторног кретања равни једнака међу собом. Отуда следује:

Став 9. *Свака права равни је после транслације паралелна сама себи.* ($a \parallel a_1$, слика 13).

По одређеној правој p нека се помера одређена права t тако да је увек сама себи паралелна (слика 14). По пређашњем креће се права t транслаторно те ствара раван. Стога је зовемо п р о и з в о д и љ а или г е н е р а т р и с а, а праву p пак п р а в а в о д и љ а или п р а в а д и р е к т р и с а.



Слика 14

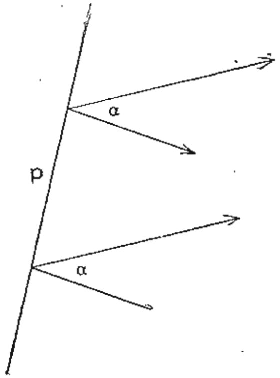
§ 6. Транслација у простору

1. По одређеној правој помера се теме угла чији краци остају паралелни сами себи (слика 15). Кажемо, да се угао креће транслаторно. Отуда следује:

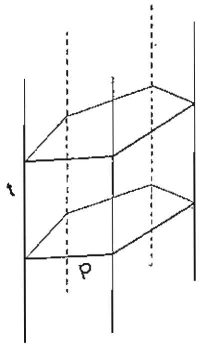
Став 10. *Углови са паралелним и истосмерним крацима једнаки су.*

2. По одређеној правој t помера се многоугао p тако, да је увек паралелан сам себи (слика 16). Транслаторно кретање многоугла ствара п р и з м а т и ч н у п о в р ш и н у која је неограничена.

3. По одређеној правој t помера се круг k тако, да остаје сам себи паралелан (слика 17). Транслаторним кретањем



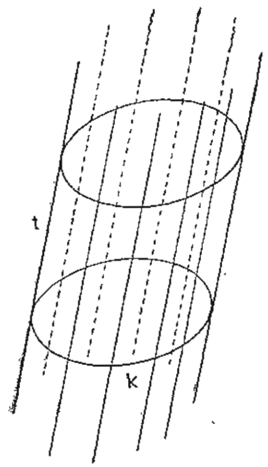
Слика 15



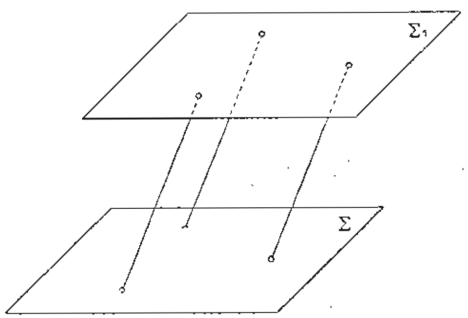
Слика 16

круга ствара се *неограничена ваљкаста (цилиндрична) површина.*

4. Ако се раван у простору помиче у одређеном смеру тако, да остаје сама себи паралелна, кажемо, да чини транслаторно кретање. При транслаторном кретању равни (слика 18) растојања свих тачака равни у новом положају од тачака равни у



Слика 17

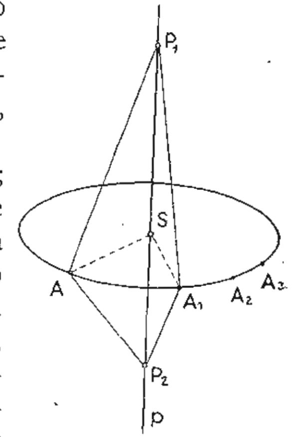


Слика 18

првобитном положају једнака су међу собом. Равни су *паралелне.*

§ 7. Обртање или ротација тачке око праве

Ако хоћемо одређену тачку A да обрћемо (ротирамо) око одређене праве p, тада замишљамо тачку A спојену са са две произвољне тачке P_1 и P_2 праве p тако, да се добије троугао $P_1 A P_2$, који обрћемо око стране $P_1 P_2$ (слика 19). При томе остају тачке P_1 и P_2 на својим местима, док тачка A долази у $A_1, A_2, A_3, \ldots$ итд.



Слика 19

Узмимо да је тачка A дошла у A_1; троугао $P_1 A P_2$ је обрнут око стране $\overline{P_1 P_2}$ у нови положај $P_1 A_1 P_2$. Оба троугла су по 4 $\cong$ подударни зато, што имају све три стране узајамно једнаке. Ако из A повучемо на $\overline{P_1 P_2}$ нормалу, њено подножје S је и подножје нормале из A_1 на $\overline{P_1 P_2}$ зато, што су троугли $P_1 A P_2$ и $P_1 A_1 P_2$ подударни и имају заједничку основицу $\overline{P_1 P_2}$; такође су и обе нормале једнаких дужина.

Исто важи за све положаје A_2, A_3, A_4 које узима тачка A при обртању. То значи, да све нормале из $A, A_1, A_2 \ldots$ имају исто подножје и једнаке дужине. По ставу 5. последица 1. леже све те нормале из $A, A_1, A_2, A_3 \ldots$ у равни нормалној на троуглову страну $\overline{P_1 P_2}$. Пошто су једнаке, описује тачка A круг који лежи у тој нормалној равни на праву p, чије је средиште S заједничко подножје свих нормала на страну $\overline{P_1 P_2}$.

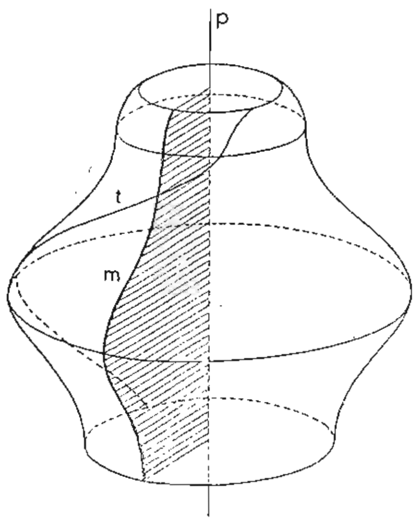
Праву p, чији је део страна $\overline{P_1 P_2}$, зовемо *обртна* или *ротациона оса.* Отуда следује:

Став 11. *При обртању тачке око одређене праве описује тачка круг чија раван стоји нормално на обртној оси; средиште круга лежи у подножју нормале повучене из тачке на обртну осу.*

Ако имамо више тачака које обрћемо око дате праве добијамо кругове, који леже у равнима нормалним на обртној оси. Због тога су равни међу собом паралелне и њихове кругове зовемо *упоредници* или *паралелни кругови.*

§ 8. Обртне или ротационе површине

Ако обрћемо ма какву праву или криву линију око дате праве, добијамо **обртну** или **ротациону површину** (слика 20). Линију, која при ротацији описује обртну површину, зовемо **производиља** или **генератриса** *(t)*. Раван положена кроз осу зове се **меридијанска раван**. Она сече обртну површину по **меридијану** *(m)*. Обртањем меридијана *m* добијамо исту обртну површину као обртањем производиље *t*. Сви меридијани су међу собом једнаки.



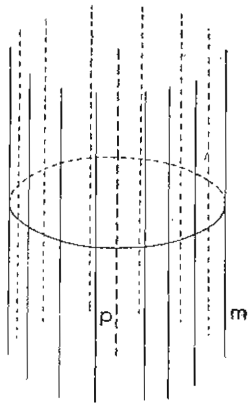
Слика 20

Нарочито су важне обртне површине, где су меридијани једноставне геометриске линије: права и круг.

1. Меридијан је права, паралелна обртној оси (слика 21). Добијамо неограничену **ваљкасту (цилиндричну) површину** (омотач ротационог ваљка).

2. Меридијан је права која сече обртну осу. Добијамо **купасту (конусну) површину** (омотач ротационе двојне купе) (слика 22). Пресек праве са обртном осом је врх двојне купе. Површина је неограничена.

3. Меридијан је полукруг, обртна оса његов пречник (слика 23). При обртању добијамо **лоптасту (сферну) површину** или **лопту**.

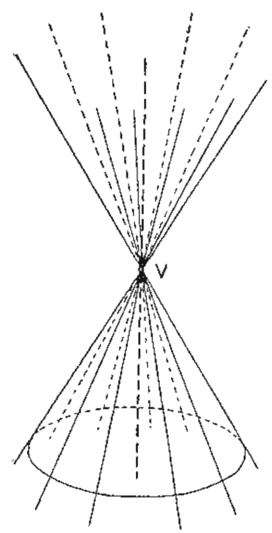


Слика 21

Напомена: Код земље је оса ротације пречник који спаја Северни и Јужни пол. Земљин меридијан је нешто спљоштен круг. Највећи упоредник зове се **екватор**. Његова раван иде кроз средиште Земље.

Задаци:

1. Ако нацртамо на хартији два једнака круга, можемо ли да сматрамо, да је један постао транслацијом другог?



Слика 22

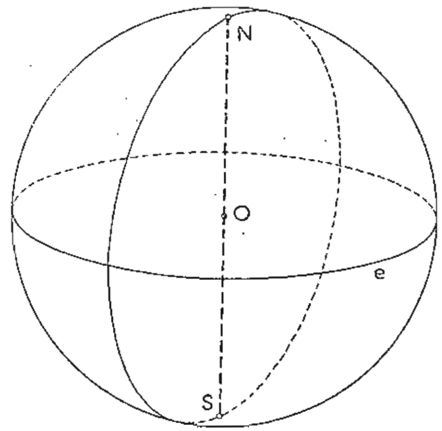
2. Кад при транслацији многоугла добијамо праву, а кад косу призму?

3. Кад при транслацији круга добијамо прав, а код кос ваљак? Зашто прав ваљак зовемо и ротациони ваљак?

4. Ди ли су два угла са паралелним крацима у простору увек једнаки? Кад су једнаки, а кад су суплементни?

5. Како се мора вршити транслаторно кретање равни, па да растојање двају положаја равни буде једнако растојању двеју тачака равни које су при транслацији постале једна из друге?

6. Докажи, да ротација прелази у транслацију, ако се оса ротације помакне у бесконачност?



Слика 23

* 7. Да ли су површине косога ваљка и косе купе ротационе површине?

III. МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈ ДВЕЈУ РАВНИ

§ 9. Положај двеју равни

Аксиом 2. *Равни се поклапају, ако имају три заједничке тачке које не леже на истој правој.*

Став је потпуно јасан, јер ако би све три тачке лежале на истој правој, тада постоји могућност, да се обе равни не поклапају, већ се секу по правој, на којој те дате три тачке леже.

Отуда следује: Две равни које се не поклапају секу се по једној правој или су паралелне. Праву по којој се равни секу зовемо пресечница. Она дели сваку од обе равни у две полуравни.

Паралелне равни немају у коначности ниједне заједничке праве; кажемо, да се секу по бескрајно удаљеној правој обе равни.

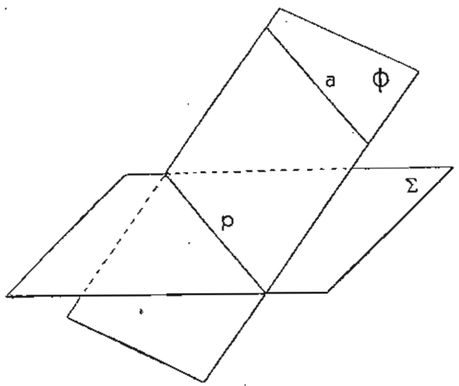
§ 10. Пресечница двеју равни

Став 12. *Ако у две равни које се секу повучемо праве a и b тако, да су обе паралелне пресечници p обе равни, тада су праве a и b и међу собом паралелне.*

Доказ: Пошто је $a \parallel p$ и $b \parallel p$, следује $a \parallel b$.

Став 13. *Ако положимо кроз праву a која је паралелна датој равни Σ произвољну раван Φ, она сече раван Σ по пресечници p која је паралелна правој a.*

Доказ (посредан, слика 24): Узимамо, да пресечница p није паралелна правој a. Тада мора пресечница p да сече праву a или су пресечнице p и права a мимоилазне. У првом случају мора права a да сече пресечницу p у једној тачки равни Σ у коначности. То је супротно претпоставци, да права a нема са равни ниједне заједничке тачке у коначности, зато што јој је паралелна. Исто тако је искључено и, да би

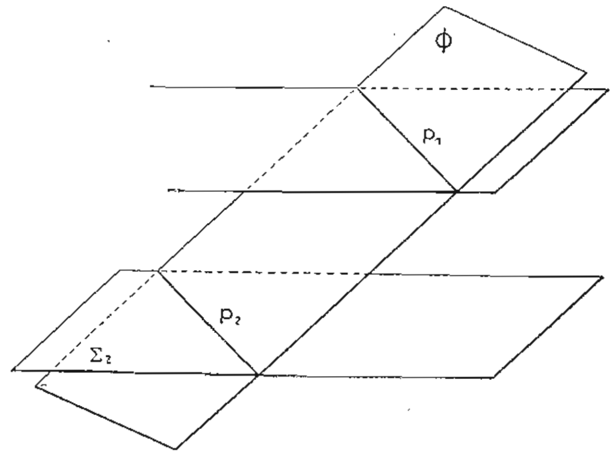


Слика 24

права a и пресечница p биле мимоилазне, јер две праве које се укрштају не могу да леже у истој равни. Остаје само могућност, да су права a и пресечница p паралелне.

§ 11. Пресек двеју паралелних равни са трећом равни

Став 14. *Ако две паралелне равни пресечемо трећом равни, пресечнице су паралелне.*



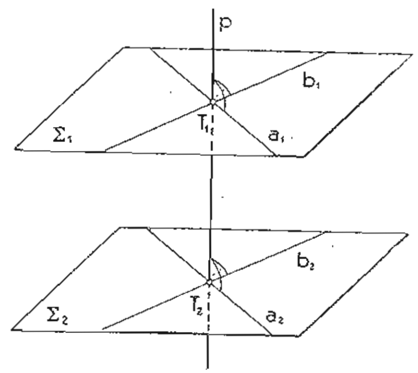
Слика 25

Доказ (посредан, слика 25): Пошто пресечнице p_1 и p_2 леже у паралелним равнима, оне су паралелне или мимоилазне. Друга могућност је искључена зато, што обе пресечнице леже у истој равни Φ, а две праве које се укрштају не могу никад лежати у истој равни. Стога су пресечнице p_1 и p_2 паралелне.

§ 12. Растојање паралелних равни

Став 15. *Нормала на раван је истовремено и нормала на паралелну раван.*

Доказ (слика 26): Две произвољне равни Φ_1 и Φ_2, које положимо кроз праву p, секу паралелне равни Σ_1 и Σ_2 по правима a_1, b_1 и a_2, b_2 тако, да је $a_1 \parallel a_2$ и $b_1 \parallel b_2$ (став 14). Пошто права p стоји нормално на равни Σ_1, то су углови pa_1 и pb_1 прави



Слика 26

углови (став 5). Угао pa_1 је једнак углу pa_2 зато, што су сагласни углови на две паралелне праве. То исто важи за углове pb_1 и pb_2. Отуда следује, да права p стоји нормално на две праве повучене кроз њено подножје T_2 у равни Σ_2. Стога стоји права p нормално и на равни Σ_2.

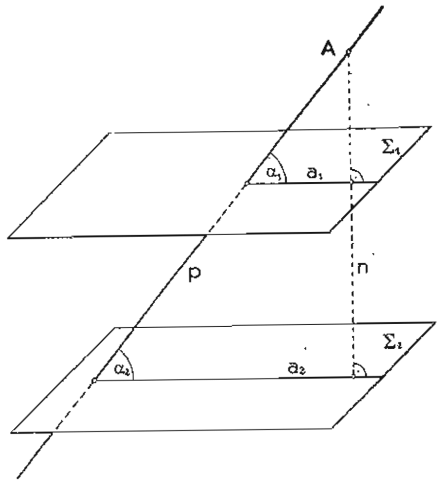
Став 16. *Ако две равни стоје нормално на истој прави, оне су паралелне.* Докажи.

Став 17. *Нормала између паралелних равни је растојање обе равни. Она је свуда једнака.* Докажи.

§ 13. Нагибни угао праве према паралелним равнима

Став 18. *Ма која права има према паралелним равнима исти нагиб.*

Доказ (слика 27): Узмемо на правој p ма коју тачку A и поставимо кроз њу нормалу n на раван Σ_1. Она је по ставу 15 нормала и на раван Σ_2, јер су равни Σ_1 и Σ_2 паралелне. Правом p и нормалом n је одређена пројектујућа раван која сече обе равни по паралелама a_1 и a_2. Паралеле a_1 и a_2 су стога пројекције праве p на равнима Σ_1 и Σ_2. Стога су углови α_1 и α_2 нагибни углови праве p према Σ_1 и Σ_2. Оба су једнаки, јер су сагласни углови на две паралелне праве.



Слика 27

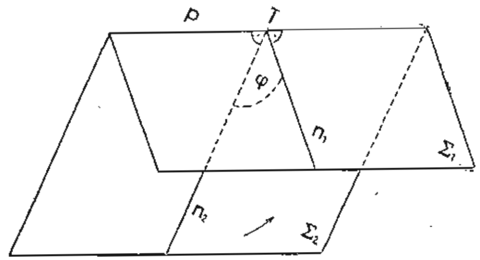
§ 14. Угао две полуравни са заједничком ивицом. Површински угао или диједар

Нека се две полуравни тако поклапају, да имају заједничку ивицу. Ако једну полураван обрнемо око заједничке ивице тако, да опет покрије другу полураван, кажемо, да је полураван учинила пун обрт.

Две полуравни са заједничком ивицом које се не поклапају, нагнуте су једна према другој. Део обрта, за који је потребно обрнути једну полураван да би се поклопила са другом, јесте угао две полуравни. Зовемо га површински угао или диједар, а каткад и клин. За одређивање диједра важи:

Став 19. *Ако у ма којој тачки T заједничке ивице p двеју полуравни повучемо у обе полуравни нормале n_1 и n_2 на ивицу p, добијамо угао, који је једнак диједру или клину обе полуравни.*

Доказ (слика 28): Узмемо на заједничкој ивици p обе полуравни ма коју тачку T и повучемо у обе полуравни у тој тачки нормале n_1 и n_2 на заједничку ивицу p. Обртањем полуравни Σ_2 у полураван Σ_1 око заједничке ивице p обрће се нормала n_2 у равни $(n_1\, n_2)$ и поклапа се са нормалом n_1. При томе опише нормала n_2 исти део пуног обрта као и раван Σ_2. Отуда следује, да је дијадар једнак углу који чине обе нормале n_1 и n_2 на заједничку ивицу у ма којој тачки T те ивице.



Слика 28

Ма где изабрали тачку T на ивици p, кад повучемо нормале n_1 и n_2, угао који чине нормале, стално је једнак, јер су краци паралелни и истосмерни.

Нормале n_1 и n_2 чине раван која стоји управно на ивици p. Стога је диједар једнак углу пресека нормалне равни на ивици p. Пошто су нормалне равни на ивицу p међу собом паралелне (став 16), то су и сви пресеци са граничним површинама диједра међу собом паралелни и нормални на ивици p. Зато су и сви углови, које добијамо на тај начин, међу собом једнаки. При одређивању величине диједра, дакле, нема положај нормалне равни никаквог утицаја.

Код тела зовемо диједар или површински угао двеју граничних површина и телесни угао, да бисмо га разликовали од ивичнога угла, тј. угла који чине две суседне ивице.

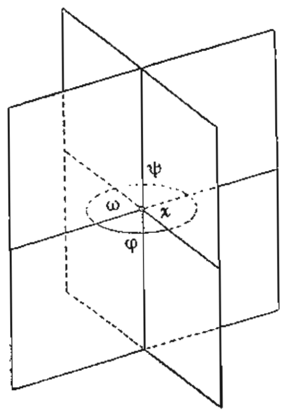
Ивичне углове обележаваћемо почетним малим словима грчке азбуке: α, β, γ, δ, . . . или са угао $(a\,b)$, $(b\,c)$, $(c\,d)$ итд., где су a, b, c ивице тела, дијeдре ћемо обележавати са последњим малим словима грчке азбуке φ, χ, ψ, ω или дијeдар са ивицом a, b, c . . .

§ 15. Врсте дијeдара

Дијeдар или клин две полуравни може да буде оштар, прав, туп, раван и испупчен. Кад је прав угао, кажемо, да полуравни стоје нормално једна на другу.

§ 16. Нагибни угао двеју равни

Две равни чине на пресечници 4 дијeдра. По два супротна — унакрсна дијeдра — једнаки су ($\varphi = \psi$, $\chi = \omega$) и по два суседна дијeдра — упоредна дијeдра — суплементни су ($\varphi + \chi = 2\,R$, $\chi + \psi = 2\,R$, $\psi + \omega = 2\,R$, $\omega + \varphi = 2\,R$). (Слика 29). Од два упоредна дијeдра је обично један оштар угао Тај сматрамо за нагибни угао обе равни.



Слика 29

Напомена: Израз нагибни угао равни употребљава се у нацртној геометрији за угао који чини раван са „равни пројекције“, иако се уопште говори само о „углу двеју равни“. Аналогно говоримо код призме и пирамиде о „нагибном углу“ бочне површине према основној површини и о „површинском углу“ обе бочне површине.

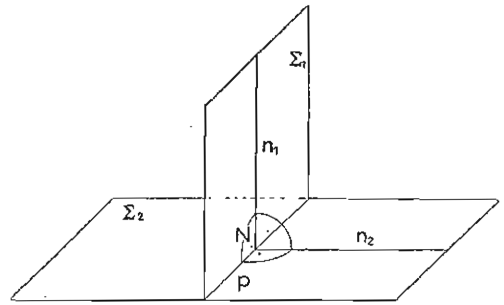
Ако нагибни угао двеју равни мери 90°, стоје равни нормално једна на другој; ако је пак нагибни угао двеју равни оштар угао, равни су нагнуте једна према другој (стоје косо једна на другој). Нагибни угао не може мерити више од 90°.

§ 17. Равни нормалне једна на другој

Став 20. *Права, која у једној од две нормалне равни стоји нормално на њиховој пресечници, стоји нормално и на другој равни.*

Доказ (слика 30): Повуцимо у равни Σ_1 ма коју нормалу n_1 на пресечницу p обе равни Σ_1 и Σ_2.

Ако повучемо у равни Σ_2 у подножју N нормалу n_2 на пресечницу p, онда су n_1 и n_2 краци нагибнога угла, јер стоје нормално на пресечници p. Тај угао је прав угао, јер равни стоје нормално једна на другој. Права n_1 стоји тада нормално на двема правима равни Σ_2 (на p и n_2), дакле стоји по ставу 5 нормално на равни Σ_2.



Слика 30

Став 21. *Раван, положена кроз праву која стоји нормално на датој равни, стоји нормално на тој равни.* (слика 30). Докажи.

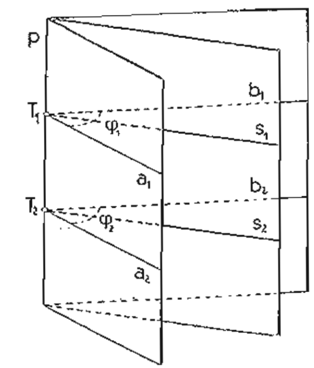
Став 22. *Ако две равне стоје нормално на трећој равни, стоји и њихова пресечница нормално на трећој равни.* Докажи.

§ 18. Симетриска раван дијeдра

Пресецимо полуравни дијeдра са равни Σ_1 која стоји нормално на ивици p (слика 31). Она их сече дуж полуправих a_1 и b_1 са заједничком полазном тачком T_1 на ивици p. Пошто a_1 и b_1 стоје нормално на ивици p то је угао, који чине једнак дијeдру обе полуравни. Угаона симетрала s_1 угла φ_1 стоји нормално на ивици p, јер лежи у нормалној равни на ту ивицу. Раван, одређену ивицом p и угаоном симетралом s_1, зовемо раван симетрије дијeдра.

Став 23. *Раван симетрије полови дијeдар.*

Доказ (сл. 31): Ако узмемо ма коју другу раван Σ_2 нормалну на ивици p, она је по ставу 16 паралелна равни Σ_1, зато што су равни, које стоје управно на истој правој, паралелне међу собом. По ставу 14

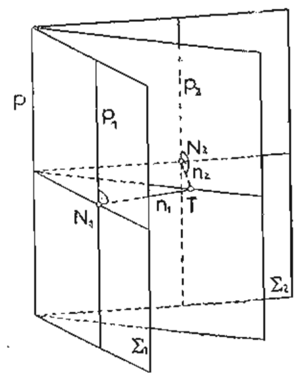


Слика 31

пресеци две паралелне равни са трећом равни паралелни су. Стога су пресеци $a_1 \parallel a_2$, $b_1 \parallel b_2$ и $s_1 \parallel s_2$. Углови које чине паралелни и истосмерни краци су по ставу 10 једнаки међу собом: $\sphericalangle a_1 b_1 = \sphericalangle a_2 b_2$, $\sphericalangle a_1 s_1 = \sphericalangle a_2 s_2$ и $\sphericalangle b_1 s_1 = \sphericalangle b_2 s_2$. Пошто је $\sphericalangle a_1 s_1 = \sphericalangle b_1 s_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle a_1 b_1$, то је и $\sphericalangle a_2 s_2 = \sphericalangle b_2 s_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle a_2 b_2$.

Пошто је раван Σ_2 нормална на ивици p била произвољно изабрана, важи исти закључак за сваку нормалну раван на p. Све тако добијене угаоне симетрале s_1, $s_2 \ldots$ паралелне су међу собом и секу ивицу p диједра. Стога леже у једној истој равни кроз p; она је раван симетрије диједра.

Ако из ма које тачке T симетриске равни повучемо нормале n_1 и n_2 на равни диједра, одређују n_1 и n_2 раван нормалну на ивици p (слика 32). Нормала n_1 стоји наиме нормално на свакој правој равни Σ_1 која иде кроз њено подножје N_1; дакле стоји n_1 нормално и на p_1 која је паралелна p. Из истога разлога стоји и n_2 нормално на p_2 која је паралелна p. Раван, одређена са n_1 и n_2 стоји нормално на паралелама p_1 и p_2, стоји стога нормално и на ивици p. Пресечнице равни (n_1 n_2) са равнима Σ_1 и Σ_2 краци су диједра, пресеченица са симетриском равни је симетрала тога угла. Пошто су n_1 и n_2 нормале из тачке T угаоне симетрале на оба крака, једнаке су. Тачка T симетриске равни је стога једнако удаљена од обе равни диједра. Пошто је тачка T произвољно изабрана, важи:



Слика 32

Став 24. *Све тачке симетриске равни једнако су удаљене од обе равни диједра.*

Тај став се може и овако изразити:

Симетриска раван диједра је геометриско место свих тачака, једнако удаљених од обе граничне равни.

Став 25. *Симетриске равни диједра и упоредногa диједра стоје нормално једна на другој.* Докажи.

Задаци:

1. Одреди геометриско место свих тачака једнако удаљених од дате равни (на пример $d = 5\ cm$).

2. Одреди геометриско место свих тачака у равни Σ, које се могу спојити са одређеном тачком T праве p тако, да спојнице стоје нормално на правој p. (Како мора да лежи права према равни?)

3. Одреди геометриско место свих тачака једнако удаљених од две паралелне равни.

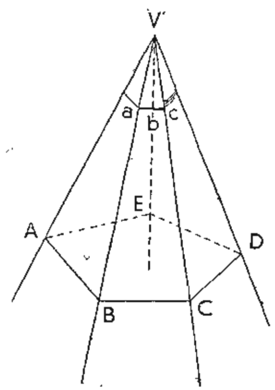
4. Да ли је права, која је нормална на датој правој равни, нормална и на равни?

5. Имају ли две ма које праве (мимоилазне) у простору симетриску раван?

IV. РОГЉЕВИ

§ 19. Дефиниција рогља

Ако обрћемо полуправу $\overline{VA}$ око њенога краја V тако, да се она помера по обиму многоугла $ABCDE$, описује обртна полуправа толико равни, колико страна има изабрани многоугао. Простор, који лежи између тих равни, зове се р о г а љ. Да постане рогаљ мора тачка V да лежи ван равни многоугла (слика 33). Ту тачку V зовемо в р х или т е м е рогља, полуправе зовемо и в и ц е и равни између две суседне ивице б о ч н е с т р а н е рогља. Угао што га чине две узастопне ивице је и в и ч н и у г а о или с т р а н а рогља. Угао који чине две узастопне површине је површински угао или кратко угао рогља. Сваки рогаљ има толико страна или углова, колико има ивица, односно бочних страна.



Слика 33

Стране обележавамо као углове у равни: $\sphericalangle AVB = a$, $\sphericalangle BVC = b$, $\sphericalangle CVD = c$ итд., диједре на тај начин што се стави у заграду ивица на којој лежи угао: $(AV) = \alpha$, $(BV) = \beta$, $(CV) = \gamma$ итд.

По броју ивица или страна разликујемо т р о с т р а н е (т р о и в и ч н е) р о г љ е в е или т р и j е д р е, ч е т в о р о с т р а н е, п е т о с т р а н е, n — с т р а н е рогљеве.

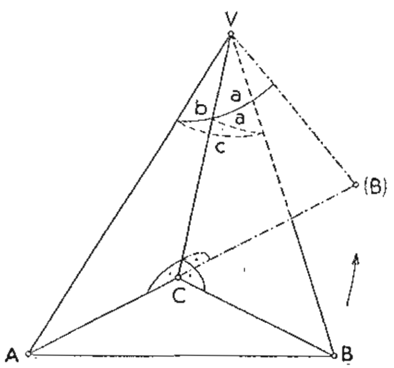
Рогаљ је испупчен или конвексан, ако су све стране и сви углови издубљени; конкаван или издубљен тада, када има и испупчених страна и углова. Проширене граничне површине конвексног рогља нигде не секу рогаљ. Узимаћемо у обзир само конвексне рогље.

Једнакостран рогаљ има једнаке стране (ивичне углове); једнакоугли има једнаке углове (диједре). Рогаљ који је уједно и једнакостран и једнакоугли зовемо правилан или регуларан (Направи моделе).

§ 20. Односи међу странама триједра

Став 26. *У сваком триједру је збир двеју страна већи од треће и разлика двеју страна мања од треће стране.*

Доказ првога дела (слика 34): У тространом рогљу $VABC$ нека буде $\sphericalangle AVB = C$ највећа страна. Ако триједар пресечемо тако, да пресечна раван стоји нормално на ивици $\overline{VC}$, добијамо троугао ABC чије стране $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ стоје нормално на ивици $\overline{VC}$. Обрнимо троугао VCB око $\overline{VC}$ тако, да пређе у исту раван са троуглом VCA. Добијамо троугао $A(B)V$. У том троуглу је страна $\overline{A(B)} = \overline{AC} + \overline{CB}$ већа од стране AB троугла ABV. Остале две стране су у оба троугла ABV и $A(B)V$ једнаке. Угао, који чине две стране, у толико је већи, у колико је већа супротна страна. Угао $AV(B)$ је стога већи од угла AVB. Пошто је угао $AV(B)$ збир две стране $(a + b)$ триједра и угао $AVB = c$ трећа страна, следује да је збир двеју страна триједра већи од треће стране $(a + b > c)$.



Слика 34

Доказ другог дела: Ако одузмемо b од обе стране неједначине: $a + b > c$, добијамо $a > c - b$. Исто тако добијамо $b > c - a$ и $c > a - b$.

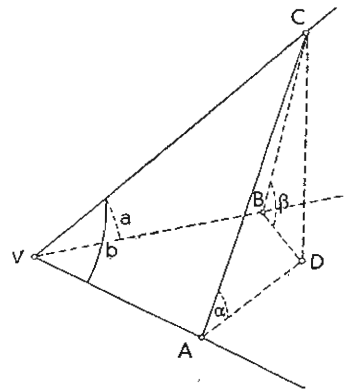
§ 21. Односи међу угловима и странама триједра

Став 27. *Према једнаким странама триједра леже једнаки углови и према једнаким угловима леже једнаке стране; према већој страни лежи већи угао и према већем углу лежи већа страна.*

Став се састоји из четири дела које ћемо доказати по овом реду: 1., 2., 4. и 3. део.

Доказ 1. дела: Према једнаким странама триједра леже једнаки углови (слика 35).

У триједру $VABC$ су стране (ивични углови) a и b једнаки. Да одредимо диједре α и β, изабраћемо ма коју тачку C на $\overline{VC}$ и повући нормале $\overline{CA} \perp \overline{VA}$, $\overline{CB} \perp \overline{VB}$ и $\overline{CD} \perp (AB)$; тада је и $\overline{DA} \perp \overline{VA}$ и $\overline{DB} \perp \overline{VB}$, пошто се прав угао пројицира као прав угао, кад се један крак налази у равни пројекције. У нашем случају су $\overline{VA}$ односно $\overline{VB}$ у пројекциској равни. Стога су углови $CAD = \alpha$ и $CBD = \beta$ диједри триједра. Троугао CVA је по 1 $\cong$ подударан троуглу CVB. Отуда следује, да су по 3 $\cong$ и троугли CDA и CDB подударни, стога је $\alpha = \beta$.



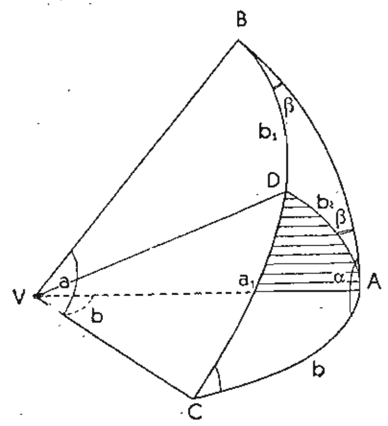
Слика 35

Доказ 2. дела: Према једнаким угловима леже у триједру једнаке стране.

Из подударности троуглова ADC и BDC по 1 $\cong$ следује: $\overline{AC} = \overline{BC}$ и из подударности троуглова CVA и CVB по 3 $\cong$ следује: $a = b$.

Доказ 4. дела: Наспрам већега угла лежи већа страна (слика 36).

Диједар α нека буде већи од диједра β. Кроз ивицу $\overline{VA}$ положимо раван која чини угао β са равни (AB). Она сече раван (BC) по правој $\overline{VD}$ тако, да дели угао a на углове a_1 и b_1. У триједру $VABD$, који има два једнака диједра,



Слика 36

једнаке су по 2. делу става и стране: $b_1 = b_2$. Отуда следује: $a = a_1 + b_1 = a_1 + b_2 > b$. a_1, b_2 и b су наиме стране триједра $VADC$, а у сваком триједру је збир двеју страна већи од треће стране.

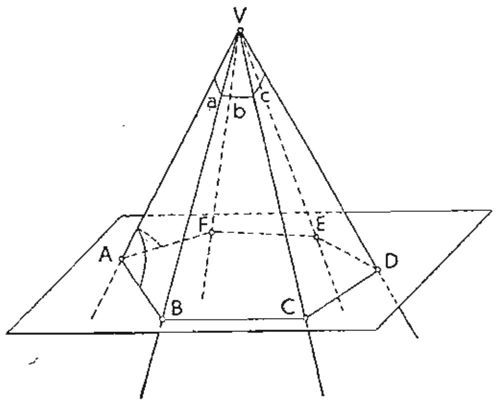
Доказ 3. дела: Према већој страни у триједру лежи већи угао.

Доказ је посредан.

Додатак: Тространи рогаљ са две једнаке стране зовемо равнокраки рогаљ

§ 22. Збир страна вишестраног рогља

Став 28. *У сваком рогљу је збир страна мањи од 4 R.*



Слика 37

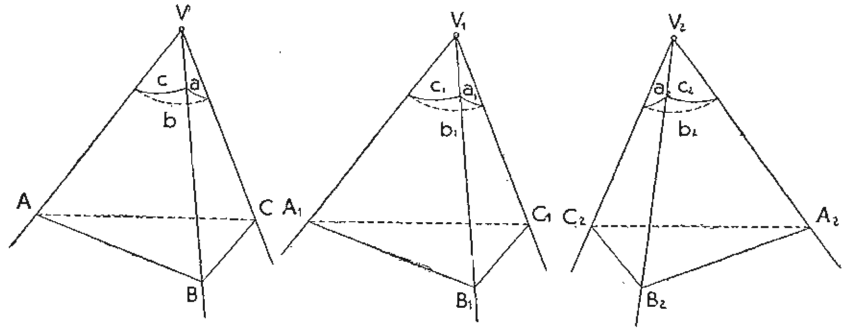
Доказ: Вишестрани рогаљ који има n страна пресечемо са равни тако, да добијемо многоугао $ABCD\ldots$, чије стране чине са ивицама n бочних троуглова. Збир свих углова бочних троуглова је $n \cdot 2R = S + S'$ где је S збир рогљевих страна $(a + b + c + \ldots)$, а S' збир углова који лежи на странама многоугла. На пресечној равни настаје n тространих рогљева. Пошто је у сваком рогљу збир два ивична угла већи од трећега, то је $S' > n \cdot 2R - 4R$. Толики је наиме збир свих унутрашњих углова многоугла. Из

$$S + S' = n \cdot 2R \text{ и}$$
$$S' > n \cdot 2R - 4R \text{ следује одузимањем:}$$
$$\underline{S < 4R}$$

§ 23. Подударни и симетрични рогљеви

Два рогља су подударни или конгруентни, ако их можемо ставити један у други тако, да се ивице једнога поклапају са ивицама другога. Стога су два рогља подударна, када су стране и углови једнога једнаки странама и угловима другога и то кад су поређани истим редом и у истом смислу у оба рогља (рогаљ $V \cong$ рогљу V_1, слика 38).

Два рогља су симетрични, када су стране и углови једнога рогља једнаке странама и угловима другога и поређани су у оба рогља истим редом, али у једном рогљу у једном смислу, а у другом у супротном (рогаљ V је симетричан рогљу V_2, рогаљ V_1 је симетричан рогљу V_2, слика 38).



Слика 38

Напомена: За боље разумевање направи два подударна триједра од картона. Затим ивице једнога триједра преви на супротну страну. Тако добијени триједар симетричан је првом триједру.

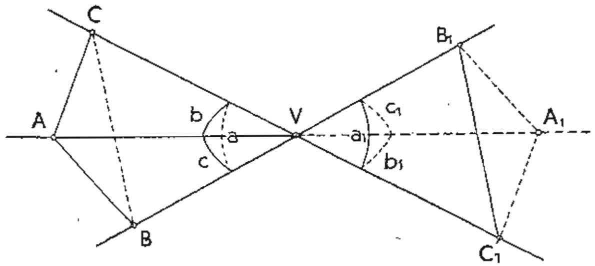
Додатак:

1. Ако су два рогља симетрични трећем, подударни су међу собом.

2. Ако је неки рогаљ симетричан другоме тада је симетричан сваком рогљу који је подударан другом.

§ 24. Унакрсни рогљеви

Два рогља с истим врхом, код којих су ивице једнога продужене ивице другога, зову се унакрсни рогљеви (слика 39). Стране једнога су унакрсне странама другога ($a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$). Пошто су граничне површине једнога



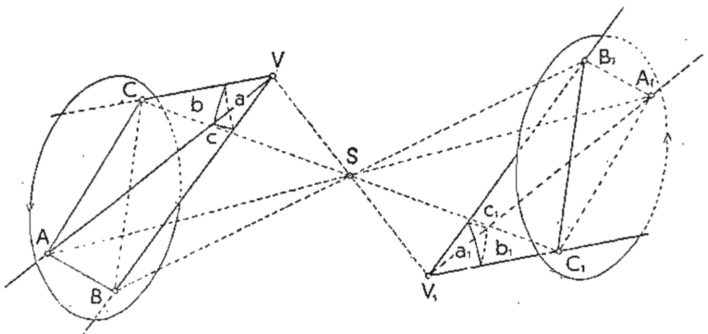
Слика 39

рогља проширене граничне површине другога, то су и диједри једнаки ($\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$). Па и поврх тога што оба рогља имају једнаке стране и углове поређане истим редом, не може се ставити један у други, зато што стране и углови првога рогља иду у супротном смислу од онога у коме иду стране и углови другога рогља. Стога су рогљеви симетрични.

Став 29. *Унакрсни рогљеви су симетрични.*

§ 25. Средишна или центрична симетрија

На ивицама датога рогља узмемо произвољне тачке $A, B, C, \ldots$ и повучемо кроз дату тачку S праве $\overline{VS}$, $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$ ... и на њима одредимо тачке $V_1, A_1, B_1, C_1, \ldots$ тако, да је $\overline{SV} = \overline{SV_1}$, $\overline{SA} = \overline{SA_1}$, $\overline{SB} = \overline{SB_1}$, $\overline{SC} = \overline{SC_1}, \ldots$



Слика 40

(слика 40). Ако спојимо тако добијене тачке $A_1, B_1, C_1, \ldots$ са V_1, добијамо ивице новога рогља, за који кажемо, да лежи **средишно** или **центрично симетрично** према датом

рогљу у односу на одређену тачку S као **центар** симетрије. Одговарајуће ивице оба рогља су паралелне и супротнога смисла. Стога су стране и углови једнога рогља једнаки странама и угловима другога, и то тако, да код рогља који симетрично лежи, иду обрнутим редом од реда у датом рогљу. У вези са пређашњим § рогљеви ниси подударни већ само симетрични.

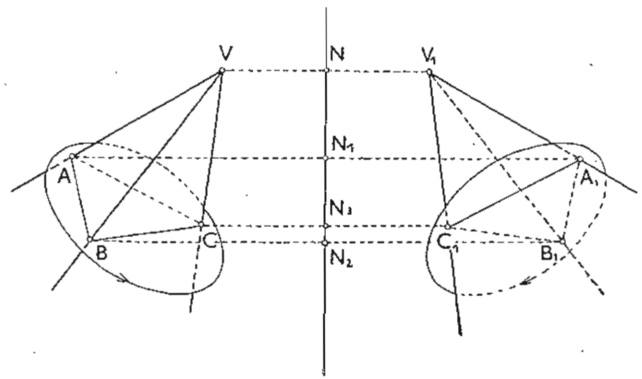
Став 30. *Два рогља који леже центрично симетрично симетрични су.*

Пошто можемо да сматрамо два унакрсна рогља као центрично симетричне рогљеве са заједничким врхом као центром симетрије, добијамо:

Став 31. *Унакрсни рогљеви су центрично симетрични рогљеви.*

§ 26. Осна (аксијална) симетрија рогља

На ивицама датога рогља узмемо произвољне тачке A, B, C ... и повучемо нормале $\overline{VN}$, $\overline{AN_1}$, $\overline{BN_2}$, $\overline{CN_3}$, ... на праву o те одредимо тачке V_1, A_1, B_1, C_1 ... тако, да је $\overline{VN} = \overline{V_1N}$, $\overline{AN_1} = \overline{A_1N_1}$, $\overline{BN_2} = \overline{B_1N_2}$, $\overline{CN_3} = \overline{C_1N_3}$ ... (слика 41). Ако спојимо тако добијене тачке A_1, B_1, C_1 ... са V_1,



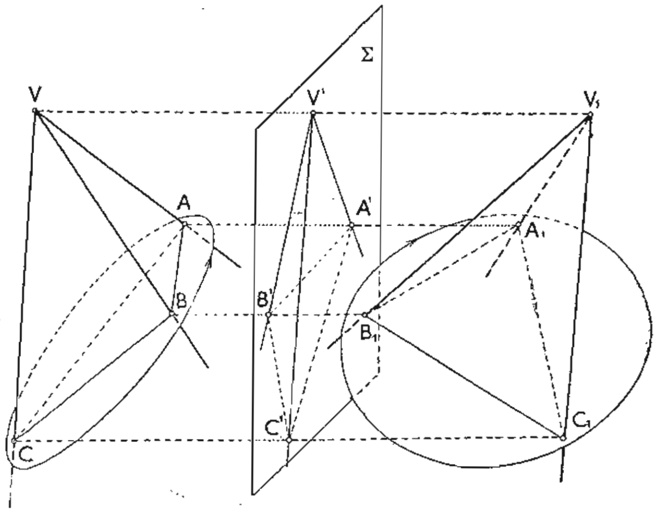
Слика 41

добијамо ивице новога рогља, за који кажемо да лежи **осно симетрично** према датом рогљу с обзиром на дату праву o као **осу симетрије**. Можемо да сматрамо, да је свака тачка ивице, свака ивица и свака гранична површина осно симетричнога рогља настала полуобртом датога рогља око осе симетрије. Зато су све стране и углови једног рогља једнаки странама и угловима другога рогља који иду код оба рогља истим редом. Отуда следује, да су оба рогља подударни.

Став 32. *Осно симетрични рогљеви подударни су.*

§ 27. Симетрија рогља према равни

Да бисмо одредили рогљу $VABC$ симетрично лежећи рогаљ с обзиром на раван Σ, повуцимо кроз V, A, B, C, нормале на раван Σ, одредимо подножја тих нормала V', A', B', C', и направимо растојања $\overline{VV'} = \overline{V_1V'}$, $\overline{AA'} = \overline{A_1A'}$, $\overline{BB'} = \overline{B_1B'}$, $\overline{CC'} = \overline{C_1C'}$, (слика 42). Рогаљ $V_1A_1B_1C_1$ лежи према рогљу



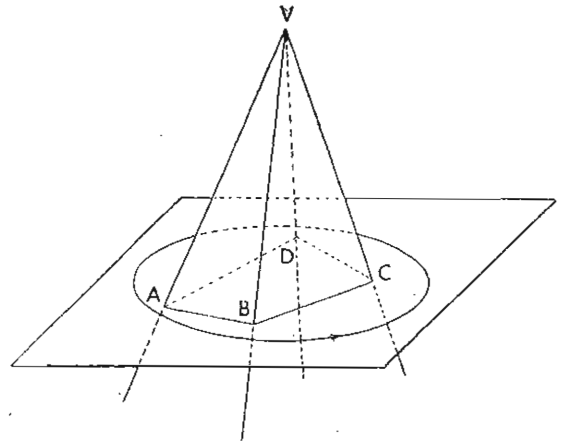
Слика 42

$VABC$ симетрично у погледу равни Σ коју зовемо **раван симетрије**. Стране и углови једнога рогља једнаки су странама и угловима рогља који лежи симетрично и они су поређени истим редом али у супротном смислу Стога су рогљеви симетрични.

Став 33. *Рогљеви који леже симетрично у погледу равни симетрични су.*

* § 28. Оријентисани рогљеви. Позитивни и негативни рогљеви

Ако посматрачу у рогљу, који гледа према врху рогља, изгледа да ивице једна за другом иду у смислу супротном кретању казаљке на часовнику, кажемо, да је рогаљ **позитиван** (слика 43); у супротном случају је **негативан**. Кажемо, да су



Слика 43

оба **једнако оријентисани** (**једносмислени**), ако су оба позитивни или оба негативни; **различито оријентисани** (**разносмислени**), кад је један рогаљ позитиван, а други негативан. Подударни рогљеви су једнако оријентисани, симетрични су различито оријентисани.

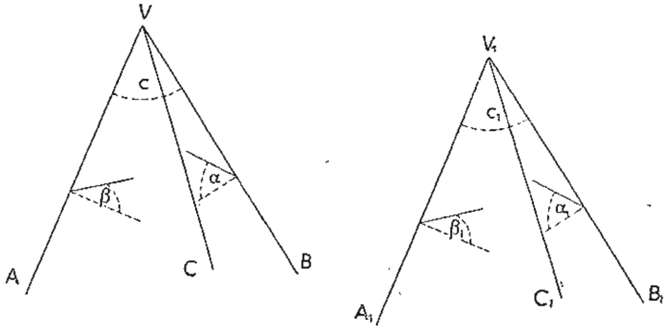
* § 29. Подударност триједара

Два триједра могу само тада бити подударни, када су једнако оријентисани. За подударност триједара важе ови ставови:

Став 34./1. *Два једнако оријентисана триједра су подударни, ако имају једнаку по једну страну и два угла.*

Дато: $c = c_1$, $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$.

Доказ (слика 44): Положимо страну AVB на $A_1V_1B_1$ тако, да се ивица $\overline{AV}$ поклопи са ивицом $\overline{A_1V_1}$ и ивица $\overline{BV}$ поклопи са ивицом $\overline{B_1V_1}$. Пошто су и диједри једнаки поклапа се гранична раван AVC са граничном равни $A_1V_1C_1$ и гранична раван BVC са граничном равни $B_1V_1C_1$. Пошто се две равни секу само по једној правој поклапају се и ивице $\overline{VC}$ и $\overline{V_1C_1}$. Триједри су дакле подударни.

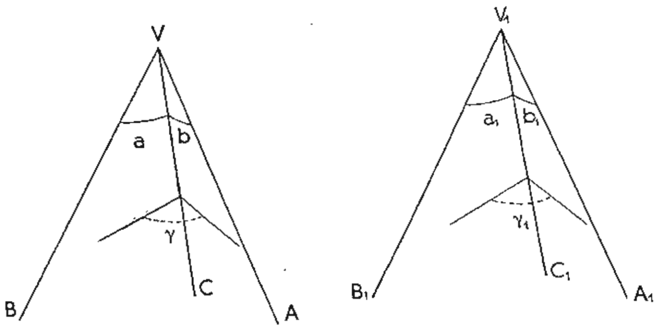


Слика 44

Став 34./2. *Два једнако оријентисана триједра подударни су, ако имају једнаке две стране и угао који оне чине.*

Дато: $a = a_1$, $b = b_1$ и $\gamma = \gamma_1$.

Доказ (слика 45):



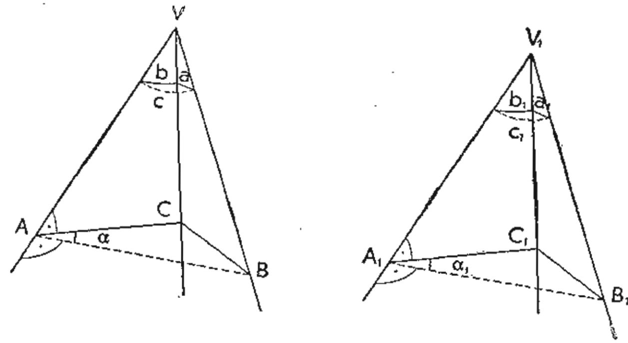
Слика 45

Положимо страну a на a_1 тако, да се ивица $\overline{VB}$ поклопи са ивицом $\overline{V_1B_1}$ и ивица $\overline{VC}$ поклопи са ивицом $\overline{V_1C_1}$. Пошто је угао γ једнак углу γ_1, поклапају се и граничне равни страна b и b_1. Због једнакости страна b и b_1 поклапају се и ивице $\overline{VA}$ и $\overline{V_1A_1}$. Оба триједра су дакле подударни.

Став 34./3. *Два једнако оријентисана триједра подударни су кад имају једнаке све три стране.*

Дато: $a = a_1$, $b = b_1$ и $c = c_1$.

Доказ (слика 46): Узмимо на једној ивици триједра $VABC$ ма коју тачку A и на одговарајућој ивици триједра $V_1A_1B_1C_1$ тачку A_1 тако, да је $\overline{V_1A_1} = \overline{VA}$. Потом повучемо у тачки



Слика 46

A у обе граничне површине триједра $VABC$ нормале $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ на ивицу $\overline{VA}$. Тако добијамо троугао ABC чији је угао α на темену A диједар триједра. Исто учинимо у триједру $V_1A_1B_1C_1$ и добијамо троугао $A_1B_1C_1$. Угао на темену A_1 тога троугла је диједар α_1 триједра $V_1A_1B_1C_1$. Ако докажемо да је $\alpha = \alpha_1$, тада је по пређашњем ставу подударност оба триједра доказана, зато што имају једнаке по две стране и угао који оне чине.

1. $\triangle ABV \cong \triangle A_1B_1V_1$ по 1 $\cong$ ($\overline{VA} = \overline{V_1A_1}$, $c = c_1$ и $\overline{AV} \perp \overline{AB}$, $\overline{A_1V_1} \perp \overline{A_1B_1}$). Стога је $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ и $\overline{VB} = \overline{V_1B_1}$.

2. $\triangle ACV \cong A_1C_1V_1$ по 1 $\cong$ ($\overline{VA} = \overline{V_1A_1}$, $b = b_1$ и $\overline{AV} \perp \overline{AC}$, $\overline{A_1V_1} \perp \overline{A_1C_1}$). Стога је $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$ и $VC = \overline{V_1C_1}$.

3. $\triangle BCV \cong \triangle B_1C_1V_1$ по 2 $\cong$ ($\overline{BV} = \overline{V_1B_1}$, $\overline{VC} = \overline{V_1C_1}$ и $a = a_1$). Стога је $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$.

4. $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ по 4 $\cong$, зато што је $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$ и $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$. Стога су и углови α и α_1 једнаки.

По пређашњем ставу су два једнака оријентисана рогља подударни, ако имају једнаке по две стране и угао који оне чине. Пошто стране a и b, односно a_1 и b_1 чине угао α, односно α_1 који су једнаки, триједри су подударни.

Задаци:

1. Направи од картона једнакостран четворострани (петострани) рогаљ, чија страна је $a = 30^0$ (45^0, 60^0). Кад је правилан?

2. Направи од картона правоугли рогаљ. (Стране су прави углови). Колико страна има такав рогаљ?

3. Колико се равностраних троуглова могу стицати у једном темену и какве рогље чине?

4. Колико се правилних петоуглова могу стицати у једној тачки и какав рогаљ чине?

5. Да ли могу правилни 6-, 7-, . . . n- угли, који се стичу у једној тачки, чинити рогаљ? Зашто не?

6. Направи од картона подударне и симетричне триједре.

7. Са колико величина је дат триједар, четворострани рогаљ, петострани рогаљ, . . . n-страни рогаљ?

8. Две стране тространога рогља мере 33^0 и 80^0; у којим границама се креће величина треће стране?

V. ОПШТЕ ОСОБИНЕ ТЕЛА. СИМЕТРИЈА

§ 30. Рогљаста и округла (обла) тела

Геометриско тело је са свих страна ограничен простор. Граничне површине су равне и криве.

Геометриско тело које је ограничено само равним површинама (многоуглима) зовемо рогљасто тело или полиједар. Овамо спадају на пример призма, пирамида и правилни полиједри. Ивица полиједра је дуж у којој се стичу два суседна многоугла. Темена су тачке у којима се стичу три или више многоуглова. Дијагонала полиједра је дуж која спаја два темена која не леже на истој граничној површини.

Правилан или регуларан полиједар има за граничне површине само правилне и подударне многоугле; стога су све ивице једнаке и сви рогљеви правилни и подударни. Правилних полиједара имамо пет: правилан тетраедар; правилан октаедар; правилан икосаедар (граничне површине код свих ових полиједара су равнострани троугли); коцку или хексаедар (граничне површине су квадрати) и правилан додекаедар

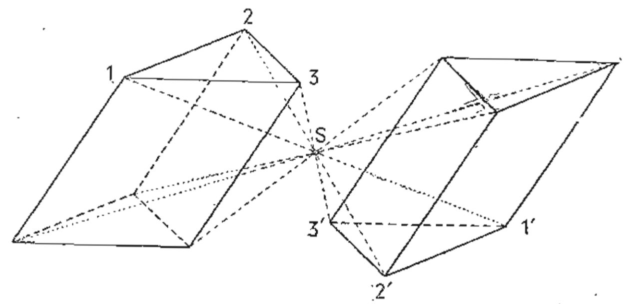
(граничне површине су правилни петоугли). Та тела је прво описао грчки филозоф Платон; стога их зовемо „Платонова“ тела.

Геометриска тела, ограничена равним и кривим површинама или само кривим, зовемо округла (обла) тела. Овамо спадају пре свега ваљак (облица), купа, лопта и обртна или ротациона тела.

* § 31. Број ивичних углова и ивица полиједра

Став 35. *У сваком полиједру је број ивичних углова једнак двоструком броју ивица.*

Доказ: Замислимо, да је полиједар ограничен са многоуглима који имају редом $n_1, n_2, n_3, \ldots$ страна. Сваки многоугао има толико углова колико и страна; отуда следује, да полиједар има $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ ивичних углова. Пошто је свака ивица полиједра страна два суседна многоугла, то је



Слика 47

број ивица једнак половини броја страна свих многоуглова, па је стога једнак и половини броја свих ивичних углова. Отуда следује, да полиједар има два пут толико ивичних углова колико ивица.

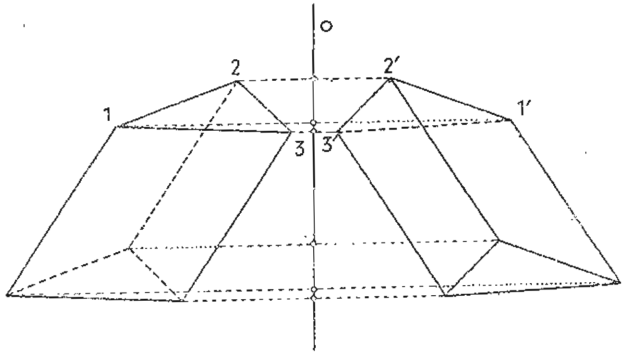
§ 32. Центрична симетрија тела

Два тела су центрично симетрична, ако дужи, које спајају темена једнога са одговарајућим теменима другога, иду кроз једну тачку која их полови. Ту тачку зовемо центар симетрије (слика 47). Пошто су рогљеви једнога тела симетрични рогљевима другога тела, тела нису подударна, већ само симетрично једнака.

Ако се код тела може у његовој унутрашњости одредити тачка S тако да свака права кроз ту тачку сече тело у две центрично симетричне тачке с обзиром на тачку S, кажемо, да је тело центрично симетрично и S центар симетрије. Коцка, квадар, ваљак и лопта су центрично симетрична тела.

§ 33. Осна (аксијална) симетрија тела

Два тела су осно симетрична, ако спојнице одговарајућих темена оба тела секу једну исту праву нормално и она их полови (слика 48). Рогљеви једнога тела су подударни са одговарајућим рогљевима другога тела. Полуобртом



Слика 48

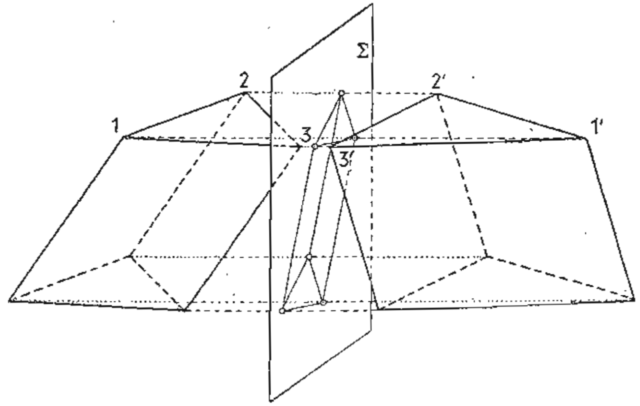
око осе симетрије (симетрале) поклапа се једно тело са другим. Стога су тела подударна.

Тело, код кога се права o може тако одредити, да свака права што стоји нормално на ту праву сече тело у две симетричне тачке у погледу праве o јесте осно симетрично; права o је симетрала тела. Коцка, квадар и обртна тела су осно симетрична тела.

§ 34. Површинска симетрија тела

Два тела су симетрична с обзиром на раван, ако дужи, које спајају тачке једнога тела са одговарајућим тачкама другога тела, стоје нормално на тој равни и раван их полови (слика 49). Оба тела имају једнаке све дужи, углове и површине, а рогљеви једног су симетрични са рогљевима другог. Обрнуто можемо тела, која имају такве особине, поставити једно према другоме тако да стоје симетрично с обзиром на одређену раван. Ту раван зовемо симетриска раван. У општем случају таква тела нису подударна; кажемо, да су тела симетрично једнака.

Тело, које се са равни може преполовити у два симетрична дела, зовемо симетрично тело. Та раван је симетриска раван тела. Симетрична геометриска тела су на пр.: коцка, квадар, правилна пирамида, ваљак, купа и лопта. Одреди на моделу равни симетрије. Колико их има коцка, квадар, ротациони ваљак, коси ваљак итд.



Слика 49

Задаци:

1. Колико ивица, рогљева и површина имају коцка, квадар, петострана и шестострана призма, тространа, четворострана и петострана пирамида?

2. Направи моделе Платонових тела.

3. Колико ивица, рогљева и површина имају Платонова тела? Направи таблицу. Ако у таблици обележимо број ивица са R, број рогљева са O и број површина са P, добијамо једначину: $O + P = R + 2$. (Ојлеров став).

4. Докажи, да осим Платонових тела нема никаквих других правилних полиједара.

5. Колико дијагонала има коцка, тространа призма, квадар, петострана и шестострана призма, тетраедар, четворострана и петострана пирамида и октаедар?

* 6. Одреди код коцке средишта свих граничних квадрата и спој их међу собом. Какво ћеш тело добити? Начини модел од жице.

* 7. Одреди средишта свих петоуглова код додекаедра и спој их међу собом. Какво ћеш тело добити?

* 8. Да ли можеш поставити две косе подударне призме у симетричан положај с обзиром на одређену раван? Кад је то могуће? Каква слика је основна површина?

VI. РЕШАВАЊЕ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

§ 35. Логаритми угаоних функција

Sin α, cos α, tg α и cotg α јесу неименовани бројеви који за одређен угао α имају одређену вредност. Ако одредимо логаритме тих бројева у ма којем логаритамском систему, добијамо:

$\log_{(a)} \sin \alpha$, $\log_{(a)} \cos \alpha$, $\log_{(a)} \mathrm{tg}\, \alpha$ и $\log_{(a)} \mathrm{cotg}\, \alpha$.

По обичају употребљавамо Бригзове (Briggs) логаритме чија је основа 10, и пишемо:

$\log \sin \alpha$, $\log \cos \alpha$, $\log \mathrm{tg}\, \alpha$ и $\log \mathrm{cotg}\, \alpha$.

Како их израчунавамо показаћемо на неколико примера. При том ћемо употребљавати логаритамске таблице С. Давидовића. Бројеви наведени у заградама означују стране логаритамских таблица.

1. пример: Одреди $\log \sin 37^0 20'$.

По таблицама природних вредности тригонометриских функција је:

$\sin 37^0 20' = 0{,}60645$ (стр. 27);

$$\log \sin 37^0 20' = \log 0{,}60\,645 = \log \frac{0{,}60\,645 \cdot 10^{10}}{10^{10}} =$$

$$= \log 6\,064\,500\,000 - 10 \log 10 = \underline{9{,}78\,280 - 10} \text{ (стр. 14).}$$

Број 0,60645 смо множили и делили са 10^{10} из чисто техничких разлога те је према томе остала његова вредност непромењена. Карактеристика логаритма се при том растави на позитиван и негативан део; алгебарски збир оба та дела је код логаритма синуса увек негативна, зато што је синус увек мањи од 1.

Логаритамске таблице имају и таблице већ израчунатих логаритама тригонометриских функција. Из тих таблица добијамо непосредно:

$\underline{\log \sin 37^0 20' = 9{,}78\,280 - 10}$ (стр. 104).

2. пример: Одреди $\log \cos 37^0 20'$.

По таблицама природних вредности тригонометриских функција је:

$\cos 37^0 20' = 0{,}79\,512$ (стр. 27);

$$\log \cos 37^0 20' = \log 0{,}79\,512 = \log \frac{0{,}79\,512 \cdot 10^{10}}{10^{10}} =$$

$$= \log 7\,951\,200\,000 - 10 \log 10 = \underline{9{,}90\,043 - 10} \text{ (стр. 19).}$$

Број 0, 79 512 смо множили и делили са 10^{10} те је његова вредност остала непромењена. Карактеристика логаритма се при том растави на позитиван и негативан део; алгебарски збир тих делова је код логаритма косинуса увек негативан, зато што је и косинус увек мањи од 1.

До истог резултата долазимо брже, ако потражимо непосредно из таблице већ израчунатих логаритама тригонометриских функција:

$\underline{\log \cos 37^0 20' = 9,\ 90\,043 - 10}$ (стр. 104).

3. пример: Одреди $\log \mathrm{tg}\, 37^0 20'$.

И у овом примеру можемо прво да одредимо $\mathrm{tg}\, 37^0 20'$, па тек после тога одговарајући логаритам. Из таблица логаритама тригонометриских функција добијамо непосредно:

$\underline{\log \mathrm{tg}\, 37^0 20' = 9,\ 88\,236 - 10}$ (стр. 104).

4. пример: Одреди $\log \mathrm{cotg}\, 37^0 20'$.

У логаритамским таблицама налазимо:

$\underline{\log \mathrm{cotg}\, 37^0 20' = 10,\ 11\,764 - 10}$ (стр. 104).

Напомена: Код log tg и log cotg може алгебарски збир оба дела карактеристике да буде и позитиван, пошто tg односно cotg могу да буду већи од 1.

5. пример: Одреди $\log \sin 56^0 48' 27''$

На страни 96 логаритамских таблица:

$\log \sin 56^0 48' = 9,\ 92\,260 - 10$

$\underline{\log \sin 56^0 49' = 9,\ 92\,269 - 10}$

Разлика за $1' = 0,\ 00\,009$

$$\text{Разлика за } 1'' = \frac{0,\ 00\,009}{60} = 0,\ 000\,001\,4$$

Разлика за $27'' = 0{,}000\,001\,4 \cdot 27 = 0{,}000\,037\,8 \approx 0{,}000\,04.$

Пошто синус расте кад угао расте, то расте и log sin и стога се разлика додаје:

$$\begin{array}{ll} \log \sin 56^0 48' & = 9{,}92\,260 - 10 \\ + \text{ разлика за } 27'' & = 0{,}00\,004 \\ \hline \log \sin 56^0 48' 27'' & = \underline{9{,}92\,264 - 10.} \end{array}$$

У нашим таблицама је разлика за $1'$ већ израчуната. Стога се рачун може унеколико скратити, ако се одмах нађе разлика за $1''$, па даље настави:

$$\begin{array}{lll} & \log\ \sin 56^0\,48' & = 9{,}92\,260 - 10 \\ + & \text{разлика } 0{,}14 \cdot 27 & = \quad 3{,}78 \\ \hline & \log\ \sin 56^0\,48'\,27'' & = 9{,}92\,264 - 10 \end{array}$$

ако узимамо у обзир још само разлику за пето децимално место.

6. пример: Одреди log cos $56^0\,48'\,27''$.

$$\begin{array}{lll} & \log\ \cos 56^0\,48' & = 9{,}73\,843 - 10 \text{ (стр. 96).} \\ - & \text{разлика } 0{,}32 \cdot 27 & = \quad 9 \\ \hline & \log\ \cos 56^0\,48'\,27'' & = 9{,}73\,834 - 10. \end{array}$$

Разлика за $27'' = 0{,}00009$ одузима се, јер кад угао расте косинус опада и с тим и логаритам косинуса.

7. пример: Одреди log tg $56^0\,48'\,27''$.

$$\begin{array}{lll} & \log\ \text{tg } 56^0\,48' & = 10{,}\,18\,417 - 10 \text{ (стр. 96)} \\ + & \text{разлика } 0{,}46 \cdot 27 & = \quad 12 \\ \hline & \log\ \text{tg } 56^0\,48'\,27'' & = 10{,}\,18\,429 - 10. \end{array}$$

Разлика се додаје, јер кад угао расте и тангенс расте, па с њим и логаритам тангенса.

8. пример: Одреди log cotg $56^0\,48'\,27''$.

$$\begin{array}{lll} & \log \text{cotg } 56^0\,48' & = 9{,}\,81\,583 - 10 \text{ (стр. 96)} \\ - & \text{разлика } 0{,}46 \cdot 27 & = \quad 12 \\ \hline & \log \text{cotg } 56^0\,48'\,27'' & = 9{,}\,81\,571 - 10. \end{array}$$

Разлика се одузима, јер кад угао расте котангенс се смањује па с њим и логаритам котангенса.

§ 36. Одређивање угла, ако је дат логаритам функције

Одређеном углу α припада одређена вредност за $\log \sin \alpha$, $\log \cos \alpha$, $\log \text{tg } \alpha$ и $\log \text{cotg } \alpha$. Обрнуто припада датом логаритму функције одређени угао. Како га одређујемо, нека нам покаже неколико примера.

1. пример: Одреди угао α, кад је $\log \sin \alpha = 9{,}78\,342 - 10$. На страни 104 логаритамских таблица налазимо, да се угао налази између $37^0\,23'$ и $37^0\,24'$.

$$\begin{array}{ll} \log\ \sin\ \alpha & = 9{,}78\,342 - 10 \\ \log\ \sin\ 37^0\,23' & = 9{,}78\,329 - 10 \\ \hline \text{разлика за } x'' & = \quad 13 \\ \text{разлика за } 1'' & = \quad 0{,}28 \end{array}$$

$$x'' = \frac{13}{0{,}28} = \frac{1300}{28} = 46''$$

$$\alpha = 37^0\,23'\,46''.$$

2. пример: Одреди угао α, кад је $\log \cos \alpha = 9{,}49\,736 - 10$. На страни 66 логаритамских таблица налазимо, да се угао α налази између $71^0\,40'$ и $71^0\,41'$.

$$\begin{array}{ll} \log\ \cos\ 71^0\,40' & = 9{,}49\,768 - 10 \\ \log\ \cos\ \alpha & = 9{,}49\,736 - 10 \\ \hline \text{разлика за } x'' & = \quad 32 \\ \text{разлика за } 1'' & = \quad 0{,}64 \end{array}$$

$$x'' = \frac{32}{0{,}64} = \frac{3200}{64} = 50''$$

$$\alpha = 71^0\,40'\,50''.$$

3. пример: Одреди угао α, кад је $\log \text{tg } \alpha = 10{,}42\,781 - 10$. На страни 70 логаритамских таблица налазимо, да се угао α налази између $69^0\,31'$ и $69^0\,32'$.

$$\begin{array}{ll} \log\ \text{tg}\ \alpha & = 10{,}42\,781 - 10 \\ \log\ \text{tg}\ 69^0\,31'' & = 10{,}42\,765 - 10 \\ \hline \text{разлика за } x'' & = \quad 16 \\ \text{разлика за } 1'' & = \quad 0{,}64 \end{array}$$

$$x'' = \frac{16}{0{,}64} = \frac{1600}{64} = 25''$$

$$\alpha = 69^0\,31'\,25''.$$

4. пример: Одреди угао α, кад је $\log \text{cotg } \alpha = 9{,}79\,385 - 10$. На страни 93 логаритамских таблица налазимо, да се угао α налази између $58^0\,6'$ и $58^0\,7'$.

$$\begin{array}{ll} \log\ \text{cotg}\ 58^0\,6' & = 9{,}79\,410 - 10 \\ \log\ \text{cotg}\ \alpha & = 9{,}79\,385 - 10 \\ \hline \text{разлика за } x'' & = \quad 25 \\ \text{разлика за } 1'' & = \quad 0{,}47 \end{array}$$

$$x'' = \frac{25}{0{,}47} = \frac{2500}{47} = 53''$$

$$\alpha = 58^0\,6'\,53''.$$

§ 37. Решавање правоуглог троугла

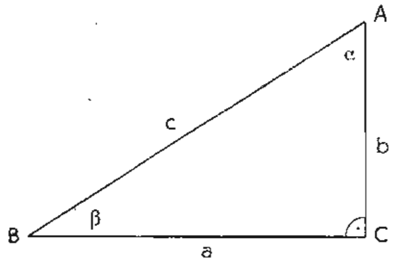
Решити правоугли троугао значи одредити из две дате независне величине остале величине.

Из $\frac{a}{c} = \sin \alpha = \cos \beta$ и

$\frac{a}{b} = \text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta$ добијамо, ако се у тим једначинама ослободимо разломака:

$$\left.\begin{aligned} a &= c \sin \alpha = c \cos \beta \text{ и} \\ a &= b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{cotg} \beta \end{aligned}\right\}$$

Став 36. *Катета правоуглог троугла једнака је производу хипотенузе и синуса супротног угла или производу хипотенузе и косинуса налеглог (оштрог) угла.*



Слика 50

Став 37. *Катета правоуглог троугла једнака је производу друге катете и тангенса супротнога угла или производу друге катете и котангенса налеглог (оштрог) угла.*

Супротни и налегли (оштри) угао одређује се катетом о којој се говори.

§ 38. Примери решавања правоуглог троугла

1. пример: Правоугли троугао је дат хипотенузом $c = 125{,}38\ m$ и углом $\alpha = 37^0\ 48'\ 28''$; одреди остале величине.

a) $\underline{a = c \sin \alpha}$

$$\begin{array}{rll} \log a = \log c + \log \sin \alpha & & \\ \log 125{,}38 \qquad = 2{,}09\ 823 & & (\text{стр. } 2) \\ + \log \sin 37^0\ 48'\ 28'' = 9{,}78\ 747 - 10 & & (\text{стр. } 105) \\ \hline \log a = 1{,}88\ 570 & & (\text{стр. } 18) \\ \underline{a = 76{,}86\ m.} & & \end{array}$$

b) $\underline{b = c \cos \alpha}$

$$\begin{array}{rl} \log b = \log c + \log \cos \alpha & \\ \log 125{,}38 \qquad = 2{,}09\ 823 & \\ + \log \cos 37^0\ 48'\ 28'' = 9{,}89\ 767 & (\text{стр. } 105) \\ \hline \log b = 1{,}99\ 590 & \\ \underline{b = 99{,}06\ m} & \underline{(\text{стр. } 24)} \end{array}$$

c) $\beta = 90 - \alpha = 52^0\ 11'\ 32''.$

2. пример: Правоугли троугао је дат катетом $a = 24{,}34\,m$ и углом $\alpha = 63^0\ 38'\ 24''$; одреди остале количине.

a) $\underline{c = \dfrac{a}{\sin \alpha}}$

$$\begin{array}{rl} \log c = \log a - \log \sin \alpha & \\ \log 24{,}34 \qquad = 1{,}38\ 632 & (\text{стр. } 5) \\ - \log \sin 63^0\ 38'\ 24'' = 9{,}95\ 231 - 10 & \\ \hline \log c = 1{,}43\ 401 & \\ \underline{c = 27{,}165\ m} & \underline{(\text{стр. } 6).} \end{array}$$

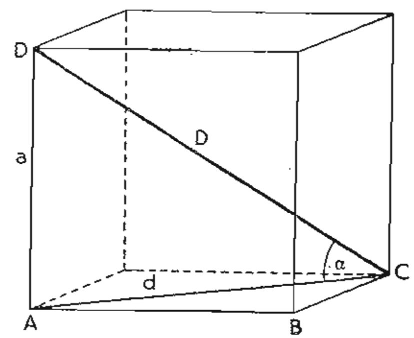
b) $\underline{b = \dfrac{a}{\operatorname{tg} \alpha}}$

$$\begin{array}{rl} \log b = \log a - \log \operatorname{tg} \alpha & \\ \log 24{,}34 \qquad = 1{,}38\ 632 & \\ - \log \operatorname{tg} 63^0\ 38'\ 24'' = 10{,}30\ 493 - 10 & (\text{стр. } 82) \\ \hline \log b = 1{,}08\ 139 & \\ \underline{b = 12{,}061\ m} & (\text{стр. } 2). \end{array}$$

c) $\beta = 90 - \alpha = 26^0\ 21'\ 36''.$

3. пример: Колики угао чини дијагонала коцке са основом?

Троугао DAC је правоугли троугао са правим углом у темену A и са катетама a и d (слика 51). d је пројекција телесне дијагонале D; стога је угао $DCA = \alpha$ тражени угао. Катета d је дијагонала квадрата: $d = a\sqrt{2}$.



Слика 51

$$\underline{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \log 2 - \log 2 & \\ \frac{1}{2} \log 2 \quad = 0{,}15\ 052 & \\ - \log 2 \quad = 0{,}30\ 103 & (\text{стр. } 1.) \\ \hline \log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}84\ 949 - 10 & \\ \underline{\alpha = 35^0\ 15'53''.} & \end{array}$$

Задаци:

1. Одреди помоћу логаритамских таблица log sin α, log cos α, log tg α и log cotg α за:

a) $\alpha = 25^0\,49'$, *c)* $\alpha = 37^0\,15'\,54''$,
b) $\alpha = 69^0\,34'$, *d)* $\alpha = 81^0\,27'\,42''$.

2. Одреди угао α, кад је дат:

a) $\log\sin\alpha = 9{,}47\ 356 - 10$, *e)* $\log \mathrm{tg}\,\alpha = 9{,}64\ 427 - 10$,
b) $\log\sin\alpha = 9{,}96\ 452 - 10$, *f)* $\log \mathrm{tg}\,\alpha = 10{,}76\ 683 - 10$,
c) $\log\cos\alpha = 9{,}86\ 674 - 10$, *g)* $\log \mathrm{cotg}\,\alpha = 9{,}33\ 467 - 10$,
d) $\log\cos\alpha = 9{,}41\ 777 - 10$, *h)* $\log \mathrm{cotg}\,\alpha = 10{,}37\ 512 - 10$.

3. Реши правоугли троугао, кад је дато:

a) $c = 435\ m$, $\alpha = 68^0\,19'\,52''$;
b) $c = 12{,}65\ m$, $\beta = 49^0\,43'\,48''$;
c) $a = 183\ m$, $b = 435\ m$;
d) $a = 43{,}56\ m$, $\alpha = 37^0\,16'\,12''$;
e) $a = 12{,}8\ m$, $\beta = 24^0\,53'\,47''$;
f) $a = 82{,}7\ m$ $c = 346{,}7\ m$;
g) $a_1 = 64\ m$, $b_1 = 225\ m$. (a_1 и b_1 су пројекције катета на хипотенузу);
h) $a = 156\ m$, $a_1 = 134\ m$;
i) $a = 15\ m$, $v = 12\ m$;
j) $v = 24{,}6\ m$, $\alpha = 26^0\,21'\,33''$;
k) $a_1 = 0{,}56\ m$, $\beta = 41^0\,17'\,31''$;
l) $a_1 = 0{,}083\ m$, $\alpha = 73^0\,12'\,26''$.

4. Реши равнокраки троугао, кад је дато (a = основица, b = крак, v = висина на основицу, v_b = висина на крак, β = угао на основици, α = угао на врху):

a) $a = 142\ m$, $b = 271\ m$;
b) $a = 53\ m$, $\alpha = 52^0\,37'\,28''$;
c) $b = 67\ m$, $\alpha = 72^0\,36'\,41''$;
d) $a = 18\ m$, $v = 37\ m$;
e) $b = 85\ cm$, $v = 68\ cm$;
f) $a = 34\ m$, $v_b = 24\ m$;
g) $b = 183\ m$, $v_b = 62\ m$;
h) $v = 174\ m$, $v_b = 56\ m$.

5. Изрази површину равнокракога троугла као функцију од:

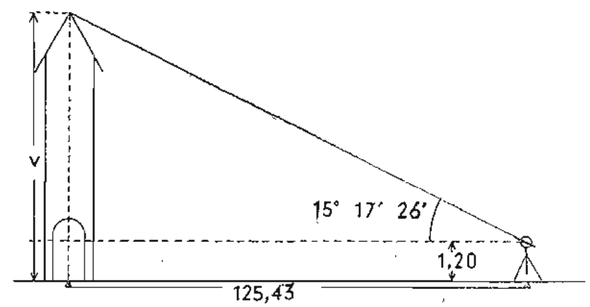
a) a и α; *c)* v и α;
b) b и β; *d)* v_b и β.

6. Одреди висину звоника угломером. (Слика 52).

Прво одредимо растојање звоника до угломера (на пр. 125,43m), потом висину угломера (1,20m) и измеримо угао ($15^0\,17'\,26''$).

7. Израчунај угао који чине стране ромба, ако су дате дијагонале $d_1 = 27\ cm$ и $d_2 = 43\ cm$.

8. Израчунај угао који чине дијагонале правоугаоника са странама $a = 19\ cm$ и $b = 9\ cm$.



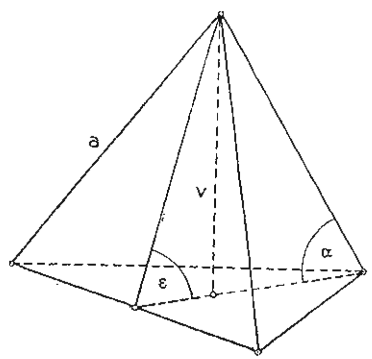
Слика 52

9. Израчунај у правилном n-углу полупречник описанога круга r, полупречник уписанога круга ϱ и површину p, кад је дато:

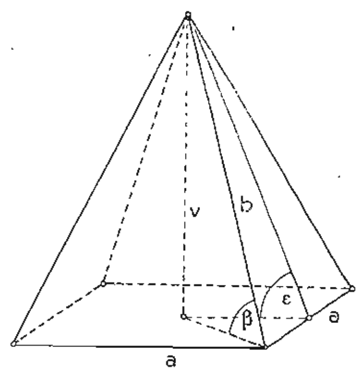
a) $n = 10$, $a = 100\ m$; *b)* $n = 15$, $a = 2{,}35\ m$.

10. Колики угао чине тангенте t_1 и t_2 на круг полупречника $r = 4\ cm$, ако је средишно растојање пресечне тачке обе тангенте 10 cm?

* 11. Израчунај нагибни угао α ивице правилног тетраедра према основи (види слику 53).



Слика 53



Слика 54

* 12. Израчунај диједар ε који чине два суседна троугла правилног тетраедра (види слику 53).

13. Права квадратна пирамида дата је основном ивицом $a = 17{,}2$ и бочном ивицом $b = 43{,}6\ cm$ (слика 54).

a) Колики је угао α који чине две ивице при врху?

b) Колики је нагибни угао β бочне ивице према основи?

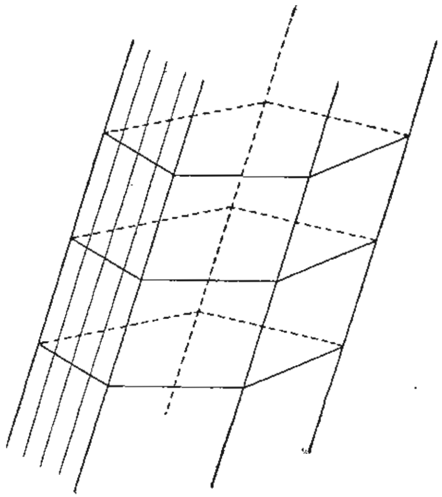
c) Колики је диједар ε који чини бочна страна са основом?

* 14. Израчунај диједар који код октаедра чине два суседна троугла.

VII. ПРИЗМА

§ 39. Постанак призме

Ако се по многоуглу (линији водиљи) помера права (производиља), која не лежи у тој равни, тако да је увек паралелна сама себи (транслаторно кретање праве), она описује са обе стране отворен простор који зовемо призматичан простор. Ако призматичан простор пресечемо са две паралелне равни, добијамо са свих страна ограничен простор који зовемо призма (сл. 55). Призма је дакле ограничена са два паралелна и подударна многоугла као основама (базама) и омотачем који чине толико бочних површина (паралелограма) колико основа има страна.



Слика 55

Пресек призме са равни, која је паралелна основи, јесте многоугао подударан основном многоуглу. Стога можемо да замислимо призму и као резултат транслаторног кретања многоугла по датој дужи водиљи.

Стране основних многоуглова су основне ивице призме, остале ивице су бочне ивице.

Пресек са равни који стоји нормално на бочне ивице призме јесте нормални пресек призме. Развијањем омотача у раван тај пресек прелази у праву линију.

Висина призме је растојање обе основе.

У раван распрострт омотач са обе основе чини мрежу призме.

§ 40. Врсте призама

По броју бочних површина разликујемо тро-, четворо-, пето-, . . . *n*- стране призме. Призма је права, ако бочне ивице стоје нормално на основама; у супротном случају је коса. Код праве призме су све бочне површине правоугаоници.

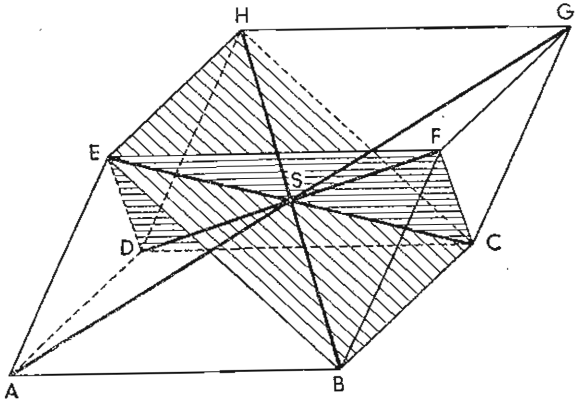
Права призма је правилна или регуларна, ако су основне површине правилни многоугли. Оса или осовина правилне призме је дуж која спаја средишта основа. Она је паралелна бочним ивицама и стоји стога нормално на основама.

Паралелепипед је призма чије су основне површине паралелограми; према томе паралелепипед је ограничен са шест паралелограма. По два наспрамна паралелограма су подударни и можемо да их сматрамо као основе. По положају бочних ивица према основама разликујемо косе и правоугле паралелепипеде. Једнакоивични косоугли паралелепипед зове се ромбоедар; ограничен је са шест подударних ромбова. Правоугли паралелепипед или квадар је ограничен са шест правоугаоника. Ивице, које се стичу у једном рогљу квадра, одређују својом величином димензије квадра; то је дужина, ширина и висина. Једнакоивични квадар је коцка.

§ 41. Дијагонални пресек и телесна дијагонала

Ако положимо раван кроз две бочне ивице призме, које не леже у истој граничној површини, она сече ту призму по паралелограму који зовемо дијагонални пресек призме. Призма има толико дијагоналних пресека колико основа има дијагонала. Дијагонални пресеци кроз исту ивицу деле призму у тростране призме. Дијагонале дијагоналних пресека су уједно телесне дијагонале призме. У паралелепипеду је дуж која спаја два супротна рогља дијагонала паралелепипеда Сваки паралелепипед има четири дијагонале (слика 56).

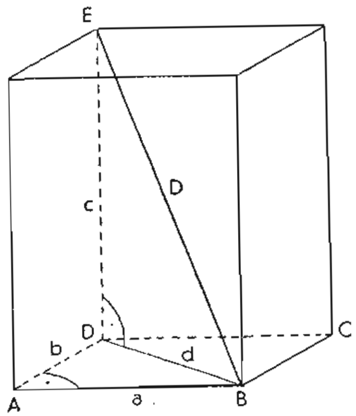
Став 38. *Дијагонале паралелепипеда секу се у истој тачки; та тачка је средиште паралелепипеда и полови дијагонале.*



Слика 56

Доказ: Узмимо дијагоналне пресеке $EFCD$ и $EHCB$. У оба паралелограма се дијагонале међусобно полове: $\overline{EC}$ је преполовљено од $\overline{BH}$ и $\overline{EC}$ од $\overline{DF}$. Према томе је тачка S заједничка за све три дијагонале и полови их. До истога закључка долазимо, ако узмемо ма који други дијагонални пресек. S је дакле заједничка тачка свих телесних дијагонала и средиште паралелепипеда.

Став 39. *Код квадра су све телесне дијагонале једнаке; квадрат дијагонале је једнак збиру квадрата дужине, ширине и висине.*



Слика 57

Доказ: a, b, c су дужина, ширина и висина квадра, d дијагонала правоуганика $ABCD$ и D телесна дијагонала $\overline{BE}$ (слика 57).

Из правоуглог троугла BDE је:

$$\underline{D^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.}$$

Додатак: Код коцке је $a = b = c$; стога је

$$D^2 = 3a^2 \text{ или } \underline{D = a\sqrt{3}.}$$

§ 42. Површина призме

Површина призме (P) једнака је збиру површина обе основе и омотача:

$$P = 2B + M$$

Површина омотача M једнака је збиру бочних површина (паралелограма). Код праве призме развијен омотач је правоугаоник чија је основица једнака обиму основе и висина једнака бочној ивици:

$$M = (a + b + c + \ldots) \cdot s = o \cdot s.$$

Површина квадра са ивицама a, b и c јесте:

$$\underline{P = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc).}$$

За $a = b = c$ добијамо површину коцке:

$$P = 6a^2.$$

§ 43. Мерење запремине. Мерне јединице

Простор, који заклапају граничне површине тела, зовемо запремина тела. Ако хоћемо да одредимо њену величину одређујемо, колико пута се запремина одређенога тела, коју сматрамо за запреминску јединицу, садржи у запремини датога тела. Број који нам то казује зове се мерни број запремине.

Јединице запреминске мере су коцке чије су ивице једнаке дужинским јединицама, те их по дужини ивице зовемо кубни метар (m^3), кубни десиметар (dm^3), кубни сантиметар (cm^3) и кубни милиметар (mm^3). Редукциони број код запреминских јединица је 1000. Зашто?

§ 44. Запремина квадра

Став 40. *Запремина квадра једнака је производу мерних бројева дужине, ширине и висине.*

Доказ: 1. Мерни бројеви a, b, c дужине, ширине и висине су цели бројеви.

У том случају поделимо квадар пресецима нормално на висину c у c једнаких плоча; свака плоча има дужину a, ширину b и висину 1. Потом пресечемо сваку плочу нормално на b у b једнаких призматичних шипки чије висине су a и основе квадрати стране 1. Призматичних шипки има $b \cdot c$. Најзад пресечемо све призматичне шипке пресецима нормално на a у a једнаких делова тако, да добијемо коцку ивице 1. Укупно добијемо $a \cdot b \cdot c$ једнаких коцки, односно запреминских јединица. Стога је запремина квадра, ако су мерни бројеви цели бројеви:

$$\underline{V = a \cdot b \cdot c}$$

2. Мерни бројеви су рационални разломци.

У том случају имају a, b, c заједничку меру $\frac{1}{m}$ и $a = \frac{\alpha}{m}$, $b = \frac{\beta}{m}$ и $c = \frac{\gamma}{m}$, где су α, β и γ цели бројеви. Стога се дају ивице поделити на $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ једнаких коцки. Свака таква коцка је $\frac{1}{m^3}$ запреминске јединице. Стога је запремина квадра, ако су мерни бројеви рационални разломци:

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \frac{1}{m^3} = \frac{\alpha}{m} \cdot \frac{\beta}{m} \cdot \frac{\gamma}{m} = \underline{a \cdot b \cdot c}$$

3. Мерни бројеви су ирационални бројеви.

На пример: $a = \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, $b = 2\sqrt{3} = 3{,}46410\ldots$, и $c = \sqrt[3]{10} = 2{,}15443\ldots$ Ако узмемо у обзир од свакога броја само прва три децимална места, налази се a између рационалних вредности $1{,}414_2$ и 1414_3, b између рационалних вредности $3{,}464_1$ и $3{,}464_2$ и c између рационалних вредности $2{,}154_4$ и $2{,}154_5$. Ако узмемо за a, b, c мање приближне вредности, добијамо запремину $V' = 10{,}5542\ldots$, која је мања. Ако узмемо пак за a, b, c веће приближне вредности, добијамо запремину $V'' = 10{,}5560\ldots$, која је већа. Код четири децимала лежи запремина квадра између $V_1' = 10{,}5544\ldots$ и $V_1'' = 10{,}5546\ldots$ Тако добијене приближне вредности разликују се у толико мање, у колико већи број децимала узимамо при рачуну.

Ирационални бројеви a, b, c су увек већи од мањих приближних вредности; само им се оне са повећањем броја децимала све више и више приближују. Стога расту са повећањем броја децимала и запремине: $V' < V_1' < V_2' < V_3' \ldots$ Обратно су пак ирационални бројеви a, b, c увек мањи од већих приближних вредности; само им се и оне са повећањем броја децимала све више и више приближују. Стога се смањују са повећањем броја децимала и запремине: $V'' > V_1'' > V_2'' > V_3'' \ldots$ Запремина квадра се налази између запремина квадра са димензијама мањих приближних вредности и квадра са димензијама већих приближних вредности:

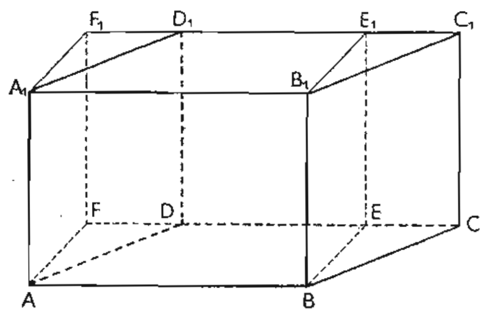
$$V' < V < V''$$
$$V_1' < V < V_1''$$
$$V_2' < V < V_2''$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Разлика $V_n'' - V_n'$ постаје при употреби великог броја децимала незнатна, тако да можемо да кажемо: Запремина квадра једнака је производу ирационалних димензија; израчунавамо је у толико тачније у колико више децимала узмемо у обзир.

§ 45. Запремина праве призме

Став 41. *Запремина праве призме једнака је производу површине основе и висине.*

Доказ: 1. пример: Основа је паралелограм $ABCD$ (слика 58). Дату призму претворимо у квадар чија је основа $ABEF$ правоугаоник еквивалентан (површински једнак) паралелограму $ABCD$. Пошто квадар има исту висину као призма, он има запремину једнаку призми, зато што је тространа призма над троуглом ADF, коју додајемо, подударна тространој призми BCE, коју отсецамо. Стога је запремина права паралелепипеда једнака производу основне површине и висине.



Слика 58

2. пример: Основа је троугао. Ту призму можемо да сматрамо као половину правог паралелепипеда са истом висином. Према првом примеру запремина паралелепипеда је $2 \cdot B \cdot V$, где B значи површину троугла. Стога је запремина праве тростране призме једнака производу основне површине и висине $(V = B \cdot v)$.

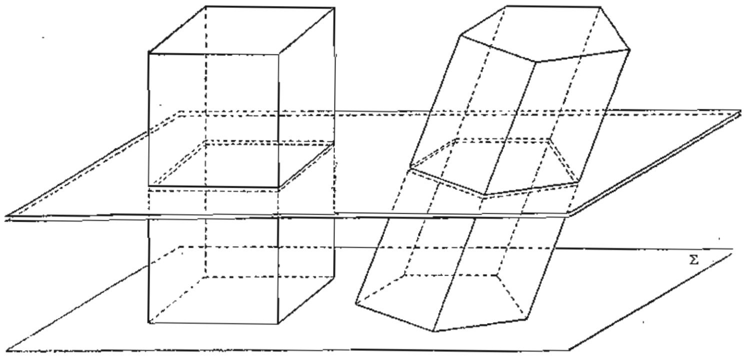
3. пример: Основа је многоугао. Дијагоналним пресецима кроз одређену бочну ивицу поделимо призму у тростране призме које имају исте висине, а основне површине $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$.

Запремина призме је $V = B_1 v + B_2 v + B_3 v + \ldots + B_n v = (B_1 + B_2 + B_2 + \ldots + B_n) v = B v$. Стога је и код многостране праве призме запремина једнака производу основне површине и висине.

§ 46. Каваљеријев став

Став 42. *Два тела, положена на исту раван, кад их паралелне равни тако секу да су пресечне слике еквивалентне, имају једнаке запремине* **(Каваљеријев став).**

О правилности Каваљеријевог става се овако уверавамо, иако доказ није строго математички (слика 59).



Слика 59

Две призме, на пример квадар и косу петострану призму са површински једнаким основама и једнаким висинама, поставимо на раван Σ. Замислимо обе призме исечене равнима, паралелним равни Σ, на произвољан број врло танких листића. Пошто су висине квадра и косе петостране призме једнаке, добијамо код обе једнак број листића.

Загледајмо листиће квадра и косе петостране призме. Листићи квадра су међусобно једнаки, а такође и листићи косе призме су међусобно једнаки; листиће квадра можемо да сматрамо, да су једнаки листићима косе призме кад су врло танки, јер су површине основа једнаке. Стога је запремина листића квадра једнака запремини листића косе призме.

Пошто квадар и коса петострана призма имају исти број запремински једнаких листића, следује, да су запремински једнаки. Тиме смо доказали правилност Каваљеријевог става.

Пошто је запремина квадра једнака производу основне површине и висине, важи исто за косу петострану призму. Стога је запремина косе призме:

$$\underline{V = B \cdot v}$$

где B значи површину основе (базе) и v висину косе призме.

§ 47. Задаци

1. пример: У квадру су дијагонале d_1, d_2, d_3 трију граничних површина; колика је телесна дијагонала?

Из једначина:

$$d_1^2 = a^2 + b^2$$
$$d_2^2 = a^2 + c^2$$
$$\underline{d_3^2 = b^2 + c^2} \text{ добијамо:}$$

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2D^2.$$

$$D = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{2}}$$

2. пример: Одреди конструкцијом ивицу коцке, ако је дата дијагонала $D = 5\,cm$.

a) Анализа: По рачуну је $\underline{D = a\sqrt{3}}$.

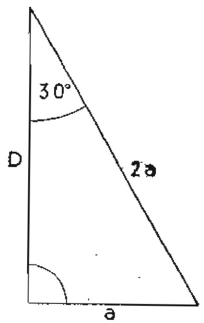
b) Конструкција (слика 60): По обрасцу је дијагонала висина равностраног троугла стране $2a$.

3. пример: Основна површина праве тростране призме јесте $B = 10 cm^2$ и бочне површине су $S_1 = 5{,}1\ cm^2$, $S_2 = 6{,}8\ cm^2$ и $S_3 = 8{,}5\ cm^2$; колике су ивице?

Ако су a, b, c основне ивице, тада је

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

где s значи полуобим основног троугла. Ако је d бочна ивица, тада је $S_1 = ad$, $S_2 = bd$ и $S_3 = cd$. Отуда следује, да је: $S_1 : S_2 : S_3 = a : b : c = 5{,}1 : 6{,}8 : 8{,}5 = 3 : 4 : 5$. Из те продужене сразмере можемо да ставимо:



Слика 60

$$a = 3x,\quad b = 4x,\quad c = 5x,$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3x+4x+5x}{2} = 6x \text{ и}$$

$B = \sqrt{6x \cdot 3x \cdot 2x \cdot x} = \sqrt{36x^4} = 6x^2$. Отуда следује:

$$x = \sqrt{\frac{B}{6}} = \sqrt{\frac{10}{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{15} \text{ и}$$

$$a = \sqrt{15}\,cm,\ b = \frac{4}{3}\sqrt{15},\ c = \frac{5}{3}\sqrt{15} \text{ и } d = \frac{S_1}{a} = \frac{5{,}1}{\sqrt{15}} =$$

$$= \frac{5{,}1 \cdot \sqrt{15}}{15} = \frac{1{,}7}{5}\sqrt{15}\ cm.$$

4. пример: Три граничне површине квадра мере $S_1 = 63\ m^2$, $S_2 = 45\ m^2$ и $S_3 = 35\ m^2$. Колике су ивице и колика је запремина?

$$S_1 = ab = 63\ m^2 \text{ или } b = \frac{63}{a}$$

$$S_2 = ac = 45\ m^2 \text{ или } c = \frac{45}{a}$$

$$S_3 = bc = 35\ m^2 = \frac{63}{a} \cdot \frac{45}{a}\text{; отуда:}$$

$$\underline{a^2 = 81 \text{ и } a = 9\ m,\ b = 7\ m \text{ и } c = 5\ m.}$$

$$\underline{V = a \cdot b \cdot c = 9 \cdot 7 \cdot 5 = 315\ m^3.}$$

5. пример: Израчунај из површине P правилне и једнакоивичне тростране призме њену запремину V.

Ако је a ивица призме, тада је

$$P = 2B + M = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} + 3a^2 = \frac{a^2}{2}(\sqrt{3} + 6) \text{ и}$$

$$\underline{a = \sqrt{\frac{2P}{\sqrt{3} + 6}}}\,.$$

Запремина $\underline{V = B \cdot v = \frac{a^3}{4}\sqrt{3} = \frac{P}{2(6 + \sqrt{3})}\sqrt{\frac{6P}{6 + \sqrt{3}}}}.$

Задаци:

1. Колика је површина и запремина квадра, чије су ивице $a = 5\ cm$, $b = 4\ cm$ и $c = 7\ cm$?

2. Колика је површина и запремина коцке, ако је
   a) дијагонала граничнога квадрата 17,5 cm,
   b) телесна дијагонала 27,3 cm?

3. Ивице двеју коцки стоје у размери 3 : 2. Колике су ивице, ако се
   a) њихове површине разликују за 120 cm^2,
   b) њихове запремине разликују за 152 cm^3?

4. Колике су ивице квадра, ако стоје у продуженој сразмери $m : n : p$ (6 : 3 : 2) и ако је површина квадра 648 cm^2?

5. Колико су ивице квадра, ако чине продужену сразмеру 6 : 3 : 2 и ако је телесна дијагонала 21 cm?

6. Колике су ивице квадра, ако чине продужену сразмеру 6 : 3 : 2 и ако је запремина 972 cm^3?

7. Површина праве призме с квадратном основом је 122,5 cm^2 и основна ивица је 3,5 cm. Колика је запремина?

8. Права 12m висока призма има за основу равнокрако-правоугли троугао катете (хипотенузе) 2,4 m (3,2m). Колике су површина и запремина призме?

9. Основа праве призме је правоугли троугао са катетама $a = 12\ cm$ и $b = 6\ cm$; колике су површина и запремина призме, ако је висина два пута већа од хипотенузе?

10. Колике су површина и запремина правилне и једнакоивичне n — стране призме ивице $= 12\ cm$? ($n = 3$, 4, 5, 6, 8 или 10).

11. Колика је површина и запремина праве тростране призме, ако су основне ивице $a = 30\ cm$, $b = 27\ cm$, $c = 15\ cm$ и бочна ивица $d = 50\ cm$?

* 12. Права квадратна призма има дијагоналу $D = 4\ cm$ и површину $P = 14\ cm^2$? Колике су ивице?

Упутство: Ако је x основна ивица а y бочна ивица, имамо једначине: $2x^2 + y^2 = D^2$ и $2x^2 + 4xy = P$. Сабирањем обе једначине добијамо: $(2x + y)^2 = D^2 + P$ и одузимањем друге једначине од двоструке прве: $(x - y)^2 = D^2 - \frac{P}{2}$. Отуда следује:

$$x = \frac{1}{3}\left(\sqrt{D^2 + P} \pm \sqrt{D^2 - \frac{P}{2}}\right) \text{ и}$$

$$y = \frac{1}{3}\left(\sqrt{D^2 + P} \mp 2 \cdot \sqrt{D^2 - \frac{P}{2}}\right).$$

13. Колика је запремина коцке, која са квадром ивица 8 cm, 9 cm, и 4 cm има једнаку површину?

14. Колике су ивице квадра запремине 10m^3, ако стоје у размери 5 : 4 : 7?

* 15. Бочне површине праве тростране призме јесу $P_1 = 25\ dm^2$, $P_2 = 29\ dm^2$ и $P_3 = 36\ dm^2$ и основа $B = 10\ dm^2$; колика је запремина?

16. Колика је ивица коцке која хвата 20 hl?

17. Водени резервоар у облику квадра хвата 7 975 000 l воде. Његова дужина је 14,5 m и ширина 12,5 m; колика је дубина?

* 18. Железнички насип чији пресек је равнокрак тра-

пез дуг је 630 m и висок 4 m; у пресеку је доња ширина просечно 15,5m и горња 7,5m. Колико m^3 земље треба насути?

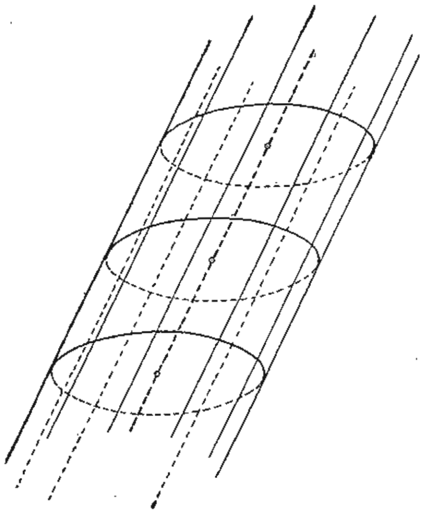
* 19. Израчунај тежину коцке ивице $a = 25\ cm$, ако је она a) од ковнога гвожђа специфичне тежине $\sigma = 7{,}8\ g/cm^3$ b) од олова са $\sigma = 11{,}44\,g/cm$, c) од смрековог дрвета са $\sigma = 0{,}56\,g/cm^3$, d) од плуте са $\sigma = 0{,}24\,g/cm^3$, e) од алуминијума са $\sigma = 2{,}59\,g/cm^3$.

* 20. Одреди димензије тегова у облику коцке чија је тежина 1 kg, ако су a) од ковног гвожђа, b) од олова, c) од смрековог дрвета, d) од плуте, e) од алуминијума. (види зад. 19).

VIII. ВАЉАК

§ 48. Постанак ваљка

Ако се по кругу (водиљи) помера права (производиља), која не лежи у равни круга, тако да је увек сама себи паралелна (транслаторно кретање праве), до свога полазнога положаја, она описује ваљкасту (цилиндричну) површину. Она ограничава са обе стране отворен ваљкасти простор. Део ваљкастог простора између две паралелне равни зове се ваљак или облица. Ваљак је дакле ограничен ваљкастом површином (омотачем) и двема паралелним основама. Основе су кругови кад су пресечне равни паралелне кругу водиљи, а елипсе, кад су пресечне равни нагнуте према кругу водиљи. Узимаћемо у обзир само ваљке са круговима као основама (кружни ваљци).



Слика 61

Пресек ваљка са равни паралелном основном кругу је круг подударан основи. Стога можемо да замислимо, да је ваљак постао транслаторним кретањем круга по дужи водиљи.

Производиље (генератрисе) ваљка зовемо истране.

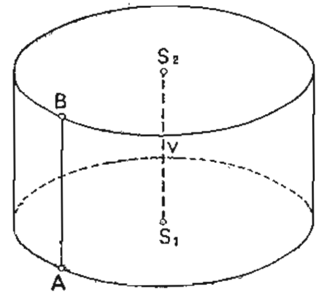
Висина ваљка је растојање обе основе.

Пресек равни која стоји нормално на производиље зовемо нормалан пресек ваљка. Развијањем омотача у раван развија се тај пресек у праву линију нормалну на производиље.

Мрежу ваљка чине у раван распрострт омотач и обе основе.

§ 49. Врсте ваљака

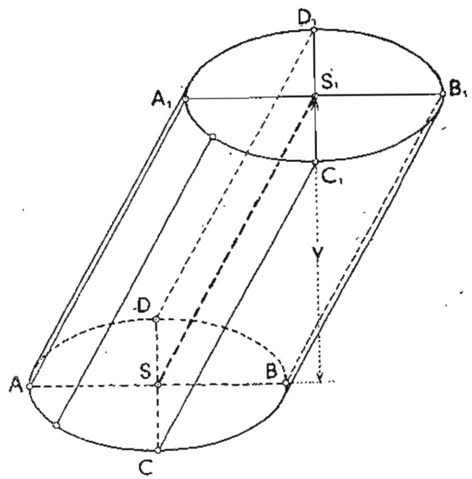
Кружни ваљак ја прав, ако производиље стоје нормално на основама (сл. 62). Спојница средишта оба круга је оса или осовина ваљка. Производиља $\overline{AB}$ паралелна је оси $\overline{S_1 S_2}$ и ствара обртањем око осе ваљкасту површину. Стога зовемо прав кружни ваљак и ротациони ваљак. Код правог ваљка је осовина висина ваљка. Осовински пресек ваљка је пресек ваљка са равни која иде кроз осовину и он је правоугаоник. Сви осовински пресеци су подударни међу собом. Кад је висина правога ваљка једнака пречнику основе, ваљак је равностран. Осовински пресек равностраног ваљка је квадрат.



Слика 62

Ваљак је кос, ако су производиље нагнуте према основи (слика 63).

Спојница средишта оба основна круга јесте средишна линија. Пресеци ваљка са равнима кроз средишну линију јесу паралелограми. Један од њих иде кроз пројекцију средишне линије на основу и стоји нормално на основи ($A\,B\,B_1\,A_1$); зовемо га

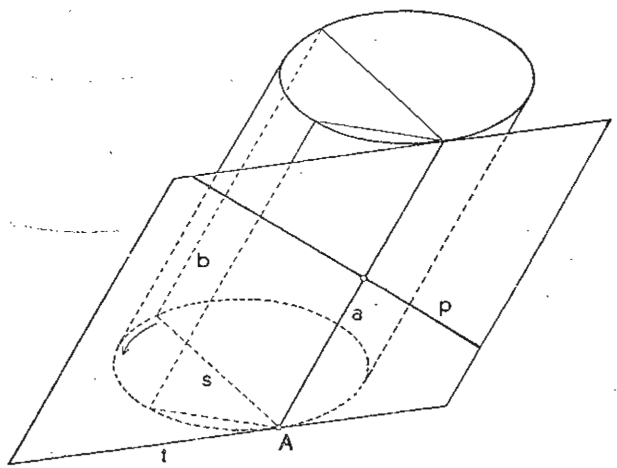


Слика 63

значајни или карактеристични паралелограм ваљка. Његова висина је уједно и висина ваљка. Пресек кроз средишну линију са равни која стоји нормално на карактеристичном паралелограму јесте правоугаоник ($C C_1 D_1 D$).

§ 50. Додирна или тангентна раван

Кроз ма које две производиље a и b можемо да положимо раван. Она сече круг по секанти s. Ако задржимо a на на свом месту, а b помичемо ка a, тада се и раван обе производиље a и b обрће око a у смеру означеном стрелицом на слици 64. И секанта s креће се у истом смислу, док не пређе



Слика 64

у тангенту t на круг у тачки A. Раван, одређена производиљом a и тангентом t у A, јесте гранични положај равни (ab). Та раван додирује ваљак по производиљи a и стога је зовемо **додирна или тангентна раван** ваљка.

Свака права p тангентне равни која сече производиљу тангента је омотача.

§ 51. Површина правога ваљка

Површина правога ваљка једнака је збиру површина основних кругова и омотача: $\underline{P = 2\,B + M}$. У раван прострт омотач је правоугаоник са странама $\underline{2\pi r}$ и v. Стога је површина омотача $M = 2\pi r v$ и

$$\underline{P = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r\,(r + v).}$$

Код равностраног ваљка је $v = 2\,r$; стога је:

$$\underline{P = 2\pi r\,(r + v) = 6\pi r^2.}$$

§ 52. Запремина ваљка

Пошто ваљак можемо да сматрамо као призму чија је основа правилан многоугао са бескрајно много страна, то је запремина ваљка

$$\underline{V = \pi r^2 v,}$$

где је πr^2 површина основнога круга и v висина ваљка.

Запремина равностраног ваљка је:

$$\underline{V = \pi r^2 \cdot 2\,r = 2\pi r^3.}$$

§ 53. Задаци

1. **пример**: Колики је полупречник и страна правог ваљка чија је запремина $V = 90\,cm^3$ и чији је омотач $60\,cm^2$?

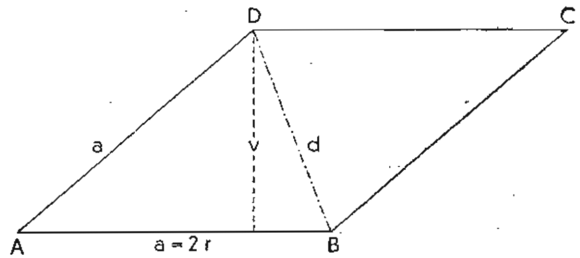
Из услова: $V = \pi r^2 v$ и $M = 2\pi r v$ добијамо:

$$\frac{V}{M} = \frac{\pi r^2 v}{2\pi r v} = \frac{r}{2}$$

$$r = \frac{2\,V}{M} = \frac{180}{60} = \underline{3\,cm}$$

$$v = \frac{M}{2\pi r} = \frac{60}{6\pi} = 10 \cdot \frac{1}{\pi} = \underline{3{,}183\ldots\,cm}$$

$$\left(\frac{1}{\pi} = 0{,}3183\ldots\right)$$



Сл. 65

2. **пример**: Карактеристични паралелограм косог ваљка је ромб, у којем је мања дијагонала d; колика је запремина ваљка, ако је његова висина v? (сл. 65).

$ABCD$ је карактеристични паралелограм, и то ромб са страном $2r$. Површина троугла ABD је:

$$p\triangle = rv = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

где s значи полуобим троугла: $s = 2r + \frac{d}{2}$.

$$rv = \sqrt{\left(2r + \frac{d}{2}\right)\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\left(2r - \frac{d}{2}\right)} = \sqrt{\left(4r^2 - \frac{d^2}{4}\right)\cdot\frac{d^2}{4}}$$

или $r^2 v^2 = r^2 d^2 - \frac{d^4}{16}$, $\quad r^2(d^2 - v^2) = \frac{d^4}{16}$,

$$r^2 = \frac{d^4}{16(d^2 - v^2)}.$$

Запремина ваљка:

$$\underline{V = \pi r^2 v = \frac{\pi d^4 v}{16(d^2 - v^2)}}.$$

Задаци:

* 1. Из дате тачке ван ваљка одреди тангентне равни на ваљак. Колико их има?

Решење: Повуци кроз дату тачку паралелу производиљи ваљка, одреди њен продор с основом и из њега повуци тангенте на основни круг. Паралелом и тангентом је одређена тангентна раван. Добијају се два решења.

* 2. Одреди конструкцијом развијени омотач правога ваљка.

3. Одреди висину правсга ваљка, код кога је површина основе једнака површина омотача.

4. Омотач правога ваљка мери 36 dm^2 и висина је 6 dm; колике су површина и запремина?

5. Колика је висина равностраног ваљка чија је површина 50 dm^2?

6. Колико лима треба за ваљкасту цев дугу 58,6 m, чији је пречник 17,5 cm?

7. Карактеристични паралелограм косога ваљка је ромб чија је површина 50,4 dm^2 и у којем је један угао 60^0. Колика је запремина ваљка?

8. Омотач равностранога ваљка износи 1452 dm^2; колика је запремина?

9. Површина основе правог ваљка је 427,52 dm^2 и омотач је 586,45 dm^2; колика је запремина?

10. Колики је пречник ваљкастог суда, високог 24 cm, који хвата 25 l?

11. За колико се попне вода у ваљкастом суду пречника 7 dm ако се долије 1 hl?

12. Одреди пречник равностраногa ваљка, који хвата *a*) 1 l, *b*) 2 l, *c*) 5 l.

13. Код правог ваљка имамо количине: r, v, M и V; израчунај из две познате остале три.

14. Колико m бакарне жице (специфична тежина $\sigma = 8{,}9\ g/cm^3$) дебљине 25 mm има у 1 kg?

15. Кроз ваљкасту цев с отвором 10 cm тече вода са брзином 0,6 cm/sec; колико воде протече у минуту?

16. Висине два ваљка истих полупречника стоје у размери $18\frac{1}{2} : 8\frac{2}{3}$. Кад је запремина једнога ваљка 1680 dm^3, колика је запремина другог?

17. Правоугаоник са странама a и b обрће се прво око стране a, па око стране b, у коме односу стоје *a*) омотачи *b*) површине, *c*) запремине добијених тела?

18. Колика је површина ваљка који је датој коцки *a*) уписан, *b*) описан?

19. Осовински пресек косог ваљка који стоји нормално на основи јесте ромб, чија је површина p и чија је краћа дијагонала једнака страни ваљка; колика је запремина ваљка?

* 20. Површина правог ваљка је P, полупречник основе и висина стоје у размери $m : n$; колика је запремина?

* 21. Полупречници основа трију ваљака чије су висине 1 m, односе се као 1 : 2 : 3; колика је запремина свакога ваљка, кад је њихов збир 10 m^3?

IX. ПИРАМИДА И ЗАРУБЉЕНА ПИРАМИДА

§ 54. Постанак пирамиде

Ако пресечемо рогаљ са равни тако, да сече све рогљеве ивице, добијамо тело, које се зове **пирамида**. Теме рогља је **врх** пирамиде, пресечна слика равни са рогљем је **основа** или **база**. Граничне површине рогља су **стране** или **бочне површине** пирамиде. Стране основе су **основне ивице**, ивице рогља су **бочне ивице**. **Висина** је растојање врха од основе.

Бочне површине су троугли; њихове висине на основне ивице зовемо б о ч н е в и с и н е. Бочне површине заједно чине о м о т а ч; у раван прострт омотач са основом чини м р е ж у пирамиде.

Д и ј а г о н а л н и п р е с е к је пресек пирамиде са равни која иде кроз две неузастопне бочне ивице. Пирамида има толико дијагоналних пресека, колико основа има дијагонала. Дијагонални пресеци су троугли.

§ 55. Врсте пирамида

По броју бочних површина или по броју бочних ивица имамо т р о с т р а н е, ч е т в о р о с т р а н е, ... *n*-с т р а н е п и р а м и д е. Тространа пирамида је најпростији полиједар, јер је ограничен само са четири површине.

Пирамида је п р а в а, ако има једнаке бочне ивице. Ако су бочне ивице једнаке, тада су и њихове пројекције на основу једнаке; стога је подножје висине једнако удаљено од свих темена основног многоугла. Основни многоугао је тетивни многоугао; подножје висине је средиште описаног круга.

Права пирамида је п р а в и л н а или р е г у л а р н а, ако је основа правилан многоугао.

Код праве пирамиде су све бочне површине равнокраки троугли, код правилне су осим тога још и подударни.

Правилна пирамида, код које су бочне ивице једнаке основним ивицама јесте ј е д н а к о и в и ч н а пирамида Могуће су само три такве пирамиде: ј е д н а к о и в и ч н а т р о с т р а н а п и р а м и д а или п р а в и л а н т е т р а е д а р, ј е д н а к о и в и ч н а к в а д р а т н а п и р а м и д а и ј е д н а к о и в и ч н а п е т о с т р а н а п и р а м и д а.

Пирамиде, које нису праве, зову се к о с е.

§ 56. Зарубљена и допунска пирамида

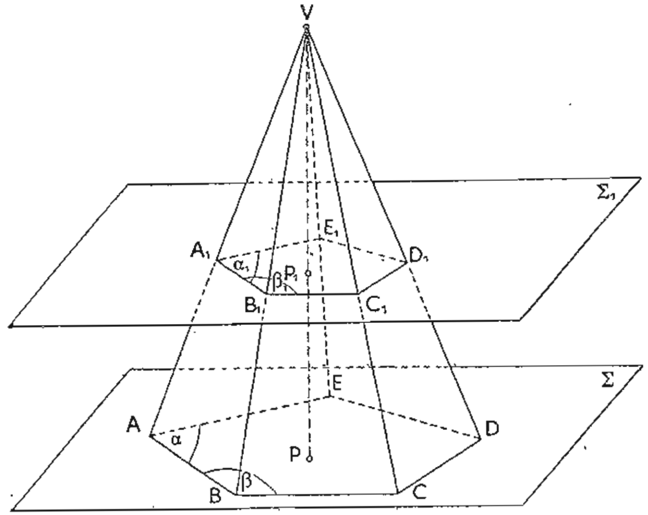
Раван, паралелна основи, дели пирамиду на два дела, на з а р у б љ е н у п и р а м и д у ($ABC\ldots\ A_1B_1C_1\ldots$) и д о п у н с к у п и р а м и д у $A_1B_1C_1\ldots V$) (слика 66). Пресечна слика је горња основа зарубљене пирамиде.

Кад је зарубљена пирамида правилна, кад права?

Став 43. *Ако пресечемо пирамиду са равни паралелном основи пресечна слика је слична основи и њихове површине су сразмерне квадратима растојања врха од обе равни.*

Д о к а з 1. дела: Основна површина и паралелни пресек слични су (слика 66).

Пресечна раван Σ_1 паралелна је основној равни Σ. Стога су по ставу 14 пресеци са бочним површинама паралелни: $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{AB}$, $\overline{B_1C_1} \parallel \overline{BC}\ldots$ Отуда следује:



Слика 66

1. да су углови обе слике једнаки: $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta\ldots$ (по ставу о угловима са паралелним и истосмерним крацима).

2. да постоје сразмере: $\overline{A_1B_1} : \overline{AB} = \overline{VB_1} : \overline{VB}$ и $\overline{B_1C_1} : \overline{BC} = \overline{VB_1} : \overline{VB}$ или $\overline{A_1B_1} : \overline{AB} = \overline{B_1C_1} : \overline{BC}$. Ако тако продужимо, добијамо продужену сразмеру: $\overline{A_1B_1} : \overline{AB} = \overline{B_1C_1} : \overline{BC} = \overline{C_1D_1} : \overline{CD} = \ldots$

По ставу, да су два многоугла слични, ако су углови једнога многоугла једнаки угловима другога, и ако су стране које чине једнаке углове, сразмерне, следује, да су основе зарубљене пирамиде сличне.

Д о к а з 2. дела: Површине основе и паралелног пресека сразмерне су квадратима растојања основних равни од врха.

По ставу, да су површине два слична многоугла сразмерне квадратима хомологних страна, добијамо:

$p_1 : p = \overline{A_1B_1}^2 : \overline{AB}^2$ (види геометрију за V разред, § 158).

Ако је висина првобитне пирамиде $\overline{VP} = v$ и висина допунске пирамиде v_1, тада су троугли VAP и VA_1P_1 слични, зато што је $\overline{A_1P_1} \parallel \overline{AP}$. (Раван, одређена са $\overline{AV}$ и $\overline{AP}$ сече паралелне равни Σ_1 и Σ по паралелним правима). Стога је:

$\overline{A_1B_1} : \overline{AB} = \overline{VA_1} : \overline{VA} = \overline{VP_1} : \overline{VP} = v_1 : v$ и $p_1 : p = v_1^2 : v^2$, што је требало доказати.

§ 57. Задаци

1. пример: Израчунај, из висине v и површина основа p и p_1 зарубљене пирамиде, висину допунске и првобитне пирамиде.

Ако са x обележимо висину допунске пирамиде тада је по пређашњем ставу:

$p : p_1 = (x+v)^2 : x^2$. Из те једначине добијамо:

$\sqrt{p} : \sqrt{p_1} = (x+v) : x$ и

$x\sqrt{p} = x\sqrt{p_1} + v\sqrt{p_1}$ или

$x(\sqrt{p} - \sqrt{p_1}) = v\sqrt{p_1}$; отуда

$$x = \frac{v\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}-\sqrt{p_1}}.$$

Висина првобитне пирамиде је:

$$v + x = v + \frac{v\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}-\sqrt{p_1}} = \frac{v\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt{p_1}}.$$

2. пример: На којем се растојању од мање основе мора направити паралелан пресек, па да пресечна површина буде једнака *a*) аритметичкој, *b*) геометриској средини основних површина?

a) Ако пресечну површину обележимо са p_2; тада је по услову $p_2 = \frac{p+p_1}{2}$. По ставу 41 је $p_2 : p_1 = (x+y)^2 : x^2$, где x значи висину допунске пирамиде а y растојање пресечне равни од горње основе. Ако израчунамо y из те једначине добијамо;

$$y = \frac{x(\sqrt{p_2} - \sqrt{p_1})}{\sqrt{p_1}}.$$

Кад ставимо за $x = \frac{v\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}-\sqrt{p_1}}$ (види 1. пример) и за p_2 дати услов, добијамо:

$$y = \frac{v\sqrt{p_1}\left(\sqrt{\frac{p+p_1}{2}} - \sqrt{p_1}\right)}{(\sqrt{p}-\sqrt{p_1})\sqrt{p_1}} = \frac{v\left(\sqrt{\frac{p+p_1}{2}} - \sqrt{p_1}\right)}{\sqrt{p}-\sqrt{p_1}}.$$

b) На исти начин добијамо, ако ставимо за $p_2 = \sqrt{p\,p_1}$:

$$y = \frac{v(\sqrt[4]{p\,p_1} - \sqrt{p_1})}{\sqrt{p}-\sqrt{p_1}}.$$

* 3. пример: Колика је површина паралелнога пресека који дели висину зарубљене пирамиде у размери $m : n$?

Висина зарубљене пирамиде се подели на делове $\frac{m}{m+n}v$ и $\frac{n}{m+n}v$ тако, да прави део буде ближи мањој (горњој) основи. Ако је p_2 пресечна површина, постоји сразмера: $p_1 : p_2 = : x^2 : \left(x + \frac{mv}{m+n}\right)^2$. Отуда се може израчунати p_2 и добија се:

$$p_2 = \frac{p_1\left(x - \frac{mv}{m+n}\right)^2}{x^2}$$

Ако се стави за $x = \frac{v\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}-\sqrt{p_1}}$ (види 1. пример), добија се:

$$p_2 = \frac{p_1\left(\frac{v\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}-\sqrt{p_1}} + \frac{mv}{m+n}\right)^2}{\frac{v^2p_1}{(\sqrt{p}-\sqrt{p_1})^2}} =$$

$$= \frac{v^2p_1\left[\sqrt{p_1}(m+n) + m(\sqrt{p}-\sqrt{p_1})\right]^2 \cdot (\sqrt{p}-\sqrt{p_1})^2}{(\sqrt{p}-\sqrt{p_1})^2(m+n)^2\,v^2p_1} =$$

$$= \left(\frac{m\sqrt{p}+n\sqrt{p_1}}{m+n}\right)^2.$$

Задаци:

1. Основна ивица правилне тростране пирамиде је $a = 17{,}2\,dm$ и висина $v = 23{,}5\,dm$; колика је бочна ивица и колики је њен нагибни угао?

2. Основна ивица правилне тростране пирамиде је $a = 19{,}5\,dm$, а бочна ивица $b = 24{,}5\,dm$; колика је висина пирамиде?

3. Основна ивица правилне квадратне пирамиде је 8,76 m и висина 10,57 m; колика је бочна ивица и њен нагибни угао? Колики је нагибни угао бочне површине?

4. Бочна ивица правилне шестостране пирамиде $b = 58{,}76\,dm$ и висина $v = 47{,}56\,dm$; колика је основна ивица и колики њен нагибни угао? Колики је нагибни угао бочне површине?

* 5. Ако се подели висина пирамиде, чија је површина основе $3{,}24 m^2$, на три једнака дела и положе кроз деоне тачке равни паралелне основи, колики су добијени пресеци?

* 6. Колики је средњи паралелни пресек (пресек који иде кроз средину висине) зарубљене пирамиде са основама $p = 27 dm^2$ и $p_1 = 16 dm^2$?

* 7. Правилној квадратној пирамиди са основном ивицом $a = 47\,cm$ и са висином $v = 52\,cm$ уписана је коцка тако, да стоји на основи пирамиде, а горња темена се налазе на бочним ивицама пирамиде. (Пресеци пирамиду паралелном равни тако, да страна пресека буде једнака висини зарубљене пирамиде). Колика је ивица коцке?

* 8. На којој висини треба пресећи пирамиду паралелном равни, па да пресек буде једнак одређеном делу основе? (на пр.: $p_1 = \frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \frac{p}{4} \ldots$)

§ 58. Површина пирамиде

Површина пирамиде једнака је збиру површина основе (B) и омотача (M):

$$\underline{P = B + M.}$$

Код правилне пирамиде је површина омотача једнака површини троугла са основицом, једнаком обиму основе, и висином, једнаком бочној висини пирамиде. Докажи.

Задаци:

1. пример: Одреди површину једнакоивичне квадратне пирамиде.

Ако је a дужина ивице, површина је:

$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2(1 + \sqrt{3}).$$

2. пример: Одреди површину правилног тетраедра.

$$P = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}.$$

§ 59. Површина зарубљене пирамиде

Површина зарубљене пирамиде једнака је збиру обе основне површине (p и p_1) и омотача.

$$\underline{P = p + p_1 + M.}$$

Омотач се састоји из толико трапеза, колико основа има страна. Код правилне зарубљене пирамиде све бочне висине су једнаке. Стога добијамо површину омотача, ако помножимо збир свих средњих линија са бочном висином.

§ 60. Каваљеријев став за пирамиду

По Каваљеријевом принципу су два тела, положена на исту раван, запремински једнака, ако их свака раван, паралелна основној равни, сече у површински једнаким сликама.

Узмимо две пирамиде, положене на основну раван Σ тако, да су висине и површине основа једнаке. Свака раван, паралелна основи, сече обе пирамиде по многоуглима који су једнаки по површини. То је зато, што су површине пресечних слика и основа код обе пиримиде сразмерне квадрату висине допунске пирамиде и првобитне пирамиде.

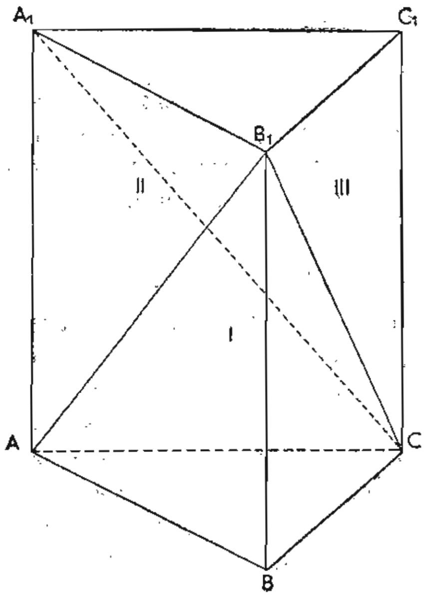
Та размера $v_1^2 : v^2$ је код обе пирамиде иста. Отуда следује:

Став 44. *Две пирамиде са еквивалентним основама и једнаким висинама имају једнаке запремине.*

§ 61. Запремина пирамиде

Свака права тространа призма може се помоћу две равни разрезати у три пирамиде. Нека прва пресечна раван иде кроз ивицу $\overline{AC}$ и теме B_1; добијемо пирамиду I са основом ABC и врхом B_1 (сл. 67). Пошто ивица $\overline{BB_1}$ стоји нормално на основи, она је висина пирамиде. Друга пресечна раван нека иде кроз дијагоналу A_1C и теме B_1. Она дели преостали део пирамиде на две пирамиде II и III. Пирамида II има за основу троугао ACA_1, који је половина правоугаоника ACC_1A_1, и врх у B_1. Пирамида III има за основу троугао $A_1B_1C_1$ и висину $\overline{CC_1}$. Како је троугао $A_1B_1C_1 \cong ABC$ и висина $\overline{CC_1}$ једнака висини $\overline{BB_1}$, следује, да су пирамиде I и III по Каваљеријевом ставу једнаке по запремини. Пирамиду III можемо да сматрамо и као пирамиду са основом $A_1B_1C_1$ који је половина правоугаоника $A\,C\,C_1A_1$, и врхом у B_1. B_1 је дакле заједнички врх обе пирамиде II и III. Стога имају обе пирамиде исту висину. Пирамиде II и III су стога по Каваљеријевом принципу запремински једнаке, јер имају једнаке основе и исту висину. Из једначина:

I = III и II = III следује
I = II = III.



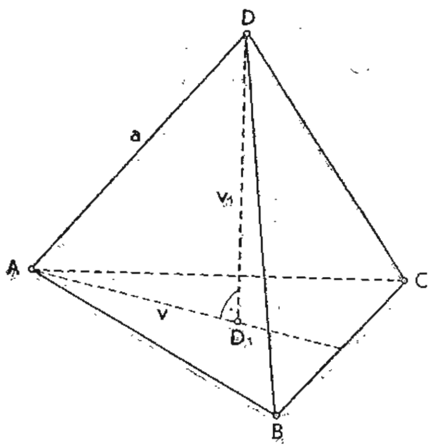
Слика 67

Отуда следује:

Тространа пирамида је трећина праве тростране призме која са пирамидом има једнаку површину основа и једнаку висину. Зато је запремина тростране пирамиде

$$V=\frac{B\cdot v}{3}.$$

По Каваљеријевом правилу вишестрана пирамида је запремински једнака тространој, кад са њом има једнаку основу и једнаку висину. Зато образац: $V=\frac{B\cdot v}{3}$ важи за сваку пирамиду.



Слика 68

Задаци:

1. пример: Одреди запремину правилног тетраедра ивице a (сл. 68).

Употребом Питагориног става израчунава се висина основе v и висина тела v_1:

$$v=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4} \text{ или } v=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

и $$v_1^2=a^2-\left(\frac{2}{3}v\right)^2=a^2-\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2=a^2-\frac{a^2}{3}=\frac{2a^2}{3}$$

или $$v_1=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Површина основе је:

$$B=\frac{av}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

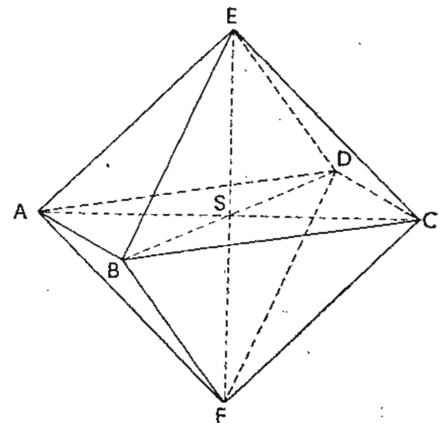
Запремина правилнога тетраедра:

$$V=\frac{Bv}{3}=\frac{\left(\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right)a\sqrt{\frac{2}{3}}}{3}=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

2. пример: Одреди запремину правилног октаедра ивице a (слика 69).

Правилан октаедар се састоји од две једнакоивичне квадратне пирамиде. Спојница оба врха $\overline{EF}$ (осовина октаедра) једнака је осталим двема телесним дијагоналима. По Питагорином ставу је:

$\overline{EF}^2=d^2=2a^2$ или $d=a\sqrt{2}$.



Слика 69

Висина сваке пирамиде је половина дијагонале. Стога је запремина правилнога октаедра:

$$V=\frac{2a^2\,\frac{a\sqrt{2}}{2}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

§ 62. Запремина зарубљене пирамиде

Запремину зарубљене пирамиде израчунавамо овако:

Ако су p и p_1 основе, v висина, V запремина зарубљене пирамиде и x висина допунске пирамиде, тада је:

$$V=\frac{p\,(v+x)}{3}-\frac{p_1\,x}{3} \qquad 1)$$

(разлика запремина првобитне и допунске пирамиде) или израчунато и уређено по x:

$$V=\frac{1}{3}\,p\,v+\frac{1}{3}\,x(p-p_1). \qquad 2)$$

x израчунавамо из сразмере:

$$p:p_1=(x+v)^2:x^2$$

(види § 57, пример 1) и добијамо:

$$x=\frac{v\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}-\sqrt{p_1}}. \qquad 3)$$

Ако вредност за x унесемо у једначину 2), добијамо:

$$V=\frac{1}{3}\,p\,v+\frac{1}{3}\,\frac{v\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}-\sqrt{p_1}}\,(p-p_1) \qquad 4)$$

Пошто је $p-p_1=(\sqrt{p}+\sqrt{p_1})(\sqrt{p}-\sqrt{p_1})$ то се једначина 4) упрошћава:

$$V=\frac{1}{3}\,p\,v+\frac{1}{3}v\sqrt{p_1}\,(\sqrt{p}+\sqrt{p_1})=$$

$$=\frac{1}{3}\,p\,v+\frac{1}{3}v\sqrt{p\,p_1}+\frac{1}{3}\,p_1\,v=$$

$$=\frac{v}{3}\,(p+p_1+\sqrt{p\,p_1})\,.$$

§ 63. Задаци

1. пример: Израчунај запремину правилне тростране зарубљене пирамиде основних ивица a и a_1 и бочне ивице s. (сл. 70). Основе ABC и $A_1B_1C_1$ јесу равнострани троугли; стога је:

$$r=\frac{a}{3}\sqrt{3}\quad r_1=\frac{a_1}{3}\sqrt{3}.$$

Ако се пројицира бочна ивица на основу, добија се правоугли троугао $A\,A'_1\,A_1$ са хипотенузом s и катетама v и $(r-r_1)$, за који се висина израчунава по Питагорином ставу:

$$v=\sqrt{s^2-(r-r_1)^2}=\sqrt{s^2-\frac{1}{3}\,(a-a_1)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3s^2-(a-a_1)^2}\,.$$

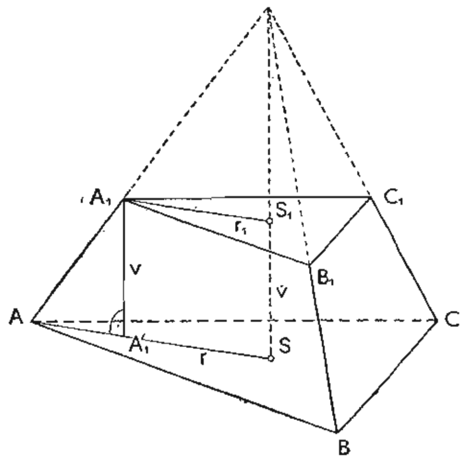
Пошто су површине основа $p=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ и $p_1=\frac{a_1^2}{4}\sqrt{3}$, добијамо запремину зарубљене пирамиде по обрасцу:

$$V=\frac{v}{3}\,(p+\sqrt{p\,p_1}+p_1)=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{3s^2-(a-a_1)^2}\left(\frac{a^2}{4}\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3\,a^2a_1^2}{16}}+\frac{a_1^2}{4}\sqrt{3}\right)=$$

$$=\frac{a^2+a\,a_1+a_1^2}{12}\;\sqrt{3\,s^2-(a-a_1)^2}.$$

2. пример: На којем се растојању од врха мора код одређене пирамиде направити паралелан пресек, па да се на два једнака дела подели *a*) омотач, *b*) запремина?



Слика 70

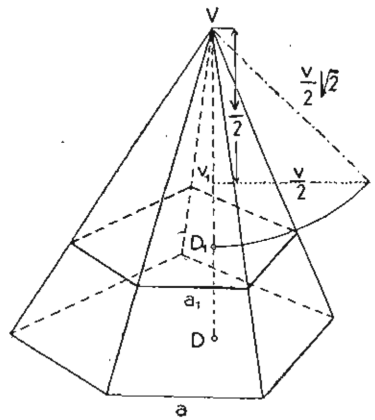
a) Пресек пирамиде и равни, паралелне основи, јесте многоугао, сличан основном многоуглу (слика 71). Ивице једнога су паралелне ивицама другога. Стога су одговарајуће бочне површине пробитне и допунске пирамиде слични троугли чија је површина сразмерна квадратима основних ивица:

$$p:p_1=a^2:a_1^2$$

(види геометрију за V разред § 157).

Пошто је размера основних ивица једнака размери висина првобитне и допунске пирамиде (став 41), добија се сразмера

$$p:p=v^2:v_1^2.$$



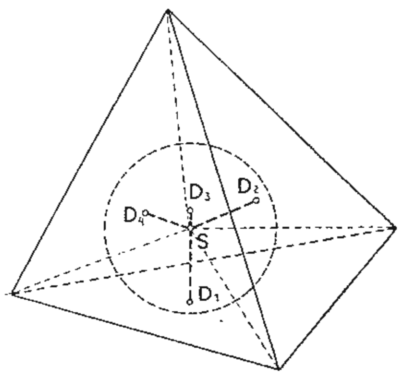
Слика 71

У датом примеру је $p : p_1 = 2 : 1$, стога је $v^2 : v_1^2 = 2 : 1$. Отуда се израчуна:

$$v_1 = \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{v}{2}\sqrt{2}.$$

a) Запремина првобитне (V) и допунске пирамиде (V_2) односе се као производи из њихових основа и висина: $\frac{V}{V_2} = \frac{p\,v}{p_2 v_2}$. Ако у горњу једначину ставимо за $\frac{p}{p_2} = \frac{v^2}{v_2^2}$ добијамо: $\frac{V}{V_2} = \frac{v^3}{v_2^3}$. Дакле запремине првобитне и допунске пирамиде односе се као кубови њихових висина. У датом примеру је $V : V_2 = 2 : 1$. Стога је $v^3 : v_2^3 = 2 : 1$. Отуда се израчуна:

$$v_2 = \frac{v}{\sqrt[3]{2}} = \frac{v}{2}\sqrt[3]{4}.$$



Слика 72

3. пример: Од произвољне тростране пирамиде дата је површина P и запремина V; израчунати полупречник лопте уписане у пирамиди.

Ако се споји центар лопте са теменима пирамиде, дели се пирамида на четири мање пирамиде, једнаких висина, наиме $v = \varrho$ (сл. 72). Стога је трострука запремина пирамиде

$3V = p_1\varrho + p_2\varrho + p_3\varrho + p_4\varrho = \varrho(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$,

где су p_1, p_2, p_3 и p_4 површине граничних троуглова и њихова је површина једнака површини пирамиде. Отуда следује:

$$3V = \varrho P \text{ или } \varrho = \frac{3V}{P}.$$

Задаци:

1. Основне ивице праве тростране призме јесу $a = 13\,cm$, $b = 14\,cm$, $c = 15\,cm$, бочна ивица је $d = 10\,cm$.

a) Колика је површина пирамиде? (Употреби Херонов образац за површину троугла:

$$p = \sqrt{s(s-a)(s=b)(s-c)}, \text{ где је } s = \frac{a+b+c}{2}).$$

b) Колика је запремина пирамиде? (Висина се израчунава по Питагорином ставу из полупречника r описанога круга око основног троугла и стране d. Полупречник је $r = \frac{abc}{4p}$).

c) Колики је полупречник уписане лопте?

d) Колики је полупречник описане лопте?

2. Основна ивица праве квадратне пирамиде јесте $a = 13\,cm$ и висина $v = 20\,cm$.

a) Колика је површина пирамиде?

b) Колика је запремина пирамиде?

c) Колики је полупречник уписане лопте?

d) Колики је полупречник описане лопте?

3. Бочна ивица правилне петостране пирамиде је $d = 24\,cm$ и висина $v = 17\,cm$.

a) Колика је површина пирамиде?

b) Колика је запремина пирамиде?

c) Колики је полупречник уписане лопте?

d) Колики је полупречник описане лопте?

4. Колике су површина и запремина правилне шестостране пирамиде, ако је основна ивица $10\,cm$ и бочна ивица $16\,cm$?

5. Површина правилне тростране пирамиде је $100\,dm^2$ и бочне ивице стоје нормално једна на другој.

a) Колика је основна ивица?

b) Колика је бочна ивица?

c) Колика је запремина?

d) Колики је полупречник уписане лопте?

e) Колики је полупречник описане лопте?

6. Колике су ивице једнакоивичне квадратне пирамиде са површином $100\,cm^2$?

7. Колике су ивице једнакоивичне квадратне пирамиде са запремином $1000\,cm^3$?

8. Колике су ивице правилног тетраедра

a) са површином $100\,m^2$,

b) са запремином 1000^3?

9. Колике су ивице правилнога октаедра са запремином $780\,cm^3$?

10. Правој пирамиди је основа правоугаоник са странама $a = 8$ *cm* и $b = 6$ *cm* и бочна ивица је $d = 13$ *cm*.

a) Колика је површина пирамиде?

b) Колика је запремина пирамиде?

c) Колики је полупречник лопте, описане око пирамиде?

11. Коцки са ивицом $a = 15$ *cm* уписана је пирамида са истом основом и врхом у једном темену коцке. Колике су површина и запремина пирамиде?

12. Колике су површина и запремина правилне квадратне зарубљене пирамиде, ако су хомологне основне ивице $a = 12$ *cm* и $a_1 = 9$ *cm* и бочна ивица $d = 5$ *cm*?

13. Одреди код пирамиде паралелни пресек тако, да буде

a) омотач зарубљене пирамиде једнак $\frac{1}{3}$ омотача првобитне пирамиде,

b) запремина зарубљене пирамиде једнака $\frac{1}{3}$ запремине првобитне пирамиде?

*14. Две хомологне основне ивице четворостране зарубљене пирамиде стоје у размери 5 : 4, већа основна површина је 100 dm^2 и висина 2,4 *dm*; колика је запремина?

* 15. Колика је висина зарубљене пирамиде, чија је запремина 60,8 m^3, кад су површине основа 28,8 m^2 и 12,8 m^2?

* 16. Зарубљена пирамида је висока 48 *dm* и има запремину 3904 dm^3; колике су површине основа, ако је њихов збир 164 dm^2?

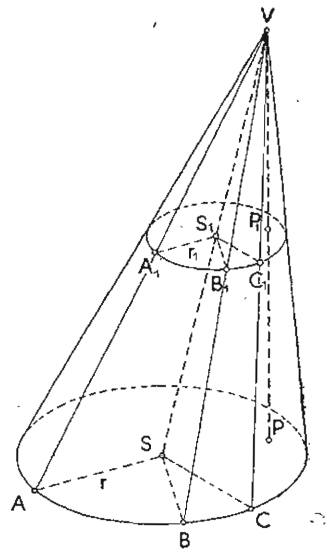
* 17. Од зарубљене пирамиде чије основе стоје у размери 16 : 1, изреже се призма, која са зарубљеном пирамидом има исту висину и заједничку мању основу; у којем су односу запремине оба тела?

X. КУПА И ЗАРУБЉЕНА КУПА

§ 64. Купа и зарубљена купа

Ако се по кругу помера полуправа која не лежи у равни круга тако, да њен крај остаје непомичан, она ствара криву површину која се зове купаста (конусна) површина. Она

обухвата на једној страни отворен, неограничен купаст простор (слика 73). Круг по коме се полуправа помера, јесте круг водиља, полуправа је производиља и крајња тачка полуправе је врх купасте површине.



Слика 73

Купаст простор између врха и равни круга водиље зове се купа (конус) Купа је дакле ограничена купиним омотачем, то је онај део купасте површине између врха и круга водиље и основом коју чини круг водиља. Растојање купинога врха од основе је висина купе Део производиље, између врха и обима основне површине је страна купе. Спојница врха са средиштем основнога круга је средишна линија купе. Пресек купе са равни, која иде кроз средишну линију, јесте троугао и он се зове средишни пресек. Пресек купе и равни, паралелне основи, је круг. Јер ако положимо кроз средишну линију равни, стварамо пресеке: $\triangle AVS \sim \triangle A_1VS_1$, $\triangle BVS \sim \triangle B_1VS_1$, $\triangle CVS \sim$ $\sim \triangle C_1VS_1$ . . Услед сличности хомологних троуглова постоје сразмере:

$$\overline{AS} : \overline{A_1S_1} = \overline{VS} : \overline{VS_1} = k \text{ или } \overline{A_1S_1} = \frac{1}{k}\overline{AS} = \frac{r}{k}$$

$$\overline{BS} : \overline{B_1S_1} = \overline{VS} : \overline{VS_1} = k \text{ или } \overline{B_1S_1} = \frac{1}{k}\overline{BS} = \frac{r}{k}$$

$$\overline{CS} : \overline{C_1S_1} = \overline{VS} : \overline{VS_1} = k \text{ или } \overline{C_1S_1} = \frac{1}{k}\overline{CS} = \frac{r}{k} \;. \;. \;.$$

Отуда следује: $\overline{A_1S_1} = \overline{B_1S_1} = \overline{CS} \ldots = \frac{r}{k} = r_1$, где је фактор пропорционалности $k = \frac{\overline{VS}}{\overline{VS_1}}$ · Фактор пропорционалности се повећава, у колико се паралелна пресечна раван ближи врху; стога се пресечни полупречник смањује.

Став 45. *Код сваке купе су полупречници основе и паралелнога пресека сразмерни растојањима тих површина до врха.*

Доказ: Према пређашњем су полупречници основе и паралелног пресека сразмерни отсецима на средишној линији; $r : r_1 = \overline{VS} : \overline{VS'}$. Ако кроз V повучемо нормалу на основу, она стоји нормално и на паралелној равни. Троугли SVP и S_1VP_1 слични су, зато што су стране $\overline{SP}$ и $\overline{S_1P_1}$ паралелне (пресеци две паралелне равни са трећом равни). Стога постоји сразмера: $\overline{VS} : \overline{VS_1} = \overline{VP} : \overline{VP_1}$, дакле и $r : r_1 = \overline{VP} : \overline{VP_1}$

Став 46. *Код сваке купе су површине основе и паралелног пресека сразмерне квадратима растојања врха од тих површина.*

Доказ: $\pi r^2 : \pi r_1^2 = v^2 : v_1^2$ или $p : p_1 = v^2 : v_1^2$.

Сваки паралелни пресек дели купу на два дела: на зарубљену купу и допунску купу. Зарубљену купу ограничавају два паралелна и неједнака круга (основе) и са стране крива површина (омотач зарубљене купе).

§ 65. Врсте купа

Купа је права, ако средишна линија стоји нормално на основи. Све њене стране су једнаке. Можемо да замислимо, и да је постала тако, што смо равнокраки троугао обрнули око његове висине. Стога зовемо праву купу и обртна или ротациона купа и средишну линију осовина купе. Пресек купе са равни која иде кроз осовину купе јесте осовински пресек. Сви осовински пресеци су подударни равнокраки троугли. Ако је осовински пресек равностран троугао, кажемо, да је купа равнострана.

Осовински пресеци праве зарубљене купе су подударни и равнокраки трапези.

Купа је коса, ако средишна линија стоји косо на основи. Пресек косе купе са равни, која иде кроз средишну линију, даје средишни пресек; он је уопште разностран троугао. Средишни пресек који иде кроз пројекцију купине средишне линије зовемо значајни или карактеристични троугао; он дели купу на два симетрична дела (симетрија косе купе у односу на раван). Стране карактеристичног троугла су: пречник основнога круга и најмања и највећа купина страна; висина купе је идентична са висином карактеристичног троугла.

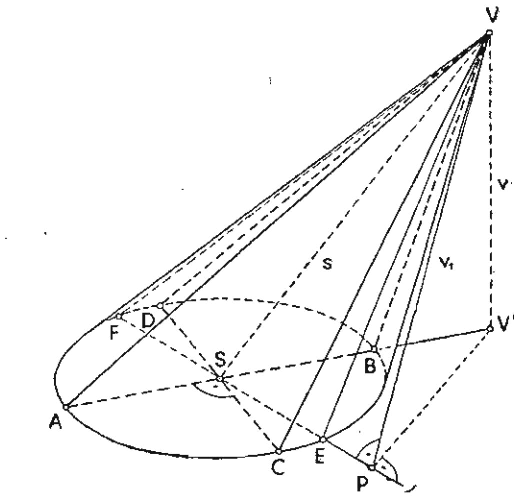
Од осовинских пресека је само један равнокрак троугао, наиме онај, што стоји нормално на карактеристичном троуглу.

Средишни пресеци косе зарубљене купе су уопште разнострани трапези; од њих стоји само карактеристични пресек нормално на основама. Који је од средишних пресека равнокраки трапез?

§ 66. Задаци

1. пример: Докажи, да је од свих средишних пресека косе купе површина карактеристичног троугла најмања а површина пресека који стоји нормално на њему највећа.

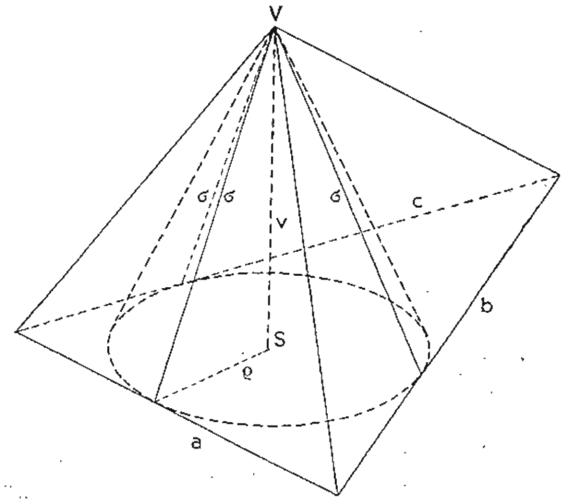
Доказ (сл. 74): Карактеристични троугао ABV има висину v купе за висину и средишну линију купе за тежишну линију. Стога је $v < s$. Пресек равни, нормалне на карактеристичном троуглу, јесте равнокрак троугао CVD са средишном линијом s купе као висином. Ако узмемо ма који средишни пресек, на пример, троугао EVF, тада је висина тога троугла $v_1 = \overline{VP}$: 1. катета правоуглог троугла FVS који има за хипотенузу s, и 2. хипотенуза правоуглог троугла $PV'V$ који има за катету v. Отуда следује: $s > v_1 > v$. Пошто сви средишни пресеци имају једнаке основице $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{EF} = \ldots = 2r$, њихова површина зависи само од висине. Зато је карактеристични троугао најмањи а средишни пресек, који на њему стоји управно, највећи од свих средишних пресека косе купе.



Слика 74

2. пример: Око праве купе је описана тространа пирамида; ако је површина основе пирамиде $B = 84\,cm^2$ и њене бочне површине $p_1 = 65\,cm^2$, $p_2 = 70\,cm^2$ и $p_3 = 75\,cm^2$, колика је основа купе и колика је њена висина?

Решење (слика 75): Полупречник описанога круга око основног троугла добија се по обрасцу $\varrho = \frac{p}{s} = \frac{2p}{a+b+c}$. (Види геометрију за V разред, § 143). Висине σ пирамидиних бочних површина су стране праве купе и стога су међу собом једнаке. Ако су a, b, c основне ивице пирамиде, тада је: $p_1 = \frac{a\sigma}{2}$, $p_2 = \frac{b\sigma}{2}$ и $p_3 = \frac{c\sigma}{2}$. Одатле се добија продужена сразмера: $p_1 : p_2 : p_3 = a : b : c = 65 : 70 : 75 = 13 : 14 : 15$, или $a = 13x$, $b = 14x$, $c = 15x$ и $s = \frac{a+b+c}{2} = 21x$.



Слика 75

Површина троугла је по Хероновом обрасцу $p = 84 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21x \cdot 8x \cdot 7x \cdot 6x} = 84x^2$. Отуда следује, да је $x = 1$. Стога су стране пирамидине основе $a = 13\,cm$, $b = 14\,cm$ и $c = 15\,cm$ и полуобим $s = 21\,cm$. Даље је $\varrho = \frac{p}{s} = \frac{84}{21} = 4\,cm$ и $\sigma = \frac{2p_1}{a} = \frac{2p_2}{b} = \frac{2p_3}{c} = 10\,cm$. Површина основе купе је $B = \pi\varrho^2 = 16\pi\,cm^2$ и висина купе $v = \sqrt{\sigma^2 - \varrho^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} = 9{,}14\ldots\,cm$.

3. пример: Правилној тространој зарубљеној пирамиди са висином $v = 6\,cm$ а са основним ивицама $a = 5\,cm$ и $a_1 = 3\,cm$ описана је зарубљена купа; колика је страна зарубљене купе?

Решење (слика 76): Страна s зарубљене купе једнака је бочној ивици зарубљене пирамиде. Ако се нацрта пројекција ивице на основу, ствара се правоугли троугао, у коме је једна катета једнака висини зарубљене пирамиде и друга катета једнака разлици полупречника доње и горње купине основе. Полупречник описанога круга израчунава се по обрасцу:

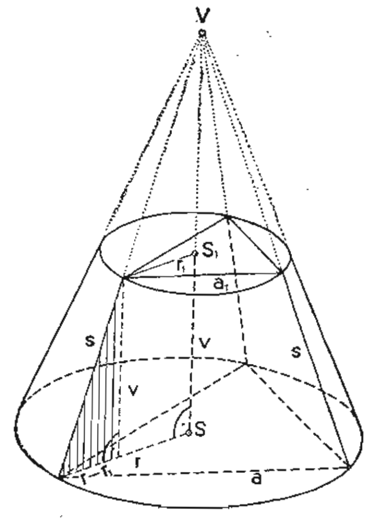
$$r = \frac{abc}{4p} = \frac{a^3}{4\,\frac{a^2}{4}\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Страна $s = \sqrt{v^2 + (r - r_1)^2} =$

$$= \sqrt{v^2 + \frac{1}{3}(a - a_1)^2} =$$

$$= \sqrt{36 + \frac{4}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{324 + 12} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{336} = \frac{4}{3}\sqrt{21}.$$



Слика 76

Задаци:

1. Докажи правилност става: Свакој тространој пирамиди може се купа уписати и око ње описати.

2. Кад се у четвоространој пирамиди може уписати купа, а кад око ње описати?

3. Пречник купине основе мери $8\,cm$; колика је површина паралелног пресека који дели купину висину у размери $3:7$?

4. Основе зарубљене купе, високе $5\,dm$, имају у пречнику $24\,dm$ и $14\,dm$; на којем растојању од веће основе треба учинити паралелан пресек, па да његов полупречник буде $9\,cm$?

5. Правој купи са висином $15\,cm$ и полупречником основе $10\,cm$ уписана је квадратна пирамида; колика је њена бочна површина? (Колика је површина пирамиде?)

6. Правој купи са висином $v = 25\,cm$ и полупречником основе $r = 15\,cm$ уписана је (око ње описана) правилна шестострана пирамида; колико је површина пирамиде?

* 7. Правој купи са полупречником основе $r = 16\,cm$ и висином $v = 8\,cm$ уписана је коцка; колика је ивица коцке?

8. На којем растојању од мање основе зарубљене купе $(r,\ r_1,\ v)$ треба направити паралелан пресек, па да пресечна

површина буде једнака *a*) аритметичкој, *b*) геометриској средини површина основа?

§ 67. Површина праве купе

Површина праве купе (P) једнака је збиру површина основе (B) и омотача (M):

$$\underline{P = B + M}$$

У раван развијен омотач је кружни исечак са луком, једнаким обиму основе, и са полупречником, једнаким купиној страни. Стога је:

$$\underline{P} = \pi r^2 + 2\pi r \frac{s}{2} = \pi r^2 + \pi r s = \underline{\pi r (r + s)}$$

Пример: Одреди површину равностране купе.

Страна $s = 2r$.

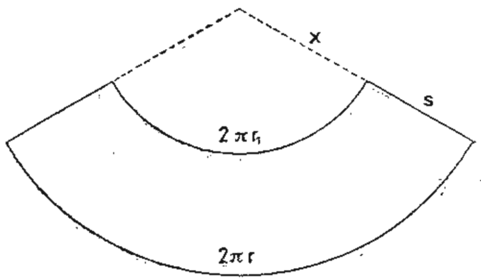
$$P = \pi r (r + 2r) = \underline{3\pi r^2}\,.$$

§ 68. Површина праве зарубљене купе

Површина праве зарубљене купе (P) једнака је збиру површина обе основе (p, p_1) и омотача (M):

$$\underline{P = p + p_1 + M.}$$

Ако омотач расечемо по страни и развијемо га у раван, добијамо исечак кружнога прстена; спољни лук је једнак обиму доње основе, унутрашњи лук пак обиму горње основе. Ширина прстена једнака је страни зарубљене купе (слика 77).



Слика 77

Ако су r и r_1 полупречници основа и s страна зарубљене купе, површина исечка кружнога прстена је:

$$M = \pi r (s + x) - \pi r_1 x = \pi r s + \pi (r - r_1) x\,.$$

Из сразмере:

$(s + x) : x = r : r_1$ добијамо $x = \dfrac{r_1 s}{r - r_1}$. Зато је

$$M = \pi r s + \pi r_1 s = \pi s (r + r_1)\,.$$

Површина зарубљене купе:

$$P = \pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi s (r + r_1) = \pi [r^2 + r_1^2 + s (r + r_1)]\,.$$

§ 69. Запремина купе

Пошто можемо купу да сматрамо као пирамиду која има за основу правилан n-угао, где је n ма како велики број, добијамо по обрасцу за запремину пирамиде запремину купе:

$$\underline{V = \frac{Bv}{3} = \frac{\pi r^2 v}{3}.}$$

Овај образац важи по Каваљеријевом ставу како за праву тако и за косу купу. Стога важи:

Став 47. *Две купе са једнаким основним површинама и једнаким висинама имају једнаке запремине.*

Пример: Одреди запремину равностране купе.

$2r = s$ и $v = \sqrt{s^2 - r^2} = r\sqrt{3}\,.$

$$\underline{V = \frac{\pi r^2 v}{3} = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}}$$

§ 70. Запремина зарубљене купе

Запремину зарубљене купе добијамо најпростије, кад је сматрамо за зарубљену пирамиду која за основу има правилан n-угао, где је n ма како велики број.

Из обрасца за запремину зарубљене пирамиде (§ 62):

$$V = \frac{v}{3}(p + p_1 + \sqrt{p\,p_1})$$

добијамо, ако ставимо за $p = \pi r^2$ и за $p_1 = \pi r_1^2$, запремину зарубљене купе:

$$\underline{V = \frac{\pi v}{3}(r^2 + r_1^2 + r r_1)}$$

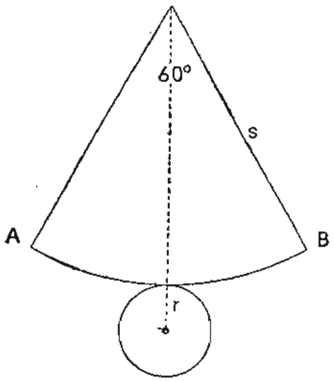
§ 71. Задаци

1. пример: Од круга полупречника $s = 12\ cm$ изреже се секстант и савије у омотач купе.

a) Колики је полупречник основног круга којим затварамо купасти простор?

b) Колика је површина купе?

c) Колика је запремина купе? (слика 78)



Слика 78

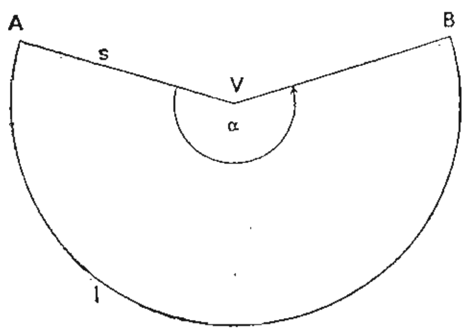
a) Из $2\pi r = \frac{2\pi s}{6}$ добија се:

$$r = \frac{s}{6} = \underline{2\ cm}\ .$$

$$b)\ P = \pi r^2 + \frac{\pi s^2}{6} = \pi\left(\frac{4+144}{6}\right) = \pi(4+24) = \underline{28\,\pi\ cm^2}$$

$$c)\ V = \frac{\pi r^2 v}{2} = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{s^2-r^2} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{144-4} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{140} = \underline{\frac{4\pi}{3}\cdot 11{,}8\ldots cm^3}\ .$$

2. пример: Полупречник и висина праве купе стоје у размери $3:4$; колики је средишни угао α који одговара развијеном омотачу? (слика 79)



Слика 79

Из $r = 3x$ и $v = 4x$ добијамо:

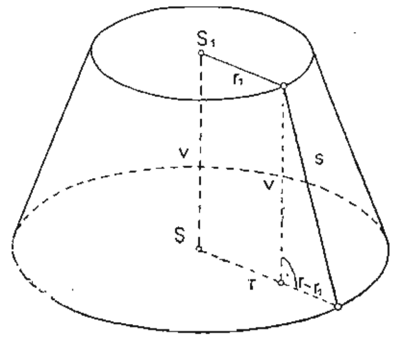
$$s = \sqrt{r^2+v^2} = \sqrt{9x^2+16x^2} = 5x\ .$$

Лук $l = \widehat{AB} = 2\pi r = 6\pi x$. Пошто се лук и круг односе као одговарајући средишни углови имамо: $l : 2\pi s = \alpha : 360^0$ и добијамо:

$$6\pi x : 10\pi x = 3 : 5 = \alpha : 360^0 \text{ и } \alpha = \frac{3.360^0}{5} = \underline{216^0}\ .$$

3. пример: Колика је висина праве зарубљене купе чији је омотач једнак збиру основних површина (слика 80)?

Ако се нацрта пројекција стране зарубљене купе на основу, добија се правоугли троугао.



Слика 80

$$s^2 = v^2 + (r-r_1)^2.$$

Услов нашега задатка је: $\pi(r^2+r_1^2) = \pi(r+r_1)\,s$ или

$$s = \frac{r^2+r_1^2}{r+r_1}\ .$$

Ако се лева и десна страна ове једначине квадрира и добијена вредност за s^2 замени у прву једначину, добија се:

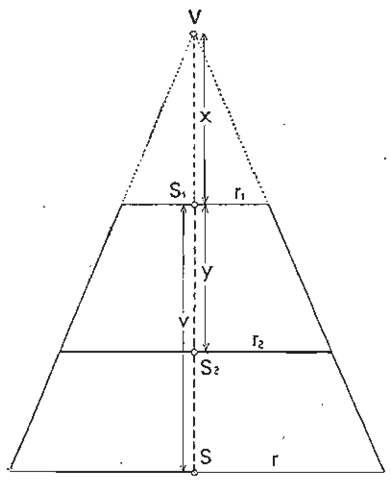
$$v^2 + (r-r_1)^2 = \frac{(r^2+r_1^2)^2}{(r+r_1)^2} \text{ и}$$

$$v^2 = \frac{(r^2+r_1^2)^2}{(r+r_1)^2} - (r-r_1)^2 = \frac{(r^2+r_1^2)^2-(r-r_1)^2(r+r_1)^2}{(r+r_1)^2} = \frac{(r^2+r_1^2)^2-(r^2-r_1^2)^2}{(r+r_1)^2} = \frac{4r^2\,r_1^2}{(r+r_1)^2}\ .$$

Отуда следује:

$$\underline{v = \frac{2\,r r_1}{r+r_1}}\ .$$

4. пример: Колики је полупречник паралелног пресека који полови зарубљену купу (слика 81)?



Слика 81

Ако је r_2 полупречник паралелног пресека и y растојање од горње основе, тада је по услову који поставља задатак:

$$\frac{\pi v}{6}(r^2+r_1^2+r\,r_1) = \frac{\pi y}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1 r_2) \text{ или:}$$

$$v(r^2+r_1^2+r\,r_1) = 2y(r_1^2+r_2^2+r_1 r_2).$$

Из сразмера: $r : r_1 = (v+x) : x$ и $r : r_1 = (y+x) : x$ израчунава се

$$y = \frac{v\,(r_2-r_1)}{r-r_1}\ .$$

Ако се та вредност стави у горњу једначину, добија се:

$$r^2 + r_1^2 + r r_1 = \frac{2(r_2 - r_1)}{r - r_1}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) \text{ и}$$

$$r^3 - r_1^3 = 2\,(r_2^3 - r_1^3). \text{ Одатле се израчуна}$$

$$r_2^3 = \frac{r^3 + r_1^3}{2} \text{ и } \underline{r_2 = \sqrt[3]{\frac{r^3 + r_1^3}{2}}}\,.$$

Решење важи и за косу зарубљену купу.

Задаци:

1. Одреди површину и запремину праве купе (r = полупречник основе, v = висина, s = страна, ε = нагибни угао стране s, B = површина основе, M = омотач, α = средишни угао развијеног омотача):

a) $r = 27\ cm,\ v = 36\ cm$;
b) $r = 25\ cm,\ s = 40\ cm$;
c) $2r = v = 15\ cm$;
d) $2r = s = 16\ dm$;
e) $r = 4\ cm,\ M = 100\ cm^2$;
f) $B = 35\ cm^2,\ M = 420\ cm^2$;
g) $r = 45\ cm,\ \varepsilon = 72^0\ 17'\ 35''$;
h) $s = 36\ cm,\ \alpha = 220^0$;
i) $r = 5\ cm,\ \alpha = 135^0\ 15'\ 26''$;
j) $v = 14{,}7\ dm,\ \alpha = 90^0$.

2. Површина осовинског пресека равностране купе је $25\ cm^2$; *a*) колика је површина, *b*) колика је запремина равностране купе?

3. Колика је површина осовинског пресека равностране купе, ако је површина $24\,\pi\,m^2$?

4. Колики је осовински пресек равностране купе, ако је запремина $57\,\pi\,m^2$?

5. Израчунати површину равностране купе помоћу њене висине.

6. Израчунати запремину равностране купе помоћу њене висине.

7. Правоугли троугао за катетама $a = 6\ cm$ и $b = 8\ cm$ и хипотенузом $c = 10\ cm$ обрће се редом око сваке своје стране, *a*) колике су површине, *b*) колике су запремине добијених тела?

8. Колика је запремина праве купе чији је омотач $100\ cm^2$, кад је осовински пресек правоугли троугао?

9. Око праве купе чије су стране нагнуте под углом од 30^0 према основи, описан је прав ваљак; у којем односу стоје омотачи тих тела?

10. Колика је запремина косе купе са полупречником основе $10\ cm$ и са висином $15\ cm$?

11. Колики је средишни угао развијеног омотача код равностране купе?

12. Колики је полупречник паралелног пресека који полови омотач?

* 13. Суд има облик зарубљене купе са полупречницима $r = 25\ cm$ и $r_1 = 15\ cm$; стране су нагнуте под углом од 60^0 према основи. Колико l воде треба, да се суд напуни *a*) до врха, *b*) до половине висине?

* 14. Ледени брег у облику купе плива по мору и налази се $40\ m$ над морском површином. До које дубине под морску површину иде основна површина, ако је густина леда 0,9 водене густине? (Тежина потиснуте воде једнака је тежини тела које плива).

15. Исечак кружнога прстена са средишним углом 288^0 и полупречницима $r = 15\ cm$ и $r_1 = 10\ cm$ савије се у омотач зарубљене купе. Колика је запремина тела, ограниченог тим омотачем и обема основама?

* 16. Код праве купе висине v ($20\ cm$) размера основе и омотача је $m : n$ ($5:16$); колика је површина и запремина купе?

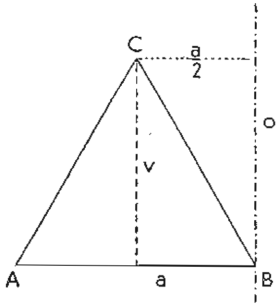
* 17. У равностраној купи уписана је коцка; у којој је размери запремина купе са запремином коцке?

XI. ОБРТНА ТЕЛА

§ 72. Обртна или ротациона тела

У § 8 описан је постанак обртне или ротационе површине. Слика, која лежи у меридијанској равни, описује при обртању око обртне осе обртну површину која обухвата са свих страна ограничан простор. Тај простор зовемо о б р т н о или р о т а ц и о н о т е л о. Код обртних тела, где су меридијани просте геометриске слике, може се површина и запремина обртног тела одредити као алгебарски збир површина и запремина већ познатих обртних тела, што ћемо показати на неколико примера.

§ 73. Задаци



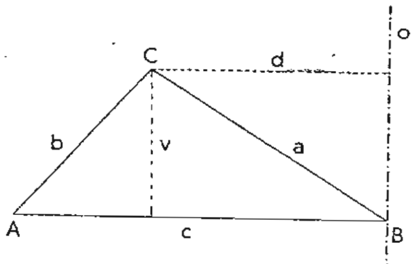
Слика 82

1. пример: Одреди површину (P) и запремину (V) обртног тела које настаје обртањем равностраног троугла око праве o која иде кроз теме B и стоји нормално на страни a (види сл. 82). Равностран троугао ABC описује обртањем праву зарубљену купу са издубљеном правом купом. Страна $\overline{AB}$ описује кружну површину, страна $\overline{AC}$ омотач зарубљене купе и страна $\overline{BC}$ омотач праве купе.

$$P = \pi a^2 + \pi \left(a + \frac{a}{2}\right) a + \pi \frac{a}{2} a = \pi a^2 + \frac{3\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{2} = \underline{3\pi a^2}.$$

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3}\left(a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right) - \frac{\pi}{3}\frac{a^2}{4}\frac{a}{2}\sqrt{3} =$$

$$= 7 \cdot \frac{\pi}{3}\frac{a^3}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\frac{a^3}{8}\sqrt{3} = \underline{\frac{\pi a^3}{4}\sqrt{3}}.$$



Слика 83

2. пример: Троугао са странама $a = 17\ cm$, $b = 10\ cm$ и $c = 21\ cm$ обрће се око осе која иде кроз теме B и стоји нормално на страни c; колика је површина P и запремина V добијеног тела? (Слика 83).

Израчуна се прво висина v и растојање d тачке C од осе обртања.

$$v = \frac{2p}{c} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}, \text{ где је}$$

$$s = \frac{a+b+c}{c} = 24; \quad v = 8\ cm \text{ и}$$

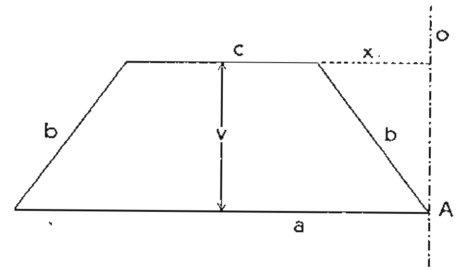
$$d = \sqrt{a^2 - v^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15\ cm.$$

$$P = \pi c^2 + \pi (c+d)\, b + \pi d a = \pi [c^2 + b(c+d) + a d] =$$
$$= 3{,}14\ (441 + 360 + 255) = \underline{3315{,}84\ cm^2}.$$

$$V = \frac{\pi}{3} v (c^2 + d^2 + cd) - \frac{\pi}{3} d^2 v = \frac{\pi v c}{3}(c+d) =$$

$$= \frac{3{,}14}{3} \cdot 8 \cdot 21\ (21 + 15) = 6\,330{,}24\ cm^3.$$

3. пример: Равнокраки трапез ($a = 11\ cm$, $c = 5\ cm$, $v = 4\ cm$) обрће се око осе која иде кроз теме A и стоји нормално на страни a; израчунати површину и запремину добијеног обртног тела (слика 84).



Слика 84

$$x = \frac{a-c}{2} = 3\ cm.$$

$$b = \sqrt{v^2 + x^2} = 5\ cm.$$

$$P = \pi a^2 + \pi(2x + c)\, c + \pi(a + c + x)\, b + \pi x b =$$
$$= \pi [a^2 + (c + 2x)\, c + (a + c + 2x)\, b] =$$
$$= \pi (121 + 55 + 110)\ cm^2 = \underline{286\pi\ cm^2}.$$

$$V = \frac{\pi v}{3}\ [a^2 + (c+x)^2 + a\ (c+x)] - \frac{\pi v}{3} x^2 =$$

$$= \frac{\pi v}{3} (a^2 + c^2 + 2cx + x^2 + ac + ax - x^2) =$$

$$= \frac{\pi v}{3}\ [a^2 + c^2 + c(2x + a) + ax] =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\ (121 + 25 + 85 + 33)cm^3 = \underline{352\ cm^3}.$$

Задаци:

1. Равностран троугао обрће се око праве која иде кроз једно његово теме и паралелна је супротној страни; колика је површина и запремина добијеног обртног тела?

2. Равнокрак троугао са основицом $a = 16\ cm$ и краком $b = 19\ cm$ обрће се око праве, паралелне краку, и удаљене

20 cm од њега; колика је површина и запремина добијеног обртног тела?

3. У којем су односу површине и у којем односу запремине тела која се добијају обртањем одређеног троугла око сваке његове стране?

4. Квадрат се обрће око осе:

a) која иде кроз једно теме и паралелна је дијагонали која не иде кроз то теме;

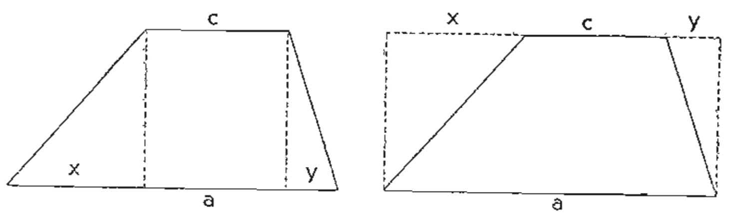
b) која је паралелна једној страни и има од ње растојање l.

Колика је површина и запремина добијених тела?

5. Равнокрак трапез за висином v и основицама a и $a+m$ обрће се око стране a; колика је површина и запремина добијеног обртног тела?

6. Правилан шестоугао са страном a обрће се a) око симетрале угла, b) око симетрале стране. Колике су површине и запремине обртних тела?

* 7. Трапез се обрће једном око веће и другипут око мање основице: кад су запремине добијених обртних тела у размери $m : n$, у којој су размери основице трапеза (слика 85).



Слика 85

XII. ЛОПТА

§ 74. Лопта

Ако обрћемо полукруг око пречника до правобитног положаја, добијамо криву површину (лоптину или сферну површину) која обухвата потпуно ограничен простор (лопту или сферу). Лопта је обртно тело и пречник, око којега обрћемо полукруг (меридијан), јесте обртна или ротациона оса. Крајеви осе су полови лопте. Све тачке сферне површине једнако су удаљене од средишта полукруга који се обрће. Према томе лопта је геометриско место свих тачака у простору које су једнако удаљене од дате тачке. Та тачка је средиште (центар) лопте. Дуж која спаја тачку сферне површине за средиштем лопте јесте полупречник лопте. Сви лоптини полупречници су једнаки.

Свака тачка меридијана описује при обртању упоредник. Највећи упоредник зовемо полутар или екватор; његов полупречник је једнак полупречнику лопте.

§ 75. Положај тачке у односу на лопту

Тачка може да буде у лопти, на лопти и ван лопте. Растојање тачке од средишта лопте зовемо средишно или централно растојање тачке. Тачка је у лопти, ако је средишно растојање мање од полупречника, на лопти, ако је средишно растојање једнако полупречнику, и изван лопте, ако је средишно растојање веће од полупречника.

§ 76. Положај праве у односу на лопту

Права може да има са лоптом две тачке заједничке, само једну тачку или ниједну. У првом случају сече права лопту и зато је зовемо сечица или секанта. У другом случају права додирује лопту у једној тачки. Такву праву зовемо дирка или тангента, заједничку тачку праве и лопте зовемо додирна тачка. Раван, одређена тангентом и средиштем лопте, сече лопту по кругу који додирује тангенту у додирној тачки.

Отуда следује:

Став 48. *Полупречник лопте у додирној тачки тангенте стоји нормално на тангенти.*

Растојање праве од средишта лопте је средишно растојање праве. Код дирке је средишно растојање једнако полупречнику лопте, код сечице мање и код праве која не сече веће од полупречника.

Више од две тачке лопта не може да има заједничке са правом.

Део сечице, који лежи у лопти, зове се тетива. Тетива је дакле дуж која спаја две тачке лоптине површине. Тетива која иде кроз центар јесте лоптин пречник или дијаметар. Крајеви пречника су супротне тачке (антиподи) лопте.

§ 77. Положај равни у односу на лопту

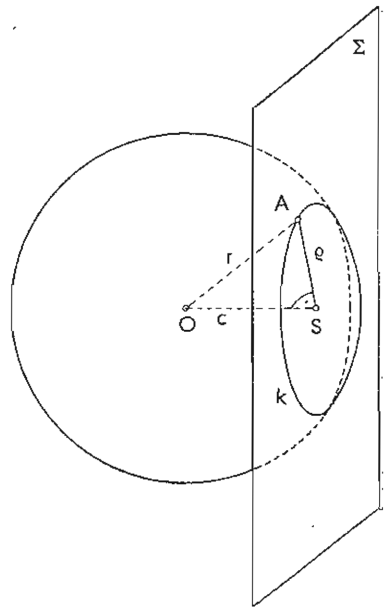
Растојање равни од средишта лопте је средишно растојање равни. С обзиром на њену величину има раван према лопти тројак положај:

I. Средишно растојање равни је мање од полупречника лопте ($c<r$).

Став 49. *Раван сече лопту по кругу са центром у подножју средишног растојања, тј. у подножју нормале из лоптиног средишта на раван.*

Доказ (сл. 86): Ако обележимо са O средиште лопте, са r полупречник лопте, са S подножје средишног растојања c ($OS \perp \Sigma$) и са ϱ растојање ма које тачке A пресечне слике од подножја S, добијамо:

$\varrho = \sqrt{r^2 - c^2}$, зато што лежи у равни нормалној на c и троугао OSA је правоугли троугао. Ма где узели на пресечној слици тачку A, увек добијамо правоугли троугао, подударан првом троуглу (3 $\cong$). Зато су све тачке пресечне слике једнако удаљене од подножја средишног растојања. Пресечна слика је дакле круг са средиштем у S и са полупречником $\varrho = \sqrt{r^2 - c^2}$.



Слика 86

Круг који лежи на лопти зовемо лоптин круг.

Из горњег доказа следује:

1. Нормала у центру лоптинога круга иде кроз центар лопте.

2. Једнаким средишним растојањима припадају на истој или једнаким лоптама једнаки лоптини кругови; већем средишном растојању припада мањи лоптин круг и обрнуто.

3. Ако је средишно растојање $c=0$, пресечни раван иде кроз средиште лопте; пресек је главни или велики круг. Сви велики кругови су једнаки и њихов полупречник је полупречник лопте.

4. Два велика круга секу се у супротним тачкама лопте, и пошто њихове равни иду кроз средиште лопте секу се по лоптином пречнику.

5. Кроз две супротне тачке може се положити бескрајно много великих кругова.

6. Кроз две ма које тачке сферне површине може се (уопште) положити само један велики круг. Раван великог круга је наиме одређена обема тачкама и центром лопте. Мањи лук великог круга између обе тачке је сферно растојање обе тачке.

II. Средишно растојање равни једнако је полупречнику лопте ($c=r$).

Према прећашњем доказу видимо, да круг постаје бескрајно мали (minimum), ако је $c=r$. Коначно је његов полупречник $\varrho=0$. Круг прелази у тачку.

Раван има у том случају с лоптом само једну тачку заједничку (додирну тачку), пошто свака друга тачка равни има средишно растојање, веће од полупречника лопте; стога се све тачке равни налазе ван лопте. Само подножје средишног растојања равни лежи на лопти, јер је $c=r$. Раван дакле додирује лопту у подножју средишног растојања. Зовемо је стога додирна или тангентна раван лопте.

Све праве тангентне равни које иду кроз додирну тачку стоје нормално на кружном полупречнику у додирној тачки равни; стога су те праве тангенте лопте. Пошто је пак са две праве које се секу већ одређена раван добијамо:

Став 50. *Двема тангентама у истој тачки лоптине површине одређена је тангентна раван на лопту.*

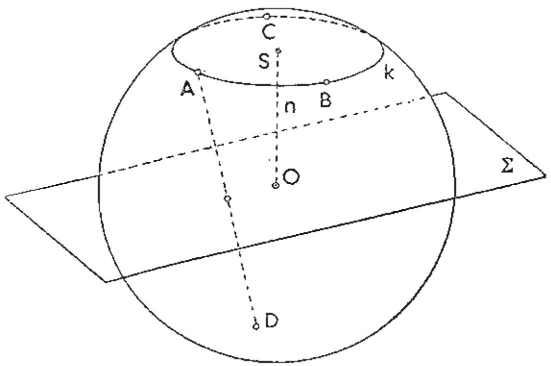
III. Средишно растојање равни веће је од полупречника лопте ($c>r$).

Из обрасца за $\varrho = \sqrt{r^2 - c^2}$ видимо, да је у том случају ϱ имагинарно. Све тачке равни имају веће средишно растојање од r и зато леже изван лопте. Раван не сече лопту и не додирује је

§ 78. Одређивање лопте

Три тачке лоптине површине не леже никад на истој правој. Јер ако би лежале на истој правој, тада би све три тачке имале једнака растојања од једне тачке (центра лопте), што је немогуће, јер су на правој могуће само две тачке, које имају одређена и једнака растојања од дате тачке.

Три ма које тачке A, B, C које не леже на истој правој одређују круг k (сл. 87). Нормала n у средишту круга иде кроз центар лопте O. Ако узмемо ма где још четврту тачку D тако, да не лежи у равни, одређеној тачкама A, B, C, сече симетриска раван Σ тачака A и D нормалу n у тачки O која има једнака растојања од све четири тачке. Пошто је $\overline{OD} = \overline{OA}$, зато што O лежи у равни симетрије тачака A и D, и $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, јер O лежи на нормали n у средишту круга k. Стога је O средиште лопте, чији полупречник је $r = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$. Отуда следује:



Слика 87

Став 51. *Лопту одређују четири тачке које не леже у истој равни.*

Ако би све четири тачке лежале у истој равни била би раван симетрије Σ паралелна нормали n и стога је не би секла.

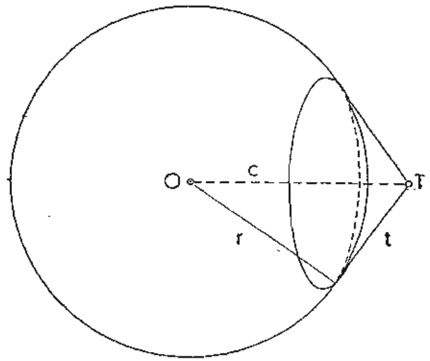
Четири тачке које не леже у истој равни одређују лопту потпуно. Јер ако узмемо уместо тачке A тачку B за одређивање симетриске равни, добијамо тачку O_1 као средиште лопте. Из $\overline{O_1D} = \overline{O_1B} = \overline{O_1A}$ и из $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{OB}$ следује да су тачке O и O_1 једнако удаљене од тачака A и B. Пошто O и O_1 леже на истој правој n морају се тачке поклапати јер само једна једина тачка на n може бити једнако удаљена од A и D. Стога је $O = O_1$.

§ 79. Дужина тангената

Тангента у ужем смислу је дуж од додирне тачке до одређене тачке тангенте.

Из једне тачке ван лопте на лопту повучене тангенте чине омотач ротационе купе; ту купу зовемо **додирна** или **тангентна купа**. Додирује лопту по **додирном кругу** (слика 88).

Ако је C средишно растојање тачке T и r полупречник лопте, тада је дужина тингенте $t = \sqrt{c^2 - r^2}$. Пошто су у том обрасцу c и r за одређену лопту и дату тачку T ван лопте стални добијамо:

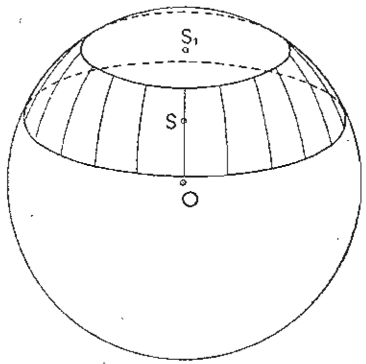


Слика 88

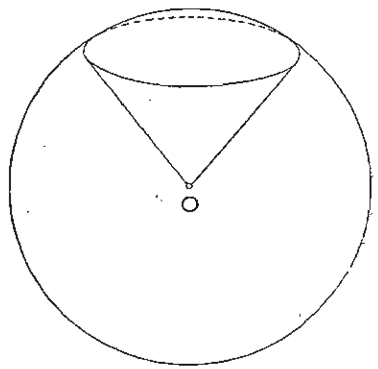
Став 52. *Из дате тачке ван лопте повучене тангенте на лопту једнаке су.*

§ 80. Лоптин отсечак, калота, слој, појас, исечак.

Сваки раван пресек дели лопту на два **лоптина отсека** или **сегмента** и лоптину површину у две **калоте** (**капе**) (слика 89). Лоптин отсечак ограничава кружна површина (основа) и калота. Висина лоптиног отсечка или лоптине



Слика 89



Слика 90

калоте је део пречника који стоји нормално на основи, између основе и калоте.

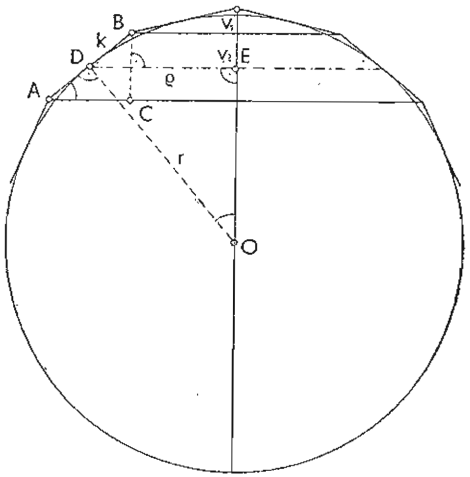
Ако лопту пресечемо са две паралелне равни лопта се распада у два лоптина отсечка и *лоптин слој* који лежи између обе паралелне равни. Лоптин слој граниче два паралелна круга (основе) и *лоптин појас*. Растојање између основа лоптиног слоја јесте *висина* лоптиног слоја или висина лоптиног појаса.

Купаста површина чији се врх налази у средишту лопте, исеца из лопте *лоптин исечак* или *сектор* који је састављен од ротационе купе и лоптиног отсечка (слика 90). Лоптин исечак ограничавају купин омотач и лоптина калота. Постаје и, ако се обрће кружни исечак око своје симетрале.

§ 81. Површина лопте

Око круга k, са полупречником r опишемо правилан $2n$ — угао (слика 91). Угаоне симетрале тога лика иду кроз два супротна темена и центар круга. Ако тај многоугао поделимо дијагоналама које стоје нормално на једној од угаоних симетрала, добијамо два троугла и $n-2$ равнокрака трапеза чије су висине $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$.

Полуобртом многоугла и круга око симетрале угла описује многоугао ротациону површину, састављену од две купе, и $n-2$ зарубљене купе, круг пак лоптину површину. Површина ротационе површине јесте збир оба омотача купа и $n-2$ омотача зарубљених купа. Површина омотача зарубљене купе јесте: $p = 2\pi\varrho k$, јер је ϱ половина средишне линије равнокраког трапеза и k крак.



Слика 91

Пошто је угао BAC једнак углу DOE (нормални углови), то су троугли BAC и DOE слични по 4 $\sim$. Отуда

следује сразмера: $\varrho : r = v_2 : k$ и $\varrho k = v_2 r$. Ако за ϱk ставимо у горњи образац добијени производ $v_2 r$, добијамо: $p = 2\pi v_2 r$. Тај образац важи за омотаче зарубљених купа па и за оба крајња омотача купа. Страна k је код свих једнака, висина је различна: $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ Сабирањем свих омотача добијамо површину ротационог тела:

$$P = 2\pi r(v_1 + v_2 + v_3 + \cdot \cdot + v_n).$$

Ако n расте у бескрајност, смањује се дужина стране све више, многоугао пређе у круг и ротациона површина у површину лопте. Збир $(v_1 + v_2 + v_3 + \cdot \cdot + v_n)$ постаје за $n \to \infty$ једнако $2r$. Отуда следује, да је површина лопте:

$$\underline{P = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2} \cdot$$

Став 53. *Површина лопте једнака је четворострукој површини великога круга.*

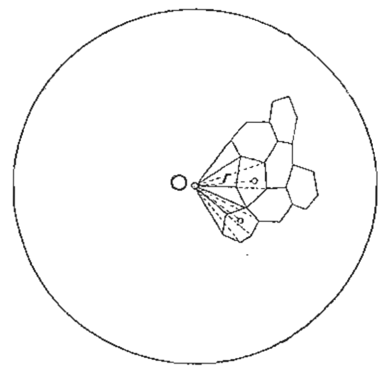
Анологно добијамо и образац за површину лоптиног појаса и лоптине капе (калоте).

$$\underline{P_p = P_к = 2\pi r v} \cdot$$

Став 54. *Површина лоптиног појаса, односно лоптине капе једнака је производу обима великог круга и висине.*

§ 82. Запремина лопте

Обложимо лопту са малим додирним многоуглима тако, да они обухватају целу лопту (слика 92). Сви многоугли ограничавају полиједар који је описан око лопте. Ако свако теме спојимо са центром лопте, делимо полиједар у пирамиде које имају једнаке висине. Висина је наиме растојање средишта лопте од основе. Оно је једнако средишном растојању додирне тачке основне површине са лоптом; дакле једнака је за све пирамиде полупречнику лопте. Запремину полиједра V_p добијамо као збир запремина свих пирамида;



Слика 92

$$V_p = \frac{r}{3}(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n),$$

где су $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ површине полиједрових страна.

Уколико полиједар има више страна и уколико су оне мање, утолико полиједар уже обухвата лопту и његова површина се приближује површини лопте. За $n \to \infty$ прећи ће најзад површина полиједра у површину лопте, што пишемо:

$$\lim_{n \to \infty} (p_1 + p_2 + \cdot \cdot \cdot + p_n) = P = 4 \pi r^2$$

Истовремено прелази и запремина полиједра у запремину лопте:

$$V = \frac{r}{3} \cdot 4 \pi r^2 = \frac{4 \pi r^3}{3} \cdot$$

Став 55. *Запремина лопте једнака је запремини пирамиде чија је основна површина једнака површини лопте и чија је висина једнака полупречнику лопте.*

§ 83. Запремина лоптиног исечка или сектора

Истим расматрањем као код одређивања лоптине запремине добијамо запремину лоптиног исечка:

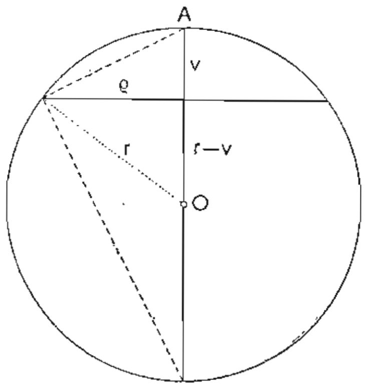
$$V_i = \frac{r}{3} \cdot P_k ,$$

где је P_k површина одговарајуће калоте. Ако за P_k ставимо вредност из § 81, тада је:

$$V_i = \frac{2}{3} \pi r^2 v \cdot$$

§ 84. Запремина лоптиног отсечка или сегмента

1. Ако је отсечак мањи од полулопте, његова је запремина (V_o) једнака разлици одговарајућег лоптиног исечка (V_i) и ротационе купе (V_s) (слика 93):



Слика 93

$$V_o = V_i - V_s =$$
$$= \frac{2}{3} \pi r^2 v - \frac{1}{3} \pi \varrho^2 (r - v).$$

Пошто је $\varrho^2 = v (2 r - v)$, то је

$$V_o = \frac{2}{3} \pi r^2 v - \frac{1}{3} \pi v (2r - v) (r - v) =$$
$$= \frac{\pi v}{3} [2 r^2 - (2r - v) (r - v)] =$$
$$= \frac{\pi v}{3} (2 r^2 - 2r^2 + 3 r v - v^2) =$$
$$= \frac{\pi v}{3} (3rv - v^2) = \frac{\pi v^2}{3} (3r - v).$$

2. Ако је отсечак већи од полулопте, тада је његова запремина једнака збиру запремина одговарајућег исечка и купе; стога је

$$V_o = \frac{2}{3} \pi r^2 v + \frac{1}{3} \pi \varrho^2 (v - r).$$

Пошто је $v - r = - (r - v)$ јесте

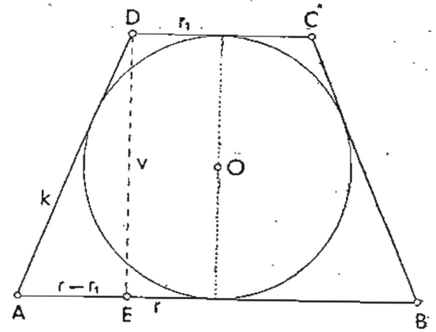
$$V_o = \frac{2}{3} \pi r^2 v - \frac{1}{3} \pi \varrho^2 (r - v).$$

Тај образац је идентичан првом обрасцу.

Запремина лоптиног слоја једнака је разлици запремина оба лоптина отсечка.

§ 85. Задаци

1. пример: Колика мора да буде висина праве зарубљене купе, да јој се може уписати лопта, кад су полупречници зарубљене купе 9 *dm* и 4 *dm*? (слика 94).



Слика 94

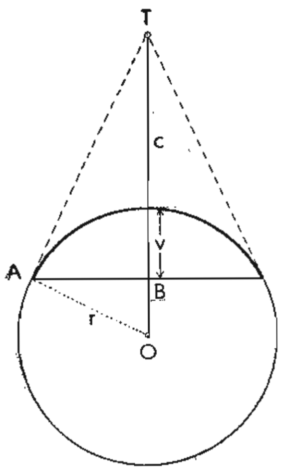
Средиште уписане лопте лежи на осовини зарубљене купе. Осовински пресек је равнокраки трапез, у коме је уписан круг. У четвороуглу се може уписати круг само тада, ако је збир две супротне стране једнак збиру остале две стране. Стога је $k = r + r_1$. Пречник круга је једнак висини трапеза. Из правоуглог троугла AED израчунава се:

$$v = \overline{DE} = \sqrt{(r + r_1)^2 - (r - r_1)^2} =$$
$$= \sqrt{r^2 + 2 r r_1 + r_1^2 - r^2 + 2 r r_1 - r_1^2} =$$
$$= \sqrt{4 r r_1} = 2 \sqrt{r r_1} = 2 \sqrt{36} = 12 \ dm.$$

2. пример: Колики део сферне површине се види из тачке која има средишно растојање c?

Из тачке T се види лоптина калота ограничене додирним кругом тангентне купе (слика 95).

Висина те калота налази се из правоуглог троугла TAO, у којем је катета $\overline{OA}$ средња геометриска пропорционала дужи:



Слика 95

$$\overline{OT} = c \text{ и } \overline{OB} = r - v:$$

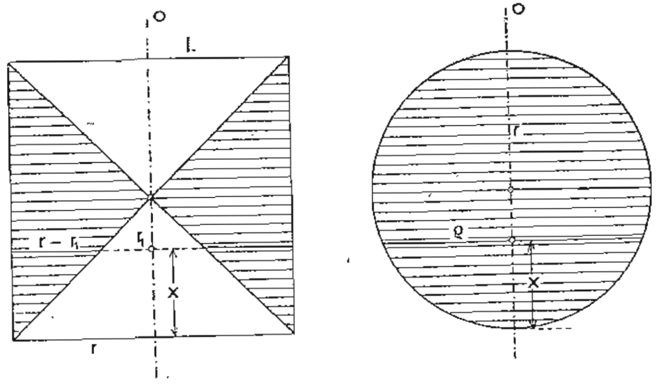
$$r^2 = c(r - v) = cr - cv \text{ и}$$

$$v = \frac{cr - r^2}{c} = \frac{r}{c}(c - r).$$

$$P_k = 2\pi r \frac{r}{c}(c - r) = \frac{2\pi r^2(c-r)}{c}.$$

3. пример: Изведи образац за запремину лопте помоћу Каваљеријевог става (слика 96).

Нацртај квадрат са страном $2r$ и повуци дијагонале. Полуобртом квадрата око осе o опише цртама превучени (шрафирани) део слике ратационо тело I, чија је запремина једнака запремини ваљка умањеној запремином двојне купе:



Слика 96

$$V_I = = V_v - 2V_k = \pi r^2 \cdot 2r - \frac{\pi r^2 \cdot 2r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Полуобртом круга са полупречником r око пречника o постаје лопта. Оба тела имају једнаке висине, наиме $2r$.

Положимо оба тела на исту раван. Ма који раван пресек нормалан на обртну осу сече прво тело у кружним

прстеновима, а лопту у круговима. Узмимо ма коју такву раван на растојању x па израчунајмо површине пресека.

Површина прстена:

$$p_I = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi r^2 - \pi(r - x)^2 =$$

$$= \pi(r^2 - r^2 + 2rx - x^2) = \pi x(2r - x) \qquad 1)$$

Површина круга: $p_k = \pi\varrho^2 = \pi x(2r - x)$, 2)

зато што је ϱ средња геометриска пропорционала дужи x и $2r - x$.

Из оба обрасца 1) и 2) видимо, да је површина паралелнога пресека првога тела једнака површина круга који добијамо као пресек исте равни са лоптом. По Каваљеријевом ставу ротационо тело I и лопта запремински су једнаки. Стога је запремина лопте:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

4. пример: Колика је запремина лоптинога исечка (V_i), код кога је калота једнака омотачу одговарајуће купе? (слика 97).

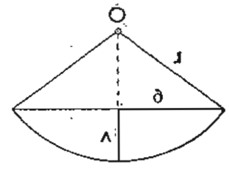
$P_k = 2\pi r v.$

$M = \pi\varrho r - \pi r\sqrt{v(2r - v)}.$

Из $2\pi r v = \pi r\sqrt{v(2r - v)}$ следује

$4v^2 = 2rv - v^2$, $5v = 2r$ и $v = \frac{2}{5}r$.

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v = \frac{4}{15}\pi r^3.$



Слика 97

5. пример: Колика је запремина лоптиног отсечка чија је калота $1\frac{1}{2}$ пута толика, колика је површина основе?

Површина калоте је $P_k = 2\pi r v$.

Површина основе је $p = \pi\varrho^2 = \pi v(2r - v)$.

Услов задатка: $2\pi r v = \frac{3}{2}\pi v(2r - v)$; отуда се израчуна:

$$2r = 3v \text{ и } v = \frac{2r}{3}.$$

Запремина отсечка: $V_o = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v) = \frac{4\pi r^2}{27}(3r - \frac{2r}{3}) =$

$$= \frac{28\pi r^3}{81}.$$

6. пример: Колика је површина појаса и колика је запремина слоја који се налази између упоредника 40^0 и 50^0 кад је полупречник лопте 1 m? (слика 98).

a) $v_1 = r - r\sin\alpha_1 = r(1 - \sin\alpha_1) = r(1 - 0{,}64\,279) = 0{,}35\,721\ m$

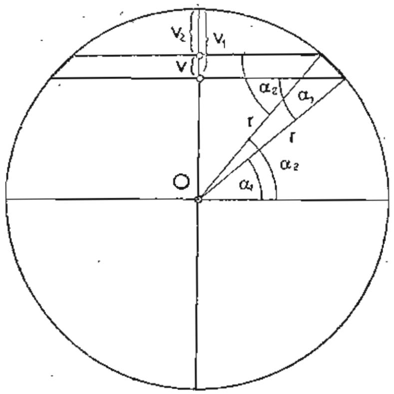
$\quad v_2 = r - r\sin\alpha_2 = r(1 - \sin\alpha_2) = r(1 - 0{,}76\,604) = 0{,}23\,396\ m$

$$v = v_1 - v_2 = r(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = 0{,}12\,325\ m$$

$$P = 2\pi r v = 2\cdot 3{,}14\ldots\cdot 0{,}12\,325 = \underline{0{,}7740\ldots m^2}$$

b) $V = \dfrac{\pi v_1^2}{3}(3r - v_1) - \dfrac{\pi v_2^2}{3}(3r - v_2) =$

$$= \frac{\pi}{3}\left[v_1^2(3r - v_1) - v_2^2(3r - v_2)\right] = \underline{0{,}195\ldots m^3}$$



Слика 98

Вежба: Израчунај површину појаса и запремину слоја Земље ($r = 6360\ km$) између иста два упоредника.

7. пример: Колики је полупречник лопте која је *a*) описана око правилног тетреадра, *b*) у правилном тетреадру уписана? (сл. 99).

a) $v = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$

$$v_1^2 = a^2 - \frac{4}{9}\,\frac{a^2}{4}\cdot 3 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$v_1 = \frac{a}{2}\sqrt{6}\,.$$

$$r^2 = (\tfrac{2}{3}v)^2 + (v_1 - r)^2 = \tfrac{4}{9}v^2 + v_1^2 - 2v_1 r + r^2.$$

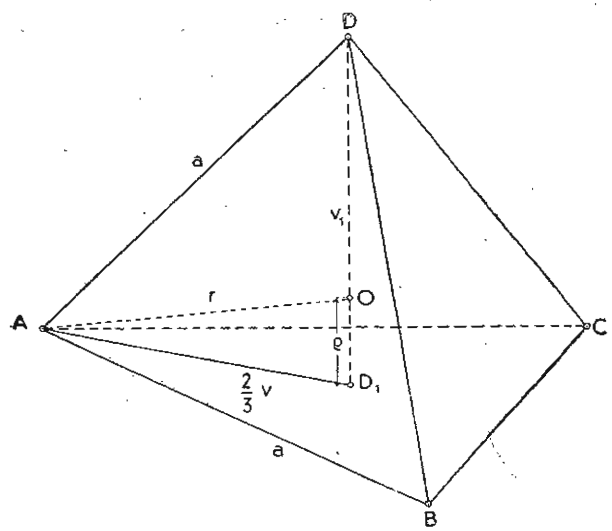
Отуда следује: $2v_1 r = \frac{4}{9}v^2 + v_1^2$ и

$$r = \frac{\frac{4}{9}v^2 + v_1^2}{2v_1} = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot 3 + \frac{2a^2}{3}}{2a\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{a}{4}\sqrt{6}.$$

b) Центар у правилном тетреадру уписане лопте можемо да сматрамо као заједнички врх четири тростране и подударне пирамиде које имају за висину полупречник уписане лопте. Стога је запремина пирамиде: $V = \dfrac{4o\varrho}{3}$. Запремина је

међутим и: $V = \dfrac{o\,v_1}{3}$. (*o* означава површину основе). Отуда следује:

$$\frac{4o\varrho}{3} = \frac{o\,v_1}{3} \text{ и } \varrho = \frac{v_1}{4} = \frac{a}{12}\sqrt{6}\,.$$



Слика 99

Задаци:

1. Докажи, да се у свакој тространој пирамиди може лопта уписати и око ње описати.

2. Кад се око паралелепипеда може описати лопта?

3. Кад се око зарубљене пирамиде може описати лопта?

4. Израчунај површину и запремину тела, састављеног од полулопте, равностраног ваљка и равностране купе (сл. 100).

5. Велики лоптин круг има површину 250 cm^2; колико је средишно растајање лоптиног круга површине 148 cm^2?

6. Полупречници два паралелна круга, чије је растојање *d*, јесу ϱ_1 и ϱ_2; колики је полупречник лопте за:

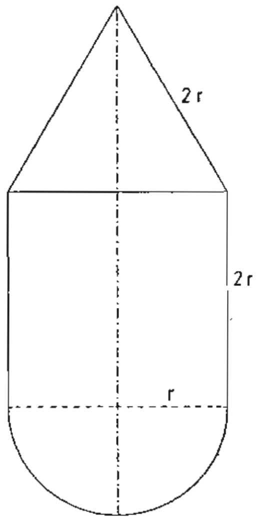
a) $d = 3\ cm,\ \varrho_1 = 4{,}4\ cm,\ \varrho_2 = 2{,}8\ cm$;

b) $d = 4\ dm,\ \varrho_1 = 7\ dm,\ \varrho_2 = 13\ dm$?

7. Полупречници два лоптина круга, чија средишна растојања стоје у размери 5 : 6, мере 15 и 7 *cm*; колики је полупречник лопте?

8. Колики је полупречник лопте, чија је површина једнака збиру (разлици) површина две лопте са полупречницима 8,7 и 5,2 *cm*?

9. Колики је полупречник лопте која хвата *a*) 1*l*, *b*) 2*l*, *c*) *n l*?



Слика 100

10. Колики је полупречник лопте од ливеног гвожђа, кад је тежина *a*) 1 *kg*, *b*) 2 *kg* *c*) $\frac{1}{2}$ *kg*, *d*) *n kg*? (Специфична тежина ливеног гвожђа = 7,3 g/cm^3).

11. Колики је полупречник лопте чија је запремина једнака збиру (разлици) запремина две лопте са полупречницима 8,7 и 5,2*cm*.

12. Лоптин појас је 0,75 *m* висок и има површину 2,5 m^2, колики је полупречник лопте?

13. Подели површину лопте на два дела тако, да је један део *n* — пута колико други; колике су површине тих делова? (r = 15 *cm*, $n = 4$).

14. Подели површину лопте са два паралелна пресека на 3 једнака дела.

15. Равностран ваљак и лопта имају једнаке површине; у којој размери стоје полупречници ваљка и лопте?

16. Колика је површина која се види из балона у висини 4000 *m* над морем? (Израчунај најпре полупречник Земље из првобитне дефиниције метра).

17. Колико се високо мора подићи над Земљом, па да се види $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, . . . $\frac{1}{n}$ њене површине?

18. Равностран ваљак и лопта имају једнаке запремине; у којој размери стоје полупречници ваљка и лопте?

19. Шупља гвоздена лопта, чији је спољни полупречник 18 *cm* и дебљина 2 *cm*, прелије се у масивну лопту. Колики је пречник преливене лопте?

20. Колика је *a*) површина, *b*) запремина лоптиног исечка, кад је угао осовинског пресека *a*) 60°, *b*) 90°, *c*) 120° (полупречник лопте $r = 10$ *cm*)?

21. Колика је површина и запремина лоптиног исечка, ако су висине одговарајуће купе и лоптиног отсечка једнаке?

22. Од лопте са полупречником *r* исече се лоптин исечак, чија је површина једнака површини великог круга. Колика је запремина исечка?

23. Колика је *a*) површина, *b*) запремина лоптиног отсечка који је мањи (већи) од полулопте, кад је пречник отсечкове основе 24 *cm* и пречник лопте 26 *cm*?

* 24. Претвори дату лопту у прав ваљак, чији је омотач трипута већи од основе; колики је *a*) полупречник ваљка, *b*) висина ваљка?

25. Основне ивице праве 10 *dm* високе пирамиде мере 5, 6 и 7 *dm*; колики је полупречник *a*) описане *b*) уписане лопте?

* 26. Лоптин отсечак и ваљак, који имају једнаке основе и једаке висине, стоје у размери 6 : 11; колика је висина отсечка, кад је полупречник лопте 35 *cm*?

* 27. У лопти са полупречником *r* уписана је права купа која са лоптом има заједничко тежиште. Израчунај површину и запремину купе.

Упутство: Висина купе је подељена центром лопте у размери 1 : 3.

$$P = \frac{8}{9}\pi\, r^2 (1 + \sqrt{3}) \text{ и } V = \frac{32}{81}\pi\, r^3 .$$

XIII. СЛИЧНА ТЕЛА

§ 86. Слична тела

Два тела су слична, ако се растојање ма којих тачака првог тела смањују (повећавају) у одређеној размери као растојања одговарајућих тачака другог тела. Слична тела имаји исти облик, а различиту величину.

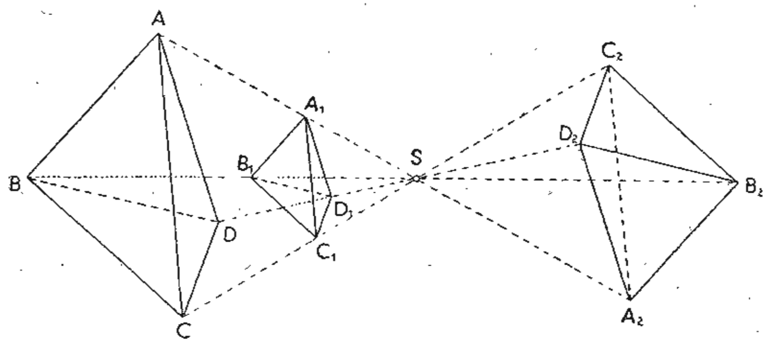
Ако спојнице хомологних тачака првог и другог тела иду кроз једну тачку, кажемо да леже у перспективном положају. Ту тачку зовемо центар сличности оба тела.

Слична тела у перспективном положају зовемо **хомотетична тела**.

На слици 101, S је за пирамиде $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ **спољашњи**, а за пирамиде $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$ **унутрашњи** центар сличности.

§ 87. Површине сличних слика

Ако хоћемо да направимо модел призме, пирамиде, ваљка, купе, зарубљене пирамиде или зарубљене купе, изрежемо (прво) мрежу од картона из које превијањем добијамо захтевано тело. Површина мреже је дакле једнака површини тела.



Слика 101

Два слична тела имају сличне мреже, зато што свакој правој или кривој линији једне мреже одговара права или крива линија истога облика у другој која је k-пута већа (мања) од прве; даље су и углови које чине праве једне мреже, једнаке угловима, које чине хомологне праве у другој мрежи.

Фактор или **модуо сличности** k је размера дужине ма које праве или криве линије прве слике и дужине хомологне праве или криве линије сличне слике. Код две дате сличне слике та је размера **стална** или **константна**. Површине сличних слика су сразмерне квадратима дужина хомологних линија у обе слике. (Види геометрију за V разред § 158).

Пошто су површине две сличне мреже сразмерне квадратима дужина хомологних линија, стоје површине сличних тела у односу:

$$P : P_1 = a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = c : c_1^2 \cdot \cdot \cdot = m^2 : n^2 = k^2 \cdot$$

Став 56. *Површине сличних тела сразмерне су квадратима дужина хомологних ивица.*

Или: *Површина једнога тела једнака је површини сличнога тела, помноженој са квадратом модула сличности.*

Све лопте су сличне међу собом. Из обрасца

$$P = 4\pi r^2 \text{ и } P_1 = 4\pi r_1^2$$

следује: $P : P_1 = r^2 : r_1^2$

Став 57. *Површине две лопте сразмерне су квадратима њихових полупречника.*

§ 88. Запремине сличних тела

Из обрасца за запремину добијамо:

1. за сличне призме или сличне ваљке:

$$V = B\,v \text{ и } V_1 = B_1 v_1 = B k^2 \cdot v\,k = k^3 \cdot B\,v;$$

отуда следује: $\frac{V_1}{V} = k^3;$

2. За сличне пирамиде или сличне купе:

$$V = \frac{B\,v}{3} \text{ и } V_1 = \frac{B_1 v_1}{3} = \frac{k^2 B \cdot k\,v}{3} = \frac{k^3 B\,v}{3};$$

отуда следује: $\frac{V_1}{V} = k^3;$

3. За лопте:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \text{ и } V_1 = \frac{4\pi r_1^3}{3} = \frac{4\pi k^3 r^3}{3} = k^3 V;$$

отуда следује: $\frac{V_1}{V} = k^3.$

4. На сличан начин показујемо за сличне зарубљене пирамиде, сличне зарубљене купе, лоптине слојеве, лоптине отсечке и лоптине исечке, да је:

$$\frac{V_1}{V} = k^3 \cdot$$

Став 58. *Запремина тела једнака је производу запремине сличнога тела и куба модула сличности.*

Пошто је модуо сличности размера дужина двеју хомологних линија, важи:

Став 59. *Запремине сличних тела сразмерне су кубовима дужина хомологних линија (страница), ивица, дијагонала, полупречника кружних линија итд.).*

§ 89. Задаци

1. пример: Запремине сличних ваљака стоје у размери $8 : 27$; у којем су односу површине?

Из $V : V_1 = 8 : 27$ добијамо: $\frac{V}{V_1} = \frac{8}{27} = k^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Према пређашњем површине се односе:

$$\frac{P}{P_1} = k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ или } \underline{P : P_1 = 4 : 9} \ .$$

2. пример: Полупречници две лопте стоје у размери $m : n$; у којем су односу површине и у којем запремине?

a) $P = 4\pi r^2$ и $P_1 = 4\pi r_1^2$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{m^2}{n^2};\ n^2 P = m^2 P_1 \text{ или } \underline{P = \frac{m^2}{n^2} P_1} \ .$$

b) $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ и $V_1 = \frac{4\pi r_1^3}{3}$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{r^3}{r_1^3} = \frac{m^3}{n^3};\ n^3 V = m^3 V_1 \text{ или } \underline{V = \frac{m^3}{n^3} V_1} \ .$$

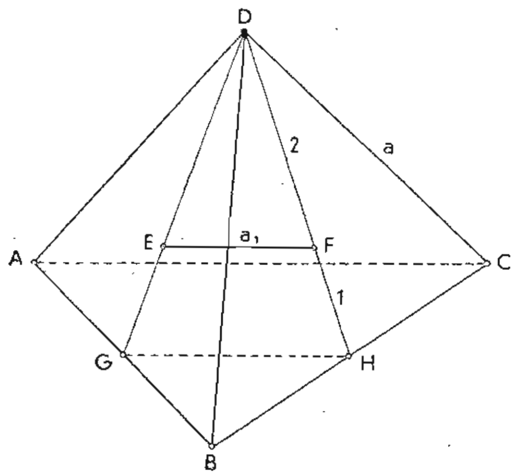
3. пример; Средишта граничних површина тетраедра нека чине темена мањега тетраедра. Колико пута је површина и колико пута запремина већег тетраедра већа од мањег?

Нека E буде средиште троугла ABD и F средиште троугла BDC (слика 102). E лежи на висини $\overline{DG}$ и F на висини $\overline{DH}$, и то тако, да су висине раздељене у размери $2 : 1$. Добија се дакле размера:

$$\overline{DE} : \overline{DG} = \overline{DF} : \overline{DH} = 2 : 3.$$

Отуда следује, да је $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ и да постоји сразмера

$$EF : GH = 2 : 3.$$



Слика 102

Пошто је GH средња линија равностраног троугла, њена је дужина $\frac{a}{2}$. Ако се та вредност стави у горњу сразмеру, добија се за

$$a_1 = EF = \frac{2\frac{a}{2}}{3} = \frac{a}{3} \ .$$

Модуо сличности једнак је размери дужина ивица већега и мањег тетраедра: $k = a : a_1 = 3$.

a) По § 87 размера површина оба тетраедра је:

$P : P_1 = k^2 = 9$; отуда следује: $\underline{P = 9 P_1}$.

b) По § 88 размера запремина оба тетраедра је:

$V : V_1 = k^3 = 27$; отуда следује: $\underline{V = 27 V_1}$.

Задаци:

1. Два слична ваљка имају заједно $26 m^2$ површине; њихове висине су $2m$ и $3m$; *a*) колика је површина свакога ваљка, *b*) колики су полупречници основа?

2. Сличне купе имају заједно $1216\,cm^3$ запремине; колика је запремина сваке купе, ако су полупречници основе 5 и 10 *cm*? Колике су висине?

3. У равностраном ваљку је уписана и око њега описана лопта; у коме су односу површине и запремине обе лопте?

4. У равностраној купи је уписана и око ње описана лопта; у ком су односу површине и запремине обе лопте.

5. У којој су размери површине, а у којој запремине две лопте, од којих је једна уписана, а друга описана око правилног тетредра?

6. У лопти је уписан и око лопте описан равнострани ваљак; у ком су односу површине и запремине оба ваљка?

7. У лопти је уписана и око лопте описана равнострана купа; у ком су односу површине и запремине обе купе?

* XIV. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ ПО МЕТОДИ АЛГЕБАРСКЕ АНАЛИЗЕ

* § 90. Алгебарска анализа и конструкција

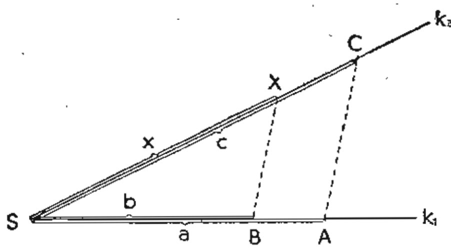
Решење неких конструктивних задатака је најпростије, ако тражену величину најпре израчунамо и тако добијени образац тумачимо геометриски. Како се то ради, показаћемо на неколико примера.

1. пример: Ако су a, b и c дате дужи, одреди дуж која одговара алгебарском изразу:

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Ако леву и десну страну дате једначине помножимо са a, добија се: $ax = bc$. ax је производ спољашњих чланова и bc производ унутрашњих чланова сразмере: $a : b = c : x$. Отуда следује, да је x четврта геометриска пропорционала.

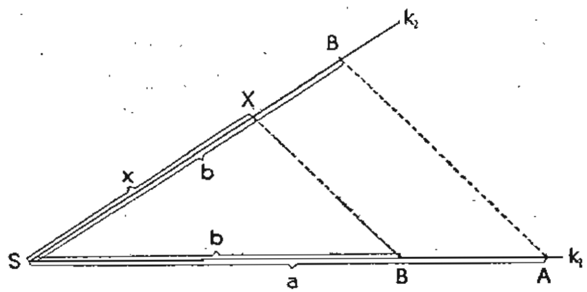
Нацртамо ма какав угао и пренесемо на крак k дужи a и b, тако да је $\overline{SA} = a$ и $\overline{SB} = b$, и на крак k_1 трећу дуж $c = \overline{SC}$ (слика 103). Ако спојимо C са A и повучемо тој спојници паралелу кроз B, добијамо на k_1 тачку X. Дуж $\overline{SX}$ је тражена четврта геометриска пропорционала x.



Слика 103

2. пример: $x = \frac{b^2}{a}$ или $ax = b^2$; одатле следује сразмера: $a : b = b : x$. x је трећа геометриска пропорционала.

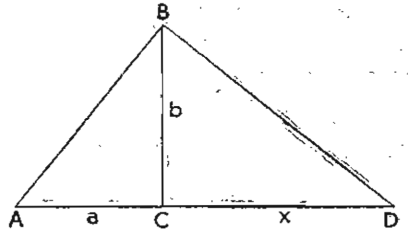
1. начин: Из сразмере $a : b = b : x$ следује конструкција аналогно горњој конструкцији, ако се стави за $c = b$ (слика 104).



Слика 104

2. начин: a) Конструкција помоћу става о висини: a и x су отсечци на хипотенузи, а b висина.

Нацртамо правоугли троугао ACB са катетама a и b. У темену B нацртамо нормалу на хипотенузу $\overline{AB}$ која продужену катету a сече у тачки D (слика 105). $\overline{CD}$ је тражена трећа геометриска пропорционала x.



Слика 105

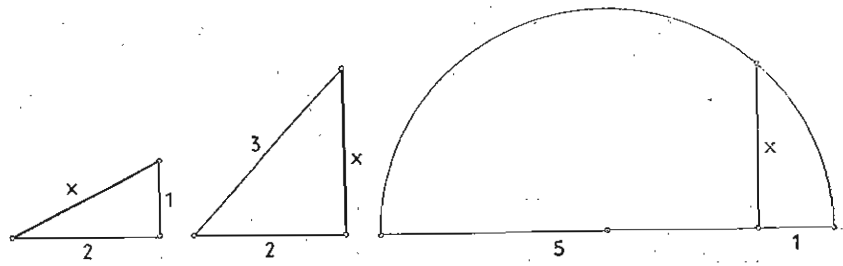
b) Доказ: Правоугли троугли ACB и BCD слични су; стога постоји сразмера хомологних страна: $a : b = b : x$.

3. пример: $x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$. Прво нацртамо помоћну дуж $y = \frac{ab}{d}$ и потом $x = \frac{y \cdot c}{e}$.

4. пример: $x = \sqrt{5}$.

a) Анализа: Израз $x = \sqrt{5}$ можемо да напишемо и на ове начине: 1) $x = \sqrt{2^2 + 1^2}$, 2) $x = \sqrt{3^2 - 2^2}$ 3) $x = \sqrt{5 \cdot 1}$.

b) Конструкција: На први начин x је хипотенуза правоуглог троугла чије су катета 2 и 1; на други начин је x катета правоуглог троугла чија је хипотенуза 3 и друга катета 2; на трећи најзад, x је средња геометриска пропорционала дужи 5 и 1 (слика 106).



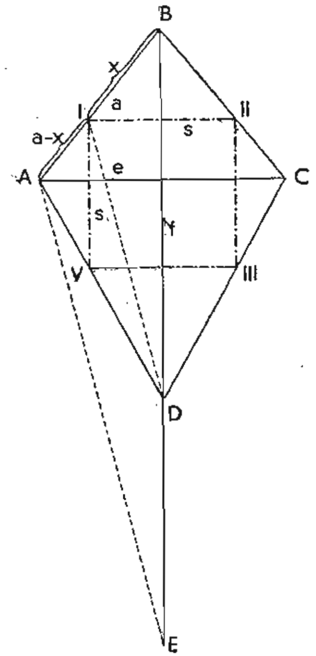
Слика 106

5. пример: Конструиши $x = \sqrt{m^2 - ab}$ за $m = 5$ cm, $a = 5$ cm и $b = 3$ cm.

Ако се стави $y^2 = ab$, добија се $x = \sqrt{m^2 - y^2} \cdot y$ је средња геометриска пропорционала дужи a и $b \cdot x$ је катета правоуглог троугла са хипотенузом m и катетом y.

6. пример: Упиши у делтоиду квадрат тако, да на свакој страни делтоида лежи по једно теме квадрата.

a) Подаци: Далтоид је дат страном a и дијагоналама e и f (слика 107).



Слика 107

b) Рачунско решење: Из сличности троуглова ABC и $I\,B\,II$ добија се сразмера: $e : s = a : x$ и из сличности троуглова ABD и $A\,II\,V$: $f : s = a : (a - x)$.

Ако се s израчуна из обе једначине, добија се:

$$s = \frac{e\,x}{a} = \frac{f\,(a-x)}{a}\ ;$$ одатле

следује:

$$ex = fa - fx \text{ или } x\,(e+f) = $$
$$= fa \text{ и } x = \frac{f\,a}{e+f}\ .$$

x је четврта геометриска пропорционала дужи $(e+f)$, f и a.

c) Конструкција: Продужимо дијагоналу $\overline{BD}$ за e те добијамо тачку E. E спојимо са A и повучемо кроз D паралелу која исеца на $\overline{AB}$ теме I квадрата, чије су стране паралелне дијагоналама делтоида.

d) Доказ: Ако узмемо B за теме прамена, постоји сразмера: $(e + f) : f = a : x$ или $x = \dfrac{a\,f}{e+f}$.

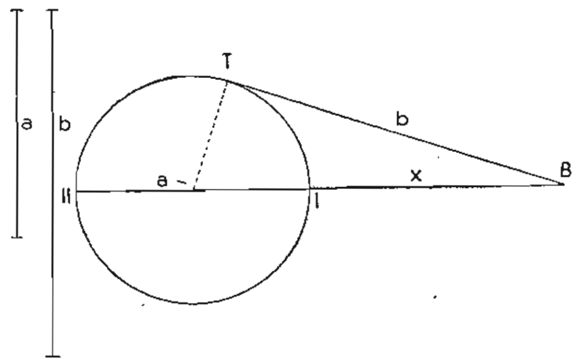
7. пример: Реши једначину $x^2 + a\,x - b^2 = 0$, где су a и b дате дужи.

a) Анализа: Напишемо једначину у облику: $x(x+a) = b^2$. b је средња геометриска пропорционала за x и $(a+x)$.

b) Конструкција (слика 108): Нацртамо круг пречника a и нацртамо у ма којој тачки T кружнога обима тангенту, на коју пренесемо дуж $b = \overline{TB}$. B спојимо са средиштем круга. Спојница сече круг у тачкама I и II. Дуж $\overline{IB} = x$.

c) Доказ: Пошто је отсечак тангенте средња геометриска пропорционала отсечака сваке секанте која иде кроз дату тачку ван круга, добијамо:

$$x\,(a + x) = b^2.$$

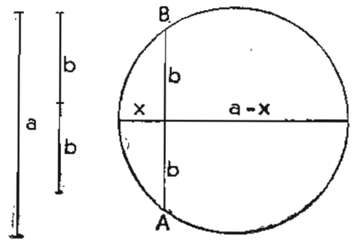


Слика 108

d) Детерминација: Задатак има увек само једно решење.

8. пример: Реши једначину $x^2 - a\,x + b^2 = 0$, где a и b означавају дужи.

a) Анализа: Пишемо једначину у облику: $x\,(x - a) = b^2$.



Слика 109

b) Конструкција (слика 109): Нацртамо круг са пречником a и у њему тетиву $\overline{AB} = 2\,b$.

Нормални пречник на тетиви има отсечке x и $a - x$, чији је производ $x\,(a - x) = b^2$.

c) Детерминација: Задатак може да се реши само ако је $2\,b < a$.

Задаци:

1. Нацртај израз (дуж) па провери резултат рачуном:

a) $x = \dfrac{a\,b}{c}$ за $a = 6\ cm$, $b = 5\ cm$ и $c = 4{,}8\ cm$;

b) $x = \frac{abc}{de}$ за $a = 6{,}2\ cm$, $b = 3\ cm$, $c = 4{,}8\ cm$, $d = 4{,}5\ cm$ и $e = 5{,}7\ cm$;

c) $x = \frac{a^2}{b}$ за $a = 5\ cm$ и $b = 7\ cm$.

2. Нацртај следеће изразе па провери резултате рачуном:

a) $x = \sqrt{m^2 - ab}$ за $m = 7{,}5\ cm$, $a = 5{,}5$ и $b = 3{,}2\ cm$;

b) $x = \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ за $a = 6\ cm$ и $b = 4\ cm$;

c) $x = \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}$ за $a = 6\ cm$ и $b = 4\ cm$;

d) $x = \frac{m \cdot n}{6}$ за $m = 11$ и $n = 5$;

e) $x = \frac{a(a + b)}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ за $a = 6cm$ и $b = 4cm$;

f) $x = \sqrt{\frac{a^2 b}{c}}$ за $a = 6cm$, $b = 4cm$ и $c = 3cm$.

3. Реши конструкцијом и рачуном:

a) $x = \sqrt{7}$, $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{15}$;

b) $x = a(\sqrt{7} - 2)$ за $a = 2cm$; стави за $a\sqrt{7} = \sqrt{7a^2} = y$.

c) $x = a(\sqrt{11} - 2)$ за $a = 15mm$;

4. Упиши у ромбу квадрат тако, да његова темена леже на све четири стране ромба.

5. Упиши у датом троуглу квадрат.

6. Основици c датога троугла повуци паралелу тако, да њена дужина буде једнака отсечку на страни b који лежи између основице и паралеле.

7. Реши једначину $x^2 - ax - b^2 = 0$.

8. Упиши у кругу са полупречником $r = 4cm$ крст, састављен од пет квадрата („црвени крст"), *a)* помоћу алгебарске анализе, *b)* помоћу сличне помоћне слике.

9. Нацртај изразе, где a, b, c, d означавају дате дужи:

a) $\sqrt{ab + c^2}$; *b)* $\sqrt{ab + cd}$; *c)* $\sqrt{a^2 + bc}$.