ТЕОРИЈА
ФУНКЦИЈА

Бор. Ј. Пујић, проф.

Теорија функција

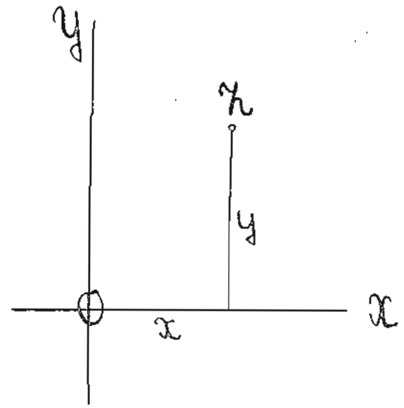
Предавања
Др. Мих. Петровића,
проф. Универзитета.

Геометриско представљање имагинарних количина

Уочимо једну имагинарну количину

$$z = x + yi$$

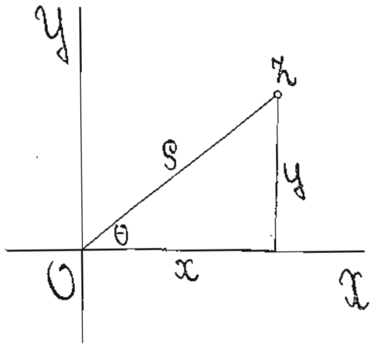
па сматрајмо реални део те количине z као апсцису, а имагинарни део y као ординату, онда, ако пренесемо x на осовину апсциса, y на осовину ордината, добијамо једну тачку z и та тачка сматра се да геометриски представља имагинарну количину z. Тачка z назива се



тада <u>геометриски представник</u> имагинарне количине z или њеним <u>афиксом</u>

За знаке x-а и y-а важи оно исто Descarтез-ово правило које се употребљује у Аналитичкој Геометрији. Према томе знајући знаке x-а и y-а знаћемо у коме ће се квадранту тачка z налазити. Чисто реалним количинама одговарају тачке на осовини OX, чисто имагинарним тачке на осовини OY, а комплексним имагинарним количинама одговарају тачке у једном од четири квадранта.

Имагинарне количине могу се изразити и помоћу поларних координата. Претпоставимо да је имагинарна количина равна



$$z = x + yi$$

Одговарајућа тачка z биће одређена ако јој знамо потег ρ и поларни угао θ. Међутим из слике се види да је

$$x = \rho \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\theta$$

Заменом у изразу за z добија се

$$z = x + yi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Кад знамо дакле ρ и θ, онда је z одређено помоћу овог обрасца. На послетку овом се обрасцу може дати још један облик, јер се према Euler-овом обрасцу зна да је

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{\theta i}$$

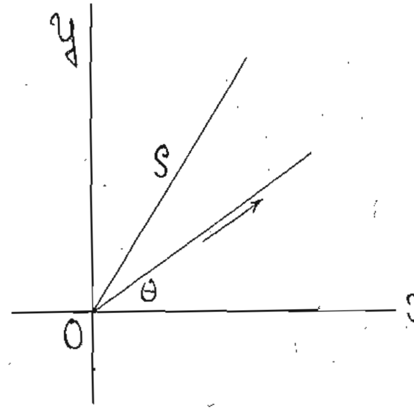
Према томе кад знамо потег ρ и угао θ једне имагинарне количине, та се количина може написати у облику

$$z = \rho e^{\theta i}$$

Количина ρ представља, као што се из слике види, одстојање тачке z од почетка и назива се <u>модуо</u> количине z. Угао θ је угао који гради модуо са осовином апсциса; тај се угао назива <u>аргументом</u> имагинарне количине z. Према томе је једна имагинарна количина потпуно одређена кад јој се зна модуо и аргуменат. Модуо имагинарне количине сматра се увек као позитиван, међутим аргуменат θ може имати ма какве вредности од 0 до ∞.

Очевидно је да реалним и позитивним количинама одговарају аргументи равни нули или у опште $2k\pi$; реалним и негативним количинама одговарају аргументи π или у опште $(2k+1)\pi$; имагинарним количинама које су чисто имагинарне и то са позитивним имагинарним деловима одговарају аргументи $\frac{\pi}{2}$ или у опште $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; на послетку чисто имагинарним количинама са негативним реалним деловима одговарају аргументи $\frac{3\pi}{2}$ или у опште $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$.

Величина једне имагинарне количине цени се у опште по величини њеног модула. Тако за једну се имагинарну количину каже да је равна нули, ако је њен модуо раван нули т.ј. ако се одговарајућа тачка поклапа са почетком. Тако се исто за једну имагинарну количину каже да је бескрајно велика, ако јој је модуо бескрајно велики т.ј. ако је одговарајућа тачка бескрајно далеко од почетка. За једну се такву количину каже да расте или опада према томе да ли се она удаљује или приближује почетку. Ако се хоће да прецизира тачно како та количина расте или опада, мора се у исто време пазити не само како јој модуо расте или опада, већ и како њен аргуменат расте или опада, јер се одговарајућа тачка може од почетка удаљавати у разним правцима. Ако хоћемо да ју пратимо треба знати у коме се она правцу од почетка удаљује т.ј. какав аргуменат у томе задржава.



За једну се тачку каже да расте у правцу датог аргумента θ ако се она удаљује од почетка у једном сталном правцу који са осовином Ox гради угао θ.

Прелазак од правоуглих координата на поларне и обратно врши се исто онако као у Аналитичкој Геометрији. Тако

1° ако је количина z дата у

облику

$$z=x+yi$$

па се тражи да се напише у облику

$$z=\rho e^{\theta i}$$

одговарајуће количине ρ и θ знаћемо из образаца

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$tg\theta=\frac{y}{x}$$

2° Ако је количина z дата у облику

$$z=\rho e^{\theta i}$$

па се тражи да се напише у облику

$$z=x+yi$$

имаћемо количине x и y из образаца

$$x=\rho\cos\theta$$

$$y=\rho\sin\theta$$

Рачунске радње са имагинарним количинама

Са имагинарним количинама могу се вршити исте радње као и са реалним само су оне овди компликованије.

1° Сабирање и одузимање

Да би се количине

$$z_1=x_1+y_1i \qquad z_2=x_2+y_2i \qquad z_3=x_3+y_3i \qquad \dots$$

сабрале, саберу им се засебно имагинарни а за себе реални делови тако да ће бити

$$z_1+z_2+z_3+\cdots=(x_1+x_2+x_3+\cdots)+(y_1+y_2+y_3+\cdots)i$$

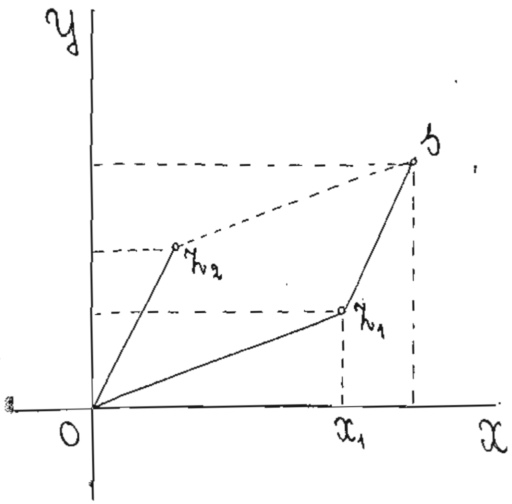
Пошто ово очевидно важи па ма какви били знаци реалних и имагинарних делова, то то исто важи и за одузимање.

Међутим сабирање и одузимање може се вршити и геометријски на овај

Начин: Уочимо најпре две тачке

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$
$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

и обележимо их у равни имагинарних количина. Ако z_1 саставимо са почетком, затим из z_1 повучемо паралелну правој Oz_2 и на њој одмеримо одстојање $z_1 s = Oz_2$, тако добијена тачка s има се сматрати као збир тачака z_1 и z_2, јер она има као апсцису



$$x_1 + x_2$$

а као ординату

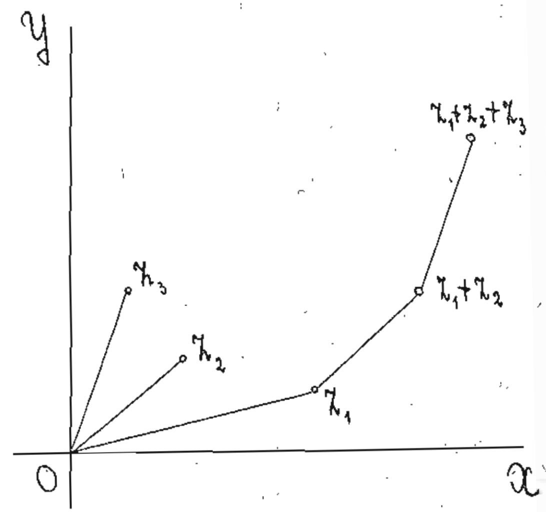
$$y_1 + y_2$$

као што се то из слике види.

Уочимо сада један ма колики број тачака

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$
$$z_2 = x_2 + y_2 i$$
$$z_3 = x_3 + y_3 i$$
$$\cdots\cdots$$

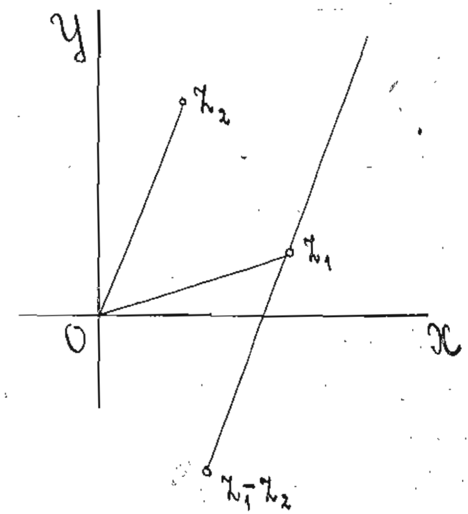
и означимо те тачке у бројној равни. За њихово сабирање имамо опште правило: обележе се оне тачке које треба сабрати, исповлаче се праве паралелне означеним на слици, последња тачка која резултује биће збир датих тачака.



Исто правило важи и за одузимање тачака само с том разликом што се пренашање дужина врши у супротним правцима. Кад има да се одузму количине

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$
$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

ради се овако као што је показано на

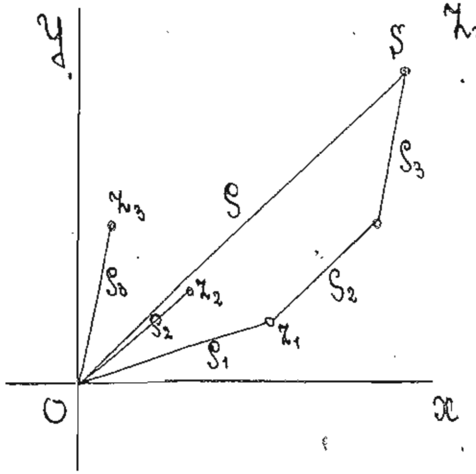


слици.

Тако се исто ради кад се има и сабирање и одузимање: увек треба образовати наведене полигоналне линије пазећи на смисао у коме се дужине требају преносити, који зависи од знака. Крајња тачка тако добијене полигоналне линије биће тражени збир или разлика.

Оваквим геометријским сабирањем добија се у исти мах једна врло важна теорема која чини велике услуге у теорији функција. Нека је дато више имагинарних количина

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$
$$z_2 = x_2 + y_2 i$$
$$z_3 = x_3 + y_3 i$$
$$\cdots\cdots\cdots$$



Претпоставимо да смо образовали полигоналну линију чије нам теме S даје алгебарски збир датих имагинарних количина. Из слике се види да је увек:

$$\rho < \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots$$

чиме је доказана ова проста а важна теорема: Модуо збира неколико имагинарних количина увек је мањи од збира модула тих количина.

Да смо на место ових сабирања имали одузимања, имали би другчију слику али исти резултат, јер модуо збира јавља се увек као дијагонала а остали модули као стране полигона, а очевидно је да је дијагонала увек краћа од збира страна.

2° Множење.

Нека је дато неколико имагинарних количина: $z_1, z_2, z_3, \cdots$ Напишимо их помоћу њихових поларних координата ρ и θ па нека је

$$z_1 = \rho_1 e^{\theta_1 i} \quad z_2 = \rho_2 e^{\theta_2 i} \quad z_3 = \rho_3 e^{\theta_3 i} \quad \cdots$$

Ако их помножимо међу собом добија се

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdots e^{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots) i}$$

из чега се види ово правило: имагинарне се количине међу собом множе, кад им се модули међу собом помноже а аргументи саберу.

3° Дељење

Нека су дате две имагинарне количине z_1 и z_2 чији су модули ρ_1 и ρ_2 а аргументи θ_1 и θ_2 тако да је

$$z_1 = \rho_1 e^{\theta_1 i} \qquad z_2 = \rho_2 e^{\theta_2 i}$$

Деобом се добија

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{(\theta_1 - \theta_2) i}$$

из чега се види ово правило: две се имагинарне количине деле међу собом кад им се модули поделе а аргументи одузму.

4° Степеновање

Нека је дата имагинарна количина z са модулом ρ и аргументом θ т.ј.

$$z = \rho e^{\theta i}$$

Из ове се једначине степеновањем са n добија

$$z^n = \rho^n e^{n\theta i}$$

из чега се види ово правило: имагинарна количина се степенује једним бројем кад јој се модул степенује а аргуменат помножи тим бројем.

5° Кореновање

На исти је начин очевидно да се имагинарна количина корењује једним бројем кад се модул корењује а аргуменат подели тим бројем.

6° Логаритмисање

Нека је дата имагинарна количина

$$z = \rho e^{\theta i}$$

Пошто је према Euler-овом обрасцу

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1$$

то можемо да пишемо

$$z = \rho e^{\theta i} \cdot 1 = \rho e^{\theta i} \cdot e^{2k\pi i} = \rho e^{(\theta + 2k\pi) i}$$

Отуда логаритмисањем

$$\log z = \log \rho + \theta i + 2k\pi i$$

из чега се види ово правило: једна се имагинарна количина логаритмише кад се логаритму модула дода: аргумент више број $2k\pi$ помножено са i, где је k ма какав цео број.

Из тога се изводи лако и образац који нам непосредно даје логаритам броја

$$z = x + yi$$

јер знамо да је за њега

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$tg\,\theta = \frac{y}{x}$$

Према томе је

$$\log(x+yi) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\,arctg\,\frac{y}{x} + 2k\pi i$$

У обрасцу се види и ово: ако је број z реалан и позитиван, може се узети $\theta = 0$ тако да се добија

$$\log z = \log \rho + 2k\pi i$$

Пошто се ρ поклапа са z то се и $\log \rho$ има сматрати као $\log z$ па се добија

$$\log z = \log z + 2k\pi i$$

и тај образац показује да $\log z$ има бесконачно много вредности које се добијају кад се једној од њих дода: ма какав цео број пута $2\pi i$. Ако је број негативан, његов θ је π и онда његов логаритам има бесконачно много вредности од којих ни једна није реална.

Функције што зависе од имагинарних количина

Нека је дата једна функција $F(z)$ једне имагинарне количине

$$z=x+yi$$

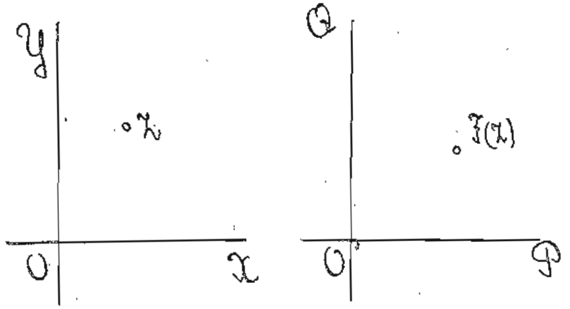
ако ту вредност заменимо у функцији, ова постаје

$$F(z)=F(x+yi)$$

тај ће израз имати свој реални део P и свој имагинарни део Q тако да је

$$F(z)=F(x+yi)=P+Qi$$

Изрази P и Q биће очевидно функције од x и y.



Ако сад узмемо две равни: раван променљиве z и раван функције $F(z)$ где је у првој равни положај једне тачке дефинисан координатама x и y, а у другој равни координатама P и Q, очевидно је да свакој тачки z у првој равни одговара по једна тачка $F(z)$ у другој равни. То је очевидно и с тога што кад је дата тачка z ове равни, она има своје x и y; пошто P и Q зависе од x и y, то ако у њима сменимо x и y координатама тачке z, P и Q добијају одређене вредности и ако те вредности обележимо у другој равни, имаћемо одговарајућу тачку $F(z)$.

Питање је сад како се, кад је дата функција $F(z)$ и положај тачке z у првој равни, може одредити положај одговарајуће тачке у другој равни. Задатак се очевидно своди на то да се одреде изрази P и Q за дату функцију $F(z)$. Та се одредба може извршити на разне начине од којих ће бити подеснији час један час други, према природи дате функције $F(z)$. Најчешћи су од тих начина ови:

1° НАЧИН

Треба извршити оне операције које су исказане самим обликом дате функције $F(z)$ и по свршетку тих операција приписати за себе чланове без i, а за себе чланове са i; први збир чланова биће P а други Q за дату функцију $F(z)$

Примери:

1. Наћи P и Q за функцију
$$F(z) = z^2$$

Овди је
$$F(z) = z^2 = (x+yi)^2 = (x^2-y^2) + 2xyi$$
па је према томе
$$P = x^2-y^2$$
$$Q = 2xy$$

2. Наћи P и Q за функцију
$$F(z) = \frac{1-z}{z^2}$$

Овди је
$$F(z) = \frac{1-z}{z^2} = \frac{1-(x+yi)}{(x+yi)^2} = \frac{1-(x+yi)}{(x^2-y^2)+2xyi} =$$
$$= \frac{x^2-y^2-2xyi-x^3+xy^2-2x^2yi-x^2yi+y^3i+2xy^2}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$
$$= \frac{x^2-y^2-x^3+xy^2+2xy^2}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} - \frac{2xy+2x^2y-y^3+x^2y}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}\, i$$

па је овди
$$P = \frac{x^2-y^2-x^3+3xy^2}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$
$$Q = -\frac{2xy+3x^2y-y^3}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

3. Одредити P и Q за функцију
$$F(z) = \log z$$

Овди је
$$F(z) = \log z = \log(x+yi) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \theta i + 2k\pi i$$
па је
$$P = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$
$$Q = \theta + 2k\pi$$

4. Одредити P и Q за функцију
$$F(z) = \sin z$$

Овде је
$$F(z) = \sin z = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i} = \frac{e^{(x+yi)i}-e^{-(x+yi)i}}{2i} =$$
$$= \frac{e^{xi-y}-e^{-xi+y}}{2i} = \frac{\frac{e^{xi}}{e^{y}}-\frac{e^{-xi}}{e^{-y}}}{2i} = \frac{e^{xi}e^{-y}-e^{-xi}e^{y}}{2i} =$$
$$= \frac{(\cos x+i\sin x)e^{-y}-(\cos x-i\sin x)e^{y}}{2i} =$$
$$= \frac{\cos x\, e^{-y}-\cos x\, e^{y}+i[\sin x\, e^{-y}+\sin x\, e^{y}]}{2i} =$$

$$=\frac{\sin x(e^{-y}+e^{y})}{2}+i\,\frac{\cos x(e^{y}-e^{-y})}{2}$$

и према томе је

$$P=\frac{\sin x(e^{-y}+e^{y})}{2}$$

$$Q=\frac{\cos x(e^{y}-e^{-y})}{2}$$

2° <u>Начин</u>

Изврши се са функцијом $F(z)$ таква једна операција после које се лакше раздвајају реални и имагинарни део. Из добијених резултата одређује се тада P и Q за првобитну функцију.

Примери:

1. Одредити P и Q за функцију

$$F(z)=\sqrt{z}$$

Ако ставимо

$$\sqrt{z}=P+Qi$$

па обе стране квадрирамо добија се

$$z=P^2-Q^2+2PQi$$

ако на левој страни сменимо z са $x+yi$ добија се

$$z=x+yi=P^2-Q^2+2PQi$$

ако уједначимо на левој и десној страни чланове без i и чланове са i, добија се

$$P^2-Q^2=x$$

$$2PQ=y$$

На тај начин имамо две једначине из којих се могу наћи две непознате P и Q.

2. Одредити P и Q за функцију

$$F(z)=\log z$$

Имаћемо

$$\log z=\log(x+yi)=P+Qi$$

а одатле

$$x+yi=e^{P+Qi}=e^{P}\cdot e^{Qi}=$$

$$=e^{P}(\cos Q+i\sin Q)$$

Према томе мора бити

$$e^{P}\cos Q=x$$

$$e^{P}\sin Q=y$$

Одатле је

$$e^{2P}=x^2+y^2$$

или

$$2P=\log(x^2+y^2)$$

или најзад

$$P=\frac{\log(x^2+y^2)}{2}$$

Исто тако из предњих једначина је

$$\operatorname{tg} Q=\frac{y}{x}$$

или

$$\Theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

3. Одредити P и Q за функцију

$$F(z) = e^{z}$$

Имаћемо

$$e^{z} = P + Qi$$

или

$$e^{x}(\cos y + i\sin y) = P + Qi$$

а одатле

$$P = e^{x}\cos y$$

$$Q = e^{x}\sin y$$

3° Начин

Знајући да је дата функција $F(z)$ извесна комбинација једне функције $\varphi(z)$ за коју би знали реални и имагинарни део може се у великом броју случајева одредити P и Q и за саму дату функцију $F(z)$.

Примери:

I Знајући да је

$$F(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

и да је

$$\varphi(z) = \varphi(x+yi) = M + Ni$$

где су M и N познати и дати нађи P и Q за функцију $F(z)$. Имаћемо

$$F(z) = F(x+yi) = \frac{1}{\varphi(x+yi)} = \frac{1}{M+Ni}$$

Ако бројитељ и именитељ помножимо са $M-Ni$ добија се

$$F(z) = \frac{M-Ni}{M^2+N^2} = \frac{M}{M^2+N^2} - \frac{Ni}{M^2+N^2}$$

Према томе имаћемо да је за дату функцију

$$P = \frac{M}{M^2+N^2}$$

$$Q = -\frac{N}{M^2+N^2}$$

II Одредити P и Q за функцију

$$F(z) = e^{\varphi(z)}$$

Знајући да је

$$\varphi(z) = M + Ni$$

Имаћемо

$$F(z) = F(x+yi) = e^{\varphi(x+yi)} = e^{M+Ni} = e^{M}\cdot e^{Ni} =$$

$$= e^{M}(\cos N + i\sin N)$$

Према томе је

$$P = e^{M}\cos N$$

$$Q = e^{M}\sin N$$

III. Одредити P и Q за функцију

$$F(z) = \log \varphi(z)$$

знајући да је

$$\varphi(z) = M + Ni$$

имаћемо

$$F(z) = F(x+yi) = \log \varphi(x+yi) = \log(M+Ni) =$$
$$= \frac{1}{2}\log(M^2+N^2) + i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{N}{M} + 2k\pi i$$

Према томе је

$$P = \frac{1}{2}\log(M^2+N^2)$$
$$Q = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{N}{M} + 2k\pi$$

4° Начин

Сменити правоугле координате x и y поларним координатама ρ и θ.

Примери:

1. Тражи се P и Q за функцију

$$F(z) = z^m$$

Знамо да је у поларним координатама ако је ρ и θ модуо и аргуменат имагинарне количине

$$z = \rho e^{\theta i}$$

Према томе биће

$$F(z) = z^m = \rho^m e^{m\theta i} = \rho^m(\cos m\theta + i \sin m\theta)$$

и према томе је

$$P = \rho^m \cos m\theta$$
$$Q = \rho^m \sin m\theta$$

Ако нам је стало затим да се врати на координате x и y, треба сменити

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

2. Одредити P и Q за функцију

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

Ако сменимо

$$z = \rho e^{\theta i}$$

добијамо

$$F(z) = a_0 + a_1 \rho e^{\theta i} + a_2 \rho^2 e^{2\theta i} + \cdots + a_n \rho^n e^{n\theta i} =$$
$$= a_0 + a_1 \rho(\cos\theta + i\sin\theta) + a_2\rho^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \cdots + a_n \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Отуда

$$P = a_0 + a_1 \rho \cos\theta + a_2 \rho^2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \rho^n \cos n\theta$$
$$Q = a_1 \rho_1 \sin\theta + a_2 \rho^2 \sin 2\theta + \cdots + a_n \rho^n \sin n\theta$$

5° Начин

Знајући реалне и имагинарне делове неколико функција и сменивши у датој функцији у случају кад је ова каква комбинација поменутих функција дешава се да се могу пораздвајати реални и имагинарни делови и тиме добити тражено P и Q. Овај је начин згодан за збирове, разлике, производе и количнике више функција.

Веза између кретања тачке z у њеној равни и кретања тачке $F(z)$ у њеној равни.

За тачку

$$z = x + yi$$

каже се да се креће у својој равни по једној одређеној путањи, ако се она креће тако да су у сваком тренутку у томе кретању x и y везани једном сталном датом релацијом

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad 1)$$

Релација 1) представља тада очевидно једначину саме путање тачке z. Тако н. пр. казати да тачка z описује круг полупречника r са центром у почетку значи једначини

$$z = x + yi$$

придодати једначину

$$x^2+y^2-z^2=0$$

Тако исто у поларним координатама казати да тачка z описује једну дату путању значи једначини

$$z=\rho e^{\theta i}$$

која дефинише тачку z додати једначину

$$\varphi(\rho,\theta)=0$$

која није ништа друго него једначина путање.

Уочимо сада функцију $F(z)$. Нека су P и Q њен реални и имагинарни део тако да је

$$F(z)=P+Qi$$

Казати да тачка $F(z)$ описује у својој равни једну одређену путању значи једначини 2) додати једну једначину

$$\Phi(P,Q)=0$$

која дефинише саму ту путању.

Како је напред казано да свакој тачки z у њеној равни одговара одређен положај тачке $F(z)$ у равни функције $F(z)$, то је очевидно да кад се тачка z буде кретала у својој равни по једној одређеној путањи C, мораће се и одговарајућа тачка $F(z)$ кретати у својој равни по једној таквој утврђеној путањи D. Очевидно је такође да путања D зависи од путање C. Да би одредили начин те зависности треба нам решити овај задатак: Знајући путању C тачке z у њеној равни одредити путању D тачке $F(z)$ у равни функције $F(z)$. Задатак се решава на један од ових начина:

1° Начин.

Нека је путања C дата у облику

$$\varphi(x,y)=0$$

и претпоставимо да смо за функцију $F(z)$ одредили одговарајуће P и Q као функције од x и y. Тада из три једначине

$$\varphi(x,y)=0$$
$$P=\psi_1(x,y)$$
$$Q=\psi_2(x,y)$$

можемо елиминисати две непознате x и y; резултат ће бити извесна релација

$$\Phi(P,Q)=0$$

која представља путању тачке $F(z)$.

Примери:

1. Кад се тачка z буде кретала по једној правој C, у каквој ће се путањи кретати тачка z^2.

Овде је

$$F(z)=z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$$

па је према томе

$$P=x^2-y^2 \qquad 3)$$

$$Q=2xy \qquad 4)$$

Ако је једначина праве C

$$ax+by+c=0 \qquad 5)$$

онда елиминишући x и y из једначина 3), 4) и 5) добиће се извесна једначина другог степена по P и Q и та једначина дефинише тражену путању.

2. Ако се тачка z креће по параболи

$$y=x^2 \qquad a)$$

по каквој ће се линији кретати тачка $F(z)=z^2$

Овде је

$$P=x^2-y^2$$

$$Q=2xy \qquad б)$$

па елиминацијом x и y из а) и б) имамо

$$P=\left(\sqrt[3]{\frac{Q}{2}}\right)^2-\left(\sqrt[3]{\frac{Q}{2}}\right)^4$$

и то је једначина тражене путање.

2° Начин

Претпоставимо да је једначина путање тачке z дата у поларним координатама

$$\varphi(\rho,\theta)=0$$

Ако у функцији $F(z)$ сменимо

$$z=\rho e^{\theta i}$$

па одредимо одговарајуће изразе за P и Q као функције од ρ и θ, имаћемо н.пр.

$$P=\psi_1(\rho,\theta)$$

$$Q=\psi_2(\rho,\theta)$$

Елиминацијом ρ и θ из три једначине

$$\varphi(\rho,\theta)=0$$

$$P=\psi_1(\rho,\theta)$$

$$Q=\psi_2(\rho,\theta)$$

добија се једна релација између P и Q и та релација дефинише тражену путању.

Примери:

1. Одредити по каквој ће се путањи кретати тачка z^2, кад се тачка z креће по архимедовој спирали

$$\rho = k\theta$$

Имамо

$$F(z) = z^2 = \rho^2 e^{2\theta i} = \rho^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

и према томе

$$P = \rho^2 \cos 2\theta$$
$$Q = \rho^2 \sin 2\theta$$

чему још треба додати

$$\rho = k\theta$$

и елиминацијом променљивих ρ и θ из ових трију једначина добијамо једначину која дефинише путању.

2. Одредити по каквој се путањи креће тачка z^n, кад се тачка z креће по хиперболичној спирали

$$\rho = \frac{a}{\theta}$$

Овде је

$$P = \rho^n \cos n\theta$$
$$Q = \rho^n \sin n\theta$$

па заменом ρ из прве у последњим двема једначинама, добијамо

$$P = \frac{a^n}{\theta^n} \cos n\theta$$

$$Q = \frac{a^n}{\theta^n} \sin n\theta$$

и то су параметарске једначине тражене путање.

3° Начин.

Претпоставимо да је једначина путање C дата у параметарском облику н. пр.

$$x = \lambda(t)$$
$$y = \mu(t)$$

где су λ и μ две дате функције. Претпоставимо да смо одредили P и Q тако да је н. пр.

$$P = \psi_1(x, y)$$
$$Q = \psi_2(x, y)$$

Ако у овим једначинама сменимо x и y њиним вредностима израженим као функције параметра t добијамо н. пр.

$$P = f_1(t)$$

$$Q = f_2(t)$$

и те једначине се могу сматрати као параметарске једначине тражене путање.

Н. пр. одредити путању тачке z^2 кад тачка z описује елипсу чије су параметарске једначине

$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t$$

Овди је

$$P = x^2 - y^2$$
$$Q = 2xy$$

па кад сменимо x и y добијамо

$$P = a^2\cos^2 t - b^2\sin^2 t$$
$$Q = 2ab\cos t\sin t$$

и то су тражене параметарске једначине путање. Ако би хтели једначину путање у облику релације између P и Q, требало би само из последњих једначина елиминисати t.

Веза између затворености или отворености путања тачака z и $F(z)$.

За тачку z каже се да је у својој равни описала једну затворену путању, ако је она пошавши од једне тачке z_0 и пошто буде описала ма какве криве линије, врати опет на исту тачку z_0, другим речима то ће бити кад се њена почетна и завршна вредност поклапају. За то време тачка $F(z)$ описује своју путању и при том се може уочити ово двоје:

1. Може се десити да кад тачка z опише једну контуру у својој равни, тачка $F(z)$ такође опише једну контуру у својој равни;
2. Може се десити да кад тачка z опише контуру у својој равни, тачка $F(z)$ не

описује контуру у својој равни већ једну отворену путању тј. известан лук код кога се почетна и завршна тачка не поклапају.

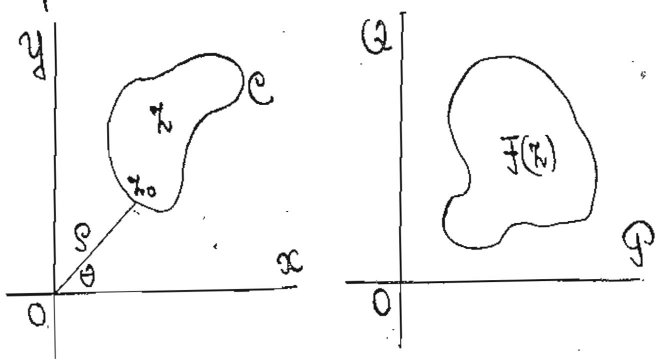
Хоће ли се имати 1. или 2. случај зависи не само од природе функције $F(z)$ већ и од области равни z у којој контура буде описана.

Примери:

1° <u>пример</u>: Нека је дата функција

$$F(z) = e^{z}$$

Претпоставимо да z опише ма какву контуру C почев од једног положаја z_0 чије су координате ρ_0 и θ_0. Ако



је контура затворена па ма где у равни она била, ρ и θ полазе од вредности ρ_0 и θ_0, расту и опадају на разне начине и опет се враћају на исте вредности, изузимајући случај кад контура обухвата почетак јер тада се ρ враћа опет на првобитну вредност ρ_0, а θ има у том тренутку вредност $\theta_0 \pm 2\pi$. Функција $F(z)=e^{z}$ почевши од првобитне вредности

$$e^{z_0} = e^{\rho_0 e^{\theta_0 i}} \qquad 1)$$

и затим, кад је z_0 дошло у свој првобитни положај, e^{z} се враћа или на вредност 1) или на вредност

$$e^{\rho_0 e^{(\theta_0 \pm 2\pi) i}} \qquad 2)$$

Према томе да ли z описује контуру која не обухвата или обухвата почетак. Вредност 2) пише се у облику

$$e^{\rho_0 e^{\theta_0 i} \cdot e^{\pm 2\pi i}} = e^{\rho_0 e^{\theta_0 i}} = e^{z_0} \qquad 3)$$

Према томе и завршне тачке при кретању функције $F(z)$ поклапају се што значи да кадгод тачка z описује ма какву контуру у својој равни, одговарајућа путања тачке $F(z)$ биће увек контура.

2° <u>пример</u>. Нека је дата функција

$$F(z) = z^{\lambda}$$

где је λ ма каква константа. Пустимо да z опише затворену путању почев од вредности

$$z_0 = \rho_0 e^{\theta_0 i}$$

и разликујмо ова два случаја:

1) случај: претпоставимо да путања не обухвата почетак. Тада ће очевидно почетна и завршна вредност поклапати се са ρ_0 и θ_0; према томе очевидно је да ће се и почетна и завршна вредности функције z^λ ма какво било λ поклапати се са вредношћу

$$z_0^\lambda = \rho_0^\lambda e^{\lambda\theta_0 i}$$

што значи да тачка $F(z)$ описује затворену путању.

2) случај: претпоставимо да путања тачке z обухвата почетак. Тада ће почетна вредност за z на тој путањи бити

$$z_0 = \rho_0 e^{\theta_0 i}$$

а завршна вредност биће

$$z = \rho_0 e^{(\theta_0+2\pi)i}$$

Према томе почетна вредност функције је $F(z)$ биће

$$F(z_0) = z_0^\lambda = \rho_0^\lambda e^{\lambda\theta_0 i} \qquad 4)$$

а завршна вредност биће

$$F(z_1) = z_1^\lambda = \rho_0^\lambda e^{(\theta_0+2\pi)i\lambda} = \rho_0^\lambda \cdot e^{\lambda\theta_0 i} \cdot e^{2\pi\lambda i}$$

или

$$F(z_1) = F(z_0) \cdot e^{2\pi\lambda i}$$

Ако је λ ма какав цео позитиван или негативан број, имаћемо да је

$$e^{2\pi\lambda i} = 1$$

и према томе

$$F(z_1) = F(z_0)$$

Тада се дакле почетна и завршна вредност функције поклапају што значи да и функција описује контуру. Међутим ако λ није цео број, онда ће израз $e^{2\pi\lambda i}$ имати вредност различиту од 1 коју ако означимо са μ добијамо

$$F(z_1) = \mu F(z_0) \qquad 5)$$

та једначина показује да се почетна и завршна вредност функције не поклапају што значи да функција описује отворену путању.

Из тога се изводи ово: кад

је дата функција z^λ онда: а) ако је λ ма какав цео број, једној ма каквој контури у равни z одговараће увек једна контура у равни $F(z)$; б) ако λ није цео број т.ј. ако је то реалан рационалан или ирационалан, или имагинаран број, онда: ако путања тачке z не опкољава почетак, тачка $F(z)$ описује контуру, на против ако путања тачке z опкољава почетак, тачка $F(z)$ описаће у овом случају отворену путању.

У овоме се већ види да отвореност и затвореност путање зависи не само од облика већ и од самог места где се налази тачка z. У исто време из овога се види и овај важан закључак: функција z^λ има ту особину да ако тачка z опише ма какву контуру која опкољава почетак завршна тачка одговарајуће путање функције $F(z)$ добија се кад се почетна вредност те функције помножи бројем

$$\mu = e^{2\pi\lambda i}$$

3° <u>пример</u>: нека је дата функција

$$F(z) = \log z$$

ако z опише контуру која не опкољава почетак, почетна вредност z биће

$$z_0 = \rho_0 e^{\theta_0 i}$$

а завршна вредност биће

$$z_0 = z_1 ,$$

према томе почетна вредност функције биће

$$F(z_0) = \log z_0 = \log(\rho_0 e^{\theta_0 i})$$

а завршна вредност биће

$$F(z_1) = \log z_1 = \log(\rho_0 e^{\theta_0 i})$$

те се две вредности поклапају и према томе путања тачке $F(z)$ биће контура. Претпоставимо сад да контура тачке z опкољава почетак; тада ће почетна вредност z бити

$$z_0 = \rho_0 e^{\theta_0 i}$$

а завршна

$$z_1 = \rho_0 e^{(\theta_0 + 2\pi) i}$$

почетна вредност саме функције биће

$$F(z_0) = \log z_0 = \log \rho_0 + \theta_0 i$$

а њена завршна вредност биће

$$F(z_1) = \log z_1 = \log \rho_0 + (\theta_0 \pm 2\pi) i = F(z_0) \pm 2\pi i$$

Исти би резултат имали и да смо написали

$$F(z) = \log \rho + \theta i + 2k\pi i$$

Ово би се $2k\pi i$ јавило и у почетној и у завршној вредности, али у завршној имали би једно $2\pi i$ више што долази отуда јер се θ обртањем око почетка увећало за 2π. Из последњег обрасца

$$F(z_1) = F(z_0) \pm 2\pi i$$

види се да се почетна и завршна вредност не поклапају и према томе путања тачке $F(z)$ биће отворена. А из свега тога види се овај закључак: функција

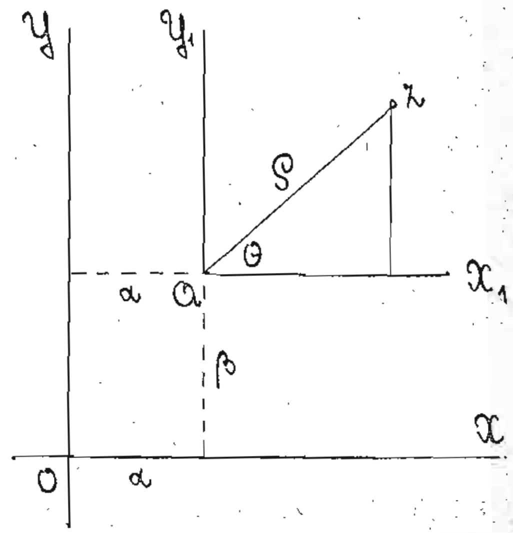
$$F(z) = \log z$$

има ту особину да ако z опише ма какву контуру која не опкољава почетак и сама ће функција описати једну контуру; на против ако путања тачке z опкољава почетак, онда функција описује отворену путању. Завршна тачка те путање добија се кад се почетној вредности дода или одузме $2\pi i$ према томе у коме је смислу тачка z описала своју контуру.

4° <u>пример</u>: Нека је дата функција

$$F(z) = (z-a)^{\lambda}$$

где су a и λ ма каква два стална реална или имагинарна броја. Покажимо најпре како се преноси почетак из O у тачку a. Нека је у првом систему



$$z = x + yi$$

Означимо у равни тачку a чије су координате α и β тако да је

$$a = \alpha + \beta i$$

и означимо координате тачке z у новом систему са x' и y', па је очевидно

$$x = x' + \alpha \qquad y = y' + \beta$$

Заменом у z оно постаје

$$z = (x'+\alpha) + (y'+\beta)i = (\alpha+\beta i) + (x'+y'i)$$

Прва заграда је a а друга заграда представља вредност z_a у новом систему. Ако ту вредност означимо са z', последњи образац даје

$$z = z' + a$$

и то је образац за пренешење почетка у тачку a.

Ако са ρ и θ означимо потег и аргуменат у новом систему, имаћемо

$$z' = \rho e^{\theta i}$$

према томе пренети почетак у a значи у једначини где год фигурише z сменити па са

$$z = a + \rho e^{\theta i}$$

где ρ и θ означавају потег и аргуменат у новом систему. Ако нам нису потребни ρ и θ, онда бисмо трансформацију извршили са

$$z = a + z'$$

где је z' вредност за z у новом систему.

Вратимо се сад функцији

$$F(z) = (z-a)^{\lambda}$$

Ако почетак пренесемо у a, функција постаје

$$F(z) = F(a+z') = z'^{\lambda}$$

Међутим ову смо функцију тако преиспитали и према ономе што смо нашли у примеру 2° имаћемо овај резултат: кад год тачка z опише у својој равни какву контуру која не опкољава тачку

$$z = a$$

горња функција ће такође описати једну контуру. Међутим ако контура коју опише тачка z опкољава тачку a, онда: a) ако је λ ма какав цео број, функција ће такође описати контуру; b) ако λ није цео број, функција ће описати отворену путању. Почетна и завршна тачка те путање разликоваће се чиниоцем

$$\mu = e^{2\pi\lambda i}$$

Примедба: Очевидно је да ће то исто бити и са функцијом $A(z-a)^{\lambda}$ где је A ма каква константа, само што ће се почетна и завршна вредност разликовати за $2\lambda\pi i$.

5° пример: Нека је дата функција

$$F(z) = \log(z-a)$$

ако пренесемо почетак у тачку a, функција постаје

$$F(z) = F(a+z') = \log z'$$

Према ономе казаном у примеру 3°. добијају се ови резултати: Кад z описује у својој равни затворену путању функција $F(z)$ ће описивати затворену или отворену путању према томе да ли путања тачке z не опкољава или опкољава тачку $z=a$. Осим тога, завршна тачка ове путање разликује се од почетне сабирком $\pm 2\pi i$.

Из ових примера већ се може склопити бесконачно много функција код којих ћемо знати однос између једне и друге путање. Пре свега очевидно је да ако две функције описују затворене путање, онда и њихов збир, разлика, производ, количник, као и сви њихови цели степени такође описују затворене путање. Из тога се н. пр. непосредно изводи ово: ако једна функција описује затворену путању, онда та колико ју пута степеновали или множили сталним бројевима и тако добијене резултате сабирали, или одузимали, добијени резултати биће функције које ће опет описивати затворену путању. Према томе једна ма који полином по z н. пр.

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

описиваће увек затворену путању кадгод z у својој равни опише затворену путању. Тај ће случај бити очевидно и са функцијом која се може развити у Маклоренов ред

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

нарочито претпостављајући да кад z описује своју затворену путању, овај ред не престаје бити конвергентан.

тако, зна се да кад се функције

$$e^z \quad e^{z^2} \quad \sin z \quad \cos z \quad \ldots$$

могу развити у Маклоренов ред или у Тејлоров ред

$$F(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots$$

конвергентан за све вредности z. Према томе све те функције као и њихове комбинације добивене сабирањем, одузимањем, множењем делењем или степеновањем имају ту особину да кадгод z опише у својој равни затворену путању и саме описују затворене путање.

Са друге стране тако исто могућно је склопити бесконачно много функција које ће имати ту особину да кад z опише затворену путању око једне или више утврђених тачака, функција описује отворену путању у својој равни. Тако н. пр. ма каква комбинација добијена сабирањем или одузимањем, множењем делењем, степеновањем или корењењем из каквог израза

$$z^{\frac{p}{q}}$$

или

$$(z-a)^{\frac{p}{q}}$$

где се претпоставља да $\frac{p}{q}$ није цео број, представљаће функцију која ће описивати отворену путању кад се z обрне око почетка или тачке a. Међутим овде може бити и изузетака. Ако би се случајно десило да у комбинацијама случајно нестане у резултату разломљеног степена. Тако исто за све комбинације које се из функције $\log z$ или $\log(z-a)$ добијају помоћу алгебарских операција представљаће функцију са отвореном путањом.

Као специјалан случај навешћемо циклометриске функције:

$$\operatorname{arc\,sin} z, \ \operatorname{arc\,cos} z, \ \operatorname{arc\,tg} z \ \ \operatorname{arc\,cotg} z$$

које се, као што је познато из више алгебре, своде на алгебарске комбинације логаритама. Према томе да ли дата функција, ма каква била путања тачке z, у својој равни, описује увек или не описује увек и сама затворену путању у својој равни, функције се деле у две велике класе:

1° <u>класа</u>: <u>униформне функције</u> код којих је путања увек затворена, и

2° <u>класа</u>: <u>неуниформне</u> или <u>мултиформне функције</u> које имају ту особину да кад z описује затворену путању око извесних тачака у својој равни, одговарајућа путања функције је отворена.

Тако н. пр. сви полиноми по z и све функције које се могу развити у Маклоренов или Тејлоров ред који би био конвергентан за све вредности z_a, као и количници тих функција биле би униформне функције. На против функције $\sqrt{z}$, $\sqrt{z-a}$, $\sqrt[n]{z-a}$, $\sqrt[m]{P(z)}$ где је $P(z)$ ма какав полином по z_y, $\log z$, $\log(z-a)$, $(z-a)^\lambda$ где је λ ирационалан број, као и разноврсне алгебарске комбинације ових и њима сличних израза биле би мултиформне функције.

Пример: Испитати какву путању описује функција $\operatorname{arc\,cos} z$.

Ако ставимо

$$\operatorname{arc\,cos} z = u$$

онда је одатле

$$z = \cos u$$

или

$$z = \frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2}$$

Ако средимо ову једначину имамо

$$e^{ui} + e^{-ui} = 2z$$

или одатле

$$e^{2ui} + 1 = 2z e^{ui}$$

или

$$e^{2ui} - 2z e^{ui} + 1 = 0$$

Одавде је

$$e^{ui} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

а одатле

$$ui = \log\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

или

$$u = \frac{1}{i} \log\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

Према томе је

$$\arccos z = \frac{1}{i}\log(z \pm \sqrt{z^2-1})$$

Одатле видимо да функција $\arccos z$ описује увек отворену путању, ма каква била путања тачке z.

Из предњег видимо да је

$$u = \frac{1}{i}\log(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$u = \frac{1}{i}\log(z-\sqrt{z^2-1})$$

Пошто је производ двају израза под логаритамским знаком раван јединици, то се њихови логаритми разликују само у знаку, зато је

$$u = \pm\frac{1}{i}\log(z+\sqrt{z^2-1})$$

О сингуларитетима функција

За једну тачку

$$z=a$$

У равни променљиве z каже се да је обична тачка какве функције $F(z)$ ако она задовољава ове услове:

1.) да функција има само једну и то коначну и одређену вредност за $z=a$;

2.) да, ако се z обрне око тачке a, одговарајућа путања функције буде затворена.

Тако имамо за функцију

$$F(z) = e^z$$

или

$$F(z) = z^m$$

где је m цео број, свака тачка у равни z јесте обична тачка.

Свака тачка у равни z која не задовољава било један или други од ова два услова назива се сингуларна тачка или сингуларитет функције $F(z)$. Тако н. пр. за функцију

$$F(z)=\frac{1}{z-a}$$

тачка

$$z=a$$

биће сингуларитет, јер за $z=a$ функција постаје бескрајна. За функцију

$$F(z)=\sin\frac{1}{z-a}$$

такође ће тачка $z=a$ бити сингуларитет јер је функција неодређена за $z=a$. За функцију

$$\log(z-a) \quad и \quad \sqrt{z-a}$$

такође је

$$z=a$$

сингуларитет, јер кад се z обрне око те тачке, путања функције је отворена.

Већ из самих примера види се да једна тачка може бити сингуларна за једну функцију из разноврсних разноврсних разлога. Према појединостима којима је она везана, разликују се сингуларне тачке према својој природи. Сингуларитети са којима се често има посла били би ови: 1) полови функција; 2) критичне тачке функција и 3) есенцијалне тачке функција. Ми ћемо редом прећи особине ових трију врста сингуларитета.

1° Полови.

За једну тачку

$$z=a$$

каже се да је пол функције $F(z)$ ако за $z=a$ функција постаје бескрајно велика а међутим њена реципрочна вредност т.ј. $\frac{1}{F(z)}$ постаје равна нули за $z=a$ т.ј. има $z=a$ као обичну тачку. Тако н. пр. функција

$$F(z)=\frac{2-z}{z-1}$$

има као пол тачку

$$z=1$$

Кад футуришe разлика $z-a$ од

које такав пол произлази пол је $z=a$. Н. пр. за функцију

$$F(z) = \frac{3}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2}$$

тачка $z=2$ биће пол другог реда. За функцију

$$F(z) = tg\, z$$

полови су

$$\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2},\ \dots$$

дакле има бескрајно много полова и сви су реални. За функцију

$$F(z) = \frac{1}{1-e^z}$$

полови су

$$0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$$

дакле има их бескрајно много, од којих је један реалан а остали имагинарни.

Одређивање полова за функције је лака ствар. Под <u>редом</u> једног пола $z=a$ разуме се највиши степен на коме фигурише разлика $z-a$ од које такав пол произлази.

2° <u>Критичне тачке.</u>

За једну тачку $z=a$ каже се да је <u>критична сингуларна тачка</u> или критични сингуларитет функције $F(z)$ ако, кад z опише ма какву затворену путању око $z=a$, функција описује отворену путању у својој равни. Према томе егзистенција критичне тачке јесте оно што чини да је функција $F(z)$ мултиформна. Тако н. пр. за функцију $\sqrt{z-a}$ или за $(z-a)^\lambda$ где λ у опште није цео број или за $\log(z-a)$ тачка $z=a$ биће критична тачка.

Међутим критичних тачака можемо имати две врсте:

I Има таквих критичних тачака да ако се z један пут обрне око $z=a$, путања је одговарајуће функције отворена, али ако се z обрне неколико пута узастопце око $z=a$, путања се функције $F(z)$ затвара. Уочимо као пример функцију

$$\sqrt{z-a}$$

и пренесимо почетак у тачку a, што значи ставити

$$z = a + \rho e^{\theta i}$$

Пустимо да се z обрне једанпут око новог почетка што значи увеличати θ за 2π. Почетна вредност је била

$$z_0 = a + \rho_0 e^{\theta_0 i}$$

а завршна биће

$$z_1 = a + \rho_0 e^{(\theta_0 + 2\pi) i}$$

Према томе почетна вредност функције биће

$$F(z_0) = \sqrt{\rho_0}\, e^{\frac{\theta_0 i}{2}}$$

а завршна

$$F(z_1) = \sqrt{\rho_0}\, e^{\frac{\theta_0 i}{2}} e^{\pi i}$$

Пошто је

$$e^{\pi i} = -1$$

то је

$$F(z_1) = -F(z_0)$$

дакле се путања не затвара. Али ако пустимо да се z обрне још једанпут око $z=a$, завршна вредност за z биће

$$z_2 = a + \rho_0 e^{(\theta_0 + 4\pi) i}$$

Према томе завршна вредност функције после другог обртања биће

$$F(z_2) = \sqrt{\rho_0}\, e^{\frac{\theta_0 i}{2}} e^{2\pi i}$$

а како је

$$e^{2\pi i} = 1$$

то је

$$F(z_2) = F(z_0)$$

- завршна вредност после другог обртања поклапа се са почетном што значи да функција $F(z)$ описује затворену путању. Према томе функција $\sqrt{z-a}$ има ту особину да ако се z обрне један пут око $z=a$ функција описује отворену путању, али ако се z обрне два пут око $z=a$, та се путања затвара.

Узмимо сад општији случај: посматрајмо функцију

$$F(z) = (z-a)^{\frac{p}{q}}$$

где су p и q два цела броја, али p није дељиво са q. Преместимо почетак у тачку a т.ј. ставимо

$$z = a + \rho e^{\theta i}$$

и пустимо да се z обрне k пута око тачке a. Почетна вредност за z биће

$$z_0 = a + \rho_0 e^{\theta_0 i}$$

а завршна

$$z_1 = a + \rho_0 e^{(\theta_0 + 2k\pi)i}$$

Према томе почетна вредност функције биће

$$F(z_0) = \rho_0^{\frac{p}{q}} e^{\frac{p\theta_0 i}{q}}$$

а завршна

$$F(z_1) = \rho_0^{\frac{p}{q}} e^{\frac{p\theta_0 i}{q}} e^{\frac{2pk\pi i}{q}}$$

Ако ставимо узастопце

$$k = 1, 2, 3, \cdots q-1$$

израз

$$e^{\frac{2pk\pi i}{q}}$$

не може нигде бити раван јединици, јер да би то било треба да је

$$\frac{kp}{q}$$

цео број, што није случај за горње вредности. На против ако је

$$k = q$$

$\frac{kp}{q}$ постаје цео број, па дакле $e^{\frac{2kp\pi i}{q}}$ постаје јединица па у том случају

$$F(z_1) = F(z_0)$$

-почетна и завршна вредност функције поклапају се и путања функције је затворена. Из тога се види да функција

$$F(z) = (z-a)^{\frac{p}{q}}$$

има ту особину да ако се z обрне q пута око тачке $z=a$ путања се функције затвара, а ако је број обртања мањи од q путања остаје отворена. Овакве тачке које имају ту особину да је путања функције затворена или отворена према броју обртања које је учинила тачка z око $z=a$ називају се алгебарске критичне тачке за ту функцију. Број који показује колико треба обрта око a па да се путања затвори назива се редом такве алгебарске критичне тачке. Као што се из горњег примера види ред такве једне тачке раван је имениоцу броја којим је степенован израз $z-a$ у функцији коју посматрамо.

Примедба: Разне вредности $F(z_0)$, $F(z_1)$, $F(z_2)$, $\cdots$ $F(z_{k-1})$ на које се наилази при том узастопном обртању тачке z око a нису ништа друго до разне детерминације функције $F(z)$. Тако н. пр. за функцију $\sqrt{z-a}$ имали смо $F(z_0) = \sqrt{z-a}$, $F(z_1) = \sqrt{z-a}$ а то су као што знамо две одредбе које може имати та функција.

II. Има тачака $z=a$ које су таке да ма колико се пута обртало z око тачке a путања се функције $F(z)$ никако не затвара. Уочимо као пример функцију

$$F(z)=(z-a)^{\lambda}$$

где је λ ма какав ирационалан број. Пренесимо почетак у a т.ј. ставимо

$$z=a+\rho e^{\theta i}$$

и пустимо да се z обрне k пута око новог почетка. Почетна вредност биће

$$z_0=a+\rho_0 e^{\theta_0 i}$$

а завршна

$$z_1=a+\rho_0 e^{(\theta_0+2k\pi)i}$$

Према томе почетна вредност функције биће

$$F(z_0)=\rho_0^{\lambda} e^{\lambda\theta_0 i}$$

а завршна

$$F(z_1)=\rho_0^{\lambda} e^{\lambda\theta_0 i} e^{2k\lambda\pi i}$$

Пошто је λ ирационалан број, производ $k\lambda$ не може никада бити цео број, па ни $e^{2k\lambda\pi i}$ не може бити равно јединици. то значи да се завршна вредност $F(z_1)$ не може никада поклопити са почетном вредношћу $F(z_0)$ па ма колико се пута обрнуло z око a. Из овога се у осталом види и то да се разне одредбе и детерминације функције $(z-a)^{\lambda}$ добијају узастопним множењем првобитне детерминације факторима: $e^{2\lambda\pi i}, e^{4\lambda\pi i}, \ldots$

Уочимо као други пример функцију

$$F(z)=\log(z-a)$$

Ако извршимо смену

$$z=a+\rho e^{\theta i}$$

функција постаје

$$F(z)=\log\rho+\theta i$$

Пустимо да се z обрне k пута око новог почетка a. Његова почетна вредност биће

$$z_0=a+\rho_0 e^{\theta_0 i}$$

а завршна

$$z_1=a+\rho_0 e^{(\theta_0+2k\pi)i}$$

Према томе почетна вредност функције биће

$$F(z_0) = \log \rho_0 + \theta_0 i$$

а завршна

$$F(z_1) = \log \rho_0 + (\theta_0 + 2k\pi) i = F(z_0) + 2k\pi i$$

Ма колика вредност била k никад се завршна вредност неће поклопити са почетном. Осим овога види се да се разне детерминације функције $\log(z-a)$ добијају кад се једну од њих дода или одузме $2\pi i, 4\pi i, 6\pi i, \dots$

Овакве тачке које имају ту особину да на колико се пута z обрнуло око a путања се функције $F(z)$ никад не затвара називају се <u>трансцеденте критичне тачке</u>. За специјалан случај кад се она јавља услед тога што у функцији $F(z)$ фигурише логаритам оне се називају <u>логаритамске критичне тачке</u>.

Из овога што претходи лако је извести упутства како треба радити при тражењу критичних тачака функција:

I При тражењу алгебарских критичних тачака треба уочити код функције од z оне изразе у којима се каква комбинација од z налази под кореним знаком односно са разломљеним изложитељем, представити такву комбинацију под кореним знаком као производ корених чинилаца и онда видети на каквом се степену јавља сваки од тих корених чинилаца. Ако тај степен буде цео број, онда од таквог кореног чиниоца не произлазе никакве алгебарске критичне тачке; на против ако изложилац није цео број, онда тај чинилац стављен раван нули даће такву тачку a; именилац његовог изложиоца дефинисаће ред тако нађене алгебарске критичне тачке. Н. пр. нека је дата функција

$$F(z) = 1 - \frac{\sqrt[3]{z^2-3z+2}}{5z-2}$$

Алгебарске критичне тачке могу се јавити код израза

$$\sqrt[3]{z^2-3z+2}$$

који се може написати у облику

$$\sqrt[3]{z^2-3z+2} = (z-1)^{\frac{1}{3}}(z-2)^{\frac{1}{3}}$$

Први корени чинилац даје алгебарску критичну тачку $z=1$ и то трећег реда, други корени чинилац даје такође алгебарску критичну тачку $z=2$ трећег реда.

II. Трансцедентне критичне тачке понајчешће произлазе отуда што какав израз фигурише са каквим степеном, који је ирационалан број или отуда што какав израз фигурише под логаритамским знаком. Било да је један или други случај, при траженју сингуларитета треба ставити да је раван нули такав израз, решити тако добијену једначину по z, па ће тако добијена вредност z бити трансцедентни сингуларитет. Н. пр. нека је дата функција

$$F(z) = \frac{z^{\lambda} - 3\sin z}{(z^2-5)^{\mu}+1}$$

где су λ и μ два ирационална броја. Према томе тражени сингуларитети добијају се решењем једначина

$$z=0 \quad \text{и} \quad z^2-5=0$$

т.ј. имамо три трансцедентна сингуларитета и то

$$z=0 \quad z=\sqrt{5} \quad z=-\sqrt{5}$$

Или нека је дата функција

$$F(z) = \sqrt{z-3\log(z^2-3z+2)}$$

трансцедентни сингуларитети добијају се решењем једначине

$$z^2-3z+2=0$$

и према томе има два сингуларитета

$$z=1 \quad \text{и} \quad z=2$$

Примедбе:

1° Дешава се у појединим специјалним случајевима, врло изузетним, да и ако један израз фигурише под логаритамским знаком ипак он не даје трансцедентне критичне тачке. То бива ако је операција логаритма подвргнута другој операцији. Тако н. пр. функција

$$F(z) = z - 2e^{4\log(z^2-3z+2)}$$

нема никаквих логаритамских критичних тачака.

2° При тражењу трансцедентних критичних тачака улогу коју игра логаритам играју очевидно и функције arc sin, arc cos, arc tg и arc cotg пошто се и оне своде на логаритме.

3° <u>Есенцијалне тачке</u>

За тачку

$$z=a$$

каже се да је <u>есенцијална тачка</u> функције $F(z)$, ако и $F(z)$ и њена реципрочна вредност $\frac{1}{F(z)}$ постају неодређени у близини тачке $z=a$. Тако н. пр. каже се да је функција $\frac{1}{e^{z}}$ потпуно неодређена у близини тачке $z=0$, тако исто и њена реципрочна вредност. Да би то доказали ми ћемо доказати да ова функција $F(z)$ за z врло блиско нули може имати какву хоћемо вредност A, другим речима доказаћемо да је увек могуће наћи вредност z врло блиску нули за коју ће бити

$$e^{\frac{1}{z}} = A \qquad 1)$$

па ма какву вредност дали броју A. Да би то доказали означимо са r и α модуо и аргуменат броја A, па ће бити

$$A = re^{\alpha i}$$

Заменом у 1) добијамо

$$e^{\frac{1}{z}} = re^{\alpha i}$$

одакле логаритмисањем

$$\frac{1}{z} = \log r + \alpha i + 2k\pi i$$

где је k ма какав цео број. Одатле је

$$z = \frac{1}{\log r + (\alpha + 2k\pi)i} = \frac{\log r - (\alpha+2k\pi)i}{(\log r)^2 + (\alpha+2k\pi)^2}$$

ако се са x и y означе реални и имагинарни део z, тако да је

$$z = x + yi$$

из последње једначине излази

$$x = \frac{\log r}{(\log r)^2 + (\alpha+2k\pi)^2}$$

$$y = \frac{-(\alpha+2k\pi)}{(\log r)^2 + (\alpha+2k\pi)^2} \qquad 2)$$

Ма какав био цео број k позитиван или негативан вредности 2) дају нам реални и имагинарни део свију вредности z за које је задовољена једначина 1). Неђутим у том изразима има један произвољан број k. Ако пустимо да k бескрајно расте било у позитивном или негативном правцу, x и y теже нули. Ако броју k дамо низ врло великих вредности $k_1, k_2, k_3 \ldots$, x и y различиваће се врло мало од нуле и давањем разних врло великих вредности броју k имаћемо и разне парове вредности x и y врло блиске нули. Сви ти парови задовољавају једначину 1) што значи да једначина 1) има бесконачно много решења по z која су врло блиска нули. Другим речима функција

$$F(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

за бесконачно много тачака у близини почетка добија произвољно узету вредност A што значи да је она одиста неодређена у близини почетка. Очевидно да то исто важи и за реципрочну вредност те функције

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}} = e^{-\frac{1}{z}}$$

што значи да је за $z=0$ одиста есенцијална тачка. Према томе за функцију

$$F(z) = e^{\frac{1}{z-a}}$$

есенцијална тачка је

$$z=a$$

а за функције

$$\sin\frac{1}{z}, \cos\frac{1}{z} \ldots$$

била би есенцијална тачка

$$z=0$$

јер се све оне изражавају помоћу Euler-овог обрасца функције $e^{\frac{1}{z}}$. И у опште за ма коју функцију облика

$$e^{F(z)} \quad \sin F(z) \quad \cos F(z) \quad tg\,F(z) \quad ctg\,F(z)$$

све вредности z_a за које функција $F(z)$ постаје бескрајна биле би есенцијалне тачке за овакве комбинације. Такође исто очевидно је да ће ма какве алгебарске комбинације ових функција имати те исте тачке као есенцијалне. Тако н. пр.

$$e^{tg\,az}$$

имаће бескрајно много есенцијалних тачака и то ће бити за

$$z = \frac{(2k+1)\pi}{2a}$$

где је a ма какав цео број.

Примедбе:

1° Есенцијалне тачке не могу се никад јавити код алгебарских функција. Ове могу имати само обичних тачака, полова и алгебарских критичних тачака. Према томе есенцијалне тачке су нешто везано за трансцеденциност функција. За есенцијалне тачке зна се од радова Weierstrass-а.

2° Осим поменутих сингуларитета има их и компликованијих, али код функција са којима ћемо имати посла не јављају се други сингуларитети осим горе поменутих.

Бесконачно удаљене тачке као сингуларитети

Под бескрајно удаљеном тачком у равни z разумећемо тачку код које модуо ρ бескрајно расте. Аргумент такве тачке може бити ма какав. И такве тачке могу бити или обичне или сингуларне. Питање о томе какве ће врсте бити тачка у бескрајности решава се овако: треба у датој функцији $f(z)$ сменити

$$z = \frac{1}{t}.$$

Тиме је очевидно бескрајно удаљена тачка пренесена у почетак и према томеваља за ново добијену функцију $\varphi(t)$ испитати које ће врсте бити тачка $t=0$ што бива према ранијим упутствима.

Примери.

1. За функцију

$$F(z) = \frac{1}{z}$$

$z=\infty$ биће обична тачка, јер ако се стави $z=\frac{1}{t}$ функција постаје t.

2. За функцију

$$F(z) = z^m$$

тачка $z=\infty$ биће пол n-тог реда, јер за $z=\frac{1}{t}$ функција постаје

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^m}$$

3. За функцију

$$F(z) = \sqrt{z-1}$$

која постаје

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{1-t}{t}}$$

тачка $z=1$ јесте алгебарска критична тачка.

4. За функције

$$e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{tg} z, \operatorname{cotg} z$$

тачка $z=\infty$ биће есенцијална тачка.

Класификација функција према природи сингуларитета.

За једну се функцију каже да је <u>холоморфна</u> за вредности z у близини једне тачке $z=a$, ако је тачка a обична тачка функције. Функција ће бити холоморфна у једној области равни z, ако је она холоморфна у близини свију тачака те области. Тако н. пр. функција

$$F(z) = \frac{1}{z-1}$$

биће холоморфна у свакој оној области равни z која не обухвата (не опкољава) тачку $z=1$.

За једну функцију која би била холоморфна за све коначне тачке у равни z каже се да је <u>цела функција</u> променљиве z. Такав је случај са ма каквим полиномом по z или са функцијама: e^z, $\sin z$, $\cos z$ и т. д.. Очевидно је да, ако имамо више целих функција, онда ће и ма какав збир, разлика или производ тих функција бити такође цела функција, пошто такве операције не уносе никакве сингуларитете. Ако функција има сингуларитета у једној области равни z али међу тим сингуларитетима нема ни једне критичне тачке, онда се за њу каже да је *униформна* функција у тој области. Тако н. пр. функција

$$F(z)=\frac{1}{z-1}$$

била би униформна за ма какву област у равни z.

За једну функцију која је униформна у целој равни z а при том нема никакав есенцијални сингуларитет у тој равни каже се да је *мероморфна* функција променљиве z.

На последку каже се за једну функцију да је *мултиформна* у једној датој области у целој равни z, ако она у таквој области има критичних тачака.

Примери:

1. функције

$$\operatorname{tg} z \quad \text{и} \quad \operatorname{cotg} z$$

су мероморфне функције јер нити имају критичних тачака нити есенцијалних тачака у целој равни z. У опште мероморфне функције могу имати као сингуларитет само полове.

2. функције

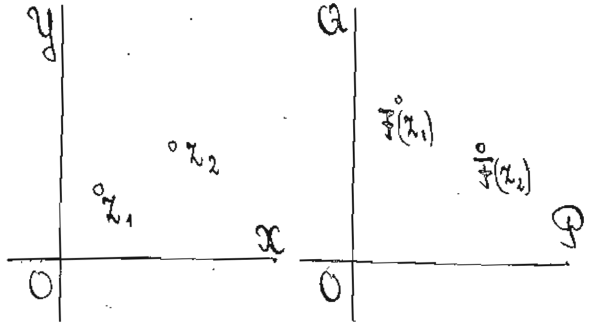
$$\sqrt{z-1} \quad \text{и} \quad \log(z-1)$$
$$\arcsin z$$

биле би мултиформне јер имају критичних тачака.

Изводи функција што зависе од имагинарних количина

У опште под *изводом* једне функције $F(z)$ има се разумети количник између бескрајно малог прираштаја функције и одговарајућег бескрајно малог прираштаја независно променљиве.

Ако уочимо раван променљиве z и у њој две међусобно бескрајно близке тачке z_1 и z_2, тим ће двема тачкама у равни функције $F(z)$ одговарати две међусобно у опште бескрајно близке тачке $F(z_1)$ и $F(z_2)$.



Као бескрајно мали прираштај z-а има се сматрати разлика

$$z_2 - z_1 = dz$$

а као одговарајући бескрајно мали прираштај функције има се сматрати

$$F(z_2) - F(z_1) = dF(z)$$

Према дефиницији извода треба да буде

$$F'(z) = \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{dF(z)}{dz} \qquad 1)$$

Међутим пошто је

$$z = x + yi$$
$$F(z) = P + Qi$$

и пошто P и Q зависе и од x и од y, биће

$$dz = dx + i\,dy$$
$$dF(z) = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + i\frac{\partial Q}{\partial x}dx + i\frac{\partial Q}{\partial y}dy$$

Заменом ових вредности у обрасцу 1) добија се

$$F'(z) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + i\frac{\partial Q}{\partial x}dx + i\frac{\partial Q}{\partial y}dy}{dx + i\,dy}$$

или деобом бројиоца и имениоца са dx

$$F'(z) = \frac{A + kB}{1 + ki} \qquad 2)$$

где је краткоће ради стављено да је

$$k = \frac{dy}{dx}$$

$$A = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$B = \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Кад је дата једна функција $F(z)$ P и Q су потпуно одређене функције од x и y па према томе ће то исто бити и са изразима A и B. Према томе и према обрасцу 2) извод $F'(z)$ биће једна потпуно одређена функција од x, y и k.

Претпоставимо да се тражи извод у једној датој утврђеној тачки z. Пошто су за њу x и y утврђени, то извод $F'(z)$ постаје за ту тачку једна одређена функција само параметра k. Међутим овај је параметар $\frac{dy}{dx}$ за ту тачку т.ј. угаони коефицијенат једне ма какве криве што пролази кроз z, па пошто се од тачке z на бескрајно блиску тачку може прећи на бескрајно много начина т.ј. преко бескрајно много разноврсних путања, свакој од тих путања одговараће по једна дирка у z и према томе по једна вредност

3) параметра k. Тај параметар дакле а према томе и вредност извода $F'(z)$ у тачки z зависе дакле од путање којом се прелази од те тачке на њу бескрајно блиску тачку и према томе пошто тих путања има бескрајно много и бескрајно разноврсних изгледало би као да је вредност извода $F'(z)$ у тој тачки z потпуно неодређена и да та неодређеност долази баш од поменуте разноврсности путања. Према томе би изгледало као да појам извода, који је потпуно одређен кад се има посла са реалним количинама, постаје неодређен кад се има посла са имагинарним количинама. Међутим та је неодређеност само привидна и ми ћемо доказати да за бескрајан број функција и то баш оних са којима се у рачунима и применама има посла, параметар k не утиче на про-

мене вредности израза 2), поред света тога што у том изразу фигурише. Да би то доказали образујмо извод израза 2) по параметру к и покажимо да је тако добијени извод раван нули за ма какву вредност к. Тај извод има за вредност
$$\frac{(1+ki)B-(A+kB)i}{(1+ki)^2}=\frac{B-Ai}{(1+ki)^2}$$
Потражимо какви би требали да су A и B па да тај израз буде раван нули за све вредности к. То ће бити очевидно кад је
$$B=Ai$$
или према обрасцима 3)
$$\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}i+\frac{\partial Q}{\partial x}$$
ако уједначимо засебно реалне и имагинарне делове у овој једначини, добијамо
$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad 4)$$
Кад год су за једну функцију $F(z)$ испуњени услови 4), извод $F'(z)$ неће зависити од к. Међутим лако се уверавамо да су услови 4) задовољени за све прочне функције са којима се у рачунима има посла. Н. пр.

1. Нека је дата функција
$$F(z)=e^z$$
Пошто је
$$e^z=e^{x+yi}=e^x\cdot e^{yi}=e^x(\cos y+i\sin y)$$
то је
$$P=e^x\cos y$$
$$Q=e^x\sin y$$
тако да је
$$\frac{\partial P}{\partial x}=e^x\cos y$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=-e^x\sin y$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\sin y$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y}=e^x\cos y$$
Упоређењем ових вредности види се да су услови 4) задовољени.

2. Нека је дата функција
$$F(z)=z^3$$
Пошто је
$$z^3=(x+yi)^3=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i$$

то је

$$P = x^3 - 3xy^2$$
$$Q = 3x^2y - y^3$$

па отуда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6xy$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

Тај је факт општи. P и Q у опште имају такав састав да су једначине 4) увек задовољене. Међутим изузетака има само код нарочито склопљених функција али са којима се нема посла у обичном рачуну. Све функције за које је услов 4) задовољен називају се <u>аналитичне функције</u>; оне, за које ти услови нису задовољени зову се <u>неаналитичне функције</u>. Према овоме што је казано само код аналитичних функција може бити речи о изводима, јер њихови изводи не зависе од путање којом се иде од тачке z до њој бескрајно блиске тачке. Из свега овога види се и то да за једну аналитичну функцију P и Q имају нарочити састав, но обрнуто ма какво произвољно P и Q не морају представљати реални и имагинарни део какве функције. Шта више нема смисла ни овакав задатак: кад је дато једно извесно произвољно P одредити функцију која би такво P имала као свој реални део. На први мах према једначинама 4) изгледало би да је задатак немогућан. Само изрази P са извесним нарочитим саставом могу бити реални део какве функције. То се може увидети на овај начин: Из једначина 4) добијамо диференцијалењем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$$

из чега се добија једначина

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \qquad 6)$$

Из тога се види да само они изрази P могу у опште бити реални део функције који буду задовољили парцијалну једначину другог реда 6). Међутим очевидно је да ту једначину не може задовољити ма какво P већ само изрази P са нарочитим саставом. Тако н. пр. израз x^2+y^2 не може бити P ни за какву функцију $F(z)$ јер је

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=2$$

На против израз x^2-y^2 може бити P једне функције јер је

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=-2$$

и једначина је 6) према томе задовољена.

Једначина 6) се зове Лапласовом парцијалном једначином и према томе само они изрази $\varphi(x,y)$ који буду ту једначину задовољавали могу бити реални део какве функције.

Сличан се израз добија и за имагинарни део Q јер из једначина 4) добијамо

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}$$

из чега се добија опет Лапласова једначина

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=0$$

Из тога се види да само они изрази $\psi(x,y)$ могу у опште представљати имагинарни део једне функције који буду задовољавали Лапласову једначину.

Раније је показано како се за једну одређену функцију $F(z)$ налази њено P и Q. Обрнути задатак био би овај: кад је дато P за једну непознату функцију $F(z)$, одредити ту функцију као и њено Q.

Код аналитичких функција које све имају своје одређене изводе тај се извод налази на исти начин као и код функција са реалним аргументима количинама. Сва правила која смо тамо имали за израчунавање извода важе и овде.

Интеграли функција што зависе од имагинарних количина.

Потражимо пре свега да ли има смисла израз

$$J=\int_{z_1}^{z_2} F(z)\,dz$$

где су z_1 и z_2 две утврђене вредности променљиве z. Пошто је

$$z=x+yi$$

то је

$$dz=dx+i\,dy$$

а пошто је

$$F(z)=P+Qi$$

где P и Q зависе и од x и од y, то је

$$J=\int_{z_1}^{z_2}(P+Qi)(dx+i\,dy)=J_1+iJ_2$$

где је

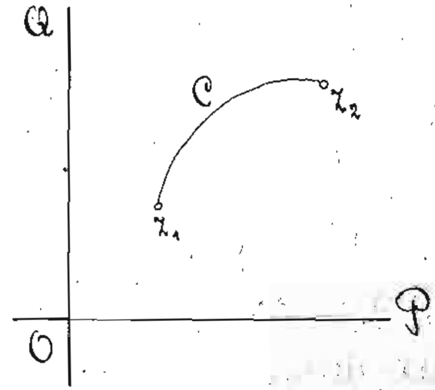
$$J_1=\int_{z_1}^{z_2}(P\,dx-Q\,dy)$$

$$J_2=\int_{z_1}^{z_2}(P\,dy+Q\,dx)$$

Сваки од интеграла J_1 и J_2 зависи од две интеграцион променљиве dx и dy и према томе ако су дате само границе z_1 и z_2 и ништа више такви интеграли немају смисла. Да би они имали смисла потребно је да под интеграционим знаком остане само једна интеграциона променљива што се може учинити само тако ако x и y буду везани једном утврђеном релацијом н. пр.

$$\psi(x,y)=0$$

Дати ту релацију значи дати путању по којој се променљива z при интеграцији има кретати од тачке z_1 до тачке z_2. Водећи рачуна о тој путањи израз под интегралним знаком остаје функција само једне променљиве тако да интеграли J_1 и J_2 тада



имају смисла па према томе и сам интеграл J. Такав се интеграл тада назива криволинијским интегралом функције $F(z)$ узет дуж путање C. Према томе израчунавање једног криволинијског интеграла

$$I = \int_{z_1}^{z_2} F(z)\, dz$$

дуж једне дате путање C са између њених граничних тачака z_1 и z_2 врши се на овај начин: пре свега треба имати једначину путање која може бити дата у разним облицима н.пр. у правоуглим координатама x и y или у поларним координатама ρ и θ или у параметарском облику и т.д.; помоћу такве једначине треба формирати изразе

$$P dx - Q dy$$
$$P dy + Q dx$$

који ће тада постати функције само једне променљиве н.пр. само од x или само од θ или само од једног параметра t и т.д.; заменом у интегралима I_1 и I_2 ови постају обични интеграли који се имају израчунати по правилима за обичне одређене интеграле, а кад су они израчунати, онда се заменом њихових вредности у изразу за I израчунава и сам тај криволинијски интеграл I. Ми ћемо према томе у ком је облику дата једначина путање C разликовати ова три случаја:

1° Случај:

Нека је једначина путање C дата у правоуглим координатама x и y и нека је њена једначина

$$\varphi(x,y) = 0$$

Помоћу те једначине и једначине

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

може се у интегралима I_1 и I_2 избацити једна која се хоће променљива н.пр. y и њен диференцијал. Тада ће се под интегралним знаком у интегралима I_1 и I_2 појавити само једна непозната: x, тако да се добија случај обичних интеграла са једном интеграционом променљивом x. Кад су они израчунати имаћемо и сам дати интеграл I.

Примери:

1. Израчунати интеграл

$$J=\int_{z_1}^{z_2} z\,dz$$

узет дуж лука параболе

$$y=x^2$$

између двеју датих тачака z_1 и z_2. Имаћемо

$$J=\int_{z_1}^{z_2}(x+yi)(dx+i\,dy)$$

Сменом

$$y=x^2$$

одакле је

$$dy=2x\,dx$$

биће

$$J=\int_{x_1}^{x_2}(x+x^2i)(dx+2xi\,dx)=\int_{x_1}^{x_2}(x+x^2i)(1+2xi)\,dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}x\,dx+2i\int_{x_1}^{x_2}x^2\,dx+i\int_{x_1}^{x_2}x^2\,dx-2\int_{x_1}^{x_2}x^3\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)+\frac{2i}{3}(x_2^3-x_1^3)+\frac{i}{3}(x_2^3-x_1^3)-\frac{1}{2}(x_2^4-x_1^4)=$$

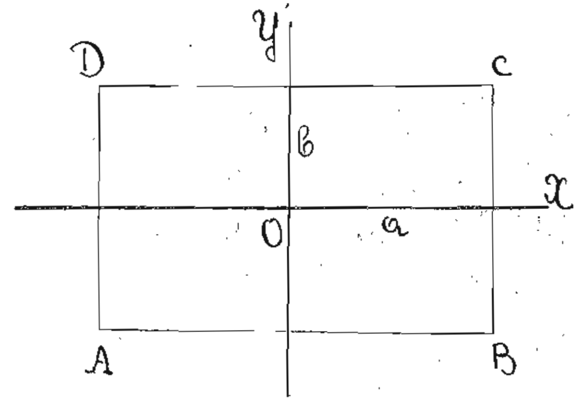
$$=\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)+i(x_2^3-x_1^3)-\frac{1}{2}(x_2^4-x_1^4)$$

2. Израчунати интеграл

$$J=\int f(z)\,dz$$

узет дуж правоугаоника означеног на слици чије половине страна нека су a и b. Очевидно је да је

$$J=J(AB)+J(BC)+J(CD)+J(DA)$$



Уочимо најпре интеграл $J(AB)$. Док променљива z путује дуж AB дотле се само x мења а y има сталну вредност $y=b$. Према томе за све време тога кретања биће

$$z=x-bi$$

$$dz=dx$$

Према томе имаћемо да је

$$J(AB)=\int_{-a}^{a}f(x-bi)\,dx$$

За други интеграл $J(BC)$ имамо да је непрестано $x=a$ тако да је

$$z=a+yi$$

$$dz=i\,dy$$

а y се мења у границама од $-b$ до $+b$. Према томе имаћемо

$$J(BC)=i\int_{-b}^{b}f(a+yi)\,dy$$

За интеграл $J(CD)$ имамо да је непрестано $y=b$ тако да је

$$z=x+bi$$

$$dz = dx$$

а x се мења од $+a$ до $-a$. Према томе биће

$$I(CD) = \int_a^{-a} f(x+bi)\,dx$$

На почетку за интеграл $I(DA)$ имамо да је непрестано $x=-a$ тако да је

$$z = -a + yi$$

$$dz = i\,dy$$

и y се мења у границама од $+b$ до $-b$, тако да је

$$I(DA) = i\int_b^{-b} f(-a+yi)\,dy$$

Сваки од ова четири интеграла представља по један обичан интеграл са једином интеграционом променљивом и кад они буду израчунати имаћемо и сам дати интеграл I.

2° Случај.

Нека је једначина путање дата у поларним координатама

$$\varphi(\rho,\theta)=0$$

ако у интегралу

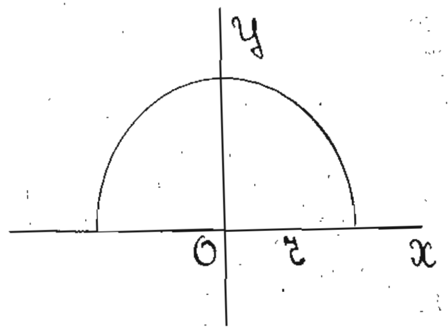
$$I=\int f(z)\,dz$$

изразимо z помоћу ρ и θ и његов диференцијал помоћу $d\rho$ и $d\theta$, онда помоћу свих тих једначина можемо учинити да у интегралу I фигурише било само ρ, било само θ тако да ћемо опет имати један обичан интеграл.

Примери:

1. Тражи се интеграл

$$I=\int z^2\,dz$$



узет дуж полукруга означеног на слици чији је полупречник r. Ако z изразимо у поларним координатама биће

$$z=\rho e^{\theta i}$$

одакле је

$$dz=\rho e^{\theta i} i\,d\theta + e^{\theta i}\,d\rho$$

Пошто путања има овде за једначину

$$\rho = const = r$$

то је

$$d\rho = 0$$

тако да се добија

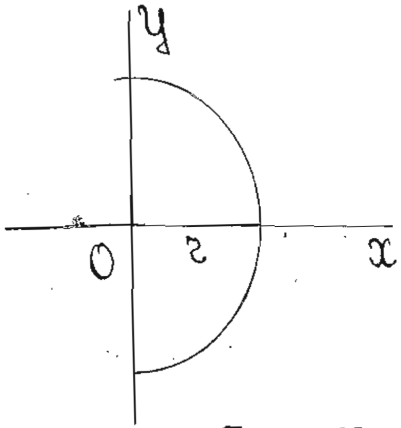
$$dz = ri e^{\theta i} d\theta$$

Заменом у интеграл овај постаје:

$$J = \int_0^\pi r^2 e^{2\theta i} r i e^{\theta i} d\theta = r^3 i \int_0^\pi e^{3\theta i} d\theta =$$

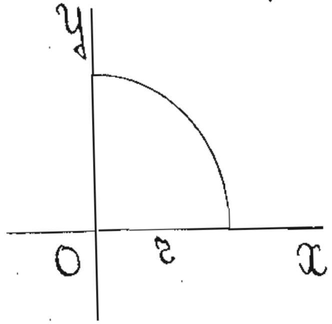
$$= \left[r^3 i \frac{e^{3\theta i}}{3i}\right]_0^\pi = \frac{r^3}{3}\left(e^{3\pi i} - 1\right) = -\frac{2}{3} r^3$$

2. Израчунати исти интеграл дуж полукруга нацртаног на слици полупречника r.



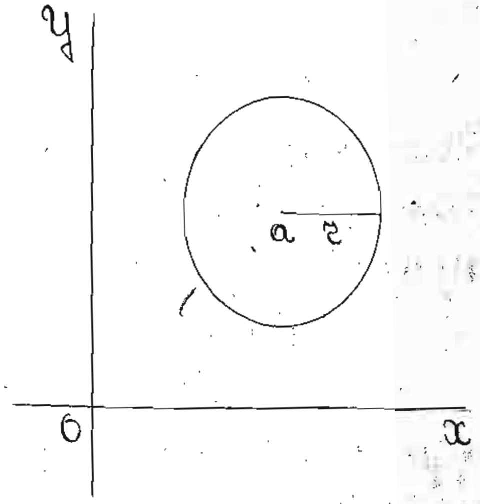
Имали би апсолутно исто као и мало пре само се мењају границе које су сада $\frac{3\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

3. Израчунати исти интеграл само узет дуж оваквог кружног лука као што је на слици.



Остаје све исто као у примеру 1. само у овом случају θ варира од 0 до $\frac{\pi}{2}$.

4. Израчунати исти интеграл дуж круга означеног на слици чији је центар тачка $z=a$ а полупречник r.



Ако се стави

$$z = a + \rho e^{\theta i}$$

одакле је

$$dz = \rho e^{\theta i} i\, d\theta + e^{\theta i} d\rho$$

једначина путање је

$$\rho = const = r$$

Заменом у интеграл добија се интеграл са само једном интеграционом променљивом θ а границе интеграла постају 0 и 2π.

3° Случај.

Нека је једначина путање дата у параметарском облику

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

одакле је

$$dx = \varphi'(t)\, dt$$
$$dy = \psi'(t)\, dt$$

тако да је

$$dz = [\varphi'(t) + i\psi'(t)]\,dt$$

Заменом у интегралу овај постаје обичан интеграл са интеграционом променљивом t, који је лако израчунати.

Н.пр. израчунати интеграл

$$J = \int z\,dz$$

дуж елипсе чије су полуосе a и b. Параметарске једначине елипсе су

$$x = a\cos t$$

$$y = b\sin t$$

где t варира 0 до 2π. Одатле је

$$dx = -a\sin t\,dt$$

$$dy = b\cos t\,dt$$

па је

$$dz = (-a\sin t + bi\cos t)\,dt$$

и заменом у интегралу добијамо један обичан интеграл са променљивом t који треба узети у границама 0 до 2π.

Cauchy-ева теорема о еквиваленцији путања.

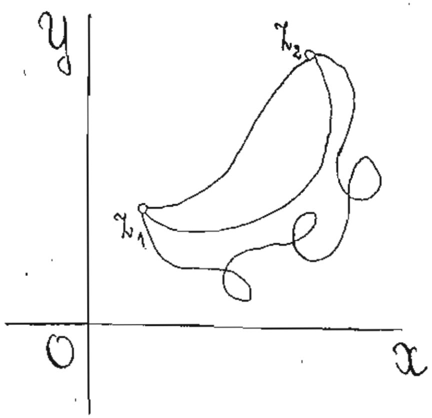
Казано је да вредност једног криволинијског интеграла зависи од ова три елемента:

1. од облика функције $f(z)$ која се интеграли;
2. од интегралних граница т.ј. од полазне и завршне тачке z при тој интеграцији; и
3. од путање дуж које се при тој интеграцији креће тачка z између полазне и завршне тачке.

Cauchy је доказао да је за аналитичне функције вредност интеграла у опште независна од овог трећег елемента, под извесним условима који су прецизирани у његовој теореми сама <u>теорема</u> гласи овако: Нека је дат интеграл

$$I = \int f(z)\,dz$$

узет дуж једне путање C између крајњих граница z_1 и z_2,



вредност интеграла неће се ни у колико изменити кад се путања буде на ма који начин деформисала али тако да непрестано пролази кроз z_1 и z_2 и да при тој деформацији никако не прође кроз какав сингуларитет функције $f(z)$.

Да би теорему доказали уочимо један интеграл оваквог облика

$$I = \int (M\,dx + N\,dy)$$

узет између тачака z_1 и z_2 дуж једне путање C и претпоставимо да су изрази M и N парцијални изводи једне исте функције $\varphi(x,y)$ тако да је

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad N = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Кад би тај случај био, интеграл има за вредност

$$I = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) = \int d\varphi = \left[\varphi(x,y) \right]_{z_1}^{z_2}$$

Узети овај интеграл у границама z_1 и z_2 значи очевидно сменити у њену најпре x и y завршним границама x_2 и y_2, па затим сменити их почетним границама x_1 и y_1 и резултате одузети. Према томе такав интеграл има за вредност

$$I = \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1)$$

Као што се види интеграл зависи само од почетне и завршне вредности x-а и y-а а никако не и од облика путање којом се прелази од тачке z_1 на z_2. Отуда ово претходно <u>правило</u>: Кад год су у једном криволинијском интегралу

$$I = \int (M\,dx + N\,dy)$$

M и N парцијални изводи једне исте функције $\varphi(x,y)$, вредност таквог интеграла зависи само од почетне и завршне вредности x-а и y-а, а никако не од путање дуж које је узет криволинијски интеграл.

Међутим кад M и N задовољава-ју те услове, они задовољавају скуп једначина

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad N = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

из којих добијамо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

што значи да је

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

одакле ово простије правило: Кад у једном интегралу

$$J = \int (M dx + N dy)$$

функције M и N задовољавају услов

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad 1)$$

вредност интеграла не зависи од путање.

Вратимо се сад првобитно датом интегралу

$$J = \int f(z)\, dz$$

Видели смо да ако су P и Q реални и имагинарни део функције $f(z)$, имаћемо да је

$$J = J_1 + J_2$$

где је

$$J_1 = \int (P dx - Q dy)$$

$$J_2 = \int (P dy + Q dx)$$

Горње правило биће применљиво на интеграл J ако је оно применљиво на интеграле J_1 и J_2. У интегралу J_1 имамо да је

$$P = M \qquad -Q = N$$

према чему добијамо услов

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad 2)$$

У интегралу J_2 имамо

$$M = Q \qquad N = P$$

тако да услов 1) постаје

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad 3)$$

Правило ће бити дакле применљиво на интеграли J_1 и J_2 па дакле и на интеграл J кад под P и Q задовољавају услове 2) и 3). Међутим ови услови нису ништа друго до они за које смо казали да их задовољавају све аналитичке функције, чиме је доказана Cauchy-ева теорема за све аналитичке функције.

Теорема престаје важити са-но онда ако никако није могуће прећи од једне путање на другу без повреде сингуларитета. У таквим случајевима интеграл може сасвим изменити вредност и Cauchy-ева теорема престаје важити. О томе је најлакше уверити се из последица које ћемо извести из ове теореме.

Последице Cauchy-еве теореме.

Из Cauchy-еве теореме може се извести велики број последица које играју врло важну улогу у данашњој теорији функција. Такве су н.пр. ове:

1° Последица.

Интеграл

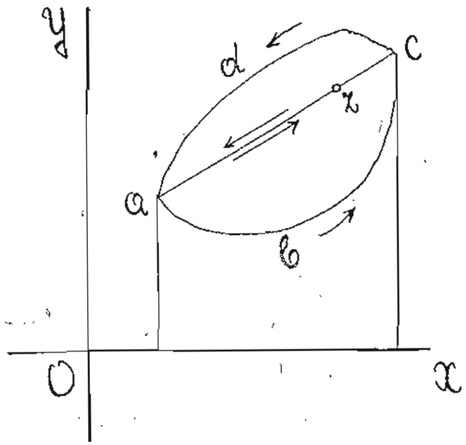
$$J=\int f(z)\,dz$$

узет дуж ма какве затворене контуре која у себи не садржи никакав сингуларитет функције $f(z)$ раван је нули.

Да би теорему доказали, претпоставимо да се тражи

$$J=\int f(z)\,dz$$

дуж једне ма какве затворене контуре $abcda$. Претпостављајући да се при интеграцији тачка z креће у правцу



означених кривих стрелица, очевидно је да ће тражени интеграл бити раван збиру два интеграла: једног који ћемо означити $J(abc)$ узет дуж путање abc другог који ћемо означити са $J(cda)$ узет дуж путање cda тако да ће бити

$$J = J(abc) + J(cda)$$

Према Cauchy-евој теореми путања abc еквивалентна је праволинијској путањи ac, пошто између њих нема никаквих сингуларитета, према чему је

$$J(abc) = J(ac)$$

Тако исто је

$$J(cda) = J(ca)$$

и према томе

$$J = J(ac) + J(ca)$$

Лако се уверавамо да интеграли $J(ac)$ и $J(ca)$ имају све своје интегралне елементе међу собом једнаке а супротно означене, јер ако уочимо на правој ac једну произвољну тачку z, у њој ће функција имати вредност $f(z)$ и за један и за други интеграл. Међутим прираштаји z-а т.ј. dz пошто су у супротним правцима супротног су знака за та два интеграла, што чини да су елементи $f(z)\,dz$ за та два интеграла одиста једнаки а супротно означени. То значи да је

$$J(ac) = -J(ca)$$

или

$$J(ac) + J(ca) = 0$$

па дакле и

$$J = 0$$

чиме је теорема доказана.

Очевидно је да све ово претпоставља да контура не обухвата никакав сингуларитет функције $f(z)$. Лако се уверавамо да теорема не мора важити ако има каквог сингуларитета. О томе ћемо се лако уверити посматрајући н. пр. интеграл

$$J=\int \frac{dz}{z}$$

узет дуж ма каквог круга који обухвата почетак. Да би интеграл израчунали треба ставити

$$z=Re^{\theta i}$$

$$dz=Re^{\theta i}\, i\, d\theta$$

и узети га у границама од 0 до 2π. Тада интеграл постаје

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{Re^{\theta i}\, i\, d\theta}{Re^{\theta i}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = i\left[\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

Дакле интеграл ма да је узет дуж затворене контуре није раван нули. Такав је у опште случај кад год контура садржи сингуларитете премда се и онда може десити да интеграл буде опет раван нули. Главно је то да у таквим случајевима може а не мора бити раван нули а међутим кад нема сингуларитета, он мора бити раван нули.

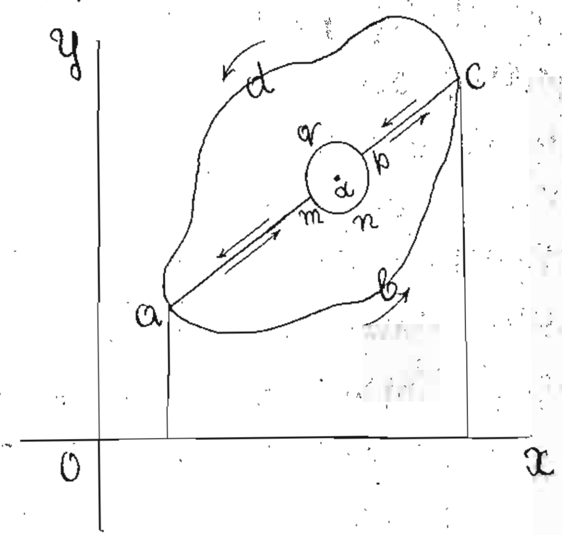
2° Последица

Ако функција $f(z)$ садржи у каквој затвореној контури само један сингуларитет, интеграл

$$J=\int f(z)\,dz$$

узет дуж такве контуре има исту вредност као и интеграл узет дуж једног који се хоће малог круга описаног око тог сингуларитета.

Нека је α један такав сингуларитет у унутрашњости дате контуре. Очевидно је да се интеграл J може раставити на збир два интеграла: једног узетог дуж путање abc и другог дуж путање cda, тако да је



$$J = J(abc) + J(cda)$$

Очевидно је, такође да је путања abc еквивалентна путањи $amnpc$ јер између њих нема никаквих сингуларитета функције. Тако исто путања cda еквивалентна је путањи $cpqma$ тако да се може написати

$$J = J(amnpc) + J(cpqma) \qquad 1)$$

Међутим је

$$J(amnpc) = J(am) + J(mnp) + J(pc)$$

$$J(cpqma) = J(cp) + J(pqm) + J(ma) \qquad 2)$$

Ако се примети да је

$$J(am) = -J(ma)$$

$$J(cp) = -J(pc)$$

сабирањем једначина 2) и према једначини 1) добија се

$$J = J(mnp) + J(pqm) = J(mnpqm)$$

дакле да је интеграл J раван интегралу дуж означеног круга, а то је и требало доказати. Као што се види пречник овог круга може бити колики се хоће али само не сме бити толики да круг обухвата какав нови сингуларитет функције $f(z)$.

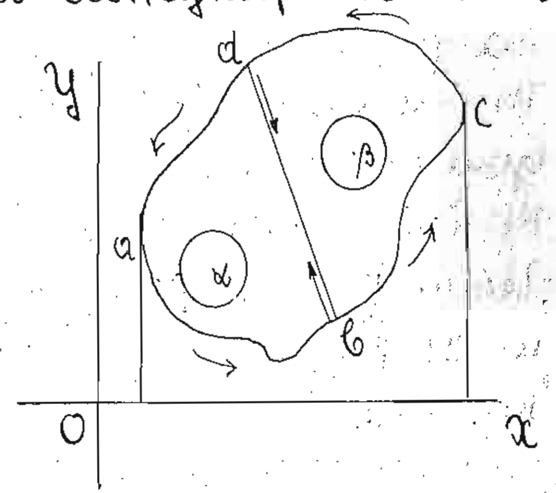
3° Последица

Интеграл

$$J = \int f(z)\,dz$$

узет дуж ма какве контуре која у својој унутрашњости садржи неколико сингуларитета функције $f(z)$ раван је збиру интеграла од којих је сваки узет дуж једног малог круга око по једног сингуларитета.

Претпоставимо н. пр. да контура садржи два сингуларитета α и β функције $f(z)$. Пресецимо контуру једном правом линијом bd тако да су та два сингуларитета с једне и друге стране те праве.



Очевидно је да се интеграл може раставити на овакав збир:

$$J = J(ab) + J(bc) + J(cd) + J(da)$$

Додајмо томе збиру израз

$$J(bd) + J(db)$$

који је очевидно идентички раван нули па се интеграл може написати у облику

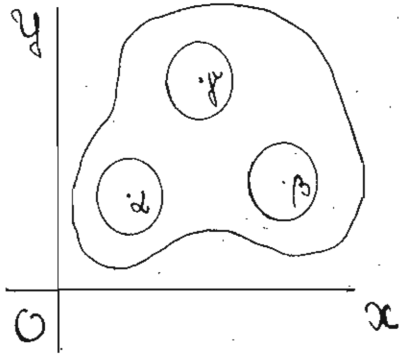
$$J = [J(ab) + J(bd) + J(da)] + [J(bc) + J(cd) + J(db)]$$

Лако се уверити да прва заграда представља интеграл $J(abda)$ а друга интеграл $J(bcdb)$ тако да је

$$J = J(abda) + J(bcdb)$$

Међутим према 2° последици Cauchy-еве теореме први од ова два интеграла раван је интегралу дуж малог круга описаног око сингуларитета α, а други је раван интегралу дуж малог круга описаног око сингуларитета β. Интеграл J раван је збиру та два интеграла као што је и требало доказати.

Апсолутно би исти доказ био и кад би се у унутрашњости контуре имао ма колики број сингуларитета.



Интеграл узет дуж такве контуре увек ће бити раван збиру интеграла узетих дуж довољно малих кругова описаних око тих сингуларитета.

Ова је 3° последица нарочито значајна због великих упрошћења које уноси у израчунавање криволинијских интеграла. Очевидно је кад је путања дуж које се интеграл тражи каква затворена контура, тиме што она своди такве контуре на мале кругове око сингуларитета знатно су упрошћени рачуни при интеграцији. Међутим израчунавање таквих интеграла дуж тих кругова веома је просто. Ако је α један од сингуларитета који су у унутрашњости контуре, треба ставити

$$z = \alpha + r e^{\theta i}$$

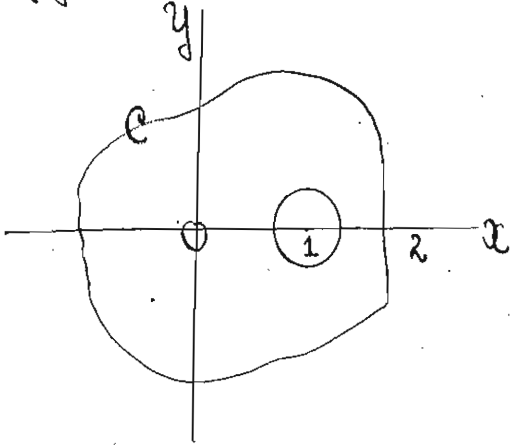
$$dz = r e^{\theta i} i \, d\theta$$

и узети интеграл у границама од $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$. То треба поновити за сваки сингуларитет који се налази у унутрашњости контуре и тако добијене резултате сабрати, па ће нам резултат дати тражени интеграл J.

Н. пр. тражи се интеграл

$$J=\int \frac{z^3\,dz}{z^2-3z+2}$$

дуж означене контуре C. Функција $f(z)$



има као сингуларитете тачке 1 и 2. Пошто контура садржи само сингуларитет $z=1$, то ће горњи интеграл бити раван интегралу дуж јединичног круга описаног око $z=1$. Према томе треба ставити

$$z=1+re^{\theta i}$$
$$dz=re^{\theta i}\,i\,d\theta$$

z^3 тада постаје

$$z^3=(1+re^{\theta i})^3$$

а функција

$$z^3-3z+2=(z-1)(z-2)=re^{\theta i}(re^{\theta i}-1)$$

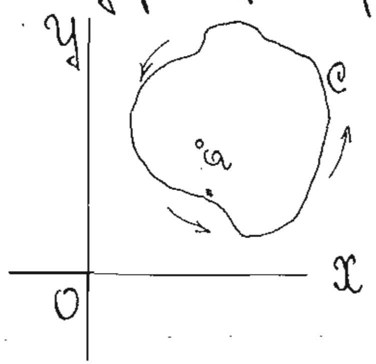
тако да интеграл постаје

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{(1+re^{\theta i})^3}{re^{\theta i}(re^{\theta i}-1)}\,re^{\theta i}\,i\,d\theta=-i\int_0^{2\pi}\frac{(1+re^{\theta i})^3}{1-re^{\theta i}}\,d\theta$$

и сад имамо један обичан одређен а не криволинијски интеграл чиме је задатак упрошћен.

Cauchy-ев основни интегрални образац

Нека је $z=a$ једна ма која тачка у равни променљиве z; нека је $F(z)$ једна ма која функција променљиве z за коју је тачка a једна обична тачка; на послетку нека је C једна ма каква затворена контура која у себи садржи тачку a али не садржи никакав сингуларитет функције $F(z)$.



Cauchy је тада доказао ову <u>теорему</u>: Интеграл

$$U=\int\frac{F(z)}{z-a}\,dz$$

узет дуж контуре C у правцу који је означен стрелицама (правац супротан кретању сказаљке на сату) има за вредност

$$2\pi i\,F(a)$$

Да би теорему доказали уочимо најпре простији интеграл

$$V=\int\frac{dz}{z-a}$$

узет дуж контуре C. Да би му нашли вредност треба се сетити да ће према 2° последици Cauchy-еве теореме он бити раван интегралу али узетом дуж једног круга око тачке a, а да би овај нашли треба ставити

$$z=a+re^{\theta i}$$

где је r полупречник узетог круга. Отуда је

$$dz=re^{\theta i}\,i\,d\theta$$

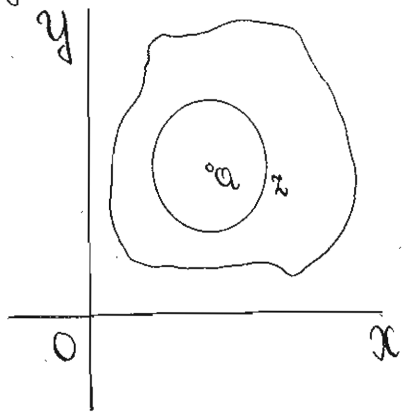
Интеграл V постаје

$$V=\int_0^{2\pi}\frac{re^{\theta i}\,i\,d\theta}{re^{\theta i}}=i\int_0^{2\pi}d\theta=i\,[\theta]_0^{2\pi}=2\pi i$$

Према томе интеграл

$$\int\frac{dz}{z-a}$$

има увек за вредност $2\pi i$ ма какав био број a. Знајући сад тај резултат пређимо на општији интеграл V. Интеграл узет дуж контуре C биће опет раван интегралу дуж произвољног круга око a, а пошто је тај круг произвољан можемо га узети да је са бескрајно малим полупречником.



Пошто се дуж тога круга z и a врло мало разликују, то ће разлика $z-a$ бити један врло мали број који ћемо означити са ε, тако да ће на том кругу непрестано бити

$$z = a+\varepsilon$$

Према томе на том кругу биће

$$F(z) = F(a+\varepsilon)$$

Међутим према обрасцу за коначне прираштаје имамо

$$F(a+\varepsilon) = F(a) + \varepsilon F'(c)$$

где је c један мали број који лежи између a и $a+\varepsilon$. Интеграл тада постаје

$$U = \int \frac{F(a)}{z-a}\,dz + \int \frac{\varepsilon F'(c)}{\varepsilon}\,dz \qquad 3)$$

други интеграл у обрасцу 3) који се своди на

$$\int F'(c)\,dz$$

пошто је узет дуж контуре у којој функција $F'(z)$ па дакле и $F'(c)$ нема никаквог сингуларитета раван је нули, тако да остаје

$$U = \int \frac{F(a)}{z-a}\,dz$$

Пошто је $F(a)$ количина независна од z, то се она може извући пред интегрални знак, тако да је

$$U = F(a)\int \frac{dz}{z-a}$$

а напослетку, пошто је

$$\int \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

последњи образац даје

$$U = 2\pi i\, F(a)$$

као што је и требало доказати.

При применама ове Cauchy-еве теореме треба непрестано имати на уму да она захтева ове погодбе:

1° број a може бити ма какав сталан број или променљива количина али независна од z;

2° функција $F(z)$ несме имати тај број a као сингуларитет;

3° за интеграл се претпоставља да је узет дуж једне контуре која обухвата тачка $z=a$ али не обухвата никакав сингуларитет функције $F(z)$;
4° интеграција се има извршити у смислу супротном ономе у коме се креће сказаљка на сату.

Из овог основног Cauchy-евог обрасца може се извести још један низ простих образаца који такође играју важну улогу у теорији функција. Ако се у горњем обрасцу смени a једном променљивом количином x али која је потпуно независна од интеграционе променљиве z, добија се израз

$$\int \frac{F(z)}{z-x}\, dz = 2\pi i\, F(x)$$

Ако сменимо x са $x+dx$ па одузмемо првобитни образац, добија се

$$\int \frac{F(z)}{z-x-dx}\, dz - \int \frac{F(z)}{z-x}\, dz = 2\pi i \left[F(x+dx) - F(x)\right]$$

или деобом са dx и пишући образац у другојачијем облику

$$\int F(z)\, dz \left[\frac{\frac{1}{z-x-dx} - \frac{1}{z-x}}{dx}\right] = 2\pi i \left[\frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}\right]$$

Заграда на левој страни је извод функције $\frac{1}{z-x}$ по x а то је

$$\frac{1}{(z-x)^2}$$

Заграда на десној страни представља извод $F'(x)$. Према томе последњи образац постаје

$$\int \frac{F(z)\, dz}{(z-x)^2} = 2\pi i\, F'(x) \qquad 4)$$

Ако исту операцију будемо покушали на обрасцу 4) т.ј. ако будемо у њему сменили x са $x+dx$, затим одузели првобитну функцију и поделили са dx, добили би образац

$$\int \frac{F(z)\, dz}{(z-x)^3} = \frac{2\pi i}{1\cdot 2} F''(x) \qquad 5)$$

Применом исте операције на образац 5) нашли би

$$\int \frac{F(z)\, dz}{(z-x)^4} = \frac{2\pi i}{1\cdot 2\cdot 3} F'''(x) \qquad 6)$$

и премињујући и даље добија се општи образац

$$\int \frac{F(z)\, dz}{(z-x)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} F^{(n)}(x) \qquad 7)$$

који важи за ма који цео број n. Образац 7) претпоставља исте оне услове које претпоставља и горњи Cauchy-ев образац.

Ако у обрасцу 7) ставимо $x=0$

добија се образац

$$\int \frac{F(z)\,dz}{z^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} F^{(n)}(0) \qquad 8)$$

који служи као основа Cauchy-евој теорији развијања функција у редове као што ћемо мало час видети.

Сви ови Cauchy-еви обрасци имају пре свега врло важне примене за непосредно израчунавање како криволинијских тако и обичних одређених интеграла. Тако кад има да се израчуна какав криволинијски интеграл н. пр.

$$\int \varphi(z)\,dz$$

узет дуж какве затворене контуре, треба разликовати ова два случаја:

1° ако функција $\varphi(z)$ у тој контури нема никаквог сингуларитета, интеграл је раван нули;

2° ако функција $\varphi(z)$ у тој контури има један сингуларитет н. пр. $z=a$ који је такав да се она може написати у једном од облика

$$\varphi(z) = \frac{\lambda(z)}{z-a}$$

$$\varphi(z) = \frac{\lambda(z)}{(z-a)^2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi(z) = \frac{\lambda(z)}{(z-a)^n}$$

где $\lambda(z)$ нема у контури никаквог сингуларитета, онда ћемо имати

$$\int \varphi(z)\,dz = \int \frac{\lambda(z)}{(z-a)^n}\,dz$$

тако да ће према Cauchy-евом обрасцу интеграл имати за вредност

$$\frac{2\pi i}{(n-1)!} \lambda^{(n-1)}(a)$$

3° ако функција $\varphi(z)$ има у тој контури више сингуларитета н. пр. $a_1, a_2, \cdots a_n$ онда ће интеграл бити раван збиру од онолико криволинијских интеграла колико има сингуларитета у тој контури, где је сваки интеграл узет дуж једне затворене контуре око по једног сингуларитета. Сваки од интеграла израчунава се тада по упутству датом под 2°

4° ако су сингуларитети такви да се функција не може написати у коме од горњих облика (као што је н. пр. случај кад су ти сингуларитети трансцедентне критичне тачке или есенцијалне тачке), онда је горњи Cauchy-ев образац неприменљив.

Н. пр. израчунати интеграл

$$\int \frac{e^z\,dz}{1-z^2}$$

дуж једног круга описаног око почетка са коликим се хоће већим полупречником. Функција $\varphi(z)$ је

$$\varphi(z) = \frac{e^z}{1-z^2}$$

она има два сингуларитета

$$z=1$$

$$z=-1$$

који ће бити оба у датом кругу. Учинимо најпре сингуларитет $z=1$, па се може написати

$$\varphi(z) = \frac{\lambda(z)}{z-1}$$

где је

$$\lambda(z) = \frac{e^z}{z+1}$$

Према томе интеграл око тачке $z=1$ имаће за вредност

$$2\pi i\,\lambda(1)$$

или

$$e\pi i$$

За други сингуларитет $z=-1$ функција се може написати у облику

$$\varphi(z) = \frac{\lambda(z)}{z+1}$$

где је

$$\lambda(z) = \frac{e^z}{z-1}$$

Пошто тачка $z=-1$ није више сингуларитет за $\lambda(z)$, то ће према Cauchy-евој теореми интеграл око сингуларитета $z=-1$ имати за вредност

$$2\pi i\,\lambda(-1)$$

или

$$\frac{\pi i}{e}$$

Према томе целокупни интеграл биће раван збиру ова два интеграла т.ј.

$$\pi i\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

Примена Cauchy-евог обрасца на развијање функција у редове.

Знамо из елементарне анализе да се дата функција $F(z)$ под извесним погодбама може развити у Taylor-ов ред уређен по степенима од $(x-a)$ или у Mac-Laurin-ов ред уређен по степенима од z. Погодбе за то знамо да се састоје у томе да је функција $F(z)$ као и сви њени изводи коначни и одређени за вредност $z=a$ и да ред буде конвергентан. Међутим Cauchy-еве теореме доводе такође до истих резултата само много прецизнијих, дајући у исто време и погодбе за развијање функција у такве редове и вредности самих коефицијената и то у два разна облика: у обичном облику израженом помоћу вредности извода и у облику криволинијских интеграла у којима фигурише дата функција. Поред тога Cauchy-еви обрасци доводе и до разноврсних других начина развијања функција у редове обухватајући у себи све те начине.

1° Развијање функција у близини обичне тачке.

Уочимо једну дату тачку

$$z=a$$

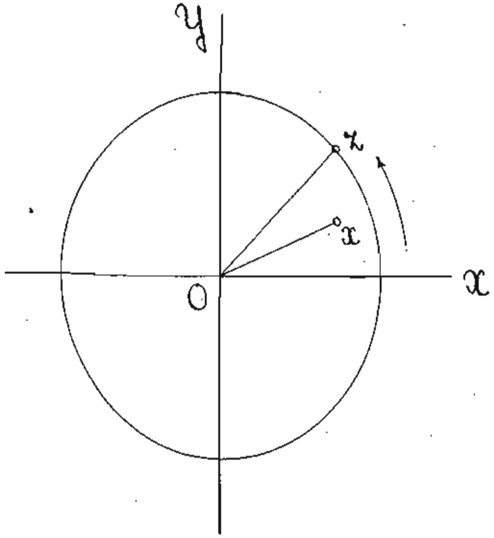
и потражимо облик реда у који се може развити функција $F(z)$ за ма какву тачку z која се буде налазила у близини тачке a. Претпоставимо најпростији случај да се тачка a поклапа са почетком. Пођимо од идентичности

$$\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=1+q+q^2+\cdots+q^n$$

одакле се добија

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\cdots+q^n+\frac{q^{n+1}}{1-q} \qquad 1)$$

Уочимо у равни z једну тачку z и једну другу ма какву тачку x чији је модул мањи од модула z. т.ј. која лежи у унутрашњости круга описаног са полупречником z око почетка.



Ставимо да је

$$q = \frac{x}{z}$$

па је очевидно да пошто је модул од x мањи од модула од z, мора бити модул од q мањи од 1 и означимо га знаком

$$|q| < 1 \qquad 2)$$

Образац 1) тада постаје

$$\frac{1}{1-\frac{x}{z}} = 1 + \frac{x}{z} + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{z}\right)^n + \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{z}}$$

Множећи и делећи леву страну са z добија се

$$\frac{z}{z-x} = 1 + \frac{x}{z} + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{z}\right)^n + \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{z}}$$

одакле је деобом са z

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}}{z-x}$$

Помножимо обе стране обрасца са $F(z)dz$ и интегралимо дуж означеног круга у правцу стрелице, па се добија

$$\int \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \int \frac{F(z)}{z}dz + x\int \frac{F(z)}{z^2}dz + x^2\int \frac{F(z)}{z^3}dz + \cdots$$
$$+ \int \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}F(z)\,dz}{z-x}$$

Лева страна према Cauchy-евој теореми равна је $2\pi i\, F(x)$. Деобом са $2\pi i$ добија се

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + R_n \qquad 3)$$

где је

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)}{z}dz$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)}{z^2}dz \qquad 4)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)}{z^{n+1}}dz$$

и где је поред тога

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}F(z)\,dz}{z-x} \qquad 5)$$

Коефицијенти $A_0\ A_1\ A_2 \cdots$ дати су криволинијским интегралима и биће извесни одређени бројеви независни од z тако да ред 3) представља известан Маклоренов ред уређен по степенима од x. Да би ред био конвергентан т.ј. имао смисла, потребно је и довољно да остатак R_n тежи нули кад n бескрајно расте. Да би доказали да остатак R_n одиста тежи нули треба се сетити да је модуо збира увек мањи од збира модула, па пошто интеграл није ништа друго до један известан збир, то је увек модуо једног интеграла мањи него интеграл модула т.ј. увек је

$$\left|\int \varphi(z)\,dz\right| < \int \left|\varphi(z)\,dz\right|$$

па ма каква била функција φ и ма каква била путања дуж које је интеграл узет. Применивши то правило на интеграл 5) добија се

$$|R_n| < \frac{1}{2\pi i}\int\left|\frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}F(z)}{z-x}\,dz\right| \qquad 6)$$

Међутим је очевидно

$$\left|\frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}F(z)}{z-x}\right| = \left|\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}\right|\cdot\left|\frac{F(z)}{z-x}\right| \qquad 7)$$

Пошто се тачка x налази у унутрашњости круга описаног око почетка са полупречником z, то је

$$|x| < |z|$$

т.ј.

$$\left|\frac{x}{z}\right| < 1.$$

Према томе могуће је увек наћи једну реалну и позитивну количину

$$\lambda < 1$$

такву да за све вредности x и z са којима се овде има посла остаје непрестано

$$\left|\frac{x}{z}\right| < \lambda$$

Једначина 7) тада доводи до неједначине

$$\left|\frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}F(z)}{z-x}\right| < \lambda^{n+1}\left|\frac{F(z)}{z-x}\right| \qquad 8)$$

Пошто интеграл на десној страни неједначине 6) има све своје елементе позитивне (пошто су модули увек сви позитивне количине), то ће интеграл на десној страни неједначине 6) а према неједначини 8) бити мањи од интеграла

$$\int \lambda^{n+1}\left|\frac{F(z)}{z-x}\,dz\right|$$

или, пошто је λ независно од z, мањи од интеграла

$$\lambda^{n+1}\int\left|\frac{F(z)}{z-x}\right|dz$$

према томе и према неједначини 6) биће

$$R_n < \frac{\lambda^{n+1}}{2\pi i}\int\left|\frac{F(z)}{z-x}\right|dz \qquad 9)$$

Пустимо сад да n бескрајно расте. Пошто је $\lambda<1$ то λ^{n+1} тежи нули за $n=\infty$, па пошто израз

$$\left|\frac{F(z)}{z-x}\right|$$

има коначне вредности за све вредности x_a у унутрашњости круга и за све вредности z у кругу, а поред тога путања дуж које се интеграција врши има коначну дужину, то је интеграл

$$\int\left|\frac{F(z)}{z-x}\right|dz$$

извесно коначан, па пошто λ^{n+1} тежи нули; то значи да и R_n мора тежити нули, што доказује конвергенцију реда 3).

Као што се види претпоставке које смо досад учинили јесу ове:

1° интеграција у обрасцима 4) и 5) врши се дуж једнога ма каквог круга описаног око почетка а у чијој унутрашњости функција $F(z)$ нема никакав сингуларитет;

2° вредност x може представљати ма какву тачку у унутрашњости тога круга;

Са тим претпоставкама извели смо дакле овај резултат: Ако је тачка x једна обична тачка функције $F(z)$, онда се $F(x)$ може развити у Маклоренов ред који ће бити конвергентан за све такве вредности x у унутрашњости једног ма каквог круга описаног око почетка који би у себи обухватио тачку x, а међутим не би обухватио никакав сингуларитет функције $F(x)$. Коефицијенти тако добијеног Маклореновог реда могу се изразити помоћу криволинијских интеграла према обрасцима 4).

Међутим помоћу ранијих Cauchy-евих образаца лако се уверити да се ти интеграли своде на обичне вредности у облику који смо раније нашли за коефицијенте

Маклореновог реда. Тако ранији Cauchy-јев образац (интеграли)

$$\int \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} F^{(n)}(0)$$

упоређен са малопређашњим обрасцима 4) показује да је

$$A_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(0)$$

тако да је

$$A_0 = F(0)$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} F'(0)$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} F''(0)$$

$$A_3 = \frac{1}{3!} F'''(0)$$

$$\cdots\cdots$$

тако да се на Cauchy-ев начин нађени коефицијенти потпуно поклапају са онима на које се наилази у обичној теорији Маклоренових редова. Међутим Cauchy-ев начин извођења има ту превагу над овим што даје коефицијенте реда и у облику интеграла и што тачно прецизира услове под којима се једна функција $F(x)$ може развити у Маклоренов ред. Као што се из те теорије види полупречник круга конвергенције тако добијеног Маклореновог реда биће раван одстојању најближег сингуларитета функције $F(x)$ од почетка т.ј. модулу тог сингуларитета (јер круг употребљивости Тејлоровог реда можемо све дотле ширити док не наиђемо на сингуларитет.)

Све то важи ако се посматра круг описан око почетка, али све би то исто имали и посматрајући један круг описан око једне тачке $z=a$ кад је ова једна обична тачка функције. Разлика је само у томе што треба x сменити са $x-a$ и онда се на место Маклореновог реда појављује Тејлоров ред

$$F(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots$$

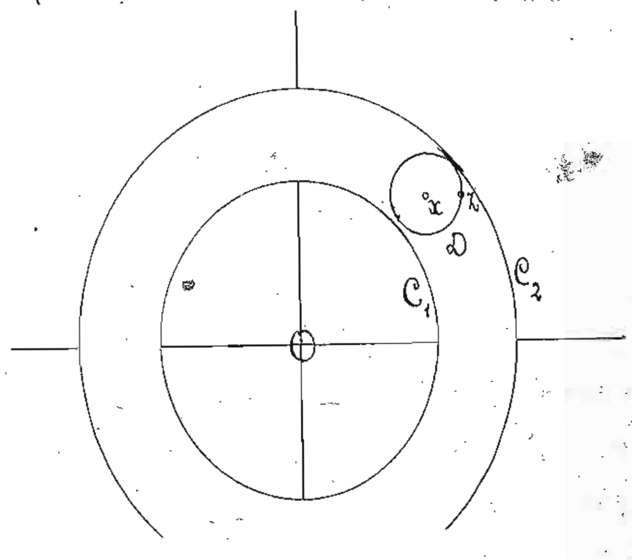
који ће бити конвергентан за све вредности x што се налазе у унутрашњости круга описаног око тачке a као центра и који у себи не би садржао никакав сингуларитет функције $F(x)$.

Према томе најопштија Cauchy-ева теорема за развијање у Маклоренове и Тејлорове редове била би ова: Ако је a једна обична тачка функције $F(x)$, функција се може развити у Тејлоров ред уређен по степенима од $(x-a)$ и који ће бити конвергентан за све вредности x у једноме кругу описаном око a а који у себи не садржи никакав сингуларитет функције $F(x)$. Израчунавање коефицијената реда може бити или помоћу криволинијских интеграла или помоћу обичних образаца из теорије таквих редова.

Теорема се понајчешће исказује у овом облику: У близини једне ма које обичне тачке a функција се $F(x)$ може развити у Тејлоров ред уређен по степенима од $(x-a)$, где се под близином тачке a имају разумети све тачке које се добијају ширећи један мали круг описан око тачке a све дотле док се не удари на какав сингуларитет функције $F(x)$.

2° Развијање функција у близини ма каквих сингуларитета.

Ако је тачка a у чијој се близини мисли развити функција у какав ред сингуларитет функције, тада је Cauchy-ева теорема неприменљива пошто интегрални обрасци којима смо се служили више не вреде. Међутим за такве случајеве важи други један начин развијања функција који ћемо сад навести. Претпоставимо најпростији случај да је сингуларитет функције у близини кога се она има развити сам почетак. Опишимо око почетка јед-



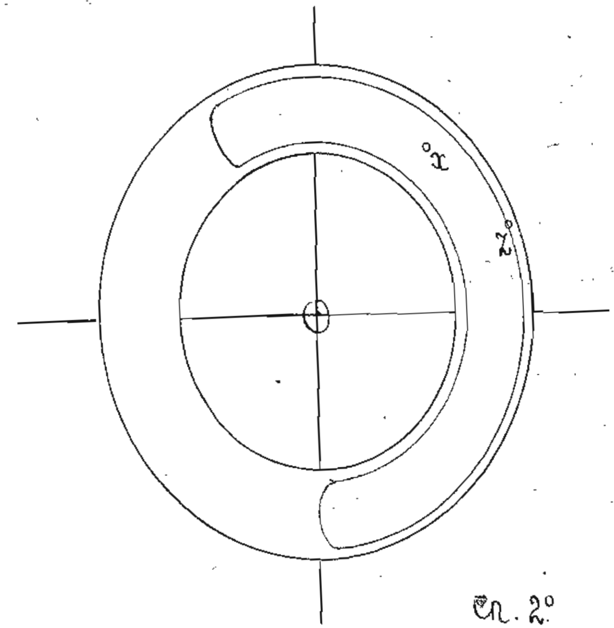
ну прстенасту површину између два концентрична круга и између којих не постоји никакав сингуларитет функције $F(x)$. Учинимо у тој прстенастој површини једну тачку x и опишимо око ње један кружић који би био довољно мали да не додирује ни једну ни другу ивицу прстенасте површине. Учинимо затим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)}{z-x}\,dz$$

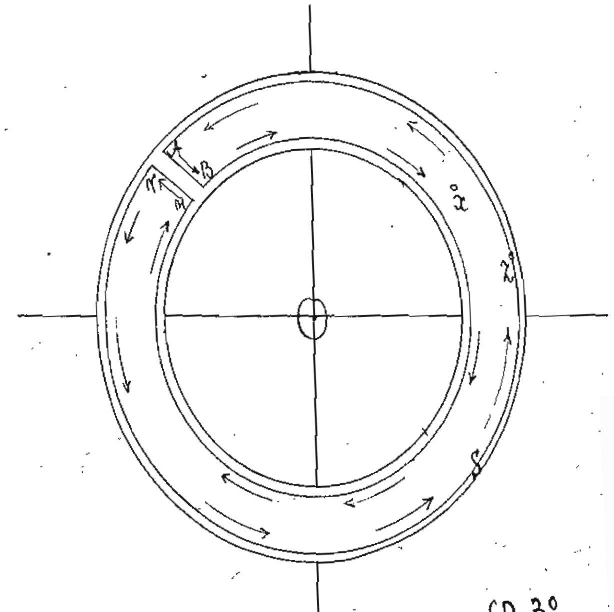
узет дуж тога кружића. Пошто у целој прстенастој површини па дакле и у томе кружићу функција $F(z)$ нема никакав сингуларитет, то према ранијем основном Cauchy-јевом обрасцу интеграл J има за вредност $F(x)$, тако да ћемо имати

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)}{z-x}\,dz$$

Деформишимо сад кружић као што је означено на слици 2° али тако да при тој деформацији он нигде не додирне ни једну ни другу ивицу прстенасте површине. Пошто се при тој деформацији не налази никакав сингуларитет функције $F(x)$ то се вредност интеграла том деформацијом неће променити. Продужимо сад ту деформацију дотле док се оба краја тако дефинисане слике не додирну као што је случај у слици 3° Очевидно је према Cauchy-евој теореми да ће интеграл дуж та-



Сл. 2°



Сл. 3°

гог кружића бити раван интегралу дуж овако поступно деформисане слике. Интеграција при том треба да је извршена у правцу стрелица. Према томе имаћемо опет образац

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)}{z-x}\,dz \qquad 13)$$

Према томе образац важи и кад се интеграција изврши дуж контуре у слици 3° Међутим ову контуру можемо разложити на четири дела и то на: лук NSA, праву AB, лук BTM и праву MN, тако да је

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int(NSA) + \int(AB) + \int(BTM) + \int(MN)\right] \qquad 14)$$

Пре свега лако је увидети да се интеграли

$$\int(AB) \quad и \quad \int(MN)$$

међу собом потиру (јер су им интегрални елементи једнаки а супротно означени). Према томе образац 14) постаје

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int(NSA) + \int(BTM)\right] \qquad 15)$$

Узмимо први интеграл

$$\int(NSA)$$

Очевидно је да док z остаје на контури NSA непрестано је

$$|x| < |z|$$

или

$$\left|\frac{x}{z}\right| < 1$$

Ставимо краткоће ради да је

$$\frac{x}{z} = q$$

и пођимо од идентичности

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Заменом

$$\frac{x}{z} = q$$

добија се

$$\frac{1}{1-\frac{x}{z}} = 1 + \frac{x}{z} + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{z}\right)^n + \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{z}}$$

Множећи бројитељ и именитељ на левој страни са z и делећи затим целу једначину са z добија се

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}}{z-x}$$

Помножимо обе стране са $F(z)\,dz$ и интегралимо обе стране дуж контуре NSA која се сад изједначује са спољашњим кругом у слици 3° и поделимо целу једначину са $2\pi i$, па ћемо имати

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(ВСК)}\frac{F(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(z)}{z}\,dz + \frac{x}{2\pi i}\int\frac{F(z)}{z^2}\,dz + \frac{x^2}{2\pi i}\int\frac{F(z)}{z^3}\,dz + \dots + \frac{x^n}{2\pi i}\int\frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(z)\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}dz}{z-x} \qquad 16)$$

Образац 16) може се написати у облику

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(ВСК)} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + R_n \qquad 17)$$

где је

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(z)}{z}\,dz$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(z)}{z^2}\,dz \qquad 18)$$

$$A_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(z)}{z^3}\,dz$$

. . . .

и где је поред тога

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}F(z)\,dz}{z-x} \qquad 19)$$

Пошто је за спољашњи круг непрестано

$$|x| < |z|$$

т.ј.

$$\left|\frac{x}{z}\right| < 1$$

то се исто онако као у прошлом случају доказује да R_n тежи нули кад n бескрајно расте. Према томе десна страна обрасца 17) представља известан Маклоренов ред, који је конвергентан пошто му остатак R_n тежи нули. Коефицијенти тог реда дати су обрасцима 18). Тиме је свршено са интегралом дуж спољнег круга.

Уочимо сад интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(ВТМ)}$$

узет дуж унутрашњег круга. Пошто је за све вредности z на унутрашњем кругу непрестано

$$|x| > |z|$$

то је

$$\left|\frac{z}{x}\right| < 1$$

Ако ставимо краткоће ради да је

$$\frac{z}{x} = q$$

и пођемо од исте идентичности као и мало час

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Заменом вредности q добићемо до обрасца

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \frac{z^2}{x^3} + \cdots + \frac{z^n}{x^{n+1}} + \frac{\left(\frac{z}{x}\right)^{n+1}}{x-z}$$

Множећи обе стране са $F(z)\,dz$ и интеграљећи дуж контуре BTM која се сад изједначује са унутрашњим кругом у слици 3° и пошто све поделимо са $2\pi i$, добија се

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{BTM} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{x}\int F(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{x^2}\int F(z)\,z\,dz + \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{x^3}\int F(z)\,z^2\,dz + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{x^{n+1}}\int F(z)\,z^n\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\left(\frac{z}{x}\right)^{n+1}F(z)\,dz}{x-z}$$

Образац се може написати у облику

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(BTM)} = \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + R_n \qquad 20)$$

где су коефицијенти $B_1, B_2 \cdots B_n$ дати обрасцима

$$B_1 = \frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,dz$$

$$B_2 = \frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,z\,dz$$

$$B_3 = \frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,z^2\,dz \qquad 21)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,z^n\,dz$$

и где је поред тога

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\left(\frac{z}{x}\right)^{n+1}F(z)\,dz}{x-z} \qquad 22)$$

Пошто је

$$\left|\frac{z}{x}\right| < 1$$

лако се уверити, као и малочас, да R_n тежи нули за $n=\infty$ а пошто је остатак реда 20) раван нули, то се види да је ред 20) конвергентан. Коефицијенти $B_1, B_2 \cdots B_n$ дати обрасцима 21) представљају очевидно бројеве независне од z и од x.

Вратимо се сад обрасцу 15) и сменимо у њему интеграле на десној страни њиховим вредностима 17) и 20). Резултат ће бити

$$F(x) = \left[A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right] + \left[\frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \cdots\right] \qquad 23)$$

где су остаци R_n изостављени зато што они теже нули кад се пусти да n бескрајно расте. Образац се често пише у скраћеном облику

$$F(x) = \sum A_n x^n + \sum \frac{B_n}{x^n} \qquad 24)$$

У обрасцу 23) исказана је једна од основних теорема теорије функција позната под именом Laurent-ова теорема: Ако је почетак на какав сингуларитет функције $F(x)$, па га окружимо једном прстенастом површином која у себи не садржи никакав сингуларитет функције $F(x)$, онда за све тачке x у тој површини функција се $F(x)$ може развити у један двоструки ред т.ј. у збир од два реда од којих је један уређен по степенима од x, а други по степенима од $\frac{1}{x}$. Оба су реда конвергентна за све вредности x у поменутој површини.

Све ово до сад претпоставља да је посматрани сингуларитет функције у почетку. Ако се посматрани сингуларитет налази у једној тачки $x=a$, очевидно је да све ово резоновање и резултати остају, само треба сменити у обрасцу 23) x са $(x-a)$. На тај начин најопштија Laurent-ова теорема била би ово: Ако је $x=a$ један ма какав сингуларитет функције $F(x)$ па око њега узмимо једну ма какву прстенасту површину која не садржи никакав сингуларитет функције $F(x)$, за све тачке у тој површини функција се $F(x)$ може развити у један двоструки ред т.ј. у збир од два реда од којих ће један бити уређен по степенима од $(x-a)$, а други по степенима од $\frac{1}{x-a}$ тако да ће бити

$$F(x) = \left[A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots\right] + \left[\frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \frac{B_3}{(x-a)^3} + \cdots\right] \qquad 25)$$

или скраћено

$$F(x) = \sum_0^\infty A_n(x-a)^n + \sum_1^\infty \frac{B_m}{(x-a)^m} \qquad 26)$$

Оба ће реда бити наступно конвергентна за све тачке x у тој прстенастој површини.

Приметимо и то да кад су нам дати изоловани сингуларитети функције унутрашњим кругом једне прстенасте површине, Laurent-ова ће теорема важити па ма колико ми ширили ту прстенасту површину у ма ком правцу али док се при том ширењу не удари ни на какав сингуларитет функције. Ако унутрашњи круг садржи само један сингуларитет, очевидно је да га смемо смањивати до самог сингуларитета, тако да се овај може оградити једним бескрајно малим кругом у који више не смемо улазити. Тако исто спољни круг смемо ширити све дотле док се при том не удари на какав нови сингуларитет функције. Према томе најшира област у којој се сме применити Laurent-ова теорема у близини сингуларитета добија се кад се око сингуларитета опише један бескрајно мали круг, па се онда он почне ширити и то се продужи све дотле док се не удари на какав нов сингуларитет. Цела област равни између првобитног и овог последњег круга представља област у којој је Laurent-ова теорема употребљива.

Приметимо на последку још и то да ако функција има више сингуларитета у равни, на сваки се од њих може применити Laurent-ова теорема.

Облици Laurent-овог реда за разне врсте сингуларитета.

Laurent-ова теорема не представља ништа о природи самог сингуларитета у чијој се близини мисли развити функција $F(x)$. Међутим тај ред има нарочите облике у случају кад је сингуларитет пол функције, а тако исто нарочите облике кад је сингуларитет есенцијална тачка функције.

1° Облик Laurent-овог реда кад је сингуларитет пол.

Претпоставимо најпре да је тај пол у самом почетку. Тада се функција $F(x)$ може развити, као што знамо, у двоструки ред

$$F(x) = [A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots] + \left[\frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \cdots\right] \qquad 27)$$

Ми ћемо доказати да кад год је пол у почетку, други од ова два реда т.ј. онај што је уређен по степенима од $\frac{1}{x}$ своди се на један ограничен број чланова. Да би то доказали треба се сетити да ако је $x=0$ пол функције $F(x)$, треба да се за $x=0$ добије $F(x)=\infty$ а $\frac{1}{F(x)}=0$. Пре свега очевидно је из обрасца 27) ако други ред има ограничен број чланова н. пр. n чланова, за $x=0$ први се ред своди на A_0 а други се своди на ∞, дакле је одиста

$$F(0) = \infty$$

Међутим реципрочна вредност

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{\sum A_n x^n + \sum \frac{B_n}{x^n}}$$

очевидно остаје равна нули јер даје $\frac{1}{\infty}$. Остаје још да докажемо да за такав случај број чланова у другом реду не може бити бескрајно велики т.ј. да ако је број тих чланова бескрајно велики, $\frac{1}{F(x)}$ неће бити равно нули. Да би то доказали узмимо да други ред у 27) има m чланова где је $m=\infty$ тако да ћемо имати

$$F(x) = [A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots] + \left[\frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \cdots + \frac{B_m}{x^m}\right]$$

Помножимо обе стране са x^m па ћемо добити

$$x^m F(x) = [A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \cdots] + [B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + B_3 x^{m-3} + \cdots]$$

одакле је

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{x^m}{[A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + \cdots] + [B_m + B_{m-1} x + B_{m-2} x^2 + \cdots]}$$

За $x=0$ у имениоцу прве заграде нестаје свих чланова а у другој свих чланова осим B_m, тако да се за $x=0$ добија

$$\frac{1}{F(x)} = \lim \frac{x^m}{B_m} \quad \text{за } x=0$$

Узмимо, пошто је раније доказано да је ред

$$\sum \frac{B_m}{x^m}$$

конвергентан за све вредности x-а у прстенастој површини чија је једна ивица бескрајно мали круг око $x=0$ а друга какав се хоће круг описан око $x=0$, што његов општи члан а то је

$$\frac{B_m}{x^m}$$

мора тежити нули за $m=\infty$ за све вредности x_a у поменутој површини, па дакле и за бескрајно мале вредности x_a. Што значи да је

$$\text{за} \quad m=\infty \quad \text{и} \quad x=0 \qquad \lim \frac{B_m}{x^m}=0$$

и према томе

$$\lim \frac{x^m}{B_m}=\infty$$

што значи да би $\frac{1}{F(x)}$ за $x=0$ имало вредност не нула нето бескрајно, а из тога је јасно да тачка $x=0$ не може бити пол. Тиме је доказано горње тврђење да кад је $x=0$ пол функције $F(x)$, други ред у обрасцу 27) не може имати бескрајно много чланова већ му је број чланова ограничен.

Из тога се изводи ова теорема: У близини пола $x=0$ функције $F(x)$ она се може развити у један ред облика

$$F(x)=\left[A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots\right]+\left[\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\cdots+\frac{B_m}{x^m}\right] \qquad 29)$$

и први ред може имати коначан или ограничен број чланова, а у другом реду број чланова увек је ограничен.

Ако сада претпоставимо да је пол не у почетку нето у тачки $x=a$, треба само горе сменити x са $(x-a)$ па се добија ова теорема: У близини једног свог пола $x=a$ функција се $F(x)$ може развити у двоструки ред

$$F(x)=\left[A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots\right]+ \\ +\left[\frac{B_0}{x-a}+\frac{B_1}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{B_m}{(x-a)^m}\right] \qquad 30)$$

где је број чланова у другој загради ограничен. Највиши степен од $\frac{1}{x-a}$ у овом другом реду назива се ред пола $x=a$.

Остаје још да се докаже како се за једну функцију $F(x)$ и за један њен пол $x=a$ одређује одговарајући број m. Из обрасца 30) добија се

$$(x-a)^m F(x)=\left[A_0(x-a)^m+A_1(x-a)^{m+1}+\cdots\right]+ \\ +\left[B_1(x-a)^{m-1}+B_2(x-a)^{m-2}+\cdots+B_m\right] \qquad 31)$$

Ако пустимо да x тежи граници, сви чланови на десној страни сем члана B_m

теже нули тако да се добија

$$\lim (x-a)^m F(x) = B_m$$

пошто је коефицијенат B_m коначан и од нуле различан, то се за одредбу броја m добија ово упутство: ако се за једну функцију $F(x)$ зна да има једну тачку $x=a$ као пол, онда да би нашли ред тога пола треба образовати производ

$$(x-a)^m F(x)$$

и тражити какав треба да је цео и позитиван број m па да тај производ за $x=a$ тежи каквој коначној и од нуле различној граници. Тако нађено m јесте ред тога пола.

На послетку остаје још питање како се за једну функцију $F(x)$ и за један њен пол $x=a$ одређују коефицијенти $A_0\ A_1\ A_2 \cdots$ као и коефицијенти $B_1 B_2 B_3 \cdots$. Ако образац 31) напишемо у облику

$$\begin{aligned}(x-a)^m F(x) = {} & B_m + B_{m-1}(x-a) + B_{m-2}(x-a)^2 + \cdots \\ & + B_1(x-a)^{m-1} + A_0(x-a)^m + A_1(x-a)^{m+1} + \\ & + A_2(x-a)^{m-2} + \cdots\end{aligned} \qquad 32)$$

онда се види да се производ

$$(x-a)^m F(x)$$

може развити у Тејлоров ред уређен само по степенима од $(x-a)$. Према томе ако смо на ма који начин успели развити израз $(x-a)^m F(x)$ у Тејлоров ред и ако будемо нашли да је он

$$(x-a)^m F(x) = M_0 + M_1(x-a) + M_2(x-a)^2 + \cdots \qquad 33)$$

онда упоређењем једначина 32) и 33) видимо да је

$$\begin{aligned} A_0 &= M_m \\ A_1 &= M_{m+1} \\ A_2 &= M_{m+2} \\ &\cdots \end{aligned} \qquad 34)$$

а тако исто да је

$$\begin{aligned} B_1 &= M_{m-1} \\ B_2 &= M_{m-2} \\ &\cdots \\ B_m &= M_0 \end{aligned} \qquad 35)$$

Обрасци 34) и 35) решавају постављени задатак и отуда ово опште упутство за израчунавање тих коефицијената што одговарају једном полу $x=a$: Треда прво по горњем упутству одредити број m што одговара томе полу, затим формирати производ

$$(x-a)^m F(x)$$

и развити га у ред облика 33) тако да су нам познати коефицијенти $M_0, M_1, M_2 \dots$ обрасци 34) и 35) дају нам тада све коефицијенте A и B што одговарају двоструком реду функције $F(x)$.

Н. пр. дата је функција

$$\frac{z+2}{(z^2-1)^4}$$

њени су полови

$$z=\pm 1$$

Узето у посматрање н. пр. пол

$$z=1$$

Горњи производ биће овде

$$(z-1)^m \frac{z+2}{(z^2-1)^4} = (z-1)^m \frac{z+2}{(z+1)^4 \cdot (z-1)^4} =$$

$$= (z-1)^{m-4} \frac{z+2}{(z+1)^4}$$

да би тај производ тежио каквој коначној и од нуле различној граници, треба да је

$$m-4=0$$

т.ј.

$$m=4$$

дакле пол $z=1$ је четвртог реда.

2° Облик Laurent-овог реда кад је сингуларитет есенцијелна тачка.

У томе случају онај ред што је уређен по степенима од $\frac{1}{x}$ пружа се у бесконачност, јер ако би се он задржао на једном члану н. пр. n-том, мало пре смо видели да би сингуларитет наступно био пол. Међутим мало пре је показано кад је то n бескрајно и ако буде

$$F(a)=0$$

$\frac{1}{F(a)}$ неће бити равно нули што очевидно може бити само тако ако је $F(a)$ неодређено, а то је карактеристика есенцијалне тачке.

За одредбу коефицијената одговарајућег Laurent-овог реда имамо раније опште правило да су они дати интегралима

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi i}\int (z-a)^n F(z)\, dz$$

Међутим у врло многим случајевима ти се коефицијенти могу израчунавати без помоћи интеграла. Тако нека је $F(z)$ каква функција холоморфна за све вредности z и нека има само једну есенцијалну тачку $z=a$. Ако извршимо смену

$$\frac{1}{z-a} = t$$

тачки $z=a$ одговара тачка $t=\infty$; пошто је функција холоморфна за све вредности z осим вредности a, може се развити у ред уређен по степенима од t, који ће важити за све вредности t тако да ћемо имати

$$F(z) = M_0 + M_1 t + M_2 t^2 + \dots$$

Тако добијени коефицијенти $M_0 M_1 M_2 \dots$ нису ништа друго до тражени коефицијенти одговарајућег Laurent-овог реда, јер ако сменимо

$$t = \frac{1}{z-a}$$

добија се

$$F(z) = M_0 + \frac{M_1}{z-a} + \frac{M_2}{(z-a)^2} + \dots$$

Тако н. пр. ако је дата функција

$$e^{\frac{1}{z}}$$

која има $z=0$ као есенцијалну тачку, ако ставимо

$$\frac{1}{z} = t$$

добија се

$$e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{1\cdot 2} + \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$

и тај ред вреди за све вредности t. Заменом

$$t = \frac{1}{z}$$

добија се

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1}\frac{1}{z-a} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{(z-a)^3} + \dots$$

Овај се начин може употребити само онда да кад се, пошто се изврши смена

$$\frac{1}{z} = t$$

ново добијена функција $f(t)$ може развити у Маклоренов ред за све вредности t, као што су н. пр. функције

$$e^t,\ \sin t,\ \cos t,\ \dots$$

то је очевидно и с тога што Laurent-ов ред треба да важи у близини тачке $z=a$ т. ј. у близини тачке $t=\infty$, а то ће бити само онда ако круг конвергенције одговарајућег Маклореновог реда по t узмогнемо ширити до у бескрајност, другим речима ако функција $f(t)$ буде холоморфна за све вредности t.

3° Развијање функција у ред у близини алгебарске критичне тачке.

Нека је дата функција $F(z)$ и нека има $z=a$ као алгебарску критичну тачку m-тог реда. То значи да кад се променљива z у својој равни буде један пут обрнула око тачке a, одговарајућа путања функције $F(z)$ не затвара се, али ако се z буде m-пута обрнуло око a, онда се путања функције $F(z)$ затвара. Извршимо најпре смену

$$z-a=t$$

Тиме смо пренели алгебарску критичну тачку у почетак, пошто тачки $z=a$ одговара сад тачка $t=0$. Пошто је $z=a$ алгебарска критична тачка m-тог реда за функцију $F(z)$, то ће тачка $t=0$ бити такође алгебарска критична тачка m-тог реда за нову функцију. Извршимо затим смену

$$t=u^m$$

где је u нова независно-променљива количина, па ће дата функција $F(z)$ постати извесна функција $\varphi(u)$

$$F(z)=\varphi(u)$$

Ми ћемо доказати да је тачка $u=0$ обична тачка за функцију $\varphi(u)$. Јер ако са ρ и θ означимо модуо и аргуменат променљиве t, а са r и φ модуо и аргуменат променљиве u, из обрасца

$$t=u^m$$

имаћемо

$$\rho e^{\theta i}=r^m e^{m\varphi i}$$

одакле се види да је

$$\theta = m\varphi$$

што показује да једном ма каквом аргументу променљиве u одговара m-пута већи аргуменат променљиве t или другим речима, кад се u буде једанпут обрнуло у својој равни, променљива се t па дакле и променљива z морају обрнути m пута у својој равни, а пошто се код ових променљивих при m обрта одговарајућа путања функције затвара, то значи да $u=0$ одиста није критична тачка за посматрану функцију.

Пошто је $u=0$ дакле обична тачка функције $\varphi(u)$, то ову можемо развити у двоструки Laurent-ов ред

$$F(z) = \varphi(u) = \left[A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots\right] + \left[\frac{B_1}{u} + \frac{B_2}{u^2} + \frac{B_3}{u^3} + \cdots\right]$$

или сменивши

$$u = \sqrt[m]{t} = \sqrt[m]{z-a}$$

имаћемо

$$F(z) = \sum A_n (z-a)^{\frac{n}{m}} + \sum B_k (z-a)^{-\frac{k}{m}}$$

Очевидно је да се до истог реда морало доћи и ако се не прелази преко помоћне променљиве t већ изврши непосредно смена

$$u = \sqrt[m]{z-a}$$

Отуда ова теорема: Ако је $z=a$ алгебарска критична тачка за једну функцију $F(z)$ и ако је m њен ред, функција се $F(z)$ може развити или у један прост ред уређен по позитивним степенима од $\sqrt[m]{z-a}$, или у један прост ред уређен по негативним степенима од $\sqrt[m]{z-a}$, или у најопштијем случају у један двоструки ред уређен и по позитивним и по негативним степенима од $\sqrt[m]{z-a}$. Које ће од тога двога бити зависи очевидно од тога да ли ће тачка $u=0$ бити обична тачка или пол или есенцијална тачка за функцију $\varphi(u)$. Што се тиче самих коефицијената таквог реда за них важи ово практично упутство: треба у функцији $F(z)$ сменити

$$z = a + u^m$$

развити добијену функцију $\varphi(u)$ у Маклоренов или Laurent-ов ред према томе какве природе буде сингуларитет $u=0$ за нову функцију $\varphi(u)$, па ће нам онда коефицијенти таквог реда бити очевидно и коефицијенти траженог реда.

Примери:

1. Дата је функција

$$F(z) = \frac{z}{\sqrt{z-a}} = \frac{z}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}$$

За њу је дакле

$$z = a$$

алгебарска критична тачка другог реда. Извршимо смену

$$z - a = u^2$$

или

$$z = u^2 + a$$

па дата функција постаје

$$F(z) = \frac{u^2+a}{u} = u + \frac{a}{u}$$

тачка

$$u = 0$$

је пол првог реда за нову функцију; отуда

$$\varphi(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots + \frac{B_1}{u}$$

или одатле

$$u\,\varphi(u) = A_0 u + A_1 u^2 + A_2 u^3 + \cdots + B_1$$

Из дате функције добијамо

$$u\,\varphi(u) = a + u^2$$

па упоређењем са предњим редом видимо да је

$$A_0 = 0$$
$$A_1 = 1$$
$$A_2 = 0$$
$$A_3 = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$B_1 = a$$

Отуда

$$f(z) = \frac{a}{(z-a)^{\frac{1}{2}}} + (z-a)^{\frac{1}{2}}$$

2. Дата је функција

$$f(z) = z + \sqrt{z^2 - 3z + 2}$$

Једначина

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

даје две алгебарске критичне тачке

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = 2$$

Развијмо дату функцију у близини једне од њих н. пр.

$$z = 1$$

Сменом

$$z - 1 = u^2$$

или

$$z = 1 + u^2$$

добијамо

$$\varphi(u) = 1 + u^2 + \sqrt{(z-1)(z+1)} =$$
$$= 1 + u^2 + u\sqrt{u^2-1}$$

тачка

$$u = 0$$

је обична тачка нове функције $\varphi(u)$; отуда

$$\varphi(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots$$

Коефицијенте овог реда имамо по обичном упутству:

$$A_0 = \varphi(0) = 1$$
$$A_1 = \varphi'(0) = 2u + \sqrt{u^2-1} + \frac{u^2}{\sqrt{u^2-1}}\Big\}_{u=0} = i$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\varphi''(0) = \frac{1}{2!}\left[2 + \frac{2u\sqrt{u^2-1} - u^2\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}}{u^2-1} + \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\right]_{u=0} =$$
$$= 1$$

и т. д.

тако да је

$$\varphi(u) = 1 + iu + u^2 + \cdots$$

или

$$f(z) = 1 + i(z-1)^{\frac{1}{2}} + (z-1) + \cdots$$

4° Развијање функција у близини трансцедентних критичних тачака

За овакво развијање нема никаквих општих правила, већ се за сваки специјалан случај развија функција како се може. У већини случајева покушава се да се на место променљиве z уведе нова једна променљива н. пр. t која ће бити таква да за тако трансформисану функцију она тачка t што одговара уоченој критичној тачки z није више критична тачка. Тада се та нова функција $\varphi(t)$ може развити у један од редова које смо раније имали.

Примери:

1. Развити функцију

$$f(z) = \sin \log(z-a)$$

у ред у близини тачке

$$z=a$$

та тачка је очевидно логаритамска критична тачка. Ако извршимо смену

$$z = a+e^{t}$$

тако да је

$$\log(z-a) = t$$

добијамо нову функцију

$$f(z) = \sin t$$

а како се $\sin t$ за све могуће вредности t може развити у ред

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

то ћемо сменивши t његовом вредношћу имати

$$f(z) = \sin \log(z-a) =$$

$$= \log(z-a) - \frac{[\log(z-a)]^3}{3!} + \frac{[\log(z-a)]^5}{5!} - \cdots$$

Као што се види функција се може развити у један ред уређен по степенима од $\log(z-a)$.

2. Нека је дата функција

$$f(z) = \frac{1}{1-z^{\alpha}}$$

где је α какав ирационалан број.

Пошто после m обрта тачке z око нуле вредност функције z^{α} постаје

$$z^{\alpha} = \rho^{m\alpha} e^{2m\alpha\pi i}$$

и пошто $m\alpha$ не може никад бити цео број, то

$$e^{2m\alpha\pi i}$$

не може никад бити равно јединици, што значи да се путања функције при том обртању никад не затвара па ма колики био број обртања. То показује да је тачка

$$z=0$$

трансцедентна критична тачка за дату функцију. Међутим ако извршимо смену

$$z^{\alpha}=t$$

добија се

$$F(z) = \frac{1}{1-t}$$

тачка

$$t=0$$

сад је обична тачка функције тако да се може написати

$$F(z) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots$$

или ако се вратимо на променљиву z

$$F(z) = 1 + z^{\alpha} + z^{2\alpha} + z^{3\alpha} + \cdots$$

Као што се види функција се може развити у ред уређен по степенима од z^{α}.

3. За функцију

$$F(z) = \cos \log (z-2)$$

је тачка

$$z=2$$

логаритамска критична тачка. Сменимо

$$\log(z-2) = t$$

добијамо

$$\varphi(t) = \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots$$

или

$$F(z) = 1 - \frac{[\log(z-2)]^2}{2!} + \frac{[\log(z-2)]^4}{4!} - \cdots$$

4. За функцију

$$F(z) = \frac{1}{1-z^{\pi}}$$

тачка

$$z=0$$

је трансцедентна критична тачка. Сменом

$$z^{\pi} = t$$

имамо

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots$$

или

$$F(z) = 1 + z^{\pi} + z^{2\pi} + z^{3\pi} + \cdots$$

Постоји још један начин развијања функција у близини критичних тачака који се употребљује онда кад се зна како се функција мења кад се променљива z буде обртала око критичне тачке. Ми ћемо испитати два таква случаја:

1° случај: развити у ред једну функцију $F(z)$ у близини њене критичне тачке $z=a$ кад се зна унапред да при једном обрту z око те тачке, завршна се вредност функције разликује од почетне вредности једном адитивном константом. Ако се почетна вредност функције означи са $F(z)$, завршна са $[F(z)]$, по услову задатка треба да буде

$$[F(z)] = F(z) + \lambda \qquad 1)$$

где је λ константа. Ако уведемо помоћну функцију

$$\varphi(z) = A \log(z-a)$$

зна се да кад се z обрне око тачке $z=a$ логаритам постаје увећан за $2\pi i$. Према томе имамо

$$[\varphi(z)] = A\left[\log(z-a) - 2\pi i\right] =$$
$$= \varphi(z) - 2A\pi i \qquad 2)$$

Одузимањем 1) од 2) добијамо

$$[F(z)] - [\varphi(z)] = F(z) - \varphi(z) + \lambda + 2A\pi i$$

Одредимо сад константу A тако да буде

$$\lambda + 2A\pi i = 0$$

што ће бити ако узмемо

$$A = \frac{-\lambda}{2\pi i}$$

или

$$A = \frac{\lambda i}{2\pi}$$

Према томе помоћна функција

$$\varphi(z) = \frac{\lambda i}{2\pi} \log(z-a)$$

има ту особину да се завршна вредност функције $F(z) - \varphi(z)$ поклапа са њеном почетном вредношћу. То значи да за функцију $F(z)-\varphi(z)$ тачка $z=a$ није више критични сингуларитет и према томе се та разлика може развити у Laurent-ов ред тако да је

$$F(z) - \varphi(z) = \sum A_n (z-a)^n + \sum B_k (z-a)^{-k}$$

Заменивши $\varphi(z)$ његовом вредношћу налази се да је

$$F(z) = \frac{\lambda i}{2\pi} \log(z-a) + \text{Laurent-ов ред}$$

2° Случај: Развити у ред једну функцију $F(z)$ у близини њене критичне тачке $z=a$ знајући само то да кад се z буде једанпут обрнуло око a завршна се вредност функције разликује од њене почетне вредности једном мултипликативном константом λ. Услов је задатка да буде

$$[F(z)] = \lambda F(z) \qquad 1)$$

ако уочимо помоћну функцију

$$\varphi(z) = (z-a)^{\beta}$$

где је β један за сад неодређен број, зна се да кад се z једанпут обрне око тачке a завршна је вредност функције

$$[\varphi(z)] = (z-a)^{\beta} \cdot e^{2\beta\pi i} = \varphi(z) \cdot e^{2\beta\pi i} \qquad 2)$$

деобом 1) и 2) добија се

$$\frac{[F(z)]}{[\varphi(z)]} = \lambda e^{-2\beta\pi i} \cdot \frac{F(z)}{\varphi(z)}$$

Изаберимо сад константу β тако да буде

$$\lambda e^{-2\beta\pi i} = 1$$

одакле је

$$\beta = \frac{\log \lambda}{2\pi i}$$

Ако даље дамо константи β ту вредност, добија се

$$\frac{[F(z)]}{[\varphi(z)]} = \frac{F(z)}{\varphi(z)}$$

То значи да функција

$$\frac{F(z)}{\varphi(z)}$$

има ту особину да се њена почетна и завршна вредност поклапају или другим речима тачка $z=a$ није више критична тачка за ту функциј. Према томе

$$\frac{F(z)}{\varphi(z)}$$

може се развити у један Laurent-ов ред

$$\frac{F(z)}{\varphi(z)} = \text{Laurent-ов ред}$$

или одатле

$$F(z) = (z-a)^{\frac{\log \lambda}{2\pi i}} \cdot [\text{Laurent-ов ред}]$$

чиме је задатак решен.

5° Развијање функција $F(z)$ за тачке у бескрајности.

Ако се у функцији изврши смена

$$z = \frac{1}{t}$$

бесконачно удаљена тачка z постаје почетак за променљиву t. Ако је даље овом сменом функција $F(z)$ постала $\varphi(t)$, задатак се своди на то да се $\varphi(t)$ развије у близини тачке $t=0$. То се међутим ради на један од начина које смо раније имали и обично ће ред зависити од тога какве је врсте тачка $t=0$ за функцију $\varphi(t)$. Кад на тај начин будемо $\varphi(t)$ развили у одговарајући ред према природи тачке $t=0$, треба у таквом реду ставити

$$t=\frac{1}{z}$$

па ћемо имати одговарајући ред у који се функција може развити у близини тачке $z=\infty$.

Примери:

1. Тачка $z=\infty$ јесте пол m-тог реда за један ма какав полином m-тог степена по z, јер ако извршимо смену

$$z=\frac{1}{t}$$

полином се претвара у израз облика

$$A_0+\frac{A_1}{t}+\frac{A_2}{t^2}+\cdots+\frac{A_m}{t^m}$$

а такав један ред карактерише пол.

2. Тачка $z=\infty$ јесте есенцијелна тачка за функцију

$$e^z$$

јер сменом

$$z=\frac{1}{t}$$

тачка $t=0$ је есенцијелна тачка за $e^{\frac{1}{t}}$

Исто то важи и за

$$\sin z,\ \cos z,\ \dots$$

3. Тачка $z=\infty$ је алгебарска критична тачка трећег реда за функцију

$$\sqrt[3]{z}$$

јер је тачка $t=0$ алгебарска критична тачка за функцију

$$\sqrt[3]{\frac{1}{t}}$$

Знајући на овај начин природу тачке $t=0$ у свима овим примерима, знаћемо и облик реда у који се може развити $\varphi(t)$ у близини тачке $t=0$, па дакле и облик реда у који се може развити $F(z)$ за тачку z у бесконачности.

Релације између сингуларитета функција и њихових извода

Дешава се да једна тачка $z=a$ буде сингуларитет једне врсте за једну дату функцију $F(z)$, а да међутим то буде сингуларитет сасвим друге врсте за извод те функције и обратно. Тако исто дешава се да је таква једна тачка сингуларитет једне исте врсте и за функцију и за њен извод. И у опште између сингуларитета функција и њихових извода постоје извесне релације и оне се могу резимирати у ових неколико теорема:

Теореме:

1° Ако је једна тачка $z=a$ обична тачка за једну функцију $F(z)$, она ће бити обична тачка и за њен извод.

Јер ако је $z=a$ обична тачка за $F(z)$, онда се према Cauchy-евој теореми $F(z)$ може у близини те тачке развити у ред

$$F(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots$$

одакле је

$$F'(z) = A_1 + 2A_2(z-a) + 3A_3(z-a)^2 + \cdots$$

што показује да се и $F'(z)$ може развити у такав исти ред, а што у исто време показује да је тачка $z=a$ обична тачка за $F'(z)$.

2° Једна тачка $z=a$ која је обична тачка за извод $F'(z)$ у исто је време и обична тачка за саму функцију $F(z)$.

Јер према Cauchy-евој теореми извод се $F'(z)$ тада може развити у ред

$$F'(z) = B_0 + B_1(x-a) + B_2(x-a)^2 + \cdots$$

одакле је интеграцијом

$$F(z) = C + B_0(x-a) + \frac{B_1}{2}(x-a)^2 + \frac{B_2}{3}(x-a)^3 + \cdots$$

што показује да се функција $F(x)$ може развити у ред истога облика т.ј. да је тачка $z=a$ обична тачка и за саму функцију $F(z)$.

3° Једна тачка $z=a$ која је пол функције $F(z)$ увек је у исто време и пол извода $F'(z)$ и то ако је она пол m-тог реда за $F(z)$, биће пол $(m+1)$-ог реда за извод $F'(z)$.

Јер према Laurent-овој теореми ако је $z=a$ пол m-тог реда за функцију $F(z)$, она се може у близини тога пола развити у ред

$$F(z)=\left[A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots\right]+$$
$$+\left[\frac{B_1}{z-a}+\frac{B_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{B_m}{(z-a)^m}\right]$$

деривацијом имамо да је

$$F'(z)=\left[A_1+2A_2(z-a)+3A_3(z-a)^2+\cdots\right]+$$
$$-\left[\frac{B_1}{(z-a)^2}+\frac{2B_2}{(z-a)^3}+\cdots+\frac{mB_m}{(z-a)^{m+1}}\right]$$

из чега се види да је $z=a$ одиста пол $(m+1)^{ог}$ реда за извод $F'(z)$.

4° Једна тачка $z=a$ која је пол извода $F'(z)$ увек је или пол или логаритамска критична тачка саме функције $F(z)$.

Јер у близини такве тачке $F'(z)$ може се развити по Laurent-овој теореми у ред

$$F'(z)=\left[C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+\cdots\right]+$$
$$+\left[\frac{D_1}{z-a}+\frac{D_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{D_m}{(z-a)^m}\right]$$

Интеграцијом се добија

$$F(z)=\left[C+C_0(z-a)+\frac{C_1}{2}(z-a)^2+\frac{C_2}{3}(z-a)^3+\cdots\right]+$$
$$+\left[D_1\log(z-a)-\frac{D_2}{z-a}-\frac{D_3}{2(z-a)^2}-\cdots-\frac{D_m}{(m-1)(z-a)^{m+1}}\right]$$

Из тог се израза види да ако коефицијенат D_1 није раван нули, тачка $z=a$ је логаритамска критична тачка за $F(z)$ пошто у другој загради фигурише $\log(z-a)$; на против ако је $D_1=0$, тога члана са логаритмом нестаје и онда као што се из добијеног реда види, тачка $z=a$ је пол $(m-1)^{ог}$ реда за функцију $F(z)$. Из тога се дакле види да ће $z=a$ бити или пол или логаритамска критична тачка према томе да ли је D_1 равно нули или различно од нуле. Пошто D_1 није ништа друго до остатак функције $F'(z)$ за пол $z=0$, то се добија овај резултат: ако је тачка $z=a$ пол за извод $F'(z)$, она ће бити у исто време или пол или логаритамска критична тачка за функцију $F(z)$ према томе да ли је остатак функције $F'(z)$ за тај пол раван нули или различан од нуле.

5° Ако је $z=a$ једна есенцијелна тачка за функцију $F(z)$, она ће бити у исто време есенцијелна тачка и за извод $F'(z)$.

Јер према Laurent-овој теореми у близини тачке $z=a$ имаћемо

$$F(z)=\left[A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots\right]+$$
$$+\left[\frac{B_1}{z-a}+\frac{B_2}{(z-a)^2}+\cdots\right]$$

где се ред у другој заградци пружа у бескрајност. Деривацијом имаћемо

$$F'(z)=\left[A_1+2A_2(z-a)+3A_3(z-a)^2+\cdots\right]+$$
$$-\left[\frac{B_1}{(z-a)^2}+\frac{2B_2}{(z-a)^3}+\cdots\right]$$

где се опет ред у другој заградци пружа у бескрајност., што показује да је $z=a$ есенцијелна тачка за извод $F'(z)$.

6° Једна тачка $z=a$ која је есенцијелна тачка за извод $F'(z)$ увек је или само есенцијелна тачка или у исто време и есенцијелна и логаритамска критична тачка за саму функцију $F(z)$.

Јер у близини такве тачке имаћемо

$$F'(z)=\left[C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+\cdots\right]+$$
$$+\left[\frac{D_1}{z-a}+\frac{D_2}{(z-a)^2}+\cdots\right]$$

где се други ред пружа у бесконачност. Интеграцијом имаћемо

$$F(z)=\left[C+C_0(z-a)+\frac{C_1}{2}(z-a)^2+\frac{C_2}{3}(z-a)^3+\cdots\right]+$$
$$+\left[D_1\log(z-a)-\frac{D_2}{z-a}-\frac{D_3}{2(z-a)^2}-\cdots\right]$$

где се такође други ред пружа у бесконачност. Према томе ако је коефицијенат $\mathcal{D}_1$ раван нули $z=a$ биће есенцијелна тачка за функцију $F(z)$, а ако је $\mathcal{D}_1$ различно од нуле, тачка $z=a$ ће бити у исто време и есенцијелна и логаритамска критична тачка за ту функцију.

7° Једна алгебарска критична тачка функције $F(z)$ увек је и алгебарска критична тачка извода $F'(z)$.

Јер према раније доказаној теореми у близини те тачке имамо ред

$$F(z) = A_0 + A_1(z-a)^{\frac{1}{m}} + A_2(z-a)^{\frac{2}{m}} + A_3(z-a)^{\frac{3}{m}} + \cdots$$

одакле деривацијом

$$F'(z) = \frac{A_1}{m}(z-a)^{\frac{1}{m}-1} + \frac{2A_2}{m}(z-a)^{\frac{2}{m}-1} + \frac{3A_3}{m}(z-a)^{\frac{3}{m}-1} + \cdots$$

или

$$F'(z) = \frac{A_1}{m}(z-a)^{\frac{1-m}{m}} + \frac{2A_2}{m}(z-a)^{\frac{2-m}{m}} + \frac{3A_3}{m}(z-a)^{\frac{3-m}{m}} + \cdots$$

из чега се види да се $F'(z)$ може развити у ред уређен по степенима од

$$(z-a)^{\frac{1}{m}}$$

што показује да је $z=a$ одиста алгебарска критична тачка тога извода.

8° Једна алгебарска критична тачка извода $F'(z)$ у исто је време и алгебарска критична тачка саме функције $F(z)$.

Доказ је исти као и малочас.

9° Једна трансцедентна критична тачка функције $F(z)$ може бити или исте врсте за њен извод или какав сингуларитет сасвим друге врсте.

Тако н. пр. ако је $z=a$ једна критична тачка за функцију $F(z)$, она ће бити у опште пол за извод $F'(z)$ што је очевидно и стога што кад је $z=a$ логаритамски сингуларитет функције $F(z)$ у изразу за $F(z)$ мора фигурисати један члан облика

$$A \log(z-a)$$

деривацијом из тога члана биће

$$\frac{1}{x-a}$$

што значи да логаритма нестаје, да се на место њега јави израз који је карактеристичан за пол једне функције.

Увод

За једну функцију $F(z)$ каже се да је <u>цела функција</u> променљиве z ако су апсолутно све тачке у равни z осим бескрајно удаљених тачака обичне тачке те функције. Такве су н. пр. функције

$$e^z, \sin z, \cos z, \dots$$

или ма какав полином m-тог степена по z и у опште свака функција z-а која нема никаквих сингуларитета у равни z-а а на коначној даљини.

Једна основна особина целих функција исказана је у овој теореми: Једна ма каква цела функција $F(z)$ може се развити у Маклоренов ред

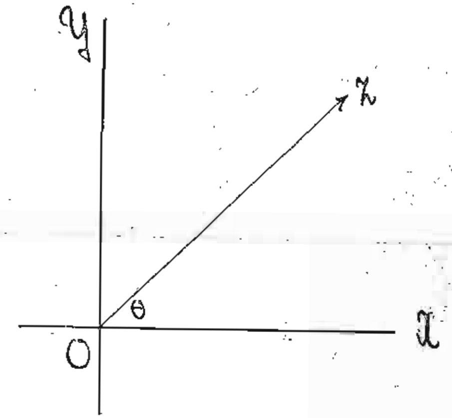
$$F(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots \qquad 1)$$

који је конвергентан у целој равни променљиве z. То је очевидно и с тога што, пошто је $z=0$ обична тачка функције $F(z)$, у близини те тачке $F(z)$ се може развити према Cauchy-евој теореми у ред 1) који ће бити конвергентан у унутрашњости једног ма каквог круга описаног око $z=0$ а који у себи не обухвата никакав сингуларитет функције $F(z)$. Па пошто и бескрајно пространи круг описан око почетка не обухвата никакав сингуларитет, то и област конвергенције таквог реда захвата целу раван променљиве z. Ова теорема даје нам могућности да се проуче многе и многе опште особине целих функција од којих ћемо неке навести.

Понашање целих функција у бесконачности.

Нека је дата цела функција $F(z)$. Пустимо да се z пошавши од почетка $z=0$ бескрајно удаљује у једном датом правцу. Аналитички то значи ставити да је

$$z = \rho e^{\theta i}$$



сменити на место θ онај угао што одговара правцу у коме z расте и пустити да у том изразу ρ бескрајно расте. Функција $F(z)$ може се при том рашћењу понашати на врло разне начине. Тако она може при томе тежити нули или ма каквој коначној и одређеној или не-

одређеној граници или може и сама бес-
крајно расти. Да би се видело понаша-
ње једне функције при таквом рашће-
њу z_a треба у функцији сменити

$$z=\rho e^{\theta i}$$

сменити θ оним углом у чијем правцу
z расте, пустити да ρ бескрајно расте
и тражити границу добијеног израза.
Према разним облицима функције
$F(z)$ и те ће границе бити разне.

Тако н. пр. ако је дата функ-
ција

$$F(z)=e^{z}$$

па се тражи граница којој она тежи
кад z бескрајно расте у једном датом
правцу θ, имаћемо посла са изразом

$$e^{\rho e^{\theta i}}=e^{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}=e^{\rho\cos\theta}\cdot e^{\rho i\sin\theta}=$$

$$=e^{\rho\cos\theta}\cdot\left[\cos(\rho\sin\theta)+i\sin(\rho\sin\theta)\right]$$

што се може написати у облику

$$F(z)=RA$$

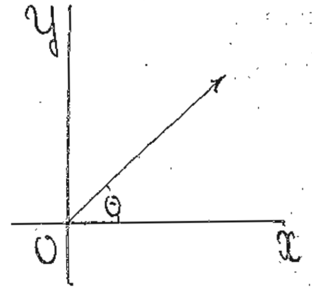
где је

$$R=e^{\rho\cos\theta}$$

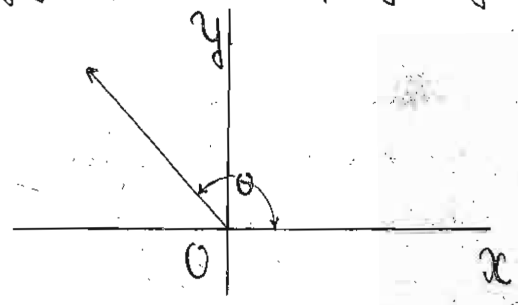
$$A=\cos(\rho\sin\theta)+i\sin(\rho\sin\theta)$$

Ако пустимо да ρ бескрајно расте, мо-
дуо количине A очевидно не може бити
већи од 1; он је раван јединици. Међу-
тим количина R која је реална може
имати разне границе према вредно-
сти које буде имао $\cos\theta$. У то име тре-
ба разликовати ове случајеве:

1° случај: нека се z удаљава у ма как-
вом правцу са десне
стране осовине OY, као
што је у слици. Тада
је $\cos\theta$ позитиван, пре-
ма томе $e^{\cos\theta}$ је веће од
1 што показује да ће количина R кад
ρ почне бескрајно расти постајати и са-
ма бескрајно велика.



2° случај: нека се z удаљује бескрајно у
ма коме правцу
са леве стране о-
совине OY као што
је у слици. Тада
је $\cos\theta$ негативан



па дакле $e^{\cos\theta}$ мање од 1 што значи да количина R тежи нули кад ρ бесконачно расте.

3° случај: нека се z бескрајно удаљује дуж осовине OY било на горе било на доле. Тада је $\cos\theta$ раван нули, па дакле $e^{\cos\theta}$ равно јединици, што значи да је количина R равна јединици, па ма како велико било ρ т.ј. да се као граница има сматрати 1.

Отуда овај резултат: функција e^z кад се z бескрајно удаљује од почетка у једном одређеном правцу може имати три разне границе којима ће тежити са према разним правцима у којима се z удаљава и то: за све правце са десне стране осовине OY функција тежи граници ∞; за све правце са леве стране осовине OY она тежи граници 0; за саму осовину OY било на горе или на доле она тежи граници 1.

На сличан се начин може испитати ма каква цела функција и у опште границе којима једна функција може тежити могу бити различне и разноврсне и за једну исту функцију. Н. пр. нека је дата функција

$$F(z) = a e^{-e^z}$$

За њу је: са десне стране осовине OY граница 0; са леве стране те осовине граница је a; а за саму ту осовину граница је $\frac{a}{e}$. Јер ако се z бескрајно удаљава у једном правцу са десне стране осовине OY напред је показано да e^z бескрајно расте, $-e^z$ постаје $-\infty$ а e^{-e^z} тежи нули; дакле кад z бескрајно расте са десне стране осовине OY, функција у опште тежи граници 0. За вредности z_a са леве стране осовине OY видели смо да e^z тежи нули, према томе e^{-e^z} тежи јединици, па дакле дата функција тежи граници a. Кад је z на самој осовини OY видели смо да e^z тежи јединици, што значи да функција тежи граници $\frac{a}{e}$. На тај начин имали би три могуће границе: $0, a$ и $\frac{a}{e}$ према разним правцима у којима се z бескрајно удаљава.

Тако би исто нашли да н. пр. функција

$$a+(b-a)e^{-e^{z}}$$

тежи једној од три граница: a, b и $a+\frac{b-a}{e}$ према разним правцима у којима z расте.

Из овога би на први мах изгледало да ове две последње посматране функције не постају бескрајне ни за какву вредност z_a, јер оне су очевидно коначне за коначне вредности z_a, а за бескрајно удаљене вредности z_a оне теже једној од показаних граница. Међутим ми ћемо сад доказати једну теорему која је у привидној контрадикцији са овим.

Liouville-ова теорема.

Не постоји никаква цела функција која остаје коначна за све могуће вредности z_a.

Теорема се обично изражава у овом облику: Једна цела функција која не постаје бескрајна па у ма коме правцу расло z своди се на једну константу.

Да би теорему доказали нека је дата цела функција $F(z)$, па знамо да се она може развити у ред

$$F(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$$

где је општи коефицијенат a_n дат Cauchy-евим обрасцем

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

где је интеграл узет дуж једног ма каквог круга описаног око $z=0$ у диреалном смислу. Стављамо да је

$$a_n = \frac{b_n}{2\pi i}$$

где је

$$b_n = \int \frac{F(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

Према правилу према коме је модуо једног интеграла увек мањи од интеграла модула, имаћемо да је

$$|b_n| < \int \frac{|F(z)|\cdot|dz|}{|z|^{n+1}}.$$

Ако модуо и аргуменат променљиве z означимо са ρ и θ, тако да је

$$z = \rho e^{\theta i}$$

биће

$$|z| = \rho$$

а пошто је

$$dz = i\rho e^{\theta i}\,d\theta$$

то је

$$|dz| = \rho\,d\theta$$

према томе је

$$|b_n| < \int_0^{2\pi} \frac{|F(z)|\cdot\rho\,d\theta}{\rho^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{|F(z)|\cdot d\theta}{\rho^n} = \frac{1}{\rho^n}\int_0^{2\pi} |F(z)|\,d\theta.$$

Претпоставимо сад да је функција $F(z)$ коначна за све могуће па и бескрајне вредности z. Тада се може наћи такав један реалан и позитиван број M да је за све могуће вредности z увек

$$|F(z)| < M$$

Заменом у последњој неједначини добија се

$$|b_n| < \frac{1}{\rho^n}\int_0^{2\pi} M\,d\theta = \frac{M}{\rho^n}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi M}{\rho^n}$$

Према Cauchy-евој теореми овај образац важи па ма какво било ρ, према томе важи и за ρ бескрајно велико, па пошто за ρ бескрајно велико количина

$$\frac{2\pi M}{\rho^n}$$

постаје нула па ма какве била вредности

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

то последња неједначина показује да је

$$b_n = 0$$

за

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

и да може бити различно од нуле само за $n=0$. Стављајући узастопце

$$n=1, 2, 3, \dots$$

добија се даље

$$b_1=0$$
$$b_2=0$$
$$b_3=0$$
$$\dots$$

па даље и

$$a_1=0$$
$$a_2=0$$
$$a_3=0$$
$$\dots$$

што показује да се сви коефицијенти Маклоренових реда своде на нулу т.ј. да остаје само први коефицијенат a_0 даље да је

$$F(z)=a_0$$

чиме је теорема доказана. Не постоји дакле никаква цела функција која би остала коначна за све могуће вредности z.

Пошто једна цела функција очевидно остаје коначна за све коначне вредности z_a, то она може бити бескрајна само за коју од бескрајних вредности z_a, што значи да се теорема може исказати у овом облику: За сваку целу функцију $F(z)$ постоји бар један правац у равни променљиве z у коме кад се z бескрајно удаљује, модул функције бескрајно расте.

Мало пре је испитивана функција

$$F(z)=a\,e^{-e^{z}}$$

Изгледа на први мах као да се не слаже са овом теоремом јер смо јој нашли свега три граничне вредности и оне су све три коначне. Разлог је овом привидном изузетку тај, што је $z=\infty$ есенцијална тачка за функцију e^z па даље и за нашу функцију $F(z)$, па се према томе њено понашање за z у бескрајности може сазнати тек проучавањем функције у близини вредности $z=\infty$ и у близини једног одређеног правца. Претпоставимо најпре да смо за θ изабрали такав један правац за који ће бити задовољен услов

$$\frac{\pi}{2\rho} < \sin\theta < \frac{3\pi}{2\rho} \qquad 1)$$

тада ће бити

$$\frac{\pi}{2} < \rho\sin\theta < \frac{3\pi}{2} \qquad 2)$$

што значи да ће

$$\cos(\rho\sin\theta)$$

бити негативно, а

$$\sin(\rho\sin\theta)$$

позитивно. Кад се узме ρ врло велико из 1) се види да је $\sin\theta$ врло мало и према томе имаћемо

$$\cos(\rho\sin\theta) = -1+\varepsilon \qquad 3)$$

$$\sin(\rho\sin\theta) = \varepsilon_1 \qquad 4)$$

Ако тада уочимо функцију

$$e^z = e^{\rho e^{\theta i}} = e^{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{\rho\cos\theta}\cdot e^{i\rho\sin\theta} =$$

$$= e^{\rho\cos\theta}\left[\cos(\rho\sin\theta) + i\sin(\rho\sin\theta)\right]$$

из вредности 3) и 4) види се да ће на таквом правцу θ и за врло велике вредности ρ члан

$$e^{\rho\cos\theta}\cdot\cos(\rho\sin\theta)$$

врло се мало разликовати од

$$-e^{\rho\cos\theta}$$

а члан

$$e^{\rho\cos\theta}\cdot\sin(\rho\sin\theta)$$

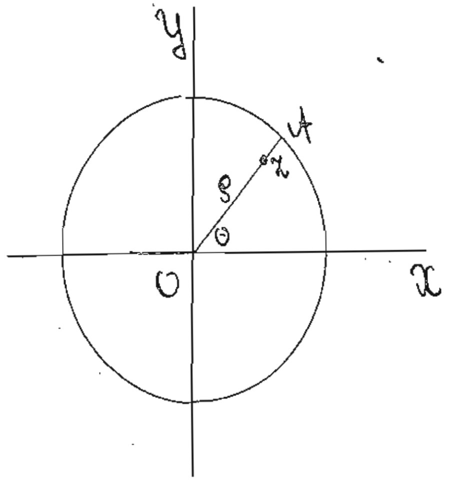
врло се мало разликовати од

$$+\varepsilon_1 e^{\rho\cos\theta}$$

Кад је дакле ρ врло велико, први члан ће бити раван: минус једној врло великој количини, а други ће члан бити бескрајно мали према првом. Према томе први члан даје знак целој комбинацији, што значи да ће e^z бити равно минус једној врло великој количини, па дакле равно $-\infty$. Функција $-e^z$ тада је $+\infty$ што значи да је и

$$F(z) = +\infty$$

Као што се дакле види оваква функција $F(z)$ има ту особину да кад се на једном правцу z бескрајно удаљи а при том и сам правац



тежи да се поклопи са осовином OX на начин исказан неједначином 1), онда при таквом рашћењу z_a и сама функција $F(z)$ бескрајно расте, дакле итак није изузетак од горње теореме.

Генералисана Liouville-ова теорема.

Не само да за сваку целу функцију постоји бар по један правац у коме кад се z бескрајно удаљује и сама функција бескрајно расте, већ у таквом једном правцу функција $F(z)$ расте увек брже него израз z^k па ма колики велики био реалан и позитиван број k. Изузетак могу чинити само оне функције $F(z)$ које се своде на какав полином по z.

Теореми се може дати и овај скраћенији облик: Свака цела функција $F(z)$ која при бескрајном рашћењу z_a не расте брже од каквог израза z^k где је k какав реалан и цео позитиван број своди се на један полином k-тог степена по z.

Приметимо пре свега да се за једну функцију $F(z)$ каже да расте спорије од друге дате функције $\varphi(z)$, ако израз

$$\left|\frac{F(z)}{\varphi(z)}\right|$$

тежи нули за z бескрајно. Тако исто за те се две функције каже да расту истом брзином, ако горњи количник тежи каквој коначној граници за z бескрајно. На послетку каже се да функција $F(z)$ расте брже од функције $\varphi(z)$, кад горњи количник бескрајно расте за z бескрајно.

Да би горњу теорему доказали претпоставимо да дата функција $F(z)$ не расте брже од z^k. Тада израз

$$\left|\frac{F(z)}{z^k}\right|$$

не постаје бескрајан кад z бескрајно расте. Према томе се може наћи такав један реалан и позитиван број M да непрестано остаје

$$\left|\frac{F(z)}{z^k}\right| < M \qquad 5)$$

Ако се функција $F(z)$ развије у Маклоренов ред

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

имаћемо за коефицијенат a_{n+k} Cauchy-ев израз

$$a_{n+k} = \frac{b_{n+k}}{2\pi i}$$

где је

$$b_{n+k} = \int \frac{F(z)\,dz}{z^{n+k+1}} = \int \frac{F(z)\,dz}{z^{n+1}\,z^k}$$

Из тога се види да је

$$|b_{n+k}| < \int \frac{|F(z)|\cdot|dz|}{|z|^{n+1}\cdot|z^k|} \qquad 6)$$

Међутим према неједначини 5) имаћемо да је

$$|b_{n+k}| < \int \frac{M\,|dz|}{|z|^{n+1}} = M \int \frac{|dz|}{|z|^{n+1}}$$

Ако се интеграл узме дуж круга чији је полупречник ρ, треба ставити

$$z = \rho e^{\theta i}$$

$$dz = \rho i e^{\theta i}\, d\theta$$

према чему је

$$|z| = \rho$$

$$|dz| = \rho\, d\theta$$

па се добија

$$|b_{n+k}| < M \int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\theta}{\rho^{n+1}} = M \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\rho^{n}} = \frac{2\pi M}{\rho^{n}}$$

та неједначина важи за ма како велики полупречник ρ па дакле и за $\rho=\infty$ па ма какве биле вредности $n=1,2,3,\dots$ Међутим за $\rho=\infty$ десна страна те неједначине тежи нули, што показује да се и $|b_{n+k}|$ своди на нулу па ма какве биле вредности $n=1,2,3,\dots$ што значи да је

$$b_{k+1}=0 \quad b_{k+2}=0 \quad b_{k+3}=0 \quad \dots$$

па дакле и

$$a_{k+1}=0 \quad a_{k+2}=0 \quad a_{k+3}=0 \quad \dots$$

т.ј. да се Маклоренов ред функције $F(z)$ своди на

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k$$

т.ј. да се $F(z)$ одиста своди на један полином k-тог степена по z, чиме је теорема доказана.

Приметимо да се теореми може дати и овај облик: Свака трансцедентна цела функција $F(z)$ расте брже него ма какав полином по z, па ма колико велики био његов степен.

У томе се већ састоји једна велика разлика између алгебарских целих функција т.ј. полинома и трансцедентних целих функција, јер за ма какав полином може се увек наћи бескрајно много других полинома који расту истом брзином као овај. За то је потребно и довољно да су оба полинома истог степена. Међутим као што се види то више не важи за трансцедентне функције јер за њих не постоји никакав полином који расте истом брзином као и оне.

Осим ове разлике има још врло много разлика између полинома и трансцедентних целих функција. Једна је од њих н. пр. ова: Зна се да сваки полином по z има онолико коначних нула колики му је степен. Међутим не стоји то да свака трансцедентна функција мора имати коначних нула. Тако н. пр. функције

$$e^{az}, e^{az^2}, e^{az^3} \ldots e^{e^z}, e^{\sin z}, e^{\cos z}, \ldots$$

немају ни једну коначну нулу. За такве трансцедентне целе функције које немају ни једну коначну нулу може се доказати ова теорема:

Свака цела трансцедентна функција $F(z)$ која нема никаквих коначних нула може се написати у облику

$$F(z) = e^{G(z)}$$

где је $G(z)$ цела функција. Да би теорему доказали уочимо логаритамски извод

$$\frac{F'(z)}{F(z)}$$

Лако се уверити да он не може бити бесконачан ни за какву коначну вредност z, јер да би то био случај требало би или да $F'(z)$ буде бесконачно, што овде није случај, пошто је $F(z)$ па дакле и $F'(z)$ цела функција, или да $F(z)$ буде равно нули, што опет није случај пошто претпостављамо да $F(z)$ нема коначних нула. Пошто тај логаритамски извод $\frac{F'(z)}{F(z)}$ не може имати критичних сингуларитета, јер би они могли произлазити или само од F или од F', а ови их немају, то ће тај логаритамски извод бити извесна функција холоморфна у целој равни променљиве z т.ј. извесна цела функција $H(z)$, тако да је

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = H(z)$$

Множећи са dz и интегралећи добија се

$$\int \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz = \int H(z)\, dz + C$$

Пошто је $H(z)$ цела функција, то ће и

$$\int H(z)\, dz + C$$

т.ј. десна страна последње једначине представљати извесну целу функцију коју ћемо означити са $G(z)$. Међутим лева страна једначине има за

вредности $\log F(z)$ тако да ће бити
$$\log F(z) = G(z)$$
одакле је
$$F(z) = e^{G(z)}$$
као што је и требало доказати.

За ове исте функције које немају коначних нула можемо доказати још једну особину: Ако пођемо од израза
$$F(z) = e^{G(z)}$$
и ако се сетимо малопређашње теореме према којој цела функција $G(z)$ расте брже него ма какав полином $P(z)$, онда се долази до ове особине: Свака трансцедентна цела функција која нема коначних нула расте при рашћењу променљиве z брже него функција
$$e^{P(z)}$$
где је $P(z)$ ма какав полином по z.

Знамо да кад је $P(z)$ ма какав полином, разлика
$$P(z) - a$$
па ма какав био број a увек има коначних нула. Међутим лако се уверити да има трансцедентних целих функција $F(z)$ за које разлика
$$F(z) - a$$
где је a један одређен број нема ни једну коначну нулу. Тако н. пр. кад је
$$F(z) = 3 + 4e^{kz}$$
разлика
$$F(z) - 3$$
нема ни једне коначне нуле. Овде се види да код трансцедентних функција може наступити одиста случај да за згодно изабрану вредност a разлика
$$F(z) - a$$
нема коначних нула.

Међутим Picard је доказао ову теорему: За једну трансцедентну целу функцију $F(z)$ може постојати само једна вредност a таква да разлика
$$F(z) - a$$

нема коначних нула. Свака друга комбинација н. пр.

$$F(z)-a\,, \quad F(z)-c\,, \quad \ldots$$

ма какви били бројеви $b, c, \ldots$ извесно има коначних нула.

Теорема се често пута исказује и у овом облику: Свака цела функција $F(z)$ која је таква да комбинације

$$F(z)-a \quad \text{и} \quad F(z)-b$$

где су a и b два различита броја, немају ни једну коначну нулу своди се на једну константу.

Постоји последица Picard-ове теореме која је оваквог облика: За једну целу трансцедентну функцију $F(z)$ може постојати само једна вредност a таква да израз

$$F(z)-a$$

има ограничен број коначних нула. Свака друга комбинација

$$F(z)-b\,, \quad F(z)-c\,, \quad \ldots$$

извесно има бескрајно много коначних нула.

Тој се теореми често пута даје и оваков облик: Свака цела функција $F(z)$ која има ту особину да комбинације

$$F(z)-a \quad \text{и} \quad F(z)-b$$

имају ограничен број коначних нула своди се на какав полином тј. тако да то не може бити никада трансцедентна функција.

Picard-ова теорема била у обичном била у генералисаном облику игра врло важну улогу у теорији функција а понаособ у аналитичкој теорији диференцијалних једначина, нарочито у задацима где се тражи да се испитају особине интеграла непосредно на самој датој диференцијалној једначини, а да се међутим једначина не мора претходно интегралити.

Међутим постоје и значајне аналогије између полинома и трансцедентних целих функција. Једна од њихових заједничких особина састоји се у томе што и једне и друге функције остају холоморфне у целој равни променљиве z.

Друга им се заједничка особина састоји у овој теореми: Ако је $z=a$ једна нула такве једне функције $F(z)$, ова се може написати у облику

$$F(z) = (z-a)^m \varphi(z)$$

где је m један цео позитиван број, а $\varphi(z)$ извесна цела функција променљиве z која не постаје равна нули за $z=a$. За ову теорему знамо из опште алгебре да важи за полиноме. Лако је међутим доказати да она важи и кад је $F(z)$ трансцедентна цела функција. Јер у близини једне такве тачке $z=a$ функција се може развити у ред

$$F(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots$$

пошто је $z=a$ нула функције $F(z)$, то _мора бити_

$$A_0 = 0$$

а поред тога _може бити_ још и неколико коефицијената A равни нули. Претпоставимо дакле да су први коефицијенат A_0 и $(m-2)$ узастопних коефицијената $A_1\, A_2 \cdots A_{m-1}$ равни нули. Онда ће бити

$$F(z) = A_m(z-a)^m \left[1 + A_{m+1}(z-a) + A_{m+2}(z-a)^2 + \cdots\right]$$

Средња заграда очевидно представља једну целу функцију променљиве z која не постаје равна нули за $z=a$ коју ако означимо са

$$\frac{\varphi(z)}{A_m}$$

имаћемо

$$F(z) = (z-a)^m \varphi(z)$$

као што је и требало доказати.

Друга једна још значајнија аналогија између полинома и трансцедентних целих функција састоји се у могућности да се такве функције развију у т. зв. _примарне факторе_ који у изразима за такве функције играју ону исту улогу косу играју корени чиниоци код полинома. Знамо да ако је $P(z)$ један полином по z чији су корени $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \cdots$ увек се може написати да је

$$P(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots$$

Још је Euler приметио да се извесне трансцедентне функције могу изразити на сличан начин помоћу једне врсте корених чиниоца. Тако н. пр. за функцију

$$\frac{\sin z}{z}$$

која је цела функција променљиве z Euler је нашао да се може написати у облику

$$\frac{\sin z}{z} = \pi\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right)\cdots =$$

$$= \pi\cdot\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

а за функцију $\cos z$ нашао је да је

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots =$$

$$= \prod\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$$

Сличне је обрасце нашао Euler и за функције

$$e^z-1\ ;\ e^z+1\ ;\ \cdots$$

тако да је на први мах могло изгледати да ће се свака трансцедентна цела функција моћи представити помоћу корених чиниоца. Међутим Cauchy је запазио да има целих функција које је немогуће представљати у оваквом облику, већ као производ од једне извесне функције $e^{G(z)}$ и продукта корених чиниоца, где је $G(z)$ извесна цела функција променљиве z. Weierstrass је нашао општу теорему за све могуће случајеве и дао је општу методу за развијање целих функција у продукте примарних фактора који при томе играју исту улогу коју и корени чиниоци за полиноме.

Weierstrass-ова метода за развијање целих функција у примарне факторе.

Ако је дата цела функција $F(z)$ и нека су $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \cdots$ њене узастопне нуле поређане по реду величина њихових модула тако да је

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| < |\alpha_3| < \cdots$$

таквих ~~модула~~ нула може бити простих и вишеструких. Ми ћемо сваку нулу сматрати за просту, а ако је вишеструка она ће се у овом низу јавити онолико пута колики јој је ред. Разликујмо ова три случаја:

1° Случај

Претпоставимо да су нуле такве да израз

$$S = \frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{|\alpha_2|} + \frac{1}{|\alpha_3|} + \cdots \qquad 1)$$

представља један конвергентан ред или у опште да S представља једну одређену и коначну количину, што ће бити случај или кад је број нула α_1 $\alpha_2\, \alpha_3 \cdots$ ограничен, или кад S представља бескрајан ред али конвергентан. Образујмо израз

$$\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1}{z-\alpha_1} \qquad 2)$$

Лако ћемо се уверити да он не постаје бескрајан за $z=\alpha_1$, јер у околини једне нуле $z=\alpha_1$ имаћемо према ранијој теореми да се може написати

$$F(z) = (z-\alpha_1)\,\varphi(z)$$

где је $\varphi(z)$ цела функција која не постаје равна нули за $z=\alpha_1$, одакле добијамо

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{z-\alpha_1} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

одакле се види да израз 2) има за вредност

$$\ldots z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

а пошто $\varphi'(z)$ није бескрајно за $z=\alpha_1$, а $\varphi(z)$ није равно нули за $z=\alpha_1$, то овај израз очевидно остаје коначан за $z=\alpha_1$ као што је требало доказати.

На исти би се начин доказало да је сваки од израза

$$\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1}{z-\alpha_2} \quad \text{і} \quad \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1}{z-\alpha_3} \quad \text{і} \quad \ldots$$

коначан и то први за $z=\alpha_2$, други за $z=\alpha_3$ $\ldots$ Према томе и израз

$$\frac{F'(z)}{F(z)} - \sum \frac{1}{z-\alpha_n} \qquad 3)$$

не може бити бескрајан ни за једну од вредности $z=\alpha_1$, $z=\alpha_2$, $z=\alpha_3$, $\ldots$ а пошто су то у опште једине вредности које би могле учинити да он постане бескрајан а он међутим остаје и за њих коначан, то се види да израз 3) остаје коначан за све могуће вредности z-а, што значи да он представља извесну целу функцију променљиве z

кију ако означимо са $H(z)$ имаћемо

$$\frac{F'(z)}{F(z)} - \sum \frac{1}{z-\alpha_n} = H(z) \qquad 4)$$

Али да би образац 4) имао смисла треба да израз

$$\sum \frac{1}{z-\alpha_n} \qquad 5)$$

има смисла, а пошто он представља известан ред, то тај ред треба да је конвергентан. Да би се дакле образац 4) смео даље употребити, треба најпре испитати да ли је ред 5) конвергентан или не. Ми ћемо доказати да је тај ред одиста конвергентан за све могуће вредности z-а изузимајући за специјалне вредности

$$z = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

Тиме ће у исти мах бити доказано то да израз 5) одиста представља једну одређену функцију z-а која има као сингуларитете само поједине изоловане тачке $z=\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Да би то доказали ставимо да је

$$\frac{1}{|\alpha_n|} = u_n \tag{6}$$

$$\frac{1}{|z-\alpha_n|} = v_n \tag{7}$$

и добићемо израз

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{|\alpha_n|}{|z-\alpha_n|} \tag{8}$$

Пошто се може написати идентички да је

$$\alpha_n = z-(z-\alpha_n)$$

и пошто је модуо збира увек мањи од збира модула, биће

$$|\alpha_n| < |z| + |z-\alpha_n|$$

или

$$\frac{|\alpha_n|}{|z-\alpha_n|} < 1 + \frac{|z|}{|z-\alpha_n|}$$

и према томе и према обрасцу 8) имаћемо

$$\frac{v_n}{u_n} < 1+\frac{|z|}{|z-\alpha_n|} \tag{9}$$

Очевидно је да израз

$$\frac{|z|}{|z-\alpha_n|}$$

остаје коначан и одређен за све могуће вредности z_a осим за $z=\alpha_n$. Према томе ма каква била вредност z, може се увек наћи такав један реалан позитиван и коначан број R, да за ту вредност z_a буде непрестано

$$1+\frac{|z|}{|z-\alpha_n|} < R$$

Неједначина 9) тада показује да је за ту вредност z_a

$$\frac{v_n}{u_n} < R$$

т.ј. да је

$$v_n < R u_n$$

и према томе је

$$\sum v_n < R\sum u_n \tag{10}$$

Заменом вредности 6) и 7) у неједначини 10) добија се

$$\sum \frac{1}{|z-\alpha_n|} < R \sum \frac{1}{|\alpha_n|} \tag{11}$$

а пошто је опет према правилу за збир модула

$$\left|\sum\frac{1}{z-\alpha_n}\right| < \sum\left|\frac{1}{z-\alpha_n}\right| = \sum\frac{1}{|z-\alpha_n|} \tag{12}$$

то неједначине 11) и 12) показују да је

$$\left|\sum\frac{1}{z-\alpha_n}\right| < R\sum\frac{1}{|\alpha_n|} = R\left(\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{|\alpha_2|}+\frac{1}{|\alpha_3|}+\cdots\right)$$

Међутим према учињеној претпоставци ред на десној страни конвергентан је што значи да је и ред на левој страни конвергентан, другим речима доказано је да израз

$$\sum \frac{1}{z-d_n}$$

има смисла. Тиме је у исто време доказано то да образац 4) има смисла и да се сме употребљавати за даље извођење.

Вратимо се сад обрасцу 4). Помножимо обе стране са dz и интегралимо у границама од нуле до z, па ћемо имати

$$\int_0^z \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz - \sum \int_0^z \frac{dz}{z-d_n} = \int_0^z H(z)\,dz \qquad 13)$$

Први интеграл има за вредност

$$\left[\log F(z)\right]_0^z = \log F(z) - \log F(0) = \log\frac{F(z)}{F(0)}$$

Други интеграл има за вредност

$$\left[\log(z-d_n)\right]_0^z = \log(z-d_n) - \log(-d_n) =$$

$$= \log\frac{z-d_n}{-d_n} = \log\left(1-\frac{z}{d_n}\right)$$

На послетку трећи интеграл као интеграл једне целе функције биће и сам извесна цела функција коју ћемо означити са $G(z)$. Образац 13) тада постаје

$$\log\frac{F(z)}{F(0)} - \sum \log\left(1-\frac{z}{d_n}\right) = G(z) \qquad 14)$$

одакле је

$$\log\frac{F(z)}{F(0)} = \sum \log\left(1-\frac{z}{d_n}\right) + G(z)$$

а одатле

$$e^{\log\frac{F(z)}{F(0)}} = e^{\sum \log\left(1-\frac{z}{d_n}\right)} \cdot e^{G(z)}$$

или

$$\frac{F(z)}{F(0)} = \left(1-\frac{z}{d_1}\right)\left(1-\frac{z}{d_2}\right)\left(1-\frac{z}{d_3}\right)\cdots e^{G(z)}$$

Отуда образац

$$F(z) = F(0)\, e^{G(z)} \prod \left(1-\frac{z}{d_n}\right) \qquad 15)$$

Образац 15) исказује прву Weierstrass-ову теорему која гласи овако: Кад је дата једна цела функција $F(z)$ која има ту особину да ако се са $d_1 d_2 d_3 \ldots$ означе њене узастопне нуле ред-

$$\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{|\alpha_2|}+\frac{1}{|\alpha_3|}+\dots$$

буде конвергентан, она се може написати у облику

$$F(z)=F(0)\,e^{G(z)}\prod\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right) \qquad 16)$$

где је $G(z)$ извесна цела функција.

Примедбе:

I Пошто на десној страни обрасца 15) фигурише $F(0)$, то у случају кад је $z=0$ једна од нула функције имаћемо да је $F(0)=0$ и према томе изгледало би да се образац 16) не може употребити, јер му се десна страна своди на нулу. Али ако приметимо да се у том случају увек може написати

$$F(z)=z^m\varphi(z)$$

где $\varphi(z)$ није више равно нули за $z=0$, онда се образац 16) може применити на $\varphi(z)$ тако да ћемо у том случају имати

$$F(z)=z^m\varphi(0)\,e^{G(z)}\prod\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)$$

II Све горње извођење важи како за случајеве кад су корени $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$ прости, тако и онда кад су они вишеструки, јер ни једна појединост извођења није везана за тај услов.

2° Случај.

Претпоставимо сад да ред

$$\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{|\alpha_2|}+\frac{1}{|\alpha_3|}+\dots$$

није конвергентан, али да је могуће наћи такав један позитиван број p да ред

$$\frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}}+\frac{1}{|\alpha_2|^{p+1}}+\frac{1}{|\alpha_3|^{p+1}}+\dots$$

буде конвергентан. Да таквих случајева одиста има лако се уверити из овог примера: зна се да је хармонијски ред

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

дивергентан а да је међутим ред

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$$

конвергентан. Ставимо да је

$$1+z+z^2+\dots+z^{p-1}=P(z)$$

и формирајмо израз

$$\Phi = \sum \left[\frac{1}{z-d_n} + \frac{1}{d_n} \mathcal{P}\left(\frac{z}{d_n}\right)\right] \qquad 17)$$

што је један израз који ће нам требати у току рачуна и за који нам треба, пре но што га будемо у рачуну употребили, доказати да представља једну одређену функцију z_a. Да би то доказали пођимо од идентичности

$$\frac{t^p - 1}{t-1} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^{p-1} = \mathcal{P}(t) \qquad 18)$$

одакле је

$$\frac{1}{1-t} = \mathcal{P}(t) + \frac{t^p}{1-t}$$

Ако у том обрасцу сменимо

$$t = \frac{z}{d_n}$$

добија се образац

$$\frac{1}{1-\frac{z}{d_n}} = \mathcal{P}\left(\frac{z}{d_n}\right) + \frac{\left(\frac{z}{d_n}\right)^p}{1-\frac{z}{d_n}}$$

или

$$\frac{1}{z-d_n} + \frac{1}{d_n}\mathcal{P}\left(\frac{z}{d_n}\right) = \frac{z^p}{d_n^p(z-d_n)} \qquad 19)$$

Означимо леву страну последњег израза са v_n и ставимо сем тога још да је

$$\frac{1}{|d_n|^{p+1}} = u_n$$

па је према обрасцу 17) очевидно да је

$$\Phi = \sum v_n \qquad 20)$$

где је

$$v_n = \frac{1}{z-d_n} + \frac{1}{d_n}\mathcal{P}\left(\frac{z}{d_n}\right) = \frac{z^p}{d_n^p(z-d_n)} \qquad 21)$$

Из 21) се налази да је

$$|v_n| = \left|\frac{z^p}{d_n^p(z-d_n)}\right| = \frac{|d_n z^p|}{|z-d_n|} u_n \qquad 22)$$

Очевидно је да је израз

$$\frac{|d_n z^p|}{|z-d_n|} = \frac{|z^p|}{\left|1-\frac{z}{d_n}\right|}$$

коначан и одређен за све могуће вредности z_a осим за $z=d_n$. Према томе ако се узме једна ма која вредност z различна од ове, тај ће израз бити коначан и одређен и према томе за тако изабрану вредност z_a може се увек наћи један реалан и позитиван број K такав да буде

$$\frac{|d_n z^p|}{|z-d_n|} < K$$

Према обрасцу 22) биће тада

$$v_n < k u_n$$

што значи да је

$$\sum |v_n| < k \sum u_n$$

па пошто је према обрасцу 20) и правилу за модул збира

$$|\Phi| < \sum |v_n| < k \sum u_n \qquad 23)$$

и пошто је са друге стране збир

$$\sum u_n = \frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}} + \frac{1}{|\alpha_2|^{p+1}} + \dots$$

по претпоставци конвергентан, неједначина 23) показује да ће и израз Φ бити конвергентан и имати коначну вредност за изабрану вредност z_a. Па пошто то вреди за све могуће вредности z_a осим са $z = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ то је тиме доказано оно што се хтело доказати т.ј. да израз Φ представља једну одређену функцију променљиве z која има као сингуларитете само изоловане тачке $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ Тиме је даље доказано да израз Φ смемо употребљавати у даљем току рачуна.

Формирајмо сад разлику

$$\frac{F'(z)}{F(z)} - \Phi \qquad 24)$$

Може се доказати да та разлика представља једну целу функцију променљиве z, јер пре свега очевидно је из самог њеног склопа да она може имати као сингуларитете само тачке $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ али ми ћемо доказати да ни те тачке нису сингуларитети. Јер ако узмемо н. пр. вредност $z = \alpha_1$ раније смо видели да се може написати

$$F(z) = (z - \alpha_1)\varphi(z)$$

где је $\varphi(z)$ цела функција која не постаје равна нули за $z = \alpha_1$. Одатле је

$$F'(z) = \varphi(z) + (z - \alpha_1)\varphi'(z)$$

одакле је

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{z - \alpha_1} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

или

$$\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1}{z - \alpha_1} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \qquad 25)$$

Образац 25) показује да кад се од израза $\frac{F'(z)}{F(z)}$ одузме $\frac{1}{z-\alpha_1}$, добија се као резултат једна функција $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ која више не постаје равна нули ни бескрајна за $z=\alpha_1$. То што смо радили са α_1 можемо урадити и са свима осталим $\alpha_2\, \alpha_3 \cdots$ из чега се види да ако од израза $\frac{F'(z)}{F(z)}$ будемо одузели све изразе $\frac{1}{z-\alpha_1}, \frac{1}{z-\alpha_2}, \cdots$ резултат ће бити једна извесна функција која више не постаје бескрајна ни за коју од вредности $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \cdots$

Очевидно је да то исто важи и кад би која од тих нула била вишеструка; разлика је само у томе што би се тада одговарајући израз $\frac{1}{z-\alpha_n}$ јављао више пута. Па пошто су у изразу 24) самим склопом израза Φ извршене ове операције одузимања, то тај израз 24) према овоме што је нађено не постаје бескрајан ни за $z=\alpha_1$ ни за $z=\alpha_2 \cdots$ и према томе он представља једну целу функцију променљиве z. Ако ту целу функцију означимо са $\mathcal{H}(z)$, имаћемо

$$\frac{F'(z)}{F(z)} - \Phi = \mathcal{H}(z) \qquad 26)$$

Ако ову једначину помножимо са dz и интегралимо у границама од 0 до z имаћемо

$$\int_0^z \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = \int_0^z \Phi(z)\,dz + \int_0^z \mathcal{H}(z)\,dz \qquad 27)$$

Први интеграл има за вредност

$$\Big[\log F(z)\Big]_0^z = \log F(z) - \log F(0) = \log \frac{F(z)}{F(0)} \qquad 28)$$

Трећи интеграл као интеграл једне целе функције биће такође и сам извесна цела функција коју ћемо означити $G(z)$

Остаје још да се нађе вредност другог од горња три интеграла. Из обрасца 17) имамо да је

$$\int_0^z \Phi(z)\,dz = \sum \int_0^z \frac{dz}{z-\alpha_n} + \sum \frac{1}{\alpha_n}\int_0^z P\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)dz \qquad 28)$$

Први од ова два интеграла има за вредност

$$\Big[\log(z-\alpha_n)\Big]_0^z = \log(z-\alpha_n) - \log(-\alpha_n) = \log\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)$$

Пошто је

$$P(t) = 1+t+t^2+t^3+\cdots+t^{n-1}$$

то је

$$\varphi\left(\frac{z}{d_n}\right) = 1 + \frac{z}{d_n} + \frac{z^2}{d_n^2} + \cdots + \frac{z^{p-1}}{d_n^{p-1}}$$

Према томе је

$$\int_0^z \varphi\left(\frac{z}{d_n}\right) dz = z + \frac{z^2}{2d_n} + \frac{z^3}{3d_n^2} + \cdots + \frac{z^p}{p\,d_n^{p-1}}$$

Према томе последња сума у обрасцу 28) има за вредност

$$Q\left(\frac{z}{d_n}\right)$$

где $Q(t)$ означује полином

$$Q(t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^p}{p} \qquad 29)$$

Према свему овоме образац 27) своди се на ово

$$\log\frac{F(z)}{F(0)} = \sum \log\left(1 - \frac{z}{d_n}\right) + Q\left(\frac{z}{d_n}\right) + G(z) \qquad 30)$$

Ако левом и десном страном обрасца 30) степенујемо број e и ако приметимо да је

$$e^{\log\frac{F(z)}{F(0)}} = \frac{F(z)}{F(0)}$$

и затим да је

$$e^{\sum \log\left(1-\frac{z}{d_n}\right)} = \prod\left(1 - \frac{z}{d_n}\right)$$

онда се тај образац своди на

$$\frac{F(z)}{F(0)} = e^{G(z)} \prod\left[\left(1-\frac{z}{d_n}\right) e^{Q\left(\frac{z}{d_n}\right)}\right]$$

што се може написати у облику

$$F(z) = F(0)\, e^{G(z)} \prod (U_n) \qquad 31)$$

где је

$$U_n = \left(1 - \frac{z}{d_n}\right) e^{Q\left(\frac{z}{d_n}\right)} \qquad 32)$$

У обрасцима 31) и 32) оличена је друга Weierstrass-ова теорема која гласи: Кад је дата једна цела функција $F(z)$ која има ту особину да ако се са $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots$ означе њене узастопне нуле, ред

$$\frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}} + \frac{1}{|\alpha_2|^{p+1}} + \cdots$$

је конвергентан за једну згодно изабрану вредност p, таква се функција може написати у облику

$$F(z) = F(0)\, e^{G(z)} \prod (U_n) \qquad 33)$$

где је U_n дато обрасцем

$$U_n = \left(1 - \frac{z}{d_n}\right) e^{Q\left(\frac{z}{d_n}\right)} \qquad 34)$$

Израз U_n Weierstrass је назвао <u>примарним фактором</u> такве функције $F(z)$. Приметимо да је и у овом случају кад би функција $F(z)$ била равна нули за $z=0$ пре употребе потребно по делити ју са згодно изабраним степеном p од z, чиме би она била ослобођена такве нуле. На тако добијени резултат имао би се тада применити Weierstrass-ов образац.

3° Случај.

Има и таквих функција за које не постоји никакав сталан број p такав да ред

$$\frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}} + \frac{1}{|\alpha_2|^{p+2}} + \dots$$

буде конвергентан. Међутим у свима могућим случајевима ако се пусти да p варира са индексом n може се учинити да тај ред буде конвергентан. Тако н. пр. узевши да је

$$p+1=n$$

тада ће ред у опште бити конвергентан јер Cauchy-ев израз

$$\sqrt[n]{\frac{1}{|\alpha_n|^n}} = \frac{1}{|\alpha_n|}$$

тежи нули за n бесконачно, пошто нуле $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ бесконачно расту са индексом n. Узевши дакле да је

$$p+1=n$$

тада ће ред бити конвергентан и на њега се може применити све оно што је казано за 2° случај. Функција ће дакле F(z) бити опет представљена обрасцима 33) и 34) само с том разликом што ће израз Q који је био полином p-тог реда бити сада један бескрајан ред. Отуда трећа теорема Weierstrass-ова која гласи овако: Кад је ред

$$\frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}} + \frac{1}{|\alpha_2|^{p+1}} + \dots$$

такав да је немогуће наћи никакав сталан број p за који би он конвергирао, функција се може представити обрасцима 33) и 34) али где је Q један бескрајан ред.

Као што се дакле види у сваком случају целу функцију F(z) можемо представити као производ од једне константе F(0), једне целе функције облика

$$e^{G(z)}$$

и једнога продукта од примарних фактора. Ови су примарни фактори у опште облика

$$U_n=\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)e^{Q\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)}$$

где израз $Q(t)$ може имати један од ова три облика:

1° ако је израз

$$\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{|\alpha_2|}+\frac{1}{|\alpha_3|}+\cdots$$

конвергентан, $Q(t)$ се своди на нулу;

2° ако је израз

$$\frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}}+\frac{1}{|\alpha_2|^{p+1}}+\frac{1}{|\alpha_3|^{p+1}}+\cdots$$

конвергентан за извесну сталну вредност p, $Q(t)$ је полином p-тог реда представљен обрасцем

$$Q(t)=t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{t^p}{p}$$

3° ако ред

$$\frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}}+\frac{1}{|\alpha_2|^{p+1}}+\frac{1}{|\alpha_3|^{p+1}}+\cdots$$

не конвергира ни за какву сталну вредност броја p, $Q(t)$ ће опет бити облика

$$Q(t)=t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots$$

али са бескрајним бројем чланова.

Примедбе:

1° Од важности је приметити да се као примарни фактор има сматрати цео израз

$$\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)e^{Q\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)}$$

и да се он никако не сме раздвајати, јер према самом досадашњем начину извођења продукат

$$\Pi(U_n)$$

само онда има смисла кад та два фактора иду заједно један с другим. Случај је аналог ономе кад би имали продукат

$$\Pi(u_n v_n)$$

где би било

$$u_n=e^{\frac{1}{2n-1}}$$

$$v_n=e^{-\frac{1}{2n}}$$

поред свега што је у опште

$$\Pi(u_n v_n)=\Pi(u_n)\cdot\Pi(v_n)$$

у овом случају тај образац више не вреди јер се u_n и v_n не смеју раздвајати ако се хоће да продукт има смисла. Овде би било

$$\prod(u_n)=\prod\left(e^{\frac{1}{2n-1}}\right)=e^{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots} \qquad 35)$$

$$\prod(v_n)=\prod\left(e^{-\frac{1}{2n}}\right)=e^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)} \qquad 36)$$

Изрази 35) и 36) немају смисла зато што су бескрајни редови на десној страни дивергентни. Међутим производ

$$\prod(u_n v_n)$$

има смисла, јер је он раван

$$\prod(u_n v_n)=e^{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots}$$

и ред је на десној страни конвергентан. Исти је случај и са горњим обрасцима 33) и 34) тако да се изрази

$$\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right) \quad \text{и} \quad e^{Q\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)}$$

не смеју раздвајати већ се оба стављају у примарни фактор.

2° У обрасцу 33) фигурише израз

$$e^{G(z)}$$

За функцију $G(z)$ зна се само то да је цела функција. Међутим о тој целој функцији док се остаје у оваквој генералности не може се ништа ближе казати нити се она прецизирати. Та се функција може одредити тек у појединим специјалним случајевима и на нарочити специјални начин. Weierstrass-ова теорија не може имати ништа више прецизирано.

У горњим трима теоремама састоји се Weierstrass-ова метода за раздвајање целих функција у примарне факторе кад се знају нуле дате функције. Као што се види то се растављање састоји у томе да се формира ред

$$S=\frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}}+\frac{1}{|\alpha_2|^{p+1}}+\cdots$$

и да се испита за какве је вредности p он конвергентан и према томе са којим се од горња три случаја има посла применити прву, другу или трећу Weierstrass-ову теорему.

Примери:

1. Нека је дата функција

$$F(z)=\frac{\sin z}{z}$$

то је једна цела функција пошто за

$$z=0$$

није бескрајна. Она има бескрајно много нула и то од две врсте: прве врсте

$$\alpha_n=n\pi$$

и друге врсте

$$\alpha_n=-n\pi$$

где је

$$n=1,2,3,\dots$$

одговарајући ред S овде је

$$S=\frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}}+\frac{1}{|\alpha_2|^{p+1}}+\cdots=\frac{1}{|\pi|^{p+1}}+\frac{1}{|2\pi|^{p+1}}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{\pi^{p+1}}\left[\frac{1}{1^{p+1}}+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\cdots\right]$$

Најмања вредност p за коју је ред у средњој загради конвергентан јесте

$$p=1$$

према чему се полином $Q(t)$ своди на полином првог степена

$$Q(t)=t$$

Према томе за нуле прве врсте имаћемо као примарни фактор

$$U_n=\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}$$

За нуле друге врсте имаћемо као примарни фактор

$$U_n=\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)e^{-\frac{z}{n\pi}}$$

те две врсте фактора спајају се у један примарни фактор облика

$$U_n=\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

тако да се горња функција може написати у облику

$$\frac{\sin z}{z}=e^{G(z)}\prod(U_n)$$

или

$$\frac{\sin z}{z}=e^{G(z)}\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

За целу функцију G не може Weierstrass-ова теорија ништа да каже. Међутим на известан специјалан начин налази се да се у овом случају функција $G(z)$ своди на нулу. Отуда образац

$$\frac{\sin z}{z}=\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

на који је још раније нашао Euler.

2. Нека је дата цела функција

$$F(z) = \cos z$$

И она има две врсте нула: нуле прве врсте

$$\alpha_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

и нуле друге врсте

$$\alpha_n = -(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

Одговарајући ред S овде је

$$S = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{p+1}\left[\frac{1}{1^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \frac{1}{5^{p+1}} + \cdots\right]$$

Најмања вредност p за коју ред на десној страни конвергира јесте

$$p = 1$$

па се полином $Q(t)$ своди на

$$Q(t) = t$$

Према томе имаћемо као примарни фактор за нуле прве врсте

$$U_n = \left(1 - \frac{z}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}\right) e^{\frac{z}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}}$$

а за нуле друге врсте

$$U_n = \left(1 + \frac{z}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}\right) e^{-\frac{z}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}}$$

Ове се две врсте фактора спајају у један примарни фактор облика

$$U_n = \left[1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]$$

према чему се добија образац

$$\cos z = e^{G(z)} \prod \left[1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]$$

За функцију $G(z)$ налази се на известан специјални начин да се и овде своди на нулу тако да се добија на послетку образац

$$\cos z = \prod \left[1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]$$

на који је такође раније нашао Euler.

Вратимо се ранијем Weierstrass-овом обрасцу

$$F(z) = F(0)\, e^{G(z)} \prod (u_n) \qquad 40)$$

где је

$$u_n = \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{Q\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)} \qquad 41)$$

а где је

$$Q(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^p}{p} \qquad 42)$$

Пре свега пошто је $F(0)$ константа можемо ју увући у саму функцију $G(z)$ тако да у рачунима можемо увек претпостављати као да она и не постоји. Видели смо да је број p дефинисан на овај начин: то је такав један реалан број за који ће ред

$$S=\frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}}+\frac{1}{|\alpha_2|^{p+1}}+\dots$$

бити конвергентан. Као што се даље види величина броја p зависи од природе нула функције $F(z)$ и од брзине којом те нуле расту са рашћењем њиховога ранга. Најмањи позитиван број p тако изабран за једну дату функцију назива се род (genre, Gattung) те функције. Тај број игра врло важну улогу у теорији целих функција јер од његове величине зависе многе особине целих функција. Он се за једну функцију одређује према самој својој дефиницији овако: треба да су познате или нуле саме функције или да се имају бар довољни подаци о томе којом брзином те нуле расту са рашћењем њиховог ранга. Из тих података треба одредити колики треба да је најмањи број p па да горњи ред S буде конвергентан. Тако одређен број p биће род те функције. Кад је $p=0$ т.ј. кад је ред

$$S=\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{|\alpha_2|}+\frac{1}{|\alpha_3|}+\dots$$

конвергентан, за функцију се каже да је нултог реда; кад се нађе да је ред S дивергентан али да је ред

$$\frac{1}{|\alpha_1|^2}+\frac{1}{|\alpha_2|^2}+\dots$$

конвергентан, одговарајућа функција биће првог реда и т.д.

Примери:

1. Раније смо имали функцију

$$F(z)=\frac{\sin z}{z}$$

чије су нуле представљене општим обрасцем

$$z=\pm n\pi$$

Ред S овде је

$$S=\frac{1}{\pi^{p+1}}\left[\frac{1}{1^{p+1}}+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\dots\right]$$

и најмањи број p за који је ред S конвергентан јесте $p=1$. Према томе функција $\frac{\sin z}{z}$ је првог рода.

2. За функцију

$$F(z) = \cos z$$

чије су нуле

$$z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

налази се тако да је њен род $p=1$.

3. За функцију

$$F(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

нуле су дате обрасцем

$$\sqrt{z} = \pm n\pi$$

т.ј.

$$z = n^2\pi^2$$

збир S овде је

$$S = \frac{1}{\pi^{2(p+1)}}\left[\frac{1}{1^{2(p+1)}} + \frac{1}{2^{2(p+1)}} + \frac{1}{3^{2(p+1)}} + \cdots\right]$$

и најмањи број p за који је ред S конвергентан јесте $p=0$ што значи да је дата функција нултог реда.

4. Исто се тако налази да је цела функција

$$\cos\sqrt{z}$$

нултог рода.

и т.д.

Примедба: Из овога се види да кад се тачно знају нуле једне целе функције, може се помоћу обичних правила о конвергенцији реалних и позитивних редова (Cauchy-ево, D'Alambert-ово правило) одредити одговарајући број p. Међутим за ту одредбу није увек потребно знати саме вредности нула, довољно је н.пр. знати да нуле расту са својим рангом истом брзином као једна дата функција $\varphi(n)$. То тада значи да при бескрајном рашћењу ранга n, количник

$$\frac{|a_n|}{\varphi(n)}$$

тежи једној коначној и од нуле различној граници k. То онда значи да се горњи ред S понаша у погледу конвергенције на исти начин као ред чији је општи члан

$$\frac{1}{\varphi(n)^{p+1}}$$

и према томе ако за овај нови ред буде по одредили одговарајући број p за који ће он конвергирати, за толики ће исти број p конвергирати и сам ред S, па према томе тај број p представљa род дате функције. Према овоме једна цела функција са ограниченим бројем нула увек је нултог рода јер је за њу увек ред S конвергентан. Као што се даље види број p зависи у главном од брзине рашћења модула нула дате функције са рангом n.

Горњи општи Weierstrass-ови обрасци 40), 41) и 42) дају начина да се решавају задаци овакве врсте: Кад је дат један низ бројева

$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \cdots$$

реалних или имагинарних, који низ може бити ограничен или неограничен, формирати ону целу функцију $F(x)$ која има тај низ бројева као своје нуле и одредити род такве целе функције. Решавање овог задатка је ово: пре свега ваља образовати ред

$$S = \frac{1}{|\alpha_1|^{p+1}} + \frac{1}{|\alpha_2|^{p+1}} + \cdots$$

(треба имати на уму да у реду не фигуришу сами бројеви $\alpha_1 \alpha_2 \cdots$ већ њихови модули) и из њега одредити број p на горњи начин. Кад је овај одређен треба формирати функцију $Q(t)$ дефинисану обрасцем 42), помоћу ове и помоћу самих вредности $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$ треба формирати примарне факторе

$$u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots$$

тада према обрасцу 40) тражена функција $F(x)$ биће равна производу свих тих примарних фактора и једне функције $e^{G(x)}$ коју је немогућно одредити без других података саме функције $F(x)$.

Кад је у Weierstrass-овом обрасцу изостављен израз $e^{G(x)}$ који ништа не утиче на скуп примарних фактора нити зависи од нула саме функције, онда део који остаје т.ј.

$$\prod(u_n)$$

назива се канонични део. Према томе под каноничним делом једне целе функције разуме се само производ њених примарних фактора без $e^{G(z)}$!

Н. пр. формирати канонични део једне целе функције која има као нуле низ вредности

$$1 \quad 8 \quad 27 \quad \cdots \quad n^3$$

Ред S овде је

$$S = \frac{1}{1^{3(p+1)}} + \frac{1}{2^{3(p+1)}} + \frac{1}{3^{3(p+1)}} + \cdots$$

и он је конвергентан и за $p=0$. Према томе функција је нултог реда, полином $G(t)$ своди се на 1 а општи примарни фактор u_n је

$$u_n = 1 - \frac{z}{n^3}$$

и према томе канонични део тражене функције биће

$$F(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{n^3}\right)$$

Laguerre-ова теорема

Нека је дата једна функција $F(z)$ рода p. Образујмо биномну једначину

$$x^{p+1} - 1 = 0$$

и нека су

$$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \cdots \quad \omega_{p+1}$$

њени корени. Формирајмо израз

$$\Delta(z) = F(\omega_1 z)\cdot F(\omega_2 z)\cdot F(\omega_3 z) \cdots F(\omega_{p+1} z)$$

и сменимо у томе изразу z новом променљивом t таквом да је

$$z = \sqrt[p+1]{t}$$

Laguerre-ова теорема тада гласи овако:

Израз Δ биће увек једна цела функција нултог рода променљиве t, имаће као своје нуле

$$\alpha_1^{p+1} \quad \alpha_2^{p+2} \quad \alpha_3^{p+3} \quad \cdots$$

где су

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \cdots$$

нуле саме функције $F(z)$, и та ће функција Δ имати за израз

$$\Delta = e^{H(t)} \prod \left(1 - \frac{t}{\alpha_n^{p+1}}\right)$$

Да би теорему доказали пођимо од израза

$$F(z) = e^{G(z)} \prod (u_n) \qquad 1)$$

где је

$$u_n = \left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right) e^{Q\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)} \qquad 2)$$

и где је $Q(t)$ дато обрасцем

$$Q(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots \qquad 3)$$

Пре свега очевидно је да ће се у изразу $\Delta(z)$ јавити као примарни фактор

$$u_n = \left(1-\frac{\omega_1 z}{\alpha_n}\right)\left(1-\frac{\omega_2 z}{\alpha_n}\right)\cdots\left(1-\frac{\omega_{p+1} z}{\alpha_n}\right) e^{Q\left(\frac{\omega_1 z}{\alpha_n}\right)+Q\left(\frac{\omega_2 z}{\alpha_n}\right)+\cdots+Q\left(\frac{\omega_{p+1} z}{\alpha_n}\right)} \qquad 4)$$

или

$$u_n = (1-\omega_1 y)(1-\omega_2 y)\cdots(1-\omega_{p+1} y)\, e^{Q(\omega_1 y)+Q(\omega_2 y)+\cdots+Q(\omega_{p+1} y)} \qquad 5)$$

где је краткоће ради стављено

$$y = \frac{z}{\alpha_n}$$

Међутим је идентички

$$(1-\omega_1 y)\cdot(1-\omega_2 y)\cdots(1-\omega_{p+1}y) = 1 - y\sum\omega_k + y^2\sum\omega_k\omega_i - y^3\sum\omega_k\omega_i\omega_j + \cdots \pm y^{p+1}\omega_1\omega_2\cdots\omega_{p+1}$$

Међутим пошто су

$$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_{p+1}$$

корени биномне једначине

$$x^{p+1} - 1 = 0$$

то изрази

$$-\sum\omega_k \qquad +\sum\omega_k\omega_i \qquad -\sum\omega_k\omega_i\omega_j \qquad \cdots$$

представљају коефицијенте ове биномне једначине, а ти су коефицијенти равни нули осим последњег који је раван -1, па се последњи образац своди на

$$(1-\omega_1 y)(1-\omega_2 y)\cdots(1-\omega_{p+1}y) = 1 - y^{p+1} \qquad 6)$$

Уочимо сад израз

$$Q(\omega_1 y)+Q(\omega_2 y)+\cdots+Q(\omega_{p+1}y) = (p+1) + y\sum\omega_i + \frac{y^2}{2}\sum\omega_i^2 + \cdots + \frac{y^p}{p}\sum\omega_i^p$$

Међутим пошто су

$$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_{p+1}$$

корени биномне једначине

$$x^{p+1} - 1 = 0$$

то је, као што се зна из теорије биномних једначина

$$\sum\omega_i = 0 \quad \sum\omega_i^2 = 0 \quad \sum\omega_i^3 = 0 \quad \cdots \quad \sum\omega_i^p = 0$$

према чему се добија

$$Q(\omega_1 y)+Q(\omega_2 y)+\cdots+Q(\omega_{p+1} y)=p+1 \qquad 7)$$

заменом вредности 6) и 7) у 5) као и вредности

$$y=\frac{z}{\alpha_n}$$

примарни се фактор u_n своди на

$$u_n=\left(1-\frac{z^{p+1}}{\alpha_n^{p+1}}\right)e^{p+1} \qquad 8)$$

Уочимо сад још израз

$$e^{G(z)}$$

који у Laguerre-овој комбинацији $\Delta(z)$ постаје

$$e^{G(\omega_1 z)+G(\omega_2 z)+\cdots+G(\omega_{p+1} z)} \qquad 9)$$

Пошто је $G(z)$ цела функција, то се може развити у Maclaurin-ов ред

$$G(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots$$

тако да израз 9) постаје

$$9)=e^{(p+1)a_0+a_1 z\sum\omega_i+a_2 z^2\sum\omega_i^2+\cdots+a_{p+1}z^{p+1}\sum\omega_i^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}\sum\omega_i^{p+2}+\cdots}$$

Међутим из теорије биномних једначина зна се да збирови

$$\sum\omega_i^{p+1}\quad\sum\omega_i^{2(p+1)}\quad\sum\omega_i^{3(p+1)}$$

имају сви за вредност $p+1$, а међутим сви остали степени равни су нули тако да је

$$\sum\omega_i=0\quad\sum\omega_i^2=0\quad\sum\omega_i^3=0\quad\cdots$$

Према томе образац 9) своди се на

$$9)=e^{(p+1)a_0+(p+1)a_{p+1}z^{p+1}+2(p+1)a_{2(p+1)}z^{2(p+1)}+3(p+1)a_{3(p+1)}z^{3(p+1)}+\cdots}$$

Ако сад у обрасцима 8) и 9) сменимо

$$z=\sqrt[p+1]{t}$$

добија се

$$u_n=\left(1-\frac{t}{\alpha_n^{p+1}}\right)e^{p+1} \qquad 10)$$

и

$$9)=e^{(p+1)(a_0+a_{p+1}t+a_{2(p+1)}t^2+a_{3(p+1)}t^3+\cdots)}$$

т.ј.

$$9)=e^{\text{цела функција од } t}$$

Према свему овом Laguerre-ов израз постаје

$$\Delta=e^{H(t)}\prod\left(1-\frac{t}{\alpha_n^{p+1}}\right) \qquad 11)$$

где смо у функцији $H(t)$ унели и сталну количину e^{p+1} из примарног фактора и где је $H(t)$ једна цела функција променљиве t. Образац 11) доказује потпуно Laguerre-ову теорему.

Laguerre-ова теорема интересантна је сама по себи једино стога што поред свега тога што се она добија

Према томе и према обрасцу 12) биће

$$|\Delta(t)| < \prod \left(1 + \frac{R}{|\beta_k|}\right) \qquad 13)$$

за све вредности t које су на кругу. У Аритметици је познато овакво једно правило: кад је дат један низ позитивних количина

$$a_1, \ a_2 \ \cdots \ a_m$$

па образујемо најпре њихову геометријску средину

$$\sqrt[m]{a_1 a_2 \cdots a_m}$$

па затим њихову аритметичку средину

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m}$$

прва је увек мања од друге или њој равна. Ако то правило применимо на факторе

$$a_k = 1 + \frac{R}{|\beta_k|}$$

добија се да је

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{k=m}\left(1 - \frac{R}{|\beta_k|}\right)} \leq \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{k=m}\left(1 + \frac{R}{|\beta_k|}\right) = \frac{1}{m}\left[m + \sum_{k=1}^{k=m}\frac{1}{|\beta_k|}\right] = 1 + \frac{\lambda R}{m}$$

где је

$$\lambda = \sum_{k=1}^{k=m}\frac{1}{|\beta_k|}$$

Дизањем на степен m добија се

$$\prod_{k=1}^{k=m}\left(1 + \frac{R}{|\beta_k|}\right) \leq \left(1 + \frac{R\lambda}{m}\right)^m \qquad 14)$$

Пустимо сад да m бескрајно расте. Израз на левој страни обрасца 14) постаје бескрајан продукат

$$\prod\left(1 + \frac{R}{|\beta_k|}\right)$$

Међутим израз на десној страни тежи граници

$$e^{R\lambda}$$

а само λ претвара се у бескрајни ред

$$\mu = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{|\beta_k|} \qquad 15)$$

Према томе неједначина 14) постаје

$$\prod\left(1 + \frac{R}{|\beta_k|}\right) < e^{\mu R} \qquad 16)$$

Поређењем неједначина 16) и 13) добија се да је

$$|\Delta(t)| < e^{\mu R}$$

а пошто је

$$R = r^{p+1}$$

то се добија као крајни резултат ова неједначина

$$|\Delta(t)| < e^{\mu r^{p+1}}$$

у којој је оличено ово правило: Кад је дата једна цела функција $F(z)$ p-тог рода и канонична типа, за све тачке z на једноме кругу с полупречника r модуо Laguerre-ове комбинације Δ непрестано је мањи од израза $e^{\mu r^{p+1}}$ где је μ извесна константа која има за вредност

$$\mu = \sum \frac{1}{|\alpha_k|}$$

а где $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots$ представљају узастопне нуле функције $F(z)$.

2° Претпоставимо сад да је функција $F(z)$ функција нултог рода. Онда је

$$p=0$$

биномна једначина

$$x^{p+1}=1$$

своди се на

$$x=1$$

низ корена

$$\omega_1\ \omega_2\ \cdots\ \omega_{p+1}$$

своди се на јединицу; Laguerre-ова комбинација $\Delta(t)$ своди се на саму функцију

17) $F(z)$. Отуда из малопређашњег правила добијамо непосредно ово правило: Модуо једне целе функције нултог рода за све вредности z на једном кругу с полупречника r увек је мањи од израза

$$e^{\mu r}$$

где је μ константа која има за вредност

$$\mu = \sum \frac{1}{|\alpha_k|}$$

Ово правило доводи и до других интересантних правила о целим функцијама нултог рода. Ако се цела функција $F(z)$ развије у Маклоренов ред

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

зна се према Cauchy-евом обрасцу да је

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

где је интеграл узет дуж ма каквог круга описаног око почетка. Ако се за ову интеграцију узме круг с полупречника r треба ставити

$$z = r e^{\theta i}$$

одакле је

$$dz = ri\, e^{\theta i}\, d\theta = riz\, d\theta$$

Према томе имаћемо

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int \frac{F(z)}{r^n}\, e^{-(n+1)\theta i}\, d\theta$$

према познатом правилу за модуле интеграла биће

$$|a_n| < \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} |F(z)|\cdot\left|e^{-(n+1)\theta i}\right|\cdot|d\theta|$$

а пошто је

$$\left|e^{-(n+1)\theta i}\right| = 1$$

а $|F(z)|$ према малопређашњем правилу је мањи од $e^{\mu r}$, то последња неједначина постаје

$$|a_n| < \frac{e^{\mu r}}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{e^{\mu r}}{r^n}$$

или

$$|a_n| < \frac{e^{\mu r}}{r^n} \qquad 18)$$

Пошто је функција $F(z)$ цела, дакле нема у целој равни сингуларитета, може се за круг интеграције узети круг са каквим се хоће полупречником r. Шта више може се узети за свако a_n други полупречник r, а пошто можемо тако располагати са r, то га можемо изабрати тако да десна страна неједначине 18) буде што је могуће мања. Очевидно је да у колико је она мања, у толико је горња граница коефицијента a_n дата неједначином 18) прецизнија. Потражимо дакле какву вредност треба да узмемо за r па да функција

$$\frac{e^{\mu r}}{r^n} \qquad 19)$$

буде минимум. Та се функција може написати у облику

$$e^{\mu r - n\log r}$$

Њен први извод по r биће

$$\left(\mu - \frac{n}{r}\right) e^{\mu r - n\log r} \qquad 20)$$

а њен други извод биће

$$\left[\left(\mu - \frac{n}{r}\right)^2 + \frac{n}{r^2}\right] e^{\mu r - n\log r} \qquad 21)$$

Ставимо ли да је раван нули први извод 20) добија се једначина

$$\mu - \frac{n}{r} = 0$$

одакле је

$$r = \frac{n}{\mu}$$

$\Theta(\mu e r)$ где μ означује горе дефинисану константу а $\theta(z)$ означује специјалну функцију дефинисану Маклореновим редом

$$\theta(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{27} + \frac{z^4}{256} + \cdots$$

3° Нека је сад дата једна функција $F(z)$ p-тог рода и нека је

$$\Delta(t) = F(\omega_1 z)\cdot F(\omega_2 z)\cdots F(\omega_{p+1} z) \qquad 24)$$

Лагиерре-ова комбинација која јој одговара, где је

$$t = z^{p+1}$$

Видели смо да је $\Delta(t)$ извесна цела функција променљиве t увек нулте врсте; тако исто видели смо под 1° да је за све време док се z креће по кругу C непрестано

$$|\Delta(t)| < e^{\mu r^{p+1}}$$

(ранија неједначина 17)). Пустимо даље да се z креће по кругу C; за то ће време функција $F(z)$ непрестано мењати свој модуо који ће ићи од једне највеће до једне најмање вредности. Означимо са $N(z)$ најмањи модуо који добија функција $F(z)$ при томе кретању променљиве z. По самој дефиницији овог модула биће

$$N(z) \leq |F(z)|$$

па ма где се налазило z на томе кругу C. Ако уочимо вредности

$$\omega_1 z \qquad \omega_2 z \qquad \cdots \qquad \omega_{p+1} z$$

пошто је у опште

$$|\omega_k z| = |\omega_k|\cdot|z|$$

и пошто је

$$|\omega_k| = 1$$

то је

$$|\omega_k z| = |z|$$

што значи да кадгод се z налази на кругу C увек се и тачка $\omega_k z$ налази на том истом кругу и према томе по самој дефиницији модула $N(z)$ биће

$$\begin{aligned} N(z) &\leq |F(\omega_1 z)| \\ N(z) &\leq |F(\omega_2 z)| \\ &\cdots\cdots \\ N(z) &\leq |F(\omega_{p+1} z)| \end{aligned} \qquad 25)$$

Пошто су сви чланови у неједначинама 25) позитивни, смемо те неједначине међу собом помножити, па је

$$[N(z)]^{p+1} \le |F(\omega_1 z)| \cdot |F(\omega_2 z)| \cdots |F(\omega_{p+1} z)|$$

или

$$[N(z)]^{p+1} \le |\Delta(t)| \qquad 26)$$

а пошто смо раније под 1° видели да за све време док се z креће по кругу C непрестано је

$$|\Delta(t)| < e^{\mu r^{p+1}}$$

то се неједначина 26) своди на

$$[N(z)]^{p+1} \le e^{\mu r^{p+1}}$$

одакле се добија

$$N(z) < e^{\frac{\mu}{p+1} r^{p+1}} \qquad 27)$$

у чему је оличено ово правило: најмањи модуо који добија једна цела функција $F(z)$ рода p за време док се z креће по једноме кругу описаном око $z=0$ са полупречником r увек је мањи од израза

$$e^{\frac{\mu}{p+1} r^{p+1}}$$

где је μ извесна константа која има раније нађену вредност

$$\mu = \sum \frac{1}{|\alpha_n|^{p+1}}$$

а где су $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ узастопне нуле саме функције $F(z)$.

Н. пр. нека је дата функција

$$F(z) = \frac{\sin z}{z}$$

чије су нуле

$$\alpha_n = n\pi$$

За њу је

$$p = 1$$

према чему је

$$\mu = \sum \frac{1}{(n\pi)^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2}$$

Међутим зна се да је

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

и према томе је

$$\mu = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{6}$$

то би било μ што произлази од позитивних нула

$$\alpha_n = n\pi$$

Исту би вредност имали и за негативне нуле $n\pi$ тако да је

$$\mu = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Према томе је

$$N(z) < e^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot r^2} = e^{\frac{r^2}{6}}$$

Према томе минимални модуо функције

$$F(z) = \frac{\sin z}{z}$$

за време док се z креће по кругу полупречника r увек је мањи од

$$e^{\frac{r^2}{6}}$$

Релације између нула целих функција и нула њихових извода

Видели смо у теорији алгебарских једначина да за њих вреди Ролеова теорема исказана у овом облику:

1° између две узастопне реалне нуле једног полинома мора лежати бар једна реална нула његовог извода;

2° између две узастопне реалне нуле извода једног полинома може лежати највише једна нула полинома.

При извођењу ове теореме за алгебарске једначине није претпостављено ништа друго до само континуалност (непрекидност) полинома. Пошто је свака цела функција карактерисана тиме што нема никаквих прекида, бескрајности или наглих скокова т.ј. пошто је свака од њих континуална, то је очевидно да Ролова теорема потпуно важи и за сваку целу функцију. У том погледу постоји потпуна аналогија између полинома и целих функција.

Међутим има других особина нула које карактеришу полиноме а које не важе за ма какву целу функцију. Тако н.пр. зна се да кад су све нуле једног полинома реалне, онда су и све нуле његовог извода такође реалне и обрнуто. То излази као непосредна последица Ролове теореме за полиноме. Тако ако су

$$a \quad b \quad c \quad \dots \quad k$$

нуле изводне једначине, зна се да је Ролов низ

$$-\infty \quad a \quad b \quad c \quad \dots \quad k \quad +\infty$$

и он се састоји из n узастопних размака ако је n степен једначине. Пошто одговарајући полином може имати само онолико реалних нула колико у овом Роловом низу има промена знака идући са лева на десно, то, ако Ролов низ није потпун т.ј. ако нема n размака, не могу ни све нуле полинома бити реалне. Из тога се види да се код полинома не може десити да су све нуле извода имагинарне а све нуле самог полинома реалне. Међутим лако се уверити из појединих примера да то више не важи за целе функције уопште. Лако је н.пр. формирати веома просте целе функције које имају ту особину да су им све нуле њиховог извода имагинарне а међутим да су све нуле саме функције реалне. Најпростији пример такве врсте била би цела функција

$$F(z) = (z+1)\, e^{z^2}$$

која има свега једну нулу

$$z=1$$

и она је реална. Међутим њен извод је

$$F'(z) = [(z+1)2z+1]e^{z^2} = (2z^2+2z+1)e^{z^2}$$

и он постаје раван нули за оне вредности z за које је

$$2z^2+2z+1=0$$

а те су вредности

$$z = -\frac{1}{2}(1 \pm i)$$

— дакле све су нуле извода имагинарне а све су нуле саме функције реалне. Тако исто ако уочимо општију функцију

$$F(z) = (z+a)e^{mz^2+nz}$$

она има као једну нулу

$$z = -a$$

и она је реална. Међутим њен извод

$$F'(z) = [(z+a)(2mz+n)+1]e^{mz^2+nz} =$$

$$= [2mz^2+(n+2am)z+an+1]e^{mz^2+nz}$$

постаје раван нули за оне вредности z за које је

$$2mz^2+(n+2am)z+an+1=0$$

те су нуле дакле

$$z = -\frac{n+2am}{4m} \pm \sqrt{\left(\frac{n+2am}{4m}\right)^2 - \frac{an+1}{2m}}$$

ако су сад константе a, m и n такве да је поткорена количина негативна т.ј. да је

$$(n+2am)^2 - 8m(an+1) < 0$$

обе су вредности z имагинарне и према томе горња функција имала би ту особину да су њене нуле све реалне, а међутим све су нуле њеног извода имагинарне.

Из ових простих примера већ се види да код целих функција може наступити случај да су све нуле извода имагинарне а све нуле саме функције реалне. Поред свега тога постоје ипак две опште класе целих функција које се у овом погледу понашају потпуно као полиноми т.ј. код којих важи правило да ако су све нуле саме функције реалне, морају и све нуле изводне функције бити реалне т.ј. извод не може имати у том случају имагинарне нуле. Те две класе функција су ове:

1° класа: Све целе функције нултог рода са каноничног типа т.ј. све целе функције облика

$$F(z) = \prod\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)$$

2° класа: Све целе функције првог рода са каноничног типа т.ј. функције облика

$$F(z) = \prod\left[\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)e^{\frac{z}{\alpha_n}}\right]$$

Ми ћемо доказати за ове две врсте функција да ако су све њихове нуле α_n реалне, онда и њихов извод $F'(z)$ не може имати имагинарне нуле. Да би то доказали формирајмо из ових вредности извод саме функције $F(z)$. Пре свега имаћемо за прву врсту функција

$$\log F(z) = \sum \log\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right) = \sum \log \frac{1}{\alpha_n}(\alpha_n - z)$$

одакле је диференцијалењем

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum \frac{-1}{\alpha_n - z} = \sum \frac{1}{z-\alpha_n} \qquad 1)$$

За другу класу функција имаћемо

$$\log F(z) = \sum\left[\log\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)+\frac{z}{\alpha_n}\right] = \sum\left[\log\frac{1}{\alpha_n}(\alpha_n - z)+\frac{z}{\alpha_n}\right]$$

одакле диференцирањем

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum\left(\frac{1}{z-\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_n}\right) \qquad 2)$$

Помоћу образаца 1) односно 2) може се сад доказати да ако су све нуле $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$ реалне, извод $F'(z)$ не може имати ни једну имагинарну нулу. То ћемо доказати ако будемо доказали да израз

$$F'(a+bi)$$

не може бити раван нули кад год је b различито од нуле. То ће пак бити доказано ако докажемо да израз

$$\frac{F'(a+bi)}{F(a+bi)}$$

не може бити раван нули кад год је b различито од нуле. Да би то доказали сменимо у обрасцима 1) и 2)

$$z = a+bi$$

па се добија из обрасца 1)

$$3) \quad \frac{F'(a+bi)}{F(a+bi)} = \sum\frac{1}{a+bi-\alpha_n} = \sum\frac{a-bi-\alpha_n}{(a-\alpha_n)^2+b^2} = \sum\frac{a-\alpha_n}{(a-\alpha_n)^2+b^2} - bi\sum\frac{1}{(a-\alpha_n)^2+b^2}$$

а из обрасца 2)

$$4) \quad \frac{F'(a+bi)}{F(a+bi)} = \sum\left(\frac{1}{a+bi-\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_n}\right) = \sum\left[\frac{a-\alpha_n}{(a-\alpha_n)^2+b^2}+\frac{1}{\alpha_n}\right] - bi\sum\frac{1}{(a-\alpha_n)^2+b^2}$$

да би десне стране образаца 3) и 4) могле бити равне нули, потребно је да понаособ буду равни нули реални и имагинарни делови. Пошто су a, b и α_n сви реални, то ће прве суме на десној страни представљати реалан а друге суме на десној страни имагинарне делове, а пошто је

$$\sum \frac{1}{(a-\alpha_n)^2+b^2}$$

као збир од самих позитивних количина не може никад бити равно нули, то друге суме у обрасцима 3) и 4) могу само тако бити равне нули, ако је $b=0$ што никако не може бити ако су нуле $a+bi$ имагинарне. Тиме је доказано да одиста не може бити имагинарних нула т.ј. да ове две класе функција о којима је реч имају и у том погледу исте особине као и полиноми. Приметимо да горе наведени изузеци као што су функције

$$F(z)=(z+1)\,e^{z^2}$$

или

$$F(z)=(z+a)\,e^{mz^2+nz}$$

не потпадају ни под једну од ових класа функција.