Теорни основи Методе Најмањих Квадрата

Теорни основи Методе Најмањих Квадрата.

Теорни основи Методе Најмањих Квадрата.

1.
Општа расматрања.

1. Резултати, до којих долазимо опажањем или мерењем, не могу се, ни у коме случају, сматрати као апсолутно тачни. Узрок је томе несавршеност наших чула и инструмената којима се служимо, као и непрегледност и непознавање свију оних узрока, који утичу на тачност мерења и посматрања. Ми смо склони да поклонимо у толико више поверења једноме мерењем добивеном резултату и да му признамо у толико већи ступањ тачности у колико више ценимо вештину и брижљивост посматрачеву и квалитет инструмената којима се служио.

2. Грешке, које се чине при мерењу и посматрању, делимо на две врсте. Једну врсту чине *сталне*, *систематске* или *правилне грешке*. То су грешке које се под једнаким условима

константно и правилно јављају, које су проузроковане извесним особинама (погрешном конструкцијом) инструмената, каквим спољним утицајем, нпр. рђавим постављањем инструмената итд. и које, према томе, у сличним приликама подједнако и у истоме смислу утичу на тачност резултата.

Другу врсту грешака чине случајне грешке. Оне се у једнаким приликама јављају разно, како у погледу величине тако и у погледу смисла (правца) и које се, дакле, не могу приписати каквом нарочитом узроку. Ова врста грешака, као уопште све појаве случајности, подлеже Рачуну Вероватноће. Али као што у свима питањима вероватноће игра велику улогу правилно оцењивање узрока, искуство, па и извесан такт у одмеравању околности, разуме се, да и у питањима ове врсте не може бити говора о строго математичким доказима. Извођења, која чинимо, служе за потврђивање оних основа на којима базира наша Теорија Грешака. Ова теорија, коју су створили Лежандр и Гаус, даје нам упутство како се из више измерених

вредности, које се не поклапају, добија извесна средња вредност непознате количине за коју је највероватније да је правој вредности најближа. Смисао и корист ове методе је та, да консеквентном употребом не добијамо вредности које у великом броју случајева одступају за бескрајно мало од праве вредности, па да у појединим случајима може евентуално и друга која вредност бити ближа истинској вредности.

3. Узмимо да је извесна количина — означимо са x њену праву (непознату) вредност — мерена више пута под једнаким околностима, које уопште и према природи мерења могу бити од утицаја по тачност резултата. Нека су $x_1, x_2, \ldots x_n$ вредности које смо у n мерења добили за количину x. Место праве вредности нашли смо, дакле, извесан број приближних вредности. Питамо се како ћемо из ових n приближних вредности да определимо највероватнију вредност за непознату x, тј. ону вредност — обележимо је са X — за коју је највећа вероватноћа да је од свију других најприближнија истинској вредности.

Претпоставка, да ће се у више, под истим околностима, поновљених мерења једне количине њена вредност наћи толико исто пута већа колико пута мања од праве вредности, тако је евидентна да нам се сама намеће. Та претпоставка води нас закључку да се, као највероватнија вредност једне више пута, под истим условима, мерене количине има сматрати аритметичка средња из оних мерењем добивених резултата. Ставићемо

(1) $$X = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

или краће

(1a) $$X = \frac{\sum_{h=1}^{h=n} x_h}{n}.$$

Из (1) следује

(2) $$(X - x_1) + (X - x_2) + \dots + (X - x_n) = 0$$

или

(2a) $$\sum_{h=1}^{h=n} (X - x_h) = 0.$$

Узев (са великом приближношћу[1]) да су $X - x_1$, $X - x_2$, … $X - x_n$ грешке, које су учињене у првом, другом, … n-томе мерењу, можемо начело претстављено формулом

1) потпуно тачно није, јер X није права, но само највероватнија вредност измерене количине. Грешке, учињене у појединим мерењима, јесу $x - x_1$, $x - x_2$, … $x - x_n$.

(2) да искажемо: збир свију мерењем учињених грешака раван је нули или боље: највероватнија од свију вредности једне количине јесте она која чини да је збир разлика између ње и појединих, мерењем добивених, вредности раван нули. Најзад, ако образац (2) напишемо у форми

$$\frac{(X - x_1) + (X - x_2) + \dots + (X - x_n)}{n} = 0$$

можемо горње начело да искажемо на овај начин: највероватнија вредност једне више пута, под истим околностима, мерене количине јесте она која чини да је аритметичка средња из учињених грешака равна нули.

Утицај случајних грешака паралишемо, дакле, кад једну исту количину измеримо, под једнаким условима, што више пута и на основу тих измерених вредности определимо резултат према формули (1). Што будемо имали више посматраних вредности тиме ће њихова аритметичка средња бити приближнија правој вредности. Међутим овако добивени резултат није слободан од грешака прве врсте, јер се утицај константних грешака не може да поништи умножавањем посматраних вредности. Ако су узроци константних грешака познати и њихов утицај може да се одреди, онда такве грешке као и да не постоје, јер се резултат мерења даје лако кориговати. Тако нпр. мерењем једне количине, чија нам је величина добро позната, ми можемо да констатујемо у коме смислу дејствују константне грешке. Ако, пак, узроци сталних грешака нису познати или су такви да се не могу да подвргну рачуну, онда гледамо да њихов утицај смањимо на други начин, а то, поглавито методом мерења. У таквоме случају ми мењамо (али ~~без~~ да очигледно не погоршавамо) услове и околности за које знамо, или бар имамо разлога да сумњамо, да проузрокују правилне грешке. Радећи тако ми сводимо правилне грешке на случајне, тј. ми чинимо да правилне грешке добивају карактер случајних грешака и да се, према томе, све грешке, подесним распоредом и методом мерења или опажања, могу да подвргну принципима Рачуна Вероватноће.

4. При израчунавању највероватније вредности из

више мерењем добивених вредности ми смо (у чл. 3.) претпоставили да су сва мерења извршена под истим околностима, због чега нам је дозвољено да сва мерења сматрамо за подједнако тачна и да, на основу тога, узмемо аритметичку средњу као највероватнију или најтачнију вредност измерене количине. Ми смо напоменули да тачност једнога мерењем добивеног резултата зависи од разних и великим делом непознатих околности и да је, према томе, строго узев, код сваког мерења вероватноћа за тачност (поузданост) резултата различна. Но пошто претпоставка о аритметичкој средњој (како смо је формулисали у чл. 3.) важи само за подједнако поуздане податке, то ћемо, у будуће, под једнако поузданим подацима разумевати такве које добијамо мерењима која су извршена под истим околностима у колико смо у опште у стању да њихову идентичност и њихов утицај оценимо.

Да бисмо у неколико објаснили појам за поузданост или такозвану тежину једнога резултата, који је добивен мерењем и значај тога појма тежине по одређивање највероватније вредности из више резултата разне тежине, а на основу принципа аритметичке средње, узећемо један прост случај. Замислимо да је једна иста количина x мерена прво p пута, затим q пута, па онда r пута итд. и претпоставимо да су сва та мерења вршена под једнаким околностима и да свакој вредности, дакле, припада иста вероватноћа за тачности.

Нека су $x_1', x_2', \dots x_p'$ мерене вредности прве групе,
$x_1'', x_2'', \dots x_q''$ " " друге "
$x_1''', x_2''', \dots x_r'''$ " " треће "

итд. На основу начела о аритметичкој средњој јесте највероватнија вредност

за прву групу $x' = \dfrac{x_1'+x_2'+\dots+x_p'}{p} = \dfrac{\sum\limits_{h=1}^{h=p} x_h'}{p}$,

" другу " $x'' = \dfrac{x_1''+x_2''+\dots+x_q''}{q} = \dfrac{\sum\limits_{h=1}^{h=q} x_h''}{q}$,

" трећу " $x''' = \dfrac{x_1'''+x_2'''+\dots+x_r'''}{r} = \dfrac{\sum\limits_{h=1}^{h=r} x_h'''}{r}$

итд. Највероватнија вредност за сва $p+q+r+\dots$ мерења јесте по начелу о аритметичкој средњој

$$x = \frac{x_1'+x_2'+\dots+x_p'+x_1''+x_2''+\dots+x_q''+x_1'''+x_2'''+\dots+x_r'''+\dots}{p+q+r+\dots}$$

$$= \frac{\sum\limits_{h=1}^{h=p} x_h' + \sum\limits_{h=1}^{h=q} x_h'' + \sum\limits_{h=1}^{h=r} x_h''' + \dots}{p+q+r+\dots},$$

које се, на основу горњих образаца, може да напише овако

$$x = \frac{px'+qx''+rx'''+\dots}{p+q+r+\dots} \qquad (3)$$

Очевидно да се резултату, који је добивен из више подједнако добрих мерења једне исте количине, има поклонити у толико више поверења (у погледу његове тачности) у колико је већи број мерења, јер тако постаје већа вероватноћа да се случајне грешке узајамно компензују[1], па дакле и већа вероватноћа за тачност аритметичке средње. Не водећи рачуна о осталим околностима ми, у таквоме случају, можемо узети број посматраних вредности за тежину ре-

1) Ова околност, да се случајне грешке у толико више компензују узајамно у колико је већи број посматраних вредности једне исте количине, од великога је значаја по оцену тежине добивених резултата. Међутим, само онда, када је број посматраних вредности велики, оправдана је претпоставка да се случајне грешке у појединим посматраним вредностима узајамно компензују.

зултата, који, на основу аритметичке средње, изводимо из дотичних посматрања. На тај начин јесу $p, q, r, \dots$ тежине резултата $x', x'', x''', \dots$ добивених из прве, друге, треће, ... групе мерења.

Из обрасца (3) читамо правило да се највероватнија вредност из више разно поузданих резултата добија када се збир производа из појединих резултата и њихове тежине подели збиром тежина појединих резултата из којих смо је добили.

Ако узмемо да је $p=q=r=\dots$ и ставимо $p+q+r+\dots=np$ образац (3) претвара се у формулу (1) која исказује начело аритметичке средње.

До формуле (3) долазимо и овим размишљањем. Пре свега ми имамо разлога да резултатима мерења који одступају јаче од извесне средње вредности придамо мању важност (мању тежину). На који начин треба одредити тај однос између тежине резултата и величине његовог одступања од оне средње вредности за то нисмо у стању да дамо прецизан одговор. Један од могућих начина је следећи и он нас води истој формули као и горњи пример.

Узмимо да је извршен непаран број $n=2m-1$ мерења непознате количине x, а резултати сређени по апсолутној величини нека су $x_1, x_2, \dots x_n$. У средини је вредност x_m. Ова средња вредност неће се променути ма колико се удаљио један од крајњих резултата x_1 или x_n од осталих, док се, међутим, аритметичка средња у томе случају помера у истоме смеру у коме је се удаљио онај појединачни резултат.

Да бисмо правило за одређивање тежине појединих мерења довели у склад са начелом о аритметичкој средњој узећемо да су тежине мерења обрнуто пропорционалне одстојању дотичних вредности од средње вредности x_m, којој можемо приписати коју било тежину, нпр. тежину = 1. Означимо са K производан фактор. Тежине за поједина мерења одредимо на овај начин

$$p_1=\frac{K}{x_m-x_1},\quad p_2=\frac{K}{x_m-x_2},\quad \dots\quad p_{m-1}=\frac{K}{x_m-x_{m-1}},$$

$$p_{m+1}=\frac{K}{x_{m+1}-x_m},\quad p_{m+2}=\frac{K}{x_{m+2}-x_m},\quad p_n=\frac{K}{x_n-x_m}.$$

Одавде следује

$$p_1x_1=p_1x_m-K$$

$$p_2x_2=p_2x_m-K$$

$$\dots$$

$$p_{m-1}x_{m-1} = p_{m-1}x_m - K$$
$$p_m x_m = p_m x_m$$
$$p_{m+1}x_{m+1} = p_{m+1}x_m + K$$
$$p_{m+2}x_{m+2} = p_{m+2}x_m + K$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$p_n x_n = p_n x_m + K,$$

које, кад саберемо и узмемо у обзир да има исто толико чланова са $-K$ колико и са $+K$, даје формулу

$$x_m = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \dots$$

На исти начин изводимо ову формулу и за паран број посматрања узев аритметичку средину из она два средња мерења.

<u>Примедба</u>. По аналогији са познатим обрасцем из Механике, а на основу формуле (3), могли бисмо да протумачимо x као тежиште за тачке чија су одстојања од једне почетне тачке на некаквој правој представљена бројевима $x', x'', x''', \dots$, а њихове масе (тежине) са $p, q, r, \dots$ Из формуле (3), кад је напишемо

(3a) $$(p+q+r+\dots)x = px' + qx'' + rx''' + \dots$$

видимо да је тежина највероватније вредности x равна збиру тежина мерења добивених по-

датака из којих је x израчунато помоћу формуле (3).

Појам тежине подразумева да је тежина представљена увек позитивним бројем. Резултат, чија је тежина $= 0$, нема никакве вредности.

2.

Функција грешке.

5. Да поред све (привидне) неправилности, која нам се, на први поглед, јавља у распореду грешака[1] учињених при опажањима постоје, ипак, извесни закони, уверићемо се кад узмемо на ум 1) да се мале грешке јављају чешће но велике грешке, пошто је теже избећи малу грешку од велике; 2) да су позитивне грешке исто толико могуће као и негативне. То значи да је вероватноћа да се учини извесна грешка свакојако функција грешке. Означимо са Δ грешку (а то је <u>разлика између праве и опажане вредности</u>),

1) Овде, а и у будуће, разумемо под грешкама увек случајне грешке са којима Метода Најмањих Квадрата једино и има посла.

са $\varphi(\Delta)$ вероватноћу да се та грешка учини. Наш циљ је да, пре свега, одредимо аналитички израз функције грешке $\varphi(\Delta)$. Опште особине ове функције јесу дакле 1) да она са растењем грешке опада, а вазда је < 1, јер је свака вероватноћа < 1; 2) да је функција парна: $\varphi(-\Delta) = \varphi(\Delta)$.

Означимо вероватноћу за грешку Δ_1 са $\varphi(\Delta_1)$,

" " " Δ_2 " $\varphi(\Delta_2)$,

. . . .

" " " Δ_n " $\varphi(\Delta_n)$.

Вероватноћа да ће се учинити једна од грешака $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$ равна је збиру вероватноћа за ове грешке,[1] дакле

$$\varphi(\Delta_1)+\varphi(\Delta_2)+\dots+\varphi(\Delta_n) = \sum_{h=1}^{h=n}\varphi(\Delta_h).$$

Ако узмемо да је број посматраних вредности врло велики, онда можемо да претпоставимо да учињене грешке теку континуирно и да је прелаз између грешака непрекидан.[2] Вероват-

1) в. Начела Науке о Вероватноћи, чл. 8. формула 2).

2) Ова претпоставка, на основу које замењујемо суму интегралом од врло велике је важности по Методу Најмањих Квадрата. Та претпоставка мора (бар приближно) бити испуњена код сваке примене ове Теорије.

ноћа да ће учињена грешка лежати у извесном бесконачно малом интервалу $d\Delta$ сразмерна је дужини тога интервала, равна је дакле $\varphi(\Delta)d\Delta$. Вероватноћа да учињена грешка лежи између α и β равна је збиру (бесконачно малих) вероватноћа $\varphi(\Delta)d\Delta$ за поједине (бесконачно мале) интервале $d\Delta$ у границама α и β и она је представљена одређеним интегралом

$$W(\alpha < \Delta < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\Delta)d\Delta. \qquad (4)$$

За овај интеграл, који изражава вероватноћу извесног догађаја, знамо да је његова вредност вазда позитивна и < 1, а да постаје $= 1$, ако границе α и β одмакнемо толико да се све могуће грешке буду у њима налазиле, а то је, без сумње, кад ставимо $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$. Према томе је

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\Delta)d\Delta = 1. \qquad (5)$$

6. Одредимо аналитички израз функције $\varphi(\Delta)$.

Нека су $x_1, x_2, \dots x_n$ мерењем добивене вредности једне количине, чија нам је права вредност x непозната. Тада су

$$x - x_1 = \Delta_1, \quad x - x_2 = \Delta_2, \quad \dots \quad x - x_n = \Delta_n \qquad (6)$$

учињене грешке. Њихове су вероватноће

$$\varphi(\Delta_1), \quad \varphi(\Delta_2), \quad \ldots \quad \varphi(\Delta_n),$$

а (сложена) вероватноћа за такав распоред грешака, тј. вероватноћа да се у n мерења учине те, а ни које друге грешке, равна је производу из горњих вероватноћа,[1] дакле

$$W(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) = \varphi(\Delta_1)\,\varphi(\Delta_2) \ldots \varphi(\Delta_n).$$

Констатујемо да је $W(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n)$ функција непознате x, пошто су $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ такође зависни од x (в. обрасце 6). То онда значи да $W(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n)$ зависи од начина како је x добивено из задатих вредности $x_1, x_2, \ldots x_n$. Појмљиво је да количину x треба одредити из мерених вредности тако како ће на основу тако израчунатог x-а да постане

$$W(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) = \text{Maximum}.$$

Као најевидентнији начин, да се из више посматраних вредности одреди највероватнија вредност једне количине, узели смо принцип аритметичке средине. Хипотеза о аритметичкој средини (коју, због њене евидентности, можемо назвати аксиомом Методе Најмањих Квадрата) мора, дакле, за x дати такву вредност, која ће учинити да

1) в. Начела Науке о Вероватноћи, гл. 10. формула 3).

$W(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n)$ буде веће од сваке друге њене вредности коју бисмо добили кад бисмо усвојили ма какав други начин одређивања непознате x из података $x_1, x_2, \ldots x_n$. Вредност x-а, коју добијамо на основу принципа о аритметичкој средини или што је исто на основу једначине

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n = 0 \qquad (2в)$$

(в. гл. 3. формулу 2) чини да је $W(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n)$, тј.

$$\varphi(\Delta_1)\,\varphi(\Delta_2) \ldots \varphi(\Delta_n) = \text{Max.}, \qquad (7)$$

па дакле и

$$l\left[\varphi(\Delta_1)\,\varphi(\Delta_2) \ldots \varphi(\Delta_n)\right] = \text{Max.},$$

односно

$$l\varphi(\Delta_1) + l\varphi(\Delta_2) + \ldots + l\varphi(\Delta_n) = \text{Max.},$$

одакле

$$\frac{\varphi'(\Delta_1)}{\varphi(\Delta_1)}\frac{d\Delta_1}{dx} + \frac{\varphi'(\Delta_2)}{\varphi(\Delta_2)}\frac{d\Delta_2}{dx} + \ldots + \frac{\varphi'(\Delta_n)}{\varphi(\Delta_n)}\frac{d\Delta_n}{dx} = 0$$

или, пошто је на основу једначина (6)

$$\frac{d\Delta_1}{dx} = \frac{d\Delta_2}{dx} = \ldots = \frac{d\Delta_n}{dx} = 1,$$

проистиче

$$\frac{\varphi'(\Delta_1)}{\varphi(\Delta_1)} + \frac{\varphi'(\Delta_2)}{\varphi(\Delta_2)} + \ldots + \frac{\varphi'(\Delta_n)}{\varphi(\Delta_n)} = 0. \qquad (7а)$$

Имајући на уму да једначине (2в) и (7), односно једначине (2в) и (7а) потичу из једне исте претпоставке (принципа о аритметичкој средини), да оне садрже у себи исто начело само у двема разним формама, и да, према томе, поменуте једначине вазда и у исто време важе — следује да су једначине (2б) и (7а) у ствари идентичне, одакле (с обзиром на то да су грешке $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$ потпуно независне једна од друге) закључујемо да су поједини чланови једначине (2б) пропорционални одговарајућим члановима једначине (7а), да је

$$\frac{\varphi'(\Delta_1)}{\varphi(\Delta_1)} : \Delta_1 = \frac{\varphi'(\Delta_2)}{\varphi(\Delta_2)} : \Delta_2 = \dots = \frac{\varphi'(\Delta_n)}{\varphi(\Delta_n)} : \Delta_n =$$

једној константи k, дакле у опште

$$\frac{\varphi'(\Delta)}{\varphi(\Delta)} : \Delta = k, \quad \text{одакле} \quad d\,l\varphi(\Delta) = k\Delta\, d\Delta,$$

$$l\varphi(\Delta) = \tfrac{1}{2}k\Delta^2 + lC, \quad \varphi(\Delta) = Ce^{\frac{1}{2}k\Delta^2}$$

На основу овога следује $\varphi(\Delta_1)\,\varphi(\Delta_2)\dots\varphi(\Delta_n)$ или

$$W(\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n) = C^n e^{\frac{1}{2}k(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\dots+\Delta_n^2)}$$

Услед тога што за x, које се добија из једн. (2б), постаје $W = Max.$, дакле

$$\frac{dW}{dx} = 0, \quad \frac{d^2W}{dx^2} < 0,$$

јесте

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dW}{d\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{dx} + \frac{dW}{d\Delta_2}\frac{d\Delta_2}{dx} + \dots + \frac{dW}{d\Delta_n}\frac{d\Delta_n}{dx}$$

$$= C^n e^{\frac{1}{2}k(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\dots+\Delta_n^2)} . k\left(\Delta_1\frac{d\Delta_1}{dx} + \Delta_2\frac{d\Delta_2}{dx} + \dots + \Delta_n\frac{d\Delta_n}{dx}\right)$$

$$= kW(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_n) = 0,$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = k(\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_n)\frac{dW}{dx} + kW\left(\frac{d\Delta_1}{dx} + \frac{d\Delta_2}{dx} + \dots + \frac{d\Delta_n}{dx}\right).$$

Први члан на десној страни раван је нули ($\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_n = 0$, $\frac{dW}{dx} = 0$), а у другоме је члану $\frac{d\Delta_1}{dx} + \frac{d\Delta_2}{dx} + \dots + \frac{d\Delta_n}{dx} = n$, тако да је $\frac{d^2W}{dx^2} = nkW$.

Пошто је $\frac{d^2W}{dx^2} < 0$, међутим број посматрања $n > 0$, а исто тако и вероватноћа $W > 0$, значи мора да је $k < 0$.[1] Ставићемо $\frac{1}{2}k = -h^2$, тако да функција грешке добија вид

$$\varphi(\Delta) = Ce^{-h^2\Delta^2}. \qquad (\alpha)$$

7. Да бисмо определили још и интеграциону константу C у горњој формули (α) за функцију $\varphi(\Delta)$ послужићемо се обрасцем (5) у чл. 5. по коме је

$$C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta = 1,$$

одакле

$$C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta}. \qquad (\beta)$$

---

1) Да константа k мора да буде негативна појмљиво је с тога што функција грешке опада са растењем грешке, што иначе не би било да је $k > 0$. Овако читамо и из формуле (α) да функција $\varphi(\Delta)$ опада са растењем грешке Δ; да је за $\Delta = \pm\infty$, $\varphi(\Delta) = 0$ (тј. да је бесконачно велика грешка немогућа) и најзад да је $\varphi(-\Delta) = \varphi(\Delta)$, $0 < \varphi(\Delta) < 1$. Ово су све раније већ утврђена својства функције грешке.

Одређивање константе C води нас, дакле, изналажењу одређеног интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}d\Delta$, који, кад се стави

$$h\Delta = x, \quad h\,d\Delta = dx,$$

добија вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}d\Delta = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Пре свега је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Ако у првоме интегралу на десној страни заменимо $x = -\xi$ добићемо

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = -\int_{+\infty}^{0} e^{-\xi^2}d\xi = \int_{0}^{+\infty} e^{-\xi^2}d\xi,$$

а пошто је свеједно којим се писменом означава променљива у једном одређеном интегралу, то је

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

и према томе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}d\Delta = \frac{2}{h}\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx. \tag{8}$$

Овај последњи интеграл наћићемо на следећи начин. Узмимо двоструки интеграл

$$\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int_{0}^{+\infty} e^{-y^2}dy\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Интеграћени по y може $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, у коме нема променљиве y, да се сматра као константа и да се, као константан фактор, стави пред $\int_{0}^{+\infty} e^{-y^2}dy$. Тако исто се овај последњи интеграл може да сматра као константан фактор онога првог интеграла. Према томе може двоструки интеграл $\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$ да се представи као производ из два проста интеграла, а пошто су та два проста интеграла одређена и једино се разликују у означавању интеграционе променљиве, дакле идентична су $\left(\int_{0}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)$, то се поменути двоструки интеграл може да изрази као квадрат једног простог интеграла

$$\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-y^2}dy\right)\left(\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right) = \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2,$$

одакле

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy}\,. \tag{9}$$

Овим смо изналажење нашега интеграла $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ свели на израчунавање двоструког интеграла $\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$. Ставимо $y = xt$, $dy = x\,dt$ (пошто се у интегралу по y има x сматрати као константа), па ћемо добити

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)}\,x\,dx.$$

Овде је $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)}x\,dx = \left[-\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{2(1+t^2)}$ 1)

и према томе

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{2(1+t^2)} = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{4},$$

дакле према формули (δ)

(8) $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Повратком формулама (γ), (β), (α) следује

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2}d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}, \quad C = \frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

(9) $$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}.$$

3.

Значај константе h.
(Мера тачности.)

8. Константа h, која се јавља у изразу за функцију грешке $\varphi(\Delta)$ (в. формулу 9) зависи од тачности мерења

1) Супституцијом $-x^2(1+t^2)=u$, $x\,dx = -\frac{du}{2(1+t^2)}$ налазимо
$\int e^{-x^2(1+t^2)}x\,dx = -\frac{1}{2(1+t^2)}\int e^u du = -\frac{e^u}{2(1+t^2)} + \text{const.} = -\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)} + \text{const.}$

и може, према томе, да послужи као мера за каквоћу (тачности) мерења. Из обрасца (9) читамо да је за $\Delta = 0$, $\varphi(0) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$. То значи: вероватноћа, да се у извесном мерењу учини грешка $\Delta = 0$, јесте $= \frac{h}{\sqrt{\pi}}$. Та вероватноћа зависи, дакле, од константе h. Из тога закључујемо да вредност константе h зависи од тачности мерења, због чега се она (константа h) по Гаус-у и зове мера тачности (Maass der Genauigkeit, Maass der Präcision; mesure de la précision).

За мерења, која су извршена под једнаким приликама, h има једну исту вредност. За такав један низ посматраних вредности јесте вероватноћа да ће извесна грешка лежати у границама $-\delta$ и $+\delta$ (тј. да њена апсолутна вредност није већа од δ) представљена формулом (4) у чл. 5.

$$W(-\delta<\Delta<+\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2\Delta^2}d\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-h\delta}^{+h\delta} e^{-x^2}dx. \quad 1)$$

Аналогно за какав други низ посматраних вредности јесте вероватноћа, да ће једна грешка лежати у границама $-\delta'$ и $+\delta'$ (тј. да њена апсолутна вредност неће бити већа од δ'), ово

1) кад се стави $h\Delta = x$, дакле $\Delta = \frac{x}{h}$, $d\Delta = \frac{dx}{h}$. Тада је за $\Delta = -\delta$, $x = -h\delta$, за $\Delta = +\delta$, $x = +h\delta$.

$$W'(-\delta' < \Delta < +\delta') = \frac{h'}{\sqrt{\pi}}\int_{-\delta'}^{+\delta'} e^{-h'^2\Delta^2}\,d\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-h'\delta'}^{+h'\delta'} e^{-x^2}\,dx.$$

Ако узмемо да је $W(-\delta < \Delta < +\delta) = W'(-\delta' < \Delta < +\delta')$, дакле

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-h\delta}^{+h\delta} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-h'\delta'}^{+h'\delta'} e^{-x^2}\,dx$$

добићемо

$$h\delta = h'\delta' \quad \text{или} \quad h : h' = \delta' : \delta.$$

Да бисмо боље објаснили смисао ове пропорције ставимо $h : h' = m$. Тада је $\delta' = m\delta$. Пошто су вероватноће за грешке δ и δ' једнаке ($W = W'$), следује да је у другом низу посматрања једна m пута δ велика грешка исто тако могућа (вероватна) као што је у првоме низу посматрања проста грешка δ. Природно је да кажемо да је први низ посматрања m пута тачнији од другога. Тако нпр. ако је $m = \frac{h}{h'} = 2, 3, \ldots$, тада се првоме низу посматрања има приписати 2 пута, 3 пута, ... већа тачност но другоме низу. Однос (размера) између констаната h и h' изражава, дакле, релативну тачност посматрања, којима припадају константе h и h'. Из овога видимо, да константа h

зависи од тачности учињених посматрања, за које она важи и обрнуто, да се константа h може сматрати као мера за тачност посматрања. Међутим треба имати на уму, да се тачност посматрања, па дакле и број h, који ју представља, има сматрати као релативан број, који се односи на два низа посматрања. Горњу пропорцију можемо да искажемо речима: тачности посматрања стоје у изврнутој пропорцији са величином грешке, која је у оба низа посматрања подједнако вероватна.

4.

Начело Методе Најмањих Квадрата.

9. Вероватноћа, да се у n опажања учине извесне грешке $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, равна је производу вероватноћа за поједине грешке

$$W(\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n) = \varphi(\Delta_1)\cdot\varphi(\Delta_2)\ldots\varphi(\Delta_n)$$

(в. чл. 6.), дакле, ако претпоставимо да су сва опажања једнаке тачности (број h за сва опажања један исти), а на основу формуле (9) у гл. 7.

(10) $$W(\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n) = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\dots+\Delta_n^2)}$$

Ми смо раније (у гл. 6.) учинили примедбу да је ова вероватнота функција непознате (праве вредности) x и да $W(\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n)$ зависи од тога како се опредељује x. Очевидно да ће онај начин одређивања непознате x бити најбољи, па дакле и она вредност x-а бити највероватнија, која буде учинила да постане

$$W(\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n) = Max.$$

(в. формулу (7) у гл. 6.), а ово је (као што видимо из формуле (10) случај, кад је

(11) $$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2 = Min.$$

У овоме је исказано начело Методе Најмањих Квадрата: највероватнија вредност једне количине, која је више пута са подједнаком тачношћу мерена, јесте она која чини да је збир квадрата (на основу те извесне вредности непознате израчунатих) грешака мањи но што би он био у коме другом случају. Да је ово начело о најмањем

збиру квадрата учињених грешака, које је и теорији овој дало име, идентично са оним још у почетку изреченом принципу аритметичке средине, видимо пошто из једн. (11) следује

$$\frac{d(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2)}{dx} = 0,$$

одакле

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n = 0$$

(једн. (26) у гл. 6.).

10. Узмимо случај да је мера тачности код појединих мерења различна. Означимо мере тачности са $h_1, h_2, \dots h_n$. Тада је сложена вероватнота за учињене грешке

$$W = \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{\sqrt{\pi}^n} e^{-(h_1^2\Delta_1^2 + h_2^2\Delta_2^2 + \dots + h_n^2\Delta_n^2)} \qquad (12)$$

Да би постало $W = Max.$ мора да је

$$h_1^2\Delta_1^2 + h_2^2\Delta_2^2 + \dots + h_n^2\Delta_n^2 = Min., \qquad (13)$$

дакле

$$\frac{d(h_1^2\Delta_1^2 + h_2^2\Delta_2^2 + \dots + h_n^2\Delta_n^2)}{dx} = 0$$

или, пошто су $h_1, h_2, \dots h_n$ константе,

$$h_1^2\Delta_1 + h_2^2\Delta_2 + \dots + h_n^2\Delta_n = 0. \qquad (14)$$

Из обрасца (13) читамо правило: највероватнија вредност мерене количине, која је мерена више пута, или са разном тачношћу, јесте она, која чини да ~~је~~ збир квадрата ~~производа~~ из грешке и ~~њо~~ одговарајуће мере тачности постане ~~минимум~~.

У гл. 4. имали смо образац (3)

$$x = \frac{px' + qx'' + rx''' + \dots}{p + q + r + \dots},$$

који можемо да напишемо

$$p(x - x') + q(x - x'') + r(x - x''') + \dots = 0$$

или

$$p\Delta_1 + q\Delta_2 + r\Delta_3 + \dots = 0.$$

Пошто је ова формула идентична са формулом (14), следује пропорција

(15) $$h_1^2 : h_2^2 : h_3^2 : \dots = p : q : r : \dots$$

или

(15a) $$h_1 : h_2 : h_3 : \dots = \sqrt{p} : \sqrt{q} : \sqrt{r} : \dots$$

То значи да су тежине пропорционалне са квадратом мере тачности или мере тачности пропорционалне са квадратним кореном из тежине.

5.

Вероватна грешка.

11. Замислимо да су све грешке, које су учињене у једној серији опажања, сређене по њиховој апсолутној величини једна до друге. Она грешка у средини, тј. она грешка којој исто толико њих претходе колико јој и следују[1] зове се вероватна грешка (wahrscheinlicher Fehler; erreur probable). Вероватна грешка за један низ посматрања то је, дакле, она вредност испод које је учињено исто толико грешака колико и изнад ње. Или: вероватна грешка то је количина за коју је вероватноћа да ће у једноме опажању учи„

1) Ово строго важи кад је број опажања, па дакле и број грешака непаран. У противноме случају имамо два средња члана у реду грешака и онда се њихова аритметичка средња узима као вероватна грешка.

нека грешка бити већа (или мања) од не равна једној половини.

Означимо са r вероватну грешку. На основу дефиниције треба да је вероватноћа да ће у извесном опажању учињена грешка бити апсолутно узев мања (или већа) од r, тј. да ће та грешка лежати између $-r$ и $+r$, равна једној половини, да је дакле

$$W(-r<\Delta<+r)=\int_{-r}^{+r}\varphi(\Delta)\,d\Delta=\frac{1}{2}$$

или с обзиром на формулу 9) у гл. 7.

$$W(-r<\Delta<+r)=\int_{-r}^{+r}\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta=\frac{1}{2},$$

које услед тога што је

$$\int_{-r}^{+r}\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta=2\int_{0}^{+r}\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+r}e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta$$

можемо да напишемо

$$W(-r<\Delta<+r)=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+r}e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta=\frac{1}{2}.$$

или, ако ставимо $h\Delta=t$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{hr}e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2},$$

одакле

$$\int_{0}^{hr}e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}. \qquad (16)$$

Да бисмо помоћу ове формуле (16) израчунали hr развићемо експоненцијалну функцију e^{-t^2} у ред:

$$e^{-t^2}=1-\frac{t^2}{1}+\frac{(t^2)^2}{2!}-\frac{(t^2)^3}{3!}+\frac{(t^2)^4}{4!}-+\dots$$

и пошто је овај ред конвергентан за све вредности аргумента t^2 добијамо интеграљењем

$$\int_{0}^{hr}e^{-t^2}\,dt=\left[t-\frac{t^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{t^5}{5}-\frac{1}{3!}\frac{t^7}{7}+\frac{1}{4!}\frac{t^9}{9}-+\dots\right]_{t=0}^{t=hr}$$

$$=hr-\frac{(hr)^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{(hr)^5}{5}-\frac{1}{3!}\frac{(hr)^7}{7}+\frac{1}{4!}\frac{(hr)^9}{9}-+\dots$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4}=0{,}4431134627, \qquad (17)$$

одакле

$$hr=0{,}4769362761. \qquad (18)$$

На основу овога у стању смо да у свакоме задатом случају израчунамо h кад претходно одредимо r. Из једначине (18) видимо да мера тачности стоји у обрнутој сразмери са вероватном грешком.

12. Формулом (18) добивеном вредношћу константе h у стању смо да израчунамо

$$W(\alpha<\Delta<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta; \qquad (4a)$$

а то је вероватноћа да извесна грешка лежи у којим било границама α и β.

Вероватноћа да апсолутна вредност једне грешке не буде већа од δ_1 јесте

$$W(-\delta_1 < \Delta < +\delta_1) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\delta_1}^{+\delta_1} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-h\delta_1}^{+h\delta_1} e^{-x^2}\,dx$$

46

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+h\delta_1} e^{-x^2}\,dx.$$

На основу ове вероватноће број грешака, чија апсолутна вредност није већа од δ_1 у једној групи од n опажања (мерења), која су извршена са тачношћу h, јесте

$$B_1 = n\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{h\delta_1} e^{-x^2}\,dx$$

и аналогно за грешке испод δ_2

$$B_2 = n\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{h\delta_2} e^{-x^2}\,dx.$$

Према овоме је (а на основу формуле 4а) број грешака, чија апсолутна вредност лежи између δ_2 и δ_1, узев да је $\delta_2 > \delta_1$, претстављен разликом

(19) $$B_2 - B_1 = n\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{h\delta_2} e^{-x^2}\,dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{h\delta_1} e^{-x^2}\,dx\right].$$

Формула (19) може да послужи за упоређење теорно-

добивених резултата са емпирички потврђеним фактима. Сравњујући поделу грешака у једном низу учињених посматрања, одвајањем грешака по њиховој величини у групе, са теорно добивеним бројем грешака на основу формуле (19), добијамо критеријум у колико се наша теорија слаже са искуством. Искуство, у главноме, потврђује резултате добивене формулом (19): у толико више у колико су главне погодбе испуњене, на којима базира сама теорија. Почев од закона аритметичке средине, главна је претпоставка да је број посматрања (дакле и број података) бесконачно велики, јер смо само на тој основи смели збир да заменимо интегралом (в. на крају чл. 5. примедбу под 1)). У колико је поменута претпоставка боље испуњена, тј. у колико је већи број опажања у толико ће и теорно добивени резултати бити оправданији. Да ће се, ипак, показати извесна одступања у томе погледу има свој узрок још у томе што посматрања нису никад потпуно слободна од констатних грешака, које овом теоријом нису и не могу бити предвиђене.

6.

Средња грешка.

13. Аритметичка средња $\frac{\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_n}{n}$ из учињених грешака не даје правилну оцену за тачност мерења, пошто грешке могу бити позитивне и негативне тако да аритметичка средња може да буде врло мала, па и равна нули и онда кад су грешке врло велике. Заводећи појам средње грешке (mittlerer Fehler, error medius metuendus)

(20) $$M = \pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\dots+\Delta_n^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$$ [1)]

величина средње грешке (која је, у осталом, подједнако вероватна са знаком + као и са знаком −) стоји у вези са апсолутном величином учињених грешака и према томе даје вернији израз за тачност мерења. —

1) Означавање суме ћошкастом заградом је по примеру Гаус-овом.

(на крају гл. 12.)

Напомена. Ако у образац

$$B_1 = n\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\delta_1} e^{-x^2}\,dx$$

ставимо $n=1000$

$\delta_1 = \frac{1}{2}r$, дакле $h\delta_1 = \frac{hr}{2} = 0,23847$ налазимо $B_1 = 264$

$\delta_1 = r$, " $h\delta_1 = hr = 0,47694$ " $B_1 = 500$

$\delta_1 = \frac{3}{2}r$, " $h\delta_1 = \frac{3hr}{2} = 0,71540$ " $B_1 = 688$

$\delta_1 = 2r$, " $h\delta_1 = 2hr = 0,95387$ " $B_1 = 823$

$\delta_1 = \frac{5r}{2}$, " $h\delta_1 = \frac{5hr}{2} = 1,19234$ " $B_1 = 908$

$\delta_1 = 3r$, " $h\delta_1 = 3hr = 1,43081$ " $B_1 = 956$

$\delta_1 = \frac{7r}{2}$, " $h\delta_1 = \frac{7hr}{2} = 1,66928$ " $B_1 = 982$

$\delta_1 = 4r$, " $h\delta_1 = 4hr = 1,90774$ " $B_1 = 993$

$\delta_1 = \frac{9r}{2}$, " $h\delta_1 = \frac{9hr}{2} = 2,14621$ " $B_1 = 998$

$\delta_1 = 5r$, " $h\delta_1 = 5hr = 2,38468$ " $B_1 = 999$.

То значи да по теорији треба у 1000 опажања да се јаве

264	грешке	$< \frac{1}{2} r$
500	"	$< r$
688	"	$< \frac{3}{2} r$
823	"	$< 2r$
908	"	$< \frac{5}{2} r$
956	"	$< 3r$
982	"	$< \frac{7}{2} r$
993	"	$< 4r$
998	"	$< \frac{9}{2} r$
999	"	$< 5r$,

где r означава средњу грешку.

Средњу грешку можемо да дефинишемо као грешку за коју је вероватноћа да ће се поновити у n посматрања једнака вероватноћи за стварно учињене грешке $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ у претпоставци да је мера тачности у обе серије опажања иста.

Вероватноћа, да је у извесном посматрању учињена грешка μ, тј. да грешка лежи између μ и $\mu + d\mu$, јесте на основу формуле (9) у гл. 7.

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\mu^2} . d\mu ,$$

а вероватноћа да се иста грешка у свих n посматрања понови

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-nh^2\mu^2} . (d\mu)^n \quad 1)$$

Вероватноће за грешке $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, ако и за њих узмемо исти интервал $d\mu$, јесу

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta_1^2} . d\mu , \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta_2^2} . d\mu , \ldots \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta_n^2} . d\mu$$

и према томе сложена вероватноћа да се све те грешке учине у n опажања

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2)} . (d\mu)^n \quad 2)$$

На основу горњег тумачења средње грешке треба да је

---

1) Види Начела Науке о Вероватноћи на крају гл. 10.
2) Начела Науке о Вероватноћи гл. 10. формула 3).

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2\mu^2 n}(d\mu)^n = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2)},$$

одакле

$$n\mu^2 = \Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2$$

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}.$$

14. Према формули (9) у гл. 7., а на основу начела за сложену вероватноћу[1], вероватноћа за у n посматрања учињене грешке $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$ јесте

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2)}$$

или по Гаус-овом начину бележења

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\Delta^2]}$$

Овај израз, на основу главног принципа Методе Најмањих Квадрата, мора да одговара његову максимуму. Но пошто су грешке $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$ познате, дакле и збир њихових квадрата одређен, следује да горњи израз само тако може испуњавати услов максимума, ако подесно одредимо количину h, тј. ако ставимо да је прва изводна тога израза узета по h равна нули:

1) В. Начела Науке о Вероватноћи гл. 10. формула 3).

$$\frac{nh^{n-1}}{\sqrt{\pi}^n} e^{-h^2[\Delta^2]} - \frac{2h^{n+1}}{\sqrt{\pi}^n}[\Delta^2]\, e^{-h^2[\Delta^2]} = 0$$

одакле

$$\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}. \qquad (21)$$

7.

Просечна грешка.

15. Аритметичка средина из апсолутних вредности грешака зове се просечна грешка (Durchschnittsfehler). Означимо са $(\Delta_1), (\Delta_2), \dots (\Delta_n)$ грешке по њиховој апсолутној вредности, тада је просечна грешка

$$\eta = \frac{(\Delta_1)+(\Delta_2)+\cdots+(\Delta_n)}{n} = \frac{[(\Delta)]}{n}. \qquad (22)$$

На основу формуле (9) у гл. 7. вероватноћа за грешку Δ_1 представљена је функцијом $\varphi(\Delta_1)$. Број грешака величине Δ_1 у n посматрања је $n\varphi(\Delta_1)$, а сума свих таквих грешака Δ_1, узев их по апсолутној вредности, равна је $\Delta_1 n \varphi(\Delta_1)$. Тако исто сума грешака Δ_2 јесте $\Delta_2 n \varphi(\Delta_2)$ итд. Дакле

$$(\Delta_1)+(\Delta_2)+\cdots+(\Delta_n) = n\left[\Delta_1\varphi(\Delta_1)+\Delta_2\varphi(\Delta_2)+\cdots+\Delta_n\varphi(\Delta_n)\right]$$

и према формули (22) просечна грешка

$$\eta = \Delta_1\varphi(\Delta_1) + \Delta_2\varphi(\Delta_2) + \dots + \Delta_n\varphi(\Delta_n) = \Sigma\Delta\varphi(\Delta).$$

Претпостављајући велики број посматрања (n довољно велико) можемо суму да заменимо интегралом и с обзиром на наша ранија извођења можемо са великом приближношћу да ставимо

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\varphi(\Delta)\,d\Delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} h\Delta e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta.$$

Да бисмо нашли овај последњи интеграл узећемо

$$h\Delta = x,$$

па ћемо добити

$$\eta = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,d(-x^2) = \left[-\frac{e^{-x^2}}{h\sqrt{\pi}}\right]_0^{\infty}$$

(23) $$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

8.

Веза између мере тачности, вероватне, средње и просечне грешке.

16. На основу формула

$hr = 0,476\,9362\,761$ (18 у гл. 11.)

$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ (21 у гл. 14.)

$\eta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$ (23 у гл. 15.)

изводимо следеће односе између мере тачности (h), вероватне грешке (r), средње грешке (μ) и просечне грешке (η):

$$h = 0,476\,9362\,761\cdot\frac{1}{r} = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}\left(=0,7071068\cdot\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\eta\sqrt{\pi}}\left(=0,56419\cdot\frac{1}{\eta}\right)$$

$$r = 0,476\,9362\,761\cdot\frac{1}{h} = 0,6744898\,\mu = 0,8453476\,\eta$$

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}\left(=0,7071068\cdot\frac{1}{h}\right) = 1,4826021\,r = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\eta\left(=1,2533141\,\eta\right)$$

$$\eta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left(=0,56419\cdot\frac{1}{h}\right) = 1,1829372\,r = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu\left(=0,7978846\,\mu\right). \qquad (24)$$

Примећујемо да је $r \approx \frac{2}{3}\mu$.

9.

Упоређење тачности аритметичке средине са тачношћу појединих мерења.

17. Нека су $a_1, a_2, \dots a_n$ измерене вредности непознате количине x, дакле

$$\Delta_1 = a_1 - x, \quad \Delta_2 = a_2 - x, \quad \dots \quad \Delta_n = a_n - x$$

учињене грешке у појединим мерењима. Из

$$x = a_1 - \Delta_1$$
$$x = a_2 - \Delta_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$x = a_n - \Delta_n$$

сабирањем следује

$$nx = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)$$

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n}{n}.$$

Први члан на десној страни је аритметичка средина, дакле највероватнија вредност непознате x, а други је члан грешка аритметичке средине. Квадрат ове грешке, означимо је са M, јесте

$$M^2 = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)^2}{n^2},$$

одакле

$$n^2M^2 = (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2) + 2(\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1\Delta_3 + \dots + \Delta_2\Delta_3 + \dots).$$

Други члан на десној страни ове једначине образован је из производа из по две грешке. Но пошто су позитивне и негативне грешке подједнако могуће очекивати је да се ови производи већим делом узајамно компензују, тако да њихова сума постаје незнатна према првоме члану на десној страни који је састављен из све самих позитивних количина. Према томе је, нарочито за већи број

мерења, дозвољено је, ако приближно узмемо

$$n^2M^2 = \Sigma(\Delta^2) = [\Delta^2],$$

које сравнено са формулом (20) у гл. 13. даје однос

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}, \quad m = M\sqrt{n}. \qquad (25)$$

На основу тога што средње и вероватне грешке стоје у линеарном односу постоји, слично формули (25), за вероватну грешку аритметичке средине и вероватну грешку појединих опажања аналогни образац

$$R = \frac{r}{\sqrt{n}}, \quad r = R\sqrt{n}. \qquad (26)$$

Аналогно обрасцима (24) у гл. 16. имамо

$$\left.\begin{aligned} R &= 0{,}674\,4898\, M \\ M &= 1{,}482\,6021\, R \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Тако исто, ако означимо са H меру тачности за аритметичку средину, постоје слични формулама (24) обрасци

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{1}{H\sqrt{2}} = 0{,}707\,1068 \cdot \frac{1}{H} \\ H &= \frac{1}{M\sqrt{2}} = 0{,}707\,1068 \cdot \frac{1}{M} \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

С обзиром на формулу (25) може последњи образац да се напише

(29)
$$H = \frac{\sqrt{n}}{\mu\sqrt{2}}.$$

Најзад, ако овде ставимо $\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ (в. формулу (21) у гл. 14.), добићемо

(30)
$$H = h\sqrt{n},$$

одакле

(30a)
$$H : h = \sqrt{n} : 1.$$

То значи да мера тачности расте пропорционално квадратном корену из броја посматрања. У вези са тим у гл. 4. реченом да тежина посматрања расте упоредо са бројем посматрања могли бисмо пропорцију (30a) да искажемо: квадрати мера тачности сразмерни су тежинама. Обзиром на горње формуле (25), (26) и (30) постоје пропорције

(31)
$$\begin{cases} M : \mu = \sqrt{p} : \sqrt{P} \\ R : r = \sqrt{p} : \sqrt{P} \\ H : h = \sqrt{P} : \sqrt{p}, \end{cases}$$

где P означава тежину аритметичке средине, а p тежину једног посматрања.

<u>Напомена</u>. Тежина највероватније вредности равна је збиру тежина појединих мерења из којих је она добивена.

10.

Израчунавање грешака на основу аритметичке средине из подједнако добрих посматрања.

18. Израчунавање свих врста грешака основали смо на <u>правим</u> грешкама, а то су разлике између истинске вредности мерене количине и појединих измерених вредности. Но пошто је права или истинска вредност мерене количине непозната, то су непознате и праве грешке појединих мерења и природно се намеће питање како се горе проучаване врсте грешака треба да рачунају помоћу <u>приближних</u> грешака, а то су разлике између посматраних вредности и њихове аритметичке средине.

Означимо са $a_1, a_2, \dots a_n$ измерене вредности једне количине x, са

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

аритметичку средину. Тада су

$$a_1 - a = \delta_1, \quad a_2 - a = \delta_2, \quad \dots \quad a_n - a = \delta_n$$

рачуном нађене привидне грешке.

Обележимо са ε грешку аритметичке средине:

$$\varepsilon = a - x.$$

С обзиром да су праве грешке појединих мерења

$$a_1 - x = \Delta_1, \quad a_2 - x = \Delta_2, \quad \dots \quad a_n - x = \Delta_n$$

следује

$$\Delta_1 = \delta_1 + \varepsilon, \quad \Delta_2 = \delta_2 + \varepsilon, \quad \dots \quad \Delta_n = \delta_n + \varepsilon.$$

Одавде збир квадрата (истинитих) грешака

$$[\Delta^2] = [\delta^2] + 2[\delta]\varepsilon + n\varepsilon^2$$

или, пошто је $[\delta] = 0$, простије

(α) $$[\Delta^2] = [\delta^2] + n\varepsilon^2.$$

Овде је количина ε (разлика између аритметичке средине a и непознате x) непозната. Међутим ми можемо да узмемо да се квадрат ове разлике ε, у главноме, поклапа са квадратом средње грешке M у резултату, тако да на основу формуле (25) у чл. 17. можемо да ставимо

$$\varepsilon^2 = \frac{\mu^2}{n},$$

где μ, као и раније, означава средњу грешку

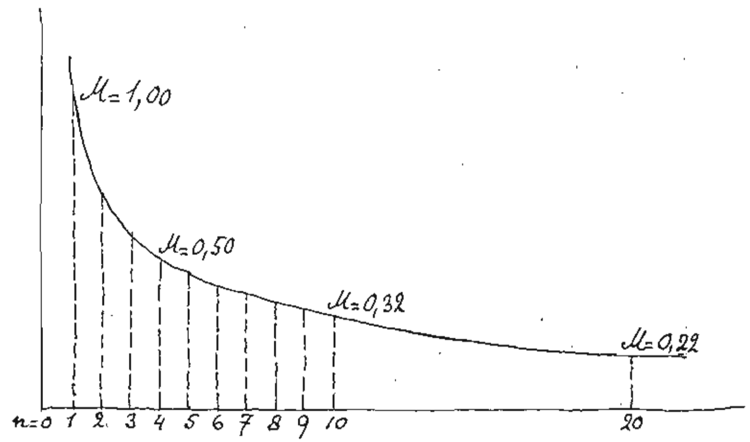
Примедба. Формула (34)

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

показује да средња грешка аритметичке средине опада пропорционално квадратном корену из броја мерења.

Да бисмо овај однос између M и n представили графички пренесено вредности од M као ординате за поједине вредности од n као апсцисе на основу неколико бројних вредности:

$n =$	1	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
$M =$	1,00	0,71	0,58	0,50	0,45	0,41	0,35	0,32	0,22	0,14	0,10.



Везивањем поступних тачака добијамо једну линију трећег степена која асимптотно додирује x-осу. За првих 5 до 10 мерења средња грешка M брзо опада, даље ступањ тачности расте, а затим опадање М-а иде врло споро и линија достиже х-осу тек у бесконачности. Из таблице видимо да се тек код 100 мерења грешка М смањује на њен десети део. Мерења се, међутим, не понављају више од 5 до 10 пута. Једно због тога што за већи број мерења средња грешка М врло споро опада, а друго и поглавито из разлога што формула (34), па дакле и бројне вредности горње таблице, на којима базира и конструкција линије за М, претпоставља да су на мерења утицале само случајне грешке, које се са једнаком вероватноћом јављају са знаком + као и са знаком —. Овај услов није готово никад испуњен и зато се, при понављању мерења, мењају, по могућству, околности које повлаче собом сталне грешке, којих увек има.

појединих мерења. С овим и с обзиром на $[\Delta^2] = n\mu^2$ (в. формулу (20) у чл. 13.) једначина (α) добија вид

$$n\mu^2 = [\delta^2] + \mu^2,$$

одакле

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}. \qquad (32)$$

Овим обрасцем израчунавамо, дакле, средњу грешку из познатих нам (приближних) грешака δ, а то су разлике из посматраних вредности $a_1, a_2, \dots a_n$ и њихове аритметичке средине a.

Према добивеној формули под (24) у чл. 16. налазимо да је вероватна грешка

$$r = \pm 0,6745\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}. \qquad (33)$$

Најзад с обзиром на формуле (25) и (27) у чл. 17. имамо за средњу и вероватну грешку аритметичке средине формуле

$$M = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n(n-1)}}, \quad R = \pm 0,6745\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n(n-1)}} \qquad (34)$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

19. Завођењем суме $[(\delta)]$ место суме $[\delta^2]$ чинимо да формуле (32), (33) и (34) у прошломе члану постају подесније за практично рачунање код подједнако добрих мерења. У претпоставци да је број извршених мерења (n) врло велики можемо са великом приближношћу (на основу формуле (22) у чл. 15. и формуле (21) у чл. 14.) да

место $n\eta = [(\Delta)]$ и $n\mu^2 = [\Delta^2]$

ставимо $n\eta = [(\delta)]$ и $n\mu^2 = [\delta^2]$.

Ова два обрасца у вези са формулом

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\eta$$

(в. формулску таблицу (24) у чл. 16.) даје следећи однос, који за довољно велико n, постоји између сума $[\delta^2]$ и $[(\delta)]$

$$[(\delta)] = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n[\delta^2]}\,, \quad \sqrt{[\delta^2]} = \pm\frac{[(\delta)]}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

С овим се горње формуле (32), (33) и (34) претварају у

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} \mu &= \pm\frac{[(\delta)]}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pm 1,2533\,\frac{[(\delta)]}{\sqrt{n(n-1)}} \\ r &= \pm 0,6745\,\frac{[(\delta)]}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pm 0,8453\,\frac{[(\delta)]}{\sqrt{n(n-1)}} \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} M &= \pm\frac{[(\delta)]}{n\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pm 1,2533\,\frac{[(\delta)]}{n\sqrt{n-1}} \\ R &= \pm 0,6745\,\frac{[(\delta)]}{n\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pm 0,8453\,\frac{[(\delta)]}{n\sqrt{n-1}}\,. \end{aligned}\right\}\quad (35)$$

11.

Одређивање средње и вероватне грешке из неједнако добрих посматрања.

20. Према начелу о аритметичкој средини највероватнија вредност једне количине која је мерена више пута са разном тачношћу и за коју добивени резултати $a', a'', \dots$ имају тежине $p', p'', \dots$ јесте

$$a = \frac{p'a' + p''a'' + \dots}{p' + p'' + \dots} = \frac{[pa]}{[p]}\,.$$

Узев да се тежине $p', p'', \dots$ појединих резултата $a', a'', \dots$ могу сматрати као бројеви посматрања[1], која су учињена са истом тачношћу (тежином $=1$) ставићемо (на основу формуле (25) у чл. 17.) да је средња грешка крајњег резултата

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}\,,$$

1) в. чл. 4.

где μ означава средњу грешку једног мерења чија је тежина $= 1$.

Означимо са x праву вредност непознате као количине и ставимо

$$\varepsilon = a - x$$

и имамо као и раније у чл. 18.

$$\Delta' = \delta' + \varepsilon, \quad \Delta'' = \delta'' + \varepsilon, \quad \ldots,$$

где Δ' означава праву грешку код посматрања, којем припада тежина p' и које је дало резултат a' са приближном грешком δ', а тако и Δ'', ... На основу горе учињене примедбе, да се посматрање са тежином p' може да замени са p' посматрања, која су сва тежине 1, следује да ће се грешка Δ' поновити у њима p' пута; тако исто грешка Δ'' поновити се p'' пута код посматрања са тежином p'', замењујући ово посматрање са p'' посматрања тежине 1 итд.

Из овога онда следује

$$[p\Delta^2] = [p\delta^2] + 2[p\delta]\varepsilon + [p]\varepsilon^2$$

или, пошто је, према појму аритметичке средње и на томе основаноме одређивању грешака δ,

$$[p\delta] = 0,$$

простије

$$[p\Delta^2] = [p\delta^2] + [p]\varepsilon^2.$$

Но пошто се и овде (као и у чл. 18.), а на основу формуле (25) у чл. 17., може ε^2 да замени квадратом средње грешке M у резултату, дакле може да стави

$$\varepsilon^2 = M^2 = \frac{\mu^2}{[p]},$$

то је

$$[p\Delta^2] = [p\delta^2] + \mu^2. \qquad (\alpha)$$

Да бисмо на левој страни $[p\Delta^2]$ изразили средњом грешком μ имајмо на уму да се, на основу формуле (25) у чл. 17., за поједина мерења са тежинама p', p'', ... (посматрања као серије из више мерења тежине 1) може да стави

$$\Delta'^2 = \frac{\mu^2}{p'}, \quad \Delta''^2 = \frac{\mu^2}{p''}, \quad \ldots$$

и према томе

$$[p\Delta^2] = n\mu^2, \qquad (\beta)$$

где n означава број мерења, која имају разне тежине.¹) Заменом овога под (β) у образац (α) добијамо

$$n\mu^2 = [p\delta^2] + \mu^2,$$

¹) Разуме се да овај број n није исто што и сума свију тежина.

одакле за средњу и вероватну грешку једног посматрања тежине 1

$$(36)\quad \begin{cases} \mu = \pm\sqrt{\dfrac{[p\delta^2]}{n-1}}, & M = \pm\sqrt{\dfrac{[p\delta^2]}{[p](n-1)}}, \\ r = \pm 0,6745\sqrt{\dfrac{[p\delta^2]}{n-1}}, & R = \pm 0,6745\sqrt{\dfrac{[p\delta^2]}{[p](n-1)}}. \end{cases}$$

Вредно је поменути да бисмо до истих резултата за μ и r дошли да смо свако посматрање односно мерење помножили са квадратним кореном из његове тежине (или што је исто помножили са мером тачности[1]) и онда са тако добивеним бројевима поступили као код мерења која су сва подједнако добра. Овим смо показали да се мерења неједнаке тежине могу рачунски да доведу на мерења једнаке тежине и тако на њих исте методе да примене.

Напомена. Ми бисмо, при израчунавању горњих грешака, могли да употребимо и апсолутне грешке на основу горе утврђене релације

$$\sqrt{[\delta^2]} = \pm\frac{[(\delta)]}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ ^{2)}$$

1) в. једн. (15а) у гл. 10.
2) в. гл. 19.

коју бисмо овде имали да, према на крају учињеној примедби, заменимо са

$$\sqrt{[p\delta^2]} = \pm\frac{[\delta\sqrt{p}]}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

и тако да добијемо формуле

$$r = \pm 0,8453\,\frac{[\delta\sqrt{p}]}{\sqrt{n(n-1)}},\quad R = \pm 0,8453\,\frac{[\delta\sqrt{p}]}{\sqrt{[p]n(n-1)}},\quad (37)$$

које, међутим, у овоме случају немају толике практичне вредности као оне под (35) у гл. 19.

12.

Примери.

1. Пример. Једним ватреним оружјем избачено је n метака. Кроз средиште мете замишљамо положене две ортогоналне координатне осе. Означимо са $x_1, y_1,\ x_2, y_2 \ldots x_n, y_n$ координате тачака погодака.

Тачку са координатама

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},\quad y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$$

зовемо тачка средњег поготка (Treffmittelpunkt; point d'impact moyen).

Да бисмо одредили средњу грешку како у хоризонталном смеру (правцу апсцисе), тако и у вертикалном смеру (правцу ординате) послужићемо се формулом (20) у гл. 13.

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}.$$

За апсцисе је

$$\Delta_i = x_i - x$$

$$\Delta_i^2 = x_i^2 - 2xx_i + x^2$$

$$[\Delta_i^2] = [x_i^2] - 2x[x_i] + nx^2$$

или пошто је

$$[x_i] = nx,$$

то је

$$[\Delta_i^2] = [x_i^2] - \frac{[x_i]^2}{n},$$

дакле

$$\mu_x = \pm\sqrt{\frac{[x_i^2]}{n} - \left(\frac{[x_i]}{n}\right)^2}$$

и аналогно

$$\mu_y = \pm\sqrt{\frac{[y_i^2]}{n} - \left(\frac{[y_i]}{n}\right)^2}.$$

Ако претпоставимо да је оружје доброг квалитета и да су околности за тачно гађање биле повољне, онда су погодци сви у близини средишта,

дакле суме $[x_i]$ и $[y_i]$ врло мале у толико пре што су поједини x_i и y_i позитивни и негативни. Количине $\left(\frac{[x_i]}{n}\right)^2$ и $\left(\frac{[y_i]}{n}\right)^2$, које се налазе под кореним знаком у последња два израза за μ_x и μ_y можемо да занемаримо и са великом приближношћу да ставимо

$$\mu_x = \pm\sqrt{\frac{[x_i^2]}{n}}$$

$$\mu_y = \pm\sqrt{\frac{[y_i^2]}{n}}.$$

С овим, а на основу формуле (21) у гл. 14.

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}},$$

добијамо као меру тачности оружја

$$h_x = \sqrt{\frac{n}{2[x_i^2]}}$$

$$h_y = \sqrt{\frac{n}{2[y_i^2]}}.$$

Уколико су x_i и y_i, па дакле и $[x_i^2]$ и $[y_i^2]$ мањи у толико су h_x и h_y већи, а тиме и квалитет оружја бољи.

Количина

$$H = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

зове се прецизност или тачност оружја.

Очевидно да се код доброг оружја тачка средњег погодка мора налазити у непосредној близини средишта. Напротив, ако је тачка средњег погодка удаљена од средишта, онда је то знак да је оружје лошег квалитета.

Угао, под којим се нишанџији показује удаљење тачке средњег погодка од средишта зове се девиација (Deviation) оружја.

Пример са бројевима.

Из једног топа избачено је 20 метака. Кроз средиште мете положена је ортогонална система и измерене су за погодке следеће координате у милиметрима

No.	x	y	No.	x	y	No	x	y	No	x	y
1	294	387	6	-207	159	11	-171	-305	16	-380	-413
2	-514	-283	7	602	-418	12	507	329	17	-494	356
3	-645	-197	8	-164	358	13	-419	-257	18	242	374
4	-218	493	9	214	-403	14	285	-549	19	548	-471
5	415	-309	10	-306	275	15	194	225	20	337	409

Према горњој дефиницији, коју смо дали за тачку средњег погодка координате јесу

$$x = 6\,mm, \quad y = -12\,mm.$$

Одстојање ове тачке од средишта јесте

$$\sqrt{6^2+12^2} = 13,42\,mm.$$

и ако узмемо да је гађање вршено у одстојању од 2650m следује као девијација

угао од $1,''06$.

Према горњим податцима, а на основу наших формула, налазимо

$$M_x = \pm 387,22\,mm \quad M_y = \pm 361,67\,mm$$

$$h_x = 0,0018 \quad h_y = 0,0020$$

$$H = 0,0027.$$

2. Пример. Угао α мерен је 10 пута и добивене су вредности

$\alpha_1 = 34°\,47'\,29,''6$ $\quad \alpha_4 = 34°\,47'\,23,''7$ $\quad \alpha_7 = 34°\,47'\,19,''8$

$\alpha_2 = 34°\,47'\,21,''4$ $\quad \alpha_5 = 34°\,47'\,20,''3$ $\quad \alpha_8 = 34°\,47'\,26,''3$

$\alpha_3 = 34°\,47'\,25,''8$ $\quad \alpha_6 = 34°\,47'\,24,''5$ $\quad \alpha_9 = 34°\,47'\,28,''2$

$\alpha_{10} = 34°\,47'\,22,''6.$

Највероватнија вредност угла α то је аритм.

метичка средина

$$a = 34^\circ 47' 24'',22 .$$

С овим конструишемо таблицу

мерење	измерени угао α	грешка $\delta = \alpha - a$	квадрат грешке δ^2
1	34° 47' 29'',6	+ 5,38	28,9444
2	21'',4	− 2,82	7,9524
3	25'',8	+ 1,58	2,4964
4	23'',7	− 0,52	0,2704
5	20'',3	− 3,92	15,3664
6	24'',5	+ 0,28	0,0784
7	19'',8	− 4,42	19,5364
8	26'',3	+ 2,08	4,3264
9	28'',2	+ 3,98	15,8404
10	22'',6	− 1,62	2,6244
		+ 13,30 − 13,30	97,4360

помоћу које налазимо

средњу грешку једног мерења $\mu = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{97,436}{9}} = \pm 3'',29$

(формула (32) у гл. 18.),

вероватна грешка једног мерења $r = \pm 0,6745\,\mu = \pm 2'',22$

(формула (33) у гл. 18.),

мера тачности једног мерења $h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = 0,2149$

(формула (21) у гл. 14.),

средња грешка аритметичке средине $M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \pm 1'',04$

(формула (34) у гл. 18.),

вероватна грешка аритметичке средине $R = 0,6745\,M = \pm 0'',70$

~~мера тачности аритмет~~ (формула (34) у гл. 18.),

мера тачности аритметичке средине $H = \frac{1}{M\sqrt{2}} = 0,6796$

(формула (28) у гл. 17.)

Као проба за рачуном добивене резултате може да послужи формула (30а) у гл. 17.

$$H : h = \sqrt{n} : 1 \quad \text{или} \quad H^2 : h^2 = n : 1 .$$

Овде је $H^2 = 0,4618$, $h^2 = 0,04618$, које потпуно одговара пропорцији $0,4618 : 0,04618 = 10 : 1$.

Као највероватнију вредност угла нашли смо $34^\circ 47' 24'',22$, а могли бисмо да се кладимо са 1 : 1 да његова права вредност лежи између $34^\circ 47' 24'',22 + 0'',70$ и $34^\circ 47' 24'',22 - 0'',70$.

Ако средимо грешке по њиховој апсолутној величини

0,28, 0,52, 1,58, 1,62, 2,08, 2,82, 3,92, 3,98, 4,42, 5,38

посматраћемо као ~~средњу~~ вероватну грешку $\frac{2,08+2,82}{2}$ = 2,45, док нам рачун за њу даје 2,22.

Најзад да бисмо израчунали вероватноћу да ће бити учињена грешка, која је апсолутно испод грешке δ_1, поступићемо по формули (4в) у чл. 12.

$$W(-\delta_1<\Delta<+\delta_1)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+h\delta_1} e^{-x^2}dx.$$

Тако нпр. за $\delta_1 = 1,5$, $h\delta_1 = 0,21 \cdot 1,5 = 0,315 \sim 0,32$ налазимо из таблице за одговарајући интеграл $W = 0,349\,1259 \sim 0,35$.

За вероватну грешку аритметичке средине $R = 0,70$ добили бисмо $W = 0,5 = \frac{1}{2}$.

3. Пример. Један угао је мерен теодолитом репетиционом методом и нађене су вредности

1)	у 4	репетиција	26° 17' 32,"58
2)	„ 5	„	39,"05
3)	„ 3	„	27,26

4)	у 6	репетиција	26° 17' 38,"07
5)	„ 5	„	31,"48
6)	„ 5	„	34,"93
7)	„ 4	„	30,"82
8)	„ 4	„	29,"53
9)	„ 5	„	28,"06
10)	„ 8	„	35,"42
11)	„ 3	„	32,"28
12)	„ 3	„	30,"08.

Резултати појединих мерења су неједнако тачни. Они су у толико тачнији у колико су више пута поновљена мерења из којих су добивени. Према томе можемо број репетиција узети као бројеве за тежину појединих резултата.

Помоћу таблице

№	p	α''	$p\alpha''$	δ	δ^2	$p\delta^2$	$p\delta$
1	4	32,58	130,32	−0,51	0,2601	1,0404	−2,04
2	5	39,05	195,25	+5,96	35,5216	147,6080	+29,80
3	3	27,26	81,78	−5,83	33,9889	101,9667	−17,49
4	6	38,07	228,42	+4,98	24,8004	148,8024	+29,88
5	5	31,48	157,40	−1,61	2,5921	12,9605	−8,05
6	5	34,93	174,65	+1,84	3,3856	16,9280	+9,20
7	4	30,82	123,28	−2,27	5,1529	20,6116	−9,08
8	4	29,53	118,12	−3,56	6,5536	26,2144	−14,24
9	5	28,06	140,30	−5,03	25,3009	126,5045	−25,15
10	8	35,42	283,36	+2,33	5,4289	43,4312	+18,64
11	3	32,28	96,84	−0,81	0,6561	1,9683	−2,43
12	3	30,08	90,24	−3,01	9,0601	27,1803	−9,03
	55		1819,96			675,2163	+87,52 −87,51

а на основу формуле (3) у чл. 4. добијамо као нај-вероватнију вредност за мерени угао

$$a = 26^\circ 17' + \frac{1819{,}''96}{55} = 26^\circ 17' 33{,}''09 .$$

Према формули (36) у чл. 20. имамо

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{675{,}22}{11}} = \pm 7{,}''835 ,$$

$$r = \pm 0{,}6745\,\mu = \pm 5{,}''285$$

$$M = \pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{[p](n-1)}} = \pm 1{,}''056 , \quad R = \pm 0{,}6745\,M = \pm 0{,}''713 .$$

На основу формуле (24) у чл. 16. и формуле (28) у чл. 17. следује

$$h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} = 0{,}0903 , \quad H = \frac{1}{M\sqrt{2}} = 0{,}6693 .$$

Могли бисмо се кладити са 1 против 1 да права вредност мереног угла лежи између $26^\circ 17' 33{,}''09 + 0{,}''71$ и $26^\circ 17' 33{,}''09 - 0{,}''71$.

Као средњу грешку једнога мерења нашли смо $\mu = \pm 7{,}''835$ замишљајући да је тежина једног мерења = 1. На основу прве пропорције (31) у чл. 17. добијамо за средњу грешку мерења добивених у

№ 3, 11, 12 са по 3 репетиције $\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{3}} = \pm 4{,}''524$,

№ 1, 7, 8 „ „ 4 „ $\mu'' = \frac{\mu}{\sqrt{4}} = \pm 3{,}''917$,

№ 2, 5, 6, 9 „ „ 5 „ $\mu''' = \frac{\mu}{\sqrt{5}} = \pm 3{,}''504$,

№ 4 „ „ 6 „ $\mu'''' = \frac{\mu}{\sqrt{6}} = \pm 3{,}''199$,

№ 10 „ „ 8 „ $\mu''''' = \frac{\mu}{\sqrt{8}} = \pm 2{,}''770$.

13.

Одређивање средње грешке рачуном нађених резултата из средњих грешака мерењем добивених података.

21. Једно од најважнијих питања у теорији и пракси поравнавања грешака то је како се средње грешке код мерењем добивених количина преносе на средњу грешку количине, коју из тачних (нетачних) података добијамо рачуном. Узећемо, претходно, два основна и најпростија случаја, а то су множење и сабирање (односно одузимање) измерених количина.

I. Множење. Нека је l измерена количина, која има да се помножи бројем K, тако да је

$$x = Kl.$$

Измереној количини l припада извесна средња грешка μ. Број K, као дата количина, сматра се као апсолутно тачан. Очевидно је средња грешка M за x

$$M = K\mu. \tag{38}$$

Објаснимо правило (38) на једном простом, али типичном примеру. Замислимо да смо

једну дуж x меримо летвом, чија дужина није потпуно тачно одређена. Грешка у дужини летве очевидно се умножава упоредно са бројем K дометака летве приликом мерења тако да грешка код x постаје K пута већа но што је грешка летве. И због неодређеног знака $\pm$ грешке μ летве и грешка M остаје такође неодређена у погледу знака: $\pm M$. Ми смо овде претпоставили да сам рад око мерења није био скопчан са грешкама.

II. Сабирање. Узмимо да је l' и l'' независно једно од другог измерено. Нека је

$$x = l' + l''.$$

Означимо са μ' и μ'' средње грешке измерених количина l' и l''. Пита се колика је средња грешка M њиховог збира x. На први поглед рекли бисмо да треба ставити $M = \mu' + \mu''$. Но ово би био само екстремни случај за нагомилавање грешака, као што би други екстремни случај за потирање грешака одговарао томе да је $M = \mu' - \mu''$. Да овакво решење постављеног питања није правилно уви дичено кад узмемо у обзир да μ' и μ'' нису фактичне грешке од l' и l'', него само извесне средње вредности грешака.

Да бисмо дошли до правилног решења треба да пођемо од правога значаја грешака μ' и μ''. Са те тачке гледишта ми замишљамо да сабирање $x = l' + l''$ није извршено само једанпут, него више пута, нпр. n пута узевши, при томе, све учињене грешке δ' и δ'' у обзир. Нека су први пут учињене грешке δ_1' и δ_1''. Тада је за x учињена грешка $\delta_1 = \delta_1' + \delta_1''$. Тако у свих n случајева

$$\delta_1 = \delta_1' + \delta_1''$$
$$\delta_2 = \delta_2' + \delta_2''$$
$$\dots$$
$$\delta_n = \delta_n' + \delta_n''.$$

Одавде

$$[\delta^2] = [\delta'^2] + [\delta''^2] + 2[\delta'\delta'']$$

$$\text{(a)} \qquad \frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\delta'^2]}{n} + \frac{[\delta''^2]}{n} + 2\frac{[\delta'\delta'']}{n}.$$

Овде је $\frac{[\delta^2]}{n} = M^2$, $\frac{[\delta'^2]}{n} = \mu'^2$, $\frac{[\delta''^2]}{n} = \mu''^2$.

Трећи члан $2\frac{[\delta'\delta'']}{n}$ на десној страни једначине (a) представља двоструку средину из производа $\delta'\delta''$ грешака δ' и δ'', којих има (ако је n довољно велико) колико позитивних толико и негативних. С обзиром на то последњи члан може, ако је n довољно велико, да се потпуно занемари према прва два члана и једначина (a) добија тада овај прости вид

$$M^2 = \mu'^2 + \mu''^2$$

$$M = \sqrt{\mu'^2 + \mu''^2}. \qquad (39)$$

Ова формула (39) исказује најважније правило у теорији поравнавања грешака и може да се искаже: средња грешка $\pm M$ збира двају мерења са средњим грешкама $\pm\mu'$ и $\pm\mu''$ представљена је хипотенузом за катете μ' и μ''.

Правило, које смо утврдили за збир, важи и за разлику двају мерених количина. Код одузимања једначина (a) има вид

$$\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\delta'^2]}{n} + \frac{[\delta''^2]}{n} - 2\frac{[\delta'\delta'']}{n},$$

одакле, с обзиром да је $\lim \frac{[\delta'\delta'']}{n} = 0$, добијамо резултат (39).

Ово правило може да се прошири и на већи број мерења

$$x = (l' \pm \mu') + (l'' \pm \mu'') + (l''' \pm \mu''') + \dots$$

Ако имамо три мерења ми онда скупљамо два елемента у један и сводимо случај од три мерења на онај од два, тако да је

$$M^2 = (\mu'^2+\mu''^2)+\mu'''^2$$

итд. На тај начин добијамо општу формулу

$$M^2=\mu'^2+\mu''^2+\mu'''^2+\dots \tag{40}$$

На случај да су у свих n мерења грешке једнаке $\mu'=\mu''=\mu'''=\dots$ имамо образац

$$M^2 = n\mu^2$$

или

$$M=\mu\sqrt{n}. \tag{41}$$

Формулу (41) могли бисмо да протумачимо на мерењу једне дужи L летвом, чија је дужина тачна, али се при сваком полагању летве чини грешка, чија је средња вредност увек $\pm\mu$. У претпоставци да се грешка μ чини у истој мери у смислу plus колико и у смислу minus формула (41) казује да је средња грешка у резултату пропорционална квадратном корену из броја n (броју колико се пута полагала летва при мерењу) или пошто је дужина L пропорционална броју n, то је средња грешка у резултату пропорционална квадратном корену из мерене дужине L.

III. Линеарна функција. На основу горња два правила за множење и сабирање (односно одузимање) изводимо следеће опште правило за

одређивање средње грешке једне линеарне функције мерених количина.

Означимо са $l', l'', l''', \dots$ мерене количине, са $\mu', \mu'', \mu''', \dots$ њихове средње грешке. Тада је средња грешка линеарне функције

$$x = k'l' + k''l'' + k'''l''' + \dots \tag{42}$$

ово

$$M = \sqrt{(k'\mu')^2+(k''\mu'')^2+(k'''\mu''')^2+\cdots}, \tag{43}$$

а на случај да је $\mu'=\mu''=\mu'''=\dots$ простије

$$M = \mu\sqrt{[k^2]}. \tag{44}$$

IV. Општа функција. Ако је количина x састављена из мерених количина $l_1, l_2, l_3, \dots$ у виду какве било функције

$$x = f(l_1, l_2, l_3, \dots) \tag{45}$$

ми ћемо, бар приближно, моћи функцију f да сведемо на форму једне линеарне функције у случају да су грешке довољно мале.

Означимо са $l_1, l_2, l_3, \dots$ праве вредности мерених количина, са $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ извесне грешке тих количина, које (грешке) ћемо претпоставити толико мале да се њихови степени могу занемарити. Помоћу Taylor-овог реда налазимо одговарајућу грешку за x

$$\delta = f(l_1+\delta_1, l_2+\delta_2, l_3+\delta_3, \dots) - f(l_1, l_2, l_3, \dots)$$

$$\delta = \frac{\partial f}{\partial l_1}\delta_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2}\delta_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3}\delta_3 + \cdots$$

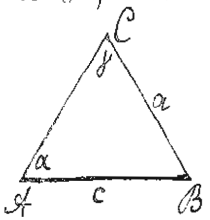
Ако означимо са $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ средње грешке мерених количина $l_1, l_2, l_3, \dots$ добићемо закључком сличним оним у I и II да је

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\mu_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\mu_2\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_3}\mu_3\right)^2 + \cdots} \tag{46}$$

Диференцијалне количнике $\frac{\partial f}{\partial l_1}, \frac{\partial f}{\partial l_2}, \frac{\partial f}{\partial l_3}, \dots$ израчунавамо помоћу измерених вредности количина $l_1, l_2, l_3, \dots$

Објаснимо ово на једном простом примеру. Претпоставимо да је основица c измерена без погрешке. Тачку C утврдили смо мерењем углова α и γ, тако да је страна

$$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}.$$



Нека су $\delta\alpha$ и $\delta\gamma$ средње грешке измерених углова α и γ. Колика је средња грешка M за израчунату страну a?

Образујући тотални диференцијал

$$da = \frac{\partial a}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \gamma}d\gamma$$

налазимо

$$da = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma}d\alpha - \frac{c\sin\alpha\cos\gamma}{\sin^2\gamma}d\gamma,$$

које, на основу горње једначине за страну a, може

да се напише

$$da = a\,\mathrm{cotg}\,\alpha\, d\alpha - a\,\mathrm{cotg}\,\gamma\, d\gamma.$$

Заменом диференцијала $d\alpha$ и $d\gamma$ средњим грешкама $\pm\delta\alpha$ и $\pm\delta\gamma$ добијамо средњу грешку M у неодређеној форми

$$\pm M = a\,\mathrm{cotg}\,\alpha \cdot \delta\alpha \pm a\,\mathrm{cotg}\,\gamma \cdot \delta\gamma,$$

а на основу формуле (46)

$$M = a\sqrt{\mathrm{cotg}^2\alpha\,(\delta\alpha)^2 + \mathrm{cotg}^2\gamma\,(\delta\gamma)^2}.$$

Ако су оба угла α и γ подједнако тачно измерена: $\delta\alpha = \delta\gamma = \delta$ имамо

$$M = a\delta\sqrt{\mathrm{cotg}^2\alpha + \mathrm{cotg}^2\gamma}.$$

Узмимо да је $\alpha = 68°15'32''$, $\gamma = 57°42'18''$, $\delta = 8''$.

Тада је, пошто претворимо δ из угловне у лучну меру (множењем са $\sin 1''$),

$$\frac{M}{a} = 8\sin 1'' \cdot \sqrt{\mathrm{cotg}^2 68°15'32'' + \mathrm{cotg}^2 57°42'18''}$$

$$= \pm 0{,}000029.$$

То значи да је $M \sim 0{,}003\ \%$ стране a.

За $a = 1000\,m$ била би средња грешка $M \sim \pm 0{,}03\,m$.

Нацрт
за
Теорију Најмањих Квадрата.

Увод.

Категорисање грешака које се чине при мерењу. Највероватнија вредност једне више пута мерене количине: а) кад су мерења подједнако тачна; в) кад мерења нису подједнако тачна. Принцип Методе Најмањих Квадрата. Главни случајеви за поравнање грешака.

I
Непосредна мерења.

1. Непосредна посматрања јесу једнаке тачности.
2. Непосредна посматрања јесу неједнаке тачности.

II
Посредна мерења.

1. Пренашање (утицај) грешака које су чињене у посматрању на функције посматраних количина.
2. Поравнање посредних подједнако тачних мерења.
3. Поравнање посредних неједнако тачних мерења.

III
Мерење количина које су једначином везане.

Претпоставимо да су мерене количине x и y у линеарноме односу: да су везане једначином

$$y = ax + b.$$

Посматрањем (мерењем) добили смо n стрегова x_1, y_1, x_2, y_2, ... x_n, y_n. При томе су учињене грешке

$$y_1 - ax_1 - b, \quad y_2 - ax_2 - b, \quad \dots \quad y_n - ax_n - b.$$

По Методи Најмањих Квадрата треба да буде минимум функција

$$u = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \dots + (y_n - ax_n - b)^2$$
$$= \sum (y - ax - b)^2.$$

Да би било $u = \mathrm{Min.}$ потребно је да буде

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \text{ дакле } -\sum 2(y-ax-b)x = 0 \text{ или } a\sum x^2 + b\sum x = \sum xy,$$
$$\frac{\partial u}{\partial b} = 0, \quad '' \quad -\sum 2(y-ax-b) = 0 \quad '' \quad a\sum x + nb = \sum y,$$

одакле опредељујемо коефицијенте a и b линеарне функције $y = ax + b$, којом су везани x и y

$$a = \frac{\sum x \sum y - n\sum xy}{(\sum x)^2 - n\sum x^2}, \quad b = \frac{\sum x \sum xy - \sum y \sum x^2}{(\sum x)^2 - n\sum x^2}.$$

Узмимо један

пример са бројевима.

Измерене су координате од десет тачака, које треба да леже све на једној правој

$$y = ax + b.$$

Има да се одреде коефицијенти a и b једначине праве.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$-0{,}75$	$-0{,}20$	$+0{,}35$	$+0{,}95$	$+1{,}50$	$+2{,}10$	$+2{,}70$	$+3{,}25$	$+3{,}85$	$+4{,}40$.

Овде је

$$\Sigma x = +5, \quad \Sigma x^2 = +85, \quad n\Sigma x^2 = +850,$$

$$\Sigma y = +18{,}15, \quad \Sigma xy = +56{,}60$$

и према томе

$$a = \frac{19{,}01}{33}, \quad b = \frac{49{,}59}{33},$$

а једначина праве

$$y = \frac{19{,}01}{33}x + \frac{49{,}59}{33}.$$

Узмимо случај са три непознате количине x, y, z, које су међусобом везане линеарном једначином

$$z = ax + by + c.$$

Мерењем смо добили n спрегова $x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n$ и при томе учињене су грешке

$$z_1 - ax_1 - by_1 - c, \quad z_2 - ax_2 - by_2 - c, \quad \dots \quad z_n - ax_n - by_n - c.$$

По Методи Најмањих Квадрата треба функција

$$u = (z_1 - ax_1 - by_1 - c)^2 + (z_2 - ax_2 - by_2 - c)^2 + \dots + (z_n - ax_n - by_n - c)^2$$
$$= \Sigma (z - ax - by - c)^2$$

да буде минимум, а то условљава

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -\Sigma 2(z - ax - by - c)x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = -\Sigma 2(z - ax - by - c)y = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = -\Sigma 2(z - ax - by - c) = 0$$

или

$$a\Sigma x^2 + b\Sigma xy + c\Sigma x - \Sigma xz = 0$$
$$a\Sigma xy + b\Sigma y^2 + c\Sigma y - \Sigma yz = 0$$
$$a\Sigma x + b\Sigma y + nc - \Sigma z = 0.$$

Помоћу ове три једначине, које се по Гаус-у зову нормалне једначине (Normalgleichungen; équations normales), налазимо коефицијенте a, b, c, који ~~мерењем~~ према вредностима за x, y, z, које смо мерењем добили, најбоље одговарају линеарној једначини $z = ax + by + c$.

Пример са бројевима.

Измерене су координате од осам тачака у простору

x	-2	-3	1	2	4	-6	0	-4
y	1	4	-2	5	-1	-5	3	0
z	$-2{,}97$	$-10{,}04$	$8{,}95$	$1{,}02$	$15{,}01$	$-4{,}02$	$-0{,}98$	$-6{,}51$.

Ове тачке треба да леже све у једној равни

$$z = ax + by + c.$$

Има да се одреде коефицијенти a, b, c, који ће најбоље задовољити једначину те равни.

Пошто израчунамо

$\sum x = -8 \qquad \sum x^2 = 86 \qquad \sum xy = 20$

$\sum y = 5 \qquad \sum y^2 = 81 \qquad \sum yz = -53{,}78$

$\sum z = 0{,}46 \qquad \sum zx = 157{,}25.$

налазимо нормалне једначине

$$86a + 20b - 8c - 157{,}25 = 0$$
$$20a + 81b + 5c + 53{,}78 = 0$$
$$-8a + 5b + 8c - 0{,}46 = 0,$$

одакле

$$a = 2{,}5019; \quad b = -1{,}4975, \quad c = 3{,}4953.$$

Овим би једначина равни гласила

$$z = 2{,}5019\,x - 1{,}4975\,y + 3{,}4953$$

или, ако се задовољимо са доста приближним вредностима $a = 2{,}5$, $b = -1{,}5$, $c = 3{,}5$, знатно краће

$$5x - 3y - 2z + 7 = 0.$$

Ми смо горе посматрали случај да су непознате $x, y, z, \ldots$ везане међусобом линеарним једначинама. На случај да та веза није линеарна проблем се може, ипак, да сведе на онај најпростији који смо расматрали, ако су нам већ унапред познате приближне вредности констаната $a, b, c, \ldots$ што је у применама врло често. Нека су $a_0, b_0, c_0, \ldots$ те приближне вредности, $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \ldots$ њихове грешке, дакле

$$a = a_0 + \Delta a, \quad b = b_0 + \Delta b, \quad c = c_0 + \Delta c, \ \ldots$$

које, кад место $a, b, c, \ldots$ унесемо у једначину $F(x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots) = 0$, која везује количине $x, y, z, \ldots$ са коефицијентима $a, b, c, \ldots$, и развијемо функцију F по Taylor-овом реду и занемарујући више степене и производе из грешака $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \ldots$ (које претпостављамо да су врло мале), даје

$$\frac{\partial F}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial F}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial F}{\partial c}\Delta c + \cdots = 0.$$

У ову једначину ставићемо за $x, y, z, \ldots$ поступно измерене спрегове $x_1, y_1, z_1, \ldots,\ x_2, y_2, z_2, \ldots, \ldots x_n, y_n, z_n \ldots$ Горња једначина је, као што видимо, линеарна у погледу грешака $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \ldots$, које има да се определе да би се добили коефицијенти $a, b, c, \ldots$ Задатак је сведен на онај најпростији случај са том разликом што, место првога степена количина $x, y, z, \ldots$ овде се јављају у изразима $\frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial b}, \frac{\partial F}{\partial c}, \ldots$ компликованије форме тих количина.

Историске напомене.

Методу Најмањих Квадрата пронашли су Лежандр (Adrien Marie Legendre, 1752-1833) и Гаус (Karl Friedrich Gauss, 1777-1855). Гаус је концептовао ову теорију још 1795. год. (када му је било тек 18 година), а његова прва публикација о овоме штампана је тек год. 1809. (theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium), док је Лежандр свој рад публиковао год. 1806. (nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes са додатком sur la méthode des moindres carrés), где је овој теорији дао име Методе Најмањих Квадрата.

Првој примени, коју је учинио Гаус са Методом Најмањих Квадрата, дао је повод Пијацијево (Giuseppe Piazzi, 1746-1826) откриће (у Палерму) прве мале планете између Марса и Јупитера 1. Јануара 1801. год. (првог дана у 19. веку), којој је дато име Церес. Употребом Методе Најмањих Квадрата, којом је Гаус

располагао од више година раније, он је израчунао ефемериду за нову планету толико тачно, а на основу релативно недовољних посматрања Пијаци-евих, да је једино помоћу њих астроному Цах-у (Franz v. Zach, 1754-1832) било могуће да идућег планетног повратка ју поново нађе на небу.

Осим Гаус-а, који је у својим шест класичних расправама (до год. 1826.) изнео све што се данас у главноме подразумева под Методом Најмањих Квадрата, највише је допринео усавршавању ове теорије чувени астроном Бесел (Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846). Тако је он у једном своме раду (Gradmessung in Ostpreussen, 1837) решио проблем којим се Гаус раније није бавио, а то је поравнање грешака код посредних мерења са условним једначинама.

Данашњој Методи Најмањих Квадрата за поравнање грешака претходиле су теорије Ојлер-а (Leonhard Euler, 1707-1783), Тобиас Мајер-а (Johann Tobias Mayer, 1723-1762), Руђера Бошковића (1711-1784), Лагранж-а (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813) и Лаплас-а (Pierre Simon Laplace, 1749-1827). Проблем је био увек исти: да се на основу задатих једначина одреде извесне непознате, којих је на броју мање но једначина, тако да добивене вредности непознатих по могућству што боље испуњавају све оне једначине. Бошковић је (1770. год.) поставио принцип да непознате треба из прекобројних једначина одредити тако да апсолутна вредност суме свих грешака буде минимум. Први је Лагранж (у једном раду из год. 1770.) основао теорију грешака на Науци о Вероватноћи. Покушај о изравнању грешака, који је непосредно претходио проналаску Методе Најмањих Квадрата, учињен је од Лаплас-а у његовом епохалном делу Traité de mécanique céleste, 1802., где је узео као принципе да алгебарска сума грешака треба да је = 0 и да апсолутна сума грешака буде минимум.