Модерне Теорије
о
ЕЛЕКТРИЦИТЕТУ И МАГНЕТИЗМУ

Ђор. Ј. Мујић, проф.

БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА
Бр. 3272

Модерне теорије о електрицитету и магнетизму

предавања
Д-р Мил. Миланковића,
проф. универзитета

I Електростатика

Основне чињенице.

Познато нам је из Експерименталне физике да се трењем двају тела ова могу електризовати т.ј. довести у такво специјално стање у којем она малене делиће папира, струготине и т.д. привлаче, па онда одбијају. При томе се указује као прва чињеница да се сва тела могу пре свега поделити у две категорије које се сасвим различито понашају при томе процесу електризирања. Код тела прве категорије указује се да је без утицаја да ли се та тела при томе процесу налазе у посредном или непосредном додиру са земљом или са другим телима; таква су тела н. пр.

стакло, парафин, каучук и т. д. Код тела друге категорије, а главни репрезентанти те категорије су метали, понашају се сасвим различито при том процесу према томе да ли су она у директном (или индиректном преко тела исте категорије) додиру са земљом или нису. Ако су у таквом додиру са земљом, онда се у опште не могу електризовати. Па док се већ у старом веку знало да се тела прве категорије могу електризовати, дотле се све до 1727 године мислило да се тела друге категорије, н. пр. метали, не могу довести у електрично стање. Тек је те године Грај нашао да се и тела друге категорије могу довести у електрично стање само морају бити опкољена са ваздухом или са осталим телима прве категорије. Додир посредни или непосредни тела друге категорије уништава од једанпут њихово електрично стање. Што се дешава додуше и код тела прве категорије али на сасвим други начин. Док тела прве категорије губе своје електрично стање само на оним местима која су доведена у додир са земљом, дотле тела друге категорије губе своје електрично стање у сасвим другим деловима. Исто тако показује се да тела прве категорије постају електрична само на оним местима на којима су трта, а по телима друге категорије шири се електрицитет и по осталим деловима њиховим. Све ове феномене можемо изразити на тај начин да тела прве категорије назовемо изолаторима, а тела друге категорије проводницима. Познато нам је такође да се код проводника електрицитет шири само по њиховој површини. Упознали смо такође у експерименталној физици две разне врсте електрицитета и познато нам је значење те класификације. Познато нам је даље да се н. пр. трењем коже и стакла буде у овим телима различите врсте електрицитета, а да су множине тих двеју врста електрицитета једнаке т. ј. са истом количином са којом кожа привлачи једно друго електризовано тело, са истом том силом га стакло одбија. Експериментом је утврђено и познати закон Coulomb-ов: да се две електричне масе e_1 и e_2 или оптерећења привлаче или одбијају силом која је једнака $f\frac{e_1e_2}{r^2}$, где r означава одстојање тих двеју маса а f један константан фактор. Електричне масе се привлаче ако су разноврсне, а одбијају ако су исте врсте. Да се сви ови феномени растумаче и формулишу може се учинити основним хипотезама.

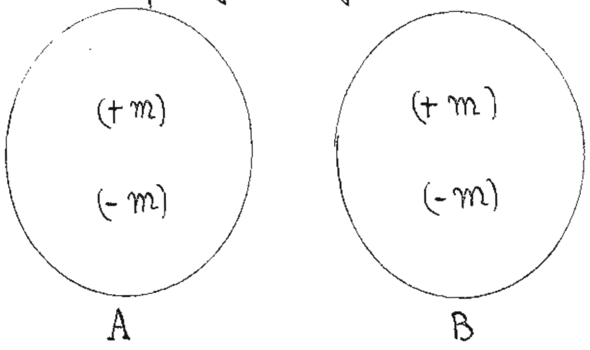
Хипотезе о природи електрицитета и електричних сила

Да досадање искуством стечене основне чињенице формулишемо у математичком облику и да на њима едифицујемо теорију електрицитета потребне су нам представе или слике о природи електрицитета и електричних сила. Чињени су многи покушаји да се сви феномени електрични и магнетни растумаче са што мањим бројем хипотеза, но потпун успех није до данас још постигнут. Често пута се један те исти електрични феномен може са истим успехом формулисати и растумачити са сасвим различитим хипотезама. Од свих тих хипотеза није до данас још ни једна стекла неоспорно преимућство над осталим, па ће тек будућност показати да ли која од тих хипотеза има неоспорно преимућство над осталим или да ли ће се електрични и магнетни феномени моћи савршеније растумачити ако се употреби каква нова хипотеза.

Хипотезе о електричном флуиду. Основа ове хипотезе састоји се у овоме: Оно што називамо електрицитетом то је једна бескрајно разређена материја која због те своје разређености не подлеже утицају теже и која је покретна. Ту материју називамо *електричним флуидом* или кратко *електрицитетом*. Како има две врсте електрицитета, то можемо ту двоструку нарав електрицитета протумачити на два разна начина:

1° Први начин био би овај: свако тело има у себи једну извесну множину те материје. При електризовању прелази са једног од електризованих тела један део те материје на друго тело. Зато ће прво тело имати мањак а друго сувишак тога флуидума преко једне множине. Тим сувишком-мањком тумачи се двострука природа електрицитета. Ова хипотеза зове се *унитарична теорија флуидума* јер предпоставља само једну врсту флуидума. Њу је формулисао *Франклин* (1755).

2° Други начин на који се може двострука природа електрицитета растумачити састоји се у овоме: Претпостављамо да имамо две различите врсте електричног флуидума. У неким електричним телима налазе се те две врсте у једнакој множини. При електризовању прелази један део једне врсте флуидума на друго тело, па ће према томе свако од њих бити натуњено са неједнаким множинама обеју врста електрицитета: једно од њих имаће више прву врсту а друго другу врсту електричног флуидума. Те сувишке зовемо <u>слободним електрицитетом</u>, а изједначене множине у свакоме од тих тела зовемо <u>везаним електрицитетом</u>. Показаћемо да свакој множини слободног електрицитета може код два иста тела одговарати произвољна множина везаног електрицитета. Посматрајмо два тела А и В. У сваком од њих нека се у почетку налазе једнаке множине обе врсте електрицитета које ћемо звати <u>позитивним</u> и <u>негативним електрицитетом</u>. А" нека има дакле m јединица позитивног и исто толико јединица негативног електрицитета а једноставности ради исто толико и тело „В". Узмимо сада да смо са тела „А" пренели на тело „В" k јединица позитивног електрицитета, онда ће у томе телу заостати (m-k) јединица позитивног електрицитета и m јединица негативног. Тело „В" имаће (m+k) јединица позитивног и m јединица негативног електрицитета. Пренесимо сада са тела „В" на тело „А" l јединица негативног електрицитета. Онда ће прво тело имати (m-k) јединица позитивног и (m+l) јединица негативног електрицитета; тело В" имаће (m+k) јединица позитивног и (m-l) јединица негативног електрицитета. Можемо сада да кажемо да у телу „А" имамо (m+l-k-l) позитив. и (m+l) негатив. електрицитета. Зато тело „А" има (m+l) везаног електрицитета и k+l слободног електрицитета. Исто тако можемо да кажемо да у телу „В" имамо (m+k)



налази без утицаја и непотребан за ширење тих сила. Faraday је експериментално доказао да је медијум који окружава и дели посматране електричне масе од утицаја на пондерабилне силе, па је из тога извео закључак: да је тај медијум средство преко којега се те силе шире. Према Faraday-евој и Maxwell-овој представи изазива једна електрична множина m_1 у околном медијуму једно напето стање, слично оном стању у којем се налази једно стиснуто еластично тело. То стање шири се до електричне множине m_2 и последица тога је да се на томе телу указује пондерабилна сила. Ова претпоставка повлачи за собом две врло важне консеквенције.

Пошто се електрични феномени указују и у безваздушном простору, а за те феномене потребан је медијум, то се претпоставља да је и безваздушни простор испуњен једним медијумом који називамо *етром*. Ова хипотеза претпоставља даље реалност етра.

Друга консеквенција ове хипотезе о посредном ширењу електричних сила је та, да то ширење треба *времена*. Егзистенција етра изгледа, као што смо већ пре једанпут споменули, прилично утврђена, а *Hertz-ови експерименти* утврдили су ван сваке сумње да је за ширење електричних феномена потребно време. Одређена је шта више и брзина којом се ти феномени шире. Зато су тековине последњих деценија дале јаке ослонце Maxwell-ове теорије

Разлика између хипотезе сила на даљину и између посредног ширења тих сила је фундаментална. Према првој хипотези не изазива једна једина електрична множина e_1 никаквог ефекта; према Maxwell-овој хипотези ствара једна једина електрична множина оно напето стање у својој околини т. ј. ствара једно *електрично поље* па је зато следећи задатак те теорије: испитивање особина тога поља. Истина је да експериментално та испитивања тога поља могу се само на тај начин вршити да се у то поље унесе једна друга електрична множина e_2 па да би се на њој мерила механичка сила која се на њој указује и која је последица напетог стања. Но посматрамо ли ствар изближе, то ћемо увек увидети да се са уношењем електричне множине e_2 у поље множине e_1 разорава ово прво поље, јер и електрична множина e_2 изазива опет једно електрично поље, па се оба та поља суперпонирају и ми добијамо једно поље које се разликује од првог поља. Ово кварење поља које се хоће да испитује избегава се на тај начин да се множина e_2 узима веома малена. Испитујемо ли на тај начин једно електрично поље, то ћемо видети да права механичка сила $\mathfrak{K}$ која утиче на пробно тело e које смо унели у поље које хоћемо да испитујемо не зависи од електричног оптерећења e пробног тела. На једном истом месту тога поља неће се правац те силе мењати ако се буде мењало електрично оптерећење e. Зато можемо да кажемо:

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{E}$$

где је дакле $\mathfrak{K}$ *механичка сила*, а $\mathfrak{E}$ један *вектор* који зависи од положаја у којем се налази пробно тело. Од тачке до тачке поља мења се тај вектор; са мењањем електричне множине e мења се на истом месту поља механичка сила $\mathfrak{K}$, али се при том мења само њен интензитет а не правац у ком дејствује. Вектор $\mathfrak{E}$ називамо *интензитетом поља* или *јачином електричног поља* или *електричном силом*. Ми ћемо вектор $\mathfrak{E}$ звати кратко *електричним вектором*.

Мења ли се e, то се мења и интензитет силе $\mathfrak{K}$, па како на једном истом месту сила $\mathfrak{K}$ може да се појави не мењајући свој правац у једном и другом смислу, то ћемо то да протумачимо тиме да величина e може бити позитивна и негативна. Када дакле та величина мења свој знак, сила $\mathfrak{K}$ мења свој правац. Сила $\mathfrak{K}$ је, као што смо упознали у Векторској Анализи, поларан вектор.

Сада нам остају о природи величина e и $\mathfrak{E}$ ове две могућности:

1° $\mathfrak{E}$ је такође поларан вектор, а e скалар прве врсте;

2° $\mathfrak{E}$ је аксијалан вектор, а e псеудо-скалар. Ми се одлучујемо за прву претпоставку а њено оправдање споменућемо касније.

Поље у коме се налазе електризована тела, дакле тела оптерећена електрицитетом, а опкољена ваздухом или другим изолаторима називамо *електростатичким пољем* ако се у томе пољу не стварају топлотни или други какви феномени. У томе је пољу претпостављено дакле: да се кондуктори који су оптерећени електрицитетом налазе у миру и да се према томе и електрична оптерећења налазе у миру. У таквом је случају вектор $\mathfrak{E}$ независан од времена, па његово поље зовемо електростатичним пољем. Но ово поље треба разликовати од стационарног електричног поља у коме се додуше вектор $\mathfrak{E}$ не мења, са временом, али за чије је одржавање потребно непрестано довађање енергије. Претпоставићемо за први мах да је посматрано поље испуњено ваздухом. Електрични феномени у том електро-статичном пољу зависе и од барометарског притиска ваздуха и електричног оптерећења, а може наступити случај да се на том пољу, ако су та оптерећења достигла извесне величине, указују феномени електричног испражњавања, који су спојени са топлотним и оптичким појавама. Тај случај искључујемо за сада из наших посматрања.

Особине електро-статичног поља.

Унесемо ли у електро-статично поље пробно тело, то можемо помоћу њега за сваку тачку тога поља одредити пондеромоторну механичку силу Q а из ове електрични вектор $\mathfrak{E}$. На тај начин можемо испитати електро-статично поље, па се тим путем долази до ових чињеница: протицање вектора $\mathfrak{E}$ кроз једну затворену површину F која не обухвата никаква електрична оптерећења једнако је нули; дакле

$$\int_F \mathfrak{E}\, df = 0$$

Обухвата ли та површина електрична оптерећења $e_1, e_2, \cdots e_n$, онда је то протицање једнако

$$\oint_f \mathfrak{E}\, df = 4\pi \sum_i e_i$$

У овом случају постоји дакле између вектора $\mathfrak{E}$ и оптерећења е исти одношај као између вектора $\mathfrak{H}$ и извора е ламеларног поља са чијом смо се теоријом упознали. Из ове чињенице следује да извори поља леже на оним местима где се налазе оптерећења т.ј. на кондукторима. Из прве чињенице следује да је у оном делу поља које не обухвата оптерећења према Gauss-овом обрасцу такође

$$\oint_f \mathfrak{E}\, df = \int_V div\, \mathfrak{E}\, dV = 0$$

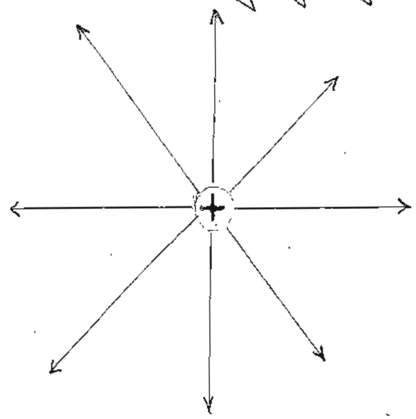
а како ова једначина вреди за сваки елеменат запремине V, то из ње следује

$$div\, \mathfrak{E} = 0$$

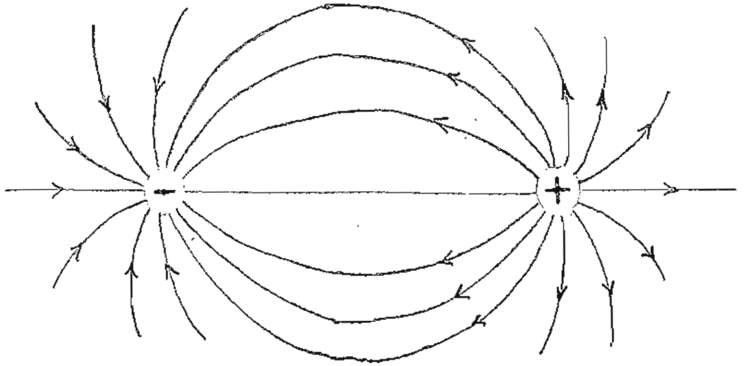
Зато можемо да кажемо: електростатичко поље између оптерећења или кондуктора је <u>безизворно поље</u> или <u>соленоидално поље</u>. Извори тога поља леже на кондукторима. Зато важи за електро-статичко поље све оно што смо у општој теорији поља доказали за соленоидална поља. Такво поље може се дакле представити помоћу соленоида којима се може дати такав пресек да је протицање кроз сваки соленоид једнако јединици; онда ће електрични вектор бити инверзно пропорционалан пресеку таквога соленоида на оном месту за које тражимо вектор $\mathfrak{E}$. Чим је соленоид шири тим је вектор $\mathfrak{E}$ мањи.

Место са соленоидима можемо поље вектора $\mathfrak{E}$ представити помоћу векторских линија ако сваки јединични соленоид заменимо са векторском линијом која пролази кроз осу тога соленоида. Онда је интензитет вектора $\mathfrak{E}$ инверзно пропорционалан одстојању таквих векторских линија на посматраном месту. Што су те линије ближе тим је интензитет јачи. Тангента на векторској линији даје правац вектора ℰ, а његов смисао следује из тога, да векторске линије иду од позитивног извора т.ј. од позитивног оптерећења ка негативном. Да би оживели представу о распореду таквих векторских линија ми ћемо овди скицирати неколико шематских представа о распореду векторских линија.

Узмимо прво случај да се у посматраном пољу налази једно јединично позитивно оптерећење сконцентрисано на једној бескрајно маленој кугли. Онда је то места једини извор посматраног поља па се због тога векторске линије шире радијално од тога извора у бескрајност, што у осталом следује и из принципа симетрије. Одстојање тих векторских линија пропорционално је квадрату одстојања посматраног места од извора.

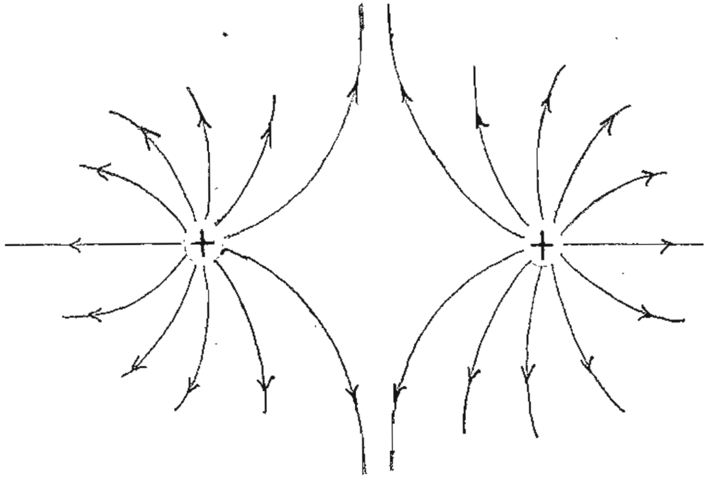


Као други случај узмимо да у посматраном пољу имамо два једнака електрична оптерећења но противног знака сконцентрисана на две тачке. Онда је позитивно оптерећење извор, а негативно понор посматраног поља. У овом случају биће распоред линија овај. Просторни распоред тих линија добијамо ако замислимо да ова слика ротира око осе која спаја оба оптерећења. У пређашњем случају не добија се просторни распоред ро-

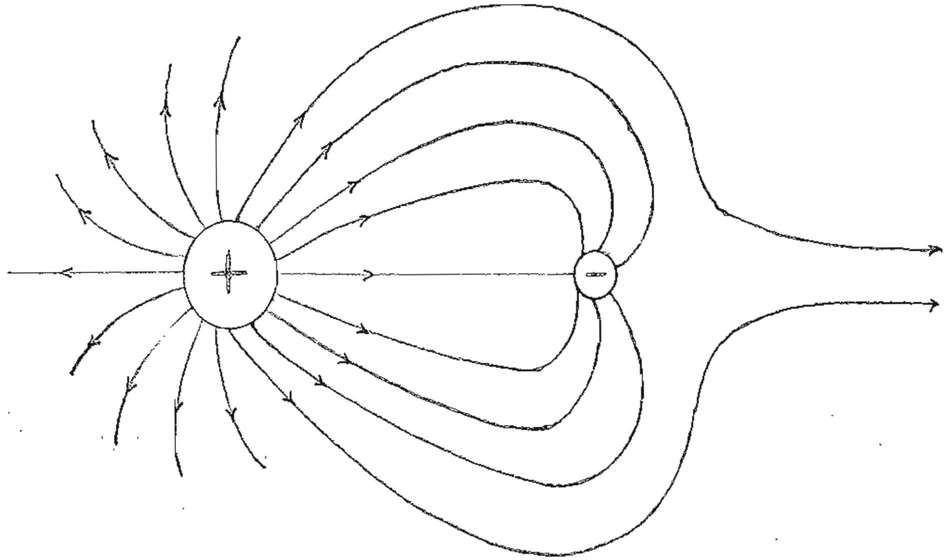


тацијом око једне осе, него се мора замислити да се векторске линије шире радијално из једног извора. Кроз сваку концентричну куглу првога поља пролази исти број линија, а како површина кугле расте са квадратом радиуса, то у тој истој мери расте и одстојање. У овом другом случају излазе све векторске линије из позитивног извора, па се свршавају у негативном извору. Што је посматрана тачка ближе извору, тим је интензитет вектора $\mathfrak{E}$ већи.

Као трећи случај узмимо да у посматраном пољу имамо два позитивна извора једнаке јачине. Све векторске линије излазе из ових двају извора и шире се у бесконачност.



Узмимо и овај случај да у пољу имамо један извор и један понор, но да је извор четири пута јачи од понора. Овај случај је карактерисован тиме што све векторске линије које се свршавају у понору излазе из извора, али све које излазе из извора не свршавају се у понору него само 1/4 од њих, јер је понор четири пута слабији од извора. Остале векторске линије које се не свршавају у понору шире се у бесконачност.



Казали смо да при сваком процесу електризирања настаје иста множина позитивног и негативног електрицитета или целокупна јачина извора једнака је целокупној јачини понора. У васиони има свака векторска линија свој почетак и свој свршетак, па велимо да се због тога електро-статичко поље не шири у бесконачност. То није случај за поље гравитације, јер у томе пољу имамо само позитивних извора, јер негативних маса не познајемо.

Замислимо сада да пробно тело крећемо у електро-статичном пољу. На то тело утиче једна механичка сила која је једнака

$$\mathfrak{R} = e\,\mathfrak{E}$$

где је e оптерећење пробног тела а $\mathfrak{E}$ електрични вектор поља на посматраном месту. Са мењањем положаја пробног тела мењаће се и тај вектор $\mathfrak{E}$ па према томе и механичка сила $\mathfrak{R}$. Када крећемо пробно тело, то имамо при томе да обавимо једну радњу. Ако га крећемо тако да се оно креће против силе $\mathfrak{R}$, или да потрошимо једну радњу ако се крећемо тако да правац кретања затвара оштар угао са правцем силе $\mathfrak{R}$, па радња једнака је интегралу

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathfrak{R}\, ds$$

где је ds елеменат пута и где се интеграција има извести између почетне тачке путање и крајње њене тачке. Ако је путања по којој крећемо пробно тело затворена, онда је механичка радња која се обавља при том кретању једнака

$$\int_l \mathfrak{R}\, ds = e \int_l \mathfrak{E}\, ds$$

тај интеграл мора на једној затвореној криви бити једнак нули, јер кад то не би био случај, могли би смисао обилажења одабрати тако да та радња буде позитивна, па би на тај начин могли непрестано добијати радње из електро-статичног поља, а то је немогуће. Због тога је дакле

$$\oint_l \mathfrak{E}\, dl = 0$$

или према Stokes-овом обрасцу

$$\int_f \operatorname{rot} \mathfrak{E}\, df = \oint \mathfrak{E}\, dl = 0$$

Како ова једначина важи за сваку затворену линију посматраног поља, то мора у читавом пољу бити

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$$

а то значи да је поље вектора $\mathfrak{E}$ безвртложно поље или, као што смо пре назвали, ламеларно поље. Вектор $\mathfrak{E}$ може се представити као градиент једнога скалара U_1

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad} U_1$$

Зато смо називали такво поље и потенцијалним пољем. Због тога ће за електро-статично поље између кондуктора важити све оно што смо извели у општој теорији за ламеларна поља. Ми можемо такво поље представити и помоћу еквипотенцијалних површина; векторске линије стајаће нормално на тим површинама а интензитет вектора $\mathfrak{E}$ биће инверзно пропорционалан дебљини ламеле. Из односа

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$$

следује

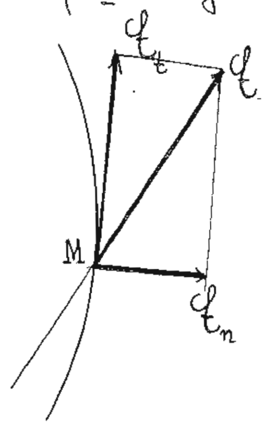
$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U_1 = 0$$

или

$$\nabla^2 U_1 = 0$$

Електро-статично поље између кондуктора задовољава Лапласову једначину, то следује већ из тога да је оно и соленоидално и ламеларно поље.

Посматрајмо површину једног кондуктора па узмимо да електрични вектор $\mathfrak{E}$ стоји косо према тој површини. Онда га можемо раставити у две компоненте од којих је једна нормална а



друга тангенцијална на површину. Иста правац као и вектор $\mathfrak{E}$ има и механичка сила $\mathfrak{R}$, па ће према томе и она у овом случају имати по једну нормалну и тангенцијалну компоненту. Обе те компоненте делују на оптерећење у посматраној тачки M површине. Утицај нормалне компоненте поништава се тиме што она делује према изолатору, а утицају тангенцијалне компоненте не стоји никаква запрека на путу и зато ће та компонента силе $\mathfrak{R}$ помакнути електрично оптерећење и помицати га све дотле док вектор $\mathfrak{E}$, према томе и вектор $\mathfrak{R}$, не буде нормалан на површину кондуктора. Зато ће површине кондуктора бити еквипотенцијалне површине посматраног векторског поља. Из истог узрока неће се моћи електрично оптерећење задржати у унутрашњости кондуктора, него ће бити потерено до површине и онде распоређено тако да она постане еквипотенцијална површина. Површине кондуктора су према томе једноставне површине извора. Теорију тих површина развили смо у општој теорији физикалних поља. Онде смо показали да се нормална компонента вектора мења скоком на таквој површини, па према томе и први извод потенцијала. Доказали смо једначину

$$\frac{dU_1}{dn} - \frac{dU_2}{dn} = 4\pi\varrho$$

где n означава елеменат нормале површине. У нашем случају је на једној страни површине

$$\frac{dU_2}{dn} = 0$$

па добијамо

$$\frac{dU_1}{dn} = 4\pi\varrho$$

ϱ називамо <u>површинском густином</u> или <u>површинским оптерећењем</u>. Потенцијал што га једна таква површина извора изазива у тачки M поља једнак је, као што смо показали

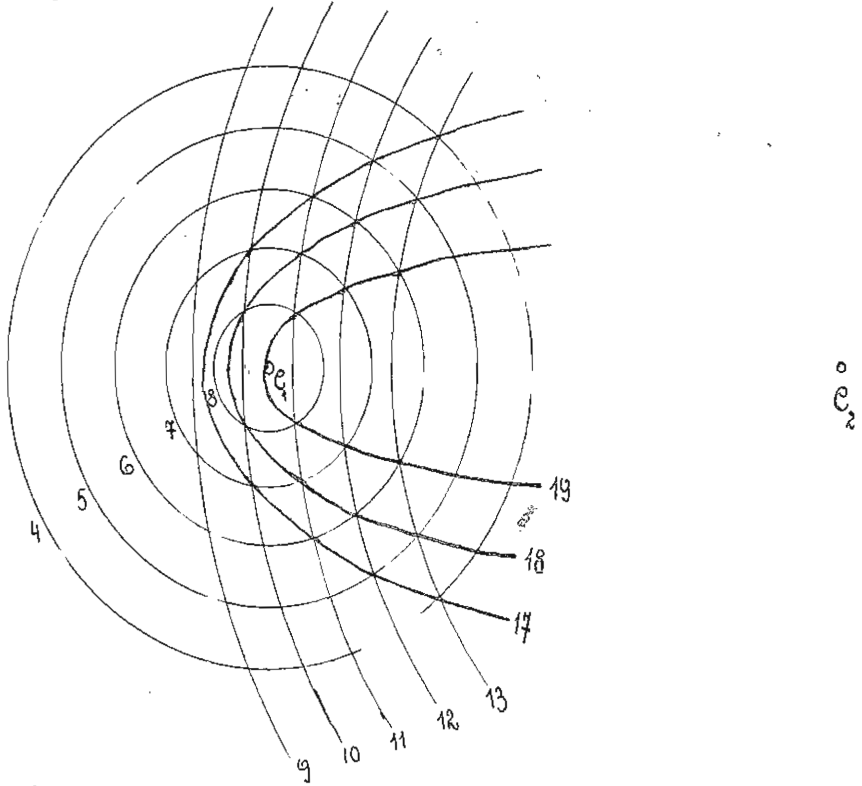
$$U = \int \frac{\varrho}{r}\, df$$

где r означава одстојање посматране тачке од елемента површине и где се интеграција има извести по читавој површини.

Кад би нам била позната електрична оптерећења и њихов распоред, једном речи кад бисмо познавали поље извора, могли би за сваку тачку простора по овој једначини да нађемо потенцијал, а тиме би био одређен и електрични вектор $\mathfrak{E}$ јер је он једнак

$$\mathfrak{E} = \nabla U$$

Овај начин одређивања електричног поља можемо само онда употребити ако су извори т.ј. оптерећења сконцентрисана на изолованим тачкама. У таквом случају изазива сваки изоловани извор једно радијално поље па суперпозиција тих радијалних поља даје тражено поље. На томе се оснива и конструкција еквипотенцијалних површина или, ако је поље равно, еквипотенцијалних линија. Према тој конструкцији суперпонирају се прво два од компонентних поља, резултат се суперпонира са трећим и т.д. Ако су према томе два таква изолована извора e_1 и e_2, онда нам је потенцијал првога



$$U_1 = \frac{e_1}{r_1}$$

а другог

$$U_2 = \frac{e_2}{r_2}$$

или одатле

$$r_1 = \frac{e_1}{U_1} \qquad r_2 = \frac{e_2}{U_2}$$

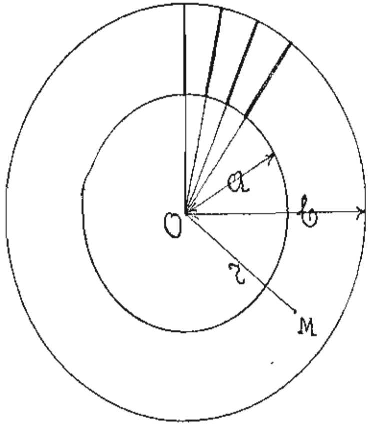
Дајемо ли величинама U_1 и U_2 вредности

$$U_1 = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$
$$U_2 = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

то ћемо добити радиусе r_1 и r_2 оних кругова који представљају еквипотенцијалне линије. За вредности потенцијала 1, 2, 3, … Концентрични кругови око e_1 нека представљају еквипотенцијалне линије за $U_1 = 4, 5, 6, 7, 8, \cdots$ Кругови који пресецају прве и чији центар лежи у e_2 нека представљају еквипотенцијалне линије за $U_2 = 9, 10, 11, 12, 13, \cdots$ Ова два поља треба да суперпонирамо, па знамо да је потенцијал резултујућег поља једнак збиру потенцијала компонентних поља, зато требамо на овој слици да спојимо међусобно оне пресеке ових двају врста линија у којима је збир потенцијала једнак. На тај начин добијамо еквипотенцијалне линије резултујућег поља. Имамо ли нпр. још један извор, онда ћемо еквипотенцијалне линије тога извора, које су концентрични кругови, спојити са добијеним резултујућим линијама првих двају поља.

Линије сила су ортогоналне трајекторије еквипотенцијалних линија и за њихову конструкцију постоје специјалне методе но ми се нећемо у њих упуштати.

Но обично проблем није тако једноставан. Ако се електрична оптерећења налазе на кондукторима коначних димензија, као што је обично случај, онда не познајемо распоред тих оптерећења, него морамо тај распоред тако одредити, да површина кондуктора буде еквипотенцијална површина електричне поља које тражимо. У оваквом облику дају се електро-статички проблеми решити само у врло специјалним случајевима, а иначе смо присиљени да употребимо методу пробања т.ј. да оптерећења тако дуго размештамо по површини кондуктора, док она не постане еквипотенцијална површина. Код случајева у којима се проблем може директно и егзактно да реши навешћемо следећа два примера:



1° Кондуктори су две концентричне кугline површине радиуса а и в. Оптерећење је унутрашње кугле задано и равно е. Онда ће из разлога централне симетрије то оптерећење бити по кугли униформно поразмештано, јер нема разлога да на једној тачки те кугле буде друкчије него на другој. Зато ће површинска густина ρ_a бити

$$\rho_a = \frac{e}{4a^2\pi}$$

Обе кугле су еквипотенцијалне површине, па ће зато линије сила бити радијалне, што у осталом следује и из разлога симетрије. Унутрашња површина биће површина извора. На њој ће линије сила почињати и свршавати се на спољашњој кугли, јер не могу у материјал спољашње кугле да продру. Зато ће спољашња кугла бити површина понора, јер ће свака линија сила која почиње на унутрашњој свршавати се на спољашњој и имати исто тотално оптерећење као и унутрашња кугла. Површинска густина спољашње кугле биће

$$\rho_в = \frac{e}{4в^2\pi}$$

Овај феномен да оптерећење унутрашње кугле изазива негативно оптерећене спољашње кугле зовемо индукцијом. Узрок индукције је тај, да се свака линија сила мора свршавати на једном кондуктору, па где се свршава настаје негативни извор. Кад би имали само унутрашњу куглу, онда би се линије сила свршавале на зидовима простора у коме се та кугла налази и на предметима који су с њом у вези. У томе случају био би проблем много компликованији, јер би се морао узети на кугли и на зидовима такав распоред електрицитета да линије сила продиру све кондукторе нормално.

Распоред линија сила у случају концентричних кугли је такав као кад би имали у центру O један изоловани извор са јачином e. Зато је потенцијал у произвољној тачки M између обеју кугли једнак

$$U = \frac{e}{r}$$

Зато је потенцијал на унутрашњој кугли

$$U_a = \frac{e}{a}$$

а на спољашњој

$$U_b = \frac{e}{b}$$

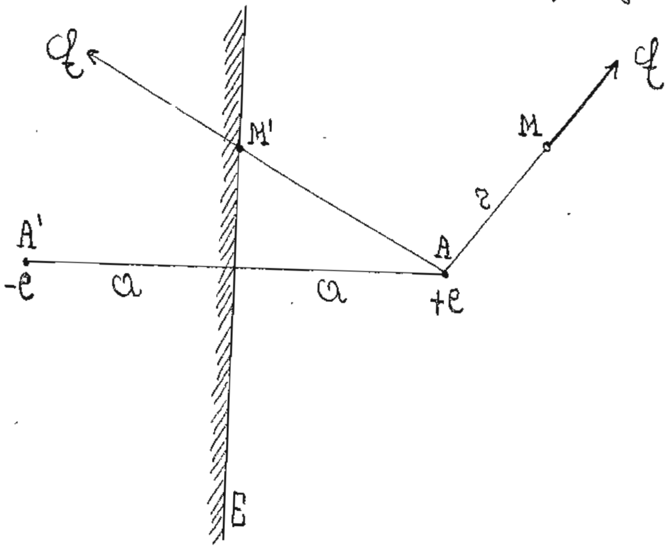
Квоцијент позитивног оптерећења са потенцијалном диференцијом зовемо капацитетом ових двеју кугли које се називају сферним кондензаторима. Он је у овом случају једнак

$$K = \frac{e}{U_a - U_b} = \frac{e}{\frac{e}{a} - \frac{e}{b}} = \frac{ab}{b-a}$$

Умањивањем одстојања ових двеју кугли можемо капацитет знатно повећати. Ако је радијус спољашње кугле бескрајно велики, онда добијамо капацитет обичне кугле

$$K = \lim_{b=\infty} \frac{a}{1 - \frac{a}{b}} = a$$

2° Кондуктори су једна изолована тачка и једна бескрајна раван. Посматрамо поље нека садржава у себи један изолован извор A са оптерећењем +e и нека буде на једној страни ограничен једном бескрајном равнином E која је површина једног кондуктора.



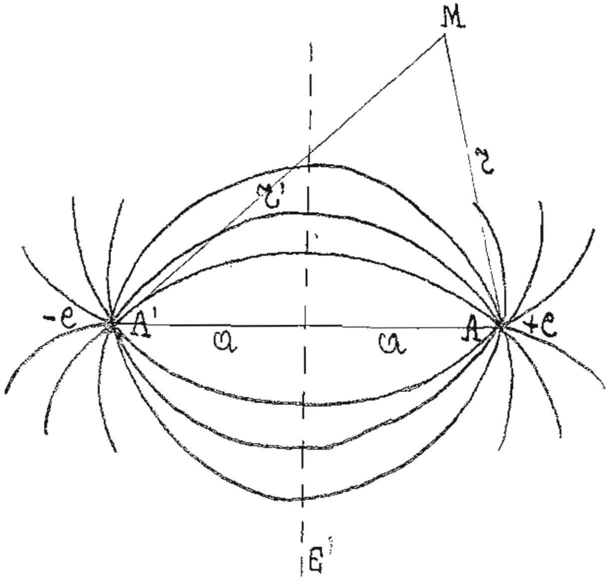
Кад би постојао извор сам за себе, онда би изазвао у произвољној тачки M потенцијал једнак

$$U = \frac{e}{r}$$

и електрични вектор $\mathfrak{E}$ који би био радијалан. У једној тачки M' равнине E стајао би тај вектор $\mathfrak{E}$ косо према тој равнини а то несме да буде. Зато ће на равнини E да се створи индукцијом множина −e електрицитета која ће бити тако поразмештана на тој равнини, да ће заједно са оптерећењем у A изазвати такво електрично поље којега векторске линије стоје нормално на равнину. Да бисмо извели то електрично поље, замислимо једну имагинарну тачку A' која стоји симетрично према равнини E и која садржава у себи негативну множину електрицитета −e. Овакав имагинарни негативан извор зове се по Томзону слика извора A. Он је методу таквих слика употребио на решавање електро-статичких проблема па ћемо се и ми у овом случају послужити том методом. Замислимо сада равнину E уклоњену тако, да се у пољу само налазе један извор A и један понор A', па испитајмо особине овога имагинарног поља. Потенцијал у тачки M овог поља једнак је

$$U = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'}$$

Налази ли се та тачка на симетра-



ли између А и А', онда је потенцијал у тачки те симетрале

$$U=0$$

јер је

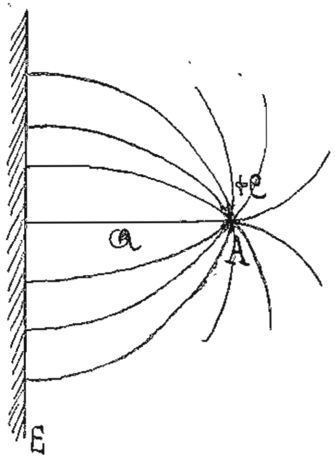
$$r=r'$$

даље константан на целој равнини која лежи симетрично према А и А'. Потенцијал је на тој равнини константан, зато је та равнина еквипотенцијална површина, па ће векторске линије имагинарног поља стајати нормално на тој равнини Е. Електрични вектор $\mathfrak{E}$ добијамо из једначине

$$\mathfrak{E}=\nabla U$$

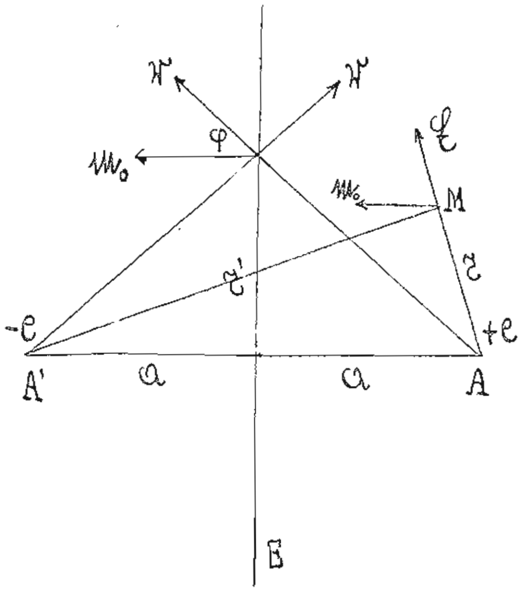
Замислимо да смо према горњој једначини за U конструисали еквипотенцијалне површине и нормално на њих линије сила; онда ће линије сила имати по принципу распоред као што је у предњој слици.

Замислимо сад да смо одстранили имагинарни понор А' и да смо геометријску равнину Е' заменили са материјалном равнином Е. Онда добијамо овакво поље.



Замислимо да је по материјалној равнини Е распоређено електрично оптерећење тако, да су та оптерећења крајеви векторских линија нацртаног поља, то ће такво поље задовољити све услове које захтева наш проблем: Оно ће имати у тачки А један изолован извор, па векторске линије које излазе из тог извора свршавају се на равнини Е и стоје нормално на њој. Имамо само да докажемо да се све векторске линије које излазе из извора А свршавају на равнини ε. Имали смо једначину:

$$U = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'}$$



а за вектор $\mathfrak{E}$

$$\mathfrak{E} = \nabla U = e\nabla\frac{1}{r} - e\nabla\frac{1}{r'}$$

Пројекција вектора $\mathfrak{E}$ на правац јединичног вектора m_0 једнака је

$$m_0\mathfrak{E} = e\,m_0\nabla\frac{1}{r} - e\,m_0\nabla\frac{1}{r'}$$

У Векторској Анализи извели смо једначину

$$m_0\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\cos(r m_0)}{r^2}$$

Узмимо да се тачка M налази у равнини ε и узмимо вектор m_0 нормално на ту равнину; онда је

$$\cos(r m_0) = \cos\varphi = \frac{a}{r}$$

$$\cos(r' m_0) = -\cos\varphi = -\frac{a}{r}$$

Зато је

$$m_0\mathfrak{E} = -e\frac{a}{r^3} - e\frac{a}{r^3} = -2e\frac{a}{r^3}$$

$m_0\mathfrak{E}$ је нормална компонента вектора $\mathfrak{E}$ и она је једнака тражени потенцијала у томе правцу, дакле

$$m_0\mathfrak{E} = \frac{dU}{dn}$$

где n означава елеменат нормале на равнину ε. Зато је

$$\frac{dU}{dn} = \frac{-2ea}{r^3}$$

а имали смо једначину

$$\frac{dU}{dn} = 4\pi\rho$$

па је због тога

$$\rho = -\frac{e}{2\pi}\cdot\frac{a}{r^3}$$

Ова једначина даје нам распоред густине негативног електрицитета поразмештаног по равнини ε. Израчунајмо тотално оптерећење површине ε. Оно је једнако

$$\int\rho\, df$$

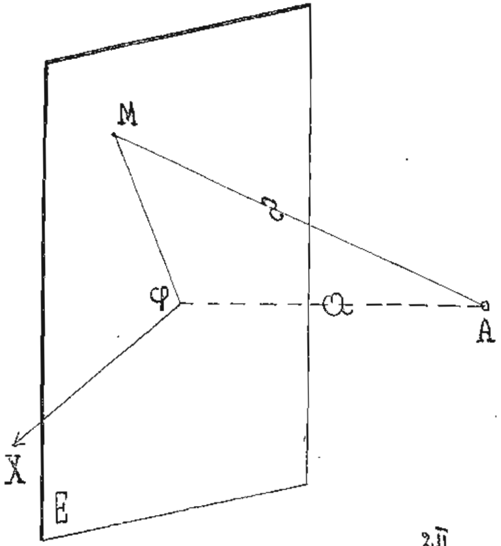
где имамо интеграцију да извршимо преко читаве равнине ε. Дакле

$$T = \int\rho\, df = -\frac{ea}{2\pi}\int\frac{df}{r^3}$$

Уведимо поларне координате. Пројекцију тачке A у равни ε узмимо за пол O. Поларну осу X положимо произвољно кроз O; онда је

$$r = \sqrt{a^2 + R^2}$$

а тотално оптерећење Г биће једнако



$$Г = -\frac{ea}{2\pi}\int\frac{df}{(a^2+R^2)^{3/2}}$$

елеменат површине df у новим координатама једнак је

$$df = R\,dR\,d\varphi$$

па је због тога

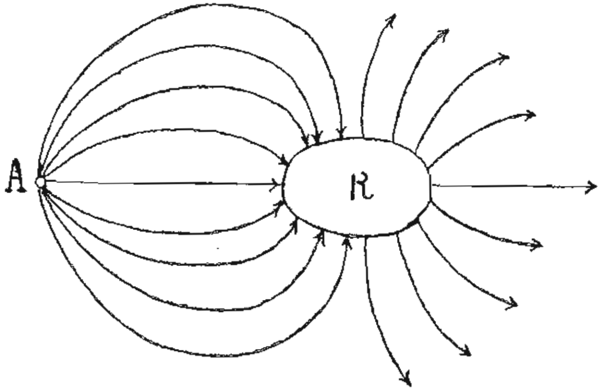
$$Г = -\frac{ea}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} (a^2+R^2)^{-3/2}\,dR =$$

$$= \frac{ea}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \; 2 \left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right\}_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{ea}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a}\,d\varphi = -e$$

што значи да се све векторске линије које излазе из извора A свршавају на равнини Е.

Овај феномен да електрична оптерећења изазивају у околним кондукторима такова електрична оптерећења назвали смо *инфлуенцијом*. Узрок је инфлуенције тај што линије сила не могу да продру у унутрашњост кондуктора, па где се свршавају настају понори или негативни извори т.ј. негативна или позитивна електрична оптерећења. Доведено ли у близину једног изолованог кондуктора који није имао никаквих оптерећења једно електрично оптерећење, то ће на оним местима где се векторске линије које излазе из тог оптерећења свршавају на кондуктору настајати електрична оптерећења негативна или позитивна према оном извору. Но како је у томе кондуктору у неелектричном стадијуму била иста множина позитивног и негативног електрицитета, то ће из њега исто толико векторских линија излазити колико их улазе. Нека A буде једно позитивно изоловано електрично оптере-



ћење а К изоловани кондуктор; онда ће наступити по принципу овакав распоред линија сила као што је означено на предњој слици. Спојимо ли десну страну кондуктора К са земљом, то ће векторске линије које излазе из кондуктора и које потичу према томе од позитивног електрицитета нестати. Како смо и у пређашњем примеру предпоставили да се на раван Е свршавају векторске линије, а да су оне које из ње излазе одстрањене.

Диелектрични медиуми.

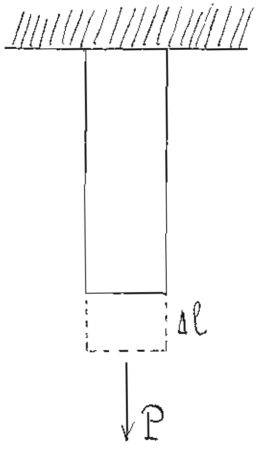
Све једначине које смо до сада извели и сви резултати предпостављали су да је простор око кондуктора испуњен ваздухом или још прецизније, да је ваздух одстрањен тако да је тај простор испуњен са бескрајно ретким флуидом који смо назвали етром. Према основном схваћању Faraday-Maxwell-ове теорије није тај флуидум хипотетичан него реалан, па ће се према томе морати очекивати и промена електричних феномена ако је простор између кондуктора испуњен другим којим изолатором. Faraday-еви експерименти утврдили су то, па је н. пр. пондеромоторна сила

P којим дејствује једно електрично оптерећење e_1 на друго e_2 једнака

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{e_1 e_2}{r^2}$$

где је ε константно ако је медиум хомоген, но где је та константа за сваки медиум другчија. Ту константу називамо <u>диелектричном константом</u>. Она је тако одабрана да је за етар једнака јединици. За ваздух је она једнака 1·00059, па се према томе врло мало разликује од константе за етар. За друге диелектричне медиуме може бити знатно већа. Према Maxwell-у одговара свакоме материјалу једна диелектрична константа т.ј. и метали имају своју диелектричну константу, но она је тако велика да се до данас није могла одредити.

Основна представа Maxwell-ове теорије састоји се у томе, као што смо рекли, да се уношењем електричног кондуктора у један диелектрични медиум н.пр. ваздух изазива у овоме једно извесно стање које се манифестује тиме да се на пробним телима указују пондеромоторне силе. То стање може се сравнити са стањем једног деформисаног еластичног тела. Стиснемо ли једно еластично тело н.пр. једно еластично перо, то смо тиме нагомилали у њему једну множину енергије и оно је у стању да обави ту радњу. Исто је тако у електричном пољу нагомилана једна множина енергије која престаје кад се кондуктори испразне, исто тако што престаје енергија нагомилана у еластичном телу кад се оно поврати у своје нормално стање. Оптеретимо ли н.пр. један штап са једном силом P, то ће се он истегнути за једну извесну дужину Δl. Удвостручимо ли оптерећење P, то ће се према Хуковом закону (основ-



ни закон науке о еластичности) и продужење Δl удвостручити т.ј. између величина Δl и P постоји овај закон

$$\Delta l = cP$$

где је c једна константа. Константа c је за сваки материјал другчија, па је н.пр. за бакар већа него за челик. Са једном истом силом изазивамо према томе на различитим материјалима различита истезања. Продужење Δl карактерише напето стање у еластичном штапу. Замислимо да се у диелектричним медиумима који опкољавају кондукторе дешава сличан процес. H. A. Lorentz представља ствар овако: електрицитет замењује са једним инкомпресибилним флуидумом који има то својство да не може да продре у унутрашњост кондуктора него се накупи на површини кондуктора и сачињава на њој један непробојни слој. Услед тога се околни диелектрикум стисне. Што је множина доведеног електрицитета већа, тим је слој дебљи и стискавање јаче. Ово је само једна слика којој Lorentz не даје реалног значења. Према разноликости медиума ће слично као и код еластичних тела истим силама одговарати различите деформације или стискавања, или обрнуто: исто стискавање изазваће код различитих медиума различите електричне силе. Електрична сила $\mathfrak{E}$ је вектор па ће на сваком месту поља и стискавање или диелектрично померање моћи бити представљено такође са једним вектором $\mathfrak{D}$. Према аналогији са еластичним телима претпостављамо да постоји пропорционалност између вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{D}$. У изотропним медиумима имаће вектори $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ исте правце, па ће према томе пропорционални фактор бити један скалар. Између вектора $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ постојаће даље релација

$$\mathfrak{D} = c\,\mathfrak{E}$$

Место фактора c стављамо фактор $\frac{\varepsilon}{4\pi}$ па имамо

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}$$

Ако сматрамо ε и $\mathfrak{E}$ као познато и дефинисано, онда је ово <u>дефинициона једначина</u> за електрично померање $\mathfrak{D}$. Сматрамо ли $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ као познато и дефинисано, горња једначина дефинише диелектричну константу ε.

Векторске линије диелектричног померања $\mathfrak{D}$.

Ако је медиум у коме је изазвано електрично поље изотропан, то на сваком његовом месту имају вектори $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{D}$ исте правце. Зато се и векторске линије оба поља поклапају. Ако је медиум поред тога хомоген т.ј. ако је ε константно у читавом пољу, онда ће се поље вектора $\mathfrak{D}$ разликовати само једним константним пропорционалним фактором од поља вектора $\mathfrak{E}$, па ћемо и поље то моћи представити помоћу ламела, соленоида и векторских линија, само ће у оба поља бити пропорционални фактори који из дебљине ламела, величине пресека соленоида и из густине векторских линија дају интензитет вектора бити различити. Оба ће поља бити слична.

Сасвим друкчије стоји ствар ако је медијум додуше изотропан али ако није хомоген. У томе случају мења се ε од тачке до тачке простора, па ће се услед тога у пољу вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{D}$ указати фундаменталне разлике. Поље вектора $\mathfrak{E}$ било је безизворно поље т.ј. његова дивергенција ишчезавала је у читавом пољу испуњеном диелектричним медијумом, а извори били су сконцентрисани само на површинама кондуктора. Само на тим површинама могле су векторске линије почети и завршити се. Но ако је ε варијабилно, онда исчезавање дивергенције вектора $\mathfrak{E}$ не повлачи за собом исчезавање дивергенције вектора $\mathfrak{D}$. Између оба вектора постоји релација

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}$$

па из ове једначине следује, ако је ε варијабилно,

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\varepsilon\mathfrak{E}) = \frac{1}{4\pi}\nabla(\varepsilon\mathfrak{E}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{4\pi}\varepsilon\operatorname{div}\mathfrak{E}$$

ако је

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$$

онда је

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}\operatorname{grad}\varepsilon$$

т.ј. дивергенција вектора $\mathfrak{D}$ не исчезава. Поље диелектричног померања је изворно поље, па га можемо представити помоћу соленоида и векторских линија. Поље вектора $\mathfrak{E}$ било је и безвртложно поље т.ј. његова ротација исчезавала је, па због тога то поље није могло имати затворених векторских линија. Но исчезавање ротације вектора $\mathfrak{E}$ не повлачи за собом исчезавање ротације вектора ϑ, јер је

$$\mathrm{rot}\,\vartheta = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,(\varepsilon\mathfrak{E}) = \frac{1}{4\pi}\,\varepsilon\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} - \frac{1}{4\pi}\,[\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon]$$

Ако је

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0$$

онда је

$$\mathrm{rot}\,\vartheta = -\frac{1}{4\pi}\,[\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon]$$

а то значи да је поље вектора ϑ вртложно поље, па може имати и затворених векторских линија. Ако се ε мења у пољу по таквом закону да његов градијент има на сваком месту тога поља исти правац као и вектор $\mathfrak{E}$, онда ће векторски производ $[\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon]$ исчезнути, па ће у том случају исчезнути и ротација диелектричног поља. То је н. пр. случај ако имамо поље вектора $\mathfrak{E}$ са једним изолованим извором а ако је ε на свакој кугли са центром у том извору константно, онда је $\mathrm{grad}\,\varepsilon$ радијалан јер стоји нормално на еквискаларној површини а и вектор $\mathfrak{E}$ је радијалан. У том случају исчезава дакле и ротација вектора ϑ.

Енергија електростатичног поља

Као што смо у предњим одељцима показали тумачи Maxwell-ова теорија електричне појаве у главном стањем и појавама у диелектрикуму. Електричним оптерећењима која се налазе на кондукторима изазива се у диелектрикуму једно специјално напето стање слично напетом стању једнога еластичног тела, па као што је у напетом еластичном телу нагомилана једна множина енергије која се може према потреби претворити у радњу, тако исто у електростатичном пољу нагомилана је једна множина енергије која се може употребити за обављање радње, било механичке или у ком другом облику н. пр. у облику топлоте, звука, светлости и т. д.

Као кондукторе карактеризовали смо она тела у којима се не може да одржи таково напето стање, па зато и није у унутрашњости кондуктора нагомилана енергија. Она има своје седиште у диелектрикуму који кондуктор опкољава. Тај диелектрикум може бити хомоген, може се континуирно мењати, у њему могу наступити и дисконтинуирне промене. То је н. пр. случај ако се у ваздуху који опкољава кондукторе налазе друга диелектрична тела.

Да карактеризујемо напето стање диелектрикума потребна су нам два вектора. Један од њих, вектор $\mathfrak{E}$, игра улогу силе која је изазвала напето стање, а други, вектор $\mathfrak{D}$, померање диелектрикума изазвано том силом. Између оба та два вектора постоји једначина

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}$$

где се ε зове диелектричном константом. Ова једначина постоји само за случај да је медиум изотропан, но ми ћемо се само на те случајеве и ограничити. Ако је медиум поврх тога хомоген, онда је ε права константа, иначе ако је медиум нехомоген, мења се она од тачке до тачке простора. У овом другом случају не ишчезава, као што смо то пре показали, дивергензија вектора $\mathfrak{D}$, па у том случају зовемо

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \rho_\omega$$

<u>просторном густином</u> правог електрицитета. Ако вектор $\mathfrak{D}$ постаје дисконтинуиран на површинама, онда његову површинску дивергензију т. ј. диференцију његових нормалних компонената на тој површини

$$\mathfrak{D}_{n_2} - \mathfrak{D}_{n_1} = \omega$$

називамо <u>површинском густином</u> правог електрицитета.

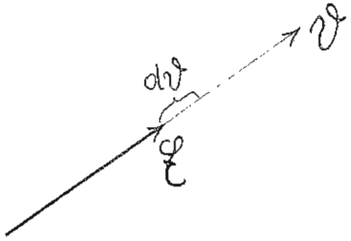
За вектор $\mathfrak{E}$ знамо да његова дивергензија ишчезава у читавом простору испуњеном диелектрикумом т.ј.

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$$

а има само површинску дивергензију на површинама кондуктора

$$\mathfrak{E}_{n_2} - \mathfrak{E}_{n_1} = 4\pi\rho$$

где ρ зовемо <u>површинском дивергензијом</u> слободног електрицитета.



Према основној представи изазива дакле вектор $\mathfrak{E}$ померање $\mathfrak{D}$. У изотропним медиумима са којима се бавимо имају оба два вектора исти правац. Када би вектор $\mathfrak{E}$ изазвао од једанпут померање $\mathfrak{D}$, онда би радња што ју тиме обавља била једнака

$(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D})$

Но вектор $\mathfrak{E}$ не може од једанпут достићи коначну своју вредност $\mathfrak{E}$, него мора проћи све вредности од нуле па до $\mathfrak{E}$, једном речју електрично поље изазива се постепено па макар време што је потребно било веома кратко. Зато ће радња што ју вектор $\mathfrak{E}$ померањем $\mathfrak{D}$ обавља бити једнака:

$$A=\int_0^{\mathfrak{E}}(\mathfrak{E}\cdot d\mathfrak{D})=\frac{\varepsilon}{4\pi}\int^{\mathfrak{E}}(\mathfrak{E}\cdot d\mathfrak{E})=\frac{\varepsilon}{4\pi}\int^{\mathcal{E}}\mathcal{E}\,d\mathcal{E}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{4\pi}\,\mathcal{E}^2=\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{0}}{4\pi}\,\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{E}=\frac{1}{2}\,\mathfrak{E}\,\frac{\varepsilon}{4\pi}\,{}^{0}\mathfrak{E}=\frac{1}{2}\,\mathfrak{E}\mathfrak{D}$$

Ова радња обавља се у сваком елементу диелектрикума и она је једнака оној енергији која се у том елементу нагомилава. Зато ће читава енергија $\mathcal{L}$ нагомилана у читавом електричном пољу бити једнака

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\int(\mathfrak{E}\mathfrak{D})\,dV$$

где dV означава елеменат запремине и где се интеграција има извести по читавом простору заузетом диелектрикумом. Означимо ли потенцијал посматраног поља са U_1, то је

$$\mathfrak{E}=-\nabla U_1$$

па је због тога

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\int(\mathfrak{D}\cdot\nabla U_1)\,dV$$

Како је

$$\operatorname{div}(U_1\mathfrak{D})=U_1\operatorname{div}\mathfrak{D}+(\mathfrak{D}\nabla U_1)$$

то је зато

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\int(U_1\operatorname{div}\mathfrak{D})\,dV-\frac{1}{2}\int\operatorname{div}(U_1\mathfrak{D})\,dV$$

Ако је медиум хомоген, онда је

$$\operatorname{div}\mathfrak{D}=0$$

па је због тога

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\int\operatorname{div}(U_1\mathfrak{D})\,dV$$

Како је по Gauß-овој теореми

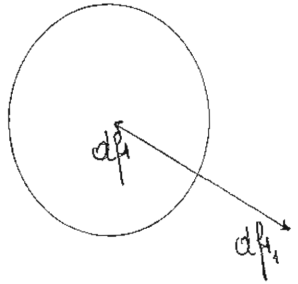
$$\int_V\operatorname{div}\mathfrak{Y}\,dV=\int_f\mathfrak{Y}\,df$$

то можемо поставити волумски интеграл претворити у површински, па је зато

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\int_f(U_1\mathfrak{D})\,df$$

где интеграл треба узети по читавој површини која опкољава посматрано поље испуњено диелектрикумом. Ако се то поље поље шири у бесконачност као што то претпостављамо, онда је површина F која опкољава диелектрикум површина кондуктора, јер та површина ограничава наше поље изнутра. Површине које га ограничава споља непостоји.

Ако се у пољу налази један једини кондуктор који има н. пр. облик кугле, онда ће се горњи интеграл узети преко површине F те кугле. При томе вектор df наперен је у унутрашњости те кугле, јер то је спољна страна посматраног електричног поља.



Уведемо ли место вектора df вектор df₁, који има противан правац и који је према томе наперен на спољну страну кугле, то је

$$df = -df_1$$

па предња једначина прелази у једначину

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\int_F U_1 \mathfrak{D}\, df_1$$

Нека сада посматрани кондуктор буде тако мален да потенцијал U_1 можемо сматрати константан на његовој површини а и у унутрашњости његовој, то можемо U_1 извадити пред знак интеграла, па имамо

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}U_1 \int \mathfrak{D}\, df_1 = \frac{1}{2}U_1 \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_F \mathfrak{E}\, df_1$$

Последњи интеграл представља нам истицање вектора $\mathfrak{E}$ из површине F а то је истицање, као што смо у теорији физикалних поља показали, једнако

$$4\pi e_1$$

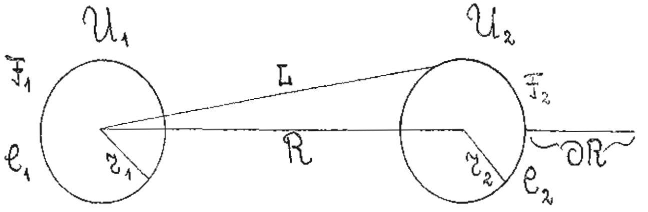
где e_1 означава електрично оптерећење које се налази на посматраном кондуктору. Зато је

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\varepsilon U_1 e_1$$

Ово је енергија нагомилана у електричном пољу у ком се налази један малени кондуктор са електричним оптерећењем e_1. U_1 је вредност потенцијала на оном месту поља на ком се налази тај (вектор) кондуктор.

Coulomb-ов закон

Узмимо сада да се у посматраном пољу налазе два малена кондуктора која имају облик кугала радиуса r_1 и r_2. Одстојање центара тих кугала нека буде R, које нека буде врло велико према величинама r_1 и r_2. Означимо ли вредност потенцијала у центру прве кугле са U_1, а у центру друге кугле са U_2, па ако је оптерећење прве кугле са e_1 а друге кугле са e_2, то је енергија нагомилана у посматраном електричном пољу једнака



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon(U_1e_1+U_2e_2)$$

У теорији физикалних поља смо показали да је потенцијал поља извора (ламеларног поља)

$$U_1 = \int\frac{\varrho\, df}{r}$$

где ϱ означава површинску густину, r одстојање посматране тачке за коју тражимо потенцијал од извора; интеграцију треба узети преко свих површина извора. Зато и у нашем случају потенцијал U_1 на месту где се налази прва кугла једнак је

$$U_1 = \int_{F_1}\frac{\varrho\, df}{r_1} + \int_{F_2}\frac{\varrho\, df}{L}$$

L означава одстојање центра прве кугле од произвољне тачке површине друге кугле. Но како је L у размери према величини r_1 и r_2 веома велико, то можемо место L да ставимо константну вредност R и да ову извадимо пред знак интеграла. Исто тако можемо и r_1 извадити пред знак интеграла, па добијамо

$$U_1 = \frac{1}{r_1}\int_{F_1}\varrho\, df + \frac{1}{R}\int_{F_2}\varrho\, df$$

Но како је

$$\int_{F_1} \varrho\, df = e_1$$

а

$$\int_{F_2} \varrho\, df = e_2$$

то је

$$U_1 = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{R}$$

На исти начин добијамо

$$U_2 = \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_1}{R}$$

Замислимо сада да се одстојање посматраних кугала повећало за величину ∂R. Услед тога промениће се и енергија $\mathcal{L}$ за величину $\partial\mathcal{L}$, па је та промена једнака

$$\partial\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(e_1\partial U_1 + e_2\partial U_2\right)$$

јер се оптерећење кугала није променило. Узмемо ли у обзир да се ни радиуси r_1 и r_2 померањем не мењају, то из пређашњих једначина следује да је

$$\partial U_1 = e_2\,\partial\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{e_2}{R^2}\partial R$$

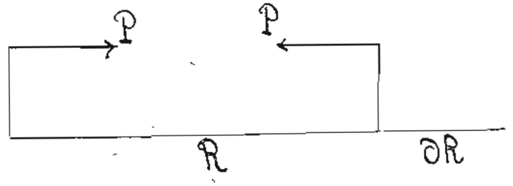
а исто тако

$$\partial U_2 = e_1\,\partial\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{e_1}{R^2}\partial R$$

Зато је

$$\partial\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{e_1e_2}{R^2} + \frac{e_1e_2}{R^2}\right)\partial R = -\varepsilon\frac{e_1e_2}{R^2}\partial R$$

Померањем кугала померила се дакле енергија нагомилана у пољу за горњу величину $\partial\mathcal{L}$. Означимо ли силу са којом се посматране кугле привлаче са $\mathcal{P}$, то та сила при померању ∂R обавља радњу



$$\partial A = -\mathcal{P}\partial R$$

Знак – долази отуда што сила и померање имају противан правац. Према основним законима Механике или према закону о одржању енергије једнака је промена радње ∂A промени енергије $\partial\mathcal{L}$ т.ј.

$$\partial A = \partial\mathcal{L}$$

а одатле следује

$$\mathcal{P} = \varepsilon\frac{e_1e_2}{R^2}$$

Ова једначина изражава Coulomb-ов закон који дакле следује директно из основне представе Maxwell-ове теорије.

Примедба: Често пута се води рачуна место о слободном електричном оптерећењу e о правим електричним оптерећењима e_ω. Док је слободно електрично оптерећење дефинисано једначином

$$\int_f \mathfrak{E}\, df = 4\pi e$$

дотле је право електрично оптерећење дефинисано једначином

$$\int_f \mathfrak{D}\, df = e_\omega$$

Но како је

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}$$

то је

$$e_\omega = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int \mathfrak{E}\, df = \varepsilon e$$

Право електрично оптерећење једнако је према томе слободном оптерећењу помноженом са диелектричном константом. Coulomb-ов закон можемо према томе писати и у облику

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e'_\omega e''_\omega}{R^2}$$

У овој једначини означују e'_ω и e''_ω права оптерећења посматраних кугала.

II Теорија магнетизма

Основне чињенице.

Већ у старом веку била је позната чињеница да неке руде нађене у близини Мало-Азијског града Магнезије имају способност да честице гвожђа привлаче и држе. Касније је под именом магнетизма обухваћен је читав комплекс тих појава. Научно испитивање тих појава почело је тек онда када се пронашло да комади челика који су били доведени у додир са природним магнетима примају и задржавају својство тих природних магнета.

Узмимо један челични штап који је на тај начин магнетизован па доведимо у гомилу гвоздених отпадака. Када га из те гомиле извадимо, онда се опажа да су се ти опиљци нагомилали на крајевима тога магнета. Изгледа дакле да су крајеви тога магнета седишта његове магнетске снаге. Узмемо ли два једнака на исти начин магнетизована челична штапа, па означимо ли крајеве њихове, које називамо <u>половима</u> магнета, са N_1 S_1 једног, N_2 S_2 другог магнета, то се опажају ове чињенице:

1° S_1 одбија S_2 са силом P
2° S_1 привлачи N_2 " " P
3° N_1 одбија N_2 " " P и
4° N_1 привлачи S_2 " " P.

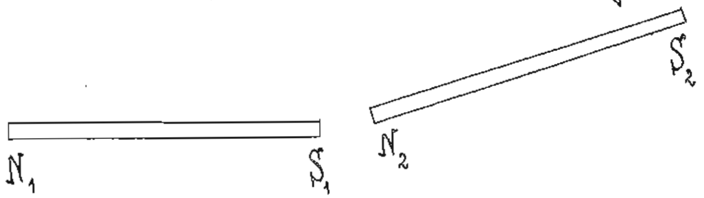
Из ових чињеница следује да имамо две разне врсте магнетизма које називамо <u>позитивним</u> и <u>негативним</u> или <u>северним</u> и <u>јужним</u> магнетизмом, па да се истоимене врсте одбијају а разноимене привлаче.

Рекли смо да изгледа да се седиште магнетних сила налази на крајевима магнетизованога штапа. Оба краја одржавају разноимене магнете. Покушамо ли да те две врсте магнетизма поделимо н. пр. на тај начин да штап преполовимо, то се увиђа да тај покушај не може успети па макар произвољно продужили комадање. Увек ће се у сваком комаду налазити један северни и један јужни пол који имају исту снагу. Зато је једна од основних чињеница магнетизма: да се у сваком магнету налази иста множина позитивног и негативног магнетизма и то не само у њему као целини него и у сваком његовом делу. Из експерименталне физике познато је да та чињеница не долази у колизију са појавом да се магнетизам указује само на крајевима штапа.

Магнетичне појаве показују несумњиво аналогију са појавама електрицитета, јер смо и овде имали две разне врсте електрицитета које смо растумачили или боље рећи представили помоћу два разна флуидума. На исти начин можемо замислити да се у сваком магнету налазе два хипотетска флуида. Сваки део тога магнета садржаваће исте множине једнога и другог флуида. Аналогија са електрицитетом намеће сама од себе питање да ли има у природи и магнетских кондуктора т.ј. таквих тела у којима се изазвани магнетизам не може да одржи него се шири. Искуство је доказало да таквих кондуктора нема и то је једна од фундаменталних разлика између електричних и магнетних појава.

Coulomb-ов закон.

Када смо упознали квалитативни закон да се магнетски полови привлаче или одбијају, указује се потреба да формулишемо квантитативни закон те појаве. При испитивању тога квантитативног закона указују се тешкоће које нису при појавама електрицитета указивале се. Тако се н. пр. сила којом се полови једнога те истога магнета привлаче не може одредити због тога што су ти полови круто везани један за други, а употребимо ли два разна магнета, онда се тиме компликује појава због тога што имамо сада четири пола. Свега тога код електризитета није било. Убрзо се међутим може констатовати факт да је привлачна сила двају магнетних полова опада рапидно са њиховим одстојањем. Узмемо ли према томе два дугачка магнетна штапа, па ставимо ли их у такав положај да су два пола веома блиска а два веома удаљена, то ће сила која дејствује између ова последња два бити незнатна према сили која дејствује између прва два, па ћемо ову последњу силу моћи одредити прилично тачно а тако исто и закон којим се магнетски полови привлаче узев у обзир и дејство других двају полова.



Означимо ли интензитете полова који се привлаче са m_1 и m_2, то добијамо закон који нам даје привлачну силу тих полова

$$P = f\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

где r означава одстојање полова а f једну константу. Овај је закон нашао на начин који смо прије описали Coulomb, па се тај закон и зове његовим именом. Константа f зависи од јединица којима меримо величине које фигуришу у горњој једначини. Узмемо ли по предлогу Gauss-овим константу

$$f = 1$$

и без димензија, па одаберемо ли два магнетна пола истога интензитета,

$$m_1 = m_2 = m$$

онда је

$$P = \frac{m^2}{r^2}$$

или

$$m = r\sqrt{P}$$

Из ове једначине можемо мерити димензије магнетског интензитета: Јединица магнетског интензитета је, према горњој једначини, она множина која на исту такву множину која се налази у одстојању једнога сантиметра изазива силу једнаку јединици т.ј. једном дину. Овај начин мерења магнетних оптерећења и интензитета зове се *магнетски начин* мерења (или *електромагнетски*)

Примедба: Coulomb-ов закон за електрицитет је према прећашњем

$$\mathfrak{P} = \varepsilon \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

За вакум је

$$\varepsilon = 1$$

па узмемо ли два једнака електрична оптерећења, то је

$$e = r\sqrt{\mathfrak{P}}$$

Јединица електричног оптерећења е је према томе она множина која на исту такву множину која се налази у одстојању 1cm дејствује силом која је једнака јединици (једном дину). Овај начин мерења електричних оптерећења зовемо *електростатским*

Ми смо у теорији електрицитета формулисали основну хипотезу да је седиште електричних феномена диелектрикум т.ј. простор који опкољава електрична оптерећења, па ту претпоставку можемо и код магнетизма да чинимо. *Магнетним оптерећењима* изазива се у околном медијуму једно напето стање које се тиме манифестује да се између магнетских оптерећења указују пондеромоторне силе. Медијум у коме је то стање изазвано називамо *магнетским пољем*. Унесемо ли у такво магнетско поље једно магнетно оптерећење m, то ће се на њему указати пондеромоторна сила $\mathfrak{K}$ која је једнака

$$\mathfrak{K} = m\,\mathfrak{H}$$

где је $\mathfrak{H}$ један вектор који не зависи од величине m коју у поље уносимо, а који се иначе мења од тачке до тачке поља.

Примедба: Ова једначина

важи у ствари само онда ако је оптерећење m које унашамо у магнетско поље (оптерећење пробног тела) тако малено да не мења посматрано магнетско поље и зато би егзактна дефиниција за вектор $\mathfrak{H}$ била

$$\mathfrak{H} = \lim_{m=0} \frac{\mathfrak{R}}{m}$$

Помоћу горњих једначина можемо експериментално испитати поље вектора $\mathfrak{H}$. Са теоријом тога поља ћемо се сада да позабавимо.

Вектор $\mathfrak{H}$ зове се магнетским интензитетом поља или магнетском силом а можемо га назвати такође и магнетским вектором.

Магнетско поље у етеру.

Један једини магнетски пол кад бисмо га могли остварити изазивао би једно радијално поље вектора $\mathfrak{R}$ и вектора $\mathfrak{H}$. Интензитет тих вектора опада са квадратом одстојања посматране тачке поља од магнетског пола. Зато је поље $\mathfrak{H}$ изазвано једним јединим магнетским полом Лапласово поље.

Имамо ли произвољан број магнетских полова концентрисаних у тачкама то поље вектора $\mathfrak{H}$ што га они изазивају настаје суперпозицијом Лапласових поља, па је зато резултујуће поље такође Лапласово. Из тога поља морамо само искључити полове оградивши их произвољно маленим куглама.

Један магнет није ништа друго него скуп магнетских полова; зато је поље што га тај магнет око себе изазива Лапласово поље, па због тога постоји у читавом простору који није заузет магнетом једначине

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$$

Из последње једначине следује такође

$$\int_L \mathfrak{H}\, dl = 0$$

а то значи да линијски интеграл вектора $\mathfrak{H}$ ишчезава дуж једне затворене линије. Због тога можемо вектор $\mathfrak{H}$ представити као градиент једног скалара V

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} V$$

а тај скалар називамо <u>магнетским скаларним потенцијалом</u>. Тај потенцијал израчунава се према општој теорији физикалних поља из једначине

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i}{r_i}$$

при чему ваља у збир узети све полове који изазивају поље. r_i означава одстојање пола од тачке поља за коју тражимо потенцијал.

Обавијемо ли око магнетских полова једну затворену површину F, то је истицање вектора $\mathfrak{H}$ из те површине једнако збиру свих полова који се налазе у тој површини помножено са 4π

$$\int_F \mathfrak{H}\, df = 4\pi \sum m_i$$

У деловима поља у којима се налазе полови које претпостављамо сада континуирно поразмештане не би ишчезла дивергенција вектора $\mathfrak{H}$, јер се сада налазимо у пољу извора, па бисмо имали

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 4\pi \rho'_m$$

где ρ'_m називамо <u>просторном густином</u> слободног магнетизма. Исто тако би на случај када би магнетни полови били континуирно поразмештани по површинама означили површинску дивергенцију вектора $\mathfrak{B}$ т.ј. диференцију његових нормалних компонената на тој површини

$$\mathfrak{B}_{n_2} - \mathfrak{B}_{n_1} = 4\pi\eta'$$

где η' означава површинску густину слободног магнетизма. Но узмемо ли у обзир да магнетски полови постоје увек по два и два са истим интензитетом но противним знаком, то у овом случају ишчезавају горње дивергенције, јер су у сваком па и најмањем делу магнета позитивни извори једнаки негативним. Густина слободног магнетизма не може се указати према томе у етеру, него само у другим медијумима или при додиру етера са другим медијумима.

Магнетско поље у другим медијумима.

Казали смо да се два магнетна пола m_1 и m_2 привлаче у етеру силом

$$\mathfrak{P} = \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

јер је у том случају пропорц. константа једнака јединици. Faraday је доказао да ако ова иста два магнетска пола унесемо у поље испуњено другим каквим медијумом н.пр. водом или живом, да ће онда и сила $\mathfrak{P}$ променити своју вредност па ће бити једнака

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{\mu}\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Константа μ зависи од медијума. Тако је н.пр. константа μ за следеће медиуме једнака:

бизмут	$\mu = 1 - 17{,}6 \times 10^{-5}$
жива	$\mu = 1 - 2{,}5 \times 10^{-5}$
вода	$\mu = 1 - 0{,}35 \times 10^{-5}$
етер	$\mu = 1$
ваздух	$\mu = 1 + 0{,}03 \times 10^{-5}$
кисеоник	$\mu = 1 + 0{,}15 \times 10^{-5}$
паладиум	$\mu = 1 + 69{,}1 \times 10^{-5}$
гвожђе никл кобалт	$\mu =$ веома велико и променљиво

Константу μ називамо *константом магнетизирања* или *магнетским пермеабилитетом*. Она је аналога диелектричној константи, али се од ње знатно разликује у овим тачкама: диелектрична константа свих познатих медиума већа је од јединице, а у случају етера једнака је јединици. Горња табела показује да у природи имамо медиума за које је константа μ мања од јединице. Ти медиуми зову се *диамагнетским*. Медиуми код којих је μ нешто веће од јединице зовемо *парамагнетским*; а медиуме код којих је μ веома велико и променљиво *феромагнетским*.

Као што смо у науци о електрицитету увели вектор потерања $\mathfrak{D}$ дефинисан једначином

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}$$

тако уводимо и сада *вектор магнетског потерања* $\mathfrak{B}$ дефинисан једначином

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

Аналогија би била потпунија кад бисмо вектор $\mathfrak{B}$ дефинисали једначином

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}$$

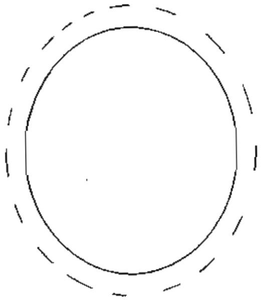
али се прва дефиниција већ одомаћила. Да бисмо значење вектора $\mathfrak{B}$ боље схватили рекапитулирајмо укратко значење вектора $\mathfrak{D}$. Налази ли се на једном електричном кондуктору нагомилана множина правог електрицитета e, то онда она изазива у пољу етера вектор $\mathfrak{E}$. Унесемо ли тај исти кондуктор са истим тим оптерећењем у простор испуњен другим диелектрикумом, то ће се променити вредност вектора $\mathfrak{E}$. Вектор $\mathfrak{D}$ којега је истицање кроз једну затворену површину дефинисано једначином

$$\int_F \mathfrak{D}\, df = e$$

не мења се јер то истицање не зависи од медиума. Па како су вектори $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ везани једначином

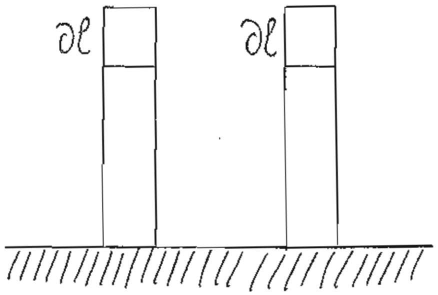
$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}$$

то ће се уношењем електричног оптерећења у медиум са диелектричном константом ε променити вектор $\mathfrak{E}$. Он ће постати ε пута мањи. Ту појаву можемо овако да представимо:



Оптеретимо ли кондуктор са електричном множином e, то се та множина не може одржати у кондуктору самоме, него се рашири по његовој површини сачињавајући један слој. Тај слој је дебљи чим је множина e већа. Тај слој изазива стискавање медиума који

То стискавање независно је од медиума и зависи само од множине електричног оптерећења, али векторска сила $\mathfrak{E}$ изазвана тим стискавањем зависи од медиума. То је исто тако као кад бисмо н. пр. два штапа, један бакарни а други гвоздени, исте дужине и истога пресека прекратили за исте дужине δl. Прекраћења су једнака али силе или боље рећи енергије нагомилане у штаповима су различите. Енергија нагомилана у гвозденом штапу биће већа него она нагомилана у бакарном. На исти начин једно те исто право електрично оптерећење e изазива у разним



медијума разне векторе $\mathfrak{E}$.

Исто је тако и са магнетским вектором $\mathfrak{B}$. И овде постоји једначина

$$\int_F \mathfrak{B}\, df = 4\pi \sum m_i$$

т.ј. истицање вектора $\mathfrak{B}$ из једне затворене површине пропорционално је магнетским оптерећењима која се налазе у тој површини, а независно од медијума који испуњава посматрано поље. Вектор $\mathfrak{H}$ зависан је од медијума, јер између њега и вектора $\mathfrak{B}$ постоји једначина

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

Дивергенцију вектора $\mathfrak{B}$ подељену са 4π називамо просторном густином правога магнетизма. Она је дефинисана једначином

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{B} = 4\pi \rho_m$$

Дивергенцију вектора $\mathfrak{H}$ подељену са 4π називамо просторном густином слободног магнетизма; она је дефинисана једначином

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{H} = 4\pi \rho'_m$$

Из горњих једначина следује

$$\mathrm{div}\, \mu \mathfrak{H} = \mu\, \mathrm{div}\, \mathfrak{H} = 4\pi \rho_m$$

или

$$\mu\, 4\pi \rho'_m = 4\pi \rho_m$$

а одатле

$$\rho_m = \mu \rho'_m$$

Извори правог магнетизма налазе се само у магнетима а и ту се у сваком па и најмањем делу његовом налазе позитивни и негативни извори у једнакој множини. Зато је истицање вектора $\mathfrak{B}$

$$\int_F \mathfrak{B}\, df = 4\pi \sum m_i = 0$$

јер у последњем збиру су позитивни чланови једнаки негативним. Како је према Gauss-овом обрасцу

$$\int_F \mathfrak{B}\, df = \int_V \mathrm{div}\, \mathfrak{B}\, dV$$

и како ова једначина вреди за сваки елеменат поља, то је у читавом пољу

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{B} = 0$$

или

$$\rho_m = 0$$

Густина правог магнетизма ишчезава увек. Но из тога не следује још да густина слободног магнетизма ишчезава. Из једначине

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

следује једначина

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0$$

Ако је медиум хомоген т.ј. ако је μ константно, онда га можемо извадити пред знак div па добијамо

$$\mu \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$$

а из ове једначине следује

$$\varrho'_m = 0$$

У хомогеном медиуму ишчезава према томе и густина слободног магнетизма.

Но ако медиум није хомоген т.ј. ако μ није константно, онда га не можемо извадити пред знак div. него је

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \mu \operatorname{div} \mathfrak{H} + \mathfrak{H} \operatorname{grad} \mu = 0$$

а одатле

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = -\frac{1}{\mu} \mathfrak{H} \operatorname{grad} \mu = 4\pi \varrho'_m$$

У овом случају не ишчезава густина слободног магнетизма, па је такво поље у коме се μ мења поље извора вектора $\mathfrak{H}$.

Додирују ли се два разна медиума, то ће додирне површине бити површине извора вектора $\mathfrak{H}$.

Све што смо до сада о магнетском вектору казали има јаке аналогије са електричним векторима. Но несмемо прећутати да горње једначине не важе за све случајеве. Изазовемо ли поље вектора $\mathfrak{H}$ изворе слободног магнетизма, на који начин се то дешава то ћемо касније видети, па пустимо ли да поље $\mathfrak{H}$ које је те изворе изазвало ишчезне, то би према постојећој једначини са нестајањем величине $\mathfrak{H}$ нестало и величине ϱ'_m. Код диамагнетских и парамагнетских супстанца то је случај, но код феромагнетских то није. Изазовемо ли у једном комаду гвожђа помоћу поља $\mathfrak{H}$ (које можемо извести електричном струјом) слободни магнетизам, па пустимо ли да поље $\mathfrak{H}$ ишчезне (т.ј. обуставимо ли струју), то неће сав магнетизам у гвожђу нестати, него ће се један део у њему одржати. Ту појаву зовемо <u>магнетском тврдоћом</u>. Ми ју у следећим извађањима нећемо узети у обзир, него ћемо једноставности ради претпоставити да су све супстанције које будемо посматрали магнетски апсолутно мекане т.ј. да се у њима не задржава пробуђени магнетизам.

Између електричних и магнетских величина које смо до сад упознали постоје ове аналогије: електричним величинама $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ и ε одговарају ове магнетске: $\mathfrak{H}$, $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}$, μ. Енергија електричног поља била је представљена изразом

$$\mathfrak{L}_e = \frac{1}{2}\int_V (\mathfrak{E}\mathfrak{D})\, dV$$

Метнемо ли у овај израз место електричних величина аналоге магнетске, то добијамо следећи израз за енергију магнетског поља

$$\mathfrak{L}_m = \frac{1}{2}\int_V \left(\mathfrak{H}\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\right) dV = \frac{1}{8\pi}\int_V (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\, dV = \frac{\mu}{8\pi}\int_V \mathfrak{H}^2\, dV$$

Исто је тако

$$\mathfrak{L}_e = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int_V \mathfrak{E}^2\, dV$$

где је

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}$$

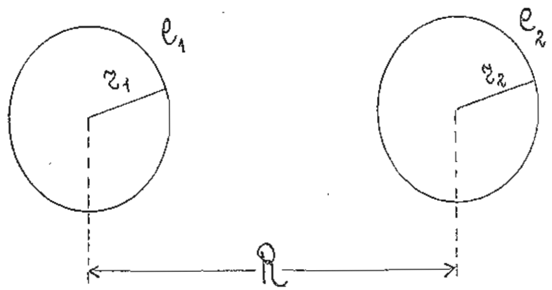
Ако је поље и магнетско и електрично, онда је читава енергија нагомилана у њему

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_e + \mathfrak{L}_m$$

III Електрична струја
и њено магнетско поље

Основне чињенице

Посматрајмо електростатско поље изазвано двема оптерећењима која се налазе на куглама радиуса r_1 и r_2. Оптерећење прве кугле нека буде e_1 а друге e_2. Радиуси r_1 и r_2 нека буду мали према дужини R. Онда је потенцијал поља на месту где се налази прва кугла једнак према претходњем



$$U_1 = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{R}$$

а потенцијал на месту где се налази друга кугла

$$U_2 = \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_1}{R}$$

Како је R велико према r_1 и r_2, то су последњи чланови горњих израза мали, па можемо једноставности ради ставити

$$U_2 = \frac{e_2}{r_2} \qquad U_1 = \frac{e_1}{r_1}$$

Потенцијална диференција једнака је

$$U_1 - U_2 = \frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2}$$

Унесемо ли сада у посматрано поље једно електрично оптерећење e које је тако мало да не разорава посматрано поље, онда се на том оптерећењу указује механичка (пондеромоторна) сила

$$\mathfrak{R} = e\,\mathfrak{E}$$

Помакнемо ли то оптерећење за дужину dl, онда смо тиме обавили механичку радњу

$$\mathfrak{R}\,dl = e\,\mathfrak{E}\,dl$$

Доведемо ли то оптерећење из положаја у ком се налази кугла r_1 у положај у ком се налази кугла r_2, то смо тиме обавили механичку радњу

$$\int_1^2 e\,\mathfrak{E}\,dl = e\int_1^2 \mathfrak{E}\,dl = -e(U_2 - U_1) = e(U_1 - U_2)$$

Замислимо сада да смо оба кондуктора спојили са металном жицом, којој можемо дати повољан положај и облик, па испитајмо какове ће се промене (феномени) сада указати. Док оба кондуктора нису била спојена жицом налазиле су се електричне множине које су по њима биле распоређене у равнотежи. Површине кондуктора представљале су еквипотенцијалне површине посматраног електричног поља. Сада, када су оба кондуктора спојена, сачињавају они један једини кондуктор, па би потенцијал на читавом том комбинованом кондуктору морао бити константан, а то није случај. Векторске линије вектора $\mathfrak{E}$ стајале су раније нормално на површинама кондуктора, а то није сада случај, јер можемо жицу тако положити да пресеца те векторске линије под косим углом. Равнотежа је према томе поремећена, те ће због тога између кондуктора наступити кроз жицу струјање електрицитета које ће тако дуго трајати док се не успостави стање равнотеже. Ми смо у електростатици питали за услове те равнотеже и обратили нашу пажњу стању у којем је равнотежа постојала, а сада у електродинамици имамо да обратимо пажњу ономе процесу који се дешава између оба стања равнотеже т.ј. од момента кад смо кондукторе спојили жицом па до момента у којем је опет наступило стање равнотеже. Да ће се тај процес састојати у померању електричних множина можемо најлакше овако увидети: Замислимо да су оба кондуктора истога радиуса и да се на њима налазе иста оптерећења но противнога знака. Док оба кондуктора нису спојена стање равнотеже није поремећено; но спојимо ли их, то они сачињавају један једини кондуктор а збир електричне множине која је сада по том кондуктору раширена једнак је нули, јер су оптерећења једнака и противнога знака. Зато ће наступити стање равнотеже онда када се обе електричне множине пониште т.ј. када не буде постојало више електростатично поље. Да то стање наступи морају се кроз жицу која кондукторе спаја извршавати померања електричних множина. Тај процес померања називамо *електричном струјом*, па ћемо сада да испитивамо феномене који прате тај процес.

Када се у жици појави електрична струја, онда се указују ови феномени: жица се угреје, а на магнетским оптерећењима која би донели у близини жице указују се пондеромоторне силе што значи да електрична струја изазива у својој околини једно магнетско поље. Наш је следећи задатак да законе који регулишу те феномене и који су експерименталним путем нађени математски формулишемо, да формулишемо према томе однос између множине електрицитета који протече кроз жицу и топлоте која се при томе ствара и да испитамо особине магнетског поља изазваног електричном струјом. Но пре него што томе приступимо морамо да се упознамо са два нова појма: са појмом јачине струје и појмом густине струје. Место јачине струје можемо употребити и интензитет струје.

Под *јачином* или *интензитетом струје* разумемо ону множину електрицитета која у јединици времена протече кроз жицу. Она је дефинисана једначином

$$J = \frac{de}{dt}$$

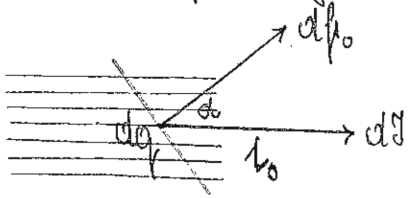
Под *густином струје* разумемо ону множину електрицитета која у јединици времена протече кроз јединицу нормалног пресека жице. Ако је површина тога пресека q и ако претпоставимо да је електрична множина која кроз жицу протече по читавом пресеку жице једнако размештена, онда је густина струје i једнака

$$i = \frac{J}{q}$$

Ако струја није једнако поразмештана по пресеку, онда је густина струје на једном месту пресека дефинисана једначином

$$i = \frac{dJ}{dq}$$

То је случај ако је пресек нормалан на правац у коме струја тече. Тај правац у коме струја тече т.ј. у коме се врше електрична померања нормалан је на еквипотенцијалну површину посматраног места, јер се у еквипотенцијалној површини не врше електрична померања. Ако пресек dq није нормалан на правац електричних померања него ако је нормала тога пресека представљена једним вектором df_0 који затвара са правцем електричних померања представљеним јединичним вектором i_0 угао α, онда протече у јединици времена кроз пресек dq електрична множина



$$dJ = (i\, dq) \cos \alpha$$

Но како је

$$i_0\, df_0 = \cos \alpha$$

то је

$$dJ = i\, i_0\, dq\, f_0$$

Израз

$$i\, i_0 = i$$

представља нам један вектор који има правац електричних померања и којега је интензитет једнак густини струје, па зато тај вектор i називамо *вектором густине струје*. Продукат

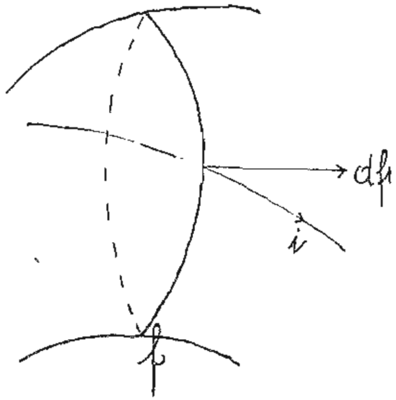
$$f_0\, dq = df$$

представља нам вектор нормалан на посматрани пресек са којега је интензитет једнак површини тога пресека, представља дакле површину тога пресека представљену векторијелно. Зато је

$$dJ = i\, df$$

Ако кондуктер кроз који се врше електрична померања нема облик жице него је коначан у свима димензијама, па ако у том кондуктору замислимо произвољну површину f, онда кроз један елеменат df те површине протече у јединици времена множина електрицитета

$$dJ = i\,df$$



где i означава вектор густине струје на посматраном елементу. Кроз читаву површину f протиче у јединици времена множина електрицитета

$$J = \int_f i\,df$$

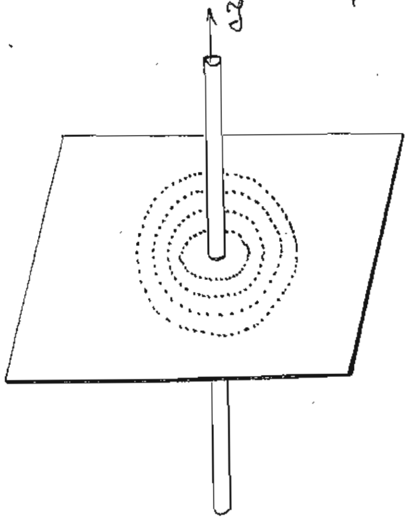
Електричне струје које се добијају испражњавањем електричних кондуктора врло су кратког трајања (не трају обично ни један хиљадити део секунде) па зато нису згодне за испитивање својстава електричне струје. Но постоје апарати који одржавају између својих полова без престанка једну сталну потенцијалну диференцију тако да када те полове спојимо са жицом, кроз ову тече без престанка електрична струја истог интензитета. Такви апарати су н. пр. галвански елементи који су нам познати из експерименталне физике. На који начин се у тим елементима ствара константна потенцијална диференција то се може испитати тек улажењем у молекуларну конституцију тих елемената, а то не спада у обим Maxwell-ове теорије. Ми даље претпостављамо да такве потенцијалне диференције хемичким, термичким или с другим процесом постоје, обраћамо нашу пажњу само електричној струји у жици а не ономе месту на коме се она ствара. У осталом ми ћемо ускоро упознати методе како се у једноме затвореном колу ствара електрична струја без да је у то коло метута апарат за стварање потенцијалне диференције.

Магнетско поље електричне струје

Електростатична или магнетостатично стање могу свако за себе да постоје, па зато електростатично поље не мора бити магнетно поље, а магнетостатичко поље не мора бити електрично поље. Но свака промена електричног стања изазива или праћена је појавама магнетским, свака промена магнетног стања праћена је електричним појавама.

Промена електричног стања може настати померањем електричних оптерећења или мењањем њиховог интензитета или обема променама комбинованим заједно. Електрична струја није ништа друго него померање електричних оптерећења па је зато праћена магнетским феноменима. Исто тако и магнетске промене могу настати мењањем интензитета или померањем њиховим или обема променама заједно. Формулисање закона који регулишу те узајамне односе је наш следећи задатак, па ћемо пре свега да испитамо магнетно поље изазвано електричном струјом.

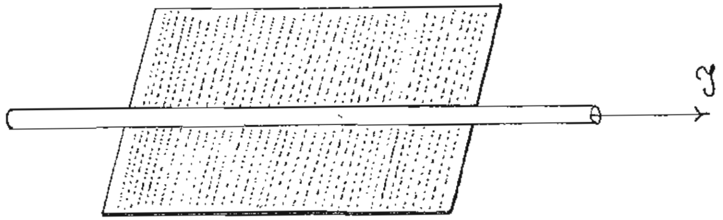
Испитујмо пре свега магнетно поље изазвано линеарном правом струјом интензитета I.



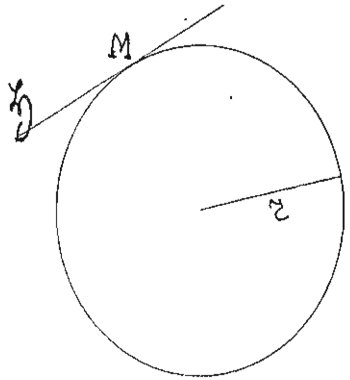
У то име промолимо праву металну жицу кроз хоризонтални папир тако да струја тече вертикално у правцу доле према горе. Пре него што пустимо кроз ту жицу електричну струју, поспимо папир са ситним опиљцима гвожђа. Пустимо ли струју да тече, то ће се ти опиљци сабрати у облику концентричних кругова по папиру а заједнички центар тих кругова биће продорна тачка у којој жица пролази кроз папир. Опиљци гвожђа сложили су се у векторске линије магнетног поља, па нам дају материјалну слику тих векторских линија. Те векторске линије су према експерименту кругови, но ми морамо још испитати да ли магнетски вектор нема компонената у правцу струје т.ј. нормално на равнину папира, јер се те компоненте при овом експерименту нису могле указати. То ћемо на тај начин испитати кад положимо жицу хоризонтално преко папира, па пустимо да кроз њу тече електрична струја. Онда ће се опиљци гвожђа наслагати у правцима нормалним на правац струје. Из тога следује да магнетски вектор $\mathfrak{H}$ нема нигде компонената паралелних са правцем струје, па су због тога векторске линије вектора $\mathfrak{H}$ концентрични кругови којих је равнина нормална на правац струје, којих центар лежи у жици. Из тога следује пре свега да су све векторске линије вектора $\mathfrak{H}$ затворене линије, па је зато поље вектора $\mathfrak{H}$ поље соленоидално или поље без извора. Зато је

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$$

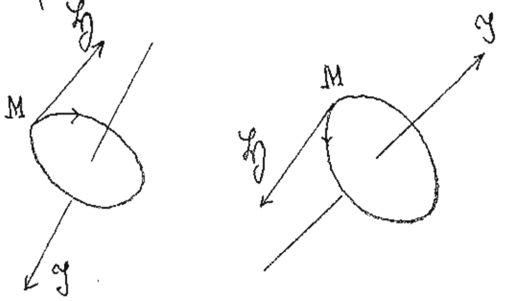
у читавом пољу које окружава електричну струју.



Да испитамо ротацију вектора $\mathfrak{H}$, јер та нам је за карактеристику поља потребна. Питаћемо за механичку радњу која се обавља ако јединицу магнетског оптерећења померимо дуж једне векторске линије. Нацртани круг нека нам представља једну векторску линију радиуса r. Електрична струја нека тече у правцу пред таблом. Вектор $\mathfrak{H}$ у произвољној тачки M те векторске линије тангира ту векторску линију. Према томе је правац вектора $\mathfrak{H}$ познат кад бисмо знали на коју страну тангенте у тачки M је наперен тај вектор. Правац тога вектора одређен је познатим <u>Ampère-овим правилом</u>: Замислимо ли човека који плива галванском струјом и који је окренут према тачки M на којој се налази магнетско оптерећење, то ће се на том оптерећењу указати таква пондеромоторна сила која ће настојати да га помери према левој страни посматрача.

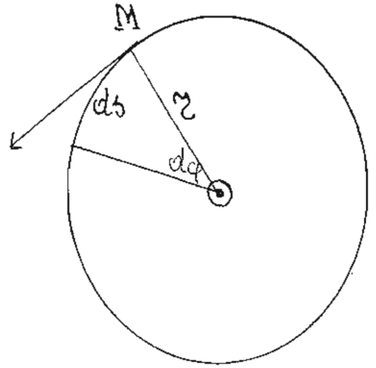


Како смо претпоставили да се у тачки M налази јединица позитивног оптерећења то ће према том правилу вектор $\mathfrak{H}$ имати правац као што је у слици означено. Ми можемо Ampère-ово правило заменити са овим правилом: Вектор $\mathfrak{H}$ наперен је тако да посматрачу са стране према којој тече струја заокреће у позитивном смислу.



Што се тиче интензитета H вектора $\mathfrak{H}$ то је очито да ће тај интензитет бити за једнако r константан т.ј. једнак дуж читаве векторске линије и једнак на свима векторским линијама које имају исти полупречник r.

У овом случају струја тече према гледаоцу; то ћемо тако означити да на месту где струја нормално пробија раван слике уцртамо мали круг са тачком у средини. Кад би струја текла у противном правцу т.ј. за сликом



онда бисмо уцртали мали круг са крстом: ⊕. Та конвенција потиче одатле што замишљамо место струје уметнуту стрелу, па у првом случају када струја тече према гледаоцу видимо њен врх, а у другом случају њен разгранати крај. Сем тога је јасно да ће интензитет вектора H зависити од интензитета струје ~~H~~ I, јер кад I ишчезне онда нема ни вектора H. Експерименталним путем одређено је да је интензитет вектора H представљен следећом једначином

$$H = \frac{2}{c} \cdot \frac{I}{r}$$

где c означава једну универзалну константу. Интензитет H вектора H директно је пропорционалан интензитету струје а инверзно одстојању посматране тачке.

Показали смо да дивергенција вектора H ишчезава. Да испитамо ротацију тога вектора питајмо колика се радња обавља ако позитивно магнетско оптерећење којега је квантитет раван јединици померимо дуж једне векторске линије. Померимо ли то оптерећење за елеменат пута ds, то је елеменат радње једнак

$$dA = H\,ds$$

јер на јединично оптерећење дејствује механичка сила интензитета H а у овоме случају имају и сила и померање исти правац. Зато је њихов скаларни продукт једнак продукту њихових интензитета.

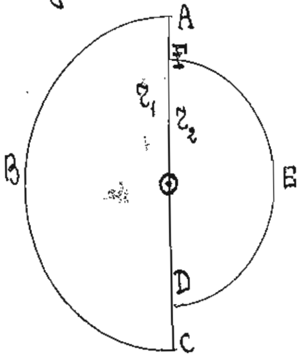
Даље је

$$dA = H r d\varphi = \frac{2}{c} J d\varphi$$

Радња која се обавља ако се оптерећење помери једанпут унаоколо дуж читаве векторске линије једнака је

$$A = \frac{2}{c} J \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{c} J$$

Ово је радња која се обавља ако се магнетско оптерећење помери унаоколо дуж произвољне векторске линије, јер у горњем изразу не долази више радијус r. Та радња је дакле независна од радијуса r. Но не само то. Ми ћемо показати да радња A има увек исту вредност ако би магнетско оптерећење померили дуж произвољне затворене линије, која обухвата струју, једанпут унаоколо.



Узмимо прво једноставности ради овај случај: обиђимо магнетским оптерећењем по путањи ABCDEFA, па питајмо за вредност линијског интеграла

$$\int_L H dl = A$$

која је једнака механичкој радњи која се при том померању обавља. На путу ABC је радња

$$\frac{2\pi}{c} J$$

на путу CD радња је једнака нули; на путу DEF

$$\frac{2\pi}{c} J$$

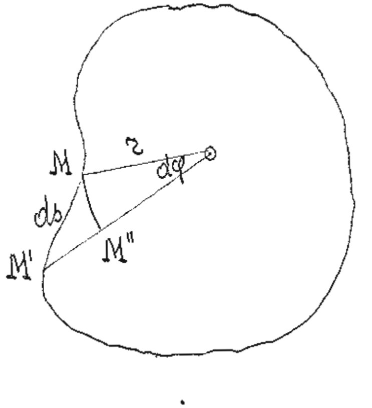
а на путу AF једнака нули. Зато је

$$A = \frac{4\pi}{c} J$$

Ако имамо произвољну равну криву која лежи у равни нормалној на струју, онда можемо сваки елеменат пута

$$MM' = ds$$

раставити у две компоненте MM'' и M''M'. Радња коју обављамо померајући оптерећење путем MM' једнака је радњи као кад бисмо ишли путем MM''M', јер радња зависи само од крајњих та-



чака. Пут ММ'' нека буде нормалан на радијусу r, па је радња дуж тога пута једнака

$$dA = \frac{2}{c} I \, d\varphi$$

Радња на путу M''M' једнака је нули. Зато је радња на путу ММ' представљена изразом

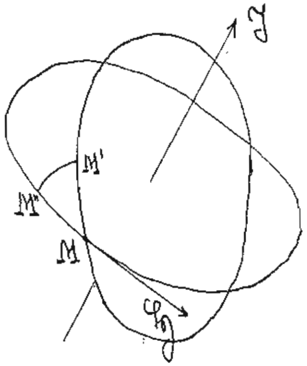
$$dA = \frac{2}{c} I \, d\varphi$$

зависи дакле само од угла $d\varphi$ под којим се вида елеменат пута ММ'. Радња на читавој контури затворене криве једнака је

$$A = \frac{2}{c} I \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{c} I$$

Ако крива дуж које узимамо линијски интеграл не лежи у равнини нормалној на струју, онда је опет линијски интеграл једнак

$$\frac{4\pi}{c} I$$



Јер, померамо ли магнетско оптерећење дуж елемента ММ' који стоји косо према правцу струје I, то то померање можемо раставити у две компоненте: ММ'' која лежи у равни нормалној на правац струје, па је на томелементу радња једнака

$$\frac{2}{c} I \, d\varphi$$

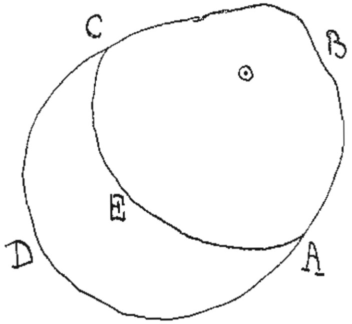
и у померање M''M'; на томе је елементу радња једнака нули јер вектор $\mathfrak{H}$ стоји нормално на правац струје I, па зато је нормалан на померање M''M' које је паралелно правцу струје. Зато је за сваку затворену линију која обилази око струје вредност линијског интеграла једнака

$$\int_L \mathfrak{H} \, dl = \frac{4\pi}{c} I \qquad 1.)$$

Обиђемо ли путем ABCDA око струје то је линијски интеграл једнак

$$\int_{A}^{A} \mathfrak{H} \, dl = \frac{4\pi}{c} I$$

Обиђемо ли путем ABCEA то линијски интеграл има исту вредност



$$ {}^{e}_{b}\!\int_{A}^{A} \mathfrak{H}\, dl = \frac{4\pi}{c} J $$

Одбијемо ли ова два линијска интеграла један од другога, то добијамо линијски интеграл дуж линије AECDA, па је зато

$$ {}^{D}_{e}\!\int_{A}^{A} \mathfrak{H}\, dl = 0 $$

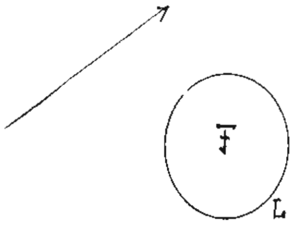
Линијски интеграл је дуж сваке затворене линије која не обухвата струју једнак нули. За линије изван електричне струје постоји дакле

$$ \int_{L} \mathfrak{H}\, dl = 0 $$

или према Stokes-овом правилу

$$ \int_{L} \mathfrak{H}\, dl = \int_{F} \mathrm{rot}\, \mathfrak{H}\, df = 0 $$

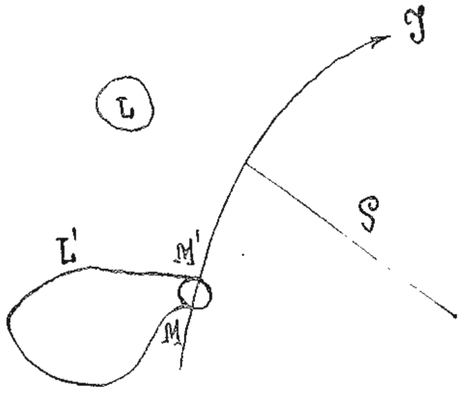
где L означава контуру затворене путање а F површину која је њоме обухваћена. Како горња једначина мора важити за свако F које се налази изван струје, то изван струје постоји једначина



$$ \mathrm{rot}\, \mathfrak{H} = 0 $$

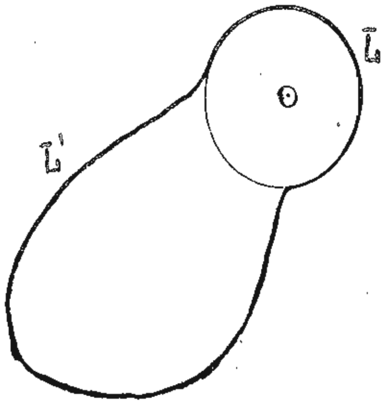
На свакој тачки поља која се налази изван кондуктора ишчезава ротација вектора $\mathfrak{H}$.

Ми смо били претпоставили да је посматрани део струје прав или боље рећи да је радијус њене кривине веома велики. Потпуно права не може струја због тога бити што мора бити затворена. Шта ће бити ако радијус струје ρ није велики? Онда га можемо раставити у праве елементе. Сваки такав елеменат изазива векторско поље $\mathfrak{H}$ које има ту особину да његов линијски интеграл за сваку затворену линију L изван струје ишчезава т.ј. ишчезава и ротација вектора $\mathfrak{H}$. Поља вектора $\mathfrak{H}$ изазвана свима тим правим елементима струје суперпонирају се па ће опет ротација резултујућег поља изван кондуктора ишчезнути,



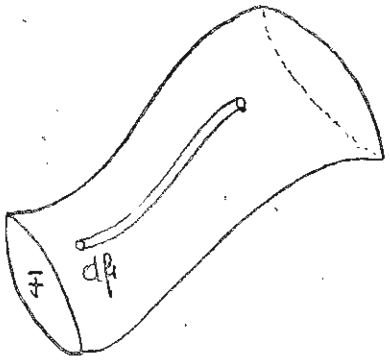
а то значи да ће и у резултујућем пољу линијски интеграл дуж линије L изван кондуктора ишчезнути. Уочимо сада један елеменат MM' струје, па обавимо око њега једну бесконачно малу линију L која је тако мала, да је за њу елеменат MM' прав. За ту линију важиће једначина 1). Надовежимо на ту линију линију L' која лежи изван кондуктора; то је линијски интеграл дуж те линије L' једнак нули, па ће зато линијски интеграл дуж линије извучене дебље бити опет једнак

$$\frac{4\pi}{c} J$$



Зато важи једначина 1.) и за случај ако струја није потпуно права, јер је линија L' једна произвољна линија.

До сада смо претпоставили да је кондуктор линеаран т.ј. једна бескрајно танка жица. Узмимо сада да кондуктор има коначне димензије. Одаберемо ли у њему једну бескрајно малену површину df, па повучемо ли кроз контуру те површине векторске линије вектора i, то ћемо добити



једно <u>влакно струје</u> које можемо сматрати за линеарно. Сва та влакна изазивају поља вектора $\mathfrak{h}$ која се суперпонирају, па ће сада такође важити једначина 1), али ће у овом случају J бити, према предашњем, једнако

$$J = \int_f i\, df$$

df значи уочени пресек кондуктора. Зато добија једначина 1) овај облик

$$\int_L \mathfrak{h}\, dl = \frac{4\pi}{c} \int_f i\, df$$

Применимо ли на леву страну ове

једначине Stokes-ово правило

$$\int_F \operatorname{rot} \mathfrak{H}\, df = \frac{4\pi}{c} \int_F i\, df$$

Како ова једначина важи за сваку површину F која обухвата макар један део кондуктора, то из ње следује

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} i \qquad 2.)$$

Ово је <u>прва главна једначина Maxwell-ова</u>. Ми ју можемо написати и у облику обичне анализе. Означимо ли ортогоналне компоненте вектора $\mathfrak{H}$ са H_x, H_y и H_z, ортогоналне компоненте вектора i са i_x, i_y и i_z то је

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

Субдетерминанте првог реда су компоненте вектора rot $\mathfrak{H}$, а оне морају бити једнаке компонентама вектора i помножене са $\frac{4\pi}{c}$, па добијамо ове једначине:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} i_x$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} i_y \qquad 2^*.)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} i_z$$

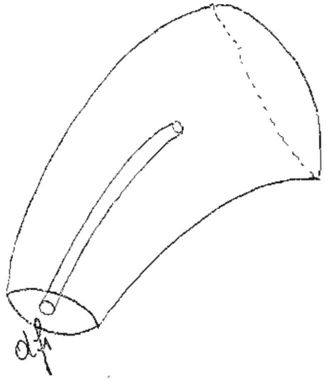
Из прве главне једначине Maxwell-ове следује

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} i = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$$

одакле

$$\operatorname{div} i = 0 \qquad 3.)$$

– Поље вектора струје i је соленоидално поље. Ако према томе у кондуктору коначне димензије одаберемо један пресек, па кроз контуру тога пресека положимо векторске линије вектора i, то добијамо један соленоид кроз који је протицање



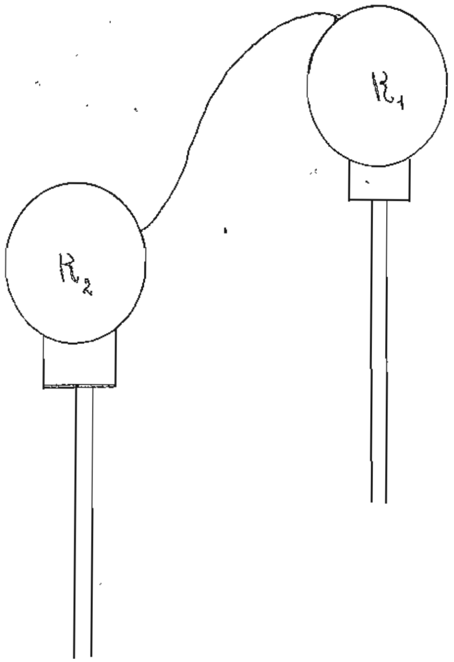
$$i\, df$$

на свима његовим пресецима исто. Електричне множине е протичу дакле исто тако као инкомпресибилна течност.

Из једначине 3.) следује такође да су векторске линије вектора $\mathfrak{h}$ затворене линије. Зато су све електричне струје затворена кола. Да је то случај код струја изазваних галванским елементима то смо у експерименталној физици упознали. Онде смо видели да електрична струја не тече само кроз жицу него и кроз елеменат између његових полова тако да је коло струје затворено. Код струја које се изазивају електричним машинама помоћу индукције такође су све струје затворена кола. Док у овом случају о коме ћемо сада говорити изгледа да струја није затворена.

Спојимо ли два изолована кондуктора са жицом, то ће кроз ту цу настати померање електрич- оптерећења т.ј. протећи ће е- трична струја, па изгледа у овом случају да она није затворена. Показаћемо касније да је ова контрадикција само привидна, па због тога ћемо имати на уму само струје код којих се сумње, да нису затворене, не указују.

3.



Поље магнетног вектора $\mathfrak{h}$ је безизворно вртложно поље, јер смо показали да је

$$\operatorname{div}\mathfrak{h}=0$$

Ротација вектора $\mathfrak{h}$ дата је једначином 2.) Па, ако у пољу имамо само једну линеарну струју, онда поље вектора $\mathfrak{h}$ има само један вртложни конац. Ако је кондуктор коначних димензија у сва три правца, онда вртложни конци испуњавају читав простор заузет тим кондуктором. Са теоријом безизворних вртложних поља упознали смо се детаљно у општој теорији физикалних поља. Резултате те теорије ћемо укратко поновити. Онде смо показали да ако је $\mathfrak{z}$ један соленоидалан вектор т.ј.

$$\operatorname{div} \mathfrak{z} = 0$$

да су онда са њим у вези два друга векторска поља: поље његовог ротора

$$\mathfrak{w} = \operatorname{rot} \mathfrak{z}$$

и поље његовог векторског потенцијала којега је он сам ротор

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mathfrak{z}$$

Векторски потенцијал $\mathfrak{A}$ такође је соленоидалан вектор т.ј.

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$$

Показали смо да се векторски потенцијал из поља вектора $\mathfrak{z}$ израчунава из једначине

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{z}\, dv}{r}$$

У нашем случају игра улогу вектора $\mathfrak{z}$ вектор $\mathfrak{h}$; улогу вектора $\mathfrak{w}$ т.ј. његовог ротора вектор $\frac{4\pi}{c} i$; и сада бисмо још увели векторски потенцијал $\mathfrak{A}$ дефинисан горњом једначином. По примеру Maxwell-овом увађамо место вектора $\mathfrak{A}$ вектор $\mathfrak{B}$ који је везан са вектором $\mathfrak{H}$ овом једначином

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

где μ означава пермеабилитет медијума. За етар, а без велике погрешке и за ваздух, μ је једнако 1, па у том случају су $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{B}$ идентички. Једначине што смо их извели у теорији соленоидалних поља могу се према томе директно употребити на теорију поља магнетног вектора $\mathfrak{h}$, ако у тим једначинама проведемо следеће супституције: место $\mathfrak{H}$ пишемо $\frac{1}{\mu}\mathfrak{B}$, место $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{h}$, место $\mathfrak{w}$ пишемо $\frac{4\pi}{c} i$. Том супституцијом добијамо једначину за магнетни потенцијал:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mu}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\frac{4\pi}{c}i\,dV}{r}$$

или

$$\mathfrak{A}=\frac{\mu}{c}\int\frac{i\,dV}{r}$$

Ово је једначина за магнетски потенцијал ако кондуктор струје има коначан облик у све три димензије, зато се интеграл има извести по читавом простору заузетом кондуктором струје. Ако нам је дакле поље вектора струје i познато, онда можемо помоћу ове једначине израчунати вектор $\mathfrak{A}$, а из једначине

$$\mathfrak{h}=\text{rot}\,\mathfrak{U}=\text{rot}\,\frac{\mathfrak{A}}{\mu}$$

следује директно поље магнетског вектора $\mathfrak{h}$. Поље струје и није нам потребно директно одређивати ако је кондуктор коначан у све три димензије. И одређивањем поља i и поља $\mathfrak{h}$ наилазимо у том случају на исте оне тешкоће које смо имали у електростатици при одређивању електричног вектора $\mathfrak{E}$ и распоред електричних оптерећења e на кондукторима коначног облика. Па као што смо онде могли поље вектора $\mathfrak{E}$ да одредимо без тешкоће у случају у коме су електрична оптерећења e била сконцентрисана у тачкама, тако можемо овде поље вектора $\mathfrak{h}$ да одредимо у случају да је кондуктор линеаран, па у том случају представља он један вртложни конац који је аналог једном извору потенцијалног поља. Овај случај да је кондуктор линеаран појављује се у пракси скоро увек и зато ћемо се са њиме детаљније да позабавимо.

У општој теорији поља упознали смо се тачно са теоријом безизворног вртложног поља које има само један једини вртложни конац, па зато можемо те резултате овде директно да применимо. У једначинама те теорије треба да изведемо само супституцију коју смо напред поменули. Поставимо задатак да израчунамо поље магнетног вектора $\mathfrak{H}$, значи да из поља $\mathfrak{m}$ имамо да изведемо поље $\mathfrak{H}$, односно поље $\mathfrak{A}$. У општој теорији извели смо све једначине: означимо ли

$$p = \mathfrak{m}\, dl$$

то се онда израчунава векторски потенцијал U из једначине

$$U = \frac{1}{4\pi} p \int_0 \frac{dl}{r}$$

где dl означава елеменат вртложног конца и где се интеграл има израчунати дуж читавог затвореног вртложног конца. Вектор $\mathfrak{H}$ израчунава се из једначине

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi} p \int_0 \frac{1}{r^3} [dl\, r] = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{m}\, dl \int_0 \frac{1}{r^3} [dl\, r]$$

Проведемо ли нашу супституцију то добијамо за $\mathfrak{m}\, dl$ израз

$$\mathfrak{m}\, dl = \frac{4\pi}{c} i\, dl$$

а како је

$$i\, dl = J$$

то је

$$\mathfrak{m}\, dl = \frac{4\pi}{c} J$$

dl значи сада елеменат струје, па добијамо за магнетски потенцијал $\mathfrak{A}$ ову једначину

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mu} = \frac{1}{c} J \int_0 \frac{dl}{r}$$

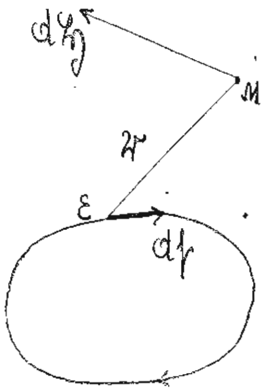
или

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} J \int_0 \frac{dl}{r} \qquad 4.)$$

Исто тако добијамо супституцијом у једначини за $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{H} = \frac{J}{c} \int_0 \frac{1}{r^3} [dl\, r] \qquad 5.)$$

Ова једначина даје нам поље вектора $\mathfrak{H}$ ако нам је дата електрична струја т.ј. њен облик и њен интензитет. Уочимо једну такову електричну струју. Онда њен произвољни елеменат dl изазива у произвољној тачки M поља вектор



$$d\mathfrak{H} = \frac{J}{c}\frac{1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}] \qquad 6.)$$

Ова једначина изражава Biot-Savard-ов закон. Према тој једначини је магнетни вектор што га елеменат $d\mathfrak{s}$ у тачки M изазива или механичка сила која би се на јединици позитивног оптерећења у тачки M указала, је један вектор који стоји нормално на равнину која иде кроз векторе $d\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{r}$, који је наперен на ону страну те равнине са које посматрано следује померање из $[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}]$ у позитивном смислу и којега је интензитет

$$dH = \frac{J}{c}\frac{1}{r^3}ds\cdot r\cdot \sin(ds,r)$$

Вектор $d\mathfrak{H}$ је тиме потпуно одређен.

Сваки елеменат струје изазива у тачки M један такав вектор, а њихов векторски збир даје вектор $\mathfrak{H}$ у тачки M. Правац вектора $\mathfrak{H}$ одређује се и Ampère-овим правилом: замислимо ли човека да плива електричном струјом, да гледа тачку M, онда је правац вектора $d\mathfrak{H}$ наперен на леву страну његову.

Biot-Savard-ов закон представљен векторском једначином 6.) можемо изразити и са три скаларне једначине. Означимо ли јединичне векторе у правцу $d\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{r}$ са $d\mathfrak{s}_0$ и $\mathfrak{r}_0$, то је

$$d\mathfrak{s} = ds\,d\mathfrak{s}_0$$
$$\mathfrak{r} = r\cdot\mathfrak{r}_0$$

па једначина 6) добија облик

$$d\mathfrak{H} = \frac{J}{c}\frac{ds}{r^2}[d\mathfrak{s}_0\,\mathfrak{r}_0] \qquad 6')$$

Компоненте вектора $d\mathfrak{H}$ означимо са dH_x, dH_y, dH_z, а компоненте јединичних вектора $d\mathfrak{s}_0$ и $\mathfrak{r}_0$ представљене су са: $\cos(x,ds)$, $\cos(y,ds)$, $\cos(z,ds)$, $\cos(x,r)$, $\cos(y,r)$, $\cos(z,r)$. Компоненте векторијелног продукта

$$[d\mathfrak{s}_0\,\mathfrak{r}_0]$$

једнаке су субдетерминантама првог реда следеће детерминанте:

$$[d\mathfrak{s}_0\,\mathfrak{r}_0] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(x,ds) & \cos(y,ds) & \cos(z,ds) \\ \cos(x,r) & \cos(y,r) & \cos(z,r) \end{vmatrix}$$

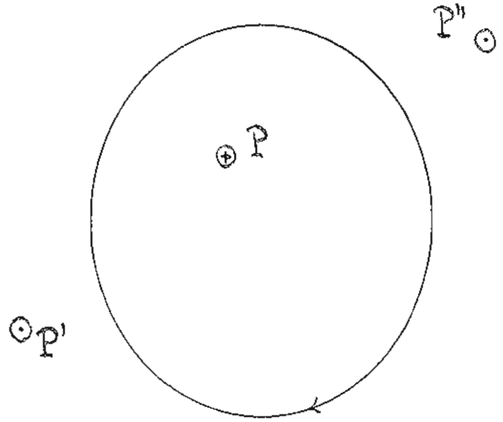
па зато можемо једначину 6*) раставити у следеће три:

$$d\mathfrak{H}_x = \frac{J}{c}\,\frac{ds}{r^2}\{\cos(y,ds)\cos(z,r) - \cos(z,ds)\cos(y,r)\}$$
$$d\mathfrak{H}_y = \frac{J}{c}\,\frac{ds}{r^2}\{\cos(z,ds)\cos(x,r) - \cos(x,ds)\cos(z,r)\} \qquad 6^{**})$$
$$d\mathfrak{H}_z = \frac{J}{c}\,\frac{ds}{r^2}\{\cos(x,ds)\cos(y,r) - \cos(y,ds)\cos(x,r)\}$$

Горње једначине дају нам могућност да за сваку могућу конфигурацију линеарне струје израчунамо магнетско поље што га оне изазивају. Ми ћемо сада да се упознамо са квалитативном страном тих једначина, да би добили представу о распореду магнетских линија т. ј. ми нећемо испитивати тачан облик тих линија, него ћемо се само упознати како се оне у неким случајевима који су за наше следеће излагање важни, по прилици распростиру.

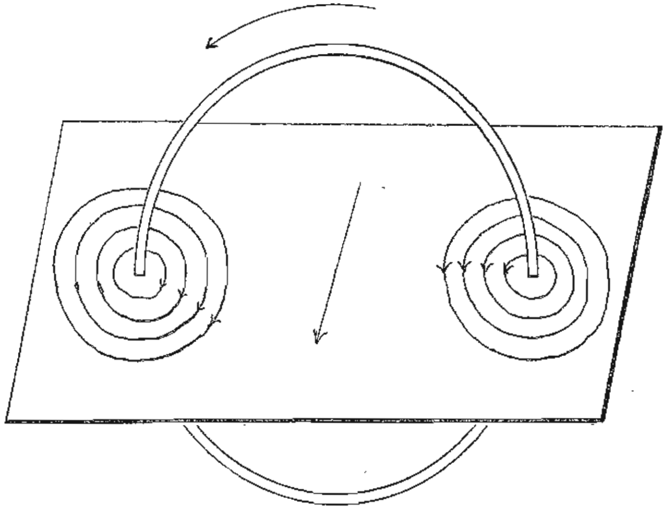
Магнетско поље кружне струје и соленоида.

Уочимо поље електричне струје која тече кроз жицу савијену у облику круга. Ако је правац струје као што је у слици назначено, онда је у сваку тачку P која се налази у кругу вектор $\mathfrak{H}$ наперен иза слике, јер сваки елеменат струје изазива према Biot-Savard-овом закону у тачку P вектор $d\mathfrak{H}$

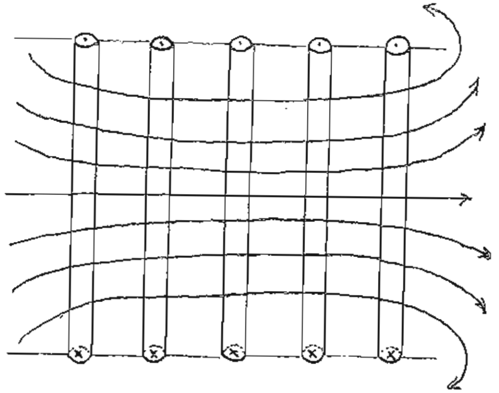


наперен иза слике.

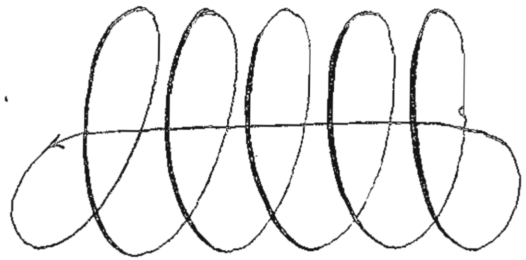
Посматрајмо сада тачку P' која се налази изван круга. Онда елеменат струје који се налазе на оној половини круга која је ближа тачки P' изазива у овој магнетски вектор наперен пред слику. Елементи струје који се налазе на половини круга која је даља од тачке P' изазивају у овој магнетски вектор наперен иза слике. Но како је утицај елемената струје тим већи што су они ближи посматраној тачки (инверзно квадрату одстојања), то ће утицај прве половине бити јачи од утицаја друге, па ће резултујући магнетски вектор у тачки P' бити наперен пред слику. То је случај и за сваку другу тачку P'' која се налази изван круга. У унутрашњости круга су према томе векторске линије наперене испред слике а изван круга иза слике. Конструишемо ли математски помоћу Biot-Savard-овог закона или експериментално магнетско поље ове кружне струје, то је пресек тога поља са равнином која иде кроз центар круга а стоји нормално на равнину његову представљен у овој слици. У унутрашњости круга наперене су у овом случају векторске линије пред слику, јер струја има сада противан смисао према ономе што је имала у прошлом случају.



Сада када смо се упознали квалитативно са магнетним пољем кружне струје можемо се квантитативно упознати и са магнетним пољем изазваним системом од више струја. За практичну примену важан је систем струја који се зове соленоид. То је систем затворених концентричних струја постављених нормално на геометријско место њихових средина које се зове оса соленоида. Најједноставнији је случај кружног цилиндричног соленоида. То је систем кружних струја нормалних на геометријско место њихових центара које је права линија. Тај случај представљен је у овој слици, која представља пресек соленоида. Из ње се види да у сваком кругу струја тече тако да посматрано са десне стране закреће у позитивном смислу. Зато су векторске линије у унутрашњости соленоида наперене све према десној страни. Утицаји свих струја сумирају се, па векторске линије сачињавају у унутрашњости соленоида један сноп. Њихов распоред представљен је у слици.



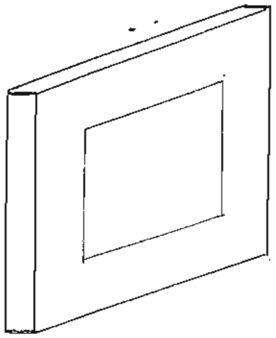
Сличан распоред магнетских линија добијамо ако једну једину жицу савијемо у облику хеликса. Сваки елеменат овога хеликса можемо раставити у два компоненте од којих је једна паралелна оси хеликса, а друга стоји нормално. Векторски збир првих компонената даје једну линеарну струју коју можемо замислити да иде кроз осу хеликса, а друге компоненте дају толико затворених кругова

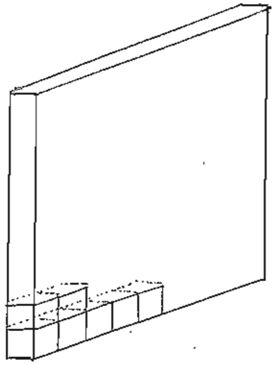


колико ходова има у хеликсу. Зато је овај систем приближно еквивалентан соленоиду и једној линеарној струји која иде кроз осу његову. Затворимо ли соленоид тако да струју вратимо кроз осу, онда се прави комад кроз који се струја враћа поништава са хипотетским правим комадом који је сачињавао једну компоненту хеликса, па је зато овај систем приближно еквивалентан соленоиду, па се често пута и сам назива соленоид. Ако такав хеликс има много ходова, онда није ни потребно струју вратити кроз осу.

Еквиваленција магнетског поља изазваног магнетским листићем са магнетским пољем изазваним електричном струјом.

У општој теорији ламеларних поља упознали смо се са двоструким површинама. Такве површине остварене су приближно н. пр. код Франклинове плоче. То је стаклена плоча обложена са обе стране станиолом, па се може тако електрично оптеретити да јој једна страна садржава позитивна а друга негативна оптерећења. Прва страна је дакле површина извора, а друга површина понора. И лајденска боца представља једну двоструку површину.





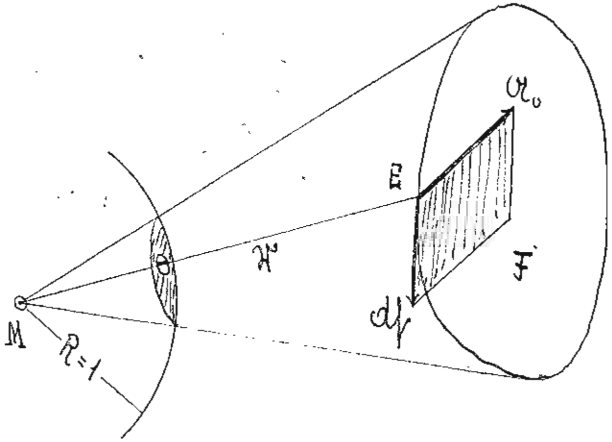
У магнетизму су такве двоструке површине остварене у <u>магнетским листићима</u> то су плочице које су с једне стране позитивно а с друге стране негативно магнетисане. Сваку такву плочицу можемо раставити у бескрајно кратке елементарне магнете. Северни полови свих тих магнета налазе се на једној, а јужни полови на другој страни танкога листића.

Питајмо сада за магнетско поље $\mathfrak{H}$ које је један такав магнетни листић произвољна облика изазвао у својој околини. У теорији поља показали смо да једна таква двострука површина изазива једно поље, којега је потенцијал у произвољној тачки M једнак:

$$U_1 = \tau \cdot \theta \qquad 1)$$

где τ означава интензитет момента двоструке површине т.ј.

$$\tau = \varrho dl \qquad 2)$$



где је ϱ површинска густина, а dl дебљина плоче. Ако је двострука површина магнетни листић, онда ϱ означава површинску густину у магнетизму, а ако је н. пр. Франклинова плоча, онда ϱ означава површинску густину електрицитета. У једначини 1) означава θ просторни угао под којим се види површина F из тачке M т.ј. површину што ју на кугли радиуса 1 а центра у M исеца конус којега је врх у тачки M а којега је база површина F.

Кад нам је познат потенцијал поља U_1, онда нам је познат и вектор $\mathfrak{h}$ тога поља

$$\mathfrak{h} = -\nabla U_1 = -\mathrm{grad}\, U_1$$

При овој операцији $\mathrm{grad}\, U_1$ претпостављамо да је површина F непомична, а да се тачка M помиче. Претпоставимо ли да је тачка M непомична а површина F помична, онда морамо, као што смо то у теорији поља доказали, променити знак десне стране, па добијамо:

$$\mathfrak{h} = \mathrm{grad}\, U_1 = \mathrm{grad}(\tau\theta)$$

Претпоставимо да је интензитет τ на читавој плочи константан; онда можемо τ извадити пред оператор ∇, па добијамо

$$\mathfrak{h} = \tau\, \mathrm{grad}\, \theta$$

Помножимо леву и десну страну ове једначине са произвољним јединичним вектором $\mathfrak{a}_0$, па добијамо

$$\mathfrak{h}\mathfrak{a}_0 = \tau \mathfrak{a}_0\, \mathrm{grad}\, \theta$$

а како је према једној од основних једначина векторске анализе

$$\frac{d\theta}{da} = \mathfrak{a}_0 \nabla\theta = \mathfrak{a}_0\, \mathrm{grad}\, \theta$$

то је

$$\mathfrak{h}\mathfrak{a}_0 = \tau \frac{d\theta}{da}$$

$\frac{d\theta}{da}$ представља нам промену просторног угла θ, ако површину F помакнемо за јединицу дужине у правцу вектора $\mathfrak{a}_0$. Израчунајмо колика је та промена просторног угла θ. Помакнемо ли површину F за јединични вектор $\mathfrak{a}_0$, то елеменат $d\mathfrak{s}$ њене контуре описује површину представљену вектором

$$[\mathfrak{a}_0\, d\mathfrak{s}]$$

Пројектирамо ли ову површину на куглу радиуса

$$ME = \mathfrak{r}$$

то је та пројекција једнака

$$[\mathfrak{a}_0\, d\mathfrak{s}]\mathfrak{r}_0$$

Но ми тражимо ону промену површине која се не дешава на кугли радиуса $\mathfrak{r}$ него на кугли радиуса 1; зато морамо горњи израз умањити

У размери

$$1 : r^2$$

т.ј. помножити са $\frac{1}{r^2}$, па ће зато елеменат $d\mathfrak{s}$ изазвати промену просторног угла θ представљену изразом

$$\frac{1}{r^2}[\mathfrak{a}_0 d\mathfrak{s}]\mathfrak{r}_0$$

Сви елементи $d\mathfrak{s}$ изазиваће промену $\frac{d\theta}{da}$, па је она једнака

$$\frac{d\theta}{da}=\int_L \frac{1}{r^2}[\mathfrak{a}_0 d\mathfrak{s}]\mathfrak{r}_0=\mathfrak{a}_0\int_L \frac{1}{r^2}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}_0]$$

где је интеграл узет по контури L површине F. Зато је

$$\mathfrak{H}\mathfrak{a}_0=\tau\mathfrak{a}_0\int_L \frac{1}{r^2}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}_0]$$

а како је $\mathfrak{a}_0$ произвољно, то је

$$\mathfrak{H}=\tau\int_L \frac{1}{r^2}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}_0]$$

Ставимо ли

$$\mathfrak{r}_0=\frac{\mathfrak{r}}{r}$$

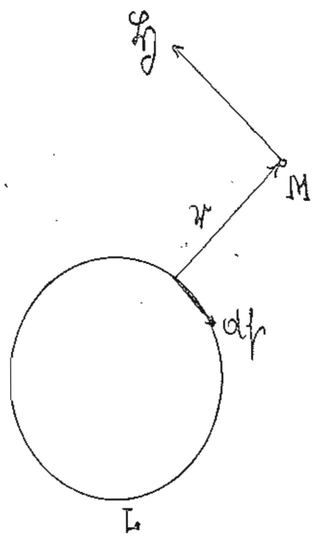
то добијамо

$$\mathfrak{H}=\tau\int_L \frac{1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}] \qquad 3.)$$

Поље $\mathfrak{H}$ што га изазива електрична струја која би текла кроз контуру посматраног магнетног листића било би према пређашњем

$$\mathfrak{H}=\frac{J}{c}\int_0 \frac{1}{r^3}[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}] \qquad 3^*.)$$

У првом случају имамо узети интеграл по контури L магнетног листића, а у другом по истој тој линији. И у једном и у другом случају представља $d\mathfrak{s}$ елеменат контуре а $\mathfrak{r}$ одстојање посматране тачке M у којој тражимо вектор $\mathfrak{H}$ од тог елемента. Зато ће електрична струја изазвати исто магнетско поље као и магнетни листић ако буде постојала релација



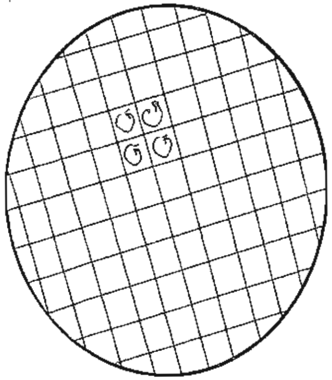
$$\tau=\frac{J}{c}$$

т.ј.

$$J=c\tau \qquad 4.)$$

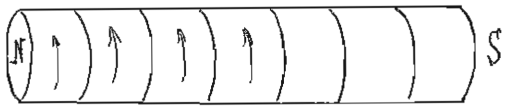
т.ј. ако њен интензитет J буде једнак: $c\tau$.

У досадашњим извађањима смо претпоставили да је интензитет момента $\mathcal{E}$ константан по читавом листићу, па кад то није случај, онда можемо магнетски листић поделити у такве елементе у којима се $\mathcal{E}$ може сматрати константно. Сваки такав елеменат можемо заменити електричном струјом која тече по његовој контури и које је интензитет дат једначином 4), при чему $\mathcal{E}$ значи интензитет момента на посматраном елементу. Ако је $\mathcal{E}$ на читавој површини константан, онда су интензитети елементарних струја једнаки, па се у унутрашњости листића поништавају (јер два и два имају увек противан смисао), па остаје само струја по контури.



Сваки магнет коначних димензија у сва три правца можемо раставити у елементарне магнетне листиће, а сваки листић заменити електричном струјом. Те хипотетске струје које на тај начин теку око сваког молекила посматраног магнета зову се Ampère-ове струје.

Један цилиндричан магнетни штап можемо нормалним пресецима раставити у танке магнетне листиће, па сваки такав листић можемо заменити са једном кружном струјом. Систем свих тих кружних струја даје соленоид са којим смо се пре упознали, па сада смо доказали и математски еквиваленцију соленоида и магнета.



Вектор $\mathfrak{B}$ дат једначином 3.) ако је простор у соленоиду и изван соленоида испуњен етером или ваздухом, што је скоро једно исто, онда је и магнетска индукција

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$$

дата једначином 3*). Ако је простор у соленоиду испуњен са медиумом пермеабилитета μ, онда је магнетска индукција у том простору

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

т.ј.

$$\mathfrak{B} = \mu \frac{J}{c} \int \frac{1}{r^3} [d\mathfrak{l}\, \mathfrak{r}]$$

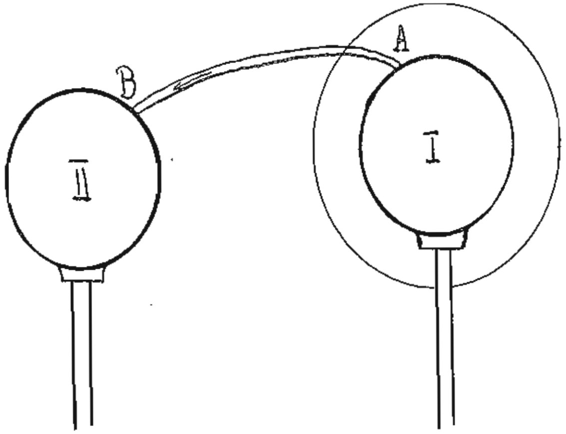
Ако је тај медиум мекано гвожђе за које је μ неколико хиљада, онда добијамо тиме веома јаку магнетску индукцију. На тој се особини оснива конструкција електро-магнета.

Струја у диелектрикуму.

Доказали смо једначину

$$\operatorname{div} i = 0 \qquad 1).$$

Из те једначине следује да електричне струје морају увек бити затворене струје. За струје изазване галванским елементима или индукцијом, то је без сумње случај, но упозорили смо на један случај који изгледа да не задовољава услов изражен једначином 1.). То је био случај да два неједнако оптерећена изоло-



повања кондуктора спојимо са металном жицом. Онда кроз ту жицу настаје померање електричних оптерећења т.ј. у њој се указује електрична струја, па изгледа на први поглед да та струја није затворена. Дуго испитивање указује да је и у овом случају струја затворена. Ваља само да узмемо у обзир све феномене који су везани на померање електричних оптерећења, па нам према основној идеји Maxwell-овој ваља обратити главну пажњу на феномене који се дешавају у диелектрикуму који опкољава кондуктор. феномени који се том приликом указују су ови: 1) Жица AB угреје се; 2) за време док кроз њу тече струја која је у овом случају врло кратког трајања, ствара се у околини жице једно магнетско поље; 3) прије но што смо кондукторе спојили са жицом био је околни медиум носиоц једнога електростатичног поља $\mathfrak{E}$. Када спојимо кондукторе, онда се то електростатично поље мења, па ако су кондуктори били једнаки и једнако оптерећени но противнога смисла, то у овом случају електростатично поље изазвано кондукторима ишчезне сасвим кад се споје кондуктори. На тај феномен ваља обратити специјалну пажњу. Шта значи када кажемо да је околни медиум носиоц електростатског поља $\mathfrak{E}$? Значи да се он налази у једном специјалном напетом стању карактеризованом вектором померања ϑ везаном за вектор $\mathfrak{E}$ једначином

$$\vartheta = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E} \qquad 2.)$$

Положимо ли у томе пољу једну затворену површину. $\overline{F}$, то постоји једначина

$$\int_F \vartheta\, df = e$$

што значи да је истицање вектора ϑ кроз ту површину једнако електричких оптерећења која се налазе у тој површини. Ми смо електричну струју дефинисали као померање електричних оптерећења, па смо јачином струје назвали диференцијални квоцијент

$$J = \frac{de}{dt}$$

Густина струје била је једнака јачини узетој на јединицу пресека, дакле ако је посматрани пресек био једнак q, онда је

$$i = \frac{J}{q} = \frac{1}{q}\frac{de}{dt}$$

Вектором струје i назвали смо вектор i дефинисан једначином

$$i = i\, i_0$$

у којој i_0 значи јединични вектор у правцу у ком се дешавају померања електричних оптерећења.

Кроз једну коначну површину f кондуктора тече струја јачине

$$J = \int_f i\, df \qquad 4)$$

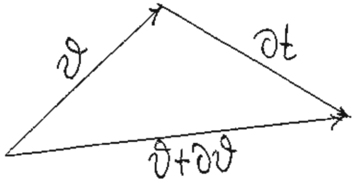
Положимо сада око кондуктора I којега оптерећење нека буде e затворену површину F, то из једначине 3) следује

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}\int_F \vartheta\, df = \int_F \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\, df = J \qquad 5)$$

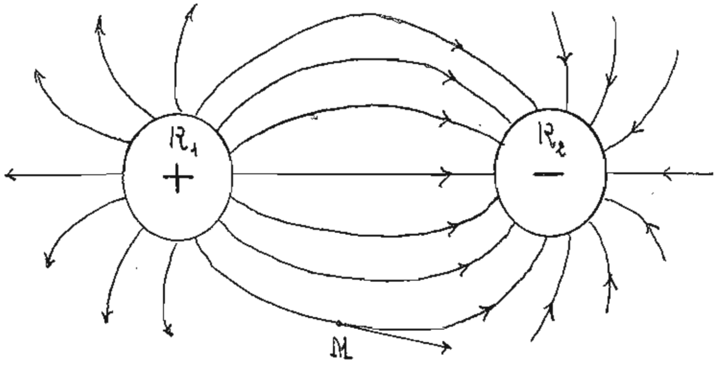
Једначина 5.) има исту структуру као и једначина 4.) само место вектора струје i у кондуктору појављује се овде диференцијални квоцијент $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$. Тај диференцијални квоцијент представља промену вектора ϑ у јединици времена, па се зове струја у диелектрикуму.

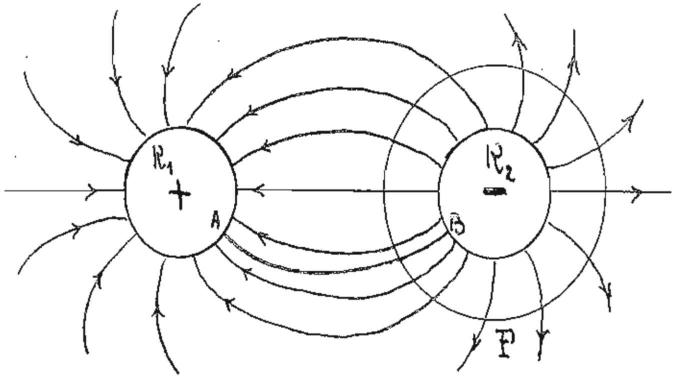
Кроз оне делове површине F који се налазе у кондуктору тече струја у кондуктору дефинисана једначином 4.), а кроз оне делове површине F који леже у диелектрикуму тече струја дефинисана једначином 5.)

Напето стање у диелектрикуму било је било је пре испражњења кондуктора дефинисано вектором ϑ. После времена Δt када се испражњење кондуктора почело да врши, променило се то напето стање, па је вектор ϑ прешао у вектор $\vartheta+\Delta\vartheta$. Промена у времену ∂t била је $\partial\vartheta$, па диференцијални квоцијент $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ који је представљен опет један вектор, зовемо: *средњом променом диелектричног померања*. Граничну вредност тога квоцијента која је опет један вектор називамо *струјом у диелектрикуму* у уоченом моменту на посматраном месту поља M. Зато смо и писали ∂ место d да бисмо означили да је та промена: промена једног одређеног места поља.



На једном једноставном примеру можемо да рекапитулирамо досадање извађање. Уочимо електростатско поље изазвано са два једнака оптерећења но противна знака, која се налазе на кондукторима K_1 и K_2. Претпоставимо једноставности ради да је околни медиум изотропан и хомоген, онда се линије вектора $\mathfrak{E}$ и вектора ϑ поклапају, па је њихов ток представљен у горњој слици. Те линије померања почињу на кондуктору K_1 а свршавају се на кондуктору K_2. На свакој произвољној тачки поља M одређен је тим линијама потпуно вектор ϑ. Спојимо ли сада оба кондуктора са жицом, то ће кроз ту жицу настати померање електрицитета т.ј. почеће електрична струја, а електростатско поље па према томе и поље век-





тора ϑ ишчезнуће потпуно. То значи да за време док кроз жицу тече струја, настаје у диелектрикуму такова померања која су једнака а противног правца вектору ϑ, да би се прво стање поништило. Померања у диелектрикуму биће према томе представљена истим оваквим векторским линијама но противног правца. Предња слика показује то померање. Док струја у кондуктору т.ј. у жици AB тече од леве стране на десну, дотле струја у диелектрикуму т.ј. диелектрична померања теку с десна на лево. Па како је према пређашњем

$$J = \frac{de}{dt} = \int_F \frac{\partial \vartheta}{\partial t} df$$

то сва та померања сачињавају затворено коло, јер кроз жицу протече множина $\frac{de}{dt}$ према кондуктору K_2, а кроз површину F протече диелектрично померање $\int_F \frac{\partial \vartheta}{\partial t} df$, а ове две величине су према пређашњој једначини једнаке. Све струје сачињавају затворена кола, само су та кола на неки начин скупљене у жици AB у сноп, па се онда кад дођу до кондуктора K_2 разилазе по простору и враћају у кондуктор K_1.

Права струја.

Према основној идеји Maxwell-ове теорије нема потпуних изолатора у природи. Сваки изолатор уједно је и кондуктор, а опет сваки кондуктор има своју диелектричну константу, па према томе је свако тело и кондуктор и изолатор. Зато ће према Maxwell-овој теорији у сваком телу тећи струја кондукторска и диелектрична $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$. Обе те струје заједно сачињавају праву струју

$$\mathfrak{c} = i + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

У кондуктору препондерантан је први члан десне стране, а у изолатору други.

Прва главна једначина Maxwell-ова добија према томе облик

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{c} = \frac{4\pi}{c} i + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

Посматрамо ли тачку у кондуктору, то ће први члан десне стране бити препондерантан; посматрамо ли тачку у изолатору, онда долази у обзир други члан. Но како је феномен такве природе да се електрично поље т.ј. поље вектора $\mathfrak{E}$ у околини електричне струје не мења, што је н. пр. случај код поља изазваног галванском струјом, онда је

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 0$$

т.ј. ми имамо случај стационарног стања електричног поља. А како је

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}$$

то је и

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = 0$$

па се у том случају права струја редукује само на струју у диелектрикуму. Прва једначина Maxwell-ова има у овом случају облик

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} i$$

Ohm-ов закон.

За стварање стационарне електричне струје потребна је константна потенцијална диференција. Галвански елементи стварају н.пр. између њихових полова сталну потенцијалну разлику која се назива електромоторном силом. Јасно је да ће интензитет I струје која тече између полова таквог елемента зависити од те потенцијалне диференције, јер са нестајањем те диференције нестаје и интензитет струје. Однос између те потенцијалне диференције и интензитета I регулисан је законом што га је Ohm 1827 године формулисао и који има овај облик

$$U_1 - U_2 = IW$$

У овој једначини значи W *тотални отпор* линеарне жице која спаја посматране полове, па се може зато *Ohm-ов закон* и овако формулисати: Потенцијална диференција између полова галванског елемента једнака је продукту интензитета струје која тече кроз жицу која те полове спаја и отпора тога комада жице.

Горњој једначини можемо дати и други облик. Како је било

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U$$

то је

$$\int_1^2 \mathfrak{E}\, dl = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2$$

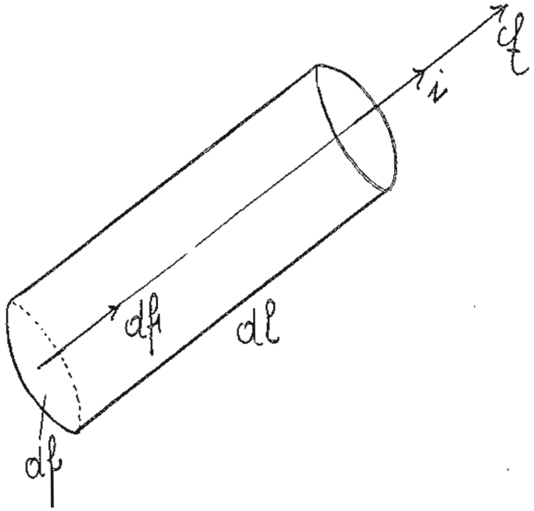
па дакле

$$\int_1^2 \mathfrak{E}\, dl = IW$$

т.ј. линијски интеграл електричног вектора узет дуж жице једнак је отпору те жице помноженом са интензитетом струје.

Ohm-ов закон је чисто емпирички закон, те је доказан за линеарне струје. Но како он важи за произвољно дугачке кондукторе дакле и за бескрајно мале, то се из горњег интегралног закона може извести диференцијални закон тиме да горњи закон применимо на бескрајно малене делове кондуктора. Јасно је да су за теорију диференцијални закони бољи, јер изражавају оштрије односе између посматраних величина. С друге стране опет је јасно да се експерименталним начином могу добити само интегрални закони, јер не можемо да експериментишемо бескрајно маленим телима.

Да изведемо Ohm-ов закон у диференцијалном облику исецимо из кондуктора, за који сада претпостављамо да је коначан у све три димензије, један цилиндричан елеменат којега се оса подудара са правцем вектора i на посматраном месту кондуктора. Вектор i представља померање електричних оптерећења, а то померање стоји нормално на еквипотенцијалне површине, па ће се зато правац вектора i подударати са правцем електричног вектора $\mathfrak{E}$.



Величине базе цилиндра нека буду df, а величина висине dl. Онда је отпор што га такав цилиндрични део кондуктора даје протицању струје пропорционалан његовој дужини dl, инверзно пропорционалан његовом пресеку df, а зависи и од материјала кондукторовог. Зато можемо отпор W изразити једначином

$$W = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dl}{df}$$

σ се назива *електричном спроводљивости материјала*. Чим је σ веће, тим је отпор мањи т.ј. спроводљивост већа. Јачина J струје у посматраном цилиндру изражена је једначином

$$J = i\, d\mathfrak{f}$$

где $d\mathfrak{f}$ представља вектор базе. Линијски интеграл електричног вектора $\mathfrak{E}$ узет по дужини цилиндра једнак је

$$\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}$$

где $d\mathfrak{l}$ значи вектор дужине dl којега се правац подудара са осом посматраног цилиндра. Зато Ohm-ов закон примењен на посматрани бесконачно малени део кондуктора добија овај облик

$$\mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = i\, d\mathfrak{f} \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{dl}{df}$$

Како

$$\frac{d\mathfrak{f}}{df} = n.$$

представља јединични вектор у правцу осе цилиндра, то горња једначина добија облик

$$\mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = \frac{1}{\sigma}\, i\, \mathfrak{r}_0\, dl$$

а како је

$$\mathfrak{r}_0\, dl = d\mathfrak{l}$$

вектор који има правац осе, то је

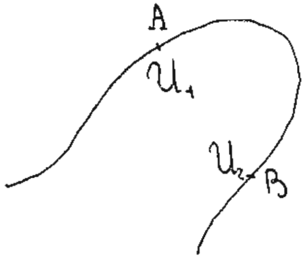
$$\mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = \frac{1}{\sigma}\, i\, d\mathfrak{l}$$

Но како се правци вектора $\mathfrak{E}$, i, $d\mathfrak{l}$ подударају, то можемо горњу једначину скратити са $d\mathfrak{l}$, па добијамо једначину

$$i = \sigma \mathfrak{E}$$

која изражава Ohm-ов закон у диференцијалном облику.

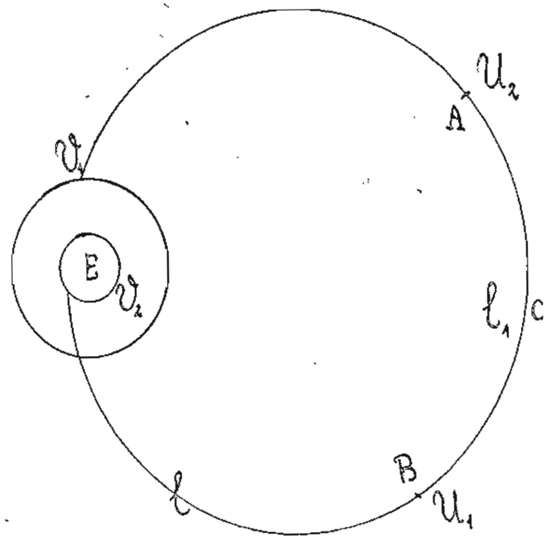
Ohm-ов закон важи за произвољне делове кондуктора, па ако из једног линеарног кондуктора исечемо комад AB, то за њега важи једначина



$$U_1 - U_2 = J W_a$$

где W_a означава отпор комада жице AB.

Ако у посматраном кондуктору имамо уметен један галвански елеменат који ствара потенцијалну разлику



$$V_1 - V_2 = K$$

где је K назива такође <u>електромоторном силом</u>, то постоји једначина

$$V_1 - V_2 = JW$$

Отпор W представља отпор читаве жице, па ако њену дужину означимо са L, а њен константни пресек са q, то је према пређашњем

$$W = \frac{1}{\sigma}\, \frac{L}{q}$$

т.ј.

$$V_1 - V_2 = \frac{J}{\sigma}\, \frac{L}{q}$$

Уочимо ли две тачке A и B кондуктора, па означимо ли потенцијале на тим тачкама са U_2 и U_1, дужину жице од A преко C до B са l_1, а дужину жице од B преко E до A са l, то за комад од A до B важи по Ohm-овом закону једначина

$$U_2 - U_1 = \frac{I}{\sigma}\cdot\frac{l_1}{q} = \frac{I}{\sigma}\,\frac{L-l}{q}$$

Одбијемо ли ову једначину од претходне, то добијамо

$$U_1 - U_2 + V_1 - V_2 = \frac{I}{\sigma}\cdot\frac{l}{q}$$

Последњу једначину можемо написати у овом облику

$$U_1 - U_2 + E = \frac{I}{\sigma}\,\frac{l}{q} = I W_l$$

а можемо је изразити речима овако: У сваком произвољном делу линеарног кондуктора је продукат интензитета струје и отпора посматраног дела кондуктора једнак збиру електромоторне силе која је уметена у посматрани део и потенцијалне диференције на крајевима посматраног дела кондуктора.

Применимо ли Ohm-ов закон у диференцијалном облику на раширену главну једначину Maxwell-ову

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,i + \frac{4\pi}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$$

и узмемо ли у обзир да је

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\,\mathfrak{E}$$

то можемо десну страну горње једначине изразити помоћу вектора $\mathfrak{E}$, па добијамо

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,\sigma\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

У овој једначини види се јасно двострука улога кондуктора: као кондуктора и изолатора. Коефицијенат σ карактерише га као спроводиоца кондуктора, а коефицијенат ε као диелектрикум.

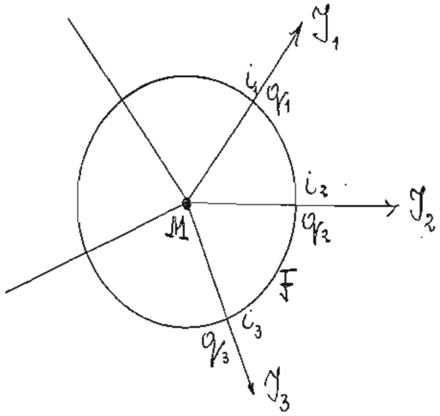
Примедба: Ohm-ов закон доказан је експериментално само за стационарне струје, но ми узимамо да важи и за промењиве, па зато смо и смели да напишемо горњу једначину.

Kirchhoff-ови закони

Поставимо следећи задатак: У мрежи линеарнӣ кондуктора уплетене су електромоторне силе. Отпор што их поједини делови те мреже дају протицању електрицитета (електричне струје) познати су. Нека се нађу интензитети струје у појединим деловима.

Ако имамо једну једину линеарну затворену струју, онда знамо да је интензитет J у свима пресецима њеним једнак, јер је вектор i соленоидалан вектор. Но ако имамо једну мрежу линеарне струје, онда нам је могуће помоћу Ohm-овӣ закона одредити како ће се струја у тој мрежи разграњавати. Место Ohm-овӣ закона згодније је применити Kirchhoff-ове законе који су изведени из Ohm-овӣ закона и из услова да је вектор i соленоидалан.

Уочимо пре свега један чвор M мреже у коме се састају више линеарних струја. Интензитете тих струја означимо са: $J_1, J_2, J_3, \ldots$ па их узмимо позитивно кад су наперени од чвора. Положимо сада око тачке M једну затворену површину F. Онда из услова



$$\operatorname{div} i = 0$$

следује да је протицање вектора i кроз површину F једнако нули т.ј.

$$\int_F i \, df = 0$$

Ми се при извађању Kirchhoff-ових закона ограничавамо само на стационарне струје и зато се вектор $\mathfrak{E}$ у диелектрикуму који опкољава мрежу не мења, па се услед тога не указују диелектричне струје у околини чвора М. Сва померања следују кроз жицу, па ће горња једначина, ако означимо са: $i_1, i_2, i_3, \cdots$ густине струја у појединим жицама, а са: $q_1, q_2, q_3, \cdots$ пресеке тих жица, добити овај облик:

$$i_1 q_1 + i_2 q_2 + i_3 q_3 + \cdots = 0$$

Па како је

$$J_1 = i_1 q_1$$
$$J_2 = i_2 q_2$$
$$\cdots\cdots$$

то је

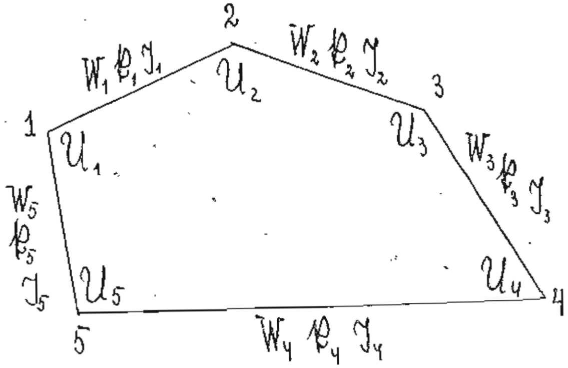
$$J_1 + J_2 + J_3 + \cdots = 0$$

или

$$\Sigma J = 0$$

Горња једначина изражава први Kirchhoff-ов закон који гласи: Алгебарски збир интензитета струја које се састају у једном чвору једнак је нули.

Извадимо из посматране мреже један полигон затворен. Вредности потенцијала на угловима тога полигона нека буду: U_1, U_2, U_3, U_4 и U_5. Отпори појединих страна тога полигона нека буду: W_1, W_2, W_3, W_4 и W_5. У те стране нека буду уплетене електромоторне силе: $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4, \mathfrak{K}_5$. Интензитета струја у тим странама нека буду: J_1, J_2, J_3, J_4 и J_5. Напишимо сада за сваку од тих страна Ohm-ов закон. Онда добијамо ове једначине



$$U_1 - U_2 + \mathfrak{K}_1 = J_1 W_1$$
$$U_2 - U_3 + \mathfrak{K}_2 = J_2 W_2$$
$$U_3 - U_4 + \mathfrak{K}_3 = J_3 W_3$$
$$U_4 - U_5 + \mathfrak{K}_4 = J_4 W_4$$
$$U_5 - U_1 + \mathfrak{K}_5 = J_5 W_5$$

Саберемо ли све једначине то добијамо.

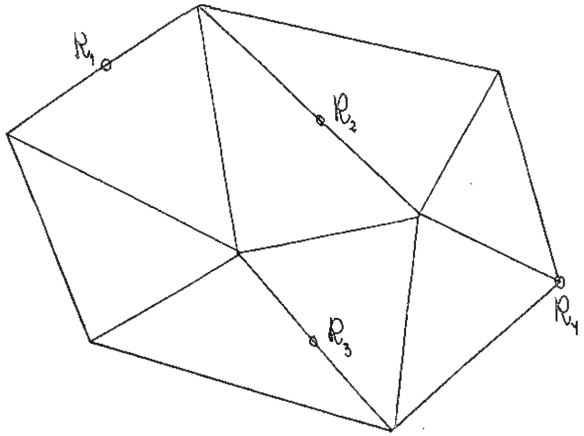
$$\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3 + \mathfrak{K}_4 + \mathfrak{K}_5 = J_1 W_1 + J_2 W_2 + J_3 W_3 + J_4 W_4 + J_5 W_5$$

а како горње извађање важи за произвољни број страна ако је само полигон затворен, то горњу једначину можемо писати

$$\Sigma \mathcal{E} = \Sigma IW$$

Она изражава други Kirchhoff-ов закон који гласи: У сваком затвореном полигону посматране мреже је збир продуката интензитета струја у појединим странама са отпором тих страна једнак збиру електромоторних сила уплетених у тај полигон.

Узмемо ли произвољну мрежу линеарних струја у коју су уплетене електромоторне силе, онда можемо згодним избором чворова у тој мрежи и згодним избором затворених полигона добити помоћу Kirchhoff-ових закона онолико једначина колико нам је потребно да одредимо интензитете струја у сваком делу те мреже.



Разгранавање електричне струје.

У главну жицу ЕА и ЕВ уплетена је електромоторна сила К. Главна жица разграњава се у тачки А у споредне: 1, 2, 3, 4 и 5 које се у тачки В састају. Отпор главне жице т.ј. комада ЕА и ЕВ заједно нека буде W_0, а отпори споредних W_1, W_2, W_3 … Питајмо за интензитете струје у главним и споредним жицама. Означимо интензитет у главној жици са J_0 а у споредним са J_1, J_2, J_3 … па применимо први Kirchhoff-ов закон на чвор А. По томе закону је

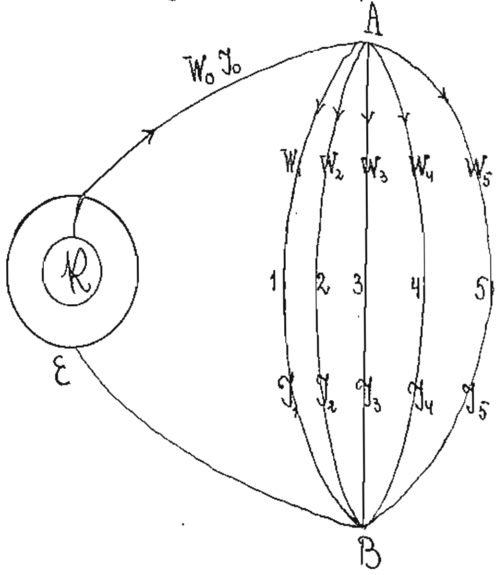
$$\Sigma J = 0.$$

т.ј.

$$-J_0 + J_1 + J_2 + \cdots = 0$$

или

$$J_0 = \Sigma J$$



Применимо сада други Kirchhoff-ов закон на затворени полигон ЕА1ВЕ. Према том закону је

$$\Sigma K = \Sigma J W$$

Дакле у овом колу имамо само једну електромоторну силу К, па је

$$K = J_0 W_0 + J_1 W_1$$

Применимо ли тај закон на коло ЕА2ВЕ, то добијамо

$$K = J_0 W_0 + J_2 W_2$$

За треће коло ЕА3ВЕ добијамо

$$K = J_0 W_0 + J_3 W_3$$

Из њих можемо израчунати интензитете, па добијамо

$$J_1 = \frac{K - J_0 W_0}{W_1}$$

$$J_2 = \frac{K - J_0W_0}{W_2}$$

$$J_3 = \frac{K - J_0W_0}{W_3}$$

. . . .

Саберемо ли све једначине, то добијамо

$$\Sigma J = J_0 = (K - J_0W_0)\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{1}{W_3} + \cdots\right)$$

или

$$J_0 = (K - J_0W_0)\,\Sigma\frac{1}{W}$$

даље

$$J_0 = \frac{K\Sigma\frac{1}{W}}{1 + W_0\Sigma\frac{1}{W}} = \frac{K}{W_0 + \frac{1}{\Sigma\frac{1}{W}}}$$

Означимо ли

$$\frac{1}{\Sigma\frac{1}{W}} = W'$$

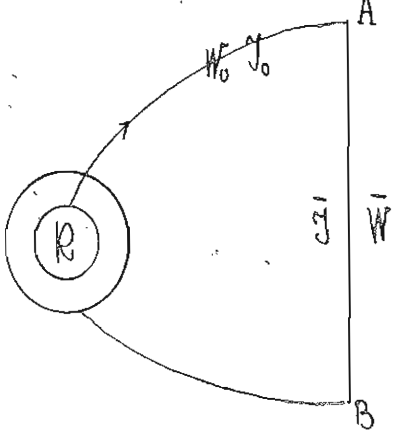
то је

$$J_0 = \frac{K}{W_0 + W'} \qquad 1)$$

Испитајмо сада значење члана W'. Кад бисмо место споредних жица имали једну једину која би имала отпор W, онда бисмо имали овај случај: Према првом Kirchhoff-овом закону примењеном на чвор A имали бисмо

$$-J_0 + \bar{J} = 0$$

$$\bar{J} = J_0$$



а према другом Kirchhoff-овом закону примењеном на посматрано коло имали бисмо

$$K = J_0W_0 + J_0\bar{W}.$$

или

$$J_0 = \frac{K}{W_0 + \bar{W}}$$

Сравнимо ли ову једначину са једначином 1) то видимо да је

$$W' = \bar{W}$$

т.ј. W' има значење отпора оне жице која би кад би заменили све споредне оставила интензитет J_0 непромењен.

Када смо тако израчунали интензитет J_0, онда су и интензитети споредних струја дати пређашњим једначинама којима можемо дати други, згоднији облик. Из једначине 1) следује

$$K - J_0W_0 = J_0W'$$

па зато следује из пређашњих једначина

$$J_1 = \frac{W'}{W_1} J_0$$

$$J_2 = \frac{W'}{W_2} J_0$$

$$J_3 = \frac{W'}{W_3} J_0$$

$$\dots\dots$$

Реципрочне вредности отпора т.ј. вредности

$$\frac{1}{W_0} = K_0 \quad \frac{1}{W_1} = K_1 \quad \frac{1}{W_2} = K_2 \quad \dots \quad \frac{1}{W'} = K'$$

називају се кондуктанцијом посматране жице. Из једначине

$$\frac{1}{\Sigma \frac{1}{W}} = W'$$

следује

$$\frac{1}{W'} = \Sigma \frac{1}{W} = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{1}{W_3} + \dots$$

т.ј.

$$K' = K_1 + K_2 + K_3 + \dots$$

т.ј. кондуктанција оне жице која би била у стању да замени све споредне а да не промени интензитет главне струје једнака је збиру кондуктанција споредних жица.

Узмимо специјално случај да се главна струја разграњава у две споредне које имају отпоре W_1 и W_2; онда су интензитети струја у тим споредним жицама дати једначинама

$$J_1 = \frac{W'}{W_1} J_0 = \frac{1}{W_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}} J_0 = \frac{1}{W_1} \frac{W_1 W_2}{W_1 + W_2} J_0$$

или

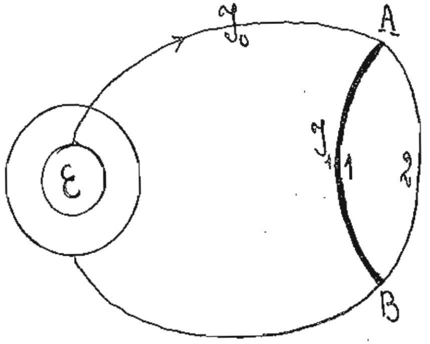
$$J_1 = \frac{W_2}{W_1 + W_2} J_0 \qquad J_2 = \frac{W_1}{W_1 + W_2} J_0.$$

Ако је отпор жице 1. m-пута већи од отпора жице 2. т.ј. ако је

$$\frac{W_1}{W_2} = m$$

онда је

$$J_1 = \frac{1}{1+m} J_0$$



Ако је н. пр. отпор жице 1. деведесет и девет пута већи од отпора жице 2. онда је

$$J_1 = \frac{1}{100} J_0$$

или

$$J_0 = 100 J_1$$

Уведемо ли у главну жицу ЕА2ВЕ споредну А1В чији је отпор 99 пута већи од отпора комада АВ главне жице н. пр. да су дужине A_1B и A_2B једнаке са, да је пресек жице 1. 99-пута мањи од пресека жице 2. , онда ће жицом 1. тећи струја чији је интензитет

$$J_1 = \frac{1}{100} J_0$$

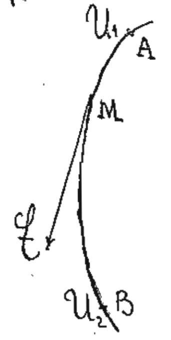
т.ј. стопута мањи од интензитета главне жице. Ову споредну жицу зову Немци Nebenleitung а Енглези Shunt.

Помоћу таквих споредних жица може се галванометрима који су удешени за слабе струје мерити интензитети јаких струја.

Радња електричне струје и Joule-ов закон

Рекли смо да се електрична струја састоји у померању електричних оптерећења, па у јединици времена протече кроз пресек линеарне жице множина оптерећења

$$\frac{de}{dt} = J$$



На свако електрично оптерећење дејствује пондеромоторна сила $\mathfrak{F}$ која је једнака продукту тог оптерећења и електричног вектора; зато ће на оптерећење $\frac{de}{dt}$ што у јединици времена протече кроз пресек M дејствовати сила

$$\mathfrak{F} = \frac{de}{dt} \mathfrak{E} = J \mathfrak{E}$$

Померањем таквих оптерећења обавља се радња, па је елеменат радње једнак

$$dA = \mathfrak{F}\,dp$$

где dp представља елеменат померања, а у нашем случају елеменат струје. Зато ће радња коју електрична струја обавља на дужини AB а у јединици времена бити једнака

$$A = \int_1^2 \mathfrak{F}\,dp = J\int_1^2 \mathfrak{E}\,dp = J(U_1 - U_2) \qquad 1.)$$

Ако је у посматраном комаду жице уплетена електромоторна сила K, онда је према Ohm-овом закону

$$U_1 - U_2 = JW - K$$

па је радња

$$A = J^2W - KJ \qquad 2.)$$

Ако у комад није уплетена електромоторна сила, онда у њему обавља се радња

$$A = J^2W \qquad 3.)$$

Посматрамо ли једно затворено коло са електромоторном силом н. пр. једно коло у које је уплетен галвански елеменат, онда је у том колу према Ohm-овом закону

$$K = JW$$

или

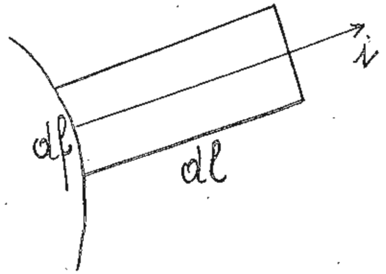
$$JW - K = 0$$

па је радња која се у том колу обавља у јединици времена, према једначини 2.), равна нули. То има ово значење: Радња која се у елементу ствара или која у елементу постаје слободна, па се у жици претвара у топлоту, зато се жица а и сам елеменат угреје, па је Joule на тај начин експериментално испитао радњу коју ствара електрична струја. Електрична струја није ништа друго него један савршен преносач енергије. Радња која се у времену ствара може се пренети на друго место.

Интегрални закон који важи

за комад струје у који није упетена електромоторна сила можемо употребити за формулисање диференцијалног закона на тај начин, што ћемо га применити на један бескрајно мален кондуктор. Да би добили што општији диференцијални закон ми ћемо узети да је кондуктор коначан у све три димензије. Исецимо из тог кондуктора један цилиндрични елеменат којега је база df а висина dl. Како је било

$$i = \frac{dJ}{df}$$



то кроз пресек df те према томе и кроз елеменат који смо исекли тако да се подудара са правцем струје протече множина у јединици времена множина електрицитета

$$dJ = i\,df$$

Отпор елемента пропорционалан је његовој дужини а инверзно пропорционалан пресеку т.ј.

$$dW = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dl}{df}$$

па ће једначина 3) у диференцијалном облику гласити

$$dA_m = (dW)(dJ)^2$$

dA_m сад значи радњу која се у јединици времена обавља у посматраном елементу

$$dA_m = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dl}{df} \cdot i^2 \cdot df^2 = \frac{1}{\sigma} i^2\, dl\, df$$

Ово је радња која се ствара у посматраном елементу т.ј. у запремини $df \cdot dl$. У јединици запремине ствараће се у јединици времена радња

$$dA = \frac{1}{\sigma} i^2$$

Ohm-ов закон у диференцијалном облику гласио је

$$i = \sigma \mathfrak{E}$$

или

$$i^2 = i^2 = \sigma^2 \mathfrak{E}^2$$

па је зато

$$dA = \sigma \mathfrak{E}^2$$

Ова се радња ствара у јединици времена у јединици запремине. У читавом кондуктору ствара се у јединици времена радња

$$A = \int_V \sigma \mathcal{E}^2 dV$$

где dV означава елеменат запремине.

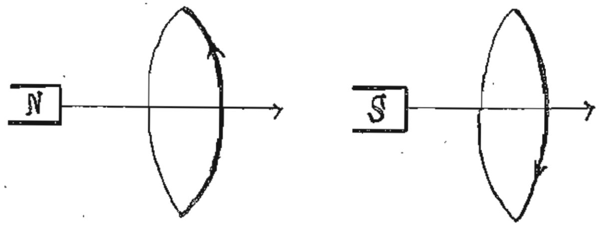
IV Индукција

Основне чињенице.

Године 1831 опазио је Faraday пошто је већ 9 година узалудно тражио, тај феномен да се покретањем магнета у близини линеарног кондуктора у овоме ствара електрична струја и убрзо је иза тога упознао све законе електромагнетне индукције, са којом ћемо се сада да упознамо.

Пре но што приступимо формулисању закона индукције упознаћемо се са основним чињеницама

Примакнемо ли линеарном електричном кондуктору

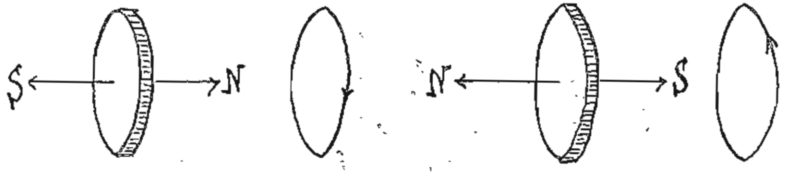


савијеном у круг северни пол једног магнета, то се у кондуктору појављује електрична струја која има правац као што је означено у првој слици. Примакнемо ли таквом колу јужни пол магнета, онда се у њему појављује струја противног правца, таква, као што је означено у другој слици.

Ми смо показали да сваки магнет можемо заменити системом електричне струје, па тако можемо цилиндрични магнет заменити соленоидом, а ако је тај магнет тако кратак да га можемо сматрати за листић, онда га можемо заменити електричном струјом која тече по његовој контури па има интензитет

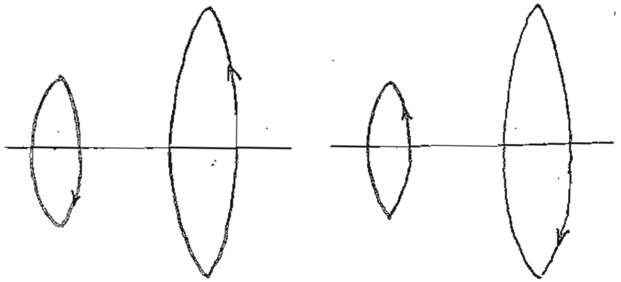
$$J = c\mathcal{E}$$

Зато можемо магнете које смо примицали заменити са електричним струјама, па би један кратки магнет као што је у следећој слици нацртано могао бити замењен са електричном струјом



која је такође у тој слици нацртана.

Заменимо ли у предњим (првој и другој) сликама магнете са електричним струјама, то добијамо ове две слике:



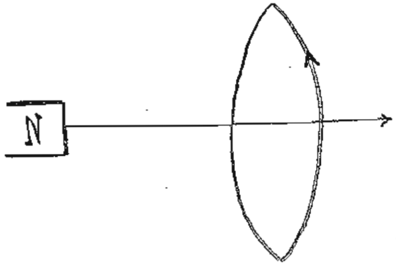
Место да примичемо електричну струју коју називамо <u>примарном струјом</u> а која изазива у другом колу <u>индуцирану</u> или <u>секундарну струју</u> можемо и овако поступити: Положај примарног и секундарног кондуктора може бити инваријабилан, па замислимо да су и једно и друго коло без струје. Пустимо ли кроз примаран кондуктор струју, то је исти ефекат као да смо струју изненада секундарном кондуктору прикачили; зато ће се у овом јавити индуцирана струја. И појачавањем и слабљењем примарне струје имамо исти ефекат као примицањем и одмицањем. Свако појачавање примарне струје изазива секундарну струју

На послетку можемо примицање примарног кола са јачањем или слабљењем струје комбиновати а место да помичемо примарни кондуктор можемо помицати секундарни, јер је јасно да промена релативног положаја кондуктора утиче на постанак индуциране струје.

Ово су основне чињенице. Из њихваља конструисати квалитативне и квантитативне законе индукције. Ми ћемо прво почети са квалитативним.

Квалитативно тумачење појаве индукције

Тиме што смо помакли северни пол секундарном кондуктору појавила се у овом индуцирана струја. Та индуцирана струја представља једну множину енергије, па ако не обавља никакав други посао, то она ствара Joule-ову топлоту, жица се угреје, те при томе створена топлота представља такође једну врсту енергије. Одакле те енергије у секундарном кондуктору? На први мах изгледа да се ова појава не може сложити са законом



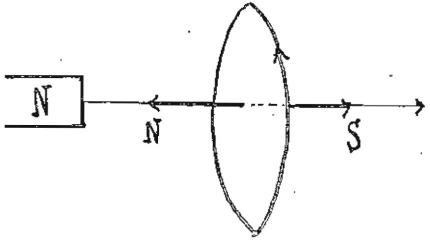
о одржању енергије, јер ми можемо северни пол помицати на једној апсолутно глаткој хоризонталној подлози, па зато помицање није нам потребна никаква радња, јер се силе које на магнет утичу (његова тежина и отпор подлоге) потпуно поништавају, па за то помицање магнета није потребна никаква сила, или изгледа бар тако. Но ми смо изгубили из вида да индуцирана струја чим се појави ствара око себе једно магнетно поље, па се зато на магнету указују пондеромоторне силе. Дакле нису тежина магнета и отпор површине једине силе које на магнет дејствују, него морамо при помицању савладати пондеромоторне силе које струја изазива на магнету. Те силе морају имати такав правац да се одупиру кретању магнета, јер само у том случају обављамо при помицању механичку радњу која се онда појављује у облику Joule-ове топлоте у индуцираном колу (у секундарном колу). Према принципу о одржању енергије мора радња коју обављамо помичући магнет бити еквивалентна енергији која се у секундарном кондуктору појављује.

Принцип оадржању енергије даје нам кључ за квалитативно и квантитативно тумачење појаве. Ми ћемо прво да се позабавимо са квалитативном страном појаве, па да питамо: зашто индуцирана струја има тај правац који је у слици означен. Индуцирану струју можемо кад питамо за магнетно поље које је њом изазвано заменити са магнетским листићем којега је контура индуцирана струја а чији је интензитет дат једначином

$$\varepsilon = \frac{J}{c}$$

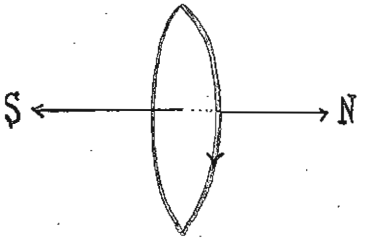
Посматрајмо приложену слику, па

питајмо која је северна а која јужна страна таквог магнетног листића, који замењује индуцирану струју. Северна страна тог листића наперена је

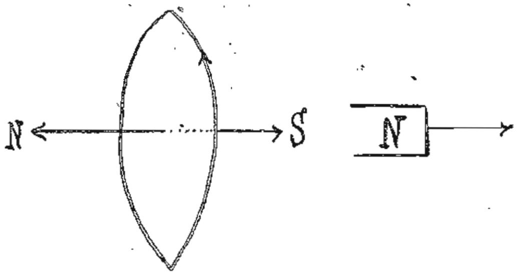


према северном полу магнета који примичемо. Зато се на магнету појављује сила које га одбијају, па те силе имамо да савладамо кад хоћемо магнет да примакнемо секундарном колу. Радња која се обавља појављује се у жици.

Када би правац струје био противан, онда би магнетно поље изазвано струјом било исто такво као поље оваквог облика. Такво поље не би одбијало него би привлачило наш магнет, па зато не би помичући га обављали радњу него би трошили, а то не може да буде, јер се радња мора



стварати, да би била еквивалентна Joule-овој топлоти која се у жици ствара. Када примичући северни пол који сматрамо за изолован прођемо кроз секундарни кондуктор, онда се правац индуциране струје у колу не мења, јер сада коло привлачи наш изоловани магнетски пол, но ми га одмичемо, па зато обављамо опет радњу.



Оваквим разматрањем може се доказати да индуцирана струја има увек такве правце као што смо их у пређашњим сликама при тумачењу основних чињеница уцртали. А резултате досадањега разматрања можемо изразити <u>Lenz-овим правилом</u>: Индуцирана струја има такав правац да се магнетно поље које она изазива противи кретању магнета.

Квантитативно формулисање закона индукције

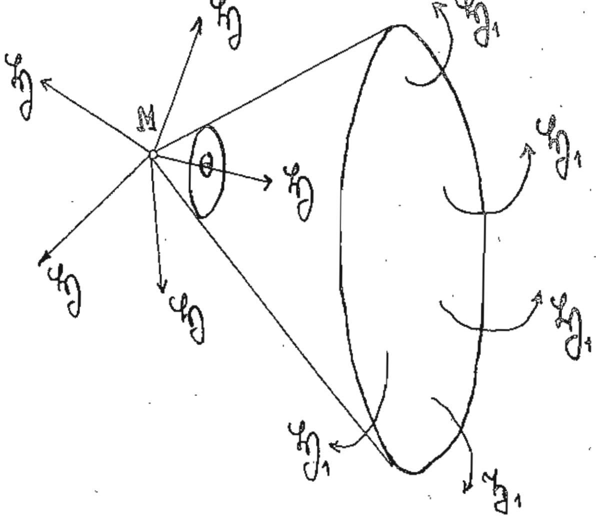
Закони индукције следоваће непосредно из услова: да је радња коју обављамо када помичемо магнет у магнетном пољу индуциране струје једнака радњи што ју сама та индуцирана струја обавља. Тако ће закони индукције бити непосредне последице закона о одржању енергије. Означимо ли радњу коју обављамо када помичемо магнет са A_1, а радњу што ју обавља индуцирана струја (или ствара у облику топлоте) са A_2, то мора постојати једначина

$$A_1 = A_2$$

та једнакост мора постојати у сваком произвољном интервалу времена, па је зато

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{dA_2}{dt}$$

Горњи изрази представљају нам радње у јединици времена па би било правилније назвати их ефектима. Формирајмо сада израз за радњу A_1. У то име уочимо магнетно поље што га изазива индуцирана струја интензитета J. То магнетно поље потпуно је еквивалентно магнетном пољу што би га изазвао један хомоген магнетни листић којега је контура индуцирана струја, а којега је интензитет



$$\tau = \frac{J}{c}$$

Скаларни потенцијал тога поља у произвољној тачки M једнак је, као што смо то у општој теорији физикалних поља доказали,

$$V = \tau\theta$$

где је θ просторни угао под којим се из тачке M види контура листића. Но ми смо у општој теорији поља доказали да је тај потенцијал U_1 једнак протицању кроз површину f листића што би га изазвао један једини извор у тачки M интензитета $-\tau$ (или понор интензитета τ). Означимо ли према томе са $\mathfrak{z}$ вектор изазван јединичним извором у тачки M, то је протицање тога вектора кроз површину f једнако

$$\int_f \mathfrak{z}\, df$$

Но ми имамо у тачки M извор интензитета $-\tau$, па ће зато протицање кроз површину f бити једнако

$$-\tau \int_f \mathfrak{z}\, df$$

Зато је

$$U_1 = -\tau\int_f \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} = -\frac{J}{c}\int_f \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f}$$

Вектор $\mathfrak{H}_1$ што га према томе изазива индуцирана струја једнак је

$$\mathfrak{H}_1 = -\operatorname{grad} U_1$$

Унесемо ли у поље вектора $\mathfrak{H}_1$ једно магнетско јединично оптерећење, то ће се на том оптерећењу указати пондеромоторна сила

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{H}_1$$

Померимо ли то оптерећење из тачке $\mathfrak{E}$ за величину $d\mathfrak{f}$, то је радња коју тиме обављамо једнака

$$-\mathfrak{H}_1\, d\mathfrak{f}$$

Знак − долази отуда што обављамо фактички радњу у оном случају када се вектор $\mathfrak{H}_1$ противи померању оптерећења у $\mathfrak{E}$ т.ј. када $\mathfrak{H}_1$ затвара са $d\mathfrak{f}$ један тупи угао. Таква елементарна радња вектора $\mathfrak{H}_1$ при померању јединичног оптерећења једнака је негативној промени потенцијала

$$\mathfrak{H}_1\, d\mathfrak{f} = -dU_1$$

Ово је основно правило механике и следује у основи из ове векторске једначине:

$$\int_0^M \mathfrak{E}\cdot d\mathfrak{f} = -(U_M - U_0)$$

Лева страна представља радњу на путу од тачке O до M. Диференцијалимо ли је по горњој граници, добијамо

$$\mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = -dU_M$$

Зато је радња коју обављамо када јединично магнетно оптерећење померимо за величину $d\mathfrak{f}_1$ у пољу вектора $\mathfrak{H}_1$ једнака

$$dA_1' = -\mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} = dU_1 = -\frac{J}{c}\, d\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f}$$

Ово је радња коју обављамо када јединично оптерећење у произвољну тачку поља помакнемо за дужину $d\mathfrak{f}$, но наш магнет не састоји се из једног концентрисаног јединичног оптерећења, него из бескрајно много таквих оптерећења. Сваки такав изоловани пол тога магнета обављаће при померању радњу dA_1 и изазвати вектор $\mathfrak{H}_1$. Ако све те радње суперпонирамо или како се при томе у једначини за dA_1' мења само вектор $\mathfrak{H}$, то ћемо је добити ако суперпонирамо векторе $\mathfrak{H}$. Радња при померању читавог магнета

$$dA_1' = -\frac{J}{c} d\int \mathfrak{H} df$$

но сада $\mathfrak{H}$ не значи више вектор изазван јединичним оптерећењем у произвољној тачки, но вектор изазван читавим магнетом. Једном речи $\mathfrak{H}$ значи поље магнета, зато је

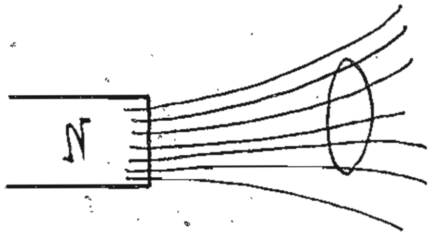
$$\frac{dA_1}{dt} = -\frac{J}{c}\frac{d}{dt}\int_f \mathfrak{H} df$$

Примедба: било би боље да смо тачку Е одмах идентификовали са тачком М јер је тачка М већ означавала произвољну тачку магнетског поља изазваног индуцираном струјом.

У последњој једначини представља израз

$$\frac{d}{dt}\int_f \mathfrak{H} df$$

промену векторских линија $\mathfrak{H}$ магнета које пролазе кроз површину f када магнет померимо. Конструишемо ли магнетско поље $\mathfrak{H}$ посматраног магнета помоћу векторских линија, то један известан број тих линија пролази кроз површину обухваћену секундарним кондуктором. Тај број n представља протицање тих линија кроз ту површину



$$n = \int_f \mathfrak{H} df$$

Помакнемо ли сада магнет, то ће се број линија које продиру површину f променити, па је та промена једнака

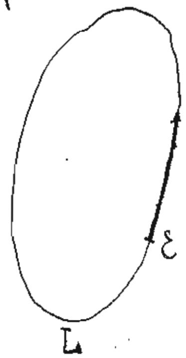
$$\frac{dn}{dt}$$

па је радња коју при томе обављамо у јединици времена једнака

$$\frac{dA_1}{dt} = -\frac{J}{c}\frac{dn}{dt}$$

Ова једначина изражава Faraday-ево правило: да је радња која се при померању магнета обавља пропорционална промени векторских линија које продиру површину f.

Користимо сада израз за радњу што ју у јединици времена обавља индуцирана струја. У јединици времена протече кроз произвољан пресек кондуктора ε множина електрицитета



$$\frac{de}{dt} = I$$

Ако је електрични вектор на посматраном месту $\mathfrak{E}$, онда се на ту померену множини електрицитета указује пондеромоторна сила

$$\mathfrak{F} = \frac{de}{dt}\mathfrak{E} = I\mathfrak{E}$$

Радња што ју у јединици времена то померање протичући кроз пресек ε обавља једнака је

$$\mathfrak{F}\,dl = I\mathfrak{E}\,dl$$

а радња што ју сва померања дуж читавог кондуктора обављају једнака је

$$\int_L \mathfrak{F}\,dl = I\int_L \mathfrak{E}\,dl$$

где интеграл треба узети дуж линије кондуктора. Зато је

$$\frac{dA_2}{dt} = I\int_L \mathfrak{E}\,dl$$

Ставимо ли изразе за $\frac{dA_1}{dt}$ и $\frac{dA_2}{dt}$ једнаке, то добијамо једначину

$$\int_L \mathfrak{E}\,dl = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_f \mathfrak{H}\,df$$

Ми смо до сада претпоставили да је медиум који окружава кондукторе и магнет етар. Ако је тај простор испуњен са медиумом који има магнетски пермеабилитет μ, онда ће се и магнетска индукција повећати пропорционално са μ, па ћемо у горњој једначини имати да уведемо место вектора $\mathfrak{H}$ вектор $\mathfrak{B}$, па тако добијамо једначину

$$\int_L \mathfrak{E}\,dl = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_f \mathfrak{B}\,df$$

Ово је друга Maxwell-ова једначина у интегралном облику. Како је по Stokes-овом правилу

$$\int_L \mathfrak{E}\,dl = \int_f \operatorname{rot}\mathfrak{E}\,df$$

то добијамо

$$\int_f \operatorname{rot}\mathfrak{E}\,df = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_f \mathfrak{B}\,df$$

Како ова једначина важи за произвољно f, то из ње следује

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$$

Ово је *друга главна Maxwell-ова једначина* у диференцијалном облику. Она важи за сваки део простора.

Према схватању старе теорије потребна је затворена секундарна жица да се појави индуцирана струја. Према схватању Maxwell-ове теорије та жица не мора бити затворена, а уопште је не мора ни бити, само ће се у том случају место струје у кондуктору показати диелектрична струја.

Изведемо ли на овој Maxwell-овој једначини лево и десно операцију div, то добијамо

$$\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{E}}_{0} = -\frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\operatorname{div}\mathfrak{B}$$

или

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = const.$$

Ако је према томе пре индукције магнетно поље $\mathfrak{B}$ било без извора т.ј. ако му је дивергенција била једнака нули, онда је за време читавог феномена

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$$

Показали смо да је поље перманентног магнета безизворно, па ће зато и у нашем случају поље вектора $\mathfrak{B}$ бити безизворно поље. Вектор $\mathfrak{E}$ изазван је индукцијом; његов ротор у овом случају не ишчезава, зато је поље и индуцираног вектора $\mathfrak{E}$ вртложно поље.

Налазе ли се у пољу индуциране струје електрична оптерећења н.пр. на кондукторима, то ће та оптерећења бити извори поља $\mathfrak{E}$, па ће у овом случају поље $\mathfrak{E}$ бити и поље извора и поље вртлога.

Сравнимо ли другу једначину Maxwell-ову са првом

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left(i + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}\right)$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$$

то нам на први поглед упадају јаке аналогије: вектору $\mathfrak{H}$ прве једначине одговара вектор $\mathfrak{E}$ друге једначине; вектору $\mathfrak{D}$ прве одговара вектор $\mathfrak{B}$ друге; но та аналогија поремећена је тиме што у другој једначини немамо вектор који би одговарао вектору $\mathfrak{i}$. То потиче отуда што немамо магнетских кондуктора, па зато електричној струји у кондуктору не одговара магнетна струја, док електричној струји у изолатору (диелектрикуму) $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ одговара магнетна струја $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ коју можемо, јер посматрамо промену вектора $\mathfrak{B}$ на једном одређеном месту, писати са знаком ∂ т.ј. $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$. Ту струју можемо назвати *правом магнетном струјом* и означимо са

$$\mathfrak{g} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

а како смо назвали правом електричном струјом израз

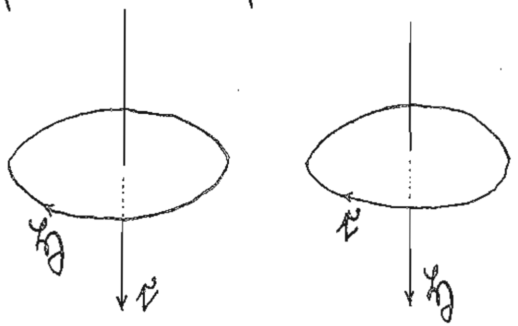
$$\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \mathfrak{c}$$

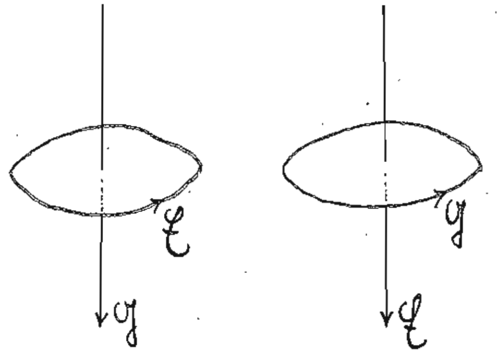
то можемо обе Maxwell-ове једначине писати у облику

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{c}$$

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\mathfrak{g}$$

Сада је аналогија обеју једначина потпуна; разлика је само у негативном знаку друге једначине. Тај знак потиче из Ampère-овог и Lenz-овог правила. Према Ampère-овом правилу изазива линеарна или кружна струја $\mathfrak{c}$ поље $\mathfrak{H}$ представљено следећим шемама; према Lenz-овом правилу ствара индуцирана струја такво магнетно поље које има противан смисао примарном магнетном пољу којим струју изазивамо и одатле потиче знак −. Зато права и круж-





на магнетна струја $\mathfrak{J}$ изазива поље вектора $\mathfrak{E}$ представљено предњим сликама.

О димензијама електричних величина.

Према Coulomb-овом закону привлаче се два електрична оптерећења e_1 и e_2 силом која је једнака

$$\mathfrak{P} = f\frac{e_1 e_2}{R^2}$$

где R означава одстојање тих оптерећења, а f један коефицијенат који зависи од медијума у коме се та оптерећења налазе. Узмемо ли по предлогу Gauss-овом да је за безваздушни простор

$$f = 1$$

онда је сила $\mathfrak{P}$ представљена изразом

$$\mathfrak{P} = \frac{e_1 e_2}{R^2}$$

па смо овим конвенцијом добили средство да меримо електрична оптерећења. Јединица електричног оптерећења биће према горњој једначини она множина која исту такву множину која је од ње удаљена за јединицу дужине одбија јединицом силе. Овакво мерење електричне множине зовемо електростатским мерењем. Оно нам даје не само јединицу електричног оптерећења него и димензије, јер ми према горњој једначини меримо електрично оптерећење једном силом и једном дужином. Димензије силе и дужине су нам познате, па према томе можемо одредити и димензију електричног оптерећења. Све механичке величине можемо мерити помоћу: дужине коју ћемо означити симболички са:

$$L$$

помоћу масе коју ћемо означити са:

$$M$$

и помоћу времена које ћемо означити са

$$T$$

У Механици меримо дужине са центиметром (cm), масе са грамом (gr), а време секундом (sec).

Тако је брзина количник пута и времена т.ј. дужине и времена, па је димензија брзине једнака

$$\dim v = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

Акцелерација је количник брзине и времена, па је зато њена димензија

$$\dim p = \frac{\dim v}{T} = LT^{-2}$$

Сила је продукат масе и акцелерације, па је њена димензија

$$\dim P = (\dim p) M = MLT^{-2}$$

Радња је продукат силе и дужине, па је њена димензија

$$\dim A = (\dim P) L = ML^2T^{-2}$$

Зато можемо из једначине

$$P = \frac{e_1 e_2}{R^2}$$

одредити димензију електричног оптерећења. Узмимо да је

$$e_1 = e_2 = e$$

онда је

$$P = \frac{e^2}{R^2}$$

или

$$e = R\sqrt{P}$$

па је зато димензија електричног оптерећења e једнака

$$\dim e = \dim R \sqrt{\dim P} = L\sqrt{ML^2T^{-2}} = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$$

Ово је димензија електричног оптерећења у електростатском систему.

По сличној методи можемо мерити магнетска оптерећења и одредити њихове димензије. Два магнетска оптерећења m_1 и m_2 привлаче се силом

$$P = f_1 \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

где f_1 зависи од пермеабилитета медијума у ком се та оптерећења налазе. Узмемо ли за безваздушни простор

$$f_1 = 1$$

онда добијамо

$$P = \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

Том конвенцијом добили смо средство да меримо магнетска оптерећења и одредимо њихове димензије. Јединица магнетског оптерећења биће према томе она множина која исту такву множину која се налази на одстојању јединице дужине одбија јединицом силе. Овај начин мерења магнетских величина зовемо *магнетним* или *електромагнетним*. Овај други назив више је уобичајен. Узмемо ли да је

$$m_1 = m_2 = m$$

то је

$$P = \frac{m^2}{R^2}$$

или

$$m = R\sqrt{P}$$

Ова једначина одређује димензију магнетног оптерећења која се може изразити помоћу димензија дужине и силе, па је

$$\dim m = \dim R\sqrt{\dim P} = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$$

Из димензије електричног оптерећења e можемо извести димензије за све остале електричне величине у електростатичном систему. Тако је н. пр. интензитет струје квоцијент електричног оптерећења и времена т.ј.

$$J = \frac{de}{dt}$$

па је зато димензија његова

$$\dim J = \frac{\dim e}{T} = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}$$

Густина струје i била је квоцијент интензитета и пресека

$$i = \frac{J}{q}$$

а како пресек има димензију површине, то је димензија од i једнака

$$\dim i = \frac{\dim J}{L^2} = M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-2}$$

Исто тако можемо одредити и димензију електричног вектора $\mathfrak{E}$ помоћу једначине

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{E}$$

где $\mathfrak{K}$ означава пондеромоторну силу и има димензију P. Зато је

$$\dim \mathfrak{E} = \frac{\dim P}{\dim e} = \frac{MLT^{-2}}{M^{\frac{1}{2}}L^{3/2}T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$$

На исти начин можемо одредити и димензије магнетних величина у електромагнетном систему. Тако се димензија магнетног вектора $\mathfrak{H}$ одређује из једначине

$$\mathfrak{K} = m\mathfrak{H}$$

па је

$$\dim \mathfrak{H} = \frac{\dim P}{\dim e} = \frac{MLT^{-2}}{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$$

Магнетне и електричне величине спојене су међусобно Maxwell-овим једначинама у којима смо увели константу c која претпоставља да су електричне величине мерене електростатски а магнетне електромагнетски. Прва главна Maxwell-ова једначина у интегралном облику гласи

$$\int_L \mathfrak{H}\,dl = \frac{4\pi}{c} J$$

У овој једначини мерена је величина $\mathfrak{H}$ електромагнетски а величина J електростатски. Метнемо ли у једначини димензије тих величина, што добијамо димензију за величину c, па је из горње једначине

$$\dim \mathfrak{H} \dim l = \frac{\dim J}{\dim c}$$

или

$$\dim c = \frac{\dim J}{(\dim \mathfrak{H})(\dim l)} = \frac{M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}}{M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1} \cdot L} = LT^{-1}$$

Из овог видимо да константа c има димензију брзине.

До сада смо мерили електричне множине електростатски а магнетске електромагнетски, но ми можемо и електричне множине мерити и електромагнетски на тај начин да у горњој једначини ставимо константу c једнаку јединици, па добијамо једначину

$$\oint_k \mathfrak{H}\, dl = 4\pi J_1$$

где J_1 означава интензитет струје мерен електромагнетски. Према овој једначини тај се интензитет извађа из магнетног вектора $\mathfrak{H}$. Овај начин мерења интензитета струје одомаћио се у пракси, јер се интензитети струја мере помоћу галванометра. Из горњих једначина следује да је

$$\frac{J}{J_1} = c$$

Било је

$$J = \frac{de}{dt}$$

па је

$$J_1 = \frac{de_1}{dt}$$

ако са e_1 означимо електрично оптерећење мерено електромагнетски. Из горњих једначина следује

$$\frac{J}{J_1} = \frac{de}{de_1}$$

или

$$\frac{e}{e_1} = c$$

Меримо ли према томе електрично оптерећење електромагнетски, па меримо ли га онда електростатски, то количник тих резултата даје константу c. На тај начин су 1856 год. Wilhelm Weber и Rudolf Kohlrausch одредили константу c, па дошли до веома важног резултата да је

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{cm}{sec} = 300000 \frac{km}{sec}$$

што значи да је константа c која

има димензију брзине једнака брзини светлости. У даљем развитку Maxwell-ове теорије показаћемо да су према схватању те теорије електрични, светлосни, и топлотни феномени исте природе, па ћемо наћи значење овоме резултату.

Из једначине

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{E}$$

која, ако меримо електричне величине електромагнетски, добија облик

$$\mathfrak{K} = e_1\mathfrak{E}_1$$

следује

$$e\mathfrak{E} = e_1\mathfrak{E}_1$$

или

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_1} = \frac{e_1}{e} = \frac{1}{c}$$

Док је, дакле, прије квоцијент електричних оптерећења у електростатском и електромагнетском систему био једнак константи c, то је сада квоцијент електричних вектора у електростатском и електромагнетском систему једнак $\frac{1}{c}$.

На исти начин може се доказати да су квоцијенти свих електричних или магнетских оптерећења мерених у једном и другом систему потенције константе c. Као што смо пре споменули одомаћио се у пракси обичај да се електричне величине мере електромагнетски, али су јединице електромагнетне системе изведене из механичке системе cm gr sec сувише мале или сувише велике, па за јачину струје, отпор кондуктора, електромоторне силе како се оне у пракси употребљавају добијамо у новом систему или сувише мале или сувише велике бројеве. Због тога је уведен практичан систем који се добија из електромагнетног на тај начин да се његове јединице помноже са једном потенцијом од 10. Те практичне јединице назване су именима великих научника на пољу електрицитета. Тако је практична јединица за интензитет струје ампере која се добија кад се јединица електромагнетне системе помножи са 10^{-1}. Практична јединица за мерење отпора је ом која се добија из електромагнетног система да се његова јединица помножи са 10^9. Практична јединица за мерење електромоторне силе или потенцијалне диференције је volt која се добија из електромагнетне јединице да се ова помножи са 10^8.

Ом-ов закон имао је у електромагнетном систему облик

$$U_1 - U_2 = IW$$

Хоћемо ли овај закон да изразимо у практичним јединицама то морамо први члан поделити са 10^8, први члан десне стране са 10^{-1}, а други члан десне стране са 10^9. Лако је увидети да ће једначина остати непромењена. Зато важи Ом-ов закон у овом облику и за практичне јединице.

Енергија у пољу електричне струје.

Замислимо једно електрично коло у коме смо изазвали индукцијом електричну струју интензитета I. Та струја нарасла је од интензитета 0 на вредност I. Она нека буде изазвана магнетним пољем $\mathfrak{H}$, које се такође постепено створило. Онда је потенцијал тога магнетног поља

$$U_1 = -\frac{I}{c}\int_f \mathfrak{H}\, df$$

Горњи интеграл представља протицање магнетног вектора $\mathfrak{H}$ кроз површину обухваћену струјом, па означимо ли

$$\int_f \mathfrak{H}\, df = n$$

то је

$$U_1 = -\frac{I}{c} n$$

У горњој једначини мерено је I електростатски. Уведемо ли величину I_1 која нам представља интензитет струје мерен електромагнетски, то је према прећашњем

$$I_1 = \frac{I}{c}$$

или

$$U_1 = -I_1 \cdot n$$

Да створимо магнетно поље које има тај потенцијал потребна је једна радња, па је према познатој једначини о одржању енергије

$$A + U_1 = \text{const}$$

Но како смо претпоставили да у почетку није било ни магнетног поља ни електричне струје, то је

$$A + U_1 = 0$$

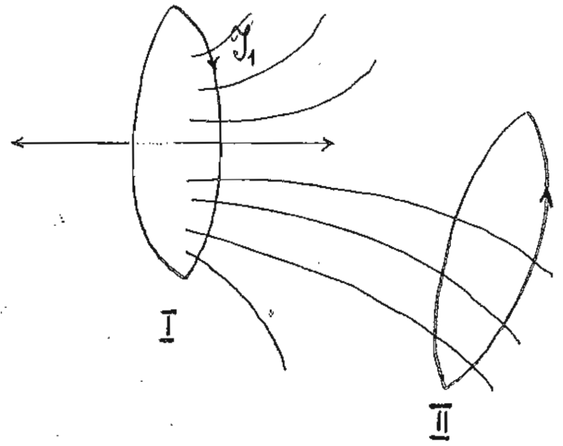
или

$$A = -U_1 = I_1 \cdot n$$

Зато можемо да кажемо: Радња која је потребна да изазове струју интензитета I_1 једнака је продукту од интензитета са протицањем вектора $\mathfrak{B}$ кроз површину обухваћену струјом.

Међусобна индукција.

За примену електрицитета много је важнији случај када се индуцирана струја место са магнетом изазива опет електричном струјом. Уочимо два кола I и II. Протече ли кроз коло I електрична струја интензитета $\mathfrak{I}_1$, то ће она створити око себе једно магнетно поље. Ефекат је према томе такав као да смо колу II примакли један магнет. Зато ће се у колу II по-



јавити индуцирана струја, па ће поље вектора $\mathfrak{E}$ према једној од превашњих једначина бити одређено

$$\int_l \mathfrak{E}\, dl = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_f \mathfrak{H}\, df$$

где линијски интеграл ваља узети по контури кола II, а површински по површини која је тим колом обухваћена. Тај површински интеграл представља нам протицање магнетног поља изазваног колом I кроз коло II, представља дакле број векторских линија које то коло продиру. Означимо ли тај број, то протицање са n_2, то је очито да ће то протицање бити пропорционално интензитету J_1; зато је

$$n_2 = M_{12} J_1$$

где M_{12} представља један коефицијенат који зависи од међусобне геометријске констелације кола I и II.

Замислимо сада да су опет оба кола без струје, па пустимо кроз коло II струју интензитета J_2. Онда ће та струја изазвати једно магнетно поље којега протицање кроз коло I нека буде n_1, па ће услед тога протицања бити у колу I индуцирана једна струја. Протицање n_1 пропорционално је интензитету струје J_2

$$n_1 = M_{21} J_2$$

где M_{21} означава један коефицијенат који зависи од међусобне конфигурације кола I и II. Означимо ту констелацију симболички са a; онда можемо казати да је

$$M_{12} = f(a)$$

Но коефицијенат M_{21} биће иста функција од a јер смо ми сасвим произвољно назвали кола I и II; зато је

$$M_{21} = f(a)$$

или

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Тај коефицијенат зове се *коефицијентом међусобне индукције*. Тај се коефицијенат може одредити рачунски или експериментално, па нам пређашње једначине дају базу за математичко израчунавање тога коефицијента, но ми се са тим питањем нећемо бавити.

Из пређашње једначине следује

$$\int_2 \mathfrak{E}\, dl = -\frac{1}{c}\frac{dn_2}{dt} = -\frac{1}{c} M \frac{dJ_1}{dt}$$

У овом једначини мерено је $\mathfrak{E}$ електростатски а протицање n_2 електромагнетски. И интензитет J_1 претпостављамо да је мерен електромагнетски. Уведимо зато и за вектор $\mathfrak{E}$ електромагнетску меру, па га означимо са $\mathfrak{E}_1$; онда је

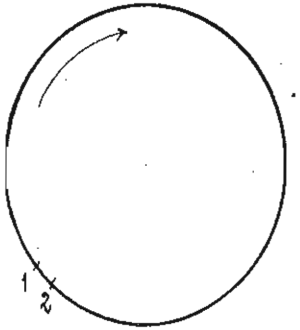
$$\frac{\mathfrak{E}}{c} = \mathfrak{E}_1$$

Ставимо ли ову вредност у пређашњу једначину, то добијамо

$$\int_2 \mathfrak{E}_1\, dl = -\frac{dn_2}{dt} = -M\frac{dJ_1}{dt}$$

- Линијски интеграл узет по колу II не ишчезава.

Замислимо два бескрајно блиска пресека у колу II, па узмимо линијски интеграл који добијамо ако дођемо из 1 у 2 обишавши цело коло. Онда је према пређашњем



$$V_1 - V_2 = \int_2 \mathfrak{E}_1\, dl$$

где $V_1 - V_2$ означава потенцијалну разлику између пресека 1 и 2. Та потенцијална разлика не ишчезава него је једнака

$$V_1 - V_2 = -\frac{dn_2}{dt} = -M\frac{dJ_1}{dt}$$

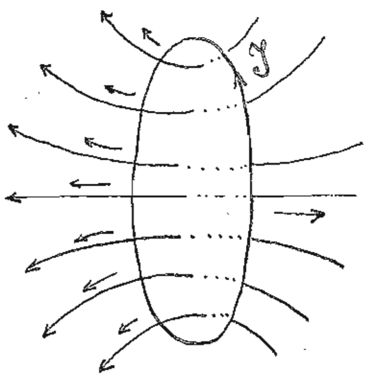
Такву потенцијалну разлику називали смо и електромоторном силом, па зато можемо да кажемо: са променом интензитета струје J_1 у колу I изазива се у колу II једна електромоторна сила K_2 која је једнака

$$K_2 = -\frac{dn_2}{dt} = -M\frac{dJ_1}{dt}$$

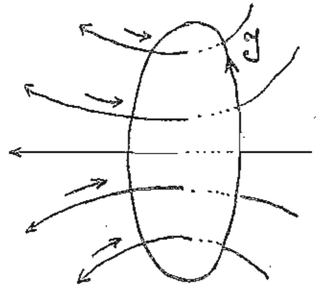
Из последње једначине се види да се та електромоторна сила само онда појављује ако се интензитет J_1 мења. Ако је он константан, онда је $\frac{dJ_1}{dt} = 0$, па према томе ишчезава и индуцирана (струја) електромоторна сила.

Сопствена индукција.

Уочимо једно коло електричне струје. Кроз то коло нека тече струја интензитета Ј. Она изазива у околини једно магнетно поље и услед тога једно протицање К тога поља кроз површину обухваћену колом. Мења ли се интензитет струје, то се мења и то протицање, а услед тога индуцира се у колу једна нова струја. Питајмо какав ће правац имати та струја ако интензитет Ј расте. Кад интензитет Ј расте, онда можемо замислити да се мењање магнетског поља дешава на тај начин да му додамо или суперпонирамо једно ново поље истога правца. То ново поље изазива према Lenz-овом закону једну струју која има противан правац од струје Ј а то значи да чим се интензитет Ј појачава, да се појављује једна струја коју тај интензитет слаби.



Ако интензитет Ј умањавамо, онда се мења и магнетно поље и то на тај начин као кад бисмо му додали једно магнетно поље противног правца. То поље индуцира у колу струју која има према Lenz-овом правилу исти правац као и струја Ј, зато свако слабљење струје Ј изазива једну индуцирану струју која јача струју коју мења.



Протицање магнетног

векторског поља кроз површину обухваћену струјом пропорционално је интензитету струје т.ј.

$$n = LJ$$

L називамо коефицијентом сопствене индукције. Из пређашњег следује да се мењањем протицања n или интензитета J у колу индуцира једна електромоторна сила

$$\mathcal{E} = -\frac{dn}{dt} = -L\frac{dJ}{dt}$$

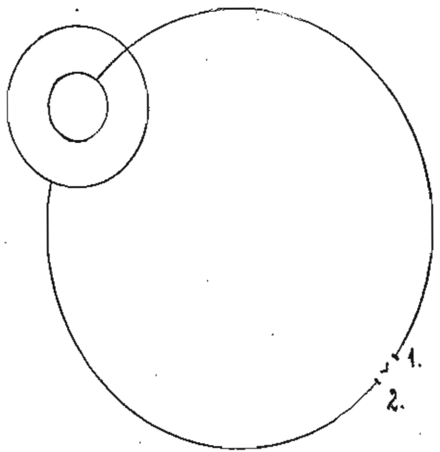
Коефицијенат L има димензију дужине па је у пракси уведена једна мера за коефицијенат која је једнака 10^9 cm. Она се назива Henry а Немци ју често пута називају и Erdquadrant зато што је једнака квадранту меридијана. Коефицијенат L одређује се такође експериментално или рачунски. Он ће бити веома велики ако је жица савијена у облику соленоида, јер онда свака магнетска линија протече толико пута кроз површину обухваћену струјом колико завоја има соленоид. Зато ће у овом случају због једначине

$$n = LJ$$

L бити веома велико.

Ако поље у околини струје није испуњено ваздухом, као што смо до сада претпоставили, него медијумом којега је магнетни пермеабилитет једнак μ, у место вектора h морамо увести вектор b који је μ пута већи. Зато ће у овом случају протицање, па према томе и коефицијенат L бити μ пута већи.

Спојимо ли крајеве 1. и 2. једнога кола у које је уплетена једна електромоторна сила, то је се у тој жици појавила електрична струја. То је исти ефекат као кад струју појачавамо. За-



то ће се у том моменту поред струје која се у колу указује услед електромоторне силе појавити услед властите индукције струја противног правца која ће прву струју да слаби. Због тога неће електрична струја одмах у почетку имати интензитет који би одговарао према величини електромоторне силе и величини отпора жице а који је регулисан Ом-овим законом. Она ће ту величину интензитета постићи тек после извесног времена које је у осталом веома кратко. Прекинемо ли коло у ком тече електрична струја на тај начин да крајеве 1 и 2 опет раставимо, то ћемо добити исти ефекат као кад слабимо струју. Значи да ће се у њој појавити услед властите индукције струја истог правца као што је била и прва струја. Та струја може бити тако јака да се између крајева 1 и 2 појави варница. Струја која се услед сопствене индукције појављује у колу када га склопимо увек је слабија од струје тога кола без властите индукције. Зато при склапању кола има струја увек позитиван смисао само је у почетку слабија.

Ohm-ов закон за променљиве струје.

Ако струја која кроз једно коло тече није константна, него ако се њен интензитет I мења, то свака промена тога интензитета изазива у томе колу једну електромоторну силу која је једнака

$$K_2 = -L\frac{dI}{dt}$$

ако је у само коло уплетена једна електромоторна сила н. пр. у облику једног галванског елемента електромоторне силе K_1, то ће целокупна електромоторна сила K бити једнака

$$K = K_1 + K_2 = K_1 - L\frac{dI}{dt}$$

Претпоставимо ли да Ohm-ов закон

$$K = IW$$

важи и за променљиве струје, то је у овом случају Ohm-ов закон изражен једначином

$$K_1 - L\frac{dI}{dt} = WI$$

Овај закон важи за читаво коло.

Посматрамо ли један део кола између пресека 1 и 2 у којима су потенцијали U_1 и U_2, то Ohm-ов закон добија у овом случају облик

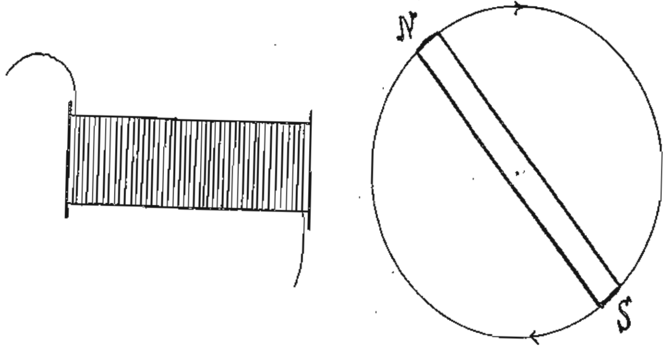
$$U_1 - U_2 + K = WI$$

или

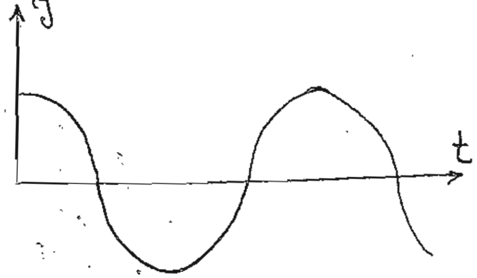
$$U_1 - U_2 + K_1 - L\frac{dI}{dt} = WI$$

Наизменичне струје.

Ротира ли пред жицом савијеном у облику соленоида један магнет тако да његов северни и јужни пол наизменично долазе пред тај соленоид, то ће се тим кретањем индуцирати у овоме једна струја која ће, као што се лако увиђа, мењати без престанка свој интензитет и смисао. Пренесемо ли интензитет и смисао струје као ординату а време као апсцису, то ће интензитет такве струје имати облик синусоиде, па ће моћи бити представљен једначином



$$I = I_0 \cos \frac{2\pi}{T} t$$



Ми смо узели као почетну тачку за време момент кад интензитет струје достиже своју максималну вредност.

Овакве струје зову се алтернирајуће или наизменичне струје, I_0 зове се њеном амплитудом а T периодом. По истеку периоде добива интензитет увек исту вредност као и у почетку периоде. Реципрочна вредност периоде, дакле онај број који нам казује колико пута у јединици времена струја постизава исте вредности т.ј. број

$$n = \frac{1}{T}$$

назива се фреквенцијом алтернирајуће струје. За производњу таквих струја конструишу се у пракси специјалне машине, па фреквенција таквих машина износи 20 - 100 ил више у секунди т.ј. интензитет струје учини у секунди толико таласа.

Ове струје веома су важне за електротехнику због тога што и даду лако трансформисати. Пустимо ли једну такву струју кроз један калем око кога је обавијен други један калем, то ће примарна струја која се непрестано мења индуцирати у другом калему опет једну сличну алтернирајућу струју. Интензитет те друге струје зависи према пређашњем од протицања вектора $\mathfrak{H}$ изазваног првом струјом кроз други калем. То протицање пропорционално је интензитету прве струје, а како је интензитет ове синусоида, то ће и протицање а и интензитет друге струје имати облик синусоиде, само обе струје неће имати исту фазу. Док једна од њих постиже максимум интензитета, дотле је интензитет друге раван нули, што значи да се фазе разликују за $\frac{1}{4}$ периоде.

Ми можемо знатно протицање кроз други калем произвољно увећати тиме да овим другом калему додамо велики број завоја, па ће протицање бити пропорционално броју завоја. На тај начин моћи ћемо тако удесити да ова друга струја има произвољно увећану потенцијалну диференцију или електромоторну снагу јер је ова била

$$k = -\frac{dn}{dt}$$

па увећавањем n увећава се и k. Друга струја имаће већу напетост али мањи интензитет, јер је радња струје, као што смо пре извели

$$A = kJ$$

а радња прве струје мора бити према принципу о одржању енергије једнака радњи друге струје. Зато ако увећамо интензитет друге струје, то се тиме умањава њена напетост и обратно. Као што видимо алтернирајуће струје су особито незгодне за трансформацију енергије.

За преношање електричне енергије потребно је струју трансформисати тако да има велику напетост а мали интензитет. Мали интензитет чини да је губитак енергије услед претварања у топлоту мали, а има и ту особину да се за преношање могу употребити танке жице. Тако трансформисана струја не увађа се, када је превалила пут, директно у рецептор, јер би конструкција таквих рецептора била нерационална а и директна употреба такве струје са великом напетошћу је опасна. Зато се та струја пред улаз у рецептор трансформише опет у струју мале напетости а већег интензитета. За конструкцију тих трансформатора или рецептора такве инсталације употребљава се принцип Теслиног ротирајућег магнетног поља, зато ћемо се са теоријом тога поља поближе упознати.

Теорија Теслиног ротирајућег магнетног поља.

Обавијемо ли око двоструког прстена К изоловану жицу која је савијена у две кратке спирале S_1 и S_2, па пустимо да кроз њу протече струја, то ће та струја изазвати једно магнетско поље којега векторске линије имају облик као што је у слици означено. То поље је у средини скоро хомогено и има вертикалан правац. Метемо ли према томе у овај прстен један магнет, то ће он заузети вертикалан положај. Ако је струја која протиче кроз жицу алтернирајућа т.ј. ако мења хармонијски свој интензитет по закону

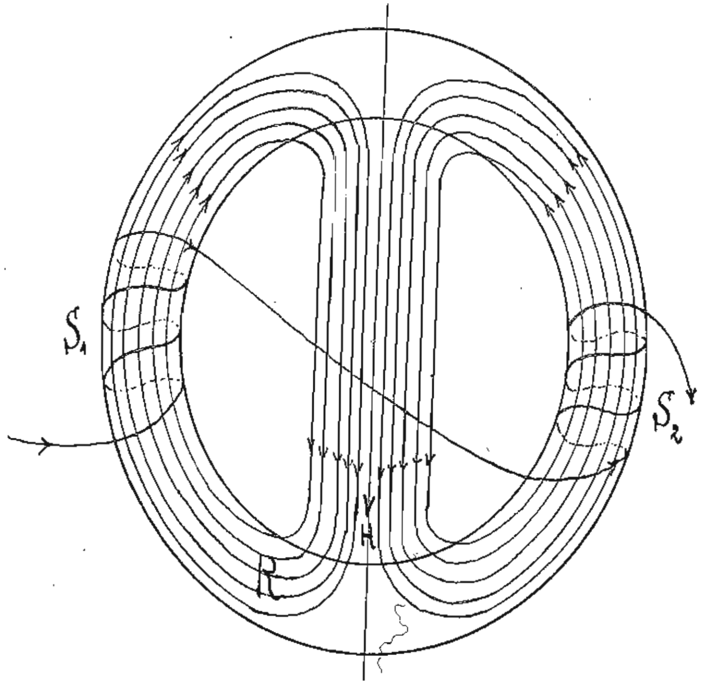
$$J = J_0 \cos \frac{2\pi}{T} t$$

то ће се и интензитет H магнетног вектора H у средини поља мењати хармонично, дакле према закону

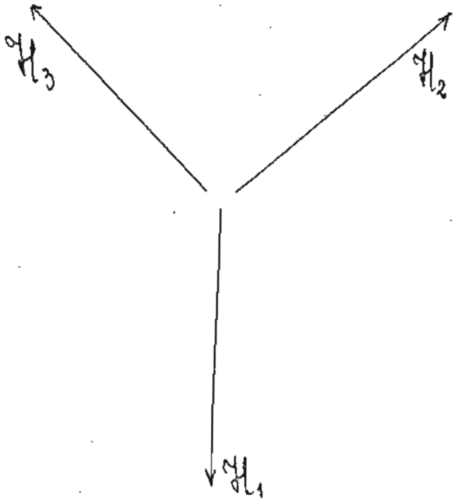
$$H = a \cos \frac{2\pi}{T} t$$

a означава максималну позитивну вредност интензитета H магнетног вектора. Тај ће се интензитет мењати, постајати негативан тако да ће се и правац магнетног вектора обрнути, али ће магнетни вектор бити непрестано вертикалан.

Замислимо сада да смо око таквог прстена К обавили три пара спирала од којих први пар и-



зазива вертикалан вектор H_1, а



друга два пара векторе H_2 и H_3 којих правци затварају са првим углове од 120°. Ако пустимо сада кроз сва три пара спирала алтернирајуће струје које имају исту амплитуду J_0 и исту периоду T, али од којих друга заостаје у фази иза прве за 1/3 периоде, а трећа за 2/3 периоде, онда су интензитети тих трију струја дати једначинама

$$J_1 = J_0 \cos \frac{2\pi}{T} t$$
$$J_2 = J_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{3} \right)$$
$$J_3 = J_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{3} \right)$$

Све три струје имају исту амплитуду J_0 и периоду T. Прва струја достиже своје максималне позитивне вредности у моментима

$$t = 0, T, 2T, 3T, \dots$$

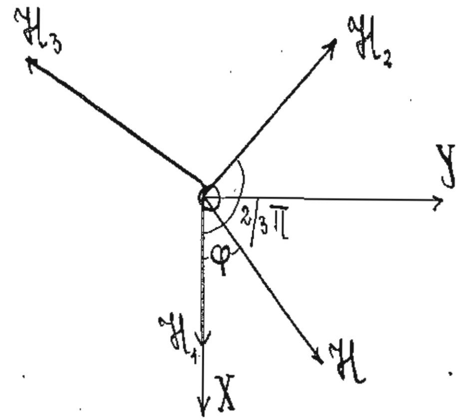
друга у моментима

$$t = T/3,\ 1\tfrac{1}{3}T,\ 2\tfrac{1}{3}T, \dots$$

а трећа у моментима

$$t = 1\tfrac{2}{3}T,\ 2\tfrac{2}{3}T,\ 3\tfrac{2}{3}T, \dots$$

Друга струја заостаје за 1/3 иза прве а трећа за 2/3. Интензитети тих трију струја мењају се без престанка, па ће се због тога мењати и величине вектора H_1, H_2 и H_3 који не мењају до душе свој правац али ће њихова резултанта $\mathfrak{H}$ (H) мењати свој правац па можда и свој интензитет H. Питајмо дакле за резултанту $\mathfrak{H}$. У то име одаберимо правац вектора H_1 за осу апсциса а правац који у тачки O стоји нормално на тај правац за осу ордината. Онда



ће компонента H_x вектора $\mathfrak{H}$ бити једнака

$$H_x = H_1 + H_2\cos\frac{2}{3}\pi + H_3\cos\frac{2}{3}\pi =$$

$$= I_0\left\{\cos\frac{2\pi}{T}t + \cos\frac{2}{3}\pi\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{3}\right) + \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{1}{3}\right.\right.\right.$$

према једначини

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

је даље

$$H_x = I_0\left\{\cos\frac{2\pi}{T}t + 2\cos\frac{2}{3}\pi\cos\frac{2\pi}{T}t\right\}$$

а како је

$$\cos\frac{2}{3}\pi = -\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

то је

$$H_x = I_0\left\{\cos\frac{2\pi}{T}t + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{T}t\right\}$$

или

$$H_x = 3/2\, I_0\cos\frac{2\pi}{T}t$$

Исто тако је

$$H_y = H_2\sin\frac{2}{3}\pi - H_3\sin\frac{2}{3}\pi =$$

$$= I_0\sin\frac{2}{3}\pi\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{3}\right) - \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{1}{3}\right)\right.$$

а према једначини

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

је

$$H_y = 2I_0\sin^2\frac{2}{3}\pi\sin\frac{2\pi}{T}t$$

а како је

$$\sin\frac{2}{3}\pi = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

то је

$$H_y = 2I_0\frac{3}{4}\sin\frac{2\pi}{T}t$$

или

$$H_y = 3/2\, I_0\sin\frac{2\pi}{T}t$$

Интензитет резултанте $\mathfrak{H}$ дат је једначином

$$H = \sqrt{H_x^2+H_y^2} = \frac{3}{2}I_0\sqrt{\cos^2\frac{2\pi}{T}t + \sin^2\frac{2\pi}{T}t} = 3/2\, I_0$$

– Резултанта H не мења свој интензитет.

Угао φ што га резултанта затвара са осом X дат је једначином

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{H_y}{H_x} = \mathrm{tg}\frac{2\pi}{T}t$$

или

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}t$$

Угао φ је пропорционалан времену, зато резултанта $\mathfrak{H}$ ротира у равни цртежа једнаком брзином око тачке O. У времену $t=T$ опише потпун круг, па је зато угловна брзина ω дата једначином

$$\omega T = 2\pi$$

или

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

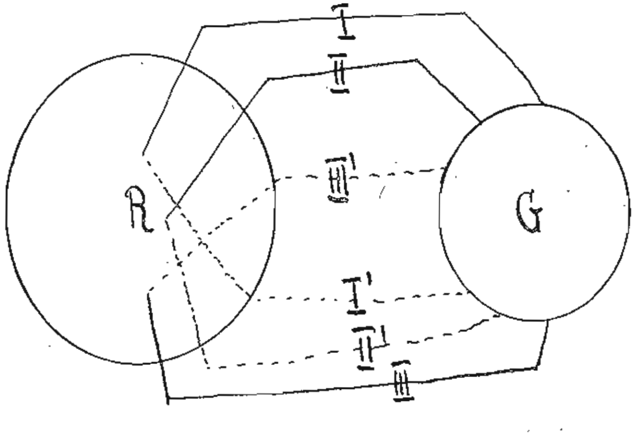
Зато се ово поље зове <u>ротирајуће магнетно поље</u>.

<u>Тесла</u> је конструисао свој мотор који се оснива на овом принципу 1887 године и пријавио за патент исте године. Маја 1888 држао је јавно предавање у Њујорку о свом мотору. <u>Ferraris</u> је незнајући за Теслин проналазак марта 1888 год. публиковао једну радњу која садржава исти принцип. Теслин приоритет у овој ствари је неоспоран али свакако и Ferraris има заслуга, јер је независно од Тесле исту ствар нашао.

<u>О Теслином мотору и моторима који су конструисани на сличном принципу.</u>

Показали смо како се помоћу три алтернирајуће струје може изазвати једно магнетно поље које непрестано ротира једнаком угловном брзином. Метнемо ли у такво поље, у пре описани прстен, један кондуктор, н. пр. опет један прстен обавијен изолованим жицама које чине затворена кола или један бубањ на исти начин обавијен (Немци зову такве справе <u>Anker</u>), то ће се пресецање магнетних линија изазваних спољним прстеном кроз затворена кола анкер-а без престанка мењати, јер магнетно поље ротира. Због тога ће се у жицама анкер-а појавити индуциране струје које имају према Ленз-овом правилу такав смисао да анкер изазива магнетно поље које се одбија од примарнога. Ако је према томе анкер покретан, ако н. пр. може да ротира око једне осе, то ће се он покренути, а како примарно магнетно поље без престанка ротира и изазива индуциране струје, то ће се анкер без престанка окретати, а у њему ће тећи без престанка затворене струје. Спојимо ли са тим анкером точак за (транспацију) трансмисију, то смо добили један електромотор. Први електромотор на томе принципу конструисао је Н. Тесла. Овакав мотор и сви који су на сличан принцип конструисани представљају најсавршенију машину за трансформацију електричне енергије у механичку. Сви мотори који су пре тога били конструисани на принципу обичне струје и Грамовог прстена имали су четке за контакт а на овим четкама расипа се врло електрична енергија. Сем тога оне се убрзо покваре и истроше. Код Теслиног мотора немамо таквих четака, те се у анкер и не уводи споља никаква струја.

На први мах изгледа да су за Теслин мотор потребне шест жица којима се струја довађа и одводи јер имамо три засебне струје. Претпоставимо дакле да се у генератор G стварају те три струје, па да се помоћу жица I-I', II-II', III-III' довађају у рецептор R који представља један такав мо-



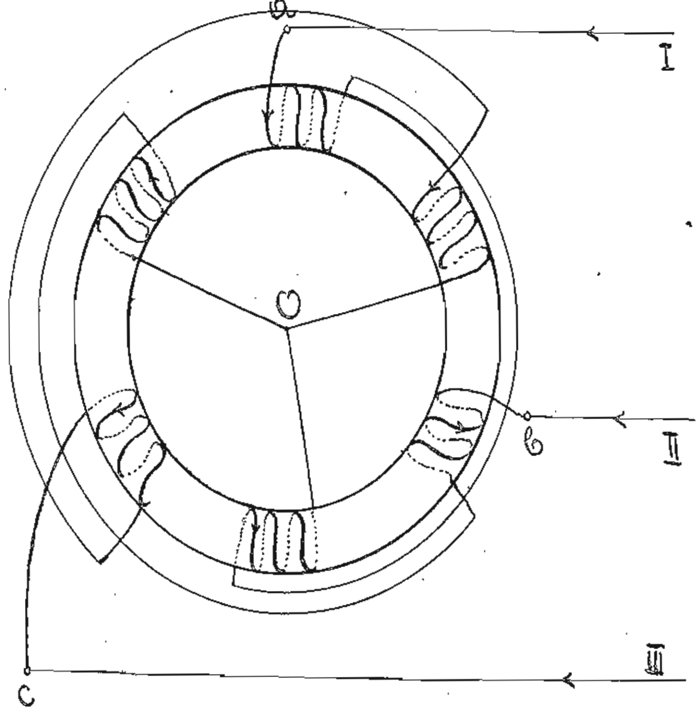
тор са трофазном струјом. Прва струја доводи се жицом I а одводи жицом I', друга жицом II а одводи жицом II', трећа се доводи жицом III а одводи жицом III'. Замислимо сада да смо жице I', II' и III' положили тако једну поред друге да сачињавају један комбиновани кондуктор, па питајмо колики ће бити интензитет у томе комбинованом кондуктору. Тај интензитет I биће једнак збиру интензитета свих трију струја, дакле

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 + I_3 = \\
&= I_0\left\{\cos\frac{2\pi}{T}t + \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{3}\right) + \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{1}{3}\right)\right\} = \\
&= I_0\left\{\cos 2\pi\frac{t}{T} + 2\cos\frac{2\pi}{T}t\,\underbrace{\cos\frac{2\pi}{3}}_{-\frac{1}{2}}\right\} = \\
&= I_0\left\{\cos\frac{2\pi}{T}t - \cos\frac{2\pi}{T}t\right\} = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Зато се може овај комбиновани кондуктор, јер у њему не тече у ствари никаква струја, сасвим испустити, па су за преношење електричне енергије довољне само три жице. Те три жице спојене су у мотору у једној тачки O од које би требао да иде комбиновани кондуктор ка генератору. У тој тачки O се те три струје тако рећи поништавају.

Код обичне струје имали би само две жице али у овом случају према пређашњем интензитет магнетног поља једнак је $3/2\, I_0$. За димензионирање тих жица од важности је вредност I_0 јер она представља максимални интензитет струје, па се те жице конструишу тако као кад би кроз њих текла струја I_0 и стварала у ствари магнетно поље које одговара интензитету $3/2\, I_0$.

Следећа слика представља шематски како се у такав један мотор увађају те три струје и како се оне спајају у једну заједничку тачку O. Прва струја доводи се жицом I до тачке $\underline{a}$, па се одатле као што је у слици означено одводи до тачке O пошто је била обавијена у две кратке диаметралне стране, као што је то потребно за извођење ротирајућег магнетног поља. На исти начин доводи се струја II до тачке в па се одводи до тачке О; исто се тако доводи струја III до тачке с па се одводи до тачке О.



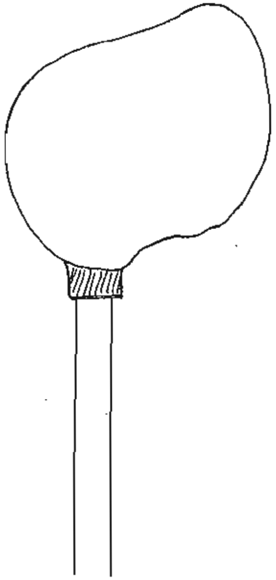
Примена алтернирајуће струје у електротехници која је почела конструкцијом Теслиног мотора отворила је нову епоху у тој струци, јер се алтернирајуће струје електрична енергија најрационалније пренаша на велике дистанције, пошто оне задовољавају најсавршенију трансформацију струје малене напетости у велике напетости и обратно и дозвољавају најрационалнију трансформацију електричне енергије у механичку.

V О електричним осцилацијама и таласима

Сем алтернирајућих струја са чијом смо се теоријом већ упознали познајемо још једну врсту променљивих струја које се указују при истражњавању електричних кондуктора, па ћемо се са теоријом тих феномена сада упознати.

Електростатски капацитет једног кондуктора.

Уочимо један изоловани електрични кондуктор произвољног облика на коме се налази тотално електрично оптерећење e. Из електростатике знамо да ће се то оптерећење раширити тако у кондуктору да његова површина постане (површина) еквипотенцијална површина електричног поља изазваног тим оптерећењем. Повећамо ли сада то тотално оптерећење у раз-



мери 1:n, то ће се оптерећење сваког дела тога кондуктора повећати у истој тој размери. То ћемо најлакше на овај начин увидети: Потенцијал поља изазваног електричним оптерећењем e, дакле пре увећања оптерећења, представљен је једначином

$$U_1=\frac{1}{4\pi}\int\frac{q\,dV}{r}$$

где q означава оптерећење елемента запремине dV, а r величину радиус-вектора. Овај интеграл ваља узети преко свих оптерећења поља, а њихов тотални износ је e. За тај потенцијал знамо да је на површини кондуктора константан.

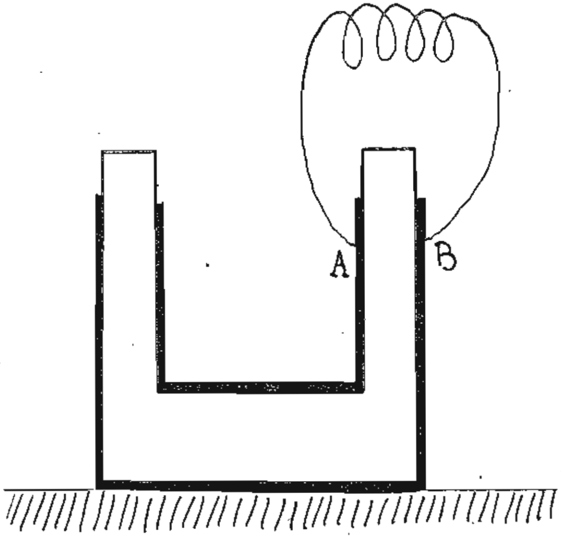
Увећамо ли сада оптерећење сваког па и најмањег дела површине кондуктора у размери 1:n, то ће се и потенцијал у читавом пољу увећати у истој тој размери као што следује из горње једначине у којој се увећавањем оптерећења величине dV и r не мењају. Зато ће и у овом случају потенцијал бити на површини кондуктора константан, што значи да нова величина оптерећења задовољава опет услове равнотеже. Због тога ће и наступити такав распоред оптерећења који је у сваком делу кондуктора n-пута већи од пређашњег, једном речи електрично оптерећење e и потенцијал површине (т.ј. потенцијал у једној тачки површине који је на читавој површини константан) расту у истој размери, па квоцијент тих двеју величина

$$\frac{e}{U_1}=K$$

не зависи од оптерећења него само од геометријског облика кондуктора и облика и положаја кондуктора који се налазе у близини посматраног кондуктора, јер њихова близина мења такође распоред електричног оптерећења. Ту величину K зовемо електростатским капацитетом кондуктора, па се он одређује експериментално или рачунски. Ми смо ју извели рачунски за случај кугличног кондензатора.

Једначине лорда

Уочимо један електрични кондензатор н. пр. једну Лајденску бочу чија је спољна облога спојена са земљом. Нека се на унутрашњој облози налази тотално електрично оптерећење Е. Спојимо ли сада унутрашњу и спољашњу облогу жицом АВ, то ће у њој настати померање електричних оптерећења т. ј. у њој ће се појавити електрич-



на струја. Док кроз жицу АВ тече струја у кондуктору, дотле између тачака В и А тече кроз стално струја у изолатору. Коефицијенат властитите индукције жице АВ нека буде L; он се може знатно увећати тиме да се жица савије у облику спирале, тако да се коефицијенат властите индукције који потиче од пута ВА у диелектрикуму не мора узети у обзир. Означимо електрично оптерећење унутрашње облоге у времену t, које бројимо од момента кад је истраживање почело, са e, а потенцијал унутарње облоге у исто време са U_1, спољне облоге са U_2, а њихову диференцију

$$U_1 - U_2 = U$$

отпор жице АВ са W, то за промењиву струју која тече кроз жицу АВ важи према пређашњем Ohm-ов закон

$$U_1 - U_2 - L\frac{dJ}{dt} = WJ \qquad 1)$$

или

$$U - L\frac{dJ}{dt} = WJ \qquad 1)$$

Означимо ли са K капацитет посматраног кондуктора, то је према пређашњем

$$\frac{e}{U} = K \qquad 2.)$$

Истраживањем се мења и бројитељ и именитељ леве стране али њихов количник остаје непромењен.

У горњој једначини представља J интензитет струје која тече кроз жицу, дакле ону множину електричног оптерећења која у јединици времена протече кроз пресек жице; зато је

$$J = -\frac{de}{dt} \qquad 3)$$

Знак – потиче отуда што када струја тече оптерећење унутрашње облоге опада, па је опадање тога оптерећења у јединици времена једнако интензитету струје. Из пређашњег следује

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{d^2e}{dt^2} \qquad 4.)$$

па ставимо ли вредности 2.), 3.) и 4.) у једначину 1.) ,то добијамо

$$\frac{e}{R}+L\frac{d^2e}{dt^2}+W\frac{de}{dt}=0$$

или

$$\frac{d^2e}{dt^2}+\frac{W}{L}\frac{de}{dt}+\frac{1}{RL}e=0 \qquad 5.)$$

Ову једначину ваља интегрисати. Како ћемо при интеграцији ове једначине наћи на експоненцијалне функције базе e природних логаритама, то ћемо, да не би побркали ознаке, електрично оптерећење e означити са q, па место једначине 5.) добијамо ову једначину

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{W}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RL}q=0 \qquad 5^x.)$$

Један партикуларни интеграл ове једначине добијамо ако ставимо

$$q=Ce^{kt}$$

одакле је

$$\frac{dq}{dt}=kCe^{kt}=kq$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}=k^2Ce^{kt}=k^2q$$

Ставимо ли ове вредности у горњу једначину то добијамо

$$q\left(k^2+\frac{W}{L}k+\frac{1}{RL}\right)=0$$

па ће једначина бити задовољена ако је израз у загради раван нули т.ј. ако је k једнако једну од следећих двеју вредности

$$k_1=-\frac{W}{2L}+\sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2}-\frac{1}{RL}} \qquad 6.)$$

$$k_2=-\frac{W}{2L}-\sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2}-\frac{1}{RL}} \qquad 7.)$$

Из ова два корена можемо саставити општи интеграл једначине 5.)

$$q=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t} \qquad 8.)$$

или

$$q=e^{-\frac{W}{2L}t}\left\{C_1e^{t\sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2}-\frac{1}{RL}}}+C_2e^{-t\sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2}-\frac{1}{RL}}}\right\} \qquad 8^x.)$$

Константе овог интеграла C_1 и C_2 треба тако одредити да задовољавају иницијалне услове феномена, а ти су ови: У времену $t=0$ је тотално оптерећење унутарње облоге кондензатора једнако $\mathcal{E}$; у том моменту не тече још никаква струја кроз жицу, па је зато интензитет те струје $I=-\frac{de}{dt}$ раван нули. Зато су иницијални услови:

$$\text{за } t=0 \left\{ \begin{array}{l} q = \mathcal{E} \\ \frac{dq}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Први од ових услова примењен на једначину 8.) даје

$$\mathcal{E} = C_1 + C_2 \qquad 9.)$$

Из једначине 8.) следује

$$\frac{dq}{dt} = R_1 C_1 e^{R_1 t} + R_2 C_2 e^{R_2 t} \qquad 10.)$$

Други иницијални услов примењен на једначину ову даје

$$0 = R_1 C_1 + R_2 C_2 \qquad 11.)$$

Из једначина 9.) и 11.) можемо одредити константе C_1 и C_2, па добијамо

$$C_1 = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \mathcal{E}$$

$$C_2 = \frac{-R_1}{R_2 - R_1} \mathcal{E}$$

или

$$C_1 = \frac{-\frac{W}{2L} - \sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2} - \frac{1}{RL}}}{-2\sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2} - \frac{1}{RL}}} \mathcal{E}$$

$$C_2 = \frac{\frac{W}{2L} - \sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2} - \frac{1}{RL}}}{-2\sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2} - \frac{1}{RL}}} \mathcal{E}$$

или

$$C_1 = \frac{\mathcal{E}}{2}\left\{1 + \frac{W}{2L} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2} - \frac{1}{RL}}}\right\} \qquad 12.)$$

$$C_2 = \frac{\mathcal{E}}{2}\left\{1 - \frac{W}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2} - \frac{1}{RL}}}\right\} \qquad 13.)$$

чиме су константе, па и сам интеграл одређени.

Апериодична и осцилаторна испражњавања кондензатора

Пређашња једначина даје два разна случаја према томе да ли је израз под кореном позитиван или негативан.

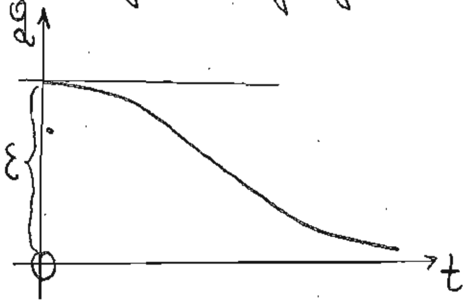
1° Случај. Нека је

$$\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2} > \frac{1}{RL}$$

или

$$W^2 > \frac{4L}{R}$$

ако је овај услов испуњен, онда се једначина 8*) може представити једном кривом која има овакав облик као што је у слици



за $t=0$ је $\varepsilon=0$ а како је и $\frac{dq}{dt}=0$ то је тангента криве у тачки у којој она сече осу ордината хоризонтална. Диференцијални квоциенат $\frac{dq}{dt}$ иначе је увек негативан, па зато се та крива асимтотски приближује оси апсциса, јер је за $t=\infty$ $q=0$. Овакво испражњавање називамо апериодичним. Оптерећење унутарње облоге испражњава се без престанка, те ће се испражњавање теоријски свршити тек после бесконачног времена, но у ствари ће то оптерећење после врло кратког времена постати неосетно. Услов за овакво испражњавање је према горњим једначинама: да је отпор жице W веома велики т.ј. већи од $\sqrt{\frac{4L}{R}}$. Ако је тај отпор мањи, онда добијамо

2° Случај, ако је даље

$$\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2} < \frac{1}{RL}$$

или

$$W^2 < \frac{4L}{R}$$

Онда је корен што долази у пређашњим једначинама имагинаран, па ставимо

$$\sqrt{\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2} - \frac{1}{RL}} = \sqrt{-1}\cdot\varphi = i\varphi$$

где је φ једна реална величина, па интеграл $8^{x})$ добија овај облик

$$q = e^{-\frac{W}{2L}t}\{C_1 e^{i\varphi t} + C_2 e^{-i\varphi t}\}$$

но како је

$$e^{i\varphi t} = \cos\varphi t + i\sin\varphi t$$

$$e^{-i\varphi t} = \cos\varphi t - i\sin\varphi t$$

то тај интеграл добија овај облик

$$q = e^{-\frac{W}{2L}t}\{(C_1+C_2)\cos\varphi t + i(C_1-C_2)\sin\varphi t\}$$

Из једначина 12.) и 13.) следује да је

$$C_1 + C_2 = \varepsilon$$

$$C_1 - C_2 = \varepsilon\frac{W}{2L}\frac{1}{i\varphi}$$

па је зато у овом случају интеграл једначине

$$q = e^{-\frac{W}{2L}t}\left\{\cos\varphi t + \frac{W}{2L\varphi}\sin\varphi t\right\}\varepsilon \qquad 14.)$$

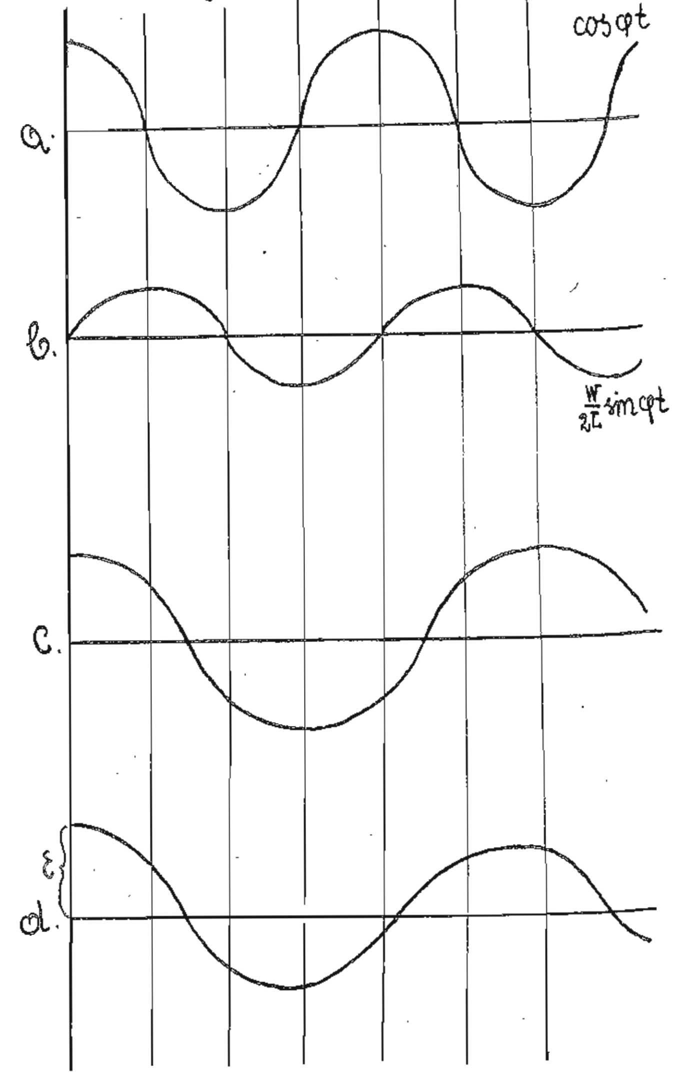
Оптерећење q представљено је у овом случају једном тригонометријском функцијом помноженом са једном експоненцијалном. Кад експоненцијалне функције не би било, онда би то оптерећење било представљено једном таласастом линијом. Компоненте те таласасте линије представљене су сликама а. и в., а сама та линија сликом с. Периода те таласасте линије T била би

$$\varphi t = 2\pi$$

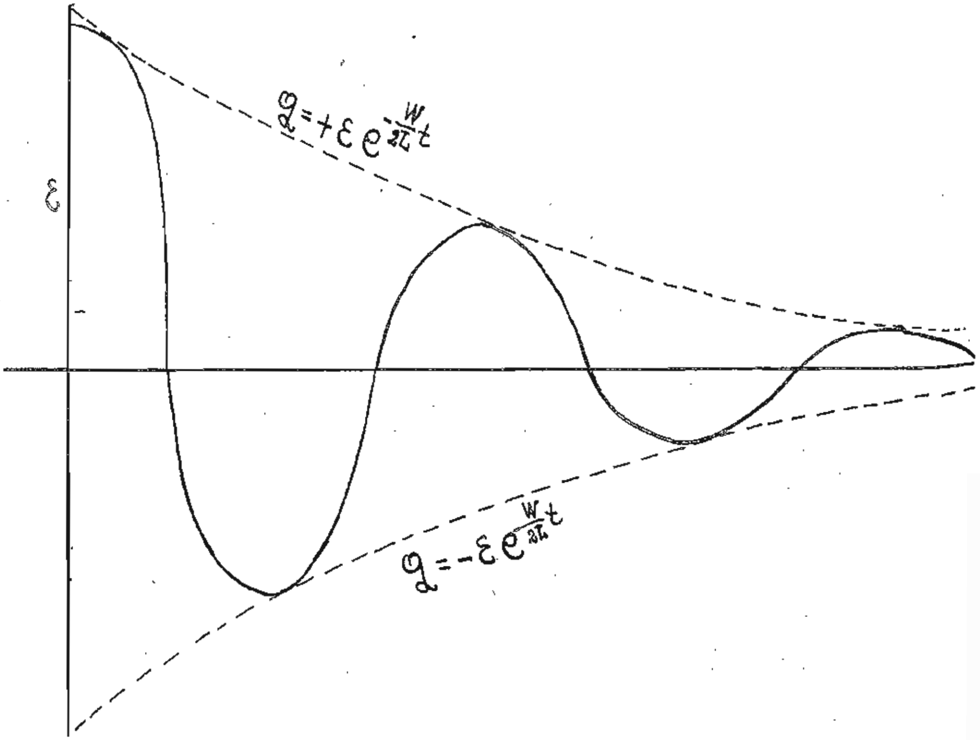
одакле

$$T = \frac{2\pi}{\varphi}$$

Но ординате те криве ваља помножити



са једном експоненцијалном функцијом. Услед тога ће амплитуде те криве бивати све мање и мање, јер експоненцијална функција опада са временом. Дужине таласа те криве која је представљена у слици d. остаће исте као и пре т.ј. периода таласа биће опет једнака $T = \frac{2\pi}{\varphi}$. Како је



$$\cos\varphi t + \frac{W}{2L\varphi}\sin\varphi t = \pm 1$$

што се дешава увек по износу једне периоде T, онда је ордината криве

$$q = \pm\varepsilon e^{-\frac{W}{2L}t}$$

те тачке криве које одговарају тим вредностима горње тригонометријске функције леже на кривама. На тај начин смо добили јасну слику феномена. Оптерећење унутарње облоге ће да опада, но кад достигне вредност нула, онда ће се унутарња облога пунити електрицитетом противног знака до једне извесне множине која је мања од иницијалне множине ε. Онда ће настати опет опадање те множине до нуле и пуњење облоге са електрицитетом истог знака као што га је имала облога у почетку. Тај феномен ће се непрестано понављати и имати према томе осцилаторан карактер. Амплитуде или максималне множине оптерећења у појединим интервалама биваће са временом све мање и мање. Периода остаје непромењена.

Исто што вреди за оптерећење ε вреди и за интензитет струје J јер је било

$$J = - \frac{dq}{dt}$$

па дакле

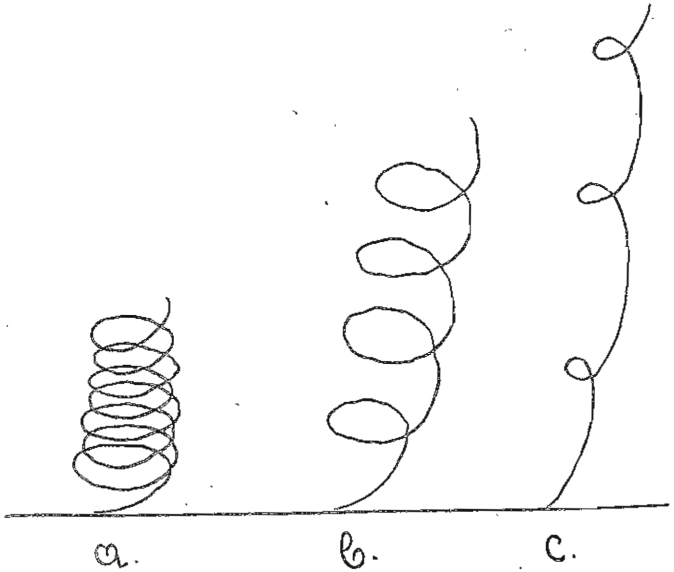
$$J = -\varepsilon e^{-\frac{W}{2L}t} \left\{ -\frac{W}{2L} \cos \varphi t - \frac{W^2}{4L^2\varphi} \sin \varphi t - \varphi \sin \varphi t + \frac{W}{2L} \cos \varphi t \right\}$$

или

$$J = \varepsilon e^{-\frac{W}{2L}t} \left(\frac{W^2}{4L^2\varphi} - \varphi \right) \sin \varphi t$$

Интензитет је представљен једном функцијом која је продукат из једне тригонометријске и једне експоненцијалне функције. Зато ће и интензитет бити представљен сличном кривом као и оптерећење q. Крива ће бити таласаста крива са све нижим и нижим таласима исте дужине.

Maxwell-ову интерпретацију електричних феномена, која се своди на напето стање у диелектрикуму, можемо овде врло згодно употребити за тумачење ових појава. Имамо ли једно еластично тело н. пр. једну еластичну спиралу која се налази у једном отпорном медиуму па нагомиламо ли у тој спирали једну множину потенцијалне енергије тиме што ју стиснемо и доведемо у напето стање, као што је означено у слици а то можемо то стање сравнити са напетим стањем у диелектрикуму пре испражњавања кондензатора. Оптеретимо ли ову спиралу, то ће се она почети истезати, па ће се њена потенцијална енергија претворити у кинетичну енергију (сл. в.) Ако је отпор медиума веома велики, онда ће се та жица асимптотски приближавати своме



положају у ком се она налази у ненапетом стању, асимптотски зато, што у истој мери у којој њено кретање бива све спорије и спорије би ће и отпор медијума све слабији и слабији, па медијум даје само онда отпор када се стрела у истин креће и зато не може стречити да стрела дође макар после бескрајног времена до свог ненапетог положаја. Сличан је случај са испражњ вањем кондензатора у случају 1° т ј. са апериодичним испражњавање Ако отпор медијума није тако вел ки, онда ће жица достићи убрзо положај у ком се налази у ненапетом стању, али ће га достићи са једном извесном брзином, па ће у то положају имати у себи још једну множину кинетичке енергије, па ће због тога прећи преко тог положаја као што се види из слике с. Но прешавши тај положај она долази у напето стање у противном смислу но неће достићи амплитуду напетости исту као што је имала у положају а., јер се један део кинетичне енергије троши на савлађивање отпора медијума, исто тако као што се при испражњавању кондензатора један део електричне кинетичне енергије троши на загрејавање жице. Ова два феномена су према томе слична и дају Maxwell-овој интерпретацији о напетости медијума лепу слику.

Ми смо реципрочну вредност периоде назвали фреквенцијом, па је она

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

или

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LK} - \frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2}}$$

Hertz је постигао осцилације са фреквенцијом од 6×10^8, а сада се постижу фреквенције од 5×10^{10}.

О електричним таласима.

Основне једначине Maxwell-ове биле су

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{i}$$
$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\mathfrak{g}$$

при чему је $\mathfrak{i}$ права електрична струја која се састоји из две компоненте

$$\mathfrak{i} = i + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$$

Први део i десне стране представља струју у кондуктору, а други $\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$ струју у изолатору. $\mathfrak{g}$ је магнетна струја

$$\mathfrak{g} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$$

Ако је посматрани медиум диелектрикум константе ε и магнетног пермеабилитета μ, онда у њему први део праве струје $\mathfrak{i}$ ишчезава, јер је она везана на кондукторе, па је зато у овом случају

$$\mathfrak{i} = \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$$

Но како је

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}$$

и

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$$

то Maxwell-ове једначине добијају у овом случају овај облик

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}$$
$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} \qquad 1.)$$

Ове једначине нам дају зависност вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ један од другог и од времена. Интеграција њихова даће нам слику електричних феномена у изолатору. Да једначине 1.) интегришемо методама анализе, потребно је да им дамо скаларни облик. Означимо ли у то име компоненте вектора $\mathfrak{H}$ са: $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$, $\mathcal{H}_z$, а компоненте вектора $\mathfrak{E}$ са: $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, то горње једначине можемо према правилима векторске анализе заменити са овим:

$$\text{rot}\,\mathcal{H} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{H}_x & \mathcal{H}_y & \mathcal{H}_z \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{c}\left\{\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} i + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} j + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} k\right\}$$

$$\text{rot}\,\mathcal{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & \mathcal{E}_z \end{vmatrix} = -\frac{\mu}{c}\left\{\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} i + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} j + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t} k\right\}$$

Развијемо ли ове изразе па ставимо ли чланове леве стране који имају фактор i једнаке члановима десне стране са истим тим фактором, онда добијамо место две векторске једначине следеће шест скаларне

$$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} \qquad 2.)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t}$$

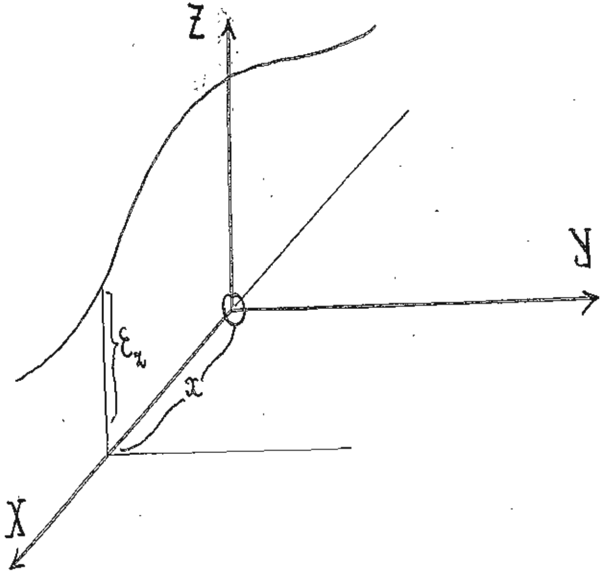
Ове једначине ваља интегрисати. Ми ћемо се ограничити на један специјалан случај, на којем се могу врло јасно растумачити феномени ширења електричних таласа, а интеграција општих случајева следује по истој методи као и интеграција тога специјалног случаја.

Ширење равних електричних таласа.

Посматрано поље вектора $\mathfrak{E}$ нека буде такове природе, да је у свакој тачки тога поља вектор $\mathfrak{E}$ паралелан оси Z нашега координатног система, а све равнине које секу нормално осу X тога система нека има у свима својим тачкама исту вредност вектора $\mathfrak{E}$. Ону површину која садржава у себи величине исте вредности зовемо површином таласа зато је у овом случају површина таласа равна и нормална на осу X. Онда је у том случају

$$\varepsilon_x=0 \qquad \varepsilon_y=0 \qquad \varepsilon_z=f(x,t)$$

ε_z је функција само од x а не од y и z, јер смо казали да је у равнини нормалној на X вредност вектора $\mathfrak{E}$ константна. Ако поље није перманентно него ако се мења са временом као што смо претпоставили, онда зависи вектор $\mathfrak{E}_z$ кога можемо сада једноставности ради да означимо са ε. Феномене што се дешавају у таквом пољу добићемо ако помоћу једначина 2) израчунамо ε као функцију од x и од t. Једначине 2) прелазе у овом случају у ове:



$$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = 0 \qquad 3.)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \qquad 3.)$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

Диференцирамо ли пету једначину по x то добијамо

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \qquad 4.)$$

Из четврте једначине следује да је

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

јер $\mathcal{E}$ не зависи од y. Отуда

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

Диференцирамо ли трећу једначину по t, то добијамо

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \qquad 5.)$$

но како је

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{\partial H_x}{\partial t}}_{=0}\Big)$$

то једначина 5.) прелази у једначину

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \qquad 6.)$$

Ако сада из једначина 4.) и 6.) елиминишемо H_y, то добијамо једначину

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \qquad 7.)$$

Интеграција ове једначине даје нам $\mathcal{E}$ као функцију од x и t. Ова једначина има исти облик као и једначина која нам даје ширење звука кроз цилиндричну цев или еластични штап. Та је једначина у теоријској физици много испитивана и ми ћемо сад прећи на њену дискусију.

Ако је $f_1(\alpha_1)$ једна произвољна функција од α_1, а њена прва два извода $f_1'(\alpha_1)$ и $f_1''(\alpha_1)$, онда добијамо један партикуларни интеграл једначине 7.) кад ставимо

$$\mathcal{E} = f_1(\alpha_1)$$

а

$$\alpha_1 = x + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t$$

т.ј.

$$\varepsilon = f_1\left(x + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right) \qquad 8.)$$

јер је у том случају

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} f_1'(\alpha_1)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} f_1''(\alpha_1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = f_1'(\alpha_1)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = f_1''(\alpha_1)$$

Ставимо ли ове вредности у једначину 7.), то добијамо

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu} f_1''(\alpha_1) = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} f_1''(\alpha_1)$$

– Једначина 7.) је задовољена каква год била функција f_1; главно је да x и t долазе једно поред другог у истом облику као у α_1. Израз 8.) представља дакле један партикуларни интеграл једначине 7.). Један други партикуларни интеграл те једначине добићемо ако ставимо

$$\varepsilon = f_2(\alpha_2)$$

где је

$$\alpha_2 = x - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t$$

дакле

$$\varepsilon = f_2\left(x - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right) \qquad 9.)$$

при чему је f_2 опет једна произвољна функција од α_2, јер је у овом случају

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} f_2'(\alpha_2)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} f_2''(\alpha_2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = f_2'(\alpha_2)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = f_2''(\alpha_2)$$

Ставимо ли ове вредности у једначину 7.) то ће она бити опет задовољена, па је дакле и 9.) један партикуларни интеграл те једначине. Ова два партикуларна интеграла можемо спојити заједно па добијамо као интеграл једначине 7.)

$$\mathcal{E}=f_1\left(x+\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right)+f_2\left(x-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right)$$

функције f_1 и f_2 треба тако одредити да задовољавају иницијалне услове.

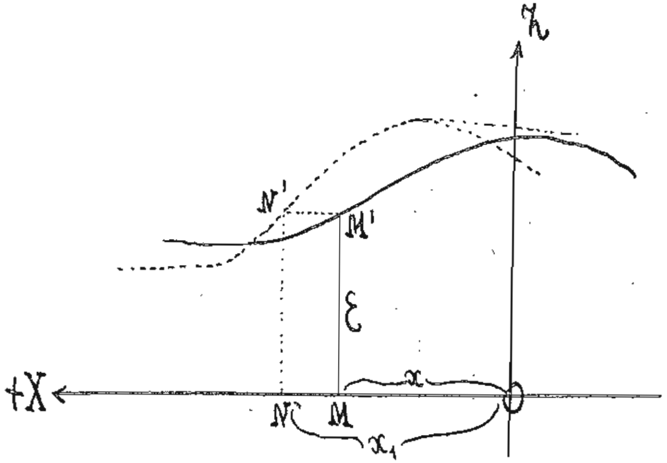
Испитујмо прво ова два партикуларна интеграла сваки за себе, па почнимо са другим

$$\mathcal{E}=f_2\left(x-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right)$$

Ако је $t=0$ т.ј. у иницијалном моменту, онда је распоред електричне силе карактеризован једначином

$$\mathcal{E}=f_2(x)$$

Нека нам следећа слика представља распоред електричне силе која је функција само од x. Онда је вредност те силе у тачки M апсцисе па и у свима тачкама које леже у равнини која у M стоји нормално на X представљена ординатом MM' а једнака



$$\mathcal{E}=f_2(x)$$

У произвољном моменту t биће вредност електричне силе у тачки M једнака

$$\mathcal{E}=f_2\left(x-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right)$$

но у истом том моменту t биће вредност електричне силе на апсциси x_1 за коју постоји релација

$$x_1-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t=x$$

бити

$$\mathcal{E}=f_2\left(x_1-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right)=f_2(x)$$

У тачки N која има апсцису x_1 имаће у времену t електрична сила исту ону вредност коју је имала у времену $t=0$ у тачки M. Како је x и t било произвољно, то добијамо распоред електричне силе у времену t на тај начин да горњи дијаграм који одговара времену $t=0$ помакнемо за дужину MN на лево. У времену t помако се тај дијаграм за дужину

$$x_1 - x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t$$

што помицање пропорционално је времену, зато се тај дијаграм креће на лево константном брзином

$$v = \frac{x_1 - x}{t} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

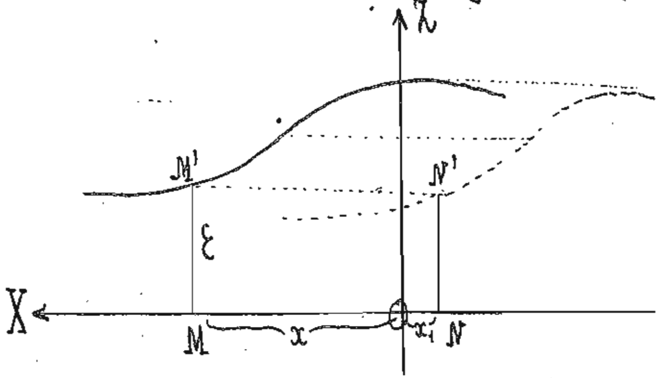
Уочимо ли интеграл

$$\mathcal{E} = f_1\left(x + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right)$$

то за њега важи следеће: У времену t=0 дат је распоред електричне силе једначином

$$\mathcal{E} = f_1(x)$$

па нека нам следећи дијаграм представља тај распоред. Онда је у произвољној тачки M вредност електричне силе дата једначином



$$\mathcal{E} = f_1(x)$$

а представљена ординатом MM'. У времену t биће вредност електричне силе на том месту једнака

$$\mathcal{E} = f_1\left(x + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right)$$

но у тачки N чија је апсциса x_1 дата релацијом

$$x_2 + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t = x$$

биће вредност електричне силе у времену t једнака

$$\mathcal{E} = f_1\left(x_1 + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = f_1(x)$$

дакле иста као што је била у времену t=0 у тачки M. Како је x и t произвољно то добијамо распоред електричне силе у времену t на тај начин да горњи дијаграм помакнемо за дужину MN на десно. Брзина којом се тај дијаграм помиче на десно једнака је

$$\frac{x - x_1}{t} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = v$$

Електричне пертурбације шире се према томе константном брзином v на лево и на десно. Ако су те пертурбације осцилаторне природе т.ј. ако се електрична сила у тачки O мења осцилаторно са периодом T, онда ће се она мењати осцилаторно у свима тачкама осе X. Пут што га такве пертурбације превале у времену T даје нам дужину таласа λ, па је зато дужина таласа дата једначином

$$vT=\lambda$$

или

$$\lambda=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}T$$

Електричне осцилације шире се у овом случају у равним таласима у правцу X т.ј. нормално на равнину таласа константном брзином v.

Једначине 3.) дозвољавају да испитамо и ширење магнетних таласа. Ако пре пертурбације т.ј. док је поље имало електростатски карактер није било у њему никаквих перманентних магнета, онда поље није било уједно и магнетско, па је у моменту $t'=0$

$$H_x=H_y=H_z=0$$

Чим наступе пертурбације т.ј. померање електричних оптерећења, одмах ће поље постати уједно и поље магнетног вектора H. Но како из четврте и шесте од једначина 3.) следује да су компоненте H_x и H_z независне од времена т.ј.

$$\frac{\partial H_x}{\partial t}=0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t}=0$$

то ће онда непрестано компоненте H_x и H_z бити равне нули

$$H_x=0 \qquad H_z=0$$

Магнетски вектор биће дакле непрестано паралелан оси Y, па зато можемо ставити

$$H_y=H$$

Онда трећа и пета од једначина 3.) добијају овај облик

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial E}{\partial x}$$

Диференцирамо ли прву од ових двеју једначина по x, а другу по t, то добијамо

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial x\partial t}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t}$$

Елиминацијом из ових једначина $\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t}$ добијамо

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

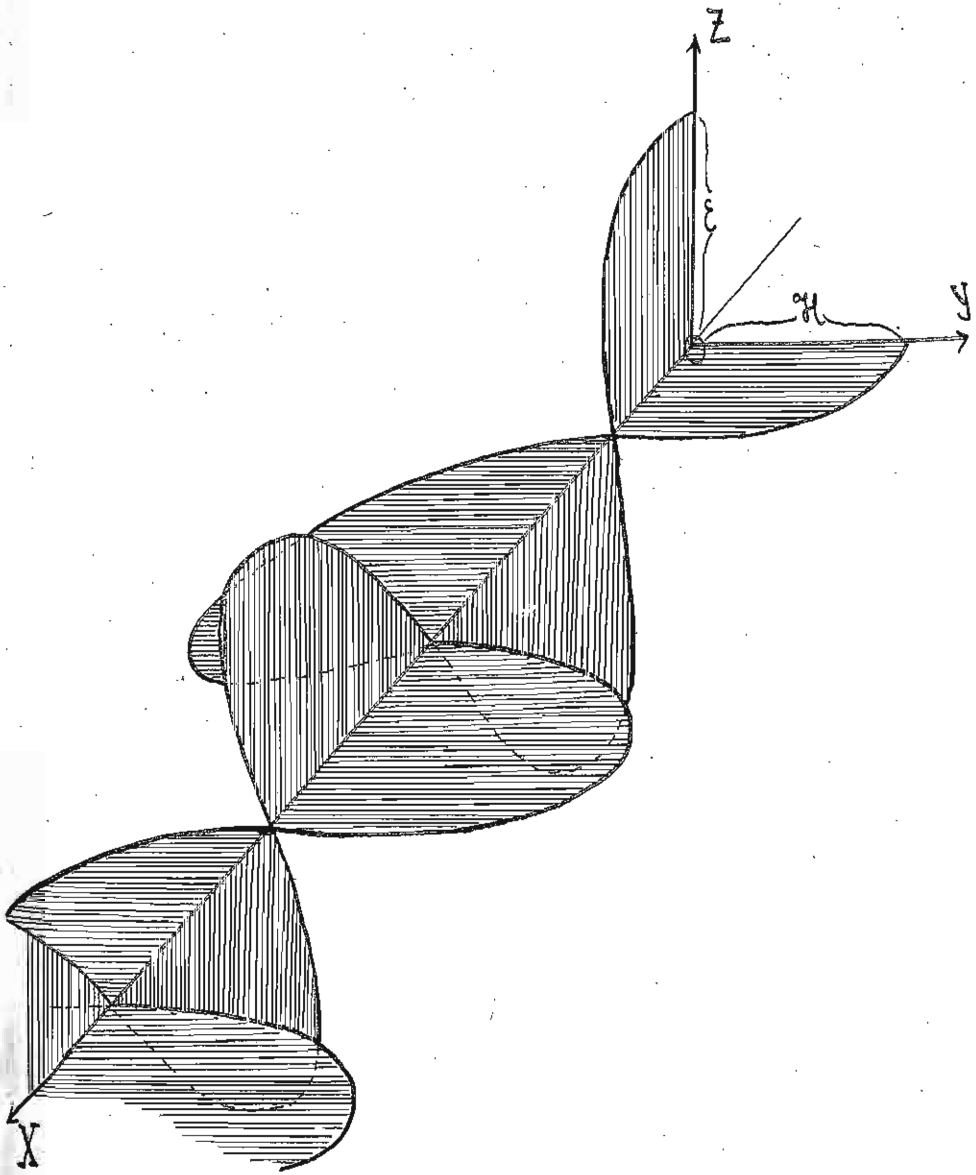
или

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

Ова једначина има исти облик као једначина за пертурбације електричних таласа само у место величине E долази овде величина H. Док је вектор E био паралелан оси Z дотле је овде вектор H паралелан оси Y. Магнетни таласи шире се према томе истом брзином

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

у истом правцу X, само магнетни вектор стоји нормално на електричном. Следећа слика представља ширење таквих електричних и магнетних таласа.



Ако се такви електрични и магнетни таласи шире у етеру за који је

$$\varepsilon = 1 \quad \mu = 1$$

или ако се шире у ваздуху за који су

такође горње величине врло блиске јединици, онда је брзина v којом се ти таласи шире

$$v = c$$

дакле једнака брзини светлости.

Ширење електромагнетних таласа у кондуктору.

Ако посматрамо медијум у коме се шире електро-магнетни таласи није изолатор него кондуктор, онда у Maxwell-овим једначинама

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\, i \qquad 1.)$$

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\,\mathfrak{g}$$

прва струја $\mathfrak{i}$ има само један члан

$$\mathfrak{i} = i$$

јер други члан који представља струју у диелектрикуму ишчезава. Па како је према Ohm-овом закону у диференцијалном облику

$$i = \sigma \mathfrak{E}$$

где σ означава проводљивост кондуктора, и како је

$$\mathfrak{J}=\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$$

а

$$\mathfrak{B}=\mu\mathfrak{H}$$

дакле

$$\mathfrak{J}=\mu\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}$$

то Maxwell-ове једначине добијају у овом случају следећи облик

$$\text{rot}\,\mathfrak{H}=\frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}$$
$$\text{rot}\,\mathfrak{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} \qquad 2.)$$

Напишемо ли ове једначине у скаларном облику то добијамо

$$\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial z}=\frac{4\pi\sigma}{c}\mathcal{E}_x$$
$$\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial x}=\frac{4\pi\sigma}{c}\mathcal{E}_y$$
$$\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial y}=\frac{4\pi\sigma}{c}\mathcal{E}_z$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial z}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial t}$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial x}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial t}$$

Претпоставимо као и прије да је вектор $\mathfrak{E}$ паралелан оси Z т.ј. да је

$$\mathcal{E}_x=0 \quad \mathcal{E}_y=0$$

па да тај вектор зависи само од времена и од апсцисе x т.ј.

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_z=f(x,t)$$

Онда једначине 3) добијају овај облик

$$\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial z}=0$$
$$\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial y}=\frac{4\pi\sigma}{c}\mathcal{E}$$
$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial t}=0 \qquad 4.)$$
$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial t}=\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x}$$
$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial t}=0$$

3.) Диференцирамо ли трећу по t а пету по x то добијамо

$$\frac{\partial^2\mathfrak{H}_y}{\partial y\partial t}=\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}$$
$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial^2\mathfrak{H}_y}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}$$

а одатле

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \qquad 5)$$

Ова једначина има исти облик као једначина за провођење топлоте кроз бескрајно раширену плочу. Као и топлота, тако се и овде шире електро-магнетни таласи у кондуктору веома ослабљено т.ј. они бивају апсорбовани од кондуктора.

Електро-магнетска теорија светлости

Ми смо законе ширења електро-магнетских таласа могли извести из основних Maxwell-ових једначина само зато, што је он увео у њих појам струје у диелектрикуму

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

Без тога појма небисмо могли извести законе о пропагацији електро-магнетних таласа. Како је струја у диелектрикуму једна од главних карактеристика Maxwell-ове теорије, то са експерименталном потврдом егзистенције такове струје стоји и пада Maxwell-ова теорија. У доба када је Maxwell своју теорију конутирао (1865 год.) нису никакви експериментални резултати доказивали егзистенцију такве струје у диелектрикуму, зато је уважање његова појма било у оно доба једна чиста хипотеза која се није ослањала ни на какве експерименте. Али је Maxwell имао довољно научничке смелости да га недостатак таквих резултата није није уздржао, него је он тврдио да такви електро-магнетни таласи који следују из његове теорије морају постојати, да се морају у етеру ширити брзином светлости, па да и сама светлост није ништа друго него ширење таквих електро-магнетних таласа.

Резултат да се електро-магнетни таласи шире истом брзином као и светлост без сумње је једна јака потврда Maxwell-ове теорије. Питајмо сада како се резултати који следују из Maxwell-ове електро-магнетске теорије светлости слажу са опажањем. По Maxwell-овој теорији била би брзина којом се светлост шири у једном произвољном диелектрикуму једнака

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Ми смо доказали да је пермеабилитет код свих диелектрикума веома близак јединици. Он се разликује од јединице осетно само код феромагнетских тела, а та тела као кондуктори не долазе у обзир када говоримо о ширењу светлости у диизолатору. Зато можемо у горњу једначини ставити

$$\mu=1$$

па добијамо да је брзина светлости у диелектрикуму диелектричне константе ε

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

или

$$\frac{c}{v}=\sqrt{\varepsilon}$$

Ова једначина даје нам однос брзине светлости у етеру и у посматраном изолатору. Тај однос назива се у Оптици апсолутним експонентом преламања светлости и обележава са ν; дакле

$$\frac{c}{v}=\nu$$

па зато следује из пређашње једначине

$$\nu=\sqrt{\varepsilon}$$

или

$$\nu^2=\varepsilon$$

Ова једначина која казује да је за сваки изолатор квадрат експонента преламања светлости једнак диелектричној константи зове се Maxwell-ова релација

Пре него што приступимо испитивању како се та Maxwell-ова релација слаже са опажањима, навешћемо још један резултат који следује из Maxwell-ове теорије. Према тој теорији електро-магнетски се таласи не слабе при пролазу кроз изолатор, јер смо казали да их добијамо на тај начин кад дијаграм иницијалног распореда мичемо у правцу осе X брзином v; амплитуде осцилација остају према томе исте. Али се према Maxwell-овој теорији електро-магнетни таласи слабе веома рапидно при пролазу кроз кондукторе. Па ако су светлосни таласи заиста електро-магнетни таласи, онда се они неће слабити при пролазу кроз изолатор, а биће апсорбовани при пролазу кроз кондуктор. Једном речи изолатори морају бити потпуно прозирни, а кондуктори непрозирни. Испитујемо ли ове теоријске резултате са практичним опажањима долазимо до ових резултата: Кондуктори електрични, а то су метали и електролити (но ове друге морамо искључити јер онде се пренашање електрицитета дешава на сасвим други начин, те се Maxwell-ова теорија на њих и не примењује) су заиста непрозирни, јер сви метали спадају у материјале који најјаче апсорбују светлосне таласе. У томе закључку се дакле Maxwell-ова теорија слаже са опажањем. Што се тиче непрозирности изолатора, то се опажања не слажу са закључком теорије. Ми познајемо до душе изолаторе који су потпуно прозирни, као: стакло, камена со, горски кристал, гасови и т. д. али познајемо извесне изолаторе, као: смола, каучук, парафин и т. д., који су потпуно непрозирни. Показаћемо да та опажања и ако се не слажу са Maxwell-овом теоријом још ову не обарају, јер узрок непрозирности тих изолатора лежи у секундарним узроцима о којима ћемо још говорити.

Maxwell-ова релација је

$$\frac{c}{v}=\sqrt{\varepsilon}$$

За сва пондерабилна тела је

$$\varepsilon>1$$

па је

$$\frac{c}{v}>1$$

или

$$c>v$$

т.ј. брзина светлости у етеру већа је од брзине светлости у ма коме пондерабилном телу. Овај се резултат слаже са опажањем. Што се тиче задовољавања једначине

$$\nu^2=\varepsilon$$

код неких изолатора задовољавају експоненат преламања ν и диелектрична константа ε потпуно Maxwell-ову релацију, но код других изолатора није ова једначина ни из далека задовољена. Тако је н. пр. за воду $\varepsilon = 81$ а $\nu = 1,3$. Шта је узрок овоме неслагању и да ли то неслагање обара Maxwell-ову теорију! Узрок отом неслагању је овај: Електрични таласи су знатно дужи од светлосних, па су до сада познати најкраћи електрични таласи који имају дужину од неколико mm, па ипак још увек 100 пута дужи од најдужих светлосних таласа. Зато се код првих нехомогенитет материјала не показује, а код других који имају тако рећи димензије исте величине као и молекули указује се утицај нехомогенитета материјала. Са једним примером могли бисмо то овако растумачити: Плива ли на површини воде једно стабло па изазовемо ли у близини тога стабла, бацивши н. пр. камен у воду, мале таласе, то ће се ти таласи ширити, но дошав до стабла њихово ширење биће прекинуто или пертурбирано. Плива ли то стабло на узбурканом мору, то оно не чини никакву запреку ширењу великих морских таласа. Исти је такав случај и код светлосних електро-магнетних таласа, па се показало да је експоненат преламања за воду за таласе који имају већу дужину $\nu=9$, а како је пре било $\varepsilon=81$, то је у овом случају Maxwell-ова релација задовољена.

Исто се тако Maxwell-ова релација слаже потпуно са опажањем код гасова којих је без сумње хомогенитет знатно већи него код других тела. Зато се данас више не сумња у електро-магнетску природу светлосних таласа.

Но главни ослонац добила је Maxwell-ова теорија у Hertz-овим експериментима.

Hertz-ови експерименти.

Maxwell је, као што смо казали, 1865 год. конципирао своју теорију електрицитета и извео из ње електро-магнетску теорију светлости. Покушавано је разуме се само по себи одмах после његове публикације да се и експериментима докаже егзистенција електро-магнетних таласа. Први корак за извазање таквих таласа био је већ учињен. Лорд Келвин и Kirchoff су теоријски показали осцилаторну природу испражњавања кондензатора и испитали теорију тога феномена. Feddersen-ови експерименти пружили су такође доста практичних искустава за те феномене, па ипак се такви таласи нису могли да констатују. Узрок је томе био овај: до Hertz-ових времена познате електричне осцилације имале су по прилици $n=10^5$, па је периода трајања осцилације

$$T = \frac{1}{n}$$

а дужина таласа

$$\lambda = vT = \frac{v}{n}$$

Вршимо ли такве експерименте у ваздуху као што је то обично случај, то можемо ставити

$$v = c = 300000 \frac{km}{sec}$$

па је према томе дужина једног електро-магнетног таласа изведеног таквим осцилацијама једнака

$$\lambda = \frac{300000000 m}{10^5} = 3000 m$$

Најкраћи електромагнетни таласи пре Hertz-а имали су према томе дужину од прилике 3 km, зато се они нису могли експериментално испитати. Зато је први задатак

Hertz-ов, када је хтео да руковођен Maxwell-овом теоријом докаже егзистенцију њених таласа, био тај, да изведе електричне таласе који не би били дужи од неколико метара, да би у лабораторијуму могао мерити њихову дужину и испитивати њихове особине.

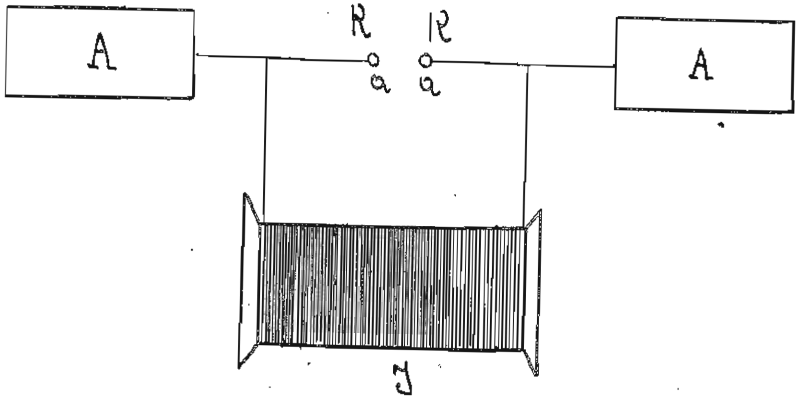
Према Келвиновој једначини коју смо извели једнака је фреквенција осцилација за истраживање кондензатора

$$n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LK}-\frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2}}$$

где L значи коефицијенат властите индукције кондензатора, K капацитет, а W отпор. Могуће је увек тако удесити да је тај отпор занемарљив, па је фреквенција дата једначином

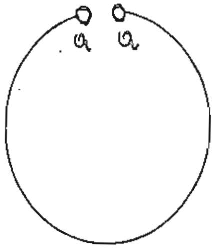
$$n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LK}}$$

Ова једначина показује јасно како се може фреквенција осцилација увећати: ваља дакле умањити коефицијенат властите индукције и капацитет т.ј. место Лајденских боца великог капацитета као што су досле употребљавали, употребити што мањи кондензатор. Сада настаје друга тешкоћа: Ми смо казали да су осцилације изазване и са великим кондензаторима веома кратког трајања и ако им је трајање теоријски бескрајно дуго, јер оне после кратког времена постану тако слабе да се не могу више опазити. Тај недостатак показаће се још јаче код кондензатора малога капацитета. Зато је Hertz дошао на идеју да такав кондензатор стоји са индукционим апаратом па да га непрестано пуни. Индукциони апарат пуни такав кондензатор у врло кратким интервалима па ако се удеси тако да осцилације за време таквог интервала између два пуњења ишчезну, онда ће се добити једна скоро континуирна серија осцилација. Тако је Херц конструисао свој <u>осцилатор</u> (он га зове Erreger) који има овај облик.

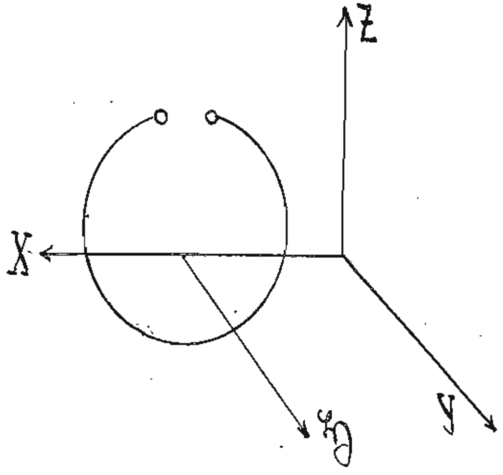


Кондензатор K којега капацитет може регулисати помоћу плоче A и код кога се испражњавање дешава између куглица a, чије се одстојање регулише микрометарским шрафом, спојен је са секундарном спиралом индукционог апарата J. Згодним избором величине L и капацитета кондензатора Херц је успео да изведе електро-магнетске таласе који су имали дужину од 2 до 4 метра. (Најкраћи таласи што их је он извео имали су дужину од 30 cm. Данас се изводе таласи дужине од неколико милиметара.

Други задатак пред којим је Херц стајао био је тај да конструише апарат којим може електро-магнетске пертурбације и ако су оне врло слабе да констатује и по могућству измери. У ту сврху Херц је конструисао свој <u>резонатор</u>. Принцип тога апарата лежи у овоме: то је једна танка жица савијена у облику круга или паралелограма са куглицама са којих се дистанција може микрометарским шрафом регулисати.

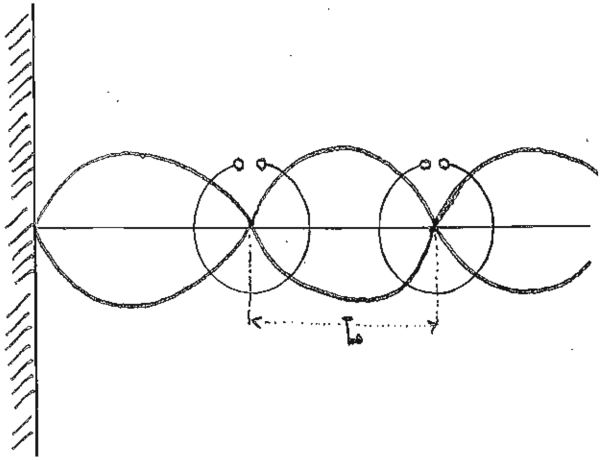


Ми смо испитивали случај да се електро-магнетни таласи шире у правцу осе X, па је у том случају електрични вектор био паралелан оси Z а магнетни оси Y. Положимо ли Hertz-ов резонатор у равнини XZ, то ће магнетни вектор H_y



стојати нормално на равнини резонатора. Но како се тај вектор H_y на посматраном месту по величини својој непрестано мења, то ће се мењати и његово протицање кроз резонатор, па ће због тога према законима индукције бити у резонатору индуцирана струја и електро-моторна сила. Ако су димензије резонатора такве да се та индуцирана електро-моторна сила сумирају, то ће потенцијална диференција између куглица а моћи при згодном одстојању тих куглица достићи такву вредност да ће се на том месту указати електрична искра, која ће се моћи опазити (аналогија са акустичним резонатором). На тај начин конструисао је Hertz осцилатор и резонатор који су одговарали један другоме. То је постигао на тај начин да је прво рачуном одредио њихове димензије, па онда још експериментом одредио. Када је Hertz поставио такав резонатор у згодну дистанцију од осцилатора и пустио да осцилатор ради, онда су се у резонатору показале искре. То је био пре свега доказ да су се електро-магнетне пертурбације шириле кроз ваздух. Ако је између осцилатора и резонатора метнуо какво диелектрично тело н. пр. дрвена врата, то искре у резонатору нису нестале. То значи да су електрични таласи пролазили и кроз дрво које је као изолатор према Maxwell-овој теорији пропушта такве таласе. Но ако је између оба апарата метнуо металну плочу искре у резонатору су нестале; метали не пропуштају електромагнетне таласе као што то захтева Maxwell-ова теорија.

Ови експерименти доказали су само ширење пертурбација кроз диелектрикум; ваљало је још доказати да то ширење има таласасту природу и измерити брзину тога ширења. Рекли смо мало час да метална плоча не пропушта електричне таласе, исто тако као што и огледало не пропушта светлосне таласе, а нееластична тела звучне. Па као што се светлосни таласи на огледалу, а звучни на нееластичном телу рефлектују, тако ће се и електро-магнетни таласи рефлектирати на металној плочи. Ако таква метална плоча стоји нормално на правцу ширења таласа X, то ће рефлектовани талас доћи до интерференције са долазећим те ће се као и у Оптици н.пр. као последица те интерференције указати стојећи таласи који се одликују специјално тиме да се на неким местима простора указују чворови т. ј. на тим местима у опште нема осцилација, док је та осцилација на средини између таква два чвора највећа. Hertz је помоћу свога осцилатора који је поставио у згодну дистанцију пред једну металну плочу изазвао такве стојеће таласе, па је онда помоћу резонатора одредио положај чворова. На тим местима нису се у резонатору указале никакве искре. У средини између два чвора била је дужина искре највећа. На тај начин могао је Hertz да одреди одстојање двају чворова l. Онда



је дужина таласа

$$\lambda = 2l$$

Трајање осцилација T следује из једначине Келвинове

$$T = \frac{1}{n}$$

где је

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LR} - \frac{1}{4}\frac{W^2}{L^2}}$$

Све величине у овим изразима могу се израчунати па дакле и T рачунски одредити, па је онда брзина ширења таласа

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

Hertz је добио за c вредност

$$c = 300000 \frac{km}{sec}$$

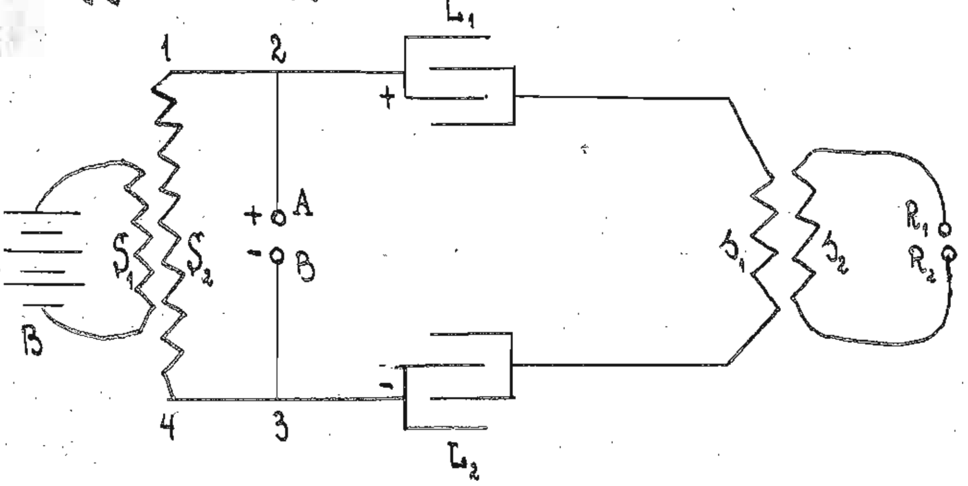
тиме је доказао да се електро-магнетни таласи шире у ваздуху истом брзином као и светлост, као што је то следовало из Maxwell-ове теорије.

Hertz је једном серијом експеримената (публикације Hertz-ове о томе предмету изишле су год. 1887, 1888 и 1889 и скупљене су у другој свесци Hertz-ових дела) доказао да се електромагнетни таласи владају исто као и светлости, да се рефлектирају по истим законима, преламају, поларизирају и т.д. и тиме доказао потпуну оправданост Maxwell-ове теорије.

О Теслиним струјама

Споменули смо да је фреквенција алтернирајућих струја које се стварају са динамомашинама обично једнака 100 и да се већа фреквенција ретко употребљава. Тесли је пошло за руком да употребом својства осцилаторних истражњавања кондензатора изведе алтернирајуће струје којих фреквенција иде у стотине хиљаде, шта више у милионе осцилација у секунди. У следећој слици је шематски представљен Теслин распоред за извађање таквих струја. Те струје називају се <u>теслине струје</u>, а Немци их зову поред тога, због њихове велике фреквенције, Hohfrequenzströme.

S_1 је примарна а S_2 секундарна страна индукционог апарата који шаље своју струју кроз коло 1234 које је тек



онда затворено када између кугала A и B скачу варнице. Због тога мора потенцијална диференција струје у томе колу бити тако велика да савлада отпор ваздуха између тих двеју кугала. Место индукционог апарата који се као што је у слици означено пуни батеријом B може се употребити динамомашина алтернирајуће струје. Тесла је то радио код својих експеримената, па је тако добијену алтернирајућу струју помоћу једнога трансформатора трансформисао на струју веће потенцијалне диференције. У тачкама 2. и 3. кола такве струје надовезане су жице које воде ка спољним облогама кондензатора L_1 и L_2. Унутарње облоге тога кондензатора спојене су са примарном спиралом S_1 Теслиног трансформатора. Секундарна спирала S_2 тога трансформатора води ка куглама K_1 и K_2 па се може контактом на овим куглама произвољно употребити.

Кад (индуцирана) индукциони апарат ради, онда се у првом, скоро бескрајно малом елементу времена напуни једна од кугала A и B позитивним (A) а друга (B) негативним електрицитетом. Исто се тако спољашња облога кондензатора L_1 напуни позитивним, а спољашња облога кондензатора L_2 негативним; унутарња облога кондензатора L_1 напуни се негативним, а кондензатора L_2 позитивним. Па пошто је потенцијална диференција између A и B велика, то ће још пре него што струја у спирали S_2 промени свој правац наступити осцилаторно испражњавање између кугала A и B, односно између спољних облога кондензатора L_1 и L_2 т.ј. те облоге ће се напунити наизменце позитивно и негативно са фреквенцијама које изнашају стотине хиљаде у секунди. Зато ће и спољне облоге тих кондензатора мењати са истом фреквенцијом свој електрицитет, једном речи кроз спиралу S_1 Теслиног трансформатора алтернирајући електрицитет са периодама који се мења од 100000$^{\text{ог}}$ дела секунде, па ће у спирали S_2 која има већи број завоја индуцирати се алтернирајућа струја са истом фреквенцијом но са већом потенцијалном диференцијом. Тако ћемо између кугала K_1 и K_2 добити једну алтернирајућу струју која ће имати огромну потенцијалну диференцију каква се није могла ни издалека да добије помоћу струје него само помоћу инфлуенцмашине. Исто тако је фреквенција таквих струја кудикамо већа него фреквенција дотада познатих струја.

Разуме се само по себи да је примена овог принципа на коме се оснивају теслине струје у пракси наишла на велике тешкоће које се морале савладати. Тако се н. пр. изолација теслиног трансформатора s_1 и s_2 због потенцијалне диференције није могла извести обичним средствима, па је зато Тесла обе спирале метнуо у резервоар напуњен зејтином који изврсно изолира (Ölisolator).

У обичне трансформаторе у којима су спирале s_1 и s_2 обавијене изоловано једна преко друге (у горњој слици су шематски нацртане једна поред друге, но у ствари се налазе једна преко друге исто тако као и спирале s_1 и s_2) меће се језгро од гвожђа да би се тиме магнетски пермеабилитет медијума и према томе и протицање магнетних вектора увећало. У теслином трансформатору то се не сме чинити јер струје мењају тако брзо свој правац да магнетисовање гвожђа не би се могло мењати истом брзином (хистерезис).

Ваљало је и о томе водити рачуна да између A и B не настане континуиран пламен те тиме би осцилације биле уништене.

Тесла је постигао таквим струјама дотле непознат ефекат. Један од најчуднијих је тај да је такве струје могао пустити без опасности кроз своје тело, док су обичне алтернирајуће струје којих је потенцијална диференција била сто пута мања од теслине смртоносне. Узрок је томе тај што се те струје крећу само по површини кондуктора дакле и човечијег тела (импединција). Тесла је могао читав простор у коме је изводио такве експерименте да испуни струјом у диелектричуну тиме што је на зидовима тога простора причврстио металне плоче које су биле спојене са кутлама K_1 и K_2. Читав тај простор био је испуњен електричним осцилацијама, па је обична Гајслерова цев без икакве жице унесена у тај простор светлила. Тесла се из раније наведених узрока могао без икакве опасности кретати у том електричном пољу испуњеном са диелектричним струјама огромне потенцијалне диференције али и огромне фреквенције.

VI Теорија електрона

Maxwell-ова теорија електрицитета са којом смо се упознали сачињава основу модерне науке о електрицитету, али у томе облику није довољна да растумачи све феномене, јер тамам је Hertz својим епохалним експериментима дао Maxwell-овој теорији чврст темељ, кад су експерименти открили читав низ електричних феномена који се нису дали растумачити Maxwell-овом теоријом. Но поред свега тога, а у томе и лежи најјачи ослонац Maxwell-ове теорије, није било потребно Maxwell-ову теорију одбацити или из основа изменити, него ју је ваљало само допунити. Тако је постала теорија електрона са којом ћемо се сада упознати

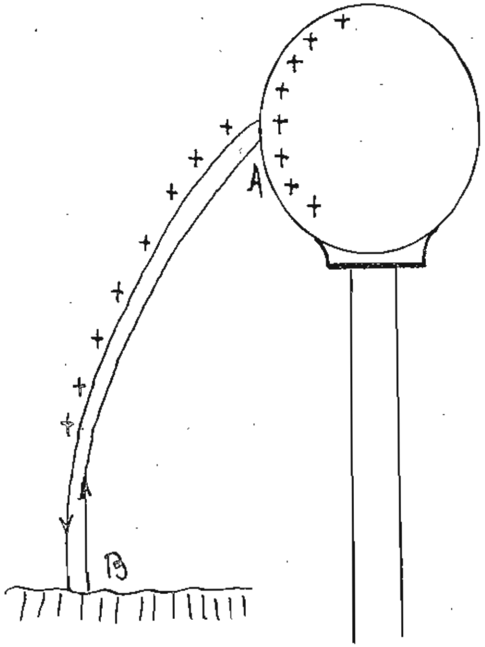
Основни појмови.

Теорија електрона комбинује на неки начин стару теорију двају електричних флуида са Maxwell-овом теоријом увађајући појам електрона.

Електрони су бескрајно мале честице (маса њихова је као што ћемо доцније видети од масе једног молекила) које носе на себи електрична оптерећења непромењиво везана на те честице. Ти електрони налазе се у бескрајно великој множини у свима пондерабилним телима, па се према знаку њихових оптерећења разликују у позитивне и негативне електроне. Кад се једно тело налази у нормалном стању, онда садржава у себи једнак број позитивних и негативних електрона. Ако је тело позитивно наелектрисано, онда значи да има више позитивних електрона.

Ти електрони привлаче се или одбијају по Coulomb-овом закону, па су пондеромоторне силе које се између два електрично оптерећена тела указују резултанте пондеромоторних сила између појединих електрона.

Ти електрони могу се по кондукторима слободно кретати а претпоставља се према томе да се на једном позитивно оптерећеном кондуктору налази један огроман број електрона, па се позитивни електрони налазе у већини. Ти позитивни електрони одбијају се међусобно по Coulomb-овом закону, па се услед тога скупе на површини кондуктора и настоје да ту површину оставе кад не би били у томе спречени. Но спојимо ли такав кондуктор помоћу жице AB са земљом, то ће позитивни електрицитет пројурити кроз жицу великом брзином у земљу, али ће у исто време негативни електрони који се налазе у земљи привлачени позитивним електронима у кондуктору пројурити кроз жицу из земље у кондуктор. Кроз жицу циркулирају према томе позитивни и негативни електрони у противном правцу један поред других.



Све ово има јаке сличности са теоријом флуида, али је фундаментална разлика у томе што сада приписујемо електрицитету атомистичку структуру.

Основну идеју Faraday-а односно Maxwell-а да се пондеромоторне (силе) електричне и магнетне силе преносе посредством етра. Електрична оптерећења односно магнетна доводе етар у једно напето стање карактерисано векторима $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{D}$, но како је

$$\mathfrak{D} = \mu \mathfrak{E}$$

а за етар је

$$\mu = 1$$

то можемо место вектора $\mathfrak{D}$ увести вектор $\mathfrak{E}$.

H. A. Lorentz оснивалац модерне теорије електрона употребљава у овом случају мала готска слова и карактеризује напето стање етра векторима $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{h}$. Према основним идејама теорије електрона испуњава етар целу васиону и што је најважније у тој поставци претпоставља се да се делови тог етра налазе у релативном мировању једни према другима т.ј. етар се, ако се уопште креће, креће као једна инваријабилна целина. То кретање етра нећемо моћи, ако у опште постоји, никада одредити, па зато називамо релативно кретање наперено према етру апсолутним кретањем. Између етра и материје повлачимо према томе оштру границу: етар није материја; он је на неки начин носилац нашег физикалног простора; у њему се може материја да креће.

Електрони унесени у етар изазивају у њему напето стање, а тим се стањем преносе пондеромоторне силе на околне електроне. Етар је једино тело (у овом специјалном случају називу тело дајемо шири појам него називу материја) у којем се у једном произвољном елементу не морају налазити електрони; иначе се електрони у свима пондерабилним телима налазе у великој количини. Но док се ти електрони могу у кондуктору слободно да крећу, дотле су они у изолаторима везани на извесне положаје, па се могу из тих положаја само силом одмакнути. Та сила која је потребна да се електрон у изолатору помакне за извесну дужину различита је за различите изолаторе, па се може назвати еластицитетом таквог изолатора.

Основне једначине теорије електрона

Основне Maxwell-ове једначине узимамо и у теорији електрона за темељ математског формулисања, али их морамо према новим основним представљањима са којима смо се сада упознали дати други облик. Према Maxwell-овој теорији је да свако део простора у којем се не налазе електрична оптерећења.

[redacted]
3272