Општа Теорија физикалних поља

Бор. Ј. Пујић, проф.

Општа теорија физикалних поља

Предавања
Др М. Миланковића,
проф. универзитета

Физикално поље и његове конфигурације

Под *физикалним пољем* разумемо један простор у којем у уоченом моменту свакој тачки његовој приписујемо једнозначно једно физикално стање. Према нарави тога физикалног стања разликујемо разна физикална поља, па тако може посматрано поље да буде н. пр.: поље топлоте, ако свакој тачки уоченог простора одговара једна извесна температура;
поље густине, ако свакој тачки простора одговара једна извесна вредност густине медиума који тај простор испуњава; исто тако имамо поље брзине, поље силе, електричних, магнетних, звучних и светлосних поља. У ствари садржава посматрани простор у исто доба

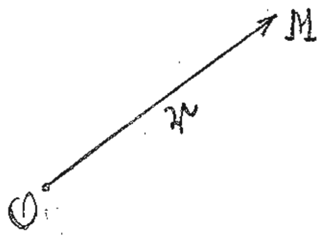
у себи више различних поља, па може да буде н. пр. поље густине и поље топлоте, или поље брзине, поље густине и поље топлоте и т. д.

Она физикална величина коју у том сложеном пољу посматрамо зове се карактерна величина. Ми ћемо увек претпоставити да се карактерна величина у посматраном пољу мења континуарно од тачке до тачке; ако то не буде био случај, то ћемо онда специјално да истакнемо. У природним феноменима мењају се карактерне особине на једној извесној тачки поља са временом, па је због тога и читаво поље функција времена. Ми ту зависност поља од времена нећемо за сада у Геометрији физикалних поља узети у обзир, нећемо претпоставити да се поље временом не мења или ако се мења, да смо га уочили у једном одређеном тренутку, када се та промена не манифестира.

Класификација физикалних поља по физикалној природи њихових карактерних величина има више спољно, феноменолошко значење него принципијелно значење. Ми ћемо видети да могу два поља која су по њиховој физикалној природи сасвим различна са математичко-квантитативног гледишта покоравати се истим законима. Па како је задатак Теориске физике да испитује баш ту математичко-квантитативну страну природних феномена, то ћемо ми провести класификацију физикалних поља по математичкој природи њихових карактерних величина.

Ако се физикално стање посматраног поља у свакој тачки његовој може изразити једном бројном величином, једном речи, ако је карактерна величина један скалар, онда називамо поље: <u>скаларним пољем.</u> Ако је за одређење физикалног стања у свакој тачки поља потребна једна управљена величина, једном речи, ако је карактерна величина посматраног поља један вектор, онда називамо посматрано поље <u>векторским пољем</u>. Ако је за одредбу физикалног стања у свакој тачки поља потребно више управљених величина, онда називамо такво поље <u>хипервекторским пољем</u>.

Уочимо у посматраном пољу једну тачку сравњивања O



коју ћемо одабрати за почетну тачку координатног система. Ако будемо хтели наше векторске једначине превести у језик анализе, онда је свака произвољна тачка M тога поља одређена вектором

$$\mathfrak{r} = M - O$$

или координатама: x, y, z тачке с обзиром на коорд. систем XYZ. Ако је уочено поље поље скалара U, онда свакој тачки тога поља одговара једна извесна вредност тога скалара, једном речи

$$U = f(\mathfrak{r}) \qquad 1.)$$

Лева страна ове једначине је скалар, па зато мора и десна страна бити скалар; једном речи функција f мора се састојати из таквих комбинација вектора $\mathfrak{r}$ које су све скаларне природе. Таква једначина је у ствари скаларна једначина. Ми би је по Gibbs-овим ознакама писали

$$U \overset{3}{=} f(\mathfrak{r}) \qquad 1')$$

Употребимо ли место вектора $\mathfrak{r}$ координате x, y, z тачке M, то једначину 1.) можемо заменити и једначином

$$U = \varphi(x,y,z) \qquad 2.)$$

Зато можемо да кажемо да је теорија скаларних поља теорија функција од три независне варијабилне x, y, z.

Ако је посматрано поље поље вектора v, онда је овај одређен векторском једначином

$$v = f(r) \qquad 3.)$$

Лева страна ове једначине је вектор, зато мора и функција f бити такве природе да даје увек једну векторску вредност. Употребив означење Gibbs-ово, писали би

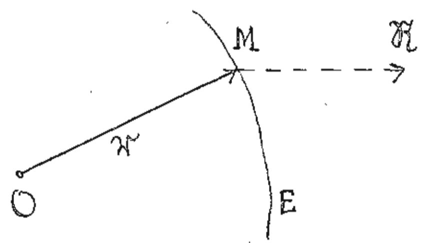
$$v \overset{3}{=} f(r) \qquad 3^{x})$$

јер је ова једначина еквивалентна трима скаларним једначинама

$$v_x = f_1(x,y,z)$$
$$v_y = f_2(x,y,z) \qquad 4.)$$
$$v_z = f_3(x,y,z)$$

где v_x, v_y, v_z означују компоненте вектора v. Теорија векторских поља је према томе теорија функција где је независна варијабила управљена величина. Зато ваља имати на уму да ми у тој теорији испитујемо у ствари особине функције f а не особине функција f_1, f_2, f_3. Оне су уведене само као помоћни појмови.

Ако је посматрано поље хипервектора 1ог реда U, онда нам за одређење тога вектора није довољан само вектор положаја r него морамо одабрати још један вектор n који је нормалан на равнину ε којој одговара вредност хипервектора U.



Вектор v дат је према томе једначином

$$v = f(r, n) \qquad 5.)$$

Теорија хипервекторских поља првога реда је према томе теорија функција од две управљене величине.

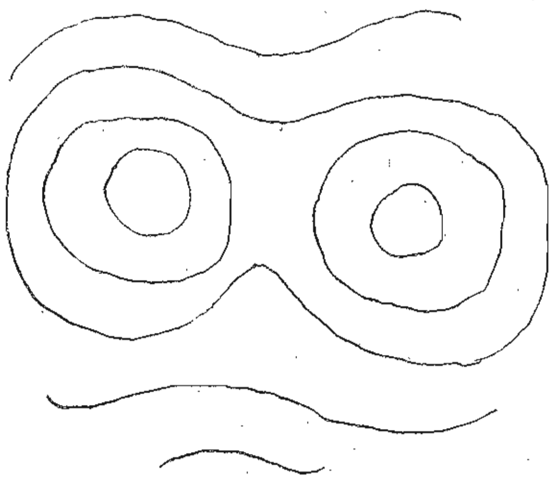
Просторне особине физикалних поља су геометриске природе, па је зато наравно да ћемо се у следећим испитивањима служити и геометриским представама. Потражићемо пре свега методе помоћу којих можемо посматрана поља геометриски тако представити, да у тој представи можемо да уочимо већ најважније особине тих поља. Те геометриске представе послужиће нам и за класификацију векторских поља.

Геометриско представљање скаларних поља.

Уочимо у пољу скалара U једну произвољну тачку M. У тој тачки има скалар U једну извесну вредност U_1. Према учињеним претпоставкама мења се скалар U у околини тачке M континуирано, па ако у њој није достигао једну екстремну вредност, то ће бити опасан масом тачака у којима скалар U има исту ту вредност U_1. То исто важи и за све те суседне тачке, у којима има U вредност U_1, па уочимо ли на тај начин све тачке простора у којима скалар U има вредност U_1, то ће оне лежати на једној површини коју називамо еквискаларном површином. Многи аутори називају је такође површином истога нивоа. Таква еквискаларна површина може бити затворена може се протезати до границе уоченога поља, а може се расчланити у више засебних листова. Њена једначина добија се ако се у једначини 2) вредност U замени вредношћу U_1

$$\varphi(x,y,z) = U_1$$

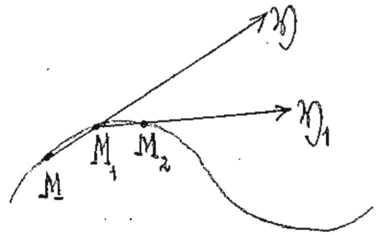
где је U_1 једна константа. Конструишемо ли читаву серију оваквих површина које одговарају еквискаларним вредностима $U_1, U_2, U_3, \ldots$ то нам таква серија површина даје јасну представу о распореду скалара U у пољу.



Ако је поље равно, т.ј. везано за равнину, онда те еквискаларне површине прелазе у еквискаларне линије. Показали смо у Векторској Анализи да вектор $\mathrm{grad}\,U$ стоји нормално на еквискаларним површинама и да је по величини и по правцу своме највећу промену скалара U у околини уочене тачке. Две еквискаларне површине које одговарају означеним вредностима скалара U не могу се никад сећи, јер би у том случају на линији пресека била вредност скалара U двозначна.

Геометриско представљање векторских поља

У пољу вектора v уочимо једну тачку M. У тој тачки има вектор v вредност v. На правцу тога вектора узмимо једну другу тачку M_1 која је бесконачно близка тачки M. Тој тачки одговараће вектор v_1 који се бесконачно мало разликује од вектора v.



Одаберемо ли на правцу тога вектора тачку M_2 која је бесконачно блиска тачки M_1 и наставимо ли тако даље, то ћемо добити једну просторну криву која има то својство да је у свакој тачки њеној правац вектора који тој тачки одговара тангира. Ту криву зовемо <u>векторском линијом</u>. Ако је векторско поље поље сила, онда зовемо ту линију: линијом сила, а ако је векторско поље поље брзина, линијом брзина. Све векторске линије уоченога поља добијамо интеграцијом диференцијалних једначина

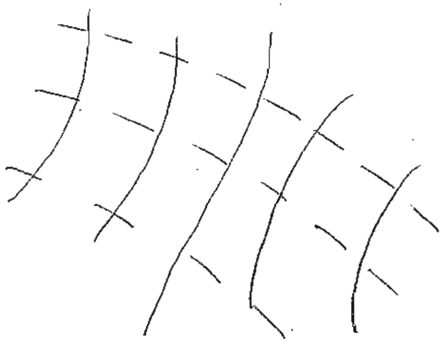
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

где x, y, z означавају координате тачака векторске линије, а: v_x, v_y, v_z компоненте вектора v у тим тачкама. Употребив једначине 4.) можемо диференцирањем једначине векторске линије да напишемо у облику

$$\frac{dx}{f_1(x,y,z)} = \frac{dy}{f_2(x,y,z)} = \frac{dz}{f_3(x,y,z)}$$

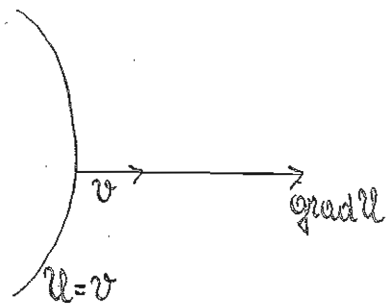
Две векторске линије не могу се никада сећи, јер би у том случају у тачки пресека био правац вектора двозначан.

Конструишемо ли један довољан број таквих векторских линија, то нам оне дају јасну представу о распореду праваца вектора $\mathfrak{v}$, али нам ове линије не дају никаквог податка о величини и смислу вектора $\mathfrak{v}$. О томе би могли на овај начин да добијемо геометриску представу: Интензитет v вектора $\mathfrak{v}$ је једна скаларна величина, па је можемо представити помоћу еквискаларних површина. Поклопимо ли обе геометриске представе помоћу векторских линија и помоћу еквискаларних површина, то смо на тај начин



добили представу о распореду вектора $\mathfrak{v}$. Ако су векторске линије нормалне на еквискаларне површине, онда нам је за геометриску представу довољна серија тих еквискаларних површина.

Из свакога скаларног поља U можемо извести једно векторско поље $\mathfrak{v}$ које задовољава условима да је правац вектора $\mathfrak{v}$ нормалан на еквискаларну површину интензитета v. У то име сматрајмо еквискаларну површину U за еквискаларну површину интензитета v. Онда изводимо да је вектор $\operatorname{grad} U$ нормалан на ту површину. На правац тога вектора треба дакле



да пренесемо један вектор интензитета v. Компоненте v_x, v_y, v_z вектора $\mathfrak{v}$ једнаке су

$$v_x = v\cos\alpha$$
$$v_y = v\cos\beta$$
$$v_z = v\cos\gamma$$

где α, β, γ означавају углове што их правац тога вектора затвара са коорд. осама. Но тај правац исти је као и правац вектора grad U, а овај затвара са коорд. осама углове чији су косинуси

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}} \qquad \cos\beta = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}$$

па како је $v = U$, то су компоненте вектора v дате једначинама

$$v_x = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = f_1(x,y,z)$$

$$v_y = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = f_2(x,y,z)$$

$$v_z = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} = f_3(x,y,z)$$

овакво представљање векторских поља способно је према томе само за једну специјалну категорију тих поља и зато га не можемо употребити него морамо потражити друге методе.

У Векторској Анализи показали смо да се из сваког скаларног поља U може да изведе једно векторско поље: поље његовог градијента

$$v = \operatorname{grad} U$$

Такво поље вектора v је безвртложно поље јер је

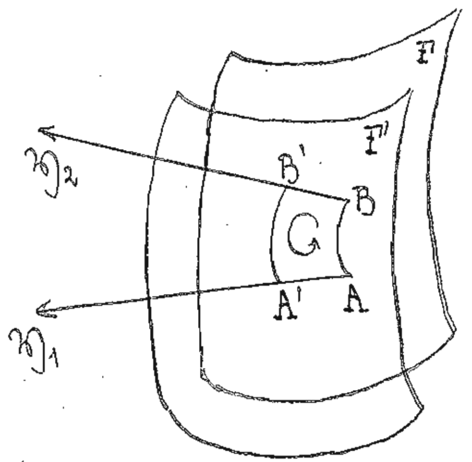
$$\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$$

Обратно: можемо представити свако безвртложно векторско поље као градијент једнога скалара U. Показали смо даље да је вектор v нормалан на еквискаларне површине

$$U(x,y,z) = \mathrm{const}$$

па конструишемо ли према томе

једну серију таквих еквискалар-
них површина, то нам оне одре-
ђују правце вектора и векторске
линије. Питање је само да ли је
могуће у тој представи уочити
и распоред интензитета вектора
$\mathfrak{v}$ и смисао његовог правца. У то
име уочимо две суседне еквиска-



ларне површи-
не скалара U:
F и F'. У тачки
A површине F
има вектор $\mathfrak{v}$
вредности $\mathfrak{v}_1$, а
у тачки B исте
површине вред-
ност $\mathfrak{v}_2$. Та оба вектора стоје нор-
мално на површини F и продиру
површину F' у тачкама A' и B', па
су и на овој површини нормални
јер су обе површине бесконачно
блиске. Употребимо сада на повр-
шину ABB'A' Stokes-ову теорему

$$\int_F \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}\,dF = \int_L \mathfrak{v}\,d\mathfrak{r}$$

где F означава површину ABB'A' а
L затворени опсег те површине. Ка-
ко је $\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}=0$, то лева страна ове
једначине исчезава. Интеграл
десне стране имамо да узмемо
по контури површине ABB'A'. Дело-
ви тога линиског интеграла који
одговарају деловима контуре AB
и A'B' исчезавају, јер је вектор $\mathfrak{v}$
нормалан на линиски елеменат
$d\mathfrak{r}$; тако се редукује линиски ин-
теграл десне стране, ако вектор $\mathfrak{v}$
сматрамо у бесконачно малом еле-
менту BB' за константан и јед-
нак $\mathfrak{v}_2$, а у елементу AA' констан-
тан и једнак $\mathfrak{v}_1$, на

$$\mathfrak{v}_2(B'-B) + \mathfrak{v}_1(A-A')$$

Означимо бесконачно мале елементе

$$B'-B = d\mathfrak{r}_2 \qquad A'-A = d\mathfrak{r}_1$$

онда горња једначина прелази у јед-
начину

$$\mathfrak{v}_2 \, d\mathfrak{l}_2 - \mathfrak{v}_1 \, d\mathfrak{l}_1 = 0$$

Правци вектора $\mathfrak{v}_2$ и $d\mathfrak{l}_2$ подударају се, исто тако и правци вектора $\mathfrak{v}_1$ и $d\mathfrak{l}_1$, па зато можемо скаларне продукте тих вектора заменити продуктима њихових интензитета, па добијамо

$$v_2 \, dl_2 - v_1 \, dl_1 = 0$$

или

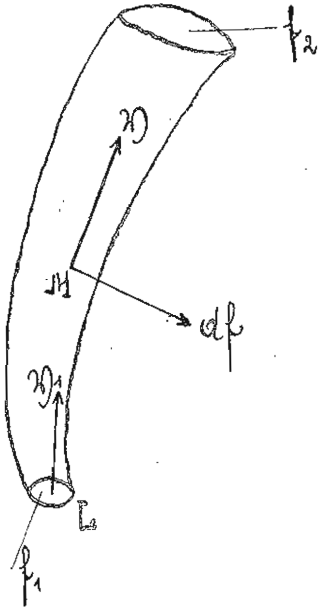
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{dl_2}{dl_1}$$

Ова једначина казује да се вектори на местима A и B односе као одстојања две суседне еквискаларне површине на тим местима. На оним местима где су те површине ближе, ту је интензитет вектора већи, па нам према томе густина тих површина даје слику о распореду интензитета векторових. Ако те површине одговарају еквидистантним векторима скалара U, онда је интензитет пропорционалан густини таквих површина.

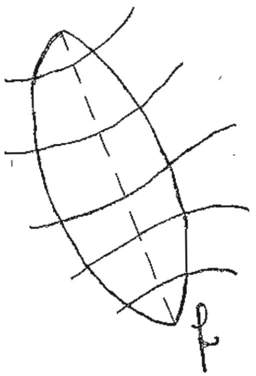
Део простора који се налази између две такве еквискаларне површине зове се: <u>ламела</u>, па се помоћу таквих површина може читаво поље разделити у ламеле. Ако су те површине еквивалентне с обзиром на U, онда нам таква представа потпуно одређује распоред вектора: у свакој тачки простора нормалан је вектор на ламелу која кроз ту тачку пролази и интензитет његов инверзно је пропорционалан дебљини такве ламеле, а правац таквог вектора наперен је на ону страну ламеле на којој страни скалар U расте. Та велика категорија векторских поља која се могу на тај начин представити (а то су сва она поља у којима је $\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}=0$) зове се: <u>Категорија ламе-</u>

<u>парних поља.</u>

Уочимо у посматраном векторском пољу једну врло малу затворену линију. Положимо кроз све тачке те линије L векторске линије, онда ове ограничавају у пољу један цевасти простор. Омотач тога простора зовемо <u>векторском цеви</u>. Појам такве векторске цеви врло је важан за геометриско представљање векторских поља. Ну пре но што томе приступимо дефинишимо још неке појмове који ће нам у будуће бити од важности.



Уочимо у посматраном пољу једну произвољну површину f, онда називамо интеграл $\int_f \mathfrak{V}\, df$ <u>протицањем вектора $\mathfrak{V}$</u> кроз ту површину. Ако је та површина затворена у којем случају је означимо са F, онда називамо вредност интеграла $\int_F \mathfrak{V}\, df$ <u>истицањем вектора $\mathfrak{V}$</u> из површине F. Место назива протицање могли би употребити назив <u>флукс</u>.



Вратимо се опет векторским цевима. Уочимо ли коју год тачку M омотача векторске цеви, то правац вектора $\mathfrak{V}$ тангира према дефиницији векторске цеви њен омотач. Вектор df који представља елеменат површине омотача у тачки M нормалан је на тај омотач, па је зато скаларни продукат

$$\mathfrak{V}\, df = 0$$

Из тога следује да је протицање вектора $\mathfrak{V}$ кроз омотач векторске цеви једнако нули. Означимо два пресека векторске цеви са f_1 и f_2, па употребимо на простор обухваћен векторском цеви између та два пресека Gauss-ову теорему

$$\int_V div\, \mathfrak{v}\, dV = \int_f \mathfrak{v}\, df$$

У десном интегралу ове једначине исчезавају према пређашњем они делови који се односе на омотач, јер је на читавом омотачу $\mathfrak{v}\,df = 0$, па се зато десни интеграл састоји само из оних делова који се односе на пресеке f_1 и f_2. Означимо сад вредност вектора $\mathfrak{v}$ на површини f_1 са $\mathfrak{v}_1$, а на површини f_2 са $\mathfrak{v}_2$, то горња једначина прелази у

$$\int_V div\, \mathfrak{v}\, dV = \int_{f_1} \mathfrak{v}_1\, df_1 + \int_{f_2} \mathfrak{v}_2\, df_2$$

Вектори df_1 и df_2 наперени су изван запремине V као што смо то при извођењу Gauss-ове теореме претпоставили, но узмимо сада да се вектор df_1 узима позитивно кад је наперен на ту страну као и вектор $\mathfrak{v}_1$ т.ј. у унутрашњост запремине V, онда морамо у предњој једначини променити знак првога интеграла, па добијамо једначину

$$\int_V div\, \mathfrak{v}\, dV = \int_{f_2} \mathfrak{v}_2\, df_2 - \int_{f_1} \mathfrak{v}_1\, df_1$$

Ако су површине f_1 и f_2 врло мале и нормалне на осу векторске цеви, онда пишемо векторе $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ као константне широм тих малих површина, а како се правци вектора $\mathfrak{v}_1$ и df_1 подударају, исто тако и правци вектора $\mathfrak{v}_2$ и df_2, то можемо њихове скаларне продукте заменити продуктима $v_1\, df_1$ и $v_2\, df_2$. Рекли смо да v_1 и v_2 можемо сматрати константним, па зато горња једначина прелази у једначину

$$\int_V div\, \mathfrak{v}\, dV = v_2 f_2 - v_1 f_1$$

Ова једначина важи строго ако су површине f_1 и f_2 бесконачно мале, па би зато било логичније њену десну страну писати овако

$$v_2\, df_2 - v_1\, df_1$$

Ако је посматрано поље вектора поље без извора т.ј. ако је у читавом пољу $div\, \mathfrak{v} = 0$, онда горња једначина прелази у

$$v_2 f_2 - v_1 f_1 = 0$$

или ако употребимо егзактну једначину

$$v_2\, df_2 - v_1\, df_1 = 0$$

или

$$v_1 f_1 = v_2 f_2$$

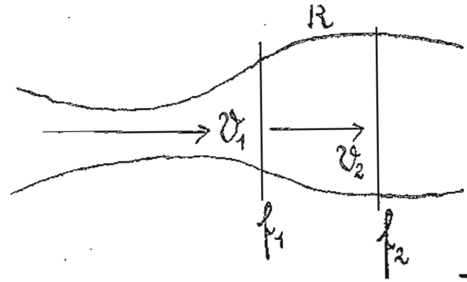
односно

$$v_1\, df_1 = v_2\, df_2$$

Ове једначине показују фундаменталну особину безизворних поља: да је у таквом пољу протицање вектора кроз једну векторску цев у свим пресецима те векторске цеви константно.

Таква векторска цев зове се и соленоид, па се векторско поље за које горња теорема важи зове соленоидалним пољем.

Посматрамо ли протицање течности кроз једну цев, то је множина течности која кроз пресек f_1 уђе у део цеви K једнака $v_1 f_1$; множина течности што кроз пресек f_2

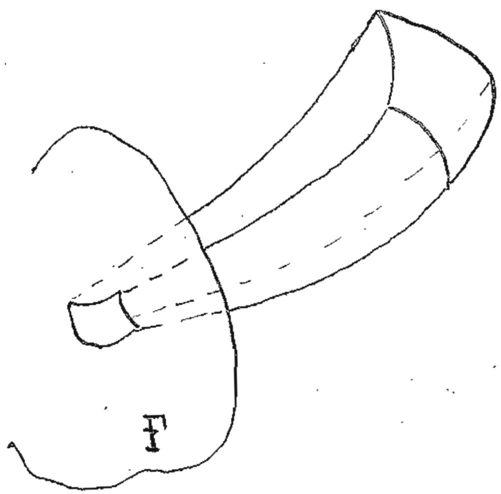


изађе из дела K једнака је $v_2 f_2$. Те две множине морају бити једнаке ако је течност инкомпресибилна, јер кад би више утекло него истекло, онда би у делу K настало згушњавање, а кад би више истекло него утекло разређивање, што је код инкомпресибилне течности немогуће. Зато је

$$v_1 f_1 = v_2 f_2$$

Протицање вектора кроз соленоиде сасвим је аналого протицању једне инкомпресибилне течности кроз цев. Ову представу увео је <u>Faraday</u> у теорију електрицитета, одакле је она постала општа својина теорије свих векторских поља. Зато се те цеви називају често и <u>Faraday-еве цеви</u>.

Помоћу соленоида можемо свако векторско поље без извора потпуно представити и то на овај начин: У то име уочимо у посматраном пољу једну



затворену површину F, па је разделимо у такве елементе да је кроз сваки елеменат њен протицање вектора једнако јединици т.ј.

$$\mathfrak{v} f = 1$$

где f означава један елеменат површине. Ти елементи не морају бити четвороугли као што је у предњој слици нацртано, него могу имати произвољан облик. Главно је да је таква површина сасвим раздељена у такве елементе. Положимо сада кроз контуре тих елемената векторске цеви, онда ће кроз сваку такву цев протицање вектора $\mathfrak{v}$ на сваком пресеку цеви бити једнако јединици т.ј. интензитет вектора инверзно је пропорционалан пресеку цеви. Где је цев шира, онде је интензитет слабији, а где је цев ужа, онде је јачи, сасвим као код протицања течности кроз једну цев. Интензитет вектора је дакле потпуно уређен а исто тако и његов правац који тангира осу векторске цеви. Разуме се само по себи да за тачно представљање морају те цеви бити што тање. Ако посматрамо поље које нема нигде извора, онда такве цеви не могу нигде имати ни почетка ни свршетка, па се или протежу од границе до границе посматраног поља или сачињавају затворене прстене.

Место са векторским цевима можемо соленоидално поље представити и са векторским линијама. Треба само да кроз сваку јединичну векторску цев положимо векторску линију. Онда је протицање кроз произвољан део једне површине једнак броју векторских линија које тај део површине продиру. Интензитет поља тим је јачи што су те линије ближе. И ове линије не могу се нигде

секи а немају, ако је поље свугде без извора, ни почетка ни свршетка. Овај начин представљања употребљава се у електротехничкој пракси.

Ако је поље и ламеларно и соленоидално, онда га можемо представити и помоћу љуски и помоћу соленоида. Део соленоидалне цеви који се налази између две суседне љуске зове се ћелија.

Класификација векторских поља.

Из сваког векторског поља $\mathfrak{v}$ можемо извести једно скаларно поље: поље његове дивергенције

$$q = \mathrm{div}\,\mathfrak{v}$$

и векторско поље његове ротације. Ове дериване величине послужиће нам за класификацију векторских поља. Показаће се да је та класификација не само у тесној вези са геометриском представом поља о којој смо до сада говорили, него шта више и са физикалном особином тих поља. Класификација се провађа према томе да ли су ове дериване величине једнаке или различите од нуле, па имамо свега четири могућна случаја и то:

1° $\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} = 0$ $\mathrm{div}\,\mathfrak{v} \neq 0$

2° $\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} \neq 0$ $\mathrm{div}\,\mathfrak{v} = 0$

3° $\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} = 0$ $\mathrm{div}\,\mathfrak{v} = 0$

4° $\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} \neq 0$ $\mathrm{div}\,\mathfrak{v} \neq 0$

Сада ћемо проучити редом особине тих поља.

1° $\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} = 0$ $\mathrm{div}\,\mathfrak{v} \neq 0$

<u>Потенцијално</u> или <u>ламеларно поље.</u>

У овоме пољу исчезава ротација вектора свугде, па зато морају и њене компоненте бити равне нули. Па како је

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

то су компоненте ротора једнаке субдетерминантама првог реда. Зато компоненте v_x, v_y, v_z вектора $\mathfrak{v}$ морају задовољавати следеће једначине

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

Овакво поље може се према пређашњем сматрати као поље градијента једнога скалара U, па је

$$\mathfrak{v} = \nabla U = \operatorname{grad} U$$

Примедба: назив градијента употребљава се код различитих аутора у врло различитом смислу. Неки називају градијентом негативну вредност онога што ми називамо градијентом. Неки аутори називају оно што ми називамо градијентом: асцедент а његову негативну вредност дисцедент. Зато је преко потребно да се при читању таквих дела пре свега јасно види шта дотични аутори разумеју под његовим називима.

Показали смо да је линијски интеграл оваквога вектора $\mathfrak{v}$ дуж једне затворене линије једнак нули

$$\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r} = 0$$

а његова вредност на једној незатвореној линији једнака диференцији вредности скалара U у њеној крајњој и почетној тачки

$$\int_{M_0}^{M} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r} = U(x,y,z) - U_0(x_0,y_0,z_0)$$

или

$$\int_{M_0}^{M} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r} = U - U_0$$

Из ове једначине следује да је вредност скалара U одређена једначином

$$U = U_0 + \int_{M_0}^{M} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r}$$

ако је вредност тога скалара дата у једној произвољној тачки M_0 посматранога поља, U_0 игра улогу једне адитивне константе.

Ако је векторско поље такве природе да у бесконачности исчезава, онда се та константа одрезује прво да и скалар U исчезава у бесконачности. Негативну вредност скалара U називамо <u>скаларним потенцијалом</u> безвртложног векторског поља.

Примедба: И код потенцијала настала је у новије време велика збрка у погледу његове дефиниције. Неки аутори називају потенцијалом негативну вредност оне величине коју други аутори називају потенцијалом, а има аутора који час позитивну час негативну вредност исте величине називају потенцијалом.

Ако је посматрано поље поље брзине, онда величину: $(-U)$ називамо <u>потенцијалом брзине</u>; ако је посматрано поље поље сила, онда ту вредност називамо <u>потенцијалом сила</u> а скалар $(+U)$ <u>функцијом сила</u>.

Ако једначину

$$\mathfrak{v} = \nabla U$$

преведемо у језик анализе т.ј. горње векторе изразимо помоћу њихових компонената, онда добијамо

$$v_x i + v_y j + v_z k = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k$$

Компоненте на левој страни морају бити равне компонентама на десној страни, зато из последње једначине следује три скаларне једначине:

$$v_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad v_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Компоненте вектора $\mathfrak{v}$ једнаке су парцијалним диференцијалним квоцијентима скалара U по дотичним координатама.

Из горње једначине следује такође

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \nabla^2 U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Величину ΔU назива Maxwell: <u>концентрацијом</u> скалара U у дотичној тачки.

Поље скалара $(-U)$ назива се <u>поље потенцијала</u> или још егзактније: <u>поље скаларног потенцијала</u>. Ваља дакле добро разликовати: поље вектора v зове се потенцијално поље, а поље скалара U назива се поље потенцијала. И у овом погледу греше многи аутори.

Називи за посматрано поље који се данас употребљавају јесу ови:

а.) <u>безвртложно поље вектора v</u>;
б.) <u>безвртложно поље извора</u>;
в.) <u>потенцијално поље</u>; и
г.) <u>ламеларно поље</u>.

2° $\operatorname{rot} v \neq 0 \quad \operatorname{div} v = 0$

Пошто дивергенција исчезава у читавом пољу, то компоненте вектора v задовољавају једначину

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

Овакво поље може се представити према пређашњем и са соленоида, па се зове соленоидално поље. Називи су за ово поље према томе ови:

а) <u>поље безизвора</u> или <u>безизворно поље</u>;
б.) <u>безизворно вртложно поље</u>; и
в.) <u>соленоидално поље</u>.

3° $\operatorname{rot} v = 0 \quad \operatorname{div} v = 0$

Ово поље може се, јер ту ротација исчезава, представити као поље градијента скалара U

$$v = \nabla U$$

а како и његова дивергенција исчезава, то је

$$\operatorname{div} v = \nabla^2 U = \Delta U = 0$$

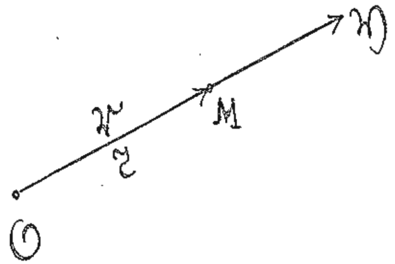
Употребимо ли језик анализе, то компоненте вектора v задовољавају следеће једначине

$$v_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad v_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$$

Ова једначина зове се Лапласовом једначином, па се зато ово поље зове: Лапласово поље. Ово поље може се представити или помоћу ламела или помоћу соленоида.

Једна специјална врста Лапласовог поља која представља уједно и основни типус његов то је радијално поље. То је такво поље у којем правац вектора $\mathfrak{V}$ у произвољној тачки тога поља пролази увек кроз једну сталну тачку тога поља O. У тој тачки секу се дакле сви правци вектора. Величина или интензитет вектора $\mathfrak{V}$ инверзно је пропорционалан квадрату одстојања његове нападне тачке M од тачке O. Ово поље је централно симетрично с обзиром на тачку O. Површине истога интензитета су кугле са



центром у O. Интензитет вектора $\mathfrak{V}$ представљен је једначином

$$v=\frac{v_0 r_0^2}{r^2},$$

где је продукат

$$v_0 r_0^2 = e$$

константан, па је

$$v=\frac{e}{r^2}$$

Имамо да докажемо да је овакво радијално поље одиста Лапласово поље. Означимо у то име скалар

$$-\frac{e}{r}=U$$

Па питајмо за градијент тога скалара. e је константа, U зависи само од одстојања r и ако је ово константно, онда је и скалар U константан. Еквискаларне површине овога скалара су кугле са центром у O. Градијент његов стоји нормално на површинама тих кугла, па је зато радијалан. Означимо ли

$$M - O = \mathfrak{r}$$

то градијент скалара U има правац јединичног вектора $\mathfrak{r}_0$. Интензитет градијента једнак је промени скалара U у правцу $\mathfrak{r}$. Зато је

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial\left(-\frac{e}{r}\right)}{\partial r}\,\mathfrak{r}_0 = \frac{e}{r^2}\,\mathfrak{r}_0$$

а овај израз представља нам вектор $\mathfrak{E}$, јер му је интензитет $\frac{e}{r^2}$ једнак интензитету вектора $\mathfrak{E}$, а правац му је радијалан. Зато је

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^2}\,\mathfrak{r}_0$$

или

$$\operatorname{grad} U = \mathfrak{E}$$

Вектор $\mathfrak{E}$ је према томе безвртложан вектор, јер се може представити као градијент једнога скалара. Имамо још да докажемо да је вектор $\mathfrak{E}$ такође безизворан т.ј. да његова дивергенција исчезава

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \nabla \frac{e}{r^2}\,\mathfrak{r}_0$$

Помножимо ли у изразу за $\mathfrak{E}$ бројитељ и именитељ са r, то онда можемо писати $\mathfrak{E}$ и у облику

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^3}\,\mathfrak{r}$$

Зато је

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \nabla \frac{e}{r^3}\,\mathfrak{r} = e\left\{\mathfrak{r}\,\nabla\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\,\nabla\mathfrak{r}\right\}$$

Градијент скалара $\frac{1}{r^3}$ такође је радијалан јер су еквискаларне површине и у овом случају кугле, па је зато, сходно према прећашњем

$$\nabla\frac{1}{r^3} = \frac{\partial\frac{1}{r^3}}{\partial r}\,\mathfrak{r}_0 = -3\,\frac{1}{r^4}\,\mathfrak{r}_0$$

$\nabla\mathfrak{r}$ је дивергенција вектора $\mathfrak{r}$. Употребимо ли тачку O за почетну тачку коорд. система, то су компоненте вектора $\mathfrak{r}$ једнаке: x, y, z, па је зато

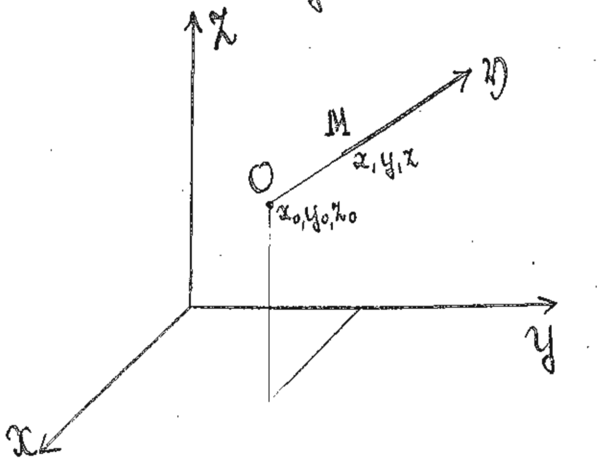
$$\nabla\mathfrak{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

И за будуће испитивање треба запамтити овај резултат да је: дивергенција радијалног вектора једнака 3. Употребив ове једначине добијамо

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = c\left\{-3r\cdot\frac{r_0}{r^4}+\frac{3}{r^3}\right\}=0$$

Вектор $\mathfrak{v}$ нема дакле ни вртлога ни извора и зато је то Лапласов вектор. Ваља имати само на уму да се из читавог поља има искључити тачка O, јер у тој тачки постаје вектор дисконтинуиран т.ј. његов интензитет је бескрајан.

Доказаћемо горње резултате помоћу анализе. Центар O радијалног поља нека има координате: x_0, y_0, z_0, произвољна тачка M координате: x, y, z



Онда су компоненте вектора $\mathfrak{v}$ једнаке

$$v_x = v\cos\alpha = \frac{v_0 r_0^2}{r^2}\cdot\frac{x-x_0}{r}$$

$$v_y = v\cos\beta = \frac{v_0 r_0^2}{r^2}\cdot\frac{y-y_0}{r}$$

$$v_z = v\cos\gamma = \frac{v_0 r_0^2}{r^2}\cdot\frac{z-z_0}{r}$$

где је

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

а где α, β, γ означавају углове што их правац вектора $\mathfrak{v}$ затвара са коорд. осама. Уведемо ли, као и пре, скалар

$$U = -\frac{v_0 r_0^2}{r} = -v_0 r_0^2\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

то се можемо диференцијацијом тога израза уверити да је

$$v_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad v_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Било је

$$v_x = v_0 r_0^2\frac{x-x_0}{r^3} = v_0 r_0^2 (x-x_0)\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Из ове једначине следује да је

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = v_0 r_0^2\left\{\frac{1}{r^3}-3\frac{(x-x_0)^2}{r^5}\right\}$$

Исто тако добијамо

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = v_0 r_0^2 \left\{ \frac{1}{r^3} - 3\frac{(y-y_0)^2}{r^5} \right\}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = v_0 r_0^2 \left\{ \frac{1}{r^3} - 3\frac{(z-z_0)^2}{r^5} \right\}$$

Саберемо ли ове три једначине, то добијамо

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = v_0 r_0^2 \left\{ \frac{3}{r^3} - 3\frac{\overbrace{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}^{r^2}}{r^5} \right\}$$
$$= 0$$

Посматрано поље је Лапласово поље али се из тога поља мора са произвољно малом куглом искључити тачка O т.ј. тачка O мора се опколити са једном бесконачно малом затвореном површином. Такво поље као ово зове се <u>изнутра ограничено</u> јер та бесконачно мала површина представља унутрашњу границу тога поља. Упознаћемо такође поља која су споља ограничена тј. опкољена једном затвореном површином.

Потпуним векторским пољима називамо она поља која нису ни споља ни изнутра ограничена и која имају ту особину да исчезавају у бесконачности. Потпуно векторско поље не може никада бити Лапласово поље, јер пошто у томе пољу нема ни извора ни понора, то векторске линије не би могле имати ни почетка ни свршетка, биле би дакле затворене. Но како је поље у исти мах и потенцијално поље, то те векторске линије стоје нормално на еквипотенцијалним површинама, па и ту од површине нижег потенцијала ка површини већег потенцијала. Јасно је да такве линије не могу никад бити затворене т.ј. не могу се никад вратити у тачку кроз коју су прошле. Од посматраног поља захтевамо дакле да су векторске линије затворене а опет да не буду затворене. Тим двама противним захтевима не може тоње удовољити. Опкопимо ли у посматраном пољу тачку O куглом радиуса r а центрута у O, то је истицање из те затворене површине једнако

$$\Omega = \int_F \mathfrak{V}\, d\mathfrak{f}$$

а како су и вектор $\mathfrak{V}$ и вектор $d\mathfrak{f}$ радијални, то можемо њихов скаларни продукат заменити продуктом њихових интензитета, па имамо

$$\Omega = \int_F v\, df = \frac{v_0 r_0^2}{r^2} \int_F df = \frac{v_0 r_0^2}{r^2} 4 r^2 \pi =$$

$$= 4\pi v_0 r_0^2 = 4\pi e$$

Сузимо ли куглу бескрајно, то ју можемо сматрати као извор којега је дивергенција

$$\operatorname{div} \mathfrak{V} = q = \frac{4\pi v_0 r_0^2}{dV}$$

где dV означава запремину те кугле. Често пута, особито у науци о електрицитету, обичај је да се јачина извора не мери запремином идеалне течности која из њега истиче него са масом њеном и у том случају приписује се идеалној течности густина

$$\frac{1}{4\pi}$$

Како издашност добијамо ако запремину што је истекла помножимо густином, то ће истицање из кугле радиуса r бити једнако

$$\Omega_m = v_0 r_0^2 = e$$

Индекс означује да се издашност мери масом.

Замислимо један произвољан број радијалних поља

$$\mathfrak{V}_1 \quad \mathfrak{V}_2 \quad \mathfrak{V}_3 \quad \ldots$$

то значи да за свако поље постоје релације

$$\operatorname{div} \mathfrak{V}_1 = 0 \qquad \operatorname{div} \mathfrak{V}_2 = 0 \qquad \ldots$$

$$\int_L \mathfrak{V}_1\, d\mathfrak{l} = 0 \qquad \int_L \mathfrak{V}_2\, d\mathfrak{l} = 0 \qquad \ldots$$

Линиски интеграл вектора дуж једне затворене линије зове се и <u>цирку-</u>

лацијом. Замислимо да смо ова радијална поља суперпонирали т.ј. положили једно преко другог, па векторе $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots$ сложили у резултујући вектор $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3 + \cdots$$

онда из пређашњих једначина следује

$$\operatorname{div}(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \cdots) = \operatorname{div}\mathfrak{v}_1 + \operatorname{div}\mathfrak{v}_2 + \cdots = 0$$

или

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$$

дивергенција резултујућег поља ишчезава. Исто тако следује

$$\int_L \mathfrak{v}\,dl = \int_L (\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \cdots)\,dl =$$

$$= \int_L \mathfrak{v}_1\,dl + \int_L \mathfrak{v}_2\,dl + \cdots = 0$$

циркулација резултујућег поља ишчезава такође, па је зато оно Лапласово поље. Суперпонирањем радијалних поља добијамо увек Лапласово поље али из тога поља морамо искључити центре радијалних поља.

4° Сложена поља су она у којима ни дивергенција ни ротација не ишчезавају т.ј.

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} \neq 0 \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{v} \neq 0$$

Означимо ли дивергенцију која је један скалар са q, а ротацију која је вектор са $\mathfrak{w}$ т.ј.

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = q \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{v} = \mathfrak{w}$$

па раставимо вектор $\mathfrak{v}$ у две компоненте $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$$

које нека задовољавају следеће услове:

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}_1 = q \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{v}_1 = 0$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}_2 = 0 \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{w}$$

Ово растављање је могућно јер суперпонирамо ли компонентална поља $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$, то ће дивергенција и ротација резултујућег поља бити

$$\operatorname{div}(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) = \operatorname{div}\mathfrak{v}_1 + \operatorname{div}\mathfrak{v}_2 = q$$

$$\operatorname{rot}(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) = \operatorname{rot}\mathfrak{v}_1 + \operatorname{rot}\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{w}$$

На тај начин можемо свако поље раставити у два поља од којих је прво безвртложно а друго безизворно т.ј. прво потенцијално а друго соленоидално. О детаљима овога растављања говорићемо касније

Сад видимо да класификација исцрпљује ова поља. Са феноменолошким значењем те класификације упознаћемо се касније.

Теорија потенцијалних поља

Уочимо поље вектора $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r}) \qquad 1.)$$

То поље нека буде потенцијално поље т.ј. нека циркулација вектора $\mathfrak{v}$ исчезава у читавом пољу т.ј.

$$\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = 0$$

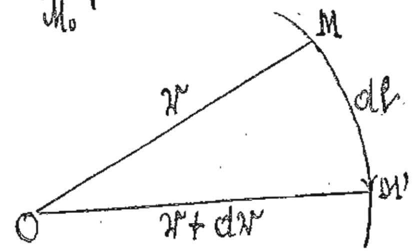
Онда можемо према пређашњем сматрати то поље као поље градијента скалара U, дакле

$$\mathfrak{v} = \nabla U \qquad 2.)$$

Између вектора $\mathfrak{v}$ и скалара U постоји још једначина

$$U = U_0 + \int_{M_0}^{M} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = U_0 + \int_{M_0}^{M} f(\mathfrak{r})\, d\mathfrak{r}$$

јер је елеменат пута $d\mathfrak{s}$ једнак такође $d\mathfrak{r}$, као што се



директно види из слике. Ако су r и $r+dr$ координате тачака M и M', онда је елеменат пута MM' једнак dr. Рекли смо да константу U_0 у векторским пољима која у бесконачности исчезавају, а са таквим ћемо се овди бавити, одређујемо захтевом: да и скалар U у бесконачности исчезава. Онда горња једначина добија облик

$$U = \int_{\infty}^{r} f(r)\, dr \qquad 3.)$$

јер је вектор положаја тачке M једнак r, а вектор тачке M_0 једнак ∞. Једначина 3.) је према томе инверзија једначине 2.). Једначина 2.) је просторна диференцијација, а једначина 3.) просторна интеграција.

Вредност $(-U)$ назвали смо скаларним потенцијалом, па је он једнак

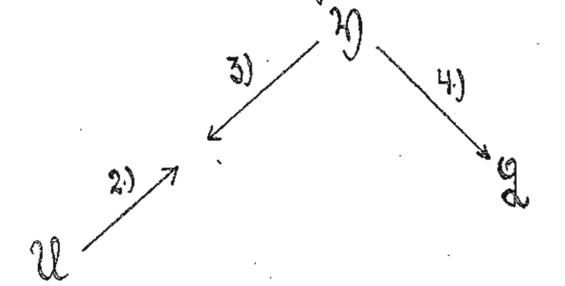
$$(-U) = \int_{r}^{\infty} f(r)\, dr \qquad 3^{*})$$

Потенцијал у једној тачки поља је према томе вредност линиског интеграла када произвољном линијом пођемо из те тачке и одемо у бескрајност.

Поље U је скаларно поље, но ми можемо из поља H извести још једно скаларно поље које је у тесној вези са њим: поље његове дивергенције

$$q = \operatorname{div} H \qquad 4.)$$

Са векторским су пољем H према томе у вези два скаларна поља: поље његова потенцијала и поље његове дивергенције. Наш задатак биће да испитамо однос тих трију поља: H, U и q и нађемо методе како се из једнога од тих поља изводе друга два. Један део тога задатка већ је изведен; једначина 2.) казује нам ка-



ко се из поља $\mathfrak{U}$ изводи поље $\mathfrak{W}$; једначина 3.) са једначином 1.) како се из поља $\mathfrak{W}$ изводи поље $\mathfrak{U}$; једначина 4.) како се из поља $\mathfrak{W}$ изводи поље g. Поће ли нам сад за руком да нађемо методу како се из поља g изводи поље $\mathfrak{W}$, онда је, као што се из предње шеме види, наш задатак већ решен, јер онда можемо из поља g извести поље $\mathfrak{U}$ тако да изведемо прво поље $\mathfrak{W}$ а из овога поље $\mathfrak{U}$. На исти начин можемо извести и инверзну операцију преко поља $\mathfrak{W}$. Зато се наш задатак продужује на задатак: да из поља извора g нађемо векторско поље $\mathfrak{W}$. Пре но што приступимо решењу тога задатка ваља да покажемо да се то решење може једнозначно провести. Узмимо да је могуће наћи два безвртложна поља $\mathfrak{W}_1$ и $\mathfrak{W}_2$ т.ј.

$$\int_L \mathfrak{W}_1\, dl = 0 \qquad \int_L \mathfrak{W}_2\, dl = 0$$

која имају то својство да су њихове дивергенције једнаке заданом пољу g т.ј.

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{W}_1 = g \qquad \mathrm{div}\, \mathfrak{W}_2 = g$$

Ако је могуће таква два поља наћи, онда решење нашег задатка није једнозначно јер га и поље $\mathfrak{W}_1$ и поље $\mathfrak{W}_2$ решава. Суперпонирајмо поље вектора $\mathfrak{W}_1$ са пољем вектора $-\mathfrak{W}_2$. Онда ће циркулација резултујућег поља $(\mathfrak{W}_1-\mathfrak{W}_2)$ бити једнака

$$\int_L (\mathfrak{W}_1-\mathfrak{W}_2)\, dl = \int_L \mathfrak{W}_1\, dl - \int_L \mathfrak{W}_2\, dl = 0$$

Резултујуће поље је према томе безвртложно. Дивергенција резултујућег поља једнака је

$$\mathrm{div}(\mathfrak{W}_1-\mathfrak{W}_2) = \mathrm{div}\, \mathfrak{W}_1 - \mathrm{div}\, \mathfrak{W}_2 = g - g = 0$$

Резултујуће је поље дакле и без извора. Поље вектора $(\mathfrak{W}_1-\mathfrak{W}_2)$ је према томе Лапласово. Тражимо ли да поље вектора $\mathfrak{W}$ буде потпуно векторско поље, онда и векторска поља $\mathfrak{W}_1$ и $\mathfrak{W}_2$ а према томе и поље $(\mathfrak{W}_1-\mathfrak{W}_2)$ морају бити потпуна поља. Но како је поље $(\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2)$ Лапласово, то оно тај услов може само онда задовољити, ако је $(\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2)=0$ т.ј. $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2$. Посматрамо ли даље потпуна векторска поља, то наш задатак има само једно значење.

Уочимо ли један произвољан број безвртложних векторских поља

$$\mathfrak{M}_1 \quad \mathfrak{M}_2 \quad \mathfrak{M}_3 \quad \cdots$$

т.ј.

$$\int_L \mathfrak{M}_1\, dl=0 \quad \int_L \mathfrak{M}_2\, dl=0 \quad \int_L \mathfrak{M}_3\, dl=0 \quad \cdots$$

дивергенције тих поља нека буду

$$q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \cdots$$

т.ј.

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{M}_1=q_1 \quad \mathrm{div}\, \mathfrak{M}_2=q_2 \quad \mathrm{div}\, \mathfrak{M}_3=q_3 \quad \cdots$$

Суперпонирамо ли сада та поља, то ће циркулација резултујућег поља $(\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2+\mathfrak{M}_3+\cdots)$ бити једнака

$$\int_L(\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2+\mathfrak{M}_3+\cdots)\, dl=\int_L \mathfrak{M}_1\, dl+\int_L \mathfrak{M}_2\, dl+\cdots \quad =0$$

јер су поједина поља била безвртложна. Дивергенција резултујућег поља биће:

$$\mathrm{div}(\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2+\mathfrak{M}_3+\cdots)=\mathrm{div}\, \mathfrak{M}_1+\mathrm{div}\, \mathfrak{M}_2+\mathrm{div}\, \mathfrak{M}_3+\cdots$$
$$=q_1+q_2+q_3+\cdots$$

Суперпонирањем безвртложних поља добијамо опет једно безвртложно поље, а дивергенција резултујућег поља једнака је збиру дивергенција компонентних поља. Ово смо правило доказали за решење нашег задатка.

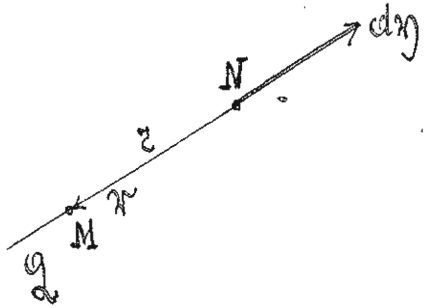
Замислимо сада да је свака тачка нашега поља извора q једини извор једнога радијалног поља, па замислимо да се сва та радијална поља суперпонирају. Ако су извори тих радијалних поља једнаки изворима посматраног поља, онда морамо суперпозицијом добити тражено поље $\mathfrak{M}$ јер је резултат суперпозиције као што смо пре показали једнозначан. Јачина извора радијалног поља била је мерена са

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = \frac{4\pi v_0 r_0^2}{dV}$$

та дивергенција мора бити једнака у свакој тачки поља јачини извора q, дакле

$$q = \frac{4\pi v_0 r_0^2}{dV}$$

Посматрамо ли сада једну тачку N нашега поља, то морамо имати на уму, да је свака тачка тога поља један извор. Тако је и произвољна тачка M извор



јачине q. Та тачка изазива у тачки N вектор $d\mathfrak{w}$, па је интензитет тога вектора према пређашњем једнак $\frac{v_0 r_0^2}{r^2}$ где r означава одстојање тачака M и N. Образујемо ли

$$M - N = \mathfrak{r}$$

то вектор $d\mathfrak{w}$ има правац $-\mathfrak{r}_0$. Зато је

$$d\mathfrak{w} = -\frac{v_0 r_0^2}{r^2}\mathfrak{r}_0$$

где $\mathfrak{r}_0$ означава јединични вектор у правцу $\mathfrak{r}$. Помножимо ли именитељ и бројитељ овога разломка са скаларом r, то добијамо

$$d\mathfrak{w} = -\frac{v_0 r_0^2}{r^3}\mathfrak{r} = -\frac{q\,dV}{4\pi r^3}\mathfrak{r}$$

Свака тачка поља има се сматрати за извор и сви ти извори изазивају у тачки N елементарне векторе $d\mathfrak{w}$ којих је величина изражена горњом једначином. Резултујући вектор $\mathfrak{w}$ добијамо ако сва та поља суперпонирамо т.ј. векторе $d\mathfrak{w}$ саберемо или, што је исто, ако горњи израз интегралимо преко читавог поља. Зато је

$$\mathfrak{w} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{q\,\mathfrak{r}}{r^3}\,dV \qquad 5.)$$

Интеграл је вектор, зато ће наравно и резултат бити вектор. Тако смо решили задатак да из поља извора q изведемо поље вектора $\mathfrak{w}$.

Поље U из поља q можемо извести тако да из поља q изведемо прво поље $\mathfrak{w}$ по горњој једначини, па онда из поља η потоњу једначине 3.) поље $\mathfrak{U}$.

Слично је и са инверзном операцијом, но ми можемо поступити директно. Потенцијал елементарних радијалних поља из којих је постављено поље састављено једнак је

$$d(-\mathfrak{U}) = \frac{v_0 r_0^2}{r} = \frac{e}{r} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{q\,dV}{r}$$

Потенцијал читавог поља добијамо ако горњи израз интегралимо између граница 0 и ∞

$$\mathfrak{U}_1 = (-\mathfrak{U}) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{q\,dV}{r} \qquad 6.)$$

Инверзна операција: из поља $\mathfrak{U}$ извести поље q, следује директно из једначина

$$q = \operatorname{div} \eta$$
$$\eta = \operatorname{grad} \mathfrak{U}$$

и зато је

$$q = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathfrak{U} = \nabla^2 \mathfrak{U} \qquad 7.)$$

Тиме смо извели све једначине које везују поља q, η и $\mathfrak{U}$.

Истицање кроз једну затворену површину мерили смо изразом

$$\Omega = \int_f \eta\, df$$

Замислимо да је вектор η представљен брзином идеалне течности коју смо употребили да нашем пољу η дадемо реалну представу. Онда нам горњи интеграл даје ону запреминску множину те течности која у јединици времена истече из те затворене површине. Често пута, особито у науци о електрицитету, не мери се истицање са запремином него са масом те идеалне течности и означимо ли специфичну густину те течности са ϱ_1, то је истицање масе у јединици времена

$$e = \varrho_1 \int_f \eta\, df$$

Коефицијенат ϱ узима се у науци о електрицитету увек да је једнак

$$\varrho = \frac{1}{4\pi}.$$

па је зато истицање једнако

$$e = \frac{1}{4\pi}\int_F \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} = \frac{1}{4\pi}\Omega$$

или

$$\Omega = 4e\pi$$

Уведемо ли аналого овоме место величине $\mathfrak{d}$ величину $4\pi s$, то једначине 5.) и 6.) добијају следеће облике

$$\mathfrak{v} = -\int_0^\infty \frac{s\mathfrak{r}}{r^3}\, dV \qquad 5^*)$$

$$U_1 = \int_0^\infty \frac{s\, dV}{r} \qquad 6^*)$$

у којима се обично у науци о електрицитету употребљују.

<u>Дисконтинуитети у потенцијалном пољу</u>. До сада смо претпостављали да је потенцијално поље континуирно. Напустимо сада претпоставку и дозволимо у посматраном пољу $\mathfrak{v}$ а према томе и у његовим деривираним пољима $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{U}$ дисконтинуитет. Један случај таквог дисконтинуитета ми смо већ упознали; то је било код радијалног поља, јер је оно на месту свога јединога извора дисконтинуирно. Зато смо тај извор искључили из посматраног поља оградивши га са довољно маленом куглом. Позабавимо се још једанпут са тим случајем. Истицање радијалног поља кроз једну куглу чији центар лежи у извору O било је једнако

$$\Omega = \int_F \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f}$$

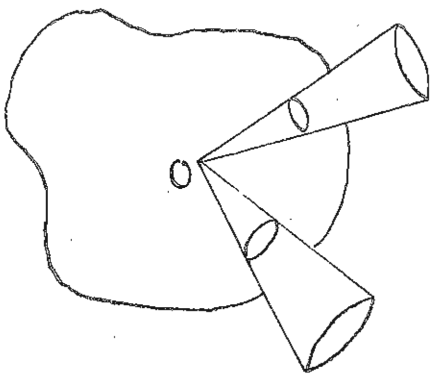
Како вектори $\mathfrak{v}$ и $d\mathfrak{f}$ имају исти правац, јер су оба радијална, то можемо продукат $\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f}$ заменити продуктом $v\,df$ па имамо

$$\Omega = \int_F v\, df = \frac{v_0 r_0^2}{r^2}\int_F df = 4\pi v_0 r_0^2 = 4\pi e$$

Потенцијал тога поља био је

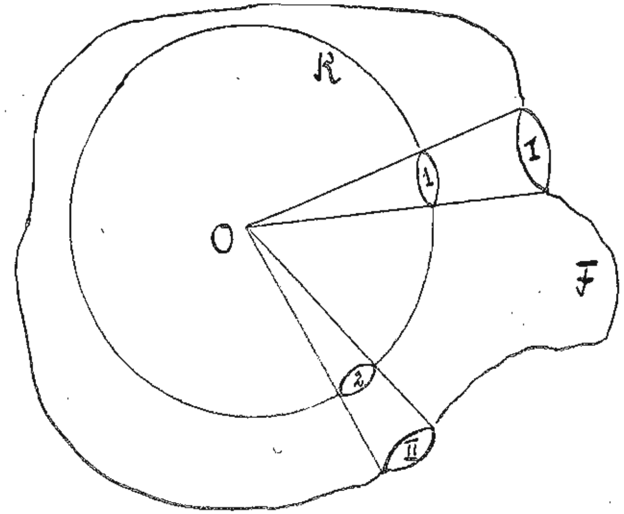
$$U_1 = (-U) = \frac{e}{r}$$

Питамо сада какво ће истицање бити кроз једну произвољну затворену површину која обухвата извор O. Истицаће кроз све концентричне кугле које обухватају тачку О биће једнако 4πе. Посматрано радијално поље је потенцијално и соленоидално поље. Соленоиди тога поља биће конуси са центром у тачки О, јер су векторске линије радијалне. Протицање кроз све пресеке таквог соленоида је константно. Кад дакле читаво поље разделимо у такве соленоиде,

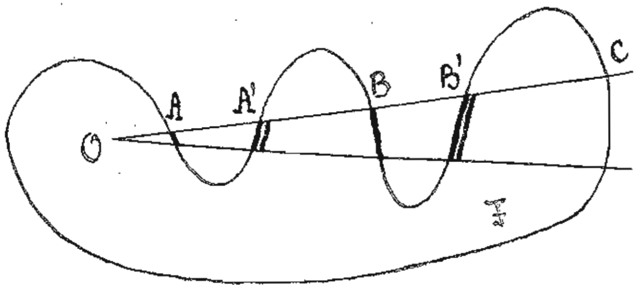


па обавијемо око тачке О као центра једну куглину површину, то ће ти сви соленоиди пролазити кроз њу и њихово истицање кроз ту куглу биће једнако 4πе. Сви ти соленоиди просецају и произвољну затворену површину F, а како је њихово протицање у свима пресецима константно, то ће њихово истицање и кроз ту површину бити једнако 4πе.

Сваки соленоид који продире куглу K око О као центра продире и површину F. Пресеке соленоида на кугли K означимо са: 1,2,3,… а пресеке на површини F са: I, II, III, … Протицање кроз пресек 1 једнако је протицању кроз пресек I; протицање кроз пресек 2 једнако је протицању кроз пресек II и т. д. Ако смо на тај начин разделили читаво поље у соленоиде, то ће сви пресеци 1,2,3,… сачињавати површину кугле K, протицање кроз све те пресеке једнако је према прећашњем 4πе. Сви пресеци I, II, III, … сачињаваће површину F. Како сваком „римском" пресеку одговара по један „арапски" пресек, то ће збир протицања кроз све

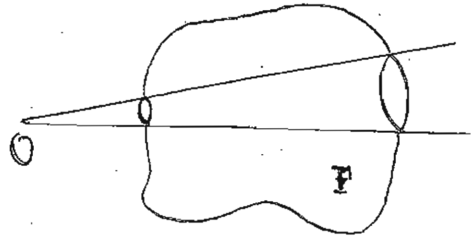


„ритске" пресеке т.ј. кроз површину F бити такође 4πe. Овај ће закон важити и онда ако површина F има такав облик да је соленоиди више пута продиру. Ако је

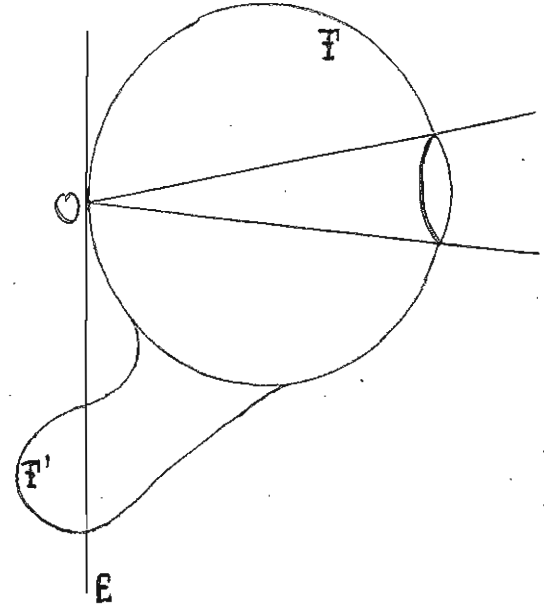


површина затворена, онда ју соленоиди могу продирати само непаран број пута н.пр. 5 пута као што је на слици. На местима A, B, C истиче идеална течност из површине, а на местима A' и B' утиче у површину, јер нормала површине затвара на овим местима туп угао са осом соленоида. Према својству соленоида истиче на месту A исто толико колико на место A' утиче; исто тако истиче на месту B толико колико на месту B' утиче и тако резултује само истицање на месту C.

Ако затворена површина F не обухвата тачку O него лежи изван ње, онда је истицање кроз ту површину једнако нули, јер сваки соленоид продире ту површину два или паран број пута, па колико у простор који ту површину обухвата утече толико ће и да истече.



Ако тачка O лежи на самој површини, онда истицање из те површине биће једнако 2πe. Конструишемо ли све соленоиде који се из тачке O шире у простор, то ће само они који се налазе на десној страни равнине E која површину F у тачки O тангира у површину F продирати; сви ти



соленоиди продиру само половину кугле које центар лежи у O, па је зато истицање кроз F једнако $2\pi e$. Ово је и онда случај ако један део површине F пресеца раван E, јер онда кроз део F' који се налази на левој страни од равни E истицање је равно нули, јер сваки соленоид пресеца тај део површине два или паран број пута.

Имамо ли више таквих радијалних поља

$$\mathfrak{Y}_1 \quad \mathfrak{Y}_2 \quad \cdots \quad \mathfrak{Y}_n$$

са издашностима извора

$$e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n$$

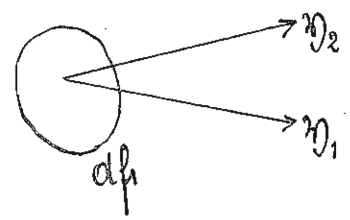
то ће резултујуће поље бити једнако

$$\mathfrak{Y} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Y}_i$$

Потенцијал резултујућег поља биће

$$U_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i}{r_i}$$

Као што се поља $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ ... суперпонирају, тако се исто суперпонирају њихови потенцијали и њихова истицања кроз произвољне површине, јер рецимо узмимо елеменат такве једне површине df, то ће протицање поља $\mathfrak{Y}_1$ бити једнако $\mathfrak{Y}_1 df$, протицање поља $\mathfrak{Y}_2$ биће $\mathfrak{Y}_2 df$ и т.д. Збир свих тих протицања је



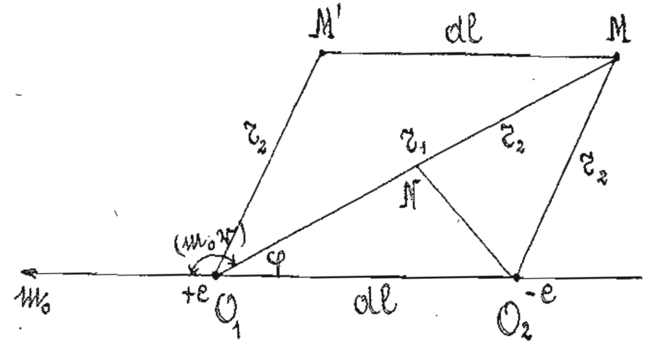
$$\mathfrak{Y}_1 df + \mathfrak{Y}_2 df + \cdots = (\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \cdots)\, df = \mathfrak{Y}\, df$$

- протицање резултујућег поља једнако је дакле збиру протицања компонент. поља. Тако ће истицање резултујућег поља кроз једну затворену површину која обухвата све изворе e_1, e_2, ... e_n бити једнако

$$\Omega = 4\pi \sum_{i=1}^{i=n} e_i$$

Ова једначина зове се такође <u>Gauss-ова теорема</u>.

Од специјалног интереса је случај ако су компонентарна поља те природе, да су збирови извора једнаки нули т.ј. да су јачине извора једнаке јачини понора; онда је истицање кроз једну затворену површину која све те изворе обухвата једнако нули. Таква поља која је могуће опколити површином тако да је истицање кроз ту површину једнако нули при чему је дозвољено да се површина шири до у бесконачност, зову се <u>поља која у бесконачности исчезавају</u>. Таква су поља електрична и магнетна поља, јер у њима, као што ћемо касније видети, одговара сваком позитивном извору један негативан извор. Поље гравитације изгледа да није такво поље јер познајемо само позитивне масе. Код оваквих поља која у бесконачности исчезавају један сингуларан за електрицитет и магнетизам важан случај је случај <u>двоструког извора</u>. Тај случај настаје тако, ако се два извора издашности +е и −е бесконачно приближе један другом. Са овим случајем ћемо се сада бавити. Ови извори нека буду O_1 и O_2; њихово одстојање нека буде dl; издашност првог извора +е а извора O_2 −е. Уочимо



једну тачку поља M. Одстојање те тачке од извора O_1 нека буде r_1, а од извора O_2 r_2. Потенцијал у тачки M је онда

$$U_1=\sum \frac{e}{r} = \frac{e}{r_1}-\frac{e}{r_2} = e\,dl\,\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{dl} = -e\,dl\,\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}}{dl}$$

Квоцијенат

$$\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}}{dl}$$

представља нам промену скалара $\frac{1}{r}$ ако се тачка M помакне паралелно са O_2O_1 за дужину dl. Означимо ли према томе јединични вектор који иде од понора O_2 према извору O_1 са m_0, то је овај квоцијенат једнак

$$\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}}{dl} = m_0 \nabla \frac{1}{r}$$

према једначини из Векторске Анализе

$$\frac{dU}{da} = a_0 \nabla U$$

Ми би требали у последњој једначини на десној страни место r да пишемо r_1, но одмах замењујемо r_1 са r јер означујемо са том дужином одстојање тачке M од оба извора, јер пошто је dl бесконачно мало, то се r_1 приближује бесконачно дужини r_2. Према томе

$$U_1 = -e\,dl\,m_0 \nabla \frac{1}{r} \qquad 1.)$$

Да овај потенцијал буде коначан мора продукат $e\,dl$ бити коначан т.ј. кад је dl бескрајно мало мора e бити бескрајно велико. Вектор

$$m = e\,dl\,m_0$$

зовемо *моменат двоструког извора* а скалар $e\,dl$ његовим *интензитетом*. Зато можемо да пишемо

$$U_1 = -m \nabla \frac{1}{r} \qquad 1'.)$$

Изразу за потенцијал можемо дати још један други облик који ће нам такође требати при применама у теорији

$$U_1 = e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = e\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = -e\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

Како су тачке O_1 и O_2 бескрајно блиске, то се дужине r_1 и r_2 бескрајно мало разликују, па зато можемо место продукта $r_1 r_2$ да пишемо

$$r_1 r_2 = r_1^2 = r^2$$

Вредност бројитеља $r_1 - r_2$ можемо овако да нађемо: пренесемо ли из тачке M на правац MO_1 дужину r_2 т.ј. опишемо ли из M круг радиуса r_2, то елеменат тога круга O_2N можемо сматрати за елеменат праве, јер је тај луг бесконачно мален. Тај елеменат стоји нормално на дужини MO_1, угао код N има дакле $90°$. Означимо ли угао MO_1O_2 са φ, то је

$$r_1 - r_2 = O_1N = dl \cos\varphi$$

Означимо ли угао $MO_1 m_0$ са $(m_0 r)$ где са r означавамо вектор O_1M, то су углови φ и $(m_0 r)$ суплементарни, па је зато

$$r_1 - r_2 = -dl \cos(m_0 r)$$

Због тога је

$$U_1 = \frac{e\,dl}{r^2}\cos(m_0 r) \qquad 2.)$$

Из једначина 1.) и 2.) следује једна чисто геометриска релација

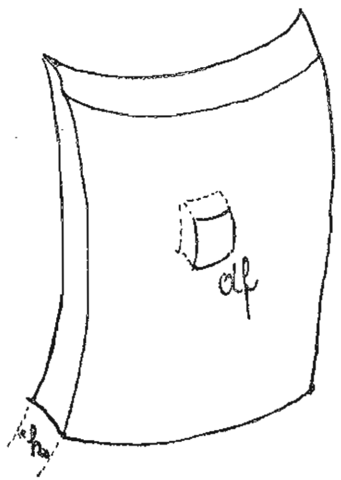
$$-m_0 \nabla \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\cos(m_0 r) \qquad 3.)$$

Упознали смо до сада ове две врсте дисконтинуитета у векторским пољима:

1° дискретне изворе и

2° дискретне двоструке изворе. Из тих дисконтинуитета можемо извести друге дисконтинуитете ако их континуирно поређамо један до другог. Поређамо ли дискретне изворе континуирно дуж једне линије, то добијамо линију извора, а поређамо ли их континуирно широм једне површине, то добијамо површину извора; поређамо ли дискретне двоструке изворе континуирно дуж једне линије тако да моменат сваког од ових извора стоји нормално на линији, то добијамо т. зв. двоструку линију; поређамо ли дискретне двоструке изворе широм једне површине тако да моменат сваког таквог извора стоји нормално на површини, то добијамо т. зв. двоструку површину. Једноставне и двоструке линије од мањег су интереса, док су површине извора и двоструке површине од врло велике важности.

Површина извора. Ако су сви извори поља концентрисани на једној површини, онда и за ово поље важи све оно што смо о суперпозицији елементарних поља казали. Ми смо у пређашњим испитивањима означили са ρ јачину извора и везали ју на елеменат простора тако да је издашност елемента dV била ρdV. Имамо ли површину извора, то морамо јачину извора везати на елеменат површине па ћемо из претходних једначина најравнијим путем прећи на једначине за површине извора, ако прво претпоставимо да је површина просторно тело само тако где је дебљина веома мала према димензијама ширине. У осталом само овај случај остварен је у природи јер математских површина не познајемо у природи. Дебљина такве плоче нека буде h. Исецимо из те површине један елеменат df. Онда је запремина цилиндричног дела плоче који одговара том елементу једнака



$$dV = h\,df$$

па је

$$\varrho\,dV = \varrho\,h\,df$$

Замислимо сада да h бива бескрајно мало и да се продукат ϱh приближује једној граничној вредности ω

$$\varrho h = \omega$$

онда називамо ту граничну вредност издашност или дивергенција површине. У пољу извора који су испуњавали цели простор имали смо потенцијал

$$U_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varrho\,dV}{r}$$

где се интеграл има да изведе преко читавог бескрајног поља. Ако су извори поља сконцентрисани на површини, онда можемо део интеграла ϱdV сменити са ωdf, па ће бити

$$U_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\omega\,df}{r} \qquad 4.)$$

где се интеграција има да изведе преко свих извора, а ти су у овом случају редуковани само на површину. Множина идеалне течности, којом представљамо векторско поље, што истече из јединице површине једнака је ω. Приписујемо ли тој течности, као што смо и пре чинили, густину $\frac{1}{4\pi}$, онда је маса течности што истече из јединице површине

$$\varrho = \frac{1}{4\pi}\omega$$

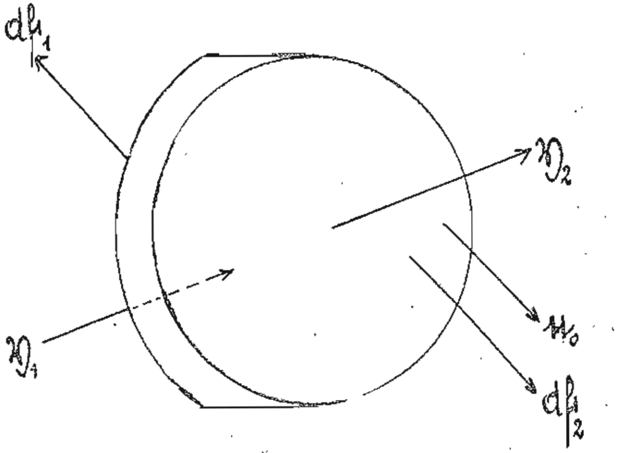
Као што смо код дискретних извора издашност е извора мерили са масом течности што из тога извора у јединици времена истече, тако ћемо сада називати ϱ-ом издашност површине

$$\omega = 4\pi\varrho$$

па можемо једначини 4.) дати и овај облик

$$U_1 = \int \frac{\varrho\, df}{r} \qquad 4.)$$

Из посматране површине извора којој дајемо још коначну дебљину h исецимо један цилиндрични елеменат површине f. Онда је према Gauss-овој једначини, ако



је примењено на запремину тога елемента V

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathfrak{v}\, dV = \int_F \mathfrak{v}\, df$$

Испитујмо сада какав ће облик добити горња једначина ако се посматрани елеменат dV тако смањује да његова површина F буде једнака df бескрајно малена првог реда а дебљина h буде бескрајно малена другог реда. Лева страна горње једначине биће у овом случају једнака

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\, dV = q\, dV = q\, h\, df = \omega\, df$$

При израчунавању десне стране горње једначине имамо да узмемо у обзир само базе цилиндра јер омотач постаје бескрајно малена вишег реда. При томе можемо вредност вектора $\mathfrak{v}$ широм сваке од посматраних база сматрати константним, па означимо ли вредности тих вектора са $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ а векторе база са df_1 и df_2, то ће лева страна Gauss-ове једначине бити једнака

$$\mathfrak{H}_1 df_1 + \mathfrak{H}_2 df_2$$

При томе ваља имати на уму да ће вектори df_1 и df_2 бити наперени на супротне стране посматраног цилиндра т.ј. вектор df_2 биће наперен на десну са вектор df_1 на леву. Оба вектора имају дакле противан правац. Површине база су иначе једнаке; означимо их са df. Означимо ли још јединични вектор који има исти правац као и вектор df_2 са n_0 то је

$$df_2 = df\, n_0$$

$$df_1 = -df\, n_0$$

Зато можемо да пишемо

$$\mathfrak{H}_1 df_1 + \mathfrak{H}_2 df_2 = (\mathfrak{H}_2 n_0 - \mathfrak{H}_1 n_0)\, df$$

$\mathfrak{H}_2 n_0$ и $\mathfrak{H}_1 n_0$ представљају нормалне компоненте вектора $\mathfrak{H}_2$ на базу f у правцу n_0. Означимо те векторе са

$$\mathfrak{H}_2 n_0 = v_{2n}$$

$$\mathfrak{H}_1 n_0 = v_{1n}$$

па ће десна страна Gauss-ове једначине бити једнака

$$(v_{2n} - v_{1n})\, df$$

па зато можемо Gauss-ову једначину заменити са

$$\omega\, df = (v_{2n} - v_{1n})\, df$$

или

$$\omega = v_{2n} - v_{1n} \qquad 5.)$$

Горња једначина казује: да се на површини извора њена нормална компонента вектора $\mathfrak{H}$ скоком са вредности ω или за вредност

$$4\pi\varrho = v_{2n} - v_{1n} \qquad 5^{*})$$

Компоненте вектора $\mathfrak{H}$ у правцу n_0 једнаке су према пређашњем негативним парцијалним диференцијалним квоцијентима потенцијала U_1 по елементу нормале, дакле

$$v_{2n} = -\frac{\partial U_2}{\partial n} \qquad v_{1n} = -\frac{\partial U_1}{\partial n}$$

ако U_2 представља потенцијал на десној страни површине са U_1 на левој. С обзиром на једначине 5.) и 5*) добијамо

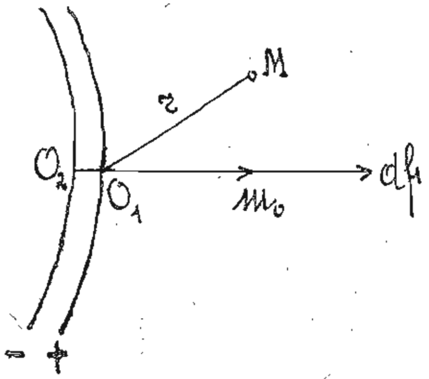
$$\frac{\partial U_1}{\partial n} - \frac{\partial U_2}{\partial n} = \omega \qquad 6.)$$

или

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} - \frac{\partial U_2}{\partial n} = 4\pi\rho \qquad 6^*)$$

- Пролазом кроз површину извора мењају се парцијални диференцијални коефицијенти потенцијала скоком. Ову особину опазио је први Coulomb, прецизирао Poisson, а доказали су је Laplace и Cauchy.

<u>Двоструке површине</u>. Оне постају, према прећашњем, тако да двоструке изворе поразмештамо континуирно широм такве површине тако, да је моменат двоструког извора тј. вектор што иде од понора према извору нормалан на ту површину. Означимо као позитивну страну површине ону страну на којој се налазе позитивни извори, а као негативну ону на којој се



налазе негативни извори, онда се вектор површине $d\mathfrak{f}$ по правцу своме подудара са вектором $\mathfrak{m}_0$ двоструког извора, јер је и тај вектор ишао од понора према извору. Зато можемо да кажемо

$$d\mathfrak{f} = \mathfrak{m}_0\, df$$

Издашност двострукога извора означили смо са $\pm e$. Тима издашностима одговараће у нашем случају издашности елемената површине $\pm \rho\, df$. Потенцијал што га двоструки извор изазива у тачки M био је једнак

$$-e\, dl\, \mathfrak{m}_0 \nabla \frac{1}{r}$$

Елеменат двоструке површине изазиваће у тачки M потенцијал

$$-\rho\, df\, dl\, \mathfrak{m}_0 \nabla \frac{1}{r}$$

или према горњој једначини

$$-\rho\, dl\, d\mathfrak{f}\, \nabla \frac{1}{r}$$

Означимо

$$\rho\, dl = \tau$$

где τ називамо <u>интензитетом момента двоструке површине</u>; онда је један елеменат двоструке површине изазвао у тачки M потенцијал

$$-\tau \operatorname{grad}\frac{1}{r}\, df_1$$

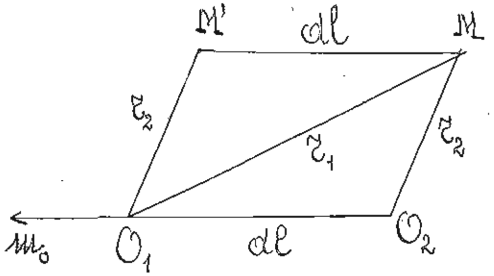
па ће према потенцијал што га читава површина у тачки M изазива бити једнак

$$U_1 = -\int_f \tau \operatorname{grad}\frac{1}{r}\, df_1 \qquad 1.)$$

или

$$U_1 = -\int_f \tau \nabla \frac{1}{r}\, df_1 \qquad 2.)$$

У горњој једначини је при операцији ∇ O непомично а M помично тј. израз $\nabla\frac{1}{r}$ смо схватили као промену скалара $\frac{1}{r}$ ако се тачка M бесконачно мало у правцу вектора m_0 помакне. Вратимо се још једанпут тој слици. Израз



$$\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}}{dl}$$

представља је промену скалара $\frac{1}{r}$ ако смо тачку M за дужину dl помакли у правцу вектора m_0. Дакле

$$\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}}{dl} = \frac{d\frac{1}{r}}{dl} = m_0 \nabla \frac{1}{r}$$

Израз

$$\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{dl}$$

представља промену скалара $\frac{1}{r}$ ако тачку M оставимо непомичну а тачку O_2 помакнемо у правцу вектора m_0 за дужину dl. Зато је

$$\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{dl} = m_0 \nabla_0 \frac{1}{r}$$

Индекс „о" означава да је тачка M непомична а тачка O помична. Из горњих једначина следује да је

$$m_0 \nabla \frac{1}{r} = -m_0 \nabla_0 \frac{1}{r}$$

Једначину 1.) можемо писати такође

$$U_1 = -\int \tau\, m_0 \nabla \frac{1}{r}\, df$$

зато јер је било

$$df_1 = m_0\, df$$

пошто је вектор m_0 био нормалан на површину. Зато је

$$U_1 = -\int_f \tau\, m_0 \nabla_0 \frac{1}{r}\, df = \int_f \tau \nabla \frac{1}{r}\, df_1 \qquad 3.)$$

Ако је интензитет τ константан, онда је

$$U_1 = \tau \int_f \nabla_0 \frac{1}{r}\, df_1 \qquad 4.)$$

У овој једначини и у претпоследњој је при операцији ∇ тачка M непомична а тачка O помична. Исто је тако и при интеграцији тачка O помична, јер се интеграл има узети преко читаве површине, док је у једначини 2) била при операцији ∇ тачка M помична а при интеграцији тачка O помична. Зато је ова трансформација била потребна. Једначина 4) дозвољава једну врло интересантну интерпретацију: Протицање једног вектора $\mathfrak{v}$ кроз једну површину било је представљено изразом $\int_f \mathfrak{v}\, df$. Узмимо да је вектор $\mathfrak{v}$ потенцијалан вектор т.ј. да је

$$\mathfrak{v} = -\nabla \mathfrak{U}_1$$

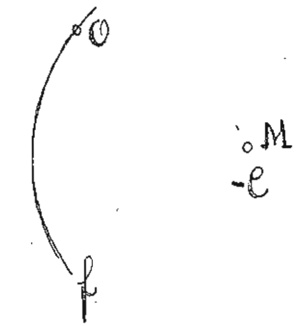
онда је протицање једнако

$$-\int_f \nabla \mathfrak{U}_1\, df$$

Узмимо сада да је вектор $\mathfrak{v}$ вектор радијалног поља са једним јединим понором издашности e или извором издашности $-e$. Онда је

$$\mathfrak{U}_1 = -\frac{e}{r}$$

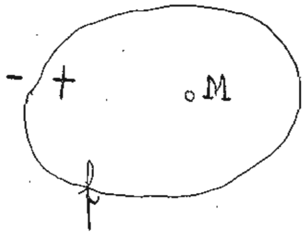
Нека понор буде у тачки M а посматрана површина кроз коју меримо протицање нека буде f. Онда је протицање једнако



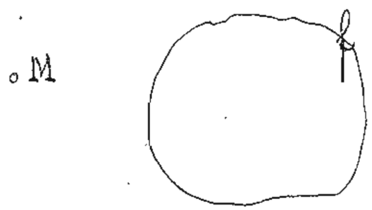
$$+e\int \nabla \frac{1}{r}\, df$$

Сравнимо ли ову једначину са једначином 4) и узмемо ли у обзир да је у овој једначини при интеграцији и при операцији ∇ тачка O површине помична то можемо да поставимо следећу *теорему*: Потенцијал што га једна двострука површина f интензитета τ изазива у једној тачки M једнак је протицању радијалног поља са понором τ у тачки M кроз ту површину.

Из ове теореме могу се извести одмах врло важне консеквенце: ако је површина f затворена, па обухвата тачку M, онда је протицање из понора M са издашности τ једнако 4πτ

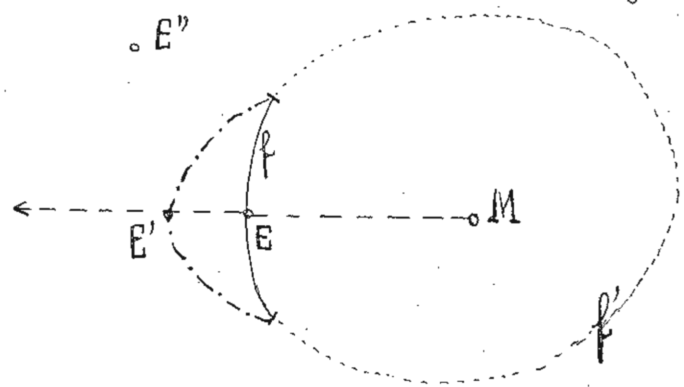


као што смо прије показали и зато је потенцијал што га површина f изазива у тачки M једнак 4πτ. Потенцијал је у унутрашњости те површине константан. У моменту када тачка M пропази кроз површину f протицање је кроз ту површину, као што смо пре показали, једнако 2πτ и зато је потенцијал што га површина f у једној својој тачки изазива једнак 2πτ. Налази ли се тачка M изван површине f, онда



је протицање из тачке M кроз површину f једнако нули и зато је потенцијал што га једна двострука затворена површина у једној спољашњој тачки изазива једнак нули.

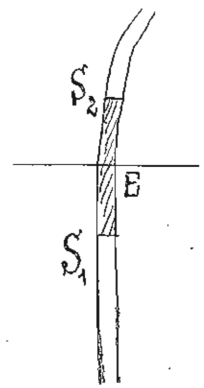
При пропазу кроз затворену површину мења се потенцијал скоком за вредност 4πτ. Но и кад површина није затворена и онда ће се потенцијал мењати скоком као што ћемо сада доказати: Посматрану незатворену површину означимо са f. Она изазива у тачки M потенцијал U_1. На површини f надовежимо једну другу површину f' тако да ова



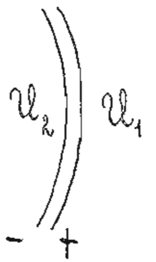
површина има исти интензитет τ и да са површином f сачињава једну затворену површину која тачку M обухвата. Потенцијал што га та површина f' изазива у тачки M нека буде U_1'. Онда можемо писати

$$U_1 = (U_1 + U_1') - U_1'$$

$(U_1 + U_1')$ то је потенцијал што га изива затворена површина у тачки М а U_1' је потенцијал што га сам део f' изазива у тачки М. Прође ли тачка М кроз површину f, то ће се (U_1+U_1') према пређашњем променити скоком за вредност $4\pi\tau$. Потенцијал U_1' мења се при пролазу тачке М кроз Е континуирно, јер тачка Е није ничим одликована тачка површине f'. Зато је промена читавог израза $(U_1+U_1')-U_1$ при пролазу кроз површину једнака $4\pi\tau$ тј. потенцијал U_1 мења се скоком. Да се потенцијал U_1' при пролазу кроз Е мења континуирно можемо и овако увидети: Замислимо да површина f' остаје потпуно непромењена а површину f да смо деформисали у положај - - - -. Кад се потенцијал U_1' не би у тачки Е мењао континуирно, онда се не би ни у тачки Е' мењао континуирно, јер сада површина f пролази кроз тачку Е' и тако можемо доказати за сваку следећу тачку Е'' и т.д. јер можемо сада површину f положити тако да иде кроз тачку Е''. Једном речи потенцијал што га површина f' изазива у свакој тачки простора био би дисконтинуиран. Ако интензитет површине није свуда константан него се мења континуирно, онда се потенцијал при пролазу кроз једну тачку те површине мења скоком за вредност $4\pi\tau$ где τ означава интензитет површине у тој тачки. И у овоме је случају ирелативно да ли је површина затворена или није. Да то увидимо, посматрајмо такву површину где се τ континуирно мења. У продорној тачки Е нека интензитет има вредност τ. Онда можемо један довољно мален



део површине S_1S_2 сматрати као површину истога интензитета. При пролазу кроз ту површину мења се потенцијал према пређашњем скоком са вредности $4\pi\tau$, а потенцијал што га остали део површине у посматраној тачки површине изазива мења се при пролазу кроз ε континуирно из истих разлога као у пређашњем случају. Означимо ли према томе потенцијал на позитивној страни двоструке површине у



непосредној близини њеној са U_1 а на негативној са U_2, то постоји једначина

$$U_1 - U_2 = 4\pi\tau$$

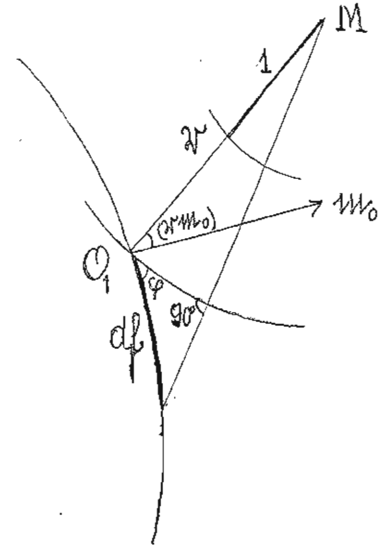
ε се може мењати континуирно широм целе површине а диференција $U_1 - U_2$ не мења се онда на посматраном месту површине. Мења ли се на једној површини потенцијалног поља потенцијал скоком, то се та површина може сматрати за двоструку површину. Интензитет је онда дат горњом једначином.

Једначини

$$U_1 = -\int_f \tau\, n_0 \nabla \frac{1}{r}\, df$$

можемо дати још једну интерпретацију из које такође директно следују консеквенције што смо их сад извели. Ми смо извели једначину

$$n_0 \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\cos(r n_0)}{r^2}$$



па је зато

$$U_1 = \int \frac{\tau \cos(r n_0)}{r^2}\, df$$

Угао $(r n_0)$ је угао што га радиус-вектор што спаја тачку O_1 површине са тачком M затвара са нормалом те површине. Опишемо ли из тачке M куглу радиуса r, то конус који повучемо из тачке M око елемента df исеца на тој кугли површину: $df \cdot \cos\varphi$, где φ означава угао што га елеменат df који можемо сматрати за раван затвара са суседним елементом кугле. Но како је

$$\varphi = (r m_0)$$

јер су r и m_0 нормале обеју равнина, то је $\cos(r m_0) \cdot df$ елеменат кугле што га конус из тачке M обавијен око површине df исеца на тој кугли. Опишемо ли из тачке M једну куглу радиуса 1, то се површине што их конус на једној и на другој кугли исеца односе као $1 : r^2$. Зато је

$$\frac{\cos(r m_0)\, df}{r^2}$$

она површина што ју конус из тачке M обавијен око површине df исеца на кугли радиуса 1. Та површина зове се такође и просторни угао, па означимо ли га са $d\theta$, то је

$$\frac{\cos(r m_0)\, df}{r^2} = d\theta$$

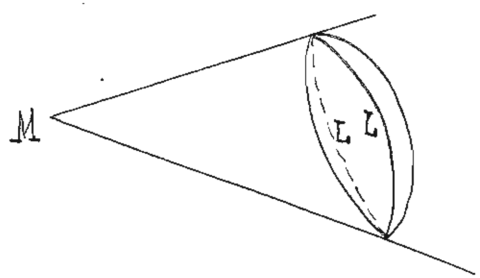
а зато је

$$U_1 = \int_f \tau\, d\theta$$

Ако је τ константно, онда је

$$U_1 = \int_f \tau\, d\theta = \tau \int_f d\theta = \tau\theta$$

где θ означава онај просторни угао под којим се види површина f из тачке M. Ако је површина затворена па се тачка M налази у њој, онда је θ једнако површини читаве кугле дакле 4π, па је зато $U_1 = 4\pi\tau$; ако се тачка M налази на затвореној површини, онда је просторни угао једнак половини површине кугле, дакле 2π, а зато је $U_1 = 2\pi\tau$; ако се тачка M налази ван затворене површине, онда ако из тачке M положимо конус који ту површину тангира,



онда додирна линија тога конуса и те површине L дели ту површину у два дела: од једног дела види се из тачке M његова спољашња страна, зато је просторни угао тог дела позитиван; од другог дела види се његова унутрашња страна, зато је просторни угао негативан; а како су иначе оба та просторна угла једнака, то је просторни угао под којим се из тачке M види читава површина једнак нули. Зато је и потенцијал у тачки M једнак нули као што смо то и пре доказали.

Теорија соленоидалних поља.

Уочимо поље вектора $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r}) \qquad 1.)$$

Вектор $\mathfrak{v}$ нека буде соленоидалан вектор т.ј. нека његова дивергенција у читавом пољу исчезава

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0. \qquad 2.)$$

Из поља тог вектора можемо извести још једно векторско поље: поље његовог ротора

$$\mathfrak{w} = \operatorname{rot} \mathfrak{v} \qquad 3.)$$

слично као што смо код ламеларног поља извели поље његове дивергенције. Код ламеларног поља имали смо још једно деривирано поље: поље скаларног потенцијала. Да би аналогија између соленоидалних и ламеларних поља била потпуна и да тековине теорије ламеларних поља узмогнемо применити на теорију соленоидалних поља, уведимо појам <u>векторског потенцијала</u>. То је један вектор деривиран из поља вектора $\mathfrak{w}$ који има то својство да Hamilton-ова операција на њему векторијелно изведена даје вектор $\mathfrak{w}$

$$[\nabla \mathfrak{U}] = \mathfrak{w} \qquad 4.)$$

или

$$\operatorname{rot} \mathfrak{U} = \mathfrak{w} \qquad 4.^{*})$$

Слично је било и код ламеларних поља. Онде смо добили вектор $\mathfrak{w}$ ако смо на скаларни потенцијал U скаларно извели Hamilton-ову операцију. Код ламеларних поља био је према тој дефиницији скаларни потенцијал одређен до на једну адитивну константу, јер је

$$\operatorname{grad}(U+C) = \operatorname{grad} U$$

Слично је и код векторског потенцијала. И векторском потенцијалу $\mathfrak{U}$ можемо додати један вектор $\mathfrak{C}$ који има то својство да је

$$\operatorname{rot} \mathfrak{C} = 0$$

т.ј. један ламеларан вектор; онда је

$$\operatorname{rot}(\mathfrak{U}+\mathfrak{C}) = \mathfrak{w}$$

Вектор $\mathfrak{C}$ игра овде улогу адитивне константе. Ми смо код ламеларних поља константу C елиминисали захтевом да поље у бесконачности исчезава. У овом случају ћемо елиминисати вектор $\mathfrak{C}$ захтевом да векторски потенцијал $\mathfrak{U}$ буде један соленоидалан вектор т.ј.

$$\operatorname{div} \mathfrak{U} = 0 \qquad 5.)$$

Да је овај услов довољан за једнозначно одређење вектора $\mathfrak{U}$ видећемо доцније. Са пољем $\mathfrak{w}$ су према томе у тесној вези векторска поља $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{U}$. Наш следећи задатак биће да нађемо односе између тих поља: $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{U}$ и методе како се из једнога од њих друга два поља израчунавају. Један део тога задатка већ је обављен; једначина 3) показује како се из поља $\mathfrak{w}$ изводи поље $\mathfrak{m}$, а једначина 4*) како се из поља $\mathfrak{U}$ извађа поље $\mathfrak{H}$. Пође ли нам за руком да изведемо инверзне операције ових операција т.ј. како се из поља $\mathfrak{M}$ извађа поље $\mathfrak{H}$ и из поља $\mathfrak{H}$ поље $\mathfrak{U}$, онда је задатак решен, јер ћемо онда из поља $\mathfrak{M}$ моћи индиректно преко поља $\mathfrak{H}$ извести поље $\mathfrak{U}$ и обратно.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{H} \arrow[dl, shift right, "3.)"'] \arrow[dr, shift left, "11.)"] & \\
\mathfrak{M} \arrow[ur, shift right, "10.)"'] \arrow[rr, shift left, "9.)"'] & & \mathfrak{U} \arrow[ul, shift left, "4^{*})"'] \arrow[ll, shift left, "6.)"]
\end{tikzcd}$$

Прије но што приступимо томе задатку морамо показати да се он може једнозначно да реши. Узмимо да је могуће из поља $\mathfrak{U}$ извести два поља $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ која задовољавају једначине 2.) и 3.) т.ј.

$$\operatorname{div} \mathfrak{H}_1 = 0 \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H}_2 = 0$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}_1 = \operatorname{rot} \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{M}$$

и да је могуће наћи два поља $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ која задовољавају једначине 4*) и 5.) т.ј.

$$\operatorname{div} \mathfrak{U}_1 = 0 \qquad \operatorname{div} \mathfrak{U}_2 = 0$$
$$\operatorname{rot} \mathfrak{U}_1 = \operatorname{rot} \mathfrak{U}_2$$

Суперпонирамо ли сада поље $\mathfrak{H}_1$ и поље $(-\mathfrak{H}_2)$ а исто тако поље $\mathfrak{U}_1$ и поље $(-\mathfrak{U}_2)$, то ће резултујућа поља $(\mathfrak{H}_1-\mathfrak{H}_2)$ и $(\mathfrak{U}_1-\mathfrak{U}_2)$ имати следеће особине:

$$\operatorname{div}(\mathfrak{H}_1-\mathfrak{H}_2) = \operatorname{div}\mathfrak{H}_1 - \operatorname{div}\mathfrak{H}_2 = 0$$
$$\operatorname{rot}(\mathfrak{H}_1-\mathfrak{H}_2) = \operatorname{rot}\mathfrak{H}_2 - \operatorname{rot}\mathfrak{H}_2 = 0$$
$$\operatorname{div}(\mathfrak{U}_1-\mathfrak{U}_2) = \operatorname{div}\mathfrak{U}_1 - \operatorname{div}\mathfrak{U}_2 = 0$$
$$\operatorname{rot}(\mathfrak{U}_1-\mathfrak{U}_2) = \operatorname{rot}\mathfrak{U}_1 - \operatorname{rot}\mathfrak{U}_2 = 0$$

Резултујућа поља $(\mathfrak{H}_1-\mathfrak{H}_2)$ и $(\mathfrak{U}_1-\mathfrak{U}_2)$ су Лапласова поља. Ако претпоставимо да су посматрана поља потпуна поља, онда тај услов може према пређашњем бити само онда задовољен ако је

$$\mathfrak{H}_1-\mathfrak{H}_2 = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{U}_1-\mathfrak{U}_2 = 0$$

или

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 \quad \text{и} \quad \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2$$

Наши задаци имају дакле само једно могуће решење.

Из једначина 3.) и 4*) следује

$$\mathfrak{M} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{U} \qquad 6.)$$

Ова једначина казује како се из поља $\mathfrak{U}$ извађа поље $\mathfrak{w}$, па ваља извести инверзну операцију. Из Векторске Анализе следује једначина

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{U} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{U} - \nabla^2\mathfrak{U}$$

а како је $\operatorname{div}\mathfrak{U}$ према једначини 5.) једнако нули, то је

$$\mathfrak{w} = -\nabla^2\mathfrak{U} \qquad 6^*)$$

Сличну смо једначину имали и код Ламеларних поља; онде је било

$$q = \nabla^2 U = -\nabla^2 U_1 \qquad 7.)$$

где је U_1 представљао скаларни потенцијал. Онде је инверзна операција била представљена једначином

$$U_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{q\,dV}{r} \qquad 8.)$$

Наша једначина $6^*)$ је векторијелна једначина па је зато еквивалентна трима скаларним једначинама између компонената вектора $\mathfrak{w}$ и $\mathfrak{U}$. Означимо ли компоненте вектора $\mathfrak{w}$ са $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ а компоненте вектора $\mathfrak{U}$ са $\mathfrak{U}_x, \mathfrak{U}_y, \mathfrak{U}_z$, то можемо једначину $6^*)$ заменити са овим трима скаларним једначинама

$$\omega_x = -\nabla^2\mathfrak{U}_x \qquad \omega_y = -\nabla^2\mathfrak{U}_y \qquad \omega_z = -\nabla^2\mathfrak{U}_z$$

Ово су скаларне једначине па зато можемо на њима извести инверзију као што смо из једначине 7.) извели инверзију изражену једначином 8. На тај начин добијамо

$$\mathfrak{U}_x = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\omega_x\,dV}{r} \qquad \mathfrak{U}_y = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\omega_y\,dV}{r} \qquad \mathfrak{U}_z = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\omega_z\,dV}{r}$$

Помножимо горње једначине редом са јединичним векторима i, j и k па их саберимо; добијамо

$$\mathfrak{U}_x i + \mathfrak{U}_y j + \mathfrak{U}_z k = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{(\omega_x i + \omega_y j + \omega_z k)\,dV}{r}$$

или

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\mathfrak{w}\,dV}{r} \qquad 9.)$$

Ова једначина извађа из поља $\mathfrak{w}$ поље $\mathfrak{U}$. Имамо сада да докажемо да овако добијен вектор $\mathfrak{U}$ задовољава једначину 5.) т.ј. да је соленоидалан вектор. Из једначине 9.) следује

$$\operatorname{div}\mathfrak{U}=\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\int_0^\infty\frac{\mathfrak{w}\,dV}{r}$$

Операцију div. можемо метнути и иза знака интеграла, јер интеграл не представља ништа друго до један бесконачан збир. При самој интеграцији можемо замислити да смо цео простор поделили у једнаке елементе dF т.ј. да је dF константна величина. Онда оно неће учествовати у операцији div i зато је

$$\operatorname{div}\mathfrak{U}=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\left(\operatorname{div}\frac{\mathfrak{w}}{r}\right)dV$$

Применимо ли на ову једначину Gauss-ову теорему, то добијамо

$$\operatorname{div}\mathfrak{U}=\frac{1}{4\pi}\int_{r=\infty}\frac{\mathfrak{w}}{r}\,dF$$

При чему је интеграција по површини изведена по површини кугле бесконачно великога радиуса, јер та кугла обухвата посматрано поље. Но ми смо претпоставили да наше поље у бесконачности ишчезава и зато ће овај интеграл по површини те бесконачне кугле ишчезнути т.ј. биће

$$\operatorname{div}\mathfrak{U}=0$$

као што је захтевана једначина 5.). Једначине 6.) и 6*.) извађају из поља $\mathfrak{U}$ поље $\mathfrak{w}$. Једначина 9.) извађа инверзну операцију. Из једначина 4*.) и 9.) следује

$$\mathfrak{z}=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{w}}{r}\,dV \qquad 10.)$$

Ова једначина извађа из поља $\mathfrak{w}$ поље $\mathfrak{z}$. Из једначина 3.) и 9.) следује

$$\mathfrak{U}=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{rot}\mathfrak{z}\,dV}{r} \qquad 11.)$$

Ова једначина извађа из поља $\mathfrak{z}$ поље $\mathfrak{U}$. Тиме су све трансформације поља изведене. Сравнимо ли добијене резултате са резултатима ламеларног поља, то упадају у очи јаке аналогије: извору $\mathfrak{d}$ ламеларног поља одговара ротор или вртлог $\mathfrak{w}$ соленоидалног поља i скаларном потенцијалу U_1, ламеларног поља одговара векторски потенцијал U соленоид. поља; скаларној Hamilton-овој операцији ламел. поља одговара вектор. Hamilt-on-ова операција у соленоид. пољу. Те аналогије састављене су у следећој табели, а да би аналогија пала боље у очи, то су операције rot и div изражене помоћу Hamilton-овог оператора

Поље

Ламеларно	Соленоидално
извор q	вртлог w
скал. потенцијал U_1	вект. потенцијал U
скал. операција ∇	вект. операција ∇
$q = (\nabla v)$	$w = [\nabla v]$
$q = \nabla(\nabla U)$	$w = [\nabla[\nabla U]]$
$U_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{q\, dV}{r}$	$U = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{w\, dV}{r}$

Дисконтинуитети у соленоидалном пољу.

Изведемо ли из соленоидалног поља v поље његовог ротора w, то можемо и у векторском пољу w да говоримо о векторским линијама. То ће бити такве линије које ће имати то својство да је у свакој тачки њихов одговарајући вектор w тангента. Означимо ли са $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ компоненте вектора w, то ће диференцијалне једначине тих векторских линија бити

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

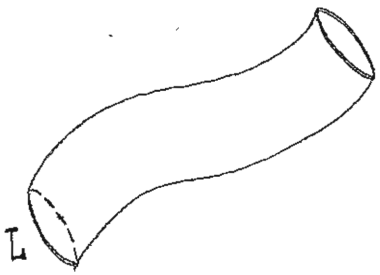
Компоненте вектора w можемо изразити и помоћу компонената вектора v јер су оне једнаке субдетерминантама детерминанте

$$w = \operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

где v_x, v_y, v_z означавају компоненте вектора v. Зато ће диференц. једначине векторских линија бити

$$\frac{dx}{\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}} = \frac{dy}{\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}} = \frac{dz}{\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}}$$

Векторске линије поља $\mathfrak{w}$ зову се вртложне линије поља $\mathfrak{v}$. Одаберемо ли у посматраном пољу соленоидалног вектора $\mathfrak{v}$ једну бесконачно малену затворену линију L, па положимо ли кроз сваку тачку те линије вртложну линију, то ће те линије сачињавати омотач једне цеви коју називамо вртложном цеви.



L

Бесконачно сужени простор који је обухваћен таквом вртложном цеви зовемо вртложним концем. Макар какво поље било поље вектора $\mathfrak{v}$ то је поље његовог ротора $\mathfrak{w}$ ако овај у опште не исчезава соленоидално поље јер је

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$$

Зато за вртложне линије и за вртложне цеви важи све оно што смо доказали за соленоидалне линије и соленоидалне цеви соленоидалних поља. Тако је н.пр. протицање вектора $\mathfrak{v}$ кроз све пресеке једне исте вртложне цеви константно. Вртложне линије морају бити затворене линије; исто тако су и вртложне цеви и конци затворени. Протицање кроз један вртложни конац, дакле скалар p

$$p = \mathfrak{w}\, df$$

је бесконачно мала величина

$$p = \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, df$$

и тако исто као што је код ламеларних поља истицање из запремине dV

$$\Omega = \varrho\, dV = \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dV$$

била бескрајно мала количина. Ми смо то истицање мерили и са масом идеалне течности и означили га са

$$e = \frac{1}{4\pi}\Omega$$

Имамо сада да проведемо аналогију између ламеларних и соленоидалних поља. Вредност скалара p зовемо моменат вртложног конца. Ако меримо тај моменат са масом идеалне течности која протече кроз вртлажни конац, онда ћемо га означити са i и биће

$$i = \frac{1}{4\pi}\rho = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{w}\,d\mathfrak{f}$$

Ми смо дисконтинуитете у ламеларним пољима извели синтетичким путем тако да смо створили прво појам једног јединог извора концентрисаног у једној тачки. Да би издашност тога извора била коначна, претпоставили смо да у продукту ρdV фактор ρ у истој мери расте у којој фактор dV опада и да на тај начин ρdV остане коначна количина. Слично ћемо поступити и у теорији соленоидалних поља. Једноме јединоме извору ламеларног поља одговара овде један једини вртложни конац. И овде претпостављамо да је продукат $\mathfrak{w}\,d\mathfrak{f}$ коначан. Један једини вртложни конац то је први и најважнији дисконтинуитет соленоидалног поља. Са таквим случајем ћемо се прво задовољити. Векторски потенцијал вртложног поља био је

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\mathfrak{w}\,dV}{r}$$

при томе смо имали да изведемо интеграцију преко целог бескрајног поља. У нашем случају имамо само један једини вртложни конац, а то значи да изван њега вектор $\mathfrak{w}$ свуда исчезава; зато ће се интеграција ограничити само на тај векторски конац. То ћемо овако означити

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int_0 \frac{\mathfrak{w}\,dV}{r}$$

Ако елеменат осе вртложног конца означимо са $d\mathfrak{s}$, то је

$$dV = d\mathfrak{f}\cdot d\mathfrak{s}$$

а продукат

$$\mathfrak{w}\,dV = \mathfrak{w}(d\mathfrak{f}\cdot d\mathfrak{s})$$

Вектори $\mathfrak{w}$ и $d\mathfrak{s}$ имају исте правце. Ако означимо јединични вектор у правцу тих двају вектора са a_0 а интензитете тих вектора са ω и ds, онда је

$$\mathfrak{m} = \omega \cdot \mathfrak{r}_0$$
$$df = \mathfrak{r}_0 \cdot ds$$

па је зато

$$\mathfrak{m}(df\, df) = \omega\, \mathfrak{r}_0\,(df\, \mathfrak{r}_0\, ds) = ds\, \mathfrak{r}_0\,(df\, \mathfrak{r}_0\, \omega) =$$
$$= df\,(df\, \mathfrak{m}) = (\mathfrak{m}\, df)\, df =$$
$$= p\, df = 4\pi i\, df$$

Зато је

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int_0 \frac{p\, df}{r} = \int_0 \frac{i\, df}{r}$$

Протицање кроз векторски конац једнако је у свим пресецима посматраног конца и зато скаларе p и i можемо метнути пред интегрални знак, па ће бити

$$\mathfrak{A} = \frac{p}{4\pi}\int_0 \frac{df}{r} = i\int_0 \frac{df}{r}$$

Вектор $\mathfrak{h}$ што га тај вртложни конац изазива у произвољној тачки M нашега поља једнак је

$$\mathfrak{h} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

Зато је

$$\mathfrak{h} = \frac{p}{4\pi}\operatorname{rot}\int_0 \frac{df}{r} = \frac{p}{4\pi}\int_0 \operatorname{rot}\frac{df}{r}$$

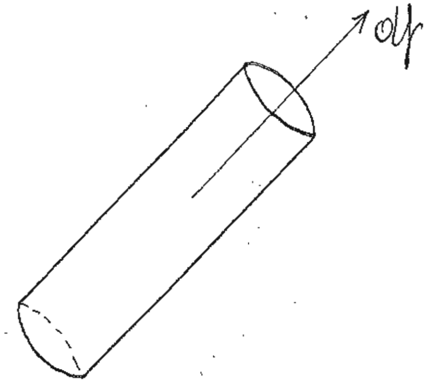
знак rot могли смо да метемо иза интегралног знака јер интеграција представља бескрајан збир. У векторској анализи извели смо једначину

$$\operatorname{rot} p\mathfrak{h} = p\operatorname{rot}\mathfrak{h} - [\mathfrak{h}\, \operatorname{grad} p]$$

где p означује скалар који је променљив у посматраном пољу. Ако употребимо ову једначину на горњи интеграл то имамо

$$\operatorname{rot}\frac{1}{r}df = \frac{1}{r}\operatorname{rot} df - \left[df\, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right]$$

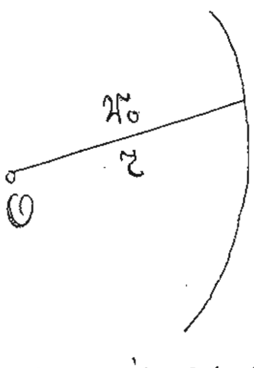
rot df исчезава зато јер је вектор df везан на једну линију па лево и десно од те линије исчезава. То можемо и на овај начин увидети: Ако око елемента df обавијемо цилиндричну површину чија се оса подудара са df, онда ћемо rot df добити ако прво израчунамо вредност векто-



ријентог продукта $[d\ell\, d\ell]$ по тој цилиндричној површини и поделимо ту вредност са запремином цилиндра и израчунамо граничну вредност тога квоцијента. Али вредност $[d\ell\, d\ell]$ једнака је нули, јер на базама цилиндра вектори $d\ell$ и $d\ell$ имају исте правце па зато исчезава њихов векторски продукат. На омотачу цилиндра вектор $d\ell$ је једнак нули јер је везан само на његову осу. Зато је $\operatorname{rot} d\ell = 0$ а због тога је

$$\operatorname{rot}\frac{1}{r}\,d\ell = -\left[d\ell\ \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right]$$

Вредност $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$ израчунаћемо овако: r означује одстојање од тачке O, па су зато еквискаларне површине скалара $\frac{1}{r}$ кугле са центром у O. Градијент стоји нормално на њима и зато му је правац радијалан т.ј. правац му је r_0 где



r_0 представља јединични вектор у правцу радијус-вектора. Интензитет вектора $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$ једнак је диференцијалном квоцијенту скалара $\frac{1}{r}$ у правцу његове најјаче промене, па је зато

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\,r_0 = -\frac{1}{r^2}\,r_0 = -\frac{1}{r^3}\,r$$

Због тога је

$$\operatorname{rot}\frac{1}{r}\,d\ell = \frac{1}{r^3}\,[d\ell\ r]$$

а вектор H

$$H = \frac{p}{4\pi}\int_0 \frac{[d\ell\ r]}{r^3} = i\int_0 \frac{[d\ell\ r]}{r^3}$$

Ова једначина одређује вектор H у пољу једног јединог вртложног конца.

У науци о електрицитету упознаћемо да та једначина изражава <u>Biot-Savard-ов закон</u>; $d\ell$ овде означује елеменат струје која представља један вртложни конац. Како што у нашем случају вртложна линија мора бити затворена, исто

тако и овде струја мора сачињава-
ти затворену линију.

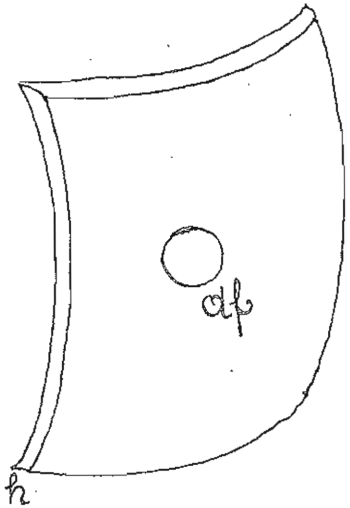
Сваки елеменат dl вртложне линије изазива у тачки M вектор

$$d\mathfrak{H} = i\,\frac{[dl\, r]}{r^3}$$

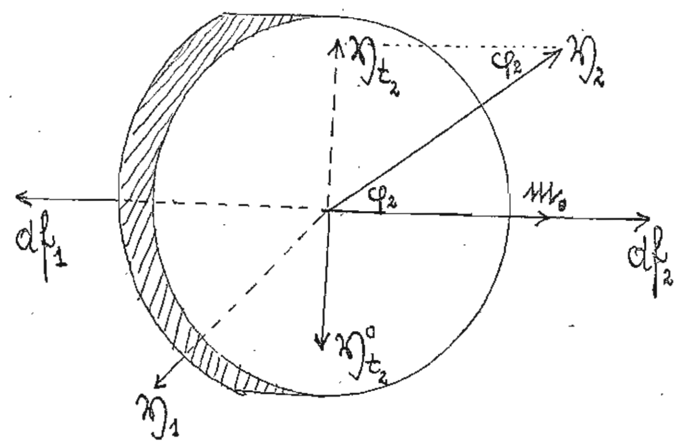
и обично се у овом облику изражава у науци о електрицитету Biot-Savard-ов закон, али треба имати на уму да елеменат вртложне линије не може сам за себе постојати као елеменат струје.

Једна важна класа дисконтинуитета соленоидалних поља настаје ако су вртложне линије везане на једну површину. Математске површине су физички немогуће и зато ћемо претпоставити да су вртложне линије везане на један простор бескрајно малене дебљине. Исецимо из такве плоче чија је дебљина h један цилиндрични елеменат базе df. Имали смо у Векторској Анализи једначину

$$\int_F [\mathfrak{H}\, df] = -\int_V \mathrm{rot}\,\mathfrak{H}\, dV$$



и применимо ју на тај цилиндрични елеменат исечен из плоче. Ако узмемо у обзир да је дебљина плоче бескрајно мала количина вишег реда од df, то ће члан интеграла леве стране горње једначине који се односи на омотач цилиндра ишчезнути а остаће само они чланови који се односе на базе цилиндра. Ако са df_1 и df_2 означимо ба-



зе цилиндра а векторе који одговарају тим базама са $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ и које можемо сматрати за константне широм обеју база, то ће се лева страна горње једначине редуковати на израз

$$[\mathfrak{B}_1\, d\mathfrak{f}_1] + [\mathfrak{B}_2\, d\mathfrak{f}_2]$$

Вектори $d\mathfrak{f}_1$ и $d\mathfrak{f}_2$ имају исти правац а супротан смисао, па ако јединични вектор нормалан на обе базе а наперен с лева на десно означимо са $\mathfrak{n}_0$, онда је

$$d\mathfrak{f}_1 = -\mathfrak{n}_0\, df$$
$$d\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{n}_0\, df$$

Лева страна горње интегралне једначине постаје

$$[\mathfrak{B}_2 \mathfrak{n}_0]\, df - [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{n}_0]\, df$$

$[\mathfrak{B}_2 \mathfrak{n}_0]$ представља вектор интензитета $v_2 \sin\varphi_2$ нормалан на раван вектора $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{n}_0$. Тај вектор $\mathfrak{B}^{\circ}_{t_2}$ лежи у равни df а једнак је по својој величини компоненти $\mathfrak{B}_{t_2}$ вектора $\mathfrak{B}_2$ у равни df, јер и та компонента има интензитет $v_2 \sin\varphi_2$. Та се компонента зове тангенцијална компонента вектора $\mathfrak{B}_2$ на површину df. Компонента $\mathfrak{B}^{\circ}_{t_2}$ стоји нормално на ту тангенцијалну компоненту, па зато можемо рећи: векторијелни продукат

$$[\mathfrak{B}_2 \mathfrak{n}_0] = \mathfrak{B}^{\circ}_{t_2}$$

представља тангенцијалну компоненту вектора $\mathfrak{B}_2$ закренуту у елементу df за 90°. Исто тако продукат

$$[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{n}_0] = \mathfrak{B}^{\circ}_{t_1}$$

представља тангенцијалну компоненту вектора $\mathfrak{B}_1$ у равни df закренуту за 90°. Лева страна горње интегралне једначине биће дакле

$$(\mathfrak{B}^{\circ}_{t_2} - \mathfrak{B}^{\circ}_{t_1})\, df$$

При израчунавању десне стране горње интегралне једначине можемо $\mathfrak{B}$ широм целе базе сматрати за константно а dV заменити са: $h\,df$

Како горња интегрална једначина

важи за свако w, то ће важити и за свако dV, па ће десна страна горње једначине која се односи на посматрани цилиндрични елеменат бити

$$-\mathrm{rot}\, w\, h\, df$$

Зато је

$$(w^{\circ}_{t_2} - w^{\circ}_{t_1})\, df = -(\mathrm{rot}\, w)\, h\, df$$

или

$$h\, \mathrm{rot}\, w = w^{\circ}_{t_1} - w^{\circ}_{t_2}$$

h је бескрајно мало и у случају да је десна страна горње једначине коначна, мора $\mathrm{rot}\, w$ бити бескрајно велико, да би продукат $h\, \mathrm{rot}\, w$ остао коначан. Ако је он коначан, онда

$$h\, \mathrm{rot}\, w = \omega_f$$

зовемо <u>вртлог површине</u>, па је

$$\omega_f = w^{\circ}_{t_1} - w^{\circ}_{t_2}$$

т.ј. вртлог површине једнак је векторској разлици тангенцијалних компонената вектора w заокружена за 90°.

Ако имамо једно такво поље у коме су све вртложне линије концентрисане на једној површини, то ће векторски потенцијал тога поља бити

$$a = \frac{1}{4\pi} \int_0 \frac{\omega\, dV}{r}$$

при чему се интеграција изводи преко површине дисконтинуитета коју сматрамо као просторно тело бесконачно мале дебљине h. Зато је

$$dV = h\, df$$

и

$$a = \frac{1}{4\pi} \int_0 \frac{\omega\, h\, df}{r}$$

Како је

$$\omega h = h\, \mathrm{rot}\, w = \omega_f$$

то је

$$a = \frac{1}{4\pi} \int_f \frac{\omega_f\, df}{r}$$

при чему се интеграција изводи преко површине дисконтинуитета. Ми смо у теорији ламеларних поља изворе површина мерили такође масом идеалне течности која из њих истече, па тако можемо и овде, аналогије ради, увести место вртлога $\mathfrak{w}_f$ вртлог површине τ који је

$$\tau = 4\pi\, \mathfrak{w}_f$$

При овим ознакама је векторски потенцијал векторског поља у коме су све вртложне линије концентрисане на једној површини једнак

$$\mathfrak{A} = \int_f \frac{\tau\, df}{r}$$

Теорија сложених поља

Уочимо поље произвољног вектора $\mathfrak{V}$. О томе пољу претпоставимо само ово: поље нека буде потпуно векторско поље т.ј. нека не буде ограничено ни изнутра ни споља и нека у бесконачности исчезава. Вектор $\mathfrak{V}$ нека буде континуиран у томе пољу а нека се само на одређеним површинама дисконтинуирно мења скоком, но нека у читавом пољу а и на површинама дисконтинуитета буде коначан. Такво поље можемо раставити у два компонентна поља: једно ламеларно и друго соленоидално. Означимо ли ламеларну компоненту са $\mathfrak{V}'$ а соленоидалну са $\mathfrak{V}''$, то је

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}' + \mathfrak{V}''$$

Ламеларну компоненту одређујемо тако

да је њена дивергенција једнака дивергенцији вектора $\mathfrak{v}$ т.ј.

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}' = \mathrm{div}\,\mathfrak{v} = q = 4\pi\rho$$

На површини дисконтинуитета нека промена нормалне компоненте вектора $\mathfrak{v}'$ буде једнака промени нормалне компоненте вектора $\mathfrak{v}$ или дивергенцији површине т.ј.

$$\mathfrak{v}'_{n2} - \mathfrak{v}'_{n1} = v_{n2} - v_{n1} = \omega = 4\pi\sigma$$

Означимо ли скаларни потенцијал ламеларног поља са U_1, то је

$$\mathfrak{v}' = -\nabla U_1$$

За U_1 извели смо једначину

$$U_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{q\,dV}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_f \frac{\omega\,df}{r}$$

Први члан десне стране потиче од извора поразмештених континуирно у читавом пољу, а други члан од извора сконцентрисаних на површини дисконтинуитета. Овим условима је вектор $\mathfrak{v}'$ потпуно одређен.

Вектор $\mathfrak{v}''$ одредићемо тако да његов ротор буде у читавом пољу једнак ротору вектора $\mathfrak{v}$ т.ј.

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}'' = \mathrm{rot}\,\mathfrak{v} = \mathfrak{w}$$

На површини дисконтинуитета нека вртлог површине вектора $\mathfrak{v}''_f$ буде једнак вртлогу површине $\mathfrak{w}_f$ вектора $\mathfrak{w}$ или једнак векторској диференцији тангенцијалних компонената вектора $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{w}_f'' = \mathfrak{w}_f = \mathfrak{v}^0_{t_1} - \mathfrak{v}^0_{t_2} = 4\pi\tau$$

Ако је $\mathfrak{A}$ векторски потенцијал соленоидалног поља, то је онда

$$\mathfrak{v}'' = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$$

и

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\mathfrak{w}\,dV}{r} + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{w}_f\,df}{r}$$

Први члан десне стране потиче од вртлога размештених континуирно по читавом пољу, а други члан од вртлога сконцентрисаних на површинама дисконтинуитета. Тиме је вектор $\mathfrak{v}''$ потпуно одређен.

Ваља само доказати да је резултат растављања једнозначан и да проширимо методу растављања на случај када је поље ограничено. Пре него што томе приступимо, морамо извести Green-ове једначине.

Green-ове једначине и њихова примена.

Заменимо ли у Gauss-овој једначини

$$\int_F \mathfrak{v}\, df = \int_V \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dV$$

вектор

$$\mathfrak{v} = U_1 \operatorname{grad} U_2 = U_1 \nabla U_2$$

где U_1 и U_2 означавају скаларне величине, то добијамо

$$\int_F U_1 \nabla U_2\, df = \int_V \operatorname{div}(U_1 \nabla U_2)\, dV = \int_V \nabla (U_1 \nabla U_2)\, dV$$

$$= \int_V \{\nabla U_1 \nabla U_2 + U_1 \nabla^2 U_2\}\, dV$$

Заменимо ли у овој једначини U_2 са U_1 и U_1 са U_2, то добијамо још једну једначину, па их обе можемо написати у облику

$$\int_F U_1 \nabla U_2\, df = \int_V \nabla U_1 \nabla U_2\, dV + \int_V U_1 \nabla^2 U_2\, dV \qquad 1.)$$

$$\int_F U_2 \nabla U_1\, df = \int_V \nabla U_1 \nabla U_2\, dV + \int_V U_2 \nabla^2 U_1\, dV \qquad 2.)$$

Одбијемо ли другу од прве једначине биће

$$\int_F (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1)\, df = \int_V (U_1 \nabla^2 U_2 - U_2 \nabla^2 U_1)\, dV \qquad 3.)$$

Ако скалари U_1 и U_2 задовољавају Laplace-ову једначину тј. ако је

$$\nabla^2 U_1 = 0 \quad \text{и} \quad \nabla^2 U_2 = 0$$

тј. ако су U_1 и U_2 хармоничке функције, онда једначина 3.) прелази у једначину

$$\int_F (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1)\, df = 0 \qquad 4.)$$

Ставимо у једначини 1.)

$$U_1 = U_2$$

онда добијамо опет нову једначину

$$\int_F U_1 \nabla U_1\, df = \int_V (\nabla U_1)^2\, dV + \int_V U_1 \nabla^2 U_1\, dV \qquad 5.)$$

У овој једначини је

$$\nabla U_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x} i + \frac{\partial U_1}{\partial y} j + \frac{\partial U_1}{\partial z} k$$

$$(\nabla U_1)^2 = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)^2$$

ако U_1 задовољава Laplace-ову једначину, онда једначина 5.) добија облик

$$\int_F U_1 \nabla U_1 \, df = \int_V (\nabla U_1)^2 \, dV \qquad 6.)$$

Једначине 1.) - 6.) зову се Grün-ове једначине. Сада ћемо извести неке теореме од којих смо један део пре упознали.

Теорема: У пољу ламеларног вектора $\mathfrak{v}$ не могу векторске линије бити затворене линије.

Ову смо теорему већ упознали но можемо је и овако доказати: Ми смо као главни карактер ламеларних поља формулисали да линиски интеграл дуж једне линије тога затвореног поља исчезава

$$\int_L \mathfrak{v} \, dl = 0$$

Кад би у посматраном пољу егзистирала једна затворена векторска линија, то би могли ту линију да одаберемо за ону затворену линију дуж које узимамо горњи линиски интеграл. Означимо ли јединични вектор у правцу вектора $\mathfrak{v}$ са $\mathfrak{v}_0$, то је

$$dl = \mathfrak{v}_0 \, ds$$

где ds означава скаларну вредност елемента лука посматране векторске линије. Зато је

$$\mathfrak{v} \, dl = \mathfrak{v} \mathfrak{v}_0 \, ds = v \, ds$$

и зато је горњи интеграл такође једнак

$$\int_L v \, ds$$

Обилазимо ли векторску линију у том у позитивном правцу вектора $\mathfrak{v}$, то је интеграл овога интеграла увек позитиван и због тога овај интеграл не може исчезнути. Због тога не може векторска линија бити затворена.

Теорема: У једном ограниченом пољу одређен је потпуно вектор $\mathfrak{v}$, ако је позната дивергенција његова у читавом пољу, ротација његова и компонента његова нормална на површини f која ограничава посматрано поље. Ово не важи за просторе који су вишеструко испреплетани.

Узмимо, да би ~~теорему~~ доказали, да је резултат једнозначан, да постоје два вектора $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ који задовољавају горње услове

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}_1 = \mathrm{div}\,\mathfrak{v}_2 = \mathrm{div}\,\mathfrak{v}$$
$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}_1 = \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}_2 = \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}$$
$$v_{1n} = v_{2n} = v_n$$

где последњи знакови представљају компоненте вектора $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ нормалне на површини која ограничава посматрани простор. Ако ове једначине постоје, онда важе за вектор

$$\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$$

следеће једначине

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}_0 = \mathrm{div}\,\mathfrak{v}_1 - \mathrm{div}\,\mathfrak{v}_2 = 0$$
$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}_0 = \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}_1 - \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}_2 = 0$$
$$v_n^0 = v_{1n} - v_{2n} = 0$$

где v_n^0 означава нормалну компоненту вектора $\mathfrak{v}_0$ на површини која ограничава посматрано поље. Она је једнака нули и зато је

$$\mathfrak{n}_0 \cdot \mathfrak{v}_0 = 0 \qquad 1.)$$

ако $\mathfrak{n}_0$ представља јединични вектор нормалан на површину. Како је

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}_0 = 0$$

то га можемо представити као градиент једног скалара

$$\mathfrak{v}_0 = \nabla U_1 \qquad 2.)$$

а како његова дивергенција исчезава, то је

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{v}_0 = \nabla^2 U_1 = 0 \qquad 3.)$$

Употребимо сада Grün-ову једначину 5.)

$$\int_f U_1 \nabla U_1\, d\mathfrak{f} = \int_v (\nabla U_1)^2\, dv + \int_v U_1 \nabla^2 U_1\, dv$$

Означимо ли елеменат површине са df, то је

$$d\mathfrak{f} = \mathfrak{n}_0\, df$$

а из једначине 1.) следује да је

$$\mathfrak{v}_0 \frac{d\mathfrak{f}}{df} = 0$$

па је с обзиром на једначину 2.)

$$\nabla U_1 \frac{d\mathfrak{f}}{d\mathfrak{f}} = 0$$

или

$$\nabla U_1 \, d\mathfrak{f} = 0 \qquad 4.)$$

Ставимо ли вредности 3.) и 4.) у Грин-ову једначину, биће

$$\int_V (\nabla U_1)^2 dV = \int_V (\mathrm{grad}\, U_1)^2 dV = 0$$

Интегрант последњег интеграла $(\mathrm{grad}\, U_1)^2$ је есенцијелно позитиван јер представља квадрат и зато тај интеграл може само онда бити раван нули, ако интегрант исчезава у читавом пољу т.ј. ако је

$$\mathrm{grad}\, U_1 = \nabla U_1 = \mathfrak{H}_0 = 0$$

Како је

$$\mathfrak{H}_0 = 0$$

то је

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$$

чиме је доказано да је вектор $\mathfrak{H}$ једнозначно одређен.

До овога резултата могли би и без употребе једначина доћи на овај начин: Вектор $\mathfrak{H}_0$ је ламеларан вектор јер његова дивергенција исчезава и зато у посматраном простору не може постојати ни једна затворена векторска линија. Кад у томе простору нема ни извора ни понора, то не могу у томе ограниченом простору ни почети а ни свршавати се векторске линије. Оне могу само пролазити кроз посматрани простор од једне до друге границе. Но како је нормална компонента вектора $\mathfrak{H}_0$ на површини која ограничава посматрано поље једнака нули, то због тога не може ни ући ни изаћи ни једна векторска линија. У посматраном пољу према томе не постоје векторске линије, па је зато

$$\mathfrak{H}_0 = 0$$

Кинематика векторског поља.

Ми смо у Рационалној Механици назвали Кинематиком ону грану науке у којој је поред просторних елемената дошла још једна величина: време. Зато смо Кинематику назвали и Геометријом Кретања у којој као четврта димензија фигурише време. На исти ћемо начин Кинематиком скаларних и векторских поља називати раширену њихову геометрију, где поред просторних елемената долази једна скаларна величина: време t.

Кинематиком скаларног поља називаћемо теорију функције

$$U = f(r, t)$$

где r означује вектор положаја тачке M на коју се односи скалар U. Ово је скаларна једначина, те је можемо заменити са

$$U = \varphi(x, y, z, t) \qquad 1^*)$$

где x, y, z означавају координате тачке M.

Кинематика векторских поља биће теорија функција

$$v = f(r, t) \qquad 2.)$$

Ова је једначина векторска па би по начину писања Gibbs-овом имали над знаком једнакости знак 3. Ту једначину можемо заменити са три скаларне једначине

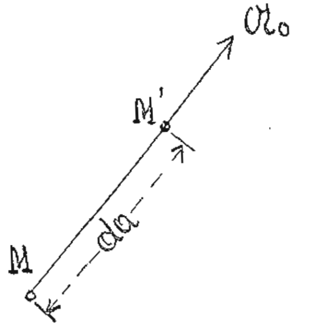
$$\left.\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t) \\ v_y &= f_2(x, y, z, t) \\ v_z &= f_3(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \qquad 2^*)$$

где v_x, v_y, v_z означавају компоненте вектора v. Ваља знати да је Кинематика векторских поља теорија функције f а не теорија функција f_1, f_2, f_3 које су уведене као помоћни појмови.

Уочимо поље скалара U

$$U = f(r, t)$$

Тај скалар нека буде функција положаја и времена. Његова промена dU која одговара промени времена dt и промени положаја da у правцу произвољно одабраног јединичног



ног вектора r_0 једнака је

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial a}da$$

У векторској анализи смо показали да је

$$\frac{\partial U}{\partial a} = r_0 \nabla U$$

па је зато

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t}dt + r_0 \nabla U \, da$$

da је скалар, па зато можемо са њиме помножити јединични вектор r_0 па добијамо

$$r_0 \, da = dr$$

па онда пређашњу једначину поделимо са скаларом dt, па добијамо

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dr}{dt}\nabla U$$

Квоцијенат $\frac{dr}{dt}$ представља брзину са којом смо се помакли из тачке M у тачку M', па ако ту брзину означимо са

$$v_e = \frac{dr}{dt}$$

то имамо коначни израз

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + v_e \nabla U \qquad 1.)$$

Уочимо сада поље вектора v које је такође функција положаја и времена

$$v = f(r, t)$$

Промена тога вектора која одговара промени времена dt и промени положаја његове нападне тачке за величину da у правцу произвољно одабраног јединичног вектора r_0 једнака је

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial a}da$$

У векторској анализи извели смо једначину

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial a} = (r_0 \nabla)\mathfrak{w}$$

па зато добијамо

$$d\mathfrak{w} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t}dt + (dr \nabla)\mathfrak{w}$$

Означимо ли и овде

$$\frac{dr}{dt} = \mathfrak{w}_e$$

то добијамо

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + (\mathfrak{w}_e \nabla)\mathfrak{w} \qquad 2.)$$

У теориској физици често је пута један покретни медиум носилац својства U и $\mathfrak{w}$. Можемо н. пр. код једнога гаса који се креће испитивати поље његове густине или поље његове топлоте; онда је тај гас носилац скаларних својстава U. Посматрамо ли кретање течности, то свакој делићу његовом одговара извесна брзина, па је она као векторско својство везана за покретни медиум

Посматрамо ли даље такве покретне медиуме, то можемо испитивати промене њихових скаларних и векторских особина са два разна гледишта: можемо питати прво: како се те особине мењају ако уочимо једну непомичну тачку простора; а можемо друго питати за промене тих својстава ако уочимо једну одређену честицу медиума и пратимо ју у њеном кретању. У првом случају у коме смо уочили једну сталну тачку поља брзина $\mathfrak{w}_e$ једнака је нули, јер се из те тачке не помера. Онда су промене скаларних и векторских својстава једнаке

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} \qquad \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t}$$

Квоциенте $\frac{\partial U}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t}$ зовемо локалним променама скалара U и вектора $\mathfrak{w}$. Ако векторско или скаларно поље није функција времена, онда ће промена скалара U или вектора $\mathfrak{w}$ ако изводимо померање $\mathfrak{w}_e$ бити

$$\frac{dU}{dt} = \mathfrak{V}_e \nabla U \qquad \frac{d\mathfrak{V}}{dt} = (\mathfrak{V}_e \nabla)\mathfrak{V}$$

Изразе $\mathfrak{V}_e \nabla U$ и $(\mathfrak{V}_e \nabla)\mathfrak{V}$ зовемо стационарним променама. Ако је скалар или вектор функција времена, па ако узважамо померање, то је онда потпуна промена једнака збиру локалне и стационарне као што то казују једначине 1.) и 2.). Те потпуне промене $\frac{dU}{dt}$ и $\frac{d\mathfrak{V}}{dt}$ зову се у случају да је брзина $\mathfrak{V}_e$ једнака брзини посматраног делића медиума тако- ђе субстанцијелни материјалне или индивидуалне промене, јер у томе случају дају једначине 1.) и 2.) оне промене које се дешавају на једноме одређеном делићу.

Пример: Возимо ли се влаком (непокренутим), то се промена температуре у влаку може мењати из два узрока: прво зато што је температура на свакоме месту земље променљива, па кад би влак стајао, температура би се мењала; друго зато што се влак креће, па кад би температура на свакоме месту земљину била независна од времена, то би се температура у влаку мењала зато, што се овај креће па долази у крајеве друге температуре. Прва промена је локална а друга стационарна. Или посматрамо ли кретање једне течности, па уочимо ли брзину $\mathfrak{V}$ једног делића њеног, то ће се та брзина мењати из два узрока: прво зато што се брзине течности у општем случају мењају у свакој одређеној тачки простора, осим то- га њена се брзина $\mathfrak{V}$ делића због то- га што овај долази у друге тачке простора, па би му се брзина мењала и онда када би брзина у свакој тачки простора била независна од времена. У овоме је случају брзина померања дата једначином 2.) која добија облик

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (w\nabla)w \qquad 2^*)$$

При кретању таквих медијума могу наступити ови специјални случајеви: Особине U и w могу бити, ако уочимо једну одређену тачку простора, независни од времена. Тако н. пр. при кретању гаса може његова густина у једној одређеној тачки простора бити константна, макар да у ову тачку долазе без престанка све друге и друге честице гаса. Исто то важи за топлоту или при кретању једне течности може у једној одређеној тачки простора брзина течности бити константна макар да у ту тачку простора долазе без престанка друге и друге честице течности и макар да се та брзина мења од тачке до тачке простора. У таквим случајевима је

$$\frac{\partial U}{\partial t}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial t}=0$$

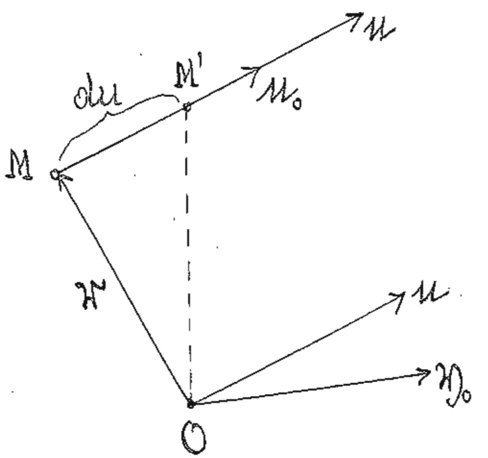
Локалне промене равне су нули а такво стање које је наступило у свима тачкама простора зовемо стационарним стањем. Медиум се креће, али су особине U и w у свакој тачки простора константне.

Може наступити случај да је особина U или w на једној одабраној честици медиума константна т.ј. ако се крећемо са том честицом, онда се особине U и w не мењају. У томе је случају дакле субстанцијелна промена равна нули т.ј.

$$\frac{dU}{dt}=0 \qquad \frac{dw}{dt}=0$$

Кинематичко значење ротора.

Посматрамо ли кретање једног крутог тела које изводи моментану ротацију представљену вектором u и моментану транслацију v_0, онда је брзина v произвољне тачке M једнака као што смо то у Векторској Анализи доказали



$$v = v_0 + [u r] \qquad 1.)$$

r означава радиус-вектор произвољне тачке. Зато се у горњој једначини мењамо ли тачку M мења само други члан десне стране, па је због тога

$$\mathrm{rot}\, v = \mathrm{rot}\, [u r]$$

јер се v_0 не мења од тачке до тачке, па је зато њен ротор раван нули. Према табели Векторске Анализе имамо

$$\mathrm{rot}\, [u r] = (r \nabla) u - (u \nabla) r + u \,\mathrm{div}\, r - r \,\mathrm{div}\, u \qquad 2.)$$

Идемо ли од тачке до тачке, то се мења само вектор r а не мења се вектор u који је у посматраном моменту за све тачке константан. Зато је

$$\mathrm{div}\, u = 0$$

и

$$(r \nabla) u = r \frac{du}{dr}$$

према формули Векторске Анализе

$$(a \nabla) v = a \frac{dv}{da}$$

а како се u не мења од тачке до тачке, то је

$$\frac{du}{dr} = 0$$

Зато је

$$\mathrm{rot}\, [u r] = -(u \nabla) r + u \,\mathrm{div}\, r \qquad 3.)$$

Одаберемо ли тачку O за почетну тачку произвољног координатног система и означимо ли координате тачке M

са x, y, z, то су компоненте радиус-вектора r једнаке

$$r_x = x \qquad r_y = y \qquad r_z = z$$

Зато је

$$\operatorname{div} r = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} = 3$$

Осим тога је

$$(u \nabla) r = u \frac{dr}{du}$$

где u означава интензитет вектора u. Померимо ли тачку M у правцу вектора u за дужину du, то је

$$u_0 \, du = dr$$

Зато је

$$\frac{dr}{du} = u_0$$

т.ј. равно јединичном вектору u_0 у правцу вектора u и зато је

$$(u \nabla) r = u \, u_0 = u$$

Ставимо ли ове вредности у једначини 3.), то добијамо

$$\operatorname{rot} [u r] = \operatorname{rot} v = -u + 3u$$

или

$$\operatorname{rot} v = 2u \qquad 4.)$$

- Ротор брзине једне тачке крутог тела т.ј. $\operatorname{rot} v$ једнак је вектору двоструке моменталне ротације што га круто тело у томе моменту изводи.

Једначина 4.) је према томе инверзија једначине 1.) или још боље једначина 1.) је инверзија једначине

$$u = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v \qquad 4.^{*})$$

v_0 игра овди улогу интеграционе константе, јер $\operatorname{rot} v$ представља једну просторну диференцијацију, па кад изведемо инверзију, то морамо додати још v_0 као интеграциону константу, јер је ротор сваког константног вектора раван нули, исто тако као диференцијални квоцијент сваке константе.

Питајмо још чему је једнака дивергенција вектора v т.ј. $\operatorname{div} v$. Из једначине 1.) следује

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} [u r]$$

јер је дивергенција константног вектора v_0 равна нули. Према табели из

Векторске Анализе биће

$$\operatorname{div}[u\,r] = r \operatorname{rot} u - u \operatorname{rot} r$$

u се не мења од тачке до тачке, па је зато

$$\operatorname{rot} u = 0$$

а $\operatorname{rot} r$ једнако је

$$\operatorname{rot} r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

Компоненте r_x, r_y, r_z једнаке су према пређашњем x, y, z, па је зато вредност све детерминанте једнака нули, јер је н. пр. $\frac{\partial r_y}{\partial x} = 0$ и т. д. па далеке и

$$\operatorname{rot} r = 0$$

а због тога је

$$\operatorname{div} v = 0$$

– Дивергенција брзине једнога крутог тела једнака је нули.

Ми смо у Векторској Анализи доказали да је дивергенција инкомпресибилне течности једнака нули, па зато можемо једну бескрајно малу честицу течности сматрати као круто тело, јер су деформације те честице бескрајно мале величине вишег реда. Из тога узрока представљаће ротација брзине честице течности

$$\operatorname{rot} v = 2u$$

двоструки вектор брзине који представља ротацију којом се та честица креће. Ово кинематичко значење и узрок је назива и ознаци ротације. Према нашим конвенцијама представља ротор двоструку ротацију а неки су аутори означавали са rot једноставну ротацију. Данас је свуда усвојена ознака коју ми употребљујемо.

Основни појмови

Ако су температуре двају места A и B једнога тела различите, то настаје сам од себе прелаз или струјање топлоте од топлих места ка хладнијим. Топлота има сама од себе тежњу да неједнакости температуре изједначи, па ће због тога у следећем интервалу времена једна позната множина топлоте прелазити од топлих места ка хладнијим. Услед тога ће се температура топлих места снижавати а хладних повећавати све дотле док се те температуре не изједначе. Разлика температуре може се само на тај начин одржати, ако се топлом месту у сваком елементу времена онолико топлоте довађа, колико је оно губи, а хладном месту у сваком елементу времена толико топлоте одузима колико је оно добива. Тај процес изједначења температуре може да се врши на три разна начина:

1º Она места тела која имају вишу температуру изазивају осцилације етра извесног интензитета. Те осцилације етра шире се и долазе до оних места која имају нижу температуру и која изазивају осцилације етра слабијег интензитета. На тим местима дакле бивају оне јаче осцилације апсорбоване. Овај процес ширења температуре зове се __ширење температуре зрачењем__. Тај начин је додуше опажен само при прелазу температуре између два тела која су растављена онаквим медиумима који осцилације етра не апсорбују, но врло је вероватно да се тај начин ширења температуре дешава у сваком телу (__унутрашње зрачење__).

2º Овај други начин ширења температуре може настати само код онаквих агрегатних стања код којих су честице посматраног медиума покретне, дакле код течности и код гасова. Ако је у таквом медиуму температура разноврсно распоређена, онда та разноврсност има за последицу да је и специфична густина медиума различита на различитим местима. Разноврсност густине има за последицу разноврсност сила које су везане на масу (н. пр. тежина). Услед те разноврсности сила може равнотежа медиума бити поремећена, па ће услед тога настати кретање честица, које ће за собом повући разноврсност температуре т.ј. преношење топлоте. Овај начин настаје н. пр. код течности која је различита у природи. Топлије честице су лакше па се пењу у вис, а хладније падају доле и изазивају тиме струјање или конвекцију течности. Зато ћемо овај начин ширења топлоте и назвати _ширење конвекцијом._

3° Изгледа да је довољно утврђен факат да се молекули свију тела даклe и чврстих, који изгледају у унутрашњости својој непомични, крећу. То кретање молекула најразноврсније је природе: транслаторно, ротаторно, осцилаторно и т. д. Услед тога садржава сваки део тела у себи једну множину кинетичне енергије, па у колико је та кинетична енергија већа, у толико је температура тога дела тела виша. У своме кретању избијају суседни молекули једног дела тела или суседни делови тела сударе и при томе се њихове кинетичне енергије изједначавају. Изједначење кинетичне енергије повлачи за собом потпуно изједначавање температуре. Овај начин ширења топлоте зовемо _ширење провађањем._

Феномен ширења топлоте је као што се из прегашњег види бескрајно компликован, јер у својој крајњој конзеквенцији води на кретање молекула, па је зато са тога гледишта кинетичне теорије молекула теорија провађања топлоте могла бити до данас изведена само за гасове. Но могуће је, не узимајући у обзир кинетичну теорију молекула нго ослањајући се само на емпирична искуства извести теорију провађања топлоте која даје резултате који се подударају са искуством. На тај је начин Fourier у својој Theorie analytique de la chaleur 1822 извео своју теорију и ми ћемо се сада њоме бавити.

Уочимо један део тела; то ће у њему бити садржан један известан капитал кинетичне енергије. Кинетичну енергију добијамо ако масу сваког молекула помножимо са половином квадрата његове брзине. Топлота има дакле исту димензију као и енергија

$$\frac{mv^2}{2}$$

и ако је брзина векторска величина, то је топлота скалар, јер брзина долази овде као квадрат т.ј. као скаларни продукат са самим собом. Меримо ли масу са грамом, дужину са центиметром, а време са секундом, то је онда димензија кинетичке енергије

$$\frac{gr \times \left(\frac{cm}{sec}\right)^2}{2} = gr \times cm^2 \times sec^{-2}$$

Исту ову димензију има дакле и топлота. Тај капитал кинетичке енергије садржаног у посматраном делу тела зовемо количином топлоте која је у њему садржана.

Уочимо један волумски елеменат dV посматраног тела, па означимо са ρ специфичну густину тога тела која се може мењати од тачке до тачке, то ће маса која је садржана у елементу dV бити представљена једначином

$$m = \rho\, dV \qquad 1.)$$

Доносимо ли тој маси једну количину топлоте dq, то ће повишење температуре du изазвано тим довођењем бити пропорционално тој количини топлоте, а инверзно пропорционално маси посматраног делића. Зато ће бити

$$dq = c\, m\, du \qquad 2.)$$

Коефицијенат c зове се специфична топлота. То је она топлота која је потребна да температуру јединице масе повиси за један степен. У ствари ће само један део количине топлоте бити употребљен на повишење температуре тога дела тела. Један други део те количине биће н.пр. претворен у електричну енергију, трећи део ће обављајући механички рад бити претворен у потенцијалну енергију и т.д. Но ми ћемо у следећим извађањима претпоставити да се сва количина топлоте која се у тело увађа или извађа употребити на повишење или снижење његове температуре. Једначина 2.) регулише однос између количине топлоте и температуре једног дела тела. Што се тиче прелаза температуре од једног делића на други, то постоји овај емпиријски стечени закон: држимо ли обе стране једне веома велике плоче дебљине n на разним температурама u_1 и u_0 н. пр. једну страну њену на температури од 100° тиме што смо је довели у додир са кључалом водом, а другу страну њену на температури од 0° тиме што смо је довели у додир са ледом који се топи, онда ће кроз ту плочу прелазити од топлије стране ка хладнијој у сваком делу времена једна извесна количина топлоте, па ће она моћи бити мерена са множином леда који се истопи. Ако је плоча бескрајно велика, онда је јасно да је температура у равнинама које су паралелне граничним површинама плоче униформно распоређена. Исечемо ли из такве плоче једну цилиндричну површину базе f, то је искуством доказано да је множина топлоте q која у времену dt протече кроз површину f пропорционална тој површини, пропорционална диференцији температура $u_1 - u_0$, а инверзно пропорционална дебљини n плоче. Зато је

$$q = k\frac{u_1 - u_0}{n} f\, dt \qquad 3.)$$

фактор k зове се <u>проводљивост топлоте</u>. То је дакле она множина топлоте која протече у јединици времена кроз јединицу пресека јединицу дебљине плоче ако је разлика њених температура једнака 1°. Тај фактор k у ствари није потпуно независан од температура u_1 и u_0; не

протече далеко иста множина топло-
те ако су обе стране плоче држане
на температурама 30° и 29° или 60°
и 59° макар да је диференција у
оба случаја једнака 1°. Но у главном
се тај фактор јако не мења и због
тога ћемо претпоставити да је не-
зависан од температуре, а да зави-
си само од материје посматраног
тела.

Посматрамо ли један беско-
начно мали елеменат у телу, то
кроз површину df која је нормална
на правац n протече у времену
dt множина топлоте

$$dq = -k \frac{\partial u}{\partial n}\, df\, dt \qquad 3.^{*})$$

Знак минус потиче отуда што се
топлота креће у оном правцу у
ком температура опада. У век-
торској анализи имали смо једна-
чину

$$\frac{\partial u}{\partial a} = a_0 \nabla u = a_0 \operatorname{grad} u$$

Означимо ли према томе јединич-
ни вектор у правцу n далеко нор-
малан на површину df са n_0, то је

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n_0 \operatorname{grad} u$$

па је зато

$$dq = -k\, n_0 \operatorname{grad} u \cdot df \cdot dt$$

Овде је

$$n_0\, df = d\mathfrak{f}$$

где $d\mathfrak{f}$ означава управни елеменат
површине кроз који посматрамо про-
тицање топлоте. Означимо ли осим
тога

$$-k \operatorname{grad} u = \mathfrak{w} \qquad 3^{**})$$

где ћемо $\mathfrak{w}$ да назовемо <u>ток то-
плоте</u>, то постоји једначина

$$dq = \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}\, dt \qquad 4.)$$

Ова једначина даје нам ону мно-
жину топлоте која у времену dt
протече кроз управљени елеменат
површине $d\mathfrak{f}$. Она је идентички јед-
нака са једначином која нам даје
протицање течности кроз елеменат

df ако $\mathfrak{w}$ означава брзину течности. Зато смо и назвали $\mathfrak{w}$ током топлоте.

Посматрамо ли једну затворену површину F, то ће у времену dt истећи из те површине множина топлоте

$$Q_1' = dt\int_F \mathfrak{w}\,df$$

а у ту ће површину у времену dt да утече множина топлоте представљена једначином

$$Q_1 = -dt\int_F \mathfrak{w}\,df$$

По Gauss-овој теореми можемо и ту множину топлоте да представимо изразом

$$Q_1 = -dt\int_V \operatorname{div}\mathfrak{w}\,dV$$

где V означава запремину обухваћену површином F.

Да би решили најопштији случај претпоставимо да се у запремину V не само топлота уводи него да се она у тој запремини ствара н. пр. хемиским или електричним трејањем, па нека множина топлоте створена у јединици времена у елементу запремине dV буде једнака e dV, где e има исту улогу као јачина извора у векторским пољима. Онда ће множина топлоте створена у времену dt у волумену V бити представљена са

$$Q_2 = dt\int_V e\,dV$$

Зато је сва множина топлоте која је у времену dt уведена и створена у запремини V представљена са

$$Q_1 + Q_2 = dt\int_V (e - \operatorname{div}\mathfrak{w})\,dV$$

Узмимо сада да се сва та топлота употреби на повишење температуре тога дела тела. Повишење температуре у времену dt представљено је изразом

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,dt$$

а множина топлоте која је потребна да то повишење изведе у елементу тела масе m једнака је према једначини 2.)

$$cm\frac{\partial u}{\partial t}dt =$$

или према једначини 1.)

$$= c\varrho\frac{\partial u}{\partial t}dt\,dv$$

то је она топлота која изазива повишење температуре елемента dv. За повишење температуре целе запремине v биће потребна топлота представљена интегралом

$$dt\int_v c\varrho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv$$

а та мора бити једнака топлини (q_1+q_2). Зато имамо једначину

$$\int_v c\varrho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv = \int_v (e-\mathrm{div}\,\eta)\,dv$$

Ова једначина мора вредети за произвољну запремину v, па зато важи једначина

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = e - \mathrm{div}\,\eta$$

а с обзиром на једначину 3**)

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = e + \mathrm{div}\,k\,\mathrm{grad}\,u \tag{5.)}$$

Ако је коефицијенат k константан, једном речи ако је медиум с обзиром на проводљивост топлоте хомоген, онда можемо фактор k извадити пред знак div, па у том случају једначина 5.) гласи

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = e + k\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u \tag{6.)}$$

У аналитичком облику пишу се ове једначине овако:

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = e + \frac{\partial k\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial k\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial k\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z} \tag{5*)}$$

а једначина 6.) добија аналитички облик

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = e + k\nabla^2 u$$

или

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = e + k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{6*)}$$

Ово су основне једначине за

провађање топлоте.

Ако се у самом кондуктору топлота не ствара т.ј. ако је

$$e=0$$

онда последња једначина добија облик

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u = \frac{k}{c\rho}\nabla^2 u$$

Ако је још c и ρ константно, онда означујемо константу

$$\frac{k}{c\rho} = a^2$$

и зовемо a <u>коефицијентом унутрашње спроводљивости</u>. Последња једначина добија онда облик

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u \qquad 7.)$$

или у развијеном облику

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad 7^{*})$$

За стационарно стање неће u бити зависно од времена т.ј.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

па у том случају једначине 5.), 6.) и 7.) добијају облике

$$e + \mathrm{div}\,k\,\mathrm{grad}\,u = 0 \qquad 5^{**})$$

$$e + k\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u = 0 \qquad 6^{**})$$

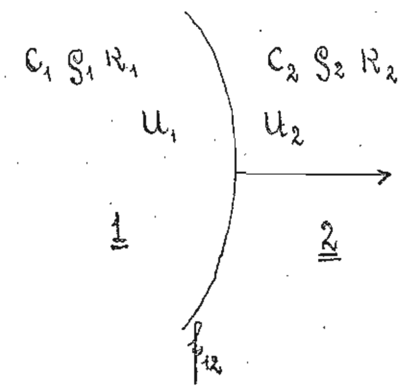
$$a^2 \nabla^2 u = 0 \qquad 7^{**})$$

<u>Гранични услови</u>. Спроводници топлоте које посматрамо или њихова својства експериментално проучавамо увек су ограничена тела, па су опкољена обично ваздухом а при експериментима често пута са течностима које се температура одржава на сталној висини. У ствари је сваки спроводник топлоте део једнога бесконачног скаларног поља топлоте које обухвата васиону. Али у томе пољу долазе тела разних агрегатних стања: чврста, течна, гасовита, па се у њему указују појаве зрачења и појаве конвекције. Због тога су сви процеси распростирања топлоте веома комплико-

вање. Зато смо присиљени да наша испитивања ограничимо на тела коначне димензије, а за граничне површине тих тела да ставимо такве услове који по могућности одговарају реалности.

Површине дисконтинуитета.

Додирују ли се два разна проводника 1 и 2 у површини f_{12}, то ће на тој површини бити поље дисконтинуирно јер се на њој мењају скоком величине: c, ρ и k. Те величине нека буду у проводнику 1: c_1, ρ_1, k_1



а у проводнику 2: c_2, ρ_2, k_2. Онда се може очекивати да ће се и температура и мењати скоком на тој површини. Означимо ју у проводнику 1 са u_1 а у проводнику 2 са u_2. Учинимо као и пре претпоставку да је множина топлоте која кроз један елеменат протече пропорционална диференцији температура, то ће топлота dq_1 која кроз елеменат df у времену dt протече из проводника 1 и 2 бити једнака

$$dq_1 = h\,(u_1-u_2)\,df\cdot dt \qquad 1.)$$

где h представља коефицијенат при прелазу од 1 на 2 па се зове прелазни коефицијенат или коефицијенат прелаза. Имали смо једначину да је та топлота која кроз тај елеменат у томе времену протече једнака такође

$$dq_1 = -k_1\frac{\partial u_1}{\partial n}\cdot df\cdot dt$$

У овој једначини n означује нормалу на површину наперену од 1 према 2. Обрнито правац те нормале па ће бити

$$dq_1 = k_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n}\cdot df\cdot dt \qquad 2.)$$

где потез преко u_1 означава да је правац нормале обрнут због чега је и знак минус исчезао.

Два су дакле случаја која треба сада разликовати: проводник 1 претпостављамо да је круто тело, па та два случаја настају према томе да ли је проводник 2:

1°.) течно или гасовито тело т.ј. такво у којему се указује појава конвекције; или је

2°.) такође круто тело.

Испитајмо прво први случај, па претпоставимо да је проводник 2 такво течно или гасовито тело, да она топлота која из проводника 1 у њега пређе није у стању да му у посматраном времену повиси осетно температуру. Онда ће сва топлота која из проводника 1 дође у проводник 2 бити конвекцијом разнесена по проводнику, а како је овај претпостављен веома велики, то ће температура u_2 остати константна. Означимо је са u_0. То је н. пр. случај ако имамо једно круто тело коначне димензије које се нађе у ваздуху. Из проводника 2 неће у овом случају бити слата никаква топлота у проводник 1. Зато добијамо из једначина 1.) и 2.)

$$k_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} = h(u_1 - u_0) \qquad 3.)$$

Другачији је случај ако је проводник 2.) круто тело. Онда топлота која из 1 пређе у 2 не бива моментално разнесена по проводнику 1, него се шири по њему по истим оним законима по којима се шири у проводнику 1. Из тога узрока шири се у проводнику 2 непосредно из површине f_{12} једна множина топлоте

$$dq_2 = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} df\, dt$$

а како на површини дисконтинуитета не може настајати ни нагомилавање топлоте ни исчезавање, јер би се онда временом температура те површине бескрајно повисила или снизила, то dq_1 мора бити једнако dq_2, па због тога

$$k_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \qquad 4.)$$

И лево и десно у овој једначини означава n нормалу наперену од 2 према 1, па зато можемо потез преко u_1 испустити и писати једноставно

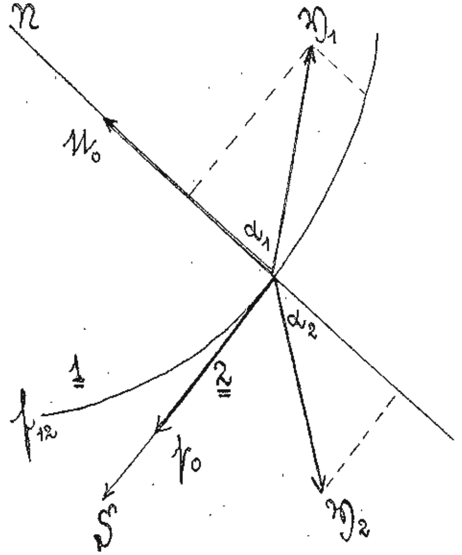
$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \qquad 4^{*})$$

Ово је услов који мора бити задовољен на површини у којој се додирују два разна крута проводника.

Преламање тока топлоте.

Додирују ли се два крута кондуктора у површини f_{12}, то при пролазу кроз ту површину настаје дисконтинуитет поља и за сваки нормални пролаз кроз ту површину важи једначина

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \qquad 1.)$$



где је n наперено у правцу јединичног вектора n_0. Ако су температуре u_1 и u_2 на граничним површинама биле различите, то ће се врло брзо успоставити однос

$$u_1 = u_2 \qquad 2.)$$

али једначина 1.) постојаће увек. Крећемо ли се у правцу произвољне тангенте S на површини f то је

$$\frac{\partial u_1}{\partial S} = \frac{\partial u_2}{\partial S} \qquad 3.)$$

јер дисконтинуитет настаје само при прелазу кроз површину. Показали смо пре да је

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = n_0 \operatorname{grad} u_1$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial n} = n_0 \operatorname{grad} u_2 \qquad 4.)$$

а назвали смо векторе

$$-k_1 \operatorname{grad} u_1 = \mathfrak{W}_1$$
$$-k_2 \operatorname{grad} u_2 = \mathfrak{W}_2 \qquad 5.)$$

ток топлоте. Из једначина 1.) и 4.) следује.

$$k_1 n_0 \operatorname{grad} u_1 = k_2 n_0 \operatorname{grad} u_2$$

или с обзиром на једначине 5.)

$$-n_0 \mathfrak{W}_1 = -n_0 \mathfrak{W}_2 \qquad 6.)$$

$-n_0 \mathfrak{W}_1$ представља компоненту вектора $\mathfrak{W}_1$ нормалну на површину f, па означимо ли интензитет вектора $\mathfrak{W}_1$ са v_1, то је та компонента једнака $v_1 \cos\alpha_1$. Исто тако продукат $-n_0 \mathfrak{w}_2$ представља компоненту вектора $\mathfrak{w}_2$ нормалну на површини f а та је једнака $v_2 \cos\alpha_2$, где α_1 и α_2 означавају углове што их токови $\mathfrak{w}_1$ и $\mathfrak{w}_2$ затварају са нормалом површине. Из једначине 6.) следује према томе

$$v_1 \cos\alpha_1 = v_2 \cos\alpha_2 \qquad 7.)$$

Означимо ли јединични вектор у правцу тангенте S са t_0 то једначину 3.) можемо заменити једначином

$$t_0 \operatorname{grad} u_1 = t_0 \operatorname{grad} u_2$$

или

$$-\frac{1}{k_1} t_0 k_1 \operatorname{grad} u_1 = -\frac{1}{k_2} t_0 k_2 \operatorname{grad} u_2$$

или

$$\frac{1}{k_1} t_0 \mathfrak{w}_1 = \frac{1}{k_2} t_0 \mathfrak{w}_2$$

$t_0 \mathfrak{w}_1$ представља компоненту вектора $\mathfrak{w}_1$ у правцу тангенте S а та је једнака $v_1 \sin\alpha_1$. Исто тако представља $t_0 \mathfrak{w}_2$ компоненту вектора $\mathfrak{w}_2$ у правцу тангенте S а та је једнака $v_2 \sin\alpha_2$.

Зато имамо једначину

$$\frac{1}{k_1} v_1 \sin\alpha_1 = \frac{1}{k_2} v_2 \sin\alpha_2 \qquad 8.)$$

Поделимо ли једначине 7.) и 8.) једну с другом, то добијамо

$$\frac{1}{k_1} \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{k_2} \operatorname{tg}\alpha_2 .$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_1}{k_2} \qquad 9.)$$

Ова једначина казује да се линије тока топлоте на додирним површинама двају различних медијума преламају тако да се тангенте углова што их оне са нормалом додирне површине затварају односе као спроводљивости топлоте.

Лако је увидети да вектори $\mathfrak{w}_1$ и $\mathfrak{w}_2$ леже у истој равни нормално на површину.

Fourier-ова једначина за гасове и за течности.

При провађању топлоте кроз гасове или течности настају у овим појави конвекције а ова изазива (или упливише кретање честица посматраног медиума. Узмимо тај проблем кретања тих честица решен т.ј. да нам је позната брзина $\mathfrak{V}_e$ посматране честице. Промена температуре једне уочене честице т.ј. супстанцијелна промена једнака је према пређашњем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathfrak{V}_e \nabla) u$$

Fourier-ова једначина коју смо пре извели односи се на једну одређену честицу медиума и зато је квоцијенат $\frac{du}{dt}$ те једначине једнак квоцијенту $\frac{du}{dt}$ горње кинематичне једначине и зато ће за гасове Fourier-ова једначина бити

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathfrak{V}_e \nabla) u = \frac{k}{c\varrho} \nabla^2 u$$

Означимо ли компоненте брзине $\mathfrak{V}_e$ са v_x, v_y, v_z, то можемо горњу једначину написати у развијеном облику овако

$$\begin{aligned}(\mathfrak{V}_e \nabla) u &= (v_x i + v_y j + v_z k)\left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) u = \\ &= \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) u \\ &= v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}$$

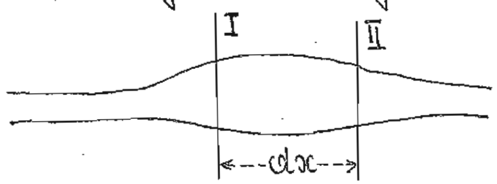
па даље

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{k}{c\varrho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Решавање проблема провађања топлоте своди се даље увек на интеграцију парцијалних диференцијалних једначина. Сама теорија провађања топлоте била је врло корисна за математичку теорију парцијалних диференцијалних једначина јер се је из теорије провађања топлоте развила теорија Fourier-ових редова и интеграла. Тај однос између проблема провађања топлоте и теорије парцијалних диференцијалних једначина узрок је да је публикован један велики број радова о провађању топлоте који има више математичког него физичког интереса. Ми ћемо главну пажњу обратити на интеграцију оних парцијалних диференцијалних једначина које имају јачи физикални значај.

Провађање топлоте кроз штап или жицу.

Узмимо да је проводник облика штапа или жице т.ј. да му је пресек веома мален према дужини. Тај штап не мора бити прав а и пресек не мора бити константан. Одаберимо на томе штапу једну почетну тачку, О па означимо одстојање произвољног пресека од те тачке мерено дуж штапа са x. Уочимо даље такав један произвољан пресек I; његова површина нека буде q; q даље може бити функција од x. Исто тако можемо претпоставити да је u_0 температура ваздуха или другог којег медијума течног или гасовитог агрегатног



стања који штап опкољава позната функција од x. Могли би узети да су и величине c, ρ и k функције од x, но једноставности ради претпоставимо да је штап хомоген, па да су према томе те величине константне. Посматрајмо сада елеменат штапа који се налази између два блиска пресека I и II чије је одстојање dx. Онда утече у времену dt у тај елеменат кроз пресек I једна множина топлоте која је према прећашњем једнака

$$-k q \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

Кроз пресек II истече у истом елементу времена једна множина топлоте представљена са

$$-\left\{k q \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial\left(q \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} dx\right\} dt$$

па према томе је сувишак топлоте који у елементу штапа заостаје једнак

$$k \frac{\partial\left(q \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} dx\, dt$$

Но осим те топлоте пролази једна извесна множина топлоте кроз омотач елемента т.ј. кроз површину у којој се штап са околним медијумом додирује. Та множина једнака је према прећашњем

$$h(u-u_0)\, df\, dt$$

где h означује коефицијенат спољне спроводљивости са df величину додирне површине. Означимо ли дужину периферије пресека I са l, то је

$$df = l\, dx$$

Читава множина топлоте која је у елементу времена dt у посматраном елементу штапа заостала једнака је према томе

$$\left\{k \frac{\partial\left(q \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} - h(u-u_0) l\right\} dx\, dt \qquad 1)$$

Та топлота употребиће се на повишење температуре и посматраног елемента. Како смо претпоставили да је пресек штапа q веома мален, то можемо узети да је температура у читавом томе пресеку униформна. Повишење температуре посматраног елемента изазвано множином топлоте која је у елементу заостала биће представљено са

$$c\varrho \frac{\partial u}{\partial t}\, dt\, dV \qquad 2.)$$

где dV представља запремину тога елемента. Та запремина једнака је

$$dV = q\, dx$$

Величине 1.) и 2.) морају бити једнаке јер претпостављамо да се сва топлота употребљава на повишење температуре. Зато добијамо

$$k\frac{\partial\left(q\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} - hl(u-u_0) = c\varrho\, q\frac{\partial u}{\partial t} \qquad 3.)$$

Ова једначина регулише провађање топлоте кроз штап. Она је у толико једноставнија од пређашњих једначина што су гранични услови на омотачу штапа у њој већ садржани, па зато имамо при решавању ове једначине да се бринемо само за граничне услове на крајевима штапа.

Ако је пресек штапа константан, онда можемо у првом члану горње једначине q извадити предзнак ∂ па у том случају добија једначина 3.) облик

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hl}{c\varrho q}(u-u_0) \qquad 3.^{*})$$

Узмимо да је температура околине константна и једнака нули т.ј.

$$u_0 = 0$$

т.ј. одаберимо почетну тачку термометричне скале једнаку спољашњој температури. Означимо

$$\frac{hl}{c\varrho q} = b^2 \quad \text{а било је} \quad \frac{k}{c\varrho} = a^2$$

па добијамо једначину

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u \qquad 3.^{**})$$

У овом облику употребљава се обично Fourier-ова једначина за штап.

Стационарно стање. Ако је у штапу наступило стационарно стање, онда је

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

па једначина 3**) добија облик

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{b^2}{a^2}u=0 \qquad 4.)$$

Да ову једначину интегришемо ставимо по познатом упутству

$$u=e^{\beta x}$$

одакле је

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\beta e^{\beta x}=\beta u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\beta^2 u$$

Заменом ових вредности у једначини 4.) добијамо

$$\beta^2 u-\frac{b^2}{a^2}u=0$$

или

$$\beta^2=\frac{b^2}{a^2}$$

Ова једначина има два решења и то

$$\beta_1=+\frac{b}{a} \quad и \quad \beta_2=-\frac{b}{a}$$

и зато ћемо имати одмах два партикуларна решења једначине 4.) и то $e^{\frac{b}{a}x}$ или $e^{-\frac{b}{a}x}$. Из ових двеју партикуларних решења можемо склопити општије решење

$$u=C_1e^{\frac{b}{a}x}+C_2e^{-\frac{b}{a}x}$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе. Ће константе треба одредити тако да наше решење задовољава граничне услове. Као граничне услове узимамо ово:

1° крај штапа и то онај за који је $x=0$ држи се на константној температури $u=u_0$;

2° штап нека буде веома, далеко кажимо бескрајно дугачак и да тај други крај има коначну температуру т.ј. да не буде бескрајно велика т.ј. за $x=\infty$ је $u\neq\pm\infty$.

Због овог другог услова мора бити

$$C_1=0$$

а из првог граничног услова добијамо једначину

$$u_0 = C_2$$

и зато је решење које задовољава граничне услове представљено са

$$u = u_0 e^{-\frac{b}{a}x} \qquad 5.)$$

- Ово је једначина за стационарно стање у бескрајно дугачком штапу или жици.

Закон који је горњом једначином изражен често пута је употребљаван да се одреде коефицијенти спроводљивости штапа. Једна од таквих метода је ова: имамо ли два штапа различитог материјала но истога пресека, тако да је у једном и у другом случају

$$q_1 = q_2 \qquad l_1 = l_2$$

па превучемо ли површине тих штапова са истим материјалом (лаком, воском, сребром, ...), онда ће у оба случаја бити и коефицијенти спољне спроводљивости једнаки

$$h_1 = h_2$$

Држимо ли крајеве (који се налазе у коначности) тих штапова на истој температури u_0 па одредимо ли на штаповима места: на првом x_1, а на другом x_2 која имају исту температуру, то ће те апсцисе задовољавати једначину

$$e^{-\frac{b_1}{a_1}x_1} = e^{-\frac{b_2}{a_2}x_2} \qquad 6.)$$

јер су температуре у штаповима дате једначинама

$$u_1 = u_0 e^{-\frac{b_1}{a_1}x_1} \qquad u_2 = u_0 e^{-\frac{b_2}{a_2}x_2}$$

Према пређашњим конвенцијама је

$$b_1 = \sqrt{\frac{h_1 l_1}{c_1 \rho_1 q_1}} \qquad a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{c_1 \rho_1}} \qquad b_2 = \sqrt{\frac{h_1 l_1}{c_2 \rho_2 q_1}} \qquad a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{c_2 \rho_2}}$$

тако да је

$$\frac{b_1}{a_1} = \sqrt{\frac{h_1 l_1}{q_1 k_1}} \qquad \frac{b_2}{a_2} = \sqrt{\frac{h_1 l_1}{q_1 k_2}}$$

Једначину 6.) можемо писати у облику

$$\frac{b_1}{a_1}x_1 = \frac{b_2}{a_2}x_2$$

па је зато

$$x_1\sqrt{\frac{k_1 l_1}{q_1 k_1}} = x_2\sqrt{\frac{k_1 l_1}{q_1 k_2}}$$

одакле

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$$

или

$$k_1 : k_2 = x_1^2 : x_2^2$$

– Коефицијенти спроводљивости k односе се као квадрати апсциса места истих температура.

На овоме се оснива <u>Ingenhousz-ов експеримент</u>. Он је тај експеримент извео већ при крају XVIII века и помоћу њега мерио коефицијенте спроводљивости металних штапова. У то име је металне штапове разнога материјала а истога пресека превукао воском, па је један крај њихов држао на константној температури од 100° тиме што је те крајеве држао у кључалој води. Штапови су били далеко утврђени да температура једног краја није имала утицаја на температуру другог краја, па су зато други крајеви штапова имали сви температуру ваздуха у соби. Према крајевима који су били угрејани растопио се восак, па су дужине на којима је био восак растопљен биле дужине $x_1, x_2, \dots$ т.ј. апсцисе које одговарају истим температурама, у овом случају температури под којом се восак топи.

<u>Општи случај</u>. Вратимо се опет једначини

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u \qquad 3^{**})$$

Ову једначину можемо свести на једноставнији облик заменом

$$u = v e^{-b^2 t}$$

одакле је

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}e^{-b^2 t} - b^2 v e^{-b^2 t} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v\right)e^{-b^2 t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}e^{-b^2 t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{-b^2 t}$$

Сменом ових вредности у горњој једначини биће

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v\right) e^{-b^2 t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{-b^2 t} - b^2 v e^{-b^2 t}$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Интеграција ове једначине је позната. Ставимо ли у њу

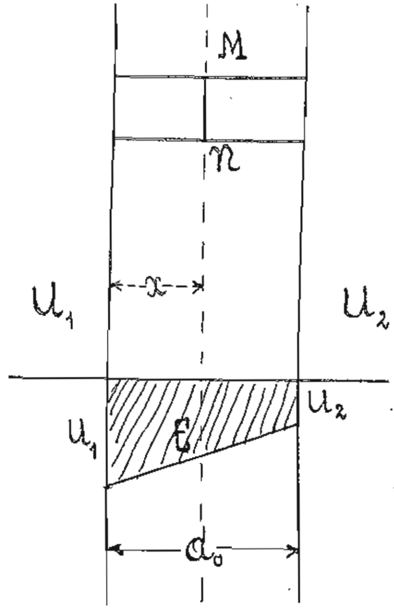
$$x = az$$

то добијамо још једноставнију једначину

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Провађање топлоте кроз плочу

Посматрамо ли плочу дебљине d_0 која је ограничена двема паралелним равнинама; та плоча нека буде бескрајно раширена а температуре u_1 и u_2 њених граничних површина нека буде по тим површинама униформно распоређене, дакле једнаке у свима тачкама плоче, при чему може да буде та температура функција времена. Онда је у једном одређеном моменту температура у свима тачкама произвољне равнине ε која је паралелна граничним



површината једнака, јер се ни једна тачка те равнине ничим не одликује од других тачака те равнине.

Исецимо из ове плоче један призматичан елеменат који пролази нормално кроз ту плочу. Онда је температура и пресека n у уоченом моменту само функција одстојања x тога пресека од граничне површине. Пролаз топлоте кроз тај призматичан елеменат вршиће се према томе исто тако као пролаз кроз један прав штап са том разликом да у овоме случају неће кроз омотач штапа излазити никаква топлота, јер се у овом случају штап додирује са другим штапом исте температуре. Према томе ће струјање топлоте кроз плочу бескрајне ширине бити регулисано једначином

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 1.)$$

За случај стационарног стања имамо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

па је зато

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Како u зависи само од x-а то можемо ову једначину директно интегрисати, па добијамо

$$u = C_1 x + C_2$$

где су C_1 и C_2 константе које морамо тако одредити да задовољавају граничне услове. Ти гранични услови дати су једначинама

за $x = 0$ је $u = u_1$

" $x = d_0$ " $u = u_2$

па зато имамо

$$u_1 = C_2$$

и

$$u_2 = C_1 d_0 + u_1$$

одакле

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{d_0}$$

Распоред температуре дат је далеко једначином

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{d_0} x$$

Распоред је далеко линеаран: температура опада од вредности u_1 на вредност u_2 по правој линији. Распоред је представљен према томе шрафираним трапезом.

Општа интеграција једначине 1.) коју смо у математици упознали даје се у специјалним случају знатно упростити. Као такав случај узећемо испитивање следећег проблема: како се шире осцилације температуре са површине земље у њену унутрашњост. У овоме случају можемо на посматраном месту земљу сматрати као једну бескрајно раширену плочу велике дебљине, па се зато наш проблем редукује на проблем: да испитамо ширење температуре кроз једну бескрајно раширену бескрајно дебелу плочу, ако се једна њена површина која се налази у коначности периодично загрева, јер је загревање земаљске површине периодично. Узећемо да се то периодично загревање наше плоче врши по хармоничном закону т.ј. да је температура u пропорционална косинусу времена. Нека далеко температура површине плочине буде

$$u = a_0 \cos \frac{2\pi t}{T} \qquad 2.)$$

Максимум температуре је у овом случају

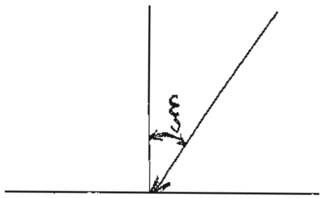
$$\max u = a_0$$

а минимум

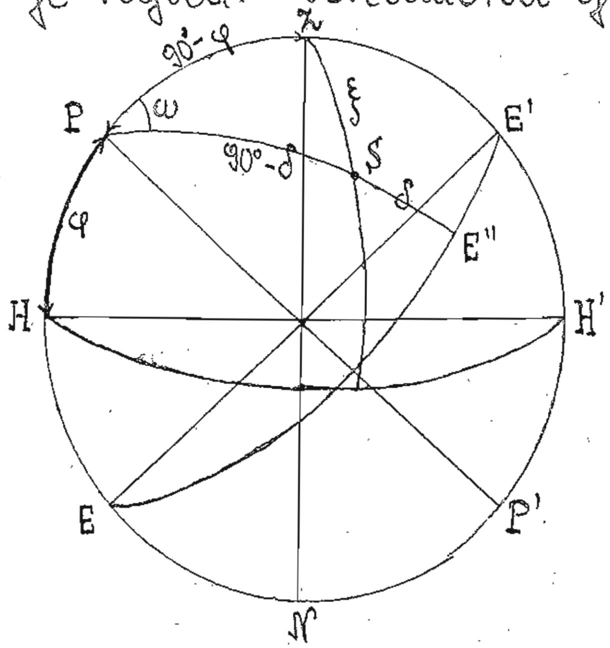
$$\min u = -a_0$$

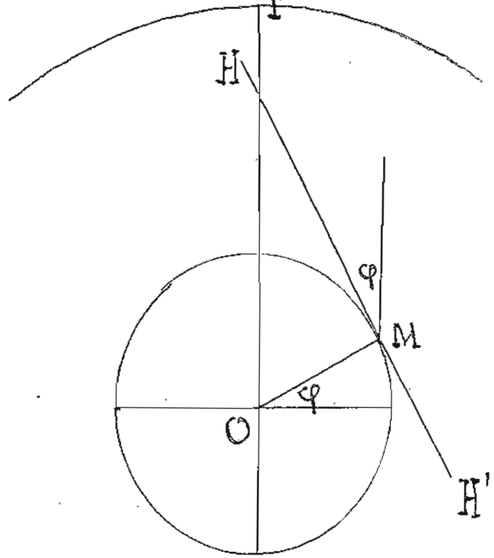
Зато величину a_0 називамо амплитудом температуре на површини. Повећа ли се време t за величину T то вредност u остаје непромењена. Зато је T периода ове осцилаторне појаве.

Примедба: Ова претпоставка о периодичном загревању једне стране упочине не слаже се потпуно са загревањем земљине површине. Загревање земаљске површине сунчаним загревањем или инсолацијом пропорционално је косинусу зенитске дистанције ξ сунца. То загревање је тим веће што



је ξ мање, а за вредност $\xi = \frac{\pi}{2}$ једнако је нули. Зенитска дистанција мења се у току дана али она није пропорционална времену као што ће то из следећег видети: нека HH' представља хоризонт посматраног места земаљске површине, Z зенит, нацртани круг према томе небеску сферу, P нека представља северни пол небеске сфере, па зато круг HPZH' меридијан посматраног места. O је центар земље, M посматрано место, HH' хоризонт, P пол; угао φ што га оса земаљска затвара са хоризонтом једнак је географској ширини. Зато је лук HP једнак географској ширини φ. S нека буде моментални положај сунца, онда је ZS једнако зенитској дистанцији ξ, PS је моментална дистанција сунца од пола, а SE'' = δ где се δ зове деклинацијом сунца. Зато је PS = 90°-δ. ω је часовни угао и са њиме се мери





сунчано време. Из сферног троугла PZS следује по једначинама сферне тригонометрије да је

$$\cos \zeta = \cos(90-\varphi)\cos(90-\delta) + \sin(90-\varphi)\sin(90-\delta)\cos\omega$$

или

$$\cos \zeta = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\omega$$

φ је на једном одређеном месту константно, δ се мења али се може узети да је у току једног дана константно, ω је пропорционално времену t (за право сунчано време, не средње време, али разлика није велика. Како је u или загревање услед инсолације пропорционално зенитној дистанцији, то ће према горњој једначини то загревање имати облик

$$u = m + n \cos kt$$

па према томе не одговара потпуно једначини 2.). Само у дане кад се сунце налази у т.ј. кад је δ равно нули, дато је загревање инсолацијом једначином облика 2.) и у томе случају T т.ј. периода осцилације је једнака 24 сата.

Једначина 2.) претпоставља да се свака периода састоји из једног дела који можемо назвати периодом загревања и другог: периоде хлађења, а та једначина претпоставља да се и то хлађење врши по закону израженом једначином 2.). Када сунце зађе, онда у истини настаје хлађење земаљске површине т.зв. хлађење радијацијом. Но то хлађење није пропорционално косинусу времена, него самом времену. Осим тога су закони загревања и хлађења земаљске површине веома компликовани, јер долазе у обзир ветрови и облаци, па се у опште ти закони не могу обухватити једном једначином и зато морамо све то узети у обзир кад будемо читали резултате проблема са којим ћемо сад да се бавимо употребити на проучавање температуре у унутрашњост земље. Проблем са почетка можемо према томе назвати идеализираним проблемом. Ако будемо хтели природни феномен оштрије да испитујемо, онда можемо суперпонирати неколико идеализираних проблема са граничним условима 2.) у којима су амплитуде и периоде различите и тако удешене да се интерференција њихових осцилација приближује по тачности осцилацијама опаженим у природи.

Вратимо се дакле идеализираном проблему. Да интегришемо или да тражимо решење једначине 1.) које задовољава следеће граничне услове:

за $x=0$ нека буде $u = a_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$ јер узимамо да почетна тачка апсцисе лежи на површини тла, а осцилације на њеној површини дате су једначином 2.); и други гранични услов нека буде:

за $x=\infty$ $\quad u \neq \pm\infty$

Утицај иницијалног распореда температуре губи се временом све више и више, па температура добија у свима деловима тла постепено периодични карактер. Узмимо дакле да је t тако велико, да ~~је~~ иницијални распоред не морамо узети у обзир. Ставимо сада по општем упутству

$$u = e^{\alpha t + \beta x} \qquad 3.)$$

Онда је

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha u \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \beta u \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta^2 u$$

Ставимо ли ове вредности у једначини 1.), то ће она бити задовољена ако је

$$\alpha = a^2 \beta^2 \qquad 4.)$$

α и β можемо произвољно одабрати али увек тако да задовољавају једначину 4). Узмимо да је β комплексан број, дакле ставимо

$$\beta = p \pm i\beta$$

то можемо учинити али морамо и α сад тако одредити, да α и β задовољавају једначину 4). Зато је

$$\alpha = a^2(p \pm i\beta)^2 = a^2(p^2 - \beta^2 \pm 2ip\beta)$$

или ако оделимо реални члан од имагинарног

$$\alpha = a^2(p^2-\beta^2) \pm 2ip\beta a^2$$

Ми имамо и за α и за β по један пар вредности, па ставимо у решењу 3.) први пут

место α вредност $a^2(p^2-\beta^2)+2ip\beta a^2$

" β " $p+\beta i$

и други пут

место α " $a^2(p^2-\beta^2)-2ip\beta a^2$

" β " $p-\beta i$

Онда добијамо два решења која можемо склопити заједно у једно опште решење:

$$u = A e^{a^2(p^2-\beta^2)t + 2ip\beta a^2 t + px + i\beta x} + B e^{a^2(p^2-\beta^2)t - 2ip\beta a^2 t + px - i\beta x} =$$

$$= e^{a^2(p^2-\beta^2)t+px}\left\{A e^{2ip\beta a^2 t + i\beta x} + B e^{-(2ip\beta a^2 t + i\beta x)}\right\}$$

Употребимо ли Euler-ов образац, то можемо даље писати

$$u = e^{a^2(p^2-\beta^2)t+px}\left\{A\cos\beta(x+2pa^2t) + Ai\sin\beta(x+2pa^2t) + B\cos\beta(x+2pa^2t) - Bi\sin\beta(x+2pa^2t)\right\}$$

Саберемо ли чланове у загради и ставимо ли место $A+B$ нову константу A_1 а место $i(A-B)$ нову константу B_1, што је дозвољено јер су константе произвољне, добијамо онда решење

$$u = e^{a^2(p^2-\beta^2)t+px}\left\{A_1\cos\beta(x+2pa^2t) + B_1\sin\beta(x+2pa^2t)\right\}$$

Ставимо сада

$$p=\beta$$

Онда горњи интеграл добија облик

$$u=e^{px}\{A_1\cos(px+2p^2a^2t)+B_1\sin(px+2p^2a^2t)\}$$

Ово решење задовољава једначину 1.) а дато је у таквом облику да згодним обртом констаната задовољи и граничне услове. Да задовољи гранични услов: за $x=\infty$ $u\neq\pm\infty$ довољно је да p буде негативно, а да задовољи гранични услов: за $x=0$ $u=a_0\cos\frac{2\pi t}{T}$ треба ставити $B_1=0$ и

$$a_0\cos\frac{2\pi t}{T}=A_1\cos 2p^2a^2t$$

из овога следује да је $A_1=a_0$ и $p=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}$ (Узимамо знак минус јер смо рекли да p мора бити негативно. Дакле решење једначине 1.) које задовољава граничне услове представљено изразом

$$u=a_0e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right) \qquad 5.)$$

Из овог решења можемо извести следеће важне конзеквенције: Уочимо ли температуре у којој одређеној тачки у унутрашњости тоце (под површином), дакле ставимо ли у горњој једначини $x=x_1$, то видимо да се u не мења ако се време t повећа за величину T. Зато је и за сваку тачку у унутрашњости тоце варијација температуре осцилаторна са периодом T. Периода остаје дакле непромењена. Овај резултат може се употребити и на земљу. У унутрашњости земље изваја температура дневне осцилације и годишње осцилације, јер су на површини земље главне периоде дан и година. Амплитуда тих осцилација у дубини x_1 једнака је $a_0e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}$. Из ове једначине следује да амплитуда опада са дубином x_1. И у ствари у дубини од 28m је амплитуда осцилација температуре тако мала да та места имају скоро константну температуру. На површини земље наступа амплитуда температуре кад је

$$2\pi\frac{t}{T}=2n\pi$$

где n означава произвољан цео број. У дубини x_1 наступа амплитуда температуре у времену t_1 ако је

$$2\pi\frac{t_1}{T}-\frac{x_1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}=2n\pi$$

Одбијемо ли ове једначине једну од друге, то добијамо

$$2\pi\frac{t_1-t}{T}=\frac{x_1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}$$

t_1-t означава према томе закашњење наступа амплитуде у дубини x_1 или оно време које осцилација треба да се са површине рашири до дубине x_1. То закашњење једнако је према томе

$$t_1-t=\frac{x_1}{2a}\sqrt{\frac{T}{\pi}}$$

Ово време ширења осцилација пропорционално је дубини x_1 и зато се може казати да се осцилације шире у дубину једнаком брзином. Ако дубину x_1 поделимо са временом које је потребно да се осцилација до те дубине рашири добијамо једну величину коју можемо назвати брзином ширења осцилација. Та брзина једнака је

$$v=\frac{x_1}{t_1-t}=2a\sqrt{\frac{\pi}{T}}$$

Брзина осцилација је према томе инверзно пропорционална другом корену из периоде T. Због тога се временске осцилације много брже шире у унутрашњости земље него годишње, јер је код њих периода 360 пута већа; но зато амплитуда дневних осцилација у дубини x_1

$$\delta_1=a_0e^{-\frac{x_1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}$$

опада много брже са дубином него амплитуда годишњих осцилација, јер је код годишњих осцилација T 360 пута веће, па због тога негативни експонент знатно мањи.

Феномен опадања амплиту- да са дубином и закашњавања наступа тих амплитуда можемо употребити

да одредимо коефицијенат спровод-
љивости земље. Меримо ли у дубини x_1 величину амплитуде, то је та величина дата једначином

$$\delta_1 = a_0 e^{-\frac{x_1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}$$

Меримо ли величину амплитуде у дубини x_2, то ће та амплитуда бити

$$\delta_2 = a_0 e^{-\frac{x_2}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}$$

или ако поделимо ове две једначине

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = e^{\frac{x_2 - x_1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}$$

или

$$\frac{x_2 - x_1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} = \log nat \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

а одатле је

$$a = \frac{(x_2 - x_1)\sqrt{\frac{\pi}{T}}}{\log nat \frac{\delta_1}{\delta_2}}$$

Помоћу ове једначине можемо одредити коефицијенат a, но можемо употребити и једну другу методу која се оснива на појави закашњивања осцилација. Одредимо ли време t_1 кад у дубини x_1 наступи максимум осцилација, то ће према пређашњем t_1 задовољавати једначину

$$2\pi \frac{t_1}{T} - \frac{x_1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} = 2n\pi$$

Одредимо ли време t_2 када у дубини x_2 наступи амплитуда температуре, онда то време t_2 мора задовољавати једначину

$$2\pi \frac{t_2}{T} - \frac{x_2}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}} = 2n\pi$$

Одузмемо ли ове једначине једну од друге, то добијамо

$$2\pi \frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{x_2 - x_1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}$$

или одатле

$$a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\pi}}$$

Кад се на тај начин одреди коефицијенат a, онда се коефицијенат k одређује из једначине

$$\frac{k}{c\varrho} = a^2$$

Примена резултата добијених за плочу на провађање топлоте кроз штап.

Једначина провађања топлоте кроз штап била је

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u \qquad 1.)$$

Ставимо у њој

$$u = v\, e^{-b^2 t} \qquad 2.)$$

одакле је

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} e^{-b^2 t} - v b^2 e^{-b^2 t} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v\right) e^{-b^2 t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} e^{-b^2 t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{-b^2 t}$$

па једначина 1.) постаје

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v\right) e^{-b^2 t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{-b^2 t} - b^2 v\, e^{-b^2 t}$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad 3.)$$

Једначина је 1.) према томе сведена на исти облик какав има једначина за плочу, па зато можемо добијене резултате за плочу употребити и на штап. Као пример узмимо овај проблем: један штап веома велике дужине загреван је периодично на једном свом крају по хармоничном закону т.ј. један његов гранични услов дат је једначином

$$x_1 = 0 \qquad u = a_0 \cos 2\pi \frac{t}{T} \qquad 4.)$$

Као други гранични услов узмимо да је штап тако дугачак да се осцилације температуре на једном крају његовом не осећају на другом крају и да према томе други крај има температуру средине у којој се налази. Једначина 1.) претпоставља да је та температура једнака нули, па је зато други гранични услов дат једначином

$$x = \infty \qquad u = 0 \qquad 5.)$$

Да применимо једначину 3) морамо замену 2.) провести и у граничним условима 4.) и 5.), па ће зато гранични услов 4.) бити после те замене изражен са:

$$x = 0 \qquad v = a_0 e^{-b^2 t} \cos 2\pi \frac{t}{T} \qquad 4.^{*})$$

а услов 5.) биће

$$x = \infty \qquad v = 0 \qquad 5.^{*})$$

Сада можемо употребити интеграле једначине 3.) које смо били извели. Један интеграл једначине 3.) био је према пређашњем једнак

$$v = e^{a^2(p^2-\beta^2)t + px} \left\{ A_1 \cos\beta(x + 2pa^2t) + \right.$$
$$\left. + B_1 \sin\beta(x + 2pa^2t) \right\}$$

Сада треба само константе тако одредити да ово решење задовољава граничне услове. То ће бити ако буде

$$B_1 = 0 \qquad A_1 = a_0$$

$$a^2(p^2-\beta^2) = b^2 \quad \text{или} \quad \beta = \sqrt{p^2 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad 6.)$$

и

$$2pa^2t = \frac{2\pi t}{T} \qquad 7.)$$

па ће зато решење једначине 3.) бити

$$v = a_0 e^{b^2t + px} \cos(x + 2pa^2t)\sqrt{p^2 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Из једначине 7.) може се p изразити помоћу a. Решење једначине 1.) које задовољава постављене граничне услове биће

$$u = v e^{-b^2t} = a_0 e^{px} \cos(x + 2pa^2t)\sqrt{p^2 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad 8.)$$

Једначине 7.) и 8.) представљају према томе решење постављеног проблема. Амплитуда температуре на апсциси x_1 једнака је

$$\delta_1 = a_0 e^{px_1}$$

Ваља да напоменемо да p мора бити негативно да са растућим x температура u приближује се нули. На апсциси x_2 представљена је амплитуда осцилација изразом

$$\delta_2 = a_0 e^{px_2}$$

или ако ове једначине поделимо

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = e^{p(x_1-x_2)} \qquad 9.)$$

Одредимо ли према томе мерењем те амплитуде, онда из ове једначине можемо одредити потпуни коефицијенат p.

Максимум осцилације наступа код апсцисе x_1 у времену t_1 ако је

$$(x_1+2pa^2t_1)\sqrt{p^2-\frac{b^2}{a^2}} = 2n\pi$$

максимум код апсцисе x_2 наступа у времену t_2 ако је

$$(x_2+2pa^2t_2)\sqrt{p^2-\frac{b^2}{a^2}} = 2n\pi$$

Одузмемо ли ове једначине једну од друге то добијамо

$$x_1-x_2 = 2pa^2(t_2-t_1) \qquad 10.)$$

Помоћу једначина 7.), 9.) и 10.) можемо сада одредити коефициенте спроводљивости a и b. На овом принципу оснива се <u>метода Anström-ова</u> за одређивање коефицијената спроводљивости: веома дугачки <u>штап</u> чији један крај има собну температуру а загрева се периодично и хлади на другом крају, па се на разним местима штапа мере амплитуде осцилација температуре и времена кад те амплитуде наступају.

Fourier-ова једначина за случај радијалног ширења топлоте

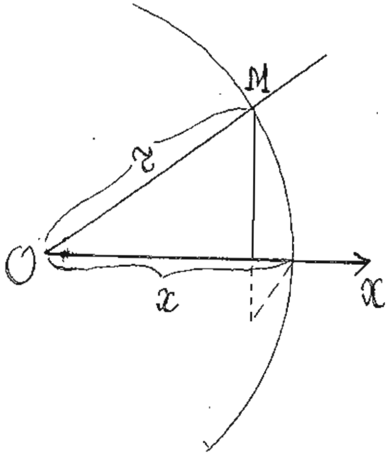
Овај случај наступа н. пр. код хлађења кугле ако су гранични услови такви да су по површинама концентричних кугала температуре униформно распоређене.

Fourier-ова општа једначина била је

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div} \operatorname{grad} u$$

Ако је ток температуре око једног центра радијалан, онда су еквискаларне површине температуре кугле са центром у O. Градиент температуре је према томе радијалан. Означимо ли одстојање произвољне тачке M од центра O са r, то је тај градиент представљен вектором

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} r_0 = \mathfrak{a}$$



где r_0 представља јединични вектор у правцу OM. Означимо тај градиент са $\mathfrak{a}$, онда су његове компоненте

$$a_x = |\mathfrak{a}| \cos(x\mathfrak{a}) = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}$$

$$a_z = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{z}{r}$$

Зато је

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \mathfrak{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Овај израз треба сада наћи. Како је

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

то је

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial r} x \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} x \underbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}_{1/r} + \frac{\partial u}{\partial r} \underbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}_{1/r} -$$

$$-\frac{\partial u}{\partial r}\underbrace{x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}}_{x^2/r^3}$$

Сем тога је

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

па је зато

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x^2}{r^3}$$

На исти начин добили би

$$\frac{\partial a_y}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{y^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{z^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{z^2}{r^3}$$

Зато је

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-$$

$$-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

Зато Fourrier-ова једначина гласи у овом случају

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2a^2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \qquad 2.)$$

Заменом

$$u=\frac{1}{r}v$$

због чега је

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}v+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{2}{r^3}v-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

у горњој једначини 2.) добијамо

$$\frac{1}{a^2}\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{2}{r^3}v-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\frac{2}{r^3}v+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r}$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

Сад смо једначину свели на облик са чијом смо се интеграцијом упознали. Заменом

$$r=ax$$

одакле је

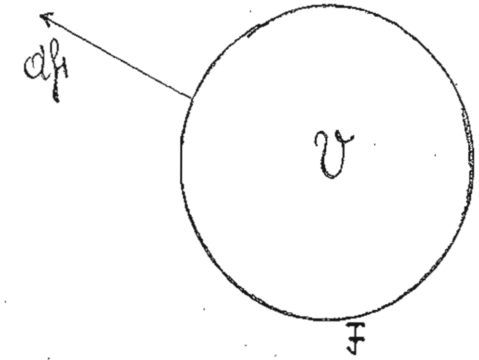
$$\partial r=a\,\partial x \qquad \partial r^2=a^2\partial x^2$$

добија се

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Главне једначине хидродинамике

Ограничимо у једној течности запремину V затвореном површином F, па замислимо остали део течности одстрањен. Да при томе механичко стање у запремини V остане непромењено морамо површину F



изложити оним силама којима је остали део течности дејствовао на запремину V. Те силе, назване <u>површинске силе</u> или <u>силе притиска</u>, нормалне су увек на посматрани елеменат површине на који дејствују. Означимо ли скаларну вредност таквога притиска узетог по јединици површине са p и која се вредност може мењати од тачке до тачке посматране течности т.ј. може бити функција координата и времена t, онда је сила притиска која дејствује на елеменат df једнака: $-p\,df$. Знак минус потиче отуда што је вектор df наперен према прећашњим конвенцијама на спољашњу страну површине, док притисак дејствује у противном правцу.

Осим површинских сила дејствују на посматрану течност још и силе које су везане на масу. Таква сила је н. пр. тежа, па означимо ли такву силу узету по јединици масе са $\mathfrak{F}$ а која може иначе да буде функција положаја и времена, и означимо ли специфичну густину течности са ρ која се такође може да мења од тачке до тачке, то је маса бескрајно мале запремине dV једнака: $\rho\,dV$ а сила која на њу утиче: $\mathfrak{F}\rho\,dV$.

Све површинске силе које дејствују на запремину V представљене су интегралом: $-\int_f p\,df$ при чему интеграл има наравно векторско значење. Све силе везане на масу које дејствују на запремину V представљене су интегралом: $\int_V \rho\,\mathfrak{F}\,dV$. Резултанта свих сила које дејствују на запремину V је према томе

$$\int_V \rho\,\mathfrak{F}\,dV - \int_f p\,df$$

Основне једначине динамике једног система од n материјалних тачака са масама $m_1, m_2 \cdots m_n$ биле су

$$\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_i \mathfrak{F}_i$$

при чему десна страна представља резултанту спољних сила. Ми можемо посматрану запремину сматрати такође као систем материјалних тачака па је маса једне такве тачке

$$m_i = \rho\, dV$$

па зато у нашем случају једначине кретања добијају облик

$$\int_V \rho \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt}\, dV = \int_V \rho \mathfrak{F}\, dV - \int_F p\, d\mathfrak{f}$$

Према једној од једначина табеле Векторске Анализе имамо

$$\int_F p\, d\mathfrak{f} = \int_V (\nabla p)\, dV = \int_V \operatorname{grad} p\, dV$$

Зато је (і можемо испустити

$$\int_V \rho \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\, dV = \int_V \rho \mathfrak{F}\, dV - \int_V \operatorname{grad} p\, dV$$

и како ова једначина важи за сваку произвољну запремину V, то због тога мора постојати једначина

$$\rho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \rho \mathfrak{F} - \operatorname{grad} p \qquad 1.)$$

-Ово је основна једначина хидродинамике.

Означимо ли вектор положаја произвољне тачке M посматране течности са $\mathfrak{r}$, то је, као што знамо

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$$

па горња једначина добија облик

$$\rho \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \rho \mathfrak{F} - \operatorname{grad} p \qquad 1')$$

У аналитичкој механици је ова једначина забележена са три скаларне једначине. Те три једначине добићемо на овај начин: означимо ли координате произвољне тачке M са: x, y, z, то је

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$$

а

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathfrak{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathfrak{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathfrak{k}$$

Означимо ли компоненте силе $\mathfrak{F}$ са: X, Y, Z, то је

$$\mathfrak{F} = X\mathfrak{i} + Y\mathfrak{j} + Z\mathfrak{k}$$

а

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathfrak{k}$$

Ставимо ли ове вредности у горњу једначину па сложимо све чланове са $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, то добијамо једначину облика

$$(\quad)i + (\quad)j + (\quad)k = 0$$

Ова једначина биће само онда задовољена ако су коефицијенти поред i, j, k у исти мах једнаки нули. Дакле добијамо ове једначине

$$\rho \frac{d^2x}{dt^2} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \frac{d^2y}{dt^2} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} \qquad 1^{**})$$

$$\rho \frac{d^2z}{dt^2} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

Уз ове једначине докази још једначина континуитета. Ако је посматрана течност нестишљива, онда је та једначина као што смо показали у Векторској Анализи једнака

$$\operatorname{div} v = 0 \qquad 2.)$$

Језиком аналитичке механике изражена је та једначина са једначином

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad 2^{*})$$

Ако је течност стишљива и ако посматрамо какав флуид који може да мења своју густину и за који такође важе пређашње једначине, онда је једначина континуитета представљена, као што смо то извели у Векторској Анализи за гасове, са једначином

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \qquad 3.)$$

У овој једначини пишемо ∂t и $\partial \rho$ да бисмо означили да посматрамо промену густине на једном одређеном месту простора, дакле локалну промену. Субстанцијелна промена $\frac{d\rho}{dt}$ једнака је збиру локалне и стационарне, дакле

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \operatorname{grad} \rho$$

Други члан једначине 3.) можемо по правилима Векторске Анализе раставити у два, па једначину 3.) пишемо у облику

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} v + v \operatorname{grad} \rho = 0$$

или с обзиром на претпоследњу једначину

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \qquad 3^{x)}$$

или

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0 \qquad 3^{xx)}$$

У једначинама $1^{xx)}$ имамо пет непознатих: x, y, z, ρ и p које ћемо да изразимо као функције времена. Са једначином континуитета имали смо четри једначине. Ако је течност нестишљива, онда је пета једначина која нам још фали дата са

$$\rho = const.$$

Ако течност или посматрани флуидум није нестишљив, онда нам је та пета једначина дата тиме што је густина ρ флуидума функција притиска p и температуре u. Та једначина

$$F(p, \rho, u) = 0$$

зове се <u>карактеристичном једначином</u>. Имамо ли посла са савршеним гасом, то је та једначина дата са Mariotte - Gay-Lussac-овим законом

$$\frac{p}{\rho(1+\alpha u)} = const$$

где је

$$\alpha = \frac{1}{273}$$

Једначине $1^{xx)}$ нису згодне за праву примену, јер у њима долазе величине x, y, z као независне и као зависне једна од друге. Стога морамо те једначине трансформисати. При томе су могућа два разна пута: можемо питати шта се дешава на једном одређеном месту простора т.ј. одредити брзине v_x, v_y, v_z, притисак p и густину ρ као функције од x, y, z и t; или ми можемо питати шта се дешава у току времена са једном одређеном материјалном честицом течности т.ј. тражити $x, y,$

r, p и ϱ као функције почетног положаја честице и времена t. Прво од ових питања решавају Euler-ове једначине а друго Lagrange-еве, и ако је и једну и другу врсту једначина извео сам Euler.

Euler-ове хидродинамичке једначине.

У једначини кретања

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\, p$$

представља квоцијент $\frac{dv}{dt}$ субстанцијелну промену тј. промену посматрану на једној одређеној честици, јер смо прије имали уз v индекс i који је означавао да v_i представља брзину једне одређене материјалне честице m_i. Та субстанцијелна промена једнака је збиру локалне и стационарне промене т.ј.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v$$

па се зато горња једначина кретања може писати у облику

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} - \mathfrak{F} + \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p = 0 \qquad 4.)$$

Ово је Euler-ова хидродинамичка једначина. Њу можемо заменити са три скаларне једначине јер је

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t}\,i + \frac{\partial v_y}{\partial t}\,j + \frac{\partial v_z}{\partial t}\,k$$

$$(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(v_x i + v_y j + v_z k)$$

$$\mathfrak{F} = X i + Y j + Z k$$

$$\mathrm{grad}\,p = \frac{\partial p}{\partial x}\,i + \frac{\partial p}{\partial y}\,j + \frac{\partial p}{\partial z}\,k$$

Ставимо ли ове вредности у Euler-ову једначину и уредимо по i, j, k и ставимо коефицијенте тих јединичних вектора да су једнаки нули, то добијамо следеће једначине

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - X + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} - Y + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad 4^{*})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} - Z + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Помоћу ових једначина, једначине континуитета и карактеристичне једначине можемо одредити: v_x, v_y, v_z, p и ϱ као функције од x, y, z и t т.ј. промене које се дешавају на једном произвољно одабраном месту простора.

Lagrange-ове једначине.

Једначине кретања 1^{xx}) можемо написати у облику

$$\frac{d^2x}{dt^2} - X + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - Y + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} - Z + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Ми тражимо сада једначине које нам одређују судбину једне уочене материјалне честице т.ј. хоћемо да изразимо x, y, z, p и ρ као функције почетног положаја те честице и наравно као функције времена. Означимо ли координате почетног положаја уочене честице са: a, b, c, то су a, b, c и t независне променљиве. Lagrange-ове једначине добићемо на овај начин: помножимо прву од једначина кретања са $\frac{\partial x}{\partial a}$, другу са $\frac{\partial y}{\partial a}$, трећу са $\frac{\partial z}{\partial a}$, па их саберимо и то добијамо

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a} = 0$$

На исти начин добијамо множењем датих једначина са $\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}, \frac{\partial y}{\partial c}$ и $\frac{\partial z}{\partial c}$ и њиховим сабирањем

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} = 0$$

5.)

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c} = 0$$

- Ово су Lagrange-ове хидродинамичке једначине. У њима се појављују: a, b, c и t као независне, а: x, y, z, p и ρ као зависне променљиве.

Путање материјалних честица

Претпоставимо да нам је поље брзина познато, па како се то поље мења од момента до момента, то ће нам оно бити познато ако нам вектор $\mathfrak{v}$ буде познат као функција положаја и времена

$$\mathfrak{v} \equiv f(r,t) \qquad 1.)$$

r значи вектор положаја произвољне материјалне честице, па је зато

$$\mathfrak{v} \equiv \frac{dr}{dt}$$

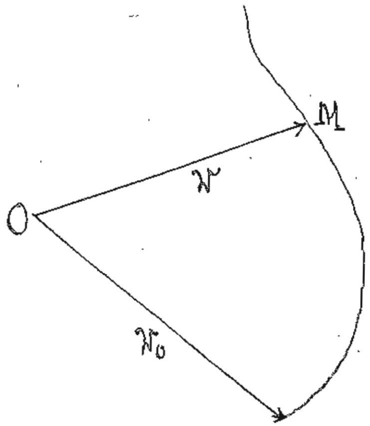
или

$$\frac{dr}{dt} \equiv f(r,t) \qquad 2.)$$

Путање материјалних честица добићемо ако интегришемо једначину 2.). Интеграција те једначине даће нам вектор положаја r једне материјалне честице као функцију времена и функцију вектора почетног положаја

$$r \equiv F(r_0,t) \qquad 3.)$$

Ако је ово путања материјалне честице, онда је r_0 вектор почетног положаја. Аналитички изразили би досадашњу операцију овако: једначина 2.) еквивалентна је следећим трима скаларним једначинама



$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,y,z,t) = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x,y,z,t) = v_y \qquad 2^{*}.)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(x,y,z,t) = v_z$$

Интеграција ових једначина даје

$$x = F_1(a,b,c,t)$$

$$y = F_2(a,b,c,t) \qquad 3^{*}.)$$

$$z = F_3(a,b,c,t)$$

где интеграционе константе a, b и c представљају координате почетног положаја посматране материјалне честице.

<u>Линије тока</u>. Уочимо ли у једном одређеном моменту t_1 поље брзина, то нам тангенте векторских линија тога поља дају правце у којима се у томе моменту материјалне честице крећу. Зато називамо векторске линије поља брзина <u>линијама тока</u>. Како се поље брзина мења од момента до момента, то се мењају и линије тока. Диференцијалне једначине тих линија тока једнаке су према прећашњем

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

или

$$\frac{dx}{f_1(x,y,z,t)} = \frac{dy}{f_2(x,y,z,t)} = \frac{dz}{f_3(x,y,z,t)} \qquad 4.)$$

где место t стоји одређена нумеричка вредност оног момента у којем постављамо те линије тока. Интеграцијом ових једначина добијамо

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z,t_1) &= C_1 \\ F_2(x,y,z,t_1) &= C_2 \end{aligned} \qquad 5.)$$

Ово су једначине линија тока које зависе од две интеграционе константе и од момента t_1 у којем их представљамо. Ове линије разликују се према томе од путања материјалних честица. Фундаментална разлика између путања материјалних честица и линија тока лежи у овоме: путање садржавају у себи елементе пута једне материјалне честице у различитим моментима времена, а линије тока садрже у себи елементе путања различитих материјалних честица у једном одређеном моменту времена.

<u>Кинематички стационарно стање</u>. Ако поље брзина не зависи од времена т.ј. ако је брзина на

једном одређеном месту простора константна, онда у једначинама 2*) није v_x, v_y, v_z функција од t, па се због тога једначине 2*) не разликују од једначина 4.), па су у том случају путање материјалних честица и линије тока идентичке. У том случају остају материјалне честице које се налазе на једној путањи увек на њој и иду на неки начин једна за другом. Линије тока састављене су у овом случају од истих материјалних честица па имају материјалну различност.

Ако кретање није стационарно, онда зависе путање од три интеграционе константе: a, b и c, а ако је стационарно, само од две. То долази отуда што стационарно стање, као што смо казали, путања садржава у себи ∞^1 материјалних тачака које све остају на њој и пролазе кроз исте положаје.

Динамички стационарно стање. Ако на једном одређеном месту простора брзина v буде константна, такође и притисак p и густина ρ, једном речи ако векторско поље v и оба скаларна поља p и ρ не зависе од времена, онда се такво стање зове динамички стационарно или као што неки аутори кажу перманентно. Посматрамо ли нестишљиву течност, онда је ρ априори константно, па је довољно да су v и p независни од времена.

Bernouli-ева теорема о стационарним стањима.

У кинематички стационарним стањима вектор $\mathfrak{v}$ не зависи од времена, па је због тога

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}=0 \qquad 1.)$$

па зато у овом случају добија Euler-ова једначина облик

$$(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = \mathfrak{F} - \nabla\frac{p}{\rho} \qquad 2.)$$

ρ смо метнули иза оператора ∇ јер посматрамо нестишљиву течност. У стационарном стању је и $\mathfrak{F}$ независно од времена, па претпоставимо да се вектор $\mathfrak{F}$ може сматрати за градијент потенцијала U т.ј.

$$\mathfrak{F}=\nabla U$$

Ово је у свима случајевима који се у природи указују случај, ако се не узму у обзир силе трења, онда једначину 2.) можемо да пишемо

$$(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = \nabla\left(U-\frac{p}{\rho}\right) \qquad 3.)$$

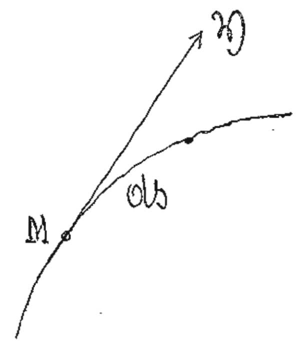
Означимо скалар

$$U-\frac{p}{\rho}=Q$$

то је једначина кретања у стационарном стању једнака

$$(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}-\nabla Q=0 \qquad 4.)$$

У стационарном стању подударају се путање са векторским линијама, па означимо ли са ds елеменат путање једне произвољне материјалне честице, то је



$$(\mathfrak{v}_0\nabla)\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{v}}{ds}$$

јер ds и јединични вектор $\mathfrak{v}_0$ имају исти правац, па је зато $\frac{d\mathfrak{v}}{ds}$ промена вектора $\mathfrak{v}$ у правцу јединичног вектора $\mathfrak{v}_0$. Помножимо ову једначину са интензитетом v вектора $\mathfrak{v}$,

то имамо
$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = v\frac{d\vec{v}}{ds}$$
па једначина 4.) добија облик
$$v\frac{d\vec{v}}{ds} - \nabla Q = 0$$
Помножимо горњу једначину са јединичним вектором $\vec{v}_0$ па добијамо
$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{ds} - \vec{v}_0\nabla Q = 0$$
Но како је
$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{v}^2}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}$$
а
$$\vec{v}_0\nabla Q = \frac{dQ}{ds}$$
то последњу једначину можемо писати
$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} - \frac{dQ}{ds} = 0$$
или
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2} - Q\right) = 0$$
Ова се једначина може интегрисати па је
$$\frac{v^2}{2} - Q = const.$$
Константа важи дуж једне одређене путање јер диференцијални количник је узет по ds т.ј. израз $\frac{v^2}{2} - Q$ остаје дуж једне путање константан а може се мењати од путање до путање. Ставимо ли место Q његову вредност то добијамо
$$\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = const. \qquad 6.)$$
Ова једначина изражава Bernoulli-јеву теорему: Ако на једном одређеном месту путање брзина v има вредност v_0, потенцијал U вредност U_0, а притисак p вредност p_0, онда постоји једначина
$$\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} - U_0 + \frac{p_0}{\rho} = K \qquad 7.)$$
за све тачке те путање.

Из горње једначине следује да је
$$p = \rho\left(U + K - \frac{v^2}{2}\right)$$
а како притисак p мора бити увек позитиван, јер би се на оном месту где

је p негативно течност раскинула, и изгубила континуитет, то мора у читавој течности бити

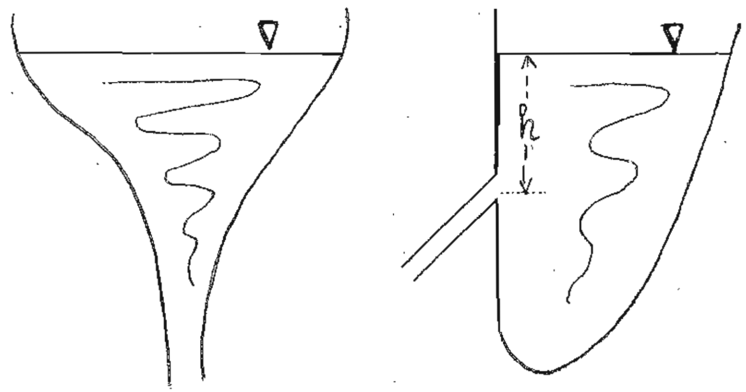
$$p > 0$$

па због тога и

$$v^2 < 2(U+K)$$

Torricelli-јева теорема.

Посматрајмо трајно истицање течности из отвора једног резервоара. Сила $\mathcal{F}$ т.ј. сила везана на јединицу масе једнака је у овом случају акцелерацији течности т.ј.



$$\mathcal{F} = g$$

Узмимо површину течности у резервоару за раван XOY координатног система, па направимо осу Z вертикалну према њој, то ће потенцијал U у овом случају бити

$$U = gz$$

јер је

$$\nabla U = \frac{dU}{dz} = g = \gamma$$

Као тачку на коју се односе вредности v_0, U_0 и p_0 одаберимо једну тачку горње површине течности. Онда је у тој тачки $U_0 = 0$ јер је $z = 0$, $p = p_a$ где p_a означава атмосферски притисак. Претпоставимо да је запремина резервоара тако велика да истицање не мења висину његовог нивоа, то можемо да ставимо и $v_a = 0$. Ставимо ли ове вредности у Bernouli-јеву једначину 7.), то добијамо

$$\frac{v^2}{2} - gz + \frac{1}{\rho}(p - p_a) = 0 \qquad 1.)$$

Како течност истиче у ваздух, то је и на месту истицања притисак једнак атмосферском притиску, дакле једнак p_a. Означимо ли вертикално одстојање отвора истицања од површине течности са h, па ставимо ли у једначини 1.)

$$z = h \quad \text{и} \quad p = p_a$$

то добијамо

$$\frac{v^2}{2} - gh = 0$$

или

$$v^2 = 2gh \qquad 2.)$$

Ова једначина даје Torricelli-јеву теорему која гласи: брзина истицања једне течности је исто толика као кад би делови течности падали од горње слободне површине до отвора слободно.

Две главне категорије кретања течности

Јасно је да кретање течности може бити бескрајно разноврсно, па је због тога од велике важности наћи један критеријум по коме би се та кретања могла поделити у главне категорије. Већ су се Euler и Lagrange бавили тим питањем, али је тек Helmholtz-у 1858 год. пошло за руком да у својој познатој расправи Über Wirbelbewegungen да реши то питање потпуно. Зато ћемо пре но што пређемо даље извести Helmholtz-ове једначине које су формулисане у тој расправи.

Euler-ова једначина била је

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

Код нестишљиве течности је ρ константно, па га можемо метнути иза оператора ∇ па имамо

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = \mathfrak{F} - \operatorname{grad}\frac{p}{\rho} \qquad 1.)$$

У векторској анализи извели смо једначину

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} + (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a} + [\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}\operatorname{rot}\mathfrak{a}]$$

Ставимо ли у овој једначини

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{v}$$

то добијамо

$$\operatorname{grad}\mathfrak{v}^2 = 2(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} + 2[\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{v}]$$

или

$$(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{v}]$$

Ставимо ли у једначини 1.) ове вредности, то она добија облик

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{v}] = \mathfrak{F} - \operatorname{grad}\frac{p}{\rho} \qquad 2.)$$

Лева страна ове једначине је један вектор а исто тако и десна, зато морају ротације тих вектора такође бити једнаке. Узмемо ли дакле ротације од свију чланова, па узмемо ли у обзир да је ротација градијента једнака нули, то једначина 2.) добија овај облик

$$\operatorname{rot}\frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{rot}[v \operatorname{rot} v] = \operatorname{rot} F \qquad 3.)$$

Из аналитичког израза ротора следује

$$\operatorname{rot}\frac{\partial v}{\partial t} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} & \frac{\partial v_y}{\partial t} & \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\, \partial t} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z\, \partial t}\right) i + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\, \partial t} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\, \partial t}\right) j +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\, \partial t} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\, \partial t}\right) k =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) k \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} v$$

дакле

$$\operatorname{rot}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{rot} v}{\partial t}$$

Показали смо да је ротор брзине на једном одређеном месту простора - течности једнак двострукој ротацији оне честице која се на том месту налази т.ј.

$$\operatorname{rot} v = 2 w$$

Ставимо ли ове вредности у једначини 3.), то добијамо

$$2\frac{\partial w}{\partial t} - 2 \operatorname{rot}[v w] = \operatorname{rot} F$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{rot}[v w] = \frac{1}{2} \operatorname{rot} F \qquad 4.)$$

Имали смо у Векторској Анализи ову једначину

$$\operatorname{rot}[b a] = (a \nabla) b - (b \nabla) a + b \operatorname{div} a - a \operatorname{div} b$$

Ставимо ли у овој једначини $b = v$ и $a = w$ то добијамо

$$\operatorname{rot}[v w] = (w \nabla) v - (v \nabla) w + v \operatorname{div} w - w \operatorname{div} v$$

Због нестишљивости течности је $\operatorname{div} v = 0$ а осим тога је $\operatorname{div} w = \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$.

Зато једначина 4.) добија овај облик

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - (w \nabla) v = \frac{1}{2} \operatorname{rot} F$$

Прва два члана у једначини могу се сложити у један јер први члан представља локалну промену вектора w а друти члан стационарну протеку, јер је брзина међутим једнака овде $\mathfrak{v}$; та два члана заједно дају субстанцијелну протеку, јер смо имали

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{w}$$

та зато последња једначина добија облик

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{v} + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{F} \qquad 5.)$$

– Ово је позната једначина Helmholtz-ова.

Силе које дејствују у природи су ако се не узме у обзир трење, такве природе да потичу од потенцијала т.ј. $\mathfrak{F}$ се може представити као градиент скалара U

$$\mathfrak{F} = \operatorname{grad} U$$

та како је

$$\operatorname{rot}\mathfrak{F} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0$$

што у таквом случају Helmholtz-ова једначина добија једноставан облик

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{v} \qquad 5^{*}.)$$

Из једначине 5.) следује одмах једна врло важна конзеквенција: Ако је у једном моменту ротација посматраног делића течности једнака нули т.ј. $\mathfrak{w}=0$, онда је према Helmholtz-овој једначини 5*.) у таквом случају кад нема трења

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = 0$$

што значи да је и у следећем моменту ротација једнака нули, а кад је то у њему, то је и у моменту који иза њега следује и т.д. То значи да ако у једном моменту честица не ротира, неће у опште никада ротирати. Из овога следује <u>прва теорема Helmholtz-ова</u>: Материјалне честице течности које у једном моменту не ротирају, неће ротирати никад и обратно, материјалне честице течности које ротирају неће престати да ротирају.

Ово је прва теорема Helmholtz-ова са ми ћемо касније извести и остале. Сада ћемо ову теорему употребити да проведемо класификацију кретања течности.

У нестишљивој течности је увек

$$\operatorname{div} v = 0$$

т.ј. поље брзина је соленоидално поље. Ротација w може бити једнака и различита од нуле, па према томе имамо ова два могућа случаја:

1° случај $\quad \operatorname{div} v = 0 \quad w \neq 0$

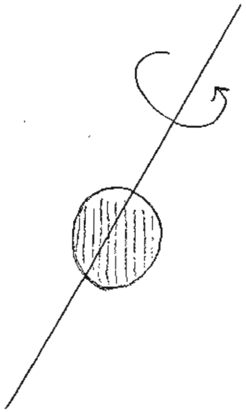
2° " " $\quad \operatorname{div} v = 0 \quad w = 0.$

Први случај у коме је w различито од нуле и у коме материјалне честице течности ротирају, зовемо <u>вртложним кретањем</u>; други случај, у коме те честице не ротирају зовемо <u>потенцијалним кретањем</u> течности. Из Helmholtz-ове теореме следује да вртложно кретање не може никад прећи у потенцијално и обратно, потенцијално кретање не може никад прећи у вртложно; зато су та два кретања два строго одељена кретања и ова класификација има реалног значења.

<u>Примедбе</u>:

1° Горња класификација односи се на супстанцијелну промену т.ј. везана је на материјалне честице а не на место простора. Зато се у једном истом простору могу дешавати оба кретања заједно, но оне материјалне честице које изводе вртложно кретање изводиће га увек, а оне које се крећу потенцијалним кретањем изводиће га такође увек, и ма да се све те честице крећу у истом простору и додирују се, неће променити природу свога кретања.

2° Горње парадоксно тврђење може се врло једноставно растумачити помоћу елементарних принципа Механике. Замислимо у течности једну малену куглицу која ротира око једне осе ротације. Кад не би на



ту куглицу утицале никакве спољне силе, то би она према принципима механике ротирала бескрајно око своје осе као што н.пр. земља ротира око своје осе. Но спољне силе које дејствују на ову куглицу су ове: 1.) тежина куглице која иде кроз њен центар; 2.) притисак околне течности који је нормалан на површину тако да притисак сваког елемента површине пролази кроз средиште куглице и ако се ти притисци могу мењати по површини куглице, што пролазе сви кроз средиште и дају услед тога резултанту која такође пролази кроз средиште и стога није у стању да уништи ротацију.

3° Горњи резултати важе као што смо споменули само за случај да се између материјалних честица течности не указују силе трења. У природи то није случај па због тога морају се горњи резултати према конкретном случају модификовати.

4° Ваља разликовати потенцијално кретање течности од кретања течности под утицајем сила које имају потенцијал. Потенцијално кретање течности је само онда ако брзине материјалних честица имају свој потенцијал брзина V. И потенцијално и вртложно кретање течности је соленоидално кретање јер у оба случаја исчезава дивергенција брзине (код нестишљиве течности) па зато важе за обе ове врсте кретања све оне особине које смо у општој теорији поља извели за соленоидална поља. Тако је и у једном и у другом случају протицање течности кроз један соленоид (цев ограничену векторским линијама, у нашем случају линијама тока) на свима пресецима тога соленоида у уоченом моменту једнако.

Потенцијално кретање течности

У овом случају је

$$\operatorname{div} v = 0$$

$$\operatorname{rot} v = 2\omega = 0 \qquad 1.)$$

па је поље брзина безвртложно поље и зато га можемо сматрати као градијент једнога скалара

$$v = \operatorname{grad} V \qquad 2.)$$

Тај скалар називамо <u>потенцијалом брзина</u>. Из прве од једначина 1.) следује

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = \nabla^2 V = 0$$

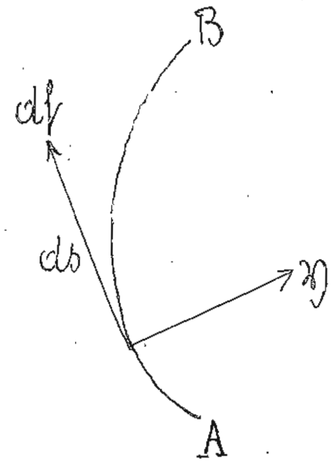
Примедба: Кад течност није нестишљива, онда прва једначина не постоји, него место ње постоји једначина континуитета

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0$$

па та једначина прелази у овом случају у једначину

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \nabla^2 V = 0$$

Уочимо у пољу брзина једну линију са крајевима A и B. Онда називамо интеграл



$$\int_A^B \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}$$

где $d\mathfrak{s}$ означава управљени елеменат те линије, *ток течности* дуж те линије. Скаларни продукат под интегралом можемо заменити са продуктом скалара: $v_s\, ds$ где v_s представља тангенцијалну компоненту вектора $\mathfrak{v}$ а ds интензитет вектора $d\mathfrak{s}$. Зато имамо

$$\int_A^B \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int_A^B v_s\, ds =$$

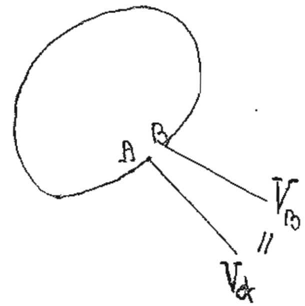
Из дефиниције потенцијала следује да је

$$v_s = \frac{dV}{ds}$$

па је зато горњи интеграл даље

$$= \int_A^B \frac{dV}{ds}\, ds = V_B - V_A$$

где V_B и V_A означавају вредности потенцијала на местима B и A. Ако је крива затворена, па ако је потенцијал у читавом пољу једнозначан т.ј. на сваком месту има једну једину одређену вредност, онда је ток дуж те криве, који називамо у овом случају *циркулацијом*, једнак нули. Ако вредност потенцијала није једнозначна у читавом пољу, онда вредност V_B ако се тачка B т.ј. други крај криве бескрајно приближи другом крају, не мора бити једнака вредности V_A него зависи та вредност од пута којим



смо дошли по други пут у тачку A и од облика затворене криве. У првом случају називамо кретање течности ациклично, а у другом циклично.

Ми ћемо сада да докажемо ову теорему: У затвореном простору који је ограничен чврстим зидовима на којима се течност не таре, не може потенцијално кретање течности бити ациклично кретање. Претпоставимо да је течност нестишљива; онда је

$$\operatorname{div} v = 0$$

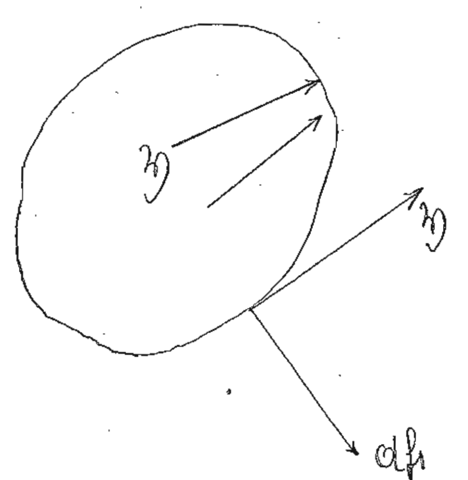
а како је при потенцијалном кретању

$$\operatorname{rot} v = 0$$

то је према пређашњем

$$\nabla^2 V = 0 \qquad 3.)$$

Брзина течности v на границама посматраног простора не може имати компоненте која би била нормална на површину, јер је површина чврста па течност не може кроз њу да прође. Зато мора вектор брзине посматране течности тангирати површину која ограничава затворени простор. Означимо ли вектор елемента површине са df, то морају вектори v и df бити нормални један на другом, што значи



$$v\, df = 0 \qquad 4.)$$

а како је

$$v = \nabla V$$

то је

$$\nabla V \cdot df = 0$$

Применимо сада Гринову једначину

$$\int_F V \underbrace{\nabla V\, df}_{0} = \int_V (\nabla V)^2 dV + \int_V V \underbrace{(\nabla^2 V)\, dV}_{0}$$

Ставимо ли горње вредности 3.) и 4.) у ову једначину, то добијамо

$$\int_v (\nabla V)^2 dv = \int_v (\mathrm{grad}\, V)^2 dv = 0$$

Интегрант у овој једначини је есенцијелно позитиван и зато мора у целом току исчезнути. Зато мора у целом току бити

$$\mathrm{grad}\, V = 0$$

или

$$v = 0$$

т. зн. течност се не може кретати.

Једначине кретања за потенцијално кретање течности.

Претпоставимо прво да брзине v имају потенцијал V; друго да силе које кретање изазивају потичу од потенцијала U; треће да је течност инкомпресибилна; онда можемо у Euler-ову једначину

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v = F - \frac{1}{\rho}\nabla p \qquad 1.)$$

ставити

$$v = \nabla V \qquad F = \nabla U$$

а ρ, пошто је константно, можемо метнути иза ∇, па добијамо на тај начин

$$\frac{\partial \nabla V}{\partial t} + (v\nabla)v = \nabla U - \nabla\frac{p}{\rho} \qquad 2.)$$

Но како је

$$\frac{\partial \nabla V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k\right) = \nabla\frac{\partial V}{\partial t}$$

а при извађању основних Helmholtz-ових једначина доказали смо једначину

$$(v\nabla)v = \frac{1}{2}\mathrm{grad}\, v^2 - [v\, \mathrm{rot}\, v]$$

Но како је у нашем случају

$$\mathrm{rot}\, v = \mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, V = 0$$

то горња једначина добија облик

$$(v\nabla)v = \frac{1}{2}\mathrm{grad}\, v^2$$

па зато једначина 2.) добија облик

$$\nabla\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{grad}\, v^2 = \nabla\left(U - \frac{p}{\rho}\right)$$

Ставимо као и пре

$$U - \frac{p}{\rho} = Q$$

онда горња једначина може да се пише

$$\operatorname{grad}\frac{\partial V}{\partial t}+\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}-\operatorname{grad}Q=0$$

или

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{v^2}{2}-Q\right)=0$$

Градиент израза у загради раван је нули и зато је тај израз у уоченом моменту константан у читавом пољу. Зато је у нашем случају у уоченом моменту израз

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{v^2}{2}-Q$$

једнак у читавом пољу. Но тај се израз може од времена до времена мењати, па ће зато тај скалар бити функција времена

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v^2}{2}-Q=\psi(t) \qquad 3.)$$

где је $\psi(t)$ једна функција времена t а није функција координата посматране тачке простора или материјалне честице. Функцију $\psi(t)$ можемо спојити заједно са потенцијалом јер она игра у једном уоченом моменту улогу константе, па означимо ли према томе

$$V_1=V-\int_{t_0}^{t}\psi(t)\,dt$$

то је

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial t}-\psi(t)$$

па једначина 3.) добија облик

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{v^2}{2}-Q=0 \qquad 4.)$$

Како је

$$\nabla V_1=\nabla V$$

јер је $\int_{t_0}^{t}\psi(t)\,dt$ у уоченом моменту у свима тачкама поља једнак, то сада игра V_1 потпуно улогу потенцијала брзина. У овој једначини кретања можемо v заменити са $\nabla V=\nabla V_1$ па је зато

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla V_1)^2-Q=0 \qquad 5.)$$

– Ово је једначина кретања за потенцијално кретање. Она је скаларна једначина, па ако је пренесемо у језик анализе, то ћемо добити једну јединy једначину

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)^2\right] - Q = 0 \qquad 5^{x})$$

<u>Стационарно стање</u>. Ако је стање стационарно, онда у једначини 3.) не зависи више десна страна од времена а исто тако не зависи у тој једначини ни потенцијал V од времена, па због тога можемо у тој једначини да ставимо

$$\frac{\partial V}{\partial t}=0 \qquad \psi(t)=const.$$

где константа не зависи ни од времена ни од положаја, па зато једначина 3.) добија облик

$$\frac{v^2}{2} - Q = const \qquad 6.)$$

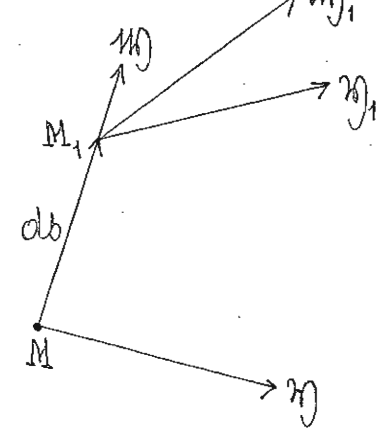
Овакву смо једначину имали и у Bernoulli-јевој теореми за произвољну врсту кретања течности т. ј. било оно потенцијално или вртложно, ако је само стационарно. Разлика између овог случаја који се односи само на потенцијално кретање и онога општијег лежи у овоме: онде је десна страна ове једначине била константна дуж целе путање једне уочене материјалне честице али се је мењала од путање до путање, док је у нашем случају константна за читаво поље, дакле за све путање и све материјалне честице.

Вртложно кретање течности.

Кретања течности у природи врло су различита јер материјалне тачке могу да изводе транслаторна кретања која могу имати и осцилаторан карактер (таласи) а могу изводити и ротациона кретања у коме случају смо назвали кретање вртложним. Идеалне течности изводе или само потенцијално кретање или вртложно кретање, па оне материјалне честице које изводе вртложно кретање изводиће га увек, а оне које изводе потенцијално кретање неће моћи прећи у вртложно кретање. У природи није то тако јер силе трења које се између појединих честица указују могу да изазову у једној течности вртложно кретање ако га пре није ни било и исто тако могу те силе трења да пониште такво вртложно кретање. Случајеви који се указују у природи су према томе још далеко компликованији него што су код идеалне течности. При свем том је теорија кретања идеалне течности од велике важности и за компликованије случаје, јер је она полазна тачка са које се испитивању тих компликованих случаја може приступити, па је заиста и пошло за руком да се том теоријом протумаче природне појаве које у опште нису имале правог тумачења (циклони). Но и без обзира на практичну примену вртложног кретања она је од велике теоријске важности јер је раширила знатно домен теорије кретања медијума а осим тога основала хипотезе које су у најинтимнијој вези са нашим представама о конституцији материје (хипотеза о вртложним атомима). Прва радња о вртложном кретању изгледа да је била једна расправа од Svanberg-а из 1839 год.

Бавили су се такође тим питањем, али је тек Helmholtz-у, као што смо поменули, пошло за руком да удари темељ теорији вртложног кретања. Великих заслуга за ову теорију стекли су W. Thomson и J. J. Thomson, Beltrami и Hanckl.

Основа теорије вртложних тела лежи у првој Helmholtz-овој теореми коју смо већ показали: оне честице које изводе вртложно кретање т.ј. које ротирају, ротирају и ротираће су увек. Вртложно кретање није дакле особина простора него својство материјалних честица које увек носе на сваком месту простора на које бивају транспортним кретањем разношене. Уочимо једну такву честицу M која изводи једно такво вртложно кретање и ротира око вектора w. Вектор w је као што смо пре показали ротор брзине v а ротација материјалне честице једнака је у уоченом моменту $\frac{w}{2}$. Помакнимо се на вектор w за један бесконачно мали елеменат ds. Онда ће материјалној честици M_1 која се



налази на другом крају тог елемента ds одговарати вектор w_1 који ће се, ако је кретање континуирно као што је претпостављено, бесконачно мало разликовати од вектора w. Према прећашњим називима можемо да кажемо да су M и M_1 две суседне тачке једне векторске линије поља w у уоченом моменту. Овај додатак „у уоченом моменту" морамо специјално напоменути јер незнамо да ли ће се у следећем моменту обе честице налазити на истој векторској линији, јер ће у следећем елементу времену dt материјална тачка M бити померена за вектор $v\,dt$ а материјална тачка M_1 за вектор $v_1\,dt$, па можемо тврдити да ће права која буде те две честице после времена dt спајала подударати се са ротором у помереној тачки M. Брзине v и v_1 разликују се за бескрајно мали вектор dv_s

$$v_1 - v = dv_s$$

Са индексом s хоћемо да назначимо да је dv_s промена брзине у тачки M ако се померимо у правцу елемента ds. Та промена у правцу тог елемента једнака је према законима Векторске Анализе

$$\frac{dv_s}{ds} = (w_0 \nabla) v$$

где w_0 представља јединични вектор у правцу вектора w, који пада у правац елемента ds. Означимо ли интензитет вектора w са ω, то је

$$w = \omega w_0$$

па је због тога

$$dv_s = \frac{ds}{\omega}(w \nabla) v$$

Одстојање тачака M_1 и M у моменту t представљено је Grassmann-овом диференцијом тачака

$$M_1 - M = ds\, w_0 = \frac{ds}{\omega} w$$

Те две тачке имаће у следећем моменту, дакле у моменту $t+dt$ одстојање

$$(M_1 - M) + \frac{d(M_1 - M)}{dt}dt = \frac{ds}{\omega} w + \frac{dM_1}{dt}dt - \frac{dM}{dt}dt$$

Диференцијални количници тачака по времену представљају, као што смо у Векторској Анализи извели, брзине, па је због тога

$$\frac{dM}{dt} = v \qquad \frac{dM_1}{dt} = v_1$$

зато је одстојање посматраних двеју тачака у моменту $t+dt$ једнако

$$\frac{ds}{\omega} w + (v_1 - v)dt = \frac{ds}{\omega} w - dv_s\,dt =$$

$$= \frac{ds}{\omega}\{ w + (w\nabla) v \, dt \}$$

Helmholtz-ова једначина за кретање нестишљиве течности под утицајем сила које проистичу из потенцијала била је

$$\frac{dw}{dt} = (w\nabla) v$$

па зато можемо у последњој једначини $(w\nabla) v \, dt$ да заменимо са dw. Резултат је дакле да ће одстојање посматраних двеју тачака у моменту $t+dt$ бити представљено вектором

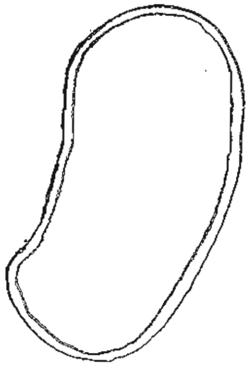
$$\frac{ds}{\omega}(w + dw)$$

Ротор у посматраној тачки M дакле у времену $t+dt$ биће једнак: $w + dw$ јер у овом случају dw представља субстанцијелну промену тј. промену ротора на уоченој честици. Вектор одстојања посматраних двеју материјалних честица имаће према томе и у моменту $t+dt$ исти правац као ротор у првој од тих честица. Зато ће те две честице и у следећем моменту лежати на истој вртложној линији. То можемо доказати и за сваки следећи момент, па зато следује друга теорема Helmholtz-ова: Оне материјалне честице које се у једном моменту налазе на једној вртложној линији, остају увек на њој и пливају са њом у течности. Вртложне су линије дакле материјалне линије и састоје се увек из истих материјалних честице.

Поље вектора w је соленоидално поље јер дивергенција тога вектора ишчезава пошто је

$$\operatorname{div} w = \operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$$

Зато векторске линије тога поља, дакле вртложне линије, неће имати ни почетак ни свршетак, па ће ићи или од једног краја поља до другог или ће бити затворене линије. Кад су затворене називамо их вртложним прстеновима па из пређашње Helmholtz-ове теореме следује да се један вртложни прстен састоји непрестано из истих материјалних честица. Такав вртложни прстен



плива у течности, мења свој положај и облик, али се састоји увек из истих материјалних честица т.ј. не мења свој материјални састав нити се може у идеалној течности поништити.

Поље вектора w је као што смо казали соленоидално поље, па зато важи зато поље све оно што смо извели за соленоидална поља. Уочимо ли у томе пољу једну векторску цев, то такву векторску цев називамо у овом случају <u>вртложним концем</u>. Ми смо доказали у теорији соленоидалних поља да је протицање вектора кроз векторску цев на свима пресецима те цеви константно, зато ће и у нашем случају - на једном вртложном концу протицање вектора w кроз произвољан пресек df тога конца, дакле израз $(w\,df)$ бити на свима пресецима тога конца и у уоченом моменту један те исти. Рекли смо да је ротација материјалне честице u једнака

$$u = \frac{w}{2}$$

па ће због тога и вртлог

$$u\,df = const \qquad 1.)$$

на свима пресецима једног истог вртложног конца бити константан. Тај израз назива се и <u>јачином вртлога</u>, па зато можемо да кажемо: јачина вртлога је на свима његовим пресецима једнака.

Одстојање двеју материјалних честица означили смо са ds; вектор одстојања $d\mathfrak{f}$ једнак је

$$d\mathfrak{f} = \frac{ds}{\omega}\,w$$

јер вектори $d\mathfrak{f}$ и w имају исти правац, па вектор $\frac{w}{\omega}$ представља јединични вектор у правцу ds. Ово је одстојање у времену t. У времену $t+dt$ биће оно једнако

$$df + d^2f = \frac{ds}{\omega}(u + du)$$

јер смо доказали да десна страна представља одстојање у времену $t+dt$. Зато је прираштај одстојања једнак

$$d^2f = \frac{ds}{\omega}\, du$$

У овој једначини можемо векторе f и u заменити са њиховим скаларним вредностима, јер такви вектори падају увек у исти правац, па имамо

$$\frac{d^2s}{ds} = \frac{d\omega}{\omega}$$

Ова се једначина даје интегралити, па је

$$\log nat\, ds = \log nat\, C\omega$$

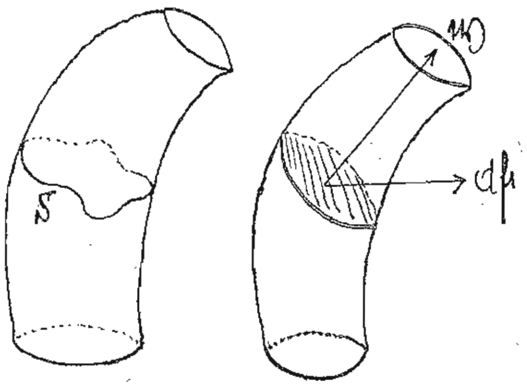
или

$$ds = C\omega$$

Ова једначина казује да је одстојање двеју уочених честица пропорционално интензитету вртлога. Повећа ли се ово одстојање, то се повећава и вртлог. По-казали смо да се један вртложни конац састоји из истих материјалних честица а претпоставили смо да је течност нестишљива. Повећа ли се према томе одстојање двеју материјалних честица, то се мора пресек вртложног конца на том месту смањити, јер је продукат $df \cdot ds$ остао константан. Но како је ds пропорционално ω, то ће онда и вртлог $df\omega$ остати константан. Овај продукат можемо заменити и са: $u\, df$ или са: $2u\, df$, па дакле следује да је и $u\, df$ константно. Док је једначина 1) казивала да је продукат $u\, df$ на свима пресецима једнога истог вртложног конца једнак, дотле последња једначина казује да је тај продукат независан и од времена. Зато можемо да кажемо: јачина вртлога једнака је на свима пресецима вртложног конца и независна је од времена.

Досадање резултате о вртложним конција можемо овако да формулишемо: Један вртложни конац састоји се увек из истих материјалних честица; он мења свој положај и свој облик, али му се материјални састав не мења. Те материјалне честице ротирају око моменталних оса ротације које тангирају вртложну линију. Величина те ротације пропорционална је одстојању суседних материјалних честица са коефицијенат пропорционалности независан је од времена.

Продукат: $w\,df$ који је на свима пресецима једног вртложног конца једнак, можемо овако трансформисати: вектор df може бити и кос пресек са може бити и произвољна површина, само онда морамо писати $\int w\,df$. Како је



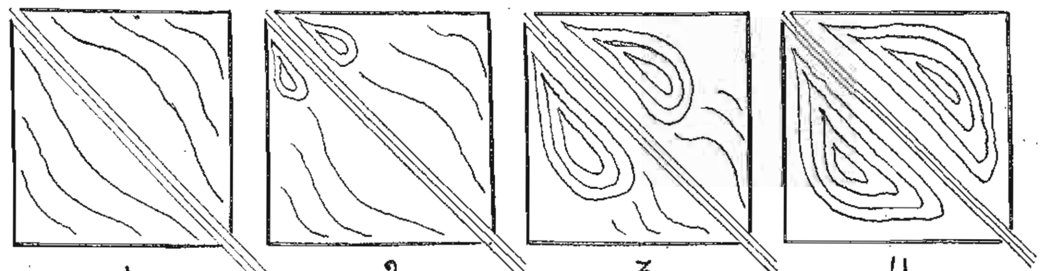
$w = \operatorname{rot} v$, то предњи интеграл по Stokes-овој теореми можемо заменити интегралом

$$\int_F \operatorname{rot} v\, df = \int_S v\, ds$$

где S означава контуру пресека. Ова једначина казује да је циркулација брзине v дуж једне произвољне линије која обухвата вртложни конац и која је затворена једнака за све произвољне такве линије.

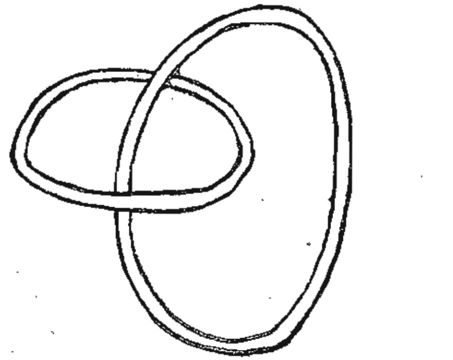
Експерименти Briegar-Ricke-ови.

Кроз квадратични суд пушта се течност да протиче дијагонално и повећава се



1. 2. 3. 4.

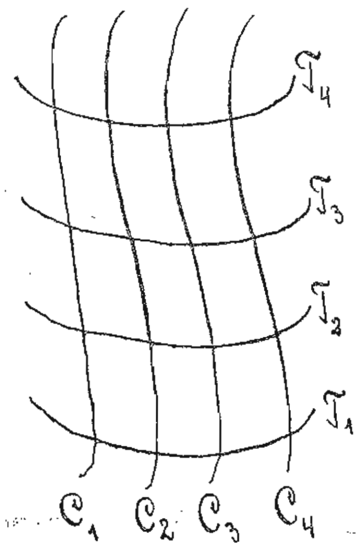
постепено тај притисак. Горње слике представљају различите фазе тога протицања. У првој фази је притисак којим течност тече врло мали, а у четвртој највећи. Исцртане линије представљају линије тока у стационарном стању или путање материјалних честица, које се могу експериментално на тај начин одредити кад се у течност успе прашина, па феномен фотографише. У првој фази се не јављају још никакви вртложни прстенови. Појача ли се притисак, то ће се указати вртложни прстени као што се то види из слике 2. Лево и десно од узала указују се мали вртложни прстени у којима течност изваја вртложно кретање и који се састоје из истих материјалних честица које према томе остају за време целог кретања течности на томе месту т.ј. не протичу. Појача ли се притисак, то се повећавају и ти прстени и према томе и онај део течности који не протиче. У последњој фази је скоро читав суд испуњен течношћу која изваја вртложно кретање а само у дијагонали протиче. Ако се два вртложна прстена промаљају као карике ланца, онда остају увек протулени и не могу се развити макар да се деформишу.



<u>Стационарно стање</u>. Стационарно стање карактерисано је тиме да је вектор $\mathfrak{v}$ независан од времена, а како је $\mathfrak{w} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}$, то ће у овом случају и вектор $\mathfrak{w}$ бити независан од времена. Једном речи поље вектора $\mathfrak{v}$ и поље вектора $\mathfrak{w}$ биће перманентна поља. Зато ће линије тока које су у овом случају уједно и путање материјалних честица и које су представљене диференцијалним једначинама

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

бити геометриски инваријабилне криве тј. кроз сваку тачку простора пролазиће једна таква крива која за време читавог кретања има инваријабилан облик. Те криве представљене су са $C_1 C_2 C_3$ ... Показали смо пре да ће материјалне честице које се на једној таквој криви налазе остати за читаво време на њој и неће је оставити. Према томе ове су криве и материјално инваријабилне криве,



јер вектор $\bar{v}$ не зависи од времена па нека буду представљене кривама $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ ... Кроз сваку тачку простора пролази једна таква крива. Материјалне честице које се н. пр. у моменту t налазе на криви Γ_1, налазиће се све заједно у следећем моменту на криви Γ_2. Како те криве описују путање $C_1 C_2$ ..., то ће се материјална крива састављена од тих честица котрљати преко линија C и деформисати увек тако да долази до   са кривама $\Gamma_1 \Gamma_2$ ...

Зато можемо да кажемо: у случају стационарног стања могуће је фиксирати у пољу један бескрајан систем непомичних површина које садржавају у себи један бескрајан број линија тока или путања и бескрајан број вртложних линија.