ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Ђорђ. Ј. Пујић, проф.

Парцијалне диференцијалне једначине

Предавања
Др Мих. Петровића,
проф. Универзитета
(допуњена примерима).

Увод

Под *парцијалном диференцијалном једначином* разуме се таква диференцијална једначина у којој фигурише више од једне независно променљиве количине. Ми ћемо претпоставити да у таквим једначинама имамо само једну променљиву функцију.

Такве су једначине н. пр.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - 5\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3f - x\frac{\partial f}{y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + af = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

У првим двема једначинама имамо променљиву f и две независно променљиве: x и y; у трећој имамо једну непознату f и три независно променљиве: x, y и z.

Изводи који фигуришу у овим једначинама увек су парцијални било прости било мешовити. Ред највишег извода било простог било мешовитог у једначини јесте и ред саме парцијалне једначине. Н. пр. једначина

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

је првог реда, једначина

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

је другог реда и т. д.

Интегралити дату парцијалну једначину значи одредити такву функцију независно променљивих количина, да кад ју сменимо у једначини ова буде идентички задовољена па какве биле вредности тих независно променљивих количина. Видели смо да и код обичних диференцијалних једначина постоји не један већ бескрајно много интеграла. Природно је да ће исто бити и код парцијалних једначина, само што је код ових произвољности интеграла још већа.

Код обичних једначина интеграли садрже произвољне константе тако да се варијацијом констаната може добити бескрајно много партикуларних интеграла. Код парцијалних једначина интеграли садрже не само произвољне константе већ и произвољне функције независно променљивих количина или њихове комбинације и т. д.

Као и код обичних једначина под партикуларним интегралом једне парцијалне једначине разуме се једна обична функција независно променљивих количина. Исто тако под општим интегралом разуме се најопштија функција која једначину задовољава и из које се спецификовањем онога што је у њој произвољно добијају сви бескрајно многи партикуларни интеграли. Видећемо да поред партикуларних и општих интеграла постоји читав низ интермедијалних интеграла који су општији од партикуларних али нису онолико општи као сам општи интеграл

Интеграција парцијалних једначина првог реда може се сматрати као свршен посао у томе смислу што данас има метода да се ма каква једначина сведе на интеграцију обичне једначине или на интеграцију симултаних једначина. Међутим са једначинама вишег реда сасвим је друкчије.

Увод.

Парцијалне диференцијалне једначине првог реда јесу једначине у којима не фигурише виши извод од првога. Поједини елементи у таквој једначини могу и недостајати н. пр. која од независно промењивих количина или и сама функција, али мора фигурисати бар један парцијалан извод ове функције, тако да би најпростији њен облик био

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Ако се тражи да функција f буде функција од две независно промењиве количине x и y, онда је интеграл

$$f = \varphi(y)$$

где је φ произвољна функција, н. пр. y

једначини

$$\frac{\partial f}{\partial x} + a = 0$$

интеграл је

$$f = ax + \varphi(y)$$

При интеграцији оваквих једначина ваља разликовати којој од ових трију група она припада:

1° Линеарне једначине без независног члана или <u>линеарне хомогене једначине</u>;

2° Линеарне једначине са независним чланом или <u>линеарне нехомогене једначине</u>.

3° <u>Нелинеарне једначине</u>.

За сваку од ових група постоји засебан метод интеграције.

Линеарне хомогене једначине

То су једначине облика

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad 1.)$$

де су

$$x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n$$

езависно променљиве количине,

$$X_1 \; X_2 \; \cdots \; X_n$$

дређене и дате функције тих независно роменљивих количина, а

$$f$$

епозната функција тих променљивих.

Интегралити ове једначине значи наћи такву функцију

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

оју кад сменимо у једначини 1.) место f ва бива идентички задовољена за све могуће вредности $x_1, x_2, \cdots x_n$. Ако је тако нађено f потпуно одређена функција независно променљивих, онда је то партикуларан интеграл једначине 1.), а ако је то најопштија функција која задовољава једначину 1.), онда је она њен општи интеграл. Ми ћемо показати да се интеграција једначине 1.) и у најопштијем случају своди на интеграцију система симултаних једначина. Тога ради уводимо независну количину t и формирамо систем симултаних једначина

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = X_1$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = X_2 \qquad 2.)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial x_n}{\partial t} = X_n$$

који се може написати у облику

$$\frac{\partial x_1}{X_1} = \frac{\partial x_2}{X_2} = \cdots = \frac{\partial x_n}{X_n} = dt \qquad 3.)$$

Систем 2.) представља систем од n симултаних једначина са n непознатих функција $x_1, x_2 \cdots x_n$ које се имају одредити као функције променљиве t. Интеграцијом система 2.) добио би се један низ једначина

$$x_1 = \varphi_1(t, C_1, \cdots C_n)$$
$$x_2 = \varphi_2(t, C_1, \cdots C_n) \qquad 4.)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \varphi_n(t, C_1, \cdots C_n)$$

Из једног ма ког пара једначина 4.) можемо елиминисати t и према томе можемо изразити сваку од функција $x_2, x_3 \cdots x_n$ као функцију од x_1. При тој елиминацији остаће све константе $C_1, C_2, \cdots C_n$ само ће једна отпасти. То долази отуда што систем једначина 3.) не садржи експлицитно t већ само dt, стога ће се при интеграцији тога система t јавити увек у облику $t+C$ и према томе кад будемо свршили поменуту елиминацију у систему 4.), онда ће увек при елиминацији t бити елиминисана и константа C везана за t. Ми ћемо као константу која отпада сматрати C_n и према томе из систем 4.) имаћемо систем

$$x_2 = \psi_2(x_1, C_1, \cdots C_{n-1})$$
$$x_3 = \psi_3(x_1, C_1, \cdots C_{n-1}) \qquad 5.)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \psi_n(x_1, C_1, \cdots C_{n-1})$$

Систем 5.) представља систем од $(n-1)$ једначину који се може решити по $(n-1)$ количини $C_1 \cdots C_{n-1}$. Претпоставимо да је то решавање извршено и нека је

$$C_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_n)$$
$$C_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots x_n) \qquad 6.)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

т.ј. нека су то тако добијена решења. Ми ћемо доказати да свака од тих функција $f_1, f_2 \cdots f_{n-1}$ представља партикуларан интеграл и задовољава парцијалну једначину 1.).

Узмимо да је f_1 партикуларан интеграл једначине 1.). Ако диференцирамо прву од једначина 6.), добијамо

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \qquad 7.)$$

Међутим из система 2) добијамо

$$\partial x_1 = X_1 dt$$
$$\partial x_2 = X_2 dt$$
$$\cdots\cdots$$
$$\partial x_n = X_n dt$$

Заменом ових вредности у једначини 7.) и скративши ју са dt добијамо

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0$$

што доказује да функција f_1 одиста задовољава једначину 1.). А то што важи за функцију f_1 важи и за функције $f_2, f_3, \cdots f_n$.

На тај се начин добија $(n-1)$ партикуларних интеграла

$$f_1, f_2, \cdots f_{n-1}$$

а из њих се може добити и потпуни интеграл, а он није ништа друго до

$$f = \Phi(f_1, f_2, \cdots f_{n-1}) \qquad 8.)$$

где је Φ произвољна функција елемена-

та $f_1, f_2, \cdots f_{n-1}$. Да би то доказали доказаћемо ово двоје:
1° да функција f дефинисана обрасцем 8.) задовољава дату парцијалну једначину 1.),
2° да се ма каква функција f која задовољава једначину 1.) може написати у облику 8.).
Ако докажемо то двоје, то је онда израз 8.) општи интеграл једначине 1.).

Да би доказали да функција 8.) задовољава једначину 1.), пошто су $f_1, f_2, \cdots f_{n-1}$ интеграли једначине 1.) имаћемо низ образаца

$$X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}=0$$

$$X_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial f_2}{\partial x_n}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}=0 \qquad 9.)$$

Помножимо прву од једначина 9.) са $\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}$, другу са $\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}$, … последњу са $\frac{\partial\Phi}{\partial f_{n-1}}$ и саберимо тако добијене једначине, па у добијеном резултату групишимо чланове са $X_1, X_2 \cdots X_n$; добићемо

$$X_1\left[\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial f_{n-1}}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\right]+$$

$$+X_2\left[\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial f_{n-1}}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\right]+$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$+X_n\left[\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial f_{n-1}}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\right]=0 \qquad 10.)$$

Прва заграда је извод од Φ по x_1, друга извод од Φ по x_2, … и према томе једначина 10.) може се написати у облику

$$X_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=0$$

што доказује да функција Φ задовољава једначину 1.).

Да би доказали да се сваки интеграл једначине 1.) може написати у облику 8.) послужићемо се једном теоремом из теорије детерминаната која гласи: Кад је дат скуп од n функција $\psi_1 \cdots \psi_n$

које зависе од n независно променљивих количина $x_1 \cdots x_n$, ако образујемо детерминанту

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

онда кад год је детерминанта Δ идентички равна нули функције $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ су међу собом везане релацијом

$$\lambda(\varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_n) = 0$$

Детерминанта Δ назива се функционална детерминанта или Јакобиан скупа функција $\varphi_1 \cdots \varphi_n$.

Претпоставимо сад да су функције $f_1 \cdots f_{n-1}$ нађени партикуларни интеграли парцијалне једначине 1.) и нека је G један ма какав други интеграл те једначине; онда ћемо имати систем од n једначина

$$\begin{aligned} X_1 \frac{\partial G}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial G}{\partial x_n} &= 0 \\ X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ X_1 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \qquad 11.)$$

Једначине 11.) представљају систем од n једначина у којима можемо сматрати као непознате n количина $X_1 \cdots X_n$. Пошто су те једначине линеарне и хомогене то да би систем 11.) могао опстати а да не морају количине $X_1 \cdots X_n$ све бити равне нули, треба, као што знамо из теорије линеарних једначина, да детерминанта тога система буде равна нули. Међутим та детерминанта није ништа друго до Јакобиан функција $G\, f_1\, f_2 \cdots f_{n-1}$, а кад је Јакобиан раван нули, према горњој теореми, те су функције везане извесном релацијом н. пр.

$$\lambda(G\, f_1\, f_2 \cdots f_{n-1}) = 0$$

Ако ту релацију решимо по G добијамо једначину облика

$$G = \Phi(f_1, \dots f_{n-1})$$

што значи да се и интеграл G може написати у облику 8.) што је и требало доказати. Тиме је дакле потпуно доказано да израз 8.) представља општи интеграл једначине 1.).

Из свега овога изводи се ово <u>практично упутство</u> за интеграцију линеарних и хомогених парцијалних диференцијалних једначина првог реда. Да би интегралили једначину 1.) треба образовати систем симултаних једначина

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = X_1$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial t} = X_n$$

и интегралити их одредивши $x_1 \dots x_n$ као функције нове промењиве t. Из тако добијених интеграла елиминацијом промењиве t из два и два интеграла и решивши тако добијене једначине по константама $C_1 \dots C_{n-1}$ формирати низ једначина

$$C_1 = f_1(x_1 \dots x_n)$$

$$\cdots$$

$$C_{n-1} = f_{n-1}(x_1 \dots x_n)$$

Свака од тако добијених функција $f_1 \dots f_{n-1}$ представљаће по један партикуларан интеграл дате парцијалне једначине, а општи интеграл једначине биће

$$f = \Phi(f_1 \dots f_{n-1})$$

где је Φ произвољна функција елемената $f_1 \dots f_{n-1}$.

Примери:

1. $$a x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + b x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

Да би решили ову једначину образујмо систем једначина

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = a x_1$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = b x_2$$

Линеарне нехомогене једначине.

То су једначине линеарне по изводима али код којих се налази независан члан независан од извода.

Претпоставићемо прво да се има посла са једначином са само две независно променљиве количине н. пр. x и y. Такве су једначине облика

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R \qquad 1.)$$

где су x и y независно променљиве количине, z непозната функција тих количина, а коефицијенти P, Q, R одређене и познате функције од x, y, z. Задатак је да се одреди z као функција од x и y тако да једначина 1.) буде идентички задовољена за све вредности x и y. Нека је

$$z = f(x,y)$$

један ма какав интеграл једначине 1.). Приметимо сад да се парцијални изводи z а по x и y обично означују са p и q, тако да је

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q$$

Напишимо израз 2.) у облику

$$\varphi(x,y,z) = 0 \qquad 3.)$$

и диференцијалимо ову функцију по x водећи рачуна о томе да је φ непосредна функција x а пошто је x у њој експлицитно, а и посредна функција од x јер z зависи од x. Дакле имаћемо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p = 0$$

Тако исто диференцијалећи по y добијамо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q = 0$$

2.) Из тих двеју једначина добијамо

$$p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

$$q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

Заменом тих вредности у једначини 1.) написаној у облику

$$Pp + Qq = R \qquad 4.)$$

добијамо

$$P\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial \varphi}{\partial y} + R\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad 5.)$$

Једначина 5.) представља линеарну хомогену парцијалну једначину првог реда по непознатој функцији φ, а њу знамо интегралити. Тога ради треба образовати систем

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = dt$$

и наћи систем интеграла

$$x = f_1(t, C_1, C_2, C_3)$$
$$y = f_2(t, C_1, C_2, C_3)$$
$$z = f_3(t, C_1, C_2, C_3)$$

Елиминацијом променљиве t добијамо две релације

$$y = \psi_1(x, C_1, C_2)$$
$$z = \psi_2(x, C_1, C_2)$$

а њиховим решењем по C_1 и C_2 добија се

$$C_1 = u(x, y, z)$$
$$C_2 = v(x, y, z)$$

Кад смо дошли до функција u и v доказаћемо овај резултат: општи интеграл једначине 1.) добија се кад се напише релација

$$\Phi(u, v) = 0$$

где је Φ произвољна функција елемената u и v. z одређено као функција од x и y таквом релацијом биће општи интеграл једначине 1.), а сви партикуларни интеграли добијају се спецификовањем произвољне функције Φ. Да би то доказали, доказаћемо ово двоје:

1° да z тако одређено одиста задовољава једначину 1.). Пре свега из онога што је казано за линеарне хомогене једначине функција $\Phi(u, v)$ биће интеграл једначине 5.). Према томе ћемо имати релацију

$$P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad 6.)$$

Међутим диференцијалећи функцију Φ најпре по x а затим по y добија се

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q = 0$$

одакле је

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} p$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} q$$

Заменом у једначини 6.) ова постаје

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\left[Pp+Qq-R\right]=0 \qquad 7.)$$

Да би једначина 7.) била задовољена као што мора да буде пошто је једначина 6.) задовољена треба да буде идентички или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0$$

или

$$Pp+Qq-R=0$$

Прва једначина не може бити задовољена идентички јер би онда значило да је Φ независно од z што није случај. Према томе мора бити

$$Pp+Qq-R=0$$

или

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R$$

што значи да на малопређашњи начин нађено z одиста задовољава дату парцијалну једначину 1.).

2° Доказаћемо да кад је z један интеграл једначине 1.) па га сменимо у функцијама u и v раније дефинисаним, те су две функције везане тада једном релацијом

$$\Phi(u,v)=0$$

Да би то доказали формирајмо детерминанту

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

која није ништа друго до Јакобиан функција u и v. Пре свега треба водити рачуна да u зависи непосредно од x а и посредно преко z; тако исто u зависи непосредно од y а и посредно преко z. То исто важи и за функцију v. Према томе ако водимо рачуна о z као функцији од x и y, треба у Δ сменити

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{са} \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \quad " \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{са} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{"} \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q$$

Ако ту смену извршимо и групишемо чланове са p, q и независне чланове, детерминанта Δ постаје

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p\right)$$

$$= p\left[\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right] +$$

$$+ q\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] =$$

$$= M_1 p + M_2 q + M_3$$

Пошто су u и v према ономе што се зна за линеарне и хомогене једначине интеграли једначине 5.), то ћемо имати две једначине

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad 9.)$$

Из тих двеју једначина можемо израчунати P и Q и онда добијамо кад прву помножимо са $\frac{\partial v}{\partial y}$ а другу са $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$P\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -R\left[\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$Q\left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -R\left[\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

или

$$M_3 P + M_1 R = 0$$

$$M_3 Q + M_2 R = 0$$

Из ових једначина добијамо

$$\frac{P}{M_1} = \frac{Q}{M_2} = -\frac{R}{M_3}$$

Ако заједничку вредност ова три количника означимо са λ, добија се

$$M_1 = \frac{P}{\lambda}$$

$$M_2 = \frac{Q}{\lambda} \qquad 10.)$$

$$M_3 = -\frac{R}{\lambda}$$

Заменом тих вредности у детерминанти Δ добија се

$$\Delta = \frac{1}{\lambda}(Pp + Qq - R) \qquad 11.)$$

У једначини 11) фактор $\frac{1}{\lambda}$ у опште за произвољне вредности x, y, z је коначан и различан од нуле јер је то извесна одређена функција од x, y, z. Међутим фактор $Pp + Qq - R$ раван је нули јер је претпостављено да је z које се овде посматра један интеграл једначине

$$Pp + Qq - R = 0$$

Према томе је

$$\Delta = 0$$

што значи да је Јакобиан функција u и v раван нули, а што опет значи према ранијем да су те две функције везане извесном релацијом

$$\Phi(u, v) = 0$$

Тиме је доказано оно што је требало доказати.

Примедба: Може се десити у врло изузетним случајевима да поред тога што је за један дати интеграл z израз $Pp + Qq - R$ раван нули, буде у исто време и фактор λ раван нули. Шта више кадгод је

$$\lambda = 0$$

онда као што се види из једначина 10.) увек је у исто време и

$$P = 0$$

$$Q = 0$$

$$R = 0$$

то показује да је λ један заједнички фактор те три функције у исто време пошто је за z дефинисано релацијом

$$\lambda(x, y, z) = 0$$

увек

$$Pp + Qq - R = 0$$

то показује да z дефинисано једначином $\lambda = 0$ такође представља један интеграл дате једначине. Такав интеграл назива се <u>сингуларним интегралом</u> те једначине. Сингуларни се интеграли дакле добијају тражени да ли функције P, Q и R имају заједничке факторе који садрже z, стављајући те факторе да су равни нули и одређујући z из тако добијених једначина. Приметимо да се у тим случајевима детерминанта Δ јавља у облику $\frac{0}{0}$. У томе случају ранији закључак да су функције u и v везане том релацијом није више оправдан.

Из свега овога изводи се ово <u>практично упутство</u> за интеграцију једначина

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R$$

где су P, Q и R одређене и дате функције променљивих x, y и z: Треба образовати систем симултаних једначина

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=dt$$

из њега интеграцијом извести две релације облика

$$y=\varphi(x,C_1,C_2)$$
$$z=\psi(x,C_1,C_2)$$

решити ове по C_1 и C_2 тако да се добија

$$C_1=u(x,y,z)$$
$$C_2=v(x,y,z)$$

тада ће релација

$$\Phi(u,v)=0$$

где је Φ произвољна функција од u и v, дефинисати z као општи интеграл дате парцијалне једначине. Специфицирајући функцију Φ добијају се разни бескрајно многи партикуларни интеграли.

Упутство не вреди у случају ако P, Q и R имају какав заједнички фактор λ који садржи z. У том случају релација $\lambda=0$ дефинише сингуларни интеграл дате једначине. Међутим ако целу једначину деобом са тим фактором ослободимо тог заједничког чиниоца, добиће се нова једначина на коју се може применити раније упутство.

До сада смо претпостављали да је дата нехомогена линеарна једначина са две независно променљиве количине x и y. Претпоставимо сад општи случај да је дата нехомогена линеарна једначина

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+P_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R \qquad 12.)$$

где су $x_1 x_2 \cdots x_n$ независно променљиве количине, z непозната функција тих променљивих која се тражи, а $P_1 P_2 \cdots P_n$ и R одређене и дате функције од $x_1 x_2 \cdots x_n$ и z. Исто правило које смо малопре имали важи и за овај случај и гласи: ради интеграције једначине 12.) треба образовати систем симултаних једначина

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{R}=dt$$

из њих интеграцијом и решавањем добијених интеграла по константама $C_1 C_2 \cdots C_n$ добити низ једначина

$$C_1=U_1(x_1\cdots x_n, z)$$
$$C_2=U_2(x_1\cdots x_n, z)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$C_n=U_n(x_1\cdots x_n, z)$$

Ако је тада Φ једна произвољна функција, релација

$$\Phi(U_1 U_2 \cdots U_n)=0.$$

дефинише општи интеграл једначине 12.). Спецификовањем произвољне функције Φ добили би све бескрајно многе партикуларне интеграле те једначине. Тако би н. пр. један партикуларан интеграл имали ако за функцију Φ узмемо

$$\Phi=U_1+U_2+\cdots+U_n$$

други

$$\Phi=U_1^2+U_2^2+\cdots+U_n^2$$

и т. д.

Примери:

1. $$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

или у скраћеном облику

$$ap+bq=1$$

где су a и b константе.

Имаћемо систем симултаних једначина

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{1}$$

или

$$\frac{dy}{b}=\frac{dx}{a}$$
$$\frac{dz}{1}=\frac{dx}{a}$$

или најзад

$$a\,dy - b\,dx = 0$$
$$a\,dz - dx = 0$$

одакле

$$ay - bx = C_1$$
$$az - x = C_2$$

Према томе функције u и v овде су

$$u = ay - bx$$
$$v = az - x$$

па је општи интеграл дате једначине

$$\Phi(ay - bx, az - x) = 0$$

Један партикуларни интеграл имаћемо ако за функцију Φ узмемо

$$\Phi(u,v) = u + v$$

дакле

$$ay - bx + az - x = 0$$

или

$$z = \frac{b+1}{a}x - y$$

други партикуларни интеграл добили би ако би узели

$$\Phi(u,v) = u^2 - v^2$$

дакле

$$(ay - bx)^2 - (az - x)^2 = 0$$

или

$$az - x = \pm(ay - bx)$$

и т. д.

2. $$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = axz$$

Имаћемо систем симултаних једначина

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{axz}$$

одакле

$$\frac{dy}{xy} = \frac{dx}{y^2}$$
$$\frac{dy}{xy} = \frac{dz}{axz}$$

или

$$y\,dy = x\,dx$$
$$\frac{dz}{z} = a\frac{dy}{y}$$

одакле

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{2}$$
$$\log z = a\log y + \log C_2$$

или

$$y^2 - x^2 = C_1$$
$$\frac{z}{y^a} = C_2$$

па је тражени општи интеграл

$$\Phi\left(y^2-x^2, \frac{z}{y^a}\right)=0$$

3. $$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$$

Имамо систем симултаних једначина

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}=\frac{du}{xyz}$$

или

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}$$

$$\frac{dx}{a}=\frac{dz}{c}$$

$$\frac{dx}{a}=\frac{du}{xyz}$$

Из првих двеју једначина имамо

$$ay-bx=C_1$$

$$az-cx=C_2$$

одакле

$$y=\frac{C_1+bx}{a}$$

$$z=\frac{C_2+cx}{a}$$

па заменом у трећој једначини добијамо

$$a^3du=x(C_1+bx)(C_2+cx)\,dx$$

одакле интеграцијом

$$a^3u=C_1C_2\frac{x^2}{2}+(bC_2+cC_1)\frac{x^3}{3}+bc\frac{x^4}{4}+C_3$$

или ако константе C_1 и C_2 сменимо њиховим вредностима

$$a^3u-a^2yz\frac{x^2}{2}+a(bz+cy)\frac{x^3}{6}-bc\frac{x^4}{4}=C_3$$

и према томе тражени општи интеграл је

$$\Phi\left(a^3u-a^2yz\frac{x^2}{2}+a(bz+cy)\frac{x^3}{6}-bc\frac{x^4}{4},\ az-cx,\ ay-bx\right)=0$$

4. $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

Имамо систем једначина

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

одакле интеграцијом

$$\frac{x}{z}=C_1$$

$$\frac{y}{z}=C_2$$

и према томе је тражени општи интеграл

$$\Phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$$

5. $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{xy}$$

Имамо систем једначина

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=xy\,dz$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\frac{dx}{x} = xy\,dz$$

Из прве је

$$\frac{x}{y} = C_1$$

одакле

$$y = \frac{x}{C_1}$$

па заменом у другој једначини

$$\frac{dx}{x} = x\cdot\frac{x}{C_1}\,dz$$

или

$$C_1\frac{dx}{x^3} = dz$$

а одатле

$$C_2 - C_1\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} = z$$

или

$$C_2 = z + \frac{C_1}{x^2}$$

или ако сменимо C_1 њеном вредношћу

$$C_2 = z + \frac{1}{2xy}$$

Отуда је тражени општи интеграл

$$\Phi\left(z+\frac{1}{xy},\ \frac{x}{y}\right)=0$$

6. $$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = x+y$$

Имамо систем једначина

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{x+y}$$

или

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{x+y}$$

Из прве је

$$-x\,dx = y\,dy$$

одакле интеграцијом

$$x^2+y^2 = C_1$$

Из друге је

$$dz = (x+y)\frac{dx}{y}$$

или заменом у

$$dz = \left(x+\sqrt{C_1-x^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{C_1-x^2}}$$

одакле интеграцијом

$$z = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{C_1-x^2}} + \int dx = -\sqrt{C_1-x^2} + x + C_2$$

или заменом константе C_1

$$z - x + y = C_2$$

и према томе је тражени општи интеграл

$$\Phi(z-x+y,\ x^2+y^2)=0$$

7. $$\sin x\frac{\partial z}{\partial x}+\cos x\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

Имаћемо систем једначина

$$\frac{dx}{\sin x}=\frac{dy}{\cos x}=\frac{dz}{1}$$

или

$$\frac{dx}{\sin x}=\frac{dy}{\cos x}$$

$$\frac{dx}{\sin x}=dz$$

Из прве је

$$\operatorname{cotg} x\,dx=dy$$

одакле интеграцијом

$$y-\log\sin x=C_1$$

Интеграција пак друге даје

$$z-\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}=C_2$$

па је далење тражени општи интеграл

$$\Phi\left(z-\log\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ y-\log\sin x\right)=0$$

8. $$\frac{1}{x^n}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y^n}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y^{n+1}}$$

Имамо систем једначина

$$x^n dx=y^n dy=y^{n+1}dz$$

или

$$x^n dx=y^n dy$$

$$y^n dy=y^{n+1}dz$$

Из прве добијамо интеграцијом

$$x^{n+1}-y^{n+1}=C_1$$

друга даје једначину

$$\frac{dy}{y}=dz$$

одакле интеграцијом

$$z-\log y=C_2$$

Отуда тражени општи интеграл

$$\Phi(x^{n+1}+y^{n+1},\ z-\log y)=0$$

9. $$x^n\frac{\partial z}{\partial x}-x^{n-1}y\frac{\partial z}{\partial y}=yz$$

Имамо систем једначина

$$\frac{dx}{x^n}=\frac{dy}{-x^{n-1}y}=\frac{dz}{yz}$$

или

$$\frac{dx}{x^n}=-\frac{dy}{x^{n-1}y}.$$

$$\frac{dx}{x^n}=\frac{dz}{yz}$$

Прва даје

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

одакле интеграцијом

$$\log x = -\log y + \log C_1$$

или

$$xy = C_1$$

Ако одавде израчунамо y и заменимо у другој једначини, имамо

$$C_1 \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{dz}{z}$$

одакле интеграцијом

$$C_1 \frac{x^{-n}}{-n} = \log z + \log C_2$$

или ако заменимо C_1

$$-\frac{y}{nx^{n-1}} = \log z C_2$$

одакле

$$C_2 = z e^{\frac{y}{nx^{n-1}}}$$

и према томе тражени општи интеграл

$$\Phi\left(z e^{\frac{y}{nx^{n-1}}}, xy\right) = 0$$

10. $$\frac{y}{e^x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x}{e^y}\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$$

Имамо систем једначина

$$\frac{e^x dx}{y} = \frac{e^y dy}{x} = \frac{dz}{xyz}$$

или

$$\frac{e^x dx}{y} = \frac{e^y dy}{x}$$

$$\frac{e^x dx}{y} = \frac{dz}{xyz}$$

Из прве је

$$x e^x dx = y e^y dy$$

одакле интеграцијом

$$(x-1)e^x - (y-1)e^y = C_1$$

Из друге је

$$\frac{dz}{z} = x e^x dx$$

одакле

$$\log z = (x-1)e^x + \log C_2$$

или

$$\log \frac{z}{C_2} = (x-1)e^x$$

или

$$\frac{z}{C_2} = e^{(x-1)e^x}$$

а одатле

$$\frac{z}{e^{(x-1)e^x}}=C_2$$

Отуда је тражени општи интеграл

$$\Phi\left[(x-1)e^x-(y-1)e^y,\ \frac{z}{e^{(x-1)e^x}}\right]=0$$

11. $$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1-y^2}\,\frac{\partial z}{\partial y}=x$$

Имамо

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dz}{x}$$

или

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{dz}{x}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Из прве имамо интеграцијом

$$x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=C_1$$

Друга даје

$$dz=\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

одакле интеграцијом

$$z+\sqrt{1-x^2}=C_2$$

па је тражени општи интеграл

$$\Phi\left[z+\sqrt{1-x^2},\ x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right]=0$$

12. $$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=u$$

Имамо систем једначина

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z^2}=\frac{du}{u}$$

или

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{du}{u}$$

одакле интеграцијом

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=C_1$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=C_2$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{u}=C_3$$

па је тражени општи интеграл

$$\Phi\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{z},\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{u}\right]=0$$

Нелинеарне једначине

То су једначине у којима један или више извода не фигуришу линеарно већ н. пр. на другом, трећем, ... степену, или под каквим кореном и т. д. Такве би једначине н. пр. биле

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

$$(1-x)^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3+\sqrt{y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=1$$

и т. д.

Интеграција овакве једначине у тесној је вези са једном нарочитом врстом диференцијалних једначина које се називају једначине са тоталним диференцијалом. Ми ћемо прво укратко трећи теорију те врсте једначина.

Под једначинама са тоталним

диференцијалима подразумевају се једначине облика

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n = 0$$

где су

$$X_1 X_2 \cdots X_n$$

одређене и дате функције променљивих

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

Проблем интеграције тих једначина састоји се у томе да се одреди једна релација

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0$$

која ће бити таква да кадгод је задовољена релација 2.) увек је задовољена и једначина 1.). Ми ћемо у појединостима проучити ту врсту једначина са трим променљивим количинама.

Нека је дата једначина

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \qquad 4$$

где су P, Q и R познате и одређене функције променљивих x, y, z. Проблем њене интеграције састоји се у томе да се одреди једна релација

$$F(x,y,z) = 0$$

која ће бити таква да кадгод је задовољена релација 5.) увек је задовољена и једначина 4.). Једначина 4.) може се написати у облику

$$dz = A\,dx + B\,dy \qquad 6.)$$

где је

$$A = -\frac{P}{R}$$

$$B = -\frac{Q}{R}$$

и где ће према томе бити A и B одређене и дате функције од x, y, z. Те функције могу садржати z а могу та и не садржати. Разликујмо према томе ова два случаја:

1° A и B не садрже z. Ако се тада хоће да једначина 6.) у опште може опстати треба да буде

$$A = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial y} \qquad 7.)$$

Пошто једначина 6.) показује да је израз

$$A\,dx + B\,dy$$

тотални диференцијал од z. Из једна-
чина 7.) добија се

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

одакле се упоређењем добија

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x}$$

Једначина 8.) јесте дакле потребан у-
слов да би једначина 6.) имала смисла.
Ми ћемо сад показати да ако је услов
8.) задовољен, једначина 6.) може опста-
ти и може се наћи једна функција
$z(x,y)$ која ће ту једначину задовоља-
вати. Да би то доказали пођимо од
релације

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A$$

Интеграцијом по x добија се

$$z=\int_{x_0}^{x} A\,dx+u(y)$$

где је $u(y)$ произвољна функција од y.

Покушајмо да одредимо функцију u
тако да буде

$$\frac{\partial z}{\partial y}=B$$

Из једначине 9.) се диференцијаљењем
по y добија

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial A}{\partial y}dx+\frac{du}{dy}$$

Отуда је

$$\frac{du}{dy}=\frac{\partial z}{\partial y}-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial A}{\partial y}dx$$

или

$$\frac{du}{dy}=B-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial A}{\partial y}dx \qquad 10.)$$

Ми ћемо сад показати да десна страна
једначине 10.) не зависи од x_a мада да
x фигурише и у A и у B. Што се види из
тога што ако узмемо извод те десне
стране по x, он се своди на

$$\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}$$

а тај је израз раван нули пошто је
претпостављено да је задовољен услов 8.).
Пошто је дакле извод по x_y раван ну-

ли, то та десна страна не зависи од x_0. Према томе она се своди на једну одређену функцију y_0 и ако ту одређену функцију која више није произвољна означимо са $\varphi(y)$, једначина се 10.) своди на

$$\frac{du}{dy}=\varphi(y) \qquad 11.)$$

одакле је

$$u(y)=\int\varphi(y)dy+C$$

Ако ту вредност сменимо у обрасцу 9.) добићемо резултат који се може написати у облику

$$z=\int_{x_0}^{x}A\,dx+\int_{y_0}^{y}\varphi(y)dy+C \qquad 12.)$$

Пошто је доказана егзистенција функције z и једначина 12.) представља тражену релацију између x, y и z, која се може сматрати као интеграл једначине 6.). За једначину 6.) каже се тада да је потпуно интеграбилна а услов

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x}$$

зове се услов потпуног интеграбилитета једначине 6.).

2° Претпоставимо да A и B садрже и z. Очевидно је да у том случају да би једначина 6.) имала смисла треба да буде

$$A=\frac{\partial z}{\partial x} \qquad B=\frac{\partial z}{\partial y} \qquad 13.)$$

Ако прву једначину диференцијалимо по y водећи рачуна да је A непосредна функција од y а и посредна функција од y преко z, ми ћемо имати

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B$$

Тако исто диференцијалимо ли другу од једначина 13.) по x, водећи рачуна о томе да B зависи од x и непосредно а и посредно преко z, добија се

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A$$

Из последњих једначина добија се релација

$$\frac{\partial A}{\partial y}+B\frac{\partial A}{\partial z}=\frac{\partial B}{\partial x}+A\frac{\partial B}{\partial z} \qquad 14.)$$

која у овом случају смењује малопређашњи услов интеграбилитета 8.)

Овим је доказано да кадгод једначина 6.) има смисла т.ј. кад има интеграла, увек мора постојати услов 14.). Ми ћемо сад доказати да је обрнуто кад год је за једну дату једначину 6.) где A и B зависе од z задовољен услов 14.), једначина 6.) има интеграл. У том циљу разликоваћемо ова два случаја:

а.) претпоставимо да релација 14.) није задовољена идентички за ма какво x, y, z. Пошто су A и B познате и одређене функције x_a, једначина 14.) није ништа друго до

$$F(x,y,z)=0 \qquad 15.)$$

а по самом начину како смо до ње дошли очевидно је да z израчунато из ње и диференцијаљено мора довести до једначине 6.). У том случају једначина 15.) представља један интеграл једначине 6.) што значи да ова има смисла. Приметимо само да у том случају интеграл не садржи никакве произвољности јер је једначина 15.) потпуно одређена.

б.) Претпоставимо да је релација 14.) задовољена идентички за ма какво x, y, z. Ми ћемо доказати да у том случају дата једначина 6.) има бескрајно много интеграла и да сви они зависе од једне произвољне константе C. Да би то доказали пођимо од ранијих релација

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=B \qquad 16.)$$

Прва од ових једначина има за десну страну једну одређену и познату функцију A која зависи од x, y и z. Ако у тој функцији сматрамо y као параметар, онда нам та једначина представља једну диференцијалну једначину првог реда у којој је интеграциона променљива x а непозната функција z. Интеграцијом те једначине имаћемо z као функцију интеграционе променљиве x параметра y и једне интеграционе константе u, која ће бити константа према x али у ствари то ће бити произвољна функција од y. Нека се на тај начин добије н.пр.

$$z = \varphi(x, y, u) \qquad 17)$$

Диференцијалећи једначину 17) по y и водећи рачуна о томе да φ зависи од y а и непосредно а и посредно преко u добијамо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

а ова једначина, водећи рачуна о томе да је

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B$$

постаје

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = B$$

Одавде се добија

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{B - \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \qquad 18)$$

Десна страна једначине 18) у опште је одређена функција од x, y и z. Ми ћемо показати да кад се у њој смени z својом вредношћу 17), та десна страна једначине 18) не зависи више од x. Да би ово доказали довољно је доказати да је извод те стране по x раван нули ако се води рачуна о једначини 17). Тај извод има за вредност

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left[\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right] - \left(B - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial x}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}$$

Водећи рачуна о томе да је

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

овај се извод може написати у облику

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left[\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial B}{\partial z}A\right] - \left(B - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial x}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2} \qquad 19)$$

Водимо сад рачуна о томе да z треба да буде дефинисано обрасцем 17.). Из тога је образац

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = A$$

Диференцирањем последње једначине имаћемо

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial u} \qquad 20.)$$

тако исто диференцирањем једначине

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A$$

по y и водећи рачуна о томе да A зависи од y и непосредно а и посредно преко z имаћемо

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad 21.)$$

Заменом вредности 20.) и 21.) у једначини 19.) после извршене редукције бројилац тога израза своди се на

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x} + A\frac{\partial B}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial A}{\partial y} + B\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

Међутим ако водимо рачуна о услову 14.) интеграбилитета једначине овај је последњи израз идентички раван нули што значи да је одиста израз 19.) т.ј. извод десне стране једначине 18.) по x_y раван нули. Према томе та десна страна неће садржати x, што значи да она зависи само од y и u. Према томе једначина 18.) биће извесна једначина облика

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \psi(u, y) \qquad 22.)$$

а то ће бити дакле једна обична диференцијална једначина првог реда. Претпоставимо да смо ту једначину интегралили по општим упуствима сматрајући y као интеграциону променљиву а u као непознату функцију, тада ћемо добити

$$u = \lambda(y, C) \qquad 23.)$$

где је C константа. Заменом тако нађене вредности 23.) у ранији образац 17.)

$$z = \varphi(x, y, u)$$

имаћемо z одређено као функцију од x, y и једне константе C. По самом начину како смо дошли до z очевидно је да оно задовољава дату једначину а тиме је доказано да одиста имамо бескрајно много интеграла z и да они зависе од једне произвољне константе. Из свега тога се изводи ово практично упутство за интеграцију једначина облика

$$dz = A\,dx + B\,dy$$

треба прво испитати да ли функције A и B задовољавају услов потпуног интеграбилитета

$$\frac{\partial B}{\partial x} + A\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial y} + B\frac{\partial A}{\partial z}$$

Ако је то случај треба гледати да ли је овај услов задовољен идентички или не и онда: ако није задовољен идентички, онда се дефинише z као позната и одређена функција од x_0 и y_0 и тако одређено z биће један интеграл дате једначине; ако је тај услов задовољен идентички, онда једначина има бескрајно много интеграла који зависе од једне произвољне константе и који се добијају интеграцијом двеју обичних диференцијалних једначина првог реда и то на овај начин: треба формирати једначину

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A$$

у њој сматрати y као параметар, x као интеграциону променљиву а z као непознату функцију, па ће се интеграцијом добити z као функција од x, параметра y и једне интеграционе константе која ће бити произвољна функција параметра y. Нека је

$$z = \varphi(x, y, u)$$

тако добијени интеграл. Затим треба формирати једначину

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{B - \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}$$

у којој на десној страни имамо одређену и познату функцију од x, y, z и u. На тој десној страни треба сада сменити z горњом вредношћу $\varphi(x,y,u)$, па се та десна страна своди на једну одређену и познату функцију од само u и y у којој даље неће фигурисати x. Према томе ова последња једначина биће једна диференцијална једначина првог реда са непознатом функцијом u и интеграционом променљивом y. Ту једначину треба интегралити по обичним упутствима за те једначине и резултат ће бити једна једначина облика

$$u = \lambda(y, C)$$

Заменом тако одређенога u у једначини

$$z = \varphi(x, y, u)$$

имаћемо z као одређену и познату функцију од x, y и C и то ће бити тражени интеграл.

Примедбе:

1° Као што се види интеграција једначине

$$dz = A\,dx + B\,dy$$

своди се у опште на интеграцију двеју обичних диференцијалних једначина првог реда. Постоји метода (Mayer-ова) која своди ту интеграцију на интеграцију само једне обичне диференцијалне једначине првог реда. Међутим та је метода у другим појединостима компликованија од ове.

2° Све ово што смо извели важи за једначине написане у облику

$$dz = A\,dx + B\,dy$$

Претпоставимо да је једначина написана у општем облику

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \qquad 24.)$$

При интеграцији треба увек деобом са R свести једначину на облик

$$dz = A\,dx + B\,dy$$

и применити све оно што је казано за ту једначину. Приметимо само то да услов интеграбилитета који смо имали за скраћену једначину постаје за општу једначину, водећи рачуна о томе да је $A = -\frac{P}{R}$, $B = -\frac{Q}{R}$

$$P\left[\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right] + Q\left[\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right] + R\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = 0 \qquad 25.)$$

Израз 24.) има ту особину да кад год је задовољен услов 25.) лева страна израза 24.) је потпун диференцијал једне функције

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

то ћемо доказати на овај начин: Показато је да кад је услов интеграбилитета задовољен, постоји једна функција

$$z = F(x, y, C) \tag{26.)}$$

која кад се смени у једначини 24.) ова бива идентички задовољена. Међутим диференцијалећи израз 26.) по x а затим по y добија се

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

а пошто је

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A = -\frac{P}{R}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B = -\frac{Q}{R}$$

то последње једначине постају

$$R\frac{\partial F}{\partial x} - P\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$R\frac{\partial F}{\partial y} - Q\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

одакле је

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{R}$$

Ако заједничку вредност ова три количника означимо са μ, добијамо

$$P = \frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$Q = \frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$R = \frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial z}$$

Заменом на левој страни израза 24.) тај израз постаје

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz\right)$$

дакле постаје тоталним диференцијалом.

Н. пр. нека је дата једначина

$$2yz\,dx + 2xz\,dy - xy\,dz = 0$$

овде је

$$dz = \frac{2z}{x}dx + \frac{2z}{y}dy$$

и према томе у овом случају је

$$A = \frac{2z}{x}$$

$$B = \frac{2z}{y}$$

Одавде је

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{2z}{x^2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{2z}{y^2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{2}{y}$$

па је

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{4z}{xy}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} + A\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{4z}{xy}$$

што значи да је услов интеграбилитета испуњен. Према упутству, треба прво образовати једначину

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A = \frac{2z}{x}$$

одакле је

$$\frac{\partial z}{2z} = \frac{2\partial x}{x}$$

или

$$\log z = 2\log x + Const$$

или

$$z = u x^2$$

где је u произвољна функција y-а. Затим треба формирати једначину

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{B - \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} = \frac{\frac{2z}{y}}{x^2} = \frac{2z}{yx^2}$$

Ако z сменимо његовом вредношћу имамо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2ux^2}{yx^2} = \frac{2u}{y}$$

или

$$\frac{\partial u}{u} = \frac{2\partial y}{y}$$

одакле

$$u = Cy^2$$

Ако сад ово u сменимо у изразу за z, добија се најзад

$$z = Cx^2y^2$$

и то је тражени интеграл.

x x x

Сад тек пређимо на праве нелинеарне парцијалне једначине. Пре свега опоменимо се начина на који се може формирати парцијална једначина. Нека је дата једна релација

$$U(x, y, z, a, b) = 0 \qquad 1$$

која садржи два произвољна параметра a и b. Ако је једначина 1) диференцирана један пут по x и један пут по y, па претпоставимо да је z функција од x и y; добијају се две једначине

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} p = 0 \qquad 2$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} q = 0 \qquad 3$$

Ако из трију једначина 1.), 2.) и 3.) елиминишемо два параметра a и b, резултат ће бити једна парцијална једначина првог реда

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad 4$$

са две независно промењиве количине x и y и једном непознатом функцијом z. Према самом начину како смо дошли до једначине 4.) очевидно је да би z израчунато из једначине 1.) задовољило парцијалну једначину 4.). Према томе изгледало би као да општи интеграл једначине 4.) садржи две константе a и b. Међутим Хадченде је показао да и ако такви интеграли као што је 1.) са две произвољне константе задовољавају једначину 4.), ипак једначина 4.) има још много општијих интеграла у којима фигуришу не само произвољне константе већ и произвољне функције. О томе се можемо уверити на овај начин: Једначине 1.), 2.) и 3.) можемо сматрати као три једначине које би се могле задовољити на тај начин ако место z, a и b метнемо извесне функције од x и y које би могли добити решењем једначина 1.), 2.) и 3.) по z, a и b. Сматрајмо a и b као функције од x и y дефинисане том једначином, па ћемо диференцијалењем једначине 1.) по x_y добити

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}\right]=0 \qquad 5.)$$

а диференцирањем по y

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}\right]=0 \qquad 6.)$$

Прве заграде у изразима 5.) и 6.) идентички су равне нули због 2.) и 3.); према томе једначине се 5.) и 6.) своде на

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0 \qquad 7.)$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0 \qquad 8.)$$

Према самом начину како смо дошли до ових једначина очевидно је да је систем једначина 1.), 7.) и 8.) еквивалентан систему 1.), 2.) и 3.). Испитајмо све начине на које је могућно задовољити систем 1.), 7.) и 8.).

1° Могу се а и в сматрати као праве константе. У том случају је

$$\frac{\partial a}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial b}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial a}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial b}{\partial y}=0$$

тако да ће једначине 7.) и 8.) бити идентички задовољене. Овај нас начин доводи до интеграла облика 1.) који садржи две константе.

2° Ако се узме да је

$$\frac{\partial u}{\partial a}=0 \qquad 9.)$$

$$\frac{\partial u}{\partial b}=0 \qquad 10.)$$

Елиминацијом а и в из трију једначина 1.), 9.) и 10.) добија се извесна једначина

$$\lambda(x,y,z)=0$$

Очевидно је да ће z израчунато из те релације бити интеграл ове формиране парцијалне једначине. Такав интеграл не садржи никакве произвољности и назива се <u>сингуларним интегралом</u> те парцијалне једначине.

3° Претпоставимо да није у исто време и

$$\frac{\partial u}{\partial a}=0$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial b}=0$$

Тада једначине 7.) и 8.) представљају две линеарне једначине и хомогене по тим изводима $\frac{\partial u}{\partial a}$ и $\frac{\partial u}{\partial b}$. Да би те једначине могле у опште постојати, а да не мора у исто време бити и $\frac{\partial u}{\partial a}=0$ и $\frac{\partial u}{\partial b}=0$ потребно је и довољно да детерминанта њихова буде равна нули т.ј.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix}=0$$

Међутим ова детерминанта није ништа друго до Јакобиан функција a и b сматраних као функције од x и y, па пошто је та детерминанта равна нули из познатих разлога о Јакобианима знамо да су a и b везани извесном релацијом н.пр.

$$b=\varphi(a)$$

Пошто је детерминанта једначина 7.) и 8.) равна нули, то се те две једначине склапају у једну коју се хоће н.пр. у прву која тада постаје

$$\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial b}\,\frac{\frac{\partial b}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial x}}=0$$

Из једначине

$$b=\varphi(a)$$

добија се

$$\frac{\frac{\partial b}{\partial x}}{\frac{\partial a}{\partial x}}=\varphi'(a)$$

тако да се последња једначина своди на

$$\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial b}\varphi'(a)=0$$

На тај начин имамо три једначине

$$u=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial b}\varphi'(a)=0 \qquad 13.)$$

$$b=\varphi(a)$$

Према сатом начину како смо до тога скупа дошли, овај је скуп еквивалентан скупу једначина 1.), 2.) и 3.). Према томе имали би у томе случају као интеграл

$$U=0$$

где су константе a и b везане релацијом

$$b=\varphi(a)$$

Ако из скупа 13.) елиминишемо константе a и b, остаће једна релација између x, y и z која ће садржати једну произвољну функцију и која дефинише z као интеграл парцијалне једначине од које смо пошли. Као што се дакле види овај интеграл садржи једну произвољну функцију па је дакле општији од онога од кога смо пошли и који садржи две константе. Као што се из свега овога види кад се познаје један та какав интеграл

$$U(x,y,z,a,b)=0$$

13.) једне парцијалне једначине, из њега се могу извести разни други интеграли и један општији интеграл који садржи једну произвољну функцију. Такав један интеграл

$$U(x,y,z,a,b)=0$$

који садржи две произвољне константе Lagrange је развао <u>потпуним интегралом</u> (intégrale complete). Интеграција се дакле једне дате такве парцијалне једначине првог реда своди према последњој анализи на одређивање једног њеног потпуног интеграла; кад будемо овај знали, знаћемо и сам општи интеграл.

Lagrange-ева метода за одређивање потпуних интеграла једне парцијалне једначине првог реда.

Принцип те методе састоји се у овоме: Нека је дата једна парцијална једначина

$$F(x,y,z,p,q)=0 \qquad 14.)$$

где је

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

Решимо једначину по q и нека је

$$q=F(x,y,z,p) \qquad 15.)$$

тако добијена једначина. Претпоставимо да смо на какав било начин успели одредити такву једну релацију

$$p=\varphi(x,y,z,a) \qquad 16.)$$

да кад p и q из образаца 15.) и 16.) сменимо у једначини

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

њена десна страна, а то је

$$\varphi(x,y,z,a)\,dx+F(x,y,z,\varphi)\,dy$$

задовољава раније изведене услове потпуног интеграбилитета. Ако смо то успели учинити, онда ће израз

$$dz=\varphi(x,y,z,a)\,dx+F(x,y,z,\varphi)\,dy$$

као што знамо из теорије једначина са тоталним диференцијалом дефинисати z као једну одређену функцију н. пр. $\psi(x,y,z,a,b)$ која садржи две произвољне константе a и b, тако да ће бити

$$z=\psi(x,y,z,a,b) \qquad 17.)$$

и то ће бити један тражени потпун интеграл дате једначине. О томе се уверавамо овако: Пре свега да је z тако добијено интеграл једначине 14.) или, што је све једно, једначине 15.) види се из тога што једначина 16.) показује да је

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi$$

а једначина 15.) показује да је

$$\frac{\partial z}{\partial y}=F(x,y,z,\varphi)$$

Елиминацијом функције φ добија се једна релација између $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}$ а то је управо дата једначина 14.) што значи да z одиста задовољава ову једначину. Пошто тако дефинисано z садржи две константе a и b, то оно представља један потпун интеграл једначине. Као што се даље види одређивање једног потпуног интеграла једначине 14.) своди се на то да се одреди једно такво p као функција од x, y, z и једне произвољне константе a н. пр.

$$p = \varphi(x, y, z, a)$$

да кад у изразу

$$p\,dx + q\,dy$$

сменимо p том одређеном вредношћу а q вредношћу која се добија из једначине 14.) пошто у њој сменимо p мало пре нађеном вредношћу, тај израз задовољава услов потпуног интеграбилитета. Ако смо успели одредити такво p на који било начин, онда се интеграцијом једначине

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

сматране као једначине са тоталним диференцијалом добија z као функција од x, y, z и двеју констаната и то ће бити тражени потпун интеграл једначине 14.). У томе се састоји принцип Лагранж-еве методе коју ћемо сад у појединостима извести. Тога ради узећемо најпре два специјална случаја у којима се такав један потпун интеграл врло лако налази, а затим ћемо узети општи случај.

1° специјалан случај:

Нека је дата ма каква парцијална једначина првог реда која не садржи x и z. То су једначине облика

$$F(y, p, q) = 0 \qquad 18.)$$

$$F\left(y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

Овди можемо узети

$$p = a$$

где је a произвољна константа. Једначина 18.) кад у њој сменимо $p = a$ постаје

$$F(y, a, q) = 0$$

и дефинише q као одређену функцију

од y и a. Нека је н. пр.

$$q=\varphi(a,y)$$

Са таквим вредностима p и q израз $pdx+q\,dy$ постаје

$$a\,dx+\varphi(y,a)\,dy$$

Он очевидно задовољава услов потпуни интеграбилитета, пошто су парцијални изводи

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial a}{\partial y}=0$$

Интеграцијом израза

$$dz=a\,dx+\varphi(a,y)\,dy$$

имаћемо

$$z=ax+\int\varphi(a,y)\,dy+b$$

и то је тражени потпун интеграл.

Н. пр. нека је дата једначина

$$\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

или

$$p+qy=0$$

Ако ставимо

$$p=a$$

добија се

$$qy=-a$$

одакле је

$$q=-\frac{a}{y}$$

Израз

$$dz=pdx+q\,dy$$

постаје

$$dz=a\,dx-\frac{a}{y}\,dy$$

одакле је

$$z=ax-a\log y+b$$

Или н. пр. нека је дата једначина

$$1+(p^2+y^2)q=0$$

ако узмемо

$$p=a$$

из једначине се добија

$$q=-\frac{1}{a^2+y^2}=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

Израз

$$dz=pdx+q\,dy$$

овде је

$$dz=a\,dx-\frac{dy}{a^2\left[1+\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]}$$

одакле је

$$z = ax - \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{a}\right) + b$$

2° специјалан случај.

То су једначине које се могу написати у облику

$$F(p,x) = \varphi(q,y)$$

Покушајно ставити

$$F(p,x) = a$$

тада мора бити и

$$\varphi(q,y) = a$$

Из тих једначина добија се н. пр.

$$p = \lambda(x,a)$$

$$q = \mu(y,a)$$

Заменом у изразу

$$p\,dx + q\,dy$$

овај постаје

$$\lambda(x,a)\,dx + \mu(y,a)\,dy$$

и очевидно услов интеграбилитета је задовољен пошто је

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial x}$$

Према томе горњи израз је потпун диференцијал једне функције тако да ћемо имати

$$z = \int\lambda(x,a)\,dx + \int\mu(y,a)\,dy + b$$

и то ће бити тражени потпун интеграл.

Н. пр. Нека је дата једначина

$$px = q + y$$

ако ставимо

$$px = a$$

онда је и

$$q + y = a$$

па одатле

$$p = \frac{a}{x}$$

$$q = a - y$$

Израз

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

постаје

$$dz = \frac{a\,dx}{x} + (a-y)\,dy$$

одакле је

$$z = a\log x - \frac{1}{2}(a-y)^2 + b$$

3° Општи случај:

Нека је дата најопштија парцијална једначина првог реда

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

или

$$F(x,y,z,p,q)=0 \qquad 19.)$$

Потражимо да ли је могуће наћи такву једну релацију

$$\Phi(x,y,z,p,q)=0 \qquad 20.)$$

да кад из 19.) и 20.) израчунамо p и q па сменимо у изразу

$$p\,dx+q\,dy$$

једначина

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

задовољава услов потпуног интеграбилитета. Пошто p и q тако одређени онда зависе од x, y и z, то ће услов интеграбилитета бити

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}q=\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}p \qquad 21.)$$

Диференцијалењем једначина 19.) и 20.) по x_y имајући на уму да F и Φ зависе од x-а и непосредно а и посредно преко p и q добија се

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad 22.)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad 23.)$$

Ако прву од ових једначина помножимо са $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ а другу са $\frac{\partial F}{\partial p}$ па одузмемо, онда чланова са $\frac{\partial p}{\partial x}$ нестаје и добија се једна једначина облика

$$M_1\frac{\partial q}{\partial x}+N_1=0 \qquad 24.)$$

где су M_1 и N_1 линеарне и хомогене функције парцијалних извода функције Φ по x, p и q са коефицијентима који ће бити познате функције од x, y, p и q.

Тако исто диференцијалећи једначине 19.) и 20.) по y имаћемо две једначине сличне једначинама 22.) и 23.) из којих можемо на малопређашњи начин избацити $\frac{\partial p}{\partial y}$ и резултат ће бити извесна једначина облика

$$M_2\frac{\partial p}{\partial y}+N_2=0 \qquad 25.)$$

где су M_2 и N_2 опет линеарне и хомогене функције парцијалних извода функције Φ са коефицијентима који ће бити познате и одређене функције променљивих x, y, z, p и q.

На послетку ако једначине 19.) и 20.) диференцијалимо по z и избацимо $\frac{\partial p}{\partial z}$, остане извесна једначина

$$M_3\frac{\partial q}{\partial z}+N_3=0 \tag{26}$$

Из свих ових једначина и једначине 21.) можемо избацити парцијалне изводе функција p и q и резултат ће бити извесна једначина облика

$$P_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}+P_2\frac{\partial\Phi}{\partial y}+P_3\frac{\partial\Phi}{\partial z}+P_4\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_5\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0 \tag{27}$$

где ће

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5$$

бити познате и одређене функције променљивих x, y, z, p и q. Шта више кад сви ови рачуни буду извршени налази се да је једначина 27.) оваквог облика

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Q\frac{\partial\Phi}{\partial y}+(Pp+Qq)\frac{\partial\Phi}{\partial z}+(X+pZ)\frac{\partial\Phi}{\partial p}-(Y+qZ)\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0$$

где P, Q, X, Y и Z имају ове вредности

$$X=\frac{\partial F}{\partial x}$$
$$Y=\frac{\partial F}{\partial y}$$
$$Z=\frac{\partial F}{\partial z} \qquad \text{A.)}$$
$$P=\frac{\partial F}{\partial p}$$
$$Q=\frac{\partial F}{\partial q}$$

Посао одређивања функције Φ сведен је дакле на интеграцију једне линеарне хомогене парцијалне једначине првог реда.

Претпоставимо да смо нашли један ма какав партикуларни интеграл једначине 28.) и нека је он

$$\Phi=\varphi(x,y,z,p,q)$$

Онда ће очевидно и функција

$$\varphi(x,y,z,p,q)-a$$

где је a једна произвољна константа, бити такође један партикуларни интеграл исте једначине. Према самом начину како смо дошли до функције Φ очевидно је да ако израчунамо p и q

из једначина

$$F = 0$$

$$\varphi - a = 0$$

па их сменимо у изразу

$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad 29)$$

овај ће израз задовољавати услов потпуног интеграбилитета. Према томе једначина 29) после те смене може се интегралити и нека је

$$z = \lambda(x, y, a, b) \qquad 30)$$

њен интеграл који ће очевидно садржати две константе a и b. Образац 30) тада ће дефинисати један потпун интеграл дате једначине

$$F = 0$$

као што смо и тражили.

Као што се дакле види сав посао одређивања једног потпуног интеграла те једначине своди се на интеграцију једне линеарне хомогене парцијалне једначине првог реда, а из свега овог што је досада изложено изводи се ово упутство: Да би нашли један потпун интеграл дате парцијалне једначине

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

који ће у себи садржати две константе, треба помоћу функције F формирати изразе A.), помоћу њих формирати једначину 28.) која ће бити једна линеарна и хомогена парцијална једначина по функцији Φ. За такве једначине видели смо како се интеграле, а за посао који се има пред очима довољно нам је одредити један ма који њен партикуларни интеграл. Ако је

$$\Phi = \varphi(x, y, z, p, q)$$

један такав интеграл, треба формирати једначину

$$\varphi(x, y, z, p, q) - a = 0$$

где је a једна произвољна константа, па из те једначине и једначине

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

израчунати p и q, сменити их овде у изразу

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

који ће тада наступно задовољити услов потпуног интеграбилитета. Ову последњу једначину тада треба интегралити по ранијим упуствима за једначине са тоталним диференцијалом и z добијено таквим интеграцијом

$$z = \lambda(x, y, a, b)$$

где је b константа увучена том интеграцијом, представљаће нам тражени потпун интеграл. Према ономе што је раније казано о општем интегралу, можемо помоћу тако познатог потпуног интеграла наћи и сам општи интеграл дате једначине на овај начин: написати потпун интеграл у облику

$$u = z - \lambda = 0$$

и формирати систем једначина

$$u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b}\varphi'(a) = 0$$

$$b = \varphi(a)$$

где је φ произвољна функција. Овај систем 31.) тада, кад би се у њему елиминисале константе a и b, дефинисао би тражени општи интеграл.

Н. пр. нека је дата једначина

$$mz + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

или

$$mz + pq = 0$$

Изрази A.) овде ће бити

$$X = 0$$
$$Y = 0$$
$$Z = m$$
$$P = q$$
$$Q = p$$

Помоћна парцијална једначина 28.) постоје

$$q\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial y} + 2pq\frac{\partial \Phi}{\partial z} - mp\frac{\partial \Phi}{\partial p} - mq\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0$$

Према теорији оваквих једначина интеграција се њихова своди на си-
31) стем симултаних једначина

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{-mp} = \frac{dq}{-mq}$$

Из друге и четврте једначине имамо

$$\frac{dy}{p} = -\frac{dp}{mp}$$

или

$$m\,dy = -dp$$

одакле

$$my + p = C$$

где је C интеграциона константа. Према томе и према теорији парцијалних линеарних једначина један партикуларни интеграл једначине 28.) биће

$$\Phi = my + p$$

Према горњем упутству треба формирати једначине

$$my + p - a = 0$$

$$mz + pq = 0$$

и из њих одредити p и q тако да је

$$p = a - my$$

$$q = -\frac{mz}{a-my}$$

Затим према упутству треба те вредности сменити у изразу

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

који тиме постаје

$$dz = (a-my)\,dx - \frac{mz}{a-my}\,dy$$

За овај што израз унапред тврди да задовољава услов потпуног интеграбилитета т.ј. да је та једначина интеграбилна. О томе се можемо уверити овако: ако ју решимо по dx т.ј. напишемо у облику

$$dx = \frac{dz}{a-my} - \frac{mz}{(a-my)^2}\,dy = d\left[\frac{z}{a-my}\right]$$

Према томе интеграцијом добијамо

$$x = \frac{z}{a-my} + b$$

па имамо потпун интеграл

$$(x-b)(a-my) - z = 0$$

Општи интеграл биће дефинисан системом једначина

$$u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b}\varphi'(a) = 0$$

$$b = \varphi(a)$$

које су овде

$$(x-b)(a-my)-z=0$$

$$(x-b)-(a-my)\varphi(a)=0$$

$$b=\varphi(a)$$

Примери:

1.

$$p^2q^2=1$$

Ова једначина потпада под 1° спец. случај, па ако узмемо

$$p=a$$

онда је и

$$q=\pm\frac{1}{a}$$

па имамо

$$dz=a\,dx\pm\frac{1}{a}dy$$

одакле

$$z=ax\pm\frac{a}{y}+b$$

2°

$$p^2+q^2=1$$

Потпада опет под 1° спец. случај, па ако узмемо

$$p=a$$

онда је

$$q=\pm\sqrt{1-a^2}$$

Отуда једначина

$$dz=a\,dx\pm\sqrt{1-a^2}\,dy$$

одакле

$$z=ax\pm\sqrt{1-a^2}\,y+b$$

3.

$$p^mq^n=1$$

Потпада опет под 1° спец. случај, ако узмемо

$$p=a^n$$

онда је

$$q=\frac{1}{a^m}$$

па отуда

$$dz=a^n dx+\frac{1}{a^m}dy$$

одакле

$$z=a^nx+\frac{1}{a^m}y+b$$

4.

$$p^n+q^n=1$$

Потпада под 1° спец. случај, па ако узмемо

$$p=a$$

биће

$$q=\sqrt[n]{1-a^n}$$

Отуда

$$dz = a\,dx + \sqrt[n]{1-a^n}\,dy$$

а одатле

$$z = ax + y\sqrt[n]{1-a^n} + b$$

5.

$$pq = x$$

Једначину можемо писати

$$\frac{p}{x} = \frac{1}{q}$$

па дакле потпада под 2° спец. случај.
Отуда

$$\frac{p}{x} = a$$

$$\frac{1}{q} = a$$

одакле

$$p = ax$$

$$q = \frac{1}{a}$$

па дакле

$$dz = ax\,dx + \frac{1}{a}\,dy$$

а одатле

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{y}{a} + b$$

6.

$$pq = xy$$

Једначину можемо писати

$$\frac{p}{x} = \frac{y}{q}$$

па дакле потпада под 2° спец. случај.
Отуда

$$\frac{p}{x} = a$$

$$\frac{y}{q} = a$$

или

$$p = ax$$

$$q = \frac{y}{a}$$

па је

$$dz = ax\,dx + \frac{y}{a}\,dy$$

а одатле

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{2a} + b$$

7.

$$q = p^2 x$$

Потпада под 2°. спец. случај,

па је

$$q = p^2 x = a$$

одакле

$$q = a$$

$$p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$$

па отуда

$$dz = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}dx + a\,dy$$

одакле

$$z = 2\sqrt{ax} + ay + b$$

8.

$$q = p^2xy$$

Једначину можемо писати

$$\frac{q}{y} = p^2x$$

па дакле потпада под 2° спец. случај. Отуда

$$\frac{q}{y} = p^2x = a^2$$

одакле

$$p = \frac{a}{\sqrt{x}}$$

$$q = a^2y$$

па је

$$dz = \frac{a}{\sqrt{x}}dx + a^2y\,dy$$

одакле

$$z = 2a\sqrt{x} + \frac{a^2y^2}{2} + b$$

9.

$$pq = z$$

Потпада под општи случај. Овди је

$$X = 0$$

$$Y = 0$$

$$Z = -1$$

$$P = q$$

$$Q = p$$

па имамо једначину

$$q\frac{\partial\Phi}{\partial x} + p\frac{\partial\Phi}{\partial y} + 2pq\frac{\partial\Phi}{\partial z} - p\frac{\partial\Phi}{\partial p} + q\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0$$

За би решили ову једначину имамо систем једначина

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = -\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

Други и четврти члан дају

$$dy = -dp$$

одакле

$$y + p = C = \Phi$$

Отуда за израчунавање p и q имамо једначине

$$y + p - a = 0$$

$$pq - z = 0$$

одакле

$$p = a - y$$

$$q = \frac{z}{a-y}$$

па имамо једначину

$$dz = (a-y)\,dx + \frac{z}{a-y}\,dy$$

или ако ју решимо по dx

$$dx = \frac{dz}{a-y} - \frac{z}{(a-y)^2}\,dy$$

Одакле се види да је

$$dx = d\left(\frac{z}{a-y}\right)$$

или

$$x = \frac{z}{a-y} + b$$

или

$$z = (x-b)(a-y)$$

10.

$$q = p^2 z$$

Потпада под општи случај. Овде је

$$F = q - p^2 z$$

па је

$$X = 0$$

$$Y = 0$$

$$Z = -p^2$$

$$P = -2pz$$

$$Q = 1$$

а отуда једначина

$$-2pz\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} + (q - 2p^2 z)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - p^3\frac{\partial\Phi}{\partial p} + p^2 q\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0$$

Да би решили ову једначину имамо систем једначина

$$\frac{dx}{-2pz} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{q - 2p^2 z} = \frac{dp}{-p^3} = \frac{dq}{p^2 q}$$

Из прве и последње имамо једначину

$$-\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

одакле интеграцијом

$$pq = a$$

па за одредбу p и q имамо једначине

$$pq - a = 0$$

$$q - p^2 z = 0$$

одакле

$$p = \sqrt[3]{\frac{a}{z}}$$

$$q = \sqrt[3]{a^2 z}$$

Отуда једначина

$$dz = \sqrt[3]{\frac{a}{z}}\, dx + \sqrt[3]{a^2 z}\, dy$$

Под парцијалном диференцијалном једначином вишег реда разуме се једначина у којој има бар један парцијалан извод који је вишег реда од првог. Такве би н. пр. биле једначине

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}-\varphi(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=\psi(x,y,z)$$

итд. Ред највишег извода представља у исто време и ред парцијалне једначине.

Теорија парцијалних једначина виших редова врло се јако разликује од теорије једначина првог реда. Док се ова последња теорија има сматрати као свршена, пошто смо видели да се свака парцијална једначина првог реда без изузетка може интетрагити или јој се бар интеграција може свести у крајњој анализи на обичну диференцијалну једначину, дотле теорија парцијалних једначина виших редова је далеко несавршенија и у кој се више пута незнају ни елементарне ствари. Тако за једначине првог реда се зна да им општи интеграл садржи једну произвољну функцију; за једначине виших редова у великом броју случајева незна се ни природа те произвољности ни број произвољних елемената. Има такође и врло простих једначина вишег реда за које је доказано да су им интеграли неаналитичке функције. Тако н. пр. за врло просту једначину другог реда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \psi(x,y)$$

доказао је Borel да се могу наћи такве вредности константе a и извесни прости облици функције ψ да сви интеграли овакве једначине буду неаналитичке функције. Међутим има ипак велики број типова парцијалних једначина ма ког реда које се могу потпуно интеграцити и код којих се о интегралима зна све што треба. Ми ћемо навести неколико таквих типова.

I Тип: Једначине са парцијалним изводима узетих само по једној независно променљивој.

Таква је н. пр. једначина

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \cdots\right)=0$$

Овакве се једначине могу сматрати као обичне диференцијалне једначине где се она друга независно променљива (овде y) има сматрати као обичан параметар једначине. Једначина се има интегралити по правилима за обичне диференцијалне једначине и пошто ће интеграл бити облика

$$z=\varphi(x, y, C_1, C_2, C_3, \cdots)$$

где би

$$C_1\ C_2 \cdots C_n$$

биле интеграционе константе, само што ове константе неће бити апсолутне константе већ произвољне функције од y. Према томе имаћемо у општем интегралу онолико произвољних функција колики је ред дате једначине.

II Тип: Једначине облика

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} = 0$$

ако ставимо

$$\frac{\partial^m z}{\partial x^m} = u$$

једначина постаје

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0$$

Одатле ће бити интеграцијом

$$u = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + \cdots + C_{n-1} y^{n-1}$$

где ће $C_0\, C_1 \dots$ бити произвољне функције од x. Ако заменимо u његовом вредношћу, добија се једначина

$$\frac{\partial^m z}{\partial x^m} = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + \cdots + C_{n-1} y^{n-1}$$

у којој ће се y сад понашати као параметар. Кад извршимо прву интеграцију имаћемо

$$\frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}} = D_0 + \int C_0\, dx + y \int C_1\, dx + \cdots + y^{n-1} \int C_{n-1}\, dx$$

где је D_0 произвољна функција од y. Поновном интеграцијом имали би

$$\frac{\partial^{m-2} z}{\partial x^{m-2}} = D_0 + \iint C_0\, dx + y \iint C_1\, dx + \cdots + y^{n-1} \iint C_{n-1}\, dx$$

Ако те интеграције продужимо до краја имаћемо

$$z = D_0 + D_1 y + D_2 y^2 + \cdots + D_{n-1} y^{n-1}$$

где је

$$D_1 = \iint \cdots \int C_0\, dx^n$$

$$D_2 = \iint \cdots \int C_1\, dx^n$$

. . . .

Пошто су $C, C_2 \dots$ произвољне функције од x, значи да ће и $D_1 D_2 \dots$ бити такође произвољне функције од x тако да нам означене интеграције у $D_1 D_2 \dots$ није нужно ни извршивати. Општи интеграл биће дакле

$$z = D_0 + D_1 y + D_2 y^2 + \cdots + D_{n-1} y^{n-1}$$

где је D_0 произвољна функција од y а

$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \dots$ произвољне функције од x. Као што се види код оваквих једначина имамо свега n произвољних функција.

<u>Специјалан случај</u>: Нека је дата једначина

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Општи интеграл ове једначине је

$$z = F(x) + \Phi(y)$$

где је F произвољна функција од x, а Φ произвољна функција од y. О томе се најлакше уверавамо диференцијалењем.

III Тип: Euler-ова парцијална једначина.

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

где су a, b и c сталне количине. Њену ћемо интеграцију показати кад буде говора о линеарним парцијалним једначинама.

IV Тип: Laplace-ова парцијална једначина

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + M\frac{\partial z}{\partial x} + N\frac{\partial z}{\partial y} + Pz + Q = 0$$

где су M, N, P и Q одређене и познате функције од x и y.

Постоји бескрајно много случајева кад се ова једначина може интеграсити.

V Тип: Liouville-ова парцијална једначина

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{\lambda z}$$

VI Тип: Ampère-Monge-ова парцијална једначина.

Ова једначина, која је компликована али има врло важне примене, је облика

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

где је краткоће ради стављено

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

а H, K, L, M и N су познате и одређене функције од $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Постоји бесконачно много случајева кад се она може интегралити. Један њен важан специјалан случај јесте једначина

$$rt - s^2 = 0$$

на коју се наилази у теорији површина што се могу развити у раван.

* * *

У осталом могућно је формирати колико се год хоће парцијалних једначина другог реда таквих да се зна облик интеграла и да у њему фигуришу две произвољне функције. Н. пр.

1. Пођимо од обрасца

$$z = F(x)\cdot\Phi(y)$$

где су F и Φ две произвољне функције. Логаритмовањем имаћемо

$$\log z = \log F(x) + \log\Phi(y)$$

Пошто су F и Φ две произвољне функције, то су и њихови логаритми произвољне функције. Према томе се може написати

$$\log z = F_1(x) + \Phi_1(y)$$

где су F_1 и Φ_1 произвољне функције. Диференцијаљењем по x добија се да је

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = F_1'(x)$$

Диференцијалећи поново по y добија се

$$\frac{z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = 0$$

или

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Према томе ова парцијална једначина има за интеграл

$$z = F(x)\cdot\Phi(y)$$

где су F и Φ две произвољне функције.

2. Пођимо од релације

$$z = \lambda(x)\Phi(y) + \mu(y)F(x)$$

где су λ и μ одређене и познате функције а F и Φ две произвољне функције. Деобом релације са $\lambda(x)\mu(y)$ добија се

$$\frac{z}{\lambda(x)\mu(y)} = \frac{\Phi(y)}{\mu(y)} + \frac{F(x)}{\lambda(x)}$$

Пошто је $\Phi(y)$ произвољна функција од y то је и $\dfrac{\Phi(y)}{\mu(y)}$ произвољна функција од y

коју ћемо означити са $\Phi_1(y)$. Исто тако пошто је $F(x)$ произвољна функција од x то је и $\frac{F(x)}{\lambda(x)}$ произвољна функција од x коју ћемо означити са $F_1(x)$, тако да се добија

$$\frac{z}{\lambda(x)\mu(y)} = F_1(x) + \Phi_1(y)$$

Ако сад диференцијалимо по x добија се

$$\frac{\lambda(x)\mu(y)\frac{\partial z}{\partial x} - \mu(y)\lambda'(x)\cdot z}{\lambda(x)^2\cdot\mu(y)^2} = F_1'(x)$$

или

$$\frac{1}{\lambda(x)\mu(y)}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)^2\mu(y)} = F_1'(x)$$

Ако сад ову једначину диференцијалимо по y пошто ју будемо помножили са $\lambda(x)$, добија се

$$\frac{\mu(y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \mu'(y)\frac{\partial z}{\partial x}}{\mu(y)^2} + \frac{\lambda'(x)\mu'(y)}{\lambda(x)\mu(y)^2} = 0$$

или

$$\lambda(x)\mu(y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \lambda(x)\mu'(y)\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda'(x)\mu'(y) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}\cdot\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = 0$$

Према томе ова једначина има као интеграл

$$z = \lambda(x)\Phi(y) + \mu(y)F(x)$$

где су Φ и F произвољне функције, а томе се може дати и овакав облик:

Ако ставимо

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = F(x)$$

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \varphi(y)$$

одакле се интеграцијом добија

$$\log\lambda(x) = \int F(x)\,dx + C_1$$

$$\log\mu(y) = \int \varphi(y)\,dy + C_2$$

или

$$\lambda(x) = e^{\int F(x)\,dx}$$

$$\mu(y) = e^{\int \varphi(y)\,dy}$$

диференцијална једначина постаје

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \varphi(y)\frac{\partial z}{\partial x} + F(x)\varphi(y) = 0$$

Заменом $\lambda(x)$ и $\mu(y)$ у горњем интегралу налази се да она има за интеграл

$$z = e^{\int F(x)dx} \cdot \Phi(y) + e^{\int \varphi(y)dy} \cdot F(x)$$