Теорија конформног снимања и њена примена у Картографији и Вишој Геодезији

Теорија конформног снимања и њена примена у Картографији и Вишој Геодезији

I
Теорија.

стра

Историске напомене. 11

Додатци.

Теорија конформног снимања и нека примена у Картографији и Вишој Геодезији.

I

Теорија.

1. Снимити једну површину на другу површину значи пренети ликове једне површине на другу површину по неком одређеном закону. Координате тачака P (снимка) на једној површини јесу непрекидне функције координата тачака p (оригинала) на другој површини. Ако тачка p описује какву линију на првој површини, онда и она њој одговарајућа тачка P описује једну линију, која је снимак оне прве линије. Разуме се да је однос између оригинала и снимка узајаман, јер се оригинал може исто тако сматрати и као снимак од снимка. Закон, по коме се тачке са једне површине пренашају на другу површину опредељује начин снимања и јасно је да оваквих начина има безбројно много. Снимање се зове _конформно_, кад два из исте тачке полазећа линиска еле-

мента (или тачније њихове тангенте у додир-ној тачци) на једној површини заклапају исти угао као и она њима одговарајућа два елемента (односно њихове тангенте) на другој површини. Одавде закључујемо да се линије на једној површини секу под истим углом под којим се секу њихови снимци на другој површини и то у тачкама које пред-стављају снимке пресечних тачака линија у оригиналу. Значи да се код конформног сни-мања све особине које су у вези са пресецима и угловима преносе са оригинала на снимак. Нарочито поменимо да трајекторије, као такве, одговарају у оригиналу и снимку једна другој.

Троугау, који је образован из три линеарна елемента, на површини оригинала одговара на површини снимка троугао са такође бес-крајно малим странама и једнаким хомоло-гим угловима. Таква два троугла су, дакле, слична и према томе размера из хомологих страна стална, дакле независна од правца датичних страна. Ово следује и из једнакости

диференцијалних количника $\frac{dS}{ds}=\frac{\delta S}{\delta s}$, пошто су они образовани за исту тачку p, а dS може да се сматра као функција од ds, тако исто и δS као функција од δs.

Замислимо површину оригинала покриве-ну једном мрежом од бескрајно малих тро-углова. На површини снимка одговара овој мрежа од такође бескрајно малих сличних троуглова. Ако у обе овакве мреже, према услову за конформно снимање, уцртамо сли-ке, онда се каже да између таквих слика по-стоји сличност у најмањим деловима. При-мећујемо да је код оваквог начина снимања у целом пространству површине однос из-међу два одговарајућа угла стално $=1$, док, међутим, однос између два одговарајућа ли-неарна елемента (и ако независан од њиховог правца) своју вредност мења према њиховом положају на површини, дакле је функција од x, y, z.

2. Формулишимо аналитички принцип конформног снимања. Нека је

$\varphi(x,y,z)=0$ једначина оригиналне површине,
$\Phi(X,Y,Z)=0$ једначина површине снимка.
Место ортогоналних координата x,y,z узећемо два параметра u, v као независно промен-љиве. Тада су X,Y,Z (пошто зависе од x,y,z) такође функције од u и v и ми имамо

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^2$$
$$dS^2 = dX^2+dY^2+dZ^2$$
$$=\left(\frac{\partial X}{\partial u}du+\frac{\partial X}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial u}du+\frac{\partial Y}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial u}du+\frac{\partial Z}{\partial v}dv\right)^2$$

или краће

$$ds^2 = e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2$$
$$dS^2 = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

где је

$$e=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \qquad E=\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2$$
$$f=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \qquad F=\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}$$
$$g=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \qquad G=\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2.$$

Према начелу, на којем се основа конформно снимање, треба да је однос

$$\frac{dS^2}{ds^2}=\frac{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}{e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2}=m$$

независан од правца дотичних линиских еле-

мената, треба да је независан од $\frac{du}{dv}$. Тај је однос један исти како за $u=$ Const., тако и за $v=$ Const. Отуда закључујемо да код конформног снимања мора да буду испуњене ове три једначине

$$E=me$$
$$F=mf$$
$$G=mg$$

тј.

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 &= m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\\ \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} &= m\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]\\ \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 &= m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right].\end{aligned}\right\} \quad (1$$

Пропорционални фактор $\sqrt{m}=\frac{dS}{ds}$ даје за сваку тачку линеарно увеличање (односно смањивање) линиских елемената на снимку. У Картографији, као једној од најважнијих примена ове теорије конформног снимања, тај се фактор зове <u>модул карте</u>. Квадрат тога фактора, дакле m, показује увелича-вање бескрајно малих површина на снимку.

<u>Примедба</u>. Из горњих једначина 1) сле-дује, обратно, да је

$$dS^2 = m\,ds^2,$$

где m означава извесну функцију од x, y, z, па дакле и од u и v, која је независна од правца датичних линиских елемената.

Да једначине 1) одговарају основној погодби за конформно сликање, по којој два из исте тачке на првој површини полазећа линиска елемента ds и δs захватају исти угао као и њима одговарајућа линиска елемента dS и δS на другој површини, можемо да покажемо и на овај начин. Пођимо од тога да је

$$\measuredangle(dS, \delta S) = \measuredangle(ds, \delta s), \quad \cos(dS, \delta S) = \cos(ds, \delta s),$$

одакле, с обзиром на

$$\cos(dS, \delta S) = \frac{dX}{dS}\frac{\delta X}{\delta S} + \frac{dY}{dS}\frac{\delta Y}{\delta S} + \frac{dZ}{dS}\frac{\delta Z}{\delta S}$$

$$\cos(ds, \delta s) = \frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta s},$$

следује

$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial X}{\partial u}\delta u + \frac{\partial X}{\partial v}\delta v\right) = \frac{dS}{ds}\frac{\delta S}{\delta s}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right),$$

где знак Σ упућује да суму треба узети у погледу све три координате X, Y, Z и x, y, z. Са оваквим начином бележења последња једначина може да се напише

$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 du\,\delta u + \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}(du\,\delta v + \delta u\,dv) + \sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 dv\,\delta v =$$

$$\frac{dS}{ds}\frac{\delta S}{\delta s}\left[\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du\,\delta u + \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}(du\,\delta v + \delta u\,dv) + \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv\,\delta v\right],$$

одакле, опет, због независности између u и v непосредно потичу једначине 1).

3. У горњим условним једначинама 1) добили смо формуле од којих за сваки особени случај можемо да чинимо употребу.

Односно параметара u и v, дакле избора нових координата примећујемо да се оне могу узети у ма каквој криволинијској координатној системи на датичној површини и лучни је елемент изражен тада у форми

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

где e, f, g означавају количине од којих зависи мера кривине (реципрочна вредност производа из главних полупречника кривине) у датичној тачци површине.

Нарочитим избором параметара (координатне системе) u, v израз за ds^2 може да се доведе и на простији вид. Тако нпр. ако линије $u = \text{Const.}$ узмемо нормално на линијама $v = \text{Const.}$, онда је

$$f=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

и према томе

$$ds^2=e\,du^2+g\,dv^2.$$

Ако су, поред овога, линије $v=Const.$ још и геодетске линије на површини, онда је

$$e=1$$

и ми имамо овакав израз

$$ds^2=du^2+g\,dv^2.$$

Нарочито прост и за нашу цињ подесан израз за ds^2 добијамо, кад је

$$e=g,\quad f=0.$$

Тада је
$$ds^2=e\,(du^2+dv^2).$$

У овоме случају је положај тачака на површини одређен у односу на две ортогоналне системе кривих линија на датичној површини, такозваних изотермама, које узајамним пресецањем образују на површини бесконачно мале квадрате. Овакве системе кривих линија зову се системе линија снимања, пошто се оне, снимањем површине на раван, претварају у Декарт-ове координате.

Да бисмо добили формуле за прелаз од једне системе u,v другој системи p,q диференцијалићемо парцијално једначину

$$ds^2=e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2=e_1\,dp^2+2f_1\,dp\,dq+g_1\,dq^2$$

и добићемо ове изразе

$$e=e_1\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2+2f_1\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial u}+g_1\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2$$

$$f=e_1\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}+2f_1\left[\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right]+g_1\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}$$

$$g=e_1\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2+2f_1\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial v}+g_1\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2.$$

Сличне једначине налазимо заменом количина e, f, g количинама e_1, f_1, g_1 и у исто време параметара u,v параметрима p,q.

4. Ми смо већ приметили да је за проблем конформног снимања од нарочите важности да се линијски елеменат, помоћу изотермне системе, доведе на форму

$$ds^2=n\,(dp^2+dq^2). \qquad (1$$

Према горе реченом добићемо обрасце за претварање системе u,v у изотермну систему p,q, кад једначину

$$ds^2=e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2=n\,(dp^2+dq^2)$$

парцијално диференцијалимо или простије, кад у последњим једначинама ставимо $e_1=g_1=n$, $f_1=0$.

Налазимо формуле

$$2)\quad \begin{cases} e = n\left[\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2\right] \\ f = n\left[\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}\right] \\ g = n\left[\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Да бисмо помоћу образаца 2) израчунали количине p, q, n поступићемо на следећи начин.

На основу прве и треће једн. 2) можемо да ставимо

$$3)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{e}}\,\frac{\partial p}{\partial u} = \cos\alpha \qquad \sqrt{\frac{n}{g}}\,\frac{\partial p}{\partial v} = \cos\beta \\ \sqrt{\frac{n}{e}}\,\frac{\partial q}{\partial u} = \sin\alpha \qquad \sqrt{\frac{n}{g}}\,\frac{\partial q}{\partial v} = \sin\beta, \end{cases}$$

одакле, а с обзиром на другу једн. 2), следује

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta-\alpha) = \frac{n}{\sqrt{eg}}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}\right) = \frac{f}{\sqrt{eg}}.$$

Ово последње је $= \cos\omega$ означивши са ω угао, који захватају међусобом линије u и v. Дакле

$$\beta - \alpha = \omega.$$

Према првој и трећој једн. 2) обрасци 3) могу да се напишу

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2}} = \cos\alpha \qquad \frac{\frac{\partial p}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2}} = \cos\beta$$

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2}} = \sin\alpha \qquad \frac{\frac{\partial q}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2}} = \sin\beta.$$

Одавде видимо да је α угао, који u (за које је $v=0$) чини са p, а β угао, који v (за које је $u=0$) чини са p.

Ако ставимо

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\omega}{2} = \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2},$$

дакле

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}$$

и једн. 3) гласе сада

$$3а)\ \sqrt{\frac{n}{e}}\,\frac{\partial p}{\partial u} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right) \qquad \sqrt{\frac{n}{g}}\,\frac{\partial p}{\partial v} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\ (3c$$

$$3б)\ \sqrt{\frac{n}{e}}\,\frac{\partial q}{\partial u} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right) \qquad \sqrt{\frac{n}{g}}\,\frac{\partial q}{\partial v} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right).\ (3d$$

Ове једначине показују да је

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial p}{\partial u} = \sqrt{e}\,\frac{\partial q}{\partial v}$$

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial q}{\partial u} = \sqrt{e}\,\frac{\partial p}{\partial v},$$

а дају нам и диференцијалне једначине за одређивање параметара p и q

$$dp = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sqrt{e}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)du + \sqrt{g}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)dv\right]$$

$$dq = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sqrt{e}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)du + \sqrt{g}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)dv\right]$$

или

$$\left.\begin{aligned} dp &= \frac{1}{\sqrt{2n}}\left[\sqrt{e(1+\sin\omega)}\,du + \sqrt{g(1-\sin\omega)}\,dv\right] \\ dq &= \frac{1}{\sqrt{2n}}\left[\sqrt{e(1-\sin\omega)}\,du + \sqrt{g(1+\sin\omega)}\,dv\right]. \end{aligned}\right\}\quad (4$$

Интеграљење ових диференцијалних једначина претпоставља познавање количине n.

Има сада да нађемо образац за израчунавање фактора n.

Диференцијалењем 3a) по v, 3c) по u следује

$$\sqrt{\frac{n}{e}}\,\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{n}{e}}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v}$$

$$\sqrt{\frac{n}{g}}\,\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{n}{g}}=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u}.$$

Множењем прве ове једначине са $\sqrt{e}$, друге са $\sqrt{g}$ и одузимањем једно од другог налазимо

$$\sqrt{e}\,\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{n}{e}}-\sqrt{g}\,\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{n}{g}}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{e}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v}+\sqrt{g}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u}\right].$$

Ставимо овде за $\frac{\partial p}{\partial u}$ и $\frac{\partial p}{\partial v}$ њихове вредности из 3a) и 3c), па ћемо добити

$$\sqrt{e}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(l\sqrt{\frac{n}{e}}\right)-\sqrt{g}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(l\sqrt{\frac{n}{g}}\right)=$$

I) $$\frac{1}{2}\left[\sqrt{e}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v}+\sqrt{g}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u}\right]$$

Диференцијалењем 3b) по v, 3d) по u, па онда множењем прве тако добивене једначине са $\sqrt{e}$, друге са $\sqrt{g}$ и одузимањем првог резултата од другог налазимо

$$-\sqrt{e}\,\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{n}{e}}+\sqrt{g}\,\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{n}{g}}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{e}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v}+\sqrt{g}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u}\right].$$

Најзад, кад за $\frac{\partial q}{\partial u}$ и $\frac{\partial q}{\partial v}$ заменимо њихове вредности из 3b) и 3d), долазимо до следећег израза који је аналоган ономе под I)

$$-\sqrt{e}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(l\sqrt{\frac{n}{e}}\right)+\sqrt{g}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(l\sqrt{\frac{n}{g}}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{e}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v}+\sqrt{g}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u}\right]. \qquad \text{(II}$$

Саберимо I) и II) па ћемо добити

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\right]\left[\sqrt{e}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(l\sqrt{\frac{n}{e}}\right)+\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(l\sqrt{\frac{n}{g}}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)\right]\left[\sqrt{e}\,\frac{\partial\omega}{\partial v}+\sqrt{g}\,\frac{\partial\omega}{\partial u}\right],$$

одакле

$$\sqrt{e}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(l\sqrt{\frac{n}{e}}\right)+\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(l\sqrt{\frac{n}{g}}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)}\left(\sqrt{e}\,\frac{\partial\omega}{\partial v}+\sqrt{g}\,\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)=$$

$$\frac{1}{2\,tg\frac{\omega}{2}}\left(\sqrt{e}\,\frac{\partial\omega}{\partial v}+\sqrt{g}\,\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)$$

или, с обзиром да је $\frac{d\frac{\omega}{2}}{tg\frac{\omega}{2}}=d\,l\sin\frac{\omega}{2}$,

$$\sqrt{e}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(l\sqrt{\frac{n}{e}}\right)+\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(l\sqrt{\frac{n}{g}}\right)=\sqrt{e}\,\frac{\partial\, l\sin\frac{\omega}{2}}{\partial v}+\sqrt{g}\,\frac{\partial\, l\sin\frac{\omega}{2}}{\partial u}.$$

Ако овде са леве и десне стране спојимо чланове који су диференцијалени по истој промењивој последња једначина добија краћи вид

$$\sqrt{e}\,\frac{\partial}{\partial v}\,l\left(\frac{\sqrt{\frac{n}{e}}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)+\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial u}\,l\left(\frac{\sqrt{\frac{n}{g}}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)=0.$$

Ставимо

$$l\left(\frac{\sqrt{n}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)=\mathcal{T} \qquad \text{(5}$$

и наша једначина гласи

$$6) \qquad \sqrt{g}\,\frac{\partial T}{\partial u} + \sqrt{e}\,\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} + \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}.$$

Ово је једна линеарна парцијална диференцијална једначина првог реда, чији општи интеграл добијамо Јакоби-евом методом из решења симултаних диференцијалних једначина

$$6a) \qquad \frac{du}{\sqrt{g}} = \frac{dv}{\sqrt{e}} = \frac{dT}{\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}}.$$

Пошто на овај начин добијемо T налазимо и n помоћу формуле 5)

$$5a) \qquad \sqrt{n} = \sin\frac{\omega}{2}\cdot e^{T},$$

а са тиме и на основу једначина 4) параметре p и q.

Примедба. Једначине 4), којима добијамо параметре p и q, опште узев (за ма какво n) нису интеграбилне. Фактор n мора, дакле, да испуни услов да израз за dp и dq начини потпуним диференцијалима. Није тешко уверити се да она вредност за n, коју добијамо помоћу 5) и 6), чини да диференцијали dp и dq, који су изражени формулама 4), постају интеграбилни, тј. да је

$$\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{e(1+\sin\omega)}{n}} = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{g(1-\sin\omega)}{n}}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{e(1-\sin\omega)}{n}} = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{g(1+\sin\omega)}{n}}.$$

И заиста по извршењу назначених диференцијалења и извесних операција долазимо до једначина I) и II) из којих, као и горе, сабирањем и свођењем оних чланова који су диференцијални по истој променљивој добијамо, са означењем 5), диференцијалну једначину 6), чиме је доказано да тако добивено n испуњује услове за интеграбилност диференцијала 4).

5. Претпоставимо на површини оригинала и на површини снимка изотермне координате у којима је

$$ds^2 = n\,(dp^2 + dq^2)$$

$$dS^2 = N\,(dP^2 + dQ^2),$$

одакле, пошто је

$$dS^2 = m\,ds^2,$$

$$dP^2 + dQ^2 = m\frac{n}{N}(dp^2 + dq^2)$$

и пошто су P, Q функције од p, q следују из

$$\left(\frac{\partial P}{\partial p}dp + \frac{\partial P}{\partial q}dq\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial p}dp + \frac{\partial Q}{\partial q}dq\right)^2 = m\frac{n}{N}(dp^2 + dq^2)$$

обрасци

$$\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^2 = m\frac{n}{N} \qquad (7a$$

$$\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = 0 \qquad (7b$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2 = m\frac{n}{N}, \qquad (7c$$

који имају исту форму као и они за снимање равни на раван.

Једначину 7в) можемо да напишемо

$$7в_1)\qquad \frac{\frac{\partial P}{\partial p}}{\frac{\partial Q}{\partial p}} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial q}}{\frac{\partial P}{\partial q}},$$

а упоређењем 7а) са 7с) добијамо

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^2\left[1+\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^2}{\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^2}\right] = \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^2\left[1+\frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^2}\right],$$

одакле, пошто су (према 7в₁) изрази у заградама лево и десно једнаки $\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^2$ или

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \mp \frac{\partial Q}{\partial p}.$$

Замена овога у 7а) и 7с), а с обзиром на 7в₁), даје опет

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \pm \frac{\partial Q}{\partial q}.$$

Парцијалним диференцијалењем претпоследње једначине по q, а последње по p и сабирањем та два резултата добијамо

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial q^2} = 0$$

и аналогно

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial q^2} = 0.$$

Ове две парцијалне ~~једначине~~ диференцијалне

једначине другог реда познате су из теорије функција комплексних аргумената. Њихов општи интеграл

$$P + iQ = \varphi(p + iq) \qquad (8$$

показује да је $P+iQ$ функција комплексне променљиве $p+iq$.

Ако тачка a са изотермним координатама p, q на површини $f(x,y,z)=0$ својим кретањем описује линије на тој површини, онда и одговарајућа тачка A са изотермним координатама P, Q описује на површини $F(X,Y,Z)=0$ линије, које се узајамно секу под истим углом под којим и линије на првој површини. Интеграл 8) одговара, дакле, у свему принципу конформног снимања и раздвајањем стварног од оног са i помноженог дела једначина 8) раствара се на две једначине у којима су одвојено P и Q представљени као функције од p и q.

6. Очевидно да се пренашање ликова са површине на површину, по принципу конформног снимања, може да продужи на колико

било број површина, тако да се последњи резул-
тат пренашања може сматрати као снимак
прве површине на последњу површину.

Према овоме може општи проблем конформног
снимања једне површине на другу да се сведе
на снимање прве површине $f(x,y,z)=0$ на раван
и снимање ове равни на другу површину
$F(X,Y,Z)=0$. Место условних једначина 1) има-
мо једначине

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=n$$
$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}=0$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2=n,$$

тако да је
$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=n(dp^2+dq^2)$$
$$dp^2+dq^2=\frac{1}{n}ds^2.$$

Аналогно
$$\left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)^2=N$$
$$\frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial q}+\frac{\partial Y}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q}+\frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q}=0$$
$$\left(\frac{\partial X}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right)^2=N,$$

тако да је
$$dS^2=dX^2+dY^2+dZ^2=N(dp^2+dq^2)$$

$$dS^2=\frac{N}{n}ds^2$$
$$m=\frac{N}{n}.$$

7. Из онога, што смо казали у прошломе чланку, за-
кључујемо да општи проблем снимања једне по-
вршине на другу површину води истоме чему и
снимање једне равни на другу раван. Пренаша-
њем површине $f(x,y,z)=0$ на раван $\varepsilon(p,q)=0$ и
пренашањем површине $F(X,Y,Z)=0$ на раван
$E(P,Q)=0$ доводимо (ортогоналне) координате
x,y,z у везу са (ортогоналним) координатама
p,q, а тако исто и (ортогоналне) координате
X,Y,Z са (ортогоналним) координатама P,Q.
Значи да су x,y,z функције од p,q
X,Y,Z функције од P,Q.
Ако претпоставимо да ликови на $f=0$, $\varepsilon=0$, $F=0$
и $E=0$ одговарају једно другоме у смислу
конформног снимања, онда су
координате X,Y,Z функције координата x,y,z, као и
координате P,Q функције координата p,q.
Пошто између P,Q и p,q постоји однос
$$P+iQ=\Phi(p+iq)$$
јасно је да се овим интегралом, а подесним

избором координатних система, изражава и зависност тачака на површини снимка $F=0$ од тачака на површини оригинала $f=0$.

У теорији функција комплексних аргумената таква функција дефинише се као количина $W=P+iQ$, која се са својим аргументом $w=p+iq$ мења тако да вредност изводне $\frac{dW}{dw}$ остаје независна од вредности диференцијала dw или како Риман[1] још дефинише као једну количину W која се са променљивом w мења на основу једначине

$$i\frac{\partial W}{\partial p}=\frac{\partial W}{\partial q}.$$

Ова дефиниција води једначинама, које важе за конформно снимање једне равни на другу раван и може, према томе, да се геометријски протумачи да постоји сличност у најмањим деловима између фигуре, коју описује тачка W и фигуре, коју описује тачка w, сматравши P,Q и p,q као ортогоналне координате тачака W и w у двема или једној истој равни.

1) Riemann. Theorie der Abelschen Funktionen. (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 54. 1857.)

Пошто се сличност односи само на бесконачно мале делове, а свака површина може да замисли састављена из бескрајно малих равних делова, тј. може да се посматра као полиедар образован из бесконачно малих равних пљосни, очевидно је облик површина, на којима замишљамо да су повучене координатне системе P,Q и p,q, споредног значаја по ову геометријску репрезентацију и везу између ликова једне и ликова друге површине. Узев на површини изотермне координате, тачке на тој површини одређују се онако исто као што се одређују тачке у равни помоћу Декарт-ових координата. Ако, дакле, комплексне количине W и w (геометријски: положај тачака, које дотичне количине одређују на оним двема површинама) стоје у вези да је $W=\varphi(w)$, онда су тиме испуњени услови, као и у случају двеју равни, тј. услови за конформно снимање.

Приметимо да у тачкама, у којима је $\frac{dW}{dw}$ бесконачно или $=0$, сличност не постоји.

Ако је, пак, W једнозначна и непрекидна функција аргумента w, онда је такав и диференцијални количник $\frac{dW}{dw}$ (чији модуо показује однос између два одговарајућа лучна елемента) и он ни у коме случају није бесконачно велики. Али $\frac{dW}{dw}$ не може да буде ни $= 0$, јер је $\frac{dw}{dW}$ непрекидна функција од W и као таква не може бити бесконачно велики.

8. Једна површина (па дакле и раван) може на другу површину (раван) да се слика на небројено много начина, јер свака веза између P, Q и p, q, која је основана на једначини $P+iQ=\Phi(p+iq)$, даје по један начин сликања. Проблем сликања постаје потпуно одређен тек онда, ако је унапред утврђена форма функције Φ или ако су њене вредности за извесан, ма како мали део на површини слика познате. Ово последње оснива се на познатоме ставу да функције комплексног аргумента, чије су вредности дате за ма како малу област, могу само на један начин да се изван те области непрекидно продуже.

На основу овога става услов, да датим тачкама једне површине (равни) одговарају

дате тачке на другој површини (равни), може да се формулише Лагранж-овом интерполационом формулом, проширујући ову и на комплексне аргументе. Ова интерполациона формула представља функцију, која за познате аргументе добија одређене вредности.

8а. Узмимо два пара тачака $w_1(p_1,q_1)$ и $W_1(P_1,Q_1)$, а тако и $w_2(p_2,q_2)$ и $W_2(P_2,Q_2)$ да одговарају једно другом као слици. Према Лагранж-овој интерполационој формули имамо

$$P+iQ=\frac{(p+iq-p_2-iq_2)}{(p_1+iq_1-p_2-iq_2)}(P_1+iQ_1)+\frac{(p+iq-p_1-iq_1)}{(p_2+iq_2-p_1-iq_1)}(P_2+iQ_2)$$

$$=\frac{(p-p_2)+i(q-q_2)}{(p_1-p_2)+i(q_1-q_2)}(P_1+iQ_1)+\frac{(p-p_1)+i(q-q_1)}{(p_2-p_1)+i(q_2-q_1)}(P_2+iQ_2).$$

Рационалисањем именитеља (множењем бројитеља и именитеља конјугованом комплексном) и пошто извршимо свођења и одвојимо најзад лево и десно стварни део од онога са i помноженог дела, добијамо за P и Q два линеарна израза у форми

$$P=a_1p+b_1q+c_1$$
$$Q=a_2p+b_2q+c_2,$$

где коефицијенти $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ нису један од другог независни. На основу у чл. 5. добивених резултата, да је

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \pm \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \mp \frac{\partial Q}{\partial p},$$

који исказују да је $P+iQ$ функција аргумента $p+iq$, следује

$$a_1 = b_2, \quad a_2 = -b_1$$

и ако ставимо

$$a_1^2 + a_2^2 = k^2$$

$$a_1 = k\cos\alpha, \quad a_2 = k\sin\alpha$$

добићемо

$$P = p.k\cos\alpha - q.k\sin\alpha + c_1$$
$$Q = p.k\sin\alpha + q.k\cos\alpha + c_2.$$

Одавде закључујемо да функциона једначина $P+iQ = \phi(p+iq)$ у овоме случају гласи

$$P+iQ = (p+iq)k(\cos\alpha + i\sin\alpha) + (c_1 + ic_2)$$
$$= (p+iq)ke^{i\alpha} + (c_1 + ic_2)$$

или краће

$$P+iQ = A(p+iq) + B,$$

где су A и B стварни или комплексни коефицијенти.

Овом једначином карактерисана је <u>сличност</u>, тј. такав начин снимања код којег су снимак и оригинал слични у коначним деловима.

86. Замислимо три пара тачака w_1, w_2, w_3 и

W_1, W_2, W_3 да су у односу оригинала и снимка. <u>Лагранж</u>-ова интерполациона формула, пошто извршимо рационалисање именитеља, средимо израз и одвојимо стварни део од имагинарног, даје за P и Q једначине другог степена, које имају вид

$$P = a_1p^2 + b_1q^2 + 2c_1pq + 2d_1p + 2e_1q + f_1$$
$$Q = a_2p^2 + b_2q^2 + 2c_2pq + 2d_2p + 2e_2q + f_2.$$

Услед једначина, које важе за снимање једне равни на другу раван (в. чл. 5.), постоје између коефицијената $a_1, b_1, \dots a_2, b_2, \dots$ односи

$$a_1 = -b_1 = c_2$$
$$a_2 = -b_2 = -c_1$$
$$d_1 = e_2$$
$$d_2 = -e_1.$$

За $q = Const.$ имамо

$$P = a_1p^2 + g_1p + h_1,$$
$$Q = -c_1p^2 + g_2p + h_2$$

и аналогно за $p = Const.$

$$P = -a_1q^2 + k_1q + l_1$$
$$Q = c_1q^2 + k_2q + l_2.$$

Елиминовањем параметра p из прве две једначине и параметра q из последње две једначине добијамо оба пута једначину другог степена између P и Q. То значи, да правама, које су паралелне са координатним осама (као и самим осама) у једној равни одговарају у другој равни линије другог степена као њихови снимци. Ближим испитивањем потврђује се да се ове две системе линија другог степена секу под правим углом, да су, дакле, конфокалне. Једну систему образују конфокалне елипсе, другу систему њима и међусобом конфокалне хиперболе.

Ова врста снимака оснива се на замени

$$P+iQ = A\sin(p+iq).$$

С обзиром на познату формулу

$$\sin(p+iq) = \frac{e^q+e^{-q}}{2}\sin p + i\,\frac{e^q-e^{-q}}{2}\cos p$$

следују обрасци

$$P = A\,\frac{e^q+e^{-q}}{2}\sin p$$

$$Q = A\,\frac{e^q-e^{-q}}{2}\cos p,$$

одакле, елиминовањем параметра p добијамо једначину елипсе

$$\frac{P^2}{A^2\left(\frac{e^q+e^{-q}}{2}\right)^2} + \frac{Q^2}{A^2\left(\frac{e^q-e^{-q}}{2}\right)^2} = 1,$$

а елиминовањем параметра q једначину хиперболе

$$\frac{P^2}{A^2\sin^2 p} - \frac{Q^2}{A^2\cos^2 p} = 1.$$

Да су елипсе (за сваку вредност од q) конфокалне, а тако исто и хиперболе (за сваку вредност од p), како међусобом тако и са елипсама конфокалне видимо из тога што је и за једне и друге квадрат линеарног ексцентрицитета

$$A^2\left(\frac{e^q+e^{-q}}{2}\right)^2 - A^2\left(\frac{e^q-e^{-q}}{2}\right)^2 = A^2$$

$$A^2\sin^2 p + A^2\cos^2 p = A^2,$$

дакле линеарни ексцентрицитет свих ових линија константан $= A$.

8c. Мењањем облика функције φ добијамо бесно разне начине конформног снимања.

Вредно је поменути, јер је за Геометрију важан случај

$$P+iQ = \frac{A(p+iq)+C}{B(p+iq)+D},$$

где су A, B, C, D константе. Овај начин снимања води кружноме сродству (Kreisverwandtschaft), које је први проучавао Мебиус (A. F. Möbius, 1790–1868). Код овога снимања имамо у равнима системе изогоналних кругова, тј. кругове који се секу под истим углом.

9. Ми знамо да је модул m уопште функција координата и да се, према томе, мења од тачке до тачке. Услед тога је снимак увек, више или мање, развучен и оригиналу сличан само у бесконачно малим деловима. За специјалне криве линије или при нарочитом избору површине снимка овај пропорционални фактор за одговарајуће лучне елементе може да буде константан тако да снимак постане сличан оригиналу и у коначним деловима. Случајеви, у којима се снимање са површине на површину може да изврши тако да је $m = \mathrm{Const.}$, доводе проучавању једначина

$$\mathcal{E} = ce$$
$$\mathcal{F} = cf$$
$$\mathcal{G} = cg$$

(в. чл. 2.), где је

$$ds^2 = e\,dp^2 + 2f\,dp\,dq + g\,dq^2$$
$$dS^2 = \mathcal{E}\,dp^2 + 2\mathcal{F}\,dp\,dq + \mathcal{G}\,dq^2.$$

Означимо са R_1 и R_2 главне полупречнике кривине задате површине. Мера њене кривине је $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ и она је, као што знамо, функција од

e, f, g и њихова прва два диференцијална количника по p и q.[1] Ако у дотични образац ставимо $e = \frac{\mathcal{E}}{c}$, $f = \frac{\mathcal{F}}{c}$, $g = \frac{\mathcal{G}}{c}$ наћићемо да је кривина $= \frac{K}{c}$. То значи да површина, за коју је код снимања задате површине на њу, модул $m = c$, има у свакој тачци кривину $\frac{K}{c}$, где K означава кривину оригиналне површине у одговарајућој тачци.

Специјалан пример горњег случаја је

$$dX = c\,dx, \quad dY = c\,dy, \quad dZ = c\,dz$$

или

$$X = cx + c', \quad Y = cy + c'', \quad Z = cz + c'''.$$

Очевидно да је површина, чије су тачке претстављене координатама X, Y, Z, слична задатој површини и у сличноме положају са њоме. Подесним избором координатног почетка можемо произвољне интеграционе константе

[1] Образац гласи

$$4(eg - f^2)^2 K = e\left[\frac{\partial e}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial q} - 2\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} + \left(\frac{\partial g}{\partial q}\right)^2\right] +$$
$$f\left[\frac{\partial e}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial e}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - 2\frac{\partial e}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial q} + 4\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} - 2\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial p}\right] +$$
$$g\left[\frac{\partial e}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial p} - 2\frac{\partial e}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{\partial e}{\partial q}\right)^2\right] -$$
$$2(eg - f^2)\left[\frac{\partial^2 e}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p^2}\right].$$

c', c'', c''' да уклонимо, тако да имамо

$$X = cx, \quad Y = cy, \quad Z = cz.$$

Одавде видимо да између потега тачке снимка и тачке оригинала постоји константан однос

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = c,$$

а пошто је и

$$\frac{X}{P} = \frac{x}{\rho}, \quad \frac{Y}{P} = \frac{y}{\rho}, \quad \frac{Z}{P} = \frac{z}{\rho}$$

следује и то да су потези P и ρ паралелни.

10. Ако је модул m за све тачке $= 1$, онда између тачака на површини снимка и тачака на површини оригинала постоје једначине

$$\mathcal{E} = e$$
$$\mathcal{F} = f$$
$$\mathcal{G} = g.$$

Овакве две површине имају, дакле, исту меру кривине и могу да се развију једна на другу (оне су девелопабл) на основу познате Гаус-ове теореме по којој, кад се једна савитљива, али не растегљива површина на ма какав било начин деформише, тј. промене тако да одстојања двеју тачака, мерена на површини, остану непромењена, онда мера кривине у свима тач-

кама остаје иста каква је била пре деформације.

Да површине, за које је $m = 1$, могу да се развију једна на другу, тј. да се једна површина може да разастре на другу површину, а да се не направе боре односно да се површина не раскида, може просто да се објасни на следећи начин. Нека су s_1, s_2, s_3 и S_1, S_2, S_3 три лука на површини $f = 0$ и три лука на површини $F = 0$, који везују три пара одговарајућих тачака на тим двема површинама. На основу претпоставке је $s_1 = S_1$, $s_2 = S_2$, $s_3 = S_3$. Тада је и површина фигуре, која је образована из лукова s_1, s_2, s_3 једнака површини фигуре из лукова S_1, S_2, S_3. О томе ћемо се уверити, кад узмемо у обзир да бескрајно мали троуглови, које можемо да уцртамо у ове две фигуре и који узајамно стоје у односу снимка и оригинала, имају исту површину у снимку као и у оригиналу, јер су како стране тако и углови појединце једнаки. Доводећи темена снимка до поклапања са теменима његовог оригинала учинићемо да се таква два троугла (услед једнаких углова и једнаких страна) потпуно поклапају. Деформисањем једне површине може поклапање ових бесконачно малих делова да се постепено прошири на све партије и да се тако да се доведу до поклапања и коначни делови датичних површина.

Из горе реченога следује да су снимци геодетских линија такође геодетске линије, ако се површине могу да развију једна на другу, јер се, при развијању једне површине на другу, најкраће растојање (геодетска линија) између двеју тачака на првој површини може поклопити само са најкраћим растојањем (геодетском линијом) између одговарајућих тачака на другој површини.

Ако једну површину представља раван, онда се геодетске линије друге површине (коју замишљамо да се у равни може развити) претварају у равни у праве линије и обратно.

На случај да се површине оригинала и снимка секу, онда су тачке пресека саме себи снимци. У пресеку се оригинал и снимак поклапају и модуо је за линију пресека = 1. Ово се види и по томе што је за тачке пресека

(као тачке које су заједничке обема површинама), $X=x$, $Y=y$, $Z=z$, $dS=ds$. То исто важи и за случај да се на површинама налазе конгруентне линије, које се могу сматрати као пресек њихов или њихових делова. Површине могу бити иначе ма какве.

11. Ако је површина девелопабл у равни, онда се израз за ds^2 из његове опште форме

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

помоћу једначина 4) у гл. 4. и с обзиром да је $n = \text{Const.}$[1], нпр. $n=1$, може да доведе на прости вид

$$ds^2 = dp^2 + dq^2.$$

Овако добивени параметри p и q представљају линије снимања и претварају се, развијањем површине у раван, у ортогоналне системе правих линија.

Свака површина, која се да развити у раван, може се замислити да је постала кретањем праве линије, коју зовемо изводником или генератрисом.

---

1) услед чега, према раније већ учињеној примедби, изрази 4) у гл. 4. представљају потпуне диференцијале и могу, дакле, да се интеграле.

Ако ове изводнице (као геодетске линије) узмемо за параметарске линије u, а њихове ортогоналне трајекторије (које су код ових површина такође геодетске линије) за параметарске линије v, онда израз за ds^2 добија непосредно форму удешену за снимање

$$ds^2 = dp^2 + dq^2.$$

Пошто геодетским линијама на површини одговарају у равни праве линије као и обратно на којој систем правих линија у равни, које се секу под правим углом, одговара једна ортогонална система геодетских линија на површини, следује да ћемо из једне системе геодетских линија p, q добити другу систему геодетских линија p_1, q_1 на основу трансформационих једначина

$$p_1 = p\sin\alpha - q\cos\alpha$$
$$q_1 = p\cos\alpha + q\sin\alpha.$$

1. Пример. Код цилиндарских површина је у свакој тачци један од главних пречника кривине бесконачно велики и мера кривине дакле, као и код равни, равна нули. Цилиндарске површине могу, према томе, да се развију једна на другу, па и у раван и могу да се

сниме једна на другу и у раван тако да је $m=1$.

Узев z-осу у правцу генератрисе општа једначина за цилиндричне површине има вид

$$y = F(x).$$

Заменом $x = v,\ \ y = F(v),\ \ z = p$

добијамо $$ds^2 = dp^2 + \left[1 + F'^2(v)\right] dv^2$$

и ако ставимо

$$\sqrt{1 + F'^2(v)}\, dv = dq$$

имамо за линиски елемената формулу

$$ds^2 = dp^2 + dq^2,$$

где параметри p и q дају линиске системе снимања, које се, развијањем цилиндричне површине у раван, претварају у ортогоналне системе правих линија.

Једначине

$$p_1 = p\sin\alpha - q\cos\alpha$$
$$q_1 = p\cos\alpha + q\sin\alpha$$

представљају ма коју ортогоналну геодетску систему линија на цилиндарској површини.

2. Пример. Сличан пример дају конусне површине. Оне се такође могу да развију једна на другу и у раван и могу да сниме једна на другу и у раван тако да је $m=1$.

За параметарске линије p узећемо и овде генератрисе, тако да је

$$dp = \frac{dz}{\cos\gamma},$$

где γ означава угао, који заклапају генератрисе са z-осом. Генератрисама ортогоналну систему добијамо из

$$dq = \sqrt{ds^2 - \frac{dz^2}{\cos^2\gamma}}.$$

12. Док се код снимања на каквих површина пренашају на снимак само она својства линија, које се односе на њихово узајамно пресецање и законе, којима ово подлежи, дотле код снимања површина, које могу да се развију једна на другу и у раван, долази још (услед тога што геодетске линије у оригиналу и снимку једне другој одговарају) да се пренашају и она својства, која стоје у вези са дужинама мерена на датичним површинама. Проблем снимања је, у овоме случају, идентичан са развијањем површине на површину и онда је по себи разумљиво зашто се поменута својства оригинала пренашају на снимак. Путем снимања ми решавамо тада задатак да се на датичној површини нађе фигура која

има иста својства као и нека фигура у равни. То је, очевидно, она фигура на површини која, развијањем површине у раван, постаје идентична са задатом фигуром у равни. Тако нпр. елипса (у равни) може се сматрати као снимак једне линије на каквој површини (која је девелопабл у равни) код које је збир геодетских (најкраћих) одстојања ма које тачке на њој од двеју сталних тачака на површини константан и чије геодетске тангенте у једној тачци на њој чине са најкраћим одстојањима додирне тачке од двеју сталних тачака једнаке углове.

Разуме се да ово важи за ма какве површине, које могу да се развију једна на другу. Познато је да се површине са константном кривином могу да развију на лопти. Снимање такве површине на другу коју површину исте врсте или на лопту врши се на исти начин као и снимање једне девелопабле површине на раван. Пошто је у оваквим случајевима модуо $m = Const.$, следује се сва горе поменута својства једне фигуре на површини константне кривине преносе и на њен снимак на лопти.

Примери.

13. Површине другог степена. — Параметре за конформно снимање површина другог степена добијамо најлакше употребом елиптичних координата у простору. Познато је да се тачке у простору могу да одреде као пресечне тачке трију конфокалних површина другога степена. Са тиме да се тачке налазе на једној површини другога степена остају свега два параметра, који одређују положај тачака на дотичној површини. Пошто су пресечне линије конфокалних површина другог степена заједничке линије кривине тих површина, видимо да је овим свака тачка на површини одређена у систему двеју ортогоналних линиских система.

Нека је задата површина елипсоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$
Површине, које су конфокалне с овим елипсоидом, представљене су једначинама
$$\frac{x^2}{a^2-u}+\frac{y^2}{b^2-u}+\frac{z^2}{c^2-u}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2-v}+\frac{y^2}{b^2-v}+\frac{z^2}{c^2-v}=1,$$
где треба узети

$$a^2>u>b^2>v>c^2,$$
тако да прва једначина представља двокрилне, а друга просте хиперболоиде. Ма која тачка на елипсоиду одређена је извесним спрегом параметара u и v; $u=\mathrm{Const.}$ даје једну, $v=\mathrm{Const.}$ даје другу систему линија кривине.

Из горње три једначине следује
$$x^2=a^2\frac{(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$
$$y^2=b^2\frac{(b^2-u)(b^2-v)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}$$
$$z^2=c^2\frac{(c^2-u)(c^2-v)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)},$$
одакле логаритамским диференцијалењем
$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{2}\frac{x}{a^2-u},\quad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{2}\frac{y}{b^2-u},\quad \frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{1}{2}\frac{z}{c^2-u},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{2}\frac{x}{a^2-v},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{2}\frac{y}{b^2-v},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{1}{2}\frac{z}{c^2-v},$$
тако да у изразу
$$ds^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^2$$
$$=e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2$$
ваља ставити
$$e=\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(a^2-u)^2}+\frac{y^2}{(b^2-u)^2}+\frac{z^2}{(c^2-u)^2}\right]$$
$$f=\frac{1}{4}\left[\frac{x}{a^2-u}\frac{x}{a^2-v}+\frac{y}{b^2-u}\frac{y}{b^2-v}+\frac{z}{c^2-u}\frac{z}{c^2-v}\right]$$
$$g=\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(a^2-v)^2}+\frac{y^2}{(b^2-v)^2}+\frac{z^2}{(c^2-v)^2}\right].$$

Одузимањем једначине друге и треће површине једну од друге уверићемо се да је $f=0$, које је, у осталом, и по томе јасно, пошто се све три површине секу нормално. Најзад, ако у изразима за e и g ставимо за $\frac{x^2}{a^2-u}, \frac{y^2}{b^2-u}, \frac{z^2}{c^2-u}, \frac{x^2}{a^2-v}, \frac{y^2}{b^2-v}, \frac{z^2}{c^2-v}$ њихове вредности, које следују из горњих једначина за x^2, y^2, z^2, добићемо

$$e = \frac{1}{4}\frac{u(u-v)}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}$$

$$f = 0$$

$$g = -\frac{1}{4}\frac{v(u-v)}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}.$$

Овај резултат може геометрски лако да се протумачи. Означимо са $d\sigma_1$ елеменат пресечне линије прве и друге површине, дакле елеменат линије кривине $v=$ Const., са $d\sigma_2$ елеменат пресечне линије прве и треће површине, дакле елеменат линије кривине $u=$ Const. Тада је

$$d\sigma_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}\, du = \sqrt{e}\, du$$

$$d\sigma_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\, dv = \sqrt{g}\, dv$$

и према томе

$$ds^2 = d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2.$$

Да бисмо израз

$$ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

довели на вид

$$ds^2 = n(dp^2 + dq^2)$$

употребићемо једн. 4) у чл. 4., које, с обзиром да је овде $\omega = 90°$, дакле $\sin\omega = 1$, гласе

$$dp = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{e}\, du$$

$$dq = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{g}\, dv.$$

За фактор n имамо према обрасцима I) и II) у чл. 4.

$$\frac{\partial}{\partial v} l\sqrt{\frac{n}{e}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} l\sqrt{\frac{n}{g}} = 0.$$

Ово показује да је $\frac{n}{e}$ независно од v, а $\frac{n}{g}$ независно од u. С обзиром на горње вредности за e и g можемо да ставимо

$$n = C(u-v)$$

и добијамо за p и q обрасце

$$dp = c\sqrt{\frac{u}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}}\, du$$

$$dq = c\sqrt{\frac{-v}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}}\, dv.$$

За лук S имамо формулу

$$S = c\int\frac{ds}{\sqrt{u-v}}.$$

У појединости овога проблема нећемо улазити, једно што је то изван оквира ове расправе, друго што је писао у своме раду Conforme Abbildung des elliptischen Paraboloïds auf die Ebene. Inauguraldissertation, 1885. то исцрпно учинио са једном од тих површина 1).

14. <u>Обртне површине</u>. — Један од простијих случајева, који је, због његове примене на обртни елипсоид и лопту, нарочито важан по Картографију и Вишу Геодезију, то је конформно снимање обртних површина.

Лако је увидети какав избор у погледу линијских система $u = Const.$ и $v = Const.$ треба овде учинити да би израз за ds^2 добио на вид

$$ds^2 = du^2 + g\,dv^2.$$

Ма коју тачку на обртној површини можемо да сматрамо као пресек једне меридијанске линије и једног паралелног круга. Ове системе линија секу се под правим углом, а сем тога је система меридијанских линија у исто време и

1) За општи (троаксијални) елипсоид постоји такав рад од Шеринг-а (E. Schering, Über die conforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene. Göttingen, 1858.), који је награђен од филозофског факултета Гетингенског Универзитета.

геодетска.

Општа једначина обртних површина, узев обртну осу као z-осу, може да се напише

$$\sqrt{x^2+y^2} = \mathcal{F}(z).$$

Заменом

$$x = \mathcal{F}(z)\cos v$$
$$y = \mathcal{F}(z)\sin v$$
$$z = z$$

добијамо

$$ds^2 = \left[1+\mathcal{F}'(z)^2\right]dz^2 + \mathcal{F}(z)^2 dv^2,$$

одакле, кад ставимо

$$\sqrt{1+\mathcal{F}'(z)^2}\,dz = du$$
$$\mathcal{F}(z)^2 = g,$$

следује непосредно израз

$$ds^2 = du^2 + g\,dv^2.$$

С овим што је

$e = 1$

$f = 0$, дакле $\omega = \frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\partial\omega}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial\omega}{\partial v} = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right) = 0,\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right) = 1\right)$

$g = \mathcal{F}(z)^2$,

а на основу једн. I) и II) у чл. 4. јесте

$$\frac{\partial}{\partial v} l\sqrt{n} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial u} l\frac{\sqrt{n}}{\mathcal{F}(z)} = 0.$$

Из прве једначине видимо да је n независно од v, из друге да је

$$\frac{\sqrt{n}}{\mathcal{F}(z)} = C, \qquad \sqrt{n} = C\mathcal{F}(z).$$

Према овоме, а помоћу једн. 4) у чл. 4. налазимо

$$dp = \frac{c}{\mathcal{F}(z)}\,du = \frac{c}{\mathcal{F}(z)}\sqrt{1+\mathcal{F}'(z)^2}\,dz$$

$$dq = c\,dv = c\,d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x},$$

дакле

$$p = c\int\frac{\sqrt{1+\mathcal{F}'(z)^2}}{\mathcal{F}(z)}\,dz + c'$$

$$q = c\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + c''.$$

15. Обртни елипсоид. — Једначина обртног елипсоида

1) $$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Претпоставимо, као што је код наше Земље, $a > b$. У томе случају a представља полупречник екватора, b половину обртне осе.

Положај једне тачке на елипсоиду одређен је њеним координатама x, y, z, а можемо да одредимо и на овај начин. Кроз тачку положимо меридијан (полуелипсу) и угао, који тај меридијан заклапа са почетним меридијаном (оним који пролази кроз x-осу), бројећи тај угао од позитивног правца x-осе на позитивном правцу y-осе по екватору од 0 до 360°, зовемо (географском) дужином λ дотичне тачке на елипсоиду.

Даље замишљамо у тачци повучену нормалу на елипсоид, тј. нормалу на тангенцијалну раван у дотичној тачци. Угао, који та нормала гради са равни екватора зовемо (географском) ширином β тачке на елипсоиду. Тај угао бројимо од 0 до +90° у правцу позитивне z-осе и од 0 до −90° у правцу негативне z-осе. Са овом погодбом имамо

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\lambda &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\beta &= \frac{a^2 z}{\sqrt{a^4z^2+b^4(x^2+y^2)}}.^{1)} \end{aligned}\right\} \quad (2$$

1) Ову последњу формулу добијамо из познатих образаца за углове које нормала на површину $\mathcal{F}(x,y,z)=0$ у тачци x, y, z чини са координатним осама $\cos\alpha = \dfrac{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2}}$. У нашем примеру (елипсоида) је $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y} = \frac{2y}{a^2}$, $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z} = \frac{2z}{b^2}$ на основу чега, пошто је $\gamma = 90° - \beta$ (β = геогр. ширини) следује $\sin\beta = \dfrac{a^2z}{\sqrt{a^4z^2+b^4(x^2+y^2)}}$.

Из последње једначине добијамо

$$x^2+y^2=\frac{a^4}{b^4}z^2\operatorname{cotg}^2\beta,$$

које у вези са једн. 1) даје

$$x^2+y^2=\frac{a^4\cos^2\beta}{a^2\cos^2\beta+b^2\sin^2\beta},\quad z^2=\frac{b^4\sin^2\beta}{a^2\cos^2\beta+b^2\sin^2\beta}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{a^2\cos\beta}{\sqrt{a^2\cos^2\beta+b^2\sin^2\beta}},\quad z=\frac{b^2\sin\beta}{\sqrt{a^2\cos^2\beta+b^2\sin^2\beta}}.$$

С овим, а према обрасцима 2)

$$x=\sqrt{x^2+y^2}\cos\lambda,\quad y=\sqrt{x^2+y^2}\sin\lambda,$$

налазимо следеће трансформационе формуле

$$3)\quad\left\{\begin{aligned} x&=\frac{a\cos\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}\\ y&=\frac{a\sin\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}\\ z&=\frac{a(1-e^2)\sin\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\end{aligned}\right.$$

где означава $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$, којима су ортогоналне координате x, y, z изражене географским координатама λ, β.

Да бисмо израз за линиски елемент превели из форме $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ на вид

$$ds^2=e\,d\lambda^2+2f\,d\lambda\,d\beta+g\,d\beta^2$$

образоваћемо

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}=-\frac{a\sin\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\quad \frac{\partial y}{\partial\lambda}=\frac{a\cos\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\quad \frac{\partial z}{\partial\lambda}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\beta}=-\frac{a(1-e^2)\cos\lambda\sin\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{3/2}},\quad \frac{\partial y}{\partial\beta}=-\frac{a(1-e^2)\sin\lambda\sin\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{3/2}},\quad \frac{\partial z}{\partial\beta}=\frac{a(1-e^2)\cos\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{3/2}}$$

и налазимо

$$e=\frac{a^2\cos^2\beta}{1-e^2\sin^2\beta},\quad f=0,\quad g=\frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\sin^2\beta)^3}. \qquad (4$$

Фактор n можемо да определимо помоћу једн. I) у гл. 4., која пошто је $\omega=90°$, гласи

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\,l\sqrt{\frac{n}{e}}=0,$$

одакле $\frac{n}{e}=\mathrm{Const.}$ или простије $n=e$, дакле

$$n=\frac{a^2\cos^2\beta}{1-e^2\sin^2\beta}. \qquad (5$$

С овим, а на основу једн. 4) у гл. 4., добијамо

$$dp=d\lambda$$

$$dq=(1-e^2)\frac{d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)\cos\beta},$$

одакле интеграљењем (узев за доње границе интеграла $\lambda=0$ и $\beta=0$)

$$\left.\begin{aligned} p&=\lambda\\ q&=l\left[\operatorname{tg}\left(45°+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right].\end{aligned}\right\}\qquad (6$$

Из последње формуле видимо да она престаје важити за $\beta=\pm 90°$, јер је тада $q=\infty$, а (према обрасцу 5) $n=0$.

Према добивеним обрасцима 6) и на основу гл. 5. опште решење конформног снимања обртног елипсоида на раван обухваћено је формулом

7) $$X+iY=\Phi\left\{\lambda+il\left[tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\}.$$

Узев у обзир да је за Декарт-ове координате $dS^2=dX^2+dY^2$, дакле $N=1$, а на основу формуле 7а) у чл. 5.

$$m=\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)^2}{n}N$$

и пошто је $$n=\frac{a^2\cos^2\beta}{1-e^2\sin^2\beta}$$

имамо за модуо карте образац:

7а) $$m=\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)^2}{a^2\cos^2\beta}\left(1-e^2\sin^2\beta\right).$$

16. Лопта. — За лопту са полупречником a добијамо обрасце, кад у једначинама 5), 6), 7) и 7а) ставимо $a=b$, $e=0$. Имамо

1) $$\begin{cases} p=\lambda \\ q=l\,tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right) \end{cases}$$

1а) $$n=a^2\cos^2\beta.$$

За опште решење конформног снимања лопте на раван постоје формуле

2) $$X+iY=\Phi\left\{\lambda+il\,tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\right\}$$

2а) $$m=\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)^2}{a^2\cos^2\beta}.$$

17. Снимање обртног елипсоида на лопту. — Означимо, као и горе, са λ и β (географску) дужину и ширину једне тачке на обртноме елипсоиду, са $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ дужину и ширину одговарајуће тачке на лопти са полупречником r. Тада је према формулама 5) и 6) у чл. 15. и формулама 1) и 1а) у чл. 16.

$$p=\lambda$$
$$q=l\left[tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]$$
$$n=\frac{a^2\cos^2\beta}{1-e^2\sin^2\beta}$$

$$P=\mathcal{L}$$
$$Q=l\,tg\left(45^\circ+\frac{\mathcal{B}}{2}\right)$$
$$N=r^2\cos^2\mathcal{B}$$

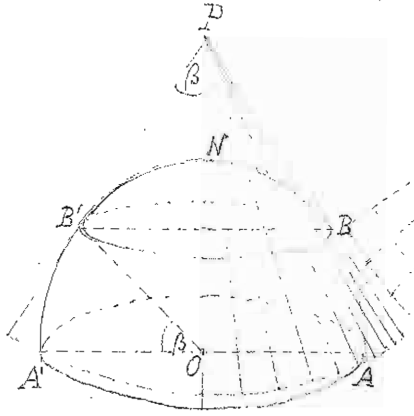
и према томе опште решење конформног снимања обртног елипсоида на лопту представљено формулама

$$\mathcal{L}+il\,tg\left(45^\circ+\frac{\mathcal{B}}{2}\right)=\Phi\left\{\lambda+il\left[tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\} \quad (1$$

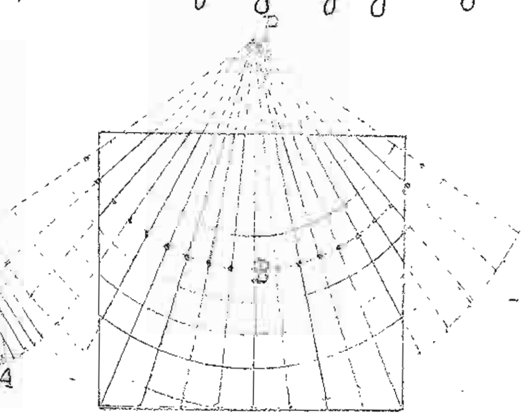
$$m=\frac{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial\, l\,tg\left(45^\circ+\frac{\mathcal{B}}{2}\right)}{\partial\lambda}\right)^2}{a^2\cos^2\beta}\,r^2\cos^2\mathcal{B}\cdot\left(1-e^2\sin^2\beta\right). \quad (1a$$

II
Примене у Картографији
1.
О картографским пројекцијама уопште.

18. Пошто је наша земна лопта једна у свима правцима крива површина и као такве њен (смањени) снимак не може да се разастре у раван (хартије) ми гледамо да ублажимо ту тешкоћу пројектовањем сфере на другу површину која може да се развије у раван, нпр. на омотач једне купе. Ми замишљамо око (смањене) земне лопте обавијену купу, која



Сл.1.



Сл.2.

лопту додирује по средњем ~~меридијану~~ упореднику (BB') онога дела сфере који снимамо.

Врх купе узимамо у продужењу земне осе (ON). У расклопу купе (снимку) меридијани се показују као праве које полазе из тачке P (врха купе) и секу кружне концентричне упоредике (чије је заједничко средиште у тачци P) под правим углом. Овако се снимање зове нормална конусна пројекција. Она је у принципу примењена још од Птоломеја (150 пре Хр.). Пошто се у близини додирног круга омотач купе у великој мери прилагођава сферној површини то се делови лопте у томе појасу доста верно снимају. Због тога је ова врста пројекције подесна само за области које се простиру поглавито од истока ка западу.

Меркатор је (1554) знатно усавршио овај начин пројекције пренашањем дужинских степени сразмерно њиховој величини место по средњем упореднику дуж два упоредника која су подједнако удаљена од средњег. Овим се грешке услед развучености снимка своде на половину.

Приближавањем додирног круга (купе са сфером) екватору угао купе (∡ BPB') по„стаје оштрији тако да за сами екватор (узевши га за средњег упоредника снимка) купа се претвара у ваљак. По развијању ваљка у раван меридијани и упоредници показују се као две системе паралелних правих које се узајамно секу ортогонално. Овако сни„мање се зове нормална цилиндарска пројекција.

Приближавањем додирног круга полу N угао пројекционе купе постаје све тупљи, центар пројекције (врх купе) ближи се полу и најзад кад P падне у N купа се претвара у раван. Упоредници се показују као концентрични кругови описани из тачке N. Углови, под којим се меридијани секу пренашају се у ни„ховој правој величини. Снимање се зове нормална азимутска пројекција.

У извесним случајевима (који зависе од облика и положаја ~~од~~ оног дела земље по„вршине који хоћемо да снимимо) угодно је да се, место правог пројекционог конуса PBB' узме

коса купа, чија оса PO није нормална на ква„тору односно упореднику BB'. Таква се про„јекција зове коса. Најзад, ако осу PO уз„немо у равни екватора добијамо еквато„реалну или трансверзалну пројекцију.

Пошто се се лопта не може да развије у раван, то није могуће снимање извршити тако да се све особине оригинала пренесу на снимак, тј. тако да снимак буде у сваком погледу сли„чан оригиналу. Ми смо принуђени да извесне особине жртвујемо на рачун других. Две су осо„бине најважније код конструкције карата (сни„мање лопте на раван). Једна је особина да се облик (контуре) по могућству сачува. То се по„стиже великим делом пројектовањем по прин„ципу конформног снимања код којег се углови узајамног пресецања појединих линија пре„нашају у њиховој правој величини и услед чега између снимка и оригинала постоји сличност у најмањим деловима. Такве су пројекције изогоналне (winkeltreu).

Друга главна особина, коју желимо такође да по могућству сачувано, то је <u>еквивалентност</u> (flächentreu), која захтева да се величина површине пренаша пропорционално њеној правој мери.

Ове две особине искључују једна другу код сваке површине која не може да се развије, па дакле и код лопте. Изогонални снимци нису еквивалентни, а еквивалентни снимци нису изогонални.

Према овоме се код конструкције мреже карата поступа у главноме по овим принципима.

1) пројекције су <u>ортоморфне</u>, <u>конформне</u> или <u>изогоналне</u>.

2) пројекције су <u>еквивалентне</u>.

3) пројекције нису ни конформне ни еквивалентне, него је узето друго какво карактерно својство за директиву. Овде долазе <u>посредујуће</u> пројекције код којих је узета извесна средина између оних пројекција под 1) и 2), сведени недостатке једне и друге врсте на известан минимум поступајући при томе по неком одређеном начину.

Вршећи снимање по једном од горе наведених

начина: конусним, цилиндарским или азимутским пројектовањем, а следујући једном од поменутих начела, долазимо до конформног, еквивалентног или посредујућег конусног, цилиндарског или азимутског снимања.

Код сви начина снимања основу чине меридијанске линије, док се систем упоредника мења према захтевима која условљавају принципи конформности, еквивалентности или ма које друге важне особине о којима при снимању треба водити рачуна.

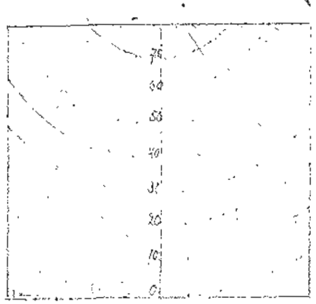
Поменимо најзад још неке врсте пројекција које се често примењују.

Кад се на нормално конусним, цилиндарским или азимутским мрежама са еквидистантним упоредницима пренесу дужински степени сразмерно њиховој правој дужини, које они имају на дотичним упоредницима и добивене тачке споје добију се као меридијани извесне трансцендентне линије, а делови мреже постају еквивалентни. <u>Breusing</u> је ову групу пројекција назвао <u>abweitungstreu</u>.

Ову врсту конусних и цилиндарских пројекција налазимо код свију старијих карата земаља.

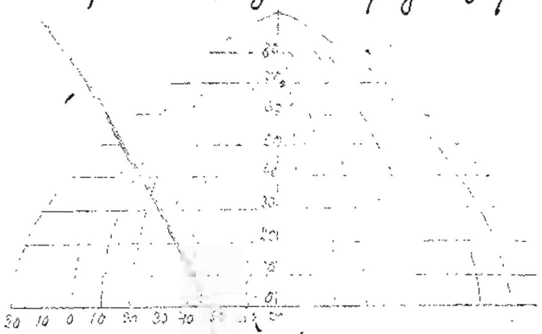
Пренесимо на упоредницима обичне конусне или цилиндарске пројекције са еквидистантним упоредницима дужинске степене у сразмери њихове праве величине од средњег

Боне-ова пројекција



сл. 3.

Фламстид-ова пројекција



сл. 4.

па ћемо добити мрежу по којој махом цртане карте у атласима. Прва (конусна) је позната под именом Bonne-ове пројекције, а друга (цилиндарска) (ма да је њен прави творац Меркатор, 1606.) под именом Sanson-ове (1650.) или Flamsteed-ове (1729.) пројекције. Код обеју је средњи меридиан представљен једном правом. Остали меридиани у колико су удаљенији од средњег меридиана имају све већу кривину.

Услед тога развученост постаје на крајевима карте врло осетна, а нарочито код снимака већих просторија, нпр. Азије, Африке итд. Обе су пројекције еквивалентне пројекције и могу да се употребе кад удаљења од средњег меридиана нису велика.

Ако паралелне кругове, који су по меридиану еквидистантни опишемо полупречницима пропорционално котангентама њихових географских ширина, а дужинске степене пренесемо по њима сразмерно њиховој правој величини од почетног меридиана добићемо такозвану поликонусну пројекцију, која је веома подесна за снимање земаља које се простиру више у меридиалноме, а мање у правцу источно-западноме, као нпр. Египат.

Поменимо најзад полиедарску пројекцију, која се у новије доба употребљује, тако нпр. код немачке генералштабне карте у размери 1:100000 и карте некадање Аустро-Угарске у секцијама и размери 1:75000. Овде се пројектовање врши на пљосни једнога полиезра. Област, коју треба снимити, подељена је меридианима и паралелним круговима на тако мале трапезе да се сваки од њих може (према узетој размери карте) снимити на једном листу хартије подесне величине. Трапези су узети у толикој мери мали да се могу сматрати као равни четвороуглови. Но пошто се код карте у њеној целини води рачуна о кривини земље, разуме се, да се цела карта не сме сматрати као раван снимак који је састављен из појединих листова. За мањи број секција, које се граниче, одступање од равни је незнатно и мали број таквих секција може се, ипак, саставити.

После ових кратких напомена о картографским пројекцијама уопште прелазимо, у смислу програма наше расправе, на примене конформног снимања у Картографији.

2.

Меркатор-ова пројекција.

19. Лопта. — Као опште решење конформног снимања лопте на раван нашли смо формуле

$$X+iY=\phi\left\{\lambda+i\,l\,tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\right\}$$

$$m=\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)^2}{a^2\cos^2\beta}$$

(в. обрасце 2) и 2а) у чл. 16.). Према форми функције ϕ добићемо разне врсте снимања лопте на раван. Узмимо најпростију форму функције, а то је

$$\phi(w)=kw,$$

где k означава једну сталну количину. У овом случају имамо формуле

$$\left.\begin{aligned} X &= k\lambda \\ Y &= k\,l\,tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (1$$

и пошто је

$$\frac{\partial X}{\partial\lambda}=k,\quad \frac{\partial Y}{\partial\lambda}=0$$

$$m=\frac{k^2}{a^2\cos^2\beta},$$

дакле модуо карте

$$\sqrt{m}=\frac{k}{a\cos\beta}. \qquad (1a$$

Из једн. 1) изводимо следеће закључке.

За $\lambda=0$ је $X=0$. То значи да је први меридиан представљен Y-осом.

За ма какво $\lambda=Const.$ је и $X=Const.$, а то значи да се меридиани пренашају у равни као праве линије паралелне са Y-осом и то тако да су одстојања њихова од Y-осе пропорционална географским дужинама дотичних меридијана. Меридијански снимци за $\lambda = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots$ образују еквидистантне са Y-осом паралелне праве. За $\beta = 0$ је $Y = 0$, дакле екватор представљен X-осом.

За ма какво $\beta = Const.$ је и $Y = Const.$ Значи да се паралелни кругови пресликавају у равни као праве линије паралелне са X-осом. Отуда што је Y изражено тригонометриском тангентом угла β видимо да размак између ових паралелних правих постаје све већи од екватора на полу.

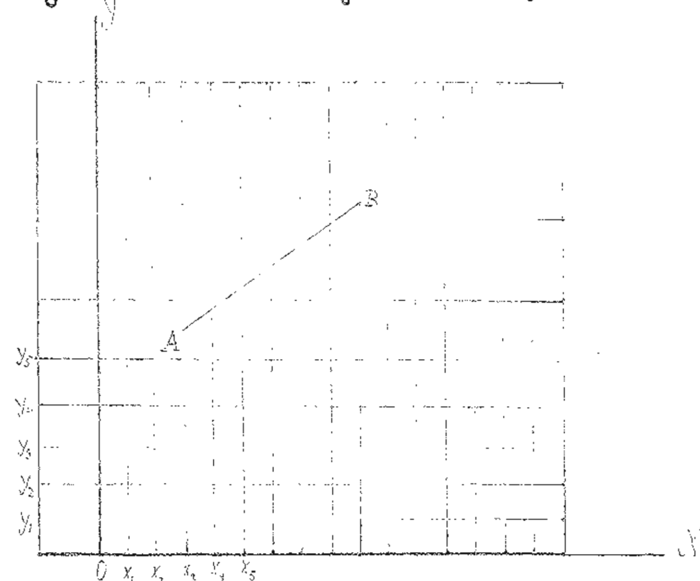
Тачка $\lambda = 0$, $\beta = 0$, а то је пресечна тачка првог меридијана са екватором представљена је у равни почетком координата ($X = 0$, $Y = 0$).

Константа K одређује се размером између величине карте и величине Земље, јер је $K = \frac{X}{\lambda}$ (в. прву једн. 1).

Модуо карте, од којег зависи већа или мања развученост снимка, управља се према углу β. Из формуле 1а) видимо да тај фактор има нај-

мању вредност на екватору, јер је за $\beta = 0$, $\sqrt{m} = \frac{K}{a}$. Од екватора ка полу он расте, тако да за $\beta = \pm 90^\circ$ постаје $\sqrt{m} = \infty$. Полови се на снимку и не показују, јер је за $\beta = \pm 90^\circ$, $Y = \infty$. Формуле 1) и 1а) постају тада неупотребљиве.

Према овоме је лако конструисати мрежу карте. Права OX представља екватор, права OY први меридијан, тачка O дакле пресек ова два основна круга. Еквидистантне



сл. 5.

праве повучене из тачака $x_1, x_2, x_3, \ldots$ паралелно са Y-осом представљају меридијане. Подесним избором константе K (а ово зависи од размере у којој желимо да нацртамо карту¹) учинићемо $Ox_1 = x_1x_2 = x_2x_3 = \dots$ и да ови размаци одговарају извесној угловној мери, нпр. углу од 10°. Паралелне праве са X-осом повучене из тачака $y_1, y_2, y_3, \dots$ у одстојањима $Oy_1 = k\,l\,tg(45° + \frac{10°}{2})$, $Oy_2 = k\,l\,tg(45° + \frac{20°}{2})$, $Oy_3 = k\,l\,tg(45° + \frac{30°}{2})$, ... представљају упореднике за географске ширине од 10°, 20°, 30°, ... Таква мрежа преноси се на исти начин лево од Y-осе за западне дужине, односно испод X-осе за јужне ширине. По томе је лако унети у мрежу чије географске координате (λ, β) познајемо.

Лако је увидети како се конструише мрежа за извесан део земне површине. Да бисмо нпр. конструисали мрежу карте за део земне површине између $\lambda_1 = 12°$ и $\lambda_2 = 30°$ дужине источно од Гринича и $\beta_1 = 36°$ и $\beta_2 = 46°$ ширине (Балканско полуострова) и то за сваки трећи степен дужине и за сваки други степен ширине узећемо у рачун да је у овоме случају $Ox_1 = x_1x_2 = x_2x_3 = \dots = \frac{k\pi}{180}\cdot 3$, а ово, избором размере у којој се карта

1) Узмимо да 1° дужине треба да се представи 1 cm., онда је $\frac{k\pi}{180} = 1$ cm., одакле $k = \frac{180}{\pi} = 57,30$ cm.

црта, одређено. Отуда налазимо вредност константе k, а помоћу ове добијамо онда

$$Oy_1 = k\,l\,tg\left(45° + \frac{38°}{2}\right) - k\,l\,tg\left(45° + \frac{36°}{2}\right) = k\,l\left(\frac{tg\,64°}{tg\,63°}\right)$$

$$y_1y_2 = k\,l\,tg\left(45° + \frac{40°}{2}\right) - k\,l\,tg\left(45° + \frac{38°}{2}\right) = k\,l\left(\frac{tg\,65°}{tg\,64°}\right)$$

$$y_2y_3 = k\,l\,tg\left(45° + \frac{42°}{2}\right) - k\,l\,tg\left(45° + \frac{40°}{2}\right) = k\,l\left(\frac{tg\,66°}{tg\,65°}\right)$$

$$y_3y_4 = k\,l\,tg\left(45° + \frac{44°}{2}\right) - k\,l\,tg\left(45° + \frac{42°}{2}\right) = k\,l\left(\frac{tg\,67°}{tg\,66°}\right)$$

$$y_4y_5 = k\,l\,tg\left(45° + \frac{46°}{2}\right) - k\,l\,tg\left(45° + \frac{44°}{2}\right) = k\,l\left(\frac{tg\,68°}{tg\,67°}\right).$$

Ова врста карата има једну врло значајну особину. Дуж AB, која везује тачке A и B на карти сече све меридијанске праве под истим углом. Значи да и она линија на сфери, чији је снимак дуж AB, сече такође све меридијана између тачака, које одговарају тачкама A и B, под једним истим углом. Таква линија се зове локсодрома. По тој линији управљају бродови на мору (обично) свој курс. Снимак локсодроме представљен је, дакле, једном дужи. Према томе заповедник брода желећи да плови по локсодроми везује тачку поласка са тачком опредељеном на карти једном дужи. Из угла, који та права чини са меридијанским правцима одређује графички угао под којим, употребом компаса, сече меридијане земље. Због овога се ова врста снимања употребљава поглавито код поморских карата и због чега се овакве карте тако и зову.

Ове карте се зову још и карте са растегнутим ширинама или редуциране карте, а понајчешће и Меркатор-еве карте по чувеном нидерландском Географу Gerhard Mercator (1512-1594), који је први употребио овај начин снимања код своје велике светске карте год. 1569.

Док су на сфери дужински степени од екватора ка полу променљиви (бивају мањи), а степени ширине константни у Меркатор-евој пројекцији је обратно: степени ширине су променљиви (расту од екватора ка полу), а степени дужине су стални.

Меркатор је поставио себи задатак да конструише карту код које су степени дужине

једнаки док степени ширине стоје према степенима дужине у истоме односу као и на лопти. Полупречник упоредника за географску ширину β јесте $= a\cos\beta$ (где a означава полупречник сфере) и према томе је дужина лука за 1° географске дужине на томе упореднику $= \frac{\pi}{180} a\cos\beta$, док је дужина лука за 1° географске ширине стално $= \frac{\pi a}{180}$, дакле однос између та два лука $= \frac{1}{\cos\beta}$. Узмимо да овај однос постоји и за најмање делове и нека је K снимак једног степена дужине. Тада је растојање између са X-осом паралелних правих, које представљају упоредника за географске ширине β и $\beta + d\beta$, једнако $\frac{k\,d\beta}{\cos\beta}$, одакле следује да је отстојање упоредника са географском ширином β од екватора

$$\int_0^\beta \frac{k\,d\beta}{\cos\beta} = k\,l\,tg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right),$$

а ово је једн. 1) која нам је служила као дефиниција конформног снимања, које смо горе расматрали.

1. Примедба. Да бисмо добили једначину снимка (у равни) једне линије на сфери заменићемо у

једначини линије координате x, y, z њиховим вредностима у X, Y. Тако нпр. једначину снимка једног великог круга, који је у Декарт-овим координатама одређен једначином

$$Ax + By + Cz = 0,$$

добићемо кад (на основу образаца 3) у чл. 15. за $e = 0$) ставимо у њој

$$x = a\cos\lambda\cos\beta$$

$$y = a\sin\lambda\cos\beta$$

$$z = a\sin\beta .$$

Тиме налазимо

$$A\cos\lambda + B\sin\lambda + C\,tg\beta = 0,$$

одакле, кад учинимо замену (на основу једн. 1))

$$\lambda = \frac{X}{k}$$

$$tg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = e^{\frac{Y}{k}}$$

$$\frac{1 + tg\frac{\beta}{2}}{1 - tg\frac{\beta}{2}} = e^{\frac{Y}{k}}$$

$$tg\frac{\beta}{2} = \frac{e^{\frac{Y}{k}} - 1}{e^{\frac{Y}{k}} + 1}$$

$$tg\beta = \frac{2\,tg\frac{\beta}{2}}{1 - tg^2\frac{\beta}{2}} = \frac{e^{2\frac{Y}{k}} - 1}{2\,e^{\frac{Y}{k}}} = \frac{e^{\frac{Y}{k}} - e^{-\frac{Y}{k}}}{2},$$

добијамо једначину снимка великог круга

$$A\cos\frac{X}{k} + B\sin\frac{X}{k} + C\,\frac{e^{\frac{Y}{k}} - e^{-\frac{Y}{k}}}{2} = 0$$

или

$$A\cos\frac{X}{k} + B\sin\frac{X}{k} + C\,\sinh yp\,\frac{Y}{k} = 0.$$

Обратно да бисмо добили једначину оригиналне линије на сфери за известан снимак у равни треба у једначини снимка координате X, Y заменути сферним координатама λ и β односно координатама x, y, z. Тако нпр. да бисмо добили једначину локсодроме на сфери полазимо од једначине њеног снимка у равни, а то је права

$$\frac{X - c'}{Y - c''} = tg\alpha,$$

где је α (константни) угао под којим права сече све са Y-осом паралелне праве линије, дакле угао под којим и одговарајућа локсодрома сече меридиане на сфери. c' и c'' означавају две константе. Према формулама 1) једначина локсодроме има вид

$$\lambda = tg\alpha .\ l\,tg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) + Const.$$

Да бисмо ову једначину превели у координате x, y, z утврђујемо из горњих образаца за x, y, z

$$tg\,\lambda = \frac{y}{x}, \text{ дакле } \lambda = arctg\,\frac{y}{x},$$

$$\sin\beta = \frac{z}{a}, \text{ дакле } tg\beta = \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \frac{2\,tg\frac{\beta}{2}}{1 - tg^2\frac{\beta}{2}},$$

$$tg\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{a^2-z^2}\pm a}{z}, \quad tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1+tg\frac{\beta}{2}}{1-tg\frac{\beta}{2}} = \frac{z+\sqrt{a^2-z^2}\pm a}{z-\sqrt{a^2-z^2}\mp a}$$

и добијамо за локсодрому једначину

$$arctg\frac{y}{x} = tg\alpha \cdot l\left(\frac{z+\sqrt{a^2-z^2}\pm a}{z-\sqrt{a^2-z^2}\mp a}\right)+Const.$$

2. Примедба. Меркатор-ова пројекција је цилиндарска пројекција. Снимак се добија пренашањем сфере на ваљак који је обавијен око лоптиног екватора. Меридијани и паралелни кругови пренашају се на ваљак, пошто овај развијемо у раван, као две системе ортогоналних и међусобом паралелних правих. Меридијански кругови показују се у снимку као еквидистантне паралелне праве линије, док размак између појединих упоредника у снимку бива све већи од екватора ка полу. То исто важи и за развученост саме слике. Од свих упоредника једини екватор се пренаша у правој величини.

Према циљу и употреби карте пренашање са сфере на ваљак може да се изврши место на екваторској основи на основи једног упоредника. Тако нпр. код снимања само једне хемисфере узели бисмо средњи упоредник карте око којег замишљамо да је обавијен ваљак

око сфере. Овим се постизава да ублажимо развученост снимка распоредивши је на више и на ниже у подједнакој мери.

20. Обртни елипсоид. — За конформно снимање обртног елипсоида у раван имали смо ове опште формуле

$$X+iY = \phi\left\{\lambda + i\,l\left[tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\}$$

$$m = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)^2}{a^2\cos^2\beta}\cdot\left(1-e^2\sin^2\beta\right)$$

(в. обрасце 7) и 7а) у гл. 15.).

Узев за функцију ϕ најпростију форму

$$\phi(w) = kw,$$

где k означава какву било константу, имамо формуле

$$\left.\begin{aligned} X &= k\lambda \\ Y &= k\,l\left[tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (1$$

и пошто је $\frac{\partial X}{\partial\lambda} = k$, $\frac{\partial Y}{\partial\lambda} = 0$, то је

$$m = \frac{k^2\left(1-e^2\sin^2\beta\right)}{a^2\cos^2\beta},$$

дакле модул карте

$$\sqrt{m} = \frac{k\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}{a\cos\beta}. \qquad (1a$$

Из ових једначина изводе се слични закључци као из оних за лопту у прошломе члану.

С обзиром да је (за нашу Земљу) број e врло мали количина $l\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)$ може да се развије у ред који је врло нагло конвергентан

$$l\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right) = -2\left(e\sin\beta + \frac{1}{3}e^3\sin^3\beta + \frac{1}{5}e^5\sin^5\beta + \dots\right)$$

тако да, пошто занемаримо чланове са e^4 и вишим степенима, добијамо формуле

2) $$\begin{cases} X = k\lambda \\ Y = k\, l\, tg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) - k e^2 \sin\beta \end{cases}$$

2a) $$\sqrt{m} = \frac{k\left(1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\beta\right)}{a\cos\beta}.$$

3.

Стереографска пројекција.

а) поларна пројекција.

21. Лопта. — Узмимо у општем решењу, које дају формуле 2) и 2а) у чл. 16. место опште функције Φ експоненцијалну функцију

$$\Phi(w) = k e^{iw},$$

дакле

$$X + iY = k e^{i\left[\lambda + i\, l\, tg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\right]} = k e^{i\lambda} e^{-l\, tg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)} = k\, cotg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\cdot(\cos\lambda + i\sin\lambda),$$

па ћемо добити једначине

$$\left.\begin{aligned} X &= k\cos\lambda\, cotg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{k\cos\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta} \\ Y &= k\sin\lambda\, cotg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{k\sin\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta} \end{aligned}\right\} \quad (1$$

и пошто је

$$\frac{\partial X}{\partial\lambda} = -\frac{k\sin\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta}, \quad \frac{\partial Y}{\partial\lambda} = \frac{k\cos\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta},$$

то је

$$m = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)^2}{a^2\cos^2\beta} = \frac{k^2}{a^2(1+\sin\beta)^2},$$

дакле модул карте

$$\sqrt{m} = \frac{k}{a(1+\sin\beta)}. \quad (1a$$

Из једн. 1) следује

$$\left.\begin{aligned} \frac{Y}{X} &= tg\lambda \quad \text{или} \quad Y = X\, tg\lambda \\ X^2 + Y^2 &= k^2 cotg^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2$$

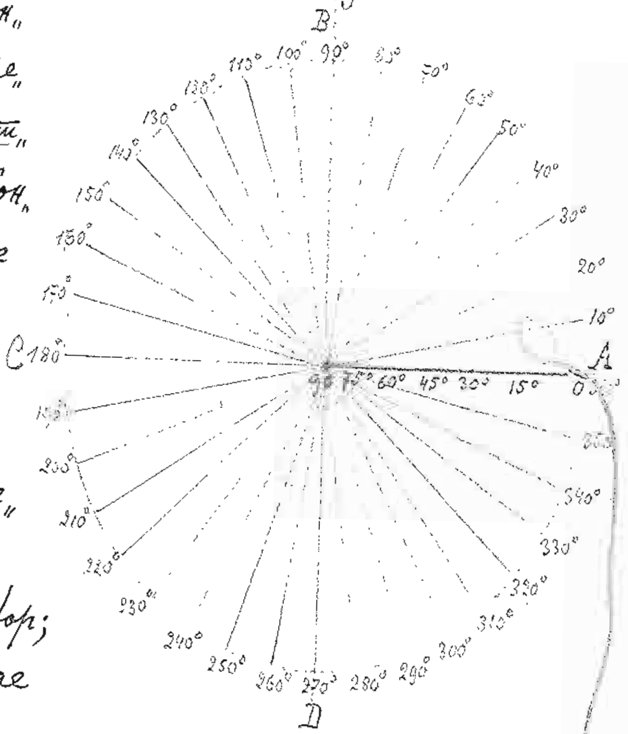
Одавде видимо да је за $\beta = 0$, $X = 0$ и $Y = 0$. Почетак координата је, дакле, лик (северног) пола. Прва једн. 2) показује да је за $\lambda = 0$, $Y = 0$. Значи да (позитивна половина) X-осе представља први меридијан. Остали меридијани показују се као праве линије које полазе из почетка координата и чине са X-осом углове једнаке географској дужини λ.

Из друге једн. 2) читамо да је за $\beta = Const.$, $X^2 + Y^2 = Const.$ Значи да се упоредници снимају као концентрични кругови са средиштем у координатноме почетку. Њихови су полупречници $= K\,\mathrm{cotg}(45^\circ + \frac{\beta}{2})$. Највећи од њих кругова је екватор; његов је полупречник у снимку $= K$ (јер је за екватор $\beta = 0$). Овим се снима једна половина лопте и величину карте одређује полупречник екваторског снимка (количина K).

Модуо $\sqrt{m}$ има највећу вредност на екватор ($\beta = 0$), $\sqrt{m} = \frac{K}{a}$, а најмању на полу ($\beta = 90^\circ$), $\sqrt{m} = \frac{K}{2a}$, а ово је половина ове највеће. Развученост карте није велика.

Ова врста конструкције потребљава се код светских карата. Конструкција мреже врло је проста.

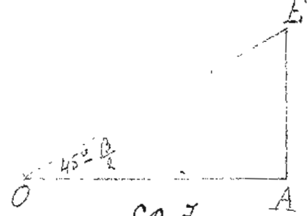
Круг $ABCD$ са полупречником K (који одређује величину карте) представља екватор; његово средиште



сл. 6.

(тачка O) представља пол. OA је почетни меридијан ($\lambda = 0$), OB меридијан $\lambda = 90^\circ$, OC меридијан $\lambda = 180^\circ$, OD меридијан $\lambda = 270^\circ$. Меридијан са географском дужином λ представља полупречник, који са OA чини угао λ.

Упоредник за географску ширину β представљен је кругом који је описан из O полупречником $OA \cdot \mathrm{cotg}(45^\circ + \frac{\beta}{2}) = OA \cdot \mathrm{tg}(45^\circ - \frac{\beta}{2})$.



сл. 7.

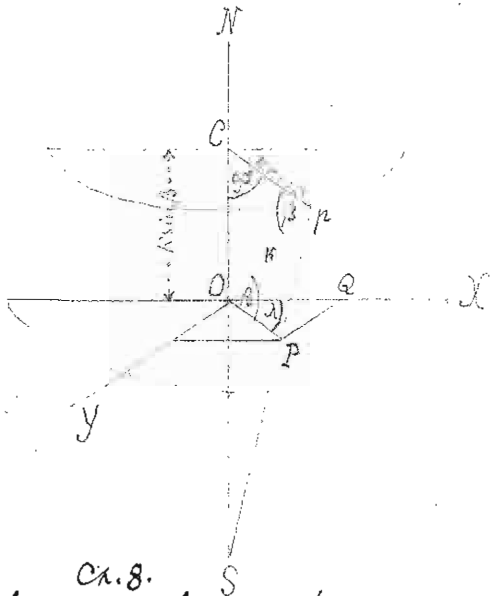
Овај полупречник је лако конструисати помоћу правоуглог троугла у коме је $OA = K$, $\sphericalangle AOE = 45^\circ - \frac{\beta}{2}$, јер је онда $AE = OA \cdot \mathrm{tg}(45^\circ - \frac{\beta}{2}) = K \cdot \mathrm{cotg}(45^\circ + \frac{\beta}{2})$.

Вредно је поменути да се код ове пројекције снимак локсодроме показује као логаритамска спирала за коју је почетак координата асимптотна тачка.

1. Примедба. Карте ове врсте, познате под именом поларне стереографске пројекције, могу се сматрати као централне пројекције једне хемисфере на екваторску раван узете из пола супротне хемисфере као центра пројекције. Да бисмо снимили северну половину наше

(у смањеној размери замишљене) Земље ми повлачимо из јужног пола зраке ка појединим тачкама на северној хемисфери. Тачке, у којима ови зраци продиру раван екватора јесу снимци дотичних тачака на сфери. Из овога следују све оне карактерне особине ових карата, које смо горе навели, на име: да се меридијани снимају као праве, које се секу у тачци која представља снимак (северног) пола, док се упоредници показују као концентрични кругови, који су описани из тачке у којој се секу меридијанске праве.

Да овај начин пројектовања одговара горњим једначинама 1) можемо се лако уверити помоћу слике. Нека је круг SXN први меридијан, N северни, S јужни пол, тачка P продорна тачка у равни екватора добивена везивањем тачке p на сфери (са полупречником k) са јужним полом S.



Сл. 8.

Тачка p налази се на упореднику географске ширине β. Пројекција полупречника $Cp = k\cos\beta$ у равни екватора је OP, а ово OP добијамо (с обзиром да је $OP \parallel Cp$) из пропорције

$$SC : Cp = SO : OP$$

или

$$k(1+\sin\beta) : k\cos\beta = k : OP,$$

одакле

$$OP = \frac{k\cos\beta}{1+\sin\beta}.$$

Према овоме су (из правоуглог троугла OPQ) координате тачке P (као стереографске пројекције тачке p)

$$X = OP.\cos\lambda = \frac{k\cos\beta\cos\lambda}{1+\sin\beta}$$

$$Y = OP.\sin\lambda = \frac{k\cos\beta\sin\lambda}{1+\sin\beta} \qquad q.e.д.$$

Одавде опет следује

$$X + iY = \frac{k\cos\beta}{1+\sin\beta}(\cos\lambda + i\sin\lambda) = k.\mathrm{cotg}\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right).e^{i\lambda}$$

$$= k e^{-\mathrm{l}\,\mathrm{tg}\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)} e^{i\lambda} = k e^{i\left[\lambda + i\,\mathrm{l}\,\mathrm{tg}\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\right]}.$$

Примедба. Астроном Хардинг (K.L. Harding, 1765–1834) у своме великом атласу неба (Atlas novus coelestis, Гетинген, 1808–123) у 26 листова са укупно 120 000 звезда конструисао је карте на основу замене

$$\phi(w) = k e^{i\rho w},$$

тј.

$$X + iY = k e^{i\rho[\lambda + il\,tg(45^\circ + \frac{\beta}{2})]}$$
$$= k e^{i\rho\lambda} \cdot e^{-\rho l\,tg(45^\circ + \frac{\beta}{2})}$$
$$= k \cot g^{\rho}(45^\circ + \tfrac{\beta}{2}) \cdot (\cos\rho\lambda + i \sin\rho\lambda),$$

дакле

$$3) \quad \begin{cases} X = k \cot g^{\rho}(45^\circ + \frac{\beta}{2}) \cdot \cos\rho\lambda \\ Y = k \cot g^{\rho}(45^\circ + \frac{\beta}{2}) \cdot \sin\rho\lambda \end{cases}$$

$$3a) \quad \sqrt{m} = \rho \frac{k \cot g^{\rho}(45^\circ + \frac{\beta}{2})}{a \cos\beta}.$$

Одавде следује

$$4) \quad \begin{cases} \frac{Y}{X} = tg\,\rho\lambda \quad \text{или} \quad Y = X\,tg\,\rho\lambda \\ X^2 + Y^2 = k^2 \cot g^{2\rho}(45^\circ + \frac{\beta}{2}). \end{cases}$$

Као што видимо и овде се меридијани снимају као праве, које се секу у почетку координата (снимку пола), а упоредници као концентрични кругови описани из координатног почетка.

Разуме се да се место (северног или јужног) пола може и свака друга тачка на сфери узети за средиште карте. У таквоме случају замишља се да се пројектовање врши из тачке која је дијаметрално супротна средишној тачци на карти

и то место на екваторску раван на раван великог круга која је управна на полупречнику који везује центар пројекције са средиштем лопте.

Најзад лако је увидети како се има да нацрта мрежа карте ако се снима само једна зона лопте, нпр. од β_1 до β_2. Ово се врло често примењује код звезданих карата. Количину ρ можемо тада да одредимо тако да модуо $\sqrt{m}$ добије исту вредност за $\beta = \beta_1$ коју и за $\beta = \beta_2$. За то је потребно да буде (према формули 3а)

$$\frac{\cot g^{\rho}(45^\circ + \frac{\beta_1}{2})}{\cos\beta_1} = \frac{\cot g^{\rho}(45^\circ + \frac{\beta_2}{2})}{\cos\beta_2},$$

одакле

$$\rho = \frac{\log\cos\beta_1 - \log\cos\beta_2}{\log\cot g(45^\circ + \frac{\beta_1}{2}) - \log\cot g(45^\circ + \frac{\beta_2}{2})}.$$

22. Обртни елипсоид. — Пошав од општих формула 7) и 7а) у гл. 15. и узев за функцију ϕ да је

$$\phi(w) = k e^{iw}$$

добијамо за снимање обртног елипсоида на раван

$$X + iY = k e^{i\{\lambda + il[tg(45^\circ + \frac{\beta}{2}) \cdot (\frac{1 - e\sin\beta}{1 + e\sin\beta})^{e/2}]\}}$$

$$X+iY = k e^{i\lambda}\cdot e^{-l\left[tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]}$$

$$= k\,\mathrm{cotg}\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\cdot(\cos\lambda+i\sin\lambda),$$

одакле

$$1)\quad\begin{cases} X = k\,\mathrm{cotg}\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\cos\lambda = \frac{k\cos\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta}\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}} \\ Y = k\,\mathrm{cotg}\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\sin\lambda = \frac{k\sin\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta}\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}. \end{cases}$$

Пошто је

$$\frac{\partial X}{\partial\lambda} = -\frac{k\sin\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta}\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial\lambda} = \frac{k\cos\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta}\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}$$

имамо

$$m = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)^2}{a^2\cos^2\beta}(1-e^2\sin^2\beta) = \frac{k^2}{a^2}\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{e}\frac{1-e^2\sin^2\beta}{(1+\sin\beta)^2}$$

$$1a)\qquad \sqrt{m} = \frac{k}{a}\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}{1+\sin\beta}.$$

Из једн. 1) следује

$$2)\quad\begin{cases} \frac{Y}{X} = tg\lambda \quad \text{или} \quad Y = X\,tg\lambda \\ X^2+Y^2 = k^2\,\mathrm{cotg}^2\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{e}. \end{cases}$$

Одавде изводимо закључке ~~односно~~ мреже за поларну стереографску пројекцију обртног елипсоида сличне онима за лопту у прошлом члану.

в) Екватореална пројекција.

23. Лопта. — Центар пројекције постављамо у тачку где меридиан $\lambda = 180^\circ$ сече екватор. За раван, на коју снимамо хемисферу која је супротна пројекционом центру, узимамо раван меридиана $\lambda = 90^\circ$ и $\lambda = 270^\circ$. Нека је k полупречник (смањене земље) лопте. У равни снимка замишљамо ортогоналну систему: почетак у средишту лопте, X-осу у пресеку равни снимка са екватором и то њен позитиван правац управљен тачци $\lambda = 90^\circ$, Y-осу управљену ка северном полу, а Z-осу супротно правцу од средишта лопте ка центру пројекције. Према познатим једначинама за трансформацију ортогоналних координата у сферне и обратно имамо за тачку, чија је дужина λ, а ширина β на сфери

$$x = k\cos\beta\sin\lambda$$
$$y = k\sin\beta$$
$$z = k\cos\beta\cos\lambda.$$

Ортогоналне координате пројекционог центра јесу $0, 0, -K$.

Да бисмо нашли координате тачке продора праве, која везује пројекциони центар са неком тачком на сфери, са пројекционом равни, дакле координате снимка извесне тачке на сфери, ми постављамо једначине пројекционог зрака по обрасцу

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

где треба ставити

$$x_1=0,\quad y_1=0,\quad z_1=-K$$

$$x_2=K\cos\beta\sin\lambda,\quad y_2=K\sin\beta,\quad z_2=K\cos\beta\cos\lambda.$$

На тај начин добијамо као једначине пројекционог зрака

$$\frac{x}{K\cos\beta\sin\lambda}=\frac{y}{K\sin\beta}=\frac{z+K}{K\cos\beta\cos\lambda+K},$$

одакле, кад ставимо $z=0$, налазимо координате снимка (у xy-равни) тачке λ, β на сфери

$$1)\quad \begin{cases} X=\dfrac{K\cos\beta\sin\lambda}{1+\cos\beta\cos\lambda} & (1_1\\[2ex] Y=\dfrac{K\sin\beta}{1+\cos\beta\cos\lambda}. & (1_2 \end{cases}$$

Питање да ли овакав начин пројекције одговара условима конформног снимања

води нас питању да ли уопште постоји и ако постоји каква је форма функције φ која даје обрасце 1). Треба да је

$$\frac{K\cos\beta\sin\lambda}{1+\cos\beta\cos\lambda}+i\,\frac{K\sin\beta}{1+\cos\beta\cos\lambda}=\varphi\left\{\lambda+i\,l\,tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\right\}.$$

За $\beta=0$ имали бисмо

$$\frac{K\sin\lambda}{1+\cos\lambda}=\varphi(\lambda)\quad\text{или}\quad K\,tg\frac{\lambda}{2}=\varphi(\lambda),$$

одакле закључујемо да треба ставити

$$\varphi(w)=K\,tg\frac{w}{2},$$

тј.

$$X+iY=K\,tg\left[\frac{\lambda}{2}+\frac{i}{2}\,l\,tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\right].$$

На десној страни имамо тангенту комплексног аргумента, које, кад развијемо по познатој формули

$$tg(a+ib)=\frac{2\sin 2a+i\left(e^{2b}-e^{-2b}\right)}{2\cos 2a+e^{2b}+e^{-2b}},$$

добијамо

$$tg\left[\frac{\lambda}{2}+\frac{i}{2}\,l\,tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\right]=\frac{2\sin\lambda+i\left[e^{l\,tg(45^\circ+\frac{\beta}{2})}-e^{-l\,tg(45^\circ+\frac{\beta}{2})}\right]}{2\cos\lambda+e^{l\,tg(45^\circ+\frac{\beta}{2})}+e^{-l\,tg(45^\circ+\frac{\beta}{2})}}$$

$$=\frac{2\sin\lambda+i\left[tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)-cotg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\right]}{2\cos\lambda+tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)+cotg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\lambda\cos\beta+i\sin\beta}{1+\cos\beta\cos\lambda},$$

дакле

$$X+iY=K\,\frac{\sin\lambda\cos\beta+i\sin\beta}{1+\cos\beta\cos\lambda},$$

одакле, раздвајањем стварног дела од имагинарног, следују обрасци 1).

Најзад с обзиром да је

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{\cos\lambda + \cos\beta}{(1+\cos\beta\cos\lambda)^2} K\cos\beta, \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{K\sin\beta\sin\lambda\cos\beta}{(1+\cos\beta\cos\lambda)^2}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{K^2\cos^2\beta}{(1+\cos\beta\cos\lambda)^2}$$

налазимо за модул карте

1a) $$\sqrt{m} = \frac{K}{a(1+\cos\beta\cos\lambda)}.$$

Из једначина 1) произилазе једначине

2) $$\begin{cases} X^2 + Y^2 + 2KX\cot g\lambda = K^2 & (2_1) \\ X^2 + Y^2 - \dfrac{2KY}{\sin\beta} = -K^2 & (2_2) \end{cases}$$

помоћу којих, а у вези са оним под 1), изводимо закључке односно ове врсте снимака.

Из 1_2) видимо да је за $\beta=0$ и $Y=0$. То значи да је екватор представљен у снимку X-осом.

Једн. 1_1) показује да је за $\lambda=0$ и $X=0$, одакле изводимо закључак да Y-оса представља први меридиан.

Према овоме следује да је почетак координата снимак пресека првог меридиана са екватором.

Једн. 2_1) за извесно $\lambda = Const.$ даје кругове, чија се средишта налазе на X-оси. Ови кругови су снимци меридиана.

Једн. 2_2) показује да су (за $\beta = Const.$) снимци упоредника такође кругови, чија средишта пак леже на Y-оси.

Ако једн. 2_1) напишемо

$$(X + K\cot g\lambda)^2 + Y^2 = \frac{K^2}{\sin^2\lambda}$$

и упоредимо је са познатом једначином круга $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (где a, b представљају координате средишта, r полупречник) видићемо да координате средишта круга, који представља снимак меридиана дужине λ, има на карти координате $x = -K\cot g\lambda$, $y=0$, а полупречник тог круга да је $= \pm\frac{K}{\sin\lambda}$ и то $+\frac{K}{\sin\lambda}$, кад је $\sin\lambda > 0$, а $-\frac{K}{\sin\lambda}$, ако је $\sin\lambda < 0$. За $\lambda = 0$ полупречник постаје ∞, које се слаже с оним што смо већ поменули: да је први меридиан ($\lambda=0$) представљен на карти Y-осом. Растењем дужине λ од 0 до $90°$ полупречник опада од ∞ до K, док се апсциса средишта дотичног круга креће од

$-\infty$ па до 0.

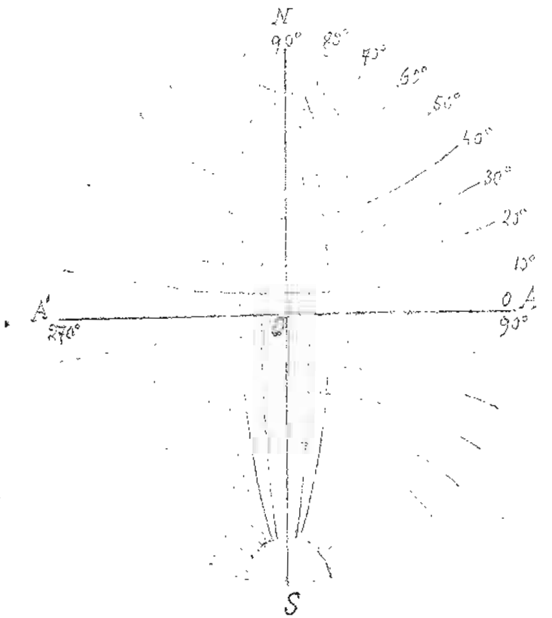
Напишимо једн. 2_2) у форми

$$X^2+\left(Y-\frac{K}{\sin\beta}\right)^2=K^2\cot g^2\beta,$$

па ћемо видети да овај круг, који представља упоредник географске ширине β, има за координате средишта $X=0$, $Y=\frac{K}{\sin\beta}$, а полупречник $=\pm K\cot g\beta$. За северну половину сфере средишта ових кругова леже на позитивној страни Y-осе, за јужну половину на негативној страни Y-осе. За екватор ($\beta=0$) полупречник постаје ∞, јер се на карте екватор снима као X-оса.

Конструкција мреже.

Круг $ANA'S$ са полупречником K представља меридиан географске дужине од 90° и 270° (пројекциону раван) и то полукруг NAS меридиан за дужину $\lambda=90°$, а полукруг $NA'S$ меридиан за дужину $\lambda=270°$.



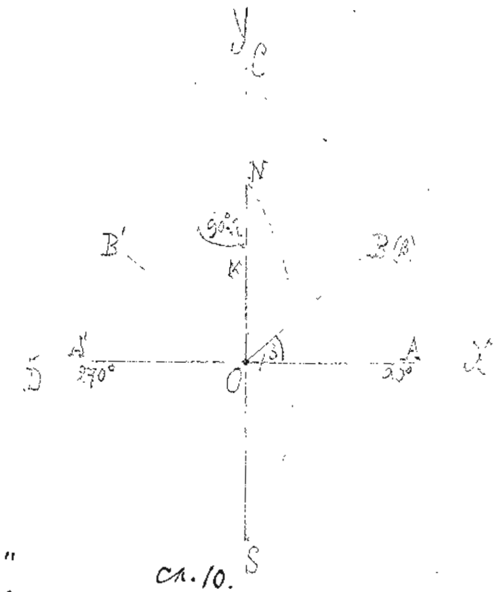
Сл. 9.

AA' представља екватор и то комад OA за дужине од $\lambda=0$ до $\lambda=90°$, а комад OA' за дужине од $\lambda=360°$ до $\lambda=270°$. N је северни, S јужни пол.

Да бисмо конструисали упоредник за географску ширину $\beta = AOB$ повући ћемо у тачци B дирку BC до пресека C са Y-осом. Тада је

$OC=\frac{K}{\sin\beta}$, $BC=K\cot g\beta$,

одакле видимо да је C средиште, а BC полупречник упоредника за ширину β (од $\lambda=0$ до $\lambda=90°$ и од $\lambda=270°$ до $\lambda=360°$).



Сл. 10.

Да бисмо нацртали меридиан за извесну географску дужину λ начинићемо $OND=90°-\lambda$ и онда је

$$DN=\frac{K}{\sin\lambda},\quad OD=K\cot g\lambda$$

и према томе DN полупречник, а тачка D средиште меридиана за задату дужину λ.

Разуме се да је мрежа лево од NS симетрична с оном десно од NS као и доња половина (испод AA') што је симетрична са горњом половином (изнад AA'). Аналогно се конструише и она друга хемисфера земне лопте.

Што се тиче модула

$$\sqrt{m} = \frac{k}{a(1+\cos\beta\cos\lambda)}$$

видимо да је он за тачке на екватору (X-оси), тј. за $\beta=0$ раван $\frac{k}{a(1+\cos\lambda)}$. У тачци O је најмањи $=\frac{k}{2a}$, док је на ивици карте (за $\lambda=90°$) највећи $=\frac{k}{a}$. Из овога видимо да меридијани, који су на лопти еквидистантни, на карти се све више један другом приближују у колико су ближи средини карте.

За први меридијан ($\lambda=0$) је $\sqrt{m}=\frac{k}{a(1+\cos\beta)}$, одакле изводимо аналоган закључак: да упоредници ка екватору бивају све ближи један другоме.

Овај начин снимања лопте на раван, познат под именом екваторске стереографске пројекције употребљава се код карата света.

III

Примена у Вишој Геодезији.

1.

Конформно снимање сфероида на лопту.

24. У чл. 17. формулом 1)

$$\mathcal{L} + il\,tg\left(45°+\frac{B}{2}\right) = \phi\left\{\lambda + il\left[tg\left(45°+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\}$$

обухваћени су сви начини конформног снимања обртног елипсоида на лопту.

Најпростије решење је кад се функција ϕ стави равна њеном аргументу

$$\phi(w) = w.$$

Овакво снимање је најподесније кад се снима цела површина обртног елипсоида на лопту. У применама геодетским, где је у питању само један релативно мали део земне површине, удесно је додати функцији једну (имагинарну) константу и ставити

$$\phi(w) = w - ilk.$$

Овим се постизава то да се подесним избором полупречника (r) лопте и константе k може да учини да модул карте ($\sqrt{m}$) за онај део површине који се снима врло мало одступа од 1 одређујући k и r тако да за средњи упоредник карте модул постаје $=1$, а све до за неколико степени северно и јужно од њега модул се врло мало разликује од 1. Тако нпр. наводи Гаус пример Данске у границама $\beta_1 = 53°$ и $\beta_2 = 58°$, где је удаљење од средњег полупречника $2\frac{1}{2}°$. Узев за спљоштеност земне елипсе $e = \frac{1}{303}$ Гаус налази да се на крајевима карте снимци (линеарно) увеличавају свега за $\frac{1}{530000}$. Овако мало одступање модула од 1 (одступање које је у погледу одстојања доличног упоредника од средњег упоредника једна мала количина другог реда и које осим тога још садржи и квадрат од иначе већ врло мале количине e) знатно олакшава употребу формула у геодетским рачунима.

Ова преимућства се још знатно појачавају (код употребе у геодетским применама конформног снимања сфероида на лопту) кад унесемо још једну константу и ставимо

$$\varphi(w) = \alpha w - ilk.$$

Располажући једном константом (α) више можемо да учинимо да одступање модула од 1 ~~од извесног средњег (нормалног) упоредника карте~~ у погледу одстојања доличног упоредника од извесног средњег (нормалног) упоредника карте постаје једна мала количина трећег реда у којој се такође јавља e^2. На тај начин, узевши Гаус-ов пример за Данску, линеарно увеличавање снимка своди се на $\frac{1}{5800000}$.

Оваквим конформним снимањем ми пренашамо са сфероида мрежу троуглова, чије су стране најкраће (геодетске) линије, на лопту и добијамо мрежу троуглова, чији су углови појединце једнаки угловима у одговарајућим троугловима на сфероиду, а стране (изузев лукова меридијанских линија) и ако нису строго узев луци великих кругова ипак се од ових тако мало разликују да се у већини случајева могу њима заменути или, на случај да је потребна врло велика тачност, то одступање њихово од лукова великих кругова лако да израчунати. У свакоме случају претпоставља се

1) да троуглови нису сувише удаљени од нормалног упоредника и

2) да су њихове стране у сравнењу са земним квадрантом довољно мале. Ово је, међутим, увек случај код мерењем добивених троуглова.

Према овоме смо доведени у могућност да посматрану мрежу троуглова, пошто смо пренели једну страну са сфероида на лопту, а помоћу углова срачунало као мрежу на лопти (састављену из сферних троуглова) уносећи, у случају потребе врло велике тачности, нужне корекције.

25. Узмимо дакле да је

$$\Phi(w) = \alpha w - ilK,$$

тј. (в. формулу 1) у чл. 17.)

$$\mathcal{L} + il\,tg\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = \alpha\lambda + il\left[\frac{1}{K}\,tg^{\alpha}\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e}\right],$$

одакле

$$1)\quad \begin{cases} \mathcal{L} = \alpha\lambda \\ tg\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = \frac{1}{K}\,tg^{\alpha}\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e}. \end{cases}$$

Пошто је $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = \alpha$, $\frac{\partial\, l\,tg\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)}{\partial\lambda} = 0$ имамо (према формули 1а) у чл. 17.)

$$\sqrt{m} = \frac{\alpha r\cos B}{a\cos\beta}\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}. \qquad (1a$$

Покушаћемо да одредимо константе r, α и K тако да за извесну ширину $\beta=\omega$ на сфероиду и њој одговарајућој ширини $B=\Omega$ на лопти буде $m=1$, а за ширине, које се од $\beta=\omega$ мало разликују, нпр. за $\beta=\omega+\rho$ (где ρ означава малу количину) модул m се разликује од 1 тек у члановима реда ρ^3.

Означимо ради краћег бележења $\sqrt{m}=\mu$.

Променом β у $\beta+\rho$ мења се μ у

$$\mu + \frac{d\mu}{d\beta}\rho + \frac{d^2\mu}{d\beta^2}\frac{\rho^2}{2} + \dots$$

Ми постављамо услов да за

$$\left.\begin{array}{l} \beta=\omega, \quad B=\Omega \\ \text{постаје} \quad \mu = 1 \\ \frac{d\mu}{d\beta} = 0 \\ \frac{d^2\mu}{d\beta^2} = 0. \end{array}\right\} \qquad (2$$

Из 1а) следује

$$\frac{d\mu}{d\beta}=\frac{\alpha r}{a}\left[\frac{(1-e^2)\sin\beta\cos B}{\cos^2\beta\cdot\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}-\frac{\sin B}{\cos\beta}\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}\,\frac{dB}{d\beta}\right],$$

а из друге једн. 1) кад је логаритамски диференцирамо

$$\frac{1}{\cos B}\frac{dB}{d\beta}=\frac{\alpha}{\cos\beta}-\frac{\alpha e^2\cos\beta}{1-e^2\sin^2\beta}=\frac{\alpha(1-e^2)}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)},$$

одакле

$$\frac{dB}{d\beta}=\frac{\alpha(1-e^2)\cos B}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)},$$

које, кад заменимо у образац за $\frac{d\mu}{d\beta}$, даје

$$\frac{d\mu}{d\beta}=\frac{\alpha r(1-e^2)\cos B}{a\cos^2\beta\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}(\sin\beta-\alpha\sin B)$$

или с обзиром на формулу 1а)

2а) $$\frac{d\mu}{d\beta}=\frac{\mu(1-e^2)(\sin\beta-\alpha\sin B)}{\cos\beta\,(1-e^2\sin^2\beta)}.$$

Одавде изводимо даље

$$\frac{d^2\mu}{d\beta^2}=(\sin\beta-\alpha\sin B)\frac{d}{d\beta}\left[\frac{\mu(1-e^2)}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)}\right]+\frac{\mu(1-e^2)}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)}\frac{d}{d\beta}(\sin\beta-\alpha\sin B).$$

Овде је

$$\frac{d}{d\beta}(\sin\beta-\alpha\sin B)=\cos\beta-\alpha\cos B\frac{dB}{d\beta}=\cos\beta-\frac{\alpha^2(1-e^2\cos^2B)}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)}$$

и тако добијамо

2б) $$\frac{d^2\mu}{d\beta^2}=(1-e^2)(\sin\beta-\alpha\sin B)\frac{d}{d\beta}\left[\frac{\mu}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)}\right]+\frac{\mu(1-e^2)}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)}\left[\cos\beta-\frac{\alpha^2(1-e^2)\cos^2B}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)}\right].$$

На основу формула 1а), 2а) и 2б) закључујемо да

су условне једначине 2) испуњене, ако је

3₁) $$\frac{\alpha r\cos\Omega}{a\cos\omega}\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}=1$$

3₂) $$\sin\omega-\alpha\sin\Omega=0$$

3₃) $$\cos\omega-\frac{\alpha^2(1-e^2)\cos^2\Omega}{\cos\omega\cdot(1-e^2\sin^2\omega)}=0. \qquad (3$$

Ове једначине у вези са другом једначином 1) пошто и у њој ставимо $\beta=\omega$, $B=\Omega$, дакле

3₄) $$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\Omega}{2}\right)=\frac{1}{k}\operatorname{tg}^{\alpha}\left(45^\circ+\frac{\omega}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\omega}{1+e\sin\omega}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e}, \qquad (3$$

одређују количине r, α, k и Ω помоћу ω.

Из 3₂) следује

$$\sin\Omega=\frac{\sin\omega}{\alpha},\ \text{дакле}\ \cos^2\Omega=1-\frac{\sin^2\omega}{\alpha^2}, \qquad (*$$

које кад заменимо у 3₃)

$$\cos^2\omega\cdot(1-e^2\sin^2\omega)=\alpha^2(1-e^2)\left(1-\frac{\sin^2\omega}{\alpha^2}\right)$$

$$\alpha^2(1-e^2)-1+e^2\sin^2\omega+e^2\sin^2\omega\cos^2\omega=0$$

$$\alpha^2(1-e^2)-(1-e^2)-e^2\cos^4\omega=0,$$

одакле

$$\alpha^2=1+\frac{e^2\cos^4\omega}{1-e^2}. \qquad (**$$

Обрасци *) и **) и они под 3₁) и 3₄), пошто ове последње решимо по r и k, дају нам формуле за израчунавање констаната Ω, α, r и k кад је дато ω

$$\sin\Omega = \frac{\sin\omega}{\alpha}$$

$$\alpha^2 = 1+\frac{e^2\cos^4\omega}{1-e^2}$$

4) $$r = \frac{a\cos\omega}{\alpha\cos\Omega\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}}$$

$$K = \frac{tg^{\alpha}\left(45^\circ+\frac{\omega}{2}\right)}{tg\left(45^\circ+\frac{\Omega}{2}\right)}\left(\frac{1-e\sin\omega}{1+e\sin\omega}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e}$$

Образац за полупречник лопте можемо да нађемо у другој (непосредној) форми. На основу добивених формула изводимо

$$\frac{\cos\omega}{\alpha\cos\Omega} = \frac{\cos\omega}{\alpha\sqrt{1-\sin^2\Omega}} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{\alpha^2-\alpha^2\sin^2\Omega}} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{\alpha^2-\sin^2\omega}}$$

$$= \frac{\cos\omega}{\sqrt{1+\frac{e^2\cos^4\omega}{1-e^2}-\sin^2\omega}} = \frac{\sqrt{1-e^2}\cdot\cos\omega}{\cos\omega\sqrt{1-e^2+e^2\cos^2\omega}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}},$$

а с овим према трећој формули 4)

4a) $$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\omega} = \frac{b}{1-e^2\sin^2\omega},$$

где b означава обртну полуосу сфероида.

26. Да бисмо обрасце 4) у прошлом члану направили подеснијим за (логаритамско) рачу-

нање завешћемо помоћне углове φ, ζ, θ

$$\sin\varphi = e$$

$$tg\zeta = tg\varphi\cdot\cos^2\omega, \quad \text{одакле} \quad \cos^4\omega = \frac{tg^2\zeta}{tg^2\varphi}$$

$$\sin\theta = \sin\varphi\cdot\sin\omega, \quad \text{одакле} \quad \sin\omega = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}.$$

Тада је

$$\alpha^2 = 1+\frac{\sin^2\varphi\cdot\frac{tg^2\zeta}{tg^2\varphi}}{1-\sin^2\varphi} = 1+tg^2\zeta = \frac{1}{\cos^2\zeta}, \text{ дакле } \alpha = \frac{1}{\cos\zeta}$$

$$\sin\Omega = \frac{\sin\omega}{\frac{1}{\cos\zeta}} = \sin\omega\cdot\cos\zeta$$

$$r = \frac{a\cos\omega}{\frac{1}{\cos\zeta}\cos\Omega\sqrt{1-\sin^2\varphi\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\varphi}}} = \frac{a\cos\omega\cdot\cos\zeta}{\cos\Omega\cos\theta}$$

$$K = \frac{tg^{\alpha}\left(45^\circ+\frac{\omega}{2}\right)}{tg\left(45^\circ+\frac{\Omega}{2}\right)}\left(\frac{1-\sin\varphi\sin\omega}{1+\sin\varphi\sin\omega}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e} = \frac{tg^{\alpha}\left(45^\circ+\frac{\omega}{2}\right)}{tg\left(45^\circ+\frac{\Omega}{2}\right)}\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e}$$

$$= \frac{tg^{\alpha}\left(45^\circ+\frac{\omega}{2}\right)}{tg\left(45^\circ+\frac{\Omega}{2}\right)}\, tg^{\alpha e}\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right).$$

Имамо дакле следећу систему једначина

$5_1)$ $\sin\varphi = e$

$5_2)$ $tg\zeta = tg\varphi\cdot\cos^2\omega$

$5_3)$ $\sin\theta = \sin\varphi\cdot\sin\omega$ (5

$6_1)$ $\alpha = \frac{1}{\cos\zeta}$

$6_2)$ $\sin\Omega = \sin\omega\cos\zeta$ (6

6) $$\begin{cases} r = \dfrac{a\cos\omega\cos\zeta}{\cos\Omega\cos\theta} & (6_3) \\[2ex] K = \dfrac{\operatorname{tg}^{\alpha}\left(45^\circ+\frac{\omega}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\Omega}{2}\right)}\operatorname{tg}^{\alpha e}\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right). & (6_4) \end{cases}$$

Ако нам је дато ω, онда израчунавамо φ помоћу 5_1), ζ помоћу 5_2), θ помоћу 5_3) и онда α, Ω, r и K помоћу једн. 6).

На случај да је дато Ω формираћемо нову систему једначина да бисмо их подесили за израчунавање осталих количина. Завешћемо осим горња три угла φ, ζ, θ (једн. 5) још и помоћни угао η

5a) $$\operatorname{tg}\eta = \sin\zeta\cdot\operatorname{tg}\omega.$$

Из

$$\cos^2\eta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\eta} = \frac{1}{1+\sin^2\zeta\cdot\operatorname{tg}^2\omega} = \frac{\cos^2\omega}{\cos^2\omega+\sin^2\zeta\cdot\sin^2\omega}$$
$$= \frac{\cos^2\omega}{1-\sin^2\omega\cdot\cos^2\zeta} = \frac{\cos^2\omega}{1-\sin^2\Omega} = \frac{\cos^2\omega}{\cos^2\Omega}$$

следује

7_1) $$\cos\eta\cdot\cos\Omega = \cos\omega.$$

Помоћу ове формуле 7_1) и образаца 5) и 6) изводимо даље

$$\sin\eta\cdot\cos\Omega = \sin\eta\cdot\frac{\cos\omega}{\cos\eta} = \operatorname{tg}\eta\cdot\cos\omega = \sin\zeta\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\omega$$
$$= \sin\zeta\cdot\sin\omega = \sin\zeta\cdot\frac{\sin\Omega}{\cos\zeta} = \operatorname{tg}\zeta\cdot\sin\Omega,$$

одакле
$$\sin\eta = \operatorname{tg}\zeta\cdot\operatorname{tg}\Omega. \qquad (7_2$$

Даље налазимо

$$\operatorname{tg}\frac{\eta}{2} = \frac{1-\cos\eta}{\sin\eta} = \frac{1-\frac{\cos\omega}{\cos\Omega}}{\operatorname{tg}\zeta\cdot\operatorname{tg}\Omega} = \frac{\cos\Omega-\cos\omega}{\operatorname{tg}\zeta\cdot\sin\Omega}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2} = \frac{\sin\zeta}{1+\cos\zeta} = \frac{\sin\zeta}{1+\frac{\sin\Omega}{\sin\omega}} = \frac{\sin\zeta\cdot\sin\omega}{\sin\omega+\sin\Omega},$$

тако да је

$$\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2} = \frac{\cos\Omega-\cos\omega}{\sin\omega+\sin\Omega}\,\frac{\sin\zeta\cdot\sin\omega}{\operatorname{tg}\zeta\cdot\sin\Omega}.$$

или (услед 6_2) краће

$$\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\omega-\Omega}{2}. \qquad (7_3$$

Најзад имамо

$$\operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg}\varphi\cdot\cos^2\omega = \operatorname{tg}\varphi\cdot(1-\sin^2\omega) = \operatorname{tg}\varphi\cdot\left(1-\frac{\sin^2\Omega}{\cos^2\zeta}\right)$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\varphi\cdot(\cos^2\zeta-\sin^2\Omega)}{\cos^2\zeta},$$

одакле

$$\sin\zeta\cdot\cos\zeta\cdot\cos\varphi = \sin\varphi\cdot(\cos^2\zeta-\sin^2\Omega) = \sin\varphi\cdot\cos^2\zeta-\sin\varphi\cdot\sin^2\Omega$$
$$\sin\varphi\cdot\sin^2\Omega = \sin\varphi\cdot\cos^2\zeta-\sin\zeta\cdot\cos\zeta\cdot\cos\varphi,$$

одакле кад двоструку вредност леве и десне стране ове једначине одузмемо од $\sin\varphi$

$$\sin\varphi\cdot(1-2\sin^2\Omega) = \sin\varphi\cdot(1-2\cos^2\zeta)+2\sin\zeta\cdot\cos\zeta\cdot\cos\varphi$$

или краће

$$\sin\varphi\cdot\cos2\Omega = -\sin\varphi\cdot\cos2\zeta+\sin2\zeta\cdot\cos\varphi$$
$$= \sin(2\zeta-\varphi). \qquad (7_4$$

Овим смо добили обрасце

$$5)\quad \begin{cases} \sin\varphi = e & \ldots\ldots (5_1 \\ \sin\Theta = \sin\varphi\cdot\sin\omega & \ldots\ldots (5_3 \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} \cos\eta\cdot\cos\Omega = \cos\omega & \ldots\ldots (7_1 \\ \sin\eta = tg\zeta\cdot tg\Omega & \ldots\ldots (7_2 \\ tg\frac{\eta}{2}\cdot tg\frac{\zeta}{2} = tg\frac{\omega-\Omega}{2} & \ldots\ldots (7_3 \\ \sin\varphi\cdot\cos 2\Omega = \sin(2\zeta-\varphi) & \ldots\ldots (7_4 \end{cases}$$

$$6)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\cos\zeta} & \ldots\ldots (6_1 \\ r = \dfrac{a\cos\omega\cdot\cos\zeta}{\cos\Omega\cdot\cos\Theta} & \ldots\ldots (6_3 \\ K = \dfrac{tg^{\alpha}\left(45^\circ+\frac{\omega}{2}\right)}{tg\left(45^\circ+\frac{\Omega}{2}\right)}\, tg^{\alpha e}\left(45^\circ-\frac{\Theta}{2}\right). & \ldots\ldots (6_4 \end{cases}$$

За известно задато Ω израчунавање иде овим редом: φ налазимо из 5_1), ζ из 7_4), η из 7_2), ω из 7_1) или 7_3), Θ из 5_3), α из 6_1), r из 6_3), K из 6_4).

Примедба. Гаус је узео за нормалну ширину на лопти

$$\Omega = 52^\circ 40',$$

која приближно одговара средњем упореднику некадашње краљевине Хановер. Употребом Бесел-ових података за димензије Земље и узев тоазу за јединицу нашао је

$$\log a = 6,5148\,235\,337$$
$$\log\cos\varphi = 9,9985\,458\,202 - 10$$
$$\varphi = 4^\circ 41'\, 9'',98262$$

$$\log e = 8,9122\,052\,079 - 10$$
$$\zeta = 1^\circ 43'\, 26'',80402$$
$$\eta = 2^\circ 15'\, 42'',34083$$
$$\omega = 52^\circ 42'\, 2'',53251$$
$$\log\alpha = 0,0001\,966\,553$$
$$\Theta = 3^\circ 43'\, 34'',24669$$
$$\log K = 9,9983\,291\,196 - 10$$
$$\log r = 6,5152\,074\,703.$$

Ако се узме метар за јединицу, онда је

$$\log a = 6,8046\,434\,637$$
$$\log r = 6,8050\,274\,003.$$

27. Пошто одредимо константе α, r, K, које се јављају у једн. 1) чл. 25., на основу формула 6) у чл. 26. једн. 1) не садрже више ништа неодређено и могу да се примене.

Отуда што $\mathcal{L}$ зависи само од λ, а B само од β следује да се меридијани елипсоида пресликавају на лопту опет као меридијани, а упоредници елипсоида као упоредници лопте. Пошто је за $\beta = \pm 90^\circ$ и $B = \pm 90^\circ$ видно да полови сфероида одговарају половима лопте.

За $\beta=0$ постаје $tg\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{K}$, одакле закључујемо да само онда кад је $K=1$ ширини $\beta=0$ одговара ширина $B=0$, а то ће рећи да се тада екватор сфероида пренаша на екватору лопте. Ово је случај кад узмемо $\omega=0$, јер је онда, према формулама 5) и 6) у гл. 26 $\sin\varphi=e$, $\gamma=\varphi$, $\Theta=0$, $\alpha=\frac{1}{\cos\varphi}$, $\Omega=0$, $r=a\cos\varphi=b$, $K=1$.

28. Да бисмо из дужине и ширине (λ,β) једне тачке на сфероиду нашли дужину и ширину (L,B) одговарајуће тачке (снимка) на лопти ми можемо да се послужимо непосредно формулама 1) у гл. 25.) или, кад зарад лакшег рачунања ставимо

1) $$\sin\delta=e\sin\beta,$$

формулом

$$tg\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{K}tg^{\alpha}\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)cotg^{\alpha e}\left(45^\circ+\frac{\delta}{2}\right),$$

дакле

2_1) $$\log tg\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=\alpha\left[\log tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)+e\log cotg\left(45^\circ+\frac{\delta}{2}\right)\right]-\log K,$$

док прва формула 1) у гл. 25. непосредно даје

2_2) $$L=\alpha\lambda.$$

Обратно, ако треба из B и L да се нађе β и λ (а овај је случај далеко чешћи код израчунавања

геодетске мреже) написаћемо једн. 2_1)

$$\log tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{\alpha}\left[\log tg\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)+\log K\right]-e\log cotg\left(45^\circ+\frac{\delta}{2}\right)$$

или ако ставимо

$$\frac{1}{\alpha}=\cos\zeta \qquad (3$$

(в. формулу 6_1) у гл. 26.) у форми

$$\log tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\zeta\cdot\left[\log tg\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)+\log K\right]-e\log tg\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right). \qquad (4_1$$

За дужину имамо

$$\lambda=\frac{L}{\alpha}. \qquad (4_2$$

Решавање помоћу формуле 4_1) могли бисмо да вршимо доста брзо апроксимацијом на овај начин. С обзиром на то да је e врло мала количина можемо приближно да узмемо $\beta=B$ 1) и да (према формули 1) ставимо

$$\sin\delta_1=e\sin B.$$

Заменувши овако добивену вредност за δ у једн. 4_1) добили бисмо прву приближну вредност за β (β_1) помоћу које бисмо за δ нашли тачнију вредност $\sin\delta_2=e\sin\beta_1$, а с овом и

---

1) Услед $e=0$ следује $\alpha=1$ (в. форм. ** у гл. 25.), дакле $\cos\zeta=1$ (в. форм. 6_1 у гл. 26.), $\Omega=\omega$ (в. форм. 6_2 у гл. 26) и према томе $K=1$ (в. форм. 4 у гл. 25.), а с овим $\beta=B$ (в. прву једн. 1 у гл. 25.).

на основу једн. 4₁) дошли до нове и тачније вредности $\beta=\beta_2$ итд. Услед тога што онај први део на десној страни једн. 4₁), а то је

$$\cos\zeta\cdot\left[\log tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)+\log K\right],$$

остаје увек исти ово срачунавање иде доста брзо.

Узмимо као пример

$$\beta=51^\circ 35'.$$

Употребом Гаус-ових података на седам децимала:

$\log e=8,9122052-10$, $\log K=9,9983291-10$, $\zeta=1^\circ 43' 26'',80$

(в. на крају гл. 26.) налазимо

$$\log tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)=0,4579219$$
$$\log K=9,9983291-10$$
$$\overline{\log tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)+\log K=0,4562510}$$
$$\log\left[\log tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)+\log K\right]=0,6592038-1$$
$$\log\cos\zeta=9,9998033$$
$$\overline{\log\left\{\cos\zeta\left[\log tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)+\log K\right]\right\}=0,6590071-1}$$

*) $$\cos\zeta\left[\log tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)+\log K\right]=0,4560444.$$

Ово је онај први део на десној страни једн. 4₁). Приближну вредност за други део $e\log tg\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)$ добићемо кад прво израчунамо приближну вред-

ност δ_1 на основу обрасца 1) узев $\beta=51^\circ 35'$

$$\log e=8,9122052-10$$
$$\log\sin 51^\circ 35'=9,8940461-10$$
$$\overline{\log\sin\delta_1=8,8062513-10}$$

$$\delta_1=3^\circ 40' 12'',\quad \frac{\delta_1}{2}=1^\circ 50' 6'',\quad 45^\circ-\frac{\delta_1}{2}=43^\circ 9' 54'',$$

па онда

$$\log tg\left(45^\circ-\frac{\delta_1}{2}\right)=9,9721629=-0,0278371$$
$$\log\log tg\left(45^\circ-\frac{\delta_1}{2}\right)=0,4446240-2\ (n)$$
$$\log e=8,9122052-10$$
$$\overline{\log\left[e\cdot\log tg\left(45^\circ-\frac{\delta_1}{2}\right)\right]=7,3568292-10\ (n)}$$
$$e\cdot\log tg\left(45^\circ-\frac{\delta_1}{2}\right)=-0,0022742. \qquad (**$$

С овим под **) и оним под *) добијамо

$$\log tg\left(45^\circ+\frac{\beta_1}{2}\right)=0,4583186$$
$$45^\circ+\frac{\beta_1}{2}=70^\circ 48' 28'',5,\qquad \beta_1=51^\circ 36' 57''.$$

Узев сада $\sin\delta_2=e\sin\beta_1$ имамо

$$\log e=8,9122052-10$$
$$\log\sin 51^\circ 36' 57''=9,8942413-10$$
$$\overline{\log\sin\delta_2=8,8064465-10}$$
$$\delta_2=3^\circ 40' 18'',\quad 45^\circ-\delta_2=43^\circ 9' 51''$$
$$\log tg\left(45^\circ-\frac{\delta_2}{2}\right)=9,9721502=-0,0278498$$

$$\log\log tg\left(45^\circ - \frac{\delta_2}{2}\right) = 0,444\,8221 - 2\ (n)$$
$$\log e = 8,912\,2052 - 10$$
$$\log\left[e \cdot \log tg\left(45^\circ - \frac{\delta_2}{2}\right)\right] = 7,357\,0273 - 10\ (n)$$
$$e \log tg\left(45^\circ - \frac{\delta_2}{2}\right) = -0,002\,2752,$$

које с оним под *) даје

$$\log tg\left(45^\circ + \frac{\beta_2}{2}\right) = 0,458\,3196,$$

одакле

$$45^\circ + \frac{\beta_2}{2} = 70^\circ 48' 28'',67, \quad \beta_2 = 51^\circ 36' 57'',34.$$

Овај се резултат (β_2) тако мало разликује од прошлога (β_1) да се може сматрати као довољно тачан радећи са седмомесним таблицама.

Напомена. У расправи[1] о овоме предмету Гаус показује други један начин за претварање β и B једно у друго и то помоћу редова. Међутим Гаус препоручује да се код опсежних премеравања, где се преношење са сфероида на лопту или обратно има да изврши за врло много тачака, израчуна одмах једна

1) C. F. Gauss. Untersuchungen über Gegenstände der Höhern Geodäsie. Erste Abhandlung. Carl Friedrich Gauss Werke. Vierter Band. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1880.

опширна таблица место да се то ради помоћу формула. И пошто се много чешће дешава да се са лопте пренаша на сфероид но обратно угодно је да се за аргуменат таблице узме ширина на лопти. Гаус прилаже својој расправи такву таблицу за нормални упоредник $\Omega = 52^\circ 40'$ и то за 12° ширине: од $46^\circ 40'$ до $58^\circ 40'$ за сваку минуту аргумента B. Таблица даје одговарајуће вредности ширине β на пет децимала секунде као и логаритме модула $\sqrt{m}$ на десет децимала.

2.

Израчунавање географских координата тачака геодетске мреже.

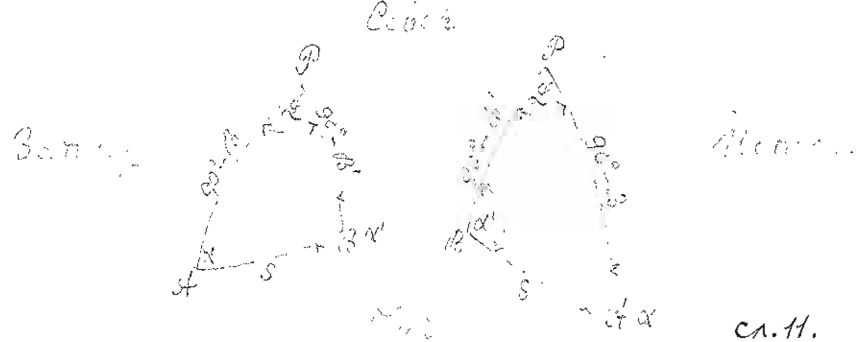
29. Задатак је да се из познате ширине и дужине једне тачке A на земноме сфероиду и одстојања S неке тачке B од тачке A, као и азимута тачке B у тачци A израчунају географске координате (ширина и дужина) тачке B и азимут тачке A

у тачци B[1]? Место дужина тачака A и B узећемо разлику њихову и означити је са λ, тако да би λ представљало дужину тачке B сматравши меридиан од A као почетни меридиан. Ми ћемо овде да правимо разлику између источне и западне дужине, рачунавши λ од 0 до 180°, како бисмо могли непосредно да применимо формуле Сферне Тригонометрије.

Означимо са P северни пол, са PA и PB меридиане који пролазе кроз тачке A и B и нека је $AB = s$. Тада су α и α' азимути тачке B у тачци A и тачке A у тачци B. У претпоставци да A и B леже у зони снимања за коју модуо $\sqrt{m}$ врло мало одступа од 1, слици тачака A и B на лопти биће такође у одстојању s и пошто се меридиани тачака A и B снимају на

1) Под азимутом тачке B у тачци A разумемо угао, који чини најкраћа линија s, која води од A ка B, са меридианом тачке A, рачунавши тај угао од северне стране тога меридиана у смислу Исток-Југ-Запад од 0 до 360°. — Азимут тачке A у тачци B то је угао, који правац BA заклапа у тачци B са меридианом ове тачке.

лопти опет као меридиани, то ће ови меридиани на лопти међусобом заклапати угао $\alpha\lambda$, који ћемо означити са L (в. прву формулу 1) у чл. 25.). Азимуте на сфероиду и лопти можемо сматрати као исте.



сл. 11.

Према овоме посматраћемо нашу слику као слику на лопти, где A и B представљају тачке које одговарају тачкама A и B на сфероиду (Земљи), P северни пол лопте, дакле $APB = L$. Географске ширине тачака A и B то су B и B', као што их добијамо из ширина β и β' одговарајућих тачака на сфероиду, а на основу друге формуле 1) у чл. 25. Троугао PAB је, дакле, сферан и његова страна AB представља страну $AB = s$ на сфероиду. На слици су представљена два случаја: 1) кад се тачка B налази источно од A и 2) кад се тачка B налази западно од A.

~~На основу Гаус-ових једначина имамо~~

$$\cancel{\sin\left(\frac{\alpha'+\mathcal{L}}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B'}{2}\right)=\sin\left(45^\circ-\frac{B+s}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cancel{\cos\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B'}{2}\right)=-\sin\left(45^\circ-\frac{B-s}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$$

На основу Гаус-ових једначина у Сферној Тригонометрији имамо

у случају кад је B источно од A

$$1)\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\alpha'+\mathcal{L}}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B'}{2}\right)&=\sin\left(45^\circ-\frac{B+s}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\\
\cos\left(\frac{\alpha'+\mathcal{L}}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B'}{2}\right)&=-\sin\left(45^\circ-\frac{B-s}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\\
\sin\left(\frac{\alpha'-\mathcal{L}}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B'}{2}\right)&=\cos\left(45^\circ-\frac{B+s}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\\
\cos\left(\frac{\alpha'-\mathcal{L}}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B'}{2}\right)&=-\cos\left(45^\circ-\frac{B-s}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2},
\end{aligned}\right.$$

одакле Непер-ове аналогије

$$2)\quad\left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right)&=-\frac{\sin\left(45^\circ-\frac{B+s}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ-\frac{B-s}{2}\right)}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\\
\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)&=-\frac{\cos\left(45^\circ-\frac{B+s}{2}\right)}{\cos\left(45^\circ-\frac{B-s}{2}\right)}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}\right.$$

У другоме случају, тј. кад је B западно од тачке A, Гаус-ове једначине гласе

$$\left.\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\alpha'+\mathcal{L}}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B'}{2}\right)&=-\cos\left(45^\circ-\frac{B+s}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\\
\cos\left(\frac{\alpha'+\mathcal{L}}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B'}{2}\right)&=\cos\left(45^\circ-\frac{B-s}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\\
\sin\left(\frac{\alpha'-\mathcal{L}}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B'}{2}\right)&=-\sin\left(45^\circ-\frac{B+s}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\\
\cos\left(\frac{\alpha'-\mathcal{L}}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B'}{2}\right)&=\sin\left(45^\circ-\frac{B-s}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2},
\end{aligned}\right\}\quad(1a$$

а одавде Непер-ове аналогије

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right)&=-\frac{\cos\left(45^\circ-\frac{B+s}{2}\right)}{\cos\left(45^\circ-\frac{B-s}{2}\right)}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\\
\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha'-\mathcal{L}}{2}\right)&=-\frac{\sin\left(45^\circ-\frac{B+s}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ-\frac{B-s}{2}\right)}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}\right\}\quad(2a$$

Из Непер-ових формула 2) и 2a) добијамо у једном и другом случају $\frac{\alpha'+\alpha}{2}$ и $\frac{\alpha'-\mathcal{L}}{2}$, па дакле и α' и $\mathcal{L}$, а с овим и $45^\circ-\frac{B'}{2}$; дакле и B' из пода„ така B, s и α. Приметимо да се

у првоме случају $\frac{\alpha'+\alpha}{2}$ креће између 90° и 270°, а $\frac{\alpha'-\mathcal{L}}{2}$ између 180° и 0.

У другоме случају лежи $\frac{\alpha'+\alpha}{2}$ између 0 и 180°, а $\frac{\alpha'-\mathcal{L}}{2}$ између 90° и -90°.

Пошто нађемо на овај начин B' и $\mathcal{L}$ израчу„ наћемо (помоћу формула 1) у чл. 25.) β' и λ, где је β' ширина места B на сфероиду, а λ раз„

лука између дужине места B и места A. Угао α' може да нам послужи за израчунавање неке треће тачке C на каквој новој страни мреже за коју познајемо угао, који она чини са страном AB. Итд.

Пример из Бесел-ових мерења.

Место A је Трунц, B је Кенигсберг.

$$\beta = 54^\circ\, 13'\, 11'',47, \quad \alpha = 48^\circ\, 9'\, 52'',53$$

$$\log s = 4,629\,6286 \text{ (у тоазама).}$$

Другом формулом 1) у гл. 25. или помоћу Гаус-ових таблица налазимо да је за $\beta = 54^\circ\, 13'\, 11'',47$

$$B = 54^\circ\, 11'\, 2'',90.$$

Да бисмо израчунали s у секундама (угловној мери) узећемо

$$s = r \operatorname{arc} S'', \text{ одакле } \operatorname{arc} S'' = \frac{s}{r},$$

где r означава полупречник земног сфероида у дотичној зони, а $\operatorname{arc} S''$ дужину лука, који одговара углу од S'' у кругу са полупречником 1.

$\operatorname{arc} S''$ претварамо у S'' на основу пропорције

$$\operatorname{arc} S'' : \pi = S'' : 180.60.60'',$$

одакле

$$S'' = \frac{\operatorname{arc} S''}{\pi} \cdot 180.60.60 = \frac{s}{r\pi} \cdot 180.60.60''$$

$$= 2684'',39 = 44'\, 44'',39.$$

Рачун за S''.

$$\log S'' = \log s + \log 180 + 2\log 60 - \log\pi - \log r.$$

Пре свега одређујемо полупречник

$$r = \frac{b}{1 - e^2 \sin^2 \omega}$$

(в. формулу 4a) у гл. 25.). Према Бесел-овим подацима је

$$\log e = 8,912\,2052 - 10$$
$$\log \sin\omega = 9,900\,6297 - 10$$
$$\log e \sin\omega = 8,812\,8349 - 10$$
$$\log e^2 \sin^2\omega = 7,625\,6698 - 10$$
$$e^2 \sin^2\omega = 0,004\,2235$$
$$1 - e^2 \sin^2\omega = 0,995\,7765$$
$$\log(1 - e^2\sin^2\omega) = 0,998\,1619 - 1$$

$$\log b = 6,513\,3694$$
$$\log(1 - e^2\sin^2\omega) = 0,998\,1619 - 1$$
$$\log r = 6,515\,2075$$
$$\log\pi = 0,497\,1499$$
$$\log \pi r = 7,012\,3574$$

$$\log s = 4,629\,6286$$
$$\log 180 = 2,255\,2725$$
$$\log 60^2 = 3,556\,3025$$
$$\log s.180.60^2 = 10,441\,2036$$

$$\log S.180.60^2 = 10,441\,2036$$
$$\log \pi r = 7,012\,3574$$
$$\log S'' = \log \frac{S.180.60^2}{\pi r} = 3,428\,8463$$
$$S'' = 2684'',39 = 44'\,44'',39.$$

С овим налазимо

$$\frac{B+S}{2} = 27°\,27'\,53'',64\,, \quad 45° - \frac{B+S}{2} = 17°\,32'\,6'',36$$
$$\frac{B-S}{2} = 26°\,43'\,9'',25\,, \quad 45° - \frac{B-S}{2} = 18°\,16'\,50'',75\,,$$

а на основу овога помоћу Непер-ових аналогија 2)

$$\frac{\alpha'+\mathcal{L}}{2} = 114°\,57'\,12'',87$$
$$\frac{\alpha'-\mathcal{L}}{2} = 113°\,59'\,33'',58\,,$$

одакле

$$\alpha' = 228°\,56'\,46'',45$$
$$\mathcal{L} = 0°\,57'\,39'',29.$$

Овим, на основу прве формуле 1) у чл. 25. $\lambda = \frac{\mathcal{L}}{\alpha}$ и формуле 6_1) у чл. 26. $\alpha = \frac{1}{\cos\zeta}$, дакле $\lambda = \mathcal{L}.\cos\zeta$, где је $\zeta = 1°\,43'\,26'',80$ (в. на крају чл. 26.), налазимо

$$\lambda = 0°\,57'\,37'',72.$$

Употребом једне од Гаус-ових једначина 1) добијамо $45° - \frac{B'}{2} = 17°\,39'\,40'',15$, дакле

$$B' = 54°\,40'\,39'',70.$$

Друга формула 1) у чл. 25. или Гаус-ове таблице дају за $B' = 54°\,40'\,39'',70$ на сфероиду

$$\beta' = 54°\,42'\,49'',93.$$

Задатак је овим потпуно решен. Нашли смо, дакле, да је ширина Кенигсберга $\beta' = 54°42'49'',93$; разлика између дужине Кенигсберга и Трунца $\lambda = 0°57'37'',72$; азимут места Трунц у Кенигсбергу $\alpha' = 228°\,56'\,46'',45$.

30. Овим је решен главни задатак Више Геодезије у колико се на њега може да примене теорија конформног снимања кривих површина. У току нашег излагања ми смо претпоставили да је фактор $m = 1$, које је, строго узев, тачно само за $\beta = \omega$ (в. у почетку чл. 25.). За друге вредности ширине β, које су за мало различне од ω, фактор m је само приближно $= 1$ и одступање m-а од 1 постаје у толико веће у колико се β буде више разликовало од ω. То значи да снимак једне геодетске линије на лопти није апсолутно једнак самој линији и према томе да се тај снимак не поклапа потпуно са луком великог круга. Исто тако и азимути у крајњим тачкама сферне дужи (комада великог круга), које (тј. крајње тачке) представљају снимке крајњих тачака геодетске

линије на сфероиду нису у снимку исте као у оригиналу. Према томе имали бисмо да испитамо величину овог одступања, које чинимо замењујући једне другима, као што смо то горе радили (замењујући снимке геодетских линија деловима великих кругова и азимуте на лопти азимутима на сфероиду), тј. имали бисмо да израчунамо поправке, које треба учинити код добивених резултата. У та испитивања ми нећемо овде да се упуштамо из два разлога: једно што такво проучавање не улази, строго узев, у оквир наше расправе о конформном снимању, а друго што су те корекције тако незнатне да се оне у пракси готово и не узимају у обзир. Тако нпр. нашао је Гаус код Хановеранског мерења за стране, које су биле дугачке скоро 15 миља корекције испод 0,001 секунде.

Историске напомене.

За стереографску пројекцију се мисли да је њу пронашао чувени грчки астроном Хипарх (у другом веку пре Хр.). Велики александриски географ Клаудије Птоломеј (у првој половини другог века после Хр.) писао је о стереографској пројекцији расправу, која постоји данас само у латинском преводу (Explicatio superficiei sphericae in planum). Доцније су се и многи други геометри бавили овом методом и препоручивали је за конструкцију географских карата, а нарочито Хасе (у своме спису Sciagraphia integri tractatus de constructione mapparum omnis generis. Lipsiae, 1717). Своје име добила је стереографска пројекција од Агвилонија (Aguilonius. Opticorum libri VI. Antwerpiae, 1613). Карактеристично је, да је, поред свег бављења овом методом од стране геометара, остало неопажено значајно својство стереографске пројекције да се углови пренашају у њиховој правој величини тако да је та њена особина тек много доцније проналажена.

Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728.–1777.) у својим Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Dritter Theil, Berlin, 1772. Sechste Abhandlung: Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. проучавајући конструкцију карата пошао је од општије тачке гледишта, док су се сви пре њега ограничавали само на поједине врсте пројекција, а нарочито на перспективно снимање. Расматрајући проблем снимања лопте на раван Ламберт је формулисао извесне услове, који морају бити испуњени код снимака, а поставио услове конформности и еквивалентности. Ма да и он није извео потпуно теорију ове две врсте снимања, њему, ипак, припада заслуга да је замисао, на којима се оне оснивају, јасно изнео. Осим тога је завео и неколико нових начина снимања, која се и данас употребљавају у Картографији. Но и ако је Ламберт у својим Anmerkungen und Zusätze први узео у проучавање пројектовања, која је Гаус доцније назвао конформним

снимањем, он је се задовољио да постави диференцијалне једначине од којих зависи конформно снимање лопте на раван изводећи из њих, поред већ познате стереографске и Меркаторове пројекције и неколико нових. Опште решење за снимање других површина није успео да нађе.

Решење конформног снимања обртних површина на раван дао је Лагранж (Joseph Louis de Lagrange, 1736.–1813.) у свом раду Sur la Construction des cartes géographiques (Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Berlin, Année 1779) специјализујући опште решење на случај да се меридијанске линије и упоредници пренашају у равни као кругови. Лагранж је своје решење и даље специјалисао на снимање спљоштеног обртног елипсоида указујући на примену добивених формула у конструкцији географских карата.

Гаус (Carl Friedrich Gauss, 1777.–1855.) у расправи Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird (Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von H. C. Schumacher, 3. Heft. Altona 1825) (као од„говор на расписани темат од ученог друштва у Копенхагену) решио је проблем конформног сни„мања сасвим опште постављајући диференцијал„не једначине за ма какве површине.

Додатак No. 6.

Кратке напомене о кривини површина.

Под <u>нормалним пресеком</u> неке површине у једној њеној тачци разумемо пресек до„бивен једном равни која стоји управно на тангенцијалној равни површине у додирној тачци.

<u>Meunier</u>-ова теорема. Замислимо у једној тачци на површини повучен нор„малан пресек и други један коси пресек под углом φ према равни првог пресека и то тако да оба пресека пролазе кроз исту тангенту која је повучена на пов„ршину у дотичној тачци. Теорема гласи да је полупречник кривине косога пре„сека (r) једнак пројекцији полупреч„ника кривине нормалнога пресека (R) на раван косога пресека

$$r = R\cos\varphi.$$

У свакој тачци на површини постоје

два нормална пресека од којих један има највећи, а други најмањи полупречник кривине од свих осталих нормалних пресека. Та два нормална пресека зову се *главни пресеци*, а њихови полупречници *главни полупречници кривине*.

Линија на површини, код које се нормале повучене у двема узастопним тачкама њеним *секу*, зове се *линија кривине* дотичне површине. Кроз сваку тачку на површини пролазе увек две линије кривине, које се у тој тачци секу под правим углом.

Линије кривине, уопште узев, нису равне линије и ако су (изузетно) равне линије њихова се раван не мора поклапати са равни главног пресека. Раван главног пресека је нормална на површини, док раван линије кривине стоји косо према овој.[1]

1) Теорију линија кривине дао је *Монж* (Gaspard Monge, 1746.–1818.) у Applications de l'analyse à la géométrie.

Dupin-ова теорема. Ако се три површине секу нормално у једној тачци и ако се две и две од њих и у следећој тачци секу под правим углом, онда су пресеци ових површина у правцу линија кривине на тим површинама.

Теорема, по којој се конфокалне површине другог степена секу по линијама кривине, сачињава специјалан случај *Meunier*-ове теореме.

Кад се две површине секу нормално (или под ма каквим константним углом) и ако је њихов пресек линија кривине једне површине, онда је он (пресек) линија кривине и друге површине.

Под *геодетском линијом* једне површине разумемо такву линију на површини чија је оскулаторна раван у ма којој њеној тачци нормална раван површине.

Конац, затегнут преко површине између двеју тачака на површини, добија форму геодетске линије и с тога је геодетска линија обично и најкраћа линија између двеју тачака на површини.¹)

Лопта, чији је полупречник a одређен са
$$\frac{2}{a}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},$$
представља оскулаторну лопту површине у тачци у којој су главни полупречници кривине R_1 и R_2. Ова лопта има у посматраној тачци на површини исту кривину као и површина и представља <u>средњу кривину</u> површине.

<u>Joachimsthal</u>-ова теорема. Ако је линија кривине равна линија, онда њена раван чини са <u>тангенцијалном равни</u> у свакој тачци линије

1) Геодетска линија не мора увек да је најкраћа линија између двеју тачака на површини. Тако нпр. оба дела великог круга, који пролази кроз две тачке на сфери, јесу геодетске линије, док је, међутим, само онај део тога круга (сферна дуж), који је $\angle 180°$, најкраће растојање између дотичних тачака. Геодетска линија је и најкраћа линија у случају да су тачке довољно близу једна другој.

један исти угао.

Ако је линија кривине геодетска линија, онда она мора да је равна линија.

Замислимо на некој површини један део ограничен једном затвореном линијом и паралелно са нормалама на површину, које су подигнуте у тачкама линије, повучене полупречнике једне лопте, чији је полупречник = 1. Површину овим полупречницима обележеног дела лопте назвао је <u>Гаус</u> <u>тоталном кривином</u> посматраног дела замишљене површине. Дељењем тоталне кривине једног површинског елемента са површином тог површинског елемента добијамо оно што се зове <u>мера кривине</u> у тачци на коју се односи онај површински елеменат.

Мера кривине је једнака реципрочној вредности производа из главних полупречника кривине
$$K=\frac{1}{R_1 R_2}.$$

<u>Гаус</u>-ова теорема. Кад се једна савитљива, али не растегљива површина деформује на какав било начин, дакле промене свој облик

тако да одстојања (мерена на површини) између појединих тачака остану иста, која су била и пре деформације, да онда и мера кривине у свакој тачци површине остаје непромењена.

На свакој површини могу да се образују две система линија u и v тако да је за једну систему $u = Const.$, а за другу $v = Const.$ Ма која тачка на површини може да се посматра као пресек једне линије прве системе са једном линијом друге системе и њен положај на површини да се одреди, према томе, параметрима u и v. Линиски елеменат на површини представљен је онда на начин

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2.$$

$\sqrt{e}\,du$ изражава елеменат линије која полази од извесне тачке, а за коју је $v = Const.$;
$\sqrt{g}\,dv$ даје опет елеменат линије, која полази из исте тачке, а за коју је $u = Const.$

Ако се ове две линије секу под углом ω, онда је, с обзиром на то да је ds дијагонала у паралелограму, чије су стране $\sqrt{e}\,du$ и $\sqrt{g}\,dv$, а захваћени угао ω

$$\cos\omega = \frac{f}{\sqrt{eg}}.$$

Површина овога паралелограма је

$$\sqrt{e}\,du \cdot \sqrt{g}\,dv \cdot \sin\omega = \sqrt{eg - f^2}\,du\,dv.$$

Ако су линије $u = 0$ геодетске линије, онда је $e = 1$, а ако су линије $u = 0$, $v = 0$ једна према другој ортогоналне, онда је (на основу формуле за $\cos\omega$) $f = 0$ и у таквоме случају (тј. кад су линије u геодетске, а линије v њихове ортогоналне трајекторије) линиски елеменат добија вид

$$ds^2 = du^2 + g\,dv^2.$$

У овоме случају линије v не могу бити геодетске осим ако се површина може да развије у раван (да је девелопабл).

Најзад, ако ставимо $e = g = n$, $f = 0$, онда је

$$ds^2 = n(du^2 + dv^2)$$

и таквих система ортогоналних линија има на свакој површини безбројно много. Такве системе линија деле површину на бесконачно мале квадрате и зову се изотермне.

Заменом

$$u + iv = 2\mu, \quad u - iv = 2\nu,$$

одакле

$$du = d\mu + d\nu, \quad dv = \frac{d\mu - d\nu}{i}$$

дајемо линиском елементу форму

$$ds^2 = 4n\,d\mu\,d\nu.$$

Додатак No. 4.

гл. 24. стр. 87.

Гаус у својој класичној расправи Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. Artikel 13. даје за

$$\phi(w) = w + Const.$$

у главноме[1] следеће решење за снимање обртног елипсоида на лопту.

Узев да је $\phi(w) = w + ilk$ добијамо основне једначине

$$1)\quad \begin{cases} \mathcal{L} = \lambda \\ tg\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = k\, tg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}} \end{cases}$$

и пошто је

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1, \quad \frac{\partial\, l\, tg\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right)}{\partial \lambda} = 0$$

имамо

$$m = \frac{r^2\cos^2 B}{a^2\cos^2\beta}\left(1 - e^2\sin^2\beta\right)$$

$$1a)\quad \sqrt{m} = \frac{r\cos B}{a\cos\beta}\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}.$$

---

[1] Овде су учињене извесне незнатне измене у колико је то било потребно због осталог излагања.

Ако овде за $\cos B$ ставимо његову вредност, која следује из друге једн. 1), а на основу тога што је

$$tg\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = \frac{1 + tg\frac{B}{2}}{1 - tg\frac{B}{2}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}}}{1 - \sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}}} = \text{напр. } g$$

(где је $g = k\, tg\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}$), одакле

$$\sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}} = \frac{g-1}{g+1}, \quad \cos B = \frac{2g}{1+g^2}, \text{ тј.}$$

$$\cos B = \frac{2k\, tg\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}}{1 + k^2 tg^2\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{e}}$$

$$= \frac{2k\sin\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\left(1+e\sin\beta\right)^e}{\cos^2\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(1+e\sin\beta\right)^e + k^2\sin^2\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(1-e\sin\beta\right)^e}$$

$$= \frac{k\cos\beta\cdot\left(1-e^2\sin^2\beta\right)^{\frac{e}{2}}}{\cos^2\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(1+e\sin\beta\right)^e + k^2\sin^2\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(1-e\sin\beta\right)^e}$$

добићемо на основу формуле 1a)

$$\sqrt{m} = \frac{r}{a}\cdot\frac{k\left(1-e^2\sin^2\beta\right)^{\frac{1}{2}+\frac{e}{2}}}{\cos^2\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(1+e\sin\beta\right)^e + k^2\sin^2\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(1-e\sin\beta\right)^e}\cdot \quad (1b$$

Модул $\sqrt{m}$ зависи, дакле, једино од ширине β. Најмање одступање од потпуне сличности између снимка и оригинала добићемо одредимо произвољну константу k тако да

$\sqrt{m}$ добије исту вредност за крајње ширине β услед чега се $\sqrt{m}$ за средњу ширину приближује својој највећој односно најмањој вредности. Означимо са β_1 и β_2 крајње вредности ширине β. Према постављеноме услову, да $\sqrt{m}$ добије за β_1 и β_2 исту вредност, имамо за K ову једначину

$$\frac{(1-e^2\sin^2\beta_1)^{\frac{1}{2}+\frac{e}{2}}}{\cos^2(45^\circ+\frac{\beta_1}{2})\cdot(1+e\sin\beta_1)^e+K^2\sin^2(45^\circ+\frac{\beta_1}{2})\cdot(1-e\sin\beta_1)^e}$$

$$=\frac{(1-e^2\sin^2\beta_2)^{\frac{1}{2}+\frac{e}{2}}}{\cos^2(45^\circ+\frac{\beta_2}{2})\cdot(1+e\sin\beta_2)^e+K^2\sin^2(45^\circ+\frac{\beta_2}{2})\cdot(1-e\sin\beta_3)^e}$$

одакле

$$2)\quad K=\sqrt{\frac{\dfrac{\cos^2(45^\circ+\frac{\beta_1}{2})\cdot(1+e\sin\beta_1)^e}{(1-e^2\sin^2\beta_1)^{\frac{1}{2}+\frac{e}{2}}}-\dfrac{\cos^2(45^\circ+\frac{\beta_2}{2})\cdot(1+e\sin\beta_2)^e}{(1-e^2\sin^2\beta_2)^{\frac{1}{2}+\frac{e}{2}}}}{\dfrac{\sin^2(45^\circ+\frac{\beta_2}{2})\cdot(1-e\sin\beta_2)^e}{(1-e^2\sin^2\beta_2)^{\frac{1}{2}+\frac{e}{2}}}-\dfrac{\sin^2(45^\circ+\frac{\beta_1}{2})\cdot(1-e\sin\beta_1)^e}{(1-e^2\sin^2\beta_1)^{\frac{1}{2}+\frac{e}{2}}}}}.$$

Да бисмо испитали за коју ширину добија $\sqrt{m}$ своју највећу или најмању вредност диференцијалимо логаритамски једн. 1а) и добићемо (пошто је $l\sqrt{m}=lr-la+l\cos B-l\cos\beta+\frac{1}{2}\,l(1-e^2\sin^2\beta)$)

$$*)\qquad \frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{m}}=-\mathrm{tg}B\,dB+\mathrm{tg}\beta\,d\beta-\frac{e^2\sin\beta\cos\beta\,d\beta}{1-e^2\sin^2\beta}.$$

Логаритамским диференцијалењем друге једн. 1)

(узев у обзир да је

$$l\,\mathrm{tg}\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=lK+l\,\mathrm{tg}\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)+\frac{e}{2}\left[l(1-e\sin\beta)-l(1+e\sin\beta)\right])$$

налазимо

$$\frac{dB}{2\cos^2(45^\circ+\frac{B}{2})\cdot\mathrm{tg}(45^\circ+\frac{B}{2})}=\frac{d\beta}{2\cos^2(45^\circ+\frac{\beta}{2})\cdot\mathrm{tg}(45^\circ+\frac{\beta}{2})}+\frac{e}{2}\left[\frac{-e\cos\beta}{1-e\sin\beta}-\frac{e\cos\beta}{1+e\sin\beta}\right]d\beta$$

или

$$\frac{dB}{\cos B}=\frac{d\beta}{\cos\beta}-\frac{e^2\cos\beta\,d\beta}{1-e^2\sin^2\beta}$$

или

$$\frac{dB}{\cos B}=\frac{(1-e^2)\,d\beta}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)},$$

дакле

$$dB=\cos B\,\frac{(1-e^2)\,d\beta}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)},$$

које, кад унесемо у једн. *), даје

$$\frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{m}}=\left[-\sin B\,\frac{1-e^2}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{e\sin\beta\cos\beta}{1-e^2\sin^2\beta}\right]d\beta$$

$$=\frac{-(1-e^2)\sin B+\sin\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)-e^2\sin\beta\cos^2\beta}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)}\,d\beta$$

$$\frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{m}}=\frac{(1-e^2)(\sin\beta-\sin B)}{\cos\beta\cdot(1-e^2\sin^2\beta)}\,d\beta.\qquad (**$$

Ово постаје $=0$, тј. модул добија своју највећу или најмању вредност, кад је $\sin\beta=\sin B$, дакле за $B=\beta$.

Означимо ову вредност ширине, за коју $\sqrt{m}$ постаје највеће односно најмање, са B и тада имамо (кад у другу једн. 1) ставимо $\mathcal{B}=\beta=B$)

$$K=\left(\frac{1+e\sin B}{1-e\sin B}\right)^{\frac{e}{2}},$$

одакле

$$\sin B=\frac{K^{\frac{2}{e}}-1}{e\left(K^{\frac{2}{e}}+1\right)}.$$

Одавде можемо да израчунамо B пошто смо помоћу формуле 2) нашли константу K. Са тако добивеним K друга формула 1) постаје

$$tg\left(45°+\frac{\mathcal{B}}{2}\right)=tg\left(45°+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left[\frac{(1+e\sin B)(1-e\sin\beta)}{(1-e\sin B)(1+e\sin\beta)}\right]^{\frac{e}{2}}.$$

Одавде видимо да је за $\beta < B$, $\mathcal{B} > \beta$, дакле $\sin\beta-\sin B < 0$, па према **) и $\frac{d\sqrt{m}}{d\beta} < 0$, док је за $\beta > B$, $\mathcal{B} < \beta$, дакле $\sin\beta-\sin B > 0$, па и $\frac{d\sqrt{m}}{d\beta} > 0$. То значи да је за $\beta=\mathcal{B}=B$ модул $\sqrt{m}$ увек у минимуму и то (на основу једн. 1a) кад у њој ставимо $\beta=\mathcal{B}=B$)

$$=\frac{r}{a}\sqrt{1-e^2\sin^2 B}.$$

Ако узмемо као полупречник лопте

$$r=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}},$$

онда за ширину B слици бесконачно малих делова елипсоида на лопти постају не само слични но и равни своме оригиналу, а за остале ширине су већи од оригинала.

Додатак No. 2.

Чл. 15. стр. 47.

Интеграљење диференцијалне једначине

$$dq=(1-e^2)\frac{d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)\cos\beta}.$$

Растављењем

$$dq=\frac{d\beta}{\cos\beta}-\frac{e^2\cos\beta\, d\beta}{1-e^2\sin^2\beta}$$

следује

$$q=\int\frac{d\beta}{\cos\beta}-e\int\frac{d\,e\sin\beta}{1-e^2\sin^2\beta}.$$

Први интеграл налазимо познатом заменом $tg\frac{\beta}{2}=t$ на основу које је $\cos\beta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $d\beta=\frac{2dt}{1+t^2}$ и према томе

$$\int\frac{d\beta}{\cos\beta}=2\int\frac{dt}{1-t^2}=l\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=l\left(\frac{1+tg\frac{\beta}{2}}{1-tg\frac{\beta}{2}}\right)=l\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right),$$

а тако исто и други интеграл, кад ставимо $e\sin\beta=\xi$

$$e\int\frac{d\,e\sin\beta}{1-e^2\sin^2\beta}=e\int\frac{d\xi}{1-\xi^2}=\frac{e}{2}\,l\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)$$
$$=l\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}.$$

С овим налазимо

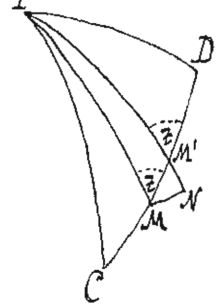
$$q=l\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)-l\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}=l\left[tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right].$$

Додатак No. 3.

Сл. 19. и 20.

<u>Локсодрома</u> ($\lambda o \xi \acute{o} \varsigma$ = кос, $\delta \rho \acute{o} \mu o \varsigma$ = пут) линија на сфери или сфероиду, која сече све меридиане под истим углом, који се зове <u>азимут</u>. Такву линију описује брод кад је управљен стално ка истој тачци бусоле.

1. на сфери.



сл. 12.

Нека C тачка поласка, D тачка доласка, PC и PD њихови меридиани, P(северни) пол, лук CD локсодрома између C и D. Означимо са

L_1, B_1 дужину и <u>ширину</u> тачке C,

L_2, B_2 " " " " D,

L, B " " " " M

на локсодроми између C и D, са

$L+dL$, $B+dB$ <u>ширину</u> и дужину тачке M' такође на локсодроми бесконачно близу тачци M. Обележимо константни $\sphericalangle PMD = Z$ (азимут), који локсодрома чини са меридианима. Нека је $MM' = ds$, MN бесконачно мали лук упоредника тачке M.

<u>Сматравши</u> троугао $MM'N$ као праволиниски троугао са правим углом код N имамо

$M'N$, а то је $dB = ds.\cos Z$, $MN = ds.\sin Z$.

Пошто се луци упоредника имају према луцима екватора са истим средишњим углом као полупречници дотичних кругова, а полупречник упоредника је $r = R\cos B$, ако са R означимо полупречник екватора, то је $MN = \frac{r}{R} dL = dL.\cos B$ и према томе $dL = \frac{ds}{\cos B}\sin Z$. Добили смо дакле ове две једначине

$$dB = ds.\cos Z \qquad (1$$

$$dL = \frac{ds.\sin Z}{\cos B}. \qquad (2$$

Интегралећи прву једначину између граница L_1 и L_2, а с обзиром да је Z константно, добијамо

$$B_2 - B_1 = s.\cos Z. \qquad (3$$

Деленем једначине 2) једначином 1) налазимо

$$\frac{dL}{dB} = \frac{tgZ}{\cos B}, \text{ одакле } dL = tgZ.\frac{dB}{\cos B}$$

$$L_2 - L_1 = tgZ\int_{B_1}^{B_2}\frac{dB}{\cos B}$$

$$L_2 - L_1 = tgZ.\, l\left[\frac{tg(45^\circ + \frac{B_2}{2})}{tg(45^\circ + \frac{B_1}{2})}\right]. \qquad (4$$

1. <u>Напомена</u>. Ако бисмо прву тачку C узели у тачци где први меридиан сече екватор ($L_1 = 0$, $B_1 = 0$), једначина 4) добила би ову простију форму

$$L = tgZ.\, l\, tg(45^\circ + \frac{B}{2}). \qquad (4a$$

Из ове једначине закључујемо 1) да се локсодрома састоји из два дела, који су у односу према екватору преокренуто симетрични и 2) пошто је за $B=90^\circ$, $L=\infty$ да локсодрома кружи око полова у бесконачно много завијутака не достижући их никако. Полови су асимптотне тачке локсодроме.

Једн. 4) односно 4а) може се сматрати као једначина локсодроме у географским координатама L и B.

2. Напомена. Обрасци 3) и 4) могу да послуже за решавање неколико важних проблема у морепловству. Приметимо да су, зарад лакшег рачунања, конструисане нарочите таблице за функцију

$$\lg\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{B}{2}\right)=\varphi(B).$$

Такве се таблице зову таблице растених ширина. Имамо дакле једначину 3)

$$B_2-B_1=S\cdot\cos Z$$

и једначину 4), коју ћемо да напишемо краће

$$L_2-L_1=\operatorname{tg} Z\cdot\left[\varphi(B_2)-\varphi(B_1)\right].$$

Ове две једначине садрже шест количина L_1, B_1, L_2, B_2, S и Z, тако да кад су нам познате четири од њих, остале две можемо да израчунамо.

Пре свега претпостављамо да су нам познате географске координате L_1, B_1 полазне тачке C и онда имамо ове случајеве:

1) Дато B_2 и L_2. Траже се Z и S.
Једн. 4) даје
$$\operatorname{tg} Z=\frac{L_2-L_1}{\varphi(B_2)-\varphi(B_1)},$$
а с овим и помоћу 3)
$$S=\frac{B_2-B_1}{\cos Z}.$$

2) Дато S и Z. Траже се B_2 и L_2.
Из једн. 3) следује
$$B_2=B_1+S\cdot\cos Z$$
и помоћу овога, а на основу 4)
$$L_2=L_1+\operatorname{tg} Z\cdot\left[\varphi(B_2)-\varphi(B_1)\right].$$

3) Дато Z и B_2. Траже се L_2 и S.
Из једн. 4) налазимо
$$L_2=L_1+\operatorname{tg} Z\cdot\left[\varphi(B_2)-\varphi(B_1)\right],$$
а из једн. 3)
$$S=\frac{B_2-B_1}{\cos Z}.$$

4) Дато Z и L_2. Траже се B_2 и S.
Једн. 4) даје
$$\varphi(B_2)=\frac{L_2-L_1}{\operatorname{tg} Z}+\varphi(B_1),$$
а са добивеним B_2 помоћу једн. 3)
$$S=\frac{B_2-B_1}{\cos Z}.$$

5) Дато S и B_2. Траже се Z и L_2.

формула 3) даје $\cos Z = \frac{B_2 - B_1}{S}$

и онда помоћу 4)

$$L_2 = L_1 + tgZ \cdot [\varphi(B_2) - \varphi(B_1)].$$

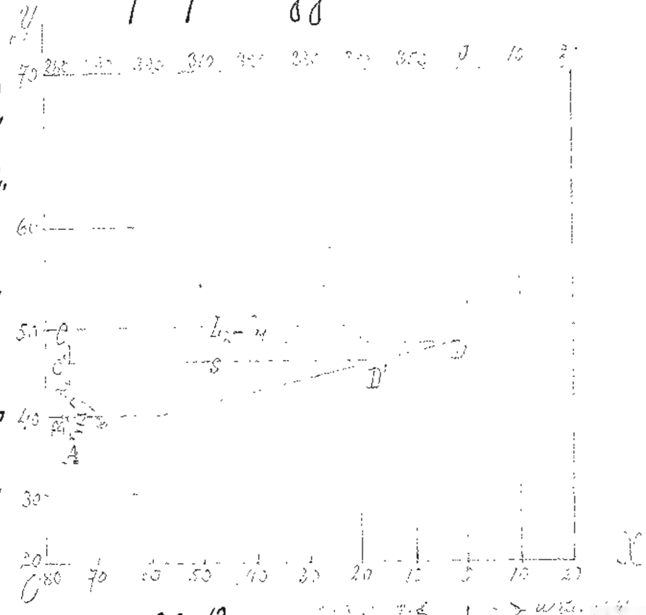
6) Дато S и L_2. Тражи се B_2 и Z.

Овај проблем не може да се непосредно реши формулама 3) и 4). Он се решава помоћу таблица, које су конструисане на основу формула 3) и 4) тако да за сваку вредност S и Z таблице дају одговарајуће вредности за $L_2 - L_1$ и $B_2 - B_1$. Овим се, онда, обратно из задатих вредности за S и $L_2 - L_1$ налазе (интерполацијом) одговарајуће вредности за $B_2 - B_1$ и Z.

Графичко решење ових шест задатака.

Узмимо да треба конструисати карту, која обухвата у дужини 10°, а у ширини 5°. Одмерићемо у хоризонталноме правцу OX 10 једнаких делова, који представљају степене дужине, које можемо да поделимо на мање делове, који би представљали поједине минуте или по 10 минута у сваком степену. Нормале, подигнуте у појединим подеоцима, представљају меридиане. Ова подељена права OX одговара

првоме упореднику на карти и служи као размерник за графичке конструкције. Делови ове праве пропорционални су одговарајућим деловима на екватору. Остале упореднике одредићемо на начин како смо објаснили у чл. 19. Одстојања упоредника међусобом мерена су јединицом, на основу које је подељен први упоредник OX на степене и минуте географске дужине.



сл. 13.

Повуцимо за A меридиан AC, а за тачку D упоредник DC. Из троугла ADC, у којем је $\measuredangle DAC = Z$ стални угао по којем локсодрома AD сече меридиане (а то је њен азимут) и на основу конструкције да је $AC = \varphi(L_2) - \varphi(L_1)$, читамо $DC = AC \cdot tgZ = tgZ \cdot [\varphi(L_2) - \varphi(L_1)]$, одакле, с обзиром на формулу 4), закључујемо да је

$$D'C = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 .$$

Пренесимо на меридијану тачке A као дужину разлику географских ширина $B_2 - B_1$, тј. број степена и минута у јединици, којом је конструисан први упоредник (линија OX) и нека је $AC' = B_2 - B_1$. Тада читамо из троугла $AD'C'$ да је $AC' = AD' . \cos Z$ или $B_2 - B_1 = AD' . \cos Z$, које упоређено са једн. 3) показује да је

$$AD' = s,$$

тј. одстојање тачке опредељена D од тачке полазка A изражено у дужној јединици првога упоредника (у миљама, километрима итд.).

И пошто се сви оних шест задатака решавају помоћу једн. 3) и 4) видимо да се њихово графичко решење своди на конструкцију троуглова ADC и $AD'C'$.

2. на сфероиду.

Из троугла $MM'N$ (в. сл. 12.), сматрајући га као правоугли троугао са правим углом код N, читамо $MN = M'N . \operatorname{tg} Z$. Овде је MN елеменат упоредника тачке M, чији је полупречник $= \dfrac{a\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}$ [1],

1) в. Додатак No. формула 2).

дакле

$$MN = \frac{a\cos\beta . d\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}} .$$

$M'N$ је елеменат меридијанске елипсе и према томе

$$M'N = \frac{a(1-e^2) . d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{3/2}} .$$ [1]

Према првој формули $MN = M'N . \operatorname{tg} Z$ имамо диференцијалну једначину локсодроме

$$\frac{a\cos\beta . d\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}} = \frac{a(1-e^2) . d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{3/2}} \operatorname{tg} Z$$

или

$$d\lambda = \operatorname{tg} Z \frac{(1-e^2) . d\beta}{\cos\beta . (1-e^2\sin^2\beta)} ,$$

одакле, интеграљењем између граница λ_1 и λ_2 и 0 и β

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \operatorname{tg} Z . l\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) . \left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{e/2}\right],$$ [2]

где λ_1 значи дужину тачке у којој линија сече екватор.

Из ове једначине ми видимо да је за $\beta = 90^\circ$, $\lambda_2 = \infty$. То значи да је пол асимптотна тачка локсодроме.

За $Z = 0$ је $\lambda_2 = \lambda_1$. Локсодрома је меридијан.

За $Z = 90^\circ$ локсодрома је упоредник.

Означимо

$$l\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) . \left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right] = \Phi(\beta)$$

1) в. Додатак No. формула 10).

2) в. Додатак No.

и једначина локсодроме гласи

$$\lambda_2-\lambda_1=tgZ\cdot\Phi(\beta).$$

За функцију $\Phi(\beta)$ такође су конструисане таблице растених ширина. Ове су таблице сложеније од оних за функцију $\varphi(\beta)$. Разлика између функција $\Phi(\beta)$ и $\varphi(\beta)$ може да износе до 23'. У морепловетству служе се таблицама за функцију $\varphi(\beta)$ сматравши Земљу као лопту. Грешка, која из тога произилази, лежи испод ступња тачности који се иначе постизава посматравањима на броду.

Додатак No. 7.

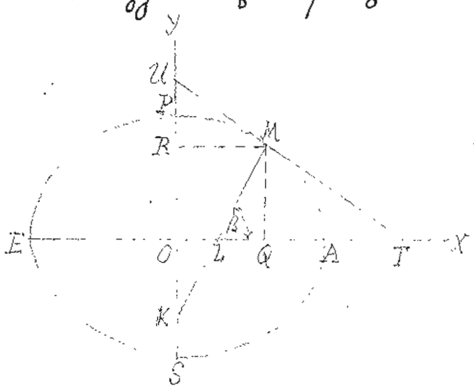
Формуле за земни сфероид.

Количине, које се употребљавају у Геодезији, изражене у a (полупречнику екватора), e (ексцентрицитету меридианске елипсе) и β (географске ширине неке тачке на земном сфероиду).

Нека је $PASE$ меридианска елипса, P северни пол, M тачка на сфероиду коју посматрамо. У тачци M повлачимо тангенту MT на меридиан и нормалу ML на тангенту.

Тада је $\sphericalangle MLT=\beta$ географска ширина места M.

Између ексцентрицитета e, велике полуосе a (екваторског полупречника) и мале полуосе (обртне полуосе) постоје познати односи



Сл. 14.

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\qquad (1a$$

$$b=a\sqrt{1-e^2}.\qquad (1b$$

Из Аналитичке Геометрије знамо да је угловни сачинитељ дирке у тачци $M\,(x,y)$

$$tg\,MTx=-\frac{b^2x}{a^2y},$$ [1]

дакле угловни сачинитељ нормале у тачци M

$$tg\,MLx=\frac{a^2y}{b^2x},$$

тј.

$$tg\beta=\frac{a^2y}{b^2x},$$

одакле, пошто на основу једначине елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ заменимо $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ и решимо једначину по x

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2tg^2\beta}}$$

или с обзиром на 1a)

---

1) в. Анал. Геом. I део гл.

2) $$x=\frac{a\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}.$$

Апсциса x представља полупречник упоредника на коме се налази тачка M.

На основу елипсине једначине $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ и добивене вредности 2), а с обзиром на формулу 1в) налазимо за ординату y тачке M

3) $$y=\frac{a(1-e^2)\sin\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}.$$

Из троугла MRK читамо да је $MK=\frac{x}{\cos\beta}$ или, кад заменимо за x његову вредност из 2), добијамо за $MK=N$

4) $$N=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}.$$

Ово N ($=MK$) назваћемо великом нормалом.

Из троугла MLQ читамо $ML=\frac{y}{\sin\beta}$ или кад унесемо за y његову вредност из 3) и означимо $ML=n$

5) $$n=\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}.$$

Ово n ($=ML$) назовимо малом нормалом.

Из 4) и 5) следује

6) $$n=N(1-e^2).$$

Ми знамо да је за линије другог степена (па дакле и за елипсу) полупречник кривине

$$\rho=\frac{n^3}{p^2},$$ [1)]

где p означава параметар линије. За елипсу је

$$p=\frac{b^2}{a}$$ [2)]

и према томе је, а с обзиром на формуле 5) и 1в)

$$\rho=\frac{n^3}{a^2(1-e^2)^2}=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\beta)^{3/2}}, \qquad (7$$

које, на основу образаца 6) и 4), може да се напише и овако

$$\rho=\frac{N(1-e^2)}{1-e^2\sin^2\beta}. \qquad (8$$

Ако кроз нормалу ML положимо раван нормално на раван меридијанске елипсе, онда та раван сече сфероид опет по једној елипси, чији је полупречник кривине у тачци M једнак великој нормали $N=MK$.

Пресецимо сфероид једном равни, која пролази кроз нормалу ML (која је у исто време и нормала обртног елипсоида) и чини са меридијанским пресеком какав било угао Θ, онда је по познатој Ајлер-овој теореми (имавши у виду да пресеци, чији су полупречници кривине ρ и N, стоје

1) в. Инф. Рач. I део, чл. 128. 1. пример.

2) в. Анал. Геом. I део, чл. 78. формула α.

нормално један према другом)

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{N}\sin^2\theta + \frac{1}{\rho}\cos^2\theta$$

бележећи са ρ' попречник кривине тога пресека. Ако ставимо за ρ његову вредност из 8) добићемо

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{N}\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\beta\cos^2\theta\right)$$

или

9) $$\rho' = N\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\beta\cos^2\theta\right)^{-1}.$$

Овом формулом налазимо, дакле, попречник кривине нормалног пресека, чији је <u>азимут</u> θ (угао, који чини раван пресека са меридианом места).

Означимо са S лук меридианске елипсе; dS можемо сматрати као елеменат њеног оскулаторног круга и пошто је $d\beta$ угао који чине две бесконачно приближне нормале меридианске елипсе то је

10) $$dS = \rho\, d\beta = \frac{a(1-e^2)\,d\beta}{(1-e^2\sin^2\beta)^{3/2}}.$$

Развијањем $(1-e^2\sin^2\beta)^{-3/2}$ у ред и интеграљењем између граница β_1 и β_2 добијамо за меридиански лук између два места са <u>ширинама</u> β_1 и β_2

$$S = a(1-e^2)\Big[K_1(\beta_2-\beta_1) - \frac{1}{2}K_2(\sin 2\beta_2 - \sin 2\beta_1) + \frac{1}{4}K_3(\sin 4\beta_2 - \sin 4\beta_1) - \frac{1}{6}(\sin 6\beta_2 - \sin 6\beta_1) + \dots\Big]$$

или

$$S = a(1-e^2)\Big[K_1(\beta_2-\beta_1) - K_2\sin(\beta_2-\beta_1)\cos(\beta_2+\beta_1) + \frac{1}{2}K_3\sin 2(\beta_2-\beta_1)\cos 2(\beta_2+\beta_1) - \frac{1}{3}K_4\sin 3(\beta_2-\beta_1)\cos 3(\beta_2+\beta_1) + \dots\Big],$$

где је

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \dots \\ K_2 &= \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \dots \\ K_3 &= \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \dots \\ K_4 &= \frac{35}{512}e^6 + \dots \end{aligned}\right\} \quad (11$$

Више степене од e^6 излишно је узимати.

Уметањем мерењем добивених резултата у формулу 11) добијамо извесан број условних једначина, које a и e^2 мора да испуне. Методом Најмањих Квадрата, тј. погодбом да се a и e^2 одреде из постављених једначина тако да збир квадрата грешака буде минимум налазимо највероватније вредности за a и e, којим одређујемо облик земљиног сфероида. На тај начин је нашао <u>Бесел</u> год. 1837. и 1840.

$a = 3\,272\,077{,}14$ тоаза, $e^2 = 0{,}0066744$.

Базирајући на доцније резултате саопштио је <u>Енке</u> (J. F. Encke, 1791.–1865.) год. 1850. вредности које су врло мало различне од горњих.

Додатак No. 1.

Чл. 2. стр. 6.

У Аналитичкој Геометрији у простору имамо обрасце

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

где су $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ пројекције дужи d на три ортогоналне осе, α, β, γ углови које d чини са тим осама. Осим тога имамо формулу

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2,$$

где означавају $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ углове које дуж d_1, а $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ углове које друга нека дуж d_2 заклапа са координатним осама. $\theta = \sphericalangle(d_1, d_2)$.

В. Анал. Геом. II део, чл.

Додатак No. 5.

Чл. 29. стр. 108.

Означимо са a, b, c стране, са A, B, C углове једнога сферног троугла. Гаус-ове једначине гласе

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(в. Тригоном. чл. 148. формуле 136.), а одавде (деобом) Непер-ове аналогије

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

(в. Тригоном. чл. 149. формуле 137.).