Аналитична Геометрија

II. ДЕО У ПРОСТОРУ

Бор. Ј. Пујић, проф.

Аналитична геометрија у простору.

Предавања
Др. Мих. Петровића,
проф. Универзитета
(допуњена примерима).

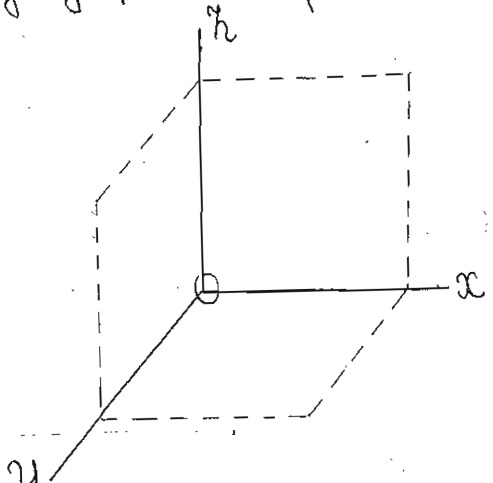
Увод

Видели смо да се у равни положај једне тачке може потпуно одредити помоћу два броја, тако да кад су та два броја позната по својим вредностима и знацима, положај тачке је потпуно одређен. Ти се бројеви зову координатама тачке у равни и њихов геометријски смисао зависи од избора координатнога система, којих има веома много.

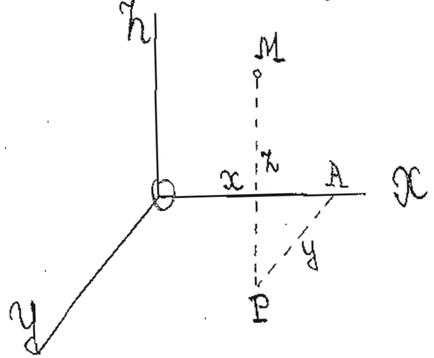
На сличан се начин положај тачке у простору може потпуно одредити помоћу три броја који се зову координатама тачке, чији геометријски смисао такође зависи од избора координатнога система. Таквих система може бити бесконачно

много, а од њих се најчешће упо-
требљују правоугли и поларни ко-
ординатни систем.

1° Правоугли координатни систем. Замислимо три једну на дру-
гу управне равни; оне ће се увек



сећи по трима
међу собом у-
правним права-
ма: OX, OY и OZ.
Положај једне
тачке M у про-
стору, кад су већ
горње три равни
утврђене, може се сматрати као одре-
ђен ако се знају одстојања тачке M



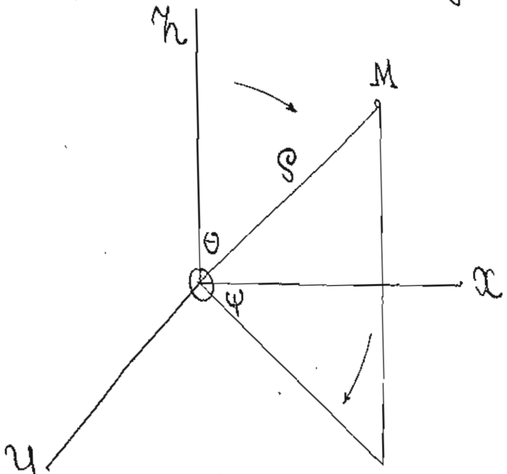
од тих трију рав-
ни. Та одстоја-
ња у ствари мо-
гу се добити и
на тај начин ако
се из тачке M
спусти управна на раван XOY па се
из њене пројекције P спусти управна
PA на праву OX. Тада је положај тач-
ке M одређен трима дужинама

$$OA = x \quad PA = y \quad MP = z$$

Али као што у равни није положај
тачке довољно одређен самим вредно-
стима координата x и y, такав је
случај и у простору. За сваку групу
вредности (x, y, z) постојало би осам та-
чака M које тој групи одговарају. Да
би се отклонила та неодређеност у-
својено је, као и у равни, да се коор-
динатама x, y и z придају знаци +
и −, а за саме те знаке усвојено је
правило слично ономе у равни: ду-
жине x сматрају се као позитивне
ако су са десне стране почетка O, а
као негативне ако су са леве стране
од почетка O; дужине y су позитив-
не ако су испред почетка O, а нега-
тивне ако су иза почетка O; на по-
слетку дужине z сматрају се као по-

зитивне или негативне према томе да ли су изнад или испод почетка O. Усвојивши то правило о знацима положај тачке је потпуно одређен трима координатама x, y и z. Праве Ox, Oy и Oz јесу координатне осовине; равни xOy, xOz и yOz називају се координатним равнима; тачка O се назива координатни почетак.

2° Поларни систем. Нека су опет дате три једна на другу управне равни. Положај тачке M може се



сматрати као одређен ако се знају: a) њено одстојање

$MO=\rho$

(потег) од тачке O, b) угао ψ који гради раван MOz са равни xOz; c) угао θ који гради потег ρ са правом Oz. Потег ρ сматра се увек као позитиван, а углови θ и ψ могу имати све могуће реалне вредности али само за њих је увек потребно утврдити како ће им се знаци рачунати. То је утврђивање знакова произвољно, али кад је једном у почетку рачуна усвојено за њих једно правило, оно мора важити у току целог рачуна. Тако н. пр. могу се углови θ и ψ сматрати као позитивни ако су добијени обртањем праве OM и OP у правцу стрелица.

Представљање површина помоћу једначина.

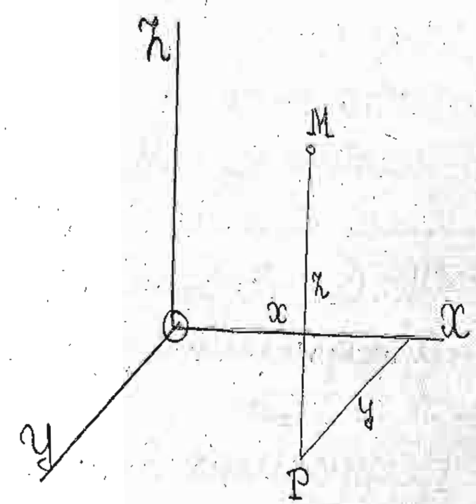
Знамо да у равни једној једначини

$$F(x,y)=0$$

одговара по једна линија за коју је ова једначина аналитички представник. Лако је уверити се да у простору једној једначини

$$f(x,y,z)=0$$

одговара у опште по једна површина за коју је та једначина аналитички представник. Тако, ако уочимо једну ма какву површину и у равни XOY једну произвољну тачку P, па из те тачке дигнемо управну MP до њеног пресека са површином, дужина MP очевидно неће бити произвољна већ одређена. То значи да сваком пару (x,y) одговара одређена вредност z, што показује да између x, y и z мора постојати каква веза, а кад би се та веза изразила аналитички, имали би извесну једначину



$$f(x,y,z)=0$$

И обратно: ако је унапред дата једначина

$$f(x,y,z)=0$$

па ју замислимо решену по једној координати н. пр. z тако да је

$$z=\varphi(x,y)$$

онда сваком произвољно узетом пару вредности (x,y) одговара из те једначине извесна вредност z која више није произвољна, другим речима: сваком пару вредности (x,y) одговара у простору тачка z. Двема бесконачно блиских тачака (x,y) у равни XOY одговараће у простору такође две блиске тачке M. Геометријско место таквих тачака биће извесна површина. Та би површина била геометријски представник једначине

$$f(x,y,z)=0$$

једначина би била аналитички представник те површине.

Као што у равни облик криве линије зависи од природе једначине која јој одговара, тако у простору природа површине зависи од једначине која јој одговара. Учинимо неколико простих случајева:

1° Претпоставимо да једначина садржи само једну координату x и нека је н. пр.

$$f(x)=0$$

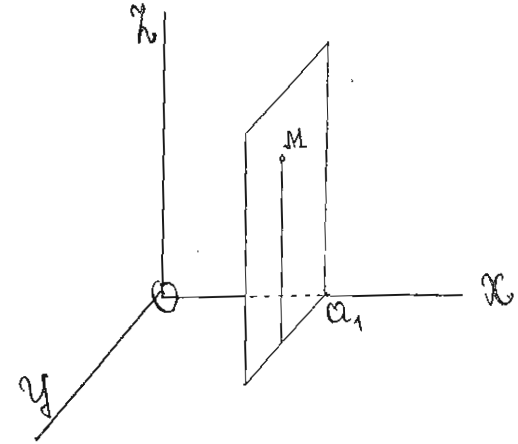
Решењем једначине по x имали би

$$x=a_1 \quad x=a_2 \quad \dots$$

Једначина

$$x=a_1$$

била би геометријско место свију оних тачака у простору које имају исту апсцису у простору a_1. Такво геометријско место очевидно није ништа друго до једна раван



паралелна равни YOZ а на растојању a_1 од ове. Једначина

$$f(x)=0$$

представљала би дакле скуп од неколико таквих равни.

На исти се начин лако увиђа да би једначина

$$\varphi(y)=0$$

представљала једну или више равни паралелних равни XOZ; на послетку једначина

$$\psi(z)=0$$

представљала би једну или више равни паралелних равни XOY. Те равни могу бити стварне или уображене.

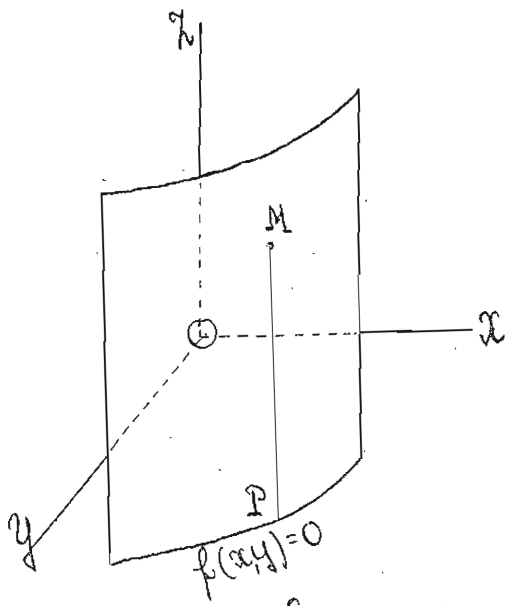
2° Претпоставимо да једначина површине садржи само две координате н. пр. x и y и нека је то

$$f(x,y)=0$$

Пошто у тој једначини не фигурише z то знали да на колико било z једне тачке M на каквој површини, између осталих двеју координата постоји увек однос

$$f(x,y)=0$$

то показује да се све тачке M такве површине пројектују у равни XOY на једну исту криву линији чија је једначина



$$f(x,y)=0$$

Геометриско место таквих тачака M т.ј. посматрана површина не може дакле бити ништа друго до извесна цилиндарска површина чије су генератрисе паралелне Осовини OZ.

Тако би исто лако увидели да би једначина

$$\varphi(x,z)=0$$

представљала извесну цилиндарску површину чије су генератрисе паралелне осовини OY, а која се у равни XOZ пројектује по кривој

$$\varphi(x,z)=0$$

На послетку једначина

$$\psi(y,z)=0$$

представљала би извесну цилиндарску површину чије су генератрисе паралелне осовини Ox и која се у равни YOZ пројектује по линији

$$\psi(y,z)=0$$

У случају кад једначина садржи све три координате, она може представљати ма какву површину у простору.

Представљање линија у простору

Две површине у простору у опште се секу по линији, а обратно свака се линија може сматрати као пресек двеју површина. Ако су дакле дате две једначине

$$f(x,y,z)=0$$

$$\varphi(x,y,z)=0$$

од којих свака одговара по једну површини, оне групе вредности (x,y,z) које у исто доба задовољавају те једначине припадаће оној кривој линији по којој се те две површине секу. Та је дакле линија дефинисана горњим двема једначинама.

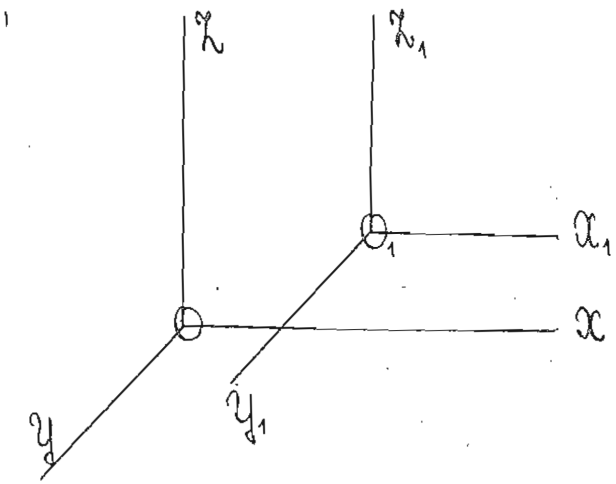
За дефиницију ма какве линије у простору потребне су две једначине и обратно: сваком пару једначина одговара по једна крива у простору. Та крива у простору може бити стварна или уображена, или се свести на праву линију или на једну тачку.

Трансформација координата.

Дешава се да у току једног рачуна настане потреба да се координатни систем са којим се дотле радило промени. Те промене могу бити разне врсте и задатак трансформације координата састоји се у томе да се помоћу координате једне тачке у старој системи израчунају координате исте тачке у новом систему и обратно. Ми ћемо прећи неколико трансформација које се најчешће употребљују.

1° Промена почетка.

Претпоставимо да је координатни почетак пренесен у нову тачку O_1 а да је правац осовина остао исти. Означимо са x_1, y_1, z_1 координате исте тачке у новом систему, са a, b и c координате почетка новог система према старом.

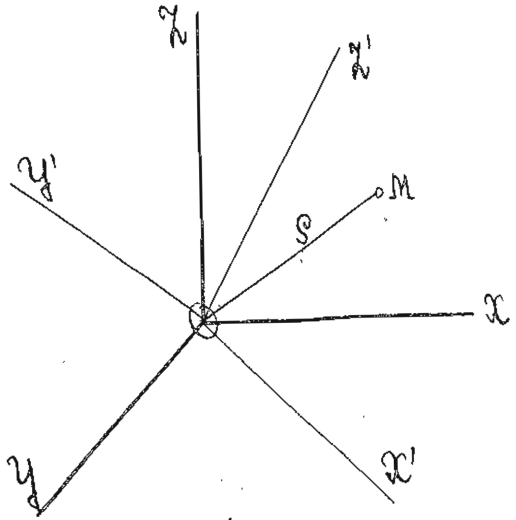


Очевидно је из слике да ће између старих и нових координата постојати односи:

$$x = x_1 + a$$
$$y = y_1 + b$$
$$z = z_1 + c$$

2° Промена правца осовина.

Претпоставимо да смо задржавши почетак O обрнули за известан угао цео координатни систем око тачке O али тако да он у новом положају буде опет правоугли. Означино са: α, β, γ косинусе углова које гради нова осовина OX' са старим OX, OY и OZ; са α_1, β_1 и γ_1 косинусе углова које гради нова осовина OY' са старим OX, OY и OZ; и са $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$ косинусе углова које гради нова осовина OZ' са старим OX, OY и OZ. Распоред ових осовина види се најбоље из ове таблице:



	OX	OY	OZ
OX'	α	β	γ
OY'	α_1	β_1	γ_1
OZ'	α_{11}	β_{11}	γ_{11}

Задатак трансформације своди се на то да се помоћу x, y, z израчуна x_1, y_1 и z_1 и обратно. Уочимо тачку M чији потег нека је ρ. Пројекција потега ρ на стару осовину OX биће x. Међутим до исте пројекције можемо доћи на тај начин сматрајући је као збир пројекција нових координата x_1, y_1, z_1 на осовину OX. [Познато правило према коме је пројекција једне дужине на ма којој осовини равна збиру пројекција њених компонената на исту осовини.] Другим речима

$$\text{пројекц.}(OM)_x = \text{пројˇ.}(x_1)_x + \text{пројˇ.}(y_1)_x + \text{пројˇ.}(z_1)_x$$

Како је

$$\text{пројекц.}(OM)_x = x$$
$$\text{"} \quad (x_1)_x = \alpha x_1$$
$$\text{"} \quad (y_1)_x = \alpha_1 y_1$$
$$\text{"} \quad (z_1)_x = \alpha_{11} z_1$$

то је

$$x = \alpha x_1 + \alpha_1 y_1 + \alpha_{11} z_1$$

Пројектујући затим исту дужину ρ на стару осовину OY добија се једначина

$$y = \beta x_1 + \beta_1 y_1 + \beta_{11} z_1$$

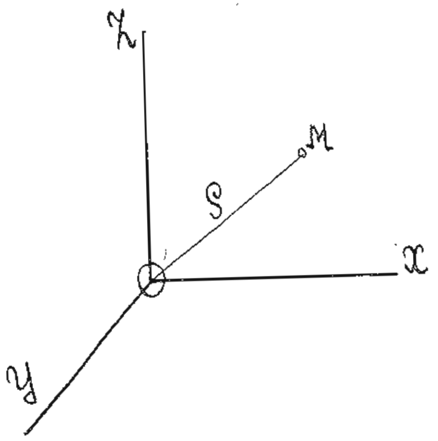
На послетку пројектујући исту дужину ρ на стару осовину OZ добија се

$$z = \gamma x_1 + \gamma_1 y_1 + \gamma_{11} z_1$$

На тај начин имамо систем од три једначине

$$x = \alpha x_1 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 z_1$$
$$y = \beta x_1 + \beta_1 y_1 + \beta_2 z_1 \qquad 1)$$
$$z = \gamma x_1 + \gamma_1 y_1 + \beta_2 z_1$$

помоћу којих се старе координате изражавају помоћу нових. У тим једначинама као што се види фигуришу девет косинуса, међутим ми ћемо доказати да тих девет косинуса нису међу собом независни већ да између њих постоји шест релација. Да би то доказали уочимо у једном систему OXYZ једну тачку M чији потег нека је ρ, и означимо са θ, φ и ψ углове које гради права OM са осовинама OX, OY и OZ.



Дужина

$$OM = \rho$$

може се сматрати као дијагонала паралелопипеда чије су ивице координате x, y и z тачке M. Према познатом правилу за дужину дијагонале биће

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Али пошто су x, y и z пројекције дужине ρ на осовине OX, OY и OZ, то је

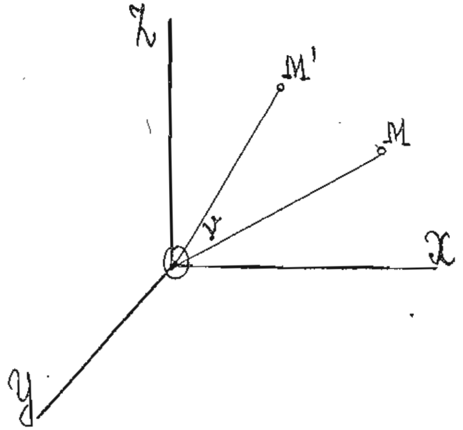
$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \cdot \cos\varphi \qquad 2)$$
$$z = \rho \cos\psi$$

Заменом тих вредности у горњој једначини и скративши са ρ^2 добија се једначина

$$\cos^2\theta + \cos^2\varphi + \cos^2\psi = 1 \qquad 3)$$

Образац 3) исказује ово правило које ће нам требати у трансформацији координата: Ако један ма који правац OM гради са коорд. осовинама углове θ, φ и ψ, збир квадрата косинуса тих углова увек је раван јединици.

На почетку извешћемо још једно просто правило које ћемо такође непосредно применити у задатку трансформације координата. Уочимо два правца OM и OM₁ и означимо са ν угао који граде та два правца међу собом.



Означимо даље са ξ, η и ζ углове које гради правац OM са коорд. осовинама OX, OY и OZ, са ξ_1, η_1 и ζ_1 углове које гради правац OM_1 са истим осовинама. Ако дужину

$$OM = \rho$$

пројектујемо на правац OM_1, та ће пројекција очевидно бити

$$\rho \cos \nu$$

Међутим та пројекција мора бити равна збиру пројекција компонената дужине $OM = \rho$ на исти правац OM_1. Пошто ће компоненте дужине ρ бити x, y и z и пошто оне са правцем OM_1 граде углове ξ_1, η_1 и ζ_1, то ће њихове пројекције бити:

$$x \cos \xi_1 \;, \quad y \cos \eta_1 \quad \text{и} \quad z \cos \zeta_1$$

према чему је

$$\rho \cos \nu = x \cos \xi_1 + y \cos \eta_1 + z \cos \zeta_1$$

Али пошто се у исто време x, y и z могу сматрати као пројекције дужине $OM = \rho$ на трима коорд. осовинама, то ће бити

$$x = \rho \cos \xi$$
$$y = \rho \cos \eta$$
$$z = \rho \cos \zeta$$

Заменом у последњем обрасцу и скративши са ρ добија се

$$\cos \nu = \cos \xi \cos \xi_1 + \cos \eta \cos \eta_1 + \cos \zeta \cos \zeta_1 \qquad 4)$$

из кога се види ово правило: Ако два правца OM и OM_1 граде са коорд. осовинама углове: ξ, η, ζ и ξ_1, η_1, ζ_1 онда је угао ν који та два правца граде међу собом дат обрасцем 4).

Претпоставимо сад специјалан случај да су правци OM и OM_1 међу собом управни; онда треба да је

$$\cos \nu = 0$$

и образац 4) своди се на

$$\cos \xi \cos \xi_1 + \cos \eta \cos \eta_1 + \cos \zeta \cos \zeta_1 = 0 \qquad 5)$$

у коме се огледа ово правило: Кад су два правца OM и OM_1 међу собом управна, између косинуса углова које они граде са коорд. осовинама постоји однос 5).

Вратимо се сад задатку трансформације координата. Пошто су и у старом и у новом коорд. систему коорд. осовине по претпоставци једна на другу управне, то ће према горњем обрасцу 3) између косинуса што фигуришу у предњој таблици постојати ови односи

$$\alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_{11}^2=1$$
$$\beta^2+\beta_1^2+\beta_{11}^2=1 \qquad 6)$$
$$\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_{11}^2=1$$

Међутим према правилу опиченом у обрасцу 5) имаћемо ове односе:

$$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=0$$
$$\alpha\alpha_{11}+\beta\beta_{11}+\gamma\gamma_{11}=0 \qquad 7)$$
$$\alpha_1\alpha_{11}+\beta_1\beta_{11}+\gamma_1\gamma_{11}=0$$

У исто време имаћемо и ове две групе образаца

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$
$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=0 \qquad 8)$$
$$\alpha_{11}^2+\beta_{11}^2+\gamma_{11}^2=0$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=0$$
$$\alpha_1\beta_1+\alpha_1\gamma_1+\beta_1\gamma_1=0 \qquad 9)$$
$$\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{11}\gamma_{11}+\beta_{11}\gamma_{11}=0$$

Од ове четри групе образаца могу се било 8) и 9) било 6) и 7) сматрати као последице осталих двеју.

Послужимо се сад тим обрасцима за израчунавање количина x_1, y_1 и z_1. Ако први од образаца 1) помножимо са α, други са β, трећи са γ и водимо рачуна о горњим односима 6), 7), 8) и 9) добија се

$$x_1=\alpha x+\beta y+\gamma z$$

Тако исто ако прву од једначина 1) помножимо са α_1, другу са β_1 и трећу са γ_1 и опет водимо рачуна о горњим односима, добијамо

$$y_1=\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z$$

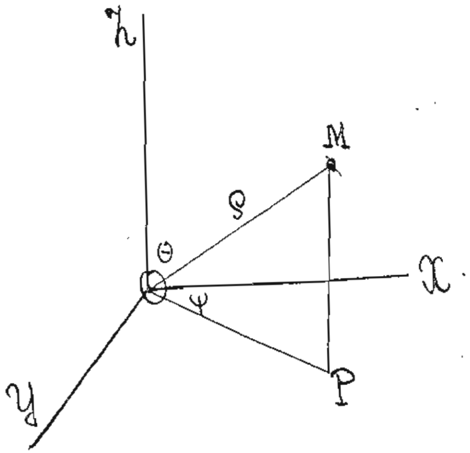
И на последку на исти начин нашли би

$$z_1=\alpha_{11}x+\beta_{11}y+\gamma_{11}z$$

У ова три последња обрасца показано је како се нове координате израчунавају помоћу старих.

3° Трансформација правоуглих координата у поларне.

Нека је дата једна тачка M чије правоугле координате нека су: (x, y, z) а њене поларне координате (ρ, θ, ψ), претпостављајући да се пол налази у почетку.



Нека је P пројекција тачке M у равни xoy. Пошто се x може сматрати као пројекција дужине OP на осовини Ox, то ће бити

$$x = OP \cdot \cos\psi$$

тако исто је

$$y = OP \cdot \sin\psi$$
$$z = OM \cdot \cos\theta$$

Али пошто је

$$OP = OM \cdot \cos(90-\theta) = OM \cdot \sin\theta$$

то добијамо групу образаца

$$x = \rho \cos\psi \sin\theta$$
$$y = \rho \sin\psi \sin\theta \qquad 10)$$
$$z = \rho \cos\theta$$

у којима је изражено како се правоугле координате израчунавају помоћу поларних. Ако сва три обрасца 10) квадрирамо и саберемо, добијамо

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \left[\cos^2\psi \sin^2\theta + \sin^2\theta \sin^2\psi + \cos^2\theta\right] = \rho^2$$

Тако исто из образаца 10) имамо

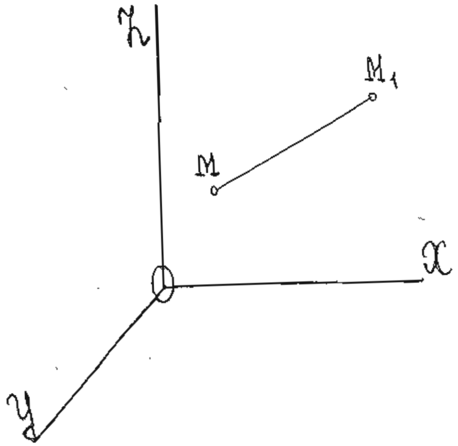
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\psi$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Сва три последња обрасца показују како се поларне координате израчунавају помоћу правоуглих.

Растојање двеју тачака у простору

Нека су (x, y, z) координате тачке M а (x_1, y_1, z_1) координате тачке M_1. Кад би тачка M била у почетку, онда би имали



$$MM_1 = \rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Кад M није у почетку, можемо замислити x као $x - x_1$, y као $y - y_1$, z као $z - z_1$. тражено растојање биће тада

$$MM_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

Теорија равни

Свака раван у простору представљена је једном једначином првог степена са три непознате

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и обратно свака таква једначина представља раван у простору. Пре свега да ова једначина представља раван уверићемо се на овај начин: Очевидно је да ма која раван паралелна равни XOY има за једначину

$$z = c$$

где је c сталан број. Тако исто једна раван паралелна равни YOZ имаће за једначину

$$x = a$$

и на послетку раван паралелна равни XOZ имаће за једначину

$$y = b$$

Ако површину представљену једначином

$$Ax+By+Cz+D=0$$

пресечемо једном равни паралелном равни XOY, пресек ће бити

$$Ax+By=-(Cc+D)$$

-права линија. Тако исто ако је пресечено равни паралелном равни XOZ пресек ће бити

$$Ax+Cz=-(Bb+D)$$

дакле опет права линија. И на последку ако ју пресечемо равнином паралелном равни YOZ, пресек ће бити

$$By+Cz=-(Aa+D)$$

Сви ови пресеци јесу дакле праве линије што показује да посматрана површина не може бити ништа друго до једна раван. И обрнуто свака раван може се представити једначином облика

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Јер ако су

$$ax+by+d=0$$
$$a_1x+c_1z+d_1=0$$

праве линије које се добијају у пресеку посматране равни са координатном равни $z=0$ и $y=0$, та два пресека потпуно одређују раван, а међутим у једначини

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad 11)$$

можемо увек одредити коефицијенте A, B, C и D тако, да једначина представља једну раван што пролази кроз те пресеке и која ће се према томе поклапати са посматраном равни.

Једначина

$$Ax+By+Cz+D=0$$

назива се општом једначином равни и у њој као што се види имамо четри коефицијента, али пошто се деобом са једним од њих можемо се њега ослободити, то једначина равни садржи три произвољна коефицијента, параметра. Варијацијом тих параметара добија се бесконачно много равни у простору. Број тих параметара смањује се кад раван има да задовољи извесне погодбе т.ј. да пролази кроз једну, две или три дате тачке, или да пролази кроз једну тачку и иде паралелно једној датој правој или једној датој равни итд. Тако н. пр. ако се тражи да раван пролази кроз једну дату тачку $M(x_0, y_0, z_0)$ и ако се изрази да координате те тачке задовољавају једначину равни, имамо

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad 12)$$

Одузимањем 12) од 11) добијамо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad 13)$$

која дефинише тражену раван и као што се види у њој има три променљива параметра.

Ако би се тражило да раван пролази кроз две дате тачке: $M(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, поред условне једначине 12) имали би

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0 \qquad 14)$$

Из једначина 12), 13) и 14) можемо елиминисати два параметра тако да ће у резултујућој једначини остати само један параметар.

На послетку ако би се тражило да раван пролази и кроз једну трећу дату тачку, имали би и овај трећи параметар нађен и коефицијенти би били одређени као и сама раван.

Други облици једначине равни.

Означимо са: a, b и c одсечке које гради посматрана раван на трима коорд. осовинама. Лако се увиђа да се тада једначина те равни може написати у облику

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad 15)$$

јер н. пр. осовина OX дефинисана је једначинама

$$z = 0 \quad y = 0$$

и тада се из једначине 15) добија

$$x = a$$

Тако исто осовина OY дефинисана је једначинама

$$x=0 \quad z=0$$

и тада се из једначине 15) добија

$$y=b$$

На послетку осовина Oz дефинисана је једначинама

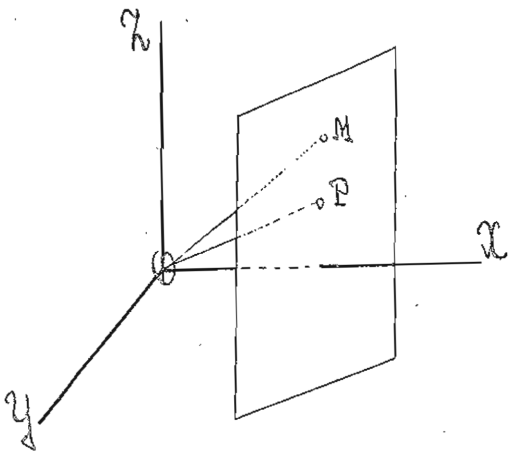
$$x=0 \quad y=0$$

и тада се из једначине 15) добија

$$z=c$$

Једначина 15) дакле одиста представља једну раван која на коорд. осовинама гради одсечке: a, b и c.

На послетку прећи ћемо још један облик једначине равни који се корисно употребљује у задацима, а то је нормални облик једначине равни.



Спустимо из почетка O управну OP на посматрану раван и нека је P продорна тачка те управне и нека је

$$OP=p$$

Очевидно је да ће раван бити потпуно одређена ако знамо p и углове које она гради са трима осовинама OX, OY и OZ. Означимо те углове са α, β и γ. Уочимо сад у посматраној равни једну тачку $M(x,y,z)$ и пројектујмо дужину OM на правац OP. Величина те пројекције биће очевидно $OP=p$. Међутим ће с друге стране та иста пројекција бити равна збиру пројекција компонената дужине OM на исти правац OP. Пошто ће компоненте дужине OM бити x, y, z и пошто оне граде са правцем OP углове α, β, γ, то ће пројекције тих компонената бити

$$x\cos\alpha, \quad y\cos\beta, \quad z\cos\gamma$$

Отуда

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad 16)$$

Пошто ова једначина вреди за на

какву тачку $M(x,y,z)$ посматрамо равни, то се она може сматрати као једначина те равни и ова се једначина назива: <u>нормалном једначином равни</u>.

Остаје нам још питање како се, кад је дата обична једначина равни

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad 17)$$

могу израчунати косинуси углова које нормала повучена из почетка на ту раван гради са осовинама и величина p те нормале. Пошто једначине 16) и 17) треба да представљају једначине једне исте равни, то мора бити

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{-p}{D} \qquad 18)$$

ако заједничку вредност ова четири разломка означимо са λ, имаћемо

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \lambda A \\ \cos\beta &= \lambda B \\ \cos\gamma &= \lambda C \\ -p &= \lambda D \end{aligned} \qquad 19)$$

Квадрирањем и сабирањем прве три једначине добија се

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \lambda^2(A^2+B^2+C^2)$$

или

$$1 = \lambda^2(A^2+B^2+C^2)$$

или

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

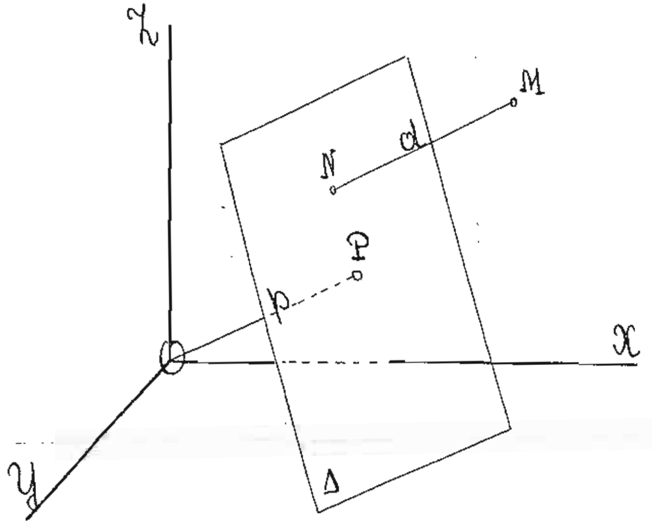
Заменом те вредности λ у обрасцима 19) добија се

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\beta &= \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\gamma &= \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ p &= \mp \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{aligned} \qquad 20)$$

Питање ознаке + или − који треба узети у датом случају решава се знаком од p; то растојање можемо увек сматрати као позитивно и према томе знак који ћемо узимати за корен $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ треба да је супротан знаку коефицијента D. Тиме је потпуно решен постављени задатак.

Растојање једне тачке од једне равни.

Претпоставимо да се тражи растојање d једне тачке $M(x_0, y_0, z_0)$ од равни Δ. Ако дужину OM пројектујемо на нормалу OP повучену из почетка O на раван Δ, та ће пројекција бити



$$p + d$$

или та се иста пројекција може добити и као збир пројекција компонената OM на исту праву OP. Пошто ће компоненте дужине OM бити x_0, y_0 и z_0 то, ако се са α, β и γ означе углови које гради нормала p са осовинама, пројекције ће ових компонената бити

$$x_0 \cos\alpha, \quad y_0 \cos\beta, \quad z_0 \cos\gamma$$

и према томе

$$p + d = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma .$$

одакле је

$$d = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p$$

А пошто смо мало час нашли да је

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$p = \frac{D}{\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

последњи образац постаје

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad 21)$$

где ће за одредбу знака + или − важити исто правило као и мало час.

Израчунавање угла двеју равни.

Нека су дате две равни дефинисане једначинама

$$Ax+By+Cz+D=0$$
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

очевидно је да угао који оне граде међу собом није ништа друго до угао који граде међу собом њихове нормале повучене из почетка. Ако се са α, β и γ и α_1, β_1 и γ_1 означе углови које те нормале граде са коорд. осовинама, угао ϑ који те нормале граде међу собом биће према једном ранијем обрасцу

$$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$$

Али према обрасцима које смо мало час доказали биће

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

где питање о знаку ваља решити на показани начин. Заменом ових вредности у горњем обрасцу добија се

$$\cos\vartheta = \frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}} \qquad 22)$$

чиме је постављени задатак решен.

Из обрасца 22) лако се изводе услови које треба да задовољавају коефицијенти једне и друге равни, па да равни буду једна на другу управне. Ако је то случај, онда је

$$\cos\vartheta = \cos 90^\circ = 0$$

па према обрасцу 22) да би равни биле управне треба да буде

$$AA_1+BB_1+CC_1=0$$

Остаје нам још да видимо услов за паралелност. Он се међутим може наћи непосредно помоћу једначина равни. Да би равни биле паралелне потребно је и довољно да њихови продори равни буду међу собом паралелни. Продор равни

$$Ax+By+Cz+D=0$$

у равни

$$y=0$$

биће дат једначином

$$Ax+Cz+D=0$$

а за другу раван

$$A_1x+C_1z+D_1=0$$

да би ове две праве биле међу собом паралелне, треба да буде

$$\frac{A}{A_1}=\frac{C}{C_1}$$

тако исто посматрањем продора н. пр. у равни XOY нашли би услов

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}$$

Према томе тражени услов за паралелност биће

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$$

Теорија праве линије.

Свака права линија може се сматрати као пресек двеју равни. Ако је једна од тих равни дефинисана једначином

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad 23)$$

а друга једначином

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad 24)$$

свака тачка (x,y,z) која припада њиховом пресеку задовољава у исто време и једначину 23) и једначину 24). Те се две једначине могу дакле сматрати као једначине праве линије и обрнуто сваку праву могуће је представити помоћу овакве две једначине, јер свакој правој одговарају две равни чији је она пресек.

Други облик једначине праве. Горње једначине можемо решити по једној координати н. пр. x, чиме се добијају две једначине облика

$$x = az + b$$
$$y = a_1 z + b_1 \qquad 25)$$

и једначине правих врло се често употребљују у том облику.

Трећи облик једначине праве.

Уочимо једну тачку $M(x_0, y_0, z_0)$ на датој правој. Ако се изрази да права 25) пролази кроз ту тачку, добија се

$$x_0 = az_0 + b$$
$$y_0 = a_1 z_0 + b_1 \qquad 26)$$

Одузимањем једначина 25) и 26) добија се

$$x - x_0 = a(z - z_0)$$
$$y - y_0 = a_1(z - z_0)$$

које се могу написати у облику

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{a_1} = \frac{z - z_0}{1} \qquad 27)$$

Ако се у једначини 27) оставе стални x_0, y_0, z_0 а мењају a и a_1, онда све праве дефинисане једначином 27) пролазе кроз тачку (x_0, y_0, z_0). Према томе варијацијом параметара a и a_1 мења се само правац праве, зато се ти параметри називају коефицијентима правца посматране праве. Једначина 27) обично се пише у симетричном облику

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad 28)$$

и кад је једначина написана у таквом облику, a, b и c се називају коефицијентима правца.

Четврти облик једначине праве.

Уочимо на датој правој једну сталну тачку (x_0, y_0, z_0) и нека су a, b и c њени коефицијенти правца, тако да за праву важи једначина 28). Ако са λ означимо заједничку вредност сва три разломка у 28) тако да је

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \lambda \qquad 29)$$

једначине 29) могу се написати у облику

$$x = x_0 + a\lambda$$
$$y = y_0 + b\lambda \qquad 30)$$

$$z = z_0 + c\lambda$$ 30)

Варијацијом параметра λ који може варирати од $-\infty$ до $+\infty$ добијају се све могуће тачке (x,y,z) на датој прави.

У задацима извесне врсте корисно је заменити обичну једначину праве овим обликом 30) н. пр. наћи пресек једне дате праве са једном датом равни. Нека је

$$Ax + By + Cz + D = 0$$ 31)

једначина равни и нека су једначине праве дате у облику

$$x = x_0 + a\lambda$$
$$y = y_0 + b\lambda$$ 32)
$$z = z_0 + c\lambda$$

Координате пресечних тачака праве и равни бивају познате ако би знали ону вредност параметра λ што одговара тој пресечној тачки, јер би онда обрасцем 29) имали пресечне тачке. Међутим ту вредност λ имамо овако: пошто пресечна тачка (x,y,z) треба да припада и равни 31) и правој 32), то сменивши 32) у 31) имамо

$$A(x_0+a\lambda)+B(y_0+b\lambda)+C(z_0+c\lambda)+D=0$$

одакле је

$$\lambda = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Aa+Bb+Cc}$$

Сменом ове вредности λ у једначини 32) имали би тражене координате пресека (x,y,z).

Из тога се н. пр. може извести услов који треба да буде задовољен за паралелност равни и праве. Пошто тада x, y и z треба да су бесконачни, то треба и λ да је бесконачно па дакле

$$Aa+Bb+Cc=0$$

На послетку потражимо услов који треба да буде задовољен па да права лежи у посматраној равни. За то права мора прво паралелна равни што значи да мора бити

$$Aa+Bb+Cc=0$$

и осим тога тачка (x_0,y_0,z_0) треба да је у равни, што значи да треба да буде задовољена једначина

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

и то су та два тражена услова.

Примедба: Помоћу ових једначина могу се решавати разни задаци о правима у простору као н. пр. ови:

1° Наћи једначину праве која пролази кроз две дате тачке.

2° Наћи једначину праве која пролази кроз једну дату тачку и има дати правац.

и т. д.

Општа једначина равни која пролази кроз једну дату праву

Нека су

$$Ax+By+Cz+D=0$$
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

једначине дате праве L. Очевидно је да раван која би имала за једначину

$$(A+kA_1)x+(B+kB_1)y+(C+kC_1)z+(D+kD_1)=0 \qquad 33)$$

представља извесну раван која пролази кроз праву L и то ма каква била вредност параметра k, јер се ова последња једначина може написати у облику:

$$(Ax+By+Cz+D)+k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0 \qquad 34)$$

и она је као што се види идентички задовољена кад је свака од заграда равна нули т.ј. кад се свака од тачака (x,y,z) налази на правој L. Варијацијош параметра k, дајући овоме све вредности од $-\infty$ до $+\infty$, имали би све могуће равни које пролазе кроз праву L. Једначина 33) или 34) јесте општа једначина свију равни што пролазе кроз праву L. Помоћу ове опште једначине решавају се разноврсни задаци од којих ћемо навести овај пример:

Наћи једначину равни Δ која пролази кроз једну праву L и стоји управно на датој равни Δ_1. Ако су

$$Ax+By+Cz+D=0$$
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

једначине дате праве L, а

$$Mx+Ny+Pz+R=0$$

једначина равни Δ_1, општа једначина свију равни што пролазе кроз праву L јесте малопређашња једначина 33). Да би раван 33) била управна на равни Δ_1 потребно је и довољно да буде, као што смо раније видели

$$M(A+kA_1)+N(B+kB_1)+P(C+kC_1)=0$$

Из те једначине можемо израчунати вредност k која одговара равни Δ а та би вредност била

$$k=-\frac{MA+NB+PC}{MA_1+NB_1+PC_1}$$

заменом у једначини 33) или 34) добија се једначина тражене равни Δ.

О угловима између правих и између правих и равни

1° Угао који гради права са координатним осовинама.

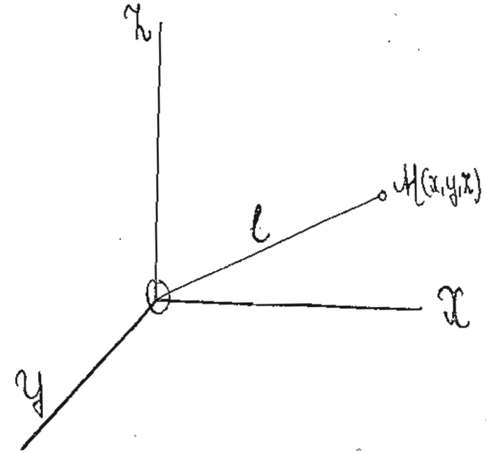
Знамо да се једначина једне дате праве може написати у облику

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \qquad 35)$$

где (x_0, y_0, z_0) представља координате једне утврђене тачке, а: a, b и c коефицијенте правца те праве. Питање је како се, знајући коефицијенте a, b и c могу наћи углови које права гради са коорд. осама. (ако кроз почетак повучемо праву паралелну датој правој, једначина ове паралелне очевидно биће облика

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \qquad 36)$$

ако на тој правој уочимо једну тачку $M(x,y,z)$, па означимо са α, β и γ углове првобитне праве са коорд. осама, ти ће углови очевидно бити исти и за нову праву која пролази кроз почетак и према томе ће бити



$$x = l\cos\alpha$$
$$y = l\cos\beta$$
$$z = l\cos\gamma$$

заменом у једначини 36) и скративши са l имаћемо

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}$$

ако заједничку вредност ова три разломка означимо са λ имаћемо

$$\cos\alpha = a\lambda$$
$$\cos\beta = b\lambda \qquad 37)$$
$$\cos\gamma = c\lambda$$

Квадрирањем и сабирањем имали би

$$1 = \lambda^2(a^2+b^2+c^2)$$

одакле је

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Заменом у обрасцима 37) добијају се за косинусе правиних углова ове вредности

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

чиме је задатак решен. Који ће се од знакова + или − узети зависи од природе задатка.

2° Угао који граде две праве међу собом.

Нека су дате две праве L_1 и L_2 и нека је

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

једначина праве L, а

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

једначина праве L_1. Означимо са α, β, γ углове што гради права L са коорд. осовинама, а са $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ углове што гради права L_1 са тим осовинама. Ако се са V означи угао између правих, видели смо раније да је он дат обрасцем

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$$

Међутим према ономе што је мало час нађено биће

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

а тако исто и

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_1}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{b_1}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{c_1}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$$

Заменом у обрасцу за $\cos V$ добија се за косинус траженог угла

$$\cos V = \frac{aa_1+bb_1+cc_1}{\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}}$$

Из овог се обрасца види у исто мах и услов који треба да задовоље коефицијенти правих $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_1$ да би ове биле међу собом управне. Тај је услов као што се види

$$aa_1+bb_1+cc_1=0$$

3° Угао између једне дате праве $\mathcal{L}$ и једне дате равни Δ.

Нека је

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

једначина праве $\mathcal{L}$, а

$$Ax+By+Cz+D=0$$

једначина равни Δ. Угао између праве и равни није ништа друго до комплеменат угла између исте праве и нормале на равни. Означимо са ω први угао, а овај последњи са v. Означимо са α,β,γ углове што гради права $\mathcal{L}$ са коорд. осовинама, а са $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ углове што гради нормала на раван Δ са тим осовинама. Тада ће према ранијим обрасцима бити

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\alpha_1=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta_1=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma_1=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Према томе биће

$$\cos v=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1$$

или, пошто је

$$\cos v=\sin\omega$$

то ће бити

$$\sin\omega=\frac{Aa+Bb+Cc}{\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(A^2+B^2+C^2)}}$$

Помоћу овог обрасца имамо синус траженог угла, а помоћу овог лако је наћи косинус тог угла.

Из истог се обрасца види н. пр. и услов који треба да постоји између коефицијената праве и равни, да би права и раван биле паралелне; тај је услов

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

који смо и раније нашли.

4° Услов да једна дата права l буде управна на једну дату раван Δ.

Ако се са $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ означе исти углови као и малочас, онда, као што смо раније видели, за прва три угла важи однос

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}$$

а за друга три угла однос

$$\frac{\cos\alpha_1}{A}=\frac{\cos\beta_1}{B}=\frac{\cos\gamma_1}{C}$$

Да би права била управна на равни треба да углови које она гради са коорд. осовинама буду они исти које гради нормала на равни са тим осовинама. Углови α, β, γ морају се дакле поклопити са угловима $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ што ће бити ако је

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$$

и то је тражени услов.

Помоћу тога може се решавати велики број задатака од којих ћемо узети ова два:

а) Кроз једну дату тачку $M(x_0, y_0, z_0)$ повући нормалу на једну дату раван Δ чија је једначина

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Пошто ова права треба да пролази кроз тачку M, њена ће једначина бити

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

где нам још ваља одредити a, b и c. Пошто права треба да је управна на равни Δ, то према малопређашњем треба да буде

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$$

и према томе једначина тражене праве биће

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

б) Наћи једначину равни што пролази кроз једну дату тачку $M(x_0, y_0, z_0)$ и која је управна на једну дату праву L. Пошто раван пролази кроз тачку M, то њена једначина мора бити облика

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

а пошто она у исто време мора бити управна на праву L, то ако се кофицијенти правца праве означе са a, b и c мора бити према малопређашњем

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$$

одакле се могу одредити коефицијенти A, B и C тако да ће тражена једначина равни бити

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

чиме је задатак решен.

Кугла.

Кугла (лопта, сфера) је површина дефинисана том особином: да јој све тачке подједнако одстоје од једне сталне тачке која се назива центар. Стално растојање ма које тачке од центра зове се полупречник. Ако ту дефиницију кугле изразимо аналитички, добијамо њену једначину. Тако, ако се са (x,y,z) означе координате једне ма које тачке на њој, са (a,b,c) координате центра, а са R полупречник, биће очевидно

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad 1)$$

и пошто та једначина важи за ма коју тачку кугле, то је општа једначина кугле. Као што се види једначина је кугле другог степена по x, y, z.

Питање је сад како се може кад је непосредно дата једначина другог степена по x, y, z знати да ли она представља једначину кугле, и ако то представља, како се могу израчунати: a, b, c и R. Најопштија једначина другог степена по x, y, z јесте

$$Ax^2+A_1y^2+A_{11}z^2+2Bxy+2B_1xz+ +2B_{11}yz+2Cx+2C_1y+2C_{11}z+F=0 \qquad 2)$$

где су

$$A\ A_1\ A_{11}\ B\ B_1\ B_{11}\ C\ C_1\ C_{11}\ F$$

независни од x, y и z. Развимо једначину 1) и напишимо је у облику

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-R^2)=0 \qquad 3)$$

Да би једначине 2) и 3) представљале једну исту површину потребно је и довољно да буде

$$A=1 \quad A_1=1 \quad A_{11}=1 \qquad \mathrm{I}$$
$$B=0 \quad B_1=0 \quad B_{11}=0 \qquad \mathrm{II}$$
$$C=-a \quad C_1=-b \quad C_{11}=-c \qquad \mathrm{III}$$
$$F=a^2+b^2+c^2-R^2 \qquad \mathrm{IV}$$

Услове III и IV увек је могуће задовољити јер ма какво било $C\ C_1\ C_{11}$ и F у једначини 2) увек можемо из једначина III и IV израчунати a, b, c и R тако да услови III и IV буду задовољени. Остају само услови I и II који исказују ово правило: да би једначина другог степена по x, y, z представљала куглу потребно је и довољно:

1) да у њој коефицијенти од x^2, y^2 и z^2 буду међу собом једнаки и онда их деобом са њиховом заједничком вредношћу можемо свести да су равни јединици;

2) да у једначини недостају чланови са xy, xz и yz.

Претпоставимо да су ти услови задовољени за једну једначину 2) т.ј. да она представља куглу. Одређивање координата центра и полупречника кугле бива помоћу једначина III и IV. Тако би из једначина III имали непосредно координате центра a, b, c а из једначине IV имали би полупречник кугле R.

Н. пр. нека је дата једначина

$$x^2+y^2+z^2+4x-y+3=0$$

Она представља куглу пошто су у њој коефицијенти чланова x^2, y^2 и z^2 једнаки међу собом, а чланови са xy, xz и yz недостају. Једначине (B) овде су

$$-a=2 \quad -b=-\frac{1}{2} \quad -c=0$$

Према томе су координате центра

$$a=-2 \quad b=\frac{1}{2} \quad c=0$$

Заменом у IV налази се да је полупречник кугле

$$R^2=\frac{5}{4}$$

Постављање једначина за разне површине.

Једна површина може бити дефинисана на два разна начина:

1° Помоћу једне опште особине свију њених тачака. У том случају гледа се да се та особина изрази аналитички помоћу координата (x,y,z) једне произвољне тачке на површини. Резултат тога биће изведена једначина по x,y,z која, пошто важи за ма коју тачку површине, представља једначину површине.

Тако н. пр. кугла има ту особину да су јој све тачке подједнако удаљене од једне сталне тачке – центра. Ако се даље координате једне ма које куглине тачке M означе са x, y и z, координате центра са a, b, c, а поменуто стално одстојање са R, изразивши да је одстојање

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

стално и равно R добија се непосредно једначина кугле. У спец. случају кад је центар у коорд. почетку, та ће једначина бити

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

2° Много чешћи начин који се састоји у овоме: једна површина сматра се као да постаје кретањем какве линије G која се назива <u>генератрисом (изводницом)</u> површине и која у свом кретању описује ту површину. Пошто је генератриса покретна, то њене једначине морају садржати променљиве параметре, јер би без тога оне представљале једну утврђену линију у простору.

Начин по коме се генератриса креће при описивању посматране површине најобичније је дат у овом облику: узме се да генератриса у свом кретању непрестано клизи по једној или више утврђених линија у простору. Ове се линије тада, које ћемо означити са D, зову <u>директрисама</u> посматране површине. Једначине директриса, пошто су то линије утврђене у простору, не могу садржати променљиве параметре.

Питање је сад како се, кад су дате једначине генератрисе и директриса може поставити једначина површине описане генератрисом. Нека су

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \cdots)=0 \qquad 1)$$
$$\varphi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \cdots)=0$$

једначине генератрисе,

$$\alpha, \beta, \gamma \cdots$$

променљиви параметри у њима. Нека су затим

$$F(x, y, z)=0 \qquad 2)$$
$$\Phi(x, y, z)=0$$

једначине једне од директриса. Уочимо једну тачку $M(x,y,z)$ која је у исто време и на генератриси и на директриси. Она мора у исто време задовољавати једначине 1) и 2) и на тај начин имамо четири једначине из којих можемо елиминисати три количине: x, y и z. Резултат ће бити извесна једначина

$$\Theta(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)=0 \qquad 3)$$

т.ј. добијамо један однос променљивих параметара. Према томе свака од директриса доводи до једне једначине 3). Претпоставимо сад да је број параметара n и да има $(n-1)$ директриса. Тада ћемо између параметара имати $(n-1)$ односа:

$$\begin{aligned} &\Theta_1(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)=0 \\ &\Theta_2(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Theta_{n-1}(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)=0 \end{aligned} \qquad 4)$$

Из једначина 4) и 1) што чини свега $n+1$ једначина можемо елиминисати свих n параметара $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ и ако је

$$\Delta(x,y,z)=0 \qquad 5)$$

резултат те елиминације, једначина 5) представљаће очевидно једначину описане површине. То излази непосредно из самог начина на који је једначина 5) добијена.

У случају кад је генератриса права линија, површине које постају њеним кретањем ма по коме закону називају се <u>праволинијским површинама</u>, јер се за овакве површине доказује да се увек могу развити у једну раван а да се при томе нигде не растегне нити убере. Ми ћемо прећи неколико најважнијих врста површина које постају на тај начин.

Цилиндарске површине.

То су површине описане једном правом која, крећући се, остаје непрестано паралелна једној датој правој а клизи по једној криви у простору. Ова ће крива тада бити директриса цилиндарске површине.

Ако једначине генератрисе напишемо у облику

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta \qquad 6)$$

да би те једначине представљале праву линију која непрестано задржава стари правац, коефицијенти а и в морају бити стални и кретање ће се постићи мењањем α и β; α и β играју дакле улогу промењљивих параметара генератрисе. Нека су

$$f(x,y,z)=0$$
$$\varphi(x,y,z)=0 \qquad 7)$$

једначине директрисе. Заменом вредности 6) у 7) добијају се две једначине

$$f(az+\alpha,\ bz+\beta,\ z)=0$$
$$\varphi(az+\alpha,\ bz+\beta,\ z)=0 \qquad 8)$$

из којих кад елиминишемо z, добија се известан однос

$$\theta(\alpha,\beta)=0 \qquad 9)$$

између параметара α и β. Ако у 9) сменимо α и β њиховим вредностима

$$\alpha = x - az$$
$$\beta = y - bz$$

добијеним из 6), добија се једначина

$$\theta(x-az,\ y-bz)=0$$

која представља једначину тражене цилиндарске површине.

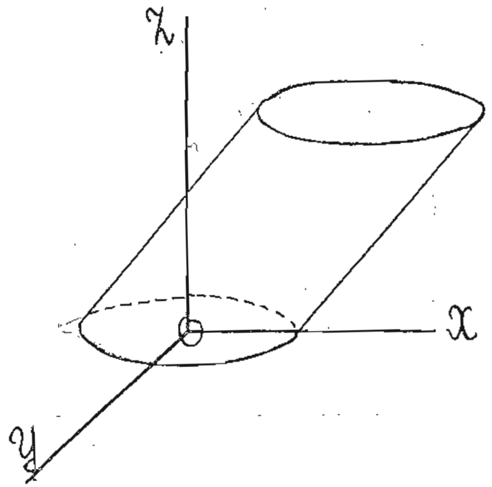
Примери:

1. Тражи се једначина цилиндарске површине која постаје кретањем праве

$$x = z + \alpha$$
$$y = 3z + \beta$$

и која клизи по једној датој елипси која се налази у равни XOY и чије су полуосе 1 и 2. Једначина директрисе биће овде

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$
$$z = 0$$



Заменом x и y њиховим вредностима у једначини директрисе, добија се једначина

$$(z+\alpha)^2 + \frac{1}{4}(3z+\beta)^2 - 1 = 0$$
$$z = 0$$

Елиминацијом z-а из тих једначина добија се

$$\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4} - 1 = 0$$

и ако у њој сменимо α и β њиховим вредностима

$$\alpha = x - z$$
$$\beta = y - 3z$$

добија се једначина

$$(x-z)^2 + \frac{1}{4}(y-3z)^2 - 1 = 0$$

или

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{13}{4}z^2 - 2xz - \frac{3}{2}yz - 1 = 0$$

као једначина тражене површине.

2. Тражи се једначина површине коју описује једна права линија чији је правац одређен вредностима $a=2$ $b=3$, кад та права клизи по једној параболи у равни XOY чија је једначина

$$y^2 = 2px.$$

Једначина генератрисе је

$$x = 2z + \alpha$$
$$y = 3z + \beta \qquad а)$$

а једначина директрисе

$$y^2 = 2px$$
$$z = 0 \qquad б)$$

Заменом а) у б) имамо

$$(3z+\beta)^2 = 2p(2z+\alpha)$$
$$z = 0$$

и елиминацијом z-а из тих једначина

$$\beta^2 = 2p\alpha$$

ако у овој једначини сменимо α и β вредностима из а), добијамо

$$(y-3z)^2 = 2p(x-2z)$$

и то је једначина тражене површине.

3. Средиште једног круга који лежи у равни YOZ и који додирује Y-осовину у коорд. почетку лежи на Z-осовини. Тај круг је директриса једне цилиндарске површине чије су генератрисе паралелне равни XOZ и са равни XOY склапају углове од α°. Наћи једначину те површине.

Једначина директрисе је

$$y^2 + (z-r)^2 = r^2$$
$$x = 0$$

или

$$y^2 - 2rz + z^2 = 0$$
$$x = 0 \qquad \text{а)}$$

а једначине генератрисе

$$z = \operatorname{tg}\alpha\, x + \beta$$
$$y = \gamma \qquad \text{б)}$$

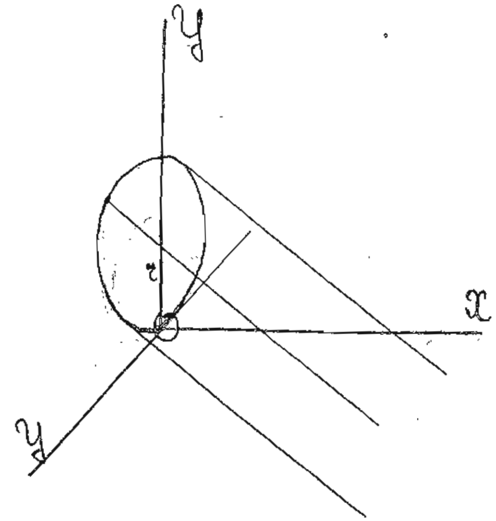
Заменом б) у а) добијамо

$$\gamma^2 - 2r(\operatorname{tg}\alpha\, x + \beta) + (\operatorname{tg}\alpha\, x + \beta)^2 = 0$$
$$x = 0$$

Елиминацијом x из ових једначина добијамо

$$\gamma^2 - 2\beta r + \beta^2 = 0$$

и ако у њој заменимо β и γ вредностима из б) добијамо као једначину тражене цилиндарске површине



$$y^2 + (z - \operatorname{tg}\alpha\, x)^2 - 2r(z - \operatorname{tg}\alpha\, x) = 0$$

4. Тражи се једначина оне цилиндарске површине код које је директриса иста као у зад. 3 а генератриса остаје стално паралелна правој

$$x = pz$$
$$y = qz$$

Једначина директрисе је

$$y^2 + z^2 - 2rz = 0 \qquad \text{а)}$$
$$x = 0$$

а једначина генератрисе

$$x = pz + \alpha \qquad \text{б)}$$

$$y = qz + \beta$$

Из прве од једначина б) је

$$z = -\frac{x}{p} - \frac{\alpha}{p} = -\frac{\alpha}{p}$$

па према томе из друге од тих једначина

$$y = -\frac{\alpha q}{p} + \beta$$

Заменом у првој од једначина а) добијамо

$$\frac{\alpha^2 q^2}{p^2} - \frac{2\alpha q \beta p}{p} + \beta^2 p^2 + \frac{\alpha^2}{p^2} + \frac{2\alpha r p}{p} = 0$$

или

$$(x-pz)^2(q^2+1) - 2p(x-pz)[(y-qz)q + z] + (y-qz)^2 p^2 = 0$$

5. У равни XOY дат је круг полупречника r и центра у коорд. почетку. Да се нађе једначина цилиндарске површине кад су генератрисе паралелне бисектриси угла између x- и z-осовина.

Једначина директрисе је

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$z = 0$$

једначина бисектрисе

$$z = x$$

па је према томе једначина генератрисе

$$z = x + \alpha$$
$$y = \beta$$

Однос између параметара α и β је

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2$$

па је према томе једначина тражене цилиндарске површине

$$(z-x)^2 + y^2 = r^2$$

Коничне површине.

То су површине описане једном правом која при кретању непрестано пролази кроз једну сталну тачку M и при том клизи по једној утврђеној кривој у простору.

Ако се координате сталне тачке M у простору означе са (x_0, y_0, z_0) познато је да се једначина ма које праве која пролази кроз ту тачку може написати у облику

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Те се једначине могу написати у облику

$$\frac{x-x_0}{z-z_0}=\alpha$$

$$\frac{y-y_0}{z-z_0}=\beta \qquad 10)$$

Пошто се њиховим мењањем добија бесконачно много правих које пролазе кроз тачку $M(x_0, y_0, z_0)$. Нека су

$$f(x,y,z)=0$$
$$\varphi(x,y,z)=0 \qquad 11)$$

једначине директрисе. Ако из 10) израчунамо x и y тако да је

$$x=x_0+\alpha(z-z_0)$$
$$y=y_0+\beta(z-z_0) \qquad 12)$$

па сменимо у једначини 11), резултат ће бити две једначине које ће зависити од z, α и β, н. пр.

$$f(z,\alpha,\beta)=0$$
$$\varphi(z,\alpha,\beta)=0$$

Елиминацијом z-а из тих двеју једначина добиће се

$$\Theta(\alpha,\beta)=0 \qquad 13)$$

- однос између параметара α и β. Заменом вредности α и β у једначини 13) добија се једначина

$$\Theta\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0 \qquad 14)$$

која представља посматрану коничну површину. У исти мах увиђа се да је једначина 14) хомогена функција од

$x-x_0$, $y-y_0$ и $z-z_0$.

У случају кад се тачка М која се назива <u>врхом коничне површине</u> узме за коорд. почетак, једначина те површине постаје

$$\Theta\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$$

Према томе то је једна хомогена функција координата x, y и z.

Примери:

1. Тражи се једначина коничне површине чији је врх коорд. почетак са директрисом елипсом

$$x^2+\frac{y^2}{4}-1=0$$
$$z=4 \qquad 15)$$

Једначине генератрисе биће тада

$$\frac{x}{z}=\alpha$$
$$\frac{y}{z}=\beta$$

Заменом вредности

$$x=\alpha z$$
$$y=\beta z$$

у једначини директрисе 15) добијају се две једначине

$$\alpha^2 z^2+\frac{1}{4}\beta^2 z^2-1=0$$
$$z=4 \qquad 16)$$

одакле се елиминацијом z-а добија

$$16\alpha^2+\frac{16}{4}\beta^2-1=0$$

или

$$16\alpha^2+4\beta^2-1=0$$

Замењујући α и β њиховим вредностима добија се

$$\frac{16x^2}{z^2}+\frac{4y^2}{z^2}-1=0$$

или

$$16x^2+4y^2-z^2=0$$

2. У равни XOY лежи једна парабола чија се осовина поклапа са X-осовином а чије је теме у коорд. почетку. Наћи једначину коничне површине која има ту параболу као директрису, а чије генератрисе пролазе кроз тачку (x_0, y_0, z_0).

Једначине директрисе су

$$y^2=2px$$
$$z=0 \qquad 17)$$

а генератрисе

$$\frac{x-x_0}{z-z_0}=\alpha$$

$$\frac{y-y_0}{z-z_0}=\beta$$

или

$$x = x_0 - \alpha z_0$$
$$y = y_0 - \beta z_0 \qquad 18)$$

и ако сменимо у првој од једначина 17) добијамо

$$y_0^2 - 2y_0\beta z_0 + \beta^2 z_0^2 - 2px_0 + 2p\alpha z_0 = 0$$

или

$$\left(\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)^2 z_0^2 - 2y_0 z_0 \frac{y-y_0}{z-z_0} + 2pz_0\frac{x-x_0}{z-z_0} + y_0^2 - 2px_0 = 0 \qquad 19)$$

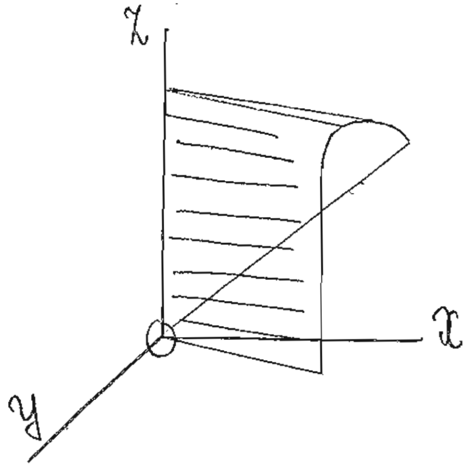
Коноидне површине.

То су површине описане једном правом која у исто време клизи по једној утврђеној правој, остаје паралелна једној утврђеној равни и клизи по једној утврђеној кривој у простору.

Узмимо сталну праву по којој клизи генератриса за осу OZ, раван XOY као раван са којом генератриса остаје паралелна, а за директрису ма какву криву у простору. Једначину генератрисе можемо тада написати у облику

$$z = \alpha$$
$$\frac{y}{x} = \beta \qquad 20)$$

где су α и β променљиве количине - параметри. (Прва једначина је отуда



што је z очевидно промењиво; друга отуда што се генератриса пројектује у равни xoy по једној ма каквој правој која пролази кроз почетак и једначина је праве $y=\beta x$).

Нека су

$$f(x,y,z)=0$$
$$\varphi(x,y,z)=0 \qquad 21)$$

једначине директрисе. Сменивши z и y њиховим вредностима 20) добијамо

$$f(x,\beta x,\alpha)=0$$
$$\varphi(x,\beta x,\alpha)=0 \qquad 22)$$

одакле се елиминацијом промењиве x добија однос

$$\Theta(\alpha,\beta)=0 \qquad 23)$$

промењивих параметара. Заменивши α и β из 20) у 23) добија се једначина

$$\Theta\left(z,\frac{y}{x}\right)=0 \qquad 24)$$

као једначина посматране коноидне површине.

Пример: Тражи се једначина коноидне површине која постаје кретањем једне праве што непрестано клизи по z-осовини и по елипси

$$y^2+\frac{1}{4}z^2-1=0$$
$$x=2 \qquad 25)$$

Заменивши вредности y и z добијеним из једначина

$$z=\alpha$$
$$\frac{y}{x}=\beta$$

у једначини 25) добија се

$$\beta^2x^2+\frac{1}{2}\alpha^2-1=0$$
$$x=2 \qquad 26)$$

Елиминацијом x-а из ових једначина 26) добија се

$$4\beta^2+\frac{1}{4}\alpha^2-1=0$$

у којој ако сменимо α и β њиховим вредностима

$$\alpha=z$$
$$\beta=\frac{y}{x}$$

добија се

$$4\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{4}-1=0$$

или

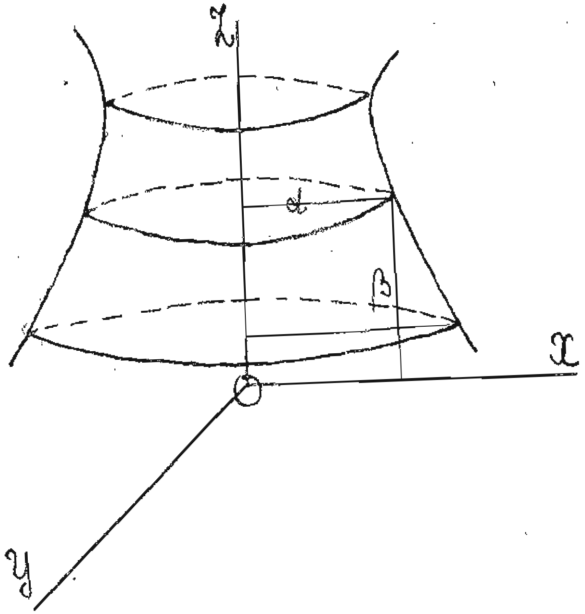
$$16y^2+x^2z^2-4x^2=0$$

као једначина посматране коноидне површине.

Обртне површине.

То су површине које постају обртањем једне покретне линије око једне утврђене праве са којом је ова покретна линија чврсто везана. Таква је једна површина н. пр. кугла која постаје обртањем једног круга око једног његовог пречника.

Међутим обртне површине могу се дефинисати још на један начин који потпада под мало пре проучени начин: Свака обртна површина може се сматрати као описана једним кругом чија раван остаје непрестано паралелна своме првобитном положају, чији се центар креће по једној правој управној на ту раван и чији се полупречник непрестано мења тако да круг при свом кретању клизи непрестано по утврђеној кривој у простору. Пресек такве површине по ма којој равни увек је круг и ти кругови називају се паралелни пресеци површине. Права по којој се креће центар назива се обртна осовина, а пресеци са ма којом равни која пролази кроз обртну осовину и која се може сматрати као директриса обртне површине називају се меридијанима површине.



Пита се сад како се може, кад је позната једначина једног меридијана, наћи једначина одговарајуће обртне површине. Ако се променљиви полупречник круга, који је у овом случају генератриса, означи са α а даљина тог круга од равни XOY са β, једначина генератрисе биће очевидно

$$\alpha = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = \beta \qquad 27)$$

Међутим из једначине меридијана можемо непосредно написати однос између α и β и нека је тај однос

$$\Theta(\alpha, \beta) = 0 \qquad 28)$$

Заменом параметара α и β из 27) у 28) имаћемо

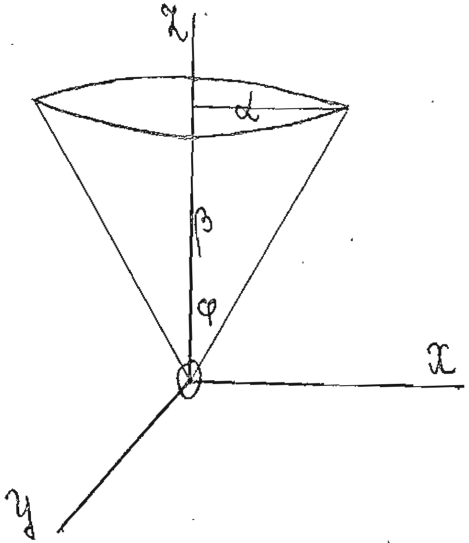
$$\Theta\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0$$

као једначину посматране обртне површине.

Примедба: Све ово важи за случај кад се обртна оса узме за осу Oz.

Примери:

1. Обртни конус чије би теме било у коорд. почетку и који би имао за обртну осу осовину Oz има за директрису извесну праву која пролази кроз коорд. почетак, чија ће јед-



начина бити

$$\beta = m\alpha$$

где је

$$m = \operatorname{cotg}\varphi.$$

Заменом

$$\alpha = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\beta = z$$

добија се једначина

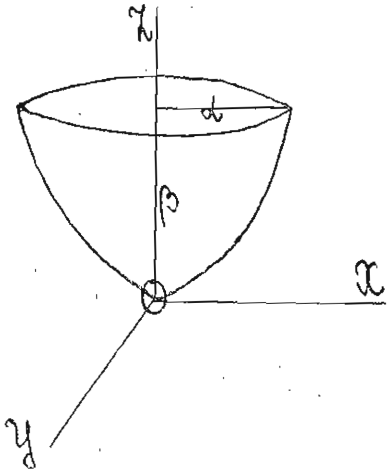
$$z = m\sqrt{x^2+y^2}$$

или

$$z^2 - m^2(x^2+y^2) = 0$$

као једначина конуса.

2. Наћи једначину обртног параболоида чија је обртна оса Oz а теме у коорд. почетку.



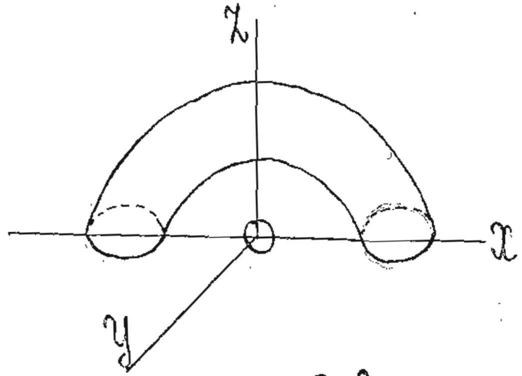
Једначина параболе која је овде директриса биће облика

$$\beta = p\alpha^2$$

Према томе једначина обртног параболоида биће

$$z = p(x^2+y^2)$$

3. Потражимо једначину контурасте површине која постаје кретањем једног круга C који се обрће око осовине Oz. Ако осовина Ox пролази кроз центар круга и ако се одстојање тог центра од почетка означи са a, једначина овог круга као директрисе биће



$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = r^2$$

где је r полупречник. Сменивши у тој једначини

$$\beta = z$$

$$\alpha = \sqrt{x^2+y^2}$$

добија се једначина

$$\left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = r^2$$

која ће, пошто је ослободимо квадратних корена, представљати извесну површину четвртог степена. Постатрана контураста површина јесте дакле површина четвртог степена.

Површине другог степена

То су површине у чијим једначинама, пошто се ова ослободи свију корена, фигурише известан полином другог степена по x, y и z. Најопштија једначина другог степена по трима координатама најчешће се пише у облику

$$Ax^2 + A_1y^2 + A_{11}z^2 + 2Byz + 2B_1xz + 2B_{11}xy + 2Cx + 2C_1y + 2C_{11}z + F = 0 \qquad 1)$$

где су

$$A\ A_1\ A_{11}\ B\ B_1\ B_{11}\ C\ C_1\ C_{11}\ \text{и}\ F$$

независни од координата и зову се <u>коефицијенти</u> једначине. Поједини од ових коефицијената могу бити равни нули.

Према разним вредностима које могу имати коефицијенти једначина 1). представља врло разне површине и дискусија у једначини могла би се извршити на начин сличан ономе код линија другог степена у равни. Међутим таква би дискусија била врло компликована, а међутим она постаје много простија кад је згодно изабран коорд. систем и на основу извесних општих особина једначина другог степена. Ми ћемо показати како се једначине најразноврснијих површина обухваћених једначином 1) могу свести на неколико простих које се могу много лакше дискутовати но једначина 1). То извођење је основано на неким особинама површина другог степена 1) које ћемо сад извести

О центрима површина другог реда

Под центром једне површине уопште разуме се таква једна тачка у простору која полови све тетиве што пролазе кроз њу па ма какав био њихов правац.

Одређивање центра за једну површину другог реда основано је на овој теореми коју ћемо сад доказати: Кад год је коорд. почетак у центру такве површине, у једначини морају недостајати чланови са x, y и z на првом степену. Да би теорему доказали повуцимо кроз почетак једну ма коју праву и једначине такве праве биће

$$x = \lambda z$$
$$y = \mu z$$

где су λ и μ променљиви параметри који се мењају кад се правац праве мења. Заменом у једначини 1) добија се

$$(A\lambda^2 + A_1\mu^2 + A_{11} + 2B_1\lambda + 2B_{11}\lambda\mu)z^2 + 2(C\lambda + C_1\mu + C_{11})z + F = 0 \qquad 2)$$

Једначина 2) даје нам координате z пресека површине са посматраном правом. Ако је сад почетак у исти мах и центар, једначина 2) решена по z треба да има корене једнаке и супротно означене. Да би то било потребно је и довољно да у једначини недостаје члан са z на првом степену т.ј. да буде

$$C\lambda + C_1\mu + C_{11} = 0 \qquad 3)$$

Па пошто једначина 3) мора постојати за ма какву праву која пролази кроз почетак т.ј. за ма какво λ и μ, то мора бити посебице

$$C = 0 \quad C_1 = 0 \quad C_{11} = 0$$

чиме је теорема доказана.

На овој теореми основано је одређивање центра и она је примењена на овај начин: Преместимо координатни почетак у једну за сад произвољну тачку $P(a,b,c)$; што ћемо учинити ако у једначини 2) ставимо да је

$$x = x_1 + a$$
$$y = y_1 + b$$
$$z = z_1 + c$$

где су x_1, y_1 и z_1 нове координате. Једначина 1) тада постаје

$$[Ax_1^2 + A_1y_1^2 + A_{11}z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B_1x_1z_1 + 2B_{11}x_1y_1] + 2\{[(Aa + B_1c + B_{11}b + C)x_1 + (A_1b + Bc + B_{11}a + C_1)y_1 + [A_{11}c + Bb + B_1a + C_{11}]z_1\} + [Aa^2 + A_1b^2 + A_{11}c^2 + 2Bbc + 2B_1ac + 2B_{11}ab + 2Ca + 2C_1b + 2C_{11}c + F] = 0 \qquad 4)$$

Ако загледамо у састав једначине 4) видимо да се она може написати у облику

$$Ax_1^2 + A_1y_1^2 + A_{11}z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B_1x_1z_1 + 2B_{11}x_1y_1 + [x_1f'_a + y_1f'_b + z_1f'_c] + f(a,b,c) = 0 \qquad 5)$$

где $f(a,b,c)$ означује резултат који се добија кад се на левој страни једначине површине смене x, y и z са a, b и c; а f'_a, f'_b, f'_c означују делимичне изводе те функције. До сад смо сматрали тачку (a, b, c) као произвољну; узмимо сад да је она центар. Према раније доказаној теореми у једначини 5) морају недостајати чланови по непознатим x_1, y_1 и z_1 на првом степену, а да би то било мора бити посебице

$$f'_a = 0$$
$$f'_b = 0 \qquad 6)$$
$$f'_c = 0$$

Једначине 6) написане у развијеном облику и пошто се у њима смени a, b и c са x, y и z биће

$$\begin{aligned} Ax + B_{11}y + B_1 z + C &= 0 \\ B_{11}x + A_1 y + Bz + C_1 &= 0 \qquad 7) \\ B_1 x + By + A_{11}z + C_{11} &= 0 \end{aligned}$$

Једначине 7) решене по x, y и z дају нам тражене координате центра. Те једначине могу имати једно и то коначно решење; у том случају површина има један одређен центар који је на коначној даљини. Тај случај биће, као што знамо из теорије детерминаната, онда кад је

$$\begin{vmatrix} A & B_{11} & B_1 \\ B_{11} & A_1 & B \\ B_1 & B & A_{11} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

Ако ту детерминанту означимо са Δ и ставимо

$$D_1 = -\begin{vmatrix} +C & B_{11} & B_1 \\ +C_1 & A_1 & B \\ +C_{11} & B & A_{11} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = -\begin{vmatrix} A & C & B_1 \\ B_{11} & C_1 & B \\ B_1 & C_{11} & A_{11} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = -\begin{vmatrix} A & B_{11} & C \\ B_{11} & A_1 & C_1 \\ B_1 & B & C_{11} \end{vmatrix}$$

координате центра биће дате вредностима

$$x = \frac{D_1}{\Delta} \qquad y = \frac{D_2}{\Delta} \qquad z = \frac{D_3}{\Delta}$$

Ако је детерминанта Δ равна нули а међутим ни једна од детерминаната D није равна нули, површина има један центар који је у бесконачности. Ако је детерминанта Δ равна нули и која од детерминаната D равна нули центар је неодређен т.ј. површина има бескрајно много центара. На последку може се десити да једначине 7) не могу постојати све три у једно време; у таквом случају површина нема центара. Приметимо још и то да свака од једначина 7) дефинише по једну раван и центар није ништа друго до пресек тих равни. Према томе да би се све три равни секле у једну тачки у коначности или бесконачности или се две и две секу по паралелним правама, површине ће имати један центар или бескрајно много центара и т. д.

Из овога се изводи ово практично упутство за одређивање центара површина другог реда: Ако је једначина површине

$$f(x,y,z)=0$$

треба образовати делимичне изводе, ставити да су равни нули и кад се добивене три једначине реше по x, y и z добијају се координате центра.

Примедба: Дешава се у извесним задацима да једначина површине

$$f(x,y,z)=0$$

садржи један или више промењљивих параметара т.ј. да представља општу једначину извесне класе површина. Дајући параметрима разне специјалне вредности добијају се разне специјалне површине обухваћене таквом општом једначином. Претпостављајући да свака од таквих површина има свој одређени центар, варијацијом параметра покретаће се и центар површине у простору и онда се помоћу једначина 7) може решити н. пр. овакав задатак: Одредити геометријско место центара свију површина обухваћених поменутом једначином и добијених варијацијом параметара. Претпоставимо н. пр. да једначина површине

садржи само један параметар тако
да овај фигурише и у једначинама 7).
Елиминишући тај параметар између
две ма које од једначина 7) па затим
између две друге од једначина 7) доби-
ли би се две једначине н. пр.

$$\varphi(x,y,z)=0$$

$$\psi(x,y,z)=0$$

Оне дефинишу извесну криву линију у
простору и та ће крива бити тражено
геометријско место центара.

Претпоставимо сад да једна-
чина површине, као и једначине 7), са-
држе два параметра. Тада се елимина-
цијом тих параметара из једначина
7) добија извесна једначина

$$\varphi(x,y,z)=0$$

Она дефинише извесну површину и
тада ће та површина бити тражено
геометријско место центара.

Примери:

1. Наћи центар површине

$$36x^2+16y^2+9z^2-216x+32y-90z+421=0$$

Имаћемо

$$f'_x=72x-216=0$$
$$f'_y=32y+32=0$$
$$f'_z=18z-90=0$$

одакле је

$$x=3 \quad y=-1 \quad z=5$$

Центар је дакле у тачки $(3,-1,5)$.

2. Наћи центар површине

$$9x^2-4y^2-91z^2+18xz-40yz-36=0$$

Имаћемо

$$f'_x=18x+18z=0$$
$$f'_y=-8y-40z=0$$
$$f'_z=-182z+18x-40y=0$$

Из прве једначине је

$$x=-z$$

а из друге

$$y=-5z$$

па заменом у трећу имамо (пошто се
скрати са 2)

$$z(91+9-100)=0$$

одакле се види да z може имати ма
какву вредност т.ј. неодређено је. То
значи да постоји у место центра ли-

ниja

$$x = -z$$
$$y = -5z$$

(дата површина је цилиндрична а горња права је њена основица).

Облик једначина површина другог реда кад се центар узме за почетак.

Претпоставимо да површина има један одређен центар на коначној даљини. Ако се тај центар узме за почетак видели смо да у једначини морају отпасти сви чланови првог степена по x, y и z. У њој дакле остаје само скуп чланова другог степена и независан члан; једначина површине добија дакле тада облик

$$Ax^2 + A_1y^2 + A_{11}z^2 + 2Byz + 2B_1xz + 2B_{11}xy + H = 0$$

где је H као што смо видели

$$H = f(a, b, c)$$

Међутим овај независан члан H може се написати и у простијем облику. Ако пођемо од једначина центра

$$Aa + B_{II}b + B_{I}c + C = 0$$
$$B_{II}a + A_{I}b + Bc + C_{I} = 0$$
$$B_{I}a + Bb + A_{II}c + C_{II} = 0$$

и помножимо прву са a, другу са b, трећу са c и добијене једначине саберемо, добија се

$$Aa^2 + A_{I}b^2 + A_{II}c^2 + 2B_{I}ac + 2B_{II}ab + 2Bbc + Ca + C_{I}b + C_{II}c = 0 \qquad 8)$$

Међутим са друге стране је

$$f(a,b,c) = Aa^2 + A_{I}b^2 + A_{II}c^2 + 2Bbc + 2B_{I}ac + 2B_{II}ab + 2Ca + 2C_{I}b + 2C_{II}c + F = 0 \qquad 9)$$

Одузимањем једначина 8) и 9) добија се

$$f(a,b,c) = Ca + C_{I}b + C_{II}c + F$$

и према томе независан члан H можемо написати у облику

$$H = Ca + C_{I}b + C_{II}c + F \qquad 10)$$

Дијаметарске равни

У опште под <u>дијаметарском површином</u> једне дате површине у простору разуме се геометријско место свију средишта тетива паралелних једном датом правцу.

Дефиниција дијаметара у простору аналогна је дефиницији дијаметара у равни. Дијаметарске површине тако дефинисане могу бити или равни или друге неке површине у простору. Ми ћемо за површине у простору доказати ову теорему: Дијаметарске површине за површине другог реда увек су равни. Да би теорему доказали нека је

$$f(x,y,z) = 0$$

једначина дате површине другог реда,

где је $f(x,y,z)$ скраћени израз једначин(е) оног општег полинома другог реда с којим смо до сад имали посла. Преместимо почетак у једну произвољн(у) тачку (a,b,c) што ћемо учинити сменивши у једначини површине

$$x = x_1 + a$$
$$y = y_1 + b$$
$$z = z_1 + c$$

Једначина криве као што смо видели добија тада облик

$$Ax_1^2 + A_1 y_1^2 + A_{11} z_1^2 + 2B y_1 z_1 + 2B_1 x_1 z_1 + + 2B_{11} x_1 y_1 + [x_1 f'_a + y_1 f'_b + z_1 f'_c] + H = 0 \quad 11)$$

где је

$$H = f(a,b,c)$$

Означимо са: m, n и p коефицијенте који дефинишу правац посматраних тетива које треба да полови дијаметарска површина. Ако кроз нови почетак повучемо једну тетиву паралелну томе правцу, једначина те тетиве биће

$$\frac{x_1}{m} = \frac{y_1}{n} = \frac{z_1}{p} \quad 12)$$

Ако заједничку вредност размака 12) означимо са ρ добијамо

$$x_1 = m\rho$$
$$y_1 = n\rho \quad 13)$$
$$z_1 = p\rho$$

Оне вредности ρ које одговарају пресечним тачкама праве 12) и криве 11) добијају се кад се вредности 13) смене у 11). Резултат ће бити квадратна једначина

$$[Am^2 + A_1 n^2 + A_{11} p^2 + 2B np + 2B_1 mp + 2B_{11} nm]\rho^2 + + [m f'_a + n f'_b + p f'_c]\rho + H = 0 \quad 14)$$

До сад је тачка $M(a,b,c)$ била произвољна. Претпоставимо сад да је то једна ма која тачка дијаметарске површине. Пошто тетива пролази кроз почетак т.ј. кроз ту тачку, то ће она бити преполовљена том тачком, другим речима координате двају пресека праве 12) и криве 11) морају бити међу собом једнаке а супротно означене. Према једначини 13) то ће бити онда ако се за ρ што одговара тим пресецима добијају две једнаке а супротно означене вредности.

Према томе једначина 14) решена по ς мора имати своја два корена једнака супротно означена што ће бити ако у једначини недостаје члан првог степена по ς т.ј. ако је

$$m f'_a + n f'_b + p f'_c = 0$$

Та једначина мора важити за ма какву тачку (a,b,c) која припада дијаметарској површини. Према томе ако a, b и c сменимо са x, y и z, једначина

$$m f'_x + n f'_y + p f'_z = 0 \tag{15}$$

мора се сматрати као једначина те дијаметарске површине. Ако сад у 15) сменимо f'_x, f'_y и f'_z њиховим вредностима

$$\begin{aligned} f'_x &= 2\left[Ax + B_{II}y + B_I z + C\right] = 0 \\ f'_y &= 2\left[B_{II}x + A_I y + Bz + C_I\right] = 0 \\ f'_z &= 2\left[B_I x + By + A_{II}z + C_{II}\right] = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

и ако тако добијену једначину уредимо по x, y и z, једначина 15) постаје

$$(mA + nB_{II} + pB_I)x + (mB_{II} + nA_I + pB)y + \\ + (mB_I + nB + pA_{II})z + (mC + nC_I + pC_{II}) = 0 \tag{17}$$

Једначина 17) представља једну раван и према томе тражена дијаметарска површина јесте раван.

Из овога се у исто време изводи ово <u>практично упутство</u> за одређивање дијаметарске равни једне дате површине другог реда: Ако се једначина такве површине означи са

$$f(x,y,z) = 0$$

онда она дијаметарска раван што полови тетиве чији су коефицијенти правца m, n и p биће дата једначином

$$m f'_x + n f'_y + p f'_z = 0$$

Из једначине 15) види се у исто време и то да свака дијаметарска раван пролази кроз центар. То излази из тога што координате центра задовољавају једначине

$$f'_x = 0 \quad f'_y = 0 \quad f'_z = 0$$

а то је исто и у једначини 15) па ма какви били коефицијенти m, n и p. Према томе кад површина има један одређен центар на коначној даљини, све се дијаметарске равни секу у једној тачки. Ако је центар у бескрајности дијаметарске равни секу се по паралелним правама или су међусобом паралелне.

Облик једначине површине другог реда кад се једна дијаметар. раван узме за коорд. раван, а центар за почетак.

Ако се за осовину Oz узме управна из почетка на дијаметарску раван коју ћемо узети за раван XOY, онда пре свега пошто јој је центар у почетку, у њеној једначини недостају чланови са x, y, z на првом степену т.ј. она постаје

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + H = 0 \qquad 18)$$

а пошто је у исто време раван XOY дијаметарска раван површине, то сваком пару вредности (x,y) морају да одговарају две једнаке а супротно означене вредности z; то може бити само тако

ако у једначини 18) никако не фигурише z на првом степену већ само са квадратом. У једначини 18) морају дакле отпасти чланови са yz и са xz тако да та једначина постаје

$$Ax^2+A_1y^2+A_{11}z^2+2Bxy+H=0 \quad 19)$$

и то је скраћени облик једначине за овај случај. Једначину 19) можемо написати и у облику

$$Pz^2+\varphi(x,y)=0$$

где је $\varphi(x,y)$ известан полином другог степена по x и y тако да једначина

$$\varphi(x,y)=0$$

представља извесну криву другог реда у равни XOY.

Оставимо сад коорд. почетак непромењен и обрнимо осовине OX и OY око почетка у равни XOY. Знамо да се полиному $\varphi(x,y)$ може дати један од ових облика:

$$Mx^2+Ny^2+H$$
$$Ny^2+Qx$$
$$Ny^2+H$$
$$Qx$$
$$H$$

Према томе згодним избором коорд. система може се увек једначина једне ма које површине другог реда свести на један од ових пет облика:

I $\quad Mx^2+Ny^2+Pz^2+H=0$

II $\quad Ny^2+Pz^2+Qx=0$

III $\quad Ny^2+Pz^2+H=0$

IV $\quad Pz^2+Qx=0$

V $\quad Pz^2+H=0$

Разуме се да ови облици обухватају и оне који би се добили смењивањем x,y,z једно са другим. Према томе проучавање површина другог реда знатно је упрошћено, јер је довољно испитати површине дефинисане са ових пет типа једначина, па да буду тиме испитане и све површине другог реда. Ми ћемо редом испитати све ове типове.

I тип. Површине дефинисане једначином:

$$Mx^2+Ny^2+Pz^2+H=0$$

Разликујмо ова два случаја:

1° Нека су коефицијенти M, N и P сви једнако означени; тада њихов заједнички знак можемо увек сматрати као позитиван, јер кад то не би био случај, било би довољно целу једначину помножити са -1 па да знак буде позитиван.

У случају кад је H позитивно, једначина не дефинише никакву стварну површину. Једини дакле случај кад се има посла са правом површином јесте онај кад је H негативно. Ако тада једначину поделимо са $-H$ и ставимо да је

$$-\frac{M}{H}=\frac{1}{a^2} \qquad -\frac{N}{H}=\frac{1}{b^2} \qquad -\frac{P}{H}=\frac{1}{c^2}$$

једначина површине постаје

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Из саме једначине одмах се види да вредност x-а може лежати између граница $-a$ и $+a$, вредност y-а између $-b$ и $+b$, а вредност z-а између граница $-c$ и $+c$, јер би у таквом случају лева страна била већа од 1. Према томе површина је ограничена са свију страна и сва лежи у унутрашњости једног паралелопипеда чије су ивице: $2a$, $2b$ и $2c$.

Пресеци са једном ма којом равни

$$x=h$$

где је $h<a$ јесу елипсе

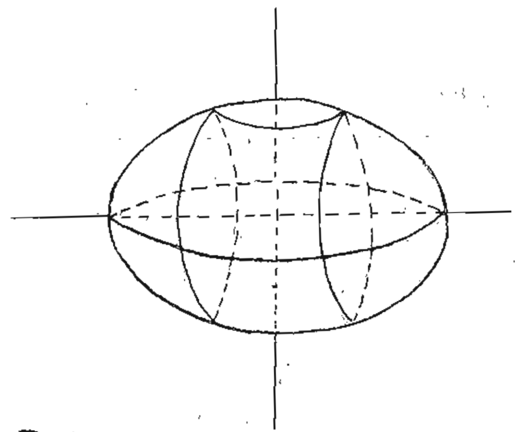
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$$

Пресеци са ма каквом равнином

$$y=k$$

где је $k<b$ јесу опет елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$$



На послетку пресеци са једном ма којом равни

$$z=l$$

јесу елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{l^2}{c^2}$$

Таква затворена површина код које су пресеци са равнинама увек елипсе називају се <u>елипсоиди</u>.

Ако су a, b и c једно од другог различни за површину се каже да је елипсоид са три осовине; ако су две од количина a, b и c међу собом једнаке, она се поста са елипсоидом са две осовине или са обртним елипсоидом; на послетку ако је $a=b=c$, елипсоид се своди на куглу.

2. Претпоставимо да су M, N и P различитих знакова; тада се увек може претпоставити да су два од ових коефицијената позитивни а један негативан. Ми ћемо узети да су M и N позитивни а P негативно. Разликујмо дакле ова три случаја:

a). Нека је

$$H=0$$

тада се једначина површине може написати у облику

$$Mx^2+Ny^2-Pz^2=0$$

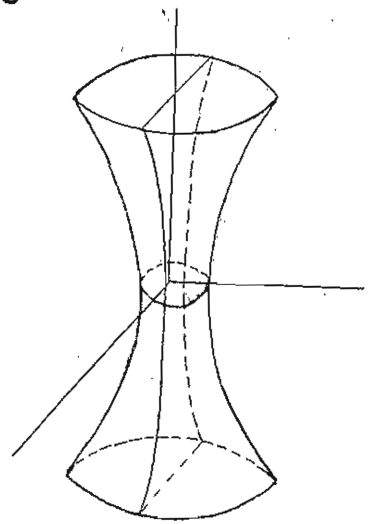
где су M и N позитивни. Једначина представља известан КОНУС чије је теме у почетку.

b) Нека је H негативно. Тада с деобом са $-H$ и ако се стави да је

$$-\frac{M}{H}=\frac{1}{a^2} \qquad -\frac{N}{H}=\frac{1}{b^2} \qquad \frac{P}{H}=\frac{1}{c^2}$$

једначина површине може написати у облику

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Пресеци са једном ма којом равнином

$$x=h$$

јесу хиперболе

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$$

пресеци са једном ма којом равнином

$$y=k$$

јесу опет хиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$$

На послетку пресеци са ма којом равнином

$$z=l$$

јесу елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{l^2}{c^2}$$

Пресеци дакле са једном ма којом равнином паралелном са XOY јесу елипсе, а пресеци са ма којом равнином параленом једну од других двеју коорд. равни јесу хиперболе. Такве површине зову се *једнограни хиперболоиди.*

Ако је $a=b$ онда се таква површина зове *ротациони једнограни хиперболоид.*

c) Нека је H позитивно. Деобом са H и ако се стави

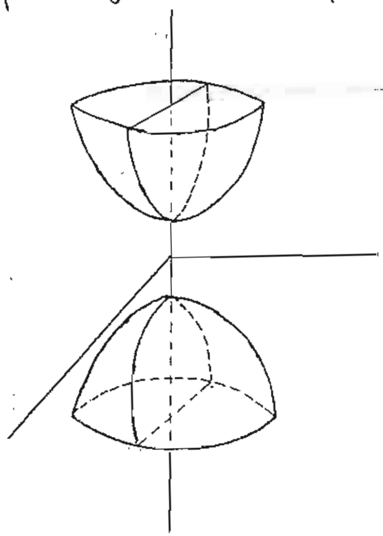
$$\frac{M}{H}=\frac{1}{a^2} \qquad \frac{N}{H}=\frac{1}{b^2} \qquad -\frac{P}{H}=\frac{1}{c^2}$$

једначина се површине може написати у облику

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Пресеци те површине са равнином

$$x=h$$



јесу хиперболе

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{h^2}{a^2}$$

пресеци са равнином

$$y=k$$

јесу опет хиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{k^2}{b^2}$$

на послетку пресеци са равнином

$$z=l$$

јесу елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{l^2}{c^2}$$

које су уображене ако је

$$-c<l<c$$

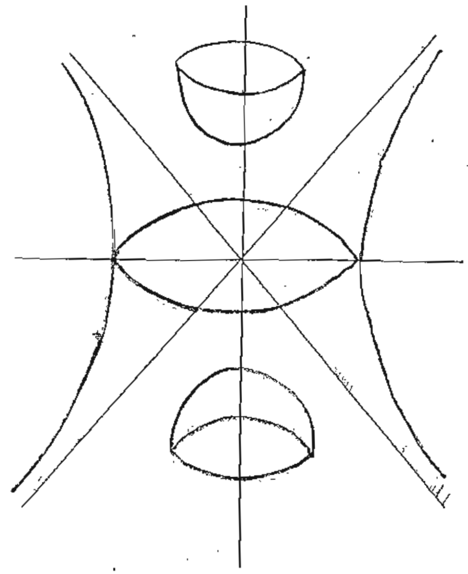
а стварне ако l лежи ван граница $-c,+c$. Површина према томе има облик означен на предњој слици и назива се *двограни хиперболоид.*

За оба два хиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

лако се доказује да имају конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



као асимптотни конус т.ј. као геометр. место асимптота свију пресека тих хиперболоида са равни што пролазе кроз Oz. Такве равни имале би за једначину

$$y=\lambda x$$

и њихови пресеци били би, било са једним било са другим хиперболоидом, хиперболе

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Међутим пресеци равни

$$y=\lambda x$$

са горњим конусом јесу две праве

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{z^2}{c^2}$$

т.ј.

$$x=\pm\frac{z}{c}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

Лако се уверавамо при оном што се зна из теорије асимптота да су ове две праве увек асимптоте за горње две хиперболе.

II Тип. Површине дефинисане једначином:

$$Ny^2+Pz^2+Qx=0$$

Разликујемо и овде два случаја

1° Нека су прва два коефицијента позитивна, трећи негативан. Ако се тада цела једначина подели са $\frac{Q}{2}$ и онда се стави

$$\frac{2N}{Q}=p \qquad \frac{2P}{Q}=q$$

једначина се може написати у облику

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x$$

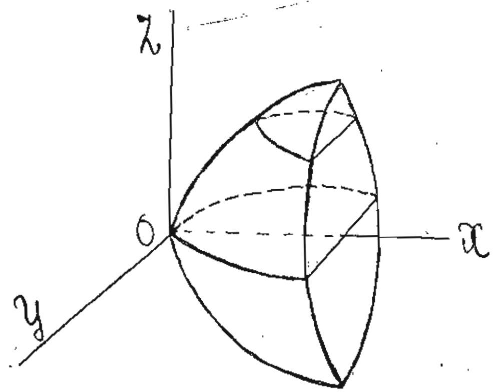
Пресеци са равнином

$$x=h$$

јесу елипсе

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2h$$

које су стварне само ако је h позитивно, што значи да се површина простире само у правцу позитивне x-осовине.



Пресеци са равнином

$$y=k$$

јесу параболе

$$z^2=2qx-\frac{k^2}{p}$$

На послетку пресеци са равнином

$$z=l$$

јесу параболе

$$y^2=2px-\frac{l^2}{q}$$

Као што се види пресеци паралелни равни XOZ јесу стварне или уображене елипсе, а пресеци паралелни осталим коорд. равнинама јесу параболе. Површина дакле има облик означен на предњој слици и назива се <u>елиптички параболоид</u>.

2° Нека је први коефицијенат позитиван а остала два негативн деобом са $-\frac{Q}{2}$ и стављајући да је

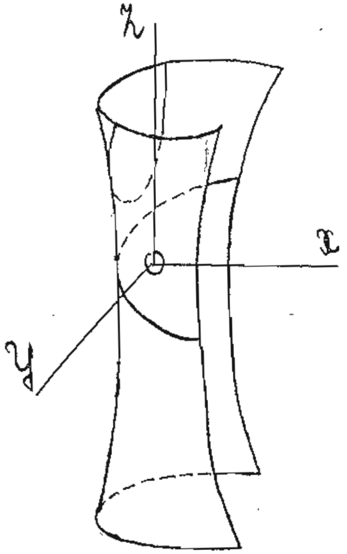
$$\frac{2N}{Q}=p \qquad -\frac{2P}{Q}=q$$

једначина површине добија облик

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$$

Пресеци са равнином

$$x=h$$



јесу хиперболе

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2h$$

пресеци са равнином

$$y=k$$

јесу параболе

$$z^2=-2qx+\frac{qk^2}{p}$$

на послетку пресеци са равнином

$$z=l$$

јесу опет параболе

$$y^2=2px+\frac{pl^2}{q}$$

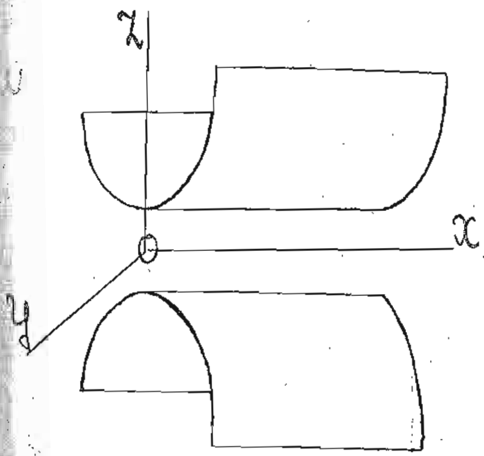
Као што се види пресеци површине паралелни рвни YOZ јесу хиперболе а пресеци паралелни осталим двема коорд. равнинама јесу параболе. Површина дакле има облик означен на предњој слици и назива се <u>хиперболним параболоидом</u>.

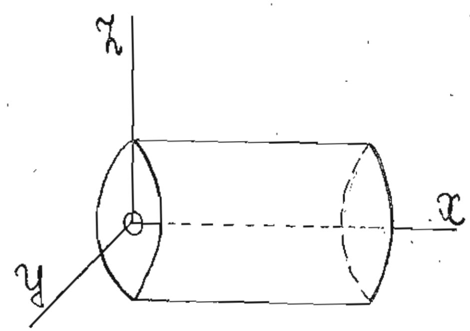
III <u>Тип</u>. <u>Површине дефинисане једначином</u>

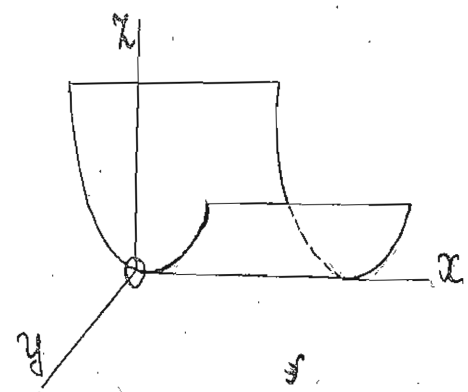
$$Ny^2+Pz^2+H=0$$

Пошто овакве једначине не зависе од x-а, пресеци површина са каквом равнином

$$x=h$$







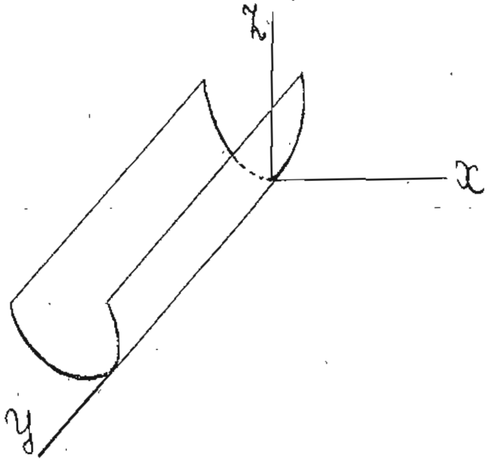
једнаки су међу собом. Површина је дакле извесна цилиндарска површина чије су генератрисе паралелне x-осовини а која у равни YOZ има за основицу криву другог реда

$$Ny^2 + Pz^2 + H = 0$$

IV тип. Површине дефинисане једначином:

$$Pz^2 + Qx = 0$$

Пошто површине не зависе од y а, по



су сви пресеци са равнима паралелним коорд. равни XOZ међу собом једнаки. Површина је дакле извесна цилиндарска површина чија је генератриса паралелна z-осовини а чија је основица у равни ZOX.

V тип. Површине дефинисане једначином

$$Pz^2 + H = 0$$

која се може свести на

$$z = \pm\sqrt{H}$$

Ова се површина своди на две равни које су паралелне коорд. равни XOY.

Примедба: У свима претходним једначинама могу се међу собом смењивати x, y и z. Облик дискутованих површина остаје исти, само што ће тиме бити измењен њихов положај према коорд. равнима.

Површине другог реда сматр
не као праволиниске површин

Казали смо да се под право
линиском површином разумеју оне по
вршине које су описане кретањем ка
ве праве по каквом одређеном зако
ну. Такве површине имају ту особи
ну да се на њима могу повући беск
начно много правих линија. Питање
је сад да ли се у опште површине
другог реда могу сматрати као пра
волинијске површине. Да би питање
решили ми ћемо навести једну оп-
шту методу за одређивање правих
линија на којој алгебарској површи
ни. Нека је

$$f(x,y,z)=0$$

једначина какве алгебарске површин
m-тог степена; нека су затим

$$x=\alpha z+p$$
$$y=\beta z+q \qquad 2).$$

једначине какве праве у простору. Пуштајући да се мењају параметри α, β, p и q једначине 2) могу представљати све могуће праве у простору. Покушајмо одредити те параметре тако да права 2) лежи на површини 1). Заменом x и y из 2) у 1) и уредивши добијену једначину по z добићемо извесну алгебарску једначину m-тог степена по z

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \cdots + A_{m-1} z + A_m = 0$$

где коефицијенти $A_0, A_1, \ldots A_m$ зависе од параметара α, β, p и q. Да би права 2) лежала на површини 1), предња једначина мора бити идентички задовољена за ма какво z, што значи да треба да буде посебице

$$A_0=0$$
$$A_1=0$$
$$A_2=0 \qquad 3)$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_m=0$$

Једначине 3) представљају систем од ($m+1$) једначина са четири непознате α, β, p и q из чега се изводе ови закључци:

1) Ако је $m>3$ једначине су 3) могуће само у изузетним случајевима, другим речима само извесне нарочите површине већег степена од 3 могу бити праволинијске површине или у опште садржати на себи правих линија;

2) Ако је $m=3$ једначине 3) представљају систем од четири једначине са четири непознате, што значи да у опште површине трећег степена садрже на себи ограничен број правих линија. Тај број може бити бесконачан т.ј. површина може бити праволинијска само у изузетним случајевима т.ј. ако се једна од једначина 3) изводи из друге.

3) Ако је $m<3$ једначине 3) имају више непознатих него једначина, што значи да оне у опште дају бесконачно много решења, другим речима површине другог степена садрже у опште бесконачно много правих линија и према томе би се могле сматрати као праволинијске површине. Али при томе се ваља напоменути да та решења могу бити стварна или уображена. Ако се дакле не постави услов да су праволиниске генератрисе разне, свака површина другог реда може се сматрати као праволиниска површина. Међутим ако се тражи да генератрисе буду разне као што се у опште претпоставља кад је реч о праволиниским површинама, онда је број праволинијских површина другог реда врло ограничен. Пре свега очевидно је да су све коничне и цилиндарске површине праволинијске. Ми ћемо доказати да осим тих површина има само још две које су праволинијске а то су: једнокрилни хипербо-

поид и хиперболни параболоид.

1° Једнокрилни хиперболоид

Видели смо да се његова једначина може написати у облику

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Нека су

$$x=\alpha z+p \qquad 4)$$
$$y=\beta z+q$$

једначине праве у простору. Заменом x и y у горњу једначини добија се

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+2z\left(\frac{\alpha p}{a^2}+\frac{\beta q}{b^2}\right)+\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-1\right)=0$$

Ова једначина мора бити идентички задовољена за ма какво z што значи да мора бити понаособ

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=\frac{1}{c^2} \qquad 5)$$

$$\frac{\alpha p}{a^2}+\frac{\beta q}{b^2}=0 \qquad 6)$$

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1 \qquad 7)$$

Једначина 5) може се написати у облику

$$\frac{c^2}{a^2}\alpha^2+\frac{c^2}{b^2}\beta^2=1$$

и биће идентички задовољена ако се стави

$$\alpha=\frac{a}{c}\cos\varphi$$
$$\beta=\frac{b}{c}\sin\varphi \qquad 8)$$

где је φ ма какав промењљив параметар. Тако исто једначина 7) биће задовољена ако је

$$p=a\cos\psi$$
$$q=b\sin\psi \qquad 9)$$

где је ψ други промењљив параметар. Заменом вредности 8) и 9) у 6) добија се између параметара φ и ψ однос

$$\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi=0$$

или

$$\cos(\varphi-\psi)=0$$

или

$$\psi-\varphi=\frac{\pi}{2}$$

или

$$\psi=\varphi+\frac{\pi}{2}$$

Ако у једначината 8) и 9) сматрамо φ и ψ као промењљиве параметре везане релацијом

$$\psi=\varphi+\frac{\pi}{2}$$

и те једначине заменимо у 4), тако добијене једначине садржаваће један про-

жењем параметар q и представља-
ће бесконачно много правих линија
које се добијају варијацијом тога
параметра. То показује да је једно-
крилни хиперболоид заиста право-
линијска површина.

2° Хиперболни параболоид.

На исти би начин могли до-
казати да су параметри α, β, p и q
реални и за ову површину, али то се
може увидети и на овај простији на-
чин: Видели смо да се једначина ове
површине може написати у облику

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x \qquad 10)$$

Ову једначину можемо написати у
облику

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}\right) = 2x$$

Ако уочимо праву чије су једначине

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda$$

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\lambda} \qquad 11)$$

очевидно је да пошто једначине 11) иден-
тички задовољавају једначину 10) за
ма какво λ, права 11) налази се на по-
вршини 10). Па пошто једначине 11) пред-
стављају бесконачно много стварних
правих које се добијају варијацијом
параметра λ, то је очевидно да и хи-
перболни параболоид садржи на себи
бесконачно много правих т.ј. да је то
једна стварна праволинијска површина.

Ове две површине т.ј. једно-
крилни хиперболоид и хиперболни па-
раболоид у исто су време поред ци-
линдричних и коничних површина дру-
гог реда једине стварне праволиниј-
ске површине другог реда, јер примењив-
ши горњу методу на лопту, елипсоид,
двокрилни хиперболоид и елиптички
параболоид добијају се за α, β, p и q
уображене вредности.