# Аналитична Геометрија

I. ДЕО У РАВНИ

Ђорђ. Ј. Лујић, проф.

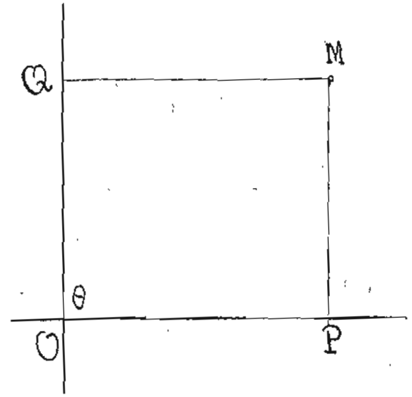


# Аналитична геометрија у равни.

Предавања
Д-р Мих. Петровића,
проф. Универзитета
(допуњена примерима).

# Увод

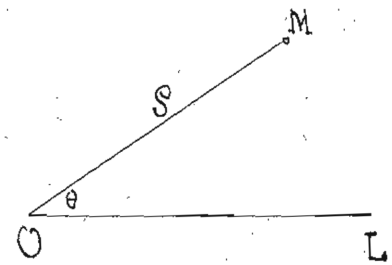
Аналитичка Геометрија је онај део математике који геометриске задатке решава рачунски. Оно што чини да је могућно на тај начин решити задатке јесте то, што је могуће положај тачке дефинисати бројевима. Оваква дефиниција тачке помоћу бројева и то за тачку у равни помоћу два, а за тачку у простору помоћу три броја, може се извести на бескрајно много начина. Који ће се од тих начина узети зависи од природе задатка. Најпростији начин, онај који се најчешће употребљава, састоји се у томе да се положај тачке дефинише двема дужинама које свагда имају један сталан правац. То је био првобитни, Descartes-ов начин фиксирања једне тачке у равни, а састоји се у овоме: Из једне тачке O повуку се две сталне праве, па се из једне посматране тачке M повуку MP и MQ паралелно поменутим сталним правама. Дужине




MQ = OP
MP = OQ

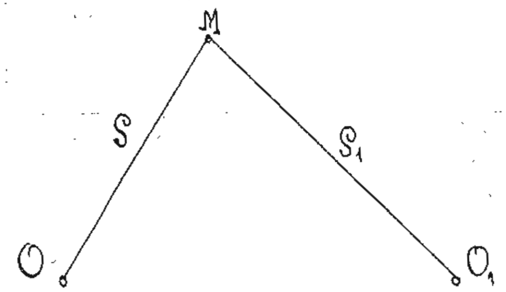
називају се координатама тачке M и то OP апсциса а MP ордината. Угао θ под којим се секу сталне праве зове се координатни угао, а сталне праве координатне осовине. Тачка O зове се координатни почетак. Најчешће се узима да је угао θ прав и онда добијамо правоугли координатни систем. За знаке који ће се придавати појединим координатама усвојено је Descartes-ово правило које гласи: ако се замисли да је апсцисна осовина хоризонтална, онда се све тачке десно од ординатне осовине сматрају као позитивне, а све тачке лево од ординатне осовине сматрају се као негативне. Помоћу тог простог правила могу се увек одредити знаци на које тачке, и обрнуто ако су дате вредности положаја координата може се положај тачке фиксирати.

Поред овог система имамо други један систем који се такође често употребљава. Њега представљају поларне координате. У њему је положај тачке M одређен њеним растојањем ρ од сталне тачке O и углом θ који гради то растојање са сталном пра-



вом $Ox$. Тада се $\rho$ и $\theta$ називају поларне координате тачке $M$ и то $\rho$ потег а $\theta$ поларни угао. Обе те координате сматрају се као позитивне и то $\rho$ се мења од $0$ до $+\infty$, а $\theta$ од $0$ до $2\pi$. Знајући $\rho$ и $\theta$ који одговарају једној тачки, положај те тачке биће потпуно одређен.

Оваквих начина и одређивања положаја једне тачке има бескрајно много. Један би такав начин представљао биполарни систем у коме је положај једне тачке одређен растојањима те тачке од две сталне тачке.




# Дефинисање линија у равни помоћу односа између бројева

Видели смо да се положај тачке одређује помоћу два броја. Показаћемо сад да се линија у равни може одредити помоћу односа два променљива броја. Уочимо једну ма какву једначину између променљивих $x$ и $y$; нека је та једначина

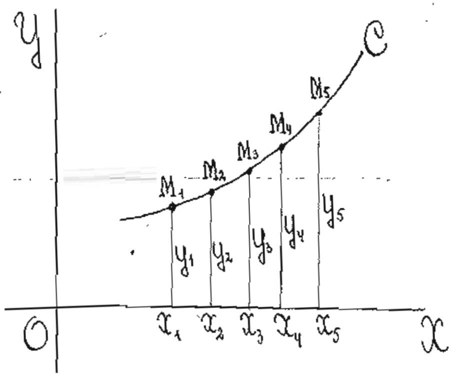
$$F(x,y)=0 \qquad 1)$$

Претпоставимо да је та једначина решена по $y$ и нека је она

$$y=\varphi(x) \qquad 2)$$

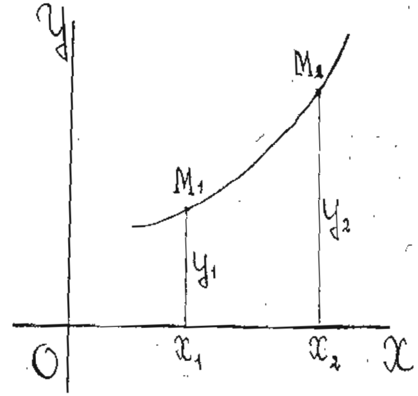
Дајмо $x$-у једну сталну вредност $x_1$. Из једначине 2), сменивши $x$ том вредношћу можемо израчунати одговарајућу вредност $y$-а и нека је она $y_1$.

Пар вредности $x_1 y_1$ дефинише у равни XOY једну тачку $M_1$. Дајмо затим x-у другу вредност $x=x_2$ и одредимо из једначине 2) одговарајућу вредност $y=y_2$. Пар вредности $x_2 y_2$ дефинише такође у равни XOY једну тачку $M_2$. На исти начин, кад будемо узастопце ставили $x=x_3$, $x=x_4$, ... добићемо из једначине 2) вредности $y=y_3, y_4, \dots$ Сваком пару вредности $x_3 y_3$, $x_4 y_4$, ... одговараће по једна тачка $M_3, M_4, \dots$




Ако су размаци између $x_1$ и $x_2$, $x_2$ и $x_3$, $x_3$ и $x_4$, ... велики, онда ће тачке $M_1 M_2 M_3 \dots$ бити далеко једна од друге; што год су ти размаци мањи, тачке $M_1 M_2 M_3 \dots$ ће бити ближе једна другој. Ако су ти размаци бескрајно мали, имаћемо бесконачно блиске тачке $M_1 M_2 M_3 \dots$, које ће бити бесконачно близу једна другој. Те ће тачке на тај начин образовати криву линију. Према самом начину на који смо дошли до те криве линије очевидно је, да ће постојати тесна веза између једначине 1) од које смо пошли и облика криве C. Та је линија графички представник једначине 1), а једначина 1.) је аналитички представник криве C.

Лако је уверити се, да је обрнуто, кад је већ нацртана крива линија C, њој увек одговара извесна једначина т.ј. известан однос између x и y. Јер ако на кривој уочимо тачку $M_1$ чије су координате $x_1$ и $y_1$, па пустимо да се $x_1$ повећа и постане $x_2$,




ордината се неће произвољно променити, већ тачно за онолико колико одговара тачки $M_2$. Између променљивих $x$ и $y$ постоји дакле известан однос који зависи од облика саме криве линије $C$. Па пошто се однос између два броја увек може представити једначином, то је извесно, да ће и за криву $C$ постојати извесна једначина $f(x,y)=0$ која јој одговара и која ће бити њен аналитички представник.

Једначина

$$f(x,y)=0$$

између двеју координата $x$ и $y$ опште представља криву линију у равни. Међутим у појединим специјалним случајевима то може бити права линија или више кривих линија или једна и више тачака или напослетку може представљати и само једну тачку.

Ако се једначина

$$f(x,y)=0$$

своди на једначину првог степена

$$ax+by+c=0$$

она представља једну праву. Ако се лева страна једначине

$$F(x,y)=0 \qquad 1.)$$

може раставити на производ од две или више функција н. пр.

$$f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\cdot f_3(x,y)\cdots=0$$

онда она представља толико засебних кривих линија, колико има чинитеља, јер свака од једначина је обухваћена првом једначином 1.). Тако н. пр. једначина

$$y^3+xy^2-2xy-2x^2+2x=0$$

која се може написати у облику

$$(y^2-2x)(x+y-1)=0$$

може се раставити на две једначине

$$y^2-2x=0$$

$$x+y-1=0$$

па дакле представља скуп од једне параболе и једне праве. Једначина

$$x^2-y^2=0$$

представља скуп од две праве које

пролазе кроз координатни почетак. Једначина

$$x^2+y^2+4y-2x+5=0$$

која се може написати у облику

$$(x-1)^2+(y+2)^2=0$$

представља само једну тачку, чије су координате $x=1$, $y=2$, јер она може бити задовољена само за тај пар реалних вредности. Једначина

$$x^2+y^2+3=0$$

не представља ништа, јер не постоји никаква стварна вредност која би је задовољавала. То су изузеци од општег правила: да једначина представља криву линију.

# Однос између кривих линија и једначина

Видели смо да се праћење них парова вредности $x$-а и $y$-а који задовољавају једначину

$$f(x,y)=0$$

води на конструкцију криве линије $C$ која би била графички представник те једначине. Координате ма које тачке $M$ такве криве дају по један пар вредности $(x,y)$ које задовољавају дату једначину.

На сличан начин решавају се овакви задаци: кад је дата једначина

$$f(x,y)=0$$

која зависи од две или једне променљиве, тражи се онај пар вредности (x,y) за које ће бити

$$f(x,y) > 0$$

или они парови (x,y) за које је

$$f(x,y) < 0$$

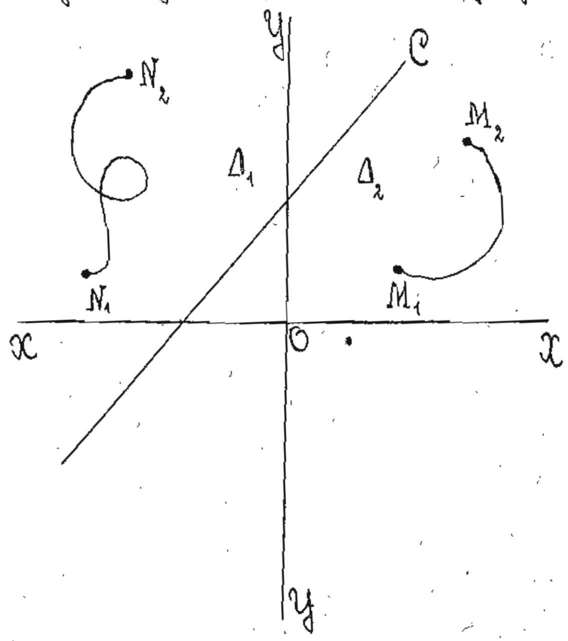
Претпоставимо да смо конструисали линију

$$f(x,y)=0$$

и нека је то извесна крива линија C. Та крива увек ће делити раван на две или више области, које ће имати ту особину, да се из једне области никаквим путем не може прећи у другу област а да се при томе не пресече крива C, а да се међутим из ма које тачке једне области може прећи у другу ма коју тачку исте области а да се при томе никако не пресече крива C. Тако н. пр. ако конструишемо праву линију

$$y = x+2$$

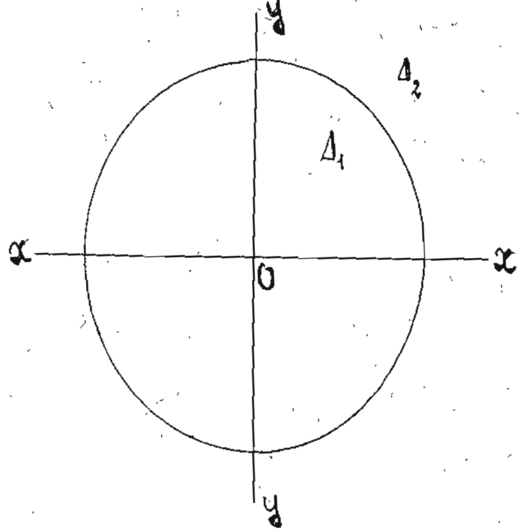
онда она дели раван на две области $\Delta_1$ и $\Delta_2$ с једне и с друге стране праве и те области горе поменуте особине т.ј. немогуће је прећи из једне тачке $M_1$ у области $\Delta_2$ у тачку $N_1$ у области $\Delta_1$ ако се при том путу не пресече права C и из једне тачке $M_1$ може се прећи на једну тачку $M_2$ у истој области, а да се при том нигде не пресече права C.




Узмимо као други пример круг

$$x^2+y^2-1=0$$

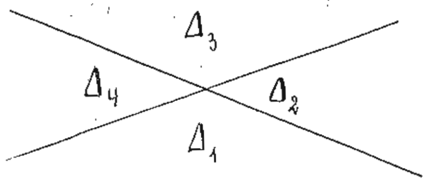
Он дели раван на две области: унутрашњу $\Delta_1$ и спољашњу $\Delta_2$. Очевидно је да се из једне области не може прећи у другу



а да се не пресече круг, а из једне тачке у области $\Delta_1$ може се прећи у другу тачку исте области а да се при том не пресече круг.

Тако би исто и за елипсу имали унутрашњу и спољашњу област.

Код двеју правих које се секу




имали би четири области: $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ и $\Delta_4$.

Код два концентрична круга имали би три такве области.

Претпоставимо дакле да смо за дату функцију $f(x,y)$ одредили све њене области у равни. Уочимо једну њену област н. пр. $\Delta$. Уочимо у тој области једну тачку $M$ чије координате нека буду: $a$ и $b$. Ако у функцији сменимо $x$ и $y$ тим координатама, $f(a;b)$ имаће известан знак $+$ или $-$. Ми ћемо доказати да тај знак остаје исти па ма коју тачку узели у области $\Delta$. Претпоставимо да смо место тачке $M(a,b)$ узели, опет у области $\Delta$, тачку $N(c,d)$. Резултат $f(c,d)$ који се добија кад се у функцији $f$ смени $x$ и $y$ са $c$ и $d$ мора бити истог знака кога је био и $f(a,b)$. Јер кад то не би био случај т.ј. кад би функција при прелазу од тачке $M$ на тачку $N$ променила знак, она би при тој промени знака очевидно морала проћи кроз вредност нула. Ако се онај пар вредности $(x,y)$ за који $f$ пролази кроз нулу означи са $\alpha$ и $\beta$, онда би било $f(\alpha,\beta)=0$ и тада се тачка $(\alpha,\beta)$ налази на кривој $C$. То би значило да је немогуће из $M$ прећи на $N$ а да се при том не пресече крива $C$. Међутим то је противно претпоставци. Из свега тога излази да је немогуће да резултат $f(c,d)$ буде другог знака но што је $f(a,b)$.

Према свему томе излази

ово основно правило које игра велику улогу у теорији неједначина: Ако је резултат који се добија кад се у функцији $f$ смени $x$ и $y$ координатама једне тачке позитиван, онда ће он бити позитиван и кад сменимо координатама ма које друге тачке у истој области. И обрнуто: ако је тај резултат негативан, он ће бити негативан ако $x$ и $y$ сменимо координатама опет ма које тачке у тој истој области. Према томе да ли је тај знак позитиван или негативан таква се област назива позитивном или негативном области функције.

Из свега овога добија се ово практично правило за решавање неједначина са две непознате: Ако је дата неједначина

$$f(x,y)>0$$

или

$$f(x,y)<0$$

па се траже сви парови вредности $(x,y)$ који такву неједначину задовољавају, треба конструисати

$$f(x,y)=0$$

и оделити њене позитивне и негативне области. За све парове вредности $(x,y)$ који одговарају координатама тачака у каквој позитивној области биће $f(x,y)>0$ и обрнуто, за све тачке у једној ма каквој негативној области биће $f(x,y)<0$. За тачке на кривој биће $f(x,y)=0$.

У томе се састоји начин решавања оваквих неједначина. Истина да свака таква неједначина има бескрајно много решења, али из овога што смо рекли види се да та решења нису сасвим произвољна. То се види из тога, што један пар произвољних $(x,y)$ неће задовољавати дату неједначину, већ то ће бити само у оном случају, ако $(x,y)$ представљају координате ма какве тачке позитивне области ако је дата неједначина $f(x,y)>0$, или негативне области, ако је дата неједначина $f(x,y)<0$.

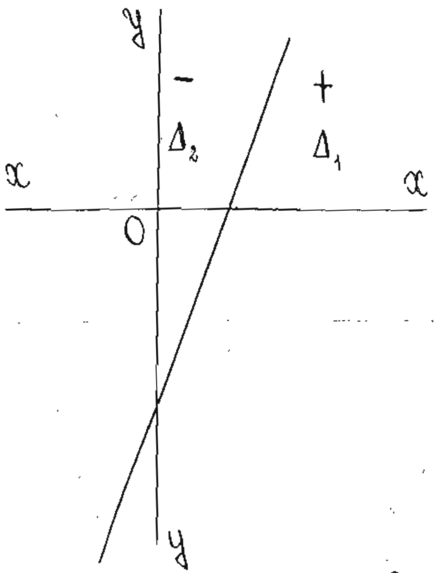
Примери:

1. Нађи све парове вредности $(x,y)$ за које ће бити

$$5x-2y-3>0$$

Ако конструишемо праву линију

$$5x-2y-3=0$$



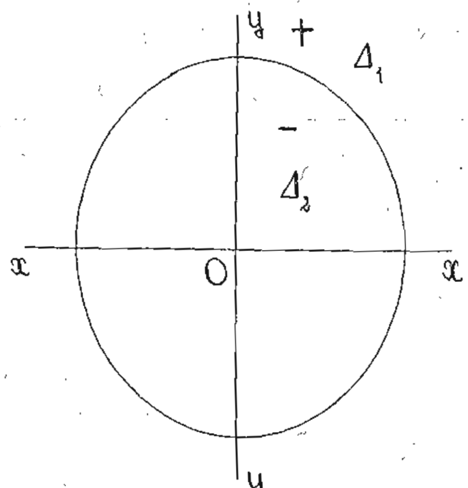

она дели раван на две области: $\Delta_1$ и $\Delta_2$ којима још ваља одредити знак. Да би одредили знак области $\Delta_1$ узећемо ма коју тачку с десне стране те праве н.пр. тачку $(1,0)$. За ту тачку израз $5x-2y-3$ добија вредност $+2$. Према томе област $\Delta_1$ је позитивна. Да би одредили знак области $\Delta_2$ узећемо у тој области сам координатни почетак. За ту тачку израз $5x-2y-3$ добија вредност $-3$. Према томе та ће област бити негативна. Решење постављеног задатка било би ово: Неједначина $5x-2y-3>0$ биће задовољена за све оне вредности $(x,y)$ које одговарају координатама ма које тачке у области $\Delta_1$.

2. Нађи све парове вредности $(x,y)$ за које ће бити

$$x^2+y^2-9<0$$

Ако конструишемо криву (круг)

$$x^2+y^2-9=0$$




он дели раван на две области: спољашњу $\Delta_1$ и унутрашњу $\Delta_2$. Да би одредили знак области $\Delta_1$ узећемо једну ма коју тачку у тој области н.пр. тачку $(4,0)$. Горњи израз тада постаје $+7$. Дакле област $\Delta_1$ је позитивна. За област $\Delta_2$ узећемо почетак, за који горњи израз постаје −9. Па је област дакле негативна. Према томе решење постављеног задатка било би ово: горњу неједначину задовољавају сви парови (x,y) који представљају координате ма које тачке у унутрашњој области круга.

3. Наћи све парове вредности (x,y) за које ће бити

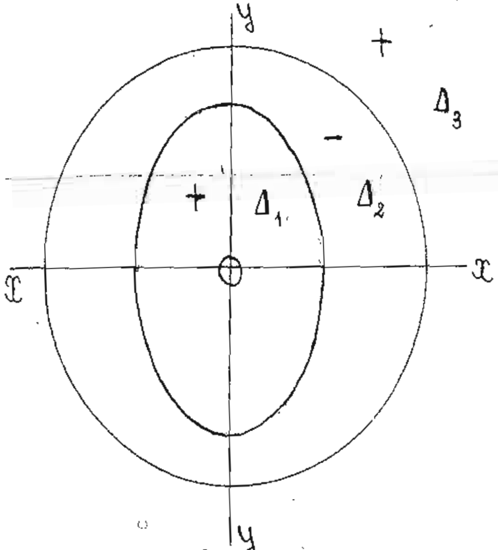
$$(4x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)>0$$

Ако се функција стави да је равна нули, добијају се две криве: круг

$$x^2+y^2-9=0$$

и елипса

$$4x^2+y^2-4=0$$




Раван ће бити подељена на три области: $\Delta_1$, $\Delta_2$ и $\Delta_3$, од којих су две: $\Delta_1$ и $\Delta_3$ позитивне, а једна: $\Delta_2$ негативна. Према томе решење горњег задатка било би ово: горњу неједначину задовољавају сви парови (x,y) који одговарају било свима тачкама у унутрашњости елипсе, било тачкама ван круга.

4. Претпоставимо да неједначина

$$f(x,y)>0$$

или

$$f(x,y)<0$$

садржи само једну непознату н.пр. x тако да се она претвара у

$$\varphi(x)>0$$

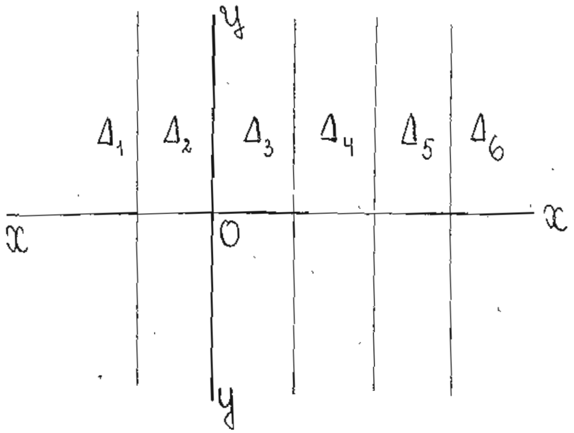
или

$$\varphi(x)<0$$

кад се она вредност x за коју је та неједначина задовољена смени. Видели смо да једначина

$$\varphi(x)=0$$

представља скуп од више правих које су све паралелне у-осој осовини. и чија ће одстојања од те осовине бити $x=a_1, a_2, a_3, \dots$ где $a_1, a_2, a_3, \dots$ корене једначине $\varphi(x)=0$. Те ће праве делити раван на разне области: $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \dots$ Знаци тих области одређују се онако исто као што је раније казано т.ј. смењујући у $\varphi(x)$ $x$ апсцисом једне ма које тачке у таквој области.




Претпоставивши да смо одредили знаке свију области, решење постављеног задатка било би ово: неједначине $\varphi(x) > 0$ задовољавају све оне вредности $x$-а које представљају апсцисе у позитивним областима $\Delta$; напротив неједначине $\varphi(x) < 0$ задовољавају све оне вредности $x$ које одговарају апсцисама тачака у негативним областима $\Delta$.

5. Ако је дата неједначина

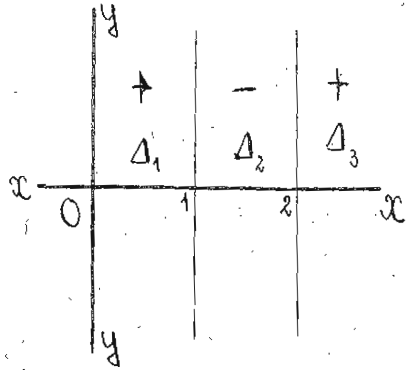
$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

и ако решимо једначину

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

она има два корена: 1 и 2, па добијамо две праве дефинисане једначинама:

$$x = 1$$
$$x = 2$$



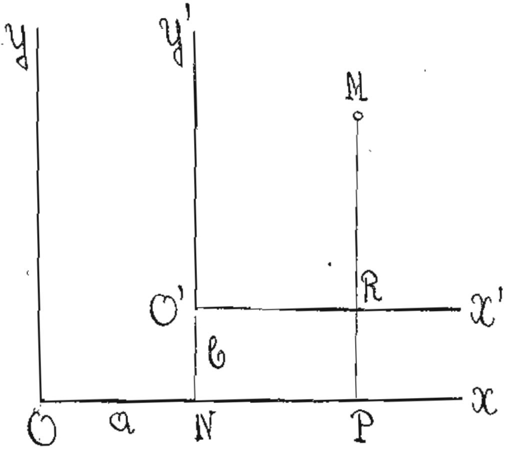

Оне образују у равни три области: $\Delta_1$, $\Delta_2$ и $\Delta_3$ од којих су $\Delta_1$ и $\Delta_3$ позитивне, а $\Delta_2$ је негативна. Према томе задата неједначина биће задовољена за све вредности $x$ које леже између 1 и 2 т.ј. које су области $\Delta_2$.

# Основни појмови из геометрије тачке.

Видели смо да се положај једне ма које тачке у равни може фиксирати помоћу два броја. Међутим величине тих бројева нису апсолутне већ зависе од избора координатног система. У једној систему тај ће број имати једну, а у другој другу вредност. За сваки задатак у коме се има посла са положајем тачака постоји такав један систем у коме сви бројеви постају што је могуће простији, тако да се често има посла са задатком овакве врсте: на место старе узете системе увести нову систему која ће бити таква да бројеви који представљају координате тачака буду у новој системи простији но у првој. Задатак се тада своди на то да се нађе веза између старих и нових координата тако да се помоћу старих могу израчунати нове, и обрнуто. Такав посао назива се <u>трансформацијом координата</u>. Казали смо да координатних система има безброј много и према томе има и безброј много задатака трансформације координата. Ми ћемо узети само такве трансформације, које се у примени најчешће јављају.

1. <u>Промена координатног почетка</u>. Нека је дат правоугли координатни систем XOY. Пренесимо координатни почетак из O у O', остављајући правац осовина непромењен, па тражимо однос између старих и нових координата. Уочи-

мо тачку M и нека су њене координате у старом систему x и y, а у новом x' и y'. Означимо са a и b апсцису и ординату новог почетка O' према старом координатном систему.



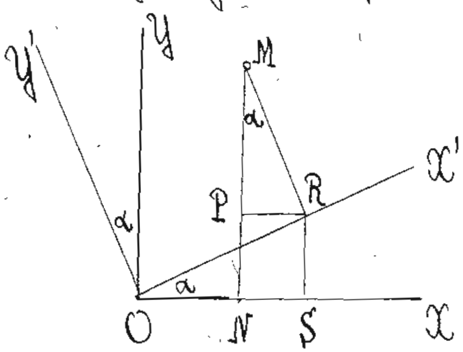

Из слике је очевидно да је

$$x = ON + NP = a + x'$$
$$y = PR + RM = b + y'$$

Из тих двеју једначина можемо кад је познато x и y израчунати x' и y'.

2. Промена правца осовина

Нека је дат правоугли систем XOY.

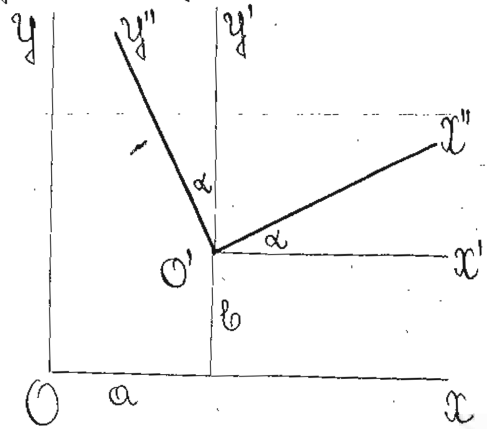



Обрнимо за угао α обе осовине око истог почетка O и нека су x и y координате дате тачке M у старом систему, а x' и y' координате те тачке у новом систему. Из слике се добија

$$x = ON = OS - NS = OR\cos\alpha - MR\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = MP + PN = RM\cos\alpha + OR\sin\alpha = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha$$

Из тих двеју једначина можемо помоћу x' и y' израчунати x и y и обрнуто.

3. Промена почетка и правца осовина. Овај се задатак сам по себи раставља на прва два задатка.




Преместићемо прво почетак O у O' не мењајући правац осовина, па ће између нових и старих координата постојати однос

$$x = a + x'$$
$$y = b + y'$$

Затим ћемо обрнути цео систем за угао $\alpha$ око тачке $O'$ и онда ће између координата $x'$ и $y'$ и нових координата $x''$ и $y''$ постојати малопређашњи однос т.ј. биће

$$x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha$$
$$y' = y''\cos\alpha + x''\sin\alpha$$

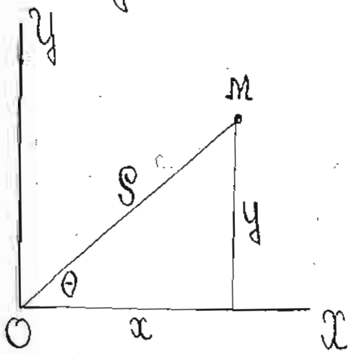
Према томе биће

$$x = a + x''\cos\alpha - y''\sin\alpha$$
$$y = b + y''\cos\alpha + x''\sin\alpha$$

Овде имамо две једначине из којих се помоћу $x''$ и $y''$ налазе старе координате $x$ и $y$ или обрнуто.

## 4. Претварање правоуглих у поларне координате (и обрнуто).

Ако је пол новог система у почетку




онда, ако су правоугле координате: $x$ и $y$, а поларне координате: $\rho$ и $\theta$, биће

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta \qquad 1)$$

или обрнуто

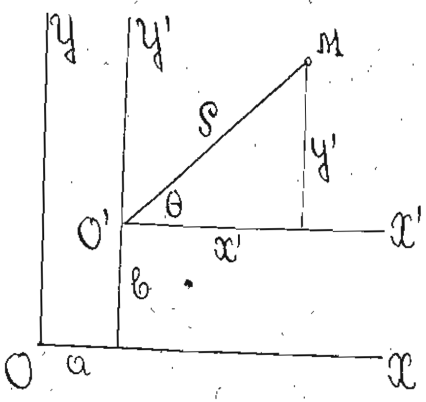
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tg\,\theta = \frac{y}{x} \qquad 2)$$

Из једначина 1) можемо израчунати координате правоуглог, а из једначина 2) поларног система.

## 5. Ако пол није у почетку,

онда прво ваља преместити правоугли систем у тачку $O'$ тако да ћемо имати

$$x = a + x'$$
$$y = b + y'$$




па тек онда ставити

$$x' = \rho\cos\theta$$
$$y' = \rho\sin\theta$$

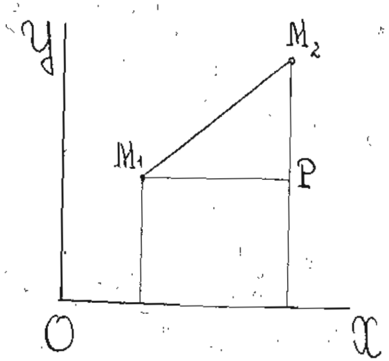
тако да ће између правоуглих и поларних координата постојати односи

$$x = a + \rho\cos\theta$$
$$y = b + \rho\sin\theta$$

6. Ако се пол не поклапа са коорд. почетком а и правац поларне није паралелан с апсцисом, онда би прво пренели почетак у пол, затим би око пола обрнули цео систем за онолики угао колики буде требао, па тек онда нове правоугле координате изразили помоћу поларних.

# Растојање двеју тачака

Ако су координате двеју тачака $M_1$ и $M_2$: $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$, из слике је очевидно да је




$$M_1M_2 = \sqrt{M_1P^2 + M_2P^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ако се једна од тачака налази у почетку, а координате друге тачке ако су $x$ и $y$, овај се образац упрошћава и постаје

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

# Основни појмови из геометрије праве линије

Најпростија једначина

$$f(x,y)=0$$

јесте линеарна једначина

$$Ax+By+C=0$$

и она представља праву линију. У њој има три промењива коефицијента, али деобом са једним од њих може се удесити да их буде само два. У појединим специјалним случајевима та једначина може бити простија, у њој може недостајати x или y, а може недостајати и x и y. У првом случају може се једначина написати у облику

$$y=b$$

и та једначина дефинише праве паралелне са апсцисном осовином; у другом случају имаћемо

$$x=a$$

и та једначина дефинише праве паралелне ординатној осовини.

Једначина праве може се написати у неколико различитих облика према врсти задатка у коме се употребљује. Један од таквих облика био би

$$y=ax+b \qquad 1.)$$

Из облика

$$Ax+By+C=0 \qquad 2.)$$

лако се израчунава овај други облик, јер ако се напише он у облику

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \qquad 3.)$$

види се да је

$$a=-\frac{A}{B} \quad b=-\frac{C}{B} \qquad 4.)$$

Ако се у једначини 1.) стави

$$x=0$$

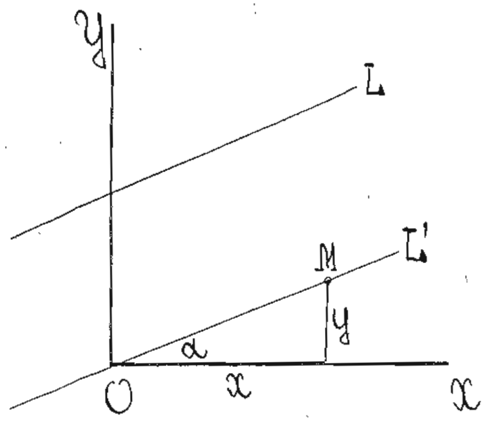
добија се

$$y=b$$

што значи да коефицијенат в представља ординату оне тачке у којој права сече y-ску осовину. Ако коефицијенту в дамо сталну вредност, па пустимо да се а мења, онде све бескрајно многе праве на тај начин добијене пролазе кроз тачку (0, в). Мењањем коефицијента а мења се само правац праве и због тога се а назива <u>коефицијенат правца</u> или <u>угаони сачинилац праве</u>. Начин на који правац праве зависи од сачиниоца видећемо на овај начин: Нека је дата права

$$y = ax + b$$

Повуцимо кроз почетак праву која има исти коефицијенат а т.ј. исти правац као и дата права.




Једначина праве L' биће

$$y = ax$$

одакле је

$$a = \frac{y}{x}$$

или, из слике,

$$a = \operatorname{tg} \alpha \qquad 5.)$$

Дакле коефицијенат а није ништа друго до тангенс оног угла који гради дата права са апсцисном осом. Тако н.пр. једначина

$$y = x$$

представља симетралу правог угла XOY, а једначина

$$y = -x$$

представља симетралу угла X'OY.

Згоднији је облик једначине праве

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad 6.)$$

Из опште једначине 2.) написане у облику

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \qquad 7.)$$

лако се прелази на горњи облик 6.), кад се стави

$$a=-\frac{C}{A} \qquad b=-\frac{C}{B}$$

Из једначине 6.) кад се стави

$$x=0$$

добија се

$$y=b$$

а кад се стави

$$y=0$$

добија се

$$x=a$$

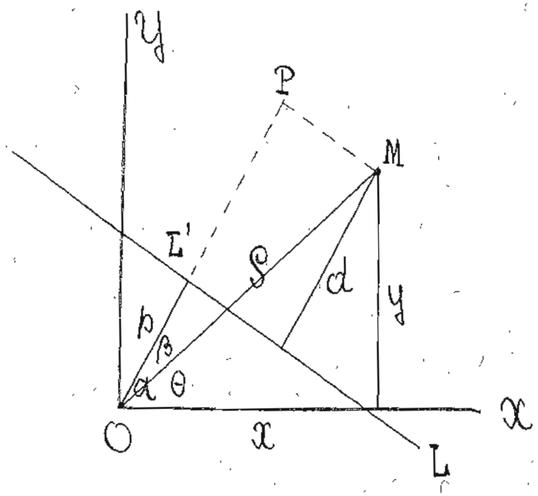
Према томе a и b представљају одсечке које гради права на координатним осовинама. Овај облик једначине праве нарочито је згодан кад се у задацима имају подаци о тим одсечцима и при конструкцији правих.

Као нарочити облик једначине праве навешћемо т. зв. нормални облик. Једначина праве $L$ потпуно је одређена, ако је познато њено најкраће одстојање

$$OS=p$$

од почетка и угао $\alpha$ који гради то

8.) одстојање са x-ском осовином. Уочимо у равни на коју тачку M која није на датој правој и означимо њено најкраће растојање од праве $L$ са $d$. Из слике се види да је:




$$OP = OM\cos\beta \qquad 9.)$$

$$OP = p+d \qquad 10)$$

Ако са $\rho$ и $\theta$ означимо поларне координате тачке M, из слике се види да је

$$\beta=\alpha-\theta \qquad 11.)$$

Заменом образаца 10) и 11.) у образац 9.) добија се

$$p+d=\rho\cos(\alpha-\theta)=\rho\cos\alpha\cos\theta+\rho\sin\alpha\sin\theta \qquad 12.)$$

Ако са x и y означимо правоугле координате тачке M, из трансформација поларних координата

У паралелне знамо да постоје ови односи

$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\theta \qquad 13.)$$

Заменом образаца 13.) у обрасцу 12.) добија се

$$p + d = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

За све тачке на линији $\mathcal{L}$ је

$$d = 0$$

па последњи образац даје

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad 14.)$$

Та једначина сада важи за сваку тачку праве $\mathcal{L}$ и према томе она се може сматрати као једначина праве. То је: <u>нормална једначина праве</u>. Прелаз од једначине

$$Ax + By + C = 0 \qquad 15.)$$

на нормалну једначину састоји се у томе, да се помоћу $A$, $B$ и $C$ израчуна $p$ и $d$. Ако упоредимо једначине 14.) и 15.), да би оне дефинисале једну исту праву, потребно је да буде

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = \frac{-p}{C}$$

Ако заједничку вредност ова три количника означимо са $\lambda$, имаћемо

$$\cos\alpha = A\cdot\lambda$$
$$\sin\alpha = B\cdot\lambda \qquad 16.)$$
$$-p = C\cdot\lambda$$

Ако прве две једначине дигнемо на квадрат и саберемо, имаћемо

$$1 = \lambda^2(A^2 + B^2)$$

одакле је

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Из једначина 16) добијамо у том случају

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$-p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad 17.)$$

Обрасци 17.) показују како се помоћу коефицијената $A$, $B$ и $C$ у општој једначини могу израчунати коефицијенти: $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $-p$ у нормалној једначини. Знак $\pm$ у тим обрасцима можемо изоставити, јер је све једно узели један или други знак, пошто једначина праве остаје иста ако је помножимо са -1.

Као последњи облик једначине праве имаћемо поларну једначину. Ако у општој једначини

$$Ax+By+C=0$$

претворимо правоугле координате у поларне т.ј. ако ставимо

$$x=\rho\cos\theta$$

$$y=\rho\sin\theta$$

једначина постаје

$$\rho=\frac{-C}{A\cos\theta+B\sin\theta}$$

и то је најопштија поларна једначина једне праве. Њој можемо дати и један згоднији облик, ако је напишемо у облику

$$\rho=\frac{1}{-\frac{A}{C}\cos\theta-\frac{B}{C}\sin\theta} \qquad 18.)$$

па ставимо да је

$$-\frac{A}{C}=M\cos\alpha \qquad -\frac{B}{C}=M\sin\alpha$$

где су $M$ и $\alpha$ за сад две непознате количине. Једначина 18.) тада постаје

$$\rho=\frac{1}{M\cos(\theta-\alpha)} \qquad 19.)$$

Међутим непознате количине $M$ и $\alpha$ можемо израчунати квадрирајући и сабирајући предње једначине, у којима уводимо $M$ и $\alpha$, па ћемо добити

$$M^2=\frac{A^2+B^2}{C^2}$$

$$tg\,\alpha=\frac{B}{A}$$

Једначина 19.) представља најпростију и уједно најопштију једначину праве. У специјалном случају кад права пролази кроз пол, поларна једначина праве добија најпростији облик и то

$$\theta=const.$$

# Конструкција праве линије.

Најобичнији подаци који се дају о конструкцији јесу одсечци које права гради на координатним осовинама. Ако су ти одсечци а и в, једначина праве биће

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

и онда се конструише права која пролази кроз крајње тачке тих одсечака. Понекад је згодније имати такав један одсечак и угао који гради права са x-ском осовином.

Кад је дата једначина

$$Ax+By+C=0$$

најпрактичније је конструисати праву стављајући у једначини $x=0$ израчунати $y$; затим стављајући $y=0$ израчунати $x$. Преносећи тако израчунате дужине $x$ и $y$ на координатне осовине имаћемо две тачке дате праве, дакле и саму праву.

Задаци на које се најчешће наилази у теорији праве јесу овакве врсте: израчунати један или обадва сачиниоца а и в за једну непознату праву $y=ax+b$ кад се знају извесни услови које треба она да задовољи. Пошто имамо два таква коефицијента, то су потребна и два услова или један двоструки услов који доводи до две једначине.

Задаци:

1° Наћи једначину праве која пролази кроз тачку $M(\alpha,\beta)$. Ако се изрази да права:

$$y=ax+b$$

пролази кроз тачку $M$ имаћемо

$$\beta = \alpha a + b$$

дакле добијамо само једну условну једначину и задатак није потпуно одређен. Одузимањем ових двеју једначина добија се

$$y - \beta = a(x - \alpha)$$

Варијацијом неодређеног коефицијента $a$ добијамо из последње једначине све могуће праве које пролазе кроз тачку $M$.

2° Одредити једначину праве која пролази кроз две дате тачке: $M_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $M_2(\alpha_2, \beta_2)$. Ако се изрази да права

$$y = ax + b$$

пролази кроз те две тачке, онда се добијају две условне једначине

$$\beta_1 = a\alpha_1 + b$$

$$\beta_2 = a\alpha_2 + b$$

одакле се може одредити $a$ и $b$, те је

$$a = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \qquad b = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

а једначина праве која пролази кроз тачке $M_1$ и $M_2$ биће

$$y - \beta_1 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}(x - \alpha_1)$$

3° Одредити праву која пролази кроз дату тачку и има дати правац. Ако тангенс тога правца означимо са $\lambda$, биће

$$a = \lambda$$

и једначина ће постати

$$y = \lambda x + b$$

Ако се изрази да права још пролази и кроз тачку $M(\alpha, \beta)$, добијамо

$$\beta = \lambda\alpha + b$$

одакле

$$b = \beta - \lambda\alpha$$

па је тражена једначина праве

$$y = \lambda(x - \alpha) + \beta$$

4° Одредити пресек двеју правих линија. Ако су дате праве

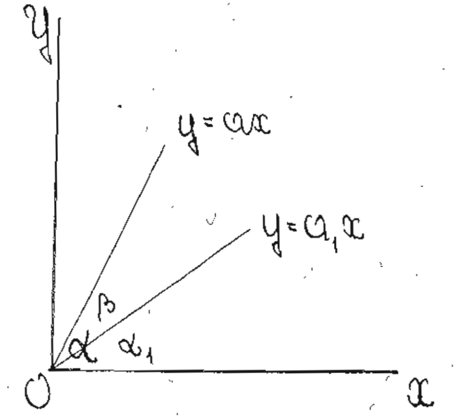
$$Ax+By+C=0$$
$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

координате њиховог пресека добијају се решењем ових двеју једначина са две непознате: x и y. Обе те координате добићемо у виду два разломка који имају исти именитељ и ако тај именитељ буде различан од нуле, онда су координате коначне и одређене; ако је тај именитељ раван нули а бројитељи различити од нуле, онда су x и y бескрајни и пресек је у бескрајности; и најзад, ако су и бројитељи и именитељ равни нули, x и y су неодређени и праве се поклапају.

5° **Одредити угао двеју правих.** Нека су дате праве

$$y=ax+b$$
$$y=a_1x+b_1$$

Ако кроз почетак повучемо те две праве, угао $\beta$ између тих правих биће онај исти који граде праве међу собом. Из слике се добија




$$tg\beta = tg(\alpha-\alpha_1) = \frac{tg\alpha - tg\alpha_1}{1+tg\alpha\, tg\alpha_1}$$

Како је

$$tg\alpha = a \qquad tg\alpha_1 = a_1$$

то последњи образац постаје

$$tg\beta=\frac{a-a_1}{1+aa_1}$$

То је тражени образац који казује како се израчунава угао између правих, кад су дати њихови правци. Из обрасца се види ово: да би праве биле паралелне, мора бити

$$tg\beta=0$$

па дакле

$$a=a_1$$

што је очевидно и из слике. Да би праве биле нормалне, треба да је

$$tg\beta=\infty$$

т.ј.

$$1+aa_1=0$$

да би праве градиле угао од 45°, треба да буде

$$tg\beta=1$$

па дакле

$$\frac{a-a_1}{1+aa_1}=1$$

или

$$aa_1+a_1-a+1=0$$

Према овоме се лако решава и овај задатак: Кад је дата једна права

$$y=\lambda x+\mu$$

потребно је и довољно да буде

$$1+\lambda a=0$$

одакле је

$$a=-\frac{1}{\lambda}$$

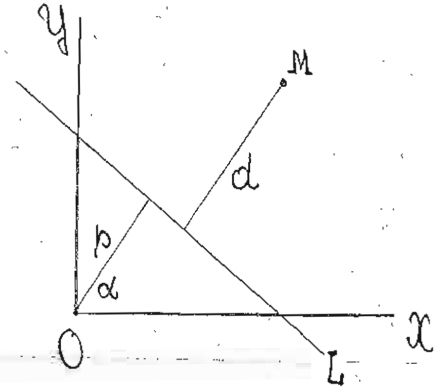
и према томе општа једначина тражених правих биће

$$y=-\frac{x}{\lambda}+b$$

где $b$ остаје неодређено и према томе варијацијом тога коефицијента $b$ у тој једначини имамо бескрајно много тражених правих које су све нормалне на датој правој.

6° <u>Наћи најкраће растојање једне дате тачке од дате праве.</u> Претпоставимо да се тражи растојање $d$ једне тачке $M(\alpha,\beta)$ од једне праве

$$Ax+By+C=0$$




При извођењу нормалне једначине праве видели смо да између растојања $d$ и елемената праве $L$ постоји овај однос

$$p+d=x\cos\alpha+y\sin\alpha$$

или

$$d=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p \qquad 1.)$$

Видели смо такође да се $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $-p$ добијају помоћу образаца

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad -p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

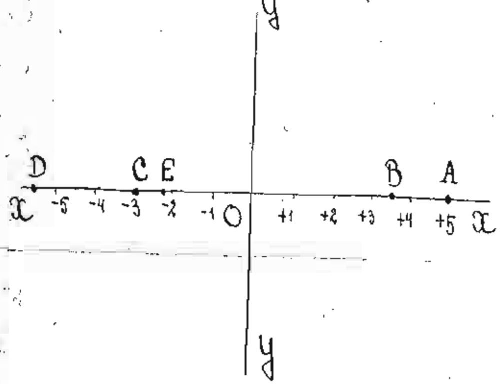
Заменом у обрасцу 1.) и сменивши у њему $x$ и $y$ са $\alpha$ и $\beta$ т.ј. координатама тачке $M$, добијамо

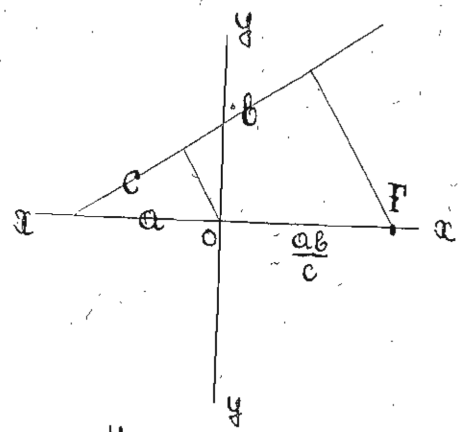
$$d = \pm \frac{A\alpha + B\beta + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad 2.)$$

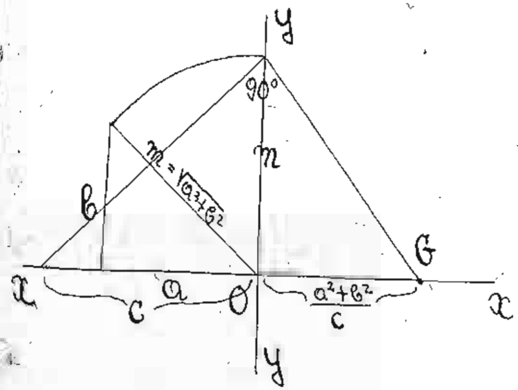
из чега се изводи ово правило: одстојање једне тачке од једне праве добија се кад се на левој страни једначине праве смени $x$ и $y$ координатама тачке $M$ и резултат подели са $\sqrt{A^2+B^2}$. У обрасцу 2.) имамо знак $\pm$. Има случајева кад нам треба знати само апсолутну вредност одстојања $d$ и тада ћемо $d$ увек сматрати као позитивно. Међутим има случајева где се треба водити рачуна о знаку тог растојања т.ј. о томе да ли је тачка с једне или с друге стране праве.

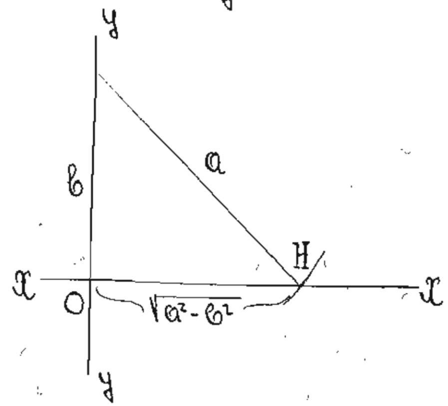
# Задаци из тачке и праве

1. Означити на коорд. осовинама тачке чије су апсцисе: $A(+5)$, $B(+3\frac{1}{2})$, $C(-3)$, $D(-5\frac{2}{3})$, $E(-2\frac{1}{4})$, $F(\frac{ab}{c})$, $G(\frac{a^2+b^2}{c})$ и $H(\sqrt{a^2-b^2})$ [$a$, $b$ и $c$ су дате дужи].

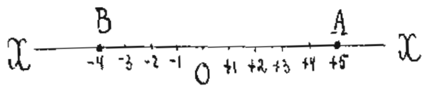


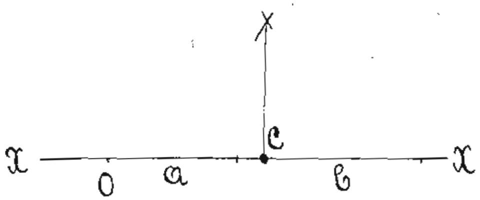



2. Које тачке $x$-ске осовине одговарају једначинама: 1.) $3x=15$ ; 2.) $7x=-28$ ; 3.) $2x=a+b$ ; 4.) $cx=a\cdot b$ ; 5.) $\frac{x+a}{x-a}=\frac{5}{4}$ ; 6.) $ax=a^2-b^2$ 7.) $a^2x=b^3$ ($a$, $b$ и $c$ су дате дужи).

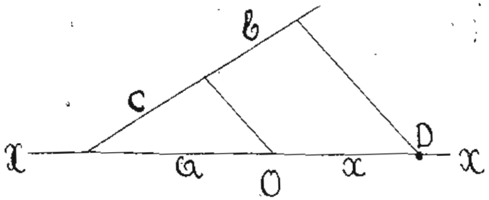



1.) $x=5$ тражена тачка је A.

2.) $x=-4$ траж. тачка је B.




3.) $x=\frac{a+b}{2}$ па је тражена тачка C (на средини дужи $a+b$).




4.) $x=\frac{ab}{c}$ па је тражена тачка D.

5.) Из једначине је

$$4x+4a=5x-5a$$

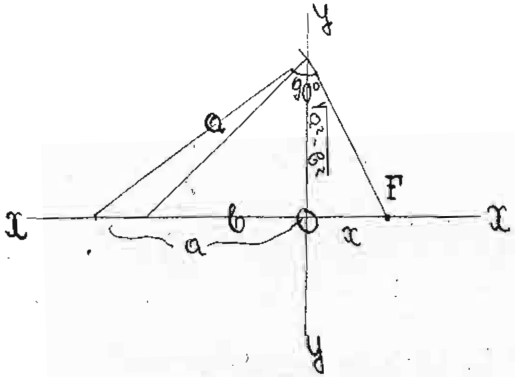
или

$$x=9a$$ па је тражена тачка E.


6.) Из једначине је

$$x=\frac{a^2-b^2}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

па је према томе тражена тачка F



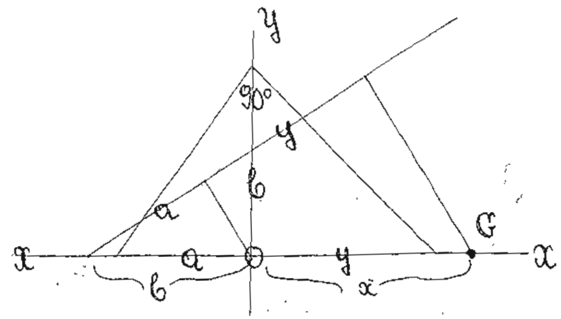

7.) Из једначине је

$$x=\frac{b^3}{a^2}=\frac{b\cdot b}{a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{y\cdot b}{a}$$

где је

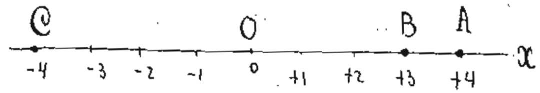
$$y=\frac{b\cdot b}{a}$$

па је према томе тражена тачка G.




3. Одредити тачке које одговарају једначинама: a) $x^2-7x+12=0$ ; b) $x^2-x+20=0$ ; c) $x^2+4x=0$ d) $x^2-(a+b)x+ab=0$ e) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$ f) $3x^3-7x^2-7x+3=0$ ; и g) $x^4-13x^2+36=0$.

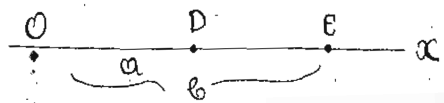
a.) Из дате једначине је $x_1=4$ $x_2=3$, па су тражене тачке A и B



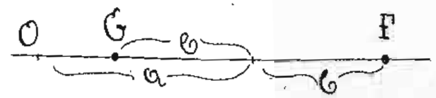

b.) Дата једначина нема реалних корена, па јој не одговара ни једна тачка.

c.) Из једначине је $x_1=0$ $x_2=-4$, па су тражене тачке O и C.

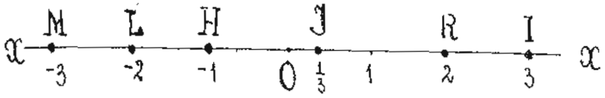
d.) Корени једначине су $x_1=a$ $x_2=b$, па су тражене тачке D и E.




e.) Корени једначине су $x_1=a+b$ $x_2=a-b$ па су



тражене тачке F и G.




f.) корени једначине су: $-1, 3$ и $\frac{1}{3}$ па су тражене тачке H, I и J.

g.) Корени једначине су $\pm 2$ и $\pm 3$, па су тражене тачке R, L, I и M.

4. Тачке $P_1$ и $P_2$ x-осе осовине имају за апсцисе вредности: a.) 3, 12 ; b.) −2, +7 ; c.) +3, −5 ; d.) −4, −6 ; e.) +a, −3a ; f.) 2a−b ; a−2b

I. Колика је величина дужи $P_1P_2$ по дужини и знаку? II. Каквом је једначином представљен сваки пар вредности x-а?

a.) $P_1P_2=+9$ ; једначина је $x^2-15x+36=0$

b.) $P_1P_2=+9$ ; " " $x^2-5x-14=0$

c.) $P_1P_2=-8$ ; " " $x^2+2x-15=0$

d.) $P_1P_2=-2$ ; " " $x^2+10x+24=0$

e.) $P_1P_2=-4a$ ; " " $x^2+2a-3a^2=0$

f.) $P_1P_2=$ ; " " $x^2-3(a-b)x+(2a-b)(a-2b)=0$

5. Које једначине одговарају групама тачака: a.) 2, 3 ; b.) 3, −5 ; c.) 0, −7 ; d.) 3, ∞ ; e.) 1, 2, 3 ; f.) 0, a, −b ; g.) ∞, 5, −2?

a.) $x^2-5x+6=0$

b.) $x^2+2x-15=0$

c.) $x(x+7)=0$ или $x^2+7x=0$

d.)

e.) $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ или $x^3-6x^2+11x-6=0$

f.) $x(x-a)(x+b)=0$ " $x^3+(b-a)x^2-abx=0$

g.)

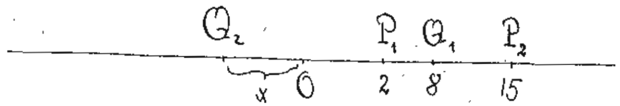
6. Код хармонијских тачака $P_1, P_2, Q_1$ и $Q_2$ са апсцисама $a_1, a_2, \alpha_1$ и $\alpha_2$ дато је: a) $a_1=2, a_2=15$ ; $\alpha_1=8$ ; b) $a_1=-12$ ; $a_2=+6$ ; $\alpha_1=+3$ ; c) $a_1=+9$, $\alpha_1=+1$, $\alpha_2=-8$. Наћи оне апсцисе које недостају.

a) $P_1Q_1:Q_1P_2=P_1Q_2:P_2Q_2$

$6:7=(x+2):(x+15)$

$6x-7x=14-90$

$x=-76=\alpha_2$

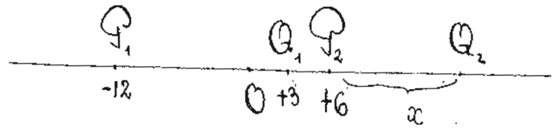



b.) $P_1Q_1:Q_1P_2=P_1Q_2:P_2Q_2$

$15:3=(18+x):x$

$15x-3x=54$

$12x=54$ $x=4,5$ па даље $OQ_2=\alpha_2=10,5$

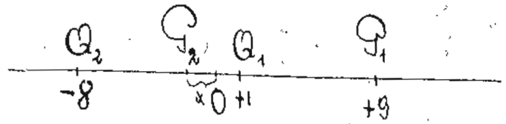



c.) $8:(x+1)=17:(8-x)$

$64-8x=17x+17$

$25x=47$ $x=1,88$

$OP_2=a_2=1,88$



7. Видети да ли су тачке чије су апсцисе: 3, 8, 11, 23 хармонијске или не?

$Q_2$ $P_1$ $Q_1$ $P_2$

0 3 8 11 23

да би те тачке биле хармонијске, треба да буде:

$$P_1Q_1 : P_2Q_1 = P_1Q_2 : P_2Q_2$$ или

$$3 : 12 = 5 : 20$$

па дакле дате тачке су хармонијске.

8. Доказати: Ако су $P_1, P_2, P_3$ и $P_4$ хармонијске тачке апсциса $x_1, x_2, x_3$ и $x_4$ онда је: $P_1P_3^2 + P_2P_4^2 = (P_1P_2 + P_3P_4)^2$.

$P_1$ $P_2$ $P_3$ $P_4$

0 $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$

Пошто су $P_1P_2P_3P_4$ хармонијске тачке, то постоји однос

$$P_2P_3 : P_3P_4 = P_1P_2 : P_1P_4$$

или

$$(x_3-x_2)^2 : (x_4-x_3)^2 = (x_2-x_1)^2 : (x_4-x_1)^2$$

или

$$(x_3^2-2x_3x_2+x_2^2)(x_4^2-2x_4x_1+x_1^2) = (x_4^2-2x_4x_3+x_3^2)(x_2^2-2x_2x_1+x_1^2)$$

или

$$x_3^2x_4^2 - 2x_3x_2x_4^2 + x_2^2x_4^2 - 2x_3^2x_4x_1 + 4x_3x_2x_4x_1 - 2x_2^2x_4x_1$$
$$+ x_3^2x_1^2 - 2x_3x_2x_1^2 + x_2^2x_1^2 = x_4^2x_2^2 - 2x_4x_3x_2^2 + x_3^2x_2^2 -$$
$$- 2x_4^2x_2x_1 + 4x_4x_3x_2x_1 - 2x_3^2x_2x_1 + x_4^2x_1^2 - 2x_4x_3x_1^2 + x_3^2x_1^2$$

$$x_3^2x_4^2 - 2x_3x_2x_4^2 - 2x_3^2x_4x_1 - 2x_2^2x_4x_1 - 2x_3x_2x_1^2 + x_2^2x_1^2 =$$
$$-2x_4x_3x_2^2 + x_3^2x_2^2 - 2x_4^2x_2x_1 - 2x_3^2x_2x_1 + x_4^2x_1^2 - 2x_4x_3x_1^2$$

или

$$+4x_1x_2x_3x_4$$
$$x_3^2x_4^2 - 2x_3x_2x_4^2 - 2x_3^2x_4x_1 - 2x_2^2x_4x_1 - 2x_3x_2x_1^2 + x_2^2x_1^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_1^2$$
$$= -2x_4x_3x_2^2 + x_3^2x_2^2 - 2x_4^2x_2x_1 - 2x_3^2x_2x_1 + x_4^2x_1^2 - 2x_4x_3x_1^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_1^2$$
$$+4x_1x_2x_3x_4$$

или

$$-2x_3x_2(x_4^2-2x_4x_1+x_1^2)$$
$$x_3^2(x_4^2-2x_4x_1+x_1^2) + x_2^2(x_4^2-2x_4x_1+x_1^2) = x_2^2(x_4^2-2x_4x_3+x_3^2)$$
$$+x_1^2(x_4^2-2x_4x_3+x_3^2) - 2x_2x_1(x_4^2-4x_4x_3+x_3^2)$$

или

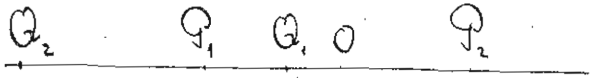
$$(x_4^2-2x_4x_1+x_1^2)(x_3^2-2x_3x_2+x_2^2) = (x_4^2-2x_4x_3+x_3^2)(x_2^2-2x_2x_1+x_1^2)$$
$$(x_4-x_1)^2(x_3-x_2)^2 = (x_4-x_3)^2(x_2-x_1)^2$$

или

$$(x_3-x_2)(x_4-x_1) = (x_4-x_3)(x_2-x_1)$$
$$x_3x_4 - x_2x_4 - x_3x_1 + x_2x_1 = x_4x_2 - x_3x_2 - x_4x_1 + x_3x_1$$
$$x_3x_4 - 2x_2x_4 - 2x_3x_1 + x_2x_1 + x_3x_2 + x_4x_1 = 0$$
$$+x_3^2 + x_1^2 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_1 - x_2x_1 - x_3^2 - x_1^2 - x_4^2 - x_2^2$$
$$+2x_2x_4 - 2x_2x_4 + 2x_1x_4 - 2x_1x_4 - x_3x_2 + x_3x_2$$

$$(x_3^2 - 2x_3x_1 + x_1^2) + (x_4^2 - 2x_4x_2 + x_2^2) = x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2$$
$$+ 2x_2x_4 - 2x_1x_4 + x_4^2 + 2x_2x_3$$

9. Ако су $P_1P_2Q_1Q_2$ хармонијске тачке и ако је O средина дужи $P_1P_2$, онда је: $OP_1^2 = OP_2^2 = OQ_1 \cdot OQ_2$




Пошто су $P_1P_2Q_1Q_2$ хармонијске тачке то постоји однос

$$P_1Q_1 : P_2Q_1 = P_1Q_2 : P_2Q_2$$

или

$$(OP_1 - OQ_1) : (OP_2 + OQ_1) = (OQ_2 - OP_1) : (OQ_2 + OP_2)$$

или, како је

$$OP_1 = OP_2$$

$$(OP_1 - OQ_1) : (OP_1 + OQ_1) = (OQ_2 - OP_1) : (OQ_2 + OP_1)$$

одакле се види да мора постојати пропорција

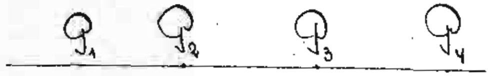
$$OP_1 : OQ_1 = OQ_2 : OP_1$$

или

$$OP_1^2 = OQ_1 \cdot OQ_2$$

10. Доказати: ако су $P_1P_2P_3P_4$ произвољне тачке једне праве, онда је

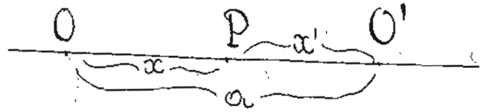
$$P_1P_3 \cdot P_2P_4 = P_1P_2 \cdot P_3P_4 + P_1P_4 \cdot P_2P_3$$




Из слике се види да је

$$P_1P_3 \cdot P_2P_4 = (P_1P_4 - P_3P_4)\cdot(P_2P_3 + P_3P_4) =$$
$$= P_1P_4 \cdot P_2P_3 - P_3P_4 \cdot P_2P_3 + P_1P_4 \cdot P_3P_4 - P_3P_4^2 =$$
$$= P_1P_4 \cdot P_2P_3 - P_3P_4(P_1P_3 - P_1P_2) + P_1P_4 \cdot P_3P_4 - P_3P_4^2 =$$
$$= P_1P_4 \cdot P_2P_3 - P_3P_4 \cdot P_1P_3 + P_3P_4 \cdot P_1P_2 + P_1P_4 \cdot P_3P_4 - P_3P_4^2 =$$
$$= P_1P_2 \cdot P_3P_4 + P_1P_4 \cdot P_2P_3 + P_3P_4\left[P_1P_4 - \underbrace{(P_1P_3 + P_3P_4)}_{P_1P_4}\right] =$$
$$= P_1P_2 \cdot P_3P_4 + P_1P_4 \cdot P_2P_3$$

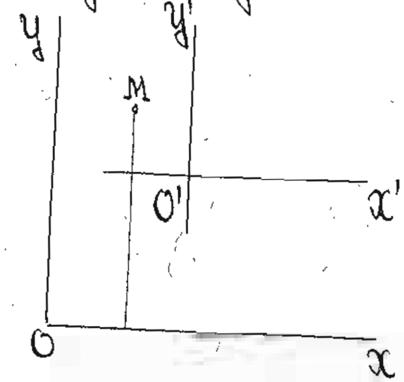
11. Тачка P има апсцису x, а тачка O' апсцису a. Колика је апсциса x' тачке P, ако се за коорд. почетак узме тачка O'.




Из слике се види да је

$$x' = -(a - x) = x - a$$

12. Тачка M има у коорд. систему O координате (3,7); колике су њене координате у систему O' чији почетак има координате (5,5) према старом систему?




$$x' = x - a = 3 - 5 = -2$$
$$y' = y - b = 7 - 5 = 2$$

Дакле координате тачке M у новом коорд. систему су $(-2, 2)$

13. Тачка P има координате $(a, b)$; колико је њено одстојање од O (тј. од коорд. почетка)?

$$d=\sqrt{a^2+b^2}$$

14. Тачке $P_1, P_2$ имају координате а) $(5,4)$ $(9,7)$; б) $(-2,7)$, $(5,-17)$; c) $(0,6)$, $(5,18)$; колико је дуж $P_1P_2$.

Према обрасцу

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

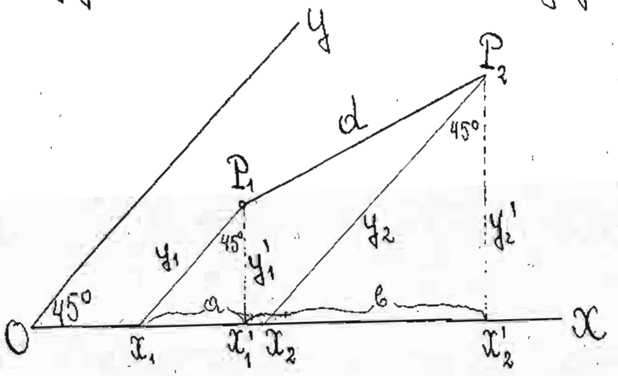
имаћемо:

а) $d=\sqrt{(9-5)^2+(7-4)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

б) $d=\sqrt{(5+2)^2+(-17-7)^2}=\sqrt{7^2+(-24)^2}=\sqrt{625}=25$

c) $d=\sqrt{5^2+(18-6)^2}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$

15. Исти задатак, само угао између осовина нека буде од 45°.




Решићемо прво задатак у опште. Нека дате координате буду $P_1(x_1,y_1)$ и $P_2(x_2,y_2)$. Да би нашли одстојање d, треба наћи координате које би тачке $P_1$ и $P_2$ имале у правоуглом коорд. систему; нека те координате буду $P_1(x_1',y_1')$ и $P_2(x_2',y_2')$. Из слике је

$$x_1'=x_1+a$$

а како је $a=y_1'$, то је из правоугл. троугла

$$2y_1'^2=y_1^2$$

или

$$y_1'=a=\frac{y_1}{\sqrt2}$$

па дакле

$$x_1'=x_1+\frac{y_1}{\sqrt2}$$

Исто тако је

$$x_2'=x_2+b$$

а како је

$$b=y_2'=\frac{y_2}{\sqrt2}$$

то је

$$x_2'=x_2+\frac{y_2}{\sqrt2}$$

Према томе дате тачке имаће у правоугл. коорд. систему координате: а) $P_1(5+2\sqrt2,\ 2\sqrt2)$, $P_2\left(9+\frac{7\sqrt2}{2},\ \frac{7\sqrt2}{2}\right)$; б) $P_1\left(-2+\frac{7\sqrt2}{2},\ \frac{7\sqrt2}{2}\right)$, $P_2\left(5-\frac{17\sqrt2}{2},\ -\frac{17\sqrt2}{2}\right)$; c) $P_1\left(\frac{6\sqrt2}{2},\ 3\sqrt2\right)$ $P_2(5+9\sqrt2,\ 9\sqrt2)$, па је према томе:

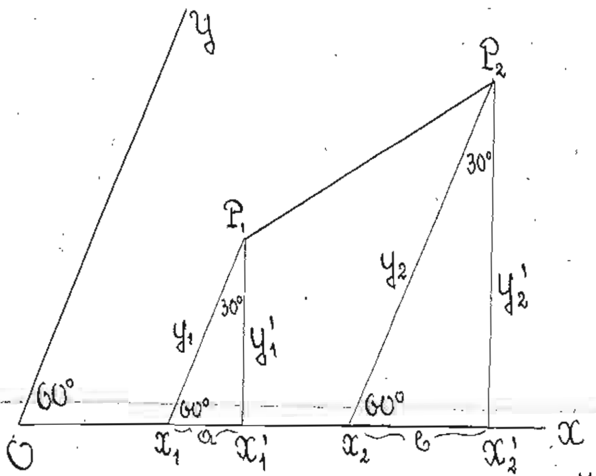
a.) $P_1P_2 = \sqrt{(9+\frac{7\sqrt{3}}{2}-5)^2+(\frac{7\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2})} =$

b.)

c.)

16. Исти задатак само угао између коорд. осовина нека буде од 60

Решићемо, као и малочас, прво задатак општи.




Из слике је

$$x_1' = x_1 + a$$

а како је

$$a = \frac{y_1}{2}$$

то је

$$x_1' = x_1 + \frac{y_1}{2}$$

Исто тако

$$y_1' = \frac{y_1\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2' = x_2 + b = x_2 + \frac{y_2}{2}$$

$$y_2' = \frac{y_2\sqrt{3}}{2}$$

Према томе за спец. случајеве правоугле координате датих тачака су

a) $P_1(7, 2\sqrt{3})$, $P_2(\frac{25}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2})$ ; b) $P_1(\frac{3}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2})$, $P_2(-\frac{7}{2}, -\frac{17\sqrt{3}}{2})$

c) $P_1(3, 3\sqrt{3})$, $P_2(14, 9\sqrt{3})$.

Отуда, према општем обрасцу

a) $P_1P_2 = \sqrt{(\frac{25}{2}-7)^2+(\frac{7\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{(\frac{11}{2})^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{37}$

b) $P_1P_2 = \sqrt{(-\frac{7}{2}-\frac{3}{2})^2+(-\frac{17\sqrt{3}}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{(-5)^2+(-12\sqrt{3})^2} = \sqrt{\phantom{x}}$

c) $P_1P_2 = \sqrt{(14-3)^2+(9\sqrt{3}-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{11^2+(6\sqrt{3})^2} = \sqrt{\phantom{x}}$

17. Правилни шестоугаоник лежи тако да је његов центар у O а два супротна угла на x-сој осовини. Колике су координате углова, ако је дужина стране a.

Из слике се види да су координате углова датог шестоугаоника ове:

$A(a, 0)$

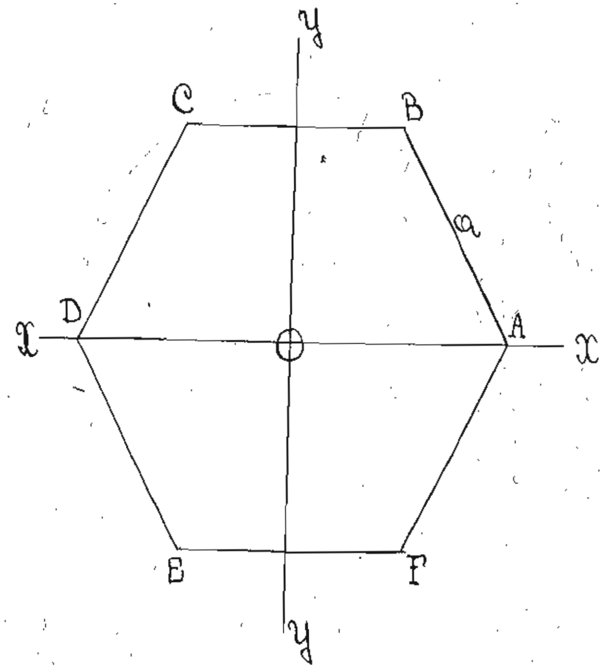
$B(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$

$C(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$

$D(-a, 0)$

$E(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2})$

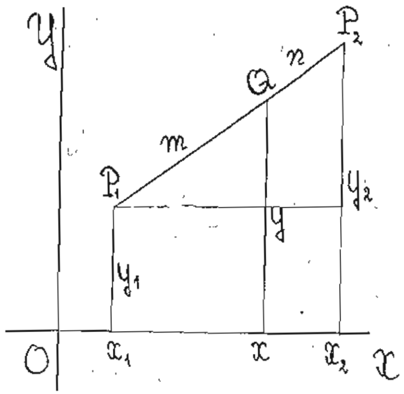
$F(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2})$




18. Координате крајњих тачака $P_1$ и $P_2$ једне дужи су $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$. Колике су координате тачке $Q$ која дели

дуж $P_1P_2$ у размери $m:n$?

Специјално: a) $P_1(5,10)$, $P_2(35,20)$, $m:n=1:2$; b) $(-3,8)$, $(12,-12)$, $3:2$; c) $(7,-8)$, $(6,6)$, $4:3$; d) $(11,2)$, $(24,-3)$, $-2:3$; e) $(3p-q,\ q-2p)$, $(p+2q,\ 5p-3q)$, $4:-3$.




Нека тражене координате тачке Q буду: x и y. Онда је, из слике

$$m:n=(x-x_1):(x_2-x)$$

одакле је

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

Исто тако из слике је:

$$(m+n):m=(y_2-y_1):(y-y_1)$$

одакле је

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

Према томе за специјалне случајеве имамо:

a) $x=\frac{1\cdot35+2\cdot5}{1+2}=\frac{45}{3}=15$ $\qquad y=\frac{1\cdot20+2\cdot10}{1+2}=\frac{40}{3}$

b) $x=\frac{3\cdot12+2\cdot-3}{3+2}=\frac{30}{5}=6$ $\qquad y=\frac{3\cdot-12+2\cdot8}{3+2}=\frac{-20}{5}=-4$

c) $x=\frac{4\cdot6+3\cdot7}{4+3}=\frac{45}{7}$ $\qquad y=\frac{4\cdot6+3\cdot-8}{4+3}=\frac{0}{7}=0$

d) $x=\frac{-2\cdot24+3\cdot11}{-2+3}=\frac{-15}{1}=-15$ $\qquad y=\frac{-2\cdot-3+3\cdot2}{-2+3}=12$

e) $x=\frac{4(p+2q)+-3\cdot(3p-q)}{4+-3}=4p+8q-9p+3q=-5p+11q$

$y=\frac{4\cdot(5p-3q)+-3\cdot(q-2p)}{4+-3}=20p-12q-3q+6p=26p-15q$

19. Координате темена једног троугла су: $(a,b)$, $(a_1,b_1)$ и $(a_2,b_2)$. Колике су дужине страна, координате њихових средишта и координате тежишта?

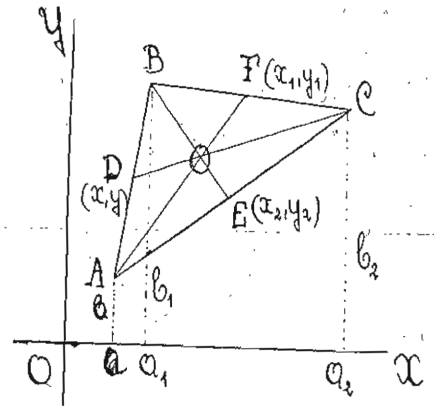
Специјално: a) $a=2$, $b=-3$, $a_1=8$, $b_1=5$, $a_2=14$, $b_2=11$; b) $a=-5$, $b=17$, $a_1=11$, $b_1=3$, $a_2=3$, $b_2=15$.

Дужине страна дате су изразима

$AB=\sqrt{(a_1-a)^2+(b_1-b)^2}$

$BC=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$

$AC=\sqrt{(a_2-a)^2+(b_2-b)^2}$




Координате средина страна су:

$x=\frac{a+a_1}{2}$ $\qquad y=\frac{b+b_1}{2}$

$x_1=\frac{a_1+a_2}{2}$ $\qquad y_1=\frac{b_1+b_2}{2}$ $\qquad x_2=\frac{a+a_2}{2}$ $\qquad y_2=\frac{b+b_2}{2}$

Како пак тачка O дели дуж DC у размери 1:2, то је према обрасцима из зад. 18. координате тежишта O троугла дате су изразима

$$\alpha = \frac{1\cdot a_2 + 2\cdot x}{1+2} = \frac{a_2 + 2\frac{a+a_1}{2}}{3} = \frac{a+a_1+a_2}{3}$$

$$\beta = \frac{1\cdot b_2 + 2\cdot y}{1+2} = \frac{b_2 + 2\cdot\frac{b+b_1}{2}}{3} = \frac{b+b_1+b_2}{3}$$

За спец. случајеве имаћемо:

а) $AB=\sqrt{6^2+8^2} = 10$  $BC=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}$  $AC=\sqrt{12^2+14^2}=\sqrt{340}$

$x=5,\ y=1,\ x_1=11,\ y_1=8,\ x_2=8,\ y_2=4;\ \alpha=8,\ \beta=4\frac{1}{3}$

б) $AB=\sqrt{452}$  $BC=\sqrt{208}$  $AC=\sqrt{68}$

$x=3,\ y=10,\ x_1=7,\ y=9,\ x_2=-1,\ y_2=16;\ \alpha=3,\ \beta=11\frac{2}{3}$.

20. На једној дужи $P_1P_2$ дате су координате: $(a_1, b_1)$ почетне тачке и $(\alpha,\beta)$ оне тачке која дели дуж $P_1P_2$ по размери $m:n$. Наћи координате тачке $P_2$ $(a_2, b_2)$.

Специјално: а) $a_1=0,\ b_1=0,\ \alpha=5,\ \beta=3,\ m:n=1:2$; б) $a_1=7,\ b_1=2,\ \alpha=12,\ \beta=-1$; $m:n=5:3$.

Према зад. 18. је:

$$\alpha = \frac{m a_2 + m a_1}{m+n} \qquad \beta = \frac{m b_2 + n b_1}{m+n}$$

па је одатле:

$$a_2 = \frac{\alpha(m+n) - n a_1}{m} \qquad b_2 = \frac{\beta(m+n) - n b_1}{m}$$

Специјално:

а) $a_2 = 15$  $b_2 = 9$

б) $a_2 = 15$  $b_2 = -2{,}8$

21. У једном троуглу дате су координате $(a,b)$ и $(a_1,b_1)$ два темена као и координате $(\alpha,\beta)$ тежишта. Наћи координате $(a_2,b_2)$ трећег темена.

Спец. а) $a=-7,\ b=-1,\ a_1=-2,\ b_1=-9,\ \alpha=0,\ \beta=0$; б) $a=2,\ b=11,\ a_1=15,\ b_1=3,\ \alpha=8,\ \beta=2$.

Према зад. 19. имаћемо

$$a_2 = 3\alpha - (a+a_1) \qquad b_2 = 3\beta - (b+b_1)$$

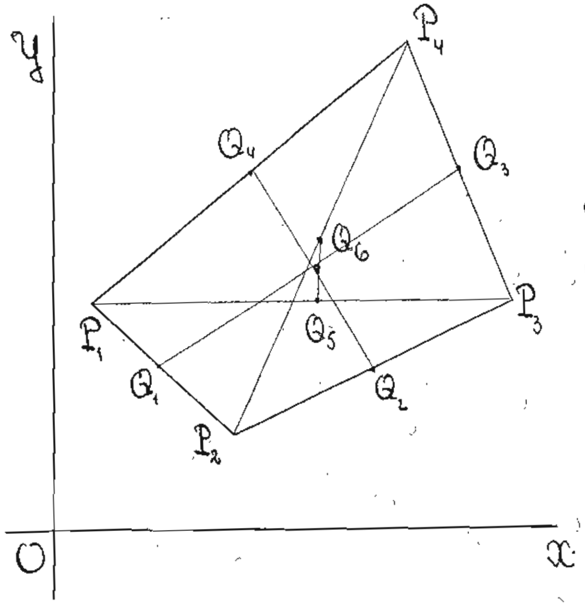
Специјално:

а) $a_2 = 3\cdot 0 - (-7+-2) = 9$  $b_2 = 3\cdot 0 - (-1+-9) = 10$

б) $a_2 = 3\cdot 8 - (2+15) = 7$  $b_2 = 3\cdot 2 - (11+3) = -8$

22. У једном четвороуглу $P_1P_2P_3P_4$ дате су координате $(a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3)$ и $(a_4,b_4)$ темена. Претоставити редом стране у $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ а дијагонале у $Q_5$ и $Q_6$. Израчунати координате средишних тачака $(\alpha_1,\beta_1), (\alpha_2,\beta_2), (\alpha_3,\beta_3)$ дужи $Q_1Q_3,\ Q_2Q_4,\ Q_5Q_6$.

Шта следује из резултата када се четвороугаоник са својим дијагоналама сматра као пројекција једног тетраедра.




ако обележимо координате тачака $Q_1, Q_2, \ldots$ са $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ оне ће бити дате обрасцима

$$x_1 = \frac{a_1+a_2}{2}$$

$$y_1 = \frac{b_1+b_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{a_2+a_3}{2}$$

и т. д.

па су према томе тражене координате

$$\alpha_1 = \frac{x_1+x_3}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \qquad \beta_1 = \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}$$

$$\alpha_2 = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \qquad \beta_2 = \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}$$

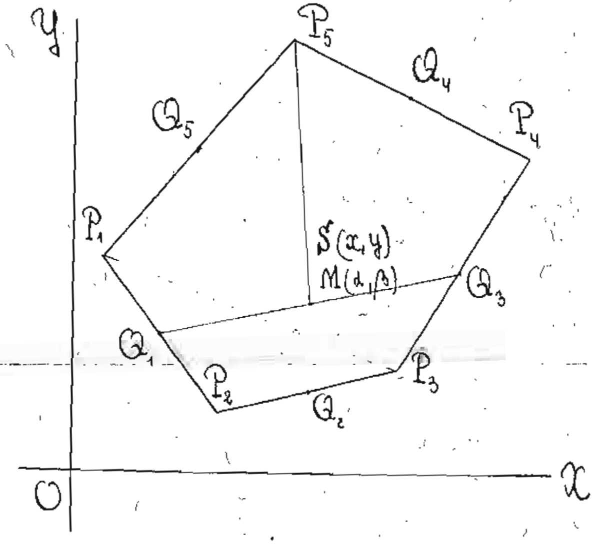
$$\alpha_3 = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \qquad \beta_3 = \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}$$

што значи да се све те три дужи секу у истој тачки и узајамно полове.

23. У једном петоугаонику $P_1P_2 \ldots P_5$ су координате темена $(a_1, b_1)$ и т. д. Стране су по реду преполовљене тачкама $Q_1, Q_2, \ldots$ Средина $M$ праве $Q_1Q_3$ спојена је са $P_5$ а $P_5M$ је подељено тачком $S$ у размери 4:1. Израчунати координате тачке $S$.

Шта се добија ако се $Q_1Q_3$ замени са $Q_2Q_4$ а $P_5$ са $P_1$?

Координате тачака $Q_1$ и $Q_3$ су:




$$x_1 = \frac{a_1+a_2}{2}$$

$$y_1 = \frac{b_1+b_2}{2}$$

$$x_3 = \frac{a_3+a_4}{2}$$

$$y_3 = \frac{b_3+b_4}{2}$$

па су према томе координате тачке $M$

$$\alpha = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \qquad \beta = \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}$$

а координате тачке $S$, према зад. 18., су:

$$x = \frac{4\alpha + 1 \cdot a_5}{4+1} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5} \qquad y = \frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{5}$$

Ако извршимо предњу смену

т.ј. узели у место $Q_1Q_3$ $Q_2Q_4$ а $P_1$ у место $P_5$, добили би за нову тачку $S_1$ исте координате што значи да се те тачке $S$ и $S_1$ поклапају.

24. Стране једног произвољног шестоугла су редом преполовљене тачкама $Q_1, Q_2, \dots Q_6$; израчунати координате тежишта троуглова $Q_1Q_3Q_5$ и $Q_2Q_4Q_6$. Шта се види?

Ако су координате темена шестоугла: $(a_1,b_1), (a_2,b_2) \cdots$ онда су координате тачака $Q_1, Q_2 \dots$:

$$x_1 = \frac{a_1+a_2}{2} \qquad y_1 = \frac{b_1+b_2}{2} \qquad \text{и т. д.}$$

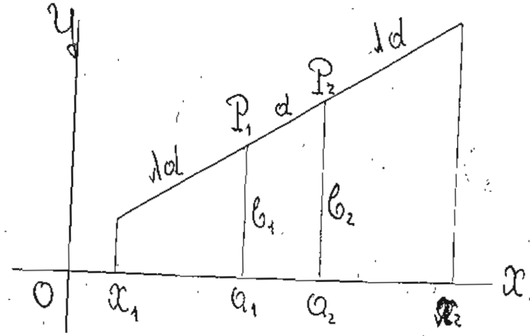
па су, према зад. 19, координате тежишта троугла $Q_1Q_3Q_5$ дате обрасцима

$$\alpha_1 = \frac{x_1+x_3+x_5}{3} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6}$$

$$\beta_2 = \frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6}{6}$$

а то су исто и координате тежишта троугла $Q_2Q_4Q_6$, што значи да се та два тежишта поклапају.

25. Једна дуж продужена је преко њених крајњих тачака $(a_1,b_1), (a_2,b_2)$ за $\lambda$-струку своју дужину. Колике су (координате) апсцисе крајњих тачака тих продужака?




Из слике је:

$$\lambda \cancel{d} : \cancel{d} = (a_1-x_1):(a_2-a_1)$$

или

$$\lambda(a_2-a_1) = a_1 - x_1$$

одакле

$$x_1 = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2$$

Исто тако

$$\cancel{d} : \lambda \cancel{d} = (a_2-a_1):(x_2-a_2)$$

одакле

$$x_2 - a_2 = \lambda(a_2-a_1)$$

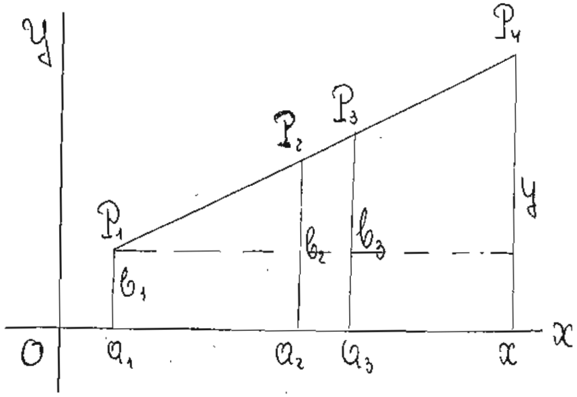
или

$$x_2 = (1+\lambda)a_2 - \lambda a_1$$

26. Координате трију тачака које леже у правој линији су: $(a_1,b_1), (a_2,b_2)$ и $(a_3,b_3)$. Нађи координате четврте хармонијски спрегнуте тачке.

Шта се добија, ако $(a_2,b_2)$ лежи у средини између $(a_1,b_1)$ и $(a_3,b_3)$?

Да би тачке $P_1P_2P_3$ и $P_4$ биле хармонијске, треба да постоји однос:




$$P_2P_1 : P_2P_3 = P_4P_1 : P_4P_3$$

или

$$(a_2-a_1):(a_3-a_2) = (x-a_1):(x-a_3)$$

одакле

$$(a_2-a_1)(x-a_3)=(a_3-a_2)(x-a_1)$$

или

$$xa_2 - xa_1 - a_2a_3 + a_1a_3 = xa_3 - xa_2 - a_1a_3 + a_1a_2$$

или

$$x(2a_2-a_1-a_3) = a_1a_2 - 2a_1a_3 + a_2a_3$$
$$= a_2(a_1+a_3 - 2a_1a_3$$

одакле

$$x = \frac{2a_1a_3 - a_2(a_1+a_3)}{a_1+a_3-2a_2}$$

Исто тако из слике је

$$(y-b_1):(b_3-b_1) = (x-a_1):(a_3-a_1)$$

одакле

$$(y-b_1)(a_3-a_1)=(x-a_1)(b_3-b_1)$$

или

$$y(a_3-a_1) - b_1a_3 + b_1a_1 = xb_3 - a_1b_3 - xb_1 + a_1b_1$$

или

$$y = \frac{x(b_3-b_1)-a_1b_3+a_3b_1}{a_3-a_1}$$

или заменом x-а

$$y = \frac{2a_1a_3 - a_2(a_1+a_3) - (a_1+a_3-2a_2)(a_3b_1-a_1b_3)}{(a_3-a_1)(a_1+a_3-2a_2)}$$

Ако је тачка $P_2$ у средини дужи $P_1P_3$, онда је

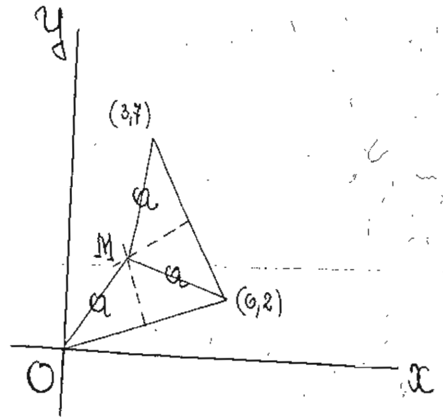
$$a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$$

па је отуда

$$x=\infty \quad и \quad y=\infty$$

27. Одредити тачку која је подједнако удаљена од тачака (6,2), (3,7) и од коорд. почетка.

Тражена тачка нека буде M а њене координате (x,y): Онда је, према слици:




$$a^2 = x^2+y^2$$
$$a^2 = (6-x)^2+(2-y)^2$$
$$a^2 = (3-x)^2+(7-y)^2$$

или одатле

$$(6-x)^2+(2-y)^2 = x^2+y^2$$
$$(3-x)^2+(7-y)^2 = x^2+y^2$$

или

$$3x+y=10$$

$$3x+7y=29$$

а одатле

$$x=2\frac{5}{18} \quad y=3\frac{1}{6}$$

28. Испитати да ли тачке (3,5), (-2,1), (5,0) и (0,-7) леже на којој од следећих правих:

а) $6x+7y=53$ ц) $4y-9x=22$

б) $2x-3y=10$ д) $7x-5y=35$

Да би тачка лежала на једној правој потребно је да координате те тачке задовољавају једначину праве. На основу тога:

тачка (3,5) лежи на правој а)

" (-2,1) " " " ц)

" (5,0) " " " б) и д)

" (0,-7) " " " д)

29. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку (-2,7), а на y-оској осовини одсеца одсечак дуж 19.

Тражена права има да пролази кроз тачке (-2,7) и (0,19), па је према томе њена једначина

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-7}{-12}$$

или

$$y=6x+19$$

30. Нацртати положаје правих представљених следећим једначинама, када је угао између осовина а) 90° б) 60°

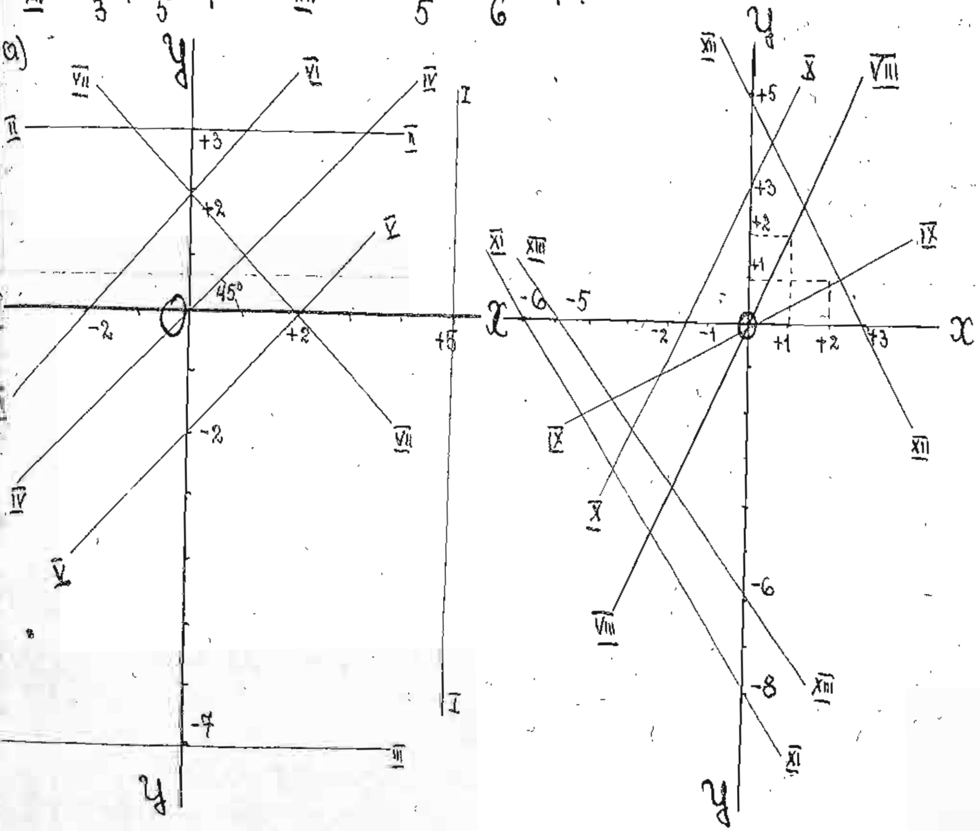
I $x=5$ II $y=+3$ III $y=-7$ IV $x-y=0$

V $x-y=2$ VI $x-y=-2$ VII $x+y=2$ VIII $y=2x$

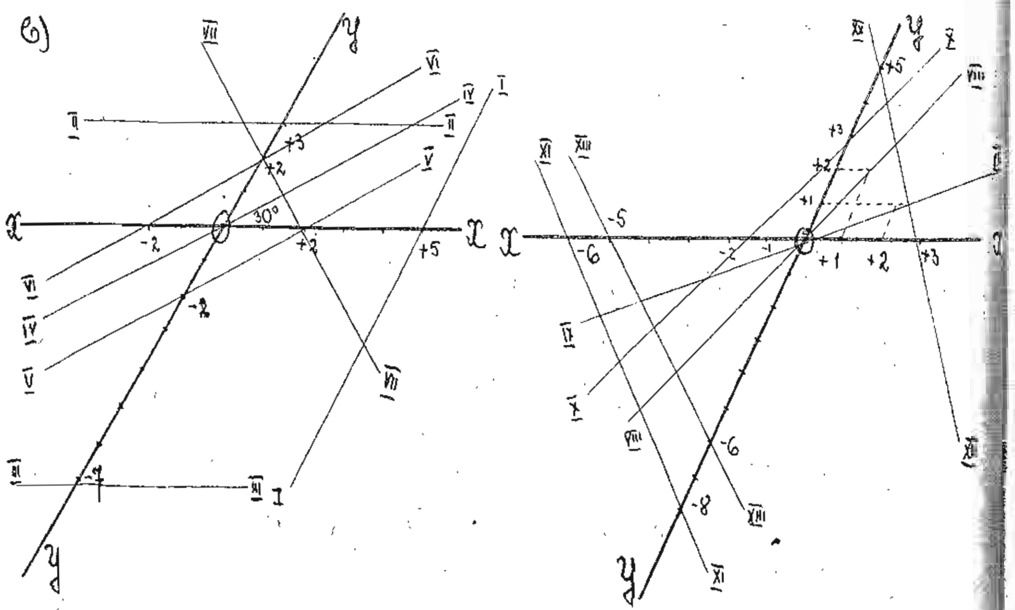
IX $y=\frac{x}{2}$ X $y=2x+3$ XI $4x-3y=-24$

XII $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ XIII $-\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$.

а)



в)



31. Наћи једначине правих које спајају тачке $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$:

$x_1 = 5,\ -2,\ 7,\ 0,\ 2a,\ \frac{p}{2},\ \frac{a_1+a_2}{2}$

$y_1 = 3,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{b_1+b_2}{2}$

$x_2 = 7,\ -5,\ 2,\ 8,\ a_1,\ a,\ 2a_2-a_1$

$y_2 = 4,\ +5,\ -3,\ 3,\ b_1,\ b,\ 2b_2-b_1$

Једначина праве која пролази кроз тачке $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ јесте

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Према томе за дате спец. случајеве имаћемо праве дефинисане овим једначинама:

$$2y - x = 1$$
$$y - x = 10$$
$$5y - 3x = -21$$
$$3x - 8y = 0$$
$$b_1 x + (2a - a_1) y = 2ab_1$$
$$\left(a - \frac{p}{2}\right) y - bx = -\frac{bp}{2}.$$
$$(a_1 - a_2) y - (b_1 - b_2) x = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

32. Наћи једначину праве која пролази кроз тачку $(x_1, y_1)$ и заклапа са $x$-осовином угао $\alpha$.

Спец.: а) $x_1 = 8$ $y_1 = 3$ $\alpha = 60°$; б) $x_1 = 3$ $y_1 = 0$ $\alpha = 135°$

Једначина тражене праве је

$$y - y_1 = tg\alpha (x - x_1)$$

За спец. случајеве она ће бити:

а) $y - \sqrt{3} x = 3 - 8\sqrt{3}$

б) $y + x = 3$

33. Наћи координате пресечне тачке правих $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Специјално:

а) $\mathcal{L}_1$: $6x + 11y = 67$ — $\mathcal{L}_2$: $2x - 5y = 31$

б) $3x + 5y = 28$ — $11x + 3y = -20$

c) $8x - 3y = 5$ — $9y - 24x = -15$

d) $ax - by = a^2 - b^2 \quad (a+b)x + (a-b)y = a^2 + 2ab - b^2$

e) $(a+b)x + (a-b)y = 2(a^2+b^2) \quad (a-b)x + (a+b)y = 2(a^2-b^2)$

Ако су једначине правих $\ell_1$ и $\ell_2$ у опште

$$m_1 x + n_1 y = p_1$$
$$m_2 x + n_2 y = p_2$$

онда су координате њихове пресечне тачке оне вредности $x$ и $y$ које задовољавају ове две једначине, а то су

$$x = \frac{p_2 n_1 - p_1 n_2}{n_1 m_2 - n_2 m_1} \qquad y = \frac{p_1 m_2 - p_2 m_1}{n_1 m_2 - n_2 m_1}$$

Према овим обрасцима за свеѕ случајеве имаћемо:

a) $x = 13 \quad y = -1$
b) $x = -4 \quad y = 8$
c) $x = 1 \quad y = 1$
d) $x = a \quad y = b$
e) $x = a+b \quad y = a-b$

34. Испитати да ли следеће три тачке леже на истој правој, и ако леже, дати њену једначину.

a) $(6,6) \quad (3,5) \quad (-6,2)$
b) $(7,10) \quad (-4,7) \quad (0,8)$
c) $(a,-b)\ ,\ (a+b, a-b)\ ,\ (a+2b, 2a-b)$.

Да би решили задатак, наћи ћемо једначину праве која пролази кроз две дате тачке и испитати затим да ли трећа тачка лежи на ту праву.

a) Једначина праве која пролази кроз прве две тачке јесте:

$$3y - x = 12$$

одакле видимо да и трећа тачка лежи на ту праву.

b) Д'о

$$11y - 3x = 89$$

трећа тачка не лежи на ову праву.

c) Д'о

$$ax - by = a^2 + b^2$$

трећа тачка лежи на ову праву.

35. Наћи једначину праве која пролази кроз тачку $(x_1, y_1)$ а 1) паралелна је 2) нормална на праву $\ell$.

Специјално

a) $x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \qquad \ell: mx + ny = c$
$x_1 = 5 \quad y_1 = 6 \qquad 7x + 4y = 12$

c) $x_1=4$ $y_1=-3$ $\mathcal{L}: 9x-11y=0$

d) $a$ $2b$ $(a+b)x+(a-b)y=c$

e) $4$ $-2$ $y=3x-8$

f.) $0$ $-8$ $y=\frac{2}{5}x+3$

Једначина праве која пролази кроз тачку $(x_1,y_1)$ јесте

$$y-y_1=a(x-x_1)$$

1) да би ова права била паралелна датој правој $\mathcal{L}$, треба да буде $a$ једнако коефицијенту правца те праве

2.) да би ова права била нормална на датој правој $\mathcal{L}$, треба да буде $a=-\frac{1}{a_1}$ где је $a_1$ коефицијент правца праве $\mathcal{L}$

За дате спец. случајеве имаћемо према томе праве дефинисане овим једначинама:

a.) 1.) $y=-\frac{m}{n}x$

2.) $y=\frac{n}{m}x$

b) 1) $4y+7x=59$

2.) $7y-4x=22$

c) 1) $11y-9x=-69$

2) $9y+11x=17$

d) 1) $y(a-b)+x(a+b)=a^2+3ab-2b^2$

2.) $(a-b)x-(a+b)y=a^2-3ab-2b^2$

e) 1) $y-3x=-14$

2) $3y+x=-2$

f) 1) $5y-2x=-40$

2) $2y+5x=-16$

36. Наћи једначину праве $\mathcal{L}_3$ која пролази кроз пресек правих $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ и кроз тачку $(x_1,y_1)$

Специјално:

$\mathcal{L}_1: 31x+47y-12=0$ $\mathcal{L}_2: 15x-19y+24=0$

a) $x_1=0$ $y_1=0$ b) $x_1=-1$ $y_1=-2$

Ако су једначине правих $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$

$$m_1x_1+n_1y=p_1$$

$$m_2x+n_2y=p_2$$

онда су координате њиховог пресека

$$x_п=\frac{p_2n_1-p_1n_2}{n_1m_2-n_2m_1} \qquad y_п=\frac{p_1m_2-p_2m_1}{n_1m_2-n_2m_1}$$

па је једначина праве која пролази кроз тај пресек и кроз тачку $(x_1,y_1)$:

$$\frac{y-y_1}{y_п-y_1}=\frac{x-x_1}{x_п-x_1}$$

Спец.: пресек датих правих је у тачки:

$x_п=$ $y_п=$

а једначине тражених правих

а) $77x+75y=0$

б) $1756x-197y+1362=0$

37. Кроз пресек правих

$$4x+7y-15=0$$
$$9x-14y-4=0$$

повући праву која је:

а) паралелна $y$-ској осовини

б) " према правој $2x-3y-9=0$

c) нормална на прву праву

d) са $+x$ и $y$-ском осовином гради троугао површине $\frac{1681}{210}$.

Пресек датих правих је $(2,1)$.

а) пролазећи кроз тај пресек тражена права задовољава једначину

$$y-1=a(x-2)$$

да би била паралелна $y$-ској осовини, која је дефинисана једначином $x=0$, треба да буде $y=0$ и $a=1$, па је према томе једначина тражене праве

$$x=2$$

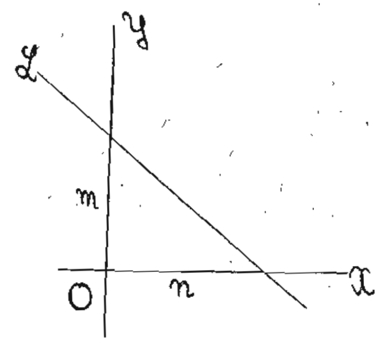
б) да би права $l$ била паралелна трећој датој правој, треба да буде $a=\frac{2}{3}$, па је тражена права дефинисана једначином

$$2x-3y-1=0$$

c) да би права $l$ била нормална на прву праву, треба да буде $a=-\frac{1}{-\frac{4}{7}}=\frac{7}{4}$, па је тражена права

$$7x-4y-10=0$$

d) По услову треба да буде




$$\frac{mn}{2}=\frac{1681}{210}$$

а према једначини праве $l$ која треба да пролази кроз тачке $(n,0)$ и $(0,m)$:

$$-1=a(n-2)$$
$$m-1=-2a$$

Из последње три једначине добијамо две вредности за $a$ и то:

$$a=-\frac{245}{84} \quad \text{и} \quad a=-\frac{72}{840}$$

и према томе проблем има два решења и то:

$$35x+12y=82$$
$$3x+35y=41$$

38. Колико је одстојање тачке $(x_1, y_1)$ од дате праве $L$, кад је угао између осовина I. $90°$ II - $60°$?

Специјално:

a) $L: 3x+4y-14=0$ $\quad x_1=2 \quad y_1=7$

b) $15x-8y+13=0$ $\quad 3 \quad 3$

c) $y=5x$ $\quad 0 \quad 7$

d) $\frac{x}{20}-\frac{y}{21}=1$ $\quad -10 \quad -11$

I Ако је једначина дате праве

$$Ax+By+C=0$$

онда је растојање тачке $(x_1, y_1)$ од ње

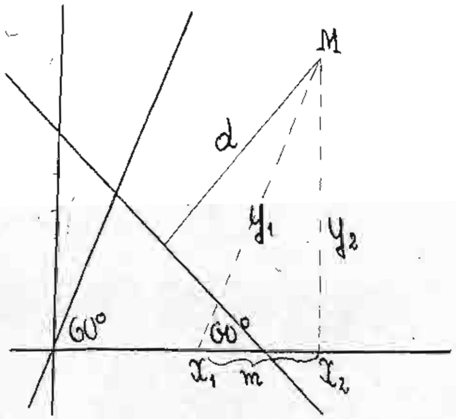
$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Специјално имамо

a) $d=4$ b) $d=2$ c) $d=\frac{7}{\sqrt{26}}$ d) $d=\frac{410}{29}$

II. Из слике се види да је:

$$m=\frac{y_1}{2}$$




па је зато

$$x_2=x_1+a=x_1+\frac{y_1}{2}$$

Исто тако из слике је

$$y_2=\frac{y_1\sqrt{3}}{2}$$

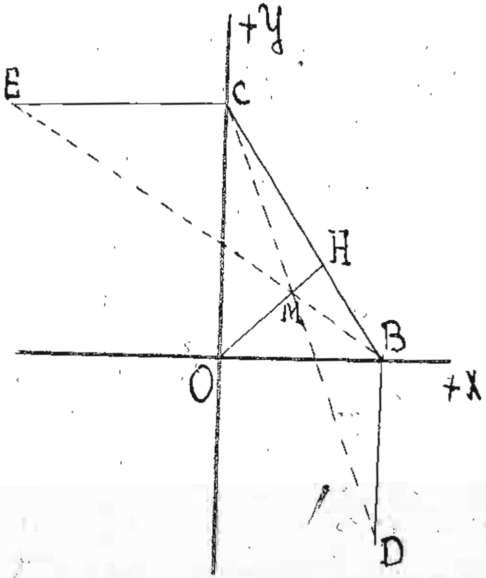
Отуда, према обрасцу из I имамо

$$d=\frac{Ax_2+By_2+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A\frac{y_1\sqrt{3}}{2}+B\left(x_1+\frac{y_1}{2}\right)+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Према томе за спец. случајеве биће:

a) $d=\frac{10}{13}\sqrt{39}$ b) $\frac{17\sqrt{3}}{13}$ c) $0{,}7\sqrt{10}$ d) $\frac{205\sqrt{3}}{\sqrt{1261}}$

39. На $+x$-осовини једног правоуглог коорд. система је пренесено $OB=a$, а на $+y$-осовини $OC=b$. На $OB$ у $B$ и на $OC$ у $C$ у правцу негативном према осовинама одвучено је $BD=OB$ и $CE=OC$, а затим $OH \perp BC$. Доказати да се $CD$ и $BE$ (помоћне линије при доказивању Питагориног правила) секу у истој тачки са $OH$.




Једначина праве која пролази кроз тачке: $E(-b,b)$ и $B(a,0)$ је

$$y(a+b)+bx-ab=0$$

а једначина праве која пролази кроз тачке $C(0,b)$ и $D(a,-a)$ је

$$ya+(a+b)x-ab=0$$

Пресек тих двеју правих $M$ има према томе за координате

$$x=\frac{ab^2}{a^2+(a+b)b} \qquad y=\frac{a^2b}{a^2+(a+b)b} \qquad 1)$$

Једначина праве $CB$ је

$$ay+bx=ab$$

а једначина праве која пролази кроз коорд. почетак $O$ и стоји нормално на праву $CB$, дакле једначина праве $OH$ је према томе

$$y=\frac{a}{b}x$$

Сменом координата под 1) у ову једначини видимо да оне задовољавају ову, што значи да се тачка $M$ налази на правој $OH$, па дакле да се праве $EB$, $CD$ и $OH$ секу у истој тачки.

40. Кроз пресечну тачку правих $\mathcal{L}_1=0$ и $\mathcal{L}_2=0$ повући праву која пролази и кроз пресечну тачку правих $\mathcal{L}_3=0$ и $\mathcal{L}_4=0$.

$\mathcal{L}_1: 3x-4y-47=0 \qquad \mathcal{L}_2: 7x+8y-23=0$

$\mathcal{L}_3: 4x+11y+65=0 \qquad \mathcal{L}_4: 9y-10x-53=0$

Пресек правих $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ је

$$x_1=9 \quad y_1=-5$$

а правих $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_4$

$$x_2=-8 \quad y_2=-3$$

па је једначина праве која пролази кроз тачке $(9,-5)$ и $(-8,-3)$:

$$y+5=\frac{-3+5}{-8-9}(x-9)$$

или, ако уредимо

$$2x+17y+67=0$$

41. Колико је одстојање коорд. почетка од правих у зад. 38? $\omega=90°$.

Ако је једначина дате праве

$$Ax+By+C=0$$

знамо да је одстојање тачке $M(\alpha,\beta)$ од те праве једнако

$$d=\pm\frac{A\alpha+B\beta+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Према томе у нашем случају биће

a) $d=\frac{14}{5}=2{,}8$ b) $d=\frac{13}{17}$ c) $d=0$ d) $d=\frac{420}{29}$

42. Колико је растојање паралелних правих $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$?

Специјално:

a) $\mathcal{L}_1: 6x+8y-11=0$ $\quad \mathcal{L}_2: 3x+4y-20,5=0$

b) $7x+24y+10=0$ $\quad 7x+24y-35=0$

c) $12x-5y-29=0$ $\quad 12x-5y-10=0$

Ако су једначине правих $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$:

$$ax+by+c=0$$
$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

онда, пошто за њих претпостављамо да су паралелне, то да би нашли одстојање једне од друге, узећемо ма коју тачку прве праве н. пр.

$$x=0 \quad y=-\frac{c}{b}$$

па ћемо тражити њено одстојање од друге праве, а оно је:

$$d=\frac{-b_1\cdot\frac{c}{b}+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{c_1b-b_1c}{b\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$$

Специјално је:

a) $d=3$ $\quad$ b) $d=1,8$ $\quad$ c) $d=1$

43. Наћи једначину праве која пролази кроз тачку $(x_1, y_1)$ и има од O одстојање p.

Једначина праве која пролази кроз тачку $(x_1, y_1)$ је

$$y-y_1=a(x-x_1)$$

Ваља још одредити a. Како тачка O има одстојање p од те праве, то постоји однос

$$p=\frac{y_1-ax_1}{\sqrt{a^2+1}}$$

или ако уредимо

$$a^2(p-x_1^2)+2x_1y_1a+(p-y_1^2)=0$$

одакле је

$$a=\frac{-x_1y_1\pm\sqrt{x_1^2y_1^2-(p-x_1^2)(p-y_1^2)}}{p-x_1^2}$$

чиме је тражена једначина одређена.

44. Наћи једначину праве која пролази кроз тачку $(x_1, y_1)$ и која има од тачке $(x_2, y_2)$ одстојање d.

Специјално: $x_1=3$, $y_1=7$, $x_2=-5$, $y_2=4$, $d=\frac{19}{17}$.

Једначина праве која пролази кроз тачку $(x_1, y_1)$ је

$$y-y_1=a(x-x_1)$$

а ћемо одредити из једначине

$$d=\frac{y_2-y_1-a(x_2-x_1)}{\sqrt{a^2+1}}$$

У спец. случају имамо

$$y-7=a(x-3)$$

а за одредбу $a$ имамо једначину

$$\frac{19}{17}=\frac{-5a-4-3a+7}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{3-8a}{\sqrt{a^2+1}}$$

или, ако ју уредимо

$$18135a^2-13872a+2240=0$$

Одатле је

$$a=\frac{6936\pm\sqrt{48108096-40622400}}{18135}=\frac{6936\pm2736}{18135}$$

одакле

$$a_1=\frac{9672}{18135}=\frac{8}{15}\qquad a_2=\frac{4200}{18135}=\frac{280}{1209}$$

па добијамо две једначине које решавају задатак:

$$y=\frac{8}{15}x+\frac{27}{5}$$

и

$$y=\frac{280}{1209}x+\frac{7623}{1209}$$

45. У једном троуглу дате су координате темена; нaћи његову површину.

Спец.: a) $(0,0)$, $(6,2)$ и $(3,7)$ б) $(5,-1)$, $(2,7)$ и $(-3,-4)$ и c) $(5,3)$, $(7,4)$ и $(9,5)$.

Нека су координате темена датог троугла: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ и $C(x_3,y_3)$. Ако за основицу узмемо страну $AB$, њена дужина је

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Једначина те основице је

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

а растојање тачке $C$ од те праве је

$$d=\frac{(y_3-y_1)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)}{\sqrt{\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2+1}}$$

па је тражена површина

$$p=\frac{AB\cdot d}{2}$$

У спец. случају је:

a) $AB=$ $d=$ $p=18$

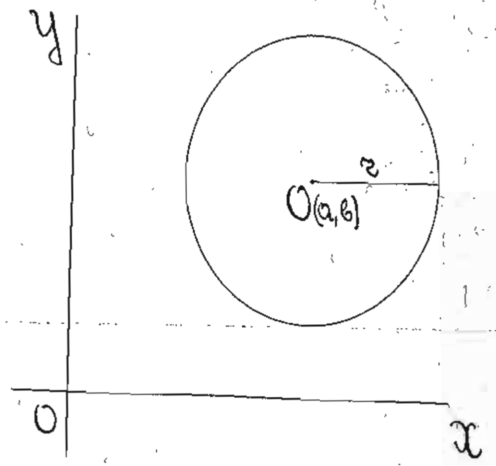
б) $AB=$ $d=$ $p=36\frac{1}{2}$

c) $AB=$ $d=$ $p=0$

# Круг.

Означимо координате центра са $a$ и $b$ а полупречник са $r$; изразивши да је растојање једне ма које тачке од центра стално и равно $r$ изнаћемо једначину круга која је:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$




Ова једначина у понеким специјалним случајевима она добија простији облик. Тако ако је $a=0$ и $b=0$, добијамо

$$x^2+y^2=r^2$$

Ако се центар налази на $x$-ској осовини а за $y$-ску осовину узме се да је дирка на круг, имаћемо

$$b=0 \quad a=\pm r$$

и према томе једначина круга биће

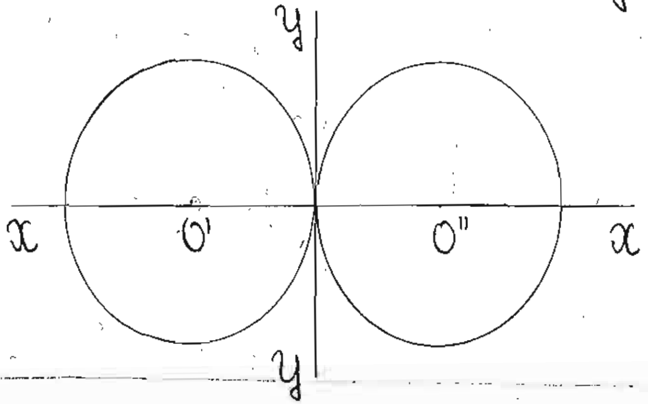
$$(x\pm r)^2+y^2=r^2$$

или

$$x^2 \pm 2rx + r^2 + y^2 = r^2$$

или на послетку

$$x^2 \pm 2rx + y^2 = 0$$




где знак − важи за десни, а знак + за леви круг.

Тако исто ако би се центар налазио на y-ској осовини а ако би x-на осовина била дирка круга, имали би

$$a=0 \quad b=\pm r$$

и једначина круга била би овог облика

$$x^2+(y\mp r)^2=r^2$$

или

$$x^2+y^2\mp 2ry+r^2=r^2$$

или на послетку

$$x^2 \mp 2ry + y^2=0$$

Најпростија је једначина круга у поларним координатама кад је центар у почетку; она је

$$\rho = r$$

Ако центар није у почетку, онда у општој једначини треба сменити

$$x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\theta$$
$$a=R\cos\alpha$$
$$b=R\sin\alpha$$

где је $R$ одстојање средишта од почетка, а $\alpha$ угао тога одстојања са поларном осовином.

На послетку по некад се употребљава и т. зв. <u>параметарска једначина круга</u>. Параметарском једначином неке криве називају се две једначине са три непознате: $x$, $y$ и $t$ т. ј. једначине

$$f(x,y,t)=0$$
$$\varphi(x,y,t)=0$$

Свакој вредности $t$ одговара бар једно решење једначина

$$f(x,y,t_1)=0$$

$$\varphi(x,y,t_1)=0$$

по $x$ и $y$ и то решење представља једну тачку. Променом вредности $t$ мења се и та тачка која својим по кретањем описује линију која је потпуно представљена горњим двема параметарским једначинама. Ако су $a$ и $b$ координате центра $r$ полупречник круга, параметарске једначине круга биће

$$x=a+r\cos t$$

$$y=b+r\sin t$$

Свакој вредности $t$ одговара по једна тачка на кругу і варирањем $t$ добијају се све тачке круга. Ако избацимо $t$ из тих двеју једначина добићемо

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t=$$

$$=r^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=r^2$$

а то је, као што знамо, једначина круга.

Вратимо се сад најопштијој једначини круга у правоуглом координатном систему

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

која се може написати и овако

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0 \qquad 1)$$

Ова једначина је другог степена, а најопштија је једначина другог степена

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Она се може деобом са $A$ написати овако

$$x^2-2\lambda xy+\mu y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0 \qquad 2)$$

Задатак: какве услове треба да испуне коефицијенти $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ и $\gamma$ па да последња једначина представља круг. Из упоређења једначина 1) и 2) види се ово: да би једначина 2) постала једначина 1) треба да буду задовољени ови услови:

$$\lambda=0$$

$$\mu=1 \qquad 3)$$

$$-a=\alpha \qquad 4)$$

$$-b=\beta \qquad 5)$$

$$a^2+b^2-r^2=\gamma \qquad 6)$$

Кад год су услови 3) задовољени, услови 4) и 5) дају нам координате средишта

$$a=-\alpha$$

$$b=-\beta$$

Услов 6) можемо написати овако

$$r^2=a^2+b^2-\gamma$$

па пошто $r$ треба да буде реално, види се да мора бити

$$a^2+b^2-\gamma>0$$

или, према условима 4) и 5)

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma>0 \qquad 7)$$

Из свега тога излази ово упутство: Да би општа квадратна једначина

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

пошто ју напишемо у облику

$$x^2+2\lambda xy+\mu y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0$$

представљала једначину круга, потребно је и довољно да буде задовољени услови 3) и 7) т.ј.

$$\lambda=0$$

$$\mu=1$$

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma>0$$

Кад су та три услова задовољени, координате средишта дате су обрасцима

$$a=-\alpha$$

$$b=-\beta$$

а полупречник

$$r=\sqrt{a^2+b^2-\gamma}$$

# Задаци о кругу

1° Дата је једначина круга

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

Наћи координате центра и полупречник. Услов 3) је задовољен; услов 7) постаје

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2-p>0$$

Кад је тај услов задовољен, координате центра су дате обрасцима 4) и 5) т.ј.

$$a=-\frac{m}{2}$$

$$b=-\frac{n}{2}$$

а полупречник

$$r=\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2-p}$$

Н. пр.

I. $$x^2+y^2-2x-4y+10=0$$

Услов 7) је овде

$$(-1)^2+(-2)^2-10=-5$$

а то је мање од нуле; дакле ово није круг.

II. $$x^2+y^2-2x-4y+1=0$$

Овде услов 7) постаје

$$(-1)^2+(-2)^2-1=+1$$

т.ј. ово је веће од нуле и према томе биће из образаца 4) и 5)

$$a=1$$

$$b=2$$

а полупречник

$$r=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2-1}=2$$

2° Какве услове треба да задовоље коефицијенти $a$ и $b$ праве

$$y=ax+b \qquad 2)$$

па да она додирује круг

$$x^2+y^2+\lambda x+\mu y+\nu=0 \qquad 1)$$

Пресечна тачка праве и круга добија се решењем једначина 1) и 2) по $x$ и $y$. Заменом $y$ из 2) у 1) добија се

$$x^2+(ax+b)^2+\lambda x+\mu(ax+b)+\nu=0$$

или

$$(1+a^2)x^2+(2ab+\lambda+a\mu)x+(b^2+\mu b+\nu)=0 \qquad 3)$$

Корени једначине 3) по $x$ дали би нам апсцисе пресечних тачака праве и круга. Да би права била дирка на кругу, потребно је да се те две тачке међу собом поклопе тј. да квадратна једначина 3) има оба своја корена једнака. Међутим познато је из теорије квадратне једначине

$$ax^2+bx+c=0$$

да је за једнакост корена потребан и довољан услов

$$b^2-4ac=0 \qquad 4)$$

Применом на једначину 3) услов 4) постаје

$$(2ab+\lambda+a\mu)^2-4(1+a^2)(b^2+b\mu+\nu)=0$$

У тој једначини имамо три познате количине $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ које дефинишу дати круг и две непознате количине $a$ и $b$ које дефинишу праву. Из ње можемо израчунати коју хоћемо од количина $a$ и $b$ и онда она друга остаје неодређена. Ако смо н. пр. нашли да је $a=3$, онда ће $y=3x+b$ представљати све могуће дирке на кругу; свакој од тих дирки одговара по једна вредност $b$ и обратно: можемо израчунати $b$ и онда би $a$ остало неодређено. Мењањем количине $a$ имали би све могуће дирке. Ако се хоће да дирка буде утврђена тј. да $a$ и $b$ буду тачно одређени, треба да буде дат још какав услов н. пр. да дирка пролази кроз какву дату тачку ван круга, или да су дате координате додирне тачке, или да је унапред дат правац те дирке.

Применимо ово на једначину круга дату у облику

$$x^2+y^2=r^2$$

и потражимо услове које треба да задовоље $a$ и $b$ да би права била дирка. Апсцисе пресечних тачака праве и круга биће корени једначине

$$x^2+(ax+b)^2=r^2$$

или једначине

$$x^2(1+a^2) + 2abx + b^2 - r^2 = 0$$

да би корени ове једначине били међу собом једнаки, потребно је и довољно да буде

$$4a^2b^2 - 4(1+a^2)(b^2-r^2) = 0$$

па дакле имамо

$$a^2b^2 + r^2 - a^2b^2 + a^2r^2 - b^2 = 0$$

одакле је

$$b = \pm r\sqrt{1+a^2}$$

Заменом у једначини праве налазимо да ће једначина дирке бити

$$y = ax \pm r\sqrt{1+a^2}$$

У тој једначини остаје $a$ неодређено. Варијацијом те количине имамо све могуће дирке на кругу. Да би дирка била потпуно одређена потребан је још један услов из кога би одредили $a$.

Потражимо једначину дирке која би са $x$-осовином градила угао од 30°. Пошто је

$$tg\, 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

то је

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Заменом у једначини дирке

$$y = ax \pm r\sqrt{1+a^2}$$

она постаје

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \pm 2r\sqrt{\frac{1}{3}}$$

или

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x \pm 2r)$$

Због знака $\pm$ имаћемо две дирке.

На сличан начин могао би се решити и задатак: одредити $a$ тако да дирка

$$y = ax \pm r\sqrt{1+a^2}$$

пролази кроз тачку $M(\alpha, \beta)$ ван круга или да тачка $M(\alpha, \beta)$ буде дирна тачка. И у једном и у другом случају имали би да сменимо у једначини дирке $x$ и $y$ са $\alpha$ и $\beta$ (координатама тачке $M$) и да тада из тако добивене квадратне једначине израчунамо $a$, чиме би дирка била потпуно одређена.

Међутим задатак да се нађе дирка на кругу

$$x^2+y^2=r^2$$

кад су дате координате $\alpha$ и $\beta$ додирне тачке може се на простији начин решити овако: Ако се изрази да дирка пролази кроз тачку $M(\alpha,\beta)$, њена ће једначина бити

$$y-\beta=\lambda(x-\alpha)$$

где још само ваља одредити $\lambda$, а тај коефицијенат није ништа друго до извод $y'$ пошто се у њему смене $x$ и $y$ координатама $\alpha$ и $\beta$. Међутим из једначине круга добија се

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

одакле је

$$y'=\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot -2x=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$$

Према томе је

$$\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$$

и једначина дирке постаје у том случају

$$y-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)$$

или

$$\beta y-\beta^2=-\alpha x+\alpha^2$$

или

$$\beta y+\alpha x=\alpha^2+\beta^2$$

или, пошто је тачка $(\alpha,\beta)$ на кругу, то је

$$\alpha^2+\beta^2=r^2$$

и према томе тражена једначина дирке биће

$$\alpha x+\beta y=r^2$$

# Задаци из круга

1. Како гласи једначина круга чије је средиште $(a,b)$ а полупречник $r$?

Спец. случајеви:

1) $a=3$ $b=4$ $r=7$ 2) $a=-5$ $b=0$ $r=6$

3) $-4$ $-6$ $3$ 4) $0$ $8$ $8$

Једначина круга чији је центар у тачки $(a,b)$ а полупречник $r$ је:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

У спец. случајевима имаћемо ове једначине:

1) $(x-3)^2+(y-4)^2=49$

2) $(x+5)^2+y^2=36$

3) $(x+4)^2+(y+6)^2=9$

4) $x^2+(y-8)^2=64$

или ако их уредимо

1) $x^2+y^2-6x-8y-24=0$

2) $x^2+y^2+10x-11=0$

3) $x^2+y^2+8x+12y+43=0$

4) $x^2+y^2-16y=0$

2. Одредити пресеке горе датих кругова са коорд. осовинама.

Пресеке тих кругова са $x$-осовином наћи ћемо, ако у тим једначинама ставимо $y=0$; они су:

1) $(3+\sqrt{33},0)$ и $(3-\sqrt{33},0)$ 2) $(1,0)$ и $(-11,0)$

3) нема пресека 4) $x$-осовина додирује круг у коорд. почетку;

пресеке са $y$-осовином добићемо, ако ставимо $x=0$ и решимо добијене једначине по $y$; они су:

1) $(0,4+\sqrt{40})$ и $(0,4-\sqrt{40})$ 2) $(0,\sqrt{11})$ и $(0,-\sqrt{11})$

3) нема пресека 4) $(0,0)$ и $(0,16)$

3. Под којим условом тачка $(x_1,y_1)$ лежи изван, на, у кругу центра $(a,b)$ и полупречника $r$.

Растојање тачке $(x_1,y_1)$ од центра $(a,b)$ је

$$d=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}$$

па ће тачка $(x_1,y_1)$ бити у, на или изван круга према томе да ли је $r$ веће, равно или мање од $d$; тражени је услов дакле

$$r^2 \gtreqless (x_1-a)^2+(y_1-b)^2$$

4. Одредити координате центра и полупречник круга чија је једначина

а) $$x^2+y^2-2ax-2by+P=0$$

б) $$Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+F=0$$

Шта бива ако је $A=0$?

Спец. случајеви:

1) $$x^2+y^2-8x-6y+16=0$$

2) $$x^2+y^2+14x-10y+48=0$$

3) $$4x^2+4y^2-20y-24=0$$

4) $$\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}y^2+10x+7y-\frac{15}{4}=0$$

Према општем упутству координате центра и полупречник су:

а) $a=a \qquad b=b \qquad r=\sqrt{a^2+b^2-P}$

б) $a=-\frac{C}{2A} \qquad b=-\frac{D}{2A} \qquad r=\sqrt{\frac{C^2+D^2}{4A^2}-\frac{F}{A}}$

Ако је $A=0$, онда су $a, b$ и $r$ бескрајно велики.

Спец. случајеви:

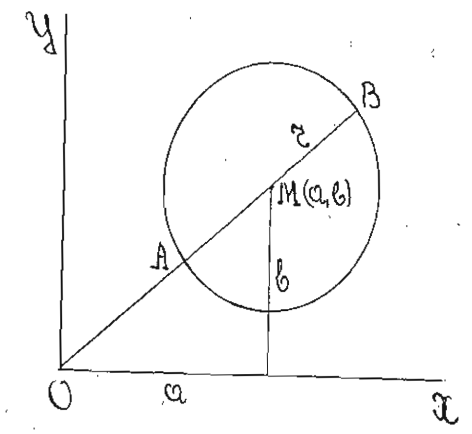
1) $a=4 \qquad b=3 \qquad r=3$ 2) $a=-7 \qquad b=5 \qquad r=\sqrt{26}$

3) $a=0 \qquad b=\frac{5}{2} \qquad r=\frac{\sqrt{49}}{2}$ 4) $a=-\frac{15}{2} \qquad b=-\frac{21}{4} \qquad r=\frac{3}{4}\sqrt{159}$

5. Дати геометријско значење коефицијенту $P$ у зад. 4. под а).

Видели смо у томе задатку да је

$$r^2=a^2+b^2-P$$




Одатле је

$$P=(a^2+b^2)-r^2=$$
$$=OM^2-r^2=$$
$$=(OM+r)(OM-r)$$
$$=OB\cdot OA$$

Према томе $P$ представља потенцију коорд. почетка за дати круг.

6. У једном кругу су дате његове координате центра $a$ и $b$ и једна тачка $(x_1,y_1)$ на њему; како гласи његова једначина?

Једначина круга чији је центар $(a,b)$ гласи

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

где још ваља одредити $r$. Како је тачка $(x_1,y_1)$ на кругу, то постоји однос

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$$

па је тражена једначина

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$$

или ако ју уредимо

$$x^2+y^2-2ax-2by-(x_1^2-2ax_1+y_1^2-2by_1)=0$$

7. На какав се одређени облик даје довести једначина једног круга чији је центар бескрајно удаљена тачка праве $y=Mx$ и који пролази кроз тачку $(x_1, y_1)$?

Ако се у једначини круга

$$x^2+y^2-2ax-2by+P=0 \qquad 1)$$

стави

$$a=\frac{a'}{\lambda} \quad b=\frac{b'}{\lambda} \quad P=\frac{p'}{\lambda}$$

она прелази у

$$x^2+y^2-\frac{2a'x+2b'y-p'}{\lambda}=0 \qquad 2)$$

или множењем са $\lambda$

$$\lambda(x^2+y^2)-2a'x-2b'y+p'=0 \qquad 3)$$

Ако је $\lambda=0$ онда је $a=\infty$ $b=\infty$ па 3) прелази у

$$-2a'x-2b'y+p'=0 \qquad 4)$$

или

$$+2x+2\frac{b'}{a'}y+\frac{p'}{a'}=0 \qquad 4')$$

Како пак тачка $(a,b)$ лежи на прави $y=Mx$, то је

$$b=Ma$$

па и

$$b'=Ma'$$

па отуда

$$\lim\frac{b}{a}=\lim\frac{b'}{a'}=M$$

Према томе 4') прелази у

$$2x+2My=\lim\frac{p'}{a'}=0 \qquad 5)$$

а пошто тачка $(x_1, y_1)$ лежи на кругу, то мора бити

$$2x_1+2My_1-\lim\frac{p'}{a'}=0 \qquad 6)$$

Из 5) и 6) добијамо, елиминацијом $\lim\frac{p'}{a'}$ као тражену једначину круга

$$2(x-x_1)+2M(y-y_1)=0 \qquad 7)$$

или

$$y-y_1=-\frac{1}{M}(x-x_1) \qquad 7')$$

Геометр. значење те једначине!

То је једначина праве која пролази кроз тачку $(x_1, y_1)$ а нормална је на прави представљеној једначином

$$y=Mx$$

8. Како гласи једначина кру-

га који пролази кроз тачке $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ и чији центар лежи на правој $y = Mx + C$?

Спец. $x_1 = 11$ $y_1 = 2$ $x_2 = 7$ $y_2 = -2$ $y = 3x - 19$.

Пошто тражени круг треба да прође кроз тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ то се његов центар налази на симетрали дужи $M_1M_2$. Једначина праве $M_1M_2$ је

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad 1)$$

а једначина праве која је нормална на њој је

$$y = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}x + \lambda \qquad 2)$$

где још ваља одредити $\lambda$. Како та нормала треба да прође кроз средину дужи $M_1M_2$, а координате те средине су

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \beta = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad 3)$$

то мора да постоји однос

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + \lambda \qquad 4)$$

одакле је

$$\lambda = \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(y_2^2 - y_1^2) - (x_1^2 - x_2^2)}{2(y_2 - y_1)} \qquad 5)$$

па заменом 5) у 2) добијамо једначину симетрале дужи $M_1M_2$ а она је

$$y = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}x + \frac{(y_2^2 - y_1^2) - (x_1^2 - x_2^2)}{2(y_2 - y_1)} \qquad 6)$$

Координате центра траженог круга наћи ћемо као координате пресечне тачке дате праве

$$y = Mx + C \qquad 7)$$

и праве 6). Ако су те координате

$$x = m \quad y = n$$

онда је полупречник траженог круга

$$r = \sqrt{(m - x_1)^2 + (n - y_1)^2}$$

а његова једначина

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

У спец. случају једначина симетрале дужи $M_1M_2$ је

$$y = \frac{11 - 7}{-2 - 2}x + \frac{4 - 4 - 121 + 49}{2(-2 - 2)}$$

или

$$y = -x + 9$$

Решењем те једначине и једначине

$$y = 3x - 19$$

$$x=7 \quad y=2$$

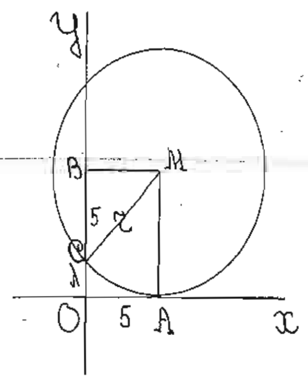
и то су координате центра траженог круга и његов полупречник је

$$r=\sqrt{(7-11)^2+(2-2)^2}=4$$

Према томе тражена једначина круга је

$$(x-7)^2+(y-2)^2=16$$

9. Како гласи једначина круга који додирује $x$-осовину у тачки $(5,0)$ а на $y$-осовини исеца тетиву дужине 10?




Координате центра $M$ наћи ћемо у пресеку правих $MA$ и $BM$ чије су једначине

$$x=5$$

$$y=\lambda+5$$

полупречник је, из троугла $BMC$, раван

$$r^2=BM^2+BC^2=50$$

а како је

$$AM=r=BO=\lambda+5$$

то је из истог троугла

$$(\lambda+5)^2=50$$

одакле је

$$\lambda=\sqrt{50}-5=\pm5\sqrt{2}-5$$

па су координате центра $M$

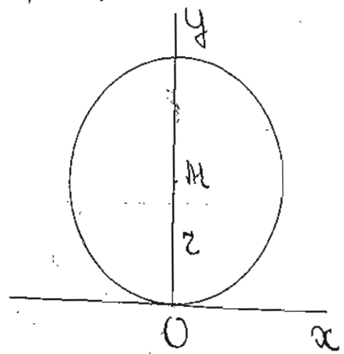
$$x=5$$

$$y=\pm5\sqrt{2}$$

па је једначина траженог круга

$$(x-5)^2+(y\mp5\sqrt{2})^2=50$$

10. Како гласи једначина круга који додирује $x$-осовину у $O$ и пролази кроз тачку $(15,25)$?




Координате центра $M$ су

$$x=0 \quad y=r$$

па је једначина круга

$$x^2+(y-r)^2=r^2$$

или

$$x^2+y^2-2yr=0$$

$r$ ћемо одредити ако изразимо да је тачка $(15,25)$ на кругу и имамо

$$15^2+25^2-2\cdot25\cdot r=0$$

одакле

$$r=17$$

Према томе тражена једначина је

$$x^2+(y-17)^2=17^2$$

11. Наћи једначину круга који пролази кроз тачке $P_1$, $P_2$ и $P_3$.

Спец: а) $(0,0)$, $(4,6)$ и $(12,10)$

б) $(1,2)$, $(13,7)$ и $(1,7)$.

Да би круг

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

пролазио кроз тачке $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ и $P_3(x_3,y_3)$, треба да буде

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$$
$$(x_2-a)^2+(y_2-b)^2=r^2$$
$$(x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2$$

Елиминацијом $r$ из прве и друге једначине имамо

$$(x_2^2-x_1^2)+2a(x_1-x_2)+(y_2^2-y_1^2)+2b(y_1-y_2)=0$$

а из прве и треће једначине

$$(x_3^2-x_1^2)+2a(x_1-x_3)+(y_3^2-y_1^2)+2b(y_1-y_3)=0$$

Из ових једначина можемо одредити координате центра $a$ и $b$, а затим и полупречник $r$.

У спец. случајевима за одређ. су $a$ и $b$ имамо једначине:

а)

$$(4^2-0^2)+2a(0-4)+(6^2-0^2)+2b(0-6)=0$$
$$(12^2-0^2)+2a(0-12)+(10^2-0^2)+2b(0-10)=0$$

или

$$2a+3b=13$$
$$6a+5b=61$$

одакле је

$$a=14{,}75 \quad b=-5{,}5$$

па отуда

$$r=15{,}76$$

б)

$$(13^2-1^2)+2a(1-13)+(7^2-2^2)+2b(2-7)=0$$
$$(1^2-1^2)+2a(1-1)+(7^2-2^2)+2b(2-7)=0$$

или

$$24a+10b=213$$
$$45-10b=0$$

одакле

$$a=7 \quad b=4{,}5$$

па даље

$$r=6{,}5$$

12. Наћи једначину круга полупречника 50 који исеца на $+x$-оси тетиву дужине 28 и пролази кроз тачку $(0,8)$.

Једначина круга који има полупречник 50 је

$$(x-a)^2+(y-b)^2=2500.$$

Ако изразимо да овај круг пролази кроз тачке (0,8) и (0,36) добијамо

$$a^2+(8-b)^2=2500$$
$$a^2+(36-b)^2=2500$$

или

$$a^2-16b+b^2=2436$$
$$a^2-72b+b^2=1204$$

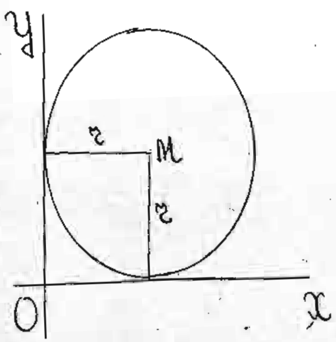
Одатле је

$$a=48 \qquad b=22$$

па је тражена једначина

$$(x-48)^2+(y-22)^2=50^2$$

13. Наћи једначину круга који пролази кроз тачку (32,81) и додирује обадве осовине.




Координате центра овог круга су $(r,r)$, па је тражена једначина

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$

где још ваља одредити $r$. Ако изразимо да овај круг пролази кроз тачку (32,81) добијамо

$$(32-r)^2+(81-r)^2=r^2$$

или ако развијемо и уредимо

$$r^2-226r+7585=0$$

одакле је

$$r_1=41 \qquad r_2=185$$

чиме је тражени круг одређен.

14. Наћи једначину по $x$ и $y$ линије која је одређена једначинама

$$x=2r\cos^2 t$$
$$y=r\sin 2t$$

где је $t$ променљиви параметар а $r$ константа.

Из датих једначина је

$$x=2r\cos^2 t \qquad 1)$$
$$y=2r\sin t\cos t \qquad 2)$$

или

$$y^2=4r^2\sin^2 t\cos^2 t \qquad 2)$$

Деобом 2) са 1) добијамо

$$2r\sin^2 t=\frac{y^2}{x}$$

одакле

$$\sin t=\sqrt{\frac{y^2}{2rx}} \qquad 3)$$

па је

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\frac{2rx-y^2}{2rx}}$$

Заменом 3) и 4) у 2) имамо

$$y = 2r\sqrt{\frac{y^2}{2rx}}\cdot\sqrt{\frac{2rx-y^2}{2rx}}$$

или

$$y = 2r\cdot\frac{y}{2rx}\sqrt{2rx-y^2}$$

или

$$x = \sqrt{2rx-y^2}$$

или најзад

$$x^2+y^2-2rx=0$$

а то је једначина круга чији се центар налази на $x$-осовини а $y$-осовина је дирка на њему.

16. Наћи координате заједничких тачака једне праве и једног круга.

Спец. случај:

1) $x^2+y^2=289$ $\quad$ $8x-15y=289$

2) $x^2+y^2=100$ $\quad$ $7x+24y=300$

3) $5x^2+5y^2+24x-12y+16=0$ $\quad$ $3x-4y+12=0$.

Координате заједничких тачака се налазе кад се једначине круга и праве сматрају као две једначине са две непознате $x$ и $y$ и реше по тим непознатим.

У спец. случају добија се:

а) $(8,-15)$ $\quad$ б) имагинарне $\quad$ ц) $(-\frac{4}{5},\frac{12}{5})$ и $(-4,0)$.

17. Наћи једначину тангенте која је повучена на круг описан око О полупречником $r$ у тачки која лежи у првом квадранту и има апсцису $x_1$.

Спец.: а) $r=25$ $x_1=7$ $\quad$ б) $r=13$ $x_1=12$.

Једначина круга описаног око О полупречником $r$ је

$$x^2+y^2=r^2$$

Из те једначине можемо наћи ординату додирне тачке чија је апсциса $x_1$, јер из

$$x_1^2+y^2=r^2$$

имамо

$$y=\pm\sqrt{r^2-x_1^2}$$

Узећемо знак + пошто се додирна тачка налази у првом квадранту па је

$$y_1=\sqrt{r^2-x_1^2}$$

Једначина дирке у тачки $(x_1 y_1)$ је онда, као што знамо из теорије

$$x_1x + y_1y = r^2$$

т.ј.

$$x_1x + \sqrt{r^2 - x_1^2}\, y = r^2$$

У том случају имаћемо као једначину тражене дирке:

а) $7x + \sqrt{25^2-7^2}\,y = 25^2$ т.ј. $7x + 24y = 25^2$

б) $12x + \sqrt{13^2-12^2}\,y = 13^2$ " $12x + 5y = 13^2$

18. Наћи услов под којим ће се права $y = mx + c$ и а) круг око О полупречника $r$ б) круг око тачке $(a,b)$ полупречника $r$ сећи или додиривати или не сећи ни додиривати. Како гласи једначина тангенте која је паралелна са $y = mx$?

а) Пресечне тачке праве

$$y = mx + c$$

и круга

$$x^2 + y^2 = r^2$$

наћи ћемо ако решимо ове две једначине по $x$ и $y$. Имамо, заменом прве у другој

$$x^2 + (mx + c)^2 = r^2$$

или ако развијемо

$$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 = r^2$$

или најзад, ако уредимо

$$x^2(1+m^2) + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$$

Да ли ће ова једначина имати два, једно или ни једно реално решење зависи од њене дискриминанте која је

$$\Delta = m^2c^2 - (c^2 - r^2)(1+m^2) =$$
$$= (m^2+1)r^2 - c^2$$

Према томе права и круг ће се сећи, додиривати или бити једна ван друге према томе да ли је

$$r\sqrt{1+m^2} \lesseqgtr c$$

б) Пресечне тачке праве

$$y = mx + c \qquad 1)$$

и круга

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad 2)$$

наћи ћемо решењем ових двеју једначина по $x$ и $y$. Ако 2) развијемо имамо

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \qquad 3)$$

и ако у овој једначини сменимо $y$ са

1) добијамо

$$x^2+(Mx+C)^2-2ax-2b(Mx+C)+a^2+b^2-r^2=0$$

или ако развијемо и уредимо

$$x^2(1+M^2)+2(MC-a-Mb)x+(C-b)^2+a^2-r^2=0$$

Ова једначина имаће два, једно или ни једно реално решење према томе да ли је њена дискриминанта

$$\Delta=(MC-a-Mb)^2-[(C-b)^2+a^2-r^2][1+M^2]=$$
$$=r^2(1+M^2)-(b-Ma-C)^2$$

већа, равна или мања од нуле. Отуда, права и круг ће се сећи, додиривати или бити једна изван друге према томе да ли је

$$r\sqrt{1+M^2}\gtreqless(b-Ma-C)$$

Потражимо дирку паралелну прави

$$y=Mx$$

код случаја а). Једначина те дирке биће

$$y=Mx+C$$

где још ваља одредити $C$ тако да ова права додирује круг

$$x^2+y^2=r^2$$

Услов за ово видели смо да је

$$r\sqrt{1+M^2}=C$$

па је према томе једначина тражене дирке

$$y=Mx\pm r\sqrt{1+M^2}$$

У случају б) имали би као једначину тражене дирке

$$y=Mx+(b-Ma\mp r\sqrt{1+M^2})$$

19. Наћи једначину тангенте повучене из тачке $(a,b)$ на круг описан око $O$ полупречником $r$.

Спец. $a=6$ $b=7$ $r=2$.

Једначина праве која пролази кроз тачку $(a,b)$ јесте

$$y-b=\lambda(x-a) \qquad 1)$$

где још ваља одредити $\lambda$ тако да ова права буде дирка на круг

$$x^2+y^2=r^2 \qquad 2)$$

Пресечне тачке праве 1) и круга 2) наћи ћемо решењем тих двеју једначина по $x$ и $y$. Заменом $y$ из 1) у 2) имамо

$$x^2+[b+\lambda(x-a)]^2=r^2$$

или ако развијено и уредимо

$$x^2(1+\lambda^2)+2\lambda(b-a\lambda)x+b^2-2ab\lambda+a^2\lambda^2-r^2=0$$

Ова ће једначина имати два корена једнака т.ј. права 1) додириваће круг два, ако је њена дискриминанта

$$\Delta=\lambda^2(b-a\lambda)^2-(1+\lambda^2)(b^2-2ab\lambda+a^2\lambda^2-r^2)=$$

$$=\lambda^2(r^2-a^2)+2ab\lambda+r^2-b^2$$

равна нули. Отуда једначина

$$\lambda^2(r^2-a^2)+2ab\lambda+r^2-b^2=0$$

одакле је

$$\lambda=\frac{-ab\pm r\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{r^2-a^2}$$

Према томе једначина тражене дирке биће

$$y-b=\frac{-ab\pm r\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{r^2-a^2}(x-a)$$

У спец. случају је

$$\lambda=\frac{-6\cdot7\pm2\sqrt{6^2+7^2-2^2}}{2^2-6^2}=\frac{-42\pm18}{-32}$$

т.ј.

$$\lambda_1=\frac{3}{4}\qquad\lambda_2=\frac{15}{8}$$

па имамо две дирке

$$y-7=\frac{3}{4}(x-6)\quad \text{и}\quad y-7=\frac{15}{8}(x-6)$$

или

$$3x-4y+10=0\quad \text{и}\quad 15x-8y-34=0$$

20. Наћи услов под којим ће права $y=Mx$ која пролази кроз O сећи, додиривати или бити изван круга описаног око тачке $(a,b)$ полупречником $r$.

Пресечне тачке праве

$$y=Mx \qquad 1)$$

и круга

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

или

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \qquad 2)$$

наћи ћемо решењем једначина 1) и 2) по $x$ и $y$. Заменом 1) у 2) имамо

$$x^2+M^2x^2-2ax-2Mbx+a^2+b^2-r^2=0$$

или

$$x^2(1+M^2)-2(a+bM)x+a^2+b^2-r^2=0$$

Ова ће једначина имати два, једно или ни једно решење или права ће сећи, додиривати или бити изван круга према томе да ли је

$$(a+Mb)^2-(1+M^2)(a^2+b^2-r^2)\gtreqless 0$$

т.ј.

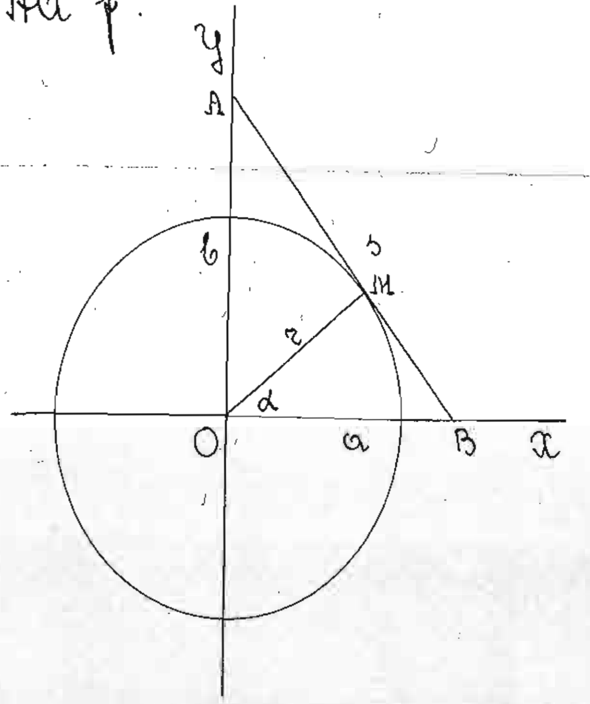
$$\frac{b - ma}{\sqrt{1+m^2}} \lesseqgtr r$$

21. Повући на круг описан око O полупречником r такву тангенту, да

а) њен део између +x и +y осовине има дату дужину s;

b) се делови између додирне тачке и коорд. осовина имају као λ:1;

c) је површина троугла који образује тангента са +x и +y-осовином равна $f^2$.




а) Једначина датог круга је

$$x^2+y^2=r^2 \qquad 1)$$

а једначина праве која пролази кроз тачке A(0,b) и B(a,0) је

$$y=\frac{b}{-a}(x-a)$$

или

$$ay+bx=ab \qquad 2)$$

дужине a и b везане су једначином

$$a^2+b^2=s^2 \qquad 3)$$

и, ако изразимо на два начина површину правоуглог троугла AOB, једначином

$$ab=rs \qquad 4)$$

Решењем једначина 3) и 4) по непознатима a и b добијамо

$$a=\frac{\sqrt{s^2+2rs}+\sqrt{s^2-2rs}}{2} \qquad b=\frac{\sqrt{s^2+2rs}-\sqrt{s^2-2rs}}{2} \qquad 5)$$

(Једначину 4) можемо добити и ако изразимо да се права 2) и круг 1) додирују).

Координате додирне тачке M наћи ћемо ако решимо једначине 1) и 2) по x и y. Заменом y из 2) у 1) добијамо

$$x^2+\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^2=r^2$$

или ако развијемо и уредимо

$$x^2(a^2+b^2)-2ab^2x+a^2(b^2-r^2)=0 \qquad 6)$$

Дискриминанта ове једначине је, с обзиром 4), равна нули, о чему је лако уверити се. Према томе ова једначина има један двојни корен и он је

$$x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

или, с обзиром на 3) и 4)

$$x=\frac{ab^2}{s^2}=\frac{rsb}{s^2}=\frac{r}{s}b=\frac{r}{2s}\left(\sqrt{s^2+2rs}-\sqrt{s^2-2rs}\right)$$

$$=\frac{r}{2\sqrt{s}}\left(\sqrt{s+2r}-\sqrt{s-2r}\right) \tag{7}$$

Исто би тако нашли

$$y=\frac{r}{2\sqrt{s}}\left(\sqrt{s+2r}+\sqrt{s-2r}\right) \tag{8}$$

Из ових једначина видимо да је услов за могућности проблема

$$s\geqq 2r$$

Ако је једначина тангенте дата у нормалном облику

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-r=0$$

онда је из слике

$$AM=r\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$

$$BM=r\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{9}$$

одакле сабирањем

$$AM+BM=s=r(\mathrm{cotg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha)=r\cdot\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

одакле

$$\sin 2\alpha=\frac{2r}{s} \tag{10}$$

па из ове једначине можемо одреди-

тим $\alpha$ а тиме је одређена и тангента и њен положај.

б) По услову задатка и према једначинама 9) следује

$$\lambda : 1 = r\,\mathrm{cotg}\,\alpha : r\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

или одатле

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$$

чиме је опет положај тражене тангенте одређен.

в) По услову задатка треба да буде

$$\frac{s\cdot r}{2}=f^2 \tag{11}$$

одакле још валља избацити $s$. Из 10) је

$$s=\frac{2r}{\sin 2\alpha}$$

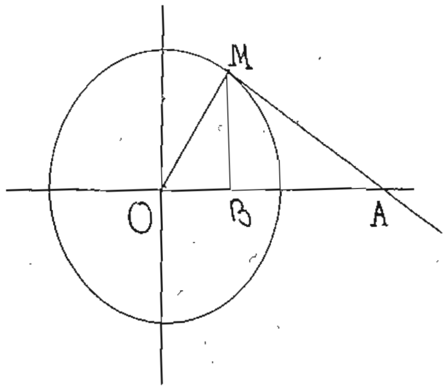
па заменом у 11)

$$\sin 2\alpha=\frac{r^2}{f^2}$$

чиме је положај тангенте одређен.

22. На круг описан око О полупречником $r=12$ повући тангенту тако да одсечак између додирне тачке и $+x$-осовине има дужину 35.

Из слике је




$$OA = \sqrt{OM^2 + MA^2} =$$
$$= \sqrt{12^2 + 35^2} = 37$$

па отуда

$$OM^2 = OA \cdot OB$$

или

$$OB = \frac{144}{37}$$

и

$$MB = \sqrt{OM^2 - OB^2} = \frac{420}{37}$$

Према томе координате додирне тачке M су

$$x = \frac{144}{37} \qquad y = \frac{420}{37}$$

па је једначина тражене тангенте

$$\frac{144}{37}x + \frac{420}{37}y = 12^2$$

или, ако упростимо

$$12x + 35y = 444$$

23. Наћи једначину круга полупречника $r = 53$ који додирује праву $45x + 28y - 1433 = 0$ у тачки чија је апсциса $x_1 = 25$.

24. Наћи једначину круга описаног око тачке (6,7) који додирује праву $y=\frac{5}{12}x-2$.

Једначина круга чији је центар тачка (6,7) је

$$(x-6)^2+(y-7)^2=r^2 \qquad 1)$$

где још ваља одредити $r$ тако да тај круг додирује праву

$$y=\frac{5}{12}x-2 \qquad 2)$$

Сменом 2) у 1) добијамо

$$x^2+\left(\frac{5}{12}x-2\right)^2-12x-14\left(\frac{5}{12}x-2\right)+85-r^2=0$$

или ако средимо

$$169x^2-2808x+16848-144r^2=0 \qquad 3)$$

да би права 2) додиривала круг 1) потребно је да дискриминанта једначине 3) буде равна нули; дакле

$$1404^2-(16848-144r^2)169=0$$

или одатле

$$r^2=\frac{876096}{144\cdot 169}=\frac{936^2}{12^2\cdot 13^2}$$

а одатле

$$r=\frac{936}{12\cdot 13}=6$$

Према томе тражена једначина је

$$(x-6)^2+(y-7)^2=6^2$$

25. Наћи координате центра круга који пролази кроз тачке (3,1) и (9,5) и додирује $x$-осовину.

Ако изразимо да круг

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad 1)$$

пролази кроз тачке (3,1) и (9,5), добијамо једначине

$$(3-a)^2+(1-b)^2=r^2$$
$$(9-a)^2+(5-b)^2=r^2$$

или, ако их средимо

$$a^2+b^2-6a-2b+10=r^2$$
$$a^2+b^2-18a-10b+106=r^2 \qquad 2)$$

Пошто круг 1) додирује $x$-осовину, то је

$$b=r$$

па заменом у једначинама 2) оне постају

$$a^2-6a-2b+10=0$$
$$a^2-18a-10b+106=0 \qquad 3)$$

чијим решењем добијамо координате центра; имамо два круга чије су координате центра

$$\frac{3\pm\sqrt{65}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{39\mp3\sqrt{65}}{4}$$

26. Наћи једначину круга уписаног у троуглу који чине праве $y=0$, $y=\frac{3}{4}x+3$ и $y=-\frac{5}{12}x+\frac{25}{3}$.

Изразити да круг

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \qquad 1)$$

додирује праве

$$y=0 \qquad 2)$$

$$y=\frac{3}{4}x+3 \qquad 3)$$

$$y=-\frac{5}{12}x+\frac{25}{3} \qquad 4)$$

значи сменити у 1) редом у вредности из 2), 3) и 4) и за сваку добијену једначину ставити да је њена дискриминанта равна нули. На тај начин добијамо ове три једначине

$$r^2-b^2=0$$

чијим решењем добијамо

$$a=5 \quad b=3 \quad r=3$$

па је једначина траженог круга

$$(x-5)^2+(y-3)^2=3^2$$

27. Наћи једначине обеју тангената које су тако повучене на круг описан око O полупречником $r=17$ да су нормалне на правој $15x-8y=10$.

Једначина датог круга је

$$x^2+y^2=17^2 \qquad 1)$$

а једначина праве која је нормална на правој

$$15x-8y=10 \qquad 2)$$

је

$$y=-\frac{8}{15}x+\lambda \qquad 3)$$

где $\lambda$ваља одредити тако да права 3) додирује круг 1). Заменом 3) у 1) имамо

$$x^2+\left(-\frac{8}{15}x+\lambda\right)^2=17^2$$

или ако уредимо

$$289x^2-240\lambda x+225(\lambda^2-289)=0 \qquad 4)$$

Да би права 3) додиривала круг 1) једначина 4) треба да има један двоструки корен т.ј. њена дискриминанта треба да буде равна нули па

даље
$$120^2\lambda^2 - 289\cdot225(\lambda^2-289)=0$$
или
$$14400\lambda^2 - 65025\lambda^2 + 289^2\cdot225=0$$
или одатле
$$\lambda^2 = \frac{289^2\cdot15^2}{50625} = \frac{289^2\cdot15^2}{225^2}$$
а одатле
$$\lambda = \pm\frac{289\cdot15}{225} = \pm\frac{289}{15}$$
Према томе једначина тражених тангената је
$$y = -\frac{8}{15}x \pm \frac{289}{15}$$
или
$$8x+15y=\pm17^2$$

28. Круг $K_1$ је дат својим центром $(a_1, b_1)$ и полупречником $r_1$, круг $K_2$ са $(a_2, b_2)$ и $r_2$.

Какви односи треба да постоје

а) да се кругови $K_1$ и $K_2$ секу у двема реалним и различитим тачкама;
в) додирују споља;
c) " изнутра;
d) када је $K_2$ потпуно изван $K_1$;
e) " $K_2$ лежи потпуно у $K_1$ а нема са њим никакву заједничку тачку?

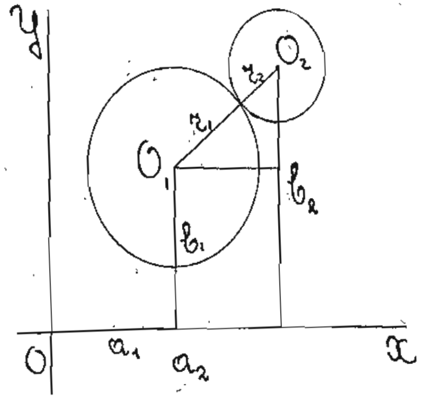
Једначине датих кругова су
$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2 \qquad 1)$$
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$$
или
$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+a_1^2+b_1^2-r_1^2=0 \qquad 2)$$
$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+a_2^2+b_2^2-r_2^2=0$$
Пресечне тачке ова два круга наћи ћемо решењем једначина 2) по $x$ и $y$. Одузимањем тих двеју једначина имамо
$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+a_2^2-a_1^2+b_2^2-b_1^2+r_2^2-r_1^2=0 \qquad 3)$$
Одавде је
$$y=\frac{2(a_1-a_2)x-(a_2^2-a_1^2)-(b_2^2-b_1^2)-(r_2^2-r_1^2)}{2(b_2-b_1)} \qquad 4')$$
или
$$y=\frac{a_1-a_2}{b_2-b_1}x-\frac{(a_2^2-a_1^2)+(b_2^2-b_1^2)+(r_2^2-r_1^2)}{2(b_2-b_1)} \qquad 4'')$$
или симболички
$$y=Ax-B \qquad 4)$$
Заменом 4) у првој од једначина 2) добијамо једну квадратну једначину по $x$ чију ћемо дискриминанту озна-

чити са $D$.

а) да би се кругови секли у двема реалним и различитим тачкама, потребно је да буде

$$D>0$$

в) да би се кругови додиривали споља, потребно је да буде




$$D=0$$

и још (према слици)

$$(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2=(r_2+r_1)^2$$

с) да би се кругови додиривали изнутра, потребно је да буде

$$D=0$$

и

$$(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2=(r_2-r_1)^2$$

д) да би један круг био потпуно изван другог, потребно је да буде

$$D<0$$

и

$$(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2>(r_2+r_1)^2$$

е) да би мањи круг био у већем и да немају ниједну заједничку тачку, потребно је да буде

$$D<0$$

и

$$(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2<(r_2-r_1)^2$$

29. Какав услов треба да постоји па да кругови

$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad 1)$$

$$x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2=0 \qquad 2)$$

буду концентрични.

Пошто кругови треба да буду концентрични, то мораду да имају исте координате центра, па отуда

$$-\frac{A_1}{2}=-\frac{A_2}{2} \qquad -\frac{B_1}{2}=-\frac{B_2}{2}$$

или

$$A_1=A_2 \qquad B_2=B_2 \qquad 3)$$

# Линије другог степена

Под линијама другог степена разумеју се линије дефинисане каквом квадратном једначином са две непознате $x$ и $y$. Круг ће према томе бити један специјалан случај такве линије.

Најопштија квадратна једначина са две непознате $x$ и $y$ може се написати у облику

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad 1)$$

где су $A, B, C, D, E$ и $F$ коефицијенти једначине који не зависе од $x$ и $y$. Таква једначина може представљати разноврсне линије и све те линије деле се на три основне врсте: врста <u>елипсе</u>, <u>хиперболе</u> и <u>па-</u>

работе. То класификовање бива према природи асимптотних праваца. Под асимптотним правцем једне криве линије разуме се такав један правац L, да ма каква права паралелна правцу L сече криву линију бар у једној тачки у бесконачности. Потражимо дакле асимптотски правац једне криве линије 1). Ако се коефицијенат таквог правца означи са $\lambda$, онда једна права H која би пролазила кроз почетак а имала такав асимптотски правац била би дефинисана једначином

$$y = \lambda x \qquad 2)$$

Координате пресечних тачака праве 2) и криве 1) добијају се решењем једначина 1) и 2) по x и y. Заменом y из 2) у 1) добија се квадратна једначина по x

$$(A + 2B\lambda + C\lambda^2)x^2 + 2(D + \lambda E)x + F = 0 \qquad 3)$$

да би права H секла криву бар у једној тачки у бесконачности, квадратна једначина 3) мора имати бар један корен бесконачан. Међутим решењем квадратне једначине облика

$$ax^2 + bx + c = 0$$

лако се увиђа да таква једначина може имати само онда бесконачан корен, ако је

$$a = 0$$

Према томе да би једначина 3) имала бесконачан корен, треба да буде сачинилац од $x^2$ раван нули тј.

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0 \qquad 4)$$

На тај начин добијамо квадратну једначину по $\lambda$ и њеним решењем по $\lambda$ имали би тражене асимптоте за криву 1). Пошто једначина 4) решена по $\lambda$ има два корена, то крива 1) има у опште два асимптотна правца. Међутим корени једначине 4) могу бити реални, имагинарни или једнаки; према томе асимптотни правци криве 1) могу бити или реални или имагинарни или се међу собом поклапају. Они ће бити реални и неједнаки ако је

$$\sqrt{B^2-AC}$$

реално и различито од нуле т. ј. ако је

$$B^2-AC>0$$

Они ће бити имагинарни ако је

$$B^2-AC<0$$

најзад поклопиће се ако је

$$B^2-AC=0$$

За једну криву другог степена каже се да припада *врсти елипсе* ако су јој асимптотни правци имагинарни. Ако су ти правци реални и различити она припада *врсти хиперболе*. И напослетку она припада *врсти параболе* ако су ти правци реални и поклапају се.

Означимо са $\Delta$ израз $B^2-AC$

$$\Delta = B^2-AC$$

Према ономе што је казано криве ће припадати врсти елипсе ако је $\Delta$ негативно, врсти хиперболе ако је $\Delta$ позитивно, врсти параболе, ако је $\Delta$ равно нули. Тако н. пр. крива линија

$$x^2-4xy+8y^2+3x-2y+1=0$$

припада врсти елипсе јер је

$$\Delta = B^2-AC = 2^2-1\cdot 8=-4$$

Крива

$$x^2-4xy+2y^2+3x-2y+1=0$$

припада врсти хиперболе јер је

$$\Delta = B^2-AC = 2^2-1\cdot 2=2$$

И на послетку крива

$$x^2-4xy+4y^2+3x-2y+1=0$$

припада врсти параболе јер је

$$\Delta = 2^2-4=0$$

На тај начин помоћу знака израза $\Delta$ може се увек одредити којој од тих врста припада једна дата крива линија. Али свака од тих врста обухвата разноврсне криве линије. Тако врста елипсе обухвата: *праву елипсу*, *круг*, *имагинарну елипсу*, а може се свести и на једну тачку. Врста хиперболе обухвата: праву хиперболу и две праве које се укрштају. Најпосле врста параболе обухвата: параболу, две паралелне праве и две праве које се поклапају. Питање је дакле како се може, кад је дата једначина другог степена

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad 1)$$

распознати какву баш криву линију представља.

Претпоставимо да се помоћу израза Δ одредило којој врсти припада крива и разликујмо ова три случаја:

## 1° Случај.

Нека крива припада врсти елипсе, тада је израз

$$\Delta = B^2-AC$$

негативан. Према томе ни $A$ ни $C$ не могу бити равни нули, јер би се иначе Δ свело на $B^2$ и било би позитивно. Решимо једначину по једној од координата н. пр. $y$. Резултат ће бити известан израз облика

$$y=\alpha x+\beta \pm \sqrt{\frac{B^2-AC}{C^2}(x^2+ax+b)}$$

где су $\alpha, \beta, a$ и $b$ извесне комбинације сачинилаца једначине 1). Пошто је израз $B^2-AC$ негативан, то можемо ставити да је

$$\frac{B^2-AC}{C^2}=-\lambda^2$$

тако да је

$$y=\alpha x+\beta \pm Y$$

где је

$$Y=\lambda\sqrt{-(x^2+ax+b)}$$

Замислимо квадратну једначину

$$x^2+ax+b=0$$

решену по $x$ и означимо са $a_1$ и $a_2$ њене корене. Ако тада подкорени израз напишемо у облику производа корених чинилаца, имаћемо да је

$$Y=\lambda\sqrt{-(x-a_1)(x-a_2)} \qquad 5)$$

Образац 5) показује да се ординате испитиване криве линије добијају кад се одговарајућим ординатама праве

$$y=\alpha x+\beta$$

додају или одузимају дужине Y. Задатак се своди на то да се испита како се мењају дужине Y. Тога ради ваља разликовати ова три случаја:

I нека су корени $a_1$ и $a_2$ реални и неједнаки и нека је н. пр.

$$a_1<a_2$$

Лако је уверити се да је за

$$x<a_1$$

тако исто и за

$$x>a_2$$

подкорени израз негативан, па дакле Y имагинарно. Међутим за једну ма коју вредност која се налази између $a_1$ и $a_2$ тај ће подкорени израз бити позитиван и према томе Y реално. То показује да у равни XOY означене праве

$$x=a_1 \quad \text{и} \quad x=a_2$$

крива је имагинарна и са леве стране $a_1$ и са десне стране $a_2$ а између њих је реална. Међутим док је x мења између граница $a_1$ и $a_2$, она остаје непрестано коначна и према томе биће коначно и Y и y. Дакле између правих $x=a_1$ и $x=a_2$ налази се цела крива и она је у свима правцима ограничена. Према томе овде се има посла са *правом елипсом*.

II нека су корени $a_1$ и $a_2$ имагинарни. Ако је н. пр.

$$a_1=m+ni \quad a_2=m-ni$$

према томе биће

$$(x-a_1)(x-a_2)=(x-m)^2+n^2$$

те је

$$Y=\lambda\sqrt{-[(x-m)^2+n^2]}$$

што показује да је Y увек уображено. Према томе има се посла са *уображеном елипсом*.

III нека су корени $a_1$ и $a_2$ стварни и једнаки. Онда је

$$Y = \lambda\sqrt{-(x-a_1)^2} = \lambda(x-a_1)\sqrt{-1}$$

па је

$$y = \alpha x + \beta \pm \lambda(x-a_1)\sqrt{-1}$$

Но ова једначина може постојати само онда ако су јој стварни и уображени делови сваки за себе равни нули т.ј. ако је

$$y - \alpha x - \beta = 0$$

и

$$x - a_1 = 0$$

Из тих једначина је

$$x = a_1$$

$$y = \alpha a_1 + \beta$$

-те две вредности дефинишу тачку и према томе крива линија се своди на једну тачку.

На последку приметимо кад се има елипса са стварним вредностима онда се може свести на круг. Видели смо у теорији круга да ће то бити онда кад, ако се коефицијенат уз $x^2$ сведе на 1, у исто време постаје коефицијенат од $y^2$ раван 1, а међутим је коефицијенат од $xy$ раван нули.

## 2° Случај

Нека крива припада врсти хиперболе. Тада се може десити да или фигуришу обадва члана са $x^2$ и $y^2$ или један од њих недостаје.

Претпоставимо најпре да фигуришу оба та члана и решимо једначину криве по једној од координата н. пр. по $y$. Тада ћемо опет имати израз као и раније, али пошто је овде $B^2-AC$ позитивно, то се може ставити да је

$$\frac{B^2-AC}{C^2} = \lambda^2$$

и тада тај израз постаје

$$y = \alpha x + \beta \pm Y$$

где је

$$Y = \lambda\sqrt{x^2+ax+b}$$

Замислимо опет решену квадратну једначину

$$x^2 + ax + b = 0$$

и нека су $a_1$ и $a_2$ њени корени, тада ћемо имати

$$y = \alpha x + \beta \pm Y$$

где је

$$Y = \lambda\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)}$$

Разликујемо опет три случаја:

I корени $a_1$ и $a_2$ су стварни и неједнаки. Лако је уверити се да је за

$$x<a_1 \quad \text{и} \quad x>a_2$$

подкорна количина позитивна, па дакле $Y$ је стварно, а да је међутим за све вредности $x$-а између $a_1$ и $a_2$ подкорна количина негативна, па дакле $Y$ уображено. То доказује да ако повучемо

$$x=a_1 \quad \text{и} \quad x=a_2$$

наша крива линија нема ни једну тачку између тих правих, а међутим да се она пружа у бесконачност са једне и друге стране тих правих. Дакле имамо <u>стварну хиперболу</u>.

II. Корени $a_1$ и $a_2$ су имагинарни. Тада ће бити

$$a_1 = m+ni \quad a_2 = m-ni$$

тако да је

$$(x-a_1)\cdot(x-a_2) = (x-m)^2+n^2$$

Подкорна количина која фигурише у $Y$ биће стварна па ма какво било $x$ и према томе крива ће бити опет <u>права хипербола</u>.

III. Корени $a_1$ и $a_2$ су стварни и једнаки. Тада је

$$Y = \lambda(x-a_1)$$

и према томе биће

$$y=\alpha x+\beta \pm \lambda(x-a_1)$$

Крива се дакле састоји из <u>две праве</u>

$$y=(\alpha+\lambda)x+(\beta-a_1\lambda)$$

$$y=(\alpha-\lambda)x+(\beta+a_1\lambda)$$

<u>које се</u> очевидно <u>укрштају</u> пошто су им коефицијенти правца различни.

Претпоставимо сада да у једначини криве 1) недостаје један од квадрата н. пр. $y^2$. Једначина тада постаје

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

и ако је решимо по $y$ добићемо

$$y = -\frac{Ax^2+2Dx+F}{2(Bx+E)} \qquad 6)$$

Приметимо да чинилац $B$ не може бити раван нули, јер ако је $B=0$ то, пошто је већ претпостављено $C=0$, било би $B^2-AC=0$ што није могућно пошто се има посла са хиперболом а не са параболом. Извршивши деобу означену у 6) и продуживши ју све донле док се не дође до каквог остатка $R$ који не зависи од $x$, имаћемо

$$y = mx+n+\frac{R}{2(Bx-E)} \qquad 7)$$

где $m$, $n$ и $R$ не зависе од $x$. Тада су могућна ова два случаја: или је $R\neq 0$ или је $R=0$.

У случају кад је

$$R\neq 0$$

образац 7) показује да се ординате посматране криве линије добијају кад се одговарајућим ординатама праве

$$y=mx+n$$

додају дужине

$$Y=\frac{R}{2(Bx+E)}$$

Ова дужина $Y$ је стварна на какво било $x$ и постаје бескрајна за

$$x=-\frac{E}{B}$$

Према томе и наша крива јесте стварна крива која се пружа бесконачно. У случају пак кад је

$$R=0$$

једначина 7) написана у облику

$$(y-mx-n)\cdot 2\cdot(Bx+E)-R=0$$

распада се у две једначине

$$y-mx-n=0$$

и

$$Bx+E=0$$

и према томе крива се своди на две праве које се укрштају.

## 3° Случај.

Нека крива припада врсти параболе. И онда се може десити слу-

чај да у једначини или фигури-
шу оба члана са квадратима ч-
ли да који од њих недостаје.

Претпоставимо најпре да фигуришу и $x^2$ и $y^2$, па решимо једначину по $y$. Под кореним знаком имаћемо један израз облика

$$mx+n$$

То долази отуда што кад се општа једначина реши по $y$ сачинилац од $x^2$ под кореном количине увек је $B^2-AC$, а тај је израз раван нули пошто се има посла са кривом параболе. Према томе имали би

$$y=\alpha x+\beta\pm\sqrt{mx+n} \qquad 8)$$

Израз 8) показује да се ординате наше криве добијају кад се одговарајућим ординатама праве

$$y=\alpha x+\beta$$

додају или одузимају количине

$$Y=\sqrt{mx+n}$$

Ове дужине $Y$ биће имагинарне са леве стране праве

$$x=-\frac{m}{n}$$

на против оне ће бити реалне са десне стране те праве и пружаће се у бесконачност. Наша крива биће дакле крива која се простире на десно од праве $x=-\frac{m}{n}$ и иде до бескрајности; дакле имамо <u>праву параболу</u>.

Претпоставимо сад да у једначини криве недостаје један од квадрата н. пр. $y^2$; тада је

$$C=0$$

а пошто треба да буде

$$B^2-AC=0$$

то мора бити и

$$B=0$$

Једначина 1) дате криве своди се тада на

$$Ax^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Ако ју решимо по $y$ добија се израз облика

$$y=mx^2+nx+p$$

Крива је дакле реална за све могуће вредности $x$-а и пружа се и на једну и на другу страну до у бесконачност. Дакле опет имамо <u>праву параболу</u>. Такав би исти случај био кад би једначини недостајао члан са $x^2$; онда би имали да решимо једначину по $x$ па би имали исти случај као и мало пре.

Претпоставимо последњи случај да у једначини недостаје и члан са $x^2$ и члан са $y^2$; тада је

$$A=0 \text{ и } C=0$$

и пошто мора бити

$$B^2-AC=0$$

то мора бити и

$$B=0$$

Једначина дате криве своди се на једначину праве линије.

Из свега овога изводи се ово <u>упутство</u> за испитивање природе кривих линија дефинисаних једном једначином другог степена

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

треба прво образовати израз

$$\Delta = B^2-AC$$

и одредити му знак; онда ће бити:

ако је $\Delta$ негативно — врста елипсе,
" " " позитивно — " хиперболе,
" " " равно нули — " параболе.

Затим разликујемо ова два случаја:

I. Ако у једначини фигуришу чланови и са $x^2$ и са $y^2$ треба једначину решити било по $x$ било по $y$; Ако је у тако добијеном решењу подкорна количина првог степена, онда се има посла са правом параболом. Ако је подкорна количина другог степена, треба је решити и наћи њене корене $a_1$ и $a_2$ и онда: ако су ти корени стварни и неједнаки, имаћемо праву елипсу или праву хиперболу према знаку израза $\Delta$; Ако су корени имагинарни имаћемо уображену елипсу ако је $\Delta<0$ или праву хиперболу ако је $\Delta>0$;

ако је подкорна количина нула: две || праве; ако је нула [illegible] и [illegible] ако су корени стварни и једнаки, имаћемо две имагинарне праве које се секу у реалној тачки ако је $\Delta<0$ или две реалне праве које се секу у једној тачки ако је $\Delta>0$.

II. Ако у једначини не фигурише један квадрат, онда ју треба решити по оној координати чији квадрат недостаје. Резултат тога решења биће известан разломак. Ако је именилац тога разломка сталан број, онда се има посла са правом параболом. Ако тај именилац није сталан број, онда треба извршити означену деобу продужити ју све дотле док се не дође до остатка који је сталан. Ако је тај остатак раван нули има се посла са двема правама које се укрштају; ако тај остатак није раван нули има се посла са правом хиперболом.

III. На послетку ако једначини недостају чланови и са $x^2$ и са $y^2$, једначина се опет реши по једној непознатој н. пр. по $y$, па ако је именитељ добијеног разломка сталан број, онда је права линија, а ако је именитељ променљив, онда је хипербола или две праве нормалне једна на другој према томе да ли се бројитељ и именитељ могу скратити биномом или не.

## Примери:

1. Доказати да једначина

$$y^2 = 2px + qx^2 \qquad 1)$$

$$y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2 \qquad 2)$$

представља елипсу, параболу или хиперболу према томе да ли је

$$q \lesseqgtr 0 \qquad 1')$$

т.ј.

$$\varepsilon \lesseqgtr 0 \qquad 2')$$

Излази отуда што је код једначине 1) израз $\Delta$

$$\Delta = B^2 - AC = q$$

а код једначине 2)

$$\Delta = -(1-\varepsilon^2) = \varepsilon^2 - 1.$$

2. Решивши по $x$ или $y$ следеће једначине доказати да оне представљају две реалне или имагинарне праве:

$$21x^2 + xy - 10y^2 = 0$$

$$4xy - 11x^2 + 34x - 12y - 3 = 0$$

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 - 18x - 45y + 8 = 0$$

$$x^2 + 9y^2 + 12y + 10x + 29 = 0$$

$$x^2 - 14xy + 49y^2 + 25 = 0$$

$$18x^2 + 30xy + 13y^2 + 18x + 13y + 2 = 0$$

Којој врсти купиних пресека припадају те праве на основу израза $B^2 - AC$?

а) Овди је

$$B^2 - AC = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 210 = +$$

па имамо врсту хиперболе. Решив једначину по $x$ добијамо

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 840y}}{42} = \frac{-y \pm 29y}{42}$$

па према томе дата једначина представља две реалне праве које се секу у једној тачки (коорд. почетку)

б) Овде је

$$B^2 - AC = 2^2 = +4$$

па опет једначина припада врсти хиперболе. Ако једначину решимо по $y$ добијамо

$$y = \frac{11x^2 - 34x + 3}{4x - 12} = \frac{11}{4}x - \frac{1}{4}$$

и према томе дата једначина представља две реалне праве које се укрштају:

$$y = \frac{11}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$4x - 12 = 0$$

в) Овде је

$$B^2 - AC = 10^2 - 4 \cdot 25 = 0$$

па дата једначина припада врсти параболе. Ако ју решимо по $x$ имамо

$$y = \frac{10y - 9 \pm \sqrt{(10y-9)^2 - (25y^2 - 45y + 8)4}}{4} = \frac{10}{4}y - \frac{9}{4} \pm \frac{7}{4}$$

па дата једначина представља две реалне паралелне праве

$$y = \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{5}{2}y - 4$$

г) овде је

$$B^2 - AC = -1\cdot 9 = -9$$

па дата једначина припада врсти елипсе. Ако ју решимо по x имамо

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - (9y^2+12y+29)} = -5 \pm \sqrt{-(9y^2+12y+4)}$$

Једначина

$$9y^2+12y+4$$

има своја два корена стварна и једнака

$$y = -\frac{2}{3}$$

па према томе дата једначина представља две имагинарне праве које се секу у реалној тачки. Имагинарне праве су

$$x = -5 \pm i\left(y + \frac{2}{3}\right)$$

а њихова пресечна тачка

$$y = -\frac{2}{3}$$
$$x = -5$$

e) Овде је

$$B^2 - AC = (-7)^2 - 1\cdot 49 = 0$$

па дата једначина припада врсти параболе. Ако ју решимо по x добијамо

$$x = 7y \pm 5i$$

f) Овде је

$$B^2 - AC = 15^2 - 18\cdot 13 = -9$$

па дата једначина припада врсти елипсе. Ако ју решимо по x имамо

$$x = \frac{-(15y+9) \pm \sqrt{(15y+9)^2 - (13y^2+13y+2}}{18} =$$
$$= -\frac{15}{18}y - \frac{9}{18} \pm \sqrt{-9y^2+36y+45}$$

Корени једначине

$$9y^2 - 36y - 45 = 0$$

су

$$y = \frac{18 \pm 27}{9}$$

и према томе дата једначина представља праву елипсу.

3. Разлагањем на чиниоце доказати да једначине

$$xy = 0 \qquad a)$$
$$xy - ay + bx - ab = 0 \qquad b)$$
$$x^2 - xy - ax = 0 \qquad c)$$
$$x^2 - y^2 = 0 \qquad d)$$
$$x^2 + y^2 = 0 \qquad e)$$

представљају парове (реалних или имагинарних) правих.

a) Имаћемо

$$x=0$$

$$y=0$$

па дата једначина представља координатне осовине.

b) Имамо из дате једначине

$$(x-a)y+b(x-a)=0$$

или

$$(x-a)(y+b)=0$$

па дата једначина представља праве

$$x=a$$

$$y=-b$$

c) Имамо

$$x(x-y-a)=0$$

па дата једначина представља праве

$$x=0$$

$$x-y-a=0$$

d) Имамо

$$(x-y)(x+y)=0$$

па дата једначина представља праве

$$x+y=0$$

$$x-y=0$$

e) Имамо

$$(x+iy)(x-iy)=0$$

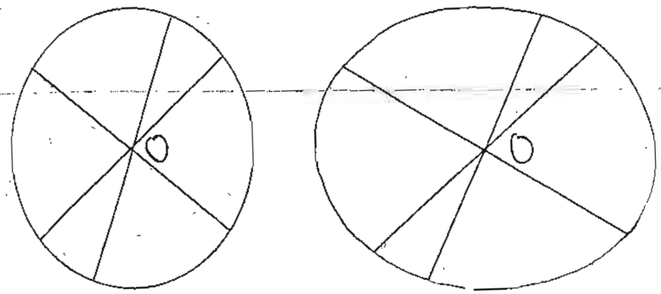
па дата једначина представља имагинарне праве

$$x+iy=0$$

$$x-iy=0$$

# О центрима кривих другог реда

Кад је дата ма каква крива линија под њеним <u>центром</u> разуме се таква једна тачка да су све тетиве које кроз ту тачку пролазе њоме преполовљене. Такве су н. пр. тачке на следећим сликама код круга и елипсе.




Задатак да се одреди центар дате криве другог реда решава се овом теоремом: да би координатни почетак био центар једне криве линије другог реда представљене једначином

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad 1)$$

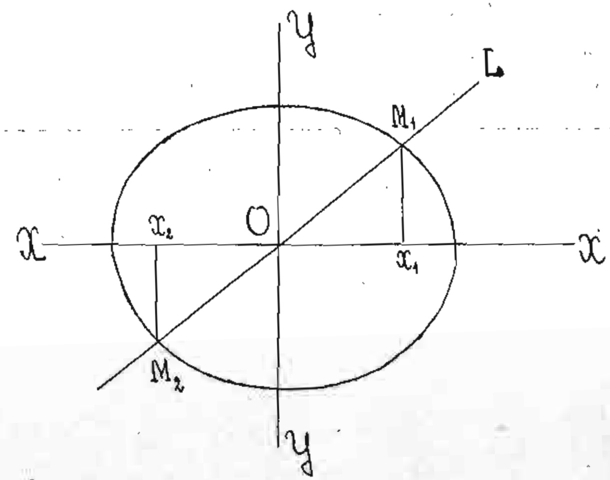
потребно је и довољно да у тој једначини недостају чланови првог степена са $x$ и $y$ т. ј. да буде

$$D=0 \quad \text{и} \quad E=0$$

Да би теорему доказали претпоставимо да је коорд. почетак одиста центар криве линије и повуцимо кроз почетак једну тетиву

$$y=mx$$

Абсцисе пресечних тачака $M_1$ и $M_2$ тетиве са кривом линијом добијају се ако вредност $y=mx$ заменимо у једначини 1) и тако добијену једначину решимо по $x$. Та ће једначина бити




$$(A+2Bm+Cm^2)x^2+2(D+Em)x+F=0$$

Ова ће једначина имати два корена

$x_1$ и $x_2$ и као што је из слике очевидно, ако је тачка O центар, вредности $x_1$ и $x_2$ морају бити једнаке а супротно означене т.ј. мора бити

$$x_1+x_2=0$$

Али из основних особина квадратних једначина зна се да је код такве једначине сачинилац од x-а на првом степену раван нули т.ј. мора бити

$$D+Em=0$$

И пошто тај услов мора бити испуњен за ма какав правац тетиве L т.ј. за ма какво m, то мора бити понаособ

$$D=0 \quad \text{и} \quad E=0$$

чиме је теорема доказана.

Из овога се непосредно изводи ово правило: Кад год у једначини другог степена и члан са x и члан са y недостаје, центар ће бити сам коорд. почетак.

Питање је сад. како се одређује центар у оним случајевима кад у једначини фигурише било члан са y било члан са x. Означимо са a и b непознате координате центра и пренесимо коорд. почетак у центар (a,b). То ћемо учинити ако у једначини криве ставимо

$$x=x_1+a \quad y=y_1+b$$

где су $x_1$ и $y_1$ координате новог система. Једначина тада постаје

$$A(x_1+a)^2+2B(x_1+a)(y_1+b)+C(y_1+b)^2+2D(x_1+a)+$$
$$+2E(y_1+b)+F=0$$

или

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2(Aa+Bb+D)x_1+$$
$$+2(Ba+Cb+E)y_1+(Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F)=0 \qquad 2)$$

Претпоставимо сад да је тачка (a,b) центар. Пошто је сад центар у почетку, то на основу мало пре доказане теореме морају у једначини 2) недостајати чланови са x и y на првом степену т.ј. мора бити

$$Aa+Bb+D=0$$
$$Ba+Cb+E=0 \qquad 3)$$

У тим двема једначинама можемо сматрати $a$ и $b$ као непознате и из њих се те количине могу израчунати, тако да се добија

$$a = \frac{BE - CD}{AC - B^2},$$

$$b = \frac{BD - AE}{AC - B^2} \tag{4}$$

Једначине 4) дају нам координате центра $a$ и $b$ израчунате помоћу коефицијената саме једначине.

Применимо обрасце 4) на ове специјалне случајеве:

1° Претпоставимо да је именилац $AC - B^2$ различан од нуле. Познато нам је да ће тај случај бити код елипсе и хиперболе, јер је код елипсе као што знамо $B^2 - AC < 0$ а код хиперболе $B^2 - AC > 0$. Обрасци 4) даће нам за $a$ и $b$ по једну коначну и тачно одређену вредност. То показује да елипса и хипербола имају по један центар и то на коначној даљини.

2° Нека је именилац $AC - B^2$ раван нули, а бројилац различит од нуле. Овај се случај дешава, као што знамо, код параболе. Тада се за $a$ и $b$ из образаца 4) добијају бесконачне вредности што значи да парабола има један центар или у бесконачности.

3° Претпоставимо да су у обрасцу 4) и бројиоци и именилац равни нули. Ако је то случај онда је

$$AC - B^2 = 0$$
$$BE - CD = 0$$
$$BD - AE = 0$$

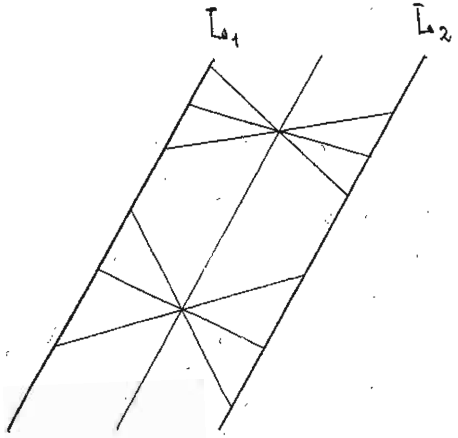
одакле се добија

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E}$$

то показује да се обе једначине 3) поклапају међу собом т.ј. да за одредбу центра имамо само једну једначину и то коју хоћемо од тих двеју. Центара тада има бесконачно много и то свака тачка праве

$$Aa + Bb + D = 0$$

где се $a$ и $b$ сматрају као координате представља центар. Овај се случај јавља онда кад се посматрана крива линија своди на две паралелне праве $L_1$ и $L_2$.




Лако се уочи права паралелна са $L_1$ и $L_2$ и на истом одстојању од тих двеју правих, свака тачка те праве може се сматрати као центар, јер она полови све тетиве што кроз њу пролазе.

Из свега овога изводи се ово практично упутство за одређивање координата центра дате криве другог реда

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

треба образовати ове две линеарне једначине

$$Aa+Bb+D=0$$
$$Ba+Cb+E=0 \qquad (5)$$

и решити их по a и b. Добијене вредности биће координате центра.

Примедба: Лако се увиђа да прва од ових једначина није ништа друго до делимични извод $\frac{\partial f}{\partial x}$ једначине дате криве линије

$$f(x,y)=0 \qquad (6)$$

а тако исто друга једначина је делимични извод $\frac{\partial f}{\partial y}$. Према томе малопређашње упутство може се исказати и у овом облику: Кад је дата једначина (6), координате центра добијају се кад се делимични изводи $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ ставе да су равни нули и добијене једначине реше по x и y. Н. пр. тражи се центар криве линије

$$x^2-6xy+y^2-x+3y-1=0$$

Једначине центра овде су

$$a-3b-\frac{1}{2}=0$$
$$-3a+b+\frac{3}{2}=0$$

или

$$6a-18b-3=0$$
$$-6a+2b+3=0$$

Према томе координате центра су

$a=\frac{1}{2}$ $b=0$

Дешава се у задацима исте врсте да коефицијенти дате криве 1) нису сви изражени у бројевима, већ да зависе од каквог променљивог параметра $\lambda$. Варијацијом параметра $\lambda$ добија се бесконачно много кривих што одговарају једначини 1) и тада могу наступити ови случајеви:

1° Све тако бесконачно многе криве имају исти центар. То ће бити онда ако $a$ и $b$ израчунати из једначине 3) не зависе од $\lambda$.

2° Дешава се да $a$ и $b$ израчунати из једначине 5) зависе од $\lambda$ тако да свакој вредности $\lambda$ одговара по један центар. Кад се $\lambda$ буде мењало, мењаће се и овај центар и према томе се наилази на овакав задатак: Наћи геометријско место свију бесконачно много тако добивених центара. Задатак се решава простом елиминацијом $\lambda$ из једначина 5). Резултат те елиминације биће извесна једначина

$$\varphi(a,b)=0$$

која везује апсцису и ординату центра и која према томе дефинише тражено геометријско место. Н. пр.

$$\lambda x^2+2xy+y^2-\lambda x+3y-1=0.$$

За сваку специјалну вредност коју будемо давали параметру $\lambda$ ова ће представљати координате центра

$$\lambda a+b-\frac{\lambda}{2}=0$$
$$a+b-\frac{3}{2}=0$$

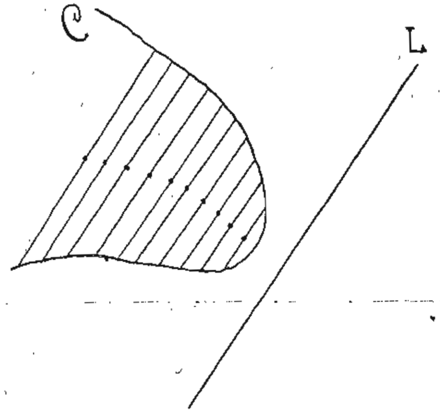
Резултат елиминације $\lambda$ јесте једначина

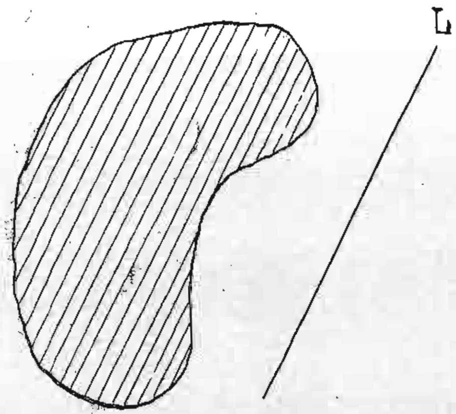
$$a+b-\frac{3}{2}=0$$

та једначина представља праву и према томе геометријско место центара свију поменутих кривих биће права линија.

# Диаметри кривих линија другог реда

Нека је дата једна та какава крива C и један правац L.



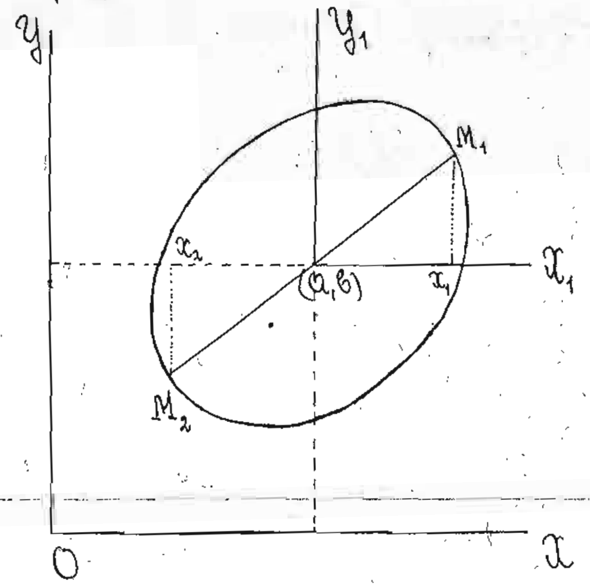

Под дијаметром криве C разуме се линија која спаја средине свију тетива паралелних правцу L. Овако дефинисани диаметри могу бити праве или криве линије. Међутим криве линије другог степена имају ту особину да су им сви диаметри праве линије. Доказаћемо ту теорему и у исти мах извешћемо како се диаметри практички одређују.

Нека је дата крива линија

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Преместимо координатни почетак у једну произвољну тачку $(a,b)$ што ћемо учинити ако у једначини криве сменимо

$$x=x_1+a$$
$$y=y_1+b$$




Онако нова ће једначина бити

$$A(x_1+a)^2+2B(x_1+a)(y_1+b)+C(y_1+b)^2+2D(x_1+a)+$$
$$+2E(y_1+b)+F=0$$

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2(Aa+Bb+D)x_1+$$
$$+2(Ba+Cb+E)y_1+(Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F)=0 \quad (6)$$

Провуцимо кроз нови координатни почетак једну та какву праву

$$y_1 = mx_1$$

Апсцисе пресечних тачака ове праве и дате криве линије добијају се кад се у једначини 6) смени $y_1$ са $mx_1$ и добијена квадратна једначина реши по $x_1$. Таква квадратна једначина ће бити:

$$(A+2Bm+Cm^2)x_1^2 + 2[(Aa+Bb+D)+(Ba+Cb+E)m]x_1 + [Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F]=0 \qquad 7)$$

Довде је била тачка $(a,b)$ произвољна. Претпоставимо сад да се та тачка налази на једном ма коме дијаметру криве линије. Према самој дефиницији дијаметра лако се увиђа да ће пресечне тачке $M_1$ и $M_2$ криве линије са ма којом правом $y_1=mx_1$ имати апсцисе $x_1$ и $x_2$ једнаке и супротно означене. А пошто су те апсцисе корени квадратне једначине 7), то ова једначина мора имати оба корена једнака а супротно означена. А пошто је збир тих корена једнак сачиниоцу непознате на првом степену то у једначини 7), пошто је збир корена раван нули, мора бити

$$(Aa+Bb+D)+(Ba+Cb+E)m=0 \qquad 8)$$

Образац 8) претпоставља да је тачка $(a,b)$ ма која тачка дијаметра; према томе ако $a$ заменимо са $x$, $b$ са $y$ једначина дијаметра може се написати у облику

$$(Ax+By+D)+m(Bx+Cy+E)=0 \qquad 9)$$

што показује да су дијаметри код линија другог степена праве линије. Једначини 9) можемо дати обичан облик једначине праве линије

$$y=\lambda x+\mu$$

ако ју решимо по $y$ имаћемо

$$y=-\frac{A+Bm}{B+Cm}x-\frac{D+Em}{B+Cm} \qquad 10)$$

Према томе ако се једначина дијаметра напише у облику $y=\lambda x+\mu$ коефицијенат правца код дијаметра т.ј. $\lambda$ имаће за вредност

$$\lambda=-\frac{A+Bm}{B+Cm} \qquad 11)$$

а ордината почетка биће

$$\mu = -\frac{D+Em}{B+Cm}$$

На последку једначини диаметра можемо дати још један облик који се врло често употребљава. Ако се једначина криве линије напише у облику

$$f(x,y)=0$$

и ако се делимични изводи по x и y функције f означе са $f'_{(x)}$ и $f'_{(y)}$, лако се увиђа да је

$$f'_{(x)} = Ax+By+D$$
$$f'_{(y)} = Bx+Cy+E \; .$$

Према томе једначина диаметра биће облика

$$f'_{(x)} + m f'_{(y)} = 0$$

Из тога се изводи ово практично упутство за тражење диаметра код кривих другог реда: треба наћи делимичне изводе $f'_{(x)}$ и $f'_{(y)}$ леве стране једначине дате криве, па у једначини

$$f'_{(x)} + m f'_{(y)} = 0$$

сменити m коефицијентом правца оних међу собом паралелних тетива које тражени диаметар треба да полови. Добијени резултат биће тражена једначина диаметра. Н. пр. тражи се онај диаметар ~~елипсе~~

$$x^2+4xy+4y^2-6x+2y-1=0$$

који полови све тетиве што граде угао од 45° са x-осовином. Овде је

$$f'_{(x)} = 2x+4y-6$$
$$f'_{(y)} = 4x+8y+2$$
$$m = tg\,45° = 1$$

и према томе једначина траженог диаметра биће

$$3x+6y-2=0$$

Из опште једначине диаметра види се пре свега да сваки диаметар пролази кроз центар. То излази отуда што ће та једначина бити задовољена за ма какво m ако је x и y изабрано тако да је

$$f'_{(x)}=0 \text{ и } f'_{(y)}=0$$

Ове две једначине нису ништа друго

до једначине што одређују центар. И обратно: свака права што пролази кроз центар може се сматрати као један дијаметар.

Видели смо за елипсу и хиперболу да имају по један центар на коначној даљини. Кроз тај центар пролази бесконачно много правих линија у свима могућим правцима и према томе елипса и хипербола имају бесконачно много дијаметара који могу имати све могуће правце. Међутим за параболу смо видели да има центар у бесконачности па пошто сви дијаметри морају пролазити кроз тај центар, то су сви међу собом паралелни. О томе се у осталом уверавамо рачунски на овај начин: ако у обрасцу

$$\lambda = -\frac{A+Bm}{B+Cm} \qquad 11)$$

у коме је исказана веза између коефицијента $\lambda$ једног дијаметра и коефицијента $m$ оних тетива које он полови водимо рачуна да је за параболу

$$B^2 - AC = 0$$

т.ј.

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = k$$

где је $k$ заједничка вредност ова два разломка, имаћемо

$$A = Bk \qquad B = Ck$$

и образац 11) даће

$$\lambda = -\frac{(k+m)B}{(k+m)C}$$

$$\lambda = -\frac{B}{C}$$

то показује заиста да правац дијаметра не зависи од правца тетива које полови и с друге стране да коефицијенат правца свију дијаметара има за вредност $-\frac{B}{C}$.

# Коњуговани диаметри

Уочимо једну ма какву елипсу или хиперболу. Видели смо да свакому правцу тетиве т.ј. свакој вредности $m$ одговара по један диаметар који те тетиве полови и чија ће једначина бити

$$f'_{(x)} + m f'_{(y)} = 0$$

Међу свима бесконачно многим диаметрима може се увек наћи по један пар таквих диаметара да сваки од њих полови тетиве паралелне оном другом. Таква два диаметра образују оно што се зове један пар међу собом <u>коњугованих</u> диаметара. Таквих парова диаметара има бесконачно много за једну исту криву линију. Јер ако уочимо један ма који диаметар н. пр. $D_1$ може се увек наћи други један диаметар $D_2$ такав да диаметар $D_1$ полови свака тетива паралелна са $D_2$ и да обратно диаметар $D_2$ полови свака тетива паралелна са $D_1$. Јер ако коефициенте правца диаметара $D_1$ и $D_2$ обележимо са $\lambda_1$ и $\lambda_2$, они морају бити везани једначином 11) која показује однос између правца диаметра и правца тетива које он полови. Тако мора бити

$$\lambda_1 = -\frac{A + B\lambda_2}{B + C\lambda_2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{A + B\lambda_1}{B + C\lambda_1}$$

Међутим обе ове једначине имају исти облик јер се обе своде на једначину

$$B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1\lambda_2 + A = 0 \qquad 13)$$

Из обрасца 13) види се да ма какву вредност имао један од коефициената $\lambda_1$ или $\lambda_2$ увек се може израчунати и њему одговарајући други коефицијенат тј. да сваком диаметру одговара један њему конјуговани диаметар.

Конјуговани диаметри играју важну улогу у теорији линија другог степена због једне важне особине коју они имају. Та се особина састоји у овоме: ако је дата ма каква елипса или хипербола, па се за ~~корен једначине~~ узме један ма који пар конјугованих диаметара, једначина криве увек се своди на њен најпростији могући облик

$$Mx^2 + Ny^2 + H = 0$$

то излази непосредно из тога што сваки од та два диаметра полови тетиве паралелна другоме, па пошто те тетиве нису ништа друго до апсцисе или ординате у новом систему, то кад се ови диаметри узму за осовине, сваком $x$ морају одговарати две једнаке и супротно означене вредности $y$. И обрнуто: сваком $y$ морају одговарати две једнаке и супротно означене вредности $x$. То може бити само тако ако у једначини криве у новој системи не фигурише ни члан са $x$ ни члан са $y$, ни члан са $xy$ тј. кад је једначина облика

$$Mx^2 + Ny^2 + H = 0$$

Видећемо доцније како се, кад је дат првобитан облик једначине дате криве и онај пар конјугованих диаметара који ће се узети за осовине, израчунавају коефицијенти $M$, $N$ и $H$ помоћу коефицијената $A, B, C, D, E$ и $F$ првобитне једначине.

# Особине кривих линија другог реда

Узмимо прво случај елипсе и хиперболе. Код тих кривих линија имамо бесконачно много парова конјугованих диаметара. Под <u>осовинама</u> једне елипсе и хиперболе разуме се онај пар конјугованих диаметара који међу собом граде прав угао. Ми ћемо показати да код елипсе и хиперболе постоји само један пар тако конјугованих диаметара. Претпоставимо да два конјугована диаметра $D_1$ и $D_2$ граде међу собом прав угао; онда пре свега међу њиховим коефицијентима правца $\lambda_1$ и $\lambda_2$ мора постојати општи однос

$$B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2+A=0 \qquad 13)$$

а пошто су ти правци међу собом управни, мора бити

$$\lambda_1\lambda_2=-1 \qquad 14)$$

Заменом 14) у 13) добија се једначина

$$B(\lambda_1+\lambda_2)+A-C=0$$

или

$$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{A-C}{B} \qquad 15)$$

Обрасци 14) и 15) показују да су $\lambda_1$ и $\lambda_2$ корени квадратне једначине

$$\lambda^2+\frac{A-C}{B}\lambda-1=0 \qquad 16)$$

Ова једначина има два корена

$$\lambda_1=\frac{C-A}{2B}+\sqrt{\frac{(C-A)^2}{4B^2}+1}$$

$$\lambda_2=\frac{C-A}{2B}-\sqrt{\frac{(C-A)^2}{4B^2}+1}$$

и оба су корена очевидно стварни, пошто је израз под кореним знаком позитиван. Знајући на тај начин коефицијенте правца тих осовина лако је написати и саме једначине осовина; ваља само у општој једначини диаметра

$$f'_{(x)}+m f'_{(y)}=0$$

сменити једанпут $m$ са $\lambda_1$ и други пут $m$ са $\lambda_2$ па ће једначине осовина бити

$$f'_{(x)} + \lambda_1 f'_{(y)} = 0$$
$$f'_{(x)} + \lambda_2 f'_{(y)} = 0$$

Као што се види увек постоје за елипсу и хиперболу две осовине и за њихово тражење важи ово практично упутство: Ваља образовати квадратну једначину

$$\lambda^2 + \frac{A-C}{B}\lambda - 1 = 0$$

решити ју по $\lambda$ и ако су корени $\lambda_1$ и $\lambda_2$, једначине осовина биће

$$f'_{(x)} + \lambda_1 f'_{(y)} = 0$$
$$f'_{(x)} + \lambda_2 f'_{(y)} = 0$$

Н. пр. нека је дата ~~елипса~~

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$$

Овде је $A=1$ $B=2$ $C=4$ и према томе горња квадратна једначина биће

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1 = 0$$

Њени корени су

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Како је

$$f'_{(x)} = 2x + 4y - 6$$

$$f'_{(y)} = 4x + 8y + 2$$

па су једначине осовина

$$\cancel{10x + 36y - 2 = 0}$$
$$\cancel{4y + 7 = 0}$$

Претпоставимо сад да је дата крива линија: парабола. Пошто су тада сви диаметри међу собом паралелни, то не може бити ни говора о двема осовинама већ само о једној. Под осовином параболе разуме се онај њен диаметар који полови тетиве управне на тај диаметар. Ако се са $m$ означи правац тих тетива (управних на тај диаметар), онда, пошто, као што смо видели, коефицијенат правца диаметра има за вредност $-\frac{B}{C}$, мора постојати однос

$$m \cdot -\frac{B}{C} = -1$$

одакле је

$$m = \frac{C}{B}$$

Заменом те вредности $m$ у општој једначини диаметра

$$f'_{(x)} + m \cdot f'_{(y)} = 0$$

добија се једначина

$$f'_{(x)} + \frac{C}{B} f'_{(y)} = 0$$

и то је једначина параболине осовине.

# О теменима кривих линија другог реда.

Под **теменом** једне криве другог реда разумеју се пресечне тачке осовина са кривом.

Код елипсе имамо четири темена која су сва стварна; код хиперболе два су стварна а два уображена; код параболе само једно стварно.

Израчунавање координата темена за једну дату криву састоји се у томе да се напишу једначине осовина и да се реши по $x$ и $y$ систем од двеју једначина од којих једна дефинише криву а друга осовину.

Дешава се да једначина

криве садржи какав промењив параметар $\lambda$ чијом се варијацијом добијају бесконачно много такве криве. Том варијацијом параметра $\lambda$ померају се темена так-ве криве и онда се наилази на овакав задатак: Наћи геометријско место темена свију бесконачно много тако добијених кривих. Задатак се решава израчунавши на мало пре наведени начин координате темена у којима ће фигурисати $\lambda$ тако да ће н. пр. бити

$$x=f(\lambda) \quad y=\varphi(\lambda)$$

Те две једначине дефинишу тражена места и ако је из њих могуће елиминисати $\lambda$ имаћемо једначину траженог геометријског места у обичном облику

$$f(x,y)=0$$

Н. пр. наћи геометр. место темена свију бесконачно много кривих другог реда дефинисаних општом једначином

$$x^2+2xy+(1+\lambda)y^2+x-y+1=0$$

где је $\lambda$ промењив параметар. Коефицијенат правца осовина дати су једначином

$$\mu^2+\frac{A-C}{B}\mu-1=0$$

или

$$\mu^2-\lambda\mu-1=0$$

ти су коефицијенти дакле

$$\mu_1=\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+4}$$

$$\mu_2=\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+4}$$

Заменом у општој једначини осовине

$$f'_{(x)}+\mu f'_{(y)}=0$$

добија се

$$\left(x+y+\frac{1}{2}\right)+\mu_1\left[x+(1+\lambda)y-\frac{1}{2}\right]=0$$

$$\left(x+y+\frac{1}{2}\right)+\mu_2\left[x+(1+\lambda)y-\frac{1}{2}\right]=0$$

Имали би једну једначину првог степена по $x$ и $y$ у којој би фигурисало и $\lambda$. Ако у њој сменимо $\lambda$ вредношћу добивеном из једначине криве линије, резултат ће бити извесна једначина по $x$ и $y$ која представља тражено геометријско место.

Примедба: Задаци овакве врсте могу се решавати и на овај начин: сменити у општој једначини

$$\mu^2 - \frac{A-C}{B}\mu - 1 = 0$$

која даје коефицијенат праваца осовина

$$\mu = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}$$

добијеним из опште једначине осовина

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Резултат ће бити једна једначина

$$F(x,y,\lambda)=0$$

која ће према самом начину како је добијена бити другог степена по $x$ и $y$ и дефинисати скуп обеју осовина дате криве. Елиминацијом параметра $\lambda$ из ове једначине и једначине саме дате криве добија се извесна једначина

$$\psi(x,y)=0$$

која дефинише тражено геом. место.

# Редуковање једначина кривих другог реда на најпростије могуће облике

Да би детаљније испитали особине разних кривих другог реда од користи је редуковати њихове једначине на што је могуће простији облик једно с тога што би се имало посла са простијим рачунима, а друго с тога што врло многе особине кривих другог реда много јасније излазе на видик на тако упрошћеним једначинама него на првобитним сложенијим. При овом упрошћавању једначина ради се овако: Нека је дата једначина

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad 1)$$

Пре свега треба помоћу израза $B^2-AC$ разликовати да ли крива припада врсти елипсе, хиперболе или параболе.

## 1° Случај елипсе или хиперболе.

Тада постоји један центар на коначној даљини и одређен. Пренесимо коорд. почетак у центар; то ћемо учинити сменивши

$$x=x_1+a \qquad y=y_1+b$$

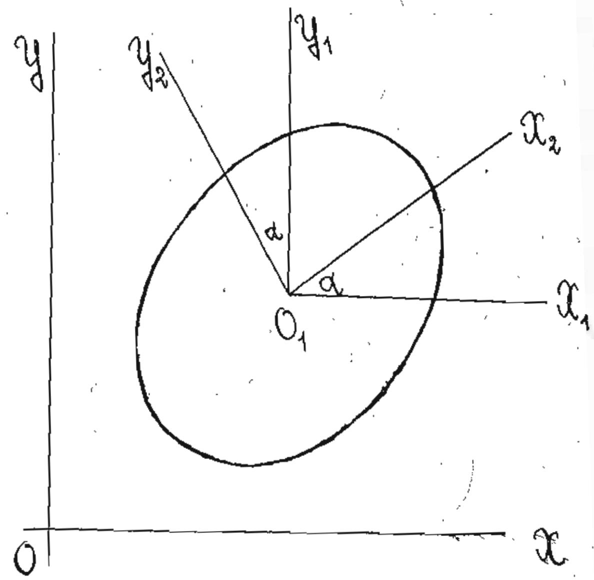
где су $a$ и $b$ координате центра. Једначина 1) тада постаје

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2(Aa+Bb+D)x_1+2(Ba+Cb+E)y_1+(Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F)=0$$

али пошто су $a$ и $b$ координате центра, то ће као што смо раније казали коефицијенти од $x_1$ и $y_1$ бити равни нули, тако да нова једначина постаје

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+H=0$$

где $H$ није ништа друго до резултат који се добија кад се у општу једначину дате криве смени $x$ и $y$ координатама центра. Обрнимо сад координатне осовине око новог (центра) почетка за један за сад неодређени угао $\alpha$, али оставимо да опет буду управне једна на другу. То ћемо, као што је познато из задатка трансформације координата, учинити ако извршимо смену




$$x_1= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y_1= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

где су $x'$ и $y'$ координате у новом систему. Резултат ће бити једначина

$$A(x'^2\cos^2\alpha-2x'y'\sin\alpha\cos\alpha+y'^2\sin^2\alpha)+2B[x'^2\sin\alpha\cos\alpha+x'y'(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-y'^2\sin\alpha\cos\alpha]+C[x'^2\sin^2\alpha+2x'y'\sin\alpha\cos\alpha+y'^2\cos^2\alpha]+H=0 \qquad 3)$$

или ако се уреди по степенима од $x$ и

у имаћемо

$$[A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha]x'^2 + 2[(C-A)\sin\alpha\cdot\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]x'y' + [A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cdot\cos\alpha + C\cos^2\alpha]y'^2 + H = 0 \qquad 4)$$

Изаберимо сад угао $\alpha$ тако да у једначини 4) нестане члан са $x'y'$. То ћемо учинити ако је

$$(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \qquad 5)$$

Ако једначину помножимо са 2 и споменемо се да је

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha \qquad 6)$$

једначина 5) ће постати

$$(C-A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0$$

одакле се добија

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2B}{A-C} \qquad 7)$$

Образац 7) показује колико треба да је $\alpha$ па да у једначини 4) нестане члана са $x'y'$. Ма каква била вредност $\frac{2B}{A-C}$, увек постоји по један угао $2\alpha$ који се налази између 0 и $\pi$ и који задовољава једначину 7). Претпоставимо даље да смо углу $\alpha$ дали ту вредност; једначина 4) своди се тада на једначину облика

$$Mx'^2 + Ny'^2 + H = 0 \qquad 8)$$

где је

$$M = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$$

$$N = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \qquad 9)$$

где још ваља сменити $\alpha$ малопре израчунатом вредношћу. Међутим $M$ и $N$ могу се израчунати на краћи начин а да се не мора та смена извршавати. Ако једначине 9) најпре саберемо а после одузмемо, добићемо

$$M + N = A + C$$

$$M - N = (A-C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha \qquad 10)$$

Треба нам даље да из једначине 7) израчунамо $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$ и сменимо у 10). Из познатих образаца

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}$$

добијају се према обрасцу 7) ови обрасци:

$$\sin 2\alpha = \frac{2B}{\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}} \qquad \cos 2\alpha = \frac{A-C}{\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}$$

заменом у обрасцу 10) добијају се као

крајњи резултат обрасци

$$M + N = A + C$$

$$M - N = \sqrt{4B^2 + (A-C)^2} \qquad 11)$$

Из образаца 11) лако се одмах израчунавају $M$ и $N$ помоћу првобитних коефицијената $A$, $B$ и $C$, па пошто $H$ унапред знамо, то ће нам бити познати сви коефицијенти редуковане једначине, чиме је редуковање свршено.

Остаје само још да се види знак који у обрасцу 11) треба ставити пред квадратним кореном. Казали смо да смо $\alpha$ изабрали тако да лежи између $0$ и $\frac{\pi}{2}$. Тада ће $2\alpha$ лежати између $0$ и $\pi$ и према томе $\sin 2\alpha$ биће позитиван. Да би то било из обрасца

$$\sin 2\alpha = \frac{2B}{\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}$$

види се да квадратном корену ваља придати онај знак који буде имао коефицијенат $B$.

Из свега овога изводи се ово <u>практично упутство</u> за редуковање једне дате једначине елипсе или хиперболе

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

на

$$Mx'^2 + Ny'^2 + H = 0 \qquad 8)$$

треба прво израчунати, по ранијим упутствима, координате центра $a$ и $b$ и помоћу њих израчунати $H$

$$H = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F$$

Затим ваља образовати систем једначина

$$M + N = A + C$$

$$M - N = \sqrt{4B^2 + (A-C)^2}$$

где пред квадратним кореном ваља ставити знак коефицијента $B$, решити ове две једначине по $M$ и $N$ и онда заменом $M$, $N$ и $H$ у једначини 8) имаћемо тражену редуковану једначину.

Приметимо само то да се израчунавање коефицијента $H$ може упростити. Тако, ако једначине центра

$$Aa + Bb + D = 0$$

$$Ba+Cb+E=0$$

помножимо прву са а другу са в и сабрено, добија се

$$Aa^2+2Bab+Cb^2+Da+Eb=0$$

одакле је

$$Aa^2+2Bab+Cb^2=-Da-Eb$$

Заменом у изразу за H

$$Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F$$

добија се за H ова вредност

$$H=Da+Eb+F$$

простија од малопређашње.

Н. пр. свести једначину хиперболе

$$x^2-6xy+2y^2+2x-3y+1=0$$

на облик

$$Mx^2+Ny^2+H=0$$

Овди је

$$A=1 \quad B=-3 \quad C=2$$

па једначине 11) постају

$$M+N=3$$

$$M-N=-\sqrt{37}$$

одакле је

$$M=\frac{3-\sqrt{37}}{2} \quad N=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$$

Координате центра дате су једначинама

$$Aa+Bb+D=0$$

$$Ba+Cb+E=0$$

т.ј.

$$a-3b+1=0$$

$$-3a+2b-\frac{3}{2}=0$$

одакле је

$$a=-\frac{15}{14} \quad b=\frac{3}{14}$$

па је

$$H=Da+Eb+F=-\frac{5}{14}-\frac{9}{28}+1=\frac{9}{28}$$

према томе тражена редукована једначина биће

$$(3-\sqrt{37})x^2+(3+\sqrt{37})y^2+\frac{9}{14}=0$$

## 2° Случај параболе.

Нека је дата парабола

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad 1)$$

где је

$$B^2-AC=0$$

одакле је

$$A=\frac{B^2}{C}$$

Заменом те вредности A једначина

криве може се написати у облику

$$C\left(y+\frac{B}{C}x\right)^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad 2)$$

Обрнимо сад коорд. систем за један угао $\alpha$ не мењајући при том почетак што значи извршити смену

$$x = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha$$

$$y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha$$

услед чега једначина 2) постаје

$$C\left[\left(\frac{B}{C}\cos\alpha+\sin\alpha\right)x_1+\left(\cos\alpha-\frac{B}{C}\sin\alpha\right)y_1\right]^2+$$

$$+2\left[D\cos\alpha+E\sin\alpha\right]x_1+2\left[E\cos\alpha-D\sin\alpha\right]y_1+F=0 \qquad 3)$$

Одредимо сад до сада неодређени угао $\alpha$ тако да у првој великој загради нестане члан са $x_1$. То ће бити ако се стави да је

$$\frac{B}{C}\cos\alpha+\sin\alpha=0$$

одакле је

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{B}{C}$$

Онда је

$$\sin\alpha=\frac{-B}{\sqrt{B^2+C^2}} \qquad \cos\alpha=\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} \qquad 4)$$

Заменом тих вредности $\alpha$ у једначини 3) ова добија облик

$$My_1^2+2Nx_1+2Py_1+F=0 \qquad 5)$$

где коефицијенти $M$, $N$ и $P$ имају ове вредности

$$M=C\left(\cos\alpha-\frac{B}{C}\sin\alpha\right)=\frac{B^2+C^2}{C}$$

$$N=D\cos\alpha+E\sin\alpha=\frac{CD-BE}{\sqrt{B^2+C^2}}$$

$$P=E\cos\alpha-D\sin\alpha=\frac{CE+BD}{\sqrt{B^2+C^2}}$$

Пренесимо сад почетак у једну неодређену тачку $(a,b)$ т.ј. извршимо смену

$$x_1=x'+a \qquad y_1=y'+b$$

где су $x'$ и $y'$ нове координате. Једначина 5) постаје

$$My'^2+2Mby'+Mb^2+2Nx'+2Na+2Py'+2Pb+F=0$$

$$My'^2+2(Mb+P)y'+2Nx'+(Mb^2+2Na+2Pb+F)=0 \qquad 6)$$

Изаберимо сад неодређене количине $a$ и $b$ тако да у једначини нестане члана са $y'$ и независног члана. То ће бити ако узмемо $a$ и $b$ тако да буде

$$Mb+P=0$$

$$Mb^2+2Na+2Pb+F=0 \qquad 7)$$

Из прве од једначина 7) имамо $b$, а из друге заменом имаћемо $a$. Претпоставимо да смо на тај начин нашли $a$ и $b$ и сменили у једначини 6); тада ће та једначина постати

$$My'^2 + 2Nx' = 0$$

коју можемо написати у облику

$$y^2 = 2px$$

где p има за вредност

$$p = -\frac{N}{M}$$

или

$$p = \frac{C(BE-CD)}{(B^2+C^2)^{3/2}}$$

Остаје нам још да видимо какав знак треба придати уз $\sqrt{B^2+C^2}$ који фигурише у горњим изразима. Пошто угао $\alpha$ треба да лежи између 0 и $\frac{\pi}{2}$ то његов синус треба да буде позитиван, што значи према другом од образаца 4) да изразу $\sqrt{B^2+C^2}$ треба придати знак супротан знаку сачиниоца B. А пошто тај исти израз фигурише и у обрасцу 8) у имениоцу, то и пред тим изразом вала увек ставити знак супротан знаку сачиниоца B.

Из свега овога изводи се као резултат ово практично упутство за редуковање једначине ма какве параболе на најпростији потпуни облик

$$y^2 = 2px$$

вала помоћу коефицијената првобитне параболине једначине израчунати p по обрасцу

$$p = \frac{C(BE-CD)}{(B^2+C^2)^{3/2}}$$

8) давши имениоцу знак супротан знаку сачиниоца B и онда тако израчунату вредност p сменити у једначини

$$y^2 = 2px$$

чиме је задатак решен.

Приметимо још и то да се p назива: параметар параболе. Свести дакле једначину параболе на њен најпростији облик значи просто израчунати њен параметар и сменити га у једначини $y^2 = 2px$.

Н. пр. свести једначину параболе

$$\frac{9}{4}x^2 + 6xy + 4y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

на најпростији облик.

Овде је

$$B=3 \quad C=4 \quad D=-1 \quad E=2$$

па је према томе

$$p=\frac{4(6+4)}{-25^{3/2}}=\frac{40}{-125}=\frac{8}{-25}$$

тражена редукована једначина биће дакле

$$y^2=-\frac{16}{25}x$$

# Проучавање особина кривих линија другог степена на њиховим редукованим једначинама

## I Елипса

Видели смо да у случају елипсе и хиперболе редукована једначина има облик

$$Mx^2+Ny^2+H=0 \qquad 1)$$

карактеристика

$$B^2-AC$$

овде се своди на

$$-MN$$

према томе у случају елипсе M и N морају бити истог знака. За тај знак може се увек претпоставити да је позитиван, јер кад то не би био случај, могли би их учинити позитивњим множеши целу једначину са -1. Коефицијенат H не може бити раван нули, јер би у том случају једначину задовољавала само једна стварна тачка $x=0$ $y=0$. Тако исто коефицијенат H не може бити ни позитиван јер у том случају поменута једначина као збир трију позитивних количина не би могао бити раван нули ни за какву стварну тачку $(x,y)$. Једини, дакле, могући случај тај је да H буде негативно. Пошто су у таком случају обе количине $\frac{H}{M}$ и $\frac{H}{N}$ негативне, то ако се стави

$$a=\sqrt{-\frac{H}{M}} \qquad 2)$$

$$b=\sqrt{-\frac{H}{N}}$$

обе количине a и b биће стварне. Ако у једначини 1) уведемо вредности 2), она се може написати у облику

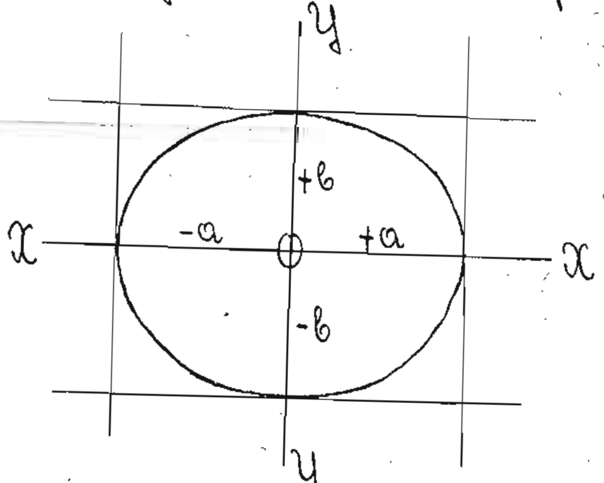
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad 3)$$

у коме се облику обично и пише једначина елипсе. Из те једначине добијамо

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad 4)$$

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \qquad 5)$$

Из једначине 4) види се да за све негативне и позитивне вредности x-а које су по апсолутној вредности веће од a, y је уображено; на против оно је стварно за све вредности x-а које су по апсолутној вредности мање од a. То значи да се крива мора налазити између правих $x=-a$ и $x=+a$. Тако исто из обрасца 5) види се да је x стварно само за оне вредности y-а које су по апсолутној вредности мање од b, што опет значи да крива мора налазити између



правих

$$y=+b \quad \text{и} \quad y=-b$$

Ове четри праве

$$x=+a \quad x=-a \quad y=+b \quad y=-b$$

образују један правоугаоник у чију се унутрашњости налази цела крива.

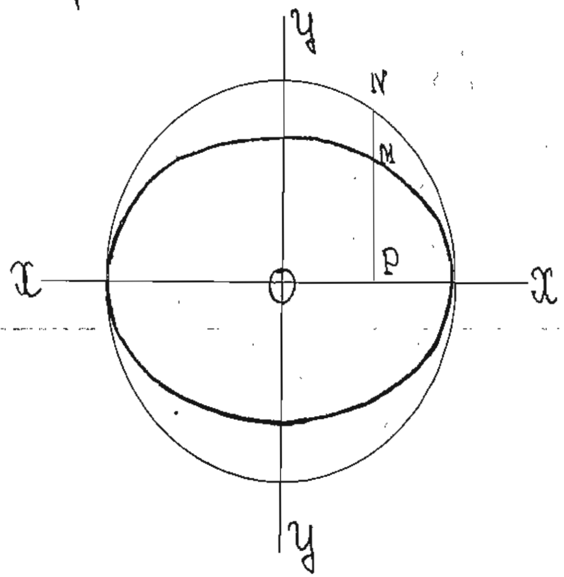
Из обрасца 4) види се у исти мах да је крива симетрична према x-осовини, пошто сваком x-у одговарају две једнаке и супротно означене вредности y-а. Тако исто из обрасца 5) види се да је крива симетрична и према y-осовини, јер сваком y-у одговарају две једнаке и супротно означене вредности x-а. Обе дакле осовине OX и OY јесу осовине симетрије за елипсу и оне су према томе и осовине елипсе.

Из једначине 4) за $x=a$ и $x=-a$ добија се $y=0$, а из једначине 5) за $y=b$ и $y=-b$ добија се $x=0$. Што показује да крива има одиста облик означен на слици и да су њена темена тачке:

$$(-a,0),\ (+a,0),\ (-b,0) \text{ и } (+b,0)$$

и она у тим теменима додирује стране правоугаоника.

Образац 4) истиче на видик још једну важну особину елипсе. Дужина $a$ назива се великом а $b$ малом полуосовином елипсе. Опишимо из центра елипсе са великом полуосовином као полупречником круг и уочимо на елипси и на кругу две тачке M и N које имају исту апсцису




$$OP=x$$

Пошто је тачка M на елипси биће

$$MP=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

а пошто је тачка N на кругу биће

$$NP=\sqrt{a^2-x^2}$$

Деобом ова два обрасца добија се

$$\frac{MP}{NP} = \frac{b}{a}$$

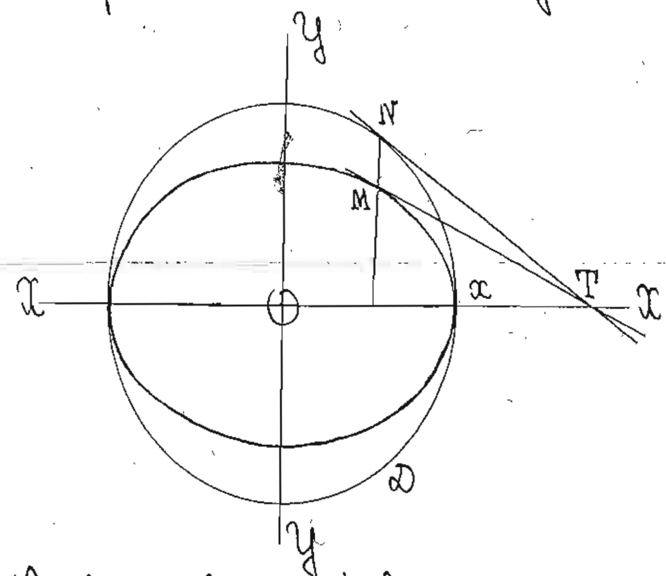
Означимо сад са $\varphi$ онај стални угао чији косинус има за вредност $\frac{b}{a}$. Из последњег обрасца добија се

$$MP = NP \cdot \cos\varphi \qquad 6)$$

Образац 6) показује ову важну особину елипсе: Свака ордината елипсе може се сматрати као пројекција одговарајућег круга Д у оној равни која би се добила кад се раван елипсе обрне око велике осовине за сталан угао $\varphi$ чији би косинус био $\frac{b}{a}$. Пошто то вреди за ма какву ординату елипсе, то теорему можемо дати и овај облик:

ако се у равни елипсе нацрта њен круг Д, па се пројектује у горе поменутој равни, та пројекција биће сама дата елипса; другим речима: Свака елипса може се сматрати као пројекција њој одговарајућег круга Д у оној равни која са равнином круга гради сталан угао $\varphi$ чији је косинус $\frac{b}{a}$.

Ова је теорема нарочито важна с тога што се помоћу ње целокупна теорија круга може применити на елипсу тако да се из сваке особине круга може израчунати одговарајућа особина елипсе. Н.пр. узмимо конструкцију дирке једне дате тачке елипсе. Претпоставимо да се тражи дирка у тачки $M$ елипсе. Одредимо њој одговарајућу тачку $N$ на кругу Д и повуцимо дирку на тај круг у тачки $N$.




Одговарајућа дирка елипсе у тачки $M$ биће права $MT$ јер, као што се лако увиђа, права $NT$ пројектује се у правој $MT$, па пошто је

NT дирка на кругу, MT биће дирка на елипси. Ако би сад у тачки M повукли нормалу на MT имали би нормалу елипсе и т. д.

Из горње везе између елипсе и круга може се непосредно извести образац за површину елипсе. Пошто површина круга има за вредност $a^2\pi$, површина елипсе као пројекција тога круга имаће за вредност

$$P = a^2\pi\cdot\cos\varphi = a^2\pi\cdot\frac{b}{a} = ab\pi$$

Затим број задатака о елипси може се решити помоћу решења овога простог задатка: Какав однос треба да постоји између коефицијената $\lambda$ и $\mu$ једне праве

$$y = \lambda x + \mu$$

па да та права додирује елипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Апсцисе пресечних тачака праве и елипсе биће корени квадратне једначине

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{\lambda x + \mu}{b}\right)^2 = 1$$

или

$$x^2(b^2 + a^2\lambda^2) + x\,2a^2\lambda\mu + a^2(\mu^2 - b^2) = 0$$

да би права додиривала елипсу њене пресечне тачке са елипсом морају се поклопити т. ј. горња квадратна једначина мора имати своја два корена једнака. Да би то било треба да буде

$$a^4\lambda^2\mu^2 - (b^2 + a^2\lambda^2)(\mu^2 - b^2)a^2 = 0$$

или

$$a^4\lambda^2\mu^2 - a^2b^2\mu^2 - a^4\lambda^2\mu^2 + a^2b^4 + a^4b^2\lambda^2 = 0$$

или

$$-\mu^2 + b^2 + a^2\lambda^2 = 0$$

одакле је

$$\mu = \pm\sqrt{a^2\lambda^2 + b^2}$$

то је тражени однос који треба да постоји између $\lambda$ и $\mu$ па да права $y = \lambda x + \mu$ додирује елипсу. Према томе и једна и друга од правих

$$y = \lambda x + \sqrt{a^2\lambda^2 + b^2}$$

$$y = \lambda x - \sqrt{a^2\lambda^2 + b^2} \qquad 7)$$

представљаће по једну дирку на елипси ма какву вредност имало $\lambda$. Те две једначине представљају дакле општу једначину свију дирака на елипси и све се могуће дирке могу добити мењањем параметра $\lambda$. Ако се тражи да дирка пролази кроз дату тачку $M(\alpha,\beta)$, онда је лако одредити вредност $\lambda$ која тој дирки одговара. Јер за прву дирку је

$$\beta = \lambda\alpha + \sqrt{a^2\lambda^2 + b^2}$$

а за другу

$$\beta = \lambda\alpha - \sqrt{a^2\lambda^2 + b^2}$$

па би из прве одредили $\lambda$ што одговара првој дирки, из друге $\lambda$ што одговара другој дирки.

Обе једначине 7) могу се сложити у једну која ће бити другог степена. Тако из њих добијамо

$$y - \lambda x = \pm\sqrt{a^2\lambda^2 + b^2}$$

одакле, се квадрирањем добија

$$y^2 - 2\lambda xy + \lambda^2 x^2 = a^2\lambda^2 + b^2$$

или

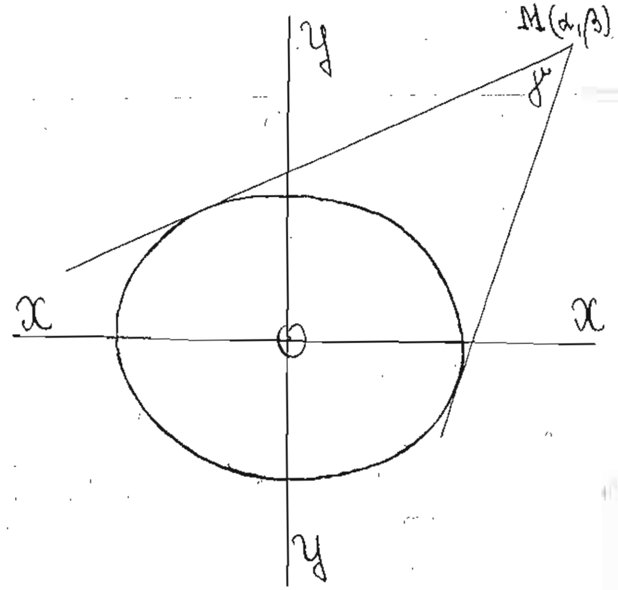
$$(y - \lambda x)^2 - a^2\lambda^2 - b^2 = 0$$

та једначина другог степена представља скуп двеју правих које ће додиривати елипсу и она се назива <u>квадратном једначином дирака елипсиних</u>. Она се употребљује при решавању многих задатака о диркама на елипси.

Н. пр. Одредити геометр. место темена једног сталног угла $\gamma$ чији краци додирују дату елипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ако се координате темена угла $\gamma$ означе са $\alpha$ и $\beta$, онда пошто краци угла морају додиривати елипсу, квадратна једначина тих кракова јесте једначина 8) ко-




8) а по услову задатка мора бити

задовољена за

$$x=\alpha \quad y=\beta$$

Отуда једначина

$$(\beta-\lambda\alpha)^2-a^2\lambda^2-b^2=0$$

или

$$(\alpha^2-a^2)\lambda^2-2\beta\alpha\lambda+(\beta^2-b^2)=0 \qquad 10)$$

Једначина 10) јесте квадратна једначина по $\lambda$ чија решења по $\lambda$ дају коефицијенте правца тангената угла $\gamma$. Ако се корени једначине 10) означе са $\lambda_1$ и $\lambda_2$, онда по услову задатка треба да буде

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1+\lambda_1\lambda_2} \qquad 11)$$

Према томе, ако би из једначине 10) одредили корене $\lambda_1$ и $\lambda_2$ и сменили у једначини 11) у којој $\operatorname{tg}\gamma$ по услову задатка има сталну и познату вредност, добили би однос између $\alpha$ и $\beta$ као једначину

$$f(\alpha,\beta)=0$$

која би нам представљала тражено геометр. место. Али се задатак може упростити јер, као што је познато, из теорије квадратне једначине, производ корена $\lambda_1\lambda_2$ имаће за вредност

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{\beta^2-b^2}{\alpha^2-a^2}$$

тако да једначина 11) постаје у том случају

$$\lambda_1-\lambda_2=(1-\lambda_1\lambda_2)\operatorname{tg}\gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2}{\alpha^2-a^2}\operatorname{tg}\gamma \qquad 12)$$

место да се смене у једначини 10) тоће се сменити у простијој једначини 11). У спец. случају кад је

$$\gamma=90^\circ$$

једначина 10) своди се на

$$1+\lambda_1\lambda_2=0$$

или

$$\alpha^2+\beta^2=a^2+b^2$$

одакле се види ова теорема: Геомет. место темена правог угла чији краци додирују дату елипсу јесте круг чији је полупречник $r$ раван дијагонали правоугаоника чије су стране велика и мала полуоса

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

<u>Аполонијеве теореме</u>. Видели смо, говорећи о дијаметрима и осови-

Нама, да кад се било осовине елип- два дијаметра. Познато нам је то
се било на који пар жених конјуго- да се од једначине 13) прелази на јед-
ваних дијаметара узму за коорди- начину 14) извесном сменом
натне осовине, једначина елипсе до-

$$x = Ax_1 + By_1$$

бија облик

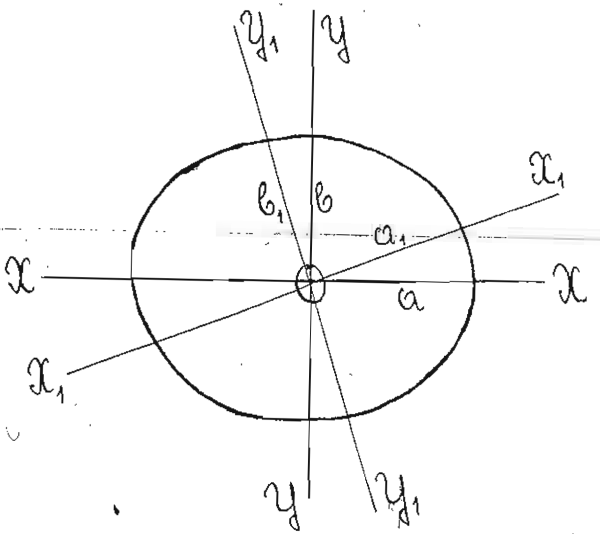
$$y = Cx_1 + Dy_1$$

$$Mx^2 + Ny^2 + H = 0$$

где A, B, C и D не зависе ни од апсциса
који се увек може написати у облику ни од ордината. Из тога се закључу-

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

је да тим прелазом из једне у другу
Узмимо прво осовине елипсе као систему $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ прелази у $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{y_1^2}{b_1^2}$. Тако
координатне осовине; једначина ће исто лако је увидети да тим прела-
елипсе тада[?] ом из једне у другу систему $x^2+y^2$
бити прелази у $x_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta + y_1^2$ где θ озна-
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ чује угао између два узета конјуго-
где су 2a и 2b вана дијаметра, Пошто би и један и
дужине осови- други израз представљао једну исту
на. Узмимо страну у два разна троугла, јед-
затим за коор- правоугли чије су катете x и y
ординатне о- у једном косоуглом чије су стране $x_1$
совине два и $y_1$ које граде међу собом угао θ. Пре-




ма каква конјугована дијаметра, на томе ако образујемо израз
та ће једначина елипсе добити облик

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{\lambda}(x^2+y^2) = \Delta_1$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} - 1 = 0$$

14) где је λ ма каква произвољна вред-
где $2a_1$ и $2b_1$ представљају дужине та[ка] ност, тај ће израз горњом трансформа-

цијом координата прећи у израз

$$\Delta_2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} - \frac{1}{\lambda}(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta)$$

Обадва ова израза могу се написати у облику

$$\Delta_1 = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\lambda}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\lambda}\right)y^2$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{\lambda}\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{\lambda}\right)y_1^2 - \frac{2x_1y_1}{\lambda}\cos\theta$$

Потражимо какву вредност треба дати неодређеној количини $\lambda$ па да изрази $\Delta_1$ и $\Delta_2$ буду потпуни квадрати каквог полинома првог степена. Ако ми уопште дигнемо на квадрат полином облика

$$Mx + Ny$$

онда, ако су $M$ и $N$ различити од нуле у развијеном квадрату увек ће фигурисати $xy$. Према томе да би израз $\Delta_1$ могао бити потпун квадрат пошто у њему нема члана са $xy$ мора бити или сачинилац од $x^2$ или сачинилац од $y^2$ раван нули, односно мора бити

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\lambda}\right) = 0 \qquad 15)$$

или

Међутим у обрасцу $\Delta_2$ фигурише члан са $x_1y_1$ и према томе да би био потпун квадрат треба да буде

$$\frac{\cos^2\theta}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{\lambda}\right) = 0 \qquad 16)$$

Из једначина 15) и 16) можемо одредити тражену вредност $\lambda$ било из једне било из друге. Очевидно је да те вредности морају бити исте било да су добијене из 15) било из 16) јер пошто се од израза $\Delta_1$ на $\Delta_2$ прелази линеарном трансформацијом, то кад год је $\Delta_1$ потпун квадрат мора бити то и $\Delta_2$ и обрнуто. Дакле једначине 15) и 16) морају се поклапати. Међутим једначину 15) можемо написати у облику

$$(\lambda - a^2)(\lambda - b^2) = 0$$

или

$$\lambda^2 - (a^2 + b^2)\lambda + a^2b^2 = 0 \qquad 17)$$

а једначину 16) можемо написати у облику

$$(\lambda - a_1^2)(\lambda - b_1^2) - a_1^2b_1^2\cos^2\theta = 0$$

$$\lambda^2-(a_1^2+b_1^2)\lambda+a_1^2b_1^2(1-\cos^2\theta)=0$$

или

$$\lambda^2-(a_1^2+b_1^2)\lambda+a_1^2b_1^2\sin^2\theta=0 \qquad 18)$$

Пошто се једначине 17) и 18) морају поклопити, то се, упоредивши их, види да је

$$a_1^2+b_1^2=a^2+b^2$$

$$a_1^2b_1^3\sin\theta=ab$$

Овим обрасцима су исказане обе две Аполонијеве теореме:

1° Збир квадрата половина ма кога конјугована дијаметра сталан је и раван збиру квадрата велике и мале полуосе.

2° Површина паралелограма конструисаног половинама два ма која конјугована дијаметра стална је и равна површини правоугаоника конструисаног са великом и малом полуосом.

# II Хипербола

Видели смо говорећи о редукцији једначина другог степена да се једначина хиперболе може свести на прост облик

$$Mx^2+Ny^2+H=0$$

али где су $M$ и $N$ супротно означени. Ако је коефицијенат $H$ раван нули, онда се једначина своди на

$$Mx^2+Ny^2=0$$

т.ј. на две једначине

$$x=y\sqrt{-\frac{N}{M}} \qquad x=-y\sqrt{-\frac{N}{M}}$$

дакле имали би две праве. Према томе код праве хиперболе увек је $H$ различно од нуле и може бити позитивно или негативно.

Уочимо један ма који случај од та два; очевидно је да се горња једначина увек може свести на облик

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

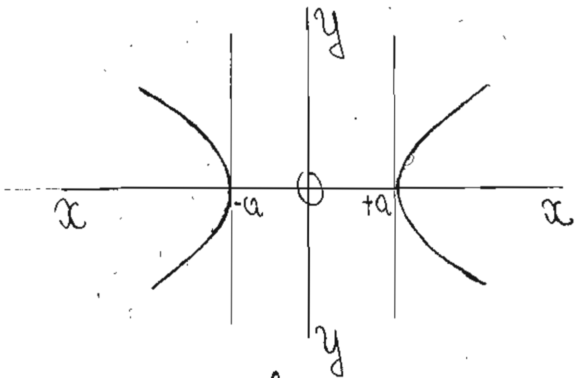
или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$$

Уочимо н.пр. први случај. Из те се једначине добија

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

и тако се увиђа да за све вредности $x$-а које се налазе између $x=+a$ и $x=-a$ $y$ је уображено. То доказује да се крива пружа или само на десну страну од тачке $+a$ или само на леву страну од тачке $-a$. На против док $x$ варира било од $+a$ до $+\infty$ било од $-a$ до $-\infty$, $y$ постаје стварно, што значи да се крива линија простире у бесконачност са десне стране праве $x=a$ и са леве стране праве $x=-a$.




А због тога што пред квадратним кореном имамо два знака + и −, крива линија је симетрична према $x$-осовином.

Из горње једначине хиперболе непосредно се изводе и једначине њених асимптота т.ј. једначине таквих правих линија да разлика између ордината криве и ординате такве праве постаје равна нули у бескрајно удаљеној тачки. Лако је уверити се да грана криве линије

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

има као асимптоту праву

$$y=\frac{b}{a}x$$

јер ако уочимо разлику ордината криве и праве т.ј.

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2}\right)$$

та разлика, множени ју и делени изразом $\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2}$ постаје

$$-ab\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2}}$$

и та разлика очевидно тежи нули за $x=\infty$. Међутим из тога што је крива линија симетрична према $x$-осовини види се да ће у исто доба бити и асимптота криве линије права

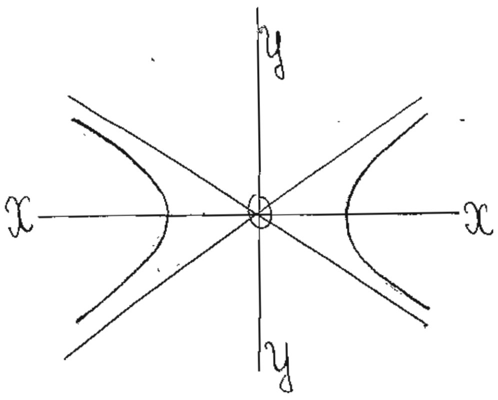
$$y=-\frac{b}{a}x$$

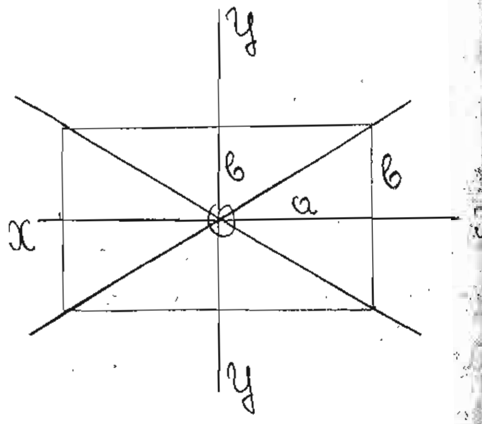
Дакле крива линија има две асимптоте и то

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y=-\frac{b}{a}x$$

Дужине $a$ и $b$ називају се полуосе хиперболине и то а <u>стварном</u> а в <u>уображеном полуосом</u>

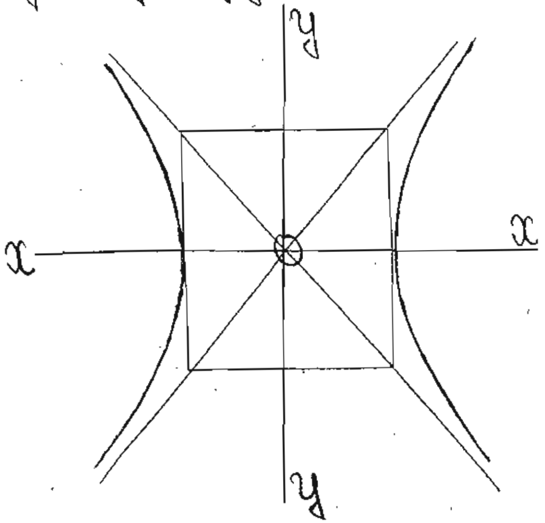
Као што се види из једначи-на хиперболиних асимптота, асимп-



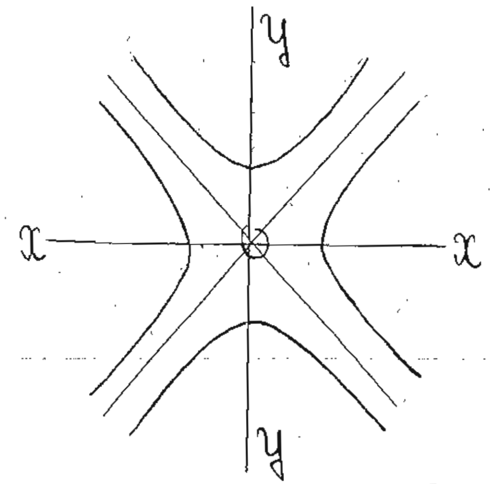

тоте нису ништа друго до дијагонале правоугаоника конструисаног са стварном и имагинарном осовином.

У случају кад је $a = в$




т.ј. кад су стварна и уображена полуосовина једнаке, хипербола се назива <u>равностраном хиперболом</u>. Поменути правоугаоник во-ди се тада на квадрат и према томе тада су асимптоте једна на другу управне. Према томе равнострана хипербола изгледа онако као на предњој слици.

За две хиперболе каже се да су међу собом <u>конјуговане</u> ако имају исти центар и исте осовине само с том разликом што је стварна полуоса једне уображена полуоса друге и обрнуто. Према томе такве две хиперболе имају и исте асимптоте, а њихов међусобни положај види се на слици.




Лако је уверити се да ако је једначина једне хиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

једначина њене конјуговане хиперболе биће

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Приметимо још и то да је код равностране хиперболе $a=b$ и према томе једначина равностране хиперболе кад се њене осовине узму за коорд. осовине биће

$$x^2-y^2=a^2$$

Већина хиперболиних особина може се извести непосредно из одговарајућих особина елипсе на овај начин: пошто се једначина елипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

разликује од једначине хиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

тиме што се место $b^2$ има $-b^2$, то кад имамо какву особину елипсе изказану каквом једначином у којој фигурише $a$ и $b$ довољно је у њој сменити $b^2$ са $-b^2$, а $b$ са $bi$ па ћемо имати једначину која изражава одговарајућу особину хиперболе.

Тако н. пр. видели смо да ће права

$$y=\lambda x+\mu$$

додиривати елипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ако је

$$\mu=\pm\sqrt{a^2\lambda^2+b^2}$$

Према томе права

$$y=\lambda x+\mu$$

додириваће хиперболу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ако је

$$\mu=\pm\sqrt{a^2\lambda^2-b^2}$$

и на тај начин имамо непосредно једначину дирака хиперболиних помоћу које можемо решавати исте оне задатке које смо решавали и код елипсе.

Тако исто видели смо да је геометр. место темена једнач. правог угла чији краци додирују елипсу круг дефинисан једначином

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

Према томе геометр. место темена једнач. правог угла чији краци додирују једну хиперболу биће круг

$$x^2+y^2=a^2-b^2$$

и тај круг биће стваран или уображен према томе да ли је $a>b$ или $a<b$.

У случају равностране хиперболе било би

$$a=b$$

и тај би се круг свео на једну тачку

$$x=0 \quad y=0$$

Као последњи пример навешћемо још Аполонијеве теореме код хиперболе: Кад се за коорд. осовине узму осовине хиперболине, једначина хиперболе је

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

где су $a$ и $b$ дужине полуоса. Ако се сад за коорд. осовине узме један ма који пар конјугованих дијаметара, једначина хиперболе биће облика

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1$$

где су $a_1$ и $b_1$ половине дијаметарских дужина. Очевидно је да ако у каквој једначини која важи за елипсу фигурише $a_1$ и $b_1$ онда одговарајућа једначина која изражава одговарајућу особину хиперболе добија се кад се $b_1^2$ смени са $-b_1^2$ т.ј. $b_1$ са $b_1 i$. Према томе ако у једначинама

$$a^2+b^2=a_1^2+b_1^2$$

$$ab=a_1 b_1 \sin\theta$$

које изражавају Аполонијеве теореме код елипсе сменимо $b_1$ са $b_1 i$ добијамо две једначине

$$a^2-b^2=a_1^2-b_1^2$$

$$ab=a_1 b_1 \sin\theta$$

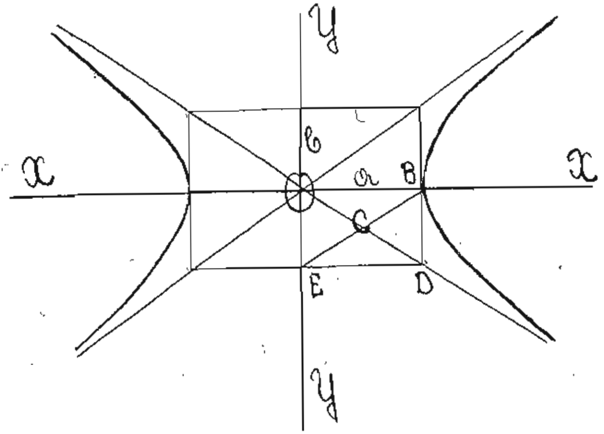
у којима су изражене Аполонијеве теореме за хиперболу. Те теореме гласе:

1° Разлика квадрата два ма каква конјугована полу-дијаметра стална је и равна разлици квадрата полуоса.

2° Површина паралелограма конструисаног са два ма каква конјугована полудијаметра стална је и равна површини правоугаоника конструисаног полуосама.

**Облик једначине хиперболе**

кад се за коорд. осовине узму асимптоте. – Очевидно је из слике да ако се осовине узму за коорд. осовине, из




једначине криве у таквом систему треба да се за $x=0$ добије $y=\infty$, а за $y=0$ добије $x=\infty$. Једна једначина другог степена између $x$ и $y$ која задовољава те услове јесте једначина

$$xy = k$$

Према томе једначина хиперболе кад се асимптоте узму за осовине биће облика

$$xy = k$$

где је $k$ стална количина и може се израчунати у датом случају кад се знају дужине полуоса $a$ и $b$. Пошто је $k$ стална количина, то је довољно одредити вредност те константе за једну коју хоћемо специјалну тачку. Узмимо за ту тачку саму тачку $B$. За њу ћемо имати у новом систему координате

$$x = OC \qquad y = BC$$

Из слике је

$$OC = \frac{OD}{2}$$

$$BC = \frac{BE}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

заменом тих вредности у једначини хиперболе

$$xy = k$$

добија се

$$k = \frac{a^2+b^2}{4}$$

чиме је задатак решен.

Н. пр. од централне једначине хиперболине

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$$

прећи на њену асимптотну једначину. Овде је

$$a = \sqrt{3}$$
$$b = \sqrt{5}$$

па према томе

$$k = \frac{3+5}{4} = 2$$

тражена једначина биће дакле

$$xy=2$$

Код равностране хиперболе је

$$a=b$$

па константа k има за вредност

$$k=\frac{a^2}{2}$$

## III Парабола

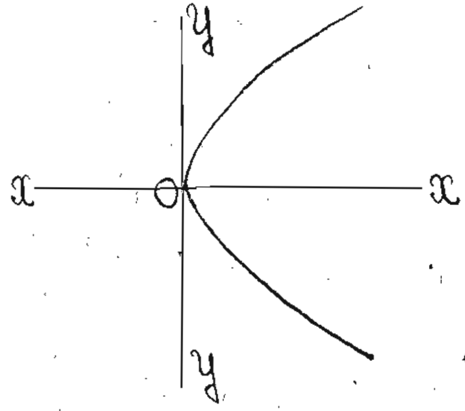
Видели смо да ако се осовина параболе узме за x-осовину а управна на осовину у темену за y-осовину, једначина параболе добија облик

$$y^2=2px$$

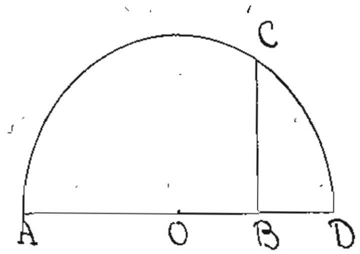
Константа p зове се параметар параболе. Ми ћемо увек претпоставити да је параметар позитиван па и макар он био и негативан; довољно би било променити знак x-y т.ј. обрнути целу слику око y-осовине за 180°. Из израза

$$y=\pm\sqrt{2px}$$

види се тада да крива не постоји на левој страни y-осовине а напротив да се пружа у бесконачности од y-осовине у десно. Она на тој страни има две симетричне гране т.ј. она има облик означен на слици.




Из горње једначине лако је извести упутство за конструкцију параболе јер се из ње добија

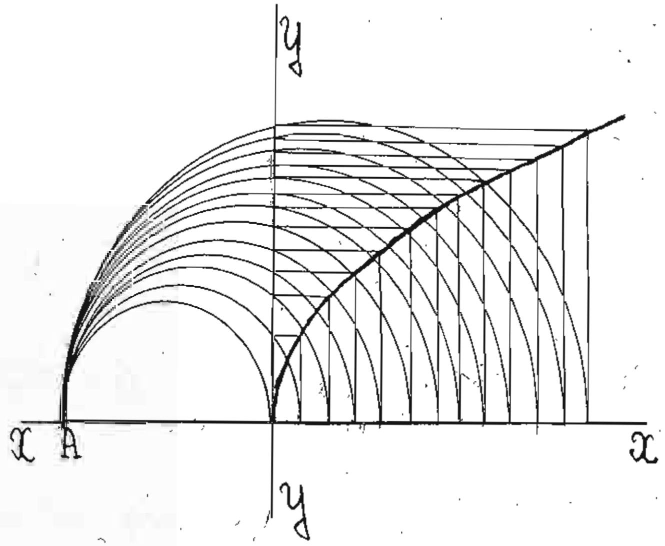



$$\frac{2p}{y}=\frac{y}{x}$$

и ако се узме у обзир особина круга према којој

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{BD}$$

лако се изводи ова конструкција параболе




пренесимо на леву

на леву страну $x$-осовине дужину

$$OA = 2p$$

и онда над $x$-осовином опишимо ра-
не полукруге чији ће центри бити на
$x$-осовини. Из пресечних тачака сва-
ког таквог круга са $x$-осовином и
$y$-осовином повуцимо паралелне коор-
динатним осовинама; пресечне тачке ових
таквих парова паралелних биће тачке
параболе.

Лако се увиђа да парабола
нема асимптота, јер није могућно наћи
никакву праву

$$y = \lambda x + \mu$$

такву да разлика ордината

$$\sqrt{2px} - \lambda x - \mu$$

тежи нули за $x = \infty$. Ма какво било $\lambda$
и $\mu$ увек је горња разлика различна
од нуле.

Потражимо једначине диаме-
тара. Тога ради потражимо какве
услове треба да задовољавају $\lambda$ и $\mu$
па да права

$$y = \lambda x + \mu$$

додирује параболу

$$y^2 - 2px = 0$$

Апсцисе пресечних тачака праве и
криве биће корени квадратне једна-
чине

$$(\lambda x + \mu)^2 - 2px = 0$$

или

$$\lambda^2 x^2 + 2(\lambda\mu - p)x + \mu^2 = 0$$

Да би права била дирка, пресечне
тачке морају се поклопити т.ј. оба
корена ове квадратне једначине мо-
рају бити једнака. То ће бити ако је

$$(\lambda\mu - p)^2 - \lambda^2\mu^2 = 0$$

т.ј.

$$\lambda^2\mu^2 - 2\lambda\mu p + p^2 - \lambda^2\mu^2 = 0$$

или

$$-2\lambda\mu + p = 0$$

одакле је

$$\mu = \frac{p}{2\lambda}$$

што је тражени услов. Према томе
једначина

$$y = \lambda x + \frac{p}{2\lambda}$$

кад се параметру $p$ буду даване разне вредности представљаће све тачке дирке на параболу

$$y^2 = 2px.$$

Помоћу те једначине могу се решавати разни задаци о диркама на параболи. Ако се н. пр. тражи дирка из какве тачке $M(x_0, y_0)$, онда би се из једначине

$$y_0 = \lambda x_0 + \frac{p}{2\lambda}$$

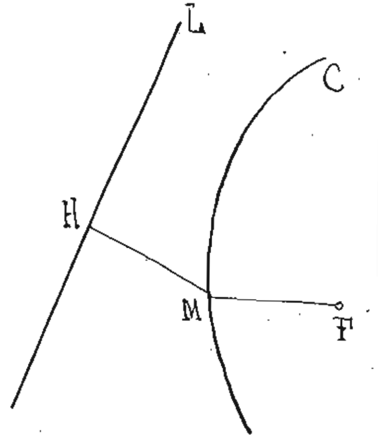
израчунало $\lambda$ и сменило у једначину

$$y = \lambda x + \frac{p}{2\lambda}$$

Пошто се при том израчунавању $\lambda$ има квадратна једначина, то ће се у опште имати две дирке које могу бити стварне или уображене.

# Жиже и директрисе код кривих другог степена

Нека је дата крива $C$, једна стална тачка $F$ и једна права $L$. Уочимо на кривој једну покретну тачку $M$. За сталну тачку $F$ каже се да је <u>жижа</u> криве $C$ ако та тачка има особину да је одстојање $MF$ једне ма које тачке криве $C$ од тачке $F$ сразмерно одстојању $MH$ тачке $M$ од сталне праве $L$ т.ј. ако је




$$\frac{MF}{MH} = const. = R = \text{број ексц.} \qquad 1)$$

где је $R$ сталан број. Права $L$ назива се тада <u>директрисом</u> криве $C$.

Из ове дефиниције жиже и директриса може се извести друга рачунска дефиниција. Ако се координате тачке $M$ означе са $x$ и $y$, а координате тачке $F$ са $\alpha$ и $\beta$, онда је одстојање тачке $M$ од жиже $F$ дато обрасцем

$$MF = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \qquad 2)$$

и онда би тај образац важио па била тачка $F$ жижа или не. Као што се види растојање $MF$ у опште је ирационална функција координата $x$ и $y$ тачке $M$. Али ми ћемо доказати да у специјалном случају кад је тачка $F$ жижа ово растојање постаје линеарна функција координата $x$ и $y$. О томе се уверавамо на овај начин: Ако је једначина праве $L$

$$mx + ny + h = 0$$

познато нам је из теорије праве да ће одстојање $MH$ бити дато обрасцем

$$MH = \frac{mx+ny+h}{\sqrt{m^2+n^2}} \qquad 3)$$

Заменом 3) у обрасцу 1) добија се

$$MF = \frac{k}{\sqrt{m^2+n^2}}(mx+ny+h) \qquad 4)$$

из чега се види да је тада растојање $MF$ одиста линеарна функција координата $x$ и $y$, а тако се исто види и то да то важи само у случају кад је тачка $F$ жижа. Докажимо сад ову теорему: да тако дефинисану жижу могу имати само криве линије другог реда. Јер заменом 2) и 3) у обрасцу 1) добија се

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \frac{k}{\sqrt{m^2+n^2}}(mx+ny+h) \qquad 5)$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 - \frac{k^2}{m^2+n^2}(mx+ny+h)^2 = 0 \qquad 6)$$

та једначина је другог степена по $x$ и $y$ и пошто она важи за ма коју тачку $(x,y)$ на криви $C$, то значи да та крива одиста мора бити другог степена, чиме је теорема доказана.

Једначину 6) можемо написати у развијеном облику

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - \frac{k^2}{m^2+n^2}(m^2x^2 + n^2y^2 + h^2 + 2mnxy +$$

$$+ 2mhx + 2nhy) = 0$$

или

$$\left(1-\frac{k^2m^2}{m^2+n^2}\right)x^2 + \left(1-\frac{k^2n^2}{m^2+n^2}\right)y^2 - \frac{2mnk^2}{m^2+n^2}xy -$$

$$-2\left(\alpha+\frac{k^2mh}{m^2+n^2}\right)x - 2\left(\beta+\frac{k^2nh}{m^2+n^2}\right)y + \left(\alpha^2+\beta^2-\frac{k^2h^2}{m^2+n^2}\right) = 0$$

Карактеристика ове криве линије биће

$$\left(1-\frac{k^2m^2}{m^2+n^2}\right)\left(1-\frac{k^2n^2}{m^2+n^2}\right) - \frac{m^2n^2k^4}{(m^2+n^2)^2} =$$

$$= 1-k^2+\frac{k^4m^2n^2}{(m^2+n^2)^2} - \frac{k^4m^2n^2}{(m^2+n^2)^2} =$$

$$= 1-k^2$$

Према томе: ако је $k<1$ крива $C$ је елипса, ако је $k>1$ она је хипербола; ако је $k=1$ онда је парабола. Према томе за елипсу увек је растојање $MF$ мање од $MH$, за хиперболу је увек $MF$ веће од $MH$, а за параболу је $MF=MH$.

Уочимо сад овај задатак: Кад је дата једначина једне криве другог реда у облику

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

како се могу одредити њене жиже и директрисе? Означимо краткоће ради једначину криве са

$$f(x,y)=0 \qquad 8)$$

Одредити жиже те криве линије значи одредити координате $\alpha$ и $\beta$; одредити њене директрисе значи узети за једначину директрисе

$$mx+ny+h=0$$

и одредити $m$, $n$ и $h$; а пошто увек можемо скратити са једним од тих коефицијената, то у резултату можемо узети н. пр. $h=1$ тако да се одредба директрисе своди на одређивање коефицијената $m$ и $n$. Пошто једначине 6) и 7) односно 8) представљају једну исту криву линију, то сви коефицијенти у једначини 6) морају бити сразмерни коефицијентима једначине 7) односно 8), тако да се може написати

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\frac{k^2}{m^2+n^2}(mx+ny+h)^2=\lambda f(x,y)$$

7) где је $\lambda$ известан сталан број. Ову једначину можемо написати у облику

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\lambda f(x,y)=\frac{k^2}{m^2+n^2}(mx+ny+h)^2$$

Из ове се једначине види да ако се

стави
$$\Delta = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \lambda f(x,y) \qquad 8a)$$
израз $\Delta$ може бити потпун квадрат једног полинома првог степена по $x$ и $y$. Према томе задатак се своди на тражење услова па да израз $\Delta$ буде потпун квадрат. Замислимо израз $\Delta$ уређен по степенима од $x$ и $y$ и нека је
$$Mx^2 + 2Nxy + Py^2 + 2Qx + 2Ry + T = \Delta$$
тако добијени резултат. Пре свега очевидно је да пошто $\Delta$ мора бити квадрат за ма какво $x$ и $y$, оно ће такође бити потпун квадрат и кад једну од тих промењљивих сматрамо као сталну тј. кад $\Delta$ сматрамо да садржи само једну промењљиву. Сматрајмо н.пр. да $\Delta$ садржи само $x$ као промењљиву и уредимо тај полином по степенима $x$-а, па ће бити
$$\Delta = Mx^2 + 2(Ny+Q)x + (Py^2 + 2Ry + T)$$
Међутим познато је да се потребан услов да би израз облика
$$Ax^2 + 2Bx + C$$
био потпун квадрат састоји у томе да треба да буде
$$B^2 - AC = 0$$
Ако то применимо на израз $\Delta$ добијамо услов
$$(Ny+Q)^2 - M(Py^2 + 2Ry + T) = 0$$
или
$$(N^2 - MP)y^2 + 2(NQ - MR)y + (Q^2 - MT) = 0$$
А пошто тај услов мора бити задовољен за ма какву вредност $y$-а, то мора бити
$$\begin{aligned} N^2 - MP &= 0 \\ NQ - MR &= 0 \\ Q^2 - MT &= 0 \end{aligned} \qquad 9)$$
Пошто коефицијенти $M, N, P, Q, R$ и $T$ зависе од $\alpha$, $\beta$ и $\lambda$, то из трију једначина 9) можемо израчунати све три непознате $\alpha$, $\beta$ и $\lambda$. Тако нађене вредности $\alpha$ и $\beta$ дају нам тражене координате жижа а $\lambda$ нам даје коефицијенат $\lambda$ за једначину 8a). Кад тим количинама $\alpha$, $\beta$ и $\lambda$ дамо те вредности, израз $\Delta$ ће

бити потпун квадрат полинома по
$x$ и $y$:

$$\Delta = (Gx + Hy + S)^2 \qquad 10)$$

Упоређењем једначине 8а) са једначином 10) имаћемо

$$\frac{k^2}{m^2+n^2}(mx+ny+h)^2 = (Gx+Hy+S)^2 \qquad 11)$$

Пошто та једначина треба да важи за ма какво $x$ и $y$, то треба да буде

$$\frac{km}{\sqrt{m^2+n^2}} = G$$

$$\frac{kn}{\sqrt{m^2+n^2}} = H \qquad 12)$$

$$\frac{kh}{\sqrt{m^2+n^2}} = S$$

У трима једначинама 12) имамо четри непознате количине $k, m, n$ и $h$, али пошто је раније казано да се може узети

$$h=1$$

то имамо три непознате количине $k$, $m$ и $n$ које се могу израчунати помоћу познатих количина $G$, $H$ и $S$. Знајући на тај начин $k, m, n$ и $h=1$ знаћемо једначину директрисе која ће бити

$$mx+ny+1=0$$

а тако исто знаћемо и растојања $MF$ и $MH$ из образаца

$$MF = \frac{k}{\sqrt{m^2+n^2}}(mx+ny+h)$$

$$MH = \frac{1}{k} \cdot MF$$

Овако треба поступати кад израз $\Delta$ садржи и прве и друге степене $x$ и $y$ и њихове производе. Међутим у појединим специјалним случајевима могу се једначине жижа и директриса наћи простије као н. пр. у овом случају:

Претпоставимо да израз $\Delta$ не садржи производ $xy$. Тада је очевидно да он само тако може бити потпун квадрат ако у њему фигурише или само $x$ или само $y$. Разликујмо дакле та два случаја:

1° Израз $\Delta$ садржи само $x$. Онда, пошто је у њему $P=0$ мора бити и $R=0$ и тада се израз $\Delta$ своди на

$$Mx^2 + 2Qx + T = 0$$

а да би он био потпун квадрат, треба да буде

$$Q^2 - MT = 0$$

Ова једначина са једначинама

$$P=0 \quad \text{и} \quad R=0$$

даје начина да се израчуна $\alpha$, $\beta$ и $\lambda$ а помоћу њих да се на малопређашњи начин одреди $m$, $n$ и $k$.

2° Претпоставимо да једначина не садржи $x$; тада пошто је $N=0$ треба да буде и $M=0$ и $Q=0$. Тада се израз $\Delta$ своди на

$$\Delta = Py^2 + 2Ry + T$$

и да би он био потпун квадрат, треба да буде

$$R^2 - PT = 0$$

Ова једначина са једначинама

$$M=0 \quad \text{и} \quad Q=0$$

служи за одредбу $\alpha$, $\beta$ и $\lambda$ помоћу којих се опет на малопређашњи начин одређују $m$, $n$ и $k$.

Из свега овога изводи се ово <u>практично упутство</u> за одређивање жижа и директриса код кривих другог реда: Нека је дата крива

$$f(x,y)=0$$

Означимо са $\alpha$ и $\beta$ координате жижа а са $mx+ny+h=0$ једначину директрисе, са $k$ сталан број који нам даје размеру $MF : MH$ и са $\lambda$ један засад непознати коефицијенат. Образујмо израз

$$\Delta = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \lambda f(x,y)$$

и испишимо услове који треба да су испуњени па да тај израз буде потпун квадрат каквог полинома првог степена по $x$ и $y$. Тај се услов увек своди на три једначине из којих можемо израчунати координате жижа $\alpha$ и $\beta$ и непознати коефицијенат $\lambda$. Заменом тако нађене вредности у изразу $\Delta$ моћи ће се тај израз увек написати у облику

$$\Delta = (Gx + Hy + S)^2$$

а онда из упоређења тог израза са изразом

$$\Delta = \frac{k^2}{m^2+n^2}(mx+ny+h)^2$$

можемо, узевши да је $h=1$, увек одредити $m$, $n$ и $k$ помоћу $G$, $H$ и $S$. Знајући $m$, $n$ и $k$ имаћемо једначину директрисе која ће бити

$$mx+ny+1=0$$

или што је једно исто

$$Gx+Hy+S=0$$

и тако исто према горњим обрасцима имаћемо $MF$ и $MH$. Тако би било

$$MF=\frac{k}{\sqrt{m^2+n^2}}(mx+ny+h)$$

или што је једно исто према обрасцу 11)

$$MF=Gx+Hy+S$$

одакле се за $MF$ изводи ово упутство: Одстојање $MF$ добија се кад се према ранијем упутству израз $\Delta$ напише

$$\Delta=(Gx+Hy+S)^2$$

и онда ће бити

$$MF=Gx+Hy+S$$

## I Елипса.

Нека је дата једначина елипсе у облику

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Означивши са $\alpha$ и $\beta$ координате жиже израз $\Delta$ постаје

$$\Delta=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

или

$$\Delta=\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)x^2+\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2+\lambda \qquad 13)$$

Пошто овај израз не садржи производ $xy$ то он не може никад бити квадрат полинома који би зависио и од $x$ и од $y$, већ само квадрат каквог полинома који зависи или само од $x$ или само од $y$. Према томе треба да у $\Delta$ нестане или $x$ или $y$. Разликујемо дакле ова два случаја:

1° У изразу $\Delta$ фигурише само $x$. Да би то било треба да буде

$$1-\frac{\lambda}{b^2}=0 \qquad 14)$$

и

$$\beta=0 \qquad 15)$$

одакле је

$$\lambda=b^2$$

$$\beta=0$$

Израз $\Delta$ тада постаје

$$\Delta=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2\alpha x+(\alpha^2+b^2)$$

да би тај израз био потпун квадрат треба да буде

$$\alpha^2-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)(\alpha^2+b^2)=0$$

или

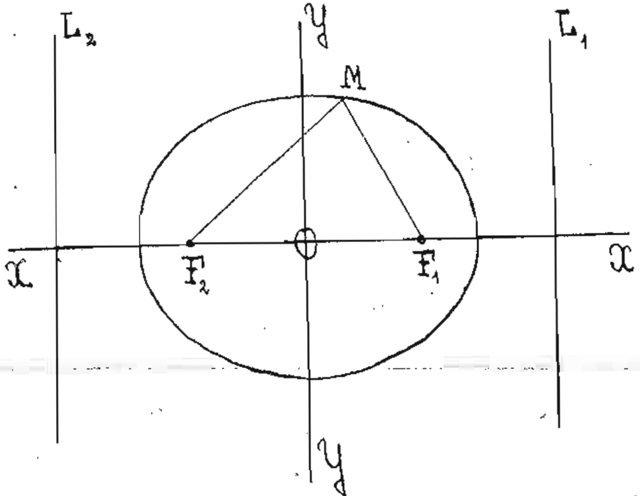
$$\alpha^2-\alpha^2+\frac{\alpha^2 b^2}{a^2}-b^2+\frac{b^4}{a^2}=0$$

или

$$-1+\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=0$$

одакле

$$\alpha=\pm\sqrt{a^2-b^2}$$




На тај начин одређене су координате жижа и као што се види има две жиже и оне су:

$$F_1\left(\alpha=+\sqrt{a^2+b^2},\ \beta=0\right)$$
$$F_2\left(\alpha=-\sqrt{a^2+b^2},\ \beta=0\right)$$

Према томе добијамо две жиже које се налазе на великој осовини и које се према њиховим координатама лако могу израчунати. Заменом нађене вредности $\alpha$ у изразу за $\Delta$ биће

$$\Delta=\frac{\alpha^2}{a^2}x^2-2\alpha x+a^2=\left(\frac{\alpha x}{a}-a\right)^2$$

из чега се види да је $\Delta$ потпун квадрат полинома

$$\frac{\alpha x}{a}-a$$

Према предњем упутству једначина директрисе биће

$$\frac{\alpha x}{a}-a=0$$

или

$$x=\frac{a^2}{\alpha}$$

Пошто $\alpha$ има две вредности

$$\alpha=\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

то ћемо имати и две директрисе чије ће једначине бити

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad и \quad x=-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Као што се види обе директрисе су паралелне y-осовини; једна одговара жижи $F_1$ а друга жижи $F_2$. Једначине директриса обично се пишу у облику

$$a-ex=0$$
$$a+ex=0$$

где је

$$e=\frac{\alpha}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

Стална количина $e$ назива се <u>ексцен</u>

трицитет елипсе. Овај би био раван нули кад би се елипса претворила у круг, јер би тада било $a=b$, а међутим он би био већи у колико је већа разлика осовина т.ј. у колико је елипса развученија.

Потражимо још растојања $MF_1$ и $MF_2$ ма које тачке $M$ од жижа. Пошто се овде полином $Gx+Hy+S$ своди на $a \pm ex$, то ће та два одстојања $MF_1$ и $MF_2$ према горњем упутству изнаћи за вредност $a \pm ex$. Али пошто се та растојања сматрају увек као позитивна, то треба израз $a \pm ex$ узети са знаком $\pm$ тако да он увек буде позитиван. На тај начин добијамо ове четири комбинације:

$$+(a-ex),\ -(a-ex),\ +(a+ex) \text{ и } -(a+ex)$$

од којих нам ваља изабрати оне које су позитивне. Пошто је за тачке елипсе увек по апсолутној вредности

$$x \leq a$$

а међутим

$$e<1$$

то је увек

$$ex \leq a$$

што значи да је израз $a-ex$ позитиван. Према томе оне од четири горње комбинације које су позитивне јесу

$$+(a-ex) \text{ и } +(a+ex)$$

Први израз одговара одстојању $MF_1$ а други $MF_2$ тако да је

$$MF_1 = a-ex$$
$$MF_2 = a+ex$$

Сабирањем тих двеју једначина добија се

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

одакле се добија позната теорема према којој је збир растојања једне ма које тачке елипсе од жижа сталан и раван великој осовини.

2° Претпоставимо да у изразу $\Delta$ фигурише само $y$. Тада је

$$1-\frac{1}{a^2}=0$$
$$\alpha = 0$$

одакле је

$$\lambda = a^2$$

Заменом у изразу за $\Delta$ овај постаје

$$\Delta = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y^2 - 2\beta y + \beta^2 + a^2$$

да би он био потпун квадрат треба да буде

$$\beta^2 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)(\beta^2 + a^2) = 0$$

одакле је

$$\beta = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$$

и пошто претпостављамо да је

$$a > b$$

то се за $\beta$ добијају уображене вредности и према томе добијају се две уображене жиже којима такође одговарају две уображене директрисе.

Као што се види елипса има четири жиже од којих су две уображене а две стварне, а тако исто и четири директрисе: две уображене и две стварне.

Примедба: При овом извођењу претпостављамо да је

$$a > b$$

т.ј. да је x-осовина велика осовина елипсе и тада се стварне жиже налазе на тој осовини. Међутим кад би било

$$b > a$$

очевидно је да би прве две жиже биле уображене а друге две стварне које су на y-осовини.

## II Хипербола

Ако узмемо једначину хиперболе у облику

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Пошто се једначина хиперболе разликује од једначине елипсе тиме само што је $b^2$ смењено са $-b^2$ т.ј. $b$ са $bi$, то се координате жижа за хиперболу добијају кад се у координатама жижа за елипсу смени $b^2$ са $-b^2$, а пошто смо код елипсе имали четири жиже дефинисане овим обрасцима

$$\left(\alpha = \pm\sqrt{a^2 - b^2},\ \beta = 0\right) \text{ и } \left(\beta = \pm\sqrt{b^2 - a^2},\ \alpha = 0\right)$$

Прве су две жиже очевидно стварне

а друге две уображене. Према томе и хипербола има четири жиже: две стварне и две уображене; стварне се жиже налазе увек на $x$-осовини.

Стварним жижама одговарају две такође стварне директрисе чије се једначине добијају потпуно исте примедбе. Код елипсе те су директрисе биле

$$a \pm ex = 0$$

где је

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

Према томе једначине директриса код хиперболе биће

$$a - ex = 0$$

и

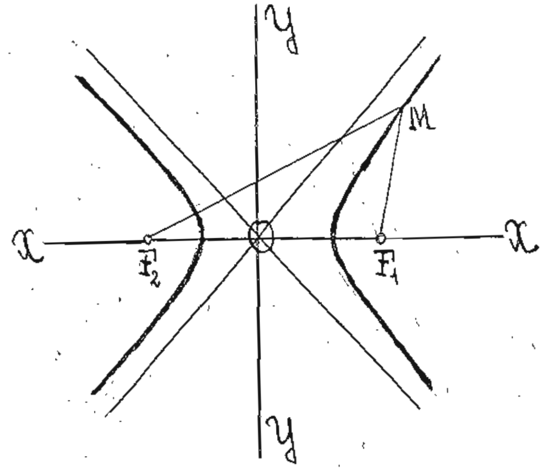
$$a + ex = 0$$

али где је

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

стална количина $e$ и овде се назива <u>ексцентрицитет</u> и као што се види ексцентрицитет код хиперболе увек је већи од 1.

Потражимо још растојања $MF_1$ и $MF_2$. Код елипсе смо нашли да су растојања била $a-ex$ и $a+ex$. То ће исто дакле бити и код хиперболе само што $e$ треба заменити ексцентрицитетом хиперболе.




Али пошто се одстојања $MF_1$ и $MF_2$ сматрају увек као позитивна, то имамо да бирамо између све четири комбинације:

$$+(a-ex),\ -(a-ex),\ +(a+ex),\ -(a+ex)$$

и да за $MF_1$ и $MF_2$ изаберемо оне од њих које су позитивне. Пошто је за хиперболу увек по апсолутној вредности

$$x > a \quad \text{и} \quad e > 1$$

то је за десну грану хиперболе $a-ex$ негативно и према томе $-(a-ex)$ позитивно. Тако исто за леву грану је комбинација $a+ex$ позитивна а све остале су негативне. Према томе за ма коју тачку хиперболе на десној страни имаћемо

$$MF_1 = -a + ex$$
$$MF_2 = a + ex$$

Међутим ако је $M$ на левој грани хиперболе биће позитивне комбинације $a - ex$ и $-(a - ex)$, тако да је

$$MF_1 = a - ex$$
$$MF_2 = -a - ex$$

Према томе за десну грану добијамо

$$MF_2 - MF_1 = 2a$$

а за леву

$$MF_1 - MF_2 = 2a$$

Из чега се изводи позната теорема према којој је разлика одстојања једне ма које тачке хиперболе од жижа стална и равна стварној осовини.

## III Парабола

Нека је једначина параболе

$$y^2 - 2px = 0$$

Онда ће израз $\Delta$ бити раван

$$\Delta = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \lambda(y^2 - 2px)$$

или

$$\Delta = x^2 + (1-\lambda)y^2 - 2(\alpha - p)x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2$$

Пошто овај израз не садржи производ $xy$, то да би он био потпун квадрат мора у њему недостајати било $x$ било $y$. Међутим пошто је сачинилац од $x^2$ раван 1, то не можемо анулирати чланове са $x$, већ само чланове са $y$. Тим анулирањем добијамо

$$1 - \lambda = 0$$

или

$$\lambda = 1$$

$$\beta = 0$$

тако да се $\Delta$ своди на

$$\Delta = x^2 - 2(\alpha - p)x + \alpha^2$$

Да би он био потпун квадрат, треба да буде

$$(\alpha - p)^2 - \alpha^2 = 0$$

одакле је

$$\alpha = \frac{p}{2}$$

Према томе парабола има само једну жижу чије су координате

$$\alpha = \frac{p}{2}, \beta = 0$$

која се налази на осовини симетрије. Заменом нађених вредности у $\Delta$ добијамо

$$\Delta = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

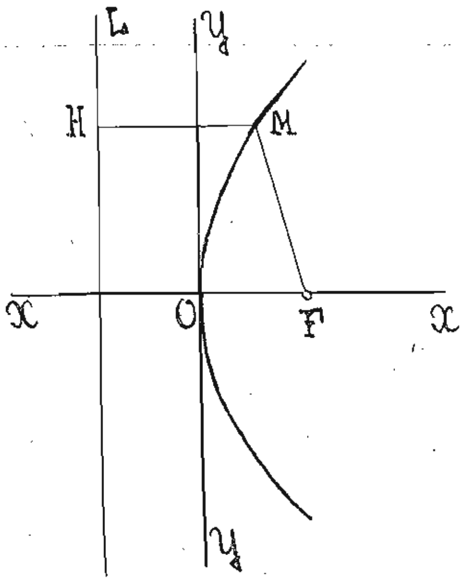
или

$$\Delta = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Према томе једначина директрисе је

$$x + \frac{p}{2} = 0$$

Директриса је дакле паралелна y-осовини.




Као што се види и жижа и директриса су с једне и друге стране темена и на подједнаком одстојању од темена.

На последку одстојање MF ма које тачке од жиже биће

$$MF = x + \frac{p}{2}$$

Пошто смо казали да је за параболу

$$R = 1$$

то је у исто време и

$$MH = x + \frac{p}{2}$$

# Одређивање кривих линија другог реда што задовољавају унапред дате услове.

Општа једначина свију кривих другог реда јесте као што знамо

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad 1)$$

Она садржи шест неодређених сачинилаца A, B, C, D, E и F али деобом једначине једним којим хоћемо од њих може се удесити да буде само пет таквих сачинилаца.

Одредити тачно једну специјалну криву линију другог реда значи одредити тачно вредности тих пет коефицијената који јој одговарају. Ако нису одређени сви коефицијенти већ само неки, онда једначина не представља једну специјалну криву линију, већ бесконачно много кривих линија. Одређивање коефицијената бива према условима за које се тражи да их крива линија задовољи. Такви услови могу бити веома разноврсни и ако их изразимо рачунски у облику једначине, добијају се т. зв. условне једначине које служе за одредбу једнога, два или више коефицијената A, B, C, D, E и F. Кад смо тако израчунали онолико сачинилаца колико допуштају условне једначине, онда заменом њиховом у једначини криве остаће толико мање неодређених сачинилаца.

Један дати геометријски услов који треба да задовољи тражена крива може се према његовој природи изразити помоћу једне, две, три и више једначина и колики буде број ових једначина, толико ће се моћи одредити неодређених сачинилаза у једначини криве. Ми ћемо претрести неколико најчешћих услова такве врсте.

Пре свега приметимо да услови такве врсте да крива буде елипса или хипербола не могу служити за одредбу ни једног коефицијента, јер они доводе само на неједначине

$$B^2-AC \gtrless 0$$

или не доводе ни до какве једначине. Напротив услов да крива буде парабола или равнострана хипербола може увек послужити да се одреди један од коефицијената $A, B, C$ јер услов да крива буде парабола доводи до једначине

$$B^2-AC=0$$

а услов да крива буде равнострана хипербола доводи до једначине

$$A+C=0$$

Пређимо сад неколико најчешћих услова.

I. Тражи се да крива пролази кроз једну дату тачку $M(a,b)$. Ако се изрази да крива пролази кроз ту тачку, добија се једначина

$$Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F=0$$

одакле можемо израчунати један који хоћемо коефицијенат или га можемо елиминисати. Тако би одузимањем имали

$$A(x^2-a^2)+2B(xy-ab)+C(y^2-b^2)+2D(x-a)+2E(y-b)=0$$

тако да остају још четри неодређена коефицијента.

II Тражи се да крива пролази кроз неколико датих тачака. Свака од тих тачака довела би до једне једначине као и мало час и према томе за одредбу сачинилаца имаћемо онолико линеарних једначина колико имамо тачака. А пошто у једначини криве имамо само пет неодређених коефицијената, то број условних једначина не сме бити већи од пет и према томе број унапред датих тачака кроз које крива има да пролази не сме бити већи од пет. Изузетка може бити само онда кад имамо пет једну од друге различитих једначина а остале се међу собом поклапају.

III. Тражи се да крива додирује једну дату праву $L$. Ако је

$$y = ax + b \qquad 2)$$

једначина дате праве $L$, апсцисе пресечних тачака криве и праве добијају се кад се у смени својом вредношћу 2) у једначини 1) па се та једначина реши по $x$. Да би права додиривала криву њене две пресечне тачке са кривом морају се поклопити што значи да поменута квадратна једначина мора имати своја два корена једнака. Ако је та квадратна једначина

$$Mx^2 + Nx + P = 0$$

услов за једнакост корена биће

$$N^2 - MP = 0$$

и из тога услова можемо израчунати један од сачинилаца.

IV. Тражи се да крива пилија додирује неколико правих.

Свака таква права довела би на малопређашњи начин до по једне једначине

$$N^2 - MP = 0$$

и према томе свака би дала могућност да се израчуна по један коефицијенат. Број оваких унапред датих правих може дакле највише бити пет изузимајући случај кад се неке од условних једначина поклапају.

V. Тражи се да једна унапред дата права $L$ има према траженој криви асимптотан правац тј. да је сече у једној бесконачно удаљеној тачки.

Ако је

$$y = ax + b$$

једначина праве $L$, сменивши у том вредношћу у једначини криве добићемо извесну квадратну једначину

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0$$

која даје апсцисе пресечних тачака праве и криве. Да би права секла криву у једној тачки у бесконачности ова једначина мора имати један корен бесконачно велики, а то ће бити ако је

$$M = 0$$

Из ове једначине може се израчунати један коефицијенат.

<u>VI</u>. Тражи се да једна дата права $L$ чија је једначина

$$y = ax + b$$

буде асимптота за тражену криву.

Знамо да стварне асимптоте може имати само хипербола као и то да свака асимптота сече хиперболу у двема бесконачно удаљеним тачкама. Према томе треба образовати горњу једначину

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0$$

и онда она мора имати два корена бесконачно велика. Да би то било, треба да буде

$$M = 0 \quad \text{и} \quad N = 0$$

и из тих двеју једначина можемо израчунати два неодређена сачиниоца. Према томе једна асимптота доводи до две условне једначине.

<u>VII</u>. Тражи се да крива има дату тачку $M(a,b)$ као центар.

Пошто координате центра задовољавају једначине

$$f'_x = 0 \quad \text{и} \quad f'_y = 0$$

т.ј. једначине

$$Aa + Bb + D = 0$$

$$Ba + Cb + E = 0$$

то из тих двеју једначина можемо израчунати два коефицијента. Према томе познавање центра доводи до две условне једначине.

VIII. Тражи се да крива има дату тачку $M(a,b)$ као жижу.

Ако се непозната једначина директрисе означи са
$$mx+ny+p=0$$
онда из теорије жижа знамо да се једначина може написати у следећем облику
$$(x-a)^2+(y-b)^2+\lambda(mx+ny+p)^2=0$$
или у сређеном облику
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(px+qy+r)^2=0 \qquad 3)$$
У једначини криве постоје још три неодређена коефицијента: $p, q$ и $r$. Према томе познавање жиже важи за две условне једначине.

Ако би хтели да баш одредимо који од сачинилаца $A, B, C, D, E$ и $F$ једначине криве написане у облику 1), требало би једначину 3) уредити по степенима од $x$ и $y$, па би упоређењем тако добијене једначине са једначином 1) имали пет једначина из којих би могли израчунати пет непознатих сачинилаца поново трију такође непознатих количина $p, q$ и $r$. Елиминацијом $p, q$ и $r$ из тих пет једначина добићемо две једначине у којима ће фигурисати пет непознатих сачинилаца једначине и према томе моћи ћемо израчунати два која хоћемо сачиниоца.

IX. Тражи се да крива има две дате тачке као жиже.

Са сваком од тих тачака ваља чинити оно што смо радили у VIII. Свака ће од њих дакле довести до две условне једначине и према томе обе жиже довешће до четири условних једначина. Из ове четири једначине можемо израчунати четири непозната коефицијента једначине криве.

X. Тражи се да крива има једну дату праву $\ell$ као директрису.

Ако је

$$y = ax + b$$

једначина праве $\ell$ и ако се са $\alpha$ и $\beta$ означе непознате координате жижа, једначина се криве, као што знамо, може написати у облику

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\lambda(y-ax-b)^2=0$$

где су $\alpha$, $\beta$ и $\lambda$ неодређене количине. Ако ову једначину уредимо по степенима од $x$ и $y$ па је упоредимо са једначином 1), имали би опет пет једначина које би изражавале пет коефицијената $A, B, C, D$ и $E$ помоћу три такове непознате количине $\alpha$, $\beta$ и $\lambda$. Елиминацијом ових трију непознатих $\alpha$, $\beta$ и $\lambda$ из тих пет једначина добили би две условне једначине из којих би могли израчунати два непозната сачиниоца једначине криве. Као што се види познавање једне директрисе доводи нас до две условне јед-

начине.

XI. Тражи се да крива има две дате праве као директрисе.

Са сваком од тих правих учинили би оно исто што смо мало пре учинили у X. Пошто свака директриса важи за две условне једначине, то ће две директрисе важити за четири условне једначине.

XII. Тражи се да крива има једну дату тачку $M(a,b)$ као жижу и једну дату праву

$$y-mx-n=0$$

као директрису.

Према теорији жижа и директриса једначина криве моћи ће се тада написати у облику

$$(x-a)^2+(y-b)^2+\lambda(y-mx-n)^2=0 \qquad 4)$$

тако да остаје свега један непознати коефицијенат $\lambda$. Ако би хтели израчунати баш саме коефицијенте

A, B, C, D, E и F једначине криве написане у облику 1), требало би једначину 4) уредити по степенима од x и y и упоредити је са једначином 1). Тим упоређењем добило би се пет једначина у којима би фигурисало λ. Елиминацијом λ имали би четири условне једначине из којих би израчунали четири непозната коефицијента.

Разноврсним комбинацијама ових услова имали би упутства за одређивање кривих линија другог реда и за друге сложеније случајеве. У таквим случајевима ваља у задатак уносити један по један од услова и за сваки од њих посебице одредити условну једначину до које он доводи. Кад сви услови буду тако уведени у рачун имаћемо као резултат неколико условних једначина из којих се може одредити онолико коефицијената непознате криве колико то у опште допуштају задати услови. Ако су услови такви да доводе до пет условних једначина, моћи ћемо одредити свих пет непознатих коефицијената и према томе тражена крива биће потпуно одређена. Такав ће случај н. пр. бити да крива пролази кроз пет датих тачака, или да додирује пет датих правих, или да пролази кроз две дате тачке и додирује три дате праве, или да пролази кроз једну дату тачку и има две дате праве као асимптоте, или да има две дате тачке као жиже и при том да пролази кроз једну дату тачку и т. д.

Ако је број условних једначина мањи од пет, онда коефицијенти неће бити сви прецизирани, већ ће само моћи неколико њих одредити помоћу других, тако да ће у једначини остати један или више непрецизираних коефицијената. Ови ће пратити улогу параметра у једначини и мењањем тих параметара имаћемо бесконачно много кривих линија другог реда који задовољавају задате услове. Тако н. пр. општа једначина свију кривих другог реда које имају за жижу тачку $M(1,2)$ а за директрису праву

$$y+3x-1=0$$

била би

$$(x-1)^2+(y-2)^2+\lambda(y+3x-1)=0$$

Приметимо само још то да при тражењу општих једначина кривих које задовољавају дате услове не морамо увек писати једначину криве у облику 1) па израчунавати коефицијенте $A, B, C, D, E$ и $F$; довољно је на ма који начин да смо успели написати једначину у таквом облику да у њој буде број непознатих параметара пет мање онај број који показује за колико условних једначина вреде скупа сви задати услови. Тако н. пр. знамо да једна жижа вреди за две условне једначине а тако исто и једна директриса. Према томе једна жижа и једна директриса важе скупа за четири условне једначине и према томе ако смо на ма који начин успели написати једначину дате криве која има дату тачку за жижу и дату праву за директрису а међутим садржи 5-4 промењљивих параметара, таква се једначина може сматрати као општа једначина свију кривих другог реда која задовољава поменуте услове. Тако за жижу $M(1,2)$ и директрису

$$y+3x-1=0$$

таква би једначина била

$$(x-1)^2+(y-2)^2+\lambda(y+3x-1)^2=0$$

а пошто она садржи један промењљив параметар $\lambda$, то се на основу оног што је мало пре казано ова једначина има сматрати као општа једначина свију кривих другог реда које имају тачку $M(1,2)$ као жижу а праву

$$y+3x-1=0$$

као директрису.

## Примери:

1° Наћи општу једначину свију кривих другог реда што пролазе кроз две дате тачке $M_1$ и $M_2$.

Ако се једна од тих тачака н. пр. $M_1$ узме за коорд. почетак, њене ће координате бити $(0,0)$. Нека су $(\alpha,\beta)$ координате друге тачке, тако да је друга тачка $M_2(\alpha,\beta)$. Ако изразимо да је општа једначина

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

задовољена координатама тачака $M_1$ и $M_2$, добијамо две једначине

$$F=0$$

$$A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F=0$$

Из ове друге једначине можемо израчунати који хоћемо коефицијенат помоћу осталих и онда заменом тога коефицијента као и заменом $F=0$ имаћемо једначину у којој ће фигурисати још три непозната коефицијента – то ће бити тражена једначина.

2° Одредити општу једначину свију кривих другог реда које додирују једну праву $L$ у датој тачки $M$.

Ако тачку $M$ узмемо за коорд. почетак а праву $L$ за $x$-осовину, онда, пошто крива

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

пролази кроз почетак, мора бити

$$F=0$$

а пошто права $L$ чија је једначина

$$y=0$$

додирује криву, то једначина

$$Ax^2+2Dx=0$$

која даје апсцисе пресечних тачака те праве са кривом мора имати свој два корена једнака, што ће бити ако је

$$D=0$$

Према томе тражена једначина биће

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Ey=0$$

коју можемо написати у облику

$$x^2+\mu xy+\nu y^2+py=0 \qquad a)$$

Може се тражити да крива додирује још једну дату праву. Ако се са

$$y=ax+b$$

означи једначина такве праве, где су a и b дати, онда би апсцисе пресечних тачака били корени једначине

$$x^2+\mu(ax+b)x+\nu(ax+b)^2+p(ax+b)=0$$

или

$$(1+\mu a+\nu a^2)x^2+(\mu b+2ab\nu+ap)x+(\nu b^2+pb)=0$$

Пошто корени те једначине морају бити међу собом једнаки, то мора бити

$$(\mu b+2ab\nu+ap)^2-4(1+\mu a+\nu a^2)(\nu b^2+pb)=0$$

одавде се може израчунати један који хоћемо сачинилац $\mu$, $\nu$ и $p$ потому остала два. Заменом тако добивених сачинилаца у горњој једначини a) имали би тражену општу једначину.

Ако би се тражило да додир буде са још више датих правих, за сваку од њих требало би написати квадратну једначину која даје апсцисе пресечних тачака праве и криве и изразити да таква једначина има своја два корена једнака. Из тако добивених условних једначина израчунало би се онолико коефицијената колико буде било датих условних једначина.

3° Нађи општу једначину свију кривих другог реда које имају y-осовину као асимптоту.

Пошто је једначина y-осовине

$$x=0$$

то ће ординате пресечних тачака ове праве и криве бити корени једначине

$$Cy^2+2Ey+F=0$$

да би осовина била асимптота, морају оба корена бити бесконачна т.ј.

$$C=0 \text{ и } E=0$$

тражена општа једначина биће дакле

$$Ax^2+2Bxy+2Dx+F=0$$

која се може написати и у облику

$$x^2+\lambda xy+\mu x+\nu=0$$

4° Наћи општу једначину свију кривих за које су обе координатне осовине асимптоте.

Ординате пресечних тачака са y-осовином јесу корени једначине

$$Cy^2+2Ey+F=0$$

а апсцисе пресечних тачака са x-осовином јесу корени једначине

$$Ax^2+2Dx+F=0$$

Свака од ових двеју једначина мора имати по два бесконачна корена, што значи да мора бити

$$C=0 \quad E=0 \quad A=0 \quad \text{и} \quad D=0$$

тражена општа једначина биће дакле

$$2Bxy+F=0$$

или

$$xy+\lambda=0$$

5° Наћи општу једначину свију кривих које имају коорд. почетак као центар.

Видели смо да онда недостају чланови са x и y; према томе тражена општа једначина биће облика

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+F=0$$

која се н. пр. може написати у облику

$$x^2+\lambda xy+\mu y^2+\nu=0$$

6° Наћи општу једначину свију кривих које имају једну дату тачку као центар и једну дату праву као асимптоту.

Пошто асимптота пролази кроз центар, то ако центар узмемо за почетак, можемо асимптоту узети за једну од коорд. осовина н. пр. за x-осовину. Пошто је центар у почетку, то једначина криве мора бити облика

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+F=0$$

Пресечне тачке ове криве са x-осовином јесу корени једначине

$$Ax^2+F=0$$

и да би оба корена била бесконачна треба да буде

$$A=0$$

Према томе тражена општа једначина биће

$$2Bxy+Cy^2+F=0$$

која се може написати у облику

$$xy+\lambda y^2+\mu=0$$

7° Наћи општу једначину кривих које имају једну тачку као жижу и једну праву као асимптоту.

Ако узмемо жижу за почетак, општа једначина кривих биће облика

$$x^2+y^2+(px+qy+r)^2=0 \qquad 5)$$

Ако се једначина асимптоте означи са

$$y=ax+b$$

апсцисе пресечних тачака биће корени једначине

$$x^2+(ax+b)^2+(px+aqx+bq+r)^2=0$$

или

$$[1+a^2+(1+aq)^2]x^2+2[ab+(p+aq)(r+bq)]x+$$
$$+[b^2+(r+bq)^2]=0$$

да би права била асимптота, морају оба корена бити бесконачна, па даље

$$1+a^2+(p+qa)^2=0$$
$$ab+(p+aq)(r+bq)=0$$

Из ових једначина можемо израчунати p, q и r помоћу једног од њих и онда заменом у једначини 5) имали би тражену општу једначину.

8° Одредити ону криву линију другог степена која има једну дату тачку за жижу, једну дату праву за директрису и поред то-па пролази кроз једну дату тачку М.

Узмимо жижу за почетак, x-осовину тако да буде управна на директриси, па ће онда једначина директрисе бити облика

$$x-l=0$$

Тражена општа једначина биће облика

$$x^2+y^2-\lambda(x-l)^2=0$$

Ако су сад $\alpha$ и $\beta$ координате тачке М кроз коју крива треба да пролази, имаћемо још условну једначину

$$\alpha^2+\beta^2-\lambda(\alpha-l)^2=0$$

одакле

$$\lambda=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha-l)^2}$$

и заменом те вредности у горњој једначини криве имаћемо тражену једначину криве.

9° Наћи општу једначину свију кривих које имају дату тачку као жижу и које додирују дату праву $L$ у једној датој тачки М.

Ако узмемо жижу за почетак општа једначина биће облика

$$x^2+y^2-(px+qy+r)^2=0 \qquad 6)$$

Узмимо x-осовину тако да је управна на дату праву; тада ће једначина праве бити

$$x-l=0$$

Ординате пресечних тачака праве и криве биће корени једначине

$$l^2+y^2-(pl+qy+r)^2=0$$

или

$$(1-q^2)y^2-2plqy+(l^2-p^2l^2-r^2)=0 \qquad 7)$$

Пошто се тачка М налази на правој $L$ то ће њене координате бити $(l,h)$ где је $h$ дато и пошто $y=h$ мора задовољити једначину 7), то добијамо условну једначину

$$(1-q^2)h^2-2plqh+(l^2-p^2l^2-r^2)=0 \qquad 8)$$

или

$$p^2l^2q^2-l^2+p^2l^2+r^2+p^2l^2-p^2l^2q^2-r^2q^2=0$$

или

$$l^2(p^2+q^2-1)-r^2q^2=0 \qquad 9)$$

Из једначине 8) и 9) можемо израчунати две од количина $q$, $p$ и $r$ помоку треће и онда заменом у б) имамо тражену једначину.

## Општа једначина кривих линија другог реда које имају две заједничке жиже.

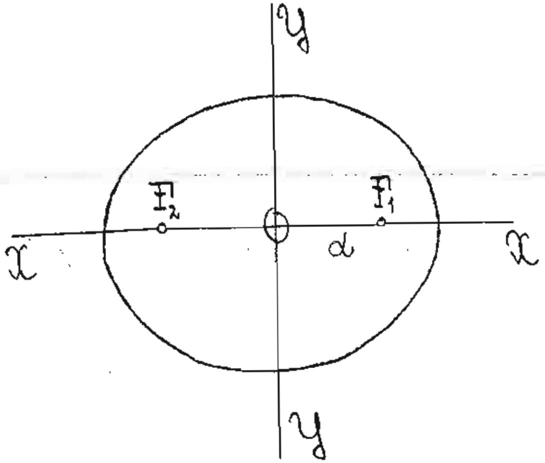
Такве криве линије називају се конфокалним кривим линијама другог реда. Очевидно је да такве криве могу бити елипсе и хиперболе, пошто параболе имају само једну жижу. Видели смо да познавање једне жиже вреди за два услова т.ј. да једна жижа даје начина да се израчунају два коефицијента у једначини. Према томе познавање двеју жижа вреди за четири условне једначине тако да само један коефицијенат једначине остаје неодређен. Према томе општа једначина конфокалних кривих другог реда мора садржати у себи само један произвољан параметар. До такве једначине можемо најлакше доћи на овај начин:

Видели смо у теорији жижа елипсе, да ако се са $a$ и $b$ означе елипсине полуосе, тако да је

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

једначина елипсе, апсцисе двеју жижа $F_1$ и $F_2$ дате су обрасцем

$$\alpha=\pm\sqrt{a^2-b^2}$$




претпостављајући да је

$$a>b$$

Отуда

$$\alpha^2=a^2-b^2$$

или

$$b^2=a^2-\alpha^2$$

према томе једначина елипсе постаје

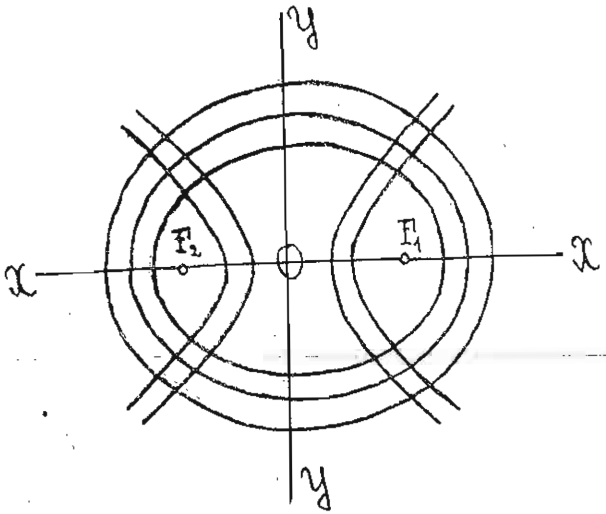
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\alpha^2}-1=0$$

У тој једначини $\alpha$ је стално, пошто $2\alpha$ представља растојање жижа $F_1$ и $F_2$ а међутим све су утврђене. Међутим $a$ се може по вољи мењати. Али из самог начина на који смо дошли до једначине очевидно је да ће све криве линије које одговарају разним вредностима $a$ имати утврђене жиже $F_1$ и $F_2$. Ако дакле сменимо $a^2$ једним произвољним параметром $\lambda^2$ једначина постаје

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-\alpha^2}-1=0 \qquad 1)$$

и она ће представљати бескрајно много кривих линија другог реда које имају исте жиже, а пошто та једначина садржи један промењив параметар $\lambda$, то ће према ономе што је мало пре казано она представљати општу једначину конфокалних линија другог реда. Једначина 1) према разним вредностима које будемо давали параметру $\lambda$ може представљати у исто време и конфокалне елипсе и конфокалне хиперболе. Тако док $\lambda^2$ варира од 0 до $\alpha^2$, израз

$\lambda^2-\alpha^2$ је негативан и једначина 1) представља конфокалне хиперболе; напротив док $\lambda^2$ варира од $\alpha^2$ до $+\infty$, израз $\lambda^2-\alpha^2$ је позитиван и једначина 1) представља конфокалне елипсе. Све тако добивене и елипсе и хиперболе имаће тако утврђене жиже $F_1$ и $F_2$ чије је растојање $2\alpha$. Очевидно је из слике и из једначине 1) да све конфокалне криве другог реда имају један исти центар.




Помоћу опште једначине 1) конфокалних кривих другог реда могу се решавати разноврсни задаци као н. пр. ови:

1° Наћи једначину оне криве другог реда која има две дате тачке као жиже и пролази кроз једну трећу унапред дату тачку $M$.

Ако праву $F_1F_2$ која спаја дате жиже узмемо за $x$-осовину а у праву што полови $F_1F_2$ за $y$-осовину, па стално одстојање $F_1F_2$ означимо са $2\alpha$, општа једначина кривих што имају $F_1$ и $F_2$ као жиже биће једначина 1). Ако се координате тачке $M$ означе са $x_0$ и $y_0$ и ако изразимо да се тачка $M$ налази на кривој 1) што даје условну једначину

$$\frac{x_0^2}{\lambda^2}+\frac{y_0^2}{\lambda^2-\alpha^2}-1=0$$

можемо из те једначине израчунати параметар $\lambda$ и онда заменом у једначини 1) имаћемо једначину тражене криве у којој ће сви коефицијенти бити прецизирани.

2° Наћи једначину оне криве другог реда која има две дате тачке као жиже и додирује дату праву $L$.

Ваља опет поћи од конфокалних кривих и изразити да права $L$, чија једначина нека је

$$y = mx + n$$

где су $m$ и $n$ унапред дати, додирује криву. То ће бити ако

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{(mx+n)^2}{\lambda^2-\alpha^2} - 1 = 0$$

има своја два корена једнака. Ако то изразимо рачунски добићемо једну једначину из које можемо израчунати $\lambda^2$ и онда заменом те вредности $\lambda$ у једначини 1) имаћемо једначину тражене криве у којој ће сви коефицијенти бити прецизирани.

3° Наћи једначину оне криве другог реда која има две дате тачке као жиже и један дат правац као асимптотски правац.

Ваља опет поћи од једначине 1) и изразити да једна права

$$y = mx + n$$

где су $m$ и $n$ унапред дати, сече криву 1) у једној бесконачно удаљеној тачки. Условна једначина биће она кад се изрази да

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{(mx+n)^2}{\lambda^2-\alpha^2} - 1 = 0$$

у облику

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{m^2}{\lambda^2-\alpha^2}\right)x^2 + \frac{2mn}{\lambda^2-\alpha^2}x + \frac{m^2+\alpha^2-\lambda^2}{\lambda^2-\alpha^2} = 0$$

има један корен бесконачан т.ј.

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{m^2}{\lambda^2-\alpha^2} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \alpha^2 + m^2\lambda^2 = 0$$

одакле је

$$\lambda^2 = \frac{\alpha^2}{1+m^2}$$

Заменом те вредности у једначини 1) добија се тражена једначина криве.

Конфокалне криве другог реда имају једну важну особину због које се често употребљују. Та се особина састоји у овоме: Кроз једну ма коју тачку $M$ у равни пролазе по две конфокалне криве другог реда од којих је једна елипса а друга хипербола и које се у тачки $M$ секу под правим углом. Да би то доказали нека су $(x_0, y_0)$ координате тачке $M$. Покушајмо одредити параметар $\lambda$ тако да крива линија 1) пролази кроз тачку $M$. То ће бити ако је задовољена једначина

$$\frac{x_0^2}{\lambda^2} + \frac{y_0^2}{\lambda^2-\alpha^2} - 1 = 0$$

или, ако ставимо

$$\lambda^2 = t$$

ако је задовољена једначина

$$x_0^2(t-\alpha^2) + y_0^2 t - t(t-\alpha^2) = 0$$

или

$$t^2 - (x_0^2+y_0^2+\alpha^2)t + \alpha^2 x_0^2 = 0 \qquad 2)$$

Лако се уверити да једначина 2) решена по $t$ има увек два корена стварна и неједнака. Да би се уверили, приметимо да једначина 2) није ништа друго до једначина 1) кад се стави

$$\lambda^2 = t$$

т.ј.

$$\frac{x_0^2}{t} + \frac{y_0^2}{t-\alpha^2} - 1 = 0$$

Ако у овој једначини сменимо овај низ вредности

$$t=\varepsilon \qquad t=+\alpha^2-\varepsilon \qquad t=+\alpha^2+\varepsilon \qquad t=+\infty$$

где је $\varepsilon$ врло мала количина, имаћемо овај низ знакова

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon & \alpha^2-\varepsilon & \alpha^2+\varepsilon & +\infty \\ + & - & + & - \end{array}$$

Ово показује да једначина има један корен између $0$ и $\alpha^2$ и један корен између $\alpha^2$ и $+\infty$, што показује да су оба корена стварна, неједнака и позитивна. Ако се онај корен што лежи између $0$ и $\alpha^2$ означи са $\lambda$, а онај корен што лежи између $\alpha^2$ и $+\infty$ означи са $\mu$, првом корену одговара хипербола

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2-\alpha^2} - 1 = 0 \qquad 3)$$

пошто је

$$\lambda^2-\alpha^2<0$$

другом корену одговара елипса

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2-\alpha^2} - 1 = 0 \qquad 4)$$

пошто је

$$\mu^2-\alpha^2>0$$

Дакле кроз тачку $M$ пролази по једна стварна елипса и једна стварна хипербола.

Примедба: Међутим у диференцијалном рачуну доказује се да се ова елипса и ова хипербола увек секу под правим углом. Према томе свака тачка M у простору може се сматрати као утврђена кад се знају параметри $\lambda^2$ и $\mu^2$ који јој одговарају. Знајући вредности тих параметара и фокално растојање, може се одмах одредити конфокална елипса и хипербола и тачка M која се налази у њиховом пресеку. Параметри $\lambda$ и $\mu$ називају се <u>елиптичким координатама</u> тачке M и ове координате играју врло важну улогу у извесним механичким теоријама а тако исто и у физичким.

Остаје нам још да видимо како се обичне правоугле координате трансформишу у елиптичке и обрнуто. Пре свега знајући x и y једне тачке M и фокално растојање $2\alpha$, $\lambda$ и $\mu$ се одређују решењем квадратне једначине

$$t^2-(x^2+y^2+\alpha^2)t+\alpha^2x^2=0$$

по t. Мањи корен те једначине даје координату $\lambda$ а већи корен координату $\mu$. Обрнути задатак тј. одредити координате x и y кад се знају $\lambda$ и $\mu$ решава се овако: Пођимо од једначине

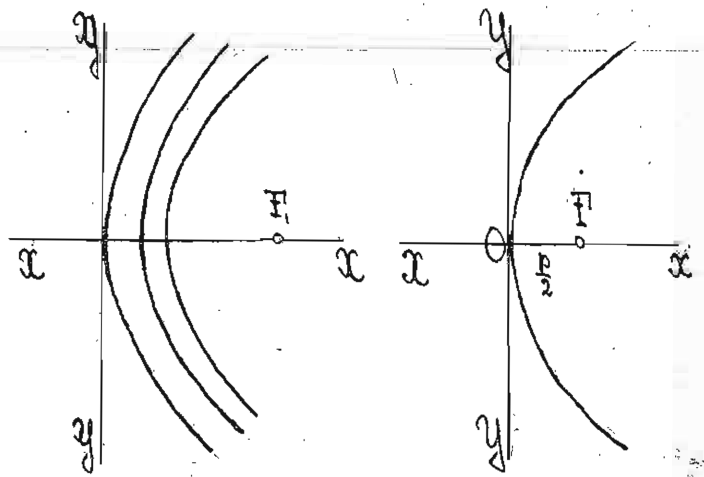
$$\frac{x^2}{a-t}+\frac{y^2}{b-t}-1=-\frac{(t-\lambda)(t-\mu)}{(a-t)(b-t)}$$

Множећи је са $a-\lambda$ и $b-\lambda$ и стављајући $t=\lambda$ односно $t=\mu$, добија се

$$x^2=\frac{(a-\lambda)(a-\mu)}{a-b}\qquad y^2=\frac{(b-\lambda)(b-\mu)}{b-a}$$

## Конфокалне параболе

За две параболе каже се да су конфокалне ако имају једну исту жижу и исту осовину. Потражимо општу једначину свију конфокалних парабола.




Кад би почетак био у темену а x-осовина пролазила кроз теме и жижу, једначина би параболе била

$$y^2 = 2px$$

Преместимо почетак у заједничку жижу. Пошто је одстојање

$$OF = \frac{p}{2}$$

то пренети почетак у F значи ставити

$$x = x_1 + \frac{p}{2}$$

чиме једначина параболе постаје

$$y^2 = 2px_1 + p^2$$

У тој једначини има само један променљиви параметар p; његовом варијацијом добијамо све могуће параболе које имају заједничко теме F као жижу. Једначина

$$y^2 = 2\lambda x + \lambda^2$$

где је $\lambda$ променљив параметар може се сматрати као општа једначина конфокалних парабола. Помоћу ње се могу као и код елипсе и хиперболе решавати разноврсни задаци као н. пр. ови:

1° Наћи једначину оне параболе која има дату тачку F као жижу а која додирује дату праву

$$y = mx + n$$

Узевши жижу као почетак треба изразити да права

$$y = mx + n$$

додирује криву

$$y^2 = 2\lambda x + \lambda^2$$

т.ј. да квадратна једначина

$$(mx+n)^2 = 2\lambda x + \lambda^2$$

или

$$m^2x^2 + 2(mn-\lambda)x + n^2 - \lambda^2 = 0$$

има своја два корена једнака. Услов за то биће

$$(mn-\lambda)^2 - m^2(n^2-\lambda^2) = 0$$

или

$$m^2n^2 - 2mn\lambda + \lambda^2 - m^2n^2 + m^2\lambda^2 = 0$$

или

$$-2mn\lambda + (1+m^2)\lambda^2 = 0$$

одакле је

$$\lambda = \frac{2mn}{1+m^2}$$

Заменом те вредности у једначини

$$y^2 = 2\lambda x + \lambda^2$$

имаћемо тражену једначину параболе.

# Поларне једначине кривих другог реда

Ако у општој једначини другог реда

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

ставимо

$$x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\theta$$

она постаје

$$(A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta)\rho^2+$$
$$+2(D\cos\theta+E\sin\theta)\rho+F=0$$

Према томе у најопштијем случају т.ј. кад се за пол узме једна произвољна тачка у равни а тако исто и произвољан правац поларне осовине поларна једначина једне криве другог реда другог је степена по $\rho$.

Међутим подеснијим избором тачке која се узима за пол и правца поларне осовине та се једначина може упростити тако да постане првог степена по $\rho$. То се може учинити на један од ова два начина:

## I Начин:

Узевши за пол једну ма коју тачку $M$ на кривој. Да би се тачка $M$ узела у правоуглом систему за почетак, имали би у горњој једначини да је

$$F=0$$

и према томе поларна једначина криве биће облика

$$(A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)\rho^2+$$
$$+2(D\cos\theta+E\sin\theta)\rho=0$$

и ако је скратимо са $\rho$ и решимо по $\rho$ добићемо

$$\rho=-\frac{2(D\cos\theta+E\sin\theta)}{A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta}$$

– дакле је првог степена по $\rho$.

## II Начин:

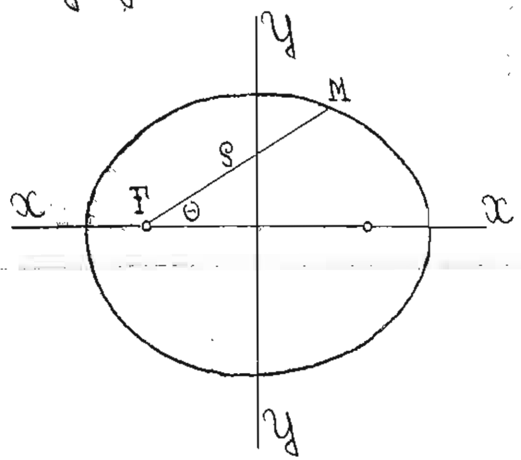
ако се једна од жижа криве узме за пол. Разликујмо ова три случаја према томе да ли је крива елипса, хипербола или парабола.

1° Елипса. Видели смо у теорији жижа да се потег $\rho$ једне тачке $M(x,y)$ може изразити помоћу $x$-а једначином

$$\rho = a + ex$$

где је $a$ велика полуоса а $e$ ексцентрицитет елипсе чија је вредност

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$




Пренесимо координатни почетак у жижу $F$; између старе апсцисе $x$ и нове $x_1$ постојаће однос

$$x = x_1 - d$$

где је

$$d = OF = \sqrt{a^2 - b^2}$$

према томе ће бити

$$\rho = a + e(x_1 - d)$$

или

$$\rho = (a - ed) + ex_1$$

Ставимо сад

$$x_1 = \rho \cos\theta$$

последња једначина постаје

$$\rho = (a - ed) + e \cdot \rho\cos\theta$$

одакле је

$$\rho = \frac{a - ed}{1 - e\cos\theta}$$

а пошто је

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

то је

$$a - ed = \frac{b^2}{a}$$

па даље ако се стави

$$p = \frac{b^2}{a}$$

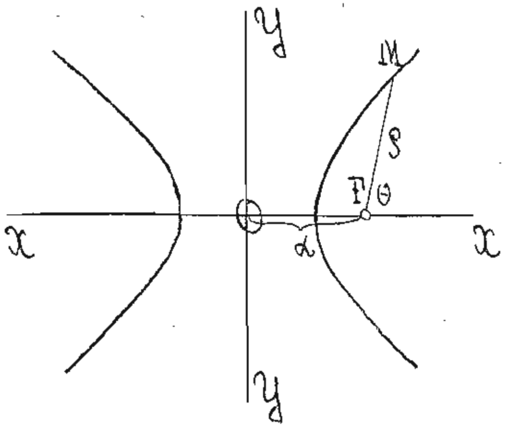
једначина елипсе постаје

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

2° Хипербола. Видели смо из теорије жижа да се потег $\rho$ једне тачке $M(x,y)$ добија помоћу обрасца

$$\rho = ex - a$$

Пренесимо почетак $O$ у $F$; између ста-




ре апсцисе $x$ и нове $x_1$ постојаће однос

$$x = x_1 + \alpha$$

где је

$$\alpha = \sqrt{a^2+b^2}$$

па је

$$\rho = e(x_1+\alpha) - a = ex_1 + (e\alpha - a)$$

ако сад сменимо

$$x_1 = \rho\cos\theta$$

последња једначина постаје

$$\rho = e\rho\cos\theta + (e\alpha - a)$$

одакле је

$$\rho = \frac{e\alpha - a}{1 - e\cos\theta}$$

али пошто је

$$\alpha = \sqrt{a^2+b^2} \qquad e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

то је

$$e\alpha - a = \frac{a^2+b^2}{a} - a = \frac{b^2}{a}$$

и ако ставимо

$$p = \frac{b^2}{a}$$

то је

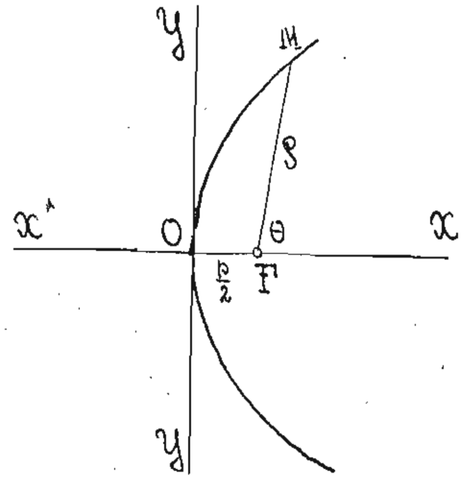
$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

одакле добијамо исту једначину ко-

о код елипсе.

3° <u>Парабола</u>. Знамо из теорије жижа код параболе, да се потег $\rho$ ма које тачке $M$ параболе може изразити помоћу апсцисе те тачке по обрасцу

$$\rho = x + \frac{p}{2}$$




Ако почетак преместимо у $F$, између старе апсцисе $x$ и нове $x_1$ постојаће однос

$$x = x_1 + \frac{p}{2}$$

Према томе је

$$\rho = x_1 + p$$

ако сад ставимо

$$x_1 = \rho\cos\theta$$

добија се

$$\rho = \rho\cos\theta + p$$

одакле је

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}$$

Из свега овог види се: ако се једна од жижа узме за пол а фокал-

на осовина односно осовина симетри-
је за поларну осовину, и елипса и
хипербола и парабола добијају је-
дан исти облик

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}$$

где су $p$ и $e$ две сталне количине што

$$p=\frac{b^2}{a}$$

за елипсу и хиперболу, а $p$ равно
параметру параболе у случају па-
раболе. Стална количина $e$ није ни-
шта друго до ексцентрицитет у
случају елипсе и хиперболе, који је у
случају елипсе мањи од јединице и
има за вредност

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

а у случају хиперболе већи од једи-
нице и има за вредност

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

и најпосле у случају параболе је

$$e=1$$

Једначина

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}$$

назива се заједничка фокална јед-
начина свију кривих другог реда и
она се нарочито употребљује у не-
беској механици.

# I Случај

Нека раван $P$ сече купу по елипси.

У добијеним деловима купе упишимо лопту $O_1$ која додирује раван $P$ у тачки $F_1$ и лопту $O_2$ која додирује раван $P$ у тачки $F_2$.

На елипси узмимо произвољну тачку $M$ и повуцимо купину страну $SM$ која додирује лопте у тачкама $A$ и $B$.

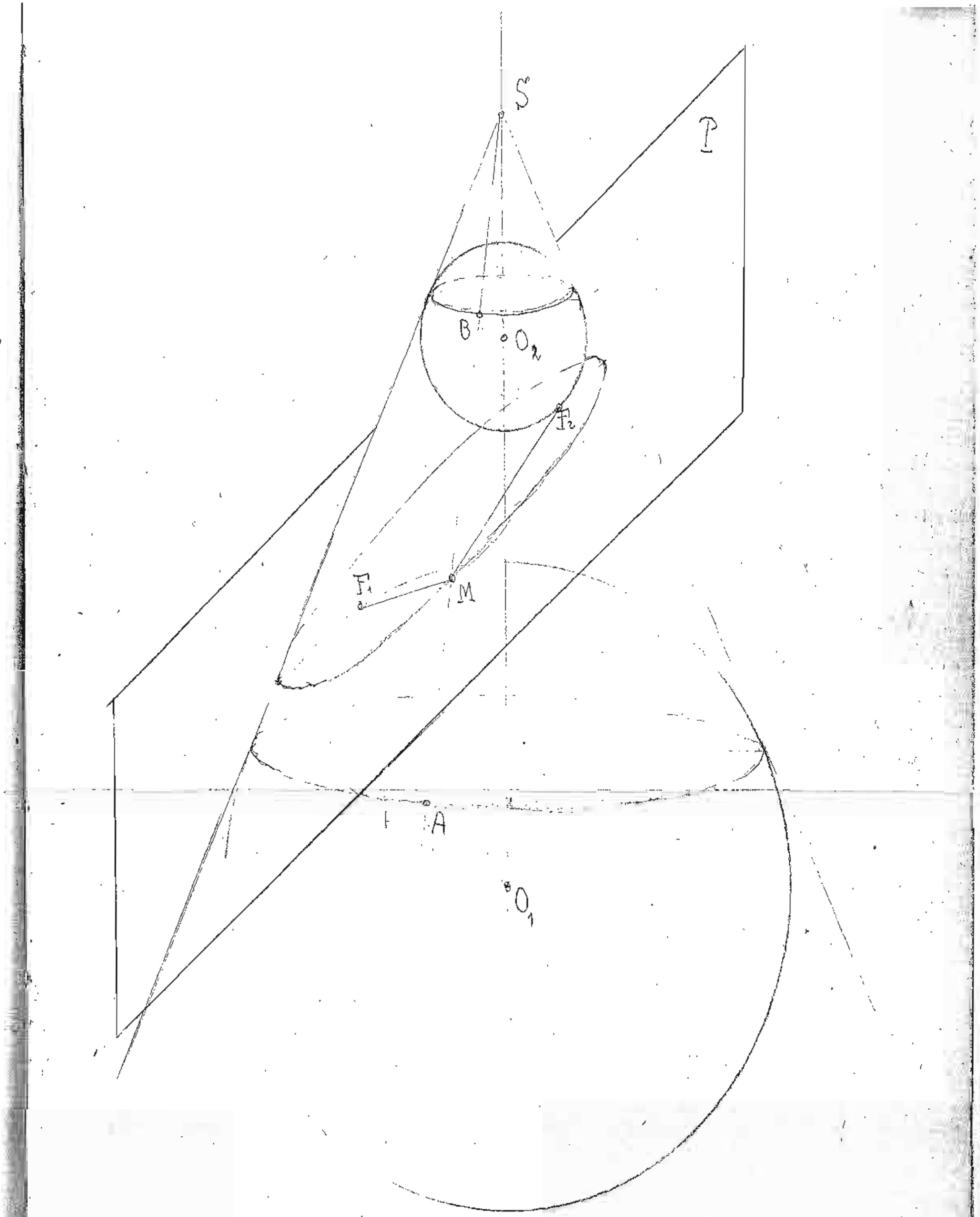
Како су све дирке повучене из неке тачке ван неке лопте на ту лопту једнаке то је

$$MF_1 = MA$$
$$MF_2 = MB$$

а одатле

$$MF_1 + MF_2 = MA + MB = AB = \text{const.}$$

а одатле особина елипсе: Збир отстојања сваке елипсине тачке од две сталне тачке је сталан број.



# II Случај

Нека раван $P$ сече купу по хиперболи.

Упишимо лопту $O_1$ која додирује раван $P$ у $F_1$ и лопту $O_2$ која додирује раван $P$ у $F_2$.

Узмимо на хиперболи произвољну тачку $M$ и повуцимо одговарајућу страну купину $MS$ која додирује уписане лопте у тачкама $A$ и $B$.

По истом правилу као и у претх. случају биће

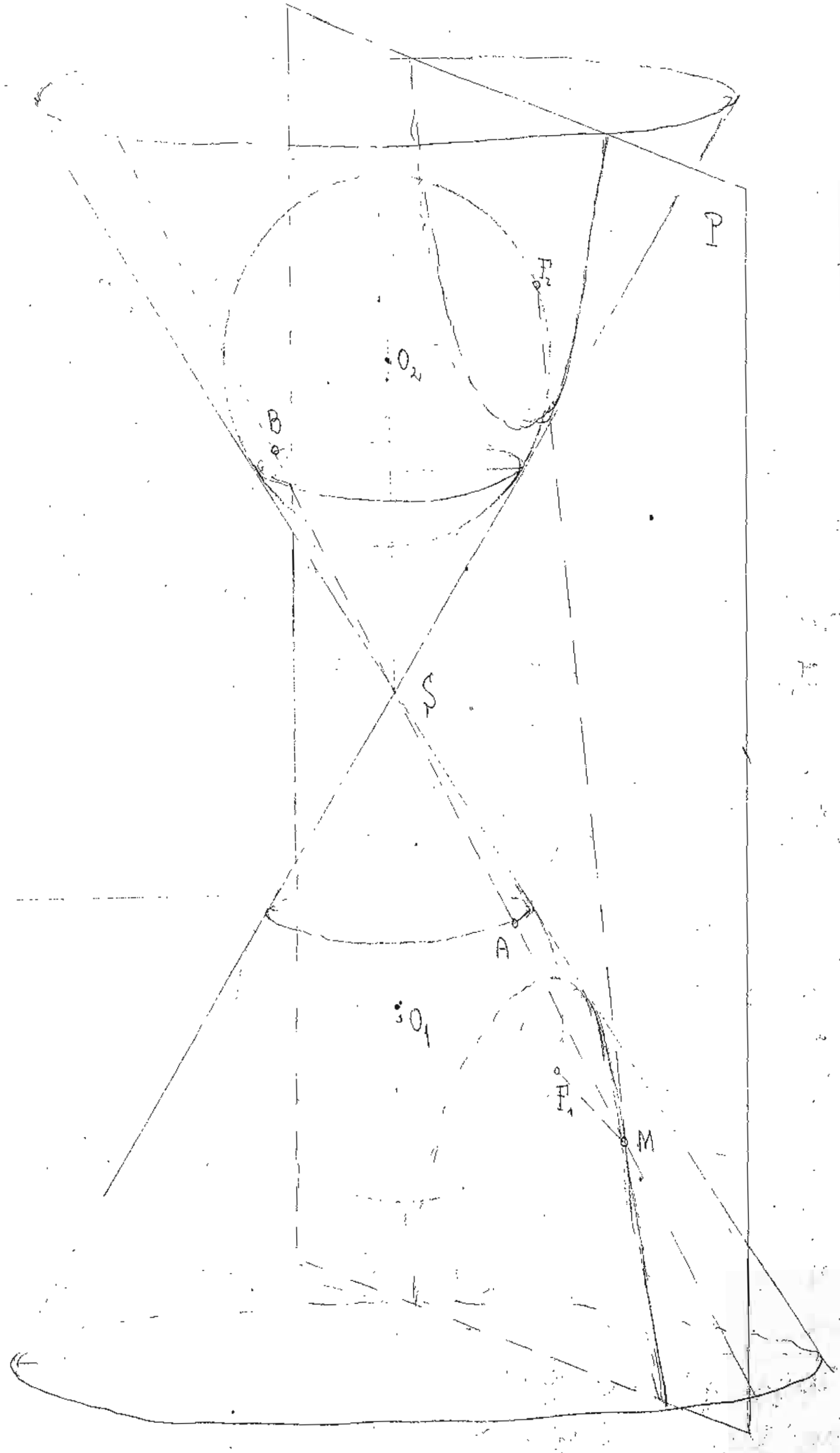
$$MF_2 = MB$$

$$MF_1 = MA$$

Ако одузмемо ове једначине добијамо

$$MF_2 - MF_1 = MB - MA = AB = const.$$

Отуда особина хиперболе: Разлика отстојања сваке хиперболине тачке од две сталне тачке је сталан број.



## III Случај:

Раван $P$ сече купу паралелно са изводницом $SM$ по параболи. Она мора бити још и нормална на осовински пресек $SMN$ ; зато је $CD$ (пресек равни $P$ и $SMN$) паралелан са $SM$. Упишимо лопту $O$. Раван $Q$ додирног круга такође је нормална на $SMN$. Зато је $EF$ (пресек равни $P$ и $Q$) нормална на $SMN$ и на $CD$. Уписана лопта додирује раван $P$ у $F$. На параболи узмимо произвољну тачку $M'$ ; тангенте из те тачке на лопту $O$ једнаке су ; отуда

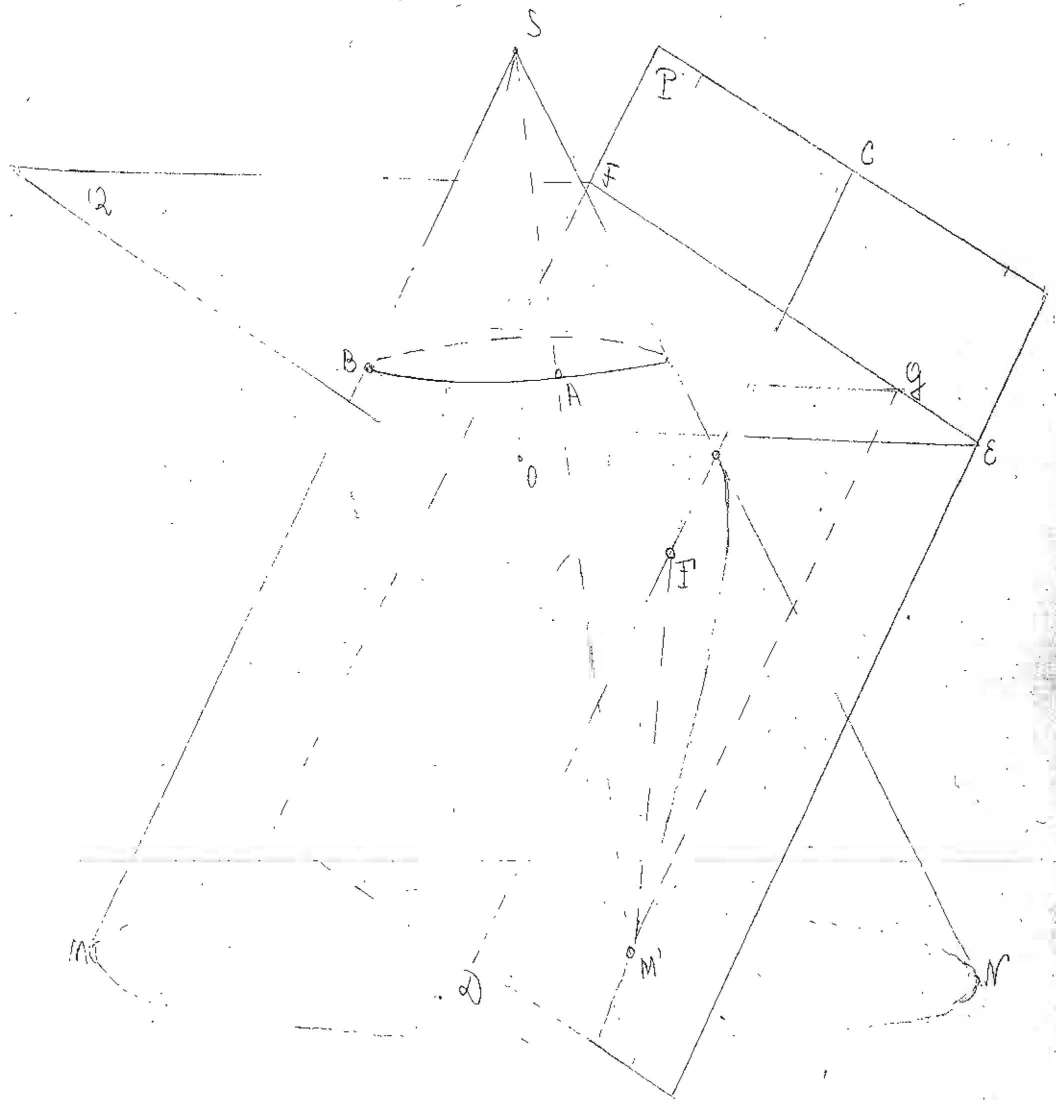
$$M'F = M'A. \quad 1)$$

Међутим $M'G$ узето нормално на $EF$ паралелна је са $CD$ па и са $SM$. $SM$ се налази дакле у оној равни у којој су $SM'$ и $AG$ па ће и пресек $B$ између $AG$ и $SM$ бити она тачка у којој $AG$ по други пут сече додирни круг. Пошто је $SB \parallel M'G$ а углови код $A$ једнаки као унакрсни то је $\Delta BSA \sim \Delta AM'G$ а пошто је у првом троуглу $SB = SA$ то ће у другом бити

$$M'G = M'A \quad 2)$$

Из 1) и 2) следује $M'F = M'G$

одакле особина параболе: Свака њена тачка је подједнако удаљена од једне сталне тачке и од једне сталне праве.



1. $x^2-4xy+8y^2+3x-2y+1=0$

$\Delta=-4<0$ врста елипсе.

$$x^2-(4y-3)x+(8y^2-2y+1)=0$$

$$x=\frac{4y-3\pm\sqrt{(4y-3)^2-4(8y^2-2y+1)}}{2}$$

$$(4y-3)^2-4(8y^2-2y+1)=0$$

$$16y^2+16y-5=0$$

$$y=\frac{-8\pm\sqrt{144}}{16}$$

Пошто су ови корени стварни и различити, једначина представља <u>праву елипсу</u>.

$$\left.\begin{aligned} F'_{(x)}&=2x-4y+3=0\\ F'_{(y)}&=-4x+16y-2=0 \end{aligned}\right\}$$

$$x=-\frac{5}{2}\quad y=-\frac{1}{2}$$

Центар елипсе је тачка

$$\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda^2+\frac{7}{2}\lambda-1=0$$

$$2\lambda^2+7\lambda-2=0$$

$$\lambda=\frac{-7\pm\sqrt{65}}{2}$$

Коефицијенти праваца осовина су:

$$\lambda_1 = \frac{-7+\sqrt{65}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-7-\sqrt{65}}{2}$$

а једначине осовина:

$$(2x-4y+3) + \frac{-7+\sqrt{65}}{2}(-4x+16y-2) = 0$$

$$(2x-4y+3) + \frac{-7-\sqrt{65}}{2}(-4x+16y-2) = 0$$

$$H = Da + Eb + F = -\frac{9}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} M+N &= A+C = 9 \\ M-N &= \sqrt{4B^2+(A-C)^2} = -\sqrt{65} \end{aligned}\right\}$$

$$M = \frac{9-\sqrt{65}}{2} \qquad N = \frac{9+\sqrt{65}}{2}$$

Редукована једначина је:

$$\frac{9-\sqrt{65}}{2}x^2 + \frac{9+\sqrt{65}}{2}y^2 - \frac{9}{4} = 0$$

2. $x^2 + y^2 + 8x + 12y + 43 = 0$

$\Delta = -1 < 0$ врста елипсе

Како је $B=0$ $A=C$ а

$r = 3$

то једначина представља круг.

Центар је

$$a = -\frac{D}{2} = -4 \qquad b = -\frac{E}{2} = -6$$

па је прва једначина:

$$(x+4)^2 + (y+6)^2 = 9$$

Како је

$$H = -9$$

$$\left.\begin{aligned} M+N &= 2 \\ M-N &= 0 \end{aligned}\right\} \quad M=1 \quad N=1$$

то је редукована једначина

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

3. $x^2+y^2-6x+2y+10=0$

$\Delta=-1<0$ врста елипсе.

$$x^2-6x+(y^2+2y+10)=0$$
$$x=3\pm\sqrt{9-(y^2+2y+10)}$$
$$9-(y^2+2y+10)=0$$
$$y^2+2y+1=0$$
$$y=-1\pm\sqrt{0}$$

- Пошто су корени стварни и једнаки, једначина представља две имагинарне праве које се секу у једној реалној тачки. Како је

$$\left.\begin{aligned}F'_{(x)}&=2x-6\\ F'_{(y)}&=2y+2\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}x&=3\\ y&=-1\end{aligned}$$

па тачка је

$$(3,-1)$$

Једначина се може писати

$$(x-3)^2+(y+1)^2=0$$

а њен редукован облик је

$$x^2+y^2=0$$

4. $x^2-2xy+2y^2+3x-3y+4=0$

$\Delta=-1<0$ врста елипсе.

$$x^2-(2y-3)x+(2y^2-3y+4)=0$$
$$y=\frac{2y-3\pm\sqrt{(2y-3)^2-4(2y^2-3y+4)}}{2}$$
$$(2y-3)^2-4(2y^2-3y+4)=0$$
$$4y^2+7=0$$
$$y=\pm\sqrt{-\frac{7}{4}}$$

Корени су имагинарни; - једначина представља имагинарну елипсу.

$$\left.\begin{aligned}F'_{(x)}&=2x-2y+3=0\\ F'_{(y)}&=-2x+4y-3=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}x&=-\frac{3}{2}\\ y&=0\end{aligned}$$

Центар је тачка

$$\left(-\frac{3}{2},0\right)$$
$$\lambda^2+\lambda-1=0$$
$$\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Коеф. праваца осовина

$$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\qquad \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Једначине осовина:

$$(2x-2y+3)+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(-2x+4y-3)=0$$

$$(2x-2y+3)+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}(-2x+4y-3)=0$$

Како је

$$H=\frac{7}{4}$$

$$M=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad N=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

редукован облик једначине је

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}x^2+\frac{3+\sqrt{5}}{2}y^2+\frac{7}{4}=0$$

5. $x^2-4xy+2y^2+3x-2y+1=0$

$\Delta=2>0$ врста хиперболе.

$$x^2-(4y-3)x+(2y^2-2y+1)=0$$

$$\Delta=(4y-3)^2-4(2y^2-2y+1)=$$
$$=8y^2-16y+5=0$$

$$y=\frac{8\pm\sqrt{24}}{8}$$

- пошто су корени стварни и различити, једначина представља праву хиперболу.

$$\left.\begin{aligned} F'_{(x)}&=2x-4y+3=0\\ F'_{(y)}&=-4x+4y-2=0\end{aligned}\right\}\ x=\frac{1}{2}\ \ y=1$$

Њен центар је тачка

$$\left(\frac{1}{2},1\right)$$

$$\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda-1=0$$

$$2\lambda^2+\lambda-2=0$$

$$\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Коеф. правца осовина су

$$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \qquad \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

а једначине осовина:

$$(2x-4y+3)+\frac{-1+\sqrt{17}}{2}(-4x+4y-2)=0$$

$$(2x-4y+3)+\frac{-1-\sqrt{17}}{2}(-4x+4y-2)=0$$

Како је

$$\mathcal{H}=\frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} M+N=3 \\ M-N=-\sqrt{17} \end{array}\right\} M=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \quad N=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

редуковани облик једначине је

$$\frac{3-\sqrt{17}}{2}x^2+\frac{3+\sqrt{17}}{2}y^2+\frac{3}{4}=0$$

6. $x^2-xy-6y^2+4x+13y-5=0$

$\Delta=7>0$ врста хиперболе.

$$x^2-(y-4)x-(6y^2-13y+5)=0$$

$$\Delta_1=(y-4)^2+4(6y^2-13y+5)=$$

$$=25y^2-60y+36=0$$

$$\Delta_2=30^2-25\cdot 36=0$$

– корени су стварни и једнаки; једначина представља <u>две праве које се секу</u>.

$$\left.\begin{array}{l} F'_{(x)}=2x-y+4=0 \\ F'_{(y)}=-x-12y+13=0 \end{array}\right\} x=-\frac{7}{5} \quad y=\frac{6}{5}$$

Пресек је тачка

$$\left(-\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$$

$$\lambda^2-14\lambda-1=0$$

$$\lambda=7\pm\sqrt{50}$$

Коеф. праваца осовина

$$\lambda_1=7+\sqrt{50} \qquad \lambda_2=7-\sqrt{50}$$

а једначине осовина

$$(2x-y+4)+(7+\sqrt{50})(-x-12y+13)=0$$

$$(2x-y+4)+(7-\sqrt{50})(-x-12y+13)=0$$

Како је

$$\mathcal{H}=0$$

$$M=\frac{-5-\sqrt{50}}{2} \qquad N=\frac{-5+\sqrt{50}}{2}$$

то је редукован облик једначине

$$\frac{-5-\sqrt{50}}{2}x^2+\frac{-5+\sqrt{50}}{2}y^2=0$$

Дате праве су $\quad x-3y+5=0$

$x+2y-1=0$

7. $\quad x^2-2xy-2y^2-3x+3y-1=0$

$\Delta=3>0$ врста хиперболе

$$x^2-(2y+3)x-(2y^2-3y+1)=0$$

$$\Delta_1=(2y+3)^2+4(2y^2-3y+1)=$$

$$=12y^2+13=0$$

$$y=\pm\sqrt{-\frac{13}{12}}$$

-корени су имагинарни; - једначина представља праву хиперболу.

$$\left.\begin{aligned} F'_{(x)}&=2x-2y-3=0\\ F'_{(y)}&=-2x-4y+3=0\end{aligned}\right\} x=\frac{3}{2} \quad y=0$$

Центар је тачка

$$\left(\frac{3}{2},0\right)$$

$$\lambda^2-3\lambda-1=0$$

$$\lambda=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

Осовине су:

$$(2x-2y-3)+\frac{3+\sqrt{13}}{2}(-2x-4y+3)=0$$

$$(2x-2y-3)+\frac{3-\sqrt{13}}{2}(-2x-4y+3)=0$$

Како је $\qquad \mathcal{H}=-\frac{13}{4}$

$$M=\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \qquad N=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

редукован облик једначине је

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}x^2+\frac{-1+\sqrt{13}}{2}y^2-\frac{13}{4}=0$$

8. $\qquad 2xy-6y^2+3x-7y+3=0$

$\Delta=1>0 \quad$ врста хиперболе

$$x=\frac{6y^2+7y-3}{2y+3}=3y-1$$

- остатак деобе је нула і једначина представља <u>две праве које се секу</u>.

$$\left.\begin{aligned}F'_{(x)}&=2y+3=0\\ F'_{(y)}&=2x-12y-7=0\end{aligned}\right\} x=-\frac{11}{2} \quad y=-\frac{3}{2}$$

Пресек је тачка

$$\left(-\frac{11}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

$$\lambda^2+6\lambda-1=0 \qquad \lambda=-3\pm\sqrt{10}$$

Једначине осовина су

$$2y+3+(-3+\sqrt{10})(2x-12y-7)=0$$
$$2y+3+(-3-\sqrt{10})(2x-12y-7)=0$$

Како је

$$\mathcal{H}=0$$

$$\left.\begin{aligned}M+N&=-6\\ M-N&=2\sqrt{10}\end{aligned}\right\}$$

одакле

$$M=-3+\sqrt{10}$$
$$N=-3-\sqrt{10}$$

едукован облик једначине је

$$(-3+\sqrt{10})\,x^2+(-3-\sqrt{10})y^2=0$$

Праве су

$$3y-x-1=0$$
$$2y+3=0$$

9. $$2x^2+2xy-3x-y+4=0$$

$\Delta=1>0$ врста хиперболе

$$y=\frac{-2x^2+3x-4}{2x-1}=-x+1-\frac{3}{2x-1}$$

Остатак дјобе је $-3$ и једначина представља <u>праву хиперболу.</u>

$$\left.\begin{aligned}F'_{(x)}&=4x+2y-3=0\\ F'_{(y)}&=2x-1=0\end{aligned}\right\}\ x=\frac{1}{2}\quad y=\frac{1}{2}$$

Центар је тачка

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda^2+2\lambda-1=0$$
$$\lambda=-1\pm\sqrt{2}$$

Једначине осовина су:

$$(4x+2y-3)+(-1+\sqrt{2})(2x-1)=0$$
$$(4x+2y-3)+(-1-\sqrt{2})(2x-1)=0$$

Како је

$$H=3$$
$$M+N=2$$
$$M-N=2\sqrt{2}$$

одакле

$$M=1+\sqrt{2}\qquad N=1-\sqrt{2}$$

редукован облик једначине је

$$(1+\sqrt{2})x^2+(1-\sqrt{2})y^2+3=0$$

10. $$2xy-4x+6y+1=0$$

$\Delta=1>0$ врста хиперболе.

$$y=\frac{4x-1}{2x+6}=2-\frac{9}{2x+6}$$

Остатак дјобе је $-9$; једначина представља праву хиперболу.

$$\left.\begin{aligned} F'_{(x)}&=2y-4=0\\ F'_{(y)}&=2x+6=0\end{aligned}\right\}\quad x=-3\quad y=2$$

Центар је тачка

$$(-3,2)$$

$$\lambda^2-1=0$$

$$\lambda=\pm 1$$

Једначине осовина су:

$$\left.\begin{aligned}(2y-4)+1(2x+6)&=0\\(2y-4)-1(2x+6)&=0\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}x+y+1&=0\\x-y+5&=0\end{aligned}\right\}$$

Решавањем једначина:

$$\left.\begin{aligned}2xy-4x+6y+1&=0\\x+y+1&=0\end{aligned}\right\}$$

обијају се стварна темена

$$\left(\frac{-6-\sqrt{26}}{2}, \frac{4+\sqrt{26}}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{-6+\sqrt{26}}{2}, \frac{4-\sqrt{26}}{2}\right)$$

Како је

$$H=13 \quad M=1 \quad N=-1$$

редукована једначина је

$$x^2-y^2+13=0$$

11.

$$2xy+x+8y+4=0$$

$\Delta=1>0$ врста хиперболе.

$$x=\frac{-8y-4}{2y+1}=-4$$

Остатак деобе је нула; једначина представља <u>две нормалне праве.</u>

$$\left.\begin{array}{l} F'_{(x)}=2y+1=0 \\ F'_{(y)}=2x+8=0 \end{array}\right\} \quad x=-\frac{1}{2} \quad y=-4$$

Пресек је тачка

$$\left(-\frac{1}{2},-4\right)$$

$$\lambda^2-1=0$$

$$\lambda=\pm 1$$

Једначине осовина су:

$$\left.\begin{array}{l} (2y+1)+1(2x+8)=0 \\ (2y+1)-1(2x+8)=0 \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} 2x+2y+9=0 \\ 2x-2y+7=0 \end{array}\right\}$$

Како је

$$H=0 \quad M=1 \quad N=-1$$

редукован облик једначине је

$$x^2 - y^2 = 0$$

или

$$(x+y)(x-y)=0$$

дакле праве

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$$

Зато праве су

$$x+y=0$$
$$2y+1=0$$

12. $$x^2-4xy+4y^2+3x-2y+1=0$$

$\Delta = 0$ врста параболе

$$x^2-(4y-3)x+(4y^2-2y+1)=0$$
$$\Delta_1=(4y-3)^2-4(4y^2-2y+1)=$$
$$=-16y+5$$

Овај израз је првог степена по $y$ и једначина представља параболу.

$$\left.\begin{array}{l} F'_{(x)}=2x-4y+3 \\ F'_{(y)}=-4x+8y-2 \end{array}\right\}$$

- центар у бескрајности.

$$m=\frac{C}{B}=-2$$

једначина осовине

$$(2x-4y+3)-2(-4x+8y-2)=0$$

или

$$10x-20y+7=0$$

Из једначина

$$\left.\begin{array}{l} x^2-4xy+4y^2+3x-2y+1=0 \\ 10x-20y+7=0 \end{array}\right\}$$

добија се теме

$$\left(-\frac{79}{200}, \frac{61}{400}\right)$$

Параметар је

$$p = \frac{C(BE-CD)}{(B^2+C^2)^{3/2}} = -\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

па је редукована једначина

$$y^2 = -\frac{4}{5\sqrt{5}}x$$

13. $x^2-4xy+4y^2-2x+4y-3=0$

$\Delta=0$ врста параболе.

$$x^2-2(2y+1)x+(4y^2+4y-3)=0$$

$$\Delta_1=(2y+1)^2-(4y^2+4y-3)= \\ =4$$

- стална количина; једначина представља <u>две паралелне праве</u>.

$$\left.\begin{aligned} F'_{(x)} &= 2x-4y-2=0 \\ F'_{(y)} &= -4x+8y+4=0 \end{aligned}\right\}\text{ зависне једначине}$$

- безброј центара чије је геом. место права

$$2x-4y-2=0$$

или

$$x-2y-1=0$$

што је у исто време и једначина осовине.

Параметар

$$p=0$$

па је редукована једначина

$$y^2=0$$

т.ј.

$$y=0$$

Дате праве су $x-2y-3=0$

$x-2y+1=0$

14. $x^2-6xy+9y^2-2x+6y+1=0$

$\Delta=0$ врста параболе

$$x^2-2(3y+1)x+(9y^2+6y+1)=0$$

$$\Delta_1=(3y+1)^2-(9y^2+6y+1)$$
$$=0$$

- две праве које се поклапају.

$$\left.\begin{array}{l} F'_{(x)}=2x-6y-2=0 \\ F'_{(y)}=-6x+18y+6=0 \end{array}\right\}$$ заједничке једначине

- бзброј центара чије је геом. место права

$$2x-6y-2=0$$

или

$$x-3y-1=0$$

- то је у исто време и једначина осовине, па су дате праве

$$(x-3y-1)^2=0$$

Параметар

$$p=0$$

па је редукована једначина

$$y^2=0$$

т.ј.

$$y=0$$

15. $2x^2-4x+3y+1=0$

$\Delta=0$ врста параболе

Пошто нема квадрата од $y$ једначина представља праву параболу:

$$(x-1)^2=-\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)$$

$$F'_{(x)}=4x-4=0$$

$$F'_{(y)}=3$$

Центар у бесконачности на правој

$$4x-4=0$$

т.ј.

$$x-1=0$$

која је осовина параболе.

Из једначина:

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2-4x+3y+1=0 \\ x-1=0 \end{array}\right\}$$

добија се као теме тачка

$$\left(1,\frac{1}{3}\right)$$

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

1936
1937

1. $40x^2 - 36xy + 25y^2 + 428x - 294y + 1128 = 0$

$\Delta = 18^2 - 40 \cdot 25 = 324 - 1000 = -676$ Елипса.

Једначине центра:

$$\left.\begin{aligned} F'_{(x)} &= 80x - 36y + 428 = 0 \\ F'_{(y)} &= -36x + 50y - 294 = 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 20x - 9y + 107 &= 0 \\ -18x + 25y - 147 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$x = -4 \qquad y = 3$$

Центар је тачка:

$$(-4, 3)$$

Коефицијенти праваца осовина дати су једначином

$$\lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda - 1 = 0$$

или

$$6\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

одакле

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \qquad \lambda_2 = -\frac{2}{3}$$

Једначине осовина:

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x + 4)$$

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 4)$$

или

$$y = \frac{3}{2}x + 9$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Темена се добијају из једначина:

I

$$\left.\begin{aligned} 40x^2 - 36xy + 25y^2 + 428x - 294y + 1128 = 0 \\ y = \frac{3}{2}x + 9 \end{aligned}\right\}$$

$$40x^2 - 36x\left(\frac{3}{2}x+9\right) + 25\left(\frac{3}{2}x+9\right)^2 + 428x - 294\left(\frac{3}{2}x+9\right) + 1128 = 0$$

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = -6$$

$$y_1 = 6 \qquad y_2 = 0$$

$$A(-2, 6) \qquad B(-6, 0)$$

II

$$\left.\begin{aligned} 40x^2 - 36xy + 25y^2 + 428x - 294y + 1128 = 0 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$40x^2 - 36x\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right) + 25\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2 + 428x - 294\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right) + 1128 = 0$$

$$4x^2 + 32x + 55 = 0$$

$$x_3 = -\frac{5}{2} \qquad x_4 = -\frac{11}{2}$$

$$y_3 = 2 \qquad y_4 = 4$$

$$C\left(-\frac{5}{2}, 2\right) \qquad D\left(-\frac{11}{2}, 4\right)$$

Дужине осовина:

$$\left.\begin{aligned} 2a = AB = \sqrt{(-6+2)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \\ 2b = CD = \sqrt{(4-2)^2 + \left(-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{13} \end{aligned}\right\}$$

$$a = \sqrt{13} \qquad b = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Редукована једначина дате елипсе:

$$\frac{13}{4}x^2 + 13y^2 = 13 \cdot \frac{13}{4}$$

или

$$x^2 + 4y^2 = 13$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \lambda_1 = \frac{3}{2} \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{13}} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{13}}$$

I смена $\left.\begin{aligned} x = X - 4 \\ y = Y + 3 \end{aligned}\right\}$

$$40X^2 - 36XY + 25Y^2 - 169 = 0$$

II смена

$$\left.\begin{aligned} X = x\sqrt{\frac{4}{13}} - y\sqrt{\frac{9}{13}} \\ Y = x\sqrt{\frac{9}{13}} + y\sqrt{\frac{4}{13}} \end{aligned}\right\}$$

$$x^2 + 4y^2 = 13$$

2. $4x^2-17xy+4y^2-x-26y-114=0$

$$\Delta=\left(\frac{17}{2}\right)^2-16=\frac{225}{4} \quad \text{хипербола}$$

Једначине центра:

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 8x-17y-1=0 \\ F'_y &= -17x+8y-26=0 \end{aligned}\right\}$$

$$x=-2 \quad y=-1$$

Центар је тачка

$$(-2,-1)$$

Коеф. правaца осовина добијају се из једначине

$$\lambda^2-1=0$$

$$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=-1$$

Једначине осовина:

$$y+1=1(x+2)$$
$$y+1=-1(x+2)$$

или

$$y=x+1$$
$$y=-x-3$$

Темена се добијају из једначина

I $\left.\begin{aligned} 4x^2-17xy+4y^2-x-26y-114=0 \\ y=x+1 \end{aligned}\right\}$

$$4x^2-17x(x+1)+4(x+1)^2-x-26(x+1)-114=0$$

$$9x^2+36x+136=0 \quad C\left(\frac{-6+10i}{3},\frac{-3-10i}{3}\right)$$

x имагинарно – имагинарна темена.

II $\left.\begin{aligned} 4x^2-17xy+4y^2-x-26y-114=0 \\ y=-x-3 \end{aligned}\right\}$ $D\left(\frac{-6-10i}{3},\frac{-3+10i}{3}\right)$

$$4x^2-17x(-x-3)+4(-x-3)^2-x-26(-x-3)-114=0$$

$$25x^2+100x=0$$

$$x_1=0 \quad x_2=-4$$
$$y_1=-3 \quad y_2=1$$

$$A(0,-3) \quad B(-4,1)$$

Дужина стварне осовине:

$$2a=\sqrt{(0+4)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2} \qquad 2b=\frac{10i\sqrt{6}}{3}$$

$$a=2\sqrt{2}$$

Ако се коорд. почетак премести у центар сменом

$$x=X-2 \quad y=Y-1$$

добија се

$$4(X-2)^2-17(X-2)(Y-1)+4(Y-1)^2-(X-2)-26(Y-1)-114=0$$

или

$$4X^2-17XY+4Y^2-100=0$$

Ако се сад коорд. систем обрне за извесан угао $\alpha$ т.ј. смени

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

добија се

$$4(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 - 17(x\cos\alpha - y\sin\alpha)(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + 4(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 - 100 = 0$$

или

$$4x^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 17x^2\sin\alpha\cos\alpha + 4y^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 17y^2\sin\alpha\cos\alpha + 17xy(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) - 100 = 0$$

или

$$4x^2 - \frac{17}{2}x^2\sin 2\alpha + 4y^2 + \frac{17}{2}\sin 2\alpha - 17xy\cos 2\alpha - 100 = 0$$

изаберимо сада $\alpha$ тако да буде

$$\cos 2\alpha = 0$$
$$2\alpha = 90^\circ \qquad \alpha = 45^\circ$$

онда се једначина своди на

$$-\frac{9}{2}x^2 + \frac{25}{2}y^2 = 100$$

или

$$9x^2 - 25y^2 = -200$$

– редукована једначина дате хиперболе.

$$25x^2 - 3y^2 = 200$$

3. $$x^2 - 2xy + y^2 - 9x - 13y + 30 = 0$$

$\Delta = 1^2 - 1\cdot 1 = 0$ Парабола.

Центар у бескрајности.

Како је

$$F'_x = 2x - 2y - 9$$
$$F'_y = -2x + 2y - 13$$
$$m = \frac{C}{B} = -1$$

то је једначина осовине

$$(2x - 2y - 9) - 1(-2x + 2y - 13) = 0$$

или

$$x - y + 1 = 0$$

или

$$y = x + 1$$

Теме се добија решавањем једначина

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2xy + y^2 - 9x - 13y + 30 = 0 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$$

$$x^2 - 2x(x+1) + (x+1)^2 - 9x - 13(x+1) + 30 = 0$$
$$-22x + 18 = 0$$
$$x = \frac{9}{11}$$
$$y = \frac{20}{11}$$

Теме је тачка $\left(\frac{9}{11}, \frac{20}{11}\right)$

Ако се коорд. почетак пренесе у теме сменом

$$x = x + \frac{9}{11}$$
$$y = y + \frac{20}{11}$$

добија се

$$\left(x+\frac{9}{11}\right)^2 - 2\left(x+\frac{9}{11}\right)\left(y+\frac{20}{11}\right) + \left(y+\frac{20}{11}\right)^2 - 9\left(x+\frac{9}{11}\right) - 13\left(y+\frac{20}{11}\right) + 30 = 0$$

или

$$x^2 - 2xy + y^2 - 11x - 11y = 0$$

Ако се коорд. систем обрне за угао $\alpha$, т.ј. смени

$$x = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

добија се

$$(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 - 2(x\cos\alpha - y\sin\alpha)(x\sin\alpha + y\cos\alpha) +$$
$$+ (x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 - 11(x\cos\alpha - y\sin\alpha) - 11(x\sin\alpha + y\cos\alpha) = 0$$

или

$$x^2(1 - \sin 2\alpha) - 2xy\cos 2\alpha + y^2(1 + \sin 2\alpha) -$$
$$- 11x(\sin\alpha + \cos\alpha) + 11y(\sin\alpha - \cos\alpha) = 0$$

ако се угао $\alpha$ изабере тако да је

$$\cos 2\alpha = 0$$
$$2\alpha = 90^\circ$$
$$\alpha = 45^\circ$$

добија се

$$2y^2 - 11x \cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

или

$$y^2 = \frac{11\sqrt{2}}{2}x$$

– редукована једначина дате параболе.

4. $5x^2+6xy+5y^2+18x-2y+13=0$

$\Delta = 9-25=-16$ елипса.

Једначине центра

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 10x+6y+18=0 \\ F'_y &= 6x+10y-2=0 \end{aligned}\right\} \therefore \left.\begin{aligned} 5x+3y+9&=0 \\ 3x+5y-1&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$x=-3 \qquad y=2$$

Центар је тачка

$$(-3,2)$$

Коефицијенти праваца осовина дати су једначином

$$\lambda^2-1=0$$

одакле

$$\lambda_1=1 \qquad \lambda_2=-1$$

Отуда једначине осовина

$$\left.\begin{aligned} y-2 &= x+3 \\ y-2 &= -(x+3) \end{aligned}\right\}$$

или

$$y=x+5$$
$$y=-x-1$$

Темена се добијају из једначина:

1) $$\left.\begin{aligned} 5x^2+6xy+5y^2+18x-2y+13&=0 \\ y&=x+5 \end{aligned}\right\}$$

$$5x^2+6x(x+5)+5(x+5)^2+18x-2(x+5)+13=0$$
$$x^2+6x+8=0$$
$$x=-3\pm 1$$

$x_1=-2$ $\qquad$ $y_1=3$

$x_2=-4$ $\qquad$ $y_2=1$

$A(-2,3) \qquad B(-4,1)$

2) $$\left.\begin{aligned} 5x^2+6xy+5y^2+18x-2y+13&=0 \\ y&=-x-1 \end{aligned}\right\}$$

$$5x^2+6x(-x-1)+5(-x-1)^2+18x-2(-x-1)+13=0$$
$$x^2+6x+5=0$$
$$x=-3\pm 2$$

$x_3=-1$ $\qquad$ $y_3=0$

$x_4=-5$ $\qquad$ $y_4=4$

$C(-1,0) \qquad D(-5,4)$

Дужине осовина су:

$2a = AB = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \qquad a=\sqrt{2}$

$2b = CD = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \qquad b=2\sqrt{2}$

Редукована једначина дате елипсе

$$8x^2+2y^2=16$$

или

$$4x^2+y^2=8 \quad \text{или} \quad x^2+4y^2=8$$

5. $2xy-4x+6y+1=0$

$\Delta = 1 > 0$ хипербола.

Једначине центра:

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 2y-4=0 \\ F'_y &= 2x+6=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y&=2 \\ x&=-3 \end{aligned}$$

Центар је тачка

$$(-3,2)$$

Коеф. правaца осовина дати су једначином

$$\lambda^2-1=0$$

$$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=-1$$

Осовине су:

$$\left.\begin{aligned} y-2 &= x+3 \\ y-2 &= -(x+3) \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} y &= x+5 \\ y &= -x-1 \end{aligned}\right\}$$

Темена се добијају решењем једначина:

$$\left.\begin{aligned} 2xy-4x+6y+1&=0 \\ y&=x+5 \end{aligned}\right\}$$

$$2x(x+5)-4x+6(x+5)+1=0$$

$$2x^2+12x+31=0$$

$$x=\frac{-6\pm i\sqrt{26}}{2}$$

$$y=\frac{4\pm i\sqrt{26}}{2}$$

Отуда имагинарна темена:

$$C\left(\frac{-6+i\sqrt{26}}{2}, \frac{4+i\sqrt{26}}{2}\right) \quad D\left(\frac{-6-i\sqrt{26}}{2}, \frac{4-i\sqrt{26}}{2}\right)$$

2)
$$\left.\begin{aligned} 2xy-4x+6y+1&=0 \\ y&=-x-1 \end{aligned}\right\}$$

$$2x(-x-1)-4x+6(-x-1)+1=0$$

$$2x^2+12x+5=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{26}}{2}$$

$$y=\frac{4\mp\sqrt{26}}{2}$$

Отуда стварна темена:

$$A\left(\frac{-6+\sqrt{26}}{2}, \frac{4-\sqrt{26}}{2}\right) \quad B\left(\frac{-6-\sqrt{26}}{2}, \frac{4+\sqrt{26}}{2}\right)$$

Према томе дужине осовина су и то: стварне осовине

$$2a = AB = \sqrt{26+26} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \qquad a=\sqrt{13}$$

имагинарне осовине:

$$2b = CD = \sqrt{-26-26} = \sqrt{-52} = 2i\sqrt{13} \qquad b = i\sqrt{13}$$

Редукована једначина хиперболе је

$$13x^2 - 13y^2 = 13\cdot 13$$

или

$$x^2 - y^2 = 13$$

Исти би резултат добили ако прво пренестимо коорд. почетак у центар сменом

$$\left.\begin{aligned} x &= X-3 \\ y &= Y+2 \end{aligned}\right\}$$

$$2(X-3)(Y+2) - 4(X-3) + 6(Y+2) + 1 = 0$$

$$2XY + 13 = 0$$

па затим обрнемо коорд. систем за угао $\alpha$ сменом:

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

т.ј.

$$2(x\cos\alpha - y\sin\alpha)(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + 13 = 0$$

$$x^2\sin 2\alpha + 2xy\cos 2\alpha - y^2\sin 2\alpha + 13 = 0$$

Ако сад $\alpha$ изаберемо тако да је

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = 90^\circ$$

добијамо

$$x^2 - y^2 + 13 = 0$$

или

$$x^2 - y^2 = -13$$

6. $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 12y + 23 = 0$

$\Delta = 0$ парабола.

Једначине центра:

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 2x + 2y + 8 = 0 \\ F'_y &= 2x + 2y + 12 = 0 \end{aligned}\right\}$$

- супротне једначине - центар у бескрајности.

Пошто је

$$m = \frac{C}{B} = 1$$

једначина осовине је

$$(2x + 2y + 8) + 1(2x + 2y + 12) = 0$$

или

$$x + y + 5 = 0$$

или

$$y = -x - 5$$

Теме се добија решењем једначина:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 12y + 23 &= 0 \\ y &= -x - 5 \end{aligned}\right\}$$

$$x^2 + 2x(-x-5) + (-x-5)^2 + 8x + 12(-x-5) + 23 = 0$$

$$-4x - 12 = 0$$

$$x = -3$$

$$y = -2$$

Теме је тачка

$$(-3,-2)$$

Ако коорд. систем преместимо у теме сменом

$$\left.\begin{aligned} x &= X-3 \\ y &= Y-2 \end{aligned}\right\}$$

$$(X-3)^2+2(X-3)(Y-2)+(Y-2)^2+8(X-3)+12(Y-2)+23=0$$

или

$$X^2+2XY+Y^2-2X+2Y=0$$

Ако коорд. систем обрнемо за угао $\alpha$ т.ј. извршимо смену:

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ Y &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

$$(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2+2(x\cos\alpha-y\sin\alpha)(x\sin\alpha+y\cos\alpha)+$$
$$+(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2-2(x\cos\alpha-y\sin\alpha)+2(x\sin\alpha+y\cos\alpha)=0$$

или

$$x^2(1+\sin 2\alpha)+2xy\cos 2\alpha+y^2(1-\sin 2\alpha)+$$
$$+2x(\sin\alpha-\cos\alpha)+2y(\sin\alpha+\cos\alpha)=0$$

Ако $\alpha$ изаберемо тако да је

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = 90^\circ \qquad \alpha = 45^\circ$$

добија се

$$2x^2+2y\sqrt{2}=0$$

или

$$x^2=-y\sqrt{2}$$

7. $13x^2-32xy+37y^2-122x+254y+217=0$

$\Delta<0$ елипса.

Центар:

$$(1,-3)$$

Коеф. правца осовина

$$\lambda_1=\frac{1}{2} \qquad \lambda_2=-2$$

Једначине осовина:

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$$

$$y=-2x-1$$

Темена:

$A(7,0)$ $B(-5,-6)$ $C(0,-1)$ $D(2,-5)$

Дужине осовина

$$2a=AB=6\sqrt{5}$$

$$2b=CD=2\sqrt{5}$$

Редукована једначина:

$$x^2+9y^2=45$$

8. $33x^2+76xy-24y^2+56x+200y-304=0$

Хипербола.

Центар:

$(-2,1)$

Коеф. правца осовина:

$\lambda_1=\frac{1}{2} \quad \lambda_2=-2$

Једначине осовина:

$y=\frac{1}{2}x+2$ стварна

$y=-2x-3$ имагинарна

Темена:

$A(0,2) \quad B(-4,0)$

$C\left(\frac{-86+i\sqrt{2236}}{43},\frac{43-2i\sqrt{2236}}{43}\right) \quad D\left(\frac{-86-i\sqrt{2236}}{43},\frac{43+2i\sqrt{2236}}{43}\right)$

Дужине осовина:

$a=\sqrt{5} \qquad b=\frac{i\sqrt{11180}}{43}$

Редукована једначина

$52x^2-43y^2=260$

9. $4x^2-12xy+9y^2-50x-94y-55=0$

Парабола.

Једначина осовине

$y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$

Теме:

$(-2,1)$

Редукована једначина

$y^2=2\sqrt{13}\,x$

10. $3x^2-8xy-3y^2+10x+20y-50=0$

Хипербола

Центар:

$(1,2)$

Коеф. правца осовина

$\lambda_1=2 \quad \lambda_2=-\frac{1}{2}$

Једначине осовина:

$y=2x$ имагинарна

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ стварна

Темена:

$A(3,1) \quad B(-1,3)$

$C(1+i,\ 2+2i) \quad D(1-i,\ 2-2i)$

Дужине осовина

$a=\sqrt{5} \quad b=i\sqrt{5}$

Редукована једначина

$x^2-y^2=5$

11. $101x^2+144xy-7y^2+260x+302y-576=0$

Хипербола

Центар:

$(-2,1)$

Коеф. правца осовина:

$\lambda_1=\frac{1}{2} \quad \lambda_2=-2$

Једначине осовина

$y=\frac{1}{2}x+2$ стварна

$y=-2x-3$ имагинарна

Темена:

$A(0,2) \quad B(-4,0)$

$C\left(\frac{-86+i\sqrt{5891}}{43},\ \frac{43-2i\sqrt{\ }}{43}\right) \quad D\left(\frac{-86-i\sqrt{\ }}{43},\ \frac{43+i\sqrt{\ }}{43}\right)$

Дужине осовина

$a=\sqrt{5} \quad b=$

Редукована једначина:

$137x^2-43y^2=685$

12. $8x^2-12xy+17y^2-24x+68y-32=0$

Елипса.

Центар:

$(0,-2)$

Коеф. правца осовина:

$\lambda_1=\frac{1}{2} \quad \lambda_2=-2$

Осовине:

$y=\frac{1}{2}x-2$

$y=-2x-2$

Темена:

$A(4,0) \quad B(-4,-4)$

$C(1,-4) \quad D(-1,0)$

Дужине осовина:

$a=2\sqrt{5} \quad b=\sqrt{5}$

Редукована једначина:

$x^2+4y^2=20$

13. $3x^2-8xy-3y^2-14x+2y-17=0$

Хипербола.

Центар:

$(1,-1)$

Коеф. правца осовина:

$\lambda_1=2 \quad \lambda_2=-\frac{1}{2}$

Једначине осовина:

$y=2x-3$ имаг.

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ств.

Темена:

$A(3,-2) \quad B(-1,0)$

$C(1+i,-1+2i) \quad D(1-i,-1-2i)$

Дужине осовина:

$a=\sqrt{5} \quad b=i\sqrt{5}$

Редукована једначина:

$x^2-y^2=5$

14. $x^2-4xy+4y^2-30x+10y+25=0$

Парабола.

Теме:

$(1,-2)$

Осовина:

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$$

Редукована једначина:

$$y^2=2\sqrt{5}\,x$$

15. $40x^2-36xy+25y^2+160x-72y-9=0$

Елипса.

Центар:

$(-2,0)$

Коеф. правца осовина:

$$\lambda_1=\frac{3}{2}\quad \lambda_2=-\frac{2}{3}$$

Једначине осовина:

$$y=\frac{3}{2}x+3$$

$$y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$$

Темена:

$$A\left(-\frac{7}{2},1\right)\quad B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$$

$$C(0,3)\quad D(-4,-3)$$

Дужине осовина:

$$a=\sqrt{13}\quad b=\frac{1}{2}\sqrt{13}$$

Редукована једначина:

$$x^2+4y^2=13$$