Диференцијални рачун

Ђор. Ј. Пујић, проф.

Диференцијални рачун

Предавања
Др Мих. Петровића,
проф. Универзитета
(допуњена примерима).

Основни појмови

Под *инфинитезималним рачуном* разуме се онај део Математике у коме се рачунске операције решавају помоћу бескрајно великих и бескрајно малих количина. Основни појмови на којима је тај рачун основан јесу: појам границе, појам бескрајно велике и појам бескрајно мале количине.

Појам границе.

За једну се количину a каже да је *граница* једне променљиве количине н. пр. x, ако се x у току оних својих промена које посматрамо све више и више приближује вредности a док се на послетку с њоме не поклопи.

Под границом једне функције н. пр. $f(x)$ разуме се таква једна вредност н. пр. b, да је вредност функције све ближа и ближа вредности b, кад се x буде све више приближавало једном датом броју н. пр. a.

За једну се функцију каже да тежи једној граници b кад x буде тежило једној граници a, ако при томе разлика између вредности функције и броја b постаје све мања и мања у колико се x буде приближавало броју a.

Границе којима тежи једна функција могу бити од три врсте:
1° коначне и одређене;
2° бескрајне; и
3° коначне или неодређене.

У инфинитезималном рачуну има се врло често посла са задатком овакве врсте: да се одреди граница којој тежи једна функција кад x бескрајно расте или опада. Понеки пут је решење задатка непосредно јер се одмах на функцији види граница којој она тежи. У сложенијим случајевима примењују се извесна правила која су сама по себи очевидна и која олакшавају посао. Таква су правила ова:
1° Граница збира или разлике двеју или више функција равна је збиру или разлици граница поједи- них функција;
2° Граница којој тежи производ више функција равна је производу граница тих функција;
3° Граница којој тежи количник двеју функција равна је количнику граница тих функција; и
4° У опште граница ма какве комбинације од више функција добија се, кад се у таквој комбинацији смени свака функција својом границом. Ако се после те смене наиђе на какав привидно неодређен израз н. пр. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$,

0·∞ и т.д. онда треба праву вредност таквих израза наћи помоћу познатих правила за такве случајеве.

Примери:

1° Наћи границу којој тежи функција

$$\frac{x^2-2}{3x^2+1}$$

кад x бесконачно расте.

Имаћемо

$$\lim \frac{x^2-2}{3x^2+1} = \lim \frac{1-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3} \quad \text{за } x=\infty$$

2. Наћи границу функције

$$\sin\frac{\pi}{2}(x-a+1)$$

кад x тежи броју a.

Имаћемо

$$\lim \sin\frac{\pi}{2}(x-a+1) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{за } x=a$$

3. Наћи границу којој тежи функција

$$e^x$$

кад x бесконачно расте.

Имаћемо

$$\lim e^x = e^\infty = \infty. \quad \text{за } x=\infty$$

4. Функције

$$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$$

кад x буде бесконачно расло, теже једној граници која истина лежи између -1 и $+1$ али је неодређена.

5. Наћи границу којој тежи функција

$$F(x) = \frac{x}{x-1} + e^{-x} - \frac{3x^2}{1-x^2}$$

кад x бесконачно расте.

Имаћемо

$$\lim F(x) = \lim \frac{1}{1-\frac{1}{x}} + e^{-x} - \frac{3}{\frac{1}{x^2}-1} = 1+0-(-3) = 4$$

6. Наћи границу којој тежи функција

$$F(x) = \frac{x^2-2x+3}{2x^2}$$

кад x бесконачно расте.

Имаћемо

$$\lim F(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{за } x=\infty$$

с тога морамо узети изводе бројитеља и именитеља у датој функцији, па је

$$\lim F(x) = \lim \frac{4x-2}{4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

7. Наћи границу којој тежи функција

$$F(x) = \frac{(2+8x)(4+5x)}{8x^2}$$

кад x бескрајно расте.

Имаћемо

$$\lim F(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{42+80x}{16x} = 5 \quad \text{за } x=\infty$$

8. Наћи границу којој тежи функција

$$F(x) = \frac{x-a}{bx^2+c}$$

кад x бескрајно расте.

Имаћемо

$$\lim F(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{1}{2bx} = 0 \quad \text{за } x=\infty$$

9. Наћи границу којој тежи функција.

$$F(x) = \frac{(3-2x)(2+3x)}{1-4x^2}$$

за $x=\infty$.

Имаћемо

$$\lim F(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{5-12x}{-8x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

10. Наћи границу којој тежи функција

$$F(x) = \frac{x(3x-1)}{(x-3)(2-x)}$$

за $x=\infty$.

Имаћемо

$$\lim F(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{6x-1}{5-2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{6}{-2} = -3$$

11. Наћи границу којој тежи функција

$$F(x) = \frac{2x-3x^2}{5-2x} - \frac{3x}{7}$$

за $x=\infty$

Имаћемо

$$\lim F(x) = \lim \left[\frac{\frac{2}{x}-3}{\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x}} - \frac{3}{\frac{7}{x}} \right] = -\infty - \infty = -\infty$$

12. Наћи границу којој тежи функција

$$F(x) = \frac{2x}{3} - \frac{3x+2x^2}{5+3x}$$

кад x бескрајно расте.

Имаћемо

$$\lim F(x) = \infty - \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{x}{15+9x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

13. Наћи границу којој тежи функција

$$F(x) = \left[\left(a+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(a-\frac{1}{x}\right)^2 \right] x$$

кад x бескрајно расте.

Имаћемо

$$\lim F(x) = 0 \cdot \infty = \lim \left\{ \left[\left(a+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(a-\frac{1}{x}\right)^2 \right] \Big/ \frac{1}{x} = \frac{0}{0} = \right.$$

$$= \lim \left[-2\frac{1}{x^2}\left(a+\frac{1}{x}\right) - 2\frac{1}{x^2}\left(a-\frac{1}{x}\right) \right] \Big/ -\frac{1}{x^2} =$$

$$= 2 \lim \left[\left(a+\frac{1}{x}\right) + \left(a-\frac{1}{x}\right) \right] = 4a$$

Појам бескрајно великих и бескрајно малих количина.

Под бескрајно великом количином разуме се једна количина већа од сваког ма колико великог коначног броја.

Од врло велике је важности разликовати бескрајно велике од врло великих количина. Тако н. пр. 1000 милиона је врло велика количина али се у инфинитезималном рачуну не сматра као бескрајно велика количина. Осим тога свака од врло великих количина је један утврђен број; међутим свака бескрајно велика количина сматра се као променљива количина чија је главна особина та: да је већа од сваког коначног броја.

Тако исто за једну количину каже се да је бескрајно мала количина ако је она мања од сваког ма колико малог али коначног броја. Према томе треба добро разликовати врло мале од бескрајно мале количине.

Као што се види за појам бескрајно велике и бескрајно мале количине није везана никаква сталност нити одређеност, међутим видећемо да то поред свега тога ни у чему не смета употреби бескрајних количина у рачунима и да су поред свега тога што су ови елементи рачуна у неку руку неодређени крајни резултати рачуна су ипак тачно одређени.

Једна основна операција са којом се има посла при употреби бескрајних количина јесте међусобно упоређивање бескрајно великих и бескрајно малих количина. То упоређивање бива на овај начин: између оних бескрајних количина са којима имамо посла у датом рачуну изабере се једна за ону са којом ћемо све остале упоређивати и та се количина назива главном бескрајно великом или бескрајно малом количином за такав рачун. Означимо тако изабрану количину са x и нека је y друга једна ма каква бескрајна количина коју би хтели да упоредимо са x. Да би се то упоређење извршило, образује се количник

$$\frac{y}{x^k}$$

и тражи се колико треба да је k па да тај количник буде коначан и од нуле различан. Тада се каже да је y бескрајно велика или бескрајно мала количина k-тог реда наспрам количине x. Број k назива се даље редом бескрајне количине y. За саму количину x каже се тада да је бескрајно велика или бескрајно мала количина првог реда.

Тако н. пр. ако у једном рачуну имамо посла са количинама:

$$x\ ,\ x^3,\ \sin x,\ 1-\cos 2x\ ,$$

свака од тих количина, кад је x бескрајно мала количина постаје и сама бескрајно мала. Сад треба да их упоредимо међу собом. Да би упоредили све те количине са количином x образоваћемо количнике

$$\frac{x^3}{x^k}\ ,\ \frac{\sin x}{x^k}\ ,\ \frac{1-\cos 2x}{x^k}$$

и за сваки количник одредићемо колико треба да је k да би био количник коначан и од нуле различан. За први количник налази се да треба да буде $k=3$, што значи да је x^3 бескрајно мала количина трећег реда; за други количник налази се да треба да је $k=1$ што значи да је $\sin x$ бескрајно мала количина првог реда; најпослетку за трећи количник треба да је $k=2$ што значи да је $1-\cos 2x$ бескрајно мала количина другог реда.

Примери:

1. Наћи ред бескрајно мале количине

$$x-\sqrt{x^2+2x}$$

Да би нашли тај ред образоваћемо количник

$$\frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{x^k} = \frac{x-\sqrt{x}\sqrt{x+2}}{x^k} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{x^{k-\frac{1}{2}}}$$

Он је коначан и од нуле различан ако је

$$k=\frac{1}{2}$$

и то је ред дате бескрајно мале количине.

2. Нађи ред бескрајно мале количине

$$\varphi(x+2h)-2\varphi(x+h)+\varphi(x)$$

према количини h, па ма какво било x.

Овде ћемо имати количник

$$\frac{\varphi(x+2h)-2\varphi(x+h)+\varphi(x)}{h^k} = \frac{\frac{\varphi(x+2h)-\varphi(x+h)}{h} - \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}}{h^{k-1}} =$$

$$=\frac{\varphi'(x+h)-\varphi'(x)}{h^{k-1}} = \frac{\varphi''(x)}{h^{k-2}}$$

Бројитељ овог количника је коначна количина, а да би то био и именитељ потребно је да буде

$$k=2$$

и према томе дата количина је другог реда.

3. Нађи ред бескрајно мале количине

$$\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

Овде ћемо имати количник

$$\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^k}$$

и он се, кад x тежи нули јавља у неодређеном облику $\frac{0}{0}$; зато морамо узети изводе бројитеља и именитеља, па имамо израз

$$\frac{\frac{1}{1+x}-1+x}{kx^{k-1}} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+1}{k(k-1)x^{k-2}} \underset{x=0}{=} \frac{0}{0} = \frac{\frac{2}{(1+x)^3}}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

Он је коначан, пошто му је бројитељ коначан, ако је

$$k=3$$

и према томе је дата количина бескрајно мала количина трећег реда.

4. Нађи ред бескрајно мале количине

$$x-A\sin x-Bx^2$$

Овде ћемо имати количник

$$\frac{x-A\sin x-Bx^2}{x^k}$$

и он се јавља, кад x тежи нули, у неодређеном облику $\frac{0}{0}$ зато ћемо узети изводе бројитеља и именитеља, па имамо

$$\frac{1-A\cos x-2Bx}{kx^{k-1}}\underset{x=0}{=}\frac{0}{0}=\frac{A\sin x-2B}{k(k-1)x^{k-2}}$$

Сада можемо разликовати ова два случаја:

1) ако је

$$B\neq 0$$

биће

$$k=2$$

2) ако је

$$B=0$$

горњи се количник опет јавља у облику $\frac{0}{0}$ па ћемо опет узети изводе, па добијамо израз

$$\frac{A\cos x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

и он је коначан ако је

$$k=3$$

Ово упоређивање бескрајних количина међу собом од интереса је због ових практичних правила која олакшавају тражење граница појединих израза:

1° Кад у једном збиру од више бескрајно великих количина имамо количине разних редова, онда се у таквом збиру при тражењу граница могу задржати само они сабирци који су највишег реда, а сви остали који су нижег реда могу се занемарити, крајњи резултат при томе неће бити ни у колико измењен. Ако у томе збиру буде било у исто време и коначних количина као сабирака, оне се имају сматрати као бескрајно велике количине нултог реда. Н. пр. нека је дат израз

$$\frac{3x^4-5x^3+1}{8x^4+2x}$$

па се тражи вредност тога израза за x бескрајно велико, према горњем правилу у бројиоцу се може задржати само члан највишег реда а то је $3x^4$, у имениоцу само $8x^4$; израз се тада своди на

$$\frac{3x^4}{8x^4}=\frac{3}{8}$$

и то је тражена граница. Лако се уверавамо да би исти резултат добили и да нисмо ове чланове занемарили јер се дата функција може написати у облику

$$\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^4}}{8+\frac{2}{x^3}}$$

и за $x=\infty$ опет добијамо $\frac{3}{8}$ као границу.

2° Кад у једном збиру имамо више бескрајно малих количина разних редова при чему се коначне количине сматрају као бескрајно мале количине нултог реда, онда се при тражењу границе требају задржати само они сабирци који су најнижег реда, а сви остали који су вишег реда могу се занемарити; крајњи резултат тиме неће бити ни у колико измењен. Тако н. пр. ако се тражи граница израза

$$\frac{3x^4-5x^3+1}{8x^4+2x-7}$$

за x бескрајно мало или кад x тежи нули, добија се $-\frac{1}{7}$. Исти би резултат очевидно добили и да смо одмах занемарили у бројиоцу све чланове осим 1 а у имениоцу све чланове осим -7.

Приметимо то да при употреби ових правила ваља имати на уму да она важе само за збирове бескрајно великих и бескрајно малих количина и за комбинације таквих збирова.

Ова два правила и ако су веома проста и очевидна јесу основа целокупној употреби бескрајних количина у рачуну.

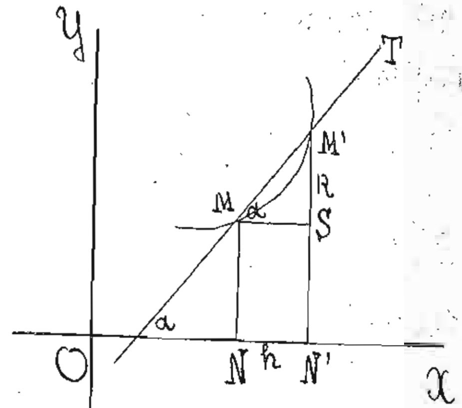
Начин на који се бескрајне количине употребљавају за израчунавање коначних количина.

Крајњи је циљ инфинитезималном рачуну тај да се коначне количине израчунају помоћу бескрајних количина. Међутим при том израчунавању можемо увек удесити тако да се бескрајно велике количине сведу на бескрајно мале, јер ако би x било бескрајно велика количина, количник $\frac{1}{x}$ је бескрајно мала количина. Према томе инфинитезимални рачун може се свести на овај задатак: израчунати коначне количине помоћу бескрајно малих количина.

Употреба бескрајно малих количина у задацима такве врсте може бити на два различита начина.

1° Начин

Једна коначна количина може се сматрати као количник двеју бескрајно малих количина. Најпростији пример за такву употребу бескрајно малих количина имамо у задатку одредбе дирке на криву линију. Узмимо на датој кривој две тачке M и M' и повуцимо кроз њих сечицу MT.



Угаони коефицијенат сечице т.ј. $\operatorname{tg}\alpha$ има очевидно за вредност $\frac{k}{h}$. Пустимо сада да тачка M' тежи тачки M. Тада сечица постаје дирка у тачки M, $\operatorname{tg}\alpha$ постаје угаони коефицијенат дирке и према томе овај коефицијенат има за вредност $\frac{k}{h}$ где су сада k и h две бескрајно мале количине.

дакле као што се види једна одређена коначна количина као што је коефицијенат правца дирке јавља се у облику количника двеју бескрајно малих количина. Ако смо дакле за дати случај у стању израчунати такав количник, онда смо одредили и сам коефицијенат правца дирке. Међутим тај се количник израчунава помоћу извода на овај начин: ако је једначина криве линије

$$y=F(x)$$

очевидно је да је

$$k=NM'-SN'=M'N'-MN=F(x+h)-F(x)$$

Према томе биће

$$\frac{k}{h}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)$$

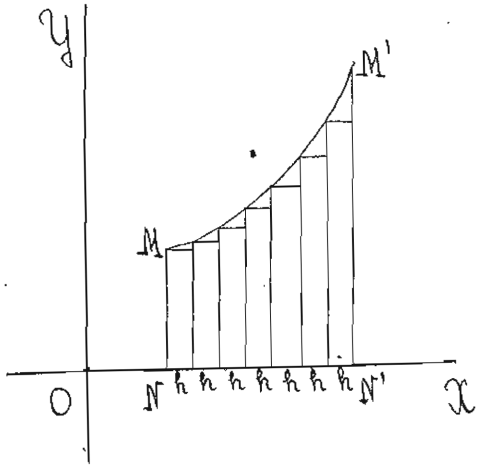
Горњи количник је могуће израчунати помоћу извода и према томе биће одређен и сам коефицијенат правца дирке.

На исти се начин одређује у Механици брзина једне тачке као количник од бескрајно малог пута и бескрајно малог времена за које је тај пут пређен.

2° Начин.

Једна коначна количина може се сматрати као збир од бескрајно много бескрајно малих количина. Најпростији пример такве врсте имали би код одређивања кружне периферије. Ова се, као што је познато, одређује поделивши периферију на врло много врло малих делова. Кад су ти делови врло мали могу се приближно сматрати као праве линије тако да у место круга имамо полигон са врло много страна. Разлика између круга и полигона биће све мања у колико су ти делови мањи а њихов број већи. Кад су ти делови бескрајно мали а њихов број бескрајно велики, полигон ће се поклопити с кругом.

Као други пример исте врсте навешћемо израчунавање површина ограничених кривим линијама. Ако се тражи површина ограничена луком MM' на какве криве линије, апсцисном осовином и двема правим ординатама



и ако основицу NN' поделимо на врло много врло малих делова h, из подеоних тачака повучемо ординате и образујемо мале правоуглонике означене на слици; очевидно је да ће разлика између збира тих правоуглоника и саме тражене површине бити у толико мања у колико је h мање. Ако је h бескрајно мало а број подеока бескрајно велики, очевидно је да ће се збир правоуглоника поклопити са траженом површином.

Лако је видети корист која се може имати од овакве употребе бескрајних количина. Разлажући овако дату количину на бескрајно ситне делове дешава се да су ти делови много простији него сама првобитна количина и да се према томе лако израчунавају, па према томе и њихов збир је лакше израчунати него првобитну количину која се тражила. Тако н. пр. код одредбе кружног лука има се посла са странама полигона које су очевидно простије од кружног лука; код одредбе криволинијске површине има се посла са правоуглоницима који су очевидно простији него првобитна криволинијска површина.

× × ×

Први начин при коме се коначне количине сматрају као количници бескрајно малих количина саставља онај део Математике који се зове Диференцијални Рачун; други начин при коме се коначне количине сматрају као збирови бескрајно малих количина саставља онај део Математике који се назива Интегрални Рачун. Скуп од та два рачуна састављају уопште онај део Математике који се назива Инфинитезимални Рачун који оперише са бескрајно малим количинама.

Интегрални рачун у његовој основи пронашао је Архимед. Међутим диференцијални рачун и ако је много простији од Интегралног, пронашао је тек Newton и Leibnitz и то сваки за себе и на два разна начина.

Појам диференцијала.

Сваку промењиву количину можемо почевши од њене неке вредности за колико хоћемо повећати или смањити. То, за колико смо ју повећали или смањили, назива се њеним прираштајем. Под прираштајем једне количине разуме се дакле разлика између промењене и првобитне те количине. Тај ће прираштај бити позитиван или негативан према томе да ли је првобитна количина повећана или смањена. Прираштај једне количине обично се означује тиме што се испред ње стави знак

$$\delta \text{ или } \Delta$$

Тако н. пр. ако хоћемо да означимо

прираштај количине x писаћемо

$$\delta x \quad \text{или} \quad \Delta x$$

Бескрајно мали прираштај једне количине назива се <u>диференцијалом</u> те количине и он се означује на тај начин што се испред оне количине чији то буде бескрајно мали прираштај стави знак

$$d$$

Тако н. пр. бескрајно мали прираштај количине x означује се са

$$dx$$

<u>Први основни задатак</u> са којим се има посла у диференцијалном рачуну јесте овај: кад две количине н. пр. x и y зависе једна од друге на један познати и одређен начин како се може знајући диференцијал dx израчунати диференцијал dy. Задатак се решава на овај начин: нека је веза између x и y исказана једначином

$$y = f(x)$$

Ако пустимо да се x промени за dx, онда ће и y добити известан прираштај који ће очевидно бити dy. Пошто тако промењене вредности $x+dx$ и $y+dy$ морају такође задовољавати горњу једначину, ми ћемо имати

$$y + dy = f(x+dx)$$

одакле је

$$dy = f(x+dx) - y$$

или

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

Ако десну страну поделимо и помножимо са dx, чиме она није промењена, добија се

$$dy = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}\, dx$$

Ако пустимо сад да прираштај dx бескрајно опада, ова се једначина претвара у

$$dy = f(x)\, dx$$

у чему је оличено ово <u>правило</u>: диференцијал једне функције добија се

кад се диференцијал независно про-
менљиве количине помножи са изво-
дом функције.

Из тога се већ може видети је
основна улога коју изводи имају у
диференцијалном рачуну.

Из предњег се обрасца види
да диференцијал једне функције за- је
виси од ова три елемента:

1° од вредности x-а;

2° " " dx; и

3° " облика функције $F(x)$, пошто од је
облика функције зависи и извод $F'(x)$.

Из горњег обрасца добијамо

$$F'(x) = \frac{dy}{dx}$$

из чега се добија ова нова дефини- је
ција извода: Извод једне функције
није ништа друго до количник од ди-
ференцијала функције и диферен-
цијала независно променљиве коли- биће
чине. То је у исто време и разлог
због чега се извод назива често пута
диференцијалним количником.

Примери:

1. Диференцијал функције
$y=x^m$

$$dy = m x^{m-1}\, dx$$

2. Диференцијал функције
$y=\log x$

$$dy = \frac{dx}{x}$$

3. Диференцијал функције
$y=\arc\cos x$

$$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Диференцијал функције
$y=\arc tg\, x$

$$dy = \frac{dx}{1+x^2}$$

5. Диференцијал функције
$y=(3x+2)(x-1)^{\frac{3}{2}}$

$$dy = \left[(3x+2)\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}3\right]dx =$$
$$= \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}\left[3x+2+2(x-1)\right]dx = \frac{15}{2}x(x-1)^{\frac{1}{2}}dx$$

6. Диференцијал функције

$$y=\log[\log(1+x^2)]$$

Биће

$$dy=\frac{2x\,dx}{(1+x^2)\log(1+x^2)}$$

7. Диференцијал функције

$$y=2e^{\sqrt{x}}\left(x^{\frac{3}{2}}-3x+6x^{\frac{1}{2}}-6\right)$$

Биће

$$dy=\left[2e^{\sqrt{x}}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-3+6\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+2\left(x^{\frac{3}{2}}-3x+6x^{\frac{1}{2}}-6\right)e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right]dx=xe^{\sqrt{x}}\left[2\left(\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x}+3\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)+2\left(x^{\frac{1}{2}}-3+6\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{6}{x}\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right]dx=$$

$$=xe^{\sqrt{x}}\left[\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{6}{x}+\frac{6}{x^{\frac{3}{2}}}+1-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x}-\frac{6}{x^{3/2}}\right]dx=$$

$$=xe^{\sqrt{x}}dx$$

8. Диференцијал функције

$$y=x(a^2-x^2)\sqrt{a^2+x^2}$$

Биће

$$dy=\left[x(a^2-x^2)\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}}+(a^2-x^2)\sqrt{a^2+x^2}-2x^2\sqrt{a^2+x^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\left[a^2x^2-x^4+a^4-x^4-2x^2a^2-2x^4\right]dx=$$

$$=\frac{a^4-a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

9. Диференцијал функције

$$y=e^{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$$

Биће

$$dy=e^{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}\cdot\left[(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}+2x\operatorname{arctg}x\right]dx$$

$$=e^{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}\cdot(1+2x\operatorname{arctg}x)\,dx$$

10. Диференцијал функције

$$y=\log(x-a)-\frac{a(2x-a)}{(x-a)^2}$$

Биће

$$dy=\left[\frac{1}{x-a}-\frac{(x-a)^2a\cdot2-a(2x-a)\cdot2(x-a)}{(x-a)^4}\right]dx=$$

$$=\frac{(x-a)^2-2a(x-a)+2a(2x-a)}{(x-a)^3}dx=$$

$$=\frac{x^2-2ax+a^2-2ax+2a^2+4ax-2a^2}{(x-a)^3}dx=$$

$$=\frac{x^2+a^2}{(x-a)^3}dx$$

11. Диференцијал функције

$$y=\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}x}$$

Биће

$$dy=\frac{(1+\operatorname{tg}x)\cos x-\sin x\cdot\frac{1}{\cos^2x}}{(1+\operatorname{tg}x)^2}dx=\frac{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\cos x-\frac{\sin x}{\cos^2x}}{\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)^2}dx$$

$$=\frac{\cos^3x+\sin x\cos^2x-\sin x}{(\cos x+\sin x)^2}dx=$$

$$= \frac{\cos^3 x + \sin x(\cos^2 x - 1)}{(\cos x + \sin x)^2}\, dx = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{(\cos x + \sin x)^2}\, dx$$

12. Диференцијал функције

$$y = \log(\sin^n x)$$

биће

$$dy = \frac{n \sin^{n-1} x \cos x}{\sin^n x}\, dx = n \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = n \operatorname{cotg} x\, dx$$

13. Диференцијал функције

$$y = \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

биће

$$dy = \frac{\sqrt{1+x^2}\left[\sqrt{1+x^2} - x \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right]}{(1+x^2)x}\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}\,[1 + x^2 - x^2]}{(1+x^2)x\sqrt{1+x^2}}\, dx = \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

14. Диференцијал функције

$$y = a^{x^n}$$

биће

$$dy = n x^{n-1} a^{x^n} \log a\, dx$$

Други основни задатак са којим се има посла у диференцијалном рачуну јесте овај: кад је дата једна функција што зависи од више независно променљивих количина и кад се знају диференцијали тих независно променљивих количина, одредити диференцијал саме функције. Другим речима ако је дато н. пр.

$$z = F(x, y, v, u, \dots)$$

како се може знајући

$$dx, dy, dv, du, \dots$$

одредити

$$dz.$$

Претпоставимо најпре да имамо посла само са две независно променљиве количине н. пр. x и y и нека је z њихова функција тако да је н. пр.

$$z = F(x, y)$$

Ако x оставимо непромењено а y се промени за dy, одговарајући прираштај функције биће

$$F(x, y+dy) - F(x, y) \qquad 1)$$

ако y оставимо непромењено а x се промени за dx, прираштај функције био би

$$F(x+dx, y) - F(x, y) \qquad 2)$$

На послетку ако се и x промени за dx

и y за dy, добијени прираштај биће
$$F(x+dx, y+dy) - F(x,y)$$
Израз 1) назива се парцијалним диференцијалом функције F по y; израз 2) назива се парцијалним диференцијалом функције F по x; израз 3) назива се тоталним диференцијалом функције F по x и y. Овај последњи израз т.ј. тотални диференцијал функције означује се са
$$dz \text{ или } dF$$
Према томе сад имамо ова два задатка:

1° Како се могу израчунати парцијални диференцијали 1) и 2); и

2° како се помоћу њих може израчунати тотални диференцијал dz.

Уочимо најпре израз 1). Он се може написати у облику
$$1) = F(x, y+dy) - F(x,y) = \frac{F(x, y+dy) - F(x,y)}{dy}\, dy$$
У том обрасцу први фактор на десној страни представља извод функције $F(x,y)$ кад се x сматра као стално а y као променљиво. Такав се извод назива парцијалним изводом функције $F(x,y)$ по y и обележава се знаком
$$F'_y \text{ или } \frac{\partial F}{\partial y}$$
Према томе последњи образац своди се на
$$1) = \frac{\partial F}{\partial y}\, dy \qquad 4)$$
На исти је начин
$$2) = F(x+dx, y) - F(x,y) = \frac{F(x+dx, y) - F(x,y)}{dx}\, dx$$
Први фактор на десној страни није ништа друго до извод функције $F(x,y)$ кад се у њој сматра y као стално а x као променљиво. Такав извод назива се парцијалним изводом функције $F(x,y)$ по x и означава се са
$$F'_x \text{ или } \frac{\partial F}{\partial x}$$
Према томе последњи образац даје
$$2) = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx \qquad 5)$$
Обрасци 4) и 5) исказују ово правило: Парцијални диференцијал једне функције по једној којој се хоће

променљивој добија се кад се парцијални извод те функције помножи са диференцијалом те променљиве количине.

Остаје нам још да се види како се, знајући парцијалне диференцијале, може израчунати тотални диференцијал једне функције. Он је представљен обрасцем 3) тако да је тотални диференцијал

$$dz = F(x+dx, y+dy) - F(x,y)$$

ако десној страни додамо и одузмемо

$$F(x, y+dy)$$

чиме се она не мења, добијамо

$$dz = [F(x+dx, y+dy) - F(x, y+dy)] + [F(x, y+dy) - F(x,y)]$$

Прва заграда није ништа друго до парцијални диференцијал функције $F(x, y+dy)$ узет по x. Тај диференцијал очевидно није ништа друго до диференцијал саме функције $F(x,y)$, пошто dy у крајњем резултату испада; прва ће заграда дакле бити

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx$$

Друга заграда није ништа друго до парцијални диференцијал функције $F(x,y)$ узет по y, те ће она дакле бити

$$\frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Према томе последњи образац даје

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

и у њему је оличено ово правило: Тотални диференцијал једне функције раван је збиру парцијалних диференцијала те функције.

Лако се увиђа да ће то исто правило вредети за ма колики број независно променљивих количина тако да се оно може сматрати као опште правило за израчунавање тоталних диференцијала. Према томе ако је дата функција

$$z = F(x, y, u, v, \cdots)$$

њен тотални диференцијал биће

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \cdots$$

Примери.

1. Наћи тотални диференцијал функције

$$u = xy\,e^{x+2y}$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{x+2y} + xy\,e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{x+2y} + 2xy\,e^{x+2y}$$

па је према томе

$$du = e^{x+2y}\left[(y+xy)\,dx + (x+2xy)\,dy\right] =$$

$$= e^{x+2y}\left[y(1+x)\,dx + x(1+2y)\,dy\right]$$

2. Наћи тотални диференцијал функције

$$u = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2(x^2+y^2)\,2x}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-4x}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2(x^2+y^2)\,2y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-4y}{(x^2+y^2)^3}$$

и према томе

$$du = -\frac{4(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2)^3}$$

3. Наћи тотални диференцијал функције

$$u = \frac{(x+a)^n}{(y+b)^m}$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{n(x+a)^{n-1}}{(y+b)^m}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(x+a)^n m (y+b)^{m-1}}{(y+b)^{2m}} = \frac{-m(x+a)^n}{(y+b)^{m+1}}$$

па је према томе

$$du = \frac{(x+a)^{n-1}\left[n(y+b)\,dx - m(x+a)\,dy\right]}{(y+b)^{m+1}}$$

4. Наћи тотални диференцијал функције

$$u = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \sqrt{x^2-y^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)x - (x^2-y^2)x}{\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{x(x^2+y^2-x^2+y^2)}{\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{-2y}{\sqrt{x^2-y^2}} - \sqrt{x^2-y^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-y(x^2+y^2) - y(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-y(x^2+y^2+x^2-y^2)}{\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-2x^2y}{\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)^{3/2}}$$

и према томе

$$du=\frac{2xy(y\,dx-x\,dy)}{\sqrt{x^2-y^2}\,(x^2+y^2)^{3/2}}$$

5. Наћи тотални диференцијал функције

$$u=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$$

Овде је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(x+y)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2}=\frac{(x+y)\sqrt{y}-2y\sqrt{x}-2x\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}\,(x+y^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{y}(x+y-2\sqrt{xy}-2x)}{2\sqrt{xy}\,(x+y)^2}=\frac{\sqrt{y}\,(y-x-2\sqrt{yx})}{2\sqrt{xy}\,(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(x+y)\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{y}}-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x+y)^2}=\frac{(x+y)\sqrt{x}-2x\sqrt{y}-2y\sqrt{x}}{2\sqrt{xy}\,(x+y)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(x+y-2\sqrt{xy}-2y)}{2\sqrt{xy}\,(x+y)^2}=\frac{\sqrt{x}\,(x-y-2\sqrt{xy})}{2\sqrt{xy}\,(x+y)^2}$$

Отуда

$$du=\frac{(y-x-2\sqrt{xy})\sqrt{y}\,dx-(x-y-2\sqrt{xy})\sqrt{x}\,dy}{2\sqrt{xy}\,(x+y)^2}$$

6. Наћи тотални диференцијал функције

$$u=\log y^x$$

Дату функцију можемо написати у облику

$$u=x\log y$$

па је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\log y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{y}$$

Отуда

$$du=\log y\,dx+\frac{x}{y}\,dy$$

7. Наћи тотални диференцијал функције

$$u=\log\sin\frac{x}{y}$$

Овде је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}}{\sin\frac{x}{y}}=\frac{1}{y}\operatorname{ctg}\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\cos\frac{x}{y}\cdot-\frac{x}{y^2}}{\sin\frac{x}{y}}=-\frac{x}{y^2}\operatorname{ctg}\frac{x}{y}$$

Отуда

$$du=\frac{1}{y^2}\operatorname{ctg}\frac{x}{y}\cdot[y\,dx-x\,dy]$$

8. Наћи тотални диференцијал функције

$$u=\log\sqrt{\frac{ax+by}{ax-by}}$$

Овде је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\sqrt{ax-by}}{\sqrt{ax+by}}\cdot\frac{\sqrt{ax-by}\,\frac{1}{2}\,\frac{a}{\sqrt{ax+by}}-\sqrt{ax+by}\,\frac{1}{2}\,\frac{a}{\sqrt{ax-by}}}{(ax-by)}=$$

$$=\frac{(ax-by)\,\frac{1}{2}\,\frac{a}{\sqrt{ax+by}}-\sqrt{ax+by}\,\frac{1}{2}\,a}{\sqrt{ax+by}\,(ax-by)}=\frac{(ax-by)a-(ax+by)a}{2(ax+by)(ax-by)}$$

$$= \frac{a(ax-by-ax-by)}{2(a^2x^2-b^2y^2)} = \frac{-aby}{a^2x^2-b^2y^2}$$

На исти би начин нашли

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{abx}{a^2x^2-b^2y^2}$$

Отуда

$$du = \frac{ab(x\,dy - y\,dx)}{a^2x^2-b^2y^2}$$

9. Наћи тотални диференцијал функције

$$u = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{x+y}$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}\cdot\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2+(x-y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}\cdot\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2+(x-y)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

Отуда

$$du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$$

10. Наћи тотални диференцијал функције

$$u = \frac{x^2y}{a^2-z^2}$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{a^2-z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{a^2-z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2x^2yz}{(a^2-z^2)^2}$$

Отуда

$$du = \frac{2xy}{a^2-z^2}dx + \frac{x^2}{a^2-z^2}dy + \frac{2x^2yz}{(a^2-z^2)^2}dz$$

11. Наћи тотални диференцијал функције

$$u = \frac{m\sin y - n\sin z}{p\sin z - m\sin x}$$

Овди је

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{m\cos x(m\sin y - n\sin z)}{(p\sin z - m\sin x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{m\cos y}{p\sin z - m\sin x} = \frac{m\cos y(p\sin z - m\sin x)}{(p\sin z - m\sin x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-n\cos z(p\sin z - m\sin x) - (m\sin y - n\sin z)p\cos z}{(p\sin z - m\sin x)^2} =$$

$$= \frac{m\cos z(n\sin x - p\sin y)}{(p\sin z - m\sin x)^2}$$

Отуда

$$du = \frac{m\cos x(m\sin y - n\sin z)dx + m\cos y(p\sin z - m\sin x)dy + m\cos z(n\sin x - p\sin y)dz}{(p\sin z - m\sin x)^2}$$

12. Наћи тотални диференцијал функције

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{z}+\frac{z^2}{2}$$

Овде је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{z}{z^2+x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{-x}{z^2+x^2}+z$$

Отуда

$$du=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{zdx-xdz}{z^2+x^2}+zdz$$

* * *

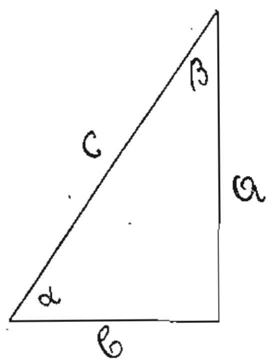
Предње правило за одређивање тоталних диференцијала налази н. пр. непосредну примену у теорији грешака при мерењима или посматрањима.

Једна се количина н. пр. дужина, тежина, величина угла и т. д. мерењем у опште може одређивати на два начина: 1° Непосредним мерењем т. ј. тражена количина измери се непосредно у јединицама мере (дужине, тежине, угла и т. д.) 2° посредним мерењем т. ј. тражена се количина изводи рачуном из других количина које су непосредним мерењем одређене.

Тако н. пр. у једном правоуглом троуглу могу се стране и углови непосредно мерити, а може се измерити непосредно једна страна и један угао па из тих података израчунати сви остали елементи.

Било да се једна количина мери посредно или непосредно, увек се чине извесне грешке које ће бити у толико мање у колико се са већом пажњом и извежбаношћу ради, али које увек постоје. При непосредним мерењима учињене грешке на тим количинама биће и у крајњем резултату онолике колике су одиста и учињене, али при посредним мерењима то није случај. У таквим приликама учињена непосредна грешка утиче и на резултујућу грешку на оним количинама које израчунавамо и тај утицај може бити разан према начину на који су везане оне количине што се израчунавају са оним количинама што се непосредно мере.

Тако н. пр. ако има да се одреди у правоуглом троуглу хипотенуза c из непосредно мерене катете a и непосредно мереног угла α имаћемо да је



$$c = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Ако смо мерењем стране a погрешили н. пр. за 1mm, погрешка учињена са страном c неће више бити 1mm већ 1mm/$\sin\alpha$, да ће у колико је α мање у толико ће и та резултујућа грешка бити већа тако да она може испасти 100, 1000 ... пута већа него што је првобитна грешка. Међутим ако би радили обрнуто т.ј. одређивали дужину a мерећи непосредно дужину c и угао α, имали би

$$a = c \cdot \sin\alpha$$

и онда ако смо на дужини c погрешили за 1mm, учињена погрешка на дужини a биће 1mm$\cdot\sin\alpha$. Пошто је

$$\sin\alpha < 1$$

то ће и грешка бити смањена.

Питање је сад како се у једном датом рачуну може одредити резултујућа грешка на једној количини која се израчунава, кад се знају грешке учињене при непосредним мерењима података. Пре свега у теорији грешака увек се претпоставља да су те грешке сведене на врло малу меру. Означимо те мале непосредне грешке на тај начин што ћемо пред ону количину на којој је погрешено ставити знак δ, тако да н. пр. δa, δx, ... означују грешке учињене на количинама a, x, ... Ако се претпостави да су те грешке довољно мале тако да се њихови квадрати, кубови, ... или производи могу занемарити настрам њих самих, онда се такве грешке могу сматрати као веома мали прираштаји мерених количина т.ј. као њихови диференцијали. Овакво ће сматрање бити у толико ближе истини у колико су те грешке мање.

Претпоставимо сад да је једна количина н.пр. z везана са једном количином x помоћу дате релације

$$z = F(x)$$

онда мерећи непосредно x можемо из те релације израчунати z. Ако смо при том учинили са x-ом грешку δx, та ће се грешка осетити и на z т.ј. изазваће једну грешку δz. Питање је сад како се знајући x и δx може израчунати резултујућа грешка δz. Сматрајући δx и δz као диференцијале имаћемо

$$\delta z = F'(x)\, dx$$

из чега се види да се резултујућа грешка δz добија кад се непосредна грешка δx помножи изводом $F'(x)$ где x ваља сменити оноликом вредношћу колику смо нашли мерењем. Ако тај образац напишемо у облику

$$\delta z = k \cdot \delta x$$

где је

$$k = F'(x)$$

број k назива се тежином грешке δx. Што год је он већи у толико је и резултујућа грешка већа, стога се он зове и коефицијентом утицаја грешке δx на количину x.

Претпоставимо сад да се има посла са једном количином z која зависи од више количина н.пр. $x, y, v, u, \dots$ тако да је н.пр.

$$z = F(x, y, v, u, \dots)$$

Претпоставимо да смо мерећи $x, y, v, u, \dots$ учинили грешке $\delta x, \delta y, \delta v, \delta u, \dots$ Питање је колика ће бити резултујућа грешка учињена на z. Ако грешке сматрамо као диференцијале, имаћено из средњег обрасца, а према правилу за тоталне диференцијале, да је

$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u + \cdots$$

или

$$\delta z = k_1 \cdot \delta x + k_2 \cdot \delta y + k_3 \cdot \delta v + k_4 \cdot \delta u + \cdots$$

где је

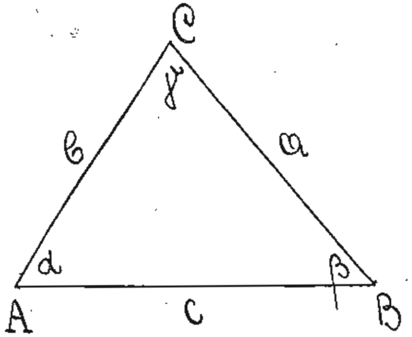
$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \quad k_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \quad k_3 = \frac{\partial f}{\partial v} \quad k_4 = \frac{\partial f}{\partial u} \quad \cdots$$

На тај начин помоћу парцијалних извода функције f и помоћу непосредних грешака $\delta x, \delta y, \delta v, \delta u, \cdots$ можемо израчунати грешку δz.

Примери:

1. Ако су у троуглу ABC дати углови α и β и страна b, помоћу тих количина можемо наћи страну a, јер из односа

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$



имамо

$$a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Претпоставимо да смо мерећи b, α и β погрешили за δb, $\delta\alpha$ и $\delta\beta$, грешка коју ћемо учинити на дужини a биће

$$\delta a = k_1\,\delta b + k_2\,\delta\alpha + k_3\,\delta\beta$$

Коефицијенат k_1 биће парцијални извод функције $b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ по количини b; према томе је

$$k_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Коефицијенат k_2 биће парцијални извод исте функције по α; према томе је

$$k_2 = \frac{b\cos\alpha}{\sin\beta}$$

На послетку коефицијенат k_3 је парцијални извод исте функције по β, дакле

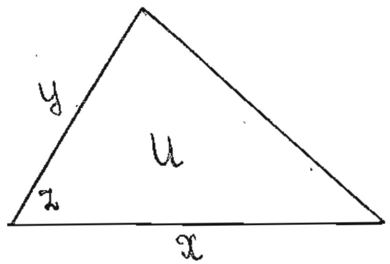
$$k_3 = -\frac{b\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta}$$

Према томе је

$$\delta a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\delta b + \frac{b\cos\alpha}{\sin\beta}\delta\alpha - \frac{b\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta}\delta\beta$$

2. Наћи колику смо погрешку учинили при израчунавању површине троугла, ако смо мерењем нашли да је дужина једне стране $x = 1000\,m$, друге $y = 500\,m$ а величина њихове

захваћеног угла $z=30°$ и ако смо при мерењу на 1000 m учинили погрешку од 0.1 m (даље $\delta x = 0.1$ $\delta y = 0{,}05\,m$), а при мерењу угла z на 30° учинили погрешку од 1" (даље $\delta z = 1''$).



Површина u троугла дата је обрасцем

$$u = \frac{xy \sin z}{2}$$

Одатле је

$$du = \frac{1}{2}\left[y \sin z\, dx + x \sin z\, dy + xy \cos z\, dz\right]$$

па је у нашем случају тотална грешка

$$du = \frac{1}{2}\left[500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.1 + 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 + 1000 \cdot 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot dz\right]$$

Имамо још да преобратимо dz у дужинске јединице, па имамо да је

$$dz = \frac{1}{200\,000}$$

Отуда

$$du = \frac{1}{2}\left[500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 + 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 + 1000 \cdot 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{200000}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[25 + 25 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{52.1}{2} = 26.05\ m^2$$

3. Наћи погрешку која се мо-

ће десити при верификовању Мариотовог закона

$$p \cdot v = const. = c$$

кад се при мерењу притиска погреши за 0.001 а при мерењу запремине за $1\,cm^3$, ако је $p = 753\,mm$ а $v = 1{,}367\,dm$.

Имаћемо

$$dc = p\,dv + v\,dp = 753 \cdot 1 + 1367 \cdot 1 = 2110\ cm\,mm$$

Међутим је

$$c = p \cdot v = 755 \cdot 1367 = 102935\ cm\,mm$$

и према томе биће

$$0{,}211\cancel{0} : 103\cancel{0000} = 0{,}00205$$

тј. погрешка је за 0.002.

4. Наћи погрешку при мерењу запремине собе ако смо мерењем нашли $x = 4\,m$ $y = 3\,m$ $z = 5\,m$ а при том начинили грешке $dx = 0{,}001$ $dy = 0{,}001$ $dz = 0{,}01$.

Овде је запремина

$$v = xyz$$

и према томе

$$dv = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz =$$
$$= 3 \cdot 5 \cdot 0{,}001 + 4 \cdot 5 \cdot 0{,}001 + 4 \cdot 3 \cdot 0{,}01 =$$
$$= 0{,}015 + 0{,}02 + 0{,}12 = 0{,}135\ m^3$$

и према томе грешка учињена при мерењу те запремине је $0{,}135\ m^3$

Виши диференцијали или диференцијали вишег реда

Видели смо да диференцијал једне количине н. пр. x није ништа друго до бескрајно мали прираштај те количине. Међутим очевидно је да тај прираштај може имати свој прираштај и овај би био диференцијал самог диференцијала dx т. ј. $d(dx)$. Он се назива другим диференцијалом количине x и означује се знаком

$$d^2x$$

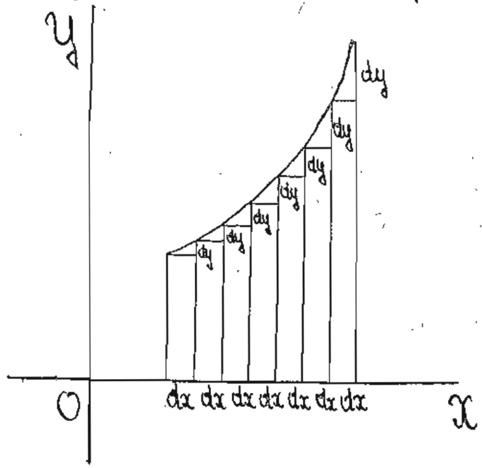
Међутим очевидно је да и овај други диференцијал може имати свој прираштај, ао би био диференцијал другог диференцијала т. ј. $d(d^2x)$ и он се означује знаком

$$d^3x$$

Све се то може продужити док се под хи
ће и на тај начин долази се до појмо
првог, другог, трећег, ... диференцијала
па који се означују знацима dx, d^2x
d^3x, d^4x, ...

Основни задатак на који се налази при рачунању са вишим диференцијалима јесте овај: знајући релације које постоје између једне количине z и других количина x, y, t и, ... од којих ова зависи, израчунати више диференцијале количине z. Решење проблема основано је на једном правилу које се састоји у овоме: диференцијале независно променљивих количина, пошто су промене тих количина у нашој власти, можемо по вољи сматрати или као сталним или као променљиве, како нам кад за рачуне буде згодније, али то не смемо радити и са количинама што од њих зависе, јер са њима не располажемо по својој вољи. Тако

н. пр. пошто апсцису x можемо произвољно мењати, можемо јој дати један низ једнаких прираштаја dx, а међутим је очевидно да одговарајући прираштаји dy неће више бити једнаки, изузимајући случај кад се крива линија своди на праву.



У таквом случају узевши да су диференцијали независно променљиве количине, и ако су они променљиви, међу собом једнаки, можемо узети да су њихови прираштаји равни нули, према чему би изашло да се виши диференцијали на које независно променљиве количине у рачуну могу сматрати као равни нули.

То правило јако олакшава рачуне и упрошћава решење задатака о којима је овди реч. Ми ћемо ово правило применити на неколико важних случајева.

1° Виши диференцијали функција што зависе од једне независно-променљиве количине.

Нека је дата функција

$$y = F(x)$$

Видели смо да је њен први диференцијал дат обрасцем

$$dy = F'(x)\,dx$$

Пошто је други диференцијал раван првом диференцијалу овог израза, то ће бити

$$d^2y = d(dy) = d[F'(x)\,dx] \quad 1)$$

Пошто се dx према предњем правилу има сматрати као стално, можемо га извући пред знак d тако да се добија

$$d^2y = dx \cdot d[F'(x)] \quad 2)$$

Међутим израз $d[F'(x)]$ према правилу о првом диференцијалу раван је изводу количине $F'(x)$ пута dx т.ј.

$$d[F'(x)] = F''(x)\,dx \quad 3)$$

и заменом 3) у 2) добија се

$$d^2y = F''(x)\,dx^2$$

Потражимо сад трећи диференцијал па ћемо имати

$$d^3y = d[F''(x)\,dx^2] = dx^2 \cdot d[F''(x)] =$$
$$= dx^2 \cdot F'''(x)\,dx = F'''(x)\,dx^3$$

Продужимо овај посао и даље долазимо до овог обрасца за n-ти диференцијал функције

$$d^ny = F^{(n)}(x)\,dx^n$$

У томе је обрасцу означено ово правило: n-ти диференцијал једне функције $F(x)$ добија се кад се n-ти извод те функције помножи са dx подигнутим на n-ти степен.

У исто се време из овог обрасца добија

$$F^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \text{ или } = \frac{d^nF}{dx^n}$$

из чега се види да се n-ти извод једне функције добија кад се n-ти диференцијал те функције подели са dx подигнутим на n-ти степен. Због тога се n-ти извод назива често пута n-ти диференцијални количник и означује се било знаком $f^{(n)}(x)$ било знаком $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Примери:

1. Наћи више диференцијале функције

$$y=\frac{a+x}{a-x}$$

Имаћемо

$$dy=f'(x)dx=\frac{(a-x)-(a+x)\cdot -1}{(a-x)^2}=\frac{2a}{(a-x)^2}\,dx$$

$$d^2y=f''(x)\,dx=2a\,\frac{-2(a-x)\cdot -1}{(a-x)^4}\,dx^2=\frac{2\cdot 2\cdot a}{(a-x)^3}\,dx^2$$

$$d^3y=f'''(x)\,dx=2\cdot 2\cdot a\,\frac{-3(a-x)^2\cdot -1}{(a-x)^6}\,dx^3=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot a}{(a-x)^4}\,dx^3$$

у опште

$$d^ny=2\cdot\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\cdot a}{(a-x)^{n+1}}\,dx^n$$

или

$$\frac{d^ny}{dx^n}=2\,\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\,a}{(a-x)^{n+1}}$$

2. Наћи више диференцијале функције

$$y=x^m$$

Имаћемо

$$dy=m\,x^{m-1}\,dx$$

$$d^2y=m(m-1)\,x^{m-2}\,dx^2$$

$$d^3y=m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}\,dx^3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$d^ny=m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-n+1)\,x^{m-n}\,dx^n$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-n+1)\,x^{m-n}$$

За $n=m$ имаћемо

$$\frac{d^my}{dx^m}=1\cdot 2\cdot 3\cdots m$$

т.ј. диференцијал m-тог реда је константа и према сви диференцијали вишег реда од m равни су нули.

3. Наћи више диференцијале функције

$$y=\log x$$

Имаћемо

$$dy=x^{-1}\log e\,dx$$

$$d^2y=-1\,x^{-2}\log e\,dx^2$$

$$d^3y=1\cdot 2\,x^{-3}\log e\,dx^3$$

$$d^4y=-1\cdot 2\cdot 3\,x^{-4}\log e\,dx^4$$

$$d^n y = (-1)^{n-1}\, 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots (n-1)\, x^{-n}\, Loge\, dx^n$$

или

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)\, Loge}{x^n}$$

Овај образац важи за

$$n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

а не важи за

$$n = 1$$

јер би за $n=1$ добили

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

што не стоји јер је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Loge}{x}$$

Ако се ради са Неперовим логаритмима, онда је

$$loge = 1$$

па је у том случају n-ти извод функције

$$y = \log x$$

дат обрасцем

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)}{x^n}$$

4. Наћи узастопне диференцијале функције

$$y = a^{mx}$$

Имамо

$$dy = m \log a\; a^{mx}\, dx$$

$$d^2 y = (m \log a)^2\, a^{mx}\, dx^2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$d^n y = (m \log a)^n\, a^{mx}\, dx^n$$

или

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (m \log a)^n a^{mx}$$

Ако је

$$m = 1$$

онда је

$$y = a^x$$

па је у том случају

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (\log a)^n a^x$$

Ако је сем тога још и

$$a = e$$

онда је

$$y = e^x$$

па је

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x$$

5. Наћи узастопне диференцијале функције

$$y = \sin mx$$

Имамо:

$$dy = m \cos mx = m \sin\left(mx + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$d^2y = m^2 \cos\left(mx + \frac{\pi}{2}\right) dx^2 = m^2 \sin\left(mx + 2\frac{\pi}{2}\right) dx^2$$

. . . .

$$d^n y = m^n \sin\left(mx + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n$$

или

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m^n \sin\left(mx + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Ако је

$$m = 1$$

онда је

$$y = \sin x$$

па је

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

6. Наћи узастопне диференцијале функције

$$y = \cos mx$$

Имамо

$$dy = -m \sin mx\, dx = m \cos\left(mx + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$d^2y = -m^2 \sin\left(mx + \frac{\pi}{2}\right) dx^2 = m^2 \cos\left(mx + 2\frac{\pi}{2}\right) dx^2$$

. . . .

$$d^n y = m^n \cos\left(mx + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n$$

или

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m^n \cos\left(mx + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Ако је

$$m = 1$$

онда је

$$y = \cos x$$

па је

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

7. Наћи узастопне диференцијале функције

$$y = e^{x \sin\alpha} \cdot \sin(x\cos\alpha)$$

Имамо

$$dy = \left\{e^{x\sin\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot \cos(x\cos\alpha) + \sin(x\cos\alpha)\sin\alpha\, e^{x\sin\alpha}\right\} dx =$$

$$= e^{x\sin\alpha}\left[\cos\alpha \cos(x\cos\alpha) + \sin\alpha \sin(x\cos\alpha)\right] dx =$$

$$= e^{x\sin\alpha} \cos(x\cos\alpha - \alpha)\, dx = e^{x\sin\alpha} \cdot \sin\left(x\cos\alpha - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$d^2y = \left[e^{x\sin\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\left(x\cos\alpha - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x\cos\alpha - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sin\alpha\, e^{x\sin\alpha}\right] dx^2 =$$

$$= e^{x\sin\alpha}\left[\cos\alpha \cos\left(x\cos\alpha - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\alpha \sin\left(x\cos\alpha - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] dx^2 =$$

$$= e^{x\sin\alpha} \cos\left(x\cos\alpha - 2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) dx^2 =$$

$$= e^{x\sin\alpha} \cdot \sin\left(x\cos\alpha - 2\alpha + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) dx^2$$

. . . .

$$d^n y = e^{x\sin\alpha} \cdot \sin\left(x\cos\alpha - n\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) \cdot dx^n$$

или

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{x\sin\alpha} \cdot \sin\left(x\cos\alpha - n\alpha + \frac{n\pi}{2}\right)$$

8. Наћи узастопне диференцијале функције

$$y = e^{ax}\cdot \sin mx$$

Имаћемо

$$dy = [e^{ax} m \cos mx + e^{ax} a \cdot \sin mx]\, dx =$$

$$= e^{ax} a \left[\sin mx + \frac{m}{a}\cos mx\right] \cdot dx$$

Ако означимо

$$\frac{m}{a} = \operatorname{tg}\varphi$$

одакле је

$$a = \frac{m}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{m\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{m\cos\varphi}{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}} = \frac{m\cos\varphi\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi} =$$

$$= \frac{m\cos\varphi\sqrt{1+\frac{m^2}{a^2}}}{\frac{m}{a}} = \frac{m\cos\varphi\sqrt{\frac{a^2+m^2}{a^2}}}{m}\, a = (a^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\varphi$$

онда сменом добијамо

$$dy = e^{ax} a \left[\sin mx + \operatorname{tg}\varphi \cos mx\right] dx =$$

$$= e^{ax} a \frac{\sin mx \cos\varphi + \sin\varphi \cos mx}{\cos\varphi}\, dx =$$

$$= e^{ax} a \frac{\sin(mx+\varphi)}{\cos\varphi}\, dx =$$

$$= (a^2+m^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \sin(mx+\varphi)\, dx$$

$$d^2y = (a^2+m^2)^{1/2}\left[e^{ax} m \cos(mx+\varphi) + e^{ax} a \sin(mx+\varphi)\right] dx^2 =$$

$$= (a^2+m^2)^{1/2} e^{ax} a \left[\sin(mx+\varphi) + \frac{m}{a}\cos(mx+\varphi)\right] dx^2 =$$

$$= (a^2+m^2)^{1/2} e^{ax} a \left[\sin(mx+\varphi) + \operatorname{tg}\varphi \cos(mx+\varphi)\right] dx^2$$

$$= (a^2+m^2)^{2/2} e^{ax} \sin(mx+2\varphi)\, dx^2$$

. . . .

$$d^ny = (a^2+m^2)^{n/2} e^{ax} \sin(mx+n\varphi)\, dx^n$$

или

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (a^2+m^2)^{n/2} e^{ax} \sin(mx+n\varphi)$$

9. Наћи узастопне диференцијале функције

$$y = xe^x$$

Имаћемо

$$dy = (xe^x + e^x)\, dx = e^x(x+1)\, dx$$

$$d^2y = [e^x + (x+1)e^x]\, dx^2 = e^x(x+2)\, dx^2$$

. . . .

$$d^ny = e^x(x+n)\, dx^n$$

или

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^x(x+n)$$

10. Наћи узастопне диференцијале функције

$$y = \log(x-a)$$

Имаћемо

$$dy = (x-a)^{-1}\, dx$$

$$d^2y = -(x-a)^{-2}\, dx^2$$

$$d^3y = 1\cdot 2\,(x-a)^{-3}\, dx^3$$

. . . .

$$d^ny = (-1)^{n-1}\, 1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)(x-a)^{-n}\, dx^n$$

или

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{(x-a)^n}$$

11. Наћи узастопне диференцијале функције

$$y=\frac{x}{a+bx}$$

Имаћемо

$$dy = \frac{a+bx-bx}{(a+bx)^2}dx = \frac{a}{(a+bx)^2}dx$$

$$d^2y = -a\frac{2b}{(a+bx)^3}dx^2$$

$$d^3y = a\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot b^2}{(a+bx)^4}dx^3$$

. . . .

$$d^ny = (-1)^{n-1}\, a\, b^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(a+bx)^{n+1}}dx^n$$

или

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1}\, n!\, b^{n-1}\frac{a}{(a+bx)^{n+1}}$$

2° Виши диференцијали функција што зависе од више независно-промењивих количина.

Нека је дата функција

$$z=F(x,y)$$

која зависи од две независно-промењиве количине x и y. Видели смо да је њен први тотални диференцијал дат обрасцем

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \qquad 1)$$

Према дефиницији другог диференцијала биће

$$d^2F = d\left[\frac{\partial F}{\partial x}dx\right] + d\left[\frac{\partial F}{\partial y}dy\right] \qquad 2)$$

Уочимо најпре израз

$$d\left[\frac{\partial F}{\partial x}dx\right]$$

Пошто је x независно-промењива количина, то је dx стално па га можемо извући пред знак d тако да је

$$d\left[\frac{\partial F}{\partial x}dx\right] = dx\cdot d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

Пошто у парцијалном изводу $\frac{\partial F}{\partial x}$ у опште фигуришу и x и y, то ће његов први диференцијал бити

$$d\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dy \qquad 3)$$

међутим израз

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \qquad 4)$$

представља парцијални извод по x, од парцијалног извода $\frac{\partial F}{\partial x}$ и он се назива другим парцијалним изводом функције F по x, и означује се знаком

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad F''_{x^2}$$

такав се извод добија кад се у функцији F сматра y као стално па се узме узастопце двапут извод по x. Тако исто израз

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

није ништа друго до парцијални извод по y, од израза $\frac{\partial F}{\partial x}$. Он се назива другим парцијалним изводом функције F узет једанпут по x а једанпут по y и означује се знаком

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \text{или} \quad F''_{x,y}$$

Он се добија кад се у функцији F сматра најпре y као стално и узме извод по x, па се затим у добијеном резултату сматра x као стално и узме извод по y.

Са таквим означавањима образац 3) постаје

$$d\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] = F''_{x^2}\,dx + F''_{x,y}\,dy \qquad 5)$$

На исти начин можемо трансформисати и други члан у обрасцу 2) па би нашли да је

$$d\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] = F''_{y,x}\,dx + F''_{y^2}\,dy \qquad 6)$$

Ако уочимо изразе $F''_{x,y}$ и $F''_{y,x}$, први од њих представља други извод функције F узет једанпут по x и једанпут по y, а други представља такође други извод функције F узет једанпут по y и једанпут по x. Лако се доказује да су та два израза међу собом увек идентички једнака тако да је

$$F''_{x,y} = F''_{y,x}$$

Према томе и према обрасцима 5) и 6) образац 2) постаје

$$d^2F = F''_{x^2}\,dx^2 + 2F''_{x,y}\,dx\,dy + F''_{y^2}\,dy^2 \qquad 7)$$

У том обрасцу је исказано како се други диференцијал функције F израчунава помоћу парцијалних извода ове функције и помоћу диференцијала dx и dy. Приметимо да се према поменутом означавању парцијалних извода последњи образац често пише у облику

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Овако би се могао исти посао продужити и даље тако да би добили трећи диференцијал d^3f. Он ће бити раван првом диференцијалу другог диференцијала од f т.ј.

$$d^3f = d\left[d^2f\right]$$

где још ваља заменити други диференцијал d^2f његовом вредношћу и диференцијалити му сваки члан понаособ, имајући при том на уму да се dx и dy имају сматрати константни, а да међутим парцијални изводи f''_{x^2}, f''_{xy} и f''_{y^2} зависе од x и y.

Исте се операције могу продужити и даље имајући на уму да је у опште n-ти диференцијал d^nf раван првом диференцијалу од $(n-1)$ог диференцијала $d^{n-1}f$. На тај начин дошли би до општег обрасца за више диференцијале функције f која зависи од две независно-променљиве количине, који образац гласи

$$d^nf = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}dx^n + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + \binom{n}{2}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}dy^n$$

или симболички означен

$$d^nf = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^n$$

Ако је дата функција

$$u = f(x, y, z)$$

која зависи од три независно промен-љиве количине, дошли би на исти начин до симболичког обрасца

$$d^nf = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^n$$

Примери:

1. Наћи узастопне диференцијале функције

$$z = x^m y^p$$

Парцијални изводи те функције су:

$$z'_x = m x^{m-1} y^p \qquad z'_y = p x^m y^{p-1}$$

$z''_{x^2} = m(m-1)x^{m-2}y^p \quad z''_{x,y} = mpx^{m-1}y^{p-1} \quad z''_{y^2} = p(p-1)x^m y^{p-2}$

$z'''_{x^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}y^p \quad z'''_{x^2,y} = m(m-1)px^{m-2}y^{p-1}$

$z'''_{xy^2} = mp(p-1)x^{m-1}y^{p-2} \quad z'''_{y^3} = p(p-1)(p-2)x^m y^{p-3}$

. . . .

Према томе узастопни диференцијали дате функције су:

$$dz = mx^{m-1}y^p\,dx + px^m y^{p-1}\,dy$$

$$d^2z = m(m-1)x^{m-2}y^p\,dx^2 + 2mpx^{m-1}y^{p-1}\,dx\,dy + p(p-1)x^m y^{p-2}\,dy^2$$

$$d^3z = m(m-1)(m-2)x^{m-3}y^p\,dx^3 + 3mp(m-1)x^{m-2}y^{p-1}\,dx^2dy + 3mp(p-1)x^{m-1}y^{p-2}\,dx\,dy^2 + p(p-1)(p-2)x^m y^{p-3}\,dy^3$$

и т. д.

2. Нађи узастопне диференцијале функције

$$f = (\sin x)^{\sin y}$$

Овде је:

$f'_x = \sin y\,\cos x\,(\sin x)^{\sin y-1} \quad f'_y = (\sin x)^{\sin y}\log\sin x\cdot\cos y$

$f''_{x^2} = \sin y\,[-(\sin x)^{\sin y} + \cos^2 x(\sin y-1)(\sin x)^{\sin y-1}]$

$f''_{x,y} = \cos x\,[\sin y\cdot(\sin x)^{\sin y-1}\log\sin x\cdot\cos y + (\sin x)^{\sin y-1}\cdot\cos y]$

$= \cos y\cos x\,(\sin x)^{\sin y-1}[\sin y\log\sin x + 1]$

$f''_{y^2} = \log\sin x\,[-(\sin x)^{\sin y}\cdot\sin y + \cos^2 y\cdot(\sin x)^{\sin y}\log\sin x] =$

$= \log\sin x\cdot(\sin x)^{\sin y}[\cos^2 y\log\sin x - \sin y]$

и т. д.

и према томе је

$$df = \sin y\cos x\,(\sin x)^{\sin y-1}\cdot dx + (\sin x)^{\sin y}\cdot\log\sin x\cdot\cos y\cdot dy$$

$$d^2f = \sin y\,[\cos^2 x\cdot(\sin y-1)\cdot(\sin x)^{\sin y-2} - (\sin x)^{\sin y}]dx^2 + 2\cos y\cos x\,(\sin x)^{\sin y-1}[\sin y\cdot\log\sin x + 1]dx\,dy + \log\sin x\cdot(\sin x)^{\sin y}[\cos^2 y\log\sin x - \sin y]dy^2$$

3. Нађи узастопне диференцијале функције

$$z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4$$

Овде је

$z'_x = 2x - 4 \quad z'_y = 2y - 6$

$z''_{x^2} = 2 \quad z''_{x,y} = 0 \quad z''_{y^2} = 2$

сви остали парцијални изводи равни су нули, па су дакле тотални диференцијали првог и другог реда

$$dz = (2x-4)dx + (2y-6)dy$$

$$d^2z = 2(dx^2 + dy^2).$$

4. Нађи узастопне диференцијале

цијалне функције

$$z = x^3 + y^3 + axy$$

Овде је:

$$z'_x = 3x^2 + ay \qquad z'_y = 3y^2 + ax$$

$$z''_{x^2} = 6x \qquad z''_{x,y} = a \qquad z''_{y^2} = 6y$$

$$z'''_{x^3} = 6 \qquad z'''_{x^2y} = 0 \qquad z'''_{x,y^2} = 0 \qquad z'''_{y^3} = 6$$

сви остали изводи равни су нули. Отуда:

$$dz = (3x^2 + ay)\,dx + (3y^2 + ax)\,dy$$

$$d^2z = 6x\,dx^2 + 2a\,dx\,dy + 6y\,dy^2$$

$$d^3z = 6\,(dx^3 + dy^3)$$

5. Наћи потпуне диференцијале првог и другог реда функције

$$z = \sin x \cdot \sin y$$

Имамо

$$z'_x = \cos x \sin y \qquad z'_y = \sin x \cos y$$

$$z''_{x^2} = -\sin x \sin y \qquad z''_{x,y} = \cos x \cos y \qquad z''_{y^2} = -\sin x \sin y$$

Отуда

$$dz = \cos x \sin y\,dx + \sin x \cos y\,dy$$

$$d^2z = -\sin x \sin y\,dx^2 + 2\cos x \cos y\,dx\,dy - \sin x \sin y\,dy^2$$

6. Наћи узастопне диференцијале функције

$$z = x^2y(a - x - y)$$

Овде је

$$z'_x = -yx^2 + 2xy(a-x-y) = xy(2a-3x-2y)$$

$$z'_y = -x^2y + x^2(a-x-y) = x^2(a-x-2y)$$

$$z''_{x^2} = y(2a-3x-2y) - 3xy = y(2a-6x-2y)$$

$$z''_{x,y} = x(2a-3x-2y) - 2xy = x(2a-3x-4y)$$

$$z''_{y^2} = -2x^2$$

$$z'''_{x^3} = -6y$$

$$z'''_{x^2y} = 2a-6x-2y-2y = 2a-6x-4y$$

$$z'''_{xy^2} = -4x$$

$$z'''_{y^3} = 0$$

и т. д.

и према томе

$$dz = xy(2a-3x-2y)\,dx + x^2(a-x-2y)\,dy$$

$$d^2z = y(2a-6x-2y)\,dx^2 + 2x(2a-3x-4y)\,dx\,dy - 2x^2\,dy^2$$

$$d^3z = -6y\,dx^3 + 3(2a-6x-4y)\,dx^2\,dy - 12x\,dx\,dy^2$$

и т. д.

7. Доказати за функцију

$$u = \operatorname{tg} x^y$$

да постоји однос

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Имамо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y\,x^{y-1}}{\cos^2 x^y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \log x}{\cos^2 x^y}$$

а одатле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\cos^2 x^y \cdot [y x^{y-1} \log x + x^{y-1}] - y x^{y-1} \cdot 2 \cos x^y \cdot \sin x^y \cdot x^y \log x}{\cos^4 x^y}$$

$$= \frac{x^{y-1}[\cos x^y + y \log x \cos x^y - 2 y x^y \log x \sin x^y]}{\cos^3 x^y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\cos^2 x^y [x^y \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot y \cdot x^y] - x^y \log x \cdot 2 \cos x^y \sin x^y y x^{y-1}}{\cos^4 x^y}$$

$$= \frac{x^{y-1}[\cos x^y + y \log x \cos x^y - 2 y x^y \log x \sin x^y]}{\cos^3 x^y}$$

чиме је доказано оно што смо хтели доказати.

8. Исто за функцију

$$u = e^{xy} \operatorname{arctg}(x+y)$$

Имамо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y e^{xy} \operatorname{arctg}(x+y) + \frac{e^{xy}}{1+(x+y)^2} = e^{xy}\left\{y \operatorname{arctg}(x+y) + \frac{1}{1+(x+y)^2}\right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x e^{xy} \operatorname{arctg}(x+y) + \frac{e^{xy}}{1+(x+y)^2} = e^{xy}\left\{x \operatorname{arctg}(x+y) + \frac{1}{1+(x+y)^2}\right\}$$

а одатле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy}\left\{\frac{y}{1+(x+y)^2} + \operatorname{arctg}(x+y) - \frac{2(x+y)}{[1+(x+y)^2]^2}\right\} + \left\{y \operatorname{arctg}(x+y) + \frac{1}{1+(x+y)^2}\right\} \cdot x e^{xy} =$$

$$= e^{xy}\left\{(1+xy)\operatorname{arctg}(x+y) + \frac{y[1+(x+y)^2] - 2(x+y) + x[1+(x+y)^2]}{[1+(x+y)^2]^2}\right\} =$$

$$= e^{xy}\left\{(1+xy)\operatorname{arctg}(x+y) + \frac{(x+y)[(x+y)^2-1]}{[1+(x+y)^2]^2}\right\}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = e^{xy}\left\{\frac{x}{1+(x+y)^2} + \operatorname{arctg}(x+y) - \frac{2(x+y)}{[1+(x+y)^2]^2}\right\} +$$

$$+ \left\{x \operatorname{arctg}(x+y) + \frac{1}{1+(x+y)^2}\right\} y e^{xy} =$$

$$= e^{xy}\left\{(1+xy)\operatorname{arctg}(x+y) + \frac{(x+y)[(x+y)^2-1]}{[1+(x+y)^2]^2}\right\}$$

9. Исто за функцију

$$u = \frac{2xy}{x^3 - y^3}$$

Имамо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x^3-y^3)\cdot 2y - 2xy \cdot 3x^2}{(x^3-y^3)^2} = 2y\,\frac{x^3 - y^3 - 3x^3}{(x^3-y^3)^2} = -2y\,\frac{2x^3+y^3}{(x^3-y^3)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(x^3-y^3)\cdot 2x - 2xy \cdot -3y^2}{(x^3-y^3)^2} = 2x\,\frac{x^3+2y^3}{(x^3-y^3)^2}$$

а одатле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2\,\frac{(x^3-y^3)^2[3y^3+2x^3+y^3] - y(2x^3+y^3)\cdot 2(x^3-y^3)\cdot -3y^2}{(x^3-y^3)^4} =$$

$$= -4\,\frac{(x^3-y^3)(2y^3+x^3) + 3y^3(2x^3+y^3)}{(x^3-y^3)^3} = -4\,\frac{x^6+7x^3y^3+y^6}{(x^3-y^3)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2\,\frac{(x^3-y^3)^2[x^3+2y^3+3x^3] - x(x^3+2y^3)\cdot 2(x^3-y^3)\cdot 3x^2}{(x^3-y^3)^4} =$$

$$= -4\,\frac{(x^3-y^3)(-2x^3-y^3)+3x^3(x^3+2y^3)}{(x^3-y^3)^3} = -4\,\frac{x^6+7x^3y^3+y^6}{(x^3-y^3)^3}$$

10. Исто за функцију

$$u = \frac{x+y}{\sin(x-y)}$$

Имамо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin(x-y)-(x+y)\cos(x-y)}{\sin^2(x-y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin(x-y)+(x+y)\cos(x-y)}{\sin^2(x-y)}$$

а одатле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\sin^2(x-y)\left[-\cos(x-y)-(x+y)\sin(x-y)-\cos(x-y)\right]+\left[\sin(x-y)-(x+y)\cos(x-y)\right]\cdot 2\sin(x-y)\cos(x-y)}{\sin^4(x-y)}$$

$$= \frac{-2\sin(x-y)\cos(x-y)-(x+y)\sin^2(x-y)+2\sin(x-y)\cos(x-y)-(x+y)2\cos^2(x-y)}{\sin^3(x-y)}$$

$$= -\frac{x+y}{\sin^3(x-y)}\cdot\left[\sin^2(x-y)+2\cos^2(x-y)\right] =$$

$$= -\frac{x+y}{\sin^3(x-y)}\left[1+\cos^2(x-y)\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\sin^2(x-y)\left[\cos(x-y)+\cos(x-y)-(x+y)\sin(x-y)\right]-\left[\sin(x-y)+(x+y)\cos(x-y)\right]\cdot 2\sin(x-y)\cos(x-y)}{\sin^4(x-y)}$$

$$= \frac{2\sin(x-y)\cos(x-y)-(x+y)\sin^2(x-y)-2\sin(x-y)\cos(x-y)-(x+y)2\cos^2(x-y)}{\sin^3(x-y)}$$

$$= -\frac{x+y}{\sin^3(x-y)}\left[1+\cos^2(x-y)\right]$$

3° Виши диференцијали посредних функција

Први случај

Нека је дата функција

$$z = F(u) \qquad 1)$$

где је

$$u = \varphi(x) \qquad 2)$$

тако да је z непосредна функција променљиве u, а преко ове посредна функција променљиве x. У том случају имаћемо као први диференцијал функције z

$$dF = F'(u)\,du \qquad 3)$$

Међутим из обрасца 2) имаћемо

$$du = \varphi'(x)\,dx \qquad 4)$$

и заменом 4) у 3)

$$dF = F'(u)\,\varphi'(x)\,dx \qquad 5)$$

Да би нашли други диференцијал d^2F пођићемо од обрасца 3) из кога је

$$d^2F = d(dF) = F''(u)\,du^2 + F'(u)\,d^2u \qquad 6)$$

Приметимо сад да се du не може више сматрати за сталну количину нити се више његови диференцијали могу сматрати за нуле, пошто и није више независно-променљива количина већ функција xа. Као сталну има се сматрати само dx. Међутим из 4) добијамо

$$d^2u = \varphi''(x)\,dx^2 \qquad 7)$$

и заменом 4) и 7) у 6) добијамо

$$d^2F = F''(u)\,\varphi'(x)^2\,dx^2 + F'(u)\,\varphi''(x)\,dx^2$$

или

$$d^2F = \left[F''(u)\,\varphi'(x)^2 + F'(u)\,\varphi''(x)\right]dx^2 . \qquad 8)$$

Ако би затим хтели израчунати трећи диференцијал d^3F, имали би поћи од обрасца 6) имајући на уму обрасце 4) и 7).

Други случај

Нека је дата функција

$$z = F(u,v) \qquad 1)$$

где је

$$u = \varphi(x)$$
$$v = \psi(x) \qquad 2)$$

тако да је z непосредна функција од u и v, а преко њих посредна функција променљиве x. И овде се се du и dv не смеју сматрати као сталне, али се као сталну има сматрати dx. Према општем правилу први диференцијал функције F биће

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv \qquad 3)$$

Међутим је

$$du = \varphi'(x)\,dx$$
$$dv = \psi(x)\,dx \qquad 4)$$

и заменом 4) у 3) добијамо

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial u}\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial v}\psi'(x)\right]dx \qquad 5)$$

као први диференцијал функције F.

Да би добили други диференцијал те функције, поћи ћемо од обрасца 3), па ћемо имати

$$d^2F = d(dF) = d\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)du + \frac{\partial F}{\partial u}d^2u + d\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)dv + \frac{\partial F}{\partial v}d^2v \qquad 6)$$

Пошто израз

$$\frac{\partial F}{\partial u}$$

зависи и од u и од v, то је

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}dv \qquad 7)$$

Исто тако је

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}dv + \frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial u}du \qquad 8)$$

Изразе du и dv имамо изражене у обрасцима 4) из којих у исто време добијамо вредности за d^2u и d^2v које су

$$d^2u = \varphi''(x)\,dx^2$$
$$d^2v = \psi''(x)\,dx^2 \tag{9}$$

Заменом образаца 4), 7), 8) и 9) у обрасцу 6) и пошто извучемо заједнички dx^2 налазимо образац за d^2F који је

$$d^2F = \left[\frac{\partial^2F}{\partial u^2}\varphi'(x)^2 + 2\frac{\partial^2F}{\partial u\,\partial v}\varphi'(x)\psi'(x) + \frac{\partial^2F}{\partial v^2}\psi'(x)^2 + \frac{\partial F}{\partial u}\varphi''(x) + \frac{\partial F}{\partial v}\psi''(x)\right]\cdot dx^2 \tag{10}$$

На исти би начин добили образац и за трећи диференцијал итд.

<u>Трећи случај</u>

Нека је дата функција

$$z = F(u,v) \tag{1}$$

где је

$$u = \varphi(x,y)$$
$$v = \psi(x,y) \tag{2}$$

и где су x и y независно променљиве количине. На тај начин z је непосредна функција од u и v, а преко њих посредна функција независно променљивих количина x и y.

Задатак се решава на исти начин као и у малопређашњим случајевима имајући само на уму да се увек dx и dy имају сматрати као стални.

На овакав се случај н. пр. наилази кад се какав образац у коме фигуришу правоугле координате и њихови диференцијали има да трансформише у образац са поларним координатама и обрнуто.

Примери:

1. Наћи други диференцијал функције

$$z = \log u$$

где је

$$u = x^m$$

Први њен диференцијал је

$$dz = \frac{1}{u}\,du$$

а како је

$$du = m x^{m-1}\,dx$$

по смени u и du добијамо

$$dz = \frac{m}{x}\,dx$$

Одавде је други диференцијал

$$d^2z = -\frac{m}{x^2}dx^2$$

трећи

$$d^3z = m\frac{12}{x^3}dx^3$$

и т. д.

2. Наћи више диференцијале функције

$$z = u^m + \log v$$

где је

$$u = \log x$$
$$v = x^n$$

Први диференцијал је

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = mu^{m-1}du + \frac{1}{v}dv$$

како је

$$du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = nx^{n-1}dx$$

по замени u, v, du и dv добијамо као први диференцијал

$$dz = \frac{m(\log x)^{m-1} + n}{x}dx$$

Одавде можемо наћи други и остале више диференцијале.

3. Наћи више диференцијале функције

$$z = \log uv + v$$

где је

$$u = xy$$
$$v = \frac{x}{y}$$

Први њен диференцијал је

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{1}{u}du + \left(\frac{1}{v}+1\right)dv$$

а како је

$$du = y\,dx + x\,dy$$
$$dv = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$$

по замени u, v, du и dv добијамо као први диференцијал

$$dz = \frac{1}{xy}(y\,dx + x\,dy) + \left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy\right)$$

или

$$dz = \frac{2y+x}{xy}dx - \frac{x}{y^2}dy$$

На сличан би начин нашли и друге више диференцијале.

4° Виши диференцијали имплицитних функција.

Уочимо најпростији случај

имплицитне функције кад су две променљиве x и y везане релацијом

$$F(x,y)=0 \qquad 1)$$

која није решена по y. Ако x-у будемо давали узастопно поједине вредности, свакој таквој вредности одговараће одређена вредност y-а тако да се y има сматрати као функција x-а и то као имплицитна функција пошто је једначина 1) нерешена по y. Питање је сад како се могу из једначине 1) израчунати узастопни диференцијали променљиве y.

Пошто је функција F равна нули за ма какво x и y, то је и њен први диференцијал раван нули т.ј.

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0 \qquad 2)$$

Решењем једначине 2) по dy добија се први диференцијал функције y

$$dy=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}\,dx \qquad 3)$$

Да би сад нашли други диференцијал d^2y пођи ћемо од обрасца 2) и диференцираћемо га, имајући на уму да се dx има сматрати као стално али не и dy. На тај начин добијамо

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)dy+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y=0 \qquad 4)$$

Ако у једначини 4) развијемо изразе

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \quad \text{и} \quad d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \qquad 5)$$

и сменимо dy вредношћу 3) па добијену једначину решимо по d^2y, имаћемо образац који нам даје други диференцијал d^2y. И т.д. На тај начин имаћемо узастопне диференцијале имплицитне функције.

Други диференцијал d^2y израчунавамо из једначине (коју добијамо кад у једначини 4) развијемо изразе 5):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y=0$$

Примери:

1. Дата је једначина

$$x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = 0$$

Диференцирањем добијамо

$$4x^3dx - 6xy^2dx - 6x^2y\,dy + 4y^3dy = 0$$

или

$$2x^3dx - 3xy^2dx - 3x^2y\,dy + 2y^3dy = 0$$

одакле је

$$dy = \frac{3xy^2 - 2x^3}{2y^3 - 3x^2y}\,dx = \frac{x}{y}\cdot\frac{3y^2 - 2x^2}{2y^2 - 3x^2}\,dx$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\,\frac{3y^2 - 2x^2}{2y^2 - 3x^2}$$

Поновним диференцирањем једначи(не 2) и сматрајући dx као констант(у) добијамо

$$6x^2dx^2 - 6xy\,dx\,dy - 6xy\,dx\,dy - 3x^2dy^2 -$$
$$- 3x^2y\,d^2y + 6y^2dy^2 + 2y^3d^2y = 0$$

или деобом са dx^2

$$6x^2 - 3y^2 - 12xy\frac{dy}{dx} + (6y^2 - 3x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (2y^3 - 3x^2y)\frac{d^2y}{dx^2}$$

и ако у овом изразу сменимо $\frac{dy}{dx}$ гор(е) нађеном вредношћу и редукујемо добијену једначину, добићемо из ње

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6(2y^8 - 7x^2y^6 + 7x^4y^4 - 7x^6y^2 + 2x^8)}{y^3(2y^2 - 3x^2)^3}$$

2. Дата је једначина

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(општа једначина кривих другог реда).

Према обрасцу

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}$$

имаћемо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}$$

3. За једначину

$$y^4 + 2(x^2 + c)y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0$$

имаћемо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy^2 + 2(x^2 - c^2)\cdot 2x}{4y^3 + 4(x^2 + c^2)y} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{4y^2 + 4(x^2 - c^2)}{4y^2 + 4(x^2 + c^2)} =$$
$$= \frac{x}{y}\cdot\frac{c^2 - x^2 - y^2}{c^2 + x^2 + y^2}$$

4. За једначину

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$$

биће

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x^2 + y^2 - bx)(2x - b) - 2a^2x}{2(x^2 + y^2 - bx)\cdot 2y - 2a^2y} = \frac{1}{y}\cdot\frac{a^2x - (x^2 + y^2 - bx)(2x - b)}{2(x^2 + y^2 - bx) - a^2}$$

5. Код једначине

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2(x^2 + y^2) = 4a^2(x^2 + y^2 - ax)^2$$

ако обележимо

$$x^2+y^2-a^2 \quad \text{са } A$$
$$x^2+y^2-ax \quad \text{„} \quad B$$

имамо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{A^2\cdot 2x+(x^2+y^2)\cdot 2A\cdot 2x-4a^2\cdot 2B\cdot(2x-a)}{A^2\cdot 2y+(x^2+y^2)\cdot 2A\cdot 2y-4a^2\cdot 2B\cdot 2y}$$
$$=\frac{1}{y}\cdot\frac{2Ax(x^2+y^2)+A^2x-4a^2B(2x-a)}{8a^2B-2A(x^2+y^2)-A^2}$$

6. Код једначине

$$x^2\log y-y^2\log x=0$$

имамо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x\log y-y^2\frac{1}{x}}{x^2\frac{1}{y}-2y\log x}=\frac{y}{x}\cdot\frac{y^2-2x^2\log y}{x^2-2y^2\log x}$$

7. Код једначине

$$y^3-x^3-y\arcsin x=0$$

имамо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-3x^2-y\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3y^2-\arcsin x}=\frac{3x^2\sqrt{1-x^2}+y}{(3y^2-\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$$

8. Код функције

$$y\sin x-x\,\mathrm{arctg}\,y=0$$

имамо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y\cos x-\mathrm{arctg}\,y}{\sin x-x\frac{1}{1+y^2}}=\frac{(1+y^2)(\mathrm{arctg}\,y-y\cos x)}{(1+y^2)\sin x-x}$$

9. Код једначине

$$\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

имамо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\sqrt{1+x}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)-\sqrt{1-x}\,\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}}}{1+x}}{\dfrac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{y}{2}}}=$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{1+x}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1-x}\,\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\cos^2\frac{y}{2}}{1+x}=\frac{-\frac{1+x+1-x}{\sqrt{1-x^2}}\cos^2\frac{y}{2}}{1+x}$$

$$=\frac{-2\cos^2\frac{y}{2}}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}=-2\frac{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{y}{2}}}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{y}{2}\right)}$$

$$=\frac{-2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)}=\frac{-2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}\,\frac{1+x+1-x}{1+x}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

10. Код једначине

$$x=a\cdot\arcsin\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}-\sqrt{2ay-y^2} \quad \text{(циклоида)}$$

имамо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{-a\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2ay-y^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}(2ay-y^2)^{-\frac{1}{2}}(2a-2y)+\frac{1}{2}(2ay-y^2)^{-\frac{1}{2}}(2a-2y)}$$

$$=\frac{1}{\frac{a-y}{\sqrt{1-\frac{2ay-y^2}{a^2}}\cdot\sqrt{2ay-y^2}}-\frac{a-y}{\sqrt{2ay-y^2}}}=$$

$$= \frac{1}{\dfrac{a-y}{\sqrt{\dfrac{a^2-2ay+y^2}{a^2}}\cdot\sqrt{2ay-y^2}} - \dfrac{a-y}{\sqrt{2ay-y^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{a-y}{\dfrac{a-y}{a}\cdot\sqrt{2ay-y^2}} - \dfrac{a-y}{\sqrt{2ay-y^2}}} = \frac{1}{\dfrac{a-a+y}{\sqrt{2ay-y^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2ay-y^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

Одавде би нашли

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2a}{y^3}\sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

11. Код функције

$$tg(x^2+y^2) = x^2-y^2$$

имаћемо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{1}{\cos^2(x^2+y^2)}\cdot 2x - 2x}{\dfrac{1}{\cos^2(x^2+y^2)}\cdot 2y + 2y} = \frac{x}{y}\cdot\frac{\cos^2(x^2+y^2)-1}{\cos^2(x^2+y^2)+1}$$

12. Код једначине

$$x = a\cdot \arccos\frac{a-y}{b} - \sqrt{b^2-(a-y)^2}$$

(једначина трохоиде)

имаћемо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{-a\cdot -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a-y}{b}\right)^2}}\cdot -\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2(a-y)}{\sqrt{b^2-(a-y)^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{b^2-(a-y)^2}{b^2}}} - \dfrac{a-y}{\sqrt{b^2-(a-y)^2}}} = \frac{\sqrt{b^2-(a-y)^2}}{y}$$

13. Код једначине

$$y x^y = \arcsin x$$

из које је

$$x^y = \frac{\arcsin x}{y}$$

имамо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\cdot y x^{y-1} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{y x^y \log x + x^y} = -\frac{y^2\cdot\dfrac{x^{y-1}}{x^y} - \dfrac{1}{x^y}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1+y\log x} =$$

$$= -\frac{1}{1+y\log x}\left[\frac{y^2}{x} - \frac{1}{\dfrac{\arcsin x}{y}\cdot\sqrt{1-x^2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{1+y\log x}\,\frac{y^2\arcsin x\sqrt{1-x^2} - xy}{x\arcsin x\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{y}{1+y\log x}\,\frac{x - y\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$$

14. Код једначине

$$\operatorname{arctg}\frac{x-a}{x+a} - \operatorname{arctg}\frac{y-a}{y+a} = b$$

имаћемо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2}\cdot\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)^2}}{-\frac{1}{1+\left(\frac{y-a}{y+a}\right)^2}\cdot\frac{(y+a)-(y-a)}{(y+a)^2}} = \frac{\frac{2a}{(x+a)^2+(x-a)^2}}{\frac{2a}{(y+a)^2+(y-a)^2}}$$

$$= \frac{y^2+a^2}{x^2+a^2}$$

15. Код једначине

$$y = x^{y+x}$$

имамо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-x^{y+x}\left[(y+x)\frac{1}{x}+\log x\right]}{1-x^{y+x}\cdot\log x} = -\frac{-x^{y+x}\left[\frac{y}{x}+1+\log x\right]}{1-x^{y+x}\log x} =$$

$$= -\frac{-x^{y+x}\left[\frac{x^{y+x}}{x}+1+\log x\right]}{1-x^{y+x}\log x} = \frac{x^{y+x}\left[x^{y+x-1}+\log x+1\right]}{1-x^{y+x}\log x}$$

Развијање функција у редове

Видели смо при развијању у редове функција што зависе од једне независно-променљиве количине да се свака таква функција, кад задовољи извесне услове, може развити у Taylor-ов ред облика

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}F''(x) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(x) + \dots$$

или у Maclaurin-ов ред

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2}F''(0) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(0) + \dots$$

Сличан резултат може се извести и за функције које зависе од више независно-променљивих.

Нека је дата н. пр. једна функција $F(x,y)$ што зависи од две независно-променљиве x и y. Ми ћемо показати:

1° да се израз $F(x+h, y+k)$ може развити у ред уређен по степенима од h и k; и
2° да се $F(x,y)$ може развити у ред уређен по степенима од x и y.

Да би то доказали уочимо један израз

$$F(x+h, y+k)$$

и сматрајмо у њему све количине осим h као сталне тако да та функција зависи од једне независно-промењиве h. Тада се она може развити у ред уређен по степенима од h т.ј. у ред облика

$$F(x+h, y+k) = M_0 + M_1 h + M_2 h^2 + \cdots \qquad 1)$$

где ће коефицијенти

$$M_0 \; M_1 \; M_2 \; \cdots$$

имати за вредност

$$M_0 = F(x, y+k)$$
$$M_1 = \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y+k)$$
$$M_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, y+k)$$

Сваки од ових коефицијената $M_0 M_1$ може се сматрати као да је функција од k и према томе можемо га развити у ред уређен по степенима од k, тако да ће бити

$$M_0 = F(x,y) + \frac{k}{1} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \cdots$$
$$M_1 = \frac{1}{1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{k}{1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + \cdots \right]$$
$$M_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{k}{1} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \cdots \right] \qquad 2)$$

Ако вредности 2) сменимо у обрасцу 1) добија се као резултат образац облика

$$F(x+h, y+k) = F(x,y) + \frac{1}{1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k \right] +$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2 \right] +$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left[\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} k^3 \right] +$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

из чега се види да се израз

$$F(x+h, y+k) \qquad 3)$$

може развити у ред облика

$$F(x+h, y+k) = A_0 + (B_1 h + B_2 k) + (C_1 h^2 + 2 C_2 hk + C_3 k^2) +$$
$$+ (D_1 h^3 + 3 D_2 h^2 k + 3 D_3 h k^2 + D_4 k^3) + \cdots \qquad 4)$$

где коефицијенти

$A_0\ B_1\ B_2\ C_1\ C_2 \cdots$

не зависе од h и k већ само од x и y и имају за вредности

$$A_0 = F(x,y)$$

$$B_1 = \frac{1}{1}\frac{\partial F}{\partial x} \qquad B_2 = \frac{1}{1}\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$C_1 = \frac{1}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad C_2 = \frac{1}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \qquad C_3 = \frac{1}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$D_1 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \qquad D_2 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} \qquad D_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2} \qquad D_4 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}$$

. . . .

Образац 4) јесте Taylor-ов образац за развијање функција што зависе од две независно-промењљиве. Њему се може дати један скраћенији облик који је много простији, а то је овај

$$F(x+h,\ y+k) = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$$

где је сваки члан S хомоген полином по h и k и то онолико степена колики му је индекс, а сваки од тих полинома добија се на овај начин: Н. пр. S_n се добија кад се израз

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left[\frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial y}k\right]^n$$

развије по биномном обрасцу па се у добијеном резултату смени $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^p$ изразом $\frac{\partial^p F}{\partial x^p}$, израз $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^p$ изразом $\frac{\partial^p F}{\partial y^p}$ и најпосле сваки израз облика $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^p\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^q$ изразом $\frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p\,\partial y^q}$. Н. пр. ако би хтели да израчунамо S_2 имали би

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial y}k\right)^2 = \frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 h^2 + 2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}hk + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 k^2\right] = \frac{1}{1\cdot 2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2\right]$$

Остаје још да се види какве услове треба да задовољи функција $F(x,y)$ па да се овакво развијање по Taylor-овом обрасцу може на њу применити. Из самог обрасца 3) очевидно је да треба да су задовољени ови услови:

1° функција F и сви њени парцијални изводи треба да су коначни и одређени, јер кад то не би био случај, десна страна обрасца 3) не би имала смисла или ако је један израз неодређен, цела је страна неодређена и бесмислена.

2° треба да је ред на десној страни обрасца 3) конвергентан за оне вредности x и y за које се мисли употребити. Претпоставимо да се ред мисли употребити за један одређени пар вредности (x,y) које могу бити реалне или имагинарне. Тада треба умети одредити за колики се прираштај h може променити x а за колики прираштај k може променити y па да ови услови употребљивости буду задовољени. Тада се нађе један известан размак за x и један известан размак за y који су такви да је ред употребљив докле год се x и y буду кретали у тим размацима. То би били размаци конвергенције уоченог Taylor-овог реда. Они се одређују по обичним методама за испитивање конвергенције редова.

Из Taylor-овог реда лако је извести и Maclaurin-ов ред за функцију $F(x,y)$. Ако у обрасцу 4) ставимо $x=0$ $y=0$ тај образац постаје

$$F(h,k) = A_0 + (B_1 h + B_2 k) + (C_1 h^2 + 2C_2 hk + C_3 k^2) + \cdots \quad 6)$$

где су коефицијенти $A_0\, B_1\, B_2\, C_1\, C_2 \ldots$ дати ранијим обрасцима 5) пошто се у изводима што фигуришу у тим обрасцима смени $x=0$ $y=0$. Образац 6) обично се пише на тај начин што се h замени са x, а k са y, те се добија

$$F(x,y) = A_0 + (B_1 x + B_2 y) + (C_1 x^2 + 2C_2 xy + C_3 y^2) + \cdots \quad 7)$$

где ће опет коефицијенти бити дати обрасцима 5). Образац 7) јесте Maclaurin-ов ред помоћу кога се дата функција $F(x,y)$ развија у ред уређен по степенима од x и y. И тај ред захтева извесне услове да би се могао употребити. Пре свега сви коефицијенти $A_0\, B_1\, B_2\, C_1\, C_2 \ldots$ т.ј. сви парцијални изводи функције F треба да су коначни и одређени, јер иначе десна страна обрасца 7) не би имала смисла. Затим тај ред треба да је конвергентан за оне вредности x и y за које се мисли употребити. По општим правилима за конвергенцију нађе се да сваки од бројева x и y треба да варира у извесном размаку који се назива размак конвергенције.

Примери:

1. Развити у Taylor-ов ред у близини тачке (1,2) функцију
$$z = x^2 y.$$

Овде је

$z = x^2 y$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$

сви остали парцијални изводи су равни нули. Сменимо ли у горњим изразима $x=1$ $y=2$ добијамо

$z=2$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$

па је према томе тражени Taylor-ов ред

$$x^2 y = 2 + \frac{1}{1}\left[4(x-1) + 1(y-2)\right] + \frac{1}{1\cdot 2}\left[4(x-1)^2 + 2\cdot 2(x-1)(y-2)\right] + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[3\cdot 2\cdot (x-1)^2(y-2)\right]$$

или

$$x^2 y^2 = 2 + 4(x-1) + (y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + (x-1)^2(y-2)$$

2. Развити у Taylor-ов ред у близини тачке (0,1) функцију
$$z = \frac{e^x}{y}$$

Имамо

$z = \frac{e^x}{y}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^x}{y^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^x}{y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^x}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\frac{e^x}{y^3}$

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{e^x}{y} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{e^x}{y^2} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 2\frac{e^x}{y^3} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -6\frac{e^x}{y^4}$

и т. д.

Ако у овим обрасцима сменимо $x=0$ $y=1$ добијамо

$z=1$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -1$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-1 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=1 \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=-1 \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=2 \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=6$$

и т. д.

и према томе тражени Taylor-ов ред биће

$$\frac{e^x}{y}=1+\frac{1}{1}\left[1\cdot(x-0)+-1\cdot(y-1)\right]+\frac{1}{1\cdot 2}\left[1\cdot(x-0)^2+\right.$$
$$\left.+2\cdot -1\,(x-0)(y-1)+2\cdot(y-1)^2\right]+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[1\cdot(x-0)^3+\right.$$
$$\left.+3\cdot -1\,(x-0)^2(y-1)+3\cdot 2\,(x-0)(y-1)^2+6(y-1)^3\right]+\cdots$$

или

$$\frac{e^x}{y}=1+x-(y-1)+\frac{x^2}{2}-x(y-1)+(y-1)^2+$$
$$+\frac{x^3}{6}-\frac{x^2(y-1)}{2}+x(y-1)^2+(y-1)^3+\cdots$$

3. Развити у Maclaurin-ов ред функцију

$$z=\frac{x-1}{y+1}$$

Имаћемо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y+1} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x-1}{(y+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{1}{(y+1)^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\,\frac{x-1}{(y+1)^3}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0 \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=0 \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=2\,\frac{1}{(y+1)^3} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=-2\cdot 3\,\frac{x-1}{(y+1)^4}$$

и т. д.

Ако сменимо у предњим изразима $x=0$ $y=0$ добијамо

$$z=-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1 \quad \frac{\partial z}{\partial y}=1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-1 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0 \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=0 \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=2 \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=2\cdot 3$$

и т. д.

Према томе тражени ред биће

$$\frac{x-1}{y+1}=-1+\frac{1}{1}\left[1\cdot x+1\cdot y\right]+\frac{1}{1\cdot 2}\left[0\cdot x^2+-1\cdot 2xy+\right.$$
$$\left.+-2\cdot y^2\right]+\left[0\cdot x^3+3\cdot 0\cdot x^2y+3\cdot 2\,xy^2+2\cdot 3y^3\right]\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

или

$$\frac{x-1}{y+1}=-1+x+y-xy-y^2+xy^2+y^3+\cdots$$

Euler-ов образац за хомогене функције

Тај је образац непосредна примена предмет Taylor-овог обрасца. За једну се функцију

$$F(x,y)$$

каже да је <u>хомогена</u> онда, ако се, сменивши у њој x са xt и y са yt, може извући известан степен н. пр. t^n тако да оно што остане не зависи више од t т.ј. ако је

$$F(xt, yt) = t^n F(x,y)$$

Број n назива се <u>степеном хомогености</u> такве функције.

За овакве функције доказује се ово: ако се образује израз

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}$$

он је идентички раван

$$nF(x,y).$$

Јер по самој дефиницији хомогених функција биће

$$F(xt, yt) = t^n F(x,y)$$

и ако у том обрасцу ставимо

$$t = 1+\alpha$$

добија се

$$F(x+\alpha x, y+\alpha y) = (1+\alpha)^n F(x,y)$$

ако на левој страни ставимо

$$\alpha x = h \quad \alpha y = k$$

образац постаје

$$F(x+h, y+k) = (1+\alpha)^n F(x,y)$$

и ако сад леву страну развијемо по Taylor-овом обрасцу у ред уређен по степенима од h и k, а израз на десној страни развијемо по биномном обрасцу, добија се

$$F(x,y) + \frac{1}{1}\left[\frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial y}k\right] + \cdots = F(x,y) + n\alpha F(x,y) + \ldots$$

Сменивши на левој страни h и k вредностима αx и αy, образац постаје

$$F(xy) + \frac{\alpha}{1}\left[x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right] + \cdots = F(x,y) + \alpha n F(x,y) + \ldots$$

Пошто ова једначина мора вредети

за ма какво α, то коефицијенти истог степена на левој и десној страни морају бити једнаки. Упоредивши коефицијенте од α на првом степену на левој и десној страни добија се непосредно једначина

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}=nF(x,y)$$

коју је требало доказати.

Тако н. пр. за хомогене функције другог степена имали би да је

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}=2F(x,y)$$

Исто правило важи и за хомогене функције са ма колико независно променљивих количина тако да н. пр. ако функција F зависи од: $x, y, z, u, \dots$ и ако је n степен њене хомогености, имали би да је

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}+u\frac{\partial F}{\partial u}+\dots=nF(x,y,z,u,\dots)$$

овај се образац зове Euler-овим обрасцем за хомогене функције и он има врло важне примене како у рачуну тако и у геометрији.

Maximum-и и minimum-и функција које зависе од више независно-променљивих количина

Нека је дата једна функција

$$F(x,y)$$

и једна тачка

$$M(x,y)$$

све тачке чије су координате

$$(x+h,\ y+k)$$

где су h и k довољно мали бројеви, сматраћемо да се налазе у близини тачке M. Образујмо разлику

$$\Delta = F(x+h,y+k) - F(x,y)$$

она представља прираштај функције F кад се пређе од тачке M на једну суседну тачку. За функцију се каже да у тачки M има један свој maximum, ако је њена вредност у тачки M већа од вредности у ма којој суседној тачки т.ј. ако је разлика Δ негативна. Обрнуто за функцију се F каже да у тачки M има један свој minimum, ако је њена вредност у тачки M мања од вредности суседних тачака т.ј. ако је разлика Δ позитивна. Према томе рачунска дефиниција maximum-а и minimum-а била би ова:

1. функција је у тачки $M(x,y)$ maximum, ако је израз Δ негативан за све довољно мале било позитивне било негативне вредности h и k;
2. функција је у датој тачки $M(x,y)$ minimum ако је израз Δ позитиван за све довољно мале позитивне и негативне вредности h и k;
3. функција није у тачки M ни maximum ни minimum ако је израз Δ за неке вредности h и k позитиван а за друге негативан.

Према томе питање о

maximum-у и minimum-у функције у једној датој тачки решава се знаком израза Δ за ту тачку.

Развијмо сад израз $F(x+h, y+k)$ по Taylor-овом обрасцу па ћемо имати:

$$F(x+h,y+k) = F(x,y) + \frac{1}{1}\left[\frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial y}k\right] + \frac{1}{1\cdot 2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2\right] + \dots$$

и према томе

$$\Delta = \left[\frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial y}k\right] + \frac{1}{1\cdot 2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2\right] + \dots$$

Пошто су h и k довољно мале количине то можемо узети

$$k = \varepsilon h$$

где је ε мала произвољна количина. Последњи образац тада постаје

$$\Delta = h\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial F}{\partial y}\right] + \frac{h^2}{1\cdot 2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] + \dots \qquad 1)$$

Да би функција могла бити maximum или minimum разлика Δ, као што смо напред видели, треба да има исти знак за све довољно мале произвољне вредности h и ε; па пошто члан са h^2 за h врло мало не утиче на знак, то ће знак израза Δ зависити само од члана са h т.ј. од члана

$$h\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial F}{\partial y}\right]$$

али очевидно је да тај члан не може задржати један исти знак и за h позитивно и за h негативно; према томе ако је тај члан различан од нуле, функција није ни maximum ни minimum. Да би била maximum или minimum тај члан треба да је раван нули, па пошто тај услов треба да буде испуњен и за ε произвољно, то треба да буде понаособ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad 2)$$

Једначине 2) представљају две једначине са две непознате x и y и њиховим решењем добијају се они парови вредности (x,y) за које у опште може бити maximum-а или minimum-а. Нека је

$x=a \quad y=b$

један такав пар решења. Онда нам треба испитати да ли ће за $x=a$ $y=b$ функција бити maximum или minimum или ни једно ни друго. Приметимо пре свега да се за $x=a$ $y=b$ израз Δ своди на свој други члан тако да је

$$\Delta = \frac{h^2}{1\cdot 2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

или

$$\Delta = \frac{h^2}{2}\left[A + 2B\varepsilon + C\varepsilon^2\right]$$

где A, B и C означавају резултате који се добијају кад се у изразима

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

смени $x=a$ $y=b$. Ако се дакле хоће да буде maximum-а или minimum-а т.ј. да израз Δ буде једног истог знака за све позитивне и негативне вредности h, треба да полином

$$A + 2\varepsilon B + C\varepsilon^2$$

задржава један исти знак за позитивне и негативне вредности ε. То ће међутим бити само онда ако су корени квадратне једначине

$$A + 2B\varepsilon + C\varepsilon^2 = 0$$

имагинарни или међу собом једнаки т.ј. треба да буде

$$B^2 - AC \leq 0$$

Ако тај услов није задовољен, онда није могуће да трином $A + 2B\varepsilon + C\varepsilon^2$ задржава исти знак за све вредности ε и према томе функција не би била ни maximum ни minimum. Међутим ако је горњи услов задовољен, знак ће горњег тринома бити непроменљив и он зависи од знака коефицијента C. Ако је C позитивно, биће и знак тринома позитиван; ако је C негативно, биће и знак тринома негативан. Па пошто ће тај знак у исто време имати и израз Δ, то се изводи овај закључак: функција f ће за $x=a$ и $y=b$ бити:

maximum, ако је $B^2-AC \leq 0$ и $C<0$.
minimum, " " $B^2-AC \leq 0$ " $C>0$.

Из тога се изводи ово <u>практично упутство</u> за одређивање maximum-а и minimum-а функције што зависе од две независно-променљиве количине: треба образовати парцијалне изводе

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

ставити да су равни нули и решити тако добијене једначине по x и y. Ако нема никаквих коначних, одређених и реалних решења, функција не може имати ни maximum-а ни minimum-а. Ако је пак

$$x=a, \quad y=b$$

једно коначно, одређено и реално решење тих једначина, онда за такво решење функција може бити maximum или minimum али може и не бити. Да би се испитало који је случај, треба образовати друге парцијалне изводе

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ставити у њима $x=a$ $y=b$ и означивши добијене резултате са A, B и C образовати израз

$$B^2-AC$$

па одредити његов знак. Ако је тај знак позитиван, функција није ни maximum ни minimum за $x=a$ $y=b$; ако је пак тај знак негативан или израз раван нули, онда још ваља испитати знак од C: ако је C негативно, функција је maximum; ако је C позитивно, функција је minimum.

Примедба: Може се десити у обрасцу 3) да је израз са h^2 идентички раван нули за ма какво ε. То ће бити очевидно ако је

$$A=0 \quad B=0 \quad C=0$$

У том случају треба се у изразу Δ задржати на члану са h^3 и продужити исто резоновање као и до сада. Међутим такви су случајеви врло изузетни и врло се ретко дешавају.

Остаје сад још да се назу сам
максимални или минимални вред
сти функције у случајевима када ве
постоје за један дати пар вредно
сти $x=a$ $y=b$. То се ради просто ка
се у функцији смени тај пар вред
ности $x=a$ $y=b$.

Примедба: На сличан се на
чин одређују maximum-и и minimum-и
функција што зависе од
три, четири, пет и више независно-
променљивих количина.

Примери:

1. Наћи maximum-е и min
mum-е функције

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

Први парцијални изводи те дате
функције су

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 9y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 9x$$

и они уједначени са нулом дају две
једначине

$$3x^2 - 9y = 0$$
$$3y^2 - 9x = 0$$

ција су решења

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \quad и \quad \left.\begin{matrix} x=3 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$$

други парцијални изводи су

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

и према томе изрази A, B и C за први
пар корена биће

$$A=0 \quad B=-9 \quad C=0$$

ша је

$$B^2 - AC = 81$$

што значи да функција за први пар
корена није ни max. ни min.

За други пар корена је

$$A=18 \quad B=-9 \quad C=18$$

$$B^2 - AC = -243$$

и како је сем тога

$$C = +$$

то је за $x=3$ $y=3$ дата функција mi-
nimum. Сама пак минимална

вредност је

$$z=0$$

2. Исто за функцију

$$z=x^2-xy+y^2-3y$$

Имаћемо једначине

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y-3=0$$

које су задовољене за

$$x=1 \qquad y=2$$

Како је

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$$

то је

$$A=2 \quad B=-1 \quad C=2$$

па је

$$B^2-AC=-3$$

а како је

$$C=+$$

то је функција z minimum за $x=1$ $y=2$ а сама та минимална вредност је

$$z=-3$$

3. Исто за функцију

$$z=x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y$$

Овди је

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+4xy^2-8=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=4y^3+4x^2y^3+8=0$$

једначине које су задовољене за

$$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\} \text{ и } \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=-1 \end{matrix}\right\}$$

За први пар корена, пошто је

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2+4y^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=8xy \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2+4x^2$$

биће

$$A=16 \quad B=8 \quad C=16$$

па пошто је

$$B^2-AC=-$$

$$C=+$$

то је функција за тај пар minimum, а сама минимална вредност је

$$z=+4$$

За други пар корена је

$$A=16 \quad B=-8 \quad C=16$$

па пошто је

$$B^2-AC=-$$

$$C=+$$

то је функција и за тај пар корена minimum, а сама минимална вредност је

$z = -20$

4. Исто за функцију

$$z = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$$

Имаћемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6x - 3 = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8$$

једначине које су задовољене овим паровима корена

$$\left.\begin{matrix} x = 1+\sqrt{2} \\ y = 2 \end{matrix}\right\}1) \quad \left.\begin{matrix} 1+\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{3} \end{matrix}\right\}2) \quad \left.\begin{matrix} 1+\sqrt{2} \\ -2-\sqrt{3} \end{matrix}\right\}3) \quad \left.\begin{matrix} 1-\sqrt{2} \\ 2 \end{matrix}\right\}4) \quad \left.\begin{matrix} 1-\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{3} \end{matrix}\right\}5) \quad \left.\begin{matrix} 1-\sqrt{2} \\ -2-\sqrt{3} \end{matrix}\right\}6)$$

Пошто је

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 6 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 48y + 36$$

то је:

1) $A = 6\sqrt{2} \quad B = 0 \quad C = -12$

па је

$$B^2 - AC = +$$

т.ј. функција нема ни max. ни min.

2) $A = 6\sqrt{2} \quad B = 0 \quad C = 24$

па је

$$B^2 - AC = -$$
$$C = +$$

т.ј. функција је min.

3) $A = 6\sqrt{2} \quad B = 0 \quad C = 24$

т.ј. функција је min. као под 2)

4) $A = -6\sqrt{2} \quad B = 0 \quad C = -12$

па је

$$B^2 - AC = -$$
$$C = -$$

т.ј. функција је max.

5) $A = -6\sqrt{2} \quad B = 0 \quad C = 24$

и како је

$$B^2 - AC = +$$

то функција није ни max. ни min.

6) $A = -6\sqrt{2} \quad B = 0 \quad C = 24$

исто као под 5).

5. Исто за функцију

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy$$

(општа једначина кривих површина другог реда).

Имамо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2by - e = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2cy + 2bx - f = 0$$

одакле је

$$x = \frac{ce - fb}{2(ac - b^2)} \qquad y = \frac{af - be}{2(ac - b^2)}$$

Како је

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2b \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2c$$

што је

$$A = 2a \qquad B = 2b \qquad C = 2c$$

и према томе

$$B^2 - AC = 4(b^2 - ac)$$

Према томе за предњи пар корена је:

z maximum ако је $b^2 < ac$ и C и a негативн[о]

z minimum " " $b^2 < ac$ " C " a позитив[но]

z ни max. ни min. " " $b^2 > ac$ или ако су a и c различитог знака. (Lagrange).

6. Исто за функцију

$$z = \frac{x^3 y^3}{(x-a)(y-b)}$$

Пошто је у опште, ако је $\log z$ max. или min., z то такође, то ако ставимо

$$\log z = z'$$

имаћемо

$$z' = 3\log x + 3\log y - \log(x-a) - \log(y-b)$$

одакле је

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-a} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{y} - \frac{1}{y-b}$$

и ако ове изводе уједначимо са нулом добијамо једначине

$$2x - 3a = 0$$
$$2y - 3b = 0$$

одакле је

$$x = \frac{3a}{2} \qquad y = \frac{3b}{2}$$

Како је

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(x-a)^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{3}{y^2} + \frac{1}{(y-b)^2}$$

што је

$$A = \frac{8}{3a^2} \quad B = 0 \quad C = \frac{8}{3b^2}$$

па даље

$$B^2 - AC = -$$

и пошто је

$$C = +$$

то је функција z' односно z minimum за тај пар вредности (x, y). Сама пак та минимална вредност је

$$z' = \log z = 3\log\frac{3a}{2} + 3\log\frac{3b}{2} - \log\left(\frac{3a}{2} - a\right) -$$
$$- \log\left(\frac{3b}{2} - b\right) = 3\log\frac{9ab}{4} - \log\frac{a}{2} - \log\frac{b}{2} =$$
$$= 3\log\left(\frac{3ab}{2}\right)^2 - \log\frac{ab}{4} = \log\left(\frac{27}{4}ab\right)^2$$

а одатле

$$z = \left(\frac{27}{4}ab\right)^2$$

7. Исто за функцију

$$z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

Први парцијални изводи уједначени са нулом дају једначине

$$\cos x + \cos(x+y) = 0$$
$$\cos y + \cos(x+y) = 0$$

Њиховим одузимањем добијамо

$$\cos x - \cos y = 0$$

одакле

$$\cos x = \cos y$$

или

$$x = y$$

Заменом 3) у на коју од једначина 1) добијамо

$$\cos x + \cos 2x = 0$$

или

$$\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

или најзад

$$\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} = 0$$

одакле

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

и према томе

$$x = 180^\circ \quad \text{или} \quad 60^\circ$$

па према томе и

$$y = 180^\circ \quad \text{или} \quad 60^\circ$$

Према томе имамо два пара вредности: $(180^\circ, 180^\circ)$ и $(60^\circ, 60^\circ)$ за које функција може бити max. или min.

Како је

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x+y) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin y - \sin(x+y)$$

2) то је за први пар корена

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0$$

3) па пошто је

$$B^2 - AC = 0$$

а

$$C = 0$$

т.ј. знак јој неодређен, па функција није ни max ни min.

За други пар корена је

$$A = -\sqrt{3} \quad B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad C = -\sqrt{3}$$

то је

$$B^2 - AC = -\frac{3}{2}$$
$$C = -$$

то је функција max. за тај пар корена; сама пак максимална вредност је

$$z=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

8. Исто за функцију

$$z=x^2+y^2-4x-6y+7$$

Овде је

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-4=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2y-6=0$$

одакле

$$x=2 \quad y=3$$

Како је

$$A=2 \quad B=0 \quad C=2$$

то је

$$B^2-AC=-$$
$$C=+$$

па је дата функција min. за горњи пар вредности.

9. Поделити број a на три дела тако да је производ из првог, квадрата другог и куба трећег дела maximum.

Ако означимо један део са x, други са y, трећи ће бити $(a-x-y)$ и према томе имамо да тражимо оне вредности (x,y) за које ће функција

$$z=(a-x-y)x^2y^3$$

бити max. Први парц. изводи те функције уједначени са нулом дају

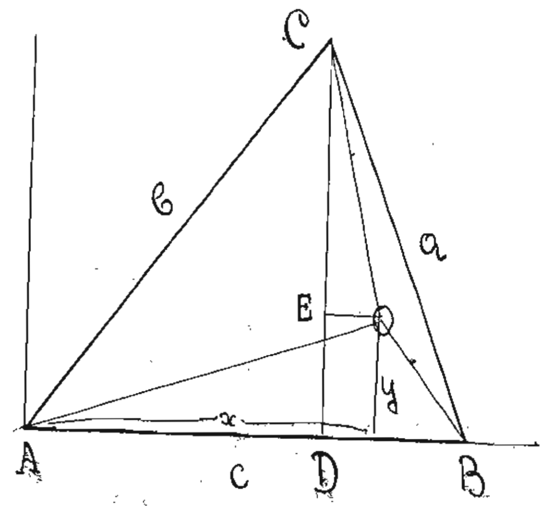
$$3x+2y-2a=0$$
$$3x+4y-3a=0$$

одакле је

$$x=\frac{a}{3} \quad y=\frac{a}{2}$$

и за тај пар вредности функција је max.

10. У унутрашњости једнога троугла наћи такву тачку да је збир квадрата њених одстојања од три темена троугла minimum.



Нека су A, B, C темена троугла; a, b и c дужине њихових страна; O тражена тачка. Узимајући A за коорд. почетак, правац стране c за апсцисну основицу и означимо са x и y координате (правоугле) тачке O а са z функцију чији минимум тражимо, налазимо

$$z = OA^2 + OB^2 + OC^2$$

Како је

$$OA^2 = x^2 + y^2$$

$$OB^2 = (c-x)^2 + y^2$$

$$OC^2 = CE^2 + EO^2 = (b\sin\alpha - y)^2 + (b\cos\alpha - x)^2$$

што је тражена функција

$$z = x^2 + y^2 + (c-x)^2 + y^2 + (b\sin\alpha - y)^2 + (b\cos\alpha - x)^2$$

или

$$z = 3x^2 + 3y^2 - x(2c + 2b\cos\alpha) - 2b\sin\alpha\cdot y + c^2 + b^2$$

Први парц. изводи ове функције изједначени са нулом дају једначине

$$6x - 2c - 2b\cos\alpha = 0$$

$$6y - 2b\sin\alpha = 0$$

одакле је

$$x = \frac{c + b\cos\alpha}{3} \qquad y = \frac{b\sin\alpha}{3}$$

Како је

$$A = 6 \quad B = 0 \quad C = 6$$

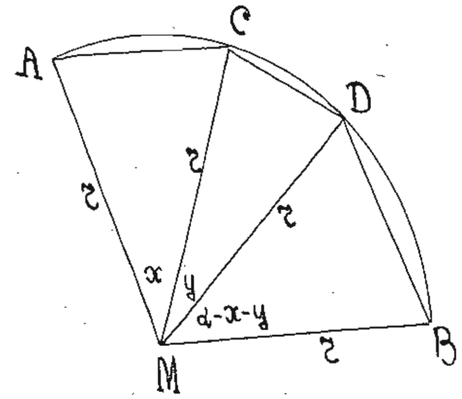
што је

$$B^2 - AC = -$$

$$C = +$$

па је z заиста minimum за средњи пар вредности (x, y).

11. Из кружног исечка чији је средишњи угао α исеци три равнокрака троугла тако да збир њихових површина буде maximum.



Ако обележимо углове

$$\sphericalangle AMC = x$$

$$\sphericalangle CMD = y$$

онда је

$$\sphericalangle DMB = \alpha - x - y$$

па је збир тражених троуглова дат обрасцем

$$z = \frac{r^2}{2}\sin x + \frac{r^2}{2}\sin y + \frac{r^2}{2}\sin(\alpha - x - y)$$

или

$$z = \frac{r^2}{2}\left\{\sin x + \sin y + \sin(\alpha - x - y)\right\}$$

што је функција чији maximum тражимо. Први парц. изводи изједначени са нулом дају једначине

$$\cos x - \cos(\alpha - x - y) = 0$$

$$\cos y - \cos(\alpha - x - y) = 0 \qquad 1)$$

Ако их одузмемо, добијамо

$$\cos x - \cos y = 0$$

или

$$\cos x = \cos y$$

па дакле

$$x = y$$

Заменом у првој од једначина 1) имамо

$$\cos x - \cos(\alpha - 2x) = 0$$

одакле

$$-2 \sin\frac{x+\alpha-2x}{2} \sin\frac{x-\alpha+2x}{2} = 0$$

и према томе је или

$$\sin\frac{\alpha - x}{2} = 0$$

или

$$\sin\frac{3x-\alpha}{2} = 0$$

Из прве добијамо

$$x = \alpha$$

што је немогуће, јер би у том случају имали у датом исечку само један троугао; из друге је

$$x = \frac{\alpha}{3}$$

а према 2) је и

$$y = \frac{\alpha}{3}$$

Како је овде

$$A = -r^2 \sin\frac{\alpha}{3} \quad B = -\frac{r^2}{2}\sin^2\frac{\alpha}{3} \quad C = -r^2 \sin\frac{\alpha}{3}$$

то је

$$B^2 - AC = \sin^2\frac{\alpha}{3}\left(\frac{r^4}{4} - r^4\right) = -$$

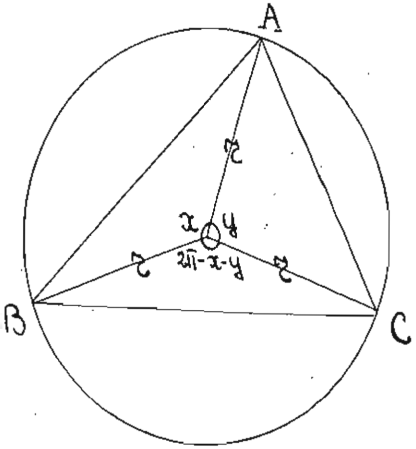
$$C = -$$

што значи да је z одиста максимум за

$$x = \frac{\alpha}{3} \quad y = \frac{\alpha}{3}$$

12. У кругу полупречника r уписати троугао највеће површине.

Површина ма каквог уписаног троугла ABC дата је обрасцем



$$F = \frac{r^2}{2}\sin x + \frac{r^2}{2}\sin y + \frac{r^2}{2}\sin(2\pi - x - y)$$

Имамо дакле да тражимо максимум функције F, коју можемо писати

$$F = \frac{r^2}{2}\left[\sin x + \sin y + \sin(2\pi - x - y)\right]$$

Задатак је исти као зад. 11. само је овде

$$\alpha = 2\pi$$

Према томе површина уписаног троугла

биће највећа кад је

$$x = y = \frac{2\pi}{3}$$

т.ј. кад је тај троугао равностран.

13. Колике морају бити стране једног троугла чији је обим $2s$, па да његова површина буде maximum.

Ако је једна страна тога троугла x, друга y, трећа је $2s-x-y$, онда ће његова површина бити

$$F = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-x-y)}$$

Имамо дакле да тражимо maximum ове функције. Први парц. њени изводи уједначени са нулом дају једначине

$$(s-y)(2x+y-2s)=0$$
$$(s-x)(2y+x-2s)=0$$

које могу да постоје само ако је

$$2x+y-2s=0$$
$$2y+x-2s=0$$

Одатле је

$$x = \frac{2s}{3} \quad y = \frac{2s}{3}$$

т.ј. површина ће тога троугла бити највећа кад је он равностран