Ђор. Ј. Пуцић, проф.

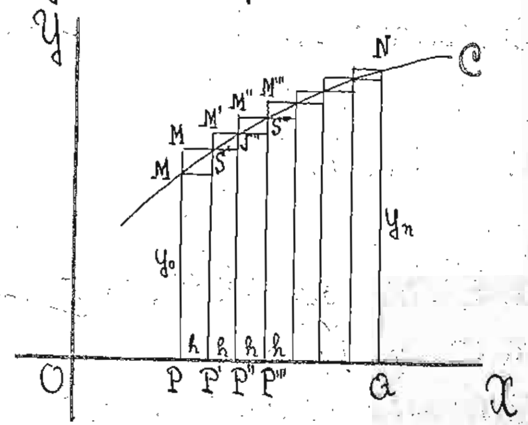
Интегрални рачун

Предавања
Др. Мих. Петровића,
проф. Универзитета
(допуњена примерима).

Појам интеграла

Један од два начина на који се израчунавају коначне количине помоћу бескрајно малих јесте тај: што се коначне количине сматрају као збир бесконачно много бесконачно малих количина.

Претпоставимо да се тражи површина ограничена кривом линијом C, осовином Ox и двема крајњим ординатама y_0 и y_n. Ако размак PQ између крајњих ордината поделимо на n једнаких делова једне исте дужине h, па из подеоних тачака повучемо пара-



лелне осовини Oy, тражена површина би-
ће подељена на n малих површина ко-
је су са три стране ограничене правим
линијама а са четврте датом кривом
линијом. Величина сваке од ових ма-
лих површина налази се између
сваког одговарајућег унутрашњег или
спољашњег правоугаоника, према томе
и целокупна тражена површина U на-
лази се између вредности U_1 и U_2, где
U_1 представља збир површина уну-
трашњих правоугаоника а U_2 збир по-
површина спољних правоугаоника,
тако да ће бити

$$U_1 < U < U_2 \qquad 1)$$

Површина сваког од малих пра-
воугаоника који састављају површину
U_1 равна је производу из сталне о-
сновице h и висине, а висине су: y_0, y_1,
y_2 ... y_{n-1}. Тако исто површина U_2 рав-
на је збиру спољних правоугаоника од
којих је сваки раван производу из
основице h и одговарајуће висине, које
су: $y_1, y_2, y_3 \cdots y_n$. Према томе је

$$U_1 = y_0 h + y_1 h + y_2 h + \cdots + y_{n-1} h \qquad 2)$$
$$U_2 = y_1 h + y_2 h + y_3 h + \cdots + y_n h \qquad 3)$$

Одатле је

$$U_2 - U_1 = (y_n - y_0) h \qquad 4)$$

Неједначина 1) и једначина 4) важе па-
ма какво било h, било оно коначно би-
ло оно бесконачно мало.

Пустимо сада да h бесконач-
но опада; онда ће и површина U и по-
вршине U_1 и U_2 бити састављене из бес-
коначно много бесконачно малих дело-
ва. Разлика

$$U_2 - U_1$$

према једначини 4), тежиће нули, јер је
она равна производу из једне коначне
количине

$$y_n - y_0$$

и једне бесконачно мале количине

$$h$$

Неједначина 1) показује да се U налази
између две вредности чија разлика
тежи нули тако, да се U поклапа

са којом хоћемо вредношћу: U_1 или U_2. Узмимо да се U поклапа са U_1, па добијамо

$$U = \lim [y_0h + y_1h + \cdots + y_{n-1}h] \qquad 5)$$

Образац 5) показује да се површина U може израчунати као граница којој тежи збир од бесконачно много бесконачно малих количина: $y_0h,\ y_1h,\ \ldots$

Нека је сад једначина криве C дата у облику

$$y = f(x)$$

Ако h сматрамо као бесконачно мали прираштај, онда је

$$h = dx$$

Из слике се види да је тада

$$y_0 = f(x)$$
$$y_1 = f(x+dx)$$
$$y_2 = f(x+2\,dx)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{n-1} = f(x+\overline{n-1}\,dx)$$

Заменом тих вредности у обрасцу 5) добија се:

$$U = \lim [f(x)dx + f(x+dx)dx + \cdots + f(x+\overline{n-1}\,dx)dx] \qquad 6)$$

Збир на десној страни обрасца 6) назива се *интегралом* функције $f(x)$ и означава се симболички знаком

$$\int f(x)\,dx$$

Сваки од сабирака

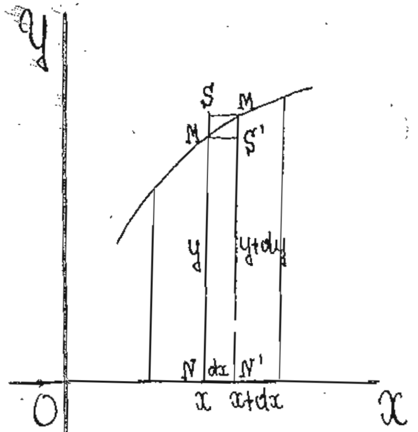
$$f(x+k\,dx)$$

који састављају тај збир назива се *елементом интеграла*. Као што се види имали би ове две *дефиниције интеграла*:

1° Интеграл једне функције $f(x)$ може се сматрати као површина ограничена x-осовином, двема крајњим ординатама од којих једна одговара апсциси x и кривом линијом $y=f(x)$.

2° Интеграл једне функције $f(x)$ може се сматрати као збир од бесконачно много сабирака који су сви облика $f(x+k\,dx)\cdot dx$ кад се у овима стави узастопце $k=1,2,3,\ldots$

И једна и друга од ових дефиниција утврђује појам интеграла, али ни помоћу једне ни помоћу друге не би се могли интеграли израчунавати. Израчунавање интеграла основано је на једној, трећој, дефиницији интеграла до које се долази овако: Означимо опет са U површину ограничену x-осовином, двема крајњим ординатама и луком посматране криве. Ако смо ту површину израчунали до једне апсцисе x, па пустимо да се x промени за dx, одговарајући прираштај површине биће dU. Из слике се види да овај прираштај површине лежи између правоугаоника MNN'S' и SNN'M'. Површина првога је



$$MNN'S' = MN\cdot NN' = y\cdot dx$$

а другога

$$SNN'M' = M'N'\cdot NN' = (y+dy)\,dx$$

Према томе је

$$y\cdot dx < dU < (y+dy)\cdot dx \qquad 7.)$$

Неједначина 7.) показује да се величина dU налази између две бесконачно мале количине првог реда које се међу собом разликују за

$$dy\cdot dx$$

т.ј. за једну бесконачно малу количину другог реда. Према ранијем правилу о занемаривању бесконачно малих количина вишег реда поред бесконачно малих количина првог реда види се да се dU поклапа са $y\cdot dx$, тако да је

$$dU = y\cdot dx$$

одакле је

$$\frac{dU}{dx} = y \qquad 8.)$$

Међутим ми смо видели, ако је једначина криве

$$y = f(x)$$

површина U биће

$$U = \int f(x)\,dx$$

Заменом тих вредности y и U у једначини 8.) добија се

$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x) \qquad 9.)$$

Из обрасца 9.) добија се ова трећа дефиниција интеграла:

3° Под интегралом једне дате функције $f(x)$ разуме се таква једна функција чији ће извод по x-у бити раван функцији под интегралним знаком.

Очевидно је да је ова трећа дефиниција интеграла, која је у исто време најпростија, најважнија у рачунском погледу од све три. Из ње се непосредно изводи ово рачунско упутство за израчунавање интеграла: треба наћи такву једну функцију $F(x)$ да кад јој нађемо извод по x-у, тај ће извод бити раван функцији $f(x)$ под интегралним знаком.

Примери:

1. Тражи се

$$\int x^m dx$$

Према горњем упутству његова ће вредност бити

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

јер извод ове функције има управо за вредност

$$x^m$$

Отуда можемо писати

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

На исти начин долазимо до:

2. $$\int e^x dx = e^x$$

3. $$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

4. $$\int \cos x \, dx = \sin x$$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arc\sin x$$

6. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arc tg\, x$$

и т. д.

Из обрасца 9.) види се да по тражење интеграла једне функције представља две реципрочне вредности са тражењем извода те функције, другим речима: операције $\frac{d}{dx}$ и $\int$ једна другу потиру т.ј. ако се с једном функцијом изврши најпре интеграција а затим диференцијација, враћемо се на прву функцију и обратно.

Појам неодређених и одређених интеграла

Из последње дефиниције интеграла како се увиђа ово: један интеграл има не једну већ бесконачно много вредности и, ако је $F(x)$ једна од тих вредности, остале се добијају кад се њој дода једна константа C. То долази отуда што ако $F(x)$ има извод $f(x)$, онда ће и $F(x)+C$ имати извод $f(x)$ па ма какву вредност имала константа C; ако дефиницију интеграла задовољава $F(x)$, онда ју задовољава и $F(x)+C$ из чега се изводи ово правило: Ако знамо једну вредност $F(x)$ датог интеграла, све остале вредности биће дате обрасцем

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

где је C једна константа. Из тога је очевидно да интеграл не може имати других вредности осим ових, јер према правилу за изводе: две количине могу имати само онда једнаке изводе ако имају једнаке вредности или се разликују за једну сталну константу C.

Да

$$\int f(x)\,dx$$

може имати бесконачно много решења можемо се уверити и геометријским путем, јер површина зависи не само од једне крајње апсцисе x, већ тако исто и од друге крајње апсцисе x. Мењајући ову другу апсцису, интеграл ће бити једнако представљен изразом $\int f(x)\,dx$ али се његова вредност мења јер се и површина мења. Та ће вредност бити утврђена само онда ако се поред једне утврђене ординате a утврди и друга b. Површина је тада узета између крајњих апсциса х и в м интеграл који тој површини одговара тада се обележава знаком

$$\int_x^b f(x)\,dx$$

Такав интеграл има утврђену вредност која зависи само од величине х. Ако се и ова количина утврди т.ј. површина се налази између а и в, онда интеграли имају потпуно утврђену вредност која ће бити један апсолутан број. Таква се вредност означује знаком

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Из тих се разлога

$$\int f(x)\,dx$$

назива <u>неодређеним интегралом</u> функције f(x), а

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

назива се <u>одређеним интегралом</u> функције f(x) између а и в који се називају <u>интегралним границама</u>, а константа C што фигурише у обрасцу 10. зове се <u>интегралном константом</u>.

Мало час је показано како се одређују неодређени интеграли помоћу треће дефиниције и обрасца 10.). Остаје да се одреди како се, кад је дат неодређен интеграл, може одредити одређени интеграл исте функције. Пошто израз 10.) важи па ма у којим границама узели интеграл, то ће важити и између граница н.пр. а и х, тако да ће бити

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C \qquad 11.)$$

С друге стране очевидно је да кад се интегралне границе поклопе, интеграл постаје раван нули. Према томе је

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

што показује да и десна страна обрасца 11.) мора бити равна нули за $x = a$, т.ј. да је

$$F(a) + C = 0$$

$$C = -F(a)$$

и пошто је C константа независна од x она ће ту вредност имати па ма какво било x. Заменом ове вредности C у обрасцу 11.) добија се

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a) \tag{12}$$

Ако сад место горње границе x узмемо утврђену вредност b, образац 12.) постаје

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{13}$$

и у том је обрасцу оличено ово правило за израчунавање одређених интеграла: треба наћи најпре неодређени интеграл $F(x)$, сменити x у њему најпре горњом затим доњом интегралном границом и резултате одузети.

Примери:

1. Тражи се

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

Неодређени интеграл овде је

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

Кад се у њему смени доња граница добија се $\frac{1}{3}$, а кад се смени горња граница добија се 9. Према томе тражени одређени интеграл има за вредност:

$$\int_1^3 x^2\,dx = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3} = \frac{26}{3}$$

2. Тражи се

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

Неодређени интеграл је

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

Кад се у њему смени горња граница, добија се $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, а кад се смени доња граница добија се $\sin 0 = 0$. Према томе дати интеграл има за вредност

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1 - 0 = 1$$

Примедба: Операција смењивања горње и доње границе у интегралу $F(x)$ и одузимање обично се означује овако:

$$\Big[F(x)\Big]_a^b$$

Н. пример: 1.

$$\int_3^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^5 = \frac{125}{3} - 9 = \frac{98}{3}$$

2. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

Неодређени интеграли

Видели смо да неодређени интеграл

$$\int f(x)dx$$

представља такву једну функцију $F(x)$ да је извод од $F(x)$ управо раван функцији $f(x)$. Видели смо и то да овакав интеграл има бесконачно много вредности које се међу собом разликују једном константом C тако да је

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Израчунавање неодређених интеграла своди се на то да се нађе једна ма која од његових вредности; остале се све добијају додавањем константе C. Из саме овакве дефиниције неодређених интеграла изводе се неколико основних особина као н. пр.

1° Особина: Ако смо успели представити израз

$$f(x)dx$$

у облику диференцијалења једне функције $\varphi(x)$ тако да је н. пр.

$$f(x)\,dx = d\,\varphi(x)$$

онда ће

$$\int f(x)\,dx$$

имати за вредност

$$\varphi(x)$$

Ово излази непосредно отуда, што се као што смо видели, знаци $\int$ и d потиру.

Н. пр. ако се тражи

$$\int \frac{dx}{x}$$

пошто је

$$\frac{dx}{x} = d\log x$$

то ће интеграл имати за вредност

$$\log x.$$

2° Особина: Ако у функцији испод интегралног знака фигурише једна стална количина (константа) као чинилац, она се може извући пред интегрални знак т.ј.

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

То излази непосредно из сличног правила које вреди за изводе.

Н. пр.

$$\int 3\frac{dx}{x} = 3\int\frac{dx}{x} = 3\log x$$

3° Особина: Интеграл алгебарског збира ма коликог броја функција раван је алгебарском збиру интеграла тих функција т.ј.

$$\int[f(x)+\varphi(x)+\psi(x)+\cdots]\,dx = \int f(x)\,dx+\int\varphi(x)\,dx+$$
$$+\int\psi(x)\,dx+\cdots$$

И ово излази из правила о изводима по коме је извод збира раван збиру извода.

Методе за израчунавање неодређених интеграла

Казано је да је израчунавање неодређених интеграла реципрочна операција израчунавању извода. Видели смо у теорији извода да свака функција има свој извод и да, кад год је позната функција, може јој се израчунати и извод помоћу обичних рачунских операција којима се данас располаже. Међутим код интеграла није такав случај. Постоји непрегледан број случајева у којима ма да је функција која има да се интеграли потпуно позната т.ј. изражена помоћу обичних рачунских операција, њен интеграл је немогуће наћи. Такав би н.пр. био случај са интегралима

$$\int \frac{e^x}{x}dx \;;\; \int \frac{\sin x}{x}dx ;\; \int \frac{\cos x}{x}dx$$

Међутим има такође бесконачно велики број интеграла који се могу израчунати помоћу обичних функција. Посао израчунавања таквих интеграла своди се на то, да се израз $f(x)dx$ под интегралним знаком представи као извод какве познате функције $\varphi(x)$. Ако је то испало за руком, интеграл ће имати за вредност $\varphi(x)+C$. На тај начин долази се до неколико основних образаца који су:

Основни обрасци.

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$

3. $\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$

5. $= \frac{\mathrm{Log}\, x}{\mathrm{Log}\, e} + C$

6. $$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$$

7. $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

8. $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

9. $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

10. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

11. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

12. $$\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x} = \sec x + C$$

13. $$\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x + C$$

14. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

15. $$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$$

16. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

17. $$\int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,cotg} x + C$$

18. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C$$

19. $$\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,cosec} x + C$$

Ових неколико образаца сматрају се у исто време и као неколико основних типова на које се покушава свести дати интеграл. То свођење бива на разне начине, од којих ћемо ми навести ове:

1° Начин: помоћу наведених трију основних особина неодређених интеграла.

Када непосредна интеграција није могућа, функција под интегралним знаком се често пута може тако трансформисати да се на њу може применити који од наведених основних образаца па чак и извести нови обрасци.

Примери:

1. $$\int \frac{4\,dx}{1+x^2} = 4\int \frac{dx}{1+x^2} = 4 \operatorname{arc\,tg} x + C$$

2. $$\int \left(3x^2 + \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x^2 dx + \int \frac{2\,dx}{x} = x^3 + 2\log x + C$$

3. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

4. $$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

5. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{dx}{a}}{\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a}+C$$

Исто тако као у предња три примера добијамо и ова три интеграла:

6. $$\int\frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arccos\frac{x}{a}+C$$

7. $$\int\frac{-dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cotg}\frac{x}{a}+C$$

8. $$\int\frac{-dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cosec}\frac{x}{a}+C$$

9. $$\int\frac{f'(x)\,dx}{f(x)}=\log f(x)+C$$

10. $$\int\frac{2bx\,dx}{a+bx^2}=\log(a+bx^2)+C$$

11. $$\int\frac{x^{n-1}dx}{a+bx^n}=\frac{1}{nb}\int\frac{nbx^{n-1}dx}{a+bx^n}=\frac{1}{nb}\log(a+bx^n)+C$$

12. $$\int(ax^2+bx+c)^2dx=\int[a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2]\,dx=$$

$$=a^2\int x^4dx+2ab\int x^3dx+(b^2+2ac)\int x^2dx+2bc\int x\,dx+c^2\int dx=$$

$$=a^2\frac{x^5}{5}+ab\frac{x^4}{2}+(b^2+2ac)\frac{x^3}{3}+bcx^2+c^2x+C$$

13. $$\int\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}dx=\int\frac{(a+x)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$$

14. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=$$

Множећи бројитељ и именитељ са x^{-3}, добијамо

$$=\int\frac{x^{-3}dx}{\sqrt{x^{-2}-1}}=-\sqrt{x^{-2}-1}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

15. $$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

16. $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{5-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}}+C$$

17. $$\int\frac{-dx}{\sqrt{2-5x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{-dx}{\sqrt{\frac{49}{36}-\left(x+\frac{5}{6}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arccos\frac{6x+5}{7}+C$$

18. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}=\int\frac{x^{-2}dx}{\sqrt{4-4x^{-1}-x^{-2}}}=$$

$$=\int\frac{-1(-x^{-2}dx)}{\sqrt{8-(x^{-1}+2)^2}}=\arccos\frac{x^{-1}+2}{2\sqrt{2}}=\arccos\frac{2x+1}{2\sqrt{2}\cdot x}+C$$

19. $\int \frac{2x-3}{x^2+2ax+3a^2}dx$

додавањем и одузимањем $2a$ бројитељу добија се

$$= \int \frac{2x+2a}{x^2+2ax+3a^2}dx - (2a+3)\int \frac{dx}{2a^2+(x+a)^2} =$$

$$= \log(x^2+2ax+3a^2) - \frac{2a+3}{a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+a}{a\sqrt{2}} + C$$

20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

Како је

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

то је дати интеграл

$$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right] = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + C$$

21. $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \log \sin x + C$

22. $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\log \cos x + C$

23. $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx =$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 2x \cdot 2dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

24. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \log \operatorname{tg} x$

25. $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$

$$= \log \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

26. $\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} =$

$$= \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C$$

27. $\int \frac{1-x\sin\alpha}{1-2x\cdot\sin\alpha+x^2}dx$

Ако у бројитељу заменимо 1 са $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, добијамо да је горњи интеграл

$$= \int \frac{\cos^2\alpha - \sin\alpha(x-\sin\alpha)}{1-2x\sin\alpha+x^2}dx =$$

$$= \cos^2\alpha \int \frac{dx}{1-2x\sin\alpha+x^2} - \sin\alpha \int \frac{x-\sin\alpha}{1-2x\sin\alpha+x^2}dx$$

$$= \cos^2\alpha \int \frac{dx}{\cos^2\alpha+(x-\sin\alpha)^2} - \frac{1}{2}\sin\alpha \int \frac{2x-2\sin\alpha}{1-2x\sin\alpha+x^2}dx$$

$$= \cos\alpha \cdot \operatorname{arctg}\frac{x-\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha \log\sqrt{1-2x\sin\alpha+x^2} + C$$

2° Начин: помоћу замене

Дешава се да дати интеграл
$\int f(x)dx$

не отпада не потпада ни под један од предних интеграла (-образаца), али кад у њему извршимо згодну смену

$$x = \varphi(t)$$

нови интеграл се поклапа са неким од тих интеграла. Какву ћемо смену употребити зависи од случаја са којим се има посла. Смена се међутим извршује овако: треба у функцији $f(x)$ сменити

$$x = \varphi(t)$$

и

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

Примери:

1. $\int \frac{dx}{a+x}$

ако извршимо смену

$$a+x=t$$

одакле

$$x = t-a \qquad dx = dt$$

дати интеграл постаје

$$= \int \frac{dt}{t} = \log t + C$$

и ако се вратимо на стару променљиву x што ћемо учинити сменивши

$$t = a+x$$

добијамо као вредност датог интеграла

$$\log(a+x) + C$$

2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-ax^4}}$

ако ставимо

$$ax^4 = t^2$$

одакле је

$$t = x^2\sqrt{a} \qquad x^2 = \frac{t}{\sqrt{a}} \qquad x\,dx = \frac{dt}{2\sqrt{a}}$$

дати интеграл постаје

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \arcsin t + C$$

или ако се вратимо на стару променљиву x

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} \arcsin(x^2\sqrt{a}) + C$$

3. $\int \log x \cdot \frac{dx}{x}$

ако сменимо

$$\log x = t$$

одакле

$$\frac{dx}{x} = dt$$

добијамо

$$= \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C.$$

4. $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$

Сменом

$$x-a=z \quad .. \quad dx=dz$$

добијамо

$$=\int z^{-n}dz=\frac{z^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{1}{(n-1)z^{n-1}}=-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C$$

5. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}$

Сменимо

$$x^2+a^2=z \quad .. \quad x\,dx=\frac{dz}{2}$$

па добијамо

$$=\frac{1}{2}\int z^{-n}dz=-\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+C$$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}$

Сменимо

$$x=\frac{1}{z} \quad .. \quad dx=-\frac{dz}{z^2}$$

па добијамо

$$=\int\frac{\frac{-dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{4}{z^2}-\frac{4}{z}-1}}=\int\frac{-dz}{\sqrt{4-4z-z^2}}=\int\frac{-dz}{\sqrt{8-(z+2)^2}}=$$

$$=\arccos\frac{z+2}{2\sqrt{2}}=\arccos\frac{2x+1}{2\sqrt{2}\cdot x}+C$$

7. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

Помножимо бројитељ и именитељ са x

$$=\int\frac{x^{-3}dx}{[x^{-1}(1-x^2)^{1/2}]^3}=\int\frac{x^{-3}dx}{(x^{-2}-1)^{3/2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x^{-3}dx}{(x^{-2}-1)^{3/2}}$$

Ако сменимо

$$x^{-2}-1=z \quad \dots \quad -2x^{-3}dx=dz$$

добијамо

$$=-\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}dz=-\frac{1}{2}\,\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{z}}=\frac{1}{\sqrt{x^{-2}-1}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

8. $\int\frac{\sqrt{x}-1}{6(\sqrt[3]{x}+1)}dx=\int\frac{x^{1/2}-1}{6(x^{1/3}+1)}dx$

Ако сменимо

$$x=z^6 \quad .. \quad dx=6z^5dz$$

добијамо

$$=\int\frac{z^3-1}{z^2+1}z^5dz=\int\frac{z^8-z^5}{z^2+1}dz=$$

$$=\int\left(z^6-z^4-z^3+z^2+z-1+\frac{1-z}{z^2+1}\right)dz=$$

$$=\int z^6dz-\int z^4dz-\int z^3dz+\int z^2dz+\int z\,dz-\int dz+$$

$$+\int\frac{dz}{z^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{2z\,dz}{z^2+1}=$$

$$=\frac{z^7}{7}-\frac{z^5}{5}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^2}{2}-z+\operatorname{arctg}z-\log\sqrt{z^2+1}=$$

$$=\frac{x^{7/6}}{7}-\frac{x^{5/6}}{5}-\frac{x^{2/3}}{4}+\frac{x^{1/2}}{3}+\frac{x^{1/3}}{2}-x^{1/6}+\operatorname{arctg}x^{1/6}-\log\sqrt{x^{1/3}+1}+C$$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

Ставимо

$$\sqrt{x^2+1} = z - x$$

одакле

$$x = \frac{z^2-1}{2z}$$

и према томе

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{z^2+1}{2z} \qquad dx = \frac{z^2+1}{2z^2}\,dz$$

па добијамо

$$= \int \frac{z^2+1}{2z^2}\,dz \cdot \frac{2z}{z^2+1} = \int \frac{dz}{z} = \log z = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$

10. Исто тако се добија

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Ставимо

$$\sqrt{1-x^2} = xz - 1$$

одакле је

$$x = \frac{2z}{z^2+1}$$

па отуда

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{z^2-1}{z^2+1} \qquad dx = -2\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}\,dz$$

и према томе

$$= \int -2\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}\,dz \cdot \frac{z^2+1}{2z} \cdot \frac{z^2+1}{z^2-1} = -\int \frac{dz}{z} = -\log z$$

$$= \log\frac{1}{z} = \log\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$$

12. Исто тако добили би

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \log\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}+C$$

13. Исто тако, с обзиром на задатке 11. и 12. добили би:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}} = \frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}+C$$

Да би дошли до овог обрасца треба најпре поделити бројитељ и именитељ са a^2.

14. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2x\sqrt{x}}\,dx$

Ставимо

$$x = z^2$$

одакле је

$$\sqrt{x} = z$$

а

$$dx = 2z\,dz$$

па овај интеграл прелази у

$$= \int \frac{(z+1)^2}{2\cdot z^2\cdot z}\,2z\,dz = \int \frac{(z+1)^2}{z^2}\,dz$$

или ако развијемо квадрат из бројитеља

$$= \int dz + \int \frac{2z}{z^2}\,dz + \int \frac{1}{z^2}\,dz =$$

$$= z + \log z^2 + \left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-1}{z} + \log z^2 + C =$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x}} + \log x + C$$

15. $$\int \frac{x\,dx}{a^2b^2+x^4}$$

Ставимо

$$x^2 = z$$

одакле

$$x\,dx = \frac{dz}{2}$$

па добијамо

$$= \int \frac{\frac{dz}{2}}{a^2b^2+z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{a^2b^2+z^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{ab}\,\text{arc.tg.}\,\frac{z}{ab} + C =$$

$$= \frac{1}{2ab}\,\text{arc.tg}\,\frac{x^2}{ab} + C$$

16. $$\int \frac{x\,dx}{a^2b^2-x^4}$$

Ставимо

$$x^2 = z$$

одакле је

$$x\,dx = \frac{dz}{2}$$

па добијамо

$$= \int \frac{\frac{dz}{2}}{a^2b^2-z^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2-a^2b^2}$$

Како је

$$\frac{1}{z^2-a^2b^2} = \frac{1}{2ab}\left[\frac{1}{z-ab} - \frac{1}{z+ab}\right]$$

то је

$$= -\frac{1}{4ab}\left[\int\frac{dz}{z-ab} - \int\frac{dz}{z+ab}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4ab}\left[\log(z-ab) - \log(z+ab)\right] + C =$$

$$= -\frac{1}{4ab}\log\frac{z-ab}{z+ab} + \log C = \frac{1}{4ab}\log C\,\frac{z+ab}{z-ab} =$$

$$= \frac{1}{4ab}\log C\,\frac{x^2+ab}{x^2-ab}$$

17. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^4b^4-x^6}}$$

Ставимо

$$x^3 = z$$

одакле је

$$x^2\,dx = \frac{dz}{3}$$

па добијамо

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{a^4b^4-z^2}} = \frac{1}{3a^2b^2}\int\frac{dz}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{a^2b^2}\right)^2}} = \frac{1}{3}\,\text{arc sin}\,\frac{z}{a^2b^2} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{arc sin}\,\frac{x^3}{a^2b^2} + C$$

3° Начин: метода делимичног интегралења.

Ова метода је основана на познатом правилу за диференцијалење производа, према коме је

$$d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du$$

Одатле је

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Интегралећи обе стране добија се

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

а пошто се интегрални и диференцијални знак потиру, т.ј.

$$\int d(uv) = uv$$

то се добија образац

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

На томе обрасцу основана је метода делимичног интеграљења која се састоји у овоме: Гледа се да се функција под интегралним знаком представи као производ двеју функција; једна од њих означи се са u, а друга од њих помножена са dx означи се са dv тако да задати интеграл постане $\int u\,dv$. Затим се применом предњег обрасца на тај интеграл овај сведе на $\int v\,du$. Ако је овај последњи интеграл простији од првог толико да се може лако интегралити, помоћу предњег обрасца биће израчунат и сам првобитни интеграл. Избор функција u и v у датом случају зависи од природе случаја и метода је примењива само онда ако се $\int v\,du$ на који је сведен може израчунати.

<u>Примери</u>:

1. $\int x e^x\,dx$

Ако се узме

$$x = u \qquad e^x dx = dv$$

одакле је

$$dx = du \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

заменом у обрасцу добијамо

$$= uv - \int v\,du = xe^x - \int e^x dx =$$
$$= xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

2. $\int \log x\,dx$

ако се стави

$$\log x = u \qquad dx = dv$$

одакле је

$$\frac{dx}{x} = du \qquad v = x$$

дати интеграл постаје

$$= x\log x - \int x\frac{dx}{x} = x\log x - x + C =$$
$$= x(\log x - 1) + C.$$

3. $$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$$

Ставимо
$$\operatorname{arc\,tg} x = u \qquad dx = dv$$
одакле је
$$\frac{dx}{1+x^2} = du \qquad x = v$$
па је дати интеграл
$$= x\operatorname{arc\,tg} x - \int x\frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

4. $$\int \frac{x\cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Ставимо
$$\arcsin x = u \qquad \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv$$
одакле је
$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \qquad v = -\sqrt{1-x^2}$$
па дати интеграл постаје
$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int\sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$$

5. $$\int x^2 e^x\,dx$$

Ставимо
$$x^2 = u \qquad e^x dx = dv$$
одакле је
$$2x\,dx = du \qquad v = e^x$$
па дати интеграл постаје
$$= x^2e^x - 2\int xe^x dx$$
а према 1. примеру
$$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C =$$
$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

6. $$\int e^x\cos x\,dx$$

Ставимо
$$\cos x = u \qquad e^x dx = dv$$
одакле је
$$du = -\sin x\,dx \qquad v = e^x$$
па је дати интеграл
$$= e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx$$
Ако се сада узме
$$\sin x = u \qquad e^x dx = dv$$
одакле је
$$du = \cos x\,dx \qquad v = e^x$$
па је

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

па заменом ове вредности у дати интегралу добијамо

$$= \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

7. Исто тако добили би

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

+8. $\int \cos x \log \sin x\,dx$

Ставимо

$$\log \sin x = u \qquad \cos x\,dx = dv$$

одакле је

$$du = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad v = \sin x$$

па дати интеграл постаје

$$= \sin x \log \sin x - \int \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$$

$$= \sin x \log \sin x - \int \cos x\,dx =$$

$$= \sin x \log \sin x - \sin x + C =$$

$$= \sin x (\log \sin x - 1) + C$$

+9. $\int \sin x \cdot \log \cos x \cdot dx$

Ако се стави

$$\log \cos x = u \qquad \sin x\,dx = dv$$

одакле је

$$du = -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx \qquad v = -\cos x$$

дати интеграл постаје

$$= -\cos x \log \cos x - \int \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\,dx =$$

$$= -\cos x \log \cos x - \int \sin x\,dx =$$

$$= -\cos x \log \cos x + \cos x + C =$$

$$= \cos x (1 - \log \cos x) + C.$$

10. $\int \arcsin x \cdot dx$

Ако се стави

$$\arcsin x = u \qquad dx = dv$$

одакле је

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v = x$$

дати интеграл постаје

$$= x \cdot \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

11. $\int \arccos x \cdot dx$

Ако се стави

$$\arccos x = u \qquad dx = dv$$

одакле је

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v = x$$

дати интеграл постаје

$$= x \arccos x + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

12. $\int \operatorname{arc\,cotg} x\,dx$

Ако се стави

$$\operatorname{arc\,cotg} x = u \qquad dx = dv$$

одакле је

$$du = \frac{-dx}{1+x^2} \qquad v = x$$

дати интеграл постаје

$$= x \operatorname{arc\,cotg} x + \int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arc\,cotg} x + \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C.$$

13. $\int \operatorname{arc\,sec} x\,dx$

Ако ставимо

$$\operatorname{arc\,sec} x = u \qquad dx = dv$$

одакле је

$$du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad v = x$$

дати интеграл постаје

$$= x \operatorname{arc\,sec} x - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

или, према зад. 10 стр.

$$= x \cdot \operatorname{arc\,sec} x - \log(x+\sqrt{x^2-1}) + C$$

14. $\int \operatorname{arc\,cosec} x\,dx$

Ако ставимо

$$\operatorname{arc\,cosec} x = u \qquad dx = dv$$

одакле је

$$du = \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad v = x$$

дати интеграл постаје

$$= x \operatorname{arc\,cosec} x + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

или, према зад 13.

$$= x \operatorname{arc\,cosec} x + \log(x+\sqrt{x^2-1}) + C$$

+ 15. $\int x^2 a^x\,dx$

Ако се стави

$$x^2 = u \qquad a^x dx = dv$$

одакле је

$$du = 2x\,dx \qquad v = \frac{a^x}{\log a}$$

дати интеграл постаје

$$= \frac{x^2 a^x}{\log a} - \frac{2}{\log a} \int x a^x\,dx$$

Ако сада ставимо

$$x = u \qquad a^x dx = dv$$

одакле је

$$du = dx \qquad v = \frac{a^x}{\log a}$$

биће

$$\int x a^x dx = \frac{x a^x}{\log a} - \frac{1}{\log a}\int a^x dx =$$

$$= \frac{x a^x}{\log a} - \frac{a^x}{(\log a)^2}$$

па је према томе дати интеграл

$$= \frac{x^2 a^x}{\log a} - \frac{2x a^x}{(\log a)^2} + \frac{2 a^x}{(\log a)^3} + C =$$

$$= \frac{a^x}{\log a}\left[\left(x - \frac{1}{\log a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\log a}\right)^2\right] + C$$

16. $$\int \frac{x e^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ако се стави

$$e^{\arcsin x} = u \qquad \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv$$

одакле је

$$du = e^{\arcsin x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v = -\sqrt{1-x^2}$$

дати интеграл постаје

$$I = -\sqrt{1-x^2}\, e^{\arcsin x} + \int e^{\arcsin x} dx$$

а ако се стави

$$x = u \qquad \frac{e^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv$$

одакле је

$$du = dx \qquad v = e^{\arcsin x}$$

дати интеграл постаје

$$I = x e^{\arcsin x} - \int e^{\arcsin x} dx$$

Из ове две вредности за дати интеграл I добија се сабирањем

$$I = \frac{1}{2} e^{\arcsin x}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + C$$

17. Одузимањем горњих вредности за I добили би

$$\int e^{\arcsin x} dx = \frac{1}{2} e^{\arcsin x}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + C$$

4° Начин: Интеграција помоћу бескрајних редова.

Дешава се да се функција $f(x)$ што фигурише у задатом интегралу може развити у какав ред

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$$

који је такав да се сваки од интеграла

$$\int u_1(x)\,dx\,,\quad \int u_2(x)\,dx\,,\ \ldots.$$

може израчунати. Ако је ред образован од ових последњих интеграла конвергентан, дати интеграл $\int f(x)\,dx$ биће раван збиру од ових последњих интеграла. Видели смо раније да кадгод функција $f(x)$ задовољава извесне услове може се развити у Тејлоров или Маклоренов ред тако да је н. пр.

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.$$

или

$$f(x) = B_0 + B_1(x-\alpha) + B_2(x-\alpha)^2 + \ldots.$$

где су: $A_0\ A_1\ A_2\ \ldots.$ и $B_0\ B_1\ B_2\ \ldots$ стални бројеви. Множени са dx и интеграљени добијамо:

$$\int f(x)\,dx = C + A_0 x + \frac{A_1}{2}x^2 + \frac{A_2}{3}x^3 + \ldots.$$

или

$$\int f(x)\,dx = C + B_0(x-\alpha) + \frac{B_1}{2}(x-\alpha)^2 + \frac{B_2}{3}(x-\alpha)^3 + \ldots$$

Испитивање конвергенције ових нових редова обично се своди на то да ли остатак реда тежи нули кад број чланова бескрајно расте.

Оваква интеграција није свагда могућа, јер има случајева у којима ма да се функција под интегралним знаком може развити у ред, нов бесконачан ред који се добија интеграцијом или није конвергентан или његов збир не представља дати интеграл. Међутим у обичним случајевима кад год је могуће развити функцију у Тејлоров или Маклоренов ред, и нови ће интегрални ред бити конвергентан и његов ће збир представљати тражени интеграл.

Н. пр. тражи се

$$\int \frac{dx}{1-x}$$

Зна се да је за $1 < x < 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

и према томе

$$\int \frac{dx}{1-x} = \int dx + \int x\,dx + \int x^2\,dx + \int x^3\,dx + \ldots$$

$$= C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Али са друге стране знамо да је

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\log(1-x)$$

па отуда

$$\log(1-x) = -C - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

Константу C можемо у овом случају прецизирати, јер пошто она не зависи од x можемо у последњем обрасцу ставити $x=0$ па се добија $0=-C$ тако да образац постаје

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

Или, тражи се н. пр.

$$\int \frac{e^x dx}{x}$$

који је иначе немогуће израчунати у коначном облику. Знамо да је за ма какву вредност x-а

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Отуда је

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1} + \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Множени са dx и интеграљени добија се

$$\int \frac{e^x dx}{x} = C + \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{1}\int dx + \frac{1}{1\cdot 2}\int x\,dx + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\int x^2 dx + \cdots$$

или

$$\int \frac{e^x dx}{x} = C + \log x + x + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \cdots$$

Ова метода је нарочито корисна у ова два случаја:

1. Кад се задати интеграл не може свести на комбинације обичних функција т.ј. не може се израчунати помоћу коначног броја рачунских операција.

2. Кад се интеграл може свести на обичне функције али кад је незгодан то скопчано са компликованим рачунима, а довољно је само знати приближне вредности интеграла. У таквом случају интеграл се израчунава у облику реда чији чланови постају све мањи, тако да се почевши од извесног ранга сви остали чланови могу занемарити а да се ипак има она тачност која се тражи. Тако на пр. ако би се тражила

вредност $\log(1-x)$ за $x=0,1$ и ако са тачношћу до три децимала, могли би у горњем реду за $\log(1-x)$ изоставити све чланове почевши од четвртог.

Интеграција рационалних функција.

Под *рационалном функцијом* једне променљиве x разуме се количник од два полинома по x. Општи облик полинома је

$$P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m$$

а општи облик једне рационалне функције је

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

где су P и Q полиноми. Ако је степен имениоца мањи од степена бројиоца или раван овоме, онда се може извршити означена деоба и резултат ће бити један извесан количник који ће бити полином по x, или сталан број и

један остатак који ће такође бу
ти стални број или полином ни
жег степена од имениоца. Тако
у опште може бити

$$R(x)=M(x)+\frac{p(x)}{Q(x)}$$

где су $M(x)$ и $p(x)$ полиноми али
степен од p је нижи од степена
Q. Према томе

$$\int R(x)\,dx$$

свео би се на

$$\int M(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\frac{p(x)}{Q(x)}\,dx$$

Први интеграл

$$\int M(x)\,dx$$

биће известан полином по x-у тако
да ако је

$$M(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots$$

интеграл ће бити

$$\frac{a_0x^{m+1}}{m+1}+\frac{a_1x^m}{m}+\frac{a_2x^{m-1}}{m-1}+\dots$$

Задати интеграл сведен је дакле н

$$\int\frac{p(x)}{Q(x)}\,dx$$

у коме је степен имениоца већи

д степена бројиоца те се према то-
ме не може вршити налотребазлагња
деоба. Задржимо се дакле на инте-
гралима облика

$$\int\frac{p(x)}{Q(x)}\,dx \qquad 1.$$

и решимо једначину

$$Q(x)=0$$

Она у опште може имати реалних
и имагинарних, једнаких и нејед-
наких корена. Разликујмо дакле
према природи корена ова четири
случаја:

I Случај

Нека је

$$x=a$$

један реалан и прост корен горње
једначине $Q(x)=0$. Тада је очевидно
да ће израз

$$\frac{(x-a)\cdot p(x)}{Q(x)} \qquad 2$$

бити коначан, непрекидан и раз-
личан од нуле за $x=a$. Према оно-

ме што знамо о Тејлоровим ред
вина, тај се израз може разви
у Тејлоров ред уређен по степени
ма од $(x-a)$ тако да ће бити

3 $$\frac{(x-a)\cdot p(x)}{Q(x)} = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots$$

Коефицијенат A_0 различан је од ну
ле јер би иначе израз био раван
нули за $x=a$ што није случај. Из
једначине 3. пуштајући да x тежи
а добија се

4. $$A_0 = \lim (x-a)\frac{p(x)}{Q(x)} \quad \text{за } x=a$$

а пошто је та граница коначна
различита од нуле, то ће исто бити
и са A_0. Деобом са $(x-a)$ је

5. $$\frac{p(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{x-a} + \varphi(x)$$

где је $\varphi(x)$ извесна функција x-а ко
остаје коначна за $x=a$. Образац 5.
показује да сваки реалан и прост
корен $x=a$ једначине $Q(x)=0$ даје у
изразу разлагања функције $\frac{p(x)}{Q(x)}$
по један члан облика $\frac{A_0}{x-a}$ и по један

остатак $\varphi(x)$ који више не садржи
рени чинилац $(x-a)$ у имениоцу.
Ако претпоставимо сад да
има још један реалан корен на
пр. $x=b$, очевидно је да разлика
$(x-b)$ мора фигурисати као корени
чинилац у изразу $\varphi(x)$, па према
томе опет на основу обрасца 5. мо-
же се написати

$$\varphi(x) = \frac{B_0}{x-b} + \psi(x) \qquad 6.$$

где је B_0 коначно и различито од нуле
а $\psi(x)$ не садржи у имениоцу ни $(x-a)$
ни $(x-b)$.

Тако исто ако је $x=c$ реалан
и прост корен једначине $Q(x)=0$ имали би

$$\psi(x) = \frac{C_0}{x-c} + \lambda(x) \qquad 7.$$

и т. д.

Из свега овога изводи се ово
правило: Ако су $a, b, c, \dots$ реални и
прости корени једначине $Q(x)=0$,
функција $\frac{p(x)}{Q(x)}$ може се написати
у облику

8. $$\frac{p(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{x-a} + \frac{B_0}{x-b} + \frac{C_0}{x-c} + \cdots + \eta(x)$$

где су $A_0\, B_0\, C_0 \ldots$ коначне и од нуле различне количине, а функција $\eta($ не садржи у имениоцу ни један о корених чинила $(x-a), (x-b), (x-c), \ldots$ Интеграцијом израза 8. добија се

9. $$\int \frac{p(x)}{Q(x)}\,dx = A_0 \log(x-a) + B_0 \log(x-b) + \\ + C_0 \log(x-c) + \cdots + \int \eta(x)\,dx$$

из чега се види да сваки реалан и прост корен једначине $Q(x)=0$ даје у интегралу одговарајуће рационалне функције по један логаритамски члан облика $A \log(x-a)$. Приметимо још и то да су вредности константата $A_0\, B_0\, C_0 \ldots$ дате обрасцем 4. коме се може дати још један згоднији облик: Ако тај образац напишемо у облику

$$A_0 = \lim \frac{p(x)}{\frac{Q(x)}{x-a}}$$

па пустимо да x тежи a бројитељ постаје $p(a)$ а имениоц

$$\lim \frac{Q(x)}{x-a} = \frac{0}{0} = Q'(a)$$

рена тоне је

$$A_0 = \frac{p(a)}{Q'(a)} \quad B_0 = \frac{p(b)}{Q'(b)} \quad C_0 = \frac{p(c)}{Q'(c)} \quad \ldots$$

II Случај

Нека су $x=a$ $x=b$ један пар имагинарних конјугованих простих корена. Пошто резоновање у напред изложеном случају очевидно важи било да је a реално било да је имагинарно, то се може написати

$$\frac{p(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{x-a} + \frac{B_0}{x-b} + \psi(x) \qquad 10.$$

где $\psi(x)$ не постаје бескрајно ни за $x=a$ ни за $x=b$. Нека је сад

$$a = \alpha + \beta i \qquad b = \alpha - \beta i$$

Образац 10. тада постаје

$$\frac{p(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{x-\alpha-\beta i} + \frac{B_0}{x-\alpha+\beta i} + \psi(x) = \\ = \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \psi(x) \qquad 11.$$

где је

12. $$M = A_0 + B_0$$
$$N = -(A_0+B_0)\alpha + (A_0-B_0)\beta i$$

Ако сада постоји још један пар простих имагинарних корена, овај ће сигурно фигурисати у имениоцу од $\varphi(x)$ тако да се пр[...] ма истом обрасцу 11. $\varphi(x)$ може раставити на збир од једног чл[...] на облика $\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ и једне функције $\eta(x)$ која не садржи у имениоцу ни први ни други пар п[...] смотраних корена.

Из тога се изводи ово **правило**: Сваки пар простих имагинарних корена једначине $Q(x)=0$ даје у изразу $\frac{p(x)}{Q(x)}$ као са[...] бирак по један члан облика $\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ где α и β представљају реалне и имагинарне количине посматраних корена, а M и N су извесне константе чије су вредности дате обрасцима 12. Према томе интеграцијом би имали

$$\int \frac{p(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}dx + \int \frac{M_2x+N_2}{(x-\alpha_2)^2+\beta^2}dx + \dots$$
$$\dots + \int \eta(x)\,dx$$

Интеграција се дакле своди на одре-ђивање

$$\int \frac{Mx+Nx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx$$

[...]ви се пак интеграли лако израчу-навају на овај начин: Ако се стави

$$x-\alpha=\beta t$$

одакле је

$$x=\alpha+\beta t$$
$$dx=\beta dt$$

имамо

$$\int \frac{M(\alpha+\beta t)+N}{\beta^2(1+t^2)}\beta\,dt = \int \frac{Ht+K}{1+t^2}dt = \qquad 13.$$
$$= H\int\frac{t\,dt}{1+t^2} + K\int\frac{dt}{1+t^2}$$

где су H и K константе чије су вред-ности

$$H=M \qquad K=\frac{M\alpha+N}{\beta}$$

Пошто интеграли који фигуришу на десној страни обрасца 13. имају за вредности

$$\int\frac{t\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\log(1+t^2) \qquad \int\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arc\,tg} t$$

што се, ако сменимо t вредношћу

$$t = \frac{x-\alpha}{\beta}$$

добија ово <u>правило</u>: Сваки пар про-
стих конјуговано-имагинарних
корена једначине $Q(x)=0$ даје у ин-
тегралу 1. по два члана од којих
је један облика

$$\frac{H}{2}\log\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]$$

а други облика

$$K \operatorname{arctg} \frac{x-\alpha}{\beta}$$

где су H и K константе.

III <u>Случај</u>

Нека је $x=a$ један вишестру-
ки корен n-тог реда једначине $Q(x)=0$
тада ће количник $\frac{Q(x)}{(x-a)^n}$ бити кона-
чан и различан од нуле за $x=a$. Према
томе $\frac{(x-a)^n p(x)}{Q(x)}$ биће такође коначан
и од нуле различан за $x=a$. Ако тај
израз означимо са $F(x)$ према ономе
што знамо о Тејлоровим редовима
функција $F(x)$ може се развити у ре-
до степенима од $(x-a)$ тако да ће
бити

$$F(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots \qquad 14.$$

где A_0 не може бити равно нули
јер би $F(x)$ било равно нули за $x=a$
што смо видели да није случај.
Деобом једначине 14. са $(x-a)^n$ до-
бија се

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n} = \frac{p(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \varphi(x) \qquad 15.$$

где $\varphi(x)$ представља извесну функ-
цију x-а која више не садржи у име-
ниоцу $(x-a)$ пошто је то скуп чла-
нова који су садржавали $(x-a)$ на
<u>вишем</u> степену од n подељених са
$(x-a)^n$.

Ако је сад $x=b$ други више-
струки корен m-тог реда, пошто он
мора фигурисати у функцији
$\varphi(x)$ у имениоцу, применом об-
расца 15. на функцију $\varphi(x)$ имамо

$$\varphi(x) = \frac{B_0}{(x-b)^m} + \frac{B_1}{(x-b)^{m-1}} + \frac{B_2}{(x-b)^{m-2}} + \cdots + \frac{B_{m-1}}{x-b} + \psi(x)$$

где $\psi(x)$ представља једну функцију

ха која нема у имениоцу ни $(x-a)$ ни $(x-b)$.

То се може продужити и са осталим вишеструким коренима чиме се долази до овог <u>правила</u>: Сваки вишеструки корен једначине $Q(x)=0$ даје у интегралу као сабирке по један низ бројева облика

$$\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-2}}+\dots+\frac{A_{n-1}}{x-a}$$

где су $A_0\, A_1\, A_2 \dots$ стални бројеви а n представља ред тога вишеструког корена. Константе $A_0\, A_1\, A_2 \dots$ могле би се израчунати на овај начин: Из обрасца 14. и онога што се зна о коефицијентима Тејлоровог реда очевидно је да ће те константе што одговарају н. пр. коренима $x=a$ имати за вредност

$$A_0=F(a) \quad A_1=\frac{1}{1}F'(a) \quad A_2=\frac{1}{1\cdot 2}F''(a) \quad A_3=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(a) \dots$$

где $F(x)$ представља функцију

$$F(x)=(x-a)^n\,\frac{p(x)}{Q(x)}$$

за други корен $x=b$ имали би исте обрасце где само ваља a сменити са b и т. д.

Према томе дати интеграл 1. своди се на интеграл облика

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k}$$

ставивши

$$x-a=t$$

одакле је

$$dx=dt$$

тај интеграл постаје

$$\int t^{-k}dt=\frac{t^{-k+1}}{-k+1}=-\frac{1}{(k-1)t^{k-1}}=-\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \qquad 16.$$

тако да стављајући узастопце $k=n, n-1, n-2, \dots 2$ имаћемо као сабирке у датом интегралу 1. интеграле облика 16. Међутим за $k=1$ имаћемо

$$\int\frac{dx}{x-a}=\log(x-a)$$

из чега се изводи ово <u>правило</u>: Сваки вишеструки реалан корен $x=a$ n-тог реда једначине $Q(x)=0$ даје у задатом интегралу као сабир[ак] један низ интеграла облика

$$\frac{L_0}{(x-a)^{n-1}} + \frac{L_1}{(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{L_{n-1}}{x-a} + L_n \log(x-a)$$

IV Случај

Нека једначина $Q(x)=0$ има једнаких имагинарних корена. Пошто извођење у III случају не претпоставља ништа о реалности корена $x=a$, то би исти начин растављања који смо имали у III случају важио и за овај случај. Али тада би имали ту незгоду што би се имало посла са имагинарним интегралима. Међутим за овај IV случај има други начин растављања који доводи до реалних интеграла. Тај се начин састоји у овоме: Нека је $x=\alpha+\beta i$ и $x=\alpha-\beta i$ један пар имагинарних вишеструких корена једначине $Q(x)=0$ и нека је n ред тога корена. Тада ће се у полиному $Q(x)$ јавити као корени чиниоци изрази $(x-\alpha-\beta i)^n$ и $(x-\alpha+\beta i)^n$ тако да ће бити

$$Q(x)=(x-\alpha-\beta i)^n\cdot(x-\alpha+\beta i)^n\cdot\eta(x)$$

или

$$Q(x)=\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n\cdot\eta(x) \qquad 17.$$

Разломак $\frac{P(x)}{Q(x)}$ биће дакле облика

$$\frac{P(x)}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n\cdot\eta(x)} \qquad 18$$

Ставимо сад да је тај разломак

$$=\frac{Mx+N}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}+R$$

где R представља разлику између два разломка тако да је

$$R=\frac{P(x)}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n\cdot\eta(x)}-\frac{Mx+N}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}$$

или

$$R=\frac{P(x)-(Mx+N)\cdot\eta(x)}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n\cdot\eta(x)} \qquad 19.$$

Ако ову вредност дамо количини R једначина 18 биће идентички задовољена, па ма какво било M и N које је до сада било произвољно. Одредимо сад ове количине тако да бројитељ разломка 19 буде дељив са

$(x-\alpha)^2+\beta^2$ т.ј. са $(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)$. Што ће б
ти ако тај бројилац садржи ова два
израза $(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)$ као корене
чиниоце т.ј. ако је раван нули за
$x=\alpha-\beta i$ и $x=\alpha+\beta i$, а то ће бити ако
је

20. $p(\alpha+\beta i)-(M\alpha+M\beta i+N)\cdot\eta(\alpha+\beta i)=0$

$p(\alpha-\beta i)-(M\alpha-M\beta i+N)\cdot\eta(\alpha-\beta i)=0$

Ако у изразима $p(\alpha+\beta i)$, $p(\alpha-\beta i)$, $\eta(\alpha+\beta i)$
и $\eta(\alpha-\beta i)$ пораздвајамо реалне и има
гинарне делове тако да је

$$p(\alpha+\beta i)=A+Bi \qquad p(\alpha-\beta i)=A-Bi$$
$$\eta(\alpha+\beta i)=C+Di \qquad \eta(\alpha-\beta i)=C-Di$$

једначине 20. постају

$$(A+Bi)-(M\alpha+N+M\beta i)(C+Di)=0$$
$$(A-Bi)-(M\alpha+N-M\beta i)(C-Di)=0$$

које се могу написати у облику

$$[A-M\alpha C-NC+MD\beta]+i[B-M\alpha D-ND-M\beta C]=0$$
$$[A-M\alpha C-NC+MD\beta]-i[B-M\alpha D-ND-M\beta C]=0$$

Да би ове две једначине могле посто-
јати, потребно је и довољно да буд

$$A-M\alpha C-NC+MD\beta=0$$
$$B-MD\alpha-ND-M\beta C=0$$

Ове две једначине представљају д

једначине првог степена по M и N,
према томе је увек могуће израчу-
нати из њих те количине. Претпо-
стављајући да смо им дали тако
израчунате вредности, бројилац у
изразу R биће дељив са $(x-\alpha)^2+\beta^2$ и
према томе с тим се изразом може
скратити бројилац и именилац,
тако да ће R добити облик

$$R=\frac{\varphi(t)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}\cdot\eta(x)}$$

Заменом те вредности у 18. добија
се да је идентички

$$\frac{p(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n}\cdot\eta(x)}=\frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n}}+\frac{\varphi(t)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}\cdot\eta(x)} \qquad 21.$$

Ако исту операцију понови-
мо и са изразом који смо добили за R
њега можемо на исти начин напи-
сати у облику

$$\frac{\varphi(t)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}\cdot\eta(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}+\frac{T(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-2}\cdot\eta(x)}$$

Затим можемо исту операцију из-
вршити и са последњим чланом и т.д.
докле год се степен израза $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$

не стажи до нуле. Према томе првобитни израз 18. т.ј. разломак $\frac{P(x)}{Q(x)}$ може се написати у облику

$$\frac{P(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n\cdot\eta(x)} = \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \frac{Hx+K}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-2}} + \dots + \frac{Jx+L}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\Theta(x)}{\eta(x)}$$

где чинилац у последњем сабирку не садржи више $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ као чинилац.

На тај се начин долази до овог <u>правила</u>: Сваком пару имагинарних корена n-тог реда једначине $Q(x)=0$ одговара у развијеном изразу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ један збир чланова облика

$$\frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}$$

где је $k=1,2,3,\dots n$ Таквим члановима одговара интеграл облика

$$I_k = \int \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}\cdot dx$$

и према томе ваља нам показати како се овакви интеграли израчунавају. Тога ради ставимо да је

$$x-\alpha=\beta t$$

одакле је

$$dx=\beta\, dt$$

интеграл I_k биће

$$I_k=\frac{1}{\beta^{2k-1}}\int\frac{M\alpha+M\beta t+N}{(1+t^2)^k}\,dt = \frac{1}{\beta^{2k-1}}\left\{[M\alpha+N]\cdot\int\frac{dt}{(1+t^2)^k}+M\beta\cdot\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)^k}\right\}$$

Према томе интеграл I_k своди се на ова два интеграла

$$M_k=\int\frac{dt}{(1+t^2)^k}\qquad N_k=\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)^k}$$

Интеграл N_k се лако израчунава стављајући да је

$$1+t^2=z$$

одакле је

$$t\,dt=\frac{1}{2}\,dz$$

тако да је

$$N_k=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^k}=\frac{1}{2}\int z^{-k}dz=\frac{z^{1-k}}{2(1-k)}=\frac{1}{2(1-k)}(1+t^2)^{1-k}$$

Међутим мало је заметније тражење интеграла M_k, и он се израчунава на овај начин: ставимо да је

$$\frac{1}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} + \delta \qquad 22.$$

и одредимо δ тако да ова једначина буде задовољена, а то ће бити ако је

$$\delta = \frac{1}{(1+t^2)^k} - \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} = -\frac{t^2}{(1+t^2)^k}$$

Заменом у 22. добија се

$$\frac{1}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^k}$$

Множени са dt и интеграљени добија се

$$M_k = M_{k-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^k} \qquad 23.$$

Други интеграл на десној страни обрасца 23. може се написати у облику

$$\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{2}\int t\,\frac{t\,dt}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{2}\int u\,dv$$

где је стављено да је

$$u = t \qquad dv = \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^k}$$

Одатле је

$$du = dt \qquad v = \int \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{1-k}\,\frac{1}{(1+t^2)^{k-1}}$$

Према томе ће бити

$$\frac{1}{2}\int u\,dv = \frac{1}{2}uv - \frac{1}{2}\int v\,du = \frac{1}{2-2k}\,\frac{t}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{1}{2-2k}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{k-1}}$$

$$= \frac{1}{2-2k}\,\frac{t}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{1}{2-2k}M_{k-1} \qquad 25.$$

Заменом 25. у 24. добија се

$$\int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{2-2k}\,\frac{t}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{1}{2-2k}M_{k-1} \qquad 26.$$

Заменом 26. у 23. добија се

$$M_k = M_{k-1} - \frac{1}{2-2k}\,\frac{t}{(1+t^2)^{k-1}} + \frac{1}{2-2k}M_{k-1}$$

или

$$M_k = \frac{1}{2-2k}\cdot\frac{t}{(1+t^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2-2k}M_{k-1} \qquad 27.$$

Образац 27. показује како се из интеграла M_{k-1} израчунава интеграл M_k. Стављајући у њему узастопце $k=2,3,\dots n$ имали би низ образаца у којима би имали узастопце $M_2\, M_3 \dots M_n$, чиме је задатак решен. Што се тиче интеграла M_1 он има за вредност

$$M_1 = \int\frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t$$

Из свега овога изводи се ово

Практично упутство за растављање једне рационалне функције на просте елементе:

1. Ако је степен бројиоца виши од степена имениоца ваља извршити деобу и ову продужити дотле, док се не дође до остатка који би био нижег степена од имениоца.

2. Треба ставити да је именилац раван нули и решити тако добијену једначину $Q(x)=0$. Сваком реалном и простом корену н. пр. $x=a$ те једначине одговараће при растављању један сабирак облика $\frac{A}{x-a}$. Сваком простом имагинарном пару корена $x=\alpha\pm\beta i$ те једначине одговараће по један сабирак облика $\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$. Сваком вишеструком корену $x=a$ n-тог реда одговараће по један скуп чланова облика

$$\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\dots+\frac{A_1}{(x-a)}$$

И на послетку сваком пару имагинарних вишеструких корена n-тог реда одговараће по један скуп облика

$$\frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}+\dots+\frac{Kx+H}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

Пошто смо тако исписали све сабирке који одговарају свима коренима ваља нам још одредити изразе који фигуришу као коефицијенти. Ми смо при извођењу правила казали какве вредности имају ти коефицијенти. Међутим у пракси најпростије је радити овако: сматрати те коефицијенте као неодређене и испитати збир свију сабирака у који се дата функција може разложити; довести обе стране једначине на исти именитељ, уједначити коефицијенте једнаких степена x-а на левој и десној страни, па ће се увек имати онолико једначина колико нам треба за одредбу коефицијената. Кад је дата рационална функција разложена на тај начин на своје просте елементе, треба помножити обе стране са dx и интегралити. При тој интеграцији наилази се на оних неколико типова интеграла које смо малочас израчунавали.

Као што се види из целокупне раније дискусије цео ће се интеграл рационалне функције у најопштијем случају свести на збир од рационалних, логаритамских функција и функција arctg x. У појединим специјалним случајевима дешава се да из интеграла исчезавају логаритамске и циклометарске функције и онда је интеграл и сам рационална функција x-а. Лако је видети да ће за то потребан и довољан услов бити тај да коефицијенти што одговарају члановима облика $\frac{A}{x-a}$ и $\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ буду сви равни нули. Тако исто дешава се да се интеграл сведе само на логаритамске функције и т. д.

Примери:

1. $$\int \frac{12x^2-70x+98}{x^3-9x^2+26x-24}\,dx$$

једначина

$$x^3-9x^2+26x-24=0$$

има корене

$$x_1=2 \quad x_2=3 \quad x_3=4$$

ако се стави

$$\frac{12x^2-70x+98}{x^3-9x^2+26x-24}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-4}$$

$$=\frac{A(x-3)(x-4)+B(x-2)(x-4)+C(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2-(7A+6B+5C)x+(12A+8B+6x)}{x^3-9x^2+26x-4}$$

одатле упоређењем добијамо

$$12=A+B+C$$
$$70=7A+6B+5C$$
$$98=12A+8B+6C$$

одавде

$$A=3 \quad B=4 \quad C=5$$

према томе

$$\frac{12x^2-70x+98}{x^3-9x^2+26x-24}=\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x-4}$$

па је дати интеграл

$$=3\int\frac{dx}{x-2}+4\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{x-4}$$

$$=3\log(x-2)+4\log(x-3)+5\log(x-4)+\log C$$

$$= \log C(x-2)^3(x-3)^4(x-4)^5$$

2. $$\int \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}\,dx$$

Једначина

$$(x-1)^6=0$$

има вишеструки корен

$$x=1$$

6-тог реда. Ако се стави

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}=\frac{A}{(x-1)^6}+\frac{B}{(x-1)^5}+\frac{C}{(x-1)^4}+\frac{D}{(x-1)^3}+\frac{E}{(x-1)^2}+\frac{F}{x-1}$$

или одатле

$$\frac{x^4+2x^2+1}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{Fx^5+(E-5F)x^4+(D-4E+10F)x^3+(C-3D+6E-10F)x^2+(B-2C+3D-4E+5F)x+(A-B+C-D+E-F)}{(x-1)^6}$$

Одатле, упоређењем бројиоца, једначине

$$F=0$$
$$E-5F=1$$
$$D-4E+10F=0$$
$$C-3D+6E-10F=2$$
$$B-2C+3D-4E+5F=0$$
$$A-B+C-D+E-F=0$$

а одатле

$A=4 \quad B=8 \quad C=8 \quad D=4 \quad E=1 \quad F=0$

Отуда је

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}=\frac{4}{(x-1)^6}+\frac{8}{(x-1)^5}+\frac{8}{(x-1)^4}+\frac{4}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

па је дати интеграл

$$=4\int\frac{dx}{(x-1)^6}+8\int\frac{dx}{(x-1)^5}+8\int\frac{dx}{(x-1)^4}+4\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$=-\frac{4}{5(x-1)^5}-\frac{8}{4(x-1)^4}-\frac{8}{3(x-1)^3}-\frac{4}{2(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+C$$

$$=-\frac{15x^4-30x^3+40x^2-20x+7}{15(x-1)^5}+C$$

3. $$\int\frac{6x^2+25x-9}{x^4-14x^3+107x^2-422x+850}\,dx$$

Једначина

$$x^4-14x^3+107x^2-422x+850=0$$

има просте имаг. корене

$$x_{1,2}=3\pm5i \qquad x_{3,4}=4\pm3i$$

Ако се стави

$$\frac{6x^2+25x-9}{x^4-14x^3+107x^2-422x+850}=\frac{Ax+B}{(x-3)^2+25}+\frac{Cx+D}{(x-4)^2+9}=$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(B-8A+D-6C)x^2+(25A+34C-8B-6D)x+(25B+34D)}{x^4-14x^3+107x^2-422x+850}$$

Упоређењем бројиоца добијамо

$$A+C=0$$
$$B-8A+D-6C=6$$

$$25A + 34C - 8B - 6D = 25$$
$$25B + 34D = -9$$

а одатле

$$A=-3 \quad B=1 \quad C=3 \quad D=-1$$

па је функција под интегр. знаком

$$= \frac{-3x+1}{(x-3)^2+25} + \frac{3x-1}{(x-4)^2+9}$$

а дати интеграл

$$= \int \frac{-3x+1}{(x-3)^2+25}\,dx + \int \frac{3x-1}{(x-4)^2+9}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}\log\left[(x-3)^2+25\right] - \frac{8}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-3}{5} + \frac{3}{2}\log\left[(x-4)^2+9\right] + \frac{11}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-4}{3} + C$$

$$= \frac{3}{2}\log\frac{(x-4)^2+9}{(x-3)^2+25} + \frac{11}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-4}{3} - \frac{8}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-3}{5} + C$$

4. $$\int \frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Једначина

$$(x^2+1)^2=0$$

има двојни пар имаг. корена

$$x = \pm i$$

Ако ставимо

$$\frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{Cx^3+Dx^2+(A+C)x+(B+D)}{(x^2+1)^2}$$

упоређењем бројиоца добијамо

$$C=2$$
$$D=-1$$
$$A+C=5$$
$$B+D=0$$

а одатле

$$A=3 \quad B=1 \quad C=2 \quad D=-1$$

према томе је дата функција

$$= \frac{3x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{2x-1}{x^2+1}$$

$$= \frac{3x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

а дати интеграл

$$I = 3\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int\frac{2x\,dx}{x^2+1} - \int\frac{dx}{x^2+1}$$

Према томе дати се интеграл распада на четири интеграла и то:

$$I_1 = \int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

Ако се стави

$$x^2+1 = z \qquad 2x\,dx = dz$$

то је

$$J_1 = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2}\int z^{-2}dz = \frac{1}{2}\,\frac{z^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{z} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}$$

Други интеграл је

$$J_2 = \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

ако се стави

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \delta$$

одакле је

$$\delta = \frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{1-x^2+1}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2}{x^2+1}$$

па дакле

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

па је

$$J_2 = \int\frac{dx}{x^2+1} - \int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

Интеграл J_2 распао се на два интегра

$$i_1 = \int\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x$$

и други

$$i_2 = \int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = \int x\,\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$$

ставимо

$$x = u \qquad \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = dv$$

одакле је

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}$$

па је

$$i_2 = -\frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$$

и према томе

$$J_2 = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2}$$

Трећи интеграл је

$$J_3 = \int\frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

ако се стави

$$x^2+1 = z \qquad 2x\,dx = dz$$

добија се

$$J_3 = \int\frac{dz}{z} = \log z = \log(x^2+1)$$

Четврти интеграл је

$$J_4 = \int\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x$$

Према томе дати интеграл је

$$J=-\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\log(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+$$

$$=\frac{x-3}{2(x^2+1)}+\log(x^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

5. $$\int\frac{x^2\,dx}{(x+a)^2(x^2+a^2)}$$

Једначина

$$(x+a)^2(x^2+a^2)=0$$

има један двојни корен $x=-a$ и један пар имаг. корена $x=\pm ai$. Ако ставимо

$$\frac{x^2}{(x+a)^2(x^2+a^2)}=\frac{A}{(x+a)^2}+\frac{B}{(x+a)}+\frac{Cx+D}{x^2+a^2}=$$

$$=\frac{(B+C)x^3+(A+Ba+2Ca+D)x^2+(Ba^2+Ca^2+2Da)x+(Aa^2+Ba^3+Da^2)}{(x+a)^2(x^2+a^2)}$$

упоређењем бројиоца добијамо једначине

$$B+C=0$$

$$A+Ba+2Ca+D=1$$

$$Ba^2+Ca^2+2Da=0$$

$$Aa^2+Ba^3+Da^2=0$$

а из њих

$$A=\frac{1}{2}\quad B=-\frac{1}{2a}\quad C=\frac{1}{2a}\quad D=0$$

па се функција под инт. знаком раставља на

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(x+a)^2}-\frac{1}{2a}\frac{1}{x+a}+\frac{1}{2a}\frac{x}{x^2+a^2}$$

а дати интеграл постаје

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+a)^2}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}+\frac{1}{2a}\int\frac{x\,dx}{x^2+a^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x+a}-\frac{1}{2a}\log(x+a)+\frac{1}{4a}\log(x^2+a^2)+C$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x+a}-\frac{a}{x+a}\right]+C$$

6. $$\int\frac{x^2\,dx}{x^2+(a+b)x+ab}$$

Једначина

$$x^2+(a+b)x+ab=0$$

има као просте корене

$$x=-a\quad x=-b$$

и ако се стави

$$\frac{x^2}{x^2+(a+b)x+ab}=x^2:[x^2+(a+b)x+ab]=1$$

$$\underline{-x^2\mp(a+b)x\mp ab}$$

$$-(a+b)x-ab$$

то је дата функција

$$=1-\frac{(a+b)x+ab}{x^2+(a+b)x+ab}$$

Ставимо сад

$$\frac{(a+b)x+ab}{x^2+(a+b)x+ab} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} = \frac{(A+B)x+(Ab+Ba)}{x^2+(a+b)x+ab}$$

Упоређењем бројиоца добијамо једначин[е]

$$A+B=a+b$$
$$Ab+Ba=ab$$

одакле је

$$A=\frac{a^2}{a-b} \quad B=-\frac{b^2}{a-b}$$

па је дата функција под инт. знаком

$$=1-\frac{a^2}{a-b}\frac{1}{x+a}+\frac{b^2}{a-b}\frac{1}{x+b}$$

а сам дати интеграл

$$=\int dx-\frac{a^2}{a-b}\int\frac{dx}{x+a}+\frac{b^2}{a-b}\int\frac{dx}{x+b}$$
$$=x-\frac{a^2}{a-b}\log(x+a)+\frac{b^2}{a-b}\log(x+b)+C$$
$$=x+\frac{1}{a-b}\left[b^2\log(x+b)-a^2\log(x+a)\right]+C$$

7. $$\int\frac{x^2-1}{(x+2)^3}dx$$

Ако се стави

$$(x+2)^3=0$$

која једначина има један троструки корен $x=-2$. Ставимо дакле

$$\frac{x^2-1}{(x+2)^3}=\frac{A}{(x+2)^3}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+2}=\frac{Cx^2+(B+4C)x+(A+2B+4C)}{(x+2)^3}$$

Упоређењем бројиоца добијамо једначине

$$C=1$$
$$B+4C=0$$
$$A+2B+4C=-1$$

из којих

$$A=3 \quad B=-4 \quad C=1$$

па је дата функција

$$=\frac{3}{(x+2)^3}-\frac{4}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}$$

а дати интеграл

$$=3\int\frac{dx}{(x+2)^3}-4\int\frac{dx}{(x+2)^2}+\int\frac{dx}{x+2}$$
$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{(x+2)^2}+4\frac{1}{x+2}+\log(x+2)+C$$
$$=\frac{8x+13}{2(x+2)^2}+\log(x+2)+C$$

8. $$\int\frac{x\,dx}{x^4+(a+b)x^2+ab}$$

Једначина

$$x^4+(a+b)x^2+ab=0$$

има два пара простих имаг. корена

$$x=\pm i\sqrt{a} \quad x=\pm i\sqrt{b}$$

Ако ставимо

$$\frac{x}{x^4+(a+b)x^2+ab}=\frac{Ax+B}{x^2+a}+\frac{Cx+D}{x^2+b}$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(Ab+Ca)x+(Bb+Da)}{x^4+(a+b)x^2+ab}$$

упоређењем бројиоца добијамо једначине

$$A+C=0$$
$$B+D=0$$
$$Ab+Ca=1$$
$$Bb+Da=0$$

одакле је

$$A=-\frac{1}{a-b} \quad B=0 \quad C=\frac{1}{a-b} \quad D=0$$

па је дата функција

$$=-\frac{1}{a-b}\,\frac{x}{x^2+a}+\frac{1}{a-b}\,\frac{x}{x^2+b}$$

а дати интеграл

$$=-\frac{1}{a-b}\int\frac{x\,dx}{x^2+a}+\frac{1}{a-b}\int\frac{x\,dx}{x^2+b}$$

$$=-\frac{1}{2(a-b)}\log(x^2+a)+\frac{1}{2(a-b)}\log(x^2+b)+$$

$$=\frac{1}{2(b-a)}\log\frac{x^2+a}{x^2+b}+C$$

9. $$\int\frac{x^5+4x^3+7x-4}{(x^2+1)^3}\,dx$$

Једначина

$$(x^2+1)^3=0$$

има један троструки пар имаг. корена $x=\pm i$. Ако ставимо

$$\frac{x^5+4x^3+7x-4}{(x^2+1)^3}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^3}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$=\frac{Ex^5+Fx^4+(C+2E)x^3+(D+2F)x^2+(A+C+E)x+(B+D+F)}{(x^2+1)^3}$$

упоређењем бројиоца добијамо једначине

$$E=1$$
$$F=0$$
$$C+2E=4$$
$$D+2F=0$$
$$A+C+E=7$$
$$D+B+F=-4$$

из њих

$$A=4 \quad B=-4 \quad C=2 \quad D=0 \quad E=1 \quad F=0$$

па је дата функција

$$=\frac{4x-4}{(x^2+1)^3}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}$$

дати интеграл

$$J = 4\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} - 4\int\frac{dx}{(x^2+1)^3} + 2\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int\frac{x\,d\ldots}{x^2\ldots}$$

Према томе дати интеграл се раста-
ја на четири интеграла и то:

$$J_1 = \int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$$

ако у њену ставимо

$$x^2+1 = z \qquad 2x\,dx = dz$$

добијамо

$$J_1 = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^3} = \frac{1}{2}\,\frac{z^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Други интеграл је

$$J_2 = \int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

Ставимо

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{(x^2+1)^2} + \delta$$

одакле је

$$\delta = \frac{1}{(x^2+1)^3} - \frac{1}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2}{(x^2+1)^3}$$

дакле

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2}{(x^2+1)^3}$$

па је

$$J_2 = \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} - \int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^3}$$

Према томе други интеграл се састоји из два интеграла:

$$i_1 = \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

чија је вредност (према зад. 4 : J_2)

$$i_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}$$

и интеграл

$$i_2 = \int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^3}$$

ставимо

$$x = u \qquad \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} = dv$$

одакле је

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

па је

$$i_2 = -\frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{8}\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{8}\,\frac{x}{x^2+1}$$

према томе

$$J_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{8}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{8}\,\frac{x}{x^2+1}$$

Трећи интеграл

$$J_3 = \int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

према зад. 4 : J_1 има вредност

$$J_3 = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

четврти интеграл

$$J_4 = \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

према зад. 4 : J_3 има вредност

$$J_4 = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

Према томе је дати интеграл

$$J = -\frac{1}{(x^2+1)^2} - 2\,\mathrm{arctg}\,x - 2\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(x^2+1) - 3\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{3x^3+2x^2+5x+4}{(x^2+1)^2}\right] + C$$

10.

$$\int \frac{16(x^2+4)\,dx}{(4x^2+4x+17)^2}$$

Једначина

$$(4x^2+4x+17)^2 = 0$$

има двојни пар имаг. корена $x = -\frac{1}{2} \pm 2i$

Ако се стави

$$\frac{16x^2+64}{(4x^2+4x+17)^2} = \frac{Ax+B}{[(x+\frac{1}{2})^2+4]^2} + \frac{Cx+D}{(x+\frac{1}{2})^2+4}$$

$$= \frac{Cx^3 + (C+D)x^2 + (A + \frac{17}{4}C + D)x + (B + \frac{17}{4}D)}{(4x^2+4x+17)^2}$$

упоређењем бројиоца добијамо једначине

$$C = 0$$

$$C + D = 16$$

$$A + \frac{17}{4}C + D = 0$$

$$B + \frac{17}{4}D = 64$$

а одатле

$$A = -16 \quad B = -4 \quad C = 0 \quad D = 16$$

та је дата функција

$$= \frac{-16x-4}{[(x+\frac{1}{2})^2+4]^2} + \frac{16}{(x+\frac{1}{2})^2+4}$$

и дати интеграл

$$J = -16\int \frac{x\,dx}{[(x+\frac{1}{2})^2+4]^2} - 4\int \frac{dx}{[(x+\frac{1}{2})^2+4]^2} + 16\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+4}$$

Према томе дати се интеграл раствара на три интеграла и то: први

$$J_1 = \int \frac{x\,dx}{[(x+\frac{1}{2})^2+4]}$$

ставимо

$$x + \frac{1}{2} = 2t \qquad dx = 2dt$$

па добијамо

$$J_1 = \int \frac{(2t-\frac{1}{2})2dt}{(4t^2+4)^2} = \frac{4}{16}\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{16}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

или, према зад. 4 : J_1 и J_2

$$J_1=\frac{1}{4}\cdot-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{8}\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2}-\frac{1}{32}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}-\frac{1}{32}\frac{\frac{2x+1}{4}}{1+\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2}$$

други интеграл је

$$J_2=\int\frac{dx}{\left[(x+\frac{1}{2})^2+4\right]}$$

ако извршимо исту малопређашњу замену и, сoбзиром на зад. 4: J_2

$$J_2=2\int\frac{dt}{(4t^2+4)^2}=\frac{2}{16}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}+\frac{1}{16}\frac{\frac{2x+1}{4}}{1+\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2}$$

Трећи интеграл је

$$J_3=\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+4}$$

истом сменом добијамо

$$J_3=2\int\frac{dt}{4t^2+4}=\frac{2}{4}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}$$

Према томе дати интеграл има вредност

$$J=\frac{16}{8}\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2}+\frac{16}{32}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}+\frac{16}{32}\frac{\frac{2x+1}{4}}{1+\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2}-$$

$$-\frac{4}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}-\frac{4}{16}\frac{\frac{2x+1}{4}}{1+\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2}+\frac{16}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}$$

или ако се сведе

$$J=\frac{2x+33}{4x^2+4x+17}+\frac{33}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}+C$$

$$11.\quad\int\frac{(5x^2-7x)\,dx}{x^4-3x^3+x^2+3x-2}$$

Једначина

$$x^4-3x^3+x^2+3x-2=0$$

има један двојни корен $x=1$ и два проста корена $x=-1$ и $x=2$. Ако ставимо

$$\frac{5x^2-7x}{x^4-3x^3+x^2+3x-2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-2}$$

$$=\frac{(B+C+D)x^3+(A-2B-4C-D)x^2-(A+B+5C+D)x-(2A-2B+2C-D)}{x^4-3x^3+x^2+3x-2}$$

Упоређењем бројиоца добијамо једначине

$$B+C+D=0$$
$$A-2B-4C-D=5$$
$$A+B-5C+D=7$$
$$2A-2B+2C-D=0$$

из којих је

$$A=1\quad B=-1\quad C=-1\quad D=2$$

па је дата функција

$$= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x-2)}$$

а дати интеграл

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{1}{(x-1)} - \log(x-1) - \log(x+1) + 2\log(x-2) + C$$

$$= \log\frac{(x-2)^2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + C$$

12. $$\int \frac{x^5+1}{x^6+x^4}\,dx$$

Једначина

$$x^6+x^4=0$$

има један четвороструки корен $x=0$ и један пар имаг. корена $x=\pm i$. Ставимо

$$\frac{x^5+1}{x^6+x^4} = \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x} + \frac{Ex+F}{x^2+1} =$$

$$= \frac{(D+E)x^5+(C+F)x^4+(B+D)x^3+(A+C)x^2+Bx+A}{x^6+x^4}$$

Одатле је упоређењем добија

$$D+E=1$$
$$C+F=0$$
$$B+D=0$$
$$A+C=0$$
$$B=0$$
$$A=1\,.$$

а из њих

$$A=1 \quad B=0 \quad C=-1 \quad D=0 \quad E=1 \quad F=1$$

па је дата функција

$$= \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

а дати интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{3x^2}\right) + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$$

13. $$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^3}$$

Једначина

$$(x^2-1)^3=0$$

има два пара троструких корена $x=1$ и $x=-1$. Ставимо

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x+1)^3} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{x+1}$$

$$= \frac{(C+F)x^5+(B+C+E-F)x^4+(A+2B-2C+D-2E-2F)x^3+(3A-2C-3D+2F)x^2+(3A-2B+C+3D+2E+F)x+(A-B+C-D-E-F)}{(x^2-1)^3}$$

Упоређењем бројиоца добијамо једначине

$$C + F = 0$$

$$B + C + E - F = 0$$

$$A + 2B - 2C + D - 2E - 2F = 0$$

$$3A - 2C - 3D + 2F = 1$$

$$3A - 2B + C + 3D + 2E + F = 0$$

$$A - B + C - D - E - F = 0$$

а из њих

$$A = \frac{1}{8} \quad B = \frac{1}{16} \quad C = -\frac{1}{16} \quad D = -\frac{1}{8} \quad E = \frac{1}{16} \quad F = \frac{1}{16}$$

па дата функција постаје

$$= \frac{1}{8}\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{16}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{16}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{x+1}$$

а дати интеграл

$$I = \frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{1}{16}\int\frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{16}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{16}\int\frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{16}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= -\frac{1}{16}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{16}\log(x-1) + \frac{1}{16}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{16}\log(x+1)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\log\frac{x+1}{x-1} - \frac{2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right] + C$$

14. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x^4-1)}$

Једначина

$$x^2(x^4-1) = 0$$

има два проста корена $x = \pm 1$, један двојни корен $x = 0$ и један пар имаг. корена $x = \pm i$. Ставимо

$$\frac{1}{x^2(x^4-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$= \frac{(B+C+D+E)x^5 + (A+C-D+F)x^4 + (C+D-E)x^3 + (C-D-F)x^2 - Bx - A}{x^2(x^4-1)}$$

Упоређењем бројиоца добијамо једначине

$$B + C + D + E = 0$$

$$A + C - D + F = 0$$

$$C + D - E = 0$$

$$C - D - F = 0$$

$$B = 0$$

$$-A = 1$$

а из њих

$$A = -1 \quad B = 0 \quad C = \frac{1}{4} \quad D = -\frac{1}{4} \quad E = 0 \quad F = \frac{1}{2}$$

па дата функција постаје

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

а дати интеграл

$$I = -\int\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{4}\log(x-1) - \frac{1}{4}\log(x+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C$$

Интеграција ирационалних функција

I Случај

Најпростији интеграли ове врсте јесу они који садрже у себи изразе

$$\sqrt[m]{x^p},\ \sqrt[n]{x^q},\ \sqrt[p]{x^s}$$

а поред тога могу садржавати и x рационално. Ако образујемо низ разломака

$$\frac{p}{m},\ \frac{q}{n},\ \frac{s}{p}, \dots$$

и доведемо их на заједнички именитељ који нека је N, биће

$$\frac{p}{m}=\frac{M_1}{N},\quad \frac{q}{n}=\frac{M_2}{N},\quad \frac{s}{p}=\frac{M_3}{N}$$

и ако ставимо да је

$$x=t^N$$

имаћемо да је

$$\sqrt[m]{x^p}=x^{\frac{p}{m}}=x^{\frac{M_1}{N}}=t^{M_1}$$

$$\sqrt[n]{x^q}=x^{\frac{q}{n}}=x^{\frac{M_2}{N}}=t^{M_2}$$

$$\sqrt[p]{x^s}=x^{\frac{s}{p}}=x^{\frac{M_3}{N}}=t^{M_3}$$

Заменом тих вредности у интегралу, функција под интегр. знаком постаће рационална функција променљиве t, а за такве функције видели смо како се интеграле. Пошто је интеграција извршена остаје још да се смени

$$t=\sqrt[N]{x}$$

На исти би начин радили ако је има посла са каквим изразом у коме фигурише рационално x и

$$\sqrt[m]{(ax+b)^p},\ \sqrt[n]{(ax+b)^q}, \dots$$

само што би пре тога ваљало извршити смену

$$ax+b=z$$

Н. пр.

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{6(\sqrt[3]{x}+1)}\,dx$$

Заједнички изложитељ је 6, па ћемо зато извршити смену

$$x = z^6$$

одакле је

$$dx = 6z^5\,dz$$

па добијамо

$$I = \int \frac{z^3-1}{z^2+1}\, z^5\,dz = \int \frac{z^8-z^5}{z^2+1}\,dz =$$

$$= \int \left(z^6 - z^4 - z^3 + z^2 + z - 1 + \frac{1-z}{z^2+1} \right) dz =$$

$$= \int z^6 dz - \int z^4 dz - \int z^3 dz + \int z^2 dz + \int z\,dz - \int dz + \int \frac{dz}{z^2+1} - \int \frac{z\,dz}{z^2+1}$$

$$= \frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} - z + \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2}\log(z^2+1)$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{4} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{2} - x^{\frac{1}{6}} + \operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{2}\log(x^{\frac{1}{3}}+1)$$

II Случај

Ако интеграл садржи рационално x и квадратни корен каквог полинома другог степена по x.

Као што ће бити показано у даљем извођењу, сви се интеграли таквог облика могу свести на четири проста типа, а то су

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int dx\sqrt{1-x^2}, \quad \int dx\sqrt{1+x^2}$$

зато ћемо показати најпре како се израчунавају ова четири типа.

1. Тип

Интеграл

$$\mathcal{L}_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

има за вредност

$$\mathcal{L}_1 = \arcsin x$$

2° Тип

Интеграл

$$\mathcal{L}_2=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ако ставимо

$$\sqrt{1+x^2}=t-x \tag{1.}$$

одакле је

$$1+x^2=t^2-2tx+x^2 \tag{2.}$$

а одатле

$$t=x\pm\sqrt{1+x^2} \tag{3.}$$

У исто време диференцијалењем једначине 2. добија се

$$t\,dt-t\,dx-x\,dt=0$$

или

$$\frac{dx}{t-x}=\frac{dt}{t} \tag{4.}$$

Заменом вредности 1. и 4. у интеграл $\mathcal{L}_2$ овај постаје

$$\mathcal{L}_2=\int\frac{dx}{t-x}=\int\frac{dt}{t}=\log t=\log\left[x\pm\sqrt{1+x^2}\right]$$

У логаритму дакле имамо два знака. Међутим очевидно је да ако се тражи да интеграл буде реалан, мора се узети знак +, јер ако би се узео знак − пошто је увек $x<\sqrt{1+x^2}$, разлика $x-\sqrt{1+x^2}$ била би негативна, па дакле логаритам имагинаран! Према томе је

$$\mathcal{L}_2=\log\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]$$

3° Тип

Интеграл

$$\mathcal{L}_3=\int dx\sqrt{1-x^2}$$

Ако функцију под интеграл. знаком помножимо и поделимо са $\sqrt{1-x^2}$ добија се

$$\mathcal{L}_3=\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\arcsin x-\int u\,dv$$

где је стављено

$$u=x\qquad dv=\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

одакле је

$$du=dx\qquad v=\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ако се стави

$$1-x^2=t$$

одакле је

$$2x\,dx=-dt$$

$$v=-\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-2\sqrt{t}=-2\sqrt{1-x^2}$$

Према томе је

$$\frac{1}{2}\int u\,dv = \frac{1}{2}uv - \frac{1}{2}\int v\,du =$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \int dx\sqrt{1-x^2}$$

Заменом у $\mathcal{L}_3$ добија се

$$\mathcal{L}_3 = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \mathcal{L}_3$$

а отуда

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}\left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]$$

4° Тип

Интеграл

$$\mathcal{L}_4 = \int dx\sqrt{1+x^2}$$

Ако опет функцију под интегр
знаком помножимо и поделимо са $\sqrt{1+x^2}$
добијамо

$$\mathcal{L}_4 = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}\int u\,dv \qquad 6.$$

где је

$$u = x \qquad dv = \frac{2x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

одакле је

$$du = dx \qquad v = \int\frac{2x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ако ставимо да је

$$1+x^2 = t$$

одакле је

$$2x\,dx = dt$$

начено

$$v = \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2t^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1+x^2}$$

а је

$$\frac{1}{2}\int u\,dv = \frac{1}{2}uv - \frac{1}{2}\int v\,du =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int dx\sqrt{1+x^2}$$

аменом у 6. биће

$$\mathcal{L}_4 = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2} - \mathcal{L}_4$$

ли

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{2}\left[\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2}\right]$$

На тај су начин дакле изра-
уната сва четири типа. Показаћемо
ад како се на ова четири типа сво-
и ма какав интеграл који у себи са-
ржи рационално x и квадратни
орен каквог полинома другог сте-
ена по x.

Покажимо пре свега како се
оже упростити један израз $R(x,\sqrt{X})$
оји би био рационална функција
роменљиве x и X где је X ма какав
олином ма ког степена по x. Ако у

рационалној функцији R и бројиоц и именилац уредимо по степенима од x биће

$$R(x,\sqrt{X})=\frac{P_1+P_2\sqrt{X}+P_3(\sqrt{X})^3+P_4(\sqrt{X})^4+\dots}{Q_1+Q_2\sqrt{X}+Q_3(\sqrt{X})^3+Q_4(\sqrt{X})^4+\dots}$$

где су $P_1 P_2 P_3 \dots Q_1 Q_2 Q_3 \dots$ извесни полиноми по x. Међутим је

$$\sqrt{X}=\sqrt{X}\quad (\sqrt{X})^2=X\quad (\sqrt{X})^3=X\sqrt{X}\quad (\sqrt{X})^4=X^2\ \dots$$

па према томе може се написати

$$R(x,\sqrt{X})=\frac{P+Q\sqrt{X}}{S+T\sqrt{X}}$$

где су P, Q, S и T полиноми по x. Ако помножимо бројилац и именилац са $S-T\sqrt{X}$ имаћемо

$$R(x,\sqrt{X})=\frac{(P+Q\sqrt{X})\cdot(S-T\sqrt{X})}{S^2-T^2X}$$

Именилац је дакле рационалан и према томе последњи израз показује да ће бити

$$R(x,\sqrt{X})=R_1(x)+R_2(x)\sqrt{X}$$

из чега се види ово <u>правило</u>: Кадгод једна функција зависи рационално од променљиве x и од израза $\sqrt{X}$ где је X ма какав полином по x, такав се израз увек може написати у облику $R_1(x)+R_2(x)\sqrt{X}$ где су R_1 и R_2 функције од x. Растављањем R_1 и R_2 на просте елементе лако се увиђа да се израз може још више упростити и да се ма како компликован он био своди на збир чланова ових облика

$$Ax^m\sqrt{X},\ \frac{A\sqrt{X}}{(x-a)^m},\ \frac{A\sqrt{X}}{x-a},\ \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\sqrt{X},\ \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}\sqrt{X} \qquad 7.$$

Сваки од ових типова према природи специјалног случаја са којим се има посла може се сменом или дефинитном интеграцијом упрошћавати даље.

Међутим ми ћемо овде показати како се може у случају кад је X ма какав полином другог степена по x увек свести на један од облика $1+x^2$ и $1-x^2$ а да притом чланови 7. никак не изгубе свој тип.

Пре света ако је полином X облика

$$X=a\pm bx^2$$

очевидно је да у првом случају треба

$$bx^2=at^2$$

одакле је

$$x = t\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$dx = dt\sqrt{\frac{a}{b}}$$

а у другом случају исту смену, па се X своди на полином облика

$$1 \pm t^2$$

а међутим се у рачун не уводи никаква нова ирационалност.

Ако је полином X потпун полином другог степена, дакле облика

$$X = ax^2 + bx \pm c$$

према томе да ли је c позитивно или негативно можемо га написати у облику

$$X = c(k + hx + x^2)$$

и према томе он ће имати један од ових облика

$$X_1 = k + hx + x^2$$

$$X_2 = k + hx - x^2$$

Међутим је идентички

$$a + bx + x^2 = \left(a - \frac{b^2}{4}\right) + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

$$a + bx - x^2 = \left(a + \frac{b^2}{4}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

према томе ако се у првом случају стави да је

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(a - \frac{b^2}{4}\right)t^2$$

одакле је

$$x = -\frac{b}{2} + \frac{t}{2}\sqrt{4a - b^2}$$

X_1 је сведено на полином облика $1 + t^2$. Исто тако ако се у другом случају стави

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(a - \frac{b^2}{4}\right)t^2$$

полином X_2 се своди на облик $1 - t^2$, а међутим се у рачун не увлачи никаква нова ирационалност. Тиме је доказано да се увек ако у функцији фигурише ирационално какав квадратни корен из каквог полинома другог степена, тај се квадратни корен увек може свести на облик $\sqrt{1+x^2}$ или $\sqrt{1-x^2}$, а да се при том не увуче у рачун никакав други квадратни корен. Из овога се види улога четири типа раније проучених интеграла при одређивању интеграла ма какав био квадратни корен полинома другог степена.

Н. пр.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 4x^2}}$$

Вала извршити смену
$$4x^2=3t^2$$
одакле је
$$x=\frac{\sqrt3}{2}t \qquad dx=\frac{\sqrt3}{2}dt$$
па је дати интеграл
$$=\frac{\sqrt3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt3\sqrt{1+t^2}}=\frac12\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)=$$
$$=\frac12\log\left(\frac{2x}{\sqrt3}+\sqrt{1+\frac{4x^2}{3}}\right)+C$$
Или н. пр.
$$J=\int dx\sqrt{8+12x+4x^2}=2\int dx\sqrt{2+3x+x^2}$$
Како је
$$2+3x+x^2=\left(2-\frac94\right)+\left(x+\frac32\right)^2=-\frac14+\left(x+\frac32\right)^2$$
то ако ставимо
$$\left(x+\frac32\right)^2=\frac{t^2}{4}$$
одакле је
$$x=-\frac32+\frac t2$$
$$dx=\frac{dt}{2}$$
биће
$$J=\int dt\sqrt{t^2-1} \qquad \text{(даље в. III случај)}$$

III Случај

Један начин за израчунавање интеграла облика
$$\int R(x,\sqrt{x^2-1})\,dx \qquad 1.$$
Ако се напише да је
$$\sqrt{x^2-1}=(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad 2.$$
па се онда стави да је
$$\frac{x+1}{x-1}=z^2 \qquad 3.$$
одакле је
$$x=\frac{z^2+1}{z^2-1} \qquad 4.$$
$$x-1=\frac{2}{z^2-1} \qquad 5.$$
$$dx=-\frac{4\,dz}{(z^2-1)^2} \qquad 6.$$
Заменом вредности 3. и 5 у обрасцу 2. па затим заменом 6. и 4. и тако добијене вредности 2. у датом интегра-

пу 1. овај постаје

$$\int R_1(z)\,dz$$

где је $R_1(z)$ извесна рационална функција z-а. Овај интеграл знамо наћи, не и кад је он израчунат, ваља се вратити на променљиву x сменом

$$z=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Н. пр. (наставак задатка из II случаја):

$$J=\int dt\sqrt{t^2-1}=\int dt\,(t-1)\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$$

Ако извршимо смену

$$\frac{t+1}{t-1}=z^2$$

одакле је

$$t=\frac{z^2+1}{z^2-1}$$

$$t-1=\frac{2}{z^2-1}$$

$$dt=-\frac{4\,dz}{(z^2-1)^2}$$

добијамо

$$J=\int-\frac{4\,dz}{(z^2-1)^2}\cdot\frac{2}{z^2-1}\cdot z=-8\int\frac{z\,dz}{(z^2-1)^3}$$

сменом

$$z^2-1=u$$

$$2z\,dz=du$$

$$J=-8\int\frac{\frac{du}{2}}{u^3}=-4\int\frac{du}{u^3}=\frac{2}{u^2}=\frac{2}{(z^2-1)^2}=$$

$$=\frac{2}{\left(\frac{t+1}{t-1}-1\right)^2}=\frac{2(t-1)^2}{4}=\frac{(t^2-1)^2}{2}=\frac{(2x+2)^2}{2}=$$

$$=2(x+1)^2$$

IV Случај

Интеграција израза

$$\int R(x, \sqrt{a+bx}, \sqrt{k+hx})\,dx \qquad 1.$$

где израз под интегралним знаком садржи рационално променљиву x и два квадратна корена полинома првог степена.

Ако се стави да је

$$a+bx = z^2 \qquad 2.$$

одакле је

$$x = \frac{z^2-a}{b} \qquad 3.$$

$$dx = \frac{2z\,dz}{b} \qquad 4.$$

$$\sqrt{k+\frac{h}{b}z^2-\frac{ah}{b}} = \sqrt{k+hx}$$

или

$$\sqrt{k+hx} = \sqrt{\alpha+\beta z^2} \qquad 5.$$

заменом вредности 2. 3. 4. и 5. у интеграл 1. овај ће добити облик

$$\int R(z, \sqrt{\alpha+\beta z^2})\,dz$$

где функција под интегралним знаком зависи рационално од променљиве z и од квадратног корена полинома другог степена. За овакве интеграле видели смо како се израчунавају и према томе дати задатак је решен.

Н. пр. ако је дат интеграл

$$\int x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$$

ако се стави

$$x+1 = z^2$$
$$x = z^2-1$$
$$x-1 = z^2-2$$
$$dx = 2z\,dz$$

дати интеграл постаје

$$2\int \frac{z(z^2-1)}{\sqrt{z^2-2}}\,dz$$

т.ј. сведен на облик са којим смо мало час имали посла.

Примедба: У случајевима кад се има посла са квадратним коренима из каквог полинома другог степена, дешава се да се интеграл може упростити увођењем у рачун тригонометријских функција тако да интеграл после извршене смене садржи под интегралним знаком какву функцију која рационално зависи од синуса и косинуса, а за такве интеграле видећемо мало доцније како се интеграле. Н. пр.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ако ставимо

$$x = \sin\varphi$$
$$dx = \cos\varphi \, d\varphi$$
$$\sqrt{1-x^2} = \cos\varphi$$

интеграл постаје

$$= \int d\varphi = \varphi = \arc\sin x$$

Или н. пр.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ax^2}}$$

Ако се стави

$$x\sqrt{a} = \sin\varphi \quad dx = \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{a}}$$

дати интеграл постаје

$$= \int \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{a}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sqrt{a}}\cos\varphi} = \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

V Случај

Интеграли облика
$$\int R(x, \sqrt{X})\,dx$$

где је X какав полином по x у вишег степена од 2.

Видели смо да кад је степен полинома један или два, интеграл се увек може израчунати помоћу обичних функција тако да се он увек своди на комбинације алгебарских, логаритамских и циклометријских функција. Међутим то више није случај кад степен полинома прелази 2. Већ за најпростије облике таквог интеграла н. пр.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

доказано је да се никаквим путем не могу свести на комбинације обичних функција (алгебарских, експоненцијалних, логаритамских, тригонометриских и циклометриских). За ове интеграле доказано је да представљају нове несводљиве рачунске елементе који имају и велики број особина различних од оних на које се наилази код обичних функција. У случају кад је степен полинома три или четири доказује се да се горњи интеграл помоћу смене или делимичних интеграљења може свести на један од ова три типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(1-h^2k)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

где су h и k стални бројеви и то било да је полином трећег или четвртог степена. За ова три типа доказано је да су не само несводљиви на обичне функције, већ да се не могу сводити ни један на други. Ова се три несводљива интеграла називају **елиптичким интегралима** I, II и III врсте. Ови се интеграли лако могу израчунати у облику бескрајног реда уређеног било по степенима од k било по степенима x_a, али се не могу свести ни на какву познату функцију x_a зато се у рачунима остављају у таквом облику. Они данас састављају: Теорију елиптичких интеграла елиптичних функција.

Примедба: У појединим врло изузетним случајевима дешава се да се дати интеграл поред свега тога што је степен полинома X већи од 2 ипак сведе на комбинације алгебарских функција. Интеграли код којих је то случај и код којих је степен полинома 3 или 4 називају се **псеудоелиптички интеграли**. Такав је н. пр. интеграл

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2\sqrt{1+x^4}}\,dx$$

који је Ајлер нашао да има за вредност

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left[\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}{1-x^2}\right]$$

или

$$\int\frac{1-x^2}{1+x^2\sqrt{1+x^4}}\,dx$$

за који је опет Ајлер нашао да има вредност

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$$

Оваквих псеудоелиптичких интеграла познат је данас врло велики број, али они представљају само изузетне случајеве.

Навешћемо још то да се интеграли оваквог облика у случајевима кад степен полинома X прелази 4 називају хиперелиптички интеграли и да се и они у врло изузетним случајевима своде на обичне функције или на елиптичке функције.

VI Случај

Интеграција биномних диференцијала.

Под биномним диференцијалима разумеју се изрази облика

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

Пре свега очевидно је да се овакви изрази могу одмах интегралити кад су m, n и p цели бројеви и да ће интеграли бити полиноми по x-у. Међутим има случајева кад то нису више цели бројеви а кад се интеграл опет може израчунати. Ставимо да је

$$a+bx^n=z$$

па ће бити

$$x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$dx=\frac{1}{n}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}}\frac{dz}{b}$$

заменом горњи израз постаје

$$\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} z^p\cdot\frac{1}{nb}\cdot\frac{1}{nb}\cdot\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}} dz$$

или

$$\frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot z^p\cdot dz$$

Претпоставимо сад да је $\frac{m+1}{n}$ какав цео број; горњи израз биће тада облика

$$P(z)\,dz\cdot z^p$$

где је P известан полином по z и онда ако је p цео број интеграцију је лако извршити. Ако је p разломак н. пр. $p=\frac{\alpha}{\beta}$ ставићемо

$$z=t^{\beta}$$

одакле је

$$dz=\beta t^{\beta-1}dt$$

па ће горњи израз постати

$$Q(t)\,dt$$

где је Q известан полином по t, дакле се интеграција може извршити. Кад је ова извршена треба се вратити на прву променљиву сменама

$$t=z^{\frac{1}{\beta}}=(a+bx^n)^{\frac{1}{\beta}}$$

Према томе интеграција се може увек извршити кадгод је $\frac{m+1}{n}$ цео број.

Али има још један случај у коме је интеграција могућна. Пошто је идентички

$$x^m(a+bx^n)^p dx = x^{m+np}\cdot(ax^{-n}+b)^p dx$$

то ако се стави да је

$$ax^{-n}+b=z$$

одакле је

$$x=\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

$$dx=-\frac{1}{n}\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{n+1}{n}}dz$$

горњи израз постаје

$$\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{m+np}{n}}\cdot z^p\cdot -\frac{1}{na}\cdot\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{n+1}{n}}dz$$

или

$$-\frac{1}{na}\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{m+np+n+1}{n}}\cdot z^p\cdot dz$$

Претпоставимо сад да је

$$\frac{m+1}{n}+p$$

цео број. Тада ће изложилац

$$\frac{m+np+n+1}{n}=\frac{m+1}{n}+p+1$$

бити такође цео број и према томе било да је p цео број било да је разломак интеграција се може извршити.

Из тога добијамо ова два случаја у којима се

$$x^m(a+bx^n)^p dx$$

може интегралити:

I случај: кад је

$$\frac{m+1}{n}$$

цео број; и

II случај: кад је

$$\frac{m+1}{n}+p$$

цео број.

У првом случају треба извршити замену

$$a+bx^n=z^q$$

где је q именитељ изложитеља p; а у другом

$$a+bx^n=x^n z^q$$

Примери:

1.

$$\int\frac{x^5dx}{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Овде је

$$\frac{m+1}{n}=\frac{5+1}{2}=3$$

дакле цео број; ставимо

$$a+bx^2=z^2$$

одатле је

$$(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}=z$$

$$x^6=\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^3$$

$$x^5dx=\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^2\frac{z\,dz}{b}$$

Са заменом дати интеграл постаје

$$=\frac{1}{b^3}\int(z^2-a)^2dz=\frac{1}{b^3}\int(z^4-2az^2+a^2)\,dz=$$

$$=\frac{z}{b^3}\left(\frac{z^4}{5}-\frac{2az^2}{3}+a^2\right)+C$$

$$=\frac{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}{b^3}\left[\frac{(a+bx^2)^2}{5}-\frac{2a(a+bx^2)}{3}+a^2\right]+C$$

2. $$\int \frac{x^6\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Овде је

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{6+1}{2}-\frac{3}{2}=2$$

дакле цео број. Ставимо

$$1+x^2=x^2z^2$$

Одатле је

$$x^6=\frac{1}{(z^2-1)^3}$$

$$dx=-\frac{z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{z^3}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

па заменом дати интеграл постаје

$$=-\int\frac{dz}{z^2(z^2-1)^3}$$

Интегралећи овај интеграл по правилима интеграције рационалних функција добија се

$$=-\frac{15z^4-25z^2+8}{8z(z^2-1)^2}+\frac{15}{16}\log\frac{z+1}{z-1}+C$$

а заменом

$$z=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

добијамо

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{x(2x^4-5x^2-15)}{\sqrt{1+x^2}}+15\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]+C$$

3. $$\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{a-bx}}$$

Ставимо

$$a-bx=z^2$$

дакле је

$$dx=-\frac{2z\,dz}{b}$$

$$a+bx=2a-z^2$$

па добијамо

$$I=\frac{2}{b}\int\frac{dz}{z^2-2a}$$

Одатле интеграцијом рацион. функције

$$I=\frac{1}{b\sqrt{2a}}\log\frac{z-\sqrt{2a}}{z+\sqrt{2a}}$$

$$=\frac{1}{b\sqrt{2a}}\log\frac{\sqrt{a-bx}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a-bx}+\sqrt{2a}}+C$$

4. $$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

Ставимо

$$x^2=y$$

$$dx=\frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

па је

$$J=\int\frac{\frac{dy}{2\sqrt{y}}}{(a^2+y)\sqrt{a^2-y}}$$

Ако се сада стави

$$\frac{1}{a^2-y}=z^2$$

одакле је

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-y}}=z$$

$$a^2+y=\frac{2a^2z^2-1}{z^2}$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\frac{dz}{z^2\sqrt{a^2z^2-1}}$$

дати интеграл постаје

$$J=\int\frac{z\,dz}{(2a^2z^2-1)\sqrt{a^2z^2-1}}$$

Ставимо најзад

$$a^2z^2-1=u^2$$

одакле је

$$z\,dz=\frac{u\,du}{a^2}$$

$$2a^2z^2-1=2u^2+1$$

па добијамо

$$J=\frac{1}{2a^2}\int\frac{du}{u^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\operatorname{arctg} u\sqrt{2}$$

а затим узастопним заменама

$$J=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$$

5.

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$$

1. решење: Ставимо

$$\sqrt{1+x+x^2}=z-x$$

одакле је

$$x=\frac{z^2-1}{2z+1}$$

$$\sqrt{1+x+x^2}=\frac{z^2+z+1}{2z+1}$$

$$1+x=\frac{z(z+2)}{2z+1}$$

$$dx=\frac{2(z^2+z+1)}{(2z+1)^2}\,dz$$

па дати интеграл постаје

$$J=2\int\frac{dz}{z(z+2)}=\log\frac{z}{z+2}+C$$

$$=\log\frac{\sqrt{1+x+x^2}+x}{\sqrt{1+x+x^2}+x+2}+C$$

2. решење: Пошто је

$$1+x+x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

ставимо

$$x+\frac{1}{2}=y$$

па добијамо

$$J = 4\int \frac{dy}{(1+2y)\sqrt{3+4y^2}}$$

Ставимо затим

$$\sqrt{3+4y^2} = z-2y$$

одакле је

$$y = \frac{z^2-3}{4z}$$

$$dy = \frac{z^2+3}{4z^2}\,dz$$

$$\sqrt{3+4y^2} = \frac{z^2+3}{2z}$$

$$1+2y = \frac{z^2+2z-3}{2z}$$

па добијамо

$$J = 4\int \frac{dz}{z^2+2z-3} = 4\int \frac{dz}{(z+1)^2-4} =$$

$$= \log\frac{z-1}{z+3} + C$$

или одатле, узастопном заменом

$$J = \log\frac{\sqrt{1+x+x^2}+x}{\sqrt{1+x+x^2}+x+2} + C$$

6.

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$$

Ставимо

$$\sqrt{1+x-x^2} = xz-1$$

одакле је

$$x = \frac{1+2z}{1+z^2}$$

$$dx = -2\,\frac{z^2+z-1}{(1+z^2)^2}\,dz$$

$$1+x = \frac{z^2+2z+2}{1+z^2}$$

$$\sqrt{1+x-x^2} = \frac{z^2+z-1}{1+z^2}$$

па добијамо

$$J = -2\int \frac{dz}{z^2+2z+2} = -2\int \frac{dz}{(z+1)^2+1} =$$

$$= -2\operatorname{arctg}(z+1) + C$$

или ако заменимо

$$z = \frac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{x}$$

добијамо

$$J = -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x} + C$$

7.

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}$$

Једначина

$$x^2-4x+3=0$$

има као корене 3 и 1. Ставимо

$$\sqrt{-3+4x-x^2} = \sqrt{(3-x)(x-1)} = z(3-x)$$

Одатле је

$$x=\frac{3z^2+1}{1+z^2}$$

$$dx=\frac{4z}{(1+z^2)^2}\,dz$$

$$3-x=\frac{2}{1+z^2}$$

$$\sqrt{-3+4x-x^2}=\frac{2z}{1+z^2}$$

$$x-2=\frac{z^2-1}{1+z^2}$$

па дати интеграл постаје

$$J=2\int\frac{dz}{z^2-1}=\log\frac{z-1}{z+1}+C$$

$$=\log\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}+C$$

$$=\log\frac{1-\sqrt{-3+4x-x^2}}{x-2}+C$$

8. $$\int\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}$$ (Ајлер)

Ако се стави

$$z=\frac{x\sqrt2}{1-x^2}.$$

добија се

$$dz=\sqrt2\,\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^4}}$$

па се множењем добија

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\sqrt2\,\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}$$

а отуда

$$J=\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{1}{\sqrt2}\log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\log\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt2}{1-x^2}+C$$

9. $$\int\frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)^{\frac12}-x^2}}$$ (Ајлер)

Ставимо

$$z=\frac{x}{\sqrt{(1+x^4)^{\frac12}-x^2}}$$

Одатле је

$$dz=\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}\left[(1+x^4)^{\frac12}-x^2\right]^{\frac32}}$$

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{(1+x^4)^{\frac12}-x^2}{\sqrt{1+x^4}}$$

па множењем добијамо

$$\frac{dz}{1+z^2}=\frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)^{\frac12}-x^2}}$$

Према томе

$$J=\int\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg} z+C$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}}+C$$

10.

$$\int\frac{x^3(1+x^4)^{\frac{1}{4}}dx}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}+1}$$

Ако ставимо

$$1+x^4=z^4$$

одакле је

$$(1+x^4)^{\frac{1}{2}}=z^2$$

$$(1+x^4)^{\frac{1}{4}}=z$$

$$x^3dx=z^3dz$$

интеграл постаје

$$J=\int\frac{z^4\,dz}{z^2+1}=\int\left(z^2-1+\frac{1}{z^2+1}\right)dz=$$

$$=\frac{z^3}{3}-z+\operatorname{arctg} z+C=$$

$$=\frac{(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}{3}-(1+x^4)^{\frac{1}{4}}+\operatorname{arctg}(1+x^4)^{\frac{1}{4}}+C$$

11.

$$\int x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

Ако ставимо

$$1+x^2=z^2$$

одакле је

$$x\,dx=z\,dz$$

па дати интеграл постаје

$$J=\int z^2dz=\frac{z^3}{3}+C=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

12.

$$\int\frac{x^2\,dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$$

Ставимо

$$a+bx=z^2$$

одакле је

$$(a+bx)^{\frac{1}{2}}=z$$

$$dx=\frac{2z\,dz}{b}$$

$$x^2=\frac{(z^2-a)^2}{b^2}$$

па дати интеграл постаје

$$J=\frac{2}{b^3}\int(z^2-a)^2dz=\frac{2}{b^3}\int\left[z^4-2az^2+a^2\right]dz=$$

$$=\frac{2}{b^3}\left[\frac{z^5}{5}-\frac{2az^3}{3}+a^2z\right]+C=$$

$$=\frac{2}{b^3}z\left[\frac{z^4}{5}-\frac{2az^2}{3}+a^2\right]+C=$$

$$=\frac{2}{b^3}(a+bx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(a+bx)^2}{5}-\frac{2a(a+bx)}{3}+a^2\right]+C$$

13. $$\int x(a+bx)^{\frac{1}{2}}dx$$

Ставимо

$$a+bx=z^2$$

одакле је

$$(a+bx)^{\frac{1}{2}}=z$$

$$x=\frac{z^2-a}{b}$$

$$dx=\frac{2z\,dz}{b}$$

па дати интеграл постаје

$$J=\frac{2}{b^2}\int(z^4-az^2)\,dz=\frac{2}{b^2}\left[\frac{z^5}{5}-\frac{az^3}{3}\right]+C$$

$$=\frac{2}{b^2}z^3\left[\frac{z^2}{5}-\frac{a}{3}\right]=$$

$$=\frac{2}{b^2}(a+bx)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{a+bx}{5}-\frac{a}{3}\right]+C$$

14. $$\int\frac{x^3\,dx}{(1+2x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Ставимо

$$1+2x^2=z^2$$

Онда је

$$(1+2x^2)^{\frac{1}{2}}=z$$

$$x^2=\frac{z^2-1}{2}$$

$$x\,dx=\frac{z\,dz}{2}$$

$$x^3\,dx=\frac{(z^2-1)z\,dz}{4}$$

па је дати интеграл

$$J=\frac{1}{4}\int(z^2-1)\,dz=\frac{1}{4}\left(\frac{z^3}{3}-z\right)+C=$$

$$=\frac{z}{4}\cdot\frac{z^2-3}{3}=\frac{(x^2-1)(1+2x^2)^{\frac{1}{2}}}{6}+C$$

15. $$\int x^3(1+x)^{\frac{1}{2}}dx$$

Ставимо

$$1+x=z^2$$

Онда је

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=z$$

$$x=z^2-1$$

$$dx=2z\,dz$$

$$x^3=(z^2-1)^3$$

па дати интеграл постаје

$$J=\int 2z^2(z^2-1)^3\,dz=2\int(z^8-3z^6+3z^4-z^2)\,dz=$$

$$=2\left[\frac{z^9}{9}-\frac{3z^7}{7}+\frac{3z^5}{5}-\frac{z^3}{3}\right]+C=$$

$$=2z^3\left[\frac{z^6}{9}-\frac{3z^4}{7}+\frac{3z^2}{5}-\frac{1}{3}\right]+C=$$

$$=2(1+x)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(1+x)^3}{9}-\frac{3(1+x)^2}{7}+\frac{3(1+x)}{5}-\frac{1}{3}\right]+C$$

16.

$$\int x^5(1+x^3)^{\frac{1}{3}}dx$$

Ако ставимо

$$1+x^3=z^3$$

одакле је

$$x^3=z^3-1$$

$$x^2dx=z^2dz$$

$$x^5dx=z^2(z^3-1)\,dz$$

дати интеграл постаје

$$\int(z^6-z^3)\,dz=\frac{z^7}{7}-\frac{z^4}{4}+C=$$

$$=z^4\left(\frac{z^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C=$$

$$=(1+x^3)^{\frac{4}{3}}\left[\frac{1+x^3}{7}-\frac{1}{4}\right]+C$$

17.

$$\int\frac{dx}{x(1+x)^{\frac{3}{4}}}$$

Ако ставимо

$$1+x=z^4$$

одакле је

$$(1+x)^{\frac{3}{4}}=z^3$$

$$x=z^4-1$$

$$dx=4z^3dz$$

дати интеграл постаје

$$=4\int\frac{dz}{z^4-1}$$

како је, помоћу растављања рационал. функција на сабирке

$$\frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1}$$

то је дати интеграл

$$=\int\frac{dz}{z-1}-\int\frac{dz}{z+1}-2\int\frac{dz}{z^2+1}=$$

$$=\log(z-1)-\log(z+1)-2\,\mathrm{arctg}\,z+C=$$

$$=\log\frac{z-1}{z+1}-2\,\mathrm{arctg}\,z+C=$$

$$=\log\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{4}}+1}-2\,\mathrm{arctg}(1+x)^{\frac{1}{4}}+C$$

18.

$$\int x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

Ако ставимо

$$1+x^2=x^2z^2$$

одакле је

$$x^2=\frac{1}{z^2-1}$$

$$1+x^2 = \frac{z^2}{z^2-1}$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$x = \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dx = -\frac{z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

дати интеграл постаје

$$J = -\int \frac{z^2\,dz}{(z^2-1)^3}$$

Растављањем функције под интегралним знаком на просте чиниоце добијамо

$$\frac{z^2}{(z^2-1)^3} = \frac{1}{8}\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{16}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{16}\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{z+1}$$

па њиховом интеграцијом добијамо

$$J = \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{16}\log(z-1) - \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{16}\log(z+1)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{z(z^2+7)}{(z^2-1)^2} + \frac{1}{2}\log\frac{z-1}{z+1}\right]$$

Заменом

$$z^2 = \frac{1+x^2}{x^2} \qquad z = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

добијамо

$$J = \frac{1}{8}\left[x(1+8x^2)\sqrt{1+x^2} + \log(\sqrt{1+x^2}-x)\right] + C$$

19.

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ако ставимо

$$1-x^2 = x^2 z^2$$

одакле је

$$x^2 = \frac{1}{z^2+1}$$

$$1-x^2 = \frac{z^2}{z^2+1}$$

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{z^3}{(z^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dx = -\frac{z\,dz}{(z^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

дати интеграл постаје

$$J = -\int \frac{dz}{z^2(z^2+1)}$$

како је

$$\frac{1}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1}$$

то је

$$J = -\int \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1}\right]dz = \frac{1}{z} + \operatorname{arc\,tg} z$$

Заменом
$$z=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$
добијамо
$$J=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$
$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arccos x+C$$

20.
$$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$$
Ставимо
$$a+bx^2=x^2z^2$$
одакле је
$$x^2=\frac{a}{z^2-b}$$
$$a+bx^2=\frac{az^2}{z^2-b}$$
$$(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{a^{\frac{5}{2}}z^5}{(z^2-b)^{\frac{5}{2}}}$$
$$dx=-\frac{a^{\frac{1}{2}}z\,dz}{(z^2-b)^{\frac{3}{2}}}$$
па добијамо
$$J=-\frac{1}{a^2}\int\frac{z^2-b}{z^4}dz=-\frac{1}{a^2}\left[\int\frac{dz}{z^2}-b\int\frac{dz}{z^4}\right.=$$
$$=-\frac{1}{a^2}\left[-\frac{1}{z}+\frac{b}{3}\frac{1}{z^3}\right]=\frac{1}{a^2}-\frac{b}{3z^3}=$$
Заменом
$$z^2=\frac{a+bx^2}{x^2}$$
$$z=\frac{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$$
добијамо
$$J=\frac{x(3a-2bx^2)}{3a^2(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}+C$$

21.
$$\int\frac{x\,dx}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$$
Ставимо
$$1+x^3=x^3z^3$$
одакле је
$$x^3=\frac{1}{z^3-1}$$
$$1+x^3=\frac{z^3}{z^3-1}$$
$$(1+x^3)^{\frac{2}{3}}=\frac{z^2}{(z^3-1)^{\frac{2}{3}}}$$
$$x\,dx=-\frac{z^2\,dz}{(z^3-1)^{\frac{5}{3}}}$$
па добијамо

$$J=-\int\frac{dz}{z^3-1}$$

Како је

$$\frac{1}{z^3-1}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{z+2}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]$$

то је

$$J=-\frac{1}{3}\left[\int\frac{dz}{z-1}-\int\frac{(z+2)\,dz}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]$$

Према томе дати се интеграл растав[ља]
на два интеграла

$$i_1=\int\frac{dz}{z-1}=\log(z-1)$$

и

$$i_2=\int\frac{(z+2)\,dz}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Ставимо у овом другом

$$z+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

одакле је

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}$$

$$z+2=\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{3}{2}$$

$$dz=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$$

па он постаје

$$i_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{(\sqrt{3}t+3)\,dt}{t^2+1}=\int\frac{t\,dt}{t^2+1}+\sqrt{3}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\log(t^2+1)+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,t=$$

$$=\frac{1}{2}\log\left[\frac{(2z+1)^2}{3}+1\right]+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$$

па је отуда

$$J=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{(2z+1)^2}{3}+1\right)+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2z+1}{\sqrt{3}}-\log(z-1)\right]+C$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{(2z+1)^2}{3}+1\right]-\frac{1}{2}\log\frac{z-1}{\sqrt[3]{z^3-1}}=$$

[и]ли ако заменимо

$$z=\frac{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

[д]обијамо

$$J=\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2(1+x^3)^{\frac{1}{3}}+x}{x\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\log\left[(1+x^3)^{\frac{1}{3}}-x\right]+C$$

22.

$$\int\frac{dx}{(\frac{2a}{b}+x)(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$$

Ставимо

$$a+bx=z^2$$

[о]дакле је

$$(a+bx)^{\frac{1}{2}}=z$$

$$x=\frac{z^2-a}{b}$$

$$\frac{2a}{b} + x = \frac{a+z^2}{b}$$

$$dx = \frac{2}{b} z\,dz$$

па добијамо

$$J = 2\int \frac{dz}{a+z^2} = \frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{a}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{a+bx}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + C$$

23.
$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x+5}\,dx$$

Ставимо

$$1+x = z^2$$

одакле је

$$x = z^2 - 1$$
$$x+5 = z^2+4$$
$$dx = 2z\,dz$$

па добијамо

$$J = 2\int \frac{z^2\,dz}{z^2+4} = 2\int dz - 8\int \frac{dz}{z^2+4}$$

Према томе дати се интеграл раставља на два интеграла

$$i_1 = \int dz = z$$

и

$$i_2 = \int \frac{dz}{z^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{2}$$

а према томе је

$$J = 2z - 4 \operatorname{arctg} \frac{z}{2} + C$$

$$= 2\sqrt{1+x} - 4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x}}{2} + C$$

24.
$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^3-1)(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Овај интеграл можемо писати

$$J = \int \frac{x^2\,dx}{(x^3-1)(x^3+1)(x^3+1)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{x^2\,dx}{(x^6-1)(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Ставимо сада

$$x^3+1 = z^2$$

одакле је

$$x^3 = z^2-1$$
$$x^6 = (z^2-1)^2$$
$$x^6-1 = z^2(z^2-2)$$
$$x^2\,dx = \frac{2z\,dz}{3}$$

па добијамо

$$J = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2(z^2-2)}$$

Како је

$$\frac{1}{z^2(z^2-2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{z+\sqrt{2}}$$

то је

$$J = -\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^2} + \frac{\sqrt{2}}{12}\int\frac{dz}{z-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{12}\int\frac{dz}{z+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{2}}{12}\log(z-\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{12}\log(z+\sqrt{2}) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{2}}{12}\log\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{\sqrt{2}}{12}\log\frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^3-1}}\right] + C$$

25.

$$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$$

Ставимо најпре

$$x^2 = y$$

$$dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

па добијамо

$$J = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{(a^2-y)\sqrt{a^2+y}\,\sqrt{y}}$$

Ставимо сада

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+y}} = z$$

одакле је

$$y = \frac{1-a^2z^2}{z^2}$$

$$a^2-y = \frac{2a^2z^2-1}{z^2}$$

$$dy = -\frac{2\,dz}{z^3}$$

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{1-a^2z^2}}{z}$$

па добијамо

$$J = -\int\frac{z\,dz}{(2a^2z^2-1)\sqrt{1-a^2z^2}}$$

Ставимо најзад

$$1-a^2z^2 = u^2$$

одакле је

$$2a^2z^2-1 = 1-2u^2$$

$$z\,dz = -\frac{u\,du}{a^2}$$

па имамо

$$J = \frac{1}{a^2}\int\frac{du}{1-2u^2} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{2u^2-1}$$

Како је

$$\frac{1}{z^2(z^2-2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{1}{z+\sqrt{2}}$$

то је

$$J = -\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^2} + \frac{\sqrt{2}}{12}\int\frac{dz}{z-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{12}\int\frac{dz}{z+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{2}}{12}\log(z-\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{12}\log(z+\sqrt{2}) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{2}}{12}\log\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{\sqrt{2}}{12}\log\frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^3-1}}\right] + C$$

25.

$$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$$

Ставимо најпре

$$x^2 = y$$

$$dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

па добијамо

$$J = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{(a^2-y)\sqrt{a^2+y}\,\sqrt{y}}$$

Ставимо сада

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+y}} = z$$

одакле је

$$y = \frac{1-a^2z^2}{z^2}$$

$$a^2-y = \frac{2a^2z^2-1}{z^2}$$

$$dy = -\frac{2\,dz}{z^3}$$

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{1-a^2z^2}}{z}$$

па добијамо

$$J = -\int\frac{z\,dz}{(2a^2z^2-1)\sqrt{1-a^2z^2}}$$

Ставимо најзад

$$1-a^2z^2 = u^2$$

одакле је

$$2a^2z^2-1 = 1-2u^2$$

$$z\,dz = -\frac{u\,du}{a^2}$$

па имамо

$$J = \frac{1}{a^2}\int\frac{du}{1-2u^2} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{2u^2-1}$$

Како је

$$\frac{1}{2u^2-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{u\sqrt{2}-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{u\sqrt{2}+1}$$

то је

$$J=-\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}\int\frac{du}{u\sqrt{2}-1}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u\sqrt{2}+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\log(u\sqrt{2}+1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\log(u\sqrt{2}-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{2a^2\sqrt{2}}\log\frac{u\sqrt{2}+1}{u\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2a^2\sqrt{2}}\log\frac{(u\sqrt{2}+1)^2}{2u^2-1}$$

Заменом

$$u=\sqrt{1-a^2z^2}=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+y}}=\sqrt{\frac{y}{a^2+y}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$u\sqrt{2}+1=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}+1=\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$2u^2-1=\frac{2x^2}{a^2+x^2}-1=\frac{x^2-a^2}{a^2+x^2}$$

добијамо

$$J=\frac{1}{2a^2\sqrt{2}}\log\frac{(x\sqrt{2}+\sqrt{a^2+x^2})^2}{x^2-a^2}=$$

$$=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\log\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$$

26.
$$\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}$$

Трином

$$x^2+3x-4$$

има корене 1 и −4, па је отуда

$$\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{(x-1)(x+4)}=z(x+4)$$

Одатле је

$$x=\frac{1+4z^2}{1-z^2}$$

$$x+4=\frac{5}{1-z^2}$$

$$dx=\frac{10z\,dz}{(1-z^2)^2}$$

па заменом у датом интегралу овај постаје

$$J=\frac{2}{5}\int dz=\frac{2}{5}z+C=$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}+C$$

27.
$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$$

Ставимо

$$\sqrt{1-x-x^2}=xz-1$$

одакле је

$$x=\frac{2z-1}{z^2+1}$$

$$1+x=\frac{z(z+2)}{z^2+1}$$

$$\sqrt{1-x-x^2}=\frac{z^2-z-1}{z^2+1}$$

$$dx=\frac{-2(z^2-z-1)}{(z^2+1)^2}$$

па добијамо

$$J=-2\int\frac{dz}{z(z+2)}$$

Како је

$$\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+2}$$

то је

$$J=-2\left[\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z+2}\right]=$$

$$=\log(z+2)-\log z=$$

$$=\log\frac{z+2}{z}$$

$$=\log\frac{\sqrt{1-x-x^2}+2x+1}{\sqrt{1-x-x^2}+1}=$$

$$=\log\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}+C$$

28

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+b^2x^n}}$$

Множени бројиоц и имениоц са x^{n-1} добијамо

$$J=\int\frac{x^{n-1}dx}{x^n\sqrt{a^2+b^2x^n}}$$

ставимо сада

$$a^2+b^2x^n=z^2$$

одакле је

$$x^n=\frac{z^2-a^2}{b^2}$$

$$x^{n-1}dx=\frac{2z\,dz}{nb^2}$$

па дати интеграл постаје

$$J=\frac{2}{n}\int\frac{dz}{z^2-a^2}$$

Како је

$$\frac{1}{z^2-a^2}=\frac{1}{2a}\frac{1}{z-a}-\frac{1}{2a}\frac{1}{z+a}$$

то је

$$J=\frac{2}{n}\left[\frac{1}{2a}\int\frac{dz}{z-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dz}{z+a}\right]=$$

$$=\frac{1}{na}\left[\log(z-a)-\log(z+a)\right]=$$

$$= \frac{1}{na} \log \frac{z-a}{z+a} = \frac{1}{na} \log \frac{(z-a)^2}{z^2-a^2} = \frac{2}{na} \log \frac{z-a}{\sqrt{z^2-a^2}} =$$

$$= \frac{2}{na} \log \frac{\sqrt{a^2+b^2x^n} - a}{b\sqrt{x^n}} + C$$

29. $$\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-b^2x^{2n}}}$$

Множећи бројилац и именилац са x^n добијамо

$$J = \int \frac{x^{2n-1}dx}{x^n\sqrt{a^2-b^2x^{2n}}}$$

Ако ставимо

$$a^2 - b^2x^{2n} = z^2$$

одакле је

$$x^{2n} = \frac{a^2-z^2}{b^2}$$

$$x^{2n-1}dx = \frac{-z\,dz}{nb^2}$$

$$x^n = \frac{\sqrt{a^2-z^2}}{b}$$

добијамо

$$J = -\frac{1}{nb}\int \frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}} = \frac{1}{nb} \arccos \frac{z}{a} =$$

$$= \frac{1}{nb} \arccos \frac{\sqrt{a^2-b^2x^{2n}}}{a} + C$$

30. $$\int \frac{dx}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Ако ставимо

$$z = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

одакле је

$$x^2 = \frac{z^2}{1-z^2}$$

$$x = \frac{z}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$1+2x^2 = \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

$$dx = \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{z} = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

добијамо

$$J = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} z =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

31. $$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+2x^2}\,dx$$

Ставимо

$$z=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

одакле је

$$x^2=\frac{z^2}{1-z^2}$$

$$x=\frac{z}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dx=\frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$1+2x^2=\frac{1+z^2}{1-z^2}$$

па добијамо

$$J=\int\frac{dz}{1-z^4}=-\int\frac{dz}{z^4-1}$$

Како је

$$\frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1}$$

то је

$$J=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\log(z-1)+\frac{1}{4}\log(z+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z-\frac{1}{4}\log\frac{z-1}{z+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{4}\log\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}+C$$

32. $$\int\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}$$ (Ојлер)

Ставимо

$$z=\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$$

одакле је

$$z^2=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$1-z^2=\frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}$$

$$\sqrt{1-z^2}=\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}$$

$$dz=\frac{\sqrt{2}\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{\sqrt{2}\,(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}$$

па је према томе дати интеграл

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin z =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + C$$

33. $$\int \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{m}{n}}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad \text{(Ајлер)}$$

Ставимо

$$x+\sqrt{1+x^2} = z^n$$

одакле је

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{m}{n}} = z^m$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = n z^{n-1}\,dz$$

$$\frac{z^n\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = n z^{n-1}\,dz$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = n z^{-1}\,dz$$

па добијамо

$$J = n\int z^{m-1}\,dz = \frac{n}{m} z^m =$$

$$= \frac{n}{m}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{m}{n}} + C$$

34 $$\int \frac{dx}{(1-x^2)(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}} \qquad \text{(Ајлер)}$$

Ставимо

$$z = \frac{x}{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}}$$

одакле је

$$z^4 = \frac{x^4}{2x^2-1}$$

$$z^3\,dz = \frac{x^3(x^2-1)\,dx}{(2x^2-1)^2}$$

$$z^7 = \frac{x^7}{(2x^2-1)^{\frac{7}{4}}}$$

$$\frac{1}{z^4} = \frac{2x^2-1}{x^4}$$

$$1-\frac{1}{z^4} = \frac{z^4-1}{z^4} = \frac{(x^2-1)^2}{x^4}$$

$$z^7\cdot\frac{z^4-1}{z^4} = z^3(z^4-1) = \frac{x^3(x-1)^2}{(2x^2-1)^{\frac{7}{4}}}$$

$$\frac{z^3\,dz}{z^3(z^4-1)} = \frac{dz}{z^4-1} = \frac{dx}{(x^2-1)(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}}$$

и према томе

$$J = -\int \frac{dz}{z^4-1}$$

Како је

$$\frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z^2+1}$$

то је

$$J = -\left[\frac{1}{4}\log(z-1) - \frac{1}{4}\log(z+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z - \frac{1}{4}\log\frac{z-1}{z+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{4}\log\frac{x-(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}}{x+(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}} + C$$

35.
$$\int\frac{dx}{x^4(x-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Ако ставимо

$$x-1 = z^2$$

одакле је

$$dx = 2z\,dz$$
$$x = 1+z^2$$
$$x^4 = (1+z^2)^4$$

дати интеграл постаје

$$J = 2\int\frac{dz}{(1+z^2)^4}$$

Овај интеграл добија се узастопном интеграцијом на овај начин:

$$J_1 = \int\frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} z$$

$$J_2 = \int\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int\frac{1+z^2-z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = \int\frac{dz}{1+z^2} - \int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2}$$

да би добили други од ова два интеграла ставимо

$$z = u \qquad \frac{z\,dz}{(1+z^2)^2} = dv$$

одакле је

$$du = dz \qquad v = \int\frac{z\,dz}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+z^2}$$

па је

$$\int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z$$

Према томе

$$J_2 = \operatorname{arc\,tg} z + \frac{1}{2}\,\frac{z}{1+z^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z$$

Затим

$$J_3 = \int\frac{dz}{(1+z^2)^3} = \int\frac{1+z^2-z^2}{(1+z^2)^3}\,dz = \int\frac{dz}{(1+z^2)^2} - \int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^3}$$

Први од ова два интеграла дат је обрасцем J_2, а да би добили други ставимо опет

$$z = u \qquad \frac{z\,dz}{(1+z^2)^3} = dv$$

одакле је

$$du = dz \qquad v = \int \frac{z\,dz}{(1+z^2)^3} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(1+z^2)^2}$$

па отуда

$$\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^3} = -\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{1}{8}\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg} z$$

и према томе

$$J_3 = \frac{1}{2}\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z + \frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2} - \frac{1}{8}\frac{z}{1+z^2} - \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg} z$$

$$= \frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{z}{1+z^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} z$$

Затим

$$J_4 = \int \frac{dz}{(1+z^2)^4} = \int \frac{1+z^2-z^2}{(1+z^2)^4}\,dz = \int \frac{dz}{(1+z^2)^3} - \int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^4}$$

Први од ова два интеграла дат је обрасцем J_3 а да би добили други ставимо опет

$$z = u \qquad \frac{z\,dz}{(1+z^2)^4} = dv$$

одакле је

$$du = dz \qquad v = \int \frac{z\,dz}{(1+z^2)^4} = -\frac{1}{6}\frac{1}{(1+z^2)^3}$$

и према томе

$$\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^4} = -\frac{1}{6}\frac{z}{(1+z^2)^3} + \frac{1}{6}\int \frac{dz}{(1+z^2)^3} =$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{z}{(1+z^2)^3} + \frac{1}{24}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{1}{16}\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg} z$$

па дакле

$$J_4 = \frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{z}{1+z^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} z + \frac{1}{6}\frac{z}{(1+z^2)^3} - \frac{1}{24}\frac{z}{(1+z^2)^2} -$$

$$- \frac{1}{16}\frac{z}{1+z^2} - \frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg} z =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{z}{(1+z^2)^3} + \frac{5}{24}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{5}{16}\frac{z}{1+z^2} + \frac{5}{16}\operatorname{arc\,tg} z$$

На тај начин је израчунат тражени интеграл, па је дакле дати интеграл једнак

$$J = \frac{1}{3}\frac{z}{(1+z^2)^3} + \frac{5}{12}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{5}{8}\frac{z}{1+z^2} + \frac{5}{8}\operatorname{arc\,tg} z$$

$$= \frac{1}{3}\frac{z}{1+z^2}\left[\frac{1}{(1+z^2)^2} + \frac{5}{4}\frac{1}{1+z^2} + \frac{15}{8}\right] + \frac{5}{8}\operatorname{arc\,tg} z$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\sqrt{x-1}}{x}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{5}{4}\frac{1}{x} + \frac{15}{8}\right] + \frac{5}{8}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x-1} + C$$

Интеграција трансцедентних функција.

И за интеграцију таквих функција употребљавају се методе с којима смо се до сада упознали и то најчешће метода замене и метода делимичне интеграције. Методом замене обично се тежи да се трансцедентна функција под интегралним знаком или упрости или сведе на алгебарску функцију. Тако н. пр. интеграли

$$\int F(e^{ax})\,dx$$

упрошћавају се сменом

$$e^{ax}=t \qquad dx=\frac{dt}{at}$$

тако да интеграл постаје

$$\frac{1}{a}\int F(t)\frac{dt}{t}$$

Интеграли облика

$$\int F(\operatorname{arctg}x)\frac{dx}{1+x^2}$$

упрошћавају се сменом

$$\operatorname{arctg}x=t$$

која претвара дати интеграл у

$$\int F(t)\,dt$$

Интеграли

$$\int F(\log x)\frac{dx}{x}$$

упрошћавају се сменом

$$\log x=t$$

која их своди на облик

$$\int F(t)\,dt$$

Какву ћемо смену употребити у ком случају зависи од природе случаја. За интеграл

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$$

где је R рационална функција синуса и косинуса употребљује се ова смена: стави се да је

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

одакле је

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$$

одакле је

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Сем тога је

$$dx = \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

Ако се $\sin x$, $\cos x$, dx замене овим вредностима у датом интегралу, добија се известан интеграл коме ће под интегралним знаком бити рационална функција променљиве t. Кад је овај интеграл израчунат по ранијим упутствима треба t сменити његовом вредношћу као функцију од x-а а то је према ранијим правилима

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Н. пр. нека је дат интеграл

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$$

Ако извршимо показану смену интеграл постаје

$$\int \frac{1+t^2}{2at+b(1-t^2)}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int\frac{dt}{b+2at-bt^2}$$

одакле рационалан је.

<u>Примедба</u>: Постоји једна општа метода, позната под именом <u>Hermite-ове методе</u> која даје непосредно $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ као експлицитну функцију x-а. У случајевима у којима је метода замене заметна или не доводи ни до каквог резултата покушава се делимичном интеграцијом описаном у обрасцу

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Која ће се функција узети за u а која за v зависи опет од природе случаја. При избору ових функција гледа се на ово:

1. да се из dv може израчунати v (што није свакад могуће);
2. да је интеграл $\int v\,du$ простији од првобитног или бар исте врсте

Уочимо н. пр. два интеграла

$$J_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx \qquad 1.$$

$$J_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx \qquad 2.$$

Ако се у првом интегралу стави

$$u=\cos bx$$
$$e^{ax}dx=dv$$

одакле је

$$du=-b\sin bx\,dx$$
$$v=\frac{e^{ax}}{a}$$

интеграл 1. постаје

$$J_1=\frac{e^{ax}}{a}\cos bx+\frac{b}{a}J_2 \qquad 3.$$

Тако исто ако у интегралу 2. узмемо

$$u=\sin bx$$
$$e^{ax}dx=dv$$

одакле је

$$du=b\cos bx\,dx$$
$$v=\frac{e^{ax}}{a}$$

интеграл 2. постаје

$$J_2=\frac{e^{ax}}{a}\sin bx-\frac{b}{a}J_1 \qquad 4.$$

Једначине 3. и 4. претстављају две једначине са две непознате J_1 и J_2 из којих се ова два интеграла могу лако израчунати.

Помоћу делимичног интеграљења лако се израчунавају н. пр. интеграли оваквог облика: $\int(\log x)^n dx$, $\int(\arcsin x)^n dx$, $\int(\arccos x)^n dx$, и т. д. или $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$, $\int x^n(\log x)^m dx$ и други.

Навешћемо још једну врсту интеграла за чије се интеграљење употребљава иста метода која се употребљава и при интеграцији рационалних функција. То су интеграли облика

$$\int e^{ax}R(x)\,dx$$

где је $R(x)$ рационална функција променљиве x. Видели смо да се рационална функција увек може написати у облику збира чланова који су облика

$$Ax^m,\ \frac{A}{x-\alpha},\ \frac{A}{(x-\alpha)^k}$$

Према томе горњи се интеграли своде на интеграле облика

$$J_1=\int x^m e^{ax}dx$$

$$I_2=\int\frac{e^{ax}}{x-\alpha}\,dx$$

$$I_3=\int\frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^k}\,dx$$

Интеграли I_1 лако се израчунавају делимичним интеграљењем стављајући да је

$$x^m=u \qquad e^{ax}dx=dv$$

Трећи интеграл може се такође свести на делимичну интеграцију стављајући

$$u=e^{ax} \qquad \frac{dx}{(x-\alpha)^k}=dv$$

чиме ће степен k бити смањен за јединицу. Међутим интеграли I_2 не могу се ни на који начин израчунати. Тај се интеграл међутим може у нечему упростити стављајући

$$x-\alpha=t$$
$$x=\alpha+t$$
$$dx=dt$$

чиме се интеграл своди на

$$\int\frac{e^{at}dt}{t}$$

Он се често пише и у облику

$$\int\frac{dz}{\log z}$$

на који се он своди сменом

$$e^{at}=z$$

Овај последњи интеграл, који је несводљив на обичне функције, познат је под именом <u>интеграла логаритма</u> и обележава се знаком

$$li(z)$$

На исти се начин изврши и редукција интеграла облика

$$\int R(x)\sin ax\,dx$$
$$\int R(x)\cos ax\,dx$$

који се растављањем рационалне функције $R(x)$ своди на један од ова три облика

$$I_1=\int x^m\sin ax\,dx \qquad I_2=\int\frac{\sin ax}{x-\alpha}dx \qquad I_3=\int\frac{\sin ax}{(x-\alpha)^n}dx$$

$$I_1=\int x^m\cos ax\,dx \qquad I_2=\int\frac{\cos ax}{x-\alpha}dx \qquad I_3=\int\frac{\cos ax}{(x-\alpha)^n}dx$$

Код првог и трећег типа опет се може употребити делимична интеграција којом снижујемо степен m односно n; међутим интеграл I_2 такође је несводљив на обичне функције. Међутим и он се даје свести на интегрални логаритам, јер ако се изврши нарочита смена

$$x - \alpha = t$$

интеграл I_2 своди се на ова два

$$\int \frac{\sin at}{t}\,dt \qquad \int \frac{\cos at}{t}\,dt$$

а ова се два интеграла, помоћу Ојлеровог обрасца

$$\sin at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2i} \qquad \cos at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

своде на малопређашњи

$$\int \frac{e^{at}\,dt}{t}$$

Овај пак интеграл, сменом

$$e^{at} = z$$

своди се на

$$\int \frac{dz}{\log z}$$

за који смо казали да се даље више не може сводити.

Примери:

1.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

Дати интеграл може се писати

$$J = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = -2 \operatorname{cotg} 2x + C$$

2.

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x}.$$

Како је

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

то је

$$J = 2 \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\operatorname{cotg} \frac{x}{2} + C$$

3.

$$\int \frac{\cos x\,dx}{a^2 + b^2 \sin x}$$

Ако се стави

$$a^2 + b^2 \sin x = z$$

одакле је

$$b^2 \cos x\,dx = dz$$

добијамо

$$J = \frac{1}{b^2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{b^2} \log z = \frac{1}{b^2} \log(a^2 + b^2 x) + C$$

4.

$$\int (\log x)^n dx$$

Ако ставимо

$$u=(\log x)^n \qquad dv=dx$$

одакле је

$$du=n(\log x)^{n-1}dx \qquad v=x$$

добијамо

$$J=x(\log x)^n-n\int(\log x)^{n-1}dx$$

Одавде је : за $n=1$

$$\int \log x\, dx = x\log x - x = x(\log x-1)+C$$

за $n=2$:

$$\int(\log x)^2dx = x(\log x)^2-2\int\log x\, dx =$$

$$= x(\log x)^2-2x\log x+2x=$$

$$= x\left[(\log x)^2-2\log x+2\right]+C$$

за $n=3$

$$\int(\log x)^3dx = x(\log x)^3-3\int(\log x)^2dx=$$

$$= x(\log x)^3-3(\log x)^2+6x\log x-6x=$$

$$= x\left[(\log x)^3-3(\log x)^2+6\log x-6\right]+C$$

У опште:

$$\int(\log x)^n dx = x\left[(\log x)^n-n(\log x)^{n-1}+n(n-1)(\log x)^{n-2}-\dots\right]+C$$

5

$$\int x^n e^{ax}dx$$

Ако ставимо

$$u=x^n \qquad dv=e^{ax}dx$$

одакле је

$$du=nx^{n-1}dx \qquad v=\frac{1}{a}e^{ax}$$

добијамо

$$J=\frac{x^n e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$$

Према томе ако узмемо : $n=1$

$$\int x e^{ax}dx=\frac{xe^{ax}}{a}-\frac{1}{a}\int e^{ax}dx=$$

$$=\frac{xe^{ax}}{a}-\frac{e^{ax}}{a^2}=$$

$$=\frac{e^{ax}}{a}\left[x-\frac{1}{a}\right]+C$$

[з]а $n=2$

$$\int x^2e^{ax}dx=\frac{x^2e^{ax}}{a}-\frac{2}{a}\int x e^{ax}dx=$$

$$=\frac{x^2e^{ax}}{a}-\frac{2xe^{ax}}{a^2}+\frac{2e^{ax}}{a^3}$$

$$=\frac{e^{ax}}{a}\left[x^2-\frac{2x}{a}+\frac{2}{a^3}\right]+C$$

За $n=3$

$$\int x^3 e^{ax}dx = \frac{x^3e^{ax}}{a} - \frac{3}{a}\int x^2e^{ax}dx =$$

$$= \frac{x^3e^{ax}}{a} - \frac{3x^2e^{ax}}{a^2} + \frac{6xe^{ax}}{a^3} - \frac{6e^{ax}}{a^4} =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\left[x^3 - \frac{3x^2}{a} + \frac{6x}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right] + C$$

У опште

$$\int x^n e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[x^n - \frac{n}{a}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2}x^{n-2} - \cdots\right] + C$$

6. Ако се у предњем задатку узме још и

$$a=1$$

добија се

$$\int x^n e^x dx = e^x\left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots\right] + C$$

7.
$$\int \frac{e^{ax}dx}{x^n}$$

Ако се стави

$$u = e^{ax} \qquad \frac{dx}{x^n} = dv$$

одакле је

$$du = ae^{ax}dx \qquad v = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^{n-1}}$$

добијамо

$$J = -\frac{1}{n-1}\,\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int\frac{e^{ax}dx}{x^{n-1}}$$

За $n=2$ добијамо

$$\int\frac{e^{ax}}{x^2} = -\frac{e^{ax}}{x} + a\int\frac{e^{ax}dx}{x}$$

Овај последњи интеграл, ако је $a=1$, видели смо код интеграције помоћу бескрајних редова, да је дат изразом

$$\int\frac{e^x dx}{x} = C + \log x + x + \frac{x^2}{1\cdot 2^2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3^2} + \cdots$$

Ако је $n=3$ добијамо

$$\int\frac{e^{ax}}{x^3} = -\frac{1}{2}\,\frac{e^{ax}}{x^2} + \frac{a}{2}\int\frac{e^{ax}dx}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{e^{ax}}{x^2} - \frac{a}{2}\,\frac{e^{ax}}{x} + \frac{a^2}{2}\int\frac{e^{ax}dx}{x}$$

8
$$\int x^m(\log x)^n dx$$

Ако ставимо

$$u = (\log x)^n \qquad dv = x^m dx$$

одакле је

$$du = \frac{n(\log x)^{n-1}dx}{x} \qquad v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

па отуда

$$J = \frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\log x)^{n-1}dx$$

Ако је $m=2$ $n=2$, добијамо

$$\int x^2(\log x)^2 dx = \frac{x^3(\log x)^2}{3} - \frac{2}{3}\int x^2 \log x \, dx$$

Ако у овом другом интегралу ставимо

$$u = \log x \qquad x^2 dx = dv$$

одакле је

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

добићемо

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx =$$

$$= \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{x^3}{9}$$

па отуда

$$\int x^2(\log x)^2 dx = \frac{x^3(\log x)^2}{3} - \frac{2x^3 \log x}{9} + \frac{2x^3}{27} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\left[(\log x)^2 - \frac{2}{3}\log x + \frac{2}{3^2}\right] + C$$

9.

$$\int \sin^n x \, dx$$

Ставимо

$$\sin^{n-1} x = u \qquad \sin x \, dx = dv$$

одакле је

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \, dx \qquad v = -\cos x$$

па отуда

$$I = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) \, dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1)\int \sin^n x \, dx$$

како је последњи интеграл у ствари дати интеграл, то ако га пребацимо на леву страну и сведемо, добијамо

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \, dx$$

Из овог општег обрасца добијамо: за $n=1$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

за $n=2$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\int dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x =$$

$$= -\frac{1}{2}(\sin x \cos x - x) + C$$

за $n=3$

$$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}\int \sin x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos x(\sin^2 x + 2) + C$$

за $n=4$

$$\int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}(\sin x \cos x - x)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos x\left(\sin^3 x + \frac{3}{2}\sin x\right) + \frac{3}{8}x + C$$

и т. д.

10.
$$\int \cos^n x\, dx$$

Ако ставимо
$$\cos^{n-1}x = u \qquad \cos x\, dx = dv$$
одакле је
$$du = -(n-1)\cos^{n-2}x\sin x\, dx \qquad v = \sin x$$
добијамо
$$I = \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\int \sin^2 x\cos^{n-2}x\, dx =$$
$$= \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\, dx =$$
$$= \sin x\cos^{n-1}x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\, dx - (n-1)\int \cos^n x\, dx$$
ако последњи интеграл пребацимо на леву страну и сведемо, добијамо
$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\, dx$$
Из овог општег обрасца добијамо: за $n=1$
$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$
за $n=2$
$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin x\cos x + x) + C$$

за $n=3$
$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{1}{3}\sin x\cos^2 x + \frac{2}{3}\int \cos x\, dx =$$
$$= \frac{1}{3}\sin x\cos^2 x + \frac{2}{3}\sin x =$$
$$= \frac{1}{3}\sin x(\cos^2 x + 2) + C$$

за $n=4$
$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}(\sin x\cos x + x)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x =$$
$$= \frac{1}{4}\sin x\left(\cos^3 x + \frac{3}{2}\cos x\right) + \frac{3}{8}x + C$$

и т. д.

11.
$$\int \frac{dx}{\sin^n x}$$

Ако ставимо
$$\frac{1}{\sin^{n-2}x} = u \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = dv$$

одакле је
$$du = -\frac{(n-2)\cos x\, dx}{\sin^{n-1}x} \qquad v = -\operatorname{ctg} x$$

добијамо

$$J = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{\cos x \operatorname{ctg} x \, dx}{\sin^{n-1} x} =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{\cos^2 x \, dx}{\sin^n x} =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{(1-\sin^2 x)\,dx}{\sin^n x} =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{dx}{\sin^n x} + (n-2)\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

Ако први од интеграла на десној страни пребацимо на леву страну и даље је сведемо, добијамо

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

Из овога општег обрасца добија се: за $n=2$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

за $n=3$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\log \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

за $n=4$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x + C$$

и т. д.

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x}$

Ставимо

$$\frac{1}{\cos^{n-2} x} = u \qquad \frac{dx}{\cos^2 x} = dv$$

$$du = \frac{(n-2)\sin x \, dx}{\cos^{n-1} x} \qquad v = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

па добијамо

$$J = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{\sin x \operatorname{tg} x}{\cos^{n-1} x}\,dx =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x}\,dx$$

или ако заменимо

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

добијамо

$$J = \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{dx}{\cos^n x} + (n-2)\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

или, ако први интеграл на десној страни

пребацимо на леву страну и сведемо, добијамо:

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

Из овог општег обрасца добијамо:

за $n=2$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

за $n=3$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C$$

за $n=4$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + C$$

за $n=5$

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\cos^3 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{4}\left(\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{3}{2}\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \frac{3}{8}\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

13 а) $\displaystyle \int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^n x}$

Ставимо

$$\frac{\sin^{m-1} x}{\cos^n x} = u \qquad \sin x\, dx = dv$$

одакле је

$$du = \frac{(m-1)\sin^{m-2} x \cos^2 x + n\sin^m x}{\cos^{n+1} x}\, dx \qquad v = -\cos x$$

па добијамо

$$J = -\frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} + \int \frac{(m-1)\sin^{m-2} x\cos^2 x + n\sin^m x}{\cos^n x}\, dx =$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} + (m-1)\int \frac{\sin^{m-2} x\cos^2 x\, dx}{\cos^n x} + n\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^n x}$$

ако у првом интегралу сменимо

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

добијамо

$$J = -\frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} + (m-1)\int \frac{\sin^{m-2} x\, dx}{\cos^n x} - (m-1)\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^n x} + n\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^n x}$$

ако последња два интеграла пребацимо на леву страну и сведемо, добијамо

$$\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^n x} = -\frac{\sin^{m-1} x}{(m-n)\cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\sin^{m-2} x\, dx}{\cos^n x}$$

Примене овог обрасца:

1) $$\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos x} = -\frac{\sin^3 x}{3} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx =$$
$$= -\frac{\sin^3 x}{3} + \int \frac{dx}{\cos x} - \int \cos x\,dx =$$
$$= -\frac{\sin^3 x}{3} + \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \sin x =$$
$$= -\frac{\sin x}{3}\left(\sin^2 x + 3\right) + \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$$

2) $$\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^4 x}{3\cos x} + \frac{4}{3}\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^2 x}$$

Ако $\sin^3 x$ заменимо са $\sin x(1-\cos^2 x)$

$$= -\frac{\sin^4 x}{3\cos x} + \frac{4}{3}\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} - \frac{4}{3}\int \sin x\,dx =$$
$$= -\frac{\sin^4 x}{3\cos x} + \frac{4}{3\cos x} + \frac{4}{3}\cos x =$$
$$= -\frac{1}{3\cos x}\left[\sin^4 x - 4 - 4\cos^2 x\right] =$$

ако $\cos^2 x$ заменимо са $1-\sin^2 x$

$$= -\frac{1}{3\cos x}\left[\sin^4 x + 4\sin^2 x - 8\right] + C$$

13 б.) $$\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x}$$

Ставимо

$$\frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x} = u \qquad \frac{dx}{\cos^2 x} = dv$$

одакле је

$$du = \frac{m\sin^{m-1} x\cos^2 x + (n-2)\sin^{m+1} x}{\cos^{n-1} x}\,dx \qquad v = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

па добијамо

$$J = \frac{\sin^{m+1} x}{\cos^{n-1} x} - \int \frac{m\sin^m x\cos^2 x + (n-2)\sin^{m+2} x}{\cos^n x}\,dx =$$
$$= \frac{\sin^{m+1} x}{\cos^{n-1} x} - m\int \frac{\sin^m x\cos^2 x\,dx}{\cos^n x} - (n-2)\int \frac{\sin^{m+2} x\,dx}{\cos^n x}$$

или ако у првом интегралу сменимо $\cos^2 x$ са $1-\sin^2 x$

$$= \frac{\sin^{m+1} x}{\cos^{n-1} x} - m\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x} + m\int \frac{\sin^{m+2} x\,dx}{\cos^n x} - (n-2)\int \frac{\sin^{m+2} x\,dx}{\cos^n x}$$
$$= \frac{\sin^{m+1} x}{\cos^{n-1} x} - m\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x} + (m-n+2)\int \frac{\sin^{m+2} x\,dx}{\cos^n x}$$

или ако у последњем интегралу сменимо

$$\sin^{m+2} x = \sin^m x\sin^2 x = \sin^m x(1-\cos^2 x)$$

биће

$$J = \frac{\sin^{m+1} x}{\cos^{n-1} x} - m\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x} + (m-n+2)\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x} - (m-n+2)\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^{n-2} x}$$

или најзад, ако прва два интеграла на десној страни пребацимо на леву страну и сведемо,

$$\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^{n-2} x}$$

Примене овог обрасца:

1) $$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^6 x} = \frac{\sin^2 x}{5\cos^5 x} + \frac{3}{5}\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{5\cos^5 x} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{1}{\cos^3 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{5\cos^5 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{5\cos^3 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{5\cos^5 x} + \frac{\sin^2 x}{5\cos^3 x} + \frac{1}{5\cos x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{5\cos^3 x}\left[\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right] + \frac{1}{5\cos x} + C$$

2) $$\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin^4 x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3}\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^4 x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3}\int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)\,dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^4 x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3}\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{3}\int \sin x\,dx$$

$$= \frac{\sin^4 x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{3} =$$

$$= \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3\cos x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3\cos x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{3\cos^3 x} - \frac{2}{3\cos x} + C$$

14. $$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx$$

а) Ако ставимо

$$\frac{\cos^{n-1} x}{\sin^m x} = u \qquad \cos x\,dx = dv$$

одакле је

$$du = \frac{-(n-1)\sin^2 x\cos^{n-2} x - m\cos^n x}{\sin^{m+1} x}\,dx \qquad v = \sin x$$

добијамо

$$J = \frac{\cos^{n-1} x}{\sin^{m-1} x} + \int \frac{(n-1)\sin^2 x\cos^{n-2} x + m\cos^n x}{\sin^m x}\,dx =$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x}{\sin^{m-1} x} + (n-1)\int \frac{\sin^2 x\cos^{n-2} x\,dx}{\sin^m x} + m\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x}$$

или, ако у првом интегралу сменимо $\sin^2 x$ са $1-\cos^2 x$

$$= \frac{\cos^{n-1} x}{\sin^{m-1} x} + (n-1)\int \frac{\cos^{n-2} x\,dx}{\sin^m x} - (n-1)\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x} + m\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x}$$

Ако последња два интеграла пребацимо на леву страну и сведемо, добијамо

$$\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x} = \frac{\cos^{n-1} x}{(n-m)\sin^{m-1} x} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} x\,dx}{\sin^m x}$$

као општи образац

б) Ако ставимо

$$\frac{\cos^n x}{\sin^{m-2}x} = u \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = dv$$

одакле је

$$du = -\frac{n\sin^2 x\cos^{n-1}x + (m-2)\cos^{n+1}x}{\sin^{m-1}x}\,dx \qquad v = -\operatorname{cotg} x = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

добијамо

$$J = -\frac{\cos^{n+1}x}{\sin^{m-1}x} - \int\frac{n\sin^2 x\cos^n x + (m-2)\cos^{n+2}x}{\sin^m x}\,dx =$$

$$= -\frac{\cos^{n+1}x}{\sin^{m-1}x} - n\int\frac{\sin^2 x\cos^n x\,dx}{\sin^m x} - (m-2)\int\frac{\cos^{n+2}x\,dx}{\sin^m x}$$

или ако у последњем интегралу заменимо

$$\cos^{n+2}x = \cos^n x\,(1-\sin^2 x)$$

добијамо

$$= -\frac{\cos^{n+1}x}{\sin^{m-1}x} - n\int\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^{m-2}x} - (m-2)\int\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x} + (m-2)\int\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^{m-2}x}$$

$$= -\frac{\cos^{n+1}x}{\sin^{m-1}x} + (m-n+2)\int\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^{m-2}x} - (m-2)\int\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x}$$

Ако последњи интеграл пребацимо на леву страну и средимо, добијамо

$$\int\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} + \frac{m-n+2}{m-1}\int\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^{m-2}x}$$

као други општи образац.

Примене ових образаца:

1) $$\int\frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{2} + \int\frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{2} + \log\sin x + C$$

2) $$\int\frac{\cos^4 x\,dx}{\sin^2 x} = \frac{\cos^3 x}{2\sin x} + \frac{3}{2}\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x}$$

или ако $\cos^2 x$ заменимо са $1-\sin^2 x$

$$= \frac{\cos^3 x}{2\sin x} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int dx$$

$$= \frac{\cos^3 x}{2\sin x} - \frac{3\cos x}{2\sin x} - \frac{3}{2}x$$

или ако $3\cos x$ заменимо са $3(\sin^2 x + \cos^2 x)\cos x$

$$= \frac{\cos^3 x}{2\sin x} - \frac{3\sin^2 x\cos x}{\sin x} - \frac{3\cos^3 x}{2\sin x} - \frac{3}{2}x$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{\sin x} - \frac{3}{2}\sin x\cos x - \frac{3}{2}x$$

$$= -\left[\frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{3}{2}\sin x\cos x + \frac{3}{2}x\right] + C$$

3) $$\int\frac{\cos^5 x\,dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos^6 x}{2\sin^2 x} - 2\int\frac{\cos^5 x\,dx}{\sin x}$$

Да би одредили овај последњи интеграл, ставимо

$$\cos x = z$$
$$-\sin x\,dx = dz$$

па добијамо

$$\int\frac{\cos^5 x\,dx}{\sin x}=-\int\frac{z^5\,dz}{1-z^2}=\int\frac{z^5\,dz}{z^2-1}=$$

$$=\int\left(z^3+z+\frac{z}{z^2-1}\right)dz=$$

$$=\int z^3\,dz+\int z\,dz-\int\frac{z\,dz}{1-z^2}=$$

$$=\frac{z^4}{4}+\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}\log(1-z^2)=$$

$$=\frac{\cos^4 x}{4}+\frac{\cos^2 x}{2}+\frac{1}{2}\log(1-\cos^2 x)=$$

$$=\frac{\cos^4 x}{4}+\frac{\cos^2 x}{2}+\log\sin x$$

а отуда дати интеграл

$$\int\frac{\cos^5 x\,dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos^6 x}{2\sin^2 x}-\frac{\cos^4 x}{2}-\cos^2 x-2\log\sin x$$

$$=-\frac{\cos^6 x+\sin^2 x\cos^4 x}{2\sin^2 x}-\cos^2 x-2\log\sin x$$

$$=-\frac{\cos^4 x}{2\sin^2 x}-\cos^2 x-2\log\sin x$$

$$=-\left[\frac{\cos^4 x}{2\sin^2 x}+\cos^2 x+2\log\sin x\right]+C$$

4) $$\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^5 x}=-\frac{\cos^3 x}{4\sin^4 x}+\frac{1}{2}\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}=$$

$$=-\frac{\cos^3 x}{4\sin^4 x}-\frac{1}{4\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{\cos^3 x}{4}\left[\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\right]+C$$

15. $$\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$$

а) Ако ставимо

$$\frac{1}{\sin^{m-2}x\cos^n x}=u\qquad\frac{dx}{\sin^2 x}=dv$$

одакле је

$$du=\frac{n\sin^2 x-(m-2)\cos^2 x}{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}\,dx\qquad v=-\operatorname{ctg}x=-\frac{\cos x}{\sin x}$$

добијамо

$$J=-\frac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}+\int\frac{n\sin^2 x-(m-2)\cos^2 x}{\sin^m x\cos^n x}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}+n\int\frac{\sin^2 x\,dx}{\sin^m x\cos^n x}-(m-2)\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^m x\cos^n x}$$

или ако у првом интегралу заменимо $\sin^2 x$ са $1-\cos^2 x$

$$=-\frac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}+n\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}-n\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}-(m-2)\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}$$

$$=-\frac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}+n\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}-(m+n-2)\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}$$

или ако први интеграл пребацимо на леву страну и сведемо, добијамо

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}$$

као први општи образац.

б) Ако ставимо

$$\frac{1}{\sin^m x \cos^{n-2} x} = u \qquad \frac{dx}{\cos^2 x} = dv$$

одакле је

$$du = \frac{(n-2)\sin^2 x - m\cos^2 x}{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}\, dx \qquad v = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

добијамо

$$J = \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} - \int \frac{(n-2)\sin^2 x - m\cos^2 x}{\sin^m x \cos^n x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x} + m\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^m x \cos^n x}$$

или ако у последњем интегралу заменимо $\cos^2 x$ са $1-\sin^2 x$

$$= \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x} + m\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} - m\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}$$

$$= \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} - (m+n-2)\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x} + m\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$$

или ако последњи интеграл пребацимо на леву страну и сведемо, добијамо

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}$$

као други општи образац.

Примене ових образаца:

1)
$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} + \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx}{\sin x \cos x}$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} + \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x}$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} - \log\cos x + \log\sin x$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} + \log\operatorname{tg} x + C$$

2)
$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$$

поновна примена општег обрасца на последњи интеграл даје

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \log\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

3)
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \frac{1}{2\sin x \cos^2 x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$$

$$= \frac{1}{2\sin x\cos^2 x} + \frac{3}{2}\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x\cos x}$$

$$= \frac{1}{2\sin x\cos^2 x} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{\cos x} + \frac{3}{2}\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{2\sin x\cos^2 x} + \frac{3}{2}\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{2}\frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{2\sin x}\left[\frac{1}{\cos^2 x} - 3\right] + \frac{3}{2}\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C$$

4) $$\int\frac{dx}{\sin^6 x\cos^2 x} = -\frac{1}{5\sin^5 x\cos x} + \frac{6}{5}\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$$

поновна примена општег обрасца на последњи интеграл даје

$$= -\frac{1}{5\sin^5 x\cos x} + \frac{6}{5}\left[-\frac{1}{3\sin^3 x\cos x} + \frac{4}{3}\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}\right]$$

$$= -\frac{1}{5\sin^5 x\cos x} - \frac{2}{5}\frac{1}{\sin^3 x\cos x} + \frac{8}{5}\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

поновна примена општег обрасца даје

$$= -\frac{1}{5\sin^5 x\cos x} - \frac{2}{5\sin^3 x\cos x} + \frac{8}{5}\left[-\frac{1}{\sin x\cos x} + 2\int\frac{dx}{\cos^2 x}\right]$$

$$= -\frac{1}{5\sin^5 x\cos x} - \frac{2}{5\sin^3 x\cos x} - \frac{8}{5\sin x\cos x} + \frac{16}{5} tg\,x$$

$$= -\frac{1}{5\cos x}\left[\frac{1}{\sin^5 x} + \frac{2}{\sin^3 x} + \frac{8}{\sin x}\right] + \frac{16}{5} tg\,x + C$$

16. $$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$$

а) Ставимо

$$\cos^{n-1}x = u \qquad \sin^m x\cos x\,dx = dv$$

одакле је

$$du = -(n-1)\cos^{n-2}x\sin x\,dx \qquad v = \frac{\sin^{m+1}x}{m+1}$$

па добијамо

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx$$

и то је први општи образац.

б) Ако у овом обрасцу, у последњем интегралу заменимо

$$\sin^{m+2}x = \sin^m x(1-\cos^2 x)$$

добијамо

$$= \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx - \frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x\cos^n x\,dx$$

или ако последњи интеграл пребацимо на леву страну и средимо, добијамо

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$$

и то је други општи образац.

в) Ако ставимо

$$\sin^{m-1}x = u \qquad \sin x\cos^n x\,dx = dv$$

одакле је

$$du = (m-1)\sin^{m-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}$$

добијамо

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x\cos^{n+2}x\,dx$$

као трећи општи образац.

г) Ако у последњем интегралу заменимо

$$\cos^{n+2}x = \cos^n x(1-\sin^2 x)$$

добијамо

$$= -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x\cos^n x\,dx - \frac{m-1}{n+1}\int \sin^m x\cos^n x\,dx$$

или ако последњи интеграл пребацимо на леву страну и сведемо

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^n x\,dx$$

- четврти општи образац.

Примене ових образаца:

1)
$$\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = -\frac{\sin^2 x\cos^3 x}{5} + \frac{2}{5}\int \sin x\cos^2 x\,dx$$
$$= -\frac{\sin^2 x\cos^3 x}{5} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cos^3 x$$
$$= -\frac{\cos^3 x}{5}\left(\sin^2 x + \frac{2}{3}\right) + C$$

2)
$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6} + \frac{1}{2}\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$$

Поновна примена општег обрасца на последњи интеграл даје

$$= \frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{1}{4}\int \sin^2 x\,dx\right]$$
$$= \frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6} + \frac{\sin^3 x\cos x}{8} + \frac{1}{8}\int \sin^2 x\,dx$$

или, ако последњи интеграл заменимо његовом вредношћу нађеном у зад. 9 овог одељка

$$= \frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6} + \frac{\sin^3 x\cos x}{8} + \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x\right]$$
$$= \frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6} + \frac{\sin^3 x\cos x}{8} - \frac{\sin x\cos x}{16} + \frac{1}{16}x$$
$$= \frac{\sin^3 x\cos x}{2}\left(\frac{\cos^2 x}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{16}(\sin x\cos x - x) + C$$

3)
$$\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx = \frac{\sin^5 x\cos^2 x}{7} + \frac{2}{7}\int \sin^4 x\cos x\,dx$$
$$= \frac{\sin^5 x\cos^2 x}{7} + \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\sin^5 x =$$
$$= \frac{\sin^5 x}{7}\left(\cos^2 x + \frac{2}{5}\right) + C$$

4) $\int \sin^5 x \cos^5 x \, dx = \frac{\sin^6 x \cos^4 x}{10} + \frac{2}{5}\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx$

поновна примена општег обрасца даје

$$= \frac{\sin^6 x \cos^4 x}{10} + \frac{2}{5}\left[\frac{\sin^6 x \cos^2 x}{8} + \frac{1}{4}\int \sin^5 x \cos x \, dx\right]$$

$$= \frac{\sin^6 x \cos^4 x}{10} + \frac{\sin^6 x \cos^2 x}{20} + \frac{1}{10}\cdot\frac{\sin^6 x}{6}$$

$$= \frac{\sin^6 x}{10}\left[\cos^4 x + \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{1}{6}\right] + C$$

17. $\int \mathrm{tg}^m x \, dx$

Ако се у трећем општем обрасцу претходнога задатка 16. замени n са $-m$ добија се општи образац

$$\int \mathrm{tg}^m x \, dx = \frac{1}{m-1}\mathrm{tg}^{m-1} x - \int \mathrm{tg}^{m-2} x \, dx$$

Примене:

за $m=2$

$$\int \mathrm{tg}^2 x \, dx = \mathrm{tg}\, x - \int dx =$$
$$= \mathrm{tg}\, x - x + C$$

за $m=3$

$$\int \mathrm{tg}^3 x \, dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \int \mathrm{tg}\, x \, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \log \cos x + C$$

за $m=4$

$$\int \mathrm{tg}^4 x \, dx = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \int \mathrm{tg}^2 x \, dx =$$
$$= \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\, x + x + C$$

и т. д.

18. $\int \mathrm{cotg}^n x \, dx$

Ако се у првом општем обрасцу претходног задатка 16. замени m са $-n$ добија се општи образац

$$\int \mathrm{cotg}^n x \, dx = -\frac{1}{n-1}\mathrm{cotg}^{n-1} x - \int \mathrm{cotg}^{n-2} x \, dx$$

Примене:

за $n=2$

$$\int \mathrm{cotg}^2 x \, dx = -\mathrm{cotg}\, x - \int dx =$$
$$= -\mathrm{cotg}\, x - x =$$
$$= -(\mathrm{cotg}\, x + x) + C$$

за $n=3$

$$\int \mathrm{cotg}^3 x \, dx = -\frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2 x - \int \mathrm{cotg}\, x \, dx$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2 x - \log \sin x$$
$$= -\left(\frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2 x + \log \sin x\right) + C$$

за $n=4$.

$$\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$$
$$= -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x$$
$$= -\left(\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x\right) + C$$

19. $$\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$$

Ставимо

$$x^n = u \qquad \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}} = dv$$

одакле је

$$du = n x^{n-1} dx \qquad v = \int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}}$$

па добијамо

$$J = \frac{2x^n}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}} - \frac{2n}{b}\int x^{n-1}(a+bx)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \frac{2x^n}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}} - \frac{2n}{b}\int \frac{x^{n-1}(a+bx)\,dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{2x^n}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}} - \frac{2an}{b}\int \frac{x^{n-1}dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}} - 2n\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$$

Ако последњи интеграл пребацимо на леву страну и сведемо, добијамо

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x^n(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{(2n+1)\cdot b} - \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-1}dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$$

као општи образац.

Примене:

за $n=1$

$$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{3b} - \frac{2a}{3b}\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{2x(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{3b} - \frac{2a}{3b}\cdot\frac{2}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2(a+bx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{x}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right] + C$$

за $n=2$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x^2(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{5b} - \frac{4a}{5b}\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{2x^2(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{5b} - \frac{4a}{5b}\left[\frac{2x(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{3b} - \frac{4a(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{3b^2}\right]$$
$$= \frac{2x^2(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{5b} - \frac{8ax(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{15b^2} + \frac{16a^2(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{15b^3}$$
$$= 2(a+bx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{x^2}{5b} - \frac{4}{5\cdot3}\frac{ax}{b^2} + \frac{4\cdot2}{5\cdot3}\frac{a^2}{b^3}\right] + C$$

за $n=3$

$$\int \frac{x^3 dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x^3(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{7b} - \frac{6a}{7b}\int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{2x^3(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{7b} - \frac{6a}{7b}\left[\frac{2x^2(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{5b} - \frac{4\cdot2\cdot ax(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{5\cdot3\cdot b^2} + \frac{4\cdot2\cdot2a^2(a+bx)^{\frac{1}{2}}}{5\cdot3\,b^3}\right]$$

$$= 2(a+bx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{x^3}{7b} - \frac{6ax^2}{7\cdot 5 b^2} + \frac{6\cdot 4 a^2 x}{7\cdot 5\cdot 3 b^3} - \frac{6\cdot 4\cdot 2 a^3}{7\cdot 5\cdot 3\, b^4}\right] + C$$

и т. д.

20. $$\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} dx$$

(где је n непаран број.)

Ставимо

$$(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} = u \qquad dx = dv$$

одакле је

$$du = -nx(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}-1}dx \qquad v = x$$

па добијамо

$$J = x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} + n\int x^2(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

$$= x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} + n\int [a^2-(a^2-x^2)](a^2-x^2)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

$$= x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} + na^2\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}-1}dx - n\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}dx$$

Ако последњи интеграл пребацимо на леву страну и сведемо, добијамо

$$\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}dx = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

као општи образац.

Примене:

за $n=1$

$$\int (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{a^2}{2}\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

за $n=3$

$$\int (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3a^2}{4}\int (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3a^2}{4}\left[\frac{x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]$$

$$= \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3a^2x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{8} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

и т. д.

21. $$\int x^n \cos x\, dx$$

Ставимо

$$x^n = u \qquad \cos x\, dx = dv$$

одакле је

$$du = nx^{n-1}dx \qquad v = \sin x$$

па добијамо

$$J = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\, dx$$

Ако сада ставимо

$$x^{n-1} = u \qquad \sin x\, dx = dv$$

одакле је

$$du = (n-1)x^{n-2}dx \qquad v = -\cos x$$

добијамо

$$\int x^{n-1}\sin x\, dx = -x^{n-1}\cos x + (n-1)\int x^{n-2}\cos x\, dx$$

па је дати интеграл

$$\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1)\int x^{n-2} \cos x\,dx$$

Примене:

за $n=1$

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x + \cos x + C$$

за $n=2$

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx$$
$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C$$

за $n=3$

$$\int x^3 \cos x\,dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6\int x\cos x\,dx =$$
$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x\sin x - 6\cos x + C$$

22. $\int x^n \sin x\,dx$

Ставимо

$$x^n = u \qquad \sin x\,dx = dv$$

одакле је

$$du = n x^{n-1}\,dx \qquad v = -\cos x$$

па је

$$I = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$$

Ставимо сада

$$x^{n-1} = u \qquad \cos x\,dx = dv$$

одакле је

$$du = (n-1)x^{n-2}\,dx \qquad v = \sin x$$

па је

$$\int x^{n-1}\cos x\,dx = x^{n-1}\sin x - (n-1)\int x^{n-2}\sin x\,dx$$

и према томе дати интеграл

$$\int x^n \sin x\,dx = -x^n\cos x + n x^{n-1}\sin x - n(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,dx$$

Примене:

за $n=1$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

за $n=2$

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

за $n=3$

$$\int x^3\sin x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x\sin x\,dx$$
$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C$$

Одређени интеграли

Особине одређених интеграла.

Казано је раније да ако се неодређени интеграл

$$\int f(x)\,dx$$

означи са $F(x)$, под одређеним интегралом разуме се

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Из овакве дефиниције непосредно излазе елементарне особине одређених интеграла и то:

1. Особина:

Ако се пермутују међу собом интегралне границе, интеграл не мења вредност, а мења знак.

2. Особина:

Ако је

$$c_1,\ c_2,\ c_3\ \dots\ c_n$$

ма какав низ узастопаних бројева који се налазе између a и b, онда се може написати

$$\int_a^b = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \int_{c_2}^{c_3} + \dots + \int_{c_n}^{b}$$

3. Особина:

Ако је функција под интегралним знаком парна т.ј. таква да је

$$f(-x) = f(x)$$

биће увек

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

јер се увек може написати

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

Ако у првом интегралу извршимо смену

$$x = -t \quad dx = -dt$$

онда је

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt = -\int_a^0 f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt$$

или ако сад у интегралу извршимо смену $x = t$, заменом у горњем обрасцу добија се

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Тако на пример:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^{\infty} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

4. Особина:

Ако је функција под интегралним знаком непарна, онда је

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Доказ је исти као код 3. особине.

5. Особина:

Ако се упореде међу собом два интеграла

$$J_1 = \int_a^b f_1(x)\,dx$$

$$I_2 = \int_a^b f_2(x)\,dx$$

где су функције f_1 и f_2 непрекидне у размаку (a, b), онда, ако је за све вредности x-а у том размаку непрестано

$$f_1(x) < f_2(x)$$

мора бити и

$$I_1 < I_2$$

јер је

$$I_2 - I_1 = \int_a^b [f_2 - f_1]\,dx$$

Ако уочимо интеграл

$$\int_a^x [f_2 - f_1]\,dx$$

чији је извод функција

$$f_2(x) - f_1(x)$$

онда, пошто је тај извод због неједначине

$$f_2(x) > f_1(x)$$

позитиван за све вредности x-а између a и b, то ће и сам интеграл бити позитиван за све такве вредности x-а па дакле и за вредност $x = b$. Према томе је

$$\int_a^b [f_2 - f_1]\,dx > 0$$

или

$$I_2 > I_1$$

као што је требало доказати.

Као непосредна последица ове особине изводи се ово правило које се врло често употребљује за одређивање приближних вредности интеграла: Ако је дат интеграл

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

и ако су $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ такве две функције x-а коначне и непрекидне у размаку (a, b) да је у том размаку непрестано

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$$

биће

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < I < \int_a^b \psi(x)\,dx$$

Ова је теорема од врло велике користи у случајевима кад је интеграл I тешко израчунати, па му се онда тражи или приближна вредност или бар границе између којих се може тврдити да лежи његова вредност. Тако на пример

$$J=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}$$

Пошто је за све вредности x-а између 0 и $\frac{1}{2}$ непрестано

$$1\le \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

према предњој теореми биће

$$\int_0^{\frac{1}{2}}dx \le J < \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

или

$$[x]_0^{\frac{1}{2}} < J < [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}}$$

или

$$\frac{1}{2}<J<\frac{\pi}{6}$$

или најзад

$$0,5<J<0,525$$

6. Особина:

Ако је дат интеграл

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

где су функције f и φ коначне и непрекидне у размаку (a, b) и ако функција φ задржава непрестано исти знак у том размаку, за који знак се може увек претпоставити да је $+$, јер ако то не би био случај помножили би цео интеграл са -1, онда ако се са M и N означе највећа и најмања вредност које добија функција f у том размаку, биће

$$J=\Theta\int_a^b\varphi(x)\,dx$$

где Θ представља један број који се налази између M и N. Јер пошто је

$$N\varphi(x)\le f(x)\varphi(x)\le M\varphi(x)$$

према 5. особини биће

$$N\int_a^b\varphi(x)\,dx<\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx<M\int_a^b\varphi(x)\,dx$$

из чега непосредно излази поменута 6. особина.

И ова се теорема врло често употребљује како за доказе разних теорема у интегралном рачуну, тако и онда кад је потребно и-нати приближан појам о величини интеграла. Тако на пример ако је дат интеграл

$$I = \int f(x)\sin x\,dx$$

где је $f(x)$ ма каква функција коначна и непрекидна у интервалу од 0 до π. Ако се узме овде да је

$$\varphi(x) = \sin x$$

биће

$$M = 1 \qquad N = 0$$

према томе ће бити

$$I = \theta \int_0^\pi f(x)\,dx$$

где је θ известан број који се налази између 0 и 1.

Разне вредности одређених интеграла.

Одређени интеграли у опште могу имати или коначне и одређене или коначне и неодређене или бескрајне вредности, што зависи с једне стране од функције под интегралним знаком, а с друге стране од интегралних граница. Ми ћемо навести неколико примера да разликујемо та три случаја.

1. Случај

Вредност одређеног интеграла је коначна и одређена.

Очевидно је да ће то бити кад је функција под интегралним знаком непрестано коначна и одређена и ако је сам размак коначан и одређен. На пример

$$\int_0^1 x^m dx$$

има коначну и одређену вредност

$$\frac{1}{m+1}$$

Дешава се да интеграл остаје коначан и одређен чак и онда када је која од граница бесконачна, или кад су обе бесконачне или кад функција под интегралним знаком постаје бесконачна за вредности x-а између интегралних граница или за саме границе. На пример

1. Интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

има коначну и одређену вредност и ако је једна од граница бескрајна.

2. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

има коначну и одређену вредност π поред свега тога што су обе границе бесконачне.

3. Интеграл

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{4}-1\right]$$

има коначну и одређену вредност поред свега што је функција под интегралним знаком бескрајна за $x=0$ вредности која се налази између интегралних граница.

Постоје више општих правила по којима се унапред може познати може ли дати интеграл, поред тога што су му границе бесконачне или сама функција под интегралним знаком бесконачна, бити коначан и одређен. Као пример таквих правила навешћемо ово: Нека је дат интеграл

$$J=\int_a^\infty f(x)\,dx$$

у коме је дакле једна граница бесконачна. Ако је могуће наћи такав један позитиван и од јединице већи број k да производ

$$x^k\cdot f(x)$$

никако не постаје бескрајан док x варира од a до ∞, интеграл ће J сигурно бити коначан, јер ако тај производ остаје коначан, онда је извесно да се може наћи такав један коначан број M да за све вредности x-а што се налазе од 0 до ∞ буде непрестано

$$x^k\cdot f(x)<M$$

одакле је

$$f(x)<\frac{M}{x^k}$$

и онда према теореми показаној мало пре овога биће

$$J<\int_a^\infty \frac{M}{x^k}\,dx \qquad 1.$$

али је

$$\int_a^\infty \frac{M}{x^k}\,dx = M\int_a^\infty x^{-k}\,dx = M\left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_a^\infty =$$

$$=\frac{M}{1-k}\left(x^{1-k}-a^{1-k}\right) \quad \text{за } x=\infty$$

Пошто је по претпоставци $k>1$, то је

$$x^{1-k}=\frac{1}{x^{k-1}}$$

и тежи нули. Према томе интеграл има за вредност

$$\frac{Ma^{1-k}}{1-k}$$

што према неједначини 1. значи да интеграл J остаје заиста коначан.

2. Случај

Вредност одређеног интеграла је коначна али неодређена.

Дешава се да функција под интегралним знаком постаје неодређена било за какву вредност између интегралних граница било за саму интегралну границу. У том случају интеграл ће бити неодређен поред свега тога што може бити коначан. На пример интеграл

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = -[\cos x]_0^\infty = 1-\cos\infty$$

поред свега тога што је коначан и што се зна да мора лежати између -1 и $+1$ неодређен је.

Међутим ипак дешава се у извесним специјалним случајевима да поред свега тога што функција под интегралним знаком остаје неодређена у интегралним границама, интеграл је ипак коначан и одређен. Као пример те врсте навешћемо интеграл

$$\int_0^\infty \sin^2 x\,dx$$

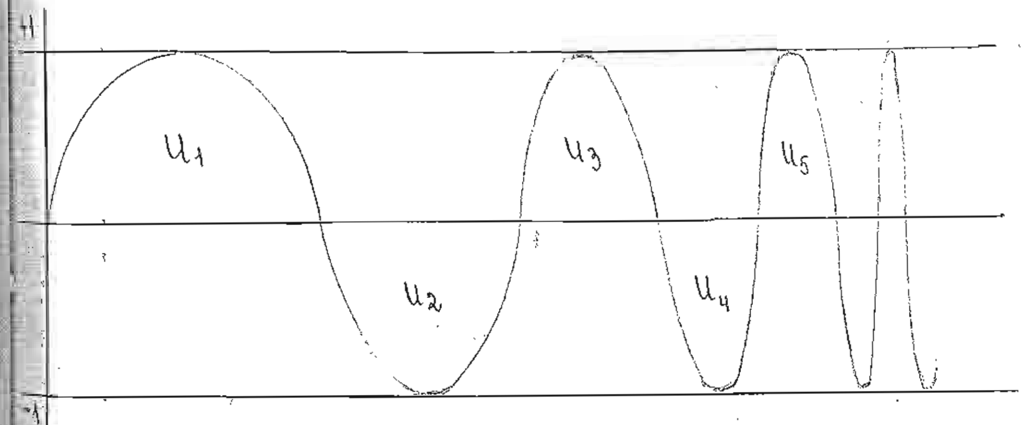
где је функција

$$\sin^2 x$$

под интегралним знаком потпуно неодређена за $x=\infty$. Међутим лако је уверити се да интеграл има потпуно одређену вредност. Ако конструишемо криву

$$y=\sin^2 x$$

она ће имати овакав облик:



Површина криве састоји се из позитивних и негативних површина тако да је

$$P = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \cdots \qquad 2.$$

Свака од ових тања је од претходне по апсолутној вредности тако да је

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5 > u_6 > \cdots$$

Према томе ред 2. представља један наизменични ред који опада. За такве редове ми смо доказали у теорији редова да су конвергентни, па према томе и сам је интеграл J коначан и одређен.

Тако се исто доказује и за

$$\int_0^\infty \cos^2 x \, dx$$

Оба су ова интеграла коначни и одређени и за њих се доказује да имају заједничку вредност

$$J = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Они се називају Фреснеловим интегралима и играју важну улогу у оптици.

3. Случај

Вредност одређеног интеграла је бескрајна.

Такав се случај у опште дешава кад су или интегралне границе бескрајне, једна или обадве, или кад функција под интегралним знаком постаје бескрајна у размаку интеграције. На пример:

$$\int_0^\infty x^m dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^\infty = \infty$$

$$\int_0^\infty e^x dx = \left[e^x\right]_0^\infty = \infty$$

Дешава се, као што је показано у првом случају, да је интеграл, поред свега тога што су му границе бесконачне или што је функција у тим границама бесконачна, ипак коначан. Као што за тај случај постоје више правила помоћу којих се распознаје да ли се с таквим случајевима има посла, тако исто постоје правила помоћу којих се може распознати да је интеграл такве врсте одиста бескрајан. Једно такво правило било би на пример ово: Ако је дат интеграл

$$J=\int_a^\infty f(x)dx$$

и ако је могуће наћи такав један број

$$k \le 1$$

да производ

$$x^k \cdot f(x)$$

не остаје непрестано коначан у размаку интеграције, интеграл ће извесно бити бескрајан, јер у таквом случају увек је могуће наћи такав један коначан број M, да за све вредности x-а између граница буде

$$x^k \cdot f(x) > M$$

или

$$f(x) > \frac{M}{x^k}$$

према томе

$$J > M\int_0^\infty \frac{dx}{x^k}$$

а пошто је

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^k} = \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_0^\infty$$

то ако је $k<1$ интеграл ће бити бескрајан; ако је $k=1$ горњи интеграл постаје

$$J > M\int_0^\infty \frac{dx}{x} = M\left[\log x\right]_0^\infty = \infty$$

Приметимо још и то да се често пута упоређивањем датог интеграла са каквим већ познатим интегралом може познати да ли ће дати интеграл бити коначан или бескрајан.

Методе за израчунавање одређених интеграла.

1. Метода

Помоћу неодређених интеграла

Ова непосредна метода састоји се у томе да се најпре нађе неодређени интеграл, да се у њему смени најпре горња затим доња граница и резултати одузму. На пример

$$\int_0^1 x^m dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

Ако се при израчунавању неодређеног интеграла мора извршити каква смена на пр.

$$x=\varphi(t)$$

вала нам поменути да тада вала променити и интеграционе границе које одговарају променљивој t. Тада вала образовати овакву таблицу

x	a	b
t	a'	b'

где се у првом реду уписују старе интеграционе границе н. пр. a и b, а у другом вредности t што одговарају обрасцу

$$x=\varphi(t)$$

На место првог интеграла имаћемо

$$\int_{a'}^{b'} F(t)\,dt$$

који према самом начину на који смо га добили мора бити једнак датом интегралу. Н. пр. ако се тражи

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx$$

Ако би хтели извршити смену

$$\cos x = t$$

одакле је

$$-\sin x\,dx = dt$$

па дакле

$$\operatorname{tg} x\, dx = -\frac{dt}{t}$$

неодређени интеграл постао би

$$-\int \frac{dt}{t} = -\log t$$

Веза између старих и нових граница је

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Према томе тражени интеграл биће

$$J = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{t} = -\left[\log t\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\log 2$$

Ова се непосредна метода може примењивати само онда кад је могуће наћи неодређени интеграл. Међутим то је немогуће у већини случајева и онда се примењују друге методе.

Примери:

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arc tg} x\right]_0^\infty = \operatorname{arc tg} \infty - \operatorname{arc tg} 0 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

2. $$\int_0^1 \frac{1-x^m}{1-x}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^m}{1-x}\,dx = \int_0^1 (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})\,dx =$$

$$= \left[\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^m}{m}\right]_0^1$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$$

3. $$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^\infty = \frac{1}{a}$$

4. $$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx$$

Да би одредили неодређени интеграл ставимо

$$x^n = u \qquad e^{-ax}\,dx = dv$$

одакле је

$$du = n x^{n-1}\,dx \qquad v = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

па је

$$\int x^n e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}x^n e^{-ax} + \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{-ax}\,dx$$

Како је први сабирак на десној страни нула и за $x=0$ и за $x=\infty$, то је

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx=\frac{n}{a}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}dx$$

Узимајући узастопне вредности за n добијамо: за $n=1$

$$\int_0^\infty x e^{-ax}dx=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}dx=\left[-\frac{1}{a^2}e^{-ax}\right]_0^\infty=\frac{1}{a^2}$$

за $n=2$

$$\int_0^\infty x^2e^{-ax}dx=\frac{2}{a}\int_0^\infty xe^{-ax}dx=\frac{1\cdot2}{a^3}$$

за $n=3$

$$\int_0^\infty x^3e^{-ax}dx=\frac{3}{a}\int_0^\infty x^2e^{-ax}dx=\frac{1\cdot2\cdot3}{a^4}$$

и т. д. У опште

$$\int_0^\infty x^ne^{-ax}dx=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{a^{n+1}}$$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{\sqrt2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int_{-1}^{\frac{\sqrt2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\arcsin x\right]_{-1}^{\frac{\sqrt2}{2}}=\arcsin\frac{\sqrt2}{2}-\arcsin(-1)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

6. $\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{a^2-x^2}$

Неодређени интеграл је

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log(a+x)-\log(a-x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}$$

и према томе одређени интеграл је

$$\int_0^a\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left[\log\frac{a+x}{a-x}\right]_0^a=\frac{1}{2a}\left[\log\infty-\log1\right]$$

$$=\infty$$

7. $\displaystyle\int_0^a\frac{a^3-x^3}{a-x}dx$

$$\int_0^a\frac{a^3-x^3}{a-x}dx=\int_0^a\left[a^2+ax+x^2\right]dx=$$

$$=\left[a^2x+\frac{ax^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=a^3+\frac{a^3}{2}+\frac{a^3}{3}$$

$$=\frac{11a^3}{6}$$

8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$

$$J = \frac{1}{a}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{a}$$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$

$$J = \left[\log \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \log \operatorname{tg} 0 =$$

$$= \log 1 - \log 0 = 0 - (-\infty) = \infty$$

10. $\int_{-1}^{+1} a^{-mx}\,dx$

Да би добили неодређени интеграл

$$\int a^{-mx}\,dx$$

ставимо

$$-mx = z$$

одакле је

$$-m\,dx = dz$$

па добијамо

$$\int a^{-mx}\,dx = -\frac{1}{m}\int a^z\,dz = -\frac{a^z}{m\log a} = -\frac{a^{-mx}}{m\log a}$$

и према томе

$$J = -\frac{1}{m\log a}\left[a^{-mx}\right]_{-1}^{+1} = -\frac{1}{m\log a}\left(a^{-m} - a^{m}\right)$$

$$= \frac{a^m - a^{-m}}{m\log a}$$

11. $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$

Да би добили неодређени интеграл ставимо

$$x = u \qquad \sin x\,dx = dv$$

одакле је

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

па је

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x$$

и према томе тражени интеграл

$$J = \left[-x\cos x + \sin x\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \left[-\pi\cdot(-1) + 0\right] - \left[\pi\cdot(-1) + 0\right] =$$

$$= 2\pi$$

12. $\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$

Неодређени интеграл је

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Први од интеграла на десној страни има за вредност

$$\arcsin\frac{x}{a}$$

да би добили други, ставимо

$$a^2-x^2=z^2$$

одакле је

$$-x\,dx=z\,dz$$

па је

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int dz=-z=-\sqrt{a^2-x^2}$$

Према томе неодређени интеграл има за вредност

$$a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$$

а одређени

$$J=\left[a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a=$$

$$=\left[a\cdot\arcsin 1-0\right]-\left[a\cdot\arcsin 0-a\right]$$

$$=a\cdot\frac{\pi}{2}+a$$

$$=a\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

13. $$\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Неодређени интеграл је

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}-\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n}$$

ако у другом интегралу на десној страни ставимо

$$x=u\qquad\frac{x\,dx}{(1+x^2)^n}=dv$$

одакле је

$$du=dx\qquad v=\frac{1}{(2-2n)(1+x^2)^{n-1}}$$

биће

$$\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n}=-\frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

и према томе

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}+\frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}}-\frac{1}{2n-2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$=\frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Први сабирак на десној страни је нула и за $x=0$ и за $x=\infty$, па отуда

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Стављајући у овом обрасцу узастопне вредности за n, добијамо за $n=2$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

за $n=3$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

за $n=4$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{5}{6}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}$$

и т. д. У опште

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

14. $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Имамо

$$J = \left[\operatorname{tg} x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1-1 = -2$$

15. $$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\, dx$$

Да би добили неодређени интеграл ставимо

$$\cos bx = u \qquad e^{-ax}dx = dv$$

одакле је

$$du = -b\sin bx\, dx \qquad v = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

па према томе

$$\int e^{-ax}\cos bx\, dx = -\frac{1}{a}\cos bx\, e^{-ax} - \frac{b}{a}\int \sin bx\, e^{-ax}dx$$

Ставимо сада у последњем интегралу

$$\sin bx = u \qquad e^{-ax}dx = dv$$

одакле је

$$du = b\cos bx\, dx \qquad v = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

па је

$$\int e^{-ax}\cos bx\, dx = -\frac{1}{a}\cos bx\, e^{-ax} - \frac{b}{a}\left[-\frac{1}{a}\sin bx\, e^{-ax} + \frac{b}{a}\int \cos bx\, e^{-ax}dx\right]$$

$$= -\frac{1}{a}\cos bx\, e^{-ax} + \frac{b}{a^2}\sin bx\, e^{-ax} - \frac{b^2}{a^2}\int \cos bx\, e^{-ax}dx$$

Ако последњи интеграл пребацимо на леву страну и средимо, добијамо

$$\int e^{-ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx - a\cos bx)$$

па је према томе тражени интеграл

$$J = \left[\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx - a\cos bx)\right]_0^\infty$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}$$

16. $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$

Слично претходном задатку добили би

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\cos bx + a\sin bx)$$

и

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

2. Метода

Метода диференцијалења под интегралним знаком.

Уочимо интеграл

$$J(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

где функција под интегралним знаком садржи један променљиви параметар α. Пошто при увођењу граница у рачун нестаје променљиве x, то ће интеграл бити функција само параметра α. Ако пустимо да се α промени за $d\alpha$, добија се

$$J + dJ = \int_a^b f(x,\alpha+d\alpha)\,dx$$

одакле је

$$dJ = \int_a^b f(x,\alpha+d\alpha)\,dx - \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

Поделимо обадве стране са $d\alpha$. Пошто интеграциона променљива x не зависи од α то $d\alpha$ можемо извући пред интегрални знак, па ће бити

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b \frac{f(x,\alpha+d\alpha)-f(x,\alpha)}{d\alpha}\cdot dx$$

или

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot dx$$

У овом обрасцу оличено је ово правило за диференцијаљење једног интеграла по једном параметру: Извод интеграла по параметру добија се кад се функција под интегралним знаком смени њеним изводом по том параметру.

На том правилу је основан метода одређених интеграла која се састоји у овоме: треба поћи од каквог познатог интеграла на пр.

$$\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

у коме функција под интегралним знаком садржи какав параметар. Ако је вредност тога интеграла $F(\alpha)$ диференцијаљењем тога интеграла по α добијамо низ образаца

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx = F'(\alpha)$$

$$\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\,dx = F''(\alpha)$$

$$\int_a^b \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3}\,dx = F'''(\alpha)$$

и т. д. Сваки од ових интеграла на десној страни представља по један нов интеграл који ће на тај начин помоћу ових образаца бити израчунат.

Н. пр. пођимо од интеграла

$$\int_0^\infty e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^\infty = \frac{1}{n}$$

узастопним диференцијаљењем тог обрасца по n добијамо низ образаца

$$-\int_0^\infty x e^{-nx}\,dx = -\frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-nx}\,dx = \frac{2}{n^3}$$

$$-\int_0^\infty x^3 e^{-nx}\, dx = -\frac{2\cdot 3}{n^4}$$

и т. д. одакле непосредно образац

$$\int_0^\infty x^m e^{-nx}\, dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{n^{m+1}}$$

Примедба: У применама ове методе ваља добро обратити пажњу на једну околност која може учинити да резултат буде погрешан. Може се десити да после извесног броја диференцијалења по параметру појави под интегралним знаком једна функција која више није коначна и одређена у интегралним границама. Образац до кога нас је та метода довела може бити нетачан. Такав би н. пр. био случај код

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos x \cdot dx}{1+\alpha x^2}$$

При првом диференцијалењу по параметру појавиће се x^2.

3. Метода

Метода интеграције под интегралним знаком.

Пошто су диференцијалење и интеграљење две реципрочне операције, то ћемо имати правило слично ономе које смо имали при диференцијалењу т. ј. ако је

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\, dx$$

онда се

$$\int_m^n I(\alpha)\, d\alpha$$

добија кад се у предњем интегралу смени функција $f(x,\alpha)$ одређеним интегралом

$$\int_m^n f(x,\alpha)\, d\alpha$$

Ако је сад овај интеграл такав да га

је лако израчунати, то ако се његова вредност означи са $\varphi(x)$ имаћемо

$$\int_m^n J(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

који је нов и разликује се од оног од кога смо пошли.

На томе је основана метода одредбе одређених интеграла интеграцијом функције под интегралним знаком. Н. пр. пођимо од интеграла

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$$

Према горњем правилу је

$$\int_m^n \frac{d\alpha}{1+\alpha} = \log\frac{n+1}{m+1}$$

добићемо ако у првобитном интегралу сменимо

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x}$$

па је

$$\int_m^n e^{\alpha\log x}\,d\alpha = \left[\frac{e^{\alpha\log x}}{\log x}\right]_m^n = \left[\frac{x^\alpha}{\log x}\right]_m^n = \frac{x^n - x^m}{\log x}$$

Отуда образац

$$\int_0^1 \frac{x^n - x^m}{\log x}\,dx = \log\frac{n+1}{m+1}$$

дакле нов интегрални образац.

Приближно израчунавање одређених интеграла

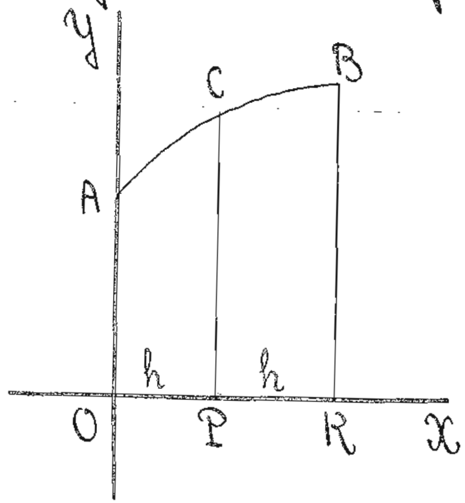
Дешава се да је дати интеграл или немогуће израчунати са апсолутном тачношћу или ако је то могуће врло је заметан посао или напослетку да није ни потребна апсолутна тачност. У таквом се случају употребљују методе за приближно израчунавање интеграла. Таквих метода има разноврсних. Једне су опште и претпостављају за функцију под интегралним знаком само континуалност, друге су специјалне и примењују се кад функција под интегралним знаком има специјалан облик. Једна од најпростијих и најподеснијих јесте:

Симпсонова метода.

Та се метода састоји у овоме: Претпоставимо да има да се израчуна приближно интеграл

$$J=\int_a^b f(x)\,dx$$

где је доња граница нула. Ако замислимо конструисану линију $y=f(x)$ торни интеграл представља површину ограничену линијом криве, x-осовином y-осовином и крајњом ординатом што одговара апсциси b. Поделимо размак OK на два једнака дела OP и PK чија заједничка величина нека је h. Покушајмо кроз тачке



A, B и C тога лука повући параболу

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \qquad 1.$$

Па би парабола пролазила кроз три тачке лука а у осталим тачкама би се разликовала од њега али не много. Коефицијенти α, β, γ добиће се ако изразимо да парабола 1. пролази кроз тачке $A(0, y_0)$, $C(h, y_1)$, $B(2h, y_2)$; тиме добијамо систем једначина

$$y_0 = \alpha$$

$$y_1 = \alpha + \beta h + \gamma h^2$$

$$y_2 = \alpha + 2\beta h + 4\gamma h^2$$

Из ових једначина се добија

$$y_1 - y_0 = \beta h + \gamma h^2$$

$$y_2 - y_0 = 2\beta h + 4\gamma h^2$$

Ако прву помножимо са 2 па их одузмемо, добијамо

$$2y_1 - y_2 - y_0 = -2\gamma h^2$$

одакле је

$$\gamma = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}$$

Заменом добијамо

$$y_1 - y_0 = \beta h + \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}$$

а одатле

$$\beta = \frac{4y_1 - 3y_0 - y_2}{2h}$$

Претпоставивши да смо дали ове вредности коефицијентима α, β, γ површина ограничена луком параболе 1., x и y осовином и ординатом y_2 имаће за вредност

$$P = \int_0^{2h} (\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, dx =$$

$$= \alpha [x]_0^{2h} + \frac{\beta}{2} [x^2]_0^{2h} + \frac{\gamma}{3} [x^3]_0^{2h} =$$

$$= 2\alpha h + 2\beta h^2 + \frac{8}{3}\gamma h^3$$

Ако сад сменимо α, β, γ њиховим вредностима, добија се

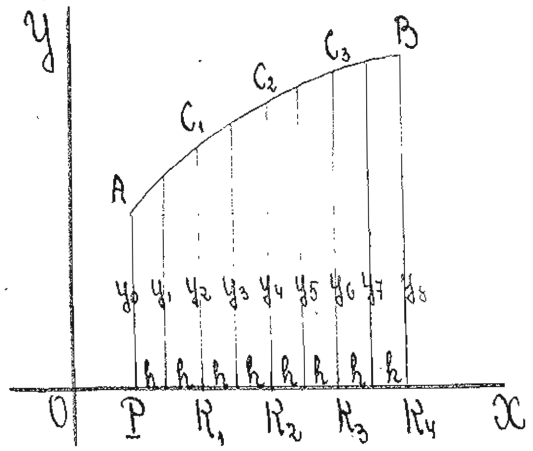
$$P = 2y_0 h + 4hy_1 - 3hy_0 - hy_2 + \frac{4hy_0}{3} - \frac{8hy_1}{3} + \frac{4hy_2}{3}$$

или ако сведемо

$$P = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] \qquad 2.$$

Што би био образац којим се може приближно израчунати тражена повр-

шина у случају кад је она подељена
само на два једнака дела и кад је
поред тога једна од крајњих орди-
ната на самој ординатној осовини.
Међутим приметимо да ће тај обра-
зац важити и кад се једна ордина-
та не поклапа са ординатном осо-
вином. То се види и из тога што у
обрасцу фигурише само величина
те ординате, па према томе обра-
зац важи кад померимо и десно или
лево У-осовину остављајући при том
Х-осовину непромењену. Та нам при-
медба даје могућност да тражену
површину поделимо не само на два
дела већ на колико се хоће паран



број делова. Прет-
поставимо да је
то и учињено са
датом површином
онда очевидно на
сваки пар тих де-
лова можемо при-
менити образац 2

целокупна површина биће равна збиру
таквих парова и очевидно је да ће
резултат бити у толико тачнији у
колико су ситнији делови на које
смо површину поделили. На тај начин
имаћемо површине:

$$AC_1K_1P = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

$$C_1C_2K_2K_1 = \frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$$

$$C_2C_3K_3K_2 = \frac{h}{3}(y_4+4y_5+y_6)$$

и т. д.

Сумирањем ових делимичних површина
нађи се да ће целокупна површина
имати за вредност

$$V = \frac{h}{3}\left[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+y_5+\cdots)+2(y_2+y_4+y_6+\cdots)\right] \quad 3.$$

На обрасцу 3. основана је
Симсонова метода израчунавања ин-
теграла површина која се састоји у о-
воме: треба дату површину поделити
на паран број делова помоћу равноод-
стојних ордината, обележити орди-
нате редом са $y_0\ y_1\ y_2 \cdots$; ако се јед-

нако одступање таквих ордината о-
бележи са h, приближна вредност тра-
жене површине добија се кад се $\frac{h}{3}$ по-
множи са збиром прве и последње ор-
динате више четири пута збир непар-
них више двапут збир парних ор-
дината. По себи се разуме да уколико
је већи број подеока n у толико ће се
боље подударати тражена површина
са израчунатом.

Примедба: Дешава се да дата
крива чија се површина тражи има
превојних тачака, па пошто парабо-
ла са чијим луком треба да се тра-
жени лук приближно покрити нема
таквих тачака, то да не би било ве-
лике разлике између та два лука,
превојну тачку треба узети као јед-
ну од подеоних тачака.

Приметимо и то да се Симсо-
новом методом могу одређивати ве-
личине површина и у оним случаје-
вима кад се незна једначина криве
пошто су елементи што фигуришу у
Симсоновом обрасцу такви да их мо-
жемо непосредно мерити. Најзад при-
метимо и то да се Симсоновим об-
расцем и површине ограничене са
свију страна кривим линијама
могу мерити, јер се површина може
тада разложити на збирове и раз-
лике горњих површина.

Примена Симсонове методе на одређивање одређених интеграла.

Кад има да се израчуна ин-
теграл

$$J=\int_a^b f(x)\,dx$$

помоћу броја h ира

$$h=\frac{b-a}{n} \qquad 4.$$

где n треба да је паран број. Ординате
$y_0\ y_1\ y_2 \ldots$ имају за вредности

$$y_0=f(a) \quad y_1=f(a+h) \quad y_2=f(a+2h) \ \ldots$$

где h валаа сменити његовом вредношћу 4.
непосредном заменом у Симсоновом

обрасцу 3. имали би вредност тражено[г]
интеграла која ће бити у толико тач-
нија у колико је већи број n.

На пример: тражи се приближ-
на вредност природног $\log 2$. Ако у-
очимо да је

$$J=\int_e^{2e}\frac{dx}{x}=\left[\log x\right]_e^{2e}=\log 2e-\log e=\log 2$$

и узмемо н. пр. $n=4$, онда је

$$h=\frac{e}{4}=0,679$$

Пошто је овде

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

то је

$$y_0=f(e)=\frac{1}{e}=\frac{1}{2,718}$$

$$y_1=f(e+h)=f(2,718+0,679)=\frac{1}{3,397}$$

$$y_2=f(e+2h)=f(2,718+1,358)=\frac{1}{4,076}$$

$$y_3=f(e+3h)=f(2,718+2,037)=\frac{1}{4,755}$$

$$y_4=f(e+4h)=f(2,718+2,716)=\frac{1}{5,436}$$

према томе биће:

$$\log 2=0,229\left[\left(\frac{1}{2,718}+\frac{1}{5,436}\right)+4\left(\frac{1}{3,397}+\frac{1}{4,755}\right)+2\cdot\frac{1}{4,076}\right]$$

Представљање функција помоћу одређених интеграла

Кад функција под интегралним знаком садржи само ону променљиву количину по којој се врши интеграција, онда ће такав интеграл бити одређен број. На пример

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$$

Али кад та функција осим интеграционе променљиве количине садржи још какав променљиви параметар, интеграл ће зависити од тог параметра дакле биће његова функција. На пример

$$\int_1^2 x^\alpha dx = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$$

а то је функција параметра α.

Кад је дата ма каква функција $\varphi(z)$ увек постоји бесконачно много интеграла облика

$$\int_a^b f(x,z)\, dx$$

који ће имати за вредност баш функцију $\varphi(z)$, тако да се свака функција једне променљиве количине z може представити у облику једног одређеног интеграла који ће садржати z као променљив параметар у функцији под интегралним знаком. На томе је основано представљање функција помоћу одређених интеграла које у много питања чини услугу јер се дешава да је функција под интегралним знаком много простија од оне коју хоћемо да представимо на тај начин. При том представљању функције помоћу одређених интеграла наилази се на један факт на који се не наилази при обичним дефиницијама функција. То је једна врста дисконтинуалности која се јавља и код најпростијих интеграла што садрже променљиве параметре и која се састоји у овоме: обично се дешава да се један исти интеграл

$$I(z)=\int_a^b f(x,z)\,dx$$

своди на $\varphi_1(z)$ кад z варира у једним границама, а кад варира у другим границама на сасвим другу функцију $\varphi_2(z)$. На пример:

1.
$$\int_0^e x^z\,dx$$

док z варира од -1 до $+\infty$ интеграл представља функцију

$$\frac{e^{z+1}}{z+1}$$

која је коначна, одређена и континуално варира са z. Међутим док z варира од -1 до $-\infty$ интеграл је бескрајан и не варира више са z.

2.
$$I(z)=\int_0^\infty e^{zx}\,dx=\left[\frac{e^{zx}}{z}\right]_0^\infty$$

Ако је z позитивно ово тежи бескрајном, па ма какво било z; за z негативно функција варира са z.

За овај исти интеграл може се ово доказати: за све реалне и имагинарне вредности z које се налазе с леве стране имагинарне осовине овај интеграл представља функцију $\frac{1}{z}$ која континуално варира са варирањем z. На против за вредности z с десне стране имагинарне осовине интеграл је бесконачан, јер за сваку вредност с леве стране поменуте осовине реални је део негативан и према томе може се написати

$$z=-p+qi$$

Интеграл постаје

$$\int_0^\infty e^{-px+qxi}\,dx=\int_0^\infty e^{-px}(\cos qx+i\sin qx)\,dx=$$

$$=\int_0^\infty e^{-px}\cos qx\,dx+i\int_0^\infty e^{-px}\sin qx\,dx$$

На против ако се z налази с десне стране имагинарне осовине имаћемо

$$\int_0^\infty e^{zx}\,dx=\int_0^\infty e^{px}\cos qx\,dx+i\int_0^\infty e^{px}\sin qx\,dx$$

да су оба интеграла бесконачна.

Као интересантан пример

овакве врсте дисконтиуалности навешћемо

$$J(z)=\int_0^{2\pi}\log(1-2z\cos x+z^2)\,dx$$

где z игра улогу параметра. Потражимо најпре вредност тог интеграла за случај кад се z налази у унутрашњости круга описаног око почетка полупречником 1, т.ј. кад му је модуо мањи од 1. Пођимо од познатог обрасца

$$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots$$

Ако у њему ставимо

$$t=-ze^{\theta i}$$

а затим

$$t=-ze^{-\theta i}$$

имаћемо ова два обрасца

$$\log(1-ze^{\theta i})=-ze^{\theta i}-\frac{z^2}{2}e^{2\theta i}+\frac{z^3}{3}e^{3\theta i}-\cdots$$

$$\log(1-ze^{-\theta i})=-ze^{-\theta i}-\frac{z^2}{2}e^{-2\theta i}+\frac{z^3}{3}e^{-3\theta i}-\cdots$$

Сабирањем ових образаца и ако се води рачуна о Ојлеровом обрасцу

$$e^{xi}+e^{-xi}=2\cos x$$

имаћемо

$$\log(1-2z\cos\theta+z^2)=-2\left[z\cos\theta+\frac{z^2}{2}\cos 2\theta+\frac{z^3}{3}\cos 3\theta+\cdots\right] \qquad 3.$$

и тај образац важи онда када буде важио 1. Тај пак образац важи кад је $|t|<1$, па дакле образац 3. важиће кад је $z<1$. Пошто се претпоставља да је модуо z мањи од 1 то у обрасцу 3. можемо сменити z са z а θ може бити ма какав број. Према томе имаћемо

$$\log(1-2z\cos x+z^2)=-2\left[z\cos x+\frac{z^2}{2}\cos 2x+\frac{z^3}{3}\cos 3x+\cdots\right]$$

Интеграљени израз у границама од 0 до 2π биће

$$J(z)=-2\sum U_n(z)$$

где је

$$U_n(z)=\int_0^{2\pi}\frac{z^n}{n}\cos nx\,dx=\frac{z^n}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=0$$

Према томе је

$$J(z)=0$$

Претпоставимо сад да се z налази ван поменутог круга т.ј. да је модуо z већи од 1. Тада се може написати да је идентички

$$\log(1-2z\cos x+z^2)=\log z^2\left(1-\frac{2}{z}\cos x+\frac{1}{z^2}\right)$$
$$=2\log z+\log\left(1-\frac{2}{z}\cos x+\frac{1}{z^2}\right)$$

и према томе је

$$J(z)=\int_0^{2\pi}2\log z\,dx+\int_0^{2\pi}\log\left(1-\frac{2}{z}\cos x+\frac{1}{z^2}\right)dx$$

Први интеграл има за вредност

$$2\log z\int_0^{2\pi}dx=4\pi\log z$$

Међутим улогу малопређашњег параметра z игра сада параметар

$$\xi=\frac{1}{z}$$

а пошто је по претпоставци модуо од z већи од 1 то је модуо од ξ мањи од 1, дакле други интеграл биће идентички раван нули, према томе цео интеграл своди се на

$$4\pi\log z$$

Из свега тога види се ово: Интеграл

$$J(z)=\int_0^{2\pi}\log(1-2z\cos x+z^2)\,dx$$

има ту особину да је идентички раван нули кад је модуо од z мањи од 1, а се напротив своди на $4\pi\log z$ кад је модуо од z већи од 1.

Из овога интеграла $J(z)$ можемо диференцијаљењем по z извести нов интеграл који има сличне особине. Пошто тај интеграл представља континуалну функцију од z док модуо од z варира од 0 до ∞, то за сваку тарбу (функцију) вредност z можемо диференцирати по z, па ћемо имати

$$P(x)=2\int_0^{2\pi}\frac{z-\cos x}{1-2z\cos x+z^2}\,dx$$

диференцијаљењем израза $4\pi\log z$ добија се да је

$$\int_0^{2\pi}\frac{z-\cos x}{1-2z\cos x+z^2}\,dx=\frac{4\pi}{z}$$

за све вредности z чији је модуо већи од 1, а раван нули за све вредности z чији је модуо мањи од 1.

Користи од оваквог начина представљања функција помоћу интеграла.

Знамо да се уопште функције могу у експлицитном облику дефинисати на разне начине, На пример ако се знају све рачунске операције које треба извршити да би се из ње извела вредност функције или у облику бесконачних редова и т. д. Дешава се у много прилика да је од свију оваквих начина најпростији онај који се састоји у изразу дате функције помоћу каквог одређеног интеграла у коме променљива количина фигурише као параметар. Као пример услуга које чини представљање функција помоћу одређених интеграла може се извести теорија Ојлерове функције

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx$$

то је функција која игра важну улогу у многим теоријама на коју је наишао Ојлер испитујући овај интеграл. Из тог израза функције $\Gamma(z)$ може се извести велики број њених познатих особина од којих ћемо ми навести ове

Ако се стави да је

$$x^{z-1}dx = du \qquad e^{-x}=v$$

одакле је

$$u=\frac{x^z}{z} \qquad e^{-x}dx=dv$$

имаћемо да је

$$\Gamma(x)=\left[\frac{e^{-x}x^z}{z}\right]_0^\infty+\int_0^\infty \frac{x^z}{z}e^{-x}dx$$

$$=\left[\frac{e^{-x}x^z}{z}\right]_0^\infty+\frac{1}{z}\Gamma(z+1)$$

Међутим лако се је уверити да први сабирак кад год је z позитивно или кад год је имагинарно али му је реални део позитиван тежи нули, тако да се последњи образац своди на

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\Gamma(z+1)$$

одакле је

$$\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$$

У том обрасцу оличена је најважнија особина функције $\Gamma(x)$ која важи за све реалне вредности z као и за све имагинарне вредности с десне стране имагинарне осовине. Из те особине изводи се ово: Кад год је z цео позитиван број $\Gamma(z)$ није ништа друго до $(z-1)!$ јер из горњег обрасца у случају кад је z позитиван број добијамо

$$\Gamma(z)=(z-1)\cdot\Gamma(z-1)$$

$$\Gamma(z-1)=(z-2)\cdot\Gamma(z-2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Ако ове обрасце измножимо међу собом имаћемо

$$\Gamma(z+1)=z\cdot(z-1)\cdot(z-2)\cdot(z-3)\cdots\Gamma(1)$$

Међутим ако се у обрасцу 3. стави $z=1$ добија се

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^0\cdot dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=1$$

Према томе последњи образац, пошто у њему сменимо z са $z-1$ добија вредност

$$\Gamma(z)=(z-1)\cdot(z-2)\cdot(z-3)\cdots2\cdot1$$

$$=(z-1)!$$

Као други пример за проучавање функција кад су оне представљене у облику одређених интеграла навешћемо функцију $\lambda(z)$ представљену овим бесконачним редом

$$\lambda(z)=1+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{27}+\frac{z^4}{256}+\cdots$$

или

$$\lambda(z)=\sum_0^\infty\frac{z^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Из овога реда можемо само то прочитати да је он конвергентан за све вредности z и да он дефинише функцију z у целој равни. Међутим из њега није могуће прочитати ни једну другу особину. Покушајмо дакле да га представимо у облику одређених интеграла где z игра улогу параметра.

Напишимо функцију у облику

$$\lambda(z)=\sum_0^\infty a_n z^n \qquad a_n=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

Покушајмо представити a_n у облику одређених интеграла у коме ће n играти улогу параметра. Пођимо од познатог обрасца

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}$$

Ако га диференцирамо по параметру α неколико пута узастопце, добијамо обрасце

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1\cdot 2}{\alpha^3}$$

и т. д.

ако диференцирамо p-пута добијамо

$$\int_0^\infty x^p e^{-\alpha x}\,dx = \frac{p!}{\alpha^{p+1}}$$

одакле је

$$\frac{1}{\alpha^{p+1}} = \int_0^\infty \frac{x^p e^{-\alpha x}}{p!}\,dx$$

Ставимо сада

$$p = n \qquad \alpha = n+1$$

па се добија

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \int_0^\infty \frac{(xe^{-x})^n}{n!}\,e^{-x}\,dx \qquad 5$$

На тај начин представљен је коефицијенат a_n помоћу одређеног интеграла. Али овај интеграл још можемо упростити ако извршимо смену

$$e^{-x}dx = -dt \qquad -e^{-x} = -t \qquad e^{-x} = t$$

Између старих и нових граница постоји овај однос:

x	0	∞
t	1	0

образац 5. тада постаје

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = -\int_1^0 \frac{(t\log\frac{1}{t})^n\,dt}{n!}$$

ако сад пермутујемо границе биће

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{(t\log\frac{1}{t})^n\,dt}{n!}$$

Имајући на тај начин a_n изражено помоћу одређеног интеграла можемо сад лако изразити и $\lambda(z)$ помоћу одређеног интеграла, јер ако ставимо краткоће ради

$$z\cdot t\log\frac{1}{t} = u$$

биће

$$\lambda(z) = \sum_0^\infty \int_0^1 \frac{u^n}{n!}\,dt = \int_0^1 \left[\sum_0^\infty \frac{u^n}{n!}\right]dt = \int_0^\infty e^u\,dt$$

па ако и сменимо његову вредност

$$\lambda(z) = \int_0^1 e^{zt\log\frac{1}{t}}\,dt$$

На тај начин функција $\lambda(z)$ представљена је у траженом облику. Из овог облика можемо прочитати разноврсне

особине те функције као на пр. ове:
1) За ма какву вредност z биће

$$\lambda(z) < e^{\frac{z}{e}}$$

јер лако се уверавамо да највећа вредност функције $t \log \frac{1}{t}$ за време док t варира од 0 до 1 јесте $\frac{1}{e}$; према томе на основу једне особине одређених интеграла коју смо имали, пошто је

$$e^{zt\log\frac{1}{t}} < e^{\frac{z}{e}}$$

биће и

$$\lambda(z) < \int_0^1 e^{\frac{z}{e}} dt = e^{\frac{z}{e}} \int_0^1 dt = e^{\frac{z}{e}}$$

2) Кад z тежи граници $+\infty$ функција $\lambda(z)$ тежи такође граници $+\infty$.
3) Кад z тежи граници $-\infty$, $\lambda(z)$ тежи нули. То је очевидно из тога што интегрални елеменат у $\lambda(z)$ тежи нули кад z тежи $-\infty$. То показује у исто време да је X-осовина с леве стране њене асимптота криве

$$y = \lambda(z)$$

4) функција $\lambda(z)$ непрекидно расте за време док z расте од 0 до ∞. Тако се исто лако уверавамо да су и сви изводи растуће функције z_a тако да ни један њен извод не може имати ни максимум ни минимум.