Ђор. Ј. Пујић, проф

Линеарне диференцијалне једначине

Предавања
Д^р Мих. Петровића,
проф. Универзитета

Увод

Линеарном диференцијалном једначином назива се свака једначина која садржи линеарно једну непознату функцију и један или више њених извода, а на ма који начин улази независно променљива количина. Општи тип таквих једначина био би

$$p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = F(x)$$

где су коефицијенти

$$p_0 \; p_1 \cdots p_n$$

стални или ма какве функције од x. Тако исто независан члан $F(x)$ може фигурисати или изостајати. Према томе да ли тај члан фигурише или не фигурише у једначини ове се деле на линеарне једначине са независним чланом или нехомогене линеарне једначин и на линеарне једначине без независног члана или хомогене линеарне једначи

Ред највишег извода који у једначини фигурише у исти је мах и ред те једначине. Н. пр. једначина

$$(x-1)\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}-xy=0$$

је једначина трећег реда.

Познато нам је из ранијег да се теорија интеграције једначина са независним чланом може свести н теорију једначина без независног члан Та је особина раније доказана. Да би нашли општи интеграл једначине са независним чланом треба нађ један партикуларан интеграл те једначине и општи интеграл те једначине али са изостављеним независним чланом; збир та два интеграл биће општи интеграл дате једначине са независним чланом. Стога ћем се у проучавању линеарних једначина ограничити на хомогене линеарне једначине.

Линеарне хомогене једначин

Општи тип такве једначине n-тог реда био би

$$p_0\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=0$$

где поједини коефицијенти могу бити стални или ма какве функције од x или неки и једнаки нули. Према томе се једначине деле на једначине са сталним и једначине са промен вим коефицијентима

Све те једначине имају следеће особине:

1° Ако су

$$y=y_1 \quad y=y_2 \quad \cdots \quad y=y_k$$

партикуларни интеграли такве једначине, онда ће и функција

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ky_k$$

бити један партикуларан интеграл па ма какве вредности имале константе $C_1, C_2 \cdots C_k$.

2° Ако су

$$y=y_1 \quad y=y_2 \quad \cdots \quad y=y_n$$

n партикуларних интеграла такве једначине и ако између тих интеграла не постоји никакав линеаран хомоген однос

$$a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n=0 \qquad 2.)$$

онда ће израз

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n \qquad 3.)$$

бити општи интеграл те једначине. Лако се увиђа да кад између партикуларних интеграла постоји однос 2.), израз 3.) ма да задовољава дату једначину неће бити њен општи интеграл. То је отуда што из једначине 2.) можемо израчунати једну коју хоћемо од функција $y_1, y_2, \cdots y_n$ и заменом у 3.)

добили би један сабирак мање па дакле и једну константу мање, тако да би интеграл 3.) имао не n константата већ (n-1) и према томе он не би био општи интеграл, јер овај мора имати n константата.

О снижавању реда једне линеарне једначине.

Линеарне једначине имају једну интересантну особину т.ј. ред им се може снизити на разне начине, тако да се од једне једначине n-тог реда добија једначина (n-1)-ог или (n-2)-ог реда.

1° начин

Нека је дата једначина 1.) коју ћемо написати у облику

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0 \qquad 4.)$$

где су

$$p_0 \quad p_1 \dots p_n$$

ма какве функције x-а. Увешћемо у рачун нову непознату z која ће са првобитном непознатом функцијом y стајати у следећој вези

$$y = e^{\int z dx}$$

или

$$z = \frac{y'}{y}$$

т.ј. z је логаритамски извод функције y. Из обрасца 5.) диференцијалењем добијамо низ образаца

$$y' = z e^{\int z dx}$$

$$y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx}$$

$$y''' = (z' + 3zz' + z^2) e^{\int z dx}.$$

. . . .

Заменом у 4.) можемо на левој страни извући као заједничко $e^{\int z dx}$ које ће бити чинитељ уз израз у коме фигурише $z, z', z'' \dots z^{(n-1)}$. Према томе кад с стави да је таква страна једнака нули добија се једна диференцијална једначина (n-1)-ог реда по z. Ако успемо интегралити ту једначину, онда заменом у изразу 5.) имаћемо одговарајући интеграл првобитне једначине.

Треба још напоменути следеће: пошто се тај интеграл добија интеграцијом једначине (n-1)-ог реда, садржаће (n-1) константу, али се зна да ако је

$$y = e^{\int z dx}$$

један интеграл једначине 4.), мора и

$$y = Ce^{\int z dx}$$

такође бити један њен интеграл. Према томе поред посматраних (n-1) констаната имаћемо још једну, - дакле општи интеграл дате једначине.

Овај начин снижавања реда једне једначине увек је поуздан, јер се претпоставља да се штогод зна о природи интеграла, само ту је недостатак у томе што нова једначина до које се дође није више линеарна.

Н. пр. нека је дата линеарна једначина другог реда

$$p_0 y'' + p_1 y' - p_2 y = 0$$

сменом

$$y = e^{\int z dx}$$

одакле се добија

$$y' = z e^{\int z dx}$$

$$y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx}$$

добијамо

$$\left[p_0 (z' + z^2) + p_1 z + p_2\right] e^{\int z dx} = 0$$

или

$$p_0 z' + p_0 z^2 + p_1 z + p_2 = 0$$

- дакле дата линеарна једначина другог реда сведена је на једначину првог реда и то Riccati-еву.

Оваква редукција чини услугу у извесним испитивањима, али што не чини никакву олакшицу за саму интеграцију, јер се Riccati-еве једначине могу само онда интегралити кад се зна један партикуларан интеграл.

2° НАЧИН

Претпоставимо да се зна један или више партикуларних интеграла једначине 4). Показаћемо да се тада дата једначина може свести на другу једначину нижег реда која ће опет бити линеарна.

Уочимо опет једначину

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y^{(2)} + p_n y = 0 \qquad 4)$$

сменимо у њој

$$y = zu$$

где су z и u засад неодређене функције. Добићемо

$$p_0 (zu)^{(n)} + p_1 (zu)^{(n-1)} + \cdots + p_n (zu) = 0 \qquad 6.)$$

Међутим узастопним диференцијалењем добијамо

$$(zu)' = z'u + zu'$$
$$(zu)'' = z''u + 2z'u' + zu''$$
$$(zu)''' = z'''u + 3z''u' + 3z'u'' + zu''' \qquad 7.)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Заменом 7.) у 6.) и кад леву страну групишемо по изводима од z лако се увиђа да ће резултат бити извесна једначина облика

$$z^{(n)} \Delta_0 + z^{(n-1)} \Delta_1 + \cdots + z' \Delta_{n-1} + z \Delta_n = 0 \qquad 8.)$$

где коефицијенти

$$\Delta_0 \Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_n$$

зависе од коефицијената

$$p_0 p_1 \cdots p_n$$

и од

$$u \quad u' \cdots u^{(n)}$$

Ти ће коефицијенти Δ по самом постанку бити линеарне и хомогене функције од $u, u', u'', \cdots$ Тако исто види се лако кад се изврши смена, да последњи коефицијенат Δ_n није ништа друго до

$$\Delta_n = p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \cdots + p_n u$$

Претпоставимо сад да смо неодређену функцију u изабрали тако да је

$$\Delta_n = 0$$

а то ће бити ако је

$$p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \cdots + p_n u = 0$$

т.ј. ако смо за неодређену функцију u узели један партикуларан интеграл дате једначине 4.). Кад тако изаберемо u једначина 8.) постаје

$$z^{(n)} \Delta_0 + z^{(n-1)} \Delta_1 + \cdots + z' \Delta_{n-1} = 0$$

Ако сад ставимо да је

$$z' = v$$

т.ј.

$$z = \int v \, dx$$

и

$$z'' = v'$$
$$z''' = v''$$
$$\cdots$$
$$z^{(n)} = v^{(n-1)}$$

једначина 9.) постаје

$$\Delta_0 v^{(n-1)} + \Delta_1 v^{(n-2)} + \cdots + \Delta_{n-1} v = 0 \qquad 10.)$$

Једначина 10.) је линеарна једначина $(n-1)$-ог реда по v. Претпоставимо да смо ју интегралили; онда би помоћу обрасца

$$z = \int v \, dx$$

добили функцију z и онда помоћу

$$y = zu$$

дошли би и до првобитно непознате функције y.

Као што се види кад се зна један партикуларан интеграл дате једначине 4.), интеграција те једначине своди се на интеграцију једначине 10.) која је

такође линеарна али за јединицу ниже
реда. Веза између интеграла једначина
4.) и 10.) дата је обрасцем

$$y = zu = u\int v\,dx$$

Напомена: Као што смо видели
кад се зна један партикуларни интегра
онда се може снизити ред дате једначи
за јединицу. Кад се знају два партику
ларна интеграла, ред једначине снижа
ва се за два. Један од тих партикулар
них интеграла допушта да се једначи
на 4.) сведе на једначину 10.); други до-
пушта да се нађе одговарајући парти
куларни интеграл једначине 10.) и да се
према томе смањи ред једначине 10.)
за јединицу т.ј. да се првобитна једна
чина 4.) сведе на једначину (n-2)-ги ред
Исто се резоновање може продужити или
даље. Тако у опште кад су познати k
партикул. интеграла једначине 4.), онда
се она може свести на једначину (n-k)
-тог реда. Тражење одговарајућег инт. ј.

рала V биће по малопређашњем обрасцу

$$y = u\int v\,dx$$

где на место u треба ставити други пар-
тикул. интеграл једначине 4.).

Н. пр. Нека је дата једначина
другог реда

$$p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

Претпоставимо да се унапред зна један
партикул. интеграл

$$y = u$$

сменом

$$y = zu$$

одакле је

$$y' = z'u + zu'$$

$$y'' = z''u + 2z'u' + zu''$$

дата једначина постаје

$$p_0 u z'' + (p_1 u + 2p_0 u')z' + (p_0 u'' + p_1 u' + p_2 u)z = 0$$

$$p_0 u'' + (p_1 u + 2p_0 u')z' = 0$$

ако ставимо

$$z' = v$$

$$z=\int v\,dx$$

последња једначина своди се на

$$p_0uv'+(p_1u+2p_0u')v=0$$

која се може написати у облику

$$\frac{v'}{v}=-\frac{p_1u+2p_0u'}{up_0}$$

Пошто су p_0 и p_1 познати као функције x_a а тако исто и u, то ће десна страна бити позната функција x_a, коју ако означимо са $\varphi(x)$ биће

$$\frac{v'}{v}=\varphi(x)$$

одакле је

$$v=Ce^{\int\varphi(x)dx}$$.

Заменом у обрасцу

$$z=\int v\,dx$$

добиће се y.

Из тога се изводи следећа особина линеарних једначина другог реда: Ако знамо један партикул. интеграл такве једначине, можемо увек наћи њен општи интеграл и то помоћу две квадратуре

Та особина даје могућност да се конструише бескрајно много једначина другог реда које се могу интегралити, а код којих ће један од коефицијената бити произвољан. Тај би се начин састојао у овоме: Одредили би један од коефицијената тако да једначина има један унапред дат партикул. интеграл. Имајући тако доби ену једначину којој већ унапред знамо један партикул. интеграл, имаћемо у исти мах и једначину коју ћемо моћи потпуно интегралити.

3° НАЧИН.

Овај се начин састоји у употреби т.зв. адјунговане једначине.

Нека је дата линеарна једначина

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0 \qquad 11.)$$

Ако леву страну краткоће ради означимо са $\Delta(y)$, једначина се може написати у облику

$$\Delta(y)=0 \qquad 12.)$$

Помножимо једначину са једном за сад неодређеном функцијом z и са dx па интегралимо; добићемо

$$\int z\,\Delta(y)\,dx = C \qquad 13$$

где је C произвољна константа. Међутим једначина 13.) у развијеном облику биће

$$\int z\,y^{(n)}dx + \int (p_1 z)\,y^{(n-1)}dx + \cdots +$$

$$+ \int (p_{n-1} z)\,y'dx + \int (p_n z)\,y\,dx = C \qquad 14$$

Уочимо најпре први од интеграла 14.) т.ј.

$$\int z\,y^{(n)}dx$$

и извршимо у њему парцијалну интеграцију. Ако ставимо да је

$$z = u$$

$$y^{(n)}dx = dv$$

биће

$$du = dz = z'dx$$

$$v = y^{(n-1)}$$

Образац за парцијалну интеграцију

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

даје следећи резултат

$$\int z\,y^{(n)}dx = z\,y^{(n-1)} - \int z'y^{(n-1)}dx \qquad 15.)$$

Ако на други интеграл из обрасца 15.) применимо опет парцијалну интеграцију биће

$$\int z'y^{(n-1)}dx = z'y^{(n-1)} - \int z''y^{(n-2)}dx \qquad 16.)$$

Ако тај низ операција продужимо све дотле док у последњем интегралу на десној страни не остане

$$\int z^{(n)}y\,dx$$

онда узастопни обрасци 15.), 16.), ... доводе до обрасца

$$\int z y^{(n)}dx = z y^{(n-1)} - z'y^{(n-2)} + \cdots \pm \int y\,z^{(n)}dx \qquad 17.)$$

Образац 17.) даје нам у развијеном облику први интеграл на левој страни обрасца 14.). До тих образаца дошли би и за други, трећи, ... интеграл обрасца 14.) и као резултат добили би низ образаца:

$$\int(p_1z)y^{(n-1)}dx=(p_1z)y^{(n-2)}-(p_1z)'y^{(n-3)}+\dots\pm\int y(p_1z)^{(n-1)}dx$$

$$\int(p_2z)y^{(n-2)}dx=(p_2z)y^{(n-3)}-(p_2z)'y^{(n-4)}+\dots\pm\int y(p_2z)^{(n-2)}dx$$

. . . .

Заменом образаца 17), 18), 19), ... у обрасцу 14) добија се једначина

$$\Phi(zy)\pm\int y\left[z^{(n)}-(p_1z)^{(n-1)}+(p_2z)^{(n-2)}+\dots\pm(p_nz)\right]dx=C$$

где $\Phi(zy)$ означује скуп чланова у обрасцима 17), 18), 19), ... који се не налазе под интегралним знаком. У том скупу чланова као што се види фигурисаће $z, z', z'', \dots z^{(n-1)}, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$ и поред тога коефицијенти једначине $p_1, p_2 \dots$

Претпоставимо сад да је неодређена функција z изабрана тако да буде задовољен услов

$$z^n-(p_1z)^{(n-1)}+(p_2z)^{(n-2)}+\dots=0$$

тада ће ишчезнути интеграл на десној страни обрасца 20.) и овај ће се свести на једначину

$$\Phi(z,y)=C$$

која ће према ономе што је казано за израз Φ бити линеарна једначина $(n-1)$-вог реда по y. Једначина 21.) назива се <u>адјунгованом</u> једначином дате диференцијалне једначине 11.). Дакле познавање једног партикуларног интеграла адјунговане једначине чини да се ред саме те једначине смањи за јединицу а да при том нова једначина остане линеарна.

Из свега овога изводи се следеће практично упуство за смањивање реда: Треба образовати адјунговану једначину дате диференцијалне једначине, која је дата обрасцем 21.), ако је ова таква да јој се може одредити бар један партикуларан интеграл, треба образовати линеарну једначину са zdx и делимично интегралити док се то може по ранијим обрасцима. У једначини

$$\Phi(z,y)=C$$

треба сменити z познатим партикуларним интегралом адјунговане једначине, па ће резултат бити извесна линеарна диференцијална једначина $(n-1)$-вог реда по y т.ј. ред дате једначине биће смањен за јединицу.

Н. пр. уочимо једначину другог реда

$$y''+p_1y'+p_2y=0 \qquad 2$$

Њена адјунгована једначина биће

$$z''-(p_1z)'+p_2z=0$$

или

$$z''-p_1z'-p_1'z+p_2z=0$$

или

$$z''-p_1z'+(p_2-p_1')z=0 \qquad 2$$

Има бескрајно много случајева где се не може непосредно наћи ни један партикуларан интеграл једначине 23.) а кад је међутим лакше наћи партикуларан интеграл једначине 2 али претпоставимо да знамо један партикуларан интеграл једначине 23.) н. пр. z_1. Да би помоћу њега свели једначину 23.) на једначину првог реда, треба једначину 22.) помножити са $z\,dx$ и интегралити сваки члан докле год је то могуће. Скуп чланова који стоје ван интегралног знака даће одговарајућу функцију $\Phi(z,y)$ која ће бити првог реда по y, ако се у њој смени z партикуларним интегралом адјунговане једначине.

Напомена: Као што се види кад знамо један партикуларан интеграл адјунговане једначине можемо смањити ред дате једначине за јединицу. Лако је уверити се да кад се знају два партикуларна интеграла адјунговане једначине можемо смањити ред дате једначине за два. Јер ако у функцији $\Phi(z,y)$ сменимо z једним партикуларним интегралом z_1, имамо

$$\Phi(z_1, y) = C$$

Ако затим сменимо z другим партикуларним интегралом z_2 добијам

$$\Phi(z_2, y) = C$$

Ако у једначинама 24.) и 25.) фигуриш као највиши извод $y^{(n-1)}$ и ако тај извод елиминишемо из тих двеју једначина, резултат ће бити извесна једначина која ће имати као највиши извод $y^{(n-2)}$. Та ће једначина бити $(n-2)$-гог реда т.ј. ред првобитне једначине смањен је за два.

Ако знамо три партикуларна интеграла адјунговане једначине, ред првобитне једначине снижава се за три и т.д. У опште познавање k партикуларних интеграла адјунговане једначине допушта да се ред дате диференцијалне једначине смањи за k.

Однос између коефицијената једне линеарне једначине и њених партикуларних интеграла.

Између линеарних диференцијалних једначина и обичних алгебарских једначина постоји доста сличности. Ми ћемо навести једну од њих: Као год што код алгебарских једначина постоје извесни познати односи између њених корена и коефицијената, тако и код линеарних диференцијалних једначина постоје односи између њених коефицијената и њених партикуларних интеграла.

Нека је дата једначина

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad 1.)$$

и нека су

$$y_1\ y_2 \cdots y_n$$

њених n партикуларних интегра ла међусобно независни. Знамо да ћ онда општи интеграл бити

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$$

где су

$$C_1\ C_2 \cdots C_n$$

интеграционе константе. Диференцијалећи једначину 2.) n пута узастопце имаћемо

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \cdots + C_ny_n'$$

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \cdots + C_ny_n''$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$y^{(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \cdots + C_ny_n^{(n)}$$

Једначине 2.) и 3.) представљају систем од $(n+1)$ једначину са n произвољних количина $C_1\ C_2 \cdots C_n$. Из ти једначина можемо даље елиминисати ове произвољне количине и ка што се зна из теорије елиминаци

биће

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y' & y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y'' & y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad 4.)$$

Ако детерминанту 4.) уредимо по степенима првог стубца, ова се претвара у једначину

$$M_0y + M_1y' + M_2y'' + \cdots + M_ny^{(n)} = 0 \qquad 5.)$$

где

$$M_0\ M_1 \cdots M_n$$

означују миноре детерминанте 4.) који се односе на елементе првог стубца. Сваки од тих минора биће извесна комбинација функција:

$$y_1\ y_1'\ y_1'' \cdots y_1^{(n)}$$

$$y_2\ y_2'\ y_2'' \cdots y_2^{(n)}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

т.ј. извесна комбинација партикуларних интеграла дате једначине. Једначине 5.) и 1.) имају исте партикуларне интеграле

$$y_1 \; y_2 \cdots y_n$$

јер ако у детерминанти сменимо y са ма којом од тих вредности, детерминанта ће имати два стуба једнака, па према томе биће једнака нули т.ј. једначина је задовољена ако y сменимо тим вредностима. Према томе једначине 1.) и 5.) имају један исти општи интеграл, што показује да оне морају бити идентичне. Упоређењем њихових коефицијената добија се

$$p_n = \frac{M_0}{M_n}$$

$$p_{n-1} = \frac{M_1}{M_n}$$

$$\cdots\cdots$$

Пошто су минори $M_0 \, M_1 \cdots M_n$ комбинације партикуларних интеграла једначине 1.), то обрасци 6.) показују непосредно како се могу коефицијенти једначине израчунати помоћу партикуларних интеграла. Практично упутство за то било би: Знајући партикуларне интеграле $y_1 \, y_2 \cdots y_n$ треба склопити детерминанту 4.), развити је по елементима првог стуба, ставити да је једнака нули, свести коефицијенат од $y^{(n)}$ на јединицу и уједначити коефицијенте у тако добијеној и датој једначини. Резултат ће бити низ образаца у којима ће бити израчунати коефицијенти: $p_1 \, p_2 \cdots p_n$.

Н. пр. израчунати коефицијенте једначине

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \qquad 7.)$$

тако да ова има као партикуларне интеграле

$$y_1 = x$$

$$y_2 = e^x$$

Одговарајућа детерминанта овде ће бити

$$\begin{vmatrix} y & x & e^x \\ y' & 1 & e^x \\ y'' & 0 & e^x \end{vmatrix} = 0$$

или ако извучемо e^x као заједничк

$$e^x\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ y' & 1 & 1 \\ y'' & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Кад ју развијемо и скратимо са e^x добијамо

$$y\cdot 1 - y'x + y''(x-1) = 0$$

Упоређењем једначина 4) и 8) налази се да је

$$p_1 = \frac{x}{x-1}$$

$$p_2 = \frac{1}{x-1}$$

Општији типови линеарних једначина које се могу интегралити.

Ако је дата једначина

$$p_0\frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n y = 0 \qquad 1.)$$

где су

$$p_0 \quad p_1 \quad p_2 \cdots p_n$$

ма какве функције промењиве x, њу у општем случају није могуће интегралити. Међутим постоји доста општих случајева кад ти коефицијенти имају нарочите облике, у којима је интеграција могућа па ма колики био ред једначине 1.). Ми ћемо прећи неколико таквих општих случајева.

1° Линеарне једначине са сталним коефицијентима.

То су једначине облика 1.) у којима су коефицијенти

$p_0\ p_1 \cdots p_n$

сви независни од x. Са таквим смо се једначинама упознали раније и видели следеће: Општи интеграл т једначине биће

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

где су

$y_1\ y_2 \cdots y_n$

партикуларни интеграли једначине 1.) добијени на следећи начин: образује се најпре карактеристичн алгебарска једначина

$$p_0r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$$

коју треба решити по непознатој r и тада треба разликовати ова чети случаја:

1° Сваком реалном и простом корену једначине 3.) одговара по један партикуларан интеграл облика

$$y=e^{r_1x}$$

где је r_1 тај корен;

2° Сваком реалном вишеструком корену те једначине 3.) чији ред нека је p, одговара p партикуларних интеграла облика

$$y_1=e^{rx}$$

$$y_2=xe^{rx}$$

$$y_3=x^2e^{rx}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_p=x^{p-1}e^{rx}$$

Према томе у општем интегралу 2.) одговараће једном таквом вишеструком корену збир чланова

$$(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_px^{p-1})e^{rx}$$

где су

$$C_1\ C_2\ \cdots C_p$$

произвољне константе.

3° сваком пару простих имагинарних корена једначине 3.) одговара у општи интегралу скуп чланова облика

$$e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x)$$

где су C_1 и C_2 интеграционе констант и где α означује реалан а β имагинаран део тога корена;

4° **сваком** пару вишеструких имагинарних корена једначине 3.) чији ре нека је p одговара у општем интегралу 2.) један скуп чланова облик

$$e^{\alpha x}[P_1(x)\sin\beta x + P_2(x)\cos\beta x]$$

где су

$$P_1(x) \text{ и } P_2(x)$$

полиноми (p-1)-вог реда по x чији су коефицијенти саме интеграционе константе

$$C_1\ C_2 \cdots C_p$$

а где као и мало час α и β означују реалан и имагинаран део тога корена.

Према томе линеарне једначине са сталним коефицијентима представљају општи тип линеарних једначина ма ког реда које се увек могу потпуно интегралити.

2° Euler-ове линеарне једначине.

То су једначине облика

$$p_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} x \frac{dy}{dx} + p_n y = 0 \qquad 1)$$

Ако се у таквој једначини стави да је

$$x = e^t$$

где је t нова независно променљива количина, биће

$$t = \log x$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = x$$

и одатле имамо низ образаца

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$$

Ако на исти начин потражимо изразе за трећи, четврти, ... извод, наћи ћемо да је

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}K$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{1}{x^4}K$$

. . . . .

где K представља збир чланова који не садрже x. Заменом израза 2.) на левој страни дате једначине 1.) лако се увиђа да се x у сваком члану потире и да се једначина своди на извесну линеарну једначину n-тог реда са сталним коефицијентима. Означимо нову једначину са

$$a_0\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_ny=0$$

Пошто су у једначини 3.) коефицијенти $a_0\ a_1\ a_2 \cdots$ стални, једначина се може потпуно интегралити, а зна се из теорије таквих једначина да ће интеграл имати овакав облик:

1° сваком стварном и простом корену њене карактеристичне једначине одговара у општем интегралу по један сабирак $C_1e^{r_1t}$, а пошто је $e^t=x$, то ће у том случају у општем интегралу дате једначине 1) одговарати по један сабирак облика

$$C_1x^{r_1}$$

2° сваком пару простих имагинарних корена одговараће у општем интегралу једначине 3.) скуп чланова облика $e^{\alpha t}(C_1\sin\beta t+C_2\cos\beta t)$. Заменом $e^t=x$ и $t=\log x$ види се да ће тада у општем интегралу дате једначине 1.) одговарати по један скуп чланова облика

$$x^\alpha\left[C_1\sin(\beta\log x)+C_2\cos(\beta\log x)\right]$$

где су α и β реални и имагинарни део

посматраног корена.

3° Сваком вишеструком реалном корену одговараће у општем интегралу једначине 3) по један скуп чланова облика

$$(C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \cdots + C_p t^{p-1}) e^{rt}$$

где p означује ред корена. Према томе сменом $e^t = x$, $t = \log x$ налази се да ће тада у општем интегралу једначине 1.) одговарати по један скуп чланова облика

$$[C_1 + C_2 \log x + C_3 (\log x)^2 + \cdots + C_p (\log x)^{p-1}] x^r$$

4° Сваком пару имагинарних вишеструких корена одговараће у општем интегралу једначине 3) по један скуп чланова облика

$$[P_1(t) \sin \beta t + P_2(t) \cos \beta t] e^{\alpha t}$$

где су P_1 и P_2 полиноми (p-1)-ог реда чији су коефицијенти саме интеграционе константе. Према томе горњом сменом налази се да ће тада у општем интегралу једначине 1.) одговарати скуп чланова облика

$$[P_1(\log x) \sin(\beta \log x) + P_2(\log x) \cos(\beta \log x)] x^\alpha$$

Према томе интеграција Euler-ових једначина може се увек потпуно извршити, пошто се оне сменом

$$x = e^t$$

своде на једначине са сталним коефицијентима, али већ из овога што је до сад показано види се да је главно умети наћи вредност r. Можемо непосредно у самој датој једначини 1.) сменити

$$y = x^r$$

[јер ставивши да је

$$x = e^t$$

$$y = e^{rt}$$

исто је што и ставивши одмах

$$y = x^r].$$

Међутим сменом

$$y = x^r$$

добијамо

$$\frac{dy}{dx} = r x^{r-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$$

. . . .

Али том сменом лева страна једначине 1) постаје облика

$$x^r Q(r)$$

где $Q(r)$ представља известан полином по r који не садржи x и који према томе има сталне коефицијенте. Одакле види се да број r који би се добио као корен карактеристич једначине за једначину 3) мора у исти мах бити и корен алгебарске једначине

$$Q(r)=0$$

до које смо дошли сменивши непосредно у датој Euler-овој једначини $y=x^r$.

Отуда следеће практично упутство за Euler-ове једначине: Треба непосредно у датој једначини ставити

$$y=x^r$$

па ће резултат те смене бити известна једначина облика

$$x^r Q(r)=0$$

где $Q(r)$ представља известан полином n-тог степена по r. Затим треба решити алгебарску једначину

$$Q(r)=0$$

Свакоме корену те једначине према његовој природи одговара у општем интегралу дате једначине збир чланова облика:

$$C_1 x^r$$

$$x^\alpha\left[C_1 \sin(\beta\log x) + C_2\cos(\beta\log x)\right]$$

$$\left[C_1 + C_2\log x + C_3(\log x)^2 + \cdots + C_p(\log x)^{p-1}\right]x^r$$

$$\left[P_1(\log x)\sin(\beta\log x) + P_2(\log x)\cos(\beta\log x)\right]x^\alpha$$

Скуп свих оваквих чланова што одговарају свима коренима једначине

$$Q(r)=0$$

представљаће општи интеграл дате

Euler - ове једначине.

Примери:

1° Нека је дата једначина

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+5x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

Ако ставимо

$$y=x^r$$

$$\frac{dy}{dx}=r\,x^{r-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=r(r-1)\,x^{r-2}$$

дата једначина постаје

$$x^r\left[r(r-1)+5r+2\right]=0$$

Кад ставимо да је заграда једнака нули добијамо алгебарску једначин

$$r^2+4r+2=0$$

чији су корени

$$r_1=-2+\sqrt{2}$$
$$r_2=-2-\sqrt{2}$$

Отуда општи интеграл дате једначи

$$y=C_1x^{-2+\sqrt{2}}+C_2x^{-2-\sqrt{2}}$$

2. Нека је дата једначина

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

Сменом

$$y=x^r$$

добијамо

$$x^r\left[r(r-1)+3r+2\right]=0$$

а отуда једначина

$$r^2+2r+2=0$$

чији су корени

$$r_1=-1+i$$
$$r_2=-1-i$$

па ће општи интеграл бити

$$y=C_1\frac{\sin\log x}{x}+C_2\frac{\cos\log x}{x}$$

3. Нека је дата једначина

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0$$

Сменом

$$y=x^r$$

добијамо

$$x^r\left[r(r-1)+3r+1\right]=0$$

одакле једначина

$$r^2+2r+1=0$$

чији су корени

$$r_1 = r_2 = -1$$

па је тражени општи интеграл

$$y = [C_1 + C_2 x] x$$

Напомена: На Euler-ове једначине лако се своди и следећи тип једначина са променљивим коефицијентима

$$p_0(ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

где су

$$a, b, p_0, p_1, \dots$$

стални коефицијенти. Тога ради треба најпре извршити смену

$$ax + b = z$$

одакле је

$$dx = \frac{dz}{a}$$

па ће се једначина свести на

$$A_0 z^n \frac{d^n y}{dz^n} + A_1 z^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} z \frac{dy}{dz} + A_n y = 0$$

т.ј. на Euler-ов тип. Кад ова последња једначина буде интеграљена, треба само у њеном општем интегралу сменити

$$z = ax + b$$

па ће се добити општи интеграл дате једначине.

3° Laplace-ове линеарне једначине.

То су једначине облика

$$(a_0 x + b_0)\frac{d^n y}{dx^n} + (a_1 x + b_1)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + (a_n x + b_n) y = 0 \qquad 1.)$$

т.ј. то су, као што се види, једначине код којих су коефицијенти ма какве линеарне функције променљиве x. Laplace је први интегралио једначине таквог типа и основна идеја његове методе састоји се у овоме: Ставимо да је

$$y = \int_\alpha^\beta \varphi(t) e^{xt} dt \qquad 2.)$$

и покушајмо одредити непознату функцију $\varphi(t)$ и непознате интегралне границе α и β тако да израз 2.) задовољав једначину 1.). Из израза 2.) добија се

$$\frac{dy}{dx} = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, t\, e^{xt} dt$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, t^2 e^{xt} dt$$

. . . .

Ако узастопне изводе 3.) сменимо у је- начини 1.) њиховим вредностима, до- бићемо за резултат једначину облик

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t) P(t)\, x\, e^{xt} dt + \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, Q(t)\, e^{xt} dt = 0$$

где су $P(t)$ и $Q(t)$ полиноми n-тог сте пена по t и то облика

$$P(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$$

$$Q(t) = b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \dots + b_{n-1} t + b_n$$

У првом интегралу на десној стра обрасца 4.) кад извршимо парцијал интеграцију узевши да је

$$x e^{xt} dt = du$$

$$\varphi(t) P(t) = v$$

одакле је

$$u = e^{xt}$$

$$dv = [P(t)\varphi'(t) + P'(t)\varphi(t)]\, dt$$

биће

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t) P(t)\, x e^{xt} dt = \int_\alpha^\beta v\, du = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u\, dv$$

$$= \left[\varphi(t) P(t) e^{xt}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta [P(t)\varphi'(t) - P'(t)\varphi(t)] e^{xt} dt$$

$$= \varphi(\beta) P(\beta) e^{\beta x} - \varphi(\alpha) P(\alpha) e^{\alpha x} - \qquad 6.)$$

$$- \int_\alpha^\beta [P(t)\varphi'(t) - P'(t)\varphi(t)] e^{xt} dt$$

Заменом интеграла 6.) у једначини 4.) ова постаје

$$\varphi(\beta) P(\beta) e^{\beta x} - \varphi(\alpha) P(\alpha) e^{\alpha x} +$$

$$+ \int_\alpha^\beta [\varphi(t)\{Q(t) - P'(t)\} - P(t)\varphi'(t)] e^{xt} dt = 0 \qquad 7.)$$

Једначина 7.) биће идентички задовољена ако бројеве α и β изаберемо тако да буде

$$P(\alpha) = 0$$

$$P(\beta) = 0 \qquad 8.)$$

и ако поред тога функцију $\varphi(t)$ изаберено тако да буде

$$\{Q(t)-P'(t)\}\varphi(t)-P(t)\varphi'(t)=0$$

Једначине 8.) показују да за α и β тре узети два корена једначине

$$P(t)=0$$

а једначина 9.) има облик

$$M\varphi'(t)+N\varphi(t)=0$$

где су M и N непознате функције по
Из ње добијамо

$$\varphi(t)=e^{\int\frac{N}{M}dt}$$

Ако дакле тако изаберемо функци φ(t) као и интегралне границе α и β дата диференцијална једначина имаће заједно за партикуларни интеграл израз

$$y=\int_\alpha^\beta\varphi(t)e^{xt}dt$$

Узимајући сад за α и β разне паро корена једначине

$$P(t)=0$$

добијамо и разне партикуларне интеграле. Из n таквих партикуларни

интеграла у случају кад их је могуће образовати имаћемо и сам општи интеграл дате једначине.

Али се јавља једна тешкоћа ако је једначина

$$P(t)=0$$

таква да нема два корена један од другог различита. У том случају не може се образовати ни један пар вредности (α, β) који задовољава услове задатка. Тада се може овако поступити: ако једначина има само један корен α, онда за β можемо узети или -∞ или +∞. Ако би узели β=-∞, једначина 7.) ће за све вредности $x^{-\infty}$ реалне и позитивне или за све имагинарне вредности x са реалним деловом позитивним бити $e^{\beta x}=0$. Према томе у случају кад се ограничавамо на те вредности x_a можемо за α узети један корен једначине $P(t)=0$ за β=-∞. Ако се има посла са реалним и негативним делом x-а или са имагинарном вредношћу чији је реалан део негативан може се за α узети један корен једначине $P(t)=0$ за β вредност $\beta=+\infty$.

Можемо у првобитну једначини извршити смену

$$y = z e^{px}$$

где је p ма какав сталан број. Диференцијалењем добијамо низ једначина

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} + p\right) e^{px}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2p\frac{dz}{dx} + p^2\right) e^{px}$$

. . . .

Заменом у датој Laplace-овој једн чини види се да ће резултат бити опет Laplace-ова једначина у којо можемо располагати неодређеним бројем p тако да сад више немам оних малопређашњих тешкоћа. На ову једначину можемо применити Laplace-ову методу и ако је z један партикуларан интеграл добијен том методом, одговарајући партикуларан интеграл дате једначине биће дат обрасцем

$$y = z e^{px}$$

Напомена: Laplace-ова метода у новије време генералисана је тако да се може применити и на друге општије типове једначина чији су коефицијенти полиноми ма ког степена. Тако исто генералисана је с друге стране на тај начин што се место (што се место) праволинијских интеграла узетих између α и β уводе у рачун и криволинијски интеграли тако да се једначина покушава задовољити извесним интегралом узетим дуж какве криволинијске путање.

Увод.

Код обичних диференцијалних
дначина има се посла са једном неза-
исно-промењивом количином и са јед-
м непознатом функцијом. Може се и-
ати посла и са групом од неколико
аквих обичних диференцијалних јед-
ачина и цела та група биће интеграље-
а ако смо сваку од тих једначина за-
бно интегралили.

У рачунима се јавља још једна
па диференцијалних једначина од
их свака садржи по једну независно-
ромењиву количину и више непозна-
их функција. Такве се једначине јав-
у увек у групи у којој је увек оно-
ко једначина колико је број непозна-

тих функција. Таква једна група једначина назива се *системом симултаних диференцијалних једначина*. Такав један систем био би н. пр.

$$\frac{dx}{dt} + F_1 x^2 + F_2 x + F_3 z = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varphi_1 x + \varphi_2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \varphi_3 z^2 = 0$$

$$\frac{dz}{dt} + \psi_1 y^2 + \psi_2 (1-y) \frac{dz}{dt} = 0$$

у коме је независно променљива t а им три непознате функције: x, y, z.

Интегралити овакав један систем значи одредити непознате функције x, y и z као функције непознате t и извесног броја произвољних константната, н. пр.

$$x = F(t, C_1, C_2, C_3, \cdots)$$

$$y = \Phi(t, C_1, C_2, C_3, \cdots)$$

$$z = \Psi(t, C_1, C_2, C_3, \cdots)$$

тако да кад се x, y, z смене овим својим вредностима дати систем буде идентички задовољен. У случају кад систем 1.) садржи највећи могући број константата он се назива *општим системом интеграла*. Ако су једна или више константата прецизиране тако да је њихов број мањи од могућег максимума систем 1.) представљаће један *партикуларан систем интеграла*.

Као и код обичних диференцијалних једначина и код симултаних једначина разликује се њихов *ред*. Под редом једног система симултаних једначина разуме се ред највишег извода који у њему фигурише. Тако н. пр. малопређашњи систем био би систем другог реда.

За интеграцију система симултаних једначина важи ова *основна теорема*: Један ма какав систем симултаних једначина може се увек свести на једну једину и то обичну диференцијалну једначину. Докажимо теорему најпре за најпростији случај кад је дат систем симултаних једначина првог реда са две непознате функције x и y. Најопштији облик таквог система је

$$F\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=0$$

$$\Phi\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=0$$

Овај систем увек се може замислити решен по $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ тако да из њега добијамо

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,y)$$

$$\frac{dy}{dt}=\varphi(t,x,y)$$

Диференцијалећи по t једну или другу од ових једначина н. пр. једначину 4.) добија се

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Из трију једначина 4.), 5.) и 6.) могу се увек елиминисати две непознат

и $\frac{dy}{dt}$, па ће резултат елиминације ти извесна једначина

$$\Delta\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right)=0 \qquad 7.)$$

во је једна обична диференцијална једначина другог реда и према томе је цео систем сведен на такву једну једначину. ретпоставимо да је једначина 7.) инте- раљена и да је

$$x=\lambda(t, C_1, C_2) \qquad 8.)$$

н општи интеграл. Заменом те вред- ости x_a у једначини 4.) и интегра- љем ове по y имаћемо

$$y=\mu(t, C_1, C_2) \qquad 8.)$$

ако да ће систем 8.) представљати оп- ти интегрални систем датих симул- аних једначина.

Исто се резоновање може приме- ти на ма какав систем симултаних дначина с тим да је и сам ред дифе- енцирања произвољан. Главно је то а ако је дати систем састављен из симултаних једначина, треба извршити онолико диференцијалења колико буде потребно да би се из тако добијених једначина и самога датог система могло елиминисати (m-1) непознатих функција и сви њихови изводи. Резултат ће бити извесна једначина

$$\Delta = 0$$

која ће садржати само независнопроменљиву количину t, затим ону непознату функцију која није елиминисана и неколико њених узастопн извода по t. Та једначина биће једн на обична диференцијална једначи на тако да је цео систем сведен н такву једну једначину. Кад је ова интеграљена треба њен интеграл сменити у свима једначинама датог система и онда на начин ко према приликама буде најлакши одређивати остале непознате фун ције. По некад ће се то моћи изврши

з икакве интеграције као што је био учај у систему 4.) и 5.). У општем ом случају добија се опет систем имултаних једначина али са једном познатом функцијом мање.

Из овога извођења као и из ме доказане теореме увиђа се у исто еме и сама егзистенција општег интеграла, а тако исто увек ће у атом случају бити могуће одредити максимум интеграционих констаната које може садржати интеграл систем и према томе може се за дан такав систем знати да ли он представља општи интеграл или не.

Линеарне симултане једн чине без независног члана.

То су једначине у којима и непознате функције и сви њихови изво ди фигуришу линеарно. Коефицијен ти таквих линеарних функција мо гу бити стални или ма како зави ни од независно променљиве t.

Овакве једначине имају мно ге особине сличне особинама обични линеарних диференцијалних једна чина. Такве су н. пр. ове особине:

Нека је дат један систем си мултаних једначина са независно-про менљивом количином t и са више непознатих функција $x, y, z, \dots$

1° Ако су

$$x = u \qquad y = v \qquad z = w \qquad \dots \tag{9.)}$$

едан систем интеграла, биће у исто реме и

$$x = Cu \qquad y = Cv \qquad z = Cw \qquad \dots \tag{10.)}$$

акође један систем интеграла па ма аква била константа C, јер очевидно да ако у датом систему сменимо $y, z, \dots$ вредностима 10.), константа C јавља се као чинилац у целој дначини тако да ако је она задо љена за $u, v, w, \dots$ она ће бити задо љена ма каква била константа C.

2° Ако су

$$\begin{matrix} x = u_1 & y = v_1 & z = w_1 & \dots \\ x = u_2 & y = v_2 & z = w_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \tag{11.)}$$

разни интегрални системи датог система симултаних једначина, онда ће у исто време и

$$x = u_1 + u_2 + \cdots$$
$$y = v_1 + v_2 + \cdots$$
$$z = w_1 + w_2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

такође бити један интегрални систем. Ово је очевидно из тога што кад се у датом систему 11.) смени $x, y, z, \ldots$ вредностима 12.), лева страна једначине биће идентички задовољена као што је то случај и код обичних диференцијалних једначина.

3° Ако су

$$x = u_1 \quad y = v_1 \quad z = w_1 \quad \cdots$$
$$x = u_2 \quad y = v_2 \quad z = w_2 \quad \cdots$$
$$x = u_3 \quad y = v_3 \quad z = w_3 \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

разни интегрални системи, онда ће и систем

$$x = C_1u_1 + C_2u_2 + C_3u_3 + \cdots$$
$$y = C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3 + \cdots$$
$$z = C_1w_1 + C_2w_2 + C_3w_3 + \cdots \qquad 14.)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

такође представљати један интегрални систем па ма какве биле константе $C_1 C_2 \cdots$ И ову особину лако је доказати, јер заменом $x, y, z, \ldots$ вредностима 14.) у датом систему једначина и групишући чланове са C_1 за себе, са C_2 за себе и т. д. свака од заграда пред којом ове константе стоје биће идентички равна нули, што значи да је систем 14.) одиста интегрални систем.

4° Интеграција једног ма каквог система линеарних симултаних једначина без независног члана увек се може свести на интеграцију једне једине обичне линеарне једначине без независног члана. Ова особина излази непосредно из малопређашње (особине) основне теореме о редуковању симултаних једначина на обичне са том напоменут да су ове једначине из којих се врши елиминисање непознатих функција и њихових извода линеарне и хомогене; очевидно је да и резултујућа једначина мора бити линеарна и хомогена по оној непознатој функцији и њеним изводима која буде нееliminисана. Тако н. пр. ако је дат систем

$$\frac{dx}{dt} = F_1 x + \varphi_1 y \qquad 5)$$

$$\frac{dy}{dt} = F_2 x + \varphi_2 y \qquad 16)$$

диференцијалећи на пр. другу једначину имаћемо

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F_2' x + F_2 \frac{dx}{dt} + \varphi_2' y + \varphi_2 \frac{dy}{dt} \qquad 17)$$

Ако из једначина 15.) и 17.) елиминишемо x и $\frac{dx}{dt}$ резултат ће бити једна линеарна једначина другог реда по y. На тај начин могла би се увек вршити интеграција овакве једначине. Али у појединим и то не баш важним случајевима није потребно вршити овакву редукцију јер се дати систем у извесној специјалној једначини може непосредно интегралити. Такав је случај са извесним типом једначина који ћемо сад навести.

Линеарне симултане једначине првог реда са сталним коефицијентима а без независног члана.

То су једначине облика

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + \cdots \\
\frac{dy}{dt} &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + \cdots \\
\frac{dz}{dt} &= c_1 x + c_2 y + c_3 z + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad 18.)$$

Овакав би се систем увек могао интегралити свођењем на једну обичну диференц. једначину са сталним коефицијентима, али та је редукција непотребна јер се систем може непосредно интегралити на овај начин: Ставимо да је

$$x = Ce^{rt}$$
$$y = De^{rt} \qquad 19.)$$
$$z = Ee^{rt}$$
$$\cdots\cdots$$

где су $C, D, E, \ldots$ произвољне константе а r известан засад неодређен број. Заменом ових вредности у 18.) и пошто се свака једначина скрати са e^{rt} имаћемо

$$Cr = a_1 C + a_2 D + a_3 E + \cdots$$
$$Dr = b_1 C + b_2 D + b_3 E + \cdots$$
$$Er = c_1 C + c_2 D + c_3 E + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

или

$$C(a_1 - r) + Da_2 + Ea_3 + \cdots = 0$$
$$Cb_1 + D(b_2 - r) + Eb_3 + \cdots = 0 \qquad 20.)$$
$$Cc_1 + Dc_2 + E(c_3 - r) + \cdots = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Једначине 20.) представљају систем n линеарних и хомогених једначина са n непознатих количина $C, D, E, \ldots$ Познато нам је из примена теорије детерминаната да би такав систем могао бити задовољен вредностима $C, D, E, \cdots$ различитим од нуле потребно је и довољно да детерминанта система буде равна нули т.ј.

$$\begin{vmatrix} a_1 - r & a_2 & a_3 & \cdots \\ b_1 & b_2 - r & b_3 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 - r & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \qquad 21.)$$

У тој детерминанти сви су елементи познати јер су то коефицијенти датих једначина и само је непознато r. Ако детерминанту развијемо па ју уредимо по степенима од r добићемо једну алгебарску једначину n-тог степена по r

$$\alpha_0 r^n + \alpha_1 r^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} r + \alpha_n = 0 \qquad 22.)$$

где ће коефицијенти

$$\alpha_0\ \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

бити увек познати. Ако се са

$$r_1\ r_2 \cdots r_n$$

значе корени те једначине, пошто сваки од њих задовољава задатак, инаћемо очевидно онолико интегралних система 19.) колико има корена т.ј. n интегралних система. Ти ће системи бити: први

$$x = C_1 e^{r_1 t}$$
$$y = D_1 e^{r_1 t}$$
$$z = E_1 e^{r_1 t}$$
$$\cdots\cdots$$

други

$$x = C_2 e^{r_2 t}$$
$$y = D_2 e^{r_2 t}$$
$$z = E_2 e^{r_2 t}$$
$$\cdots\cdots$$

и т.д. Према томе а на основу раније наведених особина линеарних симултаних једначина општи систем интеграла биће дат обрасцима

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n e^{r_n t}$$
$$y = D_1 e^{r_1 t} + D_2 e^{r_2 t} + \cdots + D_n e^{r_n t}$$
$$z = E_1 e^{r_1 t} + E_2 e^{r_2 t} + \cdots + E_n e^{r_n t}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

У овом систему као што се лако увиђа има n^2 интеграционих констаната. Међутим као и у случају обичних линеарних диференцијалних једначина ваља нам и овде разликовати случајеве кад су корени једначине 22.) реални, имагинарни и једнаки. Дискусија је апсолутно иста као и у поменутом простијем случају и њоме се налази ово:

1° сваки реалан и прост корен даје у изразима за $x, y, z, \ldots$ по један члан облика Ce^{rt} где је r такав један корен;

2° Ако је $r = \alpha + \beta i$ један имагинаран и прост корен, он ће у изразима за $x, y, \ldots$ дати по један члан облика $e^{\alpha t}\,[A \cos \beta t + B \sin \beta t]$;

3° ако је r реалан вишеструки корен k-тог реда, он ће у изразима за $x, y, \ldots$ дати по један члан облика $(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_{k-1} t^{k-1})\, e^{rt}$;

сваки имагинарни вишеструки корен у изразима за $x, y, z, \ldots$ даје по један члан облика $(C_0+C_1t+C_2t^2+\cdots+C_{k-1}t^{k-1})\cdot(A\cos\beta t + B\sin\beta t)e^{\alpha t}$ где су $C_0 C_1 \dots$ A и B константе.

Примери:

1.
$$\frac{dx}{dt}=x+y$$
$$\frac{dy}{dt}=x-y$$

Ако се стави

$$x=Ce^{rt}$$
$$y=De^{rt}$$

одакле је

$$\frac{dx}{dt}=Cre^{rt}$$
$$\frac{dy}{dt}=Dre^{rt}$$

дате једначине постају после скраћивања са e^{rt}

$$Cr=C+D$$
$$Dr=C-D$$

или

$$C(r-1)-D=0$$
$$C+D(r-1)=0$$

отуда једначина

$$\begin{vmatrix}(r-1) & -1\\ 1 & r-1\end{vmatrix}=0$$

или

$$(r-1)^2+1=0$$

одакле

$$r=1\pm i$$

Према томе имаћемо као општи интегрални систем

$$x=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t)$$
$$y=e^t(D_1\cos t+D_2\sin t)$$

2.
$$\frac{dy}{dx}-y-5z=0$$
$$\frac{dz}{dx}+y+3z=0$$

ако извршимо смену

$$y=Ce^{rx}$$
$$z=De^{rx}$$

одакле је

$$\frac{dy}{dx}=Cre^{rx}$$
$$\frac{dz}{dx}=Dre^{rx}$$

дате једначине дају

$$C(r-1) - 5D = 0$$

$$C + (r+3)D = 0$$

одакле једначина

$$\begin{vmatrix} r-1 & -5 \\ 1 & r+3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(r-1)(r+3) + 5 = 0$$

или

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

чији су корени

$$r = -1 \pm i$$

па отуда

$$y = e^{-x}\left[C_1 \cos x + C_2 \sin x\right]$$

Одавде је

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\left[(C_2 - C_1)\cos x - (C_1 + C_2)\sin x\right]$$

па заменом ових вредности у првој од датих једначина налазимо

$$z = e^{-x}\left[\frac{C_2 - 2C_1}{5}\cos x - \frac{C_1 + 2C_2}{5}\sin x\right]$$

3. $$\frac{dy}{dx} + a^2 z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + b^2 y = 0$$

иференцирањем прве добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2\frac{dz}{dx} = 0$$

заменом у овој вредности за $\frac{dz}{dx}$ из друге

$$\frac{d^2y}{dx^2} - a^2b^2y = 0$$

аракт. једначина

$$r^2 - a^2b^2 = 0$$

ма корене

$$r = \pm ab$$

а је

$$y = C_1 e^{abx} + C_2 e^{-abx}$$

давде је

$$\frac{dy}{dx} = abC_1e^{abx} - abC_2e^{-abx}$$

а заменом ове вредности у првој датој дначини имамо

$$z = -\frac{b}{a}\left[C_1e^{abx} - C_2e^{-abx}\right]$$

4. $$\frac{dy}{dx} - 3y - 8z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + y + 3z = 0$$

Диференцирањем прве добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 8\frac{dz}{dx} = 0$$

Заменом у овој једначини $\frac{dz}{dx}$ његовом вредношћу из друге једначине добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 8y + 24z = 0$$

ако и z заменимо његовом вредношћу израчунатом из прве дате једначине добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

Каракт. једначина

$$r^2 - 1 = 0$$

има корене

$$r = \pm 1$$

па је

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Одавде је

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

Заменом ових вредности у прву од датих једначина добијамо

$$z = -\frac{1}{4}(C_1 e^x + 2C_2 e^{-x})$$

5.
$$\frac{dy}{dx} - 3z + 4t = 0$$
$$\frac{dz}{dx} + t = 0$$
$$\frac{dt}{dx} + 2y - z = 0$$

ференцијалењем ових једначина до-
јамо

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2z}{dx^2} + 4\frac{d^2t}{dx^2} = 0$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dt}{dx} = 0$$
$$\frac{d^2t}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 0$$

о у првој од ових једначина заменимо и $\frac{d^2t}{dx^2}$ њиховим вредностима добије-
м из других двеју, добијамо

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 8\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx} + 3\frac{dt}{dx} = 0$$

о сада у овој једначини заменимо и $\frac{dt}{dx}$ њиховим вредностима добијеним из друге и треће од датих једначина добијамо

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 8\frac{dy}{dx} - 6y + 3z - 4t = 0$$

Сабирањем ове једначине са првом од датих једначина добијамо најзад једначину

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Њена карakт. једначина

$$z^3 - 7z - 6 = 0$$

има као корене

$$z_1 = -1$$
$$z_2 = -2$$
$$z_3 = 3$$

па је

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x}$$

Помоћу овог интеграла лако налазимо остале

$$z = C_1e^{-x} + \frac{2}{5}C_2e^{-2x} + \frac{1}{5}C_3e^{3x}$$

$$t = C_1e^{-x} + \frac{4}{5}C_2e^{-2x} - \frac{3}{5}e^{3x}$$

Линеарне симултане једна-
ине првог реда са независним
аном.

То су једначине облика

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + a_2y + a_3z + \cdots + F(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = b_1x + b_2y + b_3z + \cdots + \varphi(t) \qquad 1.)$$
$$\frac{dz}{dt} = c_1x + c_2y + c_3z + \cdots + \psi(t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

су коефицијенти

$$a_1\ a_2\ a_3 \cdots$$
$$b_1\ b_2\ b_3 \cdots$$
$$c_1\ c_2\ c_3 \cdots$$
$$\cdots\cdots$$

лни бројеви, а

$$F(t),\ \varphi(t),\ \psi(t),\ \cdots$$

могу бити ма какве функције од t.

Те једначине имају ову основну особину сличну оној код обичних линеарних једначина: Ако се зна један партикуларни интеграл система 1.) и општи интеграл система који се добија кад се у систему 1.) изоставе независни чланови, збир од та два интеграла даје општи интегрални систем самога система 1.). Доказ је апсолутно исти као и код обичних једначина. Јер ако је

$$x=u \quad y=v \quad z=\omega \quad \cdots$$

један партикуларан интегрални систем система 1.) и ако посматрамо

$$x=X+u$$
$$y=Y+v$$
$$z=Z+\omega$$
$$\cdots\cdots$$

лако се увиђа да ће после замене у систему 1.) ишчезнути $u, v, \omega, \cdots$ $F(t), \varphi(t), \psi(t), \cdots$.

Према томе интеграција ма каквог система 1.) увек се своди само на тражење једног партикуларног система, пошто већ интегрални систем за случај без независног члана увек знамо према ранијим упутствима. Као и у слу- ају обичних једначина и овде постоји велики број случајева кад се партикуларни интегрални систем може лако зрачунати и у том погледу постоји потпуна аналогија између обичних и имултаних једначина, и да би то по- тврдили прећи ћемо ова три случаја:

1°

Нека су независни чланови $\varphi, \psi, \cdots$ стални бројеви. Тада систем 1.) има као партикуларан интеграл

$$x=A \quad y=B \quad z=C \quad \cdots$$

е су $A, B, C \ldots$ извесне тачно одређене нстанте. Јер ако те вредности смени о у систему 1.) добијамо систем од n дначина са n непознатих $A, B, C, \cdots$ и те су једначине линеарне. Према томе изузимајући само случај да је детерминанта таквог система равна нули, могу се лако одредити константе $A, B, C, \dots$

Н. пр. нека је дат систем

$$\frac{dx}{dt} = x+y+1$$
$$\frac{dy}{dt} = x-y+2$$

Ако ставимо

$$x=A \quad y=B$$

добијамо

$$A+B+1=0$$
$$A-B+2=0$$

одакле је

$$A=-\frac{3}{2} \quad B=\frac{1}{2}$$

па дати систем има као партикул
интеграл

$$x=-\frac{3}{2} \quad y=\frac{1}{2}.$$

2°

Нека су независни чланови облика

$$F(t)=ke^{mt}$$
$$\varphi(t)=he^{mt}$$
$$\psi(t)=ge^{mt}$$
$$\dots\dots$$

истем 1.) има тада као партикуларни
нтеграл

$$x=Ae^{mt}$$
$$y=Be^{mt} \qquad 2.)$$
$$z=Ce^{mt}$$

р ако ове вредности сменимо у систе-
у 1.) и скратимо са e^{mt}, добијамо систем
д n једначина из којих можемо израчу-
ати n непознатих константа $A, B, C, \dots$
име ће систем 2.) бити одређен

3°

На сличан се начин ради и кад
и независни чланови били $\sin t$, $\cos t$,
и полиноми по t и т.д.

x x x

Пошто све оно што смо рекли у
очетку код линеарних симултаних
дначина важи и за овај специјалан

случај, то и код линеарних симултаних једначина са независним члановима можемо наћи општи интегрални систем диференцијалењем датих једначина и елиминацијом непознатих функција као што ће нам доказати ови примери

Примери:

1. $$\frac{dy}{dx} - 11y - 16z = 1+x$$

$$\frac{dz}{dx} + 2y + z = 1 - x$$

Диференцијалећи прву имамо

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 11\frac{dy}{dx} - 16\frac{dz}{dx} = 1$$

или ако заменимо у њој $\frac{dz}{dx}$ његовом вредношћу из друге једначине

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 11\frac{dy}{dx} + 32y + 16z = 17 - 16x$$

а сабирањем ове једначине са првом

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 21y = 18 - 15x$$

Карakт. једначина

$$z^2 - 10z + 21 = 0$$

ма корене

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = 7$$

а је

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{7x} + y_1$$

је још ваља одредити партик. интеграл

а би њега одредили ставимо

$$y_1 = ax + b$$

дакле је

$$\frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

а једначина 1.) даје

$$-10a + 21ax + 21b = 18 - 15x$$

дакле упоређењем

$$21a = -15$$

$$-10a + 21b = 18$$

одатле

$$a = -\frac{5}{7}$$

$$b = \frac{76}{147}$$

а је

$$y_1 = -\frac{5x}{7} + \frac{76}{147}$$

а отуда

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{7x} - \frac{5x}{7} + \frac{76}{147}$$

Одавде је

$$\frac{dy}{dx} = 3C_1e^{3x} + 7C_2e^{7x} - \frac{5}{7}$$

Заменом ових вредности у првој од датих једначина добијамо

$$z = -\frac{1}{2}C_1e^{3x} - \frac{1}{4}C_2e^{7x} + \frac{3x}{7} - \frac{68}{147}$$

2.

$$\frac{dy}{dx} - 17y - 40z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + 3y + 6z = x$$

Диференцирањем прве добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 17\frac{dy}{dx} - 40\frac{dz}{dx} = 0$$

или ако заменимо $\frac{dz}{dx}$ вредношћу из друге

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 120y + 240z = 40x$$

или ако заменимо z вредношћу из прве

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 11\frac{dy}{dx} + 18y = 40x$$

Каракт. једначина је

$$r^2 - 11r + 18 = 0$$

а њени корени су

$$r_1 = 2$$

$$r_2 = 9$$

а отуда

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{9x} + y_1$$

да би одредили y_1 ставимо

$$y_1 = ax + b$$

даље

$$\frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

а добијамо

$$-11a + 18ax + 18b = 40x$$

даље упоређењем

$$18a = 40$$

$$-11a + 18b = 0$$

одатле

$$a = \frac{20}{9}$$

$$b = \frac{110}{81}$$

а отуда

$$y_1 = \frac{20x}{9} + \frac{110}{81}$$

и према томе

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{9x}+\frac{20x}{9}+\frac{110}{81}$$

Одавде је

$$\frac{dy}{dx}=2C_1e^{2x}+9C_2e^{9x}+\frac{20}{9}$$

па заменом ових вредности у првој од датих једначина добијамо

$$z=-\left(\frac{3}{8}C_1e^{2x}+\frac{1}{5}C_2e^{9x}+\frac{17x}{18}+\frac{169}{324}\right)$$

3.

$$\frac{dy}{dx}-y-z=x$$

$$\frac{dz}{dx}+4y+3z=2x$$

Диференцијалећи прву добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=1$$

Заменом $\frac{dz}{dx}$ вредношћу из друге добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+4y+3z=1+2x$$

а сменом у овој z из прве

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=1+5x$$

Каракт. једначина ове једначине је

$$r^2+2r+1=0$$

ји су корени

$$r_1=r_2=-1$$

а је

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+y_1$$

а би одредили парт. интеграл y_1 ставимо

$$y=ax+b$$

дакле

$$\frac{dy}{dx}=a$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

а добијамо

$$2a+ax+b=1+5x$$

дакле упоређењем

$$a=5$$

$$2a+b=1$$

и одатле

$$a=5$$

$$b=-9$$

а је

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+5x-9$$

Одавде је

$$\frac{dy}{dx}=-(C_1+C_2x)e^{-x}+C_2e^{-x}+5$$

Заменом последњих двеју вредности у првој од датих једначина добијамо

$$z=(C_2-2C_1-2C_2x)e^{-x}-6x+14.$$

4. $$\frac{dy}{dx}+5y+z=1+x^2$$

$$\frac{dz}{dx}-y+3z=e^{2x}$$

Диференцијалећи прву добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=2x$$

Заменом $\frac{dz}{dx}$ вредношћу из друге једначине имамо

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+y-3z=2x-e^{2x}$$

а заменом у овој z вредношћу из прве

$$\frac{d^2y}{dx^2}+8\frac{dy}{dx}+16y=3x^2+2x+3-e^{2x}$$

Карактн. једначина

$$r^2+8r+16=0$$

на као корене

$$r_1=r_2=-4$$

а је

$$y=(C_1+C_2x)e^{-4x}+y_1$$

а би одредили парт. интеграл y_1 ста-ићемо

$$y=ax^2+bx+c+de^{2x}$$

акле је

$$\frac{dy}{dx}=2ax+b+2de^{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2a+4de^{2x}$$

а добијамо

$$16ax^2+(16b+16a)x+(2a+8b+16c)+$$
$$+36de^{2x}=3x^2+2x+3-e^{2x}$$

акле упоређењем

$$16a=3$$
$$16b+16a=2$$
$$2a+8b+16c=3$$
$$36d=-1$$

одатле

$$a=\frac{3}{16}$$

$$b = -\frac{1}{16}$$

$$c = \frac{25}{128}$$

$$d = -\frac{1}{36}$$

и према томе

$$y=(C_1+C_2x)e^{-4x}+\frac{3x^2}{16}-\frac{x}{16}+\frac{25}{128}-\frac{e^{2x}}{36}$$

Одавде је

$$\frac{dy}{dx}=\left[-4(C_1+C_2x)+C_2\right]e^{-4x}+\frac{3x}{8}-\frac{1}{16}-\frac{e^{2x}}{18}$$

Заменом последњих двеју вредности у прву једначину добијамо

$$z=\frac{11}{128}-\frac{x}{16}+\frac{x^2}{16}+\frac{7e^{2x}}{36}-C_2e^{-4x}-(C_1+C_2x)e^{-4x}$$

Линеарне симултане једна-
ине вишег реда са сталним
оефицијентима.

То су једначине у којима лине-
рно фигуришу непознате функције
$y, z, \ldots$ и њихови узастопни изводи

$$\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt} \quad \ldots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{d^2z}{dt^2} \quad \ldots$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} \quad \frac{d^3y}{dt^3} \quad \frac{d^3z}{dt^3} \quad \ldots$$

. . . .

Редом оваквих система назива
ред највишег извода који у њему фигу-
ше.

За такве системе важи ово основно правило: Сваки овакав систем ма кога реда био може се свести на један систем линеарних симултаних једначина првог реда са сталним коефицијентима, ако се у систему оставе само први изводи непромењени а стави се

$$\frac{dx}{dt} = u$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{dz}{dt} = w$$

Уочимо н. пр. један систем другог реда са две непознате функције чији је најопштији облик

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x + a_3 \frac{d^2y}{dt^2} + a_4 \frac{dy}{dt} + a_5 y + a_6 = 0$$

$$b_0 \frac{d^2x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 x + b_3 \frac{d^2y}{dt^2} + b_4 \frac{dy}{dt} + b_5 y + b_6 = 0$$

Ако се стави

$$\frac{dx}{dt} = u$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

бијамо систем од четири линеарне јед-
чине

$$a_0 \frac{du}{dt} + a_1 u + a_2 x + a_3 \frac{dv}{dt} + a_4 v + a_5 y + a_6 = 0$$

$$b_0 \frac{du}{dt} + b_1 u + b_2 x + b_3 \frac{dv}{dt} + b_4 v + b_5 y + b_6 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} - u = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - v = 0$$

је су све првог реда.

Тако би се исто радило и са
темом другог реда па ма колики био
ј непознатих функција.

Кад би се имало посла са си-
емом трећег реда онда би за сваки ви-
извод увели по једну нову функцију
писавши одмах везу која постоји из-
ђу ње и првобитне функције, па ћемо

добити опет систем једначина првог ре
да али са више непознатих него што и
је било у првобитном систему.

Према томе за интеграцију
система вишег реда није нужна наро
та теорија, јер је ова сведена на теор
ју једначина првог реда. Међутим по
кадкад је подесније не извршавати сво
свођење већ интегралити дату једначи
ну директно на начин сличан ономе
ји смо имали код једначина првог ре
Тако н.пр. ако је дата једна хомоген
једначина т.ј. без независног члана, и-
мало би се ставити

$$x = Ae^{rt}$$
$$y = Be^{rt}$$
$$z = Ce^{rt}$$
$$\cdots\cdots$$

скратити целу једначину са e^{rt}, па би
резултат био један систем од n лине-
арних и хомогених једначина са n непо-
знатих $A, B, C, \ldots$ Да би такав систем

рао постојати а да при том све ове
познате не буду идентички равне нули,
потребно је и довољно да детерминанта
система буде равна нули. А кад се ова
де уредила по степенима од r, добиће
извесна алгебарска једначина по r.
вакоме корену те једначине одговараће
по један партикуларан интеграл x,
$z, \ldots$ Ако су н.пр. ти корени прости
равни $r_1, r_2, r_3, \ldots$ имаћемо као општи
нтегрални систем

$$x = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} + \cdots + A_ne^{r_nt}$$
$$y = B_1e^{r_1t} + B_2e^{r_2t} + \cdots + B_ne^{r_nt}$$
$$z = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + \cdots + C_ne^{r_nt}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

случају ако би који корен био имаги-
ран место експоненцијалне функције
јављали би се sin и cos.

Примери:

1. $$\frac{d^2x}{dt^2} = ky$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = kx$$

Ако би хтели свести систем на систем првог реда, овај би постао

$$\frac{dx}{dt}=x'$$

$$\frac{dx'}{dt}=ky$$

$$\frac{dy}{dt}=y'$$

$$\frac{dy'}{dt}=kx$$

Међутим ако би хтели директно интеграли тражити требало би ставити

$$x=Ae^{rt}$$

$$y=Be^{rt}$$

одакле је

$$\frac{dx}{dt}=Are^{rt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=Ar^2e^{rt}$$

$$\frac{dy}{dt}=Bre^{rt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=Br^2e^{rt}$$

Заменом и скративши са e^{rt} једначине остају

$$Ar^2-kB=0$$
$$Br^2-kA=0$$

ли

$$Ar^2-kB=0$$
$$Ak-Br^2=0$$

туда једначина

$$\begin{vmatrix} r^2 & -k \\ k & -r^2 \end{vmatrix}=0$$

$$r^4-k^2=0$$

туда четири корена

$$r_1=\sqrt{k}$$
$$r_2=-\sqrt{k}$$
$$r_3=i\sqrt{k}$$
$$r_4=-i\sqrt{k}$$

према томе општи интегрални систем је

$$x=A_1e^{t\sqrt{k}}+A_2e^{-t\sqrt{k}}+A_3\cos t\sqrt{k}+A_4\sin t\sqrt{k}$$

$$y=B_1e^{t\sqrt{k}}+B_2e^{-t\sqrt{k}}+B_3\cos t\sqrt{k}+B_4\sin t\sqrt{k}$$

Примедба: У случају кад дата начина има независног члана који је алан, сменом

$$x = x_1 + \alpha$$

$$y = y_1 + \beta$$

. . . . . .

и згодно одређеним константама $\alpha, \beta, \ldots$ може се учинити да тога члана нестане

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x$$

Диференцијалећи прву једначину двапут добијамо

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{d^2z}{dx^2} = e^x$$

или ако у овој једначини сменимо $\frac{d^2z}{dx^2}$ вредношћу из друге једначине

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4y + 12z = 4x + e^x$$

Ако прву дату једначину помножимо са 3 и одузмемо је од ове добијамо најзад

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 4x - 2e^x$$

Каракт. једначина ове једначине је

$$r^4 - r^2 - 2 = 0$$

на има као корене

$$r_1 = \sqrt{2}$$

$$r_2 = -\sqrt{2}$$

$$r_3 = i$$

$$r_4 = -i$$

а отуда

$$y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + y_1$$

би одредили партикул. интеграл y_1 авимо

$$y = ax + b + ce^x$$

дакле

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ce^x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = Ce^x$$

а добијамо

$$Ce^x - Ce^x - 2ax - 2b - 2Ce^x = 4x - 2e^x$$

$$-2ax - 2b - 2Ce^x = 4x - 2e^x$$

дакле упоређењем

$$-2a = 4$$

$$-2b = 0$$

$$-2C = -2$$

или

$$a = -2$$
$$b = 0$$
$$c = 1$$

и према томе

$$y_1 = -2x + e^x$$

а отуда

$$y = C_1 e^{x\sqrt2} + C_2 e^{-x\sqrt2} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + e^x - 2x$$

Одавде је

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C_1 e^{x\sqrt2} + 2C_2 e^{-x\sqrt2} - C_3 \cos x - C_4 \sin x + e^x$$

Заменом последњих двеју вредности у првој од датих једначина добијамо и

$$z = -C_1 e^{x\sqrt2} - C_2 e^{-x\sqrt2} - \frac{1}{4} C_3 \cos x - \frac{1}{4} C_4 \sin x - \frac{1}{2} e^x + x$$

3. $$\frac{d^2y}{dx^2} + 7y - z = 0$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} + 4y + 2z = 0$$

ако извршимо смену

$$y = Ce^{rt}$$
$$z = De^{rt}$$

даље је

$$\frac{dy}{dx} = Cre^{rt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = Cr^2e^{rt}$$
$$\frac{dz}{dx} = Dre^{rx}$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = Dr^2e^{rx}$$

обијамо после скраћивања са e^{rx}

$$Cr^2 + 7C - D = 0$$
$$Dr^2 + 4C + 2D = 0$$

ли

$$(r^2+7)C - D = 0$$
$$4C + (r^2+2)D = 0$$

аље једначина

$$\begin{vmatrix} r^2+7 & -1 \\ 4 & r^2+2 \end{vmatrix} = 0$$

ли ако развијемо

$$r^4 + 9r^2 + 18 = 0$$

ва једначина има као корене

$$r_1 = i\sqrt6$$

$$r_2 = -i\sqrt{6}$$
$$r_3 = i\sqrt{3}$$
$$r_4 = -i\sqrt{3}$$

па отуда

$$y = C_1 \cos x\sqrt{6} + C_2 \sin x\sqrt{6} + C_3 \cos x\sqrt{3} + C_4 \sin x\sqrt{3}$$

$$z = D_1 \cos x\sqrt{6} + D_2 \sin x\sqrt{6} + D_3 \cos x\sqrt{3} + D_4 \sin x\sqrt{3}$$

Лако је наћи да је

$$D_1 = C_1$$
$$D_2 = C_2$$
$$D_3 = 4\,C_3$$
$$D_4 = 4 \cdot C_4$$

Симултане једначине које нису линеарне.

И за ове једначине важи за то
оказана основна теорема да се ма ког
блика и реда биле могу увек помоћу јед-
ог низа диференцијаљења и елимини-
ања свести на обичну диференцијал-
у једначину.

Тако исто очевидно је и то да
ко је систем вишег реда, сменом об-
ика

$$\frac{dx}{dt} = x'$$
$$\frac{dy}{dt} = y'$$
$$\frac{dx'}{dt} = x''$$

$$\frac{dy'}{dt} = y''$$

. . . .

такав се систем може увек свести на систем првог реда.

Међутим у врло много случајева и то баш оних који су од интереса интеграција се може извршити без ових редукција. Не постоји никаква општа метода за ту интеграцију, већ начин интеграције зависи од система са којим се има посла. Ми ћемо примера ради навести начин директне интеграције за ова два типа једначина

1°

Нека је дат систем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \alpha$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = f(t)$$

ако се стави

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\alpha} \cos z$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\alpha} \sin z \qquad 3.)$$

маћемо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sqrt{\alpha} \sin z \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sqrt{\alpha} \cos z \frac{dz}{dt}$$

заменом лако се уверавамо да је прва једначина идентички задовољена ма какво било z. Међутим заменом у једначини и водећи рачуна о томе да је

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

бија се

$$\alpha \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = f(t)$$

акле је

$$z = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \sqrt{f(t)}\, dt + C_1$$

1) меном у обрасцима 3.) и интегралећи

2) бија се као општи интегрални систем

$$x = \sqrt{\alpha} \int \cos \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \sqrt{f(t)}\, dt + C_1\right] dt + C_2$$

$$y = \sqrt{\alpha} \int \sin \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \sqrt{f(t)}\, dt + C_1\right] dt + C_3$$

На овај се задатак наилази н.пр. тражећи код Descartes-ових координата них једначина оне криве код које [illegible]обрасци 2.) дају у напред дати однос између полупречника кривине и лука.

2°

Нека је дат систем

$$\frac{dx}{dt} = \alpha yz$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta xz$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma xy$$

Покушајмо овај систем интегралити функцијама

$$x = A\, sn\,(gt+h)$$

$$y = B\, cn\,(gt+h)$$

$$z = C\, dn\,(gt+h)$$

Где су A, B, C, g, h као и модул k ових елиптичних функција за сад неодређене константе. Према познатом обрасцу

$$sn' = cn\,u\, dn\,u$$

$$cn' = -\,sn\,u\, dn\,u$$

$$dn' = -\,k^2\, sn\,u\, cn\,u \qquad 3.)$$

$$\frac{dx}{dt} = Ag\, cn(gt+h)\cdot dn(gt+h)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\,Bg\, sn\,(gt+h)\cdot dn(gt+h)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\,Cgk^2\, sn\,(gt+h)\, cn(gt+h)$$

ли

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Ag}{BC}\, yz$$

$$\frac{dy}{dt} = -\,\frac{Bg}{AC}\, xz \qquad 4.)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\,\frac{Cgk^2}{AB}\, xy$$

ема томе функције x, y, z дефинисане расцима 2.) да би задовољиле једначи- 1.) потребно је и довољно да буде

$$\frac{Ag}{BC} = \alpha$$

$$-\,\frac{Bg}{AC} = \beta \qquad 5.)$$

$$-\frac{Cgk^2}{MB} = \gamma$$ 5.

Из ове три једначине можемо израчунати три константе A, B, C помоћу α, β, γ и k. Кад те вредности будемо дали константама A, B, C систем 2.) представљаће интегрални систем за једначине 1.). У њему као што се види остају три произвољне константе g, h и k и према томе то ће бити општи интегрални систем.

О првим интегралима симултаних једначина.

Дешава се кад је дат један систем
мултаних једначина да се извесним ком-
нацијама једначина из којих је он са-
ављен и помоћу једне или више инте-
ација може доћи до такве једне рела-
је између независно-промењиве, не-
знатих функција и њихових извода
а би у себи садржала једну или више
извољних констаната. Таква једна
нација назива се првим интегралом
ог система. У осталом један систем
е имати и више таквих интеграла
којих би се дошло на разне начине. Тако
р. ако је дат систем:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=x$$

и ако прву једначину помножимо са

$$\frac{dx}{dt}\cdot dt=dx$$

а другу са

$$\frac{dy}{dt}dt=dy$$

добија се

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt=y\,dx$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot dt=x\,dy$$

Сабирањем ових једначина добија се

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot dt=y\,dx+x\,dy$$

Лева страна ове једначине није ништа друго до тотални диференцијал функције

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]$$

а десна је тотални диференцијал функције

$$xy$$

1.) Према томе интеграцијом једначине 2.) добија се

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2xy+C \qquad 4.)$$

акле дошли смо до једне релације између познатих функција и њихових извода. Ова лација садржи једну константу C и пре- а томе биће први интеграл датог систе- а 1.)

Уочимо сад општи систем

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,y)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\varphi(x,y) \qquad 6.)$$

е су f и φ ма какве функције xa и ya. ко опет прву једначину помножимо са

$$\frac{dx}{dt}\cdot dt=dx$$

другу са

$$\frac{dy}{dt}\cdot dt=dy$$

резултате саберемо, добија се једначина

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot dt=f\cdot dx+\varphi\cdot dy \qquad 7.)$$

Претпоставимо сад да су функције f и φ такве да је израз

$$f\,dx+\varphi\,dy$$

потпун диференцијал функције F(x,y), што ће бити ако је идентички

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Тада се интеграцијом једначине 7.) добија

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2F(x,y)+C$$

што ће бити први интеграл система 6.)

Уочимо као конкретан пример систем једначина

$$\frac{d^2x}{dt^2}=xy^2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=x^2y$$

Овди је

$$f=xy^2$$

$$\varphi=x^2y$$

и према томе задовољен је услов

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

функција за коју је

$$f\,dx+\varphi\,dy$$

отпун диференцијал јесте

$$F=\frac{1}{2}x^2y^2$$

рема томе први интеграл система биће

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=x^2y^2+C$$

На сличан би се начин радило код система са три непознате функци-

Нека је дат систем

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,y,z)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\varphi(x,y,z) \qquad 8.)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\psi(x,y,z)$$

ко прву једначину помножимо са

$$\frac{dx}{dt}dt=dx$$

гу са

$$\frac{dy}{dt}dt=dy$$

ећу са

$$\frac{dz}{dt}dt=dz$$

добија се

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}dt + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}dt =$$

$$= f\,dx + \varphi\,dy + \psi\,dz$$

Претпоставимо сад да је

$$f\,dx + \varphi\,dy + \psi\,dz$$

потпун диференцијал функције

$$F(x,y,z)$$

Очевидно је према малопређашњем да ћемо имати као први интеграл система 8.) релацију

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2F(x,y,z) + C$$

Тако н. пр. за систем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = yz$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = xz$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = xy$$

имали би за функцију F

$$F(x,y,z) = xyz$$

Отуда први интеграл

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2xyz + C$$

Начини за добијање првих ин-
теграла разни су према системима са
ојима се има посла. Приметићемо само
а први интеграли играју веома важну
логу у рационалној механици и да из-
есне основне теореме из механике нису
ишта друго до релације изражене о-
аквим првим интегралима. Такав је
пр. случај са теоремом живих сила пре-
а којој је жива сила система равна
ири радова и која је аналитички изра-
ена првим интегралом

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = U(x,y,z) + C$$

е $U(x,y,z)$ представља функцију жи-
их сила.

Примедба: Казали смо да се сва-
и систем симултаних једначина може
ести на једну обичну диференцијалну
дначину. Обрнуто има и обичних ди-
еренцијалних једначина које се лако

могу интегралити свођењем на систем симултаних једначина. Тако н. пр. једначина

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$$

очевидно је еквивалентна систему

$$\frac{dy}{dt} = ax+by+c$$

$$\frac{dx}{dt} = a'x+b'y+c$$

Ово је један систем линеарних једначине са сталним коефицијентима који се лак интеграли помоћу експоненцијалних тригонометријских функција и ако је

$$x = f(t)$$

$$y = \varphi(t)$$

интеграл тога система, интеграл првобитне једначине добија се елиминацијом t из двеју последњих једначина.

У опште кад је дата једначина

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}$$

кад год је могуће интегралити систем имултаних једначина

$$\frac{dy}{dt} = f(x,y)$$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x,y)$$

век ће бити могуће интегралити и прoбитну једначину.