Основи Теорије

ДЕТЕРМИНАНАТА

Бор. Ј. Пујић, проф.

Основи теорије детерминаната.

Предавања
Д-р Мих. Петровића,
проф. Универзитета
(допуњена примерима).

Неки претходни појмови

Под пермутацијама n елемената разумеју се разни распореди који се могу дати тим елементима стављајући их на разне начине један крај другога и тако да у сваком таквом распореду сваки се елеменат јавља једанпут и то само једанпут. По познатој елементарној радњи могу се из n елемената начинити $n!$ пермутација.

Кад имамо неколико елемената можемо од воље сматрати известан ред као природан по коме ћемо ређати елементе. Природан ред за елементе 1, 2, 3, 4 јесте тај у коме су они написани: 1, 2, 3, 4. Тако је исто природан ред: a, b, c, d, e, f за елементе a, b, c, d, e, f. Ако у једној пермутацији два елемента не стоје у природном реду, каже се да они представљају <u>инверзију</u>. Пермутација н.пр.

$$1, 2, 3, 4$$

нема ни једне инверзије, док пермутација

$$2, 1, 3, 4$$

има једну инверзију, пермутација

$$2, 1, 4, 3$$

две инверзије и т.д.

Према броју инверзија све пермутације делимо у две класе:

1° пермутације код којих је број инверзија паран, и

2° пермутације код којих је број инверзија непаран.

За класу пермутације важи ова основна <u>теорема:</u> Кад се у једној пермутацији пермутују два ма која елемента, онда та пермутација мења своју класу.

Да би ову теорему доказали уочимо два ма која елемента a и b и разликујмо следећа два случаја:

1° Претпоставимо да су елементи a и b узастопни т.ј. да се међу њима у посматраној пермутацији не налази ни један стран елеменат. Означимо са M ону групу елемената што претходи елементима a и b, а са N ону групу елемената што за њима долази. Онда посматрана пермутација овако изгледа:

$$M\ a\ b\ N \qquad 1.)$$

Ако сада a и b међу собом пермутујемо, пермутација 1.) добиће облик

$$M\ b\ a\ N \qquad 2.)$$

Овим међусобним пермутовањем елемената a и b очевидно се није ништа утицало на групе елемената M и N у погледу инверзије, али је измењен број инверзија у групи ab, јер ако та група није представљала инверзију, њена ће проста пермутација ba очевидно представљати инверзију и обрнуто. Тиме је број инверзија у датој пермутацији било повећан било смањен за јединицу и тиме је очевидно класа пермутације промењена: из парне у непарну или обрнуто.

2°) Претпоставимо сада да a и b нису два узастопна елемента у посматраној пермутацији a M и N нека значе исто што и мало час, а I нека је група елемената која лежи између елемената a и b. Онда ће посматрана пермутација изгледати овако

$$M\ a\ I\ b\ N \qquad 3.)$$

Учинимо сад помоћу извесног броја пермутовања (n пута) да елеменат b дође до елемента a; тиме 3.) постаје

$$M\ a\ b\ I\ N \qquad 4.)$$

и пермутујмо сад a и b па ћемо добити

$$M\ b\ a\ I\ N \qquad 5.)$$

Учинимо сад са n нових пермутовања да група I дође међу a и b па ће бити

$$M\ b\ I\ a\ N \qquad 6.)$$

Пермутација 6.) је у ствари пермутација 3.) са пермутованом групом ab у ba. Од 3.) до 6.) дошли смо помоћу $(n+1+n)$ пермутација т.ј. помоћу $(2n+1)$ пермутацију а то значи да је број инверсија измењен непаран број пута. Тиме пермутација коју посматрамо очевидно мора променити класу. Тако је основна теорема доказана.

Дефиниција детерминанте.

Нека је дато n^2 елемената и напишимо их у следећем облику

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Сваком елементу, како се види, придајемо два индекса којима му означавамо место у групи и то тако да горњи индекс означава ступ а доњи индекс линију у којој се елеменат налази. Ти су индекси као нека врста координата за сваки елеменат.

Уочимо у шеми групу чланова

$$a_1^1 \ a_2^2 \ a_3^3 \dots a_n^n$$

који су у њој означени стрелицама и налазе се на дијагонали у правцу стрелица. Оставимо у тој групи на дијагонали неизмењене доње индексе а пермутујмо горње на све могуће начине. Тиме ћемо добити $n!$ група. Придајмо свакој од тих група знак + ако представља пермутацију прве класе (код које је број инверзија паран), а знак − ако представља пермутацију друге класе (код које је број инверзија непаран). Алгебарски збир свих тих група пермутација назива се <u>детерминантом</u> оних n^2 елемената, а n је <u>ред</u> те детерминанте. Симболистички се детерминанта представља у облику предње шеме; каткад се може означити и на следећи начин:

$$[a_1^1 \ a_2^2 \ a_3^3 \dots a_n^n]$$

који се употребљава само онда када су елементи обележени својим индексима.

Примери:

1°) Ако је дата група од четири елемента, онда ћемо имати следећу шему

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

где су чланови главне дијагонале

$$a_1^1\, a_2^2$$

Остављајући доње индексе сталне а пермутујући горње, добијамо свега две пермутације:

$$a_1^1\, a_2^2 \quad \text{и} \quad a_1^2\, a_2^1$$

Прва пермутација нема ни једне инверзије, па је њен знак + (јер је прве класе); друга има једну инверзију, па је њен знак −. Тако имамо алгебарски збир

$$a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1$$

Онда се пише

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1$$

2° Нека је дата група од девет елемената. Онда имамо овакву шему

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

чланови главне дијагонале су

$$a_1^1\, a_2^2\, a_3^3$$

Овде добијамо шест пермутација:

$$+a_1^1 a_2^2 a_3^3,\ -a_1^1 a_2^3 a_3^2,\ -a_1^2 a_2^1 a_3^3,\ -a_1^2 a_2^3 a_3^1,$$
$$-a_1^3 a_2^1 a_3^2 \quad \text{и} \quad +a_1^3 a_2^2 a_3^1$$

Детерминанта је равна алгебарском збиру тих шест пермутационих група.

Спец. случај: узмимо исту детерминанту, али нека су вредности елемената дати у посебним бројевима

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Према предњем, ако ову детерминанту означимо са Δ, њена ће вредност бити

$$\Delta = +0\cdot5\cdot1 - 0\cdot0\cdot1 - 1\cdot2\cdot1 - 1\cdot1\cdot3 - 2\cdot2\cdot0 + 2\cdot5\cdot3 =$$
$$= -1\cdot2\cdot1 - 1\cdot1\cdot3 + 2\cdot5\cdot5 =$$
$$= 25$$

Неке основне особине детерминаната.

1° Детерминанта не мења вредност ако се стубови смене линијама и обратно.

Та особина је природна последица дефиниције. Тим измењивањем стубова и линија не мења се главна дијагонала а тиме се не мења ни вредност детерминанте. Н. пр.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

2° Ако у једној детерминанти пермутујемо два стуба или две линије, детерминанта мења знак али не мења вредност.

Да би ту теорему доказали уочимо у детерминанти елементе $r^{\text{тог}}$ и $s^{\text{тог}}$ стуба. Међу сабирцима који састављају детерминанту биће извесно један сабирак облика

$$\pm M a_p^r I a_q^s N \qquad 1.)$$

Исто ће тако међу сабирцима извесно бити и сабирак облика

$$\mp M a_p^s I a_q^r N \qquad 2.)$$

Извршимо сад пермутацију $r^{\text{тог}}$ и $s^{\text{тог}}$ стуба. Облик 1.) постаје тада

$$\pm M a_p^s I a_q^r N \qquad 3.)$$

а облик 2.) постаје

$$\mp M a_p^r I a_q^s N \qquad 4.)$$

Као што се види члан 3.) нове детерминанте није ништа друго до члан 2.) старе детерминанте са промењеним знаком. Исто је тако члан 4.) нове детерминанте у ствари члан 1.) старе детерминанте са промењеним знаком. Па пошто то вреди за све доње индексе p и q т.ј. за све детерминантине линије, то се може сматрати да чланови нове детерминанте која постаје пермутацијом два стуба нису ништа друго до чланови старе детерминанте али са промењеним знацима. Целокупна детерминанта дакле мења знак али не мења вредност. Тиме је наша теорема доказана.

Иста је аргументација за линије.

3° Свака детерминанта код које су два стуба или две линије једнаке, идентички је једнака нули.

Ова је особина непосредна последица особине под 2°, јер ако пермутујемо два таква једнака стуба или две такве једнаке линије, по особини 2° детерминанта не треба да промени вредност а мора да промени знак, а једина је нула у стању променити знак и остати иста. Вредност је дакле детерминанте једнака нули.

Заиста се пермутацијом из

$$\pm M a_p^2 \, J a_q^3 N$$

добија

$$\mp M a_p^3 \, J a_q^2 N$$

Ако је

$$2 = 3$$

ти изрази биће

$$\pm M a_p^2 \, J a_q^2 N \quad \text{и} \quad \mp M a_p^2 \, J a_q^2 N$$

који се потиру и дају нулу.

Минори детерминаната

Под минором једне детерминанте Δ разуме се она детерминанта која се добија када се у детерминанти Δ изостави један известан број линија и толики исти број ступова. Тако н. пр. детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

има ове миноре:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Ако су минори добијени изостављањем једног ступа и једне линије онда се зову: минорима првог реда и бележе се знаком Δ_α^β где горњи индекс показује изостављени ступ, а доњи изостављену линију детерминанте. Ако смо изоставили два ступа и две линије, онда се тако добијени минори зову минорима другог реда и бележе се са $\Delta_{\alpha\gamma}^{\beta\delta}$ где индекси значе исто што и горе код минора првог реда и т. д. све до минора $n^{\text{тог}}$ реда где смо изоставили n линија и n ступова (са аналогим означавањем). Код предње је детерминанте на пр. Δ_1^1 први од предњих минора. Код детерминанте

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

биће минори првог реда:

$$\Delta_1^1 = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 12 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta_2^1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

и т. д.; минори другог реда:

$$\Delta_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_{24}^{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

О развијању детерминаната помоћу минора

Нека је дата детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Из саме дефиниције лако се увиђа да ће сваки члан развијене детерминанте по познатоме начелу садржати по један и то само по један елеменат сваке линије, а тако исто и по један и то само по један елеменат сваког ступа. Према томе развијену детерминанту Δ можемо написати у следећем облику:

$$\Delta = a_k^1 A_k^1 + a_k^2 A_k^2 + a_k^3 A_k^3 + \cdots + a_k^n A_k^n$$

где израз A_k^1 не садржи више ни један елеменат првог ступа, A_k^2 ни један елеменат другог ступа и т. д. У опште где израз A_k^i не садржи више ни један елеменат $i^{\text{тог}}$ ступа. За количине $A_k^1, A_k^2, \ldots A_k^n$ доказаћемо ову __теорему__: У опште израз A_k^i није ништа друго до онај минор детерминанте Δ који се добија изостављањем $i^{\text{тог}}$ ступа и $k^{\text{те}}$ линије и то тај се минор има узети са знаком + или − према томе да ли су k и i исте или различите парности.

Да бисмо ту теорему доказали претпоставимо прво да је детерминанта Δ развијена по елементима прве линије, да постоји дакле релација

$$\Delta = a_1^1 A_1^1 + a_1^2 A_1^2 + \cdots + a_1^n A_1^n$$

Имајући на уму прву основну дефиницију детерминанте очевидно је да би израз A_1^1 добили када би у члану праве дијагонале изоставили члан a_1^1 па онда оставив доње индексе непромењене пермутовали горње индексе на све могуће начине. Према томе је израз A_1^1

она детерминанта чија је главна дијагонала $a_2^2 a_3^3 \cdots a_n^n$ и та детерминанта очевидно изгледа овако

$$\begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

чиме је очевидно доказано да је

$$A_1^1 = \Delta_1^1$$

Ако сада пермутујемо међусобно и други ступ и то тако да други дође на место првога т.ј. да елементи другог ступа играју улогу елемената првог ступа, онда ће бити

$$A_1^2 = -\Delta_1^2$$

јер су сви чланови детерминанте променили знак а не и вредност. Преместимо сада на место првог ступа трећи и то помоћу два узастопна пермутовања, па ћемо се лако уверити да је

$$A_1^3 = \Delta_1^3$$

(са истим знаком јер друга пермутација враћа стари знак). И т.д. Тиме је горње правило доказано.

Ми смо развили детерминанту по линији к. Можемо је развити и по ступу i и онда ће бити

$$\Delta = a_1^i A_1^i + a_2^i A_2^i + \cdots + a_n^i A_n^i$$

где је израз A_k^i минор детерминанте Δ и то минор Δ_k^i а знак минора је + или − према парности заједничкој или различитој од i и k. Вреди дакле исто правило.

Једну детерминанту можемо развити по којој хоћемо линији или по коме хоћемо ступу (k и i је произвољно т.ј. једно од њих). Бирамо обично ону линију или онај ступ по коме детерминанту можемо најлакше и најбрже развити и најлакше и најбрже срачунати њену вредност. Тако је најзгодније развити детерминанте чији су елементи посебни бројеви по оној линији или по оном ступу који има највише нула.

Из свега овога изводи се следеће практично упутство за развијање једне дате детерминанте: Уоче се елементи једног кога се хоће стуба i или једне које се хоће линије k и онда се детерминанта напише у облику

$$\Delta = a_k^1 A_k^1 + a_k^2 A_k^2 + \cdots + a_k^n A_k^n$$

или у облику

$$\Delta = a_1^i A_1^i + a_2^i A_2^i + \cdots + a_n^i A_n^i$$

према томе да ли развијамо по елементима произвољно изабраног стуба i или по елементима произвољно изабране линије k. Израз A_k^i у опште има за вредност

$$A_k^i = (-1)^{k+i} \Delta_k^i$$

Пошто су и минори у ствари детерминанте, то и њих можемо даље развити по истом упутству и тај рад продужити све дотле док се не дође на једну детерминанту која увек има облик

$$\begin{vmatrix} a_k^\alpha & a_k^\beta \\ a_h^\alpha & a_h^\beta \end{vmatrix}$$

и коју увек можемо написати у развијеном облику: $a_k^\alpha a_h^\beta - a_k^\beta a_h^\alpha$ чиме је њена вредност дата.

Сарусово правило за детерминанте трећег реда

Ово специјално правило за детерминанте трећег реда које олакшава развијање састоји се у овоме: Нека је дата детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Напишимо сад овакву шему

$$\Delta' = \left| \begin{array}{ccc} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \end{array} \right|$$

Δ' је Δ са дописаним првим двема линијама од Δ. Сада имамо ово правило: Развијена детерминанта Δ биће алгебарски збир свих оних пермутационих група које се налазе у детерминанти Δ' и то на означеним дијагоналама: на ↗ са знаком −, на ↘ са знаком +.

Н. пр. нека је дата детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Овди је

$$\Delta' = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right|$$

па је зато

$$\Delta = [1\cdot 5\cdot 9 + 4\cdot 8\cdot 3 + 7\cdot 2\cdot 6] - [3\cdot 5\cdot 7 + 1\cdot 8\cdot 6 + 4\cdot 2\cdot 9] = \\ = 0$$

Често пута лакше је употребити ово правило но да радимо обичним дужим и заметнијим путем; наравно то вреди само за детерминанте трећег реда.

Још неколике особине детерминаната.

Као непосредне последице показаног општег правила за развијање детерминаната изводе се ове теореме:

1° Кад је једна детерминанта написана у облику

$$\Delta = a_k^1 A_k^1 + a_k^2 A_k^2 + \cdots + a_k^n A_k^n$$

па се у овоме изразу елементи $k^{\text{те}}$ линије смене елементима друге какве линије исте детерминанте Δ, н. пр. елементима $h^{\text{те}}$ линије: $a_h^1, a_h^2 \cdots$ резултат ће бити идентички једнак нули.

То излази отуда што израз

$$\Delta = a_h^1 A_h^1 + a_h^2 A_h^2 + \cdots + a_h^n A_h^n$$

није ништа друго до развијена детерминанта Δ у којој су једнаке линије k и k, а таква је детерминанта као што смо видели идентички равна нули.

2° Када се сви елементи једног истог ступа или једне исте линије једне дате детерминанте Δ помноже једним истим бројем M, резултат ће бити једнак производу из M и детерминанте Δ.

Јер, ако смо елементе $k^{\text{те}}$ линије помножили са M, па детерминанту Δ развили по тим елементима (а то увек можемо), онда ће бити

$$M a_k^1 A_k^1 + M a_k^2 A_k^2 + \cdots + M a_k^n A_k^n =$$
$$= M [a_k^1 A_k^1 + a_k^2 A_k^2 + \cdots + a_k^n A_k^n =$$
$$= \Delta \cdot M$$

Ова особина детерминанте даје могућност да се у врло многим случајевима развијање детерминанте упрости множењем или делењем (множење са $\frac{1}{M}$ је деоба са M) једнога истог ступа или једне исте линије те детерминанте извесним згодно изабраним бројем. Н. пр.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 18 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \Delta'$$

3° Кад су елементи једне линије или једног ступа у једној детерминанти пропорционални елементима друге какве линије или другога каквог ступа те детерминанте, онда је та детерминанта идентички равна нули.

Узмимо, да бисмо то доказали, детерминанту

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \qquad 1.)$$

и претпоставимо да је

$$a_2^2 = a_1^1 \cdot \lambda$$
$$a_2^2 = a_2^1 \cdot \lambda \qquad 2.)$$
$$a_2^3 = a_3^1 \cdot \lambda$$

где је λ коефицијенат пропорционалности. Заменом тих вредности 2.) у 1.) имамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^1 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} \cdot \lambda = \Delta' \cdot \lambda$$

а пошто је $\Delta' = 0$ то је и $\Delta = 0$.

Лако се уверити општим резоновањем да то вреди и за детерминанту $n^{\text{тог}}$ реда.

4° Кад су у једној детерминанти сви елементи једне линије или једног ступа збирови од више количина, детерминанта се може изразити као збир од неколико детерминаната истог реда.

Узмимо детерминанту

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 + b_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_2^1 + b_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_3^1 + b_3^1 & a_3^2 & \cdots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 + b_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Ако је уредимо по елементима првог ступа имаћемо

$$\Delta = (a_1^1 + b_1^1)\Delta_1^1 - (a_2^1 + b_2^1)\Delta_2^1 + \cdots \pm (a_n^1 + b_n^1)\Delta_n^1$$

или

$$\Delta = \left[a_1^1 \Delta_1^1 - a_2^1 \Delta_2^1 + \cdots \pm a_n^1 \Delta_n^1\right] + \left[b_1^1 \Delta_1^1 - b_2^1 \Delta_2^1 + \cdots \pm b_n^1 \Delta_n^1\right]$$

чиме је теорема доказана.

Ако би још која линија или још који ступ имао збирове елемената, ваља поновити више пута исту операцију и добили би збир од више детерминаната чији елементи више нису збирови а које су истог реда.

5° Једна детерминанта не мења ни знак ни вредност кад се елементима једног ступа или једне линије додају елементи другог каквог ступа или друге какве линије, помножени каквом константом

Нека је дата детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Образујмо детерминанту

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 + \lambda a_1^2 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 + \lambda a_2^2 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 + \lambda a_3^2 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Онда можемо написати

$$\Delta' = \alpha + \lambda\beta$$

где су α и β две нове детерминанте добијене очевидно на основу особине 4°. Исто је тако лако увидети да је $\beta = 0$, па дакле и $\lambda\beta = 0$, т. ј.

$$\Delta' = \alpha$$

Али је $\alpha = \Delta$, па дакле

$$\Delta' = \Delta$$

Очевидно је да све ово важи и за детерминанту $n^{\text{тог}}$ реда.

И ова особина служи као олакшица при израчунавању детерминаната.

6°. Једна ма каква детерминанта $n^{\text{тог}}$ реда може се увек написати у облику детерминанте каквог хоћемо вишег реда. То се постиже тиме што се главна дијагонала прве детерминанте допуњује јединицама, а сва остала празна места нулама.

Очевидно је да се тиме првобитна детерминанта $n^{\text{тог}}$ реда није ни у колико променила. Н. пр.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & 0 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & 0 & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

тиме је детерминанта трећег реда претворена у детерминанту петог реда.

Множење детерминаната

Доказаћемо ову теорему: Производ двеју детерминаната истог реда може се написати у облику једне детерминанте истог тог реда, чији ће елементи бити једнаки збиру производа свих елемената једног истог ступа или једне исте линије са елементима других ступова или других линија.

Да би ту теорему доказали уочимо две детерминанте:

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_n^1 & b_n^2 & \cdots & b_n^n \end{vmatrix}$$

Детерминанта облика:

$$R = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_1^2 b_1^2 + a_1^3 b_1^3 + \cdots & + a_1^1 b_2^1 + a_1^2 b_2^2 + \cdots \\ a_2^1 b_1^1 + a_2^2 b_1^2 + a_2^3 b_1^3 + \cdots & + a_2^1 b_2^1 + a_2^2 b_2^2 + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n^1 b_1^1 + a_n^2 b_1^2 + a_n^3 b_1^3 + \cdots & + a_n^1 b_2^1 + a_n^2 b_2^2 + \cdots \end{vmatrix}$$

треба да буде равна производу $A \cdot B$ т.ј. треба да буде по теореми

$$R = A \cdot B$$

Да би то доказали развићемо детерминанту R у збир детерминаната, чији елементи неће више бити збирови (по особини 4° из прошлог одељка). Лако је увидети да ће таквих и тих детерминаната у збиру бити

$$n^n$$

Назовимо их детерминантама D. Међу истима има их које ће бити и нуле по вредности. То ће бити оне детерминанте код којих, пошто се извуче један заједнички фактор b_i^k из једног ступа а из каквог другог ступа фактор b_i^k, остају два ступа једнака (исто и за линије). Н. пр. из R се може извући оваква једна посебна (парцијална) детерминанта:

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_1^1 b_2^1 & \cdots \\ a_2^1 b_1^1 & a_2^1 b_2^1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ a_n^1 b_1^1 & a_n^1 b_2^1 & \cdots \end{vmatrix}$$

која је равна нули кад се извуку фактори b_1^1 и b_2^1.

Уочимо дакле сада оне детерминанте D које нису идентички једнаке нули, н. пр. једну парцијалну детерминанту

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_1^2 b_2^1 & \cdots \\ a_2^1 b_1^1 & a_2^2 b_2^1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ a_n^1 b_1^1 & a_n^2 b_2^1 & \cdots \end{vmatrix}$$

Из првог стуба можемо извући заједничко b_1^1, из другог b_2^1 ... у опште можемо извући из сваког известан елеменат b_i^k и онда је лако увидети да у D остају елементи који сачињавају и детерминанту A само што су стубови испремештани на разне начине. Пошто та околност утиче само на знак детерминанте, као што знамо из ранијег, а никако на вредност њену, то се види да ће свака детерминанта D бити облика: $\lambda \cdot A$ где λ зависи искључиво од природе чланова b. Збир таквих детерминаната D биће очевидно облика $R = M \cdot A$ где је $M = \Sigma \lambda$ и зависи такође искључиво од b. Остаје нам још да нађемо вредност израза M, који не зависи од елемената a. Вредност дакле тога израза остаје иста ма какве вредности давали елементима a. Дајмо онда тим елементима вредности $a_1^1 = 1$ $a_2^2 = 1$ ... $a_n^n = 1$; тада се лако увиђа из израза за R, да се исти своди на M а то је

$$M = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \cdots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_n^n \end{vmatrix}$$

а то је B у којој су линије смењене стубовима и обрнуто, чиме се вредност не мења. Дакле је $M = B$, а пошто је $R = A \cdot M$ то је $R = A \cdot B$ чиме је наша теорема доказана.

Пошто детерминанта не мења вредност ни знак када јој линије сменимо стубовима и обрнуто, то ћемо, ако ово правило применимо на тако измењене детерминанте, лако увидети, да се елементи детерминанте R могу написати у четри разна облика т.ј. елементи детерминанте R могу бити:

a) сума продуката елемената једне линије детерминанте A са елементима линија детерминанте B;

b.) сума продуката елемената једног стуба детерминанте A са елементима стубова детерминанте B;

c) сума продуката елемената једне линије детерминанте A са елементима стубова детерминанте B; и

d) сума продуката елемената једног стуба детерминанте A са елементима линија детерминанте B.

Ако детерминанте које имамо да помножимо нису истога реда, на основу последње особине (6°) прошлог одељка ми смо у стању да једну тако у детерминанту доведемо на ред оне друге и да на тај начин имамо да применимо овде изведену теорему о множењу детерминаната истога реда, што нам је позната операција.

Неке примене правила о множењу детерминаната

1° Под симетричном детерминантом разуме се она детерминанта чији су елементи који леже симетрично према главној дијагонали једнаки. Да би детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \qquad 1.)$$

била симетрична, мора бити

$$a_1^2 = a_2^1 \quad a_1^3 = a_3^1 \quad a_1^4 = a_4^1 \quad \ldots$$

и уопште

$$a_k^i = a_i^k$$

Тако н. пр. симетрична је детерминанта:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

Сада ћемо доказати ову теорему: Ма који парни степен једне такве детерминанте увек је једна симетрична детерминанта.

Нека је дата детерминанта 1). Множећи детерминанту самим собом, да би добили њен квадрат, добићемо детерминанту опет $n^{тог}$ реда:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \cdots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \cdots & c_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_n^1 & c_n^2 & \cdots & c_n^n \end{vmatrix}$$

где ће елементи c_i^k бити састављени по познатом правилу овако

$$c_i^k = a_i^1 a_k^1 + a_i^2 a_k^2 + a_i^3 a_k^3 + \ldots$$

Ако пермутујемо i и k биће

$$c_k^i = a_k^1 a_i^1 + a_k^2 a_i^2 + a_k^3 a_i^3 + \ldots$$

Компарацијом ова два израза уверавамо се да је

$$C_i^k = C_k^i$$

и тиме је очевидно доказано да је детерминанта Δ^2 симетрична.

Аналого се можемо уверити о истом правилу за сваки ма који паран степен.

2° Под <u>адјунгованом детерминантом</u> разуме се она детерминанта која се добија из дате детерминанте када се у овој сваки елеменат смени оним минором који му одговара.

Нека је дата детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Њена адјунгована детерминанта биће

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta_1^1 & \Delta_1^2 & \cdots & \Delta_1^n \\ \Delta_2^1 & \Delta_2^2 & \cdots & \Delta_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Delta_n^1 & \Delta_n^2 & \cdots & \Delta_n^n \end{vmatrix}$$

Сада ћемо доказати ову <u>теорему</u>

Адјунгована детерминанта једне ма какве детерминанте $n^{\text{тог}}$ реда равна је $(n-1)^{\text{ом}}$ степену те детерминанте.

Уочимо детерминанту другог реда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

и нека је њена адјунгована детерминанта

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{vmatrix}$$

Образујмо сада производ

$$\Delta' \cdot \Delta = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_1^2 \\ C_2^1 & C_2^2 \end{vmatrix} \qquad 1.)$$

где је

$$\begin{aligned} C_1^1 &= a_1^1 A_1^1 + a_1^2 A_1^2 \\ C_2^1 &= a_1^1 A_2^1 + a_1^2 A_2^1 \\ C_1^2 &= a_2^1 A_1^1 + a_2^2 A_1^2 \\ C_2^2 &= a_2^1 A_2^1 + a_2^2 A_2^2 \end{aligned} \qquad 2.)$$

Из израза 2.) очевидно је да је C_1^1 детерминанта Δ развијена по елементима прве линије; C_2^2 детерминанта Δ развијена по елементима друге линије; па даклe

$$C_1^1 = \Delta = C_2^2$$

C_1^2 добијено је кад се у детерминанти Δ развијеној по елементима прве линије стеке минори одговарајућим минорима који се односе на другу линију. Али је онда

$$C_1^2 = 0$$

Лако се на исти начин увиђа да је и

$$C_2^1 = 0$$

Заменом ових вредности у 1) добија се

$$\Delta \cdot \Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{vmatrix}$$

па дакле

$$\Delta \cdot \Delta' = \Delta^2$$

одакле је

$$\Delta' = \Delta$$

За детерминанту трећег реда вота се лако, на начин потпуно аналог горњем, увиђа да је

$$\Delta' = \Delta^2$$

и т.д. Исто се то на сличан начин доказује и за детерминанту $n^{\text{тог}}$ реда.

Ваља образовати продукт $\Delta'\cdot\Delta$, изразити га у облику детерминанте и онда се у добијеном резултату лако увиђа да ће сваки од елемената главне дијагонале бити Δ, а сви остали елементи биће нуле, тако да је

$$\Delta'\cdot\Delta = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^n$$

или

$$\Delta' = \Delta^{n-1}$$

Vandermonde-ова детерминанта

То је једна специјална детерминанта која је важна са својих примена. Облик те детерминанте је

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \cdots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad 1.)$$

где горњи индекси означавају степене.

Осим раније показаних начина за израчунавање какве детерминанте може се каткад употребити и какав специјалан начин израчунавања, што ћемо ми учинити овде код ове специјалне детерминанте.

Очевидно је да би развијена детерминанта дала као резултат какав полином по x-у и лако се увиђа да би тај полином био једнак нули за $x = x_2 = x_3 = \cdots$ Детерминанта 2.) нека је детерминанта у којој је x дошло на место количине x_1, јер је у опште количина x у детерминанти 1.) произвољна. Детерминанта 2.) изгледа:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x^1 & x_2^1 & x_3^1 & \cdots & x_n^1 \\ x^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad 2.)$$

Полином који би представљао резултат развијене детерминанте 2.) био би, као што смо рекли, неки полином по x-у који би био једнак нули за $x = x_2 = x_3 = \cdots$ јер када би сменили x ма којом од тих вредности у детерминанти 2.), она би имала два ступца једнака и била би равна нули. Полином дакле мора бити дељив сваком од разлика: $(x - x_2)$, $(x - x_3)$, $\cdots$

Што смо учинили са x_1 можемо учинити и са x_2 и са x_3 и т. д. Онда добијамо општи резултат: Vandermonde-ова детерминанта дељива је без остатка са сваком од разлика $(x_i - x_k)$ где i и k имају вредности од 1 до n, али искључујући при томе вредност $i=k$. Детерминанта ће дакле бити једнака производу свих разлика $(x_i - x_k)$ када се свака од њих узме по једном и све то помножи нечим за сада неодређеним бројем N који не зависи од $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Ваља нам још израчунати неодређени број N. У производу биће један члан

$$N x_2^1 \cdot x_3^2 \cdot x_4^3 \cdots x_n^{n-1}$$

Међутим у самој детерминанти главна је дијагонала

$$1 \cdot x_2^1 \cdot x_3^2 \cdot x_4^3 \cdots x_n^{n-1}$$

па је дакле

$$N = 1$$

да би та два члана била једнака. Према томе детерминанта Δ_v једнака је производу из свих разлика $(x_i - x_k)$ где је i resp. $k = 1, 2, \cdots n$ осим $i=k$.

Закључак о вредности детерминанте је онда лако извести:

$\Delta_v < 0$ када су елементи $x_1, x_2, x_3, \cdots$ различити међу собом;

$\Delta_v = 0$ ако међу њима има једнаких елемената, јер је онда довољно да једна од разлика $x_i - x_k$ буде равна нули, па да то буде и са целом детерминантом Δ_v.

Примена детерминаната на решавање система од n линеарних једначина са n непознатих.

То је једна од најважнијих примена теорије детерминаната, коју смо завршили. Она је и дала повода увођењу детерминаната у рачун. Решавајући такве системе једначина : n линеарних једначина са n непознатих, Cramer је, посматрајући изразе као вредности непознатих, уочио извесне правилности које су га непосредно довеле до појма детерминанте.

Нека је дат даље један такав систем једначина

$$
\begin{aligned}
a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n &= k_1 \\
a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n &= k_2 \qquad 1.) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots& \\
a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \cdots + a_n^n x_n &= k_n
\end{aligned}
$$

где су $k_1, k_2, \dots k_n$ независни чланови, $x_1, x_2, \dots x_n$ непознате количине, a_i^k коефицијенти једначине. Образујмо детерминанту

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \qquad 2.)
$$

коју ћемо назвати детерминантом система 1.). Развимо сад ту детерминанту по елементима првог ступца, па ћемо имати

$$\Delta = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + \cdots + a_n^1 A_n^1$$

где је A_i^k минор детерминанте Δ. Помножимо сада прву једначину из система 1.) са A_1^1, другу са A_2^1 и т.д. n-ту са A_n^1 и саберимо тако добијене резултате, па ће бити

$$
\begin{aligned}
&(a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + \cdots + a_n^1 A_n^1) x_1 + (a_1^2 A_1^1 + a_2^2 A_2^1 + \cdots + a_n^2 A_n^1) x_2 \\
&\quad + \cdots + (a_1^n A_1^1 + a_2^n A_2^1 + \cdots + a_n^n A_n^1 = \\
&\quad = k_1 A_1^1 + k_2 A_2^1 + \cdots + k_n A_n^1 \qquad 3.)
\end{aligned}
$$

Посматрајући коефицијенте у једначини 3.) види се:

1.) да је према једначини 2.) коефицијент од x_1 детерминанта Δ;

2.) да су остали коефицијенти уз $x_2, x_3, \dots x_n$ сви идентички једнаки нули, јер сваки од њих представља резултат који се добија кад се у детерминанти Δ развијеној по првом ступу минори што одговарају елементима првог ступа смене одговарајућим минорима другог, трећег и т. д. ступа, а такви су резултати нуле; и најзад

3.) десна страна једначине 3.) је резултат који се добија када се у детерминанти Δ елементи првог ступа смене независним члановима $k_1, k_2, \dots k_n$.

Ако се даље стави

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ k_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

онда је десна страна једначине 3.) детерминанта D_1 и онда 3.) гласи:

$$\Delta x_1 = D_1$$

или

$$x_1 = \frac{D_1}{\Delta}$$

Исто тако је, аналогно томе,

$$\Delta x_2 = D_2 \quad \text{или} \quad x_2 = \frac{D_2}{\Delta}$$

$$\dots \qquad \text{"} \qquad \dots \qquad 4.)$$

$$\Delta x_n = D_n \quad \text{"} \quad x_n = \frac{D_n}{\Delta}$$

На тај се начин на основу једначина под 4.) израчунавају непознате $x_1, x_2 \dots x_n$ у облику двеју детерминаната. Обрасцима 4.) је наш постављени задатак решен и у њима је исказано и правило и практично упутство за решавање задатака. У исти мах у тим задацима види се и ово:

а.) кад је $\Delta = 0$ а свако $D \gtrless 0$, систем 1.) даје за сваку непознату једно, бесконачно решење;

б.) Кад је $\Delta \gtrless 0$ систем 1.) даје за сваку непознату једно, коначно решење;

с.) Када је $\Delta = 0$ и по неко $D = 0$, систем 1.) даје најмање једно решење неодређено

Од интереса је још и показати да, обрнуто, непознате $x_1, x_2, \cdots x_n$ дефинисане једначинама 4.) одиста задовољавају систем 1.). Напишимо обрасце 4.) у облику:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= k_1 A_1^1 + k_2 A_2^1 + \cdots + k_n A_n^1 \\ \Delta x_2 &= k_1 A_1^2 + k_2 A_1^2 + \cdots + k_n A_n^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta x_n &= k_1 A_1^n + k_2 A_2^n + \cdots + k_n A_n^n \end{aligned} \qquad 5.)$$

Ако прву једначину из система 5.) помножимо са a_1^1, другу са a_1^2, $\cdots$ $n^{ту}$ са a_1^n па тако добијене саберемо, биће:

$$\Delta[a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n] = k_1[A_1^1 a_1^1 + A_1^2 a_1^2 + \cdots + A_1^n a_1^n] + k_2[\cdots] + \cdots + k_n[A_n^1 a_n^1 + \cdots + A_n^n a_n^n] \qquad 6.)$$

Посматрајући једначину 6.) види се:

1.) да је коефицијенат уз k_1 једнак детерминанти Δ развијеној по елементима своје прве линије;

2.) да су коефицијенти од $k_2, k_3, \cdots k_n$ идентички једнаки нули.

Отуда је

$$\Delta[a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n] = k_1 \Delta$$

или

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n = k_1$$

На исти начин дошли би редом и до осталих једначина система 1.) увек пошав од једначина 4.) што значи да непознате $x_1, x_2, \cdots x_n$ дефинисане једначинама 4.) одиста увек задовољавају систем 1.).

Још неколико важних примена детерминаната

Веома велики број питања своди се на решавање система од n линеарних једначина са n непознатих те би дакле и решавање таквих питања без теорије детерминаната било немогуће. Узећемо неколико задатака такве врсте:

1° Нека је дата алгебарска једначина

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0 \qquad 1.)$$

и нека су њени корени

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n$$

где се сваки корен сматра као прост а написан онолико пута колико му је ред. Ставимо сада

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n \\ S_2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \cdots + \alpha_n^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S_n &= \alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n + \cdots + \alpha_n^n \end{aligned} \qquad 2.)$$

тражи се да се израчунају збирови

$$S_1, S_2, \ldots S_n$$

помоћу коефицијената

$$A_1, A_2, \ldots A_n$$

дате алгебарске једначине 1.). Ако полином са леве стране једначине 1.) означимо са $f(x)$, биће:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$$

Одатле је

$$\log f(x) = \log(x-\alpha_1) + \log(x-\alpha_2) + \cdots + \log(x-\alpha_n)$$

а одатле је

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n}$$

ако узмемо извод са обе стране, или

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x-\alpha_n} \qquad 3.)$$

Уочимо први од разломака 3.) и извршив означену деобу у њему, ставимо

$$\frac{f(x)}{x-\alpha_1} = x^{n-1} + (\alpha_1 + A_1)x^{n-2} + (\alpha_1^2 + A_1\alpha_1 + A_2)x^{n-3} + \cdots \qquad 4.)$$

Сличне и аналоге изразе као 4.) имали би и за остале разломке 3.) и ако све те изразе саберемо, добијамо из 3.)

$$f'(x) = n x^{n-1} + [S_1 + nA_1]\,x^{n-2} + [S_2 + A_1S_1 + nA_2]\,x^{n-3} + \cdots \qquad 5.)$$

а са друге је стране опет узев непосредно извод полинома $f(x)$ из 1.)

$$f'(x) = n x^{n-1} + (n-1)A_1 x^{n-2} + (n-2)A_2 x^{n-3} + \cdots \qquad 6.)$$

Пошто 5.) и 6.) дефинишу исту функцију и то за ма какво x, то и коефицијенти десних страна из 5.) и 6.) морају бити једнаки. Дакле мора да постоји

$$\begin{aligned} S_1 + nA_1 &= (n-1)A_1 \\ S_2 + A_1S_1 + nA_2 &= (n-2)A_2 \\ S_3 + A_1S_2 + A_2S_1 + nA_3 &= (n-3)A_3 \\ &\cdots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} S_1 + A_1 &= 0 \\ S_2 + A_1S_1 + 2A_2 &= 0 \\ S_3 + A_1S_2 + A_2S_1 + 3A_3 &= 0 \\ &\cdots \end{aligned} \qquad 7.)$$

На тај смо начин добили низ линеарних једначина из којих можемо израчунати $S_1, S_2, \cdots S_n$. На основу ранијег можемо непосредно написати израз за S_k где је $k \leq n$. Узмимо тога ради k првих једначина 7.) и напишимо их у обрнутом реду

$$\begin{aligned} S_k + A_1S_{k-1} + A_2S_{k-2} + \cdots + S_1A_{k-1} &= -kA_k \\ S_{k-1} + A_1S_{k-2} + A_2S_{k-3} + \cdots + S_1A_{k-2} &= -(k-1)A_{k-1} \\ S_{k-2} + A_1S_{k-3} + A_2S_{k-4} + \cdots + S_1A_{k-3} &= -(k-2)A_{k-2} \\ &\cdots \end{aligned} \qquad 8.)$$

Ако у овом систему линеарних једначина сматрамо $S_k, S_{k-1}, \cdots$ као непознате, биће овде детерминанта Δ оваког облика:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{k-1} \\ 0 & 1 & A_1 & \cdots & A_{k-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & A_{k-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

где су чланови главне дијагонале сви јединице а сви чланови испод ње су нуле. Детерминанта је дакле једнака јединици т.ј. $\Delta = 1$.

Сматрајмо сада S_k као непознату x_1, па ће бити

$$x_1 = S_k = \frac{D_1}{\Delta} = D_1$$

где је D_1 она детерминанта Δ у којој су елементи првог ступца смењени независним члановима система 8). Дакле

$$S_k = \begin{vmatrix} -kA_k & A_1 & A_2 & \cdots & A_{k-1} \\ -(k-1)A_{k-1} & 1 & A_1 & \cdots & A_{k-2} \\ -(k-2)A_{k-2} & 0 & 1 & \cdots & A_{k-3} \\ -(k-3)A_{k-3} & 0 & 0 & \cdots & A_{k-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

чиме је задатак решен у случају $k \leq n$. Збирови степена свих корена тиме су, помоћу детерминаната израчунати.

Питање је сада како би те збирове израчунали за случај $k > n$. Тај се задатак решава применом исте методе за једначину облика

$$\varphi(x) = x^r f(x)$$

где је

$$\varphi(x) = x^r f(x) = x^{n+r} + A_1 x^{n+r-1} + \cdots + A_n x^r = 0$$

у којој једначини, ако смењујемо x са $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ добијамо једначине

$$\alpha_1^{n+r} + A_1 \alpha_1^{n+r-1} + \cdots + A_n \alpha_1^r = 0$$
$$\alpha_2^{n+r} + A_1 \alpha_2^{n+r-1} + \cdots + A_n \alpha_2^r = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Сабирањем тих једначина добијамо

$$S_{n+r} + A_1 S_{n+r-1} + A_2 S_{n+r-2} + \cdots + A_n S_r = 0$$

Ако сада у тој једначини стављамо узастопце $r = 0, 1, 2, \cdots k$, добијамо низ

$$S_n + A_1 S_{n-1} + \cdots + A_{n-1} S_1 = -S_0 A_n$$
$$S_{n+1} + A_1 S_n + \cdots + A_{n-1} S_2 = -S_1 A_n$$
$$S_{n+2} + A_1 S_{n+1} + \cdots + A_{n-1} S_3 = -S_2 A_n$$

Ако сада $S_n, S_{n+1}, \cdots$ сматрамо као непознате, имаћемо систем који нам је познат и који решавамо као и мало час, тако да се из свих виших степена од n могу помоћу коефицијената $A_1 A_2 \cdots A_n$ израчунати и збирови S нижег степена од n.

Примедба: У једначинама 1.) или 8.) можемо сматрати као непознате и количине $A_1 A_2 \cdots A_n$ т.ј. коефицијенте дате алгебарске једначине сматрајући при томе наравно количине S

т.ј. збирове $S_1, S_2, \dots S_n$ као дате вредности и тако би добили A_n у облику детерминанте.

2° Нека је дат ред

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad 1.)$$

са коначним или бесконачним бројем чланова. Тражи се да се помоћу коефицијената реда 1.): $a_0, a_1, a_2, \dots$ израчунају коефицијенти $b_0, b_1, \dots$ реда

$$[f(x)]^m = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \qquad 2.)$$

Ставимо

$$u = [f(x)]^m \qquad 3.)$$

онда ће бити

$$u' = m \cdot [f(x)]^{m-1} f'(x)$$

па отуда

$$\frac{u'}{u} = \frac{m \cdot f'(x)}{f(x)}$$

или

$$u' \cdot f(x) = m \cdot f'(x) \qquad 4.)$$

Међутим је

$$u = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$
$$u' = b_1 + 2 b_2 x + 3 b_3 x^2 + \dots$$
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$
$$f'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots$$

Заменом тих вредности у 4.) добија се

$$(b_1 + 2 b_2 x + 3 b_3 x^2 + \dots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = m(a_1 + 2 a_2 x + \dots)$$

Уредив ту једначину по степенима x-а добијамо

$$[a_0 b_1 - m b_0 a_1] + [2 a_0 b_2 - (m-1) b_1 a_1 - 2m a_2 b_0] x +$$
$$+ [3 a_0 b_3 - (m-2) a_1 b_2 - 2(m-1) a_2 b_0 - 3m a_3 b_0] x^2 + \qquad 5.)$$
$$+ \dots \dots = 0$$

Пошто једначина 5.) вреди за свако x то она вреди и онда кад су сви коефицијенти посебице од свих степена од x једнаки нули, па тако добијамо низ једначина

$$a_0 b_1 - m b_0 a_1 = 0$$
$$2 a_0 b_2 - (m-1) b_1 a_1 - 2m a_2 b_0 = 0$$
$$3 a_0 b_3 - (m-2) a_1 b_2 - 2(m-1) a_2 b_0 - 3m a_3 b_0 = 0 \qquad 6.)$$
$$\dots \dots \dots$$

У томе систему 6.) познате су количине $a_0, a_1, a_2, \dots$ и m, а непознате $b_0, b_1, b_2, \dots$ По тим непознатим количинама систем 6.) је један систем линеарних једначина. Тиме се израчунавање коефицијената $b_0, b_1, b_2, \dots$ своди на израчунавање детерминаната.

Приметимо још и то да је b_0 лако израчунати јер из једначине 2.) стављајући $x=0$ биће

$$[f(x)]^m = b_0$$

т.ј.

$$a_0^m = b_0$$

Заменом b_0 у једначината 6.) можемо ове написати у облику

$$a_0 b_1 = m a_1 a_0^m$$

$$(m-1) a_1 b_1 - 2 a_0 b_2 = -2m a_2 a_0^m$$

$$2(m-1) a_2 b_1 + (m-2) a_1 b_2 - 3 a_0 b_3 = -3m a_3 a_0^m$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

На исти овакав начин решавамо и следеће задатке.

3° Знајући коефицијенте реда

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad 1.)$$

израчунати кофицијенте реда

$$\log f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \qquad 2.)$$

И овде се ставља

$$\log f(x) = u$$

$$u' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

и т.д.

4° Знајући коефицијенте реда

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad 1.)$$

израчунати коефицијенте реда

$$\frac{1}{f(x)} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \qquad 2.)$$

Задатак се може решити овако: Ако измножимо редове 1.) и 2.), имаћемо

$$1 = a_0 b_0 + x[a_0 b_1 + a_1 b_0] +$$
$$+ x^2 [a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \dots] + \dots$$

Одатле је

$$a_0 b_0 = 1$$
$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \qquad 3.)$$
$$\dots\dots\dots$$

и пошто је

$$b_0 = \frac{1}{a_0}$$

то ако једначине 3.) напишемо у обрнутом реду, биће

$$\begin{aligned} b_n a_0 + b_{n-1} a_1 + \cdots + b_1 a_{n-1} &= -\frac{a_n}{a_0} \\ b_{n-1} a_0 + \cdots + b_1 a_{n-2} &= -\frac{a_{n-1}}{a_0} \\ b_{n-2} a_0 + \cdots + b_1 a_{n-3} &= -\frac{a_{n-2}}{a_0} \\ \cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad 4.)$$

Овди је сада

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = a_0^n$$

па је

$$b_n = \frac{\mathcal{D}_1}{\Delta} = \frac{\mathcal{D}_1}{a_0^n}$$

где је

$$\mathcal{D}_1 = \begin{vmatrix} -\frac{a_n}{a_0} & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ -\frac{a_{n-1}}{a_0} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_1}{a_0} & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

5° Знајући коефицијенте реда

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad 1.)$$

израчунати коефицијенте реда

$$e^{f(x)} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \qquad 2.)$$

О линеарним хомогеним једначинама

За један систем од n линеарних једначина са n непознатих каже се да су линеарне хомогене једначине ако су све првог степена по непознатој а независни су им чланови нуле. Облик таквог једног система од n линеарних хомогених једначина са n непознатих $x_1, x_2, \cdots x_n$ био би овакав

$$
\begin{aligned}
a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + \cdots + a_1^n x_n &= 0 \\
a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + \cdots + a_2^n x_n &= 0 \\
a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3 + \cdots + a_3^n x_n &= 0 \qquad 1.) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + \cdots + a_n^n x_n &= 0
\end{aligned}
$$

Такве једначине имају очевидно и решења

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

али и бесконачно много других решења различитих од нуле. За таква решења (различита од нуле) важи ова теорема: Да би систем 1.) имао и других решења осим решења $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ потребан је и довољан услов да његова детерминанта Δ буде једнака нули.

Да бисмо ту теорему доказали опоменимо се да би, кад би у 1.) фигурисали и независни чланови, систем имао за опште решење

$$x_n = \frac{D_n}{\Delta}$$

Ако се дакле ставе сви независни чланови једнаки нули, онда ће свако D увек бити једнако нули т.ј. увек ће бити и $\Delta = 0$ ако хоћемо да имамо и других решења сем (за $\Delta \neq 0$) $x_1 = x_2 = \cdots = 0$. Онда је $x_n = \frac{0}{0}$ т.ј. ма какав број различит од нуле. Тиме је доказано да је потребно да буде

$$\Delta = 0$$

Ако Δ развијемо по елементима ма које линије, биће (ако су то елементи прве линије):

$$a_1^1 A_1^1 + a_1^2 A_1^2 + \cdots + a_1^n A_1^n = 0$$

Ако сада, по познатој теореми, слемнито било миноре одговарајућим минорима друге које линије (врсте), било елементе елементима друге какве линије, биће

$$a_2^1 A_1^1 + a_2^2 A_1^2 + \cdots + a_2^n A_1^n = 0 \qquad 2.)$$

$$a_n^1 A_1^1 + a_n^2 A_1^2 + \cdots + a_n^n A_1^n = 0 \qquad 3.)$$

Једначине 2.) и 3.) састављају систем који је у ствари систем 1.) само што су у њему непознате x смењене минорима A. Те две једначине доказују да ће систем 1.) бити задовољен ако се за $x_1, x_2, \ldots x_n$ узму вредности

$$x_1 = \lambda A_1^1 \quad x_2 = \lambda A_1^2 \quad \cdots \quad x_n = \lambda A_1^n$$

где је λ произвољан број.

Исто би то могли урадити и са ма којом другом линијом и добили би сличне једначине, само би у њима фигурисали други минори. Одатле се види да у томе систему 1.) има бесконачно много решења са λ је произвољан број, дакле сва су та решења сразмерна минорима детерминанте Δ што је ваљало доказати. Ова се теорема веома често и корисно употребљује.

Неколико геометриских примена

1° Одредити праву која пролази кроз две тачке: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Општа једначина праве је

$$Ax + By + C = 0 \qquad 1.)$$

Ако она пролази кроз тачку M_1 и кроз тачку M_2, имамо две условне једначине

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \qquad 2.)$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0 \qquad 3.)$$

Тиме смо добили систем од три линеарне хомогене једначине 1.), 2.) и 3.) са три непознате A, B и C. Детерминанта тога система

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

мора бити равна нули ако хоћемо за A, B и C решења која су различита од нуле. Једначина тражене праве је

$$\Delta = 0$$

развијена по елементима прве линије.

2° Одредити једначину равни која пролази кроз три дате тачке: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Једначина равни је

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad 1.)$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \qquad 2.)$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

Једначине 2.) су три условне једначине за пролаз равни 1.) кроз тачке M_1, M_2 и M_3. Тако имамо четри линеарне хомогене једначине са четри непознате

$$A,\ B,\ C \text{ и } D$$

Да би наш систем имао и других решења осим

$$A = B = C = D = 0$$

треба да буде

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3° Услов да три тачке $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ леже на истој правој.

Услов је лако наћи; он је облика

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4° Услов да четри тачке $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M_4(x_4, y_4, z_4)$ леже на истој равни.

Услов је лако наћи у облику

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5° Услов који ваља да испуне коефицијенти три праве, па да се те три праве секу у истој тачки.

Нека су те три праве

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$
$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

Нека је тачка

$$x = a \qquad y = b$$

њихова заједничка, пресечна тачка. Лако је увидети да мора бити детерминанта нашег система од три линеарне хомогене једначине једнака нули, па је дакле тражени услов

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

6° Услов који ваља да испуне коефицијенти четири равни, па да се те равни секу у истој (правој) тачки.

Ако су те четри равни

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$
$$A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0$$

услов је лако наћи и он је

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

7° Услов који ваља да испуне коефицијенти две праве, па да оне леже у истој равни.

Уочимо на правој сталну тачку $x_0\, y_0\, z_0$ и означимо коефицијенте њеног правца са a, b, c. Онда се њена једначина може написати у облику

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \lambda \qquad 1.)$$

Аналогно томе једначина оне друге праве је

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_0}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} = \mu \qquad 2.)$$

Нека је даље

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad 3.)$$

једначина условне равни у којој леже обе тако дефинисане праве. Из 1.) и 2.) добијамо

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a\lambda & x &= x_1 + a_1\mu \\ y &= y_0 + b\lambda & y &= y_1 + b_1\mu \\ z &= z_0 + c\lambda & z &= z_1 + c_1\mu \end{aligned} \qquad 4.)$$

Заменом 4.) у 3.) добија се

$$\begin{aligned} &A(x_0 + a\lambda) + B(y_0 + b\lambda) + C(z_0 + c\lambda) + D = 0 \\ &A(x_1 + a_1\mu) + B(y_1 + b_1\mu) + C(z_1 + c_1\mu) + D = 0 \end{aligned} \qquad 5.)$$

Једначине 5.) морају постојати ако се хоће да праве 1.) и 2.) леже у равни 3.). То су дакле условне једначине из којих добијамо, уредив их по λ и μ,

$$\begin{aligned} &(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + \lambda(Aa + Bb + Cc) = 0 \\ &(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) + \mu(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1) = 0 \end{aligned} \qquad 6.)$$

Ове једначине вреде за ма какво λ и μ. Дакле вреде и једначине

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0 \\ Aa + Bb + Cc &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 &= 0 \end{aligned} \qquad 7.)$$

Ако у 4.) сменимо прву и трећу једначину њиховим разликом, биће

$$A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=0$$

$$Aa+Bb+Cc=0 \tag{8}$$

$$Aa_1+Bb_1+Cc_1=0$$

одакле се лако увиђа тражени услов

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=0$$

Једна теорема из теорије линеарних облика

Један хомогени израз који зависи од више променљивих $x_1, x_2 \cdots x_n$ називамо *обликом $n^{\text{тог}}$ реда*, а такав је један облик линеаран, ако му је степен хомогенитета једнак јединици, квадратан, ако му је тај степен раван 2 и т.д.

Општи тип једног линеарног облика је

$$ax_1+bx_2+cx_3+\cdots+kx_n$$

Претпоставимо да је дата једна група од n линеарних облика

$$f_1\ f_2\ \cdots\ f_n$$

са n променљивих. За такве се облике каже да су у међусобној зависности, ако је могуће наћи такву групу сталних бројева

$$\lambda_1 \; \lambda_2 \; \cdots \; \lambda_n$$

(независних од променљивих), да буде

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$$

за ма какве вредности од n променљивих

$$x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n$$

Н. пр. облици

$$f_1 = 3x_1 + 4x_2$$
$$f_2 = 6x_1 + 8x_2$$

стоје у таквој међусобној зависности јер за $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 1$ имамо

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$$

Облици

$$f_1 = 3x_1 + 4x_2$$
$$f_2 = 6x_1 + 13x_2$$

не стоје у таквој међусобној зависности

Питање је: какав услов треба да задовоље коефицијенти датих линеарних облика, па да исти стоје у међусобној зависности?

Нека је дат систем линеарних облика

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n \\ f_2 &= a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \cdots + a_n^n x_n \end{aligned} \qquad 1.)$$

да би ти линеарни облици били у међусобној зависности мора бити, када постоји систем количина $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0 \qquad 2.)$$

Заменив 1.) у 2.) и уредив по x-у добићемо један израз који вреди за ма какво $x_1\, x_2 \cdots x_n$ те отуда вреде и односи да су коефицијенти једнаки нулама, а овде је то

$$\begin{aligned} a_1^1 \lambda_1 + a_2^1 \lambda_2 + \cdots + a_n^1 \lambda_n &= 0 \\ a_1^2 \lambda_1 + a_2^2 \lambda_2 + \cdots + a_n^2 \lambda_n &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots \end{aligned} \qquad 4.)$$

Тако добијамо систем линеарних хомогених једначина. Да би тај систем имао и других решења сем оних који су равни нули, треба да буде детерминанта система 4.) равна нули т.ј.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$$

то је услов, ако се хоће да не буде само $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ решење система 4.).

Детерминанта Δ је у исто време и детерминанта система датих линеарних облика и ми добијамо овакву теорему:

Да би n линеарних облика са n променљивих били у међусобној зависности, треба да детерминанта коефицијената буде једнака нули.

О елиминацији

Елиминисати променљиву x из двеју једначина

$$f(x) = 0 \qquad 1.)$$

$$\varphi(x) = 0 \qquad 2.)$$

значи написати такву једну релацију међу коефицијентима једначина 1.) и 2.)

$$F = 0$$

у којој не фигурише x, да, ако је та релација задовољена, задовољене су и једначине 1.) и 2.). Пошто се у задацима те врсте узима да је променљива x у обе једначине 1.) и 2.) иста и пошто је резултат тога $F=0$ (без x-а), то се може сматрати релација $F=0$ као услов да две једначине 1.) и 2.) имају један заједнички корен.

Отуда дефиниција елиминације: Елиминисати из две једначине 1.) и 2.) променљиву x значи написати такву једну релацију између коефицијената тих једначина да, када је та релација задовољена, једначине 1.) и 2.) имају (бар) један заједнички корен.

Н. пр.

$$ax = b$$
$$a'x = b'$$

Елиминисати x значи уједначити корене тих двеју једначина т.ј. ставити

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}$$

Овди је релација

$$F = ba' - b'a = 0$$

и то је потребан услов да дате две једначине имају заједнички корен а та је релација у исто време и резултат елиминације.

Питање је сада како ћемо практички моћи извршити елиминацију променљиве x из двеју датих једначина 1.) и 2.) На први поглед најпростије је сменити x из једне у другој једначини, али би тај посао у већини случајева било врло тешко извршити. Посао је лак када су дате две просте једначине, било да се врши просто, било помоћу какве трансформације, опет просте. Постоји велики број специјалних начина и метода за елиминацију у појединим датим случајевима који зависе од природе датог задатка.

Ми ћемо учити општи задатак: Нека су дате две алгебарске једначине

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \qquad 1.)$$
$$b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_m = 0 \qquad 2.)$$

тражи се да се из њих елиминише x. Постоје више метода од којих ћемо ми узети Силвестров метод, основан на теореми о линеарним хомогеним једначината.

Уочимо најпре систем од p једначина са $(p-1)$ непознатих

$$
\left.
\begin{aligned}
&a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^{p-1} x_{p-1} + a_1^p = 0\\
&a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^{p-1} x_{p-1} + a_2^p = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_p^1 x_1 + a_p^2 x_2 + \cdots + a_p^{p-1} x_{p-1} + a_p^p = 0
\end{aligned}
\right\} \quad 3.)
$$

Такав један систем у опште нема решења, изузев када међу његовим коефицијентима постоји извесна релација. Означимо са y_p једну произвољну количину и уведимо место непознатих $x_1, x_2, \cdots x_{p-1}$ нове непознате дефинисане овако

$$y_1 = x_1 y_p \quad y_2 = x_2 y_p \quad \cdots \quad y_{p-1} = x_{p-1} y_p$$

Множећи сваку од једначина система 3.) са y_p и сменив у тако добијеним једначинама $x_1 y_p$, $x_2 y_p$, $\cdots$ својим новим вредностима, добија се

$$
\left.
\begin{aligned}
&a_1^1 y_1 + a_1^2 y_2 + \cdots + a_1^{p-1} y_{p-1} + a_1^p y_p = 0\\
&a_2^1 y_1 + a_2^2 y_2 + \cdots + a_2^{p-1} y_{p-1} + a_2^p y_p = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_p^1 y_1 + a_p^2 y_2 + \cdots + a_p^{p-1} y_{p-1} + a_p^p y_p = 0
\end{aligned}
\right\} \quad 4.)
$$

који представља систем од p линеарних једначина хомогених са p непознатих. Ако систем 3.) има решења, мора га имати и систем 4.) сем решења $y_1 = y_2 = \cdots = y_p = 0$ и обрнуто. Да би систем 4.) имао решења различитих од нуле, треба да буде, према ранијем,

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^p\\
a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^p\\
a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^p\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
a_p^1 & a_p^2 & a_p^3 & \cdots & a_p^p
\end{vmatrix} = 0
$$

што је онда услов за систем 3.).

Тако смо добили следећу теорему која је показана помоћу Силвестровог метода: Да би један систем од p линеарних хомогених ? једначина са $(p-1)$ непознатих имао решења различита од нуле, потребно је и довољно да детерминанта тога система буде једнака нули.

Вратимо се сада нашем

првобитном задатку елиминације

Помножимо једначину 1.) узастопце са $1, x, x^2 \cdots x^{n-1}$, једначину 2.) узастопце са $1, x, x^2, \cdots x^{m-1}$, па ћемо добити:

$$
\begin{aligned}
&a_0x^{m+n-1}+a_1x^{m+n-2}+a_2x^{m+n-3}+\cdots+a_{m-1}x^{n}+a_mx^{n-1}=0\\
&\qquad a_0x^{m+n-2}+a_1x^{m+n-3}+\cdots+a_{m-1}x^{n-1}+a_mx^{n-2}=0\\
&\qquad\qquad a_0x^{m+n-3}+\cdots+a_{m-1}x^{n-2}+a_mx^{n-3}=0\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_0x^{m+n-1}+b_1x^{m+n-2}+b_2x^{m+n-3}+\cdots+\cdots\cdots=0\\
&\qquad b_0x^{m+n-2}+b_1x^{m+n-3}+\cdots+\cdots=0\\
&\qquad\qquad b_0x^{m+n-3}+\cdots+\cdots=0
\end{aligned}
\qquad 5.)
$$

Ставимо сада у овим једначинама

$$x^{m+n-1}=x_1,\quad x^{m+n-2}=x_2,\ \cdots$$

онда те једначине представљају систем од $(m+n)$ једначина са $(m+n-1)$ непознатих. Ако првобитне једначине 1.) и 2.) имају заједничких решења, очевидно је да их и овај последњи систем мора имати. А пошто је у њему број једначина за јединицу већи од броја непознатих, то, према мало час доказаној теореми, треба да буде

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 & 0\\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0\\
0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_m & 0 & 0\\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0\\
0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}=0 \qquad 6.)
$$

$\Delta=0$ представља резултат елиминације променљиве x из 1.) и 2.)

Одатле се може извести ово практично упутство: Резултат елиминације између две алгебарске једначине 1.) и 2.) представља анулирана детерминанта Δ под 6.) Детерминанта је склопљена овако: Прва линија је састављена из коефицијената једначине 1.) и попуњена са десне стране са $(n-1)$ нулу; друга од истих коефицијената за једно место померених са лева на десно и попуњена са нулама на свима празним местима и т. д. све док се не дође дотле да више нета места за нуле; онда се по истом принципу почну писати линије састављене из коефицијената једначине 2.)

На задатак елиминације који је овим решен своди се и сложенији задатак: из датог система од n једначина са $(n-1)$ непознатих елиминисати све непознате. Једном елиминацијом добија се $(n-1)$ једначина са $(n-2)$ непознатих; затим извршимо опет елиминацију и т. д. све док не дођемо до две једначине. При томе се дешава да се наиђе на једначину која не садржи ни једну непознату пре но што је образовање целокупног низа једначина довршено. Тада таква једначина представља сама собом тражени резултат.

Примери за елиминацију:

1.) Нека су дате једначине

$$a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$
$$b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$$

Резултат елиминације је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

2.) Нека су дате једначине

$$a_1x + a_2 = 0$$
$$b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$$

Резултат елиминације је

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

1°

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 8 & 8 & 3 \\ 7 & 9 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -2(15-16) = +2$$

2°

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 5 \\ 16 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc} 9 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 5 \\ 16 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 5 \end{array} \right| =$$

$$= [9 \cdot 1 \cdot 1 + 8 \cdot 5 \cdot 3 + 16 \cdot 2 \cdot 5] - [16 \cdot 1 \cdot 3 + 9 \cdot 5 \cdot 5 + 8 \cdot 2 \cdot 1] =$$

$$= [9 + 120 + 160] - [48 + 225 + 16] =$$

$$= 289 - 289 = 0$$

3°

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 12 & 2 \\ 9 & 10 & 4 \\ 10 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \\ 10 & 0 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 9 \\ 10 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+12 & 7+16 \\ 15+24 & 21+32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{vmatrix}$$

5. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+6+9 & 2+6+3 & 3+2+12 \\ 4+15+18 & 8+15+6 & 12+5+24 \\ 7+24+27 & 14+24+9 & 21+8+36 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 16 & 11 & 17 \\ 37 & 29 & 41 \\ 58 & 47 & 65 \end{vmatrix}$$

6. $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & xx_1+yy_1+zz_1 & xx_2+yy_2+zz_2 \\ xx_1+yy_1+zz_1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \\ xx_2+yy_2+zz_2 & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 \end{vmatrix}$$

7. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1+4+9 & 3+4+3 & 2+6+12 \\ 3+4+3 & 9+4+1 & 6+6+4 \\ 2+6+12 & 6+6+4 & 4+9+16 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 14 & 10 & 20 \\ 10 & 14 & 16 \\ 20 & 16 & 29 \end{vmatrix} = (5684+3200+3200)-(5600+3584+2900) = 12084-12084 = 0$$

8. Решити систем једначина

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

Овди је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

одакле

$$\Delta = -2 \quad D_1 = 2 \quad D_2 = -6 \quad D_3 = 2$$

па према томе

$$x_1 = \frac{D_1}{\Delta} = -1 \quad x_2 = \frac{D_2}{\Delta} = 3 \quad x_3 = \frac{D_3}{\Delta} = -1$$

9. Решити систем једначина

$$x + y + z = 0$$
$$2x + 3y + z = 0$$
$$3x + y + 2z = 0$$

Овди је

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\3&-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\-2&-1\end{vmatrix}=-3$$

па је према томе дати систем задовољен само за

$$x=y=z=0$$

10. Елиминисати x из једначина

$$a_0x+a_1=0$$
$$b_0x+b_1=0$$

Да би ове једначине имале заједнички корен, треба да буде

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_0&a_1\\b_0&b_1\end{vmatrix}=0$$

или

$$a_0b_1-b_0a_1=0$$

12. Елиминисати x из једначина

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0$$
$$b_0x+b_1=0$$

Овде је

$$m=2\qquad n=1$$

па је зато резултат елиминације

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_0&a_1&a_2\\b_0&b_1&0\\0&b_0&b_1\end{vmatrix}=0$$

13. Елиминисати x из једначина

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0$$
$$b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

Овде је

$$m=2\qquad n=2$$

па је зато резултат елиминације

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_0&a_1&a_2&0\\0&a_0&a_1&a_2\\b_0&b_1&b_2&0\\0&b_0&b_1&b_2\end{vmatrix}=0$$

14. Дата је једначина

$$x^2+\lambda x+1=0$$

Пита се: какво треба да буде λ, па да та једначина има двоструки корен.

Изводна једначина је

$$2x+\lambda=0$$

па да би она и дата једначина имале заједнички корен, треба да буде

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Одакле је

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

или

$$\lambda = \pm 2$$

и то је тражени услов.

15. У једначинама

$$x^3 + x^2 + \lambda x + 1 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

одредити λ тако да оне имају заједнички корен.

Услов за то јесте

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или, ако ову детерминанту развије по елементима првог ступца, тај ће услов бити

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(8-2-2) +$$

$$+ (1 + 4\lambda - \lambda - 2) + (4 + 1 - 2\lambda - 1) + (1 + 2 + \lambda^2 - \lambda -$$
$$- 2\lambda - 1) = -4 + 3\lambda - 1 + 4 - 2\lambda + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

или

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

или

$$\lambda = 1$$

16. Израчунати вредност детерминанте

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

где a, b, c и d означују различите бројеве.

Одузмимо елементе прве линије

од одговарајућих елемената других трију линија, детерминанта се неће променити и ти ћемо имати:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 & a^4 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 & b^4-a^4 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 & c^4-a^4 \\ 0 & d-a & d^3-a^3 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

Развимо ову детерминанту по елементима првог ступа; добићемо једну детерминанту трећег реда, у којој су елементи прве линије дељиви са $(b-a)$, друге линије са $(c-a)$ а треће са $(d-a)$. Отуда

$$\Delta = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 & b^3+ab^2+a^2b+a^3 \\ 1 & c^2+ac+a^2 & c^3+ac^2+a^2c+a^3 \\ 1 & d^2+ad+a^2 & d^3+ad^2+a^2d+a^3 \end{vmatrix}$$

У овој новој детерминанти одузмимо елементе прве линије од елемената других двеју линија, па имамо:

$$\Delta = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 & b^3+ab^2+a^2b+a^3 \\ 0 & c^2-b^2+a(c-b) & c^3-b^3+a(c^2-b^2)+a^2(c-b) \\ 0 & d^2-b^2+a(d-b) & d^3-b^3+a(d^2-b^2)+a^2(d-b) \end{vmatrix}$$

или ако ју развијемо по елементима првог ступа и извучемо $(c-b)(d-b)$ као чинитеље

$$\Delta = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\Delta'$$

где је

$$\Delta' = \begin{vmatrix} c+b+a & c^2+bc+b^2+a(c+b)+a^2 \\ d+b+a & d^2+bd+b^2+a(d+b)+a^2 \end{vmatrix}$$

Одузимањем елемената прве линије од елемената друге линије добијамо

$$\Delta' = \begin{vmatrix} c+b+a & c^2+bc+b^2+a(c+b)+a^2 \\ d-c & d^2-c^2+b(d-c)+a(d-c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = (d-c)\begin{vmatrix} c+b+a & c^2+bc+b^2+a(c+b)+a^2 \\ 1 & d+c+b+a \end{vmatrix}$$

Одатле је

$$\Delta' = (d-c)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = (d-c)\sum ab$$

па према томе

$$\Delta = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\sum ab$$

Да би добили све чланове израза $\sum ab$, образоваћемо све комбинације друге класе од писмена: a, b, c и d.

17. Доказати идентичност

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

Додајмо елементе друге и треће линије одговарајућим елементима прве линије, па детерминанта постаје

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Одузмимо сада елементе првог ступца од елемената друга два ступца, па дата детерминанта прелази у

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

18. Бројеви 546, 273 и 169 су дељиви са 13; доказати да је детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

такође дељива са 13.

• Ако елементима трећег ступца додамо елементе другог ступца помножене са 10 и елементе првог ступца помножене са 100 вредност детерминанте се неће променити, па ћемо имати:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 546 \\ 2 & 7 & 273 \\ 1 & 6 & 169 \end{vmatrix} = 13\begin{vmatrix} 5 & 4 & 42 \\ 2 & 7 & 21 \\ 1 & 6 & 13 \end{vmatrix}$$

чиме је доказано предње тврђење.

19. Доказати идентичност

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = (a-b)^2\left[(a+b)^2-4x^2\right]$$

Одузимањем елемената четврте линије од елемената прве линије и елемената треће линије од елемената друге линије, добија се

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & b-a \\ 0 & a-b & b-a & 0 \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2 \cdot \Delta'$$

Ако детерминанту Δ' развијемо по елементима прве линије, биће

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ b & a & x \\ x & x & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ x & b & a \\ b & x & x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & x \\ x & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & x \\ x & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & a \\ b & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & b \\ b & x \end{vmatrix} =$$

$$= a^2 - x^2 + ab - x^2 - x^2 + ab - x^2 + b^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 4x^2 = (a+b)^2 - 4x^2$$

па даље

$$\Delta = (a-b)^2\left[(a+b)^2 - 4x^2\right]$$

20. Израчунати детерминанту

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin 2a \\ \sin b & \cos b & \sin 2b \\ \sin c & \cos c & \sin 2c \end{vmatrix}$$

и у извођењу истакнути један производ од три чинитеља који се анулира кад се стави $b=c$, односно $c=a$, односно $a=b$.

Имамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 2\sin a\cos a \\ \sin b & \cos b & 2\sin b\cos b \\ \sin c & \cos c & 2\sin c\cos c \end{vmatrix} = 2\cos a\cos b\cos c \begin{vmatrix} \operatorname{tg} a & 1 & \sin a \\ \operatorname{tg} b & 1 & \sin b \\ \operatorname{tg} c & 1 & \sin c \end{vmatrix}$$

или, одузимањем елемената прве линије од елемената друге и треће линије, па затим развијајући добијену детерминанту по елементима другог ступца:

$$\Delta = 2\cos a\cos b\cos c \begin{vmatrix} \operatorname{tg} a & 1 & \sin a \\ \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a & 0 & \sin b - \sin a \\ \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a & 0 & \sin c - \sin a \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cos a\cos b\cos c \begin{vmatrix} \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a & \sin b - \sin a \\ \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a & \sin c - \sin a \end{vmatrix}$$

$$= -2\cos a\cos b\cos c \begin{vmatrix} \dfrac{\sin(b-a)}{\cos b\cos a} & 2\sin\dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{b+a}{2} \\ \dfrac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a} & 2\sin\dfrac{c-a}{2}\cos\dfrac{c+a}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -8\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2} \begin{vmatrix} \cos\dfrac{b-a}{2} & \cos b\cos\dfrac{b+a}{2} \\ \cos\dfrac{c-a}{2} & \cos c\cos\dfrac{c+a}{2} \end{vmatrix}$$

Заменимо

$$\cos b\cos\frac{b+a}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{a+3b}{2} + \cos\frac{b-a}{2}\right]$$

$$\cos c\cos\frac{c+a}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{a+3c}{2} + \cos\frac{c-a}{2}\right]$$

добијамо

$$\Delta = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2} \begin{vmatrix} \cos\dfrac{b-a}{2} & \cos\dfrac{a+3b}{2} + \cos\dfrac{b-a}{2} \\ \cos\dfrac{c-a}{2} & \cos\dfrac{a+3c}{2} + \cos\dfrac{c-a}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \sin\frac{b-a}{2} \sin\frac{c-a}{2}\left[\cos\frac{a+3b}{2}\cos\frac{c-a}{2} - \cos\frac{a+3c}{2}\cos\frac{b-a}{2}\right]$$

Како је

$$2\cos\frac{a+3b}{2}\cos\frac{c-a}{2} = \cos\frac{3b+c}{2} + \cos\frac{2a+3b-c}{2}$$

$$2\cos\frac{a+3c}{2}\cos\frac{b-a}{2} = \cos\frac{3c+b}{2} + \cos\frac{2a+3c-b}{2}$$

одакле одузимањем

$$2\left[\cos\frac{a+3b}{2}\cos\frac{c-a}{2} - \cos\frac{a+3c}{2}\cos\frac{b-a}{2}\right] =$$

$$= \cos\frac{3b+c}{2} - \cos\frac{3c+b}{2} + \cos\frac{2a+3b-c}{2} - \cos\frac{2a+3c-b}{2} =$$

$$= 2\sin(b+c)\sin\frac{c-b}{2} + 2\sin\frac{2a+b+c}{2}\sin(c-b) =$$

$$= 2\sin\frac{c-b}{2}\left[\sin(b+c) + 2\sin\frac{2a+b+c}{2}\cos\frac{c-b}{2}\right] =$$

$$= 2\sin\frac{c-b}{2}\left[\sin(b+c) + \sin(c+a) + \sin(a+b)\right]$$

па отуда следује

$$\Delta = 4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{c-b}{2}\left[\sin(b+c) + \sin(c+a) + \sin(a+b)\right]$$

или

$$\Delta = 4\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{a-b}{2}\left[\sin(b+c) + \sin(c+a) + \sin(a+b)\right]$$