

CARL FRIEDRICH GAUSS
WERKE

NACHTRAG ZUM ERSTEN ABDRUCK
DES ZWEITEN BANDES

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1876.

[Zu den auf den Seiten 199 bis 495 dieses Bandes enthaltenen Theilen des Handschriftlichen Nachlasses sind bei dem zweiten Abdrucke noch die auf den Seiten 497 bis 518 abgedruckten Tabellen, Bruchstücke und Briefe hinzugekommen. Vergl. die Bemerkungen am Schlusse des Bandes.]

CIRCVLI QVADBEATVRA NOVAV.

I. Acotg. 5 = (2) — (13).

26684971	0210071265	7279572373	8848455203	4183360499	1499728341	833
	364	7220869565	2173913043	4782608695	6521739130	434
		4977954329	5694145758	6618876941	4375866188	769
		(43).....	204560302	8420465116	2790697674	418
		(47).....	299441	4645858042	5531914893	617
		(51).....	441	5293732324	0156862745	098
		(55).....		6550690367	0843578181	818
		(59).....		9770521	2254817540	338
		(63).....		14640	2730743726	600
		(67).....		22	0239630730	860
		(71).....			332561019	920
		(75).....			503719	091
		(79).....			765	142
		(83).....			1	165
		(87).....				1
26684971	0210071630	9478396268	6921374192	0505397169	7498644659	104
0,2000640569	5190437336	8654456654	4566544566	5445665445	6654456654	456
	7710131	0688316235	2941176470	5882352941	1764705882	352
		185127900	6896551724	1379310344	8275862068	965
		260673	0412205651	4831745270	7696610135	634
			7830238	1276333963	9002267573	696
		(53).....	16	9947155749	8300377358	490
		(57).....		252833663	2909752140	350
		(61).....		378007	0506907695	003
		(65).....		567	5921253449	092
		(69).....			8555011744	329
		(73).....			12937990	364
		(77).....			19625	419
		(81).....			29	850
		(85).....				45
0,2000640569	5198147467	9528161463	4824308667	9015773954	9600162348	045
26684971	0210071630	9478396268	6921374192	0505397169	7498644659	104
0,1973955598	4988075837	0049765194	7902934475	8510378785	2101517688	941

NACHLASS.

II. Acotg. 70 = 2(2) — 2(13) — (29)

0,0142857142	8571428571	4285714285	7142857142	8571428571	4285714285	714
3) 29154	5189504373	1778425655	9766763848	3965014577	2594752186	588
5) 5	9499018266	1986077229	7257095257	9282441839	7096447908	609
7)	12142656	7890201240	2509644305	1546792335	0693284989	369
9) 2478	0932222490	0490308090	6745213631	0887896588	0887896588	773
11)	5057333106	6306222511	8552396982	3736915897	3736915897	263
13)	1032108	7972715555	6146643346	3229334064	3229334064	468
15) 210	6344484227	6644111559	8665965170	217	217	217
17)	429866221	2709519206	4407891013	300	300	300
19)	87727	8002593779	4298858753	268	268	268
21)	17	9036327059	9549856909	949	949	949
23)	36538025	9306030583	042	042	042	042
25)	7456	7399858373	588	588	588	588
27)	1	5217836705	790	790	790	790
29)		3105680	960	960	960	960
31)		633	812	812	812	812
33)			128	128	128	128
9718	1729834791	0592808551	9922254616	1321671525	7531584062	196
	1734665	2555743034	3215663472	1649541762	1527612141	338
		459757555	1482383864	7141126998	3976083263	387
		14	0422965615	1776274103	9911064344	681
			4617	2526452304	1805203092	277
				1588609	8230696981	871
					563623581	695
					20	447
9718	1731569456	3608309155	5043272185	4416655304	3545867487	890
0,0142857142	8571428571	4285714285	7142857142	8571428571	4285714285	714
1	1899803653	2397215445	9451419051	5856488567	9419289581	721
	275	3436913610	0054478676	7416134847	8987544065	419
		79392	9844055042	7395895642	0248410312	651
			25286248	3100559953	3200464177	252
				8525539385	8073802709	997
				298	2695994334	943
					107092	446
						3
0,0142857144	0471232500	0119922734	6518096163	0866047064	6911326560	146
9718	1731569456	3608309155	5043272185	4416655304	3545867487	890
0,0142847425	8739663043	6511613579	1474823977	6449391760	3365459072	256

CIRCULI QUADRATURA NOVA.

III. Acotg. 99 = - (2) + 2 (13) - (29).

0,0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	0101010101
3) 10306	1015212836	4555667892	0621375472	9212335579	0328548210	397
5) 1	0515357128	1335022514	8344109925	0559046254	0127571528	232
7) 1	1072886	1471414653	8633643925	1020361090	3228255032	295
9) 1	109	4670081768	6617552662	3737477845	2290911973	781
11) 1	111689631	111395	8506950061	4898861083	3430495960	817
13) 1	11395	7383788077	7383788077	7534424942	4633550708	689
15) 1	15) 1	1627118027	5561425816	2373699984	2373699984	767
17) 1	17) 1	1186319	5620402145	2725474308	2725474308	742
19) 1	19) 1	121	0406654464	0491044329	0491044329	589
21) 1	21) 1	123498281	123498281	2431434654	2431434654	048
23) 1	23) 1	12600	12600	5796595391	5796595391	761
25) 1	25) 1	2856422466	2856422466	625	625	625
27) 1	27) 1	1311745	1311745	991	991	991
29) 1	29) 1	133	133	837	837	837
31) 1	31) 1	13	13	13	13	13
3435	3671890881	1518555964	0207125157	6404111859	6776182736	799
	153269	4495916379	1233377703	5860051584	3318322147	470
		10153602	8955177278	3172623734	8493681450	983
			775141201	8370761721	0824913332	317
			6	3705613392	8446897069	978
				547	8512895451	815
					48583	184
3435	3671890881	6024625946	1170821347	7513162840	6372940772	546
0,0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	010
	2103071425	6267004502	9668821985	0111809250	8025514305	646
	12	1630009085	4068616962	4859719760	5810101330	420
		876	5952599082	9041109610	9587196208	360
			69783	5036494243	8395616135	808
				5880870	5353877840	668
					514256898	665
					4	615
0,0101010101	2204081538	7998024565	9791117914	9156023837	7787572825	192
3435	3671890881	6024625946	1170821347	7513162840	6372940772	546
0,0101006665	8532190657	1973398619	8620296567	1642860997	1414632052	646

NACHLASS CIRCULI QUADRATURA NOVA.

IV. Acotg 307 = - 3(2) + 3(5) + (13) + (29).

0,0032573289	9022801302	9315960912	0521172638	4364820846	9055374592	833
3) 345	6088648397	3443000095	0769987174	1094169326	1556823471	597
5) 36669764	6489336152	1087234559	381787050	8899421286	416	
7) 389	0732490417	2580304164	8671007839	6274855900	501	
9) 41281419	3298311709	4522474201	4009658191	131		
11) 438	0037913381	6985798496	2620441698	672		
13) 46473043	8878046300	7405517516	808			
15) 493	0879254719	3742187243	551			
17) 52317576	3638805103	367				
19) 555	0993380734	067				
21) 58897127	616					
23) 624	909					
115 2029549465	7814333365	0256662391	3698056442	0518941157	199	
55 5818927202	4654329166	4095838262	8039265137	214		
39 8183264852	8816890772	3874585608	970			
32 8725283647	9582812482	903				
29 2157651617	582					
27 169						
115 2029549521	3633260607	3096256443	5336089154	4173256031	037	
0,0032573289	9022801302	9315960912	0521172638	4364820846	9055374592	833
7333952	9297867230	4217446911	8763575410	1779884257	283	
4586824	3699812412	1613608244	6001073132	347		
3574849	5298311253	9031193655	139			
5077504	4919929711	962				
2804625	124					
0,0032573289	9030135255	8618414966	8442006812	0043393260	0790259974	688
115 2029549521	3633260607	3096256443	5336089154	4173256031	037	
0,0032573174	7000585734	4985154359	5345750368	4707304105	6617003943	651

TABULA ARCUUM TANGENTIBUS PREMIS DATIS RESPONDENTIUM
IN PARTIBUS RADII AD 110 FIGURAS.

2	0,7853981633	9744830961	5660845819	8757210492	9234984377	6455243736	1480769541
5	0,4636476090	0080611621	4256231461	2144020285	3705428612	0263810933	0887201978 6
13	0,5880026035	4756755124	5611080625	0854276017	0724605592	4353726047	2072
17	0,2449786631	2686415417	2082481211				
29	0,3805063771	1236486630	3587916810	4331044974	0571363810	0837576305	623
37	0,1651486774	1462683827	9128289643	9435540983	8		

ZUR BERECHNUNG DER GEMEINEN LOGARITHMEN.

Man suche die Logarithmen von

$$\log \frac{1025}{*} = a$$

$$\log \frac{1024}{*} = b$$

$$\log \frac{81}{*} = c$$

$$\log \frac{125}{*} = d$$

$$\log \frac{99}{*} = e$$

(* zeigt einen um 1 kleinern Nenner als Zähler an) so ist, wovon man sich leicht überzeugen kann:

$$\log 2 = \frac{14\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a + 2b - \frac{1}{2}c - 2d + e}{49} = f$$

Noch kann man leicht herleiten

$$\log 41 = a + 12f - 2 = g$$

$$\log 3 = \frac{1 + c + 4f + g}{8}$$

$\log 11$, $\log 31$ und $\log \frac{11}{7}$ und also auch $\log 7$, $\log 31$

$\frac{7}{23 \cdot 73}$ $\frac{17}{23 \cdot 73}$ $\frac{7 \cdot 73}{17}$ $7 \cdot 7 \cdot 43$ $17 \cdot 43$	$\frac{1680^2}{*}$ $\frac{136000}{*}$ $\frac{511^2}{*}$ $\frac{512001}{*}$ $\frac{730^2}{*}$	aus diesen $\frac{7}{23}$	hieraus 73 [und $\frac{7}{23}, \frac{7}{17}$]	$\frac{7 \cdot 7}{17}$ hieraus und $\frac{7}{17}$ [und $\frac{7}{23}$] wird 7, 17, 23, 43
--	---	---------------------------	--	--

$a, \frac{81}{8}$	$\frac{81}{80}$	$i, 73$	$\frac{511^2}{510 \cdot 512}$	$\frac{730^2}{729 \cdot 731}$	$r, 53$	$\frac{788800}{788799}$
$b, \frac{41}{4}$	$\frac{6561}{6560}$	$k, 13$	$\frac{729^2}{728 \cdot 730}$		$s, 67$	$\frac{274700}{274699} \quad \frac{3751^2}{*}$
$c, 2$	$\frac{1025}{1024}$	$l, 19$	$\frac{512^2}{511 \cdot 513}$		$t, 37$	$\frac{1000000}{999999} \quad \frac{1331^2}{1330 \cdot 1332}$
$d, 7$	$\frac{2401}{2400}$	$m, 47$	$\frac{2116^2}{2115 \cdot 2117}$		$u, 59$	$\frac{3481^2}{3480 \cdot 3482}$
$e, 29$	$\frac{1681^2}{1680 \cdot 1682}$	$n, 61$	$\frac{2500^2}{2499 \cdot 2501}$		$v, 89$	$\frac{4095^2}{4094 \cdot 4096}$
$f, 43$	$\frac{512001}{512000}$	$o, 31$	$\frac{17081^2}{17080 \cdot 17082}$		$w, 83$	$\frac{6889^2}{6888 \cdot 6890}$
$g, 23 \cdot 73$	$\frac{1680^2}{1679 \cdot 1681}$	$p, 11$	$\frac{1024^2}{1023 \cdot 1025}$	$\frac{2001^2}{1000 \cdot 2002}$	$x, 79$	$\frac{3879^2}{3880 \cdot 3882}$
$h, 17$	$\frac{136000}{135999}$	$q, 71$	$\frac{10935^2}{10934 \cdot 10936}$		$y, 97$	$\frac{13871^2}{13870 \cdot 13872} \quad \frac{46656^2}{46655 \cdot 46657}$

[Die Anwendung dieser Brüche zur Bestimmung der Logarithmen der nebenstehenden kleinen Primzahlen mit Hülfe der nach wachsenden Potenzen von $\frac{x}{x-1}$ fortschreitenden sehr rasch convergirenden Reihen für $\log \frac{x}{x-1}$ ergibt sich unmittelbar aus dem zu Anfang ausgeführten Beispiel.

Es lassen sich übrigens zur Bestimmung der Logarithmen der kleinsten Primzahlen 2, 3, 7 noch vortheilhaftere Reihen aufstellen, wenn man diese GAUSSISCHEN Zahlen auf geeignete Weise mit den von HUYGHENS (HUGENII Opera varia, Lugduni 1724 pag. 457) angegebenen verbindet:

$2 \quad 1000$ $1024 = 2^{10}$	$11 \quad 9800 = 100 \cdot 2 \cdot 7^2$ $9801 = 3^4 \cdot 11^2$	$19 \quad 28899 = 3^2 \cdot 13^2 \cdot 19$ $28900 = 100 \cdot 17^2$
$3 \quad 32805 = 3^4 \cdot 5$ $32768 = 2^{15}$	$13 \quad 123200 = 100 \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 11$ $123201 = 3^6 \cdot 13^2$	$23 \quad 25920 = 10 \cdot 2^5 \cdot 3^4$ $25921 = 7^2 \cdot 23^2$
$7 \quad 2400 = 100 \cdot 2^3 \cdot 3$ $2401 = 7^4$	$17 \quad 2600 = 100 \cdot 2 \cdot 13$ $2601 = 3^2 \cdot 17^2$	$29 \quad 613088 = 2^5 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 23$ $613089 = 3^6 \cdot 29^2$

31	$116280 = 10 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 19$	53	$3059000 = 100 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23$	73	$5116643 = 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 73$
	$116281 = 11^2 \cdot 31^2$		$3059001 = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 53^2$		$5116644 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \cdot 29^2$
37	$165648 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 29$	59	$5851560 = 10 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 31$	79	$5997600 = 100 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 17$
	$165649 = 11^2 \cdot 37^2$		$5851561 = 41^2 \cdot 59^2$		$5997601 = 31^2 \cdot 79^2$
41	$1413720 = 10 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$	61	$3575880 = 10 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 43$	83	$1164240 = 10 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$
	$1413721 = 29^2 \cdot 41^2$		$3575881 = 31^2 \cdot 61^2$		$1164241 = 13^2 \cdot 83^2$
43	$978120 = 10 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$	67	$1620528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13$	89	$2859480 = 10 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \cdot 47$
	$978121 = 23^2 \cdot 45^2$		$1620529 = 19^2 \cdot 67^2$		$2859481 = 19^2 \cdot 89^2$
47	$664848 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$	71	$2016399 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 43$	97	$1138488 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 89$
	$664849 = 31^2 \cdot 47^2$		$2016400 = 100 \cdot 2^2 \cdot 71^2$		$1138489 = 11^2 \cdot 97^2$

Zur Bestimmung der Logarithmen für alle die Primzahlen, welche kleiner als 200 sind, kann man mit Vortheil die in den Tabellen für Cyklotechnie gefundenen Zerlegungen von $aa+1$, $a+2$, . . . $aa+81$ benutzen, wenn man sich auf diejenigen Zahlen a beschränkt, welche selbst nur Primzahlen unter 200 als Theiler enthalten. Die übrigen a lassen sich dann zur Bestimmung der Logarithmen der darin vorkommenden grösseren Primtheiler verwerthen.]

NACHLASS. QUADRATORUM MYRIAS PRIMA.

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
1	02	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
2	04	08	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
3	06	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
4	08	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
6	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
7	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
8	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
9	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
10	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400
11	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440
12	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480
13	26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416	442	468	494	520
14	28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560
15	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600
16	32	64	96	128	160	192	224	256	288	320	352	384	416	448	480	512	544	576	608	640
17	34	68	102	136	170	204	238	272	306	340	374	408	442	476	510	544	578	612	646	680
18	36	72	108	144	180	216	252	288	324	360	396	432	468	504	540	576	612	648	684	720
19	38	76	114	152	190	228	266	304	342	380	418	456	494	532	570	608	646	684	722	760
20	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440	480	520	560	600	640	680	720	760	800
21	42	84	126	168	210	252	296	340	384	428	472	516	560	604	648	692	736	780	824	868
22	44	88	132	176	220	264	312	356	400	444	488	532	576	620	664	708	752	796	840	884
23	46	92	138	184	230	276	324	368	412	456	500	544	588	632	676	720	764	808	852	896
24	48	96	144	192	240	288	336	380	424	468	512	556	600	644	688	732	776	820	864	908
25	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
26	52	104	156	208	260	312	364	416	468	520	572	624	676	728	780	832	884	936	988	1040
27	54	108	162	216	270	324	376	428	480	532	584	636	688	740	792	844	896	948	1000	1052
28	56	112	168	224	280	336	388	440	492	544	596	648	700	752	804	856	908	960	1012	1064
29	58	116	174	232	290	348	400	452	504	556	608	660	712	764	816	868	920	972	1024	1076
30	60	120	180	240	300	360	412	464	516	568	620	672	724	776	828	880	932	984	1036	1088
31	62	124	186	248	310	372	424	476	528	580	632	684	736	788	840	892	944	996	1048	1100
32	64	128	192	256	320	384	436	488	540	592	644	696	748	800	852	904	956	1008	1060	1112
33	66	132	198	264	330	396	448	500	552	604	656	708	760	812	864	916	968	1020	1072	1124
34	68	136	204	272	340	408	460	512	564	616	668	720	772	824	876	928	980	1032	1084	1136
35	70	140	210	280	350	420	472	524	576	628	680	732	784	836	888	940	992	1044	1096	1148
36	72	144	216	288	360	432	484	536	588	640	692	744	796	848	900	952	1004	1056	1108	1160
37	74	148	222	296	370	444	496	548	600	652	704	756	808	860	912	964	1016	1068	1120	1172
38	76	152	228	304	380	456	508	560	612	664	716	768	820	872	924	976	1028	1080	1132	1184
39	78	156	234	312	390	468	520	572	624	676	728	780	832	884	936	988	1040	1092	1144	1196
40	80	160	240	320	400	480	532	584	636	688	740	792	844	896	948	1000	1052	1104	1156	1208
41	82	164	246	328	410	492	544	596	648	700	752	804	856	908	960	1012	1064	1116	1168	1220
42	84	168	252	336	420	504	556	608	660	712	764	816	868	920	972	1024	1076	1128	1180	1232
43	86	172	258	344	430	516	568	620	672	724	776	828	880	932	984	1036	1088	1140	1192	1244
44	88	176	264	352	440	528	580	632	684	736	788	840	892	944	996	1048	1100	1152	1204	1256
45	90	180	270	360	450	540	592	644	696	748	800	852	904	956	1008	1060	1112	1164	1216	1268
46	92	184	276	368	460	552	604	656	708	760	812	864	916	968	1020	1072	1124	1176	1228	1280
47	94	188	282	376	470	564	616	668	720	772	824	876	928	980	1032	1084	1136	1188	1240	1292
48	96	192	288	384	480	576	628	680	732	784	836	888	940	992	1044	1096	1148	1200	1252	1304
49	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000

QUADRATORUM MYRIAS PRIMA.

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	11	21	31	41	51	61	71	81	91
50	1102	4202	9302	16402	25502	36602	49702	64802	81902	1000	1322	1662	2122	26522	32822	39122	46422	53722
1	04	06	08	10	12	14	16	18	20	602	24	26	28	30	32	34	36	38
2	06	10	14	18	22	26	30	34	38	704	27	31	35	39	43	47	51	55
3	08	14	20	26	32	38	44	50	56	809	29	33	37	41	45	49	53	57
4	10	18	26	34	42	50	58	66	74	916	31	35	39	43	47	51	55	59
5	13	23	33	43	53	63	73	83	93	1093	34	38	42	46	50	54	58	62
6	15	27	39	51	63	75	87	99	111	136	36	40	44	48	52	56	60	64
7	17	31	45	59	73	87	101	115	129	156	38	42	46	50	54	58	62	66
8	19	35	51	67	83	99	115	131	147	174	40	44	48	52	56	60	64	68
9	21	39	57	75	93	111	129	147	165	193	43	47	51	55	59	63	67	71
60	23	43	63	83	103	123	143	163	183	213	45	49	53	57	61	65	69	73
1	25	47	69	91	113	135	157	179	201	221	47	51	55	59	63	67	71	75
2	27	51	75	99	123	147	171	195	219	243	50	54	58	62	66	70	74	78
3	29	55	81	107	133	159	185	211	237	263	52	56	60	64	68	72	76	80
4	32	60	88	116	144	172	199	226	253	280	54	58	62	66	70	74	78	82
5	34	64	94	124	154	184	214	244	274	304	57	61	65	69	73	77	81	85
6	36	68	100	132	164	196	228	260	292	324	59	63	67	71	75	79	83	87
7	38	72	106	140	174	208	242	276	310	344	61	65	69	73	77	81	85	89
8	40	76	112	148	184	220	256	292	328	364	64	68	72	76	80	84	88	92
9	42	80	118	156	194	232	272	312	352	392	66	70	74	78	82	86	90	94
70	44	84	124	164	204	244	284	324	364	404	68	72	76	80	84	88	92	96
1	47	89	131	173	215	257	299	341	383	425	71	75	79	83	87	91	95	99
2	49	93	137	181	225	269	313	357	401	445	73	77	81	85	89	93	97	101
3	51	97	143	189	235	281	327	373	419	465	75	79	83	87	91	95	99	103
4	53	101	149	199	245	293	341	389	437	485	78	82	86	90	94	98	102	106
5	55	105	155	209	255	307	357	407	457	507	80	84	88	92	96	100	104	108
6	57	109	161	217	265	321	373	425	477	529	82	86	90	94	98	102	106	110
7	59	113	167	225	275	331	385	439	493	547	85	89	93	97	101	105	109	113
8	62	118	174	235	285	341	397	453	509	565	87	91	95	99	103	107	111	115
9	64	122	180	245	295	349	407	465	521	577	90	94	98	102	106	110	114	118
80	66	126	186	255	305	363	425	487	549	611	92	96	100	104	108	112	116	120
1	68	130	192	265	315	375	439	503	567	631	94	98	102	106	110	114	118	122
2	70	134	198	275	325	387	453	519	585	651	97	101	105	109	113	117	121	125
3	72	138	204	285	335	399	467	535	603	671	99	103	107	111	115	119	123	127
4	75	143	211	295	345	411	481	551	621	691	101	105	109	113	117	121	125	129
5	77	147	217	305	355	423	495	567	641	715	104	108	112	116	120	124	128	132
6	79	151	223	315	365	435	509	583	659	735	106	110	114	118	122	126	130	134
7	81	155	229	325	375	447	523	599	677	755	108	112	116	120	124	128	132	136
8	83	159	235	335	385	459	537	615	695	775	111	115	119	123	127	131	135	139
9	85	163	241	345	395	471	551	631	713	795	113	117	121	125	129	133	137	141
90	88	168	248	355	405	483	565	647	731	815	116	120	124	128	132	136	140	144
1	90	172	254	365	415	499	583	667	753	839	118	122	126	130	134	138	142	146
2	92	176	260	375	425	511	597	683	771	859	120	124	128	132	136	140	144	148
3	94	180	266	385	435	523	611	699	789	879	123	127	131	135	139	143	147	151
4	96	184	272	395	445	535	625	715	807	899	125	129	133	137	141	145	149	153
5	99	189	279	405	455	547	639	731	825	919	128	132	136	140	144	148	152	156
6	101	193	285	415	465	561	657	751	847	943	130	134	138	142	146	150	154	158
7	103	197	291	425	475	573	671	767	865	963	132	136	140	144	148	152	156	160
8	105	201	297	435	485	585	685	783	883	983	134	138	142	146	150	154	158	162
9	107	205	303	445	495	597	701	801	903	1007	136	140	144	148	152	156	160	164
10	110	210	310	455	505	609	715	817	921	1027	138	142	146	150	154	158	162	166

H Ü L F S T A F E L

BEI AUFLÖSUNG DER UNBESTIMMTEN GLEICHUNG

$$A = fxx + gyy$$

VERMITTELST DER AUSSCHLIESSUNGSMETHODE.



Es wird vorausgesetzt, dass man zum Excludens eine Primzahl p gewählt habe, durch welche keine der Zahlen A, f, g theilbar ist. Auch beschränkt sich die Tafel auf die zwei Fälle, da der Werth des Ausdrucks $\frac{A}{f}(\text{mod. } p)$ entweder ein bestimmter quadratischer Rest (allemaal 1), oder ein bestimmter quadratischer Nichtrest des Modulus p ist. Endlich hat man sich begnügt, die Tafel nur für den Fall einzurichten, wo fg ein quadratischer Rest von p ist, und den entgegengesetzten ganz übergangen. Der sechste Abschnitt der *Disquisitiones Arithmeticae* gibt hinlängliche Belehrung, wie man das, was die Tafel nicht unmittelbar enthält, leicht aus derselben ableiten könne.

Beispiele. Es sei die aufzulösende Gleichung $21680143 = xx + 78yy$

- | | | | |
|----|---|---|---|
| 1) | Excludens = 5 | fg = N, $\frac{A}{f} \equiv 3 \equiv 2.2^2$ | |
| | Ex tabula 1,4 | pro fg = R | adeoque 0,2,3 pro fg = N, |
| | | | et pro cas upr. 0,1,4 sive excl. $5n \pm 2$ |
| 2) | Excludens = 7 | fg = R, $\frac{A}{f} \equiv 2 \equiv 1.3^2$ | |
| | Ex tabula 0, 1, 2, 5, 6 | Pro casu praes. 0, 3, 6, 1, 4 | et excl. $7n \pm 2$ |
| 3) | Excludens = 11 | fg = R, $\frac{A}{f} \equiv 1$ | |
| | habentur itaque 0, 1, 3, 5, 6, 8, 10 excl. $11n \pm 2, 4$ | | |
| 4) | Excludens = 17 | fg = N, $\frac{A}{f} \equiv 9 \equiv 1.3^1$ | |
| | | 0. 1. 3. 4. 6 | |
| | | 0. 3. 5. 5. 1 | |
| | | 0, 2, 3, 4, 6, 7 | |
| | Excludens | $\pm 1, 5, 8$ | |

p	Werth von $\frac{A}{f} \pmod{p}$	Zahlen denen positiv oder negativ genommen x nach dem Modulus p congruent sein muss.	Excludens p	$\frac{A}{f}$	$\frac{f}{A}$	$fgRp$	
						Admittuntur	Excluduntur
3	1	0, 1	3	1	1	0	1, 2
	2	1		2	2	1, 2	0
5	1	0, 1	5	1	1	0	1, 4
		1		2	3	1, 4	0, 2, 3
	2	3		2	2, 3	0, 1, 4	
	4	4		0	2, 3	1, 4	
7	1	0, 1, 2	7	1	1	0, 2, 5	1, 6
	6	2, 3		2	4	0, 1, 6	3, 4
11	1	0, 1, 3, 5	11	3	5	1, 3, 4, 6	3, 4
		10		4	2	0, 3, 4	0, 2, 5
	1, 3, 4	5		3	1, 2, 5, 6	1, 6	
	6	6		2, 3, 4, 5	0, 3, 4	0, 1, 6	
13	1	0, 1, 2, 6	13	1	1	0, 3, 5, 6, 8	1, 10
	2	1, 4, 5		2	6	1, 2, 3, 8, 9, 10	0, 4, 5, 6, 7
17	1	0, 1, 3, 4, 6	17	3	4	0, 3, 4, 7, 8	5, 6
		1, 2, 4, 6		4	3	0, 1, 5, 6, 10	2, 9
	3	5		9	0, 1, 2, 9, 10	4, 7	
	11	6		2	1, 4, 5, 6, 7, 10	0, 2, 3, 8, 9	
19	1	0, 1, 2, 3, 4, 7	19	7	8	2, 3, 5, 6, 8, 9	0, 1, 4, 7, 10
	18	1, 3, 6, 7, 8		8	7	2, 4, 5, 6, 7, 9	0, 1, 3, 8, 10
23	1	0, 1, 4, 8, 9, 10, 11	23	9	5	0, 2, 4, 7, 9	3, 8
		1, 2, 3, 4, 6, 8		10	10	1, 3, 4, 7, 8, 10	0, 2, 5, 6, 9
	22	1		0, 2, 6, 7, 11	1, 12	3, 4, 5, 8, 9, 10	
	2	7		1, 4, 5, 8, 9, 12	0, 2, 3, 6, 7, 10, 11		
29	1	0, 1, 5, 6, 8, 9, 11, 13	29	3	9	0, 2, 5, 8, 11	4, 9
		1, 3, 5, 6, 8, 13, 14		4	10	0, 1, 4, 9, 12	2, 11
	2	5		8	1, 2, 3, 10, 11, 12	0, 4, 5, 6, 7, 8, 9	
	13	6		11	3, 4, 6, 7, 9, 10	0, 1, 2, 5, 8, 11, 12	
31	1	0, 1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 13	31	7	2	2, 4, 6, 7, 9, 11	0, 1, 3, 5, 8, 10, 12
		4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14		8	5	2, 3, 5, 8, 10, 11	0, 1, 4, 6, 7, 9, 12
	30	9		3	0, 5, 6, 7, 8	3, 10	
	1	10		4	0, 1, 3, 10, 12	6, 7	
37	1	0, 1, 2, 7, 8, 10, 11, 14, 16, 18	37	11	6	1, 5, 6, 7, 8, 12	0, 2, 3, 4, 9, 10, 11
	2	1, 3, 6, 7, 8, 14, 15, 17, 18		12	12	0, 3, 4, 9, 10	5, 8
41	1	0, 1, 3, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19	41	1	1	0, 3, 4, 6, 11, 13, 14	1, 16
		1, 2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 17		2	9	0, 1, 2, 7, 10, 15, 16	6, 11
	3	6		1, 2, 4, 6, 11, 13, 15, 16	0, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14		
	4	13		0, 5, 6, 8, 9, 11, 12	2, 15		
43	1	0, 1, 2, 3, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 18, 20	43	5	7	1, 2, 3, 8, 9, 14, 15, 16	0, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13
		1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 17, 19, 21		6	3	2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 15	0, 1, 3, 4, 8, 9, 13, 14, 16
	42	7		5	3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 14	0, 1, 2, 6, 8, 9, 11, 15, 16	
	17	8		15	0, 2, 3, 4, 13, 14, 15	5, 12	
47	1	0, 1, 4, 6, 9, 10, 11, 16, 18, 19, 20, 22, 23	47	9	2	0, 1, 5, 8, 9, 12, 16	3, 14
		2, 3, 5, 9, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 23		10	12	1, 3, 5, 6, 11, 12, 14, 16	0, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 13, 15
	46	11		14	3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14	0, 1, 2, 4, 5, 12, 13, 15, 16	
	1	12		10	2, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 15	0, 1, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 16	
53	1	0, 1, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 19, 20, 21, 22	53	13	4	0, 2, 3, 7, 10, 14, 15	8, 9
		1, 3, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 18, 21, 24, 25, 26		14	11	1, 4, 7, 8, 9, 10, 13, 16	0, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 14, 15
	2	15		8	0, 4, 6, 8, 9, 11, 13	7, 10	
	1	16		16	0, 1, 5, 7, 10, 12, 16	4, 13	
58	1	0, 1, 3, 5, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 29	58	$\frac{A}{f}$	$\frac{f}{A}$	Excluduntur	Admittuntur
	1, 3, 6	$\frac{f}{A}$		$\frac{A}{f}$	Admittuntur	Excluduntur	

NACHLASS. HÜLFSTAFEL ZUR AUFLÖSUNG DER GLEICHUNG $A = fxx + gyy$.

Ex- clu- dens	A		$fyRp$	
	f	A	Admittuntur	Excluduntur
19	1	1	0.2.3.4.7.12.15.16.17	1.18 5.6.8.9.10.11.13.14
	2	10	1.2.4.6.9.10.13.15.17.18	0.3.5.7.8.11.12.14.16
	3	13	4.5.6.7.9.10.12.13.14.15	0.1.2.3.8.11.16.17.18
	4	5	0.4.5.6.8.11.13.14.15	2.17 1.3.7.9.10.12.16.18
	5	4	0.1.2.6.8.11.13.17.18	9.10 3.4.5.7.12.14.15.16
	6	16	0.1.3.4.9.10.15.16.18	5.14 2.6.7.8.11.12.13.17
	7	11	0.1.3.5.6.13.14.16.18	8.11 2.4.7.9.10.12.15.17
	8	12	1.2.4.7.8.11.12.15.17.18	0.3.5.6.9.10.13.14.16
	9	17	0.2.6.7.9.10.12.13.17	3.16 1.4.5.8.11.14.15.18
	10	2	1.2.3.5.9.10.14.16.17.18	0.4.6.7.8.11.12.13.15
	11	7	0.2.5.8.9.10.11.14.17	7.12 1.3.4.6.13.15.16.18
	12	8	1.5.7.8.9.10.11.12.14.18	0.2.3.4.6.13.15.16.17
	13	3	2.3.4.5.8.11.14.15.16.17	0.1.6.7.9.10.12.13.18
	14	15	3.4.6.8.9.10.11.13.15.16	0.1.2.5.7.12.14.17.18
	15	14	2.3.5.6.7.12.13.14.16.17	0.1.4.8.9.10.11.15.18
	16	6	0.3.7.8.9.10.11.12.16	4.15 1.2.5.6.13.14.17.18
	17	9	0.1.4.5.7.12.14.15.18	6.13 2.3.8.9.10.11.16.17
	18	18	1.3.6.7.8.11.12.13.16.18	0.2.4.5.9.10.14.15.17
23	1	1	0.4.8.9.10.11.12.13.14.15.19	1.22 2.3.5.6.7.16.17.18.20.21
	2	12	0.1.3.4.6.9.14.17.19.20.22	5.18 2.7.8.10.11.12.13.15.16.21
	3	8	0.1.5.6.8.10.13.15.17.18.22	7.16 2.3.4.9.11.12.14.19.20.21
	4	6	0.1.3.5.7.8.15.16.18.20.22	2.21 4.6.9.10.11.12.13.14.17.19
	5	14	1.2.4.5.7.9.14.16.18.19.21.22	0.3.6.8.10.11.12.13.15.17.20
	6	4	0.2.4.5.6.7.16.17.18.19.21	11.12 1.3.8.9.10.13.14.15.20.22
	7	10	1.2.7.8.9.11.12.14.15.16.21.22	0.3.4.5.6.10.13.17.18.19.20
	8	3	0.2.5.6.8.11.12.15.17.18.21	10.13 1.3.4.7.9.14.16.19.20.22
	9	18	0.1.4.7.10.11.12.13.16.19.22	3.20 2.5.6.8.9.14.15.17.18.21
	10	7	1.2.3.5.10.11.12.13.18.20.21.22	0.4.6.7.8.9.14.15.16.17.19
	11	21	3.4.5.7.8.10.13.15.16.18.19.20	0.1.2.6.9.11.12.14.17.21.22
	12	2	0.2.3.7.10.11.12.13.16.20.21	9.14 1.4.5.6.8.15.17.18.19.22
	13	16	0.1.2.3.8.9.14.15.20.21.22	6.17 4.5.7.10.11.12.13.16.18.19
	14	5	1.5.6.9.10.11.12.13.14.17.18.22	0.2.3.4.7.8.15.16.19.20.21
15	20	3.5.6.7.9.11.12.14.16.17.18.20	0.1.2.4.8.10.13.15.19.21.22	
16	13	0.2.6.7.9.10.13.14.16.17.21	4.19 1.3.5.8.11.12.15.18.20.22	
17	19	1.2.3.4.6.10.13.17.19.20.21.22	0.5.7.8.9.11.12.14.15.16.18	
18	9	0.3.4.5.9.11.12.14.18.19.20	8.15 1.2.6.7.10.13.16.17.21.22	
19	17	1.4.6.7.8.11.12.15.16.17.19.22	0.2.3.5.9.10.13.14.18.20.21	
20	15	2.4.5.8.9.10.13.14.15.18.19.21	0.1.3.6.7.11.12.16.17.20.22	
21	11	3.6.7.8.9.10.13.14.15.16.17.20	0.1.2.4.5.11.12.18.19.21.22	
22	22	2.3.4.6.8.11.12.15.17.19.20.21	0.1.5.7.9.10.13.14.16.18.22	
p	f	A	Excluduntur	Admittuntur
	f	A	$fgNp$	

SECTIO OCTAVA.

QUARUNDAM DISQUISITIONUM AD CIRCULI SECTIONEM
PERTINENTIUM UBERIOR CONSIDERATIO.

367.

Quae in posteriore Sectionis septimae parte inde ab art. 355 tradidimus, gravia utique specimina exhibent de magna theoriae sectionis circuli fertilitate, nec non de nexu miro, qui hanc disciplinam cum variis disquisitionibus *arithmeticis* iungit. Illic vero, spatii temporisque angustia nimis coarctati, leviter tantum huncce campum stringere potuimus, qui quo ulterius in eo progredimur, eo largiore messe conatus nostros remuneratur. Propositum itaque nobis est, unam alteramve quaestionum ibi inceptarum hic denuo resumere copiosiusque pertractare: certoque lectores non sine magna admiratione plurimum problematum arithmeticoꝝ, quae toto hinc coelo dissita esse quisque expectavisset, solutionem huic fundamento inniti videbunt.

368.

Argumentum fertilissimum suppeditat disquisitio in art. 356 inchoata, ubi complexu radicum aequationis $x^n - 1 = 0$ (unitate exclusa) in duas classes discerpto, aggregatum in utraque classe definire docuimus, quae scilicet prodierunt $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ pro casu ubi n est formae $4n + 1$, aut $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-n}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-n}$ pro casu ubi n est formae $4n + 3$. Attamen illic non solum limitationem ad casum ubi n est *numerus primus* nobis im-

posueramus, sed etiam, quod multo adhuc gravioris erat momenti, *signum* quantitatis radicalis indefinitum reliquimus, seu potius hanc determinationem paucis addigitatam demonstratione solida fulcire negleximus. Hos itaque defectus ante omnia supplere oportebit.

369.

Jam sit itaque n numerus integer positivus quicumque, R radix aequationis $x^n - 1 = 0$ talis, cuius nulla potestas inferior quam n^{ta} unitati aequalis fiat (V. art. 359, II.), designemusque per $[\lambda]$, ut in Sect. VII. potestatem R^λ , ita ut $[0] = 1, [1], [2], [3] \dots [n-1]$ omnes radices aequationis $x^n - 1 = 0$ exhibeant. Porro denotemus aggregatum

$$[0] + [1] + [4] + [9] + \dots + [(n-1)^2] \text{ per } \Sigma[\Omega]$$

et generalius

$$[0] + [\lambda] + [4\lambda] + [9\lambda] \dots + [\lambda(n-1)^2] \text{ per } \Sigma[\Omega\lambda]$$

ita ut Ω indefinite quadrata numerorum $0, 1, 2, 3 \dots n-1$ indicet. Patet igitur, sicut generaliter est $[\lambda] = [\mu]$, si λ, μ sunt integri quicumque (positivi seu negativi) secundum n congrui, ita etiam fore $\Sigma[\Omega\lambda] = \Sigma[\Omega\mu]$, si $\lambda \equiv \mu$. His ita praeparatis habemus sequens

370.

PROBLEMA. *Productum e duobus aggregatis $\Sigma[\Omega]$ et $\Sigma[-\Omega]$ assignare.*

Solutio. Quum sit $nn \equiv 0, (n+1)^2 \equiv 1, (n+2)^2 \equiv 4$ etc. (mod. n), facile patet fieri $\Sigma[\Omega]$

$$\begin{aligned} &= [1] + [4] + [9] + [16] \dots + [nn] \\ &= [4] + [9] + [16] + [25] \dots + [(n+1)^2] \\ &= [9] + [16] + [25] + [36] \dots + [(n+2)^2] \\ &\quad \text{etc. aut generaliter} \\ &= [kk] + [(k+1)^2] + [(k+2)^2] + [(k+3)^2] \dots + [(n+k-1)^2] \end{aligned}$$

Hinc $[-kk] \times \Sigma[\Omega]$

$$= [0] + [2k+1] + [4k+4] + [6k+9] \dots + [(n-1)^2 + 2(n-1)k]$$

Hinc evolvitur $\Sigma[-\mathfrak{Q}] \times \Sigma[\mathfrak{Q}]$ in

$$\begin{aligned} & + [0] + [1] + [4] + [9] \dots \dots + [(n-1)^2] \\ & + [0] + [3] + [8] + [15] \dots \dots + [nn-1] \\ & + [0] + [5] + [12] + [21] \dots \dots + [nn+2n-3] \\ & + [0] + [7] + [16] + [27] \dots \dots + [nn+4n-5] \\ & + \text{etc.} \\ & + [0] + [2n-1] + [4n] + [6n+3] \dots \dots + [3nn-6n+3] \end{aligned}$$

Quas partes *verticaliter* summando prodit

$$n[0] + [1] \times \frac{1-[2n]}{1-[2]} + [4] \times \frac{1-[4n]}{1-[4]} + [9] \times \frac{1-[6n]}{1-[6]} + \text{etc.} + [(n-1)^2] \times \frac{1-[2nn-2n]}{1-[2n-2]}$$

in qua expressione omnes partes praeter primam evanescent, quoties n est impar; tunc enim omnes $1-[2n]$, $1-[4n]$, $1-[6n]$ etc. fiunt $= 0$, nullus vero denominatorum $1-[2]$, $1-[4]$, $1-[6]$, $1-[8]$ etc. usque ad $1-[2n-2]$. Quando vero n est par, etiam inter denominatores unus est $= 0$ puta $1-[n]$, cui respondet terminus $[\frac{1}{2}nn] \times \frac{1-[nn]}{1-[n]}$; summa partium autem ex quibus hic ortus est fit $= n[\frac{1}{2}nn]$. Hic denuo duo casus sunt distinguendi. Quando n est pariter par, fit $\frac{1}{2}nn \equiv 0 \pmod{n}$ adeoque $[\frac{1}{2}nn] = 1$; quando vero n est impariter par, fit $\frac{1}{2}nn \equiv \frac{1}{2}n \pmod{n}$ adeoque necessario $[\frac{1}{2}nn] = -1$. Hinc denique colligitur

- 1) pro valore impari ipsius n fit productum quaesitum $= n$
- 2) pro valore pariter pari fit productum $= 2n$
- 3) pro valore impariter pari fit $= 0$. Q. E. I.

371.

Operae iam pretium erit, indolem aggregati $\Sigma[\mathfrak{Q}]$ propius considerare.

I. Quum pro quadratis $0, 1, 4, 9, 16$ etc. ipsorum residua minima secundum modulum n substituere liceat, patet si M designet indefinite residua quadratica numeri n a 0 usque ad $n-1$, atque m multitudinem radicum congruentiae $xx \equiv M \pmod{n}$, fieri $\Sigma[\mathfrak{Q}] = \Sigma m[M]$. Numerum m in articulis 104, 105 determinare docuimus.

II. Si n est numerus primus (impar), erit pro $M \equiv 0$, $m = 1$, pro quovis autem alio valore ipsius M , $m = 2$. Si autem n est potestas numeri primi imparis $= p^s$, erit $m = 2$ pro quovis valore ipsius M per p non divisibili —

372.

Si n est numerus primus (impar), residua m consistent ex cifra, pro qua $M = 1$, et ex $\frac{1}{2}(n-1)$ aliis numeris, pro quibus $M = 2$. Designando haec residua (excluso residuo 0) indefinite per μ , erit progressio nostra $= 1 + 2 \sum r^\mu$. Porro si per ν designantur indefinite omnes reliqui numeri infra n , quorum multitudo quoque erit $\frac{1}{2}(n-1)$ et qui omnia non-residua quadratica ipsius n infra n complectentur, manifesto erit

$$1 + \sum r^\mu + \sum r^\nu = 1 + r + r^2 + r^3 \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} = 0$$

Quare ponendo summam progressionis nostrae sive $1 + 2 \sum r^\mu = A$, erit $1 + 2 \sum r^\nu = -A$, nec non $\sum r^\mu - \sum r^\nu = A$.

Per art. 356 fit itaque $A = \pm \sqrt{n}$ vel $\pm \sqrt{-n}$, prout n est $\equiv 1$ vel $\equiv 3 \pmod{4}$. Sed signum radicis hinc nondum determinatur.

Si in progressionem nostram, quam per Π designabimus, pro r substituitur alia similis radix aequationis $x^n - 1 = 0$, puta $r' = r^k$, supponamus inde prodire Π' .

373.

Si n est quadratum altiorve potestas numeri primi, puta $= p^\pi$, residua m quaedam consistent e numeris per p non divisibilibus, alia erunt divisibilia per pp neque per altiore potestatem ipsius p , alia per p^4 neque vero per p^5 dividi poterunt et sic porro usque ad ea quae per $p^{\pi-2}$ neque vero per $p^{\pi-1}$ divisibilia sunt, sive per $p^{\pi-1}$ neque vero per p^π , prout π par est sive impar; his denique accedit residuum 0, quod est unicum per p^π divisibile (conf. art. 102). Iam designando per μ indefinite residua quadratica numeri p infra p cifra exclusa (quorum multitudo $= \frac{1}{2}(p-1)$), illae diversae residuorum classes sequenti modo exhibebuntur. Prima, quae per p non sunt divisibilia, repraesentantur per $\mu + kp$, ubi pro k substituendi sunt omnes integri a 0 usque ad $p^{\pi-1} - 1$, ita ut omnium residuorum in hac forma contentorum multitudo sit $= \frac{1}{2}(p-1)p^{\pi-1}$; pro his singulis fit $M = 2$. Summa autem omnium terminorum in Π his residuis respondentium erit

$$= 2 \sum r^{\mu+kp} = 2 \sum r^\mu \cdot \sum r^{kp} = 2 \sum r^\mu \cdot \frac{r^{p^\pi} - 1}{r^p - 1} = 0$$

Secunda residuorum classis exhibebitur per $\mu pp + kp^3$ ubi pro k substituendi sunt omnes integri a 0 usque ad $p^{\pi-3} - 1$ ita ut omnium residuorum in hac

forma contentorum multitudo sit $= \frac{1}{2}(p-1)p^{\pi-3}$; pro singulis autem fit $M = 2p$. Summa terminorum in Π hinc oriundorum fit

$$= 2p \sum r^{\mu p p + k p^3} = 2p \sum r^{\mu p p} \cdot \sum r^{k p^3} = 2p \sum r^{\mu p p} \cdot \frac{r^{p^3} - 1}{r^{p^3} - 1} = 0$$

siquidem $\pi > 3$. Similiter classis tertia, quarta etc. exhibebitur per $\mu p^4 + k p^5$, $\mu p^6 + k p^7$ etc. ubi pro k omnes integri a 0 usque ad $p^{\pi-5}-1$, $p^{\pi-7}-1$ etc. accipi debent; pro his fit $M = 2pp$, $M = 2p^3$ etc. Et summa terminorum in Π e classe tertia, quarta etc. ortorum evanescet, siquidem $\pi > 5$, $\pi > 7$ etc. resp.

Hinc colligitur, pro casu ubi π par est, in Π eos tantummodo terminos remanere, qui residuo 0 respondent, qui sunt $= 1$; pro his vero fit $M = p^{\frac{1}{2}\pi}$, ita ut summa omnium terminorum in Π fiat $= p^{\frac{1}{2}\pi}$.

GAUSS AN DIRICHLET.

A Monsieur
Monsieur LEJEUNE DIRICHLET à Paris.

Schon früher würde ich Ihnen meinen Dank für die mir gütigst übersandte Abhandlung und das grosse Vergnügen welches Sie mir dadurch gemacht haben, bezeugt haben, wenn ich nicht gewünscht hätte, erst etwas von dem Erfolg dessen zu erfahren, was ich in Beziehung auf Ihre, und ich kann hinzusetzen meine eigenen Wünsche in Berlin zu thun versucht habe. Ich freue mich ungemein jetzt aus einem von dem Secretair der Akademie in Berlin erhaltenen Briefe zu sehen, dass wir hoffen können, dass man Ihnen bald im Vaterlande eine angemessene Fixirung zu verschaffen geneigt sein wird.

Es ist mir eine um so erfreulichere Erscheinung, dass Sie mit grosser Neigung demjenigen Theile der Mathematik anhängen, der von jeher mein Lieblingsstudium gewesen ist, je seltener dieselbe ist. Ich wünsche Ihnen herzlich eine äussere Lage, wo Sie soviel als möglich Herr Ihrer Zeit und der Wahl Ihrer Arbeiten bleiben. Ich selbst wurde gleich nach dem Erscheinen meiner *Disquisitiones* durch andersartige Beschäftigungen, und später, durch meine äussern Verhältnisse sehr gehindert, meiner Neigung in dem Maasse nachzuhängen wie ich gewünscht hätte. Anstatt eines zweiten Theils jenes Werks, den ich früher beabsichtigte, werde ich mich aller Wahrscheinlichkeit nach darauf beschränken müssen, von Zeit zu Zeit ein *Memoire* über einen einzelnen Gegenstand zu liefern. Die drei Abhandlungen dieser Art, die bisher im 16. Band der hiesigen *Commentationes*, und im ersten und vierten der *Commentationes recentiores* erschienen sind, enthalten aber (einen Theil der zweiten abgerechnet) keine von den Gegenständen, die ich schon 1801 zur Fortsetzung im Auge hatte, sondern neue; und so beziehen sich auch meine spätern Arbeiten dieser Art gleichfalls auf einen neuen Gegenstand, namentlich die Theorie der Biquadratischen Reste, die ich etwa in drei Abhandlungen zu geben denke; die erste davon wird in kurzem für den sechsten Band der *Comment. rec.* gedruckt werden, und die Hauptmaterialien für das Uebrige sowie für die ähnliche Theorie der cubischen Reste, ist, obgleich noch wenig davon ordentlich zu Papier gebracht ist, im Wesentlichen als abgemacht zu betrachten.

Empfehlen Sie mich gefälligst dem Herrn von HUMBOLDT, falls er noch in Paris ist, und entschuldigen mich, dass ich jetzt nicht an ihn selbst schreibe, mit der Besorgniss, dass mein Brief ihn nicht treffen möchte, da er, wie ich höre, Paris zu verlassen die Absicht hatte.

Mit aufrichtiger Hochschätzung

Ihr ergebenster

Göttingen den 13. September 1826.

C. F. GAUSS.

Für Ihr gütiges Schreiben, und die gefällige Uebersendung Ihrer beiden Abhandlungen statue ich Ihnen, mein hochgeschätzter Freund, meinen verbindlichsten Dank ab. Ich sehe mit Vergnügen das steigende Interesse, welches man gegenwärtig an den Untersuchungen der Höhern Arithmetik zu nehmen anfängt. Die glückliche Art, wie Sie das zweite auf die biquadratische Residualität der Zahl 2 aus dem ersten ableiten, hat mir sehr wohl gefallen.

Vermuthlich hat jetzt der 6. Band unsrer Commentationen seinen Weg nach Breslau gefunden, und meine Commentatio prima über die biquadratischen Reste wird Ihnen also wol gegenwärtig bekannt sein: wenn sich eine Gelegenheit darbieten sollte, würde ich auch mit Vergnügen Ihnen einen besondern Abdruck derselben übersenden. Ich hätte unter mehrern Beweisarten für das darin vorkommende Theorem wählen können; es wird Ihnen aber nicht entgehen, warum ich den daselbst ausgeführten hier vorgezogen habe, hauptsächlich nemlich, weil die Classification von 2 bei denjenigen Moduln, für welche es quadratischer Nichtrest ist (unter B oder D) als ein wesentlicher integrierender Theil des Theorems betrachtet werden muss, auf welchen die meisten andern Beweisarten nicht anwendbar scheinen.

Die ganze Untersuchung, deren Stoff ich schon seit 23 Jahren vollständig besitze, die Beweise der Haupttheoreme aber (zu welchen das in der ersten Commentation noch *nicht* zu rechnen ist) seit etwa 14 Jahren — (obwol ich wünsche und hoffe, an letztern, den Beweisen, noch einiges vereinfachen zu können) — habe ich auf ungefähr 3 Abhandlungen berechnet. Mit der Abfassung der zweiten habe ich bereits jetzt einen Anfang gemacht, und hoffe sie in nicht langer Zeit zu vollenden, falls nicht die neuerdings mir wieder aufgetragenen Messungsgeschäfte dabei noch einige Verzögerung verursachen.

Das Schlusstheorem $b \equiv \frac{1}{4}rr \pmod{p}$ hatte ich schon vor drei Jahren in den hiesigen gel. Anzeigen mit bekannt, und auf den merkwürdigen dabei noch zu lösenden Knoten aufmerksam gemacht; ich habe aber bisher nicht gehört, dass jemand einen Versuch dazu gemacht hätte. Vor einigen Tagen ist es mir nun mit der *einen Hälfte* wirklich gelungen, und dieser Fund hat mir um so mehr Vergnügen gemacht, da er sich gar nicht auf Induction gründet — denn ich gestehe, dass ich gerade *diesen* Zusammenhang nicht erwartet hätte — sondern a priori auf die Combination anderweitiger *selv verschlungener* und interessanter, schon 25 Jahr alter, aber noch gar nicht bekannt gemachter Untersuchungen,

wovon eine leise Andeutung in der Schlussanmerkung der Disquis. Arithm. S. 668 [GAUSS Werke B. I. S. 466] gegeben ist.

Es ist dies nemlich ein ausreichendes Criterium für den Fall, wo p von der Form $8n + 5$ ist.

Es sei die Anzahl der Classen, welche die binären Formen in jeder der beiden Gattungen für den Determinant $-p$ bilden $= k$. Der Anfang einer von mir bis zu dem Determinant -3000 construirten Tafel steht Disquis. Arithm. p. 520. [art. 303.] Auch ist noch zu bemerken, dass für ein p von der angenommenen Form, allemahl $k = 2m + 1$ wird, wenn m die Anzahl der Zerlegungen von p in drei positive Quadrate bedeutet (ich sage positiver, um 0 auszuschliessen), wie LEGENDRE durch Induction gefunden, und in den Disquis. Arithm. zuerst aus der Theorie der ternären Formen bewiesen ist. Man hat z. B.

für $p =$	5,	13,	29,	37,	53,	61,	101,	109,	149,	157	u. s. w.
$k =$	1,	1,	3,	1,	3,	3,	7,	3,	7,	3	
$m =$	0,	0,	$\frac{1}{4}$,	0,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{1}{9}$,	$\frac{3}{1 \ 4 \ 16}$,	$\frac{1}{9}$,	$\frac{3}{1 \ 4 \ 36}$,	$\frac{1}{4}$	
			9		16	16	36 16 36	36	4 64 64	9	
			16		36	36	64 81 49	64	144 81 49	144	

Dies vorausgesetzt, ist allemahl derjenige Werth von b , welcher $\equiv \frac{1}{2}rr \pmod{p}$ ist, $\equiv 2k + a - 1 \equiv 4m + a + 1 \pmod{8}$

wodurch das Zeichen von b vollkommen bestimmt ist. Sehen Sie hier 22 Beispiele, indem ich die Ausdehnung der am Schluss der Abhandlung gegebenen Tafel verdopple.

p	k	a	b	p	k	a	b				
5	1	+	1	+	2	181	5	+	9	+	10
13	1	-	3	-	2	197	5	+	1	-	14
29	3	+	5	+	2	229	5	-	15	+	2
37	1	+	1	-	6	269	11	+	13	+	10
53	3	-	7	-	2	277	3	+	9	+	14
61	3	+	5	-	6	293	9	+	17	+	2
101	7	+	1	-	10	317	5	-	11	+	14
109	3	-	3	+	10	349	7	+	5	+	18
149	7	-	7	-	10	373	5	-	7	+	18
157	3	-	11	-	6	389	11	+	17	-	10
173	7	+	13	+	2	397	3	-	19	-	6

Man kann die Vorschrift also auch so ausdrücken, (immer voraussetzend $p \equiv 5 \pmod{8}$)

Es ist $b \equiv a + 1 \pmod{8}$, wenn m gerade
 $b \equiv a + 5 \pmod{8}$ wenn m ungerade.

Ich wage noch keine Vermuthung, ob ein noch einfacheres Criterium möglich ist, woran man den Fall des geraden m von dem des ungeraden *im Voraus* unterscheiden könnte, d. i. ohne den Werth von m selbst zu kennen, da, wie ich schon oben bemerkt habe, dies Rapprochement noch ganz neu ist.

Für den Fall $p \equiv 1 \pmod{8}$, bleibt zwar obige Congruenz $b \equiv 2k + a - 1 \pmod{8}$ richtig, entscheidet aber nicht mehr über das Zeichen von b , da sie dem positiven und negativen Werthe von b zugleich genug thut. Es ist hier nemlich k immer gerade, $= 2m$ (wenn die Bedeutung von m eben so ausgesprochen wird wie oben) oder $= 2m + 2$, wenn man unter m die Anzahl der Zerlegungen von p in 3 positive *ungleiche* Quadrate versteht, und $b \equiv 0 \pmod{4}$, oder $b \equiv -b \pmod{8}$. Ich vermuthe dass der Fall $p \equiv 1 \pmod{8}$ oder $b \equiv 0 \pmod{4}$ *altioris indaginis* ist und vielleicht wieder

$b \equiv 4 \pmod{8}$ leichter als $b \equiv 0 \pmod{8}$
 $b \equiv 8 \pmod{16}$ leichter als $b \equiv 0 \pmod{16}$

u. s. w.

Mit ausgezeichnete Hochachtung beharre ich

Ihr freundschaftlich ergebenster

Göttingen den 30. Mai 1828.

C. F. GAUSS.

BEMERKUNGEN.

Diesem zweiten Bande von GAUSS Werken habe ich alle Abhandlungen, Aufsätze und Tafeln aus dem Gebiete der Hoheren Arithmetik, soweit die sieben Sectionen der *Disqu. Arithm.* sie nicht schon umfassen, einverleibt, und zwar die in den *Commentationes societatis regiae scientiarum Göttingensis* (in Quart) veröffentlichten fünf Abhandlungen, die in den *Göttingischen Gelehrten Anzeigen* (in Octav) erschienenen (von GAUSS nicht unterzeichneten, aber durch die Acten der Göttinger Universitäts-Bibliothek in Betreff der Autorschaft verificirten) Anzeigen sowohl dieser eignen als auch einiger anderer nichteigner Schriften, und eine Auswahl aus dem Handschriftlichen Nachlasse.

Beim zweiten Abdruck habe ich noch die Tabellen *'Circuli quadratura nova'* *'Zur Berechnung der Logarithmen'* *'Quadratorum myrias prima'* *'Indices der Primzahlen im höhern Zahlenreiche'* *'Hulfstafel zur Auflösung der unbestimmten Gleichung $A = fxx - gyy$ mittelst der Ausschliessungsmethode'* ferner *'Sectio octava'*, so weit sie aufgeschrieben ist und endlich zwei Briefe von GAUSS an DIRICHLET als wesentliche Stücke der Geschichte der Hoheren Arithmetik hinzugefügt.

Zur bessern Uebersicht der Gegenstände in einem so umfangreichen Bande sind die Lehrsätze auf gleiche Weise durch den Druck ausgezeichnet. Zum leichtern Gebrauch sowohl der ätern Ausgaben wie der vorliegenden ist bei den Verweisungen auf die *Disq. Arithm.* statt der Nummer der Seite die der Artikel gesetzt, so wie bei den Angaben von Abhandlungen statt des Orts ihrer Veröffentlichung deren eigener Titel. Die Note, die dem Art. 2 der Abhandlung *'Theorematis arithmetici demonstratio nova'* ursprünglich

beigegeben war und die eine Berichtigung des Art. 139 Disqu. Arithm. enthielt, ist dort der betreffenden Stelle eingefügt. Die Note auf Seite 91 ist einer handschriftlichen Notiz entlehnt. Ausserdem unterscheidet sich die vorliegende Ausgabe von den früheren nur durch die Berichtigung einiger Druckfehler. Die von mir hinzugefügten Einschaltungen sind durch eckige Klammern [] kenntlich gemacht.

Die *Tafel des quadratischen Characters der Primzahlen* ist nach der Weise der in Art. 99 beschriebenen und (in Art. 331) zur Zerlegung der Zahlen vorzugsweise angewandten Tabula II der Disqu. Arithm. gedruckt. Die Handschrift unter dem Titel '*Quadratorum numeris primis divisorum residua lateralia*' hat in den Schriftzügen am meisten Aehnlichkeit mit der des zweiten Theiles der Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche, sie enthält an der Stelle der den Quadratischen Rest anzeigenden horizontalen Striche kleine Kreise, von denen immer diejenigen durch Linien verbunden sind, die in benachbarten horizontalen oder verticalen Reihen vorkommen. Bei der Correctur wurde ich auf mehrere Fehler aufmerksam, habe dann bei einer einmaligen Vergleichung mit JACOBI'S *Canon Arithmeticus* 190 Abweichungen in den Angaben der Characteres und nach directer Bestimmung diese in Uebereinstimmung mit jenen gedruckten Tafeln gefunden, dem entsprechend ist hier die Ausgabe berichtigt.

Von der *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche* ist hier der erste Theil der Tabula III. der Disqu. Arithm. ähnlich eingerichtet, er enthält für die Primzahlen und deren Potenzen p^x , welche zwischen 3 und 463 liegen, die Mantissen (1), (2) .. (0) der Decimalbrüche von $\frac{10 \cdot r}{p^x}$, $\frac{10 \cdot r r}{p^{2x}}$.. $\frac{10}{p^{ix}}$, worin r die Einheit bedeutet, also (1) = (2) = .. (0) wird, wenn 10 Primitivwurzel von p^x ist, sonst aber r die kleinste unter denjenigen Primitivwurzeln von p^x bezeichnet, für welche als Basis der Index von 10 den kleinsten Werth annimmt. Die von 1 verschiedenen Werthe von r habe ich zur Erleichterung des Gebrauchs auf Seite 120 der Tafel beigelegt. Die Handschrift, in der auch noch nicht die Unterscheidungsziffern der verschiedenen Perioden angegeben sind, entspricht äusserlich am meisten der Analysis residuorum und scheint in der Zeit dem hier als zweiten Theil der ganzen Tafel hingestellten Stücke voranzugehen. Dieser zweite Theil enthält für die Primzahlen und deren Potenz p^x zwischen 467 und 997 die Mantissen der Decimalbrüche von $\frac{100}{p^x}$. Die Handschrift gibt die Theiler in abnehmender Reihenfolge und schliesst mit den Worten: *Explicitus October 14. 1795.* Im Drucke habe ich beim Theiler 191 Periode (1) die 71^{ste} Ziffer hinzugefügt und beim Theiler 529 eine zwischen der 151 und 152^{ten} Ziffer stehende Zahl fortgelassen.

Die von GAUSS selbst in einem Briefe (Seite 444) erläuterte *Tafel der Frequenz der Primzahlen* besteht für ihren ersten Theil, welche die Anzahl der Primzahlen in jedem der 1000 ersten Chiliaden gibt in einer Handschrift von GAUSS, es finden sich im Nachlass aber nicht die in dem Briefe angedeuteten Abzählungen der der ersten Million angehörenden Hunderte, die eine bestimmte Anzahl von Primzahlen enthalten. Der andere Theil der Tafel nemlich für die zweite und dritte Million ist einer von GOLDSCHMIDT allein herrührenden Handschrift entlehnt. Herr MEISSEL hat durch Abzählung und durch seine Formel die folgenden Berichtigungen zu Seite 436 und 437 gefunden:

Chilias	GAUSS	Wahrer Werth	Chilias	GAUSS	Wahrer Werth
20	102	104	546	68	69
159	87	77	601	75	76
199	96	86	625	68	78
206	85	83	668	75	74
245	78	88	675	69	75
289	85	77	784	74	75
290	84	85	800	81	71
334	85	81	879	68	78
352	80	81	985	74	70
501	78	79			

Die in dem Briefe von GAUSS an ENCKE erwähnte Formel ENCKE's scheint die folgende

$$\frac{n}{\log n} \sqrt[2 \log n]{10}$$

zu sein, welche ENCKE in einem Briefe an GAUSS vom 4. Dec. 1849 mittheilt.

Die *Tafel der Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen* gibt die Anzahl der Genera und Classen so wie den Index der Irregularität für die negativen Determinanten in den Hunderten 1 bis 30, 43, 51, 61, 62, 63, 91 bis 100, 117 bis 120, dann noch in einer besondern Zusammenstellung für die des 1. 3. und 10^{ten} Tausend, für die 500 ersten von der Form $-(15n+7)$ und $-(15n+13)$, sowie für einige sehr grosse Determinanten, ferner für die positiven Determinanten des 1. 2. 3. 9. 10^{ten} Hundert und für einige andere. Die Handschrift besteht aus einzelnen Zetteln, auf denen die Tafeln verschiedenartig eingerichtet sind, z. B. ist bei den ältern das Wort *Ordo* statt *Genus* gebraucht, so bei den einzelnen Centaden mit Ausnahme der 9. und 10. positiver Determinanten, dann aber auch bei einzelnen vorläufigen Zusammenstellungen in Chiliaden. Zur leichtern Uebersicht ist hier überall die Bezeichnung der Disqu. Arithm. gewählt, auch die grossten und kleinsten Quotienten aus der Anzahl der Classen dividirt durch den Determinanten, sowie die Anzahl der Determinanten, für welche der Quotient innerhalb gewisser Grenzen fällt, sind wegen Mangel an Raum nicht unter die einzelnen Centaden gesetzt sondern am Ende der Tafel für die negativen Determinanten zusammengestellt. Aus einigen übrig gebliebenen Aufzeichnungen scheint hervorzugehen, dass GAUSS zuerst die Classen für die Determinanten berechnet hat, die demselben Hundert und demselben Reste bei dem Theiler 15 angehören. Die Determinanten dieser Abtheilungen sind dann nach der Anzahl der Genera und Classen und zuletzt alle die demselben Hundert angehörigen auf die hier wiedergegebene Weise geordnet. Den Tafeln der einzelnen Centaden sind manche spätere Berichtigungen eingefügt, nicht aber den Zusammenstellungen in Tausenden. Zeitbestimmungen enthalten nur die beiden Tafeln mit den Determinanten der Form $-(15n+7)$ und $-(15n+13)$ nemlich resp. '*Expl. In. Febr. 1801*' und '*Expl. 27 Febr. 1807*.'

In diesen Tafeln habe ich unter anderen die folgenden Fehler bemerkt, denen ich hier zur leichtern Controle die Periodenzahlen der Fundamentalclassen wie z. B. 4. 4. 2 bei dem Determinanten II.

— 11713 und die durch Formen der resp. Fundamentalclassen dargestellten Zahlen wie 31. 37. 2 beifüge, indem, wie in meiner Abhandlung Band 14 der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, als Fundamentalclassen solche Classen genommen werden, die in Vereinigung mit den Classen ihrer Perioden durch Composition jede eigentlich primitive Classe des Determinanten einmal und nur einmal hervorbringen.

Es sind schon die Angaben fortgelassen:

Centas	9	G. IV	...	3	—	827	[21::3]
	26	IV	14	—	2587	[24::11]	
	26	VIII	6	—	2564	[56::3]	
	91	I	111	—	9059	[117::5]	
	120	IV	32	—	11956*2*	[36.2::11.49]	
	1	I	2	+	37	[3::3]	
	2	I	2	+	101	[3::4]	

und hinzugefügt:

Centas	9	G. IV	...	3	—	828	[6.2::31.23]
	26	IV	14	—	2586	[28.2::7.2]	
	26	VIII	6	—	2565	[12.2.2::7.2.5]	
	91	I	117	—	9059	[117::5]	
	120	IV	32	—	11966*2*	[32.4::15.83]	
	1	I	3	—	37	[3::3]	
	2	I	3	—	101	[3::4]	

Bei der Tafel für Centas 3 und der letzten auf Seite 476, welche in der Handschrift mit einer von der hier abgedruckten äusserlich verschiedenen Aufzeichnung der Centas 1 und 2 vereinigt vorkommen, sind die zwölf Abtheilungen statt mit I Ordo unicus. 1; I. O. 2; I. O. 3; I. O. 4; II. Ordines duo. 1. 1; II. O. 1. 2; II. O. 2. 2; II. O. 3. 3; III. Ordines quatuor. 1. 1. 1. 1; III. O. 1. 1. 2. 2; III. O. 2. 2. 2. 2; IV. Ordines octo 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1; hier auf die sonst angewandte Weise mit G. I. 1; G. I. 3; G. I. 5; G. I. 7; G. II. 1; G. II. 2; G. II. 3; G. II. 5; G. IV. 1; G. IV. 2; G. IV. 3; G. VIII. 1; bezeichnet. Die Rechnung ergibt nemlich z. B. 269. I. 3 [3::4]; 235. IV. 3 [6.2::5.5]; 401. I. 5 [5::9]; 577. I. 7 [7::3]; 727. II. 5 [10::3]. (Genera I statt Genus I auf Seite 469 ist ein Druckfehler).

In Folge von Druckfehlern ist auszulassen:

Centas	27.	G. IV	...	16	—	2624*3*
	93	IV	16	—	9216	
	118	VIII	4	—	11713*3*	

und hinzuzufügen:

Centas	27.	G. IV	...	16	—	2624*2*	[16.4::3.16]
	93	IV	16	—	9216*2*	[16.4::5.9]	
	118	VIII	4	—	11713*2*	[4.4.2::31.37.2]	

Nach meiner Berechnung ist noch auszulassen:

Centas	10.	G. II	...	9	—	972	[6.3::7.13]
	17	IV	4	—	1660	[10.2::11.5]	
	20	IV	12	—	1982	[24::3]	
	21	IV	6	—	2096	[30.2::3.4]	
	23	IV	9	—	2221	[18::10]	
	24	IV	12	—	2376	[12.2.2::5.8.8]	
	29	IV	9	—	2887	[25::8]	
	61	IV	7	—	6028	[12.2::13.4]	
	96	VIII	13	—	9594	[20.2.2::31.2.13]	
	118	IV	25	—	11780	[16.4.2::3.8.19]	
	118	VIII	16	—	11780	[16.4.2::3.8.19]	
	119	VIII	16	—	11840	[24.2.2::5.9.7]	

und hinzuzufügen:

Centas	10.	G. II	...	9	—	972*3*	[6.3::7.13]
	17	IV	12	—	1700	[24.2::13.17]	
	20	IV	12	—	1957	[24.2::7.2]	
	21	IV	6	—	2097	[12.2::47.2]	
	23	IV	9	—	2224	[18.2::5.16]	
	24	IV	12	—	2366	[24.2::3.2]	
	29	IV	9	—	2885	[18.2::13.5]	
	61	IV	6	—	6028	[12.2::13.4]	
	96	VIII	13	—	9546	[26.2.2::5.3.37]	
	118	IV	25	—	11750	[50.2::5.47]	
	118	VIII	16	—	11780*2*	[16.4.2::3.8.19]	
	119	VIII	16	—	11840*2*	[16.4.2::3.16.5]	

Millias I	G.	II	...	3	...	—	541	[10::11]	Millias I.	G.	II	...	5	...	—	415	[10::13]
I		II		4		~	415	[10::13]	I		II		5		—	541	[10::11]
I		II		8		—	527	[18::3]	I		II		9		~	459	*5*[6.3::5.9]
I		II		8		—	722	[18::3]	I		II		9		—	527	[18::3]
I		II		9		—	194	[20::5]	I		II		9		—	722	[18::3]
I		II		9		—	459	[6.3::5.9]	I		II		9		—	972	*5*[6.3::7.13]
I		II		9		—	972	[6.3::7.13]	I		II		10		—	194	[20::5]
I		II		11		—	842	[26::13]	I		II		13		—	842	[26::13]
I		IV		3		—	784	[8.2::5.4]	I		IV		2		—	532	[4.2::13.7]
I		IV		4		—	532	[4.2::13.7]	I		IV		4		—	784	[8.2::5.4]
I		IV		5		—	425	[12.2::13.17]	I		IV		6		—	425	[12.2::13.17]
I		IV		5		—	608	[12.2::13.27]	I		IV		6		—	608	[12.2::13.27]
I		IV		5		—	629	[18.2::5.2]	I		IV		9		—	629	[18.2::5.2]
III		II		15		—	2578	[16::13]	III		II		15		—	2518	[30::19]
X		I		117		—	9259	[117::15]	X		I		117		—	9259	[117::15]
formae—(15n+13)IV				4		—	2788	*2*[8.2::19.17]	formae—(15n+13)IV				4		—	2788	[8.2::19.17]

Die Tafeln zur *Cyclotechnie* geben für 2452 Zahlen von der Form $aa + 1, aa + 4, aa + 9, \dots, aa + 81$ die sämtlichen ungeraden Primtheiler p neben den zugehörigen a und zwar in solchen Fällen, wo die Primtheiler alle unter 200 liegen, nur dann werden $aa + 1$ u. s. f. zerlegbar genannt.

Zur leichtern Uebersicht beim Gebrauche hat Gauss für jede Tafel, aus der sich die vollständigen Zerlegungen von Zahlen einer der besonderen Formen bestimmen lassen, eine Hulftafel aufgestellt, die neben jeder Primzahl p solche Zahlen a enthält, deren um 1 oder 4... vermehrtes Quadrat die Zahl p zum grossten Primtheiler hat.

Der Hauptzweck der Tafeln ist die Erleichterung, die sie für die genaue Berechnung der Bogen gewahren, deren Cotangenten gegebene rationale Zahlen sind. Zunächst können nemlich mit ihrer Hülfe die Bogen für kleine Cotangenten aus den Bogen für grosse Cotangenten zusammengesetzt und dadurch die noch erforderlichen Berechnungen der Reihen, welche die Bögen in ihren Cotangenten ausdrücken, auf ein sehr geringes Maass beschränkt werden. Die hierauf hinielenden Entwicklungen, die sich in dem handschriftlichen Nachlass finden, sind wenig ausgedehnt, die folgende ist die am weitesten fortgeführte. Es bezeichnen darin

$[2] [5] [13] [17] [29] [37] [41] [53] [61] \dots [197] (18) (57) (239) \left(\frac{79}{3}\right) \dots$
die Bogen der Cotangenten

$$1 \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad 4 \quad \frac{5}{2} \quad 6 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{6}{5} \dots 14 \quad 18 \quad 57 \quad 239 \quad \frac{79}{3} \dots$$

Mit Hülfe der Tafeln ist durch Zerlegung von $18 + i, 57 + i, 239 + i$ in ihre complexe Primfactoren

$$(18) = 2[2] - 2[5] - [13]$$

$$(57) = -[2] + 3[5] - [13]$$

$$(239) = 3[2] \quad - 4[13]$$

gefunden und hieraus

$$[2] = 12(18) + 8(57) - 5(239)$$

$$[5] = 7(18) + 5(57) - 3(239)$$

$$[13] = 9(18) + 6(57) - 4(239)$$

ferner mit Hilfe der Tafeln

$$(268) = -2[5] + 2[13] - [17]$$

$$(18) = -[5] + 2[17]$$

und hieraus durch Elimination von [17] und Einsetzen der zuvor erhaltenen Werthe von [5], [13]

$$(38) + 2(268) = (18) - (57) - (239)$$

Die Elimination von (18) hat dann die neue Bestimmung ergeben

$$[2] = 12(38) + 20(57) + 7(239) + 24(268)$$

$$[5] = 7(38) + 12(57) + 4(239) + 14(268)$$

$$[13] = 9(38) + 15(57) + 5(239) + 18(268)$$

$$[17] = 4(38) + 6(57) + 2(239) + 7(268)$$

Nach folgeweiser Anwendung der Cotangenten 117, 327, 882, 18543, 307, 278, 378, 829, 993, 2945, 447, 606, 931, 1143, 1772, 6118, 34208, 44179, 85353, 485298, 17772, 9466, 330182, 5257, 114669, 12943 sind endlich [2][5]...[61] durch (5257), (9466)...(485298) ausgedrückt und deren Coefficienten in den folgenden Spalten zusammengestellt:

	5257	9466	12943	34208	44179	85353	114669	330182	485298
2	+ 2805	- 398	+ 1950	+ 1850	+ 2021	+ 2097	+ 1484	+ 1589	+ 808
5	+ 1656	- 235	+ 1151	+ 1092	+ 1195	+ 1238	+ 876	+ 820	+ 477
13	+ 2100	- 298	+ 1460	+ 1385	+ 1513	+ 1570	+ 1111	+ 1040	+ 605
17	+ 875	- 124	+ 608	+ 577	+ 630	+ 654	+ 463	+ 433	+ 252
29	+ 1359	- 193	+ 945	+ 896	+ 979	+ 1016	+ 719	+ 673	+ 391
37	+ 590	- 84	+ 410	+ 389	+ 425	+ 441	+ 312	+ 292	+ 170
41	+ 2410	- 342	+ 1675	+ 1589	+ 1736	+ 1802	+ 1275	+ 1193	+ 694
53	+ 994	- 141	+ 691	+ 655	+ 716	+ 743	+ 526	+ 492	+ 286
61	+ 2481	- 352	+ 1725	+ 1637	+ 1788	+ 1835	+ 1313	+ 1229	+ 715

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen, welche zur Bestimmung von [2][5]...[61] dienen können, überzeugt man sich unmittelbar durch die aus obigen Tafeln sich ergebenden Zerlegungen

$$(5257) = [2] + 2[5] - [13] + [17] \quad . \quad . \quad - [41] \quad . \quad - [61]$$

$$(9466) = 2[2] \quad . \quad . \quad . \quad - [29] - 3[37] \quad . \quad . \quad - [61]$$

$$(12943) = [2] - 4[5] + 3[13] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - [61]$$

$$(34208) = 2[2] - [5] - 2[13] + [17] + [29] \quad . \quad . \quad - 2[53] \quad .$$

$$(44179) = 3[2] \quad . \quad - 3[13] - 2[17] - [29] \quad . \quad . \quad + [53] \quad .$$

$$(85353) = - [2] - [5] + [13] - [17] \quad . \quad - [37] + 2[41] - [53] \quad .$$

$$(114669) = - 3[2] \quad . \quad . \quad + [17] \quad . \quad + [37] \quad . \quad + 2[53] + 2[61]$$

$$(330182) = - 4[2] + 5[5] + [13] \quad . \quad + [29] - [37] - [41] \quad . \quad + [61]$$

$$(485298) = - 2[2] - [5] + 4[13] \quad . \quad - 2[29] + [37] \quad . \quad + [53] \quad .$$

Die von den Rechnern bis jetzt angewandten Arten zur Bestimmung von $\frac{\pi}{4} = (1)$ stellt GAUSS in der folgenden Uebersicht zusammen

MACHIN	(1) = 4(5) - (239)	auch CLAUSEN
ELLER	= (2) + (3)	(ETLER à GOLDBACH 1746 Mai 28)
VEGA	= 5(7) + 2($\frac{29}{3}$)	(VEGA Thesaurus logar. p. 633)
VEGA	= 2(5) + (7)	auch CLAUSEN (Astr. Nachr. B. 25. S. 209)
RUTHERFORD	= 4(5) - (70) + (99)	(Philos. Trans. 1841. p. 283)
DASE	= (2) + (5) + (8)	(CEBELLE Journal. B. 27. S. 198)
GAUSS. 1.	= 12(18) + 8(57) - 5(239)	
GAUSS. 2.	= 12(38) + 20(57) + 7(239) + 24(168)	

Die ersten Rechnungen für die Tafeln gehören der Zeit der Ausarbeitung der *Disquis. Ar.* an, sie sind dann besonders in den Jahren 1846 und 47 gefordert. Am 21. Juli 1847 waren 223 Zerlegungen nach der hier wiedergegebenen Ordnung in Tafeln gebracht, die übrigen 169 sind später berechnet, und ich habe sie diesem Abdruck (der sich vom Original in der Einrichtung nur durch die des leichtern Satzes wegen statt der Potenzen angewandte Schreibweise der Wiederholung der Factoren unterscheidet) mit eingeordnet.

Die Manuscripte mit diesen letzten Rechnungen scheinen die Resultate in der Form zu enthalten, wie sie unmittelbar gefunden wurden. Die Reihenfolge, in welcher dabei die Zahlen a auftreten, lässt vermuthen, dass nur für die kleinern die Theiler von $aa + 1$ u. s. f. aufgesucht wurden, und dass die grössern Zahlen sich aus diesen durch Anwendung besonderer Kunstgriffe ergeben haben. Aufgezeichnet ist aber nur folgende Regel: *Aus drei Zahlen a , $2a - n$, $2a + n$ findet sich eine vierte*

$$\frac{4a^2 - (nn - 3)a}{nn + 1}$$

Diese ist immer eine ganze Zahl für $n = 0$ und $n = 1$, sonst nur

$$\begin{aligned} &\text{für } a \equiv 0 \text{ und } \equiv \pm \sqrt{-1} \pmod{nn + 1} \text{ wenn } n \text{ gerade} \\ &\text{und für } a \equiv 0 \text{ und } \equiv \pm \sqrt{-1} \pmod{\frac{nn + 1}{2}} \text{ wenn } n \text{ ungerade} \end{aligned}$$

Beispiele	$a = 253, n = 6,$	1750507
	$a = 294, n = 11,$	832902
	$a = 119, n = 1,$	3370437
	$a = 57, n = 3,$	74043
	$a = 123, n = 9,$	90657

Zu der vierten Zahl gehören nemlich keine andern Primtheiler als zu den ersten dreien und davon sind auch nur diejenigen ungeraden Primtheiler ausgeschlossen, welche der Zahl n zugehören.

Die Tabelle '*Quadratorum myrius prima*' enthält in der Zeile der Überschrift die Tausende und Hunderte, in der ersten senkrechten Spalte die Zehner und Einer der Grundzahl ferner in der letzten

senkrechten Spalte jeder einzelnen Tabelle die drei niedrigsten Ziffern des Quadrates und in dem Innern die vier oder fünf höheren Ziffern des Quadrates.

Die Tabelle '*Indices der Primzahlen im Höhern Zahlenreiche*' enthält in der obersten horizontalen Reihe den jedesmaligen Modulus, in der zweiten Reihe die zur Anwendung gekommene Basis, in der ersten senkrechten Spalte die Restzahlen und im Innern die Indices. Die Sterne * bezeichnen die Reste Null.

Die Handschrift des Bruchstückes der '*Sectio octava. Quarundam disquisitionum ad circuli sectionem pertinentium uberior consideratio*' scheint der Zeit der Umarbeitung der '*Analysis residuorum*' in die '*Disquisitiones arithmeticae*' anzugehören. Die Briefe von GAUSS an DIRICHLET bestätigen die Ansicht, dass GAUSS auch in der höheren Arithmetik erheblich mehr entdeckt hat als im Nachlasse sich findet.

SCHERING.

I N H A L T.

GAUSS WERKE BAND II. HÖHERE ARITHMETIK.

Abhandlungen.

Theorematis arithmetici demonstratio nova	1808 Jan.	Seite 1
Summatio quarundam serierum singularium	1808 Aug.	— 9
Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliaciones novae	1817 Febr.	— 47
Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio prima	1825 Apr.	— 63
Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda	1831 Apr.	— 93

Anzeigen eigener Schriften.

Theorematis arithmetici demonstratio nova	1808 Mai	— 131
Summatio quarundam serierum singularium	1808 Sept.	— 133
Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis etc.	1817 März	— 139
Theoria residuorum biquadraticorum. Comm. I.	1825 April	— 163
Theoria residuorum biquadraticorum. Comm. II.	1831 April	— 169

Anzeigen nicht eigener Schriften.

[DALBERG] Recherches sur l'irréductibilité Arithmétique et Géométrique des nom- bres et de leurs puissances	1809 März	— 181
CHERNAC. Cribrum Arithmeticum	1812 März	— 181
BLUCHARDT. Tables des diviseurs	1814 Nov. 1816 Nov. 1817 Aug.	— 183
ERCHINGER. Construction des Siebenzehneckes	1823 Dec.	— 186
SEEBER. Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären qua- dratischen Formen	1831 Juli	— 188

Nachlass.

Analysis residuorum:	
Caput sextum. Pars prior. Solutio congruentiae $x^{2n} - 1 \equiv 0$	Seite 199
Caput octavum. Disquisitiones generales de congruentiis	— 212
Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio	— 243
Démonstration de quelques théorèmes concernant les périodes des classes des formes binaires du second degré	— 260
De nexu inter multitudinem classium in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur earumque determinantem. I. II. . . X	— 269
Geometrische Seite der ternären Formen	— 305
Zur Theorie der biquadratischen Reste. I. . . VI	— 313
Zur Theorie der complexen Zahlen. I. . . VI	— 387
Tafel des quadratischen Characters der Primzahlen	— 399
Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche	— 411
Tafel der Frequenz der Primzahlen	— 435
Tafel der Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen	— 449
Tafel zur Cyklotechnie	— 477
Circuli quadratura nova	— 497
Zur Berechnung der Logarithmen	— 501
Quadratorum myrias prima	— 504
Indices der Primzahlen im höhern Zahlenreiche	— 506
Hülftafel zur Auflösung der Gleichung $A = fxx + gyy$	— 509
Sectio octava. Quarundam disquisitionum ad circuli sectionem pertinentium uberior consideratio. —	510
Briefe von GAUSS an DIRICHLET	— 514
<i>Bemerkungen</i>	— 519

GÖTTINGEN,

DRUCK DER DIETERICHSCHEM UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI.

W. FR. KAESTNER.

BERICHTIGUNG.

Zum ersten Abdrucke von Band II. pag. 452 Centas 12. G. IV. 5
Man lese 1137 statt 1237.

Zu Band II. pag. 568 Man rücke den Strich zwischen den beiden Worten 'Excluduntur' und 'Admittuntur' im *unteren* Eingange der Tabelle (rechts unten auf der Seite) sieben Millimeter weiter nach links. (Vergl. den unteren Eingang der Tabelle auf pag. 569.)

Zum ersten Abdrucke von Band III. pag. 130 und 133.

Zufolge einer von Herrn H. E. HAINÉ gemachten Bemerkung ist auf Seite 130 Art. 7. Gleichung [4] $+(\gamma - \alpha)(\gamma - \delta) F(a, \delta, \gamma + 1)$ statt $+(\gamma - \alpha)(\gamma - \delta) F(a, \delta, \gamma + 1)$, in Gleichung [11] $+(\gamma - \alpha)(\gamma - \delta) F(a, \delta, \gamma + 1)$ statt $-(\gamma - \alpha)(\gamma - \delta) F(a, \delta, \gamma + 1)$ und auf Seite 133 Art. 11. in Gleichung [23] $F(a, \delta + 1, \gamma) - F(a + 1, \delta, \gamma)$ statt $F(a - 1, \delta + 1, \gamma) - F(a - 1, \delta - 1, \gamma)$ zu setzen.
