U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U
Prirodno-matematički fakultet

Dragoljub Arandjelović

KARAMATINE PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE I ASIMPTOTSKI STAVOVI MERCEROVOG TIPA

- doktorska disertacija -

Beograd, maja 1975.

SADRŽAJ

UVOD.. 1-6

GLAVA I.— NEKE KOMUTATIVNE BANACHOVE ALGEBRE INTEGRABILNIH FUNKCIJA I.1
1. Komutativne Banachove algebre. Karakteri. Inverzibilnost I.1
2. Banachove algebre integrabilnih funkcija I.2
3. Jedno delovanje algebre $L^w(M)$ I.7
4. Primeri I.9

GLAVA II. — PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE I NIZOVI .. II.1
1. Pravilno promenljive funkcije II.1
2. Proširenja i suženja pojma pravilne promenljivosti II.4
3. Pravilno promenljivi nizovi na $\mathbb{Z}$ II.10
4. Pravilno promenljivi nizovi II.13

GLAVA III. — ABELOVI ASIMPTOTSKI STAVOVI ZA PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE I NIZOVE III.1
1. Abelovi asimptotski stavovi za pravilno promenljive funkcije III.1
2. Abelovi asimptotski stavovi za pravilno promenljive nizove na $\mathbb{Z}$ III.4
3. Abelovi asimptotski stavovi za pravilno promenljive nizove III.6
4. Faktori uniformne konvergencije za pravilno promenljive funkcije i nizove. Dokazi stavova 1 i 1.Z III.7

GLAVA IV. — MERCEROVI ASIMPTOTSKI STAVOVI ZA PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE I NIZOVE IV.1
1. Mercerovi asimptotski stavovi za pravilno promenljive funkcije IV.1
2. Primene: Hölderove i Cesàrove sredine IV.3
3. Mercerovi asimptotski stavovi za pravilno promenljive nizove na Z IV.4

LITERATURA ....

UVOD

U ovom uvodu G označava jednu od sledećih komutativnih, lokalno kompaktnih i separiranih topoloških grupa: $\mathbb{R}_+^*$ (multiplikativna grupa strogo pozitivnih realnih brojeva), $\mathbb{R}$ (aditivna grupa realnih brojeva), Z (aditivna grupa celih brojeva). Zakon kompozicije u G označava se multiplikativno, Haarova mera na G sa dt a baza filtra okolina pozitivne beskonačnosti u G obrazovana intervalima $[s,\infty[\ = \{t \in G \mid t \geq s\}$ $(s \in G)$ sa $\mathcal{F}$. Kako su grupe $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}_+^*$ izomorfne, dovoljno je posmatrati samo jednu od njih.

PREDMET.— Za funkciju R, merljivu i strogo pozitivnu na nekom intervalu $X \in \mathcal{F}$, kaže se da je <u>pravilno promenljiva na G</u> (PPG) ako granična vrednost

$$\lim_{x \to \infty} \frac{R(tx)}{R(x)} = \rho(t) \tag{1}$$

postoji za svako $t \in G$; pri tome se funkcija ρ, koja je neprekidni homomorfizam grupe G u grupu $\mathbb{R}_+^*$, naziva <u>indeksom</u> PPG funkcije R. Za $G = \mathbb{R}_+^*$ dobijaju se uobičajene (Karamatine) pravilno promenljive funkcije (PP funkcije).

Sama definicija PPG funkcija predodredjuje njihovu važnu ulogu u asimptotskom ponašanju konvolucija u kojima su jedan od faktora.

Neka su f i g merljive kompleksne funkcije na G od kojih f zadovoljava izvesne uslove integrabilnosti a g izvesne uslove ograničenosti, takve da je funkcija $t \longmapsto f(t)g(x/t)$ integrabilna na G za svako x iz nekog skupa $X \in \mathcal{F}$, i neka je za $\lambda \in \mathbb{C}$ (= skup kompleksnih brojeva) i $x \in X$

$$\begin{aligned} g_\lambda(x) &= g(x) + \lambda \int_G f(t)g(x/t)dt \\ &= g(x) + \lambda\,(f * g)(x)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Posmatramo sledeći <u>slabi opšti Mercerov asimptotski problem</u>: <u>Odrediti funkcije f i odgovarajuće vrednosti λ za koje važi</u>

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{|g(x)|}{R(x)} < \infty \iff \limsup_{x \to \infty} \frac{|g_\lambda(x)|}{R(x)} < \infty \tag{3}$$

za svaku PPG funkciju (fiksiranog) indeksa ρ i odgovarajući jaki koji se dobija kada se u slabom (3) zameni sa

$$(4) \qquad \text{postoji} \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{R(x)} \iff \text{postoji} \lim_{x\to\infty} \frac{g_\lambda(x)}{R(x)} .$$

OPŠTI METOD.— Posmatrani Mercerovi problemi se razlažu na Abelove ($\iff$ u (3) i (4) se zamenjuju sa $\Longrightarrow$) u kojima λ ne igra nikakvu ulogu (posmatraju se količnici g/R i $(f*g)/R$) i (prave) Mercerove ($\iff$ u (3) i (4) se zamenjuje sa $\Longleftarrow$) u kojima je uloga λ bitna. Abelov problem rešava se potpuno. Dobijeni Abelov stav (stav Abelove prirode) kazuje da za svako rešenje f Abelovog problema postoji Banachova algebra $A(f) \ni f$ čiji su elementi takodje rešenja tog problema. U toj algebri se rešava jednačina (2) po g da bi se primenom Abelovog stava dobila željena Mercerova implikacija; pri tome se daju dovoljni uslovi za λ: $1/\lambda$ se ne nalazi u spektru od f gde se spektar odredjuje pomoću Fourierove transformacije.

Korišćenje inverzne transformacije je, inače, jedan od opštih metoda dokazivanja Mercerovih stavova [45; s. 76-78].

PREGLED RADA.—GLAVA I ima za cilj da izvrši pripreme za rešavanje jednačine (2) u Glavi IV. Ona je opštija no što Glava IV zahteva jer smo imali u vidu mogućnost Abelovog stava za opšte pravilno promenljive funkcije (s.II.6) odakle bi se onda dobio i opšti Mercerov stav. Primećujemo da su odstupanja posmatranih algebri od algebre $L^1(G,dx)$ prouzrokovana odstupanjima PPG funkcija indeksa ρ od homomorfizma ρ.

Posle navodjenja nekih pojmova iz teorije komutativnih B-algebri (§ 1), posmatra se u § 2 jedna posebna B-algebra, A, funkcija integrabilnih sa nekom težinom na nekom monoidu, M, u lokalno kompaktnoj Abelovoj grupi G i daje opšti oblik karaktera te algebre, (vii), odakle se zaključuje o inverzibilnosti elemenata algebre A i njenog proširenja jedinicom, (viii) i (ix). Za posebne vrednosti G i M dobiće se, odavde, u § 4 neke poznate algebre. U § 3 se pokazuje da algebra A (funkcija f iz (2)) deluje na jedan Fréchetov prostor (funkcija g iz (2)).

GLAVA II je posvećena pojmu pravilne promenljivosti. Polazi se od klasičnog slučaja (§ 1) preko pregleda varijacija pojma pravilne promenljivosti u raznim pravcima (§ 2) od kojih je nama najbliže Bajšanski-Karamatino uopštenje (s.II.6) te smo malo išli tim putem (s.II.7;def. 2 i stav 1) da bi se stiglo (§ 3) do posebno jednostavnog slučaja PPZ funkcija (nizova). Na kraju (§ 4) se posmatraju pravilno promenljivi nizovi (PP nizovi),tj. nizovi R strogo pozitivni na nekom intervalu $[m,\infty[$ u $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$ i takvi da

(5) $$\lim_{n\to\infty} \frac{R([tn])}{R(n)} = \rho(t)$$

postoji za svako $t>0$. Svuda, sem u § 2, se navode (a u § 3. i dokazuju) osnovne osobine posmatranih pravilno promenljivih objekata i ukazuje na njihov paralelizam.

Čini nam se da smo poznatoj teoremi o reprezentaciji (koja se ovde javlja pod novim imenom - teorema o razlaganju) povećali vrednost primetivši (s.II.4, primedba 3b) da iz nje sledi da je skup PPG funkcija fiksiranog indeksa slika nekih B-prostora (čija se struktura može koristi pri radu sa tim funkcijama).

PPZ nizovi su posmatrani u više radova [02,16,17,34] (navodimo samo novije); ovde se prvi put eksplicitno vezuju za Karamatine PP funkcije. Oni mogu poslužiti kao najjednostavniji model onoga što se podrazumeva pod pravilnom promenljivošću.

GLAVA III. U prva tri odeljka se iskazuju Abelovi asimptotski stavovi za PP funkcije (stav 1),PPZ nizove (stav 1.Z) i PP nizove (stav 1.N^*) a kao osobine PP funkcija i nizova navode se elementarni Mercerovi stavovi o karakterizaciji. U našim stavovima se, za razliku od poznatih (v.§§ 1-3) gde se posmatra količnik $(f*R)/R$, javlja količnik $(f*g)/R$ gde je g kompleksna funkcija (niz) asimptotski uporediva sa R. Sem toga se u stavovima 1 i 1.Z daju potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju konvolucije $(f*g)(x)$ za dovoljno veliko x čime se posebno ističe koji od uslova integrabilnosti (nametnutih funkciji f) omogućavaju Abelove zaključke.

U § 4 se uvodjenjem podesnih faktora uopštava teorema o uniformnoj konvergenciji (i ograničenosti).Iz stavova 2 sledi, na primer, da granični prelazi (1),(5) vrede i u izvesnim B-prostorima E kompleksnih funkcija na G,$\mathbb{N}^*$ sa uniform -

nom normom; kao posledica se dobijaju Abelovi asimptotski stavovi u kojima se umesto integrala javlja neka druga neprekidna (u opštem slučaju nelinearna) funkcionela na E. Zatim se dokazuju stavovi 1 i 1.Z.

GLAVA IV. Iskazuju se i dokazuju Mercerovi asimptotski stavovi za PP funkcije (§ 1, stavovi 1,2) i PPZ nizove (§ 3, stavovi 1.Z,2.Z). Pri tome stavovi 2 razmatraju slučaj kada je $f(t) = o$ za $t \leq$ od jedinice u G. Svaki stav ima svoju posledicu u kojoj se variraju uslovi integrabilnosti za f i ograničenosti za g; pri tome pojačanje jednih dovodi do slabljenja drugih. Iz opštih stavova (§ 1) se u § 2 izvode poznati Mercerovi asimptotski stavovi za Hölderove i Cesàrove sredine [04].

METOD.— Rad pripada današnjoj Analizi pa njoj pripadaju i metodi korišćeni pri rešavanju problema koji su se javljali u njegovom toku. Nastojali smo da se držimo shvatanja da su metodi u Analizi odredjeni njenim "velikim" teoremama i njihovim dokazima te da se dokazivanje neke "male" svodi na uočavanje"velikih"koje na nju deluju i prirode tog delovanja. Primeri takvog dokazivanja su dokazi Abelovih stavova (Glava III) i posledica Mercerovih stavova (Glava IV).

PRAVILNO PROMENLJIVI NIZOVI se ne mogu obuhvatiti opštom definicijom 2 (s.II.7) jer preslikavanje $t \longrightarrow t.f$, $(t.f)(n) = f([tn])$ grupe $\mathbb{R}_+^*$ u skup svih kompleksnih funkcija na $\mathbb{N}^*$ nije asocijativno, tj. nije $s.(t.f) = (st).f$. Ne radimo sa njima ali ih navodimo jer su pravilno promenljiva pojava koja se danas ne može izbeći.

Nasuprot relaciji (1) iz koje se skoro neposredno izvodi da je ρ neprekidni homomorfizam grupe G u $\mathbb{R}_+^*$, dosta teško se iz (5) izvodi da je $\rho(t) = t^\rho$ za neko realno ρ i svako $t > o$ [18; s.97-98]. Već sama definicija (i oblik funkcije ρ) ukazuju da pojam PP niza nije vezan samo za multiplikativni monoid $\mathbb{N}^*$ već, možda i više, i za njime generisanu grupu $\mathbb{R}_+^*$. Čini nam se da Teorema o utapanju (s.II.14) ne odražava to generisanje.

Mogla bi se dati zajednička definicija PPG funkcija i PP nizova:

Neka je M lokalno kompaktan podmonoid od G takav da je $\mathcal{F}_M = \{X \cap M : X \in \mathcal{F}\}$ baza filtra na M. Za funkciju R, strogo pozitivnu i dx_M-merljivu na nekom skupu X iz $\mathcal{F}_M$, kaže se da je <u>pravilno promenljiva na M</u> ako za svako t iz zatvorene podgrupe od G generisane sa M postoji $\rho(t)$ iz $\mathbb{R}_+^*$ takvo da

$$(6) \qquad \frac{R(y)}{R(x)} \longrightarrow \rho(t) \text{ , kad } x \longrightarrow \infty, \ \frac{y}{x} \longrightarrow t \text{ .}$$

Ovakva definicija bi bila, na prvi pogled, prestroga. Ona je medjutim ekvivalentna prethodnim ($G = M = \mathbb{R}_+^*$ ili $\mathbb{Z}$; $G = \mathbb{R}_+^*$, $M = \mathbb{N}^*$) ako se uzme u obzir da su granične vrednosti u (1) i (5) uniformne po t na kompaktnim skupovima u M (teorema o uniformnoj konvergenciji). Primećujemo da zahtev da granična vrednost u (6) postoji kada je t jedinica grupe G dovodi do <u>pravilno oscilujućih funkcija</u>. Primećujemo, takodje, da je prvobitna definicija PP funkcija i nizova bila jedinstvena (za "sporo promenljiv" npr. "asimptotski jednak svojoj aritmetičkoj sredini").

Mišljenja smo da su PP nizovi ipak "patološki slučaj" u porodici pravilno promenljivih, da takvi ne mogu ostati, da će se (na neki način) uključiti u sadašnju ili neku buduću porodicu pravilno promenljivih.

ZABELEŠKE IZ ISTORIJE MERCEROVIH STAVOVA.

<u>1907</u>. Početak. J. MERCER [37] dokazuje da <u>konvergencija niza</u>

$$(7) \qquad \alpha s_n + (1-\alpha)\frac{s_1+s_2+\ \dots\ +s_n}{n}$$

<u>realnih brojeva za neko</u> $\alpha > 0$ <u>povlači konvergenciju niza</u> s_n . Drugim rečima (za $s_1+s_2+\ \dots\ +s_n = nu_n$): Ako je $\alpha > 0$ a slobodni član diferencne jednačine

$$(8) \qquad (\alpha n+\alpha-1)u_n - \alpha(n-1)u_{n-1} = b_n$$

konvergira, onda konvergira i njeno rešenje.

<u>Vreme teče</u>. Dokazuju se tvrdjenja slična Mercerovom za pojedine postupke zbirljivosti (<u>posebni Mercerovi stavovi</u>), dokazuje se ekvivalencija pojedinih postupaka zbirljivosti, odredjuje asimptotsko ponašanje rešenja diferencijalnih i integralnih jednačina (literatura u [45; s.77]).

1932. N.WIENER objavljuje svoje opšte Tauberove teoreme. One obuhvataju većinu do tada poznatih posebnih Tauberovih stavova, postaju (i ostaju do današnjih dana) jedno od središta Teorije zbirljivosti.

1938. Sledeći Wienera, H.R. PITT [38] dokazuje opšte Mercerove teoreme. Jedna od njih glasi: Neka je $\sigma \le \sigma_1 \le \sigma_2$, k funkcija ograničene varijacije na $\mathbb{R}$ bez singularne komponente takva da integral

$$(9) \qquad K(t-i\sigma) = K(-i\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega y}\, dk(y)$$

apsolutno konvergira za $o \le \sigma \le \sigma_2$ i da je

$$(10) \qquad \inf_{t\in\mathbb{R}} |K(-i\omega)| > o \quad \text{za} \quad o \le \sigma \le \sigma_1 .$$

Ako je a) $o \le \sigma_1 < \sigma_2$ i $s(x) = O(e^{\sigma x})$ $(x \in \mathbb{R})$ za svako $\sigma_1 < \sigma \le \sigma_2$ ili b) $\sigma_1 = \sigma_2 = o$ a funkcija s(x) ograničena, onda je

$$\limsup_{x\to\infty} |s(x)| \le C \limsup_{x\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} s(x-y)\, dk(y) \right|$$

gde konstanta C zavisi samo od k. Druga se odnosi na slučaj kada je funkcija k konstantna a s jednaka o za $x \le o$. Tada uslov (9) otpada (jer je zadovoljen), otpada i uslov a) ili b) ali se zahteva da (10) važi za $\sigma \ge o$ (v. i [39; CH V]).

1953. B.I. KORENBLYUM [32] dokazuje opštu Tauberovu asimptotsku teoremu u kojoj se tvrdi da važi implikacija

$$\int_o^\infty k(t/x)\, d\varphi(t) \sim \int_o^\infty k(t/x)\, d\psi(t) \Longrightarrow \varphi(x) \sim \psi(x)$$

$(x \to \infty)$ pod izvesnim uslovima Wienerove prirode za k' i uslovima koji zavise od poretka na $\mathbb{R}_+^*$ za k, φ, ψ.

PRIMEDBA.— Naš rad je potaknut radovima S. ALJANČIĆA [03, 04] u kojima se posmatraju posebni Mercerovi asimptotski stavovi. U tim radovima smo našli i predmet i metod.

GLAVA I

NEKE KOMUTATIVNE BANACHOVE ALGEBRE INTEGRABILNIH FUNKCIJA

§ 1. KOMUTATIVNE BANACHOVE ALGEBRE. KARAKTERI. INVERZIBILNOST.

Kompleksnom algebrom naziva se kompleksan vektorski prostor A snabdeven bilinearnim preslikavanjem $(x,y) \mapsto xy$ vektorskog prostora $A \times A$ u vektorski prostor A. To preslikavanje se naziva množenjem u algebri A. Ako je množenje u A asocijativno (komutativno), kaže se da je algebra A asocijativna (komutativna); ako ono ima neutralni element, naziva se on jedinicom u A a A jediničnom algebrom.

U daljem ćemo pod algebrom podrazumevati kompleksnu asocijativnu algebru $\neq \{o\}$.

Dodavanjem jedinice algebri A dobija se jedinična algebra $\tilde{A}$ - vektorski prostor $\mathbb{C} \times A$ snabdeven množenjem

$$(\lambda,x)(\mu,y) = (\lambda\mu,\ \lambda y + \mu x + xy).$$

Za ovo množenje je jedinica $(1,o)$. Identifikacijom algebre A i $\{o\} \times A$ dobijamo da su elementi iz $\tilde{A}$ oblika $\lambda\tilde{e} + x$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\tilde{e}$ je jedinica u $\tilde{A}$, $x \in A$) i da je

$$(\lambda\tilde{e} + x)(\mu\tilde{e} + y) = \lambda\mu\tilde{e} + \lambda y + \mu x + xy.$$

Spektrom elementa x jedinične algebre A (sa jedinicom e) naziva se skup svih kompleksnih brojeva λ za koje $x - \lambda e$ nije inverzibilan i označava sa Sp x. Element x iz A je, dakle, inverzibilan ako i samo ako $o \notin \mathrm{Sp}\,x$. Spektrom elementa x algebre A naziva se spektar tog elementa u $\tilde{A}$ i označava sa $\mathrm{Sp}'x$; ako je A jedinična, onda je $\mathrm{Sp}'x = \mathrm{Sp}\,x \cup \{o\}$.

Karakterom komutativne jedinične algebre A naziva se svaki jedinični morfizam iz A u algebru $\mathbb{C}$ (kompleksna linearna multiplikativna funkcionela na A koja u jedinici uzima vrednost 1). Skup svih karaktera algebre A označava se sa $X(A)$. Karakterom komutativne algebre A naziva se svaki morfizam iz A u $\mathbb{C}$. Skup svih karaktera algebre A označava se sa $X'(A)$; pri tome se stavlja $X(A) = X'(A) - \{o\}$.

Normiranom algebrom naziva se algebra A snabdevena normom $x \mapsto \|x\|$ koja zadovoljava uslov $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ za svako x i y iz A. Kompletna normirana algebra naziva se Banachovom algebrom (B-algebrom). Ako normirana algebra A ima jedinicu e, pretpostavljaćemo da je $\|e\| = 1$; to uvek važi u algebri $\tilde{A}$ normiranoj sa $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|$.

Spektar bilo kog elementa x jedinične Banachove algebre je neprazan kompaktan skup u $\mathbb{C}$ sadržan u zatvorenom disku sa centrom u nuli i poluprečnikom

$$\rho(x) = \lim_{n \mapsto \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

(spektralni radius od x) [23, Ch I, § 2, n° 5, Th 1, Cor. 1].

Neka je A komutativna B-algebra. Svaki karakter algebre A je neprekidan i norme ≤ 1 [23, CH I, § 3, n° 1, Th 1]. Za $x \in A$ je $Sp'x = \{ \chi(x) \mid \chi \in X'(A) \}$. Kako je $Sp_{\tilde{A}}(\lambda\tilde{e} + x) = \lambda + Sp'x$, biće element $\lambda\tilde{e} + x \in \tilde{A}$ inverzibilan ako i samo ako je $\lambda \neq o$, $\lambda + \chi(x) \neq o$ za svako $\chi \in X(A)$. Ako je A jedinična, onda je $Sp\ x = \{ \chi(x) \mid \chi \in X(A) \}$; posebno, x je inverzibilan ako i samo ako je $\chi(x) \neq o$ za svako $\chi \in X(A)$ [23, CH 1, § 3, n° 3, prop. 3].

§ 2. BANACHOVE ALGEBRE INTEGRABILNIH FUNKCIJA

Neka je

G komutativna lokalno kompaktna separirana topološka grupa sa multiplikativnim zapisom zakona kompozicije i jedinicom e,

dx Haarova mera na G,

M monoid u G (podskup od G koji sadrži e i proizvod svaka svoja dva elementa) jednak adherenciji svoje (neprazne) unutrašnjosti, sa topologijom induciranom onom sa G,

w poluneprekidna odozdo konačna i strogo pozitivna funkcija na M koja zadovoljava uslove

(1) $$w(st) \leq w(s)w(t) \quad (s,t \in M), \quad w(e) = 1,$$

$\hat{M}^w$ skup svih neprekidnih preslikavanja χ monoida M u $\mathbb{C}$ koja zadovoljavaju uslove

(2) $$\chi(st) = \chi(s)\chi(t), \quad |\chi(s)| \leq w(s), \quad \chi(e) = 1 \quad (s,t \in M)$$

Restrikciju mere dx na M označavaćemo sa dx umesto dx_M .

(i) Kompleksan vektorski prostor $L^w(M) = L^w(M,dx)$ svih kompleksnih funkcija f na M, takvih da je funkcija fw integrabilna, snabdeven normom

(3) $$\|f\|_w = \|fw\|_1 = \int_M |f(s)|w(s)\, ds$$

i konvolucijom

(4) $$(f*g)(x) = \int_{M\cap xM^{-1}} f(s)g(s^{-1}x)\, ds \quad \text{za s.s. } x \in M$$

kao množenjem, ima strukturu komutativne Banachove algebre.(*)

Neka je w^∞ produženje funkcije w na G, $= \infty$ na $G - M$. Tada je $L^{w^\infty}(G,dx)$ B-algebra [26,str. 366-368]; pri tome su elementi ove algebre $= 0$ s.s. na $G - M$. Preslikavanjem

$$f \longmapsto f_M = \text{restrikcija funkcije f sa G na M}$$

prenosi se struktura B-algebre sa $L^{w^\infty}(G,dx)$ na $L^w(M,dx)$; inverzno preslikavanje je

$$f \longmapsto f^0 = \text{produženje funkcije f sa M na G jednako 0 na } G - M.$$

(ii) Skup $\mathcal{K}(M)$, svih neprekidnih kompleksnih funkcija na M sa kompaktnim nosačem, je svuda gust u $L^w(M)$.

(*) Prostor L^w obrazuju klase funkcija. Govoreći o funkcijama kao njegovim elementima, mi identifikujemo s.s. jednake funkcije. Kada je jedna od funkcija jednakih s.s. $f*g$ neprekidna, onda ćemo pod $f*g$ podrazumevati tu jedinstvenu funkciju.

Kako je funkcija w ograničena odozgo na kompaktnim skupovima u M [22;CH VIII,§ 2,n°1,lemme 1], biće w(x)dx mera na M i $L^w(M,dx) = L^1(M,w(x)dx)$ pa (ii) sledi iz same definicije prostora L^1 [22;CH IV, § 3,n°4,déf. 2].

(iii) Ograničena linearna funkcionela φ na $L^w(M)$ ima reprezentaciju $\varphi(f) = \int_M f(s)g(s)\,ds$ gde je g/w jednoznačno odredjena funkcija iz $L^\infty(M,dx)$; pri tome je $\|\varphi\| = \|g/w\|_\infty$.

Preslikavanje $f \mapsto fw$ je kongruencija B-prostora $L^w(M)$ na B-prostor $L^1(M,dx)$ pa je konjugovano preslikavanje, $g \mapsto gw$, kongruencija B-prostora $L^\infty(M,dx)$ na B-prostor $(L^w)'(M)$ konjugovan prostoru $L^w(M)$.

Za kompleksnu funkciju f na M i $s,x \in M$ stavimo

(5) $$(\varepsilon_x * f)(s) = f(x^{-1}s) \text{ za } s \in xM, \ = 0 \text{ za } s \in M - xM$$

pa ćemo imati sledeći niz elementarnih relacija

(6) $$\varepsilon_{xy} * f = \varepsilon_x * (\varepsilon_y * f),\ \varepsilon_e * f = f \quad (x,y \in M)$$

(7) $$\int_M (\varepsilon_x * f)(s)\,ds = \int_M f(s)\,ds \quad (f \in L^1(M))$$

(8) $$\|\varepsilon_x * f\|_w \leq w(x)\|f\|_w \quad (f \in L^w(M))$$

(9) $$(f * g)(x) = \int_M f(s)(\varepsilon_s * g)(x)\,ds \quad (f,g \in L^w(M))$$

(10) $$\varepsilon_x * (f * g) = (\varepsilon_x * f) * g \quad (f,g \in L^w(M))$$

(11) Translacija $f \mapsto \varepsilon_x * f$ je neprekidni endomorfizam B-prostora $L^w(M)$.

(iv) Za svako $f \in L^w(M)$ preslikavanje $x \mapsto \varepsilon_x * f$ topološkog monoida M u B-prostor $L^w(M)$ je neprekidno.

Neka $x \in M$ i neka je V kompaktna okolina tačke x u M . Ako je f neprekidna funkcija na M sa kompaktnim nosačem K, onda iz [22;CH VIII, § 2,n°5,prop.8] sledi da je preslikavanje $t \mapsto \varepsilon_t * f^o = (\varepsilon_t * f)^o$ potprostora V od M u B-prostor dx-integrabilnih funkcija na G sa nosačem u KV neprekidno; kako je preslikavanje $h \mapsto h_M$ tog prostora u B-prostor $L^w(M)$

neprekidno ($\|h_M w\|_1 \leq a\|h\|_1$ gde je a supremum funkcije w na kompaktnom skupu KV), biće i složeno preslikavanje $t \mapsto \varepsilon_t * f$ neprekidno na V.

Opšti slučaj, $f \in L^w(M)$, svodi se na prethodni imajući u vidu da je $\|\varepsilon_t * f - \varepsilon_x * f\|_w \leq 2a\|f - g\|_w + \|\varepsilon_t * g - \varepsilon_x * g\|_w$ za $t \in V$, $a = \sup_{s\in V} w(s)$, $g \in \mathcal{K}(M)$ i da je skup $\mathcal{K}(M)$ svuda gust u $L^w(M)$.

(v) <u>Za svaku ograničenu linearnu funkcionelu</u> φ <u>na</u> $L^w(M)$ <u>i svake dve funkcije</u> f, g <u>iz</u> $L^w(M)$ <u>važi</u>

$$(12) \qquad \varphi(f * g) = \int_M f(s)\varphi(\varepsilon_s * g)\, ds \; .$$

Neka je $\varphi(f) = \int_M fh\, ds$ gde je $|h(s)| \leq cw(s)$ lokalno s.s. na M, $c = \|\varphi\|$.

Neka su f,g neprekidne funkcije na M sa kompaktnim nosačima K,L. Funkcija $F(s,t) = h(t)f(s)(\varepsilon_s * g)(t)$ je $dx\otimes dx$-merljiva na $M\times M$, ima kompaktan nosač (sadržan u $K\times KL$). Kako je $|F(s,t)| \leq c\,|f(s)|\, w(s)\,|\varepsilon_s * gw|\,(t)$ za skoro svako s iz M i za svako t iz M, biće $\int_M ds \int_M |F(s,t)|\, dt \leq c\|f\|_w \|g\|_w < \infty$ pa je

$$\int_M h(t)dt \int_M f(s)(\varepsilon_s * g)(t)ds$$
$$= \int_M f(s)ds \int_M (\varepsilon_s * g)(t)h(t)dt$$

[22;CH V, § 8,n°1,scholie] a to je jednakost (12).

Svaka strana u (12) definiše neprekidnu bilinearnu funkcionelu po $(f,g) \in L^w(M)\times L^w(M)$ (funkcija $s \mapsto \varphi(\varepsilon_s * g)$ je neprekidna pa time i merljiva na M i $|\varphi(\varepsilon_s * g)| \leq c\|g\|_w w(s)$). One su jednake, kao što smo videli, na skupu $\mathcal{K}(M)\times\mathcal{K}(M)$ pa su jednake i na njegovoj adherenciji $L^w(M)\times L^w(M)$.

(vi) <u>Algebra</u> $L^w(M)$ <u>je jedinična ako i samo ako je grupa G diskretna; pri tome je jedinica,</u> ε_e, <u>karakteristična funkcija skupa</u> $\{e\}$.

Neka je ε jedinica u $L^w(M)$. Uočimo jednu unutrašnju tačku x skupa M i jedan fundamentalan sistem okolina tačke e u G čiji su elementi, V, kompaktni, simetrični, $xV \subset M$ a skupovi VV obrazuju takodje fundamentalan sistem okolina tačke e. Karakteristična funkcija φ_{xV} skupa xV u M pripada $L^w(M)$ (w je ograničena na xV) a kako je skup xV mere > o, postoji $y \in xV$

takvo da je $1 = \varphi_{xV}(y) = (\varepsilon * \varphi_{xV})(y) = \int_U \varepsilon(s)ds$ gde skupovi $U = M \cap yx^{-1}V$ obrazuju fundamentalan sistem (zatvorenih) okolina tačke e u M. Zato je

$$1 \leq \inf_U \int_U |\varepsilon(s)|\, ds = \int_{\cap U} |\varepsilon(s)|\, ds = \int_{\{e\}} |\varepsilon(s)|\, ds$$

[22;CH IV, § 4,n°6,cor.de la prop.11] pa je skup $\{e\}$ mere $>$ o odakle sledi da je grupa G diskretna [22;CH VII, § 1,n°3,prop. 2]. Tada je i mera dx diskretna pa iz (4) sledi $\varepsilon_e * f = f$ za svako $f \in L^w(M)$, tj. $\varepsilon = \varepsilon_e$.

(vii) <u>Neka je za</u> $\chi \in \hat{M}^w$ <u>i</u> $f \in L^w(M)$

$$\zeta_\chi(f) = \hat{f}(\chi) = \int_M f(s)\chi(s)\, ds \,. \tag{13}$$

<u>Tada je</u> $\chi \longmapsto \zeta_\chi$ <u>1-1 preslikavanje skupa</u> $\hat{M}^w$ <u>na</u> $\times(L^w(M))$.

Ako $\chi \in \hat{M}^w$, onda je,na osnovu (iii), ζ_χ ograničena linearna funkcionela na $L^w(M)$. Ona je multiplikativna jer je $f^o\chi^o, g^o\chi^o \in L^1(G)$ i $(f^o * g^o)\chi^o = (f^o\chi^o) * (g^o\chi^o)(f,g \in L^w(M))$ a integral je multiplikativna funkcionela na algebri $L^1(G)$.

Ako je funkcija $\chi \in \hat{M}^w$ jednaka nuli s.s. na M, biće (zatvoren) skup njenih nula svuda gust u unutrašnjosti skupa M i zato = M. Otuda sledi: $\zeta_\chi = o \Longrightarrow \chi = o$ s.s. na M $\Longrightarrow \chi = o$ pa je $\chi \longmapsto \zeta_\chi$ 1-1 preslikavanje skupa $\hat{M}^w$ u $\times(L^w(M))$.

Neka je $\zeta \in \times(L^w(M))$ proizvoljno. Uočimo neko $f \in L^w(M)$ takvo da je $\zeta(f) = 1$. Kompleksna funkcija $\chi(s) = \zeta(\varepsilon_s * f)$ $(s \in M)$ je,na osnovu (iv),neprekidna na M. $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$ sledi iz multiplikativnosti funkcionele ζ i jednakosti

$$(\varepsilon_{st} * f) * f = (\varepsilon_s * (\varepsilon_t * f)) * f = (\varepsilon_s * f) * (\varepsilon_t * f)$$

koja se dobija iz (6) i (10).Iz $|\chi(s)| \leq \|\varepsilon_s * f\|_w \leq w(s)\|f\|_w$ sledi $a = \sup_{s\in M} \chi(s)/w(s) < \infty$ a iz

$$a^2 = \sup_{s\in M} |\chi(s)|^2/w^2(s) \leq \sup_{s\in M} |\chi(s^2)|/w(s^2) \leq a$$

da je $a \leq 1$. Konačno se $\zeta = \zeta_\chi$ dobija iz (v).

PRIMEDBA.— (vii) je u nešto drugačijem obliku ($M = G$ ali w može da uzima i vrednost ∞) iskazano u [26;4.19.20,str.370-372] i dokazano kada je $M = G$ (funkcija w je konačna) uz napomenu da se slično može postupiti u opštem slučaju. Naš dokaz je sličniji dokazu posebnog (ali i najvažnijeg) slučaja $M = G$, $w = 1$ u [23;CH II,§ 1,n° 1,prop. 1] .

Uzimajući u obzir kraj odeljka 1, (vi) i (vii), dobijamo

(viii) *Ako je grupa* G *diskretna, onda je element* f *algebre* $L^w(M)$ *inverzibilan ako i samo ako je* $\hat{f}(\chi) \neq o$ *za svako* χ *iz* $\hat{M}^w$.

(ix) *Ako grupa* G *nije diskretna, onda je element* $\lambda\tilde{e} + f$ *algebre* $\tilde{L^w}(M)$ *inverzibilan ako i samo ako je* $\lambda \neq o$ *i* $\lambda + \hat{f}(\chi) \neq o$ *za svako* χ *iz* $\hat{M}^w$.

§ 3. JEDNO DELOVANJE ALGEBRE $L^w(M)$

Zadržavamo oznake iz § 2 s tim što za funkciju w pretpostavljamo da je poluneprekidna odozdo, konačna i strogo pozitivna *na* G i da je $w(st) \leq w(s)w(t)$ $(s,t \in G)$, $w(e) = 1$. Neka je $v(s) = 1/w(s^{-1})$ za s iz G. Iz $w(t^{-1}) = w((st)^{-1}s) \leq w((st)^{-1})w(s)$ sledi

$$(14) \qquad v(st) \leq w(s)v(t) \quad \text{za svako} \quad s,t \in G.$$

Posmatramo konvoluciju produženja f^o funkcije $f \in L^w(M)$ ($f^o = o$ na $G - M$; str.3) i funkcije h definisane na G,

$$(15) \quad (f^o * h)(x) = \int_G f^o(s)h(s^{-1}x)ds = \int_M f(s)h(s^{-1}x)ds$$

za skoro svako $x \in G$, i dokazujemo

(x) *Neka je* h *merljiva kompleksna funkcija na* G *takva da* $hv \in L^\infty(xM^{-1})$ *za svako* $x \in G$.

a) *Za svaku funkciju* $f \in L^w(M)$ *funkcije* f^o *i* h *su konvolutivne i* $(f^o * h)v \in L^\infty(xM^{-1})$ *za svako* $x \in G$. *Formulom* (15) *definisana je neprekidna kompleksna konvolucija* $f^o * h$ *na* G.

b) *Za svake dve funkcije* f *i* g *iz* $L^w(M)$ *važi*

$$(16) \qquad f^o * (g^o * h) = (f^o * g^o) * h .$$

a) Ako je a unutrašnja tačka skupa M, onda je xaM^{-1} okolina tačke $x \in G$. Otuda sledi da je funkcija hv lokalno bitno ograničena a time i lokalno integrabilna na G. Funkcija w je ograničena odozgo na kompaktnim skupovima u G [22;CH VIII,

§ 2,n°1,lemme 1] pa je takva i funkcija $1/v$. Zato je h lokalno bitno ograničena a time i lokalno integrabilna na G.

Ako $t \in xM^{-1}$, onda je (zbog $s \in M \Longrightarrow s^{-1}t \in xM^{-1}$)

$$|f^o(s)h(s^{-1}t)|\,v(t) \leq |f^o(s)|\,w(s)\,|h(s^{-1}t)|\,v(s^{-1}t)$$
$$\leq |f^o(s)|\,w(s)\,\|h\varphi_{xM^{-1}}\|_\infty$$

(gde φ_A označava karakterističnu funkciju skupa $A \subset G$) za skoro svako $s \in G$. Zato je funkcija $s \longmapsto f^o(s)h(s^{-1}t)$ integrabilna na G i $|(f^o * h)(t)|\,v(t) \leq \|f\|_w\,\|h\varphi_{xM^{-1}}\|_\infty$ za svako t iz xM^{-1} odakle sledi da su funkcije f^o i h konvolutivne [22; CH VIII, § 4,n°5,prop.9] i da $(f^o * h)v \in L^\infty(xM^{-1})$ za svako $x \in G$.

Neka je $x \in G$ fiksirano a t neka prolazi skup xM^{-1}. Kako $s^{-1} \in xM^{-1}$ za $st \in M$, biće $f^o(st)h(s^{-1}) = f^o(st)(h\varphi_{xM^{-1}})(s^{-1})$ za svako $s \in G$. Pri tome je kompleksna funkcija

$$H(s)/w(s) = (h\varphi_{xM^{-1}})(s^{-1})/w(s)$$

bitno ograničena na G. Preslikavanje

$$t \longmapsto (f^o * h)(t) = \int_G f^o(st)H(s)ds = \int_G (\varepsilon_{t^{-1}} * f^o)(s)H(s)ds$$

skupa xM^{-1} u $\mathbb{C}$ je složeno od neprekidnih preslikavanja: $t \longmapsto t^{-1}$ skupa xM^{-1} u G, $t \longmapsto \varepsilon_t * f^o$ grupe G u $L^w(G)$ ((iv), str.4) i $g \longmapsto \int_G g(s)H(s)ds$ prostora $L^w(G)$ u $\mathbb{C}$ ((iii), str. 4) pa je i samo neprekidno na xM^{-1}. Zbog lokalne prirode neprekidnosti biće preslikavanje $f^o * h$ neprekidno na G.

b) Neka je $x \in G$ fiksirano i

$$F(s,t) = f^o(s)g^o(s^{-1}t)h(t^{-1}x) \quad (s,t \in G).$$

Tada je $\int_G ds \int_G |F(s,t)|dt = (|f^o| * (|g^o| * |h|))(x) < \infty$ na osnovu (i). Kako su funkcije $f^o w$ i $g^o w$ integrabilne, postoje nizovi (A_n) i (B_n) dx-integrabilnih skupova takvi da je $f^o w = o$ (a time i $f^o = o$) van unije skupova A_n i $g^o w = o$ (a time i $g^o = o$) van unije skupova B_n. Tada je $(A_m \times A_m B_n)$ prebrojiva familija $dx \otimes dx$-integrabilnih skupova van čije unije je $F = o$. Sada je $\int_G ds \int_G F\,dt = \int_G dt \int_G F\,ds$ [22; CH V, § 8,n°1, scholie] i otuda

$$\begin{aligned}(f^o * (g^o * h))(x) &= \int_G f^o(s)ds \int_G g^o(t)h(t^{-1}s^{-1}x)dt \\ &= \int_G f^o(s)ds \int_G g^o(s^{-1}t)h(t^{-1}x)dt \\ &= \int_G h(t^{-1}x)dt \int_G f^o(s)g^o(s^{-1}t)ds \\ &= ((f^o * g^o) * h)(x).\end{aligned}$$

Neposredno iz definicije množenja u algebri $\widetilde{L}^w(M)$ (s. 1) i (x) sledi

(xi) Pod pretpostavkama iz (x) važi

(17) $(\lambda\tilde{e} + f^o)*((\mu\tilde{e} + g^o)*h) = ((\lambda\tilde{e} + f^o)*(\mu\tilde{e} + g^o))*h$

za svake dve funkcije $f,g \in L^w(M)$.

PRIMERI.— 1) Ako je $M=G$, onda je $xG^{-1}=G$ za svako $x\in G$ pa uslov $hv\in L^\infty(xM^{-1})$ za svako $x\in G$ postaje: $hv\in L^\infty(G)$.

2) Neka je $G=\mathbb{R}_+^*$, $M=[1,\infty[$. Tada je $xM^{-1}=]o,x]$. Uslov $hv\in L^\infty(xM^{-1})$ za svako $x\in G$ glasi: funkcija hv je bitno ograničena na $]o,x]$ za svako $x>o$. Zameni li se bitna ograničenost ograničenošću, postaje navedeni uslov ekvivalentan sa: funkcija h je lokalno ograničena na $\mathbb{R}_+^*$ a jednaka $O(w(t^{-1}))$ kada $t\mapsto o+$.

3) Neka je $G=\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{N}$. Tada je skup $n-\mathbb{N}$ jednak intervalu $]-\infty,n]$ u $\mathbb{Z}$ a uslov $cv\in L^\infty(n-\mathbb{N})$ za svako $n\in\mathbb{Z}$ ekvivalentan je sa: $c(k)=O(w(-k))$ $(k\mapsto-\infty)$.

PRIMEDBA.—Tačka (x)a opisuje uslove u kojima će (Glave III, IV) postojati Abelovi i Mercerovi asimptotski stavovi za konvolucije sa jednim pravilno promenljivim faktorom. Njen poseban slučaj ($M=G, w=1$) nalazi se u [22;CH VIII, § 4,n°5,prop. 14]. Tačka b) je poseban slučaj asocijativnosti konvolucije mera [loc.cit. § 3,n°1,prop.1] (mogla bi se otuda i iz (i) neposredno dobiti) koja pak proističe iz Fubinijeve teoreme.

§ 4. PRIMERI

1) $M=G=\mathbb{R}_+^*$ – multiplikativna grupa realnih brojeva $>o$ sa uobičajenom topologijom i Haarovom merom $t^{-1}dt$ (gde je dt Lebesgueova mera). Kompleksna funkcija f na $\mathbb{R}_+^*$ je $t^{-1}dt$-merljiva ako i samo ako je dt-merljiva; ona je $t^{-1}dt$-integrabilna ako i samo ako je funkcija $t^{-1}f(t)$ dt-integrabilna, pri tome je

$$\int_o^\infty f(t)\,\frac{dt}{t} = \int_o^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt\,.$$

Neprekidni homomorfizmi grupe $\mathbb{R}_+^*$ u multiplikativnu grupu $\mathbb{C}^*$ kompleksnih brojeva $\neq$ o su oblika $\chi(t) = t^z$ $(z \in \mathbb{C})$. Kako je za $r \in \mathbb{R}$ (i $t \in \mathbb{R}_+^*$)

$$(\forall t)\ t^r \leq w(t) \iff (\forall t)\ r \log t \leq \log w(t)$$

$$\iff (\forall\ t<1)\ \frac{\log w(t)}{\log t} \leq r \quad \text{i} \quad (\forall\ t>1)\ r \leq \frac{\log w(t)}{\log t}$$

$$\iff \underline{\omega} = \sup_{t<1} \frac{\log w(t)}{\log t} \leq r \leq \inf_{t>1} \frac{\log w(t)}{\log t} = \overline{\omega},$$

to skup $\hat{M}^w$ obrazuju funkcije: $\chi(t) = t^z$ $(\underline{\omega} \leq \Re z \leq \overline{\omega})$.

Konvolucija funkcija $f,g \in L^w(\mathbb{R}_+^*)$ definisana je sa

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty f(s) g\left(\frac{x}{s}\right) \frac{ds}{s} \qquad (x > o)$$

a element $\lambda\tilde{e} + f \in \tilde{L}^w(R_+^*)$ je inverzibilan ako i samo ako je $\lambda \neq o$ i

$$\lambda + \hat{f}(z) = \lambda + \int_0^\infty f(s) s^z \frac{ds}{s} \neq o \quad \text{za svako } \underline{\omega} \leq \Re z \leq \overline{\omega} .$$

2) $G = \mathbb{R}_+^*$, M – multiplikativni monoid realnih brojeva ≥ 1. Iz razmatranja u prethodnom primeru sledi da skup $\hat{M}^w$ obrazuju funkcije: $\chi(t) = t^z$ $(\Re z \leq \overline{\omega})$.

Konvolucija funkcija $f,g \in L^w(M)$ definisana je sa

$$(f * g)(x) = \int_1^x f(s) g\left(\frac{x}{s}\right) \frac{ds}{s} \qquad (x \geq 1)$$

a element $\lambda\tilde{e} + f \in \tilde{L}^w(M)$ je inverzibilan ako i samo ako je $\lambda \neq o$ i

$$\lambda + \hat{f}(z) = \lambda + \int_1^\infty f(s) s^z \frac{ds}{s} \neq o \quad \text{za svako } \Re z \leq \overline{\omega} .$$

3) $M = G = \mathbb{Z}$ – aditivna grupa celih brojeva sa diskretnom topologijom i diskretnom merom (mera svakog jednočlanog skupa jednaka je 1). Kompleksan niz c na $\mathbb{Z}$ je integrabilan ako i samo ako je red c apsolutno konvergentan; pri tome je integral niza c jednak zbiru reda c.

Homomorfizmi grupe $\mathbb{Z}$ u grupu $\mathbb{C}^*$ su oblika $\chi(k) = z^k$ $(z = \chi(1) \in \mathbb{C}^*)$. Kako je za $o < r < \infty$ (i $k \in \mathbb{Z}$)

$$(\forall k)\ r^k \leq w(k) \iff$$

$$\iff (\forall k<o)\ w(k)^{1/k} \leq r \quad \text{i} \quad (\forall k>o)\ r \leq w(k)^{1/k}$$

$$\iff \underline{\omega} = \sup_{n<o} w(k)^{1/k} \leq r \leq \inf_{n>o} w(k)^{1/k} = \bar{\omega},$$

to skup $\hat{Z}^w$ obrazuju funkcije: $\chi(k) = z^k\ (\underline{\omega} \leq |z| \leq \bar{\omega})$.

Konvolucija nizova $a, b \in L^w(Z)$ definisana je sa

$$(a * b)(n) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a(k)b(n-k) \quad (n \in \mathbf{Z})$$

a niz $a \in L^w(\mathbf{Z})$ je inverzibilan ako i samo ako je

$$\hat{a}(z) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a(k)z^k \neq o \quad \text{za svako} \quad \underline{\omega} \leq |z| \leq \bar{\omega}.$$

4) $G = \mathbf{Z}$, $M = \mathbb{N}$ - aditivni monoid celih brojeva $\geq o$. Iz razmatranja u prethodnom primeru sledi da skup $\hat{\mathbb{N}}^w$ obrazuju nizovi: $\chi(k) = z^k \ (|z| \leq \bar{\omega};\ o^o = 1)$.

Konvolucija nizova $a, b \in L^w(\mathbb{N})$ definisana je sa

$$(a * b)(n) = \sum_{k=o}^{n} a(k)b(n-k) \quad (n > o)$$

a niz $a \in L^w(\mathbb{N})$ je inverzibilan ako i samo ako je

$$\hat{a}(z) = \sum_{k=o}^{\infty} a(k)z^k \neq o \quad \text{za svako} \quad |z| \leq \bar{\omega}.$$

PRIMEDBA.— Prethodni primeri (sa aditivnom grupom $\mathbb{R}$ umesto multiplikativne $\mathbb{R}_+^*$) mogu se naći u [28; Glava III, §§ 18,19].

GLAVA II

PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE I NIZOVI

§ 1. PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE

DEFINICIJA 1. — Za funkciju R, konačnu, strogo pozitivnu i merljivu na nekom intervalu $[a,\infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$, kaže se da je pravilno promenljiva (PP) ako konačna granična vrednost

(1) $$\lim_{x\to\infty} \frac{R(tx)}{R(x)} = \rho(t)$$

postoji za svako t iz nekog skupa mere >0 u $\mathbb{R}_+^*$.

Ako je R PP funkcija, onda

(I) Postoji realan broj ρ takav da je $\rho(t) = t^{\rho}$ za svako $t>0$.

Za PP funkciju koja zadovoljava (1) sa $\rho(t) = t^{\rho}$ kaže se da je pravilno promenljiva indeksa ρ. PP funkcije indeksa o nazivaju se sporo promenljivim (SP) i označavaju sa L. Funkcija R je PP indeksa ρ ako i samo ako je $R(x) = x^{\rho}L(x)$ na nekom intervalu $[a,\infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$. Zato su u klasi PP funkcija bitne SP funkcije.

Ako je R PP funkcija indeksa ρ, onda važi

(II) (TEOREMA O UNIFORMNOJ KONVERGENCIJI) Za svaki kompaktan skup K u $\mathbb{R}_+^*$ konvergencija u (1) je uniformna po $t\in K$.

(III) Postoji interval $[b,\infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$ na kome je funkcija R lokalno logaritamski ograničena (log R je lokalno ograničena).

(IV) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log R(x)}{\log x} = \rho .$$

(V) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-\alpha}R(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^{-\alpha}x^{\rho} = \infty$ za $\alpha<\rho$, $=0$ za $\alpha>\rho$.

(VI) (TEOREMA O RAZLAGANJU) Postoji interval $[b,\infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$, merljiva i ograničena realna funkcija η na $[b,\infty[$ koja $\mapsto$ nekom realnom broju kada $x\mapsto\infty$ i neprekidna realna funkcija ε na $[b,\infty[$ koja $\mapsto 0$ kada $x\mapsto\infty$ tako da je za $x\geq b$

(2) $$R(x) = x^{\rho}\cdot\exp\left\{\eta(x) + \int_b^x \varepsilon(t)\frac{dt}{t}\right\}.$$

(VII) Postoji interval $[b,\infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$, merljiva, strogo pozitivna i logaritamski ograničena funkcija H na $[b,\infty[$ koja konvergira kada $x\mapsto\infty$ i neprekidno-diferencijabilna strogo pozitivna funkcija E na $[b,\infty[$ koja zadovoljava uslov $xE'(x)/E(x)\mapsto 0$ $(x\mapsto\infty)$ tako da je za $x\geq b$

(3) $$R(x) = x^{\rho}\,H(x)E(x)\ .$$

(VIII) Za svaka dva realna broja σ i τ, $\sigma<\rho<\tau$, postoji interval $[b,\infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$ i strogo pozitivne funkcije φ i ψ na njemu od kojih je φ rastuća a ψ opadajuća tako da je (kada $x\mapsto\infty$)

(4) $$R(x)\sim x^{\sigma}\varphi(x),\ R(x)\sim x^{\tau}\psi(x).$$

(IX) Za svaka dva realna broja σ i τ, $\sigma<\rho<\tau$, je (kada $x\mapsto\infty$)

(5) $$\inf_{t\geq x} t^{-\sigma}R(t)\sim x^{-\sigma}R(x),\ \sup_{t\geq x} t^{-\tau}R(t)\sim x^{-\tau}R(x)\ .$$

(X) Postoji interval $[b,\infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$ takav da je za svaka dva realna broja σ i τ, $\sigma<\rho<\tau$, kad $x\mapsto\infty$

(6) $$\sup_{b\leq t\leq x} t^{-\sigma}R(t)\sim x^{-\sigma}R(x),\ \inf_{b\leq t\leq x} t^{-\tau}R(t)\sim x^{-\tau}R(x)\ .$$

Obrnuto: ako funkcija R, konačna, strogo pozitivna i merljiva na nekom intervalu $[a,\infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$, zadovoljava jednu od relacija (VI)-(X), onda je ona pravilno promenljiva indeksa ρ .

PRIMEDBE.—1) Proizvod konačne familije PP funkcija je takodje PP funkcija (indeks joj je jednak zbiru familije indeksa funkcija-faktora). Ako je R PP funkcija indeksa ρ a α realan broj, onda je R^{α} PP funkcija indeksa $\alpha\rho$. Skup svih PP funkcija podelimo relacijom ekvivalencije: "postoji $a>o$ takvo da je $R(x)=R_1(x)$ za $x\geq a$" ; dobijeni količnik, snabdeven množenjem (klasa) i stepenovanjem (klase) realnim brojem, ima strukturu realnog vektorskog prostora. Preslikavanje $R \mapsto$ indeks od R posmatranog prostora u $\mathbb{R}$ je linearna funkcionela; zato klase (ekvivalencije) svih SP funkcija obrazuju homogenu hiperravan u njemu a klase svih PP funkcija odredjenog indeksa ρ hiperravan dobijenu od prethodne translacijom za klasu funkcije $x \mapsto x^{\rho}$ $(x>o)$.

2) Ako je R PP funkcija indeksa ρ, onda je takva i funkcija $x \mapsto R(tx)$ za svako fiksirano $t>o$; takva je i svaka merljiva realna funkcija koja je $\sim \alpha R(x)$ $(x\to\infty)$ za neko $\alpha>o$.

3) Osnovu teorije PP funkcija čine teorema o uniformnoj konvergenciji i teorema o razlaganju (koja se javlja u ekvivalentnim oblicima (VI) i (VII)) ; izmedju definicije i bilo koje od njih je ponor posle koga se lako dolazi do ostalih osobina PP funkcija (kao u [29,30]) .

a) Teorema o uniformnoj konvergenciji, po svojoj prirodi bliska onom delu Analize koji izvire iz Baire-ove teoreme o kategoriji, uz pomoć Lebesgue-ove teoreme o dominantnoj konvergenciji daje relaciju

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^b f(t)\frac{R(tx)}{R(x)}dt = \int_a^b f(t)t^{\rho}dt \tag{7}$$

za svaki kompaktan interval $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ i svaku lokalno integrabilnu funkciju f na $\mathbb{R}_+^*$. Ova relacija je početak primene PP funkcija na odredjivanje asimptotskog ponašanja integrala.

Teorema o uniformnoj konvergenciji, velika i privlačna sama po sebi, dokazivana mnogo puta, išetala je iz okvira PP funkcija, postala povod svome sopstvenom uopštenju. Pitanje je koliko su ta uopštenja daleko od primena u Asimptotskoj analizi – onoga čemu "obične" PP funkcije duguju i svoj nastanak i svoj razvoj.

b) Neka je $[b,\infty[$ fiksiran interval u $\mathbb{R}_+^*$. Skup svih funkcija η iz (VI) (na $[b,\infty[$), snabdeven uobičajenim sabiranjem i množenjem skalarom i uniformnom normom, ima strukturu B-prostora; isto važi i za skup funkcija ε iz (VI). Teorema o razlaganju omogućava da se pri rešavanju pojedinih problema u kojima se javljaju PP funkcije koristi struktura bar jednog od navedenih B-prostora.

Teoremu o razlaganju, (VII), je B. BAJŠANSKI [11] doveo skoro do kraja pokazavši: funkcija E u (3) može se izabrati tako da bude restrikcija na $[b,\infty[$ kompleksne funkcije Φ, analitičke u $\mathbb{C}-]-\infty,b]$ i takve da $z\Phi'(z)/\Phi(z) \mapsto 0$ kada $z \mapsto \infty$ kroz ugao $|\arg(z-b)| < \pi-\varepsilon$ za svako $0<\varepsilon<\pi$. Pa ipak, čini se, kraj nije tu - nedostaje jedinstvenost takvog razlaganja.

Pre BAJŠANSKOG je D.D. ADAMOVIĆ [1O1; Th. IV] bio pokazao da se funkcija E u (3) može izabrati tako da se poklapa sa R na unapred zadatom nizu tačaka koji teži ka ∞, da je beskonačno diferencijabilna a da je monotona (konveksna) ako je R takva. Ni ovde razlaganje nije jedinstveno.

4) Logaritamska ograničenost neke strogo pozitivne funkcije f ekvivalentna je ograničenosti preslikavanja $x \mapsto f(x)$ u topološku grupu $\mathbb{R}_+^*$.

5) Neka je R PP funkcija indeksa ρ. Relacija (IV) pokazuje da je funkcija R reda ρ u odnosu na funkciju $x \mapsto x$ na $\mathbb{R}_+^*$ [21, CH V, § 1, n° 4, déf. 5]. Takodje je (IV) $\Leftrightarrow$ (V) [loc.cit., prop. 12].

2. PROŠIRENJA I SUŽENJA POJMA PRAVILNE PROMENLJIVOSTI

J. KARAMATA [29,30] je definisao neprekidne PP funkcije i izveo njihove osnovne osobine. Kasnije su J. KOREVAAR, T. VAN AARDENNE-EHRENFEST i N.G. DE BRUIJN [33] dokazali (II) i (VI) za merljive PP funkcije.

Jedno uopštenje PP funkcija dobija se zamenom jake asimptotske relacije $\sim$ u (1) slabom (O): za funkciju R, konačnu, strogo pozitivnu i merljivu na nekom intervalu $[a,\infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$, kaže se da je O-pravilno promenljiva (O-PP) ako je

$$(8) \qquad \limsup_{x \mapsto \infty} \frac{R(tx)}{R(x)} = \rho(t) < \infty$$

za svako $t>o$. Neprekidne O-PP funkcije uveo je V.AVAKUMOVIĆ [08,09]. J.KARAMATA [31] je dokazao teoremu o razlaganju pod pretpostavkom da važi teorema o uniformnoj ograničenosti;ovu su pak dokazali H.DELANGE [24] za neprekidne i W.MATUSZEWSKA [35,36] za merljive O-PP funkcije.

E.SENETA [41] je merljivost u def.1 zamenio lokalnom logaritamskom ograničenošću a skup mere $>o$ intervalom pa je za tako dobijene funkcije (slabo pravilno promenljive) dokazao (I),(IV) i (V).

B.BAJŠANSKI [10] posmatra merljive kompleksne funkcije R na $\mathbb{R}$ čija n-ta diferencija,$\Delta_t^n R(x)$,konvergira kada $x \mapsto \infty$ za svako t iz $\mathbb{R}$.Uopštava relacije (I),(II),(III),(VII). Za O-PP funkcije takve vrste dokazuje teoremu o uniformnoj ograničenosti.

S.ALJANČIĆ,R.BOJANIĆ i M.TOMIĆ [07] su preciziranjem relacije (1),

$$(9) \qquad \frac{R(tx)}{R(x)} = \rho(t) + O\left(\frac{1}{\psi(x)}\right) \quad (x \mapsto \infty)$$

za svako $t>o$ (gde $\psi(x)\uparrow\infty$ kada $x \mapsto \infty$),dobili PP funkcije sa ostatkom i pokazali da one imaju osobine analogne osobinama (II),(VI),(VII) i (IX).

R.BOJANIĆ,J.KARAMATA i M.VUILLEUMIER [15] su pokazali da teorema o uniformnoj konvergenciji važi za neke realne funkcije na izvesnim Abelovim grupama snabdevenim strukturom mreže (poredak definiše konvergenciju,Moore-Smith-ovu, i zatvorene intervale na kojima je ona uniformna);kao poseban slučaj javljaju se izvesne realne funkcije na $\mathbb{R}^n$.

B.BAJŠANSKI i J.KARAMATA [12] prenose pojam pravilne promenljivosti na preslikavanja jedne topološke grupe u drugu i dokazuju uopštene relacije: (I) i (II) za neprekidne ili merljive PP funkcije,(VII) za merljiva PP preslikavanja (multiplikativne) grupe $\mathbb{R}_+^{*n}$ u $\mathbb{R}_+^*$, teoremu o uniformnoj ograničenosti za neprekidne O-PP funkcije.Navodimo njihovu teoremu 2 :

TEOREMA.—Neka su H, G' separirane topološke grupe (sa multiplikativnim zapisom zakona kompozicije) od kojih G' zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, G lokalno kompaktna podgrupa od H, β desno invarijantna Haarova mera na G, Φ filter na H sa prebrojivom bazom $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je za svaki kompaktan skup K u G (KF_n) takodje njegova baza.

Ako preslikavanje R grupe H u G' zadovoljava uslove

a) Funkcija $t \mapsto R(tx)$ je merljiva za svako x iz H.

b) $\lim_{x,\Phi} R(tx)/R(x) = \rho(t)$ postoji za svako t iz G.

c) Skup $\rho(G)$ je sadržan u centru grupe G'.

onda

(i) ρ je neprekidan homomorfizam grupe G u G'.

(ii) Za svaku okolinu V' jedinice u G' postoje: okolina V jedinice u G i skup $F \in \Phi$ takvi da je $R(tx)/R(x) \in V'\rho(t)$ za svako $t \in V$ i svako $x \in F$.

(iii) Za svaki kompaktan skup K u G konvergencija u b) je uniformna po $t \in K$.

Dokaz teoreme se prenosi i na opštiji stav 1 koji sledi.

Neka je X skup snabdeven filtrom sa prebrojivom bazom, $\mathcal{F}$ jedna baza tog filtra, G' komutativna metrizabilna topološka grupa sa jedinicom e', $\mathcal{H}(\mathcal{F},G')$ skup svih funkcija sa vrednostima u G' od kojih je svaka definisana na nekom elementu iz $\mathcal{F}$ (koji zavisi od funkcije), $\mathcal{X}$ podskup od $\mathcal{H}(\mathcal{F},G')$.

Neka je G komutativna lokalno kompaktna separirana topološka grupa sa jedinicom e i Haar-ovom merom β, $(s,f) \mapsto s.f$ preslikavanje skupa $G \times \mathcal{X}$ u $\mathcal{X}$ takvo da je za $s,t \in G$ i $f,g \in \mathcal{X}$

$$(st).f = s.(t.f), \quad e.f = f \tag{10}$$

(11) Ako je $\lim_{\mathcal{F}} f/g = c$, onda je za svaki kompaktan skup K u G $\lim_{\mathcal{F}} s.f/s.g = c$ uniformno po $s \in K$.

Ovde, i dalje, f/g označava funkciju koja u tački x ima vrednost $f(x)(g(x))^{-1}$. Takodje je $s.f(x) = (s.f)(x)$, $st.f(x) = ((st).f)(x)$, $s.t.f(x) = (s.(t.f))(x)$. Primećujemo da iz (11) sledi: Ako $f \in \mathcal{X}$ i ako je za $s \in G$ funkcija $s.f$ definisana na skupu $F_s \in \mathcal{F}$, onda za svaki kompaktan skup K u G presek familije $(F_s)_{s\in K}$ sadrži neki skup iz $\mathcal{F}$;na tom skupu su definisane sve funkcije s.f ($s \in K$).

DEFINICIJA 2.— Za funkciju $R \in \mathcal{X}$ kaže se da je pravilno promenljiva (PP) ako

a) Za svaki kompaktan skup K u G postoji skup $F \in \mathcal{F}$ takav da je preslikavanje $s \mapsto s.f(x)$ skupa K u G′ merljivo za svako $x \in F$.

b) Za svako $s \in G$ postoji granična vrednost

$$(12) \qquad \lim \frac{s.R}{R} = \lim_{x,\mathcal{F}} \frac{s.R(x)}{R(x)} = \varrho(s).$$

Pri tome se funkcija ϱ naziva indeksom PP funkcije R.

STAV 1. — Neka je R pravilno promenljiva funkcija indeksa ϱ.Tada

(i) ϱ je neprekidni homomorfizam grupe G u grupu G′.

(ii) Za svaku okolinu V′ tačke e′ u G′ postoje: okolina V tačke e u G i skup $F \in \mathcal{F}$ takvi da je

$$(13) \qquad \frac{s.R(x)}{R(x)} \in V'\varrho(s) \quad \text{za } s \in V,\ x \in F.$$

(iii) Za svaki kompaktan skup K u G konvergencija u (12) je uniformna po $s \in K$.

(i) Dovoljno je dokazati da je ϱ merljiv homomorfizam grupe G u G′ [,CH VIII,§ 4,n°6,prop. 18].Prvo sledi iz toga što je restrikcija funkcije ϱ na proizvoljan kompaktan skup K u G granična vrednost duž filtra sa prebrojivom bazom familije merljivih preslikavanja skupa K u metrizabilnu topološku grupu [,CH IV,§ 5,n°4,Th. 2],a drugo iz

$$\varrho(st) = \lim \frac{st.R}{R} = \lim \frac{t.s.R}{t.R}\,\frac{t.R}{R} = \varrho(s)\varrho(t) \quad (s,t \in G).$$

(ii) Neka je K kompaktan skup u G mere >o.Kako je presek kompaktnih skupova VK kada V prolazi familiju kompaktnih okolina tačke e jednak K,biće $\beta(K) = \inf_V \beta(VK)$ [,CH IV, § 4,n°6,cor. de la prop. 11];neka je V jedna takva okolina za koju je $\beta(VK) < 2\beta(K)$.

Neka je W otvorena okolina tačke e' takva da je $WW^{-1} \subset V'$ a skup $M \in \mathfrak{F}$ takav da je za svako $s \in V, t \in K$ funkcija $x \mapsto st.R(x)/s.R(x)$ definisana na M a funkcija $u \mapsto u.R(x)$ merljiva na VK.Tada je funkcija $t \mapsto st.R(x)/s.R(x)$ merljiva na K za svako $s \in V$, $x \in M$ pa je skup

$$A(s,x) = \{ t \in K \mid s.t.R(x)/s.R(x) \in W\varrho(t) \}$$

merljiv; kako je on sadržan u K,biće i integrabilan.

Neka je $F \subset M$ skup iz $\mathfrak{F}$ koji zadovoljava uslov

$$(\forall s \in V)(\forall x \in F)\ \beta(A(s,x)) > \beta(VK)/2 \ .$$

Ako takav skup F ne bi postojao,imali bismo za niz (F_n) u $\mathfrak{F}$ koji je baza posmatranog filtra nizove $s_n \in V$, $x_n \in F_n$ takve da je $\beta(A(s_n,x_n)) \leq \beta(VK)/2 < \beta(K)$. Skup $\lim.\inf A(s_n,x_n)$ bi imao meru $< \beta(K)$ pa za tačku $t \in K - \lim.\inf A(s_n,x_n)$ niz $s_n.t.R(x_n)/s_n.R(x_n)$ ne bi konvergirao ka $\varrho(t)$ jer mu se beskonačno mnogo članova nalazi van $W\varrho(t)$;otuda bi sledilo da funkcija $x \mapsto s.t.R(x)/s.R(x)$ ne konvergira ka $\varrho(t)$ uni - formno po $s \in V$ što je u kontradikciji sa (11) i (12).

Neka $s \in V$, $x \in F$.Svaki od skupova $A(e,x), sA(s,x) \subset VK$ je mere $> \beta(VK)/2$.Zato postoji tačka $t \in A(e,x) \cap sA(s,x)$ pa je

$$\frac{s.R(x)}{R(x)} = \frac{t.R(x)}{R(x)} \left\{ \frac{s.s^{-1}t.R(x)}{s.R(x)} \right\}^{-1} \in W\varrho(t) \left\{ W\varrho(s^{-1}t) \right\}^{-1} = $$
$$= WW^{-1}\varrho(s) \subset V'\varrho(s) \ .$$

(iii) Neka je K kompaktan skup u G a W okolina tačke e' u G'.Neka je V' okolina tačke e' takva da je $V'V' \subset W$ a, zatim, V kompaktna okolina tačke e i $F \in \mathfrak{F}$ takvi da važi (13).Iz pokrivanja $(tV)_{t \in K}$ skupa K izdvojimo konačno pokrivanje $(tV)_{t \in L}$ (L je konačan podskup od K).Za svako $t \in L$ funkcija $x \mapsto s.t.R(x)/s.R(x)$ konvergira ka $\varrho(t)$ uniformno po $s \in V$; njene vrednosti su sadržane u $V'\varrho(t)$ za svako x iz nekog skupa $F_t \in \mathfrak{F}$ i svako $s \in V$.Neka je M skup iz $\mathfrak{F}$ sadržan u F i svim skupovima F_t.Ako $u \in K$ i $x \in M$,onda je $u = st$ za neko $s \in V$ i neko $t \in L$ pa je

$$\frac{u.R(x)}{R(x)} = \frac{s.t.R(x)}{s.R(x)} \frac{s.R(x)}{R(x)} \in V'\varrho(t)V'\varrho(s) = V'V'\varrho(u) \subset W\varrho(u) \ .$$

PRIMEDBA.—Komutativnost grupa G, G' se može oslabiti na isti način kao u Teoremi (str. 6). Metrizabilnost topološke grupe G', ekvivalentna egzistenciji prebrojivog fundamentalnog sistema okolina tačke e' u G', je slabija od "G' zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti".

PRIMERI.—1) Neka su H, G' separirane topološke grupe od kojih je G' metrizabilna i komutativna, G komutativna lokalno kompaktna podgrupa od H, $\mathcal{F}$ baza nekog filtra Φ u H koji ima prebrojivu bazu i takav je da je za svaki kompaktan skup K u G familija $(KF)_{F\in\mathcal{F}}$ takodje njegova baza. Preslikavanje $(s,f) \mapsto s.f$, $s.f(x) = f(sx)$ skupa $G \times \mathcal{H}(\mathcal{F}, G')$ u $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G')$ zadovoljava (10) i (11). Zaista, ako $f, g \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, G')$ i $\lim_{\mathcal{F}} f/g = c$, onda za svaku okolinu V' tačke e' postoji skup $F \in \mathcal{F}$ takav da je $f(x)/g(x) \in cV'$ za $x \in F$. Ako je, dalje, K kompaktan skup u G, onda postoji skup $M \in \mathcal{F}$ takav da je $KM \subset F$; za $s \in K$ i $x \in M$ važi $f(sx)/g(sx) \in cV'$. Teorema je, dakle, poseban slučaj stava 1 .

2) Ako je topološka grupa H (primer 1) lokalno kompaktna i prebrojiva u beskonačnosti, za Φ se može uzeti filter svih komplemenata relativno kompaktnih skupova u H (okoline beskonačnosti u H). Zaista, ako su K, L kompaktni skupovi u H, onda

1° Skup $\complement(K\complement L) = \complement(\bigcup_{x\in K} x\complement L) = \bigcap_{x\in K} xL$ je kompaktan.

2° Skup $M = K^{-1}L$ je kompaktan a kako je $\complement(K\complement M) = \bigcap_{x\in K} xK^{-1}L \supset L$, biće $K\complement M \subset \complement L$.

3) Neka je (primer 1) $H = G = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}_+^*$, $G' = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{F}$ baza filtra okolina tačke $+\infty$ u G obrazovana intervalima $[a, \infty[$ $(a \in G)$. Tako se dobijaju četiri vrste PP funkcija - nazivaćemo ih pravilno promenljivim (G,G') $(PP(G,G'))$ a za $G' = \mathbb{R}_+^*$ pravilno promenljivim na G (PPG). Za $(G,G') = (\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ imamo PP funkcije iz def. 1. U dokazima se najčešće pojavljuje slučaj $(G,G') = (\mathbb{R},\mathbb{R})$ koji je formalno najjednostavniji (jer smo na njega najviše navikli); suštinski su oni isti jer su topološke grupe $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}_+^*$ izomorfne. Jedan izomorfizam je preslikavanje exp pri kome se filter okolina tačke $+\infty$ u $\mathbb{R}$ preslikava na odgovarajući filter u $\mathbb{R}_+^*$ a Haarova (=Lebesgueova) mera dx na $\mathbb{R}$ na Haarovu meru dx/x na $\mathbb{R}_+^*$. Zato su sa (I)-(X) date osobine PP funkcija u sva četiri slučaja. Treba samo paziti pri prevodjenju asimptotskih relacija u kojima se eksplicit-

no ne pojavljuje <u>lim</u>; tako se, na primer, ~ 1 ($=\to 1$) za $G' = R_+^*$ prevodi sa $o(1)$ ($=\to o$) kada je $G' = \mathbb{R}$.

4) Neka je (primer 1) $H = G = Z, G' = \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{F}$ baza filtra okolina tačke $+\infty$ u Z obrazovana intervalima $[m,\infty[= \{n \in Z : n \geq m\}$ ($m \in Z$). Primer 1 daje u ovom slučaju PP nizove koje ćemo zvati pravilno promenljivim na Z (PPZ). Posmatraćemo ih u sledećem odeljku. Primećujemo da su za njih izvodjenja sasvim jednostavna (zahvaljujući jednostavnosti grupe Z).

5) Neka je $\mathcal{F}$ baza filtra okolina tačke $+\infty$ u $\mathbb{R}_+^*$ obrazovana intervalima $[a,\infty[$ $(a > o)$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R}_+^*)$, $(s,f) \to sf$ (množenje funkcije f konstantom s) preslikavanje skupa $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$. Po definiciji 2 su <u>sve</u> funkcije iz $\mathcal{H}$ PP indeksa $\rho: x \mapsto x$.

§ 3. PRAVILNO PROMENLJIVI NIZOVI NA Z

DEFINICIJA 3.— <u>Za niz</u> R, <u>strogo pozitivan na nekom intervalu</u> $[m,\infty[$ <u>u</u> Z, <u>kaže se da je</u> pravilno promenljiv na Z (PPZ) <u>ako</u>

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R(k+n)}{R(n)} = \rho(k) \tag{14}$$

<u>postoji i</u> $\in \mathbb{R}_+^*$ <u>za</u> $k = 1$; <u>pri tome se broj</u> $\rho = \rho(1)$ <u>naziva</u> indeksom <u>PPZ niza</u> R. <u>Za PPZ niz indeksa 1 kaže se da je</u> sporo promenljiv na Z (SPZ).

<u>Ako je</u> R <u>PPZ niz indeksa</u> ρ, <u>onda važi</u>

(I.Z) $\rho(k) = \rho^k$ <u>za svako</u> $k \in Z$.

(II.Z) <u>Za svaki kompaktan skup</u> K <u>u</u> Z <u>konvergencija u</u> (14) <u>je uniformna po</u> $k \in K$.

(III.Z) <u>Postoji interval</u> $[m,\infty[$ <u>u</u> Z <u>na kome je niz</u> R <u>lokalno logaritamski ograničen</u>.

(IV.Z) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\log R(n)}{n} = \log \rho \ .$$

(V.Z) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \alpha^{-n}R(n) = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \alpha^{-n}\rho^{n} = \infty$ za $0<\alpha<\rho, = 0$ za $\alpha>\rho$.

(VI.Z) Postoji interval $[m,\infty[$ u $\mathbb{Z}$ i realan nula-niz ε na njemu tako da je za $n\geq m$

$$R(n) = R(m)\rho^{n-m} \exp\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon(k). \tag{15}$$

(VII.Z) Postoji interval $[m,\infty[$ u $\mathbb{Z}$ i strogo pozitivan niz E na njemu koji zadovoljava uslov $\log E(n+1) - \log E(n) \longrightarrow 0$ $(n\longrightarrow\infty)$ tako da je $R(n)=\rho^{n}E(n)$ za $n\geq m$.

(VIII.Z) Za svaka dva broja $\sigma>0$ i $\tau>0, \sigma<\rho<\tau$, postoji interval $[m,\infty[$ u $\mathbb{Z}$ na kome je niz $\sigma^{-n}R(n)$ strogo rastući a niz $\tau^{-n}R(n)$ strogo opadajući.

(IX.Z) Za svaka dva broja $\sigma>0$ i $\tau>0, \sigma<\rho<\tau$, je kad $n\longrightarrow\infty$

$$\inf_{k\geq n} \sigma^{-k}R(k) \sim \sigma^{-n}R(n), \quad \sup_{k\geq n} \tau^{-k}R(k) \sim \tau^{-n}R(n). \tag{16}$$

(X.Z) Postoji interval $[m,\infty[$ u $\mathbb{Z}$ takav da je za svaka dva broja $\sigma>0$ i $\tau>0, \sigma<\rho<\tau$, kad $n\longrightarrow\infty$

$$\sup_{m\leq k\leq n} \sigma^{-k}R(k) \sim \sigma^{-n}R(n), \quad \inf_{m\leq k\leq n} \tau^{-k}R(k) \sim \tau^{-n}R(n). \tag{17}$$

Obrnuto: ako niz R, strogo pozitivan na nekom intervalu $[m,\infty[$ u $\mathbb{Z}$, zadovoljava jednu od relacija (VI.Z)-(X.Z), onda je on pravilno promenljiv na $\mathbb{Z}$ indeksa ρ.

(I.Z). Sledi neposredno iz definicije. (II.-III.Z). Trivijalno jer je grupa $\mathbb{Z}$ diskretna. (IV.Z). Sledi iz definicije primenom Stolzove teoreme. (V.Z). $\log \alpha^{-n}R(n) \sim (\log \alpha^{-1}\rho)n$ $(n\mapsto\infty)$ važi na osnovu (IV.Z). (VI.Z). Relacija (15) ekvivalentna je $\varepsilon(n) = \log R(n+1)/\rho R(n)$ (za $n\geq m$). (VII.Z). Uslov za E je ekvivalentan sa "E je PPZ niz". (VIII.Z). Sledi iz $\alpha^{-(n+1)}R(n+1)/\alpha^{-n}R(n) \mapsto \alpha^{-1}\rho$ $(n\mapsto\infty)$ za svako $\alpha>0$.

Neka je niz R strogo pozitivan u nekoj okolini tačke $+\infty$ u **Z**.

(VIII·Z) $\Rightarrow$ (IX·Z). (16) važi sa = umesto $\sim$ za dovoljno veliko $n>0$.

(IX·Z) $\Rightarrow$ (X.Z). Neka je R strogo pozitivan na intervalu $[m,\infty[$ u Z, $a(n,\sigma)=\inf_{k\geq n}\sigma^{-k}R(k)$ za $n\geq m$ i $0<\sigma<\rho$. Neka je $a(n,\sigma)\sim\sigma^{-n}R(n)$ $(n\mapsto\infty)$ za $0<\sigma<\rho$. Rastući niz $a(n,\sigma)$ je tada strogo pozitivan pa konvergira nekom $r(\sigma)\in\,]0,\infty]$. Za $\sigma<\bar{\sigma}<\rho$ iz $\sigma^{-n}R(n)=(\bar{\sigma}/\sigma)^n\bar{\sigma}^{-n}R(n)$ sledi $r(\sigma)=\infty r(\bar{\sigma})=\infty$. Koristeći relaciju: <u>ako su a i b strogo pozitivni nizova na nekom intervalu $[m,\infty[$ u Z i $b(n)\to\infty$ $(n\mapsto\infty)$, onda važi</u>

(18) $$a(n)\sim b(n)\Rightarrow\sup_{m\leq k\leq n}a(k)\sim\sup_{m\leq k\leq n}b(k),^{(*)}$$

dobijamo $\sup_{m\leq k\leq n}\sigma^{-k}R(k)\sim\sup_{m\leq k\leq n}a(k,\sigma)=a(n,\sigma)\sim\sigma^{-n}R(n)$. Relacija $(\forall\tau>\rho)(16_2)\Rightarrow(\forall\tau>\rho)(17_2)$ je dualna baš dokazanoj (u odnosu na poredak $\geq$ na $\mathbb{R}_+^*$).

(X·Z) $\Rightarrow$ R je Z-PP niz indeksa ρ. Iz $(\forall 0<\sigma<\rho)(17_1)$ i $\sigma^{n+1}\sup_{m\leq k\leq n+1}\sigma^{-k}R(k)\geq\sigma R(n)$ sledi $\lim.\inf R(n+1)/R(n)\geq\sigma$ i dalje, kad $\sigma\mapsto\rho-$, $\lim.\inf R(n+1)/R(n)\geq\rho$. Iz dualne relacije $(\forall\tau>\rho)(17_2)$ dobijamo $\lim.\sup R(n+1)/R(n)\leq\rho$.

PRIMEDBE.—1) Iz prethodnog dokaza se vidi da je

$$(\forall 0<\sigma<\rho)(16_1)\Leftrightarrow(\exists m\in Z)(\forall 0<\sigma<\rho)(17_1)$$
$$(\forall\tau>\rho)(16_2)\Leftrightarrow(\exists m\in Z)(\forall\tau>\rho)(17_2).$$

2) Na PPZ nizove se prenose primedbe 1) i 2) (str.3) i prvi deo primedbe 3.b) (str.4).

PRIMERI.—Ako realan niz konvergira, kad $n\mapsto\infty$, konačnom broju >0, onda je on SPZ. Takodje su, za $\alpha\in\mathbb{R}$, Z-SP nizovi: n^α, $\binom{\alpha+n}{n}$ $(\alpha\neq -1,-2,\dots)$, $(\log n)^\alpha$, $(\log_k n)^\alpha$ (k puta iterirani log). Niz $\rho^n n^\alpha(\log n)^\beta$ $(\rho>0,\ \alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R})$ je **Z**-PP indeksa ρ.

(*) Neka je $SUP_m^n\, a=\sup_{m\leq k\leq n}a(k)$ i $c(n)=SUP_m^n\,a/SUP_m^n\,b$. Iz $a\sim b$ i $b(n)\mapsto\infty$ sledi $SUP_m^n\,a\sim SUP_N^n\,a$ i $SUP_m^n\,b\sim SUP_N^n\,b$ za svako $N\geq m$. Zato je $\overline{\lim}\,c(n)=\overline{\lim}\,SUP_N^n\,a/SUP_N^n\,b\leq SUP_N^\infty\,a/b$ i otuda $\overline{\lim}\,c(n)\leq 1$. Iz $b\sim a$ sledi $\overline{\lim}\,1/c(n)\leq 1$.

§ 4. PRAVILNO PROMENLJIVI NIZOVI

DEFINICIJA 4.— Za niz R, strogo pozitivan na nekom intervalu $[m,\infty[$ u $\mathbb{N}^*$, kaže se da je pravilno promenljiv (PP) ako konačna granična vrednost

$$(19) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{R([tn])}{R(n)} = \rho(t)$$

postoji za svako $t>0$.

PP nizovi imaju osobine (I)-(X) PP funkcija (str. 1-2); samo treba u njima zameniti $\mathbb{R}_+^*$ sa $\mathbb{N}^*$ a $x\to\infty$ sa $\mathbb{N}^*\ni n\to\infty$. Posebno ćemo navesti osobine (VI)-(VII) jer su one za nizove nešto drugačijeg oblika.

Ako je R PP niz, onda postoji realan broj ρ takav da je $\rho(t)=t^\rho$ za svako $t>0$; ρ se naziva indeksom PP niza R. PP nizovi indeksa 0 nazivaju se sporo promenljivim (SP).

Ako je R PP niz indeksa ρ, onda važi

(VI) Postoji interval $[m,\infty[$ u $\mathbb{N}^*$ i realni nizovi η i ε na njemu, od kojih η konvergira nekom realnom broju a ε nuli, tako da je za $n\geq m$

$$(20) \qquad R(n) = n^\rho \exp\left\{\eta(n) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k)\frac{1}{k}\right\}.$$

(VII) Postoji interval $[m,\infty[$ u $\mathbb{N}^*$ i strogo pozitivni nizovi H i E na njemu takvi da $H(n)\to 1$ $(n\to\infty)$,

$$(21) \qquad n\left\{1-\frac{E(n-1)}{E(n)}\right\} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

i da je $R(n) = n^\rho H(n)E(n)$ za $n\geq m$.

Vezu izmedju PP funkcija i nizova (koja omogućava da se iz osobina funkcija izvode osobine nizova) daje

TEOREMA O UTAPANJU.—Niz R, strogo pozitivan na nekom intervalu $[m, \infty[$ u $\mathbb{N}^*$, je PP indeksa ρ ako i samo ako je funkcija $\bar{R}(x) = R([x])$ $(x \geq m)$ PP indeksa ρ.

Pojam PP niza potiče od J.KARAMATE [29,30].Teoremu o potapanju su dokazali J.GALAMBOS i E.SENETA [27] za nizove koji zadovoljavaju (VII) a R.BOJANIĆ i E.SENETA [18] za PP nizove.U [18] je takodje dokazana relacija (I) kao i ekvivalencija bilo kog od uslova (VI)-(X) sa "Niz R je PP indeksa ρ".

PRIMEDBA.—Zamenom relacija (20) i (21) ekvivalentnim

$$(20') \qquad R(n) = n^{\rho} \exp\left\{\eta(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon(k) \Delta \log k\right\}$$

$$(21') \qquad \frac{\Delta \log E(n)}{\Delta \log n} \mapsto o \quad (n \mapsto \infty)$$

(gde je $\Delta \log n = \log(n+1) - \log n$) postaje očitija ekvivalencija (VI) i (VII) kao i njihova veza sa odgovarajućim relacijama na strani 2.

GLAVA III

ABELOVI ASIMPTOTSKI STAVOVI ZA PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE I NIZOVE

§ 1. ABELOVI ASIMPTOTSKI STAVOVI ZA PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE

Još od svog nastanka behu PP funkcije vezane za Abelove asimptotske stavove. Tako bi se Karamatina originalna definicija [29] mogla, u slučaju merljive PP funkcije, prevesti sa:

Za funkciju R, strogo pozitivnu i merljivu na $\mathbb{R}_+^*$, kaže se da je PP indeksa $\rho \in \mathbb{R}$ ako je za neko $\sigma < \rho$ funkcija $t^{-\sigma}R(t)$ integrabilna na svakom intervalu $]o,a]$ $(a > o)$ i

(1)
$$\lim_{x \mapsto \infty} \frac{1}{R(x)} \int_o^x \left(\frac{x}{t}\right)^{\sigma} R(t)\, \frac{dt}{t} = \frac{1}{\rho - \sigma}.$$

U ovoj definiciji se pojavljuje i beskonačna tačka o za $\mathbb{R}_+^*$. Zato se zahteva integrabilnost funkcije $t^{-\sigma}R(t)$. To se može izbeći pretpostavljajući lokalnu integrabilnost funkcije R na nekom intervalu $[a, \infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$ i zamenjujući interval integracije $]o,x]$ u (1) sa $[a,x]$. Tada prethodna definicija postaje ekvivalentna definiciji 1 (str. II.1) sa $\rho(t) = t^{\rho}$. Za neprekidne PP funkcije ovu ekvivalenciju je dokazao J.KARAMATA [29] a zajedno sa R.BOJANIĆEM [14] i za merljive. Primećujemo još da se (1) može pisati u obliku

(1')
$$\lim_{x \mapsto \infty} \int_1^{\infty} t^{\sigma} \frac{R(t^{-1}x)}{R(x)} \frac{dt}{t} = \int_1^{\infty} t^{\sigma} t^{-\rho} \frac{dt}{t}$$

u kome se, očito, desna strana dobija kada se u levoj funkcija R zameni automorfizmom $t \mapsto t^{\rho}$ grupe $\mathbb{R}_+^*$. Navodimo uslove oblika (1) kojim se mogu karakterisati PP funkcije — teoreme o karakterizaciji.

Ako je R PP funkcija indeksa ρ, onda važi:

(XI) Postoji interval $[a,\infty[$ u $\mathbb{R}_+^*$ takav da je za svaki realan broj $\sigma<\rho$

$$(2)\qquad \lim_{x\mapsto\infty}\frac{1}{R(x)}\int_a^x\left(\frac{x}{t}\right)^{\sigma}R(t)\,\frac{dt}{t}=\frac{1}{\rho-\sigma}\,.$$

(XII) Za svaki realan broj $\tau>\rho$ je

$$(3)\qquad \lim_{x\mapsto\infty}\frac{1}{R(x)}\int_x^{\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^{\tau}R(t)\,\frac{dt}{t}=\frac{1}{\tau-\rho}\,.$$

Obrnuto: ako funkcija R, strogo pozitivna i merljiva u nekoj okolini tačke $+\infty$ u $\mathbb{R}_+^*$, zadovoljava (2) za neko $a>0$ i neko $\sigma<\rho$ ili (3) za neko $\tau>\rho$, onda je ona PP indeksa ρ.

Prvi korak ka uopštenju relacije (1) bio je da se funkcija $t\mapsto t^{\rho}$ u njoj zameni opštijom. Učinili su ga S.ALJANČIĆ, R.BOJANIĆ i M.TOMIĆ [06] pokazavši za neprekidne PP funkcije:

Neka je R PP funkcija indeksa ρ, strogo pozitivna, merljiva i lokalno ograničena na $\mathbb{R}_+^*$, a f merljiva realna funkcija na $\mathbb{R}_+^*$ i neka postoje realni brojevi σ i τ, $\sigma<\rho<\tau$, takvi da je funkcija $\max(t^{-\sigma},t^{-\tau})f(t)$ $t^{-1}dt$-integrabilna i da je $R(t)=O(t^{\sigma})$ $(t\mapsto 0+)$. Tada je

$$(4)\qquad \lim_{x\mapsto\infty}\frac{1}{R(x)}\int_0^{\infty}f\left(\frac{x}{t}\right)R(t)\,\frac{dt}{t}=\int_0^{\infty}f(t)t^{-\rho}\,\frac{dt}{t}\,.$$

Sledeći korak je bio da se realna funkcija $(x,t)\mapsto f\left(\frac{x}{t}\right)$ u (4) zameni opštijom. Tako M.VUILLEUMIER [43] posmatra realnu funkciju k na $[x_0,\infty[\times\mathbb{R}_+^*$ $(x_0>0)$ takvu da je funkcija $t\mapsto t^{\rho}k(x,t)$ integrabilna za svako $x\geq x_0$, zatim familiju $\mathcal{R}(\rho)$ svih PP funkcija R indeksa ρ koje su strogo pozitivne, merljive i lokalno ograničene na $\mathbb{R}_+^*$ i zadovoljavaju uslov $R(t)=O(t^{\rho})$ $(t\mapsto 0+)$ pa za integralnu transformaciju $\mathbf{K}$,

$$(5)\qquad \mathbf{K}R(x)=\int_0^{\infty}k(x,t)R(t)\,dt\ ,\quad R\in\mathcal{R}(\rho)\ ,$$

pokazuje:

(i) $\mathbb{K}R(x) = O(R(x))$ $(x \mapsto \infty)$ za svako $R \in \mathcal{R}(\rho)$ ako i samo ako postoje realni brojevi σ i $\tau, \sigma < \rho < \tau$, takvi da je

$$(6)\qquad \int_0^\infty |k(x,t)| \max\left\{\left(\frac{t}{x}\right)^\sigma, \left(\frac{t}{x}\right)^\tau\right\} dt = O(1) \quad (x \mapsto \infty).$$

(ii) $\mathbb{K}R(x)/R(x) \mapsto \alpha$ $(\in \mathbb{R},\ x \mapsto \infty)$ za svako $R \in \mathcal{R}(\rho)$ ako i samo ako

$$(7)\qquad \int_0^\infty k(x,t) \left(\frac{t}{x}\right)^\rho dt \mapsto \alpha \quad (x \mapsto \infty)$$

i postoje realni brojevi σ i $\tau, \sigma < \rho < \tau$, takvi da važi (6).

Konačno, inspirisani poznatom Korovkinovom teoremom, prenose R.BOJANIĆ i M.VUILLEUMIER [19] ove rezultate na regularne operatore (razliku dva pozitivna operatora) na $\mathcal{R}(\rho)$.

Pomenimo na kraju da je D.DRASIN [25] posmatrao rešenja R asimptotske jednačine (4) i pokazao da su ona pod izvesnim (Tauberovim) uslovima PP (uopštenje teoreme o karakterizaciji).

Zbog kasnijih potreba (glava IV) formulisaćemo sada blago uopštenje relacije (4). Dokazaćemo ga kasnije (§ 4) iako bi se ono moglo dobiti iz gornjih relacija (i) i (ii).

STAV 1.—a) Neka je R PP funkcija indeksa ρ a f i g merljive kompleksne funkcije na $\mathbb{R}_+^*$ takve da je za neke realne brojeve σ i $\tau, \sigma < \rho < \tau$, funkcija $f(t) \max(t^{-\sigma}, t^{-\tau})$ $t^{-1}dt$-integrabilna a g lokalno ograničena na $\mathbb{R}_+^*$ i $g(t) = O(t^\sigma)$ $(t \mapsto 0+)$.

(i) Ako je $\limsup_{t \mapsto \infty} |g(t)|/R(t) = \alpha < \infty$, onda je

$$(8)\qquad \limsup_{x \mapsto \infty} \frac{1}{R(x)} \left| \int_0^\infty f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \right| \le \alpha \int_0^\infty |f(t)| t^{-\rho} \frac{dt}{t}.$$

(ii) Ako je $\lim_{t \mapsto \infty} g(t)/R(t) = \alpha$, onda je

$$(9)\qquad \lim_{x \mapsto \infty} \frac{1}{R(x)} \int_0^\infty f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} = \alpha \int_0^\infty f(t) t^{-\rho} \frac{dt}{t}.$$

b) Neka je $\mathcal{R}(\rho)$ familija svih PP funkcija indeksa ρ koje su strogo pozitivne, merljive i lokalno ograničene na $\mathbb{R}_+^*$, jednake $O(t^\rho)$ kada $t \mapsto 0+$. Neka je f kompleksna funkcija na $\mathbb{R}_+^*$.

(i) Za svako $R \in \mathcal{R}(\rho)$ postoji $x_0 > 0$ takvo da je funkcija $t \mapsto f(t)R(x/t)$ $t^{-1}dt$-integrabilna za svako $x \geq x_0$ ako i samo ako je funkcija $f(t)\max(t^{-\rho}, t^{-\tau})$ $t^{-1}dt$-integrabilna za neki realan broj $\tau > \rho$.

(ii) Za svako $R \in \mathcal{R}(\rho)$ je $\int_{\mathbb{R}_+^*} f(t)R(x/t)t^{-1}dt = O(R(x))$ $(x \mapsto \infty)$ ako i samo ako je funkcija $f(t)\max(t^{-\sigma}, t^{-\tau})$ $t^{-1}dt$-integrabilna za neki par realnih brojeva σ, τ $(\sigma < \rho < \tau)$.

§ 2. ABELOVI ASIMPTOTSKI STAVOVI ZA PRAVILNO PROMENLJIVE NIZOVE NA Z

Ako je R PPZ niz indeksa ρ, onda važi

(XI.Z) Postoji interval $[m, \infty[$ u $\mathbb{Z}$ takav da je za svaki realan broj $0 < \sigma < \rho$

(10) $$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{1}{R(n)} \sum_{k=m}^{n} \sigma^{n-k} R(k) = \frac{\rho}{\rho - \sigma} .$$

(XII.Z) Za svaki realan broj $\tau > \rho$ je

(11) $$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{1}{R(n)} \sum_{k=n}^{\infty} \tau^{n-k} R(k) = \frac{\tau}{\tau - \rho} .^{(*)}$$

Obrnuto: ako niz R, strogo pozitivan u nekoj okolini tačke $+\infty$ u $\mathbb{Z}$, zadovoljava (10) za neko $m \in \mathbb{Z}$ i neko $0 < \sigma < \rho$ ili (11) za neko $\tau > \rho$, onda je on PPZ indeksa ρ.

Za m u (XI.Z) se može uzeti bilo koji ceo broj takav da je $R(k)$ definisano za $k \geq m$. Relacije (XI.Z), (XII.Z) su posebni slučajevi stava 1.Z. Obrnuto tvrdjenje sledi neposredno:

(*) Nesimetrija desnih strana u (10) i (11) se može ukloniti ako se gornja granica sumiranja u (10) smanji ili donja granica u (11) poveća za 1.

Ako niz a, definisan sa $\sum_{k=m}^{n} \sigma^{n-k}R(k) = a(n)R(n)$, konvergira ka $\rho/(\rho-\sigma)$, onda iz $a(n+1)R(n+1) = \sigma a(n)R(n) + R(n+1)$ sledi da $R(n+1)/R(n) = \sigma a(n)/(a(n+1) - 1)$ konvergira ka ρ.

Ako niz a, definisan sa $\sum_{k=n}^{\infty} \tau^{n-k}R(k) = a(n)R(n)$, konvergira ka $\tau/(\tau-\rho)$, onda iz $a(n)R(n) = R(n) + \tau^{-1}a(n+1)R(n+1)$ sledi da $R(n+1)/R(n) = \tau(a(n) - 1)/a(n+1)$ konvergira ka ρ.

STAV 1.$\mathbf{Z}$-a) Neka je R PP$\mathbf{Z}$ niz indeksa ρ, a i b kompleksni nizovi na $\mathbf{Z}$ takvi da je za neke realne brojeve σ i τ, $0<\sigma<\rho<\tau$, niz $a(k)\max(\sigma^{-k},\tau^{-k})$ apsolutno sumabilan (na $\mathbf{Z}$) a $b(k) = O(\sigma^{k})$ $(k \mapsto -\infty)$.

(i) Ako je $\limsup_{k\mapsto\infty} |b(k)|/R(k) = \alpha<\infty$, onda je

$$\limsup_{n\mapsto\infty} \frac{1}{R(n)} \left| \sum_{k\in\mathbf{Z}} a(k)b(n-k) \right| \leq \alpha \sum_{k\in\mathbf{Z}} |a(k)|\rho^{-k}. \tag{12}$$

(ii) Ako je $\lim_{k\mapsto\infty} b(k)/R(k) = \alpha$, onda je

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{R(n)} \sum_{k\in\mathbf{Z}} a(k)b(n-k) = \alpha \sum_{k\in\mathbf{Z}} a(k)\rho^{-k} . \tag{13}$$

b) Neka je $\mathcal{R}(\rho)$ familija svih PP$\mathbf{Z}$ nizova indeksa ρ koji su strogo pozitivni na $\mathbf{Z}$ i $= O(\rho^{k})$ $(k\mapsto-\infty)$. Neka je a kompleksan niz na $\mathbf{Z}$.

(i) Za svako $R \in \mathcal{R}(\rho)$ postoji $n_0\in\mathbf{Z}$ takvo da je niz $k \mapsto a(k)R(n-k)$ apsolutno sumabilan za svako $n\geq n_0$ ako i samo ako je niz $a(k)\max(\rho^{-k},\tau^{-k})$ apsolutno sumabilan za neki realan broj $\tau>\rho$.

(ii) Za svako $R \in \mathcal{R}(\rho)$ je $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a(k)R(n-k) = O(R(n))$ kada $n\mapsto\infty$ ako i samo ako je niz $a(k)\max(\sigma^{-k},\tau^{-k})$ apsolutno sumabilan za neki par realnih brojeva σ, τ $(0<\sigma<\rho<\tau)$.

Relacija a(ii) dokazana je u [40; I, Kap. IV, Problem 178]. Ispitivanju slučajeva u kojima, obrnuto, iz konvergencije niza $\sum_{k=0}^{n} a(k)R(n-k)/R(n)$ $(a(k)\geq 0$ za $k\in N)$ sledi konvergencija niza $R(n+1)/R(n)$ (teorema o karakterizaciji) posvećen je niz radova od kojih navodimo samo [16, 34].

§ 3. ABELOVI ASIMPTOTSKI STAVOVI ZA PRAVILNO PROMENLJIVE NIZOVE

Ako je R PP niz indeksa ρ, onda važi

(XI.N^*) Postoji $m \in N^*$ takvo da je za svaki realan broj $\sigma < \rho$

$$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{1}{R(n)} \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{\sigma} R(k) \Delta \log k = \frac{1}{\rho - \sigma} .^{(*)} \tag{14}$$

(XII.N^*) Za svaki realan broj $\tau > \rho$ je

$$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{1}{R(n)} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^{\tau} R(k) \Delta \log k = \frac{1}{\tau - \rho} .^{(*)} \tag{15}$$

Obrnuto: ako niz R, strogo pozitivan u nekoj okolini tačke $+\infty$ u N^*, zadovoljava (14) za neko $m \in N^*$ i neko $\sigma < \rho$ ili (15) za neko $\tau > \rho$, onda je on PP indeksa ρ .

Prethodna tvrdjenja za (14) dokazana su u [18]. Direktan deo za (15) sledi iz stava 1.N^* a obrnut se može dokazati kao u [18].

STAV 1.N^* (M. VUILLEUMIER [44]) — a) Neka je: R PP niz indeksa ρ, a kompleksan niz na $N^* \times N^*$ takav da je za neke realne brojeve σ i τ, $\sigma < \rho < \tau$,

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a(n,k)| \max\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^{\sigma}, \left(\frac{k}{n}\right)^{\tau}\right\} < \infty . \tag{16}$$

i da postoji

$$\lim_{n \mapsto \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a(n,k) \left(\frac{k}{n}\right)^{\rho} = \alpha , \tag{17}$$

b kompleksan niz na N^*.

(i) Ako je $b(n) = O(R(n))$, onda je $\sum_{k=1}^{\infty} a(n,k) b(k) = O(R(n))$ $(n \mapsto \infty)$.

(ii) Ako je $\lim_{k \mapsto \infty} b(k)/R(k) = \beta$, onda je

---

(*) $\Delta \log k$ se može zameniti sa $1/k$.

$$(18)\qquad \lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{R(n)} \sum_{k=1}^{\infty} a(n,k)b(k) = \alpha\beta .$$

b) Neka je $\mathcal{R}(\rho)$ familija svih PP nizova indeksa ρ koji su strogo pozitivni na N^* a a kompleksan niz na $N^*\times N^*$.

(i) Za svako $R \in \mathcal{R}(\rho)$ je $\sum_{k=1}^{\infty} a(n,k)R(k) = O(R(n))$ kada $n\mapsto\infty$ ako i samo ako važi (16) za neki par realnih brojeva σ i τ, $\sigma<\rho<\tau$.

(ii) Za svako $R \in \mathcal{R}(\rho)$ postoji $\lim_{n\mapsto\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a(n,k)\frac{R(k)}{R(n)}$ ako i samo ako važi (16) za neki par realnih brojeva σ i τ, $\sigma<\rho<\tau$, i postoji granična vrednost (17).

Teoreme o karakterizaciji za PP nizove razmatrao je H. BAUMANN [13].

§ 4. FAKTORI UNIFORMNE KONVERGENCIJE ZA PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE I NIZOVE. DOKAZI STAVOVA 1 i 1.Z

STAV 2.— Neka je R PP funkcija indeksa ρ. Za svaka dva realna broja σ i τ, $\sigma<\rho<\tau$, i svaku lokalno ograničenu kompleksnu funkciju g na R_+^* takvu da je $g(x) = O(x^{\sigma})$ $(x\mapsto 0+)$ važi:

(i) Ako je $g(x) = O(R(x))$ $(x\mapsto\infty)$, onda je

$$(19)\qquad \limsup_{x\mapsto\infty} \sup_{t>0} \min\left\{\left(\frac{x}{t}\right)^{\sigma},\left(\frac{x}{t}\right)^{\tau}\right\}\frac{|g(t)|}{R(x)} < \infty .$$

(ii) Ako je $\lim_{x\mapsto\infty} g(x)/R(x) = \beta$, onda je

$$(20)\qquad \lim_{x\mapsto\infty} \sup_{t>0} \min\left\{\left(\frac{x}{t}\right)^{\sigma},\left(\frac{x}{t}\right)^{\tau}\right\}\left|\frac{g(t)}{R(x)} - \beta\,\frac{t^{\rho}}{x^{\rho}}\right| = 0 .$$

Neka je $a>0$ takvo da je funkcija R lokalno logaritamski ograničena na $[a,\infty[$ ((III), str. II.1), $\overline{R}(x) = \sup_{t\geq x} t^{-\tau}R(t)$, $\underline{R}(x) = \sup_{a\leq t\leq x} t^{-\sigma}R(t)$ za $x\geq a$ i $v(x) = \min(x^{-\sigma},x^{-\tau}) = x^{-\sigma}$ za $0<x\leq 1$, $= x^{-\tau}$ za $x\geq 1$.

(i) Kako je (za $x\geq a$)

$$\sup_{0<t\leq a} v\left(\frac{t}{x}\right)\frac{|g(t)|}{R(x)} = \sup_{0<t\leq a}\left(\frac{t}{x}\right)^{-\sigma}\frac{|g(t)|}{R(x)} = \sup_{0<t\leq a} t^{-\sigma}|g(t)|\,\frac{x^{\sigma}}{R(x)}$$

ograničena funkcija na $[a,\infty[$ ((V), str. II.2) a kako je takva i funkcija g/R, dovoljno je dokazati (19) sa $t\geq a$ umesto $t>0$ i R umesto $|g|$.

Iz $(t/x)^{-\sigma}R(t)\leq x^{\sigma}\underline{R}(x)$ za $a\leq t\leq x$ i $(t/x)^{-\tau}R(t)\leq x^{\tau}\overline{R}(x)$ za $t\geq x$ sledi $v(t/x)R(t)\leq \max\{x^{\sigma}\underline{R}(x), x^{\tau}\overline{R}(x)\}$ za $t\geq a$ odakle se, na osnovu (IX) i (X) (str. II.2), dobija željeni zaključak.

(ii) Kako je za $0<t<a\leq x$ $v(t/x)=(t/x)^{-\sigma}$ i

$$\left(\frac{t}{x}\right)^{-\sigma}\left|\frac{g(t)}{R(x)}-\beta\frac{t^{\rho}}{x^{\rho}}\right|\leq\frac{\sup\limits_{0<t<a}t^{-\sigma}|g(t)|}{x^{-\sigma}R(x)}+|\beta|\left(\frac{a}{x}\right)^{\rho-\sigma},$$

gde desna strana ne zavisi od t i $\mapsto 0$ kada $x\mapsto\infty$, na osnovu (V) (str. II.2), dovoljno je dokazati (20) sa $t\geq a$ umesto $t>0$. Kako je za $t\geq a$ i $x\geq a$

$$v\left(\frac{t}{x}\right)\left|\frac{g(t)}{R(x)}-\beta\frac{t^{\rho}}{x^{\rho}}\right|\leq\frac{|g(t)|}{R(t)}v\left(\frac{t}{x}\right)\left|\frac{R(t)}{R(x)}-\frac{t^{\rho}}{x^{\rho}}\right|+v\left(\frac{t}{x}\right)\left(\frac{t}{x}\right)^{\rho}\left|\frac{g(t)}{R(t)}-\beta\right|$$
$$=\frac{|g(t)|}{R(t)}h(x,t)+k(x,t),$$

dovoljno je, zbog ograničenosti funkcije g/R na $[a,\infty[$, dokazati: $\lim\limits_{x\mapsto\infty}\sup\limits_{t\geq a}h(x,t)=0$ i $\lim\limits_{x\mapsto\infty}\sup\limits_{t\geq a}k(x,t)=0$.

Neka je $0<s<1$. Majoriranjem funkcije h u slučajevima: 1° $a\leq t\leq sx$, 2° $t\geq x/s$, 3° $sx\leq t\leq x/s$, dobijamo $h(x,t)\leq$

1° $$\left(\frac{t}{x}\right)^{-\sigma}\frac{R(t)}{R(x)}+\left(\frac{t}{x}\right)^{\rho-\sigma}\leq\frac{\underline{R}(sx)}{(sx)^{-\sigma}R(sx)}\,\frac{s^{-\sigma}R(sx)}{R(x)}+s^{\rho-\sigma}$$

2° $$\left(\frac{t}{x}\right)^{-\tau}\frac{R(t)}{R(x)}+\left(\frac{t}{x}\right)^{\rho-\tau}\leq\frac{\overline{R}(x/s)}{(x/s)^{-\tau}R(x/s)}\,\frac{s^{\tau}R(x/s)}{R(x)}+s^{\tau-\rho}$$

3° $$\sup_{sx\leq t\leq x/s}v\left(\frac{t}{x}\right)\left|\frac{R(t)}{R(x)}-\left(\frac{t}{x}\right)^{\rho}\right|\leq M\sup_{s\leq t\leq 1/s}\left|\frac{R(tx)}{R(x)}-t^{\rho}\right|$$

gde je M max funkcije v na intervalu $[s,1/s]$. Iz 1° i (X), 2° i (IX), 3° i (II) (str. II.1-2) sledi

$$\limsup_{x\mapsto\infty}\sup_{t\geq a}h(x,t)\leq 2\max\left(s^{\rho-\sigma},s^{\tau-\rho}\right)$$

i dalje, kada $s\mapsto 0+$, $\lim\limits_{x\mapsto\infty}\sup\limits_{t\geq a}h(x,t)=0$.

Majoriranjem funkcije k za $a \leq t \leq \sqrt{x}$ i $t \geq \sqrt{x}$ dobijamo za $x \geq \max(a,1)$

$$\sup_{t \geq a} k(x,t) \leq \sqrt{x}^{\sigma-\rho} \sup_{t \geq a} \left| \frac{g(t)}{R(t)} - \beta \right| + \sup_{t \geq \sqrt{x}} \left| \frac{g(t)}{R(t)} - \beta \right| \mapsto 0$$

kada $x \mapsto \infty$.

POSLEDICA.— <u>Neka je</u> R <u>PP funkcija indeksa</u> ρ, σ <u>i</u> τ <u>realni brojevi</u> ($\sigma < \rho < \tau$), X <u>B-prostor svih merljivih kompleksnih</u> (<u>realnih</u>) <u>funkcija</u> h <u>na</u> R_+^* <u>za koje je</u>

$$||h|| = \sup_{t > 0} |h(t)| \min(t^{\sigma}, t^{\tau}) < \infty,$$

F <u>neprekidna kompleksna</u> (<u>realna</u>) <u>funkcija na</u> X.<u>Tada za svaku merljivu lokalno ograničenu kompleksnu</u> (<u>realnu</u>) <u>funkciju</u> g <u>na</u> R_+^* <u>iz</u> $g(t) = O(t^{\sigma})$ $(t \to 0+)$ <u>i</u> $\lim_{t \to \infty} g(t)/R(t) = \beta$ <u>sledi</u>

$$\lim_{x \mapsto \infty} F\left[\frac{g(xt^{-1})}{R(x)}\right] = F(\beta t^{-\rho}). \tag{21}$$

Iz (19) (posle smene $t = x/s$) sledi da se funkcije $\varphi_x(t) = g(x/t)/R(x)$ nalaze u X za dovoljno veliko $x > 0$ a iz (20) da familija (φ_x) konvergira ka funkciji $\beta t^{-\rho}$ <u>u X</u> kad $x \mapsto \infty$.

PRIMERI.— Navodimo primere funkcije F pretpostavljajući da su zadovoljeni ostali uslovi (koji se ne odnose na F) prethodne posledice.

1) Neka je f kompleksna funkcija na R_+^* takva da je funkcija $f(t)\max(t^{-\sigma}, t^{-\tau})$ $t^{-1}dt$-integrabilna i neka je

$$F(h) = \int_0^{\infty} f(t)h(t)\, \frac{dt}{t}.$$

Iz $\max(t^{-\sigma}, t^{-\tau})\min(t^{\sigma}, t^{\tau}) = 1$ sledi da je linearna funkcionela F na X ograničena a (21) postaje (9).

2) Neka su elementi prostora X realne funkcije.Neka je f realna funkcija na R_+^* takva da je funkcija $f(t)\max(t^{-\sigma}, t^{-\tau})$ ograničena na R_+^* i neka je

$$F(h) = \sup_{t > 0} f(t)h(t).$$

Iz $|F(h) - F(k)| \leq \sup_{t>o} |f(t)|\max(t^{-\sigma},t^{-\tau})\ \|h - k\|$ za h i k iz X sledi da je funkcija F neprekidna na X a otuda

$$(22)\qquad \lim_{x\mapsto\infty}\ \sup_{t>o} f(t)\,\frac{g(xt^{-1})}{R(x)} = \sup_{t>o} \beta f(t)t^{-\rho}.$$

što predstavlja uopštenje relacija sa strane II.2

(5_2) $f(t) = t^{\tau}$ za $o<t\leq 1$, $= o$ za $t>1$

(6_1) $f(t) = o$ za $o<t<1$, $= t^{\sigma}$ za $t\geq 1$

$$g(t) = \begin{cases} o & \text{za } o<t<a \\ R(t) & \text{za } t\geq a \end{cases}$$

gde je funkcija R u prvom slučaju definisana a u drugom lokalno logaritamski ograničena na intervalu $[a,\infty[$.

DOKAZ STAVA 1.— a) Neka su realni brojevi a i M takvi da je $R(t)>o$ za $t\geq a$ i $\min(t^{\sigma},t^{\tau})|g(x/t)|/R(x) \leq M$ za $t>o$, $x\geq a$. Funkcije $\varphi_x(t) = f(t)g(x/t)/R(x)$ $(t>o, x\geq a)$ su merljive i imaju $t^{-1}dt$-integrabilnu dominantu $M|f(t)|\max(t^{-\sigma},t^{-\tau})$ (na osnovu stava 2(i)).Kako je

$$\varphi_x(t) = f(t)\,\frac{g(xt^{-1})}{R(xt^{-1})}\,\frac{R(t^{-1}x)}{R(x)},$$

biće za skoro svako $t>o$ (bar za ono gde je $f(t)$ konačno) u slučaju (i) $\lim.\sup_{x\to\infty} |\varphi_x(t)| = |f(t)|\,\alpha t^{-\rho}$ a u slučaju (ii) $\lim_{x\mapsto\infty} \varphi_x(t) = f(t)\alpha t^{-\rho}$ pa (9) sledi iz Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji. Neka je (x_n) realan niz koji $\mapsto\infty$ kad $n\mapsto\infty$ i zadovoljava uslov

$$\lim.\sup_{x\mapsto\infty}\left|\int_o^{\infty}\varphi_x(t)\,\frac{dt}{t}\right| = \lim.\sup_{n\mapsto\infty}\left|\int_o^{\infty}\varphi_{x_n}(t)\,\frac{dt}{t}\right|.$$

Sada (8) važi jer je desna strana u ovoj jednakosti

$$\leq \int_o^{\infty}\lim.\sup_{n\mapsto\infty}\left|\varphi_{x_n}(t)\right|\frac{dt}{t} \leq \int_o^{\infty}|f(t)|\,\alpha t^{-\rho}\,\frac{dt}{t}.$$

b) (i) Uslov je dovoljan. Neka je $R\in\mathcal{R}(\rho)$ i $x>o$. Kako je $R(x/t) = O((x/t)^{\rho}) = O(t^{-\rho})$ $(t\mapsto\infty)$, $= o((x/t)^{\tau}) = o(t^{-\tau})$ $(t\mapsto o+)$ a funkcija $t\longmapsto R(x/t)/\max(t^{-\rho},t^{-\tau})$ je lokalno ograničena na $\mathbb{R}_+^*$, postoji $M_x > o$ takvo da je

$$R(x/t) \leq M_x \max(t^{-\rho}, t^{-\tau}) \quad \text{za svako } t > o \ .$$

Uslov je potreban. Funkcija t^{ρ} je iz $\mathcal{R}(\rho)$ pa je funkcija $f(t)t^{-\rho} = x^{-\rho} f(t)(x/t)^{\rho}$ $t^{-1}dt$-integrabilna na $[1,\infty[$. Zato je dovoljno dokazati: funkcija $f(t)t^{-\tau}$ je $t^{-1}dt$-integrabilna na intervalu $]o,1]$ za neko $\tau > \rho$.

Neka je $C_o = C_o[1,\infty[$ B-prostor svih neprekidnih realnih funkcija na $[1,\infty[$ koje $\mapsto o$ kad $t \mapsto \infty$ sa uniformnom normom. Za $h \in C_o$ neka je

$$(23) R(h,t) = t^{\rho} \text{ za } o < t < 1, \ = t^{\rho} \exp \int_1^t h(s) \frac{ds}{s} \quad \text{za } t > 1$$

PP funkcija indeksa ρ ((VI), str.II.2), očito iz $\mathcal{R}(\rho)$, i

$$F(h) = \int_o^1 |f(t)| \, R(h, \tfrac{1}{t}) \frac{dt}{t} = \int_o^1 |f(t)| \, t^{-\rho} \left\{ \exp \int_1^{\frac{1}{t}} h(s) \frac{ds}{s} \right\} \frac{dt}{t}.$$

Kako je $R(h,1/t) \leq R(h,x/t)\, x^{\|h\|-\rho}$ za $x \geq 1$ i $o < t < 1$ a funkcija $t \mapsto f(t)R(h,x/t)$ je $t^{-1}dt$-integrabilna za neko $x \geq 1$, biće F realna (konačna) funkcija na C_o. Ako niz (h_n) u C_o konvergira ka h, onda je (na osnovu Fatouove leme)

$$F(h) \leq \lim.\inf_{n \to \infty} F(h_n)$$

te je funkcija F poluneprekidna odozdo na C_o odakle sledi da je ona ograničena na nekoj kugli $K[h_o, r]$ $(r > o)$ u C_o [20, CH IX, § 5, n° 4, Th. 2]. Možemo pretpostaviti da h_o ima kompaktan nosač (jer je skup takvih funkcija svuda gust u C_o). Funkcija $\varphi(t) = \exp - \int_1^{1/t} h(s)s^{-1}ds$ je tada konstantna na nekom intervalu $]o,a]$ $(o < a < 1)$ pa je ograničena na intervalu $]o,1]$. Kako je $F(h) \leq F(h_o + h) \sup_{o < t \leq 1} \varphi(t)$, biće F ograničena na kugli $K[o,r]$ u C_o. Neka je $F(h) \leq M < \infty$ za $\|h\| \leq 1$ i $h_x(t) = r$ za $1 \leq t \leq x$, $= r(x+1-t)$ za $x \leq t \leq x+1$, $= o$ za $t \geq x+1$. Iz

$$\int_{\frac{1}{x}}^1 |f(t)| \, t^{-\rho-r} \frac{dt}{t} = \int_{\frac{1}{x}}^1 |f(t)| \, R(h_x, \tfrac{1}{t}) \frac{dt}{t} \leq M$$

sledi (kad $x \mapsto \infty$) da je funkcija $f(t)t^{-(\rho+r)}$ $t^{-1}dt$-integrabilna na $]o,1]$.

b) (ii) Uslov je dovoljan na osnovu stava 1a(i) jer je $O(t^{\rho}) = O(t^{\sigma})$ $(t \mapsto 0+)$ za svako $\sigma < \rho$.

Uslov je potreban. Pretpostavljamo da je funkcija f realna (u protivnom bismo je razložili na realni i imaginarni deo). Funkcija $f(t)t^{-\tau}$ je $t^{-1}dt$-integrabilna na $]0,1]$ za neko $\tau > \rho$ (stav 1b(i)) pa je dovoljno dokazati: funkcija $f(t)t^{-\sigma}$ je $t^{-1}dt$-integrabilna na $[1,\infty[$ za neko $\sigma < \rho$. Takodje je $\int_0^1 f(t)R(x/t)t^{-1}dt = O(R(x))$ $(x \to \infty)$ (stav 1a(i)) i otuda $\int_1^{\infty} f(t)R(x/t)t^{-1}dt = O(R(x))$ $(x \mapsto \infty)$ za svako $R \in \mathcal{R}(\rho)$.

Pokazaćemo prvo da je za svako $R \in \mathcal{R}(\rho)$

$$\int_1^x |f(t)|\, R\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} = O(R(x)) \quad (x \mapsto \infty) . \tag{24}$$

Neka je BM_0 B-prostor svih merljivih i ograničenih realnih funkcija na $\mathbb{R}_+^*$ koje su $= 0$ na $]0,1]$ i $\mapsto 0$ kad $t \mapsto \infty$ (sa uniformnom normom). Neka je $R \in \mathcal{R}(\rho)$ fiksirano. Za $h \in BM_0$ i $\neq 0$ je funkcija $(2\|h\|+h)R$ takodje iz $\mathcal{R}(\rho)$ a $2\|h\|+h$ je logaritamski ograničena na $\mathbb{R}_+^*$ pa je

$$2\|h\| \int_1^{\infty} f(t)R\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} + \int_1^{\infty} f(t)R\left(\frac{x}{t}\right)h\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} = O(R(x))$$

i otuda

$$\varphi_x(h) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)\frac{R(t)}{R(x)}h(t) \frac{dt}{t} = \int_1^x f(t)\frac{R\left(\frac{x}{t}\right)}{R(x)}h\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} = O(1) .$$

Familija $(\varphi_x)_{x \geq 1}$ ograničenih linearnih funkcionela na BM_0 je ograničena u svakoj tački iz BM_0 pa je familija njihovih normi ograničena. Otuda sledi relacija (24).

Za $h \in BM_0$ neka je $R(h,t)$ funkcija (23). Tada je

$$F_x(h) = \int_1^x |f(t)| \frac{R\left(h,\frac{x}{t}\right)}{R(h,x)} \frac{dt}{t} = \int_1^x |f(t)|\, t^{-\rho} \left\{\exp - \int_{\frac{x}{t}}^x h \frac{ds}{s}\right\} \frac{dt}{t}$$

$(x \geq 1)$ familija neprekidnih funkcija na BM_0 koja je ograničena u svakoj tački iz BM_0 pa je uniformno ograničena na nekoj kugli $K[h_0,r]$ $(r > 0)$ u BM_0 gde h_0 ima kompaktan nosač te postoji $0 < M < \infty$ takvo da je $F_x(h) \leq M$ za $\|h\| \leq r$ i $x \geq 1$. Ako je $h_x(t) = -r$ za $1 \leq t \leq x$, $= 0$ za $t > x$, onda iz

$$F_x(h_x) = \int_1^x |f(t)|\, t^{-(\rho-r)} \frac{dt}{t} \leq M$$

za svako $x \geq 1$ sledi $t^{-1}dt$-integrabilnost funkcije $f(t)t^{-(\rho-r)}$ na $[1,\infty[$.

STAV 2.Z- <u>Neka je</u> R <u>PPZ niz indeksa</u> ρ. <u>Za svaka dva realna broja</u> σ <u>i</u> τ, $0<\sigma<\rho<\tau$, <u>i svaki kompleksan niz</u> b <u>na</u> Z <u>takav da je</u> $b(k) = O(\sigma^k)$ $(k \mapsto -\infty)$ <u>važi</u>:

(i) <u>Ako je</u> $b(k) = O(R(k))$ $(k \mapsto \infty)$, <u>onda je</u>

$$\limsup_{n\mapsto\infty} \sup_{k\in Z} \min(\sigma^{n-k}, \tau^{n-k}) \frac{|b(k)|}{R(n)} < \infty \ . \tag{25}$$

(ii) <u>Ako je</u> $\lim_{k\mapsto\infty} b(k)/R(k) = \beta$, <u>onda je</u>

$$\lim_{n\mapsto\infty} \sup_{k\in Z} \min(\sigma^{n-k}, \tau^{n-k}) \left| \frac{b(k)}{R(n)} - \beta \frac{\rho^k}{\rho^n} \right| = 0 \ . \tag{26}$$

Neka je m ceo broj takav da je za $k \geq m$: $R(k) > 0$, $\sigma^{-k}R(k)$ rastući a $\tau^{-k}R(k)$ opadajući niz ((VIII.Z), str. II.11). Neka je $v(k) = \min(\sigma^{-k}, \tau^{-k}) = \sigma^{-k}$ za $k \leq 0$, $= \tau^{-k}$ za $k \geq 0$.

(i) Neka je $S(k) = \sigma^{k-m}R(m)$ za $k \leq m$, $= R(k)$ za $k \geq m$. Niz b/S je ograničen na Z a za $n > m$ je $\frac{b(k)}{R(n)} = \frac{b(k)}{S(k)} \frac{S(k)}{S(n)}$ pa je je dovoljno dokazati (25) sa S umesto b i R. Kako je $\sigma^{-k}S(k)$ rastući a $\tau^{-k}S(k)$ opadajući niz <u>na Z</u> biće

$$\min(\sigma^{n-k}, \tau^{n-k}) \frac{S(k)}{S(n)} = \min\left\{ \frac{\sigma^{-k}S(k)}{\sigma^{-n}S(n)}, \frac{\tau^{-k}S(k)}{\tau^{-n}S(n)} \right\} \leq 1$$

za $k, n \in Z$.

(ii) Za $k < m \leq n$ je $v(k-n) = \sigma^{n-k}$ i

$$\sigma^{n-k} \left| \frac{b(k)}{R(n)} - \beta \frac{\rho^k}{\rho^n} \right| \leq \frac{\sup_{k<m} \sigma^{-k} |b(k)|}{\sigma^{-n}R\ n} + |\beta| \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{m-n}$$

gde desna strana ne zavisi od k i $\mapsto 0$ kad $n \mapsto \infty$ ((V.Z), str. II.11) te je dovoljno dokazati (26) sa $k \geq m$ umesto $k \in Z$ Kako je za $k \geq m$ i $n \geq m$

$$v(k-n) \left| \frac{b(k)}{R(n)} - \beta \frac{\rho^k}{\rho^n} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|b(k)|}{R(k)}\, v(k-n)\left|\frac{R(k)}{R(n)}-\frac{\rho^k}{\rho^n}\right| + v(k-n)\rho^{k-n}\left|\frac{b(k)}{R(k)}-\beta\right|$$
$$= \frac{|b(k)|}{R(k)}\, s(n,k) + t(n,k),$$

dovoljno je, zbog ograničenosti niza b/R na intervalu $[m,\infty[$ u $\mathbf{Z}$, dokazati: $\lim_{n\mapsto\infty}\sup_{k\geq m} s(n,k) = o$ i $\lim_{n\mapsto\infty}\sup_{k\geq m} t(n,k) = o$.

Neka je $p>o$ ceo broj. Majoriranjem niza s u slučajevima: 1^o $m\leq k\leq n-p$, 2^o $k\geq n+p$, 3^o $|k-n|\leq p$, dobijamo $s(n,k)\leq$

$$1^o \quad \frac{\sigma^{-k}R(k)}{\sigma^{-n}R(n)} + \frac{\sigma^{-k}\rho^k}{\sigma^{-n}\rho^n} \leq \frac{\sigma^{p-n}R(n-p)}{\sigma^{-n}R(n)} + \frac{\sigma^{p-n}\rho^{n-p}}{\sigma^{-n}\rho^n}$$

$$2^o \quad \frac{\tau^{-k}R(k)}{\tau^{-n}R(n)} + \frac{\tau^{-k}\rho^k}{\tau^{-n}\rho^n} \leq \frac{\tau^{-n-p}R(n+p)}{\tau^{-n}R(n)} + \frac{\tau^{-n-p}\rho^{n+p}}{\tau^{-n}\rho^n}$$

$$3^o \quad \sup_{|k-n|\leq p} v(k-n)\left|\frac{R(k)}{R(n)}-\rho^{k-n}\right| \leq M_p \sup_{|k|\leq p}\left|\frac{R(k+n)}{R(n)}-\rho^k\right|$$

($M_p = \sup_{|k|\leq p} v(k)$) odakle sledi

$$\lim.\sup_{n\mapsto\infty}\sup_{k\geq m} s(n,k) \leq 2\max\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^p,\left(\frac{\rho}{\tau}\right)^p\right\}$$

i konačno, kad $p\mapsto\infty$, $\lim_{n\mapsto\infty}\sup_{k\geq m} s(n,k) = o$.

Neka je $n\geq \max(m,o)$. Majoriranjem niza t za $m\leq k\leq n/2$ i $k\geq n/2$ dobijamo

$$\sup_{k\geq m} t(n,k) \leq \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{n/2}\sup_{k\geq m}\left|\frac{b(k)}{R(k)}-\beta\right| + \sup_{k\geq n/2}\left|\frac{b(k)}{R(k)}-\beta\right| \longrightarrow o$$

kad $n\mapsto\infty$.

POSLEDICA. — Neka je R PPZ niz indeksa ρ,σ i τ realni brojevi ($o<\sigma<\rho<\tau$), X B-prostor svih kompleksnih (realnih) nizova c na $\mathbf{Z}$ za koje je

$$\|c\| = \sup_{k\in \mathbf{Z}} |c(k)|\min(\sigma^k,\tau^k) < \infty,$$

F neprekidna kompleksna (realna) funkcija na X. Tada za svaki kompleksan (realan) niz b na $\mathbf{Z}$ iz $b(k) = O(\sigma^k)$ $(k\mapsto-\infty)$ i $\lim_{k\mapsto\infty} b(k)/R(k) = \beta$ sledi

$$\lim_{n\mapsto\infty} F\left[\frac{b(n-k)}{R(n)}\right] = F(\beta\rho^{-k}). \tag{27}$$

Iz (25) (posle smene $k = n-j$) sledi da se nizovi $\varphi_n(k) = b(n-k)/R(n)$ nalaze u X za dovoljno veliko $n > o$ a iz (26) da niz φ_n konvergira ka nizu $\beta\rho^{-k}$ u X kad $n \mapsto \infty$.

PRIMERI.— Navodimo primere funkcije F pretpostavljajući da su zadovoljeni ostali uslovi (koji se ne odnose na F) prethodne posledice.

3) Neka je a kompleksan niz na Z takav da je niz $a(k) \max(\sigma^{-k}, \tau^{-k})$ apsolutno sumabilan i neka je

$$F(c) = \sum_{k\in Z} a(k)c(k) .$$

Tada je F ograničena linearna funkcionela na X a (27) postaje (13) .

4) Neka su elementi prostora X realni nizovi, a realan niz na Z takav da je niz $a(k) \max(\sigma^{-k}, \tau^{-k})$ ograničen (na Z) i neka je

$$F(c) = \sup_{k\in Z} a(k)c(k) .$$

Iz $|F(c) - F(d)| \leq \sup_{k\in Z} |a(k)| \max(\sigma^{-k}, \tau^{-k}) \|c - d\|$ za $c,d \in X$ sledi da je funkcija F neprekidna na X i otuda

$$(28) \qquad \lim_{n\mapsto\infty} \sup_{k\in Z} a(k) \frac{b(n-k)}{R(n)} = \sup_{k\in Z} \beta a(k)\rho^{-k}.$$

što predstavlja uopštenje relacija (16_2) i (17_1) (str. II.11).

DOKAZ STAVA 1.Z.— a) Neka je m ceo a M realan broj takvi da je $R(k) > o$ za $k \geq m$ i $\min(\sigma^k, \tau^k) |b(n-k)|/R(n) \leq M$ za $k \in Z$ i $n \geq m$ (stav 2.Z.(i)). Niz $\varphi_n(k) = a(k)b(n-k)/R(n)$ ($k \in Z$, $n \geq m$) ima apsolutno sumabilnu dominantu $M|a(k)| \max(\sigma^{-k}, \tau^{-k})$. Kako je $\varphi_n(k) = a(k) \dfrac{b(n-k)}{R(n-k)} \dfrac{R(n-k)}{R(n)}$, biće za svako $k \in Z$ u slučaju (i) $\lim.\sup_{n\mapsto\infty} |\varphi_n(k)| = |a(k)| \alpha\rho^{-k}$ a u slučaju (ii) $\lim_{n\mapsto\infty} \varphi_n(k) = a(k)\alpha\rho^{-k}$ pa (13) sledi iz Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji a (12) iz $\lim.\sup_{n\mapsto\infty} \left|\sum_{k\in Z} \varphi_n(k)\right| \leq \sum_{k\in Z} \lim.\sup_{n\mapsto\infty} |\varphi_n(k)|$.

b(i) Uslov je dovoljan. Neka $R \in \mathcal{R}(\rho)$, $n \in Z$. Kako je $R(n-k) = O(\rho^{n-k}) = O(\rho^{-k})$ $(k \mapsto \infty)$, $= o(\tau^{n-k}) = o(\tau^{-k})(k \mapsto -\infty)$, biće $R(n-k) \leq M_n \max(\rho^{-k}, \tau^{-k})$ za neko $M_n > o$ i svako $k \in Z$.

Uslov je potreban. Niz ρ^k je iz $\mathcal{R}(\rho)$ pa je niz $a(k)\rho^{-k} = \rho^{-n}a(k)\rho^{n-k}$ apsolutno sumabilan na intervalu $]o,\infty[$ u $\mathbf{Z}$. Zato je dovoljno dokazati: niz $a(k)\tau^{-k}$ je apsolutno sumabilan na intervalu $]-\infty,o]$ u $\mathbf{Z}$ za neko $\tau>\rho$.

Za $c \in \mathbf{c}_o$ (B-prostor realnih nula-nizova na $\mathbb{N}$) neka je

$$(29)\quad R(c,k) = \rho^k \text{ za } k<o, \ = \rho^k \exp \sum_{j=o}^{k} c(j) \text{ za } k\geq o$$

PPZ niz indeksa ρ ((VI.Z),str.II.11), očito iz $\mathcal{R}(\rho)$, i

$$F(c) = \sum_{k\leq o} |a(k)|\, R(c,-k) = \sum_{k\leq o} |a(k)|\, \rho^{-k} \left\{\exp \sum_{j=o}^{-k} c(j)\right\}.$$

Kako je $R(c,-k) \leq R(c,n-k)(\exp\|c\|/\rho)^n$ $(n\geq o,\ k\leq o)$ a niz $k \mapsto a(k)R(c,n-k)$ je apsolutno sumabilan za neko $n>o$, biće F realna konačna funkcija na $\mathbf{c}_o$. Ako niz (c_n) u $\mathbf{c}_o$ konvergira ka c, onda je (na osnovu Fatouove leme)

$$F(c) \leq \lim.\inf_{n\to\infty} F(c_n)$$

te je funkcija F poluneprekidna odozdo na $\mathbf{c}_o$ odakle sledi da je ona ograničena na nekoj kugli $K[c_o,r]$ $(r>o)$ u $\mathbf{c}_o$ [20,CH IX, § 5,n°4,Th.2]. Neka c_o ima samo konačno mnogo koordinata $\neq o$. Tada je $F(c) \leq F(c_o+c)\exp\sum_{k\geq o}|c_o(k)| \leq M$ za neki realan broj M i $\|c\|\leq r$. Ako je $c_n(k) = r$ za $o\leq k\leq n$, $= o$ za $k>n$, onda iz

$$e^r \sum_{k=-n}^{o} |a(k)|\,(\rho e^r)^{-k} = \sum_{k=-n}^{o} |a(k)|\, R(c_n,-k) \leq M$$

sledi (kada $n\to\infty$) apsolutna sumabilnost niza $a(k)(\rho e^r)^{-k}$ na intervalu $]-\infty,o]$ u $\mathbf{Z}$.

b(ii) Uslov je dovoljan na osnovu stava 1.Z.a(i) jer je $O(\rho^k) = O(\sigma^k)$ $(k\mapsto-\infty)$ za svako $o<\sigma<\rho$.

Uslov je potreban. Pretpostavljamo da je niz a realan (u protivnom bismo ga razložili na realni i imaginarni deo). Niz $a(k)\tau^{-k}$ je apsolutno sumabilan na intervalu $]-\infty,o[$ u $\mathbf{Z}$ (tačka b(i)) pa je dovoljno dokazati: niz $a(k)\sigma^{-k}$ je apsolutno sumabilan na intervalu $[o,\infty[$ u $\mathbf{Z}$ za neko $o<\sigma<\rho$.

Kako je $\sum_{k<o} a(k)R(n-k) = O(R(n))$ $(n\mapsto\infty)$ (tačka a(i)), biće $\sum_{k\geq o} a(k)R(n-k) = O(R(n))$ $(n\mapsto\infty)$ za svako $R\in\mathcal{R}(\rho)$.

Neka je $R \in \mathfrak{R}(\rho)$ fiksirano. Neka je $c^o(k)$ produženje niza $c \in \mathbf{c}_o$ sa $\mathbb{N}$ na $\mathbf{Z}$ jednako o za $k<o$. Tada $(2\|c\|+c^o)R \in \mathfrak{R}(\rho)$ (za $c \neq o$) a kako je niz $2\|c\|+c^o$ logaritamski ograničen na $\mathbf{Z}$, biće

$$2\|c\| \sum_{k\geq o} a(k)R(n-k) + \sum_{k=o}^{n} a(k)R(n-k)c(n-k) =$$

$$2\|c\| \sum_{k\geq o} a(k)R(n-k) + \sum_{k\geq o} a(k)R(n-k)c^o(n-k) = O(R(n))$$

$(n \mapsto \infty)$ odakle sledi da je niz

$$c \longmapsto \sum_{k=o}^{n} a(n-k)\frac{R(k)}{R(n)}c(k) = \sum_{k=o}^{n} a(k)\frac{R(n-k)}{R(n)}c(n-k)$$

$(n \geq o)$ ograničenih linearnih funkcionela na $\mathbf{c}_o$ ograničen u svakoj tački iz $\mathbf{c}_o$ pa je niz njihovih normi ograničen, tj. niz $\sum_{k=o}^{n} |a(k)|\dfrac{R(n-k)}{R(n)}$ $(n \geq o)$ je ograničen za svako $R \in \mathfrak{R}(\rho)$.

Za $c \in \mathbf{c}_o$ neka je $R(c,k)$ niz (29). Tada je (za $n \geq o$)

$$F_n(c) = \sum_{k=o}^{n} |a(k)| \frac{R(c,n-k)}{R(c,n)} = \sum_{k=o}^{n} |a(k)|\, \rho^{-k} \left\{\exp \, - \sum_{j=n-k+1}^{n} c(j)\right\}$$

niz neprekidnih funkcija na $\mathbf{c}_o$ koji je ograničen u svakoj tački iz $\mathbf{c}_o$ te je uniformno ograničen na nekoj kugli $K[c_o,r]$ $(r>o)$ u $\mathbf{c}_o$ gde c_o ima samo konačno mnogo koordinata $\neq o$. Zato je $F_n(c) \leq F_n(c_o+c) \exp \sum_{k\geq o}|c_o(k)| \leq M$ za neki realan broj M, $\|c\| \leq r$ i $n \geq o$. Ako je $c_n(k) = -r$ za $o \leq k \leq n$, $= o$ za $k>n$, onda iz

$$F_n(c_n) = \sum_{k=o}^{n}|a(k)|(\rho e^{-r})^{-k} \leq M \quad \underline{\text{za svako}} \quad n \geq o$$

sledi apsolutna sumabilnost niza $a(k)(\rho e^{-r})^{-k}$ na intervalu $[o,\infty[$ u $\mathbf{Z}$.

STAV 2.$\mathbb{N}^*$— <u>Neka je</u> R <u>PP niz indeksa</u> ρ. <u>Za svaka dva realna broja</u> σ <u>i</u> τ, $\sigma<\rho<\tau$, <u>i svaki kompleksan niz</u> b <u>na</u> $\mathbb{N}^*$ <u>važi:</u>

(i) <u>Ako je</u> $b(k) = O(R(k))$ $(k\mapsto\infty)$, <u>onda je</u>

$$\limsup_{n\mapsto\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}^*} \min\left\{\left(\frac{n}{k}\right)^{\sigma},\left(\frac{n}{k}\right)^{\tau}\right\} \frac{|b(k)|}{R(n)} < \infty. \tag{30}$$

(ii) <u>Ako je</u> $\lim_{k\mapsto\infty} b(k)/R(k) = \mathfrak{b}$, <u>onda je</u>

$$\lim_{n\mapsto\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}^*} \min\left\{\left(\frac{n}{k}\right)^{\sigma},\left(\frac{n}{k}\right)^{\tau}\right\} \left|\frac{b(k)}{R(n)} - \mathfrak{b}\,\frac{k^{\rho}}{n^{\rho}}\right| = o. \tag{31}$$

Neka je $b(o)=o$. Funkcija $R([t])$ je pravilno promenljiva indeksa ρ (Teorema o utapanju, str.II.14) a funkcija $b([t])$ lokalno ograničena na $\mathbb{R}_+^*$ i $b([t])=O(t^\sigma)$ $(t\mapsto o+)$. (i) Iz $b(k)=O(R(k))$ $(k\mapsto\infty)$ sledi $b([t])=O(R([t]))$ $(t\mapsto\infty)$. Funkcija $(x,t)\longmapsto\min\{(x/t)^\sigma,(x/t)^\tau\}\,b([t])/R([t])$ je ograničena na skupu $[N,\infty[\times\mathbb{R}_+^*$ za neki prirodan broj $N>o$ (stav 2(i)) pa je ograničena i njena restrikcija na $\{N,N+1,..\}\times\mathbb{N}^*$ odakle sledi (30). (ii) Ako je $\lim_{k\mapsto\infty} b(k)/R(k)=\beta$, onda je $\lim_{t\mapsto\infty} b([t])/R([t])=\beta$ pa se (31) dobija iz

$$\sup_{n\geq N}\sup_{k\in\mathbb{N}^*}\min\left\{\left(\frac{n}{k}\right)^\sigma,\left(\frac{n}{k}\right)^\tau\right\}\left|\frac{b(k)}{R(k)}-\beta\,\frac{k^\rho}{n^\rho}\right|$$

$$\leq\sup_{x\geq N}\sup_{t>o}\min\left\{\left(\frac{x}{t}\right)^\sigma,\left(\frac{x}{t}\right)^\tau\right\}\left|\frac{b([t])}{R([x])}-\beta\,\frac{t^\rho}{x^\rho}\right|\longmapsto o\quad(\mathbb{N}^*\ni N\mapsto\infty)$$

(stav 2(ii)).

GLAVA IV

MERCEROVI ASIMPTOTSKI STAVOVI ZA PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE I NIZOVE

§ 1. MERCEROVI ASIMPTOTSKI STAVOVI ZA PRAVILNO PROMENLJIVE FUNKCIJE

STAV 1.— Neka je R PP funkcija indeksa ρ a f,g dve merljive kompleksne funkcije na $\mathbb{R}_+^*$ takve da je za neka dva realna broja σ,τ $(\sigma<\rho<\tau)$ i neki kompleksan broj λ:

funkcija $f(t)\max(t^{-\sigma},t^{-\tau})$ $t^{-1}dt$-integrabilna i

$$(1) \qquad 1 + \lambda\int_0^{\infty} f(t)t^z \frac{dt}{t} \neq 0 \quad \text{za svako } z\in\mathbb{C},\ -\tau\leq \Re z\leq -\sigma,$$

funkcija g lokalno ograničena na $\mathbb{R}_+^*$ i

$$(2) \qquad g(t) = O(\max(t^{\sigma},t^{\tau}))\ \ (|\log t|\mapsto\infty).$$

Za funkciju $\quad g_\lambda(x) = g(x) + \lambda\int_0^{\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t} \quad (x>0)\quad$ važi

$$\text{(i)} \qquad g_\lambda(x) = O(R(x))\ (x\mapsto\infty) \Longrightarrow g(x) = O(R(x))\ (x\mapsto\infty)$$

$$\text{(ii)}\ \lim_{x\mapsto\infty}\frac{g_\lambda(x)}{R(x)} = \beta \Longrightarrow \lim_{x\mapsto\infty}\frac{g(x)}{R(x)} = \beta\left\{1 + \lambda\int_0^{\infty} f(t)t^{-\rho}\frac{dt}{t}\right\}^{-1}$$

Funkcija $w(t) = \max(t^{-\sigma},t^{-\tau})$ $(t>0)$ je neprekidna, strogo pozitivna i zadovoljava uslove $w(st)\leq w(s)w(t)$, $w(1)=1$.

Iz pretpostavki o funkciji f sledi da $f\in L^w(\mathbb{R}_+^*)$ (I, str. 3) i da je element $\tilde{e}+\lambda f$ algebre $\tilde{L}^w(\mathbb{R}_+^*)$ inverzibilan (I, str. 9, primer 1); neka je $(\tilde{e}+\lambda f)^{-1} = \tilde{e} + f_\lambda$, $f_\lambda\in L^w(\mathbb{R}_+^*)$.

Iz pretpostavki o funkciji g sledi da je $g(t)/w(t^{-1}) = g(t)v(t)$ ograničena funkcija na $\mathbb{R}_+^*$ pa je funkcija $(g_\lambda - g)v = (f\ast g)v$ bitno ograničena i neprekidna (I, str. 7, (x)a) i otuda ograničena na $\mathbb{R}_+^*$. Zato je i funkcija $g_\lambda v$ ograničena na $\mathbb{R}_+^*$. Jednakost $g = ((\tilde{e}+\lambda f)^{-1}\ast(\tilde{e}+\lambda f))\ast g = g_\lambda + f_\lambda\ast g_\lambda$

(I, str. 9, (xi)) važi s.s. a kako su funkcije $g - g_\lambda$ i $f_\lambda * g_\lambda$ neprekidne, važiće ona i svuda na $\mathbb{R}_+^*$.

Konačno se (i) ((ii)) dobija iz stava 1a(i) ((ii)) (III, str.3) primenjenog na funkcije f_λ, g_λ. Treba samo, u slučaju (ii), primetiti da iz multiplikativnosti funkcionele $\zeta(\mu\tilde{e}+h) = \mu + \int_0^\infty h(t)t^{-\rho}\frac{dt}{t}$ na $L^w(\mathbb{R}_+^*)$ (I, str.6, (vii) i str.9, primer 1) sledi $(1+\lambda\zeta(f))(1+\zeta(f_\lambda)) = \zeta(\tilde{e}) = 1$.

POSLEDICA.— <u>Važi stav koji se dobija iz stava 1 kada se u</u> (1) <u>i</u> (2) <u>zameni</u> a) σ sa ρ <u>ili</u> b) τ sa ρ <u>ili</u> c) σ i τ sa ρ .

a) Neka je za $\sigma \leq \alpha \leq \rho$: $w_\alpha(t) = \max(t^{-\alpha}, t^{-\tau})$, $v_\alpha(t) = 1/w_\alpha(t^{-1})$, $U_\alpha = \{z \in \mathbb{C}: -\tau \leq \Re z \leq -\alpha\}$, $U_\sigma = U$. Tada je $w_\alpha \leq w_\sigma = w$, $v_\alpha \leq v_\rho$ pa $f \in L^{w_\alpha}(\mathbb{R}_+^*)$, $gv_\alpha = O(1)$ na $\mathbb{R}_+^*$. Zato je dovoljno dokazati (stav 1) da je $1 + \lambda\hat{f}(z) \neq o$ na nekom skupu U_α $(\sigma \leq \alpha < \rho)$ gde je $\hat{f}(z) = \int_0^\infty f(t)t^z\frac{dt}{t}$ $(z \in U)$. Funkcija $\hat{f}$ je neprekidna (na U) i $\mapsto o$ kada $|z| \mapsto \infty$ $(z \in U)$. Prvo sledi, na osnovu Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji, iz $|f(t)t^z| = |f(t)|t^{\Re z} \leq |f(t)|w(t)$ za $t > o$, $fw \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ i neprekidnosti funkcije $z \mapsto t^z$ $(z \in U)$ za svako $t > o$. Drugo se može dobiti primenom principa konvergencije na familiju $\zeta_z(h) = \hat{h}(z)$ $(z \in U)$ ograničenih linearnih funkcionela na $L^w(\mathbb{R}_+^*)$: 1^o $\|\zeta_z\| = \sup_{t>o}|t^z|/w(t) \leq 1$, 2^o ako je h karakteristična funkcija intervala $[a,b]$ u $\mathbb{R}_+^*$ (skup takvih funkcija je fundamentalan u $L^w(\mathbb{R}_+^*)$), onda je

$$|\zeta_z(h)| = |b^z - a^z|/|z| \leq \{w(b) + w(a)\}/|z| \mapsto o \quad (|z| \mapsto \infty).$$

Sada je funkcija $1 + \lambda\hat{f}(z)$ $(z \in U)$ neprekidna na U i $\mapsto 1$ kada $|z| \mapsto \infty$ pa je skup njenih nula, N, kompaktan. Kako je on, po pretpostavci, disjunktan sa U_ρ, biće (kada je $N \neq \emptyset$) $m = -\min_{z\in N}\Re z < \rho$ pa se za α može uzeti bilo koji broj iz $]m, \rho[$.

Sličan je dokaz u slučaju b) ili c).

STAV 2.— <u>Neka je</u> R <u>PP funkcija indeksa</u> ρ <u>a</u> f <u>merljiva kompleksna funkcija na intervalu</u> $[1,\infty[$ <u>i</u> g <u>merljiva lokalno ograničena kompleksna funkcija na</u> $\mathbb{R}_+^*$ <u>takve da je za neki realan broj</u> $\sigma < \rho$ <u>i neki kompleksan broj</u> λ :

<u>funkcija</u> $f(t)t^{-\sigma}$ <u>$t^{-1}dt$-integrabilna na</u> $[1,\infty[$,

(3) $1 + \lambda\int_1^\infty f(t)t^z\frac{dt}{t} \neq o$ <u>za svako</u> $z \in \mathbb{C}$, $\Re z \leq -\sigma$,

(4) $$g(t) = O(t^{\sigma}) \quad (t \mapsto o+).$$

<u>Za funkciju</u> $g_{\lambda}(x) = g(x) + \lambda\int_1^{\infty} f(t)g(\frac{x}{t})\,\frac{dt}{t}$ $(x > o)$ <u>važe implikacije</u> (i) <u>i</u> (ii), <u>sa</u> $\int_1^{\infty}$ <u>umesto</u> $\int_o^{\infty}$, <u>iz stava 1.</u>

Dokaz ovog stava paralelan je dokazu prethodnog.

Neka je $M = [1,\infty[$, $w(t) = t^{-\sigma}$ $(t > o)$ neprekidni automorfizam grupe $\mathbb{R}_+^*$. Primećujemo da je $v(t) = 1/w(t^{-1}) = w(t)$.

Po pretpostavci: $f \in L^w(M)$, element $\tilde{e} + \lambda f$ algebre $\tilde{L}^w(M)$ je inverzibilan; neka je $(\tilde{e} + \lambda f)^{-1} = \tilde{e} + f_{\lambda}$, $f_{\lambda} \in L^w(M)$. Kako je preslikavanje $\mu\tilde{e} + h \mapsto \mu\tilde{e} + h^o$ homomorfizam algebre $\tilde{L}^w(M)$ u $\tilde{L}^w(\mathbb{R}_+^*)$ (I,str.3), biće $(\tilde{e} + \lambda f^o) * (\tilde{e} + (f_{\lambda})^o) = \tilde{e}$.

Po pretpostavci je funkcija gw ograničena na svakom intervalu $]o,x]$ (u $\mathbb{R}_+^*$) pa je takva i $(g_{\lambda} - g)w = (f^o * g)w$ jer je neprekidna na $\mathbb{R}_+^*$ i bitno ograničena na svakom intervalu $]o,x]$ (I,str. 7, (x)a) .Zato je funkcija $g_{\lambda}w$ ograničena na svakom intervalu $]o,x]$. Jednakost

$$g = ((\tilde{e} + \lambda f^o) * (\tilde{e} + (f_{\lambda})^o) * g = g_{\lambda} + (f_{\lambda})^o * g_{\lambda}$$

važi najpre s.s. (I,str. 9, (xi)) a zatim,zbog neprekidnosti funkcija $g - g_{\lambda}$ i $(f_{\lambda})^o * g_{\lambda}$, i svuda na $\mathbb{R}_+^*$.

Konačno se (i) ((ii)) dobija iz stava 1a(i) ((ii)) (III, str.3) primenjenog na funkcije $(f_{\lambda})^o$, g_{λ}.

POSLEDICA.— <u>Važi stav koji se dobija iz stava 2 kada se u</u> (3) <u>i</u> (4) σ <u>zameni sa</u> ρ .

Ova posledica se dobija na isti način kao i posledica a) stava 1; pri tome je: $w_{\alpha}(t) = t^{-\alpha}$ i $U_{\alpha} = \{z \in \mathbb{C}: \Re z \le -\alpha\}$ za $\sigma \le \alpha \le \rho$, $\hat{f}(z) = \int_1^{\infty} f(t)t^z\,\frac{dt}{t}$ za $z \in U = U_{\sigma}$.

§ 2. PRIMENE: HÖLDEROVE I CESÀROVE SREDINE

Pokazaćemo da posledica stava 2 daje u slučaju Hölderovih (Cesàrovih) sredina teoremu 1 (teoremu 2) iz [O4].

U ovom odeljku je: R <u>PP funkcija indeksa</u> $\rho > -1$, g <u>merljiva lokalno ograničena kompleksna funkcija na</u> $\mathbb{R}_+^*$ <u>jednaka</u> $O(t^{\rho})$ $(t \mapsto o+)$, $k = 1,2,\ldots$ <u>a</u> λ <u>kompleksan broj</u>.

<u>Hölderova sredina</u> (reda k) funkcije g definisana je sa

$$H_k g(x) = \frac{1}{\Gamma(k)x} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} g(t)\, dt$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{(\log t)^{k-1}}{\Gamma(k)t}\, g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^{\infty} h_k(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

gde je $h_k(t) = (\log t)^{k-1}/\Gamma(k)t$ za $t \geq 1$. Kako je funkcija $h_k(t)t^{-\sigma}$ dt/t-integrabilna na $[1,\infty[$ za $-1 < \sigma < \rho$ i

$$\hat{h}_k(z) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_1^{\infty} (\log t)^{k-1} t^{z-1} \frac{dt}{t} = (1-z)^{-k} \quad \text{za} \quad \Re z \leq -\rho,$$

biće: <u>ako je</u> $\lambda + (1-z)^k \neq 0$ <u>za svako</u> $\Re z \leq -\rho$, <u>onda važi</u>

$$\lim_{x \mapsto \infty} \frac{1}{R(x)} \left\{ g(x) + \lambda H_k g(x) \right\} = \beta \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{R(x)} = \beta \frac{(1+\rho)^k}{\lambda + (1+\rho)^k}.$$

<u>Cesàrova sredina</u>(reda k) funkcije g definisana je sa

$$C_k g(x) = \frac{k}{x} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1} g(t) dt$$

$$= \int_1^{\infty} k(t-1)^{k-1} t^{-k} g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^{\infty} c_k(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \quad (x > 0)$$

gde je $c_k(t) = k(t-1)^{k-1}t^{-k}$ za $t \geq 1$. Iz dt/t-integrabilnosti funkcije $c_k(t)t^{-\sigma}$ na $[1,\infty[$ za $-1 < \sigma < \rho$ i

$$\hat{c}_k(z) = k\int_1^{\infty} (t-1)^{k-1} t^{z-k} \frac{dt}{t} = k\int_0^1 (1-t)^{k-1} t^{-z} dt$$

$$= kB(k,1-z) = \frac{k\Gamma(k)\Gamma(1-z)}{\Gamma(k+1-z)} = \binom{k-z}{k}^{-1} \quad \text{za} \quad \Re z \leq -\rho$$

sledi: <u>ako je</u> $\lambda + \binom{k-z}{k} \neq 0$ <u>za svako</u> $\Re z \leq -\rho$, <u>onda važi</u>

$$\lim_{x \mapsto \infty} \frac{1}{R(x)} \left\{ g(x) + \lambda C_k g(x) \right\} = \beta \Longrightarrow \lim_{x \mapsto \infty} \frac{g(x)}{R(x)} = \beta \frac{\binom{k+\rho}{k}}{\lambda + \binom{k+\rho}{k}}.$$

§ 3. MERCEROVI ASIMPTOTSKI STAVOVI ZA PRAVILNO PROMENLJIVE NIZOVE NA Z

STAV 1.Z.— <u>Neka je</u> R <u>PPZ niz indeksa</u> ρ <u>a</u> a,b <u>dva kompleksna niza na</u> Z <u>takva da je za neka dva realna broja</u> σ,τ $(0 < \sigma < \rho < \tau)$: <u>niz</u> $a(k)\max(\sigma^{-k},\tau^{-k})$ <u>apsolutno sumabilan na</u> Z,

(5) $\sum_{k\in Z} a(k)z^k \neq 0$ <u>za svako</u> $z \in \mathbb{C}$, $1/\tau \leq |z| \leq 1/\sigma$,

(6) $b(k) = O(\max(\sigma^k, \tau^k))$ $(|k| \to \infty)$.

<u>Za niz</u> $c(n) = \sum_{k\in Z} a(k)b(n-k)$ $(n \in Z)$ <u>važi</u>

(i) $c(n) = O(R(n))$ $(n \to \infty) \Longrightarrow b(n) = O(R(n))$ $(n \to \infty)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{c(n)}{R(n)} = \beta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b(n)}{R(n)} = \beta \left\{ \sum_{k\in Z} a(k)\rho^{-k} \right\}^{-1}$.

Niz $w(k) = \max(\sigma^{-k}, \tau^{-k})$ $(k \in Z)$ je strogo pozitivan na Z i zadovoljava uslove $w(j+k) \leq w(j)w(k)$, $w(0) = 1$. Po pretpostavci: $a \in L^w(Z)$ i inverzibilan je (I, s.10, primer 3), niz $b(k)/w(-k) = b(k)v(k)$ je ograničen na Z. Zato je (I, s.7, (x)b)
$b = (a^{-1} * a) * b = a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * c$ pa (i) ((ii)) sledi iz stava 1.Z a(i) ((ii)) (III, s.5) primenjenog na nizove a^{-1}, c. Treba samo, u slučaju (ii), primetiti da iz multiplikativnosti funkcionele $\hat{a}(\rho^{-1}) = \sum_{k\in Z} a(k)\rho^{-k}$ na $L^w(Z)$ (I, s.6, (vii) i s.10, primer 3) sledi $1 = \hat{a^{-1}}(\rho^{-1})\hat{a}(\rho^{-1})$.

POSLEDICA.— <u>Važi stav koji se dobija iz stava 1.Z kada se u</u> (5) <u>i</u> (6) <u>zameni</u> a) σ sa ρ <u>ili</u> b) τ sa ρ <u>ili</u> c) σ i τ sa ρ .

a) Neka je $\sigma \leq \alpha \leq \rho$, $U_\alpha = \{ z \in \mathbb{C}: 1/\tau \leq |z| \leq 1/\alpha \}$. Kako je $\max(\alpha^{-k}, \tau^{-k}) \leq \max(\sigma^{-k}, \tau^{-k})$ i $\max(\rho^k, \tau^k) \leq \max(\alpha^k, \tau^k)$, biće niz $a(k)\max(\alpha^{-k}, \tau^{-k})$ apsolutno sumabilan na Z i $b(k) = O(\max(\alpha^k, \tau^k))$ $(|k| \to \infty)$. Zato je dovoljno dokazati (na osnovu prethodnog stava) da je $\hat{a}(z) = \sum_{k\in Z} a(k)z^k \neq 0$ na nekom skupu U_α $(\sigma \leq \alpha < \rho)$. Kompleksna funkcija $\hat{a}(z)$ $(z \in U_\sigma)$ je neprekidna pa je skup N njenih nula kompaktan. Kako je on, po pretpostavci, disjunktan sa U_ρ, biće (za $N \neq \emptyset$) $m = \min_{z\in N} |z| > 1/\rho$ pa se za α može uzeti bilo koji broj iz $[1/m, \rho[$.

Sličan je dokaz u slučaju b) ili c).

STAV 2.Z.— <u>Neka je</u> R <u>PPZ niz indeksa</u> ρ <u>a</u> a <u>kompleksan niz na</u> $\mathbb{N}$ <u>i</u> b <u>kompleksan niz na</u> Z <u>takvi da je za neki realan broj</u> σ $(0 < \sigma < \rho)$: <u>niz</u> $a(k)\sigma^{-k}$ <u>apsolutno sumabilan na</u> $\mathbb{N}$,

(7) $\sum_{k\in Z} a(k)z^k \neq 0$ <u>za svako</u> $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1/\sigma$,

(8) $$b(k) = O(\sigma^k) \quad (k \mapsto -\infty) .$$

<u>Za niz</u> $c(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a(k)b(n-k)$ $(n \in Z)$ <u>važe implikacije</u> (i) <u>i</u> (ii), <u>sa</u> $k \in \mathbb{N}$ <u>umesto</u> $k \in Z$, <u>iz stava 1.Z.</u>

Neka je $w(k) = \sigma^{-k}$ $(k \in Z)$. Po pretpostavci: $a \in L^w(\mathbb{N})$ i inverzibilan je (I,s.11,primer 4), $b(k) = O(w(-k))$ $(k \mapsto -\infty)$ pa je $c(k) = O(w(-k)) = O(\sigma^k)$ $(k \mapsto -\infty)$ i

$$b = ((a^{-1})^o * a^o) * b = (a^{-1})^o * (a^o * b) = (a^{-1})^o * c$$

(I,s. 7,(x)b i s. 9 ,primer 3). Sada se (i) ((ii)) dobija iz stava 1.Za(i) ((ii)) (III,s.5) primenjenog na nizova $(a^{-1})^o$, c. Treba samo, u slučaju (ii),primetiti da iz multiplikativnosti funkcionele $\hat{a}(\rho^{-1}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a(k)\rho^{-k}$ na $L^w(\mathbb{N})$ (I,s.11,primer 4) sledi $\hat{a}^{-1}(\rho^{-1})\hat{a}(\rho^{-1}) = 1$ i otuda $\sum_{k\in Z} (a^{-1})^o(k)\rho^{-k} = 1/ \sum_{k\in Z} a^o(k)\rho^{-k} = 1/\hat{a}(\rho^{-1})$.

POSLEDICA.— <u>Važi stav koji se dobija iz stava 2.Z kada se u</u> (7) <u>i</u> (8) σ <u>zameni sa</u> ρ .

Neka je $\sigma \leq \alpha \leq \rho$, $U_\alpha = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1/\alpha\}$. Kako je $\rho^{-k} \leq \alpha^{-k} \leq \sigma^{-k}$ za $k \geq o$, biće niz $a(k)\alpha^{-k}$ apsolutno sumabilan na $\mathbb{N}$ i $b(k) = O(\alpha^k)$ $(k \mapsto -\infty)$ pa je (na osnovu prethodnog stava) dovoljno dokazati da je $\hat{a}(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a(k)z^k \neq o$ na nekom skupu U_α $(\sigma < \alpha < \rho)$. Realna funkcija $|\hat{a}(z)|$ $(z \in U_\sigma)$ je neprekidna pa je skup njenih nula kompaktan i (po pretpostavci) disjunktan sa U_ρ. Zato je minimum tog skupa,m ,$> 1/\rho$ pa se za α može uzeti bilo koji realan broj iz intervala $[1/m,\rho[$.

PRIMEDBA.— Mercerove asimptotske stavove za PP nizove dali su S.ZIMERING [46] za inverzibilne trougaone matrice i S.ALJANČIĆ [05] za Hlderove i Cesàrove sredine.

LITERATURA

ADAMOVIĆ, D. D.

[01] Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata (I)-(II), Matem.vesnik (2-3) 3 (18) (1966); 123-136, 161-172.

[02] Sur la convergence des rapports de la somme partielle au terme général et du reste au terme général d'une série réelle ou complexe, Publ. Inst. Math. (Beograd), 15 (29) (1973), 5-20.

ALJANČIĆ, S.

[03] Asymptotic Mercerian theorems involving slowly varying functions, Mat. Vesnik (4) 10 (25) (1973), 331-337.

[04] Asymptotische Mercersätze für Hölder- und Cesàro Mittel, Publ. Inst. Math. (Beograd) 17 (31) (1974), 5-16.

[05] Deux théorèmes merceriens asymptotiques pour des suites à comportement lent, (u štampi).

ALJANČIĆ, S.; BOJANIĆ, R.; TOMIĆ, M.

[06] Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 7 (1954), 81-94.

[07] Slowly varying functions with remainder term and their applications in Analysis, Serbian Acad. Sci. Arts, Monographs vol. CDLXVII, Beograd, 1974.

AVAKUMOVIĆ, V. G.

[08] Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité, C. R. Acad. Sci. Paris 200 (1935), 1515-1517.

[09] O jednom O-inverznom stavu, Rad JAZU 79 (1936),169-186

BAJŠANSKI, B.

[10] The asymptotic behavior of the n^{th} order difference, Enseignement Math. 15 (1969), 29-41.

[11] O sporo promenljivim funkcijama, Predavanje u Matematičkom Institutu, Beograd, 20.09.1974.

BAJŠANSKI, B.; KARAMATA, J.

[12] Regularly varying functions and the principle of equicontinuity, MRC Report 517,Univ. of Wisconsin,Madison, 1964.

BAUMANN, H.

[13] Umkehrsätze für das asymptotische Verhalten linearer Folgentransformationen, Math. Z. 98 (1967), 140-178.

BOJANIĆ, R.; KARAMATA, J.

[14] On slowly varying functions and asymptotic relations, MRC Report 432, Univ. of Wisconsin, Madison, 1963.

BOJANIĆ, R.; KARAMATA, J.; VUILLEUMIER, M.

[15] A contribution to the Asymptotic Analysis in lattice-ordered groups, MRC Report 329, Univ. of Wisconsin, Madison, 1962.

BOJANIĆ, R.; LEE, Y. H.

[16] A survey of recent results and problems in the study of convolution products of sequences, Approximation Theory, Academic Press, 1973, p. 263-268.

BOJANIĆ, R.; LEE, Y. H.

[17] An estimate for the rate of convergence of convolution products of sequences, SIAM J. Math. Anal. (3) 5 (1974), 452-462.

BOJANIĆ. R.; SENETA, E.

[18] A unified theory of regularly varying sequences, Math. Z., 134 (1973), 91-106.

BOJANIĆ, R.; VUILLEUMIER, M.

[19] Asymptotic properties of linear operators, Communicated at the Symposium on Approximation Theory, Edmonton, Alberta, May 28 - June 1, 1972.

BOURBAKI, N.

Éléments de mathématique :

[20] Livre III, Topologie générale, Engleski prevod: General Topology, Part 2, Addison-Wesley, 1966.

[21] Livre IV, Fonctions d'une variable réelle (Théorie élémentaire). Ruski prevod, Nauka, Moskva, 1965.

[22] Livre VI, Integration. Ruski prevod; Chap. I-V, VI-VIII, Nauka, Moskva, 1967, 1970.

[23] Théories spectrales, Chap. I-II, Actual. Scient. Ind., n° 1332, Hermann, Paris, 1967.

DELANGE, H.

[24] Sur deux questions posées par M. Karamata, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 7 (1954), 69-80.

DRASIN, D.

[25] Tauberian theorems and slowly varying functions, Trans. Amer. Math. Soc. 133 (1968), 333-356.

EDWARDS, R. E.

[26] Functional Analysis, Theory and Applications, Ruski prevod, MIR, Moskva, 1969.

GALAMBOS, J.; SENETA, E.

[27] Regularly varying sequences, Proc. Amer. Math. Soc. (1) 41 (1973), 110-116.

GEL'FAND, I. M.; RAĬKOV, D. A.; ŠILOV, G. E.

[28] Commutative normed rings, Gostehizdat, Moscow, 1960.

KARAMATA, J.

[29] Sur un mode de croissance régulière des fonctions, Mathematica (Cluj) 4 (1930), 38-53.

[30] Sur un mode de croissance régulière, Théorèmes fondamentaux, Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 55-62.

[31] Primedba na prethodni rad g. V. Avakumovića sa obradom jedne klase funkcija koje se javljaju kod inverznih stavova zbirljivosti, Rad JAZU 79 (1936), 187-200.

KORENBLYUM, B. I.

[32] A general Tauberian theorem for the ratio of functions Dokl. Akad. Nauk SSSR 88 (1953), 745-748.

KOREVAAR, J.; VAN AARDENNE-EHRENFEST, T.; DE BRUIJN, N. G.

[33] A note on slowly oscillating functions, Nieuw Arch Wisk. (2) 23 (1949), 77-86.

LEE, Y. H.

[34] Asymptotic properties of convolution products of sequences, Publ. Inst. Math. (Beograd) 17 (31) (1974), 91-108.

MATUSZEWSKA, W.

[35] Regularly increasing functions in connection with the theory of $L^{*\varphi}$-spaces, Studia Math. 21 (1962), 317-344.

[36] A remark on my paper "Regularly increasing functions in connection with the theory of $L^{*\varphi}$-spaces", Studia Math. 25 (1965), 265-269.

MERCER, J.

[37] On the limits of real variants, Proc. London Math. Soc. (2) 5 (1907), 206-224.

PITT, H. R.

[38] Mercerian Theorems, Proc. Cambridge Phil. Soc. 34 (1938), 510-520.

[39] Tauberian Theorems, Oxford University Press, 1958.

PÓLYA, G.; SZEGÖ, G.

[40] Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I, Springer, 1925.

SENETA, E.

[41] An interpretation of some aspects of Karamata's theory of regular variation, Publ. Inst. Math. (Beograd), 15 (29) 1973 , 111-119.

SONI, K.; SONI, R. P.

[42] Slowly varying functions and asymptotic behavior of a class of integral transforms, I, J. Math. Anal. Appl. 49 (1975), 166-179.

VUILLEUMIER, M.

[43] Comportement asymptotique des transformations linéaires des suites, Thèse, Genève, 1966.

[44] Sur le comportement asymptotique des transformations linéaires des suites, Math. Z. 98 (1967), 126-139.

ZELLER, K.; BEEKMANN, W.

[45] Theorie der Limitierungsverfahren, Zweite, erweiterte und verbesserte Auflage, Springer, 1970.

ZIMERING, S.

[46] Some Mercerian theorems for regularly varying sequences Publ. Inst. Math. (Beograd) 15 (29) (1973), 171-177.