CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND XI 2.

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ELFTEN BANDES ZWEITE ABTEILUNG.



HERAUSGEGEBEN

VON DER

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

1924—1929.

4767. 3003

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ELFTEN BANDES ZWEITE ABTEILUNG

ABHANDLUNG 1

HERAUSGEGEBEN

VON DER

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN

1924.

ÜBER DIE GEODÄTISCHEN ARBEITEN VON GAUSS

VON

A. GALLE

Die Wissenschaft soll die Freundin der Praxis sein, aber nicht ihre Sklavin, sie soll ihr schenken, aber nicht ihr dienen.

GAUSS nach M. STERN.

Einleitung[1]).

Als sich GAUSS auf dem Collegium Carolinum in Braunschweig für die Universitätsstudien vorbereitete, fand er 1794, also im Alter von siebzehn Jahren die Methode der kleinsten Quadrate. Während die Konstruktion des Siebzehnecks, die ihm zwei Jahre später glückte, nach glaubwürdigen Berichten[2]) die endgültige Entscheidung für das Studium der Mathematik zur Folge hatte, und damit seinem Leben die innere Richtung wies, hat jene frühere Entdeckung dazu beigetragen, seinen äusseren Lebensgang zu beeinflussen.

Zum ersten Mal erwähnt GAUSS dieses Verfahren in einem Schreiben an den Freiherrn VON ZACH in Gotha, mit dem er, vermutlich auf den Rat des Obersten VON LECOQ (vgl. weiter unten Nr. 8, S. 16) in einen Briefwechsel getreten war, in dessen Verlaufe er um die Erlaubnis bat, auf der Gothaer Sternwarte einige Zeit zu seiner Ausbildung zu beobachten[3]). In den von VON ZACH begründeten und redigierten »Allgemeinen Geographischen Ephemeriden« war ein Auszug von ULUGH BEIGHS Zeitgleichungstafel erschienen[4]), auf den GAUSS im Frühjahr

---

1) Verzeichnis der Abkürzungen.

Werke für C. F. GAUSS, Werke, Bd. I—XI.

G.-SCH. für Briefwechsel zwischen C. F. GAUSS und H. C. SCHUMACHER, herausgegeben von C. A. F. PETERS. 6 Bände, Altona 1860—65.

G.-B. für Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Leipzig 1880.

G.-O. für WILHELM OLBERS, sein Leben und seine Werke. Zweiter Band. Briefwechsel zwischen OLBERS und GAUSS. Erste Abteilung. Berlin 1900. Zweite Abteilung. Berlin 1909.

G.-G. für Briefe von GAUSS an GERLING und von GERLING an GAUSS, nicht veröffentlicht.

2) W. SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN, *Gauss zum Gedächtnis*, Leipzig 1856.

3) Vergl. M. BRENDEL, *Über Gauss' praktisch-astronomische Arbeiten*, in diesem Bande.

4) Allg. Geogr. Ephemeriden Band 3, 1799 Februar, S. 182, Werke, Bd. XI 1.

1799 sein Verfahren anwandte und dabei zu »manchen ganz kuriosen Resultaten« gelangte. Er hebt hervor, dass er dabei eine ihm eigentümliche, seit Jahren gebrauchte Methode benutzt habe, Grössen, die zufällige Fehler involvieren, auf eine willkürfreie, konsequente Art zu kombinieren[1]).

Die Methode der kleinsten Quadrate war zugleich für GAUSS eine der Brücken, die von der reinen zur angewandten Mathematik hinüberführten und damit die vielseitige Entfaltung seines Geistes ermöglichten, der auch auf allen praktischen Gebieten, denen er sich zuwandte, bahnbrechend wirkte. GAUSS hat in der Betätigung in beiden Richtungen sein höchstes Ideal erblickt und dies OLBERS gegenüber in die im Ausdruck sich beschränkenden, aber die Sache treffenden Worte gekleidet, die wie eine vorahnend verfasste Überschrift über seinem Leben und Wirken leuchten: »Der feinste Geometer und der vollendete Astronom — das sind zwei Titel, die ich von ganzem Herzen einzeln hoch schätze, und denen ich mit leidenschaftlicher Wärme huldige, wenn sie vereint sind«[2]).

I. Abschnitt. Die Methode der kleinsten Quadrate.

1. Entstehungszeit. GAUSS hat nach seinem eigenen Zeugnis auf das von ihm gebrauchte Verfahren, für das er später nach LEGENDRES Vorgang den Namen »Methode der kleinsten Quadrate« einführte, niemals grossen Wert gelegt, und zwar insofern nicht, als ihm vom ersten Anfang an der Gedanke so natürlich, so äusserst naheliegend schien, dass er nicht im geringsten zweifelte, viele Personen, die mit Zahlenrechnungen zu verkehren gehabt, z. B. EULER, LAMBERT, HALLEY, müssten von selbst auf einen solchen Kunstgriff gekommen sein und ihn gebraucht haben, ohne deswegen es der Mühe wert zu halten, viel Aufhebens von einer so natürlichen Sache zu machen. Namentlich hat er sich oft geäussert, er wolle die allergrösste Wette eingehen, dass TOBIAS MAYER bei seinen Rechnungen dieselbe Methode schon angewandt habe. Später musste er sich allerdings aus Papieren von MAYER, die er in die Hände bekam, überzeugen, dass er jene Wette verloren haben würde[3]).

1) G.-SCH. Nr. 410. Werke VIII, S. 138, vergl. G.-O. Nr. 255, Werke VIII, S. 140.

2) G.-O. Nr. 1.

3) G.-SCH. Nr. 701, Werke VIII, S. 141.

Auf der andern Seite betonte er in den Briefen an seine Freunde, dass er früher als LEGENDRE, der ihm mit der Veröffentlichung zuvorgekommen war, die Methode gefunden hatte[1]). Er erwähnt dabei, dass er sie verschiedenen seiner Mitstudierenden mitgeteilt habe, unter anderm seinem Freunde BOLYAI. Auch hatte er sie dem damals sechzigjährigen KLÜGEL gezeigt, den er 1799 in Helmstedt getroffen zu haben scheint.

GAUSS hat aber das Verfahren in Bezug auf den grossen Nutzen, den es leistet, durchaus nicht unterschätzt; und es bleibt nur merkwürdig, dass er es in einem Alter entdeckt hat, in dem die für einen erfahrenen Rechner in ihrer Tragweite vielleicht übersehbare Erfindung andern ganz fern gelegen hätte.

2. Grundgedanke. Auf den Grundgedanken kam er zuerst im Herbst 1794, als er in dem Werke von LAMBERT »*Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung*« die Betrachtungen über die Behandlung einer Überzahl von Beobachtungen las. Es handelt sich offenbar um den Artikel[2]) »*Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche*«, in dem LAMBERT unter andern Beispielen die Länge des tropischen Jahres, wofür zwei Beobachtungen genügen würden, aus CASSINIS mehr als ein halbes Jahrhundert umfassenden Beobachtungen der Zeiten der Nachtgleichen und Sonnenwenden berechnet. Das Verfahren, das LAMBERT geometrisch einkleidet, kommt auf folgendes hinaus:

Die Fehlergleichungen haben in seinem Beispiel die einfache Form

$$l_i + v_i = t_i x + y,$$

so dass die Normalgleichungen

$$[tl] = [t^2]x + [t]y \quad \text{und} \quad [l] = [t].x + ny$$

lauten. LAMBERT teilt nun die n Beobachtungen in zwei Teile und setzt statt der letzten Normalgleichung für die beiden Teile getrennt

$$[l_1] = [t_1].x + n_1 y \quad \text{und} \quad [l_2] = [t_2].x + n_2 y$$

oder mit Einführung von Mittelwerten L, T

$$L_1 = T_1 x + y \quad \text{und} \quad L_2 = T_2 x + y,$$

1) Vergl. v. LINDENAU und BOHNENBERGER, Zeitschrift für Astronomie, Bd. II, S. 192, Fussnote.

2) Bd. I, Berlin 1765, S. 424.

woraus er

$$x = \frac{L_1 - L_2}{T_1 - T_2}, \qquad y = L_1 - T_1 \frac{L_1 - L_2}{T_1 - T_2}$$

berechnet. Hierbei beachtet er nicht, dass die Werte x, y aus zwei verschiedenen Beobachtungsreihen erhalten und daher nicht dieselben in beiden Gleichungen sind, abgesehen davon, dass die Gewichte nicht berücksichtigt werden.

GAUSS fühlte, obgleich LAMBERT ein befriedigendes Resultat erhalten hatte, den Mangel eines festen Prinzips und gelangte von Zweckmässigkeitsrücksichten ausgehend zu seiner Methode.

Möglicherweise haben einige Bemerkungen LAMBERTS, dessen Schreibweise nicht einer anregenden Wirkung entbehrt, seinen Gedankengang mit beeinflusst. LAMBERT unterscheidet bereits die regelmässigen und zufälligen Fehler und beschäftigt sich nur mit den letzteren, die er unvermeidliche nennt. Von ihnen sagt er aus, dass gleich grosse Abweichungen nach beiden Seiten gleich möglich sind, dass die geringeren Fehler häufiger, die grösseren seltner sind und dass eine Kurve, welche die Wahrscheinlichkeiten (die er als Möglichkeiten bezeichnet) zu Ordinaten hat, sich selbst auf beiden Seiten ähnlich (symmetrisch) ist; die mittelste Ordinate (im Anfangspunkte) ist die grösste, die Kurve hat auf beiden Seiten einen Wendepunkt, und zu äusserst ist die Abszissenachse ihre Tangente. Wird noch hinzugefügt, dass LAMBERT die Fehler als Grössen erster Ordnung betrachtet, deren Dignitäten (Potenzen) vernachlässigt werden können, und demnach Differentialformeln für die Beziehungen zwischen verschiedenen Fehlern verwendet, so sind die wesentlichsten Punkte, die in Betracht kommen, zusammengestellt.

In einem nach dem Vortrage von GAUSS ausgearbeiteten Vorlesungsheft über die Methode der kleinsten Quadrate aus dem Winterhalbjahr 1852/53 wird der Weg angegeben, auf dem er zu einem Kriterium für die Unvollkommenheit einer Beobachtungsreihe gelangte. Als vollkommen stellte er dabei eine Reihe hin, bei der alle Beobachtungen fehlerfrei sind. Die Summe der absoluten Werte der Fehler verwarf er als Mass der Unvollkommenheit: 1. weil dadurch der mathematischen Einheit und Reinheit widersprochen würde, 2. weil die verschiedene Verteilung der Fehler dabei unberücksichtigt bliebe, 3. weil dieses Prinzip in vielen Fällen keine Entscheidung gäbe, 4. weil die

Anwendung der Methode mit Schwierigkeiten verbunden wäre und 5. weil die überschüssigen Beobachtungen nur in soweit in Betracht kämen, als sie zur entscheidenden Wahl beitrügen[1]). Keinen dieser Fehler habe das Prinzip der Darstellung der Unvollkommenheit durch die Summe der geraden Potenzen, unter denen die Quadrate als die einfachsten den Vorzug verdienten.

GAUSS hat, nach einer Bemerkung in demselben Heft, ausdrücklich gesagt, dass er in der Weise, wie er es vorgetragen habe, auf seine Methode gekommen sei. Mit Ausnahme der Gewichte und deren Anwendung hatte er bereits 1795 alles ausgearbeitet, so dass er für seinen Privatgebrauch die Methode anwenden konnte.

Am 17. Juni 1798 schrieb GAUSS in sein *Tagebuch*[2]): »Calculus probabilitatis contra Laplace defensus«. Diese Bemerkung bezog sich wahrscheinlich auf den Inhalt einer Abhandlung von LAPLACE in den Memoiren der französischen Akademie von 1789[3]). Das hier angegebene Ausgleichungsverfahren beruht, wie auch GAUSS in der *Theoria motus* (Art. 186 Werke VII, S.254) erwähnt, auf einem von BOSCOVICH aufgebrachten Prinzip, die Summe der positiven und negativen Fehler einander gleich und möglichst klein zu machen. BOSCOVICH hat hierüber zuerst in dem von ihm mit Erläuterungen und Anmerkungen versehenen Werke: »*Philosophiae recentioris a Benedicto Stay versibus traditae libri X cum adnotationibus et supplementis P. Rogerii Josephi Boscovich*«

---

1) Vgl. DEDEKIND, *Gauss in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate.* Festschrift der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Berlin 1901, S. 50. Zu 1. hat sich GAUSS öfter geäussert, z. B. in der Anzeige der *Theoria Combinationis* vom 26. Februar 1821 in den Göttingischen gelehrten Anzeigen, Werke IV, S. 97. Zu 2. bemerkt er, es würde z. B. einerlei sein, ob ein Fehler zweimal gemacht ist, oder ob einmal der doppelt so grosse Fehler und das andremal der Fehler 0 gemacht worden wäre, wobei offenbar die letztere Beobachtung schlechter wäre. Bei 3. käme es, wenn nur eine unbekannte Grösse auftritt, darauf an, ob die Zahl der Beobachtungen gerade oder ungerade ist. Im letzteren Falle würde der mittlere der Beobachtungswerte die kleinste Unvollkommenheit darstellen, während im andern Falle sich dieselbe Unvollkommenheit der Beobachtungen ergeben würde, welchen Wert man immer zwischen den beiden mittleren der nach der Grösse geordneten Beobachtungswerte für den wahren oder genauesten annimmt. Zu 4. vgl. Werke VIII, S. 143; die Schwierigkeit würde auch darin bestehen, dass die Fehler ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen in die Rechnung eingeführt werden müssten. Zu 5. vgl. *Theoria motus*, Art. 186.

2) Vgl. Werke X 1, S. 533 [88].

3) Histoire de l'Académie des Sciences, Année 1789, Paris 1793 avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année, tirés des registres de cette Académie (VIII. *Sur les degrés mesurés des Méridiens et sur les longueurs observées du pendule* etc.)

geschrieben[1]). Als dann im Jahre 1770 in Paris eine (von dem Jesuiten P. Hugon verfasste) französische Übersetzung seines Berichtes über die Gradmessung im Kirchenstaate: »*De litteraria expeditione per pontificiam ditionem 1755*« unter dem Titel: »*Voyage astronomique et géographique dans l'état de l'église*« erschien, wurde seine Methode dort (S. 501—512) aufgenommen. Ausser dem an der erstgenannten Stelle fünf ausgewählte Gradmessungsbogen behandelnden Beispiele enthält die französische Ausgabe eine Anwendung auf neun Bogen, und in demselben Jahre veröffentlichte Boscovich eine Kometenbahnbestimmung, bei der das Verfahren zur Ableitung der Bahnelemente diente[2]). Es liegt aber kein Anhalt zu der Annahme vor, dass Gauss die Arbeiten von Boscovich gekannt hat. Später ist dieses Ausgleichungsverfahren als letztes und bevorzugtes von drei verschiedenen in die *Mécanique céleste* (tome II, livre III, 1799) von Laplace aufgenommen und daselbst verwendet worden.

Gauss hat später unter Bezugnahme auf die Tagebuchnotiz nochmals Olbers gegenüber erwähnt[3]), dass er im Juni 1798 die Unverträglichkeit von Laplaces Methode mit den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung dargetan habe. Zugleich wird man diesen Zeitpunkt als denjenigen annehmen dürfen, in dem Gauss auf die Begründung seiner Methode durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der Annahme des arithmetischen Mittels als Axiom kam[4]).

Hierzu äussert sich auch Gauss in einem Briefe an Laplace vom 30. Januar 1812: »Ich habe von der Methode der kleinsten Quadrate seit dem Jahre 1795 Gebrauch gemacht, und ich finde in meinen Papieren, dass der Monat Juni 1798 der Zeitpunkt ist, wo ich sie den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung angepasst habe. Eine Bemerkung darüber findet sich in einem Tagebuche, welches ich über meine mathematischen Beschäftigungen seit dem Jahre 1796 geführt und das ich in diesen Tagen Herrn v. Lindenau gezeigt habe. Indessen datieren meine häufigen Anwendungen dieser Methode erst vom Jahre

---

1) Bd. II, S. 420—425, Rom 1760.

2) Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde herausgegeben von Fr. von Zach II, S. 306, 1800.

3) G.-O. Nr. 255, Werke VIII, S. 140.

4) Dies stimmt mit der Angabe eines Vorlesungsheftes überein, in dem (allerdings wohl irrtümlich) der 17. Juni 1797 (statt 1798) als Entstehungstag dieser Begründung bezeichnet ist.

1802, von welcher Zeit an ich sie dann, so zu sagen, alle Tage bei meinen astronomischen Rechnungen über die neuen Planeten benützte«[1]).

Im Frühjahr 1799 machte GAUSS die bereits erwähnte Anwendung seiner Methode auf ULUGH BEIGHS Zeitgleichungstafel[2]). Zum ersten Male aber wurde etwas darüber im Druck veröffentlicht in einer Notiz vom 24. August 1799 in ZACHS Allgemeinen geographischen Ephemeriden (Bd. IV, S. 378, Werke VIII, S. 136), wo GAUSS einen Druckfehler in der von ZACH gegebenen Übersicht der Ergebnisse der Breitengradmessung zwischen Dünkirchen und Barcelona berichtigt (a. a. O., S. XXXV). Er benutzte seine Methode, um aus den vier gemessenen Stücken des Meridianbogens die Ellipse zu berechnen[3]).

Die Entdeckung der Ceres am 1. Januar 1801 hatte GAUSS zur Beschäftigung mit der Bahnbestimmung des neuen Himmelskörpers veranlasst, die er mehrmals mit verbesserten Grundlagen wiederholte. Die Ephemeride, die er aus seinen VI. Elementen erhielt, führte zur Wiederauffindung des Planeten. Als sich nun die Beobachtungen mehrten, trat ausser der Aufgabe, die Bahn zu finden, die drei gegebenen Beobachtungen Genüge tut, die andere Forderung an ihn heran, die gefundene Bahn so zu verbessern, dass die Quadratsumme der Differenzen zwischen der Rechnung und dem ganzen Vorrat von Beobachtungen so gering als möglich wird, und dazu dient eben die Methode der kleinsten Quadrate[4]).

GAUSS wurde nun vielfach aufgefordert, seine Methode bekannt zu machen; aber nicht um sie geheim zu halten, sondern um zur vollkommenen Klarheit über ihre Begründung zu kommen, zögerte er mit der Veröffentlichung, da er eine Abneigung hatte, vorläufige Ergebnisse in Druck zu geben[5]).

---

1) Der Wortlaut des französisch abgefassten Briefes findet sich Werke X 1, S. 373.

2) Ein Zettel mit den wesentlichen Ergebnissen der hierauf bezüglichen Rechnung, die GAUSS verlegt hatte, hat sich später wiedergefunden und ist in seinem Nachlass vorhanden. Vgl. hierüber Werke X 1, S. 445 und XI 1.

3) Vgl. Werke VIII, S. 136—137.

4) Während das V. und VI. Elementensystem wiederum auf drei Beobachtungen beruhten, scheint GAUSS zuerst für das VII., sicher für das VIII. (siehe Werke VIII, S. 140), etwa im Februar 1802, die Methode der kleinsten Quadrate angewandt zu haben; ZACH schreibt nämlich, dass GAUSS jetzt seine Elemente den vorhandenen Beobachtungen möglichst genau anpassen wolle, und GAUSS selbst sagt, dass sie die sämtlichen Palermer Beobachtungen möglichst genau darstellen. Vergl. Werke VI, S. 207.

5) Er bezeichnet es z. B. als sein »Prinzip, einzelne Lehrsätze nicht ins Publikum zu werfen, ehe er eine anständige Gelegenheit habe, sie gehörig zu entwickeln« (G.-G. 13. 12. 1837).

Im Jahre 1805 und besonders in dem folgenden Winter begann er aber die *Theorie der Bewegung der Himmelskörper* auszuarbeiten, die er 1806 in deutscher Sprache vollendete. Die politische Lage Deutschlands und seine eigenen Verhältnisse, die nach seiner Verheiratung im Jahre 1805 und vor der Übersiedlung nach Göttingen (1807) wenig gesicherte und unruhige waren, störten vielfach seine Arbeit, und ausserdem verzögerte die Schwierigkeit, einen Verleger zu finden, die Drucklegung, bis 1807 PERTHES unter der Bedingung der Abfassung in lateinischer Sprache den Verlag übernahm.

So kam es, dass das von LEGENDRE 1806 herausgegebene Werkchen über die Berechnung der Kometenbahnen[1]), das die Méthode des moindres carrés enthält, früher erschien, als die erste von GAUSS in der *Theoria motus corporum coelestium* (Liber II, Sectio III) gegebene Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate (Werke VII, S. 236)[2]). Während aber GAUSS zu dieser Zeit bereits die Begründung durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung[3]), unter Annahme seines Fehlergesetzes und des nun hieraus folgenden arithmetischen Mittels als Grundsatz, gefunden hatte, ging LEGENDRE nur von Zweckmässigkeitsrücksichten unter Hinweis auf statische Analogien aus[4]).

---

1) A. M. LEGENDRE, *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes avec un supplément contenant divers perfectionnemens de ces méthodes et leur application aux deux comètes de 1805.* Paris 1806.

2) Vergl. über die verschiedenen Gelegenheiten, bei denen GAUSS mit LEGENDRE zusammengetroffen ist, STÄCKEL, *Gauss als Geometer*, Werke X2, S. 20, Fussnote 5).

3) In der Theoria motus ist das nach GAUSS benannte Fehlergesetz aufgestellt, das 1808 auch von ADRAIN aus andrer Annahme entwickelt wurde.

4) LEGENDRE fügt der Bestimmung einer parabolischen Kometenbahn aus drei Beobachtungen durch seine Methode der unbestimmten Korrektionen folgende Bemerkung bei:

»Man muss dann, wenn alle Bedingungen des Problems passend ausgedrückt sind, die Koeffizienten so bestimmen, dass die Fehler möglichst klein gemacht werden. Die Methode, die mir zu diesem Zwecke die einfachste und allgemeinste zu sein scheint, besteht darin, die Summe der Quadrate der Fehler zu einem Minimum zu machen. Man erhält dann ebensoviele Gleichungen, als unbekannte Koeffizienten vorhanden sind, wodurch die Bestimmung aller Bahnelemente erreicht wird. Da die Methode, die ich Methode der kleinsten Quadrate nenne, vielleicht von grossem Nutzen in allen Fragen der Physik und Astronomie sein kann, wo es sich darum handelt, aus der Beobachtung die genauesten Ergebnisse, welche sie liefern kann, zu erhalten, so habe ich im Anhang (S. (74)—(75)) besondere Einzelheiten hinzufügt und eine Anwendung auf die Meridianmessung in Frankreich gegeben«.

In diesem Anhang macht LEGENDRE folgende Ausführungen:

»Wenn die Zahl der (linearen) Gleichungen die der Unbekannten übertrifft, tritt notwendig eine Willkür bei der Verteilung der Fehler auf, und man darf nicht erwarten, dass alle Hypothesen zu genau den-

Die Erwähnung dieser Schrift in der »Monatlichen Correspondenz« (Bd. XIV, S. 70) hat GAUSS nicht veranlasst, sie kennen zu lernen, weil er bei seiner Methode der Bahnbestimmung ganz in der Kette seiner eigenen Ideen bleiben wollte. Er erfuhr aber aus einer Bemerkung von LALANDE, dass darin jene Methode enthalten sei und vermutete alsbald, dass sie mit seinem Prinzip übereinstimmte. Wie fern GAUSS bei der Priorität von LEGENDRES Veröffentlichung das Empfinden verletzter Eitelkeit lag, wie er vielmehr nach seinen eigenen Worten um der Sache und nicht um seiner selbst willen arbeitete, und dass er, wie ZIMMERMANN von ihm rühmte, ein sehr edeldenkender und uninteressierter junger Mann war, dafür ist die Übertragung der von LEGENDRE angewandten Bezeichnung auf seine eigene Erfindung ein sichtbares Zeugnis.

Am 25. November 1810 überreichte GAUSS der Sozietät der Wissenschaften in Göttingen die *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis* (Werke VI, S. 1), in der er die reduzierten Normalgleichungen aufstellt und damit zugleich die Bezeichnungen des nach ihm benannten Algorithmus[1]) einführt, auch den Wert für das Minimum der Quadratsumme der Fehler angibt.

---

selben Resultaten führen werden; aber man muss sie in der Weise vornehmen, dass die extremen Fehler ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen in möglichst enge Grenzen eingeschlossen werden.

Von allen Prinzipien, die man hierfür vorschlagen kann, ist meiner Meinung nach das allgemeinste, genaueste und am leichtesten anwendbare dasjenige, das die Summe der Quadrate der Fehler zu einem Minimum macht. Hierdurch wird zwischen den Fehlern eine Art Gleichgewicht hergestellt, welches verhindert, dass die extremen vorwiegen, und sehr geeignet ist, das der Wahrheit am nächsten kommende Ergebnis des Gleichungssystems erkennen zu lassen«.

Nachdem er sodann angegeben hat, in welcher Weise die Gleichungen des Minimums (d. h. die Normalgleichungen) gebildet werden, weist er darauf hin, dass das arithmetische Mittel der einfachste Fall der Methode ist. Er fährt dann fort:

»Bei der Bestimmung eines Punktes x, y, z im Raume, für dessen Koordinaten durch verschiedene Beobachtungen a', b', c'; a'', b'', c''; ... gefunden seien, ist das Quadrat der Entfernung für die erste Beobachtung

$$(a'-x)^2+(b'-y)^2+(c'-z)^2;$$

aus allen n Beobachtungen erhält man für das Minimum der Summe der Quadrate der Entfernungen

$$x=\frac{fa}{n},\quad y=\frac{fb}{n},\quad z=\frac{fc}{n},$$

woraus man sieht, dass der Schwerpunkt des Systems folgende allgemeine Eigenschaft hat:

Teilt man die Masse eines Körpers in gleiche und genügend kleine Moleküle, um sie als Punkte betrachten zu können, so ist die Summe der Quadrate der Entfernungen der Moleküle vom Schwerpunkt ein Minimum.

Man sieht also, dass die Methode der kleinsten Quadrate in gewisser Weise das Zentrum erkennen lässt, um das sich alle durch die Erfahrung erlangten Resultate in der Weise ordnen lassen, dass sie sich möglichst wenig davon entfernen.«

1) Vergl. HELMERT, *Die Ausgleichsrechnung usw.* 2. Aufl. 1907. S. 120.

Im Jahre 1816 folgte dann ein Aufsatz: »*Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen*« in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften von LINDENAU und BOHNENBERGER, Bd. I, S. 185 (Werke IV, S. 109), in dem GAUSS den wahrscheinlichen Fehler aus einer hinlänglichen Anzahl wirklicher Beobachtungsfehler finden lehrt und zur Vergleichung auch aus andern Potenzsummen wahrer Beobachtungsfehler ableitet.

3. Zweite Begründung. Inzwischen hatte LAPLACE in der zum ersten Male 1809 erschienenen *Théorie analytique des Probabilités* nachgewiesen, dass unter allen linearen Kombinationen, die man mit den Fehlergleichungen[1]) vornehmen kann, diejenige, welche man als Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet, in dem Sinne die vorteilhafteste ist, als sie Werte liefert, bei denen kleinstmögliche Fehler[2]) zu befürchten sind, und zwar ohne Rücksicht auf die Form des Gesetzes, dem der Fehler der einzelnen Beobachtung unterworfen ist. Allerdings beschränkte sich seine Untersuchung auf zwei Unbekannte, auch setzte er voraus, dass positive und negative Fehler gleichen Betrages gleich wahrscheinlich seien und für alle Beobachtungen dasselbe, wenn auch ein beliebiges Fehlergesetz gelte, und nahm ausserdem an, dass die Anzahl der Beobachtungen unendlich gross sei, so dass es ganz im Dunkeln blieb, was bei einer mässigen Anzahl von Beobachtungen zu tun sei.

GAUSS erhielt am 23. Januar 1812 mehrere kleine Aufsätze von LAPLACE über diesen Gegenstand, die ihm viel Interessantes zu enthalten schienen[3]). Ob GAUSS dadurch mit veranlasst wurde, eine andre Grundlage als die in der *Theoria motus* angewandte zu suchen, muss dahin gestellt bleiben. Er selbst hat sich ausser an den sogleich zu erwähnenden Stellen seiner Veröffentlichungen später in einem Briefe an BESSEL vom 28. Februar 1839 (G.-B.

---

1) Die besonders durch W. JORDAN (*Handbuch der Vermessungskunde*, I. Band: *Ausgleichungsrechnung* 4. Aufl. 1895, S. 41) und F. R. HELMERT (a. a. O. S. 39) üblich gewordene Bezeichnung »Fehlergleichungen« kommt bereits bei GAUSS vor (Werke V, S. 632 und IX, S. 290).

2) LAPLACE versteht darunter den kleinsten durchschnittlichen Fehler, d. h. den durchschnittlichen Wert aller positiv genommenen Fehler.

3) G.-O. Nr. 255. Vielleicht ist hier auf den ersten der als »Additions par M. le Cte. LAPLACE« erschienenen Aufsätze: *Du milieu, qu'il faut choisir entre les résultats d'un grand nombre d'observations* in der Connaissance des Tems ou des mouvemens célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs pour l'an 1813; publiée par le bureau des longitudes; Paris, juillet 1811; p. 213—223 Bezug genommen, in dem LAPLACE auf eine eingehendere Behandlung in seinem zu publizierenden Werke über Wahrscheinlichkeiten hinweist.

Nr. 176) in folgender Weise geäussert: »Dass ich die in der *Theoria motus corp. coel.* angewandte Metaphysik für die Methode der kleinsten Quadrate späterhin habe fallen lassen, ist vorzugsweise auch aus einem Grunde geschehen, den ich selbst öffentlich nicht erwähnt habe. Ich muss es nämlich in alle Wege für weniger wichtig halten, denjenigen Wert einer unbekannten Grösse auszumitteln, dessen Wahrscheinlichkeit die grösste ist, die ja doch immer nur unendlich klein bleibt, als vielmehr denjenigen, an welchen sich haltend man das am wenigsten nachteilige Spiel hat; oder wenn fa die Wahrscheinlichkeit des Wertes a für die Unbekannte x bezeichnet, so ist weniger daran gelegen, dass fa ein Maximum werde, als daran, dass $\int fx . F(x-a)\,dx$, ausgedehnt durch alle möglichen Werte des x, ein Minimum werde, indem für F eine Funktion gewählt wird, die immer positiv und für grössere Argumente auf eine schickliche Art immer grösser wird. Dass man dafür das Quadrat wählt, ist rein willkürlich und diese Willkürlichkeit liegt in der Natur der Sache. Ohne die bekannten, ausserordentlich grossen Vorteile, die die Wahl des Quadrates gewährt, könnte man jede andere jenen Bedingungen entsprechende Funktion wählen«[1]).

4. Dritte Begründung. Als Gauss am 15. Februar 1821 der Königlichen Sozietät die Abhandlung: »*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior*« (Werke IV, S. 1), vorlegte, war er zu der dritten Begründungsart gelangt, von der er bei verschiedenen Gelegenheiten ausgesprochen hat, dass sie seiner Überzeugung nach die ausschliesslich einzige zulässige Anknüpfung an die Wahrscheinlichkeitsrechnung sei[2]).

In der Selbstanzeige in den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 26. Februar 1821[3]) weist Gauss zum Schluss ausdrücklich darauf hin, dass er von einem ähnlichen Gesichtspunkt wie Laplace ausgegangen sei, aber den Begriff des mittleren zu befürchtenden Fehlers[4]) auf eine andere, und wie ihm schien, schon an und für sich natürlichere Art festgestellt habe, und dass er hoffe, dass die Freunde der Mathematik mit Vergnügen sehen würden, wie die Methode der kleinsten Quadrate in ihrer neuen hier gegebenen Begründung

1) Werke VIII, S. 147. Vergl. Werke IV, S. 97.

2) Vgl. G.-Sch. Nr. 955, Werke VIII, S. 147.

3) Werke IV, S. 95.

4) Laplace spricht von la valeur moyenne de l'erreur à craindre au plus.

allgemein als die zweckmässigste Kombination der Beobachtungen erscheint, nicht nur näherungsweise, sondern nach mathematischer Schärfe — die Funktion für die Wahrscheinlichkeit der Fehler sei, wie sie wolle, und die Anzahl der Beobachtungen möge gross oder klein sein.

Am 2. Februar 1823 überreichte GAUSS der Sozietät eine Fortsetzung seiner Untersuchungen unter demselben Titel als *pars posterior* (Werke IV, S. 27). Mit ihrem Inhalt machte er die Zeitgenossen durch eine Anzeige in den Göttinger gelehrten Anzeigen vom 24. Februar 1823 (Werke IV, S. 100) bekannt. Ausser dem Verfahren zur Bestimmung der Gewichte sämtlicher Unbekannten werden noch die Aufgaben behandelt, beim Hinzutreten einer noch nicht berücksichtigten Beobachtung, und bei Änderung des Gewichtes einer schon verwendeten Beobachtung, ohne Wiederholung der ganzen Eliminationsarbeit die Veränderungen der Endresultate zu erhalten.

Wenn man vermuten kann, dass GAUSS auf diese Aufgaben durch seine geodätische Tätigkeit geführt worden ist, so zeigen die Beispiele in der als *Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* der Sozietät am 16. September 1826 überreichten Vorlesung (Werke IV, S. 104), dass die hier behandelte Theorie der bedingten Beobachtungen eine Frucht seiner Beschäftigung mit der Gradmessung gewesen ist. In den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 25. September 1826 (Werke IV, S. 107) betont er dies noch ausdrücklich: »Die trigonometrischen Messungen gehören ganz besonders in das Feld, wo die Wahrscheinlichkeitsrechnung Anwendung findet, und namentlich in derjenigen Form Anwendung findet, die in der gegenwärtigen Abhandlung entwickelt ist«.

Bei dieser Gelegenheit hat GAUSS noch auf eine Eigenschaft der Methode der kleinsten Quadrate hingewiesen, die nicht ihre mathematische Seite berührt, sondern das sittliche Gebiet streift, indem sie das verwerfliche Verfahren des Auswählens und Ausschliessens von Beobachtungen, sei es aus Unbekanntschaft mit den wahren Grundsätzen einer richtigen Theorie, oder aus dem geheimen Wunsche, den Messungen das Ansehen grösserer Genauigkeit zu geben, mit immer wachsendem Erfolge verhindert hat[1]).

1) Vgl. GAEDE, *Beiträge zur Kenntniss von Gauss' praktisch-geodätischen Arbeiten*, Zeitschrift für Vermessungswesen 1885, S. 53.

5. Ausbreitung. In erster Linie, namentlich in bezug auf die Mannigfaltigkeit der Anwendungen, hat die Methode der kleinsten Quadrate in der Geodäsie Eingang gefunden. Dies ist ihr zunächst nicht durch die Originalarbeiten von GAUSS gelungen, sondern es bedurfte erst der Einführung durch seine Schüler, um das neue Gebiet grösseren Kreisen zugänglich zu machen. JOHANN FRANZ ENCKES Abhandlungen über die Methode der kleinsten Quadrate in den Berliner Astronomischen Jahrbüchern von 1834, 1835, 1836, die *Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung* von GOTTHILF HAGEN (1837), sowie CHRISTIAN LUDWIG GERLINGS *Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie* (1843) haben ihr zur allgemeinen Anwendung verholfen, und für die Geodäsie im Besondern ist später das *Handbuch der Vermessungskunde* von WILHELM JORDAN von förderndem Einfluss geworden[1]).

II. Abschnitt. Die Anfänge geodätischer Tätigkeit seit 1796.

6. Eine Aufgabe der praktischen Geometrie. In die Jahre zwischen 1796 und 1801 fällt nach einer Bemerkung von GAUSS gegenüber GERLING[2]) seine Beschäftigung mit einer ganz eigenartigen Frage. Es handelt sich zwar um die sogenannte POTHENOTsche Aufgabe der praktischen Geometrie: die Lage eines Punktes aus den an demselben gemessenen Winkeln zwischen drei andern Punkten von genau bekannter Lage zu finden, die auf jugendliche Mathematiker einen besondern Reiz auszuüben pflegt, nicht zum wenigsten durch den Grenzfall des »gefährlichen Kreises«, der die Berechnung unmöglich macht;

1) Die Geschichte der neuen Wissenschaft gehört nicht in den Rahmen des Lebensbildes von GAUSS; HANSEN, ANDRAE, SCHREIBER, THIELE, HELMERT, KRÜGER haben auf GAUSSscher Grundlage weiter gebaut. — Eine deutsche Ausgabe der »Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate« von CARL FRIEDRICH GAUSS (Berlin 1887) ist von BÖRSCH und SIMON besorgt worden, die ausser den erwähnten Abhandlungen und ihren Anzeigen den Aufsatz in den Astronomischen Nachrichten (Bd. V, S. 227): Chronometrische Längenbestimmungen (1826) und die Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am RAMSDENschen Zenitsektor (1828, Werke IX, S. 1) enthält. Früher ist bereits eine französische Übersetzung erschienen: GAUSS, *Méthode des moindres carrés;* Mémoires sur la combinaison des observations; traduits par J. BERTRAND. Paris 1855.

2) Brief vom 22. November 1841.

aber GAUSS fasste die davon ganz verschiedene, vor dem Bekanntwerden seiner Untersuchung darüber wahrscheinlich noch niemals betrachtete physische Möglichkeit ins Auge, unter welcher Bedingung die zwischen den drei gegebenen Punkten angesetzten Winkel gemessen sein können oder nicht. Die bei wirklich ausgeführten Messungen garnicht begründete Überlegung kann also etwa bei einem Schreibfehler in den Beobachtungszahlen notwendig werden und würde bei einer häufigen Anwendung dieser Methode der Punktbestimmung, die man aber bei GAUSS in jener Zeit nicht annehmen kann, etwa durch ein immerhin seltsames Versehen veranlasst sein können. Wahrscheinlicher ist das Problem als eine zierliche geometrische Aufgabe für GAUSS verlockend gewesen, worauf die Symmetrie der Behandlung und die Gegenüberstellung der beiden Figuren, die einer Abbildung durch reziproke Radien entsprechen, hinzuweisen scheinen[1]).

7. **Geodätische Notiz.** Die erste Veröffentlichung einer geodätischen Notiz wurde bereits (S. 9) erwähnt; GAUSS erhielt durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate aus den vier Meridianbögen zwischen Dünkirchen-Pantheon-Evaux-Carcassonne-Barcelona des Meridians von Paris allein (ohne Rücksicht auf den Grad in Peru) die Abplattung 1/187 und als Länge des ganzen Quadranten 2565006 Moduln (Doppel-Toisen).

8. **Arbeiten für Lecoq**[2]). In demselben Jahre 1799 stand GAUSS im Briefwechsel mit dem damaligen Obersten VON LECOQ in Preussisch-Minden, der für militärische Zwecke eine Vermessung von Westfalen unternommen hatte. Aus einigen Briefen von LECOQ an GAUSS und einem z. Z. in der Autographensammlung DARMSTÄDTER der Staats-Bibliothek in Berlin aufbewahrten Schreiben von GAUSS an LECOQ[3]) erfahren wir genaueres über das, worum es sich handelte. Am 3. Februar 1799 schrieb LECOQ aus Minden: »Sollte es mir an Zeit zur Berechnung fehlen oder mir Schwierigkeiten aufstossen, die ich ohne Ihren Rat nicht beseitigen kann, so erlauben Sie mir, dass ich Sie dann an Ihrem gütigen Versprechen erinnere«. Am 3. März folgte dann eine direkte Aufforderung: »Da Ew. Wohlgeboren so gefällig gewesen sind, sich zu astrono-

1) Vgl. Werke VIII, S. 309—318, und GALLE, *Geodäsie*, Sammlung SCHUBERT XXIII, Leipzig 1907, § 54, S. 209. Eine besondere Eleganz erreichte GAUSS hierbei später (G.-G. 14. 1. 1842) durch Anwendung komplexer Grössen.

2) Vergl. den Aufsatz über GAUSS praktisch-astronomische Arbeiten von M. BRENDEL in diesem Bande.

3) Werke X 1, S. 540.

mischen Rechnungen zu erbieten, so ersuche ich Sie, die von Ein- und Austritt der letzten Sternbedeckung vom 26. Februar, die ich hier beobachtet habe, gef. zu übernehmen und wo möglich daraus die Länge von Minden abzuleiten«. Am 22. März schickte LECOQ mit dem Dank für die Rechnung der Sternbedeckung wieder Beobachtungen von Monddistanzen. In einem folgenden Briefe schreibt er: »Ich habe nun meine ganze Rechnung und so viel ich von der Ihrigen erhalten, dem Herrn v. ZACH geschickt und ihn ersucht, zu entscheiden, welche ihm richtiger dünke«. LECOQ erwähnt, GAUSS habe offenbar statt BOHNENBERGERS Formeln für Monddistanzen eigene benutzt. In einem späteren Briefe vom 29. April erbittet er sich von GAUSS Meinung und Rat zur Berechnung einiger Azimute.

Der erwähnte Brief von GAUSS (datiert Braunschweig, 17. April 1799) enthält zunächst die Ergebnisse seiner Rechnungen für die »wahre Zusammenkunft von Mond und 8 Scorpii in mittlerer Sonnenzeit« aus 3 Beobachtungen in Paris, und je einer in Minden von LECOQ, in Göttingen von SEYFFER und in Seeberg von ZACH. Er knüpft daran Bemerkungen über die gute Übereinstimmung der in Seeberg und Göttingen beobachteten Ein- und Austritte und der Mittel bei Paris und Seeberg mit den Meridiandifferenzen der Stationen. Er spricht dann über die Abweichungen von den bis dahin angenommenen Längenunterschieden von Göttingen und Seeberg gegen Paris und fährt fort: »Übrigens wird der geringe Unterschied von 7″[1]) bei Paris wahrscheinlich an den Elementen liegen; ich wünschte noch mehrere Beobb. der Bedeckung zu haben, um die Verbesserung der Elemente[2]) daraus zu bestimmen; vornehmlich von mehr entlegenen Orten (z. B. v. Wien); Göttingen und Gotha liegen einander zu nahe — merkwürdig aber ist immer, dass an dem östlichsten Orte Gotha eine spätere [Konjunktion] folgt aus dem Eintritt, als aus dem Austritt, bei dem westlichsten Paris dieser eine spätere gibt, als jener und bei dem mittleren Göttingen der Unterschied 0 ist. Übrigens werde ich die Resultate meiner Rechnung auch gleich an Herrn v. ZACH schicken und ihn bitten, im Fall er noch andre korr[espondierende] Beobb. erhält, sie mir sogleich mitzuschicken«. Bei Minden vermutet er einen Fehler von 1 Minute. Dann

1) GAUSS meint Zeitsekunden.

2) Hierunter dürfte eine Verbesserung des Mondortes zu verstehen sein.

fügt er einiges über die Berechnung hinzu, worüber die in Werke, Bd. X 1, S. 539 ff. abgedruckte Stelle dieses Briefes Aufschluss gibt. Die dort erwähnten Formeln hat GAUSS offenbar selbständig abgeleitet und dabei nicht mehr im Gedächtnis gehabt, was er in Büchern gefunden hatte. Bei dem fehlerlos ausgeführten Rechenbeispiel bemerkt er noch, dass er sich bei den eigenen Rechnungen mancher Kunstgriffe bediene[1]).

LECOQ zollte GAUSS öffentlich seinen Dank (Monatliche Correspondenz, Band 8, Seite 139) mit dem Zeugnis: »Im astronomischen Teil ist mir der Doktor GAUSS von grossem Nutzen gewesen; seine Ausrechnungen und Briefe haben zu meinem Unterricht viel beigetragen«. In der Tat hatte sich GAUSS als der Lehrer erwiesen, der die Aufgaben von der theoretischen Seite vollkommen beherrschte, wenn er auch noch nicht die praktische Erfahrung besass, um die Unsicherheit der Beobachtungen zu beurteilen, auf die er siebenstellige logarithmische Rechnungen anwandte und weitgehende Schlüsse baute.

Wie LECOQ hatte auch Ober-Appellationsrat v. ENDE in Celle[2]) den Vorsatz gefasst, das Land astronomisch zu bereisen, da in dem ganzen Kurfürstentum Hannover nur 5 Punkte (Göttingen, Hannover, Stade, Lilienthal und Celle) astronomisch bestimmt seien. Er beabsichtigte insbesondere in Braunschweig und Wolfenbüttel zu beobachten, da er von LECOQS Bestimmung der Polhöhe von Braunschweig noch keine Kenntnis hatte. Hier ist GAUSS, wie wir sehen werden, mit v. ENDE in Berührung gekommen.

9. Erste Beobachtungen und praktische Betätigungen. Über die Anfänge der praktischen Tätigkeit von GAUSS sind wir wenig unterrichtet. Aus einer Bemerkung gegenüber OLBERS (G.-O. Nr. 46) vom November 1802 geht hervor, dass er während seiner Studienzeit in Göttingen gar keine Anweisung zum Beobachten erhalten hat, obgleich ihn der nach TOBIAS MAYERS Tode mit der Wahrnehmung der Sternwarte beauftragte Professor SEYFFER[3]) einmal seinen Schüler genannt hatte. Seine eigenen Übungen hatten sich bis dahin auf einige Beobachtungen am Mauerquadranten und Spiegelsextanten

1) Vgl. GALLE, *Gauss als Zahlenrechner*, Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1917, S. 5/6.

2) Gest. 1816 in Köln. Er hatte in Celle eine kleine Sternwarte eingerichtet.

3) SEYFFER wurde 1804 von Göttingen nach München berufen und übernahm 1815 nach Aufhebung der alten Münchener Sternwarte die Direktion des k. topographischen Bureaus. S. a.: *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai*, Leipzig 1899, S. 178.

beschränkt. Dass er aber ein gewisses Interesse für Beobachtungen schon frühzeitig gehabt hat, deutet ein Brief an Hofrat ZIMMERMANN[1]) vom 24. Dezember 1797 an, in dem er erwähnt, dass eine Kränklichkeit ihn um die Beobachtung einer Mondfinsternis[2]) gebracht habe.

Erst die Aussicht auf eine Sternwarte scheint den Anstoss zu einer lebhafteren praktischen Tätigkeit gegeben zu haben; GAUSS erkannte mit Bedauern (G.-O. Nr. 46), dass er nicht nur im Beobachten, sondern auch im Zeichnen, der Baukunst und den mechanischen Künsten noch ganz unerfahren sei.

Professor PFAFF hatte gegenüber dem Etatsrat v. FUSS in Petersburg den Wunsch geäussert, dass GAUSS eine seinen Verdiensten und Neigungen angemessene Anstellung erhalten möchte und angefragt, ob nicht bei der Akademie eine schickliche Stellung für ihn offen wäre. FUSS hatte ihn darauf 1802 für die vakante Stelle des Astronomen HENRY[3]) vorgeschlagen, falls sich GAUSS entschliessen könne, mit seinen eminenten theoretischen Kenntnissen praktische Astronomie zu verbinden und die Sternwarte in Petersburg zu übernehmen. Er erwähnt noch dabei, dass er die Neigung zum Beobachten bei GAUSS voraussetzen dürfe.

Es gelang seinen Freunden, insbesondere OLBERS, GAUSS von der Auswanderung aus Deutschland abzuhalten. KARL WILHELM FERDINAND, von dem LAPLACE rühmte[4]): »Der Herzog von Braunschweig hat in seinem Lande mehr entdeckt, als einen Planeten: einen überirdischen Geist in menschlichem Körper«, war schon längst mit den mathematischen Kenntnissen und Verdiensten von GAUSS durch die Berichte des Geheimen Etatsrats v. ZIMMERMANN (Professor der Mathematik, Physik und Naturgeschichte am Collegium Carolinum in Braunschweig) bekannt geworden und hatte nicht nur GAUSS einst die Aufnahme in diese Schule durch Zuwendungen aus der herzoglichen Schatulle ermöglicht, sondern sicherte ihm auch jetzt aus eigener Bewegung eine ansehnliche Verbesserung seiner Lage zu, ohne seine Musse durch bestimmte

1) L. HÄNSELMANN, *Karl Friedrich Gauss* (1878), S. 36.

2) Am 4. Dezember 1797.

3) HENRY war vorher an der Mannheimer Sternwarte tätig gewesen und ist nach seinem Abgange von Petersburg als Chef de Brigade und Directeur des opérations astronomiques bei der Vermessung von Bayern durch die Ingenieur-Geographen bekannt geworden. Monatl. Corr. VII, S. 358.

4) L. HÄNSELMANN a. a. O., S. 52.

Dienste zu beschränken (G.-O. Nr. 8). Zunächst bot sich für GAUSS die Aussicht auf eine unter v. ZACHS Mithilfe in Braunschweig zu errichtende Sternwarte. An diesen hatte sich GAUSS schon früher einmal (1799) mit der Bitte gewandt, nach Seeberg kommen zu dürfen, was ihm aber ZACH abgeschlagen hatte[1]). Auch als GAUSS ihn jetzt um Überlassung einiger Instrumente ersucht hatte, riet ihm v. ZACH in einem Briefe (vom 21. Februar 1802) von der Beschäftigung mit der praktischen Astronomie in zwar freundlicher, aber energischer Weise ab, indem er GAUSS' Kurzsichtigkeit als ein wesentliches Hindernis dabei ansah und auf die Gefährlichkeit von Sextanten- und Sonnenbeobachtungen für die Augen hinwies, wie er selbst erfahren habe. Auch werde GAUSS bei der praktischen Astronomie eine kostbare Zeit verlieren, die er tausendmal besser und nützlicher anwenden könne. Er habe ein so überwiegendes talent de calcul, dass er mit diesem allein wuchern müsse. Immerhin erklärte er sich bereit, ihm einen Sextanten, einen künstlichen Horizont, eine Uhr und ein Fernrohr zu borgen.

Mit dem kleinen, zum Sextanten gehörigen Fernrohr machte GAUSS dann bereits 1802 zum Vergnügen zuweilen Zeitbestimmungen, vielleicht nach der von OLBERS angegebenen Methode (Mon. Corr., Band III, S. 124) durch Sternverschwindungen, die er ganz vorzüglich fand.

Auch beobachtete GAUSS am 8. November 1802 in Braunschweig mit seinen geringen Hilfsmitteln den Vorübergang des Merkur vor der Sonnenscheibe an einem zweifüssigen Achromaten von BAUMANN[2]).

10. Aussicht auf die Göttinger Sternwarte. Bald eröffnete sich ihm aber durch OLBERS' Vermittlung die Aussicht, in Deutschland in einer Weise ganz der Astronomie leben zu können, die seinen Wünschen entsprach und seine Zukunft sicher stellte. Der Umstand, dass die Göttinger Sternwarte, deren Leiter er werden sollte, noch nicht vollendet war, erschien ihm gerade erwünscht, da er sich in der Zwischenzeit erst recht zum praktischen Astronomen ausbilden

1) Siehe M. BRENDEL, *Über Gauss' praktisch-astronomische Arbeiten*, Werke XI 2.

2) Monatliche Correspondenz, Band VI, S. 570 und Werke VI, S. 231. An dieser Stelle wird erwähnt, daß GAUSS, da ihm kein Passagen-Instrument zur Verfügung stand, sich mit einigen nach 1 Uhr auf einem unbedeckten Öl-Horizont genommenen einzelnen Sonnenhöhen zur Zeitbestimmung für die Beobachtung des Merkurdurchgangs begnügen musste, und dass es seine erste Zeitbestimmung dieser Art war. Ausser zur Beobachtung des Austrittes hat er auch das Fernrohr als Kreismikrometer zu gebrauchen versucht und mehrere Rektaszensionsdifferenzen zwischen Merkur und dem Mittelpunkte der Sonne genommen.

könne. Hierzu hielt er den Beistand v. Zachs für unentbehrlich, der ihm allerdings wegen der erwähnten Abmahnungen des Seeberger Astronomen nicht sicher erschien.

Die Vorbereitungen für seinen künftigen Beruf betrieb Gauss mit der ihm eigenen Beharrlichkeit und Gründlichkeit. Nachdem er im Laufe des Jahres 1802 bereits eine ziemliche Übung in den gewöhnlichen Beobachtungen mit dem Sextanten erlangt hatte, so dass er hoffen konnte, sich durch Autopsie auch in die Behandlung andrer Instrumente wohl zu finden, wünschte er, sich nach und nach mit einem guten Vorrat von optischen Werkzeugen zu versehen. Aus einer Bemerkung, die er mit der Bitte an Olbers, ihm hierbei behülflich zu sein, verband, geht aber zugleich hervor, dass er nicht willens war, seine ganze Zeit praktischen Beschäftigungen zu opfern, dass ihm, wie er sich ein andres Mal ausdrückt[1]), das Beobachten mehr zu einer sehr angenehmen Abwechslung dienen, an theoretischen Arbeiten aber nicht hindern werde, da er diese viel zu lieb habe. »Glauben Sie nicht«, schreibt er[2]), »dass mich solche praktische Beschäftigungen von der Spekulation abbringen werden; es wird mir damit immer gehen, wie einem Reisenden, dem seine Heimat, wenn er eine Zeit lang sich in der Fremde herumgetrieben hat, nur doppelt teuer geworden ist.« Mag es aber aus diesen Äusserungen, besonders beim Beginn seiner Beobachtungstätigkeit, ersichtlich sein, dass Gauss einen andern innern Beruf fühlte, so war ihm das Praktische doch nicht nur eine angenehme Abwechslung, gewissermassen ein Ersatz für andre ihm fremde Zerstreuungen, sondern er hatte bei allem, was er tat, ein starkes sachliches Interesse. Solche Arbeiten, die andre wohl hätten ausführen können, übernahm er selbst auch dann, wenn sie beschwerlich und vielleicht aufreibend für ihn waren, falls er sie für nützlich hielt und überzeugt war, dass sie sonst garnicht zur Ausführung kommen würden. Die Beobachtungen waren ihm das Mittel, zu einer bestimmten Erkenntnis zu gelangen, gerade so wie Rechnungen und Formeln ihm nicht Selbstzweck waren, sondern der Kalkül das Kleid war, in dem er seine Gedanken über eine Sache vorführte. Durch genaue Ausarbeitung der Methode, gründliche Untersuchung des Instrumentes und hohe Anspannung der Aufmerksamkeit suchte er die grösstmögliche Genauigkeit und Sicherheit

1) G.-O. Nr. 48.

2) G.-O. Nr. 61.

des Ergebnisses zu gewinnen und er empfand bei der Erreichung des gesteckten Zieles grosse innere Befriedigung. Die Freude am Beobachten an sich oder der Wunsch, Beobachtungen zwecks späterer Verwertung zu sammeln, tritt in der Glanzzeit seines Wirkens zurück, erst später finden sich Anklänge in dieser Richtung, als er magnetische Beobachtungen häufte oder als ihn in vorgeschrittenem Alter die Betrachtung der Mondoberfläche lockte.

11. Winkelmessungen bei Braunschweig. In den folgenden Jahren 1803—1805 sehen wir GAUSS wieder mit kleinen Messungen beschäftigt, die er freilich vorerst mehr als Übungen und Veranlassung zu Exkursionen in die Umgebung Braunschweigs ansah. Sie erstreckten sich z. B. bis in die Gegend von Broizen[1]), wo er auf einer Erhebung alle sichtbaren Punkte einstellte. Er bediente sich bei den Winkelmessungen des ihm von v. ZACH überlassenen Sextanten. Er wunderte sich selbst über die grosse dabei erlangte Genauigkeit, ungeachtet er seine Winkel in Ermangelung eines Instrumentes zum Höhenmessen nicht auf den Horizont reduzieren konnte. Bereits damals dachte er schon daran, aus seinen Messungen mehr zu machen: »Ich habe den Plan, einst das ganze Land mit einem Dreiecksnetz zu beziehen. Eine hinlängliche Anzahl trigonometrisch bestimmter Punkte mit seinem Detail verbunden müssen zu einer guten Karte dienen können«[2]), denn die Vermessung des Braunschweigschen Landes durch Major GERLACH mit dem Astrolabium und der Kette oder gar nur mit Messtisch und Schrittmass konnte für eine zuverlässige Karte nicht in Betracht kommen.

12. Beobachtungen von Pulverblitzen. Seeberger Basis. Ein Aufsatz von BEIGEL über die trigonometrische Vermessung in Bayern in ZACHS Monatlicher Correspondenz[3]) erregte die Aufmerksamkeit von GAUSS. BEIGEL hoffte, dass Seeberg zum Mittelpunkt einer umfassenden trigonometrischen Messung über einen grossen Teil Deutschlands genommen werden möchte und v. ZACH bemerkte dazu, dass dieser Wunsch bereits seiner Erfüllung nahe sei, worüber er bald genaueres bekannt geben werde. Auf eine hierauf bezügliche Anfrage von GAUSS antwortete ZACH nur in Rätseln, aber OLBERS konnte ihm

1) Wohl übereinstimmend mit der jetzigen Bahnstation Broitzen, 5 km von Braunschweig an der nach Hildesheim führenden Linie gelegen.

2) G.-O. Nr. 61.

3) Band VII, Seite 354.

mitteilen, dass ZACH vom König von Preussen zur Vermessung seiner neu akquirierten Länder aufgefordert sei, und dies unter der Bedingung angenommen habe, dass sie wenigstens mit den letzten englischen und französischen Messungen rivalisieren könne. Ferner habe der Herzog von Gotha die Kosten übernommen, um damit eine grosse deutsche Gradmessung von 4 Grad Breite und 6 Grad Länge zu verbinden, und ZACH wolle im Sommer 1803 im Meridian von Seeberg eine Basis von 10000 Toisen Länge messen. »Mich wundert«, schreibt OLBERS, »dass er Ihnen noch nichts Umständliches davon gemeldet hat, da er in dem, was Theoria bei diesen Messungen betreffen wird, auf Ihren Beistand rechnet«.

GAUSS kam nun bald durch den Oberappelationsrat v. ENDE, der wie schon erwähnt wurde (vergl. S. 18), in Braunschweig und Umgebung Breiten- und Längenbestimmungen machte, mit diesen Arbeiten in Berührung. Über v. ENDE hat er sich gelegentlich GERLING gegenüber geäussert[2]), dass er kein ungeschickter Beobachter wäre. Der Wert von Dilettanten-Beobachtungen mit geringen Werkzeugen sei aber sehr gering für die Geographie verglichen mit dem, was selbst eine mittelmässige Triangulation leisten könne. Fast alle 1803 durch Pulversignale bestimmten Längen wichen von den Resultaten aus MÜFFLINGS Dreiecken mehr ab, als man auf die Irregularitäten der Erde schieben könne. Die Polhöhe des Brockens folge aus den Dreiecken auch über 9″ kleiner als aus ZACHS Beobachtungen: »hier freilich können«, fügt GAUSS mit genialer Erkenntnis der wahren Ursache hinzu, »die Harzberge, die nach Süden noch so bedeutende Massen vorlegen, während im Norden nichts mehr ist, wohl viel mitgewirkt haben«.

v. ZACH befand sich im August auf dem Brocken und gab von dort fast täglich Signale für die Längenbestimmungen[3]), während die Arbeiten in Braunschweig, Helmstedt und Wolfenbüttel v. ENDE und GAUSS übertragen waren[4]).

---

1) Über den Plan für die Königlich Preussische trigonometrische und astronomische Aufnahme von Thüringen und dem Eichsfelde und die Herzogl. Sachsen-Gothaische Gradmessung zur Bestimmung der wahren Gestalt der Erde vergleiche Monatliche Correspondenz Band IX, Seite 3 ff.

2) Brief von 21. Febr. 1822. Vergl. GAEDE, *Beiträge* S. 37, Anm. 85. Originalbericht vom 26. 1. 1831.

3) Vergl. EGEN, *Vorschlag zu einer neuen Methode der Zeitübertragung usw.* Astr. Nachr. Bd. 8, Nr. 171, S. 62 f.

4) In Braunschweig beobachtete v. ENDE mit einem eigenen ARNOLDschen Chronometer in seiner in der Steinstrasse gelegenen Wohnung, GAUSS im Süden der Stadt im Garten des Kaufmanns KÖPPE vom 9.

GAUSS bestimmte die Zeit mit einem dem Herzog von Gotha gehörenden Chronometer, das ZACH an ENDE geschickt hatte, aus Sonnenbeobachtungen; auch beobachtete er in Braunschweig eine Sternbedeckung zur Längenbestimmung. Bevor ZACH den Brocken verliess, reiste GAUSS am 27. August 1803 von Braunschweig dorthin und begleitete ihn dann nach Gotha, um zugleich mit v. ENDE und Professor BÜRG aus Wien an der Seeberger Grundlinienmessung teilzunehmen. Es wurde nur ein Teil derselben, ungefähr 2000 Toisen lang, nördlich von der Sternwarte hin und zurück gemessen; bekanntlich wurde die Messung der ganzen Linie nie vollendet und die zur Bezeichnung der Endpunkte gewählten unbrauchbaren Kanonenrohre wurden nach der Schlacht bei Jena, weil es verboten war, Waffen zu vergraben oder zu verbergen, ausgegraben, so dass, wie GAUSS sich einmal ausdrückte, die Endpunkte auf eine wahrhaft Schildaische Art verloren gingen (G.-O. Nr. 343).

Damals freute sich GAUSS über die Uebereinstimmung der Messungen in beiden Richtungen, die nach allen Reduktionen nur um eine ganz unbedeutende Kleinigkeit von ein paar Linien differierten. Später überzeugte er sich, dass die gemessene Länge, besonders aber der ungenügende Anschluss des Dreiecksnetzes auf zu kleine Dreiecksseiten führte. Er war drei Monate lang Gast der Seeberger Sternwarte, wo mannigfaltige Beschäftigungen seine Zeit zersplitterten und bedeutende theoretische Arbeiten nicht zuliessen. Am 7. Dezember reiste er sodann mit ZACH von Gotha ab, der auf 10 Tage mit ihm nach Braunschweig kam, um einen geeigneten Platz für die dort projektierte Sternwarte auszusuchen und einen solchen auch in dem ehemaligen Pulvermagazin fand. Es sollte aber nicht zu dem Bau dieser Sternwarte kommen.

Vielmehr begannen schon die Vorbereitungen für den Bau der Göttinger Sternwarte. Im April 1803 war auch der Observator HARDING aus Lilienthal nach der Seeberger Sternwarte gekommen, da er den Auftrag hatte, die Mittagslinie der neuen Sternwarte in Göttingen festzulegen und dazu von ZACH ausser einem Chronometer Rat für die Ausführung nach einer von ZACH[1]) ange-

bis 18. August. In Helmstedt nahmen beide korrespondierende Sonnenhöhen im Garten des Hofrat PFAFF am 19. August und abends die Brockensignale auf. Am 21. August wurden die korrespondierenden Höhen im Gasthofe zum Erbprinzen gemessen. In Wolfenbüttel wurden 16 Paar Sonnenhöhen am 25. August im Pavillon des Drosten v. RODENBERG und dann die Feuersignale beobachtet. Mon. Corr. X, S. 302—307, Werke XI 1, S. 261.

1) Mon. Corr. XXV, Seite 544.

gebenen Methode erbitten wollte. Vermutlich hat diese Reise das erste persönliche Zusammentreffen von GAUSS mit dem 12 Jahre älteren Kollegen herbeigeführt[1]), dem (nach der Anstellungsurkunde vom 25. Juli 1807) mit ihm zusammen die Direktion der Göttinger Sternwarte übertragen wurde. Dies eigenartige Verhältnis zu einem Manne, den GAUSS von Anfang an als einen geschickten, fleissigen, gefälligen und bescheidenen Gehilfen[2]) betrachtete und betrachten musste, hat jedenfalls dazu beigetragen, dass Reibungen nicht ausblieben, so freundschaftlich die Stellung beider anfangs war[3]), und so gerecht ihn auch später GAUSS beurteilte. Besonders zur Zeit der Gradmessungsarbeiten verbitterte dies Verhältnis GAUSS das Leben, wobei das Gefühl, auch selbst nicht ganz schuldlos zu sein[4]), nicht ohne Einfluss blieb.

Im Jahre 1804 begann v. ZACH mit Veröffentlichungen über die Gradmessung, zu der die Seeberger Basis den Anfang gebildet hatte. Er schlug dabei die Anschaffung eines Zenitsektors vor, obgleich zwei vortreffliche BORDAsche Multiplikationskreise zur Bestimmung des Breitenunterschiedes der Endpunkte der Meridianmessung vorhanden waren und obgleich ein solcher Kreis, wie sich ZACH ausdrückt, »das Senkblei durchaus entbehrt und folglich die Einwirkung der Gebirgsattraktion auf dasselbe ganz wegfällt«[5]). Ein Zenitsektor würde ausser andern Verwendungen von einem neuen Nutzen bei der Gradmessung sein, weil man damit in Verbindung mit dem BORDAschen Kreise die unmittelbaren Attraktionen der Thüringer und der Harzgebirge ausmitteln könnte. GAUSS erkannte sofort den Irrtum dieser Aeusserungen und schrieb an OLBERS: »Ich hätte gewünscht, dass die Aeusserung, als würde nur das Lot am Zenitsektor von der Attraktion der Gebirge afficiert (und nicht das Niveau am BORDAschen Kreise) nicht geschehen wäre«. (G.-O. Nr. 81).

Auch über die Beobachtungen, an denen er teilgenommen hatte, äusserte sich GAUSS zu OLBERS. Mit der Genauigkeit der durch die Pulversignale erhaltenen Längenunterschiede gab er sich zufrieden, obgleich Differenzen von

1) G.-Sch. Nr. 459.

2) G.-O. Nr. 114.

3) Monatliche Correspondenz, Band 28, S. 501. Als HARDING im Juli 1804 in Lilienthal den Planeten Juno entdeckt hatte, beobachtete ihn GAUSS mit einem Spiegelteleskop von SHORT.

4) Nach Bemerkungen von ENCKE in Briefen an GERLING vom 3. August und 4. September 1821.

5) Monatliche Correspondenz, Band 9, 1804, S. 106.

5 Zeitsekunden vorkamen, indem sich aus den Beobachtungsfehlern keine grössere Genauigkeit erwarten liess. Besonders freute es ihn, dass das Ergebnis für den Beobachtungsplatz in Braunschweig mit seiner Berechnung des Längenunterschiedes gegen Brocken aus der genügend bekannten Breitendifferenz und dem von ihm in Braunschweig beobachteten Azimute des Brockens sich bis auf die Sekunde übereinstimmend ergab. Man kann vermuten, dass GAUSS hierzu die später bei der Lösung der Hauptaufgabe für die Kugel aufgestellte Formel[1]) angewandt hat: $\tan g\, l = \sin b \tan g\, T \sec (B - b)$, wo l und b den Längen- und Breitenunterschied, hier T das Azimut und B die Breite in Braunschweig bezeichneten.

Sein Interesse an diesen Arbeiten verrät sich auch dadurch, dass er die meisten der von Leutnant Freiherrn v. MÜFFLING angestellten Beobachtungen zu seinem Vergnügen berechnete. v. MÜFFLING, 2 Jahre älter als GAUSS, hatte bereits 1797—1802 an der trigonometrischen Vermessung Westfalens für die LECOQsche Karte teilgenommen und sich jetzt mit LINDENAU zusammen an der Basismessung beteiligt. Mit zwei andern Gehilfen bereiste er dann in ZACHS Auftrag ganz Thüringen und mass mit dem Theodolithen die Winkel zwischen allen sichtbaren Kirchtürmen usw. auf einer sehr grossen Anzahl von Standpunkten. Diese Triangulation schloss GAUSS mit dem Sextanten an das gemessene Stück der Basis an, und seine Rechnung gab ihm eine Menge von Örtern vom Brocken bis in den fränkischen Kreis, die seiner Meinung nach genau genug für die Bedürfnisse einer Karte bestimmt waren.

Selbst einen kurzen Aufenthalt in dem kleinen »paradiesischen« Badeorte Rehburg, etwa 35 km von Hannover (OLBERS gibt nur 3 Meilen an), wo OLBERS öfter durch laue Bäder und Driburger Wasser seine Gesundheit zu stärken pflegte, und GAUSS ihn im August 1804 auf einige Tage besuchte, benutzten die beiden Freunde zur Messung einiger Winkel zwischen Hannover, Brocken und Minden, aus deren genähert bekannter geographischer Lage GAUSS die Länge und Breite des Georgplatzes (einer kleinen Anhöhe[2]) in Bad Rehburg) berechnete und die Ungenauigkeit der GÜSSEFELDschen Karte nachwies. Vielleicht hat er damals das eigenartige Rechnungsverfahren in seine Logarithmen-

1) Vergl. *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie.* Erste Abhandlung. Art. 17. Werke IV, S. 287.

2) Nach Mitteilung von Professor OERTEL in Hannover.

tafel eingetragen, das Werke IX, S. 238 abgedruckt ist[1]). Diese Messungen waren ihm auch insofern von Interesse, als bis dahin Hameln als der westlichste Punkt betrachtet worden war, von dem aus der Brocken erblickt werden konnte[2]). ZACH nahm die Entdeckung des Brockens in Rehburg mit grossem Interesse auf und lud GAUSS ein, bei Wiederholung der Pulversignale auf dem Brocken im Frühjahr 1805 die Bestimmung von Rehburg zu übernehmen, während er selbst auf dem Keulenberge bei Dresden[3]) beobachten wollte. GAUSS hatte es selbst für wünschenswert gehalten, dass noch auf mehreren entfernteren Punkten, wie Hameln, im Lüneburgschen, in der Alt-Mark usw. korrespondierende Beobachtungen von geübten Beobachtern angestellt werden möchten, wobei der Wirt auf dem Brocken Pulversignale geben sollte. Jedoch scheinen sich diese Pläne nicht verwirklicht zu haben.

13. **Berührung mit Epailly.** In den Jahren 1803—1805 leitete der französische Oberst EPAILLY die Vermessungen in dem besetzten Gebiete, und seine Dreiecke, besonders im südlichen Teile des Kurfürstentumes Hannover, sind GAUSS später bei der Gradmessung von grossem Nutzen für die Anlage seines eigenen Dreiecksnetzes gewesen, haben allerdings auch manchmal die Konfiguration desselben ungünstig beeinflusst. In welcher Weise EPAILLY, dem ein starkes Personal an Ingenieuren, berittenen Ordonnanzen, Wagen und Pferden zu Gebote stand, seine Arbeiten durchführte, erhellt aus seinem eigenen Bericht[4]) *Sur les moyens d'exécution:* »pour faire marcher de front la reconnaissance des triangles, la disposition, l'élévation des signaux et l'observation des angles, il fallait. . . . . malgré les cris et les plaintes des paysans pouvoir impitoyablement abattre leurs bois, percer des fenêtres dans les toîts de leurs clochers, y faire des observatoires; il fallait pouvoir jouir partout du droit

1) Und vielleicht auch Werke IX, S. 223, Notiz 2.

2) Auf die Sichtbarkeit des Brockens bezügliche Mitteilungen scheinen auch später für GAUSS von Interesse gewesen zu sein, vergl. G.-SCH. Nr. 318.

3) Der Keulenberg (Augustusberg), 443 m hoch, befindet sich bei Königsbrück im Pulsnitztal. Dort wurden 1803, obgleich der Brocken selbst nicht sichtbar ist, doch die Pulverblitze wahrgenommen.

4) Im Besitz der Trigonometrischen Abteilung der Preussischen Landesaufnahme befindet sich ein Aktenstück über diese Triangulation. Den Hauptbestandteil desselben bildet ein 55 Seiten langer Bericht EPAILLYS: »Compte rendu à Monsieur le Général de Brigade du Génie SANSON, directeur du dépot général de la guerre, par le chef de section, directeur du Bureau Topographique de l'armée d'Hanovre, des travaux faits à ce Bureau pendant l'an douze«; GAUSS hat dieses Aktenstück, insbesondere den Compte rendu, in Händen gehabt, vergleiche Werke, Band IV, S. 488 und G.-O. Nr. 427, S. 125.

de conquête et n'avoir à craindre nulle part ni refus, ni résistance; il fallait que nous pussions en imposer, qu'on respectât jusqu'aux signaux que nous avons élevés dans les déserts, où ils n'ont d'autre sauve-garde que la frayeur.«

1805 kam EPAILLY auch nach Braunschweig, um mit einem LENOIRschen Kreise auf dem Andreasturme Winkel zu nehmen. GAUSS hat offenbar die Gelegenheit benützt, diese Arbeiten und die Instrumente kennen zu lernen, wobei er sich über die grobe Teilung des Kreises wunderte. Er wünschte sich dagegen einen solchen Kreis von TROUGHTON. Sonst erfahren wir über diese Messungen nichts durch GAUSS, als dass EPAILLY in Braunschweig erkrankte.

In den folgenden Jahren scheinen die geodätischen Interessen etwas mehr in den Hintergrund getreten zu sein. Im Jahre 1805 verheiratete sich GAUSS, im folgenden wurde sein Sohn Joseph geboren, der später sein Gehilfe bei der Gradmessung werden sollte. Die politischen Vorgänge, die auch das Schicksal der Georgia Augusta berührten, haben sein Gemüt vielfach beschäftigt, und die Entwicklung und die Sorgen seiner eigenen Verhältnisse ihn bedrückt. Doch hat ihn dies alles nicht gehindert, inmitten der Unruhe und der Kriegswirren die bedeutendsten Früchte seines Geistes zu pflücken. Auf astronomischen Gebiete verfasste er in dieser Zeit die *Theoria motus corporum coelestium.*

III. Abschnitt. Das erste Jahrzehnt in Göttingen: 1807—1816.

14. Azimut von Clausberg, Polhöhe von Freytagswerder. Alsbald nach seinem Eintreffen in Göttingen, im November 1807, scheint GAUSS in seinem auch sonst hervortretenden Bestreben, die grundlegenden Bestimmungen an erste Stelle zu setzen[1]), eine Azimutbestimmung auf der Sternwarte gemacht zu

1) Dieses zeigt sich auch bei seinen astronomischen Arbeiten, bei denen er von vornherein die Bestimmung der Konstanten des Sonnensystems im Auge hatte. Vergleiche C. BRUHNS, *Johann Franz Encke.* Leipzig 1869. S. 31 (Beobachtungen des Solstitiums 1814—15) und G.-Sch. Nr. 98, wo Verabredungen mit

haben, über die er sich in einem Briefe an OLBERS äussert[1]): »Vor kurzem habe ich von der Methode[2]), von einem terrestrischen Gegenstande Höhe und Azimut durch Abstände von der wahren und der im Quecksilberhorizont reflektierten Sonne zu bestimmen, eine praktische Anwendung gemacht; ich finde, dass es damit ganz vortrefflich geht, und die Beobachtungen von zwei Tagen geben sehr gut übereinstimmende Resultate. Vom Mittelpunkt der Sternwarte[3]) gesehen ist das Azimut von Clausberg $220^0\,24'\,50''$. Die direkte Auflösung jenes Problems beruht auf 3 sphärischen Dreiecken, ich ziehe aber eine Art indirekten Verfahrens vor. Sind zwei Messungen des Abstandes vom wahren und reflektierten Sonnenbilde gleichzeitig (was man leicht durch Inter-

---

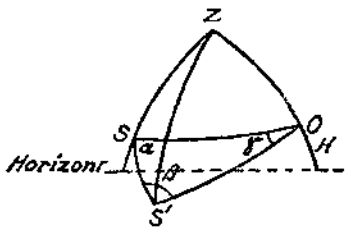
NICOLAI, SOLDNER und ENCKE für korrespondierende Mondbeobachtungen zur Bestimmung der Längenunterschiede zwischen Göttingen und mehreren Sternwarten erwähnt werden, die (1820) bereits 5 Monate im Gange waren. In demselben Briefe werden von GAUSS berechnete Aberrations- und Nutationstafeln erwähnt.

1) G.-O. Nr. 207.

2) Sind $OS = d$ und $OS' = d'$ die gemessenen Abstände zwischen dem Objekte O und der Sonne S und der im Quecksilberhorizonte reflektierten Sonne S', bedeutet ferner Z das Zenit, so ist im Dreieck ZSS':

$$ZS = 90^0 - h_1, \quad ZS' = 90^0 + h_2, \quad \text{Winkel } Z = a_2 - a_1$$

wenn $a_1 h_1$ Azimut und Höhe der Sonne zur Zeit der ersten Mesbung, $a_2 h_2$ zur Zeit der zweiten Messung sind. Man erhält daraus die andern Stücke des Dreiecks $SS' = \Delta$, und die Winkel bei $S: S + \alpha$ und bei $S': \beta - S'$ etwa durch die Gleichungen des art. 54 der *Theoria motus*.



Sodann erhält man die Winkel α, β, γ des Dreiecks $SS'O$ aus den drei Seiten d, d', Δ.

Damit werden entweder aus Dreieck ZSO, in dem $SZ = 90^0 - h_1$, $SO = d$ und der eingeschlossene Winkel S bekannt sind, der Winkel bei Z d. h. die Differenz $A - a_1$, des Azimutes A des Objektes (und gleichzeitig $ZO = 90^0 - H$, die Zenitdistanz des Objekts) und a_1 der Sonne berechnet, oder aus Dreieck $ZS'O$, in dem $ZS' = 90^0 + h_2$, $ZS'O = S'$, $S'O = d'$ ist, $Z = A - a_2$ (und $ZO = 90^0 - H$).

Sind abwechselnd mehrere Abstände von der Sonne und ihrem Bilde nahe nach einander gemessen, so kann man durch Interpolation Abstände d und d' erhalten, die zu demselben Sonnenort gehören. Man erhält α oder β aus den drei Seiten $2h$, d und d' des Dreiecks $OS'S$ und $A - a$ (sowie H) aus $ZS = 90^0 - h$, $OS = d$ und $S = 180^0 - \alpha$ des Dreiecks ZSO oder auch aus $ZS' = 90^0 + h$, $OS' = d'$ und $S' = \beta$ des Dreiecks $ZS'O$.

3) Hier ist die alte Sternwarte gemeint, wo TOBIAS MAYER beobachtete. Sie lag in der Strasse Klein-Paris (jetzt Turmstrasse) auf einem alten Festungsturm. GAUSS wohnte damals in der Nachbarschaft in dem grossen Hause an der Ecke von Klein-Paris und der Kurzen Strasse, wo er auch die *Theoria motus* vollendet hat. Vergl. W. SCHUR, *Festschrift der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen*, 1901, S. 128.

polation erhält, wenn mehrere Abstände immer wechselsweise gemessen sind), so führt die Auflösung sogleich auf sehr bequeme Formeln«.

HARDING trat GAUSS einen neuen Sextanten ab, den vormals Dr. HEINEKEN in Bremen besessen und ihm überlassen hatte. Mit diesem 10-zölligen Sextanten von TROUGHTON[1]), für den ihm REPSOLD noch ein Stativ liefern sollte und der in mehreren Rücksichten besser war, als der alte, beabsichtigte GAUSS im Sommer 1808 auf gemeinsamen Exkursionen mit HARDING die Gegend von Göttingen mit Dreiecken zu überziehen[2]).

Der Mangel an grösseren Instrumenten und guten Uhren vor Vollendung der neuen Sternwarte, die sich bis zum Jahre 1818 verzögert hat, dürfte auch die 1808 erschienene Programmabhandlung: *Methodum peculiarem elevationem poli determinandi explicat D. Carolus Friedericus Gauss* (Werke VI, S. 37), veranlasst haben; bei dieser Methode, welche aus den beobachteten Höhen zweier Sterne und der Zwischenzeit der Beobachtung die Zeit und Breite gibt, konnte der Sextant und eine mittelmässige Uhr gute Resultate liefern. Sie erforderte nicht so viel vorbereitende Rechnungen, als die kurz vorher von ihm in ZACHS Mon. Corr. XVIII, S. 277 (Werke VI, S. 129) veröffentlichte: *Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie*, bei der drei gleiche Sternhöhen beobachtet werden.

Im Zusammenhang mit diesen Bestrebungen, durch die ihm zur Verfügung stehenden einfachen Instrumente möglichst genaue Resultate zu erhalten, steht wohl auch eine im August 1810 nach Münden unternommene Fahrt, bei der es sich z. T. darum handelte, den Einfluss des Fahrens auf den Gang eines Chronometers zu finden. Bei dieser Gelegenheit bestimmte GAUSS auf dem sogenannten Freytagswerder am Zusammenfluss von Werra und Fulda die Polhöhe und den Längenunterschied gegen Göttingen durch die Sonne (letzteren offenbar durch Chronometerübertragung)[3]).

---

1) Auf diesen neuen, in dem Brief von GAUSS an OLBERS vom 19. April 1808 (G.-O. Nr. 207) erwähnten Sextanten scheint sich die Bemerkung von GAUSS in der Abhandlung *Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie* in der Mon. Corr. vom Oktober 1808, Band XVIII, S. 281, Werke VI, S. 131 zu beziehen: »Ich selbst besitze einen 10 zölligen [Sextanten] von TROUGHTON Nr. 420, der zwar übrigens vortrefflich ist, aber ganz entschieden die Winkel von 100 bis 120° um 50 bis 60 oder 70″ zu klein gibt«.

2) Die Winkelmessungen bei Göttingen werden 1821 im G.-O. Nr. 399 erwähnt, wobei GAUSS sich erinnert, dass er 1812 auf dem Hanstein die Winkel zwischen Göttingen, Brocken und der Boineburg (zwei MÜFFLINGschen Punkten) bestimmt hatte.

3) Am 19. und 20. Februar 1812 beobachtete GAUSS zur Bestimmung der Länge von Göttingen Sternbedeckungen (G.-SCH. Nr. 192).

15. Schumacher. Aufforderung zur Teilnahme an der Gradmessung. Im Winter 1808—1809 begann für GAUSS durch die Vorlesungen noch eine andere Tätigkeit, der er ein inneres Widerstreben entgegenbrachte (G.-B. Nr. 143, vergl. G.-SCH. Nr. 192 und Nr. 1076), insbesondere weil sie seine Zeit zerstückelte und ihm so die Unabhängigkeit »das grosse Losungswort für Geistesarbeiten in die Tiefe« (G.-O. Nr. 596) raubte. Trotzdem hat er bis in sein Alter mit grosser Gewissenhaftigkeit auch diese akademische Pflicht erfüllt und die Anregung und Belehrung, die seine Schüler dadurch erhalten und dankbar anerkannt haben (WINNECKE, *Festschrift zu Gauss' hundertjährigem Geburtstage.* Braunschweig 1877, S. 21), bezeugen den grossen Erfolg gerade auch dieser Tätigkeit.

Mehr Freude hatte GAUSS allerdings an der Unterweisung solcher Männer, die seinetwegen nach Göttingen kamen, um mehr privatim ihre Studien zu betreiben oder ihre Ausbildung zu vervollkommnen und dabei seinen Rat und seine Hilfe in Anspruch zu nehmen[1]). Zu ihnen gehörte SCHUMACHER, der sich in demselben Winter 1808/09 in Göttingen einfand. Er war 3 Jahre jünger als GAUSS, hatte ursprünglich Rechtswissenschaft studiert, sich aber dann der Mathematik und Astronomie zugewandt und sich bei LALANDE in Paris ausbilden wollen, als der Krieg ausbrach und dann LALANDES Tod (4. April 1807) dies verhinderte. Neben dem Arzt und Astronomen OLBERS wurde SCHUMACHER bald einer der bevorzugten Männer, die sich GAUSS' Freunde nennen durften. Aber nicht der intime und umfangreiche Briefwechsel, der ihr Verhältnis widerspiegelt, in dem GAUSS in wissenschaftlicher Beziehung der Gebende war und in praktischer Hinsicht oft den Rat und die Erfahrung des feinfühlenden und geschäftsgewandten Vermittlers in Anspruch nahm, bildet den Anlass zur Erwähnung ihrer Bekanntschaft an dieser Stelle, sondern der entscheidende Einfluss, den SCHUMACHER auf die geodätische Laufbahn von GAUSS ausgeübt hat.

SCHUMACHER wurde im Oktober 1810 als ausserordentlicher Professor der Astronomie nach Kopenhagen berufen, von wo er 1813 als Direktor der Sternwarte nach Mannheim ging. GAUSS war sehr erfreut über die Verkürzung des Abstandes ihrer Wohnorte. Auch gedachte er sogleich, Göttingen und Mann-

1) Vergl. G.-SCH. Nr. 77, wo DIRKSEN gemeint zu sein scheint.

heim durch eine Triangulation zu verbinden, zumal er einen »unübertrefflichen« achtzölligen Theodolithen[1]) von REICHENBACH erhalten hatte, der bei der Messung des Winkels[2]) zwischen Clausberg und Geismar auf der Sternwarte nur einen Unterschied von 0,5″ gegen die Messung mit dem zwölfzölligen BORDAschen Kreise gegeben hatte. Zunächst wollte er, falls GERLING von Cassel aus den Hohehagen sehen könnte, von dort aus Pulversignale geben lassen, um den Längenunterschied zwischen Cassel und Göttingen zu bestimmen. Sollte der Hohehagen aber unsichtbar sein, so schlug GAUSS vor, im Herbst 1813 gleichzeitige Sternschnuppenbeobachtungen zu diesem Zwecke auszuführen. Ferner gedachte er im Frühjahr 1814 zunächst Göttingen und Gotha durch Dreiecke mit einander zu verbinden, worüber er sich vielleicht schon im Herbst 1811, als er 14 Tage auf der Seeberger Sternwarte weilte, mit ZACH verständigt hatte.

Zur Durchführung aller dieser Pläne kam es nicht, zumal SCHUMACHER bereits 1815 wieder nach Kopenhagen, nunmehr als ordentlicher Professor zurückkehrte. Von dort schrieb er am 8. Juni 1816 an GAUSS in einem Briefe, der geschichtliche Bedeutung erlangt hat (G.-SCH. Nr. 68), über eine Sache, die ihm sehr am Herzen lag: »Der König hat mir die nötigen Fonds zu einer Gradmessung von Skagen bis Lauenburg (4 1/3 Grad der Breite) und eine Längengradmessung von Kopenhagen bis zur Westküste von Jütland (4 2/3 Längengrade) bewilligt. Ich wäre jetzt schon an der Arbeit, wenn nicht wirklich unverantwortlicher Weise REICHENBACH mich mit den Instrumenten im Stich gelassen hätte. . . . Sie können leicht denken, dass ich alles aufbieten werde, etwas so vollkommenes als möglich zu leisten und hier ist es, wo ich mir Ihren Rat erbitte. Zeigen Sie mir doch an, worin Sie Verbesserung der gewöhnlichen Methoden wünschen, und entwerfen Sie mir den Plan der Berechnungen. Wäre es nicht möglich, dass Sie oder LINDENAU, oder alle beide, den Meridian durch Hannover fort bis gegen Gotha, oder bis an die

---

1) GAUSS schreibt darüber an GERLING (2. Mai 1813): »Morgen werde ich eine vorläufige Rekognoszierung auf dem Hohen Hagen vornehmen. Der Theodolith ist ein herrliches Instrument, mit den kleinen Fernrohr von 1 Zoll Öffnung sieht man bei hellem Sonnenglanz den Sirius so schön, dass man darüber in Erstaunen gerät. Ich zweifle nicht, dass man fast alle Sterne erster Grösse am Tage damit beobachten kann«.

2) Dies gab ihm den Anlass zur Beschäftigung mit der Reduktion schief gemessener Winkel auf den Horizont (vergl. Werke IX, S. 510).

bayerischen Dreiecke führten, und dass wir dann gemeinschaftlich eine Grundlinie in der Gegend von Hamburg mässen? Die eine Grundlinie bei Gotha ist ja, meine ich, beinahe schon von ZACH fertig? Ist das, was Sie mir mitzuteilen haben, zuviel, um schriftlich abgemacht werden zu können, so laden Sie mich nur durch einen ostensibeln Brief, mit dem ich dann gleich zum Könige gehen werde, auf ein Rendezvous in Hamburg diesen Herbst ein, wo wir unsern ganzen Operationsplan verabreden können. Ich zweifle nicht, dass, wenn Sie sonst Lust dazu haben, Ihre Regierung nicht jede Unterstützung dazu geben werde, und gegen diese können Sie auch gerne die Nachricht brauchen, dass der König von Dänemark mir bereits alle Fonds bewilligt habe, sonst bitte ich aber, nichts öffentlich von dieser Gradmessung bekannt zu machen, bis Sie entweder sich zur Teilnahme entschlossen haben, oder bis ich sie allein vollführt habe. Wollen Sie in Ihrem Briefe an mich Ihr Vergnügen darüber bemerken, dass der König sich zu einer solchen wissenschaftlichen Operation entschlossen habe, so würden Sie ihm ein grosses Vergnügen machen (er hat mich express gefragt, was Sie wohl dazu sagen würden) und mir zu ähnlichen wissenschaftlichen Operationen ein desto leichteres Gelingen bahnen.«

16. Antwort von Gauss. Mit grosser Begeisterung begrüsste GAUSS die von SCHUMACHER geplante Gradmessung, deren von diesem angeregte Fortsetzung nach Süden er nur im Augenblicke nicht zu übernehmen wagte. Er antwortete am 5. Juli 1816[1]):

»Vor allen Dingen, teuerster Freund, meinen herzlichen Glückwunsch zu der herrlichen grossen Unternehmung, welche Sie mir in Ihrem letzten Briefe ankündigen. Diese Gradmessung in den k. dänischen Staaten wird uns, an sich schon, über die Gestalt der Erde schöne Aufschlüsse geben. Ich zweifle indessen garnicht, dass es in Zukunft möglich zu machen sein wird, Ihre Messungen durch das Königreich Hannover südlich fortzusetzen. In diesem Augenblicke kann ich zwar einen solchen Wunsch in H[annover] noch nicht in Anregung bringen, da erst die Astronomie selbst noch so grosser Unterstützung bedarf: allein ich bin überzeugt, dass demnächst unsere Regierung, die auch die Wissenschaften gern unterstützt, dem glorreichen Beispiele Ihres trefflichen

1) W. IX, 345/6. G.-SCH. Nr. 69.

Königs folgen werde. Wir würden dann schon einen respektabeln Meridianbogen von $6\frac{1}{2}$ Grad haben, und leicht würden sich dann auch noch diese Operationen mit den bayerischen Dreiecken in Verbindung setzen lassen. Letztere sind gewiss mit grösster Sorgfalt gemessen, und es ist nur zu beklagen, dass sie der Publizität entzogen werden.

Über die Art, die gemessenen Dreiecke im Kalkul zu behandeln, habe ich mir eine eigene Methode entworfen, die aber für einen Brief viel zu weitläuftig sein würde. In Zukunft, falls ich bis dahin, wo Sie Ihre Dreiecke gemessen haben, sie nicht schon öffentlich bekannt gemacht haben sollte, werde ich mit Ihnen darüber umständlich konferieren: ja ich erbiete mich, die Berechnung der Hauptdreiecke selbst auf mich zu nehmen.

Bei dem zweiten Teile Ihrer Unternehmung, der Messung des Längengrades, habe ich nur einen kleinen Zweifel. Ich meinte nämlich, dass die Länder der dänischen Monarchie eher flach zu nennen sind, wenigstens keine hohen Berge haben. Ist diese Voraussetzung gegründet, und sind Sie dann dadurch genötigt, zur Bestimmung des astronomischen Längenunterschiedes einen Zwischenpunkt oder gar mehrere zu nehmen, so wird jener Bestimmung, auch wenn Sie noch so geschickte Gehülfen und Hülfsmittel haben, doch immer eine kleine Ungewissheit ankleben.

Einen grossen Vorteil haben Sie in dem Umstande, dass Dänemark schon einmal trigonometrisch vermessen ist[1)], ich meine natürlich nicht in den gemessenen Winkeln selbst, die weit davon entfernt sind, sich zu einer Gradmessung zu qualifizieren, sondern weil jene Operationen Ihnen das Auswählen der Stationspunkte ungemein erleichtern wird. Dies Aufsuchen würde mir bei einer ähnlichen Arbeit gerade das unangenehmste sein, weil dabei so viele Zeit umsonst verloren wird. Ich habe mir viele Mühe gegeben (in ähnlichen Rücksichten auf künftige Operationen) die von EPAILLY im Hannöverschen gemessenen Winkel zu erhalten, aber ohne Erfolg.«

17. Unregelmässigkeit des französischen Meridians. Die ausserordentliche Teilnahme, die GAUSS an SCHUMACHERS Unternehmung bekundete, ist erst dann verständlich, wenn sie bis zu den Wurzeln ihrer Entstehung verfolgt wird.

---

1) [Vergl. V. H. O. MADSEN, *Le Service géodésique du Danemark 1816—1916.* Den Danske Gradmaaling Ny Raekke, Hefte Nr. 16. Kopenhagen 1916.]

Sie ruft die Erinnerung an jene kleine Berichtigung wach, die der zweiundzwanzigjährige Jüngling als erstmaligen Beitrag an ZACHS Allgemeine Geographische Ephemeriden einsandte (W. VIII, S. 136). Sie bezog sich auf die Einleitung, die v. ZACH dem vierten Bande dieser Zeitschrift vorausgeschickt hatte. Es war hierin die grösste damals vorhandene Gradmessung erwähnt, deren 90 Dreiecke den Meridian von Dünkirchen bis Barcelona umspannten. Diese zwecks Einführung des Dezimalsystems bei der Mass- und Gewichtsreform unternommene Neumessung des französischen Meridians war soeben von MÉCHAIN und DELAMBRE mit den besten damals zur Verfügung stehenden Hülfsmitteln vollendet worden[1]). Die ungünstige Gestaltung der CASSINIschen Dreiecke[2]) war durch eine vollständig neue Anlage vermieden worden und die innere Übereinstimmung der Ergebnisse befriedigte die damaligen Anforderungen durchaus. Aber die ermittelten Breitengradlängen zeigten wie bei den beiden früheren Messungen[3]) des Pariser Meridians Abweichungen von der regelmässigen Zunahme nach Norden, die man nicht den Beobachtungsfehlern zuschreiben konnte.

Als nun GAUSS zur Bestimmung der Meridianellipse auf die in dem Aufsatze von ZACH angegebenen vier Stücke des gemessenen Bogens die Methode der kleinsten Quadrate anwandte, erhielt er statt der von LALANDE (A. G. E. IV, S. XXXVII) errechneten Abplattung von 1 : 150 den Wert 1 : 50 (vergl. die Berichtigung, die GAUSS seiner eigenen Notiz folgen liess, W. VIII, S. 137) und bemerkte hierdurch einen Druckfehler in der Tabelle, nach dessen Verbesserung er die Abplattung 1 : 187 fand, deren Unterschied von dem französischen Ergebnis 1 : 150 er für nicht eben erheblich erachtete, weil die Endpunkte sich zu nahe lagen.

Wenn aber der ganze gemessene Meridianbogen mit jenem in Peru[4])

1) *Base du Système métrique décimal, ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et de Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes par M. M. Méchain et Delambre.* Rédigée par M. DELAMBRE. Suite des Mémoires de l'Institut. Paris 1806, 1807 et 1810. 3 vol. in 4°.

2) *La méridienne de l'Observatoire royal de Paris vérifiée dans toute l'étendue du royaume par de nouvelles observations* ... par M. CASSINI DE THURY. Paris 1744.

3) *De la Grandeur et de la Figure de la Terre* par J. CASSINI. Suite des Mémoires de l'Académie royale des Sciences, année 1718 und die in Anm. 2) erwähnte Messung von CASSINI DE THURY.

4) *La Figure de la Terre, déterminée par les observations des M. M. Bouguer et de La Condamine,* par M. BOUGUER, Paris 1749. — *Journal du voyage fait par ordre du Roi, à l'Équateur, servant d'introduction historique à la mesure des trois premiers degrés du méridien.* Par M. LA CONDAMINE. Paris 1751.

verglichen wurde, so erhielt man, wie v. ZACH (A. G. E. II, S. XXXVI) angibt, 1 : 334 für die Abplattung, ein Resultat, das mit den Pendelbeobachtungen und den astronomischen Ergebnissen weit besser übereinstimmte[1]). Man legte daher der Berechnung des Meters als des zehnmillionten Teiles des Erdquadranten diesen Abplattungswert zu Grunde[2]).

18. Unregelmässigkeit der Erdgestalt. Sicherlich hat GAUSS einerseits aus der Ungleichmässigkeit der Gradlängen der französischen Meridianbögen, andererseits aus der Verschiedenheit des Abplattungswertes, je nachdem er aus dem einen kleinen Umfang begreifenden Bogen oder aus der Kombination von Gradmessungen in verschiedenen geographischen Breiten abgeleitet wurde, bereits damals die Erkenntnis gewonnen, dass die Erdfigur unregelmässig ist und dass nur, wie er 1819 in einem Berichte (W. IV, S. 482) auseinandersetzte, die Vervielfältigung solcher Operationen Aufklärung über die noch dunkeln Punkte erbringen könne. Er erkannte zwar, wie aus seiner (S. 23 erwähnten) Äusserung über die Bestimmung der Polhöhe des Brockens im Jahre 1803 hervorgeht, dass durch Gebirgsattraktionen Lotabweichungen hervorgerufen werden, die sich als Unstimmigkeiten der aus Dreiecksberechnungen erhaltenen Breitenunterschiede mit den astronomisch beobachteten Polhöhen bemerkbar machen. Dunkel war ihm vielleicht damals noch das Zustandekommen solcher Unterschiede, wenn keine sichtbaren Gebirgsmassen vorhanden waren. Wenigstens kann man aus der vertraulichen Art der Mitteilung an SOLDNER [Brief v. 12. 11. 1823, Werke XI 1] über die zwischen Göttingen und Altona von ihm und SCHUMACHER erhaltene relative Lotabweichung von 5″ (vgl. G.-Sch. Nr. 195 u. 378) schliessen, dass GAUSS 1823/24 noch nicht wagte, mit voller Sicherheit über ihre Ursache sich zu äussern. Zu dieser späteren Zeit erblickte er zwar selbst darin einen entscheidenden Beweis für das unregelmässige Fortschreiten der Schwere, auch wenn sich dafür auf der Oberfläche der Erde kein Anhalt ergab[3]), woraus hervorgeht,

1) v. ZACH fand allerdings mit der zu kleinen Mondmasse 1 : 92 aus der Nutation das Achsenverhältnis 332,8 : 333,9 (M. C. XII, S. 339). Aus Pendellängen wurde 1 : 321, aus Mondsgleichungen 1 : 305 (M. C. XXIII, S. 254) angenommen. Der im Text angegebene Wert weicht von dem jetzt angenommenen 1 : 298 nach der andern Seite ab, wie der aus dem französischen Meridian allein gewonnene.

2) Die Kombination der Länge des französischen Meridianbogens mit der auf anderm Wege erhaltenen Abplattung zeigt die Willkür in der Festsetzung der Masseinheit.

3) G.-SCH. Nr. 192 (20. 12. 1823).

dass nicht ein Misstrauen gegen das Ergebnis der Bestimmung des Breitenunterschiedes bei ihm vorlag. Es war ihm aber eine neue Erkenntnis, deren Bestätigung durch Beobachtungen an andern Orten, wie z. B. in Helgoland ihm willkommen gewesen wäre, um ein Erfahrungsdatum mehr über vermutete Irregularitäten zu erhalten[1]). Man wird weiter gehen und annehmen dürfen, dass Gauss bereits jene Definition der Erdgestalt gefunden hatte, die er in der »*Bestimmung des Breitenunterschiedes* usw.« (Werke IX, S. 49) 1828 veröffentlicht hat. Gerade Helgoland musste darum für ihn besondre Bedeutung haben, weil an der Küste ein Wechsel der Dichte in der äussersten Erdrinde stattfindet und daher der Sinn der Abweichung des Lotes von der Ellipsoidnormalen ihm eine Bestätigung seiner Vorstellung zu geben versprach.

19. Erddimensionen. Dass Gauss die dänische Gradmessung ganz besonders aus dem Grunde begrüsste, weil sie über die Gestalt der Erde schöne Aufschlüsse geben würde, stimmt mit seinem erwähnten, besonders seit der Übernahme der Leitung der Göttinger Sternwarte hervorgetretenen Bestreben überein, in erster Linie Fundamentalbestimmungen vorzunehmen. Wie er die Festlegung der Sternwarte nach geographischer Länge und Breite als ein erstes Erfordernis ansah (G.-B. Nr. 74, 75, 93, 102, 113, 115, 118, 122, 143, 160), so lagen ihm auch die grundlegenden astronomischen Konstanten am Herzen. Er beschäftigt sich[2]) mit der Eigenbewegung des Sonnensystems (G.-B. Nr. 135, 140), mit der Schiefe der Ekliptik (G.-B. Nr. 69), mit Fundamentalsternbeobachtungen (G.-B. Nr. 102, 118, 120, 124, 127, 128). Er konstruierte Aberrationstafeln (G.-B. Nr. 105, G.-Sch. Nr. 63, 94, 98) und interessierte sich für die Präzessions- und Nutationskonstante (G.-B. Nr. 95) und so fort. Seine Aberrations- und Nutationstafeln machten auch in den Mailänder Ephemeriden einen stehenden Artikel aus (G.-Sch. Nr. 63). Untersuchungen über die Theorie der Refraktion werden G.-Sch. Nr. 59 erwähnt. Seine Bemühungen trafen hierbei mit denen Bessels zusammen, der in den *Fundamenta astronomiae* (1818) seine Untersuchungen über die Aberrations- und Nutationskonstante, über Refraktion usw. niederlegte und damit einen Teil dieser Arbeiten Gauss abnahm. Sodann hat Gauss die Prüfung und

1) G.-Sch. Nr. 182.

2) Man vergl. die einschlägigen Stücke W. XI 1.

Untersuchung der Instrumente als eine den Beobachtungen voranzustellende Aufgabe mit Umsicht und Ausdauer durchgeführt und hierbei vielfach mit BESSEL neue Berührungspunkte gefunden, die ebenfalls in dem Briefwechsel zwischen beiden Männern einen häufigen Gedankenaustausch herbeiführten.

Zu diesen Konstanten gehören nun auch die Erddimensionen, die grosse Achse und die Abplattung. Welchen Wert er auf ihre Bestimmung gelegt hat, geht daraus hervor, dass er den als zuverlässigen Rechner von ihm geschätzten Dr. SCHMIDT veranlasst hat, an Stelle der von WALBECK[1]) erhaltenen Werte, die dieser zum ersten Male nach einwandfreien Grundsätzen abgeleitet hatte, eine auf sieben Gradmessungen, worunter sich die hannoversche befand, beruhende neue Herleitung der Dimensionen vorzunehmen (W. IX, S. 56).

Es war aber nicht nur die Bedeutung der Kenntnis der Erdgestalt für die Astronomie, weswegen GAUSS auf ihre Erforschung Wert legte, sondern er hatte schon frühzeitig für die Geodäsie selbst ein lebhaftes Interesse gezeigt. Zwar mag der von ihm in der Braunschweiger Zeit geäusserte Plan[2]), das Land mit Dreiecken zu überziehen, zunächst mit dem Wunsche zusammengehangen haben, seinem Fürsten einen Zoll der Dankbarkeit abzutragen, weil er seine Zuwendungen als unverdient betrachtete, so lange er noch nichts für das Land getan hätte. Aber seine Teilnahme an der Seeberger Grundlinienmessung[3]), die Lebhaftigkeit, mit der er sich nach der ZACH vom König von Preussen aufgetragenen Vermessung[4]) der aquirierten Länder erkundigte, der im Briefwechsel mit v. LINDENAU immer wiederkehrende Plan, Göttingen mit Gotha durch Dreiecke zu verbinden[5]), sind Zeichen für seine fortgesetzte Beschäftigung mit dem Gedanken einer Triangulierung und der Herstellung einer Karte[6]).

Er war sich nun klar darüber, dass nur eine ins Grosse gehende Operation (W. IV, S. 482) einen wirklichen Nutzen haben könne, dass isolierte Gradmessungen in Europa, die nur einen kleinen Umfang umfassen, nach den

1) WALBECK, *De forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcibus meridiani, definiendis.* Åbo 1819.
2) G.-O. Nr. 61.
3) G.-O. Nr. 77.
4) G.-O. Nr. 63.
5) Vergl. auch G.-SCH. Nr. 52.
6) G.-O. Nr. 81.

grossen Unternehmungen in Frankreich und England[1]) höchstens einen sehr untergeordneten Wert haben könnten, wogegen noch eine oder ein paar ähnliche Messungen von einer bedeutenden Ausdehnung für die Kenntnis der Erde ungemein wichtig sein würden.

Ausser dem grossen Bogen von den Orkney-Inseln bis zu den Balearen[2]) waren in ähnlichem Umfang in Europa noch zwei Meridianmessungen möglich: der russische[3]) und der von Jütland bis zur Insel Elba reichende Meridian. Der letztere umfasst 16 Breitengrade. Dieser Plan hatte, nachdem der Anfang mit einem Bogen von $4\,^1/_2$ Graden in Dänemark gemacht war, um so mehr Aussicht auf Verwirklichung, als bereits in einigen dazwischen liegenden Ländern, wie Thüringen und Bayern, Vorarbeiten wirklich vorlagen. Die Fortsetzung der dänischen Dreiecke durch Hannover war die erste und notwendige Bedingung dafür. Dadurch wurde bereits eine Verlängerung um 2^0 erreicht, und wenn die auch sonst erwünschte Triangulation zwischen den Sternwarten in Göttingen und Gotha zu Stande kam, so war damit ein Bogen von 7^0 verwirklicht.

Zudem fasste GAUSS auch sogleich den Zweck einer Landesvermessung in Hannover ins Auge, die sich an die Meridianmessung leicht anschliessen liess.

Dass er nun nicht sofort dieses Unternehmen in Angriff nehmen wollte, ist ganz erklärlich, da die Beschaffung der Instrumente[4]) für die neue Sternwarte seine Zeit und für die Regierung bedeutende Kosten erforderte.

---

1) *Exposé des opérations faites en France, en 1787, pour la jonction des Observatoires de Paris et de Greenwich;* par M. M. CASSINI, MÉCHAIN et LE GENDRE, Paris. — *An account of the operations carried for accomplishing a trigonometrical survey of England and Wales, from the commencement in the year* 1784 *to the end of* 1796. By captain WILLIAM MUDGE and ISAAC DALBY. Vol. I. 1799. Vgl. G.-O. Nr. 342.

2) Der Pariser Meridian wurde durch BIOT und ARAGO bis zur Insel Formentera verlängert, zum Teil, um bei der Bestimmung des Meters von der Abplattung unabhängiger zu sein, da die Mitte des Bogens nach dieser Erweiterung nahezu auf den 45. Parallel fiel. Der Meridianbogen, mit dem Krümmungshalbmesser R_{45} für die Mittelbreite, hat nämlich bis auf Glieder vierter Ordnung die Länge $m = R_{45}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\rho} + a(1-e^2)\frac{e^2}{8}\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\rho}\right)^3 \cos(\varphi_1+\varphi_2)$. (Vergl. JORDAN-EGGERT, *Handbuch der Vermessungskunde.* Bd. 3 (6. Aufl.). Stuttgart 1916. S. 221). Für $\varphi_1+\varphi_2 = 90^0$ fällt aber das zweite Glied fort.

3) Die russisch-skandinavische Breitengradmessung wurde von F. G. W. STRUVE 1821—1831 auf dem 44. Meridian von Jakobstadt bis zur Insel Mäki-pääly im Finnischen Meerbusen ausgeführt. Bis 1852 wurde sie nordwärts bis zum Eismeer, südlich bis zur Donaumündung verlängert, so dass sie eine Amplitude von 25° erreicht.

4) Am 18. April 1816 war GAUSS, von seinem Sohne JOSEPH begleitet, zu einer fünfwöchentlichen Reise nach München und Benediktbeurn aufgebrochen, um mit FRAUNHOFER und REICHENBACH persönliche

20. Preisaufgabe. Dass er aber im Ernste mit dem Gedanken umging, an einer solchen Unternehmung mitzuwirken, geht daraus hervor, dass er sich bereits viele Mühe gegeben hatte, in Rücksicht auf eine solche Operation, die von EPAILLY[1]) im Hannoverschen gemessenen Winkel zu erhalten[2]), während SCHUMACHER, worauf er hinwies, den Vorteil hatte, dass Dänemark schon einmal trigonometrisch vermessen war[3]) und daher die zeitraubende und lästige Auswahl der Dreieckspunkte erleichtert wurde.

Besprechungen wegen eines Passage-Instruments und Meridiankreises zu erledigen. Ein mehrtägiger Aufenthalt auf dem Seeberge bei seiner Rückkehr hatte wohl auch den Zweck, sich wegen der Instrumentbeschaffungen zu orientieren. S. Werke X 1, S. 305.

1) EPAILLY gehörte, wie PUISSANT, TRANCHOT, BONNE, HENRY, BROSSIER zu den französischen Ingenieur-Geographen, deren Tätigkeit im Anschluss an die DELAMBRE-MÉCHAINsche Meridianmessung besonders unter dem Konsulat und dem Kaiserreich Bedeutung erlangte, indem sie einen grossen Teil von Europa aufnahmen. Nachdem EPAILLY bereits an der Karte von Schwaben gearbeitet hatte, wurde 1803 die Karte von Hannover befohlen; in den Jahren 1804—05 machte er nach einer Rekognoszierung des Landes, die durch fast ganz Hannover umfassende, von ihm aufgefundene Pläne unterstützt wurde, die Aufnahmen selbst. Im Herbst 1805 unterbrachen die kriegerischen Ereignisse seine Arbeit. Später wurde die Karte von Hannover mit der Karte des Kaiserreichs vereinigt. Vgl. noch W. IX, S. 365. Die Abschrift der EPAILLYschen Dreiecke erhielt GAUSS 1816 (G.-O. Nr. 448). Ein von GAUSS selbst geschriebenes Verzeichnis der geographischen Koordinaten der EPAILLYschen Punkte befindet sich in dem Seite 27 Anm. 4 erwähnten Aktenstücke,

2) v. LINDENAU, an den sich demnach GAUSS auch in dieser Angelegenheit gewendet hatte, schreibt am 21. Okt. 1815: »Dass ich noch bis zu diesem Augenblicke von meiner Korrespondenz mit EPAILLY auch nicht eine Zeile auffinden konnte, macht mich höchst unmutig ... Der Ort wo alle hierher gehörigen Notizen in Paris aufbewahrt werden, heisst Dépôt de la Guerre de l'Empire français. Direktor ist General SANSON, Souschef, der das ganze dirigiert, Obrist MURIEL, da SANSON ein arger Ignorant ist; unter diesen arbeiten zunächst PUISSANT und HENRY.« (Nr. 143), und am 31. Dez. 1816: »Bei Durchsuchung meiner älteren Briefschaften sind mir auch drei Briefe von EPAILLY an ZACH und mich in die Hände gefallen, die ich hier beilege, wiewohl eben nicht viel erhebliches daraus zu ersehen ist. Wohin mein mitgeteiltes Dreiecktableau hingeraten ist, wird der Himmel wissen. Ich glaube, dass es in den Händen des GR.[?] THÜMMEL ist, da ich diesem 1812 alle Papiere, die auf meine Verbindung mit dem Bureau général de la guerre Bezug hatten, ausgehändigt habe« (Nr. 180).

3) Die ersten ausgedehnteren Triangulationen in Dänemark wurden durch die geographischen Karten veranlasst, welche die Königliche Akademie der Wissenschaften in Dänemark im Verlaufe der zweiten Hälfte des 18. und im Anfange des 19. Jahrhunderts ausführen liess. Um die zur Konstruktion der Karten nötigen Anhaltspunkte zu bekommen, begann man schon 1765 eine Reihe von Dreiecken bei Kopenhagen zu messen und führte diese Arbeiten ohne Unterbrechung fort, indem man verschiedene Dreiecksketten von Seeland mit den umliegenden Inseln durch Fünen und Langeland nach der Halbinsel führte, wo sie sich nach Süden und Norden erweiterten, so dass sie am Ende des Jahrhunderts von Skagen bis zur Elbe reichten. Da man ebenso einen Bogen von nahe 4° auf dem Meridian von Skagen gemessen hatte, lag es nahe ihn zu einer Gradmessung zu benützen, für die Bugge 1787 einen Vorschlag einreichte, der selbst an den topographischen Arbeiten beteiligt gewesen war. Indessen sollte diese erst 30 Jahre später von SCHUMACHER ins Leben gerufen werden (V. H. O. MADSEN, Le Service géodésique du Danemark 1816—19. Den Danske Gradmaaling. Ny RÆKKE, Hefte Nr. 16. Kopenhagen 1916).

Aber nicht nur für die Anlage der Dreiecke hatte GAUSS sich vorzubereiten gesucht, er hatte auch die rechnerische Behandlung der Dreiecksmessungen zum eingehenden Studium gemacht. Hierauf wirft der Schluss des oben im Auszug mitgeteilten Briefes an SCHUMACHER einiges Licht. GAUSS schreibt (vgl. W. IX, S. 346): »Das Programm mit der Preisfrage Ihrer Sozietät ist mir noch nicht zu Gesichte gekommen. Mit LINDENAU habe ich auch über eine Preisfrage konferiert, die in der neuen Zeitschrift[1]) mit dem Preise von 100 Dukaten aufgegeben werden soll. Mir war eine interessante Aufgabe eingefallen, nämlich: »»allgemein eine gegebene Fläche so auf einer anderen (gegebenen) zu projizieren (abzubilden), dass das Bild dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich werde.«« Ein spezieller Fall ist, wenn die erste Fläche eine Kugel, die zweite eine Ebene ist. Hier sind die stereographische und die merkatorsche Projektion partikuläre Auflösungen. Man will aber die allgemeine Auflösung, worunter alle partikulären begriffen sind, für jede Art von Flächen. Es soll hierüber in dem Journal philomathique[2]) bereits von MONGE und POINSOT gearbeitet sein (wie BURCKHARDT an LINDENAU geschrieben hat), allein da ich nicht genau weiss, wo, so habe ich noch nicht nachsuchen können, und weiss daher nicht, ob jener Herren Auflösungen ganz meiner Idee entsprechen und die Sache erschöpfen. Im entgegengesetzten Falle schien mir dies einmal eine schickliche Preisfrage für eine Sozietät zu sein. Bei der hiesigen kommt die Reihe des Aufgebens nur alle 12 Jahre an mich.«

21. **Die Entstehungszeit der Projektionsmethode.** Am deutlichsten spricht sich GAUSS später (13. Januar 1821) an OLBERS[3]) darüber aus (vergl. W. IX, S. 368): »Ich habe mir schon seit Jahren[4]) eine eigene Methode entworfen, wie solche Messungen am zweckmässigsten behandelt werden können, denn alles, was ich darüber gelesen habe, finde ich herzlich wertlos. So haben sich

1) LINDENAU setzte ZACHS Monatliche Korrespondenz der Erd- und Himmelskunde (1807—14) fort und gab mit BOHNENBERGER zusammen die Zeitschrift für Astronomie (6 Bände, Tübingen 1816—18) heraus, die GAUSS mit der neuen Zeitschrift meint.

2) Vergl. P. STÄCKEL, *Gauss als Geometer*. W. X 2, Abh. 4, S. 90, Fussnote 1.

3) G.-O. Nr. 399.

4) KRÜGER gibt als Entstehungszeit der Artikel [1] bis [15], [21] und [22] in W. IX, S. 143 ff. die Jahre 1818—20 an, in denen bereits die Projektion der hannoverschen Landesvermessung entstanden sein dürfte. In dieselbe Zeit wird die Beschäftigung mit der konformen Projektion des Sphäroids auf die Kugel verlegt (W. IX, S. 115). Gleichzeitig dürfte sich GAUSS auch mit der Theorie der geodätischen Linie (Artikel [1] und [3] in W. IX, S. 72 und 78) beschäftigt haben. Vergl. W. IX, S. 96. 204.

z. B. viele Mathematiker grosse Mühe mit der Aufgabe gegeben, aus Abständen vom Meridian und Perpendikel die Längen und Breiten zu berechnen, mit Rücksicht auf die elliptische Gestalt der Erde, während, so viel ich weiss, niemand vorher gefragt hat, 1) wie denn jene Abstände, so verstanden, wie man sie gewöhnlich versteht, aus den Messungen mit ebenso grosser Schärfe gefunden werden können, denn es scheint, dass die meisten diese Rechnung wie in der Ebene führen; oder doch ganz unrichtige oder unbrauchbare Vorschriften dafür geben; 2) ob es denn überhaupt nur zweckmässig sei, die so verstandenen Abstände zu gebrauchen, da es entschieden ist, dass, wenn man sie hinlänglich scharf aus den Dreiecken ableiten will, dies nur durch höchst beschwerliche Rechnungen geschehen kann, so wie man aus ihnen nur mit vieler Mühe wieder zu den Längen und Breiten herabsteigt. Das Ganze würde nur ein „die Pferde hinter den Wagen spannen« sein. [illegible] »»Soll etwas Brauchbares zwischen die Dreiecke und die Längen und Breiten gesetzt werden, so muss es etwas ganz Anderes wie jene so wie gewöhnlich verstandenen Koordinaten sein.«« Wie dies bei meiner Theorie geschieht, kann ich hier freilich nicht umständlich ausführen; nur soviel bemerke ich, dass das, was ich zwischen die Dreiecke und die Längen und Breiten setze, diejenigen Koordinaten sind, mit denen am zweckmässigsten jeder Punkt in einer Ebene dargestellt werden kann. Diese Koordinaten folgen höchst bequem und leicht aus den gemessenen Dreiecken, und ohne eine sehr genaue Kenntnis der Abplattung der Erde vorauszusetzen; und zweitens aus ihnen folgt wieder ebenso leicht die Länge und Breite, natürlich indem man die Abplattung kennen muss. Ich habe die Absicht, diese Theorie, wo nicht früher, doch mit meinen künftigen Messungen bekannt zu machen, und bitte vorher diese angedeuteten Ideen noch für sich zu behalten. Sehr gern würde ich sie nicht blos auf die hannoverschen Dreiecke, sondern auf alle andern damit in Verbindung kommenden anwenden und so eine Description géométrique eines grossen Teils von Europa geben, wenn ich durch Mitteilungen gehörig unterstützt würde. Aber!«

Es geht aus diesen Briefstellen mit Deutlichkeit hervor, dass GAUSS die konforme Projektion für die Darstellung der Koordinaten der Dreieckspunkte in der Ebene bereits vor dem Vorschlage der Preisaufgabe besessen hat. Durch die Briefe von LINDENAU wird es wahrscheinlich, dass die erste Idee der kon-

formen Projektion im allgemeinen nicht lange vor Beginn des Jahres 1815 entstanden ist. Leider scheinen die Briefe von GAUSS an v. LINDENAU verloren zu sein (W. VI, S. 654) und man ist auf LINDENAUS Briefe angewiesen, die immerhin einen Anhalt geben.

22. Besuch in Seeberg. Briefwechsel mit Lindenau[1]. Bei dem etwa vierzehntägigen Besuch auf dem Seeberg, der, wie es scheint, am 18. September 1812 begann, hatte ein Gespräch über den Unterschied im Niveau des roten und des mittelländischen Meeres GAUSS den ersten Anstoss zur Bearbeitung der Attraktion der Sphäroide gegeben[2], die ihm als eine für die Gestalt der Erde besonders interessante Untersuchung erschien[3] (W. V, S. 281).

Es scheint aber auch dort eine Triangulation zur Verbindung der Sternwarten Seeberg und Göttingen zur Sprache gekommen zu sein. LINDENAU schreibt im Anschluss an diese Unterredung am 24. Januar 1813: »Einen Theodolit werde ich vielleicht früher erhalten und dann können wir die geodätische Verbindung unserer Sternwarten sogleich in Ausführung bringen. Was

1) v. LINDENAU hatte an der S. 23 erwähnten Vermessung Thüringens teilgenommen. In einem Briefe an GAUSS vom 3. 7. 1808 klagt er, dass ihn die trigonometrischen Arbeiten dieses Jahres sieben Wochen statt drei Wochen aufgehalten hätten; er erwähnt noch einen ihm von Seiten des französischen Gouvernements wegen Triangulierung der Flussgebiete der Werra und Weser gemachten Antrag und setzt hinzu: »Gehen diese Operationen wirklich vor sich, so komme ich in Ihre Nähe und werde dann das Vergnügen haben, Sie in Göttingen zu besuchen«. In einem Schreiben vom 2. 11. 1808 bedauert er wieder seine lange Abwesenheit von der Sternwarte, während der er sich auf höheren Befehl mit einer trigonometrischen Verbindung des Ochsenkopfes mit dem Seeberg beschäftigen musste. Am 8. 9. 1809 dankt er GAUSS für »die so angenehmen und lehrreichen Stunden, die er in GAUSS' Gesellschaft während seines nur leider zu kurzen Aufenthaltes in Göttingen« zugebracht hatte, und am 4. 10. 1810 schreibt er an GAUSS: »Nicht frohen Mutes schied ich in Langensalza von Ihnen, mein teuerster Freund, und oft wünschte ich mich den Abend nach Mühlhausen, um dort noch ein paar Stunden in Ihrer Gesellschaft zu sein. Aber doch ist es mir sehr lieb, Sie jetzt nicht nach Göttingen begleitet zu haben«. Am 18. 4. 1811 erwähnt LINDENAU wiederum einen fünftägigen Aufenthalt in Göttingen, worauf dann im folgenden Jahre der Besuch von GAUSS in Seeberg ein Wiedersehen brachte.

2) GAUSS schrieb in sein Tagebuch: »Theoriam attractionis sphaeroidis elliptici in puncta extra solidum sita prorsus novam invenimus. 1812 Sept. 26. Seebergae« und etwas später: »Etiam partes reliquas ejusdem theoriae per methodum novam mirae simplicitatis absolvimus. 1812 Oct. 15 Gott[ingae]«. W. X 1, S. 570, [142] und [143]. Im folgenden Jahre erschien die Abhandlung: *Theoria attractionis corporum sphaeridicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata societati regiae scientiarum tradita* 18. Mart. 1813. W. V, S. 3. Anzeige darüber in den Göttingischen gelehrten Anzeigen: 1813 April 5. W. V, S. 279. Schon MACLAURIN hatte sich mit diesem Gegenstande in der Preisschrift über Ebbe und Flut beschäftigt.

3) LINDENAU erwähnt in einem Briefe (19. 10. 1812), dass GAUSS untersuchen wollte, inwiefern es möglich sei, dass sich vielleicht das Meer in einer Spirale erheben könne.

für Punkte dazu zu benutzen sind, darüber müssen wir beide einmal auf Rekognition ausgehen.« Am 5. Februar 1813 kommt LINDENAU wieder darauf zurück: »Meinen Theodolit erwarte ich in den nächsten Tagen und notwendig müssen wir im Laufe des nächsten Sommers unsere trigonometrische Verbindung zu Stande bringen. Aus meinen Dreiecken habe ich die Seite Hörselberg-Wartburg und auf diese, glaube ich, werden sich die andern Dreiecke am besten gründen lassen.«

Ein Brief vom 28. Mai 1813 scheint eine vorausgegangene Anfrage von GAUSS über die Art der von LINDENAU verwendeten Signale anzudeuten: »Ich gedenke bald einmal eine kleine Rekognoszierungs-Expedition zum Behufe unserer trigonometrischen Verbindung zu machen. Meine Signale waren vierkantige 10—12 Fuss hohe Pyramiden . . . Sehr weit und deutlich waren diese Signale sichtbar.«

Am 13. Juni 1813 kündigt LINDENAU seinen Besuch an: »Ich denke dann meine Wanderung zu Fuss und über den Meissner zu machen und mich da zugleich mit nach Dreieckspunkten umzuschauen.«

Die Verbindungstriangulation kam nicht zu Stande, indessen scheint GAUSS aus diesem Anlass im Laufe des Jahres 1814 begonnen zu haben, sich mit der rechnerischen Behandlung der Messungen zu beschäftigen. Am 24. November 1814 nimmt LINDENAU auf eine einschlägige Äusserung von ihm Bezug: »Zu Ihrer Bemerkung über das Irrige, die Koordinaten aus terrestrischen Messungen herzuleiten[1]), so wie dies früher geschah, erlaube ich mir eine Einwendung. Dass das Verfahren, wie es z. B. SOLDNER[2]) in der Mon. Corr. vorgeschlagen und wie es ZACH und andere in Anwendung gebracht haben, irrig ist, darüber bin ich ganz einverstanden[3]). Allein wenn die Koordinaten so berechnet werden,

---

1) GAUSS dürfte sich ähnlich wie an der oben angeführten Stelle aus dem Briefe an OLBERS auch LINDENAU gegenüber geäussert haben.

2) Monatliche Correspondenz, Band XI, Seite 1. Über die kürzeste Linie auf dem Sphäroide, und insbesondere S. 11: Perpendiculaire à la méridienne, und Methoden, vermittelst derselben die geographischen Längen und Breiten aus einem Triangelnetze zu berechnen und Seite 17: Nähere Bestimmung der Methode, aus Perpendikel und Abstand die Länge und Breite zu finden. [Im Register zu ZACHs Mon. Corr. fehlt dieser Aufsatz unter SOLDNER.]

3) SOLDNER vernachlässigt bei seiner Theorie der kürzesten Linie das Quadrat von

$$\varepsilon = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \omega + \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^4}{4} - \frac{\omega^5}{4} \cdots$$

wie es PUISSANT (*Géodésie*[1]), p. 122) tut, oder wenn die gemessenen Dreiecksstücke auf Chorden und Chorden-Winkel reduziert werden, oder wenn das berücksichtigt wird, was LEGENDRE (Mémoires de l'institut 1806) darüber gesagt, so scheint es mir, als werde man die Abstände vom Meridian und Perpendikel richtig erhalten. Sehr neugierig bin ich auf Ihre neue zu diesem Behuf entwickelte Methode und auf die Art, wie Sie dadurch Kontrollen für überzählige Winkel erhalten[2]). Die aus ZACHS Messungen sich ergebenden Differenzen sind arg und ich kann Ihre Vermutung, dass Mangel an Genauigkeit im Zentrieren die Ursache davon sei, aus eigener Erfahrung bestätigen. . . Beiläufig bemerke ich, dass die von Ihnen selbst als die einzig gut anerkannte Methode für Bestimmung von Längen und Breiten aus geodätischen Messungen von DELAMBRE ist.«

Hierauf scheint GAUSS mit einigen Widerlegungen geantwortet zu haben, denn LINDENAU kommt am 6. Dezember 1814 darauf zurück: »PUISSANTS angezogene Stelle spricht nicht von DELAMBRES Methode, sondern gibt eine Art an, die Koordinaten zu berechnen, die mir strenge Resultate zu gewähren scheint. Resultate von Landesvermessungen, wo Koordinaten berechnet wurden, kommen in der Mon. Corr. mehrere vor. In diesem Augenblicke fallen mir nur zwei: die österreichische und die BOHNENBERGERsche ein«[3]).

(wenn wir mit GAUSS die Abplattung mit ω bezeichnen), also auch das Quadrat der Abplattung. Er erhält in etwas andrer Form damit aus der gegebenen Breite, Länge und dem Azimut im Anfangspunkte dieselben Ausdrücke für den Längenunterschied des Endpunktes und die lineare Länge der geodätischen Linie wie EULER (Mémoires de l'Académie de Berlin 1753, S. 258) und fügt noch die Breite des Endpunktes durch Umkehrung der durch Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linie erhaltenen Reihe hinzu, die EULER aus Unkenntnis des LAGRANGEschen Satzes noch nicht anwenden konnte. Bei der dann folgenden Anwendung auf die Berechnung der Breite und Länge aus Perpendikel und Abstand werden die letzteren durch Projektion der Dreiecksseiten wie in der Ebene abgeleitet und darauf die gefundenen Ausdrücke durch Einsetzung des Azimutes $= 90^0$ am Fusspunkt des Perpendikels angewendet. ZACH hat »*Über die Vortrefflichkeit der k. k. österreichischen und der k. bayerischen Landesvermessung und ihre genaue Übereinstimmung*« (M. C. Bd. XXVIII, S. 135) Untersuchungen angestellt. Er scheint nur die SOLDNERschen Resultate, aber nicht seine Formeln unmittelbar benutzt zu haben, sondern behandelt dieselbe Aufgabe (M. C. Bd. XXVIII, S. 135) auf Grund der Methode von BUZENGEIGER (M. C. Bd. XXV, S. 478) und vergleicht sie mit der von ORIANI (M. C. Bd. XI, S. 557).

1) Diese Angabe bezieht sich auf die erste Auflage von L. PUISSANT, *Traité de Géodésie*, Paris 1805.

2) Man könnte etwa an die Notizen [1] und [2] in Werke IX, S. 245—249 denken; jedenfalls sind es wohl Seitenbedingungsgleichungen, auf die von GAUSS angespielt war.

3) Vergleiche: BOHNENBERGER »*Berechnung der Länge und Breite der trigonometrischen Vermessungen*«

Auf eine freie Seite dieses Briefes hat GAUSS eine kleine Berechnung geschrieben, der er als Überschrift vorsetzte: »Beweis dass PUISSANT nichts taugt«.

Dieser Brief zeigt, dass GAUSS am Ende des Jahres 1814 sich mit der Darstellung der Dreieckspunkte durch Koordinaten beschäftigte. Der Hinweis LINDENAUS auf Landesvermessungen, für die Kooordinaten berechnet waren, klingt wie eine Antwort auf eine sich darauf beziehende Anfrage von GAUSS, der literarischen Nachforschungen abgeneigt war[1]) und daher öfter seine Freunde um

---

und *„trigonometrische Vermessung in Süddeutschland«*, insbesondere: ZACH. Monatliche Correspondenz, Band VII, Seite 43, 354, 384, 520 und *»trigonometrische Vermessung von Österreich«*, besonders Band VIII, S. 18 und Band XXVIII, S. 135 in derselben Zeitschrift.

Band XXVIII, S. 141 gibt der Herausgeber in dem S. 44, Fussnote 3 genannten Aufsatze eine Übersicht über das Verfahren: »Man pflegt ein trigonometrisches Netz gemeiniglich auf den Meridian eines Ortes zu beziehen. Erstens, um bei einer Länder-Aufnahme und Karten-Entwurf alle Stationen und Dreiecks-punkte unabhängig von einander auf das Papier bringen zu können. Dies geschieht, indem man die Abszissen und Ordinaten dieser Punkte von einem angenommenen Meridian und dessen Perpendikel berechnet und so diese Punkte viel bequemer und genauer, senkrecht von diesen beiden Linien nach einem Massstab auf die Papier-Sektionen bringt, als wenn man die nach verschiedenen Winkeln geneigten Dreiecks-Seiten selbst auftrüge. Hierzu wird gerade keine Meridian-Linie unbedingt erfordert, jede willkürliche Linie und ihre Senkrechte würden dieselben Dienste leisten, sobald man nur einen Winkel kennt oder voraussetzt, den eine Seite des Dreiecksnetzes mit dieser willkürlichen Linie macht. Allein man will bei geographischen und topographischen Karten nicht nur allein die richtige respektive Lage aller Ortschaften ... haben, sondern man fordert, dass diese Karten auch genau nach den vier Weltgegenden orientiert sein sollen ..., man will die geographische Länge und Breite aller Punkte kennen, dazu wird eine richtige und genaue Orientierung des ganzen Dreiecks-Netzes nach dem wahren Meridian erfordert. Man bewirkt dieses durch die Beobachtung des Azimuts einer Dreiecks-Seite, das heisst, man bestimmt den Winkel, den eine dieser Seiten mit dem Meridian eines Ortes macht, und wenn man diesen hat, so hat man auch die Richtungswinkel mit dem Meridian aller übrigen zusammenhängenden Seiten eines Dreiecksnetzes. Damit berechnet man die Abszissen und Ordinaten, das ist die senkrechten Abstände vom Perpendikel und vom Meridian aller Punkte, und daraus ferner ihre Längen- und Breitenunterschiede mit dem Hauptorte, durch welchen man, so zu sagen, den ersten Meridian gelegt hat.

Um sich zu überzeugen, dass ein Dreiecksnetz am äussersten Ende der Messung keine falsche Richtung gegen den Meridian genommen hat, so pflegt man an den beiden äussersten Enden einer langen Dreiecksreihe den Richtungswinkel einer Seite mit dem Meridian zu bestimmen. Ist der durch die Dreieckswinkel und vom ersten Richtungswinkel abgeleitete letzte Richtungswinkel dem unmittelbar astronomisch beobachteten gleich, so ist dies eine Probe, dass das Netz keine Schwenkung gelitten hat. Allein diese Probe prüft keineswegs des Geodäten Arbeit, sondern blos die des Astronomen, und beweist nur, dass dieser in seinen Beobachtungen der beiden Richtungswinkel nicht gefehlt hat«.

1) G.-SCH. Nr. 624: »Belesenheit und Nachsuchen ist nicht meine Stärke. Vielleicht können Sie aber etwas auffinden«. — G.-SCH. Nr. 701: »Ich müsste, wenn meine Mitteilungen Autoritätsrang haben sollten, erst selbst literarische Recherchen machen, wozu es mir an Zeit — ich gestehe auch an Neigung fehlt, da derartige Forschungen nicht gerade mein Geschmack sind«.

Mitteilung solcher Angaben bat. Er wollte sich vielleicht überzeugen, ob andre in ähnlicher Weise wie er sich die Sache zurechtgelegt hätten, was dann darauf hindeuten würde, dass er bereits diejenigen Koordinaten, die er in dem Briefe an OLBERS als Zwischenglied zwischen Dreiecksmessungen und den geographischen Koordinaten erwähnt (vergl. Seite 42), ins Auge gefasst hatte.

Seine eigene Aufzeichnung auf dem Briefe von LINDENAU verbessert das Verfahren von PUISSANT, der die Rechnung wie in der Ebene führte, durch Berücksichtigung der sphärischen Exzesse und kennzeichnet es zugleich als eine Koordinatendarstellung in Bezug auf den Meridian und das dazu senkrechte Perpendikel im Anfangspunkte. Dass diese Art der Berechnung »nichts taugt«, liegt wesentlich daran, dass für die grossen dabei vorkommenden Dreiecke die einfache Berechnung der Exzesse nicht ausreicht. Dem gegenüber stellt GAUSS die Berechnung rechtwinklicher sphärischer Koordinaten durch Reihenentwicklung als Muster auf. Er gelangt dabei, teilweise sogar genau, zu denselben Ergebnissen, die SOLDNER einige Jahre früher[1]) gefunden hatte. Diese Untersuchungen SOLDNERS konnten ihm aber nicht bekannt sein, da sie viel später veröffentlich worden sind und erst durch die Verwendung bei der Bayerischen Landesvermessung Anerkennung und eine grosse praktische Bedeutung erlangt haben[2]). Auch ist bei denjenigen Formeln, die bei GAUSS

---

1) SOLDNER übergab der Kgl. Steuervermessungskommission am 5. Mai 1810 im Manuskript eine Abhandlung: »*Über die Berechnung eines geodätischen Dreiecksnetzes und die Ermittlung der sphärischen Koordinaten der Dreieckspunkte*«, welche diese Behörde als ein nicht für die Öffentlichkeit bestimmtes Aktenstück behandelte, und die erst auf Veranlassung von v. BAUERNFEIND zum ersten Male in dem 1873 erschienenen Werke: »*Die bayerische Landesvermessung*« abgedruckt wurde, vergl. F. J. MÜLLER, *Studien zur Geschichte der theoretischen Geodäsie.* Augsburg 1918, Seite 26. An dieser Stelle ist noch auf BAUERNFEIND: *J. G. v. Soldner*, Seite 21, verwiesen.

Die Abhandlung von SOLDNER ist auch in OSTWALDS Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 184, herausgegeben von J. FRISCHAUF, Leipzig 1911 erschienen. Dort ist noch S. 61 angegeben: In Bayern hatte der Kurfürst MAXIMILIAN JOSEPH bereits 1801 ein topographisches Bureau errichtet, das von einer »Steuervermessungskommission« besorgt wurde; dieses wurde mit einer zweiten Behörde »Steuerrektifikationskommission« 1804 zu einer Behörde »Unmittelbare Königliche Steuerkatasterkommission« vereinigt, dessen Vorstand JOSEPH v. UTZSCHEIDER für die topographischen Arbeiten ULRICH SCHIEGG und 1808 SOLDNER berief.

2) Eine Besprechung von SOLDNERS Theorie findet sich in einem Aufsatze: *Geschichtliche Nachrichten über die ältere Topographie und die neueren Institute für die Landesvermessung in Bayern* von J. N. AULITSCHECK in den Militärischen Mitteilungen, herausgegeben von J. v. XYLANDER und L. KRETSCHMER. 1829. Vergl. F. J. MÜLLER, *Johann Georg von Soldner, der Geodät.* Dissertation. München 1914. Seite 78. Vergl. ferner E. v. HAMMER, *Die Berechnungen der trigonometrischen Vermessungen mit Rücksicht auf die*

und SOLDNER nicht übereinstimmen, die Gestalt, die ihnen SOLDNER gegeben hat, vorteilhafter, so dass man auch hieraus entnehmen kann, dass GAUSS ganz selbständig dazu gelangt ist. GAUSS hätte wahrscheinlich nicht OLBERS gegenüber (in dem Briefe vom 13. Januar 1821) den Ausspruch getan: »Ich habe mir seit Jahren eine eigene Methode entworfen, wie solche Messungen (Dreiecksmessungen I. Ordnung) am zweckmässigsten behandelt werden können; denn alles, was ich darüber gelesen habe, finde ich herzlich wertlos«, wenn er SOLDNERS Arbeiten gekannt hätte.

Nebenbei ist bei der kleinen Rechnung erwähnenswert, dass der von GAUSS verwendete Erdradius der Radius des Äquators ist. Wir wissen leider nicht, wie er auf die naheliegende und berechtigte Frage LINDENAUS, für welche Breite das Beispiel gerechnet sei, geantwortet hat. Man wird aber den Schluss ziehen dürfen, dass GAUSS den mittleren Krümmungsradius für eine bestimmte Breite deshalb nicht verwendet hat, weil ihm damals noch der Begriff des Krümmungsmasses einer Fläche fehlte[1]).

Endlich sei noch darauf hingewiesen, dass die Werte des Erdradius, die GAUSS bei seinen Rechnungen verwendet hat, einen Anhalt für die Zeit geben können, in der sie enstanden sind. In manchen Fällen erhält man eine Bestätigung für diese Zeitfeststellung durch die Werte der benutzten geographischen Breite von Göttingen, für die ebenfalls immer neue verbesserte Werte eingeführt wurden[2]).

---

sphäroidische Gestalt der Erde von J. G. F. BOHNENBERGER. Stuttgart 1885. Einleitung, F. J. MÜLLER, *Studien* usw., Seite 32.

FRISCHAUF sagt a. a. O., Seite 63: Bedeutend war die Anregung, die durch die Landesaufnahme von Bayern an die Nachbarstaaten ausging. Württemberg, Baden, Hessen wurden fast genau nach SOLDNERS Muster aufgenommen. Ihm und seinen hervorragenden Nachfolgern ist der hohe Stand des Vermessungswesens in Bayern zu danken. Die wenigen Stellen, wo allgemein Bekanntes des Zusammenhanges wegen mitgeteilt wird, abgerechnet, geht SOLDNER seine eigenen Wege. Originalität, Gründlichkeit und überaus klare Darstellung zeichnen die ... Abhandlung aus.

1) Siehe P. STÄCKEL, *Gauss als Geometer*. W. X 2, Abh. 4, Seite 96, 103.

2) Wir geben hier eine Zusammenstellung der von GAUSS für die Dimensionen der Erde und für die Polhöhe von Göttingen verwendeten Zahlenwerte.

Zuerst benutzte GAUSS den Abplattungswert 1 : 310.

Für diesen Wert erklärte sich Freiherr v. ZACH (Bibl. Britannique Août 1810; Mon. Corr. XXIII, S. 254/255, vergl. S. 156). Derselben Abplattung bediente sich v. MÜFFLING bei allen Formeln und Hülfstafeln für die topographischen Arbeiten des Preussischen Generalstabs (Instruktion für die topographischen Arbeiten des Kgl. Preuss. Generalstabs vom 15. Januar 1821) und bei der Längengradmessung zwischen

Am 6. Februar 1816 erinnert LINDENAU von neuem an den Triangulierungsplan: »Im Laufe dieses Jahres müssen wir doch auch ernstlich an die trigonometrische Verbindung unserer Sternwarten denken und solche bewerk-

---

Dünkirchen und dem Seeberg bei Gotha (1826, Seite 19 ff.), aus der er aber folgerte, dass sie zu gross sei und nur 1 : 315,2 betrage (Seite 20/21 und Astr. Nachr., Band 2, Nr. 27, Seite 37). Für den Äquatorradius nahm v. MÜFFLING bei den topographischen Arbeiten 1 693 183,15 Pr. Ruthen an, welchem Wert $\log a =$ 6,8046121 in Metern entsprechen würde.

GAUSS berechnete dagegen mit der Abplattung 1 : 310, unter Annahme des Meridian-Quadranten $Q =$ 10 000 000 m $\log a =$ 6,8045809 (Werke IX, Seite 68, 119). Denselben Wert hat er bei der Rechnung auf dem oben (Seite 46) erwähnten Briefe von LINDENAU vom 6. Dezember 1814 verwendet. Mit dem Verwandlungslogarithmus 9,7101800 (genauer ist er 9,71018007) erhält er daraus $\log a =$ 6,5147609 (Werke IX, S. 118).

Im Jahre 1819 erschien die *Dissertatio de forma et magnitudine telluris* von WALBECK (Werke IX, S. 71, Zeitschrift für Vermessungswesen 1893, S. 426—434), nach der die Abplattung 1 : 302,78, die Länge des Meridian-Quadranten 5 130 878,22 Toisen ist. GAUSS nimmt $Q =$ 5130878,3 Toisen an (Werke IX, S. 69). Spätestens im August 1820 (wo WALBECK sich 8 Tage in Göttingen aufhielt) wird GAUSS die Abhandlung von WALBECK kennen gelernt haben. Beim Beginn der Gradmessungsarbeiten hat er dann die Zahlen benutzt (G.-O. Nr. 448)

$$a = 3\,271\,821 \qquad b = 3\,261\,011 \qquad \omega = 1 : 302{,}68,$$

wobei er infolge eines Schreibfehlers 302,68 an Stelle von 302,78 verwendete und bis 1824 beibehielt.

Für $Q =$ 5130878,3 Toisen erhielt er $\log a$ (in Toisen) = 6,5147893106 und für $Q =$ 10000000 m $\log a =$ 6,8045978348 (Werke IX, S. 69). Mit der Abplattung 1 : 302,68 sind die Rechnungen und Tabellen in Werke IX, S. 83, 87, 114, 125, 126, 149, 160—162, 172, 173 ausgeführt, sodass ihre Entstehungszeit vor 1824 anzunehmen ist.

Von 1824 an benutzte GAUSS (G.-O. Nr. 523) die Abplattung 1 : 302,78. Für $Q =$ 10000000 berechnete er $\log a =$ 6,804597596978. Werke IX, S. 69. Dieser Abplattungswert, bezw. der genauere 1 : 302,7827, ist in Werke IX verwendet: S. 82, 139, 182, 184, 192, vergl. 197 (vergl. auch Werke X 1, S. 230).

Auf Veranlassung von GAUSS berechnete Dr. SCHMIDT (vergl. Astronomische Nachrichten Bd. 7, und J. C. EDUARD SCHMIDT, Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie. Teil I. Göttingen 1829) neue Elemente und erhielt die Abplattung 1 : 298,39 und den Meridiangrad 57010,35 Toisen. Nach einer neuen Rechnung erhielt SCHMIDT die Abplattung 1 : 297,732 und 57008,551 Toisen für den Meridiangrad (G.-SCH. Nr. 362,378); diese Werte legte GAUSS seinen neuen Hilfstafeln zu Grunde (Werke IX, S. 218). Die Länge des Meters ist darnach 443,29849 Linien (Werke IX, S. 207). Diese Werte sind ungefähr 1830 in Gebrauch genommen. (Im Koordinatenverzeichnis hatte GAUSS nach einem Briefe von Dezember 1827 (Werke IX, S. 281) an SCHUMACHER als Einheit 443,307885 Par. Linien angewendet, was dem früheren Werte von SCHMIDTs Meridiangrad entsprechen würde.)

In den »*Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*« verwendete GAUSS die von BESSEL 1841 abgeleiteten Erddimensionen (Astronom. Nachr., Band 19, Nr. 438, Seite 116): $\log a =$ 6,5148235837 (in Toisen), $\log \cos \varphi = \log \sqrt{1-e^2} =$ 9,9985458202 (die Abplattung ist nach BESSEL a. a. O. 1 : 299,1528). Wird a blos von der Abplattung abhängig angesehen, d. h. $Q =$ 10000000 m gesetzt, so findet GAUSS $\log a =$ 6,8046062999 und $a =$ 6376851,447 (Werke IV, S. 330).

stelligen.« In dem Briefe an SCHUMACHER (S. 41) hatte GAUSS erwähnt, dass er mit LINDENAU über eine Preisfrage konferiert hatte, die in der neuen Zeitschrift bekannt gegeben werden sollte. Hierauf antwortet LINDENAU in einem (nicht datierten) Briefe: »Ihre Aufgabe über allgemeine Theorie der Projektionen spricht mich sehr an und mein Wunsch entscheidet für diese; nur frage ich an, ob Sie meinen, dass man die ganzen (von COTTA ausgesetzten) 100 Dukaten darauf setze oder nur 50 und die andern auf zwei der besten

---

Gelegentlich erwähnt, aber nicht verwendet wird noch die Abplattung nach Sabine 1 : 289 (Werke IX, S. 378).

Ebenso wie die Zahlenwerte der Erddimensionen kommen diejenigen der Polhöhe von Göttingen in Betracht, die sich bis 1816 auf die alte Sternwarte, von 1817 ab auf die neue Sternwarte beziehen. Da es sich hier nur um Feststellung der Entstehungszeit von Rechnungen und Rechnungsbeispielen handelt, erübrigt sich ein Eingehen auf die Gründe der Verschiedenheit der Polhöhenwerte und es wird auf die Abhandlung von M. BRENDEL *über die astronomischen Arbeiten* (Werke XI 2) verwiesen.

Die erste Angabe scheint 51° 31′ 55″,61 in dem Briefe vom 8. April 1818 an OLBERS zu sein (G.-O. Nr. 266).

In dem Briefe vom 13. Dezember 1814 wird die Länge 30° 23′, die Breite 51° 31′ 55″ (G.-SCH. Nr. 64) angegeben. In Briefen an OLBERS aus demselben Jahre werden als Ergebnisse aus Beobachtungen von Südsternen 52″,5, aus Polarsternbeobachtungen 55″,5, aus Sonnenbeobachtungen im Sommer 49″, im Winter 51″ erwähnt (G.-O. Nr. 278). Im Dezember 1814 gaben die Polarsternbeobachtungen 51° 31′ 55″,44 (G.-O. Nr. 287, vergl. G.-SCH. Nr. 64). Im Januar 1815 wird 55″,31 aus Polarsternbeobachtungen, 50″,47 aus Sonnenbeobachtungen angegeben (G.-O. Nr. 289). Auf den Polarsternergebnissen scheint die Angabe in dem Schreiben an SCHUMACHER zu beruhen.

Im Jahre 1817 wird 51° 31′ 49″,3 in einem Briefe an OLBERS (G.-O. Nr. 335) angeführt mit der Bemerkung: Ebenso viel gibt die Übertragung von der alten Sternwarte. In den folgenden Jahren sind folgende Werte angegeben:

1820	Febr.	51° 31′ 50″	(G.-SCH. Nr. 98).
1820	Okt. 4.	48,7	(G.-O. Nr. 394) } (G.-B. 143).
1822/3		48,7	(G.-O. Nr. 523) }
1824	Febr.	46,84	(G.-O. Nr. 491).
		47,92	
		48,03	48,0 aus Zirkumpolarsternen im Jahre 1820 (G.-O. Nr. 493).
		47,92	stimmt mit der Zahl für den Platz des Zenitsektors im »Breitenunterschied« überein.
1824	Mai	51 31 47,638	(G.-O. Nr. 502).
		48,00	(G.-O. Nr. 523).
		48,10	(G.-SCH. 215).
1828	Juli	51 31 47,85	wurde aus den Beobachtungen zur Bestimmung des Breitenunterschiedes, die 1827 ausgeführt waren, als Polhöhe des REICHENBACHschen Meridiankreises erhalten.

Abhandlungen, die über Kometen und Mondtheorie eingingen, bestimmte. In den Mémoires de l'Institut kommt nichts hierher gehöriges vor, allein ob nicht vielleicht MONGE den Gegenstand in dem Journal de l'école polytechnique abgehandelt haben könnte, dies lasse ich unentschieden, da ich diese Sammlung nicht vollständig besitze. Eine Abhandlung von EULER über einen verwandten Gegenstand erinnere ich mich früherhin einmal gelesen zu haben.«

Nachdem an einigen Stellen des Briefwechsels von der Reise[1]), die GAUSS wegen Bestellung von Instrumenten nach München und Benediktbeuern unternehmen wollte und an der nach GAUSS Wunsch LINDENAU teilnehmen sollte, die Rede war, kommt LINDENAU am 31. Mai 1816 wieder auf die Triangulation zurück: »Käme unsre längst projektierte Verbindung noch im Laufe dieses Sommers oder Herbsts zu Stande, so könnten wir einander wohl noch einmal auf einer Bergkuppe treffen. Ich habe Herrn VON STUDTNITZ, der jetzt eine Reise ins Hessische macht, aufgegeben, behufige Dreieckspunkte für uns ausfindig zu machen.«

Am 18. Juni 1816 teilt LINDENAU bezüglich des Themas der Preisfrage mit: »BURCKHARDT, an den ich vor einiger Zeit geschrieben und befragt hatte, ob wohl Ihre mir mitgeteilte Aufgabe über Projektionen schon irgend in Paris behandelt worden sei, schreibt mir, dass dies im wesentlichen im Journal polytechnique von MONGE und POINSOT geschehen. Ist dies nun wirklich der Fall, so hätte ich dann wohl Lust, für die Preisfrage die Sonnenparallaxe und den Kometen von 1680 mit Berücksichtigung der Störungen zu wählen.«

Diese, wie bereits (Seite 41) bemerkt, irrige Bemerkung BURCKHARDTS veranlasste GAUSS wohl zu einer Rückfrage, auf die LINDENAU am 28. Juni 1816 antwortete: »BURCKHARDTS Brief enthält kein ganz genaues Zitat, indem es nur heisst, die Arbeiten stünden im Journal polytechnique; leider existiert dies in Gotha nicht, so dass ich mich noch nicht näher von der Sache unterrichten konnte.«

Nachdem GAUSS den Brief von SCHUMACHER mitgeteilt hatte, erwiderte LINDENAU am 6. Juli 1816: »Das wesentliche in SCHUMACHERS Briefe ist für mich die darinnen angekündigte Gradmessung, von der ich günstige Resultate wünsche und hoffe. Hinsichtlich meiner Teilnahme daran werde ich sehr

1) Vergleiche Seite 39, Anmerkung 4.

laxif oder richtiger verneinend antworten, denn, im Vertrauen gesagt, finde ich, dass es eine etwas sonderbare Zumutung ist, eine Reise von circa 200 Meilen auf eigene Kosten zu machen, um eine Rakete platzen zu sehen. Daran aber, dass ich in meiner Antwort an SCHUMACHER den Nutzen einer solchen Expedition auf das beste lobe und preise, will ich es nicht fehlen lassen. Auch spreche ich da ganz meiner Überzeugung gemäss, indem es mir sehr wünschenswert erscheint, dass eine anderweite nordische Gradmessung befriedigender als seither über die Differenzen von MAUPERTUIS und SVANBERG entscheiden möge.«

Am 17. Juli 1816 folgte ein anderer Brief aus Seeberg, in dem es heisst: »SCHUMACHER habe ich nun geantwortet: ich wünsche auf das lebhafteste, dass seine Operation, die für Topographie und höhere Geodäsie von grosser Wichtigkeit werden kann, zu Stande kommen möge, und ich glaube, dass SCHUMACHER die Sorgfalt und Emsigkeit besitzt, um eine solche Unternehmung mit Erfolg auszuführen. Sehr interessant wäre, wenn Sie die Hannöverschen Dreiecke mit den SCHUMACHERschen in Verbindung bringen und dadurch die Länge und Breitendifferenz von Göttingen-Copenhagen trigonometrisch bestimmen könnten. Sobald das Wetter schön wird, werde ich auf den Schneekopf gehen, um Jena-Seeberg zu verbinden. Die Signale sind gesetzt und vier Dreiecke werden zu dieser Verbindung hinreichen. Könnten wir doch nur auch einmal unsre Verbindung zu Stande bringen.«

Sodann sei eine Äusserung LINDENAUS vom 7. September 1816 erwähnt: »Ich habe jetzt jemanden mit der Gegend von hier nach Göttingen bekannten ausgeschickt, um uns Dreieckspunkte auszusuchen; wären diese erhalten, und das Wetter dann noch günstig, so hätte ich gar nicht übel Lust, noch im Laufe dieses Herbstes eine kleine Exkursion deshalb zu machen. Mit NICOLAI versuche ich jetzt die Methode der Längenbestimmungen durch Mondkulminationen . . .; wenn Sie die Sternwarte bewohnen, wollen wir diesen Versuch für unsere Längendifferenz doch auch machen.«

Endlich schreibt LINDENAU am 27. September 1816: »Unsere doch sicher im nächsten Sommer auszuführende trigonometrische Verbindung wird wenig Schwierigkeiten haben: 1. Dreieck: Seeberg-Inselsberg-Struth. 2. Dreieck: Inselsberg-Struth-Meissner. 3. Dreieck: Struth-Meissner-Gleichen. Von Meissner und Gleichen sieht man ja wohl den Göttinger Turm und so wäre die Ver-

bindung gemacht. Unsere Längendifferenz würde sich vielleicht sogleich durch die auf der Struth zu gebenden Pulver-Signale bestimmen lassen.«

LINDENAU hat, wie aus seinen Briefen hervorgeht, das Interesse von GAUSS für Triangulationen wach zu halten verstanden. Nicht weniger mögen die gegenseitigen Besuche beiden Männern Gelegenheit gegeben haben, geodätische Fragen zu besprechen. Von dem Aufenthalt auf dem Seeberge im Herbst 1812 wissen wir, wie bereits erwähnt, dass solche Themata zur Sprache kamen, und die 1813 erschienene Arbeit von GAUSS über die Theorie der Anziehung homogener Ellipsoide war eine Frucht dieses Besuches. Leider erwähnt ENCKE, der zwei Jahre später GAUSS am 25. September 1814 nach Seeberg begleitete, nichts von dem Inhalt der damals zwischen GAUSS und LINDENAU geführten Gespräche, die er mit dem grössten Interesse verfolgte. Die Fülle der Gedanken, die GAUSS in dem zweiten Jahrzehnt hervorbrachte, ist nur vergleichbar derjenigen in seiner Jugendzeit, etwa dem letzten Jahrzehnt des vorangegangenen Jahrhunderts. Dieses gewaltige Wehen seines Geistes offenbarte sich damals dem jungen ENCKE, der seinen Eindruck in Worte kleidet, die sonst wohl nur einem Dichter oder Künstler gegenüber angebracht erscheinen: er sei von den herrlichen Ansichten, die GAUSS Abends nach Tische aufstellte, wie berauscht gewesen.

23. **Abbildungsaufgabe.** Von den Gedankengängen, die GAUSS damals im Hinblick auf die Geodäsie und in engem Zusammenhang damit auf die Flächentheorie beschäftigten, ist vieles erst später und manches erst nach 30 Jahren in die Erscheinung getreten. Nur wenige Anhaltspunkte für die Zeit der Entstehung der einzelnen Gedanken lassen sich finden. In der *Theoria attractionis* kommen hierfür zwei Stellen in Betracht. Wenn im Artikel 6 um den angezogenen Punkt eine Kugel mit dem Einheitsradius beschrieben wird und durch einen Strahlenkegel kleine Flächenstücke auf ihr und der Fläche ausgeschnitten, auf einander projiziert und über die Fläche integriert werden, so liegt es nicht fern, damit die Notiz 2 (Werke VIII, S. 367) zu vergleichen, in der das Element der Oberfläche eines Ellipsoids durch das entsprechende auf der Himmelskugel ausgedrückt wird. Die an derselben Stelle und wohl nahezu gleichzeitig entstandene Bemerkung [1] (Werke VIII, S. 367), bei der ein Flächenelement und ein Kugelflächenelement in der Weise mit einander korrespondieren, dass der Kugelradius und die Flächennormale in den

entsprechenden Punkten einander parallel sind, enthält zum ersten Male das Krümmungsmass, das aber noch nicht als solches bezeichnet wird. (Vergleiche P. STÄCKEL, *Gauss als Geometer*, Werke X 2, Abh. 4, S. 86).

Den mittleren Krümmungsradius scheint GAUSS damals auch noch nicht gekannt zu haben. Es wäre denkbar, dass LINDENAUS Frage (vergl. Seite 48) für welche Breite die von GAUSS angestellte Rechnung gelte, ihn zu diesem Begriff hingeführt hätte; jedoch ist es wahrscheinlicher, dass er hierzu erst nach der Veröffentlichung der Preisarbeit (im Jahre 1822) gelangt ist. Denn die Preisarbeit benutzt bei der Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel den Querkrümmungsradius als Kugelhalbmesser und nicht den mittleren Krümmungsradius, wie bei der Abbildung in den »Untersuchungen«.

Auf eine andere Stelle der *Theoria attractionis* hat bereits P. STÄCKEL aufmerksam gemacht (*Gauss als Geometer*, a. a. O. S. 87). Sie betrifft eine neue Auffassung der Gleichung einer Fläche, indem in $W(x, y, z) = 0$ die Koordinaten als Funktionen von zwei unabhängigen Variabeln angesehen werden. So vorteilhaft sich dieses Hilfsmittel für die Flächentheorie im allgemeinen erweist, so tritt der Nutzen doch ganz besonders bei der Abbildungsaufgabe hervor. Denn es ist auf diese Weise ohne weiteres möglich, die Punkte von zwei verschiedenen Flächen zu einander in Beziehung zu setzen, indem denselben Werten t, u der unabhängigen Variabeln auf der einen Fläche x, y, z, auf der andern X, Y, Z entsprechen (vergl. Werke IV, S. 194).

Es wird sich kaum ermitteln lassen, in wie weit vor dem Beginn der dänischen Gradmessung bereits die theoretischen Grundlagen von GAUSS ausgearbeitet waren. Dass er verschiedene Arten der Abbildung ausgeprobt hat, geht aus den Zusammenstellungen in Werke IX, S. 107—140 hervor, jedoch ist sicher ein Teil derselben erst in der Mitte des dritten Jahrzehnts des vorigen Jahrhunderts entstanden. Zweifellos hat er von Anfang an eine winkeltreue Abbildung ins Auge gefasst, bei der die Ähnlichkeit des Bildes mit dem Urbilde in den kleinsten Teilen stattfindet.

23. Verschiedene Abbildungsarten. Die Notizen [1] Werke IX, S. 107, [6] S. 112, [10] S. 115, [1] S. 117, [1] S. 123 folgen in demselben Handbuch unmittelbar auf einander (Werke IX, S. 115). Unter ihnen betreffen die drei

ersten die Übertragung des Ellipsoids auf die Kugelfläche[1]), die vierte und fünfte die Abbildung der Kugel auf die Ebene durch stereographische und MERKATORS Projektion. Hiernach scheint GAUSS zunächst eine konforme Doppelprojektion beabsichtigt zu haben.

Bezüglich der Notiz [1] Werke IX, S. 117 kann man vermuten, dass sie ungefähr zur Zeit des Briefes von LINDENAU am 6. Dezember 1814 entstanden ist. Denn die Wahl des Beispiels, das sich auf Marseille und die Insel Planier[2]) bezieht, deutet auf eine Zeit, in der eigene Messungen von GAUSS noch nicht vorlagen. Und in dem Beispiel von Brocken und Göttingen wird die Breite von Göttingen verwendet, die in einem Briefe an SCHUMACHER (G.-SCH. Nr. 64) vom 13. Dezember 1814 vorkommt (vergl. Seite 50, Fussnote). Die Breite von Brocken stimmt mit der Angabe in der Monatlichen Correspondenz Band IX, S. 503 (1804) überein. Ferner ist die Abplattung 1 : 310 auch bei der Rechnung auf dem erwähnten Briefe von LINDENAU (1814) verwendet und jedenfalls von 1820 an nicht mehr benutzt worden. Ebenso ist der Logarithmus der grossen Halbachse in beiden Beispielen derselbe, der in jener Briefnotiz (1814) und Werke IX, Seite 68 vorkommt (vergl. Seite 48, Fussnote).

Unter den im Nachlasse aufgefundenen Aufzeichnungen (Werke IX) sind die genannten hiernach die frühesten. Die Notiz Werke IX, S. 117 *(Stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene)* kann man mit ziemlicher Sicherheit in das Jahr 1814 verlegen, von den andern wird man annehmen können, dass sie erst im Winter 1820/21 entstanden sind, als sich GAUSS mit der Ausarbeitung der Preisaufgabe zu beschäftigen begann.

Bei der Projektion des Sphäroids auf die Kugel wird, wie in der Preisaufgabe als Radius der Kugel der Querkrümmungsradius in einem Hauptparallelkreis gewählt. GAUSS untersucht die Veränderung des Vergrösserungsverhältnisses mit der Breite (Werke IX, S. 108). Er gibt sodann Formeln zur Berechnung der Breite ψ auf der Kugel aus der Breite φ auf dem Sphäroid

---

1) Hierbei wählt GAUSS als Kugelhalbmesser den Querkrümmungshalbmesser für einen gegebenen Parallelkreis.

2) Die Zahlenwerte (Koordinaten der Insel Planier) sind dem Werke von ZACH *Attraction des montagnes* etc. Avignon 1814 entnommen, über das GAUSS eine Besprechung in den Gött. gel. Anzeigen vom 31. Dezember 1814 verfasst hat (Werke VI, S. 569). Diese Rezensionsarbeit gab ihm das oben erwähnte Beispiel an die Hand, das also auch hiernach im Dezember 1814 entstanden sein dürfte.

und umgekehrt, wobei die Reihenentwicklungen nach Potenzen von $\varphi - P$ bezw. $\psi - P$ fortschreiten; P ist hierin die für Sphäroid und Kugel gemeinsame Breite des Hauptparallelkreises (Werke IX, S. 112). Sodann gibt er auch die Korrektionen der auf der Kugel berechneten Azimute an, die mit umgekehrtem Vorzeichen an den beobachteten Azimuten anzubringen sind (Werke IX, S. 115).

Bei der Verwendung der stereographischen Projektion für die Abbildung der Kugel auf die Ebene werden Formeln für die Berechnung sowohl der Breite auf der Kugel aus den rechtwinkligen Koordinaten, als auch von x und y aus der sphärischen Länge und Breite abgeleitet. Bemerkenswert ist bei dieser Notiz (Werke IX, S. 117), dass irgendwelche Anklänge an die Darstellung von LAGRANGE (vergl. OSTWALDS Klassiker Nr. 55) fehlen. Ferner gibt das Beispiel für Göttingen und Brocken (wo die Breite von Göttingen auf das Jahr 1814 oder 1815 hinweist, wozu auch der Abplattungswert passt) die einzige durchgeführte Rechnung für die konforme Doppelprojektion. Vervollständigt ist die Untersuchung noch durch die Angabe der Korrektion des Azimutes der geradlinigen Verbindung der beiden projizierten Örter, um auf das sphärische Azimut übergehen zu können.

Bei MERKATORS Projektion (Werke IX, S. 123) werden ebenfalls Länge und Breite aus den ebenen Koordinaten und umgekehrt diese aus den sphärischen geographischen Koordinaten mit Berechnung der Meridiankonvergenz abgeleitet. Ferner wird die Verbesserung des Azimuts der Richtungslinie und die Längenreduktion angegeben. Diese Notizen sind nach dem Gesagten in gewisser Weise in sich abgeschlossen; die in Werke IX darauf folgenden, z. T. vielleicht etwas später entstandenen, enthalten dann Ausarbeitungen zur bequemeren Durchführung der Rechnung und Tabellen (bei Notiz [2], Seite 124 sind sie weggelassen) und Hilfstafeln. Man wird auch bemerken, dass von der Abbildungsfunktion noch nicht die Rede ist, die in der nach 1825 entstandenen Notiz über die stereographische Abbildung des Sphäroids in der Ebene an die Spitze gestellt wird, wenn auch z. T. die komplexen Grössen verwendet werden. Insbesondere bei der frühesten Notiz lassen sich die Formeln auf elementarem Wege ableiten, wie ja auch die Konformität sich in dieser Weise bei der stereographischen Projektion zeigen lässt.

Kurz zusammengefasst kann gesagt werden, dass GAUSS, vielleicht durch

Unterredungen mit LINDENAU angeregt, im Jahre 1814 die konforme Abbildung der Dreieckspunkte als Ersatz für die Berechnung der Abstände vom Meridian und Perpendikel ins Auge fasste und wahrscheinlich zunächst an eine Abbildung des Sphäroids auf die Kugel und darauf nochmalige Projektion der Kugel auf die Ebene, letztere durch die stereographische Projektion, gedacht hat. Erst 1820 scheint er dann zur eingehenderen Beschäftigung mit dem Gegenstande und zur Erprobung verschiedener Projektionen gekommen zu sein.

IV. Abschnitt. 1816—1820. Beginn der Dänischen Gradmessung.

25. Vorbesprechung wegen der Gradmessung. Im Sommer 1816 hatte GAUSS die bereits erwähnte Reise nach Benediktbeuern unternommen, im Herbst desselben Jahres bezog er die Amtswohnung in der neuen Sternwarte. Hier konnte er die Einrichtung der Beobachtungsräume betreiben und die Aufstellung der Instrumente bewerkstelligen. Mit Ungeduld erwartete er die Ankunft der bei REICHENBACH und REPSOLD bestellten Instrumente, um die praktische Tätigkeit beginnen zu können[1]). Die Zeit, die ihm neben der dienstlichen Beanspruchung und den astronomischen Beobachtungen für theoretische Arbeiten blieb, benutzte er, um die begonnenen Untersuchungen abzuschliessen[2]). Andererseits beschäftigte ihn die nichteuklidische Geometrie

1) Von den Instrumenten der alten Sternwarte waren nach der neuen der sechsfüssige Mauerquadrant von BIRD und das zehnfüssige Spiegelteleskop von WILHELM HERSCHEL gekommen. An einem BORDAschen Kreise, den er gleichzeitig mit einem achtzölligen REICHENBACHschen Theodoliten 1813 erwarb (G.-SCH. Nr. 52), hat er von 1813 bis 1817 oder 1818 namentlich den Nordstern auf der alten und neuen Sternwarte eifrig beobachtet (G.-SCH. Nr. 920). 1814 hatte sodann GAUSS das FRAUNHOFERsche Heliometer angekauft, mit dem er aber nicht viel beobachtet hat. Im April 1818 konnte er den auf Vorschlag von SCHUMACHER gekauften REPSOLDschen Meridiankreis, den dieser auf seiner inzwischen eingegangenen Privatsternwarte benutzt hatte, aufstellen. 1818 und 1819 langten dann noch das REICHENBACHsche Passageninstrument und der REICHENBACHsche Meridiankreis in Göttingen an. Vergl. M. BRENDEL Werke XI 2.

2) Es sind hier insbesondere die Abhandlungen zu nennen: *Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae* (Werke II, S. 47) und *Theoria attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta* etc. (Werke III, S. 331), ferner die *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen* (Werke IV, S. 109).

und er bildete die transzendente Trigonometrie aus (vergl. STÄCKEL, *Gauss als Geometer*, Werke X 2 Abh. 4, S. 30); die Abbildungsaufgabe, die Flächentheorie und die Theorie des Erdmagnetismus nahmen seinen Geist bereits lebhaft in Anspruch. Der Zeitpunkt, in dem die Aufforderung von SCHUMACHER zur Teilnahme an einem ganz neuen, grossen Unternehmen eintraf, war daher ein sehr ungünstiger und es ist ganz verständlich, dass GAUSS sich nicht sofort zu einer Zusage entschloss, zu der ihn sein wissenschaftlicher Eifer gern fortgerissen hätte. Es kamen noch andre Bedenken hinzu. Ihm fehlte in praktischer Hinsicht die Erfahrung und für die Verhandlungen mit den Behörden und den in Betracht kommenden Stellen die Unterstützung von Sachverständigen, auch zur Teilnahme an den Beobachtungen und zu ihrer Vorbereitung hatte er geschickte Hilfskräfte nicht zur Hand. Dann waren es auch die hohen Kosten der geplanten Vermessung, deren Bewilligung zu beantragen ihm peinlich war. Er hatte, als er den REPSOLDschen Kreis für die Sternwarte erwerben wollte (G.-SCH. Nr. 59), auf ein zweites Passageninstrument verzichtet, weil die Regierung trotz besten Willens die notwendigen Gelder für den Bau der Sternwarte, ja selbst für die Besoldungen nicht immer hatte rechtzeitig flüssig machen können. Soeben erst, im Juni 1816 hatte GAUSS ein Promemoria eingereicht (Werke XI 1, S. 294), um auf die Bestellung eines Durchgangsinstrumentes und Meridiankreises von REICHENBACH anzutragen. Sogleich von neuem um Bewilligungen für die Gradmessung und die dazu nötigen Instrumente bei der Regierung einzukommen, erschien ihm untunlich. SCHUMACHER half ihm über diese Schwierigkeiten hinweg, indem er sich persönlich an den Minister, den Geheimen Kammerrat v. ARNSWALDT in Hannover wandte[1]), der sehr entgegenkommend war und sogleich nach allen Einzelheiten fragte, unter anderm auch, ob nicht Gehilfen nötig wären. Als im September v. ARNSWALDT auf der Rückreise von einer Kur in Wiesbaden durch Göttingen hindurchkam, trug er GAUSS die Abfassung einer schriftlichen Eingabe auf. Da GAUSS dazu mehrere Notizen von SCHUMACHER benötigte, und dessen Antwort auf seine Anfrage verloren gegangen war, so verzögerte das Hin- und Herschreiben die Sache, und er erhielt erst Anfang Dezember von SCHUMACHER die verlangten Angaben über die Ökonomie der Operationen in Dänemark, insbesondere über

1) v. ARNSWALDT (SCHUMACHER schreibt ARNSWALD) war zugleich Kurator der Universität Göttingen.

die Dauer der Messungen, über das Personal und über die Kosten im einzelnen. In der Antwort schlug SCHUMACHER zugleich vor, das südlichste Dreieck der dänischen Triangulation und eine Grundlinie bei Hamburg gemeinschaftlich zu messen. Eine zweite Basis wollte er bei Kopenhagen anlegen, während GAUSS am südlichsten Punkte seiner Dreiecke ebenfalls noch eine Grundlinie ins Auge fassen sollte. Zu Gehilfen schlug er Offiziere vor, die am leichtesten mit der Landbevölkerung zu verhandeln verständen.

26. Teilnahme an der Messung des Verbindungsdreiecks, an den Sektorbeobachtungen und der Basismessung. Ende Juli 1817 hatten die eigentlichen Operationen in Dänemark begonnen, und im November waren $1\frac{1}{2}$ Grade des Meridianbogens von Hamburg bis zur Insel Alsen trianguliert. Als nun SCHUMACHER 1818 daran gehen konnte, seine südlichsten Dreiecke zu messen, forderte er GAUSS nochmals auf, möglichst im September an den Anschlussmessungen teilzunehmen und sandte ihm eine Skizze der gemessenen Dreiecke und der projektierten Verbindung. GAUSS hatte den Brief etwas zu spät erhalten, um mit dem Kurator über diesen Plan sprechen zu können. Durch eine schriftliche Eingabe fürchtete er aber lästig zu werden, bevor seine Denkschrift über die Teilnahme an der Gradmessung einer Antwort gewürdigt wäre. Indessen wollte er die Anschlussmessungen gern übernehmen, falls SCHUMACHER mit dem Minister verhandeln wollte. Dieser tat auch alsbald die nötigen Schritte, die zu einem günstigen Erfolge führten, und konnte zugleich melden, dass die Fortsetzung der Gradmessung durch Hannover zwar noch nicht beschlossen sei, dass aber v. ARNSWALDT keineswegs bezweifle, dass dies für die Wissenschaft wichtige Unternehmen demnächst ausgeführt werde, und dass er es sich angelegen sein lassen werde, es zu befördern. Am 10. September 1818 konnte GAUSS melden, dass er selbst vom Minister den Auftrag zur Vornahme der Messungen in Lüneburg erhalten habe. Er bat daher SCHUMACHER, ihm die Beschreibung der einzustellenden Signale zu senden und womöglich die genäherten Winkel in Lüneburg anzugeben, um Verwechslungen der Objekte zu verhüten. Auch wegen der Auswahl des zur Aufstellung geeignetsten Turmes in Lüneburg fragte er um Rat (Werke IX, S. 347, G.-SCH. Nr. 79). GAUSS hatte sich nicht wohl befunden; als sich aber seine Gesundheit besserte, freute er sich recht herzlich auf die Reise. Er kaufte einen Wagen und nahm ausser dem zwölfzölligen BORDAschen Kreise noch den achtzölligen Theodoliten mit,

um zu sehen, wie die Resultate passen würden. Als Gehilfen hatte ihm ALBERS[1]) den Artillerie-Kapitän MÜLLER (seinen späteren langjährigen Mitarbeiter) vorgeschlagen, er nahm aber für dieses Mal SCHUMACHERS Anerbieten an, der ihm seinen Gehilfen Kapitän CAROC zur Verfügung stellen wollte. Da aber CAROC zunächst noch in Lauenburg mit der Winkelmessung beschäftigt war, wurde URSIN (GEORG FREDERIK KRÜGER) damit beauftragt, GAUSS an die Hand zu gehen. Nachher kam noch SCHUMACHER selbst mit einem REPSOLDschen achtzölligen Theodolithen nach Lüneburg. Die Messungen der beiden Winkel Hamburg-Hohenhorn und Hohenhorn-Lauenburg fanden auf dem Michaelisturm in Lüneburg statt. Die grosse schöne Laterne desselben war aus ganz solidem Stein und die Zentrierung leicht und sicher[2]). Bei diesen Beobachtungen erhielt GAUSS durch ein die Sonne spiegelndes Fenster des Michaelisturmes in Hamburg, das ihn beim Beobachten störte, die erste Anregung zu der im Herbst 1820 gemachten Erfindung des Heliotrops. Die beiden am 8. und 9. Oktober 1818 gemessenen Hauptwinkel teilte GAUSS Ende des Monats SCHUMACHER mit (G.-Sch. Nr. 84). Auch die Zenitdistanzen der drei Punkte hatte er gemessen. Eine Anzahl von Richtungen nach Nebenpunkten hatte er bereits am 3. Oktober beobachtet, wobei er auch Wilsede hatte mitnehmen wollen, das in dem EPAILLY-schen Dreiecke Hamburg-Wilsede-Lüneburg vorkam, aber wohl nicht zu sehen war. Am 9. Oktober bestimmte er noch auf der Bastei vor einem Tore von Lüneburg zum Zwecke der Zentrierung mit dem Theodoliten die Winkel zwischen den verschiedenen Türmen und dem Standpunkte von SCHUMACHERS Theodolit. Über die Lüneburger Messungen sandte GAUSS einen Bericht nach Hannover und beantragte die Bewilligung eines grösseren Theo-

1) H. C. ALBERS hat sich durch eine nach ihm benannte flächentreue Kegelprojektion bekannt gemacht. Der Empfehlungsbrief von H. C. ALBERS an GAUSS lautet: »Durch den Herrn Prof. SCHUMACHER habe ich ... erfahren, dass Euer Hochwohlgeboren den Auftrag bekommen haben, hierher zu kommen, um den Punkt Lüneburg an die Dreiecksmessung anzuschliessen, die Herr Prof. SCHUMACHER jetzt im speziellen Auftrag seines Königs vollzieht. Vielleicht fehlt es Ihnen an einem tüchtigen Gehilfen und in dieser Absicht wage ich es, Ihnen einen Freund, den jetzigen Artillerie-Kapitän, Herrn Dr. MÜLLER (nicht den Ingenieur-Kapitän und Aide General-Quartiermeister gleichen Namens) in Hannover vorzuschlagen, der einer Ihrer würdigsten Schüler ist und das Wenige, was an seiner Brauchbarkeit vielleicht noch fehlen möchte, sicher bald erwerben und durch Fleiss ersetzen wird. Auch SCHUMACHERS Freund ist er, da er vor dessen Rufe nach Mannheim mit ihm eine zeitlang in Hamburg sich aufgehalten hat«.

2) GAUSS wohnte auf ALBERS' Rat im Schütting, einem vom Michaelisturm etwas entfernten Gasthof am Markte.

doliten. Aber er bekam hierauf, wie auf seine Denkschrift lange keine Antwort. Da benutzte SCHUMACHER, der im April 1819 nach England reiste, um den RAMSDENschen Zenitsektor[1]) persönlich auf dem Woolwich Observatory in Empfang zu nehmen, die Gelegenheit, in London Sir JOSEPH BANKS »der beinahe allmächtig war« die Hannoversche Gradmessung ans Herz zu legen. Er veranlasste ferner den dänischen Gesandten in England, Geheimrat v. BOURKE mit dem Grafen MÜNSTER, dem Minister für die hannoverschen Angelegenheiten in London, über die Gradmessungsangelegenheit zu verhandeln. Dieser war ein wenig stutzig, dass GAUSS nicht selbst sich an ihn gewandt hatte, und wünschte sobald als möglich eine Mitteilung über die Kosten; wenn diese 1500 Pfund Sterling nicht überschritten, würde die Sache schnell entschieden werden. GAUSS legte infolgedessen in einem Schriftstück dem Grafen MÜNSTER die Bedeutung und den Nutzen der hannoverschen Gradmessung dar (Werke IV, S. 482/483) und unterrichtete auf SCHUMACHERS Rat[2]) auch v. ARNSWALDT von diesem Schreiben, indem er zugleich nahelegte, ihm die Teilnahme an den Beobachtungen in Lauenburg zu ermöglichen (Werke IV, S. 484/5). Anfang Juni sprach SCHUMACHER auch noch persönlich mit ARNSWALDT und es gelang ihm, eine Ministerialverfügung zu erwirken, nach der sich GAUSS nach Lauenburg begeben und alle nötigen Vorschüsse erhalten solle. Ende Juni wurde der Sektor in Lauenburg aufgestellt und GAUSS nahm

---

1) Der Zenitsektor war das letzte Werk von RAMSDEN, das er selbst nicht mehr vollenden konnte. Eine Beschreibung des Instrumentes findet sich in: »*An Account of the Trigonometrical Survey carried in he Years* 1791, 1792, 1793 and 1794 by W. MUDGE and J. DALBY, woraus ein Auszug in BIGOURDAN, *Grandeur et figure de la Terre*, Paris 1912, Seite 353—356 gegeben ist. — 1802 hatte General MUDGE bei der englischen Gradmessung mit diesem Sektor beobachtet, 1818 wurden von englischen und französischen Gelehrten gemeinschaftlich in Dünkirchen, als dem nördlichsten Endpunkt der französischen Gradmessung eine Reihe von Beobachtungen damit gemacht. Sodann wurde er von der englischen Regierung zu der dänischen Gradmessung auf zwei Jahre geliehen, und SCHUMACHER wollte ihn anfangs von Dünkirchen abholen. Der Sektor gehörte dem Board of Ordnance, die Verfügung darüber hatte der Herzog VON WELLINGTON als Great Master of the Ordnance, die besondere Aufsicht lag nach dem Tode von MUDGE in den Händen des Oberstleutnant COLBY.

GAUSS legte Wert darauf mit diesem selben Instrument, das zu den Bestimmungen in Lauenburg, Lysabbel (auf Alsen) und Skagen, auch in Kopenhagen 1819 und 1820 verwendet worden war, in Göttingen, vielleicht auch in Celle oder Hannover die astronomischen Beobachtungen für die Gradmessung anzustellen. Schliesslich diente der Sektor zur Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten in Altona und Göttingen. 1827 wurde er durch Hauptmann MÜLLER nach London zurückgebracht.

2) In etwas weitgehender Bevormundung legte SCHUMACHER einen Entwurf des Briefes GAUSS vor.

an den Beobachtungen teil, von denen er durch die Hitze des Sommers ermattet am 18. Juli etwas überstürzt heimkehrte[1]). Fast überraschen muss es, dass er im Anfang 1820 aus freien Stücken an SCHUMACHER schrieb, es würde ihm grosse Freude machen, in diesem Jahre nochmals einige Wochen in SCHUMACHERS Gesellschaft zuzubringen und an seinen Arbeiten teilzunehmen[2]). Nur dass die hannoversche Gradmessung trotz eines freundlichen Schreibens des Grafen MÜNSTER noch immer nicht bewilligt war, rief in GAUSS das Gefühl der Besorgnis hervor, durch einen Antrag auf eine dritte mit der Gradmessung nur in loser Verbindung stehende Unternehmung, nämlich die Basismessung, lästig zu werden. Wohl nicht ohne die Absicht, seinen Plan von dänischer Seite gefördert zu sehen, sprach er zugleich seine Bereitwilligkeit aus, auf einen von SCHUMACHER geäusserten Wunsch (G.-SCH. Nr. 95) einzugehen, in den Göttinger Anzeigen einen Aufsatz über die dänische Gradmessung zu veröffentlichen und darin ihrer Förderung durch König FRIEDRICH VI. zu gedenken. Freilich wollte er eine blosse Huldigung um so mehr vermeiden, als darin ein verblümter Druck auf seine Regierung erblickt werden könnte. Die Bereitstellung der Mittel für die Fortführung der Dreiecksmessungen sollte freiwillig geschehen, nur dann, aber dann auch recht gern wolle er im wissenschaftlichen Interesse das persönliche Opfer bringen, als das er die ihm bevorstehende Tätigkeit ansah. Bereits nach wenigen Wochen konnte SCHUMACHER melden, der König habe an seinen Gesandten in London Ordre geschickt, von der Hannoverschen Regierung die Gegenwart von GAUSS bei der Grundlinienmessung zu erbitten, woran sich noch seine Teilnahme an den Beobachtungen in Lauenburg schliessen sollte. — In einer formellen, wohl zugleich an die Adresse des Königs gerichteten Antwort gab GAUSS seine Bereitwilligkeit kund: »Vor allen Dingen muss ich Ihnen zu erkennen geben, wie sehr ich mich dadurch geehrt fühle, dass Ihr vortrefflicher König meine Gegenwart bei Ihrer

1) Darauf deuten die in der Eile zurückgelassenen Kleidungsstücke (G.-SCH. Nr. 93/4).

2) Die Gründe, die ihn hierbei leiteten, erhellen aus dem Berichte vom 27. Februar 1820, hier genüge der Hinweis auf folgende Stelle: Da die ganze Gradmessung in extenso in einem eigenen Werke der gelehrten Welt bekannt gemacht werden soll, wird die Anwesenheit eines Zeugen bei einigen der wichtigsten Operationen dazu dienen, die Authentizität zu verstärken (Werke IV, S. 487). — Bei der Basismessung waren ausserdem noch, wie es scheint, STRUVE (vgl. STRUVE, *Arc du méridien*), WALBECK und OLBERS zugegen, und als Mitarbeiter von SCHUMACHER u. a. HANSEN, der dann 1825 Leiter der Sternwarte auf dem Seeberge bei Gotha wurde.

bevorstehenden Standlinienmessung verlangt und sogar geruhet hat, mir den Urlaub dazu zu erwirken. Wenn ich, wie nicht zu bezweifeln ist, diesen erhalte, wird es mir die angenehmste Pflicht sein, Sr. Majestät Befehlen nachzukommen« (G.-Sch. Nr. 98). Endlich konnte Gauss in einem Briefe vom 20. Mai 1820 anzeigen, dass infolge eines Schreibens vom Grafen Münster aus London als Antwort auf den ein Jahr zuvor durch Schumacher besorgten Brief der König die Fortsetzung der Gradmessung durch das Königreich Hannover genehmigt habe (G.-Sch. Nr. 100). Die hierauf bezügliche Kabinetsordre Georgs IV., Königs von Grossbritannien und Hannover an das Ministerium war am 9. Mai 1820 ergangen, die Mitteilung des Ministeriums an Gauss erfolgte unter dem 30. Juni 1820 (Werke IX, S. 431). — Über seine Teilnahme an der Braaker Grundlinienmessung[1]), die einschliesslich der Reise vom 12. September bis 25. Oktober 1820 währte, hat Gauss am 1. November 1820 an das Ministerium berichtet. Über den dabei verwendeten Repsoldschen Apparat urteilt er, dass er an Genauigkeit, Solidität und Zweckmässigkeit alle bei andern Gelegenheiten gebrauchten übertreffe[2]). Die Beendigung der Messung hatte Gauss nicht abgewartet; er bat Schumacher, ihn über den Fortgang bis ins einzelne zu unterrichten. Auf der Rückreise erfuhr Gauss durch v. Arnswaldt, dass Graf Münster mit dem Herzoge v. Wellington wegen Überlassung des Sektors das Nötige vereinbaren wollte. Vor der Reise hatten Gauss und Schumacher verabredet dieselben Sterne in Skagen, wohin letzterer im Mai 1820 gehen wollte, und in Göttingen gleichzeitig zu beobachten. Später wurde Skagen durch Altona ersetzt. Die dänische Gradmessung ist in. der beabsichtigten Weise nicht vollständig zu Schumachers Lebzeiten vollendet worden, die Messungen zur Verbindung der Basis und der Dreiecke nahm die folgenden Jahre in Anspruch und 1824 trat eine Unterbrechung ein. 1838 wurde dann noch eine Basis bei Amager bei Kopenhagen gemessen (vergl.

1) Braak liegt etwa 12 km nordöstlich von Hamburg.

2) Eine definitive Bestimmung der Stangen ist nie erfolgt, so dass die von Caroc angegebene Entfernung Hamburg-Hohenhorn, auf der die absolute Länge der dänischen und der Gausssachen Triangulation, so wie von Gerlings Dreiecken in Kurhessen beruht, ebenfalls nur als vorläufiger Wert angesehen werden kann. (Vergleiche: Schreiben an den Herrn Doctor W. Olbers in Bremen von H. C. Schumacher, enthaltend eine Nachricht über den Apparat, dessen er sich zur Messung der Basis bei Braak im Jahre 1820 bedient hat, mit 2 von Herrn Ingenieur-Kapitän v. Caroc gestochenen Steindrucken. Altona 1821.)

Den Danske Gradmaaling, Ny Raekke, Hefte 16: *Le Service Géodésique du Danemark* 1816—1916 par V. H. O. MADSEN. Kopenhagen 1916).

V. Abschnitt. Vorbereitungen für die hannoversche Gradmessung.

27. Meridianzeichen. Am Schlusse des Jahres 1820 begann GAUSS mit mancherlei Vorbereitungen für die Gradmessung. Sie brachten ihm viele Widerwärtigkeiten und machten ihn oft unmutig (G.-SCH. Nr. 106). Eine wichtige Vorbereitung war ihm mit einiger Mühe gelungen. Er hatte nach Aufgeben des Planes, von Hamburg anzufangen (G.-SCH. Nr. 113), die Sternwarte in Göttingen als Ausgangspunkt für die Vermessungen ausersehen und musste für die Beobachtung eines Anfangsazimutes die notwendigen Einrichtungen herstellen. Er hatte zu diesem Zwecke anfangs zwei Meridianzeichen, ein nördliches und ein südliches, ins Auge gefasst. Es gelang ihm indes nur auf der Nordseite die Schwierigkeiten zu überwinden und sich die Aussicht auf einen Hügel jenseits des Dorfes Weende zu verschaffen, der etwa 5 km entfernt war. Das Gelände eignete sich sehr zu einem Meridianzeichen, das in 42′ Höhe sich gegen den Horizont projizierte[1]). Am 14. Dezember war der Meridianschnitt frei, und es konnte zunächst ein Interimszeichen gesetzt werden.

28. Auswahl der Dreieckspunkte. Welche Schwierigkeiten GAUSS hatte, um die von EPAILLY 1804—05 gemessenen 94 Dreiecke zu erhalten, die den südlichen Teil von Hannover mit Hamburg auf einem grossen Umwege verbanden, wurde bereits erwähnt (S. 40)[2]). Auch LAPLACE konnte ihm kein vollständiges

1) Schade, sagt GAUSS, »dass α Lyrae bei der untern Kulmination noch mehrere Minuten tiefer durchgehen wird; nach etwa 150 Jahren, wenn dann hier noch observiert wird, muss der Stern aber herausleuchten«.

2) »Die Fragmente, die ich von EPAILLYS Messungen auf verschiedenen Wegen erhalten habe, setzen mich in den Stand, eine Kette von Dreiecken von Herkules bis Bentheim so ziemlich zu restituieren und meine eigenen damit zu verbinden. Bei Bentheim schliessen sich wieder die KRAYENHOFFschen und an diese bei Dünkirchen die französischen an«. (G.-G. 21. Februar 1822. Vergl. G.-O. Nr. 447. 448 und G.-SCH. Nr. 113.)

Winkelverzeichnis, sondern nur eine Übersichtskarte verschaffen. Das Aussuchen der Dreieckspunkte wurde dadurch sehr behindert, dass im Lüneburgschen eine grosse Lücke vorhanden war. Nur für den südlichen Teil erhielt GAUSS auf verschiedenen Wegen einzelne Resultate und kannte alle EPAILLYschen Punkte. Dies war mitbestimmend für ihn, die Triangulation von Süden zu beginnen, wobei noch die Nähe von Göttingen wegen der leichteren Abhilfe bei Verlegenheiten im Anfange der Operationen in Betracht kam.

Als sehr wesentlich sah er den Anschluss an diejenigen fremden Triangulationen an, die Hannover im Süden berührten, wodurch die Gradmessung einer Ausdehnung in dieser Richtung fähig würde. Seit 1816 hatte der preussische Generalstab die Vermessungen für eine Karte übernommen und v. MÜFFLING hatte mit einer Dreieckskette begonnen, die durch Hessen, Thüringen und Brandenburg führte, das französische, bayerische und österreichische Netz verbinden sollte und Ende der zwanziger Jahre vollendet wurde. Die bereits vorliegenden Ergebnisse wurden GAUSS bereitwillig mitgeteilt.

29. **Instrumente.** Eine wesentliche Vorbereitung betraf die Bestellung der zur Gradmessung nötigen Instrumente. Der Bemühungen um den RAMSDENschen Sektor wurde schon gedacht (S. 61, Fussnote); als transportables Instrument war er notwendig, falls noch ein Zwischenpunkt, an dem die Breite bestimmt werden sollte, eingeschaltet wurde; sodann war es wünschenswert, mit demselben Instrumente am südlichen Endpunkte der Gradmessung zu beobachten, das am andern Endpunkte verwendet worden war; endlich erschien es wichtig und lehrreich, die Güte des Instrumentes, mit dem so viele wichtige Bestimmungen ausgeführt waren, durch vergleichende Beobachtungen an diesem Instrument mit dem REICHENBACHschen Meridiankreise zu prüfen; die hierbei gemachten Erfahrungen liessen sich dann bei den Meridianbeobachtungen der Sternwarte verwerten.

Ebenso traf GAUSS bereits im Sommer 1820 angemessene Einleitungen, um die unmittelbar auf den geodätischen Teil der Gradmessung bezüglichen Instrumente zu beschaffen. Für die eigentlichen Winkelmessungen bestellte er bei REICHENBACH, dessen Werkstatt gerade sein ehemaliger Werkmeister ERTEL übernommen hatte, einen 12-zölligen Theodoliten und ein Universalinstrument[1]), die im Mai und Juli 1821 abgeliefert werden sollten. Auch

1) Das vorzüglich wegen der Azimutmessungen bestellte Universalinstrument hat GAUSS im November 1822 erhalten (G.-B. Nr. 135).

bei diesen Verhandlungen hatte er vielfach Verdruss, indem er keine Antwort erhielt, obwohl er deshalb noch an SOLDNER in München geschrieben hatte (G.-SCH. Nr. 106). Ein Trost war es nur, dass er für Rekognoszierungszwecke einen kleinen (5-zölligen) Theodoliten von TROUGHTON durch SCHUMACHERS Besorgung im März 1821 in Händen hätte, und dass ihm dieser auch ein Universalinstrument mit gebrochenem Fernrohr, den sogenannten Stutzschwanz, anbieten konnte, auf den GAUSS aber nachher verzichtete.

Viel Not bereitete ihm noch die Saumseligkeit von REPSOLD, von dem er eine Reverberenlampe wünschte, um damit Versuche anzustellen. Auch dieser gab ihm keine Antwort und GAUSS erhielt die Lampe erst im Mai 1821. Über die Absichten, die GAUSS hierbei hatte, wird im Folgenden im Zusammenhange gesprochen werden.

30. Gehilfen. Als Gehilfen hatte OLBERS einen Schüler von REICHENBACH, TREVIRANUS, vorgeschlagen, doch führten die Verhandlungen nicht zum Ziele. Als zweiten Mitarbeiter wollte GAUSS aus verschiedenen Gründen einen Offizier wählen. Auch nahm er noch einen dritten in Aussicht, wobei er an G. K. CHR. v. STAUDT dachte. Ferner wollte er noch Volontäre teilnehmen lassen. Anfangs hatte er darauf gerechnet, dass SCHUMACHER ihm CAROC, »das Muster aller Gehilfen«[1]) zur Einübung seiner Mitarbeiter überlassen würde, doch verzichtete er bei den leichten Arbeiten des ersten Jahres auf diese Unterstützung. Er gewann schliesslich als Gehilfen zwei Offiziere der Artillerie, Hauptmann MÜLLER[2]) und Leutnant HARTMANN aus Hannover (GAEDE a. a. O., S. 28 Anm.).

1) »Die erforderlichen Eigenschaften für solche Gehilfen sind nicht sowohl besonders tiefe mathematische oder astronomische Einsichten, als vielmehr reger Eifer für die Sache, die grösste Pünktlichkeit und Sinn für die grösste Genauigkeit, eine gewisse praktische Anstelligkeit, einige Kenntnisse vom Bauwesen, einige Bekanntschaft mit dem Geschäftsgange in unserm Lande bei denjenigen Behörden, mit welchen in solchen Angelegenheiten Berührungen vorkommen« (Werke IV, S. 483).

2) Siehe S. 60.

VI. Abschnitt.

Die Erkundung der Dreieckspunkte[1]) (1821) und die Erfindung des Heliotrops.

31. Errichtung von Signalen. Nach diesen Vorbereitungen begann Gauss um Mitte April 1821 die ersten Erkundungen und vorläufigen Messungen in der Umgebung Göttingens. Auf dem etwa 15 km entfernten Hohehagen bei Dransfeld hatte in 508 m Meereshöhe ehemals ein französischer Signalturm gestanden und die noch erkennbare Stelle erwies sich wegen der sehr ausgedehnten Aussicht überaus schicklich zu einem Hauptdreieckspunkte[2]). Auf Grund von vorläufigen, hier vorgenommenen Messungen wies Gauss seine beiden Gehilfen an, sogleich bei ihrer Herreise von Hannover, das sie Mitte Mai verliessen, die höchsten Bergspitzen im Hildesheimschen zu erkunden, um einen Punkt ausfindig zu machen, der mit dem Hohehagen und dem von ihm sichtbaren Kötersberge[3]) im Amte Polle ein Dreieck bilden könnte. Dies gelang jedoch nicht, und der Kötersberg selbst erwies sich für die Gradmessung als ungeeignet. Es kamen aber noch der Hils bei Ammensen und der Kahlberg unweit Gandersheim, der ein französischer Punkt gewesen war, zur Berücksichtigung und die Erkundung durch Hauptmann Müller und Leutnant Hartmann ergab, dass der Kahlberg infolge der seinem Namen widersprechenden starken Bewaldung nur mit grossen Schwierigkeiten als Dreieckspunkt benutzt werden konnte, während der Hils sich sehr gut eignete, zumal auf ihm nach Norden bis Hannover, ja wie sich später zeigte, bis zum Brelinger Berge freie Aussicht vorhanden war.

Nach der Ankunft der beiden Mitarbeiter in Göttingen wurde dem Leutnant Hartmann[4]) der Bau des Signals auf dem Hohehagen übertragen, während Hauptmann Müller nach einem nochmaligen vergeblichen Besuche des Köters-

1) Eine Übersichtskarte der gemessenen Dreiecke systeme findet sich Werke IX, zwischen S. 434 u. 435.

2) Nahezu an dieser Stelle ist in den Jahren 1909—11 ein 35 m hoher Gaussturm vom Verschönerungsverein Dransfeld aus Basalt errichtet worden, in dem sich eine Gaussbüste von Eberleins Hand befindet. Die Aussicht umfasst 9000 qkm.

3) Vom Kötersberge war auch der Herkules bei Kassel sichtbar, der bei einer Verbindung mit den hessischen Dreiecken in Betracht kam.

4) Hartmann wurde auch damit beauftragt, eine Schneise für das südliche Meridianzeichen auszulichten. Davon ist aber später nicht mehr die Rede.

berges den Bau des Signals auf dem Hils einleitete[1]) und den von GAUSS ausersehenen, bereits im Braunschweigschen gelegenen Kruksberg bei Lichtenberg rekognoszierte. Die Genehmigung zur Abholzung des dort befindlichen Hochwalds konnte leicht erlangt werden.

Eine einheitliche Erkundung des ganzen Gebietes der Gradmessung hat nicht stattgefunden und ist offenbar auch nicht beabsichtigt gewesen. Diese Unterlassung, die sich später in mancher Beziehung fühlbar gemacht und GAUSS manche trübe Stunde verursacht hat, ist zunächst in den damals bestehenden Schwierigkeiten begründet: Die schlechten Reiseverbindungen, die langsame Nachrichtenvermittlung, die Mangelhaftigkeit der Karten, die schwierige Unterkunft in kleinen Ortschaften, die Kostspieligkeit und die technischen Schwierigkeiten des Baues von Erkundungsgerüsten u. a. m. bildeten grosse Erschwernisse. Die Gehilfen waren mit den ihnen obliegenden Aufgaben wenig vertraut, GAUSS musste sie im Gebrauch der wissenschaftlichen Hilfsmittel erst unterrichten[2]) und übernahm manches selbst, was er ihnen nicht zutraute. Immerhin würde, wenn diese Gründe den Ausschlag gegeben hätten, GAUSS wahrscheinlich in Briefen an seine Freunde sein Bedauern über die Unmöglichkeit falls solchen systematischen Vorarbeit ausgesprochen haben. Es waren jedeneiner auch innere Gründe, die ihn davon abhielten. Nicht so sehr, weil er den Anstrengungen einer mehrere Monate dauernden derartigen Tätigkeit sich körperlich und seelisch nicht gewachsen fühlte, sondern mehr noch wird der Wunsch, bald Resultate der Gradmessung zu sehen und vorlegen zu können, in ihm rege gewesen sein. Auch war es seine Arbeitsmethode, keinen Schritt weiter vorzuschreiten, bevor der vorangehende vollständig gesichert war. Diese bei theoretischen Untersuchungen vorbildliche Art übertrug er, wohl nicht immer zum Vorteile, auch auf die praktischen geodätischen Arbeiten. Im letzten Grunde war es indessen ein neuer Gedanke, der wie ein Funke in seinem Geiste erglühte, und der zur leuchtenden Flamme entfacht das ganze Verfahren der Erkundung, ja die Anlage der Dreieckskette durchaus umzugestalten versprach. Es war die Erfindung eines neuen Apparats, des Helio-

1) Den ein Angestellter der Karlshütte weiter überwachte.

2) »Während Sie an CAROC einen Gehilfen haben, auf den Sie sich ganz verlassen, und dem Sie alle Details überlassen können, muss ich meine Gehilfen erst selbst dressieren, und wenigstens anfangs mich in viele, mir zum Teil selbst fremde Details einlassen« (G.-SCH. Nr. 116).

tropen, die er erst lange in sich trug, ehe er sie auch nur den nächsten seiner Freunde mitteilte.

32. Heliotrop. Wie lange ihn bereits die Sichtbarmachung der Dreiecks-punkte beschäftigt hatte, zeigten die Briefe von LINDENAU (vergl. S. 44). Er hoffte, im Frühjahr 1821 mündlich mit SCHUMACHER über diese Dinge sprechen zu können, wenn dieser zur Vornahme von Pendelbeobachtungen auf der Sternwarte nach Göttingen gekommen sein würde. Durch Krankheit und wegen der Fortsetzung der Basismessung zerschlug sich diese Aussicht. Es handelte sich für GAUSS besonders um die Frage der Bauart der Signale, ob dieselbe Form auf allen Stationen angewendet werden sollte, ob die bei den Franzosen übliche Verbindung der vier Pfeiler am Erdboden durch ein Kreuz zweckmässig sei, kurz, er wollte SCHUMACHERS Erfahrungen kennen lernen, ob sich seine Signale in Rücksicht auf gute Sichtbarkeit, wie auf Stabilität gut bewährt hätten.

Signaltürme schienen ihm überhaupt in manchen Fällen unzweckmässig, namentlich wenn die Objekte tiefer als der Standpunkt liegen und sich gegen die Erde projizieren, wie es z. B. vom Brocken aus der Fall sein würde. Ja selbst die vollkommensten Signaltürme, geschwärzte, die sich gegen den Himmel projizieren, wären in sehr grossen Entfernungen, wenn man eine von der Sonne beleuchtete und eine im Schatten befindliche Seitenfläche sieht, nicht gänzlich von einer beschwerlichen Phase frei. Deshalb schwankte er eine Zeit lang zwischen der Wahl von Tag- und Nachtbeobachtungen. Die Nachtbeobachtungen schienen ihm allerdings grosse Unbequemlichkeiten zu bringen, besonders wenn die Stationen auf schwer zugänglichen, vom Quartier weit entfernten Bergen lägen. Doch riet v. MÜFFLING sehr dringend zu ihnen und empfahl die Anwendung von Reverberen. REPSOLD wollte ihm seinerseits white-fires schicken[1]). Bei mässigen Entfernungen entsprachen die mit den Lampen angestellten Versuche seinen Erwartungen[2]). Indem ihm aber alle

1) Es handelt sich um bengalische Flammen, vielleicht durch Verwendung von Magnesiumpulver.

2) Beim Beinberg, den GAUSS vor der Erkundung des Hils als den einzig möglichen Punkt in Betracht zog, von dem aus der Hohehagen, Hannover, Braunschweig und der Brocken zugleich gesehen werden konnten, hätte ein im Theodolit sichtbares Signal nach seinen Versuchen sehr grosse Dimensionen haben müssen. Deshalb wollte er mit den von REPSOLD im Mai 1821 erhaltenen Reverberen (Lampen mit Reflektoren) und mit zwei kleineren bei KÖRNER in Jena bestellten, Versuche anstellen, den Beinberg auf dem

erwähnten Schwierigkeiten bei Bildung grosser Dreiecke nach fremden Erfahrungen, bevor er eigene gemacht hatte, vorschwebten, war er auf ein ganz neues Mittel bedacht, ihnen abzuhelfen. Bei der Messung des Winkels Hamburg-Hohenhorn in Lüneburg hatte er in seinem Beobachtungsjournal vermerkt: »Hamburg schlecht zu sehen, das westliche von der Sonne beleuchtete Fenster geniert das Pointieren« und später hinzugefügt: »N. B. Diese Erfahrung ist die erste Veranlassung zu der im Herbst 1820 gemachten Erfindung des Heliotrops gewesen«[1]).

Die Art, wie er bei dieser Erfindung vorging, ist kennzeichnend für seine Arbeitsweise. Zunächst überzeugte er sich durch theoretische Untersuchungen, die auf photometrischen Grundlagen beruhten, davon, dass selbst von ganz kleinen Planspiegeln reflektiertes Sonnenlicht hinreichende Kraft hat, um in den grössten Entfernungen sichtbar zu sein[2]) und sich viel leichter und besser beobachten lässt, als alle Türme und Signale, ja selbst besser als mehrere ARGANDsche[3]) Lampen bei Nacht. Um sodann diese Idee brauchbar zu machen, bedurfte es eines besonderen Instrumentes, wodurch man das reflektierte Sonnenlicht mit grösster Genauigkeit und Sicherheit ununterbrochen nach jedem beliebigen noch so weit entfernten Punkte richten kann. Er versuchte zunächst einen Spiegel am Deckel des Fernrohrs eines Theodoliten zu befestigen und ihm durch vorher mühsam berechnete Azimute und Höhen die richtige Lage zu geben, um das Licht nach einer bestimmten Richtung zu werfen, kam aber damit nicht zum Ziel.

---

70 km entfernten Hohehagen sichtbar zu machen. Für die Entfernung Brocken-Inselsberg glaubte er aber, mit diesem Hilfsmittel nicht auszureichen. S. a. Anhang.

1) Nach GAUSS heisst das Instrument der (nicht das) Heliotrop. Dieser Name erschien ihm besonders schicklich trotz seiner Verwendung in der Botanik und in der Mineralogie.

2) Im Astronomischen Jahrbuch für 1825 schreibt GAUSS: »Bei einem nur einigermassen günstigen Zustande der Luft gibt es jetzt für die Grösse der Dreiecksseiten keine Grenzen mehr, als die die Krümmung der Erde setzt (Werke IX, S. 466). Nach dem Göttinger Almanach soll er die Bemerkung gemacht haben, diese Entdeckung wäre grösser als die von Amerika, wenn wir mit diesem Instrument mit unsern Nachbarn auf dem Monde verkehren könnten. Hierzu passt die Äusserung: »Mit 100 Spiegeln, jeden zu 16 Quadratfuss Fläche, vereint gebraucht würde man gutes Heliotrop-Licht nach dem Monde schicken können. Schade, dass wir nicht einen solchen Apparat mit einem Detachement von 100 Leuten und ein paar Astronomen dahin senden können, uns zu Längenbestimmungen Zei[ch]en zu geben (G.-O. Nr. 446).

3) AIMÉ ARGAND erfand 1783 in London Brenner mit doppeltem Luftzug, worüber er die Schrift verfasste: *Découverte des lampes à courant d'air et à cylindre*, Genf 1785. Die in Frage kommenden Lampen waren mit sehr genauen parabolischen Spiegeln versehen.

Um dann seinen im wesentlichen fertigen Entwurf des Heliotrops zu verwirklichen, bedurfte er eines Mechanikers, dessen Arbeiten er fortlaufend überwachen konnte und fand ihn in der Person des Inspektors RUMPF in Göttingen, der im Frühjahr 1821 die Arbeit begann[1]). Das weitere Nachdenken über diesen Gegenstand führte ihn auf eine zweite ganz verschiedene Einrichtung des Instruments, an deren Herstellung RUMPF sogleich nach Vollendung eines Apparates der ersten Art ging. An diese zweite Konstruktion denkt man gewöhnlich, wenn man vom GAUSSschen Heliotrop spricht[2]). (Siehe Anhang.)

Noch vor der Vollendung kam GAUSS auf einen dritten Gedanken, in allerdings unvollkommnerer Weise, aber mit wesentlicher Kostenersparnis einen Ersatz, einen Vizeheliotrop, wie er ihn nannte, zu schaffen, indem er einen Spiegelsextanten dazu einrichtete. Diese Vorrichtung war fast über seine Erwartung auf 2 Meilen Entfernung brauchbar und machte den beabsichtigten Signalbau in Lichtenberg entbehrlich. Die zur Reflexion benützten Spiegel waren 2 Zoll in Breite und 1 1/4 Zoll in Höhe (5,5 mal 4 cm), bei dem Heliotrop zweiter Konstruktion, »der eigentlich ein vom ersten ganz verschiedenes Instrument ist«, (G.-G. 21. 2. 22) konnten grössere Spiegel angebracht werden (Spiegelgrösse 6 1/4 Quadratzoll).

Bei den ersten Versuchen mit dem Heliotropen zwischen der Sternwarte und dem Hohehagen (15 km) gab selbst das Licht einer beleuchteten Wolke den schönsten Zielpunkt[3]). Zwischen Hils und dem Meridianzeichen der Sternwarte (etwa 40 km Entfernung) war das Licht mit blossem Auge zu sehen. ENCKE, seit Januar 1820 Vizedirektor der Seeberger Sternwarte[4]), kam nun auf GAUSS Einladung im Sommer nach Göttingen, um sich mit dem Vizeheliotrop einzuüben. Während GAUSS sich mit dem eigentlichen Heliotropen auf dem Hohehagen aufstellte, begab sich ENCKE nach dem 85 km davon entfernten Inselsberge. Die Beobachtungen und Versuche, die vom 19. bis 29. Juli dauerten, hatten den allerwünschenswertesten Erfolg und die gemessenen

1) PHILIPP RUMPF wurde 1819 als Mechanikus bei der Sternwarte angestellt.

2) Göttinger gelehrte Anzeigen 9. August 1821 (Werke IX, S. 462).

3) Im November 1821 machte GAUSS auch einen geglückten Versuch mit Mondlicht (G.-SCH. Nr. 130, Werke IX, S. 70). Über die ersten Versuche berichtete GAUSS an OLBERS (G.-O. Nr. 422, Werke IX, S. 467).

4) C. BRUHNS, *Johann Franz Encke*. Leipzig 1869. S. 94.

Winkel gaben solche Übereinstimmung, wie sie bei andrer Signalisierung kaum zu erwarten war.

GAUSS hat, was nach solchen Erfolgen[1]) nicht Wunder nimmt, auf seine Erfindung hohen Wert gelegt, und in der Tat hat er ein Hilfsmittel geschaffen, das seitdem für alle Tagesmessungen ersten Ranges unentbehrlich geworden ist, indem es gleichzeitig die Arbeit erleichtert und die Genauigkeit erhöht. Es ist auch natürlich, dass den grossen Theoretiker die erste Erfindung auf praktischem Gebiete mit Stolz erfüllte, sogar mit grösserem Stolze, als die später mit WILHELM WEBER gemeinsam verwirklichte erste Anlage eines elektrischen Telegraphen[2]), deren Bedeutung unvergleichlich grösser für die Nachwelt geworden ist.

Wenn heutzutage der GAUSSsche Heliotrop nicht mehr in seiner ursprünglichen Gestalt, sondern in einer einfacheren Konstruktion verwendet wird, so ist doch das Grundprinzip geblieben. Die Vereinfachung wäre zur Zeit, als GAUSS die Gradmessung vornahm, kaum angängig gewesen, hauptsächlich wegen der Schwierigkeit, gutes Spiegelglas zu erhalten, über die er selbst klagt[3]).

---

1) Am 15. Juli 1821 schreibt GAUSS an LINDENAU: »Gestern Nachmittag fing ich, da der Amtmannshau im Schatten lag und das dortige Signal noch nicht vollendet erschien, wieder mit Messung des Winkels zwischen Sternwarte und Hohehagen an; während ich damit beschäftigt war, erhob sich auf einmal unter meinen Kanonieren ein lauter Jubel, und ein zartes glänzendes Sternchen zeigte sich auf dem 37000 m entfernten Bergrücken dem blossen Auge. Die Sichtbarkeit wurde nachher öfters unterbrochen. . . Doch erhielt ich 30 Winkelmessungen zwischen Hohehagen, Signal und Amtmannshau, Heliotrop, unter denen gerade die sich am schönsten machen liessen, wo das Licht mit den blossen Augen garnicht gesehen werden konnte. Noch $^1/_4$ Stunde vor Sonnenuntergang war das herrliche Sternchen mit blossem Auge zu sehen. Etwas schöneres wie diesen Zielpunkt in der späten Abendstunde, wo die Luft ruhig und alle Gegenstände scharf begrenzt waren, kann Ihre Einbildungskraft sich nicht denken.«

An BESSEL berichtet GAUSS über die günstigen Erfahrungen mit dem Heliotropen am 26. Dezember 1821 und bemerkt dabei: »Einen sehr wesentlichen Vorzug hat das Heliotroplicht vor jedem andern Signale, worüber ich oft artige Erfahrungen gemacht habe; nämlich das Heliotroplicht sieht man desto besser, je stärker man vergrössert, irdische Signale hingegen (bei grossen Entfernungen) desto schlechter, denn bei letzteren ist es vorzüglich die Blässe, die das Sehen hindert; . . . Die Sache erklärt sich leicht; auch bei der stärksten Vergrösserung bleibt das Heliotroplicht ein Punkt und dessen Licht ist immer dasselbe, aber der Grund ist desto düsterer, je stärker man vergrössert« (G.-B. Nr. 131).

2) GAUSS hat auch beim Heliotropen bereits auf den »vielleicht noch wichtigeren Gebrauch eines den Raum so kräftig durchdringenden Mittels zu telegraphischen Signalisierungen im Krieg und Frieden« hingewiesen (Werke IX, S. 465) und zur Verständigung zwischen Beobachter und Heliotropisten eine Zeichensprache verabredet und benutzt (G.-G. 11. 8. 23, Werke IX, S. 382 ff., 395).

3) G.-G. 19. 5. 1822.

VII. Abschnitt. Die eigentlichen Winkelmessungen (1821—1823).

33. (1821) **Sternwarte, Meridianzeichen, Hohehagen, Hils, Brocken.** Nachdem das Signal auf dem Hohehagen fertig war, konnten am 24. Juni 1821 die wirklichen Messungen zunächst auf der Sternwarte ihren Anfang nehmen. Da der REICHENBACHsche Theodolit noch nicht angekommen war, beobachtete GAUSS mit dem von SCHUMACHER entliehenen Theodoliten. Die zweite Station war das nördliche Meridianzeichen, wo vom 13. bis 17. Juli gemessen wurde. Da inzwischen RUMPF den Heliotropen fertig gestellt hatte, konnte er zum ersten Male zu einer Winkelmessung im Grossen verwendet werden. MÜLLER wurde mit ihm nach dem Hils entsandt. Der Versuch fiel günstig aus und es bestand kein Zweifel mehr, dass auch für die Entfernung von 85 km zwischen dem Hohehagen und dem Inselsberg der Heliotrop verwendbar wäre. Den Inselsberg und zwar den Dreieckspunkt der preussischen Vermessung besetzte, wie schon erwähnt wurde, ENCKE mit dem Vizeheliotropen, während GAUSS sich mit dem eigentlichen Heliotropen auf dem Hohehagen aufstellte. Vom 19.—29. Juli wurden auf dem Hohehagen die Richtungen nach dem Inselsberg, der Sternwarte, dem Meridianzeichen und einer grossen Zahl anderer Punkte festgelegt. Auf dem Inselsberge war ENCKE angewiesen, den Winkel zwischen Hohehagen und einem gut sichtbaren Hilfspunkte[1]) zu messen, der später an den Brocken angeschlossen werden sollte.

Die vierte Station war der Hils. Da nur ein eigentlicher Heliotrop zur Verfügung stand, musste MÜLLER mit ihm nach einander den Lichtenberg, das Meridianzeichen, den Brelingerberg[2]) und Deister besetzen. GAUSS benutzte seinerseits den Vizeheliotropen zu telegraphischen Zeichen, wenn die Station gewechselt werden sollte und zu ähnlichen Zwecken. Vor Beginn der Messungen musste über die Fortsetzung der Arbeiten nach Norden entschieden werden, da zwar vom Hils aus alle Türme der Stadt Hannover sichtbar waren, es aber zweifelhaft blieb, ob einer derselben sich zur weiteren Fortsetzung gut gelegener Dreiecke eignen würde. Zu diesem Behufe reiste GAUSS selbst nach Hannover

1) G.-G. 3. 10. 1823. Werke IX, S. 396.

2) Brelingerberg ist kein Punkt der Gradmessung, sondern nur von Hils und Deister eingeschnitten. Siehe das Folgende.

und liess MÜLLER noch weiter nördlich nach der höchsten Erhebung dieser Gegend, dem bei Meinersen gelegenen Wohlenberge gehen. Da von hier aus nur die äusserste Spitze des Marktturmes in Hannover erblickt werden konnte, wurde Hannover als Hauptdreieckspunkt aufgegeben[1]). Die hierauf begonnenen Messungen auf dem Hils unterbrach GAUSS, indem er einen Tag nach Göttingen zurückkehrte, um mit MÜLLER wegen der Fortführung nach Norden Rücksprache zu nehmen und um den inzwischen von REICHENBACH gesandten Theodoliten zu besichtigen. Dann beendete er die Messungen auf dem Hils, die die Zeit vom 7. bis 27. August in Anspruch genommen hatten.

Am 2. September begab er sich in Begleitung von HARTMANN nach dem Brocken, dem letzten Dreieckspunkte dieses Jahres, von wo die Richtungen nach Lichtenberg, Hils, Hohehagen und Inselsberg genommen werden sollten. Zwar hatten Hils und Hohehagen[2]) Signale, aber der weiten Entfernungen wegen sollte auch hier Heliotroplicht verwendet werden, und MÜLLER alle vier Punkte nach einander bereisen. Indessen war das Wetter in der sonst

---

1) »Ich bemerke hierbei, dass dessen ungeachtet die Lage von Hannover ebenso genau mit bestimmt werden wird, als wenn es ein Hauptdreieckspunkt wäre, sowie ich überhaupt mit den unmittelbar zur Gradmessung gehörenden Beobachtungen auf jedem Standpunkt allezeit, soweit es ohne erheblichen Zeitverlust geschehen kann, alle diejenigen gern verbinde, die für die Geographie des Königreichs nützlich sein können« (Bericht an das Kabinetsministerium 7. Januar 1822).

»Der oberste Zweck der Triangulierung als Teil der Gradmessung ist, die Göttinger Sternwarte mit den dänischen Dreiecken zu verbinden, und dazu war es am vorteilhaftesten, die Dreiecke so gross wie möglich einzurichten, und daher die Dreieckspunkte im Allgemeinen auf den höchsten Stellen, die die weiteste Aussicht darbieten, zu wählen. Diese Punkte haben aber grösstenteils kein unmittelbares Interesse für die Geographie des Königreichs. Neben dem Hauptzwecke habe ich jedoch auch für diese meine Operationen überall nach Möglichkeit nützlich zu machen gesucht. Ich habe die Lage der Ortschaften, die in dem Bereich der Hauptdreiecke sich befinden, mit Sorgfalt bestimmt; einige derselben mit einer Schärfe, die der der Hauptdreieckspunkte kaum nachsteht, alle aber mit solcher Genauigkeit, wie nur zu einer Landesvermessung gefordert werden kann. Von Städten nenne ich Hannover, Braunschweig, Celle, Lüneburg, Neustadt am Rübenberge, Burgdorf. Die Anzahl der Dorfkirchtürme, deren Lage genau bestimmt wurde, ist sehr gross. Die Bahn ist gebrochen, diese Ernte, wenn es gewünscht wird, über einen grösseren Teil des Königreichs oder über das ganze auszudehnen« (Arbeitsbericht für 1822).

»Ich schnitt überdies auch alle sichtbaren Objekte bei Gelegenheit und ich muss sagen, dass ich dieses Geschäft mit seinen täglichen Ausgleichungen so lieb gewann, dass mir das Bemerken, Ausmitteln und Berechnen eines neuen Kirchturms wohl ebensoviel Vergnügen macht, wie das Beobachten eines neuen Gestirns. Vor Gott ists am Ende auch wohl einerlei, ob wir die Lage eines Kirchturms auf einen Fuss oder die eines Sternes auf eine Sekunde bestimmt haben« (G.-B. Nr. 135).

2) Das Signal auf dem Hohehagen wurde am Ende des Jahres in Brand gesteckt, wozu GAUSS bemerkt: »Glücklich, dass die Heliotrope es entbehrlich machen« (G.-G. 15. 11. 21. GAEDE S. 82. G.-B. Nr. 131).

in dieser Gegend besonders günstigen Jahreszeit so schlecht, dass vom Hohehagen nur selten Licht kam und der Inselsberg innerhalb 14 Tagen nur einmal eine Viertelstunde Sonnenschein hatte. Da für Oktober kein besseres Wetter erwartet werden konnte, kehrte GAUSS am 3. Oktober auch wegen des erwarteten Eintreffens des Königs nach Göttingen zurück[1]). Die Feldarbeiten hatten mit geringen Unterbrechungen 5 ½ Monate in Anspruch genommen und waren bei der verhältnismässig kühlen Witterung des Sommers der Gesundheit von GAUSS förderlich gewesen.

Am Schlusse des Jahres (22. November bis 14. Dezember) fuhr GAUSS nach Altona, um den RAMSDENschen Zenitsektor abzuholen, wobei ihn RUMPF begleitete, um die Verpackung zu besorgen.

34. (1822) **Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Dass GAUSS sich bei aller Unruhe und Vielseitigkeit seiner Tätigkeit noch mit theoretischen Arbeiten beschäftigt hatte, wobei ihm als einzige Erleichterung eine zufällige Unterbrechung der Vorlesungen im Anfang des Jahres (G.-B. Nr. 127) zu statten kam, ersieht man aus der Veröffentlichung des Aufsatzes: *Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der praktischen Geometrie* (Werke IX, S. 231). Er ist, worauf die Wahl des Beispiels[2]) schliessen lässt, zunächst für SCHUMACHER bestimmt gewesen und vielleicht durch eine Anfrage von ihm veranlasst werden. Es macht den Eindruck, dass ihm GAUSS in dem Begleitschreiben bei der Übersendung seine Herablassung zeigen wollte, wenn er in etwas schroffer Form bemerkt, dass er bei dem Niederschreiben so trivialer Sachen dasselbe unangenehme Gefühl habe, das ihn bei dem Kollieglesen oft begleitet habe[3]).

35. **Lüneburger Heide.** Die Gradmessung war an ihre schwierigste Stelle gelangt, wo sie sich der Lüneburger Heide näherte. Hier fehlt es fast ganz an Höhen, und Waldungen verhinderten weite Sichten. Wie im vor-

1) Nach dem ursprünglichen Programm wollte der König die Bibliothek, die Reitbahn und die Sternwarte besichtigen (Brief von MÜLLER 19. 8. 1821).

2) Das die Messungen von CAROC benützte (Werke IX, S. 233).

3) Im Juni 1821 waren die Astronomischen Nachrichten von SCHUMACHER begründet worden. GAUSS zur Mitarbeit aufgefordert antwortet: »Wenn Ihre astronomische Wochenschrift zu Stande kommt, werde ich sie gern nach Vermögen unterstützen. Aber freilich können Sie nie von mir Beiträge erwarten, die viel Raum füllen« (G.-Sch. Nr. 119). Dies war der äussere Anlass zu der Abhandlung von GAUSS.

hergehenden Jahre brach GAUSS wieder frühzeitig (28. April) zur Erkundung auf. In Hannover entdeckte er zwar, dass dort Celle sichtbar war, wo MÜLLER im vorigen Jahre von Wohlenberg aus einen falschen Turm eingeschnitten hatte. Aber die Türme in Celle waren völlig unbrauchbar; hingegen fand er $1\frac{1}{8}$ Stunden nordöstlich von Celle auf einem Plateau bei Garssen, wo ein französischer Signalturm gestanden hatte, einen brauchbaren Punkt, der sich nicht nur mit dem Deister, sondern auch mit Lichtenberg verknüpfen liess. Inzwischen hatte Hauptmann MÜLLER den Brelingerberg von neuem besucht und sich davon überzeugt, dass Lichtenberg von ihm nicht zu erreichen war, so dass er ganz aufgegeben werden musste. Auf dem Falkenberg, wohin sich GAUSS dann wandte, war nicht bloss Deister und Garssen zu sehen, sondern auch der Lichtenberg als schmaler Saum über dem zwischenliegenden Gelände erkennbar. Damit wurde nun auch der 1821 von Lichtenberg aus eingestellte Wohlenberg überflüssig, den GAUSS als EPAILLYschen Punkt ausgewählt hatte, wie überhaupt die Verfolgung von EPAILLYS Spuren seine Entschlüsse oft ungünstig beeinflusste[1]).

Soweit war alles vortrefflich gegangen, aber die weitere Fortsetzung nach Norden von Garssen und Falkenberg aus machte »unsägliche Schwierigkeiten«. GAUSS liess MÜLLER die Gegend westlich von Falkenberg und nördlich davon rekognoszieren, und ging selbst zunächst nach Lüneburg. Während die Erkundung von MÜLLER gar kein Resultat hatte, ergab auch seine eigene, dass es, wenn überhaupt möglich, ungeheuer schwer sein würde, von Lüneburg nach Süden durchzudringen, weil der Süsing[2]) eine undurchdringliche Mauer entgegenstellte. Dagegen hatte er die Genugtuung, die Möglichkeit zweier Dreiecke recht im Herzen der Heide festzustellen: Wulfsode-Hauselberg-Wilsede und Wulfsode-Hauselberg-Falkenberg. Aber er sah weder eine Möglichkeit einer Verbindung mit seinen südlichen Dreiecken, noch fand er eine solche Verknüpfung mit den nördlichen Punkten, bei der er sich beruhigen

1) EPAILLYsche Punkte waren Wohlenberg, Braunschweig, Hannover, Hils, Hohehagen, Deister, Hauselberg, Garssen, Lüneburg, Wilsede, Falkenberg.

2) Nach ANDREES Handatlas und der topographischen Übersichtskarte des deutschen Reiches (1 : 200 000) Blatt 58 (Lüneburg) 1904 muss es Süsing heissen, die verschiedentlich vorkommende Bezeichnung Lüsing beruht vielleicht auf unrichtiger Lesung.

mochte. Es war gerade diejenige Stelle, an der EPAILLY es aufgegeben hatte, ein zusammenhängendes Dreiecksnetz durch die Heide zu legen[1]).

Am 1. Juni kehrte GAUSS durch die Anstrengungen der Reise und die Hitze in seiner Gesundheit angegriffen nach Göttingen zurück, um das Weitere auf eine Zeit zu verschieben, wenn er ein grösseres Personal und vollständigere Instrumente besässe. Er verwandte 14 Tage dazu, um alles für die wirkliche Messung vorzubereiten, zu der er seinen sechzehnjährigen Sohn JOSEPH als dritten Gehilfen heranzuziehen beschloss[2]).

Am 17. Juni traf GAUSS bereits in Lichtenberg ein, um am folgenden Tage mit den Messungen zu beginnen, die am 8. Juli beendet wurden. Die Richtung nach Falkenberg war sehr durch den eine Woche anhaltenden Moorbrand gestört worden[3]).

Vom 6. bis 16. Juli wurde die Station Deister bezogen. „Hier wurde der älteste Heliotrop benutzt, dessen Rektifikation vermutlich durch unsanften Transport gelitten hatte, um dem Heliotropisten ein Zeichen zu geben, wenn die Richtung gut war. Es wurden in diesem Sommer immer drei Heliotrope gebraucht und noch ein heliotropartig montierter Spiegel zum Telegraphieren. Von Garssen aus leuchtete JOSEPH, die andern Stationen machte HARTMANN sichtbar. Während dieser Zeit hatte MÜLLER die Richtung von Falkenberg nach Wilsede vermittels eines grossen Durchhaus[4]) geöffnet, dessen herrliches Gelingen GAUSS um so mehr zur Satisfaktion gereichte, als er die Richtung auf künstliche Art aus seinen Frühjahrsmessungen hatte ableiten müssen. Einen

1) EPAILLY, bei dem Hauselberg und Garssen unverbunden blieben, sagt: »j'eus le désagrément de perdre quinze jours pour reconnaitre l'impossibilité de conduire dans cette partie un canevas trigonométrique.« »N'ayant pu pénétrer d'Hanovre vers Ulsen, je sentis que ma seule ressource était de descendre le Weser pour remonter l'Elbe.«

2) Werke IX, S. 411.

3) Im Arbeitsbericht für 1824 klagt GAUSS über die habituell dunstige Beschaffenheit der Atmosphäre, eine Folge des allgemein verbreiteten Moorbrennens. In dem Briefe an GERLING vom 7. 11. 1822, dem ein grosser Teil des obigen Berichtes über die Messungen des Jahres 1822 entnommen ist, erwähnt GAUSS noch: »Mein grosser Spiegel, 1 Quadratfuss, war sogar durch den dichten Moorbrandsqualm, der mehrere Quadratmeilen bedeckte, von Lichtenberg bis Falkenberg fast 12 Meilen durchgedrungen, welcher Qualm freilich für die winzigen Heliotropspiegel zu dicht gewesen war«.

4) »Wenn ich alle grösseren und kleineren Durchhaue aus den Jahren 1821—1824 zusammen zähle, von solchen, wo vielleicht ein Dutzend Bäume gefällt sind, bis zu den grössten, so mögen etwa 16 oder 17 Durchhaue vorgekommen sein. Der allergrösste, nach der Ausdehnung, war im Becklinger Holz unweit der Strasse von Bergen nach Soltau« (G.-SCH. Nr. 233).

auf dem Wilsederberg gesetzten Signalbaum sah er mitten im Spalt, als er nachher selbst nach Falkenberg kam. Am 18. Juli kam er nach Garssen, wo die Beobachtungen durch das weisse Zelt in Scharnhorst[1]), das ihm seine Südseite zukehrte und dadurch das Heliotroplicht sehr schwächte, einen ganzen Tag lang unbrauchbar gemacht wurden. Ehe er Garssen verliess, musste die Verbindung mit Hauselberg ernstlich bedacht werden. Die Richtung ging durch dichtes Holz, zum Teil Buchen und Eichen, und ein Durchhau hätte gewiss mehrere tausend Taler gekostet und dazu war es nicht einmal wahrscheinlich, dass er zum Ziel führen würde, weil das Land dazwischen vermutlich zu hoch oder vielmehr nicht tief genug gewesen wäre. Denn der Hauselberg ist kein eigentlicher Berg, sondern nur ein etwas hohes Plateau und wenn auch alles, was zwischen diesem Punkt und Garssen ist, weniger hoch liegt als diese beiden Punkte, so ist doch in diesen flachen Gegenden die Krümmung der Erde schon ein Hindernis der Verbindung. Es war daher unerlässlich, noch einen Zwischenpunkt zu finden. Nach langem Suchen und als schon fast alle Hoffnung aufgegeben war, fand sich der Punkt bei Scharnhorst, der etwa 40 Fuss höher liegt als Garssen, und von wo der Falkenberg unmittelbar zu sehen war, während Garssen vermittels ein Paar Durchhaue sichtbar gemacht werden konnte; auch war nun wegen der grösseren Nähe und Höhe mehr Hoffnung vorhanden, dass die Richtung Hauselberg-Scharnhorst vermittels eines Durchhaues geöffnet werden könnte (durch das Haassel, das wie eine Mauer auf der Nordseite jede Aussicht abschneidet). Nachdem Gauss nun noch in Garssen die Richtung nach Scharnhorst festgelegt hatte, ging er am 4. August nach Falkenberg ab, und wohnte in Bergen. Die Menge der hier zu machenden Messungen, das im Ganzen nicht sehr günstige Wetter und die Notwendigkeit, ehe er Falkenberg verliess, noch die weitere Fortsetzung nach Nordosten zu sichern, machte, dass er hier fünf Wochen zubringen musste[2]). Bei der Ungewissheit, ob Hauselberg-Scharnhorst sich durch einen

1) G.-G. 5. 9. 1823. Werke IX, S. 389.

2) Der Aufenthalt zog sich auch länger hin, weil Gauss alle Hauptwinkel gern wenigstens an zwei verschiedenen Tagen mass. Die Stimmung, in der er sich befand, spiegelt sich in dem Briefe vom 23. August 1822 an Schumacher wieder, an den er schreibt: »Noch ist gar kein Definitivplan zu machen, wovon gewiss wäre, dass die dabei vorkommenden Schwierigkeiten sich überwinden lassen, wenigstens kein solcher, zu welchem ich mich jetzt schon entschliessen könnte. Möchte doch das ganze Geschäft erst zu Ende sein!« (G.-Sch. Nr. 151).

Durchhau öffnen lassen werde, brauchte er die Vorsicht, auch gleich noch eine Richtung Falkenberg-Breithorn festzulegen, nämlich, nach einem inzwischen aufgefundenen Punkte, von dem Wilsede (aber nicht Wulfsode, was aber nach der Öffnung von Falkenberg-Wilsede nicht sehr wesentlich war) sichtbar war; die Hoffnung einer Verbindung mit Scharnhorst vermittels Durchhau erschien grösser als bei Hauselberg.

Am 7. September verliess GAUSS Falkenberg und wandte sich nach Hauselberg[1]). Leider fand er hier gleich in der ersten Minute, dass das Terrain, auf dem der Haasselwald steht, nicht genug Depression hatte[2]) und die Zuziehung von Breithorn unerlässlich wurde. Doch wollte er die auf Hauselberg bezüglichen Messungen nicht verlieren und entschloss sich daher, beide Punkte beizubehalten[3]). Allein um dies zu können, musste auch die durch einen Wald versperrte Linie Hauselberg-Breithorn geöffnet werden. Unter günstigem Wetter und angestrengtester Arbeit wurden indessen in 6 Tagen nicht bloss alle Messungen auf dem Hauselberg absolviert[4]), sondern es wurde

1) Auf dem Hauselberge konnte GAUSS überhaupt keine Briefe bekommen. Das Quartier schildert er von Barlhof, seinem Wohnort bei Wilsede aus mit Humor: »Ganz so schlecht, wie ich gefürchtet hatte, ist der Aufenthalt hier doch nicht, ohne Vergleich besser, wie in Ober Ohe, von wo ich den Hauselberg und Breithorn bestritt. Dort lebte eine Familie, deren Haupt »PETER HINRICH VON DER OHE ZUR OHE« sich schreibt (falls er schreiben kann), dessen Eigentum vielleicht 1 Quadratmeile gross ist, dessen Kinder aber die Schweine hüten. Manche Bequemlichkeiten kennt man dort garnicht, z. B. einen Spiegel, einen Abort und dergleichen. Gott sei Dank, dass ich den 10tägigen Aufenthalt daselbst überstanden habe, und bei der kühlen meinem Körper zusagenden Witterung recht gut überstanden habe« (G.-SCH. Nr. 157).

2) GAUSS bemerkt dazu: »Sie sehen, dass ich immer Calcul und Messung gleichen Schritt halten lasse, und mir die Mittel verschafft hatte, Richtung und Depression von Scharnhorst auf Hauselberg genau vorauszuwissen. Ohne diese Verfahrungsart, die mich selten vor Mitternacht zur Ruhe kommen liess, wäre ich bestimmt nicht durchgekommen« (G.-G. 7. 11. 1822).

3) GAUSS tröstete sich durch die Erkenntnis: »Dies gibt so vielfältige unschätzbare Kontrollen und am Ende muss jeder gemessene Winkel pro rata beitragen« (G.-G. 7. 11. 1822). »Es wäre zu wünschen, dass man bei jeder Messung solche Prüfungen hätte. Es gibt Messungen, wobei die Summen der drei Winkel um 2″ bis 3″ gewiss unrichtig sind. In der Tat ist die Prüfung vermittelst der Summe der Winkel à la portée von jedermann; die durch Diagonalen ist es weniger, so leicht sie auch für einen Mathematiker ist, und man kann sich der Vermutung nicht erwehren, dass die erstere Prüfung zuweilen dazu gedient haben mag, wenn auch nicht die Beobachtungen zu verfälschen, doch etwas zu wählen (man bemerkt eine Tendenz dazu selbst bei DELAMBRE)« (G.-B. Nr. 135).

4) Auf dem Hauselberge mass GAUSS nur Winkel zwischen Falkenberg, Wilsede (woher HARTMANN ihm Heliotroplicht schickte) und Wulfsode und das, was zur Beurteilung der Möglichkeit des Durchhaus nach Eschede (Station Scharnhorst) erforderlich war.

auch während dieser Zeit ein steinernes Postament auf Breithorn gesetzt[1]) und zugleich der Durchhau von Breithorn nach Scharnhorst durch den Haassel grösstenteils vollendet[2]). Er begab sich daher gleich nach Breithorn, stellte seine Instrumente auf und fing unmittelbar, nachdem der letzte Baum gefallen war, die Beobachtung an. »Dieser Durchhau ist wirklich eine Art von mathematischem Triumph geworden; als der letzte Baum fiel, hatte ich das Scharnhorstpostament zwischen den beiden Vertikalfäden« schrieb GAUSS an GERLING. Der eine und grössere Teil der Schwierigkeit war also glücklich überwunden[3]). Für die weitere Fortsetzung im Norden war schon früher der Timpenberg aufgefunden, der sich mit Wulfsode, Wilsede und Hamburg verbinden liess, so dass hierdurch die Verbindung mit Hamburg schon vollständig möglich war, doch hätte GAUSS gern wegen des in Hamburg etwas spitzen Winkels noch die Verbindung Timpenberg-Lüneburg (die durch das Ende des Süsing geht) mitgenommen. Nun konnte zwar vom 18.—21. September in Wulfsode beobachtet werden, aber leider war Lüneburg nicht zu sehen. Deshalb ging GAUSS am 22. September nach dem Zwischenpunkte Timpenberg, wo er sich überzeugte, dass ein schon begonnener Durchhau nach Lüneburg nicht zum Ziele führte und daher aufgegeben werden musste. Es musste also für dieses Jahr von der Einschaltung eines weiteren Zwischenpunktes abgesehen werden; am 23. und 24. September wurden noch die Messungen in Wulfsode vollendet. Vom 26. September bis 7. Oktober wurden die obgleich sehr zahlreichen Messungen in Wilsede schnell absolviert, wo noch zwei SCHUMACHERsche Punkte Syk und Hohenhorn gesehen und festgelegt werden konnten. Nach Hohenhorn konnte auch von da aus Licht gesendet werden. In Wilsede hat GAUSS an einem Tage bei sehr schöner Luft 150 Winkel ohne Heliotroplicht gemessen, was ihm in gleichem Umfange nur noch zweimal während seiner ganzen Beobachtungstätigkeit gelungen ist. Als neunte und letzte Station des Jahres 1822 folgte

1) Bei der Seltenheit der Steine in der Heide mussten dazu Grabsteine einige Meilen weit hergeholt werden. Auf allen Dreieckspunkten diente ein etwa $3^1/_2$—4 Fuss hohes aufgemauertes steinernes Postament zur Aufstellung des Heliotropen und des Theodoliten. Auf der Station Garssen musste wegen der zu kleinen Dimensionen des Postaments der Theodolit etwas verschieden vom Heliotropplatz aufgestellt werden.

2) Die beiden Durchhaue von Breithorn nach Hauselberg und von Breithorn nach Scharnhorst hatte Hauptmann MÜLLER mit so viel Präzision durchgeführt, dass, sowie der letzte Baum fiel, die schon aufgemauerten Postamente in der Mitte der schmalen Spalte erschienen (G.-SCH. Nr. 155).

3) Vergl. G.-G. 7. 11. 1822.

noch Scharnhorst, wo er die Messung des Winkels zwischen Deister und Lichtenberg, da die Tage schon kürzer waren und Vormittags gewöhnlich garnichts scharf zu messen war, auf das nächste Jahr verschob und am 13. Oktober nach dreitägigem Aufenthalt die Arbeiten dieses Jahres abbrach[1]).

36. Preisaufgabe, Theoria combinationis, Pars II. Nach den Anstrengungen und der Unruhe der beinahe halbjährigen Abwesenheit von Göttingen fand GAUSS einen Haufen sehr widerwärtiger Geschäfte zu Hause vor, die seine Zeit zerstückelten und eine freie Geistesstimmung verhinderten.

Um so bewundernswerter ist es, dass er die Preisaufgabe, mit der er sich im vorhergehenden Winter erst ernstlich zu befassen angefangen hatte, bereits im Dezember an SCHUMACHER absenden konnte. Allerdings beschränkte er die astronomischen Beobachtungen in diesem Winter, auch um seine angegriffene Gesundheit nicht durch die Kälte zu gefährden.

Infolge eines eigentümlichen Missverständnisses einer Notiz in der Leipziger Literaturzeitung, wonach von zwei der Kopenhagener Sozietät eingereichten Arbeiten keine des Preises würdig befunden wäre, erbat GAUSS am Beginn des Jahres 1823 die umgehende Rücksendung seiner Abhandlung über die Umformung der Flächen, wie er seine Bewerbungsschrift kurz benannte, zumal er keine Abschrift (die SCHUMACHER aber sofort durch NEHUS hatte anfertigen lassen) genommen hätte. SCHUMACHER konnte ihn aufklären, dass es sich um eine ganz andre Preisaufgabe gehandelt hatte.

GAUSS nahm noch andre theoretische Untersuchungen wieder mit Erfolg auf und konnte im Februar den zweiten Teil der *Theoria combinationis* nach

1) Zur Messung dieses Winkels ist es auch später nicht mehr gekommen. Über die Arbeiten dieses Jahres bemerkt GAUSS noch zu GERLING in dem Briefe vom 7. 11. 1822, dem die obige Darstellung zum grossen Teile und vielfach wörtlich entnommen ist: »Etwas einfacher hätte sich mein Netz einrichten lassen, wenn ich, was ich jetzt weiss, schon im vorigen Frühjahr gewusst hätte. Es liesse sich nämlich Scharnhorst vermittelst ein paar leichter Durchhaue unmittelbar mit Deister und Lichtenberg verbinden. Auf diese Art hätte also Garssen und Hauselberg ganz wegbleiben können. Aber was jetzt möglich wäre, war damals so gut wie unmöglich. Denn wie hätten diese ganz unscheinbaren Plätze bei Scharnhorst und Breithorn aufgefunden, ihre Brauchbarkeit erkannt und ihre genaue Lage behuf der Durchhaue ausgemittelt werden können, wenn nicht die erzählten Messungen schon vorausgegangen wären? Erlaubt es Zeit und Umstände, so möchte ich sehr gern die Winkel des Dreiecks Lichtenberg—Deister—Scharnhorst noch messen« (siehe vorher). »Die ganze Linie Scharnhorst-Breithorn (11218 Meter) hat keine unübersteigliche Hindernissen um als Basis gemessen zu werden. SCHUMACHERS Basis (in anliegender Zeichnung die Linie von Hamburg-Syk kreuzend) hält nicht viel über die halbe Länge«.

zweijähriger Zwischenzeit dem ersten folgen lassen. Zwei darin enthaltene Aufgaben sind vielleicht mit durch die praktischen geodätischen Arbeiten veranlasst worden. Die eine betrifft die Hinzuziehung einer neuen Beobachtung (Art. 35), die andre eine nachträgliche Gewichtsänderung einer Beobachtung (Art. 36) und zeigt, wie ohne Wiederholung der ganzen Rechnung das Ergebnis verbessert wird.

37. (1823) **Pläne für Erweiterung der Gradmessung.** Für die Feldarbeiten[1]) standen in diesem Jahr zwei notwendige Ergänzungen im Vordergrunde: der Anschluss an die dänische Gradmessung und die Verknüpfung mit den hessischen Dreiecken. Dass die Messungen im vergangnen Jahre rascher vorgerückt und besser geworden waren, glaubte GAUSS der Hilfe seines Sohnes neben der seiner älteren Mitarbeiter zu verdanken[2]). Mit einem vierten Gehilfen und einem weiteren Heliotrop wäre er seiner Meinung nach noch weiter gekommen, aber man hatte ihm wiederholt die möglichste Kostenersparnis ans Herz gelegt. Immerhin dachte er daran, einen Neffen von OLBERS, ADOLF KULENKAMP, der bei BESSEL studiert hatte, für den Fall anzunehmen, dass sich seine Messungen weiter ausdehnen sollten. In der Tat trug er sich mit dem Plane, seine Triangulation nach Westen zu erweitern, um an die KRAYENHOFFschen Dreiecke anzuschliessen und auf diese Weise eine Verbindung mit dem englisch-franzö-

1) Am 30. März schrieb GAUSS an OLBERS (G.-O. Nr. 469): »Gar wenig hat gefehlt, dass es mit meinen Gradmessungsarbeiten und allem Ähnlichen auf einmal ganz vorbei gewesen wäre, durch einen Sturz, den ich vor acht Tagen von einem nicht zugerittenen Pferde auf das Pflaster tat. Diesmal bin ich aber buchstäblich noch mit einem blauen Auge davon gekommen, d. i. mit einigen Fleischwunden am Arme, an der Nase und einer Quetschung hart unter dem Auge, welches ich allein zum Observieren brauchen kann. Jetzt sind meine Wunden schon ganz wieder geheilt und blos noch einige Regenbogenfarben unter dem Auge übrig. Das Auge selbst ist garnicht affiziert gewesen«.

2) »Die wirklichen Messungsarbeiten haben in diesem Jahre vier Monate gedauert, nämlich bis Mitte Oktobers, und während dieser Zeit sind neun Hauptdreieckspunkte absolviert: im Jahre 1821 konnten in einer nicht viel kürzeren Zeit nur fünf vorgenommen werden; dies so viel raschere Fortschreiten ist hauptsächlich der Vermehrung der Zahl der Gehilfen und der Heliotrope zuzuschreiben; allein noch wichtiger ist der daraus erhaltene Gewinn in der Vergrösserung der Genauigkeit der Messungen selbst.« Werke IX, S. 411. »Mein ältester Sohn hat in diesem wie in den beiden vorhergehenden Jahren an den Geschäften teilgenommen und an praktischen Arbeiten so viel Neigung gewonnen, dass er seinen früheren Entschluss, die Rechte zu studieren, aufgegeben hat und als Kadet in unser Artilleriekorps eingetreten ist. Er hat viel Geschick zu praktischen Arbeiten, aber nicht so feurige Liebe zur abstrakten Spekulation, dass ich es hätte gern sehen können, wenn er sich der Mathematik ex professo gewidmet hätte. Jetzt, denke ich, ist er am rechten Platz«. G.-B. Nr. 146.

sischen Meridianbogen herbeizuführen. Er hielt diese Messungen in Verbindung mit Azimutalbestimmungen in Bentheim oder einem andern westlichen Orte für ebenso wichtig hinsichtlich des obersten Zweckes, nämlich in Rücksicht auf die Gestalt der Erde, als die Breitengradmessung. Nicht geringer wäre der Nutzen für die Geographie des Königreichs Hannover anzuschlagen, wenn die Messungen einen soviel grösseren Teil desselben umfassten. Er legte aber Wert darauf, zu dieser Erweiterung seiner Gradmessung aufgefordert zu werden und bat OLBERS, durch seine Beziehungen zu den Bremer Behörden einen solchen Vorschlag in Anregung zu bringen. Eine Beschleunigung dieser Angelegenheit war ihm um so mehr erwünscht, als er fürchtete, dass seine Dreieckspunkte, bei denen fast kein Steinpostament unbeschädigt geblieben war, verloren gehen könnten[1]).

OLBERS ging darauf ein und erreichte, dass der Bremer Senat durch den Bürgermeister SCHMIDT bei der Hannoverschen Regierung diese Vermessung beantragte, da sie insbesondere auch für die Stadt Bremen von praktischer Bedeutung war. Bremen erklärte sich bereit, einen Gehilfen zu stellen und da KULENKAMPS Bewerbung zurückgezogen wurde, nahm GAUSS den ebenfalls von OLBERS genannten Studiosus KLÜVER in Aussicht, der schon in Göttingen bei GAUSS gewesen war und vom Bremer Senat begünstigt wurde. Zur Erprobung seiner Brauchbarkeit schlug GAUSS vor, ihm die Erkundung des EPAILLYschen Punktes Haverloh bei Verden zu übertragen. Es handelte sich darum zu entscheiden, ob das Dreieck Haverloh-Wilsede-Falkenberg möglich sei. Dass Bremen, Asendorf und Wilstädt dort sichtbar seien, nahm GAUSS ohne weiteres an. Diese Rekognoszierung, an der sich noch der Wasserbauinspektor BLOHM aus Bremen mit seinem Bruder beteiligte, blieb zunächst ungenügend. Da wegen SCHUMACHERS erst Ende Mai bevorstehender Rückkehr von Kopenhagen nach Altona die Anschlussmessungen bei Hamburg aufgeschoben werden mussten, so entschloss sich GAUSS, selbst am 15. Mai nach Bremen zu fahren. Auf dem Wege dahin erfuhr er in Hannover, dass das Ministerium seinen Plänen nichts

1) Eine Festlegung oder Sicherung seiner Dreieckspunkte hat GAUSS nirgends vorgesehen. Auch auf den Postamenten waren die eigentlichen Dreieckspunkte nicht fixiert. Die Zielpunkte waren zuweilen durch die Kreise, die GAUSS durch die drei Fussspitzen des Heliotrops beschrieb, als Zentrum des Kreises erkennbar. Vergl. G.-SCH. Nr. 252.

in den Weg legte[1]). Er wollte von einem Turme in Hannover eine grosse Menge von Punkten festlegen, die von Deister aus eingeschnitten waren, was er aber erst später ausführte. Er ging dabei von der Ansicht aus, dass es im allgemeinen viel kürzer, wohlfeiler und schärfer sei, die Türme, die im Innern eines Dreiecks ersten Ranges liegen, durch Schnitte von den Hauptpunkten mit einem »superieuren« Instrument zu bestimmen, als durch ein System von sogenannten Dreiecken zweiten und dritten Ranges mit einem untergeordneten Werkzeuge (G.-O. Nr. 474). Am 19. Mai brach er von dort nach Bremen und Rothenburg[2]) auf, wo er bis zum 28. blieb. Er durchmusterte besonders die Horizonte der Bremer Türme, während MÜLLER hieran eine längere Erkundungsreise zwischen Bremen und Wilsede anschloss.

38. Timpenberg, Niendorf, Lüneburg, Hamburg, Altona, Hannover, Göttingen, Brocken, Hohehagen. Am 30. Mai 1823 begann GAUSS die eigentlichen Arbeiten dieses Sommers und zwar auf dem Timpenberge. In Niendorf, der folgenden Station, die von seinem Aufenthaltsorte Bäzendorf nur durch eine beschwerliche Fusswanderung zu erreichen war, musste die Verbindung mit Timpenberg erst durch einen Durchhau geschaffen werden. Es waren dort 7 Hauptdreieckspunkte zu sehen, die entfernteren darunter, wie Hamburg und Syk aber schwer erkennbar. Am 11. Juni konnte er jedoch nach Lüneburg abgehen, wohin CAROC von Lauenburg aus Heliotroplicht sandte. Es wurde Wilsede, Hamburg, Hohenhorn[3]), Niendorf eingestellt. Bei Gelegenheit dieser Beobachtungen wird erwähnt, dass bei den Heliotropen in den späten Nachmittagsstunden ein Hülfsspiegel verwendet wurde, wie er auch heutzutage benutzt wird. Am 24. Juni wurden die Beobachtungen in Lüneburg abgeschlossen und GAUSS konnte nun mit SCHUMACHER in Altona zusammentreffen. Der Michaelisturm in Hamburg[4]) erwies sich als eine sehr ungeeignete Station

---

1) »Aus den Ausserungen des Geh. Kab.-Rat HOPPENSTEDT und des Herrn Ministers v. ARNSWALDT, die ich heute gesprochen habe, geht hervor, dass die Ausdehnung meiner Messungen nach Westen wohl meinem Gutbefinden überlassen bleibt. Obwohl mir lieber sein würde, ein wirkliches Interesse für die Sache zu finden als bloss, dass man mich machen lässt, so werde ich mich doch einem so nützlichen Unternehmen nicht entziehen«. G.-O. Nr. 476.

2) Beim Butlerberge.

3) Der Turm in Hohenhorn war nach 1818 umgebaut; alle darauf bezüglichen Messungen mussten deshalb wiederholt werden, da keine feste Marke am Turme bestimmt war. GARDE S. 44, Anm. 108.

4) »Der in Nindorf, Timpenberg und Lüneburg fast immer bei dem heerrauchigen Zustand der Luft

wegen der unsichern und unbequemen Aufstellung, sodass Gauss noch auf einen Tag (27. Juni) nach Blankenese ging und hier 27 Punkte einstellte.

Am 21. Juli rief ihn eine gefährliche Erkrankung seiner Frau nach Göttingen zurück, unterwegs blieb er am 19. Juli in Hannover und machte an diesem einen Tage über 100 Einstellungen von Kirchtürmen und andern Punkten im Hildesheimschen. In der letzten Zeit hatte er verschiedentlich mit Olbers wegen der Rekognoszierungen im Westen korrespondiert, und mit Schumacher verhandelt, dem er sehr dringend riet, von Hohenhorn aus, das Schumacher so wie so noch einmal beziehen musste[1]), Niendorf und Wilsede mit Heliotropen besetzen zu lassen[2]). In Göttingen machte Gauss vom 22. August bis 3. September Messungen, vermutlich zur Bestimmung des Azimutes der Seite Sternwarte (Theodolitplatz 1823) — Nördliches Meridianzeichen (Werke IX, S. 318. G.-G. 26. 12. 1823).

39. Endpunkt der Gradmessung. Schumacher hatte mit seinem Könige eine eingehende Unterredung gehabt, bei der der König viel von Lokalanziehungen sprach und Bedenken gegen Skagen als Endpunkt der Gradmessung äusserte. Ihm schien vielmehr Helgoland geeigneter und eine vortreffliche astronomische Station zu sein. Hierauf nimmt Gauss Bezug, wenn er an Schumacher schreibt: »Wenn gleich Helgoland ein an sich guter Punkt für astronomische Beobachtungen sein würde, so sehe ich doch nicht recht ein, dass ein erheblicher Nutzen für die Gestalt der Erde davon gezogen werden könnte, wenigstens nicht, dass er Skagen entbehrlich macht. Denn die Polhöhe wird nur etwa 54 Grad 12 Minuten sein, also die Amplitude zwischen Göttingen und Helgo-

---

sehr blass aussehende Hamburger Turm hat mich sehr geplagt, ebenso wie der Lüneburger in Hamburg, und im allgemeinen sind die Messungen in jenen Gegenden nicht ganz so scharf wie die früheren, wozu übrigens auch das ewige Schwanken der Türme mit beigetragen hat. Der Michaelisturm in Hamburg ist, so lange ich dagewesen bin, nie ruhig gewesen; die horizontalen pendelartigen Schwankungen gehen oft über $^1/_2$ Minute. Dieser Turm ist von allen meinen Dreieckspunkten als Standpunkt und (den Brocken abgerechnet) auch als Zielpunkt der allerschlechteste gewesen«. G.-G. 27. 7. 1823. Werke IX, S. 382.

1) Seite 84, Fussnote 3.

2) »Auf den Steinen [in Wilsede und Niendorf] werden die eigentlichen Dreieckspunkte noch recht gut zu erkennen sein und zugleich die Kreise, in welche die Heliotropspitzen zu stehen kommen. Sollte dies aber nicht der Fall sein, so ist in Wilsede das Zentrum des Steinquadrats als Dreieckspunkt anzunehmen; in Niendorf hingegen ist der Dreieckspunkt 10,5 mm östlich, 6,6 mm südlich vom Zentrum zu setzen, wenn man die Seitenflächen von N nach S oder von O nach W gehend betrachtet (was eigentlich nicht genau ist, da die Orientierung 20 Grad abweicht)«. G.-Sch. Nr. 182.

land $2\frac{1}{2}$ Grad, viel zu gering um etwas über die Gestalt der Erde entscheiden zu können, und noch weniger würde in dieser Beziehung die Vergleichung mit Lauenburg, Altona und Lysabbel zu etwas führen, nicht zu gedenken, dass er gar zu weit von den Meridianen dieser Örter abliegt; ebenso wenig aber würde er eine brauchbare Parallelgradmessung geben, weil in dieser Rücksicht der Längenunterschied wieder zu klein ist. Dass aber astronomische Beobachtungen an diesem Platze, nachdem er an die Dreiecke[1]) geknüpft wäre, als accessorium zu den übrigen, und um über vermutete Irregularitäten ein Erfahrungsdatum mehr zu bekommen, allerdings seinen Wert hätte, gebe ich gerne zu.«

Am 13. September begab sich GAUSS nochmals nach dem Brocken[2]), um die mangelhaften Messungen von 1821 zu wiederholen, obgleich der Widerspruch des Dreiecks Hohehagen-Hils-Brocken von 3″,7 zum grossen Teil auf die Messungen auf dem Hils zurückzuführen war. Zugleich konnten die Anschlussmessungen an die hessische Triangulation erfolgen[3]), wozu sich GERLING nach

---

1) »Was die Verbindung Helgolands mit dem Kontinente betrifft, so glaube ich fast, Ihnen die Untersuchung der Möglichkeit ersparen zu können. Es lässt sich nicht nur mit Wangeroog und Neuwerk verbinden, sondern ist wirklich durch EPAILLY bereits verbunden, obwohl seine Messungen selbst nicht zu erhalten stehen, also so gut wie nicht vorhanden sind. Auch mit St. Peter, auf der Schleswigschen Küste, hat er die Verbindung als möglich bezeichnet, ebenso wie zwischen St. Peter und Neuwerk«. G.-SCH. Nr. 182.

2) »Ihr Ausdruck, wenn ich vom Brocken aus auf Heliotroplicht pointieren wolle und nicht das Häuschen vorzöge etc., scheint auf einiges Missverständnis der Motive, um deren willen ich zum zweiten Male auf den Brocken gehen könnte, hinzudeuten. Die scharfe Bestimmung der Richtung zum Inselsberg ist in der Tat ein Hauptzweck. . . . Dieser eine Grund allein würde mich allein noch nicht wegen des abermaligen Besuches rechtfertigen. Meine Winkelmessungen 1821 nach meinen eigenen Hauptpunkten waren bei dem ambulierenden Heliotrop und ungünstigen Wetter zu dürftig und des Ganzen nicht völlig würdig ausgefallen, daher ich diese durch gleichzeitige Besetzung mit Heliotropen zu wiederholen, sowie nachher auch noch einmal zum Hohehagen und Hils zurückzukehren wünschte«. G.-G. 11. 8. 1823. Werke IX, S. 382.

3) GERLING an GAUSS, 4. August 1823. »Durch die Punkte Inselsberg, Meissner, Herkules wäre dann die Verbindung der hessischen Dreiecke mit Ihrer Gradmessung und der letzteren mit der bayerischen Seite Taufstein-Oberreisig bewirkt, wozu noch der Feldberg kommt, den, wenn ich nicht sehr irre, die Bayern auch in ihrem System haben«.

»Inzwischen war in dem benachbarten Kurfürstentum Hessen eine trigonometrische Landesvermessung unter der Leitung des Herrn Professor GERLING angefangen, bei welcher die Hauptdreiecke mit ausgezeichnet guten Hilfsmitteln und mit aller erreichbaren Genauigkeit gemessen werden sollten. Eine Verbindung derselben mit den hannoverschen Dreiecken war daher um so wichtiger, weil dadurch diese mit den bayerischen Dreiecken in Zusammenhang kommen mussten, und die in verschiedenen Teilen von Europa

dem Inselsberg begab. Das Wetter war aber sehr ungünstig und GAUSS sass gleich zu Anfang 3 Tage im Nebel. Am 27. September verliess er den Brocken und beobachtete nur noch vom 5. bis 16. Oktober auf dem Hohehagen, womit er seine Arbeiten schloss, die ihn in diesem Jahre 2½ Monat von Göttingen fern gehalten hatten. Nachher wurde das Wetter wieder günstiger; da er aber HARTMANN bereits verabschiedet hatte, konnte er nicht mehr die Messungen auf dem Hils wiederholen. Um diese Zeit war auch SCHUMACHER erst zur Absolvierung der Station Hohenhorn gekommen, wo er aber Wilsede und Niendorf nicht beobachtete, weil er niemand dorthin zur Bedienung des Heliotrops senden konnte.

Die Absicht, die GAUSS am Beginne der Gradmessung gehabt hatte, Göttingen mit Hamburg durch eine Kette möglichst grosser Dreiecke zu verbinden, hatte sich nicht verwirklichen lassen. Im Gegenteil war das Bild seines Dreiecksnetzes ziemlich verwickelt. Die Kontrolle durch Diagonalen, die zunächst aus Not entstanden waren, brachte allerdings Abwechslung in die Ausgleichung und Befriedigung durch die Sicherheit und die Übereinstimmung der Resultate. Sie war in einer Zeit, wo die Beobachter die Messungen, wenn auch nicht fälschten, so doch im Hinblick auf die Übereinstimmung auswählten, ein nachahmenswertes Vorbild und zeigte eine neue Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Aber hierdurch wurde die Arbeit vermehrt, die GAUSS allein auf sich genommen hatte. Auf den Stationen war er bis Mitternacht am Schreibtisch tätig[1]), und noch im November beschäftigte ihn die Ausgleichung, die er schon einmal infolge der Aufnahme eines fehlerhaften Stationstableaus vergeblich gemacht hatte[2]).

---

ausgeführten Dreiecksmessungen durch ihre Verknüpfung zu einem Ganzen in höherer wissenschaftlicher Beziehung einen vielfach erhöhten Wert erhalten. Jene Verbindung der hannoverschen und kurhessischen Messungen wurde noch im Spätjahr 1823 ausgeführt; letztere sind aber seitdem unvollendet geblieben, obwohl soviel als zu einer notdürftigen Verbindung der hannoverschen mit den bayerischen Dreiecken erforderlich war, nämlich die Messung von wenigstens zwei Winkeln in allen zu der Verbindung nötigen Dreiecken, im Jahre 1823 vollendet ist«. (GAUSS, *Die trigonometrischen Messungen im Königreich Hannover, um* 1830, Werke IX, S. 402.)

1) »Fast jeden Abend mache ich eine neue Auflage des Tableaus [bei der indirekten Stationsausgleichung], wo immer leicht nachzuhelfen ist. Bei der Einförmigkeit des Messungsgeschäfts gibt dies immer eine angenehme Unterhaltung« (Werke IX, S. 280, G.-G. 26. 12. 1823).

2) »Ich habe das System meiner Hauptdreiecke in diesen Tagen sorgfältig ausgeglichen, so dass nicht nur die Summe der Winkel jedes einzelnen Dreiecks, sondern auch die Verhältnisse der Seiten in den ge-

40. Relative Lotabweichung von Altona gegen Göttingen. GAUSS hatte nach Vollendung seiner Ausgleichung die geodätische Breite von Altona von Göttingen übertragen und den erhaltenen Wert SCHUMACHER mitgeteilt. SCHUMACHER stellte nun seine Polhöhenbeobachtungen am REICHENBACHschen Kreise in Altona und zum Vergleiche auch vereinzelte am Stutzschwanz und mit dem von LINDENAU geliehenen Meridiankreise erhaltene zusammen und fand dadurch, dass die Polhöhe 5″,2 kleiner als durch die Übertragung folgte; GAUSS äussert sich hierzu am 20. Dezember 1823 (G.-SCH. Nr. 192): »Die Differenz Ihrer mit dem Meridiankreise gefundenen Polhöhe ist sehr merkwürdig. Bestätigt sie sich[1]) demnächst nach oftmaligem Umlegen, wie ich nicht zweifle, so gibt sie einen für mich entscheidenden Beweis des unregelmässigen Fortschreitens der Richtung der Schwere, ohne dass wir dafür einen Grund in der sichtbaren Oberfläche der Erde nachweisen können. Anders aber, däucht mir dürfen wir dies Phänomen nicht aussprechen, und ich kann Ihrem vorigen Briefe[2]) nicht ganz beistimmen, wenn Sie sagen, dass man die Ursache nirgends anders als in der von mir gebrauchten Abplattung suchen könne. Das Ensemble aller Beobachtungen erfordert diese oder eine wenig davon verschiedene Abplattung gebieterisch, und wenn, wie die Erfahrung zeigt, überall

---

kreuzten Vierecken und Fünfecken genau harmonieren, und zwar ohne alle Willkür, ohne Auswählen, ohne Ausschliessen, alles nach der Strenge der Probabilitätsrechnung. Es sind zusammen 26 Dreiecke, worin alle Winkel von mir selbst beobachtet sind. Die grösste Summe der Fehler ist 2″,2 in einem Dreiecke, wo bei einer Seite das Pointieren sehr schwierig war; die nächst grösste ist 1″,8. Keine der 76 vorkommenden Richtungen ist bei der Ausgleichung um eine ganze Sekunde geändert; die grösste Änderung beträgt 0″,813 bei der oben erwähnten Seite von Nindorf nach Hamburg. Was ich nach meiner neuen Probabilitätstheorie den mittleren Fehler nenne, bei den Richtungen, ist 0″,48« (G.-B. Nr. 140. Werke IX, S. 359). Vergleiche den Brief an BOHNENBERGER, Werke IX, S. 366. »Ich habe nunmehro die mühsame Ausgleichung meiner sämtlichen Messungen von 1821—1823, so weit sie die Hauptdreiecke betrifft, vollendet, so dass nun nicht nur die Summen der Winkel der einzelnen Dreiecke, sondern auch die Verhältnisse der Seiten in den gekreuzten Vierecken und Fünfecken genau zu einander passen, und zwar nach den strengen Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sine ira et studio, und ohne alle Willkürlichkeit« (G.-O. Nr. 484. Werke IX, S. 319).

1) In der *Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona* (1828) ergab sich der Unterschied 5″,52. Werke IX, S. 49.

2) SCHUMACHER hatte geschrieben: »Ich habe Ihnen, mein vielverehrter Freund, ein Resultat mitzuteilen, das Sie interessieren wird. Nemlich, dass meine bisherigen Beobachtungen mit dem REICHENBACHschen Meridiankreise zeigen, dass das von Ihnen angewandte Aplatissement (ich glaube von Walbeck hergeleitet) nicht auf den Bogen zwischen Göttingen und Altona passt«. G.-SCH. Nr. 190.

in mässigen Strecken andere Krümmungen sich zeigen, so beweiset dies nur, dass im Kleinen die Erde gar kein Ellipsoid ist, sondern gleichsam wellenförmig von dem die Erde im Grossen darstellenden Ellipsoid abweicht. Es ist dann, wenn man kleine Stücke durch ein individuelles Ellipsoid darstellen will, einerlei, ob man eine andere Abplattung oder andere Hauptachse annimmt, da dies immer nur eine Art von Interpolationsbehelf ist«. Im Anschluss hieran schlug GAUSS vor, im Spätsommer 1824 mit dem RAMSDENschen Zenitsektor die Breiten der beiden Sternwarten in Altona und Göttingen zu bestimmen. Ausserdem empfahl er, im bevorstehenden Winter gleichzeitige Beobachtungen derselben Sterne an den beiden REICHENBACHschen Kreisen anzustellen.

Diese Reihe, die auf eine Stunde Sternzeit beschränkt und auf eine passende Beobachtungszeit gelegt werden sollte[1]), konnte GAUSS wegen der Krankheit seiner Gattin und der durch zwei Kollegia ohnehin für die übrigen Arbeiten zerstückelten Zeit nicht sogleich zu Stande bringen. Erst im Januar und Februar des folgenden Jahres, 1824, gelang es ihm, den Plan durchzuführen, und eine Bestätigung des bestehenden Unterschiedes der astronomischen und geodätischen Verbindung der beiden Sternwarten zu erhalten. Die Vergleichung der Göttinger mit der von ZACH auf dem Brocken mit einem freilich minderwertigen LENOIRschen Instrumente beobachteten Polhöhe gab eine Abweichung von 15″ im entgegengesetzten Sinne für den Bogen Göttingen-Brocken und GAUSS konnte nun nicht mehr an dem unregelmässigen Fortschreiten der Schwererichtung zweifeln; er hielt es sogar für möglich, dass bereits eine Entfernung von ein paar hundert Schritten Anomalien zeigen könnte[2]). Ausser den zum grossen Teil von HANSEN angestellten Zenitstern-

1) »Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, dass ich im Allgemeinen ungern in den Frühstunden vor Tage beobachte; ich finde meine Augen dann immer viel schwächer, und mag allenfalls lieber bis zwei Uhr aufbleiben, als um 5 oder 6 Uhr aufstehen«. G.-SCH. Nr. 192.

2) Eine etwas undeutliche Frage von SCHUMACHER veranlasste GAUSS zu einer allgemeineren Klarstellung: »Ihre Frage, wenn mehrere Punkte eines Netzes astronomisch bestimmt sind, und Amplituden geben, die mit der Rechnung nicht harmonieren, welche dann gelten soll, da Lokalattraktionen sowohl in A als B etc. möglich wären? verstehe ich nicht ganz. Für jeden Punkt gilt die Polhöhe, die astronomisch gefunden ist, insofern die Beobachtungen alle Vertrauen verdienen. Das Phänomen besteht ja bloss darin, dass die Polhöhen mit den terrestrischen Entfernungen nicht Schritt halten. Durch den Ausdruck Lokal-Anziehungen wird däucht mir schon alles in einen falschen Gesichtspunkt gestellt. Das gleichmässige Fortschreiten der Polhöhen setzt voraus, dass die Erde in ihrem Innern regelmässig gebildet sei, und fällt weg, wenn diese Voraussetzung unrichtig ist. Ich finde darin garnichts auffallendes und sehe nicht, warum man

Beobachtungen in Altona teilte SCHUMACHER auch die Breite von Lauenburg mit, die er aus Beobachtungen am TROUGHTONschen(?) Sektor erhalten hatte. Auch hatte NEHUS die Wintermonate benutzt, um mit der Sonne Azimutbestimmungen dort zu machen. GAUSS konnte daraus einen Azimutunterschied gegen den geodätischen Wert von 2″,4 berechnen.

41. Beschäftigung mit Krayenhoffs und anderen Triangulationen. Im Winter 1823/24 beschäftigte sich GAUSS, obgleich er noch keine Entscheidung seiner Regierung über die Fortsetzung der Messungen nach Westen in Händen hatte, eingehend mit den KRAYENHOFFschen Dreiecken, die er zu seinem Bedauern lange nicht so genau fand, wie er angenommen hatte[1]). Er hatte sich sodann

---

blos örtliche Störungen annehmen wollte. Meinen Sie aber mit Ihrer Frage, wie man die Polhöhe anderer Punkte, d. i. solcher, wo keine astronomischen Beobachtungen gemacht sind, ansetzen solle, so ist die Antwort leicht: Es fehlt uns dann durchaus an den nötigen Datis dazu, und wir können nichts weiter tun als eine schickliche Interpolation anwenden. Eigentlich aber interessiert die genaue astronomische Polhöhe keinen Menschen, als den Astronomen, der wieder an einem solchen Orte Observationen von adäquater Feinheit anstellen will oder angestellt hat. Für jeden bloss menschlichen Gebrauch, wo die grösste Genauigkeit erfordert wird, d. i. eine grössere als die astronomischen Anomalien komportieren, soll man die geodätische wahre Lage der Örter gegen einander anwenden». G.-SCH. Nr. 197.

1) »Entweder muss HR. KRAYENHOFF seine Ausgleichungen nicht gehörig gemacht haben, oder seine Winkelmessungen involvieren versteckter Weise viel grössere Fehler als man nach der Prüfung durch die drei Dreiecks- und die Gyruswinkel erwarten sollte, und im letzten Fall ist man berechtigt zu glauben, dass die angegebenen Beobachtungswinkel wenigstens parteiisch gewählt sind, um diese Schliessungen der einzelnen Dreiecke und Tours d'horizon zu erzwingen. Wahrlich, es ist bei geodätischen Beobachtungen noch viel notwendiger, dass uns die Originalmessungen vorgelegt werden, als bei astronomischen, wo so leicht manche Bände voll Beobachtungen gedruckt werden, aus deren Spreu man nie ein Weizenkorn benutzen wird« (G.-SCH. Nr. 192).

»Selbst KRAYENHOFFs Messungen sind mir noch nicht detailliert genug bekannt gemacht. Das Tableau von p. 85 bis 86 sollte umständlicher sein und sollte alle Beobachtungen enthalten, denn es ist mir fast zur Gewissheit geworden, dass KRAYENHOFF ausgewählt hat, um guten Schluss der Winkel zu 180° und 360° zu erhalten. Nach diesem Schluss sollte man die Messungen für viel genauer halten, als sie wirklich sind, denn um die Polygone in Übereinstimmung zu bringen, hat KRAYENHOFF viel grössere Änderungen anbringen müssen, zum Teil im nordöstlichen Teil ganz barbarische Änderungen. Vergleichen Sie z. B. die beobachteten Winkel pg. 83 mit denen, die er in seinen Definitiv-Tableaus zu Grunde legt .... Freilich hat er im NW-Teil mit einem kleinen Kreise observiert, aber woher immer die guten Schlüsse der einzelnen Dreiecke und des Gyrus horizontis. Und solche Fehler sind doch auch an einem kleinen Kreise, den er noch dazu parfaitement exécuté nennt, nicht zu verzeihen; und höchst befremdend ist die Parallaxe, worüber er pag. 17 klagt; warum stellte er denn die Fäden nicht in den Brennpunkt, oder wenn keine Stellung der Fäden bei dem Instrument möglich war, warum liess er denn keine Vorrichtung dazu machen? Dies ist, deucht mir, ganz unverzeihlich. Im südlichen Teil scheinen zwar so grosse

auch um die Dreieckmessungen von ECKHARDT, BOHNENBERGER, SOLDNER und LITTROW bemüht, um eine zusammenhängende Kette von Lysabbel bis Mailand oder Wien, oder gar bis an die türkische Grenze berechnen zu können. Aber alle waren sehr zurückhaltend mit der Mitteilung ihrer Resultate (selbst GERLING war in dieser Beziehung sehr vorsichtig[1]). Nur der Regierungsrat ECKHARDT schickte ihm die Darmstädter Hauptdreiecke, die GAUSS sogleich zu berechnen begann. Er erhielt dabei ein merkwürdiges Resultat, über das er an SCHUMACHER noch nichts schreiben wollte, während er OLBERS zwei Tage später einige Angaben im Vertrauen kommunizierte[2]).

Einen Bericht und ein Gutachten, das er im Januar nach Hannover schickte, begleitete GAUSS mit einer Karte, die alle bisherigen dänischen, hannoverschen, hessischen, einen Teil der preussischen und sämtliche KRAYENHOFFschen Punkte enthielt. 200 Punkte waren darin nach genau berechneten Koordinaten eingetragen. GAUSS erwartete von dieser Eingabe einen Erfolg für die Genehmigung seiner weiteren Arbeiten, an deren Übernahme ihm offenbar viel lag (G.-O. Nr. 487).

Fehler nicht vorzukommen, doch auch grössere, als man nach Schluss der Dreiecke und des Gyrus erwarten sollte. Es ist wenigstens ein Glück, dass KRAYENHOFFs Netz in sich selbst so viele verräterische Prüfungen darbietet. Aber was soll man von Messungen denken, wo ohne Polygone und ohne Diagonalen bloss eine Reihe Dreiecke fortläuft, wenn man Ursache hat, die Aufrichtigkeit und Unparteilichkeit der Beobachter in Zweifel zu ziehen. Der Kalkul des sphärischen Exzesses ist gar zu leicht und es daher zu verführerisch, wenn auch nicht zu verfälschen, doch auszulesen, was in den Kram passt. Die Verbindung meiner Dreiecke mit den französisch-englischen blos über Ostfriesland scheint mir nach obigem sehr bedenklich, am besten wäre es wohl, zugleich bei Bentheim und Jever anzuschliessen« (G.-O. Nr. 486).

1) »Selbst GERLING hat mir zwar alle seine Messungen mitgeteilt, aber mit grosser Ängstlichkeit und mit der Bitte, ja keine Zahl öffentlich bekannt zu machen, oder mir merken zu lassen, dass er sie geschickt, weil man das in Cassel sehr übel auslegen würde« (G.-O Nr. 486).

2) »Die Darmstädtischen Dreiecke habe ich an die Punkte Feldberg-Dünsberg, wie sie ohne alle Interrogation MÜFFLINGscher Messungen bloss aus den GERLINGschen (immer zuletzt nach SCHUMACHERs Basis) bestimmt sind, angeschlossen und bis Mannheim berechnet. Hier weicht nun die Darmstädter von ECKHARDT gemessene Basis von meiner Rechnung im Logarithmen nur 2 Einheiten ab, während MÜFFLING durch seine Dreiecke einen ganz enormen Unterschied von der Seeberger Basis fand.

Die Seite Amöneburg-Dünsberg, aus ECKHARDTs Winkeln berechnet, weicht 391 Einh. im Log. von dem Werte ab, den sie nach MÜFFLINGs Dreiecken erhält (das Absolute immer auf einerlei Basis gegründet). Schon bei der Lage des Herkules findet sich ein in geodätischer (wenn gleich nicht in astronomischer) Rücksicht merklicher Unterschied, ob ich ihn bloss auf GERLINGs und meine Messungen oder auf die MÜFFLINGschen gründe, ungefähr 2 m. (Die vorstehenden Notizen bitte ich als im Vertrauen kommuniziert zu betrachten.)« (G.-O. Nr. 487.)

Im Juli 1823 hatte er (durch HORNEMANN) die offizielle Anzeige erhalten, dass ihm der Preis der Kopenhagener Sozietät zuerkannt sei. Die Krankheit seiner Frau, die dadurch bedingten Veränderungen in seinem Hausstande und einige bedeutende Verluste hatten seine Finanzen so derangiert, dass er den Luxus, eine Medaille aufzubewahren, sich nicht verstatten durfte, sondern SCHUMACHER bat, sie in bares Geld zu verwandeln (G.-SCH. Nr. 180). Er hatte damals Aussicht gehabt, einen Ruf nach Berlin zu erhalten, der eine Verbesserung seiner Lage gebracht hätte. So hat auch bei der Erweiterung des Gradmessungsunternehmens der Grund eines kleinen pekuniären Vorteils ihm das Opfer erleichtert, als das er immer wieder die Beschäftigung mit Arbeiten ansah, die ihn aus der ungestörten Geistesverfassung herausrissen, deren er für theoretische Untersuchungen bedurfte[1]).

VIII. Abschnitt. Ausdehnung der Gradmessung nach Westen.

42. (1824) Falkenberg, Elmhorst, Bullerberg, Bottel, Brüttendorf, Bremen, Garlste, Brillit, Zeven, Steinberg, Bottel, Litberg, Wilsede. Am 15. Februar ging das Reskript des Grafen MÜNSTER ein, und am 8. März wurde GAUSS durch das Kabinetsministerium mit der Fortsetzung der Gradmessung betraut. Da MÜLLER und HARTMANN vor Beendigung des Militärschulkursus Hannover nicht verlassen konnten, wurde der Beginn der Messungen bis nach Ostern[2]) verschoben. Auch auf OLBERS Rat sollte eine sorgfältigere Erkundung vorangehen, die GAUSS anfangs einem Manne, der viel Eifer und Geschicklichkeit gezeigt hatte, dem Konrektor KÖHLER in Ilfeld übertragen wollte, zu der aber schliesslich KLÜVER, der in Bremen zur Vorbereitung des künftigen Katasters

1) »Wie die Sachen einmal liegen, darf ich eine Unternehmung nicht abweisen, die obwohl mit tausend Beschwerden verbunden und vielleicht aufreibend auf meine Kräfte wirkend, doch reell nützlich ist, die freilich auch von andern ausgeführt werden könnte, während ich selbst unter günstigeren Verhältnissen etwas besseres täte, allein die bestimmt, wenn ich sie nicht auf mich nehme, gar nicht zur Ausführung kommen würde; endlich, auch das darf ich Ihnen nicht verhehlen, eine Sache, die in etwas das Missverhältnis ausgleicht, welches zwischen meiner Diensteinnahme — derselben anno 1824, wie sie 1810 unter JÉROME festgesetzt wurde — und den Bedürfnissen einer zahlreichen Familie stattfindet.« (G.-B. Nr. 143).

2) 18. April.

in Aussicht genommen war, bestimmt wurde. Durch seine bewundernswerte Beweglichkeit und viele Anstelligkeit ist er dann GAUSS auch nützlich gewesen.

Am 18. Mai brach GAUSS nach Visselhövede auf, um auf dem Falkenberge, wo er bereits 1822 beobachtet hatte, an die Seite Falkenberg-Wilsede seiner Meridianmessung anzuschliessen. Er liess Wilsede durch Leutnant HARTMANN mit einem Heliotrop besetzen, um zugleich für SCHUMACHER, falls dieser in Hohenhorn die beabsichtigten Messungen ausführte, Licht zu senden. Da in diesem Jahre 4 Heliotrope zur Verfügung standen, konnten die Arbeiten rascher fortschreiten. In den 3 Tagen vom 21.—23. Mai wurde Falkenberg fertig und GAUSS konnte auf dem neuen Punkt Elmhorst beginnen, der der einzige war, auf dem Falkenberg und Wilsede gleichzeitig sichtbar waren. Da der verwünschte Moordampf ihm die Aussicht behinderte, nahmen die Beobachtungen die Zeit vom 24. Mai bis 5. Juni in Anspruch. Ein hochstämmiges Gehölz, von dem Elmhorst eingeschlossen war und auch den Namen hatte, machte für alle übrigen Richtungen Durchhaue erforderlich. Besonders lag es GAUSS an der Freilegung des Litberges; er hatte MÜLLER die Richtung von dort nach Elmhorst genau angeben können. Indessen hinderte unerwarteter Weise hernach eine Baumgruppe in 3 Meilen Entfernung die Sicht, aber KLÜVER fand durch seine Geschicklichkeit im Klettern und sein scharfes Auge schnell die störenden Bäume heraus. Auch nach dem Bullerberge, den GAUSS als dritten Standpunkt gewählt hatte, war die Anlage einer Schneise notwendig. Auf dieser Erhebung beobachtete GAUSS vom 7.—18. Juni. Er entwarf nun eine Skizze, die noch die Punkte Litberg, Brüttendorf und Bottel enthielt, von denen die beiden letzteren mit Bremen ein Dreieck bilden konnten. Es kam aber dabei noch auf einen grossen Durchhau an, — den grössten, der bei seinen Messungen bis dahin vorgekommen war, — der die 27 km von einander entfernten Punkte Brüttendorf und Litberg verbinden sollte. Durch seine Ausführung wurde allerdings der Bullerberg überflüssig; da er aber einmal verwendet war, sollte er auch beibehalten werden. Durch die Seite Litberg-Elmhorst war ein neuer Übergang von der Seite Falkenberg-Breithorn auf die Seite Hamburg-Hohenhorn gewonnen, indem dadurch die kleinen Dreiecke der früheren Messung im Westen umgangen wurden[1]).

1) Das 2. Stück des X. Bandes der Corr. astr. enthielt in einem anonymen M. U. A. d. l. G. ge-

Durch die drei Seiten Bremen-Brüttendorf, Bremen-Eversen und Brüttendorf-Litberg hoffte GAUSS, im Falle noch die Verbindung Brüttendorf-Eversen möglich wäre, weiter zu kommen. Eine Erkundung, ob auf dem Brüttendorfer Felde Bremen und Wilsede an einem und demselben Punkte gesehen werden könnten, liess sich bei dem stets herrschenden Moorrauch nicht ermöglichen und GAUSS beabsichtigte, Schritte zu tun, um Verbote des Moorbrennens zu erwirken[1]). Er bedauerte, an Stelle des Bullerbergers nicht Höperhoven ge-

---

zeichneten Briefe eine Stelle (p. 164): Les points trigonométriques entre Hambourg et Celle sont très-mal choisis, quoiqu'il faille convenir, que ce terrain est très-chicaneur; on aurait dû ériger des tours d'observation de 80 à 100 pieds de hauteur, comme on en a construit sur l'Ettersberg près Weimar. Selon mon avis la triangulation du général KRAYENHOFF me semble sous tous les rapports la plus parfaite etc. (G.-O. Nr. 508). GAUSS konnte sich nicht entschliessen, einem so arroganten Menschen zu antworten, »dessen ganze Weisheit darin zu bestehen scheint, den Wert eines Dreieckssystems nach dem Vorkommen von spitzen Winkeln zu beurteilen in der Art wie die einfältige Bemerkung eines gewissen BEIGEL in der Monatlichen Correspondenz VIII, pag. 114« (G.-B. Nr. 147). BEIGELs Bemerkung war: »Die Möglichkeit eines beträchtlichen Fehlers lag schon in dem schlechten Dreiecke, das zur Verbindung der gemessenen Basis mit der Triangelreihe diente [bei MAUPERTUIS] und aus folgenden Winkeln bestand: $9^0\,22'\,0''$, $77^0\,31'\,50''$, $93^0\,6'\,10''$«.

»Es bedurfte nur geringen Nachdenkens, um einzusehen, dass dieser Vorwurf ganz abgeschmackt ist. Nur dann ist ein solches Dreieck geradezu verwerflich, wenn man dasselbe gebrauchen muss, um von der kleinen Seite auf eine der grossen überzugehen oder umgekehrt, obwohl das letzte auch wieder nur dann zu tadeln ist, wenn von dieser kleinen Seite nachher wieder zu grossen fortgeschritten wird. — In allen anderen Fällen ist ein solches Dreieck nur darum von geringerem Wert, weil man damit auf einmal nicht viel weiter kommt. Der Nachteil hat aber nicht viel zu bedeuten, und jeder wird ja von selbst so klug sein, da, wo er gleich einen grossen Schritt machen kann, nicht erst ohne wichtige Gründe einen kleinen zu machen. Auf die Art erklären sich die zum Teil kleinen Winkel in meinem System leicht. . . . Allemal ist die Genauigkeit eines Übergangssystems leicht zu berechnen. Z. B. wenn durch 3 Dreiecke von AB auf AC überzugehen ist, so setze man $(\text{ctg}\,a^2 + \text{ctg}\,b^2) + (\text{ctg}\,c^2 + \text{ctg}\,d^2) + (\text{ctg}\,e^2 + \text{ctg}\,f^2) = S$. Alsdann ist das Gewicht, welches der Differenz der Logarithmen von AB und AC beizulegen ist, umgekehrt dem S, oder die Genauigkeit dem $\sqrt{\frac{1}{S}}$ proportional. . . . . Sie sehen also, dass die eingeschobenen kleinen Dreiecke die Genauigkeit vergrössern. Werden alle Messungen zugleich benutzt, so wird die Genauigkeit sehr viel grösser, aber ihre Bestimmung ist dann altioris indaginis« (G.-O. Nr. 511). »Die starken Linien [in einer Zeichnung] zeigen, wie nunmehr der Übergang von meiner Seite Falkenberg-Breithorn zu der dänischen Hamburg-Hohenhorn gemacht werden kann, die schwachen östlichen, wie er 1822 und 1823 gemacht ist; die Genauigkeit des letzteren ist zwar wegen der vielfach kontrollierenden Verknüpfung etwas grösser als bei dem neuen, der, ohne dass der alte schon vorhergegangen wäre, gar nicht hätte ausgemittelt werden können; indessen wird der Unterschied der Genauigkeit nicht bedeutend sein, und da natürlich der neue nicht für den alten substituiert wird, sondern alle Messungen pro rata zu den Endresultaten kontribuieren müssen, so wird die Genauigkeit etwa verdoppelt werden« (G.-O. Nr. 511).

1) GAUSS ging mit dem Gedanken um, sich an die Landdrostei in Stade zu wenden und bat OLBERS um ein Gutachten über die Schädlichkeit des Moorrauchs, an der aber OLBERS zweifelte (G.-O. Nr. 509. 510).

wählt zu haben, da der Höpenhovener Berg ihm auf dem Bullerberge Bremen verdeckte, andrerseits dort auch Wilsede entgegen der Versicherung von MÜLLER und KLÜVER wahrscheinlich sichtbar war.

Endlich wurde ein Punkt bei Brüttendorf gefunden, wo Bremen, Bullerberg und Wilsede zugleich sichtbar gemacht werden konnten, und ebenso ein Punkt auf dem Everser Felde[1]), von wo die Richtungen nach Wilsede, Bullerberg, Brüttendorf und Bremen genommen werden konnten. Die Verbindung mit Bremen sollte sich auf die Seite Wilsede-Elmhorst stützen. Aus dieser folgte Wilsede-Bullerberg, von dieser war der Übergang zu Eversen-Brüttendorf entweder vermittelst Wilsede-Eversen oder Bullerberg-Eversen oder Bullerberg-Brüttendorf gedacht, oder vielmehr nicht auf einem einzelnen dieser vier Wege, sondern aus der Verbindung aller Messungen in dem vollständigen Viereck. Von Brüttendorf-Eversen sollte dann Bremen erreicht werden. Wenn aber — was auch eintrat — der Durchhau von Brüttendorf nach Litberg gelang, so ergab sich eine noch viel einfachere Verbindung: Hamburg-Wilsede, Wilsede-Litberg, Wilsede-Brüttendorf, Wilsede-Eversen, Brüttendorf-Eversen usw. Durch die Messungen von 1822, 1823, 1824 war GAUSS im Stande, die Richtung des Durchhaus auf einige Sekunden genau anzugeben[2]).

GAUSS blieb in Rotenburg wohnen, als er die Messungen auf dem Bullerberge beendet hatte und begann auf dem 1 ½ Meilen von Rotenburg entfernten Everser Plateau oder richtiger Ahauser Feld und offiziell sogenannten Bottel zu beobachten. Er hätte schon damals den weit höheren Steinberg vorgezogen, wenn er die später durchgeführte Freilegung der Richtung nach Wilsede für möglich gehalten hätte.

»Die Stelle, wo ich als erklärter Anhänger der Meinung, der gewöhnlich mit Heerrauch bezeichnete Nebel sei nichts anderes als Moordampf, genannt bin, steht in OKENS Isis 1829 S. 343. Ich will gern zugeben, dass auch aus andern Ursachen Nebel entstehen können, die stinken; allein der Moorrauch hat einen so eigenen Geruch, dass, wer lange am Herd desselben gewesen ist und einen feinen Geruchssinn hat (was leider mein Fall ist, da gewöhnlich mehr widerliches als angenehmes vorkommt) ihn auch in grösserer Verdünnung wiedererkennt: mit Gewissheit kann ich übrigens hinzusetzen, dass ich keine Erfahrungen eines anderen riechenden Nebels gemacht habe, sondern dass jeder riechende Nebel, den ich gerochen habe, diesen spezifischen Geruch hatte und stets mit Umständen begleitet war, die jener Voraussetzung nicht nur nicht widersprachen, sondern meistens die Wahrscheinlichkeit sehr erhöhten, oft kaum einen Zweifel übrig liessen« (G.-G. 6. 5. 1831).

1) Bottel, im folgenden mit Eversen bezeichnet, s. a. u.

2) G.-O. Nr. 511. G.-SCH. Nr. 215.

Auf dem Bottel hielt er sich vom 19. bis 24. Juni auf; MÜLLER befand sich gleichzeitig in Brüttendorf, um den Wald nach dem Litberg hin zu durchbrechen[1]), KLÜVER sollte ihn unterstüzen und gleichzeitig Heliotroplicht nach dem Bottel senden. Als GAUSS am 27. Juni nach Zeven kam, fand er den Durchhau schon offen, dessen Richtung nur 2″ von der Vorausberechnung differierte. Aber nach Westen bot sich schlechte Aussicht, weiter zu kommen und JOSEPH GAUSS musste mit MÜLLER die Gegend von Bremervörde bis Hambergen und dann nach Worpswede und Wilstadt hin rekognoszieren. GAUSS hätte am liebsten Bremen als Hauptdreieckspunkt ganz aufgegeben, da der Ansgariusturm ein schlechter Zielpunkt und noch schlechterer Standpunkt sein würde[2]). Aber trotz ungünstiger Sicht schnitt er sogleich von Brüttendorf aus Neugierde ein paar mal Bremen ein, das er vorher vom Bottel aus beobachtet hatte, und fand dadurch aus einer vorläufigen Rechnung seine Lage um etwa 7 m nördlich und ebenso viel westlich von der Stelle, die er aus seinen eigenen, EPAILLYS und KRAYENHOFFS und wieder EPAILLYS Messungen geschlossen hatte. Er war davon nicht sehr befriedigt; als aber OLBERS irrtümlich 7″ statt 7 m gelesen hatte, wurde GAUSS zu einer ausführlichen Darlegung

---

1) »Ohne dass solche Messungen vorangegangen wären, würde ein solcher Durchhau ganz unmöglich gewesen sein, oder er hätte an Zeit und Geld wenigstens beinahe so viel gekostet, wie jene Messungen zusammen; auch abgesehen davon, dass man ohne die vorgängigen Arbeiten garnicht darauf hätte kommen können, gerade diese Plätze zu wählen, da namentlich das Brüttendorfer Feld eine unscheinbare zur Erbauung von 100 Fuss hohen Türmen gar nicht besonders einladende Gegend ist. EPAILLY war von Bremen aus mit seinen Messungen nach O und NO nicht weiter gekommen als WILSTEDT und HAVERLOH und erklärte die gerade Verbindung mit Hamburg für unmöglich, obgleich er den Vorteil hatte, dass er sich keine Bedenken machte, in der Luft auf hohen Signaltürmen zu beobachten, während ich von Anfang an mir zum Prinzip gemacht habe, dies nicht zu tun, oder höchstens für einen Notfall aufzusparen, wo durchaus auf andre Weise nicht durchzukommen wäre. In der Tat ist der Modus, den ZACH [oder eigentlich der Anonymus in ZACHs Journal, siehe oben] mir anrät, insofern der leichteste, als dabei gar keine Geistestätigkeit erfordert wird, sondern nur, dass man Zeit, Geld, viel Geld, oft ganz vergeblich aufgewandtes Geld nicht achtet und auf Genauigkeit Verzicht tut. Hätte ich von 1822 an nach seinem Rat agiert, so würde ich die doppelte Zeit und die dreifachen Kosten verbraucht haben, um am Ende die halbe Genauigkeit zu erreichen« (G.-O. Nr. 511).

2) »Vermutlich werden auf dem Turm selbst erst mehrere Vorkehrungen gemacht werden müssen, eine Art Befriedigung in der Laterne, eine Art Kreuz zwischen den Pfeilern der Laterne, unabhängig vom Fussboden, um den Heliotrop und demnächst den Theodolithen darauf zu stellen. Da die Laterne, so viel ich mich erinnere, nur sehr eng ist, so wird der Heliotrop selbst oft und lange im Schatten sein, und daher fast immer doppelte Reflexion angewandt werden müssen. Wie unendlich grosse Vorzüge haben die Plätze zu ebener Erde!« (G.-O. Nr. 512.)

seiner Ansichten über die Genauigkeit astronomischer und geodätischer Messungen veranlasst (G.-O. Nr. 521):

»Durch meine Prüfung der KRAYENHOFFschen Dreiecke in NO von Holland von deren Schlechtigkeit überzeugt und die Genauigkeit der EPAILLYschen Messungen nicht kennend, hatte ich mich allenfalls auf einen Unterschied von 30 m—40 m gefasst gemacht. Auch die 7 m würden mir, wenn ich die ganze Kette selbst gemessen hätte, noch viel zu viel sein; wäre aber wirklich ein Unterschied von 7″ N und W gewesen, also die Lage über 250 m unrichtig, so würde ich nicht anstehen zu erklären, dass entweder KRAYENHOFFS oder EPAILLYS Messungen oder beide keinen Dreier wert wären. Es ist mir nicht recht klar, wie Sie jenen vermeinten Unterschied von 7″ mit dem von 6″ bei Altona in Vergleich stellen; bei letzterem Orte war die astronomische Lage von Altona (* Lage der Vertikalen daselbst gegen die Erdachse und eine bestimmte Anfangs-Meridianebene) um 5″ oder 6″ abweichend von dem, was aus der astronomischen Lage von Göttingen gefolgert war. Bei Bremen hingegen war die Lage gegen Göttingen bloss geodätisch zweimal bestimmt, einmal auf einem ungeheuer langen Wege und einmal auf einem kurzen. Grösserer Klarheit wegen könnte man 3 Arten, die Lage eines Ortes anzugeben, unterscheiden:

1) Die geodätische, indem ich z. B. sage, dass Bremen auf dem langen Wege 173065,8 m nördlich und 76342,5 m westlich von Göttingen gefunden, auf dem kürzeren aber einstweilen 173073,6 m und 76348,5 m. Da die Erde kein Planum ist, so ist eigentlich erst noch zu erklären, wie dies nördl. und westl. zu verstehen ist. Man kennt den gewöhnlichen (unrichtigen) Sprachgebrauch: Abstand vom Meridian und Perpendikel. Meine Zahlen sind eigentlich etwas anderes, nur Analoges, allein eine gründliche Erklärung ist in der Kürze nicht möglich.

2) Die geodätisch-astronomische oder pseudo-astronomische Lage, wenn man die geodätischen Messungen auf ein regelmässiges Ellipsoid appliziert und danach die Breiten- und Längen-Unterschiede angibt. Ich kann hier Bremen nicht als Beispiel anführen, da ich die in dieser Form sich darauf beziehenden Zahlen gar nicht bei mir habe. . . .

Man kann diese beiden Arten nur wie eine betrachten, wobei gleichsam nur die Form verschieden ist, aber wesentlich verschieden ist.

3) Die wirklich astronomische Lage, die ich oben (bei *) definiert habe. Nach allen neueren Erfahrungen hält diese garnicht Schritt mit 2) und es gibt kein Mittel, sie zu finden als wirkliche astronomische Beobb. Meiner Ansicht nach aber hat sie en récompense bloss für den Astronomen Interesse, insofern an einem Orte auch wirklich astronomische Beobb. angestellt werden, die bis auf eine Bogensekunde genau sind. In jeder andern Beziehung, wo man die gegenseitige Lage von Punkten vergleichen will, kommt es nicht auf 3), sondern auf 1) oder 2) an.

Ich weiss nicht, ob ich mich nicht irre, aber mir däucht, dass man bisher noch nicht recht gewusst hat, was eigentlich die besten geodätischen Messungen im Grossen leisten können, ungefähr wie man vor Entdeckung der neuen Planeten eine ganz falsche Vorstellung von dem hatte, was man von guten astron. Beobb. zu fordern berechtigt ist. Ich gestehe, dass es mir ein selbständiges hohes Interesse zu haben scheint, die gegenseitige Lage von einigen 1000 Punkten über ganz Europa mit aller Schärfe zu bestimmen, deren die Kunst und Wissenschaft des 19. Jahrhunderts fähig ist. Dadurch, dass man bei grossen geodätischen Messungen immer sein Auge nur auf 3) richtete, hat man einen ganz falschen Gesichtspunkt und Masstab erhalten. Denn da die höchste Kunst der Astronomie kaum 1″ der Breite und das 3-fache (oder mehr) in der Länge erreichen kann, so meinte man, geodätische Messungen schon genug gerechtfertigt und in Glanz gesetzt zu haben, wenn man zuletzt nur Unterschiede von einigen Sekunden fand. Mehr ist auch nicht möglich, wenn man von der astronomischen Lage 3) mehrerer Punkte ausgehend zu einem Vereinigungspunkte kam. Aber ganz barbarisch und unverantwortlich wäre ein solcher Unterschied bei rein geodätischen Verbindungen 1) oder bei 2), wenn man nur einen Punkt astronomisch zu Grunde legt, insofern solche Messungen nicht schon einen halben Weltteil umfasst haben. . . . Nur bei der hier ausgelegten Ansicht kann ich an meinen Arbeiten ein wahres Interesse haben, und ohne sie würde ich beklagen, meine Zeit 4 Jahre hindurch auf einen ganz unwürdigen Gegenstand gewandt zu haben.«

Vom Bottel aus hatte Gauss einen entfernten Turm gesehen, den er für Ganderkesee hielt. Die Hoffnung, ein Dreieck Bottel-Worpswede-Ganderkesee zu erhalten, liess sich aber nicht verwirklichen, da sich gar kein Punkt im

Nordwesten mit Brüttendorf verbinden liess. Es musste daher Bremen als Hauptdreieckspunkt beibehalten werden.

In Zeven mit seiner reizenden Naturumgebung (G.-B. Nr. 151) fühlte sich Gauss anfangs bei kühlem Wetter und der elektrizitätsfreien Luft wohler, wozu auch das gute Quartier im Posthause beitrug, und er konnte den 4 km weiten Weg nach der Beobachtungsstation in Brüttendorf oft zu Fuss zurücklegen (G.-O. Nr. 523). Bald klagte er aber wieder über schwüle Hitze (G.-O. Nr. 524), und als er am 10. Juli die Beobachtungen in Brüttendorf beendet hatte und nach Bremen kam, brachten ihn die Fatiguen der Messungsarbeiten und die ihm hier nicht zuträgliche Lebensweise so herunter, dass er an der Möglichkeit zweifelte, mit seinen Arbeiten fortfahren zu können (G.-B. Nr. 146). Er hatte bei den Dreiecken dieses Jahres die dritten Dreieckspunkte vorläufig liegenlassen, um erst einmal nach Westen vorzudringen. Für die Seite Bremen-Brüttendorf fand er nun aber überhaupt keinen dritten Punkt, so dass es um die Fortsetzung der Messungen sehr misslich stand[1]). Da trat ein glücklicher Umstand ein, indem Gauss von dem Ansgariusturm gerade noch die Spitze des Turmes in Zeven erblickte, während er von Zeven aus infolge des Höhenrauchs Bremen nicht bemerkt hatte[2]). Nun erfuhr freilich sein Dreiecksnetz wieder eine Umgestaltung, indem zunächst Brüttendorf als Beobachtungspunkt überflüssig wurde.

Sechs Wochen weilte Gauss in Bremen. Er fand seinen damals im 66. Lebensjahre stehenden Freund heiter und wohler, als im vorhergehenden Jahre und schied von ihm in der Hoffnung, ihn bald in Zeven wiederzusehen. Er ging aber zunächst nicht dahin, sondern nach dem westlichsten Punkte dieses Jahres auf der Garlster Heide bei Vegesack und erreichte somit die Weser. Offenbar leitete ihn der Wunsch, erst einmal den Anschluss an Krayenhoff zu erlangen und in der Tat konnte er hier den äussersten von Krayenhoffs Punkten, Varel, bereits sehen. Seinen Aufenthalt nahm er in Osterholz, das eine Meile südöstlich von seinem Dreieckspunkt lag. Am Sonntag, den 22. August hatte er nur einen offenen Wagen erhalten[3]), mit dem er unter anscheinend günstigen Auspizien um 1 Uhr nach dem Garlster Platze fuhr,

1) Arbeitsbericht für 1824.

2) Vergl. G.-O. Nr. 525.

3) Später hat er den Weg von Gnarrenburg nach Brillit einige Male zu Fuss zurücklegen können.

allein schon auf halbem Wege stellte sich Regen ein, der den ganzen Tag nicht wieder aufhörte. Bis auf die Haut durchnässt kehrte er ohne etwas gesehen zu haben, um 8 ½ Uhr zurück. Doch konnte er bereits am 26. August nach dem Punkte Brillit bei Gnarrenburg weitergehen, wo er ebenfalls schneller, als er gedacht, am 30. August 1824 fertig wurde. Während seines dortigen Aufenthaltes war die Luft für das Sehen terrestrischer Gegenstände immer höchst ungünstig, so dass er mehrere entfernte Punkte, die MÜLLER früher bemerkt hatte, nie erkennen konnte. Besser ging es dagegen mit den Heliotroplichtern, die täglich 1 oder 1 ½ Stunden lang sehr gut zu sehen waren, vorher und nachher aber sehr stark wallten. Weil sich Brillit nicht mit Brüttendorf verbinden liess, wurde Zeven als Beobachtungspunkt gewählt. Hier dauerte es mehrere Stunden, ehe GAUSS eine Stelle auf dem Turm finden konnte, wo alle Hauptrichtungen zugleich offen waren oder sich öffnen liessen[1]) und es liess sich nicht ändern, dass einige nur in genierter Lage beobachtet werden konnten. Von Bremen, wo sein Gehilfe BAUMANN[2]) heliotropierte, erhielt er zunächst gar kein Licht, obgleich Sonnenschein dort zu sein schien. Die enge Lokalität auf dem Ansgariusturm mochte Schuld sein, und BAUMANN kam mit der doppelten Reflexion nicht zu Stande. Auch das Moorbrennen nahm wieder überhand, so dass GAUSS auch die andern Richtungen nicht erhielt. Er sandte daher seinen Sohn nach dem Steinberge, um wenigstens den einen Winkel Steinberg-Wilsede messen zu können. Dazu kam die grässliche Hitze, die auf sein Befinden nachteilig wirkte, während der Landaufenthalt in Osterholz es wieder gebessert hatte. Er reduzierte hier die Beobachtungen in Bremen, wobei die Nebenpunkte, die er durch die zwischen ihnen und den Hauptpunkten gemessenen Winkel festlegte, schlechter stimmten, als die Messungen zwischen den Hauptpunkten[3]). Es kam sogar ein Winkel vor, der durch die Ausgleichung eine Verbesserung von 3″ erhielt[4]). Ausser der schlechten Sichtbarkeit der irdischen Punkte schrieb er diese Misstimmigkeit dem Um-

1) Brillit und Litberg wurden durch Öffnung von zwei Schneisen erhalten.

2) BAUMANN war als Gehilfe (ohne Diäten) angenommen, er war fleissig und hatte guten Willen, aber es fehlte ihm ganz an iudicium, so dass die Dienste, die er leisten konnte, nach GAUSS Urteil ebenso gut ein Unteroffizier hätte leisten können (G.-O. Nr. 548).

3) Es waren 6 Hauptpunkte: Steinberg, Bottel, Brüttendorf, Zeven, Brillit, Garlste und 6 Nebenpunkte: Twistringen, Oldenburg, Hude, Neuenkirchen, Verden, Asendorf (G.-O. Nr. 529).

4) Neuenkirchen-Garlste.

stande zu, dass die Hauptpunkte unter sich bei unveränderter Körperstellung beobachtet wurden, bei den Nebenpunkten aber meistens die Vergleichung nicht möglich war, ohne für beide Objekte verschiedene Sitzplätze zu nehmen. Dies brachte höchst wahrscheinlich eine erhebliche Reaktion auf das Instrument hervor, wenn auf Türmen observiert wurde, so dass neben den schwankenden auch noch konstante Fehler entstanden. Ähnliches hatte er auch schon auf dem Brocken, in Lüneburg und Hamburg bemerkt, ebenso wie CAROC in Hohenhorn die gleiche Erfahrung gemacht hatte. Auch in Zeven fürchtete er ähnliche Einflüsse. Obgleich übrigens die Stationsausgleichungen keine schlechtere Übereinstimmung zeigten als anderwärts[1]), gab die Winkelsumme in dem Dreieck Zeven-Bremen-Brillit einen Fehler von mehr als 4″. GAUSS glaubte, dass das harte Wegstreichen der Lichtstrahlen über zwischenliegende Waldungen Lateral-Refraktionen hervorgebracht habe, die gewöhnlich in einem Sinne wirkten, und hat aus diesem Grund dieselben Stationen 1825 noch einmal besucht (G.-G. 27. 1. 25).

In Zeven empfing GAUSS den gleichzeitigen Besuch von OLBERS, SCHUMACHER und REPSOLD; er sah OLBERS nie froher, als in den paar Tagen an diesem freundlichen Orte (G.-B. Nr. 146). Am 5. September 1824 waren die Messungen beendet. Da vom Bottel aus Zeven nicht erreicht werden konnte, trat der von den vorigen Stationen bereits eingeschnittene Steinberg an seine Stelle. Die Beobachtungen erstreckten sich vom 17. bis 24. September, dann ging GAUSS noch einen Tag (25. September) auf den Bottel, offenbar um die Verbindung mit dem Steinberg herzustellen, da er ja die überflüssig gewordenen Beobachtungen in Brüttendorf, Bottel und Bullerberg nicht verwarf, sondern in die Ausgleichung mit einbezog. Am darauf folgenden Tage begab sich GAUSS nach Apensen[2]) eine Meile südwestlich von Buxtehude (wo er bei einem Kaufmann KÖSTER wohnte). Er war dort etwa 5,3 km von seinem Beobachtungspunkte Litberg entfernt. Dort konnte man die Häuser von Altona erblicken und umgekehrt konnte man vom Stadtkirchturm das Zelt auf dem

1) Werke IX, S. 263 ff. sind die Stationsausgleichungen für Zeven und Brillit abgedruckt.

2) »Wenn Ihr Gehilfe einen schlechteren aber näheren Aufenthalt einem etwas besseren aber entfernteren vorzieht, so liegt Sauensiek nur etwa 15 Minuten (zu gehen) vom Litberg. Ich selbst bin noch nicht in Sauensiek gewesen, aber MÜLLER hat da logiert, wie auch KLÜVER und BAUMANN. Ich weiss nicht, ob der Name daher kommt, dass die Säue dort krank werden. Aber 2 Bierbrauereien sind da, die auch mein Quartier mit ihrem Gebräu versehen« (G.-SCH. Nr. 221).

Litberge erkennen. Am 3. Oktober wurden die Messungen auf dem Litberge beendet und GAUSS musste nun noch einmal auf seinen schon 1822 besetzten Punkt Wilsede zurückkehren, um die neu gewählten Punkte von hier einzustellen. Er wohnte in Barl, wo er sich trotz mancher kleinen Entbehrung sehr wohl befand[1]). Ja er konnte SCHUMACHER schreiben, was er auch nach Schluss der Arbeiten noch wiederholt hat[2]), dass er sich seit Jahren nicht so gesund gefühlt habe, wie in den letzten drei bis vier Wochen (G.-SCH. Nr. 225. 17. 10. 24). Daran änderte auch nichts das abscheuliche Wetter, das in den ersten 10 Tagen fast garnichts auszurichten gestattete. Er war aber mit den Beobachtungen, als dann bessere Tage kamen, zufrieden, indem das Dreieck Wilsede-Hamburg-Litberg bis auf 1,5″ schloss. Die Richtung zwischen Litberg und Elmhorst und umgekehrt schien ihm allerdings mit einem Fehler behaftet zu sein, indem sie hart über Bäume hinwegging und dadurch etwas »biassed« war. SCHUMACHER hatte für GAUSS zwei Sergeanten zum Heliotropieren beordert[3]), ausserdem erwähnt GAUSS noch 3 Artilleristen, die bei ihm beschäftigt waren[4]). In Barl lernte er THOMAS CLAUSEN kennen, der ihm einen Brief von SCHUMACHER überbrachte. CLAUSEN scheint dann auch beim Lesen der Korrektur der Preisaufgabe, die jetzt gedruckt wurde, mitgewirkt zu haben.

IX. Abschnitt. Zenitdistanzmessungen.

43. Gegenseitige Zenitdistanzen. Bisher ist nur der Messung der Dreieckswinkel Erwähnung geschehen. Aber gleich bei Beginn der Gradmessung hat GAUSS auch die Bestimmung der Höhen der Dreieckspunkte ins Auge gefasst und zu diesem Zwecke mit dem zwölfzölligen Multiplikationskreise[5]) gegen-

1) SCHUMACHER versorgte ihn mit Bier und Wein, wovon besonders der letztere ihm sehr willkommen war (G.-SCH. Nr. 225).

2) G.-O. Nr. 146.

3) Das Signal, das GAUSS bei seinem Weggang von der Station sandte, scheint unbemerkt geblieben zu sein, so dass SCHUMACHER über den Verbleib der Leute eine Zeitlang im Ungewissen war.

4) Die Namen zweier Unteroffiziere BIESTER und QUERFELD werden genannt.

5) Ausnahmsweise hat er auch den Theodoliten benützt, vom Bottel nach Steinberg und von Wilsede nach Bullerberg.

seitige Zenitdistanzen zwischen ihnen bestimmt, und nur in einigen Ausnahmefällen sich mit einseitigen Zenitdistanzen begnügt[1]). Wenn er namentlich wegen der schlechten Beschaffenheit der KRAYENHOFFschen Messungen in ihrem nordöstlichen Teile zwischen einem Anschluss an diese Triangulation bei Bentheim oder bei Jever schwankte, so hat vermutlich ausser noch andern Gründen der Wunsch den Ausschlag gegeben, durch die Verbindung im Norden seine Dreieckskette an die Nordsee zu führen, um auf diese Weise die Höhenbestimmungen auf die Meeresfläche beziehen zu können (Werke IX, S. 438—439).

Nachdem er bereits im Januar 1823 eine Berechnung der in den Jahren 1821 und 1822 durchgeführten Triangulation vollendet hatte, wobei ihm der Anschluss an die ZACHsche Basis[2]) einen vorläufigen, aber genügend genauen Wert der Längeneinheit lieferte, erhielt er die geographischen Koordinaten der Dreieckspunkte mit aller für die Höhenberechnung gewünschten Genauigkeit. Es wäre ihm aber zunächst nur möglich gewesen, die relativen Höhen anzugeben und er beschränkte sich daher zunächst darauf, die terrestrische Refraktion zu bestimmen, worunter er die Verschiedenheit der Richtungen des Lichtstrahls an den beiden Endpunkten verstanden wissen wollte[3]). In einem im Astronomischen Jahrbuch für das Jahr 1826 (Berlin 1823, Seite 89 bis 92) veröffentlichten Aufsatz stellte er für die einzelnen Linien die Krümmung des terrestrischen Bogens mit der beobachteten Refraktion zusammen. Das Verhältnis gab ihm dann den Refraktionskoeffizienten im Mittel aus allen Bestimmungen der beiden ersten Jahre zu 0,1306. Er erkannte zugleich, dass bei kleinen Entfernungen sich die grösseren Abweichungen von diesem Werte zeigten. Sodann hatte er die Erfahrung gemacht, dass in den Vormittags- und frühen Nachmittagsstunden die Refraktion des Lichts, solange es nahe über der Erdfläche wegstreicht, gewöhnlich negativ war und die Luft so stark wallte, dass sich keine scharfen Messungen machen liessen, indem das Heliotroplicht oft einer kometenartigen Scheibe von zuweilen einer Minute Durchmesser glich (Werke IX, S. 440). Er hatte deswegen in den Jahren 1821—1823, um für die Theodolitmessungen die Zeiten der guten und ruhigen Bilder benutzen zu können, die Zenitdistanzmessungen, die er als etwas mehr Unter-

1) Bremen nach Bottel und Brüttendorf nach Zeven (1824).

2) Durch die Seite Brocken-Inselsberg, die der preussischen Vermessung von MÜFFLING angehörte.

3) Die meisten damaligen Schriftsteller und Astronomen bezeichneten die Hälfte davon als Refraktion.

geordnetes betrachtete, auf die Vormittagsstunden und die Zeit um Mittag herum verlegt. Im Jahre 1824 aber, wo die Richtungen vielfach ganz knapp über den Erdboden hinstrichen, gab er die Verwendung der Vormittagsstunden überhaupt auf und die Zenitdistanzen sind daher in diesem Jahre sämtlich in den Nachmittagsstunden, meist zwischen 3 und 4 Uhr, mit fortschreitender Jahreszeit früher gemessen, im Oktober wallte die Luft schon um $1\frac{1}{2}$ oder 2 Uhr nicht mehr merklich. Auch bestrebte er sich, bei jeder Linie die Messung an beiden Endpunkten ungefähr bei gleicher Luftbeschaffenheit zu machen. Die der früheren Rechnung entsprechende Rechnung für 1824 (unter Mitnahme der beiden 1822/23 beobachteten Linien Falkenberg-Wilsede und Wilsede-Hamburg) gab ihm im Mittel aus 22 Linien, die mit 20 maliger Repetition am 12 zölligen Kreise gegenseitig beobachtet waren, 0,14778[1]). Die Zahlenwerte der einzelnen Jahre haben bei einer späteren Zusammenstellung eine stete Zunahme gezeigt und GAUSS hat die Ursache in der Beobachtungszeit erkannt[2]). Während die Refraktion am Mittag am kleinsten ist, nimmt sie in den späteren Nachmittagsstunden mit ausserordentlicher Regelmässigkeit zu, schrieb er im Jahre 1846 an SCHUMACHER (G.-SCH. Nr. 1130).

44. Rückkehr nach Göttingen. Als GAUSS Ende Oktober wieder in Göttingen eintraf, erfuhr er erst, wie ernstlich die Erkrankung seiner Frau in den Sommermonaten gewesen war. Und bald war wieder sein Haus der Schauplatz von Unruhe und Sorge, als drei seiner Kinder von den Masern befallen wurden und dann seine durch zweijährige Krankheit geschwächte Frau sich ansteckte und eine Zeitlang in grösster Gefahr schwebte.

---

1) Hierbei waren 7 Linien ausgeschlossen, bei denen die Messung nicht vorschriftsmässig ausgeführt war, insbesondere die nur einseitig bestimmten.

2) Die Ergebnisse waren (Werke IX, S. 444):

1821/22	0,12981	
1823	0,12643	bis Wilsede-Niendorf
	0,14126	bis Hamburg
1824	0,14778	
1825	0,15826.	

Ein Aufsatz von GAUSS im *Astronomischen Jahrbuch für 1826* und die Briefstellen, die sich auf den Refraktionskoeffizienten beziehen, sind Werke IX, S. 434—444 abgedruckt. Daran schliesst sich (S. 445—455) eine theoretische Abhandlung über die terrestrische Refraktion und die Ausgleichung der Höhenmessungen.

Eine weitere Beunruhigung seiner Gemütsverfassung brachte noch die Berliner Berufungsangelegenheit, die zur Entscheidung drängte. Gleich nach seiner Rückkehr hatte er ein Schreiben von HOPPENSTÄDT erhalten, mit dem Anerbieten einer bedeutenden Gehaltszulage, wenn er die Berufung nach Berlin ablehnen würde. Um sich nicht die Hoffnung auf eine gründliche Verbesserung seiner Lage zu verderben, ging er auf das Anerbieten nicht ein. Aber als sich die Angelegenheit weiter verzögerte und er vertraulich erfuhr, dass man trotz seiner Absage den Vorschlag zu einer wahrhaft liberalen Verbesserung seiner Lage nach London an den König abgesandt habe und bald darauf auch die Genehmigung des Königs eintraf, entschied sich GAUSS, die fremden Anträge nach einem solchen Beweise von Wohlwollen durch seine Regierung nicht anzunehmen, und blieb dabei, obgleich ihm von verschiedenen Seiten eine Zurücknahme seiner Absage an Berlin nahe gelegt wurde. Dass die Erhöhung seines Gehaltes auf 2500 Taler letzten Endes auf die erfolgreiche Durchführung der Gradmessung sich gründete, und die Wichtigkeit dieses kurz vor seiner Vollendung stehenden Unternehmens für den hannoverschen Staat anerkannte, rechtfertigt seine Erwähnung im Zusammenhange mit den geodätischen Arbeiten.

Andrerseits blieb auch der Einfluss innerer Erregung nie ganz bei der wissenschaftlichen Tätigkeit unbemerkt. Sie spiegelt sich in der Unzufriedenheit mit dem Erreichten und einer Unlust, die dann wieder dem Bestreben wich, den Arbeiten die möglichste Vollkommenheit zu sichern.

Eine vorläufige Diskussion der Messungen des Jahres 1824 zeigte GAUSS, dass noch viel zu wünschen übrig blieb. — Von 15 Hauptdreiecken hatten drei eine Winkelsumme, die über 2″ fehlerhaft war, und er fasste den Entschluss, falls er überhaupt die Messungen fortsetzen sollte (G.-O. Nr. 540), das am wenigsten stimmende Dreieck Zeven-Brillit-Bremen im folgenden Jahre nochmals zu messen. Dann glich er alsbald die Zenitdistanzmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate aus, um die Ergebnisse den Berichten an das Hannoversche Ministerium und den Senat von Bremen einfügen zu können. Allerdings mussten für die Ableitung absoluter Höhen einige Zahlen verwertet werden, die aus fremden Messungen stammten. Der mittlere Fehler der relativen Höhen von 4,8 Fuss wäre nach seiner Schätzung um 50 % grösser ausgefallen, wenn er nicht die gegenseitigen Zenitdistanzen genau gleich-

zeitig[1]) und dabei möglichst unter ähnlichen atmosphärischen Umständen gemessen hätte.

X. Abschnitt. Beendigung der Gradmessung.

45. (1825) Brüttendorf, Zeven, Bremen, Garlste, Bremerlehe, Varel, Langwarden, Jever, Brillit, Zeven. Die Unlust, die Beobachtungen fortzusetzen, hatte GAUSS bald überwunden. Er kaufte an Stelle des verbrauchten Wagens im März 1825 einen neuen in Hannover und beschloss, die Triangulierung sehr früh im Jahre zu beginnen.

SCHUMACHER, der im vergangnen Jahre durch die Chronometerexpedition zur Bestimmung der Länge von Altona und Helgoland gegen Greenwich in Anspruch genommen war, plante nun, Schweremessungen an verschiedenen bedeutenden Orten zu machen. Es war für ihn sehr günstig, dass er Aussicht hatte, mit BESSEL persönlich über diese Beobachtungen sprechen zu können, da dieser seinen Pendelapparat von REPSOLD in Hamburg selbst abholen wollte. Leider konnte BESSEL einen Besuch in Göttingen damit nicht verbinden, und auch eine Zusammenkunft von GAUSS und BESSEL in Hamburg liess sich nicht verwirklichen. GAUSS lud vielmehr SCHUMACHER und BESSEL zu einem Besuche seiner Station Zeven ein, wo er auch OLBERS erwartete. Indessen kam keine feste Verabredung zu Stande und GAUSS brach um die Mitte des Monats (wohl am 18. oder 19.) über Hannover, Walsrode, Rothenburg nach Zeven auf, das er am Mittag des 25. April erreichen wollte. In Hannover, wo er sich verschiedener Geschäfte wegen aufhielt, traf er im Gasthofe[2]) mit ENCKE zusammen, der von Hamburg nach Seeberg zurückkehrte. In jenen Tagen begaben sich SCHUMACHER, Professor THUNE[3]), der längere Zeit bei SCHUMACHER als Gast weilte, BESSEL, HANSEN und REPSOLD nach Bremen, wobei SCHUMACHER mehrere

1) GAUSS versteht hierunter offenbar die gleiche Tageszeit, während ein wirklich gleichzeitiges Beobachten nur bei zwei Beobachtern möglich ist.

2) In der Hasenschenke. G.-SCH. Nr. 1192.

3) THUNE war Professor der Astronomie in Kopenhagen, nachdem SCHUMACHER sein Lehramt aufgegeben und in Altona eine Sternwarte erhalten hatte.

Chronometer und den Repetitionskreis, BESSEL ebenfalls ein Chronometer mit sich führte, um die Länge von Bremen zu bestimmen, wo dann HANSEN die Zeit und Zirkum-Meridianhöhen für die Breite beobachtete. Dabei trafen sie zufällig am Sonntag, den 24. April mit GAUSS in Rothenburg zusammen. GAUSS war mehr überrascht als erfreut, als er bei der Ankunft in ELLERMANNS Gasthof zunächst des Professors THUNE ansichtig wurde und dann die unerwartet grosse Reisegesellschaft erblickte. Die letzten Tage in Göttingen, wo er wegen Erkrankung des Inspektors RUMPF das Auseinandernehmen und die Reinigung der Instrumente hatte selbst vornehmen müssen, die Strapazen der Reise und der Besorgungen in Hannover hatten ihn so mitgenommen, dass er die nur kurze Zeit nicht ausnutzen konnte. Er war daher unbefriedigt von dieser Begegnung, bei der er nicht einmal mit BESSEL über die Berliner Angelegenheit, auch mit Rücksicht auf die Gegenwart ihm ferner stehender Menschen hatte sprechen können. Auch BESSEL bedauerte das Misslingen dieses ersten Wiedersehens nach langer Zeit[1]), nur den Eindruck behielt er davon in angenehmer Erinnerung, dass GAUSS ein sehr kräftiges Äussere besitze, wie er es nicht erwartet hatte (G.-B. Nr. 152).

Gleich am 25. wurde GAUSS durch zwei bis in sein Zimmer geleitete Zwischentelegraphen benachrichtigt, dass auf dem Brüttendorfer Berge das Heliotroplicht des Bremer Turmes erschienen sei. Trotzdem er noch ganz erschöpft war, fuhr er sogleich dahin und erhielt einige gute Winkel. Auf dem Rückwege wurde er auf der Strasse von Ottersberg nach Zeven, 500 Schritt von der Stelle, wo sie dicht bei seinem Brüttendorfer Postament vorbeiführte, infolge eines tief ausgefahrenen Geleises mit seinem Wagen umgeworfen. Der Kasten mit dem Theodoliten fiel auf seinen Schenkel, der Kreis auf seine rechte Seite, am Schenkel erhielt er eine leichte Kontusion, in der Seite fühlte er Schmerzen. Der Unfall hatte infolge der langsamen Bewegung des Wagens keine schlimmeren Folgen gehabt, und die Schmerzen verloren sich schon am nächsten Tage. Auch die Instrumente waren nicht beschädigt, aber GAUSS fühlte eine Mutlosigkeit, die er sonst garnicht an sich kannte (G.-O. Nr. 564). Er lud OLBERS sehr dringend ein, ihn zu be-

1) GAUSS hatte BESSEL zuerst 1807 in Lilienthal persönlich kennen gelernt. (GAUSS an JOH. VON MÜLLER 15. 7. 1808, Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 131. G.-B. Nr. 28. 29.)

suchen und wollte sogar nötigenfalls seinen Aufenthalt in Zeven verlängern, wo er übrigens noch den Durchhau zwischen Bremerlehe und Brillit, den MÜLLER und sein Sohn besorgten, abwarten wollte. Ungefähr vom 6. bis 8. Mai führte OLBERS seinen Besuch in Zeven zur grossen Freude von GAUSS wirklich aus. Am 10. Mai verliess auch GAUSS dann Zeven und begab sich nach Bremen, was sich erst im letzten Augenblick entschied. Er teilte noch vorher OLBERS die telegraphischen Zeichen mit, durch die er HARTMANN, der von Bremen aus leuchten sollte, und KLÜVER, der den Heliotropen in Garlste zu bedienen bestimmt war, von seinen Absichten verständigen wollte. Hauptmann MÜLLER wurde nach Langwarden und Jever gesandt, um diese Stationen vorzubereiten. Zehn Tage bis zum 22. Mai nahmen die Beobachtungen in Bremen in Anspruch. GAUSS ging nun nochmals nach Osterholz, um in Garlste zu beobachten. Bis zum 28. erhielt er nichts wegen des dicken Moorrauchs und der unaufhörlich auf einander folgenden Gewitterschauer und benutzte die ersten Tage zur Berechnung der Stationsbeobachtungen. Die Winkel wurden durch die neuen Messungen verschlechtert[1]). Über die Ursache äusserte sich GAUSS zunächst noch nicht, er scheint aber mit OLBERS in Bremen über die merkwürdigen Erfahrungen, die er gemacht hatte, gesprochen zu haben (G.-SCH. Nr. 257)[2]).

Am 6. Juni reiste er nach Bremerlehe (Lehe) ab, wo er in einer Woche (7. bis 13. Juni) die Messungen vollendete. Schlechtes Quartier[3]) hatte wieder seinem Befinden geschadet, und er sehnte sich nach Varel, wo der Aufenthalt sehr gut sein sollte.

In Varel war jedoch das Wetter nicht sehr günstig, auch das Befinden hob sich nur langsam trotz der eingetretenen Kälte und des Gebrauchs einiger Seebäder in dem eine Stunde entfernten Dangart[4]). Am 26. konnten die Arbeiten dort beendet werden, und es kam nun zunächst Langwarden an die Reihe, weil Neuwerk eingemessen werden sollte, das SCHUMACHER mit einem

1) Die Beobachtungen in Garlste litten auch dadurch, dass die Lichter von Varel und Lehe vor 5 Uhr gewöhnlich garnicht über die vorliegenden Holzsäume kamen und dann auch noch so wallend waren, dass in der Regel vor 6 oder $6^1/_2$ Uhr keine gescheiten Messungen gemacht werden konnten (G.-O. Nr. 577).

2) Vergl. G.-SCH. Nr. 259 und G.-O. Nr. 570.

3) Er wohnte bei Madame MUHL.

4) Es scheinen warme Seebäder gewesen zu sein. G.-SCH. Nr. 252.

Heliotropen hatte besetzen lassen; es sollte der Anschluss an die dänischen Dreiecke dadurch hergestellt werden. GAUSS kam am 27. Mittags an und blieb bis zum 12. Juli. Die Messungen quälten ihn lange unbeschreiblich, Diskordanzen wie sonst nirgends machten ihn ganz irre (G.-SCH. Nr. 256). Endlich kam er einer wichtigen Fehlerquelle auf die Spur[1]). Von Langwarden

1) »Die hiesigen Messungen« (in Langwarden) »haben mir unbeschreibliche Qual gemacht. Diskordanzen so gross, wie ich sie nie und nirgends gehabt habe, liessen mich wegen ihrer Quellen in Ungewissheit und machten mich ganz irre, so dass ich keiner einzigen Messung mehr trauen konnte. Was hatte Schuld? Lateral-Refraktionen, das Instrument, Wind, der auf die Objektivhälfte öfter überwiegend wirkte, Seiten-Refraktionen« (GAUSS hat übersehen, dass er sie eben genannt hatte) »genierte Körperstellung in dem sehr engen Turm, Reaktion des Körpergewichts, wenn während der Messung immer der Platz wechselweise verändert werden muss pp.? Längst war ich überzeugt, dass das Instrument seiner Natur nach strikte alle Messungen zu klein zu geben eine Tendenz hat; allein immer hatten die Versuche gezeigt, dass der Unterschied zwischen direkter und Supplement-Messung kaum merklich war, höchstens ein paar Zehntel-Sekunden, und höchstens aus einer sehr grossen Anzahl Messungen ausgemittelt werden konnte. Hier zeigten sich nun Fälle, wo der Gyrus horizontis über 6″ oder 7″ betrug und immer zu klein war. Das Instrument ist dasselbe, was 1822—24 (nicht 1821) gebraucht ist, immer von mir selbst sorgfältig gereinigt und zusammengesetzt. Hatte es sich dieses Jahr so verschlechtert? Durchgreifende Versuche wurden durch ungünstiges Wetter, Windsturm und dergl. fast unmöglich gemacht, da dazu natürlich immer viele und gute Messungen erfordert werden. Bei den nicht zahlreichen Versuchen wollte aber immer weder ein bedeutender Einfluss des Zukleinmessens, wenn es durch Supplementmessung geprüft wurde, noch von dem Körpergewicht sich ergeben; ich nahm das Instrument ganz auseinander, ohne irgend etwas Fehlerhaftes, Loses pp. zu finden, liess abwechselnd meinen Sohn pointieren und mehr dergl., die Ungewissheit wurde nur immer grösser und dunkler. Endlich habe ich aber doch einige Hoffnung, einem Umstande auf der Spur zu sein, den ich zwar längst gekannt, aber seinen Einfluss nicht für so gross gehalten habe, wie er zu sein scheint. Ich fand nämlich, dass sämmtliche hiesige Messungen, insofern sie nicht sonst unter verdächtigen Umständen gemacht waren, z. B. [bei] starkem Wind, unruhiger Luft, die hier oft oder gewöhnlich sogar in den anderwärts fast immer besseren späten Nachmittagsstunden Statt hat, sich ganz gut unter einander vertrugen, wenn ich nur die Messungen auf das Bremerleher Heliotroplicht (die freilich gerade die zahlreichsten waren) ausschloss; allein diese, obwohl gewöhnlich unter sich in den einzelnen Reihen harmonierend, passten nicht zu dem Ganzen und differierten auch zuweilen unter sich sehr stark, wenn ich allein oder mit meinem Sohne zusammen versuchsweise gemessen hatte. Dies führte auf die Vermutung, dass (wenn nicht sonst quid pro quo's dort vorgefallen) das Pointieren auf das Heliotroplicht in der noch nicht 3 Meilen entfernten Laterne, die gewöhnlich deutlich miterscheint, fehlerhaft ist, indem das Auge das nicht reine Fadenintervall nicht unbefangen biseziert. Es wäre jetzt zu weitläufig, Ihnen zu schreiben, was mich noch in dieser Vermutung mehr bestärkte. Gestern habe ich nun das Bremerleher Licht auf andre Weise, nämlich immer a u f einen Faden pointiert, und die sehr zahlreichen so gemachten Messungen stimmen nun unter sich und mit den übrigen, wo die Richtung nicht entriert, sehr gut, aber nicht mit den früheren. Der Unterschied scheint im Pointieren auf mehr als 2″ bis 3″ gehen zu können und zwar gerade in dem Sinn, wie ich es nicht erwartete, obgleich es auch so psychologisch sehr natürlich sein mag. Das Licht erscheint nicht im Zentrum der etwa 30″ breiten Laterne; es sollte nach der dortigen Abmessung etwa 1½″ rechts erscheinen, aber das Ensemble aller Messungen zeigt, dass ich immer wohl 4″ rechts

aus nahm GAUSS noch Zenitdistanzen der Meeresfläche zur Zeit der Ebbe und von verschiedenen Punkten auf den Deichen, die er durch eine kleine Triangulation festlegte; er tat dies, um die Meereshöhe der Göttinger Sternwarte ableiten zu können.

In Jever, wo an dem Turm ein kanzelartiger Anbau hatte angebracht werden müssen, um alle Richtungen zu erhalten, erreichte GAUSS den anderen Endpunkt der Anschlussseite Jever-Varel der KRAYENHOFFschen Vermessung. Er dachte daran, die Triangulation auf einer Seite Varel-Wangeroog fortzubauen und begab sich für zwei Tage nach Wangeroog, wo er aber weder Langwaarden, noch Neuwerk erblickte. Da es ferner sehr schwierig schien, eine feste Aufstellung auf dem dortigen Turm zu erhalten, gab er auch in Rücksicht auf seine unter der Hitze wieder sehr angegriffene Gesundheit den Plan ganz auf. Die von ihm in Varel erhaltenen Winkel zeigten grosse Verschiedenheiten (von 15″) gegen die KRAYENHOFFschen, die möglichenfalls in einem Zentrierungsunterschied zu suchen waren. Doch war eine Anfrage bei KRAYENHOFF zur Zeit unmöglich, da dieser sich in Surinam befand[1]).

Nachdem er am 19. Juli fertig geworden war, blieb GAUSS auf der Durchreise die Nacht vom 23. zum 24. in Bremen. An diesem Abende kam auch der unsichere Anschluss durch die KRAYENHOFFschen Dreiecke an den englisch-französischen Bogen zur Besprechung. OLBERS schlug vor, da die südlichen KRAYENHOFFschen Dreiecke genauer als die nördlichen waren, eine neue Reihe von Dreiecken anzufangen, die von Bremen in südwestlicher Richtung durch das Osnabrücker Gebiet sich zögen und bei Bentheim eine neue Ver-

---

pointiert haben muss. Man ist sich also wohl, wenn auch nicht deutlich bewusst, dass das Licht seitwärts von der Mitte ist, und tut, um dies gewiss zu berücksichtigen, mehr als man sollte. Wenn ich übrigens oben sagte, dass die Laterne gewöhnlich deutlich erscheint, so ist dies doch nicht so zu verstehen, dass diese Deutlichkeit immer so gross ist, wie zu einem ganz scharfen Sehen erfordert wird. Allein die Erfahrung zeigt nun, wie es scheint, dass es gewöhnlich auf eine nachteilige Weise geniert. Bei dem Pointieren von Brillit auf Zeven tritt ein ganz ähnlicher Fall ein, und ich bin nun sehr neugierig, ob auch dort die künftigen Messungen bei der anderen (übrigens für das Auge viel beschwerlicheren und ermüdenderen) Methode eine günstige Änderung erleiden werden«. G.-O. Nr. 587.

»Ich habe bei meinen trigonometrischen Winkelmessungen unzählige Male die Erfahrung gemacht, dass ich die Bisektion des Fadenintervalls bedeutend unrichtig beurteilte, wenn die Symmetrie fehlte, bei Heliotroplicht z. B. auf einem Turme in mässiger Entfernung; ich musste in solchen Fällen immer, um richtige Messungen zu machen, das Licht auf einen Faden bringen«. G.-O. Nr. 631.

1) Holländische Kolonie in Guayana in Südamerika.

bindung bringen könnten. Er fügte die Versicherung hinzu, dass der Senat von Bremen aus Interesse für das wissenschaftliche Unternehmen die Beihülfe von KLÜVER während der noch übrigen Zeit des Jahres gern bewilligen würde. GAUSS trug aber doppeltes Bedenken, einmal wegen Überschreitung seines Auftrages, dann wegen seiner gänzlichen Unbekanntschaft mit dem Gelände zwischen Bremen und Bentheim, auf diesen Plan einzugehen.

GAUSS ging nun nach Gnarrenburg bei Brillit, wo er sich vom 29. Juli bis 2. August aufhielt; er hatte diesen Platz im Frühjahr des Moorrauchs wegen im Rücken gelassen, hatte aber auch jetzt wieder mit diesem Hindernis zu kämpfen. Durch die von neuem eingetretene Hitze, fühlte er sich gänzlich ausser Stande, noch weitere Messungen vorzunehmen, holte nur noch einige Richtungen in Zeven am 4. und 5. August nach, wollte dann von Wilsede aus noch nach dem Kötersberge, gab aber auch diesen auf und kehrte direkt nach Göttingen zurück. Er hat zwar später noch eine Fortsetzung seiner Arbeiten ins Auge gefasst, stand aber tatsächlich am Ende seiner Gradmessung.

46. Erholungsreise nach Süddeutschland. Gegen den Herbst machte GAUSS mit seiner Frau, der eine Badekur verordnet war, eine Reise in das südliche Deutschland über Marburg und Mannheim nach Baden-Baden und zurück über den Schwarzwald, das Murgtal, Tübingen, Stuttgart, Würzburg und Gotha[1]), bei welcher Gelegenheit er GERLING, NICOLAI und LINDENAU wiedersah und ECKHARDT, BOHNENBERGER und WURM persönlich kennen lernte. Mit Befriedigung sah er, dass bei den Darmstädtischen, Badischen und Württembergischen Messungen sehr viele Heliotrope in Gebrauch waren, wobei die für BOHNENBERGER, der ihre Einrichtung nur nach den wesentlichsten Angaben von GAUSS kannte, von BAUMANN konstruierten in Beziehung auf Dimensionen und Gestalt kompendiöser, transportabler und wohlfeiler als die von RUMPF hergestellten waren.

1) G.-O. Nr. 591.

XI. Abschnitt. Flächentheorie.

47. Angestrengte theoretische Arbeiten. Die Reise wirkte infolge des übermässig heissen Spätsommers nicht wohltätig auf die Gesundheit von GAUSS, und er kränkelte während des ganzen folgenden Winters[1]). Nachdem die Preisschrift im Herbst 1825 im Druck erschienen war, fing GAUSS im Oktober an, einen Teil der allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen wieder vorzunehmen, die die Grundlage seines projektierten Werkes über höhere Geodäsie bilden sollten. Dieser so reichhaltige, wie schwierige Gegenstand[2]) liess ihn zu anderen Arbeiten zunächst garnicht kommen, und es war ihm sehr angreifend, wenn Vormittags die Stunde des Kollegs kam, sich mit Frische in die Sachen hineinzudenken, die er seinen Zuhörern vorzutragen hatte, und dann wieder mit Lebendigkeit bei seinen Meditationen heimisch zu sein. Es kam hinzu, dass die Nächte meist bis auf eine oder zwei Stunden schlaflos waren, aber OLBERS hatte wohl nicht Unrecht, wenn er die Beschwerden, die GAUSS empfand, mit den Wehen verglich, die so unangenehm und schmerzhaft sie auch seien, die Geburt eines stattlichen Heros ankündigten. GAUSS glaubte, bei seinen Untersuchungen sehr weit ausholen zu müssen, indem er sogar seine Ansicht über die Krümmungshalbmesser bei ebenen Kurven vorauszuschicken beabsichtigte. Es war ihm zweifelhaft, ob er die rein geometrischen Teile von dem Werke abtrennen und in den Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlichen sollte, beschloss aber vorerst die Form der Bekanntmachung auf sich beruhen zu lassen und zunächst alles zu Papier zu bringen[3]). GAUSS bekennt, kaum während einer Periode seines Lebens so angestrengt gearbeitet zu haben, wie in diesem Winter, und er glaubte, vergleichsweise auch nie so wenig reinen Ertrag geerntet zu haben. Bei mathematischen Anstrengungen, wo nicht das Arbeiten, wie das Verfertigen eines Schuhs über einen gegebenen Leisten vollendet werden könne, war dies nicht anders zu erwarten. Wochen ja Monate lang beschäftigte er

1) G.-E. 12. 3. 26., G.-B. Nr. 153.

2) »Man muss den Baum zu allen seinen Wurzelfäden verfolgen und manches davon kostet mir wochenlanges angestrengtes Nachdenken« (G.-SCH. Nr. 262).

3) G.-O. Nr. 591.

sich mit einer Aufgabe, ohne sie zu seiner Zufriedenheit lösen zu können[1]). SCHUMACHER, dem gegenüber er sich in dieser Weise äusserte, bat ihn, nicht zu strenge an dem Grundsatz, ut nihil amplius desiderari possit, festzuhalten, da ihm die Materie weit wichtiger, als die möglichst vollendete Form erschien. Aber GAUSS, der nur in Bezug auf einen für die Astronomischen Nachrichten in Aussicht gestellten Beitrag gesagt hatte, dass er etwas ganz Unbedeutendes sehr ungern gäbe, erwidert auf diesen Rat etwas erregt: »So werden Sie es doch nicht verstehen, als ob ich mehr für die Wissenschaft leisten würde, wenn ich mich mehr damit begnügte, einzelne Mauersteine, Ziegel etc. zu liefern, anstatt eines Gebäudes, sei es nun ein Tempel oder eine Hütte, da gewissermassen doch das Gebäude auch nur Form der Backsteine ist. Aber ungern stelle ich ein Gebäude auf, worin Hauptteile fehlen, wenn gleich ich wenig auf den äussern Aufputz gebe. Auf keinen Fall aber, wenn Sie sonst mit Ihrem Vorwurf auch Recht hätten, passt er auf meine Klagen über die gegenwärtigen Arbeiten, wo es nur das gilt, was ich Materie nenne; und ebenso kann ich Ihnen bestimmt versichern, dass wenn ich gern auch eine gefällige Form gebe, diese vergleichsweise nur sehr wenig Zeit und Kraft in Anspruch nimmt oder bei früheren Arbeiten genommen hat. Höchst drückend aber fühle ich bei schleunigen Arbeiten meine äusseren Verhältnisse«[2]).

Solche trübe Stimmungen wurden abgelöst durch frohlockende Ausrufe[3]): »Ich habe viel, viel Schönes herausgebracht!« So gelang ihm als ein glück-

---

1) P. STÄCKEL bemerkt hierzu (*Gauss als Geometer*, Werke X 2, Abh. 4, S. 104): »Wie wir sahen [a. a. O., S. 95], hatte GAUSS bei zwei besondern Formen des Linienelementes [$ds^2 = m(dp^2 + dq^2)$ bei der konformen Abbildung, und $ds^2 = dp^2 + G dq^2$ bei der Darstellung durch geodätische Polarkoordinaten] das Krümmungsmass durch den darin auftretenden Koeffizienten und dessen erste und zweite partiellen Ableitungen ausdrücken können. Er wusste, dass das Krümmungsmass bei den Biegungen erhalten bleibt, folglich musste bei der allgemeinen Form des Linienelementes [$ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$] das Krümmungsmass ebenfalls durch die darin auftretenden Koeffizienten und deren partielle Ableitungen darstellbar sein. Allein die Rechnungen, die dort zum Ziel geführt hatten, liessen sich nicht ohne weiteres auf den Fall beliebiger bestimmender Grössen übertragen; hierauf beziehen sich wohl die Klagen über die Unfruchtbarkeit langer Bemühungen in dem Briefe an OLBERS vom 19. Februar 1826.«

In der angeführten Abhandlung von P. STÄCKEL ist die Entstehung der *Disquisitiones circa superficies curvas* eingehend behandelt; es konnte daher hier um so mehr auf eine Wiederholung verzichtet werden, als direkte Beziehungen zur Geodäsie dabei nicht in Frage kommen.

2) Er prägte das für ihn bezeichnende Wort: »Unabhängigkeit ist das grosse Losungswort für Geistesarbeiten in die Tiefe.«

3) G.-O. Nr. 596.

licher Fund die Generalisierung des LEGENDREschen Theorems, dass auf der Kugel die Seiten proxime den Sinus der um ein Drittel des sphärischen Exzesses verminderten Winkel proportional sind[1]), auf krumme Flächen jeder Art auszudehnen, wo die Verteilung ungleich geschehen muss[2]).

48. Ausgleichung, Krayenhoffsche Triangulation, Theoria combinationis Pars III. Da GAUSS damals hoffte, die Beobachtungen am Zenitsektor gleichzeitig mit SCHUMACHER noch im Spätsommer vornehmen zu können, beschäftigte er sich im Sommer 1826 bereits mit Vorbereitungen dazu.

Im Frühjahr 1827 begann GAUSS die scharfe Ausgleichung seines Dreiecksnetzes, das 32 Punkte, 51 Dreiecke und 146 Richtungen enthielt. Die Ausgleichung der Höhen hatte er als ein viel leichteres Geschäft bereits im April beendet. Aber die Ausgleichung des Winkelsystems, bei der alle Willkür ausgeschlossen werden sollte, war ein sehr beschwerliches Geschäft. Insbesondere war es langweilig, bei allen Messungen vorher die kleinen Reduktionen anzubringen. Es handelte sich um die von GAUSS gefundene Reduktion wegen der Höhe des Objekts über der Erdoberfläche, die daher rührt, dass die Punkte, die in einer Vertikallinie liegen, nicht in einer Vertikalebene erscheinen, während BESSEL die weniger erhebliche wegen des Winkels der geodätischen Linie mit dem Vertikalschnitt angebracht hatte[3]). Den grössten Betrag ($-0''{,}041$) hatte die Gausssche Reduktion bei der Richtung von Lichtenberg zum Brocken.

Sodann nahm GAUSS von neuem eine Prüfung der KRAYENHOFFschen Messungen im Innern von Holland vor, die ihn über seine eigenen Richtungsfehler (in maximo $1''{,}3$) beruhigten. Denn wenn auch die Schlussfehler der Dreiecke stimmten, so zeigte sich durch Prüfung der Seitenverhältnisse, dass z. B. in einem von KRAYENHOFF gemessenen Fünfeck die Winkel an der Peripherie im Durchschnitt $3''{,}0$ geändert werden müssten, so dass Fehler der Winkelsumme im Dreieck von $10''$ zu erwarten waren. Diese Anomalien konnten aber in Holland bei kurzen Sichten und hochgelegenen Stationen nicht den Wirkungen der Seitenrefraktion, sondern mussten den Messungen

1) Vergl. LEGENDRE, *Éléments de géométrie*, 14. édition. Bruxelles 1832, Seite 411.

2) *Disquisitiones c. s. c.* art. 29, Werke IV, S. 285; G.-O. Nr. 593.

3) G.-O. Nr. 602. Vergl. GALLE, *Über die Gauss-Besselschen Azimutreduktionen. Lotabweichungen im Harz.* Veröffentl. des Preuss. Geodätischen Instituts. N. F. Nr. 36. Anhang. Berlin 1908.

selbst zur Last gelegt werden. KRAYENHOFFS *Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande* (La Haye 1815) hatte er sich für diese Untersuchungen von OLBERS zugleich mit MÜLLERS Karte geliehen.

Die Beschäftigung mit den Bedingungen, denen die Messungen in einem Dreiecksnetze zu genügen haben, gab GAUSS den Anstoss, in einem Supplementum oder dritten Teil seiner Theorie der Kombination der Beobachtungen[1]) die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate nach bedingten Beobachtungen niederzulegen. Er illustrierte sie durch zwei Beispiele, von denen das erste der KRAYENHOFFschen Triangulation[2]) entnommen ist und 9 Punkte derselben umfasst, während das zweite das Netz zwischen den 5 Punkten Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode, Wilsede seiner eigenen Triangulation entnommen ist. Diese Dreiecke benutzte er dann auch, um die Genauigkeit zu ermitteln, mit welcher eine Seite (Falkenberg-Breithorn) aus einer andern (Wilsede-Wulfsode) mit Hilfe der ausgeglichenen Beobachtungen bestimmt werden kann. In kurzer Zeit war diese Arbeit vollendet[3]), die er als einen Teil des projektierten Werkes über höhere Geodäsie ansah, den er aber als eine selbständige Abhandlung herauszugeben vorzog. Am 16. September 1826 legte er sie der Göttinger Sozietät vor.

XII. Abschnitt. Vorbereitung zu den Sektorbeobachtungen.

49. Bestimmung der Instrumentalfehler. Im Beginn des Jahres 1827 wusste GAUSS selbst noch nicht, ob er seine Messungsarbeiten als vollendet ansehen sollte oder nicht[4]). Er wollte eine zweite Verbindung über Bentheim nur

1) Dieser dritte Teil betrifft den Fall »wo die data der Aufgabe nicht in der Form vorliegen, die im 1. Teil vorausgesetzt wird. Ob man sie gleich immer in diese Form bringen kann, so ist es doch oft vorteilhaft, es nicht zu tun, sondern die Aufgabe auf eine ganz eigene Art zu behandeln«. G.-E. 9. 7. 26.

2) »Beiläufig ist daraus indirekt auch ersichtlich, wie weit die KRAYENHOFFschen Messungen von derjenigen Genauigkeit entfernt sind, die man ihnen mit Unrecht beigelegt hat.« G.-B. Nr. 154.

3) Bei der Ausarbeitung machte ihm vorzüglich die Wahl der Bezeichnungen viel Plage. G.-E. 9. 7. 26. »Keine meiner Schriften hat mich in dieser Beziehung mehr Zeit gekostet, als das *Suppl. theor. comb.*; worin so viele Sachen zu bezeichnen waren; blos aus diesem Grunde (und weil man beim ersten Ausarbeiten sich gleichsam festfährt) hat sie wohl 3 oder 4 mal umgearbeitet werden müssen.« G.-G. 29. 12. 1839.

4) G.-SCH. Nr. 265.

dann herstellen, wenn es verlangt würde, aber sich nicht dazu drängen[1]). Dagegen sah er die Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Altona und Göttingen als ein dringendes Erfordernis an[2]). Sehr erwünscht kam es ihm, dass der Herzog von Sussex der Sternwarte eine gute Pendeluhr von Hardy zum Geschenk machte.

Es gereichte Gauss, wie er an Olbers schreibt[3]), zum Vergnügen, eine Idee zuerst ins Leben gerufen zu haben, die für die gesamte praktische Astronomie von unendlicher Wichtigkeit sei[4]). Die Idee, die in ähnlicher Weise schon Rittenhouse[5]) und Lambert[6]) gehabt hatten, war bis dahin noch eine tote, jetzt war sie lebend: »Es scheint, dass sie in den Köpfen der praktischen Astronomen erst recht zur Klarheit bringt, für jede Aufgabe der praktischen Astronomie das direkte Mittel sofort aufzuspüren und dadurch gewissermassen erst dieses Feld der Geistestätigkeit zu einer Wissenschaft zu machen, das bisher nur ein dunkles Herumtappen war. Die Anwendbarkeit jener Idee ist von unerschöpflicher Mannigfaltigkeit; ich habe zuerst nur ein paar Fälle angedeutet, viele andre sind mir ausserdem zum Teil gleich anfangs, zum Teil nachher eingefallen«[3]). Gauss hat nun nichts über diesen Gedanken, der ihn damals beschäftigte, veröffentlicht und es scheint auch in seinem Nachlasse nichts darüber vorhanden zu sein. Wenn daher auch über die ursprüngliche allgemeinste Idee[7]) nichts vorliegt, so sind doch verschiedene Formen, in denen

---

1) Um Anfang April sandte er ein Schreiben an Münster, in dem er schrieb, dass er auch künftig seine Kräfte den trigonometrischen Messungen zur Verfügung stellen wolle, wenn es von ihm gefordert würde.

2) G.-Sch. Nr. 285. Wie Cato seine Reden mit ceterum censeo, so schloss Gauss seine Briefe an Schumacher mit einer Mahnung, den Breitenunterschied nicht zu vergessen.

3) G.-O. Nr. 596.

4) Vergl. F. A. L. Ambronn, *Instrumentenkunde*, Teil I, Berlin 1899, Seite 296.

5) Vergl. die Bemerkung von Kater in den Astronomischen Nachrichten, Band 4 (1826), S. 225.

6) J. H. Lambert, *Deutscher gelehrter Briefwechsel*, Augsburg 1782—84, Band 3, S. 199, vergl. Band 4, S. 209.

7) Die allgemeine Idee dürfte darin bestanden haben, dass ohne mechanische Eingriffe am Instrument mit Hilfe rein optischer Methoden Instrumentalfehler bestimmt oder eliminiert werden. Sie beruhen einmal darauf, dass die von einem durch Beleuchtung sichtbar gemachten Punkte der Brennebene eines Fernrohrs ausgehenden Lichtstrahlen das Objektiv desselben parallel verlassen und dann in das Objektiv des mit dem Beobachtungsinstrument verbundenen Fernrohrs eintretend sich wieder in der Brennebene dieses Fernrohrs vereinigen; sodann dass die aus dem vertikal gestellten Beobachtungsrohr parallel austretenden Lichtstrahlen durch einen horizontalen Spiegel in dasselbe Fernrohr zurückgeworfen werden, endlich dass ein Stern direkt

sie in die Erscheinung getreten ist, dadurch bekannt geworden, dass andere ihm, wie das öfter geschehen ist, in der Veröffentlichung zuvorgekommen sind. Zuerst war es BESSEL, der die Methode, die Biegung astronomischer Fernrohre zu bestimmen, in den Astronomischen Nachrichten[1]) veröffentlichte, die mit derjenigen von GAUSS übereinstimmte, von der BESSEL im Juli 1824 OLBERS Mitteilung gemacht hatte. Sodann schrieb BOHNENBERGER über eine neue Methode, den Indexfehler eines Höhenkreises zu bestimmen und die Horizontalachse eines Mittagsfernrohres ohne Lot oder Libelle zu berichtigen[2]). GAUSS hatte dieselbe Idee zur Bestimmung des Kollimationsfehlers gleich anfangs gehabt, aber die Ausführbarkeit war ihm noch schwierig erschienen[3]). Erst jetzt gelang es ihm, wie er an OLBERS am 14. Juli 1826 schrieb, den Nadirpunkt nach dieser Methode zu bestimmen[4]), wobei er nicht die Fäden im Quecksilberhorizont mit ihrem Spiegelbild zur Deckung brachte, sondern zwei symmetrische Einstellungen in die Mitte der Fäden machte[5]).

Eine andere Messung, die mit den Vorbereitungen der Breitenbestimmung zusammenhing, war die Bestimmung der Teilungsfehler des REICHENBACHschen Meridiankreises. An diesem war 1824 durch 89 Beobachtungen des Polarsterns die absolute Polhöhe von Göttingen erhalten worden. Andrerseits sind dann auch die Zenitdistanzen der 43 Sterne, die am Zenitsektor zur relativen Polhöhenbestimmung von Göttingen gegen Altona verwendet sind, zur Kontrolle noch am REICHENBACHschen Meridiankreise gemessen worden[6]), was GAUSS

und sein Spiegelbild im horizontalen Spiegel eingestellt werden. Auf diesen Wegen können der Zenitpunkt bezw. Nadir- oder Horizontpunkt des Kreises, der Kollimationsfehler, die Biegung, die Fadendistanzen, der Fokus usw. bestimmt werden.

1) Band 3, Altona 1825, Nr. 61. Briefwechsel OLBERS-BESSEL, Nr. 382.

2) Astronomische Nachrichten, Band 4, 1826, Nr. 89.

3) »Ich wusste nicht recht, wo ich die Illumination anbringen sollte; BOHNENBERGER hat nun die praktische Ausführbarkeit bewährt, obgleich ich wünschte, dass er in seiner Beschreibung etwas deutlicher gewesen wäre. Er bringt bei doppeltem Okular sie zwischen beiden an; aber bei einfachem zwischen dem Netz und dem Augendeckel. Zwischen beiden sitzt ja aber das Glas beinahe in der Mitte der Theorie nach; ist nun sein Illuminateur zwischen Netz und Okular, oder zwischen Okular und Augendeckel? Welche Form hat der Illuminateur und welche Grösse ungefähr die Öffnung? Ich werde nun darüber, da BOHNENBERGER so unvollständig sich ausdrückt, Versuche machen, obwohl es unangenehm ist, dazu ein Okular gleichsam erst aufopfern zu müssen, da hier niemand auf solche Glasarbeiten eingerichtet ist. Es wäre vielleicht gut, die ganze letzte Okularröhre von Glas zu machen.« G.-O. Nr. 596.

4) G.-O. Nr. 604.

5) G.-SCH. Nr. 274.

6) *Breitenunterschied*, Art. 11, 21, Werke IX, S. 39. 50.

sicherlich von vornherein ins Auge gefasst hatte. Es wurden mit vier von REPSOLD gelieferten Mikroskopen 30 Teilstriche von 12 zu 12 Grad je fast 200 Mal in abgeänderten Kombinationen eingestellt. Anfangs hatte sich GAUSS vorgenommen, die Untersuchung auf die doppelte Anzahl der Teilstriche auszudehnen, gab aber des grossen dazu erforderlichen Zeitaufwands wegen angesichts der Geringfügigkeit der erhaltenen Verbesserungen diese Absicht auf. Von diesem Zeitpunkt ab hat er immer zwei REPSOLDsche Mikroskope zur Ablesung des Kreises benutzt.

50. Zwei Veröffentlichungen. Katalog der Koordinaten. SCHUMACHER sandte GAUSS die Ergebnisse der vorjährigen Chronometer-Expedition, die eine gute Übereinstimmung zeigten[1]), da TIARKS um Rat gebeten hatte, wie er die Längendifferenzen aus diesen Elementen ableiten solle. Diese Anregung gab GAUSS Veranlassung einen Artikel über chronometrische Längenbestimmungen für die Astronomischen Nachrichten zu verfassen[2]). Er weist in dieser Abhandlung, in der die Fehlergleichungen aufgestellt und die Gewichte den Längendifferenzen umgekehrt proportional gesetzt werden, noch besonders darauf hin, bei der Auflösung der Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate Näherungswerte der Unbekannten einzuführen und deren Verbesserungen als neue Unbekannte zu betrachten.

Im Oktober erhielt GAUSS den Besuch von SCHUMACHER, der auf der Hin- und Rückreise von München bei ihm einkehrte. GAUSS hatte bei dieser Gelegenheit SCHUMACHER einige Belehrung über die Berichtigung des Heliotropen der zweiten Konstruktion gegeben. Auf Wunsch von SCHUMACHER schickte er ihm noch einen Aufsatz über diese Berichtigungsmethoden, der, nachdem ihn CLAUSEN ins Reine geschrieben, im Anfang 1827 dann auch im Druck mit erläuternden Figuren erschienen ist[3]).

Eine sehr ermüdende und zeitraubende Beschäftigung bestand in der Berechnung der Koordinaten der Nebenpunkte; GAUSS konnte einen Katalog

1) Die Chronometerbeobachtungen sind 1824 bei Gelegenheit der von der englischen Admiralität veranstalteten Expedition zur chronometrischen Bestimmung der Längenunterschiede zwischen Altona, Bremen, Helgoland und Greenwich ausgeführt worden. Astronomische Nachrichten, Band 5, 1827, S. 225. Die Übereinstimmung des Längenunterschieds zwischen Altona und Helgoland bezeichnet GAUSS als bewundernswert. G.-SCH. NR. 279.

2) Astronomische Nachrichten, Band 5, 1827, S. 227.

3) Astronomische Nachrichten, Band 5, 1827, Nr. 116.

aufstellen, der fast 400 Punkte enthielt, schliesslich legte er aber diese Arbeit bei Seite, obgleich noch der südliche Teil seines Messungsgebietes fehlte, und widmete sich bei Beginn des neuen Jahres der eigentlichen Ausarbeitung der dritten geodätischen Abhandlung, wie er die *Disquisitiones* anfänglich bezeichnete. Unter den Theoremen, die er bereits gefunden hatte, befand sich der Lehrsatz, dass die Verbindungslinie der Endpunkte der von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien gleicher Länge auf ihnen allen senkrecht stehen[1]). GAUSS erwähnt dann die höchst zierliche Relation zwischen der Summe der Winkel eines durch kürzeste Linien begrenzten Polygons und der Fläche, die die Normalen auf der krummen Fläche an der Himmelskugel ausfüllen[2]). Er gedachte auch die allgemeine Theorie der Reduktion der beobachteten Winkel auf die Winkel, die bei der konformen Projektion zwischen den geradlinigen Verbindungen stattfinden, in diese Abhandlung aufzunehmen[3]), hat dann aber tatsächlich die Abbildungsaufgaben zurückgestellt[4]).

XIII. Abschnitt. Bestimmung des Breitenunterschiedes.

51. Die Beobachtungen am Sektor. SCHUMACHER hatte Sir EDWARD SABINE gebeten, ein unveränderliches Pendel für ihn zu bestellen und damit an dem Platze, wo KATER eine Schweremessung gemacht hatte, zu beobachten. SABINE stellte darauf seinen Besuch in Altona in Aussicht, wohin er das Pendel selbst bringen wollte. Dies schien SCHUMACHER eine günstige Gelegenheit, den

1) *Disquisitiones circa superficies curvas* Art. 15. Werke IV, S. 239.

2) Hierauf bezieht sich vermutlich eine Bemerkung, die auf demselben Blatte steht, dem die Notiz [8] in Werke IX, S. 113 entnommen ist. Sie lautet:

»Dieses Theorem integriert und mit $dr.\tang i - d\varphi = 0$ verbunden, welches die charakteristische Bedingung für die Darstellung der kürzesten Linie enthält, indem $90^0 - i$ die Neigung eines Elements der Darstellung gegen die Linie konstanter u enthält, dient zum einfachen Beweise des schönen Lehrsatzes, dass der Überschuss der Winkel eines durch kürzeste Linien begrenzten Polygons über 360^0 allemal dem Flächeninhalt der korrespondierenden Figur auf der Himmelskugel, Radius $= 1$, gleich ist.«

Für das Dreieck ist der Satz im Art. 20, Werke IV, S. 244, der Abhandlung gegeben.

3) Also etwa dasjenige, was in Art. 12 der ersten Abhandlung der *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*, Werke IV, S. 275, enthalten ist.

4) G.-O. Nr. 607.

RAMSDENschen Sektor nach seiner Verwendung in Göttingen und Altona wieder nach England zurück zu befördern. Er schlug deshalb GAUSS vor, die Breitenbeobachtungen im März und April vorzunehmen, an denen er dann allerdings selbst in vollem Umfange teilzunehmen durch eine notwendige Reise nach Kopenhagen verhindert war, und empfahl, den Ingenierleutnant v. NEHUS auf Kosten der dänischen Regierung als Gehilfen bei diesen Beobachtungen zu verwenden, den er als tüchtigen Beobachter und angenehmen Gesellschafter rühmte. Obgleich GAUSS lieber gesehen hätte, wenn SCHUMACHER selbst nach Göttingen gekommen wäre, erklärte er sich doch auch mit der Assistenz von NEHUS einverstanden. Er rechnete darauf, dass SCHUMACHER bei Zeiten die nötigen Vorkehrungen für die Aufstellung des Sektors in seinem Garten in Altona, in dem auch die Sternwarte lag, treffen würde, wo unter demselben Beobachtungszelte, das MUDGE in England gebraucht hatte, die Beobachtungen vorgenommen werden sollten. GAUSS ging nun an die Auswahl der Sterne, bei der er den Rat von SCHUMACHER erbitten musste, da er über die Lichtstärke des Sektors nicht unterrichtet war, während SCHUMACHER ihn schon durch die Beobachtungen in Kopenhagen kannte. Nachdem NEHUS im März nach Göttingen gekommen war, wo ihm GAUSS eine Unterkunft in der Nähe der Sternwarte besorgt hatte, begannen in den ersten Tagen des April die Beobachtungen, bei denen GAUSS die Einstellungen machte und die Antritte an die Meridianfäden beobachtete, während NEHUS die Ablesung der Mikrometerschrauben und die Einstellung des Lotfadens besorgte, auch darauf achtete, dass das Wassergefäss, worin das Lot eintauchte, immer gehörig gefüllt war. Am 16. Mai konnte der Sektor von Göttingen nach Altona abgehen, wohin ihn RUMPF transportierte, und GAUSS begann dort wieder dieselben 43 Sterne, die in Göttingen benutzt waren, zu beobachten. Anfangs war das Wetter so ungünstig, dass er fürchtete, zu einem Teile der Göttinger Beobachtungen die korrespondierenden nicht bekommen zu können, dazu fehlte ihm bis Ende des Monats die Hülfe von NEHUS[1]). Um den 20. Juli wurden auch die Messungen in Altona beendet, wo GAUSS die Gastfreundschaft von SCHU-

1) Das Befinden von GAUSS war noch durch Unannehmlichkeiten, »bei denen er sich nur leidend verhalten konnte«, affiziert; zu diesen gehörten Schwierigkeiten, die man seinem Sohne JOSEPH beim Eintritt in die Offizierslaufbahn wegen geringer Kurzsichtigkeit machte. JOSEPH hatte nach der Teilnahme an den Gradmessungsarbeiten alle Neigung zur Jurisprudenz verloren und sich bei der Artillerie beworben.

MACHER genossen hatte. In Göttingen und Altona zusammen hatte GAUSS gegen 900 Beobachtungen gemacht, wobei jeder Stern möglichst 12 mal eingestellt wurde. Der mittlere Fehler einer Beobachtung war annähernd derselbe, wie an dem Meridiankreise. Die Beobachtungen waren besonders auch dadurch anstrengend gewesen, das sie oft bis 4 oder 5 Uhr morgens gedauert hatten[1]).

Da die Ankunft von SABINE, der sich auf eine Anfrage von GAUSS bereit erklärt hatte, den Transport des Sektors zu übernehmen, sich hinzögerte, so beauftragte GAUSS damit den Hauptmann MÜLLER, der die Überführung nach England erledigen konnte, ohne Schwierigkeiten zu begegnen.

GAUSS hatte noch HANSEN aufgefordert, die in Göttingen und Altona beobachteten Sterne auch am ERTELschen zweifüssigen Meridiankreise der Seeberger Sternwarte zu beobachten, da der Breitenunterschied zwischen Göttingen und Seeberg durch die trigonometrische Verbindung beider Sternwarten auf Grund der GAUSSschen und MÜFFLINGschen Dreiecke ein noch erhöhtes Interesse beanspruchte. Auch HANSEN ermittelte täglich meistens zweimal den Kollimationsfehler durch Einstellung auf den Nadirpunkt, nachdem er im Herbst 1826 dieses Verfahren in Göttingen praktisch kennen gelernt hatte. Der Breitenunterschied ergab sich zwischen Seeberg und Göttingen 0″,73 kleiner als aus der Dreiecksverbindung, während, wie bereits erwähnt[2]), die Polhöhe von Altona um 5″,52 kleiner aus den astronomischen Beobachtungen folgte, als aus dem gemessenen Meridianbogen, für dessen Berechnung allerdings der vorläufige Wert der Braaker Basis angenommen werden musste.

GAUSS hatte die Abhandlung über die krummen Flächen zwar schon im März vollendet, sie aber noch nicht der Sozietät überreicht, weil zur Ostermesse kein Band der Denkschriften herauskam. Erst im Oktober übergab er sie der Gesellschaft[3]) und liess am 5. November eine Selbstanzeige derselben erscheinen[4]).

Nachdem sich die Lotabweichung zwischen Göttingen und Altona durch die Sektorbeobachtungen bestätigt hatte, dachte GAUSS daran, noch einen Zwischen-

1) G.-O. Nr. 164.

2) Seite 88.

3) Werke IX, S. 377.

4) Werke IV, S. 341. Göttingische gelehrte Anzeigen, Stück 177, Seite 1761—1768. 1827 Nov. 5.

punkt einzuschalten. Mit dem Sektor war dies unter den obwaltenden Umständen nicht möglich; SCHUMACHER sollte daher mit einem im Ersten Vertikal aufzustellenden Passageninstrumente zunächst in Altona beginnen, dann wollte GAUSS mit ihm gemeinsam in Celle[1]) beobachten; zum Schlusse wollte GAUSS selbst noch in Göttingen eine neue Polhöhenbestimmung machen. Indessen konnte sich SCHUMACHER, wenigstens im laufenden Jahre nicht, auf diese Beobachtungen einlassen[2]).

Am Ende des Jahres konnte der Druck des *Supplementum theoriae combinationis* beginnen, nachdem die Vorlesung über die quadratischen Reste herausgekommen war.

Der *Breitenunterschied* erschien erst im folgenden Jahre (1828) im Verlage von Vandenhoek & Rupprecht in Göttingen; anfangs war an eine Veröffentlichung in den von SCHUMACHER als Ergänzungshefte der Astronomischen Nachrichten herausgegebenen astronomischen Abhandlungen gedacht. GAUSS hatte nämlich eine Abhandlung über die mathematische Theorie der Refraktion von Dr. J. C. EDUARD SCHMIDT[3]), dessen Talente er sehr hoch hielt[4]), für das vierte Heft der Astronomischen Abhandlungen in Vorschlag gebracht, weil es SCHMIDT bis dahin nicht gelungen war, einen Verleger zu finden. Als ihm dies aber doch gelang, was seiner bedrängten Lage durch ein kleines Honorar nachhelfen sollte, bot GAUSS die Zenitsektormessungen, die nahezu denselben Raum einnehmen würden, SCHUMACHER zur Veröffentlichung an derselben Stelle an, da er der Einverleibung in die *Commentationes* der Göttinger Sozietät deshalb abgeneigt war, weil er ungern etwas in fremder Sprache erscheinen liess[5]).

---

1) Er fasste wohl auch Celle deshalb ins Auge, weil sich sein Sohn EUGEN dort aufhielt.

2) G.-SCH. Nr. 305.

3) I. C. E. SCHMIDT hatte sich bereits mit Kometenrechnungen beschäftigt (Komet von 1823, Nr. 165 in J. G. GALLES Verzeichnis, Astr. Jahrbuch 1827, 129). Durch GAUSS wurde er veranlasst, eine erweiterte und verbesserte Ausgleichung der Gradmessungen zur Bestimmung der Erddimensionen vorzunehmen, wobei die in den Zwischenpunkten beobachteten Polhöhen mit berücksichtigt wurden und insbesondere auch die hannoversche Gradmessung zugezogen wurde. In seinem Lehrbuche der mathematischen und physischen Geographie, Göttingen 1829—30 sind die Ergebnisse noch weiter fortgesetzter Berechnungen mitgeteilt. Vergl. JORDAN, *Handbuch der Vermessungskunde*, Band III (1916), S. 8.

4) G.-SCH. Nr. 316.

5) Erst am 27. Juni 1837 stellte O. MÜLLER den Antrag auf Zulassung der deutschen Sprache in den Verhandlungen und Schriften der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. Unter den sämtlich zustimmenden Voten befand sich auch das von GAUSS. Göttinger Festschrift, Berlin 1901, S. 210 Anm.

SCHUMACHER rechnete sich dies Anerbieten zu grosser Ehre an und liess ein Porträt von GAUSS lithographieren, das dann, als GAUSS zurücktrat[1]), als Beilage der Astronomischen Nachrichten erschienen ist.

XIV. Abschnitt. Die Erdgestalt.

52. Definition der Erdfigur, Laplacesche Gleichung. Die im IX. Bande der Werke abgedruckte *Bestimmung des Breitenunterschiedes* usw. kann als ein Muster gedrängter Darstellung der Beobachtungen und umfassender Berücksichtigung aller Fehlerquellen bei der Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate gelten. Sie enthält ausser den Ergebnissen der Beobachtungen und der Vergleichung mit dem terrestrischen Bogen und Zusätzen über den Breitenunterschied zwischen Göttingen und Seeberg und über die Erddimensionen im Artikel 20 zum ersten Male die deutliche Definition der Erdgestalt, die zur Grundlage für die weitere Entwicklung der Geodäsie geworden ist[2]):

---

1) G.-SCH. Nr. 332, 333. GAUSS gab fünf Gründe an, die Schrift einem Buchhändler in Verlag zu geben: »1) dass ich dadurch den Vorteil erreiche, dass die Schrift unter meinen Augen gedruckt werden kann, also, da mir immer in der Handschrift vieles entgeht, was gedruckt mir sogleich auffällt, viel korrekter; 2) dass der Druck des Anfangs dann schon beginnen kann, ehe das Ganze vollendet ist; 3) dass es wohl allerdings schicklicher ist, dass die Resultate einer auf öffentliche Autorität und Kosten ausgeführten Arbeit nicht als ein Artikel in einem Heft einer periodischen Sammlung, sondern wie eine selbständige Schrift erscheint; 4) dass der buchhändlerische Vertrieb gewöhnlich sich eine leichtere Zirkulation zu verschaffen weiss; 5) dass Sie [SCHUMACHER] selbst dabei gar kein weiteres Interesse haben, sondern dass, so wie Ihr König zum Besten der Wissenschaft Kosten, Sie Ihrerseits Zeit und Mühe lediglich opfern, um das Erscheinen von Arbeiten zu befördern, die sonst vielleicht ungedruckt bleiben müssten«.

2) Von den Definitionen von GAUSS und BESSEL (Astronomische Nachrichten 14, S. 269) ist HEINRICH BRUNS in seiner Abhandlung »*Die Figur der Erde*« (Publikation des Kgl. Preussischen Geodätischen Instituts, Berlin 1878) ausgegangen. Er hat jedoch an die Stelle der Entwicklung einer besonderen durch die Bezeichnung »mathematische Figur der Erde« von den übrigen ausgezeichneten Niveaufläche die Ermittlung der Kräftefunktion als Aufgabe der Geodäsie hingestellt. Seite 4: »Nach der GAUSS-BESSELschen Definition ist die mathematische Figur der Erde eine von den Niveauflächen und zwar diejenige, von der die Oberfläche der Weltmeere einen Teil bildet. Hierbei wird stillschweigend vorausgesetzt, dass die Meeresoberfläche eine Niveaufläche sei, eine Annahme, welche offenbar nicht in aller Strenge richtig ist«. Seite 5: »Erstlich ist, ganz abgesehen von den rascheren und vorübergehenden Barometerschwankungen, der mittlere

»Was wir im geometrischen Sinn Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet, und von der die Oberfläche des Weltmeers einen Teil ausmacht. Die Richtung der Schwere an jedem Punkte wird aber durch die Gestalt des festen Teils der Erde und seine ungleiche Dichtigkeit bestimmt, und an der äussern Rinde der Erde, von der allein wir etwas wissen, zeigt sich diese Gestalt und Dichtigkeit als höchst unregelmässig: die Unregelmässigkeit der Dichtigkeit mag sich leicht noch ziemlich tief unter die äussere Rinde erstrecken, und entzieht sich ganz unsern Berechnungen, zu welchen fast alle Data fehlen. Die geometrische Oberfläche ist das Produkt der Gesammtwirkung dieser ungleich verteilten Elemente, und anstatt vorkommende unzweideutige Beweise der Unregelmässigkeit befremdend zu finden, scheint es eher zu bewundern, dass sie nicht noch grösser ist. . . . . Bei dieser Sachlage hindert aber noch nichts, die Erde im Ganzen als ein elliptisches Revolutionssphäroid zu betrachten, von dem die wirkliche (geometrische) Oberfläche überall bald in stärkern, bald in schwächern, bald in kürzern, bald in längern Undulationen abweicht.«

Des Zusammenhanges wegen soll an dieser Stelle auf eine 1830 in den Göttinger gelehrten Anzeigen (Werke IV, S. 370) erschienene Besprechung eingegangen werden. GAUSS hatte mit lebhafter Anteilnahme den Plan für die Fortsetzung der Längengradmessung Brest-Wien bis zur österreichischen Grenze und darüber hinaus durch Russland bis zum Ural verfolgt. Die noch ältere, von LAPLACE angeregte Gradmessung längs des 45. Breitengrades war 1821—23

---

jährliche Luftdruck im Meeresniveau nicht konstant. Zweitens lässt sich zeigen, dass die von Sonne und Mond hervorgerufenen Oszillationen des Meeres sich in dem mittleren Meeresspiegel im Allgemeinen nicht zu dem Betrage Null ausgleichen«. Seite 6: »Drittens lehrt die Existenz der beständigen Meeresströmungen, dass der mittlere Meeresspiegel keine Niveaufläche sein kann«. »Man hat also bei der GAUSS-BESSELschen Definition die Bedingung fallen zu lassen, durch welche eine der Niveauflächen als mathematische Figur der Erde charakterisiert wird«. Seite 7: »Will man jedoch, um von einer bestimmten mathematischen Figur der Erde im Sinne der GAUSS-BESSELschen Definition reden zu können, die im Vergleich zu den Dimensionen des Erdkörpers geringfügigen Unterschiede zwischen den einzelnen Geoiden vernachlässigen, so ist offenbar mit dem aus dem Vorangehenden sich ergebenden Vorbehalt nichts dagegen einzuwenden«. GAUSS legte auf die Ausdrucksweise nicht immer besonderen Wert, sondern nur darauf, dass der Mathematiker sich der Sachen bewusst bleibe (G.-SCH. Nr. 381), und wenn es selbstverständlich ist, dass er eine mittlere Niveaufläche ins Auge gefasst hat, so darf man mit gleichem Rechte annehmen, dass er zeitliche Änderungen ebenso ausgeschlossen hat.

durch die astronomisch-geodätischen Arbeiten von CARLINI und PLANA im Königreich Sardinien ergänzt worden, die 1825 und 1827 in zwei Bänden niedergelegt sind[1]).

Das Referat von GAUSS über dieses Werk zeichnet sich durch das genaue Eingehen auf die Beobachtungsmethoden und die dabei auftretenden Fehler aus, wobei bisweilen noch zwischen den Zeilen Bedenken angedeutet sind, noch vielmehr aber durch die weitschauenden geodätischen Gesichtspunkte, die darin zum Ausdruck gebracht werden. Er weist auf die von LAPLACE 1799[2]) aufgestellte Kontrollgleichung hin: »Nach einem von LAPLACE zwar unter speziellen Beschränkungen[3]) aufgestellten, aber einer grossen Generalisierung fähigen Theorem[4]) steht die Konvergenz der Meridiane in einem notwendigen und von der Gestalt der Erde unabhängigen[5]) Zusammenhange mit dem Längenunterschiede[6]), so dass die Ungleichförmigkeit der einen[7]) sich aus denen der andern[8]) beim Fortschreiten in einer Kette von geodätischen Linien a priori abnehmen lassen«[9]). Er wendet dies auf die Beobachtungen an, wobei er folgende Zahlen erhält:

		Berechnete Anomalie	Unterschied von der beobachteten Anomalie
Turin	— 5″,5	+ 0″,52	+ 2″,60
Mont Cénis	— 51,2	+ 4,81	+ 4,11
Colombier	— 25,2	+ 2,34	+ 1,95.

1) *Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen exécutées en Piémont et en Savoie par une commission composée d'officiers de l'état major général et d'astronomes Piémontais et Autrichiens en* 1821, 1822, 1823. Milan. Tome I, 1825, tome II, 1827.

2) LAPLACE, *Mécanique céleste* T. II, L. III, 1799, p. 117.

3) LAPLACE stellte die Gleichung zunächst nur für die Endpunkte eines Meridianbogens auf.

4) Die erweiterte Kontrollgleichung findet jetzt bei der Berechnung von Lotabweichungssystemen nach HELMERTS Vorgang ausgedehnte Anwendung.

5) Zunächst denkt GAUSS hierbei wohl an die Unregelmässigkeiten der Erde, wie an der weiter unten zitierten Stelle, aber auch die erweiterte Gleichung ist fast unabhängig von der Grösse der Achse und der Abplattung der Erde.

6) Die Gleichung gilt, so lange man die Quadrate des Längen- und Breitenunterschiedes der Endpunkte vernachlässigen darf, auch für endliche Linien.

7) Der Meridiankonvergenz.

8) Aus den Ungleichförmigkeiten der Längenunterschiede.

9) Wenn die Lotabweichungen im Azimut längs einer Kette gegeben sind, lassen sich daraus die Lotabweichungen in Länge berechnen.

Die dritte Kolumne müsste null ergeben[1]). GAUSS äussert sich darüber in folgender Weise (Werke IV, S. 377): »Nach unserer Ansicht sind diese 3 Zahlen[2]) von grösster Wichtigkeit, als sie uns einen nicht zurückweisbaren Masstab für die Genauigkeit der Operation selbst geben, da sie (Rechnungsfehler bei Seite gesetzt) nichts anderes sein können, als die Aggregate der Fehler, die bei den astronomischen Längenbestimmungen, den Azimutalbestimmungen und den Messungen der Winkel im Dreiecksnetze begangen sind. Man kann freilich diese Einflüsse nicht trennen, allein das Dasein des Gesamtfehlers, unabhängig von den Irregularitäten der Erdfigur, ist eine unleugbare Tatsache, wenn auch die Meinung, die man sonst wohl von der absoluten, bei allen drei Geschäften erreichten Genauigkeit gehabt hat, merklich herabgestimmt werden muss. Vermutlich hat jedes seinen Anteil beigetragen, obwohl wir geneigt sind, die grössere Hälfte den gemessenen Dreieckswinkeln zuzuschreiben«[3]).

Das Hauptinteresse erregte bei GAUSS der von ihm abgeleitete Unterschied des terrestrischen Bogens von dem astronomischen Längenunterschied, der mit nahezu 48″ die merkwürdigste Tatsache dieser Art darstellte, die bis dahin in den Annalen der höheren Geodäsie vorgekommen war. GAUSS führte sie auf die Attraktion der im Norden und Süden das Gebiet der Messung begrenzenden Alpenketten zurück; allein für ebenso wahrscheinlich hielt er es, dass die ungleiche Dichtigkeit der untern Erdschichten, vielleicht bis zu grosser Tiefe hinab, nicht minder Anteil daran habe. Wenigstens liessen sich ähnliche, bei ganz in der Ebene liegenden Punkten vorgekommene Unterschiede von

1) Die drei Kolumnen entsprechen den Werten: $T'-T$, $-\frac{T'-T}{\sin B}$, $\lambda-\frac{T'-T}{\sin B}$. Die Zahlen der zweiten und dritten Kolumne sind in Zeitsekunden zu verstehen, also mit $15.\sin B$ im Nenner erhalten. Für B ist die Breite von Mailand verwendet.

2) Der dritten Kolumne. In der Tat ist die LAPLACEsche Gleichung von den eben erwähnten unbedeutenden Einflüssen abgesehen nicht von der Länge der geodätischen Linie, sondern nur von den Lotabweichungen im Anfangspunkte, den Azimuten im Anfangs- und Endpunkt und den Winkeln der Brechungspunkte der Kette abhängig. GAUSS hat also diese aus den Differentialgleichungen der geodätischen Linie sich ergebenden Tatsachen vollständig überblickt.

3) Dies ist im vorliegenden Falle vielleicht nicht so sicher begründet, wie GAUSS annimmt, weil die Längenbestimmungen durch Zeitsignale und dazu noch durch Chronometerübertragung erhalten sind und wenig Vertrauen verdienen. In jetziger Zeit, wo die telegraphischen Längenbestimmungen den Breitenbestimmungen nahezu ebenbürtig sind, wird man in der Tat das Auftreten eines absoluten Gliedes in der LAPLACEschen Gleichung in erster Linie auf Fehler der Winkelmessungen zurückführen.

sehr bedeutender Grösse (z. B. eine Anomalie von 21″,9 zwischen Mailand und Parma) nicht wohl anders erklären. »Wir setzen hinzu«, fährt er fort, »dass je mehr die sorgfältig ausgeführten Gradmessungen vervielfältigt werden, desto mehr die Überzeugung Platz gewinnt, dass solche Abweichungen nur in Rücksicht auf ihre Grösse, aber nicht an sich als Ausnahmen betrachtet werden dürfen, und dass sich solche nach grösserem oder kleinerem Massstabe überall zeigen«[1]).

Am Schlusse der ausführlichen Besprechung erwähnt GAUSS die von den Verfassern benutzten Näherungsformeln zur Übertragung der geographischen Koordinaten längs einer Dreiecksseite und setzt hinzu, dass sich bei einer andern Form der Rechnung eine Berücksichtigung der Glieder bis zur vierten Ordnung durch sehr geschmeidige Methoden erreichen lasse, ein Zeugnis dafür, dass er damals die in der zweiten Abhandlung der *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* gegebene Methode, vielleicht in der Form, wie sie Werke IX, S. 80/81 mitgeteilt ist, bereits aufgestellt hatte.

XV. Abschnitt. Die Zeit der hannoverschen Landesvermessung.

53. **Plan.** Da das Seite 114 Fussn. 4 erwähnte Schreiben von GAUSS an den Grafen MÜNSTER (G.-O. Nr. 599) noch nicht beantwortet war, benutzte der Hauptmann MÜLLER die Gelegenheit der Rücklieferung des Zenitsektors zur Überreichung eines Promemoria, in dem die Erweiterung der Triangulation über das ganze Königreich vorgeschlagen wurde[2]).

1) Werke IV, S. 379.

2) MÜLLER schreibt aus Hannover am 13. November 1827: »Der Graf MÜNSTER hat mir aufgetragen, ihn angelegentlichst wegen Nichtbeantwortung eines Briefes von Ihnen zu entschuldigen, er habe denselben wegen der darin enthaltenen interessanten Mitteilungen an den Lord FITZROY SOMMERSET als damaligen Secretary des Master General gegeben; dieser sei bald darauf bei der bekannten Ministerialveränderung aus dem Board of Ordnance ausgetreten und er, der Graf MÜNSTER, habe den Brief nicht wieder zurückbekommen können. In Beziehung auf Ihre Autorisation übergab ich dem Graf M. einige Zeilen, die den Zweck hatten, die Nützlichkeit einer ferneren Ausdehnung der Gradmessungsarbeiten, insoweit es zur Vervollständigung der Geographie des Landes erforderlich sei und als Basis für topographische Aufnahmen zu dienen, darzustellen und ich fügte dann die Versicherung hinzu, dass Sie bereitwillig sein würden, soweit es die Gesundheit erlaubte, sich ferner damit zu befassen«.

In welcher Weise sich GAUSS diese Ausdehnung der Gradmessungsarbeiten gedacht hat, geht aus seinem Bericht vom 21. November 1827 (Werke IX, S. 413) hervor. Er stellt zunächst die Kosten der Gradmessung zusammen, die in den Jahren 1821—23 für die Meridianmessung rund 11000 Taler, 1824—25 für den Parallelbogen etwa 7000 Taler erfordert hatten[1]). Davon waren etwa 2500—3000 Taler zur Anschaffung von Instrumenten und für die Abholung des englischen Zenitsektors verausgabt. Hiernach glaubte GAUSS, die Kosten für die bevorstehenden Operationen, die hauptsächlich der Vervollkommnung der Landesgeographie dienen sollten, auf 12000 Taler veranschlagen zu dürfen, indem sie nicht denselben Grad von äusserster Schärfe wie die Gradmessung erfordern würden. — Es waren noch drei getrennte, von den Dreiecksmessungen nicht berührte Stücke des Königreichs übrig: A. der nördliche Teil des Lüneburgschen, B. der nördlichste Teil des Bremischen und C. der westlich von der grossen Dreieckskette liegende Landesteil, enthaltend besonders das Hoyesche, Diepholz, Osnabrück bis Bentheim, Lingen und Meppen.

Bei der Triangulierung würde man sich nicht beschränken, blos Netze von Hauptdreiecken erster Ordnung über diese Landesteile zu legen, sondern damit die Bestimmung der Lage einer möglichst grossen Zahl sekundärer Punkte verbinden, besonders von Kirchtürmen, wie auch bereits bei der Gradmessung über 500 derartige Punkte bestimmt waren. Die Angabe dieser Punkte in Zahlen bilde dann eine sichere Grundlage[2]) für alle Detailaufnahmen. Jede Messtischplatte würde dann unabhängig von den andern bearbeitet und eine Fehlerfortpflanzung auf andere Blätter falle fort. Diese Blätter liessen sich dann zu einem genau orientierten und überall zusammenpassenden Ganzen vereinigen[3]). Gleichzeitig wurde auch die Herstellung einer

1) Als persönliche »Defrayierung« hatte GAUSS täglich 5 Rtlr., ferner als Diäten Hauptmann MÜLLER 4 Rtlr., Leutn. HARTMANN und JOSEPH GAUSS je 3 Rtlr. erhalten, ferner bekamen der Unteroffizier Bombardier MAX (ein junger kräftiger, resoluter Mann), der Kanonier LUWES (ein junger, anstelliger und dienstfertiger Mensch), der Kanonier LANDERS (zugleich Tischler und Rademacher) und der Aufwärter TEIPEL je 16 Ggr. Nach Beendigung der Gradmessungsarbeiten hat GAUSS noch eine persönliche Gratifikation von 1000 Taler in Gold erhalten. GAEDE, *Beiträge* usw., S. 29, Brief von MÜLLER vom 1. Mai 1821.

2) GAUSS hatte schon im Frühjahr 1821 dem Oberstleutnant PROTT mehr als 50 scharf bestimmte Punkte für seine Detailaufnahme mitgeteilt.

3) In einem späteren Bericht (vom 22. April 1828) äussert sich GAUSS: »Bei den älteren unvoll-

Karte ins Auge gefasst[1]). Die Zeitdauer schätzte Gauss für die Landesvermessung[2]) auf etwa 10 Jahre, tatsächlich hat sie 17 Jahre erfordert und erst 1844 ihren Abschluss gefunden.

Bereits im Sommer 1827 hatte auf Grund eines Entschlusses des Kabinettsministeriums eine Detailvermessung begonnen, bei der Offiziere der Generalstabsakademie sich im Aufnehmen übten. Von den meisten Gegenden waren Karten vorhanden, die in England aufbewahrt wurden. Auf Hauptmann Müllers Vorschlag wurde zunächst die Gegend um Hildesheim gewählt, um die Vorteile zu zeigen, die das Vorhandensein der durch die Gradmessung erhaltenen Koordinaten böte. Hartmann berichtete dann ausführlich über die ausgeführten Arbeiten und erwähnte dabei, dass Verwerfungen der Messtische vorgekommen seien, und dass er an Stelle der zuerst benutzten hölzernen Lineale starke Lineale aus Glas habe anwenden lassen Diese Bemerkung veranlasste Gauss zu einer Anfrage bei Schumacher, ob in Dänemark sich auch Einflüsse des Sonnenscheins auf die Messtischplatten gezeigt hätten; Schumacher, bei dessen Messtischen Messinglineale und Fernrohre gebraucht wurden, hatte aber keine ungünstigen Erfahrungen gemacht.

Es waren nämlich für die Karte von Dänemark Aufnahmen im Gange, und es fanden Ergänzungsmessungen statt, die Peters auf den Elbinseln und bei Hamburg (G.-Sch. Nr. 318) mit einem 8-zölligen Theodoliten vornahm. Hierzu erbat Schumacher die Mitteilung der Koordinaten der Punkte, die Gauss eingemessen hatte, und es lag ihm besonders daran, die von Peters gemessenen Azimute mit den berechneten vergleichen zu können. Dieser Bitte entsprach Gauss, indem er ihm die ebenen Koordinaten von mehr als 50 Punkten (G.-Sch. Nr. 321) mitteilte und in mehreren auf einander folgenden Briefen ausführliche Rechnungsvorschriften hinzufügte, die besonders dadurch

kommenen und nicht auf eine vorgängige scharfe Triangulierung basierten Methoden der Detailaufnahme war die Zusammensetzung der einzelnen Blätter zu Einer Karte immer ein ebenso langwieriges, als schlüpfriges Geschäft, womit die Ingenieurs während eines grossen Teils des Winters vollauf zu tun hatten. Es blieb dabei unvermeidlich, dass bald hier, bald da etwas nicht zusammenpasste; man musste dann willkürliche, unsichere Ausgleichungen versuchen, überall abzwicken oder zerren und verrenken, um so, auf einem Prokrustesbett, die Blätter taliter qualiter zum Zusammenhang zu bringen. Auch von unserer älteren Landesvermessung ist mir manches der Art erzählt, was jedoch weniger den Arbeitern, als der Methode zur Last fällt«. Gaede, *Beiträge* usw., S. 61.

1) Kabinetsordre Georgs IV. vom 25. 3. 1828. Vergl. das Folgende.

2) Nach dem Berichte vom 26. 6. 1828.

von Bedeutung sind, dass sie die von GAUSS tatsächlich verwendeten Formeln erkennen lassen. Als Muster gab er ein vollständig ausgeglichenes Tableau der Azimute für eine Station mit 93 Richtungen. Zugleich erbot er sich, die Detailaufnahme zu bearbeiten und leitete aus den Messungen von NEHUS und PETERS die Koordinaten von 76 Punkten ab (G.-SCH. Nr. 334). Es hätte ihm auch viel daran gelegen, den Zusammenhang seiner und der dänischen Dreiecke noch inniger zu gestalten, und er schlug vor, in einem Polygon um Hamburg die Winkel scharf zu messen. Indessen scheint SCHUMACHER, der solche Arbeiten wegen seiner andern Beschäftigungen hinauszögerte, dazu nicht Zeit gefunden zu haben.

Am 25. März 1828 kam die Kabinettsordre König GEORGS IV. heraus, die eine Ausdehnung der Triangulation über das ganze Königreich Hannover unter Leitung von GAUSS befahl. Gleichzeitig sollte eine auf diese Triangulation zu stützende Spezialaufnahme und die Herausgabe einer Karte stattfinden. Dabei wurde die Verwendung von Generalstabsoffizieren empfohlen, um zugleich Ersparnisse zu erzielen. Die Gesamtkosten sollten jährlich 5000 Taler nicht übersteigen.

GAUSS hat dann alljährlich im Frühjahr einen Arbeitsplan für die im Sommer auszuführenden Arbeiten vorgelegt und im Herbst einen Bericht über die stattgehabten Fortschritte erstattet. Für das erste Jahr 1828 schlug er einige trigonometrische Vorarbeiten für die Detailaufnahme des Hildesheimschen und des Eichsfeldes vor (G.-O. Nr. 629), die auch im Spätsommer begonnen wurden.

Er hatte von SCHUMACHER einen Kostenanschlag für die Aufnahme einer Quadratmeile erbeten und hielt es für angebracht, in den ersten Jahren auf die Triangulation etwa zwei Drittel, auf die Detailaufnahme ein Drittel der zur Verfügung stehenden Gelder zu verwenden, um Stockungen bei letzterer zu vermeiden. Er selbst wollte sich nicht an den Messungen beteiligen, hatte aber vor, zum Beginn einige Tage nach Hannover zu kommen, wohin ihn auch andre Geschäfte riefen.

Die Leitung der Operationen erforderte, namentlich im Anfang, eine fast tägliche, weitläufige Korrespondenz. Nach Beendigung der Feldarbeiten widmete sich GAUSS dann sofort der Berechnung, bei der er keine Hilfe hatte, und die ihn mehrere Wochen ganz in Anspruch nahm. Die Koordinaten

wurden in Verzeichnisse gebracht, deren im Ganzen 16 vorhanden sind, die zusammengenommen über 3000 Bestimmungen enthalten. Diese Koordinaten bildeten die Grundlage der Detailaufnahmen und der Karten des PAPENschen Atlas. Zum Schlusse hat sie GAUSS zu einem allgemeinen Verzeichnis verschmolzen, das etwa 2600 Punkte umfasst, indem ein Teil mehrfach in den partiellen Verzeichnissen vorhanden war[1]).

54. Beobachter. Instrumente. Die Triangulierungsarbeiten lagen in den Händen seiner drei Mitarbeiter, GAUSS selbst hat nur ein einziges Mal, am 7. September 1828, auf dem Hohehagen, eine Station besucht. Als Instrumente wurden drei andere Theodolite als bei der Gradmessung gebraucht. HARTMANN beobachtete mit dem 8-zölligen REICHENBACHschen Instrumente, das seit 1812 der Sternwarte gehörte; der 12-zöllige ERTELsche Theodolit, den MÜLLER verwendete, gehörte dem hannoverschen Generalstab und war dem vorigen ähnlich, besass aber keinen Höhenkreis und kein Versicherungsfernrohr; JOSEPH GAUSS benutzte einen 8-zölligen ERTELschen Theodoliten, auch ohne Höhenkreis und Versicherungsfernrohr, optisch aber von derselben Güte, wie der 12-Zöller. Die Beobachter konnten aber nicht ihre ganze Zeit dem Vermessungsgeschäft widmen. Ein näheres Eingehen auf die jährlichen Fortschritte der Arbeiten wird entbehrt werden können, weil sie nur in einem äusseren Zusammenhang mit der geodätischen Tätigkeit von GAUSS stehen. Immerhin wird sich Gelegenheit bieten, Einzelheiten im Anschluss an den Bericht über die Tätigkeit von GAUSS zu erwähnen[2]).

1) Der Abschluss der rechnerischen Bearbeitung der Landesvermessung hat sich bis 1848 verzögert. Ein Teil der Beobachtungsjournale und das allgemeine Koordinaten-Verzeichnis wurden von dem Wärter der Sternwarte SCHLÜTER abgeschrieben und von Professor GOLDSCHMIDT kollationiert. Im Jahre 1859 wünschte das Ministerium des Innern die Herausgabe durch den Druck, was aber von dem Chef des Hannoverschen Generalstabes, Generalmajor v. SICHART, abgelehnt wurde. Er begründete das damit, dass die in dem Verzeichnis enthaltenen Koordinaten nicht nur einen ausserordentlich relativen Wert hätten, sondern auch viele derselben, ausser den ausdrücklich als unsicher bezeichneten, unzuverlässig und gar falsch seien. Von solchen müsste es also zuvor gesäubert werden. Später ist das allgemeine Koordinaten-Verzeichnis, so wie es vorlag, zweimal abgedruckt: 1868 von WITTSTEIN zum Gebrauch bei der Katastervermessung, 1873 in Band IV der Werke. An der letzteren Stelle sind auch die Abrisse der Gradmessung vollständig, die übrigen auszugsweise veröffentlicht. GAEDE, *Beiträge* usw., S. 72—74.

2) GAEDE hat in den *Beiträgen* usw., S. 56—78 einen besondern Abschnitt GAUSS' Anteil an der Hannoverschen Landesvermessung gewidmet, wobei er einige vierzig ungedruckte Originalberichte von GAUSS zu Grunde legte. Ein mehrere Bogen langer historischer Bericht über alle von ihm teils ausgeführten, teils geleiteten Messungen im Königreich Hannover, aus Anlass der Trennung von England und Hannover nach

Im Frühjahr 1828 hatte GAUSS noch eine neue umfangreiche Reihe von Beobachtungen zur Bestimmung der absoluten Polhöhe von Göttingen angestellt, die sich auf mikroskopische Ablesungen von nur 8 verschiedenen Teilstrichen des Kreises gründete und eine vortreffliche Übereinstimmung zeigte. Im Sommer besuchte ihn auf einige Tage SCHUMACHER, der nach Königsberg unterwegs war, um BESSELS Pendelapparat in Empfang zu nehmen. Am 14. August 1828 reichte GAUSS ein Urlaubsgesuch mit der Begründung ein, dass seine Gesundheit nach den anhaltenden Anstrengungen einer Stärkung bedürftig sei und reiste gleich nach der erwähnten Besteigung des Hohehagen nach Berlin zur Naturforscherversammlung, wo er drei Wochen als Gast bei ALEXANDER v. HUMBOLDT verweilte. Dort lernte er WILHELM WEBER kennen, der damals ausserordentlicher Professor in Halle war und 1831 als Ordinarius der Physik nach Göttingen berufen wurde.

Diese Reise war ein Wendepunkt im Leben von GAUSS, insofern von da ab die physikalischen Interessen bei ihm in den Vordergrund traten. Im Verein mit WILHELM WEBER widmete er sich den Untersuchungen des Erdmagnetismus, die den dritten Höhepunkt[1]) in seiner wissenschaftlichen Tätigkeit bezeichnen dürften.

Auch noch eine andre Arbeit hatte GAUSS sich aufbürden lassen, indem er zum Mitgliede einer Masskommission ernannt war, die das Mass- und Gewichtswesen für Hannover neu ordnen sollte. Im März 1829 begab er sich nach Hannover zur Teilnahme an einer Konferenz dieser Kommission, und im Mai fuhr er nochmals dahin, um die in diesem Jahre auszuführenden Triangulationen zu besprechen. Die drei Offiziere sollten darnach ein Dreiecksnetz erster und zweiter Ordnung in den westfälischen Landesteilen anlegen und zwar sollte MÜLLER zunächst das Land bereisen und Vorbereitungen treffen, HARTMANN im Hildesheimschen und JOSEPH GAUSS im Eichsfelde noch einige

---

dem 1837 erfolgten Tode GEORGS IV. ist vom 8. Februar 1838 datiert (Werke IX, S. 418—425). — Eine Übersicht der jährlichen Arbeiten lässt sich aus der Übersichtskarte des PAPENschen Atlas entnehmen, die auch in Werke IX nach Seite 434 Aufnahme gefunden hat.

1) Die erste Epoche kann von 1791—1805 gerechnet werden, die zweite etwa von 1815—1825. Für GAUSS gilt, was GOETHE zu ECKERMANN (Gespräche, III. Teil, Abschnitt 1828) von genialen Naturen, mit denen es eine eigene Bewandtnis habe, sagt: »sie erleben eine wiederholte Pubertät, während andere Leute nur einmal jung sind.« »Wir nehmen bei vorzüglich begabten Menschen auch während ihres Alters immer noch frische Epochen besonderer Produktivität wahr.«

Detailaufnahmen ausfüllen und erst dann alle drei gleichzeitig in Westfalen operieren. GAUSS gedachte damals, im September selbst noch einen Monat ins Feld zu gehen und die Nähe Bremens zu einem Besuch bei OLBERS zu benutzen. Allein wegen vielfacher Hindernisse fügte sich alles anders. JOSEPH GAUSS konnte seine Aufgabe in vierzehn Tagen vollenden. Er reiste MÜLLER nach, konnte ihn aber nicht mehr erreichen. Er begann nun auf eigene Faust auf dem Dörnberge, einem EPAILLYschen Platze und Hauptdreiecks-punkte zu messen, wurde aber durch MÜLLER nach Twistingen abberufen, wo beide gemeinschaftlich beobachteten. Inzwischen erhielt MÜLLER einen andern Auftrag vom Ministerium und konnte an den Messungen in diesem Jahre nicht mehr teilnehmen. Da HARTMANN mit seiner Aufgabe im Hildes-heimschen noch lange nicht fertig war, blieb mithin JOSEPH GAUSS als einziger für die Triangulierungsarbeiten übrig. Das Wetter war sehr schlecht, und er hatte in selbständigen Arbeiten mit einem REICHENBACHschen Theodoliten fast gar keine Übung. Trotzdem absolvierte er 8 Hauptpunkte und 6 Punkte II. Ordnung abgesehen von verschiedenen Nebenpunkten. Das ganze an die Seite Bremen-Steinberg anschliessende Netz mit Ausnahme des Knickberges bei Üchte, den HARTMANN noch im August übernehmen konnte, war sein Werk, und sein Vater war sehr erfreut darüber, da die Messungen sich als sehr sorgfältig ausgeführt und die ganze Anlage als zweckmässig erwies.

GAUSS selbst gab seine Reise auf und widmete sich der Verarbeitung der sowohl bei seinem Sohne als bei HARTMANN je 200 Seiten umfassenden Messungen mit grosser Aufopferung; am liebsten hätte er das ganze Messungs-geschäft mit seinen Verdriesslichkeiten und Verhandlungen Knall und Fall aufgegeben.

Zu Beginn des Jahres 1830 erschien ausser der bereits (Seite 124) ange-führten Besprechung, die ein Zeugnis GAUSSscher Genialität ist, eine andere über das *Mémorial du dépôt général de la guerre*, bei der man zunächst stutzig sein kann, was GAUSS veranlasst haben mochte, über den Inhalt dieser Schrift zu schreiben (Werke IV, S. 381). Vielleicht lag ihm daran, hervorzuheben, welche ansehnlichen Summen den Ingenieur-Geographen bei der Herstellung der Karte von Frankreich zur Verfügung standen im Gegensatz zu den geringen Mitteln, die in Hannover für diesen Zweck beansprucht wurden. Denn die historischen Notizen, z. B. die Unterredung des Grafen DE GISORS mit FRIEDRICH dem Grossen

und Briefe Ludwigs XIV., die er zwar offenbar mit viel Interesse gelesen hatte, und bei deren Erwähnung er Gelegenheit nimmt, französischer Anmassung entgegen zu treten, sind kaum ein Anlass zu diesem Bericht gewesen. Vielmehr werden ihm die Erwägungen über den Kartenmasstab von Bedeutung gewesen sein; man kann annehmen, dass ihn diese Fragen damals beschäftigten[1]), die im Jahre 1832 für ihn wichtig wurden, als der Ingenieur-Leutnant Papen es unternahm, unter Gauss' Mitwirkung eine Karte von Hannover im Masstab 1 : 100000 herauszugeben. Am Schlusse fügte Gauss die oft von ihm erhobene Forderung hinzu, die Dreiecksmessungen ausführlich zu veröffentlichen, wobei es dahingestellt bleiben muss, ob das Erscheinen von Puissant, *Nouvelle description géométrique de la France* (Paris 1832) dadurch beschleunigt worden ist.

Am Ende dieses Jahres erwirkte Gauss seinem Sohne einen Urlaub von 6 Wochen[2]) bis zum 20. Dezember, damit er manches, was zur Verarbeitung

---

1) Gauss hat sich, wie an dieser Stelle erwähnt werden möge, nach einer eigenen Methode mit der Berechnung des Flächeninhaltes auf der Erdoberfläche beschäftigt und z. B. die Grösse des grossen Ozeans und der wichtigsten Länder Australiens auf Grundlage von Karten ermittelt. Vergl. E. A. W. v. Zimmermann, *Australien in Hinsicht der Erd-, Menschen- und Produktenkunde nebst einer allgemeine Darstellung des grossen Ozeans*, Hamburg 1810, Vorrede S. XV: »Der Herr Professor Gauss, dessen Name jede weitere Anpreisung unnütz macht, übernahm, aus vieljähriger Freundschaft, die Berechnung der Grösse mehrerer der wichtigsten Länder Australiens nach einigen der neuesten Karten. Er schuf sich hierzu eigene Methoden, worüber er gelegentlich etwas Bestimmtes bekannt machen wird«. Bereits in einem 1814 abgefassten Referat über Fr. Kries, *Lehrbuch der mathematischen Geographie* legt Gauss Wert auf derartige Berechnungen (Werke IV, S. 383).

2) Das Schreiben vom 1. Oktober 1830 ist ausführlicher von Gaede, *Beiträge*, S. 69 abgedruckt. Hier mögen einige Stellen wiedergegeben werden: »In andern Ländern, wo ähnliche Operationen ausgeführt sind oder werden, wie in Bayern, Frankreich, Preussen, Österreich, Dänemark etc., sind eigene topographische Bureaus errichtet, wo sich die rohen Materialien konzentrieren, und wo behufs des zweiten Geschäfts (deren Verarbeitung zu Resultaten) eigene Verifikatoren, Kalkulatoren etc. angestellt sind, oder auch das Personale, welches in den Sommermonaten den Messungen obgelegen hat, so weit es dazu tüchtig ist, in den Wintermonaten zu diesen Geschäften mit verwandt wird. Bei der hiesigen trigonometrischen Vermessung habe ich bisher diesen Teil des Geschäfts ganz allein auf mich selbst genommen. . . Ohne hier in umständliche Details einzugehen, darf ich doch nicht unbemerkt lassen, dass mir diese Verarbeitung nur dadurch möglich gewesen ist, dass ich ihr meine ganze, mir von meinen unmittelbaren Dienstgeschäften gebliebene Zeit gewidmet habe.

Wie gerne ich auch zu der Verarbeitung der im verflossenen Sommer gewonnenen rohen Materialien abermals meine Zeit und Kräfte opfern werde, da es einen so nützlichen Zweck gilt, so lässt sich doch schon mit Bestimmtheit voraussehen, dass, ohne wenigstens einige Hilfe dabei benutzen zu können, es nicht möglich sein wird, mit dieser Verarbeitung im Laufe des Winters fertig zu werden. . . Bei der fast in jeder Beziehung

der Messungen diente, ihm abnehmen konnte. Einer der Offiziere hatte die im vorhergehenden Jahre von seinem Sohne bis Bentheim geführten Dreiecke bis nach Ostfriesland hinein fortgesetzt, der Kapitän Müller und sein Sohn hatten den östlich von der Gradmessung liegenden Teil zu bearbeiten angefangen; deshalb war ihm die Hilfe — die ihm nur in diesem einen Jahre zu Teil wurde — sehr erwünscht.

Die häuslichen Verhältnisse waren in dieser Zeit sehr betrübende, Eugen Gauss hatte sich mit seinem Vater überworfen und war nach Amerika ausgewandert, nach qualvoller Krankheit starb am 13. September 1831 Gauss' zweite Gattin, und die Klage drang aus seinem Herzen: »Von unsern Handlungen sind wir Herr, aber nicht von den Wirkungen, welche Lebensverhältnisse auf unser Gemüt machen« (G.-O. Nr. 666). Die Energie seines Willens suchte einen Ausweg in der Beschäftigung mit der Kristallographie, bis ihn das Eintreffen von Wilhelm Weber in neue Bahnen lenkte.

55. Fortsetzung der hannoverschen Landesvermessung. Die Landesvermessungsarbeiten waren in mehreren aufeinander folgenden Jahren durch anderweite Inanspruchnahme der Offiziere behindert; auch beschränkte die Choleragefahr die Wahl des Vermessungsgebietes. Müller vertrat 1831 den Oberstleutnant Prott und gebrauchte im nächsten Jahre eine Kur in Karlsbad; Hartmann musste Lektionen an der polytechnischen Schule halten, es gelang ihm jedoch, das von Joseph Gauss 1829 bis zu den Seiten Mordkuhlenberg-Queckenberg-Kirchhesepe geführte, von ihm selbst 1830 fortgesetzte Polygon um Oldenburg bei der Seite Varel zu schliessen[1]). Leutnant Gauss konnte eine Nachlese zu seinen Beobachtungen in Lüneburg halten.

---

mir eigentümlichen Behandlung des ganzen Geschäfts, welche hier zu entwickeln, unpassend sein würde, kann ich eine reelle Hilfe bei dieser Verarbeitung nur von solchen Personen erwarten, die mit jener Eigentümlichkeit schon in gewissem Grade vertraut sind: jeder andre, selbst schon sehr fertige Rechner, würde doch erst eines längeren Unterrichts bedürfen, und dadurch die für mich intendierte Zeitersparnis absorbiert werden. Unter den drei erwähnten Artillerieoffizieren, welche mit diesem Geiste bekannt sind, ist mein Sohn, der Leutnant Gauss, der einzige gegenwärtig disponible, da die beiden anderen, wegen des von ihnen bei der Militärschule und Generalstabsakademie zu erteilenden Unterrichts, nicht abkommen können.

Unter diesen Umständen bin ich daher zu der untertänigsten Bitte genötigt: Königliches Kabinettsministerium wolle veranlassen, dass der Artillerieleutnant Gauss behufs Hilfeleistung bei Verarbeitung der Messungen vorerst noch auf zwei Monate zu meiner Disposition gestellt werde.«

1) Vergleiche die Übersichtskarte im Papenschen Atlas oder Werke IX, S. 434: Messungen in Westphalen, ferner die Ausgleichung des Dreieckskranzes, der das Oldenburgsche umgibt: Werke IX, S. 331—342.

56. Gausssche Koordinaten-Rechnung. In den Briefen an SCHUMACHER setzte GAUSS die Erläuterung seiner Methoden fort, indem er die Berechnung der Koordinaten aus den Längen und Breiten (G.-SCH. Nr. 391), den Weg, aus der wirklichen (linearen) Länge die Entfernung in der Darstellung zu erhalten (G.-SCH. Nr. 394), ferner die Aufgabe, aus einem gemessenen Winkel den ihm in der Abbildung korrespondierenden zu finden (G.-SCH. Nr. 394) nach und nach behandelte[1]).

57. Verbesserung der Erddimensionen. GAUSS regte sodann den Dr. SCHMIDT zu einer weiteren Verbesserung der Erddimensionen an, indem er ihn auf das schon 1815 von LAMBTON gemessene Stück des ostindischen Bogens von Namthabad bis Dasmerjidda und auf die EVERESTsche Fortsetzung bis Kullianpoor aufmerksam machte.

58. Vermessung von Braunschweig. Auf Veranlassung von GAUSS oder wenigstens unter seiner Mitwirkung kam 1833 eine Vermessung von Braunschweig zu Stande, mit der Professor SPOHR vom Collegium Carolinum beauftragt war[2]). Aber auch die von ihm geleiteten Arbeiten nahmen einen

---

1) GAUSS hat über die von ihm benutzten Formeln nichts veröffentlicht. In einer Nachschrift der Vorlesung über höhere Geodäsie, die GOLDSCHMIDT ausgearbeitet hat, sind die Gebrauchsformeln angegeben, aber nicht entwickelt. Durch die Briefe an SCHUMACHER sind sie erst zu allgemeinerer Kenntnis gelangt. Hieraus hat sie der Wasserbauinspektor TAAKS, der auch mehrere Druck- oder Schreibfehler berichtigte, übersichtlich zusammengestellt in: *Geodätische Tafeln für die Nord- und Ostseeküste berechnet nach Gaussschen Formeln.* Aurich 1865. Eine Ableitung und auch Weiterentwicklung der GAUSSschen Formeln hat zuerst O. SCHREIBER in: *Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung.* Hannover 1866 gegeben. Näherungsformeln für die GAUSSsche Projektion der Hannoverschen Landesvermessung veröffentlichte F. R. HELMERT in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Band 5 (1876), S. 238—253. Eine ausführliche Darstellung der GAUSSschen Methode, mit Berücksichtigung der im Nachlass aufgefundenen Formeln und eine Erweiterung zum Zwecke der Verwendung bei Darstellung grösserer Gebiete ist in der Veröffentlichung des Kgl. preuss. Geodätischen Instituts. N. F. Nr. 52: L. KRÜGER, *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene,* Potsdam 1912, enthalten. Es ist darin die Abbildungsgleichung Werke IX, S. 144 als Grundlage der GAUSSschen Methode angesehen.

2) GAUSS schreibt an den Gatten einer Freundin seiner ersten Frau, GERHARD SCHNEIDER am 6. März 1829: »Wahrscheinlich wissen Sie bereits, dass das Herzogtum Braunschweig nun auch trigonometrisch vermessen wird. Ich freue mich sehr darüber, dass so eine den heutigen Anforderungen angemessene Karte meines Vaterlandes zur Ausführung kommen wird, und werde in Gemässheit der deshalb an mich ergangenen Aufforderung sehr gern demnächst alle Mitteilungen aus meinen eigenen Messungen machen, die dazu beförderlich sein können. Einen zwölfzölligen Theodolithen habe ich bereits, auf spezielles Verlangen, in München für diese Messungen bestellt«. L. HÄNSELMANN, *Karl Friedrich Gauss, Zwölf Kapitel aus seinem Leben,* Leipzig 1878, S. 98.

neuen Aufschwung, insofern HARTMANN mit der Vermessung des Harzes beauftragt wurde. MÜLLER war bei der Anlage der Linie Köln-Berlin des optischen Telegraphen auf der Strecke Hornburg bis Höxter dem Major O'ETZEL von der Regierung beigeordnet, konnte aber auch noch mit JOSEPH GAUSS an der Mittelweser in Tätigkeit treten.

59. **Bearbeitung der Landesvermessung.** Mit der Berechnung der Harzbeobachtungen beschäftigte sich GAUSS 1834 in viermonatlicher angestrengter Arbeit, ohne ganz fertig zu werden; sein Sohn konnte allerdings am Ende des Jahres nach Göttingen kommen, scheint aber nur an den magnetischen Beobachtungen teilgenommen zu haben.

Übrigens verfuhr GAUSS bei der Bearbeitung der Landesvermessung in Westfalen, dem Lüneburgschen, dem Harz, der Wesergegend und bei den Dreiecksmessungen des Jahres 1836, nicht mit derselben Strenge, wie bei den 40 Dreiecken zwischen den 33 Punkten seiner Gradmessung, sondern in der Weise, dass er zunächst die Winkelmessungen allein in Betracht zog und scharf ausglich, dann zu diesen ausgeglichenen Zahlen die neue Ausgleichung hinzufügte, welche die Seitenverhältnisse erfordern. Eine alternative Wiederholung, bis stehende Resultate erscheinen, die zu demselben Ergebnis wie die Ausgleichung in einem Gusse führen, unterliess er dagegen für diese Zwecke.

Nachdem am 31. August 1834 HARDING gestorben war, wurde GOLDSCHMIDT, der im Jahre 1831 die von GAUSS gestellte Preisaufgabe gelöst hatte[1]), Ostern 1835 Observator an der Sternwarte und ging im Sommer nach Osnabrück, um JOSEPH GAUSS bei den Messungen Hilfe zu leisten.

1) Die Preisaufgabe, die GAUSS 1830 gestellt hat, lautete: »Determinetur inter lineas duo puncta data jungentes ea, quae circa axem datum revoluta gignat superficiem minimam«. H. A. SCHWARZ spricht sich darüber wie folgt aus: »Infolge eines von GAUSS ausgegangenen Vorschlages wurde von der philosophischen Fakultät der hiesigen Universität für das Jahr 1831 eine die Rotationsfläche kleinsten Flächeninhalts betreffende Preisaufgabe gestellt, für deren Bearbeitung GOLDSCHMIDT den ausgesetzten Preis erhielt. In der gekrönten Preisschrift wird die durch Rotation einer Kettenlinie um ihre Direktrix als Achse entstehende Minimalfläche, welche nach einem von PLATEAU ausgegangenen Vorschlage den Namen Katenoid erhalten hat, genauer untersucht. Insbesondere wird die Frage erledigt, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit es möglich sei, durch zwei Parallelkreise einer Rotationsfläche zwei von einander verschiedene Katenoide zu legen, unter welchen Bedingungen durch beide Kreise nur ein Katenoid oder überhaupt kein Katenoid gelegt werden kann. Auf diejenigen Fragen, deren Erörterung mit der Untersuchung des Vorzeichens der Werte zusammenhängt, welche die zweite Variation des Flächeninhalts einer von zwei Parallelkreisen begrenzten Zone eines Katenoids annehmen kann, geht GOLDSCHMIDT nicht ein.« (H. A. SCHWARZ, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. 1 (Berlin 1890), S. 271—272.)

In einem Briefe des folgenden Jahres (G.-Sch. Nr. 521) erwähnt Gauss eine bereits von Tobias Mayer[1]) behandelte Aufgabe, aus den geographischen Breiten zweier Orte und ihren gegenseitigen Azimuten die Abplattung zu finden, die bei dem damaligen Stande der Beobachtungskunst keine brauchbaren Ergebnisse hätte liefern können. Er macht darauf aufmerksam, dass die Aufgabe unbestimmt wird, wenn beide Punkte entweder gleiche Längen oder gleiche Polhöhen haben.

Im Jahre 1836 ruhten die Messungen nicht ganz; allerdings war Joseph Gauss nach Amerika gegangen, um die dortigen Eisenbahnen kennen zu lernen, aber Hauptmann Müller widmete sich der Triangulierung des Landstrichs an der Oberweser zwischen Uslar, Göttingen und Münden und traf im folgenden Jahre (1837) weitere Vorbereitungen zur Detailaufnahme im Osnabrückschen. Auch rekognoszierte er die Allergegend für künftige trigonometrische Messungen. Für seine Arbeiten erhoffte Gauss ein Zusammenwirken mit Gerling, der im Jahre 1835 nach elfjähriger Unterbrechung die hessische Landesvermessung von neuem wieder aufgenommen hatte, und es gelang auch Müller und Gerling, ihre Punkte gegenseitig zu verbinden. Goldschmidt beteiligte sich gleichfalls durch Heliotropieren von Göttingen nach dem Hohehagen.

XVI. Abschnitt. Längenbestimmung zwischen Göttingen und Mannheim.

60. Beobachtung der Pulverblitze und Heliotropsignale. Beendigung der Landesvermessung. Gerling frug noch bei Gauss an, ob er eine Längenbestimmung zwischen Göttingen und Mannheim für wichtig halte und Gauss stellte gern seine Mitwirkung durch Beobachtung der Pulverblitze in Aussicht[2]).

Diese Längenbestimmung kam 1837 zu Stande, nachdem Gerling die hessische Landesvermessung beendet hatte. Es gelang noch vorher die wegen

---

1) Vergl. Astronomische Nachrichten, Band 13, 1836, S. 354.

2) Bei dieser Gelegenheit gab Gauss Gerling Ratschläge, wie man die Libelle am Instrument zu füllen habe, wenn die Blase zu lang geworden sei. Er selbst habe dazu nur immer $^1/_4$ bis $^1/_2$ Stunde Zeit gebraucht.

des Göttinger Universitätsjubiläums[1]) notwendig gewordene Renovierung der Sternwartenräume rechtzeitig fertig zu stellen. Die Signale mussten nämlich vom Saale aus beobachtet werden, weil das vorhandene Chronometer für die Zeitübertragung nach dem Dache zu unzuverlässig war und es fand sich glücklicherweise eine Stelle in der Sternwarte, wo die Kuppe des Meissner noch eben sichtbar war. Am 22. August 1837 nahmen die Signale ihren Anfang und am 9. September wurden die letzten gegeben. Ausser Pulverblitzen wurden auch Signale durch vereinfachte Heliotropen verwendet, die vom Meissner und Feldberg gegeben und in Göttingen, Frauenberg und Mannheim aufgenommen wurden[2]).

---

1) Das Jubiläum der Georgia Augusta wurde vom 17. bis 19. September 1837 gefeiert, A. v. HUMBOLDT nahm daran teil und hielt sich neun Tage in Göttingen auf.

2) Vom Meissner wurden 179 Heliotropsignale und 92 Pulverblitze gesandt, vom Feldberg 58 Heliotrop- und 83 Pulversignale.

Auf eine Frage von GERLING wegen der Ausgleichung der Signale antwortet GAUSS am 29. Dezember 1839:

»Ich komme nun auf Ihre Frage wegen der geodätischen Aufgabe, wo die Länge von Linien in überzähliger Zahl gemessen sind und gefragt wird, wie man die Methode der kleinsten Quadrate darauf anwendbar machen könne. Solche Fragen lassen sich zwar mit wenigen Worten stellen, während eine gründliche Beantwortung eine kleine Abhandlung erfordert. Ich habe den Kopf jetzt voll von vielerlei häklichen Dingen, so dass ich zu meiner grossen Betrübnis z. B. zu einer wissenschaftlichen Arbeit, die ich seit Mai d. J. habe bei Seite legen müssen, da sie einen auf längere Zeit freien Geist erfordert, noch garnicht wieder zurückkehren kann. Um Ihnen aber meinen guten Willen zu beweisen, will ich einen Versuch machen, mich auf einige Stunden zu Ihrer Frage zusammenzunehmen, und bitte daher im Voraus um Entschuldigung, wenn mein Versuch Ihnen nicht vollkommen Genüge leistet.

[*Aufgabe, wo die Länge von Linien in überzähliger Art gemessen sind und gefragt wird, wie man die Methode der kleinsten Quadrate darauf anwendbar machen könne.*] Die Sache, aus höherem allgemeinen Standpunkte betrachtet, läuft immer zuerst darauf hinaus, dass gewisse Grössen $\ldots P, Q, R \ldots$ durch einen in der Natur der Sache liegenden Zusammenhang verknüpft sind, so dass, wenn alle bis auf Eine gegeben sind, diese Eine sich a priori aus den übrigen berechnen lässt. Ein solcher Zusammenhang lässt sich auf eine Gleichung $V = 0$ reduzieren, wo V eine gegebene Funktion von $\ldots P, Q, R \ldots$ ist. Nehmen wir an, das vollständige Differential von V sei

$$\cdots p.dP + q.dQ + r.dR + \cdots$$

und bezeichnen dieses Polynomium Kürze halber mit ω. Es ist klar, dass wenn anstatt desjenigen Systems von Werten, welches das wahre ist, ein anderes $\ldots P + dP,\ Q + dQ,\ R + dR \ldots$ betrachtet werde, so bleibt noch unentschieden, ob diese unter einander verträglich sind. Sind sie es, so muss notwendig $\omega = 0$ werden; sind sie es nicht, so erhält ω einen von 0 verschiedenen Wert, der aber immer sehr klein sein wird, wenn die neuen Werte z. B. beobachtete, also mit kleinen Fehlern behaftete Werte, allgemein, wenn sie von unter sich verträglichen Werten alle nur sehr wenig verschieden sind. Ihre Substitution in V wird nicht $V = 0$, sondern $V = u$ geben, wo u nichts anderes ist, als der Wert von ω, wenn statt

Ende 1838 war GAUSS mit der Reduktion von MÜLLERS Messungen an der Aller beschäftigt. 1839 hat dann MÜLLER noch den westlichen Teil des Gebietes um Bremen bearbeitet und 1841 das Netz in Ostfriesland angelegt, das die Nordseeinseln mit dem Festlande verband. Nach MÜLLERS Tode (1843)

$\ldots dP, dQ, dR \ldots$ die Fehler der Beobachtungen oder die erforderlichen Korrektionen mit entgegengesetzten Zeichen substituiert würden (oder substituiert werden könnten). In praktischer Rücksicht ist es ferner einerlei, ob man zur Berechnung der Koeffizienten von $\ldots dP, dQ, dR \ldots$ d. i. der Grössen $\ldots p, q, r \ldots$, die an sich Funktionen von $\ldots P, Q, R \ldots$ sind, die wahren Werte dieser Grössen oder die beobachteten $\ldots P+dP, Q+dQ, R+dR \ldots$ zum Grunde legt.

Zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ist offenbar nichts weiter erforderlich, als die Werte von $\ldots p, q, r \ldots u$ zu kennen, man gelange nun zu ihnen, wie man wolle. Es kann nämlich in einzelnen Fällen unbequem sein, erst die endliche Gleichung $V = 0$ auszuarbeiten und zu differentiieren; kann man auf anderem Wege zu jenen Grössen oder »zu solchen, die ihnen respektive proportional sind«, gelangen, so ist dies ebenso gut. In der Tat sind auch ihre absoluten Werte ganz indifferent, da anstatt der Gleichung $V = 0$ unzählige andere, mit derselben gleichbedeutende aufgestellt werden könnten, die andere Werte von $\ldots p, q, r, \ldots u$ geben würden, aber notwendig solche, die jenen proportional bleiben.

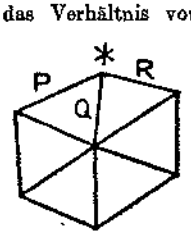
Dies wohl verstanden, kommt es nun jedesmal auf zwei Dinge an

1) das Verhältnis der Koeffizienten $\ldots p, q, r \ldots$ unter einander auszumitteln,

2) das Verhältnis der Grösse u zu Einem dieser Koeffizienten,

und zwar beides, ohne die endliche Gleichung $V = 0$ zu besitzen.

Was die erste Aufgabe betrifft, so lassen sich darüber zwar keine allgemeine Regeln geben, aber in einzelnen Fällen wird man sich gewöhnlich leicht helfen können. (Richtiger sollte ich mich wohl so ausdrücken, dass ich jetzt nicht Zeit habe, das dem einzelnen Fall zum Grunde liegende Prinzip ganz generalisiert in Worte einzukleiden.) Betrachten wir z. B. den Fall eines Polygons, worin alle Linien gemessen sind, also eine überzählige vorhanden ist. Hier muss die Gleichung $\cdots + p \cdot dP + q \cdot dQ + r \cdot dR \cdots = 0$ auf jedes System von Änderungen $\ldots dP, dQ, dR \ldots$ passen, die unter sich verträglich sind, also auf das System, wo nur zwei Linien, z. B. nur P und Q geändert werden. Hier kann man also sämtliche Punkte mit Ausnahme von $*$ als fest annehmen und darf blos solche Abänderung der Lage von $*$ zulassen, wo R ungeändert bleibt. Da finden Sie dann, dass $dP : dQ = \sin PR : \sin QR$ sein muss, folglich muss notwendig $p \cdot \sin PR + q \cdot \sin Qr = 0$ sein oder $p : q = \sin QR : -\sin PR$. Auf gleiche Weise findet sich das Verhältnis von $q : r = -\sin PR : \sin PQ$ und indem Sie so durch die ganze Figur fortschreiten,



ergibt sich das Verhältnis sämtlicher Koeffizienten zu einander. Ja wenn Sie nach Vollendung wieder vom letzten zum ersten fortschritten, so bekämen Sie blos die Bestätigung dessen, was Sie schon haben, insofern Sie die wahren Werte von den Winkeln zum Grunde legten (indem dies Bestätigen nichts anderes ist als die triviale Bedingungsgleichung der Seitenverhältnisse). Numerisch ausführen können Sie freilich die Rechnung nur, indem Sie nach den gewöhnlichen Regeln der Trigonometrie die einzelnen Dreiecke nach den beobachteten Seiten berechnen, so dass Sie am Ende einen kleinen Unterschied finden würden, der aber insofern es sich hier nur erst von dem Verhältnis der Koeffizienten $\ldots p, q, r, \ldots$ handelt, infolge der oben gemachten Bemerkung für 0 zu achten ist.

Was dann die zweite Aufgabe betrifft, so bedenken Sie, dass der Gleichung

$$\cdots + p \cdot dP + q \cdot dQ + r \cdot dR + \cdots = u$$

blieb JOSEPH GAUSS als einziger zurück, dem die Vollendung des Werkes zufiel, indem er von der Seite Hamburg-Litberg bis zur Seite Silberberg-Bardahl gelangte.

XVII. Abschnitt. Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie.

61. Erste Abhandlung. Als WILHELM WEBER 1843 nach Leipzig berufen wurde, ging der Hauptreiz, sich mit dem Magnetismus zu beschäftigen, für GAUSS verloren und er veröffentlichte noch in demselben Jahre die erste Abhandlung der *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* (Werke IV, S. 259—300). Er behandelt darin einen Spezialfall der in seiner Preisschrift gegebenen Abbildungen, die er jetzt zum ersten Male als konforme bezeichnete, in grösserer Ausführlichkeit, nämlich die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel. Während die Annahme $f(v) = v$ für die Abbildungsfunktion bei der Projektion der ganzen Oberfläche des Ellipsoids am geeignetsten ist, legte er für die Abbildung eines kleineren Gebietes die Funktion $f(v) = av - i.\log k$ zu Grunde,

---

Genüge geleistet wird, wenn $\cdots - dP, -dQ, -dR \cdots$ nur solche Korrektionen der Beobachtungen bedeuten, die dieselben unter einander verträglich machen, wenn es gleich nicht die Reduktionen auf die im konkreten Fall wahren Werte sind. Das einfachste System solcher Korrektionen ist dasjenige, wo alle bis auf Eine gleich 0 gesetzt werden, und auch diesem System muss also obige Gleichung genügen. Das ist aber ganz leicht, wenn Sie im gegenwärtigen Beispiel nach den gewöhnlichen Regeln der Trigonometrie aus den beobachteten Werten der übrigen diese Eine z. B. das R berechnen und mit dem beobachteten Werte vergleichen; die Differenz, wenn vom letzteren der erstere subtrahiert wird, ist das jetzt in Frage kommende dR, bei welcher ganzen Rechnung natürlich alle Schärfe angewandt werden muss, während bei den Operationen, die sich auf obige erste Aufgabe beziehen (insofern sie nicht selbst Teile der jetzigen Operation sind) eine viel geringere Schärfe zureicht. Da nun aus 1) das Verhältnis aller $\ldots p, q, r \ldots$ bekannt war, eine von ihnen ganz willkürlich angenommen werden konnte, und mithin alle bekannt sind, so haben Sie jetzt $u = r.dR$, dR in der oben angeführten Bedeutung genommen.

Ich hoffe, dass dieses Ihnen genügen wird. Hätte ich mehr Zeit darauf wenden können, so würde alles zierlicher ausgedrückt werden können, besonders in der Anordnung der Bezeichnungen. Aber [um] in dieser Beziehung zierlich zu schreiben, ist es gewöhnlich nötig, wenigstens die Sachen zweimal auszuarbeiten, da man erst, wenn alles schon einmal auf dem Papier steht, beurteilen kann, wie es etwa klarer hätte dargestellt werden können. Keine meiner Schriften hat mich in dieser Beziehung mehr Zeit gekostet, als das *Suppl. Theor. Comb.*, worin so viele Sachen zu bezeichnen waren; blos aus diesem Grunde (und weil man beim ersten Ausarbeiten sich gleichsam festfährt) hat sie wohl 3 oder 4 mal umgearbeitet werden müssen.

in der also zwei Konstanten a und k zur Verfügung standen, um die Abweichung des Vergrösserungsverhältnisses von dem Werte 1 im mittleren Parallelkreis auf eine Grösse dritter Ordnung (abgesehen von dem Faktor e^2) herabzudrücken. Ausser einem Beispiel ist noch eine Tafel hinzugefügt[1]) (Werke IV, S. 293).

62. Zweite Abhandlung. Die zweite Abhandlung folgte 1846 (Werke IV, S. 301—340). Die in der ersten sphärisch behandelte Aufgabe der Übertragung der geographischen Koordinaten durch eine Dreiecksseite wird hier auf dem Ellipsoid behandelt. Der wichtigste Fortschritt ist dabei die Einführung der Mittelwerte der Breiten und der Azimute der beiden Endpunkte der geodätischen Linie, und es entstanden jene Formeln zur indirekten Lösung der Aufgabe, mit sechs aus Hilfstafeln zu entnehmenden Koeffizienten, die mit geringen Abänderungen noch jetzt, namentlich für die andere Aufgabe, aus den Koordinaten der Endpunkte die lineare Länge und die Azimute zu berechnen, Anwendung finden.

Ob GAUSS, als er am 30. Dezember GERLING gegenüber erwähnte, dass ihm zur Ausführung einer grösseren Arbeit, die er vorhätte, Möglichkeit und Mut fehle, sein geplantes Werk über die trigonometrischen Messungen in Hannover im Auge gehabt hat, bleibt zweifelhaft[2]). In seinem Nachlasse hat sich nur ein Plan dazu (Werke IX, S. 401), die Einleitung und der Anfang des ersten Abschnittes gefunden.

Mit jener Ausdauer, die nach seinen eigenen Worten das untrügliche Zeichen des Genies sind, einen Gegenstand nicht eher zu verlassen, bis er ihn ergrübelt habe, kam er immer wieder auf Untersuchungen zurück, die aufklären sollten, welche Ursache den Winkelfehlern, die namentlich zuletzt seine Beobachtungen in störender Weise beeinflusst hatten, zu Grunde lag. In ausführlicher Weise hat er darüber an GERLING Bericht erstattet[3]).

---

1) In der Ausgabe in OSTWALDS Klassikern Nr. 177 hat der Herausgeber, J. FRISCHAUF, aus den dort Seite 89 angegebenen Gründen bei beiden Abhandlungen die Tafeln weggelassen.

2) Möglicher Weise handelte es sich um die Untersuchungen des Planeten Pallas.

3) GAUSS an GERLING, 15. Januar 1844: »An dem Theodoliten, womit mein Sohn vorigen Sommer (nach MÜLLERS Tode) gemessen hat, und der den ärgerlichen Fehler, alle Winkel zu klein zu geben, in einem unverschämten Grade angenommen hatte, habe ich jetzt durch MEYERSTEIN Abänderungen machen lassen, auf deren Wirksamkeit ich sehr neugierig bin. Sie bestehen hauptsächlich in Vorrichtungen, durch

63. Änderung der Polhöhe mit der Höhe. Die letzte Bemerkung von Bedeutung, die eine geodätische Frage betrifft, findet sich in einem Briefe an General BAEYER vom 22. Juni 1853 (Werke IX, S. 99). Sie betrifft die

die man die Federn, welche unten die Zapfen unterstützen, nach Gefallen stark, schwach oder garnicht wirken lassen und damit schnell und leicht wechseln kann«.

8. April 1844: »Ich komme nun zu dem Theodoliten. Sie finden die Fälle besonders rätselhaft, wo die gemessenen Winkel die Tendenz eines positiven Fehlers zeigen, (während meine Erfahrungen immer negative Fehler d. i. zu kleine Resultate ergeben) und reden von 3 solchen Fällen. . . . Glück aber muss ich Ihnen wünschen, dass Sie so schnell [die] Quelle des Fehlers entdeckten. Mir ist es nicht so gut geworden; mit dem Fehler der 3 Theodoliten, in kleinerem oder grösserem Masse die Winkel zu klein zu geben, quäle ich mich schon seit fast 20 Jahren und kann bis diese Stunde noch nicht Herr davon werden. So nahe liegende Ursachen, wie eine lose Schraube oder Mangel an Fett, sind gewiss nicht Schuld. Ich will Ihnen jetzt einen kleinen Bericht von meinen bisherigen Erfahrungen und den in den letzten Monaten gemachten Versuchen geben.

Ich entdeckte das Dasein dieses Fehlers zuerst an meinem 12-zölligen Theodoliten im Jahr 1825. Die in den vorhergehenden Jahren gemachten Messungen hatten keine Spur davon gezeigt. An der letzten Station von 1825 half ich mir so, dass ich, wenn der Winkel gleich A gesetzt wird, eine Reihe Messungen wie gewöhnlich, die andere in etwa ebenso vielen Repetitionen so machte, dass die Alhidade von rechts nach links, also durch den Bogen $-(360^0-A)$ gedreht wurde; die zweite Art gab dann das A natürlich zu gross und das Mittel aus beiden nahm ich für den richtigen Winkel. Von der Grösse des Winkels schien der Fehler garnicht oder nicht merklich abzuhängen; der mittlere Wert des Fehlers war etwa $^3/_4$ Sekunde.

MÜLLER gebrauchte einen andern Theodoliten, aber von gleichen Dimensionen. Auch hier zeigte sich der Fehler nicht gleich, aber unverkennbar in den späteren Jahren. Ich gab ihm auf, dasselbe Palliativ anzuwenden, was jedoch nicht ganz konsequent befolgt sein mag, da die grossen Alhidadenbewegungen immer etwas länger aufhalten. Einen numerischen mittleren Wert des Fehlers kann ich jetzt nicht angeben, jedenfalls war er wenigstens doppelt so gross als bei meinem Theodoliten.

Mein Sohn gebrauchte einen 8-zölligen Theodoliten, aber mit ebenso starkem Fernrohr wie das des 12-zölligen. In den früheren Jahren war der Fehler nicht, aber im letzten Sommer, wo mein Sohn nach fast 10-jähriger Zwischenzeit wieder mit diesem Theodoliten operierte (den MEYERSTEIN vorher gereinigt und sorgfältig untersucht hatte) erschien er auch, nur anfangs zugleich mit grosser Unregelmässigkeit der Resultate verbunden. Er erkannte aber bald, dass hievon die Ursache in dem Umstande lag, dass er bloss ziemlich die letzten Gänge der untern Stellschraube angewandt, die wie gewöhnlich stark ausgenutzt waren. Später schraubte er diese Schraube viel weiter durch die Mutter, und die grosse Unregelmässigkeit hörte fast auf, aber alle Winkel [wurden] wieder zu klein. Ich veranlasste ihn, die Winkel alle auf zwei Arten zu messen 1) die gewöhnliche, wo von dem Objekt links angefangen, die Alhidade also durch $+A$, und dann der ganze Kreis durch $-A$ bewegt wird, 2) anfangend von dem Objekt rechts und die Alhidade durch $+(360^0-A)$, Kreis durch $-(360^0-A)$ drehend. Die Mittel geben dann in der Generalausgleichung eine leidliche Übereinstimmung, aber die Fehler der einseitigen Messung gingen auf 3″, 4″, auch wohl 5″.

Ich habe nun, nachdem der Theodolit zurückgekommen war, folgende Schlüsse und Abänderungen gemacht.

I. Da bei allen drei Theodoliten der Fehler anfangs garnicht oder nicht merklich vorhanden war, so müsste jedenfalls Abnutzung mit im Spiele sein. Ich habe daher für die obere und untere Stellschraube nebst den Muttern ganz neue machen lassen. Die alten fand MEYERSTEIN stark und ungleich ausgenutzt. Die neuen haben einen sehr schönen leichten, gleichen Gang.

Änderung der Polhöhe mit der Meereshöhe. Aus der Formel, die Gauss dafür angibt und deren bedingten Wert wegen der Nichtberücksichtigung der Lokalattraktion er hervorhebt, geht mit Wahrscheinlichkeit hervor, dass er einen

---

II. Von Fehlern, die in konstantem Sinn wirken, kann ich mir nur die einzige Erklärung denken, dass entweder

A) der Kreis nicht ganz unbeweglich bleibt während eines Zeitintervalles, wo seine Unbeweglichkeit vorausgesetzt wird, oder

B) die Alhidade ihre relative Stellung gegen den Kreis nicht beibehält während einer Zeit, wo diese unveränderte Stellung stattfinden sollte.

Biegung der Speichen könnten hierunter begriffen gedacht werden. Ich ziehe aber vor, diese Biegung aus folgendem Gesichtspunkte zu betrachten. Bei dem 8-zölligen Theodoliten, wo die Fernrohrträger nicht auf dem Rande der Alhidade, sondern auf dem Herzen derselben aufstehen (eine Einrichtung, die übrigens einiges gegen sich hat) ist eigentlich eine Biegung der Speichen fast ganz irrelevant. Nachteilig wirkt sie eigentlich nur, insofern bei der Anfangsablesung und bei der Endablesung eine ungleiche Biegung der Speichen stattfindet, und der Betrag dieser Ungleichheit wird dann mit der Anzahl aller Repetitionen dividiert, ist also jedenfalls um so mehr unmerklich, da, wie Versuche mich gelehrt haben, (indem ich das Objekt einmal blos durch Schrauben in einem Sinne, und nachher durch Schrauben von der andern Seite her auf den Faden bringe und beidemal ablese) der ganze Betrag so klein ist, dass er sich in der Ungewissheit der Ablesung verliert. Es bleibt also nur A und B zu betrachten.

Was B betrifft, so kann eine solche Änderung während der Drehung des ganzen Kreises (insofern diese nicht unvernünftig schleudernd, sondern sehr langsam geschieht) nur in der Reibung des Zapfens auf der Tragfeder eine Erklärung finden. Dieses fällt aber jetzt weg, nachdem ich diese Feder ganz anders habe einrichten lassen, wie ich weiterhin erklären werde.

Dann kann aber eine solche schädliche Änderung auch stattfinden, während man abliest, ich meine, während man den Lupenträger um 90° dreht, um ihn über die beiden andern Verniers zu bringen. Dieser Fehler hat gewiss stattgefunden, da der Lupenträger wirklich etwas schwer ging; ich habe ihn aber jetzt so leicht gehend gemacht, dass nicht mehr an einen merklichen Einfluss zu denken ist. Überdies kann daraus kein konstanter Fehler entstehen, sondern höchstens wechselweise eine Messung zu gross, die folgende zu klein pp. Ich lese nämlich immer so ab: anfangs I, III; Drehung; II, IV; dann die folgende Ablesung II, IV; Drehung; I, III, u. s. f.

Es scheint also, dass wir es nur noch mit A zu tun haben. Ich hatte mir gedacht, dass, indem die Alhidade gedreht wird, infolge der Reibung des Zapfens in der Büchse diese und damit der Kreis sich immer in demselben Sinne etwas mitdrehen wird, wenn irgendwo einiger Spielraum dazu da ist; die Alhidade durchläuft also relativ gegen den Kreis einen kleinern Bogen als im Raume und so erklärt sich, dass alle Winkel zu klein ausfallen.

Es sind also immer zwei Dinge zu betrachten, die Kraft, welche die Alhidadenbewegung zum Bewegen des Kreises ausübt, und die Empfänglichkeit des letztern, dem Impuls der Kraft zu folgen. Ich trachtete daher beides wo nicht zu heben, doch zu vermindern. Ein Mittel zu dem letztern Zweck waren die neuen tadellosen Schrauben. Das zweite Mittel ist die neue Einrichtung der Tragfedern. Diese sind jetzt so eingerichtet, dass sie nach Gefallen das ganze Gewicht, einen beliebigen Teil oder garnicht tragen, und dass man damit leicht und schnell nach Gefallen wechseln kann. Die Beschreibung der dazu angewandten, sehr gut exekutierten Einrichtung übergehe ich für jetzt. Der Gebrauch ist folgender: Während der Ablesung trägt die Alhidadenfeder garnicht, oder die Alhidade liegt mit ihrem ganzen Gewicht in der Büchse;

Ausdruck für die Niveaufläche, das von LISTING so genannte Geoid (also eine Formel für das Erdpotential) abgeleitet hatte, aus dem dann auch das CLAIRAUTsche Theorem gefolgert wird.

---

die Kreisfeder hingegen trägt vollkommen, so dass ich den Kreis mit grosser Leichtigkeit drehe, um jeden Index in einerlei Beleuchtung abzulesen. Nun wird bei demselben Zustand der Federn durch Kreisdrehen das erste Objekt sehr nahe auf den Faden gebracht, dann die Klemmschraube festgesetzt*), die Kreisfeder abgespannt und die Freistellung gemacht, für welche die Stellschraube dann selten mehr als etwa 15″ in Anspruch genommen zu werden braucht. Nun wird die Alhidadenklemme leicht gelöst, die Tragfeder abgespannt, die Klemme völlig und **recht ordentlich** (*) gelöst und dann das Fernrohr sehr nahe auf das zweite Objekt geführt; dann die Tragfeder wieder angespannt (d. i. zum Tragen gebracht), die Klemme ein wenig befestigt, die Tragfeder wieder abgespannt, die Klemme ganz befestigt, die Stellung feiner d. i. bis auf etwa 10″ genau gemacht, die Feder wieder angespannt und die Stellung ganz fein vollendet. Jetzt wird wieder die Kreisfeder abgespannt, die Klemme gelöst und entweder abgelesen oder zu einer zweiten Messung geschritten. Das ganze anfangs verwickelt scheinende (und wohl einiges Lehrgeld kostende) Spiel wird einem in kurzer Zeit ganz mechanisch.

Ich habe nun hiemit eine bedeutende Anzahl Winkelmessungen gemacht; gross muss die Zahl immer sein, um die Ablesungsfehler unschädlich zu machen, da diese ziemlich gross sind. Die Teilstriche sind nicht so edel, wie an den andern Theodoliten, und ich bleibe bei der Schätzung öfters 5″—10″ ungewiss. Ich habe daher zu jedem Winkel 50 oder mehr Repetitionen gebraucht. Die Gegenstände waren 1) Geismar 2) Rosdorf 3) Hohehagen Signal 4) Sesebühl, die ich an Einem Platze in der Sternwarte sehe. Es liegt daselbst ein grosser fundierter Stein, bestimmt dem 6-füssigen Merz für Mikrom[eter]messungen eine feste Lage zu geben; ich sehe durch das Fenster etwa 90° im Azimuth; Geismar wird durch die zugleich geöffnete Tür sichtbar. Der Theodolit bleibt hier fortwährend stehen und ist wegen des Nivellierens immer nur eine sehr kleine Nachhülfe erforderlich gefunden. Freilich steht der Theodolit zunächst auf einem hölzernen Stativ; aber es liess sich für jetzt eine andere Aufstellung durchaus nicht erreichen. Im Freien hätte ich eine Aufstellung auf einem Steine haben können, wo aber nicht so viele gute Objekte sichtbar gewesen wären und wo die Notwendigkeit, das Instrument jedesmal erst neu aufzustellen, die Gewinnung von vielen Repetitionen in der ungünstigen Jahreszeit ganz unmöglich gemacht hätte. Die folgenden 650 Repetitionen haben 5 Wochen gekostet; in günstigerer Jahreszeit hätten sie in Einer erhalten werden können.

Unter I verstehe ich hier die Messung A, $-A$, d. i. wo die Alhidade von der Linken nach der Rechten um A, der Kreis [um] ebensoviel von der Rechten nach der Linken gedreht wird, unter II hingegen $360-A$, $-(360-A)$, wo beide durch das Supplement gedreht werden. Bei I wird also mit den links liegenden, bei II mit den rechts liegenden angefangen; bei I bilden die Ablesungen wachsende, bei II abnehmende Zahlen. In der letzten Kolumne setze ich die Ausgleichung der Mittel hin, um sie in Übereinstimmung zu bringen.

	jedes	I	II		Mittel	
1.2	50	72° 51′ 42,″800	72° 51′ 46,″100	100	72° 51′ 44,″450	+ 0,″136
1.3	60	89 23 24,292	89 23 26,646	120	89 23 25,469	+ 0,014
1.4	50	98 31 21,850	98 31 24,225	100	98 31 23,037	— 0,154
2.3	55	16 31 40,000	16 31 41,787	110	16 31 40,864	+ 0,033
2.4	55	25 39 37,841	25 39 38,568	110	25 39 38,205	+ 0,092
3.4	55	9 7 56,386	9 7 58,318	110	9 7 57,352	+ 0,048.

*) D. i. heruntergedrückt, so dass sie garnicht trägt; genau genommen ist dies eigentlich eine stärkere Anspannung. Das Abspannen bezieht sich also auf die Büchse, gegen die die Feder vorher drückte.

64. Zusammenfassung. Bei einem Rückblicke auf die geodätische Tätigkeit von GAUSS denkt man in erster Linie an seine Gradmessung. Sie hatte ein

---

Die ausgeglichenen Azimute sind (natürlich salva correctione communi)

1	334° 37′ 50,″817
2	47 29 35,403
3	64 1 16,300
4	73 9 13,700.

Es erhellet also, dass trotz der angebrachten Änderungen die Winkel noch immer zu klein ausfallen, im Mittel um 1,″194, dass aber die Mittel aus I und II sich so schon vereinigen lassen, wie man nur wünschen kann, und besser als jemals mit dem 12-zölligen erreicht ist. In Ihren Bezeichnungen finde ich $m = \sqrt{\frac{\Sigma pvv}{3}} = 1,''360$ Wenn auch etwas hiebei zufällig sein mag, so kann man doch mit vieler Sicherheit schliessen, dass jeder Winkel, wo die Alhidade von L nach R, der Kreis von R nach L bewegt wird, erscheint zu klein, durchschnittlich 1,″194 und wenn man so auf gleiche Art vom ersten Objekt zum zweiten und vom zweiten zum ersten (immer Alhidade von L nach R, und Kreis von R nach L drehend) misst, so ist die Summe beider Resultate 360°—2,″388 und das Mittel zwischen dem ersten Winkel und dem Supplement des zweiten sehr nahe der richtige Wert. 1) Nach den von mir gebrauchten Vorsichten war mir nicht wahrscheinlich, dass Reibung des Alhidadenzapfens in der Büchse allein noch durchschnittlich 1″ hervorbringen könnte. Ich überlegte zuvörderst, dass es noch eine zweite ganz auf dieselbe Weise wirkende Ursache gibt, nämlich die Reibung der am Limbuskreise herumschleppenden Alhidadenklemme. 2) Es ist möglich, dass diese zweite Ursache auch etwas weniges beigetragen hat, da vor dieser Reflexion nicht immer gleich sorgfältig darauf geachtet ist, die Alhidadenklemme vor der freien Alhidadenbewegung **recht ordentlich** (s. o. [S 145]) zu öffnen. 3) Allein die weitere Überlegung lehrte mich, dass noch eine dritte Ursache existiert, die wohl reichlich ebensoviel wirken kann, wie die beiden ersten. Das ist die Kraft, die man mit den Fingern ausübt, indem man die Alhidade festklemmt. Man drehet dadurch gewiss auch etwas den Limbuskreis in dem Sinn ↗○, falls nur einiger Spielraum zu drehen da ist. Man überzeugt sich leicht, dass diese dritte Ursache in demselben Sinne wirkt, wie die beiden ersten, so oft man die Alhidadenbewegung von der Linken nach der Rechten ausführt, aber im entgegengesetzten, wenn man die Alhidade rückwärts dreht. Das letzte war bei obiger Messung nicht vorgekommen. Ich habe daher versucht, den Winkel 3.4 auch auf die Art $-A$, $+A$ zu messen, d. i. ich drehe von Sesebühl anfangend die Alhidade von rechts nach links, und nachher den Kreis von links nach rechts, dies gab mir

3.4 60 9° 7′ 57,″292

also fast genau dem Mittel aus I und II gleich, so dass man schliessen möchte, die Ursache 3) wirke nahe ebensoviel, wie 1) und 2) zusammen, und während bei den Messungen I und II die Ursachen konspirieren, destruieren sie einander bei III. Hier entsteht nun das Bedauern, dass die Zeit nicht erlaubt, alle Kombinationen durchzuprobieren. Ich würde sie symbolisch so vorstellen.

1.	$+A, -A$
2.	$+A, 360^0 - A$
3.	$-A, +A$
4.	$-A, -(360^0 - A)$
5.	$360^0 - A, +A$
6.	$360^0 - A, -(360^0 - A)$
7.	$-(360^0 - A), -A$
8.	$-(360^0 - A), +(360^0 - A)$.

Teil einer grossen Meridianmessung werden sollen. Die anderen Teile waren nicht vollendet und die Anschlüsse waren nicht genügend. Die Grundlinien

---

Es steht hier immer voran die Bewegung der Alhidade und nachher die Bewegung des Kreises. + bedeutet immer von links nach rechts. Die obigen Bezeichnungen waren also

I 1
II 6
III . . . . . 3.

Aber die Zeit hat nur diese drei bisher durchzumachen verstattet und III = 3 auch nur an Einem der Winkel. Die übrige Zeit ist mit Versuchen an den alten Schrauben und mit allerlei andern Abänderungen zugebracht. Letztere haben sich nicht alle bewährt. Namentlich habe ich Spannfedern an der untern und obern Stellschraube anbringen lassen, um den toten Gang aufzuheben, habe sie aber wieder verwerfen müssen, da sehr schlechte Resultate damit hervorgingen. Die Ursache ist, dass durch diese Spannfedern immer auch die offene Klemme auf eine solche Art sich an den Limbus stemmt, dass die freie Drehung (der Alhidade oder des ganzes Kreises) die (besonders die erstere nach (*) [oben S. 145] sehr leicht gehen sollten, sehr schwer gehend werden. Ich habe daher die obere Spannfeder ganz in Untätigkeit gesetzt und lasse die untere nur schwach wirken.

Man könnte fragen, in wie fern möglicherweise ein Unterschied zwischen 1. und 2. oder zwischen 3. und 4. u. s. f. entstehen kann aus dem Sinn der Bewegung des Kreises? Ich antworte, eine solche Wirkung ist allerdings denkbar, obwohl von mir faktisch nur bei 5. und 6. und zwar mit den alten Schrauben und während an der untern Schraube die eben erwähnte Spannfeder noch wirkte. Aus 6. fand sich der Wert von $(360^0 - A)$ erheblich kleiner als aus 5., oder mit andern Worten: aus 6. folgt der Wert von A erheblich (mehrere Sekunden) grösser als aus 5., während sowohl 5. als 6. das A wirklich zu gross geben (ich fand aus 5. $A = 9^0\,7'\,58''{,}542$ mit 60 Repet[itionen], aus 6. $A = 9^0\,8'\,2''{,}000$ aus 15 Repet[itionen]). Ich erkläre dies so, dass beidemale (5. und 6.) der zu grosse Wert von A aus dem unzeitigen Vorwärtsgehen des Kreises entsteht, aber bei 6. ist der ganze Kreis durch das vorherige (zumal ziemlich stete) Rückwärtsdrehen viel mehr disponibel gemacht, nachher wieder schädlichen Spielraum zur Vorwärtsbewegung zu besitzen, als bei 5. Ich beklage, dass die Zeit nicht verstattet, alle Kombinationen recht gründlich durchzumachen. Am schwierigsten ist immer zu entscheiden, wo eigentlich der Spielraum ist. Vermutlich ist hier ein Zusammenwirken vieler Ursachen, etwas wenn auch noch so wenig toter Gang der Stellschraube, einige Bosheit in den Fusschrauben, obwohl natürlich immer nach dem Nivellieren (oder während der letzten Nivellierungsnachhilfe) die Fusschrauben tüchtig festgebremst werden, vielleicht selbst die Spitzen in den Telleröffnungen, oder auch etwas das hölzerne Stativ. Wer vermag es zu [ent]scheiden? Die Tatsache steht fest genug, dass noch immer, wenn die obigen Ursachen 1., 2., 3. in Einem Sinne wirken, die Winkel zu klein ausfallen. Bei verschiedenen Instrumenten und bei verschiedenen Beobachtern mag der Effekt von 1. 2. 3. sehr ungleich sein. Klemmt man die Alhidade nur schwach an, so scheint die Wirkung von 3. sich sehr zu vermindern; ich habe aber nur wenige Versuche darüber gemacht, da es immer ängstlich ist, ob man nicht zu wenig tue? ich habe im Gegenteil gewöhnlich die Klemme ziemlich scharf angezogen. Hat BRANDT sich vielleicht bei allen seinen Winkeln auf dem Knill der obigen Art 3. bedient, und überwiegt an seinem Instrument der Effekt der Ursache 3. die Ursachen 1., 2. bedeutend, so wäre daraus erklärt, warum alle seine Winkel zu gross ausfielen. ... Es ist aber wohl Zeit, diesen langen Brief zu schliessen. Um ihn nicht noch länger zu machen, habe ich manches abkürzen und für manches die Motive weglassen müssen, was Sie hoffentlich leicht selbst supplieren werden, wenn Sie den Gegenstand Ihres eigenen weiteren Nachdenkens würdigen wollen.«

waren nicht endgültig bestimmt und unter einander nicht ausgeglichen. Da

---

GAUSS an GERLING, 14. 7. 1844. »Ich beschränke mich heute darauf, in Beziehung auf den einen Passus [Ihres Briefes]: »»Was Ihre neue Federeinrichtung betrifft, so muss ich gestehen, dass ich mir die Manöver damit bis jetzt [nicht] ganz klar habe machen können, sondern vielmehr glaube, dass ich entweder Sie missverstehe, *wenn ich Tragfeder sowohl die eine Feder nenne, die den Limbuskreis trägt, als die, welche den Alhidadenkreis trägt, und mir vorstelle, dass beide unabhängig von einander angespannt* (zum Tragen gebracht) *und abgespannt* (ausser Wirksamkeit gesetzt) *werden können,* und mir dann die Manöver so denke, wie unten näher angegeben; oder, dass in Ihrem Briefe eine Anspannung anzumerken vergessen sei etc., worauf dann eine symbolische Bezeichnung der Operationen folgt«« zu erwidern, dass ich mit Vergnügen bereit bin, zu versuchen, aufzuklären, was Ihnen unklar ist, sobald Sie mir nur anzeigen, was Ihnen denn eigentlich unklar ist, was ich in der Tat aus obigem Passus nicht erraten kann. Ich meinerseits verstehe nicht, wie Sie das Vorhandensein zweier Tragfedern, einer für die Alhidade, der anderen für den Limbuskreis, und die Unabhängigkeit des Spiels der einen von dem Spiel der andern in der rot unterstrichenen [hier kursiv gedruckten] Stelle noch gleichsam als hypothetisch hinstellen, da ich geglaubt habe, beides in meinem letzten Briefe oder schon in einem früheren expressis verbis selbst gesagt zu haben. Es war also darin ein Missverständnis nicht möglich, und ebenso finde ich nachher Ihre Übertragung der Operationsvorschriften in eine symbolische Form im Wesentlichen (d. i. mit einigen ganz unwesentlichen Abänderungen) ganz übereinstimmend mit der Instruktion, welche ich an meinen Sohn geschickt habe. Ich bitte daher recht sehr, mir anzugeben, was Ihnen dabei dunkel geblieben. Ich sollte nicht glauben, dass die drei Operationen

$$+ \text{l[imbus]} + a$$
$$a \text{ etwas geklemmt}$$
$$+ \text{l[imbus]} - a$$

Ihnen Anstoss gegeben haben können, die offenbar zu dem Zweck hineingesetzt sind, damit nicht bei äusserst beweglicher Alhidade das Anklemmen das vorher erhaltene nahe Zielen wieder bedeutend verstelle, und also (was ich immer vermeide) der Stellschraube nachher zu viel zugemutet werden müsse. Dass aber vorher bei der Kreisbewegung nicht ähnliche 3 Operationen eingeschoben sind, hat offenbar seinen Grund darin, weil es da nicht nötig ist; auch bei $-l$ verrückt das Anklemmen die Fernrohrrichtung nicht erheblich. Ich habe den Passus Ihres Briefes wohl 8 mal durchgelesen, finde mich aber durchaus ausser Stande, den Gegenstand ihres Zweifels zu erraten.«

GAUSS an GERLING 30. Juli 1844: »Nach den von Ihnen jetzt gegebenen Erläuterungen scheint das Missverständnis in Beziehung auf das Spiel der Tragfedern nur daher gekommen zu sein, dass ich einmal abgespannt (nun wird die Tragfeder leicht gelöst, die Tragfeder abgespannt etc.) anstatt angespannt geschrieben habe; solch eine Verwechslung kann leicht begegnen bei Anwendung einer Terminologie, die von einem Gesichtspunkt aus vollkommen passend ist, während ein anderer Gesichtspunkt gerade das Widerspiel erfordert, solange man sich eine solche Terminologie noch nicht ganz mechanisch gemacht hat. In jener Stelle soll die Feder angespannt werden, an oder gegen den Alhidadenzapfen, nämlich sie soll in den Zustand gebracht werden, wo ihre Spannung gegen den Alhidadenzapfen wirkt; dies ist aber gegen den vorhergehenden Zustand insofern eine Abspannung, als man die Spannung vermindert hat. In der meinem Sohn gegebenen Instruktion sind die Wörter anspannen und abspannen garnicht gebraucht, sondern Kreis leicht = Kreistragfeder tragend, und Kreis schwer, Alhidade leicht, Alhidade schwer, und mein Sohn hat nirgends Anstoss gefunden; auch ist der Erfolg seiner Messungen mit dem Theodoliten fortwährend ein sehr befriedigender.«

Vgl. AMBRONN, *Der zwölfzöllige Theodolit, welchen Gauss bei seinen Messungen zur hannoverschen Triangulation in den Jahren* 1822 *und* 1823 *benutzt hat.* Zeitschr. f. Vermessungswesen, Bd. 29, S. 177—180.

auch die hannoversche Gradmessung auf dem vorläufigen Ergebnis der Braaker Basis beruht, kann sie nicht als vollwertiger Beitrag zur Bestimmung der Grösse der Erde betrachtet werden. Die Gestaltung der Gaussschen Dreiecke ist ungünstig und verwickelt. Als Grundlage der Katastervermessung hat sie nicht verwendet werden können, noch weniger ihre Erweiterung, die Landesvermessung, deren Genauigkeit geringer war. Ein Hauptgrund lag darin, dass bereits ein Menschenalter nach dem Tode von Gauss die trigonometrischen Punkte, von einigen Kirchtürmen und dergleichen abgesehen, in der Natur nicht mehr vorhanden waren. Die Landesaufnahme konnte daher beim hannoverschen Dreiecksnetz von diesen Punkten auch keinen Gebrauch machen. Die grosse Sorgfalt bei den Messungen und die gewaltige Rechenarbeit, die nach Gauss' eigener Schätzung mehr als eine Million von Zahlen bewältigte, sind also nicht in dem Umfange ausgenutzt worden, wie sie verdient hätten.

Während so die Koordinaten der Gaussschen Dreieckspunkte nur zur Topographie ausreichten, liegt die wesentliche Bedeutung der praktischen Tätigkeit von Gauss in der Umgestaltung der Methoden, die durch die Erfindung des Heliotrops und das Verfahren der Winkelmessung hervorgerufen ist. In letzterer Beziehung hat Gauss, der die Winkel durch Repetition mass, keine Gewichtsgleichungen aufgestellt, sondern die hervorgehenden Richtungswerte als gleichgewichtig und von einander unabhängig in die Systemausgleichung eingeführt. Er hat auf jeder Station so lange gemessen, »bis jeder Winkel sein Recht bekommen hatte«. Als Ideal hat er die Methode der Winkelbeobachtung in allen Kombinationen betrachtet (Werke IX, S. 288, 289), die dann bei der preussischen Landesaufnahme (und bei dem Reichsamt für Landesaufnahme) ausgebildet und streng durchgeführt worden ist.

Ausser durch diese Verbesserungen der Beobachtungsweise beginnt mit Gauss eine neue Zeit für die Berechnung der Dreiecksmessungen. Die Methode der kleinsten Quadrate ist zwar auf vielen Gebieten angewandt worden, aber in der Geodäsie hat sie eine besondere Pflegestätte gefunden. Gerade das verwickelte hannoversche Dreieckssystem hat ihrem Urheber zu ihrer vielseitigen Ausbildung Anlass gegeben.

Im engen Zusammenhang mit der Gradmessung stehen theoretische Arbeiten von Gauss, die wiederum nicht nur der Geodäsie zugute kamen, sondern auch die Mathematik befruchteten. Die Lehre von den konformen Abbil-

dungen bildet den Anfang der durch die Gradmessung angeregten schöpferischen Tätigkeit von GAUSS, ihren Abschluss und ihre Krönung findet diese Tätigkeit in der Flächentheorie. Auf dem Wege dahin sind bereits damals in den Grundzügen die erst später veröffentlichten Untersuchungen über die höhere Geodäsie entstanden.

Die Feldarbeit und die Bearbeitung der Messungen haben durch die Beanspruchung kostbarer Zeit eine zusammenhängende Darstellung der theoretischen Grundlagen der Gradmessung nicht zu Stande kommen lassen. Aber GAUSS hat als einer der ersten der Geodäsie ihr eigentliches Ziel gezeigt, indem er die Gestalt der Erde definierte und die Ursachen ihrer Unregelmässigkeiten klarlegte. Die Internationale Erdmessung hat in einer Weise, wie GAUSS es kaum hoffen konnte, die Theorie der Lotabweichungen zur Erforschung der Erdgestalt weitergeführt.

Schliesslich ist auch der Lebensabschnitt von GAUSS, in dem er sich von der Geodäsie abwandte und den Erdmagnetismus als Arbeitsfeld erkor, durch die einflussreichste seiner praktischen Erfindungen, den elektro-magnetischen Telegraphen, den astronomisch-geodätischen Arbeiten förderlich geworden. Durch die Anwendung der Telegraphie ist die Genauigkeit der Bestimmung von Längenunterschieden erheblich der Genauigkeit der Breitenbestimmungen genähert worden.

Anhang.
Zur Erfindung des Heliotrops.

Nachdem GAUSS zu REPSOLD in Beziehungen getreten war, wurde er durch REPSOLD und SCHUMACHER aufgefordert (Werke XI 1, S. 142, G.-SCH. Nr. 19) sich mit dioptrischen Untersuchungen zu beschäftigen, zu denen er schon früher den Grund gelegt hatte; ein weiterer Anlass zu solchen Untersuchungen ergab sich, als GAUSS die Instrumente für die neue Sternwarte erhalten hatte. Er erfand aber auch kleinere Einrichtungen auf dem Gebiete der Katoptrik. Am REPSOLDschen Kreise verbesserte er die Beleuchtungsvorrichtung, um die äusserst feinen Fäden erkennen zu können (G.-O. Nr. 380). Beim Mittagsfernrohr hatte er von vorn herein, um die Beleuchtung zu verstärken, polierte Messing-

röhren angebracht (G.-B. Nr. 127). Mit dem REICHENBACHschen Kreise beobachtete er den Nordstern aus einem Wasserspiegel und konnte ihn auf diese Weise bei Tage in oberer Kulmination recht gut beobachten, ja selbst Sterne dritter Grösse am Tage sehen, wenn dies nicht die zitternde Bewegung des Wassers vereitelte (Werke V, S. 432, G.-O. Nr. 386). Über den neuen Gedanken, das reflektierte Licht zum Erkennen der trigonometrischen Punkte zu verwenden, schreibt er an OLBERS (G.-O. Nr. 396): »Erste Veranlassung gab dazu die Erinnerung an eine Erfahrung, die ich 1818 in Lüneburg machte, wo ich in der Entfernung von 6 Meilen das zufällig von einem [Sonnenstrahl getroffene] Fenster des obersten Kabinets im Michaelisturm in Hamburg als einen überaus glänzenden Lichtpunkt sah«. BESSEL machte zu dieser originellen Idee die Bemerkung: »Wie oft hat jeder die Fenster meilenweit entfernter Häuser durch den Widerschein der Abendsonne bemerkt, ohne an die Anwendung desselben Prinzips zu denken, wodurch Sie jetzt den geodätischen Vermessungen eine neue Vollkommenheit aneignen« (G.-B. Nr. 130). Aber GAUSS hat (wie wir einem Heft von G. STISSER über die von GAUSS im Sommerhalbjahr 1848 gehaltene Vorlesung »Höhere Geodäsie« entnehmen, auf die sich auch die folgenden Bemerkungen gründen) auf diesen Gedanken selbst gar kein bedeutendes Gewicht gelegt, sondern nur auf die Ausführung des Instrumentes. Bevor er an die Konstruktion ging, berechnete er nach photometrischen Grundsätzen, wie sie besonders in dem Werke von BOUGUER[1]) behandelt sind, wie gross der Spiegel sein müsse, damit das Licht bei der grössten Entfernung, die bei seinen Messungen vorkommen würde, und die er auf 15 Meilen schätzte, gut sichtbar, aber auch nicht zu blendend sei. Er fand, dass ein Spiegel etwa von der Grösse einer Visitenkarte[2]) genügen würde, um das Sonnenbild mit der Helligkeit der Sterne erster Grösse bei Tage erscheinen zu lassen, wenn eine mittlere Absorption der Luft vorausgesetzt werde. Abgesehen von der Berücksichtigung dieser Absorption würde die Rechnung sehr einfach sein. Aber indem jene wirke, und zwar bei arithmetischem Fortschritt der Entfernung in geome-

1) BOUGUER, *Essai d'optique sur la gradation de la lumière.* Paris 1729. 12°. *Traité d'optique sur la gradation de la lumière,* ouvrage posthume de M. BOUGUER, publié par DE LA CAILLE, Paris 1760. 4°. BOUGUER gibt an, dass ein Spiegel von 1 Linie Dicke das Licht bei einem Einfallswinkel von 15° im Verhältnis von 1000 : 628 schwächt, und dass eine Luftschicht von 200 Toisen den 100. Teil des Lichts absorbiert.

2) Die zur Reflexion verwendeten Spiegel hatten eine Breite von 2 Zoll und eine Höhe von $1^1/_2$ Zoll.

trischem Verhältnisse zunähme, sei sie sehr zu berücksichtigen. Bei verschiedenem Zustande der Luft sei der Koeffizient selbst sehr verschieden und die Helligkeit davon abhängig; übrigens könne der Spiegel durch vorgesetzte Scheiben mehr oder weniger verkleinert werden, wenn das allzu helle Licht dem Beobachter unangenehm wäre. »Andrerseits«, sagt GAUSS, »hindert nichts, die Spiegel, wenn es nötig ist, noch grösser zu nehmen. Ein Fehler von 5′ in der Richtung, oder genau genommen einer, der nicht grösser ist als $^1/_4$ Sonnendurchmesser, hindert die Brauchbarkeit nicht« (G.-O. Nr. 396).

Die photometrische Berechnung erwähnt GAUSS noch in einem Briefe an OLBERS (G.-O. Nr. 420): »Nach einem Rechnungsüberschlage, der sich grossen Teils auf Ihre Angaben[1]] gründet, wird die Helligkeit in der Distanz Δ Meter[2])

$$= \left(\frac{620000}{\Delta}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta}{25457}}$$

sein, die des Aldebaran bei Tage, wenn er so hoch stände, wie eben die Sonne steht, wenn sie den Heliostat beleuchtet, als Einheit betrachtet. Die Höhe der Sonne wird aber hiebei wenig influieren, da, wenn sie niedrig steht, auch das Auge für schwächeres Licht empfänglicher ist. In der Distanz 50000 Meter (etwa der grössten, die bei der französischen und schwedischen Gradmessung angewendet ist) hätten wir also die Helligkeit noch etwa = 36; in der Distanz 105000, ungefähr die allergrösste, die bei meinen Operationen vorkommen könnte, Brocken-Inselsberg, noch etwa = 2; die Helligkeit 1 ist aber für die Theodoliten-Fernrohre noch ganz bedeutend.«

OLBERS bemerkte hierzu, dass noch ein Faktor in der Formel fehle wegen der scheinbaren Winkel-Entfernung der Sonne von dem Ort, wohin das Licht zurückgeworfen wird. Darauf antwortete GAUSS (G.-O. Nr. 424): »Den Faktor Kosinus der halben Elongation habe ich deshalb nicht beigesetzt, weil ich nur das Maximum des zu erhaltenden Effekts abschätzen wollte, wobei man die Stunde auswählen kann, wo die Sonne im Vertikal des Punktes steht, wohin man das Licht schicken will, und wodurch jener Kosinus nicht so sehr viel kleiner als 1 wird. Sonst versteht sich, dass bei sehr schiefem Auffallen

[1] Wahrscheinlich in der Abhandlung von OLBERS, *Mars und Aldebaran am 23. Februar 1801* (*Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke*, Band I, S. 122. Berlin 1894).]

2) Bei den Dimensionen, die RUMPF den Spiegeln gibt.

der Effekt viel schwächer wird. Die konstante Zahl 25427 m[1]) habe ich nach Bouguer angenommen, sie ist aber gewiss bei verschiedenem Luftzustande sehr verschieden und vielleicht zuweilen noch viel grösser. Denn sonst würde ich die Möglichkeit, dass die Franzosen in der Distanz 160000 m noch ihre Reverberes auf Formentera erkannten, kaum begreifen.«

Die geringe Grösse, die sich für den Spiegel ergeben hatte, überraschte Gauss anfangs, bestätigte sich aber dann als völlig genügend, ja die Erwartungen wurden noch übertroffen (Werke VI, S. 462).

Der Herbst 1820 brachte Gauss die Gelegenheit, bei der Braaker Grundlinienmessung mit Repsold, Schumacher, Struve u. a. über die verschiedenen Hilfsmittel zur Sichtbarmachung seiner Dreieckspunkte zu sprechen. Am 4. Oktober erwähnt Gauss von Altona aus die Versuche, die mit angezündeten Argandschen Lampen mit Reflektoren gemacht wurden und bei Tage in einer Entfernung von 3 1/2 Meilen sehr gute Sichtbarkeit ergaben. Am nächsten Tage sollte eine Lampe in Lübeck aufgestellt und vom Michaelisturm in Hamburg in mehr als 8 Meilen Entfernung beobachtet werden. Wenn dies gelang (was nicht der Fall gewesen zu sein scheint), wollte Gauss bei seiner ganzen künftigen Triangulation keine anderen Signale als solche Lampen gebrauchen (G.-O. Nr. 390).

Der Anfang der Basismessung verzögerte sich, und die unfreiwillige Musse hat Gauss vermutlich gestattet, über die Einrichtung eines Heliostaten nachzusinnen. Diese Annahme liegt nahe, weil er den Herbst 1820 als Zeitpunkt seiner Erfindung angibt (Werke IX, S. 483).

Am 25. Oktober kehrte er nach Göttingen zurück; am 3. Dezember schreibt er an Olbers (G.-O. Nr. 396): »Ich habe über eine Maschine nachgesonnen, wodurch die Stellung des Spiegels überall leicht erhalten und bei gehöriger Achtsamkeit auch unterhalten werden kann, ohne Uhrwerk und Weltachse, kurz eine Art von portativem Heliostat[2]). Mir däucht, die Gestalt, auf die ich nach mehreren Umänderungen gekommen bin, ist wohl die einfachste.

---

1) Olbers hat bei Wiederholung der Formel für die Helligkeit (G.-O. Nr. 243) 25427 statt 25457 geschrieben. Diesen Wert hat Gauss bei der Antwort offenbar vor Augen gehabt.

2) Gauss hat also nicht an einen Heliostaten gedacht, wie ihn zuerst Fahrenheit oder S'Gravesande (Poggendorff Annalen, 17, S. 572) erfunden haben. Vielmehr passt die nachfolgende Beschreibung auf die erste Form des von ihm konstruierten Heliotrops.

Sie gründet sich darauf, dass, wenn ein Spiegel die Sonnenstrahlen nach einer vorgeschriebenen Richtung reflektieren soll, seine Fläche auf der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks senkrecht sein muss, während die Richtung der einen Seite nach der Sonne, die der andern nach dem zu erleuchtenden Objekt gekehrt ist (die beiden Seiten in entgegengesetzter Richtung verstanden, d. i. die eine von der Spitze des Dreiecks nach der Basis, die andere von der Basis nach der Spitze). . . . Haben Sie doch die Güte, mir Ihre Meinung darüber zu sagen und auch Hrn. TREVIRANUS[1]) zu befragen, der vielleicht noch vorteilhaftere Abänderungen ersinnt, ihn auch zu fragen, für welchen Preis ungefähr eine solche Maschine geliefert werden könnte. Ich möchte wohl erst eine zur Probe machen lassen; zeigte sie sich brauchbar, so würde ich aber wenigstens 2 oder 3 haben müssen. Die Dimensionen brauchten nicht gross zu sein, wenn die Arbeit recht akkurat wäre. Ich meine, ein Fernrohr von etwa 9 Zoll wäre hinreichend. Der Spiegel und das Fadenkreuz des Fernrohrs müssten wohl jedes 2 Korrektionen haben, damit man nicht zu sehr von der vollkommenen Ausführung des Künstlers abhinge.«

TREVIRANUS schlug kleine Abänderungen vor, die GAUSS zum Teil berücksichtigt zu haben scheint. GAUSS schrieb aber auch noch an REPSOLD, den er an die Sendung der Lampen erinnerte: »Ob Sie doch noch neue Versuche gemacht haben, in wiefern das Lampenlicht bei Tage in grosser Entfernung sichtbar ist, hat mir SCHUMACHER nicht geschrieben. Sollte dies vielleicht doch nicht so gelingen, wie zu wünschen wäre, so habe ich noch eine andere Idee, wovon man, wie ich glaube, wenn auch nur für einzelne Fälle, einen vorteilhaften Gebrauch machen könnte. Ich glaube nämlich, dass man das reflektierte Sonnenlicht selbst gebrauchen kann, und dass, wenn der Spiegel gut poliert und plan, auch hinreichend genau gerichtet ist, man selbst in einer Entfernung von zehn und mehreren Meilen einen sehr glänzenden Punkt sehen wird, wenn gleich der Spiegel nur 1—2 Zoll im Durchmesser hielte. Alles kommt darauf an, durch eine Maschine den Spiegel bei dem beständigen Vorrücken der Sonne immer leicht und genau in der gehörigen Richtung zu erhalten. Ich habe eine solche Maschine ausgesonnen, wodurch, wie ich glaube, dies leicht bewerkstelligt wird, wenn sie mit Akkuratesse gearbeitet ist und mit

1) TREVIRANUS, ein Schüler REICHENBACHS, war Mechaniker in Bremen.

Achtsamkeit gebraucht wird. Ich lege davon eine Zeichnung bei[1]), die das Wesentliche vorstellt und die ich Ihrer Prüfung unterwerfe. Gewiss werden Sie noch manches dabei vorteilhafter einzurichten wissen. Aber für einen sehr grossen Freundschaftsdienst würde ich es ansehen, wenn Sie selbst die Anfertigung eines solchen Apparats auf sich nehmen wollten. . . Wenn der Gebrauch auch nur auf die Fälle beschränkt ist, wo sehr grosse Dreiecksseiten vorkommen, so würde dies doch schon viel wert sein«.

Erst im Mai 1821 erhielt GAUSS durch einen reisenden Hamburger darauf den Bescheid, dass eines der bestellten Instrumente fertig sei und das andere sofort in Arbeit genommen werde. GAUSS antwortete, dass ihm dies sehr erwünscht sei, wenn mit dem zweiten Instrument der transportable Heliostat gemeint sei, und behielt sich vor, noch umständlicher darüber zu schreiben.

Es hätte ihm daran gelegen, beim Aussuchen der Stationen für die südliche Hälfte seiner Triangulation im April und Mai bereits einen Apparat zur Verfügung zu haben, worauf sich die Bemerkung in einem Briefe an BESSEL bezieht: »Ich denke daran, hiebei noch ein besonderes Experiment zu machen, wovon ich Ihnen, wenn der Erfolg die Anwendbarkeit meiner Idee bestätigt, nähere Nachricht geben werde« (G.-B. Nr. 127).

GAUSS hatte inzwischen den Inspektor RUMPF in Göttingen mit der Herstellung eines Apparates beauftragt, der im Juli fertig wurde. Ein Heliotrop von dieser Form befindet sich im geophysikalischen Institut der Göttinger Universität. Die Beschreibungen dieser Form des Heliotrops in POGGENDORFFS Annalen, Band 17, S. 83, Fussnote und in Werke IX, S. 483 erwähnen eine Kreisscheibe, die aber bei dem Göttinger Instrumente nicht vorhanden ist. Der in der Figur a. a. O. gezeichnete Kreis ist jedoch zur Versinnlichung der geometrischen Beziehungen geeignet. Eine andere Darstellung hat HELMERT in dem *Berichte über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876* (herausgegeben von A. W. HOFMANN, Braunschweig 1878, S. 169) gegeben, die genau, aber nicht ganz übersichtlich ist.

Auf einem Dreifuss mit Fussschrauben erhebt sich eine Säule (siehe die Figur Werke IX, S. 483), die in C eine zu ihr normale, also angenähert hori-

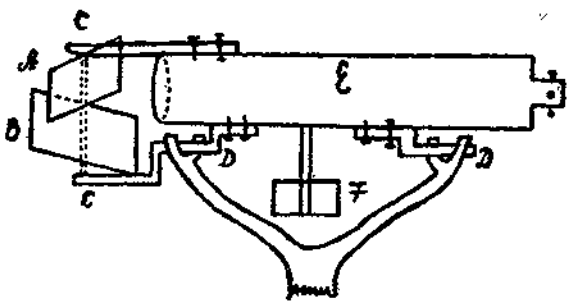
[1]) Nicht mehr vorhanden.]

zontale Achse AB trägt, die um ihren Mittelpunkt C und in ihren Lagern drehbar ist. Ein Fernrohr HD ist an ihr so befestigt, dass es sich um eine in C zu AB normale Achse dreht, also mit AB jeden Winkel bilden, insbesondere auch mit der Richtung dieser Achse zusammenfallen kann, was dazu dient, diese auf einen entfernten Punkt zu richten. Die Drehung der Achse AB in ihren Lagern ermöglicht es, die Ebene, in der sich das Fernrohr bewegt, zu kippen, so dass das Fernrohr in jede Richtung gebracht und auf die Sonne eingestellt werden kann. Am Ende A der Achse AB befindet sich bei F ein Spiegel, der um eine Achse drehbar ist, die selbst wiederum bei Drehung von AB in ihren Lagern eine zu AB normale Ebene beschreibt. An der Rückseite des Spiegels ist ein Stiel FG normal zur Spiegelfläche angebracht, der sich in einer mit dem Fernrohr fest verbundenen Hülse E verschiebt, wobei die Entfernung $EC = EA$ unveränderlich bleibt. ACE ist daher ein gleichschenkliges Dreieck, auf dessen Ebene die Spiegelachse senkrecht steht. Ein parallel zur Fernrohrrichtung DC auf den Spiegel fallender Sonnenstrahl, dessen Einfallswinkel $= CEA$ ist, wird daher in der Richtung CA, die den Winkel $DCA = 2CEA$ mit DC bildet, reflektiert. Der Spiegel F ist etwas seitlich an einem an der Achse AB befestigten Ringe angebracht, um die Sicht frei zu lassen.

Noch vor Vollendung des Apparates benutzte Gauss auch einen einfachen Sextanten zum Heliotropieren. Wird er auf einem festen Stativ angebracht, und der Winkel Sonne-Objekt eingestellt, so ist es nur nötig, die Alhidade um den doppelten Schärfungswinkel vorwärts zu drehen, um das Licht nach dem Objekte hinzuwerfen. Eine Vereinfachung wurde dadurch erzielt, dass ein dritter Spiegel (wie die andern senkrecht zur Sextantenebene), um den Schärfungswinkel gegen den grossen Spiegel gedreht, angebracht wurde. Über die Versuche, die damit gemacht wurden, gibt der Werke IX, S. 467 abgedruckte Brief Auskunft.

Inzwischen war Gauss noch auf eine ganz andere, sehr viel einfachere Einrichtung verfallen, die er Repsold mitteilte, nachdem er die Lampen bekommen hatte: »Was die Heliostate betrifft, so hat die weitere Überlegung mir die Überzeugung gegeben, dass, wenn ein solcher Apparat zuverlässige Wirkung tun soll, die verschiedenen Drehungsachsen mit sehr grosser Akkuratesse und Stabilität gearbeitet sein, und dass dabei die verschiedenen Be-

dingungen des Parallelismus und der Rechtwinkligkeit in grösserer Genauigkeit ausgeführt sein müssen, als von dem Künstler allein erwartet werden kann, so dass dazu noch die nötigen Korrektionsschrauben hinzukommen müssen. Dieser Überlegung zufolge hat die Konstruktion des Instrumentes die Einrichtung erhalten, die beiliegende [nicht mehr vorhandene] Zeichnung zeigt .... und Herr Rumpf hatte, noch ehe ich von Ihnen wusste, dass Sie zur Ausführung erbötig sein wollten, ein soches Instrument angefangen, welches jetzt beinahe vollendet ist. Ich zweifle jedoch keineswegs, dass Ihr Nachdenken noch mancherlei Verbesserungen an die Hand geben würde. — Inzwischen bin ich in diesen Tagen noch auf eine ganz andere Idee gekommen, die bei weitem einfacher ist, so dass ich es für besser halten möchte, künftig die Heliostate nur nach dieser Idee einzurichten, wo die Konstruktion und Berichtigung viel leichter ist, und wo auch nötigenfalls ein grösserer Spiegel und ein stärkeres Fernrohr angewandt werden kann. Diese Idee ist indessen noch nicht ganz in Rücksicht der mechanischen Einrichtung zur Reife gebracht; allein bei Ihnen bedarf es nur eines Winkes, so dass Sie die letztere viel vollkommner werden ausführen können, als ich im Stande wäre.



Die Hauptsache ist diese: Zwei Spiegel A, B sind so mit einer Achse CC verbunden, dass ihre Flächen mit dieser Achse parallel und unter sich senkrecht sind. Die Pfannen der Achse CC sind mit dem Fernrohr E verbunden und alles dies zusammen dreht sich um die Achse DD, die mit CC einen rechten Winkel macht, und mit der die optische Achse des Fernrohrs parallel ist. Das System der Spiegel A, B kann mit Leichtigkeit aus den Pfannen genommen und sicher und genau wieder eingesetzt werden. Die Fortsetzung der Achse DD geht durch die Mitte des Spiegels B. — F ist ein Gegengewicht. Das Ganze steht auf einem Fuss, wodurch das Fernrohr in jede Richtung, die aber nie sehr stark von der horizontalen abweicht, gebracht werden kann.

Der Gebrauch ist folgender: Indem die Spiegel fortgenommen sind, wird das Fernrohr genau nach dem Ort gerichtet, wohin man Sonnenlicht reflek-

tieren will, und in dieser Lage sicher befestigt. Dann werden die Spiegel eingesetzt und (durch Drehung um die Achse DD) die Achse CC ungefähr in eine Richtung gebracht, die senkrecht zu der Linie nach der Sonne ist. Man erkennt dies beiläufig schon an dem Schatten der Spiegel, indem die Sonne in der Ebene sein muss, die durch die untere Kante des Spiegels A und durch die obere des Spiegels B geht.

Hierauf wird das Spiegelsystem um CC so gedreht, dass das von A reflektierte Sonnenlicht in die Gesichtslinie des Fernrohrs kommt. (Ungefähr erhält man dies auch schon leicht, indem man nur so lange dreht, bis das Objektiv von dem reflektierten Sonnenlicht am besten erleuchtet ist.) Man hilft nun nach durch Verbindung der Drehung um die Achsen CC und DD, bis das Zentrum der Sonne (oder eigentlich nur ein Punkt der Sonnenscheibe) genau auf der Gesichtslinie ist. Dann ist man sicher, dass der Spiegel B das Sonnenlicht in der gewünschten Richtung reflektiert.

Es würde mir sehr angenehm sein, wenn Sie dieser Idee weiter nachdenken und auf die bequemste mechanische Anordnung der Teile denken wollten. Mittlerweile hoffe ich, dass ich bald über die Kraft des Sonnenlichts bei der ersten Einrichtung, nach RUMPFS Spezimen, werde Erfahrungen anstellen können, die bei dieser neuen Einrichtung mit Vorteil benutzt werden mögen. — Sobald das reflektierte Sonnenlicht einmal in der optischen Achse des Fernrohrs ist, werde ich es leicht in derselben erhalten, und ich glaube aus freier Hand, wenigstens ohne feine Schrauben«[1]).

Der hier beschriebene Apparat unterscheidet sich nicht wesentlich von der endgiltigen zweiten Gestalt des Heliotrops (Werke IX, S. 477, Figur 2), bei der ein Spiegel in zwei Teile zerlegt ist, so dass sich die Spiegel durchdringen.

Anfang Juli vollendete RUMPF in der Hauptsache den Heliotrop erster Konstruktion, bei dem allerdings das provisorische Fernrohr und auch der Spiegel sehr schlecht waren, wodurch die Benutzung ausserordentlich erschwert wurde. Doch gelangen einige Versuche und als Hauptmann MÜLLER den Spiegel einmal auf eine helle Wolke richtete, gab dies auf 1800 m Distanz ein überaus schönes Bild, so dass GAUSS nicht zweifelte, bei Wahl einer recht glänzenden

1) Der Brief ist abgedruckt in dem Aufsatz: *Über J. G. Repsolds Heliotropen* von J. A. REPSOLD, Zeitschrift für Instrumentenkunde XVII, 1897, S. 1 ff.

Wolke noch auf eine Meile weit mit einem guten Fernrohr das Licht pointieren zu können (G.-O. Nr. 424). Um diese Zeit entschied sich auch GAUSS für die Bezeichnung Heliotrop, nachdem er noch am 1. Juli in einem Briefe an OLBERS von dem »Heliostat oder Heliotrop oder Sonnenspiegel« gesprochen hatte.

Den Heliotrop zweiter Konstruktion zog GAUSS vor, da sein Gebrauch bequemer, die Berichtigung etwas einfacher und die grössere Spiegelfläche in manchen Fällen angenehmer und schliesslich die Herstellungskosten etwas geringer wären (G.-SCH. Nr. 171). Doch ist auch dieser zweite Heliotrop ein ziemlich kompliziertes Instrument, zu dessen Berichtigung 8 Operationen erforderlich sind (Werke IX, S. 472, 479). HELMERT hat ausserdem gezeigt (HOFMANN, Bericht S. 165), dass Abweichungen von der geforderten Rechtwinkligkeit der Spiegelachse gegen die Visierlinie des Fernrohrs und der gegenseitigen normalen Lage der Ebenen der beiden Spiegel als Fehler erster Ordnung auftreten.

Merkwürdig erscheint es, dass GAUSS diejenige Form der Heliotrope kaum beachtet hat, die als Erfindung des Ingenieur-Geographen BERTRAM bezeichnet wird (vergl. C. HOFFMANN und G. SALZENBERG, *Trigonometrisches Nivellement der Oder*. Berlin 1841, S. 11), und durch BESSELS *Gradmessung in Ostpreussen* (1838) und durch BAEYERS *Küstenvermessung* (1849) in die geodätische Praxis eingeführt, tatsächlich die Gaussschen Konstruktionen verdrängt hat.

Ob BERTRAM selbständig zu seiner Heliotropform gekommen ist, mag dahingestellt bleiben, jedenfalls hat REPSOLD, alsbald nach der Aufforderung von GAUSS, über Verbesserungen des Heliotrops nachzudenken, dieselbe einfache Konstruktion mit dem Blicke des praktischen Mechanikers gefunden, wie die in Kopenhagen bei der dänischen Gradmessung aufbewahrten REPSOLDschen Apparate zeigen. SCHUMACHER erwähnt am 16. November 1821 kurz, dass er bei der Alignierung und Verbindung seiner Basis kleine Heliotrope mit dem grössten Vorteil gebraucht habe (G.-SCH. Nr. 131). GAUSS selbst äussert sich über sie gegenüber OLBERS und fügt eine Zeichnung bei, so dass er sie vielleicht auch gesehen hat. Er schreibt (G.-O. Nr. 434): »SCHUMACHER hat beim Alignieren seiner Basis eine ganz rohe Art von Heliotrop angewandt. Auf einem etwa 2½ Fuss langen Brett steht ein Spiegelgestell, welches den Spiegel in jede Lage zu bringen erlaubt. Das Bild des Spiegels wird auf

einem zweiten senkrechten kleinen Brett aufgefangen, so dass das Zentrum von jenem mit dem Zentrum eines Loches zusammenfällt, welches mit dem (ruhenden) Zentrum des Spiegels zuvor in die Richtung gebracht ist, wohin man das Licht zu reflektieren wünscht. Eine sichere und ununterbrochene Lichtlenkung ist zwar auf diese Art nicht wohl zu erhalten, doch zeigt SCHUMACHERS Erfahrung, dass sie doch nicht unbrauchbar ist, und ich werde daher eine ähnliche, etwas abgeänderte Einrichtung für einen grossen Spiegel von wenigstens 1 oder 2 Quadratfuss Fläche machen lassen, welcher für das Rekognoszieren oder für das erste tägliche Einstellen von vielem Nutzen sein wird«.

Ob eine spätere Bemerkung (G.-O. Nr. 439) am 22. Januar 1822 sich auf die hier angedeutete Absicht bezieht, ist nicht sicher: »Der Apparat zu meinem grossen Heliotrop wird bald fertig sein, und ich bin sehr neugierig auf die ersten Versuche damit. Der Spiegel hat 145 Quadratzoll Par. Fläche, also 58 mal so viel wie der älteste oder 23 mal so viel wie der zweite. Die Berichtigungen werden sehr einfach sein.«

Auf die einfache REPSOLDsche Konstruktion bezieht sich wohl auch eine Notiz von SCHUBACH. Hierüber schreibt GAUSS an SCHUMACHER (G.-SCH. Nr. 159): »Für Sie ist die Bemerkung überflüssig, dass die von Hrn. SCHUBACH im Astronom. Jahrbuch von 1825 gegebene Nachricht über die Einrichtung der Heliotrope ganz auf einem Irrtum beruht und mit meinem Heliotrop gar nichts gemein hat«.

Dass REPSOLD sich über die Vorteile seiner Heliotrope den GAUSSschen gegenüber klar war, zeigt die Antwort, die er 1825 dem General BAEYER gab, als dieser darüber klagte, dass die Spiegel der GAUSSschen Heliotrope sich bei jedem Transporte derangierten und dass die mit dem Heliotropieren beauftragten Leute sie nicht zu korrigieren verstünden: »Mein Gott! nehmen Sie doch ein Brettchen und stellen an dem einen Ende einen Spiegel auf, der um eine vertikale und eine horizontale Achse drehbar ist, so dass er in eine jede Ebene gebracht werden kann. In der Mitte des Spiegels machen Sie ein kleines Loch und stellen am andern Ende des Brettchens ein Fadenkreuz auf. Richten Sie nun durch das Loch im Spiegel das Fadenkreuz auf ein Objekt und drehen den Spiegel so, dass der Schatten von dem Loch im Spiegel auf das Fadenkreuz fällt, so hat das Objekt Licht«. (Die Mitteilungen von REPSOLD sind dem S. 158 genannten Aufsatz von J. A. REPSOLD entnommen.)

Jedenfalls hätte REPSOLD eine ähnliche Äusserung GAUSS gegenüber nicht zu tun gewagt und die Zurückhaltung von GAUSS' Freunden und Bekannten in Bezug auf schriftliche Mitteilungen über die Verwendung der einfachen Heliotrope ist unverkennbar.

Die Gausssche Erfindung hat, obwohl sie gegenwärtig nicht mehr in ihrer ursprünglichen Form verwendet wird, der Geodäsie einen unvergänglichen Nutzen gebracht. Die in wissenschaftlicher, aber auch in mechanischer Hinsicht bis ins Einzelne durchdachten Instrumente sind ein bleibendes Denkmal der schöpferischen Kraft und der Geistesschärfe ihres Urhebers. Wollte man die Erfindung des Heliotrops bei Seite lassen, so wäre es nicht möglich, ein vollständiges Bild von der vielseitigen Begabung von GAUSS zu gewinnen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung . . . . . Seite 3

I. Abschnitt. Die Methode der kleinsten Quadrate . . . . . — 4

1. Entstehungszeit . . . . . — 4
2. Grundgedanke . . . . . — 5
3. Zweite Begründung . . . . . — 12
4. Dritte Begründung . . . . . — 13
5. Ausbreitung . . . . . — 15

II. Abschnitt. Die Anfänge geodätischer Tätigkeit seit 1796 . . . . . — 15

6. Eine Aufgabe der praktischen Geometrie . . . . . — 15
7. Geodätische Notiz . . . . . — 16
8. Arbeiten für LECOQ . . . . . — 16
9. Erste Beobachtungen und praktische Betätigungen . . . . . — 18
10. Aussicht auf die Göttinger Sternwarte . . . . . — 20
11. Winkelmessungen bei Braunschweig . . . . . — 22
12. Beobachtungen von Pulverblitzen. Seeberger Basis . . . . . — 22
13. Berührung mit EPAILLY . . . . . — 27

III. Abschnitt. Das erste Jahrzehnt in Göttingen; 1807—1816 . . . . . — 28

14. Azimut von Clausberg, Polhöhe von Freytagswerder . . . . . — 28
15. SCHUMACHER. Aufforderung zur Teilnahme an der Gradmessung . . . . . — 31
16. Antwort von GAUSS . . . . . — 33
17. Unregelmässigkeit des französischen Meridians . . . . . — 34
18. Unregelmässigkeit der Erdgestalt . . . . . — 36
19. Erddimensionen . . . . . — 37
20. Preisaufgabe . . . . . — 40
21. Die Entstehungszeit der Projektionsmethode . . . . . — 41
22. Besuch in Seeberg. Briefwechsel mit Lindenau . . . . . — 43
23. Abbildungsaufgabe . . . . . — 53
24. Verschiedene Abbildungsarten . . . . . — 54

IV. Abschnitt. 1816—1820. Beginn der Dänischen Gradmessung . . . . . — 57

25. Vorbesprechung wegen der Gradmessung . . . . . — 57
26. Teilnahme an der Messung des Verbindungsdreiecks, an den Sektorbeobachtungen und der Basismessung . . . . . — 59

V. Abschnitt. Vorbereitung für die hannoversche Gradmessung . . . . . Seite 64
27. Meridianzeichen . . . . . — 64
28. Auswahl der Dreieckspunkte . . . . . — 64
29. Instrumente . . . . . — 65
30. Gehilfen . . . . . — 66
VI. Abschnitt. Die Erkundung der Dreieckspunkte (1821) und die Erfindung des Heliotrops . — 67
31. Errichtung von Signalen . . . . . — 67
32. Heliotrop . . . . . — 69
VII. Abschnitt. Die eigentlichen Winkelmessungen (1821—1823) . . . . . — 73
33. (1821) Sternwarte, Meridianzeichen, Hohehagen, Hils, Brocken . . . . . — 73
34. (1822) Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . . — 75
35. Lüneburger Heide . . . . . — 76
36. Preisaufgabe, Theoria combinationis, Pars II . . . . . — 81
37. (1823) Pläne für Erweiterung der Gradmessung . . . . . — 82
38. Timpenberg, Niendorf, Lüneburg, Hamburg, Altona, Hannover, Göttingen, Brocken, Hohehagen — 84
39. Endpunkt der Gradmessung . . . . . — 85
40. Relative Lotabweichung von Altona gegen Göttingen . . . . . — 88
41. Beschäftigung mit KRAYENHOFFs und anderen Triangulationen . . . . . — 90
VIII. Abschnitt. Ausdehnung der Gradmessung nach Westen . . . . . — 92
42. (1824) Falkenberg, Elmhorst, Bullerberg, Bottel, Brüttendorf, Bremen, Garlste, Brillit, Zeven, Steinberg, Bottel, Litberg, Wilsede . . . . . — 92
IX. Abschnitt. Zenitdistanzmessungen . . . . . — 102
43. Gegenseitige Zenitdistanzen . . . . . — 102
44. Rückkehr nach Göttingen . . . . . — 104
X. Abschnitt. Beendigung der Gradmessung . . . . . — 106
45. (1825) Brüttendorf, Zeven, Bremen, Garlste, Bremerlehe, Varel, Landwarden, Jever, Brillit, Zeven . . . . . — 106
46. Erholungsreise nach Süddeutschland . . . . . — 111
XI. Abschnitt. Flächentheorie . . . . . — 112
47. Angestrengte theoretische Arbeiten . . . . . — 112
48. Ausgleichung, KRAYENHOFFsche Triangulation, Theoria combinationis Pars III . . . . — 114
XII. Abschnitt. Vorbereitung zu den Sektorbeobachtungen . . . . . — 115
49. Bestimmung der Instrumentalfehler . . . . . — 115
50. Zwei Veröffentlichungen. Katalog der Koordinaten . . . . . — 118
XIII. Abschnitt. Bestimmung des Breitenunterschiedes . . . . . — 119
51. Die Beobachtungen am Sektor . . . . . — 119
XIV. Abschnitt. Die Erdgestalt . . . . . — 123
52. Definition der Erdfigur, LAPLACEsche Gleichung . . . . . — 123
XV. Abschnitt. Die Zeit der hannoverschen Landesvermessung . . . . . — 127
53. Plan . . . . . — 127
54. Beobachter. Instrumente . . . . . — 131
55. Fortsetzung der hannoverschen Landesvermessung . . . . . — 135
56. GAUSSsche Koordinaten-Rechnung . . . . . — 136

57. Verbesserung der Erddimensionen . . . . . Seite 136
58. Vermessung von Braunschweig . . . . . — 136
59. Bearbeitung der Landesvermessung . . . . . — 137
XVI. Abschnitt. Längenbestimmung zwischen Göttingen und Mannheim . . . . . — 138
60. Beobachtung der Pulverblitze und Heliotropsignale. Beendigung der Landesvermessung — 138
XVII. Abschnitt. Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie . . . . . — 141
61. Erste Abhandlung . . . . . — 141
62. Zweite Abhandlung . . . . . — 142
63. Änderung der Polhöhe mit der Höhe . . . . . — 143
64. Zusammenfassung . . . . . — 146
Anhang. Zur Erfindung des Heliotrops . . . . . — 150

Berichtigungen.

Seite	9,	Norm	lies	XI 2	statt X 2.
»	54,	Zeile 3 v. u.	»	24	» 23.
»	68,	» 18	»	einer	» falls.
»	68,	» 19	»	falls	» einer.
»	72,	» 15	»	die	» dic.



GAUSS-MEDAILLE.

Die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften besitzt von der Bronzemedaille, die sie 1877 anlässlich der 100-jährigen Wiederkehr von Gauss' Geburtstag hat prägen lassen, noch 12 Stück (Dm. 7 cm). Sie möchte diese allerletzten Exemplare nicht im Handel verschwinden sehen, sondern sie am liebsten in den Händen solcher wissen, die ein inneres und wissenschaftliches Verhältnis zu unserm grossen Mathematiker haben. Sie gibt daher die Gelegenheit hier an dieser Stelle bekannt und bittet diejenigen, die gegen Einsendung von 25 Rentenmark ein Exemplar zu erhalten wünschen, sich baldigst an den Unterzeichneten zu wenden.

Göttingen, im September 1924.

Der vorsitzende Sekretär:
H. Thiersch.

C. F. GAUSS WERKE

HERAUSGEGEBEN VON DER KGL. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

A. AUSGABE AUF DRUCKPAPIER.

Band I DISQUISITIONES ARITHMETICAE Zweiter Abdruck. 1870.

II HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 1876.
NACHTRAG zum ersten Abdruck des zweiten Bandes. 1876.

III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck 1876.

IV WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 1880.

V MATHEMATISCHE PHYSIK Zweiter Abdruck. 1877.

VI ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN UND AUFSÄTZE. 1874.

VII THEORIA MOTUS UND THEORETISCH-ASTRONOMISCHER NACHLASS. (Parabolische Bewegung, Störungen der Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes.) 1906.

VIII ARITHMETIK, ANALYSIS, WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG, GEOMETRIE. (Nachträge zu Band I—IV.) 1900.

IX. GEODASIE (Fortsetzung von Band IV.) 1903.

X Abteilung 1 NACHLASS UND BRIEFWECHSEL ZUR REINEN MATHEMATIK. Nachträge zu Bd. I—IV und VIII. TAGEBUCH. 1917.

X Abteilung 2 ABHANDLUNGEN ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER REINEN MATHEMATIK. 1. und 5. Abhandlung. 1922.

X. Abteilung 2, 4. Abhandlung. 1923.

XI Abteilung 1. NACHLASS UND BRIEFWECHSEL ZUR PHYSIK, ASTRONOMIE UND CHRONOLOGIE Nachträge zu Bd. V—VII. VARIA Unter der Presse.

XI. Abteilung 2 ABHANDLUNGEN ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER ANGEWANDTEN MATHEMATIK (Geodäsie, Physik, Astronomie). 1. Abhandlung 1924. 2. Abhandlung u. f. in Vorbereitung.

Die Bände X 2 und XI 2 bestehen aus einzelnen Abhandlungen (Essays), die besonders paginiert sind und in der Reihenfolge ihrer Fertigstellung auch gesondert ausgegeben werden. Mit der letzten Abhandlung eines jeden Bandes wird Titelblatt und Inhaltsverzeichnis geliefert.

XII BIOGRAPHISCHES NEBST EINEM GENERALREGISTER. In Vorbereitung.

B. AUSGABE AUF SCHREIBPAPIER.

Band I—VI (nur vollständig abzugeben).

Berichte über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken werden, von 1898 beginnend, regelmäßig in den Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (geschäftliche Mitteilungen) veröffentlicht.

GÖTTINGEN, GEDRUCKT IN DER DIETERICHSCHEN UNIV.-BUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER).

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ELFTEN BANDES ZWEITE ABTEILUNG

ABHANDLUNG 2

HERAUSGEGEBEN

VON DER

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN

1929

ÜBER GAUSS' PHYSIKALISCHE ARBEITEN

(MAGNETISMUS, ELEKTRODYNAMIK, OPTIK)

VON

CLEMENS SCHAEFER

XI 2 Abh. 2.

C 99.9966

I. Gauss' magnetische Untersuchungen[1]).

Erster Abschnitt: Die Anfänge.

1. In einem Briefe vom 1. März 1803[2]) schreibt Gauss an Olbers: »Was halten Sie von der Nachricht aus Glasgow von der magnetischen Terella, womit der amerikanische Schiffer seine Länge so sicher bestimmte? Ich bin dagegen etwas misstrauisch, ob ich gleich glaube, dass über die magnetische Kraft der Erde noch viel zu entdecken sein möchte, und dass sich hier noch ein grösseres Feld für Anwendung der Mathematik finden wird, als man bisher davon kultiviert hat.« Wenige Tage später (am 4. März 1803[3])) antwortet Olbers auf Gaussens Frage, wobei er ihn auffordert, diesen Untersuchungen sein Interesse zu widmen: »Die Erzählung von der auf Quecksilber schwimmenden magnetischen Kugel habe ich für ein Märchen gehalten. Allerdings ist über den Magnetismus unserer Erde noch viel zu tun, und ich wünschte

---

1) Bei den Zitaten ist in dieser Abhandlung durchgehends eine Anzahl von Abkürzungen verwendet worden. Es werden zitiert:

1. C. F. Gauss, Werke, Band I bis XII — als: Werke, I bis XII.
2. *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*, herausgegeben von C. A. F. Peters, Altona 1861—1865 — als: Gauss-Schumacher, I bis VI.
3. *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und C. L. Gerling*, herausgegeben von C. Schaefer, Berlin 1927 — als: Gauss-Gerling.
4. *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und F. W. Bessel*, herausgegeben von der Preuss. Akad. d. Wissensch., Berlin 1880 — als: Gauss-Bessel.
5. *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke*, II, 1 und II, 2, enthaltend den Briefwechsel mit Gauss, herausgegeben von C. Schilling und J. Kramer, 1900—1909 — als: Gauss-Olbers, II, 1 u. II, 2.
6. *Briefe zwischen A. v. Humboldt und C. F. Gauss*, herausgegeben von K. Bruhns, Leipzig 1877 — als: Gauss-Humboldt.

2) Gauss-Olbers, II, 1, S. 128.

3) Ebenda, S. 132.

sehr, dass Sie, mein teurer Freund, Ihre scharfsinnigen Untersuchungen auf diesen Gegenstand richten mögen. Es ist mir oft leid gewesen, dass TOBIAS MAYERS Abhandlung über diese Materie nicht gedruckt worden ist.«

Unmittelbare Folgen hat dieser Briefwechsel nicht gehabt[1]).

2. Neun Jahre später (am 18. Juli 1812[2])) schreibt wieder OLBERS aus Paris, wo er mit HUMBOLDT zusammen war, an GAUSS: »HUMBOLDT hat mir neulich als ein Problem die merkwürdige Beobachtung von SCHEUBLER[3]) in Tübingen über die tägliche Veränderung der Magnetnadel vorgelegt. Diese beträgt bekanntlich bei gewöhnlichen Magnetnadeln 14′. Allein, wenn man eine Magnetnadel aus zwei magnetisierten Stäbchen zusammensetzt, sodass sie also auf ihren beiden Enden einen sogenannten Nordpol hat, so kann man nicht allein die Abweichung der Magnetnadel nach der verschiedenen Stärke der beiden Pole beliebig verändern, (dies versteht sich von selbst), sondern jene täglichen Veränderungen ganz ungemein vermehren. Bei SCHEUBLERS auf solche Art zusammengesetzter Magnetnadel gingen sie statt auf 14′ vielmehr auf $1^0\,45'$. Dies schien HUMBOLDT ganz unerklärbar. — Ich habe ihm geantwortet, dass eine so isolierte Beobachtung noch erst wiederholt zu werden verdiene, dass es misslich sei, ein Faktum erklären zu wollen, wenn die Realität desselben noch zweifelhaft sei; dass es mir aber, wenn man SCHEUBLERS Beobachtung als gewiss und als allgemein geltend voraussetzen wolle, daraus zu folgen scheine, unsere Erde habe nicht blos zwei, sondern wenigstens 4 magnetische Pole, wie dies auch schon von mehreren Physikern behauptet worden sei. — Wie bei 4 Polen das SCHEUBLERsche Problem erklärt wird, füge ich hier nicht umständlich bei.« Am 6. September 1812[4]) antwortete GAUSS darauf Folgendes: »Die Beobachtung des Herrn SCHUEBLER in Stuttgart würde sehr interessant sein, obwohl ich mit Ihnen ihre Zuverlässigkeit zu bezweifeln noch sehr geneigt sein möchte. Ich bin überaus begierig auf Ihre Erklärung durch vier magnetische Pole der Erde. Zu meiner grossen Beschämung muss ich indess bekennen, dass ich selbst nicht einsehe, wie man

1) Ein Brief an HARDING vom 28. November 1806 wird in Artikel 51 besprochen.

2) GAUSS-OLBERS, II, 1, S. 508.

3) Gemeint ist offenbar GUSTAV SCHUEBLER; eine Arbeit, in der die obige Beobachtung enthalten wäre, habe ich nicht feststellen können. — SCHAEFER.

4) Werke XII, S. 253.

durch Zusammensetzung zweier Nadeln (vorausgesetzt, dass sie eine gerade Linie bilden) jede Deklination hervorbringen kann; ich begreife wohl, dass eine solche Nadel weniger magnetische Intensität haben, also langsamere Schwingungen machen muss; aber woher eine andere Deklination oder Inklination erfolgen müsse, ist mir nicht recht klar.« Eine Antwort von OLBERS auf diese sehr berechtigten GAUSSschen Zweifel kennen wir nicht.

3. Wieder acht Jahre später (im Mai oder Juni 1820)[1]) erfolgt eine neue Anregung OLBERS' an GAUSS: »Haben Sie, lieber GAUSS, HANSTEENS *Untersuchungen über den Magnetismus der Erde*[2]) durchgeblättert? Weiter habe ich bisher noch nichts getan. Ob es überhaupt schon hohe Zeit ist, wie HANSTEEN meint, aus den bisherigen Beobachtungen eine Theorie zu entwickeln, weiss ich nicht; ich fürchte aber, für HANSTEEN war es doch noch zu früh, da er erst in den Zusätzen der von FLINDERS mit Bestimmtheit gemachten Bemerkung, dass für jedes Schiff die Magnetnadel eine eigene Abweichung zeige, die nach der Richtung des Schiffs veränderlich ist, erwähnt. Dies macht alle zur See angestellten Beobachtungen mehr oder weniger unsicher, wenn man nicht durch Vergleichungen und Kritik die individuelle erforderliche Korrektion ausmitteln kann.« Es erfolgt nur eine kurze Antwort GAUSSens (am 28. Juni 1820)[3]): »HANSTEENS Werk über den Magnetismus ist mir noch nicht zu Gesicht gekommen. Vor einiger Zeit erkundigte ich mich danach bei REUSS, der es noch nicht kannte. Ich werde nächstens wieder einmal anfragen, ob die Bibliothek es schon besitzt. Gewöhnlich ruhen dann aber solche Werke erst sehr lange in den Händen der Rezensenten.«

Alle diese Briefstellen zeigen wohl deutlich, dass GAUSS einerseits durch andere Dinge noch zu sehr beschäftigt war, um dem Magnetismus mehr als ein allgemeines Interesse entgegenzubringen. Anderseits fehlte GAUSS auch das Material, dessen er zur Durchführung seiner wissenschaftlichen Pläne bedurft hätte, und man darf annehmen, dass diese selbst noch nicht über eine allgemeine Konzeption hinaus gediehen waren.

4. Es bedurfte neuer Anstösse, um den Stein ins Rollen zu bringen. Diese sind einmal in der allgemeinen wissenschaftlichen Situation der

1) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 8.

2) CHR. HANSTEEN, *Untersuchungen über den Magnetismus der Erde*, (nebst Atlas); Christiania 1819.

3) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 13.

Zeit von 1820 bis 1831 zu finden, anderseits in dem persönlichen Einflusse, den der grosse Naturforscher ALEXANDER v. HUMBOLDT inzwischen auf GAUSS gewonnen hatte, und schliesslich in den nahen Beziehungen zu WILHELM WEBER.

Die wissenschaftliche Situation wird durch folgende Daten beleuchtet: 1820 entdeckte OERSTEDT den Elektromagnetismus, d. h. die Tatsache, dass ein elektrischer Strom magnetische Kräfte ausübt. Diese gewaltige Entdeckung beschäftigte in den nächsten Jahren die bedeutendsten Geister. Um die magnetische Wirkung eines beliebigen Stromleiters auf einen Magnetpol berechnen zu können, stellten 1820/21 BIOT und SAVART das nach ihnen benannte Elementargesetz auf; 1822/24 folgte ihnen AMPÈRE, indem er zeigte, dass ein geschlossener Strom eine magnetische Lamelle in ihrer Wirkung auf den Aussenraum ersetzen könne; von da bis zur Aufstellung des AMPÈRE-schen Elementargesetzes, das die magnetischen Wirkungen zweier Stromleiter auf einander bestimmt und zur Berechnung der ponderomotorischen Kräfte zweier beliebiger Ströme aufeinander dient, war nur noch ein Schritt. 1827 stellte OHM das nach ihm benannte Gesetz der galvanischen Kette auf; 1828 erschien zu Nottingham die Abhandlung GREENS über Potentialtheorie, von der wir allerdings nicht wissen, ob GAUSS sie überhaupt gekannt hat; 1831 entdeckte MICHAEL FARADAY das Gegenstück des Elektromagnetismus, die Induktion, d. h. die Tatsache, dass ein bewegter Magnet elektrische Wirkungen auszuüben vermag.

Dadurch war die Lehre vom Magnetismus, bisher ein kleines und relativ unscheinbares Gebiet der Physik, in ganz anderer Weise als vorher in das Zentrum des wissenschaftlichen Interesses gerückt.

Dazu kam der Einfluss, den ALEXANDER v. HUMBOLDT auf GAUSS ausgeübt hat. Spätestens seit 1807[1]) stand GAUSS mit HUMBOLDT im Briefwechsel; 1810 versuchte dessen Bruder WILHELM v. HUMBOLDT ihn an die Berliner Akademie und an die neu zu gründende Universität zu ziehen[2]), ein Versuch, der mit gleichem negativen Ergebnis in den Jahren 1821/24 wiederholt wurde. Im Jahre 1828 endlich fand, wie A. v. HUMBOLDT[3]) an GAUSS schreibt »die Versammlung deutscher und nordischer Naturforscher, Physiker und Astronomen«

1) GAUSS-HUMBOLDT, S. 1 und 2.

2) Ebenda, S. 3 ff. und Werke XII, S. 320 ff.

3) Ebenda, S. 20.

in Berlin, und zwar vom 18.—26. September statt. Der äusserst dringenden Einladung HUMBOLDTS, nach Berlin zu kommen und sein Gast zu sein, leistete GAUSS Folge, und es ist kein Zweifel möglich, dass er dort von HUMBOLDT direkt auf erdmagnetische Probleme hingewiesen worden ist; denn HUMBOLDT hatte eine kleine Ausstellung ihm gehöriger magnetischer Apparate in seinem Hause veranstaltet, die er GAUSS zeigte. Hierauf spielt HUMBOLDT an, wenn er an GAUSS schreibt[1]): »Ihr bereits mit so schönem Erfolge gekröntes Unternehmen befriedigt meine Eitelkeit auf eine sehr individuelle Weise. Ich träume, dass meine Bitten, die Versuche, die Sie in meinem Hause mit Auffindung der Inklination durch 3 und 6 Extra-Meridian-Beobachtungen machten, mitgewirkt haben zu dem Entschlusse, diesen verworrenen Teil der Physik aufzuklären.«

5. Diese Anregungen insgesamt genommen mögen es wohl gewesen sein, die GAUSSens Aufmerksamkeit definitiv auf den Magnetismus hingelenkt haben. Zwar dauert es noch einige Jahre, bis sich in seiner Korrespondenz mit OLBERS, BESSEL, ENCKE, GERLING, HUMBOLDT fast in jedem Briefe Mitteilungen über seine magnetischen Arbeiten befinden; aber schon 1829, also ein Jahr nach seinem Besuche bei HUMBOLDT, schreibt er an OLBERS am 12. Oktober[2]) sehr befriedigt über einen Besuch des belgischen Physikers QUETELET, der damals in Deutschland, Holland, der Schweiz und Italien erdmagnetische Messungen machte: »Die Bekanntschaft des Herrn QUETELET ist mir sehr angenehm gewesen; wir haben mit seinem artigen Apparat in meinem Garten verschiedene Reihen von Versuchen über die Intensität der magnetischen Kraft angestellt, die eine von mir kaum erwartete Übereinstimmung gewährten.« Um welche Versuche es sich hier gehandelt hat, ersieht man aus dem Berichte QUETELETS[3]); auf S. 4 desselben heisst es: »Ayant eu l'avantage de faire des observations sur l'intensité magnétique à Goettingue avec M. le professeur GAUSS, cet illustre géomètre me conseillait de compter les oscillations à partir d'un point fixe, devant lequel l'aiguille devait repasser constamment, tel que

1) GAUSS-HUMBOLDT, S. 25.

2) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 525.

3) »*Recherches sur l'intensité magnétique de differens lieux de l'Allemagne et des Pays-Bas*; lues dans la séance du 5. déc. 1829, Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, Bd. VI, Bruxelles 1830, S. 1—18.

le point du cercle gradué qui répondait au méridien magnétique. L'aiguille passe chaque fois devant ce point avec le maximum de vitesse, tandis qu'elle reste un instant immobile vers le maximum d'amplitude; ce qui rend ce dernier point moins précis. En faisant néanmoins simultanément une série d'observations, et en adoptant chacun une manière de compter différente, nous sommes parvenus à des résultats qui ne différaient que de 0″,05 pour 391 secondes. On ne peut disconvenir qu'un point fixe comporte plus de précision, mais il exige qu'on se tienne très-près de l'instrument.«

Hier taucht also zum ersten Mal der Gedanke auf, den GAUSS später 1837) in seiner Abhandlung: *Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel* entwickelt hat, nämlich den Beginn einer Schwingung von der Stelle grösster Geschwindigkeit statt von der Stelle grösster Elongation, wie bis dahin allgemein üblich, zu zählen. Ob GAUSS erst durch den Besuch QUETELETS, als er dessen Versuche mit eigenen Augen sah, auf diesen Gedanken gekommen ist, oder ob er sich damals schon so viel mit der praktischen Bestimmung von Schwingungsdauern beschäftigt hatte, dass ihm dieser Gedanke geläufig war, ist nicht zu entscheiden.

Schliesslich findet sich aus diesen Jahren in einer kurzen Notiz[1]) über ein am 7. Januar 1831 von GERLING in Marburg beobachtetes Nordlicht, die GAUSS der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften am 28. Februar 1831 vorlegte, zum Schluss eine Bemerkung, die darauf schliessen lässt, dass zu dieser Zeit auf der Göttinger Sternwarte die Magnetnadel bereits regelmässig beobachtet wurde (Deklination). Es heisst nämlich zum Schluss: »Die hier in Göttingen von Herrn Professor HARDING an diesem Nordlichte gemachten Wahrnehmungen stimmen im Wesentlichen mit den von andern Orten bekannt gewordenen überein, doch verdient der Umstand erwähnt zu werden, dass während der Dauer des Phänomens die Magnetnadel um etwa dreiviertel Grad von ihrer gewöhnlichen Stellung nach Norden ging, und am andern Morgen wieder auf dieselbe zurückgekommen war.«

Das Ende dieser Vorbereitungsperiode ist dadurch charakterisiert, dass es mit dem Amtsantritte WILHELM WEBERS in Göttingen zusammenfällt, der im Herbste des Jahres 1831 als Nachfolger von TOBIAS MAYER auf Betreiben von

1) Werke V, S. 519.

Gauss auf den Lehrstuhl der Physik berufen worden war. In ihm fand Gauss die gleichgestimmte Seele, den wissenschaftlich interessierten Physiker und hingebenden Freund, dessen Mitwirkung an der Ausführung der wissenschaftlichen Pläne geradezu die Vorbedingung dafür war, dass Gauss sich jetzt mit Erfolg der Physik zuwenden konnte. In einem Briefe an Humboldt hat sich Gauss am 13. Juli 1833[1]) übrigens selbst über den Einfluss Humboldts und Webers folgendermassen geäussert: »Dass die unbedeutenden Versuche, die ich vor 5 Jahren bei Ihnen zu machen das Vergnügen hatte, mich dem Magnetismus zugewandt hätten, kann ich zwar nicht eigentlich sagen, denn in der Tat ist mein Verlangen danach so alt, wie meine Beschäftigung mit den exakten Wissenschaften überhaupt, also weit über 40 Jahr; allein ich habe den Fehler, dass ich erst dann recht eifrig mich mit einer Sache beschäftigen mag, wenn mir die Mittel zu einem rechten Eindringen zu Gebote stehen und daran fehlte es früher. Das freundschaftliche Verhältnis, in welchem ich zu unserm trefflichen Weber stehe, seine ungemein grosse Gefälligkeit, alle Hülfsmittel des physikalischen Kabinetts zu meiner Disposition zu stellen und mich mit seinem eigenen Reichtum an praktischen Ideen zu unterstützen, machte mir die ersten Schritte erst möglich, und den ersten Impuls dazu haben doch wieder Sie gegeben, durch einen Brief an Weber, worin Sie (Ende 1831) der unter Ihren Auspizien errichteten Anstalten für Beobachtung der täglichen Variation erwähnten.«

Zweiter Abschnitt.

Zurückführung des Erdmagnetismus auf absolutes Mass.

6. Schon im Anfang des Jahres 1832 zeigt die Korrespondenz von Gauss deutlich, dass er sich inzwischen mit aller Kraft auf die Probleme des Magnetismus geworfen hat[2]). Am 14. Februar kommt in einem Briefe an Gerling[3]) zum ersten Male die in Zukunft sich häufig wiederholende Bemerkung vor, dass er sich in der letzten Zeit viel mit dem »Magnetismus überhaupt« beschäftigt habe, und dass es ihm insbesondere auch gelungen sei, die Inten-

1) Werke XII, S. 312 (Antwort auf den S. 7 oben zitierten Brief Humboldts).

2) Man vergl. hierzu auch den Bericht von Sartorius v. Waltershausen: *Gauss zum Gedächtnis*, S. 62.

3) Gauss-Gerling, S. 386; Werke XI, 1, S. 72.

sität des Erdmagnetismus auf absolute Einheiten zu reduzieren; er gibt dabei, wie wir heute sagen würden, die Dimension der magnetischen Kraft an und sogar schon einen angenäherten Wert für die Horizontalintensität in absoluten Einheiten für Göttingen. Am 18. Februar 1832 in einem Briefe an OLBERS[1]) finden sich zum Teil dieselben Auseinandersetzungen fast wörtlich wieder, wie auch in einem Briefe an SCHUMACHER vom 3. März[2]). In dem genannten Briefe an OLBERS findet sich auch eine kurze Andeutung über die experimentelle Methode, deren sich GAUSS bedient hat. Man erkennt deutlich, dass in grossen Zügen die Konzeption des Inhaltes der »*Intensitas*«, ja weit darüber hinaus bis zur allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus fertig war. Es handelt sich nur noch darum, genauere Messungen zu machen und die Methoden zu verfeinern. Eine Fülle von Ideen strömt ihm zu (Brief vom 2. April an GERLING[3]) und vom 2. August[4]) an OLBERS), in denen er dies selbst in stolzer Freude mitteilt; und in der Tat findet sich in seinen Briefen bis zum Ende des Jahres vieles, ja das meiste von dem angedeutet, was er später in seinen Abhandlungen ausgeführt hat. Darüber wird im Einzelnen später zu berichten sein.

7. Am 2. August 1832 schreibt GAUSS an OLBERS[5]), dass er für später ein grosses zusammenfassendes Werk über Magnetismus zu schreiben beabsichtige; vorläufig wolle er einen kleinen Teil desselben, über die Intensität des Erdmagnetismus, in Angriff nehmen und gesondert veröffentlichen. Eine »mehr populäre« Einleitung legt er dem Freunde bei, die uns verloren gegangen ist; sie war wohl im wesentlichen identisch mit der Einleitung, die GAUSS seiner Abhandlung vorausgeschickt hat und stimmte dem Inhalte nach natürlich im Ganzen überein mit der eigenen Anzeige[6]) seiner Abhandlung in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen. Am 31. August teilt er an SCHUMACHER[7]) mit, dass er mit der Ausarbeitung der »*Intensitas*« begonnen habe, am 14. De-

1) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 584; Werke XI, 1, S. 72.
2) GAUSS-SCHUMACHER IV, S. 294 ff.
3) GAUSS-GERLING, S. 387; Werke XI, 1, S. 77.
4) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 587 ff.; Werke XI, 1, S. 79.
5) Vergl. die vorhergehende Anmerkung.
6) Werke V, S. 293.
7) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 304.

zember[1]) gibt er ihm die Nachricht von der Vollendung dieses Teils seines Programms; am 15. Dezember las er die Abhandlung in der Sozietät vor.

Die »*Intensitas*«[2]) ist die erste reife Frucht von Gauss' magnetischen Arbeiten.

Einleitend gibt Gauss nach einem kurzen historischen Überblick eine kritische Schilderung der bisherigen Messungen, die nur relative sein konnten. Für eine gegebene Magnetnadel an einem gegebenen Orte zu einer bestimmten Zeit hängt der Wert der Intensität des Erdmagnetismus von der Schwingungsdauer der Nadel ab, auf deren Bestimmung man sich bisher beschränkt hatte; dieselbe Zahl von Schwingungen in der Sekunde an verschiedenen Orten bedeutet also gleiche, veränderte Schwingungszahl veränderte magnetische Kraft — unter der Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Nadel, die aber streng genommen nie garantiert werden kann. Kann dieser Nachteil für kurze Zeit auch durch Benutzung mehrerer Nadeln und gegenseitigen Vergleich der mit ihnen gewonnenen Ergebnisse erheblich vermindert werden, so verliert die Methode alle Brauchbarkeit, sobald es sich um sehr grosse Zeiträume handelt, so bald man also die säkularen Variationen, z. B. der Horizontalintensität, messen will. Deshalb muss an Stelle der »relativen« eine »absolute« Methode treten[3]).

8. Im ersten Abschnitt der »*Intensitas*« formuliert Gauss zunächst die Voraussetzungen und Hypothesen, die er über den Magnetismus zugrunde legt: er nimmt zwei imponderable magnetische Flüssigkeiten, die nördliche oder positive und die südliche oder negative, an, deren Elemente Kräfte auf einander ausüben, die den wirkenden Mengen proportional sind und überdies mit dem Quadrate der Entfernung abnehmen. Dieses Gesetz hält Gauss zwar schon durch Coulombs Untersuchungen für gesichert. Er setzt aber später allgemeiner die $n$te Potenz der Entfernung an und bestimmt aus seinen eigenen Messungen den Wert $n = 2$ mit grösster Genauigkeit. Auf Grund der obigen Voraussetzung hat man, wenn zwei Quantitäten der beiden Flüssigkeiten mit m_1 und m_2 bezeichnet werden und f einen Proportionalitätsfaktor bedeutet,

1) Gauss-Schumacher II, S. 316.

2) *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*, Werke V, S. 79.

3) Vergl. hierzu weiter unten Art. 16, S. 23.

für die Kraft einen Ausdruck von der Form:

$$f\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

der positiv (d. h. bei gleichartigen Elementen) Abstossung, negativ (ungleichartige Elemente) Anziehung bedeutet. Dadurch ist gleichzeitig der Tatsache Rechnung getragen, dass ungleichartige magnetische Flüssigkeiten sich anziehen, gleichartige sich abstossen. Diese Kraft kann man nun messen. Da nämlich die magnetischen Flüssigkeiten nicht für sich allein auftreten, sondern nur mit ponderablen Teilchen der magnetischen Körper untrennbar verbunden, so erfahren die gewöhnlichen ponderabeln Körper unter dem Einfluss der magnetischen Kräfte Bewegungsantriebe, die gemessen werden können. Denn da eine ponderomotorische Kraft die Erzeugung einer Beschleunigung an einer gegebenen Masse bewirkt, so ist eine Kraftwirkung zwischen zwei Teilchen magnetischer Flüssigkeiten äquivalent mit der Wirkung einer bestimmten beschleunigenden Kraft auf eine gegebene Masse. Führt man drei passende Einheiten für die Masse, die Länge und die Zeit ein, so ist also eine ponderomotorische Kraft zu messen durch das Produkt aus Masse M und Beschleunigung α; man erhält also die Gleichung

$$f\frac{m_1 m_2}{r^2} = M\alpha. \tag{2}$$

Nun aber tritt die Hauptschwierigkeit auf. Von »Quantitäten« m_1 und m_2 magnetischer Flüssigkeiten kann man ja eigentlich erst sprechen, wenn man ein Mass dafür besitzt, was noch nicht der Fall ist. GAUSS formuliert daher den Grundsatz: Da die magnetischen Flüssigkeiten selbst nur durch die Wirkungen, die sie hervorbringen, erkennbar sind, so müssen gerade diese zur Messung jener dienen.

Versteht man unter der Kraft 1 diejenige, die einer Masse 1 in der Zeit 1 die Beschleunigung 1 erteilt, so definiert GAUSS die Einheit der Menge (nördlicher oder positiver, südlicher oder negativer) magnetischer Flüssigkeit als diejenige, die auf eine andere ihr gleiche in der Entfernung 1 befindliche Menge die abstossende Kraft 1 ausübt. Das kommt darauf heraus, in der Gleichung (2) den Proportionalitätsfaktor als dimensionslos zu betrachten und ihn gleich 1 zu setzen. Dies ist natürlich willkürlich, (und man könnte jede beliebige andere Festsetzung treffen). Aber es ist GAUSSens grosses Verdienst,

als erster erkannt zu haben, dass eine derartige Festsetzung nicht nur möglich, sondern auch notwendig ist, wenn man zu einer rationellen Messung der magnetischen Mengen und aller daraus abgeleiteten Grössen, also auch der magnetischen Kräfte, gelangen will. Auch der Name »absolute Messung« oder »Messung in absoluten Einheiten« geht auf GAUSS zurück und hat sich bis heute erhalten.

Nachdem durch GAUSSens Verfahren der Begriff der magnetischen Menge eine präzise Fassung erhalten hat, kann man noch bemerken, dass (2) auch das Vorzeichen der Kraft richtig wiedergibt, wenn man allgemein abstossende Kräfte als positiv, anziehende als negativ rechnet.

9. Einen weiteren fundamentalen Punkt berührt dann GAUSS, indem er als fernere Voraussetzungen die folgenden formuliert: Jeder magnetische Körper enthält gleiche Quantitäten der beiden magnetischen Flüssigkeiten; dies gilt sogar für jedes kleinste Teilchen eines magnetischen Körpers. Diese Voraussetzung wird durch das bekannte Experiment notwendig, dass durch Zerbrechen eines Magneten, wie oft diese Prozedur auch vorgenommen wird, die beiden Flüssigkeiten nicht getrennt werden können; man erhält immer wieder einen vollständigen Magneten. Auf den ersten Blick steht diese Voraussetzung im Widerspruch mit der Beobachtung, dass ein Magnet zwei »Pole« an den Enden zu besitzen, also nur an seinen Enden je eine isolierte magnetische Flüssigkeit vorhanden zu sein scheint. GAUSS selbst hat dieser scheinbare Widerspruch manche Schwierigkeit verursacht; so schreibt er z. B. am 18. August 1832 an ENCKE[1]): »In dem bisherigen Vortrag der Lehre vom Magnetismus findet sich aber so viel Vages, Nichtssagendes, Unlogisches (auch selbst bei BIOT), dass hier erst ganz von vorne an aufgebauet werden muss. Es gehört dahin der Begriff der Pole, dann der schreiende Widerspruch, dass man einmal annimmt, in jedem Teilchen einer Nadel sei ebensoviel nördlicher als südlicher Magnetismus, und nachher doch immer so spricht als sei an einem Ende der Nadel blos der Eine, am anderen der andere Magnetismus. Mich hat diese Verworrenheit bei BIOT[2]) im vorigen Herbst, als

1) Werke XI, 1, S. 83.

2) Gemeint ist wohl der 3. Band von I. B. BIOT, *Traité de Physique expérimentale et mathématique*, 4 Bände, Paris 1816; man vergleiche auch die Ausführungen BIOTs in seinem *Précis élementaire de physique expérimentale*, Paris 1824, Band 2, S. 16 ff.

ich anfing mich mit diesen Dingen zu beschäftigen, erst lange gequält. Ich konnte mit seinem freien Magnetismus gar keinen Sinn verbinden. Durch die Beziehung auf die Elektrizität hat BIOT die Sache nur verwirrter gemacht. Ich bin nun freilich in diesen Dingen schon lange zu völliger Klarheit gekommen, allein es gehören dazu mehrere neue höchst interessante Lehrsätze, die sehr tief liegen, deren Entwicklung die Grenzen der mir zunächst vorgesetzten Abhandlung weit, sehr weit überschreiten würde, und die ich daher in dieser nur mit wenigen Zeilen anzudeuten haben werde.« — Die Auflösung der Schwierigkeit gibt GAUSS, indem er, ohne Beweis, folgendes Theorem ausspricht: »Wie auch immer aber die Verteilung des freien Magnetismus innerhalb des Körpers sich verhalten mag, stets kann man an deren Stelle, infolge eines allgemeinen Theorems, nach einem bestimmten Gesetze eine andere Verteilung auf der Oberfläche des Körpers allein einsetzen, welche nach aussen hin vollständig dieselben Kräfte ausübt wie jene, so dass ein irgendwo ausserhalb gelegenes Element von magnetischer Flüssigkeit genau dieselbe Anziehung oder Abstossung von der wirklichen Verteilung des Magnetismus innerhalb des Körpers erfährt, wie von der auf der Oberfläche desselben gedachten. Dieselbe Fiktion kann man auf zwei Körper ausdehnen, welche nach Massgabe des in ihnen entwickelten freien Magnetismus auf einander wirken, so dass für jeden von beiden die auf der Oberfläche gedachte Verteilung an die Stelle der wirklichen inneren treten kann. Auf diese Weise können wir endlich der gewöhnlichen Sprechweise, welche z. B. dem einen Ende einer Magnetnadel ausschliesslich Nordmagnetismus, dem anderen Südmagnetismus zuschreibt, den wahren Sinn unterlegen.«

Den Lehrsatz, den GAUSS hier ausgesprochen hat, hat er erst veröffentlicht im Jahre 1840 in der Abhandlung: »*Allgemeine Lehrsätze usw.*«[1]). Dieses Theorem, das am Schlusse der genannten Abhandlung als eine Folge allgemeiner potentialtheoretischer Sätze auftritt, hat GAUSS also spätestens seit Mitte 1832 besessen und damit auch den wesentlichen Inhalt dieser Abhandlung, auf die wir später zurückkommen.

10. Indem GAUSS die Untersuchung auf sogenannte »magnetisch harte« Körper beschränkt (d. h. auf solche mit grosser »Koerzitivkraft«) und noch be-

1) *Allgemeine Lehrsätze in Bezug auf die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte* 1839; Werke V, S. 195.

merkt hat, dass die magnetischen Kräfte eines Magneten von der Temperatur abhängen, es also notwendig sei, den Temperatureinfluss experimentell festzulegen, um alle Beobachtungen auf dieselbe Temperatur reduzieren zu können, wendet er sich zu der Tatsache, dass die Erde magnetische Kräfte ausübt; er bespricht kurz die Variationen des magnetischen Meridians (der Deklination) und betont, dass über die Variation der Intensität so gut wie nichts bekannt sei. Dann geht er dazu über, die gemachten Voraussetzungen mathematisch zu formulieren.

Aus der Tatsache, dass in einem Magneten, ja sogar in jedem kleinsten Teilchen eines solchen, beide magnetische Flüssigkeiten in gleicher Menge vorhanden sind, folgt zunächst:

$$\int dm = 0, \tag{3}$$

wenn dm ein Element des Magnetismus bezeichnet und das Integral über den ganzen Körper erstreckt wird.

Dann führt Gauss den Begriff des »magnetischen Momentes« ($\mathfrak{M}$) ein. Darunter ist ein Vektor verstanden, dessen Komponenten $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ in bezug auf drei beliebige zu einander senkrechte im Raume feste Achsen x, y, z folgendermassen definiert sind:

$$\int x\,dm = \mathfrak{M}_x, \quad \int y\,dm = \mathfrak{M}_y, \quad \int z\,dm = \mathfrak{M}_z. \tag{4}$$

In der bequemeren Vektorschreibweise ist, wenn $\mathfrak{r}$ den Lagenvektor mit den Komponenten x, y, z des Teilchens dm bedeutet, offenbar das Moment selbst:

$$\mathfrak{M} = \int \mathfrak{r}\,dm. \tag{4a}$$

In Verbindung mit (3) ergeben sich Gleichungen von der Form:

$$\int x\,dm = \int (x-a)\,dm = \mathfrak{M}_x \text{ usw.}, \tag{5}$$

wo a eine beliebige Konstante ist. Daraus folgt, dass die Wahl des Anfangspunktes gleichgültig ist und der Vektor $\mathfrak{M}$ keine bestimmte materielle Linie in einem Magneten, sondern nur eine Richtung festlegt. Aus dem Vektorcharakter von $\mathfrak{M}$ folgt für die Komponente $\mathfrak{M}_\xi$ des Momentes in bezug auf eine beliebige Achse ξ, die mit den Koordinatenachsen die Winkel A, B, C bildet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\xi &= \int (x\cos A + y\cos B + z\cos C)\,dm \\ &= \mathfrak{M}_x \cos A + \mathfrak{M}_y \cos B + \mathfrak{M}_z \cos C, \end{aligned} \tag{6}$$

während sich aus (4) für den Betrag $|\mathfrak{M}| = M$ des Momentes

$$|\mathfrak{M}| = M = +\sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2} \tag{7}$$

und für die Richtungskosinusse desselben:

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{M}_x}{M}, \quad \cos\beta = \frac{\mathfrak{M}_y}{M}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathfrak{M}_z}{M} \tag{8}$$

ergibt. Damit kann man für die Komponente $\mathfrak{M}_\xi$ nach (6) schreiben:

$$\mathfrak{M}_\xi = M\{\cos A\cos\alpha + \cos B\cos\beta + \cos C\cos\gamma\} = M\cos\omega, \tag{9}$$

wenn ω den Winkel zwischen der Achse ξ und der Richtung des magnetischen Momentes bedeutet. Diese letztere wird als »magnetische Achse« des Körpers bezeichnet; für $\omega = 0$, d. h. in bezug auf die magnetische Achse ist das Moment ein Maximum ($= M$), es ist gleich 0 für $\omega = \frac{\pi}{2}$, negativ für $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$. Die Enden der magnetischen Achse, die nach dem Obigen ja keine materielle Gerade, sondern nur eine Richtung ist, nennt GAUSS die Pole.

11. GAUSS geht nun dazu über, die Wirkung der Kraft des Erdmagnetismus, die wir mit $\mathfrak{H}$ (Betrag $|\mathfrak{H}| = H$; Komponenten $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$) bezeichnen, auf einen Magneten festzustellen; dabei wird die vereinfachende Annahme gemacht, die stets zulässig ist, dass $\mathfrak{H}$ innerhalb des vom Magneten eingenommenen Raumgebietes konstant ist. Die Wirkung kann nach den bekannten Gesetzen der Statik starrer Körper berechnet werden; denn es ist bekannt, dass das an einem starren Körper angreifende Kräftesystem im allgemeinen Falle äquivalent ist einer Einzelkraft $\mathfrak{K}$ und einem Kräftepaar $\mathfrak{P}$.

In dem besonderen Falle, mit dem wir es hier zu tun haben, ist die Einzelkraft gleich 0. Denn auf ein Flüssigkeitsteilchen dm wirkt die Kraft $\mathfrak{H}dm$, also ist die Gesamtkraft nach (3):

$$\mathfrak{K} = \int \mathfrak{H}dm = \mathfrak{H}\int dm = 0. \tag{10}$$

Es bleibt also nur die Wirkung des Kräftepaars übrig; der Erdmagnetismus übt also auf eine Magnetnadel nur ein Drehmoment aus. Das Kräftepaar $\mathfrak{P}$ ergibt sich zu:

$$\mathfrak{P} = \int[\mathfrak{r}, \mathfrak{H}dm] = \int[\mathfrak{r}dm, \mathfrak{H}] = [\int \mathfrak{r}dm, \mathfrak{H}] = [\mathfrak{M}, \mathfrak{H}], \tag{11}$$

wenn $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ das sogenannte vektorielle Produkt aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnet.

Er ist senkrecht zur Ebene von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ und sein Betrag ist:

$$|\mathfrak{P}| = MH \sin(\mathfrak{M}, \mathfrak{H}). \tag{12}$$

Sein Maximalbetrag, die sogenannte »Direktionskraft«, ist also $M.H$ selbst. Aus (11) und (12) folgt sofort die Bedingung dafür, dass ein Magnet unter dem Einfluss der erdmagnetischen Kraft im stabilen Gleichgewicht ist; denn aus $\mathfrak{P} = 0$ folgt, da weder M noch H verschwinden, dass $\sin(\mathfrak{M}\mathfrak{H}) = 0$ sein muss, d. h. $\mathfrak{M} \parallel \mathfrak{H}$, die Richtung der magnetischen Achse muss also parallel der äusseren Feldkraft sein[1]).

Nach (11) und (12) ist es, da $\mathfrak{P}$ ein »freier« Vektor ist, stets möglich, die Wirkung des Erdfeldes auf einen Magneten zu ersetzen durch zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die in zwei beliebigen Punkten A und B des Magneten im gegenseitigen Abstande R angreifen, den Betrag $\frac{MH}{R}$ und die Richtung von $\mathfrak{H}$ haben.

12. Diese letzteren Betrachtungen wendet Gauss an, um eine sehr originelle Darstellung der Wirkung der Vertikalkomponente der erdmagnetischen Kraft auf eine Magnetnadel zu geben.

Nennt man die Vertikalkomponente des Erdmagnetismus etwa V, so ist auch das von dieser Teilkraft ausgeübte Kräftepaar nach (12) gleich $VM \sin(VM)$, also wieder zwei gleichen, aber entgegengesetzt (vertikal nach oben und unten) gerichteten Kräfte von der Grösse $\frac{MV}{R}$ äquivalent, die in zwei beliebigen Punkten A und B der Magnetnadel angreifen, die den Abstand R voneinander haben. Man kann also z. B. den Punkt A und seinen Abstand R von B beliebig annehmen, z. B. A in den Schwerpunkt der Nadel legen. Ist das Gewicht der Nadel gleich G, so kann man den Abstand $R = \frac{VM}{G}$ machen, sodass die beiden äquivalenten Kräfte den Betrag $\frac{MV}{R} = G$ erhalten, d. h. gleich dem Gewicht der Nadel werden. Die eine, die im Schwerpunkt A nach oben angreift, wird gerade kompensiert durch das gleichfalls im Schwerpunkt angreifende Gewicht G der Nadel; die andere Kraft greift in einem Punkte B im Abstande $\frac{VM}{G}$ vom Schwerpunkt nach unten an. Es kommt also die Wirkung der Vertikalkomponente V einfach auf eine Verlegung des Schwerpunktes der Nadel von A nach B hinaus.

1) $\mathfrak{M} \parallel -\mathfrak{H}$ würde eine instabile Lage ergeben.

Auf der nördlichen Halbkugel verschiebt sich der Schwerpunkt nach dem Ende hin, das nordmagnetische Flüssigkeit besitzt. Mit dieser uns etwas ungewohnten Darstellung der Wirkung der Vertikalkomponente verbindet GAUSS einen bestimmten Zweck; er zieht aus ihr nämlich eine praktische Folgerung für die experimentelle Bestimmung der Inklination. Er sagt darüber:

»Bei dieser Auffassungsweise leuchtet von selbst ein, dass, was immer für Versuche mit einer Magnetnadel in einem einzigen magnetischen Zustande gemacht werden mögen, aus diesen allein die Inklination nicht abgeleitet werden kann, sondern dass die Lage des wirklichen Schwerpunktes anderswoher schon bekannt sein muss. Diese Lage pflegt bestimmt zu werden, bevor die Nadel magnetisiert wird; aber diese Art ist nicht sicher genug, da meistens eine Stahlnadel schon während ihrer Herstellung einen, wenn auch schwachen, Magnetismus annimmt. Es ist daher für die Bestimmung der Inklination notwendig, dass durch eine zweckmässige Änderung des magnetischen Zustandes der Nadel eine andere Verlegung des Schwerpunktes hervorgerufen werde. Damit diese von der ersteren möglichst verschieden werde, wird es notwendig sein, die Pole umzukehren, wodurch eine doppelte Verlegung erhalten wird. Übrigens kann die Verlegung des Schwerpunktes selbst bei Nadeln, welche die geeigneteste Form haben und mit Magnetismus gesättigt sind, eine gewisse Grenze nicht überschreiten, die (für eine einfache Verschiebung) in unseren Gegenden ungefähr 0,4 mm beträgt, und in Gegenden, wo die vertikale Kraft am grössten ist, unter 0,6 mm bleibt; daraus ersieht man gleichzeitig, eine wie grosse mechanische Feinheit bei den Nadeln erfordert wird, die zur Bestimmung der Inklination dienen sollen.«

13. Von nun an setzt GAUSS voraus, dass die Magnetnadel nur um eine vertikale Achse drehbar sei, sodass die Vertikalkomponente V nicht in Betracht kommt; der Einfachheit halber werden wir mit GAUSS die Horizontalkomponente von jetzt an mit dem Buchstaben H bezeichnen, wodurch ein Irrtum wohl nicht entstehen kann.

Das Problem, das GAUSS nun löst, ist die absolute Bestimmung von H; hat man H gefunden und den Inklinationswinkel i gemessen, so ist die totale Intensität des Erdmagnetismus $= \frac{H}{\cos i}$.

Die Bestimmung von H erreicht GAUSS dadurch, dass er einmal das Produkt HM der Horizontalintensität in das magnetische Moment und dann nach

einer zweiten Methode den Quotienten $\frac{H}{M}$ bestimmt; seine Methode liefert also gleichzeitig das magnetische Moment der zur Untersuchung benutzten Magnetnadel und macht die Messung der Intensität unabhängig von dem Zustande der Nadel.

Gauss' Methode zur Bestimmung von HM ist die folgende: Lässt man eine Magnetnadel vom Trägheitsmoment K um eine vertikale Achse unter dem Einfluss der Horizontalintensität schwingen, so ist, da die Direktionskraft den Wert HM besitzt, die (ganze) Schwingungsdauer T nach bekannten Sätzen der Mechanik:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{HM}}. \tag{13}$$

Für die Gültigkeit dieser Formel ist vorausgesetzt, dass die Schwingungsamplituden unendlich klein sind. Die besondere Methode, die Gauss zur Bestimmung von T entwickelt hat, ist in einer eigenen Abhandlung behandelt[1]), die hier nicht zu besprechen ist, ebensowenig wie Gauss' Verfahren, um das Trägheitsmoment K experimentell zu bestimmen. Beide Methoden haben mit Magnetismus an sich nichts zu tun, sondern gehören in das Gebiet der Mechanik. Hier sei nur erwähnt, dass sein Verfahren darauf herauskommt, der Nadel ein bekanntes Zusatzträgheitsmoment K' zu geben und sie so mit der Schwingungsdauer T'

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{K+K'}{HM}} \tag{14}$$

schwingen zu lassen. Durch Kombination von (13) und (14), d. h. durch die blosse Bestimmung zweier Schwingungsdauern, die nach Gauss' Verfahren mit ausserordentlicher Genauigkeit möglich ist, gewinnt man das Produkt

$$HM = 4\pi^2 \frac{K'}{T'^2 - T^2}. \tag{15}$$

In den Formeln (13) bis (15) ist die Torsionskraft des Aufhängefadens vernachlässigt. Gauss hat auch zur Berücksichtigung dieses Umstandes eine Methode angegeben, die gleichfalls in das Gebiet der Mechanik zu rechnen ist.

14. Es handelt sich jetzt um die Bestimmung von $\frac{H}{M}$. Dazu bedient sich Gauss einer Hilfsnadel, die um eine vertikale Achse drehbar ist; sie

1) *Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel* 1837; Werke V, S. 374.

stellt sich ohne die Wirkung störender Kräfte natürlich in den magnetischen Meridian ein. Der zu untersuchende Magnet — wir wollen ihn von jetzt an den Hauptmagneten nennen — d. h. derjenige, für den das magnetische Moment M bestimmt werden soll, kann nun in zwei Lagen so angebracht werden, dass auf die Hilfsnadel gleichzeitig die Horizontalintensität H und die magnetischen Kräfte des Hauptmagneten wirken.

In der sogenannten ersten Hauptlage ist die Stellung der beiden Nadeln zueinander folgende: Der Hauptmagnet liegt mit seiner Achse senkrecht zum magnetischen Meridian, und zwar so, dass seine Achse auf den Aufhängepunkt der Hilfsnadel hinweist. Bei gleicher Entfernung der beiden Nadeln sind nun vier verschiedene Stellungen des Hauptmagneten möglich:

1. Der Hauptmagnet liegt östlich von der Hilfsnadel und zwar ist
   a) sein Nordpol der Hilfsnadel zugewendet;
   b) sein Südpol der Hilfsnadel zugewendet.
2. Der Hauptmagnet liegt westlich von der Hilfsnadel und zwar ist
   a) sein Nordpol der Hilfsnadel zugewendet;
   b) sein Südpol der Hilfsnadel zugewendet.

Alle vier Stellungen werden benötigt, um Asymmetrien der Anordnung auszugleichen.

Bezeichnet man die Entfernung der beiden Nadeln von Mitte zu Mitte mit R, die Länge des Hauptmagneten mit l, die der Hilfsnadel mit λ, und sind die Längsdimensionen beider Nadeln sehr klein gegen R, so ist die Ablenkung φ_1 der Hilfsnadel aus dem Meridian (natürlich das Mittel aus allen vier Stellungen)

$$\text{tang}\,\varphi_1 = \frac{M}{H}\left\{\frac{n}{R^{n+1}} + \frac{\psi_1}{R^{n+3}} + \frac{\psi_2}{R^{n+5}} + \cdots\right\}, \tag{16}$$

wo die Grössen ψ von der Verteilung des Magnetismus im Hauptmagneten abhängen. GAUSS hat hier den Exponenten 2 des COULOMBschen Gesetzes zunächst noch nicht eingeführt, sondern, wie bereits erwähnt wurde, ihn allgemeiner durch die unbekannte Zahl n ersetzt.

Die sogenannte zweite Hauptlage ist durch folgende Angaben charakterisiert: Der Hauptmagnet liegt mit seiner Achse wiederum senkrecht zum magnetischen Meridian, aber jetzt weist die magnetische Achse der Hilfs-

nadel auf seine Mitte hin; der Abstand der Nadeln von Mitte zu Mitte sei wieder R. Auch hier sind wieder vier spezielle Lagenmöglichkeiten vorhanden und zur Elimination von Asymmetrien notwendig:

1. Der Hauptmagnet liegt südlich von der Hilfsnadel und zwar
   a) sein Nordpol westlich;
   b) sein Südpol westlich.
2. Der Hauptmagnet liegt nördlich von der Hilfsnadel und zwar
   a) sein Nordpol westlich;
   b) sein Südpol westlich.

In diesem Falle ist die Ablenkung φ_2 der Hilfsnadel aus dem Meridian gegeben durch

$$\text{tang}\,\varphi_2 = \frac{M}{H}\left\{\frac{1}{R^{n+1}} + \frac{\chi_1}{R^{n+3}} + \frac{\chi_2}{R^{n+5}} + \cdots\right\}, \tag{17}$$

wo die χ wieder gewisse Konstanten des Magneten sind.

Sowohl in (16) wie in (17) werden die höheren Glieder mit den Koeffizienten ψ und χ immer weniger merklich, je grösser R im Verhältnis zu den Längsdimensionen der verwendeten Magnete ist; im Grenzfall für unendlich grosse Entfernung bleibt in beiden Formeln nur das erste Glied übrig.

15. Gauss hat nun zunächst Messungen in beiden Hauptlagen und in verschiedenen Entfernungen R angestellt. Dann müssen nach (16) und (17) die beiden Winkel φ_1 und φ_2 (wenigstens insofern die Tangenten durch die Winkel ersetzt werden dürfen) um so genauer in dem Verhältnis $n : 1$ stehen, je grösser R genommen wird, d. h. man kann ohne weiteres aus dem Vergleich der in beiden Hauptlagen gewonnenen Zahlen den genauen Wert des Exponenten im Coulombschen Gesetz bestimmen. Aus der Gaussschen Messung vom 24. bis 28. Juni 1832, die nach seinen Angaben in der folgenden Tabelle wiedergegeben wird, erkennt man sofort, dass nur $n = 2$ in Frage kommen kann, da die Winkel φ_1 fast genau doppelt so gross sind als φ_2; ebenso nehmen die Werte tang φ_1 und tang φ_2 fast genau mit der dritten Potenz der Entfernung R ab.

R	φ_1	φ_2
1,1 m		$1^0\ 57'\ 24{,}8''$
1,2		1 29 40,5
1,3	$2^0\ 13'\ 51{,}2''$	1 10 19,3
1,4	1 47 28,6	0 55 58,9
1,5	1 27 19,1	0 45 14,3
1,6	1 12 7,6	0 37 12,2
1,7	1 0 9,9	0 30 57,9
1,8	0 50 52,5	0 25 59,5
1,9	0 43 21,8	0 22 9,2
2,0	0 37 16,2	0 19 1,6
2,1	0 32 4,6	0 16 24,7
2,5	0 18 51,9	0 9 36,1
3,0	0 11 0,7	0 5 33,7
3,5	0 6 56,9	0 3 28,9
4,0	0 4 35,9	0 2 22,2

Nach der Methode der kleinsten Quadrate hat GAUSS die obigen Zahlen als Funktionen von R dargestellt durch:

$$(18)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\varphi_1 = 0{,}086870\,R^{-3} - 0{,}002185\,R^{-5}, \\ \operatorname{tang}\varphi_2 = 0{,}043435\,R^{-3} + 0{,}002449\,R^{-5}. \end{cases}$$

Die Berücksichtigung der dritten Glieder in (16) und (17) erwies sich schon als unnötig.

Mit diesen Werten hat GAUSS Werte für φ_1 und φ_2 berechnet, die nebst ihren Unterschieden von den experimentell gewonnenen Zahlen in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

R	φ_1	Unterschied	φ_2	Unterschied
1,1 m			$1^0\ 57'\ 22{,}0''$	$+ 2{,}8''$
1,2			1 29 46,5	$- 6{,}0$
1,3	$2^0\ 13'\ 50{,}4''$	$+ 0{,}8''$	1 10 13,3	$+ 0{,}6$
1,4	1 47 24,1	+ 4.5	0 55 58,7	$+ 0{,}2$
1,5	1 27 28,7	— 9,6	0 45 20,9	$- 6{,}6$
1,6	1 12 10,9	— 3,3	0 37 15,4	$- 3{,}2$
1,7	1 0 14,9	— 5,0	0 30 59,1	$- 1{,}2$
1,8	0 50 48,3	+ 4,2	0 26 2,9	$- 3{,}4$
1,9	0 43 14,0	+ 7,8	0 22 6,6	$+ 2{,}6$
2,0	0 37 5,6	+ 10,6	0 18 55,7	$+ 5{,}9$
2,1	0 32 3,7	+ 0,9	0 16 19,8	$+ 4{,}9$
2,5	0 19 2,1	— 10,2	0 9 38,6	$- 2{,}5$
3,0	0 11 1,8	— 1,1	0 5 33,9	$- 0{,}2$
3,5	0 6 57,1	— 0,2	0 3 29,8	$- 1{,}0$
4,0	0 4 39,6	— 3,7	0 2 20,5	$+ 1{,}7$

16. Ausser dem in Nr. 14 besprochenen Verfahren zur Bestimmung von $\frac{M}{H}$ hat GAUSS noch eine zweite Methode angegeben — er selbst bezeichnet sie umgekehrt als »modus prior« — von der er freilich in der Abhandlung selbst keinen Gebrauch macht, da sie weniger genau sei, als die erste. Aber in der Einleitung zur »*Intensitas*« gibt er eine kurze Schilderung des Gedankenganges.

Das Verfahren soll darin bestehen, einmal eine Hilfsnadel im Erdfelde allein schwingen zu lassen, ein zweites Mal unter der kombinierten Wirkung des Erdfeldes und des Hauptmagneten, wenn dessen Achse in dem durch die Mitte der Hilfsnadel gehenden magnetischen Meridian liegt. Dann werden je nach Lage der Pole die Schwingungen der Hilfsnadel beschleunigt oder verzögert, und man kann z. B. durch Umlegen des Hauptmagneten zwei Werte für die Schwingungsdauern erhalten, aus denen dann H und M berechnet werden können.

GAUSS bemerkt dazu, dass bereits POISSON[1]) diese Methode vorgeschlagen

1) S. D. POISSON, *Solution d'un problème rélatif au Magnétisme terrestre*, in: Additions à la Connaissance des temps pour l'an 1828. Paris 1825, S. 322; Auszug in den Annales de Chimie et de Phy-

habe. In der Abhandlung POISSONS findet sich in der Tat folgender Gedankengang: Zwei Nadeln A und B liegen hintereinander im magnetischen Meridian. Man entfernt zunächt B und lässt 1) A unter der alleinigen Wirkung der Horizontalintensität H schwingen (Schwingungsdauer T); dann 2) ebenso B nach Entfernung von A (Schwingungsdauer T'). Dann wird B festgehalten und A schwingt 3) unter der kombinierten Wirkung von H und B (Schwingungsdauer θ); dann endlich 4) schwingt bei festgehaltenem A die Nadel B unter der Wirkung von H und A (Schwingungsdauer θ'). Bezeichnet man die Trägheitsmomente der beiden Nadeln mit K_A und K_B, ihre Entfernung von Mitte zu Mitte mit R, das als sehr gross gegen die Lineardimensionen der Nadeln genommen wird, die magnetischen Momente mit M_A und M_B, und behält man endlich im COULOMBschen Gesetz den Proportionalitätsfaktor f bei (statt ihn, wie GAUSS tut, gleich 1 zu setzen), so hat man folgende vier Gleichungen:

$$(19)\quad \begin{cases} \frac{4\pi^2 K_A}{T^2} = HM_A, & \frac{4\pi^2 K_B}{T'^2} = HM_B, \\ \frac{4\pi^2 K_A}{\theta^2} = HM_A + \frac{2f}{R^3} M_A M_B, & \frac{4\pi^2 K_B}{\theta'^2} = HM_B + \frac{2f}{R^3} M_A M_B. \end{cases}$$

Durch geeignete Kombination derselben gewinnt man leicht die POISSONsche Formel:

$$(20)\qquad H^2 = \frac{8\pi^2}{R^3} f \frac{\sqrt{K_A K_B}\,.\,\theta\theta'}{TT'\sqrt{T^2-\theta^2}\sqrt{T'^2-\theta'^2}}.$$

Man erkennt daraus erstens, dass der Faktor f von POISSON beibehalten, also kein Versuch gemacht wird, die Quantität der magnetischen Flüssigkeiten und damit die Horizontalintensität im »absoluten« Masse zu bestimmen. POISSON sagt auch ausdrücklich: »Le Coefficient f étant une constante qui exprime cette même action à l'unité de distance et entre deux quantités de fluide dont chacune serait prise pour unité«. Der Gedanke, durch Festlegung von f erst ein brauchbares Mass für die magnetischen Mengen zu schaffen, lag POISSON also fern.

Man erkennt zweitens, dass in POISSONS Formel die beiden Trägheitsmomente der benutzten Nadeln eingehen, die er — unter Annahme der Ho-

sique, Vol. 30, S. 257, 1825; deutsch in BAUMGARTNERS Zeitschrift für Physik und Mathematik, Bd. I, S. 117, Wien 1826.

mogeneität — berechnet wissen will. Hier liegt vom experimentellen Standpunkt natürlich ein Nachteil gegenüber der Gaussschen Methode vor, die das Trägheitsmoment experimentell bestimmt. Auch dieser Teil der Gaussschen Leistung findet sich demnach nicht bei Poisson.

Drittens aber sieht man, dass Poissons Formel für H unabhängig ist von dem magnetischen Zustande der zur Untersuchung verwendeten Nadeln. Die Poissonsche Methode ist also sicher keine »relative« Methode in dem Sinne, wie Gauss dieses Wort in der Einleitung seiner Abhandlung gebraucht[1]); denn nach Poisson ist es durchaus möglich, z. B. die säkulare Variation der erdmagnetischen Elemente mit voller Sicherheit festzustellen. Poissons Methode ist also in diesem Sinne eine »absolute«; sie ist es nur insofern nicht, als man dieses Wort nach dem Vorgange von Gauss neuerdings für solche Methoden reserviert, die den Faktor f irgendwie festlegen.

Der allgemeine Gedanke also, dem Poisson folgt, nämlich auf eine Magnetnadel den kombinierten Einfluss von H und einer zweiten Nadel wirken zu lassen, findet sich bei Gauss wieder. Bei beiden kommt das Verfahren darauf heraus, sowohl HM als $\frac{H}{M}$ zu bestimmen. Es liegt dennoch keine Abhängigkeit Gaussens von Poisson bezüglich der Methode vor; denn wir besitzen in dem Briefe an Schumacher[2]) vom 6. August 1835 sein eigenes Zeugnis dafür, dass er Poissons Abhandlung damals nicht gekannt hat: »Allerdings habe ich meine Methode, die Intensität des Erdmagnetismus zu bestimmen, nicht von Poisson entlehnt, da ich dessen Aufsatz damals (Frühjahr 1832) noch gar nicht gelesen hatte . . . .«. Auch in allem übrigen ist er gänzlich unabhängig von Poisson.

17. Die Poissonsche Methode und ihre Leistung, Werte für die erdmagnetische Kraft zu liefern, die unabhängig sind von dem magnetischen Zustande der benutzten Nadeln, hat schon vor Erscheinen der Gaussschen Arbeit die Aufmerksamkeit einiger Physiker auf sich gezogen. In einer im Jahre 1830 erschienenen Arbeit *Über die Messung der Intensität des tellurischen Magnetismus* haben Ludwig Moser und Peter Riess[3]) auf die Bedeutung der Poisson-

1) Vergl. den Schluss von art. 7 auf S. 11.

2) Gauss-Schumacher, Bd. II, S. 416.

3) Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie, Band 18, S. 226, 1830.

schen Methode hingewiesen und sie experimentell auszuführen versucht. Zu diesem Zwecke haben sie die Poissonschen Formeln in eine (wie sie glauben) für das Experiment geeignetere Form gebracht und einige Messungen ausgeführt. Infolge falscher Berechnungsart sind ihre Resultate aber fehlerhaft ausgefallen. Gauss hat diese Messungen gekannt. In einem Briefe an Schumacher vom 3. März 1832[1]) äussert er sich folgendermassen: »Wenn ich nicht irre, hat Poisson zuerst ein Verfahren angegeben, und ich finde auch in Poggendorffs Annalen einen Versuch, solches zur Anwendung zu bringen. Allein ich finde dabei Verschiedenes, was ich durchaus für unzulässig halten muss, und halte mich überzeugt, dass durch solche Behandlung auch nicht einmal ein grobgenähertes Resultat erhalten werden kann.« Ferner heisst es in einem Briefe an Gerling[2]) vom 20. Juni 1832: »Meine Zurückführung der Intensität auf absolute Einheit, wozu [ich] schon mehrere, obwohl erst als vorläufig anzusehende Versuche gemacht habe, gelingen ganz unvergleichlich. Aber das von Moser und Rieser [so schreibt Gauss irrtümlich den zweiten Namen] aus der Beobachtung in Berlin berechnete Resultat ist nur ein fünftel des meinigen, also ganz unbrauchbar ..... Jener enorme Fehler hat übrigens seinen Grund hauptsächlich in einer ganz unzulässigen Berechnungsweise: Nach richtigen Prinzipien finden sich, so gut es geht, Resultate, die wenigstens Annäherungen sind und sogar mein Resultat zwischen sich haben.«

Übrigens hat Gauss auch selbst Versuche nach dem »modus prior« gemacht, wie er in der *Intensitas* angibt. Auch in dem Briefe an Schumacher[3]) vom 3. März 1832 erwähnt er dies und gibt dort vorläufige Ergebnisse nach beiden Methoden an.

In dem Briefe an Olbers[4]) vom 2. August 1832 hat er dies noch einmal bemerkt: »Nichts desto weniger ist der modus prior dem zweiten bei weitem nachzusetzen, und zwar deswegen, weil jener eine viel längere Zeit erfordert, während welcher die Veränderlichkeit des Erdmagnetismus sich auf das Entschiedenste bemerklich macht. Ich habe zwar auch mehrere Versuche nach dem modus prior gemacht (die nahezu dieselben Resultate geben), werde aber

1) Gauss-Schumacher II, S. 295; Werke XI, 1, S. 73 ff., insbesondere S. 75.

2) Gauss-Gerling, S. 392; Werke XI, 1, S. 78.

3) Gauss-Schumacher II, S. 295; Werke XI, 1, S. 73 ff.

4) Gauss-Olbers II, 2, S. 587; Werke XI, 1, S. 79 ff.; insbesondere S. 81.

bei denen, die gelten sollen, mich nur auf den zweiten Modus beschränken.«

In dieser Bemerkung tritt ein neuer wichtiger Gesichtspunkt zur Bewertung der Poissonschen Methode auf, nämlich die längere Zeitdauer einer Messung, die Gauss mit Recht als einen Nachteil betrachtet. Einmal wegen der in dieser Zeit stattfindenden Variationen des erdmagnetischen Feldes, die also der Beobachtung entgehen, die vielmehr nur einen Mittelwert liefern kann. Dann aber auch, — wie Gauss im Artikel 23 der *Intensitas* hervorhebt — weil eine merkliche Änderung des magnetischen Zustandes der Nadel selbst eintreten könnte. Aus demselben Grunde empfiehlt Gauss auch bei seinem Verfahren die möglichste Abkürzung. In diesem Zusammenhange ist es nun von Interesse festzustellen, dass Gauss einen nicht unwesentlichen Umstand, der bei seiner Methode eine Veränderung des magnetischen Moments der Nadel herbeiführt, übersehen hat. G. Th. Fechner[1]) hat zuerst darauf hingewiesen, dass der Hauptmagnet bei der Schwingungsbeobachtung im wesentlichen parallel dem Meridian liegt, bei den Ablenkungsbeobachtungen dagegen in beiden Hauptlagen senkrecht zu demselben. In der ersteren Lage erfährt sein magnetisches Moment durch die magnetisierende Kraft der Horizontalintensität eine Verstärkung, im zweiten Falle nicht; 1855 hat W. Weber[2]) gelehrt, diesen Umstand zu berücksichtigen.

18. Im Artikel 25 der *Intensitas* hat Gauss schliesslich eine Reihe von zahlenmässigen Ergebnissen über die absoluten Werte der Horizontalintensität zusammengestellt. Er benutzt als Einheiten das Milligramm, das Millimeter und die Sekunde. Durch Übergang zu den heute üblichen Einheiten, Gramm, Zentimeter, Sekunde, reduzieren sich seine Werte auf den zehnten Teil. Gauss teilt die Ergebnisse von zehn Messreihen unter den verschiedensten Bedingungen mit, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind; die Werte von H sind auf gr, cm, sec reduziert. Die Bemerkungen der vierten Spalte geben einen Eindruck davon, mit welcher Umsicht und Sorgfalt Gauss die Bedingungen des Experiments variiert hat.

---

1) G. Th. Fechner, Poggendorffs Annalen, Bd. LV, S. 189; 1842.

2) W. Weber, Abhdl. d. Gött. Ges. d. Wiss., Bd. VI, 1855; auch Webers Werke, Bd. II, S. 326. Vergl. ferner E. Dorn, Wied. Ann. XVII, S. 776, 1882; ebenda XXXV, S. 270 und 275, 1888.

Nr. des Versuchs	Zeit 1832	H in $gr^{\frac{1}{2}}\ cm^{-\frac{1}{2}}\ sec^{-1}$	Bemerkungen	
I	21. Mai	0,17820	bei weitem geringere Sorgfalt	Messungen an verschiedenen Orten angestellt
II	24. Mai	0,17694		
III	4. Juni	0,17713		
IV	24.—28. Juni	0,17625	geringere Sorgfalt	
V	23., 24. Juli	0,17826		
VI	25., 26. Juli	0,17845		
VII	9. September	0,17764	grösste Sorgfalt	Messungen an demselben Orte angestellt
VIII	18. September	0,17821		
IX	27. September	0,17965	sehr leichte Nadel (58 gr)	
X	15. Oktober	0,17860	gemischter Versuch: Ablenkungen am Orte V bis IX, Schwingungen an anderem Orte Nadel 1062 gr, Länge 48,5 cm	

Bei Nr. I—VIII wurden zwar verschiedene Nadeln benutzt, aber alle waren von gleicher Länge und etwa gleichem Gewicht (400—440 gr).

Zu dem Versuch IX bemerkt GAUSS, dass er nur angestellt sei, um zu untersuchen, welche Genauigkeit man mit kleinen Nadeln erreichen könnte. »Es besteht kein Zweifel«, sagt er, »dass die Feinheit der Beobachtungen merklich vermehrt wird, wenn noch schwerere Nadeln benutzt werden, z. B. solche, deren Gewicht bis zu 2000 oder 3000 gr steigt.«

Dies ist ein Punkt, der für GAUSS' Auffassung ganz charakteristisch ist; er ist in der Tat zu immer schwereren Nadeln übergegangen, zum Teil aus dem Grunde, um den Einfluss der Luftströmungen herabzusetzen. Es ist dies einer der wenigen Punkte, wo wir heute — nach dem Vorgange von LAMONT — grundsätzlich von GAUSS abweichen[1]).

Mitteilungen über die ersten quantitativen Ergebnisse seiner Messungen hat GAUSS gemacht im Briefe an SCHUMACHER vom 3. März 1832[2]), wo er als vorläufige Werte der Horizontalintensität nach Schwingungsversuchen (POISSON-

1) Man vergleiche dazu die Darstellung LAMONTS in seiner Schrift *Über das magnetische Observatorium der kgl. Sternwarte bei München* (München 1841, bei HÜBSCHMANN), auch verkürzt in den Astron. Nachrichten, Bd. 19, 1842, S. 211—216. Daran schloss sich eine unerfreuliche Polemik WEBERS mit LAMONT, über die man das Nähere im Briefwechsel GAUSS-SCHUMACHER (Werke XII, S. 285—292) nachlesen kann. (In der PETERSschen Ausgabe des Briefwechsels sind diese Stellen unterdrückt).

2) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 395; Werke XI, 1, S. 73 ff.

sche Methode) 0,172, nach der Ablenkungsmethode 0,159 angibt; ferner im Brief an OLBERS vom 2. August[1]) 1832, wo schon die genaueren Werte 0,17762 und 0,17780 auftreten.

19. Die *Intensitas* ist die erste reife Frucht von GAUSSens Untersuchungen über Magnetismus; doch zeigen seine Briefe aus dieser Zeit (1832), dass er sich schon von Anfang an mit weit grösseren Plänen und Ideen trug.

Dass er sich nicht auf die Bestimmung der Horizontalintensität allein beschränken wollte, ist ja von vornherein naheliegend; in der Tat schreibt er schon am 2. April 1832 an GERLING[2]) und am 12. Mai 1832 an ENCKE[3]), dass er begründete Aussicht habe, die Messung aller magnetischer Elemente (Deklination, Inklination, Variationen) zu eben derselben Vollkommenheit zu bringen, wie die Messung der Horizontalintensität.

Bei seinen Versuchen war es natürlich wesentlich für GAUSS, dass er sich mit den besten damals bekannten Methoden zur Magnetisierung vertraut machte; er hat denn in der Tat auch zahlreiche Versuche darüber gemacht, wie aus seiner am 10. September 1832 in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen erschienenen Rezension[4]) einer kleinen Schrift von FRIEDRICH FISCHER hervorgeht, in der er seine Erfahrungen in Kürze angibt. Dabei stiess er natürlich auch auf die Frage nach der allmählichen Abnahme der Magnetisierung von Magneten und am 31. August 1832 schreibt er an SCHUMACHER[5]): »Jetzt bin ich unter anderem mit Versuchen beschäftigt, die Sättigungsmethoden zu vervollkommnen, teils den Grad der Beharrlichkeit, oder vielmehr die dekreszierende Geschwindigkeit der allmählichen Abnahme der Nadeln zu prüfen.«

In demselben Briefe heisst es weiter: »Im Winter werde ich den Einfluss der Temperatur untersuchen«; dasselbe Thema hatte er schon in Briefen an GERLING[6]) vom 25. Juli 1832 und an OLBERS[7]) vom 2. August 1832 angeschlagen. In etwas anderer Form, nämlich im Zusammenhang mit der Variation der erd-

1) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 587; Werke XI, 1, S. 79 ff.

2) GAUSS-GERLING, S. 387; Werke XI, 1, S. 77.

3) Werke XI, 1, S. 78.

4) *Praktische Anweisung* ... von FRIEDRICH FISCHER; Rezension von GAUSS in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen, Stück 143, S. 1441 ff., 1832, 10. September; Werke V, S. 591.

5) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 303.

6) GAUSS-GERLING, S. 394.

7) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 587 ff.; Werke XI, 1, S. 79 ff.

magnetischen Elemente, war das Problem schon im Briefe an SCHUMACHER[1]) vom 3. März 1832 aufgerollt worden, in dem GAUSS sich mit einer bei ihm seltenen Offenheit über seine theoretischen Ideen ausspricht: »Ich habe immer diese ungeheuren Änderungen wie etwas höchst merkwürdiges betrachtet. Ohne Zweifel ist die magnetische Erdkraft nicht das Resultat von ein Paar grossen Magneten in der Nähe des Erdmittelpunkts, die nach und nach viele Meilen weit sich von ihrem Platze bewegen, sondern das Resultat aller in der Erde enthaltenen polarisierten Eisenteile, und zwar mehr derjenigen, die der Oberfläche, als der, die dem Mittelpunkte näher liegen. Allein was soll man von den ungeheuren Änderungen, die seit ein paar Jahrhunderten stattgefunden haben, denken? Mir hat immer diese Erscheinung eine besondere Gunst für die von CORDIER besonders hervorgehobene Hypothese zu erwecken geschienen, wonach die feste Erdrinde vergleichsweise nur dünn ist. Natürlich können dann nur in dieser die magnetischen Kräfte ihren Sitz haben, und die allmähliche Verdickung dieser Rinde durch Erstarren vorher flüssig gewesener Schichten erklärt die eintretende grosse Veränderung in dem Erdmagnetismus auf das Ungezwungenste, die sonst ein grosses Rätsel bleibt. Auch der Umstand, dass die sogenannten magnetischen Hauptpole der Erde in die kältesten Gegenden fallen, wo vermutlich die Erdrinde am dicksten ist, scheint darauf hin zu deuten.«

In dem gleichen Briefe an SCHUMACHER finden sich Äusserungen GAUSSens über zu entwerfende magnetische Karten; aus ihnen geht klar hervor, dass er zu dieser Zeit längst wesentliche Ergebnisse seiner 1837 erschienenen *Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus* besessen hat. Dass ihm damals auch bereits erhebliche Teile seiner grossen potentialtheoretischen Arbeit bekannt waren, haben wir schon in Art. 9 bemerkt, im Anschluss an seine eigenen Andeutungen in der *Intensitas*.

Endlich finden wir gegen Ende des Jahres — es ist dies ja eine ganz naturgemässe und beinahe zwangsläufige Entwicklung — die ersten Mitteilungen GAUSSens an seine Freunde, dass er angefangen habe, seine Methoden auf den Galvanismus zu übertragen (Brief an GERLING[2]) vom 28. Oktober 1832

1) GAUSS-SCHUMACHER II. S. 294 ff.; Werke XI, 1, S. 73.

2) GAUSS-GERLING, S. 401.

und an SCHUMACHER[1]) vom 14. Dezember 1832); ein Zufall ermöglicht es uns sogar, festzustellen, dass er am 21. Oktober 1832 die ersten galvanischen Versuche angestellt hat.

Diese kurze Übersicht möge hier genügen, um GAUSSens Interessensphäre im Jahre 1832 zu charakterisieren. Wir kommen später noch ausführlich darauf zurück.

Dritter Abschnitt.
Der Bau des magnetischen Observatoriums und die Bildung des magnetischen Vereins.

20. Schon im Briefe an OLBERS[2]) vom 2. August 1832 heisst es an einer Stelle: »Gegenwärtig habe ich zwei Apparate fertig (ganz gleiche), womit absolute Deklination und ihre Änderungen, Schwingungsdauer etc. mit einer Schärfe gemessen werden können, die garnichts zu wünschen übrig lässt, ausgenommen für mich ein angemessenes Lokal, wo kein Eisen in der Nähe ist und jeder Luftzug abgehalten ist.« Allerdings, fügt GAUSS hinzu, dürfe man den Einfluss eines solchen Lokals auch nicht überschätzen, denn auch so überböten seine Messungen alles frühere sehr weit. Immerhin taucht hier zum ersten Male, wenn auch in bedingter Weise, der Gedanke auf, dass es wünschenswert sei, ein eigenes Gebäude mit Sonderausrüstung für magnetische Messungen zu besitzen. Wenige Tage später (am 18. August 1832) schreibt GAUSS, fast gleichlautend, an ENCKE[3]): ». . . . und es bleibt jetzt eigentlich garnichts weiter zu wünschen übrig, als ein gegen Eisennähe und Luftzug ganz geschütztes Lokal.«

Inzwischen reift der Plan weiter: denn am 25. Dezember heisst es in einem Brief an ENCKE[4]): »Ich bin nicht abgeneigt, bei unserem Gouvernement auf die Errichtung eines eigenen Gebäudes zu den magnetischen Beobachtungen in der Nähe der Sternwarte anzutragen, wo der Apparat, in noch grösseren Dimensionen ausgeführt, aufgestellt werden könnte. Es könnten dann hier regelmässige Beobachtungen über die täglichen Variationen der Deklination

1) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 310 ff.
2) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 587 ff.; Werke XI, 1, S. 79.
3) Werke XI, 1, S. 85 ff.
4) Brief Nr. 36 an ENCKE (ungedruckt).

in der Art angestellt werden, dass alle Zahlen zugleich auf das schärfste absolute wären«. Und am 6. Januar 1833 schreibt GAUSS noch bestimmter an SCHUMACHER[1]): »Ich gehe damit um, bei unserem Ministerium auf die Errichtung eines eigenen von Eisen freien Gebäudes für fortwährende magnetische Beobachtungen anzutragen und habe bereits den Baumeister um einen Kostenanschlag ersucht.«

GAUSSens offizielle Eingabe[2]) an das »Königliche Universitäts Kuratorium« ist vom 29. Januar 1833 datiert; der amtliche Bericht trägt den Titel: »Vortrag des Hofrats GAUSS in Göttingen, das Bedürfnis eines besonderen Lokals für magnetische Beobachtungen betreffend.«

Aus einem Briefe an SCHUMACHER[3]) vom 21. März 1833 geht hervor, dass die Einrichtung eines besonderen Gebäudes für magnetische Beobachtungen genehmigt sei und der Bau in kurzem beginnen werde. Am 20. August meldet GAUSS an ENCKE[4]), dass der Bau langsam fortschreite, das Gebäude aber bereits unter Dach sei, und er schon im Herbst darin zu beobachten hoffe.

Wirklich kann er am 20. November 1833 OLBERS[5]) mitteilen, dass das Observatorium bis auf einige innere Einrichtungen vollendet sei, und dass er schon einen der bisherigen Apparate hineingestellt und mit Justieren begonnen habe.

21. Mit der Fertigstellung des magnetischen Observatoriums war ein zweiter wichtiger Schritt vorwärts getan, und GAUSS wird nicht müde, in den Briefen an seine Freunde stets die Vorzüge seines Observatoriums zu schildern und die Notwendigkeit zu betonen, überall solche Spezialobservatorien für magnetische Messungen einzurichten. Eine Beschreibung des Gebäudes hat er selbst in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen[6]) vom 9. August 1834 gegeben; die innere Einrichtung hat WILHELM WEBER im ersten Bande der Zeitschrift »Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836« (Göttingen 1837, S. 13ff.) bekannt gemacht.

---

1) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 319 ff.

2) Werke XI, 1, p. 55 ff.

3) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 324 ff.

4) Brief Nr. 38 an ENCKE, der betreffende Passus ist ungedruckt; Teile des Briefes Werke XI, 1, S. 85.

5) GAUSS-OLBERS II, 2; S. 601 ff.

6) Göttingische Gelehrte Anzeigen, Stück 128, S. 1265 bis 1274, 1834; Werke V, S. 519.

Die wesentlichsten Punkte der Gaussschen Beschreibung seien hier wiedergegeben: Das Observatorium war — abgesehen von Nebenräumen — ein genau im geographischen Meridian orientiertes längliches Viereck von 32 Pariser Fuss Länge und 15 Fuss Breite; im ganzen Gebäude war ohne Ausnahme alles sonst bei Gebäuden übliche Eisen durch Kupfer ersetzt. Die Höhe des Saales betrug etwa 10 Fuss; Doppeltüren und Doppelfenster sorgten für tunlichste Fernhaltung von Luftzug. Nach den Angaben Webers betrugen die Kosten für das Göttinger Observatorium 797 Tlr. 19 Ggr. 6 Pfg. Preussisch Courant, wovon ein erheblicher Teil für den Ersatz des Eisens durch Kupfer erfordert wurde.

Nach Gaussens und Webers Beschreibung war das Observatorium ausgerüstet mit einem Theodolithen, der auf besonders fundamentiertem Postament stand, einer astronomischen Uhr, einem Magnetometer mit Kasten, einer Anzahl Messstangen zur Ausführung der Gaussschen Methode der ersten und zweiten Hauptlage (siehe Art. 14). Der Magnetstab des Magnetometers bestand aus Uslarschem Gussstahl, hatte eine Länge von 610, eine Breite von 37, eine Dicke von 10 Millimetern und ein Gewicht von ungefähr zwei Kilogramm. Er befand sich in einem, wie Weber besonders betont, »sehr grossen« Kasten; in der ersten Ausführungsform hatte er die Gestalt eines vertikalen Zylinders von 800 mm Durchmesser und 300 mm Höhe. Er war so weit gewählt, um einen Stab von 700 mm Länge horizontal am Magneten befestigen zu können, der die als Zusatzträgheitsmomente dienenden Gewichte tragen sollte. Im übrigen war der Kasten leicht zu öffnen, obwohl dicht verschliessbar, um nach Möglichkeit Luftströmungen abzuhalten[1]).

Die Beobachtungen im Observatorium waren in der Hauptsache nach Gaussens Bericht »die Bestimmung der Deklination und ihrer Veränderung in verschiedenen Tagesstunden, Monaten und Jahren.« Alle Tage wurden die Aufzeichnungen zweimal gemacht, vormittags 8 Uhr und nachmittags 1 Uhr, weil zu dieser Zeit erfahrungsgemäss in Göttingen die grössten Variationen stattfanden.

Ferner wurden an gewissen bestimmten Tagen im Jahre, den von Humboldt eingeführten sog. »magnetischen Terminen«, 44 Stunden hindurch un-

1) Dies gelang, wie Lamont nachwies, eben infolge der Grösse des Kastens, nicht vollkommen; deswegen wählt man heute nach Lamonts Vorgang den Kasten so eng als möglich.

unterbrochen in kurzen Fristen die Veränderungen der Deklination beobachtet. Der Zweck dieser Messungen war, einmal den regelmässigen Verlauf der Variation der Deklination genauer kennen zu lernen, dann aber auch die Ursache der häufig auftretenden Anomalien der Variation, z. B. den Einfluss der Nordlichter, zu erfassen.

In dem genannten Aufsatze in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen erwähnt GAUSS auch schon die fast seit zwei Jahren begonnenen Versuche über Galvanismus, Elektromagnetismus und Induktion; er hebt am Schlusse ausdrücklich, wenn auch nur mit wenigen Worten, den elektromagnetischen Telegraphen hervor, den er mit WEBER zusammen zwischen der Sternwarte, dem physikalischen Kabinet und dem magnetischen Observatorium eingerichtet hatte. Wir kommen hierauf ausführlich zurück.

22. In dem bereits erwähnten Bericht vom 9. August 1834 gibt GAUSS auch eine summarische Übersicht über die bisherigen Beobachtungen im magnetischen Observatorium.

Zu erwähnen sind davon zunächst die sog. »Terminbeobachtungen«. Magnetische »Termine« waren, wie schon erwähnt, von ALEXANDER VON HUMBOLDT an möglichst zahlreichen Orten mit genauer Beobachtungsvorschrift angeregt worden; es wurde an diesen Tagen 44 Stunden hindurch ununterbrochen in kurzen Zeitintervallen die Veränderung der Deklination verfolgt. Die ersten derartigen im Göttinger Observatorium angestellten Terminbeobachtungen fanden am 20./21. März, 4./5. Mai, 21./22. Juni 1834 statt; beobachtet wurde ausser von GAUSS und WEBER noch von 7 Hilfskräften, unter denen sich auch GAUSS' Sohn WILHELM befand. Im Märztermin geschahen die Beobachtungen im allgemeinen in Intervallen von 20 Minuten, nur zum Teil in halb so grossen Zwischenräumen; aber bereits hier wurde erkannt, dass es viel zweckmässiger sein würde, die Zeit von 44 Stunden abzukürzen und dafür häufiger zu beobachten. Im Maitermin wurde alle 10 Minuten, im Junitermin bereits alle 5 Minuten beobachtet. Von Terminbeobachtungen an anderen Orten, die mit den Göttinger Beobachtungen hätten verglichen werden können, kamen am 20./21. März nur Berliner Versuche in Frage, die aber unter dem schweren Mangel litten, dass nur alle Stunden beobachtet war. Infolge dessen konnte ein Vergleich mit den Göttinger Messungen keine wesentlichen Ergebnisse liefern, obwohl sich wenigstens Andeutungen der in Göttingen be-

merkten Anomalien ergaben. Dagegen zeigten die im Maitermin von SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN auf seinem Gute in Bayern angestellten Messungen »eine wahrhaft bewunderungswürdige Übereinstimmung« mit den Göttinger Ergebnissen. Am 21./22. Juni wurde ausser in Göttingen noch in Berlin von ENCKE, POGGENDORFF und MÄDLER, in Frankfurt a. M. von SARTORIUS beobachtet; alle Anomalien stimmten vollkommen überein. Die Folgerung aus diesen Beobachtungen formuliert GAUSS folgendermassen: »Diese Resultate können bereits als eine schöne Frucht der verabredeten Beobachtungen angesehen werden, da daraus auf das klarste hervorgeht, dass kleinere und grössere Anomalien der Magnetnadel, die zuweilen in ziemlich kurzen Fristen wechseln, nicht lokale, sondern kräftige, weithin wirkende Ursachen haben müssen, was man in Beziehung auf sehr grosse mit Nordlichtern in Verbindung stehende Unregelmässigkeiten auch schon früher bemerkt hatte. So wie in Zukunft die Teilnahme an diesen verabredeten Beobachtungen mit den ebenso scharfen als bequemen Apparaten sich immer weiter ausdehnen wird, ... wird es nicht fehlen, dass wir über diese höchst merkwürdigen und rätselhaften Erscheinungen umfassende Aufklärungen erhalten.«

Ausser den Terminbeobachtungen wurden auch sonst häufig entsprechende Beobachtungsreihen im Göttinger Observatorium ausgeführt; GAUSS erwähnt besonders eine solche vom 14. Januar 1834, bei der sehr starke Anomalien der Deklination beobachtet wurden. Endlich sollte regelmässig die Horizontalintensität in absolutem Mass bestimmt werden; zur Zeit des GAUSSschen Berichts war dies bereits 3 mal geschehen; am 17. Juli 1834 fand man 0,17743 abs. Einheiten, am 20. Juli: 0,17740 und am 21. Juli endlich 0,17761, also sehr nahe unter sich und mit den Ergebnissen der *Intensitas* übereinstimmend.

Ein weiterer Bericht[1]) GAUSSens über die Tätigkeit des magnetischen Observatoriums: *Beobachtungen der Magnetischen Variation in Göttingen und Leipzig am 1. und 2. Oktober 1834* enthält folgende Angaben: In dem Termine vom 6./7. August wurden starke Variationen der Deklination in Göttingen festgestellt, aber korrespondierende Beobachtungen von anderen Orten, mit denen sie hätten verglichen werden können, wurden durch zufällige Störungen verhindert. Dagegen wurde im nächsten Termin (23./24. September)

1) Werke V, S 525; POGGENDORFFS Annalen d. Phys. u. Chemie, Bd. 33, S. 426, 1834.

ausser in Göttingen in Leipzig, Berlin, Braunschweig und Kopenhagen beobachtet. Der Verlauf der magnetischen Störungen war aber regelmässig und daher wenig interessant, obwohl kleine Anomalien sich gleichzeitig an allen vier Orten zeigten. GAUSS hat dann noch einen ausserordentlichen Termin am 1. und 2. Oktober mit Leipzig verabredet, wo WEBER gerade anwesend war, und die Ergebnisse desselben waren die Veranlassung zu dem GAUSSschen Berichte. »Man wird nicht ohne Vergnügen die grosse Übereinstimmung nicht bloss in den grossen Bewegungen, welche am Abend des 1. Oktobers stattfanden, sondern fast in sämtlichen kleinen bemerken, so dass deren Quellen sich als auf grosse Ferne hinwirkende, obwohl zur Zeit noch sehr rätselhafte Kräfte auf das Unverkennbarste ausweisen. In Leipzig waren die Anomalien im Allgemeinen etwas kleiner, als in Göttingen; letzterem Orte wird daher der Herd der wirkenden Kräfte näher gewesen sein. Ich bemerke nur noch, dass während eines Teils jener Stunden ich selbst an einem zweiten in der hiesigen Sternwarte aufgestellten Apparat, wovon ich bald eine ausführliche Nachricht zu geben gedenke, beobachtet habe, und dass diese Beobachtungen einen fast vollkommenen Parallelismus mit denen des hiesigen magnetischen Observatoriums in den grösseren und kleineren Bewegungen ergeben haben; ein ähnlicher Erfolg hatte auch am 23. und 24. September, so wie bei vielen sonstigen Beobachtungen, statt, in dem Masse, dass schon öfters die Uhren an beiden Plätzen bloss mittels der magnetischen Erscheinungen bis auf einen kleinen Bruchteil einer Zeitminute genau verglichen werden konnten. Dasselbe gelang mittels der grösseren Bewegungen am 1. und 2. Oktober zwischen Göttingen und Leipzig, wo an beiden Orten die Uhren nur wenige Sekunden von der mittleren Ortszeit abwichen.

»Durch diese Erfahrungen erhalten nun auch die kleinen, in sehr kurzen Zeitfristen wechselnden Schwankungen der Magnetnadel ein überaus grosses Interesse; man muss wünschen, dass auch diese durch die Beobachtungen an vielen von einander entfernten Plätzen sorgfältig verfolgt werden, und es wird daher unumgänglich nötig, alle Beobachtungen in recht kurzen Zeitintervallen zu machen. Bisher beobachteten wir von 5 zu 5 Minuten; aber auch dieses Intervall ist noch fast zu lang, und wir denken künftig immer von 3 zu 3 Minuten den Stand der Magnetnadel an den verabredeten Tagen zu bestimmen.«

GAUSS gibt dann noch ein Beispiel für die Art an, wie die Beobachtungen gemacht werden sollen und knüpft daran die Bemerkung: »Ich habe absichtlich dieses Beispiel gewählt, wo die Nadel schnelle Veränderungen zeigte, die selbst von 20 zu 20 Sekunden sich so entschieden darstellen. Wir haben Fälle genug, wo ein ähnlicher Erfolg selbst in halb so grossen Zeitintervallen eintritt.«

23. Die im vorstehenden summarisch nach den offiziellen GAUSSschen Berichten angegebenen Resultate und Forschungen spiegeln sich naturgemäss viel lebendiger und ausführlicher in GAUSSens Briefen an seine Freunde SCHUMACHER, ENCKE und OLBERS aus dieser Zeit wieder.

Am 8. März 1834 schreibt ENCKE[1]), er gedenke bei der Berliner Sternwarte »ein kleines Nebengebäude für magnetische Beobachtungen« einzurichten. Sofort antwortet GAUSS[2]) am 21. März 1834, ENCKE möge doch unter allen Umständen nach Göttingen kommen, ehe er irgendwelche magnetischen Einrichtungen in Berlin treffe: »Jedenfalls zweifele ich nicht, dass Sie es künftig bedauern würden, in Rücksicht Ihres M. O. einen Entschluss gefasst zu haben, ehe Sie die hiesigen Einrichtungen kennen gelernt und die Art der Beobachtung selbst erprobt haben. Wir können hier mehrere Vitaloperationen durchmachen, die sich unendlich viel leichter aus der unmittelbaren Anschauung als aus Beschreibung erkennen lassen, z. B. Intensitätsbeobachtungen, Bestimmungen für die Elemente der Torsion usw.« GAUSS teilt dann mit, dass er »gestern und heute« (d. h. zum Märztermin am 20./21. März) »zum ersten Male in die Beobachtung der stündlichen Variation eingetreten« sei. »Meistens ist (während der 44 Stunden) von 10 zu 10 Minuten aufgezeichnet worden, so jedoch, dass jeder Ansatz ein Mittel aus den 5 nächsten Minuten ist, z. B. für $8^h\,50'$ ist beobachtet bei $8^h\,48'\,0''$, $49'\,0''$, $50'\,0''$, $51'\,0''$, $52'\,0''$ an einer Uhr, die genau die M. Z. zeigt. . . . . in der vorigen Nacht von 3^h bis 8^h haben grosse Anomalien stattgefunden, auf deren Parallelismus mit anderen Beobachtungen ich sehr neugierig bin. . . . . Der Gebrauch grosser Nadeln hat etwas überaus angenehmes. Die Amplitude der Schwingung nimmt so langsam ab, dass sie erst nach 2 oder $2\frac{1}{4}$ Stunden auf die Hälfte kommt. Die Skala misst einen (ganzen) Bogen von $7\frac{1}{2}$ Grad; fängt man also mit so kleinen Schwin-

1) Brief Nr. 68 von ENCKE (ungedruckt).

2) Werke XI, 1, S. 86 ff.

gungen an, die noch innerhalb der Skala fallen, so sind die Schwingungen selbst nach 12 Stunden noch gross genug, um sicher beobachtet zu werden.«

Man erkennt aus den letzten Sätzen wieder die schon einmal betonte Neigung von GAUSS, möglichst schwere Magnetnadeln zu nehmen; aus einer anderen Stelle desselben Briefes geht hervor, dass seine obige Bemerkung sich auf einen vierpfündigen Stab bezieht.

Interessant ist es für uns, von einer technischen Schwierigkeit zu hören, die damals bestand und von der wir uns heute nichts mehr träumen lassen: »Eine Hauptschwierigkeit ist, sich gute Spiegel zu verschaffen. Ein von REPSOLD verfertigter fand sich ganz unbrauchbar. Es ist jetzt ein Spiegel 50 mm hoch, 75 mm breit eingesetzt, den wir durch Zerschneiden und Foliierung eines TROUGHTONschen Glasdaches gewonnen haben. Dieser ist recht gut. Es ist aber ausserordentlich schwer, Spiegel von solcher Grösse zu machen. Ein Künstler aus Braunschweig beschäftigt sich jetzt mit dieser Aufgabe.« Noch mehrere Male finden sich solche Äusserungen über die Schwierigkeit, gute Spiegel zu beschaffen und an einer Stelle[1]) gibt GAUSS den Preis eines solchen zu 40 Gulden an!

Die Göttinger Einrichtungen erweckten natürlich überall das grösste Interesse; wir hören daher in den nächsten Briefen vielfach von Besuchen auswärtiger Gelehrter in Göttingen. So schreibt[2]) GAUSS am 25. Mai 1834 an SCHUMACHER: ». . . dass es mich sehr freuen wird, die Herren OERSTEDT und HANSTEEN hier zu sehen, dass ich mit grösstem Vergnügen ihnen alles, was meine Erfahrung in Beziehung auf die magnetischen Einrichtungen mir an die Hand gegeben hat, mitteilen werde.« Am gleichen Tage meldet er an GERLING[3]): »Morgen geht ein Apparat nach Freiberg ab, der 600 Fuss unter der Erde aufgehängt wird.«

Ein Brief vom 14. Juni 1834 an ENCKE[4]) enthält eine ausführliche Schilderung des Maitermins: »Für die gewogentliche Mitteilung der Berliner magnetischen Beobachtungen vom 21./22. März habe ich Ihnen, mein teuerster Freund, noch meinen verbindlichen Dank abzustatten. Man erkennt darin, wie Sie

1) Brief Nr. 44 an ENCKE vom 13. Oktober 1834; der genannte Passus ungedruckt; Teile des Briefes Werke XI, 1, S. 95.

2) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 355 ff.

3) GAUSS-GERLING, S. 442.

4) Werke XI, 1, S. 87.

auch selbst schon bemerkt haben, die Spur der in den Frühstunden des zweiten Tages hier wahrgenommenen Anomalien, aber auch zugleich die Notwendigkeit viel engerer Zwischenzeiten, wenn man dergleichen Anomalien und ihren Parallelismus an verschiedenen Orten vollkommen übersehen will. Die Zahlen der hiesigen Beobachtungen würden Ihnen gern zu Dienst stehen; allein ihre öffentliche Bekanntmachung würde wohl nur in dem Fall von Interesse sein können, wenn an irgend einem dritten Ort viel detailliertere Beobachtungen gemacht sind, als in Berlin. Am 4./5. Mai sind hier die Beobachtungen noch viel detaillierter gemacht als das erste Mal, nämlich durchweg von 10 zu 10 Minuten, ja, wenigstens zur Hälfte noch enger, nämlich von 5 zu 5 Minuten und bei besonderen Vorkommnissen anhaltend von Minute zu Minute. Beim Beobachten von 10 zu 10 Minuten würden also die Aufzeichnungen so stehen:

Schema A

$8^h\ 57'\ 49''$ / $58\ 10$	Mittel gilt für	$8^h\ 58'$
$58\ 49$ / $59\ 10$	Mittel » »	$8^h\ 59'$
$59\ 49$ / $9^h\ 0\ 10$	Mittel » »	$9^h\ 0'$
$0\ 49$ / $1\ 10$	Mittel » »	$9^h\ 1'$
$1\ 49$ / $2\ 10$	Mittel » »	$9^h\ 2'$
etc. etc.		

Mittel aus allen als für $9^h\ 0'$ gültig betrachtet

Bei Aufzeichnungen von 5 zu 5 Minuten ist wohl mit halben Minuten beobachtet, namentlich von Hrn. Listing und Hrn. Prof. Weber; z. B.

Schema B

$10^h\ 58'\ 49''$ / $59\ 10$	$10^h\ 59'\ 0''$
$59\ 19$ / $59\ 40$	$10^h\ 59'\ 30''$
$59\ 49$ / $11^h\ 0'\ 10''$	$11^h\ 0'\ 0''$
$0\ 19$ / $0\ 40$	$11^h\ 0'\ 30''$
$0\ 49$ / $1\ 10$	$11^h\ 1'\ 0''$

»Ich selbst habe gewöhnlich nur von 10 zu 10 Minuten nach A, zuweilen von 5 zu 5 Minuten teils nach A teils nach B beobachtet.

»In diesen Tagen, besonders am zweiten (5. Mai), haben sich nun merkwürdige Anomalien gezeigt, von denen man bei Aufzeichnungen von Stunde zu Stunde kaum eine Idee bekommen haben würde. Ich muss es daher als etwas sehr Interessantes betrachten, dass diesmal korrespondierende Beobachtungen mit beinahe eben so viel Detail da sind. Hr. SARTORIUS hat nämlich in Waltershausen unter Beistand von zwei Gehilfen an einem zwar kleineren, aber dem hiesigen ähnlichen Apparat beobachtet und die Mittel von 10 zu 10 Minuten, wie sie aus dem Schema A sich ergeben, mir mitgeteilt. Der Beobachtungsort zwischen Meiningen und Männerstadt liegt ein paar Zeitminuten östlich von Göttingen.

»Hr. SARTORIUS hat in den ersten Stunden versäumt, wieder nach der Marke zu sehen, welche er dann um $10^h\,40$ Minuten zu seinem Schrecken bedeutend verstellt fand. Von da an hat er jede Stunde mehrere Male nachgesehen und nötigenfalls nachgeholfen. Die ersten Beobachtungen sind mithin zu kassieren; ich habe sie jedoch punktiert mitgezeichnet. Sie werden nun gewiss mit freudiger Überraschung die graphische Darstellung der Göttinger und Waltershauser Beobachtungen (jene schwarz, diese rot) in dem anliegenden Blatt, untere Hälfte, betrachten. (Nach gleichem Massstabe gezeichnet). Die grossen, schnell wechselnden Anomalien erkennt man alle wieder und selbst von den meisten kleineren findet man die kenntliche Spur. Ja, ich halte für wahrscheinlich, dass die Harmonie noch frappanter ausfallen würde, wenn die Waltershauser Beobachtungen in den kritischen Stunden, auch anstatt von 10 zu 10 Minuten (wo sich kleinere Krausheiten verwischen) von 5 zu 5 Minuten gemacht wären. Ich habe Hrn. SARTORIUS aufgefordert, mir noch die Resultate für jede einzelne Minute, die vorhanden sind, anstatt der extrahierten Mittel, zu schicken, und hoffe, dass sich dann auch die Spur der hier mit entschiedenster Gewissheit den 5. Mai morgens 8^h—$8^h\,20'$ bemerkten Einsenkung finden wird. Ich bemerke nur noch, dass die Göttinger Zahlen nicht nach Mitteln aus je 5 Werten, sondern direkt nach den einzelnen vorhandenen Minuten zuerst in eine Zeichnung mit 5 mal grösserem Massstabe und danach nach dem Augenmasse verjüngt (in die korrespondierenden Quadrate) eingetragen sind.

»Zur Vergleichung habe ich in der oberen Hälfte des Blattes nun auch noch die hiesigen Beobachtungen vom 21./22. März nach demselben Massstabe gezeichnet und darunter die mir von Ihnen mitgeteilten Berliner Zahlen, ohne jedoch letztere Punkte durch Linien zu verbinden, wobei zuviel Willkürlichkeit sich hätte einmischen müssen.

»Ich glaube, dass durch die erwähnten Tatsachen sich ganz unzweifelbar herausstellt, dass nicht bloss die grösseren Ausschweifungen, sondern selbst die kleineren und in kurzen Zeiten wechselnden Fluktuationen nicht lokal, sondern durch Kräfte, welche bis auf sehr grosse Entfernungen hinaus wirken, hervorgebracht sind, und das Interesse für die gleichzeitig an vielen Orten anzustellenden Beobachtungen wird mithin umso mehr gesteigert.

»Ich muss in Beziehung auf die Zeichnungen noch bemerken, dass sie überall nur nach der nominellen Zeit (Uhrzeit) gemacht sind. In Göttingen war dies auf ein paar Sekunden genau mittlere Zeit; in Waltershausen war die Uhr etwa ein bis zwei Minuten voraus, was mit dem Meridianunterschied zusammen eine Verschiebung von etwa 3—4 Minuten nötig machen würde, um die dortigen Beobachtungen den Göttinger gleichzeitig zu machen. Mir deucht, dass man dieses selbst in der Zeichnung an den hervortretenden Stellen wiedererkennt. Ich möchte behaupten, dass, wenn in Waltershausen an einem ebenso feinen Apparat beobachtet wäre, wie der hiesige ist, ... und die Aufzeichnungen in den letzten 6 Stunden von Minute zu Minute gemacht wären, man daraus den Meridianunterschied bis auf einen kleinen Bruchteil einer Minute würde ableiten können, vorausgesetzt, dass die dabei tätigen Kräfte den hierbei in Frage kommenden Raum in unmerklicher Zeit durchdringen.

»Ob diese Voraussetzung wahr ist oder nicht, ist freilich noch unbekannt; allein ich lebe der Hoffnung, dass, wenn vielleicht in nicht langer Zeit ähnliche Etablissements wie das hiesige in Altona, Kopenhagen, Christiania und Russland (vielleicht auch Nordamerika) bestehen, wir über diese transzendentinteressante Frage bald ins Reine kommen werden.«

Und in einem Nachtrag fügt er noch erläuternd hinzu:

»Damit Sie mich nicht missverstehen, muss ich noch eine Bemerkung beifügen. Ich erwarte garnicht, dass die Waltershauser Beobachtungen, wären sie ebenso detailliert wie die hiesigen, genau die Kopie von letzteren

darbieten würden, sondern finde vielmehr natürlich, wenn die Wirkungen, je entfernter vom eigentlichen Herd, (den wir doch der Wahrscheinlichkeit nach weit im Norden von Göttingen zu suchen haben) sich desto mehr verflachen. Die Zukunft wird uns darüber schon Licht geben.«

Wieder einen Monat später schreibt GAUSS an ENCKE[1]) über den Junitermin, bei dem ENCKE in Berlin und SARTORIUS in Frankfurt a. M. beobachtet hatten. »Ich schicke daher mit den hiesigen Beobachtungen ..... die Abschrift derjenigen, die SARTORIUS in den letzten Stunden des 21. Juni selbst gemacht hat, worin Sie ..... mit Vergnügen die Übereinstimmung mit den in Berlin und Göttingen in diesen Stunden vorgekommenen Auswüchsen bemerken werden.«

In diesem Briefe findet sich dann noch die Mitteilung, dass OERSTEDT, der in Kopenhagen ein »dem hiesigen gleiches Etablissement« errichten wolle, z. Zt. in Göttingen sei, sowie, dass GAUSS in der Sternwarte (nicht im magnetischen Observatorium) jetzt eine 25 pfündige Magnetnadel aufgehängt habe, über deren besonderen Zweck er sich an dieser Stelle nicht ausspricht, über den er aber am 8. August 1834 an ENCKE[2]) folgende Mitteilungen macht: »Ich habe mich darauf beschränkt, zuweilen einen kleinen Satz genau gleichzeitig korrespondierender Beobachtungen in der Sternwarte mit der 25 pfündigen Nadel zu machen[3]), welche ..... eine höchst merkwürdige Harmonie zeigen und beweisen, dass auch die kleineren Sprünge innerhalb weniger Minuten, die uns früher etwas beunruhigt haben, durchaus reell sind, obwohl erst künftige Vergleichung mit scharfen entfernteren Beobachtungen ausweisen wird, ob auch diese sehr weit entlegene Ursachen haben. Jedenfalls sind die Intervalle von 5 zu 5 Minuten keineswegs zu enge, sondern zu Zeiten starker oder sprudelnder Anomalien eher noch zu gross. ..... Wenn die schärferen Apparate erst noch mehr verbreitet sein werden, möchte es nützlich sein, zuweilen solche korrespondierende Beobachtungen mit sehr engen Intervallen für eine kleine Anzahl von Stunden zu verabreden.« Daran schliesst sich eine Mitteilung über eine Beobachtung an, die GAUSS zum ersten Male in dem

1) Brief Nr. 41 an ENCKE vom 20. Juli 1834 (ungedruckt).

2) Werke XI, 1, S. 92.

3) Nämlich korrespondierend mit den offiziellen Beobachtungen des Augusttermins an der 4 pfündigen Nadel im magnetischen Observatorium. — SCHAEFER.

Brief vom 14. Juni 1834 an ENCKE andeutete und die ihm offenbar sehr starken Eindruck gemacht hat, da sie sich in mehreren Briefen hervorgehoben findet: »Wir haben hier schon zuweilen solche Aufzeichnungen gleichzeitig an beiden Apparaten, 5 bis 6 Resultate in der Minute, gemacht, versuchsweise sogar einmal dadurch die Uhren verglichen, was sich hinterdrein auf 12 Sekunden richtig fand. Ich bin geneigt, zu glauben, dass durch die Erscheinung am 7. August $7\frac{3}{4}$ Uhr abends die Längenunterschiede zwischen Göttingen und anderen Orten wohl viel genauer als durch Mond- oder Trabanten-Finsternisse bestimmt werden könnten[1]). WEBERS Aufzeichnungen geben immer für jede Schwingungsdauer (20″) zwei Skalenteile Wachstum.« Die gleiche Mitteilung findet sich im Briefe vom 31. August an OLBERS und noch in einem späteren Briefe vom 14. September an ENCKE wiederholt[2]).

Schliesslich findet sich eine letzte Mitteilung GAUSSens darüber zwei Jahre später in einem Briefe an SCHUMACHER[3]) vom 23. April 1836, den dieser in Nr. 310 der Astronomischen Nachrichten zur allgemeinen Kenntnis brachte. Die betreffende Stelle lautet: »Es waren heute morgen ausserordentliche Bewegungen der Magnetnadel, noch grösser als am 7. Februar 1835. Dies veranlasste mich, einige Sets in der Sternwarte zu beobachten, während GOLDSCHMIDT im magnetischen Observatorium aufzeichnete. Schön bestätigte sich hier der gleichförmige Gang, sodass ich wagte, den gegenseitigen Uhrstand daraus abzuleiten. Es fand sich

aus einem schnellen Aufsteigen:

CAMPE vor SHELTON[4]) 4′ 41″,1

aus einem wenige Minuten nachher erfolgten Niedersteigen:

CAMPE vor SHELTON 4′ 42″,4

4′ 41″,5

Eine direkte Vergleichung der Uhren:

1. durch ein Zeichen am Fenster gab . . . . . 4′ 41″,5
2. durch einen Induktionsimpuls . . . . . 4′ 41″,5,

1) In dem schon erwähnten Bericht GAUSSens über den Oktobertermin 1834 findet sich die Bemerkung, dass am 6. u. 7. August »recht merkwürdige und starke Anomalien« beobachtet wurden.

2) Weitere Ausführungen hierzu: *Beobachtungen der magnetischen Variation in Göttingen und Leipzig am 1. und 2. Oktober 1834*; POGGENDORFFS Annalen 33, 1834; Werke V, S. 525. Ferner Göttingische Gelehrte Anzeigen, Stück 36, S 345 ff.; Werke V, S. 528 ff., sowie Werke V, S. 537 ff.

3) GAUSS-SCHUMACHER III, S. 52; Werke V, S. 540.

4) CAMPE und SHELTON ist die kurze Bezeichnung der beiden Uhren in der Sternwarte und im magnetischen Observatorium. — SCHAEFER.

also eine herrliche Bestätigung dessen, was ich in den A[stronomischen] N[achrichten] Nr. 276 gesagt habe.«

In dem eben erwähnten Briefe an ENCKE vom 14. September 1834 finden wir auch die ersten Mitteilungen über vorläufige Versuche, mit einer neuen Methode die Inklination zu bestimmen, auf die wir später zurückkommen.

Von Interesse ist es noch, aus einem Briefe ENCKES vom 28. August 1834 zu entnehmen, dass ALEXANDER VON HUMBOLDT, trotz aller Bewunderung für GAUSS, leise Bedenken über die veränderten Methoden von GAUSS hegte — und äusserte, z. B. darüber, dass GAUSS neben der Horizontalintensität nicht auch die Bestimmung der Inklination für notwendig hielt. Er konnte freilich nicht wissen, dass GAUSS schon damals im Besitze von Theoremen war, die er später in seiner *Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus* veröffentlicht hat, und die die Beschränkung auf die Horizontalkomponente der magnetischen Erdkraft rechtfertigten[1]).

24. In den kurzen Berichten, die GAUSS seit 1834, zum Teil in POGGENDORFFS Annalen der Physik und Chemie, zum Teil in den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlicht hat, sowie in den gleichzeitigen Briefen an seine Freunde finden sich weitere Angaben über die fortlaufende Tätigkeit des magnetischen Observatoriums, auf die wir hier im ein-

1) Die erste öffentliche Andeutung GAUSSens über diese Frage findet sich in dem oben erwähnten Aufsatze in den Astronomischen Nachrichten Nr. 276 vom 21. März 1835 (Werke V, S. 538 ff.). Dort sagt er in einer Anmerkung: »Im neunten Bande der Astronomischen Nachrichten hat dieser hochverdiente Naturforscher [HANSTEEN] uns auch mit einer allgemeinen Karte für die ganze Intensität beschenkt. So dankbar man diese schöne Arbeit anerkennen muss, so kann ich doch die Bemerkung nicht unterdrücken, dass eine allgemeine Karte für die horizontale Intensität in vielfacher Hinsicht noch ungleich nützlicher sein würde, namentlich auch in Verbindung mit einer zuverlässigen allgemeinen Deklinationskarte, zu einer durchgreifenden Begründung einer allgemeinen Theorie. Zu diesem Zweck ist die Bestimmung der magnetischen Kraft durch Angabe der ganzen Intensität, Inklination und Deklination (die man wohl als die einfachste Wahl der Elemente zu betrachten gewöhnt ist) gerade die am wenigsten brauchbare. Die weitere Entwickelung dieser Behauptung, die vielleicht manchem paradox erscheinen könnte, muss ich mir aber für einen anderen Ort vorbehalten. Möchte nur jener Naturforscher uns aus der Fülle seiner gesammelten Schätze bald mit jenen Erfordernissen beschenken.« Es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese Anmerkung GAUSSens durch ENCKES Brief veranlasst ist; sie wäre dann gewissermassen als Abwehr solcher Auffassungen, wie sie HUMBOLDT hegte, aufzufassen. Man vergleiche hierzu noch folgende Äusserung GAUSSens in einem (ungedruckten) Briefe (Nr. 56) an ENCKE vom 2. April 1839: »Übrigens werden Sie in dem Aufsatze [gemeint ist die *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus*], wenn Sie zwischen den Zeilen lesen, auch die indirekte Beantwortung einiger Einwendungen des Hrn. v. HUMBOLDT finden, die Sie mir vor einigen Jahren schrieben. . . . .«.

zelnen nicht näher einzugehen brauchen. Es sind im wesentlichen Angaben über die Mittelwerte der Deklination zu Göttingen, über die Terminbeobachtungen, dann aber auch in immer steigendem Masse über seine Versuche über Elektromagnetismus und Induktion, auf die wir später zurückkommen müssen.

Von Wichtigkeit ist jedoch folgender Punkt: In einem Brief an ENCKE[1]) vom 13. Oktober 1834 betont GAUSS wieder, wie schon mehrere Male vorher, die Notwendigkeit, in kurzen Zeitintervallen zu beobachten, und bezeichnet es im Zusammenhang damit als zweckmässig, die lang andauernden HUMBOLDTschen Termine abzuändern. Er schreibt: »Die Beobachtungen vom 23./24. September zeigen aufs neue, wie notwendig und wichtig es ist, in kleinen Zeitintervallen zu beobachten. Da jedoch besonders an den Orten, wo nicht zahlreiche Gehilfen sind, solche Beobachtungen 44 Stunden und 8 Mal im Jahr zu machen, gar zu ermüdend ist, so ist es wohl am besten, künftig eine andere Terminbestimmung zu machen und die bisherigen ganz fahren zu lassen. Ohnehin können die mit GAMBEYschen Apparaten und in grossen Zeitintervallen gemachten für unsere Zwecke als ziemlich unnütz betrachtet werden. Ich dächte, 24 Stunden und 6 Mal im Jahre wäre genug und würden gewiss, wenn auch nicht jedesmal, doch oft genug interessante Erscheinungen zu erwarten sein. Nach allen bisherigen Erfahrungen kommen grosse Anomalien mehr bei Nacht vor: Um also solche nicht zu zerschneiden, würde am ratsamsten sein, von einem Mittag bis zum folgenden zu beobachten; ausserdem hat dies den Vorteil, dass das beschwerliche Beleuchtungsarrangement nur einmal getroffen zu werden braucht. Sobald WEBER zurück ist, werden wir das nötige deshalb konzertieren und Ihnen anzeigen.«

Dieser Plan hat bald feste Gestalt angenommen; denn in der Mitteilung[2]) vom 5. November 1834 *Beobachtung der magnetischen Variation in Göttingen und Leipzig am 1. und 2. Oktober 1834* heisst es zum Schlusse: »Wir werden daher anstatt der jährlichen acht Termine künftig 6, und anstatt der 44stündigen Dauer eine 24stündige wählen, auch die Termine, nach mehrfach geäussertem Wunsche, auf bestimmte Wochentage festsetzen. Die nächsten Termine sind sonach

1) Werke XI, 1, S. 94 ff.

2) POGG. Ann. 33, S. 426. 1834; Werke V, S. 525; der hier folgende Passus ist dort nicht abgedruckt.

1834 November 29. und 30. 1835 Januar 31. und Februar 1. März 28. und 29. Mai 30. und 31. etc.	}	allemal von Mittag bis Mittag; Göttinger mittlere Zeit,

nämlich immer vom letzten Sonnabend jedes ungeraden Monats bis zum folgenden Sonntag.

»Ausserdem werden wir noch allemal nach jedem Haupttermine noch an dem nächsten Dienstag und Mittwoch 2 Abendstunden von 8—10 Uhr (Göttinger mittlere Zeit) die Beobachtungen anstellen, also 1834 Dezember 2. und 3., 1835 Februar 3. und 4. u. s. w. Beobachter an Orten, deren Meridian von dem Göttinger bedeutend verschieden ist, werden daher aufgefordert, damit die Vergleichung die volle Zeit umfasse, diesen Unterschied zu berücksichtigen, besonders an den Nebenterminen.«

Diese Aufforderung Gaussens, die alten und eingebürgerten Termine, die die grosse Autorität Humboldts eingerichtet hatte, zu verlassen und neue Termine einzuhalten, zeigt wohl am besten, wie stark der Eindruck war, den Gaussens und Webers Untersuchungen auf die Zeitgenossen gemacht haben. Der Schwerpunkt der magnetischen Forschung lag von jetzt ab in Göttingen. Natürlich haben sich die neuen Termine nicht sofort durchgesetzt, aber in immer steigender Zahl beteiligten sich Astronomen und Physiker daran, mit Instrumenten, die mit den Göttinger Apparaten identisch waren. Diese Zusammenarbeit unter dem geistigen »Vorort« Göttingen ist der Ursprung des sogenannten »Magnetischen Vereins«, der durchaus kein Verein mit festen Satzungen, sondern eine allmählich organisch zusammengewachsene »Arbeitsgemeinschaft« war[1]).

Schon im Februar 1835 (das genauere Datum des Briefes ist unbekannt) gibt Gauss an Olbers[2]) einen Bericht über den Erfolg des ersten Termins vom 29. und 30. November, an dem Göttingen, Leipzig und Berlin teilnahmen.

Ein offizieller Bericht[3]) über den Ausfall des Termins wurde von Gauss in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom 7. März 1835 erstattet.

---

1) Man vergleiche hierzu die Darstellung A. v. Humboldts in seinem *Kosmos*, Bd. I, S. 436; Anmerkung 36 (zu Seite 197), 1845.

2) Gauss-Olbers, abgedruckt Werke XI, 1, S. 97.

3) Göttingische Gelehrte Anzeigen, Stück 36, S. 345 ff. vom 7. März 1833; Werke V, S. 528 ff.

Eine nochmalige Bekanntmachung der neuen Termine befindet sich in GAUSSENS Abhandlung[1]) vom 21. März 1835: *Beobachtung der Variationen der Magnetnadel in Kopenhagen und Mailand am 5. und 6. März 1834*, der in SCHUMACHERS Astronomischen Nachrichten erschien. —

In der nächsten Zeit finden wir in GAUSSENS Briefen an seine Freunde häufig Nachrichten über die Ausbreitung der Teilnahme an den neuen Terminen, wobei denn auch allmählich die Bezeichnung »Verein« auftaucht. Zum erstenmal scheint dies der Fall zu sein in einem Briefe an GERLING[2]) vom 15. Dezember 1835, in dem es heisst: »Fortwährend erweitert sich übrigens unser Verein. Hoffentlich nimmt im nächsten Jahre ENCKE mit besseren Mitteln als bisher teil. Für Bonn hat MEYERSTEIN einen Apparat in Arbeit, und in diesen Tagen ersuchte mich AIRY, (bisher in Cambridge, künftig in Greenwich) ihm einen Apparat zu bestellen.« Ähnlich in einem Brief an OLBERS[3]) vom 11. November 1835: »Die Teilnahme an magnetischen Beobachtungen verbreitet sich immer mehr; es sind Apparate von hier nach Upsala, Freiberg, München und Wien gekommen. In Russland wird bald bis Nertschinsk mit Magnetometern beobachtet werden. Dieser Tage zeigte mir auch AIRY (PONDS Nachfolger) an, dass er die Absicht habe, bei Greenwich regelmässig magnetische Beobachtungen zu machen, und verlangte mein Gutachten«.

Auch in dem zusammenfassenden, mehr populären Aufsatz GAUSSENS: *Erdmagnetismus und Magnetometer*, der den ersten Jahrgang von SCHUMACHERS Jahrbuch[4]) 1836 eröffnete, findet sich eine hierauf bezügliche Stelle: »Diesem Vereine zu magnetischen Beobachtungen, an jährlich 6 im Voraus festgesetzten Terminen, schliessen sich schon immer mehr Teilnehmer an; binnen Jahresfrist wird er schon in den entferntesten Teilen des russischen Reiches Mitarbeiter haben.« Ähnliche Bemerkungen finden sich noch häufig; im Januar 1836 meldet GAUSS an ENCKE[5]), dass MEYERSTEIN Apparate nach Freiberg, Haag, Halle, München, Upsala, Wien, Bonn, Dublin und Greenwich geliefert oder in Auftrag habe. Dieselben Namen als Teilnehmer der »Assoziation«

1) Astronomische Nachrichten, Nr. 276 vom 21. März 1835; Werke V, S. 538.
2) GAUSS-GERLING, S. 454 ff.
3) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 628
4) Werke V, S. 315.
5) Werke XI, 1, S. 102.

werden aufgeführt in einem Brief an OLBERS[1]), dazu noch Breslau und Krakau. In einem späteren Brief an ENCKE[2]) werden noch Neapel und Kasan genannt. Schliesslich findet sich in einem Briefe HUMBOLDTS[3]) an GAUSS vom 27. Juli 1837 die folgende Angabe: »Ihr grosser Name und die völlige Umgestaltung der Beobachtungen, welche Sie geschaffen und verbreitet haben, hat jetzt eine Assoziation zustande gebracht, deren Früchte allmählich die Entzifferung »jener geheimnissvollen Hieroglyphenschrift« sein wird. Auf mehr als 20 Punkten sind jetzt schon Ihre Instrumente aufgestellt . . . .«.

25. Das Jahr 1836 war für den neu entstandenen Verein bedeutungsvoll. Einmal fassten GAUSS und WEBER den Entschluss, die magnetischen Untersuchungen der Mitglieder fortan in einer besonderen Zeitschrift zu veröffentlichen. Zum andern benutzte HUMBOLDT das Schwergewicht seiner international anerkannten und berühmten Persönlichkeit, um auf die englische Regierung dahin einzuwirken, dass in den englischen Kolonien an möglichst vielen Orten magnetische Observatorien eingerichtet würden.

Über die Entstehung des Gedankens, eine eigene Zeitschrift zu gründen, unterrichtet uns ein Brief von GAUSS an OLBERS[4]) vom 18. März 1836: »Die Beobachtungen des Termins werden wohl auch noch lithographiert werden. Es entsteht jedoch die Schwierigkeit, wie für künftige regelmässige Lithographierung die Kosten gedeckt werden sollen. WEBER meinte, dass dies vielleicht durch Zusammentreten der Teilnehmer und Freunde geschehen könnte, wo dann der Aufwand für einen einzelnen nicht gar so gross sein und er dafür ein halbes Dutzend Abdrücke erhalten könnte. Ich zweifle aber, ob dies ausführbar ist, denn natürlich kann Herr Professor WEBER sich nicht auf das Versenden und Einkassieren einlassen, das müsste durch Vermittlung etwa eines Kunst- oder Buchhändlers geschehen, was sich aber schwerlich hier in Göttingen einrichten lässt, zumal das Geschäft bei seiner Zersplitterung doch zu unbedeutend sein würde.

»Ich habe dagegen Herrn Professor WEBER vorgeschlagen, in Göttingen ein allgemeines eigenes physikalisches Journal zu gründen, welches ausser

1) Werke XI, 1, S. 107.

2) Brief Nr. 50 an ENCKE vom 3. Juni 1836; ungedruckt.

3) GAUSS-HUMBOLDT, S. 29.

4) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 635; Werke XI, 1, S. 107.

vielem andern Nutzen auch zur Magazinierung der magnetischen Beobachtungen ein bequemes Mittel darbieten würde. Ich weiss aber noch nicht, ob seine grosse Bescheidenheit ihm erlauben wird, so etwas zu unternehmen. Ich selbst kann freilich nichts dabei tun, als zu Zeiten einmal einen kleinen Beitrag geben . . . .«

Die geplante Zeitschrift erschien zum ersten Mal im Jahre 1837 unter dem Titel »*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre . . . .*, herausgegeben von Carl Friedrich Gauss und Wilhelm Weber.« Sie hat es auf 6 Bände gebracht, die die Berichte aus den Jahren 1836—1841 umfassen; die beiden ersten Bände sind in Göttingen im Verlage der Dieterichschen Buchhandlung erschienen, die vier letzten in Leipzig von der Weidmannschen Buchhandlung verlegt worden. Der dritte Jahrgang enthält, was zur Beurteilung der Verbreitung der Zeitschrift wichtig ist, ein Subskribentenverzeichnis, nach dem man feststellen kann, dass im ganzen 181 Exemplare subskribiert waren, darunter 30 von der preussischen, 20 von der bayerischen, 15 von der russischen Akademie der Wissenschaften, sodass also rund 110 Exemplare von Einzelpersonen abonniert waren. Wie aus einem späteren Briefe Gaussens[1]) hervorgeht, hat die Zeitschrift sehr bald mit Schwierigkeiten zu kämpfen gehabt, die dann schliesslich auch ihr Eingehen verursacht haben. Ihre Bedeutung als Sammelstelle für die Publikationen über Erdmagnetismus und verwandte Gebiete ist dennoch sehr hoch anzuschlagen: Gauss selbst hat in den 6 Bänden fünfzehnmal das Wort ergriffen, Weber 23 Abhandlungen beigesteuert; da im ganzen (von reinen Beobachtungszahlen abgesehen) 55 Mitteilungen in den *Resultaten* erschienen sind, haben Gauss und Weber zusammen 38 Abhandlungen, d. h. reichlich $\frac{2}{3}$ des gesamten Inhaltes geliefert.

Das andere wichtige Ereignis für den magnetischen Verein war, wie schon erwähnt, eine Anregung Humboldts bei der Royal Society in London. In einem ausführlichen Schreiben[2]) vom April 1836 an den Herzog von Sussex, den damaligen Präsidenten der Royal Society, gibt Humboldt zunächst eine allgemeine Schilderung der Entwicklung der Lehre vom Erdmagnetismus und schliesst mit der Bitte, die Royal Society möge zusammen mit der Göttinger

1) Gauss-Olbers II, 2, S. 665.

2) Abgedruckt in den Abhandlungen der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen Bd. 34, 1887, in der Abhandlung: *C. F. Gauss und die Erforschung des Erdmagnetismus*, von Ernst Schering, S. 9 ff.; Scherings Werke, Bd. II, S. 233.

Gesellschaft der Wissenschaften, dem Institut von Frankreich und der kaiserlich russischen Akademie der Wissenschaften in Beratungen darüber eintreten, auf welche Weise am zweckmässigsten die erdmagnetischen Messungen gefördert werden könnten. HUMBOLDT deutet an, welch' grosse Bedeutung es haben würde, wenn in den den Erdball umspannenden englischen Kolonien an geeigneten Stellen magnetische Observatorien eingerichtet würden. Die Royal Society beauftragte AIRY und CHRISTIE, ein Gutachten auszuarbeiten, das noch im nämlichen Jahre 1836 im Druck erschien[1]). Darin schlugen sie, wie HUMBOLDT voll Freude am 30. Juli 1836 an GAUSS schreibt[2]), »weit mehr Stationen in der Südsee, Ost- und Westindien vor«, als er zu erwarten gewagt habe. »Der Report schlägt als leicht zu errichtende Stationen vor: Neufundland, Halifax, Gibraltar, die Jonischen Inseln, St. Helena, Paranatta, Mauritius, Madras, Ceylon und Jamaica«[3]).

26. Immerhin dauerte es noch mehrere Jahre, bis die Royal Society zu einem endgültigen Entschlusse kam. Am 1. Juli 1839 erliess sie ein Zirkular, das GAUSS und WEBER im 3. Bande der *Resultate* abdruckten[4]) und mit folgenden Worten begleiteten: »In dem Augenblick, wo wir im Begriffe sind, diesen Band zu schliessen, erhalten wir das Zirkular der kgl. Sozietät zu London, welches wir hier noch mitteilen, weil daraus am besten ersichtlich ist, zu welchen Erwartungen wir durch die grossartigen Massregeln des englichen Gouvernements zur Beförderung dieses Teils der Naturwissenschaften berechtigt werden.« Das Zirkular selbst hat (im Wesentlichen) folgenden Wortlaut:

Royal Society
1 st July, 1839

Sir,

In pursuance of the directions of the President and Council of the Royal Society of London I have the honour to forward you the annexed papers, being copies of a Report made by the Joint Committee of Physics and Meteorology of the Society to the Council on the subject of an extended system

1) Es ist mir nicht zugänglich gewesen.

2) GAUSS-HUMBOLDT, S. 26 ff.

3) In den Gutachten finden sich übrigens Bedenken gegen die GAUSS-WEBERschen Apparate angedeutet (wegen der grossen dabei verwendeten Magnetstäbe), die sich ganz mit LAMONTS späteren Ausführungen decken.

4) *Resultate* 1839, S. 149 u. 150.

of Magnetic Observation, and of the Resolution of the Council taken thereon; and to acquaint you that, in consequense of the representations made, Her Majesty's Governement has ordered the equipment (now in progress) of a naval expedition of discovery, consisting of two ships under the command of Captain James C. Ross, to proceed to the Antarctic Seas for purposes of magnetic research, and also the establishment of fixed magnetic observatories at St. Helena, Montreal, the Cape of Good Hope and Van Diemens Land, having for their object the execution of a series of corresponding magnetic observations during a period of three years, in consonance with the views expressed in that Report. The Court of Directors of the Honourable East India Company have also, in compliance with the suggestions of the Royal Society, resolved to establish similar observatories at Madras, Bombay and at a station in the Himalaya Mountains. . . . . The general tenor of these observations is sufficiently indicated in the Report annexed, but a more particular programme of them will be forwarded to you as soon as the details are sufficiently matured to admit of its printing and circulation; but it may here be noticed, that one essential feature of them will consist in observations to be made at each station, in conformity with the system (in so far as applicable) and at the times already agreed on by the German Magnetic Association, either as they now stand or as (on communication) they shall, by mutual consent, be modified.

A series of meteorological observations subordinate to, and in connexion and coextensive with, the magnetic observations will be made at each station.

The following is a list of the instruments intended to form the essential equipment of each observatory:

LIST (with estimated Prices).

Instrumental equipment for one fixed magnetic observatory:

1 Declination Magnetometer . . } 1 Horizontal Force Magnetometer }	Grubb, Dublin	£ 73 10
1 Vertical Force Magnetometer .	Robinson	21 0
1 Dipping Needle	Robinson	24 0
1 Azimuthal Transit	Simms	50 0
2 Reading Telescopes	Simms	6 6
2 Chronometers	. . . . .	100 0

The above are all the instruments required for magnetical purposes.

The declination and horizontal force magnetometers are similar, with slight modifications, to those devised by Mr. GAUSS, and already in extensive use; so that the observations made with the latter instruments and with those specified above will be strictly comparable. . . . . .

W. H. SMYTH, foreign Secretary.

Man erkennt aus dem Zirkular, wie fest begründet das Ansehen war, das die Göttinger Forscher genossen, da sowohl die Apparate (im wesentlichen), als auch die Termine in Übereinstimmung mit der »German Magnetic Association« gewählt wurden.

27. Die von GAUSS geschriebene »Einleitung«[1]), mit der die neue Zeitschrift eröffnet wurde, enthält einmal eine Rekapitulation des bisher Geleisteten, dann eine Begründung für die von HUMBOLDT abweichende Wahl der Termine, endlich die Formulierung der ersten Aufgaben des »magnetischen Vereins«, nämlich die genaue Untersuchung der Variationen der magnetischen Deklination an möglichst vielen Orten. Er fügt folgende Bemerkung hinzu: »Wenn, wie nicht zu bezweifeln ist, die beiden anderen Elemente der erdmagnetischen Kraft, die Inklination und die Intensität, ähnlichen Veränderungen unterworfen sind, so kann man fragen, warum vorzugsweise oder für jetzt ausschliesslich, jenem ersten Elemente so sorgfältige Bemühungen gewidmet werden?« Die Antwort findet GAUSS einmal in der praktischen Wichtigkeit der Deklination für den Seefahrer, den Geodäten und den Markscheider, anderseits und vorzugsweise aber darin, dass die Beobachtung der Inklination und der Intensität zur Zeit noch nicht der Genauigkeit fähig sei, die man dafür verlangen müsse. »Zur Zeit ist es daher noch zu früh, die letzteren in den Kreis ausgedehnter Untersuchungen aufzunehmen. Sobald aber die Beobachtungsmittel soweit vervollkommnet sein werden, dass wir die Veränderungen und namentlich die schnell wechselnden Veränderungen in den anderen Elementen des Erdmagnetismus mit Sicherheit erkennen, mit Leichtigkeit verfolgen und mit Schärfe messen können, werden diese Veränderungen dieselben Ansprüche auf die vereinte Tätigkeit der Naturforscher haben, wie die Ver-

1) *Resultate* im Jahre 1836, S. 3—11, 1837; Werke V, S. 345.

änderungen der Deklination. Man darf hoffen, dass dieser Zeitpunkt nicht gar entfernt mehr sein wird.«

28. Eine weitere Mitteilung Gaussens[1]) im ersten Bande der Zeitschrift betrifft »das in den Beobachtungsterminen anzuwendende Verfahren.« Wir brauchen, da es sich in der Hauptsache um technische Details handelt, hier nicht näher darauf einzugehen. Nur eine Stelle ist aus zwei Gründen wichtig. Es handelt sich um die Bestimmung des »Standes der Magnetnadel«: »Unter dem Stand der Magnetnadel . . . . . ist hier nicht diejenige Stellung verstanden, welche der aufgehängte Magnetstab in dem betreffenden Augenblick wirklich eben hat, sondern diejenige, welche er haben würde, wenn er . . . . in diesem Augenblicke genau im magnetischen Meridian wäre. Diese Distinktion war unnötig, solange man sich nur solcher Nadeln bediente, die eine sehr grosse Genauigkeit nicht geben konnten; man brauchte nur dafür zu sorgen, dass die Nadel um die Zeit der Beobachtung in keiner erkennbaren Schwingung begriffen war, und erhielt damit das Gesuchte unmittelbar. Bei den viel grösseren Forderungen, die man an die Genauigkeit der Bestimmungen durch die jetzt eingeführten Apparate machen kann und machen muss, kann aber von einer solchen unmittelbaren Bestimmung nicht mehr die Rede sein. Es steht nicht in unserer Macht, die Nadel des Magnetometers so vollkommen zu beruhigen, dass gar keine erkennbaren Schwingungsbewegungen zurückbleiben; wenigstens kann es nicht mit Sicherheit ohne Zeitaufwand und nicht auf die Dauer geschehen. Es werden daher an die Stelle der unmittelbaren Beobachtung solche mittelbare Bestimmungen treten müssen, zu denen eine vollkommene Beruhigung unnötig ist.« Es folgt dann die Anleitung, aus den Schwingungsbögen selbst die Ruhelage zu bestimmen, eine Methode, die wir auch heute noch, unter anderm bei feinen Messungen an der Wage genau nach der Gaussschen Vorschrift ausführen — und das ist der eine Grund, weshalb wir die obige Stelle zitiert haben. Der andere Grund ist der folgende: Lamont, der Münchener Astronom, ist, wie schon erwähnt, später in der Konstruktion erdmagnetischer Apparate stark von Gauss und Weber abgewichen und setzt sich grade mit der angeführten Stelle in Gegensatz.

Gauss hat ferner im gleichen Bande noch einen *Auszug aus den drei-*

1) *Resultate* im Jahre 1836, S. 34—50, 1837; Werke V, S. 541.

jährigen täglichen Beobachtungen der magnetischen Deklination zu Göttingen[1]) sowie *Erläuterungen zu den Terminzeichnungen und Beobachtungszahlen*[2]) veröffentlicht; es sind der Hauptsache nach teils Anweisungen, wie die reinen Beobachtungen rechnerisch zu behandeln sind, um die täglichen und säkularen Variationen von den »zufälligen« Anomalien zu befreien, teils eine kurze Diskussion der Ergebnisse der Terminbeobachtungen.

29. In dem im Artikel 27 mitgeteilten Schlusswort seiner »Einleitung« zu den *Resultaten* gibt GAUSS der Hoffnung Ausdruck, dass die Zeit nicht mehr entfernt sei, in der man auch die Variationen der Intensität mit derselben Genauigkeit werde messen können, wie die der Deklination. In der Tat hatte GAUSS, als er diese Worte niederschrieb, schon die Idee zu einem Apparat gefasst, der dies leisten sollte, ja, schon Versuche mit einem vorläufigen Modell desselben gemacht[3]).

Am 2. Mai 1837 schreibt GAUSS an GERLING[4]): »Ein anderer Apparat zur unmittelbaren Beobachtung der Intensitätsänderungen ist in Arbeit«, und am 9. Juli 1837 heisst es ebenfalls an GERLING[5]): »Meine beiden neuen Apparate scheinen meinen Erwartungen zu entsprechen. Schreiben aber will ich Ihnen noch nichts davon.« Genauere Mitteilungen enthält dann ein Brief an OLBERS[6]) vom 2. Sept. 1837 »In der Sitzung der Sozietät im Jubiläum (19. September) werde ich eine Vorlesung halten über ein neues Mittel für die magnetischen Beobachtungen. Es bezieht sich auf einen neuen Apparat, der für die (horizontale) Intensität ganz dasselbe leistet, was das Magnetometer für die Deklination, wodurch also die Aufgabe (*Resultate*, S. 12), soweit von dem horizontalen Teile der erdmagnetischen Kraft die Rede ist, erledigt wird. Von einer rohen Probe der Grundidee finden Sie eine Andeutung in SCHUMACHERS Jahrbuch 1836, S. 19, woraus freilich nicht zu erkennen ist, in was das Mittel besteht, sondern nur ein sekundärer Teil von dem, was damit geschieht. In diesem Sommer habe ich aber den Apparat ordentlich ausführen lassen, und es sind sogar die beiden letzten Termine (der Haupttermin vom 29. Juli und

1) *Resultate* für das Jahr 1836, S. 50 ff.; Werke V, S. 556.

2) Ebenda 1836, S. 90 ff.; Werke V, S. 568.

3) Ebenda 1837, S. 6; Werke V, S. 362.

4) GAUSS-GERLING, S. 511 ff.

5) Ebenda, S. 515 ff.

6) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 649; Werke XI, 1, S. 111 ff.

der Extratermin vom 31. August) vollständig damit beobachtet, während ebenso vollständig in beiden auch im m[agnetischen] O[bservatorium] der Verlauf der Deklination beobachtet ist.

»Der horizontale Teil des Erdmagnetismus kann also jetzt so scharf beobachtet werden, wie die Sterne am Himmel. Aber mit dem vertikalen Teile wird eine ähnliche Genauigkeit niemals erreicht werden können; wer die Stelle der *Intensitas vis* etc. S. 15 »Ex hoc rem — requiratur« gehörig studiert und beherzigt hat, wird dies leicht von selbst einsehen. Wenn man aber auch nicht die gleiche Genauigkeit wie bei dem horizontalen Teil erreichen kann, so bin ich doch überzeugt, dass man viel mehr erreichen kann, als bis jetzt erreicht ist. Das ist aber etwas, worauf ich mich nicht einlassen kann. Bei den Instrumental-Hilfsmitteln für die beiden Elemente des horizontalen Teiles konnten geistige Mittel ausreichen, d. h. durch eine gehörige Einrichtung konnte man Apparate zur Erreichung der höchsten Genauigkeit darstellen, die eigentlich keine übermässig feine mechanische Arbeit erfordern und mit geringen Kosten angefertigt werden können. (Der neue Apparat kommt nicht auf 50 ℔, natürlich alles schon vorhandene, was dabei gebraucht wird, ungerechnet, namentlich Uhr, Theodolit und Magnetstab.) Dagegen sind bei allem, wobei der vertikale Teil der magnetischen Kraft auf irgend eine Art mit ins Spiel kommt, sei es als Inklination oder anders, sehr fein, sehr vollkommen ausgearbeitete, also auch am Ende kostbare Instrumente unentbehrlich, unerlässlich und können durch nichts anderes ersetzt werden. Ein Inklinationsapparat von der gewöhnlichen Einrichtung, der nur so weit befriedigen würde, als wir jetzt wirklich sind, also wobei man noch weit, sehr weit zurück ist gegen das, was man wünschen muss, kostet schon mehr als ich in einem oder zwei Jahren für Sternwarte und magnetische Anlagen zusammen zu verausgaben habe . . . . . .«

30. Der in Frage stehende Apparat war das von GAUSS so genannte »Bifilarmagnetometer«. GAUSS benutzt dabei den Gedanken, die magnetische Direktionskraft[1]) zu messen durch die Direktionskraft, die ein an zwei Fäden aufgehängter fester Körper erfährt, wenn er aus seiner Gleichgewichtslage

1) »Direktionskraft«, das maximale Drehungsmoment, ist eine bei dieser Gelegenheit von GAUSS eingeführte Bezeichnung, die sich bis heute erhalten hat, obwohl sie in der Hinsicht nicht glücklich gewählt ist, dass die Direktionskraft nicht die Dimension einer Kraft besitzt.

abgelenkt wird. Wir geben GAUSSens eigene Worte wieder[1]): »Die Bedingungen des Gleichgewichts eines an zwei Fäden aufgehängten Körpers von beliebiger Gestalt, dessen Teile einstweilen bloss der Schwerkraft unterworfen und in festem Zusammenhange vorausgesetzt werden, lassen sich kurz so zusammenfassen, dass die Vertikale durch den Schwerpunkt des Körpers und die durch die Fäden dargestellten geraden Linien sich in einer Ebene befinden, und zugleich entweder unter sich parallel sein, oder sich in einem Punkt schneiden müssen. Allemal sind also bei der Gleichgewichtsstellung die beiden Fäden und der Schwerpunkt in einer Vertikalebene. Um die Vorstellungen zu fixieren, mag man annehmen, dass die beiden Fäden gleich lang, ihre oberen Anknüpfungspunkte in gleicher Höhe sind und von einander ebenso weit abstehen, wie die beiden unteren, endlich dass die letzteren mit dem Schwerpunkte ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Unter diesen Voraussetzungen werden also im Gleichgewichtszustande die beiden Fäden vertikal hängen, und eine dritte Vertikallinie, mitten zwischen diesen Fäden gedacht, wird den Schwerpunkt des Körpers treffen. Bringt man den Körper aus dieser Lage mittels einer Drehung um letztere Linie, so werden die beiden Fäden nicht mehr vertikal, und auch nicht mehr in einer Ebene sein, und zugleich wird der Körper etwas gehoben. Es entsteht demnach ein Bestreben, zu der vorigen Lage zurückzukehren, mit einem Drehungsmomente, welches mit hinlänglicher Genauigkeit dem Sinus der Ablenkung von der Ruhestellung proportional gesetzt werden kann, also am grössten ist, wenn die Ablenkung 90 Grad beträgt; dieses grösste Drehungsmoment wird immer stillschweigend verstanden, wenn man von Drehungsmoment schlechthin spricht. Man kann dasselbe auch als Mass einer Kraft ansehen, mit welcher der Körper vermöge der Aufhängungsart in seiner Gleichgewichtsstellung zurückgehalten wird, und die ich der Kürze wegen die aus der Aufhängungsart entspringende Direktionskraft nennen will. Ihre Grösse hängt übrigens ab von 1) der Länge der Aufhängungsfäden, 2) deren Abstande, 3) dem Gewicht des Körpers, und zwar so, dass sie der Länge der Fäden verkehrt, dem Quadrate ihres Abstandes direkt, und dem Gewicht des Körpers gleichfalls direkt proportional ist . . .

»Gehen wir jetzt zu der Voraussetzung über, dass ein horizontaler Magnetstab einen Bestandteil des aufgehängten Körpers ausmache, so tritt eine zweite

1) *Resultate* im Jahre 1837, S. 1—11, 1838; Werke V, S. 352 u. 357.

Direktionskraft mit ins Spiel, und die Erscheinungen hängen von der Zusammensetzung der beiden Direktionskräfte nach den bekannten Regeln der Statik ab. Es sind in dieser Beziehung drei Fälle zu unterscheiden, indem die beiden Stellungen des Körpers, in welchen er vermöge jeder der beiden Kräfte für sich allein im Gleichgewichtszustande sein würde, entweder zusammenfallen, oder entgegengesetzt sein, oder einen Winkel miteinander machen können. Man sieht leicht, dass der Unterschied dieser drei Fälle auf dem Verhältnis der beiden Winkel beruht, welche einerseits die gerade Linie durch die beiden unteren Anknüpfungspunkte der Fäden mit dem Magnetstabe und anderseits die gerade Linie durch die beiden oberen Befestigungspunkte mit dem magnetischen Meridian macht. Denkt man sich den Körper in derjenigen Gleichgewichtslage, die durch die Aufhängungsart allein bedingt wird, so wird für den ersten unserer drei Fälle der Magnetstab im magnetischen Meridian sein müssen, und zwar in seiner natürlichen Lage (Nordpol auf der Nordseite); für den zweiten Fall muss er in verkehrter Lage im Meridian sein, und für den dritten muss er mit dem magnetischen Meridian einen Winkel machen. Der Kürze halber will ich diese drei möglichen Lagen des Magnetstabes in dem Apparate die natürliche, die verkehrte und die transversale nennen . . . . . .«

»Im dritten Falle endlich, wo die beiden Direktionskräfte einen Winkel miteinander machen, wird der Konflikt dieser beiden Kräfte durch eine Zwischenstellung vermittelt, wobei weder der Stab im Meridian, noch eine gerade Linie durch die unteren Anknüpfungspunkte der Fäden der durch die oberen parallel ist, und diese Zwischenlage sowohl als die Kraft, mit welcher der Apparat in derselben zurückgehalten wird, richten sich nach dem statischen Gesetze der Zusammensetzung zweier Kräfte. Man übersieht nun aber zugleich, dass, wenn der Apparat Mittel darbietet, die Winkel zwischen den drei in Rede stehenden Stellungen zu messen, das Verhältnis der beiden komponierenden Direktionskräfte sich berechnen lässt, und dass man folglich auch die magnetische Direktionskraft in absolutem Masse angeben kann, wenn die Direktionskraft vermöge der Aufhängungsweise in absolutem Masse bekannt ist. Unsere Aufgabe ist dann also gelöst. Am vorteilhaftesten ist es übrigens, das Einliegen des Magnetstabes relativ gegen die anderen Teile des Apparates so einzurichten, dass jener in der vermittelten Gleichgewichtsstellung nahe

einen rechten Winkel mit dem magnetischen Meridian macht, welchem Fall also die Benennung der transversalen Lage vorzugsweise angemessen ist. Teils ist nämlich dann die Ablenkung der Fäden von ihrer Lage in einer Ebene am grössten, und damit die Berechnung des Resultats am schärfsten, teils hat dann auch eine kleine Veränderung der magnetischen Deklination vermöge der stündlichen oder zufälligen Variationen auf die Stellung keinen merklichen Einfluss. Dagegen aber affiziert eine jede Veränderung in der Stärke des Erdmagnetismus die Stellung unmittelbar und lässt sich mit derselben Leichtigkeit, Schnelligkeit und Schärfe sogleich erkennen und messen, wie das Spiel der Veränderungen der Deklination am gewöhnlichen Magnetometer . . . .«.

Damit ist das Prinzip des Bifilarmagnetometers klar formuliert und GAUSS geht zu einer kurzen Beschreibung des Apparates über, die in einer Abhandlung von WEBER[1]) *Bemerkungen über die Einrichtung und den Gebrauch des Bifilarmagnetometers* nach der praktisch-experimentellen Seite hin ergänzt wird — ein Beweis für die enge Zusammenarbeit beider Männer, die es kaum möglich macht, genau zu scheiden, was dem Einen und was dem Andern zukommt.

Beobachtet wurde mit dem neuen Apparat zum ersten Male in den magnetischen Terminen vom 29./30. Juli 1837 sowie am 31. August und 1. September 1837 zu Göttingen. Die lithographierten Kurven[2]) zeigen zum erstenmal nebeneinander die »Störungen der magnetischen Intensität« und die »der magnetischen Deklination«. Ausserdem zeigen sie im »Polardiagramm« die gleichzeitige Änderung der Deklination und der horizontalen Intensität.

31. In der gleichen Arbeit bespricht GAUSS noch eine weitere Anwendungsmöglichkeit des Bifilarmagnetometers. In der sogenannten »natürlichen« Lage des Magnetstabes wirken offenbar die mechanische und die magnetische Direktionskraft gleichsinnig, so dass die Gleichgewichtslage in diesem Falle sicher stabil ist. Anders kann es in der sogenannten »verkehrten« Lage des Magneten sein. Da dann mechanische und magnetische Direktionskraft einander entgegenwirken, so ist die Gleichgewichtslage nur dann stabil, wenn die mechanische grösser ist als die magnetische. Umgekehrt ist der Apparat umso empfindlicher, d. h.

1) *Resultate* im Jahre 1837, S. 20 ff., 1838.

2) Ebenda, Tafeln II—IV, 1838.

durch umso kleinere Kräfte aus der Gleichgewichtslage abzulenken, je näher die magnetische Direktionskraft ihrem Werte nach der mechanischen kommt. Bei dem Gaussschen Apparat[1]) war das Verhältnis der mechanischen zur magnetischen Direktionskraft etwa wie 11 : 10; demgemäss war die resultierende Direktionskraft (gleich der Differenz der beiden Direktionskräfte) verhältnismässig = 1, d. h. sie betrug nur den zehnten Teil der magnetischen Direktionskraft. Der Apparat wirkte demnach bei dieser Art der Benutzung wie ein gewöhnliches Magnetometer von 10facher Empfindlichkeit, zeigte also z. B. die Variationen der Deklination in zehnmal vergrössertem Massstabe an. Natürlich betont Gauss auch, dass der neue Apparat in der »verkehrten« Lage als empfindliches Galvanometer zu benutzen sei, und gibt Proben seiner Leistungsfähigkeit, worauf wir an dieser Stelle nicht eingehen.

Zusammenfassend kommt Gauss zu folgendem Urteil über die Leistungen des gewöhnlichen und des bifilaren Magnetometers[2]): »Halten wir die Leistungen des neuen Apparates und des Magnetometers zusammen, so ergibt sich, dass beide in Beziehung auf einige Zwecke einander wechselseitig ergänzen müssen, in Beziehung anderer hingegen gleiche Anwendbarkeit haben. Zur Bestimmung der absoluten Deklination kann nur das Magnetometer dienen, nicht aber der neue Apparat; die Veränderungen der Deklination und besonders die schnell wechselnden lassen sich mit beiden verfolgen. Zur Bestimmung der absoluten Intensität können beide Apparate dienen, obwohl die Anwendung des Magnetometers etwas weniger kompliziert ist als der alleinige Gebrauch des neuen Apparates sein würde; aber jenes für sich allein kann die Intensität nur in ihrem Mittelwerte während eines gewissen Zeitraums geben, und die schnell wechselnden Änderungen in demselben entgehen diesem Instrumente gänzlich, während der neue Apparat diese auf das befriedigendste nachweist. Für alle sonstigen Zwecke, z. B. um Magnetstäbe rücksichtlich ihrer magnetischen Stärke untereinander zu vergleichen, ferner in Verbindung mit einem Multiplikator, für galvanometrische und telegraphische Zwecke, sind beide gleich brauchbar; ja, in den beiden letzteren Beziehungen hat der neue Apparat noch einen bedeutenden Vorzug, da man, wie schon bemerkt ist, in seiner Gewalt hat, ihn so nahe man will, astatisch zu machen.«

1) *Resultate* im Jahre 1837, S. 8, 1838.

2) Ebenda, S. 11, 1838.

Man erkennt, dass GAUSS nicht nur das Prinzip, sondern auch das Anwendungsgebiet des Bifilarinstruments aufs Klarste erkannt hat. Freilich ist er nicht der erste gewesen, der es erdacht und angewendet hat. Vielmehr scheint SNOW HARRIS[1]) die Priorität der Erfindung zuzukommen, während LLOYD[2]) es unabhängig von GAUSS auf erdmagnetische Messungen angewendet zu haben angibt. Dass GAUSS die schwer zugängliche Arbeit von HARRIS gekannt habe, darf als ausgeschlossen betrachtet werden, so dass er in jedem Falle als selbständiger Erfinder des Apparates anzusehen ist; unter seinem Namen und durch seine Versuche ist das Instrument der wissenschaftlichen Welt erst zugänglich geworden und wird daher auch heute noch zu Recht mit seinem Namen verknüpft.

32. Durch die Konstruktion des Bifilarmagnetometers tauchten sofort einige Probleme auf, mit deren Lösung sich nun GAUSS und WEBER beschäftigten.

Zunächst ist folgendes klar: Die Angaben eines »Horizontalvariometers«, wie man das Bifilar bezeichnen kann, unterliegen den folgenden störenden Einflüssen: Änderung der Temperatur verändert das magnetische Moment des benutzten Stabes, die Torsion der Fäden, sowie ihren Abstand. Es bedurfte also zunächst genauer Messungen über die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur.

Eine Abhandlung WEBERS[3]) versucht diesen Einfluss zu bestimmen. Er verwendet in höchst geistvoller Weise eine Differentialmethode, indem er zwei Magnetstäbe auf das Magnetometer wirken lässt, deren Ablenkung sich gerade gegenseitig kompensiert und von denen der eine einer variabeln Temperatur ausgesetzt wird. So gewinnt er eine äusserst empfindliche Methode zur Untersuchung des Problems. Die Ergebnisse sind durchaus nicht einfach, sondern recht kompliziert; als praktische Folgerung kann man etwa die angeben, dass es erforderlich ist, bei jedem einzelnen Magnetstab die Temperaturkorrektion gesondert zu bestimmen.

Ein weiteres Problem entsprang einem mehr technischen Grunde. Wenn

1) SNOW HARRIES, Report of the British Association 1832, S. 563 ff.; ebenda 1835, S. 17; ebenda 1836, S. 19. Phil. Trans. 1836, S. 417.

2) LLOYD, im Account of the magn. Observ. of Dublin 1842, S. 28 ff.

3) WILHELM WEBER, *Resultate* i. J. 1837, S. 38 ff., 1838.

man gleichzeitig in einem als magnetisches Observatorium dienenden Raume das Bifilar- und das Unifilarinstrument anbringt, sodass an ihnen gleichzeitig von denselben Beobachtern gemessen werden kann, so müssen die gegenseitigen Störungen der beiden Instrumente berücksichtigt werden. Mit der experimentellen Durchführung dieses Problems hat sich wieder WILHELM WEBER[1]) in der Arbeit: *Bemerkung über die Einrichtung und den Gebrauch des Bifilarmagnetometers* befasst, auf Grund einer von GAUSS[2]) angegebenen einfachen Konstruktion, die die gegenseitige Einwirkung der beiden Instrumente übersehen lässt, ohne dass es notwendig ist, eine detaillierte Theorie beider Instrumente zu entwickeln. Die GAUSSsche Konstruktion, die von WEBER in der genannten Arbeit mitgeteilt wird, findet sich — übrigens ohne Beweis — unter der Überschrift *Zierliche Konstruktion für die magnetische Ablenkung* im *Handbuch* 15 (Ba, Opuscula varii argumenti, Vol. primum, Brunovici 1800); sie wird etwa gleichzeitig mit dem Bifilarmagnetometer entstanden sein. Die Anwendung der GAUSSschen Konstruktion auf das in Rede stehende Problem formuliert WEBER in der genannten Abhandlung folgendermassen: »Hierbei ist es beachtenswert, dass die beiden Magnetometer in einem grossen Saale sich auf eine solche Weise gegeneinander stellen lassen, dass die mittlere Deklination ganz unverändert bleibt, und die Variationen der Deklination und der Intensität nur insofern affiziert werden, dass der Wert der Skalenteile etwas anders bestimmt werden muss, als ausserdem. Dies ist der Fall, wenn der Pfeiler, auf welchem die Theodoliten stehen, mit den beiden Magnetometern ein Dreieck bildet, dessen eine Seite (nämlich die zwischen dem Pfeiler und dem Deklinationsmagnetometer) im magnetischen Meridian liegt, während die andere Seite, nämlich die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der beiden Magnetometer verbindet, einen Winkel von $35^0\,15'\,32''$[3]) mit dem magnetischen Meridian macht«[4]).

---

1) *Resultate* im Jahr 1837, S. 20 ff., 1838.

2) Werke XI, 1, S. 59.

3) Genauer muss der Sinus dieses Winkels $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ sein. — SCHAEFER.

4) GAUSS ist 1840 auf diese Frage noch einmal ausführlich zurückgekommen (*Resultate* im Jahre 1840, S. 26 ff., 1841, Werke V, S. 427); der letzte Paragraph gibt die Anwendung seiner allgemeinen Formeln auf den speziellen hier behandelten Fall; der wesentliche Inhalt dieser Abhandlung war also jedenfalls schon damals (1837) im Besitze von GAUSS. — SCHAEFER.

33. Das Ergebnis der Termine im Jahre 1837 (im ganzen 7) hat GAUSS wieder in den *Resultaten* kommentiert[1]). Hervorzuheben ist folgendes: Der Novembertermin wurde an einem etwas anderen Datum abgehalten (am 13. November), um — gemäss einer Anregung HUMBOLDTS — zu prüfen, ob »an den Monatstagen, die in den früheren Jahren durch eine ausserordentliche Menge von Sternschnuppen ausgezeichnet gewesen waren, vielleicht auch ungewöhnliche magnetische Bewegungen eintreten könnten.« Das Ergebnis war negativ, die Fragestellung aber deshalb interessant und wichtig, weil man damals über die Herkunft der Störungen (ob tellurischen oder kosmischen Ursprungs) noch völlig im Unklaren war. Zum Schlusse ist noch eine allgemeine Bemerkung GAUSSENS mitteilenswert, die sich gegen etwaige Zweifel an der Brauchbarkeit des Bifilars richtet, eine Bemerkung, die sich auch in mehreren Briefen[2]) wiederfindet: »Wer inzwischen sich schon selbst in Betrachtungen . . . . . versuchen möchte, braucht sich wenigstens durch keine Zweifel an der Realität der durch das Bifilarmagnetometer angezeigten Intensitätsbewegungen davon abhalten zu lassen. In der Tat sind solche Zweifel ganz unstatthaft geworden, nachdem bereits im Märztermin des gegenwärtigen Jahres 1838 ausser Göttingen noch in drei anderen Orten die gleichzeitigen Intensitätsbewegungen mit ähnlichen Bifilarapparaten beobachtet sind und eine ebenso bewundernswürdige Übereinstimmung gezeigt haben, wie wir seit vier Jahren an den Deklinationsbewegungen zu finden gewohnt sind.«

34. Im gleichen Jahrgang (1837) der *Resultate* hat GAUSS[3]) auch die von ihm verwendete Methode, Schwingungsdauern genau zu messen, bekannt gemacht. Ein genaueres Eingehen darauf erübrigt sich hier, da sie zur Mechanik gehört; nur sei darauf aufmerksam gemacht, dass GAUSS sie (vergl. Artikel 5) spätestens seit 1829 in ihren Grundzügen besass.

35. Horizontalintensität und Deklination, sowie ihre Variationen hatte nun GAUSS exakt zu messen gelehrt. Übrig blieb noch die Inklination und ihre Variation. Bereits mehrfach haben wir darauf hingewiesen, dass GAUSS zwar von Anfang an beabsichtigte, auch dieses dritte Element des Erdmagne-

1) *Resultate* im Jahre 1837, S. 130 ff., 1838.

2) GAUSS-GERLING, S. 553 ff.; GAUSS-OLBERS II, 2, S. 682; Brief Nr. 56 an ENCKE vom 2. April 1839 (unveröffentlicht).

3) *Resultate* im Jahre 1837, S. 58 ff.

tismus in den Bereich seiner Untersuchungen einzubeziehen, dass er die Untersuchung der Inklination schliesslich aber bewusst zurückstellte[1]), weil hier das zu lösende Problem am schwierigsten und am wenigsten aussichtsvoll war.

Nicht gleich von Anfang an war sich allerdings GAUSS darüber klar gewesen, dass bei der Inklination besondere Schwierigkeiten zu überwinden sein würden. Denn am 2. April 1832 schreibt er an GERLING[2]): »Ich hoffe in allen einzelnen Momenten, nämlich Intensität, Deklination, Inklination und Variationen dieser drei Elemente, die bisherige Schärfe weit überbieten zu können.« Ähnlich äussert sich GAUSS auch in einem Brief an ENCKE[3]) vom 12. Mai 1832.

Aber schon in der *Intensitas*[4]), die gegen Ende des Jahres 1832 erschien, hatte GAUSS seinen grundsätzlichen späteren Standpunkt gewonnen. Nachdem er (vergl. Artikel 12) auseinandergesetzt hat, dass die Wirkung der Vertikalkomponente der erdmagnetischen Kraft als eine Schwerpunktsverschiebung der Nadel gedeutet werden könne, fährt er fort: »Bei dieser Auffassungsweise leuchtet von selbst ein, dass, was immer für Versuche mit einer Magnetnadel in einem einzigen magnetischen Zustand gemacht werden mögen, aus diesen allein die Inklination nicht abgeleitet werden kann, sondern dass die Lage des wirklichen Schwerpunktes anders woher schon bekannt sein muss. Diese Lage pflegt bestimmt zu werden, bevor die Nadel magnetisiert ist; aber diese Art ist nicht sicher genug, da meistens eine Stahlnadel schon während ihrer Herstellung einen wenn auch schwachen Magnetismus annimmt. Es ist daher für die Bestimmung der Inklination notwendig, dass durch eine zweckmässige Änderung des magnetischen Zustandes der Nadel eine andere Verlegung des Schwerpunktes hervorgerufen werde. Damit diese von der ersteren möglichst verschieden werde, wird es notwendig sein, die Pole umzukehren, wodurch eine doppelte Verlegung erhalten wird. Übrigens kann die Verlegung des Schwerpunktes . . . . . eine gewisse Grenze nicht überschreiten, die . . . . . in unsern Gegenden ungefähr 0,4 mm beträgt und in Gegenden, wo die Vertikalkraft am grössten ist, unter 0,6 mm bleibt; daraus ersieht man gleich-

1) Vergl. die im Art. 27 oben erwähnte Einleitung, Werke V, S. 351.

2) GAUSS-GERLING, S. 387 ff.; Werke XI, 1, S. 77.

3) Werke XI, 1, S. 78.

4) Werke V, S. 91.

zeitig, eine wie grosse mechanische Feinheit bei den Nadeln erfordert wird, die zur Bestimmung der Inklination dienen sollen.« In diesem letzten Satz ist schon angedeutet, dass bei der Inklinationsmessung durch die Magnetnadel mechanisch-technische Schwierigkeiten von ganz anderer Grössenordnung zu überwinden sind, wie dies für Deklination und Horizontalintensität notwendig war[1]). Obwohl nun GAUSS in dieser Erkenntnis die genaue Bestimmung der Inklination vorerst zurückstellte, hat er sich doch dauernd mit dem Problem beschäftigt.

36. Die nächste Äusserung von Wichtigkeit findet sich in einem Brief an ENCKE[2]) vom 14. September 1834. Dort heisst es: »Es sind hier bereits einige Versuche mit den Beobachtungen gemacht, wo ein vierpfündiger Stab durch ein kleines, an einem Ende aufgelegtes Gewicht horizontal gemacht wurde, und nachher, nach Umkehrung der Pole, am anderen Ende. Also die COULOMBsche Methode unter Anwendung des Prinzipes, die Horizontalstellung durch Spiegel, Skala und Fernrohr zu ermitteln. Das Fernrohr in der oberen Etage, die Skala an der Decke[3]). . . . . Dieser Versuch ist garnicht in der Absicht gemacht, die Inklination selbst zu bestimmen, da das Lokal im Physikalischen Kabinett dazu garnicht taugt, indem Eisen und andere Magnetstäbe in der Nähe waren, daher ich auch das Resultat noch garnicht berechnet habe, sondern bloss zunächst zu prüfen, wie genau auf diese Weise die Einstellung beobachtet werden kann. Dieser Versuch ist sehr befriedigend ausgefallen. Man wird gewiss die Entfernung beider Auflagestellen auf weniger als $\frac{1}{1000}$ bestimmen können. Ich bin daher überzeugt, dass durch diese Methode die Inklination genauer als mit irgend einem Inklinatorium bestimmt werden kann, und in Zukunft werden wir gewiss diese Operation im magnetischen Observatorium ausführen. Wenn Herr v. HUMBOLDT behauptet, BIOT habe die Methode unbrauchbar gefunden, so vermute ich, dass jener solche mit einer andern Methode verwechselt hat, denn BIOT selbst urteilt schon in seiner Physik III, S. 35, dass sie die genaueste von allen sei. Hätte aber BIOT ein anderes Urteil aus-

1) Auch in einem späteren Brief an OLBERS (Werke XI, 1, S. 111) wird dies unter Bezugnahme auf die obige Stelle der *Intensitas* näher ausgeführt.

2) Werke XI, 1, S. 93.

3) Man vergl. die in dem Briefe sich findende Figur zur Erläuterung des Prinzips; Werke XI, 1, S. 94. — SCHAEFER.

gesprochen, so würde ich vorerst daraus weiter nichts schliessen, als dass er ein schlechter Beobachter sein müsste . . . .«

Die Coulombsche Methode[1]), die Gauss hier durch Benutzung der Spiegelablesung zu verbessern beabsichtigt, ist die folgende:

Man lässt einen frei aufgehängten Magnetstab, der durch ein Gewicht P (am südlichen Pole derselben) in horizontale Lage gebracht ist, horizontale Schwingungen um den magnetischen Meridian ausführen; in diesem Falle wirkt natürlich nur die Horizontalkomponente H. Bezeichnet M das magnetische Moment des Stabes, so ist die Schwingungsdauer T_H nach Gleichung (13) (oben S. 19):

$$T_H = 2\pi\sqrt{\frac{k}{HM}}, \tag{13 a}$$

wenn k das Trägheitsmoment der Nadel ist. Bedeutet ferner l die halbe Länge der Nadel, p ihr Gewicht, g die Erdbeschleunigung, so wird $k = \frac{p}{g} l^2$; drückt man noch die Schwingungsdauer T_H durch die reduzierte Länge λ eines isochron schwingenden Pendels aus, so ergibt sich:

$$HM = \frac{pl^2}{3\lambda}. \tag{21}$$

Ist anderseits das Gewicht P im Abstand l' anzubringen, um die Nadel horizontal zu stellen, so hält das Drehmoment Pl' dem Moment VM der Vertikalkomponente V das Gleichgewicht, es ist also:

$$VM = Pl'. \tag{22}$$

Wenn man nunmehr p, P, l, l' und λ bestimmt, so erhält man durch Division von (21) und (22) für die Tangente des Inklinationswinkels i den Wert:

$$\operatorname{tang} i = \frac{H}{V} = \frac{pl^2}{3Pl'\lambda}. \tag{23}$$

Ausser dieser Methode, die wir die erste Coulombsche nennen wollen, hat Coulomb noch eine Modifikation derselben angegeben, bei der das Drehmoment der Vertikalkomponente dadurch bestimmt wird, dass man die Inklinationsnadel senkrecht zum Meridian schwingen lässt. Ist die Schwingungsdauer T_V, so ist offenbar, [entsprechend (13)]:

$$T_V = 2\pi\sqrt{\frac{k}{VM}}, \tag{13 b}$$

1) Coulomb, Mémoires de l'Institut, t. IV, S. 565.

und durch Division in Gleichung (13a) erhält man für die Tangente des Inklinationswinkels:

$$\tan g\, i = \frac{T_B^2}{T_V^2}. \tag{24}$$

Es wird also hier die statische Horizontierung der Nadel durch ein Gewicht P im Abstande l' durch eine dynamische Methode, die Schwingungsbeobachtung, ersetzt. Wir wollen diese Variante, bei der also überhaupt nur Schwingungsdauern gemessen werden, als zweite COULOMBsche Methode bezeichnen.

Natürlich ist bei den obigen Formeln vorausgesetzt, dass die Achse, um die die Schwingungen erfolgen, exakt durch den Schwerpunkt gehe, was natürlich nie der Fall ist; dieser Punkt wird nachher von Wichtigkeit werden.

37. Von den im vorhergehenden Artikel erwähnten beiden COULOMBschen Methoden scheint GAUSS nur die erste aus der Literatur gekannt, die zweite dagegen selbständig ersonnen zu haben. Denn in einem Brief an ENCKE[1]) vom Januar 1836 schreibt er: »Schon vor einigen Jahren hatte ich eine besondere Methode erdacht, die Inklination zu bestimmen, wozu eine Nadel mit einer feinen Achse etwas ausserhalb des Schwerpunktes nötig ist, und wo man bloss Schwingungsdauern beobachtet. Ein damals von mir gemachter ganz roher Versuch liess die Brauchbarkeit der Methode schon erkennen, aber die Herren SARTORIUS und LISTING haben sie mit einem besser gearbeiteten Apparat in Neapel recht glücklich ausgeführt[2]), sodass ich diese Methode für die allergenaueste halten möchte. Ihr Resultat ist aber noch nicht definitiv . . . . .« Die Methode, die GAUSS hier als von ihm selbst erdacht bezeichnet, ist nun aber, wie aus den zwei Jahre nach diesem Briefe veröffentlichten Untersuchungen von SARTORIUS und LISTING hervorgeht, nichts anderes, als die zweite COULOMBsche Methode. Höchstens insofern könnte man in GAUSS' Worten eine selbständige Abweichung finden, als er besonders betont, die Achse solle ausserhalb des Schwerpunktes sein. Der Sinn dieser Anordnung würde der folgende sein: Da ja niemals die Achse streng durch den Schwerpunkt geht, so ist es wohl nach GAUSSens Meinung vorzuziehen, wenn man die Abweichung

1) Werke XI, 1, S. 103 ff.; das genauere Datum ist nicht bekannt.

2) Die Messungen, auf die GAUSS hier anspielt, sind später veröffentlicht in den *Resultaten* im Jahre 1838, S. 58 ff., 1839.

absichtlich übertreibt, um sie desto genauer durch Messungen eliminieren zu können. In der Tat kann man die Abweichung viel genauer bestimmen, als garantieren, dass sie nicht vorhanden ist. In der Arbeit von SARTORIUS und LISTING ist übrigens dieser spezielle GAUSSsche Gesichtspunkt garnicht erwähnt; vermutlich hat GAUSS, der doch offenbar den Verfassern die Methode mitgeteilt hat, später selbst keinen grossen Wert mehr auf dieselbe gelegt, da sie in der Tat äusserst umständlich und zeitraubend ist.

38. Ganz andere Methoden zur Bestimmung der Inklination hat GAUSS in den folgenden Jahren (1837—1839) erwogen und erprobt, die auf der Benutzung der durch das Erdfeld bewirkten Induktion beruhen. Wir kommen in einem der folgenden Artikel darauf zurück. Im Jahre 1840 endlich scheint GAUSS den Gedanken, die Inklination nach neuen Methoden zu messen, aufgegeben zu haben; er beschränkt sich von da an darauf, mit dem vorhandenen Instrumentarium, einem von ROBINSON angefertigten Inklinatorium, Messungen anzustellen und die Fehlerquellen desselben zu diskutieren. Er hat Ende 1839 oder Anfang Januar 1840 ENCKE nach seinen Erfahrungen mit ROBINSONschen Inklinatorien gefragt; denn in einem Briefe vom 12. Januar 1840 gibt ENCKE[1]) ausführlichen Bericht: er selbst habe nie mit einem solchen beobachtet, aber die amerikanischen Physiker BACHE und FORBES, die in Berlin gearbeitet hätten, hätten ein ROBINSONsches Instrument benutzt und mit demselben jedenfalls keine schlechteren Ergebnisse erzielt, als mit dem ENCKE gehörigen Apparat vom GAMBEY; mit dem letzteren habe er Unterschiede bis zu 7 Winkelminuten nicht vermeiden können. Auch HUMBOLDT habe nur mit GAMBEYschen, nicht mit ROBINSONschen Instrumenten gemessen.

Am 13. September 1841 schreibt GAUSS[2]) an SCHUMACHER, dass er Messungen mit einem ROBINSONschen Inklinatorium angefangen habe: »Ich habe in der letzten Zeit einige vorläufige Anwendungen des ROBINSONschen Inklinatoriums gemacht; die Art, wie die Kristallplatten[3]) bewegt werden, scheint mir eine sehr unzweckmässige und tadelnswerte[4]). Überhaupt wird man gestehen, dass Inklinatorien noch sehr unvollkommene Apparate sind . . . .«

1) Unveröffentlicht.

2) GAUSS-SCHUMACHER, Bd. IV, S. 41.

3) Gemeint sind die Achatlager, auf die die Achse der Magnetnadel aufgelegt wird und die in bestimmter Weise justierbar sein müssen (vergl. Anmerkung 4).

4) Vergl. z. B. GAUSS' Ausführungen über diesen Punkt in seiner Abhandlung: *Beobachtungen der*

Unter dem Eindrucke der theoretisch unzweifelhaft vorhandenen Mängel ist hier GAUSSens Erwartung über die Leistungen des ROBINSONschen Inklinatoriums offenbar recht gering; aber schon am 9. November 1841 schreibt er[1]), nachdem er mehr praktische Erfahrungen an diesem Instrument gesammelt hat, wieder an SCHUMACHER: »Mit dem ROBINSONschen Inklinatorium habe ich seit 2 bis 3 Monaten eine bedeutende Anzahl von Bestimmungen gemacht, die eine bessere Übereinstimmung geben, als ich selbst erwartet hatte, da das Instrument allerdings manches zu wünschen übrig lässt.« Noch günstiger äussert sich GAUSS am 20. Mai 1842 gegen ENCKE[2]): »Ich habe mich in der letzten Zeit viel mit Inklinationsbeobachtungen (mit einem ROBINSONschen Inklinatorium) beschäftigt. Diese Instrumente lassen noch viel zu wünschen übrig; indessen geben meine Mittelresultate von Oktober 1841 bis Mai 1842 eine ungemein befriedigende Übereinstimmung . . . . .«[3]). Diese Messungen hat GAUSS bis in den September 1842 fortgesetzt und, wie aus einem Briefe vom 16. September 1842 an SCHUMACHER[4]) hervorgeht, in dieser Zeit mit der Ausarbeitung einer Abhandlung über Inklinationsbeobachtungen angefangen.

39. Diese Abhandlung erschien unter dem Titel *Beobachtungen der magnetischen Inklination in Göttingen*[5]). In ihrem ersten Teil gibt GAUSS eine Aufzählung der Bedingungen, denen eine exakte Justierung des Inklinatoriums zu genügen hat (sieben an der Zahl), und prüft sodann, nachdem die Berichtigung so gut als möglich ausgeführt war, an den erhaltenen Beobachtungssätzen die Genauigkeit der Beobachtung selbst. Diese Darlegungen zeigen zum ersten Male — trotz der wertvollen Vorarbeiten HANSTEENS[6]) — eine vollkommene Einsicht in die Theorie des Instruments, — und darin liegt der Fortschritt und der dauernde Wert der GAUSSschen Arbeit. GAUSS bediente sich übrigens einer etwas anderen Messungsart als bis dahin üblich war, um den genauen Wert der Inklination zu bestimmen, der zwar umständlicher ist,

magnetischen Inklination in Göttingen, Resultate im Jahre 1841, 1842; Werke V, S. 444 ff., insbesondere Abschnitt 5, S. 448.

1) GAUSS-SCHUMACHER IV, S. 42.

2) GAUSS-ENCKE, Brief Nr. 64, unveröffentlicht.

3) Man vergl. hierzu auch den ausführlichen Brief an SCHUMACHER vom 20. Juni 1840 (Werke XII, S. 283 ff.), in dem die Mängel der ROBINSONschen Instrumente erörtert werden.

4) GAUSS-SCHUMACHER IV, S. 41.

5) *Resultate* im Jahre 1841, S. 10 ff., 1843; Werke V, S. 444.

6) CHRISTOPHER HANSTEEN, *Untersuchungen über den Magnetismus der Erde*, Christiania 1813, S. 38 ff.

aber den Vorteil hat, dass man eine genauere Einsicht in die Wirkungsweise jedes einzelnen Fehlers erhält. GAUSS' Verfahren besteht darin, dass er stets zwei Tage hindurch mit zwei Nadeln beobachtet, von denen an jedem Tage wechselweise nur eine ummagnetisiert wird; erst die Beobachtungen zweier Tage geben demgemäss den Wert der Inklination, während die etwa eingetretene Änderung der Inklination durch die nicht umgekehrte Nadel gemessen wird. Interessant ist es, die Genauigkeit festzustellen, die GAUSS für die einzelne Ablesung erreichte; sie betrug rund 40″, die auf Rechnung der reinen Beobachtungsfehler zu setzen sind. Dagegen sind die Fehler beim GAUSSschen Exemplar des Inklinatoriums, trotz sorgfältigster Berichtigung, die durch die Anomalie der Einstellung vorkommen, weit grösser, nämlich 90″, ein Punkt, den GAUSS auch besonders hervorhebt.

Die Genauigkeit des definitiven Inklinationswertes lässt sich auf etwa 1′ veranschlagen, eine Grenze, die auch heute noch kaum überschritten ist; sie ist in der schon erwähnten Schwierigkeit begründet, mechanisch vollkommene Inklinatorien herzustellen.

40. Bereits im Artikel 38 wurde erwähnt, dass GAUSS sich in der Zeit, bevor er sich zu Messungen am Inklinatorium entschloss, ganz andere, nämlich auf der Induktionswirkung des Erdmagnetismus beruhende, Methoden der Inklinationsmessungen versucht hat.

Über das Prinzip eines solchen Apparates schreibt er[1]) am 23. Juli 1836 an OLBERS; »Unter meinen jetzigen magnetischen Experimenten ist das merkwürdigste eines, wo die Induktionswirkung des Erdmagnetismus auf einen siebenhundertfachen Drahtring, übersponnen und zusammen über 13000 Fuss lang, bestimmt wird. Dieser Ring oder dieses Rad wird um eine Achse gedreht, die einen horizontalen Diameter des Rades bildet. Diese Drehungsachse macht genau einen rechten Winkel mit dem magnetischen Meridian, und die beiden Enden des Drahtes sind bis zum Multiplikator des grossen Magnetometers der Sternwarte fortgeführt, welcher Multiplikator jetzt aus 610 Umwindungen übersponnenen Drahtes besteht. Die Drehung geschieht taktmässig nach der Uhr, alle 2 Sekunden eine Umdrehung, und nach jeder halben Umdrehung wechselt vermöge eines eigentümlichen Mechanismus die

1) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 642 ff.; Werke XI, 1, S. 110.

Verbindung der Drahtenden des Rades mit ihren Fortsetzungen. Die Einrichtung ist nach Vorschrift der Theorie so, dass dieser Wechsel genau stattfindet, wenn das Rad dem magnetischen Äquator parallel ist, oder einfacher gesagt, normal gegen die Richtung der erdmagnetischen Kraft. So wirkt der durch die Induktion erzeugte Strom immer in einerlei Sinne auf das Magnetometer und bewirkt, obwohl die ganze Drahtlänge so gegen 20000 Fuss lang ist, doch noch Ausweichungen von mehreren Hundert Skalenteilen an der 25 pfündigen Nadel . . . . . .«. Obwohl GAUSS an dieser Stelle nichts von einer Anwendung dieses Apparates auf die Bestimmung der Inklination sagt, geht seine Absicht doch deutlich aus einem späteren Briefe hervor, auf den wir sogleich zurückkommen; bemerkt sei nur, dass bei der oben beschriebenen GAUSSschen Anordnung der Magnetometerausschlag ceteris paribus der Vertikalkomponente des Erdmagnetismus proportional ist.

Etwa ein Jahr später erschien in den *Resultaten* WILHELM WEBERS[1]) Aufsatz über das »Induktionsinklinatorium«, in dem WEBER es sich zur Aufgabe macht, anstelle der Messungen mit dem Inklinatorium die Induktion des Erdfeldes zu benutzen. Aus einer Bemerkung WEBERS (l. c. S. 82) kann man mit Sicherheit schliessen, dass GAUSS' oben im Briefe an OLBERS angedeuteter »Erd-Induktor« ihn zu seinen Versuchen angeregt hat. Dieses WEBERsche Induktionsinklinatorium ist eine geistreiche Kombination von Induktor und Magnetometer. Im Inneren eines um eine horizontale Achse drehbaren Kupferrings schwebt eine Magnetnadel; bei Drehung des Kupferrings wirkt dieser gleichzeitig als »Induktor«, indem durch die Vertikalkomponente des Erdfeldes in ihm Ströme induziert werden, sowie als »Multiplikator«, indem diese Ströme auf die Magnetnadel einwirken, ausserdem auch noch, was für uns hier nebensächlich ist, als »Kommutator« und als »Dämpfer«. Mit diesem Instrument kann man relative Inklinationsmessungen (Vergleiche der Inklination an verschiedenen Orten und zu verschiedener Zeit) machen, zur absoluten Bestimmung der Konstanten des Instruments muss aber eine absolute Inklinationsmessung mit dem Inklinatorium bereits bekannt sein; alle Fehlerquellen dieser Messung werden demnach in den WEBERschen Apparat mit eingehen. Einer irgendwie gesteigerten Genauigkeit ist also dieser Apparat garnicht fähig. GAUSS

1) *Resultate* im Jahre 1837, S. 81ff., 1838.

hat dies sofort erkannt, denn am 20. November 1838 schreibt er[1]) wieder an OLBERS: »Die Abänderung, welche WEBER unter dem Namen Induktionsinklinatorium gemacht hat, ist zwar im höchsten Grade sinnreich, ich glaube aber nicht, dass man auf diese Weise jemals sehr scharfe Resultate erhalten kann. Ich komme auf meine alte Art zurück (wobei ein von dem Drehungsapparat ganz getrenntes Magnetometer gebraucht wird), lasse aber an jenem zwei geteilte Kreise und Vorkehrungen zum scharfen Nivellieren anbringen. Ich bin geneigt, zu glauben, dass man damit ziemlich scharfe Inklinationen, wenigstens so scharfe, wie mit den gewöhnlichen Inklinatorien, erhalten kann, ja, wenn man noch anderes damit verbinden will, auch absolute Deklination. Doch werde ich erst den Erfolg abwarten, ehe ich mich weiter darüber äussere . . . . .«. GAUSSens »alte Art« ist offenbar die im vorher zitierten Briefe angedeutete, und man erkennt hier in nuce die Bestandteile des Erdinduktors, den WILHELM WEBER später[2]) angegeben hat, dessen Konstruktion auch bisher WEBER allein zugeschrieben wurde. Es kann aber wohl nicht zweifelhaft sein, dass gerade bezüglich des Erdinduktors WEBER unmittelbar durch GAUSSens oben dargelegte Versuche aufs stärkste beeinflusst worden ist, obwohl sich in der genannten Abhandlung WEBERS ein Einfluss von GAUSS mit keinem Worte mehr erwähnt findet. —

GAUSS selbst ist nicht mehr auf diese seine Versuche zurückgekommen, sondern hat später die in Artikel 38 geschilderten Untersuchungen mit dem ROBINSONschen Inklinatorium angestellt. Aber sein Scharfblick hat sich auch hier bewährt; denn mit dem Erdinduktor werden auch heute noch die besten Inklinationsmessungen ausgeführt.

Die Variationen der Inklination, die ursprünglich auf seinem Programm standen, hat GAUSS überhaupt nicht mehr zu bestimmen angefangen. Es mag dies damit zusammenhängen, dass zwei theoretische Arbeiten, die *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus* und seine grosse potentialtheoretische Arbeit sein Interesse in immer gesteigertem Masse beanspruchten. Auch WEBERS Fortgang von Göttingen nach Leipzig hat sicher im selben Sinne gewirkt.

---

1) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 697; Werke XI, 1, S. 113.

2) W. WEBER, *Gesammelte Werke*, Bd. II, S. 277 ff.; S. 328 ff.

Vierter Abschnitt.

Die allgemeine Theorie des Erdmagnetismus und die Untersuchungen zur Potentialtheorie.

41. Der Gedanke, eine allgemeine Theorie des Erdmagnetismus zu entwerfen, hat GAUSS schon sehr lange vorgeschwebt. Er hat, wie wir später (Art. 51) noch ausführlich begründen werden, unzweifelhaft bereits im Jahre 1806 die allgemeine Konzeption einer solchen Theorie gehabt und spätestens im Jahre 1832 alle wesentlichen Züge derselben besessen und ist nur durch die Mangelhaftigkeit des Beobachtungsmaterials zunächst davon abgehalten worden, die allgemeine Theorie auszuarbeiten bezw. zu veröffentlichen.

Am 3. Mai 1832 schreibt er[1]) an SCHUMACHER: ». . . . Dies ist der Erdmagnetismus, und ich möchte wohl Ihre Verwendung ansprechen, um einen Wunsch in Erfüllung gehen zu sehen. Der vortreffliche HANSTEEN hat uns vor einiger Zeit eine Karte der isodynamischen Linien geliefert, und hoffentlich haben wir von demselben auch bald neue Deklinations- und Inklinationskarten zu erwarten. Dadurch werden dann die magnetischen Erscheinungen vollständig dargestellt, und für die meisten Personen wird die Darstellung in dieser Form am angenehmsten sein. Allein — was Ihnen vielleicht anfangs paradox erscheinen wird — für denjenigen, der versuchen will, das Ganze der Erscheinungen einer möglichst einfachen Theorie unterwürfig zu machen, ist diese Darstellung nicht die zweckmässigste, sondern eine andere wäre zu diesem Zweck von viel unmittelbarerer Brauchbarkeit. Nämlich durch drei Karten, die die drei partiellen Intensitäten vor Augen legten. Es sei m die ganze magnetische Kraft, i die Neigung, δ die Abweichung; dann werden die drei partiellen Kräfte:

$$\xi = m \sin i \qquad \text{in vertikaler Richtung,}$$
$$\eta = m \cos i \sin \delta \quad \text{in horizontaler Richtung nach Norden,}$$
$$\zeta = m \cos \delta \qquad \text{in horizontaler Richtung nach Westen.}$$

Wären die drei Karten für ξ, η, ζ vorhanden, so wäre ich geneigt, einen Versuch der oben angedeuteten Art zu machen; vielleicht entschlösse sich Herr

1) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 295; Werke XI, 1, S. 73.

HANSTEEN dazu, solche zu liefern, oder allenfalls auch nur eine derselben. Meine theoretische Untersuchung zeigt sogar, dass eine vollständige Darstellung einer partiellen Kraft an sich zureichend ist, die andern a priori abzuleiten[1]). Selbst solche Karten zu entwerfen, werde ich mich nicht entschliessen, da dazu eine längere innige kritische Bekanntschaft mit den Quellen erforderlich ist. Die Zurückführung auf eine kleine Anzahl von Polen z. B. vier, halte ich übrigens nicht für naturgemäss; solche Pole sind Symptome in den Erscheinungen, die keine scharfe Bedeutung haben, und wenn wir erst im Besitze der allgemeinen, alles auf einmal umfassenden Formel sind, ergeben sich diese sogenannten Pole, wenn man sie wissen will, von selbst mit. Vielleicht wird Ihnen, was ich sagen will, durch ein Beispiel deutlicher. Die Zeitgleichung bietet im Jahre mehrere Maxima und Minima dar, aber man würde Unrecht haben, diesen eine ganz besondere Bedeutung beizulegen«[2]). . . . .

Erst im Winter des Jahres 1838 trat GAUSS der Ausführung seines alten Planes ernstlich nahe. Am 3. November 1838 schreibt er[3]) an ENCKE: »Ich habe die Absicht, im Laufe dieses Winters meine Theorie des allgemeinen Erdmagnetismus auszuarbeiten, zugleich mit einer Probe der Anwendungen auf die Beobachtungen, die freilich nur als ein erster roher Versuch zu betrachten ist.« . . . . . Und am 17. Dezember 1838 schreibt er an SCHUMACHER[4]): ». . . . Ein Jahrgang der *Resultate* soll nun jedenfalls noch herauskommen, und ich schreibe jetzt an einem dafür bestimmten Aufsatz: *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus.*« . . . .

Aus einem Briefe an BESSEL[5]) vom 28. Februar 1839 geht schliesslich hervor, dass GAUSS »den ersten Bogen in die Druckerei gegeben hat, obwohl der letzte noch nicht fertig ist«; im April 1839 war der Druck vollendet, wie GAUSS[6]) am 18. April 1839 an ENCKE mitteilt.

42. Die GAUSSsche Abhandlung *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus* eröffnete den dritten Band der *Resultate*[7]).

---

1) Dieser letztere Gedanke tritt in dem Briefe an HARDING (1806) noch nicht auf; vergl. Art. 51.

2) Man vergl. hierzu noch einen Brief von GAUSS an HANSTEEN vom 29. Mai 1832, Werke XII, S. 138 ff.

3) GAUSS-ENCKE, Brief Nr. 54, unveröffentlicht.

4) GAUSS-SCHUMACHER III, S. 215 ff.

5) GAUSS-BESSEL, S. 523 ff.

6) GAUSS-ENCKE, Brief Nr. 55, unveröffentlicht.

7) *Resultate* im Jahre 1838, S. 1—47, 1839; Werke V, S. 119 ff.

In der Einleitung sagt GAUSS, dass man sich bisher in der Theorie des Erdmagnetismus damit begnügt habe, drei Systeme von Linien auf der Erdoberfläche zu ziehen, die Isogonen (Kurven gleicher Deklination), die Isoklinen (Kurven gleicher Inklination) und die Isodynamen (Kurven gleicher Intensität), dass aber die Aufstellung dieser Kurven nicht das eigentliche Ziel darstellen könne. Das Problem sei vielmehr, »die die Erscheinungen des Erdmagnetismus hervorbringenden Grundkräfte nach ihrer Wirkungsart und Grösse zu erforschen, die Beobachtung diesen Elementen zu unterwerfen und dadurch die Erscheinungen in noch unerforschten Gegenden zu antizipieren.« Sodann geht GAUSS über zu einer Kritik der bisherigen theoretischen Versuche, die hauptsächlich darin bestanden, dass man a priori eine bestimmte Hypothese über die Ursache des Erdmagnetismus machte, die dann an den Beobachtungen ausprobiert wurde. Die primitivste dieser Hypothesen war die, im Erdmittelpunkte befinde sich ein kleiner Magnet mit je einem Nord- und Südpol von bestimmter Stärke. Wo die Achse dieses Magneten die Erdoberfläche träfe, wären die magnetischen Pole der Erde, in dem grössten Kreise mitten zwischen den Polen wäre der magnetische Äquator usw. Die Magnetnadel müsste an den Polen vertikal, am Äquator horizontal stehen, die Intensität wäre ausserdem am Äquator halb so gross wie an den Polen. Die blosse Aufzählung dieser Folgerungen genügt, um erkennen zu lassen, dass die fragliche Hypothese unzulässig ist, da die Beobachtungen damit garnicht übereinstimmen; z. B. ist der magnetische Äquator kein grösster Kreis, sondern eine Kurve doppelter Krümmung usw. Man (z. B. TOBIAS MAYER) war deshalb dazu übergegangen, den kleinen Magneten, der den Erdmagnetismus erzeugen sollte, exzentrisch anzubringen; aber auch hier würde ein genauerer Vergleich mit der Erfahrung die Unbrauchbarkeit der Grundannahme gezeigt haben.

Diese ganze Betrachtungsweise lehnt GAUSS grundsätzlich ab, ohne damit zu bestreiten, dass eine hinreichende Anzahl von Magneten, in geeigneter Richtung und Stärke angebracht, die Beobachtungen gut darstellen könne. Aber dies sei eine »cura posterior«, das könne man aus einer vollständigen Theorie hinterher immer finden, — wenn man es wolle.

43. GAUSS geht nun von der Voraussetzung aus — die später von ihm geprüft wird — dass die Ursache des normalen Erdmagnetismus ihren Sitz im Innern der Erde habe, während er dieselbe Annahme für die Störungen offen

lässt, ja sogar bezweifelt. Ferner wird vorausgesetzt, dass der Erdmagnetismus die Resultante der Wirkung sämtlicher magnetischer Teile der Erde ist, wobei es gleichgültig bleibt, ob man sich darin zwei magnetische Flüssigkeiten oder AMPÈRESche Ströme vorstellen will. Unter diesen Umständen lassen sich die Kraftkomponenten darstellen als die partiellen Ableitungen einer einzigen eindeutigen Funktion V der Koordinaten, die wir — obwohl an dieser Stelle bei GAUSS der Name noch nicht vorkommt[1]), — als das magnetische Potential der Erde bezeichnen wollen. Nennt man ein Element Magnetismus $d\mu$, ρ seinen Abstand von dem »Aufpunkte«, X, Y die horizontalen Komponenten (positiv nach Norden bzw. nach Westen), Z die Vertikalkomponente (positiv gegen den Mittelpunkt der Erde), so ist zu setzen:

$$V = -\int \frac{d\mu}{\rho} \tag{25}$$

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{26}$$

GAUSS benutzt nun einige einfache Sätze aus der Theorie des Potentials, die wir hier anführen.

In zwei um ds von einander entfernten Punkten habe das Potential die Werte V und $V+dV$; dann ist die totale Änderung

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \tag{27}$$

Bezeichnet man die Grösse der ganzen Intensität mit

$$\psi = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \tag{28}$$

mit θ den Winkel, den ihre Richtung mit dem Bogenelement ds einschliesst, so ist offenbar auch:

$$dV = \psi \cos\theta\, ds, \tag{29}$$

und das zwischen zwei Punkten P_0 und P_1 längs einer beliebigen Kurve erstreckte Linienintegral hat den Wert:

$$\int_{P_0}^{P_1} \psi \cos\theta\, ds = V_1 - V_0,$$

1) Vergl. hierzu Artikel 52.

wenn V_0 und V_1 die Werte von V in den Punkten P_0, P_1 bezeichnen, das heisst, das Integral hängt nur von Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges ab. Daraus ergeben sich sofort folgende Korrolarien:

I. Das Integral $\int_{P_0}^{P_1} \psi \cos\theta \, ds$ behält einerlei Wert, auf welchem Wege man auch von P_0 nach P_1 übergeht;

II. Das Integral $\int_{O} \psi \cos\theta \, ds$ längs einer in sich zurückkehrenden Linie erstreckt, ist immer gleich Null.

III. In einer geschlossenen Linie muss, wenn nicht durchgehends $\theta = 90^0$ ist, ein Teil der Werte von θ kleiner und ein Teil grösser als 90^0 sein.

GAUSS führt dann noch die Flächen konstanten Potentials (Niveauflächen) $V = \text{const.}$ ein und zeigt, dass die Totalkraft ψ normal zu diesen Flächen gerichtet ist, während ihre Grösse, wenn man die Potentialwerte von je zwei aufeinanderfolgenden Niveauflächen um den festen Betrag dV voneinander abstehen lässt, umgekehrt proportional dem Abstande jener Flächen ist, so dass also durch Betrachten der Niveauflächen Grösse und Richtung der Intensität bestimmt werden können.

Galt das bisherige für beliebige Punkte im Raume, so folgt weiter die Spezialisierung auf Punkte der Erdoberfläche.

Es sei ds ein auf der Erdoberfläche liegendes Bogenelement, dessen Enden die Werte V und $V+dV$ entsprechen; seine Neigung gegen den magnetischen Meridian sei t, i die Inklination und ω die Horizontalintensität. Dann ist:

$$\omega = \psi \cos i \tag{30}$$

$$\cos\theta = \cos i \cos t \tag{31}$$

und es wird

$$dV = \omega \cos t \, ds = \psi \cos i \cos t \, ds. \tag{32}$$

Das zwischen zwei Punkten P_0 und P_1 der Erdoberfläche erstreckte Integral

$$\int_{P_0}^{P_1} \omega \cos t \, ds$$

hängt wieder nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, und es folgen entsprechende Korrolarien I bis III wie oben.

Die dem Korrolar II entsprechende Folgerung, dass das Integral $\int_0 \omega \cos t ds$, erstreckt über eine auf der Erdoberfläche liegende in sich zurücklaufende Kurve, stets gleich Null sein muss, wird dann an einem Beispiel geprüft, in dem der Umfang des Dreiecks Göttingen, Mailand, Paris als Integrationsweg genommen wird; für ω und t werden natürlich Mittelwerte gesetzt. GAUSS benutzt die so entstehende Gleichung, um die Horizontalintensität in Paris aus denen von Göttingen und Mailand sowie den Deklinationen in den drei Städten zu berechnen; es findet sich (in einem bestimmten Masssystem[1]):

$$\omega_{\text{Paris}} = 0{,}51\,696,$$

während die Beobachtung den Wert 0,51 801 liefert, was als eine hinreichende Bestätigung der Formel angesehen werden kann.

Die Bedeutung dieses Resultats, wenn es allgemein gilt[2]), liegt darin, dass damit die Ableitbarkeit des normalen Erdmagnetismus aus einem eindeutigen Potential V bewiesen wäre; diese Bemerkung findet sich zwar nicht explizite bei GAUSS, ist aber natürlich in seiner Entwicklung enthalten.

Die Niveauflächen $V = \text{const.}$ schneiden die Erdoberfläche in Kurven, auf denen ebenfalls das Potential konstant ist; die horizontale magnetische Kraft steht normal zu ihnen und ist ihrem Betrage nach umgekehrt proportional dem Abstande zweier benachbarter Niveaulinien, wenn diese gleichen Differenzen dV entsprechen. Je zwei benachbarte Niveaulinien grenzen auf der Erdoberfläche »Zonen« ab. Den Extremwerten von V entsprechen dabei offenbar zwei Punkte, die von den Nachbarlinien ringförmig umgeben werden. Diese Punkte sind diejenigen, in denen die Flächen $V = \text{const.}$ die Erdoberfläche berühren; in ihnen ist die horizontale Kraft gleich Null, die ganze magnetische Kraft also vertikal gerichtet. GAUSS nennt diese Punkte — und nur solche, in denen die horizontale Komponente verschwindet, — die »magnetischen Pole« der Erde.

Im grossen und ganzen kann behauptet werden, dass das System der Niveaulinien die eben geschilderte einfachste Gestalt hat, dass also insbesondere nur zwei Pole vorhanden sind. Dagegen können wohl aus lokalen Gründen

1) Die Intensität in London ist gleich 1,372 gesetzt, was zu GAUSS' Zeit üblich war.

2) Nach neueren Untersuchungen scheinen etwa 3 % des Erdfeldes eine Ursache zu haben, die kein Potential besitzt, vergl. auch Art. 50, sowie L. A. BAUER, Terr. Magn. 25, S. 145, 1920.

Abweichungen von diesem einfachsten Typus auftreten, die Gauss des längeren diskutiert und durch zwei Zeichnungen erläutert. Wir brauchen hierauf nicht einzugehen, ebenso wenig wie auf die kritischen Bemerkungen, die er an den landläufigen Begriff der »Pole« knüpft.

44. Wesentlich dagegen für uns sind seine anschliessenden Folgerungen, die er aus der Darstellbarbeit der Kraftkomponenten als den partiellen Ableitungen einer Funktion V zieht. $\overline{V}$[1]) ist auf der Erdoberfläche eine Funktion zweier Variabeln, die Gauss als die geographische Länge λ (von einem beliebigen Meridian östlich gerechnet) und die Zenitdistanz u (Komplement der geographischen Breite) wählt. Wird die Erde, was hinreichend genau ist, als Kugel vom Radius R betrachtet, so ist ein Element des Meridians Rdu, ein Element des Parallelkreises $R \sin u \, d\lambda$, also die horizontalen Kraftkomponenten:

$$(33) \qquad \begin{cases} \overline{X} = -\frac{1}{R}\frac{\partial \overline{V}}{\partial u}, \\ \overline{Y} = -\frac{1}{R \sin u}\frac{\partial \overline{V}}{\partial \lambda}. \end{cases}$$

Nun folgt der merkwürdige Satz, dass wenn $\overline{X}$ als Funktion von u und λ für die ganze Erdoberfläche bekannt ist, $\overline{Y}$ daraus a priori abgeleitet werden kann. Denn setzt man:

$$(34) \qquad \int_0^u \overline{X}(u, \lambda) du = T(u, \lambda), \quad \text{also } \frac{\partial T}{\partial u} = \overline{X}(u, \lambda),$$

wobei λ bei der Integration als konstanter Parameter betrachtet wird, so wird die erste der Gleichungen (33):

$$\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{1}{R}\frac{\partial \overline{V}}{\partial u} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial u}(RT + \overline{V}) = 0,$$

das Aggregat $(RT + \overline{V})$ ist also lediglich eine Funktion $f(\lambda)$ von λ, d. h. auf einem und demselben Meridian konstant.

Da nun aber die Meridiane im Nordpol zusammenlaufen, so muss $f(\lambda)$

1) Alle sich auf die Erdoberfläche beziehenden Grössen sind durch einen horizontalen Strich gekennzeichnet.

sogar eine absolute Konstante sein, also

$$R\,T + \overline{V} = \text{const.} \tag{35}$$

Diese Konstante hat eine einfache physikalische Bedeutung; denn für den Nordpol ($u = 0$) ist (nach (34)) $T = 0$; nennt man also das magnetische Potential am Nordpol $\overset{*}{\overline{V}}$, so geht (35) über in die Gleichung:

$$R\,T + \overline{V} = \overset{*}{\overline{V}}, \tag{36}$$

woraus sich für T die Darstellung ergibt:

$$T(u, \lambda) = \frac{\overset{*}{\overline{V}} - \overline{V}}{R}. \tag{37}$$

Da nach Voraussetzung $\overline{X}$ auf der ganzen Erdoberfläche bekannt ist, so ist das gemäss (34) auch für T der Fall. Nun hat man nur partiell nach λ zu differentiieren und erhält:

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = -\frac{1}{R}\frac{\partial \overline{V}}{\partial \lambda},$$

und der Vergleich mit der zweiten Gleichung (33) zeigt, dass

$$\overline{Y} = \frac{1}{\sin u}\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{1}{\sin u}\int_0^u \frac{\partial \overline{X}}{\partial u}\,du \tag{38}$$

ist. Damit ist der behauptete Satz bewiesen, nämlich $\overline{Y}$ vollkommen bestimmt aus der Kenntnis von $\overline{X}$.

Gauss diskutiert nun die Frage, ob dieser Satz umkehrbar ist, d. h. also, ob $\overline{X}$ bestimmt ist, wenn $\overline{Y}$ für die ganze Erdoberfläche gegeben ist. Man sieht sofort, dass dies vollständig nicht der Fall sein kann; denn bei der obigen Argumentation spielt die Bestimmung der unbestimmten Funktion $f(\lambda)$ eine wesentliche Rolle; sie gelingt nur dadurch, dass die Meridiane am Nordpol zusammenlaufen. Für die Breitenkreise gilt ähnliches nicht, und so kann man von vorneherein erwarten, dass bei der Umkehrung des Satzes in $\overline{X}$ eine Funktion $\varphi(u)$ unbestimmt bleiben wird. In der Tat zeigt dies die Rechnung sofort. Denn bestimmt man unter der Voraussetzung, dass $\overline{Y}$ bekannt ist, eine Funktion $U(u, \lambda)$ durch die Forderung (u bei der Integration als konstant betrachtet):

$$U(u,\lambda) = \int \sin u\, \overline{Y} d\lambda, \tag{39}$$

also

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \sin u\, \overline{Y}(\lambda, u),$$

so wird die zweite der Gleichungen (33) zu:

$$\frac{1}{\sin u}\left\{\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{1}{R}\frac{\partial \overline{V}}{\partial \lambda}\right\} = 0$$

oder

$$RU + \overline{V} = \varphi(u), \tag{40}$$

d. h. das Aggregat $(RU + \overline{V})$ ist längs eines jeden Breitenkreises konstant, ändert sich aber im allgemeinen von Breitenkreis zu Breitenkreis. Für U folgt daraus die Darstellung:

$$U = \frac{1}{R}\varphi(u) - \frac{1}{R}\overline{V},$$

und durch partielle Differentiation nach u ergibt sich, unter Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (33):

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{1}{R}\varphi'(u) - \frac{1}{R}\frac{\partial \overline{V}}{\partial u} = \frac{1}{R}\varphi'(u) + \overline{X},$$

d. h.

$$\overline{X} = \frac{\partial U}{\partial u} - \frac{1}{R}\varphi'(u) = \frac{\partial U}{\partial u} + \psi(u). \tag{41}$$

$\overline{X}$ ist also nur bestimmt bis auf eine Funktion $\psi(u)$. Sobald man jedoch sämtliche $\overline{X}$-Werte längs eines Meridians (oder allgemeiner, längs einer beliebigen die geographischen Pole verbindenden Kurve) kennt, hat man auch sämtliche Werte der Funktion $\psi(u)$ und damit dann auch $\overline{X}$ auf der ganzen Erdoberfläche vollständig.

45. Eine wesentliche Verallgemeinerung, bei der die Vertikalkomponente Z mit in den Kreis der Betrachtung gezogen wird, erhält Gauss, indem er das Potential V für den Aussenraum der Erde mit Einschluss ihrer Oberfläche betrachtet. V erscheint nunmehr als Funktion von r, u, λ, wo r den Abstand vom Erdmittelpunkte bedeutet, und Gauss entwickelt nun V nach Kugelfunktionen (mit positivem Index), d. h. in eine Reihe nach fallenden Potenzen von r. Dies entspricht der Voraussetzung, dass die Ursache des normalen Erdmagnetismus im Innern der Erde ihren Sitz habe.

Gauss setzt an:

$$V = \frac{R^2}{r}\left\{P_0 + \frac{R}{r}P_1 + \frac{R^2}{r^2}P_2 + \frac{R^3}{r^3}P_3 + \cdots\right\}, \tag{42}$$

wobei die P_n natürlich Funktionen von u und λ, sogenannte »Kugelfunktionen«[1]) sind. Um die Beziehung der P_n zu der magnetischen Verteilung in der Erde festzustellen, muss man von der Definition des Potentials

$$V = -\int \frac{d\mu}{\rho}$$

ausgehen; darin ist ρ die Entfernung des an der Stelle (r_0, u_0, λ_0) befindlichen Elementes $d\mu$ von dem variabeln Aufpunkte (r, u, λ), d. h.

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2rr_0[\cos u \cos u_0 + \sin u \sin u_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] + r_0^2}. \tag{43}$$

Entwickelt man nun $\frac{1}{\rho}$ gleichfalls in eine Reihe nach fallenden Potenzen von r

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\left\{T_0 + \frac{r_0}{r}T_1 + \frac{r_0^2}{r^2}T_2 + \frac{r_0^3}{r^3}T_3 + \cdots\right\}, \tag{44}$$

wo auch die T_n als Funktionen von u und λ zu betrachten sind, so folgt für das Potential

$$V = -\int \frac{d\mu}{\rho} = -\int \frac{d\mu}{r}\left\{T_0 + \frac{r_0}{r}T_1 + \frac{r_0^2}{r^2}T_2 + \cdots\right\}, \tag{45}$$

und diese Reihe muss offenbar mit (42) identisch sein. So erhält Gauss durch Koeffizientenvergleichung die Beziehungen

$$\left\{\begin{array}{l} R^2 P_0 = -\int T_0 d\mu, \\ R^3 P_1 = -\int r_0 T_1 d\mu, \\ R^4 P_2 = -\int r_0^2 T_2 d\mu, \text{ u. s. w.} \end{array}\right. \tag{46}$$

T_0 ist aber, wie man durch Ausrechnung der Entwicklung (44) sieht, gleich Eins; also folgt, da $\int d\mu = 0$ ist, weil gleich viel nördlicher und südlicher Magnetismus in jedem Volumelement vorhanden ist, $P_0 = 0$. Die Reihe (42) wird also einfacher:

$$V = \frac{R^2}{r}\left\{\frac{R}{r}P_1 + \frac{R^2}{r^2}P_2 + \frac{R^3}{r^3}P_3 + \cdots\right\}. \tag{42a}$$

1) Genauer: Laplacesche Funktionen (Kugelfunktionen von zwei Veränderlichen).

Für P_1 erhält man einen Ausdruck von der Form

$$R^3 P_1 = \alpha \cos u + \beta \sin u \cos \lambda + \gamma \sin u \sin \lambda, \tag{47}$$

wo α, β, γ die folgende Bedeutung haben:

$$\alpha = -\int r_0 \cos u_0 d\mu; \quad \beta = -\int r_0 \sin u_0 \cos \lambda_0 d\mu; \quad \gamma = -\int r_0 \sin u_0 \sin \lambda_0 d\mu, \tag{48}$$

d. h. α, β, γ sind die negativ genommenen Komponenten des magnetischen Moments $\mathfrak{M}$ der Erde in bezug auf die drei Achsen: Erdachse und die beiden Äquatorradien für 0^0 und 90^0 Länge. In ähnlicher Weise kann man jedes beliebige P_n mit der magnetischen Verteilung in Beziehung setzen.

Für das Potential gilt die LAPLACEsche Gleichung:

$$\Delta V = 0;$$

transformiert man diese auf Polarkoordinaten r, u, λ und setzt in sie den Ausdruck (42a) für V ein, so erhält man die folgende partielle Differentialgleichung für die P_n:

$$0 = n(n+1) P_n + \frac{\partial^2 P_n}{\partial u^2} + \operatorname{cotg} u \frac{\partial P_n}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 P_n}{\partial \lambda^2}. \tag{49}$$

Setzt man zur Integration an:

$$P_n = \sum_m^{0,n} P_{n,m}(u) \{g_{n,m} \cos m\lambda + h_{n,m} \sin m\lambda\}, \tag{50}$$

wo die $P_{n,m}(u)$ die sogenannten »zugeordneten« Kugelfunktionen und die $g_{n,m}$ und $h_{n,m}$ Zahlenkoeffizienten sind, so findet man für $P_{n,m}$ die Form

$$P_{n,m} = \Big\{\cos u^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos u^{n-m-2} + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} \cos u^{n-m-4} - \cdots \Big\} \sin u^m, \tag{51}$$

und für P_n ergibt sich dann gemäss (50) ein Aggregat von $2n+1$ Teilen:

$$P_n = g_{n0} P_{n0} + (g_{n1} \cos \lambda + h_{n1} \sin \lambda) P_{n1} + (g_{n2} \cos 2\lambda + h_{n2} \sin 2\lambda) P_{n2} + \cdots + (g_{nn} \cos n\lambda + h_{nn} \sin n\lambda) P_{nn}. \tag{52}$$

Man erhält also zum Beispiel

$$\begin{cases} P_1 = g_{10} P_{10} + (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) P_{11}, \\ P_2 = g_{20} P_{20} + (g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda) P_{21} + (g_{22} \cos 2\lambda + h_{22} \sin 2\lambda) P_{22}, \\ P_3 = g_{30} P_{30} + (g_{31} \cos \lambda + h_{31} \sin \lambda) P_{31} + (g_{32} \cos 2\lambda + h_{32} \sin 2\lambda) P_{32} \\ \qquad + (g_{33} \cos 3\lambda + h_{33} \sin 3\lambda) P_{33}, \end{cases} \tag{53}$$

d. h. P_1 besteht aus 3, P_2 aus 5, P_3 aus 7, P_4 aus 9 Gliedern usw. mit je ebenso vielen Koeffizienten g und h.

Für die Komponenten X, Y, Z der magnetischen Kraft erhält man nun die folgende Darstellung:

$$(54)\qquad \begin{cases} X = -\frac{R^3}{r^3}\left(\frac{\partial P_1}{\partial u} + \frac{R}{r}\frac{\partial P_2}{\partial u} + \frac{R^2}{r^2}\frac{\partial P_3}{\partial u} + \cdots\right), \\ Y = -\frac{R^3}{r^3 \sin u}\left(\frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + \frac{R}{r}\frac{\partial P_2}{\partial \lambda} + \frac{R^2}{r^2}\frac{\partial P_3}{\partial \lambda} + \cdots\right), \\ Z = \frac{R^3}{r^3}\left(2P_1 + \frac{3R}{r}P_2 + \frac{4R^2}{r^2}P_3 + \cdots\right), \end{cases}$$

die sich für die Erdoberfläche ($r = R$) auf die folgenden reduzieren:

$$(55)\qquad \begin{cases} \overline{X} = -\left(\frac{\partial P_1}{\partial u} + \frac{\partial P_2}{\partial u} + \frac{\partial P_3}{\partial u} + \cdots\right), \\ \overline{Y} = -\frac{1}{\sin u}\left(\frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial P_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial P_3}{\partial \lambda} + \cdots\right), \\ \overline{Z} = 2P_1 + 3P_2 + 4P_3 + \cdots. \end{cases}$$

46. Nun geht Gauss auf das Theorem zurück, dass jede Funktion von λ und u, die für alle Werte von λ von 0^0 bis 360^0 und von u von 0^0 bis 180^0 einen bestimmten endlichen Wert hat, auf eine und nur eine Weise nach Kugelfunktionen entwickelt werden kann:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \cdots,$$

und kommt durch Kombination dieses Satzes mit dem Vorhergehenden zu folgenden wichtigen Aussagen:

I. Die Kenntnis des Potentials $\overline{V}$ auf der Erdoberfläche genügt, um die Kräfte X, Y, Z nicht nur auf der Erdoberfläche, sondern im ganzen Raume zu bestimmen. Denn wenn $\frac{\overline{V}}{R}$ in der obigen Weise entwickelt ist, kennt man die P_n, also nach (55) die Kraftkomponenten auf der Erdoberfläche und nach (54) die im ganzen Raume.

II. Auch die Kenntnis von $\overline{X}$ auf der ganzen Erdoberfläche allein reicht hin, um alles in I. angeführte zu bekommen. Denn nach (34) und (37) ist

$$\int_0^u \overline{X}\, du = \frac{\overset{*}{V} - \overline{V}}{R},$$

d. h. man kennt $\overline{V}$, womit das Gesagte bewiesen ist.

III. Analog reicht die Kenntnis von $\overline{Y}$ auf der Erdoberfläche, verbunden mit der Kenntnis von $\overline{X}$ längs einer die geographischen Pole verbindenden Kurve hin, um alles in I. Angeführte zu erlangen.

IV. Das gleiche gilt schliesslich für die $\overline{Z}$-Komponente. Ist nämlich diese etwa in eine Reihe

$$Q_0 + Q_1 + Q_2 + \cdots$$

entwickelt, so muss durch Vergleich mit der letzten Gleichung (55) sein:

$$(56) \qquad \begin{cases} Q_0 = 0 \\ Q_1 = 2P_1, \\ Q_2 = 3P_2, \\ Q_3 = 4P_3, \ldots \end{cases}$$

d. h. man kennt die P_n, kann folglich $\overline{V}$ konstruieren, und hat damit wieder die Bedingungen von I.

Im Vorhergehenden ist die vollständige Begründung der Behauptungen enthalten, die GAUSS in seinem im Artikel 41 angeführten Briefe an SCHUMACHER aufgestellt hat. Diese Sätze, die ja GAUSS spätestens 1832, wahrscheinlich schon viel früher[1]) bekannt waren, veranlassten ihn, sich bei seinen experimentellen Untersuchungen zunächst auf die Bestimmung der Horizontalkomponente und der Deklination zu beschränken, die ihm $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ lieferten, und von der Bestimmung der Inklination vorläufig abzusehen. Im Artikel 23 haben wir darauf hingewiesen, dass manche zeitgenössischen Naturforscher, unter ihnen kein Geringerer als ALEXANDER VON HUMBOLDT, ursprünglich Anstoss an dieser Einschränkung der Messungen nahmen, deren Grund sie nicht erkannten; wie GAUSS in einem Briefe an ENCKE[2]) ausdrücklich betont, waren die obigen Ausführungen eine indirekte (»zwischen den Zeilen«) Zurückweisung der Meinung HUMBOLDTS. Wegen der Lückenhaftigkeit des Beobachtungsmaterials hat GAUSS übrigens keinen Gebrauch von diesen Sätzen gemacht, vielmehr alle Komponenten gleichmässig bei der praktischen Anwendung seiner Theorie auf die Beobachtungen benutzt. Er bemerkt dazu[3]): »So interessant es übrigens sein

1) Vergl. hierzu die Ausführungen der Artikel 41 und 51.

2) GAUSS-ENCKE, Brief Nr. 56 vom 2. April 1839, unveröffentlicht.

3) *Allgemeine Theorie*, Werke V, S. 145.

würde, die ganze Theorie des Erdmagnetismus allein auf Beobachtung der horizontalen Nadel zu gründen, und damit den vertikalen Teil oder die Inklination zu antizipieren, so ist es doch dazu gegenwärtig noch viel zu früh. Die Mangelhaftigkeit der Data verstattet nicht, auf den Mitgebrauch des vertikalen Teils zu verzichten. Im Grunde empfängt auch die Theorie schon dadurch ihre Bestätigung, wenn die Vereinbarkeit sämtlicher Elemente unter ein Prinzip nachgewiesen werden kann.«

47. Der theoretische Teil der GAUSSischen Theorie des Erdmagnetismus ist damit im wesentlichen erledigt. Es folgt jetzt die Anwendung auf die Beobachtungen.

Dabei besteht folgende Schwierigkeit: Es ist zwar sicher, dass die Reihen für $\overline{V}$, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ konvergieren[1]), allein der Grad der Annäherung hängt davon ab, wie nahe sich die magnetischen Flüssigkeiten bis an die Erdoberfläche erstrecken; je weiter sie von der Erdoberfläche entfernt bleiben, umso schneller konvergieren die Reihen. Da darüber nichts bekannt ist, so ist man auf Probieren angewiesen. Geht man zum Beispiel bis zu den Gliedern 4. Ordnung einschliesslich, d. h. bis zu der Funktion P_4, so hat man nach den Auseinandersetzungen des vorhergehenden Artikels im ganzen $3+5+7+9=24$ Koeffizienten g und h zu bestimmen. Da jeder Wert $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ drei Gleichungen liefert, so würden also im Prinzip acht Beobachtungen an verschiedenen Stellen der Erde hinreichen, um diese Bestimmung zu liefern. Dies setzt indessen Beobachtungen von ganz anderer Genauigkeit voraus, als sie damals zur Verfügung standen, und so würde nichts anderes übrig bleiben, als alle Beobachtungen zu verwenden, und die genauesten Werte der g und h nach der Methode der kleinsten Quadrate zu ermitteln, — eine höchst langwierige Aufgabe. Durch einen Kunstgriff, dessen Schilderung wir hier übergehen können, hat GAUSS diese Rechenschwierigkeiten erheblich reduziert und ein System von Koeffizienten berechnet, die demgemäss die eigentlichen »Elemente des Erdmagnetismus« darstellen.

Beachtenswert ist, dass GAUSS sich in der Tat genötigt sah, bis zu den Gliedern 4. Ordnung zu gehen; obwohl Glieder 5. Ordnung sich noch nicht als

1) Die Frage der Konvergenz hat GAUSS selbst nicht erörtert, weder für $r<R$, wo sie ja auf der Hand liegt, noch für $r=R$. Für letzteren Fall lag 1838 schon der von DIRICHLET herrührende Konvergenzbeweis (1837, DIRICHLETs Werke I, S. 283 ff.) vor.

ganz einflusslos erwiesen, reichte die Genauigkeit der Messung nicht zu ihrer Berechnung aus. Spätere Forscher sind versuchsweise bis zu Gliedern 7. Ordnung mit 63 Koeffizienten gegangen, ohne eine entsprechend grössere Genauigkeit zu erzielen; man verliert sich nur in lokalen Störungen. So beschränkt man sich auch heute noch auf die 24 GAUSSischen Koeffizienten — ein glänzender Beweis für den mathematischen und physikalischen Takt des Schöpfers der Theorie.

Die Einheit der magnetischen Kraft pflegte man damals so zu wählen, dass die ganze Intensität in London gleich 1,372 wurde[1]). GAUSS ändert sie hier so ab, dass diese Intensität den 1000fachen Wert, also 1372 annahm. Eine Reduktion auf absolute Einheiten ist natürlich leicht möglich.

GAUSS erhält folgendes System für die »Elemente der Theorie des Erdmagnetismus«:

$g_{10} = +925{,}782$	$g_{22} = +\ 0{,}493$
$g_{20} = -\ 22{,}059$	$g_{32} = -73{,}193$
$g_{30} = -\ 18{,}868$	$g_{42} = -45{,}791$
$g_{40} = -108{,}855$	$h_{22} = -39{,}010$
$g_{11} = +\ 89{,}024$	$h_{32} = -22{,}766$
$g_{21} = -144{,}913$	$h_{42} = +42{,}573$
$g_{31} = +122{,}936$	$g_{33} = +\ 1{,}396$
$g_{41} = -152{,}589$	$g_{43} = +19{,}774$
$h_{11} = -178{,}744$	$h_{33} = -18{,}750$
$h_{21} = -\ 6{,}030$	$h_{43} = -\ 0{,}178$
$h_{31} = +\ 47{,}794$	$g_{44} = +\ 4{,}127$
$h_{41} = +\ 64{,}112$	$h_{44} = +\ 3{,}175.$

Damit sind dann die Werte für $\overline{V}$ sowie für $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ vollkommen bestimmt, woraus Horizontalintensität ω, ganze Intensität ψ, Deklination δ und Inklination i leicht berechnet und nun mit den Beobachtungen verglichen werden können.

Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung, obwohl sie im einzelnen viel zu wünschen übrig liess, ist doch im grossen und ganzen so gut, dass GAUSS sich berechtigt fühlen durfte, den mit den eben ange-

1) Vergl. die Anmerkung in Artikel 43, S. 77.

gebenen Koeffizienten berechneten Ausdruck $\frac{\overline{V}}{R}$ »als der Wahrheit nahekommend« zu betrachten; er hat daher durch Dr. GOLDSCHMIDT Karten der Niveaulinien herstellen lassen, deren eine in MERCATORprojektion den Erdgürtel zwischen 70^0 nördlicher und südlicher Breite zeigt, während die beiden andern in stereographischer Projektion die Polargegenden bis 65^0 Breite darbieten[1]). Es folgt aus der Betrachtung dieses Kurvensystems, — das GAUSS im grossen und ganzen als festliegend betrachtet —, dass die im Artikel 43 behauptete einfache Gestalt der Niveaulinien, die der Existenz zweier magnetischer Pole entspricht, wirklich für die Erde zutrifft. Und darüber hinaus ergibt sich die Festlegung der magnetischen Pole selbst. GAUSS fand

f. d. magn. Nord-Pol: $73^0\,35'$ n. Br., $264^0\,21'$ ö. L. n. Greenwich; $\psi = 1{,}701$[2])
f. d. magn. Süd-Pol: $72^0\,35'$ s. Br., $152^0\,30'$ ö. L.; $\psi = 2{,}253$[2]).

Kapitän Ross hatte den nördlichen Pol um $3^0\,30'$ südlicher gefunden als nach der Rechnung; der Südpol war zur Zeit der ersten Veröffentlichung der Theorie noch nicht bekannt. Es war ein Triumph für die GAUSSische Theorie, als im Jahre 1841 durch den amerikanischen Kapitän WILKES der magnetische Südpol festgelegt wurde zu etwa $70^0\,21'$ südlicher Breite, $146^0\,17'$ östlicher Länge, d. h. an einer Stelle, die nur wenig von der berechneten abweicht[3]).

48. Von Interesse sind noch einige daran anschliessende Rechnungsergebnisse von GAUSS über die Richtung der magnetischen Achse, d. h. die Richtung des magnetischen Moments der Erde, die Grösse des Moments und die Stärke der Magnetisierung der Erde.

Das magnetische Moment der Erde ist nach (48) allein durch das Glied 1. Ordnung bestimmt. Setzt man in (48) die Werte ein, wie sie aus den »Elementen« folgen, so findet GAUSS für die Komponenten des Moments die Werte:

$$(57) \qquad \begin{cases} -\alpha = -925{,}782\,R^3, \\ -\beta = -\ 89{,}024\,R^3, \\ -\gamma = +178{,}744\,R^3. \end{cases}$$

1) Sie sind erschienen im *Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie entworfen*, unter Mitwirkung von C. B. GOLDSCHMIDT, herausgegeben von C. F. GAUSS und W. WEBER, Leipzig 1840; Werke XII, S. 335 ff.

2) ψ für London $= 1{,}872$ gesetzt.

3) SCHUMACHERS Astronomische Nachrichten, Nr. 417, 9. Februar 1841; Werke V, S. 580.

Durch die Verhältnisse dieser drei Grössen ist auch die Richtung des Moments, d. h. die magnetische Achse bestimmt; sie ist parallel dem Erddurchmesser von $77^0\,50'$ nördlicher Breite und $296^0\,29'$ östlicher Länge nach $77^0\,50'$ südlicher Br. und $116^0\,29'$ östlicher L., und der gesamte Betrag des Moments in bezug auf diese Achse ist gleich $947{,}08\,R^3$, alle obigen Zahlen bezogen auf die Londoner Intensität $= 1372$. Zur Reduktion auf absolute Einheiten ist zu bemerken, dass nach obiger Einheit die ganze Intensität in Göttingen $= 1357$ wird, während ihr Wert in absoluten Einheiten (cm, gr, sec) nach der Messung von GAUSS $0{,}47414$[1]) beträgt. Der Reduktionsfaktor ist demgemäss $= 0{,}00034941$, und somit das magnetische Moment der Erde:

$$|\mathfrak{M}| = 3{,}33092\,R^3 \tag{58}$$

oder, den Radius der Erde $= 6{,}366 \cdot 10^8$ cm gesetzt:

$$|\mathfrak{M}| = 8{,}54 \cdot 10^{25} \text{ abs. Einheiten.} \tag{59}$$

GAUSS hatte früher in der *Intensitas*[2]) das Moment eines einpfündigen Magnetstabes $= 10087{,}7$ abs. Einheiten gefunden; im Vergleich zu diesem Stabe ist das Moment der Erde rund 8464 Trillionen mal grösser. »Es wären daher 8464 Trillionen solcher Magnetstäbe mit parallelen magnetischen Achsen erforderlich, um die magnetische Wirkung der Erde im äusseren Raum zu ersetzen, was bei einer gleichförmigen Verteilung durch den ganzen körperlichen Raum der Erde beinahe 8 Stäbe ... auf jedes Kubikmeter beträgt«[3]). Verglichen mit der Magnetisierung von Stahl ist übrigens die Erde äusserst schwach magnetisiert; ihr Moment beträgt nämlich nur rund $1/10000$ des gleichen Volumens maximal magnetisierten Stahles.

Zur Beurteilung der Genauigkeit des GAUSSischen Wertes (59) für das Moment mag erwähnt werden, dass nach einer neueren Bestimmung[4]) das Moment der Erde $8{,}35 \cdot 10^{25}$ ist, d. h. nur um rund 2 % von dem GAUSSschen Werte abweicht.

---

1) Da GAUSS mg und mm benutzt, kommt bei ihm 4,7414 heraus; entsprechend auch der Reduktionsfaktor.

2) *Intensitas*, Werke V, S. 111.

3) Werke V, S. 165.

4) L. A. BAUER, *Terrestrial Magnetism* 4, S. 33, 1899.

49. Von wesentlicher und grundsätzlicher Bedeutung ist eine Bemerkung, die GAUSS an diese Betrachtungen anknüpft. Nach einem Satze der Potentialtheorie, von dem GAUSS bereits in der *Intensitas*[1]) (vergl. Artikel 10) Gebrauch gemacht hat, »kann anstatt jeder beliebigen Verteilung der magnetischen Flüssigkeiten innerhalb eines körperlichen Raumes allemal substituiert werden eine Verteilung auf der Oberfläche dieses Raumes, so dass die Wirkung in jedem Punkte des äusseren Raumes genau dieselbe bleibt, woraus man leicht schliesst, dass einerlei Wirkung im ganzen äusseren Raume aus unendlich vielen verschiedenen Verteilungen der magnetischen Flüssigkeiten im Innern abzuleiten ist.« Diesen Satz hat GAUSS auch hier nicht bewiesen, sondern er verweist, wie in der *Intensitas*, auf eine spätere Gelegenheit[2]).

Die wirkliche Verteilung der magnetischen Mengen im Erdinnern bleibt also völlig unbestimmt; dagegen ist die »äquivalente Flächenbelegung« vollkommen festgelegt. Für die magnetische Flächendichte gibt GAUSS als Folge jenes potentialtheoretischen Satzes den Wert an:

$$(60) \qquad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\overline{V}}{R} - 2\overline{Z}\right) = -\frac{1}{4\pi}(3P_1 + 5P_2 + 7P_3 + 9P_4 + \cdots),$$

den er im einzelnen diskutiert; eine Karte dieser fingierten Flächendichte findet sich im *Atlas des Erdmagnetismus*[3]).

50. Zum Schluss seiner allgemeinen Theorie diskutiert GAUSS noch eine Anzahl von Problemen, die sich mittels seiner Theorie durch künftige genaue Beobachtungen würden aufklären lassen.

Zunächst wirft er die Frage auf, ob es als absolut gesichert angesehen werden könne — was bisher stets vorausgesetzt wurde —, dass in jedem Volumenelement gleich viel nördlicher und südlicher Magnetismus vorhanden sei. Wäre dies nicht der Fall, so würde die Kugelfunktion 0 ter Ordnung P_0, die bisher nach (46) gleich Null war, nicht verschwinden dürfen. Das würde, wie GAUSS zeigt, zur Folge haben, dass im Ausdruck (55) für die Vertikalkomponente $\overline{Z}$ das Glied P_0 hinzugefügt werden müsste; die Beobachtungen würden also erkennen lassen, ob zur exakten Darstellung von $\overline{Z}$ ein von Null

1) *Intensitas*, Werke V, S. 87.

2) Vergl. weiter unten Art. 52 ff.

3) Karten Nr. III und IV des *Atlasses*.

verschiedenes P_0 erfordert wird oder nicht. Obwohl GAUSS selbst keinen Zweifel an der exakten Gültigkeit der bisherigen Voraussetzung hegte, ist doch die grundsätzliche Möglichkeit der Prüfung ihm interessant genug gewesen, um sie ausdrücklich anzuführen. Die Prüfung selbst musste aus Mangel an hinreichend genauen Beobachtungen unterbleiben.

Eine zweite Frage ist die, ob wirklich der Sitz des normalen Erdmagnetismus im Erdinnern anzunehmen ist oder nicht; letzteres wurde von namhaften Naturforschern[1]) zu GAUSSens Zeit für möglich gehalten. Er untersucht deshalb, wie bei Annahme einer ausserhalb der Erde befindlichen Ursache die magnetischen Wirkungen auf der Erdoberfläche sich gestalten würden. Wieder wird vorausgesetzt, dass diese äussere Ursache ein Potential v besitze, das von den drei Variabeln r, u, λ abhängt und an der Erdoberfläche in den Wert $\bar{v}$ (u, λ) übergeht. Die Form der horizontalen Komponenten $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ bleibt unverändert, nämlich

$$\overline{X} = -\frac{1}{R}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u},$$
$$\overline{Y} = -\frac{1}{R\sin u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda},$$

dagegen nicht die der Vertikalkomponente $\overline{Z}$. Um diese zu ermitteln, muss v, als Funktion von r, u und λ betrachtet, nach r differentiiert werden, worauf $r = R$ zu setzen ist. Für den Innenraum aber kann v nur nach steigenden Potenzen von r entwickelt werden, nämlich so:

$$\frac{v}{R} = p_0 + \frac{r}{R}p_1 + \frac{r^2}{R^2}p_2 + \frac{r^3}{R^3}p_3 + \cdots. \tag{61}$$

Dabei ist p_0 eine Konstante von der physikalischen Bedeutung, dass Rp_0 den Wert des Potentials im Erdmittelpunkt angibt; dagegen sind die p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ Funktionen von u und λ, die derselben partiellen Differentialgleichung (49) gehorchen wie die P_n, also gleichfalls Kugelfunktionen. Führt man nun die Rechnung durch, so findet man für $\overline{Z}$ nicht die frühere Formel (55), d. h. nicht $2p_1 + 3p_2 + 4p_3 + \cdots$, sondern die neue davon total abweichende:

$$\overline{Z} = -p_1 - 2p_2 - 3p_3 - \cdots. \tag{62}$$

Die Beobachtungen sind aber mit (55) und nicht mit (62) im Einklange, also

1) Z. B. VON BREWSTER.

kann mit Sicherheit geschlossen werden, dass der normale Erdmagnetismus im wesentlichen seine Ursache im Innern der Erde haben muss.

Aber freilich kann, wie GAUSS selbst hervorhebt, nicht gefolgert werden, dass der totale Erdmagnetismus seinen Sitz im Erdinnern habe; ein kleiner Teil könnte — so genau waren die damaligen Beobachtungen nicht, als dass dies hätte entschieden werden können — immerhin von äusseren Ursachen erzeugt werden. GAUSS entwirft daher auch die Grundlinien einer Theorie, die die Ursache des normalen Erdmagnetismus sowohl im Innern als auch im Äussern der Erde sucht. Das Potential W setzt sich in diesem Falle additiv aus V und v zusammen, es ist also nach fallenden und steigenden Potenzen von r entwickelt, so dass auf der Erdoberfläche ($r = R$) die auftretenden Kugelfunktionen die Form

$$\Pi_n = P_n + p_n$$

haben. Ohne genauer auf die weitere Entwicklung einzugehen, wollen wir hier nur GAUSS' Resultat erwähnen, dass »man durch Kombination der horizontalen Kräfte mit den vertikalen das Mittel erhält, W in seine Bestandteile V und v zu scheiden, und also zu erkennen, ob letzterem ein merklicher Wert beigelegt werden muss«[1]).

GAUSS selbst hat die Beantwortung der aufgeworfenen Frage unterlassen und aus Mangel an Beobachtungen unterlassen müssen; aber neuere Untersuchungen[2]) haben wohl mit Sicherheit ergeben, dass rund 94 % des magnetischen Erdfeldes von innen stammen, rund 6 % von einer äusseren Ursache herrühren; dieser letztere Teil besitzt rund zur Hälfte ein Potential, die andere Hälfte des Aussenfeldes ist potentiallos[3]); es kann also die Gleichung von S. 77 $\int_0 \omega \cos t ds = 0$ nicht in Strenge bestehen.

Auch hier kann man nur GAUSSens wissenschaftliche Voraussicht bewundern, da die spätere Entwicklung seine Auffassung vollkommen gerechtfertigt hat.

51. Nach den obigen Darlegungen ist die GAUSSsche *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus* zu bezeichnen als eine »phänomenologische« Theorie, d. h.

1) *Allgemeine Theorie*, Werke V, S. 173.

2) Vergl. die Angaben bei ANGENHEISTER, Physik. Zeitschr. Bd. 26, S. 306. 1925.

3) Vergl. den Schluss des Artikels 43, Fussnote 2) S. 77.

als eine solche, die lediglich einer quantitativen Erfassung (»Beschreibung« im KIRCHHOFFschen Sinne) der Phänomene dient. Was eigentlich die Ursache des Erdmagnetismus ist, wodurch eine bestimmte Verteilung der magnetischen Mengen — die ja ganz unbestimmt bleibt — im Erdinnern bedingt ist: diese Fragen werden nicht einmal berührt. Die Tatsache ferner, dass die Richtung des magnetischen Moments doch sehr nahe mit der Richtung der Rotationsachse der Erde (nur zirka elf Grad Abweichung!) zusammenfällt, — eine Tatsache, die dem modernen Physiker kaum als Zufall erscheinen kann und sich ihm gerade zum interessantesten Problem gestaltet, — wird überhaupt nicht explizite erwähnt.

Diese Zurückhaltung liegt zum Teil wohl daran, dass GAUSS es nicht liebte, da, wo keine sicheren Indizien vorlagen, »unreife Hypothesen« zu machen, wie er einmal sagt. Man darf wohl annehmen, dass GAUSS sich mit Absicht jeder speziellen Annahme enthalten hat, auch wo er privatim bestimmte Anschauungen hatte. Seine Theorie liefert daher den grossen Rahmen, in den jede spätere (im eigentlichen Sinne des Wortes physikalische) Theorie sich einspannen lässt. Sie beruht auf allgemein gültigen mathematischen Sätzen und hat eben deshalb Ewigkeitswert, weil sie in gewissem, oben näher bezeichnetem Sinne leer ist.

Ein anderer Punkt verlangt noch besondere Besprechung. Wir haben in Artikel 42 die Kritik wiedergegeben, die GAUSS an den früheren theoretischen Versuchen übt, durch Annahme von einem oder mehreren Magneten im Erdinnern die Erscheinung des Erdmagnetismus zu erklären. Und doch ist sein Verfahren im Grunde genommen nichts anderes. Denn zum Beispiel das erste Glied seiner Reihe (42a) für V ist $\frac{R^3}{r^2} P_1$, und man überzeugt sich leicht nach (50) und (51), dass P_1 folgende Gestalt hat:

$$P_1 = g_{10} \cos u + (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) \sin u, \tag{63}$$

so dass dieses Glied der Reihe für V den Wert bekommt:

$$R^3 \frac{g_{10} \cos u + (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) \sin u}{r^3}. \tag{64}$$

Das ist aber nichts anderes als das Potential eines kleinen Magneten (eines magnetischen »Dipols«) von geeigneter Stärke, dessen Achsenrichtung durch die Winkel u und λ charakterisiert ist. Und ebenso stellt das zweite Glied der

Reihe (42a) $\frac{R^4 P_2}{r^3}$ das Potential eines Doppelmagneten (eines »Tetrapols«), das dritte Glied das Potential eines »Oktopols« dar u. s. w. Es ist nicht anzunehmen, dass dieser einfache Zusammenhang GAUSS entgangen sein sollte, wenn er ihn auch nicht ausdrücklich hervorgehoben hat. Die Stelle in dem in Artikel 41 zitierten Brief an SCHUMACHER vom 3. Mai 1832 »wenn wir erst im Besitz der allgemeinen .... Formel sind, ergeben sich diese ... Pole, wenn man sie wissen will, von selbst mit«, ist gar nicht anders zu erklären, als durch die Annahme, dass GAUSS diesen Sachverhalt erkannt hat. Sonderbar bleibt allerdings immer unter diesen Umständen die ablehnende Kritik an den älteren Versuchen. Sie ist aber wohl nur so zu verstehen, dass GAUSS das methodische Vorgehen der früheren Theorien missbilligt, und da kann ja allerdings kein Zweifel sein, dass die GAUSSische Theorie in dieser Hinsicht schlechthin vollendet ist.

Noch ein Punkt erscheint von besonderer Wichtigkeit. Dass GAUSS bereits 1832 alles Wesentliche seiner allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus besessen hat, ist sicher feststehend und im Vorhergehenden mehrfach belegt worden. Es finden sich aber in GAUSS' Briefen Angaben, die auf eine viel weiter zurückliegende Zeit hindeuten. In einem Schreiben an ENCKE[1]) vom 2. April 1839 heisst es von der »allgemeinen Theorie«: »Für mich war die Hauptsache, die abstrakte Theorie zu geben, ... die numerische Anwendung auf die Erde sehe ich als etwas ganz Sekundäres an, wozu es eigentlich noch zu früh ist und die ich ganz weggelassen hätte, wenn ich nicht, wie einmal das zum grössten Teile sehr böotische Lesepublikum ist, überzeugt gewesen wäre, dass ohne die Probe der Anwendung zu geben, die abstrakte Theorie gar nicht gehörig beherzigt werden würde. Ich hätte sonst diese abstrakte Theorie schon vor zehn oder zwanzig Jahren geben können ...«[2]).

Ganz in Übereinstimmung damit heisst es in einem Briefe vom 23. Januar 1842 an SCHUMACHER[3]): »... Gerade aus solchen Betrachtungen habe ich meine Behandlungsart des Erdmagnetismus, wovon das Theoretische schon vor 30 oder mehr Jahren hätte geschrieben werden können[2]),

1) GAUSS-ENCKE, Brief Nr. 56; unveröffentlicht.

2) Von mir gesperrt. — SCHAEFER.

3) GAUSS-SCHUMACHER IV, S. 52.

für die Publikation auszuarbeiten gezögert, solange ich garnicht von ferne adäquat, was dadurch geleistet werden kann, faktisch darlegen konnte; und selbst 1838 war es eigentlich noch fast zu früh dazu, aber ohne die numerische Anwendung hätte sonst wahrscheinlich entweder niemand die Theorie beachtet oder nur Albernheiten dagegen vorgebracht.«

Mit diesen Zeitangaben von GAUSS kommt man in das erste Jahrzehnt des XIX. Jahrhunderts zurück, und das stimmt vortrefflich zu der Tatsache, dass wir aus dem Jahre 1806 einen Brief von GAUSS an HARDING haben (vom 28. November 1806)[1]), in dem es heisst: »Wie gross setzen Sie die Deklination der Magnetnadel zu Göttingen? Können Sie mir nicht die Deklinationen für diejenigen Örter nachweisen, für die Herr v. HUMBOLDT im November-Heft der Monatlichen Korrespondenz die Inklinationen gibt? Oder auch für einige von denen, wofür HUMBOLDT im IV. Bande der Allgemeinen Geographischen Ephemeriden die Inklination angab? Deklination und Inklination zugleich für eine beträchtliche Anzahl von Örtern auf sehr verschiedenen Punkten der Erde, z. B. dem Kap, Batavia, in Südamerika, dem Südmeere, Nordamerika und Ägypten würden für mich einen ungemein grossen Wert haben. Ich wünschte, dass jemand aus dem vielen in den neuesten Zeiten gemachten Reisen Beobachtungen dieser Art in einem eigenen Werke sammelte. . . . . .« Aus diesem Briefe geht klar hervor, dass GAUSS schon damals die Daten für seine allgemeine Theorie des Erdmagnetismus zu bekommen versuchte. HARDINGS Antwort vom 1. Januar 1807 fiel negativ aus; kein Wunder: machte es doch noch 30 Jahre später Schwierigkeiten, das Material zu erhalten.

Es ergibt sich demgemäss, dass GAUSS schon im Jahre 1806 den allgemeinen Gedanken der Theorie des Erdmagnetismus besass, nämlich die Idee, das magnetische Potential der Erde nach Kugelfunktionen zu entwickeln und die Koeffizienten durch die Beobachtung zu bestimmen.

52. In gewissem Sinne der Abschluss seiner magnetischen Forschungen, wenn auch an Bedeutung darüber weit hinausragend, sind GAUSS' *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der*

1) Werke XII, S. 145; vergl. auch Anmerkung 1 auf S. 4.

Entfernungen wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte[1]). Ein Abschluss nicht in zeitlicher Hinsicht — denn zum Beispiel seine Inklinationsmessungen liegen später —, sondern weil bestimmte theoretische Grundlagen, auf die GAUSS sowohl in der *Intensitas* als auch in der *Allgemeinen Theorie* sich stützte, hier dargelegt und zum ersten Mal veröffentlicht sind. Diese Untersuchungen gehören auch deshalb in den Kreis der magnetischen herein, weil nachweislich GAUSS zu bestimmten Ergebnissen dieser Arbeit durch seine Beschäftigung mit dem Magnetismus angeregt worden ist.

In dieser Arbeit werden die Eigenschaften der Funktion

$$V = \sum \frac{\mu}{r}, \tag{65}$$

die schon in der *Allgemeinen Theorie* eine besondere Rolle gespielt hatte, untersucht, und hier taucht bei GAUSS auch zum erstenmal der Name »Potential« für dieselbe öffentlich[2]) auf. Für diese Funktion hat bekanntlich G. GREEN[3]) in seiner grossen 1828 erschienenen Arbeit *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* den Namen »Potentialfunktion« geprägt, und es läge nahe, schon aus diesem Grunde der Koinzidenz der Namengebung eine Abhängigkeit GAUSSens von GREEN anzunehmen. Aber GAUSS erwähnt die GREENsche Arbeit, die auch in England nahezu unbekannt blieb, nicht, und es gibt keinen Nachweis dafür, dass er sie gekannt habe. Wir kommen auf diese Frage noch später zurück; hier möge es genügen, zu betonen, dass auch aus der zunächst überraschenden Übereinstimmung in der Bezeichnung »Potential« nicht auf eine Abhängigkeit geschlossen werden kann. Denn die Begriffe »potentia« und »actus« gehören zum Sprachschatze der mittelalterlichen Philosophie, der ja an vielen Stellen seinen Einfluss auf physikalische Bezeichnungen ausgeübt hat. Der Name »potentielle Energie« ist natürlich erst viel später aufgekommen als die Bezeichnung »Potential« und vermutlich direkt von der Potentialfunktion abgeleitet; aber die Bezeichnung »aktuelle Energie« statt »kinetischer Energie«

---

1) *Resultate* i. J. 1839, Leipzig 1840; Werke V, S. 195. *Selbstanzeige*: Gött. Gel. Anz., Stück 50/51, S. 489 ff.; Werke V, S. 305.

2) Zum ersten Male benutzt GAUSS die Bezeichnung »Potential« in einer aus dem Oktober 1839 stammenden Notiz, die erst aus seinem Nachlass veröffentlicht wurde; siehe Werke X, 1, S. 316.

3) G. GREEN, Math. Papers, London 1871; ursprünglich veröffentlicht in Nottingham 1828.

zeigt deutlich, dass die gegensätzlichen Begriffe »potentia« und »actus« damals geläufig waren, z. B. in Form des scholastischen Satzes, dass jedem »actus« eine »potentia« vorausgehen müsse. Es ist daher durchaus wahrscheinlich, dass GAUSS und GREEN unabhängig voneinander denselben Namen gewählt haben, selbst wenn wir von allen anderen Erwägungen absehen, die für GAUSSens Unabhängigkeit sprechen. Übrigens kommt, wie STÄCKEL festgestellt hat, der Name »Potential« schon bei DANIEL BERNOULLI vor[1]), aber weder GREEN noch GAUSS dürften dies gewusst haben; vielmehr ist dies wieder ein Argument für die oben dargelegte Auffassung, dass das Wort dem Sprachgebrauch der mittelalterlichen Philosophie entstammt.

53. Von der GAUSSschen Abhandlung selbst wollen wir nur einige wichtige Sätze besprechen, die eine direkte Beziehung zum Magnetismus haben.

Im Abschnitt 22 seiner Abhandlung spricht er den Satz aus, der seither als »GAUSSscher Satz der Potentialtheorie« bezeichnet wird: »Ist ds ein Element einer einen zusammenhängenden endlichen Raum begrenzenden Fläche, P die Kraft, welche irgendwie verteilte Massen in ds in der auf die Fläche normalen Richtung ausüben, wobei eine nach innen oder nach aussen wirkende Kraft als positiv betrachtet wird, je nachdem anziehende oder abstossende Massen als positiv gelten, so wird das Integral $\int P ds$, über die ganze Fläche ausgedehnt, $4\pi M + 2\pi M'$, wenn M das Aggregat der im Innern des Raumes befindlichen, M' das der auf der Oberfläche nach der Stetigkeit verteilten Massen bedeuten.«

In der heutigen Terminologie ist $\int P ds$ der sogenannte »Kraftfluss« durch die Oberfläche; oder allgemeiner, wenn $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Vektor ist, so ist $\int \mathfrak{A}_n ds$ der »Fluss« des Vektors $\mathfrak{A}$ durch diese Fläche.

Der GAUSSsche Beweis stützt sich ausschliesslich auf den Satz, dass das Integral

$$\int \frac{\cos(nr)}{r^2} ds, \tag{66}$$

wenn (nr) der Winkel zwischen der Normalen n und der Richtung r ist, die von einem Massenteilchen zum Aufpunkte hingeht, die Werte Null, 2π oder 4π annimmt, je nachdem das betrachtete Massenteilchen ausserhalb der

1) Siehe EULERS *Methodus inveniendi etc.*, Lausanne 1744, S. 246.

Fläche, auf der Fläche oder innerhalb der Fläche liegt. Diesen Satz aber hat GAUSS schon in der Arbeit (1813) *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata*[1]) bewiesen. Es ist nun mehr als wahrscheinlich, dass GAUSS damals auch schon den oben formulierten Lehrsatz gehabt hat, der sich unmittelbar darbietet, da die Kräfte umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung sind. Verbindet man diese Erwägung mit den brieflichen Äusserungen GAUSSens, die wir im Artikel 51 zitiert haben, so ist die Vermutung nicht von der Hand zu weisen, dass dieser »GAUSSsche Satz« nebst einigen nahe verwandten schon in sehr frühe Zeit (vor 1810) zurückreichen mag.

Im folgenden Abschnitt 23. zeigt GAUSS, dass auch der Satz gilt

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 4\pi M, \tag{67}$$

da eben $\frac{\partial V}{\partial n}$ in diesem Falle gleich P, der Normalkomponente der Kraft, ist.

Setzt man $M = \int k\,dt$, wo dt das Volumelement des von der Fläche s eingeschlossenen Raumes ist, und beachtet man, dass nach POISSON

$$\Delta V = -4\pi k,$$

so findet man durch Kombination:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = -\int \Delta V\, dt. \tag{68}$$

Merkwürdigerweise findet sich dieser Satz, der auch als »GAUSSsche Integraltransformation« bezeichnet wird, nicht bei GAUSS ausgesprochen, noch weniger die allgemeinere Form:

$$\int \mathfrak{A}_n\, ds = -\int \operatorname{div} \mathfrak{A}\, dt, \tag{69}$$

wenn $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Vektor ist, der gewissen Stetigkeitsbedingungen zu genügen hat.

Diese Feststellung ist wichtig für die Beurteilung des Verhältnisses des GAUSSschen Satzes zu dem GREENschen. GREEN geht in seiner Abhandlung unmittelbar aus von dem folgenden Satze, den er durch partielle Integration beweist:

$$\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dt + \int \varphi \Delta \psi\, dt = -\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds, \tag{70}$$

1) Comm. soc. reg. scient. Gotting. rec. Vol. 2, 1813; Werke V, S. 1 ff.

wo φ und ψ zwei skalare Funktionen sind. Aus dem Satze (69), der sich aber, wie gesagt, nicht bei GAUSS findet, könnte man (70) durch spezielle Wahl des Vektors $\mathfrak{A}$ ableiten, indem man einfach setzt:

$$\mathfrak{A} = \varphi \operatorname{grad} \psi; \tag{71}$$

durch Einsetzen in (69) folgt sofort (70) und durch Vertauschung von φ und ψ durch Subtraktion auch der weitere GREENsche Satz:

$$\int (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) dt = -\int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) ds. \tag{72}$$

Also kann man sagen, dass (69) allgemeiner ist als die GREENschen Sätze, die sich als Spezialfälle aus ihm ergeben. Tatsächlich aber liegt die Sache für den von GAUSS aufgestellten Satz umgekehrt, da (69) bei GAUSS gar nicht vorkommt. Schon in der Form (68), die allerdings auch bei GAUSS nicht explizite auftritt, ist der GAUSSsche Satz ein Spezialfall des GREENschen (72). Denn man braucht ja nur zu setzen: $\psi = 1$, $\varphi = V$, so hat man (68), und daraus, vermöge der POISSONschen Gleichung auch (67), d. h. den Satz, der wirklich in der GAUSSschen Arbeit steht. Man muss also sagen, dass der wirklich ausgesprochene GAUSSsche Satz (67) ein Spezialfall des GREENschen Satzes (70) bzw. (72) ist.

Auch das ist für die Beurteilung einer eventuellen Abhängigkeit GAUSSens von GREEN von Wichtigkeit: GAUSS würde schwerlich einen Satz, den er als Spezialfall eines GREENschen Satzes erkannt hätte, der Veröffentlichung für wert gehalten haben.

54. Genau dieselben Erwägungen lassen sich bezüglich eines weiteren GAUSSschen Satzes anstellen, den er im Abschnitt 24. seiner Arbeit bringt:

$$\int V \frac{\partial V}{\partial n} ds = \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dt. \tag{73}$$

GAUSS beweist ihn durch partielle Integration, d. h. durch genau dieselbe Methode, die er schon in der Abhandlung über die Attraktion der Sphäroide benutzt hatte. Man erhält auch diesen GAUSSschen Satz leicht als Spezialfall des GREENschen, indem man in (70) einfach $\varphi = \psi = V$ setzt und $\Delta V = 0$ annimmt, d. h. im Innern der Fläche s keine Massen voraussetzt, was die Gültigkeitsbedingung von (73) ist. (Übrigens findet sich obiger Satz bei GREEN nicht als Spezialfall seiner Formel ausgesprochen.)

GAUSS brauchte diesen Satz (73), bezw. eine leichte Erweiterung desselben, um das folgende Theorem zu beweisen, dass wir nach der *Selbstanzeige*[1]) zitieren: »Wenn eine geschlossene Fläche eine Gleichgewichtsfläche für die Anziehungs- oder Abstossungskräfte von Massen ist, die sich sämtlich im äusseren Raum befinden, so ist die Resultante der Kräfte sowohl in jedem Punkte jener Fläche, als auch in jedem Punkte des ganzen inneren Raumes gleich Null.«

Das GAUSSsche Resultat ergibt sich, wenn man (73) mit (67) kombiniert; die letztere Gleichung geht nämlich in diesem Falle, da keine inneren Massen vorhanden sind, über in $\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0$, oder auch, mit einer Konstanten A multipliziert, in $\int A \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0$. Durch Subtraktion dieser Gleichung von (73) folgt die in Rede stehende Formel:

$$\int (V - A) \frac{\partial V}{\partial n} ds = \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dt. \tag{73 a}$$

Hat nun die Fläche als Gleichgewichtsfläche das konstante Potential $V = A$, so folgt, dass im ganzen inneren Raume

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

ist, d. h. dass die Kräfte sich im Innern vollständig zerstören, was zu beweisen war.

Zu dieser Untersuchung ist GAUSS veranlasst worden durch das Studium einer Abhandlung von POISSON[2]), in der behauptet wurde[3]), »dass es zur Erhaltung eines beharrlichen elektrischen Zustandes eines elektrisierten leitenden Körpers nicht zureichend sei, dass die innere Grenzfläche der freien, an der Oberfläche des Leiters befindlichen Elektrizität eine Gleichgewichtsfläche sei, sondern noch ausserdem erforderlich, dass diese Elektrizität auch in keinem Punkte des inneren Raumes Anziehung oder Abstossung ausübe.«

Demgegenüber zeigt der GAUSSsche Lehrsatz, dass die sogenannte zweite Bedingung POISSONS in der ersten enthalten ist.

---

1) *Selbstanzeige*, Werke V, S. 307.

2) S. D. POISSON, *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs*, Mémoires de l'Institut, année 1811, Paris 1812, S. 1.

3) *Selbstanzeige*, Werke V, S. 307.

Über den Zeitpunkt der Entstehung dieser Sätze sind wir orientiert durch einen Brief von GAUSS an BESSEL[1]) vom 31. Dezember 1831: ». . . . Bei der Lektüre von POISSONS älterer Abhandlung über die Elektrizität (1812) bin ich neulich auf einen meines Wissens neuen und, wie mir scheint, artigen Satz gekommen. Er geht davon aus, dass die freie Elektrizität sich unter der Oberfläche eines isolierten Leiters sammelt, und meint, es sei nicht zureichend, dass die Resultante aller Abstossungen in jedem Punkte der inneren Oberfläche jener Elektrizitätsschicht auf diese senkrecht sei, sondern die physische Aufgabe erfordere ausserdem noch die Bedingung, dass die Resultante in jedem Punkte des innern eingeschlossenen Raumes gleich Null werde, weil sich sonst neue Elektrizität zersetzen würde. Man mag diese Behauptung an sich zugeben, allein ich beweise, dass, unter Voraussetzung der Repulsion im verkehrten doppelten Verhältnis des Abstandes, die zweite Bedingung schon von selbst in der ersten enthalten ist. Dann wird es offenbar ein Fehler, von neuem an die physische Natur zu appellieren, wo die Mathematik den Gegenstand schon von selbst darreicht. Mein Satz gilt ebenso gut von anziehenden Kräften und heisst dann: wenn ein wie immer gestalteter homogener oder nicht homogener Körper aus Teilen besteht, die eine Anziehungskraft im verkehrten doppelten Verhältnis des Abstandes ausüben, und dieser Körper einen hohlen Raum umschliesst, an dessen Begrenzung in keinem Punkte eine schiefe Resultante statthat, so ist die Resultante in jedem Punkte dieser Begrenzung sowohl als in jedem Punkte des hohlen Raumes gleich Null. — Sobald man den Satz einmal aufgefasst hat, ist die Beweisführung eben nicht schwer zu finden. . . .«

Die Auffindung des fraglichen Satzes durch GAUSS ist also mit Sicherheit in die Mitte des Jahres 1831 zu setzen.

Ein weiteres Theorem der GAUSSschen Abhandlung hängt unmittelbar damit zusammen, dürfte also ebenfalls in dieser Zeit von GAUSS gefunden worden sein. In der anschaulichen Formulierung der *Selbstanzeige*[2]) lautet es: »Ein weiteres Theorem bezieht sich auf den anderen Fall, wo die anziehenden oder abstossenden Massen sich innerhalb des von einer geschlossenen Fläche begrenzten Raumes befinden. Hier wird in jedem Punkte der Fläche, wenn

1) GAUSS-BESSEL S. 504; Werke XI, 1, S. 116.

2) *Selbstanzeige*, Werke V, 307.

sie eine Gleichgewichtsfläche ist, die resultierende Kraft nach einerlei Seite gerichtet sein, auch wenn anziehende und abstossende Massen zugleich vorhanden sind; je nachdem nämlich das Aggregat der ersteren oder das der anderen das grössere ist, wird die Resultante in allen Punkten nach innen oder nach aussen gerichtet sein; ist aber das Aggregat der anziehenden Massen dem der abstossenden gleich, so wird, wenn es überhaupt eine geschlossene und umschliessende Gleichgewichtsfläche gibt, die Resultante der Kräfte in jedem Punkte derselben und zugleich im ganzen äusseren Raume gleich Null sein.« —

Dass Gauss sich um die Mitte des Jahres 1831 mit der Lektüre der Poissonschen Abhandlung beschäftigte, ist vermutlich kein Zufall, sondern dadurch bedingt, dass er in der Darstellung der Lehre vom Magnetismus auf eine Schwierigkeit stiess, über die er sich zunächst in der ihm zugänglichen Literatur zu informieren suchte. In dem in Artikel 9 (oben S. 13) zitierten Briefe von Gauss an Encke[1]) vom 18. August 1832 heisst es: »In dem bisherigen Vortrag der Lehre vom Magnetismus findet sich aber soviel Vages, Nichtssagendes Unlogisches, ... dass hier erst ganz von neuem aufgebaut werden muss. Es gehört dahin der Begriff der Pole, dann der schreiende Widerspruch, dass man einmal annimmt, in jedem Teilchen einer Nadel sei ebensoviel nördlicher als südlicher Magnetismus, und nachher doch immer so spricht, als sei an einem Ende der Nadel nur der eine, am andern der andere Magnetismus. Mich hat diese Verworrenheit bei Biot im vorigen Herbst, als ich anfing, mich mit diesen Dingen zu beschäftigen, erst lange gequält. ... Durch die Beziehung auf die Elektrizität hat Biot die Sache nur verwirrter gemacht. Ich bin nun freilich in diesen Dingen schon lange zu völliger Klarheit gekommen, allein es gehören dazu mehrere neue höchst interessante Lehrsätze, die sehr tief liegen, deren Entwicklung die Grenzen der mir zunächst vorgesetzten Arbeit weit, sehr weit überschreiten würde. ...«

Der Hinweis Biots auf die Verhältnisse bei der Elektrizität mag Gauss veranlasst haben, Poissons Abhandlung aus dem Jahre 1812 durchzusehen. Er fand dort freilich nicht die Auflösung seiner Schwierigkeit, sondern stiess auf die oben charakterisierte Behauptung Poissons, die ihn dann dazu veranlasste, die Sache genauer zu untersuchen und richtig zu stellen.

---

1) Gauss-Encke, Werke XI, 1, S. 83.

55. Die Notwendigkeit, die im obigen Briefe erwähnte Schwierigkeit zu überwinden, hat GAUSS dann gleichfalls Mitte oder Ende des Jahres 1831 zur Auffindung des Theorems geführt, das er selbst als den wichtigsten Teil seiner Abhandlung ansieht. Er spricht diesen Satz in der folgenden Fassung aus[1]): »Anstatt einer beliebigen gegebenen Massenverteilung D, welche entweder bloss auf den inneren von einer geschlossenen Fläche S begrenzten Raum beschränkt ist, oder bloss auf den äusseren Raum, lässt sich eine Massenverteilung E bloss auf der Fläche selbst substituieren, mit dem Erfolge, dass die Wirkung von E der Wirkung von D gleich wird in allen Punkten des äusseren Raumes für den ersten Fall, oder in allen Punkten des inneren Raumes für den zweiten.«

Das ist der Satz, auf den GAUSS in der *Intensitas* und der *Allgemeinen Theorie* sich mehrfach gestützt hat. Er ist eine Folgerung aus dem vorhergehenden Hauptsatz, dass es stets eine und nur eine Verteilung einer gegebenen Masse über eine Fläche gibt, so dass das Potential dieser Masse in allen Punkten jener Fläche vorgeschriebene Werte annimmt.

Über die Frage der Stringenz von GAUSSens Beweisführung für den letztgenannten Satz, die sich im wesentlichen auf einen Gedankengang stützt, den RIEMANN später das »DIRICHLETsche Prinzip« genannt hat, braucht hier nicht gesprochen zu werden. Sicher ist, dass dieser Satz mit dem Komplex der zu ihm gehörigen Folgerungen erst um 1831 entstanden ist; sicher ist auch in diesem Punkte keinerlei Abhängigkeit von GREEN vorhanden.

56. Fasst man alles vorhin Gesagte zusammen, so kann man sich etwa folgendes Bild von der allmählichen Entstehung der GAUSSschen Resultate machen:

Schon relativ früh, etwa um 1810, hat GAUSS wahrscheinlich das Theorem besessen

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 4\pi M \text{ bezw. } = 0,$$

das sich unmittelbar an einen Satz anschliesst, den er in der 1813 erschienenen Abhandlung über die Anziehung der elliptischen Sphäroide veröffentlicht hatte.

1) Werke V, S. 240.

Etwa gleichzeitig ist die Idee entstanden, durch Konstruktion der Niveauflächen eine Art Topographie des entsprechenden elektrischen, magnetischen oder Schwerefeldes zu erhalten[1]). Insbesondere hat Gauss auch die allgemeine Vorstellung gehabt — spätestens 1806 —, dass die Erde ein magnetisches Potential besitze, und dass dieses nach Kugelfunktionen entwickelt werden könne, mit positivem oder negativem Index, je nachdem die Ursache des Erdmagnetismus im Innern oder im Äussern der Erde zu suchen sei.

Im Jahre 1831 fand er, angeregt durch eine unrichtige Behauptung Poissons, die Sätze über Gleichgewichtsflächen, im gleichen Jahre endlich den Satz von der »äquivalenten« Flächenbelegung, angeregt durch eine besondere Schwierigkeit in der Lehre vom Magnetismus.

Eine Bekanntschaft mit Greens *Essay* ist danach mit Sicherheit als nicht vorhanden zu betrachten.

II. Gauss' Untersuchungen über Galvanismus, Elektromagnetismus, Elektrodynamik und Induktion.

Erster Abschnitt: Galvanismus und Elektromagnetismus.

57. Schon früher[2]) haben wir darauf hingewiesen, dass Gauss im Verlaufe seiner magnetischen Untersuchungen fast zwangsläufig dazu geführt wurde, auch die Erscheinungen des Galvanismus, der Elektrodynamik und der Induktion in den Kreis seiner Betrachtungen einzubeziehen. Ein Zufall ermöglicht es, fast genau den Tag anzugeben, an dem er zum ersten Male das Magnetometer, das zu diesem Zwecke mit einer vielfachen Drahtwickelung versehen war, zur Messung eines galvanischen Stromes, also als Galvanometer, oder, wie er sagt, als »Multiplikator« benutzte.

1) Vergl. hierzu insbesondere eine darauf bezügliche Notiz aus Handbuch 21 (Bg), abgedruckt Werke XI, 1, S. 71; das Handbuch ist angefangen im September 1813; die Notiz stammt mit Sicherheit aus dem Jahre 1814.

2) Vergl. z. B. Artikel 19.

Um den 22. Oktober 1832 herum, jedenfalls nach dem 20. und vor dem 28. Oktober, hat GAUSS den Besuch des englischen Astronomen SIR JAMES SOUTH und des jungen Hamburger Mechanikers REPSOLD gehabt. Am 21. Oktober nämlich meldet SCHUMACHER[1]) an GAUSS ihre bereits erfolgte Abreise von Altona nach Göttingen, und GAUSS bemerkt in einem Briefe vom 14. Dezember 1832 an SCHUMACHER[2]), dass er »seit kurzem, einen Tag vor Herren REPSOLD-SOUTHS Ankunft« seine Apparate auch auf die galvanischen Erscheinungen angewendet habe. Da GAUSS[3]) am 28. Oktober 1832 an GERLING das Gleiche berichtet, so muss SOUTH zwischen dem 21. und 28. Oktober, vermutlich am 22. Oktober in Göttingen gewesen sein, so dass wir den Beginn der Untersuchungen über Galvanismus etwa auf den 21. Oktober 1832 festsetzen müssen.

In dem genannten Briefe an GERLING heisst es: »Meine magnetischen Apparate habe ich, erst seit ganz kurzem, mit dem Galvanismus in Verbindung zu setzen angefangen, ein für mich noch fast ganz neues Feld, wo sich aber eine unabsehbare Aussicht zu neuen Versuchen öffnet. . . . Die Ihnen ohne Zweifel bekannten Messungen von FECHNER, von denen mir WEBER sagte, dass sie die feinsten bisher gemachten seien, erscheinen mir wie höchst grobe Annäherungen. Selbst von einem kleinen Plattenpaar zeigt sich die Wirkung so gross, dass ihre allmähliche Abnahme, mit grösster Regelmässigkeit fortschreitend, in jeder einzelnen Sekunde eine sehr augenfällige Grösse wird und geraume Zeit hindurch bleibt.«

Man ersieht daraus, welches GAUSSENS erste Versuche waren: er mass die Stromstärke eines kleinen galvanischen Elementes und konstatierte die allmähliche Abnahme desselben in Folge der Inkonstanz der elektromotorischen Kraft.

Diese Versuche haben GAUSS aufs höchste interessiert; er habe »die grösste Befriedigung gefunden«, heisst es in dem oben genannten Briefe vom 14. Dezember 1832 an SCHUMACHER; sie sind ein Grund mehr für GAUSS gewesen, den Bau eines magnetischen Observatoriums zu betreiben und, in seinem amt-

1) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 309.
2) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 310.
3) GAUSS-GERLING, S. 401 ff.

lichen Berichte[1]) an das Universitätskuratorium vom 29. Januar 1833 wird schon ausdrücklich hervorgehoben: »Endlich würde diese Einrichtung zu fast unzähligen andern magnetischen, galvanomagnetischen und elektromagnetischen Beobachtungen und Messungen dienen, und gewiss manche bisher noch dunkle Punkte in diesen Lehren dadurch aufgehellt werden können.«

58. Aus Gaussens Bericht[2]) an die Göttingische Gesellschaft der Wissenschaften über die Errichtung und die Aufgaben des magnetischen Observatoriums geht Genaueres über die getroffenen Einrichtungen und die nächsten Ziele der Beobachtungen hervor. Es heisst dort: »Ebenso, wie mit dem früheren in der Sternwarte aufgestellten Apparate, hat man nun auch mit dem gegenwärtigen im magnetischen Observatorium Vorrichtungen zu elektromagnetischen Versuchen und Messungen verbunden. Der aufgehängte Magnetstab ist von einem aus 200 Umwindungen bestehenden Multiplikator umgeben, dessen Konstruktion die Anwendung von nicht besponnenem Drahte erlaubte; die Drahtlänge beträgt 1100 Fuss. Mit Hilfe eines sehr einfach konstruierten Kommutators kann der Beobachter, ohne sein Auge vom Fernrohr zu entfernen, jeden Augenblick die Richtung des galvanischen Stromes umkehren, oder den Strom ganz unterbrechen.

»Wir können hierbei eine mit den beschriebenen Einrichtungen in genauer Verbindung stehende grossartige und bisher in ihrer Art einzige Anlage nicht unerwähnt lassen, die wir unserm Professor Weber verdanken. Dieser hatte bereits im vorigen Jahre [1833][3]) von dem physikalischen Kabinett aus über die Häuser der Stadt hin bis zur Sternwarte eine doppelte Drahtverbindung geführt, welche gegenwärtig von der Sternwarte bis zum magnetischen Observatorium fortgeführt ist. Dadurch bildet sich eine grosse galvanische Kette, worin der galvanische Strom, die an beiden Endpunkten befindlichen Multiplikatoren mitgerechnet, eine Drahtlänge von fast 9000 Fuss zu durchlaufen hat. . . . . Diese Anlage ist ganz dazu geeignet, zu einer Menge der interessantesten Versuche Gelegenheit zu geben. Man bemerkt nicht ohne Be-

1) Werke XI, 1, S. 55, insbesondere S. 58.

2) Gött. Gel. Anz., Stück 128 vom 9. August 1834, S. 1265 ff.; Werke V, S. 519.

3) Ein darauf bezüglicher Briefwechsel Webers mit dem Magistrat von Göttingen ist veröffentlicht in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, Band 40, S. 265, 1927; man vergleiche auch den Brief von Gauss an Humboldt vom 13. Juni 1833, Werke XII, S. 312 ff. — Schaefer.

wunderung, wie ein einziges Plattenpaar am andern Ende hineingebracht, augenblicklich dem Magnetstabe eine Bewegung erteilt, die zu einem Ausschlage von weit über 1000 Skalenteilen ansteigt; noch auffallender aber findet man, wenigstens anfangs, dass ein Plattenpaar von sehr geringer Grösse, z. B. einen Zoll im Durchmesser, und unter Verwendung von blossem Brunnen- oder selbst destilliertem Wasser eine nicht viel kleinere Wirkung hervorbringt, als ein sehr grosses Plattenpaar mit starker Säure. Und doch ist dieser Umstand bei näherer Überlegung ganz in der Ordnung, und dient nur zu neuer Bestätigung der schönen, zuerst von OHM aufgestellten Theorie. Bei Vermehrung der Anzahl der Plattenpaare wächst hingegen die Wirkung und zwar dieser beinahe proportional. Die Leichtigkeit und Sicherheit, womit man durch den Kommutator die Richtung des Stromes und die davon abhängige Bewegung der Nadel beherrscht, hatte schon im vorigen Jahre [1833] Versuche einer Anwendung zu telegraphischer Signalisierung veranlasst, die auch mit ganzen Wörtern und kleinen Phrasen auf das vollkommenste gelangen. Es leidet keinen Zweifel, dass es möglich sein würde, auf ähnliche Weise eine unmittelbare telegraphische Verbindung zwischen zweien, eine beträchtliche Zahl von Meilen voneinander entfernten Örtern einzurichten; allein es kann hier natürlich nicht der Ort sein, Ideen über diesen Gegenstand weiter zu entwickeln.«

Man sieht, dass es sich zunächst um Versuche handelte, die zur Prüfung des OHMschen Gesetzes dienen sollten, aus denen sich dann — gewissermassen ganz von selbst — die Möglichkeit einer elektromagnetischen Telegraphie entwickelte. (Vergl. weiter unten Art. 65.)

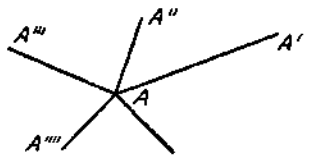
Aus den Angaben von GAUSS lassen sich, wenigstens ungefähr, die Dimensionen der verwendeten Kupferdrähte und ihre Widerstände bestimmen. Man findet für den Draht, der zu den Multiplikatoren verwendet wurde, einen Durchmesser von ungefähr 0,23 mm, als Gesamtwiderstand der beiden Multiplikatoren rund 300 Ohm; für den zur »Kette« verwendeten dickeren Draht ergibt sich ein Durchmesser von rund 1,1 mm und ein Widerstand von ungefähr 40 Ohm, also ein Gesamtwiderstand (Kette + 2 Multiplikatoren) von etwa 340 Ohm. Danach ergibt sich leicht die von GAUSS angedeutete Erklärung seiner Versuche; der »äussere« Widerstand (340 Ohm) ist gross gegen den »inneren« des Plattenpaares, die elektromotorische Kraft in den beiden von GAUSS erwähnten Fällen ungefähr dieselbe, also auch der Ausschlag.

Hintereinanderschaltung mehrerer Elemente vergrössert die elektromotorische Kraft proportinal der Zahl der Elemente, also in demselben Verhältnisse auch den Ausschlag.

Etwa dieselben Angaben wie in dem obigen Bericht macht GAUSS auch in Briefen an HUMBOLDT vom 13. Juni 1833[1]), an ENCKE vom 20. August 1833[2]) und an OLBERS vom 20. November 1833[3]). Erwähnenswert ist aus dem letzteren noch, dass GAUSS angibt, er habe einen »Kommutator« konstruiert, von dem er auch schon in dem obigen Bericht spricht. Es ist möglich, dass eine Notiz mit Zeichnung von GAUSS[4]) im *Handbuch* 19 (Be), überschrieben *Rotationskommutatoren mit drei Gleisen*, sich auf die hier erwähnte Konstruktion bezieht, möglich freilich auch, dass diese Zeichnung eine spätere Umänderung des ursprünglichen Kommutators ist.

59. Dass GAUSS sich in der Tat zunächst sehr eingehend mit dem OHMschen Gesetz und seinen Konsequenzen befasst hat, geht gleichfalls hervor aus einer Aufzeichnung[5]), die er etwa im März 1833 gemacht hat und die erst aus seinem Nachlass veröffentlicht wurde.

Dort beschäftigt GAUSS sich mit der Frage, wie sich die Ströme auf die einzelnen Teile eines galvanischen Stromsystems verteilen. Er erörtert zunächst die Frage nach den Stromstärken in den zu einem Verzweigungspunkt hinführenden Drähten (siehe Figur 1). »Dass allgemeine Grundgesetz ist nun, dass, wenn A ein beliebiger Punkt ist, A', A'', A''' ... Punkte, die jeder mit A einfach verbunden sind, ... man für jeden Punkt etwas der Höhe Analoges anzunehmen hat, also a im Punkte A, a' im Punkte A' u. s. w., dass dann immer



Figur 1.

$$0 = \frac{a'-a}{AA'} + \frac{a''-a}{AA''} + \frac{a'''-a}{AA'''} + \cdots,$$

und dass dann immer die einzelnen Teile dieses Aggregates die Stromintensitäten in den einzelnen Teilen ausdrücken.«

---

1) Werke XII, S. 312

2) Werke XI, 1, S. 85.

3) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 601.

4) Abgedruckt Werke XI, 1, S. 68.

5) Werke V, S. 601 ff.

Das, was GAUSS hier als »etwas der Höhe Analoges« bezeichnet, ist das elektrische Potential an jeder Stelle des Leiters, die Differenzen $(a'-a)$, $(a''-a)$, ... demgemäss die Potentialdifferenzen der Punkte A', A'', ... gegen A. Mit den Längen AA', AA'', ... meint GAUSS die Widerstände der Drähte, die von A', A'', ... nach A hinführen (bezw. ihnen proportionale Grössen), sodass also jeder der obigen Summanden der Quotient aus Potentialdifferenz und Widerstand, d. h. nach dem OHMschen Gesetze die Stromstärke in jedem einzelnen Zweige (bezw. eine ihr proportionale Grösse) darstellt. Nennt man sie entsprechend I', I'', I''', ... so geht die obige Gleichung über in:

$$0 = I' + I'' + I''' + \cdots = \sum I.$$

Das ist aber nichts anderes, als einer der bekannten Sätze, die GUSTAV KIRCHHOFF im Jahre 1845[1]) für Stromverzweigungen angegeben, und den GAUSS also unzweifelhaft zwölf Jahre vorher besessen hat.

Auch den andern KIRCHHOFFschen Satz hat schon GAUSS ausgesprochen. Denn in demselben Fragment heisst es weiter:

»In jedem Punkte findet ein bestimmter Druck statt, sobald an einem Punkte dessen Wert willkürlich angenommen ist. Zwei Sätze reichen dann zu, alles in Gleichungen zu bringen:

I. Sind A, B zwei Punkte, zwischen welchen kein Knotenpunkt ist, ist P die Summe der Kräfte zwischen diesen Punkten von A nach B zu geschätzt, ρ der Gesamtwiderstand zwischen diesen Punkten, a, b die Werte des Druckes für jene Punkte, so ist:

$$\frac{a-b+P}{\rho} = \text{Intensität des Stromes von } A \text{ nach } B \text{ zu.}$$

II. Die Summe der Intensitäten aller Ströme von einem Punkte aus gerechnet (mehr als zwei, wenn ein Knotenpunkt) ist $= 0$.«

Satz II ist der schon oben erwähnte KIRCHHOFFsche Satz; in I dagegen finden wir das andere Theorem KIRCHHOFFS. Was GAUSS vorher als »etwas der Höhe Analoges« sich selbst näher zu bringen versuchte, nennt er hier »Druck«; es ist, wie bereits gesagt, das elektrische Potential[2]); P ist die »eingeprägte« (von galvanischen Elementen oder dergl. herrührende) elektromotorische Kraft.

1) G. KIRCHHOFF, Ges. Werke, S. 1, 1845; S. 22, 1847.

2) Interessant ist, dass GAUSS 1833 den Namen »Potential« also noch nicht gebrauchte; vergl. hierzu noch Artikel 52, oben S. 95.

GAUSS hat dann weiter in einer Aufzeichnung[1]), die sich unmittelbar daran anschliesst, für eine ziemlich komplizierte Stromverzweigung die Gleichungen nach diesen Prinzipien aufgestellt und sowohl den Gesamtwiderstand des Systems, als auch die Stromstärken in den einzelnen Zweigen berechnet.

Es folgt dann noch eine äusserst interessante Bemerkung über ein gewisses »Minimalprinzip«. Er sagt[2]): »Das Grundprinzip führt zugleich dahin, dass

$$\sum ri^2$$

ein Minimum sein muss, wo r den einem Elemente entsprechenden Widerstand, i die Intensität des Stromes bedeuten«, wofür dann ein einfacher Beweis folgt. In der heutigen Ausdrucksweise würden wir sagen, dass die JOULESche Wärme unter den Bedingungen der »KIRCHHOFFschen« Sätze ein Minimum wird. Die physikalische Bedeutung der Grösse $\sum ri^2$ als »Stromwärme« hat GAUSS offenbar nicht gekannt; es findet sich auch keinerlei Andeutung darüber, dass die Erzeugung von Wärme durch den elektrischen Strom ihn jemals beschäftigt hätte. Den Satz vom »Minimum der Stromwärme« hat übrigens später auch KIRCHHOFF gefunden[3]).

60. Weitere Aufzeichnungen von GAUSS[4]) über das OHMsche Gesetz finden sich im *Handbuch* 19 (Be). Er betrachtet dort einfache Schaltungen, in denen ein Erreger — ein später zu besprechender Induktor, was hier nebensächlich ist — mit einem Widerstand und einem Multiplikator, dann mit zwei Widerständen und einen Multiplikator hintereinander geschaltet ist; der dritte Sonderfall, den GAUSS betrachtet, ist der, dass der Strom des Erregers zwei parallel geschaltete Widerstände und den Multiplikator durchläuft. Es finden sich in der GAUSSschen Aufzeichnung auch die Formeln, die das OHMsche Gesetz für diese drei Fälle liefert.

Hand in Hand damit gehen Versuche, um festzustellen, ob die Stromstärke im ganzen Leiter räumlich konstant ist, bezw. damit im Zusammenhang, ob der galvanische Strom eine messbare »Geschwindigkeit« in der Drahtleitung

1) Werke V, S. 603.

2) Werke V, S. 603.

3) GUSTAV KIRCHHOFF, Ges. Werke, S. 33 ff., 1848.

4) Abgedruckt Werke XI, 1, S. 68.

habe. In einem Briefe an GERLING[1]) vom 4. Dezember 1834 heisst es darüber: »Die Versuche damit[2]) eröffnen ein ganz neues Feld zu Resultaten in scharfen quantitativen Verhältnissen. Die Unmessbarkeit der Zeit, in der der Strom-[kreis] durchlaufen wird, ist bereits konstatiert; wir vergleichen die Uhren dadurch auf einen kleinen Bruchteil der Sekunde genau. Die Stärke des Stromes ist an allen Stellen dieselbe, höchst wichtiges Resultat, dessen Zulässigkeit während Regens jedoch erst noch geprüft werden muss. . . . .« Dieselben Äusserungen finden sich etwas detaillierter in einem Bericht GAUSSENS[3]) an die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vom 7. März 1835. Nachdem er zuerst erwähnt hat, dass in den Stromkreis jetzt drei Multiplikatoren eingeschaltet seien (einer in der Sternwarte mit 25 pfd. Stab, einer im magnetischen Observatorium mit 4 pfd. Stab, einer im physikalischen Kabinett mit 1 pfd. Stab) heisst es weiter: »Wenn ein galvanischer Strom mit der Kette in Verbindung gesetzt wird, so erscheinen die Bewegungen der Magnetstäbe in den drei Apparaten so augenblicklich, dass ihr Anfang bis auf einen kleinen Bruch einer Zeitsekunde sich genau beobachten lässt. Die Vergleichung der Uhren bei den drei Apparaten liefert so vollkommen übereinstimmende Resultate, der Strom möge an dem einen Ende oder an dem andern, oder in der Mitte erzeugt sein, dass daraus die Unmessbarkeit der Zeit, in welcher der Strom eine halbe Meile durchläuft, vollkommen bestätigt wird. Nach den interessanten Versuchen von WHEATSTONE[4]), welche neulich in den Philosophical Transactions für 1834 bekannt gemacht sind, und nach welchen der elektrische Strom in Metallen eine grössere Geschwindigkeit zu haben scheint, als das Licht im Raume, liess sich freilich ein solcher Erfolg schon vermuten, obwohl sich daraus doch noch nicht unbedingt auf das Verhalten eines galvanischen Stromes und dessen Einwirkung auf die Magnetnadel schliessen liess.

»Die Intensität eines galvanischen Stromes wird durch die Ablenkung der Magnetnadel, also zunächst durch Skalenteile, gemessen oder bestimmt, allein

1) GAUSS-GERLING, S. 421 ff.; auch Werke XI, 1, S. 96.

2) Nämlich mit der galvanischen Kette. — SCHAEFER.

3) Gött. gel. Anz., Stück 36, S. 345, 17. März 1835; Werke V, S. 528 ff.

4) Gemeint ist die Abhandlung von CHARLES WHEATSTONE: *An account of some experiments to measure the velocity of electricity and the duration of electric light*, Philosophical Transactions 1834. — SCHAEFER.

offenbar in den drei Apparaten mit verschiedenen Einheiten, welche von den Dimensionen der Multiplikatoren und der Geltung der Skalenteile in Bogensekunden abhängen. Nun zeigen aber zahlreiche angestellte Versuche, dass zwischen den Ablenkungen an den drei Apparaten durch denselben Strom in einerlei Augenblick stets genau ein konstantes Verhältnis stattfindet, der Strom möge an dem einen oder an dem anderen Ende oder in der Mitte erzeugt sein. Es ergibt sich daraus das wichtige Resultat, dass der Strom in seiner ganzen Länge dieselbe Intensität hat, wenigstens nichts merkliches davon verliert. Man wird in Zukunft besonders aufmerksam darauf sein, ob dieses Resultat auch unter eigentümlichen Umständen, namentlich während starken Regens, seine Gültigkeit behält.»

In einem schon früher (Artikel 23, oben S. 43) angeführten Brief von Gauss an Schumacher[1]) vom 23. April 1836 findet sich eine numerische Angabe, aus der man die Genauigkeit derartiger Messungen beurteilen kann. Der »Beginn einer Bewegung«, hier der Magnetstäbe, lässt sich natürlich grundsätzlich nicht genau bestimmen; die »Fortpflanzungsgeschwindigkeit« des Stromes könnte relativ recht klein sein und doch bei einer derartigen Anordnung als »unmessbar gross« erscheinen. Dieser letztere Ausdruck ist eben nur relativ (nämlich im Hinblick auf die Leistungsfähigkeit der verwendeten Versuchsanordnung) zu nehmen. Gauss gibt als Beobachtungsgenauigkeit in dem obigen Bericht einen kleinen Bruchteil einer Sekunde. Aus dem genannten Briefe geht hervor, dass zwei Uhrvergleichungen, die einmal durch den galvanischen Strom, das andere Mal durch Benutzung einer starken magnetischen Variation vorgenommen wurden, um zwei Zehntel einer Sekunde von einander abwichen. Später[2]) gibt Gauss einmal 0,1 Sek. als Genauigkeit an. Das dürfte in der Tat die Höchstgrenze des bei der Gaussschen Anordnung Erreichbaren sein.

Noch ein Punkt ist von Interesse, im Hinblick auf Gaussens Andeutung, dass man aus den Wheatstoneschen Versuchen noch nichts Sicheres über das Verhalten des »galvanischen« Stromes schliessen könne. Diese Bemerkung bezieht sich auf die Tatsache, dass die Versuche Wheatstones mit den Entladungsfunken Leydener Flaschen gemacht sind; zu Gaussens Zeiten galt es noch keineswegs als ausgemacht, dass die statische und die galvanische Elek-

1) Gauss-Schumacher III, S. 53.

2) Gauss-Olbers II, 2, S. 617; Werke XI, 1, S. 99.

trizität identisch seien. GAUSS hat in der Tat einen direkten Versuch ausgeführt, um die Identität beider Elektrizitäten zu beweisen. In einem Briefe an ENCKE[1]) vom Januar 1836 heisst es: »Auch hier in Göttingen ist im Laufe des vergangenen Jahres manches neue experimentiert. Wir haben die Reibungselektrizität durch die Kette vom Physikalischen Kabinett bis zur Sternwarte getrieben, ihre magnetische Wirkung gemessen und gefunden, dass unter gewissen Vorsichtsmassregeln nur wenig unterwegs verloren geht.« Der Nachweis der Identität liegt dabei in dem Auftreten der magnetischen Wirkung der Reibungselektrizität.

Ausführlicher zur selben Frage hat sich GAUSS[2]) in der der Göttinger Gesellschaft vorgelegten Abhandlung über das Bifilarmagnetometer geäussert. Dort heisst es: »Die elektromagnetischen Wirkungen der gewöhnlichen Reibungselektrizität, wenn man sie durch den Multiplikator gehen lässt, gehören zu den schwächsten, schwer zu erkennenden und noch schwerer zu messenden. Bekanntlich ist das Dasein solcher Wirkungen zuerst von COLLADON entdeckt und später von FARADAY bestätigt. Anstatt wie diese Physiker getan haben, eine starke elektrische Batterie durch den Leitungsdraht zu entladen, beobachtete der Hofrat GAUSS die Wirkung der Reibungselektrizität bei fortgesetzter Drehung einer im physikalischen Kabinette aufgestellten Elektrisiermaschine, deren Konduktor und Reibzeug mit den Enden der grossen, nach der Sternwarte gehenden, Kette verbunden waren. In dieser Kette befand sich der Multiplikator, welcher den Magnetstab des neuen[3]) Apparats umgibt, und dieser Stab wurde dadurch in einer Ablenkung von 144 Skalenteilen oder 51 Minuten erhalten, positiver oder negativer, je nach der Richtung, in welcher die Elektrizität den Multiplikator durchlief. Die Drahtlänge der Kette betrug hierbei etwa 13000 Fuss; aber als besonders merkwürdig muss noch der Umstand hervorgehoben werden, dass eine Verlängerung der Kette bis fast zu einer ganzen Meile, durch Hineinbringen anderen Drahts, gar keine Verminderung der elektromagnetischen Wirkung hervorbrachte. In dieser Beziehung verhält sich also die strömende Maschinenelektrizität anders, als die galvanischen Ströme, die hydrogalvanisch, thermogalvanisch, oder durch In-

1) Werke XI, 1, S. 103.

2) Gött. gel. Anz., St. 173, S. 1721, 30. Oktober 1837; Werke V, S. 352.

3) Gemeint ist das Bifilarmagnetometer. — SCHAEFER.

duktion erregt werden, und deren durch die magnetische Wirkung gemessene Intensität immer desto schwächer wird, je länger die schliessende Kette ist. Allein weit entfernt einen wesentlichen inneren Unterschied zwischen jenen und diesen Strömen zu beweisen, dient jene Erscheinung vielmehr zu einer Bestätigung der Gleichheit und derjenigen Theorie, welcher zufolge ungleiche Intensität zweier Ströme nichts weiter ist, als ungleiche Menge in gegebener Zeit jeden Querschnitt der Leitung durchströmender Elektrizität. Nur setzen gegebene elektromotorische Kräfte der zuletzt genannten Arten desto weniger Elektrizität in Bewegung, je grösser der Widerstand ist, den die längere Kette entgegensetzt. Aber bei dem oben angeführten Versuche musste alle von der Maschine auf den Konduktor in Funkenform überspringende Elektrizität die ganze Kette durchlaufen, um sich mit der entgegengesetzten des Reibzeugs auszugleichen, die Kette mochte kurz oder lang sein. . . . . Die Menge der in bestimmter Zeit jeden Querschnitt des Leitungsdrahtes durchströmenden Elektrizität hing also garnicht von der Länge der Kette, sondern nur von dem Spiele der Maschine ab.«

Die hier erwähnte Besonderheit beruht einfach darauf, dass der »innere« Widerstand der Elektrisiermaschine ungeheuer gross gegen den der Kette war; wie Gauss hervorhebt, ist die Erscheinung mit dem Ohmschen Gesetze also vollständig im Einklang.

Ganz analoge Versuche haben Gauss und Weber, gleichfalls Ende 1835 und Anfang 1836, mit der Thermoelektrizität gemacht; auch hier handelte es sich um die Frage, ob die auf diese Weise erzeugten Ströme identisch mit den galvanischen seien. In dem nämlichen Brief an Encke, in dem der Versuch über die Reibungselektrizität erwähnt wird, findet sich eine Nachschrift mit folgenden Worten: ». . . . . In den letzten Tagen haben wir auch angefangen, uns mit den thermogalvanischen Strömen zu beschäftigen. Vermittels einer einfachen Vorrichtung können wir solche durch die ganze, eine Meile lange Kette treiben, sodass z. B. von der Sternwarte aus sämtliche vier Magnetometer (worunter jetzt 2 mit 25 pfd. Stäben, da Weber sich auch einen solchen aufgehängt hat) in sehr bedeutende Bewegungen gesetzt werden können. Die Natur dieser Ströme ist durchaus nicht von den auf andere Weise hervorgebrachten verschieden.« Ganz ebenso schreibt er am 17. Januar 1836 an

SCHUMACHER[1]) und am 1. März 1836 auch an OLBERS[2]). Hier findet sich überdies noch eine interessante Bemerkung: »Vielleicht kann man davon für die Pyrometrie (Hochöfen, Porzellanöfen, Schmelzöfen etc.) sehr wichtige Anwendungen machen.« Hier zeigt sich wieder in glänzendster Weise GAUSSens divinatorischer Blick. Öffentlich bekannt gemacht über seine Untersuchungen über Thermogalvanismus hat GAUSS nur wenige kurze Sätze in dem schon genannten Aufsatz über das Bifilarmagnetometer[3]). Dort heisst es: »Der neue Apparat[4]) dient zur scharfen Messung selbst der schwächsten galvanischen Ströme. . . . . In Beziehung auf thermogalvanisch erregte Ströme widerlegt sich dadurch auf das evidenteste die irrige Meinung vieler Physiker, als ob jene eine Kette von bedeutender Länge nicht durchdringen könnten. Durch eine noch so lange Kette werden solche Ströme nicht aufgehoben, sondern nur, und zwar genau, in demselben Verhältnisse geschwächt, wie bei andern Erregungsarten. Unter Anwendung eines thermogalvanischen Apparates von eigentümlicher Konstruktion bringt die blosse Berührung der Verbindungsstellen mit dem Finger einen galvanischen Strom hervor, der, selbst wenn er eine fast zwei Meilen lange Kette meistens sehr dünnen Drahts zu durchlaufen hat, doch noch in sehr bedeutenden Ablenkungen des Magnetstabes sich zu erkennen gibt.« Über die Konstruktion des besonderen thermogalvanischen Apparats, den GAUSS erwähnt, ist nichts bekannt.

61. Wir haben schon bemerkt, dass GAUSS einen Kommutator konstruiert hat, dessen er selbst mehrfach Erwähnung tut. Die Benutzung dieses Instruments hat ihn zu mancherlei Beobachtungen geführt, die später von Bedeutung geworden sind. In einem Briefe an OLBERS vom 20. November 1833[5]) heisst es: ». . . . Ich habe mir eine einfache Vorrichtung ausgedacht, wodurch ich augenblicklich die Richtung des Stromes umkehren kann, die ich einen Kommutator nenne. Wenn ich so taktmässig an meinen Platten operiere, so wird in sehr kurzer Zeit . . . . die Bewegung der Nadel im physikalischen Kabinett so stark, dass sie an eine Glocke anschlägt, hörbar in

1) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 435; Werke XI, 1, S. 106.

2) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 633; Werke XI, 1, S. 106.

3) Werke V, S. 354.

4) Nämlich das Bifilarmagnetometer. — SCHAEFER.

5) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 601.

einem anderen Zimmer. Das ist jedoch mehr Spielerei . . . .« Hier spielt GAUSS auf die Beobachtung an, dass man durch Kommutieren des Stromes im Takte der Schwingungsdauer des Galvanometers dessen Ausschläge »multiplizieren« kann. Diese an sich ja aus andern Gebieten der Physik wohlbekannte Erscheinung ist die Grundlage der später von WEBER[1]) veröffentlichten sogenannten »Multiplikationsmethode«; auch bei GAUSS finden sich Aufzeichnungen im *Handbuch* 19 (Be)[2]) die dazu Beziehungen haben, freilich allgemeiner sind. Er behandelt dort u. a. die Aufgabe: »Fünf Kommutationen des galvanischen Stromes so anzuordnen, dass zwei in der Kette befindliche Nadeln nachher ebensogrosse Schwingungen haben, wie vorher.« Natürlich ist es GAUSS nicht entgangen, dass man durch andere Betätigung des Kommutators die Schwingungen eines Magnetstabes in der mannigfaltigsten Weise beeinflussen kann, und es findet sich z. B. in dem nämlichen *Handbuch* eine Notiz über »den Lauf der Elongationen, bei abwechselnd angebrachten Induktionsstössen«. Die dort gegebenen Formeln kommen im wesentlichen auf diejenigen heraus, die WEBER[3]) später in seiner »Zurückwerfungsmethode« mitgeteilt hat. Es ist danach unzweifelhaft, dass der Ursprung beider Methoden auf die gemeinsame Arbeit von GAUSS und WEBER zurückgeht.

62. Es ist fast selbstverständlich, dass GAUSS, nachdem er die magnetischen Messungen auf absolute Masse zurückgeführt hatte, den Gedanken fasste, das Gleiche für die galvanischen Ströme zu leisten. Die erste Andeutung eines solchen Planes findet sich in einem Brief an ENCKE[4]) vom Januar 1836, in dem es heisst: »Mehr sagen meinem Geschmack zwei andere damit nahe zusammenhängende Arbeiten zu, wovon auch schon Einiges niedergeschrieben ist. Die eine über allgemeine Theoreme, die im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte betreffend . . . . . .; die zweite über die Grundgesetze der galvanischen Ströme und der Induktion und deren Zurückführung auf absolute Masse. Beides sind aber keine Arbeiten, die man aus dem Ärmel schütteln kann . . . . .«

In der Tat hat GAUSS gegen Ende des Jahres 1835 begonnen, eine Ab-

1) WILHELM WEBER, Werke III, S. 488.
2) Werke XI, 1, S. 63 ff.
3) WILHELM WEBER, Werke III, S. 441 ff.
4) Werke XI, 1, S. 102.

handlung mit dem Titel zu schreiben: »*Zurückführung der Wechselwirkung zwischen galvanischen Strömen und Magnetismus auf absolute Masse*«, die sich als Torso in seinem Nachlass vorgefunden hat[1]).

Er benutzt dort zunächst das BIOT-SAVARTsche Gesetz, um die Mittel zur Abmessung der Stärke eines galvanischen Stromes zu finden. Nennt man dieselbe I, so ist die Kraft K eines Stromelementes ds auf eine magnetische Menge μ im Abstande r ihrem Betrage nach gleich:

$$K = f\frac{\mu I\,ds}{r^2}\sin(rs), \tag{74}$$

wo f einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Indem GAUSS diesen gleich Eins und dimensionslos annimmt, gewinnt er die Gleichung:

$$K = \frac{\mu I\,ds}{r^2}\sin(rs). \tag{74 a}$$

Daraus folgert er für die »Dimension« der Stromstärke I:

$$[I] = \left[\frac{\mu}{l}\right] = [m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}], \tag{75}$$

wenn m, l, t die zu Grunde gelegten Einheiten von Masse, Länge und Zeit sind[2]). Damit ist die gestellte Aufgabe grundsätzlich gelöst; praktisch insofern nicht, als man Stromelemente und ihre magnetischen Wirkungen niemals isolieren kann. GAUSS geht daher dazu über, auf Grund des BIOT-SAVARTschen Gesetzes, die magnetische Wirkung von bestimmten geschlossenen Leiterformen, z. B. von einem Rechtecke oder von mehreren hintereinandergeschalteten Rechtecken, auf eine Magnetnadel zu behandeln, und gibt so eine quantitative Theorie des Galvanometers, indem es nun möglich ist, aus dem Ausschlage desselben die Stromstärke in absoluten Einheiten zu bestimmen.

---

1) Abgedruckt Werke XI, 1, S. 178.

2) Im engsten Zusammenhange damit steht eine Aufzeichnung GAUSSens, im *Handbuch* 19 (abgedruckt Werke V, S. 630), die eine Tabelle der Dimensionen folgender physikalischer Grössen enthält: Geschwindigkeit, Dichte, Expansibilität der Flüssigkeit, spezifische Elastizität bei bestimmter Temperatur, Beschleunigungskraft, Masse, Druck, Wirkung = lebendige Kraft = Drehungsmoment, Wirksamkeit [= Effekt = Leistung], Erdmagnetismus, freier Magnetismus = Stärke eines ganzen Stromes, Erregungskraft von Kupfer zu Zink, Leitungsvermögen bestimmten Metalls. — Dass hier auch die Masse aufgeführt wird, hat bei GAUSS den Sinn, dass er mit Hülfe des Gravitationsgesetzes, in dem die Gravitationkonstante dimensionslos = 1 gesetzt wird, die Masseneinheit durch Länge und Zeit ausdrücken kann (sog. astronomisches Mass-System). Diese Aufzeichnung stammt wohl auch aus derselben Zeit (1835).

Eine Anzahl von Beispielen, in denen GAUSS zum ersten Male Ströme in absolutem Mass gemessen hat, erläutert den theoretischen Sachverhalt. Unter den von GAUSS angeführten Beispielen sei das fünfte besonders erwähnt, weil hier die Stromstärke, die eine Elektrisiermaschine liefert, gemessen wird[1]): »Indem der Konduktor und das Reibzeug einer Elektrisiermaschine in die Kette gebracht war, wurde die Maschine fortwährend gedreht, eine Umdrehung auf eine Sekunde. Dabei war die Wirkung $\varphi = 1'\,57''{,}6$, und der Durchgang der Elektrizität äquivalierte einem Strome, für welchen

$$I = 0{,}0005701\, l\,.\, H = 0{,}00105\, m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}\text{«}.$$

Dabei ist H die in absolutem Mass gemessene Horizontalintensität des Erdmagnetismus und l die gewählte Längeneinheit[2]). Nimmt man die GAUSSschen Einheiten (Milligramm, Millimeter, Sekunde), so wird $H = 1{,}78$ und $l = 1$. Es folgt dann der zweite in der Gleichung angegebene numerische Wert.

Bei dieser Gelegenheit hat GAUSS auch die »inneren« und »äusseren« Widerstände der benutzten galvanischen Elemente und der Kette in absolutem Masse gemessen.

Der zweite Abschnitt der GAUSSschen Abhandlung trägt den Titel: *Allgemeine Ausdrücke für die Kraft, mit welcher ein wie immer geformter Leiter eines galvanischen Stromes auf ein magnetisches Element in jedem Punkte des Raumes wirkt.* Danach zu schliessen, sollte darin wohl die allgemeine AMPÈRE-sche Idee von der Äquivalenz geschlossener Ströme mit Magneten behandelt werden. Allein das Manuskript bricht noch in der Einleitung ab.

Im Zusammenhang damit stehen offenbar Aufzeichnungen im *Handbuch* 19 (Be)[3]) die aus dem Jahre 1835 stammen, in denen es sich um den Beweis des AMPÈRESchen Fundamentalsatzes handelt.

63. Aus späterer Zeit ist noch eines isolierten Versuches Erwähnung zu tun, der der Ausgangspunkt einer wichtigen Anwendung hätte werden können, wenn er weiter verfolgt worden wäre, und wenn die Zeit reif dazu gewesen wäre. GAUSS[4]) schreibt am 19. Juli 1838 an WEBER: ». . . . . Vor einigen

1) Werke XI, 1, S. 193.

2) Die Bezeichnungen sind hier gegen GAUSS geändert.

3) Werke V, S. 622 ff.

4) Werke XI, 1, S. 174.

Tagen habe ich noch einmal versucht, Kohle in die galvanische Kette zu bringen. Meine alten (20 Jahre alten) Kohlen leiten garnicht, während frisch ausgeglühte Kohlen einen vergleichsweise gegen die 13000 Fuss lange Drahtkette .... nur kleinen Widerstand darboten. Was mir aber besonders merkwürdig war, ist, dass pulverisierte Kohlen (frische) in einer breiten und dünnen Schicht zwischen zwei Metallplatten garnicht leiten wollten. Ich weiss nicht, ob dies auch schon von anderen bemerkt ist.«

Die Gausssche Beobachtung ist vollkommen richtig; der Übergangswiderstand zwischen fein pulverisierten Kohlenstücken ist praktisch unendlich. Nicht bemerkt hat Gauss, dass der Widerstand durch Erschütterung erheblich herabgesetzt werden kann. Diese Beobachtung hätte grundsätzlich zum Mikrophon führen können.

64. Etwas abseits von den oben behandelten Problemen liegt eine Äusserung Gaussens über die Kontaktelektrizität und die Voltaische Spannungsreihe. Sie findet sich in einem Briefe an Weber[1]) vom 27. Januar 1844 und ist veranlasst durch eine Mitteilung Webers über einen Versuch, die Kontaktspannungsdifferenz experimentell nachzuweisen; der Versuch scheint übrigens nicht veröffentlicht worden zu sein, man kann ihn indessen aus dem Gaussschen Briefe rekonstruieren. Er hat Gauss Gelegenheit gegeben, seine Ansicht auszusprechen. Es heisst an der genannten Stelle: »Ihr Versuch, wodurch Sie die elektrische Ungleichheit des Zinks und Kupfers direkt erkennbar und messbar machen, hat mich sehr interessiert, und ich bin geneigt, zu glauben, dass er der Anfangspunkt zu höchst wichtigen Fortschritten in dieser Lehre werden könnte. Ich fühle dabei aufs neue schmerzlichst, wie schön es gewesen sein würde, wenn ich mit Ihnen zusammen in diesem Felde hätte arbeiten können.

»Rechnungen über die Verteilung der Elektrizität auf Ihrer zwei-metalligen Kugel lassen sich noch gar nicht machen, da es noch am Besten fehlt, nämlich an dem präzisen physikalischen Prinzip, wovon die Rechnungen ausgehen müssen. Diesem Prinzip vor allem muss man auf die Spur zu kommen suchen; ist es einmal gefunden und befestigt, so wird es auf einmal

1) Werke XI, 1, S. 174 ff.

in der Lehre Tag werden, und neue Entdeckungen, wie scheffelweise die Äpfel von einem schwer belasteten Fruchtbaum uns von selbst in den Schoss fallen.

»Wie die Elektrizität auf einem leitenden (elektrisch homogenen) Körper sich verteilt, dazu hat bekanntlich Poisson vor 30 Jahren die Grundgleichungen gegeben und die Folgen für mehrere interessante, wie wohl immer höchst einfache Fälle entwickelt. Nach Voltas Meinung, an die ich vor Ihrem Versuch niemals recht habe glauben können, verteilt sich die Elektrizität auf einem zusammengesetzten Körper anders, als auf einem homogenen, so zwar, dass z. B. Zink mehr positive Elektrizität enthält, wenn es mit Kupfer verbunden ist, als es haben würde, wenn es mit ebenso geformtem Zink verbunden wäre. Aber es ist dies nicht viel mehr als Nichts wissen, so lange wir nicht das Quantitative dieses Mehr im ganzen wie im einzelnen klar überschauen können, und dazu fehlt es zur Zeit noch an Allem. Aber Versuche werden schon auf die Spur führen können, wenn sie in grösster Mannigfaltigkeit und in möglichster Schärfe ausgeführt werden . . . . . .«

Es folgt dann eine Reihe von Abänderungsvorschlägen zum Weberschen Versuch und dann heisst es weiter: »Ich habe eben Poissons Arbeit .... erwähnt. Die mathematische Kunst darin verdient alle Anerkennung, aber ich habe noch einige Zweifel, ob die physikalische Grundlage richtig ist. Ich meine, ob diejenige Wirkung der Elektrizitätselemente aufeinander, welche dem Quadrat verkehrt proportional ist, hier allein im Spiel ist, oder ob nicht zugleich eine Art Molekularaktion in Betracht gezogen werden muss, die viel mehr dabei wirkt, etwa so, wie bei liquiden Flüssigkeiten die gegenseitige Gravitation der Teile . . . . nur die zweite Rolle spielt neben nur in unmessbar kleinen Entfernungen wirkenden Kräften. Es ist dies in diesem Augenblick nur ein flüchtiger Gedanke, da das Gewicht der von Poisson beigebrachten Versuche mir jetzt nicht gegenwärtig genug ist. Bei einer blossen Wirkung proportional $\frac{1}{d^2}$ kann ich mir von der Ursache des Voltaischen Fundamentalsatzes gar keine Vorstellung machen; bei einer Mitwirkung von Molekularkräften liesse sich schon eher etwas dem Kalkül zugängliches denken . . . .«

In diesen Bemerkungen hat Gauss in der Tat den entscheidenden Punkt mit aller Schärfe bezeichnet, nämlich, dass die Kontaktspannungen nur erklärbar sind, wenn gewisse Molekularkräfte angenommen werden, die die verschiedenen Metalle auf die beiden Elektrizitäten in verschiedenem Masse ausüben.

Dieser Gedanke taucht bei GAUSS wohl zum ersten Male auf; erst einige Jahre später (1847) hat HELMHOLTZ[1]) in seiner berühmten Arbeit über die Erhaltung der Kraft unabhängig denselben Gedanken ausgesprochen.

65. Ein Resultat der GAUSS-WEBERschen Versuche, auf das sie selbst wohl den geringsten Wert legten, an das sich aber wegen seiner praktischen Bedeutung der Nachruhm und die Popularität geknüpft hat, ist die Erfindung der elektromagnetischen Telegraphie.

Die ersten Erwähnungen finden sich in Briefen an HUMBOLDT vom 13. Juni 1833[2]) und an OLBERS[3]) vom 20. November 1833. GAUSS berichtet im letzteren von der Einrichtung der galvanischen Kette, der Konstruktion des Kommutators und fährt dann fort: »Wir haben diese Vorrichtung bereits zu telegraphischen Versuchen gebraucht, die sehr gut mit ganzen Wörtern oder kleinen Phrasen gelungen sind. Diese Art zu telegraphieren, hat das Angenehme, dass sie von Wetter und Tageszeit ganz unabhängig ist; jeder, der das Zeichen gibt und der dasselbe empfängt, bleibt in seinem Zimmer, wenn er will, bei verschlossenen Fensterläden. Ich bin überzeugt, dass unter Anwendung von hinlänglich starken Drähten auf diese Weise auf einen Schlag von Göttingen nach Hannover oder von Hannover nach Bremen telegraphiert werden könnte.« Ähnlich äussert sich GAUSS[4]) in seinem Bericht an die Göttinger Gesellschaft 1834; die betreffende Stelle ist in Art. 58 (vergl. oben S. 106) mitgeteilt.

Die anspruchslose Form, in der GAUSS eine Erfindung mitteilt, die im Laufe eines halben Jahrhunderts das Antlitz der Erde umgestaltet hat, zeigt deutlich, dass diese Anwendung seiner wissenschaftlichen Versuche für ihn lediglich etwas Akzidentelles war, wenn er auch von Anfang an über die mögliche praktische Bedeutung im Klaren war.

Die nächste Mitteilung findet sich in einem Briefe GAUSSens an WEBER[5]) vom 16. Juli 1835: »Wollen Sie, lieber WEBER, einmal versuchen, ob Sie eine telegraphische Probe, die ich 5 Minuten nach dem Uhrzeichen machen will, lesen können? Hier der Schlüssel:

1) H. v. HELMHOLTZ, Ges. Abh., Band I, S. 48.
2) Brief an HUMBOLDT, Werke XII, S. 312.
3) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 601.
4) Werke V, S. 519.
5) Werke XI, 1, S. 173.

	−3	−2	−1	+1	+2	+3
−3	y	=	w	f	=	=
−2	—	h	a	s	b	—
−1	k	d	e	i	g	p
+1	v	o	n	r	l	q
+2	—	c	t	u	m	—
+3	—	—	x	z	—	—

Die offenen Stellen können für die Ziffern und etwa den Schlusspunkt reserviert bleiben. Es ist also z. B. x = +3, −1, d. h. 3 positive und nach einer kleinen Pause von etwa 4 Sekunden 1 negativer Stoss . . . .«

Eine neue Beobachtung erwähnt Gauss im Briefe an Olbers[1]) vom 11. November 1835 im Zusammenhang mit der elektrischen Telegraphie: »Eine ganz artige Entdeckung oder Bemerkung habe ich vor etwa 6 Wochen gemacht, dass man den Sinn (ob + oder −) eines galvanischen Induktionsimpulses ganz bestimmt mit den Lippen unterscheiden kann, sodass wir zum Spass schon so telegraphiert haben, dass die Depesche aufgeschmeckt wurde.« Dieselbe Mitteilung findet sich auch in einem Briefe an Schumacher[2]) vom 13. September 1835, wo sie in einer beinahe humoristischen Weise von Gauss erzählt wird: »Man würde diese Methode zum telegraphieren gebrauchen können und die Depesche, welche S. M. aller Reussen in Petersburg abspielen lassen wollte, würde in demselben Augenblicke in Odessa geschmeckt werden können. Wollte man eine mehrfache Kette ziehen, und zugleich eine korrespondierende Anzahl Schmecker am andern Ende aufstellen, wozu man auch blinde Invaliden gebrauchen könnte, die nur jedesmal, wenn ihnen zu schmecken gegeben wird, die Hand in die Höhe zu halten hätten, während ein Sekretär die aufgehobenen Hände protokollierte, so würde sicher nach dieser Methode sehr schnell telegraphiert werden können.«

Es handelt sich hier natürlich um eine elektrochemische Wirkung, die nach den Faradayschen Gesetzen ohne weiteres verständlich ist und an sich mit Telegraphie nichts zu tun hat; sie erschien aber aus dem Grunde er-

1) Gauss-Olbers II, 2, S. 628.

2) Gauss-Schumacher II, S. 417.

wähnenswert, weil es Gaussens einzige Äusserung über einen elektrolytischen Vorgang ist, die wir kennen.

66. So sehr Gauss die Erfindung des elektromagnetischen Telegraphen als etwas Sekundäres im Vergleich zu seinen theoretischen Untersuchungen betrachtete, so sehr war er sich der ungeheuren praktischen Bedeutung der elektrischen Telegraphie bewusst. Diese seine Einstellung geht deutlich aus seinem Briefe[1]) vom 6. August 1835 an Schumacher hervor, in dem es heisst: »Darf ich Ihnen aber vertraulich sagen, was mir selbst bei meinen Arbeiten die meiste Satisfaktion gibt, so sind es vielmehr die theoretischen Eroberungen im Gebiet des Elektromagnetismus, als die in dem des reinen Magnetismus. In andern äusseren Verhältnissen, als die meinigen sind, liessen sich wahrscheinlich auch für die Sozietät wichtige und in den Augen des grossen Haufens glänzende praktische Anwendungen daran knüpfen. Bei einem Budget von 150 Talern jährlich für Sternwarte und magnetisches Observatorium zusammen (dies nur im engsten Vertrauen für Sie) lassen sich freilich wahrhaft grosse Versuche nicht anstellen. Könnte man aber darauf tausende von Talern wenden, so glaube ich, dass z. B. die elektromagnetische Telegraphie zu einer Vollkommenheit und zu einem Massstabe gebracht werden könnte, vor der die Phantasie fast erschrickt. Der Kaiser von Russland könnte seine Befehle ohne Zwischenstation in derselben Minute von Petersburg nach Odessa, ja vielleicht nach Kiachta geben, wenn nur der Kupferdraht von gehöriger (im Voraus scharf zu bestimmender) Stärke gesichert hinführt, und an beiden Endpunkten mächtige Apparate und gut eingeübte Personen wären. Ich halte es nicht für unmöglich, eine Maschinerie anzugeben, wodurch eine Depesche fast so mechanisch abgespielt würde, wie ein Glockenspiel ein Musikspiel abspielt, das einmal auf eine Walze gesetzt ist. . . . . Dass wenigstens das erste ABC leicht zu erlernen ist, können Sie daraus abnehmen, dass neulich meine Tochter mehrere Buchstaben sogleich ohne allen Unterricht sicher gelesen hat. . . . . Ich glaube, dass es möglich sein wird, in jeder Minute 5 bis 6 Buchstaben zu signalisieren, wobei also nur die Länge der Depesche, aber gar nicht die Entfernung in Betracht kommt.«

Dieser Auffassung von Gauss entsprach es, dass er, wenn es sich um die

1) Gauss-Schumacher II, S. 411; Werke XI, 1, S. 100.

praktische Verwertung des Telegraphen handelte, zwar nicht selbst aktiv eingriff, es aber mit grösstem Interesse verfolgte, wenn seine Freunde und Schüler dies taten. Z. B. hatte GERLING, der zu Pfingsten 1835 GAUSS in Göttingen besuchte, ihn darauf aufmerksam gemacht, dass der Bau einer Eisenbahn zwischen Leipzig und Dresden geplant sei. Bei dieser mündlichen Besprechung mag GAUSS den Gedanken geäussert haben, wie zweckmässig die Ausrüstung der Bahnlinie mit einem elektrischen Telegraphen sein würde. Jedenfalls teilt GERLING[1]) am 31. Juli 1835 GAUSS mit, dass er wegen dieser Angelegenheit umgehend an den früheren Astronomen, jetzigen Präsidenten des königlich sächsischen Staatsministeriums Herrn v. LINDENAU geschrieben und dieser ihm unter 30. Juni folgendes geantwortet habe: »Wegen der Verbindung eines galvanischen Apparats mit der zwischen Leipzig und Dresden anzulegenden Eisenbahn habe ich sogleich nach Leipzig geschrieben und zweifle nicht, dass der Gedanke dort aufgefasst werden wird, da es an wissenschaftlicher Teilnahme und Sachverständigen in Leipzig nicht fehlt.« GERLING fügt diesen Zeilen LINDENAUS noch den Rat hinzu, GAUSS möge LINDENAU die den Telegraphen betreffenden Stücke der Göttinger Gelehrten Anzeigen zusenden, um ihn vollkommen zu orientieren.

Das Thema von dem bei der Leipzig-Dresdener Eisenbahn anzulegenden Telegraphen kehrt noch mehrfach im Briefwechsel von GAUSS wieder; z. B. teilt er[2]) am 11. November 1835 OLBERS vertraulich mit, dass die Errichtung des Telegraphen beschlossen sei. Es scheint sogar, dass GAUSS im Verlauf der Angelegenheit sich selbst mit der Direktion der Leipzig-Dresdener Eisenbahn in Verbindung gesetzt habe, doch sind die darauf bezüglichen Akten vernichtet[3]).

Mit dem gleichen Interesse verfolgte er die Untersuchungen STEINHEILS, der in München das Gebäude der Akademie mit der Sternwarte in Bogenhausen durch einen elektrischen Telegraphen verbunden hatte[4]). Namentlich hat die wichtige Entdeckung STEINHEILS[5]), dass die Erde ein relativ grosses

1) GAUSS-GERLING, S. 144.

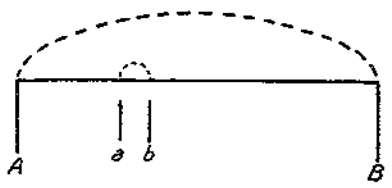
2) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 627.

3) Vergl. dazu die Darstellung bei H. MARGGRAFF, *C. A. Steinheil*, München 1888, S. 29 ff.

4) Brief von STEINHEIL an GAUSS vom 18. Juni 1836, Werke XII, S. 130

5) Werke XII, S. 135 ff.

Leitvermögen habe, dass man also die Rückleitung sparen könne, die lebhafteste Anteilnahme bei GAUSS gefunden. STEINHEIL machte diese Entdeckung, als er einen elektrischen Telegraphen längs der Bahnlinie Nürnberg-Fürth anlegte und, einem Vorschlage von GAUSS[1]) folgend, die Schienen zur Hin- und Rückleitung benutzen wollte. Er bemerkte dabei, dass er Kurzschluss in der Leitung hatte und kam so folgerichtig zu der Auffassung, dass die Erde ein erhebliches Leitvermögen haben müsse, also wenigstens als Rückleitung dienen könne. Noch bevor GAUSS die direkte Mitteilung STEINHEILS erhalten hatte, hatte er, auf Zeitungsnachrichten gestützt, durch eigene Versuche den Befund STEINHEILS bestätigt, ja, sogar eine interessante Variante angebracht, indem er mit Hilfe zweier verschiedener Metalle, die in dem Erdboden versenkt wurden, ein galvanisches Element hergestellt hatte. In einem Briefe GAUSSENS vom 28. August 1834 an STEINHEIL[2]) heisst es: »Von Ihrer schönen Entdeckung, das starke galvanische Leitungsvermögen der Erde betreffend, hatte ich schon durch die Zeitungen etwas erfahren, und demzufolge selbst einen Versuch im Kleinen gemacht — soweit in dem Augenblick mein Drahtvorrat reichte — d. i. auf etwa 500 Fuss Entfernung, mit gleichem Erfolge wie Sie. Die Sache ist mit der Theorie völlig harmonisch, und man braucht dem Erdreich nur ein kleineres Leitungsvermögen als Wasser hat beizulegen, um die Erscheinung zu erklären, obwohl letzteres schon mehrere hunderttausendmal kleiner ist, als das Leitungsvermögen der Metalle. Gleichermassen ist es der Theorie konform, dass, wenn dem in Erde zwischen A und B gehenden Strome durch zwei andere ab, etwas abgefangen wird, so zwar, dass



Figur 2.

1) AB eine sehr grosse Entfernung,
2) ab eine gegebene kleine,
3) ab viel näher bei A als bei B eingesetzt werde,
4) und so, dass $AabB$ nahe Einer Richtung (oder wenigstens Aab),

der partielle Strom, übrigens gleichgesetzt, dem Quadrate der Entfernung des ab von A verkehrt proportional sein muss. Doch scheint mir, kann man bei

1) In dem schon mehrfach erwähnten Briefe an HUMBOLDT vom 13. Juni 1833, Werke XII, S. 312; auch hierzu vergl. man die Darstellung bei MARGGRAFF.

2) Brief von GAUSS an STEINHEIL, Werke XII, S. 135.

diesen Versuchen schon wegen der Ungleichheit des Terrains in Beziehung auf Feuchtigkeit nicht viel Übereinstimmung erwarten, und die Übereinstimmung würde ohne Zweifel viel grösser werden, wenn *Aab* etwa in einem See, nicht gar zu nahe am Ufer eingesetzt würde.

»Übrigens haben meine kleinen Versuche noch etwas anderes gelehrt, was mir sehr interessant scheint, nämlich, dass, wenn Platten von ungleichem Metall an den beiden Enden eingesetzt werden, ein kräftiger hydrogalvanischer Strom entsteht. Es ist doch überraschend, dass an die Stelle eines $\frac{1}{2}$ Linie dicken, mit gesäuertem Wasser getränkten Tuchlappens eine 500 Fuss dicke Erdschicht treten kann mit, wenn auch nicht gleich grossem, doch ganz ähnlichem Erfolg. Ich zweifle nicht, dass Sie bei Ihren viel grösseren Entfernungen doch das gleiche finden werden.«

Die in diesem Briefe enthaltenen Betrachtungen über die Stärke des abgezweigten Stromes sind wohl die ersten, die sich auf Ausbreitung von Strömen in körperlichen Leitern beziehen.

67. Um das Jahr 1837 wurden die ersten Versuche bekannt, die Idee der elektromagnetischen Rotationsapparate zur Konstruktion technisch brauchbarer Maschinen zu verwenden. In Deutschland war es vor allem M. Jacobi, der Bruder des Mathematikers, der solche Maschinen konstruiert und sie in einem besonderen Werke *Mémoire sur l'application de l'électromagnetisme au mouvement des machines* (Potsdam 1837) behandelt hat. Es ist daher nicht merkwürdig, dass nunmehr auch im Briefwechsel von Gauss dieses Problem eine Rolle spielt, allerdings nur in der Korrespondenz mit Olbers[1]). Auffällig ist nur, dass die Maschine von Jacobi kaum flüchtig erwähnt wird, während als Grundlage der Diskussion unkontrollierbare Zeitungsberichte über angebliche amerikanische Erfindungen dienen mussten. Unter diesen Umständen konnte die Erörterung dieser Frage nicht sehr belangreich sein, da Gauss — an sich sehr mit Recht — einen starken Skeptizismus zeigte. Von grundsätzlichem Interesse ist nur eine Stelle, wo er sich über die theoretischen Gründe ausspricht, weswegen er prinzipiell nicht geneigt war, an

1) Gauss an Olbers am 1. November 1837; am 10. November 1837; am 16. Januar 1838; Olbers an Gauss am 10. März 1838; Gauss an Olbers am 18. März 1838; Olbers an Gauss am 24. März 1838; am 17. April 1838; Gauss an Olbers am 29. April 1838; Olbers an Gauss am 24. August 1838; Gauss an Olbers am 20. November 1838. Sämtliche Briefe in Gauss-Olbers II, 2, S. 659 ff.

die Möglichkeit einer technischen Verwertung des Elektromagnetismus zu denken. Am 10. März 1838 schreibt er[1]) an OLBERS: »Ich meinesteils habe bisher aus inneren Gründen eine sehr geringe Erwartung von einer derartigen Benutzbarkeit des Elektromagnetismus gehabt. Diese Gründe sind für mich sehr stark, aber keine entschiedene Gewissheit. Sie müssen daher entschiedenen Tatsachen weichen. . . . . Von meinen inneren Gründen will ich Ihnen wenigstens noch etwas sagen: Schon ein gewöhnlicher Magnet übt in der Berührung eine viel stärkere Anziehung aus, als in einer auch nur sehr geringen Entfernung. Dies ist mit der Theorie im Einklang und hätte aus derselben vorausgesehen werden können. Aber die Theorie lehrt mich, dass dasselbe in einem noch viel, viel höheren Grade stattfinden müsse bei den künstlichen Magneten, die es nur transitorisch durch galvanische Spiralströme werden; ich meine. weiches Eisen, z. B. in Hufeisenform, umwunden mit Draht, wird ein Magnet, solange durch diesen Draht ein galvanischer Strom geht, sodass man es bis zu einem Tragevermögen von 2000 Pfund gebracht hat. Aber man täusche sich nicht und glaube, dass dieser Hufeisenmagnet ebenso in Distanz wirke wie einer aus hartem Stahl, dem ein beharrlicher Magnetismus gegeben ist. Denn die Lebensbedingung, dem ersten einen so starken Magnetismus zu geben, ist eben das Geschlossensein des Hufeisens durch einen daran hängenden Anker. Derselbe Weicheisenmagnet, der so 2000 Pfund tragen kann, wird ungeschlossen nur ein sehr schwacher sein, und vielleicht, wenn die Ankerfüsse nur $\frac{1}{2}$ Linie abstehen, nur noch eine Anziehung äqual wenigen Loten ausüben können. Aber über das Quantitative können nur Versuche Belehrung geben, dergleichen ich noch nicht gemacht habe. Mit einem kleinen Bruchteil der Summen, die der russische Kaiser für den p. JACOBI ausgeworfen hat, würde man schon über die Sache gehöriges Licht verbreiten können. Aber die Mesquinität der Mittel, die mir zu Gebote stehen, schliesst derartige Versuche ganz aus.« Es ist interessant zu sehen, wie die an sich richtige Einsicht von der Bedeutung des geschlossenen magnetischen Kreises GAUSS doch vollkommen auf Abwege geführt hat. Freilich hat er diese Äusserung nur einem vertrauten Freunde gegenüber getan und würde sich wohl in der Öffentlichkeit, wenn überhaupt, viel

1) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 671 ff.

zurückhaltender ausgesprochen haben. Interessant ist es auch, dass OLBERS, der an sich geneigt war, den Zeitungsberichten mehr Glauben zu schenken, durch die Argumentation von GAUSS bewogen wurde, seine Anschauung fallen zu lassen.

Zweiter Abschnitt.

Elektrodynamik und Induktion.

68. Im Jahre 1831 entdeckte FARADAY die Erscheinungen der Induktion, und am 21. März 1833 meldet GAUSS[1]) zum erstenmal in einem Briefe an SCHUMACHER, dass er sich damit eingehend beschäftige: »In der letzten Zeit habe ich meine Apparate hauptsächlich zu Versuchen über die sogenannte Induktion, die eine der interessantesten Naturerscheinungen ist, angewendet, und die ich an jenen sehr verstärkt sichtbar machen kann. Mit den Hauptmomenten des Gesetzes, wonach sie sich richtet, bin ich auch ziemlich im Reinen.« SCHUMACHER[2]) erwiderte darauf am 25. März 1833 mit dem Eingeständnis, dass er gar nicht wisse, was Induktion sei. Dann dauert es über ein Jahr, bis zur nächsten brieflichen Mitteilung von GAUSS über Induktion: Er berichtet an GERLING[3]) am 4. November 1834 über die Konstruktion eines »Induktors«, d. h. eines Magnetstabes, über den eine Rolle Draht geschoben, bezw. wieder entfernt werden kann. Dieser Induktor war mit dem Magnetometer verbunden, und GAUSS benutzte diese Anordnung zu einer scharfen Prüfung des OHMschen Gesetzes[4]) (siehe weiter oben die Artikel 58—60). Er zog den Induktor einem galvanischen Elemente vor, weil dessen elektromotorische Kraft nicht konstant war.

69. Im Laufe des Jahres 1834 machte GAUSS folgende Beobachtung[5]). Bei Bestimmung des logarithmischen Dekrementes der Schwingungen des Magnetometerstabes ergaben sich zu verschiedenen Zeiten ausserordentlich verschiedene Werte; GAUSS stellte fest, dass das Dekrement immer grösser war, wenn das Magnetometer sich in der geschlossenen Kette befand, als wenn der Kreis

1) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 324.

2) Ebenda, S. 326.

3) GAUSS-GERLING, S. 423.

4) Vergl. Werke XI, 1, S. 68 ff.

5) Werke V, S. 534 ff.

geöffnet war. Damit war die Erklärung gegeben: der schwingende Magnetstab induzierte Ströme in der ihn umgebenden Spule, wenn diese geschlossen war, was nur auf Kosten seiner kinetischen Energie geschehen konnte; daher musste die Schwingung in diesem Falle ein stärkeres Dekrement aufweisen als im Falle der offenen Kette. Diese Erkenntnis veranlasste GAUSS zu folgendem Versuch: es wurde eine geschlossene Kette gebildet, in der sich 3 Magnetometer befanden, eines mit einem 25 pfündigen Magnetstabe (in der Sternwarte), eines im magnetischen Observatorium mit einem 4 pfündigen, das dritte im physikalischen Kabinett mit einem 1 pfündigen Magnetstabe. Nun wurde der 25 pfündige Stab in Schwingungen versetzt, die durch ihn induzierten Ströme brachten dann die beiden andern Stäbe zu erzwungenen Schwingungen.

Die erste Aufzeichnung darüber findet sich im *Handbuch* 19 (Be)[1]) unter dem Titel *Inducierte gemischte Bewegung*; eine ausführliche Schilderung findet sich in einem Brief an OLBERS[2]) aus dem Februar 1835, in dem es heisst: »Über das, was seit Juli 1834 hier neues hinzugekommen, werde ich vielleicht bald eine Notiz in den G. G. A.[3]) geben. Die 25 pfündige Nadel in der Sternwarte mit ihrem Multiplikator von 270 Windungen unter 2700 Fuss Drahtlänge in der grossen bis zum physikalischen Kabinett gehenden Kette, worin der Strom die Drahtlänge von fast $\frac{1}{2}$ Meile zu durchlaufen hat, bietet zu vielen überraschenden Versuchen Gelegenheit, die noch auf lange Zeit Beschäftigung geben, und noch umfassendere geben könnten, wenn die Geldmittel nicht so beschränkt wären. Ein Versuch aber gehört zu den schönsten, die in diesem Fach je gemacht sind, und wird wohl den meisten Naturforschern sehr überraschend sein, obwohl ich nicht durch Zufall, sondern durch Prämeditation darauf gekommen bin und des Erfolges schon gewiss war, noch ehe ich ihn gemacht hatte. Es ist folgender:

»Wenn die 25 pfündige Nadel in beträchtliche Schwingungen versetzt wird, z. B. so grosse, wie der Kasten verstattet, etwa 27^0, so können dabei die Nadeln im magnetischen Observatorium und im physikalischen Kabinett in Ruhe sein, und bleiben darin, wenn die Kette nicht geschlossen ist oder eine der Nadeln davon abgesperrt ist. Ist oder wird aber die Kette geschlossen,

1) Werke XI, 1, S. 65.

2) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 617 ff.

3) Gött. Gel. Anz., 36. Stück vom 7. März 1835; Werke V, S. 528 ff.

so dass die Multiplikatoren im magnetischen Observatorium und im physikalischen Kabinett mit darin sind, so fangen diese beiden Nadeln augenblicklich an mitzuschwingen.

»Aber am merkwürdigsten ist die Art der Schwingungen. Die natürliche Schwingungszahl der Nadeln ist

25 pfd. in der Sternwarte . . . . . 42,3 Sek.,
4 » im magnetischen Observatorium 20,5 » ,
1 » im physikalischen Kabinett. . . 13,8 » ,

so dass z. B. für die Nadel im magnetischen Observatorium die Stellung auf der Skala in jedem Augenblick t durch die Formel

$$A + R\cos\left(\frac{t-T}{20{,}5^{\text{sec}}}\cdot 180^0\right)$$

ausgedrückt wird, wenn A die Stellung der Nadel in Ruhe, R die an sich willkürliche halbe Schwingungsgrösse, T eine Epoche bedeutet, wo die Nadelstellung im Maximum war. Allein wenn die sympathetischen Schwingungen eintreten, so sind diese, allgemein zu reden, immer gemischte, nämlich eine natürliche von willkürlicher und eine induzierte von bestimmter Grösse, z. B. unter obigen Voraussetzungen die Formel:

$$A + R\cos\left(\frac{t-T}{20{,}5^{\text{sec}}}\cdot 180^0\right) + r\cos\left(\frac{t-T'}{42{,}3^{\text{sec}}}\cdot 180^0\right).$$

Dieses r ist dem Schwingungsbogen der grossen Nadel proportional; wenn dieser am grössten ist, etwa $r = 20$ Skalenteile. Fast noch merkwürdiger ist der a priori vorausgesehene und in der Erfahrung auf das vollkommenste bestätigte Umstand, dass die induzierten Schwingungen, welche mit den induzierenden von gleicher Dauer sind, mit diesen nicht gleichen Anfang haben, sondern eine halbe Schwingungsdauer (das Bogenargument 90^0) davon abstehen.

»Die gezeichneten Figuren sehen allerliebst aus, und ich habe es in meiner Gewalt, das R (oder die natürliche Schwingung) unmerklich zu machen, wo dann die Nadel also rein eine ihr nicht natürliche Schwingung zu machen gezwungen ist; sobald die Kette geöffnet wird, nimmt die Nadel sogleich wieder ihre natürliche Schwingung allein ein.

»Ganz ähnliche Erscheinungen im Physikalischen Kabinett, nur dass aus den statthabenden Grössenverhältnissen das r kleiner wird als im magnetischen Observatorium.

»Am merkwürdigsten aber ist der gleichfalls genau vorausgesehene Fall, wo in der Kette eine zweite Nadel ist, deren natürliche Schwingungsdauer der der grossen gleich ist. Ich hatte dies nicht sofort realisieren können, aber jetzt ist dies auch geschehen, genau mit dem erwarteten Erfolg. Im Physikalischen Kabinett wurde die Nadel . . . . astatisch gemacht, d. i. zwei Nadeln mit entgegengesetzten Polen verbunden, wovon die eine etwas weniges stärker ist als die andere. Auf diese wirkt der Erdmagnetismus schwächer, daher längere Schwingungsdauer, während der Multiplikator nicht bloss eben so stark wie vorher, sondern noch fast 50 % stärker einwirkt. So wurde die Schwingungsdauer dieser Doppelnadel auch genau auf 42,3 Sekunden gebracht. Der Erfolg ist, dass für den Augenblick, wo die Kette geschlossen wird, indem die 25pfündige schon vorher schwang, die im Physikalischen Kabinett sofort auch anfängt zu schwingen, und diese Schwingungen, anfangs mässig, nahmen beständig an Grösse zu, so dass sie nach einer halben Stunde auf 30^0 angewachsen waren. Hier sind nun aber die Elongationen mit denen der grossen Nadel gleichzeitig, obwohl nach Lage der Umstände entweder gleichnamig (d. i. Maximum mit Maximum) oder ungleichnamig (Maximum mit Minimum).

»Das ganze Phänomen ist eine Art Abspiegelung dessen, was im Sonnensystem vorgeht, nämlich der periodischen Störungen im ersten Fall, der Säkularstörungen im zweiten, nur haben sie den Vorzug, dass, während wir bei den Planetenstörungen bloss müssige Zuschauer sind, wie hier die eben so scharf oder zum Teil noch viel schärfer zu messenden Wirkungen selbst nach Gefallen hervorbringen. . . . . .

»Ich muss noch bemerken, dass freilich genau betrachtet, eben so gut die Schwingungen der zweiten oder dritten Nadel Schwingungen in den beiden andern erzeugen müssen. Allein ich habe durch die Rechnung gefunden, dass solche unmerklich sind, was auch die Versuche bestätigen. Vorderhand, d. h. solange man sich nicht auch Nadeln von ähnlicher Kraft wie meine 25pfündige verschafft oder stärkere, wird also dieser interessante Versuch der sympathetischen Schwingungen in grosser Ferne anderwärts nicht nachgemacht werden können.«

Eine kurze Notiz, auf diese Versuche hindeutend, findet sich noch in

einem Brief an ENCKE[1]) vom 1. März 1835 und schliesslich eine öffentliche Mitteilung darüber in den Göttinger Gelehrten Anzeigen[2]) vom 7. März 1835. Auch in dem zusammenfassenden Aufsatze *Erdmagnetismus und Magnetometer*[3]) ist GAUSS noch einmal ausführlich (und zum Teil sogar noch etwas verallgemeinernd) auf diese Erscheinung eingegangen.

GAUSS hat in diesen Versuchen die Theorie der erzwungenen Schwingungen eines Massenpunktes auf die induzierten Schwingungen des Magnetometers angewendet; anscheinend ist er der erste oder jedenfalls einer der ersten, der überhaupt das mechanische Problem der erzwungenen Schwingungen behandelt hat. Auffällig ist es, dass GAUSS den allgemeineren Fall, den er im Briefe an OLBERS andeutet, nämlich den, dass die »kleineren Nadeln« eine Rückwirkung auf die grosse Nadel ausüben, nicht behandelt hat; er hat sich offenbar damit begnügt, durch Rechnung festzustellen, dass in seinem Falle diese Rückwirkung unmerkbar klein war; er hätte sonst das Phänomen der Schwebungen und das Hin- und Herpendeln der Energie finden müssen. —

70. Im engsten Zusammenhange damit steht die Vergrösserung der Dämpfung der schwingenden Magnetnadel, d. h. die Beruhigung einer Schwingung durch Umgeben der Nadel mit einem Kupferdämpfer, wozu GAUSS allerdings erst im Jahre 1837 überging. Eine darauf bezügliche Rechnung über *Gedämpfte Schwingungen* findet sich im *Handbuch* 19 (Be)[4]), die sicher aus der Zeit zwischen 1834 und 1837 stammt. Dann kommt GAUSS ausführlicher in zwei Briefen an SCHUMACHER[5]) vom 30. März 1837 und vom 21. April 1837 auf die Frage der Nützlichkeit eines Dämpfers zurück. SCHUMACHER besass ein Magnetometer, das STEINHEIL in München angefertigt hatte und das mit Kupferdämpfer versehen war. Im ersten der genannten Briefe schreibt GAUSS darüber: »Das Mittel, durch eine starke Kupferumgebung die Beruhigung zu beschleunigen, ist ein vortreffliches, nur schade, dass es nicht jedermanns Sache ist, eine grosse Summe Geld bloss zum Anschaffen des Metallwertes desselben zu verwenden. Man würde wenig gewinnen, wenn man anstatt

1) Bisher unveröffentlicht.

2) Gött. Gel. Anz., 36. Stück, S. 345 ff., 1835; Werke V, S. 528 ff.

3) SCHUMACHERS Jahrbuch für 1836, S. 1—47; Werke V, S. 315 ff., insbesondere S. 342 ff.

4) Werke XI, 1, S. 67.

5) GAUSS-SCHUMACHER III, S. 160 ff. und 164 ff.

Kupfer Blei nehmen wollte, weil man dann wohl das vier- oder fünffache Gewicht nötig hätte (um eben so weit zu reichen), worunter selbst die Füsse des Kastens brechen könnten. Noch besser als Kupfer wäre Silber.«

GAUSS hatte zu dieser Zeit noch keine quantitative Berechnung über die zweckmässigste Form des Kupferdämpfers und die Grösse des zu erwartenden Effektes angestellt, sondern urteilte rein instinktmässig. Aber eine Mitteilung von WEBER, dass STEINHEIL das Kupfer nur unter der Nadel angebracht habe, lässt ihn sofort die Unzweckmässigkeit dieser Konstruktion einsehen, und nun erst geht GAUSS ernstlich an diese Frage heran. In dem genannten Briefe vom 21. April 1837 hat er seinen vorerst reservierten Standpunkt aufgegeben: »Seit meinem letzten Briefe . . . habe ich unserm magnetischen Apparate einen wichtigen Zusatz gegeben. Sie erinnern sich, dass ich den Nutzen des Kupfers zwar anerkennend, doch die 130 Pfund, die für Ihren kleinen Apparat angewandt sind, abschreckend fand, zumal da ich nachher aus den Beobachtungen[1]) selbst schliessen zu können glaubte, dass die Wirkung vergleichungsweise noch keine sehr starke gewesen sei.

»Allein, was mir Freund WEBER von der Art, wie STEINHEIL in München das Kupfer angebracht habe, [erzählt hat], nämlich unter der Nadel, . . . verschwand meine Verwunderung und meine Abschreckung; denn in der Tat tut Kupfer, auf diese Weise angebracht, nur einen sehr kleinen Teil von der Wirkung, die es, zweckmässig angebracht, tun könnte; ich glaube in der Tat, dass Sie bei Ihrem Apparate mit 6 Pfund reichlich ebensoviel ausrichten können, wie STEINHEIL mit 130 Pfund.

»Ich habe die zweckmässigste Gestalt nach der Theorie ermittelt, und 17 Pfund taten bei meiner 4pfündigen Nadel schon eine Wirkung, mit der ich mich völlig begnügen könnte; ich habe aber noch 50 % mehr genommen, also etwa 25 Pfund, und durch diesen Dämpfer bringt man die allergrössten Schwingungen in sehr mässiger Zeit zu fast vollkommenem Stillstande. Es soll nun noch scharf untersucht werden, ob dieser Dämpfer vielleicht doch eine kleine Ablenkung erzeugt; für die Terminbeobachtungen würde dies gleichgültig sein, aber nicht für die täglichen absoluten Messungen. Unser Dämpfer kann übrigens in einer oder ein paar Minuten weggenommen oder hingestellt werden.«

1) Die SCHUMACHER mit diesem Apparat gemacht hatte. — SCHAEFER.

Nachdem GAUSS so die Vorzüge eines richtig konstruierten Kupferdämpfers festgestellt hatte, hat er ihn nunmehr allen Teilnehmern an den magnetischen Beobachtungen dringend empfohlen. Öffentlich zuerst bei Gelegenheit der Beschreibung des Bifilarmagnetometers[1]), ferner in seiner Abhandlung *Über die Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel*[2]) (dort findet sich auch andeutungsweise eine Beschreibung der Gaussschen Form des Kupferdämpfers) und schliesslich in zahlreichen Briefen an seine Freunde, z. B. an GERLING[3]).

Durch die Benutzung des Dämpfers war auch erst die Vorbedingung für die heute sogenannte Multiplikations- und Zurückwerfungsmethode von GAUSS und WEBER gegeben; eine darauf bezügliche Rechnung findet sich im *Handbuch* 15 (Ba)[4]); sie stammt aus dem Anfang des Jahres 1838.

71. Von weiteren experimentellen Untersuchungen mit Hilfe der Induktionsströme ist noch folgendes zu erwähnen: am 15. Dezember 1835 schreibt GAUSS[5]) an GERLING: »Meinen Induktor habe ich jetzt auf fast 7000 Umwindungen verstärken lassen, so dass zirka für 50 Mark Draht darauf ist, es lassen sich jetzt Erschütterungen in den Armen und der Brust damit hervorbringen, die nicht bloss merklich, sondern fast unerträglich sind. Heute morgen ist mir zum ersten Male gelungen, einen Funken hervorzubringen oder vielmehr ein halb Schock, da jeder Wechsel seinen Funken gab. . . . . Ich brauchte dabei eine sehr feine englische Nähnadel, deren Spitze eine Metallplatte eben noch nicht berührte. Später, wo ich für die Metallplatte ein Gefäss mit Quecksilber substituierte, wollte zuerst der Versuch nicht gelingen, weil das Quecksilber . . . . immer . . . . in einige Bewegung kam; endlich gelang es mehrere Male und zuletzt kam ein so starker Funke, dass die Spitze der Nadel abschmolz . . .« Ganz ähnlich berichtet GAUSS wenige Tage später (im Januar 1836)[6]) an ENCKE: »Das allermerkwürdigste aber scheint zu sein, dass (seit etwa acht bis zehn Tagen) es mir gelingt, Funken hervorzubringen, und dass diese Funken nach der Richtung des Stromes eine ver-

1) *Resultate* für 1837, S. 1—19, 1838; Werke V, S. 372.
2) Ebenda, S. 58—80, 1838; Werke V, S. 386 ff.
3) GAUSS-GERLING, S. 617, 632, 642 ff.
4) Werke XI, 1, S. 62
5) GAUSS-GERLING, S. 455.
6) Werke XI, 1, S. 102.

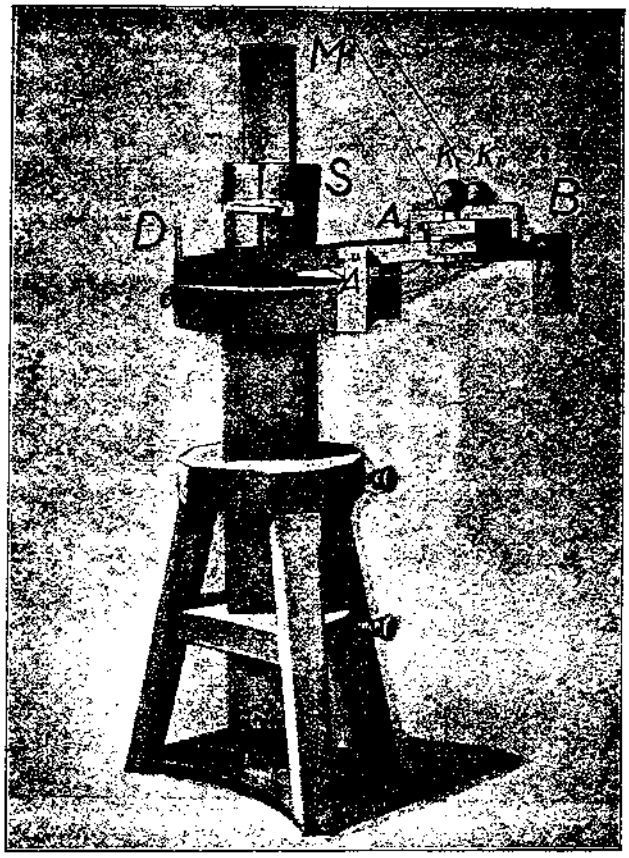
schiedene Farbe haben. Ich lasse die Funken von einer feinen Nadel gegen eine feste Metallfläche (nicht Quecksilber) überschlagen, wo der positive Strom einen hellgelben Funken mit einem Stich ins grüne gibt, der negative einen violetten oder zuweilen rotgelben Funken. Mehrere Male hat der letztere die Spitze der Nadel geschmolzen. Die Entfernung muss dabei aber sehr klein sein, vermutlich unter ein Tausendstel Zoll, und ich bediene mich zur Stellung einer sehr feinen Schraube. . . . Es werden sich hieran noch eine Menge höchst interessanter Versuche knüpfen lassen . . . .«

Aus dem Jahre 1836 stammen ferner die ersten Versuche von GAUSS, den Erdmagnetismus, insbesondere die Inklination, mit Hilfe der Induktionsströme zu untersuchen; wir haben darüber bereits in Artikel 40 ausführlich berichtet; es unterliegt keinem Zweifel, dass GAUSS im wesentlichen bereits den Erdinduktor besass, der heute als WEBERscher bezeichnet wird.

Schliesslich geht aus einem Briefe von GAUSS an OLBERS[1]) vom 20. November 1838 hervor, dass GAUSS und WEBER schon 1835 oder 1836 eine magnetelektrische Maschine gebaut hatten, um elektrische Ströme zu erzeugen. »Fortwährend die lebhaftesten Funken, sehr starke Wasserzersetzung, die heftigsten physiologischen Wirkungen, welche die Personen, die den Strom durch ihren Körper gehen liessen, gewöhnlich nicht länger als ein paar Sekunden aushalten mochten.«

72. In diesem Zusammenhange kann noch die Art und Weise erwähnt werden, wie GAUSS schliesslich den Induktor zu telegraphischen Versuchen benutzte. Ursprünglich war derselbe einfach ein Magnet, über den eine Drahtrolle geschoben bezw. von dem die Rolle abgezogen wurde. Das Magnetometer reagierte in diesem Falle durch einen (ballistischen) Ausschlag. Bei der grossen Schwingungsdauer (zirka 40 Sekunden) war die Telegraphiergeschwindigkeit natürlich ausserordentlich klein. Bei einer späteren Ausführungsform des Induktors, die in der folgenden Figur 3 wiedergegeben ist, wurde ein anderes Verfahren benutzt. Die über den Magneten gesteckte Rolle wurde nicht mehr ganz abgezogen, sondern erhielt nur kleine Rucke in dem einen oder andern Sinne, denen kleine Zuckungen der Magnetnadel entsprachen, entweder von der Ruhe aus, oder auch, ebenso deutlich erkennbar, über eine

1) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 696.



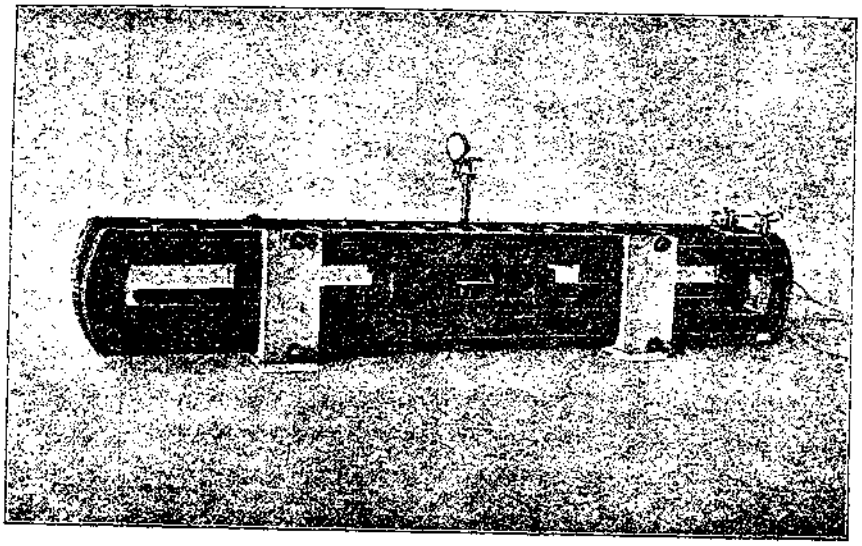
Figur 3.

Schwingung der Nadel überlagert. Wie dieser Zweck bequem und sicher bei dem Induktor erreicht wurde, ersieht man aus der Figur. *MM* ist der vertikal stehende Magnet (zwei 25 pfündige Stäbe), über den die Spule *S* geschoben ist. Diese ist an einem Hebel befestigt, der um die horizontale (von vorn nach hinten gehende) Achse *AA* drehbar ist; ein Anschlag *D* (auf der linken Seite der Figur) begrenzt die Bewegung der Spule, die durch einen Druck auf *B* (und nachheriges Loslassen von *B*) bewirkt wird. Die Knöpfe K_1 und K_2, von denen der eine oder der andere gleichzeitig mit *B* niedergedrückt werden muss, bewirken erst den Schluss der Kette und geben die Möglichkeit der Kommutierung des Stromes.

Das Magnetometer in Verbindung mit diesem Kommutator bildete den elektromagnetischen Telegraphen. Da dieser in den eigentlichen Werken

von GAUSS keinen Platz gefunden hat, so mag die Abbildung (Figur 4), die wohl ohne Erläuterung verständlich ist, hier gleichfalls wiedergegeben werden

Eine schematische Abbildung einer älteren Form des Induktors und des Magnetometers findet sich im Artikel »Telegraph« in GEHLERS *Physikalischem Wörterbuch*, Band IX (1838), nebst einer eingehenden Beschreibung von MUNCKE, der die GAUSSschen Versuche als Augenzeuge gesehen hatte.



Figur 4.

73. Von noch grösserer Bedeutung als die im Vorhergehenden geschilderten experimentellen Untersuchungen über die Induktion sind die theoretischen Betrachtungen, die GAUSS über die Theorie der Elektrodynamik angestellt hat. Von diesen Untersuchungen ist zu seinen Lebzeiten nichts veröffentlicht worden, da sie nicht zu dem von GAUSS beabsichtigtem Abschluss gelangt sind. Wir haben nur Bruchstücke, die sämtlich im V. Bande der Werke veröffentlicht sind.

Der allgemeine Charakter lässt sich so aussprechen: Wenn in einem (primären) Stromleiter 1 die Stromstärke variiert oder er bewegt wird, so tritt in einem (sekundären) bis dahin stromlosen Kreise 2 ein Induktionsstrom auf. Damit gleichzeitig treten aber zwischen diesen beiden Stromkreisen Kräfte auf, die auf ihre Magnetfelder zurückzuführen sind. Eine jede theoretische Betrachtung über Induktion muss also in engem Zusammenhange stehen mit

den Untersuchungen Ampères über die Ersetzbarkeit der magnetischen Wirkung von Strömen durch geeignete Magnete bezw. mit dem Ampèreschen elektrodynamischen Gesetz über die Kräfte zwischen zwei Stromelementen.

Demgemäss hat sich Gauss zunächst mit dem Ampèreschen Ergebnis beschäftigt, wonach die magnetische Wirkung eines geschlossenen Stromes s von der Stromstärke J für den Aussenraum vollkommen ersetzt werden kann durch die einer magnetischen Doppelschicht vom Moment J, die von dem Stromleiter s berandet wird. Das magnetische Potential V einer solchen magnetischen »Schale« ist in einem Punkte P des Aussenraumes gleich dem Produkte aus der Stromstärke J und dem räumlichen Winkel ω, unter dem die Schale vom Punkte P aus erscheint:

$$V = J\omega. \tag{76}$$

Dieser Satz, den Gauss zuerst gefunden hat, findet sich nur nebenher in der *Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus*[1]) ausgesprochen, und für seine Begründung verweist Gauss auf eine andere Gelegenheit, ein Versprechen, das er nicht mehr eingelöst hat. Auf diese Weise erschien die Formulierung des Theorems erst 1839 in der Öffentlichkeit (da die *Resultate* für das Jahr 1838 erst 1839 erschienen); es kann aber nach dem ganzen Zusammenhange der Dinge gar kein Zweifel bestehen, dass die Auffindung dieses Satzes spätestens in den Anfang des Jahres 1833 gehört, vermutlich sogar noch älter ist.

Orientiert man im Punkte $P(xyz)$ ein Polarkoordinatensystem (r, ϑ, φ), so ist definitionsgemäss

$$\omega = \iint \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \tag{77}$$

wobei die Integrale über den betreffenden Bereich der Einheitskugel zu erstrecken sind. Gauss hat nun, offenbar von dieser Formel ausgehend, ω auch in rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt und gibt in einer Notiz[2]), die zweifellos aus den Jahren 1832 bis 1835 stammt, folgende drei Werte für ω an, die auseinander durch zyklische Vertauschung von x, y und z hervorgehen:

$$\omega = \int \frac{z'(x'\,dy' - y'\,dx')}{r(x'^2 + y'^2)} = \int \frac{x'(y'\,dz' - z'\,dy')}{r(y'^2 + z'^2)} = \int \frac{y'(z'\,dx' - x'\,dz')}{r(z'^2 + x'^2)}. \tag{78}$$

1) *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus, Resultate* f. d. Jahr 1838; S. 1—57; Werke V, S. 119 ff., insbesondere S. 170 und 171.

2) *Handbuch* 19 (Be), S. 188; Werke V, S. 611—612.

Dabei ist die Entfernung vom Aufpunkte P gleich

$$r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

gesetzt. Durch partielle Differentiation nach x, y, z folgen daraus (nach Multiplikation mit J) die Kraftkomponenten, die auf einen positiven magnetischen Einheitspol wirken, und die sich gleichfalls bei GAUSS an der genannten Stelle finden.

74. Im engsten Zusammenhang damit steht eine Aufzeichnung von GAUSS vom 22. Januar 1833[1]), die den im vorigen Artikel besprochenen Satz voraussetzt, weswegen man dessen Auffindung mit Sicherheit früher ansetzen muss.

Das magnetische Potential einer Doppelschicht bezw. eines Stromes, also, von einem konstanten Faktor abgesehen, der räumliche Winkel. unter dem sie von P aus erscheinen, kann noch auf andere Weise berechnet werden, indem man nämlich auf den Begriff des Potentials als der Arbeit zurückgeht, die geleistet werden muss, um den positiven Einheitspol aus der Unendlichkeit auf einer beliebigen Kurve s' zum Punkte P zu führen. Es wird sich also der räumliche Winkel ω auch als ein Doppelintegral über die beiden Kurven s und s' darstellen lassen:

$$\omega = \iint' \Pi \, ds \, ds', \tag{79}$$

wo der Strich am zweiten Integralzeichen andeuten soll, dass sich die Integration auf s' bezieht. Nimmt man nun die Kurve s' allgemeiner an, d. h. betrachtet man statt einer aus dem Unendlichen kommenden zum Punkte P führenden Kurve, z. B. eine solche, die geschlossen ist, dann liegen zwei Möglichkeiten vor: Entweder umschlingt s' ein oder mehrere Male die Berandungskurve s der Doppelschicht bezw. des Stromes, oder sie tut dies nicht. Nun hat GAUSS in der genannten Aufzeichnung bewiesen, dass das so entstehende Doppelintegral

$$\iint' \frac{(x'-x)(dy\,dz'-dz\,dy')+(y'-y)(dz\,dx'-dx\,dz')+(z'-z)(dx\,dy'-dy\,dx')}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = 4\pi m \tag{80}$$

ist, wo m die Zahl der — algebraisch zu zählenden — Umwindungen der Kurve s' und der Kurve s ist. Der Satz ist bei GAUSS geometrisch einge-

1) *Handbuch* 19 (Be), S. 174; Werke V, S. 605; vergl. auch die Bemerkungen von SCHERING daselbst, S. 638.

kleidet, indem das Problem der »Geometria Situs« aufgeworfen wird, die Anzahl der Umschlingungen zweier geschlossener Linien zu zählen. Die physikalische Bedeutung ist die: Führt man auf der Kurve s' den positiven magnetischen Einheitspol auf einer beliebigen, den Strom J umschlingenden Kurve einmal herum, so wird dabei die Arbeit

$$A = 4\pi J \tag{81}$$

geleistet, die neuerdings wohl auch als die »magnetomotorische Kraft« bezeichnet wird. Als Spezialfall ist darin derjenige enthalten, wo die geschlossene Kurve s' den Strom nicht umschlingt; dann ist $A = 0$, d. h. im Aussenraum des Stromes existiert ein magnetisches Potential.

Diese Gleichung enthält das Grundgesetz des Elektromagnetismus; in moderner Bezeichnung ($\mathfrak{H}$ der magnetische Vektor, $J = \int j_n dS$, wenn j der Vektor der Stromdichte und dS ein Element des durchströmten Querschnittes ist):

$$\int_0 \mathfrak{H}_s ds = 4\pi \int j_n dS. \tag{81a}$$

In diesen Zusammenhang gehört es auch, dass bei Gauss[1]) die Komponenten des Vektorpotentials — ohne diesen Namen — eines linearen Stromes auftreten. Gauss definiert nämlich drei Grössen

$$X = J' \int \frac{dx'}{r'}, \quad Y = J' \int \frac{dy'}{r'}, \quad Z = J' \int \frac{dz'}{r'}, \tag{82}$$

wo dx', dy', dz' die Komponenten eines Stromelementes ds' des Leiters sind in dem Punkte mit den Koordinaten x', y', z', dessen Abstand vom Aufpunkte (xyz) durch r' bezeichnet wird. Die Rotation dieses Vektors gibt, wie bekannt, die magnetische Kraft des Stromes an, und da diese auch als Gradient des im vorhergehenden besprochenen skalaren Potentials V dargestellt werden kann, finden wir bei Gauss auch die drei Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \tag{83}$$

die den Zusammenhang zwischen den beiden Potentialen aussprechen.

75. Durch die Lehre Ampères von der Ersetzbarbeit der magnetischen Wirkung eines Stromes durch eine magnetische Lamelle sind die elektromagnetischen Erscheinungen im engeren Sinne verknüpft mit den elektrodyna-

1) *Handbuch* 19 (Be), S. 189 ff.; Werke V, S. 612 ff.

mischen, d. h. mit den ponderomotorischen Kräften, die verschiedene Ströme auf einander ausüben. So wurde GAUSS zwangsläufig auch zur Untersuchung der elektrodynamischen Kräfte geführt. Diese hatte AMPÈRE in einer Anzahl klassischer Abhandlungen auf ein »Elementargesetz« zurückgeführt, d. h. auf ein Gesetz für Stromelemente. Diese AMPÈRESchen Untersuchungen waren GAUSS geläufig. Das AMPÈRESche Gesetz kommt in seinen Notizen sehr häufig und zwar in den verschiedensten Formen vor, die alle auch bei AMPÈRE vorhanden sind. Aber in zwei Richtungen geht GAUSS von vornherein über seine Vorgänger hinaus.

Es ist bekannt, dass ein Elementargesetz nur in dem Sinne »richtig« sein kann, als es die Erscheinungen an geschlossenen Strömen richtig wiedergibt, weil es nur geschlossene Ströme gibt. Die Zeit vor MAXWELL hielt jedoch auch ungeschlossene Ströme für möglich, und für sie hatte daher die Frage nach dem »richtigen« Elementargesetz noch eine tiefere Bedeutung: Verschiedene Elementargesetze nämlich, die für geschlossene Ströme identische Resultate liefern, führen für ungeschlossene Ströme im allgemeinen zu verschiedenen Ergebnissen und könnten daher an solchen geprüft werden. Ein vom AMPÈRESchen total abweichendes Elementargesetz hat z. B. H. GRASSMANN[1]) vorgeschlagen, und dieser befürwortet Versuche an ungeschlossenen Strömen zur Entscheidung zwischen seinem und dem AMPÈRESchen Gesetz. Mathematisch gesprochen beruht der Unterschied zwischen solchen Elementargesetzen darin, dass man totale Differentiale nach s und s' hinzufügen und fortlassen darf, da diese bei der Integration über einen der beiden geschlossenen Stromkreise fortfallen. Dieser Gesichtspunkt, den später (1870) HELMHOLTZ[2]) hervorgehoben hat, ist GAUSS vollkommen geläufig, und so ist es denn nicht merkwürdig, dass er bei seinen Untersuchungen auch auf die GRASSMANNsche Form des Elementargesetzes gestossen ist — wenigstens zehn Jahre vor GRASSMANN.

Das AMPÈRESche Gesetz für die Kraft zwischen zwei Stromelementen $J\,ds$ und $J'\,ds'$ im Abstande r lautet

$$(84) \qquad -\frac{JJ'\,ds\,ds'}{r^2}\left\{-\tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'+\cos\varepsilon\right\};$$

1) H. GRASSMANN, Pogg. Ann. 64, 1845, Gesammelte Werke, Bd. II, 2, S. 147 ff.

2) H. v. HELMHOLTZ, Ges. Abhandl. I, S. 545.

dabei ist ϑ der Winkel zwischen r und ds, ϑ' ebenso zwischen r und ds', ε der Winkel zwischen ds und ds'. Rechnet man die Längen s und s' der beiden Stromleiter von einem festen Anfangspunkte aus, so kann man r als Funktion von s und s' betrachten, und es lassen sich, wie AMPÈRE gezeigt hat, die obigen drei Winkel durch r und seine partiellen Ableitungen nach diesen ausdrücken.

Da

$$r^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

ist, folgt unmittelbar:

$$(85)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial s} = \cos\vartheta, \\ \dfrac{\partial r}{\partial s'} = -\cos\vartheta', \\ r\dfrac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}+\dfrac{\partial r}{\partial s}\dfrac{\partial r}{\partial s'} = -\cos\varepsilon; \end{cases}$$

damit ergibt sich aus (84):

$$(86)\qquad -\frac{JJ'\,ds\,ds'}{r^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}-r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right\}.$$

Statt dieser AMPÈRESchen Formel benutzt GAUSS mit Vorliebe die Form, zu der sie führt, wenn statt r die Variable $\rho = \sqrt{r}$ in die Formeln eingeführt wird. Man erhält dann eine andere Darstellung für die AMPÈRESche Formel (84), auf die GAUSS fast alle seine Rechnungen basiert, nämlich

$$(87)\qquad +\frac{2JJ'}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds' = +2JJ'\frac{dd'\rho}{\rho},$$

wenn man die Differentiationen nach s durch d, die nach s' durch d' bezeichnet; ebenso werden, wie schon oben, Integrationen nach s' durch einen Strich am Integralzeichen bezeichnet. Neben dieser AMPÈRESchen Form tritt nun bei GAUSS[1]) folgende Vorschrift zur Berechnung der ponderomotorischen Kraft zwischen zwei Stromelementen auf:

»Die Fundamentalebene geht durch das wirkende Stromelement AB und den Punkt C, auf welchen gewirkt wird.

»Die komplexen Grössen, welche die Plätze B, C relativ gegen A bezeichnen, seien β, γ; ferner sei r der Modul von γ[2]). Endlich, falls auch in

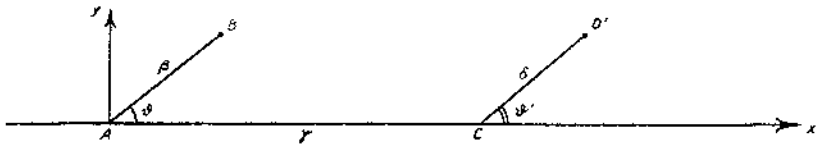
1) *Handbuch* 19 (Be), S. 191; Werke V, S. 614.

2) In der Handschrift von GAUSS ist hier ein Schreibfehler, der auch in den Abdruck Werke V, S. 614 übergegangen ist, indem statt γ der Buchstabe β gesetzt ist, was aber keinen Sinn ergibt. — SCHAEFER.

C ein Strom in dessen Element CD bereits vorhanden, sei $\gamma+\delta+i'\zeta$ die komplexe Grösse, die den Platz von D gegen A bezeichnet. Man hat dann, wenn in C ein Strom ist, für die Kraft, welche dessen materieller Träger durch AB erleidet

$$JJ'\frac{\delta}{r}\Im\mathfrak{m}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)\text{ [1)]}.\text{«} \tag{88}$$

Die folgende Figur 5 veranschaulicht den Sachverhalt.



Figur 5.

Gauss hat offenbar die Ebene ABC, d. h. die von ihm sogenannte Fundamentalebene (Ampères »Elementarfläche«) als komplexe Ebene xy genommen. Der Einfachheit halber haben wir in der Zeichnung AC als x-Achse gewählt; das vom Punkte C ausgehende Stromelement CD liegt im allgemeinen natürlich nicht in der Fundamentalebene; seine Projektion CD' auf dieselbe bezeichnet Gauss durch die komplexe Grösse δ, seine zur Fundamentalebene senkrechte Komponente — unter Vermittlung einer dritten Einheit i' — durch ζ. Bezeichnet man daher den Winkel zwischen CD und der Fundamentalebene durch ω, so ist der absolute Betrag von δ:

$$|\delta| = ds'.\cos\omega, \tag{89}$$

und δ selbst offenbar gleich

$$\delta = ds'.\cos\omega.e^{i\vartheta'}, \tag{90}$$

wenn, wie oben, ϑ' den Winkel zwischen ds' und r bezeichnen soll. In derselben Weise ist $\beta = ds.e^{i\vartheta}$, während $\gamma = r$ ist wegen der speziellen Wahl des Koordinatensystems. Unter diesen Umständen erhalten wir aus der Gaussschen Formel (88) für die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$ den Ausdruck

$$\mathfrak{K} = JJ'\frac{ds'\cos\omega.e^{i\vartheta'}}{r}\Im\mathfrak{m}\left(\frac{ds.e^{i\vartheta}}{r}\right), \tag{91}$$

und diese Kraft hat die Komponenten:

1) $\Im\mathfrak{m}$ bedeutet, dass der imaginäre Teil der komplexen Grösse zu nehmen ist.

$$(92)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_x = -\frac{JJ'dsds'}{r^2}\cos\omega\,.\,\sin\vartheta'\,.\,\sin\vartheta, \\ \mathfrak{K}_y = \quad\frac{JJ'dsds'}{r^2}\cos\omega\,.\,\cos\vartheta'\,.\,\sin\vartheta, \end{cases}$$

und den Betrag

$$(93)\qquad K = |\mathfrak{K}| = \frac{JJ'dsds'}{r^2}\cos\omega\,.\,\sin\vartheta.$$

Die Richtung der Kraft ergibt sich aus (92): sie liegt in der Fundamentalebene und senkrecht zum Stromelement ds.

Das aber ist das Grassmannsche Elementargesetz in allen seinen Einzelheiten.

Bemerkenswert ist an der obigen Darstellung noch, dass Gauss hier eine »trikomplexe Grösse«, d. h. den dreidimensionalen Vektor

$$\delta + i'\zeta = \delta' + i\delta'' + i'\zeta$$

eingeführt hat, mit den drei Einheiten 1, i, i'.

76. Ein weiteres Ergebnis, dass Gauss vorweggenommen hat, ist die Ableitbarkeit der elektrodynamischen Kräfte aus einem Potential.

Die ponderomotorische Kraft, die ein Stromelement Jds in einem Magnetfelde $\mathfrak{H}$ erfährt, ist — entsprechend dem Biot-Savartschen Gesetze und dem dritten Newtonschen Axiom — der Grösse und Richtung nach durch das Vektorprodukt

$$(94)\qquad \mathfrak{K} = J[d\mathfrak{s}, \mathfrak{H}],$$

gegeben, also die Kraftkomponenten (ξ, η, ζ in Gaussscher Bezeichnung) durch

$$(95)\qquad \begin{cases} \xi = J(\mathfrak{H}_z dy - \mathfrak{H}_y dz), \\ \eta = J(\mathfrak{H}_x dz - \mathfrak{H}_z dx), \\ \zeta = J(\mathfrak{H}_y dx - \mathfrak{H}_x dy). \end{cases}$$

Rührt das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ von einem geschlossenen Strome J' her, so ist es nach Artikel 73 von einem Potential $V = J'\omega$ ableitbar, und man erhält so statt (95):

$$(96)\qquad \begin{cases} \xi = J\left(\frac{\partial V}{\partial z}dy - \frac{\partial V}{\partial y}dz\right), \\ \eta = J\left(\frac{\partial V}{\partial x}dz - \frac{\partial V}{\partial z}dx\right). \\ \zeta = J\left(\frac{\partial V}{\partial y}dx - \frac{\partial V}{\partial x}dy\right). \end{cases}$$

wobei in $V = J'\omega$ der Wert für ω aus (78) zu entnehmen ist. Man erhält so z. B. für ξ den Wert:

$$(97) \qquad -\xi = JJ' \int' \Big\{ \frac{[(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz]\,dx'}{r^3} - \frac{(x'-x)(dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz')}{r^3} \Big\},$$

und für die virtuelle Arbeit bei einer Verrückung δx, δy, δz:

$$(\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z) = -JJ' \int' \frac{dr}{r^2}(dx'\delta x + dy'\delta y + dz'\delta z) + JJ' \int' \frac{\delta r}{r^2}(dx'\,dx + dy'\,dy + dz'\,dz)$$

oder:

$$(\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z) = -JJ' \int' \delta \frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r} + JJ' \int' \Big(dx' \frac{\delta\,dx}{r} + dy' \frac{\delta\,dy}{r} + dz' \frac{\delta\,dz}{r}\Big) - JJ' \int' \Big(dx' \frac{\delta x\,dr}{r^2} + dy' \frac{\delta y\,dr}{r^2} + dz' \frac{\delta z\,dr}{r^2}\Big).$$

Die beiden letzten Glieder ergeben zusammengefasst

$$JJ' \int' \Big[dx'\,d\Big(\frac{\delta x}{r}\Big) + dy'\,d\Big(\frac{\delta y}{r}\Big) + dz'\,d\Big(\frac{\delta z}{r}\Big)\Big] = JJ' \int' \Big[dx' \frac{d}{ds}\Big(\frac{\delta x}{r}\Big) + dy' \frac{d}{ds}\Big(\frac{\delta y}{r}\Big) + dz' \frac{d}{ds}\Big(\frac{\delta z}{r}\Big)\Big] ds,$$

was über den Stromkreis s, dem das Element Jds angehört, integriert Null ergibt, und GAUSS erhält also schliesslich für die virtuelle Arbeit, die von den AMPÈRESchen Kräften bei Verschiebung des Stromkreises s gegen s' geleistet wird, den Ausdruck:

$$(98) \qquad \int(\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z) = JJ'\delta \iint' \frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r}.$$

Führt man nun die Bezeichnung:

$$(99) \qquad \Pi = -JJ' \iint' \frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r} = -JJ' \iint' \frac{\cos\varepsilon\,ds\,ds'}{r}$$

ein, so folgen aus (98) die Gleichungen

$$(100) \qquad \xi = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}, \quad \zeta = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}.$$

Π ist aber nichts anderes als das von FRANZ NEUMANN[1]) sogenannte »elektrodynamische Potential« der beiden Ströme aufeinander, als dessen partielle Ableitungen die Kraftkomponenten erscheinen. Die Gleichungen (100) stellen also bezüglich der ponderomotorischen Kräfte nach Form und Inhalt das NEUMANNsche Potentialgesetz dar, das von diesem erst in den Jahren 1845 und 1847 veröffentlicht wurde, d. h. etwa 12 Jahre, nachdem GAUSS es gefunden hatte.

77. Darüber hinaus hat GAUSS auch den Zusammenhang zwischen der induzierten elektromotorischen Kraft und dem elektrodynamischen Potential, d. h. das allgemeine Induktionsgesetz, gefunden. Seine Ausdrucksweise ist hier freilich schwankend, indem er als elektromotorische Kraft zuweilen das Linienintegral der elektrischen Feldstärke $\int \mathfrak{E}_s\, ds$, zuweilen aber auch einfach die elektrische Feldstärke selbst bezeichnet; die letztere nennt GAUSS »elektromotorische Kraft in einem Punkte«.

In dem *Handbuche* 19 (Be)[2]) findet sich eine Eintragung von GAUSS unter der Überschrift: *Das Induktionsgesetz, gefunden* 1835, *Januar* 23; *morgens sieben Uhr vor dem Aufstehen*, folgenden Inhaltes: »Die stromerzeugende Kraft, welche in einem Punkte P hervorgebracht wird durch ein Rheophorelement γ, dessen Entfernung von P gleich r, ist während des Zeitelementes dt die Differenz der beiden Werte von $\frac{\gamma}{r}$, welche den Augenblicken t und $t+dt$ entsprechen, durch dt dividiert, wo γ nach Grösse und Richtung zu berücksichtigen ist, was kurz und verständlich durch

$$-\frac{d\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{dt}$$

ausgedrückt werden kann.«

Unter γ ist unzweifelhaft Jds zu verstehen; was GAUSS mit der Bestimmung meinte, »wo γ nach Grösse und Richtung zu berücksichtigen ist«, zeigen unzweideutig einige Anwendungen, die er von seiner Gleichung macht. Es heisst z. B. an einer anderen Stelle[3]): »Entsteht während der sehr kleinen

1) F. NEUMANN, Abhandl. der Berliner Akademie 1845 und 1847; NEUMANNs Ges. Werke, Band III S. 258 ff. und S. 345 ff.

2) *Handbuch* 19 (Be), S. 184; Werke V, S. 609.

3) *Handbuch* 19 (Be), S. 186; Werke V, S. 610.

Zeit dt der Strom J in s, so ist damit eine oben bemerkte stromerzeugende Kraft in jedem Punkte begleitet; vom Element ds' ist das Mass derselben

$$= -\frac{J\,ds\,ds'\cos\varepsilon}{r\,dt},$$

wenn ε die Neigung der Richtungen ds, ds' gegeneinander bezeichnet«[1]). Im weiteren Verlauf der Rechnung gelangt GAUSS zum Ergebnis, dass auf Grund dieses Gesetzes die elektromotorische Kraft A_1, die im geschlossenen Kreise s' durch Entstehung des Stromes J im geschlossenen Kreise s erzeugt wird, durch

$$A_1 = \frac{4J}{dt}\iint' \frac{\partial\rho}{\partial s}\frac{\partial\rho}{\partial s'}\,ds\,ds'$$

gegeben ist, wo $\rho^2 = r$ die Entfernung der beiden Stromelemente ds und ds' bedeutet. Dieser Ausdruck ist aber mit Hilfe der (in ρ ausgedrückten) Beziehungen (85) identisch mit dem folgenden:

$$A_1 = -\frac{J}{dt}\iint' \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'. \tag{101}$$

Beachtet man, dass nach den Bedingungen des Problems J die in der Zeit dt entstehende Stromstärke ist, d. h. das, was wir in gewöhnlicher Schreibweise mit dJ bezeichnen, so kann man die letzte Gleichung schreiben:

$$A_1 = -\iint' \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'\cdot\frac{dJ}{dt} \tag{101a}$$

und man erkennt — allerdings nur in dem speziellen Falle, wo die Induktion nicht durch Bewegung erzeugt wird — den Zusammenhang mit dem elektrodynamischen Potential (99). Denn

$$-J\iint' \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'$$

ist das Potential des Stromes J in Bezug auf den Leiter s', der von der Stromstärke $J' = 1$ durchflossen gedacht wird.

GAUSS hat aber ebenso den Fall behandelt, dass die Stromstärke J konstant bleibt, dagegen die Lage der beiden Leiter gegeneinander geändert wird. Sein Gedankengang ist der folgende[2]):

1) Die Bezeichnungen habe ich hier, der Gleichförmigkeit wegen gegen GAUSS geändert. — SCHAEFER.

2) Werke V, S. 608.

»Die elektromotorische Kraft eines Stromelements Jds wirkt in jedem Punkte mit einer Stärke, welche der Entfernung r verkehrt, hingegen dem auf diese Linie projizierten Stromelement direkt proportional ist, und in der Richtung der Linie r selbst, aber stets im entgegengesetzten Sinne.« Die letzten Worte entsprechen der von LENZ[1]) aufgestellten Regel, dass bei der Bewegung immer Arbeit geleistet werden muss, deren Äquivalent eben die Induktion ist; d. h. die letztere entspricht dem Energieprinzip. Man erkennt also hier, dass GAUSS denselben Ausgangspunkt genommen und demselben Gedankengange gefolgt ist, wie später (1845) FRANZ NEUMANN in seiner schon genannten Arbeit. So findet GAUSS für die durch Bewegung erzeugte elektromotorische Kraft den Ausdruck

$$A_2 = 4J\frac{d}{dt}\iint' \frac{d\rho}{ds}\frac{d\rho}{ds'}\,ds\,ds',$$

oder:

$$A_2 = -J\frac{d}{dt}\iint' \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'. \tag{102}$$

Der allgemeine Fall, wo sowohl Stromänderung als auch Bewegung vorhanden ist, ist von GAUSS nur in der Form des im Eingang aufgestellten Elementargesetzes der Induktion behandelt, das nach Integration über die geschlossenen Stromkreise s und s' in der Tat die beiden Gleichungen (101) und (102) als Spezialfälle umfasst. Die Ausführung dieser Integrationen oder die Zusammenfassung der Gleichungen (101) und (102) liefert für den allgemeinen Fall der Induktion die elektromotorische Kraft:

$$A = -\frac{d}{dt}\left[J\iint' \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'\right], \tag{103}$$

und dies ist wieder genau das FRANZ NEUMANNsche Ergebnis, nämlich der zweite Teil des Potentialgesetzes.

Als Gesamtergebnis können wir daher feststellen, dass GAUSS im Anfang des Jahres 1835 das vollständige Potentialgesetz besass, sowohl was die Ableitung der ponderomotorischen Kräfte, als die der Induktionserscheinungen angeht. Diese Leistung ist wohl die Krone der physikalischen Schöpfungen von GAUSS, wie sie es auch für FRANZ NEUMANN gewesen ist.

1) LENZ, Pogg. Ann. **33**, S. 483; 1834.

Erwähnt sei übrigens, dass fast alle oben verwendeten Gleichungen bei GAUSS allgemeiner geschrieben sind, indem beiderseits ungeschlossene Stromleiter s und s' vorausgesetzt sind. Demgemäss treten noch 4 Glieder in den Ausdrücken für die elektromotorische Kraft hinzu, die von den Anfangs- und Endstücken der Leiter herrühren; sie sind im vorhergehenden fortgelassen, einmal um den Gedankengang klarer hervortreten zu lassen, zum zweiten aber, weil wir heute wissen, dass ungeschlossene Ströme gar nicht existieren. Immerhin haben auch diese allgemeineren Formulierungen von GAUSS ihren Einfluss auf die Entwicklung der Wissenschaft ausgeübt. HELMHOLTZ[1]) knüpft (1870), wie mir scheint, bei seinen Untersuchungen über die allgemeinste Form des Elementargesetzes direkt an diese 1867 im Bande V der Werke veröffentlichten Betrachtungen von GAUSS an.

78. Nach dem Standpunkte der damaligen Zeit waren Elementargesetze zwischen Stromelementen nicht das letzte Ziel der Wissenschaft; vielmehr galt es damals als höchstes Ziel der Physik, daraus Fernwirkungsgesetze (nach Art des NEWTONschen bezw. COULOMBschen) zwischen den elektrischen Ladungen abzuleiten, die man sich in den Leitern fliessend dachte. Auch GAUSS hat demgemäss versucht, ein solches Gesetz zu finden, aus dem sowohl die elektrostatischen Erscheinungen, wie die elektromagnetischen und elektrodynamischen und endlich die Induktionswirkungen abzuleiten wären.

In seinen hinterlassenen Aufzeichnungen finden sich zwei derartige Ansätze.

Auf einem einzelnen Blatte[2]) finden sich folgende Sätze, die aus dem Jahre 1835 stammen: »Wirkung eines elektrischen Elements auf ein anderes, relativ gegen welches der Platz des ersteren durch die komplexe Grösse u für die Zeit t bestimmt wird; Entfernung $= r$:

$$-\frac{u}{r^3}-\frac{\alpha}{ur}\left(\frac{du}{dt}\right)^2-\frac{\beta}{r}\frac{d^2u}{dt^2}.\text{«} \tag{104}$$

Wenige Zeilen später heisst es weiter zur Erläuterung: »In einer galvanischen Strömung von der Intensität J[3]) schiebt sich in der Zeit t durch jeden Quer-

1) H. v. HELMHOLTZ, Ges. Abhandl., Band I, S. 564 ff.

2) Werke V, S. 616.

3) Die Bezeichnung ist hier von mir geändert. — SCHAEFER.

schnitt die positive Elektrizität εJt nach der einen, die negative $-\varepsilon Jt$ nach der andern Richtung.«

Dabei ist ε ein Faktor, der nicht näher bezeichnet wird, der aber nach GAUSS mit den Konstanten α und β in (104) in folgender Weise zusammenhängen soll:

$$\alpha = \frac{1}{8\varepsilon^2}, \quad \beta = \frac{1}{4\varepsilon^2} = 2\alpha. \tag{105}$$

Damit nimmt das GAUSSsche »Grundgesetz I«, wie wir es nennen wollen, folgende Gestalt an:

$$-\frac{u}{r^3} - \frac{1}{8\varepsilon^2}\frac{1}{ur}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \frac{1}{4\varepsilon^2}\frac{1}{r}\frac{d^2u}{dt^2}. \tag{106}$$

Durch Dimensionsvergleichung der einzelnen Ausdrücke erkennt man leicht, dass ε die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Das von GAUSS als komplexe Grösse bezeichnete u ist offenbar »trikomplex«, d. h. die vektoriell aufgefasste Grösse r; also ist $|u| = r$. Dann gibt das erste Glied $\frac{u}{r^3}$ dem Betrage nach die COULOMBsche Kraft zwischen zwei ruhenden Ladungen, wie es sein muss. Wenn man das zweite Glied mit u erweitert und bedenkt, dass $u^2 = r^2$ ist, so erhält man statt (106):

$$-\frac{u}{r}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{8\varepsilon^2 r^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right\} - \frac{1}{4\varepsilon^2}\frac{1}{r}\frac{d^2u}{dt^2}. \tag{107}$$

Die beiden durch geschweifte Klammern zusammengefassten Glieder würden eine Kraft in Richtung der Entfernung r bedeuten; das zweite Glied hängt dabei von der relativen Geschwindigkeit $\dot{u}$ ab, das dritte Glied repräsentiert eine Kraft in Richtung der relativen Beschleunigung $\ddot{u}$ und ist dieser proportional.

Man erkennt, dass zwischen dem GAUSSschen »Grundgesetz I« und dem später (1845—1847) von WILHELM WEBER[1]) aufgestellten Elementargesetz

$$\frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2}{\varepsilon^2 r^2} + \frac{2\ddot{r}}{\varepsilon^2 r} \tag{108}$$

insofern eine grosse Ähnlichkeit besteht, als auch bei WEBER das zweite Glied von einer Geschwindigkeit ($\dot{r}$), das dritte von einer Beschleunigung ($\ddot{r}$)

1) WILHELM WEBER, Ges. Werke III, S. 134 ff.

abhängt, die allerdings nicht mit der relativen Geschwindigkeit ($\dot{u}$) bezw. der relativen Beschleunigung ($\ddot{u}$) identisch sind.

Dieses »Grundgesetz I« ist bisher nicht genauer untersucht worden, weil GAUSS selbst es anscheinend nicht weiter verfolgt hat.

Im *Handbuch* 19 (Be)[1]) hat GAUSS — im Juli 1835 — noch ein zweites Grundgesetz aufgestellt, das in der Literatur schlechthin als »Gausssches Grundgesetz« bezeichnet wird, weswegen auch wir uns dieser Bezeichnung anschliessen wollen. Für die Wirkung zweier Elektrizitätsmengen aufeinander gibt GAUSS die Formel an:

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 + k\left\{\ddot{u}^2 - \tfrac{3}{2}\dot{r}^2\right\}\right], \tag{109}$$

wo $\sqrt{\frac{1}{k}}$ (ebenso wie vorhin ε) eine Geschwindigkeit bedeutet.

Von diesem seinem eigentlichen Grundgesetz hat GAUSS noch selbst — in den folgenden Zeilen des *Handbuches* — gezeigt, dass es mit den AMPÈRE-schen elektrodynamischen Gesetzen übereinstimmt; wie es sich zur Induktion verhält, hat GAUSS sicherlich auch geprüft, indessen ist uns keine Aufzeichnung darüber erhalten. Dagegen hat MAXWELL[2]) gezeigt, dass das GAUSSsche Grundgesetz die Erscheinungen der Induktion nicht richtig wiedergibt. Da GAUSS sein Grundgesetz nicht veröffentlicht hat, ist man zu der Annahme berechtigt, dass dasselbe auch ihn nicht befriedigt hat.

79. Während GAUSS hier ganz konsequent die Auffassung der Fernwirkungstheorie vertritt — ein Standpunkt, der später von WILHELM WEBER und KARL NEUMANN entwickelt wurde und der im WEBERschen Grundgesetze kulminierte — scheint er später Gedanken gehegt zu haben, die sich den Ideen FARADAYS annähern, wonach die Fernwirkung durch eine Feldwirkung zu ersetzen ist.

Wir sind darüber orientiert durch einen Brief GAUSSens an WEBER[3]) vom 19. März 1845, der eine Antwort auf einen Brief WEBERS darstellt, der sich damals bereits mit der Aufstellung seines Grundgesetzes und seiner Ableitbarkeit aus den AMPÈRESchen Gesetzen beschäftigte. GAUSS schreibt: »Diese

1) *Handbuch* 19 (Be), S. 193; Werke V, S. 616.

2) MAXWELL, *Treatise of Electricity and Magnetism*, Band II, Deutsche Ausg. S. 593 ff.

3) Werke V, S. 627, insbes. S. 629.

[Durchsicht] hat mir . . . . . gezeigt, dass der Gegenstand [Ihres Aufsatzes] zu denselben Untersuchungen gehört, mit denen ich mich vor etwa 10 Jahren (ich meine 1834 bis 1836) sehr ausgedehnt beschäftigt habe, und dass, um ein gründliches und erschöpfendes Urteil über ihren Aufsatz aussprechen zu können, es nicht zureicht, diesen durchzulesen, sondern dass ich mich erst ganz wieder in meine eigenen Arbeiten aus jener Zeit würde hineinstudieren müssen, was einen umso längeren Zeitraum erfordern würde, da ich jetzt, bei einer versuchsweise vorgenommenen Papierdurchmusterung erst einige nur fragmentarische Bruchstücke aufgefunden habe, obwohl wahrscheinlich viel mehr vorhanden sein wird, wenn auch nicht in vollständig geordneter Form . . . . . .«

Gauss geht dann des Näheren auf Webers Darlegungen über das Ampèresche Gesetz ein, was uns hier nicht interessiert[1]) und fährt fort: »Ich würde ohne Zweifel meine Untersuchungen längst bekannt gemacht haben, hätte nicht zu der Zeit, wo ich sie abbrach, das gefehlt, was ich wie den eigentlichen Schlussstein betrachtet hatte, ... nämlich die Ableitung der Zusatzkräfte (die zu der gegenseitigen Wirkung ruhender Elektrizitätsteile noch hinzukommen, wenn sie in gegenseitiger Bewegung sind) aus der nicht instantanen, sondern (auf ähnliche Weise wie beim Licht) in der Zeit sich fortpflanzenden Wirkung. Mir hatte dies damals nicht gelingen wollen; ich verliess aber . . . . . die Untersuchung damals doch nicht ganz ohne Hoffnung, dass dies später vielleicht gelingen könnte, obwohl . . . . . mit der subjektiven Überzeugung, dass es vorher nötig sei, sich von der Art, wie die Fortpflanzung geschieht, eine konstruierbare Vorstellung zu machen.«

Hier findet sich zum ersten Male die Andeutung einer Nahewirkung mit endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit, freilich sehr allgemein und unbestimmt formuliert; aber sie zeigt doch, dass Gauss auf dem Wege war, der später auf Grund der Faradayschen Ideen von Maxwell beschritten wurde. Der erste, dem 1858 ein weiterer Schritt in dieser Richtung gelang, war bekannt-

1) Von Interesse mag immerhin folgende Feststellung sein: In dem mehrfach genannten *Handbuch* 19 (Be), in dem sich Gauss' Entwicklungen über Elektrodynamik befinden, ist eine Eintragung (Werke V, S. 624) erst nach 1843 eingetragen. Sie bezieht sich auf das Ampèresche Gesetz, und man kann vermuten, dass Gauss, der nach dem Empfang von Webers Brief seine alten Papiere suchte, aber nicht vollständig wiederfand, zu seiner Wiedereinarbeitung in die Materie diese spätere Aufzeichnung gemacht hat. Diese wäre dann erst 1845 geschrieben und direkt durch Webers Brief veranlasst.

lich GAUSS' Schüler BERNHARD RIEMANN[1]), der anstelle der POISSONschen Gleichung für das Potential die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta V + 4\pi\rho$$

angesetzt hatte, die eine Fortpflanzung des Potentials mit Lichtgeschwindigkeit ergibt. GAUSS selbst war hier ein Erfolg nicht beschieden gewesen.

III. Gauss' Untersuchungen über Optik.

80. Schon durch seine astronomische Tätigkeit wurde GAUSS veranlasst, sich mit bestimmten Problemen der Optik, genauer der Dioptrik zu befassen. Und zwar wurden ihm diese Probleme — wie jedem Astronomen seiner Zeit — durch die Unvollkommenheit der damaligen Fernrohre fast aufgezwungen. Es handelt sich mit andern Worten darum, achromatische und sphärisch korrigierte Fernrohrobjektive zu berechnen.

Zum ersten Male trat diese Aufgabe im Jahre 1807 an GAUSS heran, als der Inhaber der berühmten Hamburger mechanisch-optischen Werkstätte JOHANN GEORG REPSOLD sich an ihn wandte mit bestimmten Fragen über die Konstruktion eines achromatischen Doppelobjektivs. REPSOLD wurde zu seinem Briefe veranlasst durch einen Aufsatz von GEORG SIMON KLÜGEL[2]); der Brief selbst ist uns nicht bekannt, doch können wir aus GAUSSens Antwort ersehen, um was es sich handelte. Dieser[3]) erwiderte am 30. September 1807 aus Braunschweig: »Auf Veranlassung von Ihrem Herrn Onkel habe ich den KLÜGELschen Aufsatz über die Dimensionen eines Doppelobjektivs in HINDENBURGS Archiv durchgesehen. Diesen Zweig der Mathematik habe ich zwar bisher noch zu keiner Hauptbeschäftigung gemacht, und mancherlei meine Zeit jetzt beschränkende Arbeiten verbieten mir, in diesem Augenblick tief in diesen

1) B. RIEMANN, Ges. Werke, 2. Aufl., S. 288.

2) G. S. KLÜGEL, *Angabe eines Doppelobjektivs, das von aller Zerstreuung der Farbe frei ist;* Archiv der reinen und angew. Math., 6. Heft, S. 141 ff., 1797.

3) Werke XII, S. 145.

Gegenstand einzugehen; indessen glaube ich doch Ihre Fragen ..... ziemlich befriedigend beantworten zu können.

»Erstlich, wenn die Dicke des Glases zu den von KLÜGEL vorgeschriebenen Dimensionen nicht zureicht, so kann man allenfalls die Linsen so viel dünner schleifen (wovon denn freilich die natürliche Folge ist, dass die Konvexlinse eine verhältnismässig kleinere Öffnung erhält) und übrigens die Dimensionen der Krümmung beibehalten. KLÜGEL erklärt selbst S. 154, dass dadurch kein sehr bedeutender Fehler entstehen könne. Um aber nichts zu wünschen übrig zu lassen, habe ich für dünnere Linsen die Dimensionen eines Objektivs berechnet, von dem ich versichern kann, dass es völlig so gut ist, als das von KLÜGEL angegebene und in der Voraussetzung, dass die Zerstreuungskräfte der beiden Glasarten den S. 151 angegebenen Datis entsprechen, sowohl die Abweichung wegen der Farben als die wegen der Gestalt vollkommen hebt.

Brennweite d. Doppelobjektivs v. d. hinteren Fläche gerechnet	31938	Teile
» » Konvexglases » » » » »	9962	»
» » Konkavglases » » » » »	—	
Halbmesser der Vorderfläche beim Konvexglase	6943	»
» » Hinterfläche » »	22712	»
» » Vorderfläche » Konkavglase	14938	»
» » Hinterfläche » »	18709	»
Dicke des Konvexglases	100	»
Ganze Öffnung des Konvexglases	2055	»
Dicke des Konkavglases (in der Achse)	35	»
Distanz der inneren Flächen beider Gläser	80	»

Der Theorie nach muss dies Glas für 8 Fuss Brennweite eine wirkliche Öffnung von $5\frac{1}{2}$ Zoll vollkommen vertragen. Schlimm ist's nur, dass man schwerlich darauf rechnen kann, dass die Zerstreuungskräfte der beiden Glasarten vollkommen mit den vorausgesetzten Zahlen übereinstimmen, und man von der andern Seite die vorgeschriebenen Krümmungen nie aufs allerschärfste in der Praxis wird ausführen können. Gerade dieser Umstand aber gibt die Antwort auf Ihre zweite Frage. An sich ist allerdings keineswegs notwendig, dass die beiden Gläser durch einen Zwischenraum getrennt sind. Allein die Absicht, warum bei der Rechnung einer gelassen ist, geht dahin, um einigen

Spielraum zu gewinnen, sodass man durch Verringerung oder Vergrösserung der Distanz demjenigen durch Probieren nachhelfen könne, was an der Beschaffenheit der Glasarten und der Ausführung der verlangten Krümmungen etwa noch fehlen kann. Die Engländer leisten dieses Nachhelfen nicht durch Verschieben der Gläser, sondern dadurch, dass sie aus einer sehr grossen Menge von Linsen diejenige aussuchen, die den besten Effekt tut. Könnten Sie mir einerseits die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse Ihrer Glasarten haarscharf angeben und zweitens gewiss sein, die vorgeschriebenen Krümmungen ebenso haarscharf auszuführen, so wäre es ein Leichtes, die Dimensionen zu dem besten Objektiv, wo die Linsen sich berühren, anzugeben. Allein bei den kleinen doch immer unvermeidlichen Unvollkommenheiten ist es dem, der nicht unter Hunderten von Linsen aussuchen kann, notwendig, sich gleichsam den Rücken frei zu erhalten, um wenigstens durch eine kleine Verschiebung der Linsen das gefehlte wieder einzubringen zu suchen. Ob übrigens nach Herrn KLÜGELS Vorschriften schon ein Glas ausgeführt ist, weiss ich nicht; aber gewiss glaube ich, dass man durch zweckmässige Benutzung der Theorie vor der blossen Empirie einen sicheren Vorsprung müsste erhalten können.«

In derselben Angelegenheit besitzen wir noch einen zweiten Brief von GAUSS[1]) an REPSOLD vom 2. September 1809. Darin verlangt GAUSS wiederum von REPSOLD genaue Werte von Brechungs- und Zerstreuungsvermögen der beiden Glassorten und erteilt ihm einige Ratschläge, wie er die exakte Messung ausführen solle. »Alsdann werde ich mit Vergnügen untersuchen, in wie fern bei der daraus folgenden Beschaffenheit der Gläser das Objektivglas etwa noch vollkommener eingerichtet werden könnte, und zweitens, wie es zu berechnen sei, damit das Konkavglas die möglichst kleinste Dicke erhalte.«

Die Forderung, möglichst geringer Dicke des Flintglases musste damals aus technischen Gründen gestellt werden, da grössere Stücke schlierenfreien Flintglases nicht mit Sicherheit hergestellt werden konnten. Wir kommen auf diesen Punkt, der späterhin noch eine andere Bedeutung erhalten wird, noch einmal zurück.

Am 30. Mai 1810[2]) und dann noch einmal am 10. Juni 1810[3]) erbittet

1) Werke XII, S. 147 ff.

2) GAUSS-SCHUMACHER I, S. 43.

3) Ebenda, S. 44; Werke XI, 1, S. 145.

SCHUMACHER im Namen REPSOLDS die Neuberechnung eines Doppelobjektivs von 8 Fuss Brennweite. Letzterer hatte inzwischen für seine Glassorten folgende mittleren Werte für den Brechungsexponenten n und die Dispersionen dn gefunden:

$$\text{für das Kronglas: } n = 1{,}5157; \quad dn = 0{,}0051,$$
$$\text{für das Flintglas: } n = 1{,}6109; \quad dn = 0{,}0090.$$

Insbesondere wünschte REPSOLD aus Bequemlichkeitsgründen, dass zwei Flächen der beiden Linsen den gleichen Krümmungshalbmesser haben sollten. Am 25. Mai 1810 antwortet GAUSS[1]): »REPSOLDS Wunsch, dass zwei von den vier Flächen einerlei Halbmesser bekommen, lässt sich nicht erfüllen, wenn die Bedingung statthaben soll, dass die dritte Fläche einen kleineren Halbmesser habe als die zweite. Sie können sich davon leicht überzeugen, wenn Sie folgende vier Formeln näher prüfen, wodurch nach REPSOLDS Angaben die vier Halbmesser $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\sigma}$, $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\sigma'}$[2]) dargestellt werden, wenn die Brennweite 96 Zoll werden und die Abweichung wegen Gestalt der Gläser und wegen der Farben gehoben werden soll. Diese Form ist mir eigentümlich und, wie ich glaube, die zierlichste, die man finden kann:

$$(110) \qquad \begin{cases} \rho = +0{,}0556255 - 0{,}0276427 \operatorname{tang}\varphi, \\ \sigma = +0{,}0083843 + 0{,}0276427 \operatorname{tang}\varphi, \\ \rho' = +0{,}0129083 - 0{,}0339803 \operatorname{secans}\varphi, \\ \sigma' = -0{,}0498917 + 0{,}0339803 \operatorname{secans}\varphi. \end{cases}$$

Der Winkel φ kann nach Gefallen angenommen werden; negative Halbmesser zeigen hohle Flächen an.

»Bei diesen Formeln ist die Dicke der Gläser nicht in Betracht gezogen. Mit Rücksicht auf diese werden einige Abänderungen nötig; ich habe ein System von Werten auf das Schärfste berechnet, wodurch die äusseren Farben bei den sehr nahe der Achse [verlaufenden Strahlen] und zugleich die mittleren [Strahlen], die in einem Abstand von zwei Zoll von der Achse [verlaufen], genau in einen Punkt zusammengebracht werden, und mir dabei die Bedingung vorgeschrieben, dass die zweite und dritte Fläche nicht viel verschieden sein sollen; je ungleicher man sie nimmt, desto kleiner wird der Halbmesser der

1) GAUSS-SCHUMACHER I, S. 45; Werke XI, 1, S. 146.

2) Die Bezeichnung ist hier der Gleichförmigkeit wegen (s. Artikel 81) geändert. — SCHAEFER.

ersten Fläche, und man wünscht kleine Halbmesser so viel [als] möglich zu vermeiden.

Masse für ein Doppelobjektiv von 96 Zoll Brennweite, 5 Zoll Öffnung:

Halbmesser der Flächen des Konvexglases	26,202 Zoll;	Dicke in der Achse	
	42,972 » ;		0,21,
» » » » Konkavglases	39,985 » ;	Dicke in der Achse	
	100,845 » ;		0,11.

Ich bin überzeugt, dass, wenn die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse genau so sind, wie REPSOLD sie gefunden hat, und die Flächen genau kugelförmig werden, dieses Glas eine sehr gute Wirkung tun muss.«

Wider Erwarten gaben die beiden ersten Objektive, die REPSOLD nach diesen Formeln herstellte, schlechte bezw. nicht voll befriedigende Resultate. Er sowohl wie SCHUMACHER schoben dies darauf, dass nach den GAUSSschen Formeln die Dicke der Gläser so gering ausfiel, dass das Glas beim Schleifen sich durchgebogen und die Kugelgestalt verloren habe. Am 6. Oktober 1810 teilt GAUSS[1]) an SCHUMACHER mit, dass er bereit sei, die Rechnung für etwas grössere Dicke der Gläser noch einmal zu wiederholen; er glaube aber, dass dies die Dimensionen nur wenig verändern könne. Bevor er dazu kam, teilte ihm indes SCHUMACHER[2]) am 10. November 1810 mit, dass ein neuer Versuch REPSOLDS von vollem Erfolge gekrönt gewesen sei: »REPSOLD hat jetzt nach Ihren Formeln ein ..... Objektiv vollendet, das, ohnerachtet das Glas Streifen hat, vortreffliche Wirkung tut. Es sitzt schon im Passageninstrumente und zeigt bei hellem Tage Mizar als Doppelstern. Beide Sterne sind noch keine 20 Sekunden von einander entfernt. Alle Sterne der vierten Grösse kann man jetzt bei Tage beobachten.« Und in einem späteren Briefe vom 31. Juni 1811 teilt SCHUMACHER[3]) mit, dass der Polarstern, ein Doppelstern der vierten Klasse HERSCHELS, mit dem GAUSSschen Objektiv aufgelöst werden könne: »Sie können danach von der Vortrefflichkeit des nach Ihren Formeln geschliffenen Objektivs urteilen.«

1) GAUSS-SCHUMACHER I, S. 154; Werke XI, 1, S. 148.
2) Ebenda S. 158; Werke XI, 1, S. 148.
3) Ebenda S. 82.

81. Wichtig für uns ist die im ersten Brief an REPSOLD enthaltene Feststellung von GAUSS, dass er sich bisher nicht wesentlich mit der Theorie achromatischer Objektive befasst habe. Man wird daher erwarten können, dass die ausgeführte Berechnung nichts der Sache nach Neues bringt, sondern im Wesentlichen eine Anwendung bekannter Ergebnisse gewesen ist. Damit steht nicht im Widerspruch GAUSS' Äusserung im Brief an SCHUMACHER vom 25. Juni 1810, dass die Formeln (110) für die Halbmesser der Einzellinsen »ihm eigentümlich seien«; denn das kann sich ausschliesslich auf die analytische Form beziehen und bezieht sich, wie wir gleich sehen werden, tatsächlich darauf. Man kann in der Tat zeigen, dass GAUSSens Rechnung im Wesentlichen auf EULERS *Dioptrik* zurückgeht.

Wir besitzen nämlich aus dem Nachlasse eine Aufzeichnung von GAUSS[1]) *Achromatische Doppelobjektive, ohne Rücksicht auf Dicke und Abstand*, in der zwar nicht genau die Form (110), aber eine nahe damit verwandte und unmittelbar damit zusammenhängende benützt wird, nämlich die folgende:

$$(111)\qquad \begin{cases} \frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} = e + f\,\text{tang}\,\psi, \\ \frac{\rho'-\sigma'}{\rho'+\sigma'} = e' + f'\,\text{secans}\,\psi, \\ \frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} = E + F\,\text{tang}\,\Psi, \\ \frac{\rho'-\sigma'}{\rho'+\sigma'} = E' + F'\,\text{secans}\,\Psi. \end{cases}$$

Das erste Gleichungspaar liefert bei willkürlichem ψ alle Doppelobjektive, die in der Achse chromatisch und für rotes Licht sphärisch korrigiert sind; das zweite Paar bei willkürlichem Ψ ebenso alle diejenigen, die in der Achse chromatisch und für violettes Licht sphärisch korrigiert sind. Alle vier Gleichungen zusammen müssen gelten, wenn ausser der chromatischen Korrektion zugleich die sphärische Aberration für rote und violette Strahlen beseitigt sein soll. Hier können wir nun an Hand der GAUSSschen Aufzeichnung, die jedenfalls in der Zeit um 1808 entstanden, aber erst nach 1813[2]) niedergeschrieben ist, den Gang der Rechnung und ihren Ausgangspunkt verfolgen.

---

1) *Handbuch* 21 (Bg), S. 29 und 30; Werke XI, 1, S. 135 ff.

2) Das *Handbuch* 21 (Bg)' trägt die Notiz: Angefangen im September 1813; der Text der obigen Handschrift stammt mit grösster Wahrscheinlichkeit aus dem Jahre 1815.

Der Ausgangspunkt ist ein Problem von EULER[1]): Bei gegebenem Objektabstande a und gegebenem Bildabstande α gibt es unendlich viele (unendlich dünne) Einzellinsen, die das Objekt in den Bildpunkt abbilden; die sphärische Aberration (EULERS *spatium diffusionis*) ist je nach der Wahl der Linse verschieden, und einer bestimmten Linse entspricht das Minimum derselben. In GAUSS' Schreibweise lauten EULERS Formeln für die Radien $\frac{1}{\rho}$ und $\frac{1}{\sigma}$ dieser Linsenschar folgendermassen:

$$(112)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha\alpha}{r\alpha + s\alpha \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{l-1}}, \\ \frac{1}{\sigma} = \frac{\alpha\alpha}{r\alpha + s\alpha \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{l-1}}, \end{cases}$$

dabei haben r, s, τ folgende Bedeutung:

$$(113)\qquad \begin{cases} r = \frac{1}{2m} + \frac{1}{m+3} - 1, \\ s = 1 + \frac{1}{2m} - \frac{1}{m+3}, \\ \tau = \frac{(m+1)\sqrt{4m+3}}{2m(m+3)}, \end{cases}$$

während $(m+1)$ der Brechungsexponent der Linse für rote Strahlen ist; $l \geqq 1$ ist der Parameter der Schar, durch dessen verschiedene Wahl man die verschiedenen Linsen zu festem a und α erhält; $l = 1$ entspricht dem Minimum der sphärischen Aberration.

Die GAUSSsche Rechnung braucht hier nicht weiter analysiert zu werden, da dies in den Erläuterungen in Band XI, 1 der Werke, S. 138 ff. ausführlich geschehen ist. Hier möge es genügen zu zeigen, dass man von den EULERschen Formeln (112) in der Tat unmittelbar zu der Form (110) für ρ und σ geführt wird. Beachtet man nämlich, dass für astronomische Fernrohre der Objektabstand $a = \infty$ zu setzen ist, so wird die Bildweite $\alpha = p$, wenn p die Brennweite ist. Damit liefern die EULERschen Formeln (112):

$$(114)\qquad \begin{cases} \rho = \frac{s}{p} \pm \frac{\tau}{p}\sqrt{l-1}, \\ \sigma = \frac{r}{p} \mp \frac{\tau}{p}\sqrt{l-1}. \end{cases}$$

1) *Dioptricae pars prima*; LEONARDI EULERI Opera omnia, ser. III, vol. 3, Seite 34 (zitiert nach der neuen EULERausgabe).

Da nun nach dem Vorhergehenden $\sqrt{l-1}$ zwischen 0 und ∞ schwanken kann, so kann man unter Einführung eines neuen Parameters ψ setzen:

$$\sqrt{l-1} = \operatorname{tang} \psi,$$

und erhält damit:

$$(115) \qquad \begin{cases} \rho = \frac{s}{p} \pm \frac{z}{p} \operatorname{tang} \psi, \\ \sigma = \frac{r}{p} \mp \frac{z}{p} \operatorname{tang} \psi, \end{cases}$$

was genau die Form (110) für ρ und σ ist. Ganz analog ist es mit den Halbmessern der zweiten Linse, was hier nicht näher ausgeführt zu werden braucht.

Man sieht, dass abgesehen von der Form der analytischen Darstellung GAUSS vollkommen auf EULER fusst. Demgemäss ist auch das für REPSOLD berechnete Doppelobjektiv sphärisch für die Randstrahlen und chromatisch in der Achse korrigiert, wie man es damals zu machen pflegte.

82. Etwas grundsätzlich Neues dagegen tritt bei GAUSS auf in dem 1817 veröffentlichten Artikel[1]) *Über die achromatischen Doppelobjektive, besonders in Rücksicht der vollkommenern Aufhebung der Farbenzerstreuung.* Dieser Aufsatz war veranlasst durch eine Abhandlung BOHNENBERGERS über denselben Gegenstand.

Die Sachlage ist folgende: Wenn man ein Doppelobjektiv, wie es damals allgemein geschah und wie man es für allein möglich hielt, so korrigiert, dass die sphärische Aberration für die Randstrahlen mittlerer Wellenlänge und die chromatische Aberration für die Zentralstrahlen beseitigt wird, so ist die Aufgabe in dem Sinne unbestimmt, als man zu jeder beliebig vorgegebenen Konvexlinse aus Kronglas eine Flintglaslinse berechnen kann, so dass die Kombination den obigen Anforderungen entspricht. Das Verhältnis der Halbmesser der Kronglaslinse kann dabei also noch vollkommen willkürlich angenommen werden und wurde von den verschiedenen Autoren deshalb nach akzessorischen Gesichtspunkten bestimmt, wobei man übrigens stillschweigend immer beide Halbmesser der Kronglaslinse positiv nahm, d. h. das Kronglas als Bikonvexlinse ausbildete. EULER z. B. bestimmte die Halbmesser so, dass die erste

1) Zeitschr. für Astron. u. verwandte Wissensch., Bd. 4, S. 345 ff., 1817; Werke V, S. 504 ff. Die erste Andeutung findet sich im Briefe an OLBERS vom 28. April 1817: GAUSS-OLBERS II, 1, p. 852.

Linse für sich ein Minimum der sphärischen Aberration gibt (Verhältnis etwa 1 : 7); KLÜGEL wollte möglichst kleine Krümmungen verwenden (Verhältnis 1 : 1); später stellte derselbe die Forderung möglichst kleiner Brechungen (Verhältnis 1 : 3). GAUSS kritisiert nun diese verschiedenen Vorschläge mit folgender allgemeinen Begründung: Da die sphärische Aberration niemals ganz beseitigt werden kann, sondern, wenn sie für die Randzone korrigiert ist, in den Zwischenzonen sich wieder bemerklich macht (und umgekehrt), so fragt es sich, ob es überhaupt zweckmässig ist, gerade diesen Linsenfehler möglichst zu beseitigen, solange das Objektiv noch andere Unvollkommenheiten hat, die unter Umständen störender sind, als der Rest sphärischer Aberration Es empfiehlt sich z. B. nach GAUSS mehr, die Farbenzerstreuung auch für die Randstrahlen zu kompensieren, — wenn dies möglich ist.

BOHNENBERGER[1]) hat nun das Verdienst, durch seine Arbeit gezeigt zu haben, dass es in Hinsicht der Farbenzerstreuung vorteilhafter ist, das Halbmesserverhältnis 2 : 3 statt des KLÜGELschen Verhältnisses 1 : 3 zu wählen; in beiden Fällen ist die sphärische Aberration noch merklich gleich gut korrigiert.

Immerhin bleibt auch bei dieser von BOHNENBERGER vorgeschlagenen Wahl der Halbmesser ein Rest von Farbenzerstreuung für die Randstrahlen übrig, und es erhebt sich eben die allgemeine Frage, ob man nicht die Forderung der Beseitigung der chromatischen Fehler für die Randstrahlen zur Bestimmung des Verhältnisses der Halbmesser der ersten Linse benützen kann. BOHNENBERGER kam auf Grund seiner Untersuchung[2]) zu dem Ergebnis, dass dies nicht möglich sei: »Denn es lässt sich die Farbenzerstreuung nicht für grosse und kleine Brechungen, also nicht am Mittelpunkt und am Rande des Objektivs gleichzeitig heben«, heisst es am Schlusse seines Aufsatzes. Dieses Resultat veranlasste GAUSS, die Frage von Neuem zu prüfen, mit dem entgegengesetzten Ergebnis[3]): »Die vollkommene Wegschaffung der Farbenzerstreuung bei den Randstrahlen und den der Achse nächsten Strahlen ist nämlich allerdings möglich, oder bestimmter, es lässt sich ein Objektiv be-

1) *Bemerkungen über die Berechnung achromatischer Objektive*, Zeitschr. für Astron. und verwandte Wissensch., Band I, S. 282 ff. und 385 ff.

2) A. a. O., S. 393.

3) Zeitschr. für Astron. und verwandte Wissensch., Band IV, S. 345 ff.; Werke V, S. 506.

rechnen, welches alle Strahlen von zwei bestimmten Farben, sowohl diejenigen, welche in einer bestimmten Entfernung von der Achse, als die, welche unendlich nahe bei derselben (und zwar, wie hier immer vorausgesetzt wird, mit ihr parallel) auffallen, in einem und demselben Punkte vereinigt.«

Das Ergebnis kommt wesentlich dadurch zustande, dass GAUSS die bisher stillschweigend gemachte Voraussetzung, dass die Konvexlinse bikonvex sein müsse, fallen liess. Bei GAUSS ist vielmehr bei beiden Linsen der eine Halbmesser positiv, der andere negativ, und zwar so, dass die Kronglaslinse kollektiv, die Flintlinse hingegen dispansiv ist; die beiden konvexen Flächen sind dem (unendlich fernen) Objekt zugewendet.

Die Dimensionen des GAUSSischen Objektivs sind die folgenden: Die Brechungsexponenten der Kronglaslinse waren angenommen (wie bei BOHNENBERGER) zu:

	für violette Strahlen	1,525 976
	mittlere	1,515 162
	rote	1,504 348

die der Flintglaslinse zu:

	für violette Strahlen	1,62 173
	mittlere	1,60 177
	rote	1,58 181.

Die Dicke der ersten (Kronglas-)Linse in willkürlichen Einheiten ist gleich 200 gesetzt, die der zweiten (Flint) zu 80, der Abstand zu 50 Einheiten. Dann fand GAUSS für die Halbmesser der Reihe nach in denselben Einheiten:

$$\underbrace{3415{,}287;\quad -10133{,}007;}_{\text{Kron}} \qquad \underbrace{4207{,}421;\quad -2807{,}320}_{\text{Flint.}}$$

Dann »vereinigen sich die roten und violetten Strahlen, sowohl die, welche unendlich nahe bei der Achse, als die, welche in der Entfernung 1083,687 auffallen, alle in einem Punkt der Achse, dessen Entfernung von der letzten Fläche gleich 28293,3 wird. Wird jene Entfernung von der Achse, bei welcher der Einfallswinkel $18^0 30'$ ist, als Halbmesser der Öffnung angenommen, so ist der Durchmesser der Öffnung nahe $\frac{1}{13}$ der Brennweite.« Dann heisst es weiter — und dies ist für das Folgende wichtig —: »Um beurteilen zu können, wie gross die noch übrig bleibende Abweichung wegen der Gestalt für die

Strahlen zwischen dem Rande und der Achse wird, habe ich die Vereinigungsweite für den Einfallswinkel 13^0 berechnet und gefunden:

28289,3 für die roten,
28290,0 für die violetten Strahlen.«

Man sieht also, dass die Abweichung von der Kugelgestalt in $\frac{2}{3}$ der Öffnung wieder hervortritt, wenn sie für den Rand ($18^0 13'$) korrigiert ist.

Über die Art, wie GAUSS das Objektiv berechnet hat, gibt folgende Stelle seiner Abhandlung[1]) Auskunft: »Es gehört nicht zu meiner Absicht, den mathematischen Teil dieser Untersuchung hier zu entwickeln. Ich bemerke nur, dass die Aufgabe, wenn man die Abweichung wegen der Gestalt nach EULERS Art betrachtet und Dicke und Entfernung der Glaslinsen bei Seite setzt, auf eine Gleichung vierten Grades führt, welche zwei reelle Wurzeln hat. Die hieraus sich ergebende genäherte Auflösung dient zur Grundlage einer indirekten Rechnung, durch welche alles in Übereinstimmung gebracht wird.« Man erkennt wieder die Anknüpfung an EULER und damit an diejenigen Entwicklungen, die in den vorhergehenden Artikeln besprochen sind. Die dort erwähnte Handschrift aus *Handbuch* 21 (Bg) stellt geradezu die nach EULERS Art angestellte vorläufige Rechnung dar, unter Vernachlässigung von Dicke und Entfernung der Linsen[2]). Die weitere Durchführung der GAUSSschen Rechnung ist uns von seiner Hand nicht erhalten; man kann sie aber rekonstruieren aus einem *Lehrbuch der analytischen Optik* von JOH. CARL ED. SCHMIDT[3]), das nach dem 1832 erfolgten Tode des Verfassers von GOLDSCHMIDT, dem Schüler und Gehilfen von GAUSS, im Jahre 1834 in Göttingen herausgegeben wurde. Dort[4]) ist ein Objektiv nach GAUSS — also wohl unter seiner ausdrücklichen Billigung — durchgerechnet.

83. GAUSSsche Objektive sind inzwischen mehrfach hergestellt und mit

1) Werke V, S. 507.

2) Dass diese Auffassung zutrifft, ergibt sich am schlagendsten, wenn man nach dieser GAUSSschen Vorschrift die provisorischen Halbmesser der Linsenflächen wirklich ausrechnet. Ich finde bei einer flüchtigen Rechnung, wenn der erste Halbmesser dem GAUSSschen definitiven Werte gleichgesetzt wird:

3415,287; — 11601,6; 4243,3; — 2878,1.

Diese Werte weichen bis zu 13% von den GAUSSischen ab, was in Anbetracht der Vernachlässigung nicht unerwartet ist.

3) J. C. E. SCHMIDT, *Lehrbuch der analytischen Optik*, Göttingen 1834.

4) A. a. O., S. 484 ff.

anderen Glassorten berechnet worden — anscheinend mit recht verschiedenem Erfolge. Nach einem Berichte STEINHEILS sei es zum ersten Male in England, aber mit sehr schlechtem Ergebnis, ausgeführt worden. STEINHEIL selbst hat dann im Jahre 1860 ein Objektiv nach GAUSS angefertigt und gibt darüber folgenden Bericht[1]): »GAUSS hatte durch seine Rechnung gezeigt, dass es möglich ist, ein Objektiv zu konstruieren, welches Strahlen von zweierlei Brechbarkeit und zwar solche, welche der Achse unendlich nahe und solche, welche am Rande des Objektivs einfallen, in aller Strenge in einem Punkte vereinigt. Alle anders konstruierten Doppelobjektive leisten dieses nicht, sondern sie vereinigen nur die mittleren Strahlen und dann noch einen Strahl von anderer Brechbarkeit, z. B. den des Randes oder den der Achse, und es entsteht daher in unseren gegenwärtigen Objektiven eine Farbenabweichung, die um so fühlbarer wird, je grösser die Öffnung des Objektivs im Verhältnis zur Brennweite, und je grösser die Dimensionen überhaupt sind.

»Es war daher von hohem Belang, eine Konstruktion zu geben, welche diesen Übelstand beseitigt, und das war erreicht durch die Arbeit von GAUSS. Allein es hatten sich mehrfache Skrupel gegen diese erhoben. Einmal waren die Krümmungshalbmesser viel kürzer als bei FRAUNHOFER, ja kleiner als $\frac{1}{10}$ Brennweite, während bei FRAUNHOFER der kürzeste Halbmesser nahe $\frac{1}{3}$ Brennweite misst. Man fürchtete also, durch so sehr gekrümmte Gläser andere ausser der Rechnung liegende und doch wesentliche Bedingungen, z. B. Gesichtsfeld etc. nicht erfüllt zu sehen. Auf die grösste Bedenklichkeit hatte aber GAUSS selbst aufmerksam gemacht. Diese besteht darin, dass für die mittleren Strahlen zwischen Mittelpunkt und Rand des Objektivs wieder eine Abweichung hervortritt, die in $\frac{2}{3}$ ihr Maximum erreicht, so dass also wohl die Strahlen von Rand und Achse, aber nicht alle dazwischen liegenden vereinigt waren. Diesem Umstande wurde es zugeschrieben, dass der Effekt des GAUSSschen Objektivs nicht besser ausgefallen ist, und so blieb diese schöne Arbeit des grossen Meisters an 40 Jahre ohne Erfolg.

»Ein näheres Eingehen in die Sache zeigt jedoch leicht, dass die GAUSSsche Rechnung direkt gar nicht ausführbar war, weil GAUSS für die Grenzen des Spektrums gerechnet hatte, also gerade die Hauptmasse der Strahlen unbe-

1) Abgedruckt bei WILHELM WEBER, *Über das von Gauss berechnete und von Steinheil ausgeführte Fernrohrobjektiv*, WEBERS Werke I, S. 563 ff.; vergl. auch den Werke XII, S. 151 ff. abgedruckten Brief STEINHEILS aus den Astron. Nachr., Bd. 53, 1860, S. 305.

rücksichtigt liess. Es war dies durchaus kein Versehen von GAUSS; im Gegenteil lag es nur in seiner Absicht zu zeigen, dass sich Strahlen von zweierlei Brechbarkeit vereinigen lassen, und er wählte die Grenzwerte, weil er wusste, dass, wenn sich diese vereinigen lassen, dies auch für die Zwischenwerte gilt. Es war nur ein Versehen, dass man glaubte, diese Rechnung direkt realisieren zu können.

»Was nun die Abweichung der Strahlen in $\frac{2}{3}$ der Öffnung anbetrifft, so wusste ich aus den Rechnungen meines Sohnes Dr. ADOLPH STEINHEIL über Mikroskopobjektive, dass sich solche Abweichungen durch die Dicken der Linsen oder durch kleine in der Ordnung der Dicken liegende Abstände heben lassen, und veranlasste ihn daher, das Objektiv, was ich heute die Ehre habe der Klasse vorzuzeigen, zu berechnen.

»Die Ausführung selbst bietet keine Schwierigkeit, wenn man im Besitze der Hilfsmittel ist, die gestatten, einen Halbmesser auf fünf Zifferstellen genau herzustellen und Abweichungen der siebenten Zifferstelle in der Sphäre zu erkennen. Allein es zeigte sich, dass die jetzt übliche Art, die Objektive zu fassen, nicht ausreichend ist, um einen bestmöglichen Effekt zu erlangen.

»Ich habe daher dem Objektive eine neue Art Montierung gegeben, welche gestattet, jede Linse oder beide zusammen gegen die optische Achse zu neigen, die Mittelpunkte der Linsen gegen einander zu verstellen und endlich den Abstand der Linsen zu verändern. Man erlangt damit durch Versuche den bestmöglichen Effekt, der sich bei den gegebenen Flächen des Objektivs erzielen lässt.

»Der erste Blick durch das Fernrohr wird jedem Kenner sagen, dass es von ungewöhnlicher Schärfe und Farblosigkeit ist. Auf hellbeleuchtete Objekte erträgt das Objektiv von 36‴ Öffnung und 46″ Brennweite eine 300—360 malige Vergrösserung ganz gut.

»Dennoch glaube ich durchaus nicht, dass bei diesem ersten Versuch die möglichst grosse Vollkommenheit erreicht ist. Im Gegenteil müsste der Effekt noch besser sein, wenn die Farben so gelegt wären, dass die Brennweite 2 bis 3 Linien länger würde, wenn die eine Linse ungeändert bliebe. Ich glaubte es aber schon so, wie es ist, vorlegen zu dürfen, weil es in der Leistung die besten mir zugänglichen Instrumente dieser Dimensionen übertrifft, und weil wir schon hieraus ersehen, dass auch diese Idee von GAUSS,

die an 40 Jahre verkannt und unberücksichtigt blieb, ihre Früchte tragen wird.

»Zum Schluss füge ich nur bei, dass ich jetzt die Grenze untersuche, bis zu welcher die Öffnung des Gaussschen Objektivs im Verhältnis zur Brennweite vergrössert werden kann. Es unterliegt keinem Zweifel, dass wir auch darin weiter kommen, als bei dem Fraunhoferschen Objektive, weil die Farben erster Ordnung über das ganze Objektiv vernichtet sind. Es ist jetzt ein Objektiv in Arbeit, welches 54‴ Öffnung bei 48″ Brennweite bekommt. Ist auch für diese Öffnung das Bild genügend und das Gesichtsfeld noch gut wie jetzt, dann ist der Hoffnung Raum gegeben, bessere grosse Refraktoren herzustellen, als dies bis jetzt möglich war.«

Später sind noch mehrere Male — mit kleinen Varianten natürlich — Gausssche Objektive berechnet worden; eine Zusammenstellung der wichtigsten bis zum Jahre 1888 findet sich in einem Aufsatze von Krüss[1]), der zu dem Ergebnis kommt, dass die Gausssche Bedingung kein Fortschritt gegenüber Fraunhofer sei, ein Urteil, das schon deshalb zu scharf ist, weil es viel zu allgemein formuliert ist. Im Gegensatz dazu hat Lummer[2]) ein Gauss-Objektiv für die Fernrohre eines Spektrometers berechnet — mit dem denkbar günstigsten Erfolge: Obwohl die Farbenkorrektion ja nur für 2 Wellenlängen ausgeführt wurde, zeigte sie sich doch für das ganze Spektrum als vollkommen, sodass Lummer für Präzisions-Spektrometer, die für das ganze Spektrum scharf abbildende Fernrohre haben müssen, Gausssche Objektive als die besten betrachtet.

Übrigens hat man mit bestem Erfolge die Gausssche Bedingung später[3]) bei Mikroskop-Objektiven verwendet.

Die ganze Art der Betrachtung der älteren Optik ist vom heutigen Standpunkt aus korrekturbedürftig, da es für die Wellenlehre eine punktförmige Abbildung ja überhaupt nicht gibt. Deshalb haben alle älteren Betrachtungen Modifikationen in diesem Sinne über sich ergehen lassen müssen. Diesen Mangel kann man aber den älteren Arbeiten natürlich nicht zum Vorwurf

1) H. Krüss, *Die Farbenkorrektion der Fernrohr-Objektive von Gauss und von Fraunhofer*, Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. 8, S. 7 ff., 1888.

2) In Müller-Pouillets *Lehrbuch der Physik*, 9. Aufl., Bd. II, S. 569 ff.; dort findet sich die ganze Durchrechnung des Objektivs.

3) Vergl. dazu Ernst Abbe, Ges. Abhandl., Bd. I, S. 450 ff., insb. S. 453.

machen, denn jede wissenschaftliche Anschauung wird schliesslich überholt und verbessert. In diesem Lichte gesehen, wird man den Gedanken von GAUSS als eine wertvolle Anregung betrachten müssen, die auch heute noch ihren Wert haben kann, wie die oben angeführten Beispiele zeigen[1]).

84. Am Schlusse seines Aufsatzes über *Achromatische Doppelobjektive* macht GAUSS noch eine Bemerkung grundsätzlicher Art über die Korrektion der sphärischen Aberration, die durch eine Bemerkung BOHNENBERGERS veranlasst war.

Wenn man die sphärische Aberration für den Rand der Linse beseitigt, so tritt sie natürlich in den Zwischenzonen mit einem gewissen Betrage wieder auf, und vernichtet man sie für eine Zwischenzone, so macht sie sich am Rande wieder bemerklich. Es fragt sich nun, wie man ein Objektiv bezüglich der sphärischen Aberration am besten korrigiert, am Rande oder in einer Zwischenzone? BOHNENBERGER[2]) hat folgendermassen argumentiert: Da die sphärische Aberration in den Zwischenzonen mit einem bestimmten Betrage auftritt, wenn sie für den Rand kompensiert ist, so könne man die Öffnung des Objektivs offenbar ohne Schaden soviel vergrössern, bis die sphärische Aberration für den grösseren Rand gerade wieder den Betrag erreicht habe, der ohnehin in den Zwischenzonen herrscht; die schon vorhandene Undeutlichkeit der Abbildung werde ja durch eine solche Vergrösserung der Öffnung nicht vermehrt. Daher, schliesst BOHNENBERGER, solle man die sphärische Aberration nicht für den Rand, sondern für eine solche Zone korrigieren, dass Rand und Zwischenzone etwa gleich starke Reste von Aberration aufwiesen.

Gegen diese an sich einleuchtende und anscheinend durchschlagende Begründung nimmt GAUSS[3]) Stellung. Er würde dieser Überlegung Beweiskraft zusprechen, sagt er, wenn die Aberration, die jenseits und diesseits der korrigierten Zone übrigbliebe, dasselbe Vorzeichen hätte. »Man könnte zwar hiegegen mit

---

1) Allgemein kann man folgendes sagen: Die Anwendung der GAUSSschen Bedingungen ist überall da am Platze, wo es sich um Instrumente handelt, die bis zu den Grenzen des Auflösungsvermögens beansprucht werden, also z. B. bei Objektiven für astronomische Fernrohre und starken Mikroobjektiven. Bei schwachen Mikroobjektiven und photographischen Objektiven braucht sie nicht berücksichtigt zu werden.

2) A. a. O., S. 279.

3) Werke V, S. 508.

einigem Schein einwenden, dass es bei der Längenabweichung auf das Zeichen gar nicht ankomme, und dass positive und negative Abweichungen eine und dieselbe Undeutlichkeit im Auge hervorbringen. Allein hierbei nähme man offenbar stillschweigend an, dass das Okular immer genau für das deutliche Sehen desjenigen Bildes gestellt sei, welches durch die der Achse nächsten Strahlen hervorgebracht wird, und dies kann doch nicht eingeräumt werden. Man mag dies Bild immerhin das Hauptbild nennen; es fällt mit dem von den Randstrahlen hervorgebrachten Bilde zusammen, wenn die Abweichung für diese gehoben ist, und alle übrigen Bilder werden dann (wenigstens allgemein zu reden) jenseits oder diesseits des Hauptbildes liegen. Da man nun das Okular immer so stellt, dass die Undeutlichkeit so klein wie möglich wird, so sieht man gerade das Hauptbild am wenigsten deutlich, und jede Vergrösserung der Öffnung vergrössert auch die Undeutlichkeit.«

Auch diese Gausssche Argumentation ist unter einer stillschweigenden Voraussetzung gemacht, nämlich der, dass man von der verschiedenen Intensität der Bilder absieht, die durch die verschiedenen Zonen des Objektivs erzeugt wird. In einem Briefe an Brandes[1]) hat Gauss selbst diese Einschränkung erkannt und beseitigt und gibt die Resultate einer neuen Berechnung, die auf die Intensität Rücksicht nimmt: »Ich finde nämlich jetzt durch eine tiefer eindringende Untersuchung, dass die Undeutlichkeit, die in dem Ausdrucke für die Längenabweichung von der vierten Potenz des Abstandes der auffallenden Strahlen von der Achse abhängt, den möglich kleinsten Totaleinfluss hat, wenn man das Objektiv so konstruiert, dass diejenigen Strahlen, die unendlich nahe bei der Achse einfallen, und diejenigen, die in einer Entfernung $= R\sqrt{\frac{5}{7}}$ auffallen würden (wo R = Radius des Objektivs ist), in einem Punkte A sich vereinigen, wobei das Okular dann so steht, dass man denjenigen Punkt der Achse, wo die Strahlen, die in der Entfernung

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10}\right)}\, R \text{ und } = \sqrt{\left(\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10}\right)}\, R$$[2])

von der Achse aufgefallen sind, sich alle vereinigen, deutlich sieht. Denken

1) Abgedruckt in Gehlers *Physikal. Wörterbuch* 1831, Artikel: Linsenglas von Brandes; Werke V, S. 509—510.

2) Hier liegen in Gauss' Werken V, S. 509 Druckfehler vor, indem die Quadratwurzeln fehlen. — Schaefer.

Sie sich nämlich durch diesen Punkt eine auf die Achse senkrechte Ebene, so ist das Bild desto undeutlicher, je grösser der Kreis um A ist, den die von einem Punkte des Objekts auf das Objektivglas gefallenen Strahlen füllen, doch so, dass die Intensität der Strahlen an jeder Stelle dieses Kreises mit berücksichtigt werden muss. Hiebei ist nun einige Willkürlichkeit; ich halte für das zweckmässigste, hier nach denselben Prinzipien zu verfahren, die der Methode der kleinsten Quadrate zum Grunde liegen. Ist nämlich ds ein Element dieses Kreises, ρ die Entfernung des Elements von A und i die Intensität der Strahlen daselbst, so nehme ich an, dass $\int i\rho^2 ds$ als das Mass der Total-Undeutlichkeit zu betrachten sei, und mache dies zu einem Minimum. Ich finde dabei folgende Resultate: 1. Konstruierte man das Objektiv so, dass dasjenige Glied der Längenabweichung, welches von dem Quadrate der Entfernung von der Achse abhängt, $= 0$ wird, und setzte das Okular so, dass A dahin fällt, wo die der Achse unendlich nahen Strahlen diese schneiden, so sei der Wert dieses Integrals $= E$. 2. Stellte man aber bei derselben Einrichtung das Okular so, dass das Integral so klein wird, wie es bei dieser Einrichtung werden kann (wobei A der Vereinigungspunkt der in der Entfernung $= R\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ auffallenden Strahlen sein wird), so ist das Integral $= \frac{1}{4} E$. 3. Dagegen ist bei der obigen Einrichtung und der vorteilhaftesten Stellung des Okulars das Integral $= \frac{1}{100} E$, als absolutes Minimum. Obiges Resultat, dass nämlich mit dem Vereinigungspunkte der der Achse unendlich nahen Strahlen ein bloss fingiertes Bild (von Strahlen aus grösserer Distanz von der Achse als der Halbmesser des Objektivs) vereinigt werden soll, ist anfangs sehr überraschend und paradox scheinend; aber bei näherer Betrachtung sieht man den eigentlichen Grund leicht ein. Jenes erste sogenannte Hauptbild (von Strahlen sehr nahe bei der Achse) ist nämlich dabei gleichsam das Unwichtigste wegen seiner geringen Intensität; viel wichtiger ist, dass die Strahlen von den der Peripherie näheren Ringen des Objektivs unter sich besser zusammengehalten werden, was bei jener Einrichtung am besten erreicht wird. Es tut mir leid, dass die Grenzen eines Briefes jetzt grössere Ausführlichkeit nicht gestatten; der scharfe Kalkül lässt sich nichts abstreiten und bei einem vagen Raisonnement übersieht man leicht einen wesentlichen Umstand; allein für den Kenner werden diese Winke schon zureichen.

»Allgemein finde ich, dass immer bei der vorteilhaftesten Stellung

des Okulars jenes Integral $= \frac{1}{4}E\,(1 - \frac{5}{8}\mu^2 + \frac{3}{8}\mu^4)$ wird, wenn das Objektiv so konstruiert ist, dass Strahlen aus der Entfernung μR von der Achse sich mit dem (oben sogenannten) Hauptbilde in einem Punkte vereinigen. Dies ist ein Minimum für $\mu = \sqrt{\frac{5}{7}}$ und ist dann $= \frac{1}{70}E$; für $\mu = 1$ wäre es nur $= \frac{1}{60}E$ und für $\mu =$ unendlich klein, $= \frac{1}{4}E$. Nicht allein hat also hienach BOHNENBERGER Unrecht, sondern auch ich habe damals Unrecht gehabt, aber insofern, als ich noch nicht weit genug von BOHNENBERGER abgewichen bin. Ich hatte damals bloss die ganze Grösse des undeutlichen Bildes berücksichtigt, ohne auf die ungleiche Intensität der einzelnen Teile Rücksicht zu nehmen.«

Die Rechnung, die GAUSS zu diesem Ergebnis führte, ist reproduziert in J. C. E. SCHMIDTS bereits S. 162 genanntem *Lehrbuch*[1]).

Gegen die GAUSSsche Forderung wird von den praktischen Optikern auch heute noch vielfach verstossen; selbst in modernen Lehrbüchern der geometrischen Optik stehen die GAUSSsche und eine der BOHNENBERGERschen verwandte Vorschrift kritiklos nebeneinander. In Wirklichkeit liegt die Sache so: Solange die Aberrationen so klein sind, dass die durch sie erzeugten Zerstreuungskreise unterhalb der »Rasterkonstante« des Perzeptionsorgans liegen, ist es natürlich gleichgültig, ob die Randstrahlen unterkorrigiert, korrigiert oder überkorrigiert sind. Anders bei Systemen, die eine grössere Zonenabweichung haben. Eine solche ist z. B. bei allen modernen photographischen Objektiven mehr oder weniger vorhanden, und zwar umso stärker, je länger die Brennweite ist. Solche Systeme, nach der BOHNENBERGERschen Vorschrift korrigiert, geben ein kontrastarmes Mittelbild. Eine kontrastvolle Abbildung ist nur durch entsprechende Unterkorrektion im GAUSSschen Sinne zu erzielen. Von welchen Betrachtungen man auch ausgeht, man kommt stets zu Vorschriften, die der GAUSSschen ausserordentlich nahe stehen, und die Praxis bestätigt deren Richtigkeit.

85. Auf die Frage nach der Konstruktion achromatischer Objektive ist GAUSS später (um 1840) noch einmal eingegangen, als der Wiener Mechaniker und Optiker PLÖSSL eine neue Konstruktion von Fernrohren, die sogenannten dialytischen Fernrohre in den Handel brachte.

1) A. a. O., S. 514 ff.

Die Konstruktion der dialytischen Fernrohre verdankt ihren Ursprung der schon im Vorhergehenden hervorgehobenen Schwierigkeit, grosse klare Stücke von Flintglas herzustellen. Da dieses Blei enthält, das spezifisch schwerer ist als die übrigen Bestandteile, so wurden damals die Glasschmelzen fast stets inhomogen und schlierig. Wie LITTROW[1]) angibt, hatten sowohl die französische wie auch die englische Regierung grosse Preise — 12000 Francs bezw. 100 Pfund — für die Lösung des Problems ausgesetzt, mit Sicherheit grosse klare Stücke Flintglas zu erzeugen. Derselbe Autor gibt auch die Preise an, die für Flintglasstücke gezahlt werden mussten, aus denen man eine Linse von 12 Zoll Öffnung herstellen konnte: nicht weniger als 7200 Francs betrug der Preis eines derartigen Stückes, wenn ein solches durch Zufall einmal in der Schmelze gelang.

Man erkennt, wie dieser Mangel an grossen guten Flintglasstücken dazu führen musste, darüber nachzudenken, ob man nicht den Effekt der Achromatisierung mit kleineren Stücken würde erzielen können. LITTROW[2]) (1827) und ROGERS[3]) (1828) machten, wie es scheint unabhängig voneinander, fast denselben Vorschlag: Statt die beiden Linsen des achromatischen Objektivs unmittelbar aneinanderzusetzen, schlugen sie vor, die dispansive Flintglaslinse in grösserer Entfernung von dem kollektiven Kronglas anzubringen, an einer Stelle, wo das einfallende Strahlenbündel schon einen relativ kleinen Querschnitt angenommen hat; so könnte die Grösse der Flintglaslinse entsprechend verkleinert werden. Mit dem damaligen Flintglase, das in Brechung und Dispersion relativ wenig vom Kronglas abwich, hätte man aber bei so erheblichen Distanzen der beiden Linsen das Objektiv nicht achromatisieren können. ROGERS schlägt daher anstelle der einfachen Flintlinse eine aus Kron- und Flintglas zusammengesetzte Linse von folgender Eigenschaft vor: Für die Strahlen mittlerer Brechbarkeit sollte sie gerade wie ein Planglas wirken, für die violetten demnach als Konkavglas, für die roten schliesslich als Konvexglas. Gerade diese Eigenschaft wäre in der Tat erforderlich, um den chromatischen Fehler der einfachen Frontlinse aus Kronglas zu kompensieren, die ja die violetten Strahlen früher vereinigt als die roten.

1) v. LITTROW. *Vermischte Schriften*, Bd. I, S. 231 (Stuttgart 1846).

2) v. LITTROW, Zeitschr. f. Physik und Mathem., Bd. III, S. 129 ff., 1827; Bd. IV, S. 257 ff., 1828.

3) ROGERS, Pogg. Ann., Bd. 14, S. 325, 1828.

So scheint es also, dass diese Lösung, die durch PLÖSSL in die Praxis umgesetzt wurde, aus den Schwierigkeiten herausführte, indem man auch auf diese Weise ein achromatisches Objektiv herstellen könnte. Gleichzeitig gewönne man noch den Vorteil einer Verkürzung des Fernrohrs. Der Erfolg der praktischen Ausführung durch PLÖSSL ist in der Tat ein sehr grosser gewesen[1]).

Indessen hat GAUSS gezeigt, dass die Sache nicht so einfach liegt, wie die Erfinder dieses Typus es sich gedacht hatten, wenn auch der Erfolg ihrem Raisonnement Recht zu geben schien.

86. Zum ersten Mal stiess GAUSS auf die PLÖSSLschen Fernrohre durch eine Mitteilung von SCHUMACHER[2]) vom 24. Dezember 1832, die eine ganz fragmentarische Darlegung des Prinzips enthält, auf die GAUSS jedoch nicht weiter einging.

Erst im Jahre 1840, als er mit der Ausarbeitung seiner *Dioptrischen Untersuchungen* beschäftigt war, kommt er auf die dialytischen Fernrohre zurück, in einem Brief an ENCKE[3]) vom 2. Januar 1840: »Ebenso würden Sie mich verpflichten, wenn Sie mir etwas ausführlichere Auskunft über PLÖSSLS Arbeiten, namentlich sogenannte dialytische Fernröhre geben könnten. Irre ich nicht, so habe ich vor einigen Jahren irgendwo[4]) bei einer Prüfung der letztern eine Bezugnahme auf Sie gelesen. Ich würde mich also sehr über eine Belehrung freuen . . . . . .« Am 12. Januar antwortet ENCKE[5]): »Von PLÖSSLS Arbeiten kenne ich nur ein kleines zweifüssiges Fernrohr, was zu den ersten dialytischen gehört, die er gemacht hat, und was er als eines der besseren den Naturforschern in Wien präsentierte. . . . . Dieses Fernrohr ist in der Tat vorzüglich. Seine Vergrösserung geht bis 80 mal und entzückte auch HANSEN . . . . so sehr, dass er sogleich den Entschluss fasste, sich auch eines kommen zu lassen. FRAUNHOFERsche habe ich nicht damit vergleichen können, aber ich ziehe es den hiesigen guten englischen dreifüssigen bei weitem . . . . vor.« Diese allgemeine Auskunft genügte GAUSS jedoch nicht

1) Ausser den weiter unten vorkommenden Zeugnissen vergleiche man: FREIHERR V. JAQUIN, *Notizen über dialytische Fernröhre*, Zeitschr. f. Physik u. verwandte Wissenschaften, Bd. III, S. 57, 1835.

2) GAUSS-SCHUMACHER II, S. 313.

3) Werke XI, 1, S. 153.

4) In dem schon genannten Aufsatze des FREIHERRN VON JAQUIN. — SCHAEFER.

5) Werke XI, 1, S. 154.

und er stellt in einem späteren Brief[1]) vom 17. September 1840 noch einmal eine Reihe detaillierter Fragen. Er erwähnt dabei, dass SARTORIUS mit seinem PLÖSSL wenig zufrieden sei, da er ein ausserordentlich kleines Gesichtsfeld habe und z. B. die Planeten nicht farbenfrei zeige. »Gegenwärtig interessiert mich nun der Gegenstand .... in einer rein theoretischen [Beziehung]; ich bin nämlich mit einer dioptrischen Untersuchung beschäftigt, ... die mich zu dem Schlusse geführt hat, dass die ganze Einrichtung der dialytischen Fernröhre verwerflich sein möchte. Ich betrachte selbst diesen Schluss mit einigem Misstrauen, teils weil ich nie ein solches Fernrohr gesehen habe und meine Rechnungen sich nur auf ungewisse hypothetische Voraussetzungen stützen können, teils weil Sie und SCHUMACHER so rühmlich über Ihre Instrumente urteilen .... Am klarsten glaube ich mich auf folgende Art Ihnen verständlich machen zu können:

»Zum vollkommenen Achromatismus gehören zwei Bedingungen:

1) dass das rote und das blaue Bild (so will ich mich der Kürze wegen ausdrücken) in eine normal gegen die Fernrohrachse liegende Ebene fallen,

2) dass sie gleiche Grösse haben.

»Ist die erste Bedingung allein erfüllt, so werden Doppelsterne in der Mitte des Gesichtsfeldes äusserst scharf erscheinen können, wenn auch an der zweiten Bedingung beträchtlich viel fehlte, z. B. das rote und blaue Bild im Verhältnis der Ungleichheit 51 : 50 oder so stünden; in diesem Falle werden aber die Doppelsterne nicht mehr recht rein erscheinen, wenn man sie in einer beträchtlichen Entfernung vom Zentrum des Gesichtsfeldes betrachtet. Grössere Gegenstände werden nicht durchaus zufrieden stellen; das Gesichtsfeld wird, um diesen vitalen Fehler zu cachieren, sehr verengt werden müssen. Dies alles scheint bei SARTORIUS' Fernrohr der Fall zu sein.

»Ich finde in allen optischen Büchern die zweite Bedingung nirgends nur einmal erwähnt. Der Grund mag sein, dass bei der gewöhnlichen Einrichtung der achromatischen Objektive sie mit der ersten von selbst, wo nicht genau, doch sehr nahe erfüllt wird, sodass man, was daran fehlt, nicht bemerkt. Aber meine theoretische Untersuchung ergibt, dass bei einer grossen Trennung der Kronglas- und der Flintglaslinse die Erfüllung der zweiten Bedingung un-

1) Werke XI, 1, S. 154 ff.

möglich wird. Nur wenn man drei Linsen anwendet und auch die dritte wieder in angemessene beträchtliche Entfernung von der zweiten stellt, würde die Erfüllung der Bedingung möglich werden; ich zweifle aber, dass bei den dialytischen Fernröhren hierin prinzipmässig verfahren ist . . . .«

Die neue Erkenntnis von der zweiten Bedingung der Achromasie, die GAUSS bezüglich des Wertes des dialytischen Prinzips so skeptisch machte, ist in diesem Briefe mit vollster Klarheit ausgesprochen, ebenso wie in einem etwas späteren (vom 9. Oktober 1840) an SCHUMACHER[1]). Darin betont GAUSS noch besonders, dass zwar bei drei von einander weit getrennten Linsen die zweite Bedingung der Achromasie sich erfüllen lasse, nicht aber wenn zwei davon, wie es bei den Dialytrohren der Fall war, verkittet seien bezw. dicht bei einander stünden. »Gründlich a priori urteilen kann ich freilich nicht ohne genaue quantitative Data über die drei Brennweiten der drei Linsen und die beiden Distanzen, und so erlaube ich mir kein Urteil darüber, inwiefern die Unvollkommenheit, welche die Theorie andeutet, in der Ausübung noch fühlbar ist. . . . .«

Und schliesslich findet sich derselbe Gedankengang noch kurz in einem Briefe an GERLING[2]) vom 24. Oktober 1840.

87. Bevor wir in der Diskussion über die dialytischen Fernrohre weitergehen, ist es interessant an dieser Stelle hinterlassene Aufzeichnungen von GAUSS zu besprechen, die mit dem ganzen Fragenkomplex in Verbindung zu stehen scheinen.

Einmal findet sich in einem kleinen Hefte[3]) folgendes Problem aufgeworfen: »Drei Gläser, deren Brennweiten [numerisch gegeben sind], sollen für ein kurzsichtiges Auge, dessen Gesichtsweite [gegeben] ist[4]), zu einem Fernrohr arrangiert werden, in welchem der farbige Rand gehoben ist.«

Die Aufgabe wird mit drei probeweisen Ansätzen für die Entfernungen der Linsen durchgerechnet; die beiden ersten Ansätze geben noch farbigen Rand, der letzte dagegen gibt ein befriedigendes Resultat. Das würde genau mit GAUSS' Angaben in den obigen Briefen an ENCKE und SCHUMACHER übereinstimmen.

1) GAUSS-SCHUMACHER III, S. 406 ff.; Werke XI, 1, S. 158.
2) GAUSS-GERLING, S. 617; Werke XI, 1, S. 160.
3) *Scheda* An; Werke XI, 1, S. 126 ff.
4) Offenbar für das Auge von GAUSS selbst. — SCHAEFER.

Ferner finden sich im *Handbuch* 20 (Bh)[1]) drei Fragmente über *Analyse von Fernrohren.* GAUSS hat dort nach dioptrischen Formeln, auf die wir später werden einzugehen haben, seinen BAUMANNschen Kometensucher, sein FRAUNHOFERsches Zugfernrohr und sein kleines RAMSDENsches Fernrohr genau untersucht und in jedem einzelnen Falle den farbigen Rand dazu berechnet.

Man darf daher wohl annehmen, dass diese Untersuchungen mit seinen allgemeinen Betrachtungen über die PLÖSSLschen Fernrohre zusammenhängen.

88. In dem in Artikel 86 wiedergegebenen Briefe an ENCKE vom 2. Januar 1840 betont GAUSS selbst, dass er, obwohl er von der grundsätzlichen Richtigkeit seiner Theorie betreffs der Achromasie überzeugt sei, noch zweifle, in wie weit daraus auf eine Unbrauchbarkeit der dialytischen Fernrohre geschlossen werden könne. Im weiteren Verlaufe erhielt GAUSS sowohl von ENCKE[2]) als von SCHUMACHER[3]) ein dialytisches Fernrohr zur Untersuchung zugesandt. Im Brief ENCKES ist es interessant zu sehen, wie dieser durch GAUSSens Argumentation erschüttert, geneigt war, seine ursprüngliche Ansicht von der Vortrefflichkeit der PLÖSSLschen Instrumente aufzugeben. Er erwähnt, dass er sich einmal Notizen zu dem erwähnten Aufsatz von ROGERS gemacht habe, in denen er sich über den Nutzen der ganzen Einrichtung skeptisch ausgedrückt habe, und fährt dann — ganz im Gegensatz zu seinem früheren Optimismus — fort: »Es hat mich ungemein gefreut, dass Ihre Untersuchung ebenfalls Nachteile der Konstruktion nachgewiesen hat.«

Aber GAUSS war inzwischen schon weitergekommen. Er hatte erkannt, dass die von ihm hervorgehobenen Umstände zwar durchaus richtig waren, aber dennoch nichts gegen die PLÖSSLschen Instrumente bewiesen. Denn — und das ist wieder ein grundsätzlich neuer Gedanke von GAUSS — der chromatische Fehler, der durch das dialytische Objektiv entsteht, kann durch das Okular vollständig kompensiert werden, sodass das Auge — und das ist ja allein erforderlich — ein vollkommen farbenreines Bild empfängt. In einem Briefe an ENCKE vom 23. Dezember 1840[4]) heisst es: »Was ich Ihnen früher geschrieben habe, nämlich dass das durch dialytisch angeordnete Ob-

1) Werke XI, 1, S. 120 ff.

2) Brief vom 30. Oktober 1840; Werke XI, 1, S. 160.

3) Brief vom 2. Oktober 1840; GAUSS-SCHUMACHER III, S. 409; Werke XI, 1, S. 159.

4) Werke XI, 1, S. 161 f.

jektivlinsen hervorgebrachte Bild farbenrein nicht sein kann, bleibt unumstösslich wahr; allein eine tiefer eindringende Theorie hat mich überzeugt, dass dieses durch die Okulargläser wieder aufgehoben werden kann, und, worauf es doch am Ende allein ankommt, im Auge ein vollkommen farbenreines Bild möglich ist, während dies bei einem Objektiv der gewöhnlichen Einrichtung theoretisch unmöglich ist, wenigstens nicht möglich für mehr als einen Okulareinsatz.«

Damit ist nun zum ersten Male das fruchtbare Prinzip der »Arbeitsteilung« ausgesprochen; das Objektiv braucht für sich nicht vollkommen zu sein, indem seine übrigbleibenden Fehler durch das Okular kompensiert werden können, ein Gedanke, der bei den sogenannten »Kompensationsokularen« der modernen Mikroskope noch heute seine Kraft bewährt.

Die hier im vertraulichen Briefverkehr geäusserten Ansichten hat Gauss dann öffentlich ausgesprochen in seiner grossen dioptrischen Arbeit[1]) vom Jahre 1840. Nachdem er dort auseinandergesetzt hat, warum das dialytische Objektiv nicht vollkommen achromatisch sein könne, fährt er fort: »Man darf jedoch hieraus keinesweges folgern, dass Fernröhre von dieser letztern Einrichtung in Beziehung auf Achromatismus unvollkommener bleiben müssen, als Fernröhre mit achromatischen, nach der gewöhnlichen Art konstruierten und ein völlig farbenreines Bild hervorbringenden Objektiven. Man kann vielmehr gerade umgekehrt behaupten, dass jene bei einer wohlberechneten Anordnung der Okulare dem Auge das farbenreinere Bild zu geben fähig sind.

»In der Tat kann ein vollkommen farbenreines vom Objektiv erzeugtes Bild (möge es ein wirkliches oder virtuelles sein) wegen der Farbenzerstreuung, welche durch die Okulargläser hervorgebracht wird, dem Auge nicht vollkommen rein erscheinen; man verhütet zwar durch besondere Anordnung der Okulare den sogenannten farbigen Rand, kann aber damit die Längenabweichung nicht aufheben, welche noch durch den Umstand vergrössert wird, dass das menschliche Auge selbst nicht achromatisch ist. Man bewirkt nur, dass die letzten Bilder, rotes und violettes, in einerlei scheinbarer Grösse, nicht aber, dass sie in gleichem Abstande oder zugleich deutlich erscheinen.

»Die ungleiche Grösse der ersten Bilder, des roten und violetten, welche

1) *Dioptrische Untersuchungen*, Werke V, S. 243 ff., insbesondere S. 275 ff.

bei den dialytischen Objektiven unvermeidlich ist, lässt sich aber durch eine angemessene Einrichtung der Okulare sehr wohl kompensieren, sodass der farbige Rand in der Erscheinung ebenso gut gehoben wird, wie bei Fernröhren von gewöhnlicher Einrichtung, während die zweite eben berührte Unvollkommenheit auch hier bleibt, so lange das erste rote und violette Bild in gleicher Entfernung von dem Objektive liegen.

»Es ist also klar, dass, um im Auge ein vollkommen farbenreines Bild hervorzubringen, das erste Bild eine gewisse, von den Verhältnissen der Okulare und dem Nichtachromatismus des menschlichen Auges abhängende Längenabweichung haben muss. Theoretisch betrachtet lässt sich nun allerdings auch ein Objektiv von gewöhnlicher Einrichtung so berechnen, dass eine vorgeschriebene Längenabweichung stattfindet; allein abgesehen von der Schwierigkeit, der ganzen Schärfe, welche zur Darstellung so sehr kleiner Unterschiede erfordert wird, in der technischen Ausführung nachzukommen, würde doch diese Längenabweichung immer nur für ein bestimmtes Okular passen. Bei der dialytischen Einrichtung hingegen ist durch die Verschiebbarkeit der den zweiten Teil des Objektivs bildenden Doppellinse gegen den ersten das Mittel gegeben, diejenige Längenabweichung zu erhalten, welche für jedes Okular erforderlich ist, während das Okular so eingerichtet sein kann, dass der farbige Rand gehörig gehoben wird. Übrigens muss ich mich hier auf diese kurze Andeutung beschränken, und eine ausführlichere Entwicklung dieses interessanten Gegenstandes einer andern Gelegenheit vorbehalten.«

Die Vorzüge der PLÖSSLschen Instrumente bestimmten GAUSS schliesslich, sich selbst ein derartiges Fernrohr zu kaufen, mit dessen Leistungen er sehr zufrieden war[1]).

89. Im Zusammenhange mit den bisher besprochenen Untersuchungen über achromatische Objektive steht eine Anzahl von Äusserungen von GAUSS über allgemeine Eigenschaften des Strahlenganges in Fernrohren (Vergrösserung, Helligkeit, Modifikationen für kurzsichtige Augen usw.). Diese Äusserungen — im Grunde genommen ganz elementaren Charakters — sind im Briefwechsel zerstreut und erstrecken sich von etwa 1813 bis 1846. Sie verdanken ihre Entstehung, oder besser gesagt, ihre Formulierung mehr oder

1) Brief an GERLING vom 12. Mai 1841; GAUSS-GERLING, S. 621; Werke XI, 1, S. 163.

minder zufälligen Anlässen. Wenn es auch, wie gesagt, ganz elementare Dinge sind, die GAUSS als Selbstverständlichkeiten ansah, so ist doch nicht zu vergessen, dass diese Dinge den meisten Physikern jener Zeit ganz und gar nicht geläufig waren. Wir besprechen daher diese Äusserungen im Zusammenhange.

Am 10. Juli 1813 schreibt OLBERS[1]) an GAUSS: »Es scheint mir, dass wir die Aperturen unserer nichtachromatischen Kometensucher viel zu gross machen, wodurch die Bestimmtheit und Schärfe des Bildes leidet, ohne dass wir an Licht gewinnen. Dass die Lichtstärke eines Fernrohrs bei gleicher Durchsichtigkeit der Gläser wie das Quadrat des Durchmessers des Objektivglases sich verhält, ist nur so lange wahr, als der Strahlenbüschel, der aus dem letzten Augenglase kommt, im Durchmesser kleiner als die Pupille unseres Auges ist. Dieser Durchmesser unserer Pupille wird auch des Nachts nicht viel über $2\frac{1}{2}$ Pariser Linien betragen. Vergrössert nun ein Kometensucher m mal, und ist der Durchmesser unserer Pupille gleich d, so ist md die einzig nützliche Apertur des Kometensuchers. Also für 8 malige Vergrösserung und $d = 2\frac{1}{2}$ Linien gesetzt, würde $md = 20$ Linien sein. Ist die Apertur grösser, so gewinnt man nichts an Licht, nur der Durchmesser des Strahlenbüschels wird grösser, als ihn die Apertur unserer Pupille fassen kann. Es scheint mir also, dass wir die Objektive unserer Kometensucher nie breiter als 2 Zoll, oder, wenn wir 10 mal vergrössern wollen, höchstens $2\frac{1}{2}$ Zoll machen sollten. Die von RAMSDEN sind viel breiter.« In seiner Antwort[2]) (vom 13. September 1813) stimmt GAUSS dieser Kritik von OLBERS im allgemeinen durchaus zu, bemerkt jedoch, dass dazu die Voraussetzung sei, dass das Auge sich dabei genau an seinem Platze, d. h. an der Stelle des Okularkreises (der Austrittspupille in moderner Ausdrucksweise) befinden müsse. Wenn man zwei Instrumente habe, von denen das erste eine Objektivöffnung gerade gleich md habe, das zweite dagegen eine grössere, so verliere man im ersten Falle an Helligkeit, wenn man das Auge von seinem Platz entferne, während man im zweiten Falle nichts verliere. Denn im letzteren Falle ist ja die Augenpupille stets kleiner als der Okularkreis, wirkt also immer als Austrittspupille. Aus diesem Grunde hält GAUSS es doch für zweckmässig, die Öffnung etwas grösser zu

1) GAUSS-OLBERS II, 1, S. 524; Werke XI, 1, S. 149.

2) Ebenda, S. 530; Werke XI, 1, S. 150.

wählen, als dem Produkt md entspricht, wenn auch viel kleiner, als es damals geschah.

Eine ähnliche Diskussion spielte sich zwischen GAUSS und OLBERS im Jahre 1820 ab. OLBERS hatte in einem Briefe von Ende September 1820[1]) die Lichtstärken einiger Fernrohre aus ihren Dimensionen berechnet und beiläufig die Bemerkung angefügt: »Ich bin aber überzeugt, dass diese Lichtstärken für andere Augen anders, und besonders für natürlich kurzsichtige Augen grösser ausfallen werden. . . . . .« Am 4. Oktober 1820 antwortete GAUSS[2]) darauf: »Ihre Mitteilungen . . . . . waren mir sehr interessant, nur ist mir nicht völlig klar, weshalb die Lichtstärke der Fernrohre für kurzsichtige Augen grösser ist als für weitsichtige. Die Lichtstärke, wie sie bei Fernröhren statt hat, schien mir, vorausgesetzt, dass die Fernrohre wenigstens so starke Vergrösserungen haben, dass das Bild des Objektivs[3]) gewiss immer kleiner ist als der Augenstern, für alle Augen dieselbe, während eher die Lichtstärke für das unbewaffnete kurzsichtige Auge mir grösser deuchte, weil diese gewöhnlich eine grössere Pupille haben; wenigstens ist dies bei meinen Augen der Fall. Wäre diese Ansicht richtig, ..., so gewänne der Kurzsichtige beim Gebrauch desselben Fernrohrs weniger als der Weitsichtige.« In seiner Antwort vom 10. Oktober 1820 stimmt OLBERS[4]) diesen Bemerkungen zu, falls die Augenpupille bei kurzsichtigen Augen grösser sei: »Aber bei den kurzsichtigen Augen, die ich näher zu untersuchen Anlass hatte, war die Pupille bei gleichem Lichte kleiner . . . . . .«

90. Aus demselben Jahre stammt die bekannte Gausssche Methode zur exakten Bestimmung der Vergrösserung eines Fernrohrs. Auch sie war ursprünglich einem astronomischen Bedürfnis entsprungen, nämlich der Aufgabe, die gegenseitigen Abstände der Fäden in Meridianfernrohren zu bestimmen[5]). GAUSS' Überlegung ist folgende: Wenn man — nach entferntem Okular — umgekehrt durch das Meridianfernrohr gegen den Himmel sieht, so treten von jedem Punkte der Brennebene parallele Strahlen aus dem Objektiv her-

1) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 36.

2) Ebenda, S. 41.

3) D. h. der Okularkreis (Austrittspupille). — SCHAEFER.

4) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 42 ff.

5) Astron. Nachr., Bd. II, S. 371 ff., 1823; Werke VI, S. 445.

aus; Strahlen von verschiedenen Punkten der Brennebene bilden Winkel miteinander, die der Distanz dieser Punkte proportional bezw. ihr gleich sind, wenn diese Entfernung selbst im Winkelmass gemessen wird, wie es bei der Benutzung als Meridianfernrohr bei den Fäden der Fall ist. Die Winkel der Strahlen, die von den einzelnen Fäden ausgehen, werden nun mit einem (auf unendlich gestellten) Theodolithen gemessen, und damit hat man den Abstand der Fäden im Winkelmass.

Davon macht nun GAUSS folgende Anwendung auf die Bestimmung der Vergrösserung von Fernrohren: Unter Vergrösserung versteht man bekanntlich das Verhältnis der Sehwinkel (genauer das Verhältnis der Tangenten der Winkel), unter denen das Objekt einmal bei Betrachtung durch das Fernrohr, einmal bei direktem Sehen erscheint. Sieht man durch ein (auf unendlich gestelltes) Fernrohr umgekehrt hindurch, so werden die Sehwinkel durch das Fernrohr um ebenso viel verkleinert, als sie bei normaler Benutzung desselben vergrössert würden. D. h. die Verkleinerung durch das umgekehrte Fernrohr ist gleich der Vergrösserung durch das normal benutzte.

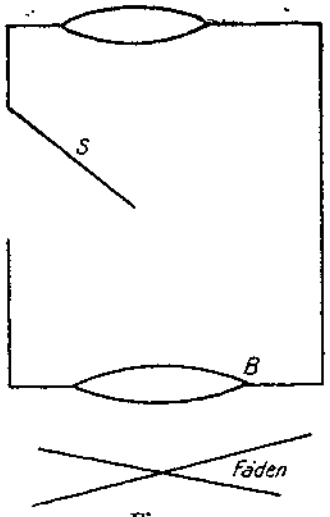
Will man also die Vergrösserung eines Fernrohrs messen, so misst man den Winkelabstand zweier Objekte einmal direkt mit einem Theodolithen (normaler Sehwinkel), ein zweites Mal durch das zu untersuchende umgekehrte Fernrohr hindurch (verkleinerter Sehwinkel). Ihr Verhältnis (genauer das Verhältnis ihrer Tangenten) gibt dann unmittelbar die Vergrösserung. Das Verfahren war sehr viel genauer, als alle damals bekannten Methoden und wird noch heute häufig ausgeführt. Die erste Mitteilung des Gedankenganges findet sich in einem Briefe an OLBERS vom 20. Dezember 1820[1]), während die Veröffentlichung erst 1823 erfolgte.

In einem gewissen Zusammenhange damit steht die Konstruktion des sogenannten GAUSSschen Okulars, das noch heute regelmässig zum Zwecke der Autokollimation verwendet wird. Die obige Methode von GAUSS hatte BOHNENBERGER[2]) auf den Gedanken gebracht, zum Zwecke eben der Autokollimation (die zur Bestimmung des Indexfehlers eines Meridiankreises gebraucht wurde) das Fadenkreuz gleichmässig auf folgende Weise zu beleuchten: Zwischen den Fäden des Fadenkreuzes und der letzten Linse des Okulars machte

1) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 262.

2) BOHNENBERGER, Astron. Nachr., Bd. IV, S. 327 ff., 1826.

er in das Rohr des Instrumentes eine seitliche Öffnung und brachte im Innern des Rohres einen geneigten Spiegel S an, sodass die Hälfte des Gesichtsfeldes bedeckt wurde (s. Figur 6). Vor die Öffnung wurde eine Lampe gestellt, deren Licht durch S zur ersten Linse des Okulars geleitet wurde, von wo es auf die Fäden traf, die auf diese Weise gut beleuchtet wurden. Diese Vorrichtung ist als der BOHNENBERGERsche Kollimator bekannt. Sie besitzt aber gewisse Nachteile, vor allem den, dass von der Linse B Licht ins Auge reflektiert wird, das die deutliche Sichtbarkeit des Fadenkreuzes beeinträchtigt[1]). GAUSS ersetzte daher den undurchsichtigen Spiegel S durch eine unter 45^0 geneigte durchsichtige Glasplatte, die durch das ganze Gesichtsfeld ging und entfernte die Linse B vollständig. »Die Pointe ist, dass zwischen dem unter 45^0 geneigten Spiegel und dem Fadensystem gar kein Glas sein darf«, schreibt er an SCHUMACHER am 31. Oktober 1846[2]).



Figur 6.

91. Ebenfalls ein elementares Problem des Strahlenganges im Fernrohr ist behandelt in zwei Briefen zwischen GAUSS und GERLING aus den Jahren 1839/40. Am 31. Dezember 1839 hatte GERLING[3]) bei einer Beschreibung seines FRAUNHOFER-MERZschen Fernrohres erwähnt, dass die Sonnengläser vor dem Okular ihm stets gesprungen seien, wenn er das Fernrohr gegen die Sonne gerichtet habe. MERZ habe ihm darauf mitgeteilt, dass er das Objektiv abblenden müsse. Dies erschien GERLING so zu sagen als ein Mangel des Instruments; er glaubte verlangen zu können, dass die Sonnengläser auch die Benutzung der ganzen Öffnung des Objektivs aushalten müssten. Am 10. Januar 1840 antwortete GAUSS[4]) mit einer ausführlichen Darlegung der Intensitätsverhältnisse in der Brennebene des Fernrohrs und im Okularkreise. Seine Betrachtung kommt darauf hinaus, die Grösse des Sonnenbildes in der Brenn-

1) Brief SCHUMACHERS an GAUSS vom 2. Dezember 1828; GAUSS-SCHUMACHER II, S. 189.
2) GAUSS-SCHUMACHER, Bd. V, S. 225; Astron. Nachrichten, Bd. 25, S. 43, 1846; Werke VI, S. 472.
3) GAUSS-GERLING, S. 593.
4) Ebenda, S. 599.

ebene zu vergleichen mit der Grösse des Okularkreises. Da durch beide Flächen dieselbe Energie hindurchströmt, verhalten sich die Lichtintensitäten umgekehrt wie die Flächen, und es ergibt sich, dass normalerweise die Intensität im Okularkreis viel grösser ist als in der Brennebene. Daher müsse bei völliger Öffnung jedes Blendglas springen, wenn das Fernrohr gegen die Sonne gerichtet werde, während gleichzeitig die Spinnfäden des Fadenkreuzes in der Brennebene unbeschädigt blieben. Er schreibt: »In einem Punkte tun sie m. E. Herrn Merz unrecht, ich meine wegen der Blendgläser. Bei voller Öffnung und hochstehender Sonne springt jedes Glas; auch mir zersprang ein Blendglas am Passageninstrument gleich in der ersten Zeit; ich überzeugte mich aber bald, dass dies garnicht anders sein kann, und machte mir daher gleich selbst Blendkappen von feinem Papier für Passageninstrument und Meridiankreis. Ich finde die Theorie jenes Vorgangs nirgendwo berührt, und es scheint, dass manche Physiker davon ganz falsche Vorstellungen haben, da, wenn ich nicht irre, Muncke (oder war es Littrow?) es vor einigen Jahren als etwas Mirakulöses betrachtete, dass die Spinnfäden im Brennpunkt eines Passageinstrumentes nicht verbrennen. Das ist aber ganz natürlich. In der Tat: ist m die Vergrösserung des Fernrohrs, die Brennweite k mal grösser als der Durchmesser des Objektivs und setzt man den Sinus des Sonnendurchmessers $= \frac{1}{110}$, so wird ..... die Intensität des Sonnenlichtes auf einem Flächenelemente sein:

1) $= m^2$ vor dem Okular oder am Platz des Blendglases,

2) $= (110/k)^2$ im Brennpunkt oder am Platz der Fäden,

nämlich die Intensität für einfache Beleuchtung durch die Sonne $= 1$ gesetzt.

»Brauchen Sie also eine 130 malige Vergrösserung, so ist die erstere Intensität etwa 740 mal grösser als die zweite; für ein gewöhnliches Brennglas ist etwa $k = 3$, und auch dann ist die Intensität 1) fast 25 mal stärker. Sie werden, wenn Sie kein Blendglas vorschrauben und statt dessen ein Stück Zunder vorhalten, dies gleich in Brand geraten sehen.

»Übrigens gibt es gar kein Mittel, jene Intensität zu verringern, wenn man die Vergrösserung beibehält. Aber indem Sie eine Blendkapsel vorstecken, wird der Lichtzylinder vor dem Okular so viel enger, und es wird also von dem Blendglase nur eine sehr kleine Stelle getroffen, in welcher aber die Dichtigkeit des Lichtes noch eben so gross ist wie vorher.«

Über denselben Gegenstand äussert sich GAUSS[1]) noch einmal ganz kurz in einem Briefe an SCHUMACHER vom 30. Januar 1843, wobei er erwähnt, dass er diese Verhältnisse in seinen Vorlesungen besprochen habe.

92. Ein Vorlesungsheft, das ein Schüler von GAUSS, PIPER, mitgeschrieben hatte, kam im Jahre 1846 in die Hand SCHUMACHERS, der von der darin enthaltenen Theorie des Fernrohrs so entzückt war, dass er GAUSS dringend nahelegte, diese Darlegungen in den »Astronomischen Nachrichten« zu veröffentlichen. GAUSS lehnte schliesslich ab, nachdem er die Niederschrift noch einmal durchgesehen hatte; aber diese Lektüre war ihm Veranlassung, in Briefen an SCHUMACHER einen Punkt richtig zu stellen, den er in den Vorlesungen berührt hatte.

Es handelt sich um die Frage, ob die Vergrösserung eines Fernrohrs für das kurzsichtige oder normale Auge grösser ist, d. h. welches Auge den grösseren subjektiven Nutzen von dem Fernrohre habe.

GAUSS hatte[2]) ursprünglich so argumentiert: Ein normales Auge benutzt eine Lupe so, dass die von einem Objektpunkt ausgehenden Strahlen parallel sind, d. h. es bringt das Objekt in die Brennebene der Lupe, während ein kurzsichtiges Auge das Objekt näher an die Lupe heranbringt, sodass die Strahlen mit der geeigneten Divergenz auf das Auge fallen. Folglich sei der Sehwinkel und damit die Vergrösserung für das kurzsichtige Auge bei Benutzung einer Lupe grösser. Da nun die Okularlinse des Fernrohres als Lupe diene, so sei damit bewiesen, dass ein kurzsichtiges Auge mehr durch die Benutzung eines Fernrohres gewinne, als ein weitsichtiges.

Diese Schlussweise und dieses Resultat nimmt nun GAUSS[3]) in einem Briefe an SCHUMACHER vom 27. Juni 1846 zurück. Er deutet zunächst im allgemeinen an, dass es ein Unterschied sei, ob man ein Objekt betrachte, oder ein Bild des Objektes, von dem Strahlen nur in bestimmter Richtung ausgehen. Er gibt dann ohne Begründung sein neues Ergebnis an: »Dieser Ort des Auges liegt nun (wie eine genauere Untersuchung zeigt) etwas weniges[4]) entfernter von

1) GAUSS-SCHUMACHER V, S. 116.

2) Ebenda, S. 117.

3) Ebenda, S. 171.

4) Hier ist im Abdruck des Briefes ein Druckfehler unterlaufen, der den Sinn ins direkte Gegenteil verkehrt; der oben stehende Text entspricht der Handschrift. — SCHAEFER.

dem Okular bei der Stellung für ein kurzsichtiges Auge, als bei der für ein weitsichtiges, und durch diesen Umstand wird die grössere Annäherung des Okulars gegen das vom Objektiv formierte Bild, die der Kurzsichtige anwendet, mehr als kompensiert, sodass der Kurzsichtige, falls er sein Auge wirklich genau an den für sein Auge gültigen Ort bringt, allerdings eine etwas schwächere Vergrösserung hat, als der Fernsichtige.«

Diese Äusserung Gaussens teilte Schumacher an den mecklenburgischen Geheimen Kanzleirat Heinrich Christian Friedrich Paschen in Schwerin mit, der, gleichfalls ein früherer Schüler von Gauss, sich lebhaft für diese Frage interessierte und nun durch Vermittlung Schumachers mit Gauss korrespondierte. Im Verlauf dieser Korrespondenz[1]) gab Gauss die vollständigen Formeln an, die zu finden Paschen selbst nur zum Teil gelungen war.

Gauss' Auffassung ist die folgende: Der Ort des Auges, der sogenannte Okularkreis, ist das durch das Okular entworfene Bild des Objektivs; durch dieses Bild müssen alle Strahlen hindurchgehen, die das Objektiv treffen. Die Vergrösserung V des Fernrohrs ist nun — nach elementaren Sätzen — das Verhältnis aus dem Objektivdurchmesser D zum Durchmesser des Okularkreises d, und für ein weitsichtiges (d. h. auf Unendlich eingestelltes) Auge ist das gleich dem Verhältnis der Brennweite F des Objektivs zu der f des Okulars:

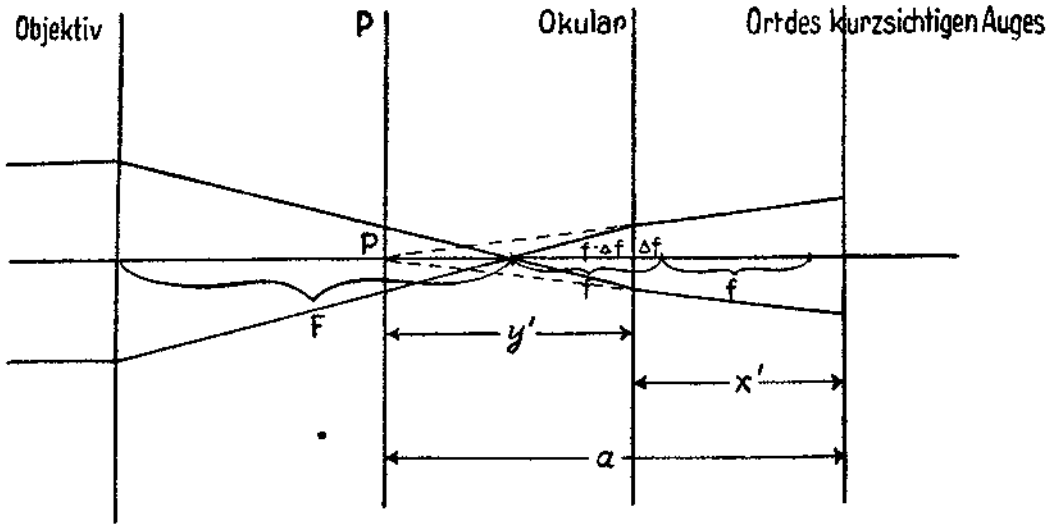
$$V = \frac{F}{f}. \tag{116}$$

Ein kurzsichtiges Auge schiebt nach Gauss das Okular um das Stück Δf näher an die Brennebene heran, sodass die Strahlen aus dem Okular mit geeigneter Divergenz austreten. Ist die Akkomodationsweite dieses Auges gleich a, so haben wir die Verhältnisse der umstehenden Figur 7, in der parallel auf das Objektiv treffende Strahlen verfolgt sind.

Die divergent ausfahrenden Strahlen treffen — rückwärts verlängert —, die Fernrohrachse in einem Punkte P, der vom Ort des Auges um a entfernt ist. Für den Abstand x' des Augenortes vom Okular findet man nach der gewöhnlichen Linsenformel:

$$x' = f + \frac{f^2}{F - \Delta f}, \tag{117}$$

1) Gauss-Schumacher V, S. 174 ff., S. 177 ff., S. 179, S. 180; später (1853/54) veranlasste die mecklenburgische Landesvermessung einen direkten Briefwechsel zwischen Gauss und Paschen.



Figur 7.

für die Lage y' des Punktes P vor dem Okular erhält man auf dieselbe Weise:

$$y' = \frac{f(f-\Delta f)}{\Delta f}, \tag{118}$$

und da nach der Figur:

$$x' + y' = a,$$

so ergibt sich:

$$f + \frac{f^2}{F-\Delta f} + \frac{f^2 - f\Delta f}{\Delta f} = a,$$

oder in Gaussscher Schreibweise[1])

$$\Delta f = \frac{f^2}{a - \frac{f^2}{F-\Delta f}}, \tag{119}$$

woraus

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}F - \sqrt{\tfrac{1}{4}F^2 - \frac{f^2 F}{a}}\ ^{2}). \tag{120}$$

Setzt man $a = \infty$, so wird $\Delta f = 0$, und man erhält aus (117) für den normalen Abstand x des Augenortes vom Okular:

$$x = f + \frac{f^2}{F}, \tag{121}$$

1) Gauss-Schumacher V, S. 177.

2) Der zweite Wert ist offenbar zu verwerfen.

woraus in der Tat hervorgehen würde, dass für ein kurzsichtiges Auge der Abstand (x') grösser ist als für das normale Auge (x), wie es GAUSS' Meinung war. Die Vergrösserung V' für ein kurzsichtiges Auge wäre:

$$V' = \frac{F - \Delta f}{f},$$

also nach Einführung des Wertes (120) von Δf:

$$V' = \frac{\frac{1}{2}F + \sqrt{\frac{1}{4}F^2 - \frac{f^2 F}{a}}}{f}, \tag{122}$$

ein Wert, der tatsächlich kleiner wäre als der für ein normales Auge geltende Wert V in (116). GAUSS bemerkt gegen PASCHEN noch ausdrücklich, dass man nach seiner in unserem Artikel 90 behandelten experimentellen Methode stets den durch die Gleichung (116) gegebenen Normalwert V der Vergrösserung erhalte.

Wir können indessen GAUSS' Argumentation in zweifacher Hinsicht nicht zustimmen. Zunächst nicht seiner Anschauung über die Leistung der Lupe beim kurzsichtigen und normalsichtigen Auge. Es ist doch der Zweck der Lupe die Akkomodationsgrenzen des Auges zu überwinden; wir wollen ihre Brennweite f nennen und annehmen, dass sie direkt vor das Auge gehalten werde. Wenn die kürzeste Akkomodationsnähe für das normale Auge S_{norm}, für das kurzsichtige S_{kurz} ist, so besteht in jedem Falle die Leistung der Lupe darin, die Akkomodationsnähe auf f herabzudrücken; der kleine Unterschied der Lage des Objektes in beiden Fällen, auf dem die ganze GAUSSsche Argumentation beruht, spielt praktisch gar keine Rolle, namentlich nicht bei starken Lupen.

Die Leistung der Lupe ist nun das Verhältnis der natürlichen zur künstlichen Akkomodationsnähe, also für das normale Auge S_{norm}/f, für das kurzsichtige S_{kurz}/f, woraus hervorgeht, dass im Gegensatz zu GAUSS' Anschauungen die Leistung der Lupe für das normale Auge im Verhältnis $\frac{S_{norm}}{S_{kurz}}$ grösser ist als für das kurzsichtige.

Ebensowenig erscheint uns GAUSS' Beweisführung für das Fernrohr zulässig. Der schwache Punkt seiner Betrachtungen liegt in Folgendem: Für den Normalsichtigen hat V einen guten Sinn, da er das Objekt (z. B. einen Stern) auch ohne Instrument scharf sieht; dagegen lässt sich mit der Grösse

V' für den Kurzsichtigen kein rechter Sinn verbinden, da er ohne Instrument überhaupt kein brauchbares Bild des Objektes erhält. Man kann also in der von GAUSS beabsichtigten Weise gar nicht vergleichen, kann dies vielmehr nur in der Weise tun, dass man die Grössen der in beiden Fällen auf der Netzhaut des (normalen bezw. kurzsichtigen) Auges erzeugten Bilder bei jedesmaliger bester Okulareinstellung vergleicht. Führt man die elementare Rechnung durch, so ergibt sich ohne Vernachlässigung für das Verhältnis der normalen Bildgrösse l_{norm} zu der für ein kurzsichtiges Auge l_{kurz}:

$$\frac{l_{norm}}{l_{kurz}} = \frac{F}{F-\Delta f}.$$

Diese Gleichung führt dann aber in der Tat exakt zu dem GAUSSschen Ergebnis (122) zurück, dass nämlich für ein normales Auge das Fernrohr mehr leistet als für das kurzsichtige Auge[1]).

93. Von grösserer Bedeutung als die zuletzt behandelten Beiträge zur Theorie des Fernrohrs ist eine Anregung von GAUSS betreffend eine Methode zur Photometrie der Gestirne.

Für den November 1829 war auf Veranlassung von GAUSS von der Mathematischen Klasse der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften folgende Preisaufgabe gestellt worden[2]):

»In der praktischen Astronomie mangelt es noch immer an einem Mittel zur sicheren Bestimmung der Lichtstärke der Himmelskörper, und die früher zu diesem Zwecke in Vorschlag gebrachten Vorrichtungen haben sich in der Anwendung wenig brauchbar gezeigt.

»Da es jedoch von vielfachem und grossem Nutzen sein würde, die verschiedenen Abstufungen des Sternenlichts und die darin stattfindenden Veränderungen mit Sicherheit und Leichtigkeit beurteilen zu können: so wünscht die königliche Sozietät neue, durch vollständige Beschreibungen erläuterte Vorschläge zu solchen auf photometrischen Grundsätzen beruhenden Vorrichtungen zu erhalten, mittels welcher die verschiedenen Grade des Lichts der Fixsterne

1) Ich verdanke diese kritischen Darlegungen meinem Kollegen Professor Dr. MAX BEREK in Wetzlar, dem ich überhaupt für freundliche Beratung sehr zu Dank verpflichtet bin.

2) Siehe Werke XI, 1, S. 168; die Aufgabe wurde für November 1831 wiederholt; vergl. auch den Brief an OLBERS vom 31. Januar 1829, Werke XII, S. 223.

mit Sicherheit, Gleichförmigkeit und Leichtigkeit beurteilt und festgestellt werden können, und deren Leistungen aus einer ausführlichen Darlegung der Resultate, die aus ihrer Anwendung auf Sterne von den verschiedensten Grössen erhalten worden sind, sich erkennen und beurteilen lassen.«

Den eingegangenen Bewerbungsschriften vermochte die Sozietät den Preis nicht zu erteilen; sie erneuerte jedoch auf GAUSS' Betreiben die Preisaufgabe und GAUSS stellte eine eigene Idee zu einem derartigen Photometer GERLING zur Verfügung, damit dieser den Gedanken ausbilden und sich gegebenen Falls um den Preis bewerben solle.

In einem Brief an OLBERS[1]) äussert sich GAUSS zunächst über die Grundgedanken des zu konstruierenden Apparates dahin, dass dabei das Auge über nichts anderes als über Gleichheit oder Ungleichheit der Helligkeit zweier benachbarter Sterne zu urteilen haben solle, d. h. GAUSS will auch in der Photometrie der Gestirne nur das bewährte Prinzip verwendet wissen, das der praktischen Photometrie seit LAMBERT zu Grunde gelegt wird. Von besonderem Interesse sind nun aber die Bemerkungen, die er über den Fall verschieden gefärbter Lichtquellen macht, d. h. über das Problem der heterochromatischen Photometrie: »Ich komme noch einmal auf das Photometrische zurück. Ich vermute, dass das Urteil über gleiche oder ungleiche Helligkeit einer ziemlich grossen Schärfe fähig sein wird, ..., sobald die Gegenstände nicht sehr ungleiche Färbung haben. Im entgegengesetzten Fall, z. B. wenn Rot mit Grün verglichen werden soll, wird dies freilich wegfallen. Ich habe indes keinen recht deutlichen Begriff, was eigentlich gleiche Helligkeit hier bedeuten soll. Bei gleichen Farben schaut man das unmittelbar an; aber ungleiche können als Empfindungen in Rücksicht auf Gleichheit der Helligkeit kaum verglichen werden. Am Ende bleibt da wohl garnichts anderes übrig, als dass ein roter Stern und ein grüner Stern für gleichhell gelten, wenn einerlei aliquoter Teil die Grenze des Empfindbaren ist.« In diesen Worten ist die grundsätzliche Schwierigkeit der heterochromatischen Photometrie in vollkommener Klarheit formuliert, dass es nämlich von vornherein überhaupt garnicht feststeht, ob mit dem Begriff der Helligkeit eines farbigen Lichtes ein exakter Sinn verbunden werden kann. Diese Schwierigkeit, zu

1) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 581; Werke XI, 1, S. 168 ff.

der noch die technischen Schwierigkeiten der Messung hinzutreten, ist erst ganz kürzlich von SCHRÖDINGER behoben worden, der die Kriterien dafür angegeben hat[1]).

Seinen Vorschlag selbst hat GAUSS[2]) in einem späteren Briefe an OLBERS vom 18. Februar 1832 ausführlicher auseinandergesetzt: »Vielleicht macht es Ihnen eine kleine Zerstreuung, wenn ich Ihnen meine Grundidee zu einem Photometer, wie ich sie GERLING angegeben habe, anzeige. Denken Sie sich einen Spiegelsextanten mit der Modifikation, dass der kleine Spiegel garnicht belegt ist, sondern blos von seinen Glasflächen reflektiert, beide Spiegel aber reichlich so gross wie das Objektiv des Fernrohrs, der grosse auch so breit, wie es für die äussersten Fälle der Winkeldistanz zwischen zwei zu vergleichenden Sternen nötig ist, damit jeder Punkt des Objektivs Licht bekomme. Man stellt den Sextanten so, als wolle man jene Distanz messen, sodass beide Bilder nahe bei einander erscheinen. Die ursprünglichen Lichtintensitäten der Sterne A, B seien a und b, die Intensität der Bilder αa, βb, wo α und β von der Öffnung des Objektivs und der unvollkommenen Durchsichtigkeit der Gläser abhängen, β ausserdem noch von der Angulardistanz der Sterne. Jenseits des kleinen Spiegels ist aber noch eine Vorrichtung angebracht, vermöge der man das direkt gesehene Licht auf einen beliebigen Bruch μ reduzieren kann, indem man statt des vollen Objektivs nur einem Sektor $\mu \times 360^0$ Licht verstattet. Dieses bestimmt man so, dass beide Bilder gleich hell erscheinen; man hat also $\mu\alpha a = \beta b$. Jetzt macht man einen zweiten Versuch, indem man den Sextanten umkehrt und also den vorher direkt gesehenen Stern reflektiert sieht. In diesem zweiten Versuch trete μ' an die Stelle von μ. Man hat also $\mu'\alpha b = \beta a$. War ursprünglich $a = b$, so wird man notwendig $\mu' = \mu$ finden und vice versa; sind aber a, b ungleich, so hat man

$$a : b = \beta : \mu\alpha = \mu'\alpha : \beta = \sqrt{\mu'} : \sqrt{\mu}.$$

Zugleich wird immmer

$$\mu\mu' = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

eine nur von der Angulardistanz abhängige Grösse sein, über die man aus

1) E. SCHRÖDINGER, Annalen der Physik, Bd. 63, S. 397; 1920.

2) GAUSS-OLBERS II, 2, S. 583.

vielen Versuchen das Gesetz ausfindig machen kann; nachdem dies geschehen ist, werden auch einseitige Messungen ein Resultat geben. Dies ist die eigentlich mathematische Grundidee; es versteht sich, dass an die Stelle eines grossen Sextanten mit kleinem Fernrohr hier ein grosses Fernrohr mit kleinem Sextanten (nur um die Sterne bequem zugleich ins Gesichtsfeld bringen zu können) treten muss.«

Wie schon erwähnt, hatte GAUSS diesen Gedanken GERLING mitgeteilt, der in der Tat — wie aus dem GAUSSschen Bericht[1]) über das Ergebnis der Preisbewerbung hervorgeht — nach diesem Prinzip ein Photometer konstruiert hat, dass allerdings nicht den Preis, sondern nur eine lobende Erwähnung erhielt. Preisträger wurde STEINHEIL, der sich gleichfalls mit einem (auf anderen konstruktiven Grundsätzen beruhenden) Photometer an der Bewerbung beteiligt hatte. Man verdankt so GAUSS die Anregung zu einem wesentlichen Fortschritt auf diesem Gebiet.

94. GAUSS' grösste Leistung auf dioptrischem Gebiete sind unzweifelhaft seine *Dioptrischen Untersuchungen*[2]), die 1840 erschienen. Nach seinen Angaben[3]) besass GAUSS damals die Resultate schon seit 40 bis 45 Jahren; er habe sich »aber stets gescheut, diese elementaren Betrachtungen zu veröffentlichen«. Den Anstoss dazu gab schliesslich eine Arbeit von BESSEL[4]) über die Bestimmung der Brennweite des Königsberger Heliometer-Objektivs. Da wegen der nicht zu vernachlässigenden Dicke des Objektivs nicht hinreichend definiert war, von welchem Punkte der Linse Brennweite, Objekt- und Gegenstandsweite zu rechnen waren, verfiel BESSEL auf folgenden Ausweg: Er gab sich die Entfernung D von Objekt und Bild vor, brachte dann die Linse in die beiden Stellungen, in denen sie das Objekt in der Entfernung D scharf abbildet; die Distanz der beiden Linsenstellungen sei d. Dann hat man offenbar, wenn g, b, f Gegenstandsweite, Bildweite, Brennweite bedeuten:

$$D = g + b, \quad d = b - g,$$

und nach der gewöhnlichen Linsenformel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ ergibt sich für f der

1) Werke VI, S. 649 (Gött. Gel. Anz. 1835, S. 329 ff.).

2) Werke V, S. 243 ff.

3) Brief an ENCKE vom 23. Dezember 1830; Werke XI, 1, S. 160.

4) BESSEL, Astronom. Nachr., Bd. 17, S. 169, 1840.

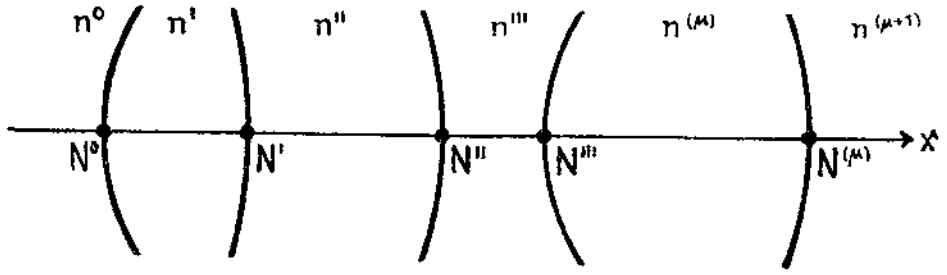
Wert

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4d}.$$

Die Methode ist seither als BESSELsche Methode bekannt; aber in ihrer Anwendung auf dicke Linsen ist der Fortschritt nur scheinbar; denn sie setzt in unzulässiger Weise voraus, dass die gewöhnliche Linsenformel bei Linsen mit endlicher Dicke noch zutreffe. Infolge dieses Irrtums unterschätzte BESSEL den möglichen Fehler seiner Messung ganz ausserordentlich, und dies war für GAUSS die Veranlassung, seine Betrachtungen zu veröffentlichen.

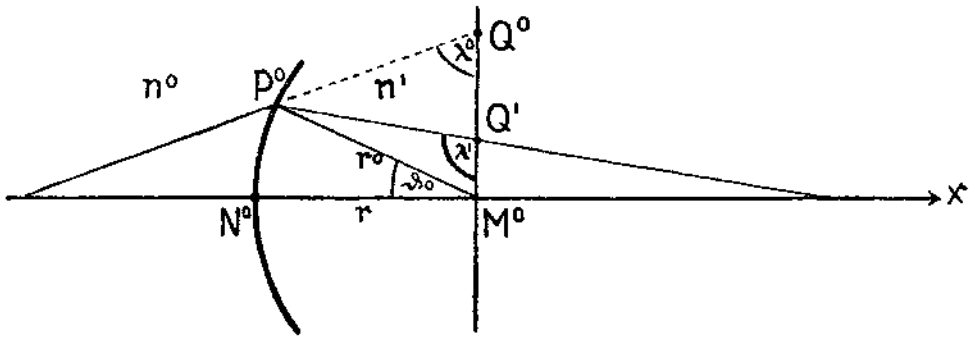
Es handelt sich in den *Dioptrischen Untersuchungen* um das Problem, den Gang des Lichtstrahls durch ein zentriertes System von brechenden Kugelflächen zu verfolgen; die Gleichungen des Strahles vor der ersten Brechung sind in Beziehung zu setzen zu den Gleichungen des Strahles nach der letzten Brechung, d. h. die Koeffizienten der letzteren Gleichungen sind abzuleiten aus denen der ersteren.

Die Brechungsindizes der einzelnen Medien werden von GAUSS bezeichnet durch n^0 (erstes Medium, d. h. vor der ersten Brechung), n' (zweites Medium, d. h. nach der ersten Brechung), $n'', \ldots n^{(\mu+1)}$ (letztes Medium, nach der letzten Brechung). Als Achse des zentrierten Systems wird die x-Achse genommen; die Stellen, wo die brechenden Flächen die x-Achse treffen, heissen entsprechend $N^0, N', N'' \ldots N^{(\mu)}$; die Krümmungsmittelpunkte der Flächen, die gleichfalls auf der Achse liegen, $M^0, M', M'' \ldots M^{(\mu)}$; diese Buchstaben bezeichnen gleichzeitig die diesen Punkten zugehörigen x-Werte; so ist z. B. $M^0 - N^0 = r^0$ der Krümmungsradius der ersten brechenden Fläche. Wir haben also das Bild der Figur 8 vor uns, in der noch die Krümmungsmittelpunkte eingezeichnet zu denken sind.



Figur 8.

Beschränken wir uns zunächst auf eine Brechung, so setzt GAUSS noch Folgendes fest: Der Punkt, in dem der einfallende Lichtstrahl die brechende Fläche trifft, sei P^0, der spitze Winkel zwischen M^0P^0 und der x-Achse sei ϑ^0; der einfallende Lichtstrahl (nötigenfalls verlängert) treffe die im Punkte M^0 zur x-Achse normal stehende Ebene in Q^0, der gebrochene ebenso in Q' (Figur 9).



Figur 9.

Setzt man nun die Gleichungen des einfallenden Strahls in der Form an:

$$(123)\qquad \begin{cases} y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - N^0) + b^0, \\ z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x - N^0) + c^0 \end{cases}$$

und entsprechend für den gebrochenen Strahl:

$$(124)\qquad \begin{cases} y = \frac{\beta'}{n'}(x - N^0) + b', \\ z = \frac{\gamma'}{n'}(x - N^0) + c', \end{cases}$$

so handelt es sich eben darum, die Grössen β', γ', b', c' durch β^0, γ^0, b^0, c^0 auszudrücken.

Bei der Lösung der Aufgabe wird durchgehend vorausgesetzt, dass nur Zentralstrahlen benutzt werden, die also mit der x-Achse nur sehr kleine Winkel bilden. Da beide Gleichungspaare (123) und (124) für den Punkt P^0 gelten, so muss sein

$$\frac{\beta^0}{n^0} r^0 (1 - \cos\vartheta^0) + b^0 = \frac{\beta'}{n'} r^0 (1 - \cos\vartheta^0) + b'$$

$$\frac{\gamma^0}{n^0} r^0 (1 - \cos\vartheta^0) + c^0 = \frac{\gamma'}{n'} r^0 (1 - \cos\vartheta^0) + c'$$

oder, da nach der letzten Voraussetzung β^0, β', ϑ^0 unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind:

$$\begin{cases} b' = b^0 \\ c' = c^0, \end{cases} \tag{125}$$

bis auf Grössen dritter Ordnung genau.

Bezeichnet man ferner mit λ^0 und λ' die Winkel, die die Gerade M^0Q^0 mit P^0Q^0 bezw. P^0Q' macht (siehe Figur 9, S. 191), so hat man durch Anwendung des Sinussatzes und des Brechungsgesetzes:

$$M^0Q' = \frac{n^0}{n'} \cdot M^0Q^0 \cdot \frac{\sin\lambda^0}{\sin\lambda'}. \tag{126}$$

Für den Punkt Q^0 geht nun, da $x - N^0 = r^0$ ist, Gleichung (123) über in:

$$\begin{cases} y = \frac{\beta^0}{n^0} r^0 + b^0, \\ z = \frac{\gamma^0}{n^0} r^0 + c^0. \end{cases} \tag{127}$$

Für Q' gehen ebenso die Gleichungen (124) für den gebrochenen Strahl über in:

$$\begin{cases} y = \frac{\beta'}{n'} r^0 + b', \\ z = \frac{\beta'}{n'} r^0 + c'. \end{cases} \tag{128}$$

Die letzteren Koordinaten (128) verhalten sich zu denen in (127) offenbar wie $M^0Q' : M^0Q^0$, also nach (126) wie $n^0 \sin\lambda^0 : n' \sin\lambda'$; daher folgt:

$$\frac{\frac{\beta'}{n'} r^0 + b'}{\frac{\beta^0}{n^0} r^0 + b^0} = \frac{n^0 \sin\lambda^0}{n' \sin\lambda'},$$

also unter Berücksichtigung von (125), sowie des Umstandes, dass λ^0 und λ' von rechten Winkeln nur um Grössen erster Ordnung abweichen:

$$\begin{cases} \beta' = \beta^0 + \frac{n^0 - n'}{r^0} b^0 = \beta^0 + \frac{n' - n^0}{N^0 - M^0} b^0, \\ \gamma' = \gamma^0 + \frac{n^0 - n'}{r^0} c^0 = \gamma^0 + \frac{n' - n^0}{N^0 - M^0} c^0. \end{cases} \tag{129}$$

Die Formeln (125) und (129) lösen die gestellte Aufgabe vollständig.

95. Nach Erlangung dieses speziellen Resultates, das wir später brauchen werden, geht GAUSS zum allgemeinen Fall der Figur 8 über. Es werden auch

hier die Gleichungen der Strahlen bei den aufeinanderfolgenden Brechungen in analoger Form aufgestellt, aber nicht mehr alle auf den Punkt $x = N^0$ bezogen, wie in den Gleichungen (123) und (124), sondern der Reihe nach bei den verschiedenen Brechungen auf die Punkte $N^0, N', N'' \ldots N^{(\mu)}$. Wir haben also vor der ersten Brechung (wie in den Gleichungen (123)):

$$(130)\qquad \begin{cases} y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - N^0) + b^0, \\ z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x - N^0) + c^0, \end{cases}$$

nach der ersten Brechung (jetzt auf N' bezogen):

$$(131)\qquad \begin{cases} y = \frac{\beta'}{n'}(x - N') + b', \\ z = \frac{\gamma'}{n'}(x - N') + c', \end{cases}$$

wobei jetzt die Grössen b' und c' natürlich andere sind, als in den Gleichungen (124); nach der zweiten Brechung:

$$(132)\qquad \begin{cases} y = \frac{\beta''}{n''}(x - N'') + b'', \\ z = \frac{\gamma''}{n''}(x - N'') + c'', \end{cases}$$

und so fort. Nach der letzten Brechung haben wir:

$$y = \frac{\beta^{(\mu+1)}}{n^{(\mu+1)}}(x - N^{(\mu)}) + b^{(\mu)},$$
$$z = \frac{\gamma^{(\mu+1)}}{n^{(\mu+1)}}(x - N^{(\mu)}) + c^{(\mu)},$$

oder, indem die jeweils letzten Grössen $\beta^{(\mu+1)}$, $\gamma^{(\mu+1)}$, $N^{(\mu)}$, $n^{(\mu+1)}$, $b^{(\mu)}$, $c^{(\mu)}$ durch einen * bezeichnet werden:

$$(133)\qquad \begin{cases} y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - N^*) + b^*, \\ z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - N^*) + c^*. \end{cases}$$

Führt man die Abkürzungen ein:

$$(134)\qquad \begin{cases} \frac{N' - N^0}{n'} = t', \quad \frac{N'' - N'}{n''} = t'', \quad \frac{N''' - N''}{n'''} = t''', \quad \cdots \quad \frac{N^{(\mu)} - N^{(\mu-1)}}{n^{(\mu)}} = t^*, \\ \frac{n' - n^0}{N^0 - M^0} = u^0, \quad \frac{n'' - n'}{N' - M'} = u', \quad \frac{n''' - n''}{N'' - M''} = u'', \quad \cdots \quad \frac{n^{(\mu+1)} - n^{(\mu)}}{N^{(\mu)} - M^{(\mu)}} = u^*, \end{cases}$$

so erhält man, genau wie im Artikel 94, folgende Rekursionsformeln:

$$(135)\qquad \begin{cases} \beta' = \beta^0 + u^0 b^0, & b' = b^0 + t'\,\beta', \\ \beta'' = \beta' + u' b', & b'' = b' + t''\,\beta'', \\ \beta''' = \beta'' + u'' b'', & b''' = b'' + t'''\beta''', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta^* = \beta^{(\mu)} + u^* b^*, & b^* = b^{(\mu-1)} + t^*\beta^{(\mu)}, \end{cases}$$

d. h. $\beta^* \equiv \beta^{(\mu+1)}$ und $b^* \equiv b^{(\mu)}$ (und analog natürlich $\gamma^* \equiv \gamma^{(\mu+1)}$ bezw. $c^* \equiv c^{(\mu)}$) sind linear mit β^0, b^0, γ^0, c^0 verbunden:

$$(136)\qquad \begin{cases} b^* = g b^0 + h\beta^0, & \beta^* = k b^0 + l\beta^0, \\ c^* = g c^0 + h\gamma^0, & \gamma^* = k c^0 + l\gamma^0. \end{cases}$$

Die Rekursionsformeln lassen sich mit Hilfe eines Eulerschen Algorithmus sehr einfach hinschreiben; doch brauchen wir darauf nicht näher einzugehen. Anzumerken ist nur eine Folgerung, die durch Rechnung verifiziert werden kann; es ist

$$(137)\qquad \begin{vmatrix} g & h \\ k & l \end{vmatrix} = +1;$$

infolge davon können die Gleichungen (136) in folgender Weise nach b^0, c^0, β^0, γ^0 aufgelöst werden:

$$(136\,a)\qquad \begin{cases} b^0 = l b^* - h\beta^*, & \beta^0 = -k b^* + g\beta^*, \\ c^0 = l c^* - h\gamma^*, & \gamma^0 = -k c^* + g\gamma^*. \end{cases}$$

Mit den Gleichungen (136) und (136a) ist die gestellte Aufgabe grundsätzlich in voller Allgemeinheit gelöst; das Ergebnis bedarf jetzt nur noch einer Diskussion für besondere Fälle und eventuell einer Untersuchung darüber, ob es noch einfacher formuliert werden kann.

Als erstes Ergebnis folgt z. B. aus den obigen Formeln, wie man das Bild eines Punktes $P(\xi, \eta, \zeta)$, der auf dem einfallenden Strahl (130) liegt, findet. Der Bildpunkt $P^*(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$ muss natürlich auf dem ausfahrenden Strahl (133) liegen und man findet leicht:

$$\begin{cases} \xi^* = N^* - \dfrac{n^0 h - g(\xi - N^0)}{n^0 l - k(\xi - N^0)} \cdot n^*, \\ \eta^* = \dfrac{n^0 \eta}{n^0 l - k(\xi - N^0)}, \\ \zeta^* = \dfrac{n^0 \zeta}{n^0 l - k(\xi - N^0)}. \end{cases}$$

Der Punkt P hat den senkrechten Abstand $\sqrt{\eta^2+\zeta^2}$ von der x-Achse; P^* liegt natürlich in der durch P und die x-Achse gelegte Ebene, im Abstand $\sqrt{\eta^{*2}+\zeta^{*2}}$ von der x-Achse; das Verhältnis beider Abstände ist das, was man heute als die »Lateralvergrösserung« bezeichnet. Wir verwenden dafür den Buchstaben V_L. Man findet leicht aus der letzten Gleichung:

$$V_L = \frac{n^0}{n^0 l - k(\xi - N^0)} = g + \frac{k}{n^*}(\xi^* - N^*). \tag{138}$$

Man kann nun nach Normalebenen zur x-Achse fragen, in denen die Lateralvergrösserung gleich 1 ist, d. h. nach solchen Ebenen, in denen die Punkte P und P^* gleichen Abstand von der x-Achse haben. Man findet aus (138) dafür die beiden (dasselbe aussagenden) Gleichungen:

$$l - \frac{k}{n^0}(\xi - N^0) = 1,$$

$$g + \frac{k}{n^*}(\xi^* - N^*) = 1.$$

Aus der ersten von ihnen folgt

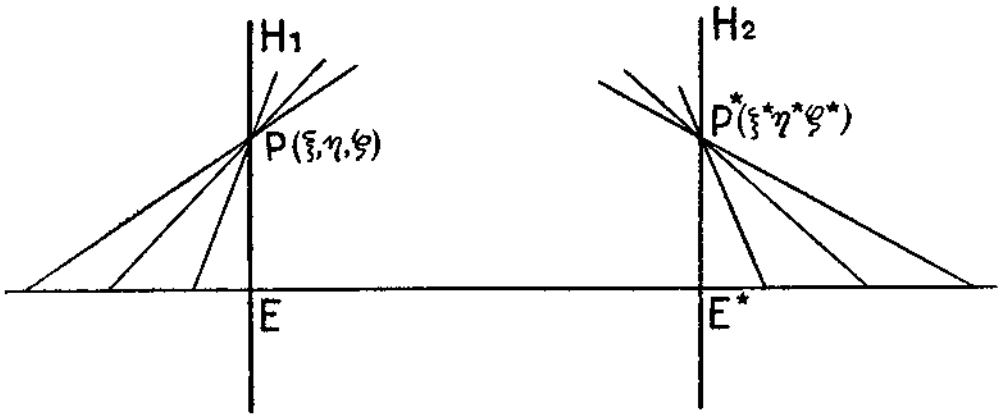
$$\xi = N^0 - \frac{n^0(1-l)}{k} \equiv E, \tag{139a}$$

aus der zweiten ebenso:

$$\xi^* = N^* + \frac{n^*(1-g)}{k} \equiv E^*. \tag{139b}$$

Dadurch sind zwei Ebenen $x = E$ und $x = E^*$ definiert, von denen die eine offenbar das Bild der anderen ist, und zwar ist, wenn wir bei unserem bisherigen Sprachgebrauch bleiben, die zweite Ebene das Bild der ersteren; denn jeder Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ der ersteren wird abgebildet in einem Punkt $P^*(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$ der letzteren, der sich überdies nach unserer Forderung im gleichen Abstand von der x-Achse befindet. Für Ebenen, Geraden und Punkte, die im Verhältnis von Objekt zu Bild zu einander stehen, wollen wir die Bezeichnung »konjugiert« gebrauchen. Insbesondere nennt man die beiden durch (139a) und (139b) definierten konjugierten Ebenen die beiden »Hauptebenen« des Systems, die Punkte E und E^* selbst die »Hauptpunkte«.

Fällt also ein Strahl in beliebiger Richtung ein, der die erste Hauptebene in $P(\xi, \eta, \zeta)$ schneidet, so verlässt der ausfahrende Strahl die zweite Hauptebene in dem konjugierten Punkte $P^*(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$ (siehe Figur 10).



Figur 16.

Man sieht also bereits hier, dass diese beiden Ebenen in gewissem Sinne das ganze brechende System ersetzen können, wodurch sich auch der Name Hauptebenen rechtfertigt.

96. Wir wollen nun im Folgenden den einfallenden und ausfahrenden Strahl, statt auf die Punkte N^0 und N^*, auf die Hauptpunkte E und E^* beziehen, und setzen demgemäss an:
für den einfallenden Strahl

$$(140) \qquad \begin{cases} y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - E) + B, \\ z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x - E) + C, \end{cases}$$

für den ausfahrenden Strahl

$$(141) \qquad \begin{cases} y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - E^*) + B^*, \\ z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - E^*) + C^*. \end{cases}$$

Unter Benutzung der Bezeichnungen

$$(142) \qquad \frac{N^0 - E}{n^0} = \theta, \quad \frac{E^* - N^*}{n^*} = \theta^*$$

findet man zunächst:

$$b^0 = B + \theta\beta^0, \qquad c^0 = C + \theta\gamma^0,$$
$$B^* = b^* + \theta^*\beta^*, \quad C^* = c^* + \theta^*\gamma^*,$$

und daraus folgt leicht, dass, wenn man

$$(143)\qquad \begin{cases} G = g + \theta^* k, \\ H = h + \theta g + \theta\theta^* k + \theta^* l, \\ K = k, \\ L = l + \theta k \end{cases}$$

setzt, die Relationen bestehen:

$$(144)\qquad \begin{cases} B^* = GB + H\beta^0, \quad C^* = GC + H\gamma^0, \\ \beta^* = KB + L\beta^0, \quad \gamma^* = KC + L\gamma^0, \end{cases}$$

die das genaue Analogon zu den Formeln (136) darstellen. Da ferner auch hier

$$(145)\qquad \begin{vmatrix} G & H \\ K & L \end{vmatrix} = +1$$

ist, so ergeben sich durch Auflösung von (144) auch die zu (136a) analogen Gleichungen. Setzt man aus (139a) und (139b) die Werte von E und E^* in (142) ein, so erhält man im besonderen

$$(142a)\qquad \theta = \frac{1-l}{k}, \quad \theta^* = \frac{1-g}{k},$$

und weiter aus (143):

$$(143a)\qquad \begin{cases} G = 1, \\ H = 0, \\ K = k, \\ L = 1. \end{cases}$$

Schliesslich folgt also für die Gleichungen (141) des ausfahrenden Strahls:

$$(146)\qquad \begin{cases} y = \frac{\beta^0 + kB}{n^*}(x - E^*) + B, \\ z = \frac{\gamma^0 + kC}{n^*}(x - E^*) + C. \end{cases}$$

Man kann diese Gleichungen mit denen vergleichen, die in (128) und (129) für den einmal gebrochenen Strahl erhalten wurden, d. h. mit den Gleichungen

$$y = \frac{\beta^0 + \frac{n^0 - n^*}{r} b^0}{n^*} + b^*,$$

$$z = \frac{\gamma^0 + \frac{n^0 - n^*}{n} c^0}{n^*} + c^*,$$

wo sinngemäss die gestrichenen Grössen durch besternte ersetzt sind, da nur eine Brechung vorkommt. Dann entsprechen sich offenbar die Ausdrücke

$$k \text{ und } \frac{n^0 - n^*}{r},$$

und wenn man diese einander gleich setzt, d. h.

$$r = \frac{n^0 - n^*}{k}$$

macht, so kann man, falls $n \neq n^*$ ist, das ganze System durch eine einzige brechende Kugelfläche in E mit dem Krümmungsradius $\frac{n^0 - n^*}{k}$ ersetzen. Falls dagegen $n^0 = n^*$ ist, so kann man in E eine unendlich dünne Linse von der Brennweite $-\frac{n^0}{k}$ für das System substituieren. In GAUSS' eigenen Worten: »Es ist verstattet, anstatt des Überganges aus dem ersten Mittel in das letzte vermöge mehrerer Brechungen den Übergang entweder durch eine einzige Brechung oder durch eine einzige Linse von unendlich kleiner Dicke zu substituieren, je nachdem das erste und letzte Mittel ungleich oder gleich sind, indem man im ersten Falle der brechenden Fläche den Halbmesser $\frac{n^0 - n^*}{k}$, im zweiten der Linse die Brennweite $-\frac{n^0}{k}$ gibt, die brechende Fläche oder die Linse in E annimmt und in beiden Fällen die Lage des ausfahrenden Strahles soviel verschiebt, als die Entfernung des Punktes E von E^* beträgt.«

In dieser Zurückführung eines beliebig komplizierten zentrierten Systems auf diese einfachen Fälle ist die eigentliche Leistung der GAUSSschen Theorie zu erblicken.

Bemerkt sei noch, dass GAUSS die Hauptebenen nicht durch die Bedingung einführt, dass in ihnen die Lateralvergrösserung gleich 1 sein soll, obwohl das in seinen Entwickelungen natürlich implizite enthalten ist; er hebt merkwürdiger Weise diese Tatsache nicht einmal hervor.

97. GAUSS definiert ferner noch zwei weitere Punkte F und F^*, auf die man gleichfalls mit Vorteil die einfallenden und ausfahrenden Strahlen beziehen kann. Sie werden definiert durch die Angaben:

$$(148) \qquad \begin{cases} F = N^0 + \frac{n^0 l}{k} = E + \frac{n^0}{k}, \\ F^* = N^* - \frac{n^* g}{k} = E^* - \frac{n^*}{k}. \end{cases}$$

So gewinnt man die Ansätze:
für den einfallenden Strahl

$$(149)\qquad \begin{cases} y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - F) + B', \\ z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x - F) + C', \end{cases}$$

für den ausfahrenden Strahl

$$(150)\qquad \begin{cases} y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - F^*) + B'^*, \\ z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - F^*) + C'^*. \end{cases}$$

Man kann nun genau dieselben Betrachtungen anstellen, wie im vorhergehenden Artikel und erhält auch formal dieselben Gleichungen, wenn man statt (142) sinngemäss setzt:

$$(151)\qquad \frac{N^0 - F}{n^0} = \theta', \quad \frac{F^* - N^*}{n^*} = \theta'^*.$$

So folgen die Gleichungen (143), (144), (145), wo nur die entsprechenden Grössen zum Unterschied mit einem Strich zu versehen sind. Im Einzelnen ergibt sich

$$(152)\qquad \begin{cases} \theta' = -\frac{l}{k}, \quad \theta'^* = -\frac{g}{k}, \\ G' = 0, \quad H' = -\frac{1}{k}, \quad K' = k, \quad L' = 0, \end{cases}$$

und daraus schliesslich für den ausfahrenden Strahl das Gleichungspaar:

$$(153)\qquad \begin{cases} y = \frac{kB'}{n^*}(x - F^*) - \frac{\beta^0}{k}, \\ z = \frac{kC'}{n^*}(x - F^*) - \frac{\gamma^0}{k}, \end{cases}$$

das mit (149) für den einfallenden Strahl zu kombinieren ist.

Man erkennt nun sofort folgende Fundamentaleigenschaft der Punkte F und F^*: Betrachten wir einfallende Strahlen durch den Punkt F, d. h. setzen wir in (149) $B' = C' = 0$, so folgt aus (153) $y = z = \text{const.}$, d. h. die ausfahrenden Strahlen sind der x-Achse parallel. Und umgekehrt: Setzen wir in (149) $\beta^0 = \gamma^0 = 0$, d. h. nehmen wir parallel der Achse einfallende Strahlen, so folgt aus (153), dass die ausfahrenden Strahlen durch F^* gehen müssen.

Die Punkte F und F^* haben daher die Eigenschaft der Brennpunkte und werden so bezeichnet: F als der vordere (erste), F^* als der hintere (zweite) Brennpunkt. Als Brennweiten hat man nach (148) sinngemäss die Abstände der Punkte F und F^* von den Hauptpunkten E bezw. E^* zu bezeichnen und erhält so, wenn f die vordere und f^* die hintere Brennweite bezeichnen:

$$f = -\frac{n^0}{k}, \quad f^* = -\frac{n^*}{k}, \tag{154}$$

die einander gleich werden, falls wie gewöhnlich das erste und letzte Medium identisch sind.

98. Zu erörtern bleibt noch ein singulärer Fall, der nämlich, wo $k = 0$ ist. Dann folgt aus den Gleichungen (139) und (148), dass Hauptpunkte und Brennpunkte des Systems im Unendlichen liegen; sie verlieren dann ihre Bedeutung. Dieser Fall liegt z. B. vor bei einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr: Parallel auf das Objektiv fallende Strahlen verlassen das Okular parallel und umgekehrt; deshalb heisst dieser singuläre Fall der »teleskopische«. Man geht dann direkt auf die Gleichungen (130) für den einfallenden und (132) für den ausfahrenden Strahl zurück, die sich unter Berücksichtigung der Werte (136) mit $k = 0$ so schreiben lassen:

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - N^0) + b^0; \quad z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x - N^0) + c^0, \tag{130}$$

$$y = \frac{l\beta^0}{n^*}(x - N^*) + gb^0 + h\beta^0; \quad z = \frac{l\gamma^0}{n^*}(x - N^*) + gc^0 + h\gamma^0. \tag{154}$$

Definiert man nun einen neuen Punkt N^{**} durch die Gleichung

$$N^{**} = N^* - \frac{hn^*}{l} = N^* - ghn^*, \tag{155}$$

so werden die Formeln (154) für den ausfahrenden Strahl einfach:

$$\begin{cases} y = \frac{l\beta^0}{n^*}(x - N^{**}) + gb^0, \\ z = \frac{l\gamma^0}{n^*}(x - N^{**}) + gc^0. \end{cases} \tag{156}$$

Nehmen wir jetzt auf dem einfallenden Strahl wieder einen Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ an, so erhält man für das Bild $P^{**}(\xi^{**}, \eta^{**}, \zeta^{**})$ desselben die Werte:

$$\begin{cases} \xi^{**} = N^* + \frac{n^*}{n^0} g^2 (\xi - N^0), \\ \eta^{**} = g\eta, \quad \zeta^{**} = g\zeta. \end{cases} \tag{157}$$

Daraus folgt zunächst für die Lateralvergrösserung V_L der Wert:

$$V_L = g. \tag{158}$$

Und ferner folgt, wenn wir $\xi = N^0$, $\eta = \zeta = 0$ nehmen, dass $\xi^{**} = N^{**}$, $\eta^{**} = \zeta^{**} = 0$ werden, d. h. dass der Punkt N^{**} das Bild des Punktes N^0 ist, in dem die erste brechende Fläche die Achse des Systems schneidet. Eine Ebene senkrecht zur Achse in N^0 wird also in die achsensenkrechte Ebene in N^{**} abgebildet[1]) oder, auf das astronomische Fernrohr angewendet: das »Objektiv« wird in den »Okularkreis« abgebildet, woraus sofort folgt, dass die Lateralvergrösserung gleich dem Durchmesserverhältnis von Objektiv und Okularkreis ist, wovon wir im Vorhergehenden mehrfach Gebrauch gemacht haben. Für das umgekehrte Fernrohr folgt die Verkleinerung zu $1/g$, und das ist die Theorie der Gaussschen Methode zur Bestimmung der Vergrösserung eines Fernrohrs, die wir in Art. 90 besprochen haben.

99. Des weiteren folgen in den *Dioptrischen Untersuchungen* Angaben über die Konstruktion des Bildes, wenn Haupt- und Brennpunkte des Systems gegeben sind, ferner über die experimentelle Bestimmung der Haupt- und Brennpunkte und schliesslich werden die Formeln für eine einfache Linse von nicht verschwindender Dicke angegeben. Auf diese Details brauchen wir hier nicht einzugehen[2]). Es sei nur noch erwähnt, dass Bessels Bestimmung der Brennweite des Königsberger Heliometerobjektivs einer Korrektur unterzogen wird. Während Bessel den Fehler seines Resultates auf 1/75000 der Brennweite schätzte, zeigt Gauss, dass er ungefähr 1/1300 beträgt.

Schliesslich — und das führt zurück zu der Theorie der dialytischen Fernrohre, die wir in den Artikeln 85—88 besprochen haben — betont Gauss, dass die Lage der Haupt- und Brennpunkte von den Brechungsindizes der Linsen des Systems abhängt, d. h. von Wellenlänge zu Wellenlänge

1) Natürlich nur in so weit, als Zentralstrahlen verwendet werden.

2) Gauss erwähnt auch noch, dass Reflexionen an Kugelflächen formal sich einfach dadurch in die Theorie einordnen, dass man den Brechungsindex negativ setzt. In *Handbuch* 19 (Be), S. 230 (Werke XI, 1, S. 143) findet sich eine Aufzeichnung von Gauss, in der er ein Beispiel für einen derartigen Fall durchgerechnet hat: *Reflexion an der hinteren Fläche einer Linse.* Die Lichtstrahlen fallen auf eine Linse, werden das erste Mal an der Vorderfläche gebrochen, an der Hinterfläche reflektiert, das zweite Mal wieder an der Vorderfläche gebrochen. Die Formeln geben Haupt- und Brennpunkte für diesen Fall an; diese Notiz, deren Bezeichnungen mit denen der *Dioptrischen Untersuchungen* übereinstimmen, stammt offenbar ebenfalls aus dem Jahre 1840.

variiert, dass also im Allgemeinen chromatische Aberration auftritt. Zur Achromasie wird nun aber erfordert, dass alle parallelen Strahlen unabhängig von der Farbe sich in einem Punkte vereinigen, d. h. nicht nur solche, die parallel der Achse einfallen, sondern auch solche, die geneigt dagegen sind. Mit andern Worten[1]): »Die verschiedenfarbigen Bilder eines ausgedehnten, als unendlich entfernt betrachteten Gegenstandes müssen nicht bloss in eine Ebene fallen, sondern auch gleiche Grösse haben. Die erste Bedingung beruht auf der Identität des hinteren Brennpunktes für verschiedenfarbige Strahlen, die zweite auf der Gleichheit der Brennweiten, und da diese die Entfernung des zweiten Brennpunktes vom zweiten Hauptpunkte ist, so kann man auch die beiden Bedingungen dadurch ausdrücken, dass beide Punkte zugleich für rote und violette Strahlen dieselben sein müssen.«

Bei den gewöhnlichen achromatischen Objektiven, bei denen die Linsen dicht bei einander stehen, ist mit der ersten Bedingung auch nahezu die zweite immer erfüllt, nicht aber bei den dialytischen Objektiven. Man erkennt hier, wie GAUSS durch seine Theorie der Hauptpunkte zum ersten Male zur Erkenntnis der zweiten Bedingung geführt wurde und woher seine Bedenken gegen das dialytische Prinzip stammten. Wir haben im Vorhergehenden gezeigt, auf welche Weise sich diese Schwierigkeiten dennoch lösen lassen.

100. Die GAUSSsche Dioptrik ist der Abschluss und die Vollendung derjenigen Untersuchungen, die sich auf Zentralstrahlen (Parachsialstrahlen), d. h. auf die punktweise Abbildung durch enge Strahlenbüschel beziehen. Wenn man von der Einführung der sog. »Knotenpunkte« durch MÖBIUS[2]) absieht, hat in materieller Hinsicht der GAUSSschen Theorie im Laufe fast eines Jahrhunderts nichts hinzugefügt werden können. Dennoch ist die Bedeutung der GAUSSschen Untersuchung für die heutige praktische Optik gering, da man sich eben nicht auf enge Strahlenbüschel beschränken kann, sondern mittels weitgeöffneter Strahlenbüschel abbilden muss. Einmal aus Gründen der Intensität, da enge Büschel keine nennenswerte Energie transportieren, dann aber auch, weil die Beugung umso störender hervortritt, je enger die Öffnung des Strahlenbüschels ist. Statt dass die Abbildung durch

1) *Dioptrische Untersuchungen* a. a. O., S. 274.

2) A. F. MÖBIUS, CRELLES Journal f. d. reine und angewandte Mathematik, Bd. 5, S. 113, 1830. MÖBIUS' Gesammelte Werke IV (1887), S. 477—511.

enge (parachsiale) Büschel besonders gut ist, wie es die geometrische Optik behauptet, ist sie in Wirklichkeit, wie es auch nach der Wellentheorie zu erwarten ist, besonders schlecht, weil ein Objektpunkt in ein umso grösseres Beugungsscheibchen abgebildet wird, je enger das die Abbildung vermittelnde Strahlenbüschel ist. Man kann geradezu sagen, dass der Abbildung durch Zentralstrahlen gar keine Bedeutung zukommen würde, wenn nicht die begrenzte Empfindlichkeit des Auges es mit sich brächte, dass eine streng stigmatische Abbildung nicht verlangt wird.

Ein Punkt ist bei Gauss besonders merkwürdig. Die hier betrachtete Abbildung des Objektraumes auf den Bildraum ist von folgender Art: Jedem Punkte P des Objektraumes entspricht ein Punkt P^* des Bildraumes, jeder durch P gehenden Geraden G entspricht eine durch P^* gehende Gerade G^*, und jeder die Gerade G enthaltenden Ebene E entspricht eine G^* enthaltende Ebene E^*. Es entsprechen sich also Punkte, Strahlen, Ebenen in beiden Räumen gegenseitig eindeutig und das Ineinanderliegen bleibt erhalten; eine solche Beziehung ist aber eine rein geometrische Angelegenheit und wird als »kollineare Verwandtschaft« bezeichnet.

Daraus ergibt sich aber, dass dadurch, dass man eine kollineare Verwandtschaft zwischen zwei Räumen statuiert, die mathematischen Beziehungen zwischen den Dingen im Objektraum und ihren Bildern im Bildraum auch rein mathematisch festgelegt sind, d. h. ohne irgendeine Beziehung auf physikalische Mittel, durch die die kollineare Verwandtschaft realisiert werden kann. Die geometrischen Beziehungen beider Räume zueinander stehen fest, auch wenn es gar kein Mittel in der Natur gäbe, diese Beziehung physikalisch herzustellen. Die aufeinanderfolgenden Brechungen und Reflexionen haben also mit dem geometrischen Problem an sich nichts zu tun, sie sind vielmehr grundsätzlich davon zu trennen. Diese Trennung ist bei Gauss nicht nur nicht durchgeführt, sondern er hat, wie man wohl annehmen muss, ihre Möglichkeit und Notwendigkeit gar nicht erkannt; es entging ihm anscheinend die Erkenntnis, dass alle Annahmen über die besondere Art der Verwirklichung einer optischen Abbildung den Kern der Frage, d. h. deren allgemeine Gesetze überhaupt nicht tangieren. Es scheint Möbius[1]) der erste

1) A. F. Möbius, *Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hülfe der Collineationsver-*

gewesen zu sein, der erkannt hat, dass eine paraxiale Abbildung durch eine brechende sphärische Fläche die Verhältnisse der kollinearen Verwandtschaft zum Ausdruck bringt, aber erst MAXWELL[1]) und unabhängig von ihm ABBE[2]) haben bei der Ableitung der allgemeinen Gesetze der optischen Abbildung alle Voraussetzungen über ihre Verwirklichung zunächst ganz beiseite gelassen. Man kann eben rein geometrisch zu den Begriffen der Hauptpunkte, Knotenpunkte, Brennpunkte usw., d. h. zu allen Fundamentaleigenschaften der Abbildung gelangen. Während die Gausssche Herleitung den Eindruck hervorrufen muss, als seien alle diese Begriffe auf die Verwendung enger Büschel beschränkt, so zeigt vielmehr die geometrische Untersuchung, dass die kollineare Verwandtschaft und damit auch diese Fundamentalbegriffe bei beliebig weit geöffneten Strahlenbüscheln möglich sind, nämlich geometrisch möglich sind, während nur die physikalische Herstellung solcher Verwandtschaft bei GAUSS auf enge Büschel beschränkt ist.

101. Nach GAUSS' Angaben reichen die Anfänge der *Dioptrischen Untersuchungen* um 40 bis 45 Jahre zurück. Auch wenn wir die kleinere Zahl nehmen, kommen wir in das Jahr 1800. Aus so früher Zeit haben wir keinen urkundlichen Beleg dafür, vielmehr hat GAUSS sich zum ersten Male über dioptrische Probleme geäussert in dem früher erwähnten Briefwechsel mit REPSOLD, d. h. im Jahre 1807.

In seinem Nachlass jedoch finden sich Aufzeichnungen[3]), die offenbar eng mit dem Thema der *Dioptrischen Untersuchungen* zusammenhängen, und die aus relativ früher Zeit stammen: Diese Notizen sind nämlich sicher nicht später als 1817 und nicht vor 1814 entstanden[4]).

wandtschaft, Sitzungsber. d. sächs. Akad. d. Wissensch., Math.-phys. Classe, Bd. 7 (1855), S. 8—32, MÖBIUS' Gesammelte Werke IV (1887), S. 541—568.

1) J. C. MAXWELL, Scientif. Pap., Bd. I, S. 271 (1856).

2) E. ABBE, in seinen Vorlesungen etwa 1873; siehe dazu WINKELMANN, *Handbuch der Physik*, 2. Aufl., Bd. VI, S. 27 ff.

3) *Handbuch* 21 (Bg), S. 27/28; Werke XI, 1, S. 115 ff.

4) Diese Datierung ergibt sich folgendermassen: Die Aufzeichnungen sind enthalten im *Handbuch* 21 (Bg), das nach GAUSS' eigener Mitteilung angefangen ist im September 1813, und zwar stehen sie auf den Seiten 27 und 28. Unmittelbar anschliessend, nämlich auf den Seiten 29/30 befindet sich die Aufzeichnung über achromatische Doppelobjektive, d. h. die Vorarbeit zur Berechnung des GAUSSschen Objektivs, das Ende 1817 veröffentlicht wurde.

Die Aufzeichnung führt den ganz unphysikalischen Titel: *Neuer Algorithmus*, der in Folgendem besteht:

Gegeben ist eine Anzahl von Grössen

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots$$

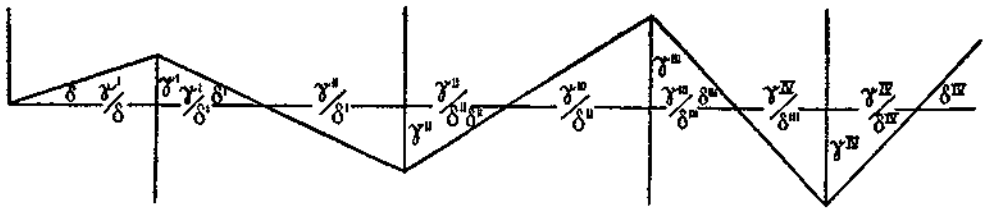
in bestimmter Ordnung. Aus ihnen werden neue Grössen $A,\ B,\ C,\ D,\ \ldots$ gebildet nach der Vorschrift

$$A = a,\quad B = bA - 1,\quad C = cB - A,\quad D = dC - B,\ \ldots$$

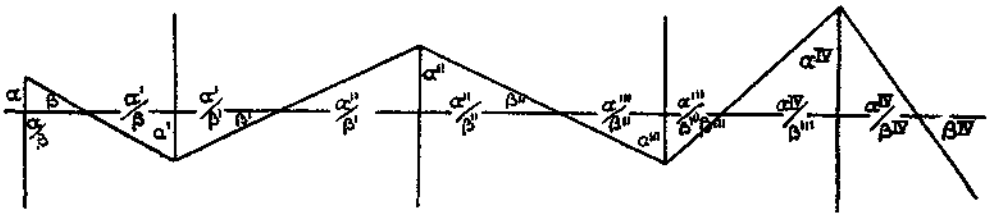
und zwar wird zur Abkürzung gesetzt:

$$A = (a,\ a),\quad B = (a,\ b),\quad C = (a,\ c),\quad D = (a,\ d),\ \ldots$$

Es werden darauf die einfachsten Gesetze dieses Algorithmus entwickelt, der grosse Ähnlichkeit mit einem EULERschen zeigt[1]), demselben, den GAUSS in den *Dioptrischen Untersuchungen* verwendet hat[2]), und dann werden die Elemente $a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots$ der Reihe nach identifiziert mit gewissen Grössen $f,\ h,\ f',\ h',\ f'',\ h'',\ \ldots$, deren physikalische Bedeutung die folgende ist: Gegeben sei ein zentriertes System von $(\mu+1)$ Linsen, deren Brennweiten $1/f,\ 1/f',\ 1/f''\ \ldots$, deren Abstände von einander $h,\ h',\ h''\ \ldots$ sind. Die Verhältnisse werden durch folgende zwei Zeichnungen von GAUSS erläutert, in denen noch gewisse Buchstaben $\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \ldots,\ \beta,\ \beta',\ \ldots,\ \gamma,\ \gamma',\ \ldots,\ \delta,\ \delta',\ \ldots$ eingetragen sind.



Figur 11 a.



Figur 11 b.

1) L. EULER, *Specimen algorithmi singularis*, Novi Comment. Acad. sc. Petrop., Bd. IX (1764), S. 53—69.

2) Werke V, S. 250.

Der Sinn dieser Bezeichnungen ist folgender: In Figur 11b werden axenparallel einfallende Strahlen gedacht und einer derselben, der in der Höhe $\alpha = 1$ das Objektiv trifft, wird auf seinem Gange durch das System verfolgt; das Ziel ist, die Durchstosshöhen α', α'', α''', ... dieser Strahlen bei den andern Linsen zu finden. In Figur 11a dagegen wird ein sog. »Hauptstrahl« durch das System verfolgt, der unter dem Winkel $\delta = 1$ die Objektivmitte durchstösst. Die Grössen γ', γ'', γ''' ... sind den Höhen proportional; gesucht werden ausserdem die Winkel δ', δ'', ..., unter denen der Hauptstrahl die Achse schneidet. Im Gegensatz zu den Hauptstrahlen der Figur 11a nennt man die in Figur 11b verfolgten Strahlen heute die »Öffnungsstrahlen«; beide zusammen bilden das Gerippe eines Strahlenganges durch ein zentriertes System, wobei hier immer an ein astronomisches Fernrohr gedacht ist.

GAUSS gibt nun folgende Beziehungen an:

(158a)	(158b)	(158c)	(158d)
$\alpha = 1$	$\beta = f$	$\gamma = 0$	$\delta = 1$
$\alpha' = (f, h)$	$\beta' = (f, f')$	$\gamma' = h$	$\delta' = (h, f')$
$\alpha'' = (f, h')$	$\beta'' = (f, f'')$	$\gamma'' = (h, h'')$	$\delta'' = (h, f'')$
$\alpha''' = (f, h'')$	$\beta''' = (f, f''')$	$\gamma''' = (h, h''')$	$\delta''' = (h, f''')$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit dieser Formeln. Der Sinn der Figur 11b ist ja der, dass der Gang von achsenparallel auffallenden Strahlen durch das System verfolgt wird: Es ergibt sich also für die Brennweite $1/f$ der ersten Linse der Wert $\frac{\alpha}{\beta}$, d. h. mit $\alpha = 1$ die Beziehung $\beta = f$, wie es die erste Gleichung (158b) angibt. Ferner ist offenbar nach derselben Figur

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta} = h;$$

also mit dem Vorhergehenden:

$$\alpha' = fh - 1 = (f, h),$$

wie es die zweite Gleichung (158a) behauptet. Da ferner $\frac{\alpha'}{\beta}$ gleich der Gegenstandsweite, $\frac{\alpha'}{\beta'}$ gleich der Bildweite für die zweite Linse ist, so ergibt die gewöhnliche Linsenformel:

$$\frac{\beta}{\alpha'} + \frac{\beta'}{\alpha'} = f',$$

also

$$\beta' = \alpha' f' - f = (fh - 1) f' - f = (f, f'),$$

wie es die zweite Gleichung (158b) fordert, usw.

Analoges gilt für die Hauptstrahlen in Figur 11a. Es ergibt sich unmittelbar, da $\delta = 1$ gesetzt ist:

$$\gamma' = h,$$

d. h. die zweite Gleichung (158c). Ferner wieder nach der Linsenformel, da $\frac{\gamma'}{\delta} = \gamma'$ die Gegenstandsweite und ebenso $\frac{\gamma'}{\delta'}$ die Bildweite für die zweite Linse ist (die das Objektiv abbildet):

$$\frac{\delta}{\gamma'} + \frac{\delta'}{\gamma'} = f'$$

oder mit Rücksicht auf das Vorhergehende:

$$\delta' = hf' - 1 = (h, f'),$$

was der zweiten Gleichung (158d) entspricht, usw.

Gauss setzt nun hinzu: »Hier wird nun:

$\delta^{(\mu)}$ ... die Vergrösserung; bei geradem μ ist $\delta^{(\mu)}$ positiv bei aufrechtem Bilde, negativ bei verkehrtem,

$\frac{g}{\beta}, \frac{g}{\beta'}, \frac{g}{\beta''}, \cdots$ Grösse der einzelnen Bilder, wenn g das Gesichtsfeld,

$g\gamma, g\gamma', g\gamma'', \ldots$ Öffnungen der Gläser, wegen des Gesichtsfeldes,

$\frac{\omega}{\delta}, \frac{\omega}{\delta'}, \frac{\omega}{\delta''}, \cdots$ Durchmesser der Strahlenkegel,

$\omega\alpha, \omega\alpha', \omega\alpha'', \ldots$ Öffnungen der Gläser, wegen der Helligkeit.«

Auch diese letzteren Gleichungen sind unmittelbar zu verifizieren. Schliesslich folgen noch einige Bemerkungen über die Verwendung des obigen »Fernrohrs« für weitsichtige und kurzsichtige Augen: »Für weitsichtige Augen muss $\beta^{(\mu)} = 0$ werden; für kurzsichtige, deren Augenweite gleich k, muss

$$\beta^{(\mu)} \delta^{(\mu)} k = -1$$

sein.« Man erkennt hier ohne weiteres den Zusammenhang mit den in Artikel 92 behandelte Fragen.

Interessant ist es, dass Gauss bereits in so früher Zeit zwei Strahlensysteme — eben die Haupt- und Öffnungsstrahlen, wie wir heute sagen —

durch das System hindurch verfolgte; bisher führte man die gleichzeitige Benutzung dieser beiden Strahlsysteme auf eine Abhandlung von LUDWIG SEIDEL[1]) aus dem Jahre 1856 zurück.

102. Neben diesen dioptrischen Untersuchungen finden sich bei GAUSS über Fragen der eigentlichen physikalischen Optik nur fragmentarische Aufzeichnungen und Briefstellen, die hier der Vollständigkeit halber noch besprochen werden müssen.

Eine erste Notiz aus dem Jahre 1811 betrifft die Versuche von MALUS über die Polarisation des Lichtes. GAUSS schreibt darüber am 22. November an BESSEL[2]): »Die schönen Versuche von MALUS über das Ausbleiben einer zweiten Reflexion bei dem Einfallswinkel $35^0 25'$, wenn die beiden Ebenen, in welchen die Reflexion geschieht und geschehen soll, auf einander senkrecht sind, beschäftigen mich seit einigen Tagen. MALUS hat jenen Winkel durch Versuche bestimmt, wobei leicht eine Unsicherheit von $\frac{1}{4}$ Grad übrigbleiben mag. Roh habe ich diese Versuche bereits wiederholt, und zwar mit glücklichem Erfolg. Allein ich gedenke dies künftig mit mehr Genauigkeit zu tun, um auszumitteln, mit welcher Genauigkeit jener Winkel bestimmt werden kann. Sollte er, wie mir wahrscheinlich ist, nicht $35^0 25'$, sondern $35^0 16'$ sein, so liesse sich MALUS' Entdeckung höchst elegant so darstellen: Licht kann nicht zweimal reflektiert werden (von unbelegten Glasspiegeln), wenn diese die Seitenflächen eines regulären Tetraeders sind, und jenes Licht zuerst senkrecht auf eine dritte Seite desselben Tetraeders eingefallen war. Ich glaube, MALUS' Entdeckungen werden der erste Anfang zu vielen herrlichen Aufschlüssen über die Natur des Lichtes sein.« Diese Stelle zeigt das grosse Interesse, das GAUSS der MALUSschen Entdeckung entgegenbrachte, aber gleichzeitig, dass der Mathematiker in ihm sozusagen mit dem Physiker durchging. Seine Bemerkung über die mögliche Ungenauigkeit der MALUSschen Bestimmung des Polarisationswinkels ist zwar durchaus berechtigt, aber seine geometrische Einkleidung des MALUSschen Ergebnisses greift vollständig daneben: GAUSS wusste noch nicht — und konnte es nicht wissen — dass dieser Polarisationswinkel vom Material des Spiegels abhängt — das BREWSTERsche Gesetz wurde erst 1815 aufgestellt —, womit seine Deutung sofort zusammenbricht. Übrigens ist die

1) L. SEIDEL, Denkschriften der Münchener Akad. d. Wissenschaften, Bd. 43, 1856.

2) GAUSS-BESSEL, S. 154.

geometrische Formulierung Gaussens so kurz gehalten, dass ihr eigentlicher Sinn nicht recht klar ist. Es ist wohl sicher, dass Gauss später selbst die Unhaltbarkeit seiner Auffassung eingesehen hat und deshalb nicht mehr darauf zurückgekommen ist.

103. Im Jahre 1835 erschien das Werk des Speyerer Professors F. M. Schwerd[1]): *Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt und in Bildern dargestellt*, das eine sehr grosse Bedeutung für die Befestigung der Undulationstheorie gehabt hat. Gleichzeitig hatte Schwerd einen »Beugungsapparat« zusammengestellt, der die Fachgenossen in den Stand setzen sollte, seine Versuche zu wiederholen. Bei der Wichtigkeit des Problems ist es nicht merkwürdig, dass auch Gauss sich damit beschäftigte; er schreibt am 7. Juni 1836 an Schumacher[2]): »Ich habe mich in der letzten Woche viel mit optischen, namentlich mit den sehr interessanten Beugungsversuchen beschäftigt. Schwerd hat in diesem Felde recht viel geleistet, um diese höchst mannigfaltigen Erscheinungen, wozu Fraunhofer zuerst den Weg eröffnete, aus einem Prinzip abzuleiten. Inzwischen bleibt jedoch noch sehr viel übrig, bis die Theorie als vollständig und erschöpfend angesehen werden kann.« Und ebenso teilt Gauss[3]) am 23. Juli 1836 Olbers mit, dass er sich einen Schwerdschen Apparat angeschafft habe, um Diffraktionsversuche zu machen. »Diese Gegenstände werden mir fast ebenso interessant wie Magnetismus und Galvanismus. Ich habe jedoch jetzt mich mit Gewalt ganz wieder davon trennen müssen, da es mir dazu an Zeit fehlt.« Leider war die Trennung eine endgültige: Gauss hat nie mehr die Musse gefunden, zum Problem der Beugung zurückzukehren. Nur aus dem Nachlass[4]) sind uns ein paar Notizen erhalten *Allgemeine Formeln für die Wirkung eines leuchtenden Punktes P auf einen Punkt p*, die offenbar aus derselben Zeit (1835/36) stammen.

Die erste dieser Notizen ist in mehrfacher Hinsicht interessant: »Es sei P von p durch eine entweder geschlossene oder unendliche Fläche geschieden, deren offener Teil s heisse; ds sei ein Element von s; R, r seine Entfernung

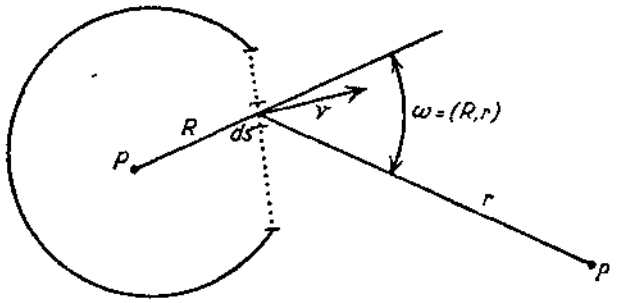
1) In der Schwan- und Goetzschen Buchhandlung, Mannheim 1835.

2) Gauss-Schumacher III, S. 62; Werke XI, 1, S. 151.

3) Gauss-Olbers II, 2, S. 641; Werke XI, 1, S. 151.

4) Werke V, S. 635 ff.

von P, p; ν[1]) eine unbestimmte Normale auf ds, nach der Seite gerichtet, wo p liegt; λ eine Wellenlänge; $\frac{2\pi i}{\lambda} = \alpha$; ω der Winkel zwischen R und r.« Wir haben also die Verhältnisse der Figur 12 vor uns.



Figur 12.

Dann soll nach GAUSS die Wirkung von P auf p durch folgendes Doppelintegral über s gegeben sein:

$$\int \frac{ds}{Rr} \frac{\frac{\partial R}{\partial \nu} + \frac{\partial r}{\partial \nu}}{\sin \omega} e^{\alpha(R+r)}. \tag{159}$$

Da $\frac{\partial R}{\partial \nu}$, $-\frac{\partial r}{\partial \nu}$ die Sinus der Neigungswinkel von R und r gegen ds sind, kann man dafür auch die Kosinus der Winkel mit der Normale ν von ds setzen:

$$\frac{\partial R}{\partial \nu} = \cos(R\nu), \quad -\frac{\partial r}{\partial \nu} = \cos(r\nu).$$

Führt man diese Werte ein, so kann man (159) die Form geben:

$$\int \frac{ds}{Rr} \frac{\cos(R\nu) - \cos(r\nu)}{\sin(Rr)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(R+r)}. \tag{160}$$

(Dies Integral ist natürlich noch mit einem Zeitfaktor multipliziert zu denken.)

Wir haben es hier mit einem Versuch zu tun, das HUYGENS-FRESNELsche Prinzip exakt zu formulieren. Nach diesem Prinzip ist jedes Element ds einer Wellenfläche als selbständiges Erregungszentrum zu betrachten, von dem also Kugelwellen ausgehen. Nehmen wir in P eine punktförmige Lichtquelle an, so ist die davon in ds erzeugte Lichterregung offenbar

$$\frac{ds}{R} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} R}.$$

1) Hier habe ich die Bezeichnung gegen das Original geändert. — SCHAEFER.

Betrachten wir jetzt ds als selbstständiges Erregungszentrum von dieser Stärke, so haben wir in p eine Wirkung proportional zu dem Ausdruck:

$$\frac{ds}{R} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} R} \cdot \frac{1}{r} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} r} = \frac{ds}{Rr} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(R+r)},$$

d. h. zu dem Integranden von (160), abgesehen von den Winkelfunktionen

$$\frac{\cos(R\nu) - \cos(r\nu)}{\sin(Rr)}.$$

Der Zähler hat darin offenbar folgende Bedeutung: Von dem Element ds gehen in Wirklichkeit Wellen nur nach der Seite von p hin, nicht auch nach rückwärts. In dem elementaren HUYGENS-FRESNELschen Prinzip ist diese Tatsache nicht verständlich: Sie muss besonders postuliert werden, ohne dass eine Begründung dafür gegeben werden könnte. Man sieht nun aus der GAUSSschen Formel (160) gleich, dass die Differenz der Kosinus gleich 2 wird, wenn ds in der direkten Verbindungslinie von P und p liegt; d. h. nach aussen geht eine Strahlung proportional 2, nach innen dagegen wird die Differenz der Kosinus gleich 0, d. h. nach rückwärts geht keine Strahlung von ds aus. Der erwähnten Tatsache wird also durch den Ansatz

$$\{\cos(R\nu) - \cos(r\nu)\}$$

Rechnung getragen. Es ist beachtenswert, dass in der exakten Formulierung des HUYGENSschen Prinzips durch GUSTAV KIRCHHOFF, der es durch Integration der Wellengleichung gewann, ebenfalls genau diese Differenz der Kosinus auftritt[1]).

Der Faktor $\frac{1}{\sin(Rr)}$ soll offenbar den Einfluss der »Schiefe« bei der Ausstrahlung zur Geltung bringen. Dieser Faktor ist in der KIRCHHOFFschen Formulierung nicht mehr vorhanden, er muss also wegfallen, da diese exakt ist. Überhaupt ist der ganze GAUSSsche Ansatz weiter nichts als ein Versuch, der nicht zu Ende geführt wurde, weil andere Probleme die Zeit von GAUSS in Anspruch nahmen. —

1) S. z. B. DRUDE, *Lehrbuch der Optik*, 2. Aufl., S. 171.

Index.

ABBE, ERNST 165, 204
Abbildung, punktweise 202, 203
Aberration, sphärische 159, 166
— —, Minimum derselben 159
Ableitung des Uhrstandes 43
Absolute Bestimmung von H 18 ff.
Absolutes Mass, Bestimmung der Stromstärke 116
—, Bestimmung von Widerständen galvanischer Elemente 117
—, Bestimmung der Induktion 115
—, Erdmagnetismus 9 ff.
—, Messung galvanischer Ströme 115
—, Wechselwirkung zwischen galvanischen Strömen und Magneten 116
Achromasie 172, 202
—, zwei Bedingungen dafür 172, 202
Achromatisches Doppelobjektiv 152 ff.
Achse, magnetische 16
AIRY, G. B. 47, 50
Algorithmus, EULERscher 204
—, GAUSSscher 204
AMPÈRE, A. M. 6, 137 ff.
—, Elektrodynamisches Gesetz 6, 137 ff., 140, 151
—, Elementarfläche 142
—, Ersetzbarkeit von Strömen durch Magnete 137
AMPÈREsche Kräfte, virtuelle Arbeit derselben 144
ANGENHEISTER 91
Apertur von Kometensuchern 177
Äquivalente Flächenbelegung 89, 103
Aquivalenz von Strömen mit Magneten 117
Arbeitsteilung, Prinzip der 175
Astronomisches Massystem 116
Atlas des Erdmagnetismus 87, 89
Austrittspupille 177
Autokollimation 179

BACHE 67
Bahntelegraph, Leipzig-Dresden 123
Bau des Magnetischen Observatoriums 31 ff.
BAUER, L. A. 88
Beobachtungen, magnetischer Variationen in Göttingen und Leipzig 35
—, magnetisches Observatorium 33, 34
Beobachtungstermine, nach GAUSS 53
BEREK, M. 186
BERNOULLI, Daniel 96
BESSEL, F. W. 7, 189
BESSELsche Methode zur Bestimmung von Brennweiten 190
Bestimmung von Längenunterschieden 43
Beugungsapparat, SCHWERDscher 209
Beugungstheorie 209
Bewegung, induzierte 128
Bifilarmagnetometer 54 ff., 59, 61, 114, 133
Bildkonstruktion 201
BIOT 6, 13, 64, 101
BIOT-SAVARTsches Elementargesetz 6, 116, 143
BOHNENBERGER, 159, 160, 166, 179
BOHNENBERGERscher Kollimator 180
Brechung 193 ff.
Brennebene 181, 199
Brennpunkt 200
Brennweite 200
BREWSTERsches Gesetz 207

CHRISTIE 50
COLLADON 112
CORDIER 30
CORDIERsche Hypothese 30
COULOMB 11, 65, 148
—, Methode zur Bestimmung der Inklination 64 ff.
COULOMBsches Gesetz 11, 21
COULOMBsche Kraft 149

Dämpfer 70, 131 ff.
Dämpfung der Magnetnadel 131

Deklination, Variation derselben 15
Dialytisches Fernrohr 169, 173 ff.
Diffraktionsversuche 209
Dimensionen, Tabelle von GAUSS 116
Dioptrische Untersuchungen von GAUSS 171, 175, 189 ff.
Direktionskraft 17, 55
DIRICHLET, J. P. LEJEUNE 85
DIRICHLETsches Prinzip 102
Doppelobjektiv achromatisches 152 ff.
Doppelschicht, magnetische 137

Elektrische Feldstärke, Linienintegral derselben 145
Elektrisches Potential 108
Elektrizität, galvanische 112
—, Grundgesetze 149 ff.
—, statische 111
Elektrochemische Wirkung des Stromes 121
Elektrodynamik 127 ff.
—, GAUSSsche Versuche 103 ff.
Elektrodynamische Kräfte 140
— —, Ableitbarkeit aus einem Potential 143
Elektrodynamisches Potential 143, 145
Elektromagnetische Rotationsapparate 125
— Telegraphie 34, 106, 120, 135
Elektromagnetismus, Entdeckung durch OERSTEDT 6
—, GAUSSsche Versuche 34, 103 ff.
—, Grundgesetz desselben 139
Elektromotorische Kraft, galvanischer Elemente 104
Elementarfläche, AMPÈREsche 142
Elemente des Erdmagnetismus 86
Elliptische Sphäroide, Anziehung derselben 102
ENCKE, F. 7, 13
Erde als galvanisches Element 125
—, magnetische Pole 4
Erdinduktor 70, 134
Erdmagnetische Elemente, Variation 29
Erdmagnetische Kraft, Vertikalkomponente 17
Erdmagnetismus, allgemeine Theorie 10, 30, 44, 72 ff., 91, 137
Erdmagnetismus, Atlas 87, 89
—, GAUSS' Aufsatz 47
—, HANSTEENS Untersuchungen 5
—, Induktionswirkung 69
—, normaler, Sitz desselben 90
—, Ursache des normalen 80
—, Zurückführung auf absolutes Mass 9 ff.
Erzwungene Schwingungen 129 ff.
EULER, L. 157, 205
EULERscher Algorithmus 205

FARADAY, M. 6, 112, 127, 150, 151
—, Entdeckung der Induktion 6
Farbenzerstreuung, Aufhebung derselben 159 ff.
FECHNER, G. Th. 27, 104
Feldwirkung 150 ff.
Fernrohr, dialytisches 169, 173 ff., 201
—, Helligkeit desselben 176 ff.
—, Strahlengang in demselben 176, 180
—, Theorie 182, 201
—, Vergrösserung desselben 176, 179 ff., 182 ff., 201
Fernrohranalyse 174 ff.
Fernrohrobjektive, achromatisch korrigierte 152
—, sphärisch korrigierte 152
Fernwirkungsgesetze 148
Fernwirkungstheorie 150
FISCHER, Friedr. 129
Flächenbelegung, äquivalente 89, 103
FLINDERS 5
FORBES 67
Fortpflanzungsgeschwindigkeit, endliche 151
FRAUNHOFER, J. 163
FRAUNHOFERsche Objektive 165
FRESNEL, A. 209, 211
Fundamentalebene, GAUSSsche 142
Funkenerzeugung 133

Galvanische Elemente, Widerstand derselben in absolutem Mass 117
Galvanischer Strom 111
— —, Geschwindigkeit 109
— —, Grundgesetze 115
— — und Magnetismus, Wechselwirkung 116
— —, Zurückführung auf absolutes Mass 115
Galvanische Versuche, erste von GAUSS 31
Galvanismus, GAUSSsche Versuche 34, 103 ff.
Galvanometer 103
—, Theorie desselben 116
GAMBEY 45, 67
GAMBEYscher Apparat 45, 67
GAUSS, Abhandlung zur Potentialtheorie 14, 94
—, allgemeines Induktionsgesetz 145, 147
—, allgemeine Theorie des Erdmagnetismus 10, 30, 44, 72 ff., 91, 137
—, Aufsatz über »Erdmagnetismus und Magnetometer« 47
—, Aufzeichnungen über das OHMsche Gesetz 109
—, Beobachtungen der magnetischen Inklination 68
—, Beobachtungstermine 53
—, dioptrische Untersuchungen 171, 175, 189 ff.
—, Einleitung zur Eröffnung der Zeitschrift 52

GAUSS, elektromagnetischer Telegraph 34
—, Fundamentalebene 142
—, Grundgesetz 149
—, Integraltransformation 97
—, Komponenten des Vektorpotentials 139
—, Konstruktion eines Induktors 127
—, Konstruktion eines Kommutators 114
—, Messung der Horizontalintensität 21
—, Methode zur Bestimmung der Inklination 67
—, Methode zur Bestimmung der Vergrösserung eines Fernrohrs 178
—, Methode zur Bestimmung des magnetischen Moments 19
—, Methode zur Messung von Schwingungsdauern 62
—, Photometrie der Gestirne 186
—, Potentialtheorie 30, 94
—, QUETELETS Besuch 7
—, Tabelle der Dimensionen 116
—, telegraphische Versuche 134
— und ALEXANDER V. HUMBOLDT 6
— und WILHELM WEBER 9
—, Unterkorrektion von Objektiven 169
—, Verfahren zur experimentellen Bestimmung des Trägheitsmomentes 19
—, Versuche über Elektrodynamik 103 ff.
—, Versuche über Elektromagnetismus 34, 103 ff.
—, Versuche über Galvanismus 34, 103 ff.
—, Versuche über Induktion 34, 103 ff.
GAUSSsche Objektive 162 ff.
GAUSSscher Algorithmus 204
GAUSSscher Satz 97, 98
GAUSSsches Grundgesetz 150
GAUSSsches Okular 179
GERLING 7, 26, 187
—, Nordlichtbeobachtung 8
Geschlossene Ströme 117, 140
Geschlossener magnetischer Kreis 126
Geschwindigkeit der Fortpflanzung von elektrischen Strömen 109
Gesetz der galvanischen Kette 6
GRASSMANNsches Elementargesetz 140, 143
GREEN, G. 6, 95, 102, 103
GREENsche Abhandlung über Potentialtheorie 6, 95
GREENsche Sätze 97, 98
Gründung einer Zeitschrift 48

H, absolute Bestimmung von 18
HANSEN, C. A. 174
HANSTEEN, CH. 5, 38, 66, 72
—, Untersuchungen über den Magnetismus der Erde 5
HARDING, C. L. 4, 8
Hauptebene 195 ff.
Hauptlage, erste 20
Hauptlage, zweite 20
Hauptpunkt 195
—, experimentelle Bestimmung 201
Hauptstrahlen 206
Helligkeit eines Fernrohrs 176
HELMHOLTZ, H. v. 120, 140
—, allgemeinste Form des Elementargesetzes 148
Heterochromatische Photometrie 187
Horizontalintensität, GAUSS' Messung derselben 21
—, absolute Einheit 10
—, zahlenmässige Ergebnisse der absoluten Werte 27
Horizontalkomponente, Beschränkung auf dieselbe 44
Horizontalvariometer 60
HUMBOLDT, ALEXANDER V. 4, 6, 34, 49, 64, 84
— —, Einfluss auf GAUSS 6 ff.
—, WILHELM V. 6
HUYGENS-FRESNELsches Prinzip 209 ff.
Hydrogalvanischer Strom 125

JACOBI, M. 125
Induktion, Entdeckung derselben 6
—, GAUSS' Versuche 34, 103 ff., 127 ff.
—, Grundgesetze 115, 145 ff.
Induktionsinklinatorium, WEBERsches 70
Induktionswirkung des Erdmagnetismus 69
Induktor 70, 127
Induzierte Bewegung 128
Inklination, COULOMBsche Methode zur Bestimmung derselben 64
—, Untersuchung mit Hilfe von Induktionsströmen 134
—, Variation derselben 71
Inklinationsbeobachtungen 68
Inklinationsmessungen 62 ff., 67, 96
Inklinatorium, ROBINSONsches 67
—, Theorie des Instrumentes 68
Inkonstanz der elektromotorischen Kraft 104
Integraltransformation, GAUSSsche 97
Integration, partielle 98
Intensitas vis magneticae terrestris 11
Intensität im Okularkreis 181
Intensität in der Brennebene 181
Intensitätsvariation, Messung derselben 15, 54
JOULEsche Wärme 109

KIRCHHOFF, GUSTAV 108, 211
KIRCHHOFFsche Sätze 108
KLÜGEL, G. S. 152

Knotenpunkte 202
Koerzitivkraft 14
Kollimator, BOHNENBERGERscher 180
Kollineare Verwandtschaft 202
Kollineation 203
Kometensucher, Apertur desselben 177
Kommutator 105, 107, 114
Komplexe Grössen 141
Konjugierte Ebenen 195
— Geraden 195
— Punkte 195
Kontaktelektrizität 118
Körper, magnetisch harter 14
Kraft, elektromotorische 104
—, magnetische, Komponenten derselben 83
Kraftfluss 96
KRÜSS, H. 165
Kugelfläche, Ersetzung eines zentrierten Systems durch eine 195
Kugelfunktionen 80 ff.
Kupferdämpfer 131, 133

LAMBERT 187
LAMONT 28, 53
Längenunterschiede, Bestimmung derselben 43
LAPLACEsche Funktionen 81
Lateralvergrösserung 195
Leiter, körperlicher, Stromausbreitung in demselben 125
Leitvermögen der Erde 124
LENZsche Regel 147
Leuchtender Punkt, Wirkung desselben 209
Lichtstärke eines Fernrohrs 177 ff.
LISTING, B. 39, 66
LITTROW 170, 181
LLOYD 60
Logarithmisches Dekrement, Bestimmung desselben 127
LUMMER, O. 165
Lupe, Leistung derselben 185

Magnetelektrische Maschinen 125 ff., 134
Magnetische Achse 16, 87
Magnetische Doppelschicht 137
Magnetische Flüssigkeit 12
Magnetische Kraft, Komponenten derselben 83
— —, Temperaturabhängigkeit derselben 15, 29, 60
Magnetische Menge, Begriff derselben 13
Magnetische Pole der Erde 4, 77
— — Festlegung derselben 87
Magnetische Variation, Beobachtungen in Göttingen und Leipzig 35
Magnetischer Kreis, geschlossener 126
— Südpol 87
— Verein 31 ff., 46, 47, 49
Magnetisches Moment 15, 18, 87
— — der Erde 87 [19
— —, GAUSSsche Methode zur Bestimmung desselben
— Observatorium, Bau desselben 31 ff.
— —, Beobachtungen in demselben 33 ff.
— —, innere Einrichtung desselben 32
— Potential der Erde 75, 103
— — eines Stromes 139
— — einer Schale 137
Magnetische Termine 33 ff.
— —, Abänderung derselben 45
Magnetisch harte Körper 14
Magnetisierung der Erde, Stärke derselben 87
Magnetisierungsmethoden 29
Magnetismus und galvanische Ströme, Wechselwirkung 116
Magnetnadel, Bestimmung der Schwingungsdauer der- [selben 8
—, Dämpfung derselben 131
Magnetometer, GAUSS' Aufsatz über 47
Magnetomotorische Kraft 139
MALUS 207
MALUSsche Versuche über Polarisation des Lichtes 207
MAXWELL, J. C. 140, 150 ff., 204
MAYER, TOBIAS 4, 8, 74
Meridianunterschied, Ableitung desselben 41
MERZ 180, 181
Mikrophon 118
Minimalprinzip 109
Minimum der Stromwärme 109
MÖBIUS, A. F. 202, 203
Molekularkräfte 119
Moment, magnetisches 15, 18, 19, 87
MOSER, LUDWIG 25, 26
Multiplikationsmethode 115, 133
Multiplikator 70, 103, 105
MUNCKE 136, 181

Nahewirkung 151
Naturforscherversammlung zu Berlin 1828 7
NEUMANN, FRANZ 145, 147
NEUMANNsches Potentialgesetz 145, 147
NEUMANN, KARL 150
NEWTON, I. 148
Niveauflächen 75, 103
Nordlichtbeobachtung von GERLING 8

Objektive, FRAUNHOFERsche 165
—, GAUSSsche 162 ff.
Observatorium, magnetisches 31 ff.
OERSTEDT 6, 38
—, Entdeckung des Elektromagnetismus 6
Öffnungsstrahl 206
OHM, G. S. 6
OHMsches Gesetz der galvanischen Kette 6, 113
— —, GAUSS' Aufzeichnungen über dasselbe 109
— —, Prüfung desselben 107, 127
Okular, GAUSSsches 179
Okularkreis 177, 201
—, Intensität in demselben 181
OLBERS, W. 3, 4, 26 [162
Optik, analytische, Lehrbuch von JOH. C. ED. SCHMIDT

Parachsialstrahlen 202
Partielle Integration 98
PASCHEN, H. C. 183, 185
Photometrie der Gestirne, GAUSSsche Methode 186
—, heterochromatische 187
PIPER 182
PLÖSSL 169, 171, 176
POISSON, S. D. 23, 24, 99, 100
POISSONsche Gleichung 152
— Methode 23, 25
Pol, Begriff desselben 13, 78, 101
Polarisation des Lichtes, MALUSsche Versuche 207
Pole, magnetische der Erde 4, 77
—, —, Festlegung derselben 87
POND 47
Ponderomotorische Kraft 140 ff.
Potential 95
—, eindeutiges 77
—, elektrisches 108
—, elektrodynamisches 145
—, konstantes 176
—, magnetisches der Erde 75
—, —, einer Schale 137
—, —, eines Stromes 139
—, Wellengleichung für dasselbe 152
Potentialfunktion, GREENsche 95
Potentialgesetz, NEUMANNsches 145, 147
Potentialtheorie 72 ff., 94
—, GAUSSsche Abhandlung zu derselben 14, 30, 94
—, GREENsche 6, 95
Punktweise Abbildung 202
Pyrometrie 114

QUETELET 7
—, Besuch bei GAUSS 7

Räumlicher Winkel 137
— — als Doppelintegral 138
— — in rechtwinkligen Koordinaten 137
REPSOLD, JOHANN GEORG 38, 104, 152
Resonanz 130
REUSS 5
RIEMANN, B. 102, 152
RIESS, PETER 25, 26
ROBINSONsches Inklinatorium 67
ROGERS 176, 174
ROSS 87
Rotationsapparate, elektromagnetische 125
Rotationskommutator 107
Royal Society 49, 50
— —, Beteiligung an Beobachtungen 50 ff.

SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN 9, 40, 66, 172
SAVART 6, 116, 143
SCHMIDT, JOH. C. ED. 162, 169
— —, Lehrbuch der analytischen Optik 162, 169
SCHRÖDINGER, E. 188
SCHUEBLER, GUSTAV 4
SCHUMACHER, H. C. 10, 25
—, Jahrbuch 47
SCHWERD, F. M. 209
SCHWERDscher Beugungsapparat 209
Schwingungen, erzwungene 129 ff.
Schwingungsdauer einer Magnetnadel 8, 62
SEIDEL, L. 206
Signalisierung, telegraphische 106
SNOW, HARRIS 60
SOUTH, JAMES 104
Spannungsreihe, VOLTAsche 118
Sphärische Aberration 158, 166
Sphäroide, elliptische 102
STÄCKEL, P. 96
STEINHEIL, C. A. 123, 131, 163, 189
—, Entdeckung des Leitvermögens der Erde 123
STEINHEILsches Photometer 189
Sternphotometer 188
Sternphotometrie 187
Stigmatische Abbildung 203
Strahlengang eines Fernrohrs 176, 180
Stromausbreitung in körperlichen Leitern 125
Stromstärke 104, 116
Stromverteilung 107
Stromverzweigung 108, 109
Stromwärme 109
SUSSEX, HERZOG VON 49
Südpol, magnetischer 87

Telegraph, elektromagnetischer 34, 106, 120, 134, 135
Telegraphie, praktische Verwendungsmöglichkeit 123
Telegraphische Signalisierung 106
Telegraphischer Schlüssel 120
Teleskopisches System 200, 201
Temperaturabhängigkeit magnetischer Kräfte 15, 29,
Terminsbeobachtungen, magnetische 33, 34, 62 [60
— —, Abänderung derselben 45
Thermoelektrizität 113
—, Anwendung auf die Pyrometrie 114
Thermogalvanismus 114
Topographie des Feldes 103
Trägheitsmoment 19
Trikomplexe Grössen 143, 149

Uhrstand, Ableitung desselben 43
Umschlingungen zweier geschlossener Kurven 139
Ungeschlossene Ströme 140, 148
Unterkorrektion von Objektiven nach GAUSS 169

Variation der Deklination 15
— der Inklination 71
— der Intensität 15, 54
Vektor, dreidimensionaler 143
Vektorfluss 96
Vektorpotential 139
Vergrösserung eines Fernrohrs 167, 179 ff., 201
— — — für kurzsichtige Augen 182
— — — für normale Augen 182
— — —, Bestimmung derselben nach GAUSS 178
— — —, Normalwert derselben 185
Vertikalkomponente der erdmagnetischen Kraft 17
Virtuelle Arbeit der AMPÈREschen Kräfte 144
VOLTAscher Fundamentalsatz 119
VOLTAsche Spannungsreihe 118

WEBER, WILHELM 6, 27, 39, 61, 104, 105, 118, 150, 163
—, Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur 60
—, Amtsantritt in Göttingen als Nachfolger von TOBIAS MAYER 8
—, Beschreibung der inneren Einrichtung des magnetischen Observatoriums 32
—, Einfluss auf GAUSS 9
—, Induktionsinklinatorium 70
—, Multiplikationsmethode 115
WEBERsches Elementargesetz 149, 150
WEBERsche Zurückwerfungsmethode 115
Wechselwirkung zwischen galvanischen Strömen und Magneten 116
Wellengleichung für das Potential 152
WHEATSTONE, CHARLES 110
Widerstand galvanischer Elemente 117
— pulverisierter Kohle 118
WILKES, Festlegung des magnetisches Südpols 87

Zeitschrift: Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins 48, 49, 52
Zentralstrahlen 191, 202
Zentriertes System 190, 193 ff.
Zurückwerfungsmethode 115, 133

CARL FRIEDRICH GAUSS
WERKE

HERAUSGEGEBEN VON DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

Band

I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck. 478 Seiten. 1870. Kart. RM 48.—

II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 528 Seiten. 1876. Kart. RM 53.—

NACHTRAG zum ersten Abdruck des zweiten Bandes. Seite 495—528. 1876. Kart. RM 3.80

III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 499 Seiten. 1876. Kart. RM 56.—

IV. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 492 Seiten. 1880. Kart. RM 50.—

V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 642 Seiten. 1877. Kart. RM 64.—

VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN UND AUFSÄTZE. 664 Seiten. 1874. Kart. RM 69.—

VII. THEORIA MOTUS UND THEORETISCH-ASTRONOMISCHER NACHLASS. (Parabolische Bewegung, Storungen der Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes). 650 S. 1906. Kart. RM 65.—

VIII. ARITHMETIK, ANALYSIS, WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG, GEOMETRIE. (Nachtrage zu Band I—IV.) 458 Seiten. 1900. Kart. RM 46.—

IX. GEODÄSIE. (Fortsetzung von Band IV.) 528 Seiten. 1903. Kart. RM 53.—

X. Abteilung 1. NACHLASS UND BRIEFWECHSEL ZUR REINEN MATHEMATIK. (Nachträge zu Band I—IV und VIII.) TAGEBUCH. 586 Seiten. 1917. Kart. RM 59.—

NACHBILDUNG DES TAGEBUCHS (Notizenjournals) 1796—1814. RM 1.20

XI. Abteilung 1. NACHTRÄGE ZUR PHYSIK, CHRONOLOGIE UND ASTRONOMIE. (Nachtrage zu Band V—VII.) 518 Seiten. 1927. Brosch. RM 47. —. Kart. RM 48.—

XII. VARIA UND ATLAS DES ERDMAGNETISMUS. 415 Seiten, 5 Zahlentafeln und 19 Karten. 1929. Brosch. RM 49.—. Kart. RM 50.—

X. Abteilung 2. ABHANDLUNGEN ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER REINEN MATHEMATIK.

Abhandlung 1 und 5: ÜBER GAUSS' ZAHLENTHEORETISCHE ARBEITEN. Von PAUL BACHMANN. — GAUSS UND DIE VARIATIONSRECHNUNG. Von OSCAR BOLZA. 75 + 95 Seiten. 1922. RM 17.—

Abhandlung 4: GAUSS ALS GEOMETER. Von PAUL STAECKEL. 123 Seiten. 1923. RM 12.50

Abhandlung 6: GAUSS ALS ZAHLENRECHNER. Von PHILIPP MAENNCHEN. Etwa 60 Seiten. Unter der Presse.

Abhandlungen 2 und 3 in Vorbereitung.

XI. Abteilung 2. ABHANDLUNGEN ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER ANGEWANDTEN MATHEMATIK (Geodäsie, Physik und Astronomie).

Abhandlung 1: ÜBER DIE GEODÄTISCHEN ARBEITEN VON GAUSS. Von A. GALLE. 165 Seiten. 1924. RM 17.—

Abhandlung 2: ÜBER GAUSS' PHYSIKALISCHE ARBEITEN. Von CLEMENS SCHAEFER. 217 Seiten. 1929.

Abhandlung 3: ÜBER DIE ASTRONOMISCHEN ARBEITEN VON GAUSS. Von MARTIN BRENDEL. Etwa 300 Seiten. Unter der Presse.

Die Bände X, 2 und XI, 2 bestehen aus einzelnen Abhandlungen (Essays), die besonders paginiert sind und in der Reihenfolge ihrer Fertigstellung auch gesondert ausgegeben werden. Mit der letzten Abhandlung eines jeden Bandes wird Titelblatt und Inhaltsverzeichnis geliefert.

Supplementband. REGISTER. BESCHREIBUNG DES NACHLASSES. BIOGRAPHISCHES. In Vorbereitung.

GÖTTINGEN, GEDRUCKT IN DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER).

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ELFTEN BANDES ZWEITE ABTEILUNG

ABHANDLUNG 3

HERAUSGEGEBEN

VON DER

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN

1929

ÜBER DIE ASTRONOMISCHEN ARBEITEN VON GAUSS

VON

MARTIN BRENDEL

Erster Abschnitt.

Praktische und sphärische Astronomie.

Einleitung.

Aus den Gebieten der praktischen und der sphärischen Astronomie hat Gauss keine so umfassenden Werke veröffentlicht wie auf anderen Gebieten. Er hat ausser den beiden im Jahre 1808 erschienenen Abhandlungen »*Methodus peculiaris elevationem poli determinandi*«[1]) und »*Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie*«[2]) eine Reihe von Hilfstafeln herausgegeben, nämlich »*Allgemeine Tafeln für Aberration und Nutation*« (1808)[3]), *Tafeln für die Mittags-Verbesserung*« (1811)[4]), »*Tafel für die Sonnen-Coordinaten*« (1812)[5]), *Refractionstafeln* (1822)[6]). Hierzu gesellen sich viele kleinere Aufsätze und Mitteilungen, sowie Beobachtungen und Berechnungen von Planeten, Kometen, Sternbedeckungen u. a. m.

Fertig durchgeführte Untersuchungen mit seinen Fundamentalinstrumenten, im besonderen dem Reichenbachschen Borda-Kreise, dem Repsoldschen Meridiankreise, dem Reichenbachschen Passageninstrument und dem Reichenbachschen Meridiankreise, wie er sie anfangs geplant hatte, besitzen wir nicht, wohl aber sehr eingehende Beschreibungen dieser Instrumente und Berichte über die bei ihnen angewandten Beobachtungsmethoden[7]). Dass die Unter-

1) Werke VI, S. 37—49.

2) Ebendort, S. 129—140.

3) Ebendort, S. 123—128.

4) Ebendort, S. 166—171.

5) Ebendort, S. 172—180.

6) Ebendort, S. 185—190.

7) Vergl. insbesondere Werke VI, S. 404 (Bordaischer Kreis), S. 410 (Repsoldscher Meridiankreis), S. 422 f. (Reichenbachsches Passageninstrument), S. 429 f. (Reichenbachscher Meridiankreis), S. 472 (Nadirbeobachtungen).

suchungen nicht zum Abschluss gelangten, erklärt sich aus der vielseitigen und häufig zersplitterten Tätigkeit nach Übernahme der Leitung der Göttinger Sternwarte, über die GAUSS selbst so häufig klagte und die so viele seiner wissenschaftlichen Pläne nicht zur Durchführung gelangen liess.

Man wird den Wert der GAUSSschen Arbeiten besonders auf diesen Gebieten nach dem bekannten von ihm selbst aufgestellten Grundsatz »Pauca sed matura« nicht nach der absoluten Anzahl der veröffentlichten Beobachtungen einschätzen. Wie überall, so sehen wir auch hier den Schöpfer neuer Methoden, ebenso wie den tiefeindringenden Kritiker, der allem die grösstmögliche Schärfe und Vollendung zu geben bestrebt ist.

Die Anzahl der tatsächlich von GAUSS angestellten Beobachtungen ist keineswegs gering; sie dienten aber in erster Linie den genannten Zwecken, neue Methoden zu schaffen und grösste Schärfe zu erreichen, und sind zum weitaus grössten Teile nicht zur Veröffentlichung gelangt. Er traf hier mit BESSEL zusammen. In jener Zeit, wo sich das Bedürfnis nach Fundamentalbeobachtungen zur genaueren Bestimmung der Konstanten der Präzession, Nutation, Aberration und anderer Grössen stark fühlbar machte, setzte man grosse Hoffnungen auf die gleichzeitigen Arbeiten von GAUSS und BESSEL. Der letztere hatte in seiner Bearbeitung der BRADLEYschen Beobachtungen zuerst gezeigt, wie die astronomische Beobachtungskunst verfeinert und vervollkommnet werden könne, und man sah besonders im Zusammentreffen beider Gelehrten eine neue Zeit für die beobachtende Astronomie herannahen. Indessen blieb es doch BESSEL fast allein vorbehalten, die Grundlagen für eine auf höherer Stufe stehende Beobachtungskunst zu schaffen. GAUSS' Teilnahme daran wurde kurz nach ihrem Beginn durch die Übernahme anderer grosser Arbeiten fast plötzlich abgebrochen und seine nicht unbeträchtlichen bis dahin geleisteten Beiträge gelangten nicht zur Weiterführung und noch weniger zur Veröffentlichung. Ein Teil dieser von GAUSS angestellten Beobachtungen ist aus dem Nachlass im Band XI, 1 der Werke abgedruckt. Andererseits liegt der Schwerpunkt von GAUSS' praktischer und Beobachtungstätigkeit nicht auf astronomischem, sondern auf verwandten Gebieten; man braucht nur an seine dioptrischen Untersuchungen, an die Erfindung des Heliotrops, an seine ausgedehnten geodätischen Messungen und seine magnetischen Untersuchungen und Beobachtungen zu denken. Es darf nicht verwundern, dass praktische Beschäftigungen dieser Art, durch

die der Wissenschaft neue Wege eröffnet wurden, mehr Anziehungskraft auf ihn ausübten als das Sammeln langer Beobachtungsreihen; auch blieb bei der gewaltigen Fruchtbarkeit an neuen Gedanken für dieses Sammeln keine Gelegenheit übrig. Dass GAUSS an sich vor langen mühsamen praktischen Arbeiten nicht zurückschreckte, wird schon dadurch bewiesen, dass er einen fast zu grossen Teil seiner Zeit auf die Ausgleichungen zur Hannoverschen Landesvermessung, auf die Prüfung der Hannoverschen Normalmasse und -gewichte und andere ähnliche Aufgaben verwandte.

Man wird nach dem Grunde fragen, warum GAUSS, dessen Hauptneigung doch zunächst den tiefsten Problemen der reinen Mathematik galt, schliesslich in seiner öffentlichen Stellung Astronom geworden ist. Die Antwort wird in Anbetracht der äusseren Umstände nicht eben schwer fallen. Er war mittellos und musste an die Zukunft denken. Dem reinen Mathematiker stand nur der Beruf eines Lehrers entweder an der Schule oder an der Universität offen, und es ist sehr bekannt, dass GAUSS von Jugend auf bis in sein hohes Alter einen Widerwillen gegen das Unterrichten empfand, den er nicht überwinden konnte, und den zu verbergen er sich niemals Mühe gegeben hat. Als er die Universität Göttingen im Herbst 1795 bezog, soll er noch unschlüssig gewesen sein, ob er Philologie oder Mathematik studieren solle. Wenn er auch als Schüler schon eine hohe Begabung beim Studium der alten Sprachen zeigte und sich sein ganzes Leben lang gern mit den lebenden Sprachen beschäftigte, so darf man doch wohl annehmen, dass der Gedanke, Philologie zu studieren, nur mit Rücksicht auf seine spätere Versorgung von ihm gefasst worden war. Sicher dachte er daran, sich eine auskömmliche Lebensstellung zu verschaffen, in der er auch seine mathematischen Untersuchungen entsprechend seinen Neigungen ausführen konnte. Nun führte ihn die Mathematik an sich zu den angewandten Gebieten, im besonderen zur Astronomie, und es mag damals die Aussicht auf ein Vorwärtskommen als Astronom, ohne gleichzeitig unterrichten zu müssen, nicht ungünstig gewesen sein.

In dem Briefwechsel mit v. ZACH[1]) aus GAUSS' Braunschweiger Zeit[2]) 1799

1) FRANZ XAVER FREIHERR v. ZACH, der bekannte und einflussreiche Direktor der Seeberger Sternwarte, Herausgeber der Allgemeinen Geographischen Ephemeriden, der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde und der Correspondance astronomique. — Von dem Briefwechsel sind nur die Briefe von ZACH an GAUSS im GAUSSarchiv erhalten.

2) Siehe weiter unten, im besonderen S. 15.

bis 1804 und in gleichzeitigen Briefen an OLBERS spiegeln sich die Überlegungen und Gedanken über die Ergreifung der astronomischen Laufbahn deutlich wieder, bis durch GAUSS' Berufung nach Göttingen 1807 die Entscheidung fiel. Dass er so die Leitung einer Sternwarte übernahm, bei der er doch nicht ganz frei davon war, unterrichten zu müssen, brachten die Umstände mit sich.

Es waren, besonders in GAUSS' späterem Alter, freilich nicht die Unterrichtspflichten allein, die ihm die Musse zum wissenschaftlichen Arbeiten raubten, obwohl er sich über diese Pflichten ständig beklagte. Vielmehr wurde seine Zeit eben durch die oben erwähnten anderen Beschäftigungen in Anspruch genommen, die freilich wegen ihrer wissenschaftlichen Eigenart für ihn anziehender waren als das Abhalten elementarer Vorlesungen. Durch die Briefwechsel mit OLBERS, BESSEL und SCHUMACHER ziehen sich häufige Klagen über die Art seiner Beschäftigung und über die Last der ihm auferlegten Geschäfte.

Die mehrfach an ihn herangetretenen Anerbietungen, im besonderen aus Petersburg 1802—1804, aus Hamburg 1821 und aus Berlin 1822—1825, betrachtete er wohl immer aus dem Gesichtspunkt, möglichste Freiheit für wissenschaftliche Arbeiten zu erlangen. Noch in späterer Zeit[1]) klagt der 62jährige über die Beschränkung seiner Zeit, die ihn fast garnicht an wissenschaftliche Arbeiten denken lässt. Es finden sich auch Andeutungen[2]), dass er, allerdings wohl hauptsächlich durch die Amtsentsetzung der Göttinger sieben Professoren und den bevorstehenden Fortgang WILHELM WEBERS veranlasst, mit dem Gedanken umging, »für den letzten Teil seines Lebens eine unabhängige Stellung zu suchen und zu dem Zweck seinen Aufenthalt in einem Lande zu nehmen, wo man dieselbe mit mässigen Vermögensmitteln behaupten kann.« Zeitungsnotizen hatten berichtet, dass GAUSS beabsichtige, nach Paris überzusiedeln; indessen war das Gerücht nur daraus entstanden, dass er einen vorübergehenden Aufenthalt dort plante[3]).

Im Rahmen dieses Aufsatzes ergeben sich mehrere Perioden von GAUSS'

1) Brief an OLBERS vom 14. Mai 1839.

2) Brief an OLBERS vom 16. Januar 1838.

3) Vergl. den Brief von OLBERS an GAUSS vom 8. Januar 1838 und den vorerwähnten, sowie den an OLBERS vom 4. März 1838.

praktisch-astronomischer Tätigkeit, die sich freilich nicht immer scharf von einander scheiden lassen.

1. Braunschweiger Periode bis zur Übersiedelung nach Göttingen (1807); einzelne Beobachtungen von Planeten, Kometen u. a.

2. Göttinger Periode bis zum Eintreffen des REICHENBACHschen BORDAkreises (1813); Beobachtungen am Mauerquadranten und Kreismikrometerbeobachtungen auf der alten Sternwarte.

3. Beobachtungen mit dem BORDAkreise bis zur Fertigstellung der neuen Sternwarte (1813—1816); Untersuchungen über die Polhöhe und über die Schiefe der Ekliptik; erste Beobachtungen mit dem Heliometer.

4. Beobachtungen auf der neuen Sternwarte, insbesondere Fortsetzung der Beobachtungen mit dem BORDAkreise bis zum Eintreffen des REPSOLDschen Meridiankreises (1817—1818).

5. Beobachtungen am REPSOLDschen Kreise bis zum Eintreffen des REICHENBACHschen Passageninstruments und des REICHENBACHschen Meridiankreises (1818).

6. Untersuchungen mit den REICHENBACHschen Instrumenten; Beobachtungen von Fundamentalsternen u. a. (1818—1820).

7. Periode mit geringerer astronomischer Tätigkeit; Hannoversche Landesvermessung, erdmagnetische und andere physikalische Untersuchungen (seit 1820).

---

1. Die Braunschweiger Periode (bis 1807).

Während seiner Göttinger Studienzeit (1795—1798) begann GAUSS sich mit dem Studium der Astronomie zu beschäftigen, wozu er bei SEYFFER Vorlesungen gehört zu haben scheint; die mathematischen Vorlesungen von KÄSTNER zogen ihn wenig an, und wenn auch SEYFFER ihm hierfür keinen Ersatz bieten konnte, so trat er doch mit diesem in engere persönliche Beziehung[1]). In dem Briefe an OLBERS vom 18. November 1802 schreibt er:

1) In dem Briefwechsel zwischen GAUSS und WOLFGANG BOLYAI aus der Zeit (1798—1799), als GAUSS bereits wieder in Braunschweig, BOLYAI aber noch in Göttingen war, kehrt der Name SEYFFERS öfter wieder, teils indem BOLYAI an GAUSS über ihn berichtet, teils dadurch, dass GAUSS Grüsse an SEYFFER bestellen lässt. So heisst es z. B. in einem Briefe von GAUSS an BOLYAI vom 22. April 1799 (*Briefwechsel Gauss-Bolyai*, Leipzig 1899, S. 22): »Einliegenden Brief (er ist bloss astronomischen Inhalts) wirst Du die Güte haben, an Hrn. SEYFFER zu besorgen und mich ihm zu empfehlen«.

»Mündliche Anweisung zum Beobachten habe ich bisher gar keine gehabt, obgleich Herr SEYFFER mich einmal seinen Schüler genannt hat; alle meine bisherigen Übungen schränken sich auf einige Beobachtungen am Mauerquadranten und mit dem Spiegelsextanten ein. Mein Gesicht ist ziemlich scharf, aber sehr kurzsichtig.« Dass GAUSS in Göttingen sich an astronomischen Beobachtungen beteiligte, geht auch aus einem Brief an ZIMMERMANN vom 24. Dezember 1797, der sich nebst anderen Briefen im Braunschweiger Landeshauptarchiv befindet, hervor, in dem er sagt, dass er in Folge einer Erkrankung die Beobachtung der letzten Mondfinsternis habe versäumen müssen. Aus den Akten der Göttinger Universitäts-Bibliothek hat sich, wenigstens teilweise, feststellen lassen, welche Bücher er während seiner Studienzeit aus der Bibliothek entliehen hat. Darunter befinden sich ausser verschiedenen akademischen Schriften:

LALANDE, *Astronomie* (im November 1795);
SÉJOUR, *Traité analytique des mouvements célestes*;
Sammlung astronomischer Tafeln der Berliner Akademie;
HELL, *Ephemeriden für 1796*;
COUSIN, *Introduction à l'Astronomie physique*;
Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1788—89, 1791—94, 1799.

In den Jahren 1798—1801 unternahm der Kgl. Preuss. Oberst und Generalquartiermeister bei der Neutralitätsarmee von LECOQ eine trigonometrische Aufnahme in Westfalen, über die er in der Monatlichen Correspondenz[1]) berichtet. Er sagt dort (Seite 139): »Im astronomischen Teil ist mir der Dr. GAUSS von grossem Nutzen gewesen. Seine Ausrechnungen und Briefe haben zu meinem Unterricht viel beigetragen und ich zolle ihm gern hier meinen Dank[2]).« LECOQ hat sich auf ZACHS Rat vornehmlich des Spiegelsextanten bedient und

1) M. C. VIII (1803), Seite 136 ff. und ebendort an anderen Stellen.

2) Von den Briefen von GAUSS an LECOQ haben sich bisher vier auffinden lassen, nämlich
Brief vom 17. April 1799 (Autographensammlung DARMSTÄDTER der Staatsbibliothek in Berlin)
Brief vom 24.—27. April 1799 (Professor Dr. STEINACKER, Braunschweig)
Brief vom 4. September 1800 (Reichsamt für Landesaufnahme)
Brief vom 25. September 1800 (Reichsamt für Landesaufnahme).
Von diesen befinden sich photographische Nachbildungen im GAUSSarchiv; der erste ist Werke X, 1, Seite 540, 541 im Auszug wiedergegeben. Die Briefe von LECOQ an GAUSS sind im GAUSSarchiv vorhanden und scheinen vollständig zu sein.

damit ausser den Dreieckswinkeln auch die Polhöhe mehrerer Orte astronomisch bestimmt, sowie einige Monddistanzen und Sternbedeckungen zur Bestimmung von Längendifferenzen beobachtet[1]). Im Dezember 1798 beobachtete er in Braunschweig, »mehr um Gelegenheit zu haben, sich in diesen Berechnungen zu üben, als in der Meinung, Braunschweig besser zu bestimmen als es schon ist«, wie er an GAUSS am 3. Februar 1799 aus Minden schrieb. Bei dieser Gelegenheit wurde er wahrscheinlich durch ZIMMERMANN mit GAUSS bekannt gemacht, von dem er sich in manchen Fragen helfen und raten liess. Auch schrieb GAUSS an SEYFFER, um sich die nötigen Daten aus dem Nautical Almanach zur Berechnung der LECOQschen Beobachtungen schicken zu lassen und vermittelte so die Verbindung zwischen LECOQ und Jenem. SEYFFER beteiligte sich ebenfalls an den Berechnungen und zog seine Göttinger Beobachtungen von Sternbedeckungen zu den Längenbestimmungen hinzu. Da GAUSS versprochen hatte, LECOQ bei den weiteren Berechnungen der Beobachtungen zu helfen, so fand er hier Gelegenheit, mit der praktischen Astronomie, wenn auch nur mit elementaren Aufgaben, in Verbindung zu bleiben, ohne jedoch selbst beobachten zu können, da er keine Instrumente hatte. Er fand hierbei Gelegenheit, sich die strengen Formeln für die Mondparallaxe abzuleiten, die er in der Tagebuchnotiz Nr. 97 (vergl. Werke XI, 1, S. 539) erwähnt.

LECOQ scheint es gewesen zu sein, der GAUSS' Bekanntschaft mit ZACH vermittelte. Er schreibt an GAUSS am 13. April 1799: »sowohl für Euer Wohlgeboren als für den Herrn v. ZACH freut es mich, dass ich etwas beigetragen habe, Ihre Bekanntschaft zu befördern. Hätten Sie nur einen guten Sextanten und eine Pendeluhr, so würden Sie in Braunschweig Beobachtungen machen können, da meines Wissens ein schönes Teleskop auf dem Carolino vorhanden ist, mit dem Sie den Übergang des Merkur beobachten könnten« (vergl. unten Seite 31).

Am 29. April 1799 schreibt LECOQ sodann an GAUSS: »Ich freue mich, dass Sie den Vorsatz gefasst und dazu die Erlaubnis Ihres Landesherrn schon haben, nach Gotha zu reisen«. GAUSS hatte in dieser Zeit bei ZACH ange-

1) Vergl. v. ZACH, *Allgemeine Geographische Ephemeriden*, Band III (1799), Seite 201 f., an welcher Stelle LECOQ in einem Briefe aus Braunschweig über seine ersten Beobachtungen mit dem Sextanten an ZACH berichtet; diese betrafen die Bestimmung der Polhohe von Minden.

fragt, ob er bei ihm sich in der praktischen Astronomie üben könne, und LECOQ scheint sich auch hierin, wie aus seinen Briefen an GAUSS hervorgeht, bei ZACH für ihn verwandt zu haben. GAUSS wartete lange auf Antwort von ZACH[1]); endlich am 24. September 1799 antwortete dieser:

»Recht inständigst muss ich Ew. Wohlgebohren um Vergebung bitten, dass ich auf mehrere Ihrer verehrtesten Briefe nicht geantwortet und für die mir gütigst kommunizierten Schriften meinen ergebensten Dank nicht abgestattet habe. Allein wenn Sie, bester Herr Doktor, meine Lage kennten, gewiss, Sie würden mir mehr als verzeihen, — mich recht sehr beklagen —. Meine ganz zerrüttete und zerstörte Gesundheit, die ich seit meiner letzten schweren Krankheit nicht wieder hergestellt habe, der Umstand, dass ich Ihnen eine weitläufige detaillierte Antwort auf alle Ihre Briefe schreiben wollte, waren die Ursachen, dass ich dieses von einem Tag zum anderen verschob. Notgedrungen kann ich jetzo nur in Eile die Ehre haben, Ihnen auf den vorzüglichsten Punkt Ihres Schreibens zu antworten. — Es tut mir herzlich leid, dass ich Ewr. Wohlgeboren erklären muss, dass ich aus mehr als einer Ursache, welche alle herzusetzen zu weitläufig wäre, Ihrem Gesuche, sich bei mir auf der Seeberger Sternwarte aufzuhalten, unmöglich willfahren kann. Ich kann und darf künftighin niemanden mehr zu mir auf die Sternwarte nehmen. Teils erlaubt mir meine stets kränkelnde Gesundheit diese Unbequemlichkeit nicht mehr; ich habe sie mehrere Jahre lang nur zu sehr und zu drückend gefühlt; meine Denkungsart erlaubt mir nicht, Kostgänger bei mir aufzunehmen, ich kann unmöglich einen Gasthof aus meinem Hause machen; NIEUWLAND, CALKOEN, BOHNENBERGER, CAMERER, BURCKHARDT, HORNER u. a. m. haben alle gratis bei mir gewohnt und alle meine Bequemlichkeiten des Lebens unentgeltlich mit mir geteilt. Meine jetzige Lebensart und Einrichtung meines Hauswesens ist nun so, dass ich niemanden mehr bei mir aufnehmen kann. Allein diese ist nicht die einzige und bei weitem nicht

1) Zur Charakteristik dieses Mannes mag folgende Stelle aus dem Briefe von LECOQ an GAUSS vom 17. Mai 1799 angeführt werden: »Wundern Sie sich nicht über Herrn v. ZACHS Stillschweigen; dieser äusserst dienstfertige Mann, mit der Delicatesse des feinsten Gefühls versehen, ist mit Geschäften überhäuft und hat, wie Sie wissen, eine ausgebreitete Korrespondenz. Er schreibt daher nicht oft, aber dann auch desto längere Briefe. Ich schreibe ihm gewiss 3 oder 4 mal für eine Antwort von ihm, die aber dann meistens 3 Bogen stark ist und oft eine Abhandlung enthält.»

die Hauptursache dieser Verfügung. Seitdem meine zu grosse Gefälligkeit zu sehr gemissbraucht worden, einige Unglücksfälle vorgefallen, Instrumente beschädigt und erst kürzlich ein namhafter und unersetzlicher Schaden durch das Ungeschick eines Ungeübten verursacht worden, sehen es Se. Durchlaucht unser Herzog nicht gern, dass sich Anfänger Ihrer zu Ihrem eigenen Vergnügen mit grossen Kosten angeschafften Instrumente zur Übung bedienen sollen. Die hiesige astronomische Anstalt ist keine öffentliche, keine Landesanstalt, gehört zu keiner Akademie, Universität etc., sie ist bloss eine eigene Privatliebhaberei unseres Herzogs, die aus seiner Schatulle bestritten wird; Se. Durchlaucht haben es nie gern gesehen, nie erlaubt, dass Fremde mit Ihren eigenen Instrumenten Übungen machen, und diese dadurch allen Gefahren der Ungeschicklichkeit und Abnutzung ausgesetzt werden sollten. Was ich bisher tat, war nur immer per nefas getan, die Güte des Herzogs ignorierte dieses. Allein einige neuerliche Vorfallenheiten reizten die Langmut des Herzogs, zogen mir Verdruss zu, so dass es mir glatterdings unmöglich wird, jemanden, sei es wer er wolle, auf der herzoglichen Sternwarte aufzunehmen und den Gebrauch der herzoglichen Privatinstrumente, die nur meiner Aufsicht anvertraut sind, zu gestatten. Dieses, Hochgeehrtester Herr Doktor, habe ich also die Ehre Ihnen bekannt zu machen. Ich behalte mir vor, Ihnen auf andere Punkte Ihrer Briefe ein andermal umständlicher zu antworten, insonderheit Ihnen einiges von Dr. Burckhardt aus Paris als Antwort über Ihre Bemerkungen Ulugh-Beighs Tafeln betreffend, mitzuteilen.«

In demselben Briefe, in dem Gauss Zach bittet, nach Gotha kommen zu dürfen, teilte er, wie aus der vorstehenden im Gaussarchiv erhaltenen Antwort hervorgeht, diesem einige Bemerkungen über Ulugh Beighs Sonnentafeln mit, die Burckhardt[1]) in den von Zach herausgegebenen »Allgemeinen geographischen Ephemeriden« (Bd. III, 1799, Seite 179) abgedruckt und besprochen hatte. Diese Mitteilung von Gauss ist deswegen bemerkenswert, weil er dabei die von ihm schon längere Zeit vorher gefundene Methode der kleinsten Quadrate[2]) anwandte;

1) Joh. Karl Burckhardt, geboren 1773 in Leipzig, Schüler von Zach und von diesem nach Paris empfohlen, wo er Freund und Gehilfe von La Lande und La Place wurde und 1825 als Direktor der Sternwarte auf der Ecole militaire starb.

2) Vergl. darüber auch A. Galle, *Über die geodätischen Arbeiten von Gauss*, Abh. I dieses Bandes, Einleitung und I. Abschnitt.

man vergleiche hierzu die Werke XII, S. 64 abgedruckte Notiz: *Mittelpunktsgleichung nach Ulughbe in Zeittertien*«.

Die Beteiligung an den Berechnungen der Lecoqschen Beobachtungen dauerte bis Mai 1799; in der Folgezeit scheint Gauss keine Gelegenheit zur Beschäftigung mit der beobachtenden Astronomie gehabt zu haben. Er förderte seine rein mathematischen Untersuchungen und war später von 1801 an durch die Berechnung der Bahnen der neu entdeckten Planeten in Anspruch genommen. Im Februar 1802 scheint er aber von neuem Zach, mit dem er anlässlich der Entdeckung der Ceres in lebhaften Briefwechsel getreten war, um Rat gebeten zu haben, wie er sich auf dem Gebiete der praktischen Astronomie betätigen könne.

Zach antwortet hierauf am 21. Februar 1802:

»Ich komme jetzt auf den Artikel der Instrumente. Aber so ein kurzes Gesicht haben Sie, mein teuerster Herr Doktor! Das ist sehr schlimm für einen praktischen Astronomen. Meine Erfahrung, die ich bei vielen Astronomen und Liebhabern dieser Wissenschaft gemacht habe, gibt mir, dass ein so kurzes Gesicht grosse und fast unüberwindliche Schwierigkeiten in der praktischen Astronomie macht. Bei der Beschaffenheit Ihrer Augen, wie Sie mir solche beschrieben haben, können Sie des Nachts kein Instrument scharf ablesen. Welche grosse optische Parallaxe müssen Sie nicht haben! Werden Sie bei einer solchen Anstrengung Ihre Augen nicht angreifen, sie noch kurzsichtiger machen und ganz verderben, besonders wenn Sie sich vor der Hand auf den Gebrauch eines Sextanten einschränken müssen. Nehmen Sie ein Beispiel an mir, was ich für fürchterliche Augenkrankheiten mache; ich schreibe sie alle dem Spiegelsextanten und den häufigen Sonnenbeobachtungen zu, an die man bei diesem Werkzeuge beschränkt ist. Lesen Sie nur, was ich im Mai-Heft 1801, S. 500 davon gesagt habe. Herschel und Schröter haben Falkenaugen. Sie sind ein vortrefflicher Analyste, Sie haben ein so überwiegendes Talent de Calcul, dass Sie mit diesem allein wuchern müssen. Sie werden bei praktischer Astronomie eine kostbare Zeit verlieren, die Sie tausendmal besser und nützlicher anwenden können. Wie würde mich mein alter Freund La Lande schmälen, der nur praktische Astronomie will, wenn er wüsste, dass ich Ihnen eine solche Vorlesung halte und von praktischer Sternkunde abrate! Allein mein Prinzip ist, ein Mensch, der etwas besseres

machen kann, und was nur wenige Menschen machen können, muss nicht machen wollen, was so viele Menschen machen können. Es wäre ebenso schlimm, als wenn ich meine 30jährigen Erfahrungen, Übungen und Gewohnheiten in der praktischen Astronomie jetzt aufgeben und nur im Kabinett, wie ein HENNERT, an Exercices de Collège arbeiten wollte. Sie haben, Hochgeehrtester Herr Doktor, ein kostbares Pfund; damit können Sie so viel nützen, dass es unverantwortlich wäre, es schwächen oder teilen zu wollen. Aber verstehen Sie mich auch recht. Es ist nicht, dass ich Ihnen das Beobachtungstalent absprechen will. Wie kann ich das; ich habe ja nicht die Ehre, Sie persönlich zu kennen, und ich kenne Ihre mechanische Dexterität gar nicht. Meine Sorge ist nur, praktische Astronomie würde Sie zu sehr zerstreuen und von Studien ableiten, von welchen es erwiesen ist, dass Sie entschiedenes Talent haben. Was für ein praktischer Astronom aus Ihnen werden wird, das wissen Sie ja selbst noch nicht und müssen es erst erfahren. Indessen, damit Sie sehen, dass es nicht an meinem guten Willen fehlt, dass ich nicht Ursache sein will, ein Pfund in Ihnen verschlummern zu lassen, das Sie wecken wollen, so mache ich Ihnen folgenden Vorschlag.

Ich will Ihnen für diesen Sommer einen Sextanten, einen künstlichen Horizont, eine Uhr und ein Fernrohr borgen. Damit können Sie nun Polhöhen und Längen bestimmen. Der Sextant dient Ihnen auch zu korrespondierenden Sonnenhöhen, damit können Sie die Uhr berichtigen; das Fernrohr soll hinreichend sein, um Sternbedeckungen zu beobachten. Ich will trachten, Ihnen diese Instrumente sobald als möglich zu schicken, damit Sie noch im künftigen Monat die Bedeckung des Jupiters, den 16. März, beobachten können; aber sicher sollen Sie jene vom 13. April, so wie die Bedeckung der Plejaden, den 5. April, damit vornehmen können. Ich erwarte täglich eine gute AUCHsche Uhr aus Weimar; diese und der künstliche Horizont fehlt nur noch, sonst hätte ich alles beisammen.

Sehen Sie nun zu, wie weit Sie mit Ihren ersten Übungen kommen, ob Sie ihnen zur Erholung dienen. Sie können damit mehrere Ortsbestimmungen im Braunschweigischen machen; Helmstedt, eine Universität, verdiente es vorzüglich. Terrestrische Messungen werden Ihnen wegen des kurzen Gesichts noch mehr Schwierigkeiten machen; halten Sie sich indessen an die astronomischen. Finden Sie, dass Sie damit gut fortkommen, und dass Ihnen das

Beobachten eine angenehme Zerstreuung macht, so will ich Ihnen alsdann andere Vorschläge wegen Acquisition eigener Instrumente machen. Sollte dann Ihr Herzog nichts für praktische Sternkunde in Helmstedt tun wollen? Wenn er, oder die Universität, nur alle Jahre 500 Rtlr. dazu hergeben, so ist in 6 Jahren eine brave Sternwarte in Helmstedt, oder in Braunschweig. Das würde gewiss viele anziehen. Dann, auf welcher deutschen Universität wird denn praktische Sternkunde und Schiffahrtskunde gelehrt? Selbst in Holland geschieht es nicht. Die Holländer, Hamburger, Bremer, Lübecker kämen alle nach Helmstedt, wenn sie wissen, dass da praktischer Unterricht in Handhabung des Spiegelsextanten, in Beobachtungen mit demselben, in der Methode der Monddistanzen und überhaupt in astronomischer Navigation Unterricht zu erhalten wäre. Helmstedt bekäme dadurch einen grossen Ruf und einen ungeteilten glänzenden Vorzug vor allen anderen deutschen Universitäten. Kam doch der seel. Prof. NIEUWLAND, der Navigationslehrer in Amsterdam war und über den Sextanten schon geschrieben hatte, doch hauptsächlich deswegen nach Gotha, um den Gebrauch dieses Werkzeuges recht zu lernen; er konnte damit gar nicht umgehen. So war es mit seinem Nachfolger VAN BEEK CALKOEN. Ich kann am besten aus Erfahrung darüber sprechen, wie gross der Zulauf in Helmstedt sein würde, wenn eine solche Anstalt da existierte. Denn niemand erfährt es leider zudringlicher als ich, wie sehr und wie viele diesen Unterricht bei mir wünschen; aber ich bin aus mehr als einer Ursache jetzt gezwungen, ihn überall abzuweisen. Ich habe erst kürzlich dem Kurfürsten von Bayern und dem Fürsten von Würzburg ähnliche Ansinnen refusieren müssen. Meine Geschäfte, meine Lage erlaubt dies durchaus nicht mehr. Ich kann solche Liebhaber nur abweisen; wie vortrefflich wäre es nicht, wenn ich sie künftig nach Helmstedt hinweisen könnte.

Finden Sie, dass Ihnen praktische Astronomie zu viel Zeit wegnimmt, Ihren Augen schädlich wird, Ihnen nur undankbare Mühe und wenig Vergnügen macht: nun dann schicken Sie mir meine Instrumente wieder zurück, und somit haben Sie keine unnötigen Auslagen gemacht.«

Mit Rücksicht auf diese Äusserungen ZACHS schrieb GAUSS, nachdem er den Ruf nach Petersburg[1]) erhalten hatte, und als OLBERS versuchte, ihn für die Göttinger Professur vorzuschlagen, am 3. Dezember 1802 an OLBERS:

1) Vergleiche unten Seite 20.

»Wenn es sich künftig zeigen wird, dass sonst keine unvorhergesehenen Hindernisse*) obwalten, so würde mir der Umstand, dass das Observatorium noch nicht vollendet ist, gerade erwünscht sein, da ich dann in der Zwischenzeit mich erst recht zum praktischen Astronomen vorbereiten könnte. Sehr beunruhigend ist in dieser Hinsicht für mich die Ungewissheit, in der ich bin, wie v. ZACH darüber denkt, und ob es ganz nach seinem Herzen sein würde, die Stelle durch mich besetzt zu wissen, da mir sein Beistand dabei so sehr unentbehrlich sein würde. Von meiner grossen Neigung zu praktischen Beschäftigungen ist er schon seit lange unterrichtet. Sogleich nach der Verbesserung meiner äusseren Lage durch unseren Herzog ersuchte ich Herrn v. ZACH, mir zur Erlangung eines Sextanten von bester Güte behilflich zu sein, ich fände ungemein viel Gefallen am Beobachten und hätte den Wunsch, einen Sextanten zu besitzen, schon lange gehegt, hoffte auch, mich in der Folge mit mehreren Instrumenten versehen zu können; zugleich meldete ich ihm, dass mein Gesicht gut, obwohl sehr myopisch sei. In seiner Antwort auf diesen Brief widerriet er mir zwar die Praxis, teils weil er meinte, dass ich mich mit mehrerem Nutzen mit theoretischen Untersuchungen beschäftigen könne, teils weil zumal die Sonnenbeobachtungen meinen Augen nachteilig sein und sie vielleicht noch kurzsichtiger machen könnten, erbot sich aber zugleich auf das gefälligste, mir einen Sextanten, Pendeluhr und künstlichen Horizont zu borgen, damit ich vorerst ohne die Gefahr einer unnötigen Ausgabe mich versuchen könne. Was nun jene beiden Gründe betrifft, so habe ich in Ansehung des ersteren geglaubt, dass das Beobachten mir zu einer sehr angenehmen Abwechslung dienen und mich an theoretischen Arbeiten eben nicht hindern würde, weil ich diese viel zu lieb habe; dass es selbst für den Theoretiker oft von grosser Wichtigkeit ist, wenn er in der Ausübung auch bewandert ist; und endlich, wenn die Rede davon ist, ex officio und nicht bloss als Dilettant Praktiker zu sein (woran ich freilich damals noch eben nicht dachte), scheint es mir sehr in Betracht zu kommen, dass es in ganz Europa vielleicht kaum ein halb Dutzend besoldete reine Mathematiker gibt. In Ansehung des zweiten Punktes habe ich bisher nicht gefunden, dass meine doch oft sehr fleissigen Sonnenbeobachtungen irgend nachteilige Wirkung auf meine Augen gehabt hätten, und ein Astronom auf einer wohlbestellten Sternwarte braucht doch die Sonne viel weniger zu be-

*) Nämlich für die Berufung nach Göttingen. — BRDL.

obachten, als ein blosser Sextantenbeobachter. Auch finde ich nicht, dass die Kurzsichtigkeit das Beobachten eben erschwerte, ausser etwa, wenn am Himmel mit einem Fernrohr etwas Teleskopisches aus freier Hand aufzusuchen ist, und auch dagegen würde es wohl mancherlei Hilfsmittel geben. In den gewöhnlichen Beobachtungen mit dem Sextanten habe ich mich nun ziemlich geübt, und so hoffe ich, dass ich durch Autopsie mich auch in die Behandlung anderer Instrumente wohl finden werde.

Von dem Rufe nach Petersburg habe ich v. ZACH gleichfalls Nachricht gegeben, ihm die Gründe gemeldet, warum ich ihn auf die angebotenen Bedingungen anzunehmen Bedenken getragen habe, ihn um seinen Rat gebeten, falls man geneigt sei, die Bedingungen vorteilhafter zu machen, und zugleich die Hoffnung geäussert, dass er mir bei eintretender Notwendigkeit es nicht abschlagen würde, mich eine Zeitlang zum Schüler anzunehmen. Auf diesen Brief, der am 26. Oktober abgegangen ist, habe ich nun bis heute keine Antwort. ZACHS letzter Brief ist vom 25. Oktober. Auch von der M. C., welche er sonst immer mir selbst zuzuschicken die Güte hatte, habe ich das letzte Stück durch eine fremde Hand erhalten. Ob nun v. ZACH verreist oder krank ist, oder ob er mir vielleicht selbst irgend eine Proposition machen will, worüber er selbst erst Nachrichten einziehen will, darüber erwarte ich posttäglich mit Ungeduld Auskunft.«

Es mag auffallend erscheinen, dass v. ZACH GAUSS so dringlich von der beobachtenden Astronomie abrät und ihm wegen seiner Kurzsichtigkeit Schwierigkeiten schildert, die man als unbegründet bezeichnen muss. Möglicherweise haben hierzu die folgenden Umstände beigetragen. In Göttingen wurde der Bau der neuen Sternwarte geplant und ZACH war mit dem Entwurf der Pläne beauftragt worden. Es schien sein Wunsch zu sein, dass die Leitung dieser Sternwarte seinem Schüler BURCKHARDT übertragen werde und daher fürchtete er vielleicht schon, dass sich diese Hoffnung durch die Berufung von GAUSS zerschlagen würde[1]). Man kann diese Vermutung vielleicht auch aus dem folgenden Briefe herauslesen.

In der Antwort auf die Mitteilung der ersten von GAUSS berechneten Cereselemente hatte ZACH im Brief an GAUSS am 10. November 1801 sich folgendermassen ausgesprochen:

1) Vergl. auch GAUSS an OLBERS vom 18. November 1802.

»Inzwischen werden Ewr. Wohlgeboren von selbst einsehen, dass in den Bestimmungsstücken Ihrer Ellipse noch sehr viel hypothetisches liegt, und dass sich z. B. das Aphelium und die Exzentrizität noch sehr von der Wahrheit entfernen können. Dr. BURCKHARDT hätte seine Ellipse ebenso genau den Beobachtungen anpassen können, wenn er gewollt hätte; er hielt es nicht der Mühe wert, und es dürfte nicht schwer halten, eine ebenso gut stimmende Ellipse für den Fall zu finden, wo man das Perihelium auf den 11. Febr. verlegen wollte. Behutsamkeit ist daher immer zu empfehlen, und man muss, um niemanden irre zu leiten, die Möglichkeit nicht leugnen, dass man mehr als eine Ellipse durch die PIAZZIschen Punkte legen könne. Z. B. Ewr. Wohlgeboren finden darin einen grossen Beweis oder wenigstens ein grosses Gewicht und Vertrauen in Ihre Elemente, dass Sie den von Dr. OLBERS vermuteten enormen Observationsfehler von 20″ nicht zulassen, allein Dr. PIAZZI gesteht selbst einen Fehler von 15″ in seiner Beobachtung vom 11. Februar (November-Stück, p. 572[1]). Da Sie aber diese fehlerhaften Beobachtungen selbst bei Ihren Berechnungen zu Grunde gelegt haben, so war es natürlich, dass Sie diesen Fehler 0″ fanden; Ihr Raisonnement war in diesem Falle eine Petitio Principii. Diese Kleinigkeit ändert Ihre Ellipse nicht sehr und ist kaum der Mühe wert, davon zu reden; Ihre Arbeit bleibt immer schön und verdienstlich, erstens weil Ihre Elemente die PIAZZISCHEN Beobachtungen so schön darstellen, zweitens weil Sie eine mögliche Bahn zeigt, in welcher der neue Gast eben so gut, als in der BURCKHARDTschen oder einer anderen Bahn wandeln kann, folglich dem Beobachter zum Leitfaden dienen kann, um so mehr, da alle unsere vorhergehenden Raisonnements uns gewissermassen (freilich mit Unrecht) sicher gestellt haben und es vielleicht ohne Ihre Berechnung keinem Astronomen beigekommen wäre, den Himmelsraum bei seiner Untersuchung weiter nach Osten auszudehnen.«

Indessen ginge man zu weit, wenn man daraus schliessen wollte, dass ZACH etwa GAUSS nicht wohlgesinnt gewesen sei. Als OLBERS bald darauf auf Grund von GAUSS' Vorausberechnung die Ceres sogleich wieder aufgefunden hatte, schrieb er an ZACH:

»Mit Vergnügen werden Sie bemerkt haben, wie genau Dr. GAUSS' Ellipse mit den Beobachtungen der Ceres stimmt. Melden Sie doch dies diesem

1) M. C. IV (1801). — BRDL.

würdigen Gelehrten unter Bezeugung meiner ganz besonderen Hochachtung. Ohne seine mühsamen Untersuchungen über die elliptischen Elemente dieses Planeten würden wir diesen vielleicht gar nicht wiedergefunden haben. Ich wenigstens hätte ihn nicht so weit ostwärts gesucht.« ZACHS Stimmung scheint sich hiernach mehr zu GAUSS' Gunsten gewendet zu haben; er druckte diese Briefstelle in der Monatlichen Correspondenz, Bd. V, S. 181 ab und fügte hinzu: »Wir wollen demnach die gänzliche Berichtigung dieser Ellipse dem geschickten Dr. GAUSS allein überlassen; denn es wäre sehr unartig, das mit leichter Mühe in Ordnung bringen zu wollen, was dieser verdienstvolle Gelehrte mit so vieler Mühe entworfen hat. Ihm gebührt Ehre und Dank, dass er uns bis jetzt so gut geleitet hat; wir wollen ihm daher auch noch diesen Dank schuldig bleiben, dass er uns bis ans letzte Ziel führen soll, welches, wie wir hoffen, vielleicht schon im nächsten Hefte der M. C. geschehen wird.« Nach diesem Erfolge von GAUSS, der bekanntlich überall Aufsehen erregte, erhöhte der Herzog die ihm gewährte Unterstützung, worüber GAUSS an OLBERS am 23. Februar 1802 schreibt:

»Ich hoffe, in Zukunft mich meinen Lieblingswissenschaften bald mit mehr Energie ergeben zu können. Bisher war ich in einer sehr dürftigen Lage, aller literarischen Hilfsmittel fast ganz beraubt. Unser edler Fürst, dem ich ohnehin alles, was ich bin, zu verdanken habe, hat, nachdem er die neuesten Nachrichten über unsere Ceres im Februarheft der M. C. gesehen, mir aus eigener Bewegung eine ansehnliche Verbesserung meiner Lage zugesichert, ohne meine Musse durch bestimmte Dienste zu beschränken. Ich fühle lebhaft, wieviel ich von dieser glücklichen Wendung auf Rechnung Ihrer grossmütigen Äusserungen zu setzen habe, und diese Wirkung wird Ihnen bei Ihren freundschaftlichen Gesinnungen für mich gewiss Freude machen.«

Gleichzeitig schrieb ZACH an GAUSS in dem oben schon teilweise abgedruckten Brief vom 21. Februar 1802:

»Wie sehr es mich gefreut hat, dass Ihr edler Herzog Sie nun so gesetzt hat, dass Sie sorgenfrei sich nun der erhabensten Wissenschaft ganz widmen können, brauche ich Ihnen nicht erst mit vielen Worten zu sagen. Der Herzog hat nicht nur Ihnen, sondern auch den Wissenschaften eine wahre Wohltat erzeigt. Die mathematischen Wissenschaften werden überhaupt jetzt in Deutschland wenig encouragiert. Man sieht aber auch die Früchte davon.

Die berühmte Universität Göttingen hat seit KÄSTNERS Tode keinen Mathematiker mehr. Lassen Sie KLÜGEL in Halle, HINDENBURG in Leipzig mit Tode abgehen, so sind unsere deutschen Mathematiker sonst nirgends als im Braunschweigischen zu Hause. STAHL[1]) in Jena zeigt sich gut, er will aber Hungers sterben; ich habe es noch nicht mit aller Mühe dahin bringen können, ihm das zu verschaffen, was Ihr vortrefflicher Herzog aus eigener Bewegung für Sie getan hat. Unser wackerer BURCKHARDT musste expatriieren, um sein Glück zu machen, in Leipzig wäre er auf einem Dachstübchen verfault. TÖPFER[2]) versauert in Grimma, dieser vortreffliche Kopf muss solchen Jungen katechesieren. Im jetzigen Frankreich sind die Mathematiker Sénateurs und Conseillers d'Etat. In England bekleiden sie die ersten Finanzstellen. Nur in Deutschland verhungern sie. Dies verdiente wirklich einmal öffentlich gesagt zu werden, dass der Herzog von Braunschweig die mathematischen Wissenschaften so sehr in Schutz und Protektion nimmt. Er hat uns KLÜGEL gegeben, er erhält uns PFAFF, und nun schenkt er uns GAUSS. Wüsste es der Herr, wie innigst ich ihm in meinem Herzen dafür danke. Dass er diese Wissenschaft seiner vorzüglichen Huld würdigt, das macht, weil er ein grosser Feldherr ist und einsieht, zu was diese Wissenschaften im Krieg, beim Ingenieur, beim Artilleur, beim Pionier und beim Generalstab nutz sind. Der grosse FRIEDRICH verstand nichts von Mathematik und doch sorgte er sozusagen ängstlich dafür, tüchtige Mathematiker bei seiner Akademie zu haben. Er hatte aber auch die besten Köpfe, die in dieser Art in ganz Europa existierten. Er hatte einen EULER, einen LA GRANGE, einen LAMBERT. Man findet in des grossen Königs Schriften, dass er bisweilen über Mathematik spottete! Doch nein, nicht über Mathematik spottete er, sondern über die Mathematiker; aber das wars auch nicht, nicht über Mathematiker sondern über EULER spottete er, weil er im Grunde piquiert war und es ihn verdross, dass dieser ihn verliess und nach Russland ging. Daher die ewigen Sarkasmen, dass EULER la grande Ourse du Nord wäre observieren gegangen. Wie gut behandelte der König dagegen MAUPERTUIS und LA GRANGE. Man lese nur seine Briefe an D'ALEMBERT, wie angelegentlich er um LA GRANGE handelt,

1) KONRAD DIETRICH MARTIN STAHL (1771—1833) war später Professor in Würzburg, Landshut und München. — BRDL.

2) HEINRICH AUGUST TÖPFER (1758—1833) war Professor an der Landesschule zu Grimma. — BRDL.

wie sehr es ihm darum zu tun war, diesen grossen Geometer an seine Akademie zu fesseln. Nach dem Tode dieses grossen Königs haben Seine Exzellenz der Corporal Prof. HERTZBERG[1]), qui voulait mener l'Académie comme un Régiment, diesen grossen Mann nach Frankreich vertrieben, wo ihn BONAPARTE, der die mathematischen und besonders astronomischen Wissenschaften auch sehr beschützt, zum Sénateur gemacht hat. LA GRANGE und LA PLACE sind jetzt des grands Seigneurs, halten Equipagen in Paris und haben Revenuen von beinahe 8000 Rtlr. Die deutschen Mathematiker schätzten sich glücklich, wenn sie nur das Zehntel davon hätten. Doch genug von dieser Jeremiade! Indessen: Es lebe der Herzog von Braunschweig!«

ZACH schickte GAUSS, wie er versprochen, im März 1802 einen 10zölligen THROUGHTONschen Sextanten, einen künstlichen steinernen Horizont mit Niveau und eine AUCHsche 10 Taler-Uhr und versprach ihm eine bessere Pendeluhr, sobald er sie von AUCH erhalten haben würde. Mit diesen einfachen Mitteln übte sich GAUSS im Beobachten und führte mit dem Sextanten eine Reihe von Ortsbestimmungen in der Umgebung von Braunschweig aus, machte auch regelmässige Zeitbestimmungen.

Im September 1802 erhielt GAUSS den bereits erwähnten Ruf nach Petersburg als Astronom der Akademie der Wissenschaften und Direktor der Sternwarte. Der Staatsrat v. FUSS hatte mehrere deutsche Gelehrte darunter ZACH wegen Besetzung der Stelle um Rat gefragt; auch hier hatte Zach nicht gleich GAUSS vorgeschlagen, sondern FUSS scheint auf diesen durch PFAFF aufmerksam gemacht worden zu sein, wie man aus den Briefen von FUSS an GAUSS schliessen kann[2]). FUSS hatte im April oder Mai PFAFF daraufhin gebeten, GAUSS' Ansichten über eine etwaige Berufung nach Petersburg in Erfahrung zu bringen. Doch erhielt er hierauf keine Antwort, sodass er am 5. September 1802 direkt an GAUSS schreibt und ihn fragt, ob er wohl bereit wäre, einen Ruf anzunehmen. Hiervon machte GAUSS in dem Brief vom 12. Oktober 1802 OLBERS vertrauliche Mitteilung und bittet um seinen Rat; er meint, dass er seinerseits wenig Aussicht habe, in Deutschland eine ihm zusagende

1) EWALD FRIEDRICH GRAF V. HERTZBERG (1725—1795), Staatsmann und Historiker, wurde 1763 Minister und nach FRIEDRICHS des Grossen Tode (1786) »Kurator« der Berliner Akademie; über seine Reorganisation der Akademie siehe A. HARNACK, *Geschichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Ausgabe in einem Bande, Berlin 1901, S. 361—381. — BRDL.

2) Diese Briefe befinden sich im GAUSSarchiv.

Stellung zu erhalten, da er zu einem Lehramt nicht die geringste Neigung habe; andererseits aber deutet er an, dass er Deutschland sehr ungern verlassen würde, besonders da die ihm von Petersburg aus gemachten Bedingungen keine sehr günstigen waren. OLBERS beschliesst sogleich sein Möglichstes zu tun, um GAUSS in Deutschland zu halten, und erbittet sich von GAUSS die Erlaubniss, an ZACH und nach Göttingen vertraulich zu schreiben. OLBERS dachte sich, dass man GAUSS vielleicht die Leitung der neuen Sternwarte in Göttingen übertragen könne, während der Professor der Astronomie SEYFFER die Professur behalten würde. In diesem Sinne schrieb er dem Göttinger Professor der Geschichte HEEREN, auch wohl an den ständigen Sekretär der Sozietät der Wissenschaften, Professor der klassischen Philologie HEYNE[1]). In Göttingen wurde OLBERS Anregung sehr freundlich aufgenommen, sodass dieser zu erwarten schien, dass von der Regierung in Hannover bald ein Antrag an GAUSS herantreten würde. GAUSS hatte inzwischen den Petersburger Ruf abgelehnt, erwartete aber eine Erneuerung unter verbesserten Bedingungen. Hierin hatte er sich auch nicht getäuscht, denn v. ZIMMERMANN erhielt im Dezember 1802 von FUSS einen Brief[2]), in dem dieser schreibt, dass man weitere Versuche machen werde, um GAUSS für Petersburg zu gewinnen. In ähnlichem Sinne schrieb auch SCHUBERT[3]) an GAUSS. Die Verhältnisse in Göttingen lagen nun so, dass sich augenblicklich für GAUSS nichts Positives erreichen liess, obwohl man den Gedanken, ihn später dorthin zu berufen, offenbar verfolgte. Dies brachte GAUSS in eine unangenehme Lage des Schwankens, und er scheint nahe daran gewesen zu sein, den Petersburger Ruf anzunehmen, besonders in dem Gedanken, dass er ja von dort aus auch nach Göttingen zurückkehren könne. Aber noch ein Hindernis stand der Annahme des Petersburger Rufes entgegen: der Gedanke, seinen Herzog zu verlassen, der so viel für ihn getan hatte, und dem er sich nicht undankbar erweisen wollte. Wie zu erwarten war, wollte ihn auch der Herzog nicht gehen lassen, sondern verbesserte im Januar 1803 seine Lage nochmals wesentlich, sodass GAUSS den Petersburger Ruf jetzt endgültig ablehnte. Auf eine Anregung von GAUSS, in Braunschweig einige astronomische Instrumente

1) OLBERS an GAUSS, 25. Dezember 1802.

2) GAUSS an OLBERS, 21. Dezember 1802.

3) Die Briefe von SCHUBERT an GAUSS befinden sich im GAUSSarchiv.

anzuschaffen, verspricht ihm der Herzog auch den Bau einer kleinen Sternwarte. GAUSS schreibt darüber an OLBERS am 1. März 1803:

»Dass ich nun hier bleibe, hier in völliger Unabhängigkeit à mon aise leben werde (unser Fürst hat meine Pension auf 600 Rthl. erhöht und dabei freie Wohnung zugesichert), diese Nachricht hätte ich Ihnen zwar schon vor ein paar Wochen schreiben können; allein ich wünschte Ihnen noch mehr schreiben zu können, und dies kann ich jetzt. Unser edler Fürst hat sich nämlich geneigt gezeigt, hier etwas für die ausübende Astronomie zu tun. Ich hatte ihm vorgestellt, dass ein Vorrat von zweckmässigen Instrumenten, ein astronomischer Salon oder eine Art von kleiner Sternwarte eine Zierde der Stadt, ein Mittel, den Geschmack an Astronomie mehr zu verbreitern, ein Mittel, der Wissenschaft selbst nützlich zu sein, abgeben würde, und dieser Gedanke erhielt seinen Beifall. Unser Freund ZACH hat bereits durch einen kleinen Überschlag gezeigt, wie sich mit mässigen Kosten eine zweckmässige Sammlung machen liesse, und sich selbst erboten, auf den Sommer selbst hierher zu kommen, ein passendes Lokal aufzusuchen und uns mit seinem Rate behilflich zu sein; und eben gestern hat der Herzog in einem Billet an v. ZIMMERMANN seinen Wunsch zu erkennen gegeben, dass dieses Anerbieten zur Wirklichkeit kommen möchte. Wenn also der Himmel meinen Aussichten günstig ist und sonst keine Hindernisse eintreten, so kommt ZACH nach Johannis, wenn die Frühlingsreisen unseres Herzogs geendigt sind, zu uns; ich gehe eine Zeit lang nach Gotha, um mich in der praktischen Astronomie zu üben, und in kurzem haben wir hier eine kleine Sternwarte, wodurch alle meine Wünsche erfüllt sein werden.«

Zu gleicher Zeit schrieb GAUSS an ZACH; jedoch ist dieser Brief nicht mehr vorhanden. In seiner Antwort sagt ZACH am 27. Januar 1803: »Ich kann Ewr. Wohlgeboren nicht genugsam ausdrücken, wie sehr mich der Inhalt Ihres letzten Schreibens erfreut hat. Nun sind Sie geborgen und auch meine Wünsche sind erfüllt. Nun kann weder von St. Petersburg noch von Dorpat mehr die Rede sein. An beiden Orten wären Sie nicht independent und frei gewesen, so wenig wie in Helmstedt; überall hätten Sie nur zu kämpfen aber nicht zu wirken gehabt. Sum Passer antiquus; ich kenne die Lage solcher Dinge. Was ist denn bei den Sternwarten von Leipzig und Halle am Ende herausgekommen? Auch da waren zu viele Köche! Und eben

deswegen habe ich mich bei Helmstedt so lau bewiesen, weil auch da sich Leute einmengen wollten, die nicht dazu gehören. Wo ist etwas für Astronomie geschehen? Wo ein Mann allein wirken konnte. In Seeberg, in Palermo, in Neapel, in Lilienthal, in Slough; nun sind Sie, mein Verehrungswürdigster, auf den Punkt gebracht, wo ich Sie hinwünschte; nun schlagen Sie S. 83 meines Januar-Heftes nach[1]); als ich dieses niederschrieb, hatte ich Sie und Ihren edlen grossen Fürsten im Sinne. Ich hoffte damals noch nicht, dass meine Anspielung so bald in Erfüllung gehen würde, lassen Sie uns daher alle Kräfte aufbieten, auch diese Wahrheit in Braunschweig zu bestätigen. Zeigen Sie der Welt, dass Ihr Herzog und Sie das wahre Geheimnis verstanden haben, wie man Wissenschaften tätig befördern kann. In welch glückliche Lage versetzt Sie nicht Ihr grossmütiger Herzog? Gewiss er wird die grösste Ehre und den grössten Ruhm davon einernten. Sie werden schon dafür Sorge tragen, dass sein grosser Name auch an den Himmel geschrieben werde. Nun können Sie, mein Teuerster, ungehindert und daher zweckmässig und ruhig zum Besten der Wissenschaft wirken. Der Herzog baut Ihnen eine kleine Sternwarte in Braunschweig nach den Bedürfnissen, die der neueste Zustand dieser Wissenschaft erfordert; ganz dieser gewidmet, arbeiten Sie nach Willkür, wozu Sie Ihr Genius antreibt. Mit meinem Rate und mit meinen gesammelten Erfahrungen in der praktischen Sternkunde will ich, so weit meine Fähigkeiten reichen, treulich beistehen. Sie fordern mir im Namen Sr. Durchlaucht des Herzogs einen Plan und Kostenanschlag einer kleinen Sternwarte ab. Hier ist er. Legen Sie mich mit denselben ihm untertänigst zu Füssen.

Euer Wohlgeboren haben ganz recht, wenn Sie sagen, dass Sie keine grosse und stattliche Sternwarte bedürfen, um viel zum Gewinn der Wissenschaft beizutragen. Darin bin ich ganz mit Ihnen einverstanden; daher glaube ich auch, dass es nicht nötig sein wird, ein eigenes Gebäude dazu aufzuführen. Gewiss lässt sich in Braunschweig irgend ein Gebäude finden, vielleicht das Schloss, ein alter Turm, welches man sehr zweckmässig und mit wenigen Kosten zu einer niedlichen Sternwarte würde einrichten können, so wie ich eine auf dem Gothaischen Schlosse und eine andere im Garten I. Durchlaucht der

1) M. C. VII (18), wo von der Errichtung von Sternwarten durch Gönner der Astronomie die Rede ist. — BRDL.

Frau Herzogin allhier erbaut habe. Sollte Seine Durchlaucht der Herzog zu einem Entschlusse kommen, so würde ich mir die grösste Gnade daraus machen, diesem Herrn meine untertänigste Cour in Braunschweig selbst zu machen, das Lokal auszusuchen und den Bau zu überschlagen. Dies könnte kommendes Frühjahr geschehen, wo ich Sie alsdann zugleich abholen und mit mir nach Gotha bringen würde.

Was die Instrumente betrifft, so würde ich folgende Vorschläge machen.

1) Ein vierfüssiges Passageninstrument, von unserem SCHRÖDER hier in Gotha, nach dem Muster des grossen RAMSDENschen auf der Seeberger Sternwarte gearbeitet und desgleichen dieser Künstler unter meiner Aufsicht für den Oberappelationsgerichtsrat v. ENDE verfertigt hat . . . . . 500 Rtlr. (800)
2) Ein ganzer Kreis von 3 Fuss, wie der PIAZZIsche in Palermo v. BAUMANN in Stuttgart verfertigt, dürfte etwa zu stehen kommen 1000 Rtlr. (1500)
3) Ein BORDAscher Cercle-Repetiteur zu geodätischen Vermessungen 300 Rtlr. (600)
4) Eine astronomische Pendeluhr, nach der ARNOLDschen verfertigt, mit Zink und Eisen-Pendel von AUCH . . . . . 400 Rtlr. (700)
5) Einen Achromaten von 3 Fuss, parallaktrisch montiert, mit Mikrometer v. SCHRÖDER . . . . . 400 Rtlr. (600)
6) Einen Reflektor von 7 Fuss von LILIENTHAL, ganz montiert, Mahagoni 300 Rtlr. (600)
7) Kometensucher, Barometer, Thermometer etc. . . 50 Rtlr. (150)

Man kann demnach vor der Hand den ersten Kostenanschlag der Instrumente auf 3000 Rtlr. ansetzen. Die roten Zahlen[1]) deuten an, was diese Instrumente in England kosten würden. Ausserdem, dass solche gegen 2000 Rtlr. höher zu stehen kommen dürften, ist die Zeit nicht abzusehen, wann solche geliefert werden würden.

Mit SCHRÖDER, mit BAUMANN ist mehr Hoffnung, und diese Künstler liefern gewiss in kurzer Zeit eben so gute Werkzeuge wie die englischen. SCHRÖDER hat bereits ein 4 zölliges Passageninstrument in Arbeit, das ziemlich avanciert ist. Will der Herzog dem Künstler 200 Rtlr. Vorschuss geben,

1) Hier in Klammern gesetzt. — BRDL.

welche er begehrt, und für die ich so wie für die Güte des Instruments repondiere, so ist das Instrument sogleich für Ihre Sternwarte bestimmt, und Sie können dessen Vollendung selbst in Gotha betreiben.«

Auf OLBERS Anfrage, im März 1803, ob GAUSS sich nun für immer an Braunschweig gefesselt fühle, und ob Göttingen nicht mehr auf ihn rechnen könne, antwortet GAUSS, dass es vor allem sein Fürst sei, durch den er sich an Braunschweig gebunden fühle, und der einen hohen Sinn für die Kultur der Wissenschaft habe. Er fügt jedoch hinzu »aber derer, die diesen Sinn haben, gibt es nicht viele; nicht alle sind warm für die Begünstigung solcher Wissenschaften. Verhältnisse dieser Art eignen sich mehr für eine mündliche Unterredung als für die Feder.« Es scheint, als ob manche Einflüsse in Braunschweig merkbar geworden sind, die die Fesselung GAUSS' an seine Vaterstadt und die damit der Wissenschaft gebrachten finanziellen Opfer als weniger wünschenswert ansahen[1]).

GAUSS' Wunsch, sich weiter im Beobachten zu üben und dies im besonderen unter ZACHS Leitung zu tun, erfüllte sich endlich im Sommer 1803. ZACH erhielt vom König von Preussen den Auftrag zu einer Gradmessung, die von der bayrischen Grenze über den Seeberg bei Gotha bis nach Westfalen gehen sollte. Anfang August 1803 ging er auf den Brocken, von wo er fast täglich Pulversignale gab, die von anderen Punkten zum Zwecke von Längenbestimmungen beobachtet wurden, und noch im gleichen Jahre begann er mit der Messung einer Basis von 10000 Toisen im Meridian der Sternwarte auf dem Seeberg. In einem Brief vom 29. Juli 1803 bittet er GAUSS, an der Basismessung teilzunehmen. GAUSS sollte gemeinsam mit dem Oberappellationsrat Freiherrn v. ENDE[2]) von Braunschweig aus die Pulversignale beobachten, zu welchem Zweck ZACH ihm einen ARNOLDschen Chronometer zuschickte; sodann sollte er ihn auf dem Brocken besuchen und mit ihm nach Gotha gehen. ZACH berichtet über die Gradmessung in der M. C. 1804 und im besonderen über die Längen- und Breitenbestimmungen in den Heften Juli bis November, über die Basismessung im Dezemberheft. Im Septemberheft Seite 201 heisst es »der Geheimrat und Vizeregierungspräsident Freiherr v. ENDE

1) Siehe im folgenden S. 29 und 31.

2) Dieser hatte sich in Celle eine kleine Privatsternwarte eingerichtet, über die ZACH in der M. C. XXXIII, S. 29 ausführlich berichtet.

und Dr. Gauss »beobachteten« in Braunschweig, Wolfenbüttel und Helmstedt«. Näheres darüber findet sich im Oktoberheft 1804 der M. C. (abgedruckt Werke XI, 1, S. 261f.); auch schreibt Gauss an Olbers am 12. August 1803: »Meine Zeit ist besonders in den letzten acht Tagen so zersplittert gewesen, dass ich fast nie einiger zusammenhängender Stunden mächtig gewesen bin. Die Hauptursache davon sind meine jetzigen praktisch astronomischen Beschäftigungen. Von Zach befindet sich nämlich jetzt auf dem Brocken und gibt dort fast täglich Signale zu Längenbestimmungen; er hat Herrn von Ende und mir die hiesigen Beobachtungen übertragen und mir zu dieser Absicht einen besonderen Arnoldschen Chronometer geschickt. Das sehr ungünstige Wetter und der Umstand, dass ich Sonnenhöhen nicht in meiner Wohnung beobachten kann, erschweren mir die Zeitbestimmung sehr. Aus den am 9. und 10. beobachteten Signalen, die sich nachts (von 9 bis 10 Uhr, von 10^m zu 10^m) äusserst gut mit blossen Augen sehen lassen, kann ich für unsere Länge keinen Schluss ziehen; nach einer gedruckten Disposition der Signale sollten sie $9^h\,0^m\,0^s$, $10^m\,0^s$ etc. mittlere Brockenzeit oder nach v. Zachs Angabe $8^h\,59^m\,32^s$, $9^h\,9^m\,32^s$ u. s. w. (nach meiner Schätzung vielleicht genauer $8^h\,59^m\,37^s$) mittlere Braunschweiger Zeit fallen; allein ich habe sie am 9. um $9^h\,0^m\,12^s$ etc. und am 10. um $9^h\,0^m\,8^s{,}5$ beobachtet (von Ende noch $1\frac{1}{2}^s$ später). — Am 9. habe ich auch Austritt von ε Arietis beobachtet . . . . . .

Heute Nachmittag um 9 Uhr haben wir die ersten Tagsignale, allein eben jetzt regnet es in Strömen, und ich zweifle, dass wir etwas davon werden sehen können. Die Nachtsignale werden in Allem 12 mal, die Tagsignale 6 mal gegeben, beide jedesmal 7 Stück, mit $\frac{1}{2}$ Pfund entzündetem Pulver. Wahrscheinlich wird auch noch v. Ende oder wir beide nach Helmstedt gehen, um die Länge und Breite davon festzusetzen. Gegen die Zeit der Abreise Zachs vom Brocken werde ich zu ihm und mit ihm nach Gotha reisen, um der Basismessung mit beizuwohnen.«

Auf dem Brocken machte Gauss die persönliche Bekanntschaft Zachs. Über seine Tätigkeit in Gotha, von wo er erst im Dezember 1803 nach Braunschweig zurückkehrte, ist kaum etwas in Erfahrung zu bringen. Er gibt darüber nur kurze Andeutungen in seinen Briefen an Olbers und Harding vom Dezember 1803 bis Februar 1804 und erwähnt, dass er sich mit dem

Problem der Zodiake[1]) der kleinen Planeten beschäftigt, sonst aber nicht zu theoretischen Arbeiten käme. Anfang Dezember reiste GAUSS in Begleitung von ZACH von Gotha zurück nach Braunschweig, wo »ein massives Gebäude, das ehedem zum Pulvermagazin gebraucht« war, als »ein vortrefflicher Platz zu einer Sternwarte ausgefunden« wurde. ZACH versprach »bald einen detaillierten Plan zur Einrichtung der Sternwarte zu entwerfen«. (Brief an OLBERS vom 18. Dezember 1803.)

Inzwischen hatte man in Petersburg noch nicht alle Hoffnung aufgegeben, GAUSS doch noch zu gewinnen; er schreibt an OLBERS am 17. Juni 1804: »Von Petersburg aus habe ich übrigens wiederholt die freundschaftlichsten Anerbietungen; aber es ist mir gegenwärtig aus mehr als einem Grunde eigentlich selbst recht, dass vor der Hand noch keine Entscheidung nötig ist. Dies alles im engen Vertrauen. Ich freue mich, dass der Bau der Göttingischen Sternwarte, der unglücklichen Zeitumstände ungeachtet, doch noch allgemach fortgeht.«

Dagegen geschah nichts für die Einrichtung der geplanten kleinen Sternwarte in Braunschweig, und auch ZACH liess nichts von sich hören; endlich am 15. September 1804 schrieb dieser an GAUSS, dass er im nächsten Jahre seine Messungen wiederholen wolle und dabei auf GAUSS »Güte und Hilfeleistung rechnet«; er will ihn »reichlich mit Instrumenten, Chronometern, Sextanten, astronomischen Fernrohren u. s. w. versehen«. Vgl. jedoch S. 29 unten.

Für GAUSS blieb die Ungewissheit über seine Zukunft bestehen. Auf der einen Seite bestand für ihn die Hoffnung, in Braunschweig eine kleine Sternwarte und eine dauernde und auskömmliche Stellung zu erhalten, in der er von Verpflichtungen, insbesondere von einer Lehrtätigkeit frei war und seinen rein wissenschaftlichen Arbeiten leben konnte. Auf der anderen Seite boten sich ihm mehrere Rufe nach einer angeseheneren, aber weniger Musse lassenden auswärtigen Tätigkeit; denn auch von Petersburg wurden die Versuche, ihn zu gewinnen, fortgesetzt, und ausserdem hatte er einen Ruf nach Landshut erhalten, der allerdings kaum in Betracht kam. Die Ungewissheit über seine Zukunft, die bis in das Jahr 1807 hinein dauerte, verbunden mit dem Wunsche, vor allem der Forschung sich widmen zu können, mag ihn oft bedrückt und

1) Vergl. Werke VII, S. 313 f.

beunruhigt haben, umsomehr als er sich im Oktober 1805 mit JOHANNE OSTHOFF verheiratet hatte.

Am 29. September 1804, also nur 14 Tage nach dem oben angeführten Briefe, in dem ZACH ihn zur Teilnahme an den Vermessungen aufgefordert hatte, schrieb dieser:

»Von der Braunschweiger Sternwarte kann zwischen Ihrem Herzog und mir nicht wieder die Rede sein; denn:

1. Hat mir der Herzog nie einen bestimmten und formellen Auftrag dazu gegeben; also was geschehen ist, ist per indirectum geschehen.

2. Weiss ich von sicherer Hand, dass mein Besuch in Braunschweig dem Herzog sehr unangenehm war.

Ich weiss auch noch mehrere Sachen, welche hier anzuführen unnötig sind. Soviel ist aber gewiss, dass Ihr Herzog mich ebenso wenig als ich ihn gesucht habe, und dass ich nur aus Missverstand damals nach Braunschweig gekommen bin. Ihnen, liebster Freund, muss ich es sub rosa eröffnen, dass ich mich, rebus sic stantibus, unmöglich um Ihre Sternwarte bekümmern kann, noch darf. Meine Sache ist es nicht, mich den Grossen, besonders in Dingen, die ihnen unangenehm sind, aufzudringen, mein Prinzip ist vielmehr, mich von ihnen entfernt zu halten. Anderer Leute Absichten formuliere ich aber nie. Ich glaubte, Ihnen, verehrungswürdigster Freund, dies Geständnis schuldig zu sein; ich hielt zehn Monate damit zurück und glaubte schon, wir hätten uns gegenseitig erraten und verstanden. Da Sie mir aber in Ihrem letzten Brief davon Meldung machen, so glaubte ich, Ihnen als Freund und tibi soli diese Erklärung geben zu müssen. Vielleicht befremdet Sie diese ebenso sehr als mich die Entdeckung, dass ich nach Braunschweig ungerufen und comme un chien dans un jeu de quilles kam. So was passiert nur einmal. Das zweite Mal ist man schon behutsamer!!«

Hierauf schrieb GAUSS an OLBERS am 16. Oktober 1804:

»Unser Herzog hat in einer neulich mit Herrn v. ZIMMERMANN gehabten Unterredung ganz aus eigener Bewegung den Vorsatz und Wunsch, hier eine Sternwarte zu errichten, noch sehr bestimmt und fest geäussert und sich über das gänzliche Stillschweigen des Herrn v. ZACH sehr empfindlich bezeugt und kaum der Versicherung des Herrn v. ZIMMERMANN glauben können, dass ich

den Herrn v. ZACH noch zu wiederholten Malen erinnert habe. Ich selbst befinde mich hierbei in einem wunderlichen Verhältnisse, denn Herr v. ZACH seinerseits hat mir nicht undeutlich zu verstehen gegeben, als hege er den Argwohn, ohne Veranlassung des Herzogs hierhergekommen zu sein. Ich bin fast gezwungen anzunehmen, dass ein unberufener homme double aus unlauteren Motiven diese Insinuation gemacht habe. Sie wenigstens, mein teurer Freund, werden mir bloss aufs Wort glauben, dass jene Einbildung durchaus grundlos ist, dass im Grunde ich an der ganzen Angelegenheit durchaus weiter keinen tätigen Anteil genommen habe, als die erste Idee angegeben zu haben, und dass alles, was geschehen ist, lediglich vom Herrn v. ZACH selbst und vom Herzog herrührt. Mit Gewissheit kann ich nun freilich noch nicht vorhersehen, was für einen Ausgang diese verdriessliche Sache nimmt.

Das Beste scheint mir zu sein, wenn sie sich noch so lange tränierte, bis etwas Bestimmtes von Göttingen aus angetragen werden kann, aber Herrn v. ZACH muss ich wegen seines Verdachts notwendig detrompieren, dies bin ich meiner eigenen Ehre schuldig. Ich hoffe indes doch, dass unser Herzog bei rechter Vorstellung der Sache endlich seine Einwilligung geben und mich nicht nötigen werde, einer weit opulentern, sichereren und mit einem grösseren und nützlichern Wirkungskreise verbundenen Lage zu entsagen, als ich möglicherweise hier haben könnte.«

GAUSS schien demnach nun das Interesse an dem Bau der Sternwarte verloren zu haben und auf den Ruf nach Göttingen seine Hoffnung zu setzen. Im Juni 1804 war SEYFFER nach Landshut berufen worden; man wollte darum HARDING als ausserordentlichen Professor und als Inspektor der Sternwarte nach Göttingen berufen, was auch im Herbst 1805 geschah. Die Leitung der Sternwarte dachte man GAUSS zu übertragen; ihr Bau jedoch wurde durch die politischen Verhältnisse, wenn auch nicht ganz abgebrochen, so doch ungebührlich in die Länge gezogen.

Der Briefwechsel mit ZACH ruhte bis Ende 1805 gänzlich; ZACHS Messungen wurden zwar fortgesetzt, jedoch gab er keine Pulversignale auf dem Brocken und GAUSS nahm nicht an den Messungen teil. Ein grosser Teil seiner Zeit wurde durch die langwierigen Rechnungen zu den Störungen der Ceres in Anspruch genommen (Werke VII, S. 402 f.).

Nachdem in einem neuen Gespräch des Herzogs mit ZIMMERMANN sich in der Tat herausgestellt hatte[1]), dass ein Unberufener, dessen Name nicht genannt wird, sich eingemischt und ZACH mistrauisch gemacht hatte, kam die Frage des Baues der Braunschweiger Sternwarte nochmals in Fluss, wie sich aus einem Briefe ZACHS an GAUSS vom 28. Mai 1806 ergibt, in dem es heisst: »Wahrscheinlich werden nun alle meine Risse und Vorschläge zu Ihrer neuen Sternwarte in Ihren Händen sein. Ich wünsche nur, dass alles Ihren Beifall erhalten möge. Die Hauptsache scheint mir gegenwärtig diese zu sein, dass Ihr Durchlauchtiger Herzog nur vorerst den Bau bewillige und die nötigen Fonds dazu anweise. Sind die Bauanschläge nach meinen überschickten Rissen nun einmal gemacht und der Bau wirklich dekretiert, so kann man immer noch, selbst während des Baues, diejenigen Modifikationen anbringen, welche Sie etwa dabei vorzuschlagen hätten. Zur Einrichtung des Erdgeschosses und zur Anlegung der Treppe muss ohnehin ein eigner Riss gefertigt werden, welcher ganz von den Bequemlichkeiten abhängt, welche Sie darin angebracht wissen wollen; daher ich mich auch in dieses Detail garnicht eingelassen habe, so wie ich auch den Punkt wegen Ihrer Wohnung ganz übergangen habe, welche man Ihnen doch in der Nähe der Sternwarte entweder erbauen oder irgend ein Privathaus, das in der Nähe steht, dazu einrichten und bestimmen muss, damit der Observator seine beständige annexe Wohnung habe und nicht von der Caprice seines Miethern abhänge, welcher ihm diese Wohnung nach Gutdünken aufkündigen kann. Meines Erachtens müsste diese Wohnung ein fürstliches, zur Sternwarte gehöriges Eigentum sein, welches zum permanenten Quartier des Observators bestimmt sein müsse: so wie es z. B. in Berlin ist, wo Herr BERNOULLI, nachher Herr BODE ein königliches Haus der Sternwarte gegenüber bewohnen. Vielleicht hat Ihr Herzog auf dem Gänsewinkel ein Haus, das sich dazu schickt; wo nicht, so kauft oder baut dieser reiche Herzog eines. Es trägt zur Verschönerung der Stadt bei und er stiftet seines grossen Namens ewiges Gedächtnis im Himmel so wie auch auf Erden. Amen, so wird es auch sein!«

Über die wirkliche Sachlage gibt folgende Stelle aus einem Briefe an HARDING vom 30. Juli 1806, der wohl unter dem Eindruck der Aussicht auf die Göttinger Berufung geschrieben ist, Aufschluss:

1) Vergl. Brief von GAUSS an OLBERS vom 21. Dezember 1804.

»Was unsere neue Sternwarte betrifft, so haben Sie davon eine nicht richtige Vorstellung. Ihnen darüber eine vollständige Aufklärung zu geben, würde sich eher für eine mündliche Unterredung als für einen Brief eignen. Hier will ich also nur zwei Fakta berühren:

1) Was den Bau betrifft, den Sie für dekretiert und vielleicht schon angefangen halten, so ist dieses keineswegs der Fall. Es ist allerdings ein Plan gezeichnet, dieser dem Baumeister übergeben, von ihm in architektonischer Hinsicht abgeändert und die Kosten angeschlagen. Was aber ausserdem geschehen ist, ist bloss etwas negatives, nämlich die Äusserung, dass der Bau wegen vieler anderer nötiger Bauten wohl nicht vor künftigem Frühjahre würde anfangen können (ohne deswegen zu versprechen, dass er alsdann anfangen werde; diejenigen, die einen solchen Bau nicht wünschen, werden im künftigen Frühjahre leicht auch wieder andere nötige Bauten wissen).

2) Was die Instrumente betrifft, so ist allerdings Befehl gegeben, mit den Erben des Grafen HAHN[1]) in Unterhandlung zu treten; allein dies wird, wie ich mit höchster Wahrscheinlichkeit versichern kann, zu Nichts führen. Denn erstens sollen alle Instrumente zusammen verkauft werden und sogar alle physikalischen und chemischen mit dabei bleiben. Mit allem diesen Wesen ist aber garnichts gedient, und es sind eigentlich nur ein paar Nummern darunter, die ich haben möchte; zweitens das einzige Instrument, an dessen Besitz mir wirklich viel gelegen wäre, nämlich der 3 füssige Dollond, soll garnicht mit verkauft werden; drittens hat Herr v. ZACH auch sehr dagegen geraten. — Von der Absicht, neue Instrumente in England zu bestellen, ist aber noch garnicht die Rede gewesen; ich habe zwar durch Herrn v. ZACH ein 5 füssiges Achromat bestellt, aber für meine eigene Rechnung.

Überhaupt werde ich diese ganze Angelegenheit, an deren Veranlassung ich ganz und gar keinen Anteil habe, ihren Gang gehen lassen, ohne sie weder zu hindern noch zu urgieren; denn dass das Ganze das würde, was ganz meinen Wünschen entspräche, dazu habe ich wenig Hoffnung; ich meine, dass die Sternwarte mit allen zur heutigen Astronomie nötigen Instrumenten

1) Über die im Juli 1806 zum Verkauf stehende wertvolle Sammlung des Grafen FRIEDRICH HAHN siehe Monatl. Corr. 1806, S. 285. — Die Königsberger Sternwarte erhielt daraus bei BESSELS Berufung (1810) den 25-zölligen Kreis von CARY und andere Instrumente; vgl. JOH. A. REPSOLD, *Zur Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, I. Band, Leipzig 1908, S. 118. — BRDL.

von der ersten Güte versehen und dem Direktor eine anständige perennierende Wohnung unmittelbar an der Sternwarte gebaut würde, kurz, dass es so würde, wie der Plan war, es in Göttingen zu machen. Lassen Sie indess alles obige, was ich Ihnen nur im engsten Vertrauen schrieb, ganz unter uns beiden bleiben; nur HEYNE können Sie gelegentlich sub rosa einen Wink davon geben.

Der, den Sie mir als Gehülfen schon beigeordnet glaubten, ist Herr BARTELS[1]), ein geborener Braunschweiger, der einen Ruf nach Kasan hatte.«

Im weiteren Verlaufe des Unglücksjahrs 1806 ruhten alle Verhandlungen; der Herzog erlag im Oktober 1806 seinen im Felde erhaltenen Verwundungen.

Zu Anfang des Jahres 1807 erneuerte man von Petersburg aus nochmals den Versuch, GAUSS zu gewinnen, und im April dieses Jahres erhielt er von HEYNE die Anfrage[2]), ob er »Göttingen als einen Zufluchtsort betrachten wolle, so lange bis die schrecklichen und noch mehr Schrecklicheres drohenden Zeiten«, die eine regelrechte Berufung unmöglich machten, vorüber wären. Er stellt ihm eine Anstellung und Besoldung von etwa 600 Rtl. in Aussicht, so lange bis er entweder einen vorteilhafteren Ruf erhalten oder in Hannover die Ordnung wiederhergestellt sei, so dass das Gehalt auf 1000 Rtl. erhöht werden könne. GAUSS zog darüber OLBERS ins Vertrauen in einem Brief, der verloren ist, und OLBERS antwortet ihm in einem Briefe vom 21./22. April, dass er nicht mit einem Gehalte unter 1000 Taler annehmen dürfe. Endlich im August 1807 trat die Entscheidung ein, indem GAUSS den endgiltigen Ruf nach Göttingen erhielt, den er annahm.

Im einzelnen ist über GAUSS' Beobachtungstätigkeit in Braunschweig und die von ihm benutzten Instrumente folgendes zu berichten: Am 10. August 1802 schrieb ZACH an GAUSS, dem er im März dieses Jahres einen Sextanten geliehen hatte (siehe Seite 20): »Im nächsten Heft wünschte ich einiges aus Ihren Briefen von Ihren Beobachtungen mit dem Sextanten, Vergleichung der Uhren etc. im Auszug mitzuteilen. Besonders möchte ich Ihr Uhrenre-

1) Der frühere Hilfslehrer an der von GAUSS besuchten BÜTTNERschen Schule, der GAUSS bei seinen ersten mathematischen Studien unterstützte. Vergl. HÄNSELMANN, *K. F. Gauss, Zwölf Kapitel aus seinem Leben*, Leipzig 1878, S. 18. L. SCHLESINGER, *Der junge Gauss*, Nachrichten der Giessener Hochschulgesellschaft, Bd. 5, Heft 3, 1927, S. 30. — BEDL.

2) Brief von HEYNE an GAUSS vom 12. April 1807, vorhanden im GAUSSarchiv.

gister von der AUCHschen Uhr mitteilen, damit andere Liebhaber auch ein drittes Urteil darüber hören und es dem braven Künstler zur Empfehlung gereichen kann. Haben Sie daher noch einige Beobachtungen von Polhöhen oder Fortsetzung des Gangs der Uhren bei der gegenwärtigen grossen Hitze zur Hand, so bitte ich gehorsamst darum«. GAUSS, der in den verlorenen Briefen an ZACH häufig über seine Beobachtungen berichtet zu haben scheint, ist jedoch diesem Wunsche nicht nachgekommen, wenigstens ist die erste Beobachtung von GAUSS, die in der Monatl. Corresp. veröffentlicht ist, die des Merkurdurchgangs vom 9. Nov. 1802 (astronomisch Nov. 8, Werke VI, S. 231, wo das Datum falsch abgedruckt ist). Er machte diese Beobachtungen mit »einem von BAUMANN verfertigten zweifüssigen Achromaten«; dies ist wahrscheinlich das im Briefe von LECOQ vom 13. April 1799 oben Seite 9 erwähnte Teleskop des Carolinums, da GAUSS im Dezember 1803 noch kein eigenes achromatisches Fernrohr besass[1]). Er schreibt an OLBERS am 8. April 1803: »Ich gewinne die ausübende Astronomie und was damit zusammenhängt immer lieber. Ich habe diese Zeit hindurch an dem Mars einige Probeversuche in kreismikrometrischen[2]) Bestimmungen gemacht, die freilich vorerst nur mittelmässig ausgefallen sind; aber ich sehe doch ein, dass man mit einem besseren und fester stehenden Fernrohre, als das von mir gebrauchte ist, und nach hinlänglicher Übung recht gute Beobachtungen auf diese Weise machen kann. Ich vermute aber doch, dass Sie manche eigentümliche Kunstgriffe und Vorteile dabei haben müssen. Dieser Tage habe ich bei dem jetzigen heiteren Wetter verschiedentlich Winkelmessungen um Braunschweig herum mit meinem Sextanten gemacht (Freund ZACH hat mir ihn ganz überlassen), und aus hiesiger Gegend schon eine grosse Anzahl Punkte niedergelegt; ich wundere mich selbst über die grosse Genauigkeit, die dabei erlangt wird, ungeachtet ich meine Winkel in Ermangelung eines Instruments zum Höhenmessen gar nicht auf den Horizont reduziere und viele Standpunkte habe, wo kein Objekt befindlich ist, nach dem ich wieder visieren kann. Ich

1) Vergl. Brief an OLBERS vom 18. Dezember 1803 auf Seite 34.

2) Als Kreismikrometer diente in jener Zeit der Rand des Gesichtsfeldes nach der Methode von BOSCOVICH oder LACAILLE. Vergl. R. WOLF, *Geschichte der Astronomie*, S. 591, wo aber übersehen ist, dass GAUSS und noch weit mehr OLBERS reichlichen Gebrauch von dieser Methode machten; AMBRONN, *Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde*, Bd. II, Seite 513; siehe auch unten S. 40. — BRDL.

habe den Plan, einst das ganze Land mit einem Dreiecksnetz zu beziehen, wozu meine jetzigen Messungen nur eine Vorübung sind. Das Braunschweigische Land ist zwar schon ehedem vom seligen Major GERLACH[1]) vermessen, allein welcher Genauigkeit seine bisher ungestochene Karte fähig sein kann, wird man daraus schliessen können, dass er nur ein gewöhnliches Astrolabium und Kette, oder, wie einige behaupten, auch dies nicht einmal, sondern nur Messtisch und Schritte gebraucht hat. Eine hinlängliche Anzahl trigonometrisch bestimmter Punkte, mit seinem Detail verbunden, müssen zu einer guten Karte dienen können. Ich wünsche sehr, mich nach und nach mit einem guten Vorrat von optischen Werkzeugen zu versehen. An einem Orte wie Bremen fällt wohl öfters Gelegenheit zu dergleichen vor, und Sie verbänden mich sehr, wenn Sie dann meiner dabei gedächten. Ich sehe gar nicht auf den Preis. Besonders wünschte ich zu acquirieren 1. ein gutes astronomisches Achromat, hinreichend, um Sternbedeckungen, Finsternisse etc. zu beobachten und kreismikrometrischen Messungen zu dienen, 2. ein gutes terrestrisches Achromat, um entlegene Gegenstände, die man im Fernrohr des Sextanten nur sehen kann, erkennen und unterscheiden zu können, 3. Kometensucher, um sich in einer Himmelsgegend leichter orientieren zu können, 4. noch einen kleinen etwa 4- oder 5-zölligen Sextanten, der sich ohne fremde Beihilfe leicht transportieren lässt.« Und am 18. Dez. 1803: »Von dem vortrefflicher Künstler SCHRÖDER in Gotha habe ich einen (nicht achromatischen) Kometensucher erhalten, der, so viel ich bei der flüchtigen Prüfung beurteilen kann, die der seit drei Wochen fast beständig bedeckte Himmel erlaubt hat, sehr gut ist. Ich bin jetzt in meiner gegenwärtigen Wohnung so eingerichtet, dass ich die meisten laufenden Beobachtungen werde mitmachen können. Nur ein eigenes achromatisches Fernrohr fehlt mir noch; ich hoffe aber vor der Hand diesem Mangel durch ein erborgtes[2]) abhelfen zu können. In einem Observationszimmer habe ich wenigstens nach Osten und Süden eine herrliche Aussicht.«

Im Februar 1804 fand sich für GAUSS Gelegenheit, ein schönes Spiegelteleskop anzuschaffen.

---

1) FRIEDRICH WILHELM ANTON GERLACH (1728—1802) war zuletzt Lehrer an der österr. Ingenieur-Akademie zu Gumpendorf bei Wien. — BRDL.

2) Vermutlich das auf S. 9 und 33 bereits erwähnte des Carolinums. — BRDL.

In Lilienthal hatte nämlich SCHRÖTER seinen Gärtner GEFKEN durch SCHRADER[1]), den bekannten Hersteller von Spiegeln für Reflektoren, im Schleifen dieser unterrichten lassen. HARDING machte GAUSS in einem Briefe vom 28. Januar 1804 auf einen Spiegel, den GEFKEN gerade hergestellt hatte und den zu verkaufen er bereit war, aufmerksam. Der Herzog bewilligte den Ankauf des Spiegels mit Rücksicht auf die in Braunschweig einzurichtende Sternwarte. Über ihn äusserte sich HARDING in einem Brief an GAUSS vom 9. März 1804 folgendermassen: »Sie erhalten den schönen 10-füssigen Spiegel für Ihre künftige Sternwarte! ich hatte ihn längst für mich selbst gekauft; da aber Ihr Herzog ihn für ein so schönes Institut bestimmt hat, so trete ich ihn willig dazu ab. In keinem andern Falle würde ich ihn hingeben, denn er ist wahrlich ein Meisterstück, und verdient es, in Ihrem künftigen Tempel zu paradieren. Sie würden von HERSCHEL keinen bessern erhalten können. Er hat bei einer Brennweite von nur 10 Fuss einen verhältlich sehr grossen Durchmesser von 11 Zoll und gehört mithin unter die Seltenheiten, da solche Verhältnisse nur selten gewählt werden, indem die richtige Figur dabei zu erhalten eine schwere Aufgabe ist. Sie werden gewiss tausendfältiges Vergnügen durch dieses Teleskop geniessen, wozu ich im Voraus gratuliere.«

Der Spiegel traf Ende April 1804 in Braunschweig ein, wurde aber für GAUSS eine Quelle vieler Unannehmlichkeiten. GAUSS hatte die Montierung dem Mechaniker RUDLOFF in Wolfenbüttel, die Herstellung der Okulare und des Suchers SCHRÖDER in Gotha in Auftrag gegeben. Beide verzögerten ihre Arbeit ungewöhnlich lange und der von RUDLOFF geforderte übermässige Preis versetzte ihn dem Herzog gegenüber in eine peinliche Lage.

Als der Spiegel endlich im Mai 1806 gebrauchsfähig schien, bemerkte GAUSS, dass er sehr schlechte Bilder[2]) gab, als deren Ursache HARDING im September desselben Jahres bei einem Besuch in Braunschweig feststellte, dass der Spiegel sich verzogen hatte. HARDING nahm ihn deshalb nochmals nach Lilienthal mit, wo dieser Fehler ohne Schwierigkeit behoben wurde. Aber

1) JOHANN GOTTLIEB FRIEDRICH SCHRADER, geb. zu Salzdahlum bei Wolfenbüttel, 1762 oder 63, gest. in St. Petersburg nach 1819. Über seinen längeren Aufenthalt in Lilienthal, wo er mehrere Spiegel herstellte, vgl. JOH. A. REPSOLD, *Zur Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, Band I, S. 93.

2) Brief von GAUSS an HARDING vom 25. Mai 1806; der Briefwechsel GAUSS-HARDING befindet sich in der Urschrift im GAUSSarchiv.

ehe er von dort zurückkam, war Gauss' Berufung nach Göttingen zu Stande gekommen und dieser hatte schliesslich noch den Verdruss, dass das schöne Instrument auf einen Antrag von Gelpke[1]) vom 10. Oktober 1807 dem Collegium Carolinum zum Gebrauch beim Unterricht überwiesen wurde. Auf den kurzen Befehl, das Instrument abzuliefern, der ihm vom Ministerium noch am gleichen Tage zuging, berichtete Gauss wie folgt in einem an den Geheimrat von Wolffradt gerichteten Brief:

»Es ist mir gestern von Seiten des Hohen Ministerii ein Reskript zugekommen, welchem zufolge ich das in meinen Händen sich befindende Spiegelteleskop an die mir von dem Konzilium des Collegii Carolini anzuzeigende Person abgeben soll. Ich bin bereit, den Befehlen des Hohen Ministerii Folge zu leisten: inzwischen würde ich glauben, meinen Pflichten sowohl gegen mein mir ewig teures Vaterland als gegen die Wissenschaften zuwider zu handeln, wenn ich unterliesse, Ewr. Exzellenz untertänigst auf einige Umstände aufmerksam zu machen, die dem Hohen Ministerium nicht bekannt sein konnten, und sonst vielleicht Dessen Absichten wegen des künftigen Gebrauchs jenes Instruments modifiziert haben würden, umsomehr da ich persönlich dabei garnicht interessiert bin. Ich nehme mir daher die Freiheit, Ewr. Exzellenz kostbare Zeit auf einige Minuten wegen dieses Gegenstandes in Anspruch zu nehmen: um dabei ganz verständlich zu sein, muss ich auch einige frühere Umstände berühren.

Im Jahre 1804 erhielt ich aus Lilienthal die Nachricht, dass dort ein 10-füssiger Teleskopspiegel, dessen Vortrefflichkeit man ungemein rühmte, feil sei; des Höchstseligen Herzogs Durchlaucht, der zufälligerweise davon hörte, gab Befehl, solchen für die damals intendierte Sternwarte anzukaufen. Dies geschah, der Spiegel kam hier an, und mir wurde der Auftrag gegeben, die

1) Über diesen Mann berichtet Hänselmann, *K. F. Gauss, Zwölf Kapitel aus seinem Leben*, S. 83. Am Collegium Carolinum hielt seit einiger Zeit Dr. August Heinrich Christian Gelpke, Subkonrektor des Martineums, astronomische Vorlesungen. Ein komischer Herr: wenn in späteren Jahren seine Zuhörer ihm unermüdlich die Neckfrage nach den drei grössten Astronomen vorlegten, nannte er Keppler und La Place, den dritten namhaft zu machen, verbot ihm seine Bescheidenheit. Dieser Mann war es, der sich am 10. Oktober 1807 an ein Mitglied der interimistischen Landesregierung, Geheimrat v. Wolffradt, mit der Bitte wandte, ihm zum Besten jener seiner Vorlesungen das zehnfüssige Newtonsche Teleskop zukommen zu lassen »welches der Dr. Gauss nur als ein von Sr. Durchlaucht dem verstorbenen Herzoge geliehenes Gut besitzt, wie ich gehört habe, und der in diesen Tagen von hier nach Göttingen abreist«.

Montierung desselben besorgen zu lassen. Ich habe dies teils durch den Mechaniker RUDLOFF in Wolfenbüttel, teils durch SCHRÖDER in Gotha ausführen lassen; beider Arbeit ist zu meiner Zufriedenheit ausgefallen.

Diese durch mancherlei Hindernisse verzögerte Arbeit war erst im Sommer 1806 ganz vollendet. Indess fand ich dann bei dem Instrumente die gehoffte grosse Wirkung nicht, und erst nach vielen vergeblichen mühsamen Versuchen musste ich doch zuletzt auf die Überzeugung kommen, dass der Spiegel in seiner dermaligen Beschaffenheit das nicht leiste, was er sollte, und notwendig erst noch einmal durch die Hände des Künstlers gehen müsse, wenn das Instrument brauchbar und des Namens seines berühmten Verfertigers würdig sein sollte. Allein da bald nachher die bekannten Ereignisse eintraten, so glaubte ich nicht, dass es damals der Zeitpunkt sei, diese Sache in Anregung zu bringen, indem ich teils fürchtete, dass dies noch erhebliche Kosten machen würde, teils auch die Aussicht verschwunden war, dass das Instrument bald auf den rechten Platz kommen würde. So hat also diese Sache geruht, bis vor einem Monate, wo der Professor HARDING aus Göttingen — eben der, welcher vor 3 Jahren aus Lilienthal den Spiegel uns angerühmt und geschickt hatte — mich hier besuchte und sich selbst von der damaligen Unvollkommenheit des Spiegels überzeugte. Die Ursache derselben ist auch ausgemittelt; ich würde zu weitläufig werden und Ewr. Exzellenz ermüden, wenn ich dieselbe hier entwickeln wollte; ich bemerke also nur, dass der Spiegel sich verzogen hatte, und zwar infolge einer Einrichtung, deren Schädlichkeit der Verfertiger vor 3 Jahren noch nicht in dem Grade kannte, daher derselbe auch als ganz unschuldig angesehen werden muss, so wie die Versicherung von Männern wie SCHRÖTER und HARDING keinen Zweifel lassen, dass der Spiegel anfangs so vortrefflich wirklich war, als sie rühmten. Da nun Professor HARDING gerade von hier nach Lilienthal reiste, so glaubte ich, dass nie eine erwünschtere Gelegenheit kommen könnte, damit der Künstler unter Herrn HARDINGS Augen den Fehler redressierte, und ich so in Stand gesetzt würde, bei meiner Abreise von hier ein vollkommenes Instrument abzuliefern. Ich trug also um so weniger Bedenken, in diesem Zeitpunkte den Spiegel nach Lilienthal zum Umschleifen zu schicken, da Herr Professor HARDING glaubte, der Künstler werde diese Arbeit Ehrenhalber übernehmen.

Vor ein paar Tagen habe ich nun durch einen Brief des Herrn Professor

HARDING die angenehme Nachricht erhalten, dass es dem Künstler vollkommen gelungen ist, dem Spiegel seine ursprüngliche Vollkommenheit wiederzugeben; man hat auch auf der berühmten Lilienthaler Sternwarte Proben damit angestellt, die zu beweisen scheinen, dass jetzt das Instrument von einer Vollkommenheit sein wird, dass wenige in Deutschland ihm gleichkommen. Ein solches Instrument würde die erste Sternwarte zieren. Da der Künstler nun auch die oben erwähnte fehlerhafte Einrichtung durch Schaden belehrt nicht wieder anbringen wird, so wird eine neue Krümmung des Spiegels nicht zu besorgen sein. In ein paar Wochen wird der Spiegel wieder hier sein, vielleicht auch schon in wenigen Tagen.

Ewr. Exzellenz sehen hieraus, dass ich in diesem Augenblick zur Ablieferung des Instruments noch nicht im Stande bin: ich gebe indess mein Wort, dass es vor meiner Abreise auf alle Fälle geschehen kann und soll. Meine Idee ging dahin, wenn ich den Spiegel zurückhaben und von dem Werte des Instruments selbst Proben gesehen haben würde, den Vorschlag zu tun, dass ein so prachtvolles, seltenes und für den ersten Unterricht unwissender Anfänger viel zu herrliches Instrument, dessengleichen in ganz Deutschland wohl nur in Lilienthal sein möchte, der Universität Helmstedt geschenkt werden möchte, wo es bei dem rühmlichst bekannten Hofrat PFAFF in würdige Hände kommen und bei vorfallenden Gelegenheiten auch zum Besten der Wissenschaft selbst gebraucht werden könnte. Wieviel bei einem so kostbaren Instrument auf eine schonende vorsichtige Behandlung ankomme, brauche ich nicht zu erwähnen.

Ich habe es für meine Pflicht gehalten, Ewr. Exzellenz auf den hohen Wert, den dieses Werkzeug nun hoffentlich erhalten haben wird, aufmerksam zu machen: ich würde mir Vorwürfe machen, wenn ich durch Stillschweigen gewissermassen schuld wäre, dass es nicht so gebraucht würde, wie es sollte, und wie das wissenschaftliche Publikum, das die Existenz eines solchen Instruments kennt, erwartet. Übrigens aber unterwerfe ich die ganze Angelegenheit dem weisen Ermessen eines Hohen Ministerii und werde das Instrument demjenigen gewissenhaft extradieren, der dazu sich legitimieren wird. Sollten Ewr. Exzellenz noch mündliche Verabredung darüber treffen wollen, so bin ich gern zu Befehl.«

Indessen wurde dieser von GAUSS erstattete Bericht ad acta gelegt und

das Instrument anscheinend doch an das Collegium Carolinum abgeliefert, da dies vielleicht schon versprochen war. Man vergleiche noch die Briefe von GAUSS an BESSEL vom 24. Juli 1807 und an OLBERS vom 2. Juli 1805, 6. und 29. Oktober 1807; in letzterem sagt GAUSS: »Es ist leicht möglich, dass dies Instrument nach meiner Abreise hier in sehr schlechte Hände kommt.«

Ausser den bereits genannten Instrumenten erwähnt GAUSS in dem Briefe an OLBERS vom 21. September 1804 (vergl. auch Werke VI, S. 248, 251 und 270) ein von ihm als sehr gut bezeichnetes SHORTsches Spiegelteleskop, das er vom 15. dieses Monats an benutzte und über dessen Herkunft sich nichts feststellen lässt; daneben erwarb er im Jahre 1805 ein RAMSDENsches Fernrohr von etwas über 2½ Fuss Fokallänge (vergl. Brief an OLBERS vom 10. Mai 1805). Er berichtet auch an OLBERS am 30. Juli 1806, dass er durch ZACH ein fünffüssiges Achromat in England auf seine Rechnung bestellt habe, worauf ihm OLBERS antwortete, dass er auf ZACHS Bestellung des Fernrohrs nicht zu sehr rechnen soll, er habe selbst schon vor 4 Jahren ein solches bestellt, und nichts erhalten.

Im einzelnen schreibt er an OLBERS über diese Instrumente am 16. Oktober 1804: »Ich beobachte bei Mondschein weit besser als bei ganz dunkeln Nächten. Mit dem lichtstarken SHORT sehe ich auch bei dem hellsten Mondschein Sterne 9. Grösse ohne Mühe; und wenn ich das Gesichtsfeld mit seinen Grenzen vor mir sehe, so scheint das Auge viel weniger zu ermüden, als wenn ich bloss in schwarze Finsterniss sehe. Haben Sie diese Bemerkung nicht gemacht, oder sehen Sie vielleicht mit Ihrem herrlichen DOLLOND auch in mondlosen Nächten doch den Umfang des Gesichtsfeldes?« und am 25. September 1804: »Mein Kometensucher, womit ich ihn[1]) jetzt wieder sehr gut sehe, da der Mond weiter weg ist (nur am 17., 18. und 21. ging es nicht), kommt mir bei Richtung des Teleskopes, dessen Sucher gänzlich unbrauchbar und dessen Gesichtsfeld nur 25′ 50″ hält, vortrefflich zu statten. Ich brauche fast nicht mehr Zeit, den kleinen Stern ins Feld zu bekommen, als wenn es der Mond wäre.«

Mit den ihm zur Verfügung stehenden Instrumenten beobachtete GAUSS ausser dem bereits oben S. 9 erwähnten Merkurdurchgang im Jahre 1802 (Werke

1) Den Planeten Juno. — BRDL.

VI, S. 231) und einzelnen Sternbedeckungen (Werke VI, S. 258) vielfach die Planeten Ceres, Pallas, Juno, Vesta, sowie den Kometen 1806 I (BIELA).

Als Kreismikrometer diente zu jener Zeit nach den von LACAILLE und BOSCOVICH (um 1740) gemachten Vorschlägen[1]) der Rand des Gesichtsfeldes. Etwa 60 Jahre später verbesserten KÖHLER und J. G. REPSOLD die Beobachtungsmethode durch einen in der Brennebene aufgespannten Messingring[1]). Besonders ausgebildet wurde die Methode durch die zahlreichen Beobachtungen von OLBERS[2]). der ausser dem an vier Fäden befestigten Ringe sich auch einer durch den Kreis gehenden Barre[2]) bediente. Das erste Mikrometer in der heute üblichen Form verfertigte[1]) FRAUNHOFER 1821. — GAUSS scheint jedoch bei seinen Beobachtungen bis in spätere Zeit den Rand des Gesichtsfeldes benutzt zu haben, wie die Notizen im Nachlass und an anderen Stellen bestätigen. Erst in späterer Zeit, Januar 1844 oder etwas früher, erhielt die Göttinger Sternwarte ein MERZsches 6-füssiges Fernrohr mit einem Ringmikrometer mit mehreren Ringen. Notizen darüber finden sich im Nachlass im Beobachtungsbuch Pf, S. 59.

Eine Kreismikrometerbeobachtung der Ceres gelang GAUSS zum erstenmale am 29. August 1804 (vergl. Brief an OLBERS vom 7. September). Ausser dieser beobachtete er im September des genannten Jahres die eben von HARDING entdeckte Juno und zwar sehr fleissig, zunächst bis zum 28. dieses Monats. Dann nahm er davon Abstand, weil ausser den OLBERSschen auch noch gute Meridianbeobachtungen, namentlich von ZACH, vorlagen. Erst als im November die Beobachtungen der Juno spärlicher wurden, beobachtete er sie am 4. Dezember und später einigemale bis zum 20. Februar, wo sie schon sehr lichtschwach war. ZACH erwähnt in der Monatl. Corresp. (Werke VI, S. 263) dass diese Beobachtung überhaupt die letzte in der Opposition war; am gleichen Tage wurde Juno aber auch von OLBERS beobachtet. Von der Vesta erhielt GAUSS sofort nach der Entdeckung einige Beobachtungen, die

1) WOLF, *Handbuch der Astronomie*, Zürich 1892, Bd. II, S. 129; AMBRONN, *Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde*, Bd. II, Berlin 1899, S. 513.

2) Vergl. BESSEL, *Über das Kreismikrometer*, M. C. Bd. XXIV, November 1811, S. 446, sowie die Briefe von BESSEL an GAUSS vom 10. Dezember 1807, von OLBERS an GAUSS vom 12. März und 27. Mai 1807, vom 16. Februar 1821 und besonders die Briefe von OLBERS an BESSEL vom 5. Januar 1807 und vom 9. März 1812.

er zu seiner ersten Bahnbestimmung benutzte. Seine Braunschweiger Beobachtungen der Pallas fallen in die Jahre 1806 und 1807.

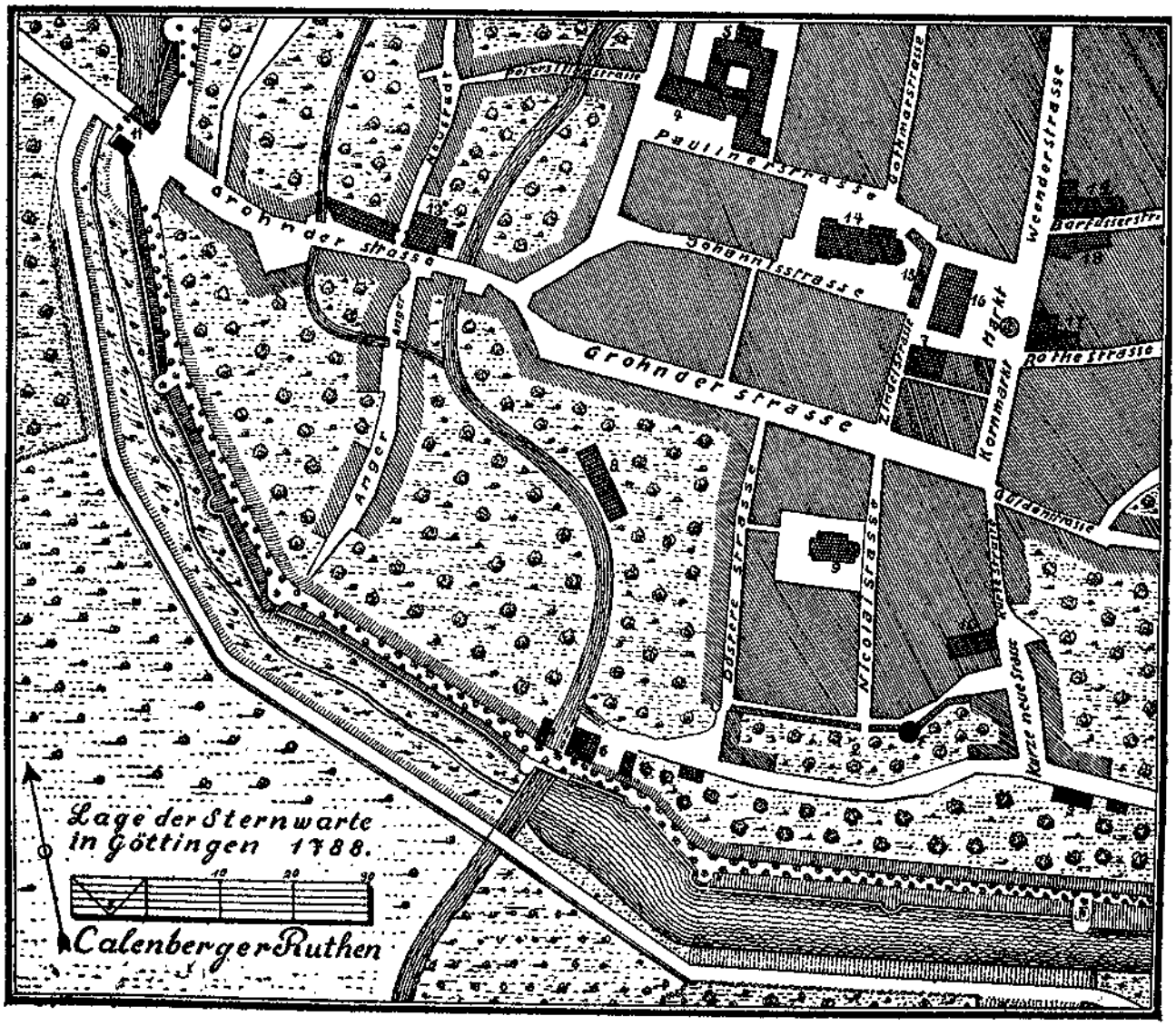
GAUSS' Tafeln für Nutation und Aberration sind im Jahre 1804 entstanden, wie er im September an OLBERS schreibt; sie sind in der Monatl. Corresp. Band XVII (Werke VI, Seite 123) im Jahre 1808 abgedruckt, jedoch für den Druck nach neuen Werten der Konstanten umgerechnet.

2. (erste Göttinger) Periode 1807—1813.

Im November 1807 siedelte GAUSS nach Göttingen über, wo zunächst die alte Sternwarte zu seiner Verfügung stand, während der im Jahre 1803 begonnene Bau der neuen Sternwarte infolge der politischen Verhältnisse ins Stocken geraten war und in den ersten Jahren nach GAUSS Übersiedelung nach Göttingen nur langsam fortschritt. Die alte Sternwarte[1]) war 1734 für JOH. ANDREAS v. SEGNER erbaut worden und lag an der alten Stadtmauer, von der das entsprechende Stück in der jetzigen Turmstrasse, früher »Klein Paris« genannt, nahe der Nikolaistrasse, noch erhalten ist. Von der alten Sternwarte sind keine Überreste vorhanden, doch scheint ein Stück der Stadtmauer, das erneuert ist, ihre frühere Lage zu bezeichnen; sie befand sich 6″,11 nördlich und 28″,43 westlich von der neuen Sternwarte (Mittelpunkt der grossen Kuppel, in der gegenwärtig das grosse Heliometer aufgestellt ist), also in $51^0\,31'\,54''{,}3$ n. B. und $39^m\,44^s{,}35$ östl. v. Greenwich. Im Jahre 1755 erhielt TOBIAS MAYER, 1762 LOWITZ und

1) Vergl. den umstehenden, aus dem 2. Teil des in der folgenden Fussnote genannten Werkes entnommenen Lageplan, sowie die nach einem auf der Göttinger Sternwarte vorhandenen Stich hergestellte Abbildung am Schluss dieses Aufsatzes; auch W. SCHUR, *Beiträge zur Geschichte der Astronomie in Hannover* (Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Berlin 1901, S. 103/104). — Die Legende zum Lageplan ist nach PÜTTER:

1. Das Observatorium.
2. Der ökonomische Garten.
3. Das chemische Laboratorium.
4. Die Universitätskirche.
5. Das Konzilienhaus.
6. Eine der beiden Stadtmühlen.
7. Die Universitätsapotheke.
8. Eines der beiden Brauhäuser.
9. Die Nikolaikirche
10. Die katholische Kirche.
11. Das Grohnder Tor.
12. Das Kommandantenhaus.
13. Die Marienkirche.
14. Die Johanniskirche.
15. Der Fleischscharn.
16. Das Rathaus.
17. Das Kaufhaus.
18. Die Ratsapotheke.


Lage der Sternwarte in Göttingen 1788.
10
20
30
Calenberger Ruthen
Grohnder strasse
Pauline strasse
Johannisstrasse
Weenderstrasse
Barfüsserstr.
Rothe strasse
Nicolaistrasse
Kurze neue Strasse
Auf der Mauer
Arbeiter
Angerstrasse

1764 KÄSTNER »die Aufsicht darüber«[1]). Der letztere gab für die 1765 erschienene *Göttinger Gelehrtengeschichte* von PÜTTER folgende Beschreibung der Sternwarte und der Instrumente:

»Das Observatorium befindet sich am mittägigen Ende der Stadt, so dass ihm die Aussicht nach Mittage zu nur durch die entlegenen Berge begrenzt wird, welche etwa drei Grade vom Horizonte wegnehmen. Nordwärts hat es keine hohen Häuser in der Nähe, dass auch dahin die Aussicht so frei ist, als man zu den auf dieser Seite nötigen Beobachtungen verlangen kann. Bekanntermassen beobachtet man die himmlischen Körper ordentlich nicht, wenn sie dem Horizonte sehr nahe sind, und die Fälle, wo man dazu genötigt ist, ereignen sich sehr selten; das wird die Frage beantworten, welche zuweilen von Neugierigen, die das Observatorium besehen, geschieht: ob es auch hoch genug sei? Wegen der angeführten Lage ist das Observatorium auch von der Unbequemlichkeit anderer Sternwarten, welche auf der Nordseite der Städte liegen, frei, die zuweilen Rauch und dergleichen Hindernisse in der Gegend des Himmels finden, wo die himmlischen Begebenheiten ordentlich vorfallen.

»Zum Grunde des Observatorii hat man einen von den runden Türmen in der Stadtmauer gewählt, welche vor diesem zur Verteidigung dienten. Man hat darauf einen Saal erbaut, wo die Werkzeuge zum Observieren befindlich sind, und auch selbst observiert werden kann. Will man etwas dergleichen unter freiem Himmel verrichten, so lassen sich die Werkzeuge gleich aus dem Saale auf einen Gang schaffen, der ihn rings herum umgibt. Über dem Saale befindet sich noch ein Boden unter dem Dache, wo ein Fenster gegen Mittag noch weitere Aussicht gibt. Unter dem Saale ist ein Stübchen angebracht, welches zur Bequemlichkeit des Beobachters dienen könnte, wenn er die Zeit einer himmlischen Begebenheit abwarten muss. Zu einer ordentlichen Wohnung war der Platz nicht zugänglich.

»Das vornehmste Werkzeug ist ein Mauerquadrant, von JOHN BIRD in London verfertigt und dem zu Greenwich, wie solcher in SMITHS *complete System of optick's* beschrieben wird (B. III, ch. 7), völlig ähnlich. Er hat acht englische Fuss

1) PÜTTER, *Versuch einer akademischen Gelehrtengeschichte*, 1. Teil Göttingen 1765, S. 238. — 2. Teil Göttingen 1788. — 3. Teil von F. SAALFELD, Hannover 1820. — 4. Teil von OESTERLEY, Göttingen 1838. Die beiden letzteren unter dem Titel »*Geschichte der Universität Göttingen*«.

im Halbmesser und ist an einem einzigen grossen Steine so befestigt, dass sich sein Fernrohr, welches ungefähr eben die Länge hat, in der Mittagsfläche dreht; das Fernrohr ist von ausnehmender Güte. Es fasst über 1 Grad. Im gemeinschaftlichen Brennpunkte beider Gläser geht ein Faden senkrecht auf die Mittagsfläche, und auf diesem stehen fünf andere senkrecht, die also Stücke von Stundenkreisen, wie jener ein Stück eines auf die Mittagsfläche senkrechten Kreises, vorstellen. Der mittelste der fünf ist in der Mittagsfläche, die Entfernung jedes Fadens vom nächsten beträgt $7\frac{1}{2}$ Minuten. Man kann also beim Durchgange der Sonne durch die Mittagsfläche zehn Antritte, fünf von jedem Rande an jedem Faden, und zugleich die Höhe der Sonne bequem beobachten. Bei Sternen hat man fünf solche Beobachtungen nebst der Höhe. Die Zeiten gibt eine Uhr an, die gleich am Quadranten steht, dass der Beobachter die Pendelschläge sehen und hören kann. Für grosse Höhen lässt sich eine Klappe über dem Quadranten vermittelst einer Stange, die der Beobachter gleich bei dem Quadranten ergreifen kann, aufstossen, dass man den Himmel gerade über sich entdeckt, und ebenso wieder zumachen. Bei geringen Höhen dient ein Fenster. Vermittelst dieses Quadranten hat der sel. Prof. MAYER ein sehr vollständiges und richtiges Verzeichnis der Fixsterne im Tierkreise verfertigt. Es befindet sich unter den noch ungedruckten Abhandlungen der königlichen Sozietät der Wissenschaften.

»Weil man den Quadranten in seiner jetzigen Stellung nur gegen Mittag zu brauchen kann, so ist am gegenüber stehenden Ende des Saales auch ein Stein in der Absicht gesetzt worden, dass man den Quadranten daran bringen könne, nördliche Höhen damit zu nehmen. Ebendaselbst steht auch noch eine Pendeluhr. Beide Uhren sind von dem geschickten Künstler, dem hiesigen Ratsherrn KAMPE, nach der Art, wie MARINONI *de Spec. Dom.*[1]) die seinige beschreibt, verfertigt. Sie gehen 4 Wochen lang. Eine andere etwas schlechtere Pendeluhr ist auch noch vorhanden.

»Ferner findet sich hier ein beweglicher messingner Quadrant, 1 Fuss im Halbmesser, mit einem Fernrohr von Herrn KAMPE. Im Fernrohr ist ein

1) JOH. JACOB VON MARINONI, *De astronomica specula domestica et organico apparatu domestico libri duo*, Viennae 1745. — BRDL.

Mikrometer vom sel. Prof. MAYER nach seiner Erfindung verfertigt (*Cosmogr. Nachr.* 1748[1]).

»Das grösste vorhandene astronomische Fernrohr ist 12 englische Fuss. Die Gläser sind nebst den Fassungen in England verfertigt. Noch eines ist von 6 Fuss, das eine blecherne, hinten erweiterte Röhre hat, das erweiterte Mikrometer nach des Herrn VON SEGNER Angaben Comm. soc. reg. scient. Goett. tom. I p. 27 zu fassen. Es ist aber gegenwärtig kein Mikrometer dabei. Ein sehr schönes DE LA HIRESches Mikrometer ist von JOHN BIRD auch mit dem Zusatze, den SMITH *System of opticks* art. 87 §. *Lehrbegriff der Optik* III B. 8, C. 138 §. BRADLEYEN zuschreibt, Herr DE LA LANDE aber bei BEVIS zu London, an einem alten HEVELschen Mikrometer gesehen hat (*Astronomie* art. 1878[2]). Es kann an das zwölffüssige Fernrohr gebracht werden. Auf der Erde zu gebrauchen sind zwei vortreffliche Fernrohre von GUISEPPE CAMPANI vorhanden; das längste von 30 römischen Palmen (etwa 20½ Pariser Fuss), das kürzere von 7 Fuss; imgleichen 2 Tubi binoculi. Ausser den nötigen Gestellen zum Gebrauch der langen Fernrohre sind auch noch zwei machinae parallaticae da.

»Der sel. Prof. MAYER hatte sich bekanntermasen sehr mit dem Monde beschäftigt und selbst eine Mondkugel zu verfertigen unternommen. Der Grund davon sollte ein Planisphaerium des Mondes sein, das er nach seinen Beobachtungen gezeichnet hatte, und daraus die Segmente zu Überziehung der Kugel sollten gezeichnet werden. Er hat die meisten dieser Segmente gezeichnet hinterlassen; auch sind einige schon in Kupfer gestochen. Dies alles ist von königlicher Regierung nach seinem Tode gekauft worden und wird auf dem Observatorio verwahrt. Die Zeichnungen vom Monde übertreffen an Richtigkeit und Schönheit alle bisher bekannt gemachten. Zugleich sind durch eben die gnädige Fürsorge viele Bände Manuskripte des sel. MAYER auch zum Gebrauch auf der Sternwarte beibehalten worden, die teils eigene oder zu gewisser Absicht gesammelte Beobachtungen, teils astronomische und auch andere mathematische Untersuchungen enthalten.«

Im zweiten Teil von PÜTTERS *Göttinger Gelehrtengeschichte* (1788), S. 266,

---

1) JOH. TOBIAS MAYER (der ältere), *Beschreibung eines neuen Mikrometers, Cosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748*, von JOH. TOBIAS MAYER besorgt, Nürnberg 1750. — BRDL.

2) In der 3. Ausgabe, 1792, art. 2364 (2. Band, S. 603). — BRDL.

wird mitgeteilt, dass an der Südseite der Sternwarte, und später auch an der Nordseite ein Anbau hergestellt wurde zur Aufstellung der Quadranten, die zur Beobachtung im Süden und Norden gedreht werden konnten. Über die in den Jahren 1765—1788 angeschafften Beobachtungsinstrumente lesen wir bei PÜTTER im wesentlichen:

»1) Ein GREGORIANISCHES Spiegelteleskop von JAMES SHORT, 20 Zoll lang, mit zweierlei Okularröhren; ausser dem daran befindlichen kleinen Spiegel ist noch ein zweiter zu stärkeren Vergrösserungen dabei; ein Geschenk von des verstorbenen Herzogs von YORK königlicher Hoheit.

»2) Eine Uhr mit rostförmigen Pendel, nach HARRISONS Erfindung von JOHN SHELTON zu London. Dass diese Uhr[1]) ihrer Absicht gemäss von Wärme und Kälte ihren Gang nicht merklich ändert, haben beständige Beobachtungen versichert. (KÄSTNER, *Über die Änderungen des Ganges der Pendeluhren im Sommer und im Winter*, Göttingen 1778).

»3) Eine Uhr zum Zählen der Sekunden beim Observieren, wenn man von der ersten zu weit entfernt ist, um die Pendelschläge derselben zu hören; bei jeder Minute tut sie einen Schlag mit einem Glöckchen zur Erinnerung, dass man die Minute aufschreiben muss; von ebendemselben verfertigt.

»4) Ein beweglicher Quadrant von J. SISSON zu London; er hat zwei englische Fuss im Halbmesser und ist sowohl zum Höhenmessen als auch zum Messen der Winkel auf der Erde eingerichtet; er kann zu der letzten Absicht vermittelst Gewinden und eines Bogens horizontal gestellt werden; dabei sind noch drei achromatische Fernrohre. Wenn er horizontal gestellt wird, muss das Fernrohr, das zum Höhenmessen dient, abgenommen, und ein anderes, das man auf seiner Regel neigen kann, daran gebracht werden. Der Rand des Quadranten ist von 10 zu 10 Minuten geteilt, der Vernier gibt 20 Sekunden, und durch die Mikrometerschraube kann man von 4 zu 4 Sekunden angeben. Der Azimuthalzirkel hält 7 Zoll im Halbmesser und ist in halbe Grade geteilt; durch den Vernier erhält man die Winkel von 3 zu 3 Minuten. (Herr DEMAINBRAY, welcher die Aufsicht über das königliche Observatorium zu Richmond hatte, veranstaltete diesen Quadranten auf Hofrat KÄSTNERS

1) Über diese Uhr vgl. die Fussnote S. 52.

Vorstellung, als in des Königs deutschen Landen die geographische Lage einiger Örter durch astronomische Beobachtungen sollte bestimmt werden. So hat sich Professor LICHTENBERG desselben bedient. Man sehe seine Nachricht davon Novi Commentarii Societ. Reg. Scient. T. VII ad. 1776, p. 210)[1]).

»5) Ein Microscopium compositum, Sonnenmikroskop und Camera obscura, von G. ADAMS zu London. Diese Sammlung optischer Werkzeuge beschreibt ihr Verfertiger GEORGE ADAMS, Mathematical Instrumentmaker to his Majesty in seiner *Micrographia illustrata; or the microscope explained*, vierte Ausgabe, London 1771.

»6) Eine kostbare Uhr von JUST. VULLIAMY et Son. Sie hat 4 Paar Zeiger; jedes Paar zeigt zusammengehörig Minuten und Sekunden; zu dem letzten Paar gehört noch ein dritter Zeiger, welcher Achtteile einer Sekunde angibt. Wenn alle Zeiger auf 60 gestellt werden, und die Uhr wird in Bewegung gesetzt, so werden alle Zeiger eines Namens gleichförmig gehen. Die Uhr ist alsdann anzusehen, als wären es vier Minuten- und Sekundenuhren, davon die vierte noch Achtelsekunden angibt. Man kann nun jedes dieser Paare hemmen, ohne dass die anderen im Gange gestört werden, und also dadurch die Augenblicke von vier Beobachtungen hinter einander angeben, ohne zu zählen oder die Zahlen aufzuschreiben.

»7) Ein NEWTONSches Spiegelteleskop von HERSCHEL verfertigt. Der grosse Spiegel hat 10 Fuss Brennweite, 9½ Zoll Öffnung; er wiegt 18 Pfund. Ausser dem Okularrohre zum Gebrauche auf der Erde sind zum astronomischen Gebrauche 8 Okulare dabei, die stärkste Vergrösserung ist etwa 1000 mal im Diameter. Der Mechanismus des Stativs ist ganz ausserordentlich künstlich, das Instrument kann sehr leicht und genau dadurch regiert werden, welches den Gebrauch dieses grossen Instruments sehr bequem macht. Rohr und Stativ sind von Mahagoniholz. Ausser dem Gebrauche wird der grosse Spiegel aus dem Rohre herausgenommen und in einen besonderen Kasten gelegt, in welchem eine messingne Büchse befindlich, worin er so genau passt, dass die Luft durch Ventile herausgetrieben und er so auf die beste Art verwahrt wird. Der Prinzen königliche Hoheiten hatten im Juli 1786 dieses Teleskop

1) GEORG CHRISTOPH LICHTENBERG, *Observationes astronomicae per annos 1772 et 1773 ..... institutae.* — BRDL.

mitgebracht, und Herr HERSCHEL hat bei seinem hiesigen Aufenthalte 1786 zu dessen Aufstellung und Gebrauch selbst Anweisung gegeben.

»Alle diese Stücke von Num. 2 an sind königliche Geschenke; Num. 2, 3, 4, 5, 7, von Sr. Majestät dem Könige, Num. 6 von Ihro Majestät der Königin.

»8) Eine Tertienuhr von J. A. KLINDWORTH zu Göttingen erfunden und gemacht. Sie hat drei Zeiger, einen für die Minuten, einen für Sekunden und einen, der die Tertien angibt. Man kann sie beim Anfange einer Beobachtung in Bewegung setzen und beim Ende hemmen und so die Zeit sehr genau angeben.

»9) Ein beweglicher Quadrant von dem verstorbenen Bauherrn L. KAMPE zu Göttingen. Er hat drei Fuss im Halbmesser; auf dem Rande sind zweierlei Teilungen, eine in 90 Grad, die andere in 96 Teile; jeder Grad ist in 6 Teile geteilt; durch den Vernier erhält man einzelne Minuten und durch die Mikrometerschraube einzelne Sekunden. Von den 96 Teilen ist jeder in 8 Teile geteilt; 17 dieser Teile sind auf dem Vernier in 16 Teile geteilt. Der Azimutalzirkel hält 5 Zoll im Halbmesser und ist in ganze Grade geteilt; durch den Vernier erhält man einzelne Minuten.

»10) Ein achromatischer Tubus von 4 Fuss mit doppeltem Objektiv von DOLLOND, mit einem messingnen Stative.

»11) Ein vortrefflicher achromatischer Tubus von 4 Fuss mit dreifachem Objektive, dessen Öffnung 4 Zoll, von DOLLOND. Diesen Tubus hat der sel. Geh. Sekretär SCHERNHAGEN zu Hannover besessen und das dazu gehörige Stativ dazu machen lassen. Nach dessen Tode ist dieses Instrument von königlicher Regierung für das Observatorium angekauft.

»Die Instrumente Num. 8—11 hat das Observatorium königlicher Regierung zu verdanken. . . . . .«

Hieraus dürfte annähernd der Zustand zu ersehen sein, in dem GAUSS bei seiner Ankunft in Göttingen die alte Sternwarte vorfand, die ihm aus seiner Studienzeit noch wohl in Erinnerung sein mochte. Er schreibt am 5. Januar 1808 an OLBERS: »Ihren Klagen über das den Beobachtungen so ungünstige Wetter muss ich in vollem Masse beistimmen; indessen scheinen Sie in Bremen doch noch beträchtlich begünstigter zu sein als wir hier, wo z. B.

vom 23. November bis 17. Dezember auch nicht ein einziger Abend gewesen ist, wo an Beobachtungen hatte gedacht werden können. Was ich hier in Absicht auf den Kometen[1]) habe tun können, ist also bisher nur sehr wenig; dazu kommt noch, dass ich hier den Zustand der meisten Instrumente noch unter meiner Erwartung gefunden habe. Der an sich schöne grössere DOLLOND ist, wie Sie selbst Sich erinnern werden, ganz erbärmlich montiert, ausserdem ist kein Okular dazu, das zu Kreismikrometerbeobachtungen brauchbar wäre; bisher war nur eine sehr starke Vergrösserung übrig. HARDING hat eine schwächere dazu machen lassen, deren Gesichtsfeld aber zu gross gelassen ist; schon in der Nähe des Randes werden die Fixsterne zu langen Spiessen. Das HERSCHELsche Teleskop tut allerdings herrlichen Effekt, unser Komet hat noch viel Licht darin, aber ich traue der festen Stellung nicht; auch glaube ich eine merkliche Parallaxe zu haben, meine Beobachtung vom 17. Dezember war damit angestellt. Am 29. Dezember versuchte ich es mit einem SHORTschen Spiegelteleskop, welches beinahe so gut ist, wie das, dessen ich mich immer in Braunschweig bediente[2]); das Gesichtsfeld ist ziemlich rein, aber die Montierung ist so äusserst wacklig, dass der leiseste Wind es schon bewegt. Endlich habe ich nun meine Zuflucht zu einem kleinern DOLLOND genommen, womit ich sowohl in Ansehung der Montierung als des rein begrenzten Gesichtsfeldes sehr zufrieden bin, nur ist es für den Kometen jetzt fast etwas zu schwach, das Gesichtsfeld ist 47′, welches mir die Beobachtung sehr erleichtert, da ich in Braunschweig immer mit einem von 25′ mich behelfen musste; für die Asteroiden wird dies Instrument mir künftig recht gute Dienste tun, nur schade, dass es keinen Sucher hat. Doch finde ich die Gegenstände leicht, wenn ich irgend einen Leitstern mit blossen Augen sehen kann.«

Einen, allerdings nicht vollständigen Überblick über die Beobachtungstätigkeit auf der Göttinger Sternwarte gibt neben den noch heute im Inventar der Sternwarte vorhandenen Beobachtungsbüchern (vergleiche die Bemerkungen Werke XI 1, S. 507, sowie weiter unten) das handschriftliche »*Tagebuch der astronomischen Beobachtungen auf der Sternwarte in Göttingen*«, das sich in zwei Bänden und einem kleinen Quartheft im Nachlass befindet und worin die

1) Komet 1807. — BRDL.

2) Vergleiche oben Seite 39.

meisten Beobachtungsergebnisse in fortlaufender Zeitfolge eingetragen sind, zum grossen Teil auch mit den zugehörigen Reduktionen. Während das Heft nur die Zeit vom 1. Januar bis 31. Juli 1808 umfasst, beginnt der erste Band erst mit dem 3. November 1808; im ganzen reicht das *Tagebuch*, mit Lücken in den letzten Jahren, bis April 1822. Über seine Beobachtungen mit den in späterer Zeit angeschafften Fundamentalinstrumenten, den Meridiankreisen und dem Passageninstrument, sowie über die meisten Planeten und Kometenbeobachtungen führte GAUSS besondere Protokolle, die an anderen Stellen des Nachlasses meist auf Zetteln, ebenfalls nicht vollständig, erhalten sind.

Als regelmässiger Beobachter ist vor allem HARDING zu nennen, der bereits 1805 als ausserordentlicher Professor und Inspektor der Sternwarte nach Göttingen berufen war und neben seiner Beobachtungstätigkeit Vorlesungen über die Anfangsgründe der Astronomie, im besonderen aber über Nautik hielt.

Besonders regelmässig sind in das *Tagebuch* die Beobachtungen der Sonne und von Fixsternen mit dem Mauerquadranten eingetragen, die meist von HARDING angestellt sind. Sie dienten zur Zeitbestimmung und zur Bestimmung von Sternörtern, die HARDING zur Herstellung seiner Himmelskarte[1]) und der Sternverzeichnisse benutzte. Ein Bericht HARDINGS darüber befindet sich in der Monatl. Corr. 1810 August; es heisst dort:

»Es war wohl nicht anders zu erwarten, als dass den Pariser Astronomen, welche den ungeheuren Schatz von Sternen in der *Histoire céleste française*[2]) zusammenhäuften, noch mancher Stern von nicht unbedeutender Grösse entgehen musste, und wirklich findet man ausser den von ihnen aufgezeichneten am Himmel noch eine so grosse Menge von der 6., 7., 8. und 9. Grösse, dass ein Beobachter, welcher sich entschliessen wollte, auch diese zu bestimmen, eine reiche Nachlese finden könnte, die einer neuen Ernte gleichen würde. So gern ich mich selbst dieser nützlichen Arbeit unterziehen möchte, um desto mehr muss ich es beklagen, dass die hiesige Sternwarte mit den zu diesem Unternehmen notwendigen Instrumenten nicht versehen ist. Denn wenn sie gleich einen vortrefflichen Mauerquadranten besitzt, dessen Wert durch

1) HARDING, *Atlas novus coelestis*, Göttingen 1822, neue Ausgabe durch JAHN 1856. Zuerst in Lieferungen erschienen; s. auch die wiederholten Mitteilungen darüber in der Monatl. Corr. 1807—1811.

2) JOS. JERÔME DE LA LANDE, *Histoire céleste française, contenant les observations faites par plusieurs astronomes français*, Paris 1801. — BRDL.

die Arbeiten des unsterblichen TOBIAS MAYER hinreichend konstatiert ist, so ist er doch gerade zu diesem Unternehmen nicht ganz geeignet, indem das daran befindliche Fernrohr von nur $1\frac{1}{4}$ Zoll Öffnung[1]) kaum Sterne von der 8. Grösse und auch diese nur bei der heitersten Luft zeigt; man weiss, wie selten die Atmosphäre in unseren Gegenden in einem solchen Zustande ist. —

»Unterdessen habe ich getan, was mir dieser Quadrant möglich macht, und diejenigen bisher noch übergangenen Sterne sechster und siebenter Grösse, die mir bei meinen Nachsuchungen am Himmel vorgekommen sind, näher zu bestimmen gesucht. Das folgende kleine Verzeichnis enthält diejenigen, welche sich auf den zur ersten Lieferung meines Himmelsatlasses gehörenden vier Blättern befinden. Den Besitzern dieser Karten dürfte es vielleicht angenehm sein, die genauere Position dieser Sterne noch früher zu erfahren, als ich sie in dem Vorberichte zu diesem Atlas werde bekannt machen können, und daher erlaube ich mir die Freiheit, Sie um einen Platz in der Mon. Cor. für dieselben zu bitten. Genehmigen Sie es, so werde ich ein ähnliches kleines Verzeichnis solcher Sterne, welche auf den Blättern der vor kurzem herausgekommenen zweiten Lieferung sich befinden, zu gleichem Zwecke nächstens überreichen. Die Sterne dieses Verzeichnisses sind fast sämtlich vier- bis fünfmal, wenige nur einmal beobachtet«[2]).

Mehrere dieser Beobachtungen sind von GAUSS angestellt, im besonderen die in den Monaten März bis Juni 1811, in welcher Zeit HARDING in Paris war, um die Lücken seiner Sternkarten auszufüllen, da er zu diesem Zwecke vom König von Westfalen ein Geschenk von 4000 Francs erhalten hatte[3]).

Daneben wurden am Mauerquadranten die grossen Planeten, der Mond, Vesta und vereinzelt auch Ceres beobachtet, und zwar Vesta häufig von GAUSS. Von allen diesen Beobachtungen scheinen jedoch nur die der Vesta und auch diese nicht vollständig veröffentlicht worden zu sein. Einzelne Beobachtungen

1) In dem zwischen GAUSS und HARDING im Mai und Juni 1805 gewechselten Briefen ist davon die Rede, das Fernrohr des Quadranten durch ein anderes mit einem Objektiv von $3\frac{1}{2}$ Zoll zu ersetzen. Das letztere scheint auch bei DOLLOND bestellt worden zu sein (HARDING an GAUSS, 20. Juni 1805); jedoch befindet sich noch heute das alte Objektiv am Mauerquadranten. — BRDL.

2) An dieser Stelle mag erwähnt werden, dass AUWERS die Beobachtungen von TOBIAS MAYER am Mauerquadranten zur Aufstellung seines Sternverzeichnisses neu reduziert hat (AUWERS, *Tobias Mayers Sternverzeichnis nach den Beobachtungen auf der Göttinger Sternwarte in den Jahren 1756 bis 1760*, Leipzig 1894).

3) Vergl. die Briefe von GAUSS an OLBERS vom 24. Oktober 1810, von OLBERS an BESSEL vom 15. September 1810, GAUSS an BESSEL vom 21. Oktober 1810 und GAUSS an SCHUMACHER vom 16. März 1811.

rühren auch von SCHUMACHER (1809), BESSEL (1810), GERLING (1810—1813), und WACHTER (1811), her; ausser den genannten mögen bei dieser Gelegenheit auch die Namen TIARKS (1808), NICOLAI, SEEBER (1811), ENCKE, HANBURY, WACHTER (1813), MÖBIUS (1814), TITTEL (1815), WESTPHAL (1816), DIRKSEN, MERIAN (1817), POSSELT (1817—1818), erwähnt werden, die sich als GAUSS' Schüler in Göttingen aufhielten.

Neben Vesta konnte Ceres nur unter ganz besonders günstigen Bedingungen und die übrigen kleinen Planeten garnicht am Mauerquadranten beobachtet werden, weil das Fernrohr zu lichtschwach war. GAUSS beklagt sich darüber noch im Briefe an OLBERS vom 20. Juni 1814 mit folgenden Worten: »Das ernstliche Beobachten der Sonnenflecken werde ich doch wohl verschieben müssen .... Am Mauerquadranten ist nichts Würdiges zu machen. Den vorige Woche oft von mir beobachteten kleinen Flecken konnte ich mit dem elenden Fernrohr des Quadranten gar nicht sehen; auch ist die Zeit immer zu kurz, um während des Durchgangs die beiden Ränder und den Flecken mit gehöriger Genauigkeit zu beobachten. Es ist wahr, dass ich den Kreis auf mehr als eine Art zu Deklinationsbestimmungen gebrauchen könnte; allein Beobachtungen und Rechnungen rauben dabei gar zu viele Zeit, und doch kann das Resultat bei weitem nicht den Grad von Genauigkeit haben, den das Heliometer[1]) gibt.«

Als Hauptuhr diente die SELTHONSche Uhr; diese ist ein Geschenk von GEORG III., König von Grossbritannien und Kurfürst von Hannover, und seit dem Jahre 1770 im Gebrauch (Brief an BESSEL vom 12. Mai 1820). Sie geht noch heute und steht auf der Sternwarte im östlichen Meridiansaal[2]). Auf der ersten Seite des zweiten Bandes des *Tagebuchs der Sternwarte* findet sich ein von GAUSS Hand geschriebenes »Register über Stand und Gang der Uhren«; es betrifft den SHELTONSchen Regulator und einen nicht näher bezeichneten Chronometer, wahrscheinlich den BERTHOUDSchen. Das Register umfasst die Zeit von August 1812 bis April 1818. Für die Korrektion der am Mauerquadranten beobachteten Durchgangszeiten wegen Azimut und Neigung des

1) Ein solches hatte GAUSS in diesem Jahre (1814) erhalten; vgl. Werke XI 1, S. 290 sowie weiter unten. — BRDL.

2) GAUSS lobt diese Uhr in den Berichten an das Kuratorium 1816 (Werke XI 1, S. 295 und 310), sowie in den Gött. Gel. Anz. vom August 1818 aus (Werke VI, S. 413), zeigt sich jedoch später in dem Briefe an OLBERS vom 23. August 1819, sowie in dem oben genannten Briefe an BESSEL, mit ihr höchst unzufrieden; vergl. auch unten: 6. Periode, REICHENBACHsche Instrumente.

Quadranten findet sich auf der ersten Seite des *Tagebuchs der Sternwarte* eine Tafel »gültig von 1808 Nov. bis 1810 Jan.« von GAUSS' Hand und eine spätere »gültig von Mai bis 1810 Sept.« von HARDING eingetragen.

Grossen Wert legte GAUSS auf die Zeitbestimmung durch korrespondierende Sonnenhöhen; nach dem *Tagebuch* liessen sich solcher Beobachtungen z. B. für die Zeit Nov. 1808 bis Jan. 1813 an nicht weniger als 212 Tagen feststellen.

Überhaupt war der Sextant ein von GAUSS gern gebrauchtes Instrument; hatte er doch schon in Braunschweig damit beobachtet und besondere Sorgfalt darauf verwandt, möglichst scharfe Beobachtungen damit zu erhalten. Den Ort des Kometen 1811 I hat er an einer Reihe von Tagen durch Abstand von zwei oder mehreren Sternen bestimmt (Werke VI, S. 335).

Manche Stunde verwandte GAUSS auch darauf, Höhe und Azimut irdischer Gegenstände »durch Abstände von der wahren und der im Quecksilberhorizont reflektierten Sonne«[1]) zu bestimmen. Er beabsichtigte, mit HARDING »kleine Exkursionen und Lustpartien mit dazu zu benutzen, die Gegend von Göttingen mit Dreiecken zu überziehen«[1]).

Hierzu sei noch folgende Eintragung von GAUSS' Hand in das *Tagebuch der Sternwarte* vom 20. September 1811 erwähnt:

»Herr Professor HARDING fuhr heute nach dem Meissner, wohin er den BERTHOUDschen Chronometer, seinen TROUGHTONschen Sextanten und meinen Glashorizont mitnahm. Die Absicht war, dort Pulversignale zu geben, welche ich hier, Herr v. LINDENAU auf dem Seeberg und Herr PABST auf dem Inselberg beobachten sollten. Der Abrede nach sollte Herr Professor HARDING heute Abend 5 Signale geben, um $9^h\,30^m$, $9^h\,35^m$, $9^h\,40^m$, $9^h\,45^m$, $9^h\,50^m$ mittlerer Göttinger Zeit. Ich hatte das Vergnügen, mit blossen Augen an der SHELTONschen Uhr sie folgendermassen zu beobachten . . . . . .«

1808 kaufte GAUSS einen neuen Sextanten aus dem Besitze von Dr. HEINECKEN in Bremen, wie er in dem schon genannten Briefe an OLBERS[1]) schreibt.

Im Oktober 1810 reiste er zu einer chronometrischen Längenbestimmung nach Gotha.

Kreismikrometerbeobachtungen der Planeten Ceres, Pallas, Juno, Vesta und einiger Kometen sind ebenfalls im *Tagebuch der Sternwarte* aufgeführt,

1) Brief von GAUSS an OLBERS vom 19. April 1808.

von denen die meisten von GAUSS herrühren; sie scheinen nicht alle veröffentlicht zu sein (vgl. Werke XI, 1). Das gleiche gilt von Sternbedeckungen und Verfinsterungen der Jupitermonde.

Als gelegentlicher Beobachter veränderlicher Sterne ist HARDING bekannt; auch seine Notizen hierzu findet man im genannten *Tagebuch*.

In dem Briefe an OLBERS vom 5. Januar 1808 (oben S. 49) beklagt sich GAUSS, dass kein zur Kreismikrometerbeobachtung taugliches Okular vorhanden sei, woraus hervorgeht, dass er zu diesen Beobachtungen den Rand des Gesichtsfeldes benutzte; vgl. oben S. 33.

Im übrigen war GAUSS' Zeit in dieser Periode (1808—1813) durch den Druck der *Theoria motus* (erschienen 1809) und durch seine umfangreichen Untersuchungen über die Störungen der Pallas in Anspruch genommen (siehe den zweiten Abschnitt dieses Aufsatzes, theoretische Astronomie); im Juli 1813 vollendete er seine Berechnung der allgemeinen Störungen der Pallas.

Doch beschäftigte er sich auch mit einer Reihe von Aufgaben der sphärischen Astronomie und es erschienen die Abhandlungen:

Methodus peculiaris elevationem poli determinandi (1808, Werke VI, S. 37).

Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie (1808, Werke VI, S. 129).

Tafeln für die Mittagsverbesserung (1811, Werke VI, S. 166).

Tafeln für die Sonnenkoordinaten (1812, Werke VI, S. 172),

sowie die schon früher von ihm berechneten

Tafeln der Nutation und Aberration (1808, Werke VI, S. 123).

Über seine Gemütsstimmung im Winter 1809—10, die in ihm keine rechte Lust zu wissenschaftlichen Arbeiten aufkommen liess, klagt GAUSS in seinen Briefen an BESSEL (7. Januar 1810) und an OLBERS (Anfang April 1810). Er hatte im Oktober 1809 seine Frau und im März 1810 seinen Sohn LOUIS verloren; im August 1810 verheiratete er sich wieder, mit MINNA WALDECK, der jüngsten Tochter des Hofrats WALDECK.

3. (zweite Göttinger) Periode, 1813—1816.

Die zweite Periode von GAUSS' Göttinger astronomischer Tätigkeit wird eingeleitet durch die Ankunft zweier bei REICHENBACH bestellter neuer Instrumente, des Repetitionskreises und des Repetitionstheodoliten. Das Repetitions-

oder Wiederholungsverfahren wurde zuerst von TOBIAS MAYER[1]) um 1752 vorgeschlagen, der es auch für ein nautisches Spiegelinstrument[1]) in Vorschlag brachte; ein solches liess zuerst BORDA um 1775 von LE NOIR in Paris herstellen[1]). Bald wurden jedoch die Spiegel fortgelassen und zwei getrennte Fernrohre angebracht[2]). Mit einem solchen Instrument konnten nicht nur Zenitdistanzen, sondern, wie mit einem gewöhnlichen Sextanten, durch Schrägstellung des Kreises auch Distanzen in beliebiger Richtung gemessen und repetiert werden. Die Bezeichnung als BORDAscher Kreis wurde beibehalten, auch nachdem die Spiegel fortgefallen waren. Die LE NOIRschen Instrumente liessen manches zu wünschen übrig, auch waren beim Gebrauch zwei Beobachter nötig. v. ZACH sagt darüber im Anschluss an SCHIEGGS Mitteilungen über seine Vermessung von Bayern (M. C., Bd. 10, S. 353, Oktober 1804):

»Längst schon hatte ich die Meinung geäussert, dass man, wenn englische Künstler sich entschliessen könnten, BORDAsche Vervielfältigungs-Kreise zu verfertigen, diese Werkzeuge nicht nur auf eine solidere und genauere Art erbauen, sondern gewiss noch vieles zu ihrer Vervollkommnung hinzufügen würde. Wenn man die Arbeiten eines LE NOIR gegen die eines RAMSDEN, TROUGHTON, BERGE, CARRY vergleicht, so muss dem allerbefangensten, so wie dem allerungeübtesten Beobachter in die Augen springen, welcher grosse Unterschied in den mechanischen Arbeiten der Künstler dieser beiden Nationen noch herrscht. Immer war ich der Meinung, dass die Beobachtungen nach dem Geiste der MAYER-BORDAschen Methode viel genauer hätten kommen müssen, als ich sie mit so vieler Vorsicht, Anstrengung und Vervielfältigung bisher mit LE NOIRschen Kreisen erhalten habe; offenbar war dieses hauptsächlich den Unvollkommenheiten des Werkzeugs zuzuschreiben, welche nur durch die ängstlichste Sorgfalt, und durch die Menge der Beobachtungen zu bekämpfen waren; ich war aber auch überzeugt, dass man, wenn dieses Werkzeug aus den Händen eines RAMSDEN gekommen wäre, mit viel weniger Mühe, mit einer viel geringern Anzahl von Beobachtungen sehr bald das genaue Resultat erhalten hätte, welches die Methode der Vervielfältigung in der Theorie so genau verheisst«, und S. 355—356: »da von englischen Künstlern noch zur

1) JOH. A. REPSOLD, *Zur Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, 1. Band, S. 77 und Figur 122—124.

2) Ebendort S. 78 und Fig. 125.

Zeit keine BORDAschen Kreise zu erhalten sind, so habe ich den Entschluss gefasst, mir von deutschen Künstlern, welche lange in England, besonders bei RAMSDEN gearbeitet haben, ein solches Werkzeug verfertigen zu lassen. Es war hier keine Wahl zu treffen; ich bestellte daher einen solchen Kreis bei dem geschickten und rühmlichst bekannten Mechanikus BAUMANN in Stuttgart und erwarte dieses Werkzeug, welches seiner Vollendung nahe ist, nächstens. . . . . .

»Deutschland zählt jetzt noch einen andern geschickten Künstler, einen Schüler RAMSDENS. Aus dem Mai-Stück der M. C. 1804, S. 377 haben unsere Leser bereits erfahren, was die Kunst des Artillerie-Hauptmanns REICHENBACH in München zu leisten vermag: Alles, was daselbst von seinen Werkzeugen und in dem im vorigen Hefte abgedruckten Schreiben des Prof. SCHIEGG von seinem BORDAschen Kreise angeführt und belegt wird, übersteigt alles, was bisher von dem Vermögen dieser Art Werkzeuge zu unserer Kenntnis gelangt ist. Wie weit lassen die Beobachtungen des Professors SCHIEGG die mit LE NOIRschen Kreisen angestellten hinter sich!«

Hiernach baute also auch REICHENBACH[1]) schon in jener Zeit derartige Kreise, GAUSS bestellte einen solchen im Jahre 1811 und erhielt ihn Ende 1812. Er ist von ihm in den G. G. A. von 1813, Mai (Werke VI, S. 365) beschrieben. Weitere Einzelheiten gibt GAUSS in LINDENAU und BOHNENBERGERS Zeitschrift für Astronomie, Band V, März-April 1818 (Werke VI, S. 404). An OLBERS schreibt er im Brief vom 8. April 1813 folgendes: »Das Interessanteste, was ich Ihnen von der Göttingischen Astronomie melden kann, ist die Acquisition von zwei REICHENBACHschen Instrumenten, einem 12-zölligen Kreise und einem 8-zölligen Theodolithen. Sie kennen den Pariser 3-füssigen Kreis, also brauche ich Ihnen nicht zu sagen, dass dies wahre Wunderwerke sind. Der Kreis (Preis 830 Gulden) ist Ende November, der Theodolith (Preis 400 Gulden) medio Januar angekommen. Aber ausser der Messung einiger terrestrischer Winkel habe ich mit dem Kreis vor der Mitte März nicht beobachten können. Zuerst war auf dem Transport das Hauptniveau beschädigt, und REICHENBACH musste erst ein anderes schicken. Dann fand sich, dass unsere Sternwarte nirgends fest genug war für das delikate Instrument, und ich musste erst ein

1) Seite 99/109 und Figuren 141 a und b in dem auf voriger Seite genannten Werk von REPSOLD.

besonderes Fundament aufführen lassen, wo ich indessen nur den nördlichen Meridian beherrsche. Schlechtes Wetter machte dann neue Verzögerung, und dann musste HARDING sich erst einige Übung im Einstellen des Niveaus erwerben. Seit einigen Wochen habe ich nun aber einige schöne Beobachtungen gemacht. In 5 Nächten habe ich den Polarstern in der untern Kulmination beobachtet. Hier die Resultate für die Polhöhe[1]):

[1813] März	20.	$51^0\,31'\,54''{,}86 = 10$	Beobb.	
»	22.	$51^0\,31'\,55''{,}74 = 18$	»	Mittel aus 82
»	26.	$51^0\,31'\,57''{,}40 = 18$	»	Beobachtungen
»	31.	$51^0\,31'\,56''{,}25 = 18$	»	$51^0\,31'\,56''{,}25$
April	3.	$51^0\,31'\,56''{,}39 = 18$	»	

Hierbei war die Distanz des Polarsterns vom Nordpol 1812 $= 1^0\,41'\,41''{,}74$ vorausgesetzt. Ihre mir wie gerufen mitgeteilte Angabe ist aber

Paris	$1^0\,41'\,41''{,}19$
Greenwich	$1^0\,41'\,41''{,}00$
»	$1^0\,41'\,41''{,}60$.

Setze ich also $1^0\,41'\,41''{,}26$, so wird die Polhöhe von Göttingen $51^0\,31'\,55''{,}77$, davon geht noch ab $0''{,}16$ Reduktion auf das Zentrum der Sternwarte, also:

Polhöhe der Göttinger Sternwarte $51^0\,31'\,55''{,}61$,
um $1''{,}61$ grösser als MAYERS Bestimmung.

Vorher hatte ich noch beobachtet:

	Polhöhe (des Platzes, wo der Kreis steht)	
März 14.	$51^0\,31'\,56''{,}57$	aus 4 Höhen des Polarsterns ausser der Kulmination, wo die Deklination wenig Einfluss hatte,
» 15.	$51^0\,31'\,56''{,}14$	aus 4 Höhen von β Cephei in der untern Kulmination,
» 17.	$51^0\,31'\,54''{,}77$	aus 6 Höhen dito,
	$51^0\,31'\,55''68$	nur $0''{,}09$ kleiner als die obige Bestimmung.

Welch ein Instrument ist so ein Kreis! Der Theodolith ist ein ebenso

1) Diese stehen auch im Handbuch Ba, S. 25 und sind mit geringen Änderungen in den G. G. A. 1813, S. 747 (Werke VI, S. 366) abgedruckt. — BRDL.

grosses Meisterwerk. Ich bestimme damit einzelne Sekunden. Mit Ungeduld warte ich auf die Zeit, wo der Polarstern in der obern Kulmination beobachtet werden kann. Am Tage ist es meinem Versuche zufolge nicht möglich, aber freilich konnte man dies von einem auch noch so schönen Fernrohr von 16 Linien nicht prätendieren.«

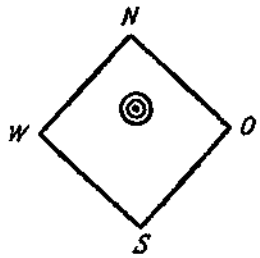
Im gleichen Sinne schrieb er darüber kurz an SCHUMACHER am 3. März 1813. Die auf beide Instrumente bezügliche Eintragung in das *Tagebuch der Sternwarte* lautet:

1812, Nov. 26. »Heute kam endlich der seit länger als einem Jahre bei REICHENBACH in München bestellte Repetitionskreis an. Die beiden Niveaus sind noch nicht in beobachtungsfertigem Zustande, da sie zu viel Luft haben; die eine Röhre hat auch am Ende einen Sprung. Es ist deshalb an REICHENBACH geschrieben.«

1813, Januar 13. »Ankunft des REICHENBACHschen Theodoliten.«

1813, Januar 14. »Wegen der künftig mit dem Theodoliten auf der Sternwarte zu machenden Messungen wurde der Mittelpunkt des Gebäudes durch ein kleines Grübchen in der einen Steinplatte bestimmt. Es ist die Platte, deren Nordecke an das östliche Ende der Treppenöffnung stösst. Auf dieser Platte steht der Mittelpunkt des Gebäudes ab:

von	der	SW-Kante	der	Platte	$335\frac{1}{2}$	mm
»	»	NW-	»	»	»	$235\frac{1}{2}$	»
»	»	NO-	»	»	»	228	»
»	»	SO-	»	»	»	328	»



1813, Februar 14. »Ankunft des Kistchens mit den neuen Libellen.«

Gegenwärtig (seit 1899) befindet sich der Repetitionskreis im geophysikalischen Institute auf dem Hainberge, der Theodolit noch auf der Sternwarte in Göttingen.

Die Ankunft der genannten Instrumente bewirkte, dass GAUSS nunmehr eine lebhaftere Beobachtungstätigkeit entwickelte. Sein Bestreben war auch hier weniger darauf gerichtet, ein umfangreiches Beobachtungsmaterial zu sammeln, als darauf, die einzelnen Beobachtungen auf das vollkommenste Mass

von Schärfe zu bringen. Daher richtete sich sein Augenmerk besonders auf genaue Untersuchung und Prüfung der Instrumente und Beobachtungsmethoden. Im *Tagebuch der Sternwarte* treten von dieser Zeit an die neu angeschafften Instrumente in den Vordergrund, und fast alle Eintragungen rühren von GAUSS Hand her. Der Mauerquadrant wird weniger häufig genannt; es scheint jedoch, dass die Beobachtungen von HARDING zum grössten Teil gar nicht mehr in das *Tagebuch der Sternwarte* eingetragen wurden, sodass ein Überblick über die gesamte Beobachtungstätigkeit auf der Sternwarte daraus nicht zu gewinnen ist. Zur Zeitbestimmung dienten, wie früher, auch korrespondierende Sonnenhöhen.

Die ersten Beobachtungen mit dem REICHENBACHschen Repetitionskreise (vergl. den S. 56—58 abgedruckten Brief an OLBERS) betreffen die Bestimmung der Polhöhe aus dem Polarstern in der untern Kulmination im März und April 1813, die ausserordentlich gut übereinstimmende Ergebnisse zeigten. Die Unsicherheit, die aus einer Verbesserung der Deklination des Sterns herrühren konnte, beabsichtigte GAUSS später durch die Beobachtung der oberen Kulmination zu beseitigen, wozu er aber erst im Januar 1815 kam (Brief an OLBERS vom 7. Januar 1815 und an BESSEL vom 30. Januar 1815).

GAUSS weitere Untersuchungen mit dem REICHENBACHschen »BORDAkreise« ebenso wie mit den später angeschafften REPSOLDschen und REICHENBACHschen Meridiankreisen stehen unter dem Einfluss eines beständigen ins Einzelne gehenden Briefwechsels mit BESSEL. Schon in einem Brief an GAUSS vom 18. März 1808 hatte BESSEL über seine mit unübertrefflicher Gründlichkeit durchgeführte Bearbeitung[1]) der BRADLEYschen Beobachtungen am Mauerquadranten berichtet, aus denen unter anderem seine so berühmt gewordenen Untersuchungen über Refraktion, Präzession und Nutation herausgewachsen sind.

Aus den Beobachtungen von MASKELYNE (1790—1799) und von PIAZZI (1792—1803) ergaben sich auffallende Unregelmässigkeiten in den Werten der Schiefe der Ekliptik, indem die Bestimmungen aus den Sommersolstitien beständig abwichen von denen aus den Wintersolstitien[2]). Im Mittel ergaben

1) *Fundamenta astronomiae p. a. 1755 ex observationibus incomparabilis J. Bradley deducta*, Königsberg 1818.

2) v. ZACH berichtet darüber M. C. XVI, 1807 September, S. 124 ff.

MASKELYNES Beobachtungen aus den Sommersolstitien einen um 4″,6 grösseren Wert als aus den Wintersolstitien, mit Ausnahme des Jahres 1798. Auch PIAZZI fand eine Differenz im gleichen Sinne, aber viel grösser, nämlich 8″,3. Indessen zeigten sich bedeutende Sprünge in den Beobachtungen, die ein bestimmtes Gesetz nicht erkennen liessen. Man suchte vergeblich nach einer Erklärung für diese merkwürdige Erscheinung. Auch kamen andere Beobachter zu einem anderen Ergebnis. PIAZZI sprach die Vermutung aus, der Grund für diese Erscheinung möchte in atmosphärischen Verhältnissen zu suchen sein (M. C. Bd. XVI, S. 129).

BESSEL schreibt darüber schon von Lilienthal[1]) aus in einem Brief an GAUSS vom 20. Juli 1808: »Ich bin nun der, durch die BRADLEYschen Beobachtungen veranlassten, Meinung, dass die Differenzen zwischen den Schiefen der Ekliptik, die man aus den beiden Solstitien findet, nur scheinbar sind, und dass man sich der Wahrheit mehr nähert, wenn man nicht die Sommersonnenwende allein, sondern das Mittel aus beiden nimmt. Ich finde zum Exempel[2]) für den 1. Januar 1755:

aus 7 Sommersolstitien $23^0\,28'\,15''{,}59$
aus 8 Wintersolstitien $23^0\,28'\,15''{,}27$.

Es kommen bei beiden Sonnenwenden einige vor, die sich 2″ vom Mittel entfernen, so dass die Differenz von 0″,32 eigentlich nichts bedeutet. Der Unterschied meiner Refraktionen von den BRADLEYschen ist nicht (wenigstens für diese Höhen) von Bedeutung und er kann es keineswegs erklären, dass MASKELYNE jetzt mit demselben Instrumente andere Resultate findet; mir scheint dieses einen Beweis für die Mortalität der Mauerquadranten abzugeben. Man muss freilich, um meiner Meinung Eingang zu verschaffen, annehmen, dass die Differenzen, die PIAZZI findet, zum Teil von einer unrichtigen Annahme der Polhöhe, die von französischen Astronomen gefundenen aber von der schlechten Beschaffenheit der von diesen gebrauchten Instrumente, herrühren. Es könnte z. B. möglich sein, dass die BORDAschen Kreise, etwa wegen einer Federung, oder wegen des toten Ganges einer Schraube, alle Zenitdistanzen

1) BESSEL war Anfang 1806 als Nachfolger von HARDING an die Lilienthaler Sternwarte des Amtmanns SCHROETER übergesiedelt.

2) Aus BRADLEYS Beobachtungen. — BRDL.

um einige Sekunden zu klein angäben, und dass diese Fehler, die sich bei den Unterschieden zwischen beiden Solstitien vervierfachen, die wirkliche Auflösung des Rätsels enthielten. Ich habe Fehler bei astronomischen Instrumenten gefunden, die vielleicht noch versteckter liegen, und wovon ich Sie heute, aus Mangel an Zeit, nicht unterhalten kann. Indess verdient diese Mutmassung vielleicht, dass man darauf achte; um aber die Frage zu entscheiden, werde ich mir wahrscheinlich selbst einen Kreis bei REICHENBACH bestellen, der vortrefflich und verhältlich wohlfeil arbeiten soll.« Er fand die Gelegenheit, selbst hierüber Beobachtungen anzustellen, nachdem er nach Königsberg berufen war (Mai 1810), um dort die neue Sternwarte zu bauen und zu übernehmen. Sein erster Versuch, das Wintersolstitium 1813 mit dem 25 zölligen Meridiankreise von CARY zu bestimmen, scheiterte daran, dass die Ablesungen infolge der Einwirkung der Sonnenwärme bis auf 10″ abwichen, weshalb er sich eine Art Schirm gegen die Sonnenwirkung besorgte[1]).

Auch GAUSS reizte die Aufgabe, eine Erklärung für diese Unstimmigkeiten zu finden; nachdem er bereits, wie oben angegeben, die Polhöhe aus dem Polarstern ermittelt hatte, bestimmte er die Schiefe der Ekliptik aus Sonnenbeobtungen am REICHENBACHschen Repetitionskreis während des Sommer- und Wintersolstitiums 1813, wozu er in der Zwischenzeit viele sorgfältige Voruntersuchungen mit dem Kreise ausgeführt hatte. Die im *Tagebuch der Sternwarte* ausgeführten Reduktionen der ersten Sommerbeobachtungen ergaben[2]):

1813 Juni	18.	$23^0\,27'\,52\overset{''}{,}09$	Juni	26.	$23^0\,27'\,47\overset{''}{,}56$
	19.	52,23		27.	52,82
	23.	52,78		29.	52,78
	25.	52,18		30.	49,73.

Er schreibt hierauf am 2. Juli 1813 an OLBERS: »Die Resultate meiner ersten mit dem REICHENBACHschen Kreise angestellten Beobachtungen des Polarsterns[3]) werden Sie in No. 75 unserer Gel. Anzeigen[4]) gelesen haben. . . . . In der letzten Zeit habe ich mit dem Kreise das Solstitium

1) Brief an GAUSS vom 30. Dezember 1813.

2) Aus der im *Tagebuch der Sternwarte* ausgeführten Reduktion der Beobachtungen geht allerdings nicht sicher hervor, ob dies die endgiltigen Werte sind.

3) Siehe auch oben S. 57. — BRDL.

4) Werke VI, S. 366. — BRDL.

beobachtet. Es ist doch sonderbar, dass auch aus diesen Beobachtungen, die aus α Ursae min. bestimmte Polhöhe zu Grunde gelegt, die Schiefe der Ekliptik ungefähr ebenso folgt, wie sie Hr. v. ZACH aus den Sommersolstitien gefunden hat, etwa 6″ grösser, als man sie im Mittel anzunehmen pflegt. Ich werde indess auf meine Beobachtungen nicht eher Gewicht legen, als bis sie ihre Selbständigkeit erhalten haben, also bis ich wenigstens auch die obere Kulmination des Polarsterns und das Wintersolstitium observiert habe. Es ist mit dieser Erscheinung doch sonderbar. Jede Nachlässigkeit des Beobachters wirkt in diesem Sinn, wenn die Ebene des Instrumentes nicht gehörig vertikal, oder die Gesichtslinie nicht gehörig berichtigt ist, oder die Beobachtung zu weit vom Vertikalfaden entfernt gemacht wird, oder wenn man bei Reduktion der Zenithdistanzen auf die in der Kulmination die Glieder der 4. Ordnung vernachlässigt. Alles dies findet aber bei den hiesigen Beobachtungen keine Anwendung. BESSEL findet zwar aus BRADLEYS Beobachtungen Sommer- und Wintersolstitien übereinstimmend, allein Mauerquadranten können bei einer so delikaten Untersuchung wohl nichts entscheiden. Wäre das Faktum gewiss und von Refraktion unabhängig, so würde man schliessen müssen, dass der Schwerpunkt der Sonne etwa um $\frac{1}{300}$ des Sonnendurchmessers unterhalb des Sonnenmittelpunktes läge, eine sehr leicht mögliche Sache, wenn die Sonne nur einigermassen aus heterogenen Teilen besteht[1]). Was würde nicht ein REICHENBACHscher Kreis in der südlichen Hemisphäre für Aufschlüsse geben können!«

Über seine Winterbeobachtungen berichtet er sodann an OLBERS am 20. Januar 1814: »Das Wintersolstitium hat mir eine um 14″ kleinere grösste Deklination der Sonne gegeben als das Sommersolstitium, die Beobachtungen unter sich stimmen vortrefflich überein. Liegt dies am Instrument, so kann ich es nur auf die Sonnenwärme schieben, die ich nächsten Sommer vom Instrument ganz abzuhalten suchen werde; immer ist es sonderbar, dass der Einfluss so konstant ist. Bei ZACHS Beobachtungen, unter uns, vermute ich, liegt ein Teil der Unterschiede daran, dass er die Gesichtslinie des Fernrohrs

1) In dem Briefe an OLBERS vom 13. September 1813 scheint GAUSS diese Vermutung wieder aufzugeben, weil sonst die aus den Merkurdurchgängen folgenden Werte der Knotenlänge der Merkurbahn auch Differenzen zeigen müssten; in einem weiter unten abgedruckten Briefe an OLBERS vom Mai 1819 kommt er jedoch wieder darauf zurück. — Vergl. auch Werke VI, S. 395—396. — BRDL.

nicht mit der Ebene des Instruments parallel gemacht hat; ich schliesse dies aus Äusserungen des Herrn v. LINDENAU, denen zufolge ZACH in dem Irrtum steht, dass diese Berichtigung bei astronomischen Beobachtungen nicht nötig sei; an meinem Kreise, wie ich ihn erhielt, war die Korrektion gross, und dass v. ZACHS Kreis auch einer beträchtlichen Korrektion bedürfe, ist mir daraus wahrscheinlich, weil er die Deklination von α Bootis um 5″ grösser gefunden hat als POND.«

Worauf OLBERS am 26. Februar antwortet: »Mit den Solstitien ist es doch eine eigene Sache, ob ich gleich noch immer zu glauben geneigt bin, dass die Winter- und Sommerschiefe der Ekliptik gleich sei. Noch weniger glaube ich mit LINDENAU an eine Verschiedenheit der südlichen und nördlichen Neigungen der Planetenbahnen, unabhängig von den Perturbationen. Die verschiedene Temperatur einzelner Teile unserer Messinstrumente wird, fürchte ich, immer vorzüglich den Sonnenbeobachtungen Grenzen setzen. — In Paris konnte man mit den Sonnenbeobachtungen bei dem REICHENBACHschen Kreise anfangs garnicht zurecht kommen, bis man alle Strahlen, die nicht aufs Objektiv fielen, möglichst abhielt. Aber lässt sich wohl alle partikuläre Erwärmung einzelner Teile des Instruments gänzlich vermeiden?«

Bedeuten z_s und z_w die Zenitdistanzen der Sonne im Sommer- und Wintersolstitium, φ die Polhöhe und ε die Schiefe der Ekliptik, so ist bekanntlich

$$z_s = \varphi - \varepsilon$$
$$z_w = \varphi + \varepsilon,$$

sodass die Beobachtungen der Sonne allein φ und ε ergeben. Setzte man aber für φ den aus Fixsternbeobachtungen, besonders des Polarsterns, gefundenen Wert, so ergab sich die erwähnte Differenz in ε. Daher schreibt GAUSS an BESSEL am 18. (28?) Mai 1814: »Die Zeit wird mir heute zu kurz, um mich noch über einiges den Repetitionskreis betreffendes mit Ihnen zu unterhalten. Auch meine Beobachtungen geben die Sommerschiefe grösser als die Winterschiefe, oder wenn Sie lieber wollen, die Sonne gibt immer (auch in den Äquinoktien) die Polhöhe kleiner als der Polarstern. Wäre das Faktum gewiss und von Refraktion unabhängig, so würde folgen, dass der Schwerpunkt der Sonne mit dem Mittelpunkt nicht zusammenfällt[1]); allein ich traue den

1) Siehe auch S. 62.

Beobachtungen nicht, solange die Teile des Instruments von der Sonnenwärme stets affiziert werden. Geben Sie mir doch eine kleine Beschreibung Ihres Schirmes. Sonderbar ist es immer, dass die Wirkung so gleichförmig in einem Sinne sein soll; aber von meinen Beobachtungen wenigstens kann ich versichern, dass andere Quellen von Fehlern, die auch immer in diesem Sinne wirkten (z. B. Nichtparallelismus der Gesichtslinie mit der Ebene, biquadratischer Teil der Reduktion auf die Kulmination), ausgeschlossen sind. Doch ein andermal mehr davon.«

Die Aufklärung dieses Umstandes beschäftigte GAUSS (und andere) mehrere Jahre hindurch und gab ihm Veranlassung, sich auch mit der Theorie der Refraktion zu beschäftigen, um so mehr, als auch die Polhöhenbestimmungen aus Fixsternen Differenzen zeigten; so schreibt er an OLBERS am 23. April 1814: »Es ist sonderbar, dass unser Kreis auch durch Fixsterne auf der Südseite des Zenits, wenn ich deren Deklinationen nach POND annehme, einige Sekunden weniger für die Polhöhe gibt als der Polarstern. α Orionis, α Canis min. und α Leonis gaben gut übereinstimmend $51^0\,31'\,52''{,}5$, der Polarstern $51^0\,31'\,55''{,}5$ (Sonne im Sommer etwa $49''$, im Winter $51''$). Ich werde bald anfangen eine Reihe von Beobachtungen zu machen, um die Refraktion unabhängig von fremden Bestimmungen abzuleiten. Es scheint hier immer noch eine Nachlese zu halten zu sein. Dass BESSEL sich nur an das MARIOTTESche Gesetz hält, ohne auf die Wärmeabnahme Rücksicht zu nehmen, die doch ein unbezweifeltes Faktum ist, will mir nicht ganz gefallen.«

In dem Briefe an OLBERS vom 31. Dezember 1814 sagt GAUSS, er habe »jetzt einen sehr zweckmässigen Schirm[1]) angebracht, wodurch alles Licht ausser dem aufs Objektiv fallenden völlig abgehalten wird.« Allein der Erfolg blieb ganz der alte und bestätigte sich weiter nach einem weiteren Brief an OLBERS vom 7. Januar 1815.

REICHENBACH[2]) meinte, dass die Biegung des Fernrohrs einen merklichen Einfluss auf die Beobachtungen haben könne; GAUSS machte entsprechende Untersuchungen durch Anbringung eines Gewichtes[3]); doch konnte hierdurch auch höchstens ein Teil des Unterschiedes erklärt werden (vergl. die Briefe

1) Ebenso in dem Briefe an BESSEL vom 30. Januar 1815, sowie Werke VI, S. 383—384.

2) Brief von GAUSS an OLBERS vom 27. November 1815.

3) Vergl. Werke VI, S. 400.

an OLBERS vom 15. Februar und 28. April, sowie an BESSEL vom 5. September, abgedruckt S. 67, und den Brief von BESSEL an OLBERS vom 25. Juni 1817.)

Dagegen meint BESSEL[1]) in seinem Brief an GAUSS vom 16. Februar 1815, dass nach seinen scharfen Reduktionen, besonders für Refraktion, aus den Beobachtungen von BRADLEY, MASKELYNE, PIAZZI, POND und ihm selbst übereinstimmende Werte der Schiefe aus Sommer- und Wintersolstitium hervorgehen und fügt hinzu: »Dagegen steht nur das Zeugnis der Wiederholungskreise und wie ich glaube nur das der kleineren.« In dem Brief vom 17. Juli 1815 gibt BESSEL das Mittel für die mittlere Schiefe aus 15 Beobachtungen des Sommersolstitiums mit $23^0\,27'\,46''{,}95$ an und fügt hinzu: »Im vorigen Jahre fand ich

zur Zeit des Sommersolstitiums $23^0\,27'\,47''{,}65$
» » » Wintersolstitiums 23 27 47,35.

Ich gestehe Ihnen, dass mir eine Übereinstimmung bis auf einen Teil der Sekunde nicht unerwartet war.« Auch BESSELS spätere Beobachtungen zeigten Übereinstimmung. Er schreibt noch am 1. März 1818 an GAUSS: »Auffallend ist doch die Beständigkeit meines Kreises[2]); der grösste Unterschied einer der acht beobachteten Sonnenwenden vom Mittel aus allen ist noch nicht $0''{,}4$.«

Bis in das Frühjahr 1818 zog sich die Diskussion zwischen GAUSS und BESSEL über diese Frage hin; die Beobachtungen beider zeigten beständig die gleichen widersprechenden Ergebnisse, ohne dass es gelang, das Rätsel zu lösen. An OLBERS berichtet GAUSS noch häufig darüber, während der Briefwechsel mit BESSEL etwas sparsamer wird. BESSELS Beobachtungen gaben auch späterhin das gleiche Ergebnis.

Wir nehmen hier die spätere Entwicklung dieser Angelegenheit vorweg. Nachdem GAUSS' Beobachtungen mit dem Repetitionskreise auf der neuen Sternwarte wieder zu dem früheren Ergebnis geführt hatten, schrieb er am 2. August 1817 an OLBERS: »Ganz bin ich mit Ihrem Urteil einstimmig über die absolute Genauigkeit der Beobachtungen von POND. Mir deucht, dass Ihre Bemerkung auch auf unseres BESSELS Beobachtungen zum Teil Anwendung findet, und es scheint mir wenigstens sehr gewagt, wenn er seine Polhöhe auf $0''{,}25$

1) Vergl. auch *Auszüge aus mehreren Briefen des H. Prof. Bessel* ..... Zeitschrift für Astronomie, 1. Bd., S. 161 (BESSELS Werke III, S. 297) und 2. Bd., S. 130 (nicht abgedruckt in den Werken).

2) Des CARYschen. — BRDL.

zuverlässig hält. Wenn wir, anstatt zu sagen, ich weiss keinen bestimmten Fehler an meinem Instrumente nachzuweisen, sagen wollen, das Instrument hat durchaus keinen Fehler, so haben wir, wenn nun auch die Beobachter mit REICHENBACHschen Repetitionskreisen in demselben Tone sprechen, schneidende Gegensätze und ein astronomisches Schisma. In der Tat gibt mein Kreis fortwährend und entschieden die Polhöhe aus Sonnenbeobachtungen 4″—5″ kleiner als aus Beobachtungen des Nordsterns, und ich bin jetzt durchaus ausser Stande, am Instrumente eine konstant wirkende Ursache zu entdecken, die Verminderung der Zenithdistanzen bewirkte. (Meine mit dem angeschraubten neuen Gewicht[1]) gemachten Beobachtungen geben aus dem Polarsterne, 158 Beobachtungen, Polhöhe $51^0\,31'\,49''{,}3$; genau ebenso viel gibt die Übertragung von der alten Sternwarte, obgleich dort mit dem angesteckten Gewicht beobachtet war; über 200 Sonnenbeobachtungen in Solstitiis geben mit CARLINIS Schiefe 4″, mit BESSELS Schiefe 5½″ weniger.) Aus den Ofener Beobachtungen folgt in demselben Sinn etwa halb soviel, aus den Königsberger nichts; eines von den drei Instrumenten kann einmal nicht recht haben, ohne dass zwei Unrecht haben. Bei Abwägung der Wahrscheinlichkeit werden immer subjektive Rücksichten influieren, und in der Tat sehr natürlich, weil man sein eigenes Instrument am besten kennt, und die Unmöglichkeit, die Unterschiede aus dieser oder jener Ursache zu erklären, am eigenen Instrumente lebendiger anschaut, als am fremden. Es wäre wohl der Mühe wert, dass ein geübter Beobachter mit REICHENBACHschen Kreisen ein Jahr auf dem Kap fleissig Sonne und südliche Zirkumpolarsterne beobachtete. Dies würde uns vielleicht manchen Aufschluss geben. Überhaupt tun zwar die Regierungen jetzt viel für Astronomie durch Erbauung von Sternwarten; aber die Ausrüstung astronomischer Reisen ist seit geraumer Zeit ganz aus der Mode gekommen«, worauf OLBERS am 16. August antwortet: »Dass auch unseres BESSELS Beobachtungen, ihrer schönen Übereinstimmung untereinander unerachtet, in Ansehung ihrer absoluten Genauigkeit doch zweifelhaft bleiben, darin stimme ich Ihnen vollkommen bei. Wahrscheinlich werden Sie schon wissen, dass LITTROW aus BESSELS Beobachtungen die Deklination von 23 Sternen abgeleitet hat, und sie alle etwa 3″ südlicher findet, als das Mittel aus PIAZZI, ORIANI und POND, die nahe miteinander übereinstimmen. Entweder

1) Siehe S. 64 und sonst.

gaben also die Instrumente dieser Astronomen alle Zenithdistanzen zu klein, oder BESSELS Kreis alle zu gross. Sollten diese Unterschiede allein in Fehlern der Messinstrumente liegen? Oder kann auch etwas auf die meteorologischen Werkzeuge, die Art ihrer Aufstellung und Benutzung bei der Refraktions-Verbesserung ankommen? Sollte es gar möglich sein, dass Lokalitäten der Sternwarten und ihrer Umgebungen Einfluss auf die Konstante der Refraktion hätten?«

Im Herbst 1817, nachdem GAUSS in der Zeitschrift für Astronomie einen längeren Aufsatz über diesen Gegenstand veröffentlicht hatte (Werke VI, S. 393), sprachen sich GAUSS und BESSEL über diesen Gegenstand noch folgendermassen aus. GAUSS schreibt am 5. September 1817: ». . . . . so beschränkt sich all mein Beobachten auf den 12-zölligen Repetitionskreis. Ich habe damit das Sommersolstitium ganz nach Wunsch beobachtet; früher hatte ich schon eine schöne Reihe Beobachtungen der untern Kulmination des Polarsterns. Bei allen Beobachtungen war das Gewicht am Fernrohr abgenommen und statt dessen ein anderes an den Alhidadenkreis geschraubt; allein in den Resultaten hat dies gar keine Änderung hervorgebracht. Eine merkliche Biegung des Fernrohres findet also nicht statt, und die Aussicht, dadurch den vielbesprochenen Unterschied der Zirkumpolar- und Sonnenbeobachtungen zu erklären, fällt also weg. Ich bin durchaus ausser Stande, an dem Instrumente eine Ursache anzugeben, die stets Verminderung der Zenithdistanzen hervorbringen müsste. Die Hauptmomente meiner Beobachtungen sind folgende; eine etwas detailliertere Angabe werden Sie nächstens in der Zeitschrift finden. . . . .«

GAUSS hatte in dem Briefe an OLBERS vom 2. August 1817 bemerkt, dass es ihm sehr gewagt schiene, wenn BESSEL seine Polhöhe auf 0″25 für zuverlässig hielte (oben S. 65). OLBERS glaubte, vom Inhalt dieses Briefes BESSEL vertraulich Mitteilung machen zu müssen; er tat dies am 2. November und fügte hinzu: »Sie werden sich, lieber BESSEL, von dieser Mitteilung, da ich keine Erlaubnis dazu habe, nichts merken lassen; ich habe sie aber hauptsächlich deswegen gegeben, weil sie Ihnen vielleicht einen Wink gibt, woher ein, mir bisher ganz unbekanntes Stillschweigen von GAUSS über Ihre letzten Arbeiten rühren mag, worüber Sie sich beklagen. Es wäre mir sehr leid, wenn zwischen zwei Männern, die ich am mehrsten liebe und ehre und ohne

Bedenken für die grössten deutschen Astronomen und Mathematiker halte, irgend eine dauernde Kälte stattfinden sollte.«

Hierauf schrieb BESSEL am 18. November desselben Jahres an GAUSS: »Ihr Brief urteilt recht und billig über den streitigen Punkt. Das subjektive Urteil leugne auch ich nicht, in sofern es nämlich nicht auf der Voraussetzung beruht, dass andere, die etwas anderes finden, dieses verschuldet haben. Diese Voraussetzung ist, wie ich Ihnen, teuerster Freund, wohl nicht zu versichern brauche, nie die meinige gewesen, wenn es darauf ankam, die Beobachtungen von Ihnen, POND und anderen unter einander oder mit den meinigen zusammenzuhalten. Von dieser Sünde kann ich mich frei erklären, wenn ich gleich die Überzeugung habe, dass nicht alle Beobachter im Stande sind, die gehörige Vorsicht anzuwenden. — Wenn ich anfangs, als ich die starken Unterschiede meiner Beobachtungen von andern noch nicht kannte, ohne eine weitere Bemerkung äusserte, meine Polhöhe scheine bis auf 0″,25 richtig zu sein, so, beruhte dies nur auf der vollkommenen Harmonie, aller aus meinen Beobachtungen gezogenen Folgerungen unter sich, wie ich auch angegeben zu haben glaube. In dieser Harmonie unter sich stehen auch meine Beobachtungen nicht allein, sondern sie stehen den BRADLEYschen zur Seite, und ich glaube, es war nicht ganz ohne Grund, wenn ich, in einem Briefe, den LINDENAU, wenn ich nicht irre, hat abdrucken[1]) lassen, sagte, dass ich der Übereinstimmung lieber traue als der Abweichung, und deshalb die Abstände beider Wendekreise vom Äquator als gleich annähme. — Jetzt aber haben sich so starke Unterschiede gezeigt, dass wir sehr Unrecht haben würden, wenn wir uns beruhigen wollten. Es ist nicht sowohl ein Streit der Beobachter als ein Streit der Instrumente; dass diese allein Schuld an dem Unterschiede sind, ist klar, wenn man sieht, dass alle kleinen Repetitionskreise, alle grossen und BRADLEYS Quadrant und mein Kreis besondere Klassen bilden. Ihr Urteil, dass die kleinen Kreise nicht den grösseren nachzusetzen sind, weil sie kleiner sind, ist unbestreitbar; wenn ich sie nachsetzte, so war es nur, weil jene der Übereinstimmung näher kamen. Allein ich weiss auch wohl, dass die Übereinstimmung zweier Instrumente, noch weniger also wohl eines Instruments mit einer angenommenen Hypothese, nicht entscheidend ist. — Die Zeit muss und wird die Rätsel, die man nicht leugnen kann, gewiss aufklären.

1) Siehe Fussnote 1) auf Seite 65. — BRDL.

Dass Ihre Hoffnung wegen des Gegengewichts getäuscht ist, ist zu bedauern, da die Sache dadurch noch verwickelter wird. Sollte BOHNENBERGER Recht haben, wie es gerade nicht unwahrscheinlich sein würde, wenn wirklich eine kleine Beweglichkeit der Achse stattfände, so müsste sich dieses, falls ich übrigens seine Äusserung recht verstanden habe, sehr leicht ausmachen lassen, wenn man die Nonien vor jeder Beobachtung abläse oder — doch Sie besitzen selbst einen Kreis und ich keinen!

»Wir gewinnen offenbar, wenn wir die Instrumente in gewissen Beziehungen immer schärfer prüfen; wir werden dadurch von den möglichen Fehlerquellen immer mehrere ausschliessen. Aus diesem Grunde habe ich die Verwendung einiger Wochen nicht gescheut, um die Teilungen meines Kreises aufs Neue zu untersuchen.«

Die Anspielung auf BOHNENBERGER in diesem Briefe bezieht sich auf dessen Vermutung, dass eine durch die Schwerewirkung verursachte Exzentrizität der Repetitionskreise den Unterschied hervorbringen könnte[1]). Hierdurch schienen sich in der Tat die Differenzen zu erklären, wenigstens wurde dadurch zunächst eine Fehlerquelle festgestellt, die als deren Ursache gelten mochte. Nach weiteren sorgfältigen Untersuchungen schreibt GAUSS an BESSEL am 25. März 1818: »Für die Beobachtungen der letzten Wintersonnenwende habe ich die Klemme am Kreise an der Objektivseite anbringen lassen[2]); die Beobachtungen sind zwar nicht zahlreich, scheinen aber doch anzuzeigen, dass der von BOHNENBERGER relevierte Umstand nicht ohne Grund ist. Ich gebe Ihnen meine Beobachtungen zu eigener Reduktion nach beliebigen Elementen und füge nur das Resultat bei, welches ich selbst nach CARLINIS Refraktions- und Sonnentafeln erhalten habe« . . . . folgen die Beobachtungen . . . . . »Nach CARLINIS Schiefe der Ekliptik und unter Voraussetzung, dass die Zenithdistanzen bei der alten Lage der Klemme der Korrektion $Q \sin z$, bei der neuen $-Q \sin z$ bedürfen, stehen meine Resultate so:

Polhöhe Nordstern (nach Ihren Tafeln)	$51^0\,31'\,49''{,}30 - 0{,}644\,Q$
Sommersolstitium von 1817	$45{,}21 + 0{,}472\,Q + d\varepsilon$
Wintersolstitium von 1817	$48{,}26 - 0{,}966\,Q - d\varepsilon$.

1) BOHNENBERGER, *Zusatz zu dem Schreiben des Herrn Hofrat Gauss*, Zeitschrift für Astronomie, Bd. 4, Juli-August 1817, S. 141. — Vergl. auch *Auszug aus einem Schreiben des Hrn. Prof. Bessel*, ebendort Bd. 5 (1818), S. 267 (BESSELS Werke II, S. 8).

2) Zur Prüfung von BOHNENBERGERS Hypothese. — BRDL.

Mein Wintersolstitium von 1814 haben Sie selbst, aber wie ich glaube nach andern Refraktionstafeln berechnet. Dürfte man annehmen, dass Q damals denselben Wert hatte wie 1817 (der Kreis ist aber mittlerweile auseinander genommen gewesen), so scheint die Vergleichung beider Wintersolstitien ungefähr $Q = 2''{,}5$ zu geben (ich werde aber diese Rechnung erst genau machen müssen). Dann würde der Nordstern noch etwa $1\frac{1}{2}$ Sekunden mehr geben als die Sonne. Dies kommt nahe mit dem überein, was ORIANI und LITTROW mit dreifüssigen Kreisen gefunden haben.«

Die interessante Diskussion zwischen beiden über diesen Gegenstand schliesst mit diesem Briefe; nur am 1. April 1819 stellt BESSEL in einem Briefe an GAUSS nochmals seine übereinstimmenden Ergebnisse von 1814 bis 1818 zusammen. In dem Briefe an OLBERS vom 31. März 1818 stellt GAUSS fest, dass seine Beobachtungen des letzten Wintersolstitiums der BOHNENBERGERschen Hypothese günstig sind, dass diese aber nur einen Teil des beobachteten Unterschiedes der Polhöhe aus Stern- und Sonnenhöhen erklärt.

Die nun erschienene BESSELsche Bearbeitung der BRADLEYschen Beobachtungen[1]) und GAUSS' Beschäftigung mit dem inzwischen (April 1818) in Göttingen eingetroffenen REPSOLDschen Meridiankreise gaben jetzt einen neuen wichtigen Stoff zur Unterhaltung und auch im Briefwechsel mit OLBERS tritt die so lange behandelte Frage der Solstitien in den Hintergrund. GAUSS scheint nun auch seine Beobachtungen mit dem Bordakreise aufgegeben zu haben. Es begegnete ihm wohl hier zum erstenmale, dass eine von ihm begonnene Untersuchung fehlschlug, während sie von anderer Seite mit Erfolg durchgeführt wurde. Der Grund lag in der Mangelhaftigkeit seiner instrumentellen Hilfsmittel und er mag es schwer empfunden haben, dass seine Sternwarte noch weit davon entfernt war, so ausgerüstet zu sein, dass er auch auf dem Gebiet der beobachtenden Astronomie die Hoffnungen erfüllen konnte, die die wissenschaftliche Welt auf ihn zu setzen gewohnt war. Schliesslich musste doch die BOHNENBERGERsche Hypothese als der wahre Grund der Unstimmigkeiten[2]) angesehen werden. GAUSS selbst spricht sich in den G. G. A., Juni 1820 (Werke VI,

1) Siehe Fussnote 1) auf Seite 59.

2) Vergl. zu dieser Frage auch noch die Briefe von OLBERS an BESSEL vom 20. April 1820, 2. Dezember 1823 und von BESSEL an OLBERS vom 25. April 1822.

S. 431) dahin aus und ebenso BESSEL in einem Aufsatz[1]) in BODES Astronomischem Jahrbuch für 1825, S. 208.

Etwa zur gleichen Zeit[2]), in der die beiden REICHENBACHschen Repetitionsinstrumente eintrafen, erhielt GAUSS auch ein vor mehr als einem Jahr bestelltes Heliometer[3]) von FRAUNHOFER. Er schreibt darüber an BESSEL am 18. (28.?) Mai 1814: »An kleinern Sachen, die schon auf der alten Sternwarte benutzt werden können, habe ich indes seit 1½ Jahren verschiedene schätzbare, in ihrer Art meisterhafte Stücke acquiriert . . . . . vor einigen Tagen auch aus demselben Institut ein herrliches achromatisches Heliometer, 43 Pariser Zoll Brennweite, 34 Linien Öffnung. Der geniale Künstler hat an diesem Instrument mehreres eigentümliche angebracht; besonders wichtig ist die Einrichtung, dass die Messungen damit durch Repetition vervielfacht und dadurch von den Lokal-Unvollkommenheiten der Schraube unabhängig gemacht werden können. Die Präzision des Fernrohrs ist ungemein gross. Ich habe nur erst ein Paar Probeobservationen an terrestrischen Objekten, der Sonne, dem Jupiter und Mond gemacht. Wenn ich von der Repetition abstrahierte und nach gewöhnlicher Art den Error Indicis bestimmte, gingen die grössten Unterschiede unter sich nur auf ½ Sekunde. Ich freue mich besonders auf die Beobachtungen von Kometen und Asteroiden, wenn sie in den Bereich von gut bestimmten Sternen kommen. Erlauben Sie mir hier eine Frage. Ihr Heliometer ruht, meine ich, auf einem Äquatoreal; aber Sie bestimmten die Position des Kometen von 1811 nur durch Abstände von zwei Sternen, oder den bewegten Kometen durch verschiedne Abstände von einem Stern. Finden Sie es denn nicht tunlich, den Positionswinkel unmittelbar am Instrument zu beobachten? Vorausgesetzt, dass die Teilung an dem Rotationszirkel mit hinlänglicher Genauigkeit, kann man, obgleich kein Nonius da ist, und die Teilung nur in ganzen Graden, beim Ablesen nicht leicht über 3′ fehlen, und dies kann bei einer Distanz von 19′ erst einen Irrtum von 1″ hervorbringen.

1) *Über die Abweichung der Fixsterne*, unterm 29. August 1822 eingesandt.

2) Im *Tagebuch der Sternwarte* ist als Tag der Ankunft des Heliometers unzweideutig der 23. Mai 1814 angegeben, während es nach dem folgenden Brief an BESSEL schon vor dem 18. Mai eingetroffen sein müsste. Vielleicht ist das Datum dieses Briefes verschrieben und soll 28. Mai heissen.

3) Vergl. auch Werke VI, S. 377. Es ist das erste von FRAUNHOFER hergestellte Heliometer; es besass ein einziges geteiltes Objektiv, während DOLLOND vor das eigentliche Objektiv eine zerschnittene Linse gesetzt hatte. Vergl. auch Brief an BESSEL vom 13. November 1814.

Mir deucht, dass man auf diese Weise auch den Positionswinkel bei einem Doppelstern mit vieler Genauigkeit müsse bestimmen können, nur dürfte man zu diesem Behuf die beiden Bilder nicht sowohl zur Deckung, sondern bei vergrösserter Distanz der Objektivhälften die vier Bilder auf eine gerade Linie bringen. Ich denke für unser Heliometer auch ein parallatisches Stativ machen zu lassen, auch in der Absicht, das Auffinden kleinerer Sterne, oder grösserer am Tage, zu erleichtern und möglich zu machen.« Ein älteres Heliometer war bereits auf der Sternwarte vorhanden. Im Briefe an OLBERS vom 15. Juni 1814 kündigt GAUSS auch diesem die Ankunft des Heliometers an und bemerkt dazu: »Ein DOLLONDsches Heliometer habe ich nie gesehen; ich meine aber, dass diese meistens so eingerichtet sind, dass vor ein vollständiges achromatisches Fernrohr zwei (nichtachromatische) Objektivhälften von bedeutender Brennweite vorgesetzt werden, deren Zentrumdistanz durch Skale und Vernier gemessen wird; wenigstens ist das Seeberger Heliometer so nach NICOLAIS Beschreibung; denn dieser (welcher es nur obenhin betrachtet hatte) erzählte mir gestern, dass es nur Plangläser schienen; ebenso wird wahrscheinlich das Königsberger sein, da es als Akzessorium zu einem vollständigen Äquatoreal gehört. Ein solches Heliometer kann also, als optisches Werkzeug betrachtet, nicht mehr leisten, als ein gemeines Fernrohr von grosser Brennweite. Bei dem unsrigen ist nur Ein zerschnittenes achromatisches Objektiv von 43 Par. Zoll Brennweite, 34 Lin. Öffnung, 4 Vergrösserungen von 50, 70, 100, 150. Dies Fernrohr, wenn beide Objektivhälften zusammengebracht werden, ist von ungemeiner Vollkommenheit; ich habe weder Mond noch Sonne je schöner gesehen. Am Monde drängt sich mir unwillkürlich die Körperlichkeit der Gebirgsgegenden auf; auf der Sonne zeigen sich jetzt ausser einem kleinen Flecken nebst drei oder vier sehr kleinen andern dabei überall Ungleichheiten, namentlich habe ich heute nordöstlich eine Stelle sehr auffallend bemerkt, die gerade so aussieht, wie bald nach Sonnenuntergang im orangefarbenen Abendhimmel ein weissliches Wölkchen, gewiss werden Sie es nach Empfang dieses Briefes auch noch mit Ihrem schönen DOLLOND wahrnehmen können. Saturn habe ich noch nicht gesehen. — Die Entfernung der Centrorum der Objektivhälften wird durch Umläufe und Teile ($\frac{1}{1000}$ leicht abzulesen) einer trefflich gearbeiteten Schraube gemessen, ein Umgang beträgt 56″. Verschiedene Bestimmungen des Error Indicis aus grossen und kleinen Objekten, himmlischen und irdischen,

geschlossen, differieren selten $\frac{1}{2}$ Sekunde. Doch soll vom Error Indicis eigentlich gar keine Rede sein, denn das Instrument ist zum Repetieren eingerichtet, so dass die etwaigen lokalen Ungleichheiten der Schraube ganz eliminiert werden. Heute Nachmittag $4\frac{1}{2}$ Uhr war der Abstand des grössten Fleckens vom nächsten Rande 5′ 52″3. Ich habe mit NICOLAI Beobachtungen der Sonnenflecken verabredet; er soll die Rektaszensionen am Passageninstrument beobachten, ich will die Abstände vom Rande messen und zur Ergänzung die Deklinationen, so gut es gehen will, am Mauerquadranten. Dies ist freilich ein schlechter Notbehelf, das Beste wäre ein Fadenmikrometer auf einer parallatischen Maschine. Indessen habe ich ein parallatisches Stativ für unser Heliometer in München bestellt und hoffe dann, wenn ich es erst besitze, sogleich die Positionswinkel unmittelbar mit ziemlicher Schärfe messen zu können, so dass die Zeit gar nicht mehr beim Messen zu helfen braucht. Vorerst liegt das Heliometer nur auf einem elenden Stativ. Was für schöne Kometenbeobachtungen werde ich dann künftig machen können. Entdecken Sie uns nur bald einen.«

Als OLBERS darauf fragte, was aus dem früher auf der Göttinger Sternwarte befindlichen DOLLONDschen Heliometer geworden sei, antwortet GAUSS am 7. Juli 1814: »Dass ich bei meiner Äusserung, ich habe noch kein DOLLONDsches Heliometer gesehen, dasjenige ignorierte, dessen Sie erwähnen und das allerdings nebst andern meistens unbrauchbaren Sachen nach KAESTNERS Tode für die Sternwarte angekauft ist, hat seinen Grund darin, weil dasselbe weder von DOLLOND ist (sondern von BAUMANN), noch auch die DOLLONDsche Einrichtung hat (sondern die BOUGUERsche). Sie können aus der Probe, die KAESTNER davon gibt, sehen, dass dieser damit auf 11″ falsch gemessen hat, dass also dies unbehülfliche Ding kaum so viel leistet, wie ein guter Spiegelsextant. Jene Äusserung von mir bezog sich nur darauf, dass ich nicht wüsste, wie DOLLOND nach Erfindung der achromatischen Gläser seine Heliometer eingerichtet hat. In den Aufsätzen, die dieser Künstler zuerst vor Erfindung der achromatischen Gläser über seine Erfindung in den Philosophical Transactions gab, spricht er von einer dreifachen Einrichtung, 1. ein zerschnittenes Objektiv allein, 2. ein solches von langer Brennweite vor einem ganzen dito von kürzerer, 3. ein solches vor einem Spiegelteleskop. Die FRAUNHOFERsche Einrichtung, ein zerschnittenes achromatisches Objektiv allein anzuwenden, scheint

DOLLOND nicht ausgeführt zu haben; immer scheint er vor das vollständige Objektiv ein zerschnittenes von langer Brennweite zu setzen. Nun wusste ich nicht, ob dieses wieder achromatisch oder einfach sei. Allein NICOLAI schreibt mir heute, dass auf der Seeberger Sternwarte zwei DOLLONDsche Heliometer vorhanden sind, wovon das eine wirklich achromatisch sei (übrigens sonderbar genug von negativer Brennweite oder konkav; aus seinen Angaben schliesse ich auf — 30 Fuss). Auf diese Art gewinnt allerdings DOLLOND eine achtmal so grosse Skale, als das meinige hat; das Ablesen kann also mit dem Nonius geschehen, trotzdem glaube ich, dass an dem meinigen die äusserst trefflichen Schrauben eher noch grössere Genauigkeit geben, selbst ohne zu repetieren. Einen wichtigen Vorzug hat aber die DOLLONDsche Einrichtung unstreitig in der grössern Schnelligkeit bei Messungen grosser Winkel; bei der Sonne ist es immer lästig, 70 Drehungen zu machen, und so möchte auch wohl bei einem sehr häufigen Gebrauch die DOLLONDsche Einrichtung den Vorzug grösserer Dauerhaftigkeit haben. Dagegen muss man bei derselben in Ansehung des Sehens sehr verlieren, an Helligkeit enorm, auch wohl an Deutlichkeit. Wenigstens vermute ich, dass das zerschnittene Objektiv auf der Seeberger Sternwarte nicht recht vollkommen ist, da NICOLAI bemerkt, dass bei weiterm Ausziehen der Okularröhre Bilder, die sich vorher berührten, sich trennen, wie dies (obwohl bei konvexen Objektiven in entgegengesetztem Sinn) bei den gemeinen Gläsern längst bemerkt wurde, worüber auch KAESTNER, der LALANDES richtige Vorschriften ganz falsch beurteilte, ein Langes und Breites hat. Bei unserm Heliometer findet dies Phänomen nicht statt. Doch ich sehe, dass ich selbst lang und breit werde und Sie nur ermüden muss.«

GAUSS beklagte sich jedoch bald über die schlechte Montierung des Heliometers; er hatte kein brauchbares Stativ dazu und beantragte die Anschaffung eines solchen in einer Eingabe an das Ministerium vom Mai 1814 in der er sich folgendermassen ausspricht:

»Ewr. Exzellenzen habe ich untertänigst Anzeige zu machen, dass vor einigen Tagen aus München ein bereits vor anderthalb Jahren bei dem kgl. bayrischen Salinenrat VON REICHENBACH — welcher bekanntlich dort in Verbindung mit dem Geheimrat VON UTZSCHNEIDER und dem Optikus FRAUNHOFER ein durch bewundernswürdige Arbeiten berühmt gewordenes Institut für Verfertigung astronomischer und optischer Instrumente errichtet hat — für die

hiesige Sternwarte bestelltes Heliometer angelangt ist. Mit dieser Bestellung hat es folgende Bewandnis.

»Im Jahr 1810, wo für die hiesigen Universitätsinstitute ein besonderer Fonds gestiftet war, wurden davon der Sternwarte jährlich 1750 Franken bestimmt. Die kurrenten Ausgaben, auch mit Einschluss meiner darauf angewiesenen Logisentschädigung, absorbierten davon ungefähr die Hälfte. Die zweckmässigste Verwendung des Überschusses schien mir zu sein, wenn ich damit die künftige Ausrüstung der neuen Sternwarte mit solchen Instrumenten, wie sie der heutige Zustand der praktischen Astronomie erheischt, vorbereitete. Freilich konnten von jenem Überschusse nur solche Stücke angeschafft werden, deren Preis mit der beschränkten Grösse desselben im Verhältnis standen, zumal da mein Wunsch, jene Überschüsse von mehrern Jahren zuweilen für Ein Instrument sammeln zu können, obgleich von dem damaligen Studiendirektorium gutgeheissen, doch nachher in der Ausführung Hindernisse fand. Indes blieb dabei mein Grundsatz, dass alles Anzuschaffende in seiner Art von der ersten Vollkommenheit sein müsste, um auch der neuen Sternwarte ganz würdig zu sein; ausserdem hielt ich es für notwendig, meine Wahl auf solche Instrumente zu richten, deren Einrichtung schon einen nützlichen Gebrauch in dem Lokale der alten Sternwarte zuliess. Auf diese Weise wurden (verschiedner Kleinigkeiten nicht zu erwähnen) im Jahre 1812 ein zwölfzölliger Repetitionskreis, im Jahr 1813 ein achtzölliger Theodolit, beide von REICHENBACH, angeschafft; beide Instrumente haben schon mannigfaltigen Gebrauch gewährt und sind in ihrer Art wahre Zierden der Sternwarte. Für das Jahr 1814 war schon gegen Ende des Jahres 1812 das jetzt fertig gewordene 43-zöllige Heliometer bestellt, dessen Preis zufolge eines Schreibens des Geheimrats von UTZSCHNEIDER 420 Gulden nach 24 fl. Fuss, oder 233⅓ Taler nach Konventionsgeld ist. Ich zweifle um so weniger, dass Eure Exzellenzen die Annahme dieses Instruments genehmigen werden, da

1) ein Heliometer ein wesentliches Bedürfnis einer gehörig ausgerüsteten Sternwarte ausmacht und auch schon auf der alten Sternwarte ebenso gut wie künftig auf der neuen gebraucht werden kann, und

2) das jetzt in Frage stehende so ausgefallen ist, dass es als ein Meisterwerk betrachtet werden kann, wie es sich freilich von dem grossen Künstler erwarten liess.

»Was übrigens die Bezahlung betrifft, die nicht füglich durch bare Übersendung des Geldes geschehen kann, so bemerke ich nur, dass dieselbe für die beiden früher angeschafften Instrumente durch Wechsel auf Augsburg geleistet wurde, welche, da die hiesigen Geldnegocianten auf Augsburg keine Geschäfte machen, damals durch den damaligen Rendanten der Universitätskasse KIENITZ aus Kassel herbeigeschafft wurden.

»Noch muss ich bemerken, dass dieses Heliometer noch kein besonderes Stativ hat. Es ist von München noch keines mitgeschickt, weil keines ausdrücklich bestellt war und der Künstler nicht wusste, ob ein mehr oder weniger künstliches Stativ gewünscht werde. Ich habe das Heliometer daher einstweilen auf das Stativ eines von den Fernrohren gesetzt, die sich auf der Sternwarte befinden, welches freilich für den Augenblick als Notbehelf dienen kann, aber der Vortrefflichkeit des Instruments selbst durchaus unwürdig ist. Dieses kann nur dann erst alles leisten, wozu es tüchtig ist, wenn es ein besondres, angemessenes Stativ hat. Man hat die Wahl zwischen einem ordinären Fernrohrstativ und einem sogenannten parallatischen Stativ; ersteres wäre etwas wohlfeiler, allein letzteres gewährt so mannigfaltige und wichtige Vorteile, dass ich nur für dieses stimmen kann, zumal da dessen Preis immer kein sehr grosses Objekt sein kann. Ich bitte demnach Ewr. Exzellenzen um die Erlaubnis, für das Instrument ein besondres parallatisches Stativ in München bestellen zu dürfen. Bekannt ist es übrigens schon und die drei hierher gelieferten Instrumente geben davon jedem Kenner auffallende Beweise, dass das dortige mathematisch-optische Institut seine Preise ungemein billig setzt; in Beziehung auf dieses Stativ kann ich, wenn es gewünscht wird, auch vorher erst anfragen.«

Aus dem genannten Grund und wegen der beschwerlichen Benutzung beschränkte sich GAUSS zunächst darauf, einige Voruntersuchungen mit diesem Instrument zu machen; so bestimmte er die Vergrösserungen (Eintragung in das *Tagebuch der Sternwarte* vom 8. Juni 1814) und stellte mit Hilfe des REICHENBACHschen Theodoliten eine Zeichnung des Umrisses des Jakobikirchturms her (Eintragung in das *Tagebuch* vom 20. August), um diesen zur Bestimmung des Skalenwertes benutzen zu können; vereinzelt mass er die Durchmesser der Sonne und des Jupiter, auch des Saturnringes und des Uranus.

Im April 1815 erhielt er endlich das neue Stativ, aber auch hiernach

erlebte er nicht viel Freude an dem Instrument. Es bahnte sich auch hierüber ein Meinungsaustausch mit BESSEL an. Dieser besass anfangs ein altes DOLLONDsches Heliometer und erhielt später (1829) ein grosses FRAUNHOFERsches[1]) von 5 Zoll Öffnung. GAUSS versuchte nach der neuen Montierung nach Ausweis des *Tagebuchs der Sternwarte* einige Messungen des Venus[2])- und des Marsdurchmessers, sowie des Saturnringes (1815 Mai — Oktober). Auch beobachtete er den Kometen 1815 II; nur die letztere dieser Beobachtungen hat er selbst veröffentlicht[3]). Seinen Plan, Sonnenflecken gemeinsam mit NICOLAI zu messen, über den er an OLBERS am 15. Juni 1814 (siehe oben Seite 73) berichtet, gab er schliesslich ganz auf und schrieb darüber an OLBERS im Juni 1815: »Zur Beobachtung von Sonnenflecken habe ich alle Lust verloren. Ich hatte vor 10 Tagen einen ausgezeichnet schönen Flecken scharf beobachtet; ein paar Tage nachher hatte sich die Gruppe so verändert, dass ich garnicht mehr wusste, was ich beobachten sollte. Isolierte Flecke hatte ich schon im vorigen Jahre mehreremale zu beobachten angefangen, die bald nachher mitten auf der Sonne ganz verschwunden waren. Das Aufstellen des Heliometers, das Beobachten selbst etc. kostet zu viel Mühe, als dass ich sie an ein so betrügerisch-undankbares Geschäft verschwenden sollte. Erst wenn ich einmal dem Heliometer einen bleibenden Platz geben kann, werde ich solche Beobachtungen wieder anfangen«. Ähnlich klagt er in einem im astronomischen Jahrbuch für 1818 abgedruckten Briefe an BODE (Werke VI, S. 388—389), in dem er sagt, dass er gute Kreismikrometerbeobachtungen vorzöge.

Im Mai 1817 schickte er nach einem schon im Juni 1816 gefassten Entschluss[4]) das Heliometer an FRAUNHOFER zurück zur Vornahme einiger Verbesserungen und erhielt es auch im November 1817 wieder mit einem neuen Objektiv[5]). Er kam aber auch auf der neuen Sternwarte nicht dazu, davon einen wirklichen Gebrauch zu machen, wie er an BESSEL am 25. März 1818 schreibt: »Gegenwärtig kann ich des Lokals wegen noch gar keinen Gebrauch davon machen; die Zimmer, wo es in Zukunft seinen Platz haben wird, werden

1) WOLF, *Handbuch der Astronomie*, II. Band, S. 140. — Vergl. auch Briefe von BESSEL an OLBERS vom 18. Januar 1820 und vom 4. Juni 1829.

2) Brief an OLBERS vom 29. Mai 1815, Werke XI, 1, S. 293.

3) Werke VI, S. 388.

4) Brief an OLBERS vom 4. Juni 1816.

5) Brief an BESSEL vom 5. September 1817 und an OLBERS vom 2. Dezember 1817.

erst in diesem Sommer fertig. Die zwei bis jetzt fertigen Zimmer können es nicht aufnehmen, da sie jetzt mit Spiegelteleskopen etc. wie ein Warenlager vollgepfropft sind.«

In seinem Briefe vom 5. Februar 1818 fragte BESSEL, ob GAUSS »nicht eine Anweisung zum richtigen Gebrauche des Heliometers« — über das damals noch keine rechte Theorie vorhanden war — »bekannt machen wolle«, worauf GAUSS am 25. März antwortet: »Ich bin zwar nicht abgeneigt, in Zukunft einmal etwas über den Gebrauch des Heliometers zu schreiben; ich werde aber damit warten müssen, bis ich erst selbst hinlängliche Erfahrungen eingesammelt habe.« Es kam aber nicht dazu, da seine Zeit durch andere Beschäftigungen in Anspruch genommen wurde.

Späterhin gab HANSEN 1827 eine Theorie des Heliometers[1]), und BESSEL veröffentlichte 1841 die Ergebnisse seiner Untersuchungen[2]). BESSEL war hierbei auch auf die dazu nötigen dioptrischen Untersuchungen gekommen, gerade in derselben Zeit wie GAUSS, der seine Abhandlung *Dioptrische Untersuchungen* im Dezember 1840[3]) der Göttinger Sozietät vorlegte. BESSEL schreibt daher am 20. Januar 1841 an GAUSS: »Die gütige schnelle Übersendung Ihrer Abhandlung über Dioptrik erkenne ich mit dem lebhaftesten Danke an. Ich habe sie gestern erhalten und — ziemlich vertraut mit ihrem Gegenstande — schnell durchlesen können. Ihre meisterhafte Behandlung darf ich nicht hervorheben; sie ist in der Ordnung, denn Niemand hat bis jetzt entscheiden können, ob der wesentliche Inhalt, oder die Form, in welcher er erscheint, in Ihren Arbeiten am meisten hervortreten. — Diese Abhandlung erregt mein Interesse noch von einer dritten Seite; denn es hat sich getroffen, dass ich selbst das Unglück gehabt habe, vor drei Wochen einen Aufsatz über dieselbe Aufgabe an SCHUMACHER[4]) zu senden. — Schon vor vielen Jahren hatte ich die Ordnung bemerkt, welche die Ausbeutung der einfachen Eigenschaften der Kettenbrüche in diese Materie bringt. Eine damalige Ausarbeitung darüber wartete auf eine Gelegenheit zur Bekanntmachung, welche von der Notwendigkeit, Anwendungen von der Dioptrik zu machen, herbeigeführt werden

1) *Ausführliche Methode, mit dem Fraunhoferschen Heliometer Beobachtungen anzustellen.* Gotha 1827.

2) *Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte,* Astronom. Untersuchungen, Seite 55 ff.

3) Werke V, S. 243.

4) *Über die Grundformeln der Dioptrik,* A. N. Bd. 18, S. 97 (1841). — BEDL.

sollte. In der Zwischenzeit nahm MÖBIUS[1]) dieselbe Materie auf und dadurch meinem Aufsatze sein hauptsächlichstes Interesse; denn obgleich er den Vorgängern in der Vernachlässigung der einzelnen Konstruktionselemente des Linsensystems unnötigerweise folgte, so schien mir dieses doch so offenbar unnötig zu sein, dass ich glaubte, ihm die Freude an seiner Arbeit durch einen wohlfeilen Zusatz nicht verkümmern zu dürfen. Ich machte dagegen ihn selbst auf diesen Zusatz aufmerksam; allein er hat meiner Mitteilung keine Folge gegeben, vielleicht um mir das, was mir noch an Sache übrig geblieben war, nicht zu nehmen. Vor einigen Monaten gelangte ich indessen zu der Ausarbeitung einer besonderen Theorie meines Heliometers, welche nun notwendig geworden ist, da ich im Begriffe bin, eine Reihe von Resultaten, welche auf Beobachtungen mit diesem Instrumente beruhen, zu redigieren. Dort mussten dioptrische Sätze angewandt werden, und nun nahm ich die ihnen von mir gegebene Form wieder auf. Als ich die meine Darstellung derselben enthaltenden Paragraphen JACOBI zeigte, meinte er, ich könne sie, ohne Übelstand, abgesondert bekannt machen, was übereinstimmend mit dieser Meinung ihre Abschrift für die Astronomischen Nachrichten veranlasste. Vielleicht haben Sie meinen Aufsatz schon eher gelesen, als dieses Blatt zu Ihnen gelangt. Es ist nicht gut, mit Ihnen zusammentreffen!«

Zu Anfang des Jahres 1816 oder Ende 1815 erhielt die Göttinger Sternwarte eine Reihe astronomischer Instrumente aus Lilienthal, über die SAALFELD in der *Geschichte der Universität Göttingen*[2]) Folgendes berichtet: »Seit dem Jahre 1815 besitzt auch die Sternwarte die von GEORG III. im April 1799 für dieselbe erkaufte Instrumentensammlung des sel. Justizrates SCHROETER zu Lilienthal, zu welcher ein Teleskop von 4, 13 und 15 Fuss, zwei von 7 Fuss, ein Achromat von 3, und ein 10 schuhiges von P. DOLLOND von 3,9 Zoll Öffnung, sowie noch verschiedene Uhren, Mikrometer und andere Maschinen gehören. Auch sind noch zwei grosse Metallspiegel von 10 englischen Zoll Durchmesser nebst dem Maschinenwerke zu einem 27 schuhigen Teleskope

1) *Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern*, CRELLES Journal, Bd. 5 (1830), S. 113 ff.; MOEBIUS Werke, Bd. IV, S. 477 ff. — *Beitrag zur Lehre von den Kettenbrüchen nebst einem dioptrischen Anhang*, CRELLES Journal, Bd. 6 (1830), S. 215 ff.; MOEBIUS Werke, Bd. IV, S. 503 ff. — BRDL.

2) *Geschichte der Universität Göttingen 1788—1820* (Hannover 1820), S. 487, vergl. Fussnote S. 43.

vorhanden, welches dereinst an der Seite der Sternwarte aufgerichtet werden wird.«

Der Ankauf dieser Instrumente[1]) war mit der Massgabe geschehen, dass SCHROETER sie bis an sein Lebensende benutzen dürfe. Nach der Einverleibung Lilienthals in das Königreich Westfalen scheint jedoch SCHROETER diesen Kauf als hinfällig angesehen zu haben. GAUSS schreibt darüber an OLBERS am 10. März 1812: »Wissen Sie etwas Näheres über SCHROETERS Demarche, den Kontrakt, wodurch die Instrumente Eigentum unserer Universität geworden sind, zu brechen, und sie nach Frankreich zu verkaufen? LAPLACE hat mir Einiges darüber geschrieben, was ich mir nicht ganz erklären kann, woraus aber doch hervorzugehen scheint, dass die Franzosen zwar einige dieser Instrumente gern haben möchten, aber doch eine zweite Disposition darüber als unrechtmässig betrachten. Wie ich darüber denke, glaube ich Ihnen bei Ihrer Anwesenheit hier mündlich gesagt zu haben.«

In dem von GAUSS erwähnten Briefe von LAPLACE vom 25. November 1811[2]) heisst es; »Si Monsieur GAUSS a l'occasion de voir ou d'écrire à M. SCHROETER, je le prie de lui dire que je ne perds point de vue son affaire, que j'en ai parlé plusieurs [fois] à M. de FERMENT, intendant général du domaine extraordinaire, qui est plein de bonne volonté et qui n'est arrêté que par la considération, que le contrat d'achat des instruments de M. SCHROETER, par le roi d'Angleterre, portant pour charge, qu'ils seraient à sa mort donnés a l'université de Gottingue, ces instruments sont une propriété du roi de Westphalie qui doit par conséquent remplir les conditions du contrat. Mais les choses ayant changé depuis que M. SCHROETER est devenu français, j'espère que tout cela pourra s'arranger à son avantage et j'y ferai mon possible.«

Indessen scheint in dieser Sache vorläufig nichts geschehen zu sein. Am 12. Dezember 1812 wurde Lilienthal von den Franzosen überfallen und gebrandschatzt; SCHROETER selbst musste flüchten[3]) und konnte sich niemals wieder ganz von diesem Schlage erholen. Die Instrumente indessen scheinen gerettet worden zu sein. Nach der Wiederherstellung des Königreichs Hannover veranlasste SCHROETER noch vor seinem Tode die Überführung der Instrumente nach Göttingen.

1) Schreiben von OLBERS im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1820, S. 242.

2) Handschrift im GAUSSarchiv. 3) Vergl. Brief von OLBERS an GAUSS vom 6. Juli 1813.

BESSEL, der diese Instrumente von seiner Lilienthaler Zeit her kannte, gibt auf eine Anfrage von GAUSS in seinem Briefe vom 14. Februar 1816 nähere Auskunft über sie.

Die Eintragungen in das *Tagebuch der Sternwarte* aus der Periode 1813 bis 1816 rühren fast ausschliesslich von GAUSS' Hand her. Sie betreffen, ausser den Beobachtungen mit dem BORDA-Kreise und dem Heliometer, solche am Mauerquadranten, an dem die Sonne zur Zeitbestimmung, sowie der Mond, Jupiter, Vesta und der Komet 1813 II[1]) beobachtet wurde. Sehr zahlreich sind auch hier die korrespondierenden Sonnenhöhen vertreten und Messungen von terrestrischen Punkten. Daneben findet man eine Reihe von Kreismikrometerbeobachtungen der Planeten Pallas, Juno, Vesta und von Kometen und Beobachtungen von Finsternissen[2]). Nur selten kommen im *Tagebuch* Fixsternbeobachtungen am Mauerquadranten von HARDING vor, der die Beobachtungsreihe für seine Sternkarten dem Abschluss nahe gebracht hatte. Von Januar bis Juli 1816 ist das *Tagebuch* gänzlich unterbrochen.

4. (dritte Göttinger) Periode, 1817—1818.

Im Oktober 1816 bezog GAUSS endlich die neue Sternwarte, deren Bau sich über so viele Jahre hingezogen hatte. Der Bau war bereits 1802 vom Könige von Hannover bewilligt worden, wie aus einem Briefe v. ZACHS an GAUSS vom 27. April 1802[3]) hervorgeht, in dem dieser sagt, er sei beauftragt, den Plan dafür zu entwerfen; auch war im März 1803 HARDING nach Göttingen gerufen[4]) worden, um den Meridian für die neue Sternwarte festzulegen. In der bereits Seite 79 genannten *Geschichte der Universität Göttingen* 1788 bis 1820, S. 481, von F. SAALFELD ist das Schicksal des Baues der Sternwarte folgendermassen geschildert:

»Da die bald nach der Stiftung der Universität errichtete Sternwarte (Teil 2, § 189. 190, S. 266 f.), welche auf einem alten Festungsturm der

1) Teils von GAUSS, teils von HARDING; veröffentlicht ist nur die Beobachtung der Vesta (Werke VI, S. 377).

2) Die Kreismikrometerbeobachtungen von Planeten und Kometen sind meist veröffentlicht und Werke VI abgedruckt.

3) Handschrift im GAUSSarchiv.

4) Vergl. Brief von GAUSS an OLBERS vom 23. März 1803.

Stadtmauer angelegt worden war, sich nicht dazu eignete, irgend eines von den vollkommneren Werkzeugen aufzunehmen, wodurch in den letzten 30 Jahren die astronomischen Beobachtungen so sehr verfeinert worden sind, so ward das Bedürfnis einer neuen Sternwarte immer fühlbarer und notwendiger, wenn Göttingens Verdienste um die Astronomie nicht ganz aufhören und angehende Astronomen hinfort Gelegenheit finden sollten, sich hier auszubilden. Schon in dem letzten Dezennium des vorigen Jahrhunderts beschloss daher die königl. Regierung eine neue, ganz nach den Bedürfnissen für den gegenwärtigen Zustand dieser Wissenschaft eingerichtete Sternwarte zu errichten. Es wurden zu dem Ende von den berühmtesten praktischen Astronomen Vorschläge zur vollkommensten Einrichtung und Gutachten über ein passliches Lokal eingeholt, und nach diesen Vorbereitungen um die königl. Genehmigung zur Ausführung dieses Baues nachgesucht. GEORG III., als erhabener Selbstkenner der Astronomie und liberaler Beschützer und Beförderer der Wissenschaften überhaupt, geruhte nicht nur den Plan in seiner ganzen Ausdehnung zu genehmigen, sondern auch den möglichst baldigen Beginn des Baues zu befehlen und dazu fürs erste die Summe von 23500 Rtlr. zu bewilligen.

»Unter mehreren in Vorschlag gebrachten Plätzen für das neue Gebäude entschied das Urteil der Kunstverständigen für einen südöstlich von der Stadt ausserhalb des Geismartores befindlichen, welcher bei einer mässigen Entfernung von der Stadt eine in diesem Leinetale ziemlich freie Aussicht und — das Haupterfordernis einer Sternwarte — einen sehr festen Grund hat. Schon im Frühjahr 1802 ward der zu dieser neuen Anlage erforderliche Grund und Boden angekauft, mit der Herbeischaffung der Baumaterialien der Anfang gemacht, und die Gründung des Hauptgebäudes im April 1803 wirklich vollzogen. Es war der Plan, den ganzen Bau innerhalb 4 bis 5 Jahren zu vollenden; allein die gleich darauf erfolgte französische Invasion veranlasste, dass der eben angefangene Bau wieder eingestellt werden musste, als die Grundmauern kaum 3 Fuss hoch aufgeführt waren. Zwar gab die 1806 erfolgte preussische Besitznahme von dem hannoverschen Lande einige Hoffnung, dass der Bau in kurzem fortgesetzt werden könne; allein die noch im Herbste desselben Jahres erfolgte Katastrophe, welche abermals eine neue heillose Umwandlung herbeiführte, schlug alle Hoffnungen in Hinsicht dieses Gebäudes auf einige Jahre wieder gänzlich nieder. Erst im Jahre 1810 ward von der

westfälischen Regierung die Fortsetzung dieses Baues genehmigt und dazu eine Summe von 200000 Fr. bestimmt. Damit fing man im Frühling 1811 den Bau wirklich wieder an, allein die Mauern des Hauptgebäudes waren kaum halb vollendet, als am Ende des Jahres 1813 die Auflösung des westfälischen Staates und die Wiederherstellung der früheren Ordnung der Dinge erfolgte. Schon im nächsten Frühjahr ward daher auf Befehl der königl. hannoverschen Regierung dieser so oft unterbrochene Bau wieder begonnen und mit solchem Nachdrucke fortgesetzt, dass das prächtige Gebäude bereits im Herbste 1816 beinahe ganz vollendet war und die astronomischen Beobachtungen darin angefangen werden konnten.«

Der Plan der neuen Sternwarte[1]) war so angelegt, dass der Mittelbau aus einer Rotunde bestand, über der eine Drehkuppel errichtet wurde, und an die auf jeder Seite sich ein Beobachtungsraum mit Meridianausschnitt anschloss. Die beiden weiterhin angebauten Seitenflügel dienten zu Arbeits- und Wohnräumen. Zu ihrer Ausrüstung mit Beobachtungsinstrumenten plante GAUSS anfangs ausser der Anschaffung der nötigen Uhren die eines grossen und eines kleinen Passageninstruments, eines grossen Meridiankreises und eines Äquatoreals[2]). Betreffs des Meridiankreises schwankte er zunächst, ob ein solcher von REPSOLD, REICHENBACH oder TROUGHTON gewählt werden sollte, welche drei er als die vortrefflichsten Hersteller bezeichnet; er setzt sie ihrer Güte nach in die umgekehrte Reihenfolge, weil ihm der von TROUGHTON für Greenwich angefertigte Kreis als der vollkommenste erscheint. Schliesslich schlägt er vor, um die Kosten für die anzuschaffenden Instrumente auf mehrere Jahre zu verteilen, zunächst ein Passageninstrument zu bestellen und sogleich einen REPSOLDschen Meridiankreis[3]) von dessen in Auflösung begriffener Sternwarte anzukaufen. Da er aber die Hoffnung hegt, dass es durch die Freigebigkeit des Prinzregenten, Königs von England, möglich sein möchte, einen TROUGHTONschen Kreis zu erhalten, so soll der anzukaufende REPSOLDsche Kreis an die Stelle des kleinen Passageninstruments treten, da für die Aufstellung mehrerer Instrumente immerhin kein Platz auf der Sternwarte

1) Siehe die Abbildung am Schluss dieses Aufsatzes.

2) Siehe GAUSS' Bericht vom 9. Februar 1815, Werke XI, 1, S. 294 ff.

3) Vergl. den Brief von SCHUMACHER an GAUSS vom 30. Dezember 1809, in welchem Briefe sich eine Abbildung des Kreises befand, mit dem SCHUMACHER häufig beobachtete.

vorgesehen sei. REPSOLD hatte eine kleine Sternwarte auf dem Teile des Hamburger Walles errichtet, der später die Elbhöhe genannt wurde. Schon zu Anfang des Jahres 1810 ging er mit dem Gedanken um, diese eingehen zu lassen und die Instrumente zu verkaufen[1]).

Am 10. Juni 1812 schreibt SCHUMACHER an GAUSS, als dieser angefragt hatte, ob SCHUMACHER ihm »nicht auch dieses Jahr mit Herrn REPSOLDS trefflichem Kreise einige gute Beobachtungen der neuen Planeten liefern« wolle: »Die Probe mit der Pallas würde REPSOLDS Kreis wohl bestanden haben, wenn er noch stände, aber die Sternwarte ist jetzt locus ubi Troia fuit. Man fing dieses Frühjahr an, erst die Befriedigung zu stehlen, dann Stühle und Tische, so dass REPSOLD eiligst die Instrumente wegnahm, um nicht auch die zu verlieren. Der Kreis steht hinter dem Ofen auf REPSOLDS Stube. Jetzt will man ihm eine Sauvegarde geben, wenn er nur wieder alles in Stand setzt. Es sind aber gute Gründe da, es nicht zu tun.« SCHUMACHER schlug GAUSS in einem Brief vom 20. März 1811 vor, den Kreis zu kaufen, worauf GAUSS am 25. April antwortete: »Ihre Idee, künftig den REPSOLDschen Kreis für die neue Sternwarte (woran jetzt wieder gebauet wird) zu kaufen, ist sehr gut; noch ist es aber zu früh, darauf anzutragen, man muss den Bau erst weiter vorrücken lassen; denn in Kassel meint man, die SCHROETERschen Instrumente[2]) seien schon eine vollständige Ausrüstung und hat noch keine Idee von dem, was nötig sein wird; ist man nur erst in den Bau tief genug eingegangen, so soll man auch schon Instrumente kaufen«, und am 13. September 1814: »Ich wünschte wohl, REPSOLDS Kreis für unsere neue Sternwarte zu acquirieren. Dem Plane nach sollten zwei Passageninstrumente angebracht werden, ich finde das zweite sehr überflüssig und sehr gut könnte der dazu bestimmte Platz den Kreis tragen. Wenn nur erst wieder mehr Geld da wäre. Das Gouvernement hat den besten Willen, aber es fehlt an allen Ecken. Für den Bau sind in diesem Jahre mehr nicht als 1500 bewilligt! Für die Institute ist seit Anfang des Jahres noch nichts ausgezahlt. Besoldungen seit einem halben Jahre.«

Der REPSOLDsche Kreis wurde auch erworben. Er sollte im Januar 1816 abgeliefert werden, traf aber erst im April 1818 ein, da REPSOLD lange Zeit

1) Vergl. die Briefe GAUSS an SCHUMACHER vom 10. Februar 1810, SCHUMACHER an GAUSS vom 16. Februar 1810.

2) Siehe oben S. 80. — BRDL.

brauchte, um ihn in Stand zu setzen. GAUSS schreibt an BESSEL am 23. Dezember 1816: »Leider ist der Zeitpunkt einer angemessenen praktischen Tätigkeit noch aufs neue weiter hinaus gerückt. In der Hoffnung, nun wenigstens in diesem Herbst den REPSOLDschen Kreis zu erhalten, hatte ich mich dazu bequemt, die neue Wohnung zu beziehen, trotzdem dass sie zum Teil noch unvollendet war, und trotz der tausendfachen Unbequemlichkeiten, die das Bewohnen eines solchen Hauses im Winter, abgeschnitten von der Stadt, mit einer starken Familie hat. Allein vor kurzem erklärte endlich REPSOLD, dass es nun wenigstens noch vier Monate bis zur Vollendung des Instruments dauern würde. So habe ich also jenes Opfer umsonst gebracht. Die Sternwarte selbst ist auch erst halb vollendet, doch könnten in zwei Zimmern Beobachtungen gemacht werden. Die meisten Instrumente sind von der alten Sternwarte herausgeschafft, und ich denke wenigstens noch eine Anzahl Beobachtungen mit dem Repetitionskreise zu machen. Gestern und heute habe ich damit die Sonne beobachtet; allein die Beobachtungen werden kaum zu gebrauchen sein, weil sie alle ziemlich entfernt auf einer Seite des Mittags liegen, und es an einer guten Zeitbestimmung fehlte. Welch eine Sklaverei, zur Zeitbestimmung immer nur einzelne Sonnenhöhen berechnen zu müssen! Sie werden es mir nicht verargen, dass ich unter solchen Umständen mich lieber mit andern Dingen beschäftige.«

Die Hoffnung, einen TROUGHTONschen Kreis vom König von England zu erhalten, erfüllte sich ebensowenig; auch hat sich keine Notiz darüber auffinden lassen, dass überhaupt ein dahingehender Versuch gemacht worden sei. GAUSS beabsichtigte vielmehr, einen zweiten Meridiankreis bei REICHENBACH zu bestellen und fasste hierzu den Plan seiner Reise nach München in den Osterferien 1816. Einen hierauf bezüglichen Antrag stellte er an das Kuratorium am 24. März dieses Jahres[1]), dem auch stattgegeben wurde. GAUSS trat seine Reise am 18. April an und war im ganzen 5 Wochen von Göttingen abwesend, wovon 12 Tage auf den Aufenthalt in München und Benediktbeuren, wo die optischen Arbeiten unter FRAUNHOFERS Leitung ausgeführt wurden, entfielen.

Einen ausführlichen Bericht über seine Reise erstattete er im Juni 1816 an das Kuratorium[1]); er beantragt, den Meridiankreis und das Passageninstru-

1) Abgedruckt Werke XI, 1, S. 302 und 305.

ment bei REICHENBACH, eine der beiden noch nötigen Pendeluhren bei LIEBHERR, der sich geschäftlich mit REICHENBACH und UTZSCHNEIDER vereinigt hatte, zu bestellen, dagegen das Äquatoreal oder parallatisch montierte Fernrohr, sowie die zweite Uhr, noch zurückzustellen. An OLBERS schreibt er am 4. Juni 1816: »Dass ich auf dieser fünfwöchentlichen Reise den mannigfaltigsten Genuss gehabt habe, werden Sie mir leicht glauben. . . . . REICHENBACH hat mich konfidentiell von seiner Teilungsmethode unterrichtet. Es liegt dabei eine sehr glückliche, genialische Idee zum Grunde. Eigentlich ist nur die Methode, wie er seine Teilmaschine geteilt hat, das Geheimnis, nicht aber das Teilen der Instrumente auf der Maschine. Grössere Instrumente als die Teilmaschine liessen sich auch ohne diese unmittelbar nach der Methode teilen; REICHENBACH ist aber nicht dafür, über eine gewisse Dimension hinauszugehen, und zwar hauptsächlich wegen der Flexibilität der Metalle. Über letztere haben wir gemeinschaftlich mehrere interessante Versuche gemacht; es ist zum Erstaunen, mit welchem Grade von Genauigkeit sich dieselben anstellen lassen; REICHENBACH wird sie in einem besondern Aufsatze in der A. Z.[1]) mit bekannt machen.

»Ebenso merkwürdig ist die Genauigkeit, mit welcher man in Benediktbeuren den Oberflächen der Gläser die Kugelgestalt gibt. FRAUNHOFER versichert, dass bei Prüfung derselben $\frac{1}{10000000}$ eines Zolles noch merklich gemacht werden könne. Zu einem Achromat von 160 Zoll Brennweite, 9 Zoll Öffnung, waren die Gläser fertig, nur waren sie vorerst in eine schlechte Röhre eingesetzt, so dass die Wirkung an einem trüben Tage nur auf der Erde gesehen werden konnte. Ein etwas kleinerer Achromat von 9 Par. Fuss Brennweite, $7\frac{1}{4}$ Zoll Bayr. Öffnung, bis 700 malige Vergrösserung, ist mit nach Neapel gekommen und kostete 4500 Gulden. Was von noch grössern Öffnungen erzählt wird, sind Fabeln für jetzt; es wird erst unendliche Mühe kosten, bis man von 9 Zoll zu 10 Zoll übergehen kann.«

Das REICHENBACHsche Passageninstrument erhielt GAUSS im November 1818, den Meridiankreis im August 1819; zu der Anschaffung des Äquatoreals ist es indessen niemals gekommen. Vielmehr wurde in der später umgebauten Drehkuppel 1886 das grosse Heliometer aufgestellt, das noch heute im Gebrauch ist.

1) Zeitschrift für Astronomie. — BRDL.

In den ersten 1½ Jahren nach dem Bezuge der neuen Sternwarte hatte GAUSS daher zu seinem Leidwesen kein grösseres brauchbares Instrument zur Verfügung, worüber er häufig klagte. Die Ungewissheit, wann der Bau der Sternwarte fertig werden würde, hatte ihn veranlasst, die Bestellung der Instrumente hinauszuschieben; an BESSEL hatte er darüber am 18. (28.?) Mai 1814 geschrieben: »Das Hauptgebäude ist bis auf den innern Ausbau beinahe fertig, die Seitenflügel sind noch gar nicht angefangen. Es wird also immer noch ein Weilchen dauern, bis ich in dieser Rücksicht so glücklich bin wie Sie. Ihnen war es so vorteilhaft, dass die Instrumentalausrüstung schon im voraus da war, mir hingegen ist es nachteilig, dass überall das Vorurteil sitzt, als sei hier ein ähnlicher Fall. An die Bestellung derjenigen Instrumente, wodurch die Sternwarte erst Wert erhalten wird, ist noch gar nicht gedacht. Ich habe absichtlich darüber noch keine speziellen Schritte getan, teils um durch die zu grosse Summe nicht abzuschrecken (für den Bau allein werden von jetzt an noch etwa 25000 Taler nötig sein), teils weil ich bei der Ungewissheit, wie lange die Vollendung des Baues sich noch verzögern könne, mich nicht in den Fall setzen wollte, die Hauptinstrumente vielleicht viele Jahre in der Kiste stehen zu haben, zumal in einem Zeitpunkt, wo die astronomischen Instrumente von Jahr zu Jahr so mannigfache Verbesserungen erhalten.«

Die letzte auf der alten Sternwarte eingetragene Notiz im *Tagebuch der Sternwarte* ist vom 13. Juni und die erste auf der neuen Sternwarte vom 13. Oktober 1816. Nachdem schon seit dem 27. Februar 1814 das *Tagebuch* keine regelmässigen Fixsternbeobachtungen am Quadranten von HARDING mehr aufweist, weil dessen Beobachtungen für seine Sternkarten vermutlich zum Abschluss gekommen waren, und für die Zeitbestimmungen fast nur Sonnenbeobachtungen am Quadranten, sowie korrespondierende und Zirkummeridianhöhen der Sonne von GAUSS' Hand enthält, rühren auch die Eintragungen auf der neuen Sternwarte fast ausschliesslich von GAUSS' Hand her. Ausser den eben genannten laufenden Beobachtungen, den bis 1818 fortgesetzten und bereits oben besprochenen Untersuchungen über die Polhöhe und die Schiefe der Ekliptik mit dem REICHENBACHschen BORDAkreise und den Messungen mit dem Heliometer betreffen sie nur vereinzelte Beobachtungen von Kometen, Planeten und anderen Himmelserscheinungen, da-

neben aber eine lange Reihe von Bestimmungen terrestrischer Punkte mit dem REICHENBACHschen Theodoliten und dem Sextanten, darunter auch solche zur Vorbereitung der Aufstellung des nördlichen Meridianzeichens. In das *Tagebuch* hat sodann GAUSS noch seine »Messungen auf dem Michaelisturm in Lüneburg zur Anknüpfung eines Lüneburger Turms an die Dänischen Dreiecke« 1818 Oktober 3.—9. eingetragen, womit die Eintragungen zunächst aufhören; nur vom 30. Oktober 1820 bis 15. April 1822 finden sich darin ausser Beobachtungen der Kometen 1818 II und 1821 wieder terrestrische Messungen im Anschluss an die Sternwarte. Mit diesen schliesst es gänzlich.

Für seine Beobachtungen mit den Meridianinstrumenten von REPSOLD und REICHENBACH hat GAUSS besondere Beobachtungsbücher angelegt.

5. Periode. Der REPSOLDsche Meridiankreis (1818 und später).

Nach dem Eintreffen des REPSOLDschen Meridiankreises im April 1818 widmete GAUSS einen grossen Teil seiner Zeit diesem Instrument. Er war, wie immer, bestrebt, auch hier seinen Untersuchungen das höchste Mass von Zuverlässigkeit zu geben und nicht auf Kosten grösserer Sorgfalt eine grosse Anzahl von Beobachtungen zusammenzutragen. Dass er trotzdem viel beobachtet hat und von ihm auch mit diesem Instrument längere Beobachtungsreihen angestellt, aber nicht veröffentlicht sind, geht aus dem Folgenden hervor. Über das Eintreffen des Kreises in Göttingen findet sich in dem oft erwähnten *Tagebuch der Sternwarte* folgende Notiz: »1818 April 10. (Freitag), Ankunft des REPSOLDschen Kreises. Am 11. April kam der Künstler selbst an und blieb bis zum 19ten Abends bei mir. In dieser Zeit wurde der Kreis aufgestellt, auch die SHELTONsche Uhr gereinigt. Letztere hatte dadurch eine Acceleration von ca. 25^s täglich erhalten. Am 20. wurde sie schärfer reguliert; ihr Stand im Mittage des 20. war, wie sich aus den späteren Beobachtungen am Kreise ergab, $-2^s,51$ und ihr täglicher Gang $+1^s,01$«.

Seine Beobachtungen an diesem Kreise hat GAUSS in ein besonderes, am 1. Mai 1818 begonnenes, Buch eingetragen, das er *Tagebuch der Beobachtungen am Repsoldschen Meridiankreise* betitelt hat und über das er in seinem S. 91 abgedruckten Brief an BESSEL vom 10. Mai berichtet. Dieses *Tagebuch* befindet sich auf der Göttinger Sternwarte, wurde dort aber erst nach Vollendung des

Bandes XI, 1 der Werke aufgefunden (siehe die Bemerkung Werke XI, 1, S. 507). Es enthält die sauber eingetragenen Beobachtungsprotokolle nebst den ersten Reduktionen; die unmittelbar am Instrument gemachten Aufzeichnungen sind mit wenigen Ausnahmen nicht mehr vorhanden. Einige Beobachtungsergebnisse hat GAUSS in den *Handbüchern* Ba (15) und Bc (17) zwischen anderen Notizen eingetragen. Ausserdem befindet sich im Nachlass eine grosse Anzahl loser Zettel, die ausser den wenigen noch vorhandenen Beobachtungsprotokollen meist Vorbereitungsrechnungen zu den Beobachtungen enthalten, insbesondere Reduktionen von Sternörtern, Hilfstafeln für die Fadendistanzen und andere Reduktionen, Instrumentalfehler, Uhrvergleichungen. Das Fernrohr des Meridiankreises hatte anfangs[1]) drei Vertikalfäden, deren Abstände auf der ersten Seite des *Tagebuchs*, auf der sich auch Notizen über die Reduktionsformeln finden, zu 16″,397 und 16″,085 (einstweilen anzunehmen) angegeben sind. Vom 1. bis 31. Mai[1]) hat GAUSS an 21 Tagen beobachtet, an den meisten einige Hauptsterne, an einigen die Sonne. Über diese seine ersten Beobachtungen und Untersuchungen am Instrument geben am besten die beiden folgenden Briefstellen Aufschluss.

GAUSS schreibt an OLBERS am 4. Mai 1818: »Ich sehne mich um so mehr nach besserm Wetter, da ich seit vierzehn Tagen im Besitze des REPSOLDschen Kreises bin, mit dem ich aber noch wenig habe machen können. Die ersten Tage gingen über die ersten Berichtigungen hin und seitdem ist es nur ausnahmsweise etwas heiter gewesen. Noch habe ich keine einzige vollständige Beobachtung des Polarsterns erhalten können, obgleich ich allemal auf dem Platze war. Einiges kann ich Ihnen indessen schon davon schreiben. Die Ablesungen geschehen durch die mikroskopischen Mikrometer mit ausserordentlicher Schärfe. Der Kreis ist unmittelbar von 5′ — 5′ geteilt; jeder Strich erscheint im Brennpunkte des zusammengesetzten Mikroskops sehr vergrössert; die mikrometrische Schraube führt darüber ein rundes Loch, etwa 20″ im Durchmesser (jeder Strich mag etwa 7″ halten), dessen Bisektion man sehr genau beurteilt; bei Tage lese ich auf eine Sekunde, bei Licht auf ½ Sekunde ganz zuverlässig ab. Da drei Ablesungen unter rechten Winkeln von einander angebracht sind (eine vierte verstattete der Bau des Instruments nicht wohl), so habe ich deren Korrespondenz schon einmal von 15 zu 15 Grad

1) Am 1. Juni wurden 5 neue Fäden eingezogen; siehe S. 92.

geprüft, wo sich ergab, dass eine kleine Exzentrizität von 0″,8 da ist, und übrigens alles sich erklären liess, ohne einen zufälligen Teilungsfehler über 1″ anzunehmen. Eine absolute Bestimmung der Teilungsfehler lässt sich natürlich auf diesem Wege nicht erhalten; ich bekomme zu diesem Behuf noch ein bewegliches Prüfungsmikroskop[1]). Ganz unverrückbar scheinen die Mikroskope nicht zu sein (sie sitzen übrigens nicht am Stein unmittelbar, sondern am beweglichen Teil des Lagers fest); folgendes sind die Resultate der Libelle, welche einen zwei Speichen des Kreises verbindenden Zylinder bis auf 1″ (zuverlässig genau) nivellierte seit der Zeit, wo ich die Mikroskope selbst berichtigt habe[2]):

	A	B	C
April 30.	3′ 22″,9	3′ 31″,6	3′ 14″,0
Mai 1. Vorm.	3 21,3	3 31,0	3 13,1
» 1. Nachm.	3 22,1	3 31,7	3 15,5
» 3. Vorm.	3 18,9	3 29,6	3 11,1
» 3. Nachm.	3 20,4	3 30,0	3 12,0.

»Beim Pointieren auf Sterne, die zwischen zwei horizontale Fäden gefasst werden, glaube ich bei ruhiger Luft nicht über 1″ fehlen zu können. Die Beobachtungen mit dem Instrument als Kreis sind noch gar zu wenig zahlreich, um Resultate geben zu können; die Durchgangszeiten von Fundamentalsternen nach BESSELS Katalog gaben am 1. Mai folgende Übereinstimmung[3]):

Capella	— 0ˢ,49	Stand der Uhr gegen Sternzeit; der Gang ist noch unbekannt, da vorher die Linse etwas gestellt, und seitdem noch keine Beobachtung möglich war.
Sirius	— 0,70	
Castor	— 0,48	
Procyon	— 0,65	
Pollux	— 0,53	
α Hydrae	— 0,77	
Regulus	— 0,55	

1) Siehe darüber S. 103. — BRDL.

2) Diese Angaben entsprechen den Eintragungen im *Handbuch* Ba, S. 71, 73, 76. — BRDL.

3) Diese Angaben entsprechen den Eintragungen im *Handbuch* Ba, S. 63, wo aber die Zahlen nachträglich etwas geändert sind; die entsprechenden Beobachtungen sind im *Tagebuch* des REPSOLDschen Kreises vermerkt. Auf Seite 65 des *Handbuchs* Ba findet sich die Überschrift »Erste Beobachtungen mit REPSOLDs Kreise«; diese beginnen mit dem 20. April, liegen also zum Teil vor dem Anfang des *Tagebuchs*. — BRDL.

»Die Achse lässt sich vermittelst einer äusserst schönen Libelle auf 1″ genau nivellieren. Eine kleine Unvollkommenheit hat noch die Beleuchtung, welcher aber REPSOLD nach seiner Zurückkunft (er ist von hier nach München und Zürich gereist) abhelfen wird. . . . . Soeben habe ich abermals den Kreis nivelliert und gefunden:

Mai 4. 3′ 18″,7 3′ 28″,2 3′ 10″,4.

»Es wird mir daher sehr wahrscheinlich, dass die gegenseitige Stellung der Mikroskope weit unveränderlicher ist, als ich anfangs dachte; denn sonst würde doch schwerlich das Mikroskop C sich ebenso viel gesenkt, wie das B gehoben und A südlich geschoben haben. Vielleicht liegen die kleinen Unterschiede mehr daran, dass ich den zu nivellierenden Zylinder nicht jedesmal sorgfältig abgewischt habe; ein paar kleine Stäubchen können schon einigen Ausschlag geben. Ein Instrument wie dieses will in allen Teilen äusserst delikat behandelt sein, und ein längerer Gebrauch muss erst alle Vorsichtsregeln lehren.

»Das Ablesen mit Mikroskopen gefällt auch mir (wie BESSEL) mehr wie das mit Nonien; ich zweifle, ob bei diesem Radius letztere eine solche Schärfe geben können. Ein Vorteil bei jenen besteht auch darin, dass man ganz unbefangen abliest, da man, wenn der mittlere Unterschied der Verniers einmal bekannt oder äusserst klein ist, unwillkürlich bei den folgenden Verniers immer schon durch die gelesenen etwas präokkupiert ist.«

Weiterhin schreibt GAUSS am 10. Mai 1818 an BESSEL: »Seit dem ersten Mai habe ich mein *Tagebuch* angefangen, aber erst zwei Seiten voll Beobachtungen erhalten[1]). Die wenigen frühern Beobachtungen lasse ich weg, da sie nur zu den vorläufigen Berichtigungen der Uhr, der Aufstellung, der Gesichtslinie und der Mikroskope dienten. Soviel ich bis jetzt urteilen kann, wird sich viel mit diesem Instrumente leisten lassen. Schlimm ist es, dass der zu der Sternwarte gewählte Platz mir schwerlich verstatten wird, eine Meridianmarke ganz so wie ich wünschte, zu errichten. Im Norden läuft die Meridianlinie durch zahllose Gärten, die mit Obstbäumen mir ein paar Grad abschneiden, und im Süden begrenzt meinen Horizont ein Berg, der dicht mit Waldung bewachsen ist. Vielleicht kann ich es dahin bringen, dass diese

1) Notizen hierüber stehen im *Handbuch* Ba, S. 74—78. — BRDL.

durchgehauen wird; vorläufig werde ich also mein Zeichen am Fuss dieses Berges errichten müssen, wo es nie so gut zu sehen sein kann, als wenn es im Norden sich gegen den Himmel projizierte. Indessen verspreche ich mir eine gute Wirkung von der Einrichtung, die ich zu wählen denke; ich denke nämlich zwei Zeichen ein Paar Fuss von einander zu setzen, so dass mein Feld, wenn das Instrument eingestellt ist, so aussieht:



Die Bisektion lässt sich mit grosser Schärfe machen. Ein Meridianzeichen ist mir desto notwendiger, da das Klima hier so äusserst ungünstig ist. In der untern Kulmination habe ich den Polarstern schon 5 oder 6 Mal vollständig beobachtet, in der obern ihn erst 2 Mal sehen können, aber nur in einzelnen Augenblicken so, dass ich zwar die Zenitdistanzen erhielt, aber keinen einzigen Fadenappuls. Eine Rektaszension habe ich also noch garnicht beobachtet. Bei allen Beobachtungen fühle ich den hohen Wert Ihrer Tafeln für die Rektaszensionen der Fundamentalsterne und wünschte nur ähnliche auch für die Deklinationen zu haben. . . . . .«

Eine Beschreibung des REPSOLDschen Meridiankreises gibt GAUSS nebst Mitteilungen über Beobachtungen des Polarsterns auch in den Göttinger Gelehrten Anzeigen (Werke VI, S. 410) und in einem in den Astronomischen Nachrichten abgedruckten Brief an BODE (Werke VI, S. 415). REPSOLD spricht davon in seiner *Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, S. 112—113 und weist dort auf einen Brief von GAUSS an ZACH hin, der in ZACHS Correspondance astronomique, géographique etc., Band II, Seite 55 abgedruckt und eine französische Übersetzung des vorerwähnten Briefes an BODE ist.

Über seine ersten Beobachtungen nach dem Einziehen der neuen Fäden berichtet GAUSS an OLBERS am 24. Juni 1818: »Ich habe inzwischen mit meinem REPSOLDschen Kreise schon ziemlich viel observiert. In den ersten Tagen dieses Monats kam REPSOLD von seiner Reise hierher zurück und zog mir neue Spinnfäden ein, 5 vertikale statt der vorigen 3, und 2 horizontale 12″,7 von einander entfernte statt der vorigen 21″,1 von einander abstehenden[1]). . . .

1) Die entsprechende Eintragung steht im *Tagebuch*, S. 8. — BRDL.

Seitdem haben die Beobachtungen an Genauigkeit noch sehr gewonnen. Besonders erfüllt und übertrifft das Instrument als Mittagsfernrohr schon jetzt alle meine Wünsche. Die Übereinstimmung meiner Nordstern-Rektaszensionen unter sich ist in der Tat so gross und so viel grösser als bei andern Astronomen, dass sie meine eigene Bewunderung erregt; sie beweist zugleich die grosse Solidität der Aufstellung. Sehen Sie hier meine bisherigen Resultate[1]) seit Einziehung der neuen Fäden (Juni 3,25 bedeutet 6^h nach der untern Kulmination)

	Beob. AR	Unterschied v. Bessels Tafeln
Juni 3,25	$0^h 55^m 58^s,65$	$+2^s,93$
4,25	58,18	+2,80
5,25	58,56	+2,45
6,25	58,91	+2,22
8,5	56 1,14	+2,97
10,25	2,58	+3,20
11,25	2,68	+2,59
12,5	3,31	+2,36
16,75	6,11	+2,13
18,25	7,31	+2,26
19,25	8,29	+2,51
21,25	10,31	+3,08

»Bei Bessels Tafeln, *Jahrbuch* 1817, ist schon auf die Verbesserung *Jahrbuch* 1818 Rücksicht genommen. Die untere Kulmination vom 3. Juni war bloss an zwei Fäden etwas unsicher beobachtet, sie weicht am meisten von den übrigen ab; die andern stimmen aber beinahe so gut überein, wie man sonst von Sternen im Äquator gewohnt ist. Der beträchtliche Unterschied von Bessels Tafel ist auffallend, ein Teil davon wird durch Lindenaus Nutationsverminderung weggeschafft werden. Ich bediene mich immer der 96-maligen Vergrösserung.

»Die Deklinationen geben zwar meistens eine nicht minder befriedigende Übereinstimmung, wie folgende Probe vom Regulus zeigt:

1) Die entsprechenden Beobachtungen stehen im *Tagebuch*, fol. 8—14. — Bedl.

			auf 1818 Anfang reduziert
Kr. im Osten	Juni 4.	$12^0\,51'\,12''{,}5$	$12^0\,51'\,10''{,}1$
	» 6.	14,1	11,7
Kr. im Westen	» 7.	$15{,}5 - \delta$	$13{,}0 - \delta$
	» 8.	$14{,}7 - \delta$	$12{,}2 - \delta$
	» 9.	12,0	9,5
	» 10.	15,0	12,4
	» 12.	15,1	12,4
	» 13.	13,7	11,0
Kr. im Osten	» 18.	17,1	14,2
	» 21.	$18{,}0 - \delta$	$12{,}0 - \delta$.

»Die Vergleichung geschah immer mit dem Polarstern, von dessen Deklination das Resultat unabhängig ist, wenn die vorhergehende obere und folgende untere Kulmination beobachtet werden konnte; an drei Tagen fehlte letztere, daher hier noch die Korrektion δ von BESSELS Tafeln vorkommt, die im Mittel nach meinen Beobachtungen gegen $+1''$ ist. Das Mittel aus diesen Resultaten stimmt nahe mit POND, ORIANI, PIAZZI überein und weicht beträchtlich von demjenigen ab, welches Hr. LITTROW aus BESSELS Beobachtungen gezogen hat. Sie sehen, dass auch die Lage des Kreises im Osten und Westen gar keinen Unterschied machte, obgleich dann an ganz verschiedenen Stellen abgelesen wird; es sind dies gewissermassen Beobachtungen mit zwei verschiedenen Instrumenten. Ein Beweis für die Vortrefflichkeit der Teilung. Sie sehen, dass ich den Kreis hierbei nach PONDscher Manier[1]) gebraucht habe. Allein obgleich dies in den meisten Fällen gut geht, so sind mir doch schon ein paar Mal Ausnahmen vorgekommen, die beweisen, dass man sich nicht unbedingt auch nur 12 Stunden auf Unverrücktheit verlassen kann. Die Deklination des Nordsterns selbst habe ich ein paar Mal auf diese Art $4''$ grösser als aus BESSELS Tafel gefunden, welches, wenn diese sie auch $1''$ zu klein geben, eine Verrückung von $6''$ in 12 Stunden voraussetzt (am Pointieren und Ablesen lag es gewiss nicht, auch wurde eigentlich bei jeder Kulmination die Zenitdistanz dreimal beobachtet); auch stimmten die Mikroskope unter sich gut; es sind also nur drei Möglichkeiten:

1) Siehe oben S. 95—96. — BRDL.

1. entweder der Stein hat sich etwas gedreht (um eine horizontale Achse von Osten nach Westen, d. i. die eine Seite hat sich im Süden oder Norden etwas gesenkt);

2. oder das Lager, welches die Mikroskope trägt, hat sich etwas gedreht;

3. oder die Verbindung des Kreises oder Fernrohres mit der Achse ist in der Nacht etwas geändert.

»Wäre 1. oder 2. der Fall gewesen, so hätte sich dies auch an der Libelle zeigen müssen; ich bin hierdurch auf die Notwendigkeit geführt, unmittelbar nach jeder Polarstern- und Sonnenbeobachtung oder jeder sehr wichtigen Beobachtung zu nivellieren, welches freilich etwas lästig ist, zumal jetzt, wo die Libelle noch keine Skale hat (die mir REPSOLD schicken wird); allein dies ist nicht zu ändern, und ich möchte darin eine Bestätigung finden von dem, was ich immer geglaubt habe, dass das Nichtversehensein mit Libelle oder Lot bei PONDS Kreise ein grosser Fehler ist; freilich muss es eine Libelle sein wie die REPSOLDsche, mit der man keine halbe Sekunde fehlen kann. Wäre aber No. 3 der Fall gewesen (was ich aber um so weniger glauben kann, da ich selbst in den betreffenden Nächten gar nicht observiert habe und HARDING auch das Instrument damals nicht berührt zu haben versichert), so könnte dies durch die Libelle, wie sie jetzt angebracht ist, nicht erkannt werden, wohl aber mit einer neuen Libelle, die REPSOLD mir auf meinen Wunsch noch liefern wird, und die unmittelbar auf das Fernrohr gestellt wird. Diese neue Libelle und ihre Vergleichung mit der alten, die zwischen zwei Kreisspeichen aufgehängt wird, wird sehr wesentlich sein, um über diesen Umstand Aufschluss zu geben; denn in der Tat ist die Verbindung des Kreises mit der Achse vielleicht, wenn das Instrument einmal unsanft behandelt wird, wohl einer kleinen Veränderlichkeit unterworfen, da jene Verbindung nur von einem kleinen Radius abhängt; jedoch kann hierüber die Erfahrung allein entscheiden. Übrigens sind alle Verbindungen durch Messingschrauben gemacht und am ganzen Instrument ist beinahe gar kein Stahl (bloss die Mikroskopschrauben ausgenommen und die Stellschraube des Kreises für die Höhe — aber nicht die Stellschraube für die beiden Lager)«.

Die in diesem Briefe erwähnte PONDsche Manier bestand darin, dass man die Deklinationen nicht aus den Zenitdistanzen in Verbindung mit der Polhöhe, sondern aus dem Ort des Pols (wie GAUSS es nennt) bestimmte, den

			auf 1818 Anfang reduziert
Kr. im Osten	Juni 4.	$12^0\,51'\,12''{,}5$	$12^0\,51'\,10''{,}1$
	» 6.	14,1	11,7
Kr. im Westen	» 7.	$15{,}5 - \delta$	$13{,}0 - \delta$
	» 8.	$14{,}7 - \delta$	$12{,}2 - \delta$
	» 9.	12,0	9,5
	» 10.	15,0	12,4
	» 12.	15,1	12,4
	» 13.	13,7	11,0
Kr. im Osten	» 18.	17,1	14,2
	» 21.	$18{,}0 - \delta$	$12{,}0 - \delta$.

»Die Vergleichung geschah immer mit dem Polarstern, von dessen Deklination das Resultat unabhängig ist, wenn die vorhergehende obere und folgende untere Kulmination beobachtet werden konnte; an drei Tagen fehlte letztere, daher hier noch die Korrektion δ von BESSELS Tafeln vorkommt, die im Mittel nach meinen Beobachtungen gegen $+1''$ ist. Das Mittel aus diesen Resultaten stimmt nahe mit POND, ORIANI, PIAZZI überein und weicht beträchtlich von demjenigen ab, welches Hr. LITTROW aus BESSELS Beobachtungen gezogen hat. Sie sehen, dass auch die Lage des Kreises im Osten und Westen gar keinen Unterschied machte, obgleich dann an ganz verschiedenen Stellen abgelesen wird; es sind dies gewissermassen Beobachtungen mit zwei verschiedenen Instrumenten. Ein Beweis für die Vortrefflichkeit der Teilung. Sie sehen, dass ich den Kreis hierbei nach PONDscher Manier[1]) gebraucht habe. Allein obgleich dies in den meisten Fällen gut geht, so sind mir doch schon ein paar Mal Ausnahmen vorgekommen, die beweisen, dass man sich nicht unbedingt auch nur 12 Stunden auf Unverrücktheit verlassen kann. Die Deklination des Nordsterns selbst habe ich ein paar Mal auf diese Art $4''$ grösser als aus BESSELS Tafel gefunden, welches, wenn diese sie auch $1''$ zu klein geben, eine Verrückung von $6''$ in 12 Stunden voraussetzt (am Pointieren und Ablesen lag es gewiss nicht, auch wurde eigentlich bei jeder Kulmination die Zenitdistanz dreimal beobachtet); auch stimmten die Mikroskope unter sich gut; es sind also nur drei Möglichkeiten:

1) Siehe oben S. 95—96. — BRDL.

1818 mit, denen ich PONDS Polardistanzen und die daraus folgende Polhöhe beisetze. Natürlich ist dies Verfahren des REPSOLDschen Kreises unwürdig, und umgekehrt, wenn erst aus Zirkumpolarsternen die Polhöhe abgeleitet ist, werden daraus die Deklinationen geschlossen werden müssen. Indessen lässt sich vorläufig hieraus abnehmen, dass meine Deklinationen von den PONDschen wohl nur sehr wenig abweichen werden. Bei α Librae würde die Übereinstimmung mit den übrigen noch grösser sein, wenn ich dieselbe Refraktion wie POND gebraucht hätte (ich habe BESSELS Tafel angewandt). Die Beobachtungen von mehrern andern Sternen habe ich noch nicht reduziert. Die Zahl der Beobachtungen ist nach der Formel $\frac{4ab}{a+b}$ berechnet, wo a die Zahl der Beobachtungen bedeutet, wo der Kreis im Osten war, b die, wo er im Westen war (gemäss meiner Wahrscheinlichkeitstheorie).

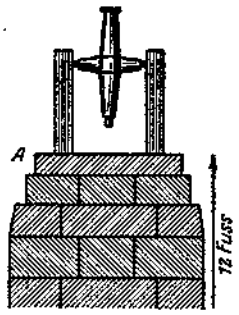
Lauter Tag-Beobachtungen:

	Beobb.	Z.-D.	PONDS Poldistanz	Polhöhe
Nordstern U. C.	16,5	$-40^0\ 7'\ 53''60$	$1^0\ 39'\ 44''35$	$51^0\ 31'\ 50''75$
β Ursae min. O. C.	13,7	$-23\ 22\ 7,18$	$15\ 6\ 2,50$	50,32
Capella O. C.	8,9	$+\ 5\ 43\ 46,87$	$44\ 11\ 57,65$	49,22
Arcturus	18,5	$+31\ 23\ 43,25$	$69\ 51\ 53,95$	49,30
β Leonis	14	$+35\ 56\ 26,01$	$74\ 24\ 37,50$	48,51
α Orionis	8,9	$+44\ 9\ 57,13$	$82\ 38\ 8,85$	48,28
α^2 Librae	13,7	$+66\ 48\ 30,11$	$105\ 16\ 38,70$	51,41

An BESSEL schreibt GAUSS über den gleichen Gegenstand am 5. Dezember 1818: »Meine ersten Beobachtungen am REPSOLDschen Kreise, die Polarstern-geraden Aufsteigungen und die Uranusopposition, ... werden Sie wahrscheinlich in unsern Gelehrten Anzeigen[1]) gefunden haben. Das Instrument hat sich auch seitdem als ein äusserst vollkommenes Mittagsfernrohr bewährt, hingegen bei den Deklinationen (die ich immer nach PONDS Manier durch Vergleichung mit der nächsten oder zweitnächsten Nordsternkulmination bestimmte) zeigten sich öfters Unterschiede grösser als ich erwartet hatte. Ich

1) Werke VI, S. 410 f. — BRDL.

habe mich endlich überzeugt, dass diese Manier, bei meinem Instrumente wenigstens, verwerflich ist. Ich habe die Erfahrung gemacht, dass die Mikroskope sich in wenigen Stunden merklich, in 12 Stunden oft 4″, 5″ auch 6″ verstellen, doch nach 24 Stunden immer ziemlich wieder auf den vorigen Punkt zurückkommen. Höchst merkwürdig ist 1) dass diese Verstellung für alle 3 Mikroskope sehr nahe dieselbe ist, 2) dass sie von Mittag bis spät in die Nacht ohne Ausnahme in einem Sinn geht, 3) dass dieser Sinn in Beziehung auf die Teilung entgegengesetzt ist, nachdem der Kreis von der östlichen Lage in die westliche gebracht ist, übrigens aber ungefähr dieselbe Grösse hat. Das Phänomen ist also ganz so, als ob die beiden Pfeiler eine gemeinschaftliche oszillierende Bewegung haben, so dass sie ein paar Stunden nach Mittag am weitesten nach Norden oben übergeneigt sind, und spät in der Nacht am weitesten nach Süden. Recht klar kann ich mir die Ursache noch nicht machen. Temperatur der Steine oder vielleicht des Steines (A), auf dem beide Pfeiler gemeinschaftlich ruhen, mag im Spiele sein, aber gewöhnlich schreitet die Änderung mit der Temperaturänderung im Zimmer so fort, dass ich auf 1^0 Reaumur fast 2″ Oszillation rechnen muss, welches doch etwas viel scheint. Am Instrument ist übrigens alles von Messing und durchaus aller Stahl vermieden, lediglich die Mikrometerschrauben ausgenommen, deren verschiedene Ausdehnung aber nur einen sehr kleinen Teil des Phänomens erklären könnte, und auch nur in der einen Lage des Instruments, während sie bei der anderen Lage damit in Widerspruch sind. Seitdem beziehe ich alles auf das Zenit, bin aber freilich gezwungen, viel öfter zu nivellieren als vorher, welches sehr lästig ist. Meine ältern Beobachtungen habe ich daher grösstenteils verwerfen müssen. Hier einige auf den Anfang von 1818 reduzierte Zenitdistanzen[1]). Viele andere sind noch nicht berechnet:



		Gewicht
α Ursae minoris U. Culm.	$-40^0\ 7'\ 53,''62$	18,2
β » » O. Culm.	$-23\ 22\ 7,17$	16,0
Capella	$+\ 5\ 43\ 46,87$	8,9

1) Vergl. auch den Brief an GERLING auf der vorigen Seite. — BRDL.

		Gewicht
Arcturus	31° 23′ 43″,10	19,8
Aldebaran	35 23 43,50	6,9
β Leonis	35 56 26,01	14,0
α Orionis	44 9 57,13	8,9
α Serpentis	44 31 25,55	10,7
α Librae	66 48 30,11	13,7
Sirius	68 0 14,39	6,0

»Die Beobachtungen sind lauter Tagbeobachtungen und mit Ihrer Refraktion reduziert. Die Anzahl der Nordstern-oberen Kulminationen, seitdem ich immer gleich vorher oder nachher nivelliere, ist noch sehr klein. Meine Polhöhe werde ich also erst nach Jahresfrist kennen. Auch muss ich erst den Apparat zur Bestimmung der Teilungsfehler erwarten[1]).«

Über GAUSS' eigentliche Beobachtungstätigkeit mit dem REPSOLDschen Kreise geben in erster Linie die folgenden Briefstellen Aufschluss:

GAUSS an OLBERS, 24. September 1818. — »Den REPSOLDschen Kreis habe ich bisher hauptsächlich für Deklinationen von Hauptfixsternen[2]) angewandt; es können jedoch, da ich, durch Erfahrung belehrt, durchaus die Beobachtungen auf das Zenit und nicht nach PONDS Manier auf den Pol beziehe, erst nach Jahresfrist Resultate daraus hervorgehen, die auch dann erst definitiv werden können, wenn ich den Apparat zur Bestimmung der Teilungsfehler[1]) erhalten habe.«

GAUSS an BESSEL, 27. Januar 1819. — »Die grosse Stabilität des REPSOLDschen Kreises im Azimut und in der Horizontalität schreibe ich vorzüglich der Vorsicht mit zu, dass beide Pfeiler auf einer grossen Unterlage stehen. Ist dies auch bei dem Ihrigen? — Meine Deklinationsbeobachtungen sind eigentlich erst seit der Zeit zuverlässig, wo ich sie auf das Zenit beziehe und alle Stunde oder zwei Stunden nivelliere[3]). Aus Hamburg habe ich eine neue

1) Vergl. S. 103. — BRDL.

2) Die entsprechenden Beobachtungen sind im *Tagebuch* des REPSOLDschen Kreises eingetragen. In einem Brief an BODE vom 7. September 1818, der im Berliner Astronomischen Jahrbuch (Werke VI, S. 414) abgedruckt ist, sagt GAUSS: »Von meinen zahlreichen Fixsternbeobachtungen ist erst ein Teil reduziert und ich behalte mir die Mitteilung der Resultate auf die Zukunft vor.« — BRDL.

3) Vergl. S. 95—96 und S. 97—98 (PONDsche Manier). — BRDL.

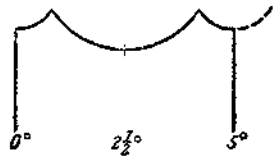
Libelle mitgebracht, die REPSOLD auf meinen Wunsch verfertigt hat, und die die erste fast noch übertrifft (unter uns, ich finde, dass REPSOLDS Libellen die REICHENBACHschen übertreffen). Diese Libelle wird unmittelbar auf den Würfel gestellt, an den die zwei Teile des Fernrohrs geschraubt sind. Meine bisherige Erfahrung zeigt indessen die Differenz zwischen dieser und der alten zwischen den Speichen des Kreises aufgehängten Libelle fast ganz konstant; letztere habe ich noch einmal an REPSOLD zurückgeschickt, um eine Skale anzubringen, die ihr anfangs fehlte, und erst kürzlich habe ich sie zurückerhalten. Beide Libellen sind fast von gleicher Empfindlichkeit, $2\frac{1}{4}$ Millimeter auf die Sekunde einfacher Ausschlag. Seit Ende Oktober[1]), wo ich die neue Libelle gebrauche, habe ich die Beobachtung von 80 bis 100 ausgewählten Zirkumpolarsternen zu meinem Hauptgeschäft gemacht. Ich denke jeden wo möglich 12 Mal in jeder Kulmination zu beobachten, 6 Mal nämlich in der einen, 6 Mal in der andern Lage des Kreises. Bisher habe ich etwa 500 bis 600 Beobachtungen, worunter aber manche wegfallen, weil das schlechte Wetter oft hinderte, die einseitig beobachteten Sterne noch hinreichend oft, ehe der Tag mich übereilte, in der andern Lage zu beobachten. Der Kollimationsfehler[2]) scheint zwar fast absolut konstant (der Zeit nach), ist aber nicht für alle Höhen derselbe. Höchst merkwürdig ist mir aber, dass dieser nach den Höhen veränderliche Kollimationsfehler, welcher, wenn er nach den Zenitdistanzen selbst geordnet wird, gar keine Regelmässigkeit zeigt, eine ganz auffallende Regelmässigkeit zeigt, wenn er nach den Differenzen der Höhen von den nächsten 5^0 geordnet wird, so dass ich mich überzeugt halte, dass er in der Art der Teilung seinen Grund hat. REPSOLD hat nämlich den Kreis zuerst in 72 Teile von 5^0 zu 5^0 geteilt, nachher die Unterabteilungen mit einer Mikrometerschraube gemacht. Er glaubte, dass der Theorie nach aus dieser Methode kein Fehler von $\frac{1}{4}$ Sekunde entstehen könnte, aber ich glaube, er hat sich geirrt. Unglücklicherweise habe ich jenen so merkwürdigen Umstand nicht bemerkt, ehe ich nach Hamburg reiste, welches ich sehr bedauere, da ich sonst mündlich die hierauf Bezug habenden Details hätte erfahren können. Ich werde nun suchen, schriftlich von ihm, was möglich ist, auszumitteln, die Dimension seines Apparats etc. Soviel hatte er mir früher

1) Seit dem 25. Oktober nach Ausweis des *Tagebuchs*. — BRDL.

2) So nennt GAUSS den Fehler des Zenitpunktes. — BRDL.

schon mündlich gesagt, dass er diejenigen 72 Striche, die er zuerst geteilt habe, nicht mehr nachweisen könne. Um Ihnen eine anschauliche Vorstellung von dieser Sache zu geben, setze ich die Kollimationsfehler aus den bisher reduzierten Sternen in doppelter Ordnung her. Mich dünkt, dies Tableau beweist die Vortrefflichkeit der ersten Teilung in 5^0 auf das schönste . . . .[1]).

»Das Vorherrschen der grössern Kollimationsfehler in dem ersten Drittel dieses zweiten Tableaus ist so auffallend, dass man sich nicht enthalten kann, es für reell zu halten. Ist die oben angedeutete Quelle die wahre, so sind wahrscheinlich die 72 Striche der ersten Teilung ungefähr in $(n \times 5^0) + (0^0\,40')$ oder in $(n \times 5^0) - (0^0\,40')$ gewesen. Sie finden leicht, dass der Kollimationsfehler dann eine solche Kurve bildet



»Dass ein paar Sterne, besonders 34 Cephei, etwas abweichen, mag an den Beobachtungsfehlern (oder zum Teil an örtlichen Teilungsfehlern) liegen, denn unter einer grossen Menge Beobachtungen werden immer auch zuweilen einige vorkommen, wo in den Mitteln eine weniger vollkommene Kompensation stattgefunden hat. Mit Verlangen erwarte ich den Apparat zur Prüfung der Teilung, woran REPSOLD jetzt noch arbeitet[2]).

»Resultate aus den Beobachtungen gebe ich Ihnen jetzt noch nicht, ich muss warten, bis erst die entgegengesetzten Kulminationen beobachtet werden können. Bald werde ich damit anfangen. Leider fühle auch ich schon zuweilen die Leiden der praktischen Astronomen. Eben jetzt bin ich mit inflammierten Augen geplagt gewesen und noch jetzt darf ich nicht wohl mehr als 2 Stunden täglich beobachten.«

Auf diesen Brief antwortet BESSEL am 1. April 1819 unter anderem: »Wie vielen Dank bin ich Ihnen für Ihren so sehr lehrreichen Brief vom 27. Januar schuldig! Was ist nicht alles zu bemerken, ehe unsere Beobachtungen wirklich bis auf kleine Teile sicher werden. Ihre Bemerkungen über den REP-

1) Hier folgt eine Tabelle der Werte des Zenitpunkts, wie sie sich aus den Beobachtungen von 38 Sternen ergeben. — BRDL.

2) Siehe S. 103. — BRDL.

soldschen Kreis sind in dieser Hinsicht das feinste, was wir haben, und recht geeignet, die Astronomen aufmerksam zu machen, dass nicht jeder, der einen Kreis umdrehen kann, im Stande ist, eine einzelne Sekunde zu beobachten. Schreiten wir auf diesem Wege fort, so werden wir bald genug erfahren, was es mit den Rätseln in der praktischen Astronomie für eine Bewandtnis hat. Aber wie viele Astronomen sind denn vorhanden, die einer ähnlichen Aufmerksamkeit fähig wären? — Ich habe schon oft gedacht, dass nicht alles Gold ist, was glänzt.«

Endlich möge noch folgende Stelle aus einem Briefe von GAUSS an OLBERS vom Mai 1819 hier Platz finden: »Ich habe dieser Tage einige neue Beobachtungen am REPSOLDschen Meridiankreis diskutiert, um den wahrscheinlichen Fehler der beobachteten Antritte an die einzelnen Fäden zu bestimmen. LITTROWS Verfahren (Zeitschrift V, S. 12) ist unrichtig; nach Verbesserung seiner Fehler findet sich aus den dortigen Datis der wahrscheinliche Fehler eines von BESSEL beobachteten Antritts nicht $= 0^s,10$, sondern $= 0^s,130$. Aus meinen Beobachtungen, die ich diskutiert habe, folgt:

$0^s,087$	aus	Arcturus-Beobachtungen,	Gewicht	35
0,114	aus	α Persei-	»	55
0,137	aus	α Cassiopeiae-	»	29
0,115	aus	x Draconis-	»	44.

Mein wahrscheinlicher Fehler scheint also etwas geringer als bei BESSEL. Ich weiss nicht recht, wie dies zugeht. BESSEL hat längere Übung als ich; seine Uhr schlägt vermutlich noch etwas schärfer ab als die meinige. Meine stärkere Vergrösserung kann auch die Ursache hiervon nicht sein. Die Vergleichung meiner Sterne unter sich zeigt, dass die Deklination nur schwach dabei mitwirkt, und der wahrscheinliche Fehler hat nicht die Form $\alpha \sec \delta$ (wie BOHNENBERGER zu glauben scheint), sondern die Form $\sqrt{\alpha^2 \sec^2 \delta + \beta^2}$, wo α vom Fehler des Sehens, β vom Fehler des Ohrs abhängt und wo, wie die Vergleichung meiner Sterne zeigt, α viel kleiner sein muss als β. Um α zu bestimmen, muss man denselben Versuch bei Sternen machen, die dem Pol sehr nahe stehen, welches ich aber noch nicht besonders genau untersucht habe; doch dürfte mein α vielleicht nur halb so gross sein als bei BESSEL, was durch die stärkere Vergrösserung und feinern Fäden sehr erklärlich ist.

Allein dass mein β auch noch etwas kleiner ist als bei BESSEL, nimmt mich, wie gesagt, etwas Wunder. Es wäre interessant, diese Grössen für viele Beobachter und Instrumente zu diskutieren. Da ich erwarten kann, dass bei REICHENBACHS Mittagsfernrohr für mich α und β wenigstens nicht grösser ausfallen werden, als bei REPSOLDS Instrument, und jenes 7 Fäden hat, so wird, wenn jenes Instrument dieselbe Stabilität hat wie dieses, ein einjähriger Kursus gewiss ebenso zuverlässige Resultate hervorbringen, als ein dreijähriger von Königsberger Beobachtungen. Ich habe keinen Zweifel, dass BESSEL seine Meinung von seinen Instrumenten etwas herabstimmen wird, wenn er erst im Besitz des REICHENBACHschen Meridiankreises sein wird.

»Bald werde ich nun auch den Apparat in Tätigkeit setzen, um die Teilungsfehler des REPSOLDschen Kreises zu bestimmen. Ich habe darüber bereits mehrere höchst merkwürdige Erfahrungen[1]). Sonnen-Beobachtungen habe ich noch nicht sehr viele gemacht, aber alle konkurrieren, dasselbe Resultat zu geben, was die Repetitionskreise[2]) gegeben haben. Die Polhöhe aus Sonnen-Beobachtungen ist etwa 5″ kleiner als aus Zirkumpolarsternen; ebenso stimmen meine Deklinationen südlicher Sterne nicht mit den BESSELschen, sondern sehr nahe mit den PONDschen überein und fallen eher noch jenseits. Inzwischen beweist dieses alles noch garnichts entschieden. Über die Konstantenfehler der Höhenmessungs-Instrumente sind noch von Niemand Untersuchungen angestellt, auch von BESSEL nicht. Meine Meinung ist, dass jedes Instrument hierbei ein Individuum ist, und dass wir das Wahre noch garnicht kennen. Jedes Instrument wird seinem Bau nach, sowie wegen der Biegungen der Teile Fehler der gemessenen Zenitdistanzen von der Form $\alpha \sin z + \beta \cos z$ haben; der zweite Teil fällt weg bei Instrumenten, die umgewandt werden können, also nicht bei PONDS Kreise, aller Wahrscheinlichkeit nach ist er aber unmerklich. Allein der erste Teil kann meiner Meinung nach durch alles Äquilibrieren nicht mit Gewissheit weggeschafft werden, und ich sehe durchaus kein Mittel, ihn zu erforschen, als durch den Quecksilberhorizont. Leider sind diese Beobachtungen sehr mühsam, und ich habe bisher nur erst ein paar gemacht, die zeigen, dass α bei REPSOLDS Kreise nur sehr klein sein kann. Wäre BESSELS Kreis fehlerfrei, so müsste nach den Resul-

1) Hierüber finden sich Notizen im *Handbuch* Ba (15), S. 100—107. — BRDL.

2) Vergl. die oben besprochenen Beobachtungen mit dem BORDAkreise. — BRDL.

taten zu schliessen, a bei PONDS Kreise etwa $= -3''{,}3$ und bei REPSOLDS Kreise $= -4''{,}8$ sein, was anzunehmen mir schwer wird; eher möchte ich zugeben, dass PONDS Kreis fehlerfrei sei, und $a = -1''{,}5$ bei mir und $= +3''{,}3$ bei BESSEL. Immer bleibt mir einiger Unterschied zwischen Mittelpunkt der Sonnenfigur und Schwerpunkt sehr wahrscheinlich[1]). Leider kommt die Ungewissheit der Refraktion dazu; die Sonnenbeobachtungen darf man ohne Petitio principii nicht mit zuziehen und bei den Zirkumpolarsternen wird wohl immer 1 Prozent Ungewissheit bleiben. Meine eigenen Beobachtungen würden sogar sehr entschieden zeigen, dass die BESSELsche Refraktion etwas vermindert werden müsse, wenn nicht die Teilungsfehler erst noch untersucht werden müssten. Bis dahin muss ich mein Urteil noch suspendieren.«

Wir ersehen aus dem Briefwechsel und dem noch vorhandenen Material, dass GAUSS einen umfangreichen Beobachtungsplan aufgestellt hatte, von dem er auch einen grossen Teil ausgeführt hat, ohne ihn jedoch zum Abschluss zu bringen und ohne die Ergebnisse, mit Ausnahme der gelegentlich im Meridian angestellten Planetenbeobachtungen, zu veröffentlichen. Im Inventar der Göttinger Sternwarte befindet sich ausser dem oft genannten *Tagebuch* des REPSOLDschen Kreises und den beiden *Tagebüchern* der REICHENBACHschen Meridianinstrumente noch ein Buch mit dem Titel *Rechnungen und Notizen, die Beobachtungen an den Meridiankreisen betreffend.* Dies Buch enthält auf den ersten Seiten unter der Überschrift »Verzeichnis zu beobachtender Sterne« eine, übrigens nicht vollständig ausgefüllte Liste von 316 Sternen, in der die Zirkumpolarsterne vorherrschen und übrigens doppelt aufgeführt und gezählt sind, entsprechend der Beobachtung in beiden Kulminationen. Das Buch enthält weiterhin einige wenige Notizen und einzelne Reduktionen der Beobachtungen am REPSOLDschen Kreise und eine Zusammenstellung der Ergebnisse bis Ende 1818 unter der Überschrift »Resultate der beobachteten Zenitdistanzen bis Ende 1818«. Dabei ist die daraus folgende Polhöhe angegeben unter der Annahme der Deklinationen nach BESSEL, PIAZZI, POND und ORIANI. Weiterhin finden sich in dem Buche noch einige Notizen über das REICHENBACHsche Passageninstrument und eine Zusammenstellung von Reduktionsformeln.

Nach dem *Tagebuch* hat GAUSS in der Zeit vom 3. Juni 1818, nach Ein-

1) Vergl. oben S. 62 und 63. — BRDL.

ziehung der neuen Fäden, bis zum 27. September an 83 Tagen verschiedene Hauptsterne, an einigen Tagen nur die Sonne oder den Polarstern beobachtet. Die Beobachtungen fallen fast ausnahmslos in die Zeit von Mittag oder frühem Nachmittag bis in die späten Abendstunden und betreffen täglich meist 10 bis 15 Sterne. In der Zeit von Ende September bis Ende Oktober befand sich GAUSS in Lüneburg, um die auf Seite 88 erwähnten Messungen auf dem Michaelisturm auszuführen. Nach seiner Rückkehr wandte er sich fast ausschliesslich der Beobachtung von Zirkumpolarsternen zu (vergl. den oben Seite 100 abgedruckten Brief an BESSEL). Das *Tagebuch* weist vom 23. Oktober 1818 bis 21. August 1819 im ganzen 141 Beobachtungstage auf, an denen ausser den Zirkumpolarsternen nur vereinzelt Südsterne und die Sonne, im Juli und August Jupiter und der Komet 1819 II, beobachtet wurden. Auch diese Beobachtungen, die in der Zeit von April bis Mai besonders zahlreich sind und täglich bis zu 30 Sterne umfassen, fallen stets in die Stunden vom frühen Nachmittag bis zum späten Abend.

Am 23. August 1819 wurde der Kreis abgenommen, worüber sich im *Tagebuch* folgende Notiz findet: »Der Kreis wurde am 23. August abgenommen, um die Pfeiler zur Aufnahme des Apparats zur Prüfung der Teilungen vorzurichten, und andere Einrichtungen in dem Zimmer zu treffen. Anfang Oktober wurde der Kreis wieder aufgestellt. Da die Fädenbeleuchtung besonders für kleine Sterne bisher immer schwierig gewesen war, so wurde der Beleuchtungsspiegel von neuem plan geschliffen und matt versilbert. Da auch dies noch nicht zureichend befunden war, die äusserst feinen Fäden immer gut zu beleuchten, so nahm ich diese heraus und zog dafür stärkere ein, und zwar nunmehro 7 vertikale«.

In derselben Zeit begannen auch die ernstlichen Beobachtungen am REICHENBACHschen Passageninstrument, das schon im September 1818 aufgestellt war (vergl. weiter unten), und GAUSS wandte nun sein Hauptaugenmerk auf dieses Instrument. Nach der Wiederaufstellung des Kreises liefen zunächst die Beobachtungen an beiden Instrumenten neben einander her. Mit dem Kreise beobachtete GAUSS im Oktober noch häufig verschiedene Hauptsterne, im November werden die Beobachtungen spärlicher und mit dem 20. Januar 1820 schliesst das *Tagebuch* gänzlich; in dieser Zeit lassen sich nur 24 Beobachtungstage feststellen. Die Veranlassung dazu, dass GAUSS seine Beobach-

tungen mit dem REPSOLDschen Kreise einschränkte und schliesslich gänzlich einstellte, gab das Eintreffen des REICHENBACHschen Meridiankreises, der im Oktober 1819 aufgestellt wurde.

Er schreibt am 1. Mai 1820 an OLBERS: »Allein für jetzt habe ich wenig Lust, mit dem letztern[1]) viel zu beobachten, da die Beobachtungen bei weitem schlechter unter sich harmonieren als beim REICHENBACHschen, so dass ich mit jenem immer erst eine viel grössere Anzahl Beobachtungen machen muss. Nach den Erfahrungen, die ich nun gemacht habe, schreibe ich dies hauptsächlich der Hemmungsart zu, und ich werde daher künftig auch am REPSOLDschen Kreise eine veränderte Hemmung anbringen lassen, bei der der Kreis selbst ganz frei bleibt.«

Einen Teil der Beobachtungen am Kreise hat GAUSS, wie schon erwähnt (siehe die Fussnoten oben Seite 90, 91 und 103) im *Handbuch* Ba (15) auf den Seiten 44—50, 63—85, 93—107 reduziert. Die Reduktion der Beobachtungen der Zirkumpolarsterne aus der Zeit vom 27. Oktober 1818 bis zum 27. Juni 1819 hat er im *Handbuch* Bc (17), Seite 147—182 ausgeführt. Übereinstimmend mit dem *Tagebuch* und dem Briefe an BESSEL vom 27. Januar 1819 (abgedruckt oben Seite 100) umfassen diese Aufzeichnungen bis zum letztgenannten Datum etwa 400 bis 500, und in der ganzen Zeit etwa 1000 Beobachtungen der im Briefe an BESSEL genannten und einiger anderen Sterne, gegen 50 an Zahl.

Auffallen wird, dass GAUSS die Beobachtungen am REPSOLDschen Kreis, wie auch schon die mit dem BORDAschen und die späteren an den REICHENBACHschen Instrumenten ausschliesslich selbst machte; nur bei den gleichzeitigen Beobachtungen des Jupiter und des Kometen 1819 II (Werke VI, S. 424) am REPSOLDschen Kreise und am Passageninstrument beobachtete HARDING am ersteren, sowie einige Male am letzteren; ebenso beobachtete ausnahmsweise ENCKE im Oktober 1819 und STRUVE im August 1820 einige Durchgänge am Passageninstrument zusammen mit GAUSS. Nirgends sonst, mit Ausnahme der späteren Jahre, in denen GAUSS nicht mehr regelmässig beobachtete, findet sich ein Anzeichen dafür, dass GAUSS diese Instrumente einem Anderen zum Beobachten überliess. OLBERS macht im Briefe vom 2. Juni 1818 eine dahingehende Anspielung; er schreibt: »Sie hatten die Güte, mich neulich aufzufordern,

1) Dem REPSOLDschen Kreise. — BRDL.

Ihnen ausser den gewöhnlichen noch einige Beobachtungsgegenstände vorzuschlagen. Besonderes wüsste ich jetzt gerade nichts. . . . . Aber könnte eine so reich mit Instrumenten dotierte Sternwarte, wobei es Ihnen ausser Herrn Professor HARDING selten auch an andern geschickten und eifrigen Gehülfen fehlen wird, ausser den laufenden gewöhnlichen Beobachtungen nicht auch gleich eine grosse Arbeit anfangen, die zwar erst in mehreren Jahren zu vollenden ist, aber einen bleibenden Nutzen gewähren wird und noch viele Entdeckungen verspricht? Ich meine eine Revision und Komplettierung der französischen *Histoire Céleste* von LALANDE. Sie sehen, dass ich dabei nur auf Ihre Gehülfen rechne. Denn es wäre unverantwortlich, wenn Sie selbst Ihre für die Wissenschaft so kostbare Zeit mit Beobachtungen der Appulse kleiner Sterne an die Fäden des Fernrohrs zubringen wollten.« GAUSS antwortet am 24. Juni: »Eine Revision der *Histoire Céleste* halte ich mit Ihnen für ein nützliches Unternehmen. Viele glänzende Ausbeute ist aber wohl nicht davon zu erwarten, da das meiste der Art schon durch HARDINGS Revision hat oder hätte gefunden sein können. . . . . Übrigens habe ich jetzt auch gar keine jungen Leute hier, die ich zu einem solchen Geschäft brauchen könnte. Mir deucht, am leichtesten würde es gehen, wenn viele Astronomen sich darin teilten, und zur Revision von einem oder ein paar Tausend Sternen würde ich mich dann gern erbieten.« WOLF sagt in seiner *Geschichte der Astronomie*, Seite 522: »als z. B. der REICHENBACHsche Multiplikationskreis[1]) 1812 in Göttingen aufgestellt war, durften zwar ENCKE und NICOLAI, wenn GAUSS observierte, leuchten und Beobachtungen niederschreiben, doch anfassen durfte ausser GAUSS Niemand das Instrument, und einmal schreibt ENCKE[2]): »Der Kreis von REICHENBACH[1]) ist wunderschön, und noch jetzt zieht GAUSS Handschuhe an, wenn er ihn anfasst«.

Auch gelegentlich der Hannoverschen Landesvermessung beklagt BESSEL, dass GAUSS einen grossen Teil seiner Zeit mit der Ausführung untergeordneter Arbeiten verliere; er schreibt in einem undatierten Brief Anfang 1823, nachdem er von den Vorteilen der Landesvermessung gesprochen hat: »Dieses ist nun die gute, sehr gute Seite Ihres Unternehmens, aber die schlechte habe ich lange vorher gefühlt, ehe Sie darüber klagten; solcher Zeitverlust ist nicht

1) Gemeint ist der BORDAkreis. — BRDL.

2) C. BRUHNS, *Joh. Franz Encke*, Leipzig 1869.

für Sie, und Sie sollten sich demselben nur in so fern unterziehen, als zur Vollendung der Theorie des Gegenstandes notwendig ist. Diese kann im Zimmer nie so gut ausgeführt werden, als bei der Ausübung, indem die Bedürfnisse sich erst bei der Ausübung darbieten; aber ein Dreieck oder zwei wären genug, um alles kennen zu lernen, was etwa entgangen wäre, und das übrige müsste N. N. machen und nicht GAUSS.« Dagegen muss berücksichtigt werden, dass GAUSS nicht wagte, die feineren Beobachtungen HARDING anzuvertrauen und keinen anderen Gehilfen besass. Über die hieraus und aus der Stellung HARDINGS erwachsenden Schwierigkeiten finden sich mehrfach Äusserungen im Briefwechsel, im besonderen in dem Briefe von GAUSS an SCHUMACHER vom 4. März 1821 und von OLBERS an BESSEL vom 26. April 1816.

6. Periode, REICHENBACHsche Instrumente 1818—1820.

Nach dem Eintreffen der REICHENBACHschen Instrumente, des Passageninstruments und des Meridiankreises, ging GAUSS mit seiner gewohnten Sorgfalt an die Benutzung beider, aber auch hier dauerte seine eingehende Beschäftigung mit ihnen nur verhältnismässig kurze Zeit, da im Jahre 1820 bereits die Vorbereitungen für die Hannoversche Landesvermessung begannen.

Eine Beschreibung des Passageninstruments[1]) gibt GAUSS in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom Oktober 1819 (Werke VI, S. 422) und im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1822 (Werke VI, S. 425); er rühmt dabei die vorzügliche Optik des Instruments, in der es dem REPSOLDschen Meridiankreise überlegen sei. Den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtung eines Fadenantritts nahe im Äquator findet er aus fast 300 beobachteten Sternen zu $0^s,095$. Auch die Vorrichtung zum Umlegen hebt er hervor, das sich nach einer vom Mechaniker RUMPF in Göttingen getroffenen Einrichtung in etwa 5 Minuten bewerkstelligen liess, während es beim REICHENBACHschen Kreise etwa 8 Minuten und beim REPSOLDschen über eine halbe Stunde in Anspruch nahm.

An OLBERS schreibt er am 24. September 1818: »Das REICHENBACHsche Mittagsfernrohr habe ich nun auch aufgestellt, es fehlt aber noch allerlei, so

1) Vergl. auch JOH. A. REPSOLD, *Zur Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, Bd. I, S. 102 und Figur 144.

dass meine Beobachtungen eigentlich noch keinen Wert haben und nur als vorläufige anzusehen sind. Ich beobachte daher jetzt eigentlich nur den Nordstern bei Tage, um die Fadenintervalle zu erhalten. Diese sind nur 10;3 im Äquator und die Anzahl der Fäden 7. Die Fäden selbst sind zwar auch von meinen Antagonisten, den Spinnen, aber viel gröber als die REPSOLDschen, ausserdem ist die Beleuchtung gleichförmiger und die optische Kraft des Fernrohrs bedeutend grösser. Es hat daher eben keine Schwierigkeit die Pallas zu observieren, sowie die Nebulosa Aquarii (was im REPSOLDschen Instrument nicht geht, wenigstens meinen Augen mehrere Male misslang). Ich habe mehrere Abende den 4/6 Saturntrabanten am Passageninstrument bei guter Beleuchtung mit observiert, die optische Wirkung dieses Instruments ist wahrhaft prachtvoll. β Ursae minoris zeigt sich bei Tage ungefähr wie ♀ dem blossen Auge in der Abenddämmerung, α Librae beobachte ich noch jetzt bei Tage, womit ich an REPSOLDS Kreise schon seit vier Wochen aufhörte, α Herculis zeigt sich noch immer sehr schön als Doppelstern etc. Zum Stellen ist dieselbe Einrichtung wie am Greenwicher Passageninstrument, nämlich am Fernrohr ein Kreis mit einer Libelle; bis jetzt finde ich jedoch diese Einrichtung zeitraubender als die gewöhnliche, wo man nur Eine Operation hat, so wie hier zwei. Kleine Sterne bei Tage mit der stärksten Vergrösserung, die nur 9′ Feld hat, verfehle ich noch öfters. Übung wird hier wohl helfen« — und im Mai 1819:

»Mein herrliches REICHENBACHsches Mittagsfernrohr habe ich bisher eigentlich noch gar nicht im Ernst brauchen können, weil die Maschine zum Umlegen noch fehlte. Diese ist jetzt durch den hiesigen Mechaniker RUMPF vollendet und wird in den nächsten Tagen angeschlagen werden. Leider fehlt mir nur noch eine zweite Uhr, die mit der SHELTONschen zu vergleichen wäre« — und endlich am 16. September 1819:

»Noch besser werden Sie die Harmonie der Beobachtungen aus den Vergleichungen von γ und β Aquilae mit α Aquilae erkennen; es ist die Korrektion der aus BESSELS Tafeln entlehnten relativen Stellungen gegen α, welche ich in folgendem Tableau darstelle:

		γ	β			γ	β
Juli	27.	$-0^{s},09$	$+0^{s},03$	August	23.	$-0,04$	$-0^{s},01$
»	28.	$-0,08$	$-0,03$	»	25.	$-0,01$	$+0,17$
»	29.	$-0,19$	$+0,01$	»	26.	$+0,02$	$-0,05$
»	30.	$-0,17$	$-0,11$	»	27.	$-0,06$	$-0,08$
August	1.	$-0,03$	0	»	28.	$-0,17$	$-0,13$
»	3.	$+0,05$	$-0,05$	September	4.	$-0,01$	$-0,22$
»	4.	$-0,06$	$+0,12$	»	5.	$-0,06$	$-0,13$
»	5.	$-0,06$	$+0,01$	»	7.	0	$+0,01$
»	11.	—	$+0,02$	»	8.	—	$-0,09$
»	12.	$-0,14$	—	»	9.	$-0,13$	$-0,11$
»	13.	$-0,16$	—	»	10.	$-0,03$	$-0,08$
»	18.	$+0,01$	$+0,02$	»	11.	$-0,08$	$-0,13$
»	19.	—	$-0,04$	»	12.	$-0,04$	$-0,07$
»	21.	$+0,09$	$-0,08$				

Im Mittel 24 Beobachtungen von γ $-0^{s},061$
25 Beobachtungen von β $-0,041$
BESSELS neuer Katalog gibt für γ $-0,076$
für β $-0,032$.

»Meine Wahrscheinlichkeitstheorie gibt hieraus den wahrscheinlichen Fehler Einer Vergleichung

aus γ	$0^{s},048$
aus β	0,055
im Mittel	0,052.

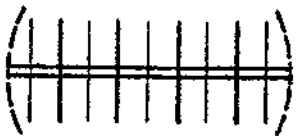
»Da dieser Fehler aus den Fehlern bei zwei beobachteten Sternen zusammengesetzt ist, so wird der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung Eines Sterns

$$= 0^{s},037.$$

»Dies stimmt sehr nahe überein mit meinem Resultat für den wahrscheinlichen Fehler Eines Appulses, den ich $= 0^{s},095$ gefunden habe.«

Nicht uninteressant ist, was er an OLBERS über das Fadenkreuz schreibt, nämlich am 24. Juli 1818: »Den Nebelfleck im Wassermann werde ich nächstens

zu beobachten[1]) versuchen. Ich fürchte nur, dass bei lichtschwachen Gegenständen meine Fäden zu fein sind. Bei derjenigen Beleuchtung, die Sterne 8. und 9. Grösse vertragen, sieht das Auge diese Fäden schon nicht ohne Anstrengung. Und doch möchte ich diese feinen Fäden ungern missen, da die Beobachtungen selbst, namentlich die bei Tage, sehr dadurch an Genauigkeit gewinnen. Finde ich, dass die Beobachtungen der Pallas z. B. nicht gut gehen wollen, so ziehe ich wohl selbst noch zwischen mein Netz neue stärkere Fäden ein, etwa nach folgender Figur:



»Die horizontalen Fäden sind an sich schon etwas dicker und werden schon bei schwächerer Beleuchtung gut erkennbar.«

Ferner am 16. Oktober 1819, wo er ebenfalls über den REPSOLDschen Kreis spricht: »Auch habe ich, da die so äusserst feinen Fäden[1]) nicht gut so zu beleuchten waren, um auch kleine Sterne beobachten zu können, zuerst den Spiegel herausgenommen, ganz eben schleifen und matt versilbern lassen. Da jedoch auch dies noch nicht helfen wollte, so habe ich die Fäden herausgerissen und andere, dickere eingezogen. Die Einrichtung des REICHENBACHschen Mittagsfernrohrs ist mir so angenehm geworden, dass ich sie hierbei nachgeahmt und statt der vorigen 5 Fäden jetzt 7 mit engern Intervallen (zwischen 10^s und 11^s für den Äquator) eingezogen habe. Leider hatte ich in dieser Jahreszeit nicht viel Auswahl mehr unter Spinnenfäden, doch ist es mir zu meiner Zufriedenheit gelungen. Ich denke, dass es nun keine Schwierigkeiten haben wird, auch die kleinen Planeten mit diesem schönen Instrumente zu beobachten.« Im Briefe an OLBERS vom 1. Mai 1820 äussert sich GAUSS sehr eingehend über das Einziehen der Fäden, das er, wie wir im vorigen gesehen haben, selbst ausführte.

Das auf der Göttinger Sternwarte noch vorhandene *Tagebuch der Beobachtungen am Reichenbachschen Mittagsfernrohr* beginnt mit dem 26. August 1819. Die vor dieser Zeit liegenden Beobachtungen sind in dem *Beobachtungsbuch* Pg (31 b), S. 14—28 eingetragen; die letzteren umfassen die Zeit vom 27. Juli bis

1) Am REPSOLDschen Kreise. — BRDL.

29. August. Die Eintragungen vom 26. bis 29. August finden sich in beiden Büchern gleichlautend. Die unmittelbar am Instrument gemachten Aufzeichnungen dürften auch hier nicht aufzufinden sein. Die erwähnten ersten Beobachtungen betreffen etwa 30 Hauptsterne; daneben wurde die Sonne, der Mond, Jupiter, Venus, Uranus und der Komet 1819 II beobachtet. Vom 26. August bis zum 27. Dezember 1819 weist das *Tagebuch* 53 Beobachtungstage auf. Sodann wurde es zur Verbesserung der Beleuchtung nach einer Notiz des *Tagebuchs* abgenommen und am 31. Dezember wieder aufgestellt. Vom 1. Januar 1820 bis zum 16. Mai 1821 lassen sich 151 Beobachtungstage nachweisen. Im Sommer 1821 trat eine lange Pause ein, weil GAUSS bereits mit der Triangulation für die Landesaufnahme beschäftigt war. Nach der Wiederaufnahme der Beobachtungen am 23. Oktober werden die Beobachtungen allmählich spärlicher. Nach dem März 1822 findet man im *Tagebuch* nur noch vereinzelte Beobachtungen im November und Dezember 1822, eine einzelne Mondbeobachtung im Dezember 1823, und endlich nach langer Unterbrechung vereinzelte Beobachtungen im Februar und März 1851!

Unter dem Datum des 10. September 1827 findet sich im *Tagebuch* eine Eintragung über die Messung der Fadenintervalle des Mittagsfernrohrs mit dem Heliometer. Im *Handbuch* Ba (15), S. 153 sind die vom 26. August bis 25. September 1819 beobachteten Sterne unter der Überschrift »Fundamentalsterne am Mittagsfernrohr« zusammengestellt mit Angaben, die anscheinend den Stand der Uhr betreffen.

Die zwischendurch angestellten Beobachtungen des Saturn und der Vesta vom September 1819 und der Pallas und des Mars vom Januar 1820 sind veröffentlicht (Werke VI, S. 428). Dagegen scheinen die ebenfalls aus dem *Tagebuch* nachzuweisenden Beobachtungen des Merkur, der Venus und der Ceres (vergl. Werke VI, S. 429) nicht reduziert worden zu sein.

Die Beobachtungszeiten fallen auch hier, wie beim REPSOLDschen Kreise in die Nachmittags- und späten Abendstunden, nur einige wenige in die Morgenstunden.

Unter dem Datum des 8. Mai 1821 verweist GAUSS im *Tagebuch* gelegentlich einer Notiz über die LIEBHERRsche Uhr auf ein »Umlegebuch«, wonach zu vermuten ist, dass er noch andere Notizbücher bei seinen Beobachtungen benutzt hat, über deren Verbleib nichts bekannt geworden ist. Auch die vier

nachträglich auf der Göttinger Sternwarte aufgefundenen *Tagebücher* sind nicht dem Gaussarchiv einverleibt und daher bei der Bearbeitung des Bandes XI, 1 übersehen worden.

In den Jahren 1819—1822 wurden auch auf Gauss' Vorschlag von ihm selbst, von Nicolai in Mannheim, Soldner in München und Encke in Seeberg die Rektaszensionen des Mondes und einiger Mondsterne zur Bestimmung der Längenunterschiede[1]) beobachtet, und auch Bessel und Struve nahmen später daran teil. Die Beobachtungen wurden durch längere Jahre fortgesetzt, jedoch beteiligte sich Gauss nur bis zum Juli 1820[2]) daran.

Bessel schreibt aus diesem Anlass an Gauss am 10. Januar 1820: »Ihr Vorschlag zu gemeinschaftlichen Mondbeobachtungen ist vortrefflich in jeder Beziehung: erstens wird er uns die Bestimmung der Meridiandifferenzen liefern; zweitens wird er am deutlichsten zeigen, wie genau man die Örter beobachten kann; drittens wird er eine Verbindung zwischen die Astronomen und Sternwarten bringen, die manches, was jetzt nicht taugt und was mir, der ich gern ein recht tätiges und kräftiges Zusammenwirken erleben möchte, höchst zuwider ist, aufheben kann. Bringen Sie mehr dergleichen auf die Bahn, so wird bald eine innige Verbindung eintreten, statt des jetzigen törichten Egoismus; die Zeit wird wiederkehren, wo der Eine Freude hat an der Arbeit des Andern. — Schade, dass ich nicht an diesen Beobachtungen habe teilnehmen können; allein treffen Sie doch nochmals eine solche Verabredung und zwar für die Sommermonate, wo das Wetter sicherer ist«, worauf Gauss am 5. März erwidert: »Von den Sternen zur Vergleichung mit dem Monde habe ich auch an Struve das Verzeichnis geschickt. Da diese Beobachtungen vorerst ununterbrochen fortgesetzt werden, so kann die Verknüpfung der Teilnehmer vielleicht auch sonst weiter führen. Sie klagen in Ihrem letzten Briefe den törichten Egoismus der jetzigen Astronomen an; ich verstehe dies, sowie einiges andere in demselben, nicht ganz. Allein ich glaube, dass wenigstens die meisten deutschen Astronomen einen solchen Vorwurf nicht verdienen; wenigstens scheinen mir die, mit denen ich in Verbindung stehe, alle nichts mehr zu wünschen, als mit vereinten Bemühungen für das Beste der Wissen-

1) Vergl. den Aufsatz von Nicolai, Astron. Nachr. 1, S. 7 und 2, S. 17 (auch Gauss' Werke VI, S. 443).

2) Vergl. den Brief von Gauss an Bessel vom 17. August 1820.

schaft zu wirken, sowie alle das Absterben der Zeitschrift[1]), die durch das in Genua herauskommende Journal natürlich nicht ersetzt wird, schmerzhaft fühlen. Ob auch ausländische Astronomen ebenso geneigt sein möchten, ihre Arbeiten an die der deutschen Astronomen anzuschliessen, mag ich zwar nicht bestimmen, allein viel anders als jetzt ist es doch wohl in dieser Rücksicht auch sonst nicht gewesen.«

Besonders schwer empfand GAUSS den Mangel einer guten Uhr. Schon im Briefe an OLBERS vom Mai 1819 bemerkt er (oben S. 109), dass ihm »eine zweite Uhr« fehlt, »die mit der SHELTONschen zu vergleichen wäre«. Von der letzteren, die seit 1770 im Gebrauch war[2]), sagt er noch in seinem Bericht an das Kuratorium vom 9. Februar 1815[3]), dass sie noch gut sei, dass aber noch zwei weitere für die neue Sternwarte nötig seien, die jedoch nicht zu den dringendsten Bedürfnissen gehörten. Die beiden älteren Pendeluhren von KAMPE[4]) kamen schon längst nicht mehr in Betracht.

Am 23. August 1819 schreibt er an OLBERS: »Leider will es nur mit der SHELTONschen Uhr gar nicht mehr gehen; gestern habe ich sie reinigen lassen, aber wenigstens die ersten 18 Stunden nachher ist sie ebenso ungleichförmig gegangen wie vorher. Ich werde es noch einige Wochen ansehen und dann versuchen, ob ein Nachschleifen der Zähne des Ankers, die, wie sich jetzt zeigte, doch bedeutend (in 48 Jahren) angegriffen sind, helfen will. Die Vortrefflichkeit des REICHENBACHschen Passageninstruments geht grösstenteils verloren, wenn die Uhr seiner nicht würdig ist.«

Aus diesem Grunde entlieh GAUSS zunächst von REPSOLD eine von dessen Uhren. Anfang Mai erhielt er eine LIEBHERRsche Uhr, wie aus einem Briefe an BESSEL vom 12. Mai 1820 hervorgeht. Die betreffenden Briefstellen mögen ihres Interesses wegen hier Platz finden.

---

1) Die von LINDENAU und BOHNENBERGER 1816 als Fortsetzung der eingegangenen »Monatlichen Korrespondenz« begründete »Zeitschrift für Astronomie« erschien nur bis 1818, in welchem Jahre v. ZACH in Genua unter dem Titel »Correspondance astronomique« eine neue Zeitschrift begründete. — BRDL.

2) Vergl. oben S. 52.

3) Werke XI, 1, S. 295.

4) Oben S. 44.

BESSEL schrieb an GAUSS am 30. April 1820: »Meine Uhr[1]) ist bei REPSOLD gewesen, der sie sehr gut verbessert hat. Der Anker war ausgeschliffen, weshalb REPSOLD einen neuen von orientalischen Granaten gemacht hat, welches bekanntlich sehr harte Steine sind. Auch hat er auf meine Bitte das ganze Werk in einen fest schliessenden Kasten von Messing eingeschlossen, so dass nur unten eine Öffnung ist, durch welche wohl kaum Staub in die Uhr kommen wird, da das Gehäuse fest verleimt ist und ausser seiner Tür noch einen mit Seidenzeug bezogenen Rahmen hat. Diesen Verbesserungen zufolge ging die Uhr vollkommen gut, so dass ich sie fast zwei Monate lang bis auf weniger als 1^s mit der Sternzeit zusammenstimmen sah; mit dem April aber fing sie an vorzueilen, so dass sie endlich fast eine halbe Sekunde täglich gewann. Der Grund zeigte sich bald in einer sehr hörbaren Reibung am Anker, die mich endlich zwang, die Uhr abzunehmen. Durch eine Lupe betrachtet scheint der eine der Steine schon wieder ein wenig angegriffen zu sein; ich weiss dieses ewige Schleifen und Reiben garnicht zu erklären, habe aber noch ein Mittel versucht, was vielleicht dem Übel abhilft. Es rührt nämlich offenbar von einem Mangel an Öl her, und doch fand ich, als ich die Uhr abnahm, das REPSOLD etwas an den Anker gebracht hatte; ich glaube nun, dass man nur suchen muss, das Öl am Anker zu erhalten, und dass dieses geschehen wird, wenn man nur äusserst wenig davon nimmt und dieses so anbringt, dass es den Zahn nicht verlassen kann; — demzufolge habe ich alles alte Öl weggenommen und statt dessen ein sehr kleines Tröpfchen auf die Mitte der Zähne des Ankers gebracht, so dass es sich weder unter die Fassung der Steine noch seitwärts ziehen kann. Wenn das Steigrad es nicht nach und nach verteilt, so muss dieses Mittel helfen. Sie würden mir einen grossen Dienst erweisen, wenn Sie mir eine sichere Abhilfe dieses Übels vorschlagen könnten; ich riskiere dabei die Uhr, die doch eine der schönsten ist, welche ich kenne, und die, wenn ihr guter Gang dauerhaft gemacht werden könnte, gar nichts zu wünschen übrig lassen würde. Jetzt, nachdem diese Uhr ohne am Pendel zu ändern, wieder aufgestellt ist, folgt sie genau der Sternzeit, so wie nach ihrer Regulierung im Winter.«

GAUSS antwortete darauf am 12. Mai 1820: »Was Ihre Uhr betrifft, so scheint

1) Die REPSOLDsche. — BRDL.

es mir doch fast, als ob Sie jetzt etwas zu viel von ihr verlangen. Wenn meine Uhr künftig keine grösseren Anomalien zeigt, als dass sie, nachdem sie 2 Monat in einer Sekunde geblieben, ihren täglichen Gang allmählich ¼ Sekunde ändert, so werde ich sehr zufrieden sein. Die REPSOLDsche Uhr, die ich bisher (als Notbehelf, da die SHELTONsche jetzt zu feinen Beobachtungen ganz unbrauchbar ist) gebraucht habe, zeigt weit grössere Unregelmässigkeiten, ebenso wie früher ja auch die Ihrige. An jener mag das vorläufige hölzerne Pendel die Hauptursache sein, das ich, wenn die Uhr hier bleibt (REPSOLD hatte sie mir vorläufig nur aus Gefälligkeit geliehen), mit einem Kompensationspendel vertauschen lassen werde. Seit zehn Tagen habe ich nun auch die neue LIEBHERRsche Uhr aufgestellt, das Wetter ist aber, seitdem ihr Gang unter eine Sekunde abgeglichen ist, ungünstig gewesen, so dass nicht viele Beobachtungen gemacht werden konnten. Die wenigen, die ich gemacht habe, deuten freilich auf einige Unregelmässigkeiten hin, allein ich kann hieraus noch gar nichts schliessen, zumal da diese Uhr noch kein besonderes Gehäuse hat. Für jetzt ist nur ein anderes vorgeschoben, wo ich oft genötigt gewesen bin, um den Schlag bei Tage unter Geräusch zu hören, die obere Tür zu öffnen, so dass häufiger Temperaturwechsel und vielleicht anderweitige Störung mitwirkt. Doch geht sie auch so, wie es scheint, beträchtlich gleichförmiger wie die REPSOLDsche in ihrem bisherigen Zustande.

»Die SHELTONsche zeigte, als ich auf sie beschränkt war, gewisse Unregelmässigkeiten, die ich mir nicht ganz erklären kann, sie teilte nämlich den Tag ungleich; der Stand der Uhr gegen Sternzeit war während aller Beobachtungen eines Tages oft bis auf $0^s,1$ bis $0^s,2$ konstant und nach den Beobachtungen des andern Morgens hatte sie dann während der Nacht 1^s, auch wohl 2^s verloren; wäre es immer 2^s (oder eine gerade Zahl) gewesen, so dächte ich, sie hätte einmal (oder einigemale) nicht ausgelöst, allein wie gesagt, zuweilen nur 1^s, übrigens nie Gewinn. Dieser Fehler, möge die Ursache sein, welche sie wolle, und der auch blieb, nachdem die Uhr gereinigt war, machte sie ganz unbrauchbar; übrigens zeigten sich bei der Reinigung die Zähne des Ankers beträchtlich angegriffen, was wohl, nachdem sie 50 Jahre ununterbrochen gegangen, nicht zu verwundern ist. Ich werde diese Zähne jetzt abschleifen und neu polieren lassen.«

Auch folgende Stellen aus dem Briefwechsel mit BESSEL mögen angeführt werden:

BESSEL an GAUSS am 1. Juni 1820: »Meine Uhr geht fortwährend vortrefflich und ich zweifle nicht, dass es auch so lange so bleiben wird, bis wieder eine hörbare Reibung sich einstellt. Hier haben Sie das Register seit der letzten Versorgung des Ankers mit Öl:

April	25.	$18^h 32^m$	−4,07	Mai	11.	$14^h 55^m$	−4,30
	26.	10 49	−4,04		12.	5 9	−4,31
	28.	10 4	−3,96		13.	8 24	−4,30
	29.	9 34	−3,92		14.	9 24	−4,14
	30.	6 59	−3,88		15.	14 48	−4,21
Mai	2.	7 16	−3,64		16.	4 5	−4,28
	3.	13 15	−3,72		17.	6 39	−4,52
	4.	12 2	−4,10		18.	10 9	−4,76
	8.	14 47	−4,37		19.	11 7	−5,04
	9.	9 47	−4,55				

»Da die genaue Regulierung des Ganges in die kalte Jahreszeit (Februar) fiel und dieser sich damals eine lange Zeit hindurch bewährte, so ist die Gleichheit dieses Ganges bei der grossen Hitze im Mai eine sehr auffallende Bestätigung der Richtigkeit der Kompensation. — Lassen Sie daher REPSOLDS Uhr nicht wieder aus Ihren Händen! denn es lässt sich von REPSOLD voraussetzen, dass er alles Folgende noch vollkommener macht als das Vorangegangene. — Interessant war es mir, den Fehler Ihres alten SHELTON kennen zu lernen; der Satz, den ich hundertmal aufgestellt und befolgt habe, wird immer mehr bestätigt: eine Grundbestimmung taugt nur dann, wenn sie aus wenigstens ein Jahr umfassenden Beobachtungen hergeleitet ist; Nacht und Tag und Sommer und Winter bringen oft etwas hervor, woran wir nicht denken, auch vieles, was wir gar nicht erkennen«.

GAUSS an BESSEL am 11. März 1821: »Leider hat der Astronom nur immer seine Not mit den Uhren. Meine LIEBHERRsche Uhr ist die erste Zeit vortrefflich gegangen, aber jetzt eilt sie auf eine mir unerklärliche Art gewaltig vor, wohl schon fünf oder sechs Mal hatte ihr täglicher Gang über 2 Sekunden gewonnen; wenn das Pendel etwas herunter geschraubt war, ging sie

anfangs langsamer, accelerierte aber bald wieder stufenweise immer mehr. Jetzt will ich sie nun einmal gehen lassen, zu sehen, wie weit sie es treibt. Die Temperatur im Kasten ist übrigens in der ganzen Zeit keinen bedeutenden Änderungen ausgesetzt gewesen, auch ist die Grösse der Schwingungen nur kaum merklich kleiner geworden. Leider ist mein Mechanikus RUMPF bereits seit vier Monaten abwesend; sobald er zurückkommt, will ich sehen, ob Reinigung etc. hilft.«

Ebenso schreibt GAUSS an OLBERS im April 1821: »Sehr in Not bin ich auf meiner Sternwarte mit den Uhren. Ich habe eigentlich keine einzige, die was wert ist. Die neue LIEBHERRsche ging ein halbes Jahr vortrefflich, aber seitdem immer schlechter und ist jetzt ganz unbrauchbar. Sie geht immer geschwinder, so dass ihr täglicher Gang während des März 15^s zunahm; nachher hat RUMPF sie etwas gereinigt und eine kleine Abänderung gemacht, worauf sie eine kurze Zeit wieder besser ging, allein bald fing sie das alte Spiel wieder an, und jetzt geht sie wieder täglich 14^s vor. Den Grund kann ich nicht erraten, die Schwingungen sind nur wenig kleiner geworden. Wie ich höre, ist es mit SOLDNERS Uhr nicht besser gegangen, und er hat das neue Echappement, wovon man sich anfangs so viel versprach, weggeworfen und einen gewöhnlichen Anker machen lassen. Wie es nachher damit gegangen, weiss ich nicht, aber es ist wahrscheinlich, dass sie auf alle Fälle nicht exquisit gehen wird, da die Arbeit nur mittelmässig ist und nur das an sich sinnreiche aber künstliche Echappement die mittelmässige Arbeit unschädlich machen sollte. Die 50jährige SHELTONsche Uhr ist seit 2 Jahren auch herzlich schlecht. Es wird am Ende wohl kein Rat sein, als eine Uhr aus England kommen zu lassen. Da Sie viel mit YOUNG korrespondieren, so hätten Sie vielleicht die Güte, einmal bei ihm anzufragen, welcher Künstler jetzt am besten arbeitet, welches etwa der Preis ist, und wie lange man etwa nach der Bestellung warten muss?«

Auch noch im Februar 1826 beklagt sich GAUSS im Briefe an OLBERS vom 19. Februar: »Die unbeschreibliche Schlechtigkeit meiner Uhren verleidet mir hier jetzt alles Observieren; allein ich habe Nachricht, dass ein Regulator von HARDY, welchen S. K. H. der Herzog von SUSSEX der Sternwarte zum Geschenk machen will, nächstens abgesandt werden soll. Mit dem grössten

Widerwillen wende ich sonst meine Zeit auf Arbeiten, aus denen bei aller angewandten Mühe doch nichts Rechtliches herauskommen kann.«

Über die HARDYsche Pendeluhr, die er bald darauf erhielt, berichtet er in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom Juni 1826 (Werke VI, S. 453).

Am 10. oder 11. August 1819 traf der REICHENBACHsche Meridiankreis in Göttingen ein, an demselben Tage, an dem OLBERS nach einem 4½ tägigen Besuch bei GAUSS eben abgereist war[1]). Eine Bemerkung über Ankunft des Kreises findet sich in GAUSS' Aufzeichnungen über seine Beobachtungen mit dem Passageninstrument im Heft Pg (31 b), S. 19. Die Aufstellung verzögerte sich indessen bis gegen Anfang Oktober. Aus der Zeit vom 3. Oktober bis zum 27. Dezember weist das genannte Heft, S. 33—42, Notizen über die vorbereitenden Untersuchungen, Nivellement der Achse, Bestimmung der Fadendistanzen und der Ungleichheit der Zapfen, Berichtigung des Azimuts und des Zenitpunktes auf. GAUSS schreibt am 9. Dezember 1819 an BESSEL: »Jetzt ist nun zwar der Kreis seit einigen Wochen aufgestellt, allein das Wetter war so ungünstig, dass ich nur erst wenige Beobachtungen habe machen und auch an die Berichtigungen noch nicht die letzte Hand legen können. Bei solchen Gelegenheiten, wie diese, fällt mir, wenn das Wetter so ungünstig ist, der Mangel eines Meridianzeichens sehr schmerzhaft, welches ich bei anhaltendem günstigen Wetter wenig oder garnicht vermisse, da alle meine Pfeiler in Rücksicht der Azimutalstellung eine fast absolute Unveränderlichkeit zeigen. Ich bin noch immer unschlüssig, was ich in dieser Beziehung tue, und der alte SCHRÖTER hätte in dieser Rücksicht den Platz der Sternwarte nicht leicht schlechter wählen können. Die Mittagslinie geht gegen Norden und Süden durch Gärten, die mit Bäumen dicht verwachsen sind. Im Süden ist zwar nur ein Garten, der HARDINGS Schwiegervater angehört, welcher Umstand aber eher nachteilig ist, da dieser weder gern die Bäume missen noch Geldentschädigung annehmen will. Bei einem ganz fremden würde das Dutzend Bäume gegen etwa hundert Taler Entschädigung längst haben weggeschafft sein können. Inzwischen ist auch die Frage, ob viel gewonnen wird. Der

1) GAUSS an OLBERS 23. August 1819, an BESSEL 9. Dezember 1819.

Horizont wird da durch einen Berg mit dichter (Privat-)Waldung begrenzt; ein Meridianzeichen würde sich daher nicht gegen den Himmel projizieren, und da ohnehin in dieser hügligen Gegend, wo gewöhnlich die Luft in den Gründen voller Dünste ist, nach Süden das Sehen fast immer schlechter geht, so würden oft Wochen, wo nicht Monate hingehen, wo das Zeichen auch nicht ein Mal gebraucht werden könnte. Nach Norden würde ich, wenn eine Allee durchgehauen würde, ein sehr schönes Terrain finden, wo in der Entfernung von einer Stunde ein Zeichen auf einem nackten Hügel sich gegen den Himmel projizierte. Aber nach dem Massstabe im Süden, wo ein Garten in die Quere geschnitten gegen hundert Taler Kosten machen wird, würde die Entschädigung der Garteneigentümer im Norden gewiss wenigstens einige tausend Taler betragen, und dann die Unterhandlung mit so vielen einzelnen, zumal da bei der milden Verfahrungsart unseres Gouvernements durchaus alles im Wege der Güte geschehen müsste. Bei dieser Lage der Dinge habe ich für die REICHENBACHschen Instrumente noch eine andere Idee, womit ich nächstens Versuche machen und Ihnen künftig den Erfolg anzeigen will.

»Es wird mich sehr freuen, wenn Sie mir in Zukunft Ihre Erfahrungen den Meridiankreis betreffend unumwunden mitteilen wollen, so wie ich Ihnen mit Vergnügen die meinigen anzeigen werde. Bisher sind ihrer noch zu wenig, als dass viel daraus geschlossen werden könnte, und der Abänderungen wegen, von denen REICHENBACH Sie auch unterrichtet haben wird, muss ich nun von neuem den Gebrauch des Instruments auf einige Zeit entbehren. Inzwischen kann ich doch nicht unterlassen, mich noch etwas mit Ihnen darüber zu unterhalten.

»Das Fernrohr ist sehr schön und scheint dem des Mittagsfernrohrs nur wenig nachzustehen. Nur gefällt mir nicht die Einrichtung, die Gesichtslinie zu korrigieren. Die Berichtigung in der Ebene[1]) des Meridians hätten wir REICHENBACH gern geschenkt, ich werde sie nie brauchen; hätte REICHENBACH sie weggelassen, so wäre die andere Berichtigung senkrecht zur Ebene[2]) des Meridians einfacher und für sich bestehender geworden. Freilich, wenigstens nach meiner Beobachtungsart, ist dies hauptsächlich nur für das erste Mal; weder am REPSOLDschen Kreise noch am Mittagsfernrohr habe ich diese

1) Indexfehler des Zenitpunktes, von GAUSS sonst als Kollimationsfehler bezeichnet. — BRDL.

2) Korrektion im Azimut. — BRDL.

Schrauben seit der ersten Berichtigung wieder angerührt, da ich ihre Veränderung, die ohnehin höchst unbedeutend ist, lieber in Rechnung bringe. Schmerzlich empfinde ich den grossen Unterschied des Ablesens der Verniers[1]) und der Mikroskope. Jene geben (falls nicht längere Erfahrung mich künftig anders urteilen lässt) bei grösserer Anstrengung und grösserem Zeitaufwand doch viel geringere Genauigkeit. Freilich wäre bei einem Meridiankreise von dieser Einrichtung, den man doch nicht alle Tage umlegen kann, die Anwendung der Mikroskope bedenklicher gewesen, weil man auf ihre unveränderte Relation zur Alhidade während einiger Wochen hätte müssen rechnen können. Doch dächte ich, könnten die Mikroskope mehr vergrössern. Am Ende gilt dies doch auch von der Libelle, und vielleicht wäre bei diesem Kreise das Lot vorzuziehen gewesen.«

Bessel hatte nach Erbauung der Königsberger Sternwarte zunächst mit einem 25zölligen Caryschen Transit Circle beobachtet; im Oktober 1819 erhielt er fast zur gleichen Zeit wie Gauss einen Reichenbachschen Meridiankreis; er schreibt am 5. März 1820 an Gauss, dass dieses Instrument sich nun in beobachtungsfähigem Zustande befinde[2]).

Beide beginnen nun ihre Erfahrungen, wie auch bei früheren Gelegenheiten, in einem lebhaften Briefwechsel auszutauschen, aus dem das Wesentlichste Werke XI, 1, S. 317—342 abgedruckt ist.

Einen ausführlichen Bericht über den Göttinger Kreis[3]) gibt Gauss in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom Juni 1820 (Werke VI, S. 429). Bessel beschreibt den seinigen in den *Königsberger Beobachtungen*, 6. Abteilung, S. III (Bessels Werke II, S. 34), in denen auch seine Beobachtungsergebnisse niedergelegt sind.

Das auf der Göttinger Sternwarte nachträglich aufgefundene *Tagebuch der Beobachtungen am Reichenbachschen Meridiankreise* enthält zunächst die sauber eingetragenen Protokolle einer Beobachtungsreihe vom 8. Dezember 1819 bis 4. Januar 1820 und dann die folgende Notiz: »Da die anfängliche Hemmung

1) Vergl. oben S. 91. Im Jahre 1889 wurden die Nonien am Reichenbachschen Kreise durch Ablesemikroskope ersetzt. Vergl. Fussnote 3). — Erdl.

2) 1842 erhielt Bessel einen Kreis von Repsold.

3) Vergl. auch Repsold, *Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, S. 104. Über die in den Jahren 1887—1889 angebrachten Änderungen am Reichenbachschen Kreise vergl. E. Grossmann, *Beobachtungen des Mondkraters Mösting*, Astron. Nachr., Bd. 137, S. 113 f.

sowohl des Kreises als der Alhidade zu mehrern Bedenklichkeiten Veranlassung gab, so wurde nötig gefunden, eine abgeänderte Hemmung vorzurichten. Zu diesem Behuf hatte Herr von Reichenbach die beiden Stellschrauben nötig, die ich daher nebst den sonst noch nötigen Abmessungen unter dem 31. Dezember 1819 nach München abschickte. Von Anfang an war auch der eine Horizontalfaden nicht ganz straff gewesen, und die Schlaffheit nahm immer mehr zu. Ich nahm daher, um neue Fäden einzuziehen, am 2. Februar das Netz heraus. Ich wünschte diese Gelegenheit zu benutzen, um auch die Zahl der vertikalen Fäden zu vergrössern; allein durch die Berührung des Wachses, womit die alten Fäden befestigt waren, wurden auch diese zum Teil schlaff, und ich war daher genötigt, das ganze Netz zu erneuern.

»Das neue Netz, aus sieben vertikalen und zwei horizontalen Fäden bestehend, war am 9. Februar vollendet; die horizontalen sind beträchtlich näher bei einander, als zuvor.

»Die neuen Hemmungsarme kamen am 14. Februar an und wurden am 17. Februar durch Herrn Rumpf angelegt. Am 18. wurde in das Gegengewicht der Alhidade Blei nachgegossen und das Instrument aufgestellt. Einige andere von Reichenbach vergessene und hier erst vorzurichtende Kleinigkeiten verzögerten die Gebrauchsfertigkeit bis zum 21.«

Es folgt sodann im *Tagebuch* eine Beobachtungsreihe vom 21. Februar bis zum 9. September 1820. Sie betrifft, ausser der Bestimmung der Polhöhe, die Deklinationen von 34 Zirkumpolarsternen, die in beiden Kulminationen beobachtet wurden, und von 35 südlicheren Fundamentalsternen. Die Rektaszensionen der letztgenannten hatte Gauss fast alle im Vorjahre am Passageninstrument bestimmt (vgl. oben S. 112); ein Teil der Zirkumpolarsterne war von ihm am Repsoldschen Meridiankreise beobachtet (vgl. oben S. 105).

Daneben beobachtete er gleichzeitig, wie auch Bessel im August 1820, 20 Zenitsterne, die Schumacher im Vorjahre in Lauenburg zur Bestimmung der Polhöhe im Anschluss an die dänische Gradmessung beobachtet hatte[1]). In einem Brief an Bode vom 3. September 1820 (abgedruckt im *Berliner Astron. Jahrbuch* für 1823, Werke VI, S. 433) gibt Gauss an, dass die Zahl seiner Beobachtungen seit dem 21. Februar rund 1200 beträgt.

1) Briefe von Gauss an Bessel vom 17. August und 7. Dezember 1820, von Bessel an Gauss vom 11. September und 20. November 1820.

Über die Beobachtungen der Zirkumpolarsterne bis zum 19. März 1820 berichtet GAUSS in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom Juni 1820 (Werke VI, S. 431), jedoch ohne Angabe der Deklinationen; die Deklinationen der SCHUMACHERschen Sterne, der Sonne und des Mars aus dieser Zeit findet man im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1823 (Werke VI, S. 432 und 434). Sonst hat er hiervon nichts veröffentlicht. Seine Ergebnisse konnten jedoch zum grössten Teil aus dem Nachlass und aus dem Briefwechsel mit BESSEL entnommen und für Band XI, 1 bearbeitet werden. Es sind nämlich im Buche Pe (27) unter dem Titel *Resultate der Beobachtungen am Reichenbachschen Kreise für die einzelnen Sterne* die Ergebnisse für die Deklinationen der Fundamentalsterne (Werke XI, 1, S. 346—347) und von Zirkumpolarsternen (Werke XI, 1, S. 343—345), im Buche Pf (28) unter dem Titel *Resultate aus den Beobachtungen am Reichenbachschen Meridiankreise und am Mittagsfernrohr* die *Scheinbaren Zenitdistanzen des Äquators aus beobachteten Zirkumpolarsternen* erhalten. Daneben finden sich an den genannten Stellen und im Heft Pg (31 b) Notizen über Nivellement, Teilungsfehler und anderes.

Das Umlegen des Meridiankreises geschah während dieser Beobachtungsreihe sechsmal und GAUSS teilte diese hiernach in sieben Perioden ein, nämlich[1]):

I.	Periode	1820	Februar	21	bis März	19,
II.	»		März	20	» April	12,
III.	»		April	12	» Mai	27,
IV.	»		Mai	27	» Juli	18,
V.	»		Juli	18	» August	10,
VI.	»		August	11	» August	18,
VII.	»		August	19	» September	9.

Von seinen Beobachtungen nach dem September 1820, von denen weiter unten die Rede sein wird, hat GAUSS nur wenige reduziert. Er sagt schon in dem Briefe an BESSEL vom 7. Dezember 1820, dass er längere Zeit nicht zur Reduktion der Beobachtungen aus den drei letzten hierunter erwähnten Perioden kommen konnte; vergl. die Bemerkungen Werke XI, 1, S. 357.

1) Vergl. auch die Briefe an BESSEL vom 12. Mai 1820 (Werke XI, 1, S. 320) und vom 7. Dezember 1820 (ebendort S. 329).

GAUSS und BESSEL tauschten zunächst ihre Ergebnisse für die Deklinationen einiger von den 36 Sternen des 1805 erschienenen Kataloges von MASKELYNE aus, vergl. den Brief von GAUSS an BESSEL vom 1. Juni 1820 (Werke XI, 1, S. 323). Im weiteren Briefwechsel stellte sich heraus, dass die Bestimmungen beider bis auf einige Zehntelsekunden übereinstimmten, vergl. den Brief von GAUSS an BESSEL vom 11. März 1821 (Werke XI, 1, S. 332), in dem jener die Deklinationen von 35 Fundamentalsternen gibt. Auch die von beiden angestellten Beobachtungen der Zenitsterne, die SCHUMACHER in Lauenburg beobachtet hatte, wurden nach einigen Schwierigkeiten zur Übereinstimmung gebracht und GAUSS schreibt hierüber an BESSEL am 7. Dezember 1820: »Über die Unterschiede unserer Deklinationen wage ich noch kein Urteil zu äussern, wir müssen erst viel mehr Erfahrungen vergleichen. Wie glücklich würde man sich vor wenigen Jahren schon bei einer solchen Übereinstimmung gehalten haben, zumal bei einem Instrument von so kleinen Dimensionen, was nicht repetiert und wo die Ablesung im Grunde noch der schwache Teil ist.«

Indessen erwies sich späterhin diese Übereinstimmung als illusorisch. Als BESSEL im Jahre 1822 in der 7. Abteilung der *Königsberger Beobachtungen* seine Sternörter veröffentlichte[1]), setzte er diese auf Grund einer Neureduktion merklich südlicher an als in seinen früheren brieflichen Mitteilungen an GAUSS und glaubte nun aus den ihm früher von GAUSS mitgeteilten Göttinger Beobachtungen auf eine Verminderung der Göttinger Polhöhe, die GAUSS zu 48″,7 annahm[2]), um 1½″ schliessen zu müssen. GAUSS entging dies zunächst, da er in der folgenden Zeit mit der Vorbereitung zur Hannoverschen Gradmessung beschäftigt und der Briefwechsel mit BESSEL spärlicher geworden war, und weil er sich auch bei der früher gefundenen Übereinstimmung mit BESSEL beruhigt hatte. Allerdings war er noch nicht dazu gekommen, die Biegung seines Instruments gründlich zu untersuchen; er beabsichtigte dies nachzuholen.

Als er endlich von OLBERS im Januar 1824 (Werke XI, 1, S. 333) darauf aufmerksam gemacht wurde, dass BESSEL meinte, GAUSS habe die Göttinger Polhöhe um 1½″ zu gross angenommen, stellt er fest, dass BESSELS neue Deklinationen von den seinigen im genannten Sinne abweichen. Er untersucht infolgedessen die Biegung seines Instruments durch Vergleichung seiner Dekli-

1) Auch *Berliner Astron. Jahrbuch* für 1825 (BESSELS Werke II, S. 248).

2) Brief von GAUSS an BESSEL vom 17. August 1820 (Werke XI, 1, S. 328).

nationen mit den neuen BESSELschen (Werke XI, 1, S. 338 und 348). Unter Anwendung der hieraus folgenden Biegung erzielt er wieder Übereinstimmung; sein Wert der Polhöhe bestätigt sich und erhält nur eine Verminderung von wenigen Zehntelsekunden[1]) und damit übrigens eine fast vollkommene Übereinstimmung mit neueren Bestimmungen.

Die Schwierigkeiten, die sich für GAUSS wie für BESSEL bei der Berücksichtigung der Refraktion und der Biegung der Instrumente boten, führten zu manchen Zweifeln bei den Reduktionen. Die Unsicherheit der ersteren wurde durch BESSELS neue Refraktionstafeln[2]) fast gänzlich behoben. Um den Einfluss der Biegung zu bestimmen, war BESSEL auf den Gedanken gekommen, ausser dem direkten Sternbilde das von einem künstlichen Horizont reflektierte Bild zu beobachten, (vergl. Brief an GAUSS vom 20. März und Briefe an OLBERS vom 11. Mai und vom 3. August 1820, Werke XI, 1, S. 318f.) und GAUSS hatte fast gleichzeitig ebenfalls das Bild des Polarsterns im Wasserhorizont beobachtet (vergl. Brief an BESSEL vom 12. Mai 1820, Werke XI, 1, S. 323 und VI, S. 432). Indessen sagt GAUSS schon im Briefe an OLBERS vom Mai 1819 (vergl. oben S. 103), dass »jedes Instrument seinem Bau nach, sowie wegen der Biegungen der Teile Fehler der gemessenen Zenitdistanzen von der Form $\alpha \sin z + \beta \cos z$ haben wird«, und dass er »durchaus kein Mittel« sieht, um den Koeffizienten α »zu erforschen, als durch den Quecksilberhorizont«[3]) (auch Werke VI, S. 427). Den Vorschlag, der Unsicherheit in der Bestimmung des Zenitpunktes durch Beobachtung des reflektierten Bildes zu entgehen, hatte BESSEL schon 1809 im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1812 gemacht[4]).

GAUSS' Beobachtungen des direkten und des reflektierten Bildes des Polarsterns zur Bestimmung der Polhöhe mit Berücksichtigung der Biegung aus den Jahren 1820 und 1824 sind in der Abhandlung *Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten Altona und Göttingen* (Werke IX, S. 40

---

1) Brief an BESSEL vom 14. März 1824 (Werke XI, 1, S. 338).

2) In den *Fundamenta Astronomiae* (vergl. oben S. 59); von GAUSS in etwas bequemere Form gebracht (H. C. SCHUMACHER, *Sammlung von Hülfstafeln* 1822) und von BESSEL verbessert im *Berliner Astron. Jahrbuch* für 1826 (vergl. den Brief von BESSEL an GAUSS vom 7. November 1822).

3) Das *Tagebuch* des REPSOLDschen Kreises weist zuerst am 28. Januar 1819 eine Beobachtung des Polarsterns im Quecksilberhorizont auf.

4) BESSELS Werke II, S. 3 und 4.

bis 47) niedergelegt; sie führten schliesslich zu dem Wert $51^0\,31'\,47''{,}85$ für die Göttinger Polhöhe (Platz des REICHENBACHschen Meridiankreises).

Während der im vorigen besprochenen ersten Beobachtungsreihe mit dem REICHENBACHschen Meridiankreis vom Februar bis September 1820 begannen die ersten Vorbereitungen für die Hannoversche Gradmessung; im Mai 1820 bewilligte der König die Mittel zur Fortsetzung der dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover und, nachdem die Nachricht von dieser Bewilligung schon allgemein bekannt war, forderte ein Ministerialerlass vom 30. Juni 1820 GAUSS auf, »über die Art und Weise und über die Zeit, zu welcher diese Arbeit unternommen werden kann, wie über die etwa erforderlichen Kosten und sonst zu treffenden Vorkehrungen« Bericht[1]) zu erstatten; vergl. Brief an OLBERS vom 8. Juli 1820.

Am 28. Juni 1820 schreibt GAUSS an BESSEL: »Überhaupt, so sehr ich die Astronomie liebe, fühle ich doch das beschwerliche des Lebens eines praktischen Astronomen ohne Hilfe oft nur zu sehr, am peinlichsten aber darin, dass ich darüber fast gar nicht zu irgend einer zusammenhängenden grössern theoretischen Arbeit kommen kann. Meine Abhandlung über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Naturwissenschaften, die eine neue Begründung der Methode der kleinsten Quadrate und sehr viel anderes neues enthalten wird, liegt schon seit länger als Jahresfrist halbvollendet. Ich weiss daher kaum, ob ich mich darüber zu freuen habe, dass der König die Fortsetzung der dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover genehmigt hat, in Rücksicht auf welche übrigens über das Wann und Wie der Ausführung bis jetzt noch nichts bestimmtes verfügt ist.« Auch im Briefe an OLBERS vom 13. Februar 1821 klagt er über die Zersplitterung seiner Zeit; er schreibt: »Bis Ende Januar war hier fast ununterbrochen bedeckter Himmel, so dass in meinem *Tagebuche* eine grosse Lücke ist. Aber auch nachher habe ich mich nur auf die Kometenbeobachtungen und die Durchgänge von ein paar Sternen beschränkt, indem ich die zufällige Unterbrechung einer meiner Vorlesungen benutzt habe, wieder eine theoretische Arbeit vorzunehmen, die ich schon 1818 angefangen, aber bei meiner zerstückelten Zeit und so mannigfaltigen zum Teil widerwärtigen und nicht immer die zu solchen Arbeiten

1) Vergl. den Aufsatz von GALLE, Abhandlung 1 dieses Bandes.

nötige freie Heiterkeit des Geistes lassenden Beschäftigungen oft auf lange Zeit wieder weggelegt hatte. Es ist die neue Begründung der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate oder vielmehr eine ziemlich ausgedehnte allgemeinere Untersuchung, wovon diese nur Ein Teil ist. Jetzt ist die erste Hälfte ganz vollendet, die ich in Kurzem der Sozietät zu übergeben denke; die zweite, welche auch bis auf einiges noch überzuarbeitende fertig ist, wird vermutlich auch noch vor Ostern mit gedruckt werden können. Sie werden manche artige Sachen darin finden. Mit Betrübnis fühle ich, wie wenig ich in meiner Lage mit allen ihren Missverhältnissen von dem leisten kann, was ich vielleicht unter glücklichern Umständen hätte leisten können, und dass wohl selbst der grössere Teil meiner frühern Lukubrationen mit mir untergehen wird. — Verzeihen Sie, teuerster OLBERS, den Ausbruch eines Gefühls, welches gerade jetzt beim Empfang eines mit jugendlichem Feuer geschriebenen Briefes von einem 18jährigen Florentiner, Namens LIBRI, der mir eine kleine vielversprechende Abhandlung über höhere Arithmetik zuschickte, wieder recht lebendig bei mir geworden ist.«

Seine besprochene Beobachtungsreihe am REICHENBACHschen Meridiankreis schliesst am 9. September 1820; am 12. September reiste er bereits nach Altona, um mit SCHUMACHER über die Auswahl der Basis für die Messungen und über die sonstigen Veranstaltungen zu beraten. Am 29. Oktober nahm er seine Beobachtungen wieder auf; sie wurden aber in der Folgezeit häufig unterbrochen und nur zum Teil reduziert.

Wenn er sich bisher an der Gradmessung nur insoweit beteiligt hatte, als er im August 1818 seine Denkschrift[1]) über die Fortsetzung durch Hannover an den Geh. Kammerrat v. ARNSWALDT, Kurator der Göttinger Universität eingesandt, im Oktober desselben Jahres an SCHUMACHERS Messungen bei Lüneburg teilgenommen, im Juni 1819 nochmals nach Lauenburg gelegentlich der dortigen Aufstellung des RAMSDENschen Zenitsektors gereist und im September die eben erwähnte Reise nach Altona unternommen, sowie am REICHENBACHschen Kreise im August 1820 gleichzeitig mit SCHUMACHER dessen Zenitsterne zur Vergleichung beobachtet hatte, so musste er nun zu diesem Zwecke den Hauptteil seiner Zeit hergeben.

1) Diese Denkschrift ist anscheinend nirgends veröffentlicht worden, vergl. auch den Brief an SCHUMACHER vom 12. August 1818 und den Aufsatz von GALLE, S. 68.

7. Periode. Geringere astronomische Tätigkeit.

In den Jahren 1821 — 1825 sehen wir GAUSS in den Sommer- und Herbstmonaten zum grossen Teil, mit Rekognoszierungen und Messungen für die Gradmessung und die anschliessenden Dreiecke beschäftigt, unterwegs. Daneben gehen seine Verarbeitung der Messungen und seine theoretischen Untersuchungen, aus denen im Dezember 1822 die Preisschrift *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird* und später, im Oktober 1827 die *Disquisitiones generales circa superficies curvas* hervorgingen. In den ersten Teil dieser Periode fällt auch die Abfassung der *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.*

Wenn GAUSS schon früher über die Zersplitterung seiner Zeit geklagt hatte, so mag jetzt besonders oft in ihm der Wunsch rege geworden sein, Göttingen mit einem anderen Ort zu vertauschen, wo er mehr Herr seiner Zeit sein konnte. Als BESSEL in seinem Brief vom 11. Dezember 1823 seine Freude darüber ausdrückte, dass »nun der grösste Teil des Zeitverlustes« (die Triangulierung für die eigentliche Gradmessung) »überwunden ist«, und in demselben Briefe sich über GAUSS' Berufung nach Berlin[1]) ausspricht, antwortet GAUSS am 14. März 1824: »Glauben Sie nun aber ja nicht, dass ich Ihrem Briefe nicht Gewicht genug beilege, wenn ich Ihnen jetzt melde, dass ich wahrscheinlich jetzt mich in neue Messungsoperationen einlasse, die nicht unter einigen Jahren werden zu vollenden sein. In der Tat werde ich dadurch nicht einen Augenblick gebunden sein, wenn eine Verwirklichung der Berliner Pläne oder angemessene andere Aufforderungen eintreten sollten. Allein, teuerster BESSEL, dies ist noch nicht genug: Sie haben sich in mehrern Briefen so stark über den geringen Wert, welchen Sie auf die Resultate der Messungen legen, erklärt, mir gewissermassen einen Vorwurf daraus gemacht, dass ich meine Zeit damit verliere, mir Glück gewünscht, dass der Zeitverlust vorbei sei. Grosser Gott, wie falsch beurteilen Sie mich. Aber es ist mir zu viel daran gelegen, von Ihnen nicht falsch beurteilt zu werden, als dass

1) Die Verhandlungen über GAUSS' Berufung nach Berlin, die erstmalig 1809 angeregt und 1821 und 1824 wieder aufgenommen werden, zogen sich bis zum Jahre 1826 hin. Im Jahre 1821 machte auch SCHUMACHER einen Versuch, GAUSS nach Hamburg zu ziehen. — BRDL.

ich nicht wünschen sollte, mich bei Ihnen zu rechtfertigen. Wahrlich, über die Sache selbst denke ich eben so. Alle Messungen in der Welt wiegen nicht ein Theorem auf, wodurch die Wissenschaft der ewigen Wahrheiten wahrhaft weiter gebracht wird. Aber Sie sollen nicht über den absoluten, sondern über den relativen Wert urteilen. Einen solchen haben ohne Zweifel die Messungen, wodurch mein Dreieckssystem mit dem KRAYENHOFFschen und dadurch mit den französischen und englischen verbunden werden soll. Und wie gering Sie auch diesen Wert anschlagen, in meinen Augen ist er doch höher als diejenigen Geschäfte, die dadurch unterbrochen werden. Ich bin ja hier so weit davon entfernt, Herr meiner Zeit zu sein. Ich muss sie teilen zwischen Collegia lesen (wogegen ich von jeher einen Widerwillen gehabt habe, der, wenn auch nicht entstanden, doch vergrössert ist durch das Gefühl, welches mich immer dabei begleitet, meine Zeit wegzuwerfen) und praktisch astronomischen Arbeiten. So viel Freude ich nun auch daran immer gehabt habe, so werden Sie mir doch zugeben, dass, wenn man bei den unzähligen kleinen und kleinlichen Geschäften dabei aller reellen Hilfe entbehrt, das Gefühl, seine Zeit zu verlieren, nur dadurch beseitigt werden kann, wenn man sich bewusst ist, einen grossen wichtigen Zweck dabei zu verfolgen. Das haben Sie uns andern nun aber schwer gemacht, da Sie uns zuvor gekommen sind und den meisten Desideraten bereits auf eine so musterhafte Art abgeholfen haben. Uns andern bleibt nun wenig mehr übrig, als hin und wieder eine Nachlese zu halten.

»Was bleibt mir also für solche Arbeiten, auf die ich selbst einen höhern Wert legen könnte, als flüchtige Nebenstunden? Ein anderer Charakter als der meinige, weniger empfindlich für unangenehme Eindrücke, oder ich selbst, wenn manches andere anders wäre als es ist, würde vielleicht auch solchen Nebenstunden noch mehr abgewinnen können, als ich es im allgemeinen kann. Wie die Sachen einmal liegen, darf ich eine Unternehmung nicht abweisen, die, obwohl mit tausend Beschwerden verbunden und vielleicht aufreibend auf meine Kräfte wirkend, doch reell nützlich ist, die freilich auch von Andern ausgeführt werden könnte, während ich selbst unter günstigern Verhältnissen etwas besseres täte, allein, die bestimmt, wenn ich sie nicht auf mich nehme, gar nicht zur Ausführung kommen würde; endlich, auch das darf ich Ihnen nicht verhehlen, eine Sache, die in etwas das Missverhältnis

ausgleicht, welches zwischen meiner Diensteinnahme — derselben anno 1824, wie sie 1810 unter JÉRÔME festgesetzt wurde — und den Bedürfnissen einer zahlreichen Familie stattfindet. Doch nun kein Wort mehr zu dieser vertraulichen Mitteilung, zu der ich genötigt war, weil es mir weh tat, von Ihnen falsch beurteilt zu werden.«

In diesem Briefe spricht sich GAUSS deutlich dahin aus, dass die beobachtende Astronomie bei BESSEL in den besten Händen sei und seine eigene Arbeitstätigkeit auf andern Gebieten ihm daher wichtiger scheine.

Das *Tagebuch* des REICHENBACHschen Meridiankreises weist in der Folgezeit folgende Anzahl von Beobachtungstagen mit den dazwischen liegenden Unterbrechungen auf:

vom	29. Oktober	1820	bis	29. Mai	1821:	55	Beobachtungstage
»	2. Januar	1822	»	6. Februar	1822	4	»
»	19. Dezember	1822	»	8. Januar	1823	7	»
»	7. April	1823	»	12. April	1823	6	»
»	6. August	1823	»	24. August	1823	6	»
»	17. Oktober	1823	»	9. Dezember	1823	15	»
»	5. Januar	1824	»	9. Mai	1824	42	»
»	5. Januar	1825	»	10. April	1825	26	»
»	1. Oktober	1825	»	8. November	1825	10	»
»	2. Januar	1826	»	26. November	1826	91	»
»	22. Januar	1827	»	16. Mai	1827	19	»
»	13. Juli	1827	»	17. Dezember	1827	54	»

Hierauf werden die Beobachtungen spärlicher. Im Mai und Juni 1828, sowie im März 1829 und im April und Mai 1830 finden sich noch einige längere Beobachtungsreihen, 1828 im ganzen 34, 1829 im ganzen 29, 1830 im ganzen 31 Beobachtungstage; sodann sind nur mehr vereinzelte Beobachtungen eingetragen: die Jahre 1831 mit 17, 1832 mit 8, 1833 mit 7, 1834 mit 18, 1835 mit 5 Beobachtungstagen. Hierauf folgt eine lange Unterbrechung; erst 1843 findet sich eine vereinzelte Beobachtung, 1844 im ganzen 3 und 1846 im ganzen 21 Beobachtungstage.

Diese Beobachtungen stehen zum grossen Teil in Beziehung zur Gradmessung.

So schlägt GAUSS in dem Briefe vom 20. Dezember 1823 SCHUMACHER die

gleichzeitige Beobachtung von Zenitsternen in Altona und Göttingen vor, um die Polhöhen beider Orte unmittelbar zu vergleichen, vorläufig durch Beobachtung von 11 Sternen an den Meridiankreisen und später in ausgedehnterem Masse am Zenitsektor; SCHUMACHER hatte nämlich zwischen der direkt bestimmten astronomischen Polhöhe von Altona und der aus der Göttinger Polhöhe von GAUSS geodätisch übertragenen eine Differenz von 5″ gefunden, in der GAUSS sogleich »einen entscheidenden Beweis des unregelmässigen Fortschreitens der Richtung der Schwere« sieht[1]). Mit den Beobachtungen wurde sofort im Januar 1824 an beiden Orten mit den Meridiankreisen begonnen, woraus sich die grössere Zahl von Beobachtungstagen in dieser Zeit (siehe vorige Seite) erklärt; über sie berichtet GAUSS an OLBERS am 28. Februar 1824: »Eine Reihe von Beobachtungen von Zenitalsternen, hier und in Altona angestellt (Januar und Februar d. J.) an den Meridiankreisen geben die Amplitudo des Bogens unabhängig von allen absoluten Polhöhen $= 2^0\,0'\,58''{,}77$ also 4″ kleiner als die geodätische Messung mit WALBECKS Erddimensionen. Fast genau denselben Unterschied finden wir bei Lauenburg, wo die Zenitalsterne, daselbst mit dem Zenitsektor und in Göttingen mit dem Meridiankreise beobachtet, die Amplitude $1^0\,50'\,29''{,}98$ und die geodätische Messung $1^0\,50'\,33''{,}93$ geben. Ich zweifle jetzt garnicht mehr an dem unregelmässigen Fortschreiten der Richtung der Schwere und sehe die Übereinstimmung von Lauenburg und Altona wie etwas Zufälliges an. In der Tat, von Göttingen zum Brocken ist die Abweichung im entgegengesetzten Sinn und mehr als zweimal grösser; die geodätische Messung gibt die Amplitudo $0^0\,26'\,13''{,}99$, während die Vergleichung der astronomisch bestimmten Polhöhen ($51^0\,31'\,48''{,}00$ und $51^0\,58'\,11''{,}65$) $0^0\,26'\,23''{,}65$ gibt, oder eigentlich noch etwas mehr, da ZACHS Beobachtungsplatz merklich südlich (leicht 1″) vom Dreieckspunkt war. Zwischen dem Brocken und Lauenburg wird also die Differenz fast 15″ betragen, und so viel kann man dem, wenn auch schlechten LENOIRschen Instrumente unmöglich Fehler zutrauen.« GAUSS wies darauf hin, wie wichtig es sei, diese Beobachtungen an denselben Plätzen mit anderen Instrumenten (dem Zenitsektor) zu wiederholen. Die von ihm angeregten Beobachtungen mit dem Sektor wurden oft hinausgeschoben und endlich im

1) In dem Briefe an SCHUMACHER vom 7. November 1823.

Jahre 1827 (im April in Göttingen und im Juni in Altona) von ihm selbst ausgeführt und die Ergebnisse in der *Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten Göttingen und Altona* (Werke IX, S. 5 ff.) bekannt gemacht. Die Zenitdistanzen[1]) der 43 hierzu benutzten Sterne bestimmte GAUSS ausserdem, ebenso wie ihre Rektaszensionen in der Zeit von April bis August 1927 am REICHENBACHschen Meridiankreise[2]). Zeitweise beteiligte sich Leutnant NEHUS an diesen Beobachtungen.

Als GAUSS 1823 in seinem Aufsatz *Neue Methode die gegenseitigen Abstände der Fäden in Meridianfernrohren zu bestimmen* (Astronomische Nachrichten 43, Werke VI, S. 445) zeigte, dass das Fadenkreuz eines Fernrohrs durch ein zweites gegenübergestelltes Fernrohr beobachtet werden kann, hatte auch BESSEL 1824 die Methode der Kollimatoren benutzt, um die Biegung im Horizont zu bestimmen (Astr. Nachr. 3, S. 209, BESSELS Werke II, S. 43). Er schreibt darüber an GAUSS am 23. Oktober 1824: »Dass auch Sie dieselbe Idee gehabt haben, wodurch ich die horizontale Biegung des Fernrohrs der Meridiankreise bestimmt habe, habe ich durch SCHUMACHER gehört; es ist zwar nicht sehr aufmunternd, dass ich von so vielem, was ich vornehme, später die Überzeugung erhalte, dass es auch ohne mich geschehen sein würde; allein ich bin darüber mit mir längst einig, auch nicht im Stande, deshalb das zu unterlassen, was mir nützlich zu sein scheint«, worauf GAUSS am 20. November antwortet: »Wenn bei dem Zusammentreffen unserer Ideen über die Ausmittelung der Flexion der Fernrohre einer von uns beiden etwas verloren hat, so wäre nach gewöhnlichen Ansichten ich wohl der. Allein mir genügt vollkommen, dass das Verfahren nun Eigentum der Astronomen ist, und ich freue mich aufrichtig, dass Sie es sind, der mir in der Bekanntmachung zuvorgekommen ist. Eine ernstliche Anwendung habe ich selbst noch nicht gemacht, denn die beiden Fernrohre, die zur Hilfe angewandt werden, sollen meiner Meinung nach dem zu prüfenden nicht gar zu weit nachstehen und ich besitze keine zwei solche, wenigstens könnte ich bei der Lokalität meiner Sternwarte das eine nicht gehörig anbringen, ohne erst komplizierte Vorrichtungen anfertigen zu lassen.«

Über die Teilungsfehler des REICHENBACHschen Meridiankreises machte GAUSS eingehende Untersuchungen im Juli 1826, über die er im Briefe an

1) Werke IX, S. 39.

2) Ebenda, S. 8. — Vergl. auch den Aufsatz von A. GALLE, Abhandlung 1 dieses Bandes, S. 120.

BESSEL vom 20. November 1826 und in der *Bestimmung des Breitenunterschiedes* (Werke IX, S. 46) berichtet (vergl. auch den undatierten Brief an SCHUMACHER vom August 1826, sowie die Briefe von SCHUMACHER an GAUSS vom 8. September 1826 und von GAUSS an OLBERS vom 14. Januar 1827). Im Nachlass befinden sich die entsprechenden Rechnungen im Buche Pe (27), S. 28—37.

Im Jahre 1826 machte BOHNENBERGER in seinem Aufsatze *Neue Methode den Indexfehler eines Höhenkreises zu bestimmen und die Horizontalaxe eines Mittagsfernrohrs zu berichtigen, ohne Lot und ohne Libelle* (Astron. Nachr., Bd. 4, S. 327) seinen bekannten Vorschlag, den Nadirpunkt durch den Quecksilberhorizont zu bestimmen. Diese Methode benutzte GAUSS sogleich, und um eine möglichst ebene Quecksilberfläche zu erhalten, liess er das Gefäss schräg nach oben sich verjüngend abdrehen[1]); auch verbesserte er später die Beleuchtung durch Entfernung der zweiten Okularlinse, so dass sich zwischen dem unter 45^0 geneigten Spiegel und dem Fadensystem kein Glas befindet (Werke VI, S. 472, vergl. auch Werke IX, S. 47). An BESSEL schreibt er am 12. März 1826: »Ich hatte dieselbe Idee zur Bestimmung des Kollimationsfehlers, die so nahe liegt, auch gleich anfangs gehabt, aber sah nicht wohl ab, wie sie ausführbar wäre. BOHNENBERGER hat sie nun praktisch bewährt, aber ich hätte gewünscht, dass er über das Detail der Einrichtungen ausführlicher gewesen wäre. In der Tat sehe ich bis diese Stunde noch immer die Ausführbarkeit nicht recht ein bei grössern Instrumenten. Bei starken Vergrösserungen sehe ich keinen Platz zur Anbringung des Illuminateurs, und ohne starke Vergrösserungen zu gebrauchen erhält man doch keine angemessene Genauigkeit. Versuchsweise habe ich in die schwächste Vergrösserung des Fernrohrs des Meridiankreises einen Glasspiegel einsetzen und an der Seite eine Öffnung anbringen lassen, aber bei den ersten gestern angestellten Versuchen hat es mir auch hier nicht gelingen wollen, eine brauchbare Beleuchtung des Netzes zu erhalten. Nicht weniger schwierig scheint mir zu sein, sich die Mittel zur feinen Bewegung zu verschaffen«, und am 20. November 1826: »Da ich nun überdies den Kollimationsfehler durch Beobachtung des Nadirpunktes im Quecksilberspiegel täglich bestimme (eine Methode, die eine unvergleichliche Genauigkeit gibt, und die ich für einen der wichtigsten Fort-

1) Vergl. den undatierten Brief an SCHUMACHER vom Juli 1827 (Werke XI, 1, S. 342) und den an OLBERS vom 31. Januar 1829 (Werke XI, 1, S. 20).

schritte der praktischen Astronomie halte), so erhalten die Beobachtungen eine Übereinstimmung, die alle frühere bedeutend übertrifft.« GAUSS scheint sich in der Tat über die Methode den Nadir zu bestimmen, schon in einem nicht mehr vorhandenen Briefe an REICHENBACH vom 11. Januar 1813 geäussert zu haben, auf den dieser am 23. Januar antwortete[1]): »Die Anwendung des künstlichen Horizonts zur vertikalen Stellung des Kreises und Rektifizierung der kleinen Querlibelle ist eine sehr gute und anwendbare Idee.« GAUSS hatte zu jener Zeit gerade seine Beobachtungen mit dem BORDAkreise begonnen, auf dessen Libelle sich REICHENBACHS Bemerkung zweifellos bezieht, und war jedenfalls dabei auf diesen Gedanken gekommen.

Während der Periode der Beobachtungen am REICHENBACHschen Meridiankreise unternahm GAUSS auch einige Untersuchungen über die Eigenbewegung des Sonnensystems, von denen er ebenfalls nichts veröffentlicht hat. Seine ersten Versuche hierüber fallen in das Jahr 1819, in dem auf seine Veranlassung dieses Problem als Preisfrage von der Göttinger Sozietät gestellt wurde[2]). Von diesen Versuchen ist jedoch nichts erhalten, wie GAUSS selbst in dem Briefe an OLBERS vom 18. Dezember 1821[3]) sagt. Er scheint sich dabei auf einige vorläufige Untersuchungen nach dem allgemeinen Grundsatz beschränkt zu haben, nach dem man durch die angenommene Richtung der Sonnenbewegung »so viel als möglich von den eigenen beobachteten Bewegungen der Sterne weg erklären kann«[4]).

Seine Untersuchungen im Winter 1821—22 wurden durch den Brief von OLBERS vom 25. November 1821 angeregt, in dem OLBERS über seine eigenen Versuche berichtet. Bereits HERSCHEL[5]) hatte aus den von MASKELYNE festgestellten Eigenbewegungen für den Apex einen Punkt im Sternbild des Herkules gefunden. Auch BESSEL hatte einige derartige Versuche angestellt bei Gelegenheit seiner Bestimmung der Eigenbewegung von Sternen[6]). Er

1) REPSOLD, *Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, I, S. 119.

2) Werke XI, 1, S. 405.

3) Ebenda, S. 408.

4) Ebenda, S. 409.

5) Drei Abhandlungen in den Philosoph. Transactions, London, 1783, 1805, 1806; siehe das genaue Zitat Werke XI, 1, S. 449 Fussnote.

6) *Fundamenta Astronomiae*, 1818, S. 308 f. — BESSEL hatte bei Gelegenheit der Untersuchung der Eigenbewegungen die Pole der Eigenbewegung für die 71 am stärksten bewegten Sterne berechnet, um einen Parallelismus in diesen Bewegungen festzustellen. HERSCHELS Ergebnis fand er dabei nicht bestätigt.

schreibt darüber an GAUSS in dem undatierten Briefe vom Dezember (?) 1822[1]): »Es ist zwar nicht schwer, denjenigen Punkt zu finden, welcher das Maximum der Projektionen der Bewegungen auf die nach den Sternen gezogenen grössten Kreise gibt; aber ohne ihn näher aufgesucht zu haben, glaube ich, nach der Auftragung der in den *Fundamentis* gegebenen Bestimmung der Pole auf einen Globus, doch nicht, dass das Maximum vom Minimum so sehr verschieden sein würde, dass die Bewegung nach einer Richtung mit grosser Wahrscheinlichkeit daraus folgte.«

Projiziert man die jährliche Eigenbewegung eines Sterns auf den durch den Stern und den Apex gelegten Grosskreis, konstruiert man also das Dreieck mit den Ecken Anfangsort P, Endort P' des Sterns, Fusspunkt Q des Lotes, so soll nach GAUSS erster Definition im Briefe an OLBERS vom 18. Dezember 1821 $\Sigma \overline{P'Q}^2$ ein Minimum sein. Er fügt aber hinzu, dass diese Definition, bei der Grösse und Richtung der Eigenbewegung berücksichtigt werden und bei der daher die Sterne mit grosser Eigenbewegung zu grosses Gewicht erhalten, »wenn sie überhaupt die richtige ist, es doch nur bei dem gegenwärtigen Zustande unserer Kenntnisse ist, wo wir nur von einer kleinern Anzahl eigner beobachteter Bewegungen auf der Himmelskugel die Richtung etwas genau kennen.« Er verbessert sie sogleich im folgenden Briefe vom 15. Januar 1822 in eine andere, bei der nur die Richtungen der Eigenbewegungen berücksichtigt werden. Er projiziert nämlich das Stück des Grosskreises zwischen dem gegenwärtigen Ort des Sterns und dem Antiapex P auf den Grosskreis der Eigenbewegung. Ist T der Fusspunkt des Lotes, so soll jetzt $\Sigma \sin^2 \overline{PT}$ ein Minimum sein. Es ist das dieselbe Bedingung, die später KOBOLD und HARZER ihren Untersuchungen zugrunde gelegt haben.

GAUSS schliesst jedoch bei den beiden genannten Definitionen die »ungünstigen« Sterne, d. h. diejenigen, die sich vom Antiapex entfernen, aus. Er rechnet nach der letzteren Formel und findet so aus den Eigenbewegungen von 70 BESSELschen Sternen[2]) für den Apex den Wert: $259^0 40'$, $-3^0 49'$,

1) Werke XI, 1, S. 427.

2) Von den auf der vorigen Seite erwähnten 71 BESSELschen Sternen lässt GAUSS den Stern 42 Comae, der die geringste Eigenbewegung hat, fort, weil er die Sterne nach ihrer Eigenbewegung in Gruppen zu je zehn einteilt, vermutlich, weil diesen Gruppen verschiedenes Gewicht zukommen dürfte; vergl. die Gruppeneinteilung unten S. 139, sowie Werke XI, 1, S. 453—454 und die Anmerkung 12), ebendort S. 487.

sowie den um 180^0 abstehenden, da die Gleichung eine solche Doppellösung bedingt. Er entscheidet sich für den ersteren Wert, weil von den 30 Sternen mit den grössten Eigenbewegungen sich 19 diesem Punkte nähern. Dieses Ergebnis erscheint ihm jedoch verdächtig, weil von den 71 BESSELschen Sternen sich 48 nach Süden und nur 23 nach Norden bewegen und daher der Apex nicht wohl so weit südlich liegen kann.

Er versucht daher eine andere Methode[1]) nach dem Grundsatz, dass möglichst wenige Sterne »ungünstig« sein sollen, indem er die Punkte Q wählt, die auf dem Grosskreis der Eigenbewegung um 90^0 vom jetzigen Ort des Sterns im Sinne der Eigenbewegung abstehen. Für alle Sterne, die sich dem Antiapex nähern, ist der Abstand der Punkte Q von diesem kleiner, für alle ungünstigen grösser als 90^0. Bestimmt man dann einen Grosskreis so, dass in der einen Halbkugel möglichst viele, in der andern möglichst wenige Punkte Q sich befinden, so bilden Apex und Antiapex die Pole dieses Grosskreises. Er vereinfacht die Rechnung, indem er »nur den gemeinschaftlichen Schwerpunkt aller Q's (im Innern der Kugel)« sucht; »der dadurch gezogene Radius, fortgesetzt, wird, wo nicht genau, doch sehr nahe das vorteilhafteste P auf der Kugel geben«. Er findet so nach Verbesserung eines kleinen Rechenfehlers für den Apex den Ort: $266^0 18'$, $+34^0 48'$. Das scheinbare Paradoxon, dass seine Rechnung nach der früheren Formel einen so erheblich verschiedenen Wert ergibt, erklärt er damit, dass bei den sukzessiven Annäherungen immer mehr Sterne als scheinbar ungünstig ausgeschlossen werden. Er beginnt daher die Rechnung von neuem, indem er als ungünstig nur diejenigen 12 Sterne ansieht, die nach der Schwerpunktsrechnung sich als solche ergeben hatten, während deren Zahl bei der ersten Rechnung 23 war. Die entsprechende Bedingung fasst er in die Gleichung $\Sigma \sin^2 \overline{PT} + n = \text{Minimum}$, wo n die Anzahl der ungünstigen Sterne bedeutet. Im nächsten Briefe an OLBERS vom 29. Januar 1822[2]) verbessert er diese Formel in

$$\Sigma \sin^2 \overline{TP} + \Sigma \sin^2 \overline{SP},$$

wo das erste Glied für die günstigen Sterne gilt und dieselbe Bedeutung hat wie früher, während im zweiten, das für die ungünstigen Sterne gilt, $\overline{SP}$ die

1) In dem Briefe an OLBERS vom 22. Januar 1822, Werke XI, 1, S. 419.

2) Werke XI, 1, S. 423 f.

Entfernung des Sterns vom Antiapex bedeutet. Die Quadratsumme der Sinusabstände der ungünstigen Sterne vom Antiapex soll also möglichst klein sein, offenbar weil bei einem dem Antiapex näher stehenden Sterne die ungünstige Eigenbewegung wahrscheinlicher ist.

Eine Hauptschwierigkeit bei dem Problem blieb die Frage, welche Sterne als günstig und welche als ungünstig anzusehen sind. Um hier eine möglichst gute Entscheidung zu treffen, hat GAUSS nach Ausweis seines Briefes an OLBERS vom 29. Januar 1822 und einer im Nachlass vorhandenen Zeichnung[1]) eine graphische Methode benutzt. Er sucht denjenigen Punkt auf der Himmelskugel, von dem sich möglichst wenige Sterne entfernen, zunächst graphisch angenähert zu ermitteln. Das Gebiet, in dem dieser Punkt liegt, ermittelt er auf folgende Weise:

Wenn man durch den Ort eines Sterns einen Grosskreis senkrecht zu seiner Eigenbewegung legt, so teilt dieser Kreis die Kugel in zwei Halbkugeln, von denen diejenige für die Lage des Antiapex günstig ist, in die der Stern durch seine Eigenbewegung hinübertritt. Zieht man nun auf einem Globus die genannten Kreise für alle benutzten Sterne, so teilen diese die ganze Kugelfläche in Dreiecke, Vierecke und andere Polygone. Die Seiten dieser Polygone teilen die Himmelskugel so, dass das Innere jedes Polygons in Beziehung auf jeden Stern entweder zur günstigen oder zur ungünstigen Halbkugel gehört. Sucht man dann dasjenige Polygon auf, dessen Inneres am wenigsten ungünstig ist, d. h. von dessen Innerem sich am wenigsten Sterne entfernen, so bildet dieses den wahrscheinlichsten Bereich für den Antiapex. Die Zeichnung für den ganzen Globus auszuführen, ist schon bei einer nicht sehr grossen Anzahl von Sternen unmöglich[2]). GAUSS hat sie auf einem Blatt Papier für die Gegend des Himmels ausgeführt, in der nach seinen früheren Rechnungen der Antiapex genähert liegen musste. Er findet so als wahrscheinlichstes Gebiet für den Antiapex das Viereck mit den Ecken:

$$\begin{aligned} &78^0\,40' - 30^0\,40' \\ &78\ 42 - 30\ 57 \\ &79\ 13 - 31\ \ 9 \\ &80\ \ 4 - 30\ 32. \end{aligned}$$

1) Werke XI, 1, S. 451 und 452.

2) Vergl. den Brief an ARGELANDER vom 16. Februar 1838, Werke XI, 1, S. 435.

Von den innerhalb dieses Vierecks gelegenen Punkten entfernen sich nur 11 Sterne, während die übrigen 60 sich ihnen nähern.

GAUSS hätte nun auf Grund dieser Feststellung nach seiner letztgenannten Formel rechnen können. Er unterlässt dies aber, obwohl er in einer anscheinend aus dem Jahre 1838 stammenden Notiz[1]) jene Formel als die »beste Methode« bezeichnet. Er beabsichtigt nun vielmehr nach einer anderen Methode zu rechnen, die den später von BRAVAIS und AIRY angewandten entspricht. Sie beruht darauf, dass die Quadratsumme der Pekuliarbewegungen der Sterne zu einem Minimum gemacht wird. Die entsprechende Formel gibt er in dem schon erwähnten Briefe an OLBERS vom 29. Januar 1822[2]), wo er diese Methode als eine Vervollkommnung seiner Methode des letzten Briefes bezeichnet und sagt, dass sie dadurch »wohl am Ende die echte und am ungezwungensten mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verknüpfende sein wird.« Über die Ableitung der Formeln findet sich keine Notiz im Nachlass; sie lassen sich indes auf demselben Wege ableiten, den AIRY benutzt hat. Auch hat GAUSS zunächst nicht nach diesen Formeln gerechnet, weil er sich erst genauere Werte für die Eigenbewegungen verschaffen wollte. Er sagt in seinem Briefe an BESSEL vom 15. November 1822[3]): »Künftig werde ich daher diese Arbeit wieder vornehmen, allein erst, wenn ich mehr Zeit habe, und dann wünsche ich auch alle beobachteten eigenen Bewegungen erst neu zu bestimmen, wozu ich erst wieder in anhaltendes Beobachten kommen muss, was vor 1824 schwerlich geschehen kann. Sehr vieles findet sich freilich schon in meinen Beobachtungen von 1820[4]), was aber grösstenteils noch nicht berechnet ist.«

Er kam jedoch nicht wieder auf diesen Gegenstand zurück, als bis er die Abhandlung von ARGELANDER *Über die eigene Bewegung des Sonnensystems*[5]) zugeschickt erhielt. ARGELANDER hatte in den Jahren 1827 bis 1830 auf der Åboer Sternwarte an dem dort 1827 aufgestellten REICHENBACHschen Meridiankreise vorzugsweise die Sterne mit grösserer Eigenbewegung beobachtet und daraufhin seinen Katalog[6]) von 560 Sternen veröffentlicht. Seinen Unter-

1) Werke XI, 1, S. 438.

2) Ebenda, S. 424.

3) Ebenda, S. 426.

4) Ebenda, S. 343 und 346. — BRDL.

5) Mémoires présentés à l'Académie de St. Pétersbourg, 1837, S. 561 ff.

6) 560 *stellarum fixarum positiones mediae ineunte anno* 1830, Helsingfors 1835.

suchungen über die eigene Bewegung der Sonne legte er diejenigen Sterne zugrunde, deren jährliche Eigenbewegung er aus der Vergleichung seines Kataloges mit den von BESSEL[1]) nach BRADLEYS Beobachtungen abgeleiteten Sternörtern grösser als 0″,1 fand. Es ergaben sich so 390 Sterne.

Nach Empfang der Abhandlung von ARGELANDER schrieb GAUSS an diesen am 16. Februar 1838[2]) und schilderte ihm seine graphische Methode, durch die er das Polygon (Viereck) aufgesucht hatte, von dessen Innerem sich am wenigsten Sterne entfernen. Er bemerkt, dass seine Bestimmung aus 71 Sternen nahe mit dem ARGELANDERschen Ergebnis übereinstimmt und fügt hinzu, dass es naturgemässer wäre, nicht die Anzahl der ungünstigen Sterne, sondern die Quadratsumme der Sinus ihrer Apexdistanzen zu einem Minimum zu machen, ein Grundsatz, den er schon in dem Briefe an OLBERS vom 29. Januar 1822 ausgesprochen hatte.

Seine zuletzt in dem eben erwähnten Briefe an OLBERS vom 29. Januar 1822[3]) angegebene Methode erwähnt GAUSS in dem Briefe an ARGELANDER nicht; jedoch rechnet er nunmehr nach dieser Methode unter Benutzung der auch von ARGELANDER benutzten 390 Sterne, bestimmt aber selbst deren Eigenbewegungen durch Vergleichung des ARGELANDERschen Kataloges mit dem BESSEL-BRADLEYschen, weil er bei ARGELANDER mehrere Rechenfehler[4]) entdeckt hatte. Er ordnet die Sterne nach der Grösse ihrer Eigenbewegungen und stellt eine Rangliste[5]) von je 10 Sternen auf. Hierauf berechnet er zunächst aus je 10, dann aus je 30, 60 und mehr Sternen den Apex und zuletzt aus allen das Gesamtergebnis[6]). Er findet z. B. aus den Gruppen von je 60, die letzte Gruppe zu 90 Sternen, die folgenden Werte[7]) für den Apex (Aequinoctium 1792,5):

1) *Fundamenta*, S. 137 f.

2) Werke XI, 1, S. 433.

3) Ebenda, S. 424.

4) GAUSS äussert sich über die ARGELANDERsche Abhandlung ausser in den Werke XI, 1 abgedruckten Briefstellen an OLBERS auch in dem Briefe an SCHUMACHER vom 30. März 1838, Werke XII, S. 273, der erst nach Erscheinen des Bandes XI, 1 bekannt geworden ist.

5) Werke XI, 1, S. 462—465.

6) Vergl. die Bearbeitung der entsprechenden Nachlassnotizen durch O. BIRCK, Werke XI, 1.

7) In dem Briefe an OLBERS vom 5. April 1838, Werke XI, 1, S. 443 und 444.

Gruppe	α	δ
I.	$251^0 58'$	$+37^0 50$
II.	260 10	+33 45
III.	256 53	+41 46
IV.	273 47	+16 56
V.	248 54	+16 17
VI.	270 46	+11 45

und als Endergebnis[1]): $261^0 51'$, $+27^0 6'$.

Er wiederholt die Rechnung, indem er jetzt die Sterne nach den Sinus ihrer Apexdistanzen in 5 Klassen ordnet und erhält damit folgende Werte[2]) (Aequinoctium 1792,5):

Klasse	α	δ
I.	$272^0 36'$	$+33^0 11'$
II.	261 17	+36 26
III.	249 19	+21 18
IV.	258 2	+24 17
V.	272 38	+23 11.

Das hieraus folgende Gesamtergebnis $261^0 31'$, $+27^0 20'$ weicht etwas von dem vorigen ab, vermutlich infolge kleinerer Rechenfehler. In seinem Briefe an OLBERS vom 5. April 1838[3]) bemerkt er zu der auffallenden Tatsache, dass bei der Einteilung in Gruppen die letzten Gruppen der weniger stark bewegten Sterne einen erheblich südlicher gelegenen Apex ergeben: »Dies ist freilich wenig von ARGELANDERS Endresultat verschieden. Indessen ist die Vereinigung der drei letzten Gruppen in Eine nicht recht zulässig, erstlich weil an sich die kleinen Bewegungen geringere Zuverlässigkeit geben und daher den folgenden Gruppen ungleiches Gewicht beigelegt werden müsste, dessen richtige Taxierung aber eigentümliche Schwierigkeiten hat. Zweitens aber, was unendlich wichtiger ist, weil (cf. die obigen 6 Gruppen) die letztern Gruppen so unverkennbar einen südlichern Punkt indizieren, was den gegründeten Verdacht erregt, dass eine konstante Ursache im Spiel ist. Eine solche kon-

1) Werke XI, 1, S. 444.

2) Ebenda, S. 479.

3) Ebenda, S. 441.

stante Ursache wäre, wenn durchschnittlich BRADLEYS Deklinationen zu südlich, oder ARGELANDERS zu nördlich wären, oder beides zugleich stattfände. Offenbar werden dadurch die Resultate verfälscht (im Sinn der Deklination) und desto mehr, je kleiner die beobachtete eigene Bewegung ist. Nach einem freilich sehr rohen und sehr prekären Überschlage schätze ich, dass, diese Diskordanz wegzuschaffen, man annehmen müsste, die beobachtete 75 jährige Deklinationsbewegung sei etwa durchschnittlich 4″ zu gross (zu nördlich). Ich möchte die Möglichkeit von $-2''{,}5$ bei BRADLEY und $+1''{,}5$ konstanten Durchschnittsfehler bei ARGELANDER nicht unbedingt leugnen. Auch könnte vielleicht eine strengere Rechnung, die aber fast unüberwindliche Arbeit erfordern würde, etwas weniger als 4″ geben. Wäre die Erklärung die richtige, so dürfte die wahre Deklination wohl 40^0 erreichen.«

Im Winter 1825/26 nach der Rückkehr von seiner letzten, zum Zwecke seiner geodätischen Messungen unternommenen, Reise schreibt GAUSS am 12. Februar 1826 an SCHUMACHER[1]): »Ich habe kaum während einer Periode meines Lebens so angestrengt gearbeitet und doch vergleichungsweise so wenig reinen Ertrag produziert wie in diesem Winter. So geht es aber oft bei mathematischen Anstrengungen, wo nicht das Arbeiten, wie das Verfertigen eines Schuhes über einen gegebenen Leisten vollendet werden kann. Ich habe mich zuweilen in diesem Winter Wochen lang, Monate lang mit einer Aufgabe beschäftigt, ohne sie zu meiner Zufriedenheit lösen zu können. Ich war etwas verwundert über Ihre Äusserung, als ob mein Fehler darin bestehe, die Materie zu sehr der vollendeten Form hintanzusetzen. Ich habe während meines ganzen wissenschaftlichen Lebens immer das Gefühl gerade vom Gegenteil gehabt, d. i. ich fühle, dass oft die Form vollendeter hätte sein können und dass darin Nachlässigkeiten zurückgeblieben sind. Denn so werden Sie es doch nicht verstehen, als ob ich mehr für die Wissenschaft leisten würde, wenn ich mich mehr damit begnügte, einzelne Mauersteine, Ziegel etc. zu liefern, anstatt eines Gebäudes, sei es nun ein Tempel oder eine Hütte, da gewissermassen doch das Gebäude auch nur Form der Backsteine ist. Aber ungern stelle ich ein Gebäude auf, worin Hauptteile fehlen, wenn gleich ich wenig auf den äussern Aufputz gebe. Auf keinen Fall aber, wenn Sie sonst mit Ihrem

1) Ähnlich spricht er sich in dem Briefe an OLBERS vom 19. Februar 1826 aus.

Vorwurf auch recht hätten, passt er auf meine Klagen über die gegenwärtigen Arbeiten, wo es nur das gilt, was ich Materie nenne; und ebenso kann ich Ihnen bestimmt versichern, dass, wenn ich gern auch eine gefällige Form gebe, diese vergleichungsweise nur sehr wenig Zeit und Kraft in Anspruch nimmt oder bei frühern Arbeiten genommen hat. Höchst drückend aber fühle ich bei schleunigen Arbeiten meine äussern Verhältnisse, und das Kollegienlesen ist z. B. in diesem Winter unbeschreiblich angreifend für mich gewesen, und Dinge, die an sich leicht sind, werden mir dabei oft sehr schwer. Ob ich meine Messungsarbeiten als vollendet ansehen soll oder nicht, weiss ich selbst noch nicht.«

Gauss beschäftigte sich in der nun folgenden Zeit auch wieder mit zahlentheoretischen Untersuchungen und war damit zu einer Beschäftigung zurückgekehrt, die er mehrere Jahre hindurch entbehren oder wenigstens stark einschränken musste. Es stehen nun bis zum Jahre 1832 mathematische und mathematisch-physikalische Untersuchungen im Vordergrund. 1828 erschienen ausser den *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[1]) seine Abhandlungen *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio* I[2]), und das *Supplementum Theoriae combinationis observationum*[3]), die er schon 1825 und 1826 der Göttinger Sozietät vorgelegt hatte; endlich 1829 die *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibri*[4]) und 1832 die *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio* II[5]).

Daneben laufen noch dauernd seine Rechnungen zur Landesvermessung, die sich im wesentlichen bis in das Jahr 1838 hinauszogen, wenn er auch selbst an den praktischen Messungen nicht mehr teilnahm; auch wurde er 1829 zum Mitgliede der Kommission für die Hannoversche Mass- nnd Gewichtsregulierung ernannt.

Astronomische Arbeiten treten damit ganz in den Hintergrund und die grossen Instrumente der Göttinger Sternwarte wurden wenig von ihm benutzt. Die oben auf Seite 130 angegebenen Beobachtungsreihen nach dem Jahre 1827, seit

1) Werke IV, S. 217.
2) Werke II, S. 65.
3) Werke IV, S. 55.
4) Werke V, S. 29.
5) Werke II, S. 93.

der Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona, sollten vielleicht zur schärferen Bestimmung der Eigenbewegung einiger Sterne dienen, da er in dem Briefe an BESSEL vom 15. November 1822 äusserte, er wolle seine Untersuchungen über die Bewegung der Sonne erst wieder vornehmen, wenn er selbst alle beobachteten Eigenbewegungen neu bestimmt haben würde[1]). Aber auch dieser Plan ist nicht zur Durchführung gekommen. Der Briefwechsel mit BESSEL ruhte monatelang, zuweilen über ein Jahr gänzlich. Doch liegen auch aus dieser Zeit Beobachtungen von Planeten und Kometen vor, die GAUSS gelegentlich ausführte, und die teils von ihm selbst veröffentlicht und Werke VI abgedruckt, teils erst Werke XI, 1 aus dem Nachlass oder dem Briefwechsel bekannt gemacht sind. Häufig beobachtete er Ceres, Pallas und die meisten Kometen.

Wenn diese Zeit auch im ganzen eine sehr reiche Ausbeute an wichtigen Untersuchungen hervorbrachte, so drückt sich in den Briefen an SCHUMACHER und OLBERS doch immer wieder, wie schon früher, seine Unzufriedenheit aus, wohl dadurch hervorgerufen, dass infolge der Zersplitterung kein ruhiges ungestörtes Arbeiten möglich war und so vieles liegen bleiben musste. Ausserdem drückte auf seine Stimmung die Krankheit seiner zweiten Frau, die schon im Jahre 1823 kränklich und seit 1826 schwer leidend war; sie starb im September 1831.

Im März 1832 schreibt GAUSS an SCHUMACHER, dass er sich mit der Theorie des Erdmagnetismus beschäftige, und dieses Gebiet ist es nun, das ihn in Gemeinschaft mit WILHELM WEBER in den nächsten Jahren in Anspruch nimmt. Es ist daher aus dieser Zeit noch weniger über GAUSS' astronomische Tätigkeit zu berichten. 1836/37 raubte ihm die Hannoversche Mass- und Gewichtsregulierung einen grossen Teil seiner Zeit. Der Briefwechsel, im besonderen mit OLBERS, handelt nun vorzugsweise von persönlichen Angelegenheiten, umsomehr als auch OLBERS, der 1840 starb, seines vorgerückten Alters wegen nicht mehr beobachtete.

Am 31. August 1834 starb GAUSS' langjähriger Gehilfe HARDING; sein Nachfolger wurde Dr. GOLDSCHMIDT, der sich bereits an den magnetischen Beobachtungen beteiligt hatte und späterhin auf der Sternwarte auch eine Reihe von Planeten- und Kometenbeobachtungen ausführte.

---

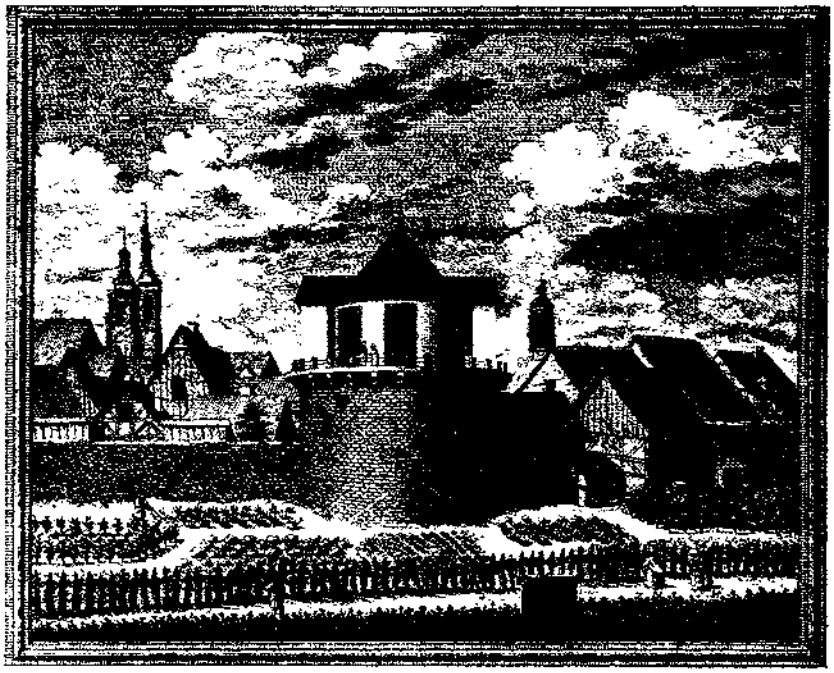
1) Vergl. oben S. 138.

In seinem hohen Alter kehrte GAUSS nochmals zur Benutzung des REICHENBACHschen Meridiankreises zurück. Das *Tagebuch* des REICHENBACHschen Kreises weist vom 6. März bis zum 28. Juni 1846 noch 21 Beobachtungstage auf, an denen GAUSS eine neue Untersuchung der Instrumentalfehler des Kreises[1]) vornahm und sehr häufig den Polarstern zu einer Neubestimmung der Fadenabstände, sowie einige wenige Hauptsterne beobachtete. Mit dem letzteren Datum schliesst das *Tagebuch.* Jedoch beobachtete er nach Ausweis des *Beobachtungsbuches* Pc (24) vom 4. Juli 1846 bis zum 27. Juni 1851, zuletzt 74 Jahre alt, nochmals die meisten der früher beobachteten Fundamentalsterne — mehrere davon 10 bis 20 mal — und einige andere Sterne. Ausserdem schloss er die Planeten Venus und Merkur an und beobachtete die neuentdeckten Planeten Metis (GRAHAMS Planet), Parthenope, Victoria, Iris, Flora und den Neptun. Die letzteren Beobachtungen hat er auch veröffentlicht; sie sind Werke VI abgedruckt.

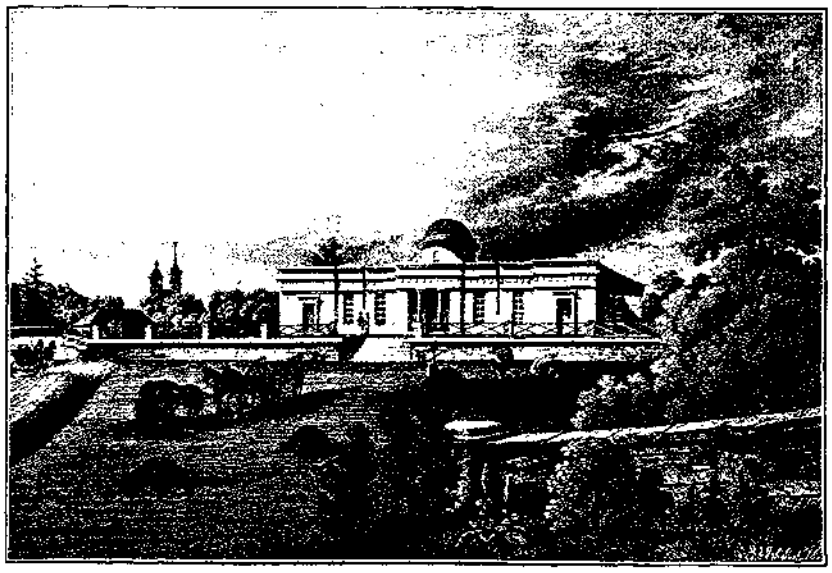
Auch die Sonnenfinsternisse vom 8. Oktober 1848 und vom 28. August 1851 beobachtete er noch; die letztere[2]) ist wohl seine letzte Beobachtung gewesen.

1) Vergl. Werke XI, 1, S. 351 f.

2) Ebenda, S. 479.



Die alte Sternwarte in Göttingen im Jahre 1773.
Nach einem Stich von J. P. KALTENHOFER.



Die neue Sternwarte in Göttingen, vollendet 1816.
Nach einem Stich von E. WAGNER (Zeichnung von E. HORNEMANN).

Zweiter Abschnitt.

Theoretische Astronomie[1]).

Einleitendes.

Gauss' Bestreben, »seinen Untersuchungen die Form vollendeter Kunstwerke zu geben« und »nie eine Arbeit zu veröffentlichen, bevor diese eine durchaus vollendete Form erhalten hatte«[2]) ist auch die Ursache, dass er von den zahlreichen von ihm geplanten, grundlegenden und den Gegenstand erschöpfenden astronomischen Werken nur eines, die *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Hamburg 1809, seinen Zeitgenossen geschenkt hat. In ihm behandelt er, soweit es die Bestimmung einer Bahn aus den Beobachtungen betrifft, ausschliesslich die elliptische und die hyperbolische Bewegung. Vielleicht mag er mit Rücksicht darauf, dass Olbers[3](die Aufgabe der parabolischen Bahnbestimmung mit Erfolg gelöst hatte, die weitere Durchführung seiner Untersuchungen über diesen Gegenstand einstweilen zurückgestellt haben. Jedenfalls hat er hierüber nur die Abhandlung *Observationes cometae secundi A. 1813 in observatorio Gottingensi factae, adiectis nonnullis adnotationibus circa calculum orbitarum parabolicarum*, Göttingen 1813[4]) veröffentlicht, in der er sich ausdrücklich auf das Olberssche Werk bezieht. Und doch beabsichtigte er, auch hier ein grosses grundlegendes Werk zu schaffen, wie unter anderem aus der von Lindenau im November 1815 verfassten Einleitung zu der »Zeitschrift für Astronomie, herausgegeben von Lin-

1) Durchgesehener Abdruck aus Heft VII der *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss*, 1918.

2) Sartorius v. Waltershausen, *Gauss zum Gedächtnis*, Leipzig 1856, S. 82.

3) *Über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen*, Weimar 1797 (Wilhelm Olbers, *Sein Leben und seine Werke*, Band I, herausgegeben von C. Schilling, Berlin 1894).

4) Werke VI, S. 25.

DENAU und BOHNENBERGER, Erster Band«, hervorgeht, wo es (S. 46) heisst: »GAUSS hat neuerlich beinahe die ganze Kometentheorie umgearbeitet, neue Tafeln entworfen, und wir haben ein eigentümliches Werk darüber von ihm zu erwarten, was wohl nichts zu wünschen übrig lassen wird.« Die Vorarbeiten für dieses Werk, die sich im Nachlass vorgefunden haben, sind Werke VII, 1906, S. 323—373, zusammengestellt.

Ebenso hat die gewaltige Arbeit, die GAUSS bei der Berechnung der Störungen der Pallas geleistet hat, erst bei der Veröffentlichung des VII. Bandes seiner Werke im Jahre 1906 der astronomischen Welt zugänglich gemacht werden können. Trotz sorgfältiger Durchsicht und Bearbeitung des Nachlasses wird natürlich nicht erwartet werden können, dass die ganze Fülle von Gedanken und Kunstgriffen, die GAUSS hier zur Anwendung brachte, damit ans Tageslicht gezogen ist, umsomehr als ausser dem Text der im VII. Band, S. 439f. abgedruckten *Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires* der gesamte auf Pallas bezügliche Nachlass fast nur aus einer nahezu unübersehbaren Zahl von Blättern mit Rechnungen, ohne jeden erläuternden Text besteht. Die eigentliche Berechnung der Störungen, die bis auf einen kleinen Rest der Marsstörungen von GAUSS ganz durchgeführt worden ist, hat sich zwar vollständig aufklären und veröffentlichen lassen, aber über die tiefer liegenden Überlegungen von GAUSS und über die Gründe, warum er seine Entwicklungen überall gerade in der vorliegenden Art und Weise gemacht hat, sowie über andere Einzelheiten lassen sich mit Sicherheit keine Schlüsse ziehen. Daher kann man, wie auf vielen auf anderen Gebieten, so auch hier, nur an der Hand des Nachlasses, nicht aber aus den gedruckten Abhandlungen allein ein Bild von der Entwicklung der GAUSSschen Arbeiten gewinnen. Was man darüber vermuten kann, wird weiter unten bei der eingehenden Besprechung dieser Arbeiten gesagt werden.

Der Beginn der Periode von GAUSS' eingehendster Beschäftigung mit astronomischen Untersuchungen wird durch die Entdeckung des Planeten Ceres im Jahre 1801 eingeleitet. Doch hatte er sich schon vorher vielfach mit kleineren oder grösseren astronomischen Problemen beschäftigt; über seine frühzeitig angestellten astronomischen Beobachtungen ist im ersten Abschnitt dieses Aufsatzes *Praktische und sphärische Astronomie* berichtet worden.

In der *Scheda* Aa vom Jahre 1798, die mit der *Scheda prima de curva lemniscata* beginnt, steht auf S. 16 die Überschrift *Scheda secunda de motu cometarum.* Darauf folgen aber die Differentialgleichungen des Zweikörperproblems mit Bezeichnungen, die sich auf die Erde beziehen und aus denen GAUSS das Flächenintegral und einige weitere Beziehungen ableitet, ohne auf die Theorie der Kometenbahnen einzugehen. Da er aber in der *Tagebuch*notiz Nr. 94 vom Juli 1798[1]) sagt »Cometarum theoriam perfectiorem reddidi«, so mag er in dieser Zeit einige weitergehende Entwickelungen über die parabolische Bewegung gemacht haben, die er dann nicht weiter ausgebaut hat und über die keine Aufzeichnungen erhalten sind. In der *Scheda* Ac sehen wir ihn Ende 1799 oder Anfang 1800 mit dem Studium der oben genannten OLBERSschen Abhandlung über die Bahnbestimmung der Kometen beschäftigt, und in der *Scheda* Ae vom Sommer 1800 findet man mehrere ganz vereinzelte Notizen, die darauf hinweisen, dass er sich schon zu jener Zeit mit dem Studium einzelner Werke der theoretischen Astronomie, im besonderen auch der Mechanik des Himmels beschäftigt hatte. Während seiner Studienzeit in Göttingen 1795—1798 hatte er nach Ausweis der Verzeichnisse der Göttinger Universitätsbibliothek von dieser ausser den bereits oben S. 8 angegebenen, noch folgende astronomische Werke entliehen: CLAIRAUT, *Théorie de la Lune*; LAGRANGE, *Mécanique analytique*; NEWTON, *Opera omnia*[2]).

I. Theorie des Mondes.

Die erste grössere Arbeit auf astronomischem Gebiete, die GAUSS unternommen hat, ist die Bearbeitung der Theorie des Mondes, die sich im Nachlass auf zusammengehefteten Blättern befindet, in den Werken Band VII, 1906, S. 613f. abgedruckt ist und nach der *Tagebuch*notiz Nr. 120[3]) (»Theoriam motus Lunae aggressi sumus«) aus dem August 1801 stammt.

Bis zum Jahre 1788 waren zur Berechnung der Ephemeriden des *Nautical Almanac* die MAYERschen Mondtafeln[4]) im Gebrauch. Indessen war MASON

1) Werke X, 1, S. 536.

2) Die *Principia* NEWTONS hatte GAUSS schon 1794 erworben.

3) Werke X, 1, S. 562.

4) *Tabulae motuum Solis et Lunae novae et correctae*, London 1770. — T. MAYER hatte zuerst seine *Novae tabulae motuum Solis et Lunae* in den Comm. Soc. scient. Gott., Göttingen, 1752 veröffentlicht, diese

vom Board of Longitude beauftragt worden, sie weiter zu verbessern, und seit 1789 traten daher die MASONschen Tafeln[1]) an die Stelle der ursprünglichen MAYERschen. Da sich bald das Bedürfnis einer weiteren Verbesserung der Tafeln fühlbar machte, so stellte die Pariser Akademie im Jahre 1798 die Preisaufgabe[2]):

»Aus einer grossen Anzahl der besten, zuverlässigsten alten und neuen Mondbeobachtungen, wenigstens 500 an der Zahl, die Epochen der mittleren Länge des Apogäums und des aufsteigenden Knotens der Mondbahn zu bestimmen.«

BÜRG bearbeitete[2]) diese Aufgabe, indem er mehr als 3000 Beobachtungen benutzte, die er mit den MAYERschen Mondtafeln verglich, und indem er auch sonst über den Rahmen der gestellten Preisaufgabe hinausging. Er erhielt, ebenso wie BOUVARD, der auch eine Abhandlung eingereicht hatte, den Preis im Jahre 1800. BÜRG setzte seine Untersuchungen über die Mondbewegung fort, und auch LAPLACE begann um diese Zeit, seine Mondtheorie zu schaffen. Im Jahre 1800 setzte das Pariser Bureau des Longitudes einen neuen Preis[3]) aus für die Erfüllung folgender Bedingungen:

»1) Aus der Vergleichung einer grossen Anzahl guter Beobachtungen den Wert der Koeffizienten der Mondungleichheiten auf das genaueste zu bestimmen und für die Länge, für die Breite und für die Parallaxe dieses Gestirns genauere und vollständigere Formeln zu geben als diejenigen sind, auf welchen die bisher gebrauchten Mondtafeln beruhen.

2) Aus diesen Formeln Mondtafeln mit einer hinlänglichen Bequemlichkeit und Sicherheit für die Berechnung zu entwerfen.«

Die Erteilung des Preises war an keinen Zeitpunkt gebunden.

---

sodann weiter verbessert und die verbesserten Tafeln 1755 zum Wettbewerb um den für die Längenbestimmung vom Board of Longitude ausgesetzten Preis nach London geschickt. Die Entscheidung über den Preis zog sich in die Länge; T. MAYER starb 1762 und seine Witwe sandte seine Handschriften, die eine weitere Verbesserung der Tafeln enthielten, ebenfalls nach London. Dort wurde seine *Theoria Lunae iuxta systema Newtonianum* 1767, und die eigentlichen Tafeln *Tabulae motuum Solis et Lunae novae et correctae* 1770 gedruckt. Die Witwe erhielt einen Teil des Preises. — Vergl. R. WOLF, *Geschichte der Astronomie*, München 1877, S. 497.

1) CHARLES MASON, *Tob. Mayers Lunar tables improved*, London 1787. — Vergl. auch LALANDE, *Astronomie* II, 3. Ausgabe, Paris 1792, S. 175.

2) Monatl. Corr. 1800, Mai, S. 541.

3) Ebenda, August, S. 165.

Vielleicht ist hierin der Anlass zu suchen, dass GAUSS die Bearbeitung der Mondtheorie in Angriff nahm. Er leitete als Fundamentalgleichungen die Differentialgleichungen des reziproken kurtierten Radiusvektors, der mittleren Länge (oder der Zeit) und der Tangente der Breite ab und benutzte die wahre Länge als unabhängige Veränderliche. Seine Fundamentalgleichungen sind also ähnlich denen von CLAIRAUT[1]), d'ALEMBERT[2]) und den später von LAPLACE[3]), PLANA[4]) u. a. aufgestellten, nicht aber den EULERschen[5]).

Die Integration wird durch Annäherungen ausgeführt, bei denen die Entwicklungen nach Potenzen der Exzentrizität und der Tangente der Neigung fortschreiten. Die Integrationsdivisoren entwickelt GAUSS nach Potenzen des Verhältnisses der mittleren Bewegungen von Mond und Erde. Die Form, die die Resultate dadurch erhalten, stimmt also im wesentlichen mit denen der späteren PLANAschen Theorie[4]) überein. Das Ergebnis der ersten Annäherung vergleicht GAUSS mit den Werten von TOBIAS MAYER. Indessen hat er die ganze Arbeit bald wieder aufgegeben und nur die Berechnung der Breitenstörungen durchgeführt; sie ist offenbar plötzlich abgebrochen worden, wofür sich die Erklärung aus der Einleitung zur *Theoria motus* und aus einem Briefe an SCHUMACHER vom 23. Januar 1842 ergibt, in dem es heisst: »Eben im Sommer 1801 hatte ich mir vorgesetzt, ähnliche Arbeit über den Mond auszuführen; aber kaum hatte ich die theoretischen Vorarbeiten angefangen (denn diese sind es, auf welche in der Vorrede meiner *Theoria motus Corporum Coelestium* angespielt wird), als das Bekanntwerden von PIAZZIS Ceresbeobachtungen mich in eine ganz andere Richtung zog.« Die in diesem Briefe erwähnte Stelle aus der Vorrede zur *Theoria motus* sehe man im Abdruck des *Tagebuchs* bei der Nr. 119, Werke X, 1, S. 561.

Über den Fortschritt der Untersuchungen von LAPLACE und BÜRG finden sich ausführliche Berichte in der Monatl. Corr. 1800—1802 und dies mag dazu beigetragen haben, dass GAUSS auch späterhin seine Arbeit anscheinend

1) CLAIRAUT, *Théorie de la Lune*, St. Petersburg 1752, 1765.

2) D'ALEMBERT, *Recherches sur différents points importants du système du monde*, Paris, I.—III. Band, 1754—1756.

3) LAPLACE, *Mécanique céleste*, Tome III., Livre VII, Paris 1802.

4) PLANA, *Théorie du mouvement de la Lune*, Turin 1832.

5) EULER, *Opuscula varii argumenti*, Berlin 1746; *Theoria motus Lunae exhibens omnes eius inaequalitates*, Petersburg 1753 und *Theoria motuum Lunae nova methodo pertractata*, Petersburg 1772.

nicht wieder zur Hand genommen hat. LAPLACES Ergebnisse erschienen 1802 im dritten Bande der *Mécanique céleste*; BÜRG erhielt 1803 den neuen Preis, während der Druck seiner Mondtafeln[1]) sich bis zum Jahre 1806 hinzog. Im Jahre 1803 hat GAUSS in der *Scheda* Am die Ergebnisse von LAPLACES Untersuchungen aus der *Mécanique céleste* (Band III) herausgeschrieben und einige Notizen dazu gemacht, die sich auf die Tafeln von MASON und auf die bis dahin bekannt gewordenen Ergebnisse von BÜRGS Untersuchungen zu beziehen scheinen.

II. Bahnbestimmung aus drei oder vier Beobachtungen (im besonderen Theoria motus).

1. Die Entdeckung der Ceres.

Die von PIAZZI in Palermo am 1. Januar 1801 gemachte Entdeckung der Ceres wurde erst im Mai durch die deutschen Zeitungen bekannt und die ersten genaueren Nachrichten darüber gab das Juni-Heft der *Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelkunde*, die v. ZACH, Oberstleutnant und Direktor der Sternwarte Seeberg bei Gotha, seit dem Jahre 1799 herausgab und die als Sammelpunkt wichtiger neuer geographischer und astronomischer Nachrichten diente. PIAZZI hatte am 24. Januar 1801 einen Brief an Professor BODE, Direktor der Berliner Sternwarte, und zu gleicher Zeit an ORIANI in Mailand und auch an LALANDE in Paris gerichtet, in dem er mitteilt, dass er einen sehr kleinen Kometen ohne Nebel und Schweif im Sternbilde des Stiers entdeckt habe[2]). Im Februar berichtete LALANDE darüber zwar an v. ZACH, ohne aber den näheren Ort am Himmel anzugeben, sodass v. ZACH auf weitere Nachricht wartete. Die Briefe von PIAZZI an ORIANI und BODE gelangten erst im April an ihre Bestimmungsorte — der an BODE war 71 Tage unterwegs —, während PIAZZI das Objekt nur bis zum 11. Februar hatte verfolgen können. In seinen Briefen gab PIAZZI nur zwei beobachtete Örter vom 1. und 23. Januar an, roh auf ganze Minuten abgerundet, und bemerkte nur noch, dass vom 10. auf den 11. Januar die rückläufige Bewegung in die rechtläufige übergegangen sei; im übrigen fügte er in seinem Briefe an

1) J. T. BÜRG, *Tables de la Lune in den Tables astronomiques publiées par le Bureau des Longitudes de France*, Prémière Partie, à Paris, chez Courcier, 1806.

2) Monatl. Corr. 1801, Juni, S. 604.

ORIANI hinzu, er habe die Vermutung, dass es sich um einen Planeten handele, während er in den Briefen an BODE und LALANDE nur von einem Kometen spricht.

Beide, BODE sowohl wie ORIANI, gaben die Nachricht sogleich an v. ZACH weiter, der dann in dem erwähnten Hefte der Monatlichen Correspondenz einen ausführlichen Artikel *Über einen zwischen Mars und Jupiter längst vermuteten, nun wahrscheinlich entdeckten neuen Hauptplaneten unseres Sonnensystems* brachte, während BODE die Entdeckung der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften mitteilte und für die Bekanntmachung in einigen Zeitungen sorgte.

v. ZACH hatte gerade im September 1800 bei Gelegenheit einer »kleinen astronomischen Reise nach Celle, Bremen und Lilienthal«, über die er in den Heften der Monatlichen Correspondenz der Jahre 1800 bis 1801 ein ausführliches *Tagebuch* veröffentlichte, mit fünf anderen Astronomen (SCHRÖDER, HARDING, OLBERS und wahrscheinlich v. ENDE und GILDEMEISTER), die sich in Lilienthal trafen, beschlossen, »eine geschlossene Gesellschaft von 24 praktischen, in ganz Europa verbreiteten Astronomen« zu gründen[1]), die sich das Aufsuchen des zwischen Mars und Jupiter vermuteten Planeten durch gleichzeitige Verbesserung der Sternverzeichnisse angelegen sein lassen sollten. Auch PIAZZI befand sich unter den 24 ausgewählten Astronomen, hatte aber die Einladung, an der Gesellschaft teilzunehmen, noch nicht erhalten[2]). BODE sowohl wie ORIANI hielten daher gleich an der Auffassung fest, dass das neue Objekt ein Planet sei, der sich zwischen Mars und Jupiter bewegt, und auch v. ZACH trat natürlich dieser Auffassung bei, umsomehr als die oberflächliche Berechnung einer Kreisbahn darauf hindeutete. v. ZACH versuchte eine etwas schärfere Berechnung einer Kreisbahn, die ihm eine merkwürdige Ähnlichkeit mit der Bahn des Kometen von 1770 zu zeigen schien[3]), so dass er sich fragte, ob beide Objekte nicht vielleicht identisch seien; gewisse Zweifel an der Natur des neuen Planeten bestanden also immer noch: PIAZZI spricht in einem späteren Briefe von ihm als von einem Kometen und auch die Pariser Astronomen scheinen der gleichen Ansicht gewesen zu sein und daher weniger Wert auf die Entdeckung gelegt zu haben[4]).

1) Monatl. Corr. 1801, Juni, S. 602.

2) Ebenda, S. 603.

3) Ebenda, S. 614; es handelt sich um den Kometen 1770 I (Nr. 102 des GALLEschen Verzeichnisses); die halbe grosse Axe ist aber das einzige Element, das bei beiden Bahnen Ähnlichkeit zeigt.

4) Monatl. Corr. 1801, Juli, S. 56—57.

Bode hatte inzwischen an Piazzi mit der Bitte um genaue Mitteilung seiner Beobachtungen geschrieben, erhielt aber zunächst keine befriedigende Antwort. Es entspann sich ein eingehender Briefwechsel über Piazzis Entdeckung zwischen Bode, v. Zach, Olbers, der die Nachricht aus der Zeitung erfahren hatte, und Burckhardt in Paris, wohin Piazzi endlich in einem weiteren Brief an Lalande, der in Paris am 31. Mai eintraf, seine Beobachtungen genauer mitgeteilt hatte, aber mit der Bitte, sie vorläufig nicht zu veröffentlichen; den deutschen Astronomen teilte sie Burckhardt unter der gleichen Bedingung mit. Auf Grund der genaueren Beobachtungen berechnete Burckhardt auch schon eine Ellipse; seine Versuche, die Beobachtungen durch eine Parabel darzustellen, scheiterten. Die entsprechenden Elemente sind im Juliheft der Monatlichen Correspondenz mitgeteilt, in der v. Zach in allen Monatsheften *Fortgesetzte Nachrichten über einen .... neuen Hauptplaneten* gab.

Die vollständigen Beobachtungen von Piazzi vom 1. Januar bis 11. Februar 1801 wurden endlich im Septemberhefte der Monatl. Correspondenz veröffentlicht, nachdem sie Piazzi mit einigen Verbesserungen an Bode, Lalande und Oriani geschickt hatte, und gelangten so auch in die Hände von Gauss.

Im Oktoberheft der Monatl. Corr. sagt v. Zach, dass gegen Mitte August bis Ende September 1801 nun von fast allen Astronomen Versuche gemacht wurden, den aus den Strahlen der Sonne wieder austretenden Planeten aufzufinden, aber ohne Erfolg; es herrschte auch allgemein in dieser Zeit schlechte Witterung. Die von Burckhardt berechnete elliptische Bahn war unsicher, nicht so sehr deswegen, weil das beobachtete Bahnstück ziemlich klein war, was damals von den Astronomen als die Hauptschwierigkeit[1]) empfunden wurde, sondern deswegen, weil er von einer willkürlichen Annahme über die Lage des Perihels ausging. Die Aufgabe, eine noch völlig unbekannte Planetenbahn aus den Beobachtungen zu bestimmen, war bisher nur beim Uranus aufgetreten, und hier konnte man zunächst eine Kreisbahn rechnen und sodann mit Hilfe entfernt liegender früherer Beobachtungen von Flamsteed 1690 und Tobias Mayer 1756, die Bode auffand, die Bahn genauer bestimmen. Olbers, der ebenfalls mit wenig Aussicht auf Erfolg die Berechnung einer

1) Vergl. *Theoria motus*, Einleitung, Werke VII, S. 7.

elliptischen Bahn begonnen hatte, empfiehlt, der Vorausberechnung eine Kreisbahn zugrunde zu legen, deren Elemente er auch angibt; denn: »War der neue Planet vor dem 1. Januar durch sein Aphelium gegangen, so vermehrt sich seine heliozentrische Geschwindigkeit immer, und auch seine geozentrischen Längen müssen im August und September grösser sein, als nach der Kreis-Hypothese. Ist er aber im Februar durch sein Perihelium gegangen, so hat sich nachmals die heliozentrische Geschwindigkeit vermindert und seine geozentrischen Längen müssen im August und September kleiner sein, als nach der Kreis-Hypothese. Weil man nun nicht wissen kann, welcher von beiden Fällen eintritt, so ist es zur künftigen Aufsuchung des Gestirns sicherer, die aus der Kreis-Hypothese gefolgerten Örter zugrunde zu legen, die von den wahren nicht sehr abweichen können, und die unter beiden möglichen Fällen das Mittel halten«[1]). Olbers, wie auch Burckhardt nahmen fälschlich an, dass der Planet zur Zeit seiner Entdeckung nicht weit entweder vom Perihel oder vom Aphel gestanden, während Gauss später zeigte, dass er sich nahezu zwischen beiden befunden habe[2]).

Piazzi verfasste eine kleine Schrift[3]), in der er über die erste Entdeckung und die weiteren Beobachtungen eingehende Mitteilungen machte und auch, ausser einer von ihm selbst berechneten Kreisbahn, die ihm durch Oriani zugesandten, von den anderen Astronomen berechneten Bahnen angibt. Der Schrift ist auch ein nochmals verbessertes Verzeichnis seiner Beobachtungen beigefügt. Im Novemberheft der Monatl. Corr. gibt v. Zach einen ausführlichen Auszug aus dieser Schrift, »welche wahrscheinlich nicht so leicht und nicht so bald in den deutschen Buchhandel kommen dürfte«, und druckt auch die verbesserten Beobachtungen ab, die ausser kleineren Änderungen eine Verbesserung der Rektaszension des 11. Februar um 15″ gegenüber den im Septemberheft abgedruckten Beobachtungen enthalten[4]).

Mit Rücksicht auf Olbers' erwähnten Vorschlag, die Vorausberechnung zur Wiederauffindung des Planeten auf eine Kreisbahn zu gründen, berechnete

1) Monatl. Corr. 1801, Oktober, S. 367.

2) A. a. O., 1801, Dezember, S. 539, Werke VI, S. 201.

3) *Risultati delle Osservazioni della nuova Stella scoperta il dì' 1 Gennajo all' Osservatorio Reale di Palermo*, Palermo 1801.

4) Vergl. oben S. 17.

v. ZACH eine Ephemeride[1]) für November und Dezember, um »dadurch allen Astronomen und Liebhabern der Sternkunde, die sich mit der Aufsuchung des Gestirns beschäftigen wollen, einen kleinen Dienst zu erweisen.«

Inzwischen hatte sich GAUSS, der die Monatl. Corr. in Braunschweig erhielt[2]), im Stillen an die Arbeit gemacht; das Interesse für den neuen Planeten veranlasste ihn, seine Mondtheorie und seine rein mathematischen Untersuchungen liegen zu lassen[3]). In seinem *Tagebuch* finden sich aus dem Jahre 1801 die Notizen Nr. 119: »Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi; — Brunsv[igae, 1801]«, Sept. m[edio] und Nr. 121: »Formulas permultas novas in Astronomia Theorica utilissimas eruimus. — 1801 Mense Octobr.«

Die ältesten im Nachlass (*Schedae* Ag, Ah, *Handbuch* Bb) vorhandenen Aufzeichnungen über die Ceres stammen erst aus dem Anfang des November und über GAUSS' Untersuchungen in den ersten Wochen lässt sich daher keine volle Klarheit gewinnen. Einen Niederschlag der in der *Tagebuch*notiz Nr. 121 genannten »Formulae permultae« mag das Werke XI, 1, S. 221 ff. abgedruckte Stück aus dem *Handbuch* Bb (November 1801) geben.

Man sieht aber soviel, dass GAUSS sofort den Plan fasste, wirklich neue brauchbare Methoden zur Bahnbestimmung zu schaffen, und dass er dabei von dem Gedanken ausging, sich nicht auf Versuche nach der einen oder anderen Richtung und auf irgend welche hypothetischen Voraussetzungen zu beschränken, sondern systematisch eine Bahn zu finden, die sich so gut wie möglich an die Beobachtungen anschliesst: wenn die PIAZZISCHEN Beobachtungen auch nur 41 Tage umfassen, so muss es doch eine Ellipse geben, die sie am besten darstellt und die geeignet ist, die zur Wiederauffindung vorausberechneten Örter möglichst nahe anzugeben. Es galt also, eine Ellipse zu finden, die von allen willkürlichen Voraussetzungen frei war, und auf den ersten Seiten des oben genannten *Handbuchs* Bb vom November 1801 finden wir diese Aufgabe bereits vollständig gelöst, wenn auch in einer weniger vollkommenen Form, als in der *Theoria motus*.

1) Monatl. Corr. 1901, November, S. 578—581.

2) GAUSS' Exemplare der Monatl. Corr. aus den Jahren 1800—1813 befinden sich in der GAUSS-Bibliothek auf der Göttinger Sternwarte und enthalten manche handschriftliche Eintragungen von seiner Hand.

3) Vergl. den Abdruck des *Tagebuchs*, Werke X, 1, S. 561—563 und oben S. 149.

In einer kleinen Handschrift *Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Planeten angewandten Methoden* hat GAUSS seine ältesten Methoden zusammengestellt, und diese Handschrift hat er am 6. August 1802 an OLBERS geschickt[1]), von dem er sie im November 1805 zurückerhielt. Kurz nach dem Erscheinen der *Theoria motus* bekam sie v. LINDENAU, vermutlich bei einem Besuch bei GAUSS, zu Gesicht und veröffentlichte sie mit GAUSS' Zustimmung in der Monatl. Corr. im September 1809[2]).

2. Einleitendes über GAUSS' Methoden der Bahnbestimmung.

Obwohl die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei gegebenen Beobachtungen eine fest umschriebene Aufgabe ist, so ist doch bekanntlich eine explizite Lösung nicht durchführbar, weil die beobachteten Örter und die zu bestimmenden Elemente der Bahn in sehr verwickelten Beziehungen zu einander stehen. Man ist auf die Lösung der Aufgabe durch Annäherungen angewiesen und daher ist die Aufstellung einer fast unbegrenzten Anzahl von Methoden möglich, die durch mehr oder minder durchgreifende Unterschiede gekennzeichnet sind.

Man wird erwarten, dass GAUSS das Gebiet, auf dem sich diese Methoden bewegen können, nach allen Richtungen hin durchforscht hat; man wird aber auch verstehen, dass er dies nicht sofort bei seinen ersten Bahnberechnungen hat durchführen können, da hier die numerische Bearbeitung des Einzelfalls drängte, damit die Bahn des neuen Planeten so bald als möglich mit ausreichender Genauigkeit zum Zweck der Wiederauffindung am Himmel bekannt wurde. So erklärt es sich, dass GAUSS' erste Bahnberechnungen zwar auf einem wichtigen neuen Grundgedanken beruhen, dem die Willkürlichkeit älterer Methoden nicht mehr anhaftet, dass sie aber in der einzelnen Durchführung noch nicht die Vervollkommnung und Verfeinerung zeigen, wie die Methoden der *Theoria motus*.

Dieser erste grundlegende Gedanke besteht in der Aufstellung einer Gleichung zwischen den Abständen des Planeten von der Sonne und von der Erde in der mittleren Beobachtung; es ist dies die im Folgenden mit 3) bezeich-

1) Vergl. die Briefe vom 6., 18. August, 11., 14., 21. September, 10. Oktober 1802, 29. Oktober, 2. November 1805 aus dem Briefwechsel zwischen GAUSS und OLBERS.

2) Werke VI, S. 148.

nete Gleichung. Sie steht auf den Werke XI, 1, S. 222, abgedruckten ersten Seiten des *Handbuchs* Bb als Gleichung I und findet sich wieder als Gleichung (7) des Artikels 6 in der soeben erwähnten *Summarischen Übersicht*[1]). GAUSS sagt dort von ihr: »Diese Formel ... ist der wichtigste Teil der ganzen Methode und ihre erste Grundlage« und schreibt in dem die Sendung an OLBERS begleitenden Briefe vom 6. August 1802: »Der wesentlichste Punkt ist die Formel (7) im 6. Artikel, auf die ich vor beinahe einem Jahr auf einem ganz anderen Wege kam. Sie ist gewissermassen das Pendant zu der Ihrigen[2]) und man könnte sagen, dass beide ein zweites Differential brauchen; die Ihrige braucht die Veränderung der geozentrischen Geschwindigkeit, um das Verhältnis der Abstände, die meinige braucht die Veränderung der Richtung, um die Abstände selbst zu finden. Dass es ausser der Ihrigen Formel noch eine ähnliche geben müsse, hatte ich vor fünf Jahren geahnt, da ich zum erstenmal Ihre Bestimmung der Kometenbahn las; ich äusserte damals etwas darüber gegen den sel. LICHTENBERG, der mich sehr aufmunterte, mich in die Untersuchung einzulassen, allein meine damaligen sehr eifrigen Beschäftigungen mit der höhern Arithmetik, sowie mit Untersuchungen aus einem andern Fache der Analyse[3]), worüber ich Ihnen in Zukunft einmal schreibe, brachten mir den Gegenstand bald wieder aus dem Sinne. Als ich im vorigen Jahre ganz unvermutet auf die Formel geriet, sah ich sogleich, von welchem Werte sie zur Abkürzung der ersten Annäherungsversuche bei einer von Hypothesen unabhängig sein sollenden[4]) Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers sein müsse. Glücklicherweise erhielt ich um die Zeit gerade die PIAZZIschen Beobachtungen im Septemberheft der Monatl. Corr., an denen ich mich sogleich eine Probe der Methode zu machen entschloss. Die Verschiedenheit meiner Resultate von den vorhergegangenen bestimmte mich, sie bekannt zu machen, und die

1) Werke VI, S. 158—159.

2) Nämlich der bekannten OLBERSschen Beziehung zwischen den Abständen von der Erde im ersten und dritten Ort, Gleichung 6) auf S. 160. — BRDL.

3) Gemeint sind wohl die aus dem Jahre 1797 stammenden Untersuchungen über lemniskatische Funktionen; vergl. überhaupt die Nummern 50—82 des *Tagebuchs* Werke X, 1, S. 509—525, in denen über GAUSS' mathematische Untersuchungen während des Jahres 1797 berichtet wird. — BRDL.

4) Diese Worte bestätigen die oben ausgesprochene Vermutung, dass GAUSS sogleich daran dachte, eine von willkürlichen Voraussetzungen freie Methode der Bahnbestimmung zu finden. — BRDL.

ferneren Rechnungen, worin ich dadurch verwickelt wurde, veranlassten die fernere Ausbildung der Methode.«

In dem Briefe an OLBERS vom 25. Mai 1802 sagt GAUSS, dass er auf seine Fundamentalformel auf bizarrem Wege gekommen sei. Vielleicht darf man hiernach vermuten, dass er zuerst die streng geltenden Gleichungen aufgestellt hat, die sich im *Handbuch* Bb[1]) neben den genähert geltenden finden.

Man wird wohl nicht fehlgehen in der Annahme, dass die Auffindung dieser Gleichung den Anlass zur *Tagebuch*notiz[2]) Nr. 119 »Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi, Brunsv[igae, 1801] Sept. m[edio]« gab, mit der auch die Zeitangabe im vorstehenden Briefe übereinstimmt.

OLBERS richtete, nachdem er die *Summarische Übersicht* gelesen, einige darauf bezügliche Fragen an GAUSS und bemerkt im Briefe vom 11. September 1802: »Übrigens wird Ihnen die grosse Analogie Ihrer Hauptgleichung (7) mit der LA PLACEschen (*Mechanik des Himmels*, übersetzt von BURCKHARDT, I. Teil, S. 279 oder Mém. de l'Acad. Roy. de Paris 1780, S. 31) bekannt sein«[3]). GAUSS antwortet am 14. September: »Die LA PLACEsche Formel, die ich vor vielen Jahren in seiner *Théorie du Mouvement Elliptique* gesehen hatte, war mir ganz aus dem Gedächtnisse gekommen, bis ich ganz vor kurzem die *Mécanique Céleste* erhielt. Mich dünkt, sie muss sich sehr leicht aus (7) herleiten lassen.«

In der *Theoria motus* finden wir die GAUSSsche Hauptgleichung nicht mehr in der gleichen Form; er ist hier noch einen Schritt weiter gegangen, indem er die von ihm mit P und Q bezeichneten Grössen einführt, von denen weiter unten gesprochen werden soll.

Auch sind die gesamten mehr auf Interpolation beruhenden ersten GAUSSschen Rechnungsmethoden in der *Theoria motus* durch systematisch vorgehende ersetzt, die er erst in den Jahren 1805—1807 schuf; auf sie beziehen sich die *Tagebuch*notizen[4]) Nr. 125, 126, 127, 129. Darüber sagt GAUSS im Briefe an OLBERS vom 3. Februar 1806: »Ich habe in diesem Jahre fleissig an meiner Methode, die Planetenbahnen zu bestimmen, gearbeitet; obgleich bisher nicht

1) Werke XI, 1, S. 222.

2) Werke X, 1, S. 561.

3) LA PLACE, *Mécanique céleste*, Première Partie, Livre I, No. 31 (Band I, S. 207 der Originalausgabe von 1799).

4) Werke X, 1, S. 564—565.

so sehr an der Ausarbeitung, als an der grössern Vervollkommnung einzelner Teile derselben. Manches, glaube ich, ist mir gut gelungen und hat wenigstens eine von der vorigen ganz verschiedene Gestalt bekommen«, und in der Vorrede zur *Theoria motus* selbst: »Methodi enim ab initio adhibitae identidem tot tantasque mutationes passae sunt, ut inter modum, quo olim orbita Cereris calculata est, institutionemque in hoc opere traditam vix ullum similitudinis vestigium remanserit«[1]).

Indessen hat Gauss gelegentlich den einen oder anderen Teil seiner älteren Methoden auch in der *Theoria motus* erwähnt[2]).

Wie Gauss auch in art. 2 der *Summarischen Übersicht* hervorhebt, stützt sich die erste Berechnung der völlig unbekannten Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen auf die Lösung zweier verschiedener Aufgaben:

Erstens: auf irgend eine Weise eine genäherte Bahn zu finden.

Zweitens: diese Bahn so zu »verbessern«, dass sie den Beobachtungen so gut als möglich Genüge leistet.

Ist die Bahn schon auf irgend eine Weise genähert bekannt, so entfällt die erste Aufgabe.

Im besonderen gelangt man zur Lösung der ersten Aufgabe, indem man anstatt der beiden Angaben, die der mittlere beobachtete geozentrische Ort liefert, zwei andere benutzt[3]); als solche stellt man sich am einfachsten die Abstände des Planeten von der Erde im ersten und dritten Ort vor. Das wichtigste ist also zunächst die Auffindung genäherter Werte dieser beiden Grössen und dies ist auf zwei wesentlich verschiedenen Wegen möglich, entweder durch eine reine Versuchsmethode, die im ersten Grunde auf Erraten beruht, oder durch systematisches Vorgehen.

Die reine Versuchsmethode besteht in irgend einer willkürlichen Annahme über die beiden Stücke, auf Grund deren man die Bahn berechnet und die Abweichung von den Beobachtungen feststellt; durch weitere Versuche kann man zu brauchbaren Näherungswerten der beiden Stücke und damit der Bahnelemente gelangen. Da aber die anzunehmende Hypothese sich auf zwei Stücke erstreckt, so werden die Versuche sich in der Regel als

1) Werke VII, 1906, S. 8—9.

2) Vergl. die Einleitung, Werke VII, 1906, S. 9.

3) Vergl. *Theoria motus*, art. 119.

praktisch undurchführbar erweisen; daher bemüht man sich, eine genäherte Beziehung zwischen beiden Stücken aufzufinden, die sich durch bekannte Grössen ausdrückt, so dass man nur eines willkürlich zu wählen braucht.

So leitet OLBERS in seiner Methode der Kometenbahnstimmung die genäherte Gleichung[1])

$$1) \qquad \delta'' = M\delta$$

ab, wo

$$2) \qquad M = \frac{\operatorname{tg}\beta' \sin(\alpha - L') - \operatorname{tg}\beta \sin(\alpha' - L')}{\operatorname{tg}\beta'' \sin(\alpha' - L') - \operatorname{tg}\beta' \sin(\alpha'' - L')} \cdot \frac{t'' - t'}{t' - t}$$

aus den Beobachtungen bekannt ist. Diese Formel beruht auf der genähert giltigen Voraussetzung, dass die Sehnen zwischen den beiden Örtern des beobachteten Körpers und ebenso die zwischen den beiden Örtern der Erde von den Radienvektoren der mittleren Beobachtung im Verhältnis der Zwischenzeiten geschnitten werden, und OLBERS leitet sie aus dieser Voraussetzung ab[2]).

3. Übersicht über GAUSS' Methoden zur genäherten Bestimmung der Abstände von der Erde (δ und δ'') im ersten und dritten Ort.

Die OLBERSsche Gleichung finden wir auch in der mehrfach erwähnten Notiz des *Handbuchs* Bb; sie ist dort von GAUSS mit II bezeichnet[3]).

Ebenso finden wir sie in der *Summarischen Übersicht* im 5. Artikel[4]), wo sie aber nur beiläufig abgeleitet und nicht benutzt wird. Auch im *Handbuch* Bb benutzt GAUSS diese Gleichung nicht wie OLBERS, der einen willkürlichen Wert von δ annimmt, daraus δ'' berechnet und dann auf Grund dieser beiden hypothetischen Werte die Bahn bestimmt. GAUSS geht vielmehr bereits bei seinen ersten Bahnbestimmungen auf dem zweiten erwähnten systematischen Wege vor, indem er direkt aus den Beobachtungen genäherte Werte für δ

1) Es bedeuten: δ, δ'' die kurtierten Abstände von der Erde im ersten und dritten Ort,
α, α', α'' die drei beobachteten geozentrischen Längen,
β, β', β'' die drei beobachteten geozentrischen Breiten,
t, t', t'' die drei Beobachtungszeiten,
L' die heliozentrische Länge der Erde im mittleren Ort.

2) WILHELM OLBERS, *Sein Leben und seine Werke*, herausgegeben von C. SCHILLING, I. Band, Berlin 1894, S. 30.

3) Werke XI, 1, S. 222.

4) Werke VI, S. 157.

und δ'' zu finden versucht, auf die er dann die Bahnbestimmung aufbaut. Und zwar findet er genäherte Werte für diese beiden Grössen, indem er zunächst einen solchen für den kurtierten Abstand des Planeten δ' in der mittleren Beobachtung sucht.

Zu diesem Zwecke benutzt er eben seine genähert geltende Hauptgleichung[1])

$$3)\quad \frac{R'}{\delta'}\left(1-\frac{R'^3}{r'^3}\right)=\frac{\operatorname{tg}\beta\sin(\alpha''-\alpha')-\operatorname{tg}\beta'\sin(\alpha''-\alpha)+\operatorname{tg}\beta''\sin(\alpha'-\alpha)}{\operatorname{tg}\beta\sin(L'-\alpha'')-\operatorname{tg}\beta''\sin(L'-\alpha)}\cdot\frac{2}{(M'-M)(M''-M')}.$$

Im *Handbuch* Bb stellt GAUSS neben diese die Beziehung zwischen δ' und r', die sich unmittelbar aus dem Dreieck Sonne-Erde-Planet ergibt, nämlich

$$4)\quad \frac{r'}{\delta'}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta'+\frac{R'^2}{\delta'^2}-2\frac{R'}{\delta'}\cos(L'-\alpha')}.$$

Aus beiden Gleichungen bestimmt er durch Versuche, die sehr schnell zum Ziele führen, δ', während r' nicht weiter in Betracht kommt. Um hieraus genäherte Werte für δ und δ'' zu finden, geht er im *Handbuch* Bb von der Annahme aus, dass die Logarithmen der drei Abstände von der Erde sich proportional den Zwischenzeiten ändern, also von der Beziehung

$$\frac{\log\delta''-\log\delta'}{t''-t'}=\frac{\log\delta'-\log\delta}{t'-t},$$

aus der folgt

$$5)\quad \begin{aligned}\log\delta&=\log\delta'-\frac{t'-t}{t''-t}\log\frac{\delta''}{\delta}\\ \log\delta''&=\log\delta'+\frac{t''-t'}{t'-t}\log\frac{\delta''}{\delta}.\end{aligned}$$

Da der Quotient $\frac{\delta''}{\delta}$ aus der OLBERSschen Gleichung:

$$6)\quad \frac{\delta''}{\delta}=\frac{\operatorname{tg}\beta'\sin(L'-\alpha)-\operatorname{tg}\beta\sin(L'-\alpha')}{\operatorname{tg}\beta''\sin(L'-\alpha')-\operatorname{tg}\beta'\sin(L'-\alpha'')}\cdot\frac{t''-t'}{t'-t}$$

bekannt ist, so lassen sich die Werte von δ und δ'' berechnen.

Dies ist das älteste GAUSSsche Verfahren, wie es uns in der Nachlassnotiz aus dem *Handbuch* Bb entgegentritt. In der *Summarischen Übersicht* hat er diese Methode bereits verfeinert, indem er anstelle der vorigen Gleichung

1) Es bedeuten: R' den Abstand der Erde von der Sonne in der mittleren Beobachtung,
r' den Abstand des Planeten von der Sonne in der mittleren Beobachtung,
M, M', M'' die mittleren Längen der Erde in den drei Beobachtungen.

Über die Ableitung der Gleichung siehe S. 162 f.

die beiden Gleichungen[1])

$$7) \qquad \begin{aligned} \delta &= -\frac{f'}{f} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta' \sin(L'-\alpha'') - \operatorname{tg}\beta'' \sin(L'-\alpha')}{\operatorname{tg}\beta \sin(L'-\alpha'') - \operatorname{tg}\beta'' \sin(L'-\alpha)}\,\delta' \\ \delta'' &= -\frac{f'}{f''} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta \sin(L'-\alpha') - \operatorname{tg}\beta' \sin(L'-\alpha)}{\operatorname{tg}\beta \sin(L'-\alpha'') - \operatorname{tg}\beta'' \sin(L'-\alpha)}\,\delta' \end{aligned}$$

anwendet[2]).

Er schreibt hier aber $\frac{g}{f} \cdot \frac{f'}{g'} \cdot \frac{t''-t}{t''-t'}$ für $-\frac{f'}{f}$ und $\frac{g''}{f''} \cdot \frac{f'}{g'} \cdot \frac{t''-t}{t'-t}$ für $-\frac{f'}{f''}$ und nimmt $\frac{f}{g}$, $\frac{f'}{g'}$, $\frac{f''}{g''}$ gleich Eins, solange er keinen besseren Näherungswert für diese Verhältnisse hat. Auf eine Anfrage von OLBERS, warum er hier nicht gleich

$$f : f' : f'' = (t''-t') : (t''-t) : (t'-t)$$

setzt, antwortet er im Briefe an diesen vom 21. September 1802:

»Den Koeffizienten $-\frac{f'}{f}$ würde ich unter die Form

$$-\frac{f'}{f+f''} \cdot \frac{f+f''}{f} = \frac{1}{1-\frac{f+f'+f''}{f'}} \cdot \frac{f+f''}{f}$$

setzen. Der erste Faktor lässt sich sehr nahe bestimmen[3]) und den zweiten kann man für den Fall, wo die Zwischenzeiten gleich sind, ohne Bedenken $= \frac{t''-t}{t''-t'}$ setzen. Mir scheint, dass man so in diesem Fall der Wahrheit um eine Dimension näher komme, als wenn man gleich $-\frac{f'}{f} = \frac{t''-t}{t''-t'}$ setzte. Ich gestehe indess, dass ich bisher mich jener Korrektion noch nicht bedient, und mich auch ohne dieselbe ebenso gut befunden habe.«

Der Quotient der beiden Gleichungen ergibt übrigens die OLBERSsche Gleichung, wie GAUSS auch in der *Summarischen Übersicht* erwähnt.

In der *Theoria motus* finden wir, wie oben bereits gesagt, die Fundamentalgleichung 3) nicht mehr in der gleichen Form vor. GAUSS stellt hier nicht mehr die Anfangswerte der kurtierten Abstände δ und δ'' an die Spitze, sondern er führt als solche die von ihm mit P und Q bezeichneten Grössen ein, für die er mit einer Hypothese über das Verhältnis vom Sektor zum

1) Werke VI, S. 156, Gleichungen (5) und (6).

2) Es bedeuten: f, f', f'' die Dreiecksflächen zwischen den Radienvektoren der zweiten und dritten, der ersten und dritten, der ersten und zweiten Beobachtung,
g, g', g'' die entsprechenden Sektoren.

3) Es ist nämlich näherungsweise $\frac{f+f'+f''}{f'} = -\frac{1}{2r^3}(M'-M)(M''-M')$. — BRDL.

Dreieck, die mit der bei Aufstellung der Gleichungen 7) gebrauchten inhaltsgleich ist, die Näherungswerte

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta}, \quad Q = \vartheta\vartheta''$$

ansetzt, deren Erklärung im folgenden (S. 163, Fussnote) gegeben wird. Aus P und Q findet GAUSS dann die beiden Grössen δ und δ'', sodass man allerdings die Sache auch so auffassen kann, als ob er diese letzteren Werte seiner Bahnbestimmung zugrunde legt.

4. Ableitung von GAUSS' Hauptgleichung zur genäherten Bestimmung von δ' und Zusammenhang mit der *Theoria motus*.

Es treten uns hier also im ganzen drei Methoden der Bahnbestimmung, insbesondere der Bestimmung von δ und δ'' entgegen, die des *Handbuchs* Bb, die der *Summarischen Übersicht* und die vervollkommnete der *Theoria motus*.

Um den Zusammenhang der älteren Methoden mit denen der *Theoria motus* zu zeigen, mögen die Fundamentalgleichungen zur Bestimmung des Abstandes δ' von der Erde, auf denen einerseits die beiden älteren Methoden unmittelbar, andererseits die der *Theoria motus* mittelbar beruht, neben einander entwickelt werden. Wir benutzen dabei hier die Bezeichnungen der *Theoria motus* und schliessen uns auch in der Entwicklung an die letztere an; die Ableitung, die GAUSS in der *Summarischen Übersicht* gibt, erscheint verwickelter.

In der *Theoria motus*, art. 112, leitet GAUSS die bekannten Gleichungen[1]):

$$8) \qquad \begin{aligned} 0 &= nx - n'x' + n''x'' \\ 0 &= ny - n'y' + n''y'' \\ 0 &= nz - n'z' + n''z'' \end{aligned}$$

ab; ihre Ableitung finden wir auch in der *Summarischen Übersicht*, art. 4, je-

1) Es bedeuten: x, y, z usw. die heliozentrischen Koordinaten des Planeten in den drei Örtern,
n, n', n'' die doppelten Dreiecksflächen zwischen den Radienvektoren des zweiten und dritten, des ersten und dritten, des ersten und zweiten Ortes,
X, Y, Z usw., N, N', N'' die entsprechenden Grössen für die Erde,
D, D', D'' die kurtierten Abstände der Erde vor der Sonne,
L, L', L'' die heliozentrischen Längen der Erde,
B, B', B'' die heliozentrischen Breiten der Erde.

doch an dieser Stelle auch die entsprechenden Gleichungen für die Erde:

$$9)\qquad \begin{aligned} 0 &= NX - N'X' + N''X'' \\ 0 &= NY - N'Y' + N''Y'' \\ 0 &= NZ - N'Z' + N''Z'', \end{aligned}$$

die in der *Theoria motus* nicht angewendet werden; hierin liegt der wesentliche Unterschied beider Methoden.

Setzt man in den Gleichungen 8) die Werte

$$10)\qquad \begin{aligned} x &= \delta \cos\alpha + D\cos L \\ y &= \delta \sin\alpha + D\sin L \\ z &= \delta \operatorname{tg}\beta + D \operatorname{tg} B \end{aligned}$$

und entsprechend die von $x', y', z', x'', y'', z''$ ein, so folgen die Gleichungen (1)—(3) des art. 112 der *Theoria motus*:

$$11)\qquad \begin{aligned} 0 &= n(\delta\cos\alpha + D\cos L) - n'(\delta'\cos\alpha' + D'\cos L') + n''(\delta''\cos\alpha'' + D''\cos L'') \\ 0 &= n(\delta\sin\alpha + D\sin L) - n'(\delta'\sin\alpha' + D'\sin L') + n''(\delta''\sin\alpha'' + D''\sin L'') \\ 0 &= n(\delta\operatorname{tg}\beta + D\operatorname{tg} B) - n'(\delta'\operatorname{tg}\beta' + D'\operatorname{tg} B') + n''(\delta''\operatorname{tg}\beta'' + D''\operatorname{tg} B''). \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen δ und δ'', indem man der Reihe nach mit

$$-\operatorname{tg}\beta\sin\alpha'' + \operatorname{tg}\beta''\sin\alpha,\quad \operatorname{tg}\beta\cos\alpha'' - \operatorname{tg}\beta''\cos\alpha,\quad \sin(\alpha''-\alpha)$$

multipliziert und addiert, so wird:

$$12)\qquad a\delta' = b + \tfrac{n}{n'}c + \tfrac{n''}{n'}d,$$

wo

$$13)\qquad \begin{aligned} a &= \operatorname{tg}\beta\sin(\alpha''-\alpha') + \operatorname{tg}\beta'\sin(\alpha-\alpha'') + \operatorname{tg}\beta''\sin(\alpha'-\alpha) \\ b &= D'\{\operatorname{tg}\beta\sin(L'-\alpha'') - \operatorname{tg}\beta''\sin(L'-\alpha) + \operatorname{tg} B'\sin(\alpha''-\alpha)\} \\ c &= -D\{\operatorname{tg}\beta\sin(L-\alpha'') - \operatorname{tg}\beta''\sin(L-\alpha) + \operatorname{tg} B\sin(\alpha''-\alpha)\} \\ d &= -D''\{\operatorname{tg}\beta\sin(L''-\alpha'') - \operatorname{tg}\beta''\sin(L''-\alpha) + \operatorname{tg} B''\sin(\alpha''-\alpha)\} \end{aligned}$$

bekannt sind.

Diese in art. 132 der *Theoria motus* abgeleitete Gleichung 12) ist die strenge Bestimmungsgleichung für δ', in der die noch unbekannten Grössen n, n', n'' zur ersten Bestimmung durch genäherte Werte ersetzt werden. GAUSS zeigt[1]), dass man bis auf Grössen 4. Ordnung richtig schreiben kann[2])

1) *Theoria motus*, art. 132—133.

2) Es bedeuten Θ, Θ', Θ'' die Zwischenzeiten zwischen der zweiten und dritten, der ersten und dritten, der ersten und zweiten Beobachtung, multipliziert mit der GAUSSschen Konstante k.

14) $$a\delta' = b + \frac{c\theta + d\theta''}{\theta'}\left(1 + \frac{\theta\theta''}{2r'^3}\right),$$

weil die Beziehungen

$$\frac{cn + dn''}{n + n''} = \frac{c\theta + d\theta''}{\theta'}, \quad \frac{n + n''}{n'} = 1 + \frac{\theta\theta''}{2r'^3}$$

bis auf Grössen 4. Ordnung richtig sind. Aus der Gleichung 14) lässt sich nun durch Heranziehung der ähnlichen Gleichung für die Erdbewegung die Fundamentalgleichung der *Summarischen Übersicht* und der Nachlassnotiz aus *Handbuch* Bb ableiten. Die Gleichungen 9) werden nämlich

15)
$$\begin{aligned} ND\cos L - N'D'\cos L' + N''D''\cos L'' &= 0 \\ ND\sin L - N'D'\sin L' + N''D''\sin L'' &= 0 \\ ND\ \mathrm{tg}\ B - N'D'\ \mathrm{tg}\ B' + N''D''\ \mathrm{tg}\ B'' &= 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese mit denselben Grössen wie oben die Gleichungen 11) und addiert man, so erhält man ähnlich der Gleichung 12):

16) $$b = -\frac{N}{N'}c - \frac{N''}{N'}d.$$

Auch hier kann man genähert setzen

$$b = -\frac{c\theta + d\theta''}{\theta'}\left(1 + \frac{\theta\theta''}{2R'^3}\right)$$

oder mit der gleichen Genauigkeit

$$\frac{c\theta + d\theta''}{\theta'} = -b\left(1 - \frac{\theta\theta''}{2R'^3}\right),$$

und dieser Wert in 14) eingesetzt, gibt wieder bis zur 4. Ordnung genau

17) $$a\delta' = -b\,\frac{\theta\theta''}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{R'^3}\right)$$

oder

$$\frac{R'}{b'}\left(1 - \frac{R'^3}{r'^3}\right) = \frac{a}{b}\cdot\frac{2R'^4}{\theta\theta''};$$

diese Gleichung endlich geht in die Fundamentalgleichung 3) über, wenn man die Breite der Erde vernachlässigt, also

$$B' = 0, \quad R' = D'$$

setzt und bedenkt, dass

$$M' - M = \frac{k}{E'^{\frac{3}{2}}}(t' - t) = \frac{\Theta''}{E'^{\frac{3}{2}}}$$
$$M'' - M' = \frac{k}{E'^{\frac{3}{2}}}(t'' - t') = \frac{\Theta}{E'^{\frac{3}{2}}}$$

genommen werden kann.

5. Methode der *Theoria motus* zur genäherten Bestimmung des Abstandes δ' im mittleren Ort.

Wie schon erwähnt, stellt GAUSS in seinen älteren Methoden neben die Hauptgleichung 3) die Beziehung 4) und bestimmt δ' aus beiden durch Versuche oder wie er es nennt, durch die indirekte Methode. Er sagt in art. 6 der *Summarischen Übersicht* »Die indirekte Methode ist hier bei weitem die bequemste; man kommt nach wenigen Versuchen, wofür sich leicht zweckmässige Vorschriften geben lassen, sehr schnell zum Ziele.«

In der *Theoria motus* hat er aber diese indirekte Methode verlassen. Dort handeln die art. 139—141 von der Bestimmung von δ', oder vielmehr von der von r', da hier die Abstände von der Sonne anstelle derer von der Erde benutzt werden, und zwar finden wir hier eine geometrische Lösung der Aufgabe, bei der der Zusammenhang mit der ursprünglichen Hauptgleichung 3) und selbst der mit der in der *Theoria motus* auftretenden entsprechenden Gleichung 14) nicht mehr zu erkennen ist. Darum haben bereits ENCKE[1]) und KLINKERFUES[2]) eine von der Gaussschen abweichende Ableitung gegeben.

Wir wollen, um den Zusammenhang zu zeigen, die Gleichungen der *Theoria motus* art. 141 möglichst kurz aus der Hauptgleichung und zwar in ihrer strengen Form 12) ableiten. Diese erstere lautet mit den Gaussschen Bezeichnungen P und Q[3])

$$18) \qquad a\delta' = b + \frac{c + dP}{1 + P}\left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right),$$

wo

$$19) \qquad P = \frac{n''}{n}, \quad Q = 2\left(\frac{n + n''}{n'} - 1\right)r'^3.$$

1) *Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen*, art. 9—10. Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1854.

2) KLINKERFUES, *Theoretische Astronomie*, 48. Vorlesung, Braunschweig 1871, zweite Auflage, herausgegeben von H. BUCHHOLZ, Braunschweig 1899.

3) *Theoria motus*, art. 134.

Nennt man im Dreieck Sonne-Erde-Planet, dessen drei Seiten R', r', Δ' sind, den Winkel am Planeten z und den aus der Beobachtung bekannten Winkel an der Erde $180^0 - \lambda$, so ist

$$\Delta' = \delta' \cos \beta' = \frac{R' \sin(\lambda - z)}{\sin z}, \quad r' = \frac{R' \sin \lambda}{\sin z}.$$

Es wird also die Hauptgleichung

$$\frac{aR'}{\cos \beta'} \sin(\lambda - z) = \left(b + \frac{c + dP}{1 + P}\right) \sin z + \frac{c + dP}{1 + P} \frac{Q \sin^4 z}{2R'^3 \sin^3 \lambda}$$

oder

$$\frac{aR'}{\cos \beta'} \sin \lambda \cos z - \left(b + \frac{aR'}{\cos \beta'} \cos \lambda\right) \sin z = \frac{c + dP}{1 + P} \left(\sin z + \frac{Q \sin^4 z}{2R'^3 \sin^3 \lambda}\right).$$

Setzt man

$$-\frac{aR'}{\cos \beta'} \sin \lambda = g \sin \sigma, \quad -\left(b + \frac{aR'}{\cos \beta'} \cos \lambda\right) = g \cos \sigma,$$

so wird

$$g \cdot \frac{1 + P}{c + dP} \sin(z - \sigma) = \sin z + \frac{Q \sin^4 z}{2R'^3 \sin^3 \lambda},$$

welche Gleichung mit der des art. 141 der *Theoria motus*

$$\sin z + \frac{Q \sin^4 z}{2R'^3 \sin^3 \lambda} = b \frac{P + 1}{P + a} \sin(z - \sigma)$$

identisch ist, wo aber die mit a, b bezeichneten Grössen nicht gleich den oben und im art. 132 der *Theoria motus* ebenso bezeichneten sind. GAUSS hat die vorstehende Gleichung im Jahre 1806 aufgestellt; sie findet sich nämlich im *Handbuch* Bd, S. 92. Durch Einführung des Winkels σ verschwinden die beiden Grössen δ' und r' aus der Hauptgleichung und die Aufgabe reduziert sich auf die Bestimmung dieses Winkels, zu welchem Zweck GAUSS im art. 141 der Gleichung noch die bequemere Form

$$20) \qquad c Q \sin \omega \sin^4 z = \sin(z - \omega - \sigma)$$

gibt, wo

$$c = \frac{1}{2R'^3 \sin^3 \lambda \sin \sigma} \text{ und } \operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \sigma}{b \frac{P + 1}{P + a} - \cos \sigma}$$

gesetzt ist. In der Gleichung 20) ist z allein unbekannt, wenn man von den im Verlauf der Annäherungen zu bestimmenden Grössen P und Q absieht, von denen die erstere im Winkel ω vorkommt und für die GAUSS in der

ersten Annäherung setzt:

$$P = \frac{\Theta''}{\Theta}, \quad Q = \Theta\Theta''.$$

Es ergibt sich sodann r' aus der Gleichung

21) $$r' = \frac{R' \sin \lambda}{\sin z}.$$

6. Bestimmung von δ und δ'' aus δ' bezw. von r und r'' aus r'.

Nachdem r' bezw. δ' gefunden sind, hat man jetzt r und r'' bezw. δ und δ'' zu berechnen. In der ältesten Nachlassnotiz bedient sich Gauss der Beziehungen 5) und der Olbersschen Gleichung 6), um δ und δ'' aus δ' zu finden, in der *Summarischen Übersicht* der schon verfeinerten Gleichungen 7). In der *Theoria motus*, wo die r statt der δ angewandt sind, erscheint das weiter verbesserte Verfahren verwickelter: Gauss berechnet hier zunächst die Ausdrücke (art. 143—144)

22) $$\frac{n'r'}{n} = \frac{(P+a)R' \sin \delta'}{b \sin (z-c)}, \quad \frac{n'r'}{n''} = \frac{1}{P}\frac{n'r'}{n},$$

23)
$$\begin{aligned} r \sin \zeta &= \frac{n'r'}{n}\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} \sin (z + A'D - \delta') = p \\ r \cos \zeta &= \varkappa(\lambda p - 1) = q \\ r'' \sin \zeta'' &= \frac{n'r'}{n''}\frac{\sin \varepsilon''}{\sin \varepsilon'} \sin (z + A'D'' - \delta') = p'' \\ r'' \cos \zeta'' &= \varkappa''(\lambda'' p'' - 1) = q'', \end{aligned}$$

wobei die Grössen ε, ε', ε'', $A'D$, $A'D''$, δ' aus der vorhergehenden Rechnung[1]) bekannt sind und auch $\varkappa$, $\varkappa''$, λ, λ'' sich durch bekannte Grössen ausdrücken.

Er findet so neben r und r'' noch die beiden Winkel ζ und ζ'', die mit Hilfe der Beziehungen[2])

---

1) *Theoria motus*, art. 136—137.

2) Es bedeutet hier $f' = \frac{v'' - v}{2}$ die halbe Differenz der Anomalien (oder Längen in der Bahn) im ersten und dritten Ort.

Die Winkel ζ, ζ'', u, u'' sind Hilfswinkel, deren geometrische Bedeutung aus der Figur 4 und dem art. 149 der *Theoria motus* hervorgeht.

$$24)\qquad \begin{aligned} \sin f' \sin\frac{u''+u}{2} &= \sin\frac{\varepsilon'}{2}\sin\frac{\zeta+\zeta''}{2} \\ \sin f' \cos\frac{u''+u}{2} &= \cos\frac{\varepsilon'}{2}\sin\frac{\zeta-\zeta''}{2} \\ \cos f' \sin\frac{u''-u}{2} &= \sin\frac{\varepsilon'}{2}\cos\frac{\zeta+\zeta''}{2} \\ \cos f' \cos\frac{u''-u}{2} &= \cos\frac{\varepsilon'}{2}\cos\frac{\zeta-\zeta''}{2} \end{aligned}$$

auch gleich f' und die Winkel u, u'' liefern; f' dient zur Verbesserung der Werte von P und Q, während u und u'' erst später bei genauerer Bestimmung der Bahn gebraucht werden. Vorarbeiten hierzu finden sich im *Handbuch* Bd, S. 92.

7. Bestimmung einer genäherten Bahn aus hypothetischen Werten von δ und δ'' oder von i und Ω, nach den älteren Methoden.

Sind einmal ausser den beobachteten Örtern zwei Stücke, und zwar insbesondere zwei Abstände des Planeten von der Erde (oder der Sonne) genähert bekannt, so kann man daraus eine genäherte Bahn berechnen und die Lösung der zweiten Aufgabe, nämlich diese Bahn zu »verbessern«, entweder daran anschliessen oder auch unmittelbar damit vereinigen. Auch hier kann man zwei grundsätzlich verschiedene Wege einschlagen, indem man entweder eine reine Versuchsmethode gebraucht oder systematisch vorgeht.

Den ersteren Weg benutzt Gauss stets bei seinen ersten Bahnbestimmungen, und zwar so, dass er eine genäherte Bahn nicht nur aus den gefundenen hypothetischen Werten der Abstände, sondern auch aus zwei weiteren benachbarten Wertepaaren berechnet und sodann diejenigen Werte interpoliert, die die Beobachtungen darstellen. Er geht also von drei angenommenen Wertepaaren, etwa: 1. δ, δ''; 2. $\delta+\varepsilon$, δ''; 3. δ, $\delta''+\varepsilon''$ aus und berechnet aus allen dreien je eine Bahn. Die Vergleichung dieser Bahn mit den Beobachtungen gibt die Mittel an die Hand, um auf die richtigen Bahnelemente zu schliessen[1]). Die Einzelheiten des Verfahrens können dabei sehr verschieden gewählt werden und an verschiedenen Stellen gibt Gauss hierfür verschiedene Methoden an.

1) Vergl. *Theoria motus*, art. 120—122.

Im *Handbuch* Bb, sowie in der *Summarischen Übersicht*, art. 9, unter I., erwähnt GAUSS zunächst seine »erste Verbesserungsmethode«, die eben darin besteht, dass man aus den drei Hypothesen für δ und δ'' drei Bahnen berechnet, die die beiden äusseren Beobachtungsörter scharf darstellen; sodann berechnet man aus den drei Elementensystemen die mittlere Beobachtung und schliesst aus den Abweichungen dieser durch Interpolation auf diejenigen Werte der Abstände, oder auf diejenigen Werte der Elemente, die auch diesen mittleren Ort so scharf wie möglich darstellen; im Bedarfsfalle wiederholt man das gleiche Verfahren, bis die erwünschte Genauigkeit erreicht ist.

Zur Bestimmung der Bahn aus den verschiedenen Hypothesen dienen die *Vorschriften zur Berechnung der Elemente, aus zweien geozentrischen Örtern, der Zwischenzeit, und den zugehörigen Abständen* in der Nachlassnotiz aus dem *Handbuch* Bb[1]). Wie in dieser ganzen Nachlassnotiz, so gibt GAUSS auch sonst eine Fülle von Formeln zur Lösung der vorgesetzten Aufgabe, aus denen der Rechner sich die heraussuchen kann, die ihm am bequemsten scheinen. Wie oben schon gesagt, dürfte hiermit die *Tagebuch*notiz Nr. 121 vom Oktober 1801 in Verbindung stehen. Leider ist aus jener Zeit im Nachlass nichts erhalten, was uns Aufschluss über die Entstehung dieser Formeln geben könnte; auch unter den vielen in den *Schedae* Ag und Ah vorhandenen numerischen Rechnungen findet sich keine, die von hypothetischen Werten der Abstände δ und δ'' ausgeht. Nur in der späteren *Scheda* Ai (1802) ist auf S. 14 und anscheinend auch S. 20 f. ein Bruchstück einer solchen Rechnung für Ceres erhalten. Ebenso beruhen mehrere der Bahnbestimmungen für Pallas, von denen aber die allerersten im Nachlass ebenfalls nicht erhalten sind, auf dieser Methode (*Schedae* Ak zu Anfang und besonders Al).

Dagegen gehen die ältesten erhaltenen Rechnungen, die sich auf Ceres beziehen, und einige auf Pallas bezügliche, von hypothetischen Werten für die Neigung i und die Knotenlänge Ω aus[2]). Vielleicht ist GAUSS hier noch von den alten früher bei den grossen Planeten üblichen Methoden beeinflusst, die bis auf KEPLER zurückgehen[3]), und bei denen allerdings die Umlaufszeit

1) Werke XI, 1, S. 223.

2) Vergl. Ebenda, S. 232 f. und 241 f.

3) Vergl. F. TH. SCHUBERT, *Theoretische Astronomie*, St. Petersburg 1798, II. Teil, § 161; auch KEPLER, *De stella Marte*, Cap. XII.

bekannt war. Wenn nämlich die Beobachtungen während der Oppositionszeit nahe am Knoten liegen, so konnte man zunächst einen Näherungswert für die Knotenlänge finden, und hieraus nicht nur die Neigung, sondern auch die heliozentrischen Koordinaten und die Koordinaten in der Bahn. Die PIAZZIschen Beobachtungen der Ceres geben nun die geozentrische Breite am 1. Januar zu $-3^0\,7'$ und am 11. Februar zu $-0^0\,36'$, so dass in der Tat der Planet sich kurz vor seinem Durchgang durch den aufsteigenden Knoten befand, und die genannte Methode mit einer Hypothese über die Umlaufszeit sehr wohl zum Ziele führen konnte. Eine solche war sogleich gegeben, weil man in Ceres den zwischen Mars und Jupiter längst vermuteten Planeten sah. Andererseits liefert eine Beobachtung des Planeten in der Ekliptik ($\beta = 0$) zwei einfache Gleichungen für δ, r und die Länge. Es ist möglich, dass GAUSS diese beiden Wege vorgeschwebt haben, die er sehr bald durch seine »formulae permultae« verfeinerte. Auch die GAUSSsche klassische Methode beginnt mit Näherungswerten der Grössen P und Q, aus denen i, Ω und die heliozentrischen Örter gefunden werden. In seinen numerischen Rechnungen löst GAUSS nun meist die Aufgabe so, dass er hypothetische Werte von i und Ω an die Spitze stellt, daraus als erstes Geschäft die Radienvektoren und die Längen in der Bahn für alle drei Beobachtungen berechnet, sodann die Bahn aus den beiden äusseren Örtern in der Bahn bestimmt und schliesslich aus den gefundenen Bahnelementen den mittleren Ort (ebenfalls in der Bahn) berechnet und seine Abweichung von der Beobachtung feststellt. Indem er dies für drei Hypothesen, etwa: 1. i, Ω; 2. $i+\varepsilon_1$, Ω; 3. i, $\Omega+\varepsilon_2$ ausführt, erhält er aus den genannten Abweichungen die nötigen Daten, um verbesserte Werte von i und Ω zu interpolieren, mit denen er dieselbe Rechnung wiederholt[1]).

Die von hypothetischen Werten von i und Ω ausgehende Methode nennt GAUSS sowohl in der Nachlassnotiz wie in der *Summarischen Übersicht* seine »Zweite Verbesserungsmethode«. Bei ihr ist die Aufgabe zu lösen: Aus zwei geozentrischen Örtern, der Neigung und der Länge des Knotens die Bahn zu berechnen, und zwar zerfällt diese Aufgabe in zwei Einzelaufgaben, Erstens: Aus einem geozentrischen Orte, der Neigung und

1) Siehe Werke XI, 1, S. 241 f.; vergl. auch ebendort S. 229.

der Länge des Knotens, die heliozentrische Länge in der Bahn und den Abstand von der Sonne zu finden, welche Aufgabe für jede der beiden äusseren Beobachtungen zu lösen ist, und Zweitens: Aus zwei heliozentrischen Längen in der Bahn und den zugehörigen Abständen von der Sonne die Bahnelemente zu finden.

Die Lösung der ersten Einzelaufgabe finden wir in der einfachsten Form im *Handbuch* Bb[1]). GAUSS hat sich aber mit ihr anscheinend vielfach beschäftigt. In der *Scheda* Ag, S. 5[2]), ist sie mit Beispielen in derselben Weise gelöst wie an der eben erwähnten Stelle; weiter finden wir aber in der *Scheda* Ag, S. 56, und im *Handbuch* Bb, S. 15, eine weitere Ausführung derselben Aufgabe zum Zwecke, ihre Auflösung für logarithmisches Rechnen geschmeidiger zu gestalten, und endlich hat GAUSS diese letztere Lösung in der Monatl. Corr., Juni 1802[3]) veröffentlicht.

Die zweite Einzelaufgabe bietet reizvollere Einzelheiten. Die Lösung kann auch nicht explizit erfolgen. Wenn die Bahnelemente noch völlig unbekannt sind, so geht GAUSS von einem Näherungswert des Parameters der Bahn p aus und der Kunstgriff, durch den er sich diesen Näherungswert verschafft, verdient besonders hervorgehoben zu werden. Er findet sich angedeutet im *Handbuch* Bb, ausführlicher dargestellt in der *Summarischen Übersicht*[4]) und besteht im Grunde aus einer mechanischen Quadratur:

Der Sektor g' zwischen den beiden äusseren Beobachtungen ist, wenn man die Masse des Planeten vernachlässigt,

$$g' = \frac{k}{2}\sqrt{p}\,(t'' - t),$$

wo k die GAUSSsche Konstante bedeutet. Nimmt man den Erdbahnhalbmesser als Einheit, also die mittlere Bewegung der Erde gleich k, so ist

$$g' = \frac{\sqrt{p}}{2}\,(U'' - U),$$

wenn U, U'' die mittleren Längen der Sonne sind; also wird

1) Werke XI, 1, S. 228.
2) Ebenda, S. 232f.
3) Werke VI, S. 87.
4) Ebenda, S. 161.

$$\sqrt{p} = \frac{2g'}{U''-U}.$$

Es ist aber, wenn v und v'' die wahren Längen im ersten und dritten Ort und w eine Integrationsvariable bedeutet,

$$2g' = \int_v^{v''} r^2\,dw = \int_v^{v''} \varphi(w)\,dw,$$

wofür man nach der Formel von Cotes genähert setzen kann

$$2g' = \tfrac{1}{2}(\varphi(v)+\varphi(v''))(v''-v)$$

oder genauer

$$2g' = \left(\frac{1}{6}\varphi(v)+\frac{2}{3}\varphi\left(\frac{v+v''}{2}\right)+\frac{1}{6}\varphi(v'')\right)(v''-v).$$

Es wird also für die erste rohe Annäherung

$$2g' = \tfrac{1}{2}(r^2+r''^2)(v''-v)$$

und damit

$$25) \qquad \sqrt{p} = \frac{r^2+r''^2}{2}\cdot\frac{v''-v}{U''-U}$$

und genauer

$$2g' = \frac{r^2+r''^2+4\mathfrak{R}}{6}(v''-v),$$

wenn $\mathfrak{R}$ der zur Länge $\frac{v+v''}{2}$ gehörende Radiusvektor des Planeten ist, also

$$26) \qquad \sqrt{p} = \frac{r^2+r''^2+4\mathfrak{R}}{6}\cdot\frac{v''-v}{U''-U}.$$

Für $\mathfrak{R}$ leitet man aus den Gleichungen

$$\frac{p}{r}-1 = e\cos(v-\pi)$$

$$\frac{p}{r''}-1 = e\cos(v''-\pi)$$

$$\frac{p}{\mathfrak{R}}-1 = e\cos\left(\frac{v+v''}{2}-\pi\right)$$

durch Elimination von e und π den Wert

$$27) \qquad \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r''}\right)}{\cos\frac{v''-v}{2}} - \frac{2\sin^2\frac{v''-v}{4}}{p\cos\frac{v''-v}{2}}$$

ab. Nachdem man aus der Formel 25) p genähert gefunden, ergibt sich $\mathfrak{R}$ und damit aus 26) auch ein genauerer Wert von p.

Diese Bestimmungsmethode von p wendet GAUSS in einer Werke XI, 1, S. 243 abgedruckten numerischen Bahnbestimmung der Ceres an. Aus dem vorausgesetzten Werte von p ergibt sich dann leicht die ganze Bahn.

Auch in der *Theoria motus*, art. 86, erwähnt er diese Methode, ohne dass sie dort praktische Verwendung findet. Im Briefe an OLBERS vom 21. September 1802 schreibt GAUSS den Wert für den Parameter in einer noch bequemeren Form, die sich auch im Nachlass in der *Scheda* Ag, S. 3, vorfindet.

Anstatt die Bahnbestimmung mit einem vorausgesetzten Wert von p vorzunehmen, kann man auch von genäherten Werten der Exzentrizität oder der Perihellänge ausgehen, wie GAUSS im *Handbuch* Bb[1]) und in der *Summarischen Übersicht* zeigt[2]); indessen ist dies nur angängig, wenn man diese Grössen schon genähert kennt.

Im *Handbuch* Bb gibt GAUSS noch eine *Dritte Verbesserungsmethode* an, die von hypothetischen Werten von i und Ω ausgeht, nebst einem Beispiel[3]).

8. Verbesserung der Bahn nach den älteren Methoden.

Hat man jetzt durch Lösung beider Einzelaufgaben die genäherten Bahnen gefunden, die unter den für i und Ω oder δ und δ'' gemachten Hypothesen die beiden äusseren Beobachtungen scharf darstellen, so berechnet man, wie bereits erwähnt, aus den Bahnelementen den mittleren Ort und stellt seine Abweichung vom beobachteten fest. Hier benutzt nun GAUSS bei seinen im Nachlass erhaltenen Rechnungen zur Bahnbestimmung den mittleren heliozentrischen Ort, während er im *Handbuch* Bb den geozentrischen dafür empfiehlt; das erstere ist das bequemere.

Nachdem für die drei Hypothesen von i und Ω die entsprechenden Fehler des mittleren Orts gefunden sind, bestimmt GAUSS die wahren Werte dieser Grössen durch Interpolation; die numerische Ausführung erhellt aus einem Werke XI, 1, S. 248 abgedruckten Beispiel. Im Nachlass finden sich dar-

1) Werke XI, 1, S. 226.

2) Vergl. auch art. 80—81 der *Theoria motus*.

3) Werke XI, 1, S. 229.

über keine weiteren Aufzeichnungen; in der *Theoria motus* handeln die art. 120—122 davon.

Im art. 8 der *Summarischen Übersicht* führt GAUSS noch eine andere Verbesserungsmethode an, auf die er »erst bei Veranlassung der Pallas verfiel« und die er dort »mit dem glücklichsten Erfolg« anwandte[1]). Sie besteht darin, dass man eine gefundene Bahn, die die äusseren Beobachtungen genau und die mittlere mit gewissen Fehlern darstellt, dadurch verbessert, dass man die ganze Rechnung von der Bestimmung von δ und δ'' an von neuem macht und dazu die äusseren Beobachtungen nach ihrem wahren Wert ansetzt, die mittlere jedoch so, dass man an ihr die gefundenen Fehler mit entgegengesetzten Vorzeichen anbringt.

9. Geschichtliches über GAUSS' Bahnbestimmungen.

Die älteren Rechnungen zur Bestimmung der Bahn der Ceres befinden sich, soweit sie erhalten sind, in den *Schedae* Ag und Ah und stammen aus dem November 1801; die allerersten aus dem Oktober und vielleicht schon aus dem September sind nicht erhalten. GAUSS hat die Elementensysteme, die er bei weiterer Verbesserung der Bahn fand, numeriert. Die Elementensysteme I—III sind nach den PIAZZIschen im Septemberheft 1801 der Monatl. Corr. veröffentlichten Beobachtungen berechnet; die Berechnung der als I bezeichneten Elemente[2]) geschah nach der »Dritten Verbesserungsmethode«, von der er später in der *Theoria motus*, art. 82 (vergl. auch art. 126) sagt, dass sie »orbitae dimensiones eruendi magnam praecisionem nunquam admittet, nisi tria loca heliocentrica intervallis considerabilibus ab invicem distent«.

Dabei ist bemerkenswert, dass auch hier von einer Hypothese über i und Ω ausgegangen wird, ohne dass aus dem Nachlass ersichtlich ist, wie die Ausgangswerte ($\Omega = 81^0\,27'\,4''{,}62$; $\log \operatorname{tg} i = 9{,}262\,1790$) erlangt worden sind[3]). Auch ist auffallend, dass GAUSS keine runden Anfangswerte für sie annimmt, sondern z. B. in Ω die Sekunden zu $4''{,}62$ ansetzt. Dass er sie bis auf Hundertel Sekunden überhaupt ansetzt, darf weniger verwundern, weil

1) Werke VI, S. 163.

2) Vergl. Werke XI, 1, S. 232 f.

3) Vergl. oben S. 169.

er ja eine möglichst scharfe Darstellung der PIAZZIschen Beobachtungen beabsichtigte, wenn auch diese Genauigkeit bei der ersten Bahnbestimmung und mit Rücksicht darauf überflüssig sein mag, dass die Beobachtungen selbst nicht entsprechend genau sind. Aber GAUSS liebte es bekanntlich, mit einer übertriebenen Anzahl von Stellen zu rechnen, auch da, wo nicht, wie hier, eine gewisse Begründung dafür gefunden werden kann[1]). Wahrscheinlich aber ist die Ableitung der Elemente I nicht die erste Bahnbestimmung der Ceres, die GAUSS ausgeführt hat; jedenfalls sind die Rechnungen, die vor der *Scheda* Ag liegen, verloren gegangen[2]), wie es ja auch gewiss mit der Entwicklung der Formeln aus dem September und dem Oktober der Fall ist, die wir in den Stücken Bb, Ag und an anderen Stellen des Nachlasses fertig zusammengestellt finden.

Der erhaltene Teil der Rechnung der Elemente I[3]) bezieht sich nur auf die Bahnbestimmung aus der ersten Hypothese über i und Ω und schliesst mit der Berechnung der Zwischenzeiten zwischen den drei Beobachtungen; es findet sich dann nur noch die Bemerkung: »Durch Interpolation fand man sodann folgende Elemente, welche die beiden äussern Beobachtungen genau, die mittlere mit $+1''{,}84$ Fehler in der Länge und $-2''{,}36$ in der Breite[4]) darstellen«, worauf die ungeordnet angegebenen Werte der Elemente I folgen, ohne dass angegeben ist, wie diese Interpolation ausgeführt wurde.

Es scheint übrigens, dass die *Scheda* Ag ursprünglich aus losen Blättern bestand, die erst nach ihrer Benutzung geheftet wurden, so dass das Auftreten von Lücken erklärlich ist. Von der Berechnung der Elemente II ist kaum etwas erhalten.

Nachdem GAUSS auch diese abgeleitet und gesehen hatte, dass beide Elementensysteme I und II die PIAZZIschen Beobachtungen gut darstellten, sandte er beide an v. ZACH, wie aus einem im GAUSSarchiv vorhandenen Brief v. ZACHS hervorgeht. Da dieser inzwischen die kleine Abhandlung von PIAZZI mit den verbesserten Beobachtungen erhalten hatte, so teilte er die letzteren sofort GAUSS mit, der aber schon mit der Berechnung seiner Elemente III fast fertig war. Diese, sowie die auf Grund der verbesserten PIAZZIschen Beobachtungen

1) Vergl. PH. MAENNCHEN, *Gauss als Zahlenrechner*, Werke X, 2, Abh. 6.

2) GAUSS sagt in der Einleitung zur *Theoria motus* (Werke VII, 1906, S. 8), dass er die erste Bahnbestimmung der Ceres im Oktober 1801 gemacht habe.

3) Werke XI, 1, S. 232f.

4) Werke VI, S. 266. — BRDL.

berechneten Elemente IV, teilte er nun auch v. ZACH mit und fügte eine Ephemeride bei, die vom 25. November bis 31. Dezember reichte. v. ZACH veröffentlichte die gesamten bisherigen Resultate von GAUSS im Dezemberheft 1801 der Monatl. Corr.[1]). Nachdem v. ZACH und viele andere die Ceres auch nach der GAUSSschen Ephemeride im Dezember bei meist ungünstigem Wetter vergebens gesucht hatten, konnte v. ZACH endlich im Februarheft 1802 von der glücklichen Wiederauffindung des Planeten berichten. Brieflich hatte er sie GAUSS am 17. Januar 1802 mitgeteilt. In der Nacht vom 31. Dezember auf den 1. Januar konnte v. ZACH nämlich feststellen, dass ein am 7. Dezember von ihm beobachteter verdächtiger Stern die Ceres war. Am 1. Januar fand auch OLBERS den Planeten auf; sein Ort stimmte sehr genau mit der GAUSSschen Ephemeride überein. GAUSS scheint von der Wiederauffindung der Ceres durch OLBERS zuerst aus den Zeitungen gehört zu haben und er richtete an diesen am 18. Januar einen Brief, um OLBERS' Beobachtungen zu erhalten; mit diesem Brief beginnt der Briefwechsel zwischen beiden Männern, aus dem man, ebenso wie aus den fortgesetzten Mitteilungen v. ZACHS über die Beobachtungen und Berechnungen der Ceres in der Monatl. Corr.[2]) entnehmen kann, wie die darauf folgende Zeit nun für GAUSS fast gänzlich mit neuen Verbesserungen der Ceresbahn ausgefüllt war.

Nach der Wiederauffindung der Ceres, bis zu der GAUSS noch ein Elementensystem V berechnet hatte, machte er sich sogleich daran, die neuen ZACHschen Beobachtungen damit zu vergleichen und v. ZACH sagt in der Monatl. Corr. vom März 1802[3]): »Als ich dem Dr. GAUSS die Nachricht von der glücklichen Auffindung der so sehnlichst erwarteten Ceres, und meine drei ersten Beobachtungen derselben mitgeteilt hatte, so war das erste, was er nach Empfang derselben tat, dass er sie sogleich nach seinen oben angezeigten Elementen V berechnete. Er fand den Fehler bei der ersten Beobachtung vom 7. Dezember in AR $+24'\,8''$; bei der zweiten vom 11. Januar $+30'\,53''$; bei der dritten vom 16. Januar $+31'\,53''$. Nach seinen (verbesserten) Elementen IV weichen sie nach einem Überschlage in folgender Ordnung ab: $+14\frac{1}{2}$ Minuten, $+19\frac{3}{4}$ Minuten, $+20\frac{1}{2}$ Minuten. Dass diese

1) Werke VI, S. 199.

2) Ebenda, von S. 199 an.

3) Ebenda, S. 206.

Elemente IV der Wahrheit etwas näher kommen, als die V, hält Dr. Gauss für Zufall; vielleicht ist es aber auch zum Teil Folge der Einwirkung der Planetenstörungen bei den Piazzischen Beobachtungen, besonders auf die Breiten.«

In der Folgezeit ist ein grosser Teil von Gauss' Zeit durch Bahnverbesserung und Berechnungen, auch der inzwischen entdeckten Pallas (April 1802), der Juno (September 1804) und der Vesta (März 1807) in Anspruch genommen. Die erste Bahn für Vesta berechnete Gauss in nur 10 Stunden[1]). Da er sich ausserdem wohl Sorgen um seine Zukunft machte, da ferner die Berufungen nach Petersburg (von 1802 an) und nach Landshut (1802), sowie die Aussicht auf die Berufung nach Göttingen in jene Zeit fielen, und da er sich auch längere Zeit auf der Sternwarte Seeberg (1803) aufhielt, so dauerte nicht nur die Unterbrechung seiner mathematischen Untersuchungen an, sondern auch die weitere Ausfeilung seiner Methoden zur Bahnbestimmung und die Vorbereitung der *Theoria motus* unterblieb, bis er diese endlich im Jahre 1806 wieder vornahm. Im Jahre 1805 hatte er begonnen, die Störungen der Ceres zu entwickeln; aber auch hier gab es viel zu rechnen, und dass er schliesslich selbst das Unbehagliche dieser dauernden mechanischen Beschäftigung empfand, zeigt ein Brief an Olbers vom 10. Mai 1805 in dem er sagt: »Die Methode, nach der ich die Ceresstörungen zu berechnen angefangen hatte, habe ich doch wieder aufgegeben. Das gar zu viele mechanische tote Rechnen, was ich dabei vor mir sah, hat mich abgeschreckt.« Auch die Nr. 122 des *Tagebuchs*[2]) gibt dem Ausdruck. In den Jahren 1806—1807 entstanden dann endlich die verfeinerten Methoden der *Theoria motus*.

10. Übersicht über die verschiedenen Methoden der Bahnbestimmung aus hypothetischen Werten von δ und δ'' oder von i und Ω.

Eine ausführlichere Schilderung der verschiedenen in Betracht kommenden Methoden der Bahnbestimmung gibt Gauss in der *Theoria motus*, art. 124—129. Er bespricht dort zehn verschiedene Methoden, von denen die fünf ersten von hypothetischen Werten von δ, δ'' oder, was auf dasselbe hinaus-

1) Vergl. Werke VI, S. 285—286.

2) Werke XI, 1, S. 563.

kommt, von r, r'' und die fünf letzten in ähnlicher Weise von hypothetischen Werten für i und Ω ausgehen.

Bei der ersten Methode berechnet man aus δ und δ'' Radiusvektor, heliozentrische Länge und Breite im ersten und dritten Ort und hieraus i, Ω und die Längen in der Bahn v und v'', wie in der Werke XI, 1, S. 223 abgedruckten Notiz [3.] aus dem *Handbuch* Bb; hieraus findet man die Elemente wie in der Notiz [4.] a. a. O., S. 224 und hieraus den mittleren geozentrischen Ort, wie in den Notizen [5.] und [6.] ebendort, S. 227 und 228. Die Vergleichung mit dem beobachteten mittleren Ort ergibt die beiden Daten (Fehler in Länge und Breite) für die Interpolation der verbesserten Ausgangswerte [1]).

Bei der zweiten Methode rechnet man bis zu den Elementen wie in der vorigen; sodann leitet man aber jetzt den heliozentrischen Ort für die mittlere Beobachtung ab; den letzteren rechnet man ausserdem aus dem beobachteten geozentrischen Ort und den für i und Ω gefundenen Werten. Die Vergleichung beider heliozentrischer Werte liefert die beiden Daten (Fehler in r und v) für die Interpolation.

Bei der dritten Methode rechnet man bis zur Bestimmung von i, Ω, v, v'', wie bei der ersten, sodann aus i, Ω und dem mittleren beobachteten geozentrischen Ort die Grössen r' und v'; hierauf aus den drei heliozentrischen Örtern, also aus r, r', r'', $v, v' v''$ die Elemente und aus den Elementen die beiden Zwischenzeiten zwischen dem ersten und zweiten und zwischen dem zweiten und dritten Ort; die Vergleichung zwischen diesen errechneten Zwischenzeiten und den wahren gibt hier die Daten zur Interpolation.

Die vierte Methode stimmt bis zur Auffindung von r, r', r'', v, v', v'' mit der dritten überein; hierauf rechnet man aber die Elemente einmal aus r, r', v, v' und zweitens aus r', r'', v', v''. Für jedes Element erhält man so eine Differenz zwischen beiden Systemen. Als Daten für die Interpolation wählt man zwei dieser Elemente aus.

Die fünfte Methode endlich verfährt wie die vierte; jedoch führt man die Rechnung nicht bis zur Bestimmung der Elemente durch, sondern nur bis zu den Grössen η und η'', die das Verhältnis zwischen Sektor und Dreieck ausdrücken [2]) und benutzt deren Differenz zur Interpolation.

1) Siehe Werke XI, 1, S. 248.

2) Vergl. unten S. 180.

Die fünf übrigen Methoden unterscheiden sich von den vorigen nur dadurch, dass man von hypothetischen Werten von i und Ω ausgeht; bei der sechsten und siebenten Methode berechnet man aus i, Ω und den beiden äusseren beobachteten Örtern die Grössen r, r'', v, v'' und verfährt dann weiter, wie bei der ersten und zweiten Methode.

Bei der achten bis zehnten Methode leitet man aus i, Ω und allen drei beobachteten Örtern die Grössen r, r', r'', v, v', v'' ab und verfährt dann weiter wie bei der dritten bis fünften. Für die siebente Methode gelten die Vorschriften der Notiz [7.] aus dem *Handbuch* Bb und für die achte die der Notiz [8.] ebendort[1]).

11. Vervollkommnete Methode der *Theoria motus*.

Bei der Schilderung dieser Methoden hält GAUSS den Gesichtspunkt fest, dass man die ganze Rechnung für drei vorausgesetzte Wertepaare durchführt, und es finden sich Beispiele für die siebente Methode in der Notiz [III.] aus der *Scheda* Ah[2]) und für die achte in der Notiz [II.] aus Ag[3]). Es handelt sich hierbei um das oben (S. 158) als »reine Versuchsmethode« bezeichnete Verfahren.

Das Festhalten an dieser mag hier auffallen, da doch die vollkommenere in der *Theoria motus* wirklich durchgeführte Methode anstelle der Interpolation aus drei Wertepaaren die Methode der sukzessiven Annäherung setzt[4]), die sogleich besprochen werden soll.

Oben ist geschildert, wie GAUSS in der *Theoria motus* mit einem gewissen Anklang an seine ältesten Methoden sich einen Näherungswert für den Abstand r' des Himmelskörpers im mittleren Beobachtungsort verschafft[5]). Dabei bilden hier die beiden Grössen P und Q den Ausgangspunkt der Annäherungen, ähnlich wie es früher δ und δ'' oder i und Ω gewesen waren, und in der ersten Annäherung ist

$$28) \qquad P = \frac{\theta''}{\theta}, \quad Q = \theta\theta''.$$

1) Werke XI, 1, S. 228—229.
2) Werke XI, 1, S. 241.
3) Ebenda, S. 232.
4) Vergl. *Theoria motus*, art. 135.
5) Vergl. die Gleichungen 20) und 21).

Wenn man in voller Analogie mit den älteren Methoden der Rechnung hypothetische Werte von P und Q zugrunde legen würde, so würde man so vorgehen, dass man mit drei Hypothesen, etwa:

$$1.\ P_0 = \frac{\theta''}{\theta},\ Q_0 = \theta\theta''; \quad 2.\ P_1 = P_0 + \epsilon_1,\ Q_1 = Q_0;$$
$$3.\ P_2 = P_0,\ Q_2 = Q_0 + \epsilon_2,$$

drei Bahnen berechnet, die die beiden äusseren Beobachtungen genau darstellen, und dann aus den Abweichungen der mittleren Beobachtung verbesserte Werte von P und Q interpoliert. Man sieht, dass der Nachteil der älteren Methoden darin liegt, dass man in allen drei Hypothesen die Rechnung bis zur Bestimmung der Elemente durchführen muss.

Die neue Methode der *Theoria motus* verlässt den Weg der versuchsweisen interpolatorischen Verbesserung der Ausgangswerte, indem sie erstens nur mit einer Hypothese P_0 und Q_0 rechnet und mit der hieraus gefundenen Bahn diese hypothetischen Werte unmittelbar verbessert, und indem sie zweitens auch bei der Berechnung dieser ersten genäherten Bahn nicht bis zur Bestimmung der Elemente durchgeführt zu werden braucht.

Die strengen Werte von P und Q (Gleichung 19) lassen sich schreiben[1])

$$29) \qquad P = \frac{\theta''}{\theta}\cdot\frac{\eta}{\eta''},\quad Q = \frac{r'^3}{rr''\eta\eta''\cos f\cos f'\cos f''}\theta\theta''$$

und das Näherungsverfahren besteht darin, auf möglichst kurzem Wege aus den genäherten Werten von P und Q die Grössen $\eta, \eta'', r, r', r'', f, f', f'''$ zu finden, um die ersteren damit zu verbessern, bis alles stimmt. Erst wenn die schliesslichen Werte dieser Grössen gefunden sind, werden die Elemente berechnet. Aus den Gleichungen 24) und den vorhergehenden ist ersichtlich, wie r, r', r'' und f'' gefunden werden; hier können auch gleich die Grössen θ und θ'' wegen Aberration verbessert werden. Es folgt dann die Bestimmung von f und f''' aus den Gleichungen des art. 144:

$$30) \qquad \begin{aligned} \sin 2f &= r \sin 2f'\cdot\frac{n}{n'r'} \\ \sin 2f''' &= r''\sin 2f'\cdot\frac{n''}{n'r'}, \end{aligned}$$

und es sind jetzt η und η'' zu bestimmen.

1) Es bedeuten: η und η'' das Verhältnis des Sektors zum Dreieck zwischen je zwei Orten, f, f'' die halbe Differenz der wahren Anomalien: $f = \frac{1}{2}(v''-v')$, $f'' = \frac{1}{2}(v'-v)$.

Von der Bestimmung dieser Grössen handeln die art. 88—94 der *Theoria motus*. Den Gang der äusserlich recht verwickelten Rechnung kann man durch die folgenden Formeln deutlich machen[1]):

$$31) \qquad m = \frac{\theta}{\sqrt{8\cos^3 f \cdot (rr')^{\frac{3}{2}}}}, \quad 2l = \frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2\cos f} - 1, \quad x = \sin^2 \frac{g}{2}$$

$$32) \qquad \sqrt{l+x} + (l+x)^{\frac{3}{2}} \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} = m$$

$$33) \qquad \eta = \frac{m}{\sqrt{l+x}}.$$

Aus der Gleichung 32) ist g oder x zu bestimmen. Gauss entwickelt hierzu die Grösse $X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$ in eine Potenzreihe nach x und verwandelt diese in einen Kettenbruch. Er setzt sodann

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)}$$

und erhält auf elementarem Wege den ersten der beiden[2]) für ξ angegebenen Kettenbrüche; vom zweiten sagt er, dass er seine Ableitung an anderer Stelle geben werde, da sie auf weniger elementaren Grundsätzen beruht. Dies ist in den *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \cdots$, art. 14[3]) geschehen, wo er die Beziehungen zwischen den functiones contiguae, und im besonderen die allgemeine Formel für die Kettenbruchentwicklung von

$$\frac{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$$

benutzt. Die Vorarbeiten hierzu finden sich, wie diejenigen zu diesem Kapitel der *Theoria motus* überhaupt, im *Handbuch* Bd (Oktober 1805) und sind teilweise Werke X, 1, S. 326 abgedruckt[4]). Gauss entwirft eine Hilfstafel, die ξ als Funktion von x gibt und durch deren Benutzung die Bestimmung von x und hieraus die von η sich sehr einfach gestaltet.

In derselben Weise wird g'' bezw. x'' und daraus η'' bestimmt und somit findet man nach 29) genauere Werte für P und Q, mit denen die Rechnung

1) $g = \frac{1}{2}(E'' - E')$ bedeutet die halbe Differenz der exzentrischen Anomalien im zweiten und dritten Ort; ebenso wird $g'' = \frac{1}{2}(E' - E)$ gesetzt.

2) Werke VII, 1906, S. 117.

3) Werke III, S. 137.

4) Man vergleiche auch die Bemerkungen von Schlesinger ebendort S. 330.

(zweite Hypothese) wiederholt wird, bis man definitive Werte für η_i und η_i'' und für g und g'' hat; aus diesen ergeben sich (*Theoria motus*, art. 95, 96) die Elemente in einfacher Weise.

Im *Handbuch* Bb, S. 24—34 finden sich Vorarbeiten zu den art. 88—96, die nach der *Tagebuch*notiz[1]) Nr. 125 »Methodum ex duobus locis heliocentricis corporis circa solem moventis eiusdem elementa determinandi novam perfectissimam deteximus« aus dem Januar 1806 zu stammen scheinen; ebenso im *Handbuch* Bd, S. 37—47, worauf sich vermutlich die *Tagebuch*notiz[1]) Nr. 126: »Methodum e tribus planetae locis geocentricis eius orbitam determinandi ad summum perfectionis gradum eveximus«, vom Mai 1806, bezieht.

12. Besondere Fälle der Bahnbestimmung.

Die Bahnbestimmung eines Planeten aus den ersten nach der Entdeckung gemachten Beobachtungen kennzeichnet sich dadurch, dass der vom Planeten zurückgelegte Teil seiner Bahn und also die Winkel $2f$, $2f'$, $2f''$ zwischen den Radienvektoren klein sind.

Wenn einerseits naturgemäss eine Bahnbestimmung aus einem kleinen Bogen mit grösserer Unsicherheit behaftet ist, so führt andererseits in diesem Falle die Gausssche Methode sehr schnell zum Ziel, sodass in der Regel schon die zweite Hypothese über P und Q zu hinreichend genauen Elementen führt[2]); sie ist aber auch brauchbar, wenn die Beobachtungen weiter auseinander liegen; nur wird man, falls die Konvergenz der Hypothesen zu wünschen übrig lässt, sobald man mit der dritten Hypothese für P und Q die Rechnung bis zur Bestimmung des vierten Wertepaares dieser Grössen durchgeführt hat, nicht mit diesem vierten Wertepaare weiterrechnen, sondern durch Interpolation aus den drei ersten Hypothesen einen besseren Näherungswert ansetzen[3]), ähnlich wie bei den älteren Methoden. Gauss hat von Anfang an Wert darauf gelegt, seinen Methoden allgemeine Gültigkeit zu geben und die *Theoria motus* enthält Beispiele, die die verschiedenen vorkommenden Fälle erleuchten. Er schreibt in einem in der Monatl. Corr.[4]) abgedruckten

1) Werke X, 1, S. 564.

2) Vergl. die Rechenbeispiele, art. 150—157 der *Theoria motus*.

3) Vergl. das Beispiel art. 158—161 der *Theoria motus*.

4) Werke VI, S. 275.

Briefe an v. ZACH vom 8. Juli 1806: »Es ist mir übrigens überaus lieb, dass ich nicht schon 1802 meine Methode, wie ich die Ceres- und Pallasbahn berechnet hatte, bekannt gemacht habe, so viele Aufforderungen auch deshalb an mich gelangten. Denn seitdem habe ich noch immer an der Vervollkommnung der Methode selbst gearbeitet, besonders in dem vorigen Winter, und ihre jetzige Gestalt sieht ihrer ersten fast gar nicht mehr ähnlich. Um hiervon eine Probe zu geben, will ich nur eines Umstandes erwähnen. Da das Problem so sehr verwickelt ist, so ist es der Natur der Sache nach nicht anders möglich, als dass bei der allerersten Annäherung einige Voraussetzungen gemacht werden müssen, die nur näherungsweise richtig sind (wie z. B. bei Dr. OLBERS' Methode die ist, dass die Chorden bei der Erde und dem Kometen durch die mittleren radii vectores im Verhältnisse der Zwischenzeiten geschnitten werden). Voraussetzungen von dieser Art liegen also auch nach meiner Methode bei der ersten Annäherung zugrunde, und zwar solche, die desto weniger von der Wahrheit abweichen, je kleiner die Zwischenzeiten sind. Man darf also die Beobachtungen, auf die man die erste Annäherung gründet, nicht gar zu weit von einander entfernt annehmen, weil man sonst vermöge der näherungsweise wahren Voraussetzung bei der ersten Rechnung gar zu weit von der Wahrheit zurückbleiben, und daher zu viele und beschwerliche Wiederholungen der Verbesserungsmethoden machen müsste. Doch konnte ich, wie meine Methode 1802 war, bei der Pallas sogleich Beobachtungen anwenden, die 27 Tage auseinander waren; viel weiter hätte ich indes doch nicht gehen mögen. Dagegen ist jetzt meine Methode so beschaffen, dass ich neulich, als ich die mir von Ihnen gütigst mitgeteilten Beobachtungen ORIANIS von 1805 zu einem, für mein Werk bestimmten Exempel benutzen wollte, und also dieselben so behandeln musste, als wenn ich von der Pallasbahn noch gar nichts wüsste, sogleich und zwar mit dem allerglücklichsten Erfolge die äussersten, 71 Tage von einander entfernten Beobachtungen zugrunde legen konnte[1]), und es leidet gar keinen Zweifel, dass ich darin noch beträchtlich weiter hätte gehen können.«

Im art. 159 der *Theoria motus* gibt GAUSS ein Beispiel für die Bahnbestimmung der Ceres, bei dem die Beobachtungen 260 Tage auseinanderliegen.

Doch ist hierzu folgendes zu bemerken: In der Gleichung 12) sind $\frac{b}{a}$,

1) Vergl. *Theoria motus*, art. 156. — BRDL.

$\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$ bei ersten Bahnbestimmungen mit kurzen Zwischenzeiten grosse Zahlen zweiter Ordnung, und zwar ist b positiv, c und d negativ. Andererseits setzt GAUSS die Grössen $\frac{\vartheta}{r'^{3/2}}$, $\frac{\vartheta''}{r''^{3/2}}$, deren Summe $\frac{\vartheta'}{r'^{3/2}}$ und e als kleine Grössen erster Ordnung voraus.

Im Juno-Beispiel ist rund

$$\frac{b}{a} = 78{,}0, \quad \frac{c}{a} = -38{,}4, \quad \frac{d}{a} = -108{,}5, \quad e = 0{,}25.$$

Beim Ceres-Beispiel finden dagegen andere Verhältnisse statt; hier ist:

$$\frac{b}{a} = 1{,}10, \quad \frac{c}{a} = +3{,}11, \quad \frac{d}{a} = -2{,}04, \quad e = 0{,}08$$

und

$$\frac{\vartheta}{r'^{3/2}} = 0{,}52, \quad \frac{\vartheta''}{r''^{3/2}} = 0{,}55, \quad \frac{\vartheta'}{r'^{3/2}} = 1{,}07.$$

Nimmt man die letzteren als klein von erster Ordnung an, so wird

$$\frac{\vartheta''}{r''^{3/2}} - \frac{\vartheta}{r'^{3/2}} = 0{,}03$$

klein mindestens von zweiter Ordnung.

δ' erscheint also nicht als Unterschied zweier grosser Zahlen zweiter Ordnung, wie beim Juno-Beispiel und ähnlichen, bei denen Fehler in $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ von grossem Einfluss sind; obwohl diese Fehler hier an sich wegen der grossen Zwischenzeiten grösser sind, so werden sie doch durch die kleineren Faktoren $\frac{c}{a}$ und $\frac{d}{a}$ nicht merklich vergrössert[1]).

Sind die Zwischenzeiten aussergewöhnlich gross, so wird auch immer aus den ersten Beobachtungen eine genäherte Bahn bereits bekannt sein und man wird dann nicht von den Näherungswerten 28) für P und Q ausgehen, sondern gleich genauere Werte für die erste Hypothese nach 29) anwenden (art. 163).

Es gibt bekanntlich eine Reihe von Fällen, in denen die Methode der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen versagt. In den art. 160—162 bespricht GAUSS die Fälle, in denen die drei geozentrischen Örter so ausgewählt sind, dass sich die Bahn entweder garnicht oder nur sehr ungenau bestimmen lässt,

1) Diese Bemerkung zum Ceres-Beispiel verdanke ich einer Mitteilung von JOH. FRISCHAUF.

nämlich 1. wenn die drei Himmelskörper Sonne, Erde, Planet bei einer der Beobachtungen ganz oder nahezu in einer geraden Linie sich befinden, oder 2. wenn der erste und dritte geozentrische Ort ganz oder nahezu zusammenfallen, oder endlich 3. wenn die drei geozentrischen Örter des Planeten und der heliozentrische Erdort in der mittleren Beobachtung ganz oder nahezu in einem grössten Kreise liegen. Diese Fälle müssen durch eine andere Auswahl der benutzten Beobachtungen vermieden werden.

Den Fall, in dem zwei ganz verschiedene Bahnen den drei Beobachtungen genügen, bespricht GAUSS im art. 142; die Entscheidung, in welcher von beiden der Himmelskörper sich bewegt, kann nur durch eine vierte entferntere Beobachtung erbracht werden.

Dem Falle endlich, in dem die Neigung der Bahn gleich Null oder sehr klein ist, passt sich die Methode der Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen[1]) an, die im wesentlichen auf den gleichen Grundsätzen beruht, wie die aus dreien. GAUSS beabsichtigte anfangs, hier eine Bahnbestimmung des Uranus als Beispiel zu geben, konnte aber die dazu nötigen Beobachtungen nicht zusammenbekommen[2]); er benutzte dann zu diesem Zweck die unmittelbar darauf entdeckte Vesta.

13. Rechnung für parabelnahe Ellipsen und Hyperbeln. Hyperbolische, parabolische und Kreisbahn-Bestimmung.

Im *Tagebuch* finden wir im April 1806 die Notiz[3]) Nr. 127: »Methodus nova ellipsin et hyperbolam ad parabolam reducendi«. Diese bezieht sich auf die art. 30—46 der *Theoria motus*, in denen die Berechnung der wahren Anomalie aus der Zeit, und umgekehrt, für parabelnahe Ellipsen und Hyperbeln behandelt wird; entsprechende Vorarbeiten dazu stehen im *Handbuch* Bd, S. 52f. und 91. Bemerkenswert sind dabei die scharfen Untersuchungen der art. 30—32 über die Genauigkeit, mit der sich die wahre Anomalie aus der mittleren ergibt; da diese Genauigkeit zu wünschen übrig lässt, wenn e nahe gleich Eins ist, so entstanden die Entwicklungen zur Reduktion parabelnaher Ellipsen und

1) *Theoria motus*, art. 164—171.

2) Vergl. den Briefwechsel zwischen GAUSS und OLBERS vom 27. und 31. Januar, 12. März 1807.

3) Werke X, 1, S. 565.

Hyperbeln auf die Parabel. Nach art. 30 scheint es, als ob GAUSS an anderer Stelle sich weiter über die Genauigkeit logarithmischer Rechnungen überhaupt verbreiten wollte.

Zur Bestimmung einer hyperbolischen Bahn wendet GAUSS ähnliche Methoden an, wie zu der einer elliptischen Bahn. In der *Theoria motus* gibt er jedoch ein Zahlenbeispiel nur für die Berechnung der Elemente aus zwei Radienvektoren, dem eingeschlossenen Winkel und der Zwischenzeit (art. 105).

Dass GAUSS in der *Theoria motus* nicht auf die Bestimmung einer parabolischen Bahn eingeht, mag, wie schon oben gesagt, seinen Grund darin haben, dass diese Aufgabe schon von OLBERS in brauchbarer Form gelöst war. Er begann erst später sich damit zu beschäftigen, als er selbst die Bahnen einiger Kometen berechnete. In einem Briefe an OLBERS vom 3. Januar 1806 präzisiert er den von OLBERS im § 37 seiner Abhandlung noch nicht klar herausgeschälten Fall näher, in dem die OLBERSschen Methode nicht anwendbar ist. Dies veranlasste wahrscheinlich OLBERS zu seiner Mitteilung vom Juni 1806 im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1809[1]).

Im Jahre 1813 bei Gelegenheit der Beschäftigung mit dem Kometen 1813 II fand GAUSS eine erhebliche Verbesserung der OLBERSschen Methode. Bei dieser lässt sich nämlich in häufig vorkommenden Fällen die Berechnung der Radienvektoren der beiden äusseren Beobachtungen und der Sehne aus dem hypothetischen Abstand von der Erde im mittleren Ort nicht scharf genug ausführen. GAUSS gibt hierfür andere Formeln, die den Hauptinhalt der Abhandlung *Observationes Cometae secundi a. 1813* . . .[2]) bilden und sich auch in seinem Briefe an OLBERS vom 25. Juli 1813 finden.

Im Jahre 1815 endlich beschäftigte er sich eingehender mit der parabolischen Bahnbestimmung; er gibt nicht nur der LAMBERTschen Gleichung eine andere Gestalt, sondern entwickelt auch eine Reihe anderer wichtiger Beziehungen. Er begann den Entwurf einer Notiz *Allgemeine Theorie der Berechnung der Kometenbahnen*, dem er ein im Briefe an OLBERS vom 13. Januar 1815 erwähntes Musterbeispiel beifügt. Die entsprechenden Bruchstücke aus dem Nachlass sind Werke VII, 1906, S. 323—374 abgedruckt; dazu ge-

1) W. OLBERS, *Sein Leben und seine Werke*, Bd. I, S. 76.

2) Werke VI, S. 25.

hört auch eine Tafel zur Berechnung der wahren Anomalie, die vollständiger ist als die Barkersche. Er schreibt darüber an Olbers am 29. Mai 1815: »Meine theoretischen Untersuchungen über die Berechnung der Kometenbahnen im allgemeinen hätte ich wohl einige Neigung, in Zukunft einmal in einem eigenen Werke bekannt zu machen, als Supplement zu meiner *Th. M. C. C.* Es könnte vielleicht 6—8 Bogen stark werden, und ich würde dann noch eine Tafel für die parabolische Bewegung von einer neuen Einrichtung beifügen, deren Gebrauch noch etwas bequemer ist als der der Barkerschen. Diese möchte auch noch 3 Bogen betragen. Der Grund dazu ist schon gelegt, wobei mir Herr Encke noch geholfen hat« und an Schumacher am 5. Januar 1845: »Das Zusatzkapitel, welches ich einmal zu der *Th. M. C. C.* zu machen im Sinn hatte, würde die Berechnung der rein parabolischen Bahn betroffen haben. Eigentlich ausgearbeitet ist darüber niemals etwas gewesen; einzelnes ist aber so aufgeschrieben, dass ich es später danach wohl wiederherstellen könnte. Allein meine nächsten Arbeiten werden sich jedenfalls auf die Fortsetzung meiner geodätischen (theoretischen) Untersuchungen beziehen.«

Das Problem der Kreisbahn mag Gauss übergangen haben, weil sich nur in besonderen Fällen, z. B. wenn die Beobachtungen zur Bestimmung einer Ellipse nicht ausreichen, die Berechnung einer solchen empfiehlt und diese »Arbeit sich durch eine sehr leichte und einfache Rechnung erledigen lässt«[1]; bei der Ceres hatte sich die Unzweckmässigkeit der Berechnung einer Kreisbahn in vollem Masse gezeigt. Jedoch findet sich in dem bekannten Lehrbuch von Klinkerfues[2]) eine Methode der Kreisbahnbestimmung, die von Gauss herrührt und Werke XI, 1, S. 253 abgedruckt ist.

III. Bahnverbesserung aus einer grösseren Reihe von Beobachtungen.

1. Einleitendes.

Die Gaussschen Methoden zur Verbesserung einer Planetenbahn aus einer grösseren Reihe von Beobachtungen treten uns an vielen zertreuten Stellen seiner Veröffentlichungen und seines Nachlasses entgegen und daher dürfte eine Zusammenstellung erwünscht sein. Im dritten Abschnitt der *Theoria*

1) Einleitung zur *Theoria motus*, Werke VII, 1906, S. 6.

2) S. Fussnote, S. 165.

motus finden wir in erster Linie die Begründung der zur Anwendung kommenden Methode der kleinsten Quadrate, in der *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis* dagegen die eigentlichen astronomischen Formeln.

Über die Bildung der Normalörter spricht GAUSS in den art. 173—174 der *Theoria motus*; in seinen praktischen Rechnungen legt er die Normalörter meist in den Augenblick der Opposition in Länge, wodurch die Rechnung möglichst vereinfacht wird. Die Zeit der Opposition ergibt sich aus der Gleichheit der heliozentrischen Länge der Erde und der aus den Beobachtungen folgenden geozentrischen Länge des Planeten; beiden ist dann auch die heliozentrische Länge des Planeten gleich, die neben der aus den Beobachtungen folgenden geozentrischen Breite die Grundlage für die Bahnverbesserung bietet. Diese Methode ist natürlich nur dann anwendbar, wenn in der Nähe der Opposition Beobachtungen in genügender Zahl vorliegen[1]).

2. Bahnverbesserung aus vier Oppositionen.

In der *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis* benutzt GAUSS zur Bahnverbesserung zwei verschiedene Verfahren; das erstere (art. 5—8), das in ähnlicher Weise auch bei seinen Störungsrechnungen zur Anwendung kommt (vergl. S. 192), soll hier so geschildert werden, wie es in der *Disquisitio* benutzt wird, indem nämlich nur vier Oppositionen benutzt werden; wegen des zweiten sehe man Seite 193. Beim ersteren findet die Methode der kleinsten Quadrate nur teilweise Anwendung; es kann folgendermassen geschildert werden:

Da Neigung und Knotenlänge bereits ziemlich genau bekannt zu sein pflegen, so ist es auch die Reduktion auf die Ekliptik und daher lassen sich die Längen in der Bahn, nur mit einem sehr kleinen Fehler behaftet, berechnen[2]). Man gewinnt hierdurch den Vorteil, dass man die Verbesserung

1) Man vergleiche hierzu auch die Notizen Werke VII, 1906, S. 310.

2) Man kann hierzu die direkte Formel

$$\operatorname{tg}(v - \Omega) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \Omega)}{\cos i}$$

benutzen; schärfer rechnet man nach der Formel (vergl. *Theoria motus*, art. 50)

$$\sin(v - \alpha) = 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin(v - \Omega) \cos(\alpha - \Omega)$$

indem man für $v - \Omega$ den aus der ersteren berechneten Wert benutzt, wodurch man gleichzeitig eine Kontrolle erhält.

Es bedeuten: v die wahre Länge in der Bahn,
α die heliozentrische Länge.

der Elemente getrennt, einerseits für die Länge des Perihels, die Exzentrizität, die mittlere tägliche Bewegung und die Länge in der Epoche, und andererseits für die Neigung und die Länge des Knotens ausführen kann; dadurch hat man nur mit vier Unbekannten zu operieren, von denen sich noch eine, die Verbesserung der Länge in der Epoche, sofort eliminieren lässt.

Aus den Längen in der Bahn v berechnet Gauss mit den genäherten Werten von π und φ die mittlere Anomalie M und ihre Ableitungen[1])

$$34) \qquad \frac{\partial M}{\partial \pi} = -\frac{\cos^3 \varphi}{(1 + e \cos w)^2} = m$$

und

$$35) \qquad \frac{\partial M}{\partial \varphi} = m \frac{(2 + e \cos w) \sin w}{\cos \varphi} = n$$

und erhält so für jeden Normalort eine Beziehung von der Form[1])

$$36) \qquad M = (M) + m \Delta\pi + n \Delta\varphi,$$

also bei vier Oppositionen vier solche Gleichungen für M, M', M'', M'''. Da

$$M = \varepsilon - \pi + \mu t$$
$$M' = \varepsilon - \pi + \mu t'$$
$$\text{usw.}$$

so ergeben sich durch Elimination von $\varepsilon - \pi$ drei Gleichungen

$$37) \qquad \begin{aligned} \mu(t' - t) &= (M') - (M) + (m' - m)\Delta\pi + (n' - n)\Delta\varphi \\ \mu(t'' - t') &= (M'') - (M') + (m'' - m')\Delta\pi + (n'' - n')\Delta\varphi \\ \mu(t''' - t'') &= (M''') - (M'') + (m''' - m'')\Delta\pi + (n''' - n'')\Delta\varphi. \end{aligned}$$

Aus diesen lässt sich auch μ sofort eliminieren und daher $\Delta\pi$ und $\Delta\varphi$ durch eine kurze Rechnung bestimmen, worauf auch sogleich μ und ε gefunden werden.

Die auf diese Weise gefundenen Werte von μ, ε, π und φ sind noch mit dem Fehler der vorausgesetzten Werte von i und Ω behaftet, aber nur soweit dieser durch die Reduktion auf die Ekliptik eingeht, also mit einem sehr geringen Betrage. Man berechnet aus ihnen die Radienvektoren in den

---

1) M = mittlere Anomalie,
(M) = berechneter genäherter Wert der mittleren Anomalie
μ = mittlere Bewegung,
ε = mittlere Länge in der Epoche,
$t, t' \ldots$ = seit dem Periheldurchgang verflossene Zeit,
$w = v - \pi$ = wahre Anomalie,
φ = Exzentrizitätswinkel; $e = \sin \varphi$.

vier Beobachtungen und erhält daraus die heliozentrischen Breiten γ nach der Formel[1]):

38) $$\sin(\vec{\sigma} - \gamma) = \frac{R \sin \delta}{r}.$$

Um auf den Einfluss der Fehler in i und Ω Rücksicht zu nehmen, setzt GAUSS

39) $$\gamma = (\gamma) + \left(\frac{d\gamma}{d\Omega}\right) \Delta\Omega + \left(\frac{d\gamma}{di}\right) \Delta i = (\gamma) + a\Delta\Omega + b\Delta i,$$

wo (γ) der berechnete Wert für die heliozentrische Breite ist. Über die Differentialquotienten $\left(\frac{d\gamma}{d\Omega}\right)$ und $\left(\frac{d\gamma}{di}\right)$ sagt GAUSS, dass er sie nicht auf analytischem Wege, sondern auf numerischem bestimmen wolle. Der Grund hierfür ist vielleicht der, dass die erstere Bestimmungsart, wenn sie streng ausgeführt wird, etwas verwickelt ist; denn $\left(\frac{d\gamma}{d\Omega}\right)$ und $\left(\frac{d\gamma}{di}\right)$ sind nicht gleich den partiellen Ableitungen von γ im gewöhnlichen Sinne, weil γ nicht aus den Elementen allein, sondern aus dem beobachteten $\vec{\sigma}$ abgeleitet ist und die Fehler Δi und $\Delta\Omega$ hier nur bei der Reduktion auf die Ekliptik und damit implizite in die Elemente π und φ, sowie auch in r eingehen. GAUSS bestimmt $\left(\frac{d\gamma}{d\Omega}\right)$ und $\left(\frac{d\gamma}{di}\right)$, indem er die ganze vorausgehende Rechnung wiederholt unter Voraussetzung von etwas veränderten Ausgangswerten von i und Ω, sodass er im ganzen drei Bestimmungen erhält; so wird bei ihm z. B. für die Opposition der Pallas[2]) von 1805

Hypothese	Ω	i	(γ)
I	$172^0\,28'\,46''{,}8$	$34^0\,37'\,31''{,}5$	$-33^0\,39'\,48''{,}15$
II	172 29 46,8	34 37 31,5	−33 39 51,10
III	172 28 46,8	34 38 31,5	−33 39 35,63

und hieraus

$$\gamma = -33^0\,39'\,48''{,}15 - 0{,}0492\,\Delta\Omega + 0{,}2087\,\Delta i$$

Er wendet also das Verfahren an, dass wir schon bei seinen ersten Bahnbe-

1) δ = geozentrische Breite,
γ = heliozentrische Breite,
r = Radiusvektor,
R = Radiusvektor der Erde.

2) Werke VI, S. 12—13.

stimmungen kennen gelernt haben und das wir heute als numerische Differentiation bezeichnen, wobei allerdings hier nur die ersten Differenzen berücksichtigt werden.

Drei weitere ähnliche Gleichungen ergeben sich für die übrigen Oppositionen.

Während die eben gefundenen Werte der heliozentrischen Breiten aus den beobachteten geozentrischen Breiten folgen, berechnet Gauss andererseits die heliozentrischen Breiten mit den (in Hypothese I) vorausgesetzten Werten von i und Ω aus den beobachteten Längen nach der Formel[1])

$$\text{40)} \qquad \operatorname{tang} \delta = \operatorname{tang} i \,.\, \sin(\alpha - \Omega),$$

und es wird

$$\text{41)} \qquad \delta = (\delta) + \frac{\partial \delta}{\partial \Omega} \Delta\Omega + \frac{\partial \delta}{\partial i} \Delta i = c\,\Delta\Omega + f\Delta i,$$

wo

$$c = -\tfrac{1}{2} \sin 2\delta \,.\, \operatorname{cotang}(\alpha - \Omega)$$

$$\text{42)} \qquad f = \frac{\sin 2\delta}{\sin 2i}.$$

Für die Opposition von 1805 findet Gauss z. B.

$$\delta = -33^0\,40'\,50''{,}63 + 0{,}1252\,\Delta\Omega - 0{,}9870\,\Delta i.$$

Da $\delta = \gamma$ sein muss, so liefert die Opposition von 1805 die Gleichung

$$\text{43)} \qquad 62''{,}48 - 0{,}1744\,\Delta\Omega + 1{,}1957\,\Delta i = 0.$$

Daneben ergeben die drei übrigen Oppositionen drei weitere ähnliche Gleichungen und da hiermit Δi und $\Delta\Omega$ überbestimmt sind, so leitet Gauss ihre Werte nach der Methode der kleinsten Quadrate ab.

Um nun endlich auch die vier übrigen oben gefundenen Elemente durch Beseitigung des Einflusses von Δi und $\Delta\Omega$ weiter zu verbessern, kann man entweder ihre genauen Werte durch Interpolation aus den drei Hypothesen für i und Ω bestimmen, oder, was zuverlässiger ist, die Bestimmung mit den scharfen Werten von i und Ω wiederholen[2]).

---

1) Hier bezeichnen:
   (δ) die heliozentrische Breite, gerechnet nach der Formel 40),
   δ den wahren Wert der heliozentrischen Breite
   α die heliozentrische Länge.

2) Vergl. *Disquisitio de elementis Palladis*, art. 8, Werke VI, S. 14—15.

3. Bahnverbesserung aus mehreren Oppositionen und mit Berücksichtigung der Störungen.

Legt man der Elementenverbesserung mehr als vier Oppositionen zugrunde, so erhält man mehr als vier Gleichungen der Form 37) und kann diese, wie die Gleichungen 43), nach der Methode der kleinsten Quadrate auflösen. Nimmt man auch auf die Störungen Rücksicht, so ist die Rechnung wesentlich die gleiche, nur muss man die gestörten Werte der Elemente benutzen. Das Verfahren, dass GAUSS hier gewöhnlich anwandte, schliesst sich an das vorerwähnte an. Es soll hier ebenfalls auseinandergesetzt werden[1]:

Es seien i_0, Ω_0, π_0, φ_0 usw. die wahren und (i_0), (Ω_0), (π_0), (φ_0) usw. genäherte Werte der mittleren oder Normal-Elemente, wie GAUSS sie nennt.

Indem man zu (i_0), (Ω_0), (π_0), (φ_0) die Störungen hinzufügt, erhält man die Näherungswerte für die gestörten (oskulierenden) Elemente, die mit (i), (Ω), (π), (φ) bezeichnet werden mögen. Mit den letzteren berechnet man wie im vorstehenden (Gleichung 36) die mittlere Anomalie (M) und hieraus die mittlere Länge $(L) = (M) + (\pi)$, so dass entsprechend der Gleichung 36) der wahre Wert der gestörten mittleren Länge ist

$$L = (L) + (m+1)\Delta\pi + n\Delta\varphi. \tag{44}$$

Für die mittlere Länge gilt hier der Ausdruck

$$L = \varepsilon + \int \mu\, dt. \tag{45}$$

Fasst man die Störungen dieser Grösse als Störungen der mittleren Länge zusammen, indem man setzt[2]

$$\delta L = \delta\varepsilon + \delta\int \mu\, dt,$$

so hat man

$$L = \varepsilon_0 + \mu_0 t + \delta L = \varepsilon_0 + (\mu_0)t + \delta L + t.\,\Delta\mu. \tag{46}$$

Zieht man also von (L) die Störungen δL und die aus dem Näherungswerte von μ folgende mittlere Bewegung seit der Epoche $t = 0$ ab, wobei man setzen kann

$$(\varepsilon_0) = (L) - \delta L - (\mu_0)t, \tag{47}$$

1) Man vergleiche dazu Werke VII, 1906, S. 479—482, 486—488, 561—564.

2) Nach Werke VII, 1906, Seite 480.

so erhält man für jede Opposition eine Gleichung von der Form

$$48) \qquad \varepsilon_0 = (\varepsilon_0) + (m+1)\Delta\pi + n\Delta\varphi - t\Delta\mu.$$

Gauss eliminiert aus diesen Gleichungen, deren Anzahl s sein mag, zunächst die Epoche ε_0, indem er das Mittel:

$$49) \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{s}\{\Sigma(\varepsilon_0) + \Delta\pi\,.\,\Sigma(m+1) + \Delta\varphi\,.\,\Sigma n - \Delta\mu\,.\,\Sigma t\}$$

nimmt und dieses von jeder der s Gleichungen abzieht; die entstehenden s Gleichungen für $\Delta\pi$, $\Delta\varphi$ und $\Delta\mu$ löst er dann nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Der weitere Verlauf der Rechnung zur Verbesserung der Werte von i und Ω ist derselbe wie im vorstehenden (S. 190); die Koeffizienten a und b können dabei in der Regel ihrer Kleinheit wegen fortgelassen werden, wodurch die Rechnung sich erheblich vereinfacht[1]).

Im Gegensatz zu dem soeben besprochenen Verfahren, das Gauss bei seinen Störungsrechnungen anwendet, steht das zweite direkte Verfahren zur Bahnverbesserung aus einer grösseren Reihe von Oppositionen, das sich in der *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis*, art. 10—14, findet. Gauss stellt hier die allgemein gültigen Gleichungen für die Differentialänderungen der heliozentrischen Länge und der geozentrischen Breite auf; nämlich[2])

$$50) \quad l = (l) + \frac{a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2 b}\Delta L + \frac{ta^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2 b}\Delta n + \left(\frac{\cos i}{\cos^2 b} - \frac{a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2 b}\right)\Delta\pi$$
$$+ \frac{a^2\cos i}{r^2\cos^2 b}(2 - e\cos E - e^2)\sin E\,\Delta\varphi$$
$$+ \left(1 - \frac{\cos i}{\cos^2 b}\right)\Delta\Omega - \operatorname{tg} b\cos(l-\Omega)\Delta i,$$

$$51) \quad \beta = (\beta) - \frac{a\sin\beta\sin(\beta-b)\operatorname{tg}\varphi\sin w}{r\sin b}\Delta L$$
$$+ \left\{\frac{2\sin\beta\sin(\beta-b)}{3\mu\sin b} - \frac{at\sin\beta\sin(\beta-b)\operatorname{tg}\varphi\sin w}{r\sin b}\right\}\Delta\mu$$
$$+ \frac{a\sin\beta\sin(\beta-b)\operatorname{tg}\varphi\sin w}{r\sin b}\Delta\pi + \frac{a\sin\beta\sin(\beta-b)\cos\varphi\cos w}{r\sin b}\Delta\varphi$$
$$+ \frac{2\sin\beta\cos(\beta-b)\cos b}{\sin 2i}\Delta i - \sin\beta\cos(\beta-b)\cos b\operatorname{ctg}(l-\Omega)\Delta\Omega.$$

1) Vergl. Werke VII, 1906, S. 482.

2) l = heliozentrische Länge,
β = geozentrische Breite,
(l) und (β) genäherte Werte der vorgenannten Grössen,
b = heliozentrische Breite.

Da es sich um Oppositionen handelt, so kann man statt l überall die geozentrische Länge nehmen und daher die Gleichungen mit sechs Unbekannten direkt nach der Methode der kleinsten Quadrate lösen. GAUSS bedient sich in der *Disquisitio* der Eliminationsmethode, die er dort ausführlich beschreibt.

Eine bequemere Form für die vorstehenden Gleichungen findet sich im *Handbuch* Be, S. 49; diese ist Werke VII, 1906, S. 311—312 abgedruckt.

4. Allgemeine Formeln zur Bahnverbesserung.

Allgemeine Formeln zur Bahnverbesserung, bei denen nicht vorausgesetzt wird, dass die Beobachtungen sich auf Oppositionen beziehen, hat GAUSS wohl nur bei seinen ersten Bahnbestimmungen angewandt; hier stellt sich die Rechnung weniger einfach. GAUSS schildert zwei verschiedene hierfür in Betracht kommende Methoden in grossen Zügen in der *Theoria motus*, art. 187—189, und mit Berücksichtigung der Störungen ebendort, art. 190—192. Die entsprechenden Differentialformeln gibt er in den art. 76—77 der *Theoria motus* und im *Handbuch* Be, Seite 56—57[1]); GAUSS scheint jedoch von ihnen kaum Gebrauch gemacht zu haben.

Über die ausführliche Begründung der Methode der kleinsten Quadrate, die GAUSS in der *Theoria motus* art. 175—186 gibt, ist an anderer Stelle berichtet worden[2]).

IV. Allgemeines über Gauss' störungstheoretische Arbeiten.

1. Einleitendes.

Für die Planeten Ceres und Pallas hat GAUSS Störungen berechnet, die Werke VII, 1906, in grösserem Umfange veröffentlicht worden sind. Während er die Pallas-Störungen nach einer mehr und mehr vervollkommneten Methode fast ganz durchgeführt hat, müssen die Berechnungen der Ceres-Störungen als Vorversuche bezeichnet werden; denn die hier angewandten Methoden waren noch wenig entwickelt, so dass — namentlich bei der Pallas — eine eingehendere Bestimmung der Störungen fast unüberwindlich lange Rech-

1) Werke VII, 1906, S. 296—297.

2) A. GALLE, *Über die geodätischen Arbeiten von Gauss*, Werke XI, 2, Abh. 1, S. 4—15.

nungen erfordert hätte. Während Gauss bei der Ceres Koordinatenstörungen anwendet, ist er nach längerem Schwanken, wofür er sich entscheiden solle, zuletzt bei der Pallas ganz zu Elementenstörungen übergegangen.

Er fand bei diesen Arbeiten Gelegenheit, seine mathematischen Untersuchungen anzuwenden, und zwar einerseits die über das arithmetisch-geometrische Mittel und die hypergeometrische Reihe, andererseits seine Interpolationstheorie. Er wird hiernach auf zwei grundsätzlich verschiedene Methoden geführt. Die erste beruht auf der analytischen Entwicklung der Störungsfunktion, wie sie auch schon von Laplace angewandt worden war: sie gibt die allgemeinen analytischen Ausdrücke für die Störungen als Funktionen der Elemente, sodass die Formeln für alle Planeten anwendbar sind, wenn die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt werden; Gauss benutzte dieses Verfahren bei der ersten Berechnung der Ceres-Störungen, bei der er sich auf die ersten Potenzen der Exzentrizität beschränkt und Koordinatenstörungen rechnet. Bei der Weiterführung der Rechnungen erwies sich diese Methode als nicht durchführbar. Die zweite Methode beruht auf der interpolatorischen Entwicklung der Störungsfunktion nach der *Theoria Interpolationis*[1]); sie ist die einzige, die in schwierigeren Fällen, wie sie z. B. Pallas bietet, durchführbar ist. Man erhält dabei nicht die allgemeinen analytischen Ausdrücke, die für jeden Planeten gelten, sondern die Entwicklung wird mit Zahlenwerten, entsprechend den Elementen eines bestimmten Planeten, ausgeführt und gilt nur für diesen. Gauss hat diese Methode bei der Pallas benutzt. Für die zweite Berechnung der Ceres-Störungen[2]) bedient sich Gauss eines gemischten Verfahrens, indem er die Entwicklungen teils analytisch, teils interpolatorisch ausführt. Er hatte damals wohl die Vorzüge des interpolatorischen Verfahrens erkannt, zögerte aber vielleicht, das analytische Verfahren ganz zu verlassen, weil er einen gewissen Wert auf die Anwendung seiner Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel legte, die beim rein interpolatorischen Verfahren ganz fortfällt.

2. Geschichtliches über Gauss' Störungsrechnungen.

Gauss spricht sich Olbers gegenüber in einem Briefe vom 25. Juni 1802 dahin aus, dass er zwar die Störungen der beiden entdeckten Planeten be-

1) Werke III, S. 265.

2) Werke VII, 1906, S. 401 f.

rechnen wolle, dass er es aber für voreilig halte, die Störungen der im März 1802 entdeckten Pallas schon jetzt vorzunehmen, ehe sie eine längere Zeit hindurch beobachtet sei; er schreibt in diesem Briefe: »Auf die Störungen eher Rücksicht zu nehmen, ehe die Pallas einen weit grössern Bogen beschrieben hat, scheint mir übrigens ziemlich überflüssig. Eine ohne Rücksicht auf dieselben den Beobachtungen genau angepasste Ellipse schliesst diese schon mit ein und muss sie eine geraume Zeit einschliessen. Es scheint mir daher nicht bloss eine unnötige, sondern selbst eine missliche Arbeit, von Grössen, deren kleine Unterschiede, und noch kleinere Unterschiede der Unterschiede, die Quelle unserer Kenntnis sein müssen, sehr grosse Quantitäten (wie die Störungsgleichungen gewiss bei Pallas sein müssen), die sich noch dazu bei dem jetzigen Zustande der Perturbationstheorie keineswegs sehr genau bestimmen lassen, erst abzuziehen, um sie nachher wieder hinzusetzen zu müssen. Wenn ich den Einfluss des Jupiter in diesem Jahre zu untersuchen Lust und Musse bekommen sollte, so würde ich einen andern Weg einschlagen und die Elemente selbst als veränderlich ansehen; ich vermute sogar, dass dies bei der Pallas überhaupt auch künftig vorzuziehen sein wird; denn wenn man, wie sonst gewöhnlich, den nach mittlern Elementen berechneten Ort durch Gleichungen wird verbessern wollen, so denke ich, werden diese so gross und zahlreich sein, dass wenigstens meine Geduld schwerlich zureichen würde, eine grosse Anzahl Örter auf diesem Wege zu berechnen. Ich denke fast, es wird immer leichter sein, einen Ort aus Elementen ohne Tafeln zu berechnen, als mit Tafeln vielleicht 30 oder 40 Gleichungen für Länge, Breite und Radiusvektor zu berechnen, und es scheint mir daher, dass es wohl vielleicht das Beste sein wird, dass man in den Tafeln wenigstens vor der Hand etwa von 3 Monat zu 3 Monat die veränderlichen oskulierenden rein elliptischen Elemente angibt. Vielleicht wäre dies selbst bei der Ceres nicht ohne Nutzen. — Übrigens glaube ich auch, dass die Pallas nach einigen Umläufen das beste Mittel sein wird, die Masse des Jupiter zu bestimmen.«

Schon in diesem Briefe deutet GAUSS an, dass die Berechnung der Elementenstörungen vermutlich den Vorzug vor der der Koordinatenstörungen verdiene; doch scheint er in dieser Frage später unschlüssig gewesen zu sein[1]), was darin seine Erklärung findet, dass es wesentlich von der angewandten Me-

1) Vergl. den folgenden Brief und S. 203.

thode abhängt, welche Berechnungsart vorzuziehen ist. Bei seiner zuletzt bei der Pallas angewandten rein interpolatorischen Methode erwies sich in der Tat die Form der Elementenstörungen als die vorteilhaftere.

Am 12. Oktober 1802 schreibt er an OLBERS: »Sollten Sie aber die ⚴ noch in der *Hist. Cél.* auffinden, so werde ich schwerlich der Begierde widerstehen können, davon noch Gebrauch zu machen. Doch bin ich selbst auf diesen Fall noch unschlüssig, ob ich die Elemente als veränderlich ansehen, oder die an die rein elliptisch berechneten Örter anzubringenden Störungen durch Quadraturen berechnen würde. Herr BURCKHARDT hat, wie ich aus der Monatl. Corr. sehe, die Perturbationen bloss nach den ersten Potenzen der Exzentrizität und Neigung berechnet; dies Verfahren, welches bei der ♀ vor der Hand mehrere Jahre hindurch völlig hinreichend sein wird, scheint mir bei der ⚴ wenig mehr zu helfen, als wenn man von den Störungen ganz abstrahiert. Überhaupt wird die Berechnung der Störungen der ⚴ künftig noch eine wahre Qual für die Analysten sein. Sich durch Quadraturen von einem Jahre zum andern hinzuhelfen, hat freilich alle zu verlangende Schärfe, allein man wird doch auch wünschen, und die Würde der Wissenschaft fordert, dass man künftig, wenn man erst hinlänglich Beobachtungen hat, den Ort für jede entferntere Zeit bestimme. Allein wenn man die Störungen auf die gewöhnliche Art durch Reihen ausdrücken will, so werden diese äusserst langsam konvergieren, und ich glaube, dass man, wenn man den Ort jedesmal auf 1″ genau berechnen will, vielleicht mehrere hundert Gleichungen für Länge, Breite und Radiusvektor nötig haben wird.« Er sagt weiter in diesem Briefe, dass er für Ceres nach den Elementen VII die Störungen berechnet, »aber bloss erst die erste Potenz der Exzentrizität in Betracht gezogen« habe.

Die letzten Worte beziehen sich auf die Werke VII, 1906, S. 377f. abgedruckte erste Berechnung der Ceresstörungen, die er sehr schnell durchführte und deren Ergebnisse bereits im Dezember 1802 veröffentlicht wurden[1]). Sie beruht im wesentlichen auf denselben Entwicklungen wie die LAPLACEschen Untersuchungen. Die gewonnenen Ergebnisse brachte er in einer zur Anwendung sehr bequemen Form in Tafeln, welche ebenfalls (Bd. VI, S. 235) veröffent-

1) Monatl. Corr., Bd. VI; Werke VI, S. 227.

licht sind. Die Rechnung sowie die Tafeln sind im folgenden (Seite 214 ff.) näher besprochen.

Gauss begnügte sich einstweilen mit diesen Ergebnissen. Er entwickelte sich nur, wie er im April 1803 an Olbers schreibt, die Differentialgleichungen für die Elementenstörungen, die er später anzuwenden gedachte; entsprechende Formeln finden sich in der *Scheda* AI, Seite 5.

Im Juni 1804 stellte die Pariser Akademie eine Preisaufgabe zur Berechnung der Störungen der kleinen Planeten, die sie in der »Gazette nationale ou le Moniteur universel« Nr. 281, Samedi 11 messidor an 12 de la Republique (30. Juni 1804), S. 1276 mit folgenden Worten bekannt machte:

Sujet du prix de Mathématiques.

»Donner la théorie des perturbations de la planète Pallas, découverte par M. Olbers.

Les géomètres ont donné la théorie des perturbations avec une étendue et une exactitude suffisantes pour toutes les planètes anciennes connues, et pour toutes celles qu'on pourra découvrir encore, tant qu'elles seront renfermées dans le même zodiaque, et qu'elles n'auront qu'une excentricité peu considérable. Mercure était jusqu'à nos jours la plus excentrique de toutes les planètes, et en même temps celle qui avait l'inclination la plus forte; mais son peu de masse et sa position à l'une des limites du système planétaire la rendent peu propre à causer des altérations bien sensibles dans les mouvements des autres planètes. Uranus, découvert il y a vingt-trois ans par M. Herschell, se trouve placé à l'autre limite du système. Avec peu de masse et une excentricité médiocre, il a encore la plus petite de toutes les inclinations connues; en sorte que les formules qui avaient servi pour Jupiter et Saturne ont été plus que suffisantes pour cette planète moderne. Cérès, découverte il y a quatre ans par M. Piazzi, ayant avec une excentricité assez considérable, une inclination de $10^0\,38'$, doit être sujette à de fortes et de nombreuses inégalités. Il paraît cependant que tous les astronomes qui ont travaillé à les déterminer se sont contentés des formules connues, dont le développement ne passe pas le produit de trois dimensions des inclinations et des excentricités. Ceux de cinq dimensions ont été employés dans la *Mécanique céleste* pour un cas particulier, d'après une formule de M. Burck-

HARDT. Le même astronome a présenté depuis à l'Institut national le développement général et complet des troisième, quatrième et cinquième ordres; mais ce degré de précision ne suffirait certainement pas pour la planète Pallas, dont l'excentricité est plus forte même que celle de Mercure, et l'inclination de $34^0\,37'$, c'est à dire cinq fois plus grande que celle d'aucune autre planète connue. Il est même difficile de conjecturer quelles seront les puissances et quelles seront les dimensions des produits qu'il sera permis de négliger, et les calculs pourraient être d'une longueur, et les formules d'une complication telles qu'elles pourraient effrayer les astronomes les plus en état d'exécuter un pareil travail. Cette considération a déterminé la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut national de France à proposer ce sujet pour le prix qu'elle doit distribuer dans sa séance publique du premier lundi de messidor an 14. En conséquence, elle invite les géomètres et les astronomes à discuter complètement toutes les inégalités de cette théorie, et à n'en omettre aucune qui ne soit reconnue entièrement négligeable; et comme ces inégalités pourraient varier assez sensiblement si les éléments elliptiques n'étaient pas encore assez exactement connus, il est indispensable que les concurrents ne se bornent pas à donner les coëfficients numériques des équations, ils doivent aussi donner les coëfficients analytiques, afin que l'on puisse y mettre les valeurs les plus exactes de la distance moyenne, de l'excentricité, de l'aphélie et de l'inclination, lorsque ces éléments seront mieux connus. Il résultera de ces coëfficients analytiques un autre avantage; ce que les planètes Cérès et Pallas, étant à des distances du Soleil si peu différentes, qu'il est même aujourd'hui très-difficile de dire laquelle des deux est la plus voisine ou la plus éloignée, la formule donnée pour Pallas pourra, sans beaucoup de changements, servir aussi pour Cérès, ainsi que pour toute autre planète qu'on pourrait découvrir par la suite, et dont on aurait de cette manière une théorie plus complète et plus certaine. La classe espère que la question paraîtra assez intéressante aux astronomes, pour qu'ils y donnent des soins proportionnés à la difficulté du sujet. Le prix sera une médaille d'or, d'un kilogramme.

Les ouvrages envoyés au concours devront être inscrits en français ou en latin, et ne seront reçus que jusqu'au 1^{er} germinal an 14. Ce terme est de rigueur.«

GAUSS schreibt darüber an OLBERS am 24. Juli 1804: »Dass das Nationalinstitut in Paris auf die Theorie der ♁-Störungen einen Preis gesetzt hat, weiss ich bloss vom Hörensagen, da ich Zeitungen nur unordentlich zu lesen pflege. Steht vielleicht im Moniteur oder sonstwo das Programm in extenso, so bitte ich um Nachweisung der Nummer. Mir deucht eine solche weitläufige Arbeit fast noch zu voreilig. Wenn indes in diesem Jahre recht gute Meridianbeobachtungen gemacht und vom vorigen noch welche bekannt werden (ohne welche man die Neigung der Bahn und mehreres nur erst beiläufig bestimmen kann) — vielleicht werden sich in der Conn. des tems XIV., die ich noch nicht gesehen, noch welche von BOUVARD, oder von dem Observat. de l'école militaire, von BURCKHARDT oder LE FRANÇOIS finden —, so bin ich unter gewissen Umständen wohl geneigt, mich auf die Arbeit einzulassen« und am 7. September desselben Jahres: »Das Programm im Moniteur wegen des Preises habe ich neulich gelesen. Einer solchen Art, die Störungen der Pallas zu behandeln, wie sie da verlangt wird, nämlich mit Hülfe analytischer Formeln, in denen man bloss die andern Elemente eines andern Planeten, z. B. der ♀, schlechtweg substituieren darf, um dessen Störungen zu finden, fühle ich meine Geduld nicht gewachsen; aber vornehmen werde ich nach meiner Manier die Pallasstörungen gewiss, obwohl wahrscheinlich die ♀-Störungen früher. Denn auch bei der ♀ scheint durch dasjenige, was ich bisher von den Störungen mitgenommen habe, noch wenig gewonnen zu sein. Etwas sonderbar scheint es mir, dass das Nationalinstitut selbst gesteht, dass die analytischen Formeln, wodurch es nun einmal das Problem gelöst wissen will, wohl so verwickelt sein möchten, dass sie auch den allergewichtigsten Astronomen abschrecken müssen.«

Im Januar 1805 bemerkte GAUSS, dass seine Ceres-Störungen, namentlich die Sekularveränderung der Neigung und des Knotens, schlecht mit den Beobachtungen stimmten. Es war dies wohl die Folge eines Rechenfehlers; GAUSS scheint sich nicht die Mühe genommen zu haben, diesen aufzusuchen. Er begann vielmehr, jetzt auch die Entwicklungen für die zweiten Potenzen der Exzentrizität nach der gleichen Methode auszuführen; diese seine Untersuchungen finden sich im *Handbuch* Bc, S. 50—54, und brechen auf der letzteren Seite gänzlich ab, da die Entwicklungen zu umständlich wurden; er schreibt am 10. Mai 1805 an OLBERS: »Die Methode, nach der ich die ♀-Störungen zu

berechnen angefangen hatte, habe ich doch wieder aufgegeben. Das gar zu viele mechanische tote Rechnen, was ich dabei vor mir sah, hat mich abgeschreckt; auch selbst wenn alle Rechnungen, die ich Fremden hätte übertragen können, von Herrn Bessel und Herrn v. Lindenau (der sich gleichfalls mich bei dergleichen Arbeiten zu unterstützen gefälligst erboten hat) übernommen wären, würde für mich noch mehr übrig geblieben sein, als meine Geduld hätte bestreiten können.

»Ich habe indessen bereits eine andere Methode ausgesonnen, die ebenso weit führen kann, als jene, aber bei weitem weniger — obwohl künstlichere — Arbeit erfordert. Ich habe schon stark angefangen, sie auf die Ceres anzuwenden, wiewohl vorerst nur nach einem eingeschränktern Plane, indem ich nur bis an die 5. Potenzen der Exzentrizitäten von ♃ und ♀ gehe. Diese Methode hat um so mehr Reiz für mich, da ich dabei von vielen, schon vor längerer Zeit angestellten, ziemlich tiefen Untersuchungen über eigene Arten von transzendenten Funktionen einen glücklichen Gebrauch machen kann. Ich werde in der Folge Ihnen eine Idee davon zu geben suchen. Auch hoffe ich, dass ich im Stande sein werde, alles so einzurichten, dass ich durch eine fremde Unterstützung eine ansehnliche Erleichterung erhalte, zwar nicht bei meiner diesmaligen Rechnung für die ♀ (denn gerade in dem Teile, wo Hilfe zu brauchen wäre, bin ich schon selbst zu weit vorgerückt), aber doch wenn ich dieselbe wiederhole, welches nötig sein wird, da ohne Zweifel die erweiterten Störungsgleichungen noch mit ansehnlichen Änderungen in den Elementen selbst verbunden sein werden — oder auch wenn ich einst diese Arbeit bei der ♃ und ♅ vornehme, wo sie beträchtlich weitläufiger sein wird.«

Die von Gauss hier erwähnte »andere Methode«, die er »ausgesonnen«, beruht einerseits auf seinen Untersuchungen über Interpolationstheorie, über die er an Olbers am 3. Januar 1806 schreibt, andererseits auf den Entwicklungen, die er im Briefe an Bessel vom 3. September 1805[1]) auseinandersetzt. Es ist die oben (S. 195) erwähnte gemischte Methode, nach der die zweite Berechnung der Ceresbahn ausgeführt worden und die unten S. 227f. besprochen ist. Gauss hat nach ihr nur die Breitenstörungen berechnet, die am leichtesten durchzuführen waren, und gerade nach der ersten Rechnung

1) Werke X, 1, S. 237.

nicht gestimmt hatten. Im weiteren erwies sich auch diese Methode ihrer Weitläufigkeit wegen als nicht durchführbar. Er schreibt an OLBERS am 2. Juli 1805: »Mit meiner Rechnung der Störungen der ☿ bin ich leider noch nicht fertig. Teils habe ich nicht immer anhaltend daran gearbeitet, teils habe ich auch daran bei weitem mehr Mühe gehabt, als ich vorher glaubte, hie und da auch wohl mehr, als notwendig gewesen wäre. Aber die zweckmässigste Ausübung einer Methode lernt man erst bei ihrer Anwendung. Mit den Störungen der Breite hatte ich angefangen. Ich hatte bei meiner ersten Rechnung alles, was von den Exzentrizitäten abhing, übergangen; ORIANI hatte nur ein Glied mitgenommen. Nunmehr habe ich alle Gleichungen, die ich über 1″ fand, mitgenommen, worunter auch ein paar sind, die von dem Produkte der Exzentrizitäten abhängen, also (da ohnehin in alle Breitengleichungen die Neigung entriert) von der Ordnung 3 sind. Von dieser Arbeit habe ich nun gewissermassen auch schon Früchte geerntet. Sie erinnern sich, dass ich mich schon seit 1803 beklagt habe, dass sich die Breiten in der ☌ von 1803 mit denen von 1801 nach der aus der Theorie gefundenen Bewegung des ☊ nicht mehr vereinigen liessen, und dass ich gezwungen war, den ♈ 1803 um 3′ weiter zu rücken. Ebenso stimmte in der ☌ 1804 die Breite nicht mit der von 1802; die Neigung musste weit mehr verringert werden, als die Theorie angab.

»Bei meinen neuesten Elementen musste ich dem ☊ eine tägliche tropische Bewegung von 0″,241, und der Neigung eine tägliche Abnahme von 0″,0243 geben, um die Beobachtungen zu vereinigen, so dass

☊ 1801 Jan. 1. $80^0\,54'\,46''$ Neigung 1802 ☌ $10^0\,38'\,1''$
1803 ☌ $80^0\,58'\,28''$ 1804 ☌ $10^0\,37'\,38''$.

»Zu meiner grossen Freude ist dieses nun nicht mehr nötig, und die Beobachtungen stimmen jetzt mit den neuen Breitengleichungen und Sekularbewegungen recht gut.«

Die Fehler in den Breitenstörungen waren damit allerdings behoben. GAUSS scheint nun aber nach allen Richtungen hin Versuche gemacht zu haben, die Methoden der Störungsrechnungen zu verbessern, und vor allem die ermüdenden langwierigen Entwicklungen und Rechnungen abzukürzen, nachdem er sich davon überzeugt hatte, dass die LAPLACEsche Methode der

Koordinatenstörungen, ebenso wie die von ihm selbst zunächst bei der Ceres angewandte, bei den kleinen Planeten nicht durchführbar ist. Zunächst versuchte er die Rechnung durch Entwerfen von Tafeln abzukürzen, die gleichzeitig auch für die anderen Planeten anwendbar waren.

Diese Tafeln beruhen auf der Entwicklung des Ausdruckes

$$(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}},$$

bei der ihn BESSEL wesentlich unterstützte (vergl. unten S. 231); sodann aber ruhten seine Arbeiten über Störungstheorie fast vollständig bis zum August 1810. Er beklagt sich bei OLBERS über das viele mechanische tote Rechnen und es mögen ihn in der Tat die langwierigen Rechnungen, die die von ihm benutzte Methode noch immer erforderte, von der Fortsetzung dieser Arbeiten abgeschreckt haben. Dazu kamen noch andere Gründe: seine im November 1807 erfolgte Übersiedlung nach Göttingen[1]), der Tod seiner Frau und seines Sohnes, die Drucklegung der *Theoria motus* und vielleicht auch die traurigen politischen Verhältnisse; auch hat er sich in dieser Zeit vielfach nicht wohl gefühlt und klagt gegenüber OLBERS (im Briefe vom April 1810) besonders über den unglücklichen Winter 1809/10[2]). Die Weiterführung der Ceres-Störungen ist gänzlich unterblieben. Im Jahre 1810 beginnt er indessen, einen grossen Teil seiner Zeit den Störungen der Pallas zu widmen.

Entsprechend seinen Äusserungen OLBERS gegenüber (oben S. 196), dass die Berechnung der Störungen erst dann sich lohnen würde, wenn Pallas durch eine längere Reihe von Oppositionen hindurch beobachtet sei, untersucht er zunächst in der ersten Hälfte des Jahres 1810, wahrscheinlich im Frühsommer, ob sich bereits eine Einwirkung der Störungen nachweisen lässt; die entsprechenden Untersuchungen hat er in der *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis . . . oppositionibus annorum* 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809[3]) veröffentlicht. Die Ergebnisse zeigen die starke Einwirkung der Störungen; die Differenzen in der Länge betragen bis zu $3\frac{1}{2}'$ und die in der Breite fast $1\frac{1}{2}'$.

Inzwischen hatte die Pariser Académie des Sciences den schon im Jahre 1804 ausgesetzten Preis auf die Berechnung der Störungen der Planeten immer

1) Vergl. oben S. 41.

2) Vergl. oben S. 54.

3) Werke VI, S. 1.

von neuem aufgeschoben; GAUSS schreibt an OLBERS am 24. Oktober 1810: »Wüsste ich, dass das Institut die Preisfrage noch einmal prorogierte, so wäre ich nicht abgeneigt, die Pallas dazu zu wählen, sonst muss billig die Ceres den Vortritt haben, wo auch, weil bald die achte ☿ beobachtet wird, eine grössere Satisfaktion zu erwarten ist. Bei der ⚴ würde ich doch wohl zuerst anfangen, die Elemente als variabel anzusehen und ihre Störungen während 7 Jahren durch Quadraturen zu bestimmen, wozu ich mir Formeln entworfen habe, die mir etwas bequemer scheinen als die LAPLACEschen. Falls es dann gelingt (wie es nicht anders zu erwarten ist), die 6 bisher beobachteten Oppositionen, die sich gar nicht mehr in eine Ellipse fügen wollen, gut zu vereinigen, so würde ich nach meiner schon vor 4 oder 5 Jahren entworfenen Methode die Störungen in der sonst üblichen Form, als periodische Störungen der Länge, der Breite und des Radiusvektor, oder noch besser seines Logarithmen berechnen.«

Danach beabsichtigte er zur Vorbereitung zuerst spezielle Störungen zu rechnen und zwar für die Elemente und sodann allgemeine Störungen für die Koordinaten. Auch hier zeigt sich, dass er zum Teil noch immer an den letzteren festhielt, obwohl er schliesslich ganz zu Elementenstörungen überging; denn er hat später auch bei den allgemeinen Störungen der Pallas Elementenstörungen benutzt.

Am 26. November 1810 berichtet er OLBERS über seine Berechnung der speziellen Störungen und wiederholt, dass er vielleicht auch die allgemeine Theorie der Störungen unternehmen wolle. Er fragt, ob OLBERS »durch seinen Wink in Paris eine nochmalige Verlängerung der Preisfrage veranlassen« könne. Die hier erwähnte Berechnung der speziellen Störungen bezieht sich auf die Werke VII, 1906, S. 473—482 abgedruckte erste Rechnung[1]).

Am 13. Dezember 1810 schreibt GAUSS an OLBERS, dass er die Rechnung vollendet und eine seine »kühnste Erwartung übertreffende Übereinstimmung herausgebracht« habe. Abgesehen von der schlecht beobachteten Breite der 5. Opposition (1808), die um 16″ abweicht, ist die grösste Abweichung 6″. Andererseits zeigte sich, dass die letzte von GAUSS auf Grund rein elliptischer Elemente abgeleitete und in der Monatl. Corr. veröffentlichte Ephemeride

1) Vergl. unten S. 233, 234.

schon über 1^0 falsch war. Er erwähnt in diesem Brief auch, dass er angefangen habe, die Rechnung der speziellen Störungen nochmals schärfer (die erste Rechnung berücksichtigte nur die Störungen erster Ordnung) auszuführen; im Dezember wurde er hiermit fertig.

Diese zweite Rechnung ist Werke VII, 1906, S. 483f. abgedruckt; sie ergab im wesentlichen eine ebenso gute Darstellung der Oppositionen, wie die erste. Da schon die Ergebnisse der ersten Rechnung so befriedigend waren, konnte eine noch bessere Übereinstimmung kaum erwartet werden und die übrigbleibenden sehr kleinen Fehler sind auf die Einwirkung der übrigen Planeten zu setzen. GAUSS berichtet über diese seine Rechnungen in der Monatl. Corr., Dezember 1810 und Januar 1811 [1]) und sagt dort, dass er die Rechnung auch deswegen wiederholt habe, »weil bei dieser weitläufigen Arbeit hier und da Fehler sich eingeschlichen haben konnten.« Kleinere Fehler lassen sich in der Tat nachweisen und auch hieraus geht hervor, dass GAUSS in der Regel auf eine genaue Prüfung seiner einzelnen Rechnungen verzichtete und es vorzog, selbst eine längere Rechnung ganz von neuem zu wiederholen.

Im Juli oder August 1811 begann GAUSS die Berechnung der allgemeinen Störungen der Pallas. Er äussert sich jetzt über die Vorteile, die die Elementenstörungen bieten, in einem Briefe an OLBERS vom 12. August 1811; nachdem er die Rechnung für die Neigung und die Knotenlänge vollendet hatte: »Die 80 Gleichungen für Inklination und ☊ liessen sich in 40 für die Breite zusammenziehen, ich glaube aber nicht, dass etwas gewonnen wird, denn wenn man die Elemente selbst stören lässt, so kann man ohne Bedenken einerlei gestörte Elemente als mehrere Monate gültig ansehen, und braucht also alle Jahre nur einmal für 6 Elemente die Störungen zu berechnen (vielleicht zusammen etwa 300—400 Gleichungen); dahingegen, wenn man bei den Elementen bloss Sekularänderungen anbringt und die periodischen bei Breite, Länge und Radiusvektor (zusammen vielleicht gegen 200), diese in einem Jahre doch wohl wenigstens für 6 verschiedene Örter berechnet werden müssten, um interpolieren zu können. Doch kann man dies in der Folge machen, wie man will, wenn nur erst alle Störungen in irgend einer Form da sind.«

---

1) Werke VI, S. 320—324.

Auch für die allgemeinen Störungen liegen zwei vollständige Rechnungen vor, die beide gänzlich auf der interpolatorischen Methode beruhen.

Die erste Rechnung[1]), bei der die 5. Potenzen der Exzentrizitäten und die 23. Potenzen des Verhältnisses der halben grossen Axen $\alpha = \frac{a}{a'}$ berücksichtigt sind, dürfte im März 1812 vollendet worden sein. GAUSS verglich die Ergebnisse mit den Beobachtungen (den Oppositionen) und bestimmte die mittleren Elemente. Bei dieser Bestimmung scheint er die merkwürdige Entdeckung gemacht zu haben, dass die mittleren Bewegungen von Jupiter und Pallas sich wie 7 : 18 verhalten. Er schreibt darüber an BESSEL am 5. Mai 1812: ». . . habe ich mich hauptsächlich mit den Pallasstörungen durch Jupiter beschäftigt. Sie werden darüber in Nr. 67 unserer Gelehrten Anzeigen einiges gelesen haben. Ihnen teile ich das merkwürdige, daselbst in einer Chiffre niedergelegte Resultat gern mit, doch mit der Bitte, dass es vorerst ganz unter uns beiden bleibe. Es besteht darin, dass die mittlern Bewegungen von ♃ und ♀ in dem rationalen Verhältnis 7 : 18 stehen, was sich durch die Einwirkung Jupiters immer genau wieder herstellt, wie die Rotationszeit unsers Mondes. Ich habe mit einer zweiten Berechnung der periodischen Störungen bereits einen Anfang gemacht . . .«

Die gleiche Mitteilung hat er in einem kürzlich aufgefundenen Briefe an OLBERS[2]) gemacht; beide bittet er, über diese Entdeckung vorläufig zu schweigen; er legt sie indessen in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom 25. April 1812[3]) in der Chiffre

1111000100101001

nieder, zu der er »zu seiner Zeit den Schlüssel geben« wollte. Das Letztere ist nun unterblieben und bei der Art und Weise, wie solche Chiffren gewählt zu werden pflegten, darf man auch nicht hoffen, die Lösung zu finden. Da man indessen aus dem Briefwechsel weiss, was sie bedeutet, so ist das auch gegenstandslos[4]).

1) Vergl. unten S. 235 ff.

2) Werke XII, S. 243. Siehe auch die Antwort von OLBERS, Werke VII, 1906, S. 421.

3) Werke VI. S. 350.

4) Im dyadischen System gibt 111 die Zahl 7 und 10010 die Zahl 18.

Im Nachlass haben sich nur vereinzelte ganz spärliche Notizen über diese Entdeckung auffinden lassen; sie sind Werke VII, 1906, S. 557—559 mit den nötigen Ergänzungen abgedruckt[1]).

Von vornherein besteht kein Zweifel, dass GAUSS hier die Erscheinung meint, die LAPLACE bereits bei den Jupitersmonden entdeckt hatte[2]) und die auch in der Theorie der kleinen Planeten eine Rolle spielt. Die Analogie mit der Rotation des Mondes, auf die GAUSS hinweist, ist allerdings nur eine äusserliche; sie hat aber wohl schon LAPLACE veranlasst, den Ausdruck Libration dafür zu gebrauchen.

GAUSS schreckte nicht davor zurück, die ganze gewaltig umfangreiche Rechnung der allgemeinen Störungen zu wiederholen[3]) und dabei schärfer zu rechnen, indem er die 11. Potenzen der Exzentrizität berücksichtigte. Er begann diese Arbeit sofort im April (oder schon Ende März) 1812.

Über den ersten Teil dieser Rechnung hat GAUSS ein ausführliches *Tagebuch* geführt, das vom 5. April bis zum 25. November 1812 reicht und angibt, welche Rechnungen er an einzelnen Tagen vollendet, wieviel Ziffern er gerechnet hatte, wieviel noch zu rechnen übrig waren, und wann diese voraussichtlich fertig sein würden. Dies *Tagebuch* ist Werke VII, 1906, S. 605—607 abgedruckt; mit *Präparation der Jupiter- und der Pallasörter* bezeichnet GAUSS die Berechnung der Koordinaten dieser Planeten, aus denen weiter die Komponenten T, V, W der Störungsfunktion folgen.

Bei der Berechnung der Koordinaten, die im *Handbuch* Bc, S. 97—99 steht, finden sich auch Notizen, nach denen GAUSS in der Tat die Ziffern gezählt hat, die er beim Rechnen hat schreiben müssen. Eine Nachzählung der Ziffern würde schon an sich eine gewaltige Arbeit sein.

Fast das ganze *Tagebuch* handelt, bis 9. Juli, nur von der Berechnung und Interpolation der Grössen T, V, W.

Nach dem *Tagebuch* erforderte diese das Schreiben von 338400 Ziffern, dagegen die Berechnung der Störungen der halben grosse Achse 51040, und die für Knoten, Neigung und Exzentrizität zusammen circa 140000. Die ganze Arbeit wird man daher wohl auf 7—800000 Ziffern schätzen können.

---

1) Vergl. unten S. 245.

2) *Mécanique céleste*, t. IV, 1805, S. 16 und 64 f.

3) Vergl. unten S. 237.

Gauss' tägliche Leistung bewegt sich zwischen 2600 und 4400 Ziffern und beträgt im Durchschnitt 3500. Man darf wohl annehmen, dass Gauss' Zeit zwischen dem 5. April und 25. November 1812 fast ausschliesslich mit diesen Rechnungen ausgefüllt war. Dabei umfassen die schliesslichen Störungsausdrücke einschliesslich der sekularen Störungen:

im Knoten	105	Störungsglieder
in der Neigung	105	»
in der Perihellänge	184	»
im Exzentrizitätswinkel	124	»
im Logarithmus der halben grossen Achse	145	»
in der mittleren Länge in der Epoche	161	»

Die zweite Rechnung der allgemeinen Jupiterstörungen der Pallas hatte Gauss im Juli 1813 vollendet; aber erst im Herbst 1816 begann er, deren Ergebnisse in Tafeln zu bringen, durch die die Berechnung der Störungsbeträge, die sonst einzeln aus den Störungsgleichungen berechnet werden müssen, ausserordentlich erleichtert wird; diese Tafeln sind vollkommen erhalten und Werke VII, 1906, S. 572—577 abgedruckt. Ihre Berechnung wurde zum grossen Teil von Encke ausgeführt und sie wurden im Spätherbst 1817 fertig.

Die Störungen der Pallas durch Saturn und Mars sind nicht bedeutend; schon im Frühjahr 1813 dachte Gauss daran, auch sie zu berücksichtigen. Die ersteren zu berechnen übernahm in jener Zeit Nicolai, und zwar nach einer Methode, die sich nur in unwesentlichen Punkten von der von Gauss bei den Jupiterstörungen benutzten unterscheidet. Sie wurden im Juli 1815 vollendet. In Gauss' Nachlass finden sich die Briefe von Nicolai an Gauss nebst den Rechnungsergebnissen von Nicolai; die Rechnungen selbst werden auf der Heidelberger Sternwarte aufbewahrt. Von Gauss' Hand findet sich darüber nirgends etwas vor.

Wie Gauss verschiedentlich an Olbers berichtet[1]), verschlechterte die Berücksichtigung der Saturnstörungen erheblich die sonst gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen, und es hat sich nicht aufklären lassen, ob sich bei den Nicolaischen Rechnungen ein Fehler eingeschlichen hat oder ob der

1) Briefe an Olbers vom 15. Juni 1814, 2. Dezember 1817.

Grund wo anders zu suchen ist. Es wäre auch heute noch von Interesse, diese Rechnungen nochmals durchzusehen und womöglich zu veröffentlichen. Im Briefe an OLBERS vom 15. Juni 1814 sagt GAUSS, dass die Übereinstimmung besser wird, wenn er allen Störungen der Epoche das entgegengesetzte Vorzeichen gibt. Da nach Werke VII, 1906, S. 587 bei den Störungen durch Mars die gleichen Formeln mit entgegengesetztem Vorzeichen benutzt sind, so liegt der Verdacht eines Fehlers im Vorzeichen allerdings nahe.

Die Berechnung der Störungen der Pallas durch Mars sollte nach einem Briefe von GAUSS an OLBERS vom 8. April 1813[1]) anscheinend ENCKE übernehmen; indessen sehen wir, dass GAUSS selbst 1814 mit dieser Berechnung beginnt und dabei teilweise eine neue besondere Methode anwendet, die man wieder, wie die zweite Rechnung der Ceresstörungen, als eine gemischt analytische und interpolatorische bezeichnen kann, und bei der er das Verhalten der Funktion $r^2 + r'^2 - 2rr' \cos w$ im komplexen Gebiet untersucht[2]).

Schon im Sommer 1802 äussert sich GAUSS in Briefen an OLBERS dahin, dass die neuen Planeten und insbesondere Pallas ein vorzügliches Mittel bieten werden, um die Jupitermasse zu bestimmen und im April 1814 machte er den ersten Versuch hierzu, indem er auch diese Masse in die Gleichungen zur Verbesserung der Elemente einführte; die entsprechende Rechnung ist Werke VII, 1906, S. 562f. abgedruckt. Er fand hier den Wert $\frac{1}{1042{,}86}$. Nach einer späteren Rechnung, über die er im Briefe an OLBERS vom 24. Juli 1816 berichtet und bei der die Saturn- und Marsstörungen berücksichtigt sind, fand er die Jupitermasse gleich $\frac{1}{1050}$, also einen sehr genauen Wert, da sie nach den besten Bestimmungen von NEWCOMB $\frac{1}{1047{,}4}$ beträgt.

Die Rechnung der Marsstörungen ist der einzige Teil von GAUSS gewaltigem Unternehmen über die Pallas, der nicht vollendet ist und hier war die noch zu leistende Arbeit sehr gering.

Die Pariser Preisfrage war inzwischen auf das äusserste bis zum Jahre 1816 hinausgeschoben worden. OLBERS schreibt an GAUSS am 25. Januar 1815: »Ich hoffe doch . . . Sie werden Ihre Methode dem Pariser Institut mitteilen. Nur Ihretwegen hat man den Preis so lange offen gelassen.« GAUSS kam aber nicht dazu, die Arbeit fertigzustellen und einzusenden; er schreibt an OLBERS

1) Werke VII, 1906, S. 422.

2) Vergl. unten, S. 249 ff.

am 8. Januar 1816: »Sollte der Preis nunmehr ausgegeben oder zurückgenommen sein, so würde ich meine Theorie nunmehr entweder stückweise in den Kommentaren oder auch in einer besondern Schrift herauszugeben denken«. Es scheint, dass man GAUSS nochmals Gelegenheit geben wollte, sich um den Preis zu bewerben; denn OLBERS schreibt ihm am 7. März 1816: ». . . Jetzt eile ich nur, Ihnen wegen der Preisaufgabe zu Paris, wenn sie es etwa noch nicht erfahren haben sollten, das Nähere zu melden. Der Ausspruch über den Preis wegen der Perturbationen der Planeten, namentlich der Pallas, ist wieder bis zum Jahr 1817 vertagt worden. Doch müssen die Schriften vor dem 1. Oktober 1816 eingesandt sein. Die Preisfrage war: »»Die Theorie der Planeten, deren Exzentrizität und Neigung zu gross sind, als dass wir im Stande wären, ihre Störungen nach den schon bekannten Methoden genau zu berechnen««. Die Klasse verlangt keine numerische Anwendung, sondern nur analytische Formeln, aber so eingerichtet, dass ein geschickter Rechner fähig sei, sie mit Sicherheit entweder auf den Planeten Pallas, oder auf einen andern der neu entdeckten oder noch zu entdeckenden Planeten anzuwenden. — Es waren nur zwei Abhandlungen eingelaufen, deren Verfasser aber die ausgesprochene Absicht der Klasse in der Preisankündigung nicht genug berücksichtigt haben. Beide (besonders der eine) haben noch zu mancherlei analytische Entwicklungen vorbeigelassen, die die Mathematiker noch erst machen müssten, um sie in den Stand zu setzen, die Auflösung des Problems, die sie gegeben haben, verstehen und beurteilen zu können. Sie haben es zu sehr versäumt, sich bis zu dem Standpunkte des Kalkulators herabzulassen, der nun wünschen sollte, Tafeln für die Pallas oder irgend einen andern Planeten zu bilden. Die Nachträge, die sie zu verschiedenen Zeiten eingeschickt haben, sind weit entfernt, alle diese Schwierigkeiten zu heben. Da die Klasse aus diesen Nachträgen und aus den eingeschickten Noten der anonymen Verfasser ersehen hat, dass sie nicht Zeit hatten, sich in alle die notwendigen Entwicklungen einzulassen, und zugleich in Erwägung zieht, dass auch vielleicht andere Mathematiker, die die Fähigkeit und Geschicklichkeit besitzen, diesen schwierigen Gegenstand zu behandeln, aus derselben Ursache abgehalten worden sind, als Preisbewerber aufzutreten, so hat sie die Preisausteilung noch bis Januar 1817 ausgesetzt. — Der Preis ist doppelt, eine goldene Medaille, 6000 Francs wert . . .«

Im oben erwähnten Brief an Olbers vom 8. Januar 1816 sagt Gauss, dass er seine Theorie jetzt ausarbeiten wolle; wahrscheinlich war zu dieser Zeit die Werke VII, 1906, S. 439—472 abgedruckte Handschrift, von der zwei Entwürfe im Nachlass vorhanden sind, zum Teil schon entstanden; man wird jedenfalls den zweiten Entwurf in das Jahr 1816 setzen müssen, während der erste auch schon vor diesem Briefe, also 1815, abgefasst sein könnte.

Da das Manuskript in französischer Sprache geschrieben ist, so war es wohl für die Einsendung nach Paris bestimmt; aber auch bis zu dem letzten von der Pariser Akademie gesetzten Termin, dem 1. Oktober 1816, wurde Gauss nicht fertig. Im Briefwechsel mit Olbers finden sich keine weiteren Anspielungen auf diese Angelegenheit; Gauss war in dieser Zeit sehr stark mit der Einrichtung der neuen Sternwarte beschäftigt und reiste im April zur Besprechung mit Reichenbach und Fraunhofer über instrumentelle Einrichtungen nach München[1]); vom Juli 1816 bis Februar 1817 ruhte der Briefwechsel mit Olbers ganz. Jedoch setzte Gauss daneben zunächst noch seine Arbeiten über Pallas fort. In das Jahr 1817 fällt, wie oben erwähnt, die Entwerfung der Tafeln für die Jupiterstörungen. Im März 1818 hatte er die zwölf Oppositionen aus den Jahren 1803—1817 verglichen und daraus neue mittlere Elemente bestimmt; er teilt dies Encke in einem Brief vom 25. März 1818 mit und bittet ihn, nun auch »die scharfe Vergleichung der sämtlichen Meridianbeobachtungen der Pallas vom April und Mai 1802 mit den oskulierenden Elementen zu übernehmen«.

Diese Rechnung hat Encke auch ausgeführt.

In der Folgezeit kam Gauss nicht wieder dazu, sich mit der Pallas oder überhaupt mit Fragen der theoretischen Astronomie eingehend zu beschäftigen. Neben den Untersuchungen und den Beobachtungen mit den neuen für die Sternwarte erworbenen Instrumenten war es vor allem seit dem Jahre 1820 die Hannoversche Landesvermessung, die ihn in Anspruch nahm. Er schreibt am 17. März 1822 an Schumacher: ». . . Was die Pallastafeln betrifft und die letzten Elemente, so sind alle darauf Bezug habenden Papiere so vereinzelt, dass es mir jetzt platterdings unmöglich ist, mich gleich wieder so hineinzustudieren, dass ich zur zuverlässigen Berechnung Anleitung geben könnte. Falls nicht noch etwas dazwischen kommt, was dieses Jahr die Fortsetzung meiner

1) Vergl oben S. 85.

Messungen suspendiert oder verhindert, so müssen die Astronomen sich diesmal helfen so gut sie können . . .« und am 8. Februar 1834 an GERLING »Ich habe dieser Tage (nach mehrjähriger Unterbrechung) die der Opposition nahe Pallas zu beobachten angefangen, wo ENCKES Ephemeride etwa 5′ fehlt. Es ist mir dabei ein schmerzlicher Gedanke, dass meine vor mehr als 20 Jahren gemachte Arbeit über die Pallasstörungen ohne Fortsetzung, Entwicklung und Bekanntmachung bisher hat bleiben müssen, auch wahrscheinlich wie vieles Andere einst mit mir untergehen wird. Sie glauben nicht, wie schwer es mir durch so vielfache Zersplitterung der Zeit so wie unter dem Druck so mancher Verhältnisse[1]) wird, eine wissenschaftliche Arbeit durchzuführen . . .« und endlich in einem Briefe an BESSEL vom 21. März 1843: »Die erste Abhandlung[2]) über die Jupitermasse hat bei mir eine Erinnerung geweckt, die mir immer schmerzhaft ist, nämlich an meine alte Arbeit über die Pallasstörungen. Sie ist seit fast einem Vierteljahrhundert mir so fremd geworden, dass es mir schwer wird, mich selbst in den vorhandenen Papieren zu orientieren . . .«; er fügt hinzu, dass »das letzte, was sich« unter seinen Papieren »vorfindet, die Berechnung und Vergleichung der 14. Opposition vom 6. Januar 1820« ist.

Bekanntlich fand HANSEN bei der Bearbeitung der Störungen des ENCKEschen Kometen ein ähnliches Verfahren zur Berechnung der Störungen wie das von GAUSS angewandte, das er 1843 veröffentlichte; er schrieb darüber an GAUSS und schickte ihm seine Abhandlung *Darlegung eines Verfahrens, um die absoluten Störungen der Himmelskörper, welche sich in Bahnen von beliebiger Neigung und elliptischer Excentricität bewegen, zu berechnen*[3]). GAUSS antwortet ihm am 11. März 1843[4]): »Von einer Woche zur andern ist mein Dank für die gefällige Übersendung des Berliner Monatsberichts (der um dieselbe Zeit auch auf gewöhnlichem Wege mir zu Gesicht kam) verschoben, weil ich hoffte einige Zeit zu gewinnen, in den Gegenstand etwas weiter in meiner Antwort eingehen zu können. Leider ist diese Hoffnung getäuscht, und selbst in den bevorstehenden Ferien, für welche sich schon im voraus so viele Rückstände

1) Vergl. oben S. 141—143. — BRDL.

2) Gemeint ist BESSELS *Bestimmung der Masse des Jupiter*, Astronomische Untersuchungen II, S. 1. — BESSELS Werke III, S. 348. — BRDL.

3) Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1843.

4) Werke VII, 1906, S. 436.

und neue Abhaltungen gesammelt haben, darf ich mir kaum Hoffnung für einige freie Musse machen.

Ich beschränke mich daher darauf, meine Freude darüber auszusprechen, dass Sie bei den Perturbationsrechnungen auf ähnliche Art verfahren, wie ich schon vor mehr als 30 Jahren bei meinen weitumfassenden Rechnungen über die Pallasstörungen zu Werke gegangen bin, in so fern Sie den Gebrauch von Reihen nach den Exzentrizitäten und Neigungen ganz kassieren. Freilich haben Sie für die Kometenstörungen auch ganz besondere, noch andere Untersuchungen nötig gehabt, zu denen für die Pallas keine Veranlassung sich fand, und überhaupt in vielen andern Beziehungen abweichende Wege eingeschlagen. Bei den Störungen der Pallas durch Jupiter brauchte ich die Methode der variabeln Elemente und zwar mit Vorbedacht, denn obgleich man so 6 Elemente zu behandeln hat, während bei dem andern Verfahren nur halb so viele sind, so habe ich doch für den praktischen Gebrauch jenes vorgezogen; man braucht die Rechnung für jedes Jahr nur einmal (für einen Tag) zu machen, wozu ich eine besondere Hilfstafel konstruierte, vermittelst welcher in vergleichungsweise sehr kurzer Zeit die Rechnung absolviert werden kann, obgleich zusammen 801 Gleichungen (1602, wenn die Sinus- und Cosinus-Glieder desselben Arguments getrennt gezählt werden; es sind vollständig alle, deren Koeffizient über 0″,1 geht) berücksichtigt worden[1]). Durch sehr einfache Mittel kann man dann das Resultat für die ganze Beobachtungs-Saison ausreichend machen, ohne der Schärfe etwas zu vergeben. Auch die Störung durch Saturn wurde berechnet und die durch Mars nach einer wesentlich verschiedenen Methode angefangen, aber nicht vollendet. Andere immer weiter sich verzweigende Geschäfte haben mir später gar nicht erlaubt, auf jene Arbeiten wieder zurückzukommen, und es steht dahin, ob in meinem Alter ich Musse und Lust haben werde, mich wieder in die Sachen hineinzuarbeiten, da noch so viele andere Dinge sind, die ich eben so ungern untergehen lassen möchte. Sie sind sehr glücklich, dass Sie in einer äussern Lage sind, wo Sie Ihre Zeit nicht zu versplittern brauchen, und es wird mir jedenfalls zur Be-

1) Es ist wohl unnötig zu bemerken, dass die Arbeit, von der ich jetzt spreche, ganz verschieden ist von der gleichfalls von mir für den ganzen Zeitraum von 1802 bis etwa 1818 oder 1820 fortgeführten Rechnung durch Quadratur; diese nenne ich spezielle, jene generelle Rechnung und letztere hat in jener eine bei so ausgedehnten Rechnungen höchst notwendige Kontrolle gefunden.

ruhigung gereichen, dass dieser Zweig der Astronomie bei Ihnen in den besten Händen ist. Ob ich bei den Marsstörungen etwas mit Ihrer mir angezeigten Integrationsart zusammenhängendes gebraucht habe, kann ich jetzt, wo mir die Sachen seit fast 25 Jahren entfremdet sind, nicht bestimmt ermitteln, möchte es aber fast bezweifeln . . .«

V. Störungen der Ceres.

1. Erste Methode.

Im Oktober (oder schon im September) 1802 machte sich GAUSS an die erste Berechnung der Störungen der Ceres[1]), die er in der Form der Koordinatenstörungen ausführte, wesentlich nach den von LAPLACE und SCHUBERT gegebenen Methoden, nach denen auch ORIANI die Hauptstörungen der Ceres und BURCKHARDT die der Pallas berechnet hatte. Er entwickelte sich aber seine Formeln selbst; die Entwicklungen finden sich im Nachlass ausserordentlich zerstreut in den *Schedae* und den *Handbüchern* vor.

Das ihm Eigne ist in erster Linie die Entwicklung der Störungsfunktion, bei der er seine Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel ausnutzen konnte.

Die Gleichungen für die Störungen[2]) nehmen bei ihm die folgende Form an[3]):

$$\delta r = \frac{\mu a}{\sqrt{1-e^2}} \{\cos V \int r Q \sin V . n\,dt - \sin V \int r Q \cos V . n\,dt\}$$

$$52) \qquad \delta v = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{\frac{2 r d\rho + \rho dr}{a^2 n\,dt} + 3\mu a \iint \partial R . n\,dt + 2\mu a \int r \left(\frac{dR}{dr}\right) n\,dt\right\}$$

$$\theta = \frac{\mu a}{\sqrt{1-e^2}} \left\{\cos V \int r \left(\frac{dR}{dz}\right) \sin V . n\,dt - \sin V \int r \left(\frac{dR}{dz}\right) \cos V . n\,dt\right\}$$

1) Werke VII, 1906, S. 377 ff.

2) Ebenda, S. 381.

3) r, r' Radiusvektoren von Ceres und Jupiter,
δr Störungen des Radiusvektor,
δv Störungen der Länge in der Bahn,
θ Breite über der als fest angenommenen ungestörten Bahnebene,
μ Jupitermasse,
a, e, n Bahnelemente der Ceres,
V wahre Anomalie, wofür auch die wahre Länge v gesetzt werden kann,
$\rho = \delta r$.

wo [1])

$$53)\qquad \begin{aligned} R &= \frac{r\cos w}{r'^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}} \\ \mathfrak{R} &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos w} \\ Q &= 2\int \partial R + r\left(\frac{dR}{dr}\right) \\ \left(\frac{dR}{dz}\right) &= z'\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\mathfrak{R}^3}\right). \end{aligned}$$

Es kommt darauf an, alle unter den Integralzeichen vorkommenden Grössen nach Vielfachen von nt oder der mittleren Längen und Anomalien von Ceres und Jupiter zu entwickeln, damit die Integrationen direkt ausgeführt werden können. Dies erfordert zunächst die Entwicklung von r, r', w, $\sin V$, $\cos V$ und sodann die von R und Q nach Vielfachen der mittleren Anomalien M und M' und damit auch nach Potenzen der Exzentrizitäten; diese Entwicklung führt Gauss direkt aus, indem er nur die ersten Potenzen der Exzentrizitäten berücksichtigt.

Ist nämlich etwa

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = f(r, r', w) \qquad f_0 = f(a, a', D) = (a^2 + a'^2 - 2aa'\cos D)^{-\frac{1}{2}},$$

wo $D = M - M' + \text{constans}$, und setzt man

$$\begin{aligned} r &= a(1+\Delta r) & \Delta r &= e\cos M \\ r' &= a'(1+\Delta r') & \Delta r' &= e'\cos M' \\ w &= D + \Delta w & \Delta w &= -2e\sin M + 2e'\sin M', \end{aligned}$$

wo Δr, $\Delta r'$, Δw die Exzentrizitäten enthalten, so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial a}a\Delta r + \frac{\partial f_0}{\partial a'}a'\Delta r' + \frac{\partial f_0}{\partial D}\Delta w.$$

Sodann sind aber f_0 und seine Ableitungen nach Vielfachen von D zu entwickeln.

---

1) $z = r\Theta$ Abstand der Ceres von der ungestörten Bahnebene,
z' Abstand des Jupiter von der ungestörten Bahnebene,
$\mathfrak{R}$ Abstand zwischen Jupiter und Ceres,
w Winkel zwischen den Radienvektoren von Ceres und Jupiter,
$\left(\frac{dR}{dr}\right)$ und $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ partielle Ableitungen von R,
∂R Ergebnis der Differentiation von R, wenn nur die Koordinaten der Ceres variiert werden.

Zur Entwicklung von f_0 braucht man die der Grösse

$$54) \quad (a^2+a'^2-2aa'\cos D)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}P^0+P'\cos D+P''\cos 2D+\cdots$$

und zur Entwicklung von $\frac{\partial f_0}{\partial a}$, $\frac{\partial f_0}{\partial a'}$, $\frac{\partial f_0}{\partial D}$ die der Grösse

$$55) \quad (a^2+a'^2-2aa'\cos D)^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}Q^0+Q'\cos D+\cdots.$$

Ausserdem braucht man auch die Entwicklung von

$$(a^2+a'^2-2aa'\cos D)^{-\frac{1}{2}}$$

um die Ausdrücke für ∂R und $\left(\frac{dR}{dr}\right)$ herzustellen.

Schon LAPLACE[1]) und vor ihm EULER[2]) zeigten, dass sämtliche Koeffizienten dieser Reihen sich durch Rekursion berechnen lassen, sobald man P^0 und P' kennt, und auch GAUSS leitet sich solche Rekursionsformeln ab. Sie sind hauptsächlich im *Handbuch* Bb, S. 16, entwickelt und finden sich auch an anderen Stellen des Nachlasses; abgedruckt sind sie Werke VII, 1906, S. 384. Zur Berechnung von P^0 und P' ist LAPLACE aber gezwungen, die bei nicht sehr kleinem α schwach konvergenten Reihen

$$56) \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}a'P^0 &= 1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\alpha^2+\left(\tfrac{1.1}{2.4}\right)^2\alpha^4+\left(\tfrac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2\alpha^6+\left(\tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2\alpha^8+\cdots \\ -\tfrac{a'^2}{a}P' &= 1-\tfrac{1.1}{2.4}\alpha^2+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1.1.3}{2.4.6}\alpha^4-\tfrac{1.3}{4.6}\cdot\tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\alpha^6+\cdots \end{aligned}$$

zu benutzen, wo $\alpha = \frac{a}{a'}$.

GAUSS war infolge seiner Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel im Stande, zur Berechnung dieser Koeffizienten ein sehr stark konvergentes Verfahren einzuschlagen, da P^0 nichts anderes ist, als das reziproke arithmetisch-geometrische Mittel aus $\frac{1}{2}(a+a')$ und $\frac{1}{2}(a-a')$, und auf ähnliche Weise auch P' gefunden werden kann. Ihm waren zu jener Zeit (1802) sicherlich die Integraldarstellungen

$$P^{(n)} = \frac{2}{a\pi}\alpha^{n+1}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}$$

geläufig und ebenso die Beziehungen dieser Integrale für $n = 0$ und 1 zum

1) *Mécanique céleste*, t. I., S. 267 ff.

2) *Institutiones calculi integralis* I § 279. LEONHARDI EULERI, Opera omnia, series I, vol. 11, S. 165 ff.

arithmetisch-geometrischen Mittel. In der unvollendeten Handschrift *De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithm.-geometricorum*[1]), in der er sich ausdrücklich auf die Anwendung seiner Untersuchungen zur Entwicklung der Störungsfunktion bezieht, befolgt er zur Berechnung von P^0 den folgenden Gedankengang[2]):

Es sei

$$57) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-u^2\cos^2\varphi}} = P + 2Q\cos 2\varphi + 2R\cos 4\varphi + 2S\cos 6\varphi + \cdots$$

Indem man auf beiden Seiten zwischen den Grenzen 0 und π integriert, erhält man

$$58) \qquad \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-u^2\cos^2\varphi}} = \pi P.$$

Andererseits ist aber

$$59) \qquad \begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-u^2\cos^2\varphi}} &= \int_0^\pi \left\{1 + \frac{1}{2}u^2\cos^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}u^4\cos^4\varphi + \cdots\right\} d\varphi \\ &= \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 u^4 + \cdots\right\}\pi. \end{aligned}$$

Es ist also

$$60) \qquad P = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 u^4 + \cdots.$$

In der *Handschrift* wird nun bewiesen, dass die Entwicklung des reziproken arithmetisch-geometrischen Mittels aus $1+u$ und $1-u$ nach Potenzen von u ebenfalls die vorstehende Reihe ergibt; es ist also

$$61) \qquad P = \frac{1}{M(1+u,\ 1-u)} = \frac{1}{M(1,\ \sqrt{1-u^2})}.$$

Der Ausdruck $(a^2 + a'^2 - 2aa'\cos D)^{-\frac{1}{2}}$ lässt sich auf die Form $\frac{1}{c\sqrt{1-u^2\cos^2\varphi}}$ bringen, wenn man setzt

$$62) \qquad u^2 = \frac{4aa'}{(a+a')^2}, \quad c = a + a', \quad \varphi = \frac{D}{2}.$$

---

1) Werke III, S. 361.

2) Vergl. auch SCHLESINGER, *Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie*, Materialien, Heft III, S. 53 f.

Es ist also

$$63) \qquad P^0 = \frac{2}{c} P = \frac{1}{M\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\sqrt{1-u^2}\right)} = \frac{1}{M\left(\frac{a'+a}{2}, \frac{a'-a}{2}\right)}.$$

Zur Bestimmung von Q und damit auch von $P' = \frac{2}{c} Q$ bietet der zweite Teil der *Handschrift* nur die Entwicklung von $dM(x, y)$. Da GAUSS hier ein Zahlenbeispiel vom Planeten Ceres entnimmt, so ist wohl anzunehmen, dass hier auch die Beziehungen zur Bestimmung von Q abgeleitet werden sollten. Indes bricht die *Handschrift* hier ab. Dagegen finden sich an anderen Stellen des Nachlasses Entwicklungen zur Berechnung von P und Q. In der *Scheda* Ac entwickelt[1]) GAUSS den Ausdruck

$$(\mu^2 - \cos^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = A + 2B\cos 2\varphi + \cdots.$$

und erhält, indem er $A = F(\mu)$, $B = G(\mu)$ setzt, die Funktionalgleichungen

$$F\left(\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)\right) = 2\mu F(\mu^2)$$
$$G\left(\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)\right) = \frac{1}{\mu} G(\mu^2) + \frac{1}{\mu} F(\mu^2).$$

Für den Quotienten $\frac{G}{F} = \frac{A}{B}$ gibt er dann die dort angegebene Reihe[2]), die der unten unter 74) abgeleiteten entspricht.

In derselben *Scheda* entwickelt er an anderer Stelle[3]) den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2\sin\varphi^2}} = A - 2A'\cos 2\varphi + \cdots$$

und gibt die expliziten Reihen für A und A', womit man die unten abgeleiteten Reihen 64) und 65) vergleichen kann[4]).

Zur Ergänzung der in der genannten *Handschrift* gegebenen Entwicklungen kann der folgende Gedankengang dienen: Man hat

$$\frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{1-u^2\cos^2\varphi}} = Q + (P+R)\cos 2\varphi + (Q+S)\cos 4\varphi + \cdots$$

---

1) Werke X, 1, S. 188.

2) Ebenda, Gleichung [28].

3) Ebenda, S. 198, [6.]

4) Vergl. hierzu H. GEPPERT, *Nachlass zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion von C. F. Gauss*, OSTWALDs Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 225, 1927, §§ 8—10, insbesondere S. 46—47.

und hieraus

$$\int_0^\pi \frac{\cos 2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-u^2\cos^2\varphi}} = \pi Q,$$

also

64) $$\int_0^\pi \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-u^2\cos^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}(P+Q).$$

Entwickelt man diesen Ausdruck ähnlich wie den Ausdruck 59), so erhält man

65) $$\frac{1}{2}(P+Q) = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{4}u^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{5}{6}u^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{7}{8}u^6+\cdots;$$

hieraus und aus 60) folgt

66) $$\frac{1}{2}(P-Q) = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4}u^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{1}{6}u^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{1}{8}u^6+\cdots.$$

Aus den beiden letzten Entwicklungen kann man auch die für Q herstellen, worauf wir jedoch hier verzichten.

Differenziert man 60) nach u^2, so wird

67) $$\frac{dP}{du^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 2u^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 3u^4+\cdots$$

und hieraus findet man

68) $$(1-u^2)\frac{dP}{du^2} = \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{8}u^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{1}{12}u^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{1}{16}u^6+\cdots,$$

also nach 66)

$$(1-u^2)\frac{dP}{du^2} = \frac{1}{4}(P-Q)^1)$$

und

69) $$\frac{Q}{P} = 1-2\frac{1-u^2}{u}\frac{1}{P}\frac{dP}{du}.$$

Nach 61) ist aber

70) $$\frac{1}{P}\frac{dP}{du} = -\frac{1}{M(1,\sqrt{1-u^2})}\frac{dM(1,\sqrt{1-u^2})}{du}.$$

Am Schlusse der genannten Handschrift[2]) gibt GAUSS die Formel

71) $$dM(x,y) = \frac{M(x,y)}{2z}\left\{\frac{dx}{x}(z+2z'+4z''+\cdots)+\frac{dy}{y}(z-2z'-4z''\ldots)\right\}$$

1) Man vergleiche hierzu die Bemerkungen von SCHLESINGER, Werke X, 1, S. 265.

2) Werke III, S. 373.

wo

$$72) \qquad \begin{aligned} z &= x^2 - y^2 \\ z' &= x'^2 - y'^2 \\ z'' &= x''^2 - y''^2 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

und

$$x' = \frac{x+y}{2}, \quad y' = \sqrt{xy}, \quad x'' = \frac{x'+y'}{2}, \quad y'' = \sqrt{x'y'},$$

die nach dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels gebildeten Grössen sind. Hieraus hat man

$$73) \qquad \frac{1}{M(1, \sqrt{1-u^2})} \frac{dM(1, \sqrt{1-u^2})}{du} = -\frac{1}{2z} \frac{u}{1-u^2} (z - 2z' - 4z'' - \cdots)$$

und daher nach 69) und 70)

$$74) \qquad \frac{Q}{P} = \frac{2}{z}(z' + 2z'' + 4z''' + \cdots);$$

die Grössen $z, z', z'' \ldots$ sind nach 72) zu bilden, und zwar, da sie mit einem Proportionalitätsfaktor multipliziert werden können, mit den Werten

$$x = C, \quad y = C\sqrt{1-u^2}.$$

Wenden wir die Formel 74) auf die Entwicklung 54) an, so wird in Übereinstimmung mit der Gleichung[1]) für P'

$$75) \qquad \frac{P'}{P^0} = \frac{2}{z}(z' + 2z'' + 3z''' + \cdots)$$

wo nach 62)

$$x = C, \quad y = \frac{a'-a}{a'+a}.$$

Wählt man

$$C = \frac{a'+a}{2},$$

so erhält man auch für $z, z', z'', \ldots$ die gleichen Werte wie in Werke VII.

In dem Werke X, 1, Seite 237 abgedruckten Briefe an BESSEL gibt GAUSS eine später von ihm aufgefundene Entwicklungsmethode, über die man unten Seite 231 ff. vergleiche. Eine Kettenbruchentwicklung für den Quotienten $\frac{P'}{P^0}$ findet sich jedoch schon aus dem Jahre 1800 in der *Scheda* Ac[2]).

1) Werke VII, 1906, S. 385.

2) Abgedruckt Werke X, 1, S. 185; man vergleiche die Bemerkungen von SCHLESINGER, ebenda, S. 268.

Die Integrationen bieten, sobald die Entwicklungen ausgeführt sind, nichts besonderes, da nur die Divisoren anzubringen sind; die sekularen Glieder verwandelt Gauss in Störungen der Exzentrizität und der Aphellänge bezw. der Neigung und der Knotenlänge.

Gauss stützte seine Rechnung auf die Cereselemente VII; mit Hilfe der so gefundenen Störungen verbesserte er diese Elemente und berechnete die Störungen aufs neue, um daraus schliesslich die Elemente VIII abzuleiten. Mitte Oktober 1802 hatte er diese Arbeit vollendet, wie er Olbers in einem Briefe vom 12. Oktober dieses Jahres mitteilt; die Störungsgleichungen sind in der Monatl. Corresp., Bd. VI, Seite 492—498[1]) veröffentlicht.

2. Tafeln der Ceresstörungen.

Zur Vergleichung der Beobachtungen mit der Rechnung und zu der darauf beruhenden Verbesserung der Elemente ist der Betrag der Störungen nach den erhaltenen Störungsgleichungen zu berechnen. Diese langwierige Arbeit kann durch Entwerfen von Tafeln abgekürzt werden.

Gauss sagt darüber[2]): »In der Zeit, dass ich nach den Störungsformeln den numerischen Wert berechne, könnte ich mehr wie eine Bahnbestimmung machen« und entwirft nach folgenden Grundsätzen eine Tafel der Ceresstörungen:

Die von den Exzentrizitäten unabhängigen Störungsglieder hängen nur vom Argument $\wp - 2\!\!\!\downarrow$[3]) und seinen Vielfachen ab, können also für dies Argument tabuliert werden. Diesen Teil der Störungen nennt Gauss den ersten Teil und tabuliert ihn[4]) in Tafel I (Länge) und Tafel III (Radiusvektor). Die Störungsglieder, die die erste Potenz der Exzentrizitäten enthalten, sind von der Form

$$a_i \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (iD - \wp - c_i),$$

wo a_i und c_i numerisch gegebene Konstanten sind, $D = \wp - 2\!\!\!\downarrow$ ist und i eine

1) Werke VI, S. 227—230.

2) Brief an Olbers vom 12. Oktober 1802.

3) $\wp$ mittlere Länge der Ceres,
$2\!\!\!\downarrow$ mittlere Länge des Jupiter.

4) Werke VI, S. 237, vergl. auch Werke VII, 1906, S. 396 f.

ganze positive oder negative Zahl oder Null bedeutet. Die Summe aller dieser Glieder mit verschiedenem i lässt sich auf die Form bringen[1])

$$A \sin (\varphi - \wp),$$

wo A und φ nur von D abhängen und für dieses Argument tabuliert werden können. Hierbei gebraucht GAUSS einen besonderen Kunstgriff; man kann nämlich allgemein statt φ auch eine Grösse $B + nD$ einführen, wo dann B gleichfalls als Funktion von D tabuliert werden kann und die obige Summe die Form

$$A \sin (B + nD - \wp)$$

annimmt. Der Vorteil der Einführung von B liegt darin, dass man n so wählen kann, dass B sich möglichst langsam mit der Zeit, also mit D, ändert, wodurch die Entnahme aus der Tafel wesentlich erleichtert wird. GAUSS wählt für Ceres $n = 2$, offenbar weil das Hauptstörungsglied das Argument $2D - \wp - c_2$ hat.

Auffallend ist, dass GAUSS auch die kleinsten Störungsglieder berücksichtigt und nur beiläufig[2]) von der Fortlassung der kleineren, »die einzeln unter 2″ betragen«, spricht, und dass er die Tafelwerte bis auf Zehntel Sekunden angibt, obwohl er doch bereits die von den zweiten Potenzen der Exzentrizitäten abhängenden Glieder nicht berücksichtigt hat.

Auch hier zeigt sich, wie bei vielen anderen Gelegenheiten, GAUSS' Neigung, die Rechnung mit weit mehr Stellen auszuführen, als der Genauigkeit der zugrundeliegenden Zahlen entspricht

3. GAUSS' zweite Methode zur Berechnung der Störungen der Ceres. (*Theoria interpolationis.*)

Da GAUSS von den Ergebnissen seiner ersten Methode nicht befriedigt war, schlug er einen neuen Weg zur Entwicklung der Störungsfunktion und der davon abhängenden Grössen ein.

Ganz neue Gesichtspunkte boten sich ihm hier durch seine Untersuchungen über Interpolationstheorie, wie sie in seiner nachgelassenen Handschrift *Theoria*

1) Vergl. Werke VI, S. 236.

2) Ebenda, S. 235.

interpolationis methodo nova tractata niedergelegt sind[1]). Es scheint, dass dies Manuskript zum Teil unter der Einwirkung des Gedankens der Anwendung auf die Berechnung der Störungen entstanden ist; insbesondere kommen die Untersuchungen der art. 10 f. in Betracht.

Es tritt hier an die Stelle der analytischen Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Reihe, bei der die Herstellung der allgemeinen Ausdrücke für die Koeffizienten allzu verwickelt wird, die interpolatorische, rein numerische Entwicklung[2]). Der numerische Wert der zu entwickelnden Funktion wird für eine Reihe von Werten des Argumentes berechnet, die auf den ganzen Umkreis von 2π, also auf die Periode, regelmässig verteilt sind, und daraus ergeben sich durch eine einfache Rechnung die numerischen Werte der Koeffizienten. Je mehr dieser Koeffizienten man berechnen will, für desto mehr Werte des Argumentes ist die Berechnung der Funktion auszuführen, in desto mehr Teile ist also der Umkreis zu teilen.

Ein ähnliches Verfahren wird bekanntlich heutzutage vielfach zur Entwicklung von beobachteten Grössen benutzt, so in der Astronomie zur Entwicklung der Ausdrücke für die Teilungsfehler oder der durch die mechanische Konstruktion entstehenden Fehler eines geteilten Kreises und in der Meteorologie unter der Bezeichnung harmonische Analyse zur Darstellung irgend welcher als periodisch vorausgesetzter Erscheinungen durch eine trigonometrische Reihe, sowie zu vielen anderen Zwecken. Zur besseren Übersicht mögen die Grundlagen des Verfahrens, wie es bei GAUSS auftritt, hier auseinandergesetzt werden:

Es sei S eine periodische Funktion von x mit der Periode 2π, die sich durch die Reihe

$$76) \qquad S = \sum \alpha_m \cos mx + \sum \beta_m \sin mx$$

darstellen lässt, und es seien die Zahlenwerte von S für eine Reihe gleichmässig auf die Periode verteilter Werte von x, nämlich $x = 0, \omega, 2\omega \ldots (r-1)\omega$ bekannt. Diese Zahlenwerte seien $S_0, S_1, S_2 \ldots S_{r-1}$; aus ihnen können die α_m und β_m berechnet werden. Setzt man nämlich[3])

1) Werke III, S. 265.

2) Diese Methode hat bekanntlich auch HANSEN angewandt. Vergl. den Briefwechsel zwischen GAUSS und diesem, Werke VII, 1906, S. 433—437.

3) Vergl. art. 20 der *Theoria interpolationis*; Werke III, S. 295.

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = \frac{1}{r}\sum_0^{r-1} S_i \\
&\alpha_1 = \frac{2}{r}\sum_0^{r-1} S_i \cos i\omega \qquad \beta_1 = \frac{2}{r}\sum_0^{r-1} S_i \sin i\omega \\
77)\qquad &\alpha_2 = \frac{2}{r}\sum_0^{r-1} S_i \cos 2i\omega \qquad \beta_2 = \frac{2}{r}\sum_0^{r-1} S_i \sin 2i\omega \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_m = \frac{2}{r}\sum_0^{r-1} S_i \cos mi\omega \qquad \beta_m = \frac{2}{r}\sum_0^{r-1} S_i \sin mi\omega \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

so ist folgendes zu bemerken, wofür GAUSS die Beweise erbringt:

Bricht die Reihe 76) mit einem bestimmten Gliede $m = \mu$ ab, so ist die Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten gleich $2\mu + 1$; ist die Anzahl r der gegebenen Werte von S, ebenfalls gleich $2\mu + 1$, so sind die Koeffizienten nicht nur eindeutig bestimmt, sondern die Darstellung von S durch 76—77) ist auch streng richtig; ist $r = 2\mu$, also eine gerade Zahl, so sind durch die obigen Formeln alle Koeffizienten α und β, mit Ausnahme der letzten, α_μ und β_μ, streng bestimmt; die beiden letzteren bleiben unbestimmt. Es besteht aber eine Beziehung zwischen ihnen[1]).

Ist jedoch die Anzahl der Koeffizienten grösser als die Anzahl der gegebenen Werte S_i, ist die Reihe also im besonderen eine unendliche, so werden zwar, wenn $r = 2\mu + 1$ ist, die Koeffizienten bis α_μ, β_μ, und wenn $r = 2\mu$ ist, bis $\alpha_{\mu-1}$, $\beta_{\mu-1}$ eindeutig bestimmt; die Darstellung der Funktion S ist aber nur eine genäherte und zwar werden die Koeffizienten α, β mit einer Annäherung gefunden, die durch die Vernachlässigung der auf α_μ, β_μ bezw. $\alpha_{\mu-1}$, $\beta_{\mu-1}$ folgenden Koeffizienten gegeben ist.

Hieraus ergibt sich für die praktische Anwendung folgender Schluss: Schreiten die Koeffizienten α, β nach Potenzen einer Grösse ε fort, ist also etwa $\alpha_i = a_i\varepsilon^i$, $\beta_i = b_i\varepsilon^i$ und ist die Reihe unendlich, so gilt die Darstellung 76) genähert bis auf Grössen der Ordnung ε^μ einschliesslich, wenn $r = 2\mu + 1$, und ausschliesslich, wenn $r = 2\mu$. Die Formeln 77) sind Werke VII, 1906,

1) Ist die Einteilung des Kreisumfanges so gewählt, dass die gegebenen Werte von S die Werte für $x = 0$ und $x = \pi$ enthalten, so ist α_μ bestimmt, β_μ unbestimmt. Liegen die gegebenen Werte symmetrisch zu $x = 0$ und $x = \pi$, ohne diese selbst zu enthalten, so ist α_μ unbestimmt, β_μ bestimmt. Der erstere Fall tritt gewöhnlich bei der numerischen Anwendung ein.

S. 496f. für die Werte $\mu = 48, 24, 12$ für die praktische Rechnung in vereinfachte Form gebracht, und durch aus dem Nachlass abgedruckte Beispiele erläutert worden.

Gauss benutzt diese Methode auch, um die Richtigkeit seiner Konvergenzuntersuchung der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung zu prüfen[1]).

Bei den Störungsrechnungen handelt es sich um die Entwicklung einer Funktion nach zwei Veränderlichen, den mittleren Längen des störenden und des gestörten Körpers; auf diesen Fall kommt Gauss in der *Theoria interpolationis* nicht zu sprechen und es finden sich darüber auch nirgends Aufzeichnungen im Nachlass, ausser den Zahlenrechnungen für die Störungen der Ceres und der Pallas. Es bietet indes keine Schwierigkeiten, das Verfahren auch hierfür zu entwickeln:

Es sei S eine periodische Funktion mit der Periode 2π von zwei Variabeln x und y, die sich in der Form:

$$78) \qquad S = \sum\sum \alpha_{m,n} \cos(mx+ny) + \sum\sum \beta_{m,n} \sin(mx+ny)$$

darstellen lässt.

Ferner seien die Zahlenwerte von S bekannt für alle Wertepaare x, y, die man erhält, wenn die Periode für x in r Teile und die für y in s Teile geteilt wird; das Intervall der Teilung für x sei $\omega = \frac{2\pi}{r}$, das für y sei $\omega' = \frac{2\pi}{s}$ und die zahlenmässig bekannten Werte von S, deren Anzahl rs ist, seien

$S_{0.0}$	für $x = 0,\ y = 0$	$S_{1.0}$	für $x = \omega,\ y = 0$
$S_{0.1}$	für $x = 0,\ y = \omega'$	$S_{1.1}$	für $x = \omega,\ y = \omega'$
$S_{0.2}$	für $x = 0, y = 2\omega'$	$S_{1.2}$	für $x = \omega,\ y = 2\omega'$
. . . . .		. . . . .	
$S_{0.s-1}$	für $x = 0,\ y = (s-1)\omega'$	$S_{1.s-1}$	für $x = \omega,\ y = (s-1)\omega'$

usw.

Ferner seien

$$S_0,\ S_1 \ldots S_{r-1} \text{ die Werte von } S \text{ für } x = 0,\ \omega,\ 2\omega \ldots (r-1)\omega;$$

dann sind diese Werte periodische Funktionen von y und man kann die Ent-

1) Werke X, 1, S. 424 (vergl. auch ebenda S. 432—433 und die *Erläuterungen* S. 442).

wicklungen ansetzen:

$$
\begin{aligned}
S_0 &= p_{0.0} + p_{0.1}\cos y + p_{0.2}\cos 2y + \cdots \\
&\quad + q_{0.1}\sin y + q_{0.2}\sin 2y + \cdots \\
S_1 &= p_{1.0} + p_{1.1}\cos y + p_{1.2}\cos 2y + \cdots \\
&\quad + q_{1.1}\sin y + q_{1.2}\sin 2y + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{r-1} &= p_{r-1.0} + p_{r-1.1}\cos y + p_{r-1.2}\cos 2y + \cdots \\
&\quad + q_{r-1.1}\sin y + q_{r-1.2}\sin 2y + \cdots
\end{aligned}
\qquad 79)
$$

und nach der im vorhergehenden beschriebenen Interpolationsmethode die Koeffizienten p und q in diesen Reihen zahlenmässig berechnen und zwar

$$
\begin{aligned}
&p_{0.0}, p_{0.1}\cdots; \quad q_{0.1}, q_{0.2}\cdots \text{ aus } S_{0.0}, S_{0.1}\cdots S_{0.s-1}; \\
&p_{1.0}, p_{1.1}\cdots; \quad q_{1.1}, q_{1.2}\cdots \text{ aus } S_{1.0}, S_{1.1}\cdots S_{1.s-1} \text{ usw.}
\end{aligned}
$$

Setzt man weiter

$$
\begin{aligned}
S &= p_0 + p_1\cos y + p_2\cos 2y + \cdots \\
&\quad + q_1\sin y + q_2\sin 2y + \cdots,
\end{aligned}
\qquad 80)
$$

so sind die Koeffizienten p und q in diesem Ausdruck periodische Funktionen von x und zwar sind $p_{0.0}$, $p_{1.0}\cdots p_{r-1.0}$ die Zahlenwerte von p_0 für $x = 0$, ω, $\ldots (r-1)\omega$; $p_{1.0}$, $p_{1.1}$, $\cdots p_{r-1.1}$ die Zahlenwerte von p_1 für dieselben x-Werte usw. Es lassen sich daher in den Reihen

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \gamma_{0.0} + \gamma_{0.1}\cos x + \gamma_{0.2}\cos 2x + \cdots \\
&\quad + \delta_{0.1}\sin x + \delta_{0.2}\sin 2x + \cdots \\
p_1 &= \gamma_{1.0} + \gamma_{1.1}\cos x + \gamma_{1.2}\cos 2x + \cdots \\
&\quad + \delta_{1.1}\sin x + \delta_{1.2}\sin 2x + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\qquad 81)
$$

die Koeffizienten γ und δ wieder zahlenmässig berechnen.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die gefundenen Reihen 81) für p_0, $p_1\cdots$ in 80) einzusetzen und die Produkte der Cosinus und Sinus auszumultiplizieren, damit man die Entwicklung in der Form 78) erhält.

Bei der Besprechung der Pallasstörungen werden wir noch weitere Kunstgriffe kennen lernen, die GAUSS bei diesen seinen Entwicklungen benutzt hat.

Da die Entwicklung der in der Störungsfunktion auftretenden Funktionen in trigonometrische Reihen nach den Vielfachen der mittleren Längen oder

Anomalien gleichzeitig nach Potenzen der Exzentrizitäten (und Neigungen) fortschreitet, ohne aber eine eigentliche Potenzreihe zu sein, so bedeutet die Einteilung der Periode in eine bestimmte Anzahl von Teilen auch die Vernachlässigung einer bestimmten Potenz der Exzentrizitäten.

Nach einer Äusserung von GAUSS in einem Brief an OLBERS vom 25. März 1805 plante er die Entwicklung bis zu den 11. Potenzen der Exzentrizitäten, beschränkte sich dann aber nach einem weiteren Briefe vom 10. Mai desselben Jahres auf die 5. Potenzen.

Er begann seine Rechnungen mit den Breitenstörungen der Ceres; diese sind Werke VII, 1906, S. 401f. abgedruckt. Die hier angewandte Methode zeigt aber bei weitem noch nicht die Vollkommenheit, wie die bei den Störungen der Pallas angewandte. Ein Grund hierfür mag darin liegen, dass GAUSS zunächst Koordinatenstörungen rechnete, bei denen die Störungen nicht, wie bei den Elementenstörungen, durch einfache Quadraturen gefunden werden.

Die Gleichung für die Breitenstörungen ist dieselbe wie oben, nämlich:

$$82) \quad \theta = \frac{\mu a}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \cos V \int r \left(\frac{dR}{dz}\right) \sin V . n\,dt - \sin V \int r \left(\frac{dR}{dz}\right) \cos V . n\,dt \right\}^{1}).$$

Hier lässt sich die rechte Seite nicht direkt nach der *Theoria interpolationis* entwickeln, sondern es müssen erst die Grössen unter den Integralzeichen entwickelt, dann die Integrationen ausgeführt und dann die Multiplikationen mit den ebenfalls zu entwickelnden Grössen cos V und sin V ausgeführt werden.

Die Grössen unter den Integralzeichen werden durch trigonometrische Reihen dargestellt, die nach zwei Argumenten, den mittleren Längen des störenden und des gestörten Körpers, fortschreiten.

Um das etwas verwickelte von GAUSS hier angewandte Verfahren klar zu machen, wollen wir das Glied unter dem ersten Integralzeichen, nämlich

$$X = r \left(\frac{dR}{dz}\right) \sin V$$

betrachten. Es ist, wie oben Gleichung 53)[1]),

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = z' \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\mathfrak{R}^3}\right)$$

1) Vergl. auch Werke VII, 1906, S. 402.

und[1])

$$z' = r' \sin J \sin (v' - \Omega) = r' \sin J \sin (\mathfrak{A} + \varepsilon' - \Omega).$$

Hiermit wird:

$$\begin{aligned} X &= X_1 X_2 \\ 83) \qquad X_1 &= r r' \sin J . \sin V . \sin (\mathfrak{A} + \varepsilon' - \Omega) \\ X_2 &= \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\Re^3}\right). \end{aligned}$$

Die Grösse $\sin J$ wird als konstant angesehen, da die vom Quadrat der störenden Masse abhängenden Glieder nicht berücksichtigt werden; die Grössen r und $\sin V$ können nach Vielfachen der mittleren Anomalie M entwickelt werden in der Form

$$84) \qquad \Sigma a_n \overset{\cos}{\underset{\sin}{}} nM,$$

wo die a_n von der Form

$$85) \qquad a_n = e^n \Sigma b_i e^i$$

sind. Die Reihe nach den Vielfachen von M schreitet also nach Potenzen der Exzentrizität e fort, aber in der Weise, dass a_n nicht gleich dem Produkt aus e^n in einen konstanten Faktor, sondern selbst gleich einer Potenzreihe nach e ist, die mit dem Gliede in e^n beginnt. Da die analytische Entwicklung einerseits zu ziemlich unübersichtlichen Ausdrücken führt (man kann sie am besten durch Anwendung der Besselschen Funktionen ausführen), andererseits bei nicht allzu grossem e die Glieder hinreichend stark abnehmen, so empfiehlt sich hier die interpolatorische Methode. Das gleiche gilt von der Entwicklung der Grösse r' und von der der Grösse $\sin (\mathfrak{A} + \varepsilon' - \Omega)$, die nach Vielfachen der mittleren Anomalie Jupiters M' und gleichzeitig nach Potenzen von dessen Exzentrizität e' fortschreiten.

Gauss entwickelt daher grundsätzlich X_1 nach der interpolatorischen Methode und teilt den Umkreis in 10 Teile, wobei er die Rechnung also für die Werte M und M' gleich 18^0, 54^0, 90^0, ... 342^0 ausführt. Hierdurch vereinfacht sie sich. Die Formeln 77) bedürfen dazu einer Umformung, die

1) J Neigung beider Bahnen gegeneinander,
v' wahre Länge Jupiters,
Ω Knotenlänge,
ε' Mittelpunktsgleichung Jupiters.

Werke VII, 1906, S. 404 angegeben ist. Die Einteilung des Umkreises in 10 Teile entspricht nach obigem der Vernachlässigung der 5. Potenzen der Exzentrizitäten.

Anders liegt die Sache bei der Grösse $\frac{1}{\mathfrak{R}^3}$; es ist

$$\mathfrak{R} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos w)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man der Kürze halber[1]) $x = 2\!\!\!/ - \varrho + \varepsilon' - a$, so ist $\cos w = \cos b \cos x$ und man kann setzen[2])

$$86) \qquad \mathfrak{R}^2 = \frac{rr' \cos b}{\beta}(1 + \beta^2 - 2\beta \cos x),$$

wo

$$87) \qquad \beta = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr' \cos b} - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos b}}{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr' \cos b} + \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos b}}.$$

Gauss entwickelt

$$88) \qquad \frac{2}{\mathfrak{R}^3} = \frac{1}{2} Q + Q' \cos x + Q'' \cos 2x + \cdots$$

und erhält hiermit

$$89) \qquad -2X_2 = \frac{2}{\mathfrak{R}^3} - \frac{2}{r'^3} = \frac{1}{2} Q^{(0)} + Q' \cos x + \cdots,$$

wo $Q^{(0)} = Q - \frac{4}{r'^3}$, und wo die Q ausser von dem Faktor $\frac{rr' \cos b}{\beta}$ nur noch von β abhängen. Da $\cos b$ nahe gleich Eins ist, so ist β nahe gleich $\frac{r}{r'}$, da wir $r' > r$ voraussetzen. Ist nun das Verhältnis $\frac{r}{r'}$ nicht erheblich von Eins verschieden, so nehmen die Glieder der Reihe weniger stark ab; denn sie schreiten im wesentlichen nach Potenzen von β fort. Es ist wünschenswert bei der Entwicklung ziemlich weit zu gehen. Hierin wird der Grund zu suchen sein, warum Gauss den Faktor X_2 analytisch entwickelt. Wahrscheinlich hat er schon hier die im Briefe an Bessel[3]) beschriebene Methode zur Berechnung der Q, wenigstens teilweise, benutzt.

Die Ausführung der ganzen etwas unübersichtlichen Rechnung gestaltet sich etwa so:

Ist zunächst die Entwicklung 89) von X_2 nach der analytischen Methode für jede Wertekombination r, r', $\cos b$, also für jedes Wertepaar M, M', das

1) α Mittelpunktsgleichung der Ceres minus Reduktion auf die Jupiterbahn, b heliozentrische Breite der Ceres.

2) Werke VII, 1906, S. 404.

3) Werke X, 1, S. 238; vergl. hier unten S. 231.

für die interpolatorische Methode gebraucht wird, durchgeführt, so sind damit die Zahlenwerte der Q für jedes dieser Wertepaare, 100 an der Zahl, bekannt[1]). Bei der ersten Methode der Ceresstörungen (oben Gleichung 55 u. f.) war diese Entwicklung nur einmal für die konstanten Grössen a und a' auszuführen. GAUSS hat hier die Q bis zum Gliede $Q^{(10)}$ berechnet, also dabei noch die 10. Potenz von $\frac{r}{r'}$ berücksichtigt; denn es ist $r'^3 Q^{(n)}$ von der Grössenordnung $\left(\frac{r}{r'}\right)^n$.

Setzt man die Reihe 89) für X_2 in den Ausdruck 83) für X ein, so erhält man z. B. für den mit Q'' multiplizierten Teil von X[2]):

$$90) \quad \text{pars}\, X = \frac{rr'}{4} \sin J \sin V . Q'' \{\sin (D - ☿ + \varepsilon' - 2a + \Omega) - \sin (3D + ☿ + 3\varepsilon' - 2a - \Omega)\}.$$

Die Zahlenwerte dieser Glieder werden wieder für jedes Wertepaar M, M' berechnet und damit durch die Interpolation nach den Formeln 77)—81) die Entwicklung dieses Teils von X gefunden.

Die Einzelheiten der Gaussschen Rechnungsart, die hier nur in grossen Umrissen geschildert ist, sind Werke VII, 1906, S. 403—406 an dem zweiten Gliede des vorstehenden Ausdrucks 90) als Beispiel auseinandergesetzt.

Ist die Grösse X nach Vielfachen von M und M' entwickelt, so ist nach 82) die Integration durch Anbringung der Divisoren auszuführen und sodann mit der gleichfalls auf interpolatorischem Wege gewonnenen Entwicklung von $\cos V$ und dem konstanten Faktor $\frac{\mu a}{\sqrt{1-e^2}}$ zu multiplizieren.

Wie bereits erwähnt, hat GAUSS nach der eben besprochenen Methode nur die Breitenstörungen gerechnet, die er in einem Briefe an OLBERS vom 2. Juli 1805 mitteilt[3]). Diese Störungen enthalten im ganzen 27, nach Zusammenziehen der Glieder gleicher Periode, 16 Glieder.

Die Rechnung wird vereinfacht durch verschiedene auftretende Symmetrien, insbesondere auch durch die der beiden Glieder in Gleichung 82), von denen wir oben nur das erste betrachtet haben. Sie ist aber dennoch äusserst umständlich. Die Berechnung der Breitenstörungen dehnt sich trotz der raum-

1) Vergl. die Werte von $\log Q''$ in der Tabelle Werke VII, 1906, S. 405.

2) Vergl. auch Werke VII, 1906, S. 403, Gleichung 2).

3) Ebenda, S. 408—409.

sparenden Schreibweise von GAUSS, bei der durchschnittlich 2000—3000 Ziffern auf einer Quartseite des *Handbuchs* Bc stehen, über 11 Seiten aus.

Aus seinen Untersuchungen über Ceres schliesst GAUSS im genannten Briefe vom 2. Juli 1805, dass »die sämtlichen bei der Pallas merklichen Gleichungen der Länge, Breite und des Radiusvektor leicht auf 500 steigen können« und »dass man vielleicht mehrere Tage nötig hat, um einen einzigen Ort zu berechnen« und fährt fort: »Durch ähnliche, aber freilich viel zahlreichere Tafeln, wie meine älteren[1]) für die Ceresstörungen, wird indes die Arbeit sehr erleichtert werden können, aber die Berechnung solcher Tafeln wird auch Monate kosten, nachdem die Formeln entwickelt sind«.

VI. Tafeln zur Entwicklung von $(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos x)^{-\frac{1}{2}}$.

GAUSS hatte wohl zunächst die Absicht, nach der im vorigen geschilderten Methode oder nach einer ganz ähnlichen die Störungen der Ceres zu vollenden und auch die der anderen Planeten (der Pallas und der im März 1805 entdeckten Juno) zu berechnen. Die Berechnung der Breitenstörungen der Ceres hatte gute Ergebnisse geliefert, war aber recht umfangreich. GAUSS suchte daher die Arbeit durch Entwerfen von Tafeln abzukürzen und es lag am nächsten, solche Tafeln für die Entwicklung des Ausdruckes 88), also für die Koeffizienten Q herzustellen.

BESSEL hatte ihm seine Hilfe bei der Ausführung von Zahlenrechnungen angeboten und auch schon bei einer anderen Gelegenheit gewährt.

Nach den obigen Gleichungen 83) und 86) galt es, den Ausdruck

$$(1 + \beta^2 - 2\beta \cos x)^{-\frac{1}{2}}$$

für verschiedene Werte von β zu entwickeln. Waren dann die Koeffizienten Q für eine Reihe von solchen Werten tabuliert, so konnten diese Tafeln auch für andere Planeten angewandt werden. In dem Briefe an BESSEL vom 3. September 1805[2]) bittet GAUSS diesen, ihn bei der Berechnung der Tafel zu unterstützen und setzt ihm die Berechnungsweise eingehend auseinander.

Die Vorschriften, die er BESSEL gibt, beziehen sich allerdings auf die

1) Vergl. oben S. 221. — BRDL.

2) Werke X, 1, S. 237.

Entwicklung von

$$(1+\beta^2-2\beta\cos x)^{-\frac{1}{2}}$$

bezw.

$$(a^2+a'^2-2aa'\cos x)^{-\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}A^{(0)}+A'\cos x+A''\cos 2x+\cdots.$$

Es ist wohl anzunehmen, dass GAUSS diesen Ausdruck gewählt hat, weil er ihn auch sonst brauchte und die Entwicklung, die zu den Exponenten $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$ usw. gehört, sich leicht aus der zu $-\frac{1}{2}$ gehörenden herstellen lässt.

Die Entwicklungsmethode, die GAUSS im Briefe an BESSEL schildert, ist bei weitem vollkommner als die bei der ersten Berechnung der Ceresstörungen (S. 215 f.) angewandte. Es ist wohl anzunehmen, dass GAUSS gerade im Anschluss an diese Untersuchungen begonnen hat, sich mit der Theorie der allgemeinen hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ zu beschäftigen; die ältesten uns erhaltenen Aufzeichnungen zu dieser Theorie stammen nämlich aus den ersten Monaten des Jahres 1806, sie sind Werke X, 1, S. 326 abgedruckt[1]). Man findet in diesen Aufzeichnungen den Kettenbruch, der den Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen darstellt[2]), und der den in dem Briefe an BESSEL gegebenen Kettenbruch für den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Q als besonderen Fall enthält. Den hierauf gegründeten Beweis für die BESSEL mitgeteilten Entwicklungen gibt GAUSS in einer im Jahre 1809 verfassten Aufzeichnung *Einiges über die unendliche Reihe* usw.[3]). Im Nachlass und in Veröffentlichungen finden sich noch viele Stellen, auch aus späterer Zeit, die von der Entwicklung des obigen Ausdrucks handeln; so in den *Disquisitiones circa seriem infinitam* etc. (1812)[4]). Die fertig gerechnete Tafel befindet sich im Nachlass; sie gibt die Grössen $\pi^{(i)}=\left(\frac{a}{a'}\right)^i\sqrt{a'^2-a^2}\,A^{(i)}$ mit dem Argument $\theta=\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{a'}$ und geht bis $\pi^{(10)}$. Sie scheint aber niemals zur Anwendung gelangt zu sein, da GAUSS, als er nach langer Unterbrechung die Störungen der Pallas im Jahre 1810 vornahm, das rein interpolatorische Verfahren anwandte.

---

1) Vergl. die Bemerkungen von SCHLESINGER, a. a. O., S. 331.

2) Siehe a. a. O., S. 329, Verwandlung.

3) Werke X, 1, S. 338. — Siehe insbesondere a. a. O., S. 345—349 und die zugehörigen Bemerkungen von SCHLESINGER, S. 354.

4) Werke III, S. 128, ferner Werke VIII, S. 84; vergl. auch den Aufsatz von SCHLESINGER über *Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie*, Materialien Heft III, S. 84, 90—91.

VII. Störungen der Pallas und Vorbereitungen dazu.

1. *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis.*

Diese Abhandlung ist im wesentlichen als eine Vorarbeit zu den Störungsrechnungen anzusehen.

Die zur Anwendung kommenden Methoden sind bereits oben S. 188 f. besprochen; nach ihnen bestimmt Gauss zunächst rein elliptische Elemente der Pallas aus den drei folgenden Gruppen von Oppositionen: 1803, 04, 05, 07; 1804, 05, 07, 08; 1805, 07, 08, 09.

Es zeigt sich einerseits aus der Vergleichung mit den Beobachtungen, dass für den Zeitraum von vier Oppositionen rein elliptische Elemente die Bahn hinreichend genau darstellen, um den Planeten für die nächste Folgezeit so vorauszuberechnen, dass ein Wiederauffinden mit dem Fernrohr keine Schwierigkeit macht; andererseits aber weichen die drei Elementensysteme doch so von einander ab, dass die Berücksichtigung der Störungen als eine Forderung der Wissenschaft bezeichnet werden muss[1]).

Es handelte sich nun um die Frage, welches Elementensystem der Störungsrechnung zugrunde gelegt werden sollte, und Gauss wählt dasjenige[2]), das sich allen beobachteten Oppositionen am besten anschliesst. Von der Bestimmung eines solchen handeln bereits die art. 172—189 der *Theoria motus*, in denen Gauss die Methode der kleinsten Quadrate ausführlich begründet.

Die hier benutzten Gleichungen zur Bestimmung der Verbesserungen der Elemente erhalten, wenigstens mit bezug auf die Längen, eine besondere Form, weil es sich um Oppositionen handelt, also die heliozentrische Länge statt der geozentrischen gebraucht wird; sie sind oben S. 193 abgedruckt.

Am Schluss der *Disquisitiones* gibt Gauss an, wie das gefundene Elementensystem die sechs Normalorte darstellt; es zeigen sich in der Länge Differenzen bis zu $3\frac{1}{2}$ Minute und in der Breite bis fast $1\frac{1}{2}$ Minute.

2. Spezielle Störungen der Pallas.

Die Rechnung der speziellen Störungen betrachtet Gauss als Vorbereitung zur Berechnung der allgemeinen Störungen; die von ihm angewandte Methode

1) *Disqu.* art. 9—10.

2) *Disqu.* art. 11 f.

ist heute wenigstens in ihren Grundzügen jedem theoretischen Astronomen geläufig.

GAUSS berechnet die Störungen der Elemente: Neigung, Knotenlänge, mittlere tägliche Bewegung, Exzentrizitätswinkel, Perihellänge und mittlere Länge in der Epoche; die Differentialgleichungen[1]) unterscheiden sich nicht wesentlich von den in der nachgelassenen Abhandlung *Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires*[2]) gegebenen.

Die von ihm gebrauchten Formeln für die mechanische Quadratur leitet GAUSS ebenfalls in der genannten *Exposition*[3]) ab. Weitere Nachlassnotizen darüber sind nicht vorhanden und auch die numerischen Rechnungen sind nur ganz lückenhaft erhalten. Die mechanische Quadratur hängt bekanntlich mit der Interpolationsrechnung zusammen. Über die erstere hat GAUSS eine Abhandlung *Methodus nova integralium valores* usw. 1814 veröffentlicht[4]), die aber in keiner näheren Beziehung zu seinen Störungsrechnungen steht; seine Arbeiten über die letztere sind erst aus der von SCHERING aus dem Nachlass abgedruckten[5]) Abhandlung *Theoria interpolationis methodo nova tractata* bekannt geworden; in dieser geht GAUSS nicht auf mechanische Quadratur ein, sondern entwickelt nur die Grundlage für seine Rechnung der allgemeinen Störungen. Dagegen hat ENCKE nach Vorlesungen von GAUSS im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1830 in einem Aufsatz *Über Interpolation*[6]) einiges gegeben, das in anderer Form in der *Theoria interpolationis* zu finden ist, und in einem zweiten Aufsatz *Über mechanische Quadratur* im Jahrbuch für 1837 die Methode auseinandergesetzt, die ihm GAUSS bei Übertragung der Berechnung der speziellen Störungen der Pallas im Jahre 1812 mitgeteilt habe[7]). Hiernach scheint es, dass ENCKE die Fortsetzung der GAUSSschen

1) Werke VII, 1906, S. 474.

2) Ebenda, S. 457.

3) Ebenda, S. 462.

4) Werke III, S. 163.

5) Ebenda, S. 265.

6) ENCKE leitet den Aufsatz mit der Bemerkung ein: »Der folgende Aufsatz ist aus den Vorlesungen entlehnt, die ich im Jahre 1812 bei dem Herrn Hofrat GAUSS zu hören das Glück hatte. In dem ganzen Gange der Entwicklung bin ich, so viel die Erinnerung gestattete, dem Vortrage meines geehrten Herrn Lehrers gefolgt, da er die grösste Gründlichkeit mit der grössten Einfachheit und Eleganz verbindet.« — Vergl. auch Werke XII, S. 29.

7) ENCKE bemerkt am Anfange dieses Aufsatzes: »Bei meinem Aufenthalt in Göttingen im Jahre 1812

Rechnung der speziellen Störungen von 1811 übernommen hatte; denn die Werke VII, 1906, abgedruckten, bis 1811 reichenden Störungsrechnungen sind im Jahre 1810 von GAUSS selbst ausgeführt. Von der ENCKEschen Berechnung ist anscheinend nichts erhalten.

Die erste Rechnung der speziellen Störungen der Pallas beruhte während des ganzen sich von Juni 1803 bis September 1811 erstreckenden Zeitraums auf einem konstanten Elementensystem, nämlich dem in der *Disquisitio de elementis Palladis* abgeleiteten; daher sind dabei nur die Störungen von der ersten Ordnung berücksichtigt; die Verbesserungen der Elemente sind nach der oben S. 192 f. besprochenen Methode ermittelt.

Um noch schärfer zu rechnen und die Störungen zweiter Ordnung zu berücksichtigen, wiederholt GAUSS die Rechnung mit veränderlichen Elementen, indem er »den ganzen Zeitraum 1803—1811 in acht Perioden« teilt[1]) und jeder besondere aus der ersten Rechnung abgeleitete Elemente zugrunde legt[2]). Weiteres siehe oben S. 205.

3. Erste Rechnung der allgemeinen Störungen der Pallas.

Hier berechnet GAUSS, wie bei den speziellen Störungen, die Störungen der Elemente. Die Differentialgleichungen[3]) zeigen einige nicht sehr wesentliche Unterschiede gegen die früher bei Ermittlung der speziellen Störungen gebrauchten; doch führt GAUSS anstelle des Exzentrizitätswinkels den Logarithmus des Parameters und anstelle der mittleren täglichen Bewegung ihren

---

übertrug mir Herr Hofrat GAUSS die Berechnung der speziellen Störungen der Pallas, und leitete mir zu diesem Behufe seine Methoden und Formeln ab, deren er seit längerer Zeit sich bedient hatte. Er hatte damals die Absicht, selbst etwas über diesen Gegenstand bekannt zu machen und behielt sich diese Erläuterung vor. Jetzt, wo leider die Aussicht auf ein eigenes Werk von GAUSS, wegen seiner vielfachen andern wichtigen Untersuchungen, so gut wie verschwunden scheint, hat er es mir gestattet, das, was ich aus seinen Vorträgen für die nachherige häufige Anwendung auf Kometen und kleine Planeten benutzt habe, hier zu publizieren; wobei ich nur noch hinzuzufügen mir erlaube, dass der Weg zum Beweise der Formeln nicht genau der ist, welchen GAUSS bei mir genommen, weil es mir nicht ratsam schien, allzuviele verwandte Betrachtungen einzumischen. Diese Bemerkung soll, wie sich von selbst versteht, nur bevorworten, dass, wenn vielleicht in der Beweisführung Einiges nicht bestimmt genug erscheinen möchte, der Fehler ganz allein mir Schuld gegeben werden muss.« — Vergl. auch Werke XII, S. 31.

1) Vergl. den Brief an OLBERS vom 13. Dezember 1810 und Werke VII, 1906, S. 464.

2) Werke VII, 1906, S. 483.

3) Ebenda, S. 490.

hyperbolischen Logarithmus bezw. den gemeinen Logarithmus der halben grossen Achse ein.

Die Ausdrücke für die Ableitungen der Elemente, die, nachdem sie durch trigonometrische Reihen dargestellt sind, direkt integriert werden können, sind periodische Funktionen der beiden Argumente M und M', d. i. der mittleren Anomalien von Pallas und Jupiter, wenn man ein konstantes elliptisches Elementensystem zugrunde legt, also die Störungen zweiter Ordnung vernachlässigt; im strengen Sinne treten noch die Apsiden- und Knotenbewegungen als Argumente hinzu.

Gauss beschränkt sich durchweg auf die Ermittlung der Störungen erster Ordnung; dagegen bemüht er sich, möglichst hohe Potenzen der Exzentrizitäten und des Verhältnisses der mittleren Entfernungen zu berücksichtigen. Er wandte daher die oben S. 225f. besprochene rein interpolatorische Methode an. Vielleicht hat er auch die in den artt. 25—28 der *Theoria interpolationis* entwickelte Methode benutzt, bei der die Periode in eine Anzahl primärer Teile, und diese wieder weiter sekundär eingeteilt werden, wodurch das Schema der Rechnung vereinfacht wird.

Da jedoch im Nachlass nur die numerischen Rechnungen für Pallas ohne jedes erklärende Wort vorhanden sind, so wurden Werke VII, 1906, Seite 491—500 alle Formeln hergestellt, die Gauss nach Ausweis seiner numerischen Rechnungen benutzt hat.

Über die Anordnung der Gaussschen Rechnung und über seine Kunstgriffe ist folgendes zu sagen:

Die Ausdrücke der Ableitungen der Elemente sind zwar periodische Funktionen der beiden Argumente M und M' und können nach den Formeln auf S. 225—226 entwickelt werden; ihre gesamte Entwicklung nach diesen Argumenten setzt sich aber aus drei Einzelentwicklungen zusammen: die Koordinaten der Pallas sind periodische Funktionen von M und die des Jupiter ebensolche von M', die gegenseitige Entfernung beider Planeten aber ist eine periodische Funktion von $M' - M$. Die Glieder in den Entwicklungen der Pallaskoordinaten nehmen ab wie die Potenzen der Pallasexzentrizität und die der Jupiterkoordinaten wie die der Jupiterexzentrizität; da die erstere gross und die letztere klein ist, so folgt zunächst, dass man bei der letzteren nicht so weit in der Entwicklung zu gehen braucht, wie bei der ersteren, also für

das Argument M den Umkreis in eine grössere Anzahl von Abschnitten teilen wird, als für M'; die Entwicklung nach diesem letztern Argument tritt überhaupt in den Hintergrund.

Die Entwicklung des gegenseitigen Abstandes beider Planeten nach Vielfachen von $M' - M$ enthält ebenfalls die Potenzen beider Exzentrizitäten, aber ausserdem nehmen ihre Glieder nach Potenzen der Grösse α ab, wo $\alpha = \frac{a}{a'}$ das Verhältnis der beiden halben grossen Achsen ist, und diese letztere Entwicklung ist also ebenfalls viel weiter fortzusetzen, als die nach M'. Mit ihr hat sich GAUSS schon bei seinen früheren Untersuchungen im Anschluss an seine Arbeiten über das arithmetrisch-geometrische Mittel besonders beschäftigt, wie oben besprochen worden ist. Er hat sie bei den Ceresstörungen im wesentlichen noch nach der analytischen Methode ausgeführt. Es sind also die Entwicklungen nach M und $M' - M$ die wichtigen und aus diesem Grund hat er wahrscheinlich diese beiden Argumente gewählt; denn bei dieser Anordnung gehen die grössten Glieder den kleineren voraus. GAUSS hat in seiner ersten Rechnung der allgemeinen Störungen der Pallas den Umkreis für M in 12 und für $M' - M$ in 48 Teile geteilt, wodurch also im grossen und ganzen die 5. Potenzen der Exzentrizität und die 23. Potenzen von α berücksichtigt werden. Zur Übersicht über die Einzelheiten der Rechnung, im besonderen über das Zusammenziehen der Cosinus- und Sinusglieder in ein einziges Glied wird ein Hinweis auf Werke VII genügen; die Ergebnisse für die Störungen findet man ebenfalls dort, ebenso wie die Vergleichung mit den Oppositionen und die Verbesserung der Elemente; die letztere allerdings unvollständig, da sich im Nachlass nur weniges darüber vorfand.

4. Zweite Rechnung der allgemeinen Störungen der Pallas.

Die zweite Rechnung der allgemeinen Störungen ist noch umfangreicher als die erste, da GAUSS hier für M den Umkreis in 24 Teile teilt, also noch die 11. Potenzen von e berücksichtigt. Die Differentialgleichungen für die Elemente sind nicht wesentlich geändert. Die schliesslichen Störungsausdrücke unterscheiden sich in der Form von denen der ersten Rechnung dadurch, dass GAUSS hier überall in den Argumenten die mittleren Längen statt der mittleren Anomalien eingeführt und die Konstanten in den Argumenten so gewählt hat,

dass alle Glieder positives Vorzeichen erhalten. Die Unterschiede der numerischen Ergebnisse in beiden Rechnungen sind klein und es wird hier ein Hinweis auf Werke VII und auf S. 207—208 oben genügen.

5. Die grössten Gleichungen in den Störungen der Pallas. Libration.

Ist E irgend eines der oskulierenden Bahnelemente des gestörten Planeten, so finden sich nach der Entwicklung der Störungsfunktion und der von ihr abhängenden Grössen bekanntlich Gleichungen der Form:

$$91) \qquad \frac{dE}{dt} = \sum_{m} \sum_{m'} a_{m.m'} \sin (m' L' - m L + A_{m.m'}),$$

wo bei Vernachlässigung der Störungen höherer Ordnung $a_{m.m'}$ und $A_{m.m'}$ Konstanten sind und[1])

$$92) \qquad \begin{aligned} L' &= n' t + \varepsilon', \\ L &= \int_0^t n\, dt + \varepsilon \end{aligned}$$

ist. Durch Integration findet man, wenn man n als konstant ansieht, was der Vernachlässigung der Störungen von höherer Ordnung entspricht:

$$93) \qquad \begin{aligned} E &= E_0 + \delta E, \\ \delta E &= a_{0.0}\, t - \sum \frac{a_{m.m'}}{m' n' - m n} \cos (m' L' - m L + A_{m.m'}). \end{aligned}$$

E_0 bedeutet den mittleren Wert des Elementes und δE seine Störungen; $a_{0.0}\, t$ ist das sekulare Störungsglied. Die Grösse der periodischen Störungsglieder hängt vom Divisor $m' n' - m n$ ab und zwar hat das grösste auftretende Störungsglied im Falle der Pallas das Argument $5 L' - 2 L$; die fünfmalige mittlere Bewegung Jupiters minus der doppelten der Pallas $= 5 n' - 2 n$ beträgt nur etwa $42''$.

Gauss bezeichnet die entsprechenden Glieder unter Hinzuziehung der vom doppelten und dreifachen Argument ($10 L' - 4 L$ und $15 L' - 6 L$) abhängenden

---

1) L' = Mittlere Länge Jupiters,
L = Mittlere Länge der Pallas,
n' = konstante mittlere tägliche Bewegung Jupiters,
n = oskulierende mittlere tägliche Bewegung der Pallas.
$\varepsilon', \varepsilon$ = Werte von L' und L für $t = 0$.

in der Länge als die grosse Gleichung[1]). Obwohl er bei Ermittlung der Störungen selbst nur die erste Potenz der störenden Masse berücksichtigt, berechnet er zur Bestimmung der Störungsbeträge für die einzelnen Epochen die mittlere Länge der Pallas mit Einschluss dieser grossen Gleichung, nimmt also hier auf die höheren Potenzen der Störungen Rücksicht; auch zur Berechnung der mittleren Länge Jupiters benutzt er die dortige grosse Gleichung nach den Tafeln von BOUVARD[2]).

Besonderes Aufsehen erregte aber die GAUSSsche Mitteilung seiner Entdeckung, dass die mittleren Bewegungen von Jupiter und Pallas im rationalen Verhältnis 7 : 18 ständen, »was sich durch die Einwirkung Jupiters immer genau wieder herstellt, wie die Rotationszeit unseres Mondes«. So schreibt er an BESSEL[3]) am 5. Mai 1812, als er gerade seine zweite Rechnung der allgemeinen Störungen begonnen hatte[4]).

Aufzeichnungen darüber, wie GAUSS die Entdeckung ursprünglich gemacht, sind nicht vorhanden; wohl aber haben sich im Nachlass nach langem Suchen zwei kleine Zettel gefunden, die aus der Zeit der Vollendung der zweiten Rechnung der allgemeinen Störungen stammen und auf denen einige numerische Rechnungen über das Librationsglied stehen, die Werke VII, S. 558—559 mit den nötigen Ergänzungen abgedruckt sind. Im Artikel [24] der *Exposition*[5]), der ebenfalls später entstanden ist, spricht GAUSS von dem Fall des rationalen Verhältnisses der mittleren Bewegungen; er sagt, dass in diesem Fall in $\int n\,dt$ (also in der mittleren Länge) ein dem Quadrat der Zeit proportionales Glied entsteht, das aber periodische Form erhält, wenn man die höheren Potenzen der störenden Masse berücksichtigt und er fügt hinzu, dass dieser Fall bei Pallas wirklich eintritt. Der Inhalt der erwähnten Zettel und die Einzelausführung der zweiten Rechnung der allgemeinen Störungen geben hierfür die Erklärung. Es ist darüber folgendes zu bemerken:

GAUSS kannte, als er jene Briefe an BESSEL und OLBERS schrieb, noch nicht die Zahlenwerte der Konstanten des Librationsgliedes, auf die sich die Rechnung

1) Werke VII, 1906, S. 559.

2) Ebenda, S. 559—560.

3) Ebenda, S. 421. — Vergl. auch den Brief an OLBERS vom 20. März 1812, Werke XII, S. 236.

4) Vergl. oben S. 206.

5) Werke VII, S. 468.

auf den Zetteln stützt; er fand diese vielmehr erst aus der erweiterten Entwicklung der Störungsfunktion bei der zweiten Rechnung im Hochsommer 1812[1]). Man muss daher vermuten, dass er zunächst nur die Integrationsdivisoren $m'n' - mn$ zahlenmässig untersucht hat.

Bezeichnen n_0 und ε_0 Mittelwerte von n und ε, so ist

$$L = n_0 t + \varepsilon_0 + \int \delta n \, dt + \delta\varepsilon.$$

Das Integral $\int \delta n \, dt$ enthält kein der Zeit proportionales Glied; um aber den sekularen Teil von $\delta\varepsilon$ nach den Ergebnissen der ersten Störungsrechnung festzustellen, hat man[2])

sekularer Teil von $\delta\varepsilon - (1-\cos i)\delta\Omega - (1-\cos\varphi)\{\delta\tilde{\omega} - (1-\cos i)\delta\Omega\} = -0''{,}04183$

» » » $\delta\Omega$ $= -0{,}09645$

» » » $\delta\tilde{\omega} - (1-\cos i)\delta\Omega$ $= -0{,}01310$

und hieraus ergibt sich

$$\text{sekularer Teil von } \delta\varepsilon = -0''{,}0593.$$

Da $n_0 = 769''{,}2443$[3]) gefunden war, so wird der sekulare Teil von L gleich $(769''{,}2443 - 0''{,}0593)t$, also die augenblickliche mittlere Bewegung gleich $769''{,}1850$; die tropische mittlere Bewegung Jupiters hatte Gauss[4]) nach Laplace zu $299''{,}2650$ angenommen und mit dem ebenfalls von Gauss gebrauchten Werte der täglichen Präzession von $0''{,}13717$ folgt hieraus die siderische mittlere Bewegung Jupiters zu $299''{,}1278$. Um die kleinsten Divisoren aufzufinden, kann man das Verhältnis der mittleren Bewegungen $\frac{n'}{n} = \frac{299''{,}1278}{769''{,}1850}$ in einen Kettenbruch verwandeln und erhält diesen gleich

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7913+\cdots}}}}}$$

Die Näherungswerte sind

$$\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{3};\ \tfrac{2}{5};\ \tfrac{7}{18} \text{ usw.}$$

1) Zwischen dem 20. Juli und 10. August, vergl. Werke VII, 1906, S. 608.

2) Werke VII, 1906, S. 526, 519, 521.

3) Ebenda, S. 527.

4) Ebenda, S. 508.

Hier tritt ausser dem Näherungsbruch $\frac{2}{5}$, der die sogenannte grosse Gleichung veranlasst, ganz besonders der nächste im Betrage von $\frac{7}{18}$ hervor; dieser stellt den Bruch fast genau dar, da das darauf folgende Glied des Kettenbruchs ungewöhnlich gross ist; es ist in der Tat:

$$\frac{18}{7}\text{-mal Bewegung des Jupiter} = 769''{,}1857$$
$$\text{Bewegung der Pallas} = 769''{,}1850.$$

Der Divisor $18n' - 7n$ ergab sich also verschwindend klein, und die analytische Untersuchung dieses Falles dürfte Gauss in ähnlicher Weise gemacht haben, wie Laplace bei Betrachtung der Libration der Jupitermonde.

Nach Werke VII, 1906, S. 542 ist mit den dortigen Bezeichnungen

$$\frac{dn}{dt} = 3n^2 ae T \sin(v - \pi) + \frac{3n^2 b^2}{r^2} V.$$

Die Entwicklung des Ausdruckes rechter Hand in der Form 91) möge das kritische Glied

94) $$n^2 a \sin(m'L' - mL + A_{m,m'})$$

enthalten, wo in unserem Falle $m' = 18$, $m = 7$. Setzt man

95) $$u = m'L' - mL + A_{m,m'}$$

und bedenkt, dass

$$\frac{dL}{dt} = n + \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \frac{dL'}{dt} = n',$$

so wird

96) $$\frac{du}{dt} = m'n' - mn - m\frac{d\varepsilon}{dt}$$

und

96) $$\frac{d^2u}{dt^2} = -mn^2 a \sin u + P,$$

wo P nur weniger wichtige periodische Glieder enthält. Vernachlässigt man P, und nimmt man den Faktor n^2 als konstant an, so kann die letztere Gleichung genau wie die Pendelgleichung diskutiert werden und zwar bei Annahme einer anziehenden oder abstossenden Schwerkraft, je nachdem a positiv oder negativ ist; man erhält

98) $$\left(\frac{du}{n\,dt}\right)^2 = C + 2ma\cos u.$$

Die einzelnen Fälle der Bewegung von u mögen hier aufgeführt werden,

da eine wirklich vollständige Darstellung in der Literatur kaum aufzufinden sein dürfte. Ist

$$1.\quad C < -2m|\alpha|,$$

so findet keine reelle Bewegung statt. Ist

$$2.\quad -2m|\alpha| < C < 0,$$

so schwankt u periodisch mit der Amplitude $\pm \arccos \frac{C}{2m|\alpha|}$ und zwar um die stabile Ruhelage $u = 0$ oder π, je nachdem α positiv oder negativ ist; die Amplitude ist absolut genommen kleiner als $\frac{\pi}{2}$. Ist

$$3.\quad 0 < C < 2m|\alpha|,$$

so schwankt u in gleicher Weise mit der Amplitude

$$\pm \arccos\left(-\frac{C}{2m|\alpha|}\right),$$

die absolut genommen grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist. Ist endlich

$$4.\quad C > 2m|\alpha|,$$

so kann $\frac{du}{dt}$ niemals verschwinden; es tritt der Fall des ganz herumschwingenden Pendels ein, und zwar in der einen oder anderen Richtung, je nach dem Vorzeichen des Anfangswertes von $\frac{du}{dt}$.

Daneben gelten die Spezialfälle:

$$a.\quad C = -2m|\alpha|;$$

stabile Ruhelage bei $u = 0$ oder π, je nachdem α positiv oder negativ.

$$b.\quad C = 0;$$

periodische Schwankung von u mit der Amplitude $\pm \frac{\pi}{2}$.

$$c.\quad C = 2m|\alpha|;$$

in diesem Falle ist

bei positivem α: $\quad \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{u}{4}\right) = e^{\pm\sqrt{m\alpha}\,.\,n(t-t_0)}$,

bei negativem α: $\quad \operatorname{tg}\frac{u}{4} = e^{\pm\sqrt{m|\alpha|}\,.\,n(t-t_0)}$.

Die Bewegung ist hier doppelt asymptotisch; u nähert sich der labilen Ruhelage ($u = \pi$, wenn α positiv, $u = 0$, wenn α negativ) für $t = \pm\infty$, also ohne

sie in endlicher Zeit zu erreichen. Doch tritt hier für $\lim e^{\pm t_0} = 0$ der noch engere Spezialfall ein, dass u dauernd in der labilen Ruhelage bleibt.

Da sehr genähert

$$\frac{du}{dt} = m'n' - mn,$$

so kann aus der obigen Kettenbruchentwicklung geschlossen werden, dass $\frac{du}{dt}$ hier in der Tat verschwindet, u periodisch ist, und das rationale Verhältnis $\frac{n'}{n} = \frac{m}{m'}$ sich immer wieder herstellt.

In den Fällen 2. und 3. schwankt $m'\frac{n'}{n} - m$ zwischen den Grenzen $\pm\sqrt{C + 2m|\alpha|}$; im Falle 4. dagegen entweder zwischen $+\sqrt{C \pm 2m|\alpha|}$ oder zwischen $-\sqrt{C \pm 2m|\alpha|}$. Da α äusserst klein ist, so sind auch die Änderungen von n sehr klein.

Die Diskussion der Gleichung 98) stützt sich auf verschiedene Vernachlässigungen und ist daher nicht streng. Der Veränderlichkeit von n^2 ist, immer unter Beiseitelassung von P, unschwer Rechnung zu tragen. Man hat dann die Gleichungen

$$\frac{du}{dt} = m'n' - mn, \quad \frac{dn}{dt} = n^2\alpha \sin u,$$

zu diskutieren. Setzt man

$$n = \frac{n_0}{1-v} \text{ und } mn_0 = m'n',$$

so wird

$$\frac{du}{dt} = -m'n'\frac{v}{1-v}, \quad \frac{dv}{dt} = n_0\alpha \sin u.$$

Diese Gleichungen haben die kanonische Form:

$$99) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u} \qquad H = n_0\alpha \cos u + m'n'(v + \log(1-v)).$$

Ein Integral dieser Gleichungen ist

$$100) \qquad H = c.$$

Die Grösse $\frac{du}{dt}$ verschwindet nur für $v = 0$, d. h. nach 100) für $n_0\alpha \cos u = c$, oder für

$$u = \pm \operatorname{arc\,cos} \frac{c}{n_0\alpha}.$$

Ist $c > n_0|\alpha|$, so verschwindet $\frac{du}{dt}$ niemals, entsprechend dem obigen Fall 4. Ist $|c| < n_0|\alpha|$, so schwankt u periodisch, wie in den Fällen 2. und 3., vorausgesetzt, dass nicht gleichzeitig $\frac{dv}{dt}$ verschwindet. $\frac{du}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ können nur dann gleichzeitig verschwinden, wenn $c = \pm n_0|\alpha|$. Für diesen Sonderwert von c treten die Sonderfälle a. und c. ein: ist $u = 0$ oder π, so bleibt es beständig konstant (Fall a.); ist u nicht gleich einem dieser Werte, so tritt der doppelt asymptotische Fall unter c. ein.

Diese Untersuchung lässt sich insofern weiter ausdehnen, als sich ohne Schwierigkeit in 97) die Glieder von P berücksichtigen lassen, deren Argumente Vielfache von u sind. Man würde dann Gleichungen von der Form 99) erhalten, bei denen

$$H = n_0 \sum \tfrac{\alpha_i}{i} \cos iu + m' n' (v + \log(1 - v)) = c$$

wäre. Die Untersuchung käme dann auf die Feststellung der reellen Wurzeln der Gleichung

$$n_0 \sum \tfrac{\alpha_i}{i} \cos iu - c = 0$$

heraus. Konvergieren die α_i stark genug, so wird diese Gleichung nur die Wurzeln $u = 0$ und π haben und die Ergebnisse werden den obigen wesentlich gleich sein. Dass dieser Fall eintritt, ist bei Pallas zu erwarten, wo m und m' verhältnismässig grosse Zahlen sind. Anders kann der Fall liegen, wenn diese Zahlen klein sind, die mittleren Bewegungen sich etwa wie $\frac{m}{m'} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ verhalten.

Wollte man noch auf weitere Glieder in P und darauf Rücksicht nehmen, dass die Grössen $\alpha_{m,m'}$ und $A_{m,m'}$ in den Ausdrücken 91) streng genommen nicht konstant sind, so werden die Untersuchungen schwieriger[1]).

Nachdem GAUSS durch seine zweite Rechnung der allgemeinen Störungen die Zahlenwerte der Koeffizienten α und A gefunden hatte, konnte er die Grenzen, zwischen denen n schwankt, sowie die Länge der Periode, wenn auch nur sehr unsicher, berechnen. Auf dem ersten der oben erwähnten Zettel stehen ausser der Zahlenrechnung für die Grössen $18L' - 7L$ und C die Gleichungen:

1) Wir verweisen auf CHARLIER, *Mechanik des Himmels*, Leipzig, II. Band, 1907, 11. Abschnitt, § 4—6, zweite durchgesehene Auflage 1927.

$$\text{»}\frac{d^2\,\text{⚴}}{dt^2} = \quad 0''{,}02955 \sin(18\,2\!\!4 - 7\,\text{⚴} + 198^0\,39'\,8''),$$

$$\frac{d^2\,\text{⚴}}{dt^2} = \quad 0''{,}02955 \sin u \;[= \alpha \sin u],$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\,0''{,}20685 \sin u \;[= -\,7\alpha \sin u],$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = C + 0''{,}4137 \cos u \;[= C + 14\alpha \cos u],$$

$$dt = \frac{du}{\sqrt{(-\,0{,}00000159 + 0{,}00000200 \cos u)}}\text{«}.$$

Auf dem zweiten Zettel lauten die Notizen (ausser den auf der folgenden Seite erwähnten Zahlenrechnungen):

$$\text{»}\frac{d^2\,\text{⚴}}{dt^2} = \alpha \sin(18\,2\!\!4 - 7\,\text{⚴} + A),$$

101) $$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\,7\alpha \sin u, \qquad \frac{18\,d2\!\!4}{dt} = 7 + \mu,$$

102) $$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = C + 14\alpha \cos u = (14\alpha + C)\cos^2\psi,$$

103) $$C = \mu^2 - 14\alpha \cos U,$$

$$\cos u = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} u,$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = C + 14\alpha - 28\alpha \sin^2 \frac{1}{2} u = (C + 14\alpha)\left(1 - \frac{28\alpha}{C + 14\alpha} \sin^2 \frac{1}{2} u\right),$$

$$\sqrt{\frac{28\alpha}{C + 14\alpha}} \cdot \sin \frac{1}{2} u = \sin\psi,$$

$$\sqrt{\frac{7\alpha}{C + 14\alpha}} \cdot \cos \frac{1}{2} u \,.\, du = \cos\psi \,.\, d\psi,$$

$$\frac{du}{dt} = \cos\psi \,.\, \sqrt{(C + 14\alpha)},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{7\alpha} \,.\, \sqrt{\left(1 - \frac{C + 14\alpha}{28\alpha} \sin^2\psi\right)},$$

104) $$\frac{d\psi}{\sqrt{\left(7\alpha - \frac{C + 14\alpha}{4} \sin^2\psi\right)}}, \qquad \frac{1}{M(\sqrt{7\alpha},\ \sqrt{(7\alpha \cos^2 \frac{1}{2} U - \frac{1}{4}\mu^2)})},$$

105) $$\text{Maximum von } \frac{du}{dt} = \sqrt{(28\alpha \sin^2 \tfrac{1}{2} U + \mu^2)}.\text{«}$$

Die Gleichungen 101) und 102) entsprechen den Gleichungen 97) und 98); Gauss schreibt stets kurz dt für $n\,dt$. Nach Gleichung 103) berechnet er C auf dem ersten Zettel; μ und U bedeuten die aus den Beobachtungen festzustellenden Anfangswerte von $\frac{du}{n\,dt} - 18\frac{n'}{n} - 7$ und $u = 18L' - 7L + A$.

Aus den Werten

$$n' = 299''{,}12817,$$
$$n = 769''{,}16512,$$

die GAUSS seiner zweiten Rechnung zugrunde legte[1]), ergibt sich

$$\log \mu = 6{,}2936 - 10,$$

wo die letzte Stelle schon um einige Einheiten unsicher ist. Der von GAUSS angegebene Wert (6,29314) enthält noch eine Stelle mehr und entspräche genau dem Wert $7n = 5384''{,}15600$ oder $n = 769''{,}165143$.

Bei der Berechnung von U hat GAUSS anscheinend ein Versehen begangen. Es folgt nämlich nach Werke VII, 1906, S. 557 das kritische Glied

$$\frac{du}{n^2 dt} = +0''{,}012 \cos(18M' - 7M) - 0''{,}027 \sin(18M' - 7M)$$

oder, indem man beide Teile zusammenzieht:

$$\frac{du}{n^2 dt} = 0''{,}02955 \sin(18M' - 7M + 156^0\,2'\,14'').$$

Der Koeffizient $a = 0''{,}02955$ stimmt genau mit dem obigen GAUSSschen Werte überein. Setzt man aber, ebenfalls mit den Werten Werke VII, 1906, S. 529,

$$\begin{aligned} M' &= L' - \pi' = L' - \ 11^0\,17'\ 5''{,}4 \\ M &= L - \pi = L - 121^0\ 8'\,54''{,}5 \end{aligned} \qquad 18\pi' - 7\pi = 75^0\,5'\,16'',$$

so erhält man

$$\frac{du}{n^2 dt} = 0''{,}02955 \sin(18L' - 7L + 80^0\,56'\,58''),$$

übrigens in voller Übereinstimmung mit dem von GAUSS berechneten Wert, Werke VII, 1906, S. 557 (Glied in $\int n dt$). Es ist also $A = 80^0\,56'\,58''$, während GAUSS auf den Zetteln mit dem Wert $A = 198^0\,39'\,8''$ gerechnet hat. Zur Berechnung von U setzt er $18L' - 7L = 125^0\,36'\,49''$, ein Wert, der sehr unsicher ist, aber annähernd mit den für verschiedene Epochen nachgerechneten Werten übereinstimmt. Hiermit findet er[2])

$$U = 324^0\,15'\,57'', \quad \log C = 4{,}20126n - 10,$$

während man mit dem richtigen Werte von A erhält:

$$U = 206^0\,33'\,46'', \quad \log C = 4{,}26300 - 10.$$

1) Werke VII, 1906, S. 528.

2) Werke VII, 1906, S. 608, steht versehentlich $\log C = 4{,}26300$ statt $4{,}20126n$.

Es ist also jedenfalls $C < 14\alpha$ und die Änderung von u periodisch. Die Gleichung 104) gibt die Periode der Libration und die Gleichung 105) gibt die Grenzen, zwischen denen n schwankt. Die Berechnung beider Grössen steht auf dem zweiten Zettel neben den Formeln. Man findet die Periode zu 1894 Pallasumläufen = 737 Jupiterumläufen, während GAUSS nach seinen Zahlen angibt: 1026,17 Pallasumläufe = 399,07 Jupiterumläufe.

Bei der Berechnung des Ausdruckes 105) ist auf dem Zettel versehentlich $\frac{1}{4}\mu^2$ statt μ^2 gesetzt, womit GAUSS die Grenzen von n zu

$$\frac{18}{7}n' \pm 0''{,}06838$$

fand[1]). Die richtige Rechnung ergibt:

$$\text{für } n\text{: } \frac{18}{7}n' \pm 0''{,}2153, \qquad \text{für } u\text{: } \pm 156^0$$

und mit den GAUSSschen Zahlen:

$$\text{für } n\text{: } \frac{18}{7}n' \pm 0''{,}0722, \qquad \text{für } u\text{: } \pm 37^0 35'.$$

GAUSS mag die Rechnung auf den Zetteln nur flüchtig gemacht und darauf weniger Wert gelegt haben, da die Grundlagen recht unsicher sind; daher erklärt es sich wohl auch, dass er seine Zahlen nicht geprüft hat. Die Untersuchung gab ihm nun die Unterlagen für seine in der Handschrift *Exposition d'une nouvelle méthode* etc.[2]) aufgestellte Behauptung, dass die bei einem rationalen Verhältnis von n und n' auftretenden sekularen Glieder in n bei Berücksichtigung der höheren Potenzen der störenden Masse die periodische Form annehmen. Für die praktische Rechnung empfiehlt er die Beibehaltung des sekularen Gliedes in n, d. h. die Entwicklung des Librationsgliedes nach Potenzen von t, und verfährt hiernach auch selbst[3]).

6. Tafeln für die Jupiterstörungen der Pallas.

Die gesamte Anzahl der Störungsglieder beläuft sich nach S. 208 auf 824 und bei der Berechnung eines einzelnen Pallasortes müssten nach den Ausdrücken Werke VII, 1906, S. 543—556, alle diese Glieder berechnet

1) Vergl. Werke VII, 1906, S. 559 und 608.

2) Ebenda, S. 468.

3) Ebenda, S. 557.

werden, wobei schon die Bildung der Argumente die Geduld eines Einzelnen leicht übersteigen würde. GAUSS entwarf daher die Werke VII, 1906, S. 572 bis 577 abgedruckten Tafeln, die sich mit den zugehörigen Rechnungen vollständig im Nachlass vorfanden. Er teilt die periodischen Glieder nach ihren Argumenten in 13 Gruppen und stellt jede Gruppe als Funktion der Differenz $L'-L$ der mittleren Längen von Pallas und Jupiter dar. Mit dieser Grösse als Argument können die Zahlen zur Berechnung der Summe einer ganzen solchen Gruppe direkt aus den Tafeln entnommen werden. Die Berechnung der Tafeln, an der sich neben ENCKE noch WESTPHAL hervorragend beteiligte, wurde in etwas mehr als einem Jahr fertiggestellt.

7. Störungen der Pallas durch Mars.

Von den Marsstörungen hat GAUSS nur die Störungen der halben grossen Achse, die des ersten Teils $\delta\int n\,dt$ der Epoche und die der Exzentrizität fertig gerechnet und hierbei im wesentlichen wieder dieselbe Methode gebraucht, wie bei den Jupiter- und Saturnstörungen. Die nicht erhebliche Arbeit der Berechnung der übrigen Elemente ist liegen geblieben.

Andererseits finden sich aber Aufzeichnungen im Nachlass, nach denen GAUSS versuchte, eine andere neuartige Methode zur Entwicklung der Komponenten der störenden Kräfte anzuwenden, die sich etwa in folgender Weise beschreiben lässt. Es sind die Ausdrücke $\frac{x'-x}{\rho^3}$, $\frac{y'-y}{\rho^3}$, $\frac{z'-z}{\rho^3}$ nach Vielfachen der mittleren Anomalien M (Pallas) und M' (Mars) zu entwickeln. Da nicht nur die Exzentrizität der Pallas, sondern auch die des Mars beträchtlich ist, und auch das Verhältnis der beiden halben grossen Axen $\frac{a'}{a}$ nicht klein ist, so konvergieren die trigonometrischen Reihen nach allen drei Vielfachen von M, M', $M-M'$ und nach allen drei Parametern $\left(e,\ e' \text{ und } \frac{a'}{a}\right)$ ziemlich schwach und man muss hier auf den Vorteil verzichten, die Entwicklung nach e' an die letzte Stelle zu setzen, wie oben S. 236—237 bei Gelegenheit der Jupiterstörungen auseinandergesetzt worden ist; vielmehr müsste die Entwicklung nach den Vielfachen aller drei Argumente M, M' und $M'-M$ mit gleichem Recht behandelt werden und dazu reicht die bei den Jupiterstörungen benutzte rein interpolatorische Methode nicht aus, da sie nur die Berücksichtigung zweier Argumente gestattet.

Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, scheint GAUSS ein gemischtes, teils interpolatorisches, teils analytisches Entwicklungsverfahren angewandt oder wenigstens versucht zu haben. Er teilt den Umkreis für das Argument M in 24 Teile und führt daher die Entwicklung nach dem Argument M' für die Einzelwerte $M = 0,\ 15^0,\ 30^0, \ldots\ 345^0$ aus; bei dieser Entwicklung stellt er folgende Betrachtungen an.

Für den Abstand der Pallas vom Mars lässt sich die Formel[1])

$$\rho^2 = A + B\cos(E' - C) + D\cos^2 E'$$

ableiten, wo E' die exzentrische Anomalie des Mars und A, B, C, D Funktionen der exzentrischen, wie auch der mittleren Anomalie der Pallas sind, also für jeden M-Wert bestimmte Zahlenwerte haben; der Ausdruck für ρ^2 lässt sich in Faktoren zerlegen:

$$\frac{\rho^2}{D} = \{\mathrm{M} - \cos(E' - \varphi)\}\{\mathrm{N} - \cos(E' + \varphi)\},$$

wo M, N, φ aus A, B, C, D zu berechnen sind[2]). Hiermit wird:

$$\frac{x' - x}{\rho^3} = \frac{x' - x}{D^{\frac{3}{2}}[\mathrm{M} - \cos(E' - \varphi)]^{\frac{3}{2}}[\mathrm{N} - \cos(E' + \varphi)]^{\frac{3}{2}}}.$$

GAUSS betrachtet nun die Würzeln der Gleichung $\rho^2 = 0$, im besonderen

$$\mathrm{M} - \cos(E' - \varphi) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung da, da $\mathrm{M} > 1$ ist,

$$E' = \varphi + k\pi + ix,$$

wo k eine ganze positive oder negative Zahl oder Null bedeutet und wo

$$e^x = \mathrm{M} \pm \sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}$$

ist.

Der entsprechende Wert von M' ergibt sich aus der KEPLERschen Gleichung

$$M' = E' - e'\sin E' = E' - e'\sin\varphi\cos(E' - \varphi) - e'\cos\varphi\sin(E' - \varphi)$$

oder, wenn man

$$\cos(E' - \varphi) = \mathrm{M} = \frac{1}{\sin\zeta},$$

und damit

$$\sin(E' - \varphi) = i\operatorname{ctg}\zeta$$

1) Die ähnliche Formel $\rho^2 = (A - a\cos E')^2 + (B - b\sin E')^2 + C^2$ benutzt GAUSS in der *Determinatio attractionis* etc., Werke III, S. 334.

2) Siehe Werke VII, 1906, S. 595.

setzt:

$$M' = E' - \frac{e' \sin \varphi}{\sin \zeta} - ie' \cos \varphi \,.\, \operatorname{ctg} \zeta.$$

Setzt man nun

$$\varphi' = \varphi - \frac{e' \sin \varphi}{\sin \zeta}$$

und der Kürze halber

$$y = e' \cos \varphi \,.\, \operatorname{ctg} \zeta,$$

so wird

$$M' - \varphi' = E' - \varphi - iy,$$

also

$$\begin{aligned} \cos (M' - \varphi') &= \tfrac{1}{2} e^{y} \{\cos (E' - \varphi) + i \sin (E' - \varphi)\} \\ &\quad + \tfrac{1}{2} e^{-y} \{\cos (E' - \varphi) - i \sin (E' - \varphi)\} \\ &= \tfrac{1}{2} e^{y} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\zeta + \tfrac{1}{2} e^{-y} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\zeta. \end{aligned}$$

Setzt man noch

$$e^{y} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\zeta = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\zeta',$$

so wird schliesslich

$$\cos (M' - \varphi') = \frac{1}{\sin \zeta'}.$$

Die beiden Gleichungen

$$\cos (E' - \varphi) - \mathrm{M} = \cos (E' - \varphi) - \frac{1}{\sin \zeta} = 0$$

und

$$\cos (M' - \varphi') - \frac{1}{\sin \zeta'} = 0$$

werden also durch die gleichen Werte von M' befriedigt. Daher hat man

$$\mathrm{M} - \cos (E' - \varphi) = c \left\{ \frac{1}{\sin \zeta'} - \cos (M' - \varphi') \right\},$$

und, wenn man

$$\lambda = \left\{ \frac{1}{\sin \zeta'} - \cos (M' - \varphi') \right\}^{\frac{3}{2}}$$

setzt,

$$\frac{x' - x}{\rho^3} = \frac{x' - x}{c^{\frac{3}{2}} D^3 (\mathrm{N} - \cos (E' + \varphi))^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{(x' - x)\lambda}{\rho^3} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

Diese Grösse ist also in zwei Faktoren zerlegt und aus dem ersten Faktor $\frac{(x' - x)\lambda}{\rho^3}$ ist die ungünstige Konvergenz verschwunden, die durch die Grösse $(\mathrm{M} - \cos (E' - \varphi))^{-\frac{3}{2}}$ veranlasst wird. Dieser erste Faktor wird sich also nach der interpolatorischen Methode nach Vielfachen von M' entwickeln lassen, ohne dass man sehr viele Glieder zu berechnen, und ohne dass man den Umkreis in allzuviele Teile zu teilen braucht. Dafür wird zwar der zweite Faktor $\frac{1}{\lambda}$

mit Berücksichtigung einer grösseren Anzahl Glieder entwickelt werden müssen jedoch lässt dieser sich leicht beliebig weit entwickeln, da es sich hier um nichts anderes als um die von GAUSS so vielfach betrachtete Entwicklung des Ausdrucks

$$(\alpha - \beta \cos \psi)^{-\frac{3}{2}}$$

handelt.

Man könnte wohl auch den zweiten Faktor $(N - \cos(E' + \varphi))^{-\frac{3}{2}}$ in gleicher Weise heraussetzen; doch hat GAUSS dieses zweite Verfahren überhaupt nicht weiter verfolgt, weil die Ersparnis an Rechenarbeit doch nicht sehr gross zu sein scheint. Vermutlich hat er den Faktor $(M - \cos(E' - \varphi))^{-\frac{3}{2}}$ gewählt, weil die Funktion $M - \cos(E' - \varphi)$ die der reellen Achse am nächsten gelegene Nullstelle in der komplexen M'-Ebene hat. Die entsprechende Wurzel M' hat den kleinsten imaginären Teil; ihr reeller Teil ist φ' und man kann annehmen, dass die Entwicklung nach $M' - \varphi'$ diejenige auf der reellen Achse ist, die am schwächsten konvergiert.

Der GAUSSsche Kunstgriff besteht also darin, dass man eine Funktion, deren Entwicklung schwach konvergiert, mit einem Faktor multipliziert, der die Konvergenz verstärkt. Das Produkt entwickelt man sodann nach der interpolatorischen Methode. Die Entwicklung des reziproken Faktors, mit der nachher wieder zu multiplizieren ist, wird zwar schwach konvergieren; man kann den Faktor aber so wählen, dass seine Entwicklung sich leicht weit genug fortsetzen lässt.

Man kann sich das Verfahren an dem analogen Fall einer Potenzreihenentwicklung vergegenwärtigen:

Es sei die Funktion

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

gegeben, wo $f(x)$ eine ganze rationale Funktion sein mag und die Gleichung

$$f(x) = 0$$

keine reelle Wurzel hat. Ihre Wurzeln seien $a_1 \pm ib_1$, $a_2 \pm ib_2$ usw., so dass

$$f(x) = ((x - a_1)^2 + b_1^2)((x - a_2)^2 + b_2^2) \cdots.$$

Es wird verlangt, y in einem beliebigen Punkte der reellen Achse so in eine Potenzreihe zu entwickeln, dass diese Reihe möglichst leicht hergestellt werden

kann. Wenn b die kleinste der Grössen $b_1, b_2, \ldots$ ist, so wird die Konvergenz der Entwicklung von y, wenigstens im entsprechenden Punkte a und seiner Umgebung, durch die Nullstelle $a+ib$ begrenzt. Nimmt man den Faktor

$$\lambda = (x-a)^2+b^2$$

heraus, so konvergiert die Entwicklung von λy stärker als die von y. Es kann also vorteilhaft sein, die Grössen λy und $\frac{1}{\lambda}$, jede für sich, zu entwickeln und durch Multiplikation beider Entwicklungen die von y herzustellen. Man wird nämlich bei der Entwicklung von λy weniger hohe Potenzen von x zu berücksichtigen brauchen, wie bei der von y und bei der von $\frac{1}{\lambda}$. Nun ist aber die Entwicklung von

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{b^2}\sum_0^\infty (-1)^n \left(\frac{x-a}{b}\right)^{2n}$$

formell leichter herzustellen, als die von y und λy, es wird also durch die Zerlegung ein Vorteil gewonnen.

Solche Erwägungen mögen es gewesen sein, die GAUSS hier verfolgt hat. In einer Notiz des *Handbuchs* 19, Be (S. 76—77)[1]), gibt GAUSS eine andere Methode zur Aufsuchung des Faktors λ:

Er bringt die Gleichung $\rho^2 = 0$ auf die Form:

$$a+b\cos 2E' - \cos(E'+D) = 0$$

und bestimmt ihre Wurzeln E' in der Form $E' = x+y$, wo x reell und y rein imaginär sein soll; die Formeln zur Berechnung von x und $\cos y$ gibt er an; letztere Grösse ist reell und grösser als Eins. Der entsprechende Wert von M' sei $\xi_0+i\eta_0$.

Ist λ wieder der zur Entwicklung des Ausdrucks $\frac{1}{\rho^2}$ aus diesem herauszunehmende Faktor, so ist also $\frac{1}{\lambda}$ in eine Reihe nach Vielfachen von $M'-\xi_0$ zu entwickeln; man wird also λ die Form geben:

$$\lambda = (C-\cos(M'-\xi_0))^{\frac{3}{2}}.$$

Die Konstante C ist so zu bestimmen, dass λ gleichzeitig mit ρ verschwindet, also

$$C = \cos i\eta_0.$$

Dabei stellt GAUSS noch die folgende Betrachtung an:

1) Werke VII, 1906, S. 599—600.

Sind

$$u = a\cos(nM' + A) \quad \text{und} \quad u' = a'\cos((n+1)M' + A')$$

zwei aufeinanderfolgende Glieder einer konvergenten Reihe, und zwar im besonderen der Entwicklung von $\frac{1}{\lambda}$, so ist:

$$\frac{u'}{u} = \frac{a'}{a}\,\frac{e^{iM'-i(A-A')} + e^{-i(2n+1)M'-i(A+A')}}{1+e^{-2in M'-2iA}}.$$

Setzt man

$$M' = \xi + i\eta,$$

so ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u'}{u} = \lim\frac{a'}{a}\,e^{-\eta}\{\cos(\xi - A + A') + i\sin(\xi - A + A')\}.$$

Macht man die von GAUSS nicht ausdrücklich hervorgehobene Voraussetzung, dass $\lim\frac{u'}{u}$ einen bestimmten Wert hat, so ist dieser höchstens gleich Eins, da die Reihe als konvergent vorausgesetzt ist. Lässt man M' in $M_0' = \xi_0 + i\eta_0$ übergehen und konvergiert die Reihe für alle Werte von M' bis M_0 ausschliesslich, so muss $\lim\frac{u'}{u}$ im Punkt M_0' sich beliebig der Eins nähern; es ist daher:

$$\lim\frac{a'}{a} = e^{\eta_0}, \quad \lim(A - A') = \xi_0.$$

8. Sekulare Störungen.

Seine Untersuchungen über die sekularen Störungen hat GAUSS in der *Determinatio attractionis* etc.[1]) veröffentlicht; aus gewissen Äusserlichkeiten kann man vermuten, dass diese Untersuchungen etwa um dieselbe Zeit (1814) ausgeführt worden sind, wie die Berechnung der Marsstörungen der Pallas. Im *Handbuch* Be, S. 82, wo sich Vorarbeiten zur *Determinatio* finden, fällt nämlich nicht bloss die Ähnlichkeit der Gleichung für ρ^2 mit der bei der Pallas benutzten auf, sondern dort ist auch ein Zahlenbeispiel von der Pallas entnommen. In der *Anzeige* der *Determinatio attractionis*[2]) vom Jahre 1818 sagt GAUSS, dass er »diese Resultate schon vor vielen Jahren gefunden hat«.

Ebendort[3]) heisst es: »Vermöge eines, vielleicht bis jetzt noch von nie-

1) Werke III, S. 331. Deutsch von H. GEPPERT, OSTWALDS Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 225.

2) Werke III, S. 360.

3) Ebenda, S. 357.

mand ausdrücklich ausgesprochenen, aber aus der physischen Astronomie leicht zu beweisenden Lehrsatzes, sind die Sekularveränderungen einer Planetenbahn durch die Störung eines andern Planeten dieselben, der störende Planet mag eine elliptische Bahn nach KEPLERS Gesetzen wirklich beschreiben, oder seine Masse mag auf den Umfang der Ellipse in dem Masse verteilt angenommen werden, dass auf Stücke der Ellipse, die sonst in gleich grossen Zeiten beschrieben werden, gleich grosse Anteile an der ganzen Masse kommen: vorausgesetzt, dass die Umlaufszeiten des gestörten und des störenden Planeten nicht in rationalem Verhältnis zu einander stehen«[1]). Man muss hier die Einschränkung machen, dass die GAUSSsche Methode nur die ersten Potenzen der störenden Masse berücksichtigt oder dass man nur diese als sekulare Störungen bezeichnet, wie es wohl in der älteren Störungstheorie üblich war. Jedoch wird dadurch z. B. im Falle des Mondes keine genügende Annäherung erreicht; ähnliches tritt ein, wenn die Umlaufszeiten beider Planeten nahezu in einem niedrigzahligen rationalen Verhältnis stehen; in diesem Falle werden die von den dritten Potenzen der störenden Masse abhängenden[2]) Glieder, die die Sekularbeschleunigung hauptsächlich bedingen, merklich.

9. Schlussbemerkung.

Mit den Jahren 1816—17 schliessen GAUSS' Arbeiten aus dem Gebiete der theoretischen Astronomie gänzlich ab. Seine späteren astronomischen Untersuchungen gehören in das Gebiet der beobachtenden und sphärischen Astronomie, während sich der Schwerpunkt seiner Arbeiten überhaupt auf verwandte Gebiete verschob; in den nächstfolgenden Jahren steht besonders die Geodäsie im Vordergrund seiner Tätigkeit. Näheres über GAUSS' astronomische Beschäftigungen in dieser Zeit sehe man im ersten Abschnitt dieser Abhandlung.

1) Vergl. BESSELS Rezension, Jenaer Allgemeine Literaturzeitung, 1821, Nr. 58. F. W. BESSEL, *Recensionen*, Leipzig 1878, S. 193.

2) Vergl. M. BRENDEL, *Theorie der kleinen Planeten*, 2. Teil, S. 49—51 u. sonst (Abhandlungen der K. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, Neue Folge, Bd. VI, Nr. 4, Berlin 1909).

Inhaltsverzeichnis.

ERSTER ABSCHNITT. — PRAKTISCHE UND SPHÄRISCHE ASTRONOMIE.

Einleitung . . . . . Seite 3

1. Die Braunschweiger Periode, bis 1807.

Studienzeit 7
Bekanntschaft mit LECOQ und Briefwechsel mit v. ZACH 9
ULUGH BEIGHS Sonnentafeln, Methode der kleinsten Quadrate 11
Beobachtungen mit dem Sextanten 13, 20, 33
Ruf nach St. Petersburg 16, 20, 27, 32
Bahnbestimmung der Ceres 17
Unterstützung durch Herzog KARL WILHELM FERDINAND 18, 21, 22
Ruf nach Göttingen 21, 29, 32
Plan einer Sternwarte in Braunschweig . . . . . 22, 27—32
Pulversignale auf dem Brocken zur Längenbestimmung 25
Persönliche Bekanntschaft mit v. ZACH, Aufenthalt auf der Sternwarte Seeberg . . . 26
HARDINGS Berufung nach Göttingen 29
Tod des Herzogs 32
Instrumente und Beobachtungen in Braunschweig 33, 39
GEPFKENsches Spiegelteleskop . . . . . 35—39

2. Zweite (erste Göttinger) Periode, 1807—1813.

Übersiedelung nach Göttingen 41
Beschreibung der alten Göttinger Sternwarte 41
Instrumente der alten Göttinger Sternwarte 43
Tagebuch der astronomischen Beobachtungen auf der Sternwarte in Göttingen 49
HARDINGS Sternkarten 50
HARDINGS Reise nach Paris 51
Schüler von GAUSS 52
SHELTONsche Uhr 52
Veröffentlichungen 54

3. Dritte (zweite Göttinger) Periode, 1813—1816.

BORDAscher Repetitionskreis von REICHENBACH 55
Bestimmung der Göttinger Polhöhe 57
Briefwechsel mit BESSEL 59

Schiefe der Ekliptik und Polhöhe . . . . . Seite 59
BESSELs Berufung nach Königsberg 61
Theorie der Refraktion 64
Widersprechende Ergebnisse für die Schiefe der Ekliptik 65
Heliometer von FRAUNHOFER 71
Dioptrische Untersuchungen 78
Instrumente aus Lilienthal 79
HARDINGS Sternkarten vollendet 81, 87

4. Vierte (dritte Göttinger) Periode, 1817—1818.
Vollendung der neuen Göttinger Sternwarte 81, 83, 87
Beschreibung der neuen Sternwarte 82
Ankunft des Repsoldschen Meridiankreises 84
GAUSS Reise nach München und Benediktbeuren 85
Ankunft des REICHENBACHschen Passageninstruments und des Meridiankreises 86
Letzte Eintragungen in das Tagebuch der Sternwarte 87

5. Fünfte Periode. — Der REPSOLDsche Meridiankreis (1818 und später).
Beobachtungen am REPSOLDschen Kreise 88
Meridianzeichen 92
Stabilität des Kreises 93
Polhöhe 96
Zenitdistanzen 98
Briefwechsel mit BESSEL und OLBERS 99
Kollimationsfehler (Äquatorpunkt) 100
Wahrscheinlicher Beobachtungsfehler 102
Apparat zur Bestimmung der Teilungsfehler 103
Biegung, Quecksilberhorizont 103
Anzahl der Beobachtungstage 105

6. Sechste Periode. — REICHENBACsche Instrumente.
Erste Beobachtungen mit dem Passageninstrument 109
Fadenkreuz 111
Tagebuch der Beobachtungen am Passageninstrument 112
Bestimmung von Längenunterschieden durch Mondbeobachtungen 113
Uhren 114
Der REICHENBACHsche Meridiankreis 119
Meridianzeichen 119
Zirkumpolar- und Fundamentalsterne 122
SCHUMACHERsche Zenitsterne; dänische Gradmessung 122
Beobachtungsperioden, Umlegen des Kreises 123
Übereinstimmung mit BESSELS Beobachtungen 124
Biegung 125
BESSELS Refraktionstafeln 125
Quecksilberhorizont 125
Vorbereitung der Hannoverschen Gradmessung 126

7. Siebente Periode. — Geringere astronomische Tätigkeit.
GAUSS Klagen über die Zersplitterung seiner Zeit . . . . . Seite 128, 141
Hannoversche Landesvermessung 128
Übersicht über die Beobachtungen am REICHENBACHschen Kreise 130
Lotabweichung 131
Beobachtungen am Zenitsektor, Breitenunterschied zwischen Göttingen und Altona 131
Bestimmung der Fadenabstände durch einen Kollimator 132
Teilungsfehler 132
Nadirbeobachtungen 133
Eigenbewegung der Sonne 134
Hannoversche Mass- und Gewichtsregulierung 142
Tod von HARDING 143
Letzte Beobachtungen 144

Tafel. Abbildung der alten und der neuen Göttinger Sternwarte.

ZWEITER ABSCHNITT. — THEORETISCHE ASTRONOMIE.

Einleitendes 145
I. Theorie des Mondes 147
II. Bahnbestimmung aus drei oder vier Beobachtungen (im besonderen *Theoria motus*).
1. Die Entdeckung der Ceres 150
2. Einleitendes über GAUSS' Methoden der Bahnbestimmung 155
3. Übersicht über GAUSS' Methoden zur genäherten Bestimmung der Abstände von der Erde im ersten und dritten Ort 159
4. Ableitung von GAUSS' Hauptgleichung zur genäherten Bestimmung von δ' und Zusammenhang mit der *Theoria motus* 162
5. Methode der *Theoria motus* zur genäherten Bestimmung des Abstandes δ' im mittleren Ort 165
6. Bestimmung von δ und δ'' aus δ' bezw. von r und r'' aus r' 167
7. Bestimmung einer genäherten Bahn aus hypothetischen Werten von δ und δ'' oder von i und Ω, nach den älteren Methoden 168
8. Verbesserung der Bahn nach den älteren Methoden 173
9. Geschichtliches über GAUSS' Bahnbestimmungen 174
10. Übersicht über die verschiedenen Methoden der Bahnbestimmung aus hypothetischen Werten von δ und δ'' oder von i und Ω 177
11. Vervollkommnete Methode der *Theoria motus* 179
12. Besondere Fälle der Bahnbestimmung 182
13. Rechnung für parabelnahe Ellipsen und Hyperbeln; hyperbolische und Kreisbahn-Bestimmung 185
III. Bahnverbesserung aus einer grösseren Reihe von Beobachtungen.
1. Einleitendes 187
2. Bahnverbesserung aus vier Oppositionen 188
3. Bahnverbesserung aus mehreren Oppositionen und mit Berücksichtigung der Störungen 192
4. Allgemeine Formeln zur Bahnverbesserung 194

IV. Allgemeines über GAUSS' störungstheoretische Arbeiten.
1. Einleitendes . . . . . Seite 194
2. Geschichtliches über GAUSS' Störungsrechnungen 195

V. Störungen der Ceres.
1. Erste Methode 214
2. Tafeln der Ceresstörungen 221
3. GAUSS' zweite Methode zur Berechnung der Störungen der Ceres. *Theoria interpolationis* 222

VI. Tafeln zur Entwicklung von $(a^2 + a'^2 - 2aa'\cos x)^{-\frac{1}{2}}$ 231

VII. Störungen der Pallas und Vorbereitungen dazu.
1. *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis* 233
2. Spezielle Störungen der Pallas 233
3. Erste Rechnung der allgemeinen Störungen der Pallas 235
4. Zweite Rechnung der allgemeinen Störungen der Pallas 237
5. Die grössten Gleichungen in den Störungen der Pallas. Libration 238
6. Tafeln für die Jupiterstörungen der Pallas 247
7. Störungen der Pallas durch Mars. Verstärkung der Konvergenz 248
8. Sekulare Störungen 253
9. Schlussbemerkung 254

BEMERKUNGEN
ZUR ZWEITEN ABTEILUNG DES ELFTEN BANDES.

Der lange gehegte Plan einer wissenschaftlichen Biographie von GAUSS gewann um das Jahr 1910 feste Gestalt, indem (vergl. den 9. *Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken*, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen 1911, 1. Heft) beschlossen wurde, »monographische Darstellungen der wissenschaftlichen Lebensarbeit von GAUSS auf den einzelnen Gebieten« (sogenannte Essays) abfassen zu lassen. Diese sollten »nach der auch sonst bei der Herausgabe der Werke und bei der Anordnung des Archivs gewählten Reihenfolge: Arithmetik, Analysis, Geometrie, Geodäsie, Physik, Astronomie« geordnet, vorerst (vergl. den 10. *Bericht*, Nachrichten usw. 1913) einzeln, jeweils nach Fertigstellung, im Buchhandel ausgegeben, dann aber in den zweiten Abteilungen der Bände X und XI der Werke gesammelt werden, so zwar, dass der Band X, 2 die auf die Reine Mathematik bezüglichen, der Band XI, 2 die auf die Anwendungsgebiete bezüglichen Essays enthält. — Es liegt in der Natur von GAUSS' wissenschaftlicher Produktion, dass eine scharfe Scheidung dessen, was zu X, 2 und was zu XI, 2 gehören sollte, nicht möglich ist; wir haben die auf Geodäsie, Physik (insbesondere Magnetismus, Elektrodynamik und Optik) und Astronomie (praktische und theoretische) bezüglichen Essays zu dem vorliegenden Bande XI, 2 vereinigt und bemerken, dass die Essays, die die Gebiete der Mechanik fester und flüssiger Körper und die Potentialtheorie einerseits, das numerische Rechnen und die Chronologie andererseits behandeln, für den Band X, 2 vorbehalten bleiben.

Die hier zusammengefassten drei Essays sind einzeln paginiert und bilden, besonders soweit sie eine Darstellung der nur im Nachlass und Briefwechsel niedergelegten Untersuchungen zu geben suchen, eine unentbehrliche Ergänzung der in den Bänden V, VII, IX, XI, 1 veröffentlichten, zum Teil sehr fragmentarischen Nachlassteile und der zugehörigen Bemerkungen der Bearbeiter. —

Die Redaktion lag in den Händen der Unterzeichneten.

M. BRENDEL. L. SCHLESINGER.

INHALT.

GAUSS WERKE BAND XI2,

ABHANDLUNGEN ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER GEODÄSIE, PHYSIK UND ASTRONOMIE.

Abhandlung 1: Über die geodätischen Arbeiten von GAUSS. Von A. GALLE . . . . . S. 1—165

Abhandlung 2: Über GAUSS' physikalische Arbeiten (Magnetismus, Elektrodynamik, Optik). Von CLEMENS SCHAEFER . . . . . S. 1—217

Abhandlung 3: Über die astronomischen Arbeiten von GAUSS. Von MARTIN BRENDEL . . . S. 1—258

Bemerkungen zu Band XI, 2 . . . . . S. 259

CARL FRIEDRICH GAUSS
WERKE

HERAUSGEGEBEN VON DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

Band

I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck. 478 Seiten. 1870. Kart. RM 48.—

II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 528 Seiten. 1876. Kart. RM 53.—

NACHTRAG zum ersten Abdruck des zweiten Bandes. Seite 495—528. 1876. Kart. RM 3.80

III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 499 Seiten. 1876. Kart. RM 50.—

IV. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 492 Seiten. 1880. Kart. RM 50.—

V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 642 Seiten. 1877. Kart. RM 64.—

VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN UND AUFSÄTZE. 664 Seiten. 1874. Kart. RM 69.—

VII. THEORIA MOTUS UND THEORETISCH-ASTRONOMISCHER NACHLASS. (Parabolische Bewegung, Storungen der Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes). 650 S. 1906. Kart. RM 65.—

VIII. ARITHMETIK, ANALYSIS, WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG, GEOMETRIE. (Nachträge zu Band I—IV.) 458 Seiten. 1900. Kart. RM 46.—

IX. GEODÄSIE. (Fortsetzung von Band IV.) 528 Seiten. 1903. Kart. RM 53.—

X. Abteilung 1. NACHLASS UND BRIEFWECHSEL ZUR REINEN MATHEMATIK. (Nachträge zu Band I—IV und VIII.) TAGEBUCH. 586 Seiten. 1917. Kart. RM 59.—

NACHBILDUNG DES TAGEBUCHS (Notizenjournals) 1796—1814. RM 1.20

XI. Abteilung 1. NACHTRAGE ZUR PHYSIK, CHRONOLOGIE UND ASTRONOMIE. (Nachträge zu Band V—VII.) 518 Seiten. 1927. Brosch. RM 47. —. Kart. RM 48.—

XII. VARIA UND ATLAS DES ERDMAGNETISMUS. 415 Seiten, 5 Zahlentafeln und 19 Karten. 1929. Brosch. RM 49.—. Kart. RM 50.—

X. Abteilung 2. ABHANDLUNGEN ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER REINEN MATHEMATIK.

Abhandlung 1 und 5: ÜBER GAUSS' ZAHLENTHEORETISCHE ARBEITEN. Von PAUL BACHMANN. — GAUSS UND DIE VARIATIONSRECHNUNG. Von OSCAR BOLZA. 75 + 95 Seiten. 1922. Brosch. RM 17.—

Abhandlung 4: GAUSS ALS GEOMETER. Von PAUL STAECKEL. 123 Seiten. 1923. Brosch. RM 12.50

Abhandlung 6: GAUSS ALS ZAHLENRECHNER. Von PHILIPP MAENNCHEN. Etwa 60 Seiten. Unter der Presse.

Abhandlungen 2, 3 und 7 in Vorbereitung.

XI. Abteilung 2. ABHANDLUNGEN ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER GEODÄSIE, PHYSIK UND ASTRONOMIE. 642 Seiten. 1929.

Hieraus einzeln:

Abhandlung 1: ÜBER DIE GEODÄTISCHEN ARBEITEN VON GAUSS. Von A. GALLE. 165 Seiten. 1924. Brosch. RM 17.—

Abhandlung 2: ÜBER GAUSS' PHYSIKALISCHE ARBEITEN. Von CLEMENS SCHAEFER. 217 Seiten. 1929. Brosch. RM 24.—

Abhandlung 3: ÜBER DIE ASTRONOMISCHEN ARBEITEN VON GAUSS. Von MARTIN BRENDEL. 260 Seiten. 1929.

Die Bände X, 2 und XI, 2 bestehen aus einzelnen Abhandlungen (Essays), die besonders paginiert sind und in der Reihenfolge ihrer Fertigstellung auch gesondert ausgegeben werden. Mit der letzten Abhandlung eines jeden Bandes wird Titelblatt und Inhaltsverzeichnis geliefert.

Supplementband. REGISTER. BESCHREIBUNG DES NACHLASSES. BIOGRAPHISCHES. In Vorbereitung.

GÖTTINGEN, GEDRUCKT IN DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER).