BOŽO M. VRDOLJAK

M E T O D A R E T R A K C I J E I S T A B I L N O S T R J E Š E NJ A D I F E R E N C I J A L N I H J E D N A Č I N A

(DOKTORSKA DISERTACIJA)

B E O G R A D
1975

PREDGOVOR

Rad se sastoji od uvoda i četiri glave.

Uvod je izložen u dva dijela. U prvom dijelu je dat kratak komentar o radu - osnovni rezultati i cilj rada, dok drugi dio uvoda predstavlja ekspozitorni dio rada.

Prva glava se odnosi na moje ranije rezultate na koje se nadovezuju novi rezultati.

U drugoj glavi uvedene su nove krivolinijske "cijevi" metode retrakcije, zatim neke definicije o stabilnosti rješenja i proučene su neke diferencijalne jednačine sa stanovišta egzistencije i stabilnosti rješenja.

Treća glava posvećena je proučavanju egzistencije i stabilnosti rješenja nekih specijalnih diferencijalnih jednačina normalnog oblika.

U četvrtoj glavi posmatraju se neki rezultati T. Pejovića sa stanovišta metode retrakcije. Učinjene su odgovarajuće dopune i uopštenja osnovnih rezultata, kao i proširenje na proučavanje rješenja i sa stanovišta stabilnosti.

Na kraju rada navedena je literatura koja je korišćena pri izradi rada i koja je citirana u radu.

Smatram svojom prijatnom dužnošću da se srdačno zahvalim prof. dr Miloradu Bertolinu na stalnoj pomoći i razumjevanju pri rukovodjenju ovim radom.

Beograd, oktobra 1975. Mr Božo Vrdoljak

S A D R Ž A J

Strana

U V O D

I KRATAK KOMENTAR O RADU

Kvalitativna analiza diferencijalnih jednačina daje globalnu sliku o ponašanju integralnih krivih jednačine, obavještavajući o nizu osobina tih krivih. Ustvari, u nekim slučajevima ona nam omogućava da crtamo približan grafik rješenja, ne znajući njegov analitički izraz. Kvalitativna analiza je od posebnog značaja kada jednačinu ne možemo riješiti preko kvadratura ili je izraz za opšti integral veoma složen i nepodesan za upotrebu.

Veoma korisne numeričke metode približnog rješavanja diferencijalnih jednačina daju konkretne, numeričke približne vrijednosti jednog odredjenog partikularnog rješenja na odredjenom intervalu, dok kvalitativna analiza daje rezultate i za beskonačne vrijednosti nezavisno promjenljive. Numerička i kvalitativna analiza ne prevazilaze jedna drugu, nego se uzajamno prožimaju i dopunjuju.

U kvalitativnoj analizi do zaključaka se dolazi, u opštem slučaju, na osnovu analiza funkcija koje figurišu u samoj diferencijalnoj jednačini. Često se umjesto zadane diferencijalne jednačine posmatra odgovarajuća jednostavnija komparativna jednačina, gdje se rješenja odgovarajućih jednačina ne razlikuju bitno po svojim kvalitativnim osobinama.

Za kvalitativnu analizu od posebnog su značaja osnovni rezultati o egzistenciji i jedinosti rješenja diferencijalnih jednačina, kao i diferencijalne nejednakosti počev od najjednostavnijih Čapligin-Petrovićevog tipa.

Metoda retrakcije T. Važevskog /vidjeti [23] ili § 3 ovoga rada/ je metoda direktne kvalitativne analize diferencijalnih jednačina, a sastoji se u tome da se: a/ odredi "cijev" izlaznih integralnih krivih, tj. "cijev" kroz čije granične tačke prolaze integralne krive diferencijalne jednačine koja se posmatra presjecajući granične krive "cijevi" izlazeći iz te "cijevi" i čineći skup tačaka striktnog izlaza, što, prema metodi retrakcije, obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja koje pripada toj "cijevi" za sve vrijednosti nezavisno promjenljive intervala na kome je "cijev formirana; ili b/ da se odredi "cijev" ulaznih integralnih krivih, tj. "cijev" kroz čije granične tačke prolaze integralne krive presjecajući granice ulazeći u tu "cijev" i čineći skup tačaka striktnog ulaza, što i obezbjedjuje zaključak da jednačina koja se posmatra ima jednu klasu rješenja koja pripada toj "cijevi" za sve vrijednosti nezavisno promjenljive intervala na kome je "cijev" formirana. Rezultat b/ važi i bez metode retrakcije, što nije teško primjetiti.

Prema tome, primjeniti metodu retrakcije u proučavanju diferencijalnih jednačina znači formirati odgovarajuću "cijev" i dati odgovarajući zaključak o ponašanju rješenja. Zavisno od vrste "cijevi" imaju se i različiti zaključci. Naime, moguće je doći ne samo do zaključka o egzistenciji bar jednog ili jedne klase rješenja, nego i o nekim drugim bitnim karakteristikama rješenja. Ovo se posebno ima tamo gdje se radi o "cijevi" čija širina teži nuli kad nezavisno promjenljiva teži $+\infty$.

Na savjet prof. dr Milorada Bertolina 1969. godine počeo sam sa proučavanjem metode retrakcije T. Važevskog. Kao osnovna inspiracija u radu poslužili su mi mnogobrojni radovi M. Bertolina, vezani za primjenu metode retrakcije, koji se kod nas prvi počeo da bavi ovim pitanjem. M. Bertolino je metodu retrakcije primjenjivao direktno na neke od jednačina koje je proučavao, a za neke je formirao odgovarajuće komparativne jednačine na koje je, zatim, primjenjivao metodu retrakcije /vidjeti radove [2], [3], [4], [5] i [8] /. Neke od tih rezultata M. Bertolina navodimo u ovom radu /glava I §1 i glava III §1/.

"Cijevi" koje je koristio M. Bertolino bile su pravolinijske "cijevi" izlaznih i ulaznih integralnih krivih, koje su odredjivane konstantnim pravama /pravama paralelnim apscisnoj osi/; krivolinijske "cijevi" izlaznih integralnih krivih, koje su odredjivane monotonim i ograničenim krivama i kojima se obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja jednačine koje teži nekom broju kad nezavisno promjenljiva teži $+\infty$; kao i stepenaste "cijevi" odredjene stepenastim izlomljenim linijama sastavljenim od segmenata paralelnih koordinatnim osama.

U svom magistarskom radu pod naslovom: "Teorija retrakta i kvalitativna analiza diferencijalnih jednačina" [1], koji sam radio pod rukovod-

---

[1] Rad je branjen na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu 8.4. 1972. godine pred komisijom u sastavu: dr K. Orlov, dr M. Bertolino.

stvom prof. dr Milorada Berolina, otišao sam dalje formirajući i krivolinijsku "cijev" ulaznih integralnih krivih koja je odredjena monotonim i ograničenim krivama i kojom se obezbjedjuje postojanje jedne klase rješenja koja teži nekom broju kad nezavisno promjenljiva teži $+\infty$, dok su se slične "cijevi" do tada koristile za dokaz egzistencije bar jednog takvog rješenja. Do nove vrste "cijevi" došao sam uvodeći i bitno nove pretpostavke izražene u obliku odgovarajućih diferencijalnih nejednakosti Čapliginovog tipa.

Polazeći od nekih rezultata M. Bertolina, posebno od onih koje navodim u glavi I§1, koristeći naročito rezultate vezane za jednačine oblika

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t)x^n + \psi(t,x) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

/vidjeti [2] / i koristeći navedene "cijevi", u magistarskom radu, proučavao sam jednačine opštijeg oblika

$$/1/ \qquad \frac{dx}{dt} = g(t,x)\,x^n + h(t,x) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

i došao do bitno novih rezultata, posebno tamo gdje se radi o egzistenciji jedne klase rješenja koja je asimptotski ograničena i koja teži nekom broju kad $t\to+\infty$ /vidjeti [24] , odnosno glavu I §2/.

Takodje, u magistarskom radu proučavao sam rezultate prof. dr Tadije Pejovića koji se odnose na jednačine

$$/2/ \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx + f(t), \\ \frac{dx}{dt} &= a(t)x + f(t), \end{aligned}$$

$$/3/ \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx + f(t) + g(t,x), \\ \frac{dx}{dt} &= a(t)x + f(t) + g(t,x), \end{aligned}$$

a koji su sadržani u radu [19] /str. 130-143/, sa stanovišta metode retrakcije, koristeći napred navedene "cijevi", kao i rezultate dobijene za jednačinu /1/ /vidjeti [25] , odnosno glavu I §3/.

Pokazao sam da se neki rezultati T. Pejovića mogu direktno interpretirati pomoću metode retrakcije, da se drugi mogu svesti na nju uz odgovarajuće modifikacije uslova, te da ima i sasvim nezavisnih rezultata. Tu sam vršio i odgovarajuće dopune uvodeći bitno nove pretpostavke za funkcije koje figurišu u jednačinama, kao i uopštenja dobijenih rezultata kada se x u članovima rx i $a(t)x$ zamjeni sa x^n $(n=1,2,\cdots)$.

Dakle, glavu I ovoga rada posvetio sam mojim ranijim rezultatima, koji se odnose na egzistenciju asimptotski ograničenih rješenja, bar jednog, svih ili jedne klase rješenja, kao i na egzistenciju klase rješenja koja teži nekoj konstanti. Riječ je o rezultatima do kojih sam došao polazeći od tipova jednačina koje su proučavali M. Bertolino i T. Pejović i pokazujući da se metoda retrakcije može uspješno primjeniti i na jednačine opštijeg oblika, a koristeći nove krivolinijske "cijevi" karakteristične za metodu retrakcije dolazim i do bitno novih rezultata, a posebno onih koji se odnose na egzistenciju čitave klase rješenja koja teži nekoj konstanti.

U daljem svome radu, kada mi je dr M. Bertolino preporučio da sa stanovišta metode retrakcije proučim novije i jače rezultate dr T. Pejovića koji se odnose na jednačine /2/ i /3/ sadržane u radu [20] /str. 9-19/, primjetio sam da mi postojeće "cijevi" nisu dovoljne. Tako sam počeo da radim na tome da formiram nove krivolinijske "cijevi" koje su odredjene krivama koje ne moraju biti monotone niti ograničene. U tome sam i uspio /vidjeti glavu II/.

Formiranje novih krivolinijskih "cijevi" izlaznih, kao i ulaznih, integralnih krivih činio sam na bitno nov način, preko krivih stacionarnih tačaka i dobio sam nekoliko vrsta "cijevi". Za ove nove vrste "cijevi" morao sam uvesti i bitno nove pretpostavke u obliku dopunskih diferencijalnih nejednakosti.

Posmatrao sam jednačinu

/4/ $$\frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

gdje je $f(t,x)$ neprekidna funkcija i ispunjava odgovarajuće uslove o jedinosti rješenja za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$.

Neka je neprekidna funkcija $x = \varphi(t)$ kriva stacionarnih tačaka jednačine /4/, tj. neka je $f(t,\varphi(t)) = 0$, koja je granica dviju oblasti u kojima integralne krive jednačine /4/ imaju suprotne koeficijente smjera. Za granice "cijevi" metode retrakcije uzimao sam krive

/5/ $$\omega_1(t) = \varphi(t) - d_1, \qquad \omega_2(t) = \varphi(t) + d_2 \quad (t \geq t_0),$$

odnosno

/6/ $$\omega_1(t) = \varphi(t) - \varepsilon_1(t), \qquad \omega_2(t) = \varphi(t) + \varepsilon_2(t) \quad (t \geq t_0),$$

gdje su d_1 i d_2 pozitivni brojevi, a $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ neprekidne, monotono opadajuće funkcije i

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon_1(t)=\lim_{t\to+\infty}\varepsilon_2(t)=0,$$

koje sam odredjivao tako da su ispunjeni odgovarajući uslovi koji garantuju da integralne krive koje prolaze kroz tačke tih krivih izlaze, odnosno ulaze u odgovarajuću "cijev". To su uslovi koje sam uzimao u obliku diferencijalnih nejednakosti Čapliginovog tipa. U slučaju "cijevi" izlaznih integralnih krivih to su uslovi

/7/
$$f(t,\omega_1(t))<\omega_1'(t),$$
$$f(t,\omega_2(t))>\omega_2'(t) \quad \text{za } t\geq t_0,$$

a u slučaju "cijevi" ulaznih integralnih krivih treba da je

/8/
$$f(t,\omega_1(t))>\omega_1'(t),$$
$$f(t,\omega_2(t))<\omega_2'(t) \quad \text{za } t\geq t_0.$$

Tako sam dobio "cijevi" oblika

/9/
$$t\geq t_0,\quad \varphi(t)-d_1<x<\varphi(t)+d_2$$

i

/1o/
$$t\geq t_0,\quad \varphi(t)-\varepsilon_1(t)<x<\varphi(t)+\varepsilon_2(t).$$

"Cijev" /9/ ima konstantnu širinu d_1+d_2, a "cijev" /1o/ ima širinu $\varepsilon_1(t)+\varepsilon_2(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$. /U radu sam granice "cijevi" izlaznih integralnih krivih obilježavao sa $v_1(t)$ i $v_2(t)$, a granice "cijevi" ulaznih integralnih krivih sa $u_1(t)$ i $u_2(t)$./

U radu sam, takodje, dokazao da ako je kriva stacionarnih tačaka $\varphi(t)$ monotona kriva da se za jednu granicu "cijevi" metode retrakcije može uzeti sama kriva $\varphi(t)$.

Tamo gdje nije lako, ili gdje nije moguće odrediti krivu stacionarnih tačaka $x=\varphi(t)$ išao sam na odredjivanje pomoćnih neprekidnih krivih $x=\psi_1(t)$ i $x=\psi_2(t)$ takvih da je

$$\psi_1(t)\leq\varphi(t)\leq\psi_2(t) \quad \text{za } t\geq t_0,$$

te da je

/11/
$$\psi_2(t)-\psi_1(t)\leq d \quad \text{za } t\geq t_0$$

/ d je pozitivan konačan broj/ ili, pored toga, i

/12/
$$\lim_{t\to+\infty}\left(\psi_2(t)-\psi_1(t)\right)=0,$$

vodeći računa o tome da je razlika izmedju krivih $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ što je moguće manja.

U ovom slučaju za granice "cijevi" uzimao sam krive

$$\omega_1(t) = \psi_1(t) - d_1, \quad \omega_2(t) = \psi_2(t) + d_2 \quad (t \geq t_0), \tag{13}$$

odnosno

$$\omega_1(t) = \psi_1(t) - \varepsilon_1(t), \quad \omega_2(t) = \psi_2(t) + \varepsilon_2(t) \quad (t \geq t_0), \tag{14}$$

te formirao respektivno "cijevi" oblika

$$t \geq t_0, \ \psi_1(t) - d_1 < x < \psi_2(t) + d_2 \tag{15}$$

i

$$t \geq t_0, \ \psi_1(t) - \varepsilon_1(t) < x < \psi_2(t) + \varepsilon_2(t). \tag{16}$$

Ovdje se praktično dobijaju četiri vrste "cijevi", jer funkcije $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ ispunjavaju uslov /11/, odnosno uslove /11/ i /12/. "Cijev" oblika /16/, kada funkcije $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ ispunjavaju uslove /11/ i /12/, je "cijev" čija širina teži nuli kad $t \to +\infty$, dok ostale "cijevi" nemaju to svojstvo.

Formiranje odgovarajuće "cijevi" ω:

$$t \geq t_0, \ \omega_1(t) < x < \omega_2(t) \tag{17}$$

donosi i zaključak da jednačina /4/ ima bar jedno ili jednu klasu rješenja koja ispunjavaju uslov

$$\omega_1(t) < x(t) < \omega_2(t), \tag{18}$$

za sve $t \geq t_0$, što zavisi od toga da li je "cijev" /17/ "cijev" izlaznih ili ulaznih integralnih krivih.

U slučaju "cijevi" ulaznih integralnih krivih uslov /18/ će da, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju sva rješenja jednačine /4/ neke oblasti $\Omega \supset \omega$ poluravni $t0x$ $(t \geq t_0)$, ako su, pored uslova /8/, u Ω ispunjeni i uslovi

$$f(t,x) > \omega_1'(t) + m_1 \ \text{za} \ x < \omega_1(t), \quad f(t,x) < \omega_2'(t) - m_2 \ \text{za} \ x > \omega_2(t), \tag{19}$$

gdje su m_1 i m_2 pozitivni fiksirani brojevi.

Formiranje navedenih "cijevi" u praksi nije uvijek moguće, pogotovo "cijevi" čija širina teži nuli. No, veliki je broj i povoljnih slučajeva, što se vidi i iz samog rada. Koja će "cijev" doći u obzir zavisi od same jednačine.

Ove nove krivolinijske "cijevi", koje se efektivno formiraju, omogućavaju dobijanje bitno novih i jačih rezultata. Činjenica da granice "cijevi" ne moraju biti monotone niti ograničene krive, te da širina "cijevi" može da teži i nuli, ukazuju na značajan doprinos kvalitativnoj analizi diferencijalnih jednačina. Tako sam u ovom radu proširio problematiku sa rješenja ograničenih ili težećih konstanti za beskonačno velike vrijednosti nezavisno promjenljive na sva druga rješenja, posebno rješenja koja teže beskonačnosti.

Što se tiče pomoćnih funkcija $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ treba primjetiti da formiranje odgovarajućih krivolinijskih "cijevi" važi i kada se pretpostavke o monotonosti i teženju nuli tih funkcija izostave. No, uzimanje i tih pretpostavki omogućuje formiranje "cijevi" čija je širina pozitivna funkcija koja teži nuli kad $t \to +\infty$, što obezbjedjuje i jače rezultate u pogledu konstatacije o ponašanju rješenja jednačine. Ovakve "cijevi" pružaju mogućnost i za lakše odredjivanje približnog rješenja jednačine koje pripada "cijevi". Takodje, ujedno se ima i odgovarajuća ocjena odstojanja bilo koja dva rješenja /tačna ili približna/ koja pripadaju "cijevi". To odstupanje nije veće od širine "cijevi", te i ono teži nuli kad $t \to +\infty$.

Dalje, primjetio sam da se "cijevi" metode retrakcije, čije širine teže nuli kad nezavisno promjenljiva teži $+\infty$, mogu neposredno iskoristiti i za proučavanje stabilnosti rješenja. Konstatovao sam da se preko "cijevi" izlaznih integralnih krivih obezbjedjuje nestabilno rješenje u smislu Ljapunova, te da "cijevi" ulaznih integralnih krivih obezbjedjuju stabilna rješenja u odgovarajućem smislu.

Koristeći "cijevi" ulaznih integralnih krivih, čija širina teži nuli, kao i odgovarajuće dobijene rezultate o posmatranim jednačinama, dao sam /u glavi II § 3/ sljedeće definicije o stabilnosti rješenja:

1. Asimptotska stabilnost jedne klase rješenja;
2. Asimptotska stabilnost u cijelom jedne klase rješenja;
3. Oblast asimptotske stabilnosti jedne klase rješenja;
4. Ravnomjerna asimptotska stabilnost jedne klase rješenja u odnosu na početnu vrijednost t_0;
5. Asimptotska stabilnost približnog rješenja;
6. Asimptotska stabilnost rješenja /tačnog ili približnog/ pri stalnim poremećajima.

Svaka od ovih definicija daje izvjesnu novinu u odnosu na poznate definicije o stabilnosti. U tom smislu definiciju 6 bih posebno istakao. Prema ovoj definiciji funkcija poremećaja ne mora da bude ograničena, što je u poznatim definicijama osnovni uslov. U definiciji 6 ograničenje za funkciju poremećaja iskazano je preko krivih stacionarnih tačaka osnovne jednačine i njene prve aproksimacije. Ovdje se zahtjeva da je moduo razlike tih krivih stacionarnih tačaka manji od pozitivne i monotone funkcije koja teži nuli. Evo te definicije.

Neka su date jednačine

/2o/ $$\frac{dx}{dt} = F(t,x) + f(t,x) \equiv F_1(t,x)$$

i

/21/ $$\frac{dx}{dt} = F(t,x),$$

gdje su $F(t,x)$ i $f(t,x)$ definisane i neprekidne funkcije i ispunjavaju potrebne uslove o jedinosti rješenja u dijelu ravni tOx za $t \geq t_0$.

Neka je $x = \varphi(t)$ tačno ili približno rješenje jednačine /21/. Kazaćemo da je rješenje $\varphi(t)$ asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima ako postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ $(t \geq t_0)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$, te ako postoji broj $\delta(r, t_0) > 0$ i neprekidna i monotono opadajuća funkcija $\delta(t)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$, tako da za proizvoljno rješenje $x(t)$ jednačine /2o/ čije početne vrijednosti zadovoljavaju nejednakost

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$$

važi nejednakost

$$|x(t) - \varphi(t)| < r(t)$$

za sve $t \geq t_0$, kada je

/22/ $$|s_1(t) - s(t)| < \delta(t) \quad \text{za sve } t \geq t_0,$$

gdje su $s_1(t)$ i $s(t)$ odgovarajuće krive stacionarnih tačaka respektivno jednačina /2o/ i /21/, tj. $F_1(t, s_1(t)) = 0$, $F(t, s(t)) = 0$.

Uslov /22/ dopušta i mogućnost da funkcija poremećaja $f(t,x)$ bude i neograničena, što potvrdjuju i navedeni primjeri. Na primjer, posmatrajući jednačine

/23/ $$\frac{dx}{dt} = -tx + t\sin t + x\ln t,$$

/24/ $$\frac{dx}{dt} = -tx + t\sin t,$$

pokazao sam da je klasa rješenja $\varphi(t)$ /tačnih ili približnih/ jednačine /24/ koja ispunjava uslov

$$\sin t - \frac{1}{\sqrt{t}} < \varphi(t) < \sin t + \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{za sve } t \geq e^4$$

asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima $x \ln t$ u smislu definicije 6, sa funkcijom $r(t) = \frac{2}{\sqrt{t}}$, i to asimptotski stabilna u cijelom. Ovdje za uslov /22/ imamo

$$|s_1(t) - s(t)| < \frac{2}{t} \ln t = \delta(t), \quad t \geq e^4.$$

Koristeći nove "cijevi" proučavao sam jednačine oblika /1/ i u glavi II /§1 i 2/ i dobio bitno nove i jače rezultate od onih ranijih /glava I §2/. Ustvari, dobio sam i rezultate koji obezbjedjuju egzistenciju bar jednog, odnosno, jedne klase rješenja jednačine /1/ koja, za sve $t \geq t_0$, pripadaju odgovarajućoj krivolinijskoj "cijevi", čija širina teži nuli kad $t \to +\infty$ /čije granične krive ne moraju biti monotone, niti ograničene/, kao i rezultate da takvoj "cijevi" pripadaju, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, sva rješenja jednačine /1/ odgovarajuće oblasti. Na primjer, za jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = \left(2 + \frac{1}{t}\sin f(t,x)\right)x^2 + \frac{1}{t}\,th\,\varphi(t,x) - 2\sqrt{t},$$

gdje su $f(t,x)$ i $\varphi(t,x)$ definisane i neprekidne funkcije i ispunjavaju potrebne uslove za jedinost rješenja jednačine za $t \geq 1$ i $|x| < +\infty$, pokazao sam da ima bar jedno pozitivno rješenje $x(t)$ koje ispunjava uslov

$$\sqrt{\frac{2t\sqrt{t} - 1}{2t + 1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{t}} < x(t) < \sqrt{\frac{2t\sqrt{t} + 1}{2t - 1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{t}} \tag{25}$$

za sve $t \geq 4$, te i uslov

$$\lim_{t \to +\infty} \left(x(t) - \sqrt[4]{t}\right) = 0$$

i jednu klasu negativnih rješenja koja ispunjava uslov

$$-\sqrt{\frac{2t\sqrt{t} + 1}{2t - 1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{t}} < x(t) < -\sqrt{\frac{2t\sqrt{t} - 1}{2t + 1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{t}} \tag{26}$$

za sve $t \geq 4$, a sva rješenja oblasti

$$x \leq \sqrt{\frac{2t\sqrt{t} - 1}{2t + 1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{t}}, \quad t \geq 4 \tag{27}$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > 4$, ispunjavaju uslov /26/, kao i uslov

$$\lim_{t \to +\infty} \left(x(t) + \sqrt[4]{t}\right) = 0.$$

Rješenje koje ispunjava uslov /25/ je nestabilno u smislu Ljapunova, a klasa rješenja koja ispunjava uslov /26/, za sve $t \geqslant 4$, je asimptotski stabilna u smislu definicije 1, dok je oblast /27/ oblast asimptotske stabilnosti te klase rješenja.

Tako sam glavu II ovoga rada posvetio uvodjenju novih krivolinijskih "cijevi" izlaznih i ulaznih integralnih krivih /§1 i §2/, iste, kao i ranije poznate, iskoristio na proučavanje jednačina oblika /1/, kao i jednačina /2/ i /3/, a zatim u §3 dobijene rezultate iskoristio za problem stabilnosti rješenja i dao pomenute definicije o stabilnosti rješenja i na kraju dobijene rezultate o ponašanju rješenja posmatranih jednačina sagledao i sa stanovišta stabilnosti rješenja.

Polazeći od jednačina oblika

$$\frac{dx}{dt} = \prod_{i=1}^{m} (x - \varphi_i(t)) \,,$$

$$\frac{dx}{dt} = \prod_{i=1}^{k} (x - \varphi_i(t))^{\alpha_i} \,,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\prod_{i \in A} (x - \varphi_i(t))^{\alpha_i}}{\prod_{j \in B} (x - \varphi_j(t))^{\alpha_j}} \,, \quad i \neq j$$

A i B su dvije permutacije prirodnih brojeva bez zajedničkih elemenata, takvi da je

$$A \cup B = \{1, 2, \cdots, m\} \,, \quad A \cap B = \emptyset \,,$$

gdje su α_i i α_j prirodni brojevi, koje je proučavao M. Bertolino /vidjeti [3], [4], [5] i [9] /, u glavi III posmatram jednačine oblika

/28/
$$\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot \prod_{i=1}^{m} (x - \varphi_i(t))^{\alpha_i}$$

i

/29/
$$\frac{dx}{dt} = g(t,x) \cdot \prod_{i=1}^{m} (x - h_i(t,x))^{\beta_i} \,,$$

gdje su α_i i β_i racionalni brojevi /pozitivni i negativni/.

Kao specijalne slučajeve jednačina /28/ i /29/ posmatrao sam jednačine oblika:

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\cdot\prod_{i=1}^{4}(x-\varphi_i(t))$$

/30/
$$\frac{dx}{dt} = f(t)\cdot\prod_{i=1}^{n}(x-\varphi_i(t)),$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\cdot(x-\varphi_1(t))^{\alpha_1}\cdot(x-\varphi_2(t))^{\alpha_2},$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\cdot\prod_{i=1}^{3}(x-\varphi_i(t))^{\alpha_i},$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\cdot\frac{(x-\varphi_1(t))^{\alpha_1}}{(x-\varphi_2(t))^{\alpha_2}},$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\cdot\frac{(x-\varphi_1(t))^{\alpha_1}\cdot(x-\varphi_2(t))^{\alpha_2}}{(x-\varphi_3(t))^{\alpha_3}},$$

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\cdot\prod_{i=1}^{3}(x-h_i(t,x))^{\alpha_i},$$

/31/
$$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\cdot\frac{(x-h_1(t,x))^{\alpha_1}}{(x-h_2(t,x))^{\alpha_2}},$$

gdje je $\alpha_i = \frac{p_i}{q_i}$, a p_i i q_i su odgovarajući prirodni brojevi. Takodje, u svojstvu primjera, posmatrao sam i jednačinu Rikatija

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\cdot(x-\varphi_1(t))\cdot(x-\varphi_2(t)).$$

Uz efektivno odredjivanje krivolinijskih "cijevi" izlaznih i ulaznih integralnih krivih dolazim do zaključaka o pripadanju bar jednog ili jedne klase rješenja odgovarajućim "cijevima", te i do ocjena o asimptotskoj stabilnosti rješenja u smislu odgovarajuće definicije, kao i o oblasti asimptotske stabilnosti. Ovdje je zanimljivo to da se kvalitativna slika skupa svih rješenja date jednačine pokazuje kao vrlo raznolika u tom smislu da ista jednačina ima rješenja vrlo različitih svojstava. Takodje, zanimljivi su i uslovi koji obezbjedjuju te rezultate.

Tako, na primjer, za jednačinu /30/ pod odgovarajućim uslovima /vidjeti teoreme 1' i 2' §2/, za $n=2k$ $(k=1,2,\cdots)$, dobio sam, pored ostalih, i sljedeći rezultat.

Jednačina /30/ ima po bar jedno rješenje koja, za sve $t\geq t_0$, ispunjavaju uslove

/32/ $$\varphi_{2i}(t) - \varepsilon_{2i}(t) < x(t) < \varphi_{2i}(t) + \varepsilon_{2i}(t) \quad (i=1,2,\dots,k)$$

i po jednu klasu rješenja koje za sve $t \geq t_0$, ispunjavaju uslove

/33/ $$\varphi_{2i+1}(t) - \varepsilon_{2i+1}(t) < x(t) < \varphi_{2i+1}(t) + \varepsilon_{2i+1}(t) \quad (i=0,1,2,\dots,k-1),$$

a za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$ uslove /33/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

/34/ $$x \leq \varphi_2(t) - \varepsilon_2(t), \quad t \geq t_0$$

kao i oblasti

/35/ $$\varphi_{2i}(t) + \varepsilon_{2i}(t) \leq x \leq \varphi_{2i+2}(t) - \varepsilon_{2i+2}(t), \quad t \geq t_0 \quad (i=1,2,\dots,k-1).$$

Rješenja koja ispunjavaju uslove /32/ su nestabilna u smislu Ljapunova, a klase rješenja koje ispunjavaju uslove /33/ su asimptotski stabilne u smislu definicije 1, dok su oblasti /34/ i /35/ oblasti asimptotske stabilnosti odgovarajućih klasa rješenja. /Funkcije $\varepsilon_i(t)$ teže nuli./

Takodje, radi ilustracije vrste dobijenih rezultata naveo bih i rezultat koji sam dobio za jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = \pm 9\sqrt{t^3 + f_1^2(t,x)} \cdot \frac{\left(x - \sin t + \frac{1}{t + f_2^2(t,x)}\right)^{\frac{5}{3}}}{\left(x + 6 - \cos f_3(t,x)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

kao primjer jednačine /31/ /§5.2./, gdje su funkcije $f_i(t,x)$ $(i=1,2,3)$ definisane i neprekidne za $t \geq 4$ i $x > -5$ i da u toj oblasti ispunjavaju potrebne uslove o jedinosti rješenja jednačine. Ova jednačina, sa znakom $+$, ima bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t \geq 4$, ispunjava uslov

/36/ $$\sin t - \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt[5]{t}} < x(t) < \sin t + \frac{1}{\sqrt[5]{t}} ,$$

a jednačina sa znakom $-$, ima jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geq 4$, ispunjava taj uslov, dok, za dovoljno veliko $t \geq t^* > 4$, uslov /36/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

/37/ $$x \geq -4, \ t \geq 4.$$

Rješenje koje ispunjava uslov /36/ /jednačina sa znakom + / je nestabilno u smislu Ljapunova, a klasa rješenja koja, za sve $t \geq 4$, ispunjava uslov /36/ /jednačina sa znakom − / je asimptotski stabilna klasa rješenja u smislu definicije 1, a oblast /37/ je oblast asimptotske stabilnosti te klase rješenja.

Rezultati proučavanja napred navedenih jednačina jasno ukazuju na mogućnost proučavanja i drugih jednačina oblika /28/ i /29/ na sličan način.

Zadnju glavu IV ovoga rada posvetio sam proučavanju bitno novih i jačih rezultata T. Pejovića vezanih za jednačine /2/ i /3/, a koje je autor izložio u radu [20] /str. 9-19/, sa stanovišta metode retrakcije, koristeći posebno rezultate dobijene u glavi II. Pretpostavke T. Pejovića iskazane u integralnom obliku zamjenjivao sam odgovarajućim jednakostima i nejednakostima podesnim za primjenu metode retrakcije. T. Pejović je do rezultata dolazio uglavnom specifičnim modifikacijama Pikarove metode uzastpnih aproksimacija. Ukazao sam na odredjenu bliskost rezultata T. Pejovića sa rezultatima koji se mogu dobiti metodom retrakcije. Pokazao sam da se neki rezultati T. Pejovića mogu direktno interpretirati pomoću metode retrakcije, drugi da se mogu svesti na nju uz odgovarajuće modifikacije uslova, odnosno uz dopunske uslove, te da ima i nezavisnih rezultata. Na mjestima sam činio i bitno nove pretpostavke o funkcijama koje figurišu u jednačinama radi proširenja posmatranja, što je dovelo i do bitno novih rezultata. Takodje, učinio sam i uopštenja dobijenih rezultata posmatrajući, pored jednačina /2/ i /3/, i jednačine opšteg oblika

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x^n + f(t) \qquad (n=1,2,\cdots), \tag{38}$$

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x^n + f(t) + \varphi(t,x) \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{39}$$

Dobijene rezultate o ponašanju rješenja proučio sam i sa stanovišta stabilnosti rješenja, posebno u smislu definicija datih u glavi II, što, takodje, predstavlja bitnu dopunu u proučavanju jednačina /2/ i /3/.

Proučavanje jednačina /2/ i /3/ činio sam kroz praćenje odgovarajućih rezultata T. Pejovića. Ovdje ću, ilustracije radi, istaći samo neke momente posmatranja.

Proučavajući jednačinu /2/ T. Pejović daje rezultate o asimptotskoj ograničenosti rješenja $x(t)$ te jednačine, a zatim i o njihovom težnju konstanti b, tj.

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = b .$$

Uz odgovarajuće modifikacije uslova T. Pejovića i dodajući nove uslove iskazane u obliku diferencijalnih nejednakosti Čapliginovog tipa idem i dalje obezbjedjujući egzistenciju rješenja jednačine /2/ koja, bar jedno ili jedna klasa, ispunjavaju uslov

$$\left| x(t) + \frac{f(t)}{a(t)} \right| < \varepsilon(t),$$

za sve $t \geqslant t_0$, kao i rezultate da za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$ taj uslov ispunjavaju sva rješenja jednačine /2/ ili, pak, uslov

$$\left| x(t) + \frac{f(t)}{a(t)} \right| < \frac{N}{M} ,$$

gdje su M i N pozitivne konstante, a $\varepsilon(t)$ monotono opadajuća funkcija i

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0 .$$

Dalje, u slučaju pretpostavke

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = r$$

T. Pejović uzima da je

$$a(t) = r + \ell(t),$$

gdje je

$$\lim_{t\to+\infty} \ell(t) = 0 ,$$

te umjesto jednačine /2/ posmatra jednačinu

/40/ $$\frac{dx}{dt} = rx + f(t) + \ell(t)x ,$$

a uz nju i jednačinu

/41/ $$\frac{dx_0}{dt} = rx_0 + f(t)$$

i pretpostavljajući da je $x_0(t)$ ograničeno rješenje jednačine /41/, uz odgovarajuće dodatne uslove, dolazi do tvrdjenja da sva rješenja $x(t)$ /odnosno, jedno rješenje/ jednačine /40/ ispunjavaju uslov

$$\lim_{t\to+\infty} \left(x(t) - x_0(t) \right) = 0 .$$

Do tog rezultata dolazim i bez dodatnih pretpostavki, a zatim proširujem posmatranje uzimajući da je

$$a(t) = a_1(t) + \mathcal{L}(t) ,$$

gdje funkcija $a_1(t)$ ne mora da teži r , niti funkcija $\mathcal{L}(t)$ nuli kad $t\to+\infty$, te umjesto jednačina /40/ i /41/ posmatram jednačine

/42/ $$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + f(t) + \mathcal{L}(t)x ,$$

/43/ $$\frac{dx_0}{dt} = a_1(t)x_0 + f(t)$$

i dolazim do rezultata da po jedna klasa rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ /odnosno, po bar jedno rješenje/ jednačina /42/ i /43/ ispunjavaju uslov

/44/ $$|x(t) - x_0(t)| < r(t),$$

za sve $t \geq t_0$, kao i do rezultata da za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$ taj uslov ispunjavaju sva rješenja jednačina /42/ i /43/, gdje je $r(t)$ monotono opadajuća funkcija i

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = 0 \ .$$

Što se tiče jednačine /3/ treba primjetiti da sam, polazeći od osnovnih pretpostavki o funkciji $g(t,x)$, koje je dao T. Pejović, uzeo da je

$$g(t,x) = h(t,x)\cdot x \ ,$$

te umjesto jednačine /3/ posmatrao jednačinu

/45/ $$\frac{dx}{dt} = \big(a(t) + h(t,x)\big)\cdot x + f(t) \ .$$

Dobijene rezultate proučavanja jednačina /4o/ i /41/ T. Pejović je koristio za proučavanje rješenja jednačine /3/ dovodeći ih u vezu sa ograničenim rješenjem $x_0(t)$ jednačine

/46/ $$\frac{dx_0}{dt} = a(t)x_0 + f(t)$$

i to kao

/47/ $$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - x_0(t)| = 0 \ .$$

Ja sam, takodje, rezultate dobijene za jednačine /4o/ i /41/, odnosno, /42/ i /43/, koristio za proučavanje jednačine /45/, dovodeći njena rješenja $x(t)$ u vezu sa rješenjima $x_0(t)$ jednačine /46/, obezbjedjujući egzistenciju po bar jednog ili po jedne klase rješenja jednačina /45/ i /46/ koja ispunjavaju uslov /44/ za sve $t \geqslant t_0$, te i uslov /47/, kao i slučajeve da za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$ taj uslov ispunjavaju sva rješenja jednačina /45/ i /46/. /Rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ ne moraju biti ograničena, niti težiti nekoj konstanti./

Dalje sam, dobijene rezultate za jednačinu /2/ uopštio i na jednačinu /38/, kao i dobijene rezultate za jednačinu /3/ uopštio sam i na jednačinu /39/, uz odgovarajuće modifikacije i dopune uslova datih za jednačine /2/ i /3/.

I ovdje sam proučio više konkretnih primjera. Radi ilustracije vrsta dobijenih rezultata navodim rezultat posmatranja jednačine

/48/ $$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\sin t}{1+\varphi(t,x)} - 2t\right)\cdot x^n + t(5-\cos t) \quad (n=1,2,\dots) \ .$$

Uz jednačinu /48/ posmatrao sam i jednačinu

/49/ $$\frac{dx_0}{dt} = -2t x_0^n + t(5-\cos t) \quad (n=1,2,\dots)$$

i došao do sljedećih zaključaka:

a/ Za $n=2k+1$ $(k=0,1,\ldots)$, jednačine /48/ i /49/ imaju po jednu klasu pozitivnih rješenja koje, za sve $t\geq 4$, pripadaju "cijevi"

/5o/ $$t\geq 4,\quad \sqrt[n]{\frac{t(5-\cos t)}{2t+1}-\frac{1}{\sqrt{t}}}<x<\sqrt[n]{\frac{t(5-\cos t)}{2t-1}+\frac{1}{\sqrt{t}}},$$

a za dovoljno veliko $t\geq t^{*}>4$ toj "cijevi" pripadaju sva rješenja jednačina /48/ i /49/;

b/ Za $n=2k$ $(k=1,2,\cdots)$, jednačine /48/ i /49/ imaju po jednu klasu pozitivnih rješenja koje, za sve $t\geq 4$, pripadaju "cijevi" /5o/, a za dovoljno veliko $t\geq t^{*}>4$ toj "cijevi" pripadaju sva rješenja jednačina /48/ i /49/ oblasti

/51/ $$x\geq -\sqrt[n]{\frac{t(5-\cos t)}{2t+1}-\frac{1}{\sqrt{t}}},\quad t\geq 4,$$

kao i po bar jedno negativno rješenje koja, za sve $t\geq 4$, pripadaju "cijevi"

/52/ $$t\geq 4,\quad -\sqrt[n]{\frac{t(5-\cos t)}{2t-1}+\frac{1}{\sqrt{t}}}<x<-\sqrt[n]{\frac{t(5-\cos t)}{2t+1}-\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

c/ Rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ respektivno jednačina /48/ i /49/ koja pripadaju "cijevi" /5o/, odnosno "cijevi" /52/ ispunjavaju i uslov /44/, za sve $t\geq 4$, te i uslov /47/, dok za dovoljno veliko $t\geq t^{*}>4$ uslov /44/, u slučaju a/, ispunjavaju sva rješenja jednačina /48/ i /49/, a u slučaju b/ sva rješenja oblasti /51/ ispunjavaju uslov /44/. Rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ koja pripadaju "cijevi" /52/ su nestabilna u smislu Ljapunova, dok je klasa rješenja $x(t)$ jednačine /48/ koja pripada "cijevi" /5o/, za sve $t\geq 4$, asimptotski stabilna u smislu definicije 1, a klasa rješenja $x_0(t)$ jednačine /49/ koja pripada "cijevi" /5o/, za sve $t\geq 4$, je ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost u smislu definicije 4 i ta klasa rješenja je asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima $\frac{\sin t}{1+\varphi(t,x)}\cdot x^{n}$ u smislu definicije 6 - to je ona klasa rješenja $x_0(t)$ koja su odredjena početnim vrijednostima $x_0(t_0)$ koje pripadaju "cijevi" /5o/. Oblast /51/ je oblast asimptotske stabilnosti pomenutih klasa rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$.

Dakle, u radu sam proučavao više tipova jednačina, polazeći od jednačina koje su proučavali T. Pejović i M. Bertolino, uvodeći i izvjesne uopštenije oblike, te pokazujući da se metoda retrakcije može uspješno primjenjivati i na šire klase jednačina. Dao sam čitav niz novih uslova o funkcijama koje figurišu u jednačinama izraženim u obliku jednakosti, nejednakosti i diferencijalnih nejednakosti Čapliginovog tipa, gdje neki imaju i vrlo specifične oblike. Tako sam dobio i veliki broj bitno novih i različitih rezultata koji jasno ilustruju širinu mogućnosti primjene metode retrakcije.

Kad je riječ o specifičnim uslovima, treba istaći one pretpostavke o funkcijama koje figurišu na desnim stranama jednačina u obliku odgovarajućih nejednakosti, gdje se funkcije iz jednačina uokviravaju konstantama ili funkcijama dovoljne opštosti, praktično znači da se proučavanje zadane jednačine svodi na proučavanje komparativnih jednačina prostijih sa gledišta kvalitativne analize. Time sam postizao uokviravanje rješenja posmatrane jednačine rješenjima majorantne "gornje" i minorantne "donje" jednačine u smislu Čapliginove teoreme. No, pored pomenutih uslova, uvodio sam i nove dopunske uslove izražene u obliku diferencijalnih nejednakosti, koje su se, ustvari, odnosile na komparativne jednačine i jednačine čija su rješenja upravo granice odgovarajuće "cijevi", što je /prema Čapliginovoj teoremi/ i obezbjedjivalo izlaženje ili ulaženje integrala komparativnih jednačina u odgovarajuću "cijev", te i polazne jednačine. Ustvari, ta ideja je i omogućila formiranje novih krivolinijskih "cijevi".

Poseban doprinos rada je, upravo, formiranje novih vrsta krivolinijskih "cijevi", koje se efektivno odredjuju definisanim i neprekidnim krivama za sve $t \geq t_0$, a koje ne moraju biti monotone, niti ograničene, što je i omogućilo ispitivanje egzistencije ograničenih rješenja, rješenja koja teže konstanti, rješenja koja teže beskonačnosti, kao i rješenja koja ostaju u ograničenim dijelovima ravni za sve $t \geq t_0$. Domen primjene ovih krivolinijskih "cijevi" je kod proučavanja rješenja sa stanovišta stabilnosti, gdje sam dao i pomenute definicije o stabilnosti klase rješenja, približnog rješenja i stabilnosti rješenja pri stalnim poremećajima, gdje funkcija poremećaja ne mora da bude ograničena.

Značajno je istaći da za navedeni način uzimanja granica $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ "cijevi" metode retrakcije, bilo preko krive stacionarnih tačaka $\varphi(t)$ /prema /5/ i /6// ili preko pomoćnih krivih $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ /prema /13/ i /14//, te uz ispunjenje odgovarajućih diferencijalnih nejednakosti oblika /7/ ili /8/, može se reći da je ostvaren jedan efektivan metod za formiranje odgovarajućih krivolinijskih "cijevi" metode retrakcije, te i metod za kvalitativno proučavanje diferencijalnih jednačina odgovarajućih oblika, kako po pitanju egzistencije odgovarajućih rješenja, tako i za utvrdjivanje egzistencije stabilnih rješenja u smislu dobijenih definicija o stabilnosti rješenja, te i za egzistenciju nestabilnih rješenja u smislu

Ljapunova. O efikasnosti navedene metode govore mnogobrojni rezultati rada.

U radu je dat i veliki broj konkretnih primjera preko kojih se vidi i praktični značaj dobijenih rezultata, kao i to da teorijski rezultati ne predstavljaju vještačku tvorevinu.

II NEKI OSNOVNI POJMOVI I REZULTATI

U ovom dijelu uvoda izložićemo ukratko neke osnovne pojmove i rezultate, koji su značajni za ovaj rad: neke diferencijalne nejednakosti, neke definicije stabilnosti rješenja, neke osnovne rezultate teorije retrakta i nešto detaljnije metodu retrakcije T. Važevskog.

§1. NEKE DIFERENCIJALNE NEJEDNAKOSTI I OCJENE RJEŠENJA

U ovom paragrafu, prije isticanja diferencijalnih nejednakosti i ocjena rješenja, navest ćemo definiciju rješenja i približnog rješenja diferencijalne jednačine, definiciju Lipšicovog uslova, kao i teoreme o postojanju i jedinosti rješenja i zavisnosti rješenja od početnih uslova. Ovi osnovni pojmovi, definicije i tvrdjenja potrebna su nam kako u ovom paragrafu tako i dalje u ovom radu.

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

/1/ $$\frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

gdje je $f(t,x)$ definisana i neprekidna funkcija u nekoj otvorenoj oblasti $D(t,x)$ ravni tOx.

Prije svega navedimo definiciju rješenja diferencijalne jednačine, a zatim i definiciju Lipšicovog uslova.

Definicija 1. Za funkciju $x=\varphi(t)$ kazaćemo da je rješenje, integral ili integralna kriva jednačine /1/ na intervalu $J=(t_1,t_2)$ ako je na tom intervalu definisana i neprekidna, kao i njen prvi izvod, te da je za svako $t\in J$:

a/ $(t,\varphi(t))\in D$,

b/ $\varphi'(t)\equiv f(t,\varphi(t))$.

Definicija 2. Kazaćemo da funkcija $f(t,x)$ u oblasti $D(t,x)$ zadovoljava

Lipšicov uslov po x ako važi

/2/ $$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| \leq L|x_2 - x_1|,$$

gdje su (t,x_1) i (t,x_2) proizvoljne tačke oblasti D, a L pozitivna konstanta, tzv. Lipšicova konstanta.

Ako funkcija $f(t,x)$ zadovoljava uslov /2/ kaže se da ona ispunjava Lipšicov uslov sa konstantom L.

Nekada se Lipšicov uslov uzima i u specijalnom obliku:

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| \leq \lambda(t)\,|x_2 - x_1|,$$

gdje je $\lambda(t)$ definisana neprekidna i ograničena funkcija u oblasti D.

Nije teško pokazati da ograničenje izvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ za svako $(t,x) \in D_1$, gdje je D_1 zatvorena konveksna oblast, obezbjedjuje ispunjenje Lipšicovog uslova sa konstantom $L = \sup\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ za $(t,x) \in D_1$.

Navedimo sada Peanovu teoremu postojanja rješenja uzetu iz djela [14] E. Kamkea /str. 2o/.

Teorema 1. Ako je funkcija $f(t,x)$ neprekidna u nekoj otvorenoj oblasti $D(t,x)$, tada kroz svaku tačku (ξ,η) te oblasti D prolazi bar jedna integralna kriva jednačine /1/ i svaka od njih može biti produžena na obe strane sve do granica ma koje zatvorene oblasti koja je sadržana u D i koja sadrži tačku (ξ,η).

No, što se tiče jedinosti rješenja, dalje se kaže:

Kroz svaku tačku (ξ,η) oblasti D prolazi samo jedna integralna kriva ako funkcija $f(t,x)$ u oblasti D ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda ili zadovoljava uslov Lipšica po x:

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| \leq L|x_2 - x_1|.$$

Sljedeće dvije teoreme o neprekidnoj zavisnosti rješenja od početnih vrijednosti /teoreme 2a i 2b/ uzete su iz djela [22] B. Rašajskog /str. 5 i 54/.

Teorema 2a. Neka funkcija $f(t,x)$ u otvorenoj oblasti $D(t,x)$ ispunjava uslov Lipšica i neka je $x = x(t,x_0)$ ono rješenje diferencijalne jednačine /1/ koje zadovoljava početni uslov: $x(t_0) = x_0$, $(t_0,x_0) \in D$, tada je rješenje $x = x(t,x_0)$ neprekidno u odnosu na početnu vrijednost x_0.

Teorema 2b. Ako je funkcija $f(t,x)$ neprekidna i zadovoljava uslov Lipšica u nekoj oblasti $D(t,x)$ i u pravougaoniku:

$$\Pi:\ |t - t_0| \leq h,\ |x_0 - \bar{x}_0| \leq k$$

egzistira rješenje $x(t,x_0)$ diferencijalne jednačine /1/ koje zadovoljava početni uslov $x(t_0)=x_0$, tada je to rješenje $x(t, ...$ ... u Π istovr...no u odnosu na t i x_0.

Kod približne integracije diferencijalnih jednačina od posebnog je značaja pojam približnog rješenja. Definiciju koju navodimo uzeta je iz djela [22] B. Rašajskog /str. 27/.

Definicija 3. Za funkciju $x=\varphi(t)$ definisanu na intervalu $J=[t_1,t_2]$ kazaćemo da je približno rješenje diferencijalne jednačine /1/ sa greškom ε ako su ispunjeni sljedeći uslovi:

a/ $(t,\varphi(t))\in D$ za $t\in J$;

b/ funkcija $\varphi(t)$, ... i njen prvi izvod, definisana je i neprekidna na intervalu J, ili um... uslova b/ sljedeći uslov:

b'/ funkcija $\varphi(t)$ ... definisana i neprekidna na intervalu J i ima dio po dio neprekidan izvo... ...ji može da bude ne definisan samo u konačnom broju tačaka t^i $(i=1,2,\dots,n)$;

c/ $|\varphi'(t)-f(t,\varphi(t))|<\varepsilon$ za $t\in J$ /i $t\neq t^i$ kada važi uslov b'//.

Sljedeće četiri teoreme /teoreme 3-6/, koje daju odgovarajuće ocjene rješenja, kao i približnih rješenja zadane diferencijalne jednačine, kao i komparativne jednačine, uzete su iz djela [14] E. Kamkea /str. 28-30/.

Kada se u diferencijalnoj jednačini /1/ funkcija $f(t,x)$ zamjeni funkcijom $f_1(t,x)$ tako da se nova diferencijalna jednačina

/3/ $$\frac{dx}{dt}=f_1(t,x)$$

lakše ispituje nego jednačina /1/, tada treba proučiti vezu izmedju rješenja tih dviju jednačina koja prolaze kroz istu zadanu tačku. O odnosu rješenja tih jednačina govori sljedeća teorema.

Teorema 3. Neka su funkcije $f(t,x)$ i $f_1(t,x)$ neprekidne u oblasti $D(t,x)$ ravni tOx, a funkcija $f(t,x)$ u toj oblasti zadovoljava i uslov Lipšica sa konstantom L, dalje, neka je

$$|f(t,x)-f_1(t,x)|\leq\varepsilon$$

u oblasti D i $x=\varphi(t)$, $x=\varphi_1(t)$ respektivno rješenja jednačina /1/ i /3/, koja prolaze kroz tačku $(t_0,x_0)\in D$. Tada za integralnu krivu $x=\varphi(t)$ važi sljedeća procjena:

$$|\varphi(t)-\varphi_1(t)|\leq\frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right).$$

Tako se dobija mogućnost približnog rješavanja komplikovanih jednačina putem zamjene istih odgovarajućim komparativnim jednačinama koje se jednostavnije rješavaju.

Navedimo sada teoremu koja daje ocjenu približnih rješenja jedne iste diferencijalne jednačine.

Teorema 4. Neka je funkcija $f(t,x)$ u oblasti $D(t,x)$ ograničena, tj. $|f(t,x)| \leq M$ i zadovoljava uslov Lipšica sa konstantom L. Zatim, neka su $x = \varphi_1(t)$ i $x = \varphi_2(t)$ za $t \in (a, b)$ dvije neprekidne i diferencijabilne krive koje leže u oblasti D, sljedstveno prolaze kroz tačke (t_1, x_1), (t_2, x_2) i približno zadovoljavaju jednačinu /1/ sa greškama ε_1 i ε_2 sljedstveno u smislu definicije 3. Tada na cijelom intervalu (a, b) važi:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L}\left(e^{L|t-t_1|} - 1\right) + \left(|x_1 - x_2| + (M + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)|t_1 - t_2|\right) \cdot e^{L|t-t_1|}.$$

Zanimljive su i sljedeće dvije ocjene rješenja koje daju teoreme 5 i 6.

Teorema 5. Neka je funkcija $f(t,x)$ jednačine /1/ neprekidna u oblasti $D(t,x)$ i (t_0, x_0) neka tačka u D. Neka su, dalje, $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ neprekidne funkcije koje u svakoj tački intervala $t_0 \leq t < a$ imaju desni i lijevi izvod $D_+\varphi_i$ i $D_-\varphi_i$ $(i = 1,2)$ respektivno. Neka oblast koja je ograničena krivama $x = \varphi_1(t)$ i $x = \varphi_2(t)$ pripada oblasti D. Ako je pri tome

$$\varphi_1(t_0) \leq x_0 \leq \varphi_2(t_0)$$

i ako je za $t_0 \leq t < a$

$$D_\pm \varphi_1(t) \leq f(t, \varphi_1(t)),$$

$$D_\pm \varphi_2(t) \geq f(t, \varphi_2(t)),$$

tada integralna kriva $x = \varphi(t)$ jednačine /1/ koja prolazi kroz tačku (t_0, x_0) postoji u cijelom intervalu $t_0 \leq t < a$ i na tom intervalu je

$$\varphi_1(t) \leq \varphi(t) \leq \varphi_2(t).$$

Funkcije $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ nazivaju se sljedstveno donjom i gornjom funkcijom.

Ako je $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$, tada su gornja medja svih $\varphi_1(t)$ i donja medja svih $\varphi_2(t)$ rješenja jednačine /1/ sa početnim uslovom $x(t_0) = x_0$.

Teorema 6. Ako je funkcija $x(t)$ na intervalu $a \leq t < b$ neprekidna i diferencijabilna s desna i ako je za konstante $M > 0$, $N \geq 0$ ispunjena nejednakost

$$|x'_+(t)| \leq M \cdot |x(t)| + N$$

/ $x'_+(t)$ označava desni izvod funkcije $x(t)$ u tački t /, tada za svaka dva broja t i t_1, koja pripadaju datom intervalu, važi nejednakost:

$$|x(t)| \leq |x(t_1)| \cdot e^{M|t-t_1|} + \frac{N}{M}\left(e^{M|t-t_1|} - 1\right).$$

U opštem slučaju važi sljedeće tvrdjenje.

Ako je funkcija $x(t)$ na intervalu $a \leq t < b$ neprekidna i diferencijabilna s desna i ako je za dvije neprekidne na tom intervalu funkcije $f(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$ ispunjena nejednakost

$$|x'_+(t)| \leq f(t) \cdot |x(t)| + g(t),$$

tada za svaka dva broja t i t_1 koja pripadaju zadanom intervalu važi nejednakost

$$|x(t)| \leq F(t) \cdot \left(|x(t_1)| + \left| \int_{t_1}^{t} \frac{g(t)}{F(t)} dt \right| \right),$$

gdje je $F(t) = e^{\left|\int_{t_1}^{t} f(t) dt\right|}$.

DIFERENCIJALNE NEJEDNAKOSTI ČAPLIGINA I PETROVIĆA

Ovdje ćemo da navedemo neke poznate diferencijalne nejednakosti S. A. Čapligina i M. Petrovića i odgovarajuće ocjene rješenja koje obezbjedjuju te diferencijalne nejednakosti.

Diferencijalne nejednakosti omogućavaju formiranje komparativnih jednačina. Tako se, u kvalitativnoj analizi diferencijalnih jednačina, često ispitivanje jednačina vrši preko odgovarajućih komparativnih jednačina prostijih sa gledišta kvalitativne analize. Rješenja posmatrane jednačine se "uokviravaju" rješenjima majorantne "gornje" i minorantne "donje" jednačine u smislu osnovne Čapliginove teoreme.

Teoreme 7 i 8 Čapligina, kao i teorema 9 M. Petrovića uzete su iz rada [8] M. Bertolina.

Osnovna teorema Čapligina o diferencijalnim nejednakostima prvog reda je sljedeća.

Teorema 7. Neka je data jednačina

$$\frac{dx}{dt} - f(t,x) = 0$$

i neka je $x = x(t)$ integralna kriva te jednačine sa početnim uslovom $x(t_0) = x_0$. Ako kriva $u = u(t)$ prolazi [illegible] tačku (t_0, x_0), tj. $u(t_0) = x_0$ i duž nje je zadovoljena diferencijalna nejednakost

$$\frac{du}{dt} - f(t,u) > 0$$

za sve $t \in (t_0, T)$, te ako u intervalu (t_0, T) integral $x(t)$ i funkcija $u(t)$ nemaju singularnih tačaka, tada na tom intervalu kriva $u(t)$ leži iznad integralne krive $x(t)$, tj.

$$u(t) > x(t) \text{ za } t_0 < t < T.$$

/U slučaju ispunjenja diferencijalne nejednakosti $\frac{du}{dt} - f(t,u) < 0$ dobija se $u(t) < x(t)$./

Navedena Čapliginova teorema često se pojavljuje i u sljedećem obliku.

Teorema 8. Neka je data otvorena oblast $D(t,x)$ ravni tOx i dvije funkcije $f_1(t,x)$, $f(t,x)$ koje su neprekidne u toj oblasti i koje tamo zadovoljavaju jedan od uslova jedinosti rješenja jednačina

/5/ $$\frac{dx}{dt} = f_1(t,x),$$

/6/ $$\frac{dx}{dt} = f(t,x).$$

Neka u oblasti D važi nejednakost

$$f_1(t,x) < f(t,x)$$

i neka su $x_1(t)$, $x(t)$ respektivno rješenja jednačina /5/ i /6/ sa početnim uslovima $x_1(t_0) = x(t_0) = x_0$. Tada važi nejednakost

$$x_1(t) < x(t)$$

za sve $t > t_0$ u D.

Ova teorema je ekvivalentna sa teoremom koju je dao M. Petrović 1899. godine, odnosno 2o godina prije Čaplígina. Teoremu M. Petrovića navodimo u originalu /vidjeti [8] str. 65-66/.

Teorema 9. "Soient

/7/ $$\frac{dx}{dt} = F(t,x),$$

/8/ $$\frac{du}{dt} = F_1(t,u),$$

/9/ $$\frac{dv}{dt} = F_2(t,v)$$

trois équations données. Traçons dans le plan (t,x) les courbes D limitant les régions de ce plan, où chacune des fonctions

/1o/ $$F(t,x) - F_1(t,x),$$

/11/ $$F(t,x) - F_2(t,x)$$

considérée comme fonction de t et x, garde un signe constant et soient Δ_1 et Δ_2 la région positive et négative du plan par rapport à la fonction /1o/, Ω_1 et Ω_2 la région positive et négative du plan par rapport à la fonction /11/.

Traçons également dans le plan (t,x) toutes les courbes, lieux géométriques des singularités des fonctions F, F_1, F_2 et appelons E l'ensemble de ces courbes.

Soit (t_0, x_0) un point n'appartenant à aucune des courbes D, E et qui se trouve dans la partie Π du plan, commune à deux régions Δ_i, Ω_k de signes contraires. Supposons, pour fixer les idées, que ce soient les régions Δ_1, Ω_2. Désignons par x, u, v les intégrales respectives /ou les branches d'intégrales/ de /7/, /8/, /9/, qui pour $t=t_0$ prennent la valeur commune $u_0 = v_0 = x_0$.

Il existera toujours de part et d'autre de la valeur $t=t_0$ un intervalle d'étendue non nulle, p. ex. de $t=t_0-h_1$ à $t=t_0+h_2$, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° t variant de t_0-h_1 à t_0+h_2 les deux fonctions u et v et leurs dérivées premières sont déterminées et continues;

2° aucune partie des courbes D, E ne se trouve dans l'intérieur ni sur la périphérie du contour Γ, formé par les courbes u, v et les deux droites $t=t_0-h_1$; $t=t_0+h_2$ et ce contour se trouve tout entier dans la partie Π du plan (t,x).

On démontre alors le résultat suivant:

Lorsque t varie de t_0-h_1 à t_0+h_2, l'intégrale x sera constamment déterminée, finie, continue et comprise entre les valeurs correspondantes de u et v".

Navedena teorema M. Petrovića, koja pokazuje bogatstvo ideja autora, ne umanjuje značaj i ulogu Čapligina, koji je, pored ostalog, dao i čuvenu metodu sukcesivnog uokviravanja.

U djelu [14] E. Kamkea /str. 29/ navodi se opštiji vid Čapliginove teoreme za obične diferencijalne jednačine prvog reda /ime autora nije navedeno/. Evo te teoreme.

Teorema 10. Neka su funkcije $f(t,x)$ i $g(t,x)$ definisane i neprekidne u oblasti $D(t,x)$ i neka je

/12/
$$f(t,x) < g(t,x).$$

Ako su $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ dva integrala jednačina

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(t,\varphi), \quad \frac{d\psi}{dt} = g(t,\psi),$$

koji ispunjavaju uslov $\varphi(\xi) \leq \psi(\xi)$, tada je

/13/
$$\varphi(t) \gtrless \psi(t) \quad \text{za} \quad \xi \gtrless t.$$

Ako bar jedna od funkcija $f(t,x)$, $g(t,x)$ ispunjava neki od uslova jedinosti rješenja, tada se u nejednakostima /12/ i /13/ može dodati znak jednakosti.

ČAPLIGINOVA METODA

Čapliginova metoda za približno rješavanje diferencijalnih jednačina zasniva se na osnovnoj Čapliginovoj teoremi o diferencijalnim nejednakostima koja se često pojavljuje i u sljedećem obliku /vidjeti [2] /.

Teorema 11. Neka su funkcije $f_1(t,x)$, $f(t,x)$, $f_2(t,x)$ u oblasti $D(t,x)$ neprekidne, zadovoljavaju uslov Lipšica i nejednakost

$$f_1(t,x) < f(t,x) < f_2(t,x).$$

Neka je, dalje, $M(t_0,x_0)$ tačka oblasti D, a $x = u(t)$, $x = x(t)$, $x = v(t)$ respektivno rješenja jednačina

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t,x), \quad \frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad \frac{dx}{dt} = f_2(t,x)$$

koja prolaze kroz tačku M, tj. $u(t_0) = x(t_0) = v(t_0) = x_0$. Tada u D, za $t > t_0$, važi nejednakost

$$u(t) < x(t) < v(t).$$

Teorema ima mjesta i u slučaju nejedinosti rješenja, tj. i u slučaju izostavljanja uslova Lipšica.

Navedena teorema o diferencijalnim nejednakostima omogućava dobijanje par okvirnih krivih $x = u(t)$ i $x = v(t)$ koje obuhvataju nepoznatu krivu $x = x(t)$. Glavni značaj Čapliginove metode približne integracije je u načinu na koji se uz poznavanje prvog para okvirnih krivih i uz dodavanje uslova $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \gtrless 0$ obezbjedjuje veoma brzo konvergirajući niz sljedećih parova $x = u_n(t)$, $x = v_n(t)$ $(n = 1,2,\dots)$, gdje svaki sljedeći par leži unutar prethodnog para i imaju se nejednakosti

$$u_n(t) < x(t) < v_n(t) \quad (n = 1,2,\cdots),$$

a razlike $v_n(t) - u_n(t)$ su sve manje kada n raste.

Čapligin je pokazao da polazeći od jednog odredjenog para krivih $x = u_n(t)$, $x = v_n(t)$, ili kraće (u_n, v_n), i pretpostavke da je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \gtrless 0$ u oblasti D, za sljedeći par krivih (u_{n+1}, v_{n+1}) se mogu uzeti rješenja linearnih jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = f'_x(t, u_n)(x - u_n) + f(t, u_n),$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(t, v_n) - f(t, u_n)}{v_n - u_n}\cdot(x - u_n) + f(t, u_n).$$

Pod pretpostavkom $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ prva od gornjih jednačina daje donju krivu $x = u_{n+1}(t)$, a druga jednačina daje gornju krivu $x = v_{n+1}(t)$.

Što se tiče ocjene razlike /vidjeti [22] str. 136/

$$\delta_n(t) = v_n(t) - u_n(t)$$

za $t \in J = [t_0, t_0 + h]$, izmedju gornje i donje krive, Luzin je došao do ocjene :

$$\delta_n(t) < M\cdot\left(\frac{t-t_0}{2h}\right)^{2^n-1} < M\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1} = \frac{2M}{2^{2^n}},$$

gdje je M pozitivna konstanta koja ograničava razliku početnog para

$$|v(t) - u(t)| \leq M \quad \text{za } t \in J.$$

Navedena ocjena pokazuje da razlika izmedju aproksimativnih krivih teži nuli /kad n raste/ velikom brzinom, što Čapliginovu metodu čini posebno značajnom.

§2. O STABILNOSTI RJEŠENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Stabilnost rješenja diferencijalnih jednačina je veoma važna oblast kvalitativne analize. U pitanju je ispitivanje medjusobnog odnosa rješenja jednog sistema jednačina, ili samo jedne jednačine, pri promjenama početnih uslova, gdje male izmjene početnih uslova daju dovoljno male izmjene rješenja, ili su, pak, pri malim izmjenama početnih uslova izmjene rješenja veće od dopustivog. U prvom slučaju imamo stabilno, a u drugom nestabilno rješenje.

Posmatraćemo normalan sistem diferencijalnih jednačina

/1/ $$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

odnosno, u matrično-vektorskom obliku, jednačinu

/2/ $$\frac{dx}{dt} = X(t, x),$$

uzimajući da je

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix},$$

gdje funkcija $X(t,x)$ zadovoljava odgovarajuće uslove za egzistenciju i jedinost rješenja [1] u oblasti

$$V = D_x \times J,$$

gdje je D_x otvorena n-dimenziona oblast vektora x, a J osa nezavisno promjenljive t. Koordinate $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ vektora x interpretiraćemo kao koordinate pokretne tačke oblasti D_x, a veličinu t, gdje je $t_0 \leq t < +\infty$, kao vrijeme. Rješenje $x(t)$ sistema /2/ u V zvaćemo kretanje ili integralna kriva, a u D_x zvaćemo trajektorijom kojom se odredjuje zakon kretanja u zavisnosti od promjene parametra t.

Posmatraćemo kretanje definisano početnim uslovima

$$t = t_0, \quad x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

odnosno,

$$t = t_0, \quad x(t_0) = x_0.$$

Ako se t mijenja na konačnom intervalu $t_0 \leq t \leq T$, to odgovor na pitanje o izmjeni rješenja pri malim izmjenama početnih uslova daje teorema o neprekidnoj zavisnosti rješenja od početnih uslova, po kojoj rješenja na konačnom intervalu $t_0 \leq t \leq T$ ostaju bliska pri dovoljno bliskim početnim vrijednostima, a ako nezavisno promjenljiva t uzima proizvoljno velike vrijednosti tada se tim pitanjem bavi teorija stabilnosti rješenja diferencijalnih jednačina.

Sistem /2/ koji ne sadrži eksplicitno nezavisno promjenljivu t, tj. sistem

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \qquad /3/$$

naziva se autonomnim ili dinamičkim, koji je u teoriji diferencijalnih jednačina posebno proučavan.

Ispitivanje stabilnosti nekog rješenja $x = x(t)$ sistema /2/ može se svesti na ispitivanje stabilnosti nula rješenja $x=0$. Zaista, posmatrajmo sistem /2/ čije je rješenje $x = x(t)$, koje je odredjeno početnim uslovom $x(t_0) = x_0$. Uvedimo zamjenu

$$y(t) = x - x(t).$$

Sistem /2/ dobija oblik

---

[1] Na primjer $X(t,x) \in C^{(0,1)}_{tx}(V)$, tj. funkcija $X(t,x)$ u oblasti V je neprekidna po nezavisno promjenljivoj t i ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda po zavisno promjenljivim $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\frac{dy}{dt} = X(t, y + x(t)) - X(t, x(t)),$$

odnosno, dobijamo sistem

/4/
$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y),$$

gdje je $Y(t,y) \equiv X(t, y+x(t)) - X(t, x(t))$ i $Y(t,0)=0$ za $t \geqslant t_0$.

Tako je rješenje $x = x(t)$, pri uvedenoj zamjeni, prešlo u nula rješenje $y=0$ novog sistema /4/, te se umjesto proučavanja stabilnosti sistema /2/ može proučavati stabilnost sistema /4/, ne umanjujući opštost posmatranja i zaključaka, što i čine mnogi autori.

NEKE DEFINICIJE STABILNOSTI RJEŠENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Ovdje ćemo navesti samo neke definicije stabilnosti rješenja, do kojih su došli razni autori, a koje se medjusobno razlikuju bilo po stepenu opštosti, bilo po kriterijumu bliskosti rješenja ili po vrsti rješenja koja se uzimaju u obzir pri razmatranju. Ne mjenjajući suštinu definicija nastojaćemo da uskladimo oznake.

1. Stabilnost u smislu Ljapunova.

a/ Rješenje $x(t)$ sistema /2/ naziva se stabilnim u smislu Ljapunova ako svakom broju $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tako da iz nejednakosti

/5/
$$|x_1(t_0) - x(t_0)| < \delta$$

slijedi nejednakost

/6/
$$|x_1(t) - x(t)| < \varepsilon \quad \text{za sve} \quad t \geqslant t_0,$$

gdje smo sa $x_1(t)$ označili proizvoljno rješenje sistema /2/ koje je odredjeno početnim uslovom $x_1(t_0)$, tj. rješenja sa bliskim početnim vrijednostima ostaju bliska za sve $t \geqslant t_0$.

a'/ Ako funkcija $X(t,x)$ ispunjava uslov $X(t,0)=0$, tj. $x=0$ je nula rješenje sistema /2/, tada važi sljedeća definicija.

Nula rješenje $x=0$ sistema /2/ je stabilno u smislu Ljapunova ako svakom broju $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta_1(\varepsilon, t_0) > 0$ tako da iz nejednakosti

$$|x(t_0)| < \delta_1$$

slijedi nejednakost

$$|x(t)| < \varepsilon \text{ za sve } t \geqslant t_0,$$

gdje je $x(t)$ proizvoljno rješenje sistema /2/ odredjeno početnim uslovom

$x(t_0)$, tj. rješenje $x(t)$ čija se početna tačka nalazi u δ_1 okolini rješenja $x=0$ ne izlazi iz ε okoline nula rješenja za sve $t \geq t_0$.

b/ Rješenje $x(t)$ naziva se nestabilnim u smislu Ljapunova ako za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ uslov /6/ nije ispunjen bar za jedno proizvoljno rješenje $x_1(t)$.

c/ Ako je uslov /5/ ispunjen za δ koje ne zavisi od t_0 kaže se da je rješenje $x(t)$ ravnomjerno stabilno.

d/ Ako rješenje $x(t)$ ne samo da je stabilno u smislu Ljapunova, nego ako postoji takav pozitivan broj $\delta_1 > 0$ da za

$$|x_1(t_0) - x(t_0)| < \delta_1$$

važi

$$\lim_{t\to+\infty} |x_1(t) - x(t)| = 0, \tag{7}$$

tada se rješenje $x(t)$ naziva asimptotski stabilno u smislu Ljapunova.

e/ Ako rješenje $x_1(t)$ konvergira ravnomjerno u odnosu na t_0 ka $x(t)$ kad $t \to +\infty$, onda se za tu asimptotsku stabilnost kaže da je ravnomjerna asimptotska stabilnost u odnosu na početnu vrijednost t_0 ([15]).

f/ Navedimo još jednu definiciju Ljapunova koja nosi naziv ravnomjerna asimptotska stabilnost po Ljapunovu, koja sa definicijom e/ nema ništa zajedničko osim samog naziva.

Posmatrajmo sistem jednačina /1/ kada funkcije X_i ispunjavaju uslove $X_i(t,0,\cdots,0) \equiv 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, tj. $x_i = 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ je nula rješenje sistema /1/.

Asimptotski stabilno nula rješenje sistema /1/ naziva se ravnomjerno asimptotski stabilno po Ljapunovu /[26]/ ako postoji takva neprekidna, strogo monotono opadajuća, od beskonačnosti do nule, funkcija $L(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $L(t) \to 0$ kad $t \to +\infty$ i takvo $\varepsilon > 0$ da pri

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2} < \varepsilon$$

bude

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t, x_{10}, \cdots, x_{n0}, t_0) < L(t-t_0).$$

Uslov /7/ ne povlači za sobom uslove /5/ i /6/ /dakle stabilnost/, a važi i obratno, tj. uslovi /5/ i /6/ ne garantuju ispunjenje uslova /7/ /stabilnost u smislu Ljapunova ne povlači i asimptotsku stabilnost/. Iz stabilnosti rješenja $x(t)$ u smislu Ljapunova ne sljeduje njegova ograničenost, takodje, iz ograničenosti nekog rješenja ne sljeduje njegova stabilnost u smislu Ljapunova.

2. Stabilnost po Lagranžu.

Kazaćemo da je sistem /2/ stabilan u smislu Lagranža ako je svako rješenje $x(t)$ neograničeno produživo u desno, tj. ako je svako rješenje $x(t)$ definisano na intervalu $[t_0, +\infty)$ i ako je ograničeno na tom intervalu ([11]).

Jasno je da iz stabilnosti u smislu Ljapunova ne sljeduje stabilnost u smislu Lagranža, kao i da iz stabilnosti po Lagranžu ne sljeduje stabilnost u smislu Ljapunova.

3. Asimptotska stabilnost u velikom i asimptotska stabilnost u cijelom.

Neka je G unapred zadana oblast promjene x u kojoj se mogu nalaziti početne vrijednosti $x(t_0)$ rješenja sistema /2/.

Rješenje $x(t)$ naziva se asimptotski stabilno u velikom /[17]/ ako je ono stabilno u smislu Ljapunova i ako je uslov /7/ ispunjen za sve $x(t_0)$ iz oblasti G.

Ograničenje da rješenje $x(t)$ u početnom momentu $t=t_0$ pripada unapred zadanoj oblasti G očevidno predstavlja razliku stabilnosti u velikom i stabilnosti u smislu Ljapunova.

Ako je, pak, rješenje $x(t)$ asimptotski stabilno u smislu Ljapunova, a uslov /7/ ispunjen za proizvoljne početne uslove, onda se kaže da je to rješenje $x(t)$ asimptotski stabilno u cijelom /[17]/.

Razlika medju gornjim definicijama je u tome što je u slučaju stabilnosti u cijelom oblast G cio prostor i time ova definicija zahtjeva i jače uslove od onih koje zahtjeva definicija o asimptotskoj stabilnosti u velikom.

4. Ekviasimptotska stabilnost /Massera/.

Kazaćemo da je rješenje $x(t)$ sistema /2/ ekviasimptotski stabilno /[15]/ ako je ono stabilno u smislu Ljapunova i ako za svako $t_0 \geq \tau$ postoji takvo $\delta(t_0)>0$ da za

$$|x_1(t_0) - x(t_0)| < \delta$$

bude

$$\lim_{t\to+\infty} |x_1(t) - x(t)| = 0$$

ravnomjerno po t_0.

Ekviasimptotska stabilnost proističe iz ravnomjerne asimptotske stabilnosti i sa svoje strane, povlači običnu asimptotsku stabilnost, ali, uopšte govoreći, ona ne obezbjedjuje ravnomjernu /ne asimptotsku/ stabilnost.

5. Eksponencijalna asimptotska stabilnost /Malkin/.

Za rješenje $x(t)$ sistema /2/ kažemo da je eksponencijalno asimptotski stabilno /[17]/ ako postoji broj $\lambda>0$ sa sljedećim svojstvom: svakom $\varepsilon>0$ odgovara $\delta(\varepsilon)>0$ tako da iz nejednakosti

$$|x_1(t_0)-x(t_0)|<\delta, \quad t_0\geqslant\tau,$$

slijedi nejednakost

$$|x_1(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon\cdot e^{-\lambda(t-t_0)} \text{ za sve } t\geqslant t_0 .$$

Eksponencijalna asimptotska stabilnost je jača od svih do sada navedenih kategorija stabilnosti.

6. Stabilnost ravnomjernog privlačenja.

Asimptotski stabilno rješenje $x(t)$ sistema /2/ naziva se ravnomjernim privlačenjem /[26]/ ako za zadani broj $h>0$ možemo izabrati brojeve $\alpha>0$ i $T>0$ takve da pri

$$|x_1(t_0)-x(t_0)|>h$$

bude ispunjeno

$$|x_1(t)-x(t)|>\alpha \quad \text{za} \quad t\in[t_0,t_0+T] .$$

U ovoj definiciji rješenje ne mora biti ravnomjerno stabilno, već se riječ ravnomjerno odnosi na privlačenje.

7. Ekstremalna stabilnost.

Neka funkcija $X(t,x)$ sistema /2/, pored navedenih uslova, ispunjava i uslove o neprekidnoj zavisnosti rješenja od početnih uslova i neka je za $t\geqslant0$ periodična sa nekom periodom T, tj. $X(t+T,x)=X(t,x)$.

Za sistem /2/ kažemo da je ekstremalno stabilan /[16]/ ako je

$$\lim_{t\to+\infty}[x_1(t)-x(t)]=0,$$

gdje su $x_1(t)$ i $x(t)$ ma koji par rješenja.

Za ovu stabilnost karakteristično je to što se ništa ne govori o bliskosti rješenja u početnom momentu $t=t_0$.

8. Stabilnost u odnosu na klasu rješenja i orbitalna stabilnost.

Neka je C neka klasa integralnih krivih u vektorskom prostoru D_x sistema /2/ i neka je $\Gamma_0\equiv x_0(t)$ element klase C. Kazaćemo da je integralna kriva Γ_0 stabilna u odnosu na klasu C /[15]/ kada za ma koje $\varepsilon>0$ i $t_0\geqslant\tau$ postoji takvo $\delta(\varepsilon,t_0)>0$ da, ako je $\Gamma_1\equiv x_1(t)\in C$ i

$$|x_1(t_0)-x_0(t_0)|<\delta,$$

važi

$$|x_1(t)-x_0(t)|<\varepsilon \text{ za sve } t\geqslant t_0 .$$

Ako je

/8/ $$\lim_{t\to+\infty}|x_1(t)-x_0(t)|=0$$

stabilnost se naziva asimptotskom.

Ako je klasa u odnosu na koju je integralna kriva Γ_0 stabilna jedino prazan skup, tada se Γ_0 naziva nestabilnom.

Integralna kriva koja nije ni stabilna ni nestabilna naziva se uslovno stabilnom. U tom slučaju je integralna kriva stabilna u odnosu na sopstvenu podklasu klase svih integralnih krivih.

Sada ćemo da damo definiciju "slabije" stabilnosti, tzv. orbitalne stabilnosti.

Integralna kriva Γ_0 je orbitalno stabilna /[15]/ u odnosu na klasu integralnih krivih C u D_x ako svakom $\varepsilon>0$, $\delta(\varepsilon)>0$ i $\tau(\varepsilon)$ takvi da, ako integralna kriva Γ_1 u momentu τ prolazi kroz $\sigma(\Gamma_0,\delta)$, tada Γ_1 ostaje unutar $\sigma(\Gamma_0,\varepsilon)$ za sve $t>\tau$. To znači, ako neka integralna kriva Γ_1 u nekom momentu τ prolazi dovoljno blizu Γ_0, ona će i dalje, za sve $t>\tau$, ostati dovoljno blizu Γ_0.

Ako integralna kriva Γ_0 ne samo da je orbitalno stabilna, nego uz to važi i uslov /8/, tada je ona orbitalno asimptotski stabilna.

Orbitalna stabilnost je očevidno slabija od stabilnosti u smislu Ljapunova i to utoliko što se kod definicije Ljapunova zahtjeva da rješenja $x(t)$ i $x_1(t)$ sistema /2/ budu bliska u početnom momentu t_0, tj. da važi $|x_1(t_0)-x(t_0)|<\delta$, dok se kod orbitalne stabilnosti zahtjeva blizina ne u početnom momentu t_0, nego u momentu t_0', gdje je $t_0'>\tau$, a τ je neki momenat. Otuda, ako je neko rješenje $x(t)$ sistema /2/ stabilno u smislu Ljapunova, tada je ono i orbitalno stabilno.

9. Stabilnost po koordinatama.

Neka funkcija $X(t,x)$ sistema /2/ ispunjava uslov $X(t,0)=0$, tj. $x=0$ je nula rješenje sistema.

Za nula rješenje $x=0$ sistema /2/ kažemo da je stabilno po koordinatama $x_1, x_2, \cdots, x_k$, $k<n$ /[26]/ ako za svako $\varepsilon>0$ postoje dva broja $\delta_1>0$ i $\delta_2>0$ $(\delta_1<\varepsilon)$ takva da za

/9/ $$\sum_{i=1}^{k} x_{i0}^2<\delta_1^2$$

i

/10/ $$\sum_{i=k+1}^{n} x_{i0}^2<\delta_2^2$$

važi

/11/ $$\sum_{i=1}^{k} x_i^2(t; x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}, t_0) < \varepsilon^2$$

za sve $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ $\left(x_{i0} = x_i(t_0; x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}, t_0)\right)$.

Ako za ma koje $\varepsilon > 0$ postoje brojevi $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ takvi da pri ispunjenju uslova /9/ i /1o/ važi uslov /11/ i ako još važi

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{i=1}^{k} x_i^2(t; x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}, t_0) = 0,$$

tada se nula rješenje sistema /2/ naziva asimptotski stabilno po koordinatama $x_1, x_2, \cdots, x_k$.

Ako sistem /2/ ne ispunjava uslove stabilnosti po koordinatama tada se on naziva nestabilnim po koordinatama.

Možemo primjetiti da stabilnost nula rješenja sistema /2/ po koordinatama $x_1, x_2, \cdots, x_k$, $k<n$ označava da je taj sistem stabilan u smislu Ljapunova po tim koordinatama, dok se za ostale koordinate $x_{k+1}, \cdots, x_n$ zahtjeva samo ispunjenje uslova /1o/.

1o. Stabilnost u smislu Poasona.

Tačka $(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}) = P$ prostora dinamičkog sistema naziva se pozitivno stabilnom u smislu Poasona ako za bilo koju okolinu U tačke P i za bilo koje $T > 0$ postoje takve vrijednosti $t \geqslant T$ pri kojima tačka $(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ trajektorije koja prolazi kroz P, pripada okolini U. Analogno, ako postoje takve vrijednosti $t \leqslant -T$ da je $(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \in U$, tačka P naziva se negativno stabilnom u smislu Poasona /[1]/.

Tačka P koja je stabilna u smislu Poasona kako za $t \geqslant T$ tako i za $t \leqslant -T$ naziva se stabilnom u smislu Poasona.

Dakle, možemo reći da je tačka P stabilna u smislu Poasona ako za dovoljno velike vrijednosti $|t| \geqslant T$ sve tačke trajektorije koja prolazi kroz P ostaju u proizvoljnoj okolini svog početnog položaja.

11. Stabilnost u smislu Jošizave.

Japanski matematičar Jošizava dao je definiciju stabilnosti skupa M, gdje je M proizvoljni zatvoreni skup tačaka.

Neka je dat skup tačaka M i neka je M_r /r je proizvoljan pozitivan broj/ skup svih tačaka prostora čija su rastojanja od skupa M strogo manja od r /skup M je podskup skupa M_r/ i neka je M_r^c skup svih tačaka prostora koje ne pripadaju M_r.

Skup M nazivamo stabilnim skupom ako svako rješenje $x(t)$ koje "počinje" u M, za $t = t_0 \geqslant 0$, ostaje u skupu M_r za sve $t \geqslant t_0$ /[16]/.

12. Skoro stabilno približno rješenje.

U radu [7] M. Bertolino je dao sljedeću definiciju stabilnosti približnog rješenja.

Neka je $x=\varphi(t)$ proizvoljna funkcija definisana za $t \geq t_0$. Za funkciju $x=\varphi(t)$ kazaćemo da je skoro stabilno približno rješenje jednačine /2/ ako svakom broju $\varepsilon \geq \ell > 0$ / ℓ je fiksiran broj/ odgovara broj $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tako da pri

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$$

važi nejednakost

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \text{ za sve } t \geq t_0 \,,$$

gdje je $x(t)$ proizvoljno rješenje jednačine /2/.

Ako je $x=\varphi(t)$ tačno rješenje jednačine /2/ tada riječ približno treba izostaviti.

U ovoj definiciji je karakteristično to što proizvoljna konstanta nije potpuno proizvoljna, nego je ne manja od pozitivnog fiksiranog broja ℓ.

13. Stabilnost pri stalnim poremećajima.

Pitanje stabilnosti pri stalnim poremećajima u praksi igra veliku ulogu. To je slučaj kada umjesto zadane jednačine posmatramo aproksimativnu jednačinu, koja je pristupačnija za proučavanje.

Neka pored jednačine /2/, tj. jednačine

$$\text{/2/} \qquad \frac{dx}{dt} = X(t,x)$$

imamo i jednačinu

$$\text{/2'/} \qquad \frac{dx}{dt} = X(t,x) + R(t,x) \,.$$

Jednačinu /2'/ nazivamo jednačinom poremećaja jednačine /2/, gdje funkcija $R(t,x)$ predstavlja stalne poremećaje i koja je ograničena i u nekom smislu mala u poredjenju sa funkcijom $X(t,x)$ za $t \geq t_0$ i za odgovarajuće vrijednosti x. Jednačina /2/ naziva se i jednačinom prve aproksimacije za jednačinu /2'/.

a/ Kazaćemo da je rješenje $x(t)$ jednačine /2/ stabilno pri stalnom dejstvu poremećaja /[17]/ ako za svaki broj $\varepsilon > 0$ postoje brojevi $\delta_1(\varepsilon) > 0$ i $\delta_2(\varepsilon) > 0$ takvi da ma koje rješenje $\varphi(t)$ jednačine /2'/ koje zadovoljava nejednakost

$$|\varphi(t_0) - x(t_0)| < \delta_1$$

zadovoljava i nejednakost

/12/ $$|\varphi(t)-x(t)|<\varepsilon \quad \text{za sve } t\geq t_0 ,$$

kada funkcija $R(t,x)$ u oblasti /12/ zadovoljava nejednakost

/13/ $$|R(t,x)|<\delta_2 .$$

Ova definicija predstavlja uopštenje stabilnosti u smislu Ljapunova i očevidno ima veliki značaj u praksi.

Navedimo još neke definicije stabilnosti pri konstantnom dejstvu poremećaja, koje u suštini predstavljaju nove varijante navedene definicije.

b/ Kazaćemo da je rješenje $x(t)$ jednačine /2/ stabilno pri stalnom dejstvu poremećaja u srednjem /na intervalu dužine T / ako funkcija $R(t,x)$ umjesto nejednakosti /13/ ispunjava nejednakost

$$\int_t^{t+T}|R(t,x)|dt<\delta_2 .$$

c/ Neka funkcija $X(t,x)$ u jednačini /2/, odnosno /2'/, ispunjava uslov $X(t,0)\equiv 0$ za $t\geq 0$. Neka su, zatim, Q i Q_0 dva skupa koji sadrže koordinatni početak, Q zatvoren ograničen skup, a Q_0 njegov podskup. Neka je $\varphi(t;t_0,x_0)$ rješenje jednačine /2'/ sa početnim uslovom $\varphi(t_0;t_0,x_0)=x_0$. Sa $\mathfrak{R}$ označimo skup svih poremećaja $R(t,x)$ koji ispunjavaju uslov $|R(t,x)|<\delta$ za sve $t\geq t_0$ i sve x .

Ako za svaki poremećaj $R(t,x)$ iz $\mathfrak{R}$, svaku tačku x_0 iz Q_0 i svaki momenat $t_0\geq 0$ rješenje $\varphi(t,t_0,x_0)$ ostaje u Q za sve $t\geq 0$, kazaćemo da je koordinatni početak praktično stabilan.

Ako ma koje rješenje $\varphi(t)$ jednačine /2'/ za svako $R(t,x)$ iz $\mathfrak{R}$ ulazi za dovoljno veliko t u Q i ostaje u njemu, tada kažemo da jednačina /2'/ posjeduje jaku praktičnu stabilnost /[16]/.

d/ Posmatrajmo sistem jednačina

/14/ $$\frac{dx}{dt}=A(t)x+X(t,x)+R(t,x)$$

i njegovu prvu aproksimaciju

/15/ $$\frac{dx}{dt}=A(t)x+X(t,x) ,$$

gdje je

$$|R(t,x)|\leq r(t) .$$

Neka je

$$h_0=\sup_{t\geq 0} r(t) ,$$

$$h_1=\sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1} r(\xi)\,d\xi ,$$

$$h_2 = \sup_{t \geq 0} \left(\int_t^{t+1} r^2(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ možemo odrediti pozitivne brojeve h i δ takve da za rješenje $\varphi(t)$ jednačine /14/ važi

$$|\varphi(t)| < \varepsilon \quad za \quad t \geq 0 ,$$

kada je

$$|\varphi(0)| < \delta$$

i kada je ispunjen jedan od uslova

$$1^\circ \; h_0 \leq h \quad , \quad 2^\circ \; h_1 \leq h \quad , \quad 3^\circ \; h_2 \leq h ,$$

tada kažemo da je nula rješenje jednačine /15/ stabilno pri stalnom dejstvu poremećaja ograničenih /u slučaju 1°/; ograničenih u srednjem /u slučaju 2°/; ograničenih u srednje kvadratnom /u slučaju 3°/ /[1]/ .

FUNKCIJA LJAPUNOVA I STABILNOST RJEŠENJA

Sada ćemo da se zadržimo na pitanju kako možemo ispitati da li je neko rješenje sistema jednačina stabilno ili ne.

Prije svega ovaj problem možemo rješiti tako da rješimo sistem diferencijalnih jednačina, a zatim da ispitamo stabilnost rješenja. U ovom slučaju problem je u teškoći i u velikom broju nemogućnosti da se sistem jednačina rješi.

Takodje, stabilnost se može ispitati variranjem parametara diferencijalnih jednačina koristeći računske mašine i posmatranjem efekata varijacija na rješenje sistema jednačina. Medjutim, ovakvo ispitivanje osjetljivosti sistema nije uvijek dovoljno.

Za ispitivanje stabilnosti rješenja i bez rješavanja sistema jednačina od velikog je značaja tzv. druga metoda Ljapunova, poznata kao "direktna metoda Ljapunova", koja se direktno primjenjuje na sistem diferencijalnih jednačina.

Posmatrajmo opet sistem jednačina /2/, tj. sistem

/16/
$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) ,$$

gdje je

$$X(t,x) \in C_{tx}^{(0,1)}(D), \quad D = \{-\infty \leq a < t < +\infty, \; |x| < H \leq +\infty\}$$

/ D je otvorena oblast koja pripada oblasti $D_x \times J$ / i $X(t,0)=0$ / $x=0$ je nula rješenje sistema /16//.

Posmatrajmo funkciju

$$V \equiv V(t,x) \in C_{tx}(D_0)$$

/ $V(t,x) \equiv V(t,x_1,\dots,x_n)$ /, gdje je $D_0 = \{a < t < +\infty,\ |x| \leq h < H\} \subset D$.

Definicija. Realna neprekidna funkcija $V(t,x)$ naziva se pozitivno definitna u D_0 ako postoji funkcija $W(x) \in C(|x| \leq h)$, takva da je

$$V(t,x) \geq W(x) > 0 \quad za \quad |x| \neq 0, \tag{17}$$
$$V(t,0) = W(0) = 0,$$

a ako umjesto uslova /17/ važi nejednakost

$$V(t,x) \leq -W(x) < 0 \quad za \quad |x| \neq 0,$$

funkcija $V(t,x)$ se naziva negativno definitna.

Problem ispitivanja stabilnosti nula rješenja $x=0$ sistema /16/ pomoću druge metode Ljapunova svodi se na proučavanje ponašanja funkcije $V(t,x)$, funkcije Ljapunova, duž proizvoljne integralne krive sistema /16/.

Navedimo sada neke osnovne teoreme Ljapunova /bez dokaza/ iz teorije stabilnosti rješenja u vezi direktne metode Ljapunova, koje daju osnovne kriterije o stabilnosti i nestabilnosti rješenja u smislu Ljapunova /teoreme su uzete iz [11] /.

Teorema Ljapunova o stabilnosti. Ako za sistem /16/ postoji funkcija $V(t,x)$ takva da je:

a/

$$V(t,x) \in C_{tx}^{(1,1)}(D_0), \tag{18}$$

b/ pozitivno definitna,

c/ izvod po vremenu t $\dot{V}(t,x)$ duž proizvoljne integralne krive

$$\frac{dV}{dt} \equiv \dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot X_i(t,x) \leq 0,$$

tada je nula rješenje $x=0$ $(a < t < +\infty)$ sistema /16/ stabilno po Ljapunovu.

Teorema Ljapunova o asimptotskoj stabilnosti. Ako za sistem /16/ postoji funkcija $V(t,x)$ koja ispunjava uslove:

a/ uslove a/ i b/ prethodne teoreme,

b/ da ravnomjerno u odnosu na t teži nuli kad $x \to 0$, tj.

$$V(t,x) \underset{t}{\rightrightarrows} 0 \quad za \quad t \in [t_0 > a, +\infty) \quad kad \quad x \to 0, \tag{19}$$

c/ da je izvod po vremenu t $\dot{V}(t,x)$ duž proi[illegible]tegralne krive sistema negativno definitna funkcija, tada je nula rješenje $x=0$ sistema /16/ asimptotski stabilno po Ljapunovu.

Teorema Ljapunova o nestabilnosti. Ako za sistem /16/ postoji funkcija $V(t,x)$ koja ispunjava uslove:

a/ uslov /18/,

b/ uslov /19/,

c/ izvod po vremenu t $\dot{V}(t,x)$ je funkcija stalnog znaka / $\dot{V}(t,x)$ je pozitivno ili negativno definitna funkcija/ duž proizvoljne integralne krive sistema,

d/ za neko $t_0>a$ u ma kojoj okolini $|x|<\Delta$ $(\Delta\leq h<H)$ postoji tačka (t_0,x_0) u kojoj je znak funkcije $V(t,x)$ jednak sa znakom izvoda $\dot{V}(t,x)$, tj.

$$V(t_0,x_0)\cdot\dot{V}(t_0,x_0)>0,$$

tada je nula rješenje $x=0$ sistema /16/ nestabilno u smislu Ljapunova.

Nedostatak teoreme Ljapunova o nestabilnosti rješenja je u tome što funkcija $V(t,x)$ treba da ispunjava odgovarajuće uslove u cijeloj oblasti D_0. Tako izvod $\dot{V}(t,x)$ u cijeloj oblasti D_0 treba da bude stalnog znaka. Medjutim, da bi utvrdili nestabilnost rješenja, u slučaju kada je nestabilnost u pitanju, dovoljno je znati svojstva funkcije $V(t,x)$ samo u nekom dijelu oblasti D_0 koji sadrži nestabilnu integralnu krivu. Taj nedostatak je ispravljen u sljedećoj teoremi Četajeva, gdje se posmatra , umjesto oblasti D_0, samo neki dio okoline koordinatnog početka /teorema je uzeta iz[13]/.

Teorema Četajeva. Neka za sistem diferencijalnih jednačina /16/ postoji funkcija $V(t,x)$ koja ispunjava uslove:

a/ za $t\geq t_0$ u proizvoljno maloj okolini od $x=0$ postoji oblast $V>0$,

b/ u toj oblasti funkcija V je ograničena,

c/ izvod po vremenu t $\dot{V}(t,x)$ izračunat duž proizvoljne integralne krive sist[illegible] /16/, uzima u oblasti $V>0$ pozitivne vrijednosti, pri čemu za sve t [illegible]a koje je $V(t,x)\geq\mathcal{L}$, gdje je $\mathcal{L}$ neka pozitivna konstanta, ispunjena nejednakost

$$\dot{V}(t,x)\geq\ell,$$

gdje je $\ell=\ell(\mathcal{L})>0$. Tada je nula rješenje $x=0$ sistema /16/ nestabilno.

Navedimo sada teoremu o asimptotskoj stabilnosti u cijelom.

Teorema Barbašina - Krasovskog. Ako za sistem /16/ postoji funkcija

$V(t,x)$ koja ispunjava uslove:

a/ $$V(t,x) = C^{(1,1)}_{tx} \; (a<t<+\infty,\; x\in D_x),$$

b/ da je pozitivno definitna,

c/ da ravnomjerno u odnosu na t teži nuli i $+\infty$ kada respektivno $|x|\to 0$ i $|x|\to+\infty$, tj.

$$V(t,x) \underset{t}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{kada} \quad |x|\to 0,$$
$$V(t,x) \underset{t}{\rightrightarrows} +\infty \quad \text{kada} \quad |x|\to +\infty,$$

d/ izvod po vremenu t duž proizvoljne integralne krive $\dot V(t,x)$ je negativno definitna funkcija, tada je nula rješenje $x=0$ sistema /16/ asimptotski stabilno u cijelom /[11]/.

Navedimo još i teoremu Malkina /uzetu iz [12]/ o stabilnosti u odnosu na stalno djelujuće poremećaje.

Posmatraćemo sisteme /2/ i /2'/, tj. sisteme

/20/ $$\frac{dx}{dt} = X(t,x),$$

/20'/ $$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + R(t,x),$$

gdje je $X(t,0)=0$.

Teorema Malkina. Neka za sistem /20/ postoji funkcija $V(t,x)$ koja ispunjava uslove:

a/ uslov /18/,

b/ da je pozitivno definitna,

c/ da su parcijalni izvodi $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ $(i=1,2,\dots,n)$ ograničeni po modulu,

d/ da je izvod po vremenu t $\dot V(t,x)$ negativno definitna funkcija.

Tada je nula rješenje $x=0$ sistema /20/ asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima.

Polazeći od osnovnih kriterija o stabilnosti rješenja, iskazane kroz navedene teoreme, u teoriji o stabilnosti rješenja dat je čitav niz kriterija o stabilnosti rješenja jednačina odgovarajućeg oblika, kao i kriteriji o stabilnosti u smislu odgovarajućih definicija.

Prema izloženim teoremama možemo primjetiti da je utvrdjivanje stabilnosti ili nestabilnosti rješenja relativno lako ako se zna funkcija Ljapunova $V(t,x)$. No, teškoća u primjeni ove direktne metode je u odredjivanju funkcije Ljapunova za zadani sistem jednačina.

§3. RETRAKCIJE I RETRAKTI. METODA RETRAKCIJE

U ovom paragrafu daćemo osnovne pojmove o retrakcijama i retraktima, prema radu [10] K. Borsuka, a zatim, prema radu [23] , i izložiti metodu retrakcije T. Ważevskog, koja se primjenjuje u ovom radu.

RETRAKCIJE I RETRAKTI

Definicija. Neka su data dva skupa A i B takva da je $B \subset A$. Svaku funkciju f , koja je unutrašnja [1] i neprekidna u A , nazivaćemo funkcijom koja vrši retrakciju A u B ako je

/1/ $$f(A) = B$$

i ako ispunjava funkcionalnu jednačinu

/2/ $$f(f(x)) = f(x).$$

Kada jedna takva funkcija postoji kaže se da je B retrakt od A .

Primjeri:

1. Za svaki skup A identitet $f(x)=x$ je funkcija koja vrši retrakciju A u A : svaki skup je retrakt sebe sama.

2. Konstantna funkcija $f(x)=p$, gdje je $p \in A$, definisana na A , je funkcija koja vrši retrakciju A u (p) : svaka tačka je retrakt svakog skupa koji je sadrži.

3. Za svako $k \leq n$ funkcija f definisana u prostoru R_n /n-to dimenzionalni Euklidski prostor/ formulom $f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$ je funkcija koja vrši retrakciju R_n u R_k : svaki prostor R_k je retrakt od R_n za $k \leq n$.

4. Funkcija $f(x) = |x|$, koja je definisana na skupu realnih brojeva R_1 , je funkcija koja vrši retrakciju prave u polupravu.

5. Ako je S sfera sa n dimenzija u prostoru R_n , c njen centar i F njena granica, funkcija f definisana formulama

$$f(p) = p \text{ za } p \in S, \quad f(p) = F \cap [\overrightarrow{cp}] \text{ za } p \text{ non} \in S$$

/$[\overrightarrow{cp}]$ je vektor odredjen tačkama c i p /, daje retrakciju R_n u S : tako je svaka n-to dimenzionalna sfera retrakt od R_n .

6. Neka je S sfera sa n dimenzija, c njen centar i F njena granica. Granica F nije retrakt od S .

---

[1] Funkciju f nazivaćemo unutrašnjom u A ako je ona definisana u A i ako je $f(A) \subset A$.

Sada ćemo da navedemo samo neka osnovna tvrdjenja o retrakcijama i retraktima, neka sa dokazom, a neka i bez dokaza.

Teorema 1. Da bi unutrašnja funkcija f u A, koja je neprekidna u tom skupu, bila funkcija koja vrši retrakciju A u B potrebno je i dovoljno da je

/3/ $$f(A) \subset B,$$

/4/ $$f(x) = x \text{ za svako } x \in B.$$

Dokaz. Ako je f funkcija koja vrši retrakciju A u B, tada je po definiciji $f(A) = B$, što povlači uslov /3/. Dalje, za svako $x \in B$ postoji $y \in A$ takav da je, prema /2/, $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$. Time je uslov /4/ ispunjen.

Obrnuto, ako unutrašnja i neprekidna funkcija f u A ispunjava uslove /3/ i /4/, tada, prema /3/, $f(x) \in f(A) \subset B$ za svako $x \in A$, odakle je, prema /4/, $f(f(x)) = f(x)$. Dakle, funkcija f vrši retrakciju A u B.

Teorema 2. Retrakt retrakta nekog skupa A je retrakt skupa A.

Dokaz. Neka su φ i ψ respektivno funkcije koje vrše retrakciju A u B i B u C. Dovoljno je pokazati da funkcija $f = \psi\varphi$ je funkcija koja vrši retrakciju A u C. Zaista, funkcija f je, prema definiciji φ i ψ, unutrašnja i neprekidna u A, šta više $f(A) = \psi\varphi(A) = \psi(B) = C$. Prema tome, slijedi $f(x) \in C \subset B$ za svako $x \in A$, odakle je, prema /4/, $ff(x) = \psi\varphi f(x) = \psi f(x) = \psi\psi\varphi(x) = \psi\varphi(x) = f(x)$ što je i trebalo dokazati.

Teorema 3. Svaki retrakt jednog skupa relativno je zatvoren u tom skupu.

Dokaz. Neka je f funkcija koja vrši retrakciju A u B i

/5/ $$x_n \in B \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

/6/ $$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in A.$$

Prema /4/ je $x_n = f(x_n)$, odakle je, prema /6/, $x = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ i prema neprekidnosti funkcije f, $x = f(x) \in f(A) = B$, što je i trebalo dokazati.

Teorema 4. Ako je skup B retrakt skupa A i skup A je u tački $p \in B$ lokalno povezan, tada je i skup B u tački p lokalno povezan [1].

Teorema 5. Sljedeće osobine prostora A pripadaju i njegovom retraktu B : 1/ da je neprekidno lokalno povezan, 2/ da sadrži jednu invarijantnu tačku.

[1] Skup A kaže se da je lokalno povezan u tački $p \in A$ ako svaka okolina tačke p u A sadrži jednu povezanu okolinu tačke p u A. Skup A je lokalno povezan ako je to u svakoj svojoj tački.

Teorema 6. Svaki zatvoren skup koji se nalazi u prostoru A u kome se može uvesti metrika i koji je homeomorfan sa jednim retraktom od R_n je retrakt od A .

Definicija. Apsolutnim retraktom naziva se svaki separabilan prostor u kome se može uvesti metrika i koji je retrakt svakog od svojih nadprostora u koje se može uvesti metrika.

Primjer. Ograničeni retrakti prostora R_n su apsolutni retrakti.

Zaista, svaki ograničeni retrakt od R_n , kako je kompaktan, a prema tome i zatvoren u svakom nadprostoru A u kome se može uvesti metrika, je, prema teoremi 6, retrakt od A .

Lema. Neka je data homeomorfija $h(B)=B_1$, gdje se B nalazi u topološkom prostoru A . Postoji topološki prostor A_1 i homeomorfija

/7/ $$g(A)=A_1,$$

takva da je

/8/ $$g(x)=h(x) \text{ za svako } x\in B.$$

Teorema 7. Svojstvo da je jedan skup apsolutni retrakt invarijanta je homeomorfije.

Dokaz. Neka je B_1 apsolutni retrakt i h homeomorfna transformacija B u B_1 . Treba dokazati da je B retrakt svakog proizvoljnog nadprostora A u kome se može uvesti metrika.

Prema navedenoj lemi, postoji topološki prostor A_1 koji obuhvata B_1 i homeomorfna transformacija g koja ispunjava uslove /7/ i /8/. Kao homeomorfna slika prostora A u kome se može uvesti metrika je prostor A_1 u kome se može uvesti metrika i slijedi

$$B_1=h(B)=g(B)\subset A_1.$$

No, B_1 je apsolutni retrakt, te postoji funkcija f koja vrši retrakciju prostora A_1 u B_1 .

Funkcija $h_{-1}fg$ je:

1/ definisana i neprekidna na A ,

2/ $h_{-1}fg(A)=h_{-1}f(A_1)=h_{-1}(B_1)=B$,

3/ za $x\in B$ je $h_{-1}fg(x)=h_{-1}fh(x)=h_{-1}h(x)=x$, jer je, prema /4/, $fh(x)=h(x)$.

Prema teoremi 1 skup B je retrakt od A .

Primjer. Homeomorfna slika sfere u prostoru R_n je apsolutni retrakt.

U praksi se nailazi na teškoće pri odredjivanju da li je neki skup retrakt od nekog drugog skupa ili ne. Za to je od posebnog značaja svojstvo invarijantnosti u odnosu na homeomorfiju. Tako koristeći spoznaju da granica sfere nije retrakt sfere izvlačimo zaključak analogan za sve skupove homeomorfne sferi.

METODA RETRAKCIJE

Posmatrajmo sistem jednačina

/9/ $$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \cdots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

i pretpostavimo da važi sljedeća

Hipoteza H. Pretpostavljamo da funkcije $f_i(t, x_1, \cdots, x_n)$ realnih promjenljivih $t, x_1, \cdots, x_n$ su definisane i neprekidne u jednom otvorenom skupu Ω koji pripada prostoru od $n+1$ dimenzije i neka kroz svaku tačku iz Ω prolazi jedan i samo jedan integral sistema /9/.

1. Neki opšti pojmovi i oznake [1].

Neka je ω jedan otvoren skup sadržan u Ω.

Skup svih ivičnih tačaka od ω nazivaćemo apsolutnom ivicom od ω i pisaćemo $frontabs(\omega)$ /analogno i za $frontabs(\Omega)$/.

Skup svih ivičnih tačaka od ω koje pripadaju Ω nazivaćemo ivicom od ω u odnosu na Ω i pisaćemo

$$front(\omega, \Omega) = \Omega \cap frontabs(\omega).$$

Neka je

$$\omega^* = exterieur(\omega, \Omega) = \Omega - \omega - front(\omega, \Omega).$$

Ovaj skup nazivaćemo spoljašnjost od ω u odnosu na Ω.

Neka je $P = (\tau, \xi_1, \cdots, \xi_n)$, tačka iz Ω, tj. $P \in \Omega$. Sa $Q = J(t, P)$ označimo integral sistema /9/ koji prolazi kroz tačku P. Slijedi

$$J(t_0, P) = P \quad \text{kada je} \quad P = (t_0, p_1, \cdots, p_n) \in \Omega.$$

Neka je dat niz tačaka $P_\nu \in \Omega$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$. Kazaćemo da niz tačaka P_ν teži prema apsolutnoj ivici od Ω i pisaćemo

/10/ $$P_\nu \longrightarrow frontabs(\Omega)$$

kada ne postoji nikakav podniz P_{α_ν} koji bi težio nekoj tački koja pripada Ω.

Postoji jedan otvoren interval (konačan ili ne) $\alpha < t < \beta$ takav da je

$$J(t, P) \in \Omega \quad \text{za} \quad \alpha < t < \beta,$$

[1] Oznake su uzete prema radu [23] T. Važevskog.

dok $J(\alpha, P)$ i $J(\beta, P)$ ne pripadaju Ω nego njegovoj apsolutnoj ivici. Taj interval označimo sa $\Delta(P,\Omega)$ ili kraće sa $\Delta(P)$. Lijevi i desni kraj intervala $\Delta(P)$ označimo respektivno sa $\alpha(P)$ i $\beta(P)$. Otuda je

$$\Delta(P,\Omega) = \Delta(P) = \big(\alpha(P), \beta(P)\big).$$

Ovaj interval je otvoren i važi $-\infty \leq \alpha(P) < \beta(P) \leq +\infty$.

Neka je δ jedan podskup od $\Delta(P)$, tj. $\delta \subset \Delta(P)$. Sa $J(\delta, P)$ označićemo skup svih tačaka $Q = J(t,P)$ za koje je $t \in \delta$. Skup $J(\delta, P)$ predstavlja, dakle, luk integrala $J(t,P)$ koji se dobija kada t prolazi kroz skup δ. Skup $J(P) = J(\Delta(P), P)$ predstavlja integral koji prolazi kroz tačku P i takav da $J(P) \subset \Omega$.

Skup tačaka koji obuhvata tačku P /za $P \in \Omega$/ i sve tačke od $J(P)$ koje se nalaze desno od P nazivaćemo desni poluintegral koji polazi od P i označavaćemo sa

$$\mathrm{Demi}(+)J(P,\Omega) \quad \text{ili} \quad \mathrm{Demi}(+)J(P).$$

Isto se definiše i lijevi poluintegral

$$\mathrm{Demi}(-)J(P,\Omega) \quad \text{ili} \quad \mathrm{Demi}(-)J(P).$$

Ako je $P = (t_0, p_1, \dots, p_n) \in \Omega$, tada je

$$\mathrm{Demi}(+)J(P) = J([t_0, \beta(P)), P), \quad \mathrm{Demi}(-)J(P) = J((\alpha(P), t_0], P).$$

Slijedi

$$\mathrm{Demi}(+)J(P) \longrightarrow \mathrm{frontabs}(\Omega), \quad \mathrm{Demi}(-)J(P) \longrightarrow \mathrm{frontabs}(\Omega),$$

a takodje za svaki niz t_ν

$$t_0 < t_\nu < \beta(P), \quad t_\nu \longrightarrow \beta(P),$$

prema /lo/, je

$$J(t_\nu, P) \longrightarrow \mathrm{frontabs}(\Omega).$$

2. Zavisnost integrala $J(t,P)$ od njegove početne tačke.

Uz važenje hipoteze H možemo dati sljedeća tvrdjenja.

a/ Neka je $P_\nu \in \Omega$, $P_0 \in \Omega$, $P_\nu \to P_0$. Niz integrala $J(t,P_\nu)$ u $\Delta(P_0)$ teži skoro uniformno prema $J(t,P_0)$ kad $\nu \to \infty$ i piše se

$$J(t,P_\nu) \rightrightarrows J(t,P_0) \quad \text{u} \quad \Delta(P_0).$$

Ovdje valja reći da sljedeće osobine imaju mjesta: ako su γ i δ dva konačna broja takva da interval $[\gamma, \delta] \subset \Delta(P_0)$ tada: 1° počevši od dovoljno velikog indeksa ν integral $J(t,P_\nu)$ je definisan za svako $t \in [\gamma,\delta]$, tj. $[\gamma,\delta] \subset \Delta(P_\nu)$, kada je ν dovoljno veliko i 2° ne uzimajući u obzir jedan konačan broj početnih indeksa ν slijedi da

$$\mathcal{J}(t,P_\nu) \rightrightarrows \mathcal{J}(t,P_0) \ u \ [\gamma,\delta],$$

tj. $\mathcal{J}(t,P_\nu)$ teži uniformno prema $\mathcal{J}(t,P_0)$ u intervalu $[\gamma,\delta]$, što, prema definiciji rastojanja, možemo napisati u obliku

$$|\mathcal{J}(t,P_\nu) - \mathcal{J}(t,P_0)| \rightrightarrows 0 \ u \ [\gamma,\delta].$$

b/ Ako je θ jedan otvoren podskup od Ω, γ i δ konačni brojevi, takvi da je

$$[\gamma,\delta] \subset \Delta(P_0),\ P_0 \in \Omega,\ P_\nu \in \Omega,\ P_\nu \to P_0,\ \mathcal{J}([\gamma,\delta],P_0) \subset \theta,$$

tada je, za dovoljno velike indekse ν,

$$\mathcal{J}([\gamma,\delta],P_\nu) \subset \theta.$$

c/ Posebno ako je $\gamma = \delta$ i

$$\gamma \in \Delta(P_0),\ P_0 \in \theta,\ P_\nu \in \Omega,\ P_\nu \to P_0,$$

tada, za dovoljno velike indekse ν, $\mathcal{J}(t,P_\nu)$ je odredjen za $t=\gamma$, ili što je isto $\gamma \in \Delta(P_\nu)$, i

$$\mathcal{J}(\gamma,P_\nu) \in \theta,\ \mathcal{J}(\gamma,P_\nu) \longrightarrow \mathcal{J}(\gamma,P_0).$$

3. Definicija sljedeće i prethodne tačke u slučaju kada važi hipoteza H.

Neka je P tačka koja pripada ω, tj. $P \in \omega$. S obzirom na desni poluintegral koji polazi od tačke P mogući su slučajevi: 1° ili $\mathrm{Demi}(+)\,\mathcal{J}(P)$ nema nikakvu tačku zajedničku sa $\mathrm{front}(\omega,\Omega)$, 2° ili $\mathrm{Demi}(+)\,\mathcal{J}(P)$, počevši od P u desno susreće po prvi put[1] $\mathrm{front}(\omega,\Omega)$ u tački Q. Tačku Q nazivaćemo "sljedećom" tačkom tačke P u odnosu na ω i Ω i sistem /9/ i označavaćemo je sa $\mathrm{cons\acute{e}q}(P;\omega,\Omega)$[2], tj.

$$Q = \mathrm{cons\acute{e}q}(P;\omega,\Omega) \in \mathrm{front}(\omega,\Omega).$$

Analogno se definiše "prethodna" tačka tačke P u odnosu na ω i Ω kao zajednička tačka od $\mathrm{Demi}(-)\,\mathcal{J}(P)$ sa $\mathrm{front}(\omega,\Omega)$, ako takva tačka postoji, i obilježava se sa

$$\mathrm{ant\acute{e}c}(P;\omega,\Omega).$$

Sa

$$\mathrm{ombre\ gauche}(\omega,\Omega)$$

označimo skup svih tačaka $P \in \omega$ za koje $\mathrm{cons\acute{e}q}(P;\omega,\Omega)$ postoji. Ovaj skup tačaka naziva se i skup tačaka lijevog traga u odnosu na ω, Ω i

---

[1] Tačka u kojoj se ovaj susret ostvaruje prvi put postoji, jer $\mathrm{front}(\omega,\Omega)$ je zatvoren u odnosu na Ω.

[2] Ovu oznaku uveo je Poincare.

sistem /9/.

Evo nekih očevidnih tvrdjenja:

a/ $$\text{ombre gauche}(\omega, \Omega) \subset \omega \subset \Omega .$$

b/ Neka je $P=(t_0, p_1, \cdots, p_n)$, $Q=(t_1, q_1, \cdots, q_n)$, $P\in\omega$, $Q\in\Omega$. Potreban i dovoljan uslov da je $Q=\text{conség}(P;\omega,\Omega)$ jeste da je

$$t_0 < t_1, \quad Q = J(t_1, P), \quad J([t_0, t_1), P) \subset \omega, \quad Q \in \text{front}(\omega, \Omega).$$

c/ Neka je $P\in\omega$. Uslovi

$$[\text{Demi}(+)J(P)] \cap \text{front}(\omega,\Omega) = 0, \quad \text{Demi}(+)J(P) \subset \omega,$$

su potrebni i dovoljni uslovi da $\text{conség}(P;\omega,\Omega)$ ne postoji.

4. Tačke izlaza i tačke ulaza.

Pretpostavimo da važi hipoteza H i navedimo nove definicije i neka tvrdjenja koja su vezana za ovo.

Definicija. Svaku tačku Q za koju postoji tačka $P\in\omega$, takva da je $Q=\text{conség}(P;\omega,\Omega)$ nazivaćemo tačkom izlaza od ω u odnosu na Ω i sistem /9/. Skup svih tačaka Q ove vrste nazivaćemo skupom tačaka izlaza od ω u odnosu na Ω i sistem /9/ i označavaćemo ga sa $\text{sortie}(\omega,\Omega)$.

a/ Prema hipotezi H slijedi očevidno

$$\text{sortie}(\omega,\Omega) \subset \text{front}(\omega,\Omega).$$

b/ Neka je $Q=(t_0, q_1, \cdots, q_n)$. Potreban i dovoljan uslov da $Q\in\text{sortie}(\omega,\Omega)$ sastoji se u tome da postoji pozitivan broj ε_0 takav da je

$$J([t_0-\varepsilon_0, t_0), Q) \subset \omega \text{ i da } Q \in \text{front}(\omega,\Omega).$$

Definicija. Neka je $Q=(t_0, q_1, \cdots, q_n)$ i neka $Q\in\text{sortie}(\omega,\Omega)$. Tačku Q nazivaćemo tačkom striktnog izlaza od ω u odnosu na Ω i sistem /9/ ako postoji takav broj $\varepsilon_0>0$ da sve tačke integrala $J(Q)$ koje odgovaraju vrijednostima t iz intervala $t_0<t\leq t_0+\varepsilon_0$ su sadržane u skupu ω^*. Skup svih tačaka striktnog izlaza od ω označavaćemo sa $\text{sortie stricte}(\omega,\Omega)$.

c/ Prema hipotezi H slijedi očevidno

$$\text{sortie stricte}(\omega,\Omega) \subset \text{sortie}(\omega,\Omega) \subset \text{front}(\omega,\Omega).$$

d/ Neka važi hipoteza H i neka je $Q=(t_0, q_1, \cdots, q_n)\in\text{front}(\omega,\Omega)$. Potreban i dovoljan uslov da je $Q\in\text{sortie stricte}(\omega,\Omega)$ je da postoji $\varepsilon_0>0$ takav da je

$$J([t_0-\varepsilon_0, t_0), Q) \subset \omega, \quad J((t_0, t_0+\varepsilon_0], Q) \subset \omega^*.$$

Definicija. Svaku tačku R za koju postoji tačka $P\in\omega$ takva da je

$R = \mathrm{ant\acute{e}c}(P; \omega, \Omega)$, nazivaćemo tačkom ulaza od ω u odnosu na Ω i sistem /9/. Tačku R nazivaćemo tačkom striktnog ulaza od ω u odnosu na Ω i sistem /9/ ako postoji takav broj $\varepsilon_0 > 0$ da sve tačke integrala $J(R)$ za vrijednosti t iz intervala $t_0 - \varepsilon_0 \leq t < t_0$ pripadaju skupu ω^*.

Za tačke ulaza i tačke striktnog ulaza važe analogna tvrdjenja iznesenim tvrdjenjima za tačke izlaza i tačke striktnog izlaza.

5. Neprekidnost transformacije $Q = f(P)$.

Lema 1. Neka važi hipoteza H. Ako $P_0 \in \omega$, $\mathrm{cons\acute{e}q}(P_0; \omega, \Omega) \in \mathrm{sortie\ stricte}(\omega, \Omega)$, tada transformacija

$$Q = f(P) = \mathrm{cons\acute{e}q}(P; \omega, \Omega)$$

je neprekidna u tački P_0 .

Dokaz. Neka je $P_0 = (t_0, p_1^0, \cdots, p_n^0)$, $P_\nu = (t_\nu, p_1^\nu, \cdots, p_n^\nu)$ i neka je $P_0 \in \mathrm{ombre\ gauche}(\omega, \Omega)$, $P_\nu \in \mathrm{ombre\ gauche}(\omega, \Omega)$, $P_\nu \to P_0$. Dovoljno je dokazati da

$$\mathrm{cons\acute{e}q}(P_\nu; \omega, \Omega) \longrightarrow \mathrm{cons\acute{e}q}(P_0; \omega, \Omega).$$

Imamo: $t_\nu \longrightarrow t_0$, $P_0 = J(t_0, P_0)$, $P_\nu = J(t_\nu, P_\nu)$. Neka je $Q_0 = \mathrm{cons\acute{e}q}(P_0; \omega, \Omega)$ i $J(t, P_0)$ integral koji prolazi kroz Q_0 za neku vrijednost τ od t . Prema tome je

/11/ $$Q_0 = \mathrm{cons\acute{e}q}(P_0; \omega, \Omega) = J(\tau, P_0), \quad t_0 < \tau, \quad J([t_0, \tau), P_0) \subset \omega.$$

Kako je ω otvoren skup i integral $J(t, P_0)$ neprekidan po t , to proizilazi da za $\delta > 0$ dovoljno malo važi

/12/ $$J([t_0 - \delta, \tau - \delta], P_0) \subset \omega .$$

Kako je $\Delta(P_0)$ otvoren interval koji odgovara integralu $J(t, P_0)$ i $\alpha(P_0)$ i $\beta(P_0)$ lijevi i desni kraj ovog intervala, to je $\alpha(P_0) < t_0 < \tau < \beta(P_0)$.

Neka je $\eta > 0$ proizvoljan broj. Prema /12/ i tvrdjenju 4.d/ postoji broj $\delta > 0$ tako mali da je

/13/ $$\alpha(P_0) < t_0 - \delta < t_0 < \tau - \delta < \tau < \tau + \delta < \beta(P_0),$$

/14/ $$J([t_0 - \delta, \tau - \delta], P_0) \subset \omega, \quad J([t_0 - \delta, \tau + \delta], P_0) \subset \Omega,$$
$$J([\tau - \delta, \tau), P_0) \subset \omega, \quad J((\tau, \tau + \delta], P_0) \subset \omega^*,$$
$$\text{prečnik od } J([\tau - \delta, \tau + \delta], P_0) < \eta .$$

Posljednja nejednakost izražava da je

/15/ $$|J(t', P_0) - J(t'', P_0)| < \eta \text{ [1]},$$

kada je $\tau - \delta \leq t' \leq \tau + \delta$, $\tau - \delta \leq t'' \leq \tau + \delta$.

---

[1] $|J(t', P_0) - J(t'', P_0)|$ označava rastojanje tačaka $J(t', P_0)$ i $J(t'', P_0)$.

Kako $t_\nu \to t_0$ to je, za dovoljno veliko ν, prema /13/,

/16/ $$\alpha(P_0) < t_0-\delta < t_\nu < \tau-\delta < \tau < \tau+\delta < \beta(P_0).$$

Prema tvrdjenjima 2.b/ i c/, kao i /13/ i /14/, za dovoljno veliko ν, važi

$$J([t_0-\delta,\tau+\delta],P_\nu)\subset\Omega,\quad J([t_0-\delta,\tau-\delta],P_\nu)\subset\omega,$$

/17/ $$J(\tau-\delta,P_\nu)\in\omega,\quad J(\tau+\delta,P_\nu)\in\omega^*,$$

odakle, prema /16/, slijedi

/18/ $$J([\tau-\delta,\tau+\delta],P_\nu)\subset\Omega,\quad J([t_\nu,\tau-\delta],P_\nu)\subset\omega.$$

Prema /17/ luk $J([\tau-\delta,\tau+\delta],P_\nu)$ siječe $\mathrm{front}(\omega,\Omega)$. Neka t prolazi intervalom $[\tau-\delta,\tau+\delta]$ u desno, počevši od $\tau-\delta$. Kako je $\mathrm{front}(\omega,\Omega)$ zatvoren u odnosu na Ω, to, prema prvoj relaciji /18/, postoji vrijednost od t, neka je to τ_ν, takva da je

/19/ $$J(\tau_\nu,P_\nu)\in\mathrm{front}(\omega,\Omega).$$

Slijedi

/2o/ $$\tau-\delta<\tau_\nu<\tau+\delta \quad i \quad J([\tau-\delta,\tau_\nu),P_\nu)\subset\omega.$$

Uporedjujući zadnju relaciju sa drugom relacijom /18/ dobija se $J([t_\nu,\tau_\nu),P_\nu)\subset\omega$. Prema ovoj relaciji i relaciji /19/ proizilazi da tačka $J(\tau_\nu,P_\nu)$ je sljedeća od $J(t_\nu,P_\nu)$ u odnosu na ω, Ω i sistem /9/ /prema definiciji sljedeće tačke/. Slijedi

/21/ $$J(\tau_\nu,P_\nu)=\mathrm{conséq}\,(P_\nu;\omega,\Omega).$$

Kako je, prema /13/, $[\tau-\delta,\tau+\delta]\subset\Delta(P_0)$, to, prema tvrdjenju 2.a/, važi sljedeća uniformna konvergencija

$$J(t,P_\nu)\rightrightarrows J(t,P_0) \quad u \quad [\tau-\delta,\tau+\delta].$$

Dakle, za indekse ν dovoljno velike, slijedi da je

$$|J(t,P_\nu)-J(t,P_0)|<\eta \quad kada \quad t\in[\tau-\delta,\tau+\delta],$$

odakle, prema /2o/, imamo

$$|J(\tau_\nu,P_\nu)-J(\tau_\nu,P_0)|<\eta.$$

Nejednakost /15/ daje, prema /2o/,

$$|J(\tau_\nu,P_0)-J(\tau,P_0)|<\eta.$$

Dakle, imamo

$$|J(\tau_\nu,P_\nu)-J(\tau,P_0)|<2\eta,$$

odakle, prema /11/ i /21/, proizilazi, za ν dovoljno veliko,

$$|\operatorname{conséq}(P_\nu;\omega,\Omega)-\operatorname{conséq}(P_0;\omega,\Omega)|<2\eta,$$

odnosno

$$\operatorname{conséq}(P_\nu;\omega,\Omega)\longrightarrow\operatorname{conséq}(P_0;\omega,\Omega),$$

jer je $\eta>0$ proizvoljan broj, što je i trebalo dokazati.

Lema 2. Pretpostavimo da važi hipoteza H i da je

$$P_\nu=(t_\nu,p_1^\nu,\dots,p_n^\nu)\in \text{ombre gauche }(\omega,\Omega),$$

/22/ $$P_0=(t_0,p_1^0,\dots,p_n^0)\in \text{sortie stricte }(\omega,\Omega),$$

$$P_\nu\longrightarrow P_0.$$

Tvrdimo da

/23/ $$\operatorname{conséq}(P_\nu;\omega,\Omega)\longrightarrow P_0.$$

Dokaz. Imamo $t_\nu\longrightarrow t_0$, $P_\nu\in\omega$ i

/24/ $$J(t_0,P_0)=P_0.$$

Neka je $\eta>0$ proizvoljan broj. Prema /22/ i tvrdjenju 4.d/ lako je zaključiti da postoji broj $\delta>0$ takav da je

$$J([t_0-\delta,t_0+\delta],P_0)\subset\Omega,\quad J([t_0-\delta,t_0),P_0)\subset\omega,$$

$$J((t_0,t_0+\delta],P_0)\subset\omega^*,\quad J(t_0+\delta,P_0)\in\omega^*,$$

/25/ $$\text{prečnik od } J([t_0-\delta,t_0+\delta],P_0)<\eta.$$

Prema tvrdjenjima 2.b/ i c/, za dovoljno veliko ν, važi

$$t_0-\delta<t_\nu<t_0+\delta,\quad J([t_0-\delta,t_0+\delta],P_\nu)\subset\Omega,$$

/26/ $$J(t_0-\delta,P_\nu)\in\omega,\quad J(t_0+\delta,P_\nu)\in\omega^*.$$

Prema drugoj relaciji /26/ i kako je $J(t_\nu,P_\nu)=P_\nu\in\omega$, postoji jedan broj τ_ν takav da je

/27/ $$t_0-\delta<\tau_\nu<t_0+\delta,\quad \operatorname{conséq}(P_\nu;\omega,\Omega)=J(\tau_\nu,P_\nu).$$

Prema tvrdjenju 2.a/ slijedi uniformna konvergencija

$$J(t,P_\nu)\rightrightarrows J(t,P_0)\quad u\quad [t_0-\delta,t_0+\delta],$$

a otuda je

$$|J(\tau_\nu,P_\nu)-J(\tau_\nu,P_0)|\longrightarrow 0.$$

Za dovoljno velike indekse ν imamo

$$|J(\tau_\nu,P_\nu)-J(\tau_\nu,P_0)|<\eta,$$

a prema /25/ je

$$|J(\tau_\nu,P_0)-J(t_0,P_0)|<\eta,$$

te je

$$|J(\tau_\nu, P_\nu) - J(t_0, P_0)| < 2\eta,$$

odakle je, prema /24/ i /27/,

$$|\text{conség}(P_\nu; \omega, \Omega) - P_0| < 2\eta,$$

što obezbjedjuje uslov /23/, jer η može da bude i proizvoljno mali broj.

Lema 3. Neka su ispunjene pretpostavke hipoteze H, neka je $S = \text{sortie}(\omega, \Omega)$ i pretpostavimo da je svaka tačka izlaza tačka striktnog izlaza, tj. da je

$$\text{sortie}(\omega, \Omega) = \text{sortie stricte}(\omega, \Omega).$$

Definišimo transformaciju $Q = \varphi(P)$ na sljedeći način

$$\varphi(P) = \text{conség}(P; \omega, \Omega) \ \text{kada} \ P \in \text{ombre gauche}(\omega, \Omega),$$

$$\varphi(P) = P \ \text{kada} \ P \in S.$$

Prema datim pretpostavkama, tvrdimo da transformacija $Q = \varphi(P)$ je neprekidna u skupu

$$W = \text{ombre gauche}(\omega, \Omega) + S$$

i da je

/28/ $$\varphi(P) \in S \ \text{kada} \ P \in W.$$

Dokaz. Neprekidnost transformacije $\varphi(P)$ zaključuje se neposredno prema lemi 1 i 2. Relacija /28/ pojavljuje se kao neposredna posljedica definicije $\varphi(P)$.

6. TEOREMA I. Neka važi hipoteza H u odnosu na sistem /9/ i pretpostavimo da je svaka tačka izlaza, u odnosu na ω, Ω i sistem /9/, tačaka striktnog izlaza, tj. da je

/29/ $$\text{sortie}(\omega, \Omega) = \text{sortie stricte}(\omega, \Omega) = S.$$

Pretpostavimo da za skupove Z i S_1 važe relacije:

$$S_1 \subset S, \quad Z \subset \omega + S_1,$$

/30/ $$Z \cap S_1 \ \text{je retrakt od} \ S_1,$$

/31/ $$Z \cap S_1 \ \text{nije retrakt od} \ Z.$$

Tada postoji bar jedna tačka $P_0 = (t_0, p_1^0, \dots, p_n^0)$, takva da je $P_0 \in Z - S_1$ i da ili

/32/ $$\text{conség}(P_0; \omega, \Omega) \in S - S_1$$

ili

/33/ $$\text{conség}(P_0; \omega, \Omega) \ \text{ne postoji}.$$

(Relacija /33/ izražava da je dio integrala desno od P_0 sasvim sadržan u ω i ne može, prema tome, nikada dodirnuti $\text{front}(\omega, \Omega)$. Ova relacija ekvivalentna je sa relacijom $\text{Demi}(+)\,\mathrm{J}(P_0) \subset \omega$, odnosno, sa relacijom $[\text{Demi}(+)\,\mathrm{J}(P_0)] \cap \text{front}(\omega, \Omega) = 0.)$

Dokaz. Pretpostavimo da je tvrdjenje teoreme netačno, tj. da je

/34/ $$\text{conség}(P; \omega, \Omega) \in S_1 \quad \text{kada} \quad P \in Z - S_1,$$

što znači da $\text{conség}(P;\omega,\Omega)$ postoji za sve tačke $P \in Z - S_1$. Otuda je

$$Z - S_1 \subset \text{ombre gauche}(\omega, \Omega).$$

Prema /29/ imamo

$$Z = (Z - S_1) + Z \cap S_1 \subset \text{ombre gauche}(\omega, \Omega) + S = W, \text{ tj.}$$

/35/ $$Z \subset W \quad \text{za} \quad W = \text{ombre gauche}(\omega, \Omega) + S.$$

Iskoristimo transformaciju $Q = \varphi(P)$, koja se pojavljuje u lemi 3 i koja je definisana uslovima

/36/ $$\varphi(P) = \text{conség}(P; \omega, \Omega) \quad \text{kada} \quad P \in \text{ombre gauche}(\omega, \Omega),$$

/37/ $$\varphi(P) = P \quad \text{kada} \quad P \in S.$$

Transformacija $Q = \varphi(P)$ je neprekidna na W /prema lemi 3/, pa je tim prije neprekidna na Z.

Prema /35/ i /37/ imamo

$$\varphi(P) = P \quad \text{kada} \quad P \in Z \cap S_1,$$

te je

$$\varphi(P) \in S_1 \text{ kada } P \in Z \cap S_1.$$

Prema /34/ i /36/ slijedi

$$\varphi(P) \in S_1 \text{ kada } P \in Z - S_1.$$

Na osnovu zadnje tri relacije zaključujemo da je

/38/ $$\varphi(P) \in S_1 \text{ kada } P \in Z \quad \text{i} \quad \varphi(P) = P \text{ kada } P \in Z \cap S_1.$$

Kako je $Z \cap S_1$ retrakt od S_1 /prema /30//, to postoji transformacija $R = \psi(Q)$ koja ostvaruje retrakciju S_1 u $Z \cap S_1$. Ova transformacija je neprekidna za $Q \in S_1$ i slijedi da je

/39/ $$\psi(Q) \in Z \cap S_1 \text{ kada } Q \in S_1, \quad \psi(Q) = Q \text{ kada } Q \in Z \cap S_1.$$

Formirajmo sada transformaciju $R = f(P)$, gdje je

$$f(P) = \psi\varphi(P).$$

Prema /38/ i /39/ transformacija $R = f(P)$ je definisana i neprekidna na Z i slijedi da je

$$f(P) \subset Z \cap S_1 \text{ kada } P \in Z, \quad f(P) = P \text{ kada } P \in Z \cap S_1.$$

Dakle, ova transformacija ostvaruje retrakciju Z na $Z \cap S_1$, što je nemoguće, prema /31/. Otuda pretpostavka da je tvrdjenje teoreme neistinito dovodi na kontradiktornost i time se potvrdjuje tačnost tvrdjenja teoreme.

7. Problem o egzistenciji asimptotskih poluintegrala i granični problem.

Zadržimo i ovdje važenje hipoteze H.

Definicija. Poluintegral sistema /9/ /koji polazi od tačke P / kazaćemo da je asimptotski u odnosu na skupove ω i Ω ako je on sadržan u ω, tj. ako je

/4o/ $$\text{Demi}(+)\,J(P) \subset \omega.$$

Problem o egzistenciji asimptotskog poluintegrala u odnosu na ω i Ω: Neka je Z jedan skup takav da je $Z \subset \omega + \text{front}(\omega,\Omega)$. Da li postoji tačka $P \in Z$ takva da je $\text{Demi}(+)\,J(P)$ asimptotski u odnosu na ω i Ω, ili što je isto, takva da relacija /4o/ ima mjesta ?

Granični problem: Neka su Z i T dva skupa u $\omega + \text{front}(\omega,\Omega)$. Da li postoje dvije tačke $A \in Z$ i $B \in T$ koje se mogu spojiti dijelom luka jednog integrala sistema /9/, koji pripada $\omega + \text{front}(\omega,\Omega)$?

U slučaju ova dva problema koristi se teorema 1, koja vodi alternativi da važi /32/ ili /33/. Uvodeći odredjene dopunske uslove u teoremu 1 može se isključiti ili relacija /32/ ili /33/. Ako relacija /33/ nije moguća teorema 1 daje pozitivan odgovor o graničnom problemu /uzimajući da je $T = S - S_1$/. Ako, pak, relacija /32/ nije moguća tada relacija /33/ povlači relaciju $\text{Demi}(+)\,J(P_0) \subset \omega$ i problem postojanja asimptotskog poluintegrala u odnosu na ω i Ω daje pozitivan odgovor.

8. TEOREMA II /o egzistenciji asimptotskih poluintegrala/.

Neka važi hipoteza H u odnosu nasistem /9/ i pretpostavimo da je svaka tačka izlaza /u odnosu na ω, Ω i sistem /9// tačka striktnog izlaza, tj. da je

$$\text{sortie}(\omega,\Omega) = \text{sortie stricte}(\omega,\Omega) = S.$$

Neka je Z skup takav da je

$$Z \subset \omega + S,$$

$$Z \cap S \text{ je retrakt od } S,$$

$$Z \cap S \text{ nije retrakt od } S.$$

Tada postoji bar jedna tačka P_0 , takva da

$$P_0 \in Z - S,$$

tj. $P_0 \in Z \cap \omega$ i da desni poluintegral koji polazi od P_0 je sadržan u ω , tj.

/41/ $$\mathrm{Demi}\,(+)\,J(P_0) \subset \omega .$$

Dokaz. Stavimo u teoremi 1 da je $S_1 = S$. Pri tome je skup $S - S_1$ prazan, te relacija /32/ nije moguća. Otuda relacija /33/ ima mjesta, a ona, pak, povlači relaciju /41/.

9. O egzistenciji asimptotskog poluintegrala koji je produžen do $t=+\infty$.

Definicija. Neka su ω i Ω dva otvorena skupa i neka $\omega \subset \Omega$. Kazaćemo da $\mathrm{frontabs}(\omega)$ dodiruje $\mathrm{frontabs}(\Omega)$ isključivo na ravni $t=b$ /gdje je b konačan broj ili $b=+\infty$ / ako za svaki niz tačaka $P_\nu = (t_\nu, p_1^\nu, \dots, p_n^\nu)$ takav da

$$P_\nu \in \omega \ \text{ i } \ P_\nu \longrightarrow \mathrm{frontabs}(\omega),$$

slijedi da

$$t_\nu \to b.$$

Na osnovu svega prethodnog možemo sada izložiti najvažnije tvrdjenje.

TEOREMA III. Neka važi hipoteza H u odnosu na sistem /9/ i pretpostavimo da $\mathrm{frontabs}(\omega)$ dodiruje $\mathrm{frontabs}(\Omega)$ isključivo na ravni $t=b$ /gdje je b konačan broj ili $b=+\infty$/. Dalje, pretpostavimo da je

$$\mathrm{sortie}\,(\omega,\Omega) = \mathrm{sortie\ stricte}\,(\omega,\Omega) = S,$$

$$Z \subset \omega + S,$$

$$Z \cap S \text{ je retrakt od } S,$$

$$Z \cap S \text{ nije retrakt od } Z .$$

Tada postoji tačka $P_0 = (t_0, p_1^0, \dots, p_n^0)$ takva da je

$$P_0 \in Z - S,$$

tj. $P_0 \in Z \cap \omega$ i da

/42/ $$\mathrm{Demi}\,(+)\,J(P_0) \subset \omega .$$

Ovaj poluintegral je asimptotski u odnosu na ω i Ω i slijedi

/43/ $$J(t,P_0) \subset \omega \quad \text{kada} \quad t_0 \leq t < b .$$

Dokaz. Označimo sa $\Delta(P_0) = (\alpha(P_0), \beta(P_0))$ interval koji odgovara integralu $J(t,P_0)$. Prema /42/ i definiciji od $\mathrm{Demi}\,(+)\,J(P_0)$ slijedi da

$$J(t,P_0) \subset \omega \quad \text{kada} \quad t_0 \leq t < \beta(P_0).$$

Da bi utvrdili /43/ treba dokazati da je $\beta(P_0)=b$. Neka je

/44/ $$t_0 < t_\nu < \beta(P_0), \quad t_\nu \longrightarrow \beta(P_0).$$

Otuda imamo

$$J(t_\nu, P_0) \longrightarrow \mathrm{frontabs}(\Omega)$$

i prema prethodnoj definiciji slijedi da

$$t_\nu \longrightarrow b,$$

što, prema /44/, daje da je $b=\beta(P_0)$.

10. O egzistenciji rješenja u graničnom problemu.

Definicija. Pretpostavimo da su skupovi ω i Ω otvoreni i da $\omega \subset \Omega$. Kazaćemo da $\mathrm{frontabs}(\omega)$ ne dodiruje $\mathrm{frontabs}(\Omega)$ kada ne postoji ni jedan niz tačaka P_ν takav da

$$P_\nu \in \omega, \quad P_\nu \longrightarrow \mathrm{frontabs}(\Omega).$$

TEOREMA IV. Neka važi hipoteza H u odnosu na sistem /9/ i pretpostavimo da $\mathrm{frontabs}(\omega)$ ne dodiruje $\mathrm{frontabs}(\Omega)$. Pretpostavimo da je

$$\mathrm{sortie}(\omega, \Omega) = \mathrm{sortie\ stricte}(\omega, \Omega) = S$$

i da za skupove Z i T važe relacije:

$$T \subset S, \quad Z \subset \omega + S - T,$$

$$Z \cap (S-T) \text{ je retrakt od } S-T,$$

$$Z \cap (S-T) \text{ nije retrakt od } Z.$$

Tada postoje dvije tačke $P_0 \in Z \cap \omega$ i $Q_0 \in T$ koje mogu biti spojene lukom $[P_0, Q_0]$ jednog integrala sistema /9/ pri čemu se taj luk nalazi u ω izuzev njegove tačke Q_0. Ovaj luk čini rješenje graničnog problema.

Dokaz. Neka je $S_1 = S - T$. Nije teško primjetiti da su pretpostavke teoreme 1 ispunjene.

Dakle, za svako $P \in \omega$ $\mathrm{cons\acute{e}q}(P; \omega, \Omega)$ postoji, jer $\mathrm{frontabs}(\omega)$ ne dodiruje $\mathrm{frontabs}(\Omega)$. Neka je $P = P_0 = (t_0, p_1^0, \cdots, p_n^0)$ i izaberimo niz t_ν takav da je: $t_0 < t_\nu < \beta(P_0)$, $t_\nu \longrightarrow \beta(P_0)$. Otuda $J(t_\nu, P_0) \longrightarrow \mathrm{frontabs}(\Omega)$.

Dakle, za jedan odredjen indeks $\nu = \mu$, prema gornjoj definiciji, je $J(t_\mu, P_0) \subset \Omega - \omega$, te će luk $J([t_0, t_\mu], P_0)$ sjeći $\mathrm{front}(\omega, \Omega)$ i, prema tome, $\mathrm{cons\acute{e}q}(P_0; \omega, \Omega)$ postoji, te relacija /33/ nije moguća. Otuda slijedi

$$\mathrm{cons\acute{e}q}(P_0; \omega, \Omega) \in S - S_1 = T.$$

Tačke P_0 i $Q_0 = \mathrm{cons\acute{e}q}(P_0; \omega, \Omega)$ očevidno ispunjavaju uslove teoreme IV.

Za ovaj rad od posebnog značaja biće teorema III koja govori o egzistenciji integrala $J(P_0)$ koji će uvijek ostati u unutrašnjosti od ω, a da nikada ne susretne ivicu od ω i o mogućnostima njegovog beskonačnog produžavanja /do ivice od Ω/. Teorema IV je važna za odredjivanje egzistencije integralnih krivih na konačnom intervalu posmatranja.

Treba istaći da je M. Bertolino u svom radu [6] dao jedan elementaran dokaz teoreme III T. Važevskog, bez korišćenja retrakcije, za slučaj kada se ima jedna obična diferencijalna jednačina. M. Bertolino je dao taj dokaz koristeći pojam Dedekindova presjeka i istakao da se u slučaju sistema jednačina komplikuje mogućnost jednog takvog dokaza.

Primjer. Posmatrajmo "cijev" ω : $|x|<1$, $|y|<1$, $-\infty<t<+\infty$.

Ivica od ω sastoji se od četiri strane E_1, E_2, E_3 i E_4, koje respektivno pripadaju ravnima $x=-1$, $x=+1$, $y=-1$ i $y=+1$.

Posmatrajmo sistem jednačina

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,y), \quad \frac{dy}{dt}=g(t,x,y)$$

i pretpostavimo da su funkcije f i g svuda neprekidne, da kroz svaku tačku prolazi jedan i samo jedan integral toga sistema i da je

$$x\cdot f(t,x,y)<0 \quad \text{na} \quad E_1+E_2,$$

$$y\cdot g(t,x,y)>0 \quad \text{na} \quad E_3+E_4.$$

Lako se primjećuje da je skup tačaka striktnog izlaza

$$S=E_3+E_4-E_1-E_2$$

Neka su A i B tačke sa koordinatama $(\xi,-1,\tau)$, $(\xi,+1,\tau)$, gdje je $|\xi|<1$, $-\infty<\tau<+\infty$. Označimo sa Z segment koji je ograničen sa tačkama A i B. Skup $Z\cap S$ čine tačke A i B i skup $Z\cap S$ nije retrakt od Z. Neka je $f(Q)=A$ kada $Q\in E_3$ i $f(Q)=B$ kada $Q\in E_4$. Transformacija $f(Q)$ ostvaruje retrakciju S u $Z\cap S$. Dakle, skup $Z\cap S$ je retrakt od S.

Prema tome, na segmentu $Z-S=Z-A-B$ postoji tačka P_0 takva da poluintegral koji polazi od P_0, produžen u desno od P_0 koliko god je to moguće, ne izlazi nikada iz "cijevi" ω. Dakle, za svako t iz intervala $t_0\leq t<+\infty$ integral će biti asimptotski ograničen.

G L A V A I

U ovoj glavi izložićemo ukratko moje ranije rezultate do kojih sam došao u magistarskom radu, a koji su objavljeni u radovima [24] i [25]. Te rezultate daćemo u paragrafima 2 i 3, a u paragrafu 1 interpretiraćemo neke rezultate M. Bertolina koje sam neposredno koristio u svome radu.

§1. NEKI REZULTATI M. BERTOLINA O ASIMPTOTSKIM RJEŠENJIMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Ovdje ćemo izložiti samo neke diferencijalne jednačine, sa važnim, a na mjestima i veoma zanimljivi[illegible] [illegible]avkama, kao i tvrdjenja koja su rezultat specifičnih posmatranja. To će biti samo neki rezultati M. Bertolina koji su mi poslužili kao osnovna inspiracija u radu /rezultati su uzeti iz rada [2]/.

1. Neka je data jednačina

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t)\, x^n + \psi(t, x) \qquad (n = 1, 2, \cdots) . \tag{/1/}$$

Za $n = 2k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ i za $n = 2k+1$ $(k = 0, 1, \cdots)$ M. Bertolino dobija bitno različite rezultate.

Za funkciju $\varphi(t)$ pretpostavlja da je neprekidna za $t \geq t_0 > 0$ i da zadovoljava jedan od uslova:

$$C_1 \leq \varphi(t) \leq C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ su konstante takve da je } C_1 \cdot C_2 > 0) ;$$

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +0 \ ; \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = -0 \ ;$$

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty \ ; \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = -\infty \ .$$

Za funkciju $\psi(t, x)$ pretpostavlja da je neprekidna u čitavoj ravni tOx, da zadovoljava Lipšicov uslov

$$|\psi(t, X) - \psi(t, x)| \leq K\, |X - x|$$

/K je Lipšicova konstanta/ u svakoj ograničenoj oblasti ravni tOx i da zadovoljava jedan od uslova:

/2/ $\qquad 0<N<\Psi(t,x)<M\,; \quad -N<\Psi(t,x)<-M\,; \quad -N<\Psi(t,x)<M\,,$

ili jedan od uslova:

$$\left.\begin{array}{l} 0<N|x|<\Psi(t,x)<M|x|\,, \\ -N|x|<\Psi(t,x)<-M|x|\,, \\ -N|x|<\Psi(t,x)<M|x|\,, \end{array}\right\} x\neq 0\,; \quad \Psi(t,0)=0\,, \tag{/3/}$$

gdje su M i N pozitivne konstante.

Koristeći osnovnu Čapliginovu teoremu o diferencijalnim nejednakostima M. Bertolino umjesto jednačine /1/ posmatra komparativne jednačine i to, u slučaju pretpostavki /2/, jednačinu

$$\frac{dx}{dt}=\varphi(t)x^n \pm k$$

/ k je konstanta/, a u slučaju pretpostavki /3/, jednačinu

$$\frac{dx}{dt}=\varphi(t)x^n \pm kx\,.$$

Kvalitativnu integraciju tih jednačina vršio je direktnom metodom.

Od svih rezultata do kojih je došao, posmatrajući jednačinu /1/, sljedećih pet teorema su samo ilustracija vrsta tih rezultata.

TEOREMA 1. Za

$$n=2k \;\; (k=1,2,\cdots)\,; \quad C_1\leq\varphi(t)\leq C_2\,, \;\; C_1,C_2<0\,; \;\; 0<N<\Psi(t,x)<M$$

/sa ostalim pretpostavkama o funkcijama $\varphi(t)$ i $\Psi(t,x)$ navedenim napred/ jednačina /1/ ima jednu klasu asimptotskih rješenja - sva pozitivna rješenja i rješenja koja prolaze kroz tačke ose $x=0$.

TEOREMA 2. Za

$$n=2k+1 \;\; (k=0,1,2,\cdots)\,; \quad C_1\leq\varphi(t)\leq C_2\,, \;\; C_1,C_2<0$$

i ako je ispunjen jedan od uslova /2/, sva su rješenja asimptotski ograničena.

TEOREMA 3. Za

$$n=2k+1 \;\; (k=0,1,2,\cdots)\,; \quad C_1\leq\varphi(t)\leq C_2\,, \;\; C_1,C_2<0\,;$$

$$x\neq 0\,, \;\; N|x|<\Psi(t,x)<M|x|\,; \;\; \Psi(t,0)=0\,,$$

sva su rješenja asimptotska, pri čemu pozitivna ne teže, a negativna teže nuli.

TEOREMA 4. Za

$$n=2k \;\; (k=1,2,\cdots)\,; \quad C_1\leq\varphi(t)\leq C_2\,, \;\; C_1,C_2<0\,;$$

$$x \neq 0,\ N|x| < \Psi(t,x) < M|x|\ ;\quad \Psi(t,0) = 0\ ,$$

sva su pozitivna rješenja asimptotska i ne teže nuli i postoji jedna klasa negativnih asimptotskih rješenja koja teže nuli.

TEOREMA 5. Za

$$n = 2k\ \ (k = 1,2,\dots)\ ;\quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = -\infty\ ;\quad 0 < N < \Psi(t,x) < M\ ,$$

sva pozitivna rješenja i sva rješenja koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ asimptotski su ograničena i ta rješenja teže nuli kad $t\to+\infty$.

Navedene rezultate M. Bertolino je razmatrao i sa stanovišta metode retrakcije.

2. Neka je data jednačina

$$\text{/4/}\qquad \frac{dx}{dt} = \Psi(t,x) + r(t,x)$$

/neka je jedinost rješenja zastupljena u cijeloj ravni tOx/ i neka su ispunjeni uslovi

$$-Nx < \Psi(t,x)\ \text{za}\ x<0\ ;\quad \Psi(t,0)=0\ ;$$

$$\text{/5/}\qquad |r(t,x)| < (N-\eta)|x|\ \text{za}\ x\neq 0\quad (0<\eta<N)\ ;$$

$$|x| \leq \delta > 0\ ;\quad r(t,0) = 0.$$

TEOREMA 6. Pod uslovima /5/ jednačina /4/ ima jednu klasu negativnih asimptotskih rješenja koja teže nuli kad $t\to+\infty$.

3. U cilju davanja primjera za primjenu metode retrakcije, bez uvodjenja komparativnih jednačina, M. Bertolino izlaže nekoliko stavova koji se odnose direktno na egzistenciju asimptotski ograničenih rješenja, a ponegdje i na njihovo teženje nuli.

TEOREMA 7. Neka je data jednačina

$$\text{/6/}\qquad \frac{dx}{dt} = a(t)\,x + d(t,x) + f(t)\ ,$$

gdje su sve date funkcije neprekidne u cijeloj ravni tOx i

$$|f(t)| < M\ ,\quad d(t,0) = 0\ ,$$

$$|d(t,x) - d(t,\bar{x})| \leq \rho(t)\,|x-\bar{x}|\ ,\quad \lim_{t\to+\infty} \rho(t) = 0\ ,$$

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = \bar{a} < 0\ .$$

Tada su sva rješenja jednačine /6/ asimptotski ograničena.

TEOREMA 8. Pri svim istim uslovima iz teoreme 7, samo za $\bar{a} > 0$, jednačina /6/ ima bar jedno asimptotski ograničeno rješenje.

TEOREMA 9. Neka su svi uslovi teoreme 7 ispunjeni uz sljedeće izmjene: $\bar{a} = 0$, $a(t)$ ne mjenja znak za $t \geq t^* \geq t_0 \geq 0$ i neka je još ispunjen i uslov

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\rho(t)}{|a(t)|} = \lim_{t\to+\infty} \frac{|f(t)|}{|a(t)|} = 0.$$

Tada, ako je $a(t) < 0$ za $t \geq t^*$, sva su rješenja jednačine /6/ asimptotski ograničena, a ako je $a(t) > 0$ za $t \geq t^*$, postoji bar jedno ograničeno rješenje.

TEOREMA lo. Neka je data jednačina

/7/ $$\frac{dx}{dt} = a(t)x + \alpha(t,x)$$

/jedinost ispunjena u cijeloj ravni tOx/, gdje je

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = \bar{a} < 0, \quad |\alpha(t,x)| \leq \gamma(t)|x|, \quad \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = 0.$$

Tada su sva rješenja jednačine /7/ asimptotski ograničena. Posebno, ako je

$$\bar{a} = 0, \quad \int_0^{+\infty} a(t)dt = -\infty, \quad \int_0^{+\infty} \gamma(t)dt < +\infty,$$

sva rješenja teže nuli /što pokazuje preko komparativne jednačine $x' = (a(t) + \gamma(t))x$ /.

TEOREMA ll. Teoreme 7, 8, 9 i lo, izuzev tvrdjenja o teženju nuli svih rješenja /teorema lo/, važe kada se umjesto x u izrazu $a(t)x$ stavi x^{2n+1} $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

4. Sljedeće tri teoreme se odnose na modifikaciju i uopštenja nekih stavova T. Pejovića.

T. Pejović je proučavao jednačinu

/8/ $$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t) + \varphi(t,x),$$

gdje su funkcije $a(t)$, $f(t)$ i $\varphi(t,x)$ neprekidne u oblasti $t \geq t_0 > 0$, $|x| < A$ i ispunjavaju uslove

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = r, \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = b, \quad \varphi(t,0) = 0,$$

/9/ $$|\varphi(t,X) - \varphi(t,x)| \leq L|X - x| \text{ za } t \geq t_0 > 0 \text{ i } |x| < A,$$

$$\frac{M|r|}{|r| - L} \leq A, \quad L < |r|,$$

gdje je M pozitivan broj takav da je $|x|<M$ za ograničeno rješenje jednačine

$$\frac{dx_0}{dt} = a(t)x_0 + f(t)\,.$$

TEOREMA 12. Pod uslovima /9/ jednačina /8/ ima, za $r>0$ jedno asimptotski ograničeno rješenje, za $r<0$ sva su rješenja asimptotski ograničena.

Ovu teoremu T. Pejovića M. Bertolino dokazuje na jednostavan način koristeći metodu retrakcije.

TEOREMA 13. Jednačina

/1o/
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}x + f(t) + \Psi(t,x)$$

ima, za $t \geq t_0 > 0$ i $|x|<B$, jedno asimptotski ograničeno rješenje, pod uslovima

$$\int_t^{+\infty} f(t)dt = O(1) \text{ kad } t\to+\infty\,, \quad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty$$

/funkcija $f(t)$ je integrabilna za $t \geq t_0 > 0$, $\varphi(t)$ pozitivna i monotona/,

$$\Psi(t,0)=0\,, \quad |\Psi(t,X)-\Psi(t,x)| \leq \lambda(t)|X-x|\,,$$

$$\int_t^{+\infty}\lambda(t)dt = O(1) \text{ kad } t\to+\infty\,, \quad \frac{M}{1-\varepsilon} < B\,,\ \varepsilon<1 \quad (|x_0|\leq M),$$

$\Psi(t,x)$ je definisana i neprekidna funkcija, $\lambda(t)$ pozitivna i integrabilna.

Posmatrajući jednačinu /1o/, sa stanovišta metode retrakcije, M. Bertolino je dao sljedeće dvije teoreme.

TEOREMA 14. Neka je data jednačina /1o/ /jedinost ispunjena u cijeloj ravni tOx/, gdje je $\varphi(t)$ pozitivna i monotona funkcija za $t\geq t_0>0$ i

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty\,,$$

$\Psi(t,x)$ definisana i neprekidna funkcija u ravni tOx i

$$\Psi(t,0) = 0\,,$$

gdje je $\lambda(t)$ neprekidna funkcija i

$$\lim_{t\to+\infty}\lambda(t) = 0\,.$$

Ako je

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = r > 0 \quad \text{i} \quad |f(t)| \leq M\,,$$

tada postoji bar jedno asimptotski ograničeno rješenje. Isti je slučaj ako je

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=+0\,,\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda(t)}{\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}}=0\,.$$

TEOREMA 15. Teoreme 12, 13 i 14 ostaju tačne kada se umjesto $a(t)x$ i $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}x$ u desnim stranama jednačina /8/ i /1o/ stavi respektivno

$$a(t)x^{2n+1}\,,\quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}x^{2n+1}\quad (n=0,1,2,\cdots)\,.$$

§2. NOVE MOGUĆNOSTI PRIMJENE METODE RETRAKCIJE U KVALITATIVNOJ ANALIZI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Metoda retrakcije T. Važevskog /vidjeti [23]/ je metoda direktne kvalitativne integracije diferencijalnih jednačina /kod koje je zastupljena pretpostavka o jedinosti rješenja/, a svodi se na formiranje odgovarajućih "cijevi" /pravolinijskih ili krivolinijskih/ i konstatovanjem da integralne krive ulaze u tu "cijev" ili izlaze iz nje, dobija se zaključak da "cijevi" pripada jedna klasa rješenja ili da postoji bar jedno rješenje koje pripada odgovarajućoj "cijevi".

Ovdje ćemo da, polazeći od rezultata M. Bertolina izloženim u §1, prikažemo nove mogućnosti primjene metode retrakcije u kvalitativnoj analizi diferencijalnih jednačina, proučavajući jednačine oblika

/1/ $$\frac{dx}{dt}=f(t,x)x^n+g(t,x)\quad (n=1,2,\cdots)\,.$$

Osnovni doprinos je uvodjenje novih vrsta krivolinijskih "cijevi" /krivolinijskih "cijevi" ulaznih integralnih krivih/, preko kojih se utvrdjuje, ne samo egzistencija asimptotski ograničenih rješenja, nego i teženje odredjene klase rješenja nekoj konstanti, dok su se slične "cijevi" do sada koristile za dokaz egzistencije bar jednog takvog rješenja /vidjeti [2] i [8]/. Ovom ishodu prethode, naravno, i nova ograničenja za funkcije $f(t,x)$ i $g(t,x)$ koje se daju u obliku dopunskih diferencijalnih nejednakosti Čapliginovog tipa. Na mnogim mjestima funkcije $f(t,x)$ i $g(t,x)$ se uokviravaju ne konstantama, nego funkcijama dovoljne opštosti. Kvalitativna slika skupa svih rješenja jednačine /1/ pokazuje se kao vrlo raznolika u tom smislu da jednačina ima rješenja veoma različitih svojstava. Takodje su raznovrsni i uslovi koji ovakvu različitost uslovljavaju.

I

Prvo posmatrajmo jednačinu /1/ za $n=1$, tj. posmatrajmo jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\cdot x + g(t,x) \tag{/1'/}$$

/jedinost rješenja zastupljena u cijeloj ravni tOx/.

S obzirom na različite pretpostavke o funkcijama $f(t,x)$ i $g(t,x)$, koje daju i kvalitativno različite rezultate, razlikovaćemo više slučajeva. Navešćemo samo neke bitno različite rezultate.

Sve pretpostavke o funkcijama $f(t,x)$ i $g(t,x)$ važiće za $t \geqslant t_0 > 0$ i $|x| < +\infty$.

TEOREMA 1. Jednačina /1'/, pod uslovima

$$\begin{aligned} &0 < m(t) < f(t,x), \\ &|g(t,x)| < n(t), \end{aligned} \tag{/2/}$$

gdje su $m(t)$ i $n(t)$ pozitivne i monotone funkcije za $t \geqslant t_0 > 0$ i takve da je

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{n(t)}{m(t)} = 0,$$

ima, za $t \geqslant t_0 > 0$, bar jedno rješenje asimptotski ograničeno i ono teži nuli kad $t \to +\infty$.

DOKAZ. Funkcija $f(t,x)$ odlučuje o znaku desne strane jednačine /1'/ za one vrijednosti x za koje je zadovoljena nejednakost

$$|f(t,x)x| > |g(t,x)|,$$

tj. za

$$|x| > \frac{|g(t,x)|}{|f(t,x)|}.$$

Kako je, prema /2/,

$$\frac{|g(t,x)|}{|f(t,x)|} < \frac{n(t)}{m(t)},$$

to funkcija $f(t,x)$ odlučuje o znaku desne strane jednačine /1'/ za

$$|x| \geqslant \frac{n(t)}{m(t)}.$$

Otuda, kako je $f(t,x) > 0$ $(t \geqslant t_0)$, u oblasti

$$x \geqslant \frac{n(t)}{m(t)} \quad (t \geqslant t_0)$$

integralne krive imaju pozitivan, a u oblasti

$$x \leqslant -\frac{n(t)}{m(t)} \quad (t \geqslant t_0)$$

negativan koeficijent smjera, te integralne krive jednačine /1'/ presjecaju krive

$$x = \pm \frac{n(t)}{m(t)} \quad (t \geq t_0)$$

izlazeći iz "cijevi" koju one čine.

Primjenimo sada metodu retrakcije T. Važevskog.

Neka je otvoren skup Ω ravan tOx, a otvoren skup ω oblast odredjena nejednakostima

$$t > t_0, \; -\frac{n(t)}{m(t)} < x < \frac{n(t)}{m(t)} \; .$$

Očevidno je $\omega \subset \Omega$.

Skup S tačaka striktnog izlaza su tačke krivih $x = \pm \frac{n(t)}{m(t)}$ $(t \geq t_0)$ /prema definiciji skupa tačaka striktnog izlaza/.

Za skup Z uzmimo segment $[P_1, P_2]$, gdje je P_1 tačka krive $x = \frac{n(t)}{m(t)}$ $(t \geq t_0)$, a P_2 tačka krive $x = -\frac{n(t)}{m(t)}$ $(t \geq t_0)$. Važi $Z \subset \omega \cup S$ [1].

Skup $Z \cap S$ čine tačke P_1 i P_2.

$Z \cap S$ je retrakt od S, jer je tačka P_1 retrakt krive $x = \frac{n(t)}{m(t)}$ $(t \geq t_0)$[2], a tačka P_2 retrakt krive $x = -\frac{n(t)}{m(t)}$ $(t \geq t_0)$. Skup $Z \cap S$ nije retrakt od Z, jer se segment $[P_1, P_2]$ ne može neprekidno preslikati na svoje krajeve.

Dakle, prema metodi retrakcije, postoji tačka P_0, takva da je

$$P_0 \in Z - S = (P_1, P_2)$$

i da

$$\mathrm{Demi}(+)\, J(P_0) \subset \omega \, ,$$

tj. integral koji prolazi kroz tačku P_0 ostaje uvijek u unutrašnjosti od ω kad $t \to +\infty$, odnosno, integral koji prolazi kroz tačku P_0 je asimptotski ograničen i teži nuli.

Na isti način za skup Z mogli smo uzeti neki drugi segment pri čemu bi takodje pokazali da postoji tačka P_0' na intervalu (P_1', P_2'), takva da je

$$\mathrm{Demi}(+)\, J(P_0') \subset \omega \, ,$$

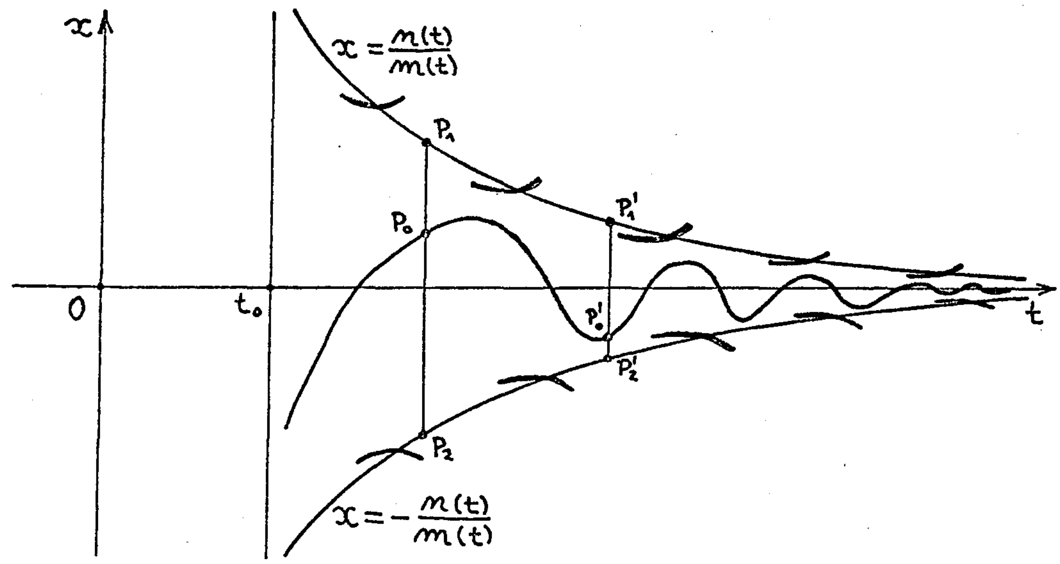
tj. i integral koji prolazi kroz tačku P_0' ostaje u ω za sve $t \geq t_0$. No, može se desiti da se dobijeni integrali poklapaju, tj. da jedna ista integralna kriva prolazi kroz tačke P_0 i P_0'. Zato i zaključujemo da postoji bar jedna integralna kriva jednačine /1'/ koja je asimptotski ograničena i koja teži nuli kad $t \to +\infty$. Ponašanje integralnih krivih ilustru-

---

[1] Skupovi ω, Ω, S i Z uzeti su prema radu [2].

[2] Svaka tačka je retrakt svakog skupa koji je sadrži, u kome je moguće neprekidno preslikavanje.

je slika 1.



Sl. 1

Primjetimo da teorema 1 važi i ako umjesto uslova /2/ funkcije $f(t,x)$ i $g(t,x)$ ispunjavaju uslove

$$0<M<f(t,x),\quad -n(t)<g(t,x)\quad \text{za } x>0,$$
$$g(t,0)<0,$$

gdje je M pozitivna konstanta, funkcija $n(t)$ pozitivna, monotona i

/3/ $$\lim_{t\to+\infty} n(t)=0.$$

Tada jednačina /1'/ ima bar jedno pozitivno rješenje asimptotski ograničeno i ono teži nuli kad $t\to+\infty$.

TEOREMA 2. Pod uslovima

/4/ $$\left.\begin{array}{l}|f(t,x)|>M|x|,\quad f(t,x)x>0,\\ -n(t)|x|<g(t,x)<0,\end{array}\right\}\ x\neq 0$$
$$g(t,0)<0,$$

gdje je funkcija $n(t)$ pozitivna, monotona i ispunjava uslov /3/, jednačina /1'/ ima, za $t\geqslant t_0>0$, sva negativna, ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ asimptotski ograničena rješenja i bar jedno pozitivno rješenje koje teži nuli kad $t\to+\infty$.

DOKAZ. Nejednakost $|f(t,x)x|>|g(t,x)|$ je ispunjena za $|x|>\frac{|g(t,x)|}{|f(t,x)|}$.

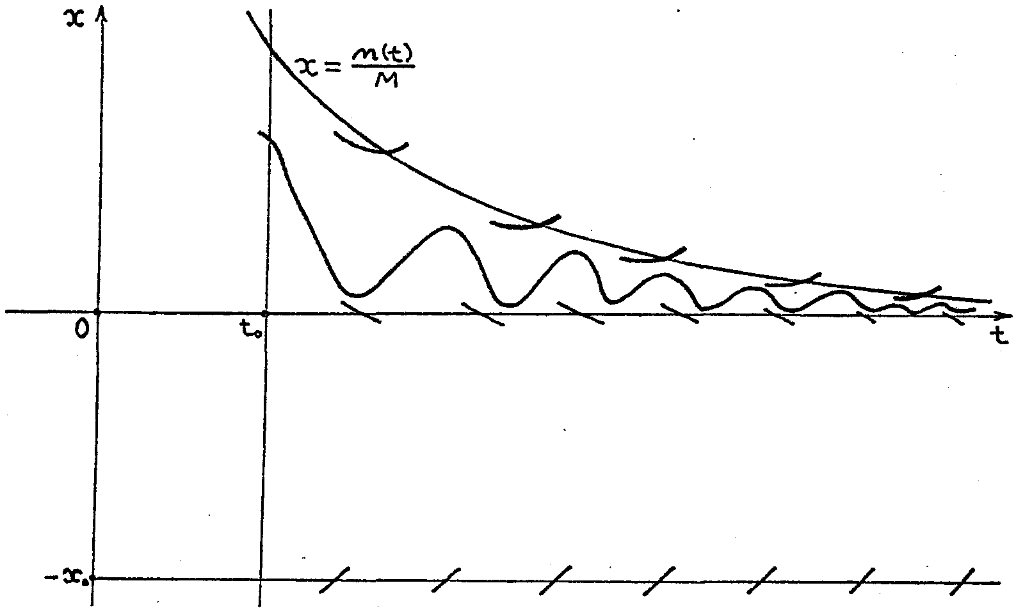
Kako je, prema /4/, $\frac{|g(t,x)|}{|f(t,x)|}<\frac{n(t)}{M}$, to je gornja nejednakost ispunjena za $|x|\geqslant\frac{n(t)}{M}$.

Otuda, u oblasti $|x|\geqslant\frac{n(t)}{M}$ $(t\geqslant t_0)$ integralne krive imaju pozitivan koeficijent smjera. Kako je još $g(t,0)<0$, to sve integralne krive koje prolaze kroz tačke krive $x=\frac{m(t)}{M}$ $(t\geq t_0)$ i polupravе $x=0$ $(t\geq t_0)$ presjecaju te linije izlazeći iz "cijevi" koja je odredjena tim linijama, te, prema metodi retrakcije, postoji bar jedna integralna kriva koja ostaje u toj "cijevi", te i teži nuli kad $t\to+\infty$ /sl. 2/.

S druge strane, za dovoljno veliko $t\geq t_0>t_1>0$, postoji pozitivan broj x_0, takav da je $\frac{m(t)}{M}<x_0$ i da za $x\leq -x_0$ $(t\geq t_0)$ integralne krive imaju pozitivan koeficijent smjera, što i pokazuje da su sve negativne integralne krive asimptotski ograničene, kao i sve one koje prolaze kroz tačke ose $x=0$ $(t\geq t_0)$.

Dakle, u slučaju rješenja oblasti $x\leq 0$ $(t\geq t_0)$ imamo da integralne krive prolaze kroz tačke polupravih $x=-x_0$ i $x=0$ $(t\geq t_0)$ ulazeći u "cijev" koju čine te poluprave, te sve to integralne krive, kao i one koje prolaze kroz unutrašnje tačke "cijevi" ostaju u "cijevi" kad $t\to+\infty$. Ovaj zaključak možemo izvesti i na jeziku metode retrakcije.

Zaista, neka je ω "cijev" odredjena polupravama $x=-x_0$ i $x=0$ $(t\geq t_0)$. Kao skup Z uzmimo proizvoljnu tačku iz unutrašnjosti ω. Skup S tačaka striktnog izlaza je prazan skup. $Z\cap S$ je prazan skup i $Z\cap S$ je retrakt od S, a nije retrakt od Z /jer se jednočlani skup ne može transformisati neprekidno u prazan skup/. Kako je Z proizvoljna tačka iz ω to sve integralne krive koje prolaze kroz tačke iz ω ostaju u ω kad $t\to+\infty$.



Sl. 2

Ako u teoremama 1 i 2 pretpostavke koje govore o ograničenju funkcije $g(t,x)$ odbacimo, samo u teoremi 2 zadržimo znak te funkcije, tvrdjenja ostaju tačna samo ako je

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-g(t,x)}{f(t,x)} = 0 \quad \text{za svako } |x| < +\infty .$$

TEOREMA 3. Pod uslovima

$$-m(t) < f(t,x) < -M < 0,$$

/5/
$$n(t) < |g(t,x)| < N,$$

$$g(t,x)\cdot x > 0, \quad x \neq 0,$$

gdje su funkcije $m(t)$ i $n(t)$ pozitivne, monotone, funkcija $n(t)$ ispunjava uslov /3/, a

/6/
$$\lim_{t\to+\infty} m(t) = +\infty \text{ [1]},$$

jednačina /1′/ ima, za $t \geq t_0 > 0$, sva rješenja asimptotski ograničena, a bar jedno od njih teži nuli kad $t \to +\infty$.

DOKAZ. Kako je, prema /5/, $\frac{|g(t,x)|}{|f(t,x)|} < \frac{N}{M} = x_0$, to funkcija $f(t,x)$ odlučuje o znaku desne strane jednačine /1′/ za $|x| \geq x_0$.

Prema tome, u oblasti $x \geq x_0$ $(t \geq t_0)$ sve integralne krive jednačine /1′/ imaju negativan, a u oblasti $x \leq -x_0$ $(t \geq t_0)$ pozitivan koeficijent smjera, te sve one ulaze u "cijev" koja je odredjena polupravama $x = \pm x_0$ $(t \geq t_0)$, pa su i asimptotski ograničene.

S druge strane, prema /5/, imamo $\frac{|g(t,x)|}{|f(t,x)|} > \frac{n(t)}{m(t)}$, te funkcija $g(t,x)$ odredjuje znak koeficijenta smjera integralnih krivih u oblasti $|x| \leq \frac{n(t)}{m(t)}$ $(t \geq t_0)$.

Kako funkcija $g(t,x)$ ispunjava uslov $g(t,x)\cdot x > 0$ $(x \neq 0)$, to integralne krive u tačkama krive $x = \frac{n(t)}{m(t)}$ $(t \geq t_0)$ imaju pozitivan, a u tačkama krive $x = -\frac{n(t)}{m(t)}$ $(t \geq t_0)$ negativan koeficijent smjera.

Prema datim pretpostavkama o funkcijama $m(t)$ i $n(t)$ funkcija $\frac{n(t)}{m(t)}$ je pozitivna, monotona i $\lim_{t\to+\infty} \frac{n(t)}{m(t)} = 0$, te sve integralne krive, koje prolaze kroz tačke krivih $x = \pm \frac{n(t)}{m(t)}$ $(t \geq t_0)$, izlaze iz "cijevi" koja je odredjena tim krivama, pa, prema metodi retrakcije, postoji bar jedna koja ostaje u "cijevi" i teži nuli. Slika 3 ilustruje ponašanje integralnih krivih.

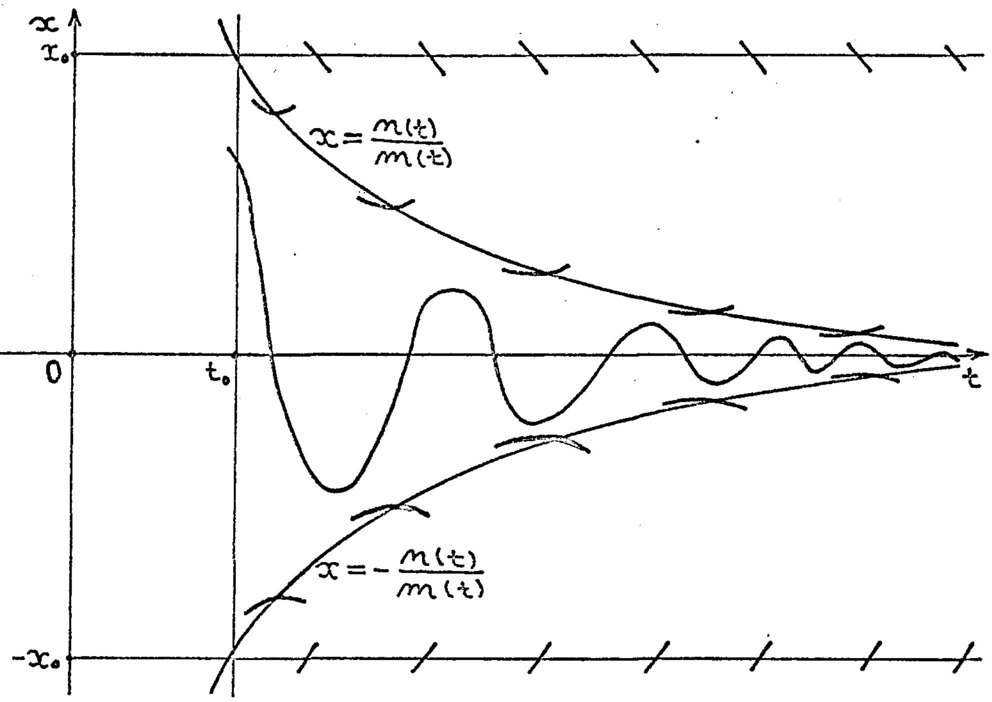
Ako funkcije $f(t,x)$ i $g(t,x)$ umjesto uslova /5/ ispunjavaju uslove

$$-m(t) < f(t,x) < -M < 0, \quad -N < g(t,x) < -n(t) < 0 \quad \text{za } x < 0;$$

$$g(t,0) > 0,$$

tada jednačina /1′/ ima jednu klasu negativnih integralnih krivih asimptotski ograničenih i bar jedna od njih teži nuli.

[1] Uslove /3/ i /6/ možemo zamjeniti uslovom $\lim_{t\to+\infty} \frac{n(t)}{m(t)} = 0$.



Sl. 3

Sada ćemo zadržati pažnju na slučaju kada su sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži nuli kad $t\to+\infty$. Za ovu svrhu potrebne su nam i jače pretpostavke.

TEOREMA 4. Jednačina /1'/, za $t\geq t_0>0$ ima, pod uslovima

$$f(t,x)<-M<0,$$

/7/
$$|g(t,x)|<m(t),$$

gdje je funkcija $m(t)$ pozitivna, monotona, ispunjava uslov /3/ i takva da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ koja je pozitivna, monotona i

/8/
$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim_{t\to+\infty}\varepsilon'(t)=0 \text{ [1]}$$

i da funkcija $m(t)$ ispunjava uslov

/9/
$$M\cdot\varepsilon(t)>-\frac{m'(t)}{M}-\varepsilon'(t) \text{ [2]},$$

sva rješenja asimptotski ograničena i jednu klasu rješenja koja teži nuli kad $t\to+\infty$.

---

[1] Podrazumjevaćemo i dalje da funkcija $\varepsilon(t)$ ispunjava te iste uslove.

[2] Na primjer, neka je: $f(t,x)<-1<0$ i $g(t,x)=\frac{t\sin x}{t^3+x^2}$. Za funkcije $m(t)$ i $\varepsilon(t)$ uzmimo $m(t)=\varepsilon(t)=\frac{1}{t}$, koje očevidno ispunjavaju uslove /3/ i /8/. Drugi uslov /7/ takodje je ispunjen jer važi $\frac{t\sin x}{t^3+x^2}<\frac{1}{t}$ za $t>1$ i za svako $|x|<+\infty$. Uslov /9/ u ovom primjeru glasi $\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}>\frac{1}{t^2}$ i ispunjen je za $t>2$. Prema tome uslovi teoreme 4 imaju mjesta.

DOKAZ. Nejednakost $|f(t,x)\cdot x| > |g(t,x)|$ je zadovoljena za $|x| > \frac{|g(t,x)|}{|f(t,x)|}$ odnosno, prema /7/, za $|x| \geqslant \frac{m(t)}{M}$.

To znači da znak desne strane jednačine /1'/ odredjuje funkcija $f(t,x)$ u oblasti $|x| \geqslant \frac{m(t)}{M}$ $(t \geqslant t_o)$. Otuda, u oblasti $x \geqslant \frac{m(t)}{M}$ $(t \geqslant t_o)$ integralne krive imaju negativan, a u oblasti $x \leqslant -\frac{m(t)}{M}$ $(t \geqslant t_o)$ pozitivan koeficijent smjera, što i znači da su sve integralne krive asimptotski ograničene. /Sve one ulaze u "cijev" koja je odredjena polupravama $x = \pm x_o$ $(t \geqslant t_o)$, gdje je x_o pozitivan broj takav da je $\frac{m(t)}{M} < x_o$ $(t \geqslant t_o)$./

Uzmimo sada krivu

$$u(t) = \frac{m(t)}{M} + \varepsilon(t) \tag{/1o/}$$

i dokažimo da integralne krive presjecaju krive $x = \pm u(t)$ $(t \geqslant t_o)$ ulazeći u "cijev" odredjenu tim krivama.

U tačkama krive $u(t)$ $(t \geqslant t_o)$ integralne krive, zaista, imaju negativan, a u tačkama krive $-u(t)$ $(t \geqslant t_o)$ pozitivan koeficijent smjera. Dokažimo još da su ispunjene nejednakosti

$$\begin{aligned} &f(t,-u(t))\cdot(-u(t)) + g(t,-u(t)) > -u'(t), \\ &f(t,u(t))\cdot u(t) + g(t,u(t)) < u'(t). \end{aligned} \tag{/11/}$$

Prema /7/, /9/ i /1o/ imamo

$$f(t,-u(t))\cdot(-u(t)) + g(t,-u(t)) > Mu(t) - m(t) = M\varepsilon(t) > -\frac{m'(t)}{M} - \varepsilon'(t) = -u'(t),$$

$$f(t,u(t))\cdot u(t) + g(t,u(t)) < -Mu(t) + m(t) = -M\varepsilon(t) < \frac{m'(t)}{M} + \varepsilon'(t) = u'(t).$$

Diferencijalne nejednakosti /9/ i /11/ su nejednakosti Čapliginovog tipa i obezbjedjuju da integralne krive jednačine /1'/ presjecaju krive $\pm u(t)$ $(t \geqslant t_o)$ ulazeći u "cijev" koju one čine /sl. 4, gdje smo uzeli da je $x_o > u(t)$ $(t \geqslant t_o)$/.

Dakle, integralne krive jednačine /1'/ koje prolaze kroz tačke oblasti

$$|x| \leqslant u(t), \quad t \geqslant t_o$$

čine klasu rješenja koja teži nuli kad $t \to +\infty$, jer i krive $\pm u(t)$ teže nuli.

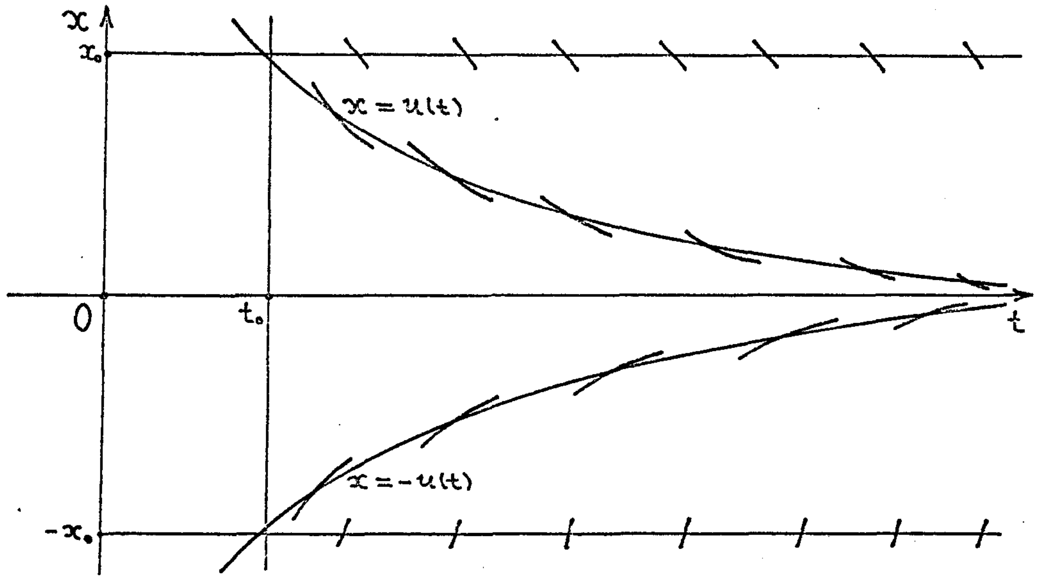
Primjetimo sada da je moguć i sljedeći slučaj.

Ako je

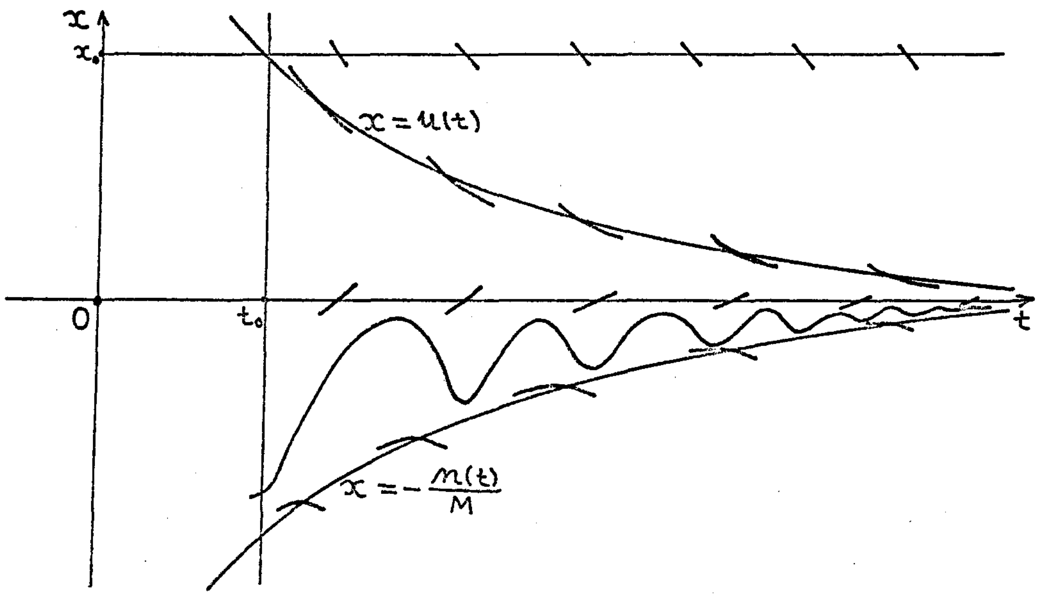
$$\begin{gathered} |f(t,x)| > M, \quad 0 < g(t,x) < m(t), \\ f(t,x)\cdot x < 0, \quad x \neq 0, \end{gathered} \tag{/12/}$$

gdje funkcija $m(t)$ ispunjava iste uslove kao i u teoremi 4, tada jednačina /1'/, za $t \geqslant t_o > 0$, ima sva pozitivna rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa tih rješenja, kao i ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ i bar jedno negativno rješenje teže nuli. Ponašanje integralnih krivih ilustruje slika 5.

Zaista, za $x>0$, pretpostavke /12/ su sadržane u pretpostavkama /7/, a kako je $g(t,0)>0$, to i imamo asimptotsku ograničenost svih pozitivnih rješenja i teženje nuli onih rješenja koja prolaze kroz tačke oblasti $0 \leq x \leq u(t)$ $(t \geq t_0)$. Za $x<0$ integralne krive će imati negativan koeficijent smjera za $x \leq -\frac{m(t)}{M}$, te imamo i bar jedno negativno rješenje koje teži nuli.



Sl. 4



Sl. 5

Sada ćemo navesti slučaj kada jednačina /1'/ ima bar jedno rješenje asimptotski ograničeno, a koje teži nekom broju b različitom od nule.

TEOREMA 5. Jednačina /1'/ ima, za $t \geq t_0 > 0$, pod uslovima

/13/
$$f(t,x) > 0, \quad g(t,x) < 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-g(t,x)}{f(t,x)} = b \quad \text{za svako } |x| < +\infty,$$

gdje je b neki pozitivan broj, bar jedno pozitivno rješenje asimptotski ograničeno i ono teži b kad $t \to +\infty$.

DOKAZ. Prema trećem uslovu /13/, za dovoljno veliko $t \geq t_0 > t_1 > 0$, postoje pozitivne i monotone funkcije $v_1(t)$ i $v_2(t)$ / $v_1(t)$ - rastuća, $v_2(t)$ - opadajuća/, takve da je

/14/
$$v_1(t) < -\frac{g(t,x)}{f(t,x)} < v_2(t) \text{ [1]}$$

i da je
$$\lim_{t\to+\infty} v_1(t) = \lim_{t\to+\infty} v_2(t) = b.$$

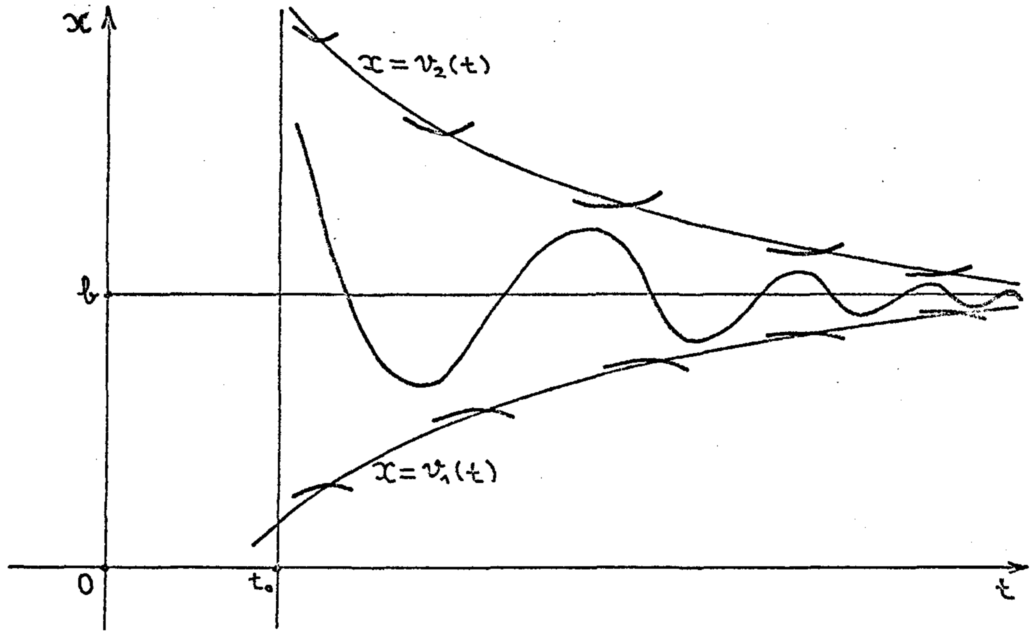
Otuda, integralne krive jednačine /1'/ imaće negativan koeficijent smjera za $x \leq v_1(t)$ $(t \geq t_0)$, a pozitivan za $x \geq v_2(t)$ $(t \geq t_0)$. Integralne krive se ponašaju kao na sl. 6, što i obezbjedjuje bar jedno asimptotski ograničeno rješenje koje teži b kad $t \to +\infty$.

Koristeći teoremu 5 možemo prihvatiti i sljedeće tvrdjenje.
Ako je
$$0 < M < f(t,x), \quad 0 < g(t,x) < m(t),$$
$$-\frac{g(t,x)}{f(t,x)} < -\frac{a}{M} < 0,$$

gdje su a i M pozitivni brojevi, funkcija $m(t)$ pozitivna, monotono opadajuća i $\lim_{t\to+\infty} m(t) = a$, bar jedno negativno rješenje je asimptotski ograničeno i ono teži $-\frac{a}{M}$.

---

[1] Neka je $x = x_i$ $(i = 1,2,\dots)$ /x_i - ma koji konačan broj/. Prema /13/ važi
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-g(t,x_i)}{f(t,x_i)} = b \quad (i = 1,2,\dots),$$
te za svako i $(i = 1,2,\dots)$, a za dovoljno veliko $t \geq t_0 > t_1 > 0$, postoje pozitivne funkcije $v_{1i}(t)$ i $v_{2i}(t)$ $(i=1,2,\dots)$ koje teže b kad $t \to +\infty$, gdje je $v_{1i}(t)$ $(i=1,2,\dots)$ monotono rastuća, a $v_{2i}(t)$ $(i=1,2,\dots)$ monotono opadajuća funkcija i takve da je
$$v_{1i}(t) < -\frac{g(t,x_i)}{f(t,x_i)} < v_{2i}(t) \quad (i=1,2,\dots)$$
i da za funkcije $v_1(t)$ i $v_2(t)$ možemo uzeti da je
$$v_1(t) = \inf_{i\in N}\{v_{1i}(t)\}, \quad v_2(t) = \sup_{i\in N}\{v_{2i}(t)\}.$$



Sl. 6

Posvetimo sada pažnju slučajevima koji obezbjedjuju da sva rješenja jednačine /1'/ budu asimptotski ograničena i da jedna klasa tih rješenja teži nekom broju različitom od nule.

TEOREMA 6. Jednačina /1'/, pod uslovima

$$-m_1(t) < f(t,x) < -m_2(t) < 0\,,$$

$$0 < n_1(t) < g(t,x) < n_2(t)\,,$$

gdje su funkcije $m_1(t)$, $m_2(t)$, $n_1(t)$ i $n_2(t)$ pozitivne, monotone i

/16/
$$\lim_{t\to+\infty} m_1(t) = \lim_{t\to+\infty} m_2(t) = a\,,$$
$$\lim_{t\to+\infty} n_1(t) = \lim_{t\to+\infty} n_2(t) = b$$

/ a i b pozitivni brojevi/, takve da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da funkcije $m_1(t)$, $m_2(t)$, $n_1(t)$ i $n_2(t)$ ispunjavaju uslove

/17/
$$m_1(t)\cdot\varepsilon(t) + \varepsilon'(t) > \left(\frac{n_1(t)}{m_1(t)}\right)'\,,$$
$$-m_2(t)\cdot\varepsilon(t) - \varepsilon'(t) < \left(\frac{n_2(t)}{m_2(t)}\right)'\,,$$

ima sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja teži broju $\frac{b}{a}$ kad $t\to+\infty$.

DOKAZ. Primjetimo da, prema pretpostavkama /15/, integralne krive imaju pozitivan koeficijent smjera za $x \leq \frac{n_1(t)}{m_1(t)}$ $(t \geq t_0)$.

Neka je

$$u_1(t) = \frac{n_1(t)}{m_1(t)} - \varepsilon(t)\,.$$

Dokažimo da integralne krive presjecaju krivu $x=u_1(t)$ $(t\geq t_0)$ pod koeficijentom smjera koji je veći od koeficijenta smjera te krive.

Zaista, prema /15/ i prvim uslovom /17/, imamo

$$f(t,u_1(t))\cdot u_1(t)+g(t,u_1(t)) > -m_1(t)\cdot u_1(t)+n_1(t)=$$
$$=m_1(t)\cdot \varepsilon(t) > \left(\frac{n_1(t)}{m_1(t)}\right)' - \varepsilon'(t) = u_1'(t).$$

S druge strane, prema /15/, integralne krive imaju negativan koeficijent smjera za $x \geq \frac{n_2(t)}{m_2(t)}$ $(t\geq t_0)$.

Neka je

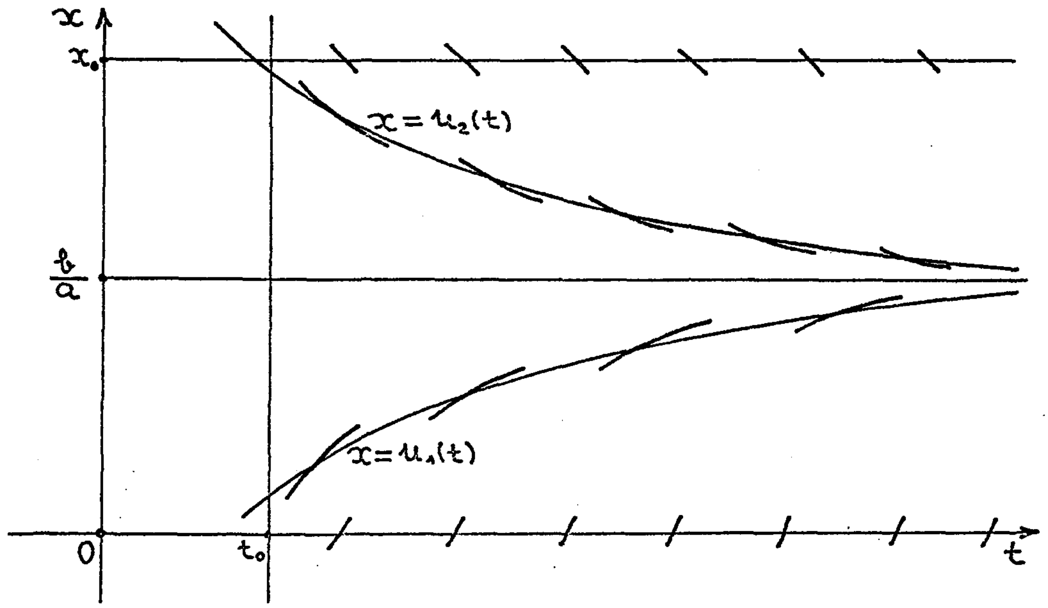
$$u_2(t)=\frac{n_2(t)}{m_2(t)}+\varepsilon(t).$$

Prema /15/ i drugom uslovu /17/, važi

$$f(t,u_2(t))\cdot u_2(t)+g(t,u_2(t)) < -m_2(t)\cdot u_2(t)+n_2(t)=$$
$$=-m_2(t)\cdot\varepsilon(t) < \left(\frac{n_2(t)}{m_2(t)}\right)' + \varepsilon'(t) = u_2'(t),$$

što pokazuje da integralne krive presjecaju krivu $x=u_2(t)$ $(t\geq t_0)$ pod koeficijentom smjera koji je manji od koeficijenta smjera te krive.

Integralne krive se ponašaju kao na sl. 7 [1], gdje je broj $x_0 > u_2(t)$ $(t\geq t_0)$.



Sl. 7

[1] Funkcije $\frac{n_1(t)}{m_1(t)}$ i $\frac{n_2(t)}{m_2(t)}$ mogu biti obe monotono opadajuće ili obe monotono rastuće ili jedna monotono opadajuća, a druga monotono rastuća. Bitno je da važi relacija: $\frac{n_1(t)}{m_1(t)} < -\frac{g(t,x)}{f(t,x)} < \frac{n_2(t)}{m_2(t)}$. Uzeti da je $\frac{n_1(t)}{m_1(t)}$ monotono rastuća, a $\frac{n_2(t)}{m_2(t)}$ monotono opadajuća daje najširu mogućnost za funkcije $f(t,x)$ i $g(t,x)$.

Slijedi zaključak, sve integralne krive jednačine /1'/ ulaze u "cijev" koja je odredjena polupravama $x=0$ i $x=x_0$ $(t\geq t_0)$, te su i sve asimptotski ograničene. Takodje, sve integralne krive koje presjecaju krive $u_1(t)$ i $u_2(t)$ $(t\geq t_0)$ ulaze u "cijev" odredjenu tim krivama. Prema tome, sve integralne krive koje prolaze kroz tačke oblasti

$$u_1(t)\leq x\leq u_2(t)\,,\quad t\geq t_0$$

ostaju u "cijevi" koja je odredjena krivama $u_1(t)$ i $u_2(t)$ $(t\geq t_0)$, te i teže broju $\frac{b}{a}$, jer krive $u_1(t)$ i $u_2(t)$ teže $\frac{b}{a}$.

Na osnovu teoreme 6 i napred proučenih rezultata možemo dati i sljedeće rezultate.

1^0 Pod uslovima

$$f(t,x)<-M<0\,,\quad 0<g(t,x)<n(t)\,,$$
$$-\frac{g(t,x)}{f(t,x)}>\frac{a}{M}>0\,,$$

gdje su a i M pozitivni brojevi, funkcija $n(t)$ pozitivna, monotono opadajuća, ispunjava uslov

$$\lim_{t\to+\infty} n(t)=a\,,$$

takva da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$-M^2\cdot\varepsilon(t)-M\cdot\varepsilon'(t)<n'(t),$$

jednačina /1'/, za $t\geq t_0>0$, ima sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži $\frac{a}{M}$ kad $t\to+\infty$.

2^0 Ako je

$$-m(t)<f(t,x)<0\,,\quad g(t,x)<-n(t)<0\,,$$
$$-C<-\frac{g(t,x)}{f(t,x)}<0\,,$$

gdje je C pozitivan broj, funkcije $m(t)$ i $n(t)$ pozitivne, monotone, a funkcija $\frac{n(t)}{m(t)}$ monotono rastuća i

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{n(t)}{m(t)}=C$$

i takve da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$m(t)\cdot\varepsilon(t)+\varepsilon'(t)>\left(\frac{n(t)}{m(t)}\right)',$$

tada jednačina /1'/ ima, za $t\geq t_0>0$, sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži $-C$ kad $t\to+\infty$.

PRIMJER 1. Jednačina

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sin tx-t}{t}\cdot x+\frac{2t+\cos x}{t+1}$$

ima, za $t\geq 11$, sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži broju 2 kad $t\to+\infty$.

Uslovi o jedinosti rješenja su ispunjeni. Ovdje možemo uzeti da je

$$m_1(t)=\frac{t+2}{t},\quad m_2(t)=\frac{t-2}{t},\quad n_1(t)=\frac{2t-1}{t},$$

$$n_2(t)=\frac{2t+1}{t},\quad \varepsilon(t)=\frac{1}{t},$$

pa je

$$u_1(t)=2-\frac{5}{t+2}-\frac{1}{t},\quad u_2(t)=2+\frac{5}{t-2}+\frac{1}{t}.$$

svi uslovi teoreme 6 su zadovoljeni za $t\geq 11$ /ovdje je $a=1$, $b=2$/, te je i navedeno tvrdjenje tačno.

Na osnovu proučenih rezultata možemo dati sljedeće važno uopštenje.

TEOREMA 7. Ako umjesto jednačine /1'/ imamo jednačinu

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\cdot x^{2n+1}+g(t,x)\quad (n=0,1,2,\cdots),$$

teoreme 1, 2, 3 i 5 važe i u ovom slučaju u potpunosti /samo kod teoreme 5 asimptotski ograničeno rješenje će da teži $\sqrt[2n+1]{b}$ umjesto b/, a teorema 4 važi samo ako funkcija $n(t)$ umjesto uslova /9/ ispunjava uslov

/9'/ $$-M\cdot\varepsilon(t)<\left(\sqrt[2n+1]{\frac{n(t)}{M}}+\varepsilon(t)\right)'$$

i teorema 6 važi samo ako funkcije $m_1(t)$, $m_2(t)$, $n_1(t)$ i $n_2(t)$ umjesto uslova /17/ ispunjavaju uslove

$$m_1(t)\cdot\varepsilon(t)>\left(\sqrt[2n+1]{\frac{n_1(t)}{m_1(t)}}-\varepsilon(t)\right)',$$

$$-m_2(t)\cdot\varepsilon(t)<\left(\sqrt[2n+1]{\frac{n_2(t)}{m_2(t)}}+\varepsilon(t)\right)'.$$

PRIMJER 2. Jednačina

$$\frac{dx}{dt}=\frac{e^{-x^2}-2t}{t}\cdot x^3+\frac{\sin t}{t^2+x^2}$$

za $t\geq 2$, ispunjava sve potrebne uslove, te, za $t\geq 2$, ima sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži nuli.

Zaista, dovoljno je primjetiti da je u pitanju primjena teorema 4 i 7, te da, za $t>1$ i $|x|<+\infty$, važi

$$\frac{e^{-x^2}-2t}{t}<-1=-M, \quad \left|\frac{\sin t}{t^2+x^2}\right|<\frac{1}{t}=n(t),$$

što odgovara uslovima /7/, a za $\varepsilon(t)=\frac{1}{t}$ ispunjen je i uslov /9'/, jer važi

$$-\frac{1}{t}<\left(\sqrt[3]{\frac{2}{t}}\right)' \quad \text{za } t\geq 1.$$

Ponašanje integralnih krivih ilustruje sl. 4, gdje treba da stoji $x_0=2$ i $u(t)=\sqrt[3]{\frac{2}{t}}$.

II

Posmatrajmo sada jednačinu /1/ za slučaj $n=2$, tj. jednačinu

/1"/ $$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\cdot x^2+g(t,x)$$

/jedinost rješenja je ispunjena u cijeloj ravni tOx/.

Ovdje ćemo tabelarno prikazati samo neke rezultate koji proizilaze iz toga što umjesto x imamo x^2. Dokazi tih rezultata u principu su sadržani u dokazima rezultata iz I.

Jednačina /1"/, za $t\geq t_0>0$ i $|x|<+\infty$, ima, pod uslovima

1^0 $$0<M<f(t,x), \quad |g(t,x)|<N, \quad g(t,0)<0$$

/M i N su pozitivne konstante/, sva negativna rješenja, ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ i bar jedno pozitivno rješenje asimptotski ograničeno.

2^0 $$|f(t,x)|>M, \quad |g(t,x)|<N,$$
$$f(t,x)\cdot x<0, \; x\neq 0,$$

sva rješenja asimptotski ograničena.

3^0 $$0<M<f(t,x)<m(t), \quad -N<g(t,x)<-n(t)<0 \text{ za } x<0,$$
$$g(t,0)>0,$$

gdje funkcije $m(t)$ i $n(t)$ ispunjavaju iste uslove kao u teoremi 3, jednu klasu negativnih rješenja asimptotski ograničenih, a bar jedno od njih teži nuli.

4° Za $x \neq 0$

$$|f(t,x)| > M\cdot|x|\,,\quad f(t,x)\cdot x > 0\,,$$
$$|g(t,x)| < n(t)\cdot|x|\,,$$

gdje je funkcija $n(t)$ pozitivna, monotona i teži nuli kad $t \to +\infty$, bar jedno rješenje asimptotski ograničeno i ono teži nuli.

5°
$$0 < M\cdot|x| < f(t,x)\,,\quad -n(t)\cdot|x| < g(t,x) < 0\,,\quad x \neq 0\,;$$
$$g(t,0) < 0$$

/funkcija $n(t)$ ista kao u slučaju 4°/, sva negativna rješenja, ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ asimptotski ograničena i bar jedno pozitivno rješenje koje teži nuli.

6°
$$M < |f(t,x)| < m(t)\,,\quad n(t) < |g(t,x)| < N\,;$$
$$f(t,x)\cdot x < 0\,,\quad g(t,x)\cdot x > 0\,,\quad x \neq 0$$

/funkcije $m(t)$ i $n(t)$ su iste kao u slučaju 3°/, sva rješenja asimptotski ograničena, a bar jedno od njih teži nuli.

7°
$$|f(t,x)| > M\,,\quad |g(t,x)| < n(t)\,;$$
$$f(t,x)\cdot x < 0\,,\quad x \neq 0\,,$$

gdje je funkcija $n(t)$ pozitivna, monotona, teži nuli kad $t \to +\infty$, takva da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$M\cdot\varepsilon(t) > -\left(\sqrt{\frac{n(t)}{M}} + \varepsilon(t)\right)'\,,$$

sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži nuli.

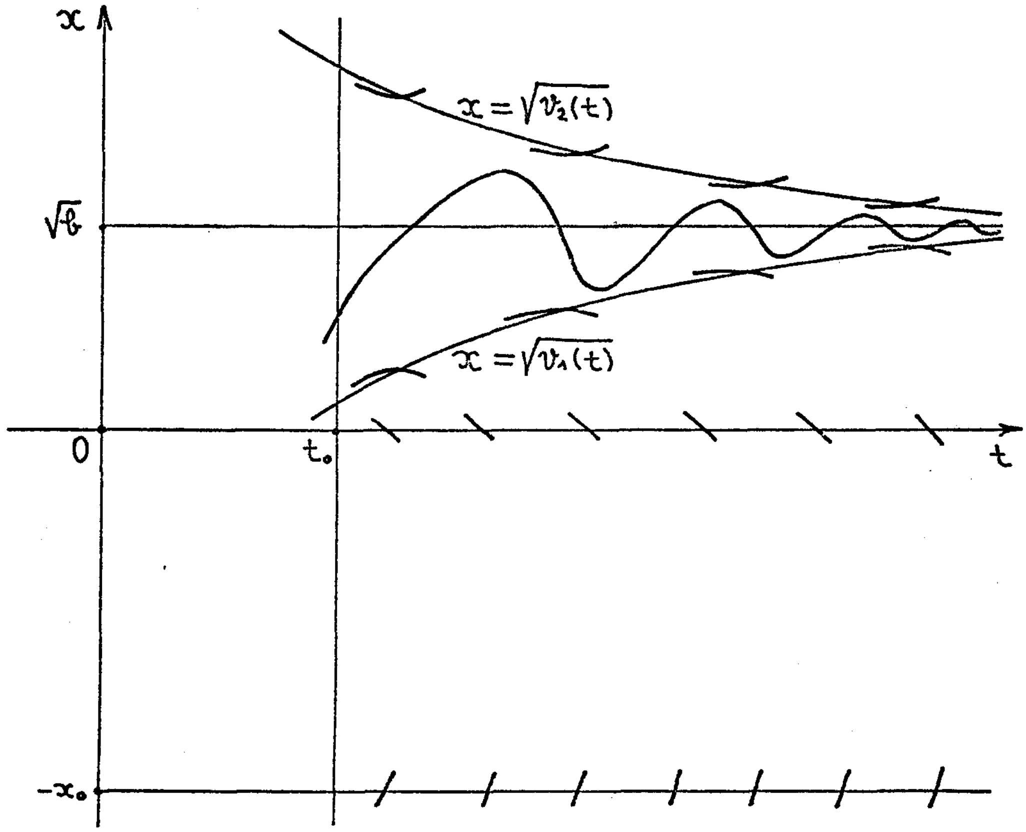
8°
$$f(t,x) < -M < 0\,,\quad 0 < g(t,x) < n(t)$$

/funkcija $n(t)$ ispunjava iste uslove kao u 7°/, sva pozitivna rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa tih rješenja, kao i ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ i bar jedno negativno rješenje teže nuli

9°
$$f(t,x) > M > 0\,,\quad -n(t) < g(t,x) < 0\,,$$
$$-\frac{g(t,x)}{f(t,x)} > \frac{a}{M} > 0\,,$$

gdje je funkcija $n(t)$ pozitivna, monotono opadajuća i teži a kad $t \to +\infty$, sva negativna i jednu klasu pozitivnih rješenja asimptotski ograničenih, a bar jedno pozitivno rješenje teži broju $\sqrt{\frac{a}{M}}$.

10° Ako funkcije $f(t,x)$ i $g(t,x)$ ispunjavaju iste uslove kao kod teoreme 5, onda asimptotski ograničena rješenja su: sva negativna i jedna klasa pozitivnih, a bar jedno pozitivno rješenje teži $\sqrt{b}$ /sl. 8, gdje je $x_0 \geq \sqrt{v_2(t)}$ $(t \geq t_0)$/.



Sl. 8

11° Ako funkcije $f(t,x)$ i $g(t,x)$ ispunjavaju iste uslove kao kod teoreme 6, gdje samo umjesto uslova /17/ treba da su ispunjeni uslovi

$$m_1(t)\cdot\varepsilon(t) > \left(\sqrt{\frac{n_1(t)}{m_1(t)}}-\varepsilon(t)\right)',$$

/18/

$$-m_2(t)\cdot\varepsilon(t) < \left(\sqrt{\frac{n_2(t)}{m_2(t)}}+\varepsilon(t)\right)',$$

onda asimptotski ograničena rješenja su: sva pozitivna i jedna klasa negativnih, a jedna klasa tih rješenja teži broju $\sqrt{\frac{b}{a}}$, i bar jedno negativno rješenje koje teži $-\sqrt{\frac{b}{a}}$.

U ovom slučaju integralne krive jednačine /1"/ imaju pozitivan koeficijent smjera u oblasti

$$|x| \leq \sqrt{\frac{n_1(t)}{m_1(t)}}\ , \quad t \geq t_0 .$$

U tačkama krive

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{n_1(t)}{m_1(t)} - \varepsilon(t)} \qquad (t \geq t_0)$$

integralne krive imaju pozitivan koeficijent smjera i veći od koeficijenta smjera te krive: prema /15/ i prvom uslovu /18/ važi

$$f(t, u_1(t)) \cdot u_1^2(t) + g(t, u_1(t)) > m_1(t) \cdot \varepsilon(t) > u_1'(t).$$

S druge strane, integralne krive imaju negativan koeficijent smjera u oblasti

$$|x| \geq \sqrt{\frac{n_2(t)}{m_2(t)}}\ , \quad t \geq t_0 .$$

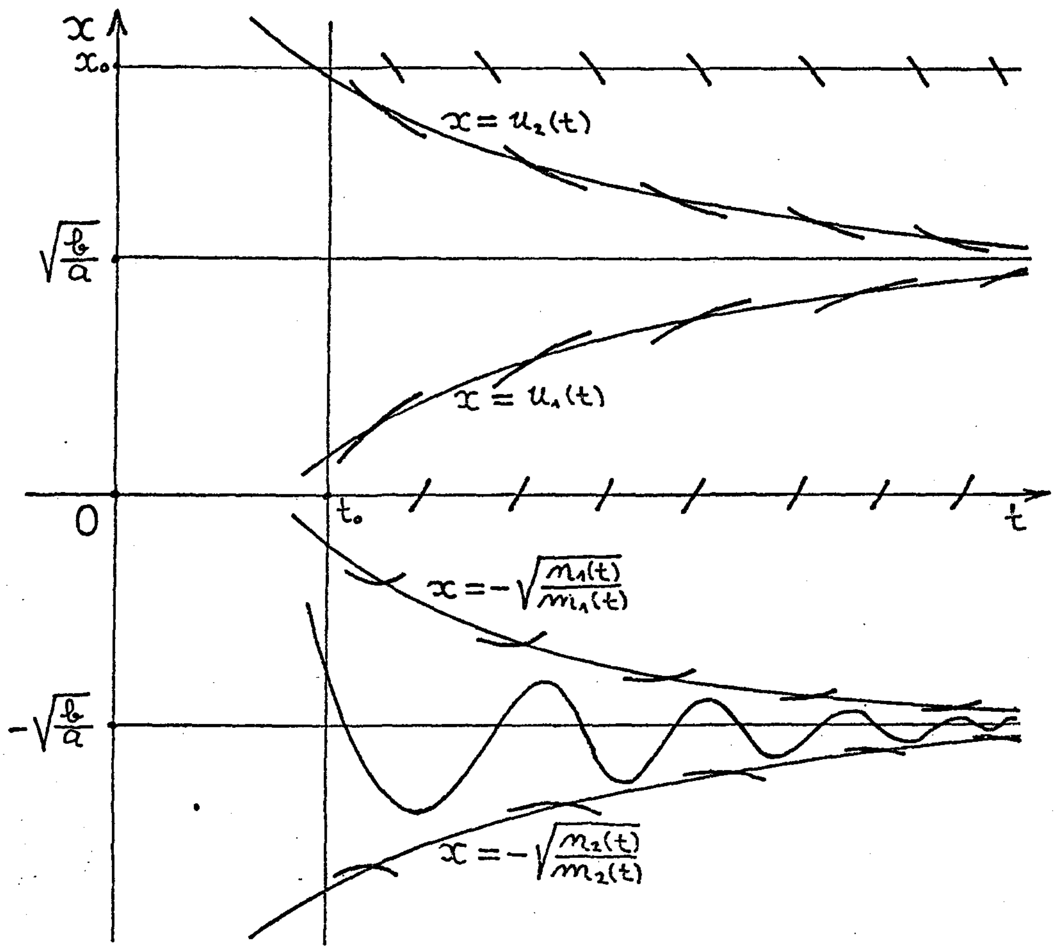
U tačkama krive

$$u_2(t) = \sqrt{\frac{n_2(t)}{m_2(t)} + \varepsilon(t)} \qquad (t \geq t_0)$$

integralne krive imaju negativan koeficijent smjera i manji od koeficijenta smjera te krive: prema /15/ i drugom uslovu /18/ važi

$$f(t, u_2(t)) \cdot u_2^2(t) + g(t, u_2(t)) < -\, m_2(t) \cdot \varepsilon(t) < u_2'(t).$$

Dakle, integralne krive se ponašaju kao na sl. 9, gdje je broj $x_0 > u_2(t)$ $(t \geq t_0)$, što i pokazuje tačnost tvrdjenja.



Sl. 9

Na osnovu proučenih rezultata možemo prihvatiti i [illegible] uopštenje.

Za jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\cdot x^{2n} + g(t,x) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

važe ista razmatranja u potpunosti kao i za jednačinu /1"/, samo umjesto tamo odgovarajućih drugih korjena ovdje bismo imali $2n$-ti korjen.

Na osnovu navedenih rezultata lako je primjetiti da su mogući i mnogi modifikovani slučajevi, kao i to da se navedeni rezultati mogu primjeniti i na jednačine drugih oblika.

§3. NEKI REZULTATI T. PEJOVIĆA SA STANOVIŠTA METODE RETRAKCIJE SA DOPUNAMA I UOPŠTENJIMA

Ovdje ćemo da posmatramo neke rezultate T. Pejovića, a koji se odnose na jednačine oblika

$$\frac{dx}{dt} = rx + f(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = rx + f(t) + g(t,x),$$

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t) + g(t,x)$$

/vidjeti [19] , str. 13o-143/, sa stanovišta metode retrakcije, koristeći posebno rezultate date u §2 . Novim pretpostavkama o funkcijama koje učestvuju u jednačinama biće date dopune /biće navedeni samo neki od mogućih slučajeva/, a zamjena članova rx i $a(t)x$ sa respektivno rx^n i $a(t)x^n$ $(n=1,2,\cdots)$ donosi i važna uopštenja.

Uzimajući iste pretpostavke /u nekim slučajevima/ ili odgovarajuće /u nekim drugim slučajevima/, podesne za primjenu metode retrakcije, sagledaćemo rezultate koje nam nudi metoda retrakcije i iste uporediti sa odgovarajućim rezultatima T. Pejovića. Ovi rezultati na nekim mjestima biće uži, a na nekim mjestima i širi /uz iste pretpostavke/, a biće i slučajeva na koje se ne može primjeniti metoda retrakcije, kao i onih na koje se može primjeniti uz uvodjenje dopunskih pretpostavki.

I

Posmatrajmo jednačinu

/1/ $$\frac{dx}{dt} = rx + f(t),$$

gdje je r konstanta, a $f(t)$ neprekidna funkcija realne promjenljive $t \geq t_0 > 0$ i koja ispunjava uslov

/2/ $$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$$

Proučavajući opšti integral linearne jednačine /1/

$$x = e^{rt}\left(c + \int_{t_0}^{t} e^{-rt} f(t)dt\right) = \frac{c + \int_{t_0}^{t} e^{-rt} f(t)\,dt}{e^{-rt}}$$

T. Pejović daje sljedeću teoremu.

TEOREMA A_1[1]. 1° Ako je r negativan realan ili kompleksan broj $r = \varrho + \theta i$ sa negativnim realnim dijelom $\varrho < 0$, tada sva rješenja jednačine /1/ teže nuli kad $t \to +\infty$, tj. opšti integral jednačine /1/ teži nuli kad $t \to +\infty$.

2° Ako je r pozitivan realan ili kompleksan broj $r = \varrho + \theta i$ sa pozitivnim realnim dijelom $\varrho > 0$, tada postoji jedan integral jednačine /1/ koji teži nuli kad $t \to +\infty$.

3° Ako je r imaginaran broj $r = \theta i$ ili nula $(\theta = 0)$, tada postoji jedan integral jednačine /1/ koji teži nuli kad $t \to +\infty$, ako je ispunjen uslov

$$\int_{+\infty}^{t} e^{-\theta i t} f(t)dt = o(1) \quad \text{kad } t \to +\infty.$$

Dalje, T. Pejović primjećuje da ako funkcija $f(t)$ umjesto uslova /2/ ispunjava uslov

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = b,$$

gdje je b brojna konstanta, da se tada može napisati

$$f(t) = b + f_1(t),$$

gdje je funkcija $f_1(t)$ neprekidna i

$$\lim_{t\to+\infty} f_1(t) = 0,$$

te da jednačina /1/ postaje

[1] Sa A_i označićemo teoreme T. Pejovića, a moje sa B_i.

/1_1/ $$\frac{dx}{dt} = rx + b + f_1(t),$$

ili poslije smjene $x = y + A$, gdje je $Ar + b = 0$ $(r \neq 0)$,

$$\frac{dy}{dt} = ry + f_1(t).$$

Kada rješenje ove jednačine teži nuli, tj. kada je $\lim\limits_{t\to+\infty} y = 0$, tada rješenje jednačine /1_1/ teži $-\frac{b}{r}$ $(r \neq 0)$, tj.

$$\lim_{t\to+\infty} x = A = -\frac{b}{r}.$$

Sada ćemo da jednačinu /1/ proučimo sa gledišta metode retrakcije. Za r ćemo pretpostaviti da je realna konstanta.

TEOREMA B_1. Jednačina /1/, za $t \geq t_0 > 0$, pod uslovom /2/, ima:

a/ za $r < 0$, sva rješenja asimptotski ograničena;

b/ za $r > 0$, bar jedno rješenje asimptotski ograničeno i ono teži nuli kad $t \to +\infty$.

DOKAZ. Član rx odredjuje znak desne strane jednačine /1/ za $|x| > \frac{|f(t)|}{|r|}$, a prema uslovu /2/, za dovoljno veliko $t \geq t_0 > t_1 > 0$ postoji pozitivan broj x_0 takav da je $\frac{|f(t)|}{|r|} < x_0$, te član rx odredjuje znak desne strane jednačine /1/ za $|x| \geq x_0$ $(t \geq t_0)$.

Otuda, u slučaju $r < 0$ u tačkama oblasti $x \geq x_0$ $(t \geq t_0)$ integralne krive imaju negativan, a u tačkama oblasti $x \leq -x_0$ $(t \geq t_0)$ pozitivan koeficijent smjera, te su i sve one asimptotski ograničene - sve one ulaze u "cijev" koja je odredjena polupravama $x = \pm x_0$ $(t \geq t_0)$.

Dokažimo sada i drugi dio teoreme.

Kako funkcija $f(t)$ ispunjava uslov /2/ to, za dovoljno veliko $t \geq t_0 > t_1 > 0$, postoji pozitivna funkcija $v(t)$ koja monotono teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da je

/3/ $$\frac{|f(t)|}{|r|} < v(t).$$

Prema nejednakosti /3/ član rx odlučuje o znaku desne strane jednačine /1/ za $|x| \geq v(t)$ $(t \geq t_0)$, te u slučaju $r > 0$ integralne krive imaju pozitivan koeficijent smjera u tačkama oblasti $x \geq v(t)$ $(t \geq t_0)$, a negativan u oblasti $x \leq -v(t)$ $(t \geq t_0)$ i ponašaju se kao na sl. 1 §2, gdje umjesto krivih $x = \pm\frac{n(t)}{m(t)}$ treba da stoje krive $x = \pm v(t)$, tj. integralne krive prolaze kroz tačke krivih $x = \pm v(t)$ $(t \geq t_0)$ izlazeći iz "cijevi" koju čine te krive. Otuda, prema metodi retrakcije, postoji bar jedna integralna kriva koja ostaje u toj "cijevi" za $t \geq t_0$, te je asimptotski ograničena i teži nuli kad $t \to +\infty$.

U slučaju $r<0$ sva će rješenja jednačine /1/ da budu asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i da teži nuli ako funkcija $f(t)$ pored uslova /2/ ispunjava i dopunski uslov, što ćemo dokazati teoremom B_2.

Neka funkcija $f(t)$, za $t \geq t_0 > 0$, ispunjava uslov

$$|f(t)| < m(t), \tag{4}$$

gdje je funkcija $m(t)$ pozitivna, monotona i

$$\lim_{t\to+\infty} m(t) = 0 \tag{5}$$

i neka postoji funkcija $\varepsilon(t)$ koja je pozitivna, monotona i

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon'(t) = 0 \text{ [1]} \tag{6}$$

i takva da funkcija $m(t)$ ispunjava uslov

$$r^2 \cdot \varepsilon(t) - r \cdot \varepsilon'(t) > -m'(t). \tag{7}$$

TEOREMA B_2. Pod uslovima /4/, /5/, /6/ i /7/, jednačina /1/, za $t \geq t_0 > 0$, ima za $r<0$ sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži nuli kad $t \to +\infty$.

DOKAZ. Kako je, prema /4/, $\frac{|f(t)|}{|r|} < \frac{m(t)}{|r|}$, to broj r odredjuje znak desne strane jednačine /1/ za $|x| \geq -\frac{m(t)}{r}$.

Neka je

$$u(t) = -\frac{m(t)}{r} + \varepsilon(t).$$

U oblasti $x \leq -u(t)$ $(t \geq t_0)$ integralne krive imaju pozitivan, a u oblasti $x \geq u(t)$ $(t \geq t_0)$ negativan koeficijent smjera i integralne krive presjecaju krive $x = \pm u(t)$ $(t \geq t_0)$ ulazeći u "cijev" odredjenu tim krivama.

Zaista je

$$r \cdot u(t) + f(t) < u'(t),$$

jer je, prema /4/,

$$r \cdot u(t) + f(t) < r \cdot u(t) + m(t) = r \cdot \varepsilon(t),$$

a prema uslovu /7/ je

$$r \cdot \varepsilon(t) < u'(t).$$

Na isti način pokazuje se da je i

---

[1] I dalje, u ovom paragrafu, podrazumjevaćemo da funkcija $\varepsilon(t)$ ispunjava te osnovne uslove.

$$r\cdot(-u(t)) + f(t) > -u'(t).$$

Dakle, integralne krive se ponašaju kao na sl. 3 §2, gdje samo umjesto krivih $x = \pm\frac{n(t)}{m(t)}$ treba da stoje krive $x = \pm u(t)$, sa koje se vidi da sve integralne krive ulaze u "cijev" odredjenu polupravama $x = \pm x_0$ $(t \geq t_0)$ /x_0 je pozitivan broj i takav da je $u(t) < x_0$ $(t \geq t_0)$ /, te su i asimptotski ograničene, kao i da sve one integralne krive koje prolaze kroz tačke oblasti $-u(t) \leq x \leq u(t)$ $(t \geq t_0)$ostaju u "cijevi" koja je odredjena krivama $x = \pm u(t)$ $(t \geq t_0)$ i čine klasu rješenja koja teži nuli kad $t \to +\infty$.

Tvrdjenje a/ teoreme B_1 /slučaj $r<0$ / je slabiji od tvrdjenja 1° teoreme A_1 T. Pejovića, jer obezbjedjuje samo asimptotsku ograničenost svih rješenja, dok kod T. Pejovića sva rješenja teže nuli, a da bi jedna klasa rješenja i težila nuli treba da funkcija $f(t)$ ispunjava i dodatni uslov /4/, te da je ispunjen i uslov /7/ /diferencijalna nejednakost Čapliginovog tipa/ - teorema B_2. U slučaju $r>0$ tvrdjenje po metodi retrakcije /tvrdjenje b/ teoreme B_1/ je jače utoliko što ono govori o postojanju bar jednog rješenja koje teži nuli, dok T. Pejović govori o postojanju jednog takvog rješenja [1]. U slučaju $r=0$ imamo jednačinu $\frac{dx}{dt} = f(t)$ na koju nije moguće primjeniti metodu retrakcije, jer se ne može formirati potrebna "cijev".

U slučaju kada funkcija $f(t)$ umjesto uslova /2/ ispunjava uslov $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = b$, gdje je b brojna konstanta, metoda retrakcije se može i tada direktno primjeniti na jednačinu /1/. Tada bismo formirali odgovarajuće "cijevi" na isti način kao i pod uslovom /2/, s tom razlikom što bi ulogu t-ose igrala prava $x = -\frac{b}{r}$, što će se jasno vidjeti u nastavku ovoga rada.

PRIMJER 1. Jednačina

$$\frac{dx}{dt} = -x - \frac{1}{t}$$

za $t \geq 4$, ima sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži nuli kad $t \to +\infty$.

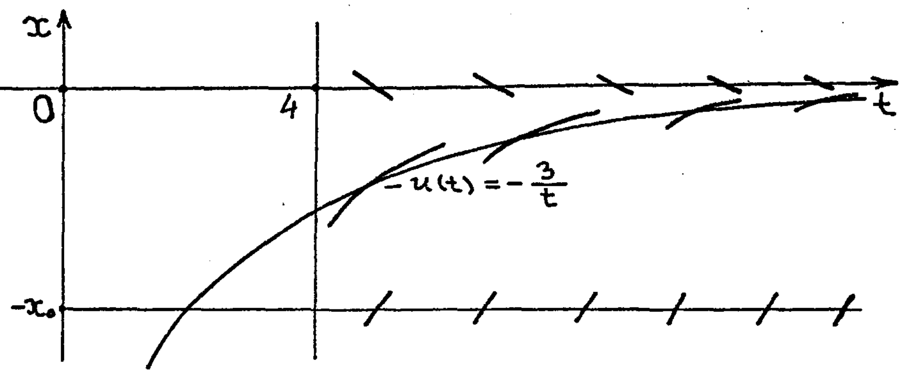
Ovdje je $r=-1$, $f(t) = -\frac{1}{t}$. Uzmemo li da je

$$m(t) = \frac{2}{t}\ , \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{t}$$

uslovi /4/, /5/ i /6/ su očevidno ispunjeni, uslov /7/ glasi $\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} > \frac{2}{t^2}$ i zadovoljen je za $t \geq 4$ /sl. 1/.

---

[1] T. Pejović je svuda isticao postojanje jednog rješenja, a ne bar jednog.



Sl. 1

Posmatrajmo sada jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t), \tag{8}$$

gdje su $a(t)$ i $f(t)$ neprekidne funkcije realne promjenljive $t \geqslant t_0 > 0$ i koje ispunjavaju uslove

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = r, \tag{9}$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = b, \tag{10}$$

gdje su r i b brojne konstante.

Funkcija $a(t)$ može se napisati u obliku

$$a(t) = r + \delta(t),$$

gdje je $\delta(t)$ neprekidna funkcija i

$$\lim_{t\to+\infty} \delta(t) = 0,$$

pa se jednačina /8/ može napisati u obliku

$$\frac{dx}{dt} = rx + f(t) + \delta(t)x. \tag{8a}$$

Dalje, neka je x_0 ograničeno rješenje jednačine

$$\frac{dx_0}{dt} = rx_0 + f(t), \tag{1'}$$

za $t \geqslant t_0 > 0$, tj.

$$|x_0| < M \quad za \quad t \geqslant t_0 > 0,$$

gdje je M fiksiran broj /T. Pejović/.

Koristeći gornje pretpostavke i polazeći od rješenja x_0 jednačine /1'/ T. Pejović posmatra niz funkcija

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_m(t),\ \cdots$$

kao sukcesivna rješenja jednačine

$$\frac{dx_m}{dt} = r\,x_m + f(t) + \delta(t)\,x_{m-1},$$

ili u integralnom obliku

$$x_m = e^{rt}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-rt} f(t)\,dt + C\right) + e^{rt}\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\,\delta(t)\,x_{m-1}\,dt,$$

odnosno posmatra red

$$x = x_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(x_m - x_{m-1}\right)$$

/posmatra kada taj red uniformno konvergira i predstavlja rješenje jednačine /8// i dolazi do sljedećeg rezultata.

TEOREMA A_2. Jednačina /8/, za $t \geq t_0 > 0$, ima:

a/ u slučaju 1^0 [1], sva asimptotski ograničena rješenja;

b/ u slučaju 2^0, jedno asimptotski ograničeno rješenje;

c/ u slučaju 3^0, jedno asimptotski ograničeno rješenje, pod uslovom

$$\int_{t}^{+\infty} |\delta(t)|\,dt = o(1) \quad \text{kad } t \to +\infty .$$

Posmatrajmo sada jednačinu /8/ koristeći metodu retrakcije. Važi sljedeći stav /za r pretpostavljamo da je realan broj/.

TEOREMA B_3. Jednačina /8/, pod uslovima /9/ i /1o/, za $t \geq t_0 > 0$ ima:

a/ za $r < 0$, sva rješenja asimptotski ograničena;

b/ za $r > 0$, bar jedno rješenje asimptotski ograničeno i ono teži $-\frac{b}{r}$ kad $t \to +\infty$.

DOKAZ. a/ Dokaz ovog tvrdjenja je isti kao za tvrdjenje a/ teoreme B_1.

b/ Uzmimo da je $b < 0$, za $b > 0$ dokaz bi bio sličan.

Kako je, prema /9/ i /1o/,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-f(t)}{a(t)} = -\frac{b}{r},$$

to je, za dovoljno veliko $t \geq t_0 > t_1 > 0$, funkcija $-\frac{f(t)}{a(t)}$ pozitivna i postoje pozitivne i monotone funkcije $v_1(t)$ i $v_2(t)$ / $v_1(t)$ je rastuća, $v_2(t)$ je opadajuća/, takve da je

$$\lim_{t\to+\infty} v_1(t) = \lim_{t\to+\infty} v_2(t) = -\frac{b}{r}$$

i da je

$$v_1(t) < -\frac{f(t)}{a(t)} < v_2(t).$$

---

[1] Vidjeti teoremu A_1.

Otuda, nejednakost $a(t)x + f(t) < 0$ je zadovoljena za $x \leqslant v_1(t)$, a nejednakost $a(t)x + f(t) > 0$ za $x \geqslant v_2(t)$, tj. u tačkama oblasti $x \leqslant v_1(t)$ $(t \geqslant t_0)$ integralne krive jednačine /8/ imaju negativan, a u tačkama oblasti $x \geqslant v_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$ pozitivan koeficijent smjera. Integralne krive se ponašaju kao na sl. 6 §2, gdje samo umjesto b treba da stoji $-\frac{b}{r}$, te prema metodi retrakcije, postoji bar jedna integralna kriva koja ostaje u "cijevi" koja je odredjena krivama $v_1(t)$ i $v_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$, te i teži $-\frac{b}{r}$ kad $t \to +\infty$.

Ako dovoljno ojačamo pretpostavke o funkcijama $a(t)$ i $f(t)$ moguće je, u slučaju $r < 0$, tvrdjenje da su sva rješenja asimptotski ograničena, a da jedna klasa rješenja i teži $-\frac{b}{r}$.

Uzmimo da funkcije $a(t)$ i $f(t)$, za $t \geqslant t_0 > 0$, ispunjavaju uslove

$$
/11/ \qquad \begin{aligned} -m_1(t) < a(t) < -m_2(t) < 0, \\ 0 < n_1(t) < f(t) < n_2(t), \end{aligned}
$$

gdje su $m_1(t)$, $m_2(t)$, $n_1(t)$ i $n_2(t)$ pozitivne i monotone funkcije, da je

$$
/12/ \qquad \begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} m_1(t) = \lim_{t\to+\infty} m_2(t) = -r \quad (r<0), \\ \lim_{t\to+\infty} n_1(t) = \lim_{t\to+\infty} n_2(t) = b \quad (b>0), \end{aligned}
$$

takve da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$
/13/ \qquad \begin{aligned} m_1(t)\cdot\varepsilon(t) + \varepsilon'(t) > \left(\frac{n_1(t)}{m_1(t)}\right)', \\ -m_2(t)\cdot\varepsilon(t) - \varepsilon'(t) < \left(\frac{n_2(t)}{m_2(t)}\right)'. \end{aligned}
$$

Sada je moguća sljedeća teorema.

TEOREMA B$_4$. Pod uslovima /11/, /12/, /6/ i /13/, za $t \geqslant t_0 > 0$, jednačina /8/ ima sva rješenja asimptotski ograničena, a jednа klasa rješenja teži $-\frac{b}{r}$ kad $t \to +\infty$.

Dokaz teoreme je isti kao dokaz teoreme 6 §2, samo umjesto $\frac{b}{a}$ ovdje imamo $-\frac{b}{r}$.

Ako umjesto drugog uslova /11/ funkcija $f(t)$ ispunjava uslov

$$
-n_2(t) < f(t) < -n_1(t) < 0,
$$

a sve ostalo ostane isto kao kod teoreme B$_4$, onda su, takodje, sva rješenja jednačine /8/ asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja teži $\frac{b}{r}$ $(b>0)$.

Uporedimo sada rezultate teorema B$_3$ i B$_4$ sa odgovarajućim rezultatima

T. Pejovića /teorema A_2/. U slučaju $r<0$, pod istim pretpostavkama, imamo i ista tvrdjenja /ovdje je to tvrdjenje a/ teoreme B_3/, a uz ojačane uslove /11/, /12/ i /13/ imamo i jače tvrdjenje /teorema B_4/, koje govori ne samo o asimptotskoj ograničenosti rješenja, nego i da jedna klasa rješenja teži $-\frac{b}{r}$, što je i rezultat više. Za $r>0$, pod istim pretpostavkama, tvrdjenje b/ teoreme B_3 jače je od odgovarajućeg tvrdjenja T. Pejovića, jer tvrdi ne samo postojanje bar jednog asimptotski ograničenog rješenja, nego i da ono teži $-\frac{b}{r}$. U slučaju $r=0$, tj. kada je

/14/ $$\lim_{t\to+\infty} a(t)=0,$$

da bi mogli primjeniti metodu retrakcije treba da funkcija $f(t)$ ispunjava uslov

/15/ $$\lim_{t\to+\infty} f(t)=0 \;^{1)},$$

da je

/16/ $$\lim_{t\to+\infty} \frac{-f(t)}{a(t)}=0$$

i da funkcija $a(t)$ ima stalan znak za $t\geqslant t_0>0$. U ovom slučaju, prema teoremi B_3, jednačina /8/ ima, za $a(t)<0$, sva rješenja asimptotski ograničena, a za $a(t)>0$, bar jedno rješenje koje teži nuli.

Na osnovu teoreme B_4 možemo prihvatiti i sljedeće tvrdjenje.

Ako funkcije $a(t)$ i $f(t)$ pored uslova /14/, /15/ i /16/ ispunjavaju i dopunske uslove

$$a(t)<-m(t)<0,$$

$$|f(t)|<n(t),$$

gdje su funkcije $m(t)$ i $n(t)$ pozitivne, monotone, teže nuli kad $t\to+\infty$ i

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{n(t)}{m(t)}=0,$$

takve da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$m(t)\cdot\varepsilon(t)+\varepsilon'(t)>-\left(\frac{n(t)}{m(t)}\right)',$$

onda jednačina /8/ ima, za $t\geqslant t_0>0$, sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži nuli kad $t\to+\infty$.

PRIMJER 2. Neka je data jednačina

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{2}{t}-1\right)\cdot x+\frac{1}{2t}+2.$$

---

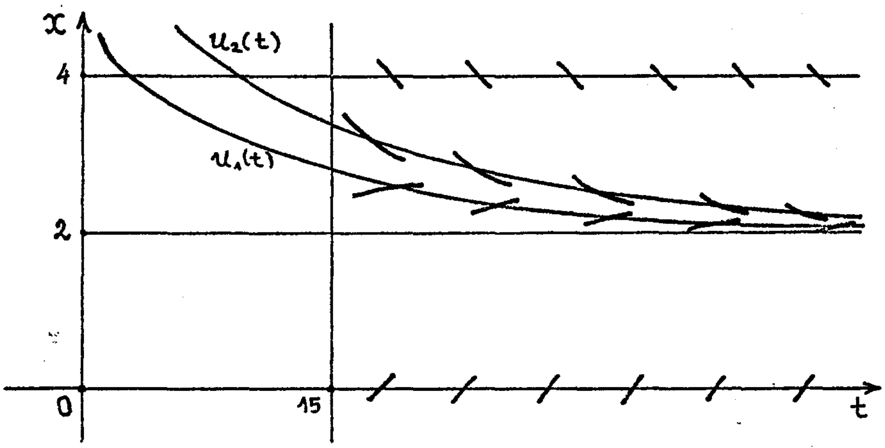
1) Ovaj uslov podrazumjeva i T. Pejović, jer pretpostavlja da je x_0 ograničeno rješenje jednačine $x_0'=rx_0+f(t)$, a $f(t)$ da ispunjava uslov /10/.

Uzmemo li da je

$$m_1(t) = 1 - \frac{1}{t}, \quad m_2(t) = 1 - \frac{3}{t}, \quad n_1(t) = 2 - \frac{1}{t}, \quad n_2(t) = 2 + \frac{1}{t}, \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{t},$$

svi uslovi teoreme B_4 su zadovoljeni za $t \geq 15$, te su sva rješenja jednačine asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži broju 2 $(r=-1, b=2)$. Integralne krive se ponašaju kao na sl. 2, gdje je

$$u_1(t) = 2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}, \quad u_2(t) = 2 + \frac{7}{t-3} + \frac{1}{t}.$$



Sl. 2

II

Posmatrajmo jednačinu

/17/ $$\frac{dx}{dt} = rx + f(t) + g(t,x),$$

gdje je r konstanta, $f(t)$ neprekidna funkcija za $t \geq t_0 > 0$ i ispunjava uslov

/18/ $$\lim_{t\to+\infty} f(t) = b,$$

gdje je b konstanta, $g(t,x)$ za $t \geq t_0 > 0$ i $|x| < A$ ispunjava uslove

/19/
/a/ definisana i neprekidna,
/b/ $g(t,0) = 0$,
/c/ $|g(t,X) - g(t,x)| \leq L\,|X - x|$,

gdje su A i L pozitivne konstante. Dalje, neka je x_0 ograničeno rješenje jednačine

/1'/ $$\frac{dx_0}{dt} = rx_0 + f(t)$$

za $t \geq t_0 > 0$, tj.

/20/ $$|x_0| < M \quad \text{za} \quad t \geq t_0 > 0,$$

gdje je M pozitivna konstanta. /To su pretpostavke T. Pejovića/

Posmatrajući jednačinu /17/, na sličan način kao i jednačinu /8/, odnosno jednačinu /8_1/, T. Pejović dolazi do sljedećeg stava.

TEOREMA A_3. Jednačina /17/ ima, za $t \geq t_0 > 0$:

a/ u slučaju 1^o, sva asimptotski ograničena rješenja, pod uslovima /19/ i

/21/ $$L < |\rho|, \quad M \cdot \frac{|\rho|}{|\rho| - L} \leq A;$$

b/ u slučaju 2^o, jedno asimptotski ograničeno rješenje, pod uslovima /19/, /20/ i /21/ ;

c/ u slučaju 3^o, jedno asimptotski ograničeno rješenje, pod uslovima /19/ i

/22/ $$L < 1, \quad M \cdot \frac{1}{1 - L} \leq A$$

i ako niz funkcija

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_t^{+\infty} (\tau - t)^{m-1} |x_0(\tau)| \, d\tau \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

ispunjava uslov

$$\mathcal{E}_m(t) = o(1) \quad kad \quad t \to +\infty \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

i uniformno konvergira.

Prema navedenim pretpostavkama o funkciji $g(t,x)$ možemo uzeti da je

/23/ $$g(t,x) = h(t,x) \cdot x \quad \text{za} \quad x \neq 0 \text{ [1]},$$

gdje funkcija $h(t,x)$, za $t \geq t_0 > 0$ i $|x| < A$, ispunjava uslove

/24/ /a/ definisana i neprekidna,

/b/ $|h(t,x)| \leq L$.

Zaista, prema uslovima /19/ je

$$|g(t,x)| \leq L|x|,$$

pa je

$$|g(t,x)| = |h(t,x)| \cdot |x| \leq L|x| \quad \text{i} \quad |h(t,x)| \leq L.$$

Tako ćemo umjesto jednačine /17/ posmatrati jednačinu

---

[1] Za $x = 0$ jednačina /17/ glasi $x' = f(t)$, te ponašanje integralnih krivih zavisi od $f(t)$.

/17'/ $$\frac{dx}{dt}=(r+h(t,x))\cdot x+f(t).$$

Razlikovaćemo dva osnovna slučaja: $r\neq 0$ i $r=0$, jer to bitno utiče na ispitivanje jednačine /17'/.

A. Neka je $r\neq 0$ i neka je

/2o'/ $$|x_0|\leq M_1<M,$$

gdje je x_0 ograničeno rješenje jednačine /1'/ za $t\geq t_0>0$, a M_1 i M su pozitivne konstante, kao i

/25/ $$L<|r|,\quad M\cdot\frac{|r|}{|r|-L}\leq A,$$

što odgovara pretpostavkama /2o/ i /21/ T. Pejovića.

TEOREMA B5. Jednačina /17'/, za $t\geq t_0>0$ i $|x|<A$, pod uslovima /18/, /24/ i /25/, ima:

a/ za $r<0$, sva rješenja asimptotski ograničena;

b/ za $r>0$, bar jedno rješenje asimptotski ograničeno.

DOKAZ. Član $(r+h(t,x))\cdot x$ je nosilac znaka desne strane jednačine /17'/ za $|x|>\dfrac{|f(t)|}{|r+h(t,x)|}$. Kako je

$$\frac{|f(t)|}{|r+h(t,x)|}\leq\frac{|f(t)|}{|r|-|h(t,x)|}\leq\frac{|f(t)|}{|r|-L}=$$
$$=\left|\frac{f(t)}{r}\right|\cdot\frac{|r|}{|r|-L}\leq M_1\cdot\frac{|r|}{|r|-L}<M\cdot\frac{|r|}{|r|-L}\;^{1)},$$

to za dovoljno veliko $t\geq t_0>t_1>0$ postoji pozitivan broj x_1 takav da je

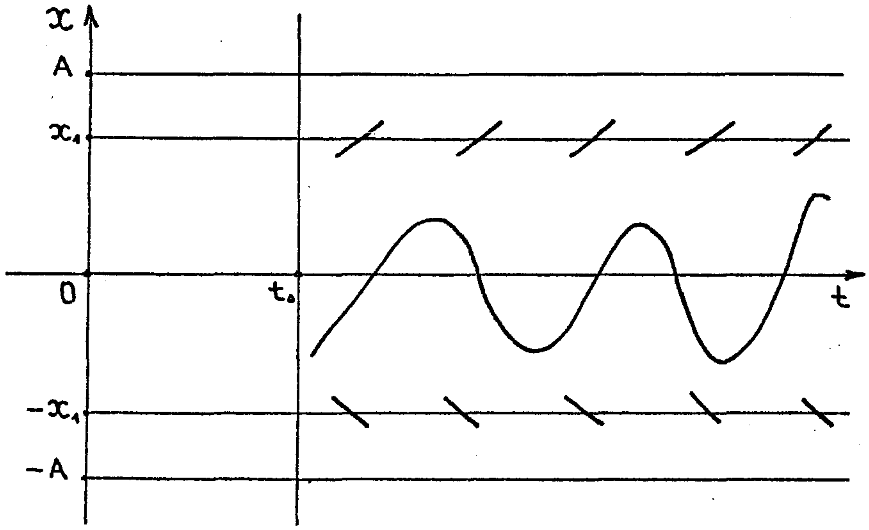
$$\frac{|f(t)|}{|r+h(t,x)|}<x_1<M\cdot\frac{|r|}{|r|-L}.$$

Otuda, za $x_1\leq|x|<A$ $(t\geq t_0)$, član $(r+h(t,x))\cdot x$ je nosilac znaka desne strane jednačine /17'/ /$r+h(t,x)$ ima znak kao i r jer je $L<|r|$/.

Slijedi zaključak, u slučaju $r<0$ integralne krive imaju pozitivan koeficijent smjera u oblasti $-A<x\leq -x_1$ $(t\geq t_0)$, a negativan u oblasti $x_1\leq x<A$ $(t\geq t_0)$, te su sve integralne krive, koje prolaze kroz tačke oblasti $|x|<A$ $(t\geq t_0)$ asimptotski ograničene; u slučaju $r>0$ integralne krive imaju negativan koeficijent smjera u oblasti $-A<x\leq -x_1$ $(t\geq t_0)$, a pozitivan u oblasti $x_1\leq x<A$ $(t\geq t_0)$, te postoji bar jedna integralna kriva koja ostaje u "cijevi" koja je odredjena polupravama $x=\pm x_1$ $(t\geq t_0)$ /sl. 3/.

---

1) Uslov $\left|\frac{f(t)}{r}\right|\leq M_1<M$ odgovara uslovu /2o'/.



Sl. 3

Sada ćemo proučiti slučajeve koji obezbjedjuju da asimptotski ograničena rješenja jednačine /17'/ teže nekom broju kad $t \to +\infty$.

Neka funkcije $h(t,x)$ i $f(t)$ pored datih uslova ispunjavaju i uslove

/26/ $$0 < m_1(t) < h(t,x) < m_2(t),$$

/27/ $$0 < n_1(t) < f(t) < n_2(t),$$

gdje su $m_1(t)$, $m_2(t)$, $n_1(t)$ i $n_2(t)$ pozitivne i monotone funkcije i koje ispunjavaju uslove

/28/ $$\lim_{t\to+\infty} m_1(t) = \lim_{t\to+\infty} m_2(t) = a, \quad m_2(t) \leq L,$$

/29/ $$\lim_{t\to+\infty} n_1(t) = \lim_{t\to+\infty} n_2(t) = b, \quad \frac{n_2(t)}{|r|} \leq M_1 < M$$

/a i b su brojevi: $a \geq 0$, $b > 0$ /, takve da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

/3o/ $$\begin{aligned} &\big(r + m_1(t)\big)\cdot\varepsilon(t) - \varepsilon'(t) < \left(\frac{n_1(t)}{r + m_1(t)}\right)', \\ &\big(r + m_2(t)\big)\cdot\varepsilon(t) - \varepsilon'(t) < -\left(\frac{n_2(t)}{r + m_2(t)}\right)'. \end{aligned}$$

TEOREMA B_6. Jednačina /17'/, za $t \geq t_0 > 0$ i $|x| < A$, ima:

a/ za $r > 0$, pod uslovima /18/, /25/, /26/ i /28/, bar jedno rješenje asimptotski ograničeno i ono teži $-\frac{b}{r+a}$ kad $t \to +\infty$;

b/ za $r < 0$, pod uslovima /6/, /25/, /26/, /27/, /28/, /29/ i /3o/, sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži $-\frac{b}{r+a}$ kad $t \to +\infty$.

DOKAZ. a/ Neka je $b < 0$, tj. $f(t) < 0$ za dovoljno veliko $t \geq t_0 > t_1 > 0$. Prema /26/ važi ocjena

$$-\frac{f(t)}{r+m_2(t)} < -\frac{f(t)}{r+h(t,x)} < -\frac{f(t)}{r+m_1(t)},$$

a prema /18/ i /28/, za dovoljno veliko $t \geq t_0 > t_1 > 0$, postoje pozitivne i monotone funkcije $v_1(t)$ i $v_2(t)$ / $v_1(t)$ - rastuća, $v_2(t)$ - opadajuća/, koje teže $-\frac{b}{r+a}$ kad $t \to +\infty$, takve da važi relacija

$$v_1(t) < -\frac{f(t)}{r+m_2(t)} < -\frac{f(t)}{r+h(t,x)} < -\frac{f(t)}{r+m_1(t)} < v_2(t)$$

i da je $v_2(t) < A$ [1].

Za $x < -\frac{f(t)}{r+h(t,x)}$, odnosno, za $-A < x \leq v_1(t)$ $(t \geq t_0)$, integralne krive imaju negativan, a za $x > -\frac{f(t)}{r+h(t,x)}$, odnosno, za $v_2(t) \leq x < A$ $(t \geq t_0)$, pozitivan koeficijent smjera i imamo slučaj kao na sl. 6 §2.

b/ Sada, prema /26/ i /27/, važi ocjena

$$-\frac{m_1(t)}{r+m_1(t)} < -\frac{f(t)}{r+h(t,x)} < -\frac{m_2(t)}{r+m_2(t)}$$

i za $-A < x \leq -\frac{m_1(t)}{r+m_1(t)}$ $(t \geq t_0)$ integralne krive imaju pozitivan, a za $-\frac{m_2(t)}{r+m_2(t)} \leq x < A$ $(t \geq t_0)$ [2], negativan prvi izvod.

Neka je

$$u_1(t) = -\frac{m_1(t)}{r+m_1(t)} - \varepsilon(t), \quad u_2(t) = -\frac{m_2(t)}{r+m_2(t)} + \varepsilon(t).$$

/Za dovoljno veliko $t \geq t_0 > t_1 > 0$ važi $u_2(t) < A$./

Prema /26/ i /27/ imamo

$$\big(r + h(t, u_1(t))\big)\cdot u_1(t) + f(t) > \big(r + m_1(t)\big)\cdot u_1(t) + m_1(t) =$$
$$= -\big(r + m_1(t)\big)\cdot \varepsilon(t),$$

a kako je, prema prvom uslovu /30/,

$$-\big(r + m_1(t)\big)\cdot \varepsilon(t) > u_1'(t),$$

to je

$$\big(r + h(t, u_1(t))\big)\cdot u_1(t) + f(t) > u_1'(t),$$

tj. integralne krive presjecaju krivu $u_1(t)$ $(t \geq t_0)$ sa prvim izvodom većim od prvog izvoda same krive $u_1(t)$.

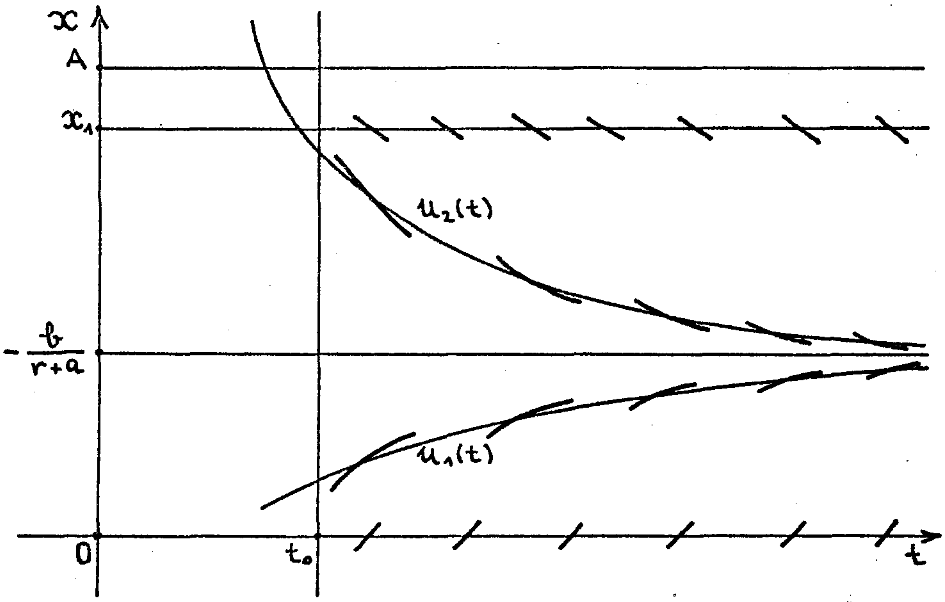
---

[1] Takva funkcija $v_2(t)$ postoji jer važi relacija

$$-\frac{f(t)}{r+m_1(t)} = \left|\frac{f(t)}{r}\right| \cdot \frac{|r|}{|r| + m_1(t)} < M_1 \cdot \frac{|r|}{|r|-L} < M \cdot \frac{|r|}{|r|-L} \leq A.$$

[2] Takva oblast postoji jer važi relacija

$$-\frac{m_2(t)}{r+m_2(t)} = \left|\frac{m_2(t)}{r}\right| \cdot \frac{|r|}{|r| - m_2(t)} \leq M_1 \cdot \frac{|r|}{|r|-L} < M \cdot \frac{|r|}{|r|-L} \leq A.$$



Sl. 4

Slično, prema /26/, /27/ i drugom uslovu /3o/, nalazimo da je

$$\left(r+h(t,u_2(t))\right)\cdot u_2(t)+f(t) < u_2'(t),$$

što pokazuje da integralne krive presjecaju krivu $u_2(t)$ $(t \geq t_0)$ sa prvim izvodom manjim od izvoda te krive /sl. 4/.

Na osnovu izvedenog možemo dati i sljedeće dopune teoremi B_6.

1° Ako je $b=0$, onda u slučaju $r>0$ asimptotski ograničeno rješenje teži nuli.

2° Ako funkcija $f(t)$ umjesto uslova /27/ ispunjava uslov

$$-m_2(t) < f(t) < -m_1(t) < 0$$

/ovdje je $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=-b$, $b>0$ /, a sve ostalo ostane isto kao u teoremi B_6, onda su sva rješenja jednačine /17'/ asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži $\frac{b}{r+a}$.

3° Ako funkcija $h(t,x)$ ispunjava uslov

$$\lim_{t\to+\infty} h(t,x)=-a \quad \text{za svako } |x|<A \quad (a>0),$$

onda uz formalnu modifikaciju uslova teoreme B_6 može se pokazati da su sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži $-\frac{b}{r-a}$.

PRIMJER 3. Jednačina

$$\frac{dx}{dt}=-2x+\frac{3t+1}{t}+\frac{x}{t+x^2}$$

za $t \geq A^2$ $(A \geq 4)$ i $|x|<A$, ispunjava uslove teoreme B_6, te ima sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži broju $\frac{3}{2}$ kad $t\to+\infty$.

B. Posmatrajmo sada slučaj $r=0$, odnosno jednačinu

/17"/ $$\frac{dx}{dt} = h(t,x)\cdot x + f(t).$$

U ovom slučaju T. Pejović je umjesto uslova /21/ uzeo uslove /22/.

Kako je funkcija $h(t,x)$ nosilac znaka desne strane jednačine /17"/ za $|x| > \frac{|f(t)|}{|h(t,x)|}$ i kako ispitivanje jednačine izvodimo za $|x|<A$, to treba uzeti da funkcija $h(t,x)$ ispunjava uslov

/31/ $$|h(t,x)| > a\ [1],$$

gdje je a pozitivan broj i $a<L$ /zbog /24/ /b//.

Prema tome imamo

$$\frac{|f(t)|}{|h(t,x)|} < \frac{|f(t)|}{a} \leq M_1\cdot\frac{1}{a} < M\cdot\frac{1}{a}\ [2].$$

Sada ćemo umjesto uslova /22/ uzeti uslov

/32/ $$M\cdot\frac{1}{a} \leq A$$

i tako obezbjediti da funkcija ~~da funkcija~~ $h(t,x)$ bude nosilac znaka desne strane jednačine /17"/ u oblasti $\left|\frac{f(t)}{a}\right| \leq |x| < A\ (t \geq t_0)$, pa se metoda retrakcije može primjeniti i u ovom slučaju.

Jednačina /17"/ po obliku je samo specijalan slučaj jednačine /1/ §2, koju smo posmatrali, zato se i nećemo posebno zadržavati na njoj. Navedimo samo nekoliko bitno različitih rezultata bez dokaza.

Jednačina /17"/, za $t \geq t_0 > 0$, ima, pod uslovom /32/ i pod uslovima

1^0 $$0 < a < h(t,x), \quad |f(t)| \leq M_1 < M,$$

bar jedno rješenje asimptotski ograničeno.

2^0 $$h(t,x) < -a < 0, \quad |f(t)| \leq M_1 < M,$$

sva rješenja asimptotski ograničena.

3^0 $$0 < a < h(t,x), \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0,$$

bar jedno rješenje asimptotski ograničeno i ono teži nuli.

4^0 $$h(t,x) < -a < 0, \quad |f(t)| < m(t),$$

---

[1] Umjesto ovog uslova može da stoji i uslov $|h(t,x)| > m_1(t)$, gdje je $m_1(t)$ pozitivna i monotona funkcija koja teži a kad $t\to+\infty$.

[2] Uslov $|f(t)| \leq M_1 < M$ odgovara uslovu /20'/.

gdje je funkcija $m(t)$ pozitivna, monotona i

$$\lim_{t\to+\infty} m(t)=0$$

i takva da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$a^2\cdot\varepsilon(t)+a\cdot\varepsilon'(t) > -m'(t),$$

sva rješenja asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži nuli.

5°

$$0<a<h(t,x)<m(t),$$

$$|f(t)|\leqslant M_1<M, \quad \lim_{t\to+\infty} f(t)=b,$$

gdje je b realan broj, a $m(t)$ pozitivna, monotono opadajuća funkcija i

$$\lim_{t\to+\infty} m(t)=a, \quad m(t)\leqslant L \text{ za } t\geqslant t_0>0,$$

bar jedno rješenje asimptotski ograničeno i ono teži $-\frac{b}{a}$.

6°

$$-m(t)<h(t,x)<-a<0,$$

$$0<n_1(t)<f(t)<n_2(t),$$

gdje $m(t)$ ispunjava iste uslove kao u slučaju 5°, a funkcije $n_1(t)$ i $n_2(t)$ pozitivne, monotone i

$$\lim_{t\to+\infty} n_1(t)=\lim_{t\to+\infty} n_2(t)=b \quad (b>0),$$

$$n_2(t)\leqslant M_1<M$$

i neka postoji funkcija $\varepsilon(t)$ takva da funkcije $m(t)$, $n_1(t)$ i $n_2(t)$ ispunjavaju uslove

$$m(t)\cdot\varepsilon(t)+\varepsilon'(t) > \left(\frac{n_1(t)}{m(t)}\right)',$$

$$a^2\cdot\varepsilon(t)+a\cdot\varepsilon'(t) > -n_2'(t),$$

sva rješenja su asimptotski ograničena, a jedna klasa rješenja i teži $\frac{b}{a}$.

U slučaju jednačine

/33/
$$\frac{dx}{dt}=a(t)x+f(t)+g(t,x),$$

gdje je $a(t)$ neprekidna funkcija za $t\geqslant t_0>0$ i koja ispunjava uslov

/34/
$$\lim_{t\to+\infty} a(t)=r,$$

a funkcije $f(t)$ i $g(t,x)$ ispunjavaju iste uslove kao u jednačini /17/, T. Pejović preporučuje da se ta jednačina napiše u obliku

$$\frac{dx}{dt}=rx+f(t)+\Psi(t,x),$$

gdje je

$$\psi(t,x) = \varphi(t,x) + p(t)\,x,$$

/35/ $$a(t) = r + p(t),$$

a $p(t)$ neprekidna funkcija i

/36/ $$\lim_{t\to+\infty} p(t) = 0,$$

te konstatuje da se njeno ispitivanje svodi na ispitivanje jednačine /17/.

I M. Bertolino je proučavao jednačinu /33/ primjenom metode retrakcije direktno na tu jednačinu. Polazeći od uslova /18/, /19/, /34/ i /25/ M. Bertolino vješto dokazuje da jednačina /33/ ima, u slučaju $r<0$ sva rješenja asimptotski ograničena, a u slučaju $r>0$ bar jedno rješenje asimptotski ograničeno /teorema 12 § , a za dokaz vidjeti u [2] str. 1o4/.

Ako uzmemo u obzir /23/ i /35/ jednačinu /33/ možemo napisati u obliku

$$\frac{dx}{dt} = \big(r + p(t) + h(t,x)\big)\cdot x + f(t),$$

a na osnovu datog proučavanja jednačine /17'/ možemo konstatovati da za ovu jednačinu važe ista razmatranja kao i za jednačinu /17'/.

Zaista, umjesto $h(t,x)$ u jednačini /17'/ sada imamo $p(t) + h(t,x)$, a kako funkcija $p(t)$ ispunjava uslov /36/, a $h(t,x)$ uslov $|h(t,x)| \leq L$, gdje je $L<|r|$ za $r\neq 0$, a za $r=0$ uslov $|h(t,x)|>a$, gdje je $a<L<1$, to ista trtiranja koja su važila za funkciju $h(t,x)$ važe i za funkciju $p(t)+h(t,x)$.

Sada uporedimo dobijene rezultate, koji se odnose na jednačinu /17/, sa odgovarajućim rezultatima T. Pejovića. Teorema B_5 daje iste rezultate, uz iste pretpostavke, a uz ojačane pretpostavke imamo teoremu B_6, koja predstavlja bitan rezultat za jednačinu /17'/. U slučaju $r=0$ T. Pejović uzima dodatne uslove /vidjeti teoremu A_3 c// i obezbjedjuje jedno asimptotski ograničeno rješenje, dok se dodavanjem uslova /31/ obezbjedjuje ...nost primjene metode retrakcije /rezultati 1^o - 6^o, koji se odnose na jednačinu /17"//.

Na osnovu proučenih rezultata možemo dati sljedeće uopštenje koje se odnosi na posmatrane jednačine.

TEOREMA B_7. Ako u jednačinama /1/, /8/ i /17'/ članove rx, $a(t)x$ i $(r+h(t,x))x$ zamjenimo respektivno članovima

$$r\cdot x^{2n+1},\quad a(t)\cdot x^{2n+1} \;\text{i}\; \big(r+h(t,x)\big)\cdot x^{2n+1} \quad (n=0,1,2,\dots),$$

važe i tada tvrdjenja koja govore o asimptotskoj ograničenosti rješenja, kao i ona koja govore o postojanju bar jednog rješenja koje teži nuli ili $-\frac{b}{r}$, odnosno $-\frac{b}{r+a}$ /samo ovdje bismo imali $\sqrt[2n+1]{-\frac{b}{r}}$, $\sqrt[2n+1]{-\frac{b}{r+a}}$ /. Takodje, važe i tvrdjenja koja govore o teženju jedne klase rješenja nuli, $-\frac{b}{r}$ ili $-\frac{b}{r+a}$, samo ako uslove /7/, /13/, /3o/ i /25/ zamjenimo respektivno sljedećim uslovima:

$$r\cdot\varepsilon(t) < \left(\sqrt[2n+1]{-\frac{m(t)}{r}+\varepsilon(t)}\right)' ;$$

$$m_1(t)\cdot\varepsilon(t) > \left(\sqrt[2n+1]{\frac{m_1(t)}{m_1(t)}-\varepsilon(t)}\right)',$$

$$m_2(t)\cdot\varepsilon(t) > -\left(\sqrt[2n+1]{\frac{m_2(t)}{m_2(t)}+\varepsilon(t)}\right)' ;$$

$$-(r+m_1(t))\cdot\varepsilon(t) > \left(\sqrt[2n+1]{-\frac{m_1(t)}{r+m_1(t)}-\varepsilon(t)}\right)',$$

$$(r+m_2(t))\cdot\varepsilon(t) < \left(\sqrt[2n+1]{-\frac{m_2(t)}{r+m_2(t)}+\varepsilon(t)}\right)' ;$$

$$L<|r|,\quad \sqrt[2n+1]{M\cdot\frac{|r|}{|r|-L}} \leqslant A .$$

III

A. U svojstvu primjera navedimo tabelarno samo neke bitno različite rezultate jednačine

$$/37/ \qquad \frac{dx}{dt} = r x^2 + f(t),$$

gdje je r realan broj i $f(t)$ neprekidna funkcija za $t \geqslant t_0 > 0$. Ako je

1° $$r<0,\ f(t)>0 \ \text{i} \ \lim_{t\to+\infty} f(t)=0,$$

sva pozitivna, ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ su asimptotski ograničena i bar jedno negativno rješenje koje teži nuli.

2° $$r>0,\ \lim_{t\to+\infty} f(t) = -b \quad (b>0),$$

sva negativna i jedna klasa pozitivnih rješenja su asimptotski ograničena i bar jedno pozitivno koje teži $\sqrt{\frac{b}{r}}$.

3° $$r<0,\ 0<-\frac{f(t)}{r}<m(t),$$

gdje je $m(t)$ pozitivna i monotona funkcija, koja teži nuli kad $t\to+\infty$, takva da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$r\cdot\varepsilon(t) < \left(\sqrt{m(t)+\varepsilon(t)}\right)',$$

sva pozitivna rješenja su asimptotski ograničena, a jedna klasa tih rješenja, kao i ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ i bar jedno negativno teže nuli.

4° $$r>0,\ \lim_{t\to+\infty} f(t)=b\ (b<0),\ 0<m_1(t)<-\frac{f(t)}{r}<m_2(t),$$

gdje su funkcije $m_1(t)$ i $m_2(t)$ pozitivne, monotone, teže $-\frac{b}{r}$ kad $t\to+\infty$, da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$-r\cdot\varepsilon(t) < \left(\sqrt{m_1(t)-\varepsilon(t)}\right)',\quad r\cdot\varepsilon(t) > \left(\sqrt{m_2(t)+\varepsilon(t)}\right)',$$

sva negativna i jedna klasa pozitivnih rješenja su asimptotski ograničena, a jedna klasa tih rješenja i teži $-\sqrt{-\frac{b}{r}}$ i bar jedno pozitivno koje teži $\sqrt{-\frac{b}{r}}$.

B. Takodje, u svojstvu primjera posmatrajmo jednačinu

/38/ $$\frac{dx}{dt} = rx^2 + f(t) + g(t,x),$$

gdje je r realan broj, $f(t)$ neprekidna i ograničena funkcija za $t\geq t_0>0$, $g(t,x)$ za $t\geq t_0>0$ i $|x|<+\infty$ ispunjava iste uslove kao u jednačini /17/ i da važi

$$g(t,x) = h(t,x)\cdot x^2,\quad x\neq 0,$$

te umjesto jednačine /38/ posmatrajmo jednačinu

/38'/ $$\frac{dx}{dt} = (r+h(t,x))\cdot x^2 + f(t),$$

gdje funkcija $h(t,x)$ ispunjava iste osnovne uslove kao u jednačini /17'/.

Evo samo nekih rezultata bez dokaza.

1° $$r>0,\ -M<f(t)<0$$

/M je pozitivna konstanta/. Asimptotska rješenja su: sva negativna, ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ i bar jedno pozitivno.

2° $$r<0,\ \lim_{t\to+\infty} f(t)=0,\ f(t)>0\ (t\geq t_0).$$

Asimptotska rješenja su: sva pozitivna, ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ i bar jedno negativno koje teži nuli.

3° $$r<0,\ 0<f(t)<m(t),$$

gdje je funkcija $m(t)$ pozitivna, monotona, teži nuli, da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$(r+L)\cdot\varepsilon(t) < \left(\sqrt{\frac{m(t)}{|r|-L}+\varepsilon(t)}\right)'.$$

Asimptotska rješenja su: sva pozitivna, a jedna klasa tih rješenja, kao i ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ i bar jedno negativno teže nuli.

4^0 $$r>0,\ m_1(t)<|h(t,x)|<m_2(t),\ \lim_{t\to+\infty} f(t)=b\ \ (b<0),$$

gdje su funkcije $m_1(t)$ i $m_2(t)$ pozitivne, monotone i teže broju a $(a\geqslant 0)$, a $m_2(t)\leqslant L$ $(t\geqslant t_0)$. Asimptotska rješenja su: sva negativna i jedna klasa pozitivnih i postoji bar jedno pozitivno rješenje koje teži $\sqrt{-\frac{b}{r+a}}$ /kada je $\lim_{t\to+\infty} h(t,x)=a$ za svako $|x|<+\infty$ / ili $\sqrt{-\frac{b}{r-a}}$ /kada je $\lim_{t\to+\infty} h(t,x)=-a$ za svako $|x|<+\infty$ /.

5^0 $$r>0,\ 0<m_1(t)<h(t,x)<m_2(t),$$
$$-n_1(t)<f(t)<-n_2(t)<0,$$

gdje su funkcije $m_1(t)$ i $m_2(t)$ pozitivne, monotone i teže broju a $(a\geqslant 0)$, a $m_2(t)\leqslant L$ $(t\geqslant t_0)$, funkcije $n_1(t)$ i $n_2(t)$ pozitivne, monotone, teže broju b $(b>0)$, da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$(r+m_1(t))\cdot\varepsilon(t)>-\left(\sqrt{\frac{n_1(t)}{r+m_1(t)}}+\varepsilon(t)\right)',$$
$$(r+m_2(t))\cdot\varepsilon(t)>\left(\sqrt{\frac{n_2(t)}{r+m_2(t)}}-\varepsilon(t)\right)'.$$

Asimptotska rješenja su: sva negativna i jedna klasa pozitivnih, a jedna klasa tih rješenja i teži $-\sqrt{\frac{b}{r+a}}$, i bar jedno pozitivno rješenje koje teži $\sqrt{\frac{b}{r+a}}$.

6^0 $$r=0,\ h(t,x)<-a<0,\ \lim_{t\to+\infty} f(t)=0,\ f(t)>0\ (t\geqslant t_0).$$

Asimptotska rješenja su: sva pozitivna, ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ i bar jedno negativno koje teži nuli.

7^0 $r=0,\ \lim_{t\to+\infty} h(t,x)=a$ za svako $|x|<+\infty,\ \lim_{t\to+\infty} f(t)=b\ \ (a>0,\ b<0)$.

Asimptotska rješenja su: sva negativna i jedna klasa pozitivnih i postoji bar jedno pozitivno koje teži $\sqrt{-\frac{b}{a}}$.

8^0 $$r=0,\ 0<a<h(t,x),\ -n(t)<f(t)<0,$$

gdje je funkcija $n(t)$ pozitivna, monotona, teži nuli kad $t\to+\infty$, da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$a\cdot\varepsilon(t)>-\left(\sqrt{\frac{n(t)}{a}}+\varepsilon(t)\right)'.$$

Asimptotska rješenja su: sva negativna, a jedna klasa tih rješenja, kao i ona koja prolaze kroz tačke ose $x=0$ i bar jedno pozitivno teže nuli.

9° $\quad r=0;\ |h(t,x)|>a;\ h(t,x)\cdot x<0,\ x\neq 0;\ |f(t)|<n(t),$

gdje funkcija $n(t)$ ispunjava iste uslove kao u 6°, sva su rješenja asimptotska, a jedna klasa i teži nuli.

10° $\quad r=0,\ -m_1(t)<h(t,x)<-m_2(t)<0,\quad 0<n_1(t)<f(t)<n_2(t),$

gdje su funkcije $m_1(t)$ i $m_2(t)$ pozitivne, monotone, teže a $(a>0)$ kad $t\to+\infty$ i $m_2(t)\leq L$ $(t\geq t_0)$, funkcije $n_1(t)$ i $n_2(t)$ su pozitivne, monotone, teže b $(b>0)$ kad $t\to+\infty$, da postoji funkcija $\varepsilon(t)$ i da je

$$m_1(t)\cdot\varepsilon(t)>\left(\sqrt{\frac{n_1(t)}{m_1(t)}}-\varepsilon(t)\right)',$$
$$m_2(t)\cdot\varepsilon(t)>-\left(\sqrt{\frac{n_2(t)}{m_2(t)}}+\varepsilon(t)\right)'.$$

Asimptotska rješenja su: sva pozitivna i jedna klasa negativnih, a jedna klasa tih rješenja i teži $\sqrt{\frac{b}{a}}$, i postoji bar jedno negativno rješenje koje teži $-\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Ako u jednačinama /37/ i /38/ umjesto r stavimo $a(t)$, gdje je $\lim\limits_{t\to+\infty}a(t)=r$, izvedena razmatranja važe i u ovom slučaju.

Takodje, važi i sljedeće uopštenje.

Ako u jednačinama /37/ i /38'/ članove $r\cdot x^2$ i $(r+h(t,x))\cdot x^2$ zamjenimo respektivno članovima

$$r\cdot x^{2n}\quad i\quad (r+h(t,x))\cdot x^{2n}\qquad (n=1,2,\cdots),$$

tada svi navedeni rezultati ostaju tačni, samo umjesto odgovarajućih drugih korjena ovdje bismo imali $2n$-ti korjen.

G L A V A II

NOVE "CIJEVI" METODE RETRAKCIJE U DIREKTNOJ KVALITATIVNOJ ANALIZI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Primjena metode retrakcije svodi se na formiranje odgovarajućih "cijevi" kroz čije granice prolaze integralne krive izlazeći iz te "cijevi", ili ulazeći u nju, i zaključak da postoji bar jedno rješenje jednačine koje ostaje u toj "cijevi", odnosno jedna klasa ili sva rješenja ostaju u toj "cijevi" /vidjeti glavu I/.

"Cijevi" o kojima je riječ do sada su bile pravolinijske, krivolinijske i stepenaste "cijevi" /vidjeti [2], [8], [9], [24] i [25]/. Krivolinijske "cijevi" su formirane pomoću monotonih i ograničenih krivih /odnosno, monotonih krivih i pravih/, njima se obezbjedjivalo postojanje bar jednog rješenja /u slučaju izlaženja integralnih krivih iz "cijevi"/, odnosno obezbjedjivalo se postojanje jedne klase rješenja /u slučaju ulaženja integralnih krivih u odgovarajuću "cijev"/ koja ostaje u "cijevi" za sve $t \geq t_0$.

M. Bertolino je formirao i stepenastu "cijev" čije su granice stepenaste izlomljene linije sastavljene od segmenata paralelnih koordinatnim osama i preko nje, a na osnovu metode retrakcije, obezbjedjuje mogućnost postojanja bar jednog rješenja koje pripada toj "cijevi".

Cilj nam je da ovdje proširimo i uopštimo dosadašnje rezultate formirajući krivolinijske "cijevi" izlaznih integralnih krivih, kao i "cijevi" ulaznih integralnih, koje su odredjene neprekidnim krivama od kojih se ne traži da budu monotone niti ograničene, kao i da ukažemo na primjenu dobijenih rezultata kod problema stabilnosti rješenja diferencijalnih jednačina, posmatrajući jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) ,$$

gdje funkcija $f(t,x)$, za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$ zadovoljava odgovarajuće uslove za egzistenciju i jedinost rješenja. Time ćemo učiniti novi doprinos kvalitativnoj analizi diferencijalnih jednačina.

U ovoj glavi, pored formiranja novih krivolinijskih "cijevi" u jednom načelnom obliku kroz posmatranje gornje jednačine, kao posebne primjere posmatraćemo i jednačine oblika

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t),$$

i

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x)x + h(t,x),$$

odnosno

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x)x^n + h(t,x) \quad (n = 1,2,\cdots);$$

sa ciljem da prezentiramo neke mogućnosti u praktičnom formiranju tih novih krivolinijskih "cijevi", a što ćemo konkretnim primjerima još jednom naglasiti i istaći praktični značaj tih "cijevi". Na kraju ove glave, koristeći dobijene rezultate, zadržaćemo se posebno na pitanju stabilnosti rješenja.

§ 1. NOVE "CIJEVI" IZLAZNIH INTEGRALNIH KRIVIH

Kako smo već napomenuli, do sada smo imali "cijevi" izlaznih integralnih krivih koje su odredjivane pravama paralelnim sa apscisnom osom, ili sa monotonim krivama koje teže nekoj konstanti kad $t \to +\infty$ i gdje je donja granica "cijevi" monotono rastuća, a gornja granica "cijevi" monotono opadajuća kriva. Takodje su korišćene "cijevi" koje su odredjene jednom konstantnom pravom i monotonom krivom koja teži toj pravoj rastući ili opadajući.

Ovdje ćemo sada da formiramo "cijevi" izlaznih integralnih krivih koje su odredjene definisanim i neprekidnim krivama, koje ne moraju biti monotone, niti ograničene. Razlikovaćemo "cijevi" sa ograničenom širinom, kao i one čija širina teži nuli kad $t \to +\infty$.

Posmatrajmo jednačinu

/1/ $$\frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

gdje je $f(t,x)$ definisana i neprekidna funkcija i ispunjava odgovarajuće uslove za jedinost rješenja u poluravni tOx $(t \geq t_0)$.

Možemo dati sljedeće tvrdjenje.

TVRDJENJE 1.

Ako postoji neprekidna funkcija $x = \varphi(t)$ takva da je, za $t \geq t_0$,

$$f(t,\varphi(t)) = 0,$$

/2/ $$f(t,x) < 0 \text{ za } x < \varphi(t),$$

$$f(t,x) > 0 \text{ za } x > \varphi(t),$$

te ako postoje neprekidne funkcije $x = v_1(t)$ i $x = v_2(t)$ takve da je, za $t \geq t_0$,

$$v_1(t) < \varphi(t) < v_2(t)$$

i da su, za $t \geq t_0$, ispunjeni uslovi

/3/ $$f(t, v_1(t)) < v_1'(t),$$

$$f(t, v_2(t)) > v_2'(t),$$

tada jednačina /1/ ima bar jedno rješenje $x(t)$ koje ispunjava uslov

/4/ $$v_1(t) < x(t) < v_2(t)$$

za sve $t \geq t_0$. /Uslovi /3/ su, ustvari, nejednakosti Čapliginovog tipa./

Zaista, prema uslovima /3/, za "cijev" ω izlaznih integralnih krivih metode retrakcije možemo uzeti da je

/5/ $$t > t_0, \quad v_1(t) < x < v_2(t).$$

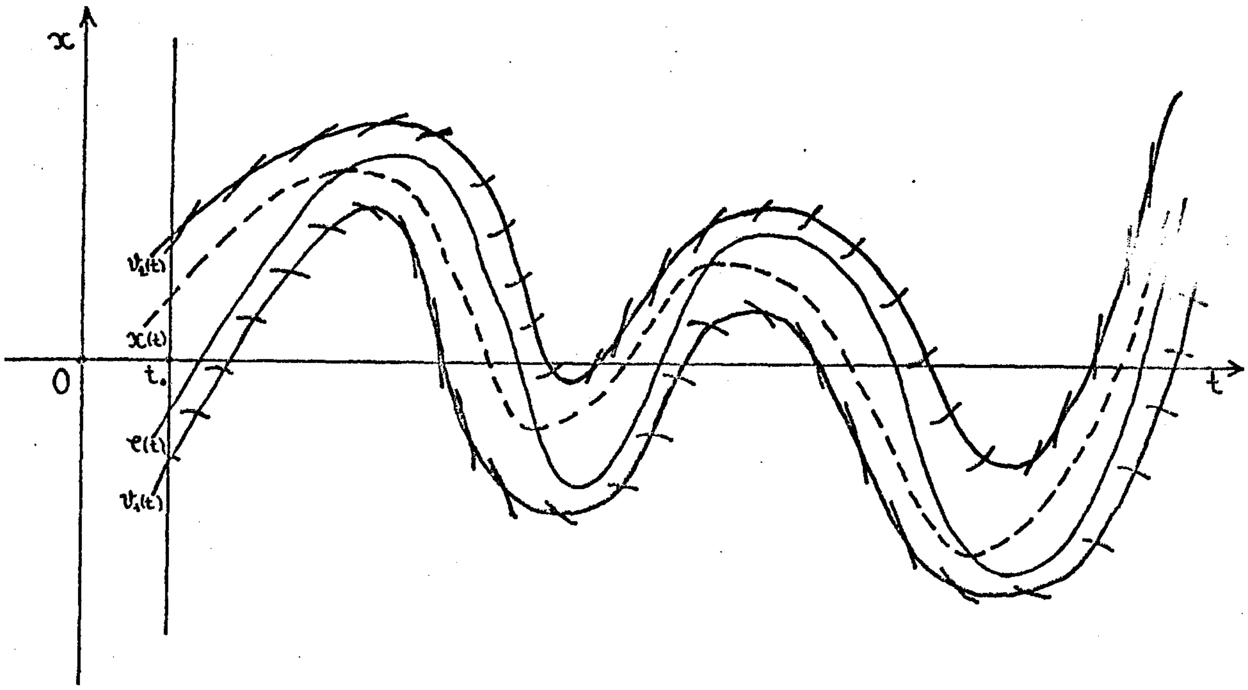
Naime, sve integralne krive koje prolaze kroz tačke krivih $x = v_1(t)$ i $x = v_2(t)$ $(t > t_0)$ izlaze iz "cijevi" ω, prema uslovima /3/ i pretpostavci o jedinosti rješenja, te i čine skup tačaka striktnog izlaza metode retrakcije. Otuda, prema metodi retrakcije, postoji bar jedno rješenje $x(t)$ jednačine /1/ koje ostaje u "cijevi" /5/ za sve $t > t_0$. Ponašanje integralnih krivih ilustruje slika 1.

Kako uslovi /3/ važe i za $t = t_0$ to će rješenje koje pripada "cijevi" /5/ da pripada i "cijevi"

/5'/ $$t \geq t_0, \quad v_1(t) < x < v_2(t)$$

za sve $t \geq t_0$, tj rješenje će da pripada "cijevi" /5'/ i za $t = t_0$. Zbog toga umjesto "cijevi" /5/ možemo uzimati "cijev" /5'/ kao "cijev" izlaznih integralnih krivih koja će, prema metodi retrakcije, da garantuje postojanje bar jednog rješenja koje joj pripada za sve $t \geq t_0$, što ćemo ubuduće /u cijelom radu/ i činiti.

Dakle, prema metodi retrakcije, jednačina /1/ ima bar jedno rješenje $x(t)$ koje pripada "cijevi" /5'/ za sve $t \geq t_0$, te ono ispunjava i uslov /4/ za sve $t \geq t_0$.



Sl. 1

Primjetimo sada neka bitna zapažanja korisna za formiranje navedene "cijevi", što neposredno proizilazi iz ponašanja krive stacionarnih tačaka $x=\varphi(t)$, za koju su ispunjeni uslovi /2/.

a/ Ako je kriva $x=\varphi(t)$ ograničena za $t \geq t_0$, tj. ako je

$$C_1 < \varphi(t) < C_2 \quad \text{za } t \geq t_0 ,$$

gdje su C_1 i C_2 brojne konstante, onda se može postaviti pravolinijska "cijev"

$$t \geq t_0 , \quad C_1 < x < C_2 .$$

b/ Ako funkcija $\varphi(t)$ teži nekom broju kad $t \to +\infty$, tada se za funkcije $\vartheta_1(t)$ i $\vartheta_2(t)$ mogu odrediti respektivno monotono neopadajuća i monotono nerastuća kriva koje teže tom broju kad $t \to +\infty$.

/Zapažanja a/ i b/ koristili smo u glavi I, a koristio ih je i M. Bertolino u svojim radovima /vidjeti [2], [3], [4] i [5] /.

Od posebnog je značaja rezultat sljedećeg tvrdjenja.

TVRDJENJE 2.

Ako funkcija $x=\varphi(t)$ ispunjava uslove /2/ i monotono je neopadajuća, za $t \geq t_0$, tada se za donju granicu "cijevi" metode retrakcije može uzeti sama kriva $\varphi(t)$, a ako je funkcija $x=\varphi(t)$ monotono nerastuća, tada se za gornju granicu "cijevi" može uzeti kriva $\varphi(t)$ / $\varphi(t) \neq \text{const. za sve } t \geq t_0$/.

Dokaz. Posmatrajmo slučaj kada je funkcija $x=\varphi(t)$ monotono neopadajuća.

Pretpostavimo da postoji integralna kriva $x_1(t)$ jednačine /1/ koja sa gornje strane dodiruje krivu stacionarnih tačaka $\varphi(t)$ u nekoj tački $t=t_1$. Posmatrajmo interval po t: $(t_1-\eta_1, t_1+\eta_2)$, gdje su η_1 i η_2 proizvoljno mali pozitivni brojevi. Sve integralne krive koje prolaze kroz tačke oblasti

$$t_1-\eta_1 < t < t_1, \quad \varphi(t) < x < x_1(t)$$

presjeći će krivu $\varphi(t)$ zbog pretpostavke o jedinosti rješenja jednačine /1/. S druge strane, kroz tačke oblasti

/6/ $$t_1 < t < t_1+\eta_2, \quad \varphi(t) < x < x_1(t)$$

ne prolazi ni jedna integralna kriva, jer ukoliko bi postojale krive koje prolaze kroz te tačke one bi, gledajući njihovo produženje u lijevo, morale presjecati krivu $x_1(t)$. No, postojanje takve oblasti /6/ ne dolazi u obzir zbog pretpostavke o egzistenciji i jedinosti rješenja jednačine /1/.

Prema tome, integralna kriva $x_1(t)$ u tački $t=t_1$ mora presjeći krivu $\varphi(t)$, te je ta tačka presjeka tačka striktnog izlaza "cijevi"

/7/ $$t \geq t_0, \quad \varphi(t) < x < \nu_2(t).$$

Drugim riječima, ne postoje tačke krive $\varphi(t)$ $(t \geq t_0)$ koje su tačke unutrašnjeg klizanja, a kako je $f(t,x)<0$ za $x<\varphi(t)$ $(t\geq t_0)$ to su sve tačke krive $x=\varphi(t)$ tačke striktnog izlaza.

Prema tome, za donju granicu "cijevi" može se uzeti kriva $x=\varphi(t)$.

Primjetimo sada i to da se u slučaju kada je kriva $x=\varphi(t)$ monotona za jednu granicu "cijevi" metode retrakcije može uzeti stepenasta linija $x=\mathcal{L}$ ili $x=\Lambda_\gamma$ stepenaste "cijevi" M. Bertolina /vidjeti [9] /. Naime, ako je $x=\varphi(t)$ monotono neopadajuća kriva tada se u oblasti

$$\varphi(t)-\varepsilon < x < \varphi(t), \quad t \geq t_0,$$

gdje je ε mali pozitivan broj, može formirati poligonalna linija

$$x=\mathcal{L}, \quad t\geq t_0,$$

koja je sastavljena od segmenata paralelnih sa osama t i x, kao donja granica "cijevi" izlaznih integralnih krivih. Ako je, pak, kriva $x=\varphi(t)$ monotono nerastuća tada se na isti način u oblasti

$$\varphi(t) < x < \varphi(t)+\varepsilon, \quad t \geq t_0$$

može formirati poligonalna linija

$$x=\Lambda_\gamma, \quad t\geq t_0,$$

kao gornja granica "cijevi" izlaznih integralnih krivih.

Polazeći od osnovnih uslova /2/, tj. od činjenice da postoji kriva $x=\varphi(t)$ /kriva stacionarnih tačaka/ koja je granica dviju oblasti u kojima integralne krive jednačine /1/ imaju suprotne koeficijente smjera, formiraćemo dvije posebne vrste krivolinijskih "cijevi" izlaznih integralnih krivih podesnih za praksu.

Jednu, uzimajući da je

/8/ $$\vartheta_1(t)=\varphi(t)-d_1\,,\quad \vartheta_2(t)=\varphi(t)+d_2\quad (t\geq t_0)\,,$$

gdje su d_1 i d_2 pozitivni brojevi. U ovom slučaju imamo "cijev" konstantne širine

/9/ $$t\geq t_0\,,\quad \varphi(t)-d_1<x<\varphi(t)+d_2\,.$$

U slučaju kada je

/10/ $$\vartheta_1(t)=\varphi(t)-\varepsilon_1(t)\,,\quad \vartheta_2(t)=\varphi(t)+\varepsilon_2(t)\quad (t\geq t_0)\,,$$

gdje su $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ neprekidne i monotono opadajuće funkcije[1] za $t\geq t_0$ i

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon_1(t)=\lim_{t\to+\infty}\varepsilon_2(t)=0\,,$$

imamo drugu "cijev"

/11/ $$t\geq t_0\,,\quad \varphi(t)-\varepsilon_1(t)<x<\varphi(t)+\varepsilon_2(t)\,,$$

"cijev" čija širina teži nuli kad $t\to+\infty$.

"Cijev" /11/ daje bolji rezultat. Ona obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja $x(t)$ koje, za dovoljno veliko $t\geq t^*>t_0$, pripada proizvoljno maloj okolini krive $x=\varphi(t)$ i koje ispunjava uslov

$$\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t)-x(t)|=0\,,$$

što može biti dobro iskorišteno pri traženju odgovarajućeg približnog rješenja jednačine /1/.

Formiranje "cijevi" oblika /9/ i /11/, naravno, nije uvijek moguće, pogotovo "cijevi" /11/. To zavisi od desne strane jednačine /1/. Primjeri koji će biti navedeni pokazaće da su mogući i povoljni slučajevi.

U praksi formiranje "cijevi" /9/ i /11/ vezano je za odredjivanje brojeva d_1 i d_2, odnosno funkcija $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ tako da su uslovi /3/ zadovoljeni.

Primjetimo još i to da u slučaju nekih konkretnih primjera možemo vršiti suženje "cijevi" /9/ i /11/, tako da se donja granica "cijevi"

---

[1] Funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ ne moraju biti monotone. No, uzimajući da su te funkcije monotone ne umanjujemo opštost posmatranja, ali ga pojednostavljujemo.

zamjeni djelimično, ili u cjelini, monotono neopadajućom krivom koja je bliža krivoj $\varphi(t)$ od postojeće donje granice, a gornja granica "cijevi" zamjeni djelimično, ili u cjelini, monotono nerastućom krivom, tako da nove granice "cijevi" budu takodje neprekidne krive. Granice nove "cijevi" su takodje skupovi tačaka striktnog izlaza.

§ 1.1.

Sada, u svojstvu primjera, posmatrajmo jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t), \tag{12}$$

gdje su $a(t)$ i $f(t)$ definisane i neprekidne funkcije i $a(t)>0$ za $t \geqslant t_0$. /Ova jednačina biće posebno posmatrana u glavi IV ovog rada./

Ovdje je kriva stacionarnih tačaka $\varphi(t) = -\frac{f(t)}{a(t)}$, a kako je $a(t)>0$ $(t \geqslant t_0)$ to su uslovi /2/ zadovoljeni.

Uzmemo li da je

$$v_1(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} - d_1, \quad v_2(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} + d_2 \quad (t \geqslant t_0)$$

uslovi /3/ postaju

$$-a(t)d_1 < \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)',$$

$$a(t)d_2 > \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)',$$

odakle je

$$\begin{aligned} d_1 &> \frac{-1}{a(t)}\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)', \\ d_2 &> \frac{1}{a(t)}\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)', \end{aligned} \tag{13}$$

te imamo zaključak: Ako je

$$\frac{1}{a(t)}\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \leqslant K \quad \text{za } t \geqslant t_0,$$

gdje je K pozitivna konstanta, tada se može za jednačinu /12/ formirati "cijev" oblika /9/, gdje se brojevi d_1 i d_2 odredjuju prema uslovima /13/, koja obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja koje ostaje u toj "cijevi" za sve $t \geqslant t_0$.

Ako, pak, uzmemo da je

$$v_1(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon_1(t), \quad v_2(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon_2(t) \quad (t \geqslant t_0),$$

uslovi /3/ postaju

$$-a(t)\varepsilon_1(t) < \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' - \varepsilon_1'(t),$$

$$a(t)\varepsilon_2(t) > \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' + \varepsilon_2'(t),$$

odnosno

$$a(t)\varepsilon_1(t) - \varepsilon_1'(t) > -\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)',$$

/14/

$$a(t)\varepsilon_2(t) - \varepsilon_2'(t) > \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' .$$

Slijedi zaključak: Ako postoje pozitivne i neprekidne funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ koje teže nuli kad $t\to+\infty$, takve da su uslovi /14/ ispunjeni, tada se za jednačinu /12/ može formirati "cijev" oblika /11/ koja obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja koje pripada toj "cijevi" za sve $t\geqslant t_0$.

Posebno primjetimo, da ako je

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{a(t)}\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' = 0 ,$$

tada sigurno postoje monotono opadajuće funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ koje teže nuli i koje ispunjavaju uslove /14/.

PRIMJERI

1° Posmatrajmo jednačinu $x' = x - \sin t$.

Ovdje je $\varphi(t)=\sin t$. Uslovi /2/ su zadovoljeni. Za brojeve d_1 i d_2, prema /13/, možemo uzeti da je $d_1=d_2=d=1+\mathcal{L}$, gdje je $\mathcal{L}$ proizvoljno mali pozitivan broj. Na slici 2 je prikazana "cijev"

$$t\geqslant t_0=0,\ \sin t - d < x < \sin t + d$$

/za t_0 može se uzeti bilo koji broj/, kao i uža "cijev" koja takodje sadrži bar jedno rješenje jednačine. Opšte rješenje jednačine je $x = Ce^t + \frac{1}{2}(\sin t+\cos t)$, a rješenje $x = \frac{1}{2}(\sin t+\cos t)$ zaista je sadržano u užoj "cijevi".

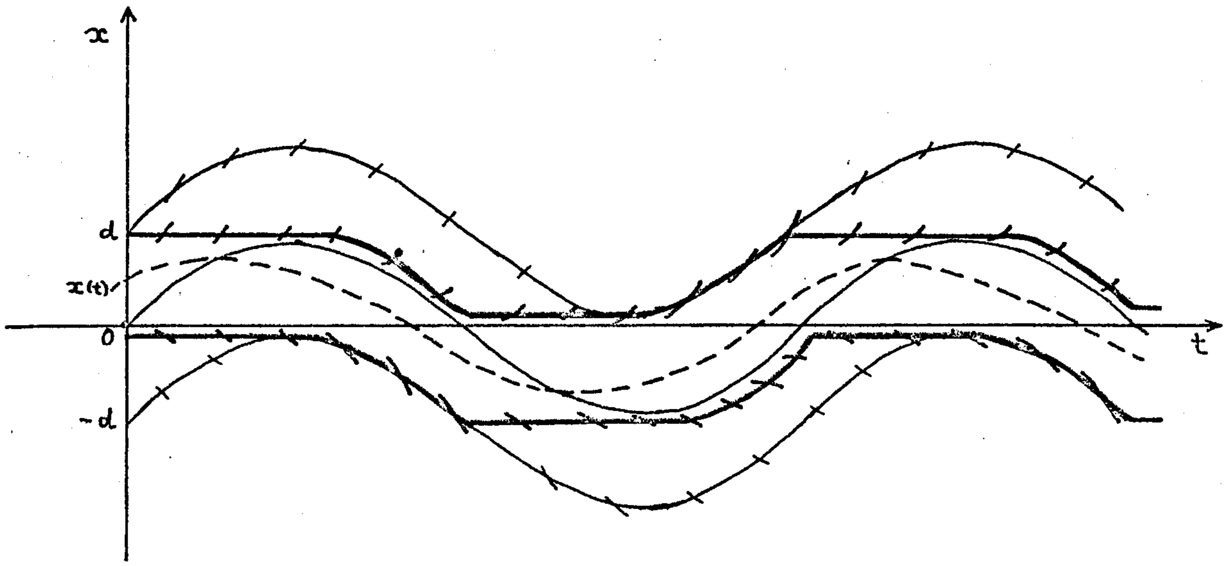
2° Neka je $x' = tx - t\sin t$.

Imamo $\varphi(t)=\sin t$, a uzmemo li da je $\varepsilon_1(t)=\varepsilon_2(t)=\frac{1}{t}$ uslovi /14/ su ispunjeni za $t\geqslant 1$, te imamo zaključak da postoji bar jedno rješenje $x(t)$ zadane jednačine koje ispunjava uslov

$$\sin t - \frac{1}{t} < x(t) < \sin t + \frac{1}{t}$$

za sve $t\geqslant 1$.

3° Uzmimo jednačinu $x' = x - t - \sin t$.



Sl. 2

Ovdje je kriva stacionarnih tačaka $\varphi(t) = t + \sin t$. Imamo $\varphi'(t) = 1 + \cos t \geqslant \geqslant 0$, tj. kriva $\varphi(t)$ je monotono neopadajuća, te za donju granicu "cijevi" metode retrakcije, prema tvrdёnju 2, možemo uzeti da je sama kriva $\varphi(t)$, tj. $v_1(t) = t + \sin t$. Za gornju granicu "cijevi" možemo uzeti da je $v_2(t) = t + \sin t + 2 + \alpha$, gdje je α mali pozitivan broj. Prema tome, jednačina ima bar jedno rješenje $x(t)$ koje ispunjava uslov

$$t + \sin t < x(t) < t + \sin t + 2 + \alpha$$

za sve $t \geqslant 1$.

Primjetimo da je opšte rješenje zadane jednačine $x = ce^t + t + 1 + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$ i da rješenje /za $C = 0$ / $x = t + 1 + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$ zaista ispunjava gornji uslov.

§ 1.2.

Iz prethodnog se vidi da je cilj odrediti odgovarajuću "cijev" koja je ograničena krivama $x = v_1(t)$ i $x = v_2(t)$ koje ispunjavaju uslove /3/, a od kojih se ne traži da budu monotone.

Uz postojanje funkcije $x = \varphi(t)$ koja ispunjava uslove /2/ /kriva stacionarnih tačaka/ dali smo ideju o nalaženju tih krivih $v_1(t)$ i $v_2(t)$ oblika /8/ i /10/ i tako formirali krivolinijske "cijevi" izlaznih integralnih krivih oblika /9/ i /11/.

Medjutim, ako nije "lako", ili ako nije moguće odrediti krivu stacionarnih tačaka $\varphi(t)$ jednačine /1/, te ako jednačina /1/ ima više krivih stacionarnih tačaka, tada za formiranje krivolinijskih "cijevi" odgovarajuće širine i "cijevi" čija širina teži nuli, a koje su ograničene krivama $v_1(t)$ i $v_2(t)$, koje ne moraju da budu monotone, treba da damo dopunska razmatranja.

Neka su nam poznate funkcije $x=\psi_1(t)$ i $x=\psi_2(t)$ takve da je

$$\psi_1(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \psi_2(t) \quad \text{za } t \geqslant t_0 ,$$

te da je

/15/ $$\psi_2(t)-\psi_1(t) \leqslant d \quad \text{za } t \geqslant t_0$$

/ d je pozitivan broj/ ili, pored toga, i

/16/ $$\lim_{t\to+\infty}\left(\psi_2(t)-\psi_1(t)\right)=0 .$$

Ako za funkcije $v_1(t)$ i $v_2(t)$ uzmemo

/17/ $$v_1(t)=\psi_1(t)-d_1 , \quad v_2(t)=\psi_2(t)+d_2$$

/ d_1 i d_2 su pozitivni brojevi/, odnosno

/18/ $$v_1(t)=\psi_1(t)-\varepsilon_1(t) , \quad v_2(t)=\psi_2(t)+\varepsilon_2(t),$$

gdje su $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ monotono opadajuće funkcije i ispunjavaju uslov

/19/ $$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon_1(t)=\lim_{t\to+\infty}\varepsilon_2(t)=0 ,$$

te ako su za funkcije $v_1(t)$ i $v_2(t)$ ispunjeni uslovi /3/, tada, u slučaju /17/ imamo krivolinijsku "cijev"

/2o/ $$t \geqslant t_0, \quad \psi_1(t)-d_1 < x < \psi_2(t)+d_2 ,$$

a u slučaju /18/ imamo krivolinijsku "cijev"

/21/ $$t \geqslant t_0, \quad \psi_1(t)-\varepsilon_1(t) < x < \psi_2(t)+\varepsilon_2(t),$$

koje, prema metodi retrakcije, sadrže po bar jedno rješenje jednačine /1/ za sve $t \geqslant t_0$.

Praktično, prema izloženom, imamo četiri oblika krivolinijskih "cijevi". To su "cijevi" oblika /2o/ i /21/ uz uslov da funkcije $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ ispunjavaju uslov /15/, odnosno, /15/ i /16/. Od tih "cijevi" najbolji rezultat daje "cijev" oblika /21/ u slučaju kada funkcije $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ ispunjavaju uslove /15/ i /16/, jer jedino širina te "cijevi" teži nuli kad $t\to+\infty$.

Funkcije $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ moguće je odredjivati prema uslovima koje ispunjavaju funkcije koje figurišu na desnoj strani zadane jednačine.

Zadržimo se posebno na jednačini

/22/ $$\frac{dx}{dt}=g(t,x)\,x+h(t,x),$$

gdje su funkcije $g(t,x)$ i $h(t,x)$ definisane, neprekidne i ispunjavaju potrebne uslove o jedinosti rješenja u poluravni tOx $(t \geq t_0)$.

Jednačina oblika /22/ proučena je u glavi I, gdje smo posmatrali ograničena rješenja, kao i rješenja koja teže nekom broju, uz pomoć pravolinijskih i krivolinijskih "cijevi" koje su odredjivane pomoću ograničenih i monotonih krivih.

Navesćemo samo dva bitno različita rezultata, s obzirom na različite uslove o funkcijama $g(t,x)$ i $h(t,x)$ /teoreme 1 i 2/.

TEOREMA 1.

Ako funkcije $g(t,x)$ i $h(t,x)$, za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$, ispunjavaju uslove

/23/ $$0 < g_1(t) \leq g(t,x) \leq g_2(t),$$

/24/ $$h_1(t) \leq h(t,x) \leq h_2(t) < 0,$$

gdje su $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ i $h_2(t)$ definisane i neprekidne funkcije za $t \geq t_0$, te ako postoje neprekidne i monotono opadajuće funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ [1] koje ispunjavaju uslove

/25/ $$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon_1(t) = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon_2(t) = 0,$$

/26/ $$\varepsilon_2(t) < -\frac{h_2(t)}{g_2(t)}$$

i takve da je, za $t \geq t_0$,

/27/ $$g_1(t)\varepsilon_1(t) - \varepsilon_1'(t) > \left(-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}\right)',$$
$$g_2(t)\varepsilon_2(t) - \varepsilon_2'(t) > -\left(-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}\right)',$$

tada jednačina /22/ ima bar jedno pozitivno rješenje $x(t)$ koje ispunjava uslov

/28/ $$-\frac{h_2(t)}{g_2(t)} - \varepsilon_2(t) < x(t) < -\frac{h_1(t)}{g_1(t)} + \varepsilon_1(t)$$

za sve $t \geq t_0$.

Dokaz. Integralne krive jednačine /22/ imaju negativan koeficijent smjera za one vrijednosti x za koje je

$$g(t,x)x + h(t,x) < 0,$$

tj. za

$$x < -\frac{h(t,x)}{g(t,x)}.$$

---

[1]) Umjesto funkcija $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ mogu se uzeti pozitivne konstante d_1 i d_2, u skladu sa prethodnim izlaganjem. Takodje može se uzeti da je $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon(t)$.

Kako je, prema /23/ i /24/,

$$-\frac{h(t,x)}{g(t,x)} \geqslant -\frac{h_2(t)}{g_2(t)},$$

to integralne krive jednačine /22/ imaju negativan koeficijent smjera za

$$x < -\frac{h_2(t)}{g_2(t)}, \quad t \geqslant t_0 .$$

S druge strane, kako je, prema /23/ i /24/,

$$-\frac{h(t,x)}{g(t,x)} \leqslant -\frac{h_1(t)}{g_1(t)},$$

integralne krive jednačine /22/ imaju pozitivan koeficijent smjera za

$$x > -\frac{h_1(t)}{g_1(t)}, \quad t \geqslant t_0 .$$

Prema tome, za funkcije $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ možemo uzeti da je

$$\psi_1(t) = -\frac{h_2(t)}{g_2(t)}, \quad \psi_2(t) = -\frac{h_1(t)}{g_1(t)},$$

te za krive $v_1(t)$ i $v_2(t)$ možemo uzeti da je

$$v_1(t) = -\frac{h_2(t)}{g_2(t)} - \varepsilon_2(t), \quad v_2(t) = -\frac{h_1(t)}{g_1(t)} + \varepsilon_1(t) .$$

Prema uslovima teoreme, za $t \geqslant t_0$, važi

$$x'(v_1(t)) = g(t,v_1)\cdot v_1(t) + h(t,v_1) \leqslant g_2(t)\, v_1(t) + h_2(t) = -g_2(t)\varepsilon_2(t) < \left(-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}\right)' - \varepsilon_2'(t) = v_1'(t),$$

$$x'(v_2(t)) = g(t,v_2)\, v_2(t) + h(t,v_2) \geqslant g_1(t)\, v_2(t) + h_1(t) = g_1(t)\varepsilon_1(t) > \left(-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}\right)' + \varepsilon_1'(t) = v_2'(t).$$

Otuda, integralne krive jednačine /22/ koje prolaze kroz tačke krivih $v_1(t)$ i $v_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$ presjecaju te krive izlazeći iz "cijevi"

/29/ $$t \geqslant t_0, \quad -\frac{h_2(t)}{g_2(t)} - \varepsilon_2(t) < x < -\frac{h_1(t)}{g_1(t)} + \varepsilon_1(t) .$$

Otuda, prema metodi retrakcije, postoji bar jedno rješenje $x(t)$ jednačine /22/ koje se, za sve $t \geqslant t_0$, nalazi u toj "cijevi", te i ispunjava uslov /28/.

Ako funkcije $-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}$ i $-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}$ ispunjavaju uslov

/30/ $$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} + \frac{h_2(t)}{g_2(t)}\right) = 0,$$

tada širina "cijevi" /29/ teži nuli kad $t \to +\infty$, te rješenje $x(t)$ jednačine /22/ koje pripada toj "cijevi" ispunjava i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\frac{h_1(t)}{g_1(t)}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\frac{h_2(t)}{g_2(t)}\right)=0 . \tag{31}$$

Navedimo sada još jedan rezultat koji se odnosi na jednačinu /22/.

TEOREMA 2.

Ako funkcije $g(t,x)$ i $h(t,x)$, za $t\geqslant t_0$ i $|x|<+\infty$, ispunjavaju uslove

$$0<g_1(t)\leqslant g(t,x) , \tag{32}$$

$$0<n(t)\leqslant-\frac{h(t,x)}{g(t,x)}\leqslant m(t) , \tag{33}$$

gdje su $g_1(t)$, $n(t)$ i $m(t)$ definisane i neprekidne funkcije za $t\geqslant t_0$, te ako postoje neprekidne i monotono opadajuće funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ koje ispunjavaju uslov /25/ i takve da je, za $t\geqslant t_0$,

$$\begin{aligned} &g_1(t)\,\varepsilon_1(t)-\varepsilon_1'(t)>-n'(t) ,\\ &g_1(t)\,\varepsilon_2(t)-\varepsilon_2'(t)>m'(t) , \end{aligned} \tag{34}$$

tada jednačina /22/, za $t\geqslant t_0$, ima bar jedno pozitivno rješenje $x(t)$ koje ispunjava uslov

$$n(t)-\varepsilon_1(t)<x(t)<m(t)+\varepsilon_2(t) \tag{35}$$

za sve $t\geqslant t_0$.

Dokaz. Kako funkcije $g(t,x)$ i $h(t,x)$ ispunjavaju uslov /33/ to ulogu funkcija $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$, o kojima je bilo riječi, igraju respektivno funkcije $n(t)$ i $m(t)$, te se za funkcije $v_1(t)$ i $v_2(t)$ može uzeti da je

$$v_1(t)=n(t)-\varepsilon_1(t) ,\quad v_2(t)=m(t)+\varepsilon_2(t)\quad (t\geqslant t_0) .$$

Prema uslovima teoreme, za $t\geqslant t_0$, važi

$$\begin{aligned} x'(v_1(t))&=g(t,v_1)\,v_1(t)+h(t,v_1)=g(t,v_1)\left(v_1(t)+\frac{h(t,v_1)}{g(t,v_1)}\right)\leqslant\\ &\leqslant g(t,v_1)\big(v_1(t)-n(t)\big)=-g(t,v_1)\,\varepsilon_1(t)\leqslant-g_1(t)\,\varepsilon_1(t)<n'(t)-\varepsilon_1'(t)=v_1'(t) ,\\ x'(v_2(t))&=g(t,v_2)\,v_2(t)+h(t,v_2)=g(t,v_2)\left(v_2(t)+\frac{h(t,v_2)}{g(t,v_2)}\right)\geqslant\\ &\geqslant g(t,v_2)\big(v_2(t)-m(t)\big)=g(t,v_2)\,\varepsilon_2(t)\geqslant g_1(t)\,\varepsilon_2(t)>m'(t)+\varepsilon_2'(t)=v_2'(t) . \end{aligned}$$

Prema tome, integralne krive jednačine /22/ koje prolaze kroz tačke krivih $v_1(t)$ i $v_2(t)$ $(t\geqslant t_0)$ presjecaju te krive izlazeći iz "cijevi"

$$t\geqslant t_0 ,\quad n(t)-\varepsilon_1(t)<x<m(t)+\varepsilon_2(t) , \tag{36}$$

što, prema metodi retrakcije, obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja $x(t)$ jednačine /22/ koje, za sve $t \geq t_0$, pripada toj "cijevi", te i ispunjava uslov /35/.

Primjetimo sada i to da ako funkcije $n(t)$ i $m(t)$ ispunjavaju uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(m(t)-n(t)\right)=0 ,$$

tada i širina "cijevi" /36/ teži nuli kad $t\to+\infty$, te rješenje koje pripada toj "cijevi" ispunjava i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-n(t)\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-m(t)\right)=0 .$$

PRIMJERI

1° Posmatrajmo jednačinu

/37/ $$x'=\sqrt{\frac{tx^2+t+1}{1+x^2}}\cdot x-\frac{1}{\sqrt{t}}\left(2t+\sin^2 f(t,x)+t\cos t\right) ,$$

gdje je $f(t,x)$ definisana i neprekidna funkcija za $t \geq 4$ i $|x|<+\infty$.

Posmatrajmo jednačinu /37/ koristeći teoremu 1.

Primjetimo da, za $t\geq 4$ i $|x|<+\infty$, važi:

$$0<g_1(t)=\sqrt{t}<\sqrt{\frac{tx^2+t+1}{1+x^2}}=\sqrt{t+\frac{1}{1+x^2}}\leq\sqrt{t+1}=g_2(t),$$

$$h_1(t)=-\sqrt{t}\left(2+\cos t+\frac{1}{t}\right)\leq-\frac{1}{\sqrt{t}}\left(2t+\sin^2 f(t,x)+t\cos t\right)=-\sqrt{t}\left(2+\frac{\sin^2 f(t,x)}{t}+\cos t\right)\leq-\sqrt{t}(2+\cos t)=h_2(t)$$

$$-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}=2+\cos t+\frac{1}{t} ,\qquad -\frac{h_2(t)}{g_2(t)}=\sqrt{\frac{t}{t+1}}\,(2+\cos t),$$

$$\left(-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}\right)'=-\cos t-\frac{1}{t^2}<1 ,\ -\left(-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}\right)'=-\sqrt{\frac{t+1}{t}}\cdot\frac{2+\cos t}{(t+1)^2}+\sqrt{\frac{t}{t+1}}\cdot\sin t<1 .$$

Za $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ uzmimo, na primjer,

$$\varepsilon_1(t)=\varepsilon_2(t)=\varepsilon(t)=\frac{1}{\ln t} .$$

Uslovi /25/ i /26/ su očevidno zadovoljeni za $t\geq 4$. Takodje i uslovi /27/ su ispunjeni, za $t\geq 4$, jer je

$$g_1(t)\varepsilon_1(t)-\varepsilon_1'(t)=\frac{\sqrt{t}}{\ln t}+\frac{1}{t\ln t}>1 ,$$

$$g_2(t)\varepsilon_2(t)-\varepsilon_2'(t)=\frac{\sqrt{t+1}}{\ln t}+\frac{1}{t\ln t}>1 .$$

Prema tome, svi uslovi teoreme 1 su ispunjeni, za $t\geq 4$, te jednačina /37/ ima bar jedno pozitivno rješenje koje ispunjava uslov

$$\sqrt{\frac{t}{t+1}}(2+\cos t)-\frac{1}{\ln t}<x(t)<2+\cos t+\frac{1}{t}+\frac{1}{\ln t}$$

za sve $t \geqslant 4$, te i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt{\frac{t}{t+1}}\,(2+\cos t)\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-(2+\cos t+\frac{1}{t})\right)=0,$$

odnosno

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-(2+\cos t)\right)=0 .$$

2^0 Posmatrajmo jednačinu

/38/ $$x'=\left(t-\frac{1}{1+\varphi(t,x)}\right)x-t\ln\left(t^3+e^{-\psi(t,x)}\right)-t\sin t+1 ,$$

gdje su $\varphi(t,x)\geqslant 0$ i $\psi(t,x)\geqslant 0$ definisane i neprekidne funkcije i ispunjavaju potrebne uslove za jedinost rješenja jednačine za $t\geqslant 5$ i $|x|<+\infty$.

Ovdje ćemo primjeniti teoremu 2.

Za $t\geqslant 5$ i $|x|<+\infty$ važi:

$$g(t,x)\equiv t-\frac{1}{1+\varphi(t,x)}\geqslant t-1=g_1(t)>0 ,$$

$$0<m(t)=\ln t^3+\sin t-\frac{1}{t}=\frac{t\ln t^3+t\sin t-1}{t}<-\frac{h(t,x)}{g(t,x)}\equiv$$

$$\equiv\frac{t\ln\left(t^3+e^{-\psi(t,x)}\right)+t\sin t-1}{t-\frac{1}{1+\varphi(t,x)}}\leqslant\frac{t\ln(t^3+1)+t\sin t-1}{t-1}=M(t) .$$

Dalje, za $t\geqslant 5$, važi:

$$-m'(t)=-\frac{3}{t}-\cos t-\frac{1}{t^2}<1 ,$$

$$M'(t)=\frac{-\ln(t^3+1)-\sin t+\left(\frac{3t^3}{t^3+1}+t\cos t\right)(t-1)+1}{(t-1)^2}<\frac{-3\ln t+(t+3)(t-1)+2}{(t-1)^2}<2 .$$

Uzmemo li da je, na primjer,

$$\varepsilon_1(t)=\varepsilon_2(t)=\varepsilon(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t}}$$

uslovi /34/ su ispunjeni, za $t\geqslant 5$, jer je

$$g_1(t)\,\varepsilon(t)-\varepsilon'(t)=\frac{t-1}{\sqrt[3]{t}}+\frac{1}{3t\sqrt[3]{t}}>2 .$$

Dakle, svi uslovi teoreme 2 su ispunjeni za $t\geqslant 5$, te postoji bar jedno rješenje $x(t)$ jednačine /38/ koje ispunjava uslov

$$\ln t^3+\sin t-\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt[3]{t}}<x(t)<\frac{t\ln(t^3+1)+t\sin t-1}{t-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{t}}$$

za sve $t\geqslant 5$. To rješenje očevidno ispunjava i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-(\ln t^3+\sin t-\frac{1}{t})\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\frac{t\ln(t^3+1)+t\sin t-1}{t-1}\right)=0 .$$

§ 2. NOVE "CIJEVI" ULAZNIH INTEGRALNIH KRIVIH

Ovdje ćemo da formiramo nove krivolinijske "cijevi" ulaznih integralnih krivih, na sličan način kao i krivolinijske "cijevi" izlaznih integralnih krivih, i iste iskoristiti na proučavanje jednačina /12/ i /22/ iz § 1.

Posmatrajmo opet jednačinu

/1/ $$\frac{dx}{dt} = f(t,x) ,$$

gdje je $f(t,x)$ definisana i neprekidna funkcija i ispunjava potrebne uslove za jedinost rješenja za $t \geqslant t_0$ i $|x| < +\infty$.

Osnovnu "cijev" ulaznih integralnih krivih formiraćemo kroz sljedeće tvrdjenje.

TVRDJENJE 3.

Ako postoji neprekidna funkcija $x = \varphi(t)$ takva da je, za $t \geqslant t_0$,

/2/ $$\begin{gathered} f(t,\varphi(t)) = 0, \\ f(t,x) > 0 \quad \text{za} \quad x < \varphi(t), \\ f(t,x) < 0 \quad \text{za} \quad x > \varphi(t), \end{gathered}$$

te ako postoje neprekidne funkcije $x = u_1(t)$ i $x = u_2(t)$ takve da je, za $t \geqslant t_0$,

/3/ $$u_1(t) < \varphi(t) < u_2(t)$$

i da su, za $t \geqslant t_0$, ispunjeni uslovi

/4/ $$\begin{gathered} f(t,u_1(t)) > u_1'(t), \\ f(t,u_2(t)) < u_2'(t), \end{gathered}$$

tada jednačina /1/ ima jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/5/ $$u_1(t) < x(t) < u_2(t)$$

za sve $t \geqslant t_0$. /Uslovi /4/ su nejednakosti Čapliginovog tipa./

Uslov /5/, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, ispunjavaju sva rješenja jednačine /1/ ako, pored uslova /4/, za $t \geqslant t_0$, važe uslovi

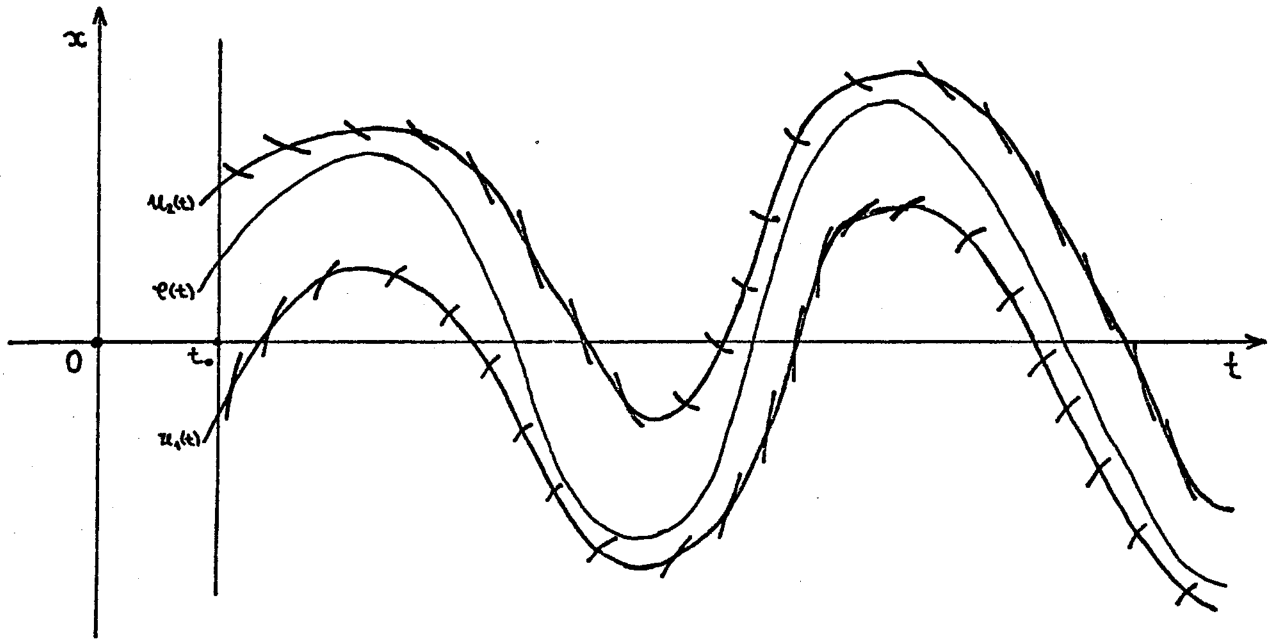
/6/ $$\begin{gathered} f(t,x) > u_1'(t) + m_1 \quad \text{za} \quad x < u_1(t), \\ f(t,x) < u_2'(t) - m_2 \quad \text{za} \quad x > u_2(t) . \end{gathered}$$

gdje su m_1 i m_2 pozitivni fiksirani brojevi.

Zaista, prema uslovima /4/, sve integralne krive jednačine /1/ koje prolaze kroz tačke krivih $x=u_1(t)$ i $x=u_2(t)$ $(t\geqslant t_0)$ ulaze u "cijev"

/7/ $$t\geqslant t_0, \quad u_1(t) < x < u_2(t),$$

kao i sve one integralne krive koje prolaze kroz tačke oblasti $u_1(t)<x<$ $< u_2(t)$ $(t\geqslant t_0)$ ostaju u toj "cijevi" za sve $t\geqslant t_0$, jer ne mogu izići iz nje. Prema tome, integralne krive koje prolaze kroz tačke oblasti $u_1(t)\leqslant x\leqslant$ $\leqslant u_2(t)$ $(t\geqslant t_0)$ čine klasu rješenja koja ispunjava uslov /5/. Ponašanje integralnih krivih ilustruje slika3.



Sl. 3

U slučaju ispunjenja uslova /6/ imamo da će sve integralne krive oblasti $x<u_1(t)$ $(t\geqslant t_0)$ /tu je koeficijent smjera integralnih krivih veći od koeficijenta smjera krive $u_1(t)$ za pozitivan fiksiran broj m_1/, kao i oblasti $x>u_2(t)$ $(t\geqslant t_0)$, za dovoljno veliko $t\geqslant t^*>t_0$, dodirnuti krivu $x=u_1(t)$, odnosno krivu $x=u_2(t)$, a zatim i ući u "cijev" /7/, te će i ispunjavati uslov /5/.

Primjetimo da ako ~~ako~~ kriva stacionarnih tačaka $x=\varphi(t)$ ispunjava uslove /2/ i ako je ograničena, tj. ako je $C_1<\varphi(t)<C_2$ za $t\geqslant t_0$, gdje su C_1 i C_2 brojne konstante, onda se može formirati pravolinijska "cijev" ulaznih integralnih krivih koja je ograničena pravama $x=C_1$ i $x=C_2$ $(t\geqslant t_0)$.

Kod formiranja "cijevi" ulaznih integralnih krivih od posebnog je značaja i sljedeće tvrdjenje.

TVRDJENJE 4.

Ako funkcija $x=\varphi(t)$ ispunjava uslove /2/ i monotono je neopadajuća za $t \geq t_0$, tada se za gornju granicu "cijevi" ulaznih integralnih krivih može uzeti sama kriva $\varphi(t)$, a ako je funkcija $x=\varphi(t)$ monotono nerastuća za $t \geq t_0$, tada se za donju granicu "cijevi" može uzeti kriva $\varphi(t)$ / $\varphi(t) \neq const.$ za sve $t \geq t_0$ /[1].

Zaista, uslovi /2/, monotonost krive $\varphi(t)$, kao i osnovni uslovi o egzistenciji i jedinosti rješenja garantuju da su tačke krive $\varphi(t)$ $(t \geq t_0)$ tačke striktnog ulaza "cijevi" /7/.

Analogno tome kako smo formirali dva posebna oblika "cijevi" izlaznih integralnih krivih /"cijevi" /9/ i /11/ § 1./ i ovdje ćemo da istaknemo dvije vrste "cijevi" ulaznih integralnih krivih.

Jednu, uzimajući da je

$$u_1(t) = \varphi(t) - d_1, \quad u_2(t) = \varphi_2(t) + d_2 \quad (t \geq t_0),$$

tj. "cijev"

/8/ $$t \geq t_0, \quad \varphi(t) - d_1 < x < \varphi(t) + d_2,$$

gdje su d_1 i d_2 pozitivni brojevi, a drugu uzimajući da je

$$u_1(t) = \varphi(t) - \varepsilon_1(t), \quad u_2(t) = \varphi(t) + \varepsilon_2(t) \quad (t \geq t_0),$$

tj. "cijev"

/9/ $$t \geq t_0, \quad \varphi(t) - \varepsilon_1(t) < x < \varphi(t) + \varepsilon_2(t),$$

gdje su $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ neprekidne i monotono opadajuće funkcije koje teže nuli kad $t \to +\infty$.

Formiranje "cijevi" oblika /8/, odnosno /9/, ulaznih integralnih krivih, ide odredjivanjem brojeva d_1 i d_2, odnosno funkcija $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$, tako da su uslovi /4/, odnosno /6/ zadovoljeni.

I ovdje, u želji da formiramo što užu "cijev" u koju ulaze integralne krive, možemo vršiti suženje "cijevi" formirane na prethodni način, tako da se donja granica "cijevi" zamjeni djelimično, ili u cjelini, monotono nerastućom krivom koja je bliža krivoj $\varphi(t)$ od postojeće donje granice, a gornja granica "cijevi" zamjeni djelimično, ili u cjelini, monotono neopadajućom krivom, tako da nove granice "cijevi" budu takodje neprekidne krive. Granice nove "cijevi" su takodje skupovi tačaka striktnog ulaza.

---

[1] Ovdje, kao i u tvrdjenju 2 § 1, podrazumjevamo da je $\varphi'(t) \geq 0$, odnosno $\varphi'(t) \leq 0$, dok $\varphi'(t) = 0$ može da bude samo u nekim diskretnim tačkama.

Primjetimo sada i to da pri formiranju "cijevi", kako izlaznih, tako i ulaznih integralnih krivih, izvedena razmatranja dolaze u obzir i za slučaj kada bi za funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ pretpostavili da su neprekidne, pozitivne i ograničene, ne pretpostavljajući monotonost i teženje nuli. U ovom slučaju imali bi odgovarajuće "cijevi" ograničene širine.

§ 2.1.

Sada, u svojstvu primjera, posmatrajmo jednačinu

/1o/ $$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t),$$

gdje su $a(t)$ i $f(t)$ neprekidne funkcije i $a(t)<0$ za $t \geq t_0$.

Kriva stacionarnih tačaka je $\varphi(t) = -\frac{f(t)}{a(t)}$, a kako je $a(t)<0$ $(t \geq t_0)$ to su uslovi /2/ ispunjeni.

Uzmemo li da je

$$u_1(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} - d_1, \quad u_2(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} + d_2$$

uslovi /4/ postaju

$$-a(t)d_1 > \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)',$$

$$a(t)d_2 < \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)',$$

odakle je

$$d_1 > \frac{-1}{a(t)}\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)',$$

/11/ $$d_2 > \frac{1}{a(t)}\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)',$$

te imamo zaključak: Ako je

$$\frac{-1}{a(t)}\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \leq K \quad \text{za } t \geq t_0,$$

gdje je K pozitivna konstanta, može se za jednačinu /1o/ formirati "cijev" oblika /8/, gdje se brojevi d_1 i d_2 odredjuju prema uslovima /11/.

U slučaju formiranja "cijevi" oblika /9/ treba uzeti

$$u_1(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon_1(t), \quad u_2(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon_2(t),$$

a uslovi /4/ postaju

$$-a(t)\varepsilon_1(t) + \varepsilon_1'(t) > \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)',$$

/12/ $$-a(t)\varepsilon_2(t) + \varepsilon_2'(t) > -\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'.$$

Slijedi zaključak: Ako postoje neprekidne i monotono opadajuće funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ koje teže nuli kad $t\to+\infty$, takve da su uslovi /12/ ispunjeni, tada se za jednačinu /1o/ može formirati "cijev" oblika /9/.

Konkretni primjeri koje ćemo navest pokazaće da su mogući gornji slučajevi, tj. da postoje jednačine čija rješenja, jedna klasa, ili sva, ulaze u "cijevi" oblika /8/ i /9/.

PRIMJERI

1° Posmatrajmo jednačinu $x' = -x + t - \frac{1}{t} + \sin t$.

Ovdje je $\varphi(t) = t - \frac{1}{t} + \sin t$, $\varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} + \cos t > 0$, što govori da je kriva $\varphi(t)$ monotono rastuća, te da se za gornju granicu "cijevi" ulaznih integralnih krivih može uzeti sama kriva $\varphi(t)$, tj. $u_2(t) = t - \frac{1}{t} + \sin t$. Za donju granicu "cijevi", prema prvom uslovu /11/, možemo uzeti da je $u_1(t) = t - \frac{1}{t} + \sin t - 2{,}1$ $(t \geq 4)$. Kako su ispunjeni, ne samo uslovi /4/, nego i uslovi /6/, to će jedna klasa rješenja da ispunjava uslov

$$t - \frac{1}{t} + \sin t - 2{,}1 < x(t) < t - \frac{1}{t} + \sin t$$

za sve $t \geq 4$, dok, za dovoljno veliko $t \geq t^* > 4$, taj uslov će da ispunjavaju sva rješenja jednačine.

2° Uzmimo jednačinu $x' = -\frac{1}{\sqrt{t}} x + \frac{1}{\sqrt{t}} \ln t$.

Ovdje je $\varphi(t) = \ln t$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t} > 0$, te za $u_2(t)$ možemo uzeti $u_2(t) = \ln t$. Prema uslovima /12/ za $\varepsilon_1(t)$ možemo uzeti $\varepsilon_1(t) = \frac{1}{\ln t}$, te je $u_1(t) = \ln t - \frac{1}{\ln t}$ $(t \geq e^2)$. Odgovarajući uslovi /4/ su ispunjeni, te jednačina ima jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

$$\ln t - \frac{1}{\ln t} < x(t) < \ln t$$

za sve $t \geq e^2$.

Napomena.

Za "cijevi" koje smo formirali karakteristično je to što sadrže krivu stacionarnih tačaka $x = \varphi(t)$, ili je ta kriva jedna granica "cijevi". Krivu stacionarnih tačaka smo neposredno koristili /vidjeti uslove tvrdjenja 3/. To je, ustvari, osnovna karakteristika našeg načina formiranja "cijevi", što ćemo i ubuduće koristiti. Medjutim, sada ćemo navest dva primjera gdje ćemo formirati "cijevi" ulaznih integralnih krivih koje neće sadržiti krivu stacionarnih tačaka. Takodje, uz ovu napomenu, možemo primjetiti da se za formiranje "cijevi" ulaznih integralnih krivih može izostaviti pretpostavka o jedinosti rješenja jednačine.

3° Za jednačinu $x' = -\frac{1}{t}x + 1$ kriva stacionarnih tačaka je $\varphi(t)=t$, a za "cijev" ulaznih integralnih krivih možemo uzeti

$$t \geq 1, \quad \frac{t}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}} < x < \frac{t}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}} .$$

Zaista za

$$u_1(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad u_2(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (t \geq 1),$$

važi:

$$x'(u_1(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t\sqrt{t}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2t\sqrt{t}} = u_1'(t),$$

$$x'(u_2(t)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t\sqrt{t}} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2t\sqrt{t}} = u_2'(t).$$

4° Za jednačinu $x' = -x + \ln t$ kriva stacionarnih tačaka je $x = \ln t$, a za "cijev" ulaznih integralnih krivih možemo uzeti

$$t > 2, \quad \ln t - \frac{2}{t} < x < \ln t - \frac{1}{t} .$$

Ovdje imamo:

$$u_1(t) = \ln t - \frac{2}{t}, \quad u_2(t) = \ln t - \frac{1}{t} \quad (t > 2),$$

$$x'(u_1(t)) = \frac{2}{t} > \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} = u_1'(t),$$

$$x'(u_2(t)) = \frac{1}{t} < \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = u_2'(t) .$$

I kod primjera 2° mogli smo uzeti "cijev" koja ne sadrži krivu stacionarnih tačaka, na primjer, "cijev"

$$t \geq e^2, \quad \ln t - \frac{1}{\ln t} < x < \ln t - \frac{1}{t} .$$

U oba gornja primjera 3° i 4° krive stacionarnih tačaka nalaze se izvan "cijevi". Razlika medju tim primjerima je u tome što u primjeru 4° možemo formirati "cijev" ulaznih integralnih krivih koja će da sadrži krivu stacionarnih tačaka $x = \ln t$ i čija širina teži nuli kad $t \to +\infty$, na primjer,

$$t > 2, \quad \ln t - \frac{2}{t} < x < \ln t + \frac{1}{t}$$

/mogli smo uzeti i da je $\ln t$ gornja granica "cijevi"/, dok to ne možemo učiniti u slučaju primjera 3°. Primjeri imaju i nešto bitno zajedničko, a to je da su im krive stacionarnih tačaka / t i $\ln t$ / strogo monotone krive.

§ 2.2.

Slično onom komentaru koji smo dali za "cijevi" izlaznih integralnih krivih i ovdje možemo primjetiti da je cilj odrediti odgovarajuću "cijev" koja je ograničena krivama $x = u_1(t)$ i $x = u_2(t)$ koje ispunjavaju uslove /4/.

Navedena razmatranja vezana su za pretpostavku postojanja krive stacionarnih tačaka $x = \varphi(t)$ koja ispunjava uslove /2/. Medjutim, nameće se pitanje kako postupiti u slučajevima gdje krivu stacionarnih tačaka $\varphi(t)$ nije "lako", ili nije moguće odrediti, kao i u slučajevima gdje jednačina ima više krivih stacionarnih tačaka.

Tamo gdje nije lako, ili gdje nije moguće, odrediti krivu stacionarnih tačaka $x = \varphi(t)$ preporučili bismo, slično kao u slučaju formiranja "cijevi" izlaznih integralnih krivih, da se umjesto krive $\varphi(t)$ obezbjede krive $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ takve da je

$$\psi_1(t) \leq \varphi(t) \leq \psi_2(t),$$

te da je razlika $\psi_2(t) - \psi_1(t)$ što manja. Za krive $u_1(t)$ i $u_2(t)$ imali bismo

$$u_1(t) = \psi_1(t) - d_1, \quad u_2(t) = \psi_2(t) + d_2 \quad (t \geq t_0),$$

odnosno

$$u_1(t) = \psi_1(t) - \varepsilon_1(t), \quad u_2(t) = \psi_2(t) + \varepsilon_2(t) \quad (t \geq t_0),$$

gdje su d_1 i d_2 pozitivni brojevi, $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ monotono opadajuće funkcije koje teže nuli, a koje se odredjuju tako da funkcije $x = u_1(t)$ i $x = u_2(t)$ ispunjavaju uslove /4/.

Kako krive $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ mogu biti odredjene tako da ispunjavaju uslov

$$\psi_2(t) - \psi_1(t) \leq d \quad \text{za} \quad t \geq t_0$$

/d je poz. konst./, ili i uslov

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\psi_2(t) - \psi_1(t) \right) = 0,$$

to, i ovdje, imamo na raspolaganju četiri oblika krivolinijskih "cijevi" ulaznih integralnih krivih.

Posmatrajmo sada i ovdje jednačinu /22/ iz § 1, tj. jednačinu

/13/ $$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\,x + h(t,x)$$

i kroz teoreme 3 i 4 prezentirajmo bitne rezultate za tu jednačinu koristeći krivolinijske "cijevi" ulaznih integralnih krivih.

TEOREMA 3.

Pod uslovima, za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$,

/14/
$$g_1(t) \leq g(t,x) \leq g_2(t) < 0 \,,$$
$$0 < h_1(t) \leq h(t,x) \leq h_2(t) \,,$$

gdje su $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ i $h_2(t)$, za $t \geq t_0$, definisane i neprekidne funkcije, te ako postoje neprekidne i monotono opadajuće funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$, koje ispunjavaju uslov

/15/
$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon_1(t) = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon_2(t) = 0$$

i takve da je, za $t \geq t_0$,

/16/
$$\varepsilon_1(t) < -\frac{h_1(t)}{g_1(t)} \,,$$

/17/
$$g_1(t)\varepsilon_1(t) - \varepsilon_1'(t) < -\left(-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}\right)' \,,$$
$$g_2(t)\varepsilon_2(t) - \varepsilon_2'(t) < \left(-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}\right)' \,,$$

jednačina /13/, za $t \geq t_0$, ima jednu klasu pozitivnih rješenja koja ispunjava uslov

/18/
$$-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} - \varepsilon_1(t) < x(t) < -\frac{h_2(t)}{g_2(t)} + \varepsilon_2(t)$$

za sve $t \geq t_0$.

Ako funkcija $g_2(t)$ ispunjava još i uslov

/19/
$$g_2(t) \leq -M < 0 \quad \text{za } t \geq t_0$$

/M je pozitivna fiksirana konstanta/, tada, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, sva rješenja jednačine /13/ ispunjavaju uslov /18/.

Dokaz. Kako prema uslovima /14/, za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$, važi

$$-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} \leq -\frac{h(t,x)}{g(t,x)} \leq -\frac{h_2(t)}{g_2(t)} \,,$$

to integralne krive jednačine /13/ imaju pozitivan koeficijent smjera za

$$x < -\frac{h_1(t)}{g_1(t)} \,, \; t \geq t_0 \,,$$

a negativan za

$$x > -\frac{h_2(t)}{g_2(t)} \,, \; t \geq t_0 \,.$$

Dakle, krive $-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}$ i $-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}$ predstavljaju respektivno krive $\Psi_1(t)$ i $\Psi_2(t)$.

Otuda, za krive $u_1(t)$ i $u_2(t)$ treba uzeti

$$u_1(t) = -\frac{h_1(t)}{g_1(t)} - \varepsilon_1(t), \quad u_2(t) = -\frac{h_2(t)}{g_2(t)} + \varepsilon_2(t) \quad (t \geq t_0).$$

Prema uslovima /16/ i /17/, za $t \geq t_0$, važi

$$x'(u_1(t)) = g(t,u_1)\,u_1(t) + h(t,u_1) \geq g_1(t)u_1(t) + h_1(t) = -g_1(t)\varepsilon_1(t) > \left(-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}\right)' - \varepsilon_1'(t) = u_1'$$

$$x'(u_2(t)) = g(t,u_2)\,u_2(t) + h(t,u_2) \leq g_2(t)u_2(t) + h_2(t) = g_2(t)\varepsilon_2(t) < \left(-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}\right)' + \varepsilon_2'(t) = u_2'(t),$$

što znači da sve integralne krive jednačine /13/ koje prolaze kroz tačke krivih $u_1(t)$ i $u_2(t)$ $(t \geq t_0)$ u tim tačkama presjecaju te krive i ulaze u "cijev"

/2o/ $$t \geq t_0, \quad -\frac{h_1(t)}{g_1(t)} - \varepsilon_1(t) < x < -\frac{h_2(t)}{g_2(t)} + \varepsilon_2(t),$$

kao i da sve integralne krive koje prolaze kroz unutrašnje tačke te "cijevi" ostaju u njoj, jer ne mogu izići iz nje. Te integralne krive i čine klasu rješenja jednačine /13/ koja ispunjava uslov /18/.

Pokažimo sada da dodatni uslov /19/ obezbjedjuje da će, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, sve integralne krive oblasti $x < u_1(t)$ i $x > u_2(t)$ $(t \geq t_0)$ ući u "cijev" /2o/. Dokažimo to, na primjer, za oblast $x < u_1(t)$ $(t \geq t_0)$. Neka je $P(t, X = u_1(t) - \delta)$ /δ je proizvoljan pozitivan broj/ proizvoljna tačka te oblasti. Prema uslovima teoreme, za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$, važi

$$x'(P) = g(t,X)(u_1(t) - \delta) + h(t,X) = g(t,X)u_1(t) + h(t,X) - g(t,X)\delta \geq$$
$$\geq -g_1(t)\varepsilon_1(t) - g(t,X)\delta > |u_1'(t)| - g(t,X)\delta \geq |u_1'(t)| - g_2(t)\delta \geq |u_1'(t)| + M\delta,$$

što znači da integralna kriva koja prolazi kroz proizvoljnu tačku P oblasti $x < u_1(t)$ $(t \geq t_0)$ ima u tački P koeficijent smjera veći od koeficijenta smjera donje granice "cijevi" $u_1(t)$ u tački sa istom apscisom, za više od pozitivnog broja $M\delta$, te će, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, i stići do krive $u_1(t)$, a zatim i presjeći je ulazeći u "cijev" /2o/. Ustvari, gornja relacija pokazuje da integralna kriva koja prolazi kroz proizvoljnu tačku P ima u tački P koeficijent smjera veći od koeficijenta smjera krive koja prolazi kroz tačku P i paralelna je sa krivom $u_1(t)$, te će integralna kriva i presjeći tu krivu približavajući se donjoj granici "cijevi". Prema tome, svaka integralna kriva koja prolazi kroz tačke oblasti $x < u_1(t)$ $(t \geq t_0)$, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, stići će do krive $u_1(t)$, a zatim i ući u "cijev" /2o/.

Primjetimo sada i to da ako funkcije $-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}$ i $-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}$ ispunjavaju i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}+\frac{h_1(t)}{g_1(t)}\right)=0 ,$$

tada širina "cijevi" /2o/ teži nuli kad $t\to+\infty$, te rješenja koja ispunjavaju uslov /18/ ispunjavaju i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\frac{h_1(t)}{g_1(t)}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\frac{h_2(t)}{g_2(t)}\right)=0 .$$

TEOREMA 4.

Pod uslovima, za $t\geqslant t_0$ i $|x|<+\infty$,

/21/
$$g(t,x)\leqslant g_1(t)<0,$$
$$0<n(t)\leqslant-\frac{h(t,x)}{g(t,x)}\leqslant m(t) ,$$

gdje su $g_1(t)$, $m(t)$ i $n(t)$ definisane i neprekidne funkcije za $t\geqslant t_0$, te ako postoje neprekidne i monotono opadajuće funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$, koje ispunjavaju uslov /15/ i takve da je, za $t\geqslant t_0$,

/22/
$$g_1(t)\varepsilon_1(t)-\varepsilon_1'(t)<-n'(t),$$
$$g_1(t)\varepsilon_2(t)-\varepsilon_2'(t)<m'(t),$$

jednačina /13/, za $t\geqslant t_0$, ima jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/23/
$$n(t)-\varepsilon_1(t)<x(t)<m(t)+\varepsilon_2(t)$$

za sve $t\geqslant t_0$.

Ako funkcija $g_1(t)$ ispunjava još i uslov

/24/
$$g_1(t)\leqslant-M<0 \quad \text{za } t\geqslant t_0$$

/M je pozitivna fiksirana konstanta/, tada, za dovoljno veliko $t\geqslant t^*>t_0$, sva rješenja jednačine /13/ ispunjavaju uslov /23/.

Dokaz. Prema uslovima /21/ integralne krive jednačine /13/ imaju pozitivan koeficijent smjera za

$$x<n(t),\ t\geqslant t_0,$$

a negativan za

$$x>m(t),\ t\geqslant t_0,$$

te za krive $u_1(t)$ i $u_2(t)$ treba uzeti

$$u_1(t)=n(t)-\varepsilon_1(t),\quad u_2(t)=m(t)+\varepsilon_2(t)\quad (t\geqslant t_0).$$

Sve integralne krive jednačine /13/ koje prolaze kroz tačke krivih

$u_1(t)$, $u_2(t)$ $(t \geq t_0)$ presjecaju te krive ulazeći u "cijev"

/25/ $$t \geq t_0, \quad m(t) - \varepsilon_1(t) < x < m(t) + \varepsilon_2(t),$$

jer, prema uslovima /21/ i /22/, za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$, važi

$$x'(u_1(t)) = g(t,u_1)\,u_1(t) + h(t,u_1) = g(t,u_1)\Big(u_1(t) + \frac{h(t,u_1)}{g(t,u_1)}\Big) \geq$$
$$\geq g(t,u_1)\big(u_1(t) - m(t)\big) = -g(t,u_1)\,\varepsilon_1(t) \geq -g_1(t)\,\varepsilon_1(t) > m'(t) - \varepsilon_1'(t) = u_1'(t),$$
$$x'(u_2(t)) = g(t,u_2)\,u_2(t) + h(t,u_2) = g(t,u_2)\Big(u_2(t) + \frac{h(t,u_2)}{g(t,u_2)}\Big) \leq$$
$$\leq g(t,u_2)\big(u_2(t) - m(t)\big) = g(t,u_2)\,\varepsilon_2(t) \leq g_1(t)\,\varepsilon_2(t) < m'(t) + \varepsilon_2'(t) = u_2'(t).$$

Otuda, integralne krive oblasti $t \geq t_0$, $u_1(t) \leq x \leq u_2(t)$ čine klasu rješenja koja ispunjava uslov /23/.

U slučaju ispunjenja uslova /24/ sve integralne krive jednačine /13/ koje prolaze kroz tačke izvan "cijevi" /25/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, dodirnuće krive $u_1(t)$ ili $u_2(t)$, te, prema gornjem, i ući u "cijev" /25/.

Ako funkcije $m(t)$ i $m(t)$ ispunjavaju uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\big(m(t) - m(t)\big) = 0,$$

tada širina krivolinijske "cijevi" /25/ teži nuli kad $t \to +\infty$, te rješenja koja ispunjavaju uslov /23/ ispunjavaju i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\big(x(t) - m(t)\big) = \lim_{t\to+\infty}\big(x(t) - m(t)\big) = 0 .$$

§ 2.3.

Prema izloženim rezultatima i dokazima istih, koji se odnose na jednačinu /13/ /teoreme 1, 2, 3 i 4/, vidi se da bismo mogli, na sličan način, prezentirati veliki broj rezultata pri detaljnom proučavanju jednačine /13/.

Na osnovu navedenih posmatranja jednačine /13/ nije teško primjetiti da se rezultati teorema 1 - 4 mogu uopštiti i na jednačinu

/13'/ $$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\,x^{2m+1} + h(t,x) \quad (m = 0,1,2,\cdots)$$

uz odgovarajuće modifikacije i dopune uslova.

Možemo dati sljedeću teoremu.

TEOREMA 5.

Tvrdjenja teorema 1-4 važe i za jednačinu /13'/ samo ako uslove /27/

i /28/ /teorema 1/; /34/ /teorema 2/; /17/ i /18/ /teorema 3/; /22/ /teorema 4/ respektivno zamjenimo uslovima:

$$g_1(t)\varepsilon_1(t) > \left(\sqrt[2m+1]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}+\varepsilon_1(t)}\right)', \quad -g_2(t)\varepsilon_2(t) < \left(\sqrt[2m+1]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}-\varepsilon_2(t)}\right)',$$

$$\sqrt[2m+1]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}-\varepsilon_2(t)} < x(t) < \sqrt[2m+1]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}+\varepsilon_1(t)} \; ;$$

/26/
$$-g_1(t)\varepsilon_1(t) < \left(\sqrt[2m+1]{m(t)-\varepsilon_1(t)}\right)',$$
$$g_1(t)\varepsilon_2(t) > \left(\sqrt[2m+1]{m(t)+\varepsilon_2(t)}\right)' \; ;$$

$$-g_1(t)\varepsilon_1(t) > \left(\sqrt[2m+1]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}-\varepsilon_1(t)}\right)', \quad g_2(t)\varepsilon_2(t) < \left(\sqrt[2m+1]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}+\varepsilon_2(t)}\right)',$$

$$\sqrt[2m+1]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}-\varepsilon_1(t)} < x(t) < \sqrt[2m+1]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}+\varepsilon_2(t)} \; ;$$

/27/
$$-g_1(t)\varepsilon_1(t) > \left(\sqrt[2m+1]{m(t)-\varepsilon_1(t)}\right)'$$
$$g_1(t)\varepsilon_2(t) < \left(\sqrt[2m+1]{m(t)+\varepsilon_2(t)}\right)' .$$

Takodje, treba uslov /35/ /teorema 2 § 1/ i /23/ /teorema 4/ zamjeniti uslovom

/28/
$$\sqrt[2m+1]{m(t)-\varepsilon_1(t)} < x(t) < \sqrt[2m+1]{m(t)+\varepsilon_2(t)},$$

a uslovima /26/ i /27/ dodati i uslov

/29/
$$\varepsilon_1(t) < m(t) \text{ za } t \geq t_0 .$$

Ako funkcija $m(t)$ ispunjava uslov

/3o/
$$\lim_{t\to+\infty} m(t) = 0 ,$$

tada se uslovi /26/ i /27/ mogu izostaviti, a uslov /28/ zamjeniti uslovom

$$0 < x(t) < \sqrt[2m+1]{m(t)+\varepsilon_2(t)} .$$

Dokaz teoreme 5 u principu je isti kao dokazi osnovnih teorema. U slučaju uslova /3o/ treba samo primjetiti da se može uzeti da je $v_1(t)=0$, odnosno $u_1(t)=0$.

Posmatrajmo sada slučaj kada u jednačini /13/ umjesto člana $g(t,x)x$ imamo $g(t,x)x^{2n}$ $(n=1,2,\dots)$, odnosno posmatrajmo jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\,x^{2n} + h(t,x) \quad (n=1,2,\cdots), \tag{31}$$

gdje funkcije $g(t,x)$ i $h(t,x)$, pored osnovnih uslova ranije navedenih, ispunjavaju i uslov, za $t \geqslant t_0$ i $|x| < +\infty$,

$$-\frac{h(t,x)}{g(t,x)} > 0,$$

tj. funkcije $g(t,x)$ i $h(t,x)$ treba da su suprotnog znaka.

Jednačina /31/ ima dvije krive stacionarnih tačaka

$$x = \pm \sqrt[2n]{-\frac{h(t,x)}{g(t,x)}},$$

koje oblast ravni tOx $(t \geqslant t_0)$ dijele na tri podoblasti, gdje u dvjema susjednim podoblastima integralne krive jednačine /31/ imaju suprotne koeficijente smjera. To omogućava istodobno formiranje dviju krivolinijskih "cijevi", koje su simetrične u odnosu na t osu. Jedna je "cijev" izlaznih, a druga "cijev" ulaznih integralnih krivih, čime se obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja koje pripada prvoj "cijevi" i jedne klase rješenja koja pripada drugoj "cijevi".

Sada ćemo, polazeći od rezultata datih za jednačine /13/ i /13'/, dati odgovarajuće rezultate koji se odnose na jednačinu /31/.

1° Pod uslovima, za $t \geqslant t_0$ i $|x| < +\infty$,

$$\begin{aligned} 0 < g_1(t) \leqslant g(t,x) \leqslant g_2(t), \\ h_1(t) \leqslant h(t,x) \leqslant h_2(t) < 0, \end{aligned} \tag{32}$$

gdje su $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ i $h_2(t)$ definisane i neprekidne funkcije za $t \geqslant t_0$, te ako postoje neprekidne i monotono opadajuće funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ koje teže nuli kad $t \to +\infty$ /i u sljedećim slučajevima podrazumjevaćemo da funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ ispunjavaju te osnovne uslove/ i takve da je, za $t \geqslant t_0$,

$$\varepsilon_2(t) < -\frac{h_2(t)}{g_2(t)}, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} g_1(t)\,\varepsilon_1(t) > \left|\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}} + \varepsilon_1(t)\right)'\right|, \\ g_2(t)\,\varepsilon_2(t) > \left|\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}} - \varepsilon_2(t)\right)'\right|, \end{aligned} \tag{34}$$

jednačina /31/, za $t \geqslant t_0$, ima bar jedno pozitivno rješenje $x(t)$ koje ispunjava uslov

$$\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}} - \varepsilon_2(t) < x(t) < \sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}} + \varepsilon_1(t) \tag{35}$$

za sve $t \geq t_0$ i jednu klasu negativnih rješenja koja ispunjava uslov

/36/ $$-\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}+\varepsilon_1(t)} < x(t) < -\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}-\varepsilon_2(t)}$$

za sve $t \geq t_0$.

Ako funkcija $g_1(t)$ ispunjava još i uslov

/37/ $$g_1(t) \geq M_1 > 0 \quad \text{za } t \geq t_0$$

/M_1je poz. konst./, tada, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, sva rješenja oblasti

/38/ $$x \leq \sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}-\varepsilon_2(t)}\ , \quad t \geq t_0$$

ispunjavaju uslov /36/.

Ako funkcije $-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}$ i $-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}$ ispunjavaju uslov

/39/ $$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}+\frac{h_2(t)}{g_2(t)}\right)=0\ ,$$

tada se za rješenja koja ispunjavaju uslove /35/ i /36/ može konstatovati da respektivno ispunjavaju i uslove

/4o/ $$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}}\right)=0\ ,$$

/41/ $$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}}\right)=0.$$

Dokažimo navedena tvrdjenja.

Kako član $g(t,x)x^{2n}$ odlučuje o znaku desne strane jednačine /31/ za

$$|x| > \sqrt[2n]{-\frac{h(t,x)}{g(t,x)}}\ , \quad t \geq t_0\ ,$$

te kako, prema uslovima /32/, za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$, važi

$$\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}} \leq \sqrt[2n]{-\frac{h(t,x)}{g(t,x)}} \leq \sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}}\ ,$$

to integralne krive jednačine /31/ imaju pozitivan koeficijent smjera za

$$|x| > \sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}}\ , \quad t \geq t_0\ ,$$

a negativan za

$$|x| < \sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}}\ , \quad t \geq t_0\ .$$

Dalje, uslovi /33/ i /34/ obezbjedjuju da će sva rješenja jednačine /31/ koja prolaze kroz tačke krivih

$$v_1(t) = \sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}-\varepsilon_2(t)}\ , \quad v_2(t) = \sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}+\varepsilon_1(t)} \quad (t \geq t_0)$$

presjeći te krive izlazeći iz "cijevi" koju čine te krive, kao i da će sva rješenja jednačine /31/ koja prolaze kroz tačke krivih

/42/ $$u_1(t) = -\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} + \varepsilon_1(t)}\,, \quad u_2(t) = -\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)} - \varepsilon_2(t)} \quad (t \geqslant t_0)$$

presjeći te krive ulazeći u "cijev" koju čine te krive.

Zaista je

$$x'(v_1(t)) = g(t,v_1)\,v_1^{2n}(t) + h(t,v_1) \leqslant g_2(t)\,v_1^{2n}(t) + h_2(t) = -g_2(t)\,\varepsilon_2(t) <$$

$$< -\left|\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)} - \varepsilon_2(t)}\right)'\right| \leqslant \left(\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)} - \varepsilon_2(t)}\right)' = v_1'(t)\,,$$

$$x'(v_2(t)) = g(t,v_2)\,v_2^{2n}(t) + h(t,v_2) \geqslant g_1(t)\,v_2^{2n}(t) + h_1(t) = g_1(t)\,\varepsilon_1(t) >$$

$$> \left|\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} + \varepsilon_1(t)}\right)'\right| \geqslant \left(\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} + \varepsilon_1(t)}\right)' = v_2'(t)\,;$$

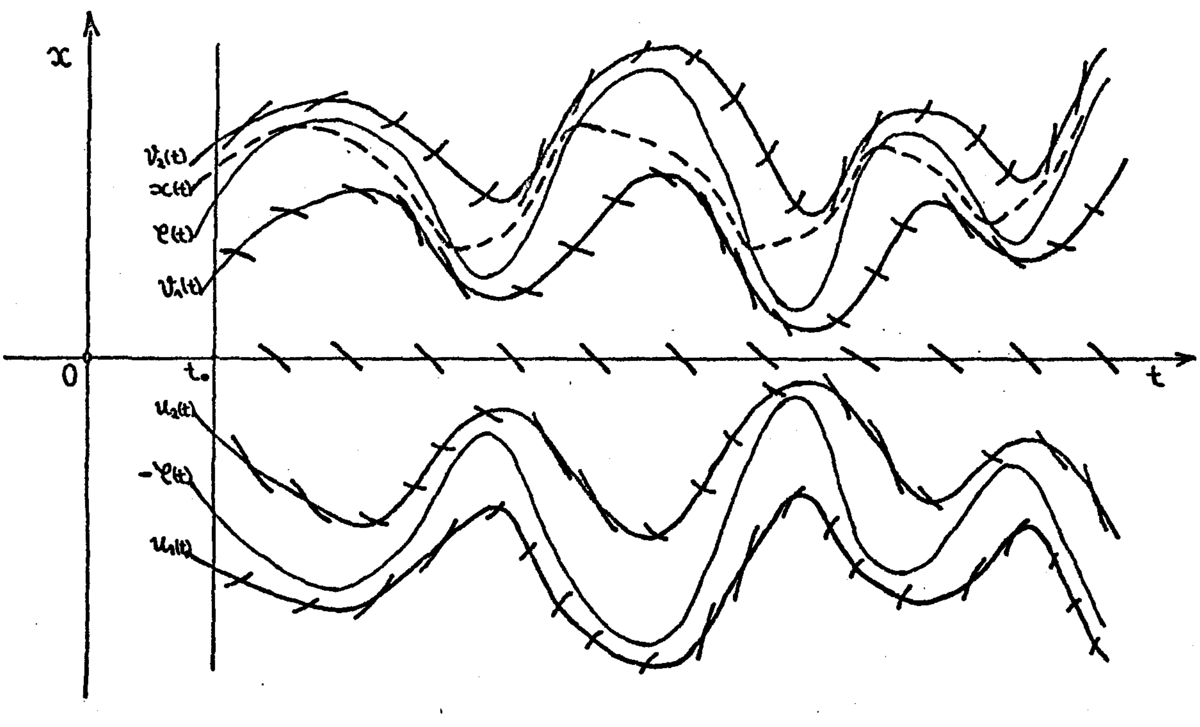
$$x'(u_1(t)) = g(t,u_1)\,u_1^{2n}(t) + h(t,u_1) \geqslant g_1(t)\,u_1^{2n}(t) + h_1(t) = g_1(t)\,\varepsilon_1(t) >$$

$$> \left|\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} + \varepsilon_1(t)}\right)'\right| \geqslant -\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} + \varepsilon_1(t)}\right)' = u_1'(t)\,,$$

$$x'(u_2(t)) = g(t,u_2)\,u_2^{2n}(t) + h(t,u_2) \leqslant g_2(t)\,u_2^{2n}(t) + h_2(t) = -g_2(t)\,\varepsilon_2(t) <$$

$$< -\left|\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)} - \varepsilon_2(t)}\right)'\right| \leqslant -\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)} - \varepsilon_2(t)}\right)' = u_2'(t)\,,$$

što garantuje da jednačina /31/ ima bar jedno pozitivno rješenje koje, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov /35/ i jednu klasu negativnih rješenja koja, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov /36/. Ponašanje integralnih krivih simbolički ilustruje slika 4. /Krive $\pm\varphi(t)$ su krive stacionarnih tačaka./



Uslov /37/ obezbjedjuje ulaženje svih rješenja oblasti /38/ u "cijev" koja je odredjena krivama /42/ za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_o$, te i uslov /36/. Dokažimo to za integralne krive koje prolaze kroz tačke oblasti

$$-\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}-\varepsilon_2(t)} < x < \sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}-\varepsilon_2(t)}\ ,\ t \geq t_o$$

Neka je

$$P_1\left(t_1\,,\ X_1 \equiv \sqrt[2n]{-\frac{h_2(t_1)}{g_2(t_1)}-\varepsilon_2(t_1)-\delta_1}\ \right),$$

gdje su t_1 i δ_1 brojevi: $t_1 \geq t_o$, $\delta_1 \in \left(0\,,\ -\frac{h_2(t_1)}{g_2(t_1)}-\varepsilon_2(t_1)\right]$, proizvoljna tačka oblasti

$$0 \leq x < \sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}-\varepsilon_2(t)}\ ,\ t \geq t_o\ .$$

Prema uslovima teoreme važi

$$x'(P_1) = g(t_1,X_1)X_1^{2n} + h(t_1,X_1) \leq g(t_1)X_1^{2n} + h_2(t_1) =$$

$$= -g_2(t_1)\varepsilon_2(t_1) - g_2(t_1)\delta_1 < -\left|\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t_1)}{g_2(t_1)}-\varepsilon_2(t_1)}\right)'\right| - M\delta_1\ ,$$

što znači da integralna kriva koja prolazi kroz tačku P_1 u toj tački ima koeficijent smjera koji je negativan i manji od modula koeficijenta smjera sa negativnim znakom krive koja prolazi kroz tačku P_1 i paralelna je sa krivom $\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}-\varepsilon_2(t)}$ za negativan broj $-M\delta_1$, te će, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_o$, i preći u oblast

/43/ $$-\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}-\varepsilon_2(t)} < x < 0\ ,\ t \geq t_o\ .$$

Dalje, neka je

$$P_2\left(t_2\,,\ X_2 \equiv -\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t_2)}{g_2(t_2)}-\varepsilon_2(t_2)-\delta_2}\ \right),$$

gdje su t_2 i δ_2 brojevi: $t_2 \geq t_o$, $\delta_2 \in \left(0\,,\ \sqrt[2n]{-\frac{h_2(t_2)}{g_2(t_2)}-\varepsilon_2(t_2)}\right)$, proizvoljna tačka oblasti /43/. Prema uslovima teoreme važi

$$x'(P_2) = g(t_2,X_2)X_2^{2n} + h(t_2,X_2) \leq g_2(t_2)X_2^{2n} + h_2(t_2) =$$

$$= -g_2(t_2)\varepsilon_2(t_2) - g_2(t_2)\delta_2 < -\left|\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t_2)}{g_2(t_2)}-\varepsilon_2(t_2)}\right)'\right| - M\delta_2\ ,$$

što znači da će integralna kriva koja prolazi kroz tačku P_2 , za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_o$, stići do krive $u_2(t)$, a zatim i ući u "cijev" koja je odredjena krivama $u_1(t)$ i $u_2(t)$.

Navedimo sada još neke bitno različite rezultate, bez dokaza, koji se odnose na jednačinu /31/. Dokazi ovih rezultata u principu su sadržani u dokazima prethodnih rezultata.

2^{o} Pod uslovima, za $t \geq t_o$ i $|x| < +\infty$,

$$0 < g_1(t) \leq g(t,x),$$

$$0 < n(t) \leq -\frac{h(t,x)}{g(t,x)} \leq m(t),$$

gdje su $g_1(t)$, $m(t)$ i $n(t)$ definisane i neprekidne funkcije za $t \geq t_o$, kao i, za $t \geq t_o$,

/44/
$$g_1(t)\varepsilon_1(t) > \left|\left(\sqrt[2n]{n(t)-\varepsilon_1(t)}\right)'\right|,$$
$$g_1(t)\varepsilon_2(t) > \left|\left(\sqrt[2n]{m(t)+\varepsilon_2(t)}\right)'\right|,$$

te i uslov /29/, jednačina /31/, za $t \geq t_o$, ima bar jedno pozitivno rješenje $x(t)$ koje ispunjava uslov

/45/
$$\sqrt[2n]{n(t)-\varepsilon_1(t)} < x(t) < \sqrt[2n]{m(t)+\varepsilon_2(t)}$$

za sve $t \geq t_o$ i jednu klasu negativnih rješenja koja ispunjava uslov

/46/
$$-\sqrt[2n]{m(t)+\varepsilon_2(t)} < x(t) < -\sqrt[2n]{n(t)-\varepsilon_1(t)}$$

za sve $t \geq t_o$.

Ako funkcija $g_1(t)$ ispunjava još i uslov /37/, tada sva rješenja jednačine /31/ koja prolaze kroz tačke oblasti

$$x \leq \sqrt[2n]{n(t)-\varepsilon_1(t)},\ t \geq t_o,$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_o$, ispunjavaju uslov /46/.

Ako funkcije $m(t)$ i $n(t)$ ispunjavaju i uslov

/47/
$$\lim_{t\to+\infty}\left(m(t)-n(t)\right) = 0,$$

tada rješenja koja ispunjavaju uslove /45/ i /46/ ispunjavaju respektivno i uslove

/48/
$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt[2n]{n(t)}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt[2n]{m(t)}\right) = 0,$$

/49/
$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\sqrt[2n]{n(t)}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\sqrt[2n]{m(t)}\right) = 0.$$

3^{o} Pod uslovima /14/, /16/, kao i, za $t \geq t_o$,

/5o/
$$-g_1(t)\varepsilon_1(t) > \left|\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}-\varepsilon_1(t)}\right)'\right|,$$
$$-g_2(t)\varepsilon_2(t) > \left|\left(\sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}+\varepsilon_2(t)}\right)'\right|,$$

jednačina /31/, za $t \geq t_0$, ima jednu klasu pozitivnih rješenja koja ispunjava uslov

/51/ $$\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} - \varepsilon_1(t)} < x(t) < \sqrt[2n]{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)} + \varepsilon_2(t)}$$

za sve $t \geq t_0$ i bar jedno negativno rješenje koje ispunjava uslov

/52/ $$-\sqrt{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)} + \varepsilon_2(t)} < x(t) < -\sqrt{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} - \varepsilon_1(t)}$$

za sve $t \geq t_0$.

Ako funkcija $g_2(t)$ ispunjava i uslov

$$g_2(t) \leq -M_2 < 0 \quad \text{za } t \geq t_0$$

/M_2 je poz. konst./, tada sva rješenja oblasti

$$x \geq -\sqrt[2n]{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} - \varepsilon_1(t)}, \quad t \geq t_0,$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /51/.

Ako funkcije $-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}$ i $-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}$ ispunjavaju uslov /39/, tada rješenja koja ispunjavaju uslove /51/ i /52/ ispunjavaju respektivno i uslove /4o/ i /41/.

4° Pod uslovima /21/, /29/, kao i /44/, gdje samo umjesto $g_1(t)$ treba da stoji $-g_1(t)$, jednačina /31/, za $t \geq t_0$, ima jednu klasu pozitivnih rješenja koja, za sve $t \geq t_0$, ispunjava uslov /45/ i bar jedno negativno rješenje koje, za sve $t \geq t_0$, ispunjava uslov /46/.

Ako funkcija $g_1(t)$ ispunjava i uslov

$$g_1(t) \leq -M_3 < 0 \quad \text{za } t \geq t_0 \quad /M_3 \text{ je poz. konst.}/,$$

tada sva rješenja oblasti

$$x \geq -\sqrt[2n]{m(t) - \varepsilon_1(t)}, \quad t \geq t_0,$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /45/.

Ako funkcije $m(t)$ i $n(t)$ ispunjavaju još i uslov /47/, tada rješenja koja ispunjavaju uslove /45/ i /46/ ispunjavaju respektivno i uslove /48/ i /49/.

5° Pod uslovima, za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$,

$$|g(t,x)| \geq g_1(t) > 0,$$

$$0 < \left|-\frac{h(t,x)}{g(t,x)}\right| \leq m(t),$$

gdje su $g_1(t)$ i $m(t)$ neprekidne funkcije za $t \geq t_0$ i

$$\lim_{t\to+\infty} m(t) = 0 \,,$$

te ako postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $\varepsilon(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da je

$$g_1(t)\varepsilon(t) > \left|\left(\sqrt[2n]{m(t)+\varepsilon(t)}\right)'\right| \quad \text{za } t \geq t_0 \,,$$

jednačina /31/, za $t \geq t_0$, ima:

a/ za $g(t,x)>0$ i $h(t,x)<0$, bar jedno pozitivno rješenje koje ispunjava uslov

/53/ $$0 < x(t) < \sqrt[2n]{m(t)+\varepsilon(t)}$$

za sve $t \geq t_0$ i jednu klasu negativnih rješenja koja ispunjava uslov

/54/ $$-\sqrt[2n]{m(t)+\varepsilon(t)} < x(t) < 0$$

za sve $t \geq t_0$;

b/ za $g(t,x)<0$ i $h(t,x)>0$, jednu klasu pozitivnih rješenja koja ispunjavaju uslov /53/ za sve $t \geq t_0$ i bar jedno negativno rješenje koje ispunjava uslov /54/.

Sva rješenja jednačine /31/ koja ispunjavaju uslove /53/ i /54/, kao i ona izmedju njih, teže nuli kad $t\to+\infty$.

Ako funkcija $g_1(t)$ ispunjava i uslov /37/, tada, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, u slučaju a/, sva rješenja oblasti $x \leq 0$ $(t \geq t_0)$ ispunjavaju uslov /54/, a u slučaju b/, sva rješenja oblasti $x \geq 0$ $(t \geq t_0)$ ispunjavaju uslov /53/.

PRIMJERI

1. Posmatrajmo jednačinu

/55/ $$x' = \frac{1-t^4}{t^3 + t\sin f(t,x)}\cdot x + \frac{t^2 + e^{-t-\varphi(t,x)}}{t}\left(\sqrt{t}+\cos t\right),$$

gdje su $f(t,x)$ i $\varphi(t,x) \geq 0$ definisane i neprekidne funkcije za $t \geq 1$ i $|x| < +\infty$.

Imamo, za $t \geq 2$ i $|x| < +\infty$,

$$g_1(t) = -\frac{1}{t} - t = \frac{1-t^4}{t^3-t} \leq \frac{1-t^4}{t^3 + t\cdot\sin f(t,x)} \leq \frac{1-t^4}{t^3+t} = \frac{1}{t} - t = g_2(t) < 0,$$

$$0 < h_1(t) = t\left(\sqrt{t}+\cos t\right) < \frac{1}{t}\left(t^2 + e^{-t-\varphi(t,x)}\right)\left(\sqrt{t}+\cos t\right) < \frac{t^2+1}{t}\left(\sqrt{t}+\cos t\right) = h_2(t).$$

Dalje je

$$-\frac{h_1(t)}{g_1(t)} = \frac{t^2(\sqrt{t}+\cos t)}{t^2+1} \,, \quad -\frac{h_2(t)}{g_2(t)} = \frac{(t^2+1)(\sqrt{t}+\cos t)}{t^2-1} \;;$$

$$\left(-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}\right)' < \sqrt{6} \quad \text{za } t \geq 6 \,, \quad \left(-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}\right)' < 4 \quad \text{za } t \geq 3 \,.$$

Neka je

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} .$$

Imamo:

$$g_1(t)\varepsilon_1(t) - \varepsilon_1'(t) = \left(-\frac{1}{t} - t\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2t\sqrt{t}} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} - \sqrt{t} < -\sqrt{6}\,, \text{ za } t \geqslant 6\,,$$

$$g_2(t)\varepsilon_2(t) - \varepsilon_2'(t) = \left(\frac{1}{t} - t\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2t\sqrt{t}} = \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \sqrt{t} < 2\,, \text{ za } t \geqslant 3.$$

Prema izvedenom, svi uslovi teoreme 3 su zadovoljeni za $t \geqslant 6$, te jednačina /55/ ima jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

$$\frac{t^2(\sqrt{t}+\cos t)}{t^2+1} - \frac{1}{\sqrt{t}} < x(t) < \frac{(t^2+1)(\sqrt{t}+\cos t)}{t^2-1} + \frac{1}{\sqrt{t}}$$

za sve $t \geqslant 6$, dok za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > 6$ sva rješenja ispunjavaju taj uslov, te i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t) - \frac{t^2(\sqrt{t}+\cos t)}{t^2+1}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(x(t) - \frac{(t^2+1)(\sqrt{t}+\cos t)}{t^2-1}\right) = 0,$$

odnosno uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t) - (\sqrt{t}+\cos t)\right) = 0\ ^{1)}.$$

2. Posmatrajmo jednačinu

/56/ $$x' = \left(2 + \frac{1}{t}\sin f(t,x)\right)x^2 + \frac{1}{t}\,\mathrm{th}\,\varphi(t,x) - 2\sqrt{t}\,,$$

gdje su $f(t,x)$ i $\varphi(t,x)$ definisane i neprekidne funkcije i ispunjavaju potrebne uslove za jedinost rješenja jednačine za $t \geqslant 1$ i $|x| < +\infty$.

Koristeći rezultat 1° koji se odnosi na jednačinu /31/ primjetimo da za $t \geqslant 1$ i $|x| < +\infty$ važi

$$0 < 1 \leqslant g_1(t) = 2 - \frac{1}{t} \leqslant 2 + \frac{1}{t}\sin f(t,x) \leqslant 2 + \frac{1}{t} = g_2(t)\,,$$

$$h_1(t) = -\frac{1}{t} - 2\sqrt{t} < \frac{1}{t}\,\mathrm{th}\,\varphi(t,x) - 2\sqrt{t} < \frac{1}{t} - 2\sqrt{t} = h_2(t) \leqslant -1 < 0 .$$

Uzmimo da je

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$$

Imamo, za $t \geqslant 4$,

$$\left|\left(\sqrt{-\frac{h_1(t)}{g_1(t)}} + \varepsilon_1(t)\right)'\right| = \left|\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{t}+\frac{1}{t}}{2-\frac{1}{t}}} + \frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right)'\right| < \frac{1}{\sqrt{t}} < \left(2 - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{t}} = g_1(t)\varepsilon_1(t),$$

$$\left|\left(\sqrt{-\frac{h_2(t)}{g_2(t)}} - \varepsilon_2(t)\right)'\right| = \left|\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{t}-\frac{1}{t}}{2+\frac{1}{t}}} - \frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right)'\right| < \frac{1}{\sqrt[4]{t}} < \left(2 + \frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{t}} = g_2(t)\varepsilon_2(t).$$

---

[1] Za $t \geqslant 6$ važi: $$\frac{t^2(\sqrt{t}+\cos t)}{t^2+1} < \sqrt{t} + \cos t < \frac{(t^2+1)(\sqrt{t}+\cos t)}{t^2-1} .$$

Svi potrebni uslovi su ispunjeni i jednačina /56/ ima bar jedno pozitivno rješenje $x(t)$ koje ispunjava uslov

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{t}-\frac{1}{t}}{2+\frac{1}{t}}-\frac{1}{\sqrt[4]{t}}} < x(t) < \sqrt{\frac{2\sqrt{t}+\frac{1}{t}}{2-\frac{1}{t}}+\frac{1}{\sqrt[4]{t}}},$$

za sve $t\geqslant 4$, te i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt{\frac{2\sqrt{t}-\frac{1}{t}}{2+\frac{1}{t}}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt{\frac{2\sqrt{t}+\frac{1}{t}}{2-\frac{1}{t}}}\right)=0,$$

odnosno uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt[4]{t}\right)=0\ ^{1)}$$

i jednu klasu negativnih rješenja koja ispunjava uslov

$$-\sqrt{\frac{2\sqrt{t}+\frac{1}{t}}{2-\frac{1}{t}}+\frac{1}{\sqrt[4]{t}}} < x(t) < -\sqrt{\frac{2\sqrt{t}-\frac{1}{t}}{2+\frac{1}{t}}-\frac{1}{\sqrt[4]{t}}}$$

za sve $t\geqslant 4$, a sva rješenja oblasti

$$x\leqslant\sqrt{\frac{2\sqrt{t}-\frac{1}{t}}{2+\frac{1}{t}}-\frac{1}{\sqrt[4]{t}}},\quad t\geqslant 4$$

ispunjavaju taj uslov, za dovoljno veliko $t\geqslant t^*>4$, kao i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\sqrt{\frac{2\sqrt{t}+\frac{1}{t}}{2-\frac{1}{t}}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\sqrt{\frac{2\sqrt{t}-\frac{1}{t}}{2+\frac{1}{t}}}\right)=0,$$

odnosno uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\sqrt[4]{t}\right)=0.$$

3. Jednačina

/57/ $$x'=\left(\operatorname{th} f(t,x)-t\right)x^2+t\left(8-5\sin t\right)+\cos\varphi(t,x),$$

gdje su $f(t,x)$ i $\varphi(t,x)$ definisane i neprekidne funkcije i ispunjavaju potrebne uslove za jedinost rješenja za $t\geqslant 8$ i $|x|<+\infty$, ima jednu klasu pozitivnih rješenja koja ispunjava uslov

$$\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)-1}{t+1}-\frac{1}{\sqrt{t}}} < x(t) < \sqrt{\frac{t(8-5\sin t)+1}{t-1}+\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

---

1) Možemo primjetiti da, za $t\geqslant 4$, važi nejednakost

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{t}-\frac{1}{t}}{2+\frac{1}{t}}} < \sqrt[4]{t} < \sqrt{\frac{2\sqrt{t}+\frac{1}{t}}{2-\frac{1}{t}}}.$$

Takodje, možemo primjetiti da su $x=\pm\sqrt[4]{t}$ približna rješenja jednačine /56/.

za sve $t \geq 8$, a sva rješenja oblasti

$$x \geqslant -\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)-1}{t+1}-\frac{1}{\sqrt{t}}}\ , \quad t \geq 8$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > 8$, ispunjavaju navedeni uslov, kao i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)-1}{t+1}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)+1}{t-1}}\right)=0,$$

odnosno uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-\sqrt{8-5\sin t}\right)=0\ ^{1)}.$$

Takodje, zadana jednačina ima i bar jedno negativno rješenje koje ispunjava uslov

$$-\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)+1}{t-1}+\frac{1}{\sqrt{t}}} < x(t) < -\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)-1}{t+1}-\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

za sve $t \geq 8$, te i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)+1}{t-1}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)-1}{t+1}}\right)=0,$$

odnosno uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)+\sqrt{8-5\sin t}\right)=0.$$

Navedena tvrdjenja, o rješenjima jednačine /57/, proizilaze iz rezultata 4° i istinitosti sljedećih relacija, za $t \geq 8$ i $|x| < +\infty$:

$$g(t,x) \equiv th\, f(t,x) - t < 1-t = g_1(t) \leqslant -7 < 0,$$

$$0 < n(t) = \frac{t(8-5\sin t)-1}{t+1} < -\frac{h(t,x)}{g(t,x)} \equiv \frac{t(8-5\sin t)+\cos\varphi(t,x)}{-th\, f(t,x)+t} < \frac{t(8-5\sin t)+1}{t-1} = m(t).$$

Neka je

$$\varepsilon_1(t)=\varepsilon_2(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Dalje, za $t \geq 8$, važi

$$\frac{1}{\sqrt{t}} < \frac{t(8-5\sin t)-1}{t+1},$$

$$\left|\left(\sqrt{n(t)-\varepsilon_1(t)}\right)'\right| = \left|\left(\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)-1}{t+1}-\frac{1}{\sqrt{t}}}\right)'\right| < \frac{7}{2\sqrt{2}} \leqslant \frac{t-1}{\sqrt{t}} = -g_1(t)\varepsilon_1(t)$$

$$\left|\left(\sqrt{m(t)+\varepsilon_2(t)}\right)'\right| = \left|\left(\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)+1}{t-1}+\frac{1}{\sqrt{t}}}\right)'\right| < \frac{7}{2\sqrt{2}} \leqslant \frac{t-1}{\sqrt{t}} = -g_1(t)\varepsilon_1(t).$$

---

1) Za $t \geq 8$ važi nejednakost

$$\sqrt{\frac{t(8-5\sin t)-1}{t+1}} < \sqrt{8-5\sin t} < \sqrt{\frac{t(8-5\sin t)+1}{t-1}}.$$

§ 3. NEKE DEFINICIJE STABILNOSTI I STABILNOST RJEŠENJA POSMATRANIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Cilj nam je u ovom paragrafu da proučimo stabilnost rješenja diferencijalnih jednačina posmatranih u glavi I i u ovoj glavi § 1 i § 2. Nije teško primjetiti da smo na osnovu odgovarajućih "cijevi", koje smo formirali pri proučavanju ponašanja rješenja posmatranih jednačina, već obezbjedili mogućnost da konstatujemo stabilnost ili nestabilnost nekih rješenja u smislu odgovarajućih definicija datih u uvodu § 2 .

Tako možemo odmah primjetiti, bez detaljnog obrazlaganja:

1° U svim slučajevima posmatranja izvedenih preko "cijevi" izlaznih integralnih krivih, čije širine teže nuli, gdje smo obezbjedjivali postojanje bar jednog rješenja $x(t)$ koje ostaje u toj "cijevi" za sve $t \geq t_0$, možemo konstatovati da je to rješenje nestabilno - nestabilno u smislu Ljapunova.

Zaista, dobijeni rezultat ne daje nam mogućnost da za neko drugo rješenje, koje u trenutku $t = t_0$ pripada istoj "cijevi", tvrdimo da će ostati u toj "cijevi" za sve $t \geq t_0$, dok nije teško primjetiti da postoji rješenje $x_1(t)$ koje je u nekom trenutku $t = \tau > t_0$ proizvoljno blisko rješenju $x(t)$, koje ostaje u "cijevi", izlazi iz te "cijevi", jer sva rješenja koja prolaze kroz ivične tačke "cijevi" izlaze iz te "cijevi" čija je širina, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, proizvoljno mala.

2° Za sve one klase rješenja za koje smo pokazali da za sve $t \geq t_0$ pripadaju odgovarajućoj "cijevi" ulaznih integralnih krivih, čija širina je ograničena, ali ne teži nuli kad $t \to +\infty$ /bilo da je "cijev" pravolinijska ili krivolinijska/, možemo konstatovati da su te klase rješenja skoro stabilna rješenja u smislu definicije M. Bertolina /vidjeti [7]/. Takodje, svaka kriva $x = \varphi(t)$ koja, za $t \geq t_0$, pripada odgovarajućoj takvoj "cijevi" i koja je približno rješenje jednačine, ona je skoro stabilno približno rješenje u smislu iste definicije.

Dovoljno je zapaziti da ako uzmemo da širina "cijevi" nije veća od ℓ /ℓ je fiksiran broj/, za sve $t \geq t_0$, da su uslovi definicije M. Bertolina ispunjeni. Takodje, možemo primjetiti da je gornji zaključak u neposrednoj vezi sa primjerom kojeg navodi M. Bertolino /vidjeti [7] /, s tim što naš zaključak predstavlja dopunu tog primjera. Naime, prave $x = m$ i $x = M$ /m, M su konstante i $m < M$/ u primjeru M. Bertolina, u odgovarajućim rerezultatima datim u ovoj glavi § 1 i § 2, zamjenjene su odgovarajućim krivama, koje mogu biti ograničene ili neograničene, ali sa ograničenim razmakom.

Što se tiče dobijenih specifičnih rezultata koji obezbjedjuju postojanje jedne klase rješenja koja za sve $t \geq t_0$ pripada odgovarajućoj krivolinijskoj "cijevi" ulaznih integralnih krivih, čija širina teži nuli kad $t \to +\infty$, kao i oni gdje takvoj "cijevi", za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, pripada i šira klasa rješenja, oni zaslužuju posebnu pažnju i po pitanju stabilnosti.

Za neka rješenja može se pokazati da su stabilna u smislu osnovne definicije Ljapunova, pa i više od toga; a, takodje, se pruža mogućnost proučavanja stabilnosti rješenja u smislu neke od ostalih poznatih definicija navedenih u uvodu §2. Primjetimo i to da formiranje krivolinijskih "cijevi" ulaznih integralnih krivih, čija širina teži nuli kad $t \to +\infty$, pruža mogućnost da se mogu lakše odrediti neka približna rješenja jednačina, kao i da se može govoriti o odgovarajućoj vrsti stabilnosti tih rješenja. Takodje, pruža se mogućnost da se u nekim slučajevima može na svojstven način govoriti i o stabilnosti rješenja pri stalnim poremećajima.

Zbog toga, a na osnovu definicija o stabilnosti rješenja navedenih u uvodu §2, navesćemo neke definicije o stabilnosti rješenja, koje će neposrednije da odgovaraju našim dobijenim rezultatima. Uz svaku od tih definicija posmatraćemo i stabilnost odgovarajućih rješenja u smislu te definicije.

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

gdje je funkcija $f(t,x)$ definisana, neprekidna i zadovoljava odgovarajuće uslove za egzistenciju i jedinost rješenja u poluravni tOx $(t \geq t_0)$.

§ 3.1.

Navedimo prvo definiciju asimptotske stabilnosti jedne klase rješenja.

DEFINICIJA 1.

Za neku klasu C rješenja jednačine /1/ kazaćemo da je asimptotski stabilna ako, za svako rješenje $x(t) \in C$ postoji neprekidna i monotono opadajuća [1] funkcija $r(t)$, za $t \geq t_0$, koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i takav broj $\delta(r, t_0) > 0$ da pri

---

[1] Pod monotono opadajućom funkcijom podrazumjevamo da je strogo monotono opadajuća.

/2/ $$|x_1(t_0) - x(t_0)| < \delta$$

važi

/3/ $$|x_1(t) - x(t)| < r(t) \quad \text{za sve } t \geq t_0,$$

gdje je $x_1(t)$ proizvoljno rješenje jednačine /1/.

Dakle, prema definiciji 1, klasa rješenja C jednačine /1/ je asimptotski stabilna ako svako rješenje $x(t) \in C$ blisko sa nekim drugim rješenjem $x_1(t)$ jednačine /1/ za $t=t_0$ ostaje blisko za svako $t \geq t_0$, u smislu definicije, tj. da razmak izmedju rješenja $x_1(t)$ i $x(t)$ nije veći od monotono opadajuće funkcije $r(t)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$. Za rješenje $x_1(t)$ kazali smo da je proizvoljno rješenje jednačine /1/, što znači da je $x_1(t)$ neko drugo rješenje jednačine /1/ različito od rješenja $x(t)$, koje pripada ili ne pripada klasi C, ali koje sa odgovarajućim rješenjem $x(t) \in C$ za odredjenu vrijednost δ ispunjava uslov /2/.

Stabilnost nekog rješenja $x(t)$ u smislu definicije 1 ne obezbjedjuje i stabilnost tog rješenja u smislu Ljapunova za sve $t \geq t_0$, mada, rješenje $x(t) \in C$ stabilno u smislu definicije 1, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, prema uslovu /3/, ostaje proizvoljno blisko sa rješenjem $x_1(t)$ sa kojim ispunjava uslov /2/ i

$$\lim_{t \to +\infty} |x_1(t) - x(t)| = 0.$$

Kao dopunu definiciji 1 možemo navest sljedeće definicije: definiciju asimptotske stabilnosti u cijelom i definiciju oblasti asimptotske stabilnosti klase C rješenja jednačine /1/.

DEFINICIJA 2.

Ako je, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, uslov /3/ ispunjen za sva rješenja $x_1(t)$ iz oblasti

$$R: \ t \geq t_0, \ |x| < +\infty$$

kazaćemo da je klasa rješenja C asimptotski stabilna u cijelom.

DEFINICIJA 3.

Ako je klasa C rješenja asimptotski stabilna, a nije asimptotski stabilna u cijelom, tada onu oblast $D \subset R$ kroz čije tačke prolaze rješenja $x_1(t)$ koja, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /3/ nazivaćemo oblast asimptotske stabilnosti klase C.

Kao primjer stabilnosti rješenja u smislu definicije 1 možemo istaći rješenja jednačine

/4/ $$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\,x^n + h(t,x)$$

/ $g(t,x)$ i $h(t,x)$ su definisane i neprekidne funkcije i ispunjavaju potrebne uslove o jedinosti rješenja za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$ /, dobijena u nekim rezultatima navedenim u glavi I § 1 i u ovoj glavi § 2, a preko "cijevi" ulaznih integralnih krivih čija širina teži nuli kad $t \to +\infty$.

Klasu C rješenja jednačine /4/ asimptotski stabilnih u smislu definicije 1 čine rješenja $x(t)$ koja su odredjena početnim uslovima $x(t_0)$ koje pripadaju otvorenom intervalu odredjenim vrijednostima donje i gornje granice odgovarajuće "cijevi" ulaznih integralnih krivih za $t=t_0$, a za funkciju $r(t)$ možemo uzeti da je to ona funkcija od koje širina te "cijevi" nije veća.

Tako, na primjer, u slučaju rezultata teoreme 4 ove glave § 2, kada je $\lim\limits_{t\to+\infty}(m(t)-n(t))=0$, klasu C asimptotski stabilnih rješenja u smislu definicije 1 čine rješenja $x(t)$ koja su odredjena početnim vrijednostima $x(t_0)$ koja pripadaju intervalu

$$\left(n(t_0) - \varepsilon_1(t_0),\ m(t_0) + \varepsilon_2(t_0)\right),$$

a za funkciju $r(t)$ možemo uzeti da je

$$r(t) = \delta(t) + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t),$$

gdje je $\delta(t)$ definisana, neprekidna, monotono opadajuća funkcija, teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da je

$$|m(t) - n(t)| < \delta(t) \quad \text{za } t \geq t_0.$$

Ovdje je "cijev" ulaznih integralnih krivih

/5/ $$t \geq t_0,\ n(t) - \varepsilon_1(t) < x < m(t) + \varepsilon_2(t).$$

Kako, prema uslovima /22/ /§ 2/, integralne krive jednačine /4/ prolaze kroz ivične tačke "cijevi" /5/ ulazeći u "cijev", to se za svaku vrijednost $x(t_0) \in (n(t_0)-\varepsilon_1(t_0),\ m(t_0)+\varepsilon_2(t_0))$ može naći dovoljno bliska vrijednost $x_1(t_0)$ tako da odgovarajuća rješenja $x(t)$ i $x_1(t)$, čije su to početne vrijednosti, ispunjavaju uslove definicije 1.

Prema rezultatima teoreme 4 /u slučaju kada je $\lim\limits_{t\to+\infty}(m(t)-n(t))=0$ /, pri uslovu $g(t,x) \leq g_1(t) < 0$, za oblast asimptotske stabilnosti klase rješenja jednačine /4/ možemo uzeti da je

$$D:\ t \geq t_0,\ n(t) - \varepsilon_1(t) \leq x \leq m(t) + \varepsilon_2(t);$$

dok pri uslovu $g(t,x) \leq -M < 0$ / M je poz. konst./ navedena klasa C rješenja je asimptotski stabilna u cijelom.

Analizirajmo, sa gledišta stabilnosti, još i rješenja dobijena u rezultatu 1^{o} § 2. ove glave, pri ispunjenju uslova /39/. Prema ovom rezultatu jednačina /4/ $(n=2k,\ k=1,2,\dots)$ ima bar jedno rješenje koje ispunjava uslov /35/ za sve $t \geq t_0$ i jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov /36/ za sve $t \geq t_0$. Možemo konstatovati:

a/ rješenje koje ispunjava uslov /35/ je nestabilno u smislu Ljapunova,

b/ klasa rješenja koja ispunjava uslov /36/ za sve $t \geq t_0$ je asimptotski stabilna u smislu definicije 1, gdje, u slučaju uslova /37/, oblast asimptotske stabilnosti te klase rješenja je oblast /38/.

Na sličan način bismo mogli analizirati, sa gledišta stabilnosti, rješenja jednačine /4/ dobijena i u ostalim rezultatima postignutim u glavi I i u ovoj glavi.

§ 3.2.

Sada navedimo tzv. definiciju ravnomjerne asimptotske stabilnosti jedne klase rješenja u odnosu na početnu vrijednost t_0.

DEFINICIJA 4.

Neka je C neka klasa rješenja jednačine /1/. Kazaćemo da je klasa rješenja C ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 ako je svako njeno rješenje $x(t)$ stabilno u smislu Ljapunova; tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tako da iz nejednakosti

/6/ $$|x_1(t_0) - x(t_0)| < \delta$$

slijedi nejednakost

/7/ $$|x_1(t) - x(t)| < \varepsilon \quad \text{za sve } t \geq t_0,$$

gdje je $x_1(t)$ proizvoljno rješenje jednačine /1/ koje je odredjeno početnim uslovom $x_1(t_0)$; te ako postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ $(t \geq t_0)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da pri /6/ važi

/8/ $$|x_1(t) - x(t)| < r(t)$$

za sve $t \geq t_0$.

Dakle, prema definiciji 4, klasa rješenja C jednačine /1/ je ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 ako svako rješenje $x(t) \in C$ blisko sa nekim drugim rješenjem jednačine $x_1(t)$ za $t = t_0$ ostaje blisko, u smislu definicije, za svako $t \geq t_0$. Uslovi /7/ i /8/ obezbjedjuju i ravnomjernu konvergenciju rješenja $x_1(t)$ ka rješenju $x(t)$ kad $t \to +\infty$.

Lako je primjetiti da je definicija 4 jača od definicije 1, jer rješenje stabilno u smislu definicije 4 stabilno je i u smislu definicije 1, dok obratno ne važi.

Takodje, možemo primjetiti da je definicija 4 u tijesnoj vezi sa definicijom Ljapunova o ravnomjernoj asimptotskoj stabilnosti u odnosu na početnu vrijednost t_0 /vidjeti uvod § 2, tačka 1 e/ ovoga rada/, te da je razlika u tome što je uslov $\lim_{t\to+\infty}|x_1(t)-x(t)|=0$ zamjenjen uslovom /ε/ u definiciji 4 i to što se u definiciji 4 tretira stabilnost jedne klase rješenja, a ne jednog rješenja. Ustvari, suštinske razlike medju tim definicijama nema, jer rješenje stabilno u smislu jedne definicije može se pokazati da je stabilno i u smislu druge definicije. Ipak smo formulisali definiciju 4 iz razloga što u ovom radu, u nekim slučajevima, formiramo odredjene klase rješenja, gdje je svako rješenje klase ravnomjerno asimptotski stabilno u odnosu na početnu vrijednost t_0 sa odredjenom funkcijom $r(t)$, a što nećemo moći tvrditi za neko rješenje koje je izvan te klase.

O stabilnosti u smislu definicije 4 možemo govoriti u slučaju jednačine

$$\frac{dx}{dt}=a(t)x+f(t), \tag{9}$$

gdje su $a(t)$ i $f(t)$ definisane i neprekidne funkcije i $a(t)<0$ za $t\geq t_0$, koju smo posmatrali u glavi I § 3, a istu smo u svojstvu primjera posmatrali i u ovoj glavi § 2.1. /Ova jednačina biće detaljnije posmatrana u glavi IV/.

Klasa rješenja jednačine /9/ koja za sve $t\geq t_0$ pripada odgovarajućoj krivolinijskoj "cijevi" ulaznih integralnih krivih čija širina teži nuli kad $t\to+\infty$ je ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4.

Zadržimo se na rezultatu koji smo za jednačinu /9/ dali u ovoj glavi § 2.1. Naime, tu imamo obezbjedjenu jednu klasu rješenja koja za sve $t\geq t_0$ pripada "cijevi"

$$t\geq t_0,\ -\frac{f(t)}{a(t)}-\varepsilon_1(t)<x<-\frac{f(t)}{a(t)}+\varepsilon_2(t), \tag{10}$$

gdje su $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ neprekidne i monotono opadajuće funkcije, koje teže nuli kad $t\to+\infty$ i takve da su uslovi /12/ /§ 2.1./ ispunjeni.

Klasa $\check{C}$ rješenja $x(t)$ koja su ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4 su ona koja su odredjena početnim uslovima $x(t_0)$ tako da je

$$x(t_0)\in\left(-\frac{f(t_0)}{a(t_0)}-\varepsilon_1(t_0),\ -\frac{f(t_0)}{a(t_0)}+\varepsilon_2(t_0)\right).$$

Pod uslovima /12/ /§ 2.1./, sva rješenja jednačine /9/ koja prolaze kroz ivične tačke "cijevi" /10/ ulaze u tu "cijev", te sve integralne krive koje prolaze kroz unutrašnje tačke te "cijevi" ostaju u njoj za sve $t \geq t_0$.

Dalje, neka su

$$P_1\left(t_1, -\frac{f(t_1)}{a(t_1)} - \delta_1\right), \quad P_2\left(t_2, -\frac{f(t_2)}{a(t_2)} + \delta_2\right)$$

/δ_1 i δ_2 su proizvoljni pozitivni brojevi/ proizvoljne tačke respektivno oblasti

/11/ $$x < -\frac{f(t)}{a(t)}, \quad t \geq t_0,$$

/12/ $$x > -\frac{f(t)}{a(t)}, \quad t \geq t_0.$$

Imamo:

$$x'(P) = -a(t)\delta_1, \quad x'(P_2) = a(t)\delta_2,$$

što pokazuje da koeficijent smjera integralnih krivih jednačine /9/ u oblasti /11/ je pozitivan i direktno zavisi od δ_1, tj. zavisi od razmaka integralne krive od krive stacionarnih tačaka $-\frac{f(t)}{a(t)}$ /što je δ_1 veće to je i veći koeficijent smjera, pri istoj vrijednosti t/, a u oblasti /12/ koeficijent smjera je negativan i to manji što je δ_2 veće.

Otuda, dvije integralne krive jednačine /9/, za $t \geq t_0$, imaju najveći razmak u tački $t = t_0$, te se taj razmak ravnomjerno smanjuje kad t raste, odnosno rješenja proizvoljno bliska u trenutku $t = t_0$ ostaju proizvoljno bliska za sve $t \geq t_0$ i bivaju sve bliža pri rašćenju t.

Prema tome, za svako rješenje $x(t) \in C$ jednačine /9/, te za proizvoljno $\varepsilon > 0$, može da se odredi broj $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ i funkcija $r(t)$, gdje je

$$r(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t), \quad t \geq t_0,$$

tako da svako rješenje $x_1(t)$ jednačine /9/ koje sa rješenjem $x(t)$ ispunjava uslov /6/, važi i uslov /7/, a takodje i uslov /8/. Ustvari, za svaku vrijednost $x(t_0)$ može se naći dovoljno bliska vrijednost $x_1(t_0)$ tako da rješenja $x(t)$ i $x_1(t)$ odredjena tim početnim uslovima ispunjavaju uslove definicije 4.

Prema rezultatu koji smo za jednačinu /9/ dali u ovoj glavi § 2.1, kao i prethodnih posmatranja, za oblast ravnomjerne asimptotske stabilnosti klase C rješenja jednačine /9/ možemo uzeti

$$D: \quad t \geq t_0, \quad -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon_1(t) \leq x \leq -\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon_2(t).$$

Medjutim, ako uslov $a(t) < 0$ zamjenimo uslovom $a(t) \leq -M < 0$ /M je poz. kon./ klasa C rješenja jednačine /9/ je ravnomjerno asimptotski stabilna u cijelom, jer dodatni uslov $a(t) \leq -M < 0$, prema /12/ /§ 2.1./, obezbjedjuje ulaženje svih rješenja jednačine /9/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, u "cijev" /1o/. Zaista, neka je

$$P\left(t, -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon_1(t) - \delta\right)$$

/δ proizvoljan pozitivan broj/ proizvoljna tačka oblasti

$$/13/ \qquad x < -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon_1(t) \, , \, t \geq t_0$$

Prema /12/ /§ 2.1./, imamo

$$x'(P) = -a(t)\varepsilon_1(t) - a(t)\delta > \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' - \varepsilon_1'(t) + M\delta ,$$

što znači da integralne krive jednačine /9/ u svakoj tački P oblasti /13/ ima koeficijent smjera veći od koeficijenta smjera krive koja je donja granica "cijevi" /1o/, u tački sa istom apscisom, za pozitivan broj $M\delta$, te će integralne krive oblasti /13/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, stići do donje medje "cijevi" /1o/, a zatim i ući u "cijev" /1o/. Analogno bi pokazali i za integralne krive oblasti $x > -\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon_2(t)$, $t \geq t_0$.

§ 3.3.

Zadržimo se sada na pitanju stabilnosti približnog rješenja.

Prije svega, dobro nam je poznato da nije uvijek moguće naći tačno rješenje zadane jednačine, ili je to veoma teško, te da se pristupa traženju odgovarajućeg približnog rješenja te jednačine. Otuda i pitanje stabilnosti približnog rješenja zaslužuje pažnju.

Takodje, primjetimo da formiranje krivolinijskih "cijevi" ulaznih integralnih krivih čija širina teži nuli kad $t \to +\infty$ pruža mogućnost da se lakše nadje odgovarajuće približno rješenje $x = \varphi(t)$ koje za $t \geq t_0$ pripada toj "cijevi", te da se, prirodno, nameće i pitanje stabilnosti tog približnog rješenja.

U radu [7] M. Bertolino je dao definiciju skoro stabilnog približnog rješenja. Polazeći od te definicije i odgovarajućeg komentara vezanog za tu definiciju, te koristeći i druge definicije o stabilnosti rješenja navedenih u uvodu § 2 ovoga rada, možemo dati sljedeću definiciju asimptotske stabilnosti približnog rješenja, koja odgovara dobijenim rezultatima u ovom radu.

DEFINICIJA 5.

Neka je $x = \varphi(t)$ neprekidna funkcija, kao i njen prvi izvod, za $t \geq t_0$. Za funkciju $x = \varphi(t)$ kazaćemo da je asimptotski stabilno približno rješenje jednačine /1/ ako postoji monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i pozitivan broj $\delta(r,t_0)$ tako da za proizvoljno rješenje $x(t)$ jednačine /1/ za koje je

/14/ $$|x(t_0)-\varphi(t_0)|<\delta$$

važi

/15/ $$|x(t)-\varphi(t)|<r(t)$$

za sve $t\geq t_0$, kada je

$$|\varphi'(t)-f(t,\varphi(t))|<\varepsilon,$$

gdje je ε greška približnog rješenja $x=\varphi(t)$.

Drugim riječima, ako je $\varphi(t)$ približno rješenje u smislu definicije 3 /uvod § 1 / i ako sa proizvoljnim rješenjem $x(t)$ ispunjava uslove /14/ i /15/, tada ćemo reći da je ono i asimptotski stabilno.

Možemo primjetiti da i definicija 5 /kao i definicija 1/ za približno rješenje $\varphi(t)$ i tačno rješenje $x(t)$ koja su po volji bliska u momentu $t=t_0$ ne govori o proizvoljnoj bliskosti za sve $t\geq t_0$, dok se, za dovoljno veliko $t\geq t^*(r)\geq t_0$, ima i proizvoljna bliskost tih rješenja i

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-\varphi(t)|=0 .$$

Ako je $x=\varphi(t)$ tačno rješenje onda je njegova asimptotska stabilnost iskazana već definicijom 1.

I u slučaju asimptotske stabilnosti približnog rješenja možemo govoriti o oblasti asimptotske stabilnosti tog rješenja u smislu definicija 2 i 3 , kao što smo istakli i za tačna rješenja.

Kao primjer asimptotski stabilnog približnog rješenja u smislu definicije 5 možemo istaći da je to svako približno rješenje posmatranih jednačina koja pripadaju odgovarajućim "cijevima" ulaznih integralnih krivih čije širine teže nuli kad $t\to+\infty$.

Navedimo i dva konkretna primjera.

1° Neka je data jednačina $x'=-tx+t\sin t$.

Svako približno rješenje $\varphi(t)$ te jednačine koje ispunjava uslov

$$\sin t-\frac{1}{\sqrt{t}}<\varphi(t)<\sin t+\frac{1}{\sqrt{t}}\ ,\ t\geq 4$$

je asimptotski stabilno približno rješenje u cijelom. Takvo je, na primjer, rješenje $\varphi(t)=\sin t-\frac{1}{t}\cos t$.

Može se pokazati da rješenja zadane jednačine prolaze kroz tačke krivih $x=\sin t-\frac{1}{\sqrt{t}}$, $x=\sin t+\frac{1}{\sqrt{t}}$ $(t\geq 4)$ ulazeći u "cijev" koju ograničavaju te krive, a kako je $a(t)=-t\leq -4$ za $t\geq 4$, to će sva rješenja, za dovoljno veliko $t\geq t^*>4$, ući u tu "cijev". Uzimajući da je $r(t)=\frac{2}{\sqrt{t}}$ svi potrebni uslovi o asimptotskoj stabilnosti u cijelom su ispunjeni.

2^0 Za jednačinu $x'=-tx+1$ takodje bi mogli pokazati da je, na primjer, približno rješenje $\varphi(t)=\frac{1}{t}$ asimptotski stabilno u cijelom.

§ 3.4.

Zadržimo se sada na pitanju stabilnosti rješenja pri stalnim poremećajima.

Neka je zadana jednačina

/16/ $$\frac{dx}{dt}=F(t,x)+f(t,x)\equiv F_1(t,x),$$

gdje su $F(t,x)$ i $f(t,x)$ definisane i neprekidne funkcije i ispunjavaju potrebne uslove o jedinosti rješenja u dijelu ravni tOx za $t\geq t_0$.

Uz jednačinu /16/ posmatrajmo i jednačinu

/17/ $$\frac{dx}{dt}=F(t,x).$$

Jednačina /17/ predstavlja tzv. jednačinu prve aproksimacije za jednačinu /16/, a funkcija $f(t,x)$ predstavlja funkciju stalnog poremećaja. U nekim slučajevima umjesto jednačine /16/ može se proučavati jednostavnija jednačina /17/, a, upravo, problem stabilnosti rješenja pri stalnim poremećajima pruža pomoć u tom smislu.

Navedimo sada sljedeću definiciju asimptotske stabilnosti rješenja pri stalnim poremećajima.

DEFINICIJA 6.

Neka je $x=\varphi(t)$ tačno ili približno rješenje jednačine /17/. Kazaćemo da je rješenje $\varphi(t)$ asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima ako postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ $(t\geq t_0)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$, te ako postoji broj $\delta(r,t_0)>0$ i neprekidna i monotono opadajuća funkcija $\delta(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$, tako da za proizvoljno rješenje $x(t)$ jednačine /16/ čije početne vrijednosti zadovoljavaju nejednakost

$$|x(t_0)-\varphi(t_0)|<\delta$$

važi nejednakost

/18/ $$|x(t)-\varphi(t)|<r(t)$$

za sve $t\geq t_0$, kada je

/19/ $|s_1(t) - s(t)| < \delta(t)$ za sve $t \geq t_0$,

gdje su $s_1(t)$ i $s(t)$ odgovarajuće krive stacionarnih tačaka respektivno jednačina /16/ i /17/, tj. $F_1(t, s_1(t)) = 0$, $F(t, s(t)) = 0$.

Kako se vidi u definiciji 6 ograničenje za funkciju poremećaja $f(t,x)$ predstavlja uslov /19/, koji je iskazan preko odgovarajućih krivih stacionarnih tačaka $s_1(t)$ i $s(t)$. Jednačine /16/ i /17/ mogu imati po više krivih stacionarnih tačaka, te se ovdje pod odgovarajućim krivama stacionarnih tačaka $s_1(t)$ i $s(t)$ misli na one koje pripadaju odgovarajućoj oblasti ravni tOx /za $t \geq t_0$ i odgovarajuće vrijednosti x/.

U praksi rješenja $x = s_1(t)$ i $x = s(t)$ respektivno jednačina $F_1(t,x)=0$ i $F(t,x)=0$ mogu biti, kako tačna, tako i približna, s tim da razmak izmedju stvarnih krivih stacionarnih tačaka bude manji od $\delta(t)$.

Bitna razlika definicije 6 od definicija o stabilnosti rješenja pri stalnim poremećajima navedenih u uvodu § 2 je u tome što se u tim definicijama ističe kao osnovni uslov za funkciju poremećaja da je ona ograničena, dok se taj uslov u definiciji 6 ne spominje, a uslov /19/ dopušta i mogućnost da funkcija poremećaja $f(t,x)$ može biti i neograničena, što ćemo vidjeti u konkretnim primjerima.

Otuda, navedenoj vrsti asimptotske stabilnosti pri stalnim poremećajima možemo dati i potpuniji naziv: asimptotska stabilnost pri stalnim poremećajima stacionarnih krivih. Zaista, prema definiciji 6, funkcija poremećaja $f(t,x)$ može da bude i neograničena, ali je bitno to da ona čini male poremećaje stacionarne krive $s(t)$.

Na osnovu navedenih definicija 1, 2 i 3, i ovdje možemo govoriti o asimptotskoj stabilnosti jedne klase rješenja, kao i o oblasti asimptotske stabilnosti pri stalnim poremećajima. Naime, ako imamo neku klasu C rješenja jednačine /17/ tako da su uslovi definicije 6 ispunjeni za ma koje rješenje $\varphi(t) \in C$ kazaćemo da je klasa C rješenja asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima; dok ćemo pod oblasti asimptotske stabilnosti pri stalnim poremećajima podrazumjevati onu oblast D kroz čije tačke prolaze rješenja $x(t)$ jednačine /16/ koja, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /18/, a ako je D: $t \geq t_0$, $|x| < +\infty$, kazaćemo da imamo asimptotsku stabilnost pri stalnim poremećajima u cijelom.

PRIMJER.

Uočimo dvije neprekidne krive $x = u_1(t)$ i $x = u_2(t)$ $(t \geq t_0)$, takve da je

$$u_1(t) < u_2(t) \quad \text{i} \quad u_2(t) - u_1(t) = d(t),$$

gdje funkcija $d(t)$ teži nuli kad $t \to +\infty$ i neka je $x = \varphi(t)$ rješenje jednačine /17/ koje ispunjava uslov

$$u_1(t) < \varphi(t) < u_2(t) \quad \text{za } t \geq t_0 .$$

Dalje, neka je, za $t \geq t_0$,

$$/20/ \qquad \begin{aligned} &F(t, u_1(t)) > 0, \quad F(t, u_1(t)) > u_1'(t), \\ &F(t, u_2(t)) < 0, \quad F(t, u_2(t)) < u_2'(t), \\ &F_1(t, u_1(t)) > 0, \quad F_1(t, u_1(t)) > u_1'(t), \\ &F_1(t, u_2(t)) < 0, \quad F_1(t, u_2(t)) < u_2'(t), \end{aligned}$$

tj. sva rješenja jednačina /16/ i /17/ koja prolaze kroz tačke oblasti

$$/21/ \qquad u_1(t) \leq x \leq u_2(t), \quad t \geq t_0$$

ostaju u toj oblasti. Rješenje $x = \varphi(t)$ jednačine /17/ je asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima u smislu definicije 6.

Uzmimo da je $r(t) \geq d(t)$. Imamo da oblast /21/ pripada oblasti

$$/22/ \qquad \varphi(t) - r(t) < x < \varphi(t) + r(t), \quad t \geq t_0 ,$$

jer je

$$\varphi(t) - r(t) < u_1(t), \quad \varphi(t) + r(t) > u_2(t) \quad (t \geq t_0) .$$

Prema uslovima /2o/ jednačine /16/ i /17/ imaju respektivno stacionarne krive $\Lambda_1(t)$ i $\Lambda(t)$ koje pripadaju oblasti /21/, te postoji funkcija $\delta(t)$ takva da je monotono opadajuća, da je

$$0 < \delta(t) < r(t) \quad , t \geq t_0$$

i koja ispunjava uslov /19/. Kako je

$$/23/ \qquad u_1(t_0) < \varphi(t_0) < u_2(t_0)$$

i kako sva rješenja jednačine /16/ koja prolaze kroz tačke oblasti /21/ ostaju u toj oblasti, može se izabrati jedno $\delta(r, t_0)$ tako da rješenje $x(t)$ jednačine /16/ ostaje u oblasti /21/ ako je $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$. Ovo rješenje $x(t)$ tim prije ostaje u široj oblasti /22/. Dakle, $\varphi(t)$ je, prema definiciji 6, asimptotski stabilno rješenje pri stalnim poremećajima.

Takodje, možemo konstatovati da svako rješenje $\varphi(t)$ /tačno ili približno/ jednačine /17/, odredjeno početnim uslovom $\varphi(t_0)$ koje ispunjava uslov /23/ je asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima u smislu definicije 6.

Primjetimo još i to da za navedeni primjer možemo uzeti da je oblast D asimptotske stabilnosti pri stalnim poremećajima oblast /21/, a ako sva rješenja jednačine /16/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ulaze u "cijev" koja je odredjena krivama $u_1(t)$ i $u_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$, tada se radi o asimptotskoj stabilnosti pri stalnim poremećajima u cijelom.

U glavi I § 3 posmatrali smo jednačine

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t) \quad \text{i} \quad \frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t) + g(t,x)$$

na sličan način, gdje se može primjetiti da se u nekim slučajevima radi o stabilnosti pri stalnim poremećajima u smislu definicije 6. /Ove jednačine biće detaljnije posmatrane u glavi IV./

Evo posmatrajmo i konkretne primjere.

1° Uzmimo jednačine

/24/ $$x' = -tx + t\sin t \equiv F(t,x) \quad \text{i}$$

/25/ $$x' = -tx + t\sin t + \ln t \equiv F_1(t,x).$$

Ovdje imamo:

$$s(t) = \sin t, \quad s_1(t) = \sin t + \frac{1}{t}\ln t,$$

$$|s_1(t) - s(t)| = \frac{1}{t}\ln t < \frac{1}{\sqrt{t}} = \delta(t), \quad t \geqslant e^3.$$

Za krive $u_1(t)$ i $u_2(t)$ i funkciju $r(t)$ možemo uzeti

$$u_1(t) = \sin t - \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad u_2(t) = \sin t + \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad r(t) = \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Uslovi /2o/ su ispunjeni za $t \geqslant e^3$:

$$F(t,u_1(t)) = \sqrt{t} > \cos t + \frac{1}{2t\sqrt{t}} = u_1'(t), \quad F(t,u_1(t)) > 0,$$

$$F(t,u_2(t)) = -\sqrt{t} < \cos t - \frac{1}{2t\sqrt{t}} = u_2'(t), \quad F(t,u_2(t)) < 0,$$

$$F_1(t,u_1(t)) = \sqrt{t} + \ln t > \cos t + \frac{1}{2t\sqrt{t}} = u_1'(t), \quad F_1(t,u_1(t)) > 0,$$

$$F_1(t,u_2(t)) = -\sqrt{t} + \ln t < \cos t - \frac{1}{2t\sqrt{t}} = u_2'(t), \quad F_1(t,u_2(t)) < 0.$$

Dakle, svi potrebni uslovi su ispunjeni, te je klasa rješenja $\varphi(t)$ /tačnih ili približnih/ jednačine /24/ koja ispunjava uslov

$$\sin t - \frac{1}{\sqrt{t}} < \varphi(t) < \sin t + \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{za sve } t \geqslant e^3,$$

asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima $f(t,x) = \ln t$ u smislu definicije 6. Takvo je, na primjer, približno rješenje $\varphi(t) = \sin t - \frac{1}{t}\cos t$. Rješenja $\varphi(t)$, o kojima je riječ, su asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima u cijelom, jer će, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > e^3$, sva rješenja jednačine /25/ ući u "cijev" ograničenu krivama $u_1(t)$ i $u_2(t)$ $(t \geqslant e^3)$, te i ispuniti uslov /18/.

2° Posmatrajmo sada uz jednačinu /24/ i jednačinu

/26/ $$x' = -tx + t\sin t + x\cdot \ln t \equiv F_1(t,x)\,.$$

Imamo:

$$s(t) = \sin t\,,\quad s_1(t) = \frac{t\sin t}{t-\ln t}\,,$$

$$|s_1(t)-s(t)| = \left|\frac{\ln t\cdot \sin t}{t-\ln t}\right| \leqslant \frac{\ln t}{t-\ln t} = \frac{\ln t}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{\ln t}{t}} < \frac{2}{t}\ln t = \delta(t)\,,\ t\geqslant e^4$$

Za funkcije $u_1(t)$, $u_2(t)$ i $r(t)$ možemo uzeti kao u primjeru 1° i imamo:

$$F_1(t,u_1(t)) = \sqrt{t} + \left(\sin t - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\ln t \geqslant \sqrt{t} - \ln t - \frac{1}{\sqrt{t}}\ln t > \cos t + \frac{1}{2t\sqrt{t}}\,,$$

$$F_1(t,u_2(t)) = -\sqrt{t} + \left(\sin t + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\ln t < \cos t - \frac{1}{2t\sqrt{t}} \quad \text{za } t\geqslant e^4.$$

Svi potrebni uslovi su ispunjeni, te je klasa rješenja $\varphi(t)$ /tačnih ili približnih/ jednačine /24/ koja ispunjava uslov

$$\sin t - \frac{1}{\sqrt{t}} < \varphi(t) < \sin t + \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{za sve } t\geqslant e^4$$

asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima $f(t,x) = x\ln t$ u smislu definicije 6 i to asimptotski stabilna u cijelom.

G L A V A III

PROUČAVANJE NEKIH SPECIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA

U ovoj glavi posmatraćemo jednačine oblika

/a/ $$\frac{dx}{dt} = f(t)(x-\varphi_1(t))^{\alpha_1}\cdot(x-\varphi_2(t))^{\alpha_2}\cdots(x-\varphi_n(t))^{\alpha_n},$$

/b/ $$\frac{dx}{dt} = f(t)\cdot\frac{(x-\varphi_1(t))^{\alpha_1}\cdot(x-\varphi_2(t))^{\alpha_2}\cdots(x-\varphi_k(t))^{\alpha_k}}{(x-\varphi_{k+1}(t))^{\alpha_{k+1}}\cdot(x-\varphi_{k+1}(t))^{\alpha_{k+2}}\cdots(x-\varphi_n(t))^{\alpha_n}},$$

/c/ $$\frac{dx}{dt} = g(t,x)(x-h_1(t,x))^{\alpha_1}\cdot(x-h_2(t,x))^{\alpha_2}\cdots(x-h_n(t,x))^{\alpha_n},$$

/d/ $$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\frac{(x-h_1(t,x))^{\alpha_1}\cdot(x-h_2(t,x))^{\alpha_2}\cdots(x-h_k(t,x))^{\alpha_k}}{(x-h_{k+1}(t,x))^{\alpha_{k+1}}\cdot(x-h_{k+2}(t,x))^{\alpha_{k+2}}\cdots(x-h_n(t,x))^{\alpha_n}},$$

gdje funkcije na desnim stranama jednačina ispunjavaju potrebne uslove za egzistenciju i jedinost rješenja za

$$t \geq t_0,\ |x| < +\infty \quad i$$

$x \neq \varphi_j(t)$ $(j = k+1, k+2, \dots, n)$ /u jednačini /b//,

$x \neq h_j(t,x)$ $(j = k+1, k+2, \dots, n)$ /u jednačini /d//,

a veličine α_i su pozitivni racionalni brojevi.

Cilj nam je u ovoj glavi, ne da detaljno proučavamo gornje jednačine /jer bi za to trebalo mnogo više prostora nego što mi ovdje možemo da damo/, nego da ukažemo na mogućnosti proučavanja tih jednačina pomoću novih krivolinijskih "cijevi" uz posmatranje nekih od gornjih jednačina. Rezultati koje ćemo dati jasno će zacrtati odgovarajuće ideje i tehniku rada u proučavanju posmatranih jednačina, koji se mogu koristiti i za ostale jednačine gornjih oblika.

Jednačine gornjih oblika proučavali su mnogi autori. U paragrafu 1 navesćemo samo neke rezultate M. Bertolina.

§ 1. NEKI REZULTATI M. BERTOLINA U PROUČAVANJU DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA SA FAKTORIZOVANOM I RACIONALNOM DESNOM STRANOM

U svojim radovima [3] , [4] , [5] i [9] M. Bertolino je proučavao diferencijalne jednačine oblika

/1/ $$\frac{dx}{dt} = \prod_{i=1}^{n} \left(x - \varphi_i(t) \right) ,$$

/2/ $$\frac{dx}{dt} = \prod_{i=1}^{k} \left(x - \varphi_i(t) \right)^{\alpha_i} ,$$

/3/ $$\frac{dx}{dt} = \frac{\prod_{i \in A} \left(x - \varphi_i(t) \right)^{\alpha_i}}{\prod_{j \in B} \left(x - \varphi_j(t) \right)^{\alpha_j}} , \quad i \neq j ,$$

A i B su dvije permutacije prirodnih brojeva bez zajedničkih elemenata, takvi da je

$$A \cup B = \{ 1, 2, \cdots, m \} , \quad A \cap B = \emptyset ,$$

gdje su α_i i α_j prirodni brojevi, uz zastupljene uslove o jedinosti rješenja u oblasti $x \neq \varphi_j(t)$.

Navedimo sada ukratko samo neka bitna zapažanja i rezultate vezane za pomenute radove.

1° U radu [3] M. Bertolino posmatra jednačine oblika /1/ i /2/ ispitujući asimptotsku ograničenost rješenja tih jednačina. Autor polazi od pretpostavke da je

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t) < \cdots < \varphi_n(t) ,$$

te da je

$$c_j < \varphi_j(t) < c_{j+1}$$

/gdje su c_j i c_{j+1} dvije konstante, takve da se izmedju njih ne nalazi ni jedna druga funkcija $\varphi_i(t)$, $i \neq j$ i koje nemaju zajedničkih tačaka sa tim funkcijama/, odnosno

$$c_1 < \varphi_1(t) < c_2 < \cdots < c_n < \varphi_n(t) < c_{n+1}$$

i na osnovu znaka desnih strana jednačina u tačkama odgovarajućih pravih $x = c_i$ $(t \geq t_0)$ formira pravolinijske "cijevi" izlaznih i ulaznih integralnih krivih, te daje rezultate koji garantuju postojanje bar jednog ili jedne klase rješenja koja su asimptotski ograničena.

2° U radu [4] M. Bertolino formira krivolinijske "cijevi" izlaznih integralnih krivih, koje su ograničene monotonim krivama koje teže nuli, te preko istih obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja koje teži nuli.

Navedimo sljedeća dva tvrdjenja M. Bertolina iz ovoga rada.

Tvrdjenje 1. Jednačina

$$\frac{dx}{dt} = \left(x + f(t)\right)\left(x + m f(t)\right) \prod_{i=1}^{k} \left(x - f_i(t)\right)^{\alpha_i},$$

gdje su $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ i $f(t)$ pozitivne i neprekidne funkcije za $t \geq t_0$, $f(t)$ je monotona funkcija i teži nuli kad $t \to +\infty$, te neka je $m > 1$ realan broj i neka su α_i prirodni brojevi takvi da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$ paran broj, ima jedno negativno rješenje koje teži nuli kad $t \to +\infty$.

Dokaz navedenog tvrdjenja autor svodi na formiranje krivolinijske "cijevi" izlaznih integralnih krivih metode retrakcije

/4/ $$t > t_0, \quad -m_1 f(t) < x < 0,$$

gdje je $1 < m_1 < m$.

Tvrdjenje 2. Neka je data jednačina

/5/ $$\frac{dx}{dt} = \left(x - f_1(t)\right)^{\alpha_1}\left(x - f_2(t)\right)^{\alpha_2}\left(x - m f_2(t)\right)^{\alpha_3} \cdot \prod_{i=4}^{k}\left(x - f_i(t)\right)^{\alpha_i},$$

gdje su $f_i(t)$ neprekidne funkcije za $t \geq t_0$; α_i su prirodni brojevi i takvi da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$ /n je neparan broj/ i posebno α_1 je paran, α_2 neparan, α_3 paran; $m > 1$ je realan broj; funkcija $f_1(t)$ je negativna funkcija i monotono teži nuli kad $t \to +\infty$; funkcije $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ su pozitivne, $f_2(t)$ je monotona funkcija i teži nuli kad $t \to +\infty$, te neka je $f_i(t) > m f_2(t)$ $(i=4,5,\dots,k)$. Pod navedenim uslovima jednačina /5/ ima jedno rješenje koje teži nuli kad $t\to+\infty$.

Ovdje autor formira krivolinijsku "cijev" izlaznih integralnih krivih

/6/ $$t>t_0,\quad m_2 f_1(t) < x < m_1 f_2(t),$$

gdje je $1<m_1<m$ i $0<m_2<1$.

3^o Egzistenciju i ponašanje asimptotski ograničenih rješenja diferencijalnih jednačina oblika /3/ M. Bertolino proučava u radu [5] .

U ovom radu autor polazi od dvije osnovne pretpostavke.

Jedne, pretpostavljajući da je

/7/ $$\inf \varphi_k(t) > \sup \varphi_\ell(t) \quad za \quad k>\ell \quad i \quad t\geq t_0,$$

te da su sve funkcije $\varphi_s(t)$ $(s=1,2,\dots,m)$ ograničene za $t\geq t_0$ i da nemaju zajedničkih tačaka. Ove pretpostavke dopuštaju egzistenciju pravih $x=x_{\ell k}= const$, takvih da je

$$\sup \varphi_\ell(t) < x_{\ell k} < \inf \varphi_k(t),$$

što omogućuje formiranje pravolinijskih "cijevi" izlaznih i ulaznih integralnih krivih, te i postojanje bar jednog, odnosno jedne klase rješenja jednačine /3/ koja su asimptotski ograničena.

Druge, pretpostavljajući da je

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t) < \cdots < \varphi_m(t),\quad t\geq t_0,$$

te uz pretpostavke o monotonosti krivih $\varphi_s(t)$ i $\varphi_{s+1}(t)$ i njihovo teženje konstanti ℓ kad $t\to+\infty$, sa različite strane prave $x=\ell$, što omogućava formiranje krivolinijskih "cijevi" izlaznih integralnih krivih, ograničenih monotonim krivama, i konstataciju postojanja bar jednog rješenja koje teži ℓ kad $t\to+\infty$.

U ovom radu autor je dao veliki broj rezultata sa detaljnim obrazloženjem, a još veći broj rezultata prikazao je tabelarno. Rezultati se odnose na asimptotsku ograničenost bar jednog rješenja, asimptotsku ograničenost jedne klase rješenja /odredjujući i oblast asimptotskih rješenja/, kao i na postojanje bar jednog rješenja koje teži nekom broju kad $t\to+\infty$.

4^o Koristeći zapažanje M. Marjanovića da se uslov /7/ može izostaviti, te da se izmedju dvije susjedne krive $\varphi_s(t)$ /koje nemaju zajedničkih tačaka/ može postaviti poligonalna linija sastavljena od segmenata paralelnih koordinatnim osama t i x M. Bertolino u radu [9] formira stepenastu "cijev" i istu koristi za ispitivanje jednačina oblika /1/.

Ustvari, u radu [9] M. Bertolino je uveo stepenastu "cijev" posmatrajući jednačinu

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad /8/$$

/jedinost ispunjena u cijeloj ravni tOx/ pod uslovom da postoji funkcija $x = \varphi(t)$ takva da je, za $t \geq t_0$,

$$f(t, \varphi(t)) = 0,$$

$$f(t, x) < 0 \quad \text{za} \quad x < \varphi(t),$$

$$f(t, x) > 0 \quad \text{za} \quad x > \varphi(t),$$

formirajući izlomljene linije $x = \alpha$ u podoblasti

$$\varphi(t) - \varepsilon < x < \varphi(t), \ t \geq t_0$$

i $x = \beta$ u podoblasti

$$\varphi(t) < x < \varphi(t) + \varepsilon, \ t \geq t_0,$$

gdje je ε proizvoljan pozitivan broj, koje su sastavljene od segmenata paralelnih sa osama t i x, kao donju, odnosno gornju granicu "cijevi"

$$t > t_0, \ \alpha < x < \beta. \qquad /9/$$

Linije $x = \alpha$ i $x = \beta$ $(t \geq t_0)$ sastoje se od tačaka striktnog izlaza, tačaka striktnog ulaza, kao i od tačaka unutrašnjeg ili spoljašnjeg klizanja – to su one tačke izlaza koje nisu tačke striktnog izlaza i one tačke ulaza koje nisu tačke striktnog ulaza /to su neke od ugaonih tačaka poligonalnih linija $x = \alpha$ i $x = \beta$/.

Formiranjem stepenaste "cijevi" /9/ garantuje se postojanje bar jednog rješenja jednačine /8/ koje na nekom konačnom intervalu pripada "cijevi" /9/, dok se ne može tvrditi da će to rješenje za svako $t \geq t_0$ ostati u toj "cijevi". Ustvari, postoji mogućnost da rješenje čija je egzistencija utvrdjena na nekom konačnom intervalu naidje na ivičnu tačku "cijevi" /9/ koja je tačka izlaza, ali nije tačka striktnog izlaza.

Dakle, navedena stepenasta "cijev" M. Bertolina obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja $x(t)$ jednačine /8/ koje pripada toj "cijevi" na nekom konačnom intervalu nezavisno promjenljive t, kao i mogućnost /koja se ne garantuje/ da to rješenje može ostati u "cijevi" i za sve $t \geq t_0$.

S druge strane, stepenasta "cijev" M. Bertolina, koja nema tačaka koje su tačke izlaza a da nisu i tačke striktnog izlaza, garantuje postojanje bar jednog rješenja koje ostaje u "cijevi" za sve $t \geq t_0$. Tako, na primjer, krivolinijske "cijevi" /4/ i /6/ mogu biti zamjenjene odgovarajućim stepenastim "cijevima", koje se jednostavno formiraju i koje obezbjedjuju isti rezultat. Ustvari, umjesto krive $-m_1 f(t)$, u "cijevi" /4/, može se postaviti stepenasta linija $x=\alpha$, a umjesto krivih $m_2 f_1(t)$ i $m_1 f_2(t)$, u "cijevi" /6/, mogu se postaviti respektivno odgovarajuće stepenaste linije $x=\alpha$ i $x=\beta$.

§ 2.

Posmatrajmo prvo diferencijalnu jednačinu

/1/ $$\frac{dx}{dt} = f(t)\big(x-\varphi_1(t)\big)\big(x-\varphi_2(t)\big)\cdots\big(x-\varphi_n(t)\big),$$

tj.

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\prod_{i=1}^{n}\big(x-\varphi_i(t)\big),$$

gdje su $f(t)$, $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ definisane i neprekidne funkcije za $t \geq t_0$, funkcija $f(t)$ stalnog znaka, a funkcije $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ispunjavaju i osnovni uslov

/2/ $$\varphi_i(t) < \varphi_{i+1}(t) \text{ na } t \geq t_0 \quad (i=1,2,\cdots,n-1).$$

U jednačini /1/ krive stacionarnih tačaka već su eksplicitno iskazane /to su krive $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ /, a kako formiranje naših "cijevi" upravo ide preko krivih stacionarnih tačaka /vidjeti glavu II/, to možemo odmah primjetiti da je proučavanje jednačina oblika /1/, kao i ostalih jednačina navedenih na početku ove glave, pomoću krivolinijskih "cijevi" uvedenih u glavi II u potpunosti opravdano i da zaslužuje veliku pažnju.

Nemamo namjeru da detaljno proučavamo jednačinu /1/, nego da damo samo neke bitne rezultate na osnovu kojih bi se mogao dati veliki broj posebnih rezultata sa gledišta koja ćemo zacrtati prezentiranim rezultatima.

Radi jasnijeg sagledavanja posmatrajmo prvo jednačinu /1/, na primjer, za slučaj $n=4$, tj. jednačinu

$$/1'/ \qquad \frac{dx}{dt} = f(t)\big(x-\varphi_1(t)\big)\big(x-\varphi_2(t)\big)\big(x-\varphi_3(t)\big)\big(x-\varphi_4(t)\big).$$

Pretpostavimo da postoje neprekidne i monotono opadajuće funkcije $\varepsilon_i(t)$ $(i=1,2,3,4)$, koje ispunjavaju uslov

$$/3/ \qquad \lim_{t\to+\infty} \varepsilon_i(t) = 0 \;{}^{1)},$$

te neprekidne i pozitivne funkcije $\psi_i(t)$ $(i=1,2,3)$, takve da funkcije $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,3,4)$, pored uslova /2/, za $t\geqslant t_0$, kao osnovni uslov ispunjavaju i uslov

$$/4/ \qquad \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t) \geqslant \psi_i(t) + 2\bar{\varepsilon}_i(t) \quad (i=1,2,3),$$

gdje su $\bar{\varepsilon}_i(t)$ $(i=1,2,3)$ neprekidne funkcije koje ispunjavaju uslove

$$/5/ \qquad \varepsilon_i(t) \leqslant \bar{\varepsilon}_i(t), \quad \varepsilon_{i+1}(t) \leqslant \bar{\varepsilon}_i(t) \quad (t\geqslant t_0), \quad \lim_{t\to+\infty} \bar{\varepsilon}_i(t) = 0 \quad (i=1,2,3).$$

Dalje, neka su funkcije $\varepsilon_i(t)$ i $\psi_i(t)$ tako odredjene da sa funkcijama $f(t)$ i $\varphi_i(t)$ ispunjavaju sljedeće uslove, za $t\geqslant t_0$,

/6/

$$/a/ \qquad |f(t)|\,\varepsilon_1(t)\big(\varepsilon_1(t)+\psi_1(t)\big)\big(\varepsilon_1(t)+\psi_1(t)+2\varepsilon_2(t)+\psi_2(t)\big)\cdot$$
$$\cdot\big(\varepsilon_1(t)+\psi_1(t)+2\varepsilon_2(t)+\psi_2(t)+2\varepsilon_3(t)+\psi_3(t)\big) > |\varphi_1'(t)| - \varepsilon_1'(t),$$

$$/b/ \qquad |f(t)|\big(\varepsilon_1(t)+\psi_1(t)\big)\varepsilon_2(t)\big(\varepsilon_2(t)+\psi_2(t)\big)\cdot$$
$$\cdot\big(\varepsilon_2(t)+\psi_2(t)+2\varepsilon_3(t)+\psi_3(t)\big) > |\varphi_2'(t)| - \varepsilon_2'(t),$$

$$/c/ \qquad |f(t)|\big(2\varepsilon_1(t)+\psi_1(t)+\varepsilon_2(t)+\psi_2(t)\big)\big(\varepsilon_2(t)+\psi_2(t)\big)\varepsilon_3(t)\cdot$$
$$\cdot\big(\varepsilon_3(t)+\psi_3(t)\big) > |\varphi_3'(t)| - \varepsilon_3'(t),$$

$$/d/ \qquad |f(t)|\big(2\varepsilon_1(t)+\psi_1(t)+2\varepsilon_2(t)+\psi_2(t)+\varepsilon_3(t)+\psi_3(t)\big)\cdot$$
$$\cdot\big(2\varepsilon_2(t)+\psi_2(t)+\varepsilon_3(t)+\psi_3(t)\big)\big(\varepsilon_3(t)+\psi_3(t)\big)\varepsilon_4(t) > |\varphi_4'(t)| - \varepsilon_4'(t).$$

---

1) Funkcije $\varepsilon_i(t)$ ne moraju biti monotone. Njihova monotonost ne sužava opštost, ali pojednostavljuje posmatranje. Za funkcije $\varepsilon_i(t)$ i dalje, u cijeloj glavi, podrazumijevaćemo da ispunjavaju navedene osnovne uslove.

Lijeve strane gornjih nejednakosti formirane su tako što činioci proizvoda /redom s lijeva u desno/, ne računajući $|f(t)|$, predstavljaju veličine od kojih rastojanja redom krivih $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ i $\varphi_4(t)$ nije manje: u /a/ nejednakosti, od krivih $x = \varphi_1(t) \pm \varepsilon_1(t)$; u /b/, od krivih $x = \varphi_2(t) \pm \varepsilon_2(t)$; u /c/, od $x = \varphi_3(t) \pm \varepsilon_3(t)$ i u /d/ od krivih $x = \varphi_4(t) \pm \varepsilon_4(t)$.

Na prvi pogled uslovi /6/ izgledaju složeni i za praksu nepodesni. Medjutim, ako primjetimo da, upravo u praksi, imamo mogućnost da funkcije $\varepsilon_i(t)$ i $\psi_i(t)$ tražimo u podesnom obliku tako da ocjenjivanje da li su uslovi /6/ ispunjeni neće ići teško [1].

Uslove /6/, tamo gdje je to moguće, možemo zamjeniti i jednostavnijim uslovima, na primjer, zanemarujući neke od funkcija $\varepsilon_i(t)$ i $\psi_i(t)$ u uslovu /6/, što zavisi od funkcija $f(t)$, $\varphi_i(t)$, kao i $\varepsilon_i(t)$ i $\psi_i(t)$. U ovom pojednostavljenju treba zanemariti one od funkcija $\varepsilon_i(t)$ i $\psi_i(t)$ koje su "male" ili beskonačno male veličine u odnosu na druge odgovarajuće funkcije u dotičnom izrazu /činiocu proizvoda/.

Tako na primjer, tamo gdje je to moguće, možemo umjesto uslova /6/ uzeti jedan od sljedećih jednostavnijih, ali i slabijih, uslova:

/6_1/

/a/ $$|f(t)|\varepsilon_1(t)\psi_1(t)\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)\big)\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)+\psi_3(t)\big) > |\varphi_1'(t)| - \varepsilon_1'(t),$$

/b/ $$|f(t)|\psi_1(t)\varepsilon_2(t)\psi_2(t)\big(\psi_2(t)+\psi_3(t)\big) > |\varphi_2'(t)| - \varepsilon_2'(t),$$

/c/ $$|f(t)|\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)\big)\psi_2(t)\varepsilon_3(t)\psi_3(t) > |\varphi_3'(t)| - \varepsilon_3'(t),$$

/d/ $$|f(t)|\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)+\psi_3(t)\big)\big(\psi_2(t)+\psi_3(t)\big)\psi_3(t)\varepsilon_4(t) > |\varphi_4'(t)| - \varepsilon_4'(t);$$

/6_2/ $$|f(t)|\varepsilon_i(t)\prod_{j=1}^{3}\big(\varepsilon_i(t)+\psi_j(t)\big) > |\varphi_i'(t)| - \varepsilon_i'(t) \quad (i=1,2,3,4);$$

/6_3/ $$|f(t)|\varepsilon_i(t)\prod_{j=1}^{3}\psi_j(t) > |\varphi_i'(t)| - \varepsilon_i'(t) \quad (i=1,2,3,4);$$

/6_4/ $$|f(t)|\varepsilon_i^4(t) > |\varphi_i'(t)| - \varepsilon_i'(t) \quad (i=1,2,3,4).$$

Sada možemo dati sljedeću teoremu.

---

[1] Pri uzimanju funkcija $\psi_i(t)$ treba nastojati da te funkcije imaju što veće moguće vrijednosti, ispunjavajući uslove /4/.

TEOREMA 1.

Jednačina /1'/, pod uslovima /4/, /5/ i /6/ /ili jedan od uslova /6₁/, /6₂/, /6₃/ i /6₄//, za $t \geq t_0$, ima :

a/ za $f(t) > 0$, bar jedno rješenje koje ispunjava uslov

/7/ $$\varphi_2(t) - \varepsilon_2(t) < x(t) < \varphi_2(t) + \varepsilon_2(t) ,$$

bar jedno rješenje koje ispunjava uslov

/8/ $$\varphi_4(t) - \varepsilon_4(t) < x(t) < \varphi_4(t) + \varepsilon_4(t) ,$$

jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/9/ $$\varphi_1(t) - \varepsilon_1(t) < x(t) < \varphi_1(t) + \varepsilon_1(t)$$

i jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/1o/ $$\varphi_3(t) - \varepsilon_3(t) < x(t) < \varphi_3(t) + \varepsilon_3(t) ,$$

za sve $t \geq t_0$;

b/ za $f(t) < 0$, bar jedno rješenje koje ispunjava uslov /9/, bar jedno rješenje koje ispunjava uslov /1o/, jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov /7/ i jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov /8/, za sve $t \geq t_0$.

DOKAZ. Krive $x = \varphi_i(t)$ $(i=1,2,3,4)$ su krive stacionarnih tačaka integralnih krivih jednačine /1'/, koje dijele oblast ravni tOx $(t \geq t_0)$ u pet podoblasti, gdje u dvjema susjednim podoblastima integralne krive imaju suprotne koeficijente smjera.

Izvedimo dokaz teoreme za slučaj $f(t) > 0$, tj. tvrdjenje a/ teoreme. /U slučaju $f(t) < 0$ integralne krive imaju suprotne koeficijente smjera i dokaz bi bio sasvim sličan./

Integralne krive jednačine /1'/ imaju negativan koeficijent smjera u oblastima

$$\varphi_1(t) < x < \varphi_2(t) \quad i \quad \varphi_3(t) < x < \varphi_4(t) \quad (t \geq t_0) ,$$

a pozitivan u oblastima

$$x < \varphi_1(t), \ \varphi_2(t) < x < \varphi_3(t) \quad i \quad x > \varphi_4(t) \quad (t \geq t_0) .$$

Uočimo sada krive

$$\omega_{11}(t) = \varphi_1(t) - \varepsilon_1(t) , \quad \omega_{12}(t) = \varphi_1(t) + \varepsilon_1(t) ;$$

$$\omega_{21}(t) = \varphi_2(t) - \varepsilon_2(t) , \quad \omega_{22}(t) = \varphi_2(t) + \varepsilon_2(t) ;$$

$$\omega_{31}(t) = \varphi_3(t) - \varepsilon_3(t)\,, \quad \omega_{32}(t) = \varphi_3(t) + \varepsilon_3(t)\ ;$$

$$\omega_{41}(t) = \varphi_4(t) - \varepsilon_4(t)\,, \quad \omega_{42}(t) = \varphi_4(t) + \varepsilon_4(t)\ \ (t \geqslant t_0)\,.$$

Prema uslovima /4/, /5/ i /6/, za $t \geqslant t_0$, važi :

$$x'(\omega_{11}(t)) = f(t)\,(-\varepsilon_1(t))\big(\varphi_1(t) - \varepsilon_1(t) - \varphi_2(t)\big)\big(\varphi_1(t) - \varepsilon_1(t) - \varphi_3(t)\big)\cdot$$
$$\cdot\big(\varphi_1(t) - \varepsilon_1(t) - \varphi_4(t)\big) > f(t)\,\varepsilon_1(t)\,\big(\varepsilon_1(t) + \psi_1(t)\big)\big(\varepsilon_1(t) + \psi_1(t) + 2\varepsilon_2(t) + \psi_2(t)\big)\cdot$$
$$\cdot\big(\varepsilon_1(t) + \psi_1(t) + 2\varepsilon_2(t) + \psi_2(t) + 2\varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big) > |\varphi_1'(t)| - \varepsilon_1'(t) \geqslant \varphi_1'(t) - \varepsilon_1'(t) = \omega_{11}'(t)\,,$$

$$x'(\omega_{12}(t)) = f(t)\,\varepsilon_1(t)\,\big(\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t) - \varphi_2(t)\big)\big(\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t) - \varphi_3(t)\big)\big(\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t) - \varphi_4(t)\big) <$$
$$< -f(t)\,\varepsilon_1(t)\big(\varepsilon_1(t) + \psi_1(t)\big)\big(\varepsilon_1(t) + \psi_1(t) + 2\varepsilon_2(t) + \psi_2(t)\big)\big(\varepsilon_1(t) + \psi_1(t) + 2\varepsilon_2(t) + \psi_2(t)$$
$$+ 2\varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big) < -|\varphi_1'(t)| + \varepsilon_1'(t) \leqslant \varphi_1'(t) + \varepsilon_1'(t) = \omega_{12}'(t)\,;$$

$$x'(\omega_{21}(t)) = f(t)\big(\varphi_2(t) - \varepsilon_2(t) - \varphi_1(t)\big)\big(-\varepsilon_2(t)\big)\big(\varphi_2(t) - \varepsilon_2(t) - \varphi_3(t)\big)\big(\varphi_2(t) - \varepsilon_2(t) - \varphi_4(t)\big) <$$
$$< -f(t)\big(\varepsilon_1(t) + \psi_1(t)\big)\,\varepsilon_2(t)\big(\varepsilon_2(t) + \psi_2(t)\big)\big(\varepsilon_2(t) + \psi_2(t) + 2\varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big) <$$
$$< -|\varphi_2'(t)| + \varepsilon_2'(t) < \varphi_2'(t) - \varepsilon_2'(t) = \omega_{21}'(t)\,,$$

$$x'(\omega_{22}(t)) = f(t)\big(\varphi_2(t) + \varepsilon_2(t) - \varphi_1(t)\big)\,\varepsilon_2(t)\big(\varphi_2(t) + \varepsilon_2(t) - \varphi_3(t)\big)\big(\varphi_2(t) + \varepsilon_2(t) - \varphi_4(t)\big) >$$
$$> f(t)\big(\varepsilon_1(t) + \psi_1(t)\big)\,\varepsilon_2(t)\big(\varepsilon_2(t) + \psi_2(t)\big)\big(\varepsilon_2(t) + \psi_2(t) + 2\varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big) >$$
$$> |\varphi_2'(t)| - \varepsilon_2'(t) > \varphi_2'(t) + \varepsilon_2'(t) = \omega_{22}'(t)\,;$$

$$x'(\omega_{31}(t)) = f(t)\big(\varphi_3(t) - \varepsilon_3(t) - \varphi_1(t)\big)\big(\varphi_3(t) - \varepsilon_3(t) - \varphi_2(t)\big)\big(-\varepsilon_3(t)\big)\big(\varphi_3(t) - \varepsilon_3(t) - \varphi_4(t)\big) >$$
$$> f(t)\big(2\varepsilon_1(t) + \psi_1(t) + \varepsilon_2(t) + \psi_2(t)\big)\big(\varepsilon_2(t) + \psi_2(t)\big)\,\varepsilon_3(t)\,\big(\varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big) >$$
$$> |\varphi_3'(t)| - \varepsilon_3'(t) \geqslant \varphi_3'(t) - \varepsilon_3'(t) = \omega_{31}'(t)\,,$$

$$x'(\omega_{32}(t)) = f(t)\big(\varphi_3(t) + \varepsilon_3(t) - \varphi_1(t)\big)\big(\varphi_3(t) + \varepsilon_3(t) - \varphi_2(t)\big)\,\varepsilon_3(t)\big(\varphi_3(t) + \varepsilon_3(t) - \varphi_4(t)\big) <$$
$$< -f(t)\big(2\varepsilon_1(t) + \psi_1(t) + \varepsilon_2(t) + \psi_2(t)\big)\big(\varepsilon_2(t) + \psi_2(t)\big)\,\varepsilon_3(t)\big(\varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big) <$$
$$< -|\varphi_3'(t)| + \varepsilon_3'(t) \leqslant \varphi_3'(t) + \varepsilon_3'(t) = \omega_{32}'(t)\,;$$

$$x'(\omega_{41}(t)) = f(t)\big(\varphi_4(t) - \varepsilon_4(t) - \varphi_1(t)\big)\big(\varphi_4(t) - \varepsilon_4(t) - \varphi_2(t)\big)\big(\varphi_4(t) - \varepsilon_4(t) - \varphi_3(t)\big)\big(-\varepsilon_4(t)\big) <$$
$$< -f(t)\big(2\varepsilon_1(t) + \psi_1(t) + 2\varepsilon_2(t) + \psi_2(t) + \varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big)\big(2\varepsilon_2(t) + \psi_2(t) + \varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big)\cdot$$
$$\cdot\big(\varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big)\cdot\varepsilon_4(t) < -|\varphi_4'(t)| + \varepsilon_4'(t) < \varphi_4'(t) - \varepsilon_4'(t) = \omega_{41}'(t)\,,$$

$$x'(\omega_{42}(t)) = f(t)\,\big(\varphi_4(t) + \varepsilon_4(t) - \varphi_1(t)\big)\big(\varphi_4(t) + \varepsilon_4(t) - \varphi_2(t)\big)\big(\varphi_4(t) + \varepsilon_4(t) - \varphi_3(t)\big)\,\varepsilon_4(t) >$$
$$> f(t)\,\big(2\varepsilon_1(t) + \psi_1(t) + 2\varepsilon_2(t) + \psi_2(t) + \varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big)\big(2\varepsilon_2(t) + \psi_2(t) + \varepsilon_3(t) + \psi_4(t)\big)\cdot$$
$$\cdot\big(\varepsilon_3(t) + \psi_3(t)\big)\,\varepsilon_4(t) > |\varphi_4'(t)| - \varepsilon_4'(t) > \varphi_4'(t) + \varepsilon_4'(t) = \omega_{42}'(t)\,.$$

Dobijene ocjene

$$x'(\omega_{21}(t)) < \omega_{21}'(t) \quad i \quad x'(\omega_{22}(t)) > \omega_{22}'(t) \quad (t \geq t_0)$$

znače da integralne krive jednačine /1′/ koje prolaze kroz tačke krivih $\omega_{21}(t)$ i $\omega_{22}(t)$ $(t \geq t_0)$ presjecaju te krive izlazeći iz "cijevi" koju čine te krive. Otuda, prema metodi retrakcije, postoji bar jedna integralna kriva $x(t)$ jednačine /1′/ koja za sve $t \geq t_0$ pripada toj "cijevi", odnosno ispunjava uslov /7/.

Analogno, ocjene

$$x'(\omega_{41}(t)) < \omega_{41}'(t) \quad i \quad x'(\omega_{42}(t)) > \omega_{42}'(t) \quad (t \geq t_0),$$

garantuju postojanje bar jednog rješenja jednačine koje za sve $t \geq t_0$ ispunjava uslov /8/.

Ocjene

$$x'(\omega_{11}(t)) > \omega_{11}'(t) \quad i \quad x'(\omega_{12}(t)) < \omega_{12}'(t) \quad (t \geq t_0)$$

znače da integralne krive koje prolaze kroz tačke krivih $\omega_{11}(t)$ i $\omega_{12}(t)$ $(t \geq t_0)$ presjecaju te krive ulazeći u "cijev" koju ograničavaju te krive, dok integralne krive koje prolaze kroz unutrašnje tačke te "cijevi" ostaju u toj "cijevi". Prema tome, integralne krive oblasti

/11/ $$\varphi_1(t) - \varepsilon_1(t) \leq x \leq \varphi_1(t) + \varepsilon_1(t), \quad t \geq t_0$$

ispunjavaju uslov /9/, dok klasa rješenja $x(t)$ koja su odredjena početnim vrijednostima $x(t_0)$, gdje je

$$x(t_0) \in \left(\varphi_1(t_0) - \varepsilon_1(t_0), \varphi_1(t_0) + \varepsilon_1(t_0)\right),$$

ispunjava uslov /9/ za sve $t \geq t_0$.

Analogno ocjene

$$x'(\omega_{31}(t)) > \omega_{31}'(t) \quad i \quad x'(\omega_{32}(t)) < \omega_{32}'(t) \quad (t \geq t_0)$$

garantuju da integralne krive oblasti

/12/ $$\varphi_3(t) - \varepsilon_3(t) \leq x \leq \varphi_3(t) + \varepsilon_3(t), \quad t \geq t_0$$

ispunjavaju uslov /1o/, dok klasa rješenja $x(t)$ koja su odredjena početnim vrijednostima $x(t_0)$, gdje je

$$x(t_0) \in \left(\varphi_3(t_0) - \varepsilon_3(t_0), \varphi_3(t_0) + \varepsilon_3(t_0)\right)$$

ispunjavaju uslov /1o/ za sve $t \geq t_0$.

Sada primjetimo da se uslovi /a/, /b/, /c/ i /d/ /uslov /6// mogu nezavisno tretirati. Naime, ispunjenje jednog povlači jedan dio tvrdjenja teoreme, dok pri tome ostali uslovi /od /6// ne moraju biti ispunjeni. Ustvari, ispunjenje jednog od uslova /6/ omogućuje formiranje jedne odgovarajuće "cijevi" čime se obezbjedjuje tačnost odgovarajućeg tvedjenja.

Ako u teoremi 1 neke pretpostavke zamjenimo strožijim pretpostavkama i uz odgovarajuće dodatne uslove dobićemo i dodatna bitna tvrdjenja, što se odnosi na slučaj kada će, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, šire klase rješenja da ispunjavaju jedan od uslova /7/, /8/, /9/ ili /10/.

Radi lakšeg posmatranja uvedimo novu neprekidnu funkciju $\varepsilon(t)$ koja ispunjava uslov

/13/ $$0 < \varepsilon(t) \leqslant \varepsilon_i(t) \quad \text{za } t \geqslant t_0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$ [1].

Navesćemo, primjera radi, samo neke mogućnosti i odgovarajuće rezultate.

Napomena: Za one funkcije $\varepsilon_i(t)$ koje nećemo morati da formiramo u jednom posmatranju /jer ćemo posmatrati ponašanje rješenja jednačine /1'/ po oblastima od x, a ne za sve $|x| < +\infty$/ uzimajući uslove /4/ i /5/ smatraćemo da su te funkcije $\varepsilon_i(t)$ jednake nuli u tim uslovima /4/ i /5/.

1° Pod uslovima /4/, /5/, /6$_1$/ /a/, kao i, za $t \geqslant t_0$,

/14/ $$f(t) > 0,$$

/15/ $$f(t)\,\psi_1(t)\big(\psi_1(t) + \psi_2(t)\big)\big(\psi_1(t) + \psi_2(t) + \psi_3(t)\big) \geqslant M_1$$

/ M_1 je pozitivna konstanta/, jedna klasa rješenja jednačine /1'/ ispunjava uslov /9/ za sve $t \geqslant t_0$, dok za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$ sva rješenja oblasti

/16/ $$x \leqslant \varphi_1(t) + \varepsilon_1(t), \quad t \geqslant t_0$$

ispunjavaju uslov /9/.

Ispunjenje uslova /4/, /5/, /6$_1$/ /a/ i /14/, prema teoremi 1, znači da jednačina /1'/ ima jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov /9/ za sve $t \geqslant t_0$, te da sva rješenja oblasti /11/ ispunjavaju uslov /9/. Dokažimo sada da dodatni uslov /15/ obezbjedjuje da i sva rješenja oblasti

/17/ $$x < \varphi_1(t) - \varepsilon_1(t), \quad t \geqslant t_0,$$

za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /9/.

---

[1] U interesu je da funkcija $\varepsilon(t)$ ima što veće moguće vrijednosti.

Neka je $P(t, \varphi_1(t)-\varepsilon_1(t)-\delta)$ / $\delta>0$ je pozitivan broj/ proizvoljna tačka oblasti /17/. Prema navedenim uslovima , za $t \geqslant t_0$, važi

$$x'(P)=f(t)(-\varepsilon_1(t)-\delta)(\varphi_1(t)-\varepsilon_1(t)-\delta-\varphi_2(t))(\varphi_1(t)-\varepsilon_1(t)-\delta-\varphi_3(t))\cdot$$
$$\cdot(\varphi_1(t)-\varepsilon_1(t)-\delta-\varphi_4(t)) > f(t)(\varepsilon_1(t)+\delta)\psi_1(t)(\psi_1(t)+\psi_2(t))(\psi_1(t)+\psi_2(t)+\psi_3(t))=$$
$$=f(t)\varepsilon_1(t)\psi_1(t)(\psi_1(t)+\psi_2(t))(\psi_1(t)+\psi_2(t)+\psi_3(t))+$$
$$+\delta\cdot f(t)\psi_1(t)(\psi_1(t)+\psi_2(t))(\psi_1(t)+\psi_2(t)+\psi_3(t)) > |\varphi_1'(t)|-\varepsilon_1'(t)+M_1\delta,$$

što znači da integralna kriva koja prolazi kroz tačku P ima koeficijent smjera u tački P veći od koeficijenta smjera krive $\omega_{11}(t)=\varphi_1(t)-\varepsilon_1(t)$ /odnosno krive koja prolazi kroz tačku P i koja je paralelna sa krivom $\omega_{11}(t)$: $\varphi_1(t)-\varepsilon_1(t)-\delta$/, u tački sa istom apscisom, za više od pozitivnog broja $M_1\delta$, te će ta integralna kriva, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, i stići do krive $\omega_{11}(t)$, odnosno do oblasti /11/, što je i trebalo dokazati.

2^0 Pod uslovima /4/, /5/, /6_1/ /b/, /13/ /za $i=1,2$ /, /14/, kao i, za $t \geqslant t_0$,

/18/ $$\tfrac{1}{2} f(t)\varepsilon(t)\psi_1(t)\psi_2(t)(\psi_2(t)+\psi_3(t)) > |\varphi_1'(t)|-\varepsilon_1'(t),$$

/19/ $$\tfrac{1}{2} f(t)\psi_1(t)\psi_2(t)(\psi_2(t)+\psi_3(t)) \geqslant M_2$$

/ M_2 je pozitivna konstanta/, jednačina /1'/, za $t \geqslant t_0$, ima bar jedno rješenje koje ispunjava uslov /7/ i jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov /9/, za sve $t \geqslant t_0$, a za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$ uslov /9/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

/2o/ $$x \leqslant \varphi_2(t)-\varepsilon_2(t), \quad t \geqslant t_0 .$$

Ako je funkcija $\varphi_1(t)$ ograničena za sve $t \geqslant t_0$, tada umjesto uslova /18/ može da stoji širi uslov /6_1/ /a/ /ili /6/ /a/ ili neki drugi odgovarajući uslov/.

Dokažimo gornje tvrdjenje.

Prema teoremi 1, uslovi /4/, /5/, /6_1/ /b/ i /14/ obezbjedjuju postojanje bar jednog rješenja jednačine /1'/ koje ispunjava uslov /7/ za sve $t \geqslant t_0$; dok uslovi /4/, /5/, /14/ i /18/ /koji je jači od uslova /6_1/ /a/ - ispunjenje uslova /18/ znači i ispunjenje uslova /6_1/ /a// obezbjedjuju i postojanje jedne klase rješenja jednačine /1'/ koja ispunjava uslov /9/ za sve $t \geqslant t_0$, a prema tvrdjenju 1^0, uslov /19/ /koji je jači od uslova /15// obezbjedjuje da sva rješenja oblasti /16/, za dovoljno veliko

$t \geqslant t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /9/.

Dokažimo sada još i to da dodatni uslovi /13/, /18/ i /19/ obezbjedjuju da, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, uslov /9/ ispunjavaju i sva rješenja oblasti

/21/ $$\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t) < x < \varphi_2(t) - \varepsilon_2(t), \quad t \geqslant t_0 .$$

Posmatrajmo ponašanje integralnih krivih u oblasti /21/, posmatrajući njihovo ponašanje u podoblastima:

/21'/ $$\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t) + \tfrac{1}{2}\psi_1(t) < x < \varphi_2(t) - \varepsilon_2(t), \quad t \geqslant t_0 ,$$

/21"/ $$\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t) < x \leqslant \varphi_1(t) + \varepsilon_1(t) + \tfrac{1}{2}\psi_1(t), \quad t \geqslant t_0 \text{[1]} .$$

Prije svega, primjetimo da, prema uslovu /6_1/ /b/, integralne krive oblasti /21/ ne prelaze u oblast $x > \varphi_2(t) - \varepsilon_2(t)$ /kriva $\varphi_2(t) - \varepsilon_2(t)$ prema uslovu /6_1/ /b/, je donja granica "cijevi" izlaznih integralnih krivih/.

Sada uzmimo da je $P_1\left(t_1, \varphi_2(t_1) - \varepsilon_2(t_1) - \delta_1\right)$ $(t_1 \geqslant t_0, \delta_1 > 0)$ proizvoljna tačka oblasti /21'/, te da je $P_2\left(t_2, \varphi_1(t_2) + \varepsilon_1(t_2) + \delta_2\right)$ $(t_2 \geqslant t_0, \delta_2 > 0)$ proizvoljna tačka oblasti /21"/.

Prema navedenim uslovima važi:

$$\begin{aligned}
x'(P_1) &= f(t_1)\left(\varphi_2(t_1) - \varepsilon_2(t_1) - \delta_1 - \varphi_1(t_1)\right)\left(-\varepsilon_2(t_1) - \delta_1\right)\left(\varphi_2(t_1) - \varepsilon_2(t_1) - \delta_1 - \varphi_3(t_1)\right)\cdot \\
&\cdot\left(\varphi_2(t_1) - \varepsilon_2(t_1) - \delta_1 - \varphi_4(t_1)\right) < -f(t_1)\,\tfrac{1}{2}\psi_1(t_1)\left(\varepsilon_2(t_1) + \delta_1\right)\psi_2(t_1)\left(\psi_2(t_1) + \psi_3(t)\right) \leqslant \\
&\leqslant -\tfrac{1}{2} f(t_1)\,\varepsilon(t_1)\,\psi_1(t_1)\,\psi_2(t_1)\left(\psi_2(t_1) + \psi_3(t_1)\right) - \delta_1 \cdot \tfrac{1}{2} f(t_1)\,\psi_1(t_1)\,\psi_2(t_1)\left(\psi_2(t_1) + \psi_3(t_1)\right) < \\
&< -|\varphi_1'(t_1)| + \varepsilon_1'(t_1) - M_2\delta_1 ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x'(P_2) &= f(t_2)\left(\varepsilon_1(t_2) + \delta\right)\left(\varphi_1(t_2) + \varepsilon_1(t_2) + \delta_2 - \varphi_2(t_2)\right)\left(\varphi_1(t_2) + \varepsilon_1(t_2) + \delta_2 - \varphi_3(t_2)\right)\cdot \\
&\cdot\left(\varphi_1(t_2) + \varepsilon_1(t_2) + \delta_2 - \varphi_4(t_2)\right) < -f(t_2)\left(\varepsilon_1(t_2) + \delta_2\right)\cdot\tfrac{1}{2}\psi_1(t_2)\left(\tfrac{1}{2}\psi_1(t_2) + \psi_2(t_2)\right)\cdot \\
&\cdot\left(\tfrac{1}{2}\psi_1(t_2) + \psi_2(t_2) + \psi_3(t_2)\right) < -\tfrac{1}{2} f(t_2)\left(\varepsilon(t_2) + \delta_2\right)\psi_1(t_2)\,\psi_2(t_2)\left(\psi_2(t_2) + \psi_3(t_2)\right) = \\
&= -\tfrac{1}{2} f(t_2)\,\varepsilon(t_2)\,\psi_1(t_2)\,\psi_2(t_2)\left(\psi_2(t_2) + \psi_3(t_2)\right) - \delta_2 \cdot \tfrac{1}{2} f(t_2)\,\psi_1(t_2)\,\psi_2(t_2)\cdot \\
&\cdot\left(\psi_2(t_2) + \psi_3(t_2)\right) < -|\varphi_1'(t_2)| + \varepsilon_1'(t_2) - M_2\delta_2 ,
\end{aligned}$$

što znači da će integralne krive koje prolaze kroz tačke oblasti /21'/, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, preći u oblast /21"/, a integralne krive

---

[1]) Oblast /21/ mogli smo podjeliti i na neki drugi način. U tom slučaju umjesto $\frac{1}{2}$ u uslovima /18/ i /19/ imali bi neki drugi odgovarajući pozitivan broj manji od 1 .

koje prolaze kroz tačke oblasti /21"/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, stići do krive $\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t)$, a zatim i ući u odgovarajuću "cijev". Prema tome, sve integralne krive oblasti /21/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, stići će do krive $\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t)$, a zatim i ući u odgovarajuću "cijev".

U slučaju kada je kriva $\varphi_1(t)$ ograničena, prema gornjim relacijama, možemo primjetiti da uslov /19/ obezbjedjuje ocjene

$$x'(P_1) < -M_2\delta_1, \quad x'(P_2) < -M_2\delta_2,$$

što znači da integralne krive u oblasti /21/ imaju negativan koeficijent smjera i manji od negativnog broja $-M_2\delta_1$, odnosno $-M_2\delta_2$, te će, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, i stići do ograničene krive $\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t)$, a prema uslovu /$6_1$/ /a/ i ući u odgovarajuću "cijev".

Na osnovu teoreme 1, rezultata 1° i 2°, te njihovih dokaza, možemo sada dati /bez dokaza/ i sljedeće rezultate.

3° Pod uslovima /4/, /5/, /6_1/ /d/, /13/ /$i=3,4$/, /14/, kao i, za $t \geq t_0$,

$$\frac{1}{2} f(t)\varepsilon(t)\left(\psi_1(t)+\psi_2(t)\right)\psi_2(t)\psi_3(t) > |\varphi_3'(t)| - \varepsilon_3'(t), \tag{22}$$

$$\frac{1}{2} f(t)\left(\psi_1(t)+\psi_2(t)\right)\psi_2(t)\psi_3(t) \geq M_3 \tag{23}$$

/M_3 je pozitivna konstanta/, jednačina /1'/ ima bar jedno rješenje koje ispunjava uslov /8/ za sve $t \geq t_0$ i jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov /1o/ za sve $t \geq t_0$, a za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, uslov /1o/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$\varphi_3(t) - \varepsilon_3(t) \leq x \leq \varphi_4(t) - \varepsilon_4(t), \quad t \geq t_0. \tag{24}$$

Ako gornjim uslovima /4/, /5/, /6_1/ /d/, /13/ /$i=3,4$/, /14/ dodamo uslove /6_1/ /b/ i /13/ /$i=2,3,4$/, a umjesto uslova /22/ i /23/ važe, za $t \geq t_0$, respektivno uslovi

$$\frac{1}{2} f(t)\varepsilon(t)\psi_1(t)\psi_2(t)\psi_3(t) > |\varphi_3'(t)| - \varepsilon_3'(t), \tag{25}$$

$$\frac{1}{2} f(t)\psi_1(t)\psi_2(t)\psi_3(t) \geq M_3'$$

/M_3' je pozitivna konstanta/, tada gornjem tvrdjenju možemo dodati: jednačina /1'/ ima i bar jedno rješenje koje ispunjava uslov /7/, a sva rješenja oblasti

$$\varphi_2(t) + \varepsilon_2(t) \leq x \leq \varphi_4(t) - \varepsilon_4(t), \quad t \geq t_0, \tag{26}$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /1o/.

Ako je funkcija $\varphi_3(t)$ ograničena, za sve $t \geq t_0$, tada gornje tvrdjenje važi i kada umjesto uslova /22/ i /25/ stoji širi uslov /6_1/ /c/.

4^0 Pod uslovima /4/, /5/, /6_1/ /a/, /13/ /$i=1,2$/, kao i, za $t \geq t_0$,

/27/ $$f(t) < 0$$

/28/ $$\frac{1}{2}|f(t)|\,\varepsilon(t)\,\psi_1(t)\,\psi_2(t)\big(\psi_2(t)+\psi_3(t)\big) > |\varphi_2'(t)| - \varepsilon_2'(t),$$

/29/ $$\frac{1}{2}|f(t)|\,\psi_1(t)\,\psi_2(t)\big(\psi_2(t)+\psi_3(t)\big) \geq M_4$$

/ M_4 je pozitivna konstanta/, jednačina /1'/ ima bar jedno rješenje koje ispunjava uslov /9/ za sve $t \geq t_0$ i jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov /7/ za sve $t \geq t_0$, a za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, uslov /7/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

/30/ $$\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t) \leq x \leq \varphi_2(t) - \varepsilon_2(t), \ t \geq t_0 .$$

Ako navedenim uslovima /4/, /5/, /6_1/ /a/, /13/ /$i=1,2$/, /27/ dodamo uslove /6_1/ /c/ i /13/ /$i=1,2,3$/, a umjesto uslova /28/ i /29/ važe, za $t \geq t_0$, respektivno uslovi

/31/ $$\frac{1}{2}|f(t)|\,\varepsilon(t)\,\psi_1(t)\,\psi_2(t)\,\psi_3(t) > |\varphi_2'(t)| - \varepsilon_2'(t),$$
$$\frac{1}{2}|f(t)|\,\psi_1(t)\,\psi_2(t)\,\psi_3(t) \geq M_4'$$

/ M_4' je pozitivna konstanta/, tada datom tvrdjenju možemo dodati: jednačina /1'/ ima i bar jedno rješenje koje ispunjava uslov /10/, a sva rješenja oblasti

/32/ $$\varphi_1(t) + \varepsilon_1(t) \leq x \leq \varphi_3(t) - \varepsilon_3(t), \ t \geq t_0,$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$ ispunjavaju uslov /7/.

Ako je funkcija $\varphi_2(t)$ ograničena, za sve $t \geq t_0$, tada navedeno tvrdjenje važi i kada umjesto uslova /28/ i /31/ stoji širi uslov /6_1/ /b/.

5^0 Pod uslovima /4/, /5/, /6_1/ /d/, /27/, kao i, za $t \geq t_0$,

/33/ $$|f(t)|\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)+\psi_3(t)\big)\big(\psi_2(t)+\psi_3(t)\big)\psi_3(t) \geq M_5$$

/ M_5 je pozitivna konstanta/, jednačina /1'/ ima jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov /8/ za sve $t \geq t_0$, dok za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$ uslov /8/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

/34/ $$x \geq \varphi_4(t) - \varepsilon_4(t), \ t \geq t_0 .$$

Ako uslovima /4/, /5/ i /27/ dodamo uslove /6_1/ /c/ i /13/ /za $i=3,4$/, a uslove /6_1/ /d/ i /33/ zamjenimo respektivno uslovima

/35/ $$\frac{1}{2}|f(t)|\varepsilon(t)\left(\psi_1(t)+\psi_2(t)\right)\psi_2(t)\psi_3(t) > |\varphi_4'(t)| - \varepsilon_4'(t),$$
$$\frac{1}{2}|f(t)|\left(\psi_1(t)+\psi_2(t)\right)\psi_2(t)\psi_3(t) \geqslant M_5'$$

/ M_5' je pozitivna konstanta/, tada navedenom tvrdjenju možemo dodati: jednačina /1'/ ima bar jedno rješenje koje ispunjava uslov /1o/ za sve $t \geqslant t_0$, a sva rješenja oblasti

/36/ $$x \geqslant \varphi_3(t) + \varepsilon_3(t),\quad t \geqslant t_0,$$

za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$ ispunjavaju uslov /8/.

Ako je funkcija $\varphi_4(t)$ ograničena, za $t \geqslant t_0$, tada gornje tvrdjenje važi i kada umjesto uslova /35/ stoji širi uslov /6_1/ /d/.

Sada, na osnovu rezultata 1° do 5° možemo dati sljedeće tvrdjenje koje obezbjedjuje te rezultate, ako su svi uslovi tih rezultata istodobno ispunjeni, a koje je u nekim djelovima slabije od tih rezultata, te koje predstavlja bitnu dopunu teoreme 1.

TEOREMA 2.

Pod uslovima /4/, /5/, /13/, kao i, za $t \geqslant t_0$,

/37/ $$\frac{1}{2}|f(t)|\varepsilon(t)\psi_1(t)\psi_2(t)\psi_3(t) > |\varphi_i'(t)| - \varepsilon_i'(t) \quad (i=1,2,3,4),$$

/38/ $$\frac{1}{2}|f(t)|\psi_1(t)\psi_2(t)\psi_3(t) \geqslant M$$

/ M je pozitivna konstanta/, jednačina /1'/, za $t \geqslant t_0$, ima:

a/ za $f(t) > 0$, po bar jedno rješenje koja ispunjavaju uslove /7/ i /8/ za sve $t \geqslant t_0$, i po jednu klasu rješenja koje ispunjavaju uslove /9/ i /1o/ za sve $t \geqslant t_0$, dok za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$ uslov /9/ ispunjavaju sva rješenja oblasti /2o/, a uslov /1o/ sva rješenja oblasti /26/;

b/ za $f(t) < 0$, po bar jedno rješenje koja ispunjavaju uslove /9/ i /1o/ za sve $t \geqslant t_0$, i po jednu klasu rješenja koje ispunjavaju uslove /7/ i /8/, dok za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, uslov /7/ ispunjavaju sva rješenja oblasti /32/, a uslov /8/ sva rješenja oblasti /36/.

Ako je neka od krivih $\varphi_i(t)$ ograničena za sve $t \geqslant t_0$, tada umjesto odgovarajućeg uslova /37/ može da stoji neki od odgovarajućih širih uslova, recimo, odgovarajući od uslova /6/ ili /6_1/.

Za dokaz ove teoreme dovoljno je primjetiti da ispunjenje uslova /37/ i /38/ znači i ispunjenje odgovarajućih uslova u rezultatima 1° do 5°.

Sada je lako primjetiti da navedeni rezultati pružaju mogućnost proučavanja rješenja jednačine /1'/ i preko krivolinijskih "cijevi" čije širine ne teže nuli kad $t\to+\infty$. Ustvari, dovoljno je primjetiti da funkcije $\varepsilon_i(t)$ ne moraju /neke ili sve/ da budu monotone i da ispunjavaju uslov /3/. I u tom slučaju naši navedeni rezultati imaju mjesta. To, ustvari, znači da iz tih dobijenih rezultata možemo uzimati i odgovarajuće slabije rezultate – da pri ispunjenju odgovarajućih uslova /koje smo uzimali u izvedenim posmatranjima/ im[illegible]ar jedno, ili jednu klasu rješenja koja pripada "cijevi"

$$t\geqslant t_0,\quad \varphi_i(t)-\varepsilon_i(t)<x<\varphi_i(t)+\varepsilon_i(t)$$

za sve $t\geqslant t_0$, gdje je $\varepsilon_i(t)>0$ /gdje funkcije $\varepsilon_i(t)$ ne moraju da budu monotone i da ispunjavaju uslov /3/, mogu da budu pozitivne konstante ili neke pozitivne ograničene funkcije/.

Posmatrajmo sada jednačinu /1/.

Uslovima /4/ i /5/ odgovaraju respektivno uslovi

/4'/ $$\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)\geqslant\psi_i(t)+2\bar{\varepsilon}_i(t)\quad(i=1,2,\dots,n-1),$$

/5'/ $$\varepsilon_i(t)\leqslant\bar{\varepsilon}_i(t),\ \varepsilon_{i+1}(t)\leqslant\bar{\varepsilon}_i(t)\ (t\geqslant t_0),\ \lim_{t\to+\infty}\bar{\varepsilon}_i(t)=0\quad(i=1,2,\dots,n-1),$$

uslovima /6/ uslovi

/6'/ $$\begin{aligned}&|f(t)|\,[2\varepsilon_1(t)+\psi_1(t)+2\varepsilon_2(t)+\psi_2(t)+\dots+2\varepsilon_{i-2}(t)+\psi_{i-2}(t)+\varepsilon_{i-1}(t)+\psi_{i-1}(t)]\cdot\\&\cdot[2\varepsilon_2(t)+\psi_2(t)+2\varepsilon_3(t)+\psi_3(t)+\dots+2\varepsilon_{i-2}(t)+\psi_{i-2}(t)+\varepsilon_{i-1}(t)+\psi_{i-1}(t)]\cdots\\&\cdot[\varepsilon_{i-1}(t)+\psi_{i-1}(t)]\cdot\varepsilon_i(t)\cdot[\varepsilon_i(t)+\psi_i(t)]\cdot[\varepsilon_i(t)+\psi_i(t)+2\varepsilon_{i+1}(t)+\psi_{i+1}(t)]\cdots\\&\cdot[\varepsilon_i(t)+\psi_i(t)+2\varepsilon_{i+1}(t)+\psi_{i+1}(t)+\dots+2\varepsilon_{n-1}(t)+\psi_{n-1}(t)]>|\varphi_i'(t)|-\varepsilon_i'(t)\quad(i=1,2,\dots,n),\end{aligned}$$

dok uslovima $/6_1/$, $/6_2/$, $/6_3/$ i $/6_4/$ odgovaraju respektivno uslovi

$/6_1'/$ $$\begin{aligned}&|f(t)|\,[\psi_1(t)+\psi_2(t)+\dots+\psi_{i-1}(t)]\cdot[\psi_2(t)+\psi_3(t)+\dots+\psi_{i-1}(t)]\cdots\\&\cdot\psi_{i-1}(t)\cdot\varepsilon_i(t)\cdot\psi_i(t)\cdot[\psi_i(t)+\psi_{i+1}(t)]\cdots[\psi_i(t)+\psi_{i+1}(t)+\dots+\psi_{n-1}(t)]>\\&>|\varphi_i'(t)|-\varepsilon_i'(t)\quad(i=1,2,\dots,n),\end{aligned}$$

/6'₂/ $$|f(t)|\,\varepsilon_i(t)\prod_{j=1}^{m-1}\big(\varepsilon_i(t)+\psi_j(t)\big) > |\varphi_i'(t)|-\varepsilon_i'(t) \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

/6'₃/ $$|f(t)|\,\varepsilon_i(t)\prod_{j=1}^{m-1}\psi_j(t) > |\varphi_i'(t)|-\varepsilon_i'(t) \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

/6'₄/ $$|f(t)|\cdot\varepsilon_i^m(t) > |\varphi_i'(t)|-\varepsilon_i'(t) \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

Sada možemo da damo teoremu koja predstavlja uopštenje teoreme 1 kada umjesto jednačine /1'/ imamo jednačinu /1/.

TEOREMA 1'.

Pod uslovima /4'/, /5'/ i /6'/ /ili jedan od uslova /6'₁/, /6'₂/, /6'₃/ i /6₄'//, jednačina /1/, za $t\geqslant t_o$, ima:

a/ Pri $f(t)>o$ $(t\geqslant t_o)$:

1/ za $m=2k+1$ $(k=o,1,\cdots)$, po bar jedno rješenje koja, za sve $t\geqslant t_o$, ispunjavaju uslove

/39/ $$\varphi_{2i+1}(t)-\varepsilon_{2i+1}(t) < x(t) < \varphi_{2i+1}(t)+\varepsilon_{2i+1}(t) \quad (i=o,1,2,\cdots,k)$$

i po jednu klasu rješenja koje, za sve $t\geqslant t_o$, ispunjavaju uslove

/4o/ $$\varphi_{2i}(t)-\varepsilon_{2i}(t) < x(t) < \varphi_{2i}(t)+\varepsilon_{2i}(t) \quad (i=1,2,\cdots,k);$$

2/ za $m=2k$ $(k=1,2,\cdots)$, po bar jedno rješenje koja, za sve $t\geqslant t_o$, ispunjavaju uslove /4o/ i po jednu klasu rješenja koje, za sve $t\geqslant t_o$, ispunjavaju uslove /39/, gdje samo i uzima vrijednosti $i=o,1,2,\cdots,k-1$.

b/ Pri $f(t)<o$ $(t\geqslant t_o)$:

1/ za $m=2k+1$ $(k=o,1,2,\cdots)$, po bar jedno rješenje koja, za sve $t\geqslant t_o$, ispunjavaju uslove /4o/ i po jednu klasu rješenja koje, za sve $t\geqslant t_o$, ispunjavaju uslove /39/;

2/ za $m=2k$ $(k=1,2,\cdots)$, po bar jedno rješenje koja, za sve $t\geqslant t_o$, ispunjavaju uslove /39/ /gdje je samo $i=o,1,2,\cdots,k-1$/ i po jednu klasu rješenja koje, za sve $t\geqslant t_o$, ispunjavaju uslove /4o/.

Možemo, takodje, da uopštimo i rezultate teoreme 2 kada se umjesto jednačine /1'/ ima jednačina /1/.

Uslovima /13/, /37/ i /38/ odgovaraju, za $t\geqslant t_o$, respektivno uslovi

/13'/ $$o<\varepsilon(t)\leqslant\varepsilon_i(t) \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

/37'/ $$\frac{1}{2}|f(t)|\varepsilon(t)\prod_{j=1}^{n-1}\Psi_j(t) > |\varphi_i'(t)| - \varepsilon_i'(t) \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

/38'/ $$\frac{1}{2}|f(t)|\prod_{j=1}^{n-1}\Psi_j(t) \geqslant M \quad / M \text{ je poz. konst.}/ .$$

TEOREMA 2'.

Pod uslovima /4'/, /5'/, /13'/, /37'/ i /38'/, tvrdjenja teoreme 1' važe u potpunosti uz sljedeće dopune:

a/ u slučaju tvrdjenja a/ teoreme 1', uslove /4o/, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, ispunjavaju sva rješenja jednačine /1/ oblasti

/41/ $$\varphi_{2i-1}(t) + \varepsilon_{2i-1}(t) \leqslant x \leqslant \varphi_{2i+1}(t) - \varepsilon_{2i+1}(t), \quad t \geqslant t_0 \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

za $n=2k+1$; dok za $n=2k$ uslove /39/, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, ispunjavaju sva rješenja oblasti

/42/ $$x \leqslant \varphi_2(t) - \varepsilon_2(t), \quad t \geqslant t_0,$$

kao i oblasti

/43/ $$\varphi_{2i}(t) + \varepsilon_{2i}(t) \leqslant x \leqslant \varphi_{2i+2}(t) - \varepsilon_{2i+2}(t), \quad t \geqslant t_0 \quad (i=1,2,\cdots,k-1);$$

b/ u slučaju tvrdjenja b/ teoreme 1', uslove /39/, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, a za $n=2k+1$, ispunjavaju sva rješenja oblasti /42/, /43/, kao i oblasti

$$x \geqslant \varphi_{2k}(t) + \varepsilon_{2k}(t), \quad t \geqslant t_0;$$

dok za $n=2k$ uslove /4o/, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, ispunjavaju sva rješenja oblasti /41/ /gdje samo treba uzeti da je $i=1,2,\cdots,k-1$ /, kao i oblasti

$$x \geqslant \varphi_{2k-1}(t) + \varepsilon_{2k-1}(t), \quad t \geqslant t_0 .$$

Ako je neka od funkcija $\varphi_i(t)$ ograničena za sve $t \geqslant t_0$, tada se umjesto odgovarajućeg uslova /37'/ može uzeti širi odgovarajući uslov /6'/ /ili /6$_1'$//.

Sada, poslije proučavanja jednačine /1'/, možemo primjetiti da izvedena razmatranja jednačine /1/ važe u potpunosti i za sljedeću jednačinu opštijeg oblika

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\prod_{i=1}^{m}(x-\varphi_i(t))\,F(t,x)\ ,$$

ako funkcija $F(t,x)$, za $t \geqslant t_o$ i $|x| < +\infty$, zadovoljava potrebne uslove za egzistenciju i jedinost rješenja i ako ispunjava uslov $F(t,x) \geqslant 1$.

PRIMJERI

1° U svojstvu primjera posmatrajmo jednačinu Rikatija

/44/ $$\frac{dx}{dt} = f(t)(x-\varphi_1(t))(x-\varphi_2(t))\ ,$$

gdje funkcije $f(t)$ i $\varphi_i(t)$ $(i=1,2)$ ispunjavaju iste osnovne uslove kao u jednačini /1/.

Za jednačinu /44/, koristeći dobijene rezultate, možemo dati sljedeće tvrdjenje:

Pod uslovima, za $t \geqslant t_o$,

/45/ $$\varphi_2(t) - \varphi_1(t) \geqslant \psi(t) + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)\ ,$$

/46/ $$|f(t)|\,\varepsilon_1(t)(\varepsilon_2(t) + \psi(t)) > |\varphi_1'(t)| - \varepsilon_1'(t)\ ,$$

/47/ $$|f(t)|\,\varepsilon_2(t)(\varepsilon_1(t) + \psi(t)) > |\varphi_2'(t)| - \varepsilon_2'(t)\ ,$$

gdje je $\psi(t)$ pozitivna i neprekidna funkcija za $t \geqslant t_o$, jednačina /44/, za $t \geqslant t_o$, ima:

a/ za $f(t) > o$ $(t \geqslant t_o)$, bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t \geqslant t_o$, ispunjava uslov

/48/ $$\varphi_2(t) - \varepsilon_2(t) < x(t) < \varphi_2(t) + \varepsilon_2(t)$$

i jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geqslant t_o$, ispunjava uslov

/49/ $$\varphi_1(t) - \varepsilon_1(t) < x(t) < \varphi_1(t) + \varepsilon_1(t)\ ;$$

b/ za $f(t) < o$ $(t \geqslant t_o)$, bar jedno rješenje koje, za sve $t \geqslant t_o$, ispunjava uslov /49/ i jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geqslant t_o$, ispunjavaju uslov /48/.

Uzmimo sada pozitivnu i neprekidnu funkciju $\varepsilon(t)$ koja, za $t \geqslant t_o$, ispunjava uslove

$$\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon_1(t)\ ,\quad \varepsilon(t) \leqslant \varepsilon_2(t)\ .$$

Ako su umjesto uslova /46/ i /47/ ispunjeni, za $t \geqslant t_o$, uslovi

/5o/ $$|f(t)|\,\varepsilon(t)\left(\varepsilon(t)+\tfrac{1}{2}\Psi(t)\right) > |\varphi_i'(t)| - \varepsilon_i'(t) \quad (i=1,2),$$

te uz to ispunjen , za $t \geq t_o$, i uslov

/51/ $$|f(t)|\left(\varepsilon(t)+\tfrac{1}{2}\Psi(t)\right) \geq M$$

/M je poz. konst./, tada, pored važenja navedenih rezultata za jednačinu /44/, važe i sljedeće dopune tim rezultatima:

a/ u slučaju $f(t)>o$ $(t\geq t_o)$, sva rješenja oblasti

$$x \leq \varphi_2(t) - \varepsilon_2(t), \quad t \geq t_o,$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_o$, ispunjavaju uslov /49/,

b/ u slučaju $f(t)<o$ $(t\geq t_o)$, sva rješenja oblasti

$$x \geq \varphi_1(t) + \varepsilon_1(t), \quad t \geq t_o,$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_o$, ispunjavaju uslov /48/.

U slučaju kada su funkcije $\varphi_i(t)$ $(i=1,2)$ ograničene zadnje tvrdjenje je tačno i kada umjesto uslova /5o/ stoje širi uslovi /46/ i /47/. Ako je jedna od funkcija $\varphi_i(t)$ $(i=1,2)$ ograničena, a druga nije, tada umjesto odgovarajućeg uslova /5o/ može da stoji odgovarajući uslov od uslova /46/ i /47/.

Navedimo sada i sljedeća dva konkretna primjera.

1/ Jednačina

$$x' = 4\sqrt{t}\,(x - \sin t)(x - 3 - th\,t)$$

ima bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t \geq 2$, ispunjava uslov

$$3 + th\,t < x(t) < 3 + th\,t + \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$$ [1]

i jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geq t_o$, ispunjava uslov

$$\sin t - \frac{1}{\sqrt[3]{t}} < x(t) < \sin t + \frac{1}{\sqrt[3]{t}},$$

dok za dovoljno veliko $t \geq t^* > 2$ taj uslov ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \leq 3 + th\,t, \quad t \geq 2.$$

Ovdje imamo da je

$$f(t) = 4\sqrt{t}, \quad \varphi_1(t) = \sin t, \quad \varphi_2(t) = 3 + th\,t,$$

funkcije $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ su ograničene. Ako uzmemo da je

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}},$$

uslovima /45/, /46/, /47/ i /51/ odgovaraju respektivno sljedeće tačne relacije, za $t \geq 2$:

---

[1] Kako je kriva $3+th\,t$ monotono rastuća to ona, prema tvrdjenju 2 /II § 1./ može da posluži kao donja granica "cijevi" metode retrakcije.

$$3 + \mathrm{th}\,t - \sin t > 1 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{t}} = \Psi(t) + 2\cdot\varepsilon(t)\,,$$

$$4\sqrt{t}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}} + 1\right) > 4\sqrt[6]{t} > |\cos t| + \frac{1}{3t\sqrt[3]{t}}\,,$$

$$4\sqrt[6]{t} > \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t} + \frac{1}{3t\sqrt[3]{t}}\,, \quad 4\sqrt{t}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}} + \frac{1}{2}\right) > 2\sqrt{t} > 2\,,$$

što obezbjedjuje tačnost navedenog rezultata.

2/ Posmatrajmo jednačinu

$$x' = (\cos t - 4)(x + 2 - \sin t)(x - t^2)\,.$$

Uzmemo li da je

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,,$$

za uslove /45/, /46/, /5o//za $i=2$ / i /51/ respektivno imamo

$$t^2 + 2 - \sin t > t^2 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} = \Psi(t) + 2\cdot\varepsilon(t)\,,$$

$$|\cos t - 4|\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + t^2\right) > 3t\sqrt{t} > |\cos t| + \frac{1}{2t\sqrt{t}}\,,$$

$$|\cos t - 4|\,\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{t^2}{2}\right) > \frac{3}{2}t\sqrt{t} > 2t + \frac{1}{2t\sqrt{t}}\,,$$

$$|\cos t - 4|\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{t^2}{2}\right) > \frac{3}{2}t^2 \geqslant 6\,,$$

koji su očevidno ispunjeni za $t \geqslant 2$. Prema tome, gornja jednačina, za $t \geqslant 2$, ima: bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t \geqslant 2$, ispunjava uslov

$$-2 + \sin t - \frac{1}{\sqrt{t}} < x(t) < -2 + \sin t + \frac{1}{\sqrt{t}}$$

i jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geqslant 2$, ispunjava uslov

$$t^2 - \frac{1}{\sqrt{t}} < x(t) < t^2\,,$$

dok sva rješenja oblasti

$$x \geqslant \sin t - 2 + \frac{1}{\sqrt{t}}\,, \quad t \geqslant 2\,,$$

za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > 2$, ispunjavaju taj uslov, odnosno uslov

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t) - t^2\right) = 0\,.$$

2^0 Jednačina

$$x' = \frac{30t+1}{t}(x + e^t)(x + \cos t)(x - \sqrt{t})$$

ima: bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t \geqslant 6$, ispunjava uslov

/52/ $$-e^t - \frac{1}{\sqrt{t}} < x(t) < -e^t\,,$$

bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t \geqslant 6$, ispunjava uslov

$$\sqrt{t} < x(t) < \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$$

i jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geqslant 6$, ispunjava uslov

$$-\cos t-\frac{1}{\sqrt{t}}<x(t)<-\cos t+\frac{1}{\sqrt{t}},$$

dok za dovoljno veliko $t\geqslant t^*>6$ taj uslov ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$-e^t\leqslant x\leqslant\sqrt{t}\ ,\ t\geqslant 6,$$

odnosno sva rješenja te oblasti ispunjavaju uslov

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t)+\cos t)=0.$$

/Možemo, na primjer, primjetiti da uslov /52/ ispunjava približno rješenje $x(t)=-e^t-\dfrac{e^t}{12(e^t-\cos t)(e^t+\sqrt{t})}$ ./

Zaista, uzmemo li da je

$$\varepsilon_1(t)=\varepsilon_2(t)=\varepsilon_3(t)=\varepsilon(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$$

odgovarajući uslovi teoreme 2′ su ispunjeni, jer, za $t\geqslant 6$, važi:

$$-\cos t+e^t>e^t-2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}=\Psi_1(t)+2\cdot\varepsilon(t),\quad \sqrt{t}-\cos t>\sqrt{t}-2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}=\Psi_2(t)+2\cdot\varepsilon(t),$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{30t+1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}(e^t-2)(\sqrt{t}-2)>15(e^t-2)\Big(1-\frac{2}{\sqrt{t}}\Big)>2(e^t-2)>e^t+\frac{1}{2t\sqrt{t}},$$

$$2(e^t-2)>|\sin t|+\frac{1}{2t\sqrt{t}},\quad 2(e^t-2)>\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2t\sqrt{t}},$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{30t+1}{t}(e^t-2)(\sqrt{t}-2)>2\sqrt{t}(e^t-2)\geqslant M>0.$$

3° Jednačina

/53/ $$x'=-\frac{20}{\sqrt{t}}(x+t)(x-5\sin t)(x-5\sin t-2)(x-t^2)$$

ima: po bar jedno rješenje koja, za sve $t\geqslant 7$, ispunjavaju uslove

/54/ $$-t-\frac{1}{t}<x(t)<-t,$$

/55/ $$5\sin t+2-\frac{1}{t}<x(t)<5\sin t+2+\frac{1}{t},$$

jednu klasu rješenja koja, za sve $t\geqslant 7$, ispunjava uslov

/56/ $$5\sin t-\frac{1}{t}<x(t)<5\sin t+\frac{1}{t},$$

dok za dovoljno veliko $t\geqslant t^*>7$ taj uslov ispunjavaju sva rješenja oblasti

/57/ $$-t\leqslant x\leqslant 5\sin t+2-\frac{1}{t}\ ,\ t\geqslant 7,$$

i ima jednu klasu rješenja koja, za sve $t\geqslant 7$, ispunjava uslov

/58/ $$t^2-\frac{1}{t}<x(t)<t^2$$

koji, za dovoljno veliko $t\geqslant t^*>7$, ispunjavaju sva rješenja oblasti

/59/ $$x\geqslant 5\sin t+2+\frac{1}{t}\ ,\ t\geqslant 7.$$

Ako uzmemo da je

$$\varepsilon_1(t)=\varepsilon_2(t)=\varepsilon_3(t)=\varepsilon_4(t)=\varepsilon(t)=\frac{1}{t}$$

nije teško vidjeti da su, za $t\geqslant 7$, ispunjeni svi uslovi teoreme 2, što i opravdava navedene zaključke o rješenjima posmatrane jednačine. Imamo:

$$f(t)=-\frac{20}{\sqrt{t}}\,,\quad \varphi_1(t)=-t\,,\quad \varphi_2(t)=5\sin t\,,\quad \varphi_3(t)=5\sin t+2\,,\quad \varphi_4(t)=t^2\,.$$

Za uslove /4/, za $t\geqslant 7$, imamo:

$$5\sin t+t > t-6+2\cdot\frac{1}{t}=\psi_1(t)+2\cdot\varepsilon(t)\,,$$

$$5\sin t+2-5\sin t > 1+2\cdot\frac{1}{t}=\psi_2(t)+2\varepsilon(t)\,,$$

$$t^2-5\sin t-2 > t^2-8+2\cdot\frac{1}{t}=\psi_3(t)+2\varepsilon(t)\,.$$

Dalje imamo da je, za $t\geqslant 7$,

$$\frac{1}{2}|f(t)|\,\varepsilon(t)\psi_1(t)\psi_2(t)\psi_3(t)=\frac{10}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{t}(t-6)(t^2-8) > \frac{10}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}(t^2-8) > \frac{10}{7}(t\sqrt{t}-4)\,,$$

kao i da je izraz $\frac{10}{7}(t\sqrt{t}-4)$, za $t\geqslant 7$, veći redom od sljedećih izraza

$$1+\frac{1}{t^2}\,,\quad |5\cos t|+\frac{1}{t^2}\,,\quad 2t+\frac{1}{t^2}\,,$$

što znači da su ispunjeni i uslovi /37/, za $t\geqslant 7$. Za uslov /38/ imamo:

$$\frac{10}{\sqrt{t}}(t-6)(t^2-8) > 100\,,\quad t\geqslant 7.$$

Posmatrajmo sada stabilnost rješenja jednačine /1/.

Dovoljno je primjetiti da smo u proučavanju jednačine /1/ obezbjedili dvije vrste rezultata. Jedne, pomoću krivolinijskih "cijevi" izlaznih integralnih krivih, a druge pomoću krivolinijskih "cijevi" ulaznih integralnih krivih, čije širine teže nuli kad $t\to+\infty$.

Na osnovu posmatranja o stabilnosti rješenja učinjenih u glavi II možemo konstatovati: Tamo gdje smo obezbjedili postojanje bar jednog rješenja to rješenje je nestabilno u smislu Ljapunova, a tamo gdje smo obezbjedili klasu rješenja, koja za sve $t\geqslant t_0$ pripada odredjenoj "cijevi" čija širina teži nuli, ta klasa rješenja je asimptotski stabilna u smislu definicije 1 /II § 3.1./.

Tako, na primjer, u slučaju tvrdjenja a/ teoreme 1', za $n=2k+1$, imamo: Rješenja koja ispunjavaju uslove /39/ su nestabilna u smislu Ljapunova, a klase rješenja koje ispunjavaju uslove /40/, za sve $t\geqslant t_0$, su asimptotski stabilne klase rješenja. To su one klase C_i rješenja $x_i(t)$ koji su odredjeni početnim vrijednostima $x_i(t_0)$ i to:

$$C_i:\quad x_i(t_0)\in\left(\varphi_{2i}(t_0)-\varepsilon_{2i}(t_0),\ \varphi_{2i}(t_0)+\varepsilon_{2i}(t_0)\right)\quad (i=1,2,\cdots,k)\,,$$

sa oblastima asimptotske stabilnosti

$$D_i: \quad \varphi_{2i}(t) - \varepsilon_{2i}(t) \leqslant x \leqslant \varphi_{2i}(t) + \varepsilon_{2i}(t), \quad t \geqslant t_0 \quad (i=1,2,\cdots,k);$$

dok u slučaju teoreme 2' a/ oblasti /41/ su oblasti asimptotske stabilnosti navedenih klasa C_i.

Od konkretnih primjera analizirajmo pitanje stabilnosti rješenja jednačine /53/ navedene u primjeru 3^0. Rješenja koja ispunjavaju uslove /54/ i /55/ su nestabilna u smislu Ljapunova, a klase rješenja koje, za sve $t \geqslant 7$, ispunjavaju uslove /56/ i /58/ su asimptotski stabilne klase rješenja u smislu definicije 1 /gdje je $r(t) = \frac{2}{t}$ / sa oblastima asimptotske stabilnosti respektivno /57/ i /59/.

§ 3.

Dobijeni rezultati pri proučavanju jednačine /1/ u § 2. mogu se neposredno iskoristiti i pri proučavanju sljedeće jednačine opštijeg oblika

$$/1/ \qquad \frac{dx}{dt} = f(t)\,(x-\varphi_1(t))^{\alpha_1}(x-\varphi_2(t))^{\alpha_2}\cdots(x-\varphi_m(t))^{\alpha_m},$$

tj.

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\prod_{i=1}^{m}(x-\varphi_i(t))^{\alpha_i},$$

gdje su funkcije $f(t)$ i $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ definisane i neprekidne za $t \geqslant t_0$; te

$$\varphi_i(t) \neq \varphi_j(t), \quad i \neq j \quad na \quad t \geqslant t_0 \quad (i,j=1,2,\cdots,m),$$

a veličine α_i $(i=1,2,\cdots,m)$ pozitivni racionalni brojevi.

Nemamo namjeru detaljno proučavati jednačinu /1/. Daćemo samo neke rezultate i time ukazati na mogućnosti proučavanja jednačina oblika /1/.

Prvo navedimo tvrdjenje koje se odnosi na jednačinu /1/ za $m=2$.

TVRDJENJE 1.

Jednačina

$$/2/ \qquad \frac{dx}{dt} = f(t)\,(x-\varphi_1(t))^{\alpha_1}(x-\varphi_2(t))^{\alpha_2},$$

gdje je $\alpha_1 = \frac{p}{q}$: p je paran, a q neparan prirodan broj, α_2 neparan prirodan broj i neka postoje pozitivne i neprekidne funkcije $\varepsilon(t)$ i $\psi(t)$ za $t \geqslant t_0$, gdje $\varepsilon(t)$ monotono teži nuli kad $t \to +\infty$ i takve da je, za $t \geqslant t_0$,

/3/ $$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \geqslant \psi(t) + \varepsilon(t),$$

/4/ $$|f(t)|\, \psi^{\alpha_1}(t)\, \varepsilon^{\alpha_2}(t) > |\varphi_2'(t)| - \varepsilon'(t).$$

ima:

a/ za $f(t) > 0$ $(t \geqslant t_0)$, bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov

/5/ $$\varphi_2(t) - \varepsilon(t) < x(t) < \varphi_2(t) + \varepsilon(t),$$

b/ za $f(t) < 0$ $(t \geqslant t_0)$, jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov /5/.

Takodje važe i sljedeće dopune u slučaju kada je $f(t) < 0$ $(t \geqslant t_0)$, odnosno dopune tvrdjenju b/:

1/ Ako je uz uslov /4/ ispunjen još i uslov

/6/ $$|f(t)|\, \psi^{\alpha_1}(t) \geqslant M_1 \quad \text{za } t \geqslant t_0$$

/M_1 je poz. konst./, tada, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, uslov /5/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

/7/ $$x \geqslant \varphi_2(t) - \varepsilon(t), \ t \geqslant t_0,$$

u slučaju kada je $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$, odnosno sva rješenja oblasti

/8/ $$x \leqslant \varphi_2(t) + \varepsilon(t), \ t \geqslant t_0,$$

kada je $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$.

2/ Ako funkcija $\psi(t)$ ispunjava uslov

/9/ $$\psi(t) \geqslant 3r \quad \text{za } t \geqslant t_0$$

gdje je r mali pozitivan broj, te ako je, za $t \geqslant t_0$,

/10/ $$|f(t)|\, r^{\alpha_1} \left(\tfrac{1}{3}\psi(t)\right)^{\alpha_2} > |\varphi_2'(t)| - \varepsilon'(t),$$

/11/ $$|f(t)| \left(r + \tfrac{1}{3}\psi(t)\right)^{\alpha_1} \varepsilon^{\alpha_2}(t) > |\varphi_2'(t)| - \varepsilon'(t),$$

/12/ $$|f(t)|\, r^{\alpha_1} \left(\tfrac{2}{3}\psi(t)\right)^{\alpha_2} > |\varphi_1'(t)|,$$

/13/ $$|f(t)| \geqslant M_2$$

/M_2 je pozitivna konstanta/, tada, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, uslov /5/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \geqslant \varphi_1(t) + r, \ t \geqslant t_0,$$

u slučaju kada je $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$, odnosno, sva rješenja oblasti

$$x \leqslant \varphi_1(t) - r, \quad t \geqslant t_0,$$

kada je $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$.

3/ Ako je funkcija $\varphi_2(t)$ ograničena za $t \geqslant t_0$ tada rezultat 2/ važi i kada je umjesto uslova /1o/ i /11/ ispunjen uslov /4/.

Dokaz. Posmatrajmo slučaj kada je $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$.

Jednačina /2/ ima dvije krive stacionarnih tačaka $x = \varphi_1(t)$ i $x = \varphi_2(t)$.

Neka je $f(t) > 0$.

Integralne krive jednačine /2/ u oblasti $x > \varphi_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$ imaju pozitivan, a u oblasti $x < \varphi_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$, izuzev tačaka krive $\varphi_1(t)$, negativan koeficijent smjera.

Neka je

$$\omega_1(t) = \varphi_2(t) - \varepsilon(t), \quad \omega_2(t) = \varphi_2(t) + \varepsilon(t) \quad (t \geqslant t_0).$$

Prema /3/ i /4/ imamo

$$x'(\omega_1(t)) = f(t)\big(\varphi_2(t) - \varepsilon(t) - \varphi_1(t)\big)^{\alpha_1}\big(-\varepsilon(t)\big)^{\alpha_2} \leqslant -f(t)\,\psi^{\alpha_1}(t)\,\varepsilon^{\alpha_2}(t) <$$

$$< -|\varphi_2'(t)| + \varepsilon'(t) < \varphi_2'(t) - \varepsilon'(t) = \omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t)) = f(t)\big(\varphi_2(t) + \varepsilon(t) - \varphi_1(t)\big)^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}(t) > f(t)\,\psi^{\alpha_1}(t)\,\varepsilon^{\alpha_2}(t) >$$

$$> |\varphi_2'(t)| - \varepsilon'(t) > \varphi_2'(t) + \varepsilon'(t) = \omega_2'(t).$$

Dakle, krive $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$ čine donju, odnosno gornju granicu "cijevi" izlaznih integralnih krivih, te, prema metodi retrakcije, jednačina /2/ ima bar jedno rješenje koje, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov /5/.

U slučaju $f(t) < 0$ slično se dolazi do ocjena

$$x'(\omega_1(t)) > \omega_1'(t), \quad x'(\omega_2(t)) < \omega_2'(t) \quad \text{za } t \geqslant t_0,$$

što znači da integralne krive koje prolaze kroz tačke krivih $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$ ulaze u "cijev" ograničenu tim krivama, te da integralne krive koje prolaze kroz unutrašnje tačke te "cijevi" ostaju u toj "cijevi", što i potvrdjuje tačnost tvrdjenja b/.

Posmatrajmo sada dodatna tvrdjenja.

Slučaj 1/, pri $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$.

Uslov /4/ i dodatni uslov /6/ obezbjedjuju da integralne krive u oblasti $x > \varphi_2(t) + \varepsilon(t)$ $(t \geqslant t_0)$ imaju koeficijent smjera ne samo manji od koeficijenta smjera krive $\varphi_2(t) + \varepsilon(t)$, nego i manji za odgovarajući pozitivan broj, što garantuje da će te integralne krive, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, stići do krive $\varphi_2(t)+\varepsilon(t)$, a zatim i ući u "cijev" ograničenu krivama $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$.

Zaista, u ma kojoj tački $P(t, \varphi_2(t)+\varepsilon(t)+\delta)$, gdje je δ proizvoljan pozitivan broj, oblasti $x > \varphi_2(t)+\varepsilon(t), t \geqslant t_0$, imamo

$$x'(P) = f(t)\left(\varphi_2(t)+\varepsilon(t)+\delta-\varphi_1(t)\right)^{\alpha_1}\left(\varepsilon(t)+\delta\right)^{\alpha_2} < f(t)\left(\psi(t)+2\varepsilon(t)+\delta\right)^{\alpha_1}\cdot$$
$$\cdot\left(\varepsilon(t)+\delta\right)^{\alpha_2} < f(t)\,\psi^{\alpha_1}(t)\,\varepsilon^{\alpha_2}(t) + f(t)\,\psi^{\alpha_1}(t)\,\delta^{\alpha_2} < \varphi_2'(t)+\varepsilon_2'(t) - M_1\delta^{\alpha_2}.$$

Slučaj 2/ $/\varphi_1(t) < \varphi_2(t)/$.

Ispunjenje uslova /9/, /1o/, /11/ i /13/ znači i ispunjenje uslova /4/ i /6/. Prema tome, ovdje treba još da dokažemo da će, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, i sve integralne krive oblasti

$$/14/ \qquad \varphi_1(t)+r \leqslant x < \varphi_2(t)-\varepsilon(t), \quad t \geqslant t_0$$

stići do krive $\varphi_2(t)-\varepsilon(t)$.

Prije svega, prema uslovu /12/, u tačkama krive $x=\varphi_1(t)+r$ $(t \geqslant t_0)$, integralne krive imaju koeficijent smjera

$$x' = f(t)\,r^{\alpha_1}\left(\varphi_1(t)+r-\varphi_2(t)\right)^{\alpha_2} > -f(t)\,r^{\alpha_1}\left(\tfrac{3}{3}\psi(t)\right)^{\alpha_2} > \varphi_1'(t).$$

To znači da će integralne krive koje prolaze kroz tačke krive $x=\varphi_1(t)+r$ $(t \geqslant t_0)$ presjeći tu krivu ulazeći u oblast /14/, te da nijedna integralna kriva koja prolazi kroz unutrašnje tačke oblasti /14/ neće dodirnuti krivu $\varphi_1(t)+r$ $(t \geqslant t_0)$.

Posmatrajmo sada ponašanje integralnih krivih u podoblastima

$$\varphi_1(t)+r < x < \varphi_2(t)-\varepsilon(t)-\tfrac{1}{3}\psi(t), \quad t \geqslant t_0,$$
$$\varphi_2(t)-\varepsilon(t)-\tfrac{1}{3}\psi(t) \leqslant x < \varphi_2(t)-\varepsilon(t), \quad t \geqslant t_0,$$

oblasti /14/.

Neka su respektivno $P_1(t_1, \varphi_2(t_1)-\varepsilon(t_1)-\tfrac{1}{3}\psi(t)-\delta_1)$, $P_2(t_2, \varphi_2(t_2)-\varepsilon(t_2)-\delta_2)$ $/\delta_1$ i δ_2 su pozitivni brojevi/ proizvoljne tačke gornjih podoblasti.

Prema navedenim uslovima, za $t \geqslant t_0$, važi

$$x'(P_1) = -f(t_1)\left(\varphi_2(t_1)-\varepsilon(t_1)-\tfrac{1}{3}\psi(t_1)-\delta_1-\varphi_1(t_1)\right)^{\alpha_1}\left(\varepsilon(t_1)+\tfrac{1}{3}\psi(t_1)+\delta_1\right)^{\alpha_2} > -f(t_1)\,r^{\alpha_1}\left(\tfrac{1}{3}\psi(t_1)+\delta_1\right)^{\alpha_2} \geqslant$$
$$\geqslant -f(t_1)\,r^{\alpha_1}\left(\tfrac{1}{3}\psi(t_1)\right)^{\alpha_2} - f(t_1)\,r^{\alpha_1}\delta^{\alpha_2} > |\varphi_2'(t_1)| - \varepsilon'(t_1) + M_2 r^{\alpha_1}\delta_1^{\alpha_2};$$

$$x'(P_2) = -f(t_2)\left(\varphi_2(t_2)-\varepsilon(t_2)-\delta_2-\varphi_1(t_2)\right)^{\alpha_1}\left(\varepsilon(t_2)+\delta_2\right)^{\alpha_2} > -f(t_2)\left(r+\tfrac{1}{3}\psi(t_2)\right)^{\alpha_1}\left(\varepsilon(t_2)+\delta_2\right)^{\alpha_2} \geqslant$$
$$\geqslant -f(t_2)\left(r+\tfrac{1}{3}\psi(t_2)\right)^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}(t) - f(t_2)\left(r+\tfrac{1}{3}\psi(t_2)\right)^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2} > |\varphi_2'(t_2)| - \varepsilon'(t_2) + M_2(2r)^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2},$$

što znači da integralne krive u ma kojoj tački oblasti /14/ imaju koeficijent smjera ne samo veći od odgovarajućeg pozitivnog broja, nego i veći od koeficijenta smjera krive $\varphi_2(t)-\varepsilon(t)$ za pozitivan broj, te će, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, i stići do krive $\varphi_2(t)-\varepsilon(t)$.

U slučaju 3/, kada je kriva $\varphi_2(t)$ ograničena, uslov /13/ obezbjedjuje da integralne krive u ma kojoj tački oblasti /14/ imaju koeficijent smjera veći od pozitivnog broja /što se vidi i iz dokaza rezultata 2//, te će, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, i stići do ograničene krive $\varphi_2(t)-\varepsilon(t)$, a uslov /4/ obezbjedjuje i ulaženje tih integralnih krivih u odgovarajuću "cijev".

PRIMJERI

1° Jednačina

/15/ $$x' = (th t - 3)(x+\ln t)^{\frac{4}{3}}(x-\sin t - 2)^3$$

ima jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/16/ $$\sin t + 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{\ln t}} < x(t) < \sin t + 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{\ln t}},$$

za sve $t \geqslant e$, a sva rješenja jednačine će, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > e$, ispunjavati uslov /16/, te i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t)-\sin t - 2) = 0 .$$

Ovdje se može primjeniti navedeni rezultat 3/. Uzmemo li da je $\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{\ln t}}$, za funkciju $\Psi(t)$ možemo uzeti da je $\Psi(t)=\ln t$, pri čemu su uslovi /4/ i /13/ ispunjeni, jer, za $t \geqslant e$, važi

$$|th t - 3|\cdot \ln^{\frac{4}{3}} t\cdot \frac{1}{\ln t} > 2\sqrt[3]{\ln t} > |\cos t| + \frac{1}{3t\ln t\sqrt[3]{\ln t}}, \quad -th t + 3 > 2 .$$

Takodje, treba primjetiti da integralne krive jednačine /15/ imaju pozitivan koeficijent smjera u oblasti $x < \sin t + 2$ $(t \geqslant e)$ izuzev u tačkama stacionarne krive $x = -\ln t$ $(t \geqslant e)$, koja je monotono opadajuća, te će sve integralne krive oblasti $x < -\ln t$ $(t \geqslant e)$ preći u oblast $x > -\ln t$ $(t \geqslant e)$, a zatim, prema ostalim uslovima, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > e$, i stići do krive $\sin t + 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{\ln t}}$ $(t \geqslant e)$.

Dakle, klasa rješenja jednačine /15/ koja ispunjava uslov /16/ za sve $t \geqslant e$ je asimptotski stabilna u smislu definicije 1 /II § 3.1./, gdje je $r(t) = 2\varepsilon(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{\ln t}}$, i to asimptotski stabilna u cijelom.

2° Jednačina

/17/ $$x' = \pm 12t^2(x-10-12\sin t)^{\frac{2}{3}}(x-20\sin t)^3$$

ima: a/ u slučaju znaka $+$, bar jedno rješenje koje ispunjava uslov

/18/ $$20\sin t - \frac{1}{t} < x(t) < 20\sin t + \frac{1}{t}$$

za sve $t \geq 2$; b/ u slučaju znaka $-$, jednu klasu rješenja koja ispunjava taj uslov za sve $t \geq 2$, dok za dovoljno veliko $t \geq t^* > 2$, sva rješenja jednačine ispunjavaju navedeni uslov.

Klasa rješenja jednačine /17/ koja ispunjava uslov /18/, za sve $t \geq 2$, je asimptotski stabilna u smislu definicije 1, sa $r(t) = \frac{2}{t}$, i to asimptotski stabilna u cijelom; dok je rješenje koje ispunjava uslov /18/, u slučaju a/, nestabilno u smislu Ljapunova.

Ovdje je

$$|f(t)| = 12t^2, \ \varphi_1(t) = 10 + 12\sin t, \ \varphi_2(t) = 20\sin t \ ; \ \varphi_2(t) < \varphi_1(t).$$

Za funkciju $\Psi(t)$ možemo uzeti $\Psi(t) = 1$, a uzmemo li da je $\varepsilon(t) = \frac{1}{t}$, uslov /4/ je očevidno ispunjen, što obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja /pri znaku$+$/, odnosno jedne klase rješenja /pri znaku$-$/ koja ispunjava uslov /18/. Dalje, kriva $f(t)$ ispunjava uslov /13/, a krive $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ su ograničene, te na osnovu izgleda krive $\varphi_1(t) = 10 + 12\sin t$ može se konstatovati /pri znaku$-$/ da će sve integralne krive oblasti $x > \varphi_1(t)$ $(t \geq 2)$, za dovoljno veliko $t \geq t^* > 2$, stići do krive $\varphi_1(t)$, a zatim stići i do krive $\varphi_2(t) + \varepsilon(t)$, te i ući u odgovarajuću "cijev".

Posmatrajmo sada jednačinu oblika /1/ za $m=3$, tj. jednačinu

/19/ $$\frac{dx}{dt} = f(t)\left(x-\varphi_1(t)\right)^{\alpha_1}\left(x-\varphi_2(t)\right)^{\alpha_2}\left(x-\varphi_3(t)\right)^{\alpha_3}.$$

Na osnovu prethodnih rezultata možemo dati sljedeća dva tvrdjenja.

TVRDJENJE 2.

Jednačina /19/, gdje je $\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1}$: p_1 neparan, a q_1 paran prirodan broj; $\alpha_2 = \frac{p_2}{q_2}$: p_2 paran, a q_2 neparan prirodan broj; α_3 neparan prirodan broj, pod uslovom

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t) < \varphi_3(t), \ t \geq t_0,$$

kao i neka postoje pozitivne i neprekidne funkcije $\varepsilon(t)$, $\Psi_1(t)$ i $\Psi_2(t)$ gdje $\varepsilon(t)$ monotono teži nuli kad $t \to +\infty$, takve da je, za $t \geq t_0$,

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \geq \Psi_1(t),$$

$$|\varphi_2(t) - \varphi_3(t)| \geq \Psi_2(t) + \varepsilon(t),$$

$$|f(t)|\left(\psi_1(t)+\psi_2(t)\right)^{\alpha_1}\cdot\psi_2^{\alpha_2}(t)\cdot\varepsilon^{\alpha_3}(t)>|\varphi_3'(t)|-\varepsilon'(t), \tag{20}$$

ima:

a/ za $f(t)>0$ $(t\geq t_0)$, bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t\geq t_0$, ispunjava uslov

$$\varphi_3(t)-\varepsilon(t)<x(t)<\varphi_3(t)+\varepsilon(t) \tag{21}$$

b/ za $f(t)<0$ $(t\geq t_0)$, jednu klasu rješenja koja, za sve $t\geq t_0$, ispunjava uslov /21/.

Takodje, važe i sljedeće dopune u slučaju kada je $f(t)<0$.

1/ Ako je pored uslova /2o/ ispunjen još i uslov

$$|f(t)|\left(\psi_1(t)+\psi_2(t)\right)^{\alpha_1}\psi_2^{\alpha_2}(t)\geq M,\quad t\geq t_0$$

/M je poz. konst./, tada, za dovoljno veliko $t\geq t^*>t_0$, uslov /21/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x\geq\varphi_3(t)-\varepsilon(t),\quad t\geq t_0.$$

2/ Ako funkcija $\psi_2(t)$ ispunjava uslov

$$\psi_2(t)\geq 3r \quad \text{za } t\geq t_0,$$

gdje je r mali pozitivan broj, te ako su ispunjeni uslovi, za $t\geq t_0$,

$$|f(t)|\left(r+\psi_1(t)\right)^{\alpha_1}\cdot r^{\alpha_2}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\psi_2(t)\right)^{\alpha_3}>|\varphi_3'(t)|-\varepsilon'(t), \tag{22}$$

$$|f(t)|\left(r+\psi_1(t)+\tfrac{1}{3}\psi_2(t)\right)^{\alpha_1}\left(r+\tfrac{1}{3}\psi_2(t)\right)^{\alpha_2}\varepsilon^{\alpha_3}(t)>|\varphi_3'(t)|-\varepsilon'(t), \tag{23}$$

$$|f(t)|\left(r+\psi_1(t)\right)^{\alpha_1}r^{\alpha_2}\left(\tfrac{2}{3}\psi_2(t)\right)^{\alpha_3}>\varphi_2'(t),$$

$$|f(t)|\,\psi_1^{\alpha_1}(t)\,\psi_2^{\alpha}(t)\geq M_1$$

/M_1 je poz. konst./, gdje je $\alpha=\min\{\alpha_2,\alpha_3\}$, tada uslov /21/, za dovoljno veliko $t\geq t^*>t_0$, ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x\geq\varphi_2(t)+r,\quad t\geq t_0.$$

3/ Ako je funkcija $\varphi_3(t)$ ograničena za $t\geq t_0$, tada navedeni rezultat 2/ važi i kada je umjesto uslova /22/ i /23/ ispunjen uslov /2o/.

TVRDJENJE 3.

Ako je $\alpha_i=\frac{p_i}{q_i}$ $(i=1,2,3)$ /p_i i q_i prirodni brojevi medju sobom prosti/, gdje su p_1, p_3, q_1, q_2 i q_3 neparni, a p_2 paran prirodan broj, zatim

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t) < \varphi_3(t) \quad za \; t \geqslant t_0,$$

te ako postoje pozitivne i neprekidne funkcije $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ gdje funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ monotono teže nuli kad $t \to +\infty$, takve da je, za $t \geqslant t_0$,

$$\varphi_2(t) - \varphi_1(t) \geqslant \psi_1(t) + \varepsilon_1(t),$$

$$\varphi_3(t) - \varphi_2(t) \geqslant \psi_2(t) + \varepsilon_2(t),$$

$$|f(t)|\, \varepsilon_1^{\alpha_1}(t)\, \psi_1^{\alpha_2}(t) \left(\psi_1(t) + \psi_2(t)\right)^{\alpha_3} > |\varphi_1'(t)| - \varepsilon_1'(t),$$

$$|f(t)| \left(\psi_1(t) + \psi_2(t)\right)^{\alpha_1} \psi_2^{\alpha_2}(t)\, \varepsilon_2^{\alpha_3}(t) > |\varphi_3'(t)| - \varepsilon_2'(t),$$

tada jednačina /19/ ima:

a/ za $f(t) > 0$ $(t \geqslant t_0)$, bar jedno rješenje koje ispunjava uslov

/24/ $$\varphi_3(t) - \varepsilon_2(t) < x(t) < \varphi_3(t) + \varepsilon_2(t)$$

za sve $t \geqslant t_0$ i jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/25/ $$\varphi_1(t) - \varepsilon_1(t) < x(t) < \varphi_1(t) + \varepsilon_1(t)$$

za sve $t \geqslant t_0$;

b/ za $f(t) < 0$ $(t \geqslant t_0)$, bar jedno rješenje koje, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov /25/ i jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov /24/.

I ovdje bismo mogli da uz odgovarajuće dodatne uslove obezbijedimo da uslov /25/ /u slučaju a// i uslov /24/ /u slučaju b//, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, ispunjavaju i odgovarajuće šire klase rješenja.

PRIMJERI

1° Jednačina

$$x' = -\frac{5}{\sqrt[3]{t}} \cdot \sqrt{x+t} \cdot \sqrt[3]{(x-\sin t)^2} \cdot \left(x - \sqrt{t} - 2\right)^3$$

ima jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/26/ $$\sqrt{t} + 2 - \frac{1}{\sqrt[6]{t}} < x(t) < \sqrt{t} + 2,$$

za sve $t \geqslant 2$, dok, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > 2$, sva rješenja oblasti

/27/ $$x > -t, \quad t \geqslant 2$$

ispunjavaju uslov /26/, odnosno, ispunjavaju uslov

$$\lim_{t \to +\infty} \left(x(t) - \sqrt{t} - 2\right) = 0.$$

Klasa rješenja koja, za sve $t \geqslant 2$, ispunjava uslov /26/ je asimptotski stabilna u smislu definicije 1 /sa $r(t)=\frac{1}{\sqrt[6]{t}}$ /, a oblast /27/ je oblast asimptotske stabilnosti.

Na osnovu rezultata 2/ može se pokazati da, za dovoljno veliko $t \geq t^* > 2$, uslov /26/ ispunjavaju rješenja oblasti $x \geq \sin t + r$, $t \geq 2$ /na primjer $r=1$ /, a na osnovu oblika krivih $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,3)$ nije teško pokazati da uslov /26/ ispunjavaju sva rješenja oblasti /27/.

2^0 Jednačina

/28/ $$x' = t^2(x-20\sin 2t)^{\frac{3}{5}}(x-10-14\sin 2t)^{\frac{2}{3}}\left(x-25-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^3$$

ima bar jedno rješenje koje ispunjava uslov

/29/ $$25 < x(t) < 25+\frac{1}{\sqrt{t}}$$

za sve $t \geq 1$ i jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/30/ $$20\sin 2t - \frac{1}{t} < x(t) < 20\sin 2t + \frac{1}{t}$$

za sve $t \geq 1$, a za dovoljno veliko $t \geq t^* > 1$ taj uslov ispunjavaju sva rješenja oblasti

/31/ $$x \leq 25, \ t \geq 1.$$

Rješenje koje ispunjava uslov /29/ nestabilno je u smislu Ljapunova, a klasa rješenja koja, za sve $t \geq 1$, ispunjava uslov /30/ je asimptotski stabilna u smislu definicije 1, a oblast /31/ je oblast asimptotske stabilnosti.

Ovaj primjer je u vezi sa tvrdjenjem 3.

Integralne krive jednačine /28/ imaju pozitivan koeficijent smjera za $x > 25+\frac{1}{\sqrt{t}}$ i $x < 20\sin 2t$ $(t \geq 1)$, a negativan za $20\sin 2t < x < 25+\frac{1}{\sqrt{t}}$, $x \neq 10+14\sin 2t$ $(t \geq 1)$. Kako je $x = 25+\frac{1}{\sqrt{t}}$ $(t \geq 1)$ monotono opadajuća kriva, to je "cijev"

$$t \geq 1, \ 25 < x < 25+\frac{1}{\sqrt{t}}$$

"cijev" izlaznih integralnih krivih, koja obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja koje joj pripada za sve $t \geq 1$.

Dalje, nije teško pokazati da je "cijev"

/32/ $$t \geq 1, \ 20\sin 2t - \frac{1}{t} < x < 20\sin 2t + \frac{1}{t}$$

"cijev" ulaznih integralnih krivih koja garantuje postojanje jedne klase rješenja koja joj pripada za sve $t \geq 1$.

Kako je $f(t) = t^2 \to +\infty$, to će sva rješenja oblasti /31/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > 1$, ući u "cijev" /32/.

§4.

Ovdje ćemo posmatrati neke jednačine oblika

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\,\frac{(x-\varphi_1(t))^{\alpha_1}(x-\varphi_2(t))^{\alpha_2}\cdots(x-\varphi_k(t))^{\alpha_k}}{(x-\varphi_{k+1}(t))^{\alpha_{k+1}}(x-\varphi_{k+2}(t))^{\alpha_{k+2}}\cdots(x-\varphi_m(t))^{\alpha_m}},$$

t.j.

$$\frac{dx}{dt} = f(t)\,\frac{\prod_{i=1}^{k}(x-\varphi_i(t))^{\alpha_i}}{\prod_{j=k+1}^{m}(x-\varphi_j(t))^{\alpha_j}},$$

gdje su funkcije $f(t)$ i $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\dots,m)$ definisane i neprekidne za $t \geq t_0$ i ispunjavaju potrebne uslove za jedinost rješenja jednačine za

$$x \neq \varphi_j(t) \quad (j = k+1, k+2, \dots, m)$$

i

$$\varphi_l(t) \neq \varphi_m(t), \quad l \neq m \quad (l, m = 1, 2, \dots, m),$$

funkcija $f(t)$ stalnog znaka za $t \geq t_0$, a veličine α_i $(i=1,2,\dots,m)$ su pozitivni racionalni brojevi.

Posmatrajmo prvo jednačinu

/1/
$$\frac{dx}{dt} = f(t)\,\frac{(x-\varphi_1(t))^{\alpha_1}}{(x-\varphi_2(t))^{\alpha_2}},$$

gdje je $\alpha_1 = \frac{p}{q}$, p i q neparni prirodni brojevi medju sobom prosti, a α_2 je bilo koji pozitivan racionalan broj.

Neka je

$$\varphi_1(t) > \varphi_2(t) \quad \text{za } t \geq t_0,$$

te neka su $\varepsilon(t)$ i $\psi(t)$ pozitivne i neprekidne funkcije, gdje funkcija $\varepsilon(t)$ monotono teži nuli kad $t \to +\infty$ i takve da je

/2/
$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \psi'(t) - \varepsilon(t) > \varepsilon(t) \quad \text{za } t \geq t_0.$$

Možemo da damo sljedeće tvrdjenje.

TVRDJENJE 4.

Jednačina /1/, pod uslovom /2/, kao i, za $t \geq t_0$,

/3/ $$|f(t)|\,\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\psi^{\alpha_2}(t)} > |\varphi_1'(t)| - \varepsilon'(t)\,,$$

ima:

a/ za $f(t)>0$ $(t\geq t_0)$, bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t\geq t_0$, ispunjava uslov

/4/ $$\varphi_1(t)-\varepsilon(t) < x(t) < \varphi_1(t)+\varepsilon(t)\,,$$

b/ za $f(t)<0$ $(t\geq t_0)$, jednu klasu rješenja koja, za sve $t\geq t_0$, ispunjava uslov /4/.

Ako je $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi_1(t)=+\infty$ uslov /4/, pri $f(t)<0$, za dovoljno veliko $t\geq t^*>t_0$, ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \geq \varphi_1(t)-\varepsilon(t)\,,\ t\geq t_0\,.$$

Važe i sljedeće dopuno pri $f(t)<0$ $(t\geq t_0)$.

1/ Ako funkcija $\psi(t)$ ispunjava uslov

/5/ $$\psi(t)=r+\psi_1(t) > r+\varepsilon(t) \quad \text{za } t\geq t_0\,,$$

gdje je r mali pozitivan broj, $\psi_1(t)$ pozitivna i neprekidna funkcija za $t\geq t_0$ / $\psi_1(t)>\varepsilon(t)$/, tada, pod uslovima, za $t\geq t_0$,

/6/ $$|f(t)|\,\frac{\left(\psi_1(t)-\varepsilon(t)\right)^{\alpha_1}}{r^{\alpha_2}} > \varphi_2'(t)\,,$$

/7/ $$|f(t)|\,\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\psi^{\alpha_2}(t)} > |\varphi_1'(t)| - \varepsilon'(t) + m_0$$

/m_0 je pozitivan broj/, za dovoljno veliko $t\geq t^*>t_0$, uslov /4/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

/8/ $$\varphi_2(t)+r \leq x \leq \varphi_1(t)+\varepsilon(t)\,,\ t\geq t_0\,.$$

Ako je $q=1$ /kod $\alpha_1=\frac{p}{q}$ /, tada gornje tvrdjenje važi i kada se uslov /7/ zamjeni uslovom /3/ i pri tom se doda uslov

/9/ $$|f(t)|\cdot\frac{1}{\psi^{\alpha_2}(t)} > M \quad \text{za } t\geq t_0 \ /M \text{ je poz. konst.}/.$$

2/ Ako postoji pozitivna i neprekidna funkcija $d(t)$ za $t\geq t_0$, tako da je, za $t\geq t_0$,

/10/ $$f(t)\,\frac{d^{\alpha_1}(t)}{\left(\psi(t)+d(t)\right)^{\alpha_2}} < \varphi_1'(t)+d'(t)\,,$$

/11/ $$f(t)\,\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\left(\psi(t)+d(t)\right)^{\alpha_2}} < \varphi_1'(t)+\varepsilon'(t)-m_0\,,$$

gdje je m_0 pozitivan broj, tada, uz uslov /3/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, uslov /4/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$\varphi_1(t) - \varepsilon(t) \leq x \leq \varphi_1(t) + d(t), \ t \geq t_0$$

Ako su, pored uslova /1o/ i /11/, ispunjeni uslovi /5/, /6/ i /7/, tada, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, uslov /4/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$\varphi_2(t) + r \leq x \leq \varphi_1(t) + d(t), \ t \geq t_0,$$

a ako je i

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\varphi_1(t) + d(t)\right) = +\infty,$$

tada uslov /4/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \geq \varphi_2(t) + r, \ t \geq t_0.$$

Dokaz. Kako je za $x = \varphi_2(t)$ $(t \geq t_0)$ desna strana jednačine /1/ neograničena, to u tačkama te krive jednačina ne ispunjava potrebne uslove o egzistenciji i jedinosti rješenja, te kako je $\varphi_2(t) < \varphi_1(t)$ $(t \geq t_0)$, to posmatrajmo ponašanje rješenja jednačine /1/ u oblasti

/12/ $$x > \varphi_2(t), \ t \geq t_0.$$

Jednačina /1/ ima krivu stacionarnih tačaka $x = \varphi_1(t)$ $(t \geq t_0)$ koja /prema uzetoj vrijednosti α_1/ oblast /12/ dijeli u dvije podoblasti u kojima integralne krive imaju suprotne koeficijente smjera.

Neka je

$$\omega_1(t) = \varphi_1(t) - \varepsilon(t), \quad \omega_2(t) = \varphi_2(t) + \varepsilon(t) \ (t \geq t_0).$$

Prema uslovu /3/ i pri $f(t) > o$, za $t \geq t_0$, imamo:

$$x'(\omega_1(t)) = f(t) \frac{(-\varepsilon(t))^{\alpha_1}}{\left(\varphi_1(t) - \varepsilon(t) - \varphi_2(t)\right)^{\alpha_2}} < -f(t) \frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\psi^{\alpha_2}(t)} < \varphi_1'(t) - \varepsilon'(t) = \omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t)) = f(t) \frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\left(\varphi_1(t) + \varepsilon(t) - \varphi_2(t)\right)^{\alpha_2}} = f(t) \frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\psi^{\alpha_2}(t)} > \varphi_1'(t) + \varepsilon'(t) = \omega_2'(t),$$

što, prema metodi retrakcije, obezbjedjuje postojanje bar jednog rješenja koje pripada "cijevi"

/13/ $$t \geq t_0, \ \varphi_1(t) - \varepsilon(t) < x < \varphi_1(t) + \varepsilon(t)$$

za sve $t \geq t_0$, te i ispunjava uslov /4/.

Za $f(t) < o$ $(t \geq t_0)$, pod uslovom /3/, za $t \geq t_0$, imamo:

$$x'(\omega_1(t)) = f(t) \frac{-\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\left(\varphi_1(t) - \varepsilon(t) - \varphi_2(t)\right)^{\alpha_2}} > -f(t) \frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\psi^{\alpha_2}(t)} > \varphi_1'(t) - \varepsilon'(t) = \omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t)) = f(t)\,\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\left(\varphi_1(t)+\varepsilon(t)-\varphi_2(t)\right)^{\alpha_2}} = f(t)\,\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\psi^{\alpha_2}(t)} < \varphi_1'(t)+\varepsilon'(t) = \omega_2'(t),$$

što znači da rješenja koja prolaze kroz tačke krivih $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$ ulaze u "cijev" /13/, a da one koje prolaze kroz unutrašnje tačke te "cijevi" ostaju u njoj i tako čine klasu rješenja koja ispunjava uslov /4/.

Ako je $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_1(t) = +\infty$ sva će rješenja oblasti $x > \varphi_1(t)$ $(t \geqslant t_0)$, pri $f(t) < 0$, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, dodirnuti krivu $\varphi_1(t)$, te i ući u "cijev" ograničenu krivama $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$.

Dokažimo sada i dodatna tvrdjenja.

Prema uslovima /2/, /5/ i /6/, za $t \geqslant t_0$, važi:

$$x'(\varphi_2(t)+r) = f(t)\,\frac{\left(\varphi_2(t)+r-\varphi_1(t)\right)^{\alpha_1}}{r^{\alpha_2}} = f(t)\,\frac{\left(\varepsilon(t)-\psi_1(t)\right)^{\alpha_1}}{r^{\alpha_2}} = -f(t)\,\frac{\left(\psi_1(t)-\varepsilon(t)\right)^{\alpha_1}}{r^{\alpha_2}} > \varphi_2'(t),$$

što garantuje da sve integralne krive koje prolaze kroz tačke krive $\varphi_2(t)+r$ $(t \geqslant t_0)$ presjecaju tu krivu prelazeći u oblast /8/.

Dalje, uslov /7/ jači je od uslova /3/, te obezbjedjuje tvrdjenje b/, a uslovi /2/, /5/ i /7/ obezbjedjuju da sve integralne krive koje prolaze kroz tačke oblasti

$$/14/ \qquad \varphi_2(t)+r \leqslant x < \varphi_1(t)-\varepsilon(t), \quad t \geqslant t_0,$$

za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, stignu do krive $\varphi_1(t)-\varepsilon(t)$, a zatim i udju u "cijev" /13/.

Zaista, neka je $P(t, \varphi_1(t)-\varepsilon(t)-\delta)$, gdje je δ pozitivan broj koji za neko $t \geqslant t_0$ može da uzme vrijednosti $\delta \in (0, \psi_1(t)-2\varepsilon(t)]$, proizvoljna tačka oblasti /14/. Prema /2/, /5/ i /7/ važi:

$$x'(P) = f(t)\,\frac{\left(-\varepsilon(t)-\delta\right)^{\alpha_1}}{\left(\varphi_1(t)-\varepsilon(t)-\delta-\varphi_2(t)\right)^{\alpha_2}} = -f(t)\,\frac{\left(\varepsilon(t)+\delta\right)^{\alpha_1}}{\left(\psi(t)-2\varepsilon(t)-\delta\right)^{\alpha_2}} >$$

$$> -f(t)\,\frac{\left(\varepsilon(t)+\delta\right)^{\alpha_1}}{\psi^{\alpha_2}(t)} > -f(t)\,\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\psi^{\alpha_2}(t)} > |\varphi_1'(t)| - \varepsilon'(t) + m_0,$$

što znači da integralne krive u ma kojoj tački P oblasti /14/ imaju koeficijent smjera veći od koeficijenta smjera krive $\varphi_1(t)-\varepsilon(t)$ za pozitivan broj m_0, te će za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$ i stići do krive $\varphi_1(t)-\varepsilon(t)$, a zatim i ući u "cijev" /13/.

Za $\varrho = 1$, prema gornjoj relaciji, te prema /3/ i /9/, važi

$$x'(P) > -f(t)\,\frac{\left(\varepsilon(t)+\delta\right)^{\alpha_1}}{\psi^{\alpha_2}(t)} \geqslant -f(t)\,\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{\psi^{\alpha_2}(t)} - f(t)\,\frac{\delta^{\alpha_1}}{\psi^{\alpha_2}(t)} > |\varphi_1'(t)| - \varepsilon'(t) + M\delta,$$

što daje isti zaključak.

U slučaju tvrdjenja 2/ treba primjetiti da uslov /1o/, za $t \geq t_0$, daje

$$x'(\varphi_1(t)+d(t)) = f(t)\frac{d^{\alpha_1}(t)}{(\varphi_1(t)+d(t)-\varphi_2(t))^{\alpha_2}} = f(t)\frac{d^{\alpha_1}(t)}{(\Psi(t)-\varepsilon(t)+d(t))^{\alpha_2}} < f(t)\frac{d^{\alpha_1}(t)}{(\Psi(t)+d(t))^{\alpha_2}} < \varphi_1'(t)+d'(t)$$

a to znači da integralne krive koje prolaze kroz tačke krive $\varphi_1(t)+d(t)$ $(t \geq t_0)$ presjecaju tu krivu ulazeći u oblast

/15/ $$\varphi_1(t)+\varepsilon(t) < x < \varphi_1(t)+d(t), \quad t \geq t_0,$$

te da je, prema /11/, u ma kojoj tački $P(t, \varphi_1(t)+\varepsilon(t)+\delta)$ / δ je pozitivan broj/ te oblasti:

$$x'(P) = f(t)\frac{(\varepsilon(t)+\delta)^{\alpha_1}}{(\varphi_1(t)+\varepsilon(t)+\delta-\varphi_2(t))^{\alpha_2}} = f(t)\frac{(\varepsilon(t)+\delta)^{\alpha_1}}{(\Psi(t)+d(t))^{\alpha_2}} < f(t)\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{(\Psi(t)+d(t))^{\alpha_2}} < \varphi_1'(t)+\varepsilon'(t)-m_0,$$

što znači da će integralne krive oblasti /15/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, stići do krive $\varphi_1(t)+\varepsilon(t)$, a prema uslovu /3/ i ući u "cijev" /13/.

Posmatrajmo sada jednačinu

/16/ $$\frac{dx}{dt} = f(t)\frac{(x-\varphi_1(t))^{\alpha_1}(x-\varphi_2(t))^{\alpha_2}}{(x-\varphi_3(t))^{\alpha_3}},$$

gdje je $\alpha_i = \frac{p_i}{q_i}$ $(i=1,2,3)$ / p_i i q_i prirodni brojevi medju sobom prosti/, p_1, p_2, q_1, q_2 i q_3 neparni, a p_3 paran prirodan broj i neka je

/17/ $$\varphi_1(t) < \varphi_3(t) < \varphi_2(t) \quad \text{za } t \geq t_0.$$

Neka postoje pozitivne i neprekidne funkcije $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\Psi_1(t)$ i $\Psi_2(t)$ $(t \geq t_0)$, gdje funkcije $\varepsilon_1(t)$ i $\varepsilon_2(t)$ monotono teže nuli kad $t \to +\infty$ takve da je, za $t \geq t_0$,

/18/ $$\begin{aligned} \varphi_3(t)-\varphi_1(t) &= \Psi_1(t)-\varepsilon_1(t) > \varepsilon_1(t), \\ \varphi_2(t)-\varphi_3(t) &= \Psi_2(t)-\varepsilon_2(t) > \varepsilon_2(t). \end{aligned}$$

Nije teško dokazati da važi sljedeće tvrdjenje.

TVRDJENJE 5.

Jednačina /16/, pod uslovima /17/, /18/, kao i, za $t \geq t_0$,

/19/ $$|f(t)|\,\frac{\varepsilon_1^{\alpha_1}(t)(\Psi_1(t)+\Psi_2(t)-2\varepsilon_1(t)-\varepsilon_2(t))^{\alpha_2}}{\Psi_1^{\alpha_3}(t)} > |\varphi_1'(t)|-\varepsilon_1'(t),$$

/2o/ $$|f(t)| \frac{\left(\psi_1(t)+\psi_2(t)-\varepsilon_1(t)-2\varepsilon_2(t)\right)^{\alpha_1}\varepsilon_2^{\alpha_2}(t)}{\psi_2^{\alpha_3}(t)} > |\varphi_2'(t)| - \varepsilon_2'(t),$$

ima:

a/ za $f(t)>0$ $(t \geqslant t_0)$, jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/21/ $$\varphi_1(t)-\varepsilon_1(t) < x(t) < \varphi_1(t)+\varepsilon_1(t)$$

za sve $t \geqslant t_0$ i bar jedno rješenje koje, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov

/22/ $$\varphi_2(t)-\varepsilon_2(t) < x(t) < \varphi_2(t)+\varepsilon_2(t);$$

b/ za $f(t)<0$ $(t \geqslant t_0)$, bar jedno rješenje koje, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov /21/ i jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov /22/.

Što se tiče dokaza navedenog tvrdjenja dovoljno je, koristeći uslove /17/, /18/, /19/ i /2o/, pokazati da, za $t \geqslant t_0$, važe sljedeće nejednakosti:

a/ za $f(t)>0$ $(t \geqslant t_0)$,

$$x'(\varphi_1(t)-\varepsilon_1(t)) > \varphi_1'(t)-\varepsilon_1'(t), \quad x'(\varphi_1(t)+\varepsilon_1(t)) < \varphi_1'(t)+\varepsilon_1'(t),$$
$$x'(\varphi_2(t)-\varepsilon_2(t)) < \varphi_2'(t)-\varepsilon_2'(t), \quad x'(\varphi_2(t)+\varepsilon_2(t)) > \varphi_2'(t)+\varepsilon_2'(t);$$

b/ za $f(t)<0$ $(t \geqslant t_0)$,

$$x'(\varphi_1(t)-\varepsilon_1(t)) < \varphi_1'(t)-\varepsilon_1'(t), \quad x'(\varphi_1(t)+\varepsilon_1(t)) > \varphi_1'(t)+\varepsilon_1'(t),$$
$$x'(\varphi_2(t)-\varepsilon_2(t)) > \varphi_2'(t)-\varepsilon_2'(t), \quad x'(\varphi_2(t)+\varepsilon_2(t)) < \varphi_2'(t)+\varepsilon_2'(t).$$

I ovdje bismo mogli uz dodatne uslove dati i dopunska tvrdjenja o širim klasama rješenja koja, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /21/, odnosno /22/.

Što se tiče pitanja stabilnosti ovdje nemamo ništa bitno novo. Ustvari, tamo gdje smo u "cijevi", čija širina teži nuli, obezbjedili bar jedno rješenje to rješenje je nestabilno u smislu Ljapunova, a tamo gdje smo u "cijevi" obezbjedili jednu klasu rješenja ta klasa rješenja je asimptotski stabilna u smislu definicije 1, a odgovarajuća oblast kroz čije tačke prolaze integralne krive koje ulaze u odgovarajuću "cijev", za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, je oblast asimptotske stabilnosti.

PRIMJERI

1° Jednačina

$$x' = -9t^2 \cdot \frac{(x-\sin t-6)^{\frac{3}{5}}}{(x-\cos t)^2}$$

ima jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geq 5$, ispunjava uslov

$$\sin t + 6 - \frac{1}{\sqrt[3]{t}} < x(t) < \sin t + 6 + \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$$

/ta klasa rješenja je asimptotski stabilna u smislu definicije 1, sa $r(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{t}}$ /, dok taj uslov, za dovoljno veliko $t \geq t^* > 5$, ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \geq \cos t + 1 \, , \; t \geq 5$$

/ova oblast je oblast asimptotske stabilnosti gornje klase rješenja/.

Ovdje je: $f(t) = -9t^2$, $\varphi_1(t) = \sin t + 6$, $\varphi_2(t) = \cos t$.

Ako uzmemo da je: $\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, $d(t) = \sqrt{t}$, lako je pokazati da su, za $t \geq 5$, svi potrebni uslovi ispunjeni. Takodje imamo da je $\varphi_1(t) + d(t) = \sin t + 6 + \sqrt{t} \longrightarrow +\infty$, $t \to +\infty$.

2° Posmatrajmo jednačinu

$$x' = \frac{10}{\ln t} \frac{(x+t)^{\frac{5}{3}} (x-t)^3}{(x-\frac{1}{t})^{\frac{1}{3}}} \tag{/23/}$$

Imamo: $f(t) = \frac{10}{\ln t}$, $\varphi_1(t) = -t$, $\varphi_2(t) = t$, $\varphi_3(t) = \frac{1}{t}$.

Neka je: $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{t}}$.

Dalje imamo: $\varphi_3(t) - \varphi_1(t) = \frac{1}{t} + t = \left(t + \frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt[5]{t}}\right) - \frac{1}{\sqrt[5]{t}} = \psi_1(t) - \varepsilon_1(t)$,

$\varphi_2(t) - \varphi_3(t) = t - \frac{1}{t} = \left(t - \frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt[5]{t}}\right) - \frac{1}{\sqrt[5]{t}} = \psi_2(t) - \varepsilon_2(t)$.

Nije teško pokazati da su odgovarajući uslovi tvrdjenja 5 ispunjeni za $t \geq 2$. Prema tome, jednačina /23/ ima bar jedno rješenje koje, za $t \geq 2$, ispunjava uslov

$$t < x(t) < t + \frac{1}{\sqrt[5]{t}}$$

/to rješenje je nestabilno/ i jednu klasu rješenja koja, za $t \geq 2$, ispunjava uslov

$$-t < x(t) < -t + \frac{1}{\sqrt[5]{t}} \tag{/24/}$$

i koja je asimptotski stabilna u smislu definicije 1 /sa $r(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{t}}$ /.

Takodje, može se pokazati da u ma kojoj tački $P(t, -t + \frac{1}{\sqrt[5]{t}} + \delta)$ / δ je pozitivan broj/ oblasti $-t + \frac{1}{\sqrt[5]{t}} < x \leq 0$, $t \geq 2$, važi $x'(P) < -\frac{10t^2}{\ln t}$, a kako $\varphi_1(t) = -t \to -\infty$ kad $t \to +\infty$, to će sve integralne krive oblasti $x \leq 0$, $t \geq 2$, za dovoljno veliko $t \geq t^* > 2$, ispuniti uslov /24/, te je oblast $x \leq 0$, $t \geq 2$ oblast asimptotske stabilnosti klase rješenja koja za sve $t \geq 2$ ispunjava uslov /24/.

§ 5.

Dobijene rezultate u prethodnim paragrafima možemo neposredno koristiti i za proučavanje jednačina sljedećih opštijih oblika:

$$/1/ \qquad \frac{dx}{dt} = g(t,x)(x-h_1(t,x))\cdots(x-h_m(t,x)) \equiv g(t,x)\prod_{i=1}^{m}(x-h_i(t,x)),$$

odnosno

$$/2/ \qquad \frac{dx}{dt} = g(t,x)(x-h_1(t,x))^{\alpha_1}\cdots(x-h_m(t,x))^{\alpha_m} \equiv g(t,x)\prod_{i=1}^{m}(x-h_i(t,x))^{\alpha_i},$$

kao i

$$/3/ \qquad \frac{dx}{dt} = g(t,x)\frac{(x-h_1(t,x))^{\alpha_1}\cdots(x-h_k(t,x))^{\alpha_k}}{(x-h_{k+1}(t,x))^{\alpha_{k+1}}\cdots(x-h_m(t,x))^{\alpha_m}} \equiv g(t,x)\frac{\prod_{i=1}^{k}(x-h_i(t,x))^{\alpha_i}}{\prod_{j=k+1}^{m}(x-h_j(t,x))^{\alpha_j}},$$

gdje su $g(t,x)$ i $h_i(t,x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ definisane i neprekidne funkcije i ispunjavaju potrebne uslove za egzistenciju i jedinost rješenja jednačina u oblasti $t \geqslant t_0$, $|x| < +\infty$ /$x \neq h_j(t,x)$ $(j=k+1,k+2,\cdots,m)$ u slučaju jednačine /3//, veličine α_i $(i=1,2,\cdots,m)$ su pozitivni racionalni brojevi.

Proučavanje gornjih jednačina može da se svede na proučavanje odgovarajućih jednačina posmatranih u prethodnim paragrafima ako funkcije $g(t,x)$ i $h_i(t,x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ ispunjavaju, na primjer, uslove, za $t \geqslant t_0$ i $|x| < +\infty$,

$$g_1(t) \leqslant g(t,x) \leqslant g_2(t), \quad g_1(t)\cdot g_2(t) > 0,$$
$$h_{i1}(t) \leqslant h_i(t,x) \leqslant h_{i2}(t) \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

gdje su $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h_{i1}(t)$ i $h_{i2}(t)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ definisane i neprekidne funkcije za $t \geqslant t_0$.

Nemamo namjeru da detaljno proučavamo navedene jednačine, jer bi to iziskivalo obiman rad, nego da ukažemo da se dosadašnji rezultati mogu dobro iskoristiti i na te jednačine i da u tom smislu damo neke rezultate.

§ 5.1.

Prije svega zapazimo da smo u glavama I i II proučavali jednačinu

/4/ $$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\,x^2 + h(t,x)\,,$$

pod pretpostavkom da je $-\frac{h(t,x)}{g(t,x)} > 0$.

Nije teško primjetiti da se, pod tim uslovom, jednačina /4/ može napisati u obliku

/4'/ $$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\left(x + \sqrt{-\frac{h(t,x)}{g(t,x)}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{h(t,x)}{g(t,x)}}\right)\,,$$

odnosno u obliku

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\left(x - h_1(t,x)\right)\left(x - h_2(t,x)\right).$$

Prema tome, ranije navedeni rezultati za jednačinu /4/ važe i za jednačinu /4'/, jer se radi o istoj jednačini.

Primjera radi, posmatrajmo sada jednačinu

/5/ $$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\left(x - h_1(t,x)\right)^{\alpha_1}\left(x - h_2(t,x)\right)^{\alpha_2}\left(x - h_3(t,x)\right)^{\alpha_3}$$

/jedinost zastupljena u oblasti $t \geqslant t_0$, $|x| < +\infty$ /, gdje su α_1 i α_3 neparni prirodni brojevi, $\alpha_2 = \frac{p}{q}$, p - paran, q - neparan prirodan broj.

Možemo dati sljedeće tvrdjenje.

TVRDJENJE 6.

Pod uslovima, za $t \geqslant t_0$ i $|x| < +\infty$,

$$0 < f(t) \leqslant g(t,x),$$

$$m_i(t) \leqslant h_i(t,x) \leqslant n_i(t) \quad (i=1,2,3),$$

$$m_i(t) < m_{i+1}(t) \quad (i=1,2),$$

$$m_2(t) - n_1(t) \geqslant \psi_1(t) + \varepsilon_1(t),$$

$$m_3(t) - n_2(t) \geqslant \psi_2(t) + \varepsilon_2(t),$$

gdje su $f(t)$, $m_i(t)$, $n_i(t)$ $(i=1,2,3)$; $\varepsilon_i(t) > 0$, $\psi_i(t) > 0$ $(i=1,2)$ definisane i neprekidne funkcije, funkcije $\varepsilon_i(t)$ monotone i teže nuli kad $t \to +\infty$, te ako je, za $t \geqslant t_0$:

a/

/6/ $$f(t)\left(\psi_1(t) + \psi_2(t)\right)^{\alpha_1}\psi_2^{\alpha_2}(t)\,\varepsilon_2^{\alpha_3}(t) > -m_3'(t) + \varepsilon_2'(t)\,,$$

$$f(t)\left(\psi_1(t) + \psi_2(t)\right)^{\alpha_1}\psi_2^{\alpha_2}(t)\,\varepsilon_2^{\alpha_3}(t) > n_3'(t) + \varepsilon_2'(t)\,,$$

jednačina /5/ ima bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t \geq t_0$, ispunjava uslov

$$m_3(t) - \varepsilon_2(t) < x(t) < n_3(t) + \varepsilon_2(t);$$

b/

/7/ $$f(t)\,\varepsilon_1^{\alpha_1}(t)\,\psi_1^{\alpha_2}(t)\,(\psi_1(t) + \psi_2(t))^{\alpha_3} > m_1'(t) - \varepsilon_1'(t),$$

/8/ $$f(t)\,\varepsilon_1^{\alpha_1}(t)\,\psi_1^{\alpha_2}(t)\,(\psi_1(t) + \psi_2(t))^{\alpha_3} > -n_1'(t) - \varepsilon_1'(t),$$

jednačina /5/ ima jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geq t_0$, ispunjava uslov

/9/ $$m_1(t) - \varepsilon_1(t) < x(t) < n_1(t) + \varepsilon_1(t).$$

Takodje važe i sljedeće dopune:

1/ Ako je u tvrdjenju 6 pored uslova /7/ i /8/ ispunjen još i uslov

$$f(t)\,\psi_1^{\alpha_2}(t)\,(\psi_1(t) + \psi_2(t))^{\alpha_3} \geq M_1$$

/M_1 je poz. konst./, tada sva rješenja oblasti

$$x \leq n_1(t) + \varepsilon_1(t),\ t \geq t_0,$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /9/.

2/ Ako postoji pozitivan broj r takav da je /na primjer/

$$\psi_1(t) \geq 3r \text{ za } t \geq t_0,$$

te ako su u tvrdjenju 6 umjesto uslova /8/, za $t \geq t_0$, ispunjeni uslovi

$$f(t)\left(\tfrac{1}{3}\psi_1(t)\right)^{\alpha_1} r^{\alpha_2}\,(r + \psi_2(t))^{\alpha_3} > -n_1'(t) - \varepsilon_1'(t),$$

/lo/

$$f(t)\,\varepsilon_1^{\alpha_1}(t)\left(\tfrac{1}{3}\psi_1(t) + r\right)^{\alpha_2}\left(\tfrac{1}{3}\psi_1(t) + r + \psi_2(t)\right)^{\alpha_3} > -n_1'(t) - \varepsilon_1'(t)$$

i ako su, za $t \geq t_0$, ispunjeni još i uslovi

$$f(t)\left(\tfrac{2}{3}\psi_1(t)\right)^{\alpha_1}\cdot r^{\alpha_2}\cdot(r + \psi_2(t))^{\alpha_3} > -m_2'(t),$$

/11/ $$f(t)\,\psi_2^{\alpha_3}(t) \geq M_2$$

/M_2 je poz. konst./, tada sva rješenja oblasti

$$x \leq m_2(t) - r,\ t \geq t_0,$$

za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /9/.

3/ Ako su krive $m_1(t)$ i $n_1(t)$, za $t \geq t_0$, ograničene, tada tvrdjenje 2/ važi i kada je umjesto uslova /lo/ ispunjen uslov /8/.

Uslovi /6/ obezbjedjuju da integralne krive jednačine /5/ koje prolaze kroz tačke krivih

$$v_1(t) = m_3(t) - \varepsilon_2(t), \quad v_2(t) = n_3(t) + \varepsilon_2(t), \quad t \geq t_0,$$

izlaze iz "cijevi"

/12/ $$t \geq t_0, \quad m_3(t) - \varepsilon_2(t) < x < n_3(t) + \varepsilon_2(t),$$

te, prema metodi retrakcije, jednačina /5/ ima bar jedno rješenje koje pripada toj "cijevi" za sve $t \geq t_0$.

S druge strane, uslovi /7/ i /8/ obezbjedjuju da integralne krive jednačine /5/ koje prolaze kroz tačke krivih

$$u_1(t) = m_1(t) - \varepsilon_1(t), \quad u_2(t) = n_1(t) + \varepsilon_1(t), \quad t \geq t_0$$

ulaze u "cijev"

/13/ $$t \geq t_0, \quad m_1(t) - \varepsilon_1(t) < x < n_1(t) + \varepsilon_1(t),$$

kao i da sve one integralne krive koje prolaze kroz unutrašnje tačke te "cijevi" ne mogu izići iz nje, te i čine klasu rješenja koja ispunjava uslov /9/.

Dodatni uslovi obezbjedjuju ulaženje u "cijev" /13/ i odgovarajuće šire klase rješenja jednačine /5/.

Primjetimo sada i to da, ako je

$$\lim_{t \to +\infty} \left(n_1(t) - m_1(t)\right) = 0,$$

$$\lim_{t \to +\infty} \left(n_3(t) - m_3(t)\right) = 0,$$

širine krivolinijskih "cijevi" /12/ i /13/ teže nuli. U ovom slučaju dobijeni rezultati predstavljaju značajan doprinos u ocjeni ponašanja rješenja. Tako za stabilnost možemo reći da je rješenje koje ispunjava uslov /12/ nestabilno u smislu Ljapunova, a klasa rješenja koja ispunjava uslov /13/, za sve $t \geq t_0$, je asimptotski stabilna u smislu definicije 1, gdje se može uzeti da je

$$r(t) = \delta(t) + 2\varepsilon_1(t),$$

a $\delta(t)$ je monotono opadajuća funkcija koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da je

$$n_1(t) - m_1(t) < \delta(t) \quad \text{za} \quad t \geq t_0.$$

Napomenimo i to da navedena tvrdjenja važe i kada se umjesto funkcija $\varepsilon_i(t)$ uzmu pozitivne konstante ili neke pozitivne ograničene funkcije.

PRIMJER

Jednačina

$$x' = \left(1 + f_1^2(t,x)\right)\left(x + 7 + 5\sin t + \tfrac{1}{t}\cos f_2(t,x)\right)^3 \left(x - t - t\,h f_3(t,x)\right)^{\frac{2}{3}} \left(x - 3t + \tfrac{1}{t} e^{-f_4^2(t,x)}\right)^5,$$

gdje su funkcije $f_i(t,x)$ $(i = 1,2,3,4)$ definisane, neprekidne i ispunjavaju odgovarajuće uslove o jedinosti rješenja jednačine za $t \geqslant 2$ i $|x| < +\infty$, ima bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t \geqslant 2$, ispunjava uslov

$$3t - \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} < x(t) < 3t$$

i jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geqslant 2$, ispunjava uslov

$$-7 - 5\sin t - \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} < x(t) < -7 - 5\sin t + \frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{t}},$$

dok za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > 2$, taj uslov ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \leqslant t - 1, \ t \geqslant 2.$$

Ovdje imamo, za $t \geqslant 2$ i $|x| < +\infty$,

$$0 < f(t) = 1 \leqslant g(t,x) \equiv 1 + f_1^2(t,x),$$

$$m_1(t) = -7 - 5\sin t - \frac{1}{t} \leqslant h_1(t,x) \equiv -7 - 5\sin t + \frac{1}{t}\cos f_2(t,x) \leqslant -7 - 5\sin t + \frac{1}{t} = n_1(t),$$

$$m_2(t) = t - 1 < h_2(t,x) \equiv t + t\,h f_3(t,x) < t + 1 = n_2(t),$$

$$m_3(t) = 3t - \frac{1}{t} \leqslant h_3(t,x) \equiv 3t - \frac{1}{t} e^{-f_4^2(t,x)} < 3t = n_3(t),$$

$$m_2(t) - n_1(t) = t - 1 + 7 + 5\sin t - \frac{1}{t} > t + \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \Psi_1(t) = t, \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{t}},$$

$$m_3(t) - n_2(t) = 3t - \frac{1}{t} - t - 1 > 2t - 2 + \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \Psi_2(t) = 2t - 2.$$

Lako je vidjeti da su uslovi /6/, /7/, /8/ i /11/, za $t \geqslant 2$, ispunjeni, a kako su, za $t \geqslant 2$, krive $m_1(t)$, $n_1(t)$ ograničene, a kriva $m_2(t)$ monotono rastuća, to su navedeni zaključci za posmatranu jednačinu tačni.

§ 5.2.

Posmatrajmo jednačinu oblika

/14/
$$\frac{dx}{dt} = g(t,x)\,\frac{\left(x - h_1(t,x)\right)^{\alpha_1}}{\left(x - h_2(t,x)\right)^{\alpha_2}},$$

gdje je α_1 neparan prirodan broj, α_2 je pozitivan racionalan broj, funkcije $g(t,x)$, $h_1(t,x)$ i $h_2(t,x)$ su definisane i neprekidne u oblasti

$t \geq t_0$, $|x| < +\infty$, te ispunjavaju odgovarajuće uslove o jedinosti rješenja u oblasti $t \geq t_0$, $x > h_2(t,x)$.

Dalje, pretpostavimo da funkcije $g(t,x)$, $h_1(t,x)$ i $h_2(t,x)$ ispunjavaju i sljedeće uslove u oblasti $t \geq t_0$, $|x| < +\infty$.

/15/
$$|g(t,x)| \geq f(t),$$
$$m_1(t) \leq h_1(t,x) \leq n_1(t),$$
$$m_2(t) \leq h_2(t,x) \leq n_2(t),$$

te da je, za $t \geq t_0$,

/16/
$$n_2(t) < m_1(t),$$
$$m_1(t) - n_2(t) = \Psi(t) - \varepsilon(t) > 0,$$
$$n_1(t) - m_1(t) \leq \ell_1(t),$$
$$n_2(t) - m_2(t) \leq \ell_2(t),$$

gdje su sve novouvedene funkcije definisane i neprekidne za $t \geq t_0$, funkcije $f(t)$, $\Psi(t)$, $\varepsilon(t)$, $\ell_1(t)$ i $\ell_2(t)$ pozitivne, a funkcija $\varepsilon(t)$ je monotona i teži nuli kad $t \to +\infty$.

Možemo dati sljedeće tvrdjenje.

TVRDJENJE 7.

Jednačina /14/, pod uslovima /15/, /16/, kao i, za $t \geq t_0$,

/17/
$$f(t)\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{(\Psi(t)+\ell_2(t))^{\alpha_2}} > |m_1'(t)| - \varepsilon'(t),$$

/18/
$$f(t)\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{(\Psi(t)+\ell_1(t)+\ell_2(t))^{\alpha_2}} > |n_1'(t)| - \varepsilon'(t),$$

ima:

a/ za $g(t,x) > 0$, bar jedno rješenje koje, za sve $t \geq t_0$, ispunjava uslov

/19/
$$m_1(t) - \varepsilon(t) < x(t) < n_1(t) + \varepsilon(t);$$

b/ za $g(t,x) < 0$, jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geq t_0$, ispunjava uslov /19/.

Za dokaz navedenog tvrdjenja dovoljno je pokazati da, prema uslovima /15/, /16/, /17/ i /18/, važe sljedeće ocjene, za $t \geq t_0$,

$$x'(m_1(t) - \varepsilon(t)) < m_1'(t) - \varepsilon'(t),$$

$$x'(m_1(t)+\varepsilon(t)) > m_1'(t)+\varepsilon'(t),$$

u slučaju $g(t,x)>0$, odnosno, da, u slučaju $g(t,x)<0$, važe ocjene

$$x'(m_1(t)-\varepsilon(t)) > m_1'(t)-\varepsilon'(t),$$
$$x'(m_1(t)+\varepsilon(t)) < m_1'(t)+\varepsilon'(t).$$

U slučaju $g(t,x)<0$ klasu rješenja koja, ispunjava uslov /19/ čine rješenja oblasti

/2o/ $$m_1(t)-\varepsilon(t) \leqslant x \leqslant m_1(t)+\varepsilon(t),\ t \geqslant t_0.$$

Uz odgovarajuće dopunske pretpostavke uslov /19/ će, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, da ispunjavaju i šire klase rješenja jednačine /14/.

Evo tih jačih tvrdjenja u slučaju kada je $g(t,x)<0$:

1/ Pod uslovima /15/, /16/, /17/, /18/, kao i, za $t \geqslant t_0$,

/21/ $$f(t)\frac{(\Psi(t)-\varepsilon(t)-r)^{\alpha_1}}{(\ell_2(t)+r)^{\alpha_2}} > m_2'(t),$$
$$f(t)\frac{1}{(\Psi(t)+\ell_2(t))^{\alpha_2}} \geqslant M_1$$

/M_1 je poz. konst./, gdje je r mali pozitivan broj i takav da je

$$r < \Psi(t)-\varepsilon(t) \text{ za } t \geqslant t_0,$$

jednačina /14/ ima jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov /19/, dok, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, taj uslov ispunjavaju sva rješenja oblasti

/22/ $$m_2(t)+r \leqslant x \leqslant m_1(t)+\varepsilon(t),\ t \geqslant t_0.$$

2/ Pod uslovima /15/, /16/, /17/, /21/, te ako postoji pozitivna i neprekidna funkcija $d(t)$, za $t \geqslant t_0$, i takva da je, za $t \geqslant t_0$,

$$f(t)\frac{\varepsilon^{\alpha_1}(t)}{(\Psi(t)+\ell_1(t)+\ell_2(t)+d(t))^{\alpha_2}} > -m_1'(t)-\varepsilon'(t),$$
$$f(t)\frac{1}{(\Psi(t)+\ell_1(t)+\ell_2(t)+d(t))^{\alpha_2}} \geqslant M_2,$$
$$f(t)\frac{d^{\alpha_1}(t)}{(\Psi(t)+\ell_1(t)+\ell_2(t)+d(t))^{\alpha_2}} > -m_1'(t)-d'(t)$$

/M_2 je poz. konst./, jednačina /14/ ima jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geqslant t_0$, ispunjava uslov /19/, dok za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, uslov /19/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

/23/ $$m_2(t)+r \leqslant x \leqslant m_1(t)+d(t),\ t \geqslant t_0.$$

Ako je $\lim\limits_{t\to+\infty}(m_1(t)+d(t))=+\infty$, tada, za dovoljno veliko $t\geq t^*>t_0$, sva rješenja oblasti

/24/ $$x\geq m_2(t)+r,\ t\geq t_0$$

ispunjavaju uslov /19/.

Možemo sada primjetiti i to da, ako je

$$\lim_{t\to+\infty} \ell_1(t)=0 ,$$

tada rješenja koja ispunjavaju uslov /19/ ispunjavaju i uslov

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t)-m_1(t))=\lim_{t\to+\infty}(x(t)-n_1(t))=0 ,$$

te da je, u slučaju $g(t,x)>0$, rješenje koje ispunjava uslov /19/ nestabilno, a u slučaju $g(t,x)<0$, klasa rješenja koja, za sve $t\geq t_0$, ispunjava uslov /19/ je asimptotski stabilna u smislu definicije 1, pri čemu se može uzeti da je

$$r(t)=\delta(t)+2\varepsilon(t) ,$$

gdje je $\delta(t)$ neprekidna i monotono opadajuća funkcija koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da je

$$\ell(t)<\delta(t) \quad \text{za } t\geq t_0 ,$$

dok je oblast asimptotske stabilnosti jedna od oblasti /20/, /22/, /23/ i /24/, što zavisi od toga koje je od navedenih tvrdjenja u pitanju.

Dokaz navedenih rezultata u principu je sadržan u dokazima ranijih rezultata.

PRIMJER

Neka je data jednačina

/25/ $$x'=\pm 9\sqrt{t^3+f_1^2(t,x)}\ \frac{\left(x-\sin t+\dfrac{1}{t+f_2^2(t,x)}\right)^{\frac{5}{3}}}{(x+6-\cos f_3(t,x))^{\frac{3}{2}}} ,$$

gdje su funkcije $f_i(t,x)$ $(i=1,2,3)$ definisane i neprekidne za $t\geq 4,\ x>-5$, te ispunjavaju i potrebne uslove koji obezbjedjuju jedinost rješenja jednačine.

Zadana jednačina, sa znakom + , ima bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t\geq 4$, ispunjava uslov

/26/ $$\sin t-\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt[5]{t}}<x(t)<\sin t+\frac{1}{\sqrt[5]{t}} ,$$

a jednačina sa znakom — , ima jednu klasu rješenja koja, za sve $t\geq 4$, ispunjava taj uslov, dok, za dovoljno veliko $t\geq t^*>4$, taj uslov ispunjavaju sva rješenja oblasti

/27/ $$x \geqslant -4,\ t \geqslant 4 .$$

Rješenje koje ispunjava uslov /26/ /jednačina sa znakom + / je nestabilno, a klasa rješenja koja, za sve $t \geqslant 4$, ispunjava uslov /26/ /jednačina sa znakom — / je asimptotski stabilna klasa rješenja u smislu definicije 1, pri čemu je $r(t)=\frac{1}{t}+\frac{2}{\sqrt[5]{t}}$, a oblast /27/ je oblast asimptotske stabilnosti.

U jednačini /25/ je $\mathcal{L}_1=\frac{5}{3}$ /u čemu se i razlikuje od posmatrane jednačine /14//, zatim, za $t \geqslant 4$ i $x \geqslant -4$, imamo:

$$|g(t,x)| = 9\sqrt{t^3+f_1^2(t,x)} \geqslant 9t\sqrt{t} = f(t),$$

$$m_1(t)=\sin t-\frac{1}{t} \leqslant h_1(t,x) \equiv \sin t-\frac{1}{t+f_2^2(t,x)} < \sin t = M_1(t),$$

$$m_2(t)=-7 \leqslant h_2(t,x) \equiv -6+\cos f_3(t,x) \leqslant -5 = M_2(t),$$

$$M_1(t)-m_1(t)=\frac{1}{t}=\ell_1(t),$$

$$M_2(t)-m_2(t)=2=\ell_2(t).$$

Uzmemo li da je $\varepsilon(t)=\frac{1}{\sqrt[5]{t}}$, mogli bismo pokazati da je "cijev"

/28/ $$t \geqslant 4,\ \sin t-\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt[5]{t}} < x < \sin t+\frac{1}{\sqrt[5]{t}}$$

"cijev" izlaznih, odnosno ulaznih integralnih krivih jednačine /25/, što zavisi od znaka + ili — u jednačini. Dalje nebi bilo teško pokazati da će sva rješenja oblasti /27/ za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > 4$ ući u "cijev" /28/.

G L A V A IV

NOVE "CIJEVI" METODE RETRAKCIJE I NEKI REZULTATI T. PEJOVIĆA

U ovoj glavi rada posmatraćemo rezultate T. Pejovića vezane za proučavanje rješenja jednačina

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t)$$

i

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t) + \varphi(t,x),$$

koji su izloženi u radu [20] . T. Pejović je primjenjivao specifične modifikacije Pikarove metode uzastopnih aproksimacije, dok ćemo mi koristiti mogućnosti kvalitativne analize diferencijalnih jednačina, a posebno nove krivolinijske "cijevi" do kojih smo došli u glavi II ovog rada, zamjenjujući pretpostavke T. Pejovića o funkcijama $a(t)$, $f(t)$ i $\varphi(t,x)$ izražene u integralnom obliku odgovarajućim jednačinama i nejednačinama po tim funkcijama i njenim izvodima. U radu će biti pokazano da se neki rezultati T. Pejovića direktno mogu interpretirati pomoću metode retrakcije, da se drugi mogu svesti na nju uz odgovarajuće modifikacije, te da ima i sasvim nezavisnih rezultata. Uvodeći i bitno nove pretpostavke o funkcijama $a(t)$, $f(t)$ i $\varphi(t,x)$ daćemo i neke dopune, a zamjenjujući član $a(t)x$ sa

$$a(t)x^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

daćemo i uopštenja dobijenih rezultata. U radu biće riječi ne samo o egzistenciji odgovarajućih rješenja, nego i o stabilnosti tih rješenja, što predstavlja bitnu dopunu.

§ 1.

U ovom paragrafu posmatraćemo jednačinu

/1/ $$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t),$$

odnosno jednačinu

/2/ $$\frac{dx}{dt} = a(t)x^n + f(t) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

gdje su $a(t)$ i $f(t)$ definisane i neprekidne funkcije realne promjenljive $t \geq t_0$.

§ 1.1.

Posmatrajmo prvo jednačinu /1/ prateći odgovarajuće rezultate T. Pejovića.

Razlikovaćemo više slučajeva.

1°

LEMA A_1[1]. Pod uslovima

/3/ $$\lim_{t\to+\infty} e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = k \neq 0, \infty \quad /k \text{ je konačan broj}/,$$

/4/ $$\lim_{t\to+\infty} \int_{t}^{\infty} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s)ds} \cdot f(\xi)\, d\xi = 0,$$

sva rješenja jednačine /1/, za $t \geq t_0$, su asimptotski ograničena.

Uslov /3/ daje

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} a(s)ds = m \neq \infty \quad /m \text{ je konačan broj}/.$$

Ako umjesto uslova /4/ uzmemo

/5/ $$\left| -\frac{f(t)}{a(t)} \right| \leq M, \; a(t) \neq 0 \quad \text{za } t \geq t_0 \quad /M \text{ je poz. konst.}/$$

/ako je ispunjen uslov /5/, onda je ispunjen i uslov /4/ T. Pejovića/, onda imamo

/6/ $$\lim_{t\to+\infty} a(t) = 0, \; a(t) \neq 0 \text{ za } t \geq t_0,$$

/7/ $$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = b \quad /b \text{ je konačan broj}/ \; [2].$$

Sada možemo formulisati sljedeću lemu.

LEMA B_1. Pod uslovima /6/ i /7/ jednačina /1/, za $t \geq t_0$, ima:

a/ Za $a(t) > 0$, bar jedno rješenje koje je asimptotski ograničeno i i koje ispunjava uslov

/8/ $$\lim_{t\to+\infty} x(t) = b;$$

b/ Za $a(t) < 0$, sva rješenja asimptotski ograničena.

---

[1] Sa A_i biće označeni rezultati T. Pejovića, a moji rezultati sa B_i.

[2] Kako je $\lim_{t\to+\infty} a(t) = 0$, $\left| -\frac{f(t)}{a(t)} \right| \leq M$, $a(t) \neq 0$ za $t \geq t_0$, to je i $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, pa je i $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = b$.

Ako je još ispunjen uslov

/9/ $$-a(t)\varepsilon(t)+\varepsilon'(t) > \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \quad \text{za } t \geqslant t_0 ,$$

gdje je $\varepsilon(t)$ monotono opadajuća funkcija, neprekidna, kao i njen prvi izvod i

/1o/ $$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim_{t\to+\infty}\varepsilon'(t)=0\ ^{1)} ,$$

tada jedna klasa rješenja ispunjava uslov

/11/ $$\left| x(t)+\frac{f(t)}{a(t)}\right| < \varepsilon(t) ,$$

za sve $t \geqslant t_0$, te i uslov /8/.

Dokaz. a/ Prema uslovu /7/ postoje neprekidne i monotone funkcije $v_1(t)$ i $v_2(t)$, gdje je $v_1(t)$ monotono rastuća, a $v_2(t)$ monotono opadajuća funkcija, koje teže broju b kad $t\to+\infty$ i takve da je

$$v_1(t) < -\frac{f(t)}{a(t)} < v_2(t) \quad \text{za } t \geqslant t_0 .$$

S druge strane, integralne krive jednačine /1/ imaju negativan koeficijent smjera u oblasti $x < -\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t \geqslant t_0)$, a pozitivan u oblasti $x > -\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t \geqslant t_0)$, te je

$$x'(v_1(t)) < v_1'(t) ,\quad x'(v_2(t)) > v_2'(t) \quad \text{za } t \geqslant t_0 ,$$

što znači da za "cijev" izlaznih integralnih krivih metode retrakcije možemo uzeti "cijev"

$$t \geqslant t_0 ,\ v_1(t) < x < v_2(t) .$$

Otuda, prema metodi retrakcije, postoji bar jedno rješenje jednačine /1/ koje se, za sve $t \geqslant t_0$, nalazi u toj "cijevi", te i ispunjava uslov /8/.

b/ Za $a(t)<0$ u oblasti $x < -\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t \geqslant t_0)$ rješenja jednačine /1/ su rastuća, a u oblasti $x > -\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t \geqslant t_0)$ rješenja su opadajuća. Kako, prema /7/, za $t \geqslant t_0 > \bar{t}$, važi

$$x_1 < -\frac{f(t)}{a(t)} < x_2 ,$$

gdje su x_1 i x_2 konačni brojevi, to sva rješenja jednačine /1/, za $t \geqslant t_0$, ulaze u "cijev" odredjenu polupravama $x=x_1$, $x=x_2$ $(t \geqslant t_0)$, pa su i asimptotski ograničena.

Dokažimo sada i drugi dio tvrdjenja b/.

Neka je

---

1) I dalje u cijeloj ovoj glavi podrazumjevaćemo da funkcija $\varepsilon(t)$ ispunjava te osnovne uslove.

$$u_1(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t), \quad u_2(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t) \quad (t \geq t_0).$$

Prema /9/ važi

$$x'(u_1(t)) = -a(t)\varepsilon(t) > \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' - \varepsilon'(t) = u_1'(t),$$

$$x'(u_2(t)) = a(t)\varepsilon(t) < \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' + \varepsilon'(t) = u_2'(t),$$

što znači da sve integralne krive koje prolaze kroz tačke krivih $u_1(t)$ i $u_2(t)$ presjecaju te krive ulazeći u "cijev" odredjenu tim krivama i da sve integralne krive koje prolaze kroz unutrašnje tačke te "cijevi" ostaju u njoj.

Dakle, integralne krive jednačine /1/ koje prolaze kroz tačke oblasti $u_1(t) < x < u_2(t)$ $(t \geq t_0)$ čine klasu rješenja koja ispunjavaju uslov /11/.

2^0

LEMA A_2. Pod uslovima

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = b, \quad \underset{t \geq t_0}{a(t) \neq 0} \quad / \; b \text{ je konačan broj/},$$

sva rješenja jednačine /1/, za $t \geq t_0$, ispunjavaju uslov /8/.

Gornji uslovi T. Pejovića daju da funkcija $a(t)$ ispunjava osnovni uslov $a(t) < 0$ za $t \geq t_0$.

Ovdje možemo da damo sljedeću lemu.

LEMA B_2. Jednačina /1/, za $t \geq t_0$, ima:

a/ Za $a(t) < 0$ i /7/ ima se slučaj 1^0 b/ /s tom razlikom što ovdje funkcija $a(t)$ ne mora da teži nuli kad $t \to +\infty$/;

b/ Pod uslovima /7/ i

/12/ $$\lim_{t\to+\infty} a(t) = r \quad / \; r \text{ je negativan broj, a može biti i } -\infty \;/,$$

sva rješenja koja ispunjavaju uslov /8/.

Dokažimo tvrdjenje b/.

U oblasti $x < -\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t \geq t_0)$ rješenja jednačine /1/ imaju pozitivan koeficijent smjera, tj. rješenja su rastuća. Ona dodiruju krivu $x = -\frac{f(t)}{a(t)}$ ili ne. Ako ne dodiruju onda su ona monotono rastuća i ograničena, te imaju i granicu c kad $t \to +\infty$, te je, prema /7/ i /12/,

$$\lim_{t\to+\infty} x' = \lim_{t\to+\infty}\left(a(t)x+f(t)\right) = \lim_{t\to+\infty} a(t)\left(x+\frac{f(t)}{a(t)}\right) = r(c-b).$$

Kako izvod x', funkcije $x(t)$ sa konačnom granicom, teži prema granici kad $t\to+\infty$, ta granica može biti samo nula, te imamo

$$r(c-b)=0,$$

odakle je $c=b$, odnosno $\lim_{t\to+\infty} x(t)=b$.

Ako rješenja oblasti $x<-\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t\geq t_0)$ dodiruju krivu $x=-\frac{f(t)}{a(t)}$, ona će imati, u zajedničkim tačkama, stacionarne tačke $/x'=0/$ i ona će prolaziti, poslije toga, kroz oblast $x>-\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t\geq t_0)$, tu će opadati i ostati u toj oblasti, ili će prolaziti još jedan put kroz oblast $x<-\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t\geq t_0)$. Rješenja koja prelaze iz jedne u drugu oblast su moguća, to su rješenja vezana za krivu $x=-\frac{f(t)}{a(t)}$, te i teže b kad $t\to+\infty$.

Rješenja oblasti $x>-\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t\geq t_0)$ ostaju uvijek u toj oblasti, neka prelaze u oblast $x<-\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t\geq t_0)$, a neka su vezana za funkciju $x=-\frac{f(t)}{a(t)}$ sjekući je beskonačno mnogo puta. Za rješenja koja ostaju uvijek u oblasti $x>-\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t\geq t_0)$ dokazuje se da ispunjavaju uslov /8/ na isti način kao i za rješenja oblasti $x<-\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t\geq t_0)$.

Dakle, sva rješenja jednačine /1/ ispunjavaju uslov /8/.

Kao dopunu rezultata lema B_1 i B_2 daćemo sljedeću teoremu.

TEOREMA B_1.

Jednačina /1/, za $t\geq t_0$, ima:

a/ Pod uslovima

/13/ $$a(t)\leq A<0 \quad \text{za } t\geq t_0 \quad / A \text{ je neg. konst.}/,$$

/14/ $$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{-a(t)}=+\infty \ ^{1)},$$

sva rješenja koja ispunjavaju uslov

/15/ $$\lim_{t\to+\infty} x(t)=+\infty.$$

b/ Pod uslovom

/16/ $$|a(t)|\,\varepsilon(t)+\varepsilon'(t) > \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \quad \text{za } t\geq t_0 \ ^{2)},$$

za $a(t)>0$ $(t\geq t_0)$, bar jedno rješenje $x(t)$ koje, za sve $t\geq t_0$, ispunjava

---

1) Ako je $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{-a(t)}=-\infty$, tada sva rješenja ispunjavaju uslov $\lim_{t\to+\infty} x(t)=-\infty$.

2) Za $a(t)>0$ $(t\geq t_0)$ uslov /16/ može biti zamjenjen širim uslovom

$$a(t)\,\varepsilon(t)-\varepsilon'(t) > \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \quad \text{za } t\geq t_0.$$

uslov /11/ [1]; a za $a(t) < 0$ $(t \geq t_0)$, jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geq t_0$, ispunjava uslov /11/, dok pri ispunjenju i uslova /13/ sva rješenja jednačine /1/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju uslov /11/.

c/ Pod uslovima, za $t \geq t_0$,

/17/ $$|a(t)| > M,$$

/18/ $$\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \leq N \text{ [2]}$$

/M i N su poz. konst./, za $a(t) > M > 0$, bar jedno rješenje $x(t)$ koje ispunjava uslov

/19/ $$\left|x(t) + \frac{f(t)}{a(t)}\right| < \frac{N}{M} \ ;$$

a ako je $a(t) < -M < 0$, jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geq t_0$, ispunjavaju taj uslov, dok za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, taj uslov ispunjavaju sva rješenja jednačine /1/.

d/ Ako je, uz uslove $a(t) < -M < 0$ $(t \geq t_0)$ i /18/,

/20/ $$\lim_{t\to+\infty} a(t) = -\infty,$$

tada jednačina /1/ ima jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov /11/, za sve $t \geq t_0$, a za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$ taj uslov ispunjavaju sva rješenja jednačine /1/.

Dokaz.

a/ Rješenja jednačine /1/, pod uslovom /13/, oblasti $x < -\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t \geq t_0)$ su rastuća, desna strana jednačine /1/ je pozitivna. Neka je $\varphi_0(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} - \delta_0$, gdje je δ_0 pozitivan fiksiran broj. Prema /14/ je $\lim_{t\to+\infty} \varphi_0(t) = +\infty$.

Pokažimo da sve integralne krive oblasti $x \leq \varphi_0(t)$ $(t \geq t_0)$ ispunjavaju uslov /15/. Neka je $P\left(t, -\frac{f(t)}{a(t)} - \delta\right)$ proizvoljna tačka te oblasti /$\delta \geq \delta_0$ je pozitivan broj/. Prema /13/ imamo

$$x'(P) = -a(t)\delta \geq -a(t)\delta_0 \geq -A\delta_0,$$

što znači da integralne krive oblasti $x \leq \varphi_0(t)$ $(t \geq t_0)$ imaju koeficijent smjera ne manji od pozitivnog broja $-A\delta_0$, te i ispunjavaju uslov /15/.

S obzirom na jedinost rješenja jednačine /1/ i rješenja oblasti $x > \varphi_0(t)$ $(t \geq t_0)$ ispunjavaju uslov /15/, jer ta rješenja ne presjecaju rješenja oblasti $x \leq \varphi_0(t)$ $(t \geq t_0)$ koja ispunjavaju uslov /15/.

---

[1] Ovdje, kao i u tvrdjenjima c/ i d/ ove teoreme, ne zahtjevamo da funkcija $-\frac{f(t)}{a(t)}$ ispunjava uslov /7/.

[2] Ovaj uslov može se zamjeniti uslovima: $\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \leq N$ za $t_0 \leq t < +\infty$ i $\lim_{t\to+\infty} \frac{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'}{-a(t)} = 0$.

b/ Posmatrajmo prvo slučaj $a(t) > 0$ $(t \geq t_0)$.

Integralne krive imaju negativan koeficijent smjera za $x < -\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t \geq t_0)$, a pozitivan za $x > -\frac{f(t)}{a(t)}$ $(t \geq t_0)$.

Neka je

$$\omega_1(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t), \quad \omega_2(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t) \quad (t \geq t_0).$$

Imamo, prema /16/,

$$x'(\omega_1(t)) = -a(t)\varepsilon(t) < -\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| + \varepsilon'(t) < \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' - \varepsilon'(t) = \omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t)) = a(t)\varepsilon(t) > \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t) > \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' + \varepsilon'(t) = \omega_2'(t),$$

što znači da integralne krive jednačine /1/ koje prolaze kroz tačke krivih $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ $(t \geq t_0)$ presjecaju te krive izlazeći iz "cijevi" koju ograničavaju te krive, te, prema metodi retrakcije, postoji bar jedno rješenje koje za sve $t \geq t_0$ ostaje u toj "cijevi", odnosno u "cijevi"

/21/ $$t \geq t_0, \; -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t) < x < -\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t),$$

pa prema tome i ispunjava uslov /11/.

Dokažimo sada za slučaj $a(t) < 0$ $(t \geq t_0)$.

Ovdje integralne krive imaju suprotan koeficijent smjera, te prema /16/, za $t \geq t_0$, važi

$$x'(\omega_1(t)) = -a(t)\varepsilon(t) > \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t) \geq \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' - \varepsilon'(t) = \omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t)) = a(t)\varepsilon(t) < -\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| + \varepsilon'(t) \leq \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' + \varepsilon'(t),$$

što znači da integralne krive koje prolaze kroz tačke krivih $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ presjecaju te krive ulazeći u "cijev" koju ograničavaju te krive, odnosno u "cijev" /21/, dok sve integralne krive koje prolaze kroz unutrašnje tačke te "cijevi" ostaju u njoj za sve $t \geq t_0$, te i čine klasu rješenja koja ispunjava uslov /11/.

Dodatni uslov /13/, uz uslov /16/, omogućuje da sve integralne krive jednačine /1/ koje se nalaze izvan "cijevi" /21/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, dodirnu krivu $\omega_1(t)$ ili $\omega_2(t)$, a zatim i udju u "cijev" /21/.

Dokažimo to za integralne krive oblasti $x < -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)$ $(t \geq t_0)$ /za slučaj $x > -\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t)$ $(t \geq t_0)$ slično se dokazuje/. Neka je $P\left(t, -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t) - \delta\right)$ / δ je proizvoljan pozitivan broj/ proizvoljna tačka te oblasti. Prema /16/ važi

$$x'(P) = -a(t)\varepsilon(t) - a(t)\delta > \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t) - a(t)\delta > |\omega_1'(t)| - A\delta.$$

Prema tome, možemo konstatovati da integralne krive u oblasti $x < -\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)$ $(t \geqslant t_0)$ imaju pozitivan koeficijent smjera i veći od $\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)\right)'\right|$ za više od pozitivnog broja $-A\delta$, te da integralne krive na većem razmaku imaju i veći koeficijent smjera. Otuda će sve integralne krive te oblasti, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, stići do krive $\omega_1(t)$, a zatim i ući u "cijev" /21/.

c/ Uočimo ovdje krive

$$\omega_1(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} - \frac{N}{M}, \quad \omega_2(t) = -\frac{f(t)}{a(t)} + \frac{N}{M} \quad (t \geqslant t_0).$$

Za $a(t) > M > 0$, pod uslovom /18/, imamo

$$x'(\omega_1(t)) = -a(t)\frac{N}{M} < -N \leqslant -\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \leqslant \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' = \omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t)) = a(t)\frac{N}{M} > N \geqslant \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \geqslant \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' = \omega_2'(t).$$

Prema tome, za $a(t) > M > 0$, integralne krive jednačine /1/ prolaze kroz tačke krivih $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$ izlazeći iz "cijevi" koju čine te krive, tj. "cijevi"

/22/ $$t \geqslant t_0, \quad -\frac{f(t)}{a(t)} - \frac{N}{M} < x < -\frac{f(t)}{a(t)} + \frac{N}{M},$$

što znači da jednačina /1/ ima bar jedno rješenje koje, za $t \geqslant t_0$, pripada toj "cijevi", te i ispunjava uslov /19/.

Za $a(t) < -M < 0$, pod uslovom /18/, imamo

$$x'(\omega_1(t)) = -a(t)\frac{N}{M} > N \geqslant \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \geqslant \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' = \omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t)) = a(t)\frac{N}{M} < -N \leqslant -\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \leqslant \left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)' = \omega_2'(t),$$

što obezbjedjuje ulaženje svih rješenja jednačine /1/ koje prolaze kroz tačke krivih $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ u "cijev" /22/, kao i to da sve one integralne krive koje prolaze kroz unutrašnje tačke "cijevi" /22/ ostaju u toj "cijevi" i čine klasu rješenja koja ispunjava uslov /19/.

Uslov $a(t) < -M < 0$ obezbjedjuje i to da će sva rješenja jednačine /1/, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, ući u "cijev" /22/. Posmatrajmo to za rješenja oblasti $x < -\frac{f(t)}{a(t)} - \frac{N}{M}$ $(t \geqslant t_0)$. U proizvoljnoj tački $P\left(t, -\frac{f(t)}{a(t)} - \frac{N}{M} - \delta\right)$ /δ je proizvoljan pozitivan broj/ te oblasti integralne krive imaju koeficijent smjera

$$x'(P) = -a(t)\frac{N}{M} - a(t)\delta > N + M\delta > |\omega_1'(t)| + M\delta,$$

tj. veći od $\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)} - \frac{N}{M}\right)'\right|$ za pozitivan broj $M\delta$, te će svaka integralna kriva oblasti $x < -\frac{f(t)}{a(t)} - \frac{N}{M}$ $(t \geq t_0)$, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, i stići do krive $-\frac{f(t)}{a(t)} - \frac{N}{M}$, a zatim i ući u "cijev" /22/.

d/ Uslovi $a(t) < -M < 0$, /18/ i /2o/ obezbjedjuju ispunjenje uslova /16/.

Zaista, neka je m neki pozitivan fiksiran broj, takav da je

$$-\varepsilon'(t) < m \quad \text{za } t \geq t_0 .$$

/Funkcija $\varepsilon'(t)$ je neprekidna funkcija za $t \geq t_0$ i ispunjava uslov /1o/./ Posmatrajmo sada uslov /16/. Uslov /16/ možemo napisati i kao

$$-a(t)\varepsilon(t) > \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t) .$$

Prema /18/ je

$$\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t) < N + m \quad \text{za } t \geq t_0 ,$$

te je uslov /16/ ispunjen i ako je ispunjen uslov

$$-a(t)\varepsilon(t) \geq N + m \quad \text{za } t \geq t_0 .$$

Ovaj uslov je ispunjen za

$$\varepsilon(t) \geq \frac{N+m}{-a(t)} , \quad t \geq t_0 .$$

Kako desna strana te nejednakosti teži nuli kad $t \to +\infty$, to postoji monotono opadajuća funkcija $\varepsilon(t)$ koja ispunjava taj uslov i uslov /1o/

Dalje važi tvrdjenje pod b/ za slučaj $a(t) < 0$.

3°

LEMA A_3. Pod uslovima

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = +\infty ,$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = b, \quad \underset{t \geq t_0}{a(t) \neq 0} \qquad /b \text{ je konačan broj/}$$

jednačina /1/, za $t \geq t_0$, ima jedno rješenje sa osobinom /8/.

Gornji uslovi T. Pejovića daju da je $a(t) > 0$ za $t \geq t_0$.

Prema tome, ovdje važi tvrdjenje a/ leme B_1 /s tom razlikom što ovdje funkcija $a(t)$ ne mora da teži nuli kad $t \to +\infty$/, a uz dopunske uslove važe i odgovarajući dijelovi tvrdjenja teoreme B_1.

4° Za $a(t) = 0$ dobija se slučaj 1° za $k = 1$ /T. Pejović/.

Za $a(t) = 0$ jednačina /1/ glasi $x' = f(t)$ na koju se ne mogu primjeniti obuhvaćena gledišta kvalitativne analize.

5^0 Za $a(t)=r$, gdje je r negativan broj, slijedi slučaj 2^0.

6^0 Za $a(t)=r$, gdje je r pozitivan broj, slijedi slučaj 3^0.

7^0

Neka je

/23/ $$\lim_{t\to+\infty} a(t)=r \quad /r \text{ je konačan broj}/,$$

$$a(t)=r+\ell(t),$$

/24/ $$\lim_{t\to+\infty} \ell(t)=0,$$

/25/ $$\lim_{t\to+\infty} f(t)=p \quad /p \text{ je konačan broj}/.$$

Jednačina /1/ postaje

/26/ $$\frac{dx}{dt}=rx+f(t)+\ell(t)x .$$

Neka je $x_0(t)$ jedno asimptotski ograničeno rješenje jednačine

/27/ $$\frac{dx_0}{dt}=rx_0+f(t),$$

tj.

/28/ $$|x_0|\leqslant M,$$

gdje je M fiksirana konstanta /T. Pejović/.

Razlikovaćemo više slučajeva.

1/ Neka je r negativan broj.

LEMA A_4. Ako je, pored osnovnih uslova /23/, /24/, /25/ i /28/,

$$r<0,\ \varepsilon_1(t)=e^{rt}\int_{t_0}^{t} e^{-r\xi}|\ell(\xi)|\,d\xi \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,\ \ \varepsilon_1=\max_{t\geqslant t_0}\varepsilon_1(t)<1,$$

tada sva rješenja jednačine /26/, za $t\geqslant t_0$, ispunjavaju uslov

/29/ $$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t)-x_0(t)\right)=0 .$$

Iz osnovnih uslova T. Pejovića proističe i sljedeća

LEMA B_3. Pod uslovima /23/ /$r<0$/, /24/ i /25/ sva rješenja jednačine /26/, za $t\geqslant t_0$, ispunjavaju uslov /29/.

Pod uslovima /23/ /$r<0$/, /24/ i /25/ sva rješenja jednačine /26/, za $t\geqslant t_0$, ispunjavaju uslov

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)=-\frac{p}{r} ,$$

kao i sva rješenja jednačine /27/, za $t\geqslant t_0$, ispunjavaju uslov

$$\lim_{t\to+\infty} x_0(t) = -\frac{\varphi}{r}$$

/vidjeti lemu B_1 b//. Prema tome, sva rješenja jednačina /26/ i /27/ ispunjavaju uslov /29/.

Ideju T. Pejovića o odredjivanju ponašanja rješenja jednačine /26/ preko jednostavnije jednačine /27/ proširimo uzimanjem umjesto pretpostavki /23/, /24/ i /25/ šire pretpostavke, te umjesto jednačina /26/ i /27/ odgovarajuće jednačine opštijeg oblika, izostavljajući pretpostavku /28/, a dodajući, takodje, i bitno nove pretpostavke. Rezultate posmatranja iskažimo sljedećom teoremom.

TEOREMA B_1.

a/ Neka je

$$a(t) = a_1(t) + \mathcal{L}(t)\ ^{1)}$$

i neka je

/30/ $$a_1(t) < 0 \quad \text{za } t \geq t_0,$$

/31/ $$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathcal{L}(t)}{a_1(t)} = 0, \quad |\mathcal{L}(t)| < |a_1(t)| \quad \text{za } t \geq t_0,$$

/32/ $$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)\mathcal{L}(t)}{a_1^2(t)} = 0\ ^{2)},$$

/33/ $$-\left(a_1(t) + |\mathcal{L}(t)|\right)\varepsilon(t) + \varepsilon'(t) > m(t) \quad \text{za } t \geq t_0,$$

gdje je $m(t) \geq 0$ $(t \geq t_0)$ neprekidna funkcija koja ispunjava uslove

/34/ $$\left|\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right)'\right| \leq m(t), \quad \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| \leq m(t) \quad \text{za } t \geq t_0,$$

tada postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ $(t \geq t_0)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da, za $t \geq t_0$, jedna klasa rješenja jednačine

/35/ $$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + f(t) + \mathcal{L}(t)x$$

i jednačine

---

[1] Funkcija $a(t)$ ne mora da ispunjava uslov /23/, a funkcija $\mathcal{L}(t)$ ne mora da teži nuli kad $t \to +\infty$.

[2] Od posebne je važnosti primjetiti da uslovi /31/ i /32/ dopuštaju da funkcija $-\frac{f(t)}{a_1(t)}$ bude ograničena ili neograničena, da teži ili ne teži nekom broju. Ako je $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{-a_1(t)} = 0$, tada se uslov /31/ može zamjeniti uslovom

/31'/ $\left|\frac{\mathcal{L}(t)}{a_1(t)}\right| \leq \varrho < \varrho_1 < 1$ za $t \geq t_0$ /ϱ i ϱ_1 su pozitivni fiksirani brojevi/,

a uslov /32/ je garantovan.

/36/ $$\frac{dx_0}{dt} = a_1(t)\,x_0 + f(t)$$

ispunjavaju uslov

/37/ $$|x(t) - x_0(t)| < r(t),$$

te i uslov /29/.

b/ Ako funkcija $a_1(t)$ umjesto uslova /3o/ ispunjava uslov

/38/ $$a_1(t) \leq A < 0 \quad \text{za } t \geq t_0 \quad / A \text{ je neg. konst.}/,$$

a sve ostale pretpostavke iz a/ ostanu iste, tada, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, sva rješenja jednačina /35/ i /36/ ispunjavaju uslov /37/.

c/ Ako je

/39/ $$\lim_{t \to +\infty} a_1(t) = -\infty,$$

tada, uz uslove /31/, /32/, /38/, kao i

/40/ $$m(t) \leq N \quad \text{za } t \geq t_0 \text{ }^{1)}$$

/N je pozitivan fiksiran broj/, po jedna klasa rješenja jednačina /35/ i /36/, za sve $t \geq t_0$, ispunjavaju uslov /37/, a za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$ taj uslov ispunjavaju sva rješenja tih jednačina.

Dokaz.

a/ Kako je, prema /31/ i /32/,

/41/ $$\lim_{t \to +\infty}\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)} + \frac{f(t)}{a_1(t)}\right) = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{a_1(t)}\left(\frac{-a_1(t)}{a_1(t)+\alpha(t)} + 1\right) =$$
$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{a_1(t)} \cdot \frac{\alpha(t)}{a_1(t)+\alpha(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)\cdot\alpha(t)}{a_1^2(t)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha(t)}{a_1(t)}} = 0,$$

to postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $\delta(t)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da ispunjava uslov

/42/ $$\left|-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)} + \frac{f(t)}{a_1(t)}\right| < \delta(t) \quad \text{za } t \geq t_0.$$

Rješenja jednačine /36/ su rastuća u oblasti $x < -\frac{f(t)}{a_1(t)}$ $(t \geq t_0)$, a opadajuća u oblasti $x > -\frac{f(t)}{a_1(t)}$ $(t \geq t_0)$, dok u oblasti $x < -\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}$ $(t \geq t_0)$ rješenja jednačine /35/ su rastuća, a u oblasti $x > -\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}$ $(t \geq t_0)$ rješenja su opadajuća.

Uslov /33/ obezbjedjuje da jedna klasa rješenja jednačine /36/ ulazi i ostaje u "cijevi" koja je odredjena krivama

---

[1]) Ovaj uslov može se zamjeniti uslovima: $m(t) \leq N$ za $t_0 \leq t < +\infty$ i $\lim_{t \to +\infty} \frac{m(t)}{a_1(t)} = 0$.

/43/ $$\omega_1(t) = -\frac{f(t)}{a_1(t)} - \varepsilon(t), \quad \omega_2(t) = -\frac{f(t)}{a_1(t)} + \varepsilon(t) \quad (t \geq t_0)$$

/to su rješenja koja prolaze kroz tačke oblasti $\omega_1(t) \leq x \leq \omega_2(t)$ $(t \geq t_0)$ /, kao i da jedna klasa rješenja jednačine /35/ ulazi i ostaje u "cijevi" koja je ograničena krivama

/44/ $$\omega_3(t) = -\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)} - \varepsilon(t), \quad \omega_4(t) = -\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)} + \varepsilon(t) \quad (t \geq t_0)$$

/to su rješenja oblasti $\omega_3(t) \leq x \leq \omega_4(t)$ $(t \geq t_0)$/. Zaista je, prema /33/ i /34/,

$$x_0'(\omega_1(t)) = -a_1(t)\varepsilon(t) \geq -(a_1(t) + |\alpha(t)|)\varepsilon(t) > m(t) - \varepsilon'(t) \geq$$
$$\geq \left|\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t) \geq \left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right)' - \varepsilon'(t) = \omega_1'(t),$$

$$x_0'(\omega_2(t)) = a_1(t)\varepsilon(t) \leq (a_1(t) + |\alpha(t)|)\varepsilon(t) < -m(t) + \varepsilon'(t) \leq$$
$$\leq -\left|\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right)'\right| + \varepsilon'(t) \leq \left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right)' + \varepsilon'(t) = \omega_2'(t);$$

$$x'(\omega_3(t)) = -(a_1(t) + \alpha(t))\varepsilon(t) \geq -(a_1(t) + |\alpha(t)|)\varepsilon(t) > m(t) - \varepsilon'(t) \geq$$
$$\geq \left|\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t) \geq \left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}\right)' - \varepsilon'(t) = \omega_3'(t),$$

$$x'(\omega_4(t)) = (a_1(t) + \alpha(t))\varepsilon(t) \leq (a_1(t) + |\alpha(t)|)\varepsilon(t) < -m(t) + \varepsilon'(t) \leq$$
$$\leq -\left|\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}\right)'\right| + \varepsilon'(t) \leq \left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}\right)' + \varepsilon'(t) = \omega_4'(t).$$

Uzmimo sada da je

/45/ $$r(t) = \varepsilon(t) + \delta(t)$$

i primjetimo da sve krive $\omega_i(t)$ $(i=1,2,3,4)$ pripadaju "cijevi"

/46/ $$t \geq t_0, \; -\frac{f(t)}{a_1(t)} - r(t) < x < -\frac{f(t)}{a_1(t)} + r(t).$$

Otuda, toj "cijevi" pripadaju i klase rješenja jednačina /35/ i /36/ koje obezbjedjuju "cijevi" koje su odredjene krivama /43/, odnosno /44/, što i potvrdjuje tačnost tvrdjenja.

b/ Uslov /38/ obezbjedjuje ulaženje svih rješenja jednačina /35/ i /36/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, respektivno u "cijevi" koje su ograničene krivama /43/, odnosno /44/. Treba primjetiti da, prema /31/ i /38/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, važi

$$a_1(t) + \alpha(t) = a_1(t)\left(1 + \frac{\alpha(t)}{a_1(t)}\right) \leq a_1(t)(1-\rho) \leq A(1-\rho) = B < 0$$

/prema /31/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, funkcija $\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}$ ispunjava uslov /31'/; B je negativan fiksiran broj/. Dalje važe odgovarajući ranije učinjeni dokazi.

c/ Ovdje treba samo da primjetimo da uslovi /31/, /39/ i /40/ obezbjedjuju uslov /33/, što se pokazuje na isti način kao što smo to učinili kod teoreme B_1 d/.

2/ Neka je r pozitivan broj.

LEMA A_5. Ako je, pored osnovnih uslova /23/, /24/, /25/ i /28/,

$$r > 0, \quad \varepsilon_1(t) = e^{rt}\int_t^{\infty} e^{-r\xi}|\ell(\xi)|\,d\xi \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \quad \varepsilon_1 = \underset{t \geq t_0}{\mathrm{Max}}\, \varepsilon_1(t) < 1,$$

tada jednačina /26/ dopušta, za $t \geq t_0$, jedno rješenje sa osobinom /29/.

Ovdje važi i sljedeća

LEMA B_4. a/ Pod uslovima /23/ /$r>0$/, /24/ i /25/ jednačine /26/ i /27/ imaju po bar jedno rješenje sa osobinom /29/.

b/ Neka je $a(t) = a_1(t) + \alpha(t)$, gdje je $a_1(t) > 0$ za $t \geq t_0$, tada, pod uslovima /31/, /32/ i

$$\text{/47/} \qquad \big(a_1(t) - |\alpha(t)|\big)\,\varepsilon(t) - \varepsilon'(t) > m(t),$$

gdje je $m(t)$ funkcija koja ispunjava uslove /34/, bar jedno rješenje $x(t)$ jednačine /35/ i bar jedno rješenje $x_0(t)$ jednačine /36/, za $t \geq t_0$, ispunjavaju uslov /37/, te i uslov /29/.

Dokaz. a/ Krive stacionarnih tačaka jednačina /26/ i /27/ su respektivno $-\frac{f(t)}{r+\ell(t)}$ i $-\frac{f(t)}{r}$. Prema /24/ i /25/ postoje monotone funkcije $v_1(t)$ i $v_2(t)$ / $v_1(t)$ monotono rastuća, $v_2(t)$ monotono opadajuća/ koje teže $-\frac{p}{r}$ i takve da je, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$,

$$v_1(t) < -\frac{f(t)}{r+\ell(t)} < v_2(t), \quad v_1(t) < -\frac{f(t)}{r} < v_2(t) \quad (t \geq t_0).$$

Otuda je

$$x'(v_1(t)) < v_1'(t), \quad x'(v_2(t)) > v_2'(t),$$

$$x_0'(v_1(t)) < v_1'(t), \quad x_0'(v_2(t)) > v_2'(t),$$

što znači da za obe jednačine /26/ i /27/ imamo "cijev" izlaznih integralnih krivih metode retrakcije

$$t \geq t_0, \quad v_1(t) < x < v_2(t),$$

koja sadrži po bar jedno rješenje $x(t)$ i $x_0(t)$ respektivno jednačina /26/ i /27/, te ta rješenja i ispunjavaju uslov /29/.

b/ Ispunjenje uslova /31/ i /32/ obezbjedjuje relaciju /41/, te i monotono opadajuću funkciju $\delta(t)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i koja ispunjava uslov /42/, kao i funkciju $r(t)$ po relaciji /45/.

Uslov /47/ dopušta da se za jednačinu /36/ formira "cijev" izlaznih integralnih krivih ograničenih krivama /43/, a za jednačinu /35/ "cijev" ograničenu krivama /44/, što i obezbjedjuje tačnost tvrdjenja, jer krive /43/ i /44/ pripadaju oblasti /46/.

Zaista je

$$x_0'(\omega_1(t)) = -a_1(t)\varepsilon(t) < -(a_1(t)-|\alpha(t)|)\varepsilon(t) < -m(t)-\varepsilon'(t) \leq \left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right)' - \varepsilon'(t) = \omega_1'(t),$$

$$x_0'(\omega_2(t)) = a_1(t)\varepsilon(t) > (a_1(t)-|\alpha(t)|)\varepsilon(t) > m(t)+\varepsilon'(t) \geq \left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right)' + \varepsilon'(t) = \omega_2'(t);$$

$$x'(\omega_3(t)) = -(a_1(t)+\alpha(t))\varepsilon(t) \leq -(a_1(t)-|\alpha(t)|)\varepsilon(t) < -m(t)-\varepsilon'(t) \leq \left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}\right)' - \varepsilon'(t) = \omega_3'(t),$$

$$x'(\omega_4(t)) = (a_1(t)+\alpha(t))\varepsilon(t) \geq (a_1(t)-|\alpha(t)|)\varepsilon(t) > m(t)+\varepsilon'(t) \geq \left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}\right)' + \varepsilon'(t) = \omega_4'(t).$$

3/ Posmatrajmo slučaj $r=0$.

LEMA A_6. Ako je, pored osnovnih uslova /23/, /24/, /25/ i /28/,

$$r=0, \quad \varepsilon_1(t) = \int_t^\infty |\ell(\xi)|\,d\xi \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \quad \varepsilon_1 = \max_{t\geq t_0} \varepsilon_1(t) < 1,$$

tada jednačina /26/, za $t \geq t_0$, dopušta jedno rješenje sa osobinom /29/.

Za $r=0$ jednačina /27/ postaje $x_0' = f(t)$ na koju se ne mogu primjeniti obuhvaćena gledišta kvalitativne analize, te i ne možemo govoriti o odnosu rješenja jednačina /26/ i /27/.

Jednačina /1/, pod uslovom /6/, proučena je u slučaju 1^o.

Medjutim, neka je $a(t) = a_1(t) + \alpha(t)$, gdje je

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = \lim_{t\to+\infty} a_1(t) = \lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0 .$$

Ako je ispunjen uslov /31/ i $a_1(t) \neq 0$ za $t \geq t_0$, tada za $a_1(t) < 0$ važi teorema B_2 a/, a za $a_1(t) > 0$ važi lema B_4 b/.

Kako funkcija $f(t)$ ispunjava uslov /25/ /po T. Pejoviću; gdje je, u ovom slučaju, $p=0$ /, to uslov /32/dolazi u obzir, odnosno gornje tvrdjenje ima mjesta.

§ 1.2.

Posmatrajmo sada pitanje stabilnost rješenja diferencijalne jednačine /1/.

Rezultati o ponašanju rješenja jednačine /1/, koje smo dali u § 1.1, dati su u obliku podesnom da sada možemo neposredno, koristeći rezultate navedene u glavi II § 3, dati odgovarajuće zaključke u pogledu stabilnosti odgovarajućih rješenja.

1. Tamo gdje se ima postojanje bar jednog rješenja, koje ispunjava odgovarajuće uslove, možemo reći da je to rješenje nestabilno u smislu

Ljapunova. Takyih rezultata imamo više, a vezani su za osnovni uslov $a(t)>0$.

2. Klasa rješenja jednačine /1/ za koju smo pokazali da ispunjava uslov /19/ /teorema B_1 c/, slučaj $a(t)<0$ / su skoro stabilna rješenja u smislu definicije M. Bertolina. Isto tako, svako približno rješenje jednačine /1/ koje ispunjava uslov /19/ /pri $a(t)<0$ / je skoro stabilno približno rješenje u smislu iste definicije /vidjeti [7] /

3. Klase rješenja jednačine /1/ za koje smo pokazali da ispunjavaju uslov /11/ /lema B_1 b/ i teorema B_1 b/ i d/, $a(t)<0$ / su ravnomjerno asimptotski stabilne u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4 /vidjeti glavu II § 3.2. - tu je, upravo, posmatrana jednačina /1//.

U slučaju kada funkcija $a(t)$ ispunjava uslov /13/ /teorema B_1 b/ i d/, $a(t)\leqslant A<0$/ klasa C rješenja jednačine /1/ koja ispunjava uslov /11/ je ravnomjerno asimptotski stabilna u cijelom /takodje, vidjeti II § 3.2./.

Takodje, možemo konstatovati da je svako približno rješenje jednačine koje ispunjava uslov /11/ /slučaj: lema B_1 b/ i teorema B_1 b/ i d/, $a(t)<0$ / asimptotski stabilno približno rješenje u smislu definicije 5 /II § 3.3./, a u slučaju uslova /13/ i asimptotski stabilno u cijelom.

4. U slučaju jednačina /35/ i /36/, a na osnovu datih rezultata za te jednačine, možemo govoriti i o stabilnosti rješenja jednačine /36/ pri stalnim poremećajima.

Ustvari, prema dokazu teoreme B_2, jednačine /35/ i /36/ imaju po jednu klasu rješenja koje su ravnomjerno asimptotski stabilne u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4 /II § 3.2./, a koje su, u slučaju uslova /38/, i ravnomjerno asimptotski stabilne u cijelom. To je ona klasa C_0 rješenja jednačine /36/ koja pripada "cijevi"

$$t\geqslant t_0, \quad -\frac{f(t)}{a_1(t)}-\varepsilon(t)<x<-\frac{f(t)}{a_1(t)}+\varepsilon(t),$$

za sve $t\geqslant t_0$, odnosno, klasa C rješenja jednačine /35/ koja pripada "cijevi"

$$t\geqslant t_0, \quad -\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}-\varepsilon(t)<x<-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}+\varepsilon(t),$$

za sve $t\geqslant t_0$, a te "cijevi", prema /42/ i /45/, pripadaju "cijevi" /46/, kojoj pripadaju i krive stacionarnih tačaka jednačina /35/ i /36/.

Prema tome, svako rješenje $x_0(t)$ jednačine /36/ /tačno ili približno/, obezbjedjeno teoremom B_2, koje ispunjava uslov

$$-\frac{f(t)}{a_1(t)}-\varepsilon(t)<x_0(t)<-\frac{f(t)}{a_1(t)}+\varepsilon(t) \quad \text{za sve } t\geqslant t_0$$

je asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima u smislu definicije 6 /II § 3.4./, a u slučaju uslova /38/ svako rješenje $x_0(t)$ jednačine /36/

odredjeno početnim uslovom $x_0(t_0)$ je asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima u smislu definicije 6.

5. Posmatrajmo sada pitanje stabilnosti rješenja za koja smo pokazali da teže nekom broju ili $\pm\infty$, a za koja nismo obezbjedili pripadanje nekoj "cijevi" čija širina teži nuli. Takva rješenja imamo u tvrdjenjima: lema B_2 b/, teorema B_1 a/ i lema B_3.

Za rješenja jednačine /1/ koja teže nekom konačnom broju /lema B_2 b// možemo pokazati da su ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije Ljapunova /vidjeti uvod § 2 pod 1. a/, d/ i e//.

U lemi B_2 b/ funkcije $a(t)$ i $-\frac{f(t)}{a(t)}$ ispunjavaju uslove /12/ i /7/. U glavi II § 3.2. konstatovali smo da dvije integralne krive jednačine /1/, pri $a(t)<0$, za $t \geqslant t_0$, imaju najveći razmak u početnoj tački $t=t_0$, te da se taj razmak ravnomjerno smanjuje kad t raste, odnosno da rješenja bliska u trenutku $t=t_0$ ostaju bliska za sve $t \geqslant t_0$ i bivaju sve bliža pri rašćenju t. S druge strane, sva rješenja teže b kad $t \to +\infty$. Prema tome, za proizvoljno rješenje $x(t)$ jednačine /1/ koje je odredjeno početnim uslovom $x(t_0)$ ispunjeni su svi potrebni uslovi definicije Ljapunova o ravnomjernoj asimptotskoj stabilnosti u odnosu na početnu vrijednost t_0.

Za rješenja jednačine /1/ koje daje teorema B_1 a/, a koje teži $+\infty$ kad $t \to +\infty$, možemo reći da su stabilna u smislu Ljapunova, ali ne možemo reći da su i asimptotski stabilna, jer ne možemo garantovati i ispunjenje uslova $\lim_{t\to+\infty} |x_1(t)-x(t)|=0$.

Za rješenja jednačine /26/, kao i /27/, za $r<0$ /lema B_3, rješenja teže konačnom broju $-\frac{p}{r}$ /, možemo pokazati da su ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije Ljapunova. Ipak, to nije dovoljno da bi mogli tvrditi da su rješenja jednačine /27/ asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima $\ell(t)x$ u smislu definicije Ljapunova /vidjeti uvod § 2 pod 12. a//, jer ne možemo pokazati da će rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ respektivno jednačina /26/ i /27/ koja su dovoljno bliska u trenutku $t=t_0$ ostati proizvoljno bliska za sve $t \geqslant t_0$.

No, nije teško primjetiti da za dva navedena rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$, koja teže broju $-\frac{p}{r}$ kad $t\to+\infty$, postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da je

$$|x(t)-x_0(t)| < r(t) \quad \text{za sve } t \geqslant t_0 .$$

Takodje je i

$$\lim_{t\to+\infty}\left|-\frac{f(t)}{r+\ell(t)}+\frac{f(t)}{r}\right| = 0,$$

te postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $\delta(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da je

$$\left|-\frac{f(t)}{r+\ell(t)}+\frac{f(t)}{r}\right|<\delta(t) \quad \text{za } t\geq t_0 ,$$

gdje su $-\frac{f(t)}{r+\ell(t)}$ i $-\frac{f(t)}{r}$ stacionarne krive respektivno jednačina /26/ i /27/.

Prema tome, možemo zaključiti da je svako rješenje $x_0(t)$ koje je odredjeno početnim uslovom $x_0(t_0)$, a koje obezbjedjuje lema B_3, asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima $\ell(t)x$ u smislu definicije 6 /II§3.4./, jer su potrebni uslovi ispunjeni.

Medjutim, ako uslovima /23/, /24/ i /25/ dodamo uslov

$$-\left(r+|\ell(t)|\right)\varepsilon(t)+\varepsilon'(t)>m(t) \quad \text{za } t\geq t_0 ,$$

gdje je $m(t)\geq 0$ neprekidna funkcija koja ispunjava uslove

$$\left|\left(-\frac{f(t)}{r}\right)'\right|\leq m(t), \quad \left|\left(-\frac{f(t)}{r+\ell(t)}\right)'\right|\leq m(t) \quad \text{za } t\geq t_0 ,$$

tada možemo efektivno odrediti klasu rješenja jednačine /27/ i za istu formirati odredjenu funkciju $r(t)$ tako da je svako rješenje koje pripada toj klasi asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima u smislu definicije 6, a sa tom funkcijom $r(t)$.

Ustvari, uz uslove /23/, /24/ i /25/, gornji dodatni uslov garantuje postojanje jedne klase rješenja jednačine /27/ koja pripada "cijevi"

$$t\geq t_0 , \quad -\frac{f(t)}{r}-\varepsilon(t)<x<-\frac{f(t)}{r}+\varepsilon(t)$$

za sve $t\geq t_0$, kao i jedne klase rješenja jednačine /26/ koja pripada "cijevi"

$$t\geq t_0 , \quad -\frac{f(t)}{r+\ell(t)}-\varepsilon(t)<x<-\frac{f(t)}{r+\ell(t)}+\varepsilon(t)$$

za sve $t\geq t_0$ /dokaz ovog u principu je isti kao dokaz teoreme B_1/, a te "cijevi" pripadaju široj "cijevi"

$$t\geq t_0 , \quad -\frac{f(t)}{r}-r(t)<x<-\frac{f(t)}{r}+r(t) ,$$

gdje je $r(t)$ monotono opadajuća funkcija koja teži nuli i

$$r(t)=\varepsilon(t)+\delta(t) ,$$

a funkcija $\delta(t)$ neprekidna, monotono opadajuća, teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da je

$$\left|-\frac{f(t)}{r+\ell(t)}+\frac{f(t)}{r}\right|<\delta(t) \quad \text{za } t\geq t_0 .$$

Dakle, svako rješenje $x_0(t)$ /tačno ili približno/ jednačine /27/ koje je odredjeno početnim uslovom $x_0(t_0)$, gdje je

$$x_0(t_0) \in \left(-\frac{f(t_0)}{r} - \varepsilon(t_0),\ -\frac{f(t_0)}{r} + \varepsilon(t_0)\right)$$

je asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima $l(t)x$ u smislu definicije 6, a sa $r(t) = \varepsilon(t) + \delta(t)$.

§ 1.3.

Sada ćemo da damo uopštenja rezultata datih u § 1.1, odnosno posmatraćemo jednačinu /2/, tj. jednačinu

/2/ $$\frac{dx}{dt} = a(t)x^n + f(t) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

gdje funkcije $a(t)$ i $f(t)$ ispunjavaju iste osnovne uslove kao i u jednačini /1/.

Prvo posmatrajmo jednačinu

/2'/ $$\frac{dx}{dt} = a(t)x^{2n+1} + f(t) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

i posvetimo pažnju uopštenju dobijenih rezultata za jednačinu /1/ i na jednačinu /2'/.

1° Tvrdjenja lema B_1 i B_2 važe u potpunosti i za jednačinu /2'/ /samo umjesto b, uslov /8/, treba da stoji $\sqrt[2n+1]{b}$ /, ako se samo uslov /9/, u slučaju $b \neq 0$, zamjeni uslovom

/9'/ $$-a(t)\varepsilon(t) > \frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(\left|-\frac{f(t)}{a(t)}\right| - \varepsilon(t)\right)^{2n}}} \quad \text{za } t \geq t_0,$$

a uslov /11/ zamjeni uslovom

/11'/ $$\sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)} < x(t) < \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t)};$$

a u slučaju $b = 0$, tj. u slučaju kada je

/48/ $$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = 0,$$

uslov /9/ možemo zamjeniti uslovom

/9"/ $$-a(t)\varepsilon(t) > \frac{|m'(t)| - \varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{(m(t) + \varepsilon(t))^{2n}}} \quad \text{za } t \geq t_0,$$

gdje je funkcija $m(t)$ neprekidna, nenegativna, teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da je

/49/ $$\left|-\frac{f(t)}{a(t)}\right| \leq m(t) \quad \text{za } t \geq t_0,$$

a uslov /11/ zamjeni uslovom

/11"/ $$|x(t)| < \sqrt[2m+1]{m(t)+\varepsilon(t)} \quad , t \geq t_0 .$$

Ako je $f(t) \geq 0$ ili $f(t) \leq 0$ ne treba uvoditi funkciju $m(t)$, a umjesto uslova /9"/ može da stoji uslov

$$-a(t)\varepsilon(t) > \frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{\left(\left|-\frac{f(t)}{a(t)}\right| + \varepsilon(t)\right)^{2m}}} \quad \text{za } t \geq t_0 .$$

Treba samo dokazati da uslovi /9'/ i /9"/ obezbjedjuju ulaženje integralnih krivih u odgovarajuće "cijevi", što ćemo, ustvari, učiniti u dokazu teoreme B_1'.

2° Navedimo sada uopštenja nekih rezultata koje daje teorema B_1, kroz sljedeću teoremu.

TEOREMA B_1'.

Tvrdjenja teoreme B_1 važe i u slučaju jednačine /2'/ uz odgovarajuće modifikacije i dopune i to:

a/ Tvrdjenje a/ važi u potpunosti.

b/ Tvrdjenje b/ važi ako uslov /16/ zamjenimo uslovom /9'/ /kada je $\left|-\frac{f(t)}{a(t)}\right| - \varepsilon(t) > 0$ za $t \geq t_0$ /, odnosno, pri uslovu /48/, ako uslov /16/ zamjenimo uslovom /9"/ /u uslovima /9'/ i /9"/ umjesto $-a(t)$ treba da stoji $|a(t)|$ /.

c/ Tvrdjenje d/ važi ako uslovu /18/ dodamo uslov

/5o/ $$\left|-\frac{f(t)}{a(t)}\right| - \varepsilon(t) \geq B \quad \text{za } t \geq t_0 ,$$

a u slučaju uslova /48/ uslov /18/ zamjenimo uslovom

/51/ $$\left|\left(\sqrt[2m+1]{m(t)+\varepsilon(t)}\right)'\right| \leq C \quad \text{za } t \geq t_0$$

/B i C su pozitivne fiksirane konstante/.

Uslov /11/ treba zamjeniti uslovom /11'/, odnosno uslovom /11"/ /u slučaju uslova /48// [1].

Dokaz.

a/ Ovo tvrdjenje je očevidno.

---

[1] Izostavili smo uopštenje tvrdjenja c/ teoreme B_1, jer bi nam za to trebalo posvetiti više prostora.

b/ Kriva $x=\sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a(t)}}$ je kriva stacionarnih tačaka jednačine /2'/.

Uslovi /9'/ i /9"/ obezbjedjuju, za $a(t)>0$, izlaženje, a za $a(t)<0$ ulaženje jedne klase integralnih krivih jednačine /2'/ u odgovarajuću "cijev"

Neka je, u slučaju uslova /9'/,

$$\omega_1(t)=\sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a(t)}-\varepsilon(t)}\,,\qquad \omega_2(t)=\sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a(t)}+\varepsilon(t)}\quad (t\geq t_0).$$

Za $a(t)>0$ imamo:

$$x'(\omega_1(t))=-a(t)\varepsilon(t)<\frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right|-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(\left|-\frac{f(t)}{a(t)}\right|-\varepsilon(t)\right)^{2n}}}\leq$$

$$\leq-\frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right|-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}}<\frac{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}}=\omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t))=a(t)\varepsilon(t)>\frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right|-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(\left|-\frac{f(t)}{a(t)}\right|-\varepsilon(t)\right)^{2n}}}\geq$$

$$\geq\frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right|-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2n}}}>\frac{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'+\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2n}}}=\omega_2'(t),$$

što znači da rješenja jednačine /2'/ prolaze kroz tačke krivih $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ izlazeći iz "cijevi" koju čine te krive, te, prema metodi retrakcije, bar jedno rješenje jednačine /2'/, za sve $t\geq t_0$, nalazi se u toj "cijevi", te i ispunjava uslov /11'/.

Za $a(t)<0$ važi

$$x'(\omega_1(t))=-a(t)\varepsilon(t)>\frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right|-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(\left|-\frac{f(t)}{a(t)}\right|-\varepsilon(t)\right)^{2n}}}\geq$$

$$\geq\frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right|-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}}\geq\frac{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}}=\omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t))=a(t)\varepsilon(t)<-\frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right|-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(\left|-\frac{f(t)}{a(t)}\right|-\varepsilon(t)\right)^{2n}}}\leq$$

$$\leq-\frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right|-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2n}}}\leq\frac{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'+\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2n}}}=\omega_2'(t),$$

što znači da integralne krive jednačine /2'/ prolaze kroz krive $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ ulazeći u "cijev" koju čine te krive, te rješenja oblasti $\omega_1(t)<x<\omega_2(t)$

$(t \geq t_0)$ čine klasu rješenja koja ispunjava uslov /11'/.

Posmatrajmo sada slučaj kada su ispunjeni uslovi /48/ i /9"/. Ovdje za funkcije $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ treba uzeti

$$\omega_1(t) = -\sqrt[2m+1]{m(t)+\varepsilon(t)}\,, \quad \omega_2(t) = \sqrt[2m+1]{m(t)+\varepsilon(t)} \quad (t \geq t_0)\,.$$

Prema /9"/ i /49/, za $a(t) > 0$, važi:

$$x'(\omega_1(t)) = a(t)\left(-m(t)-\varepsilon(t)\right) + f(t) \leq a(t)\left(-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)\right) + f(t) =$$

$$= -a(t)\varepsilon(t) < -\frac{|m'(t)| - \varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{(m(t)+\varepsilon(t))^{2m}}} \leq \frac{m'(t)+\varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{(m(t)+\varepsilon(t))^{2m}}} = \omega_1'(t)\,,$$

$$x'(\omega_2(t)) = a(t)\left(m(t)+\varepsilon(t)\right) + f(t) \geq a(t)\left(-\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t)\right) + f(t) = a(t)\varepsilon(t) > -\omega_1'(t) = \omega_2'(t)\,,$$

a za $a(t) < 0$ je:

$$x'(\omega_1(t)) = a(t)\left(-m(t)-\varepsilon(t)\right) + f(t) \geq a(t)\left(-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)\right) + f(t) = -a(t)\varepsilon(t) > \omega_1'(t)\,,$$

$$x'(\omega_2(t)) = a(t)\left(m(t)+\varepsilon(t)\right) + f(t) \leq a(t)\left(-\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t)\right) + f(t) = a(t)\varepsilon(t) < -\omega_1'(t) = \omega_2'(t)\,,$$

što, takodje, obezbjedjuje izlaženje, odnosno ulaženje integralnih krivih jednačine /2'/ u "cijev" koja je ograničena krivama $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$.

Dodatni uslov /13/ obezbjedjuje ulaženje svih rješenja jednačine /2'/ u odgovarajuću "cijev", za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$. Posmatrajmo to, na primjer, za rješenja oblasti

$$x < \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)}\,, \quad t \geq t_0\,.$$

Neka je

$$P\left(t, \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t) - \delta}\right)$$

/ δ je proizvoljan pozitivan broj/ proizvoljna tačka te oblasti. Prema /9'/ i /13/ je

$$x'(P) = -a(t)\varepsilon(t) - a(t)\delta > \left(\sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)}\right)' - A\delta\,,$$

a to znači da integralne krive jednačine /2'/ u tačkama navedene oblasti imaju koeficijent smjera pozitivan i veći od koeficijenta smjera donje granice odgovarajuće "cijevi" za više od pozitivnog broja $-A\delta$, te će za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, i stići do te "cijevi", a zatim i ući u nju. Ustvari, dobijena ocjena o vrijednosti $x'(P)$ pokazuje da integralna kriva koja prolazi kroz tačku P ima koeficijent smjera veći od koeficijenta smjera krive koja prolazi kroz tačku P, a paralelna je sa donjom granicom odgovarajuće "cijevi", za više od pozitivnog broja $-A\delta$, te će i presjeći tu krivu približavajući se donjoj granici odgovarajuće "cijevi", a kako je P proizvoljna tačka navedene oblasti to će uočena integralna kriva i stići do donje granice "cijevi", a zatim i ući u nju.

U slučaju navedenog tvrdjenja c/ uslovi /17/, /18/, /2o/, /5o/ i /51/ obezbjedjuju ispunjenje uslova /9'/, odnosno /9"/, jer su desne strane tih uslova, pri navedenim pretpostavkama, ograničene, a funkcija $a(t)$ ispunjava uslov /2o/.

3° Posmatrajmo sada jednačine

/26'/ $$\frac{dx}{dt} = r x^{2m+1} + f(t) + \ell(t) x^{2m+1},$$

/27'/ $$\frac{dx_0}{dt} = r x_0^{2m+1} + f(t) \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots),$$

koje odgovaraju jednačinama /26/ i /27/, kao i jednačine

/35'/ $$\frac{dx}{dt} = a_1(t) x^{2m+1} + f(t) + \mathcal{L}(t) x^{2m+1},$$

/36'/ $$\frac{dx_0}{dt} = a_1(t) x^{2m+1} + f(t) \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots),$$

koje odgovaraju jednačinama /35/ i /36/.

Nije teško primjetiti da tvrdjenja lema B_3 i B_4 a/ važe u potpunosti i u slučaju jednačina /26'/ i /27'/.

Kao uopštenje teoreme B_2 na jednačine /35'/ i /36'/ možemo dati sljedeću teoremu.

TEOREMA B_2'.

a/ Tvrdjenja a/ i b/ teoreme B_2 važe i za jednačine /35'/ i /36'/ samo ako uslov /33/ zamjenimo uslovom

/33'/ $$-\left(a_1(t) + |\mathcal{L}(t)|\right) \varepsilon(t) > \frac{m(t) - \varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{\left(-\frac{|f(t)|}{a_1(t) - |\mathcal{L}(t)|} - \varepsilon(t)\right)^{2m}}} \quad \text{za } t \geq t_0,$$

u slučaju kada je

/52/ $$-\frac{|f(t)|}{a_1(t) - |\mathcal{L}(t)|} - \varepsilon(t) > 0 \quad \text{za } t \geq t_0,$$

a u slučaju uslova

/53/ $$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = 0$$

zamjeni uslovom

/33"/ $$-\left(a_1(t) + |\mathcal{L}(t)|\right) \varepsilon(t) > \frac{|m'(t)| - \varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{\left(m(t) + \varepsilon(t)\right)^{2m}}} \quad \text{za } t \geq t_0,$$

gdje je funkcija $m(t)$ neprekidna, monotona, teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da je

$$-\frac{|f(t)|}{a_1(t)+|\alpha(t)|} \leqslant m(t) \quad za \ t \geqslant t_0 .$$

b/ Tvrdjenje c/ teoreme B_2 važi samo ako se uslovu /4o/ doda uslov

/54/ $$-\frac{|f(t)|}{a_1(t)-|\alpha(t)|} - \varepsilon(t) \geqslant B \quad za \ t \geqslant t_0 ;$$

a u slučaju uslova /53/, ako uslov /4o/ zamjenimo uslovom

/55/ $$\left|\left(\sqrt[2n+1]{m(t)+\varepsilon(t)}\right)'\right| \leqslant C \quad za \ t \geqslant t_0$$

/ B i C su pozitivne fiksirane konstante/.

Dokaz.

a/ Rješenja jednačine /35'/ su rastuća u oblasti $x < \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}}$ $(t \geqslant t_0)$, a opadajuća u oblasti $x > \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}}$ $(t \geqslant t_0)$. Kod jednačine /36'/ rješenja su rastuća za $x < \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a(t)}}$ $(t \geqslant t_0)$, a opadajuća za $x > \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a(t)}}$ $(t \geqslant t_0)$.

Prvo posmatrajmo slučaj kada važi /52/.

Uzmimo da je

/56/ $$u_1(t) = \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)} - \varepsilon(t)}, \quad u_2(t) = \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)} + \varepsilon(t)} \quad (t \geqslant t_0),$$

/57/ $$u_3(t) = \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)} - \varepsilon(t)}, \quad u_4(t) = \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)} + \varepsilon(t)} \quad (t \geqslant t_0).$$

Uslov /33'/ obezbjedjuje da sva rješenja jednačine /35'/ oblasti $u_3(t) \leqslant x \leqslant u_4(t)$ $(t \geqslant t_0)$ ulaze u "cijev" odredjenu krivama /57/ /ili su i bila u njoj/ i ostaju u njoj, kao i da sva rješenja jednačine /36'/ oblasti $u_1(t) \leqslant x \leqslant u_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$ ulaze u "cijev" odredjenu krivama /56/ /ili su i bila u njoj/ i ostaju u njoj.

Zaista je:

$$x'(u_3(t)) = -\left(a_1(t)+\alpha(t)\right)\varepsilon(t) \geqslant -\left(a_1(t)+|\alpha(t)|\right)\varepsilon(t) > \frac{m(t)-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{|f(t)|}{a_1(t)-|\alpha(t)|}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{m(t)-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}} \geqslant \frac{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}\right)' - \varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}} = u_3'(t);$$

$$x'(u_4(t)) = \left(a_1(t)+\alpha(t)\right)\varepsilon(t) \leqslant \left(a_1(t)+|\alpha(t)|\right)\varepsilon(t) < -\frac{m(t)-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{|f(t)|}{a_1(t)-|\alpha(t)|}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}} \leqslant$$

$$\leq -\frac{m(t)-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2n}}} \leq \frac{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}\right)'+\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2n}}} = u_4'(t);$$

$$x_0'(u_1(t)) = -a_1(t)\varepsilon(t) \geq -\left(a_1(t)+|\alpha(t)|\right)\cdot\varepsilon(t) > \frac{m(t)-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{|f(t)|}{a_1(t)-|\alpha(t)|}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}} \geq$$

$$\geq \frac{m(t)-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}} \geq \frac{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right)'-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}} = u_1'(t),$$

$$x_0'(\text{[illegible]} \varepsilon(t) \leq \left(a_1(t)+|\alpha(t)|\right)\varepsilon(t) < -\frac{m(t)-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{|f(t)|}{a_1(t)-|\alpha(t)|}-\varepsilon(t)\right)^{2n}}} \leq$$

$$\leq -\frac{m(t)-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2n}}} \leq \frac{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right)'+\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{f(t)}{a_1(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2n}}} = u_2'(t).$$

S druge strane, relaciji /41/ odgovara relacija

$$0 \leq \left|\sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}} - \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)}}\right| = \left|\sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)}}\left(\sqrt[2n+1]{\frac{1}{1+\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}}}-1\right)\right| =$$

/41'/

$$= \sqrt[2n+1]{\left|-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right|}\cdot\frac{1}{\sqrt[2n+1]{1+\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}}}\cdot\left|\left(1-\sqrt[2n+1]{1+\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}}\right)\right| =$$

$$= \sqrt[2n+1]{\left|-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right|}\cdot\frac{1}{\sqrt[2n+1]{1+\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}}}\cdot\frac{\left|-\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}\right|}{1+\sqrt[2n+1]{1+\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}}+\sqrt[2n+1]{\left(1+\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}\right)^2}+\ldots+\sqrt[2n+1]{\left(1+\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}\right)^{2n}}} <$$

$$< \sqrt[2n+1]{\left|-\frac{f(t)}{a_1(t)}\right|}\cdot\left|\frac{-\alpha(t)}{a_1(t)}\right|\cdot\frac{1}{\sqrt[2n+1]{1+\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}}} \leq \left|\frac{f(t)\,\alpha(t)}{a_1^2(t)}\right|\cdot\frac{1}{\sqrt[2n+1]{1+\frac{\alpha(t)}{a_1(t)}}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Otuda, postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $\delta(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da ispunjava uslov

$$\left|\sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)+\alpha(t)}} - \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)}}\right| < \delta(t) \quad \text{za } t \geq t_0,$$

te postoji i neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da je

$$\left|\sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)}} - u_i(t)\right| < r(t) \quad \text{za } t \geq t_0 \quad (i=1,2,3,4).$$

Možemo zaključiti da jednačine /35'/ i /36'/ imaju po jednu klasu rješenja koja, za sve $t \geq t_0$, pripadaju "cijevi"

$$t \geq t_0, \quad \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)}} - r(t) < x < \sqrt[2n+1]{-\frac{f(t)}{a_1(t)}} + r(t),$$

jer krive $u_i(t)$ $(t \geq t_0)$ $(i=1,2,3,4)$ pripadaju toj "cijevi", te i ispunjavaju /37/.

Posmatrajmo sada slučaj kada je ispunjen uslov /53/.

Ovdje treba uzeti da je

$$u_1(t) = u_3(t) = -\sqrt[2n+1]{m(t)+\varepsilon(t)}, \quad u_2(t) = u_4(t) = \sqrt[2n+1]{m(t)+\varepsilon(t)} \quad (t \geq t_0)$$

/ $\lim\limits_{t\to+\infty} u_i(t) = 0$ $(i=1,2,3,4)$/. Kriva $-\sqrt[2n+1]{m(t)+\varepsilon(t)}$ pripada oblasti rastućih rješenja, kako jednačine /35'/, tako i jednačine /36'/, a kriva $\sqrt[2n+1]{m(t)+\varepsilon(t)}$ pripada oblasti opadajućih rješenja i jedne i druge jednačine, jer, za $t \geq t_0$, važi:

$$-\frac{|f(t)|}{a_1(t)} \leq -\frac{|f(t)|}{a_1(t)+|\alpha(t)|} \leq m(t),$$

$$-\frac{|f(t)|}{a_1(t)+\alpha(t)} \leq -\frac{|f(t)|}{a_1(t)+|\alpha(t)|} \leq m(t).$$

Uslov /33"/ obezbjedjuje da rješenja jednačina /35'/ i /36'/ oblasti $u_1(t) \leq x \leq u_2(t)$ $(t \geq t_0)$ čine klase rješenja koje ispunjavaju uslov /37/, jer važi:

$$x'(u_1(t)) = (a_1(t)+\alpha(t))(-m(t)-\varepsilon(t)) + f(t) \geq (a_1(t)+\alpha(t))\left(\frac{|f(t)|}{a_1(t)+\alpha(t)} - \varepsilon(t)\right) + f(t) \geq$$

$$\geq -(a_1(t)+\alpha(t))\varepsilon(t) \geq -(a_1(t)+|\alpha(t)|)\varepsilon(t) > \frac{|m'(t)|-\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{(m(t)+\varepsilon(t))^{2n}}} \geq -\frac{m'(t)+\varepsilon'(t)}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{(m(t)+\varepsilon(t))^{2n}}} = u_1'(t),$$

$$x'(u_2(t)) = (a_1(t)+\alpha(t))(m(t)+\varepsilon(t)) + f(t) \leq (a_1(t)+\alpha(t))\left(-\frac{|f(t)|}{a_1(t)+\alpha(t)} + \varepsilon(t)\right) + f(t) \leq (a_1(t)+\alpha(t))\varepsilon(t) < -u_1'(t) = u_2'(t);$$

$$x_0'(u_1(t)) = a_1(t)(-m(t)-\varepsilon(t)) + f(t) \geq a_1(t)\left(\frac{|f(t)|}{a_1(t)} - \varepsilon(t)\right) + f(t) \geq -a_1(t)\varepsilon(t) \geq -(a_1(t)+|\alpha(t)|)\varepsilon(t) > u_1'(t),$$

$$x_0'(u_2(t)) = a_1(t)(m(t)+\varepsilon(t)) + f(t) \leq a_1(t)\left(-\frac{|f(t)|}{a_1(t)} + \varepsilon(t)\right) + f(t) \leq a_1(t)\varepsilon(t) < -u_1'(t) = u_2'(t).$$

Dalje bismo, na sličan način kao kod teoreme B_1', dokazali da dodatni uslov /38/ obezbjedjuje ulaženje svih rješenja jednačina /35'/ i /36'/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, u odgovarajuće "cijevi".

b/ Primjetimo da uslovi /39/, /40/ i /54/ obezbjedjuju uslov /33'/, a uslovi /39/ i /55/ obezbjedjuju uslov /33"/. Ustvari, dovoljno je primjetiti da su, u ovim slučajevima, desne strane nejednakosti /33'/ i /33"/ ograničene za $t \geq t_0$, a da na lijevoj strani uz $\varepsilon(t)$ imamo funkciju $a_1(t)$ koja ispunjava uslov /39/, te da se može konstatovati da se može odrediti odgovarajuća funkcija $\varepsilon(t)$.

Sada nije teško primjetiti da bismo na sličan način mogli uopštiti i tvrdjenje leme B_4 b/, uz odgovarajuće modifikacije i dopune uslova.

Što se tiče pitanja stabilnosti odgovarajućih rješenja jednačine /2'/ možemo konstatovati da i za njih važe odgovarajući zaključci dati u § 1.2. ove glave.

Posmatrajmo sada jednačinu /2/ za n parno, odnosno posmatrajmo jednačinu

$$/2''/ \qquad \frac{dx}{dt} = a(t)\,x^{2n} + f(t) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

gdje funkcije $a(t)$ i $f(t)$ treba da ispunjavaju i osnovni uslov

$$-\frac{f(t)}{a(t)} > 0\,, \quad a(t) \neq 0 \quad \text{za } t \geq t_0\,,$$

tj. da funkcije $a(t)$ i $f(t)$ imaju stalan i suprotan znak.

Ovdje je ponašanje integralnih krivih složenije nego kod jednačine /2'/, jer krive stacionarnih tačaka $x = \pm \sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)}}$ $(t \geq t_0)$ oblast ravni tOx $(t \geq t_0)$ dijele na tri podoblasti, gdje u susjednim podoblastima integralne krive imaju različita ponašanja /suprotne koeficijente smjera/. Funkcija $a(t)$ odredjuje znak desne strane u oblasti $|x| > \sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)}}$ $(t \geq t_0)$, a funkcija $f(t)$ u oblasti $|x| < \sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)}}$ $(t \geq t_0)$.

Koristeći prethodne rezultate navesćemo, bez dokaza, samo neke bitno različite rezultate[1], podrazumjevajući da funkcije $a(t)$ i $f(t)$ ispunjavaju osnovne navedene uslove.

1° Pod uslovima

$$\lim_{t \to +\infty} a(t) = r \qquad /r \text{ je konačan broj, a može biti i } \pm\infty\,/,$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = b \qquad /b \text{ je pozitivan broj ili nula}/,$$

jednačina /2''/, za $t \geq t_0$, ima:

a/ Za $r > 0$ i $f(t) < 0$, bar jedno pozitivno rješenje koje teži $\sqrt[2n]{b}$ kad $t \to +\infty$, a sva negativna i jedna klasa pozitivnih rješenja teže $-\sqrt[2n]{b}$ kad $t \to +\infty$;

b/ Za $r < 0$ i $f(t) > 0$, bar jedno negativno rješenje koje teži $-\sqrt[2n]{b}$, a sva pozitivna i jedna klasa negativnih rješenja teže $\sqrt[2n]{b}$ kad $t \to +\infty$.

Klase rješenja koje teže $\sqrt[2n]{b}$, odnosno $-\sqrt[2n]{b}$, su ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije Ljapunova.

---

[1] Dokazi ovih rezultata u principu su sadržani u dokazima navedenih tvrdjenja.

2^{o} Pod uslovima

/59/ $|a(t)| \geqslant M$ za $t \geqslant t_0$ /M je poz. konst./,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = +\infty ,$$

jednačina /2"/, za $t \geqslant t_0$, ima:

a/ Za $a(t) \geqslant M > 0$ i $f(t) < 0$, bar jedno pozitivno rješenje koje teži $+\infty$, a sva negativna i jedna klasa pozitivnih rješenja teže $-\infty$ kad $t \to +\infty$;

b/ Za $a(t) \leqslant -M < 0$ i $f(t) > 0$, bar jedno negativno rješenje koje teži $-\infty$, a sva pozitivna i jedna klasa negativnih rješenja teže $+\infty$ kad $t \to +\infty$.

Klase rješenja koja teže $+\infty$, odnosno $-\infty$, su stabilna u smislu Ljapunova.

3^{o} Pod uslovima /48/ i

$$|a(t)|\, \varepsilon(t) > \frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t)}{2n \sqrt[2n]{\left(-\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t)\right)^{2n-1}}} \quad \text{za } t \geqslant t_0 ,$$

jednačina /2"/, za $t \geqslant t_0$, ima jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/6o/ $$|x(t)| < \sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t)} \quad \text{za sve } t \geqslant t_0$$

i to:

a/ Za $a(t) > 0$ i $f(t) < 0$, bar jedno pozitivno rješenje $x(t)$ koje za sve $t \geqslant t_0$ ispunjava uslov

/6o'/ $$0 < x(t) < \sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t)}$$

i jednu klasu negativnih rješenja koja za sve $t \geqslant t_0$ ispunjava uslov

/6o"/ $$-\sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t)} < x(t) < 0 .$$

b/ Za $a(t) < 0$ i $f(t) > 0$, jednu klasu pozitivnih rješenja koja ispunjava uslov /6o'/ i bar jedno negativno rješenje koje ispunjava uslov /6o"/ /sva rješenja koja ispunjavaju uslov /6o'/ i /6o"/ i ona izmedju njih ispunjavaju uslov /6o//.

Klase rješenja koje ispunjavaju uslove /6o'/ i /6o"/, odnosno uslov /6o/, su ravnomjerno asimptotski stabilne u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4 /II § 3.2./.

Ako pored navedenih uslova, funkcija $a(t)$ ispunjava i uslov /59/, tada, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, u slučaju a/ uslov /60"/ ispunjavaju sva rješenja oblasti $x \leq 0$ $(t \geq t_0)$, a u slučaju b/ uslov /60'/ ispunjavaju sva rješenja oblasti $x \geq 0$ $(t \geq t_0)$. Te oblasti predstavljaju i oblasti asimptotske stabilnosti odgovarajućih klasa rješenja.

4^0 Pod uslovom

/61/
$$|a(t)|\,\varepsilon(t) > \frac{\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t)}{2n\sqrt[2n]{\left(-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)\right)^{2n}}} \quad \text{za } t \geq t_0$$

pri $-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t) > 0$ $(t \geq t_0)$, jednačina /2"/, za $t \geq t_0$, ima:

a/ Za $a(t) > 0$ i $f(t) < 0$, bar jedno pozitivno rješenje $x(t)$ koje za sve $t \geq t_0$ ispunjava uslov

/62/
$$\sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)} < x(t) < \sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t)}$$

i jednu klasu negativnih rješenja koja za sve $t \geq t_0$ ispunjava uslov

/63/
$$-\sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)} + \varepsilon(t)} < x(t) < -\sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)} \;;$$

b/ Za $a(t) < 0$ i $f(t) > 0$, jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t \geq t_0$ ispunjava uslov /62/ i bar jedno negativno rješenje koje za sve $t \geq t_0$ ispunjava uslov /63/.

Klase rješenja koje ispunjavaju uslove /62/ i /63/ su ravnomjerno asimptotski stabilne u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4.

Ako funkcija $a(t)$, pored uslova /61/, ispunjava još i uslov /59/, tada, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, u slučaju a/ uslov /63/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \leq \sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)}\,, \quad t \geq t_0\,,$$

a u slučaju b/ uslov /62/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \geq -\sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a(t)} - \varepsilon(t)}\,, \quad t \geq t_0\,.$$

Navedene oblasti su oblasti asimptotske stabilnosti odgovarajućih klasa rješenja.

5^0 Pod uslovima /23/, /24/ i /25/ rješenja jednačina

/26"/
$$\frac{dx}{dt} = r\,x^{2n} + f(t) + \ell(t)\,x^{2n}\,,$$

/27"/ $$\frac{dx_0}{dt} = r x_0^{2m} + f(t) \quad (m=1,2,\cdots);$$

koja ispunjavaju uslov /29/ su:

a/ za $r<0$ i $f(t)>0$, po bar jedno negativno rješenje tih jednačina, kao i sva pozitivna i po jedna klasa negativnih rješenja;

b/ za $r>0$ i $f(t)<0$, po bar jedno pozitivno rješenje, kao i sva negativna i po jedna klasa pozitivnih rješenja.

Pozitivna rješenja, o kojima je riječ teže $\sqrt[2m]{-\frac{p}{r}}$, a negativna $-\sqrt[2m]{-\frac{p}{r}}$ kad $t \to +\infty$.

Klase rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ respektivno jednačina /26"/ i /27"/ koje teže $\pm\sqrt[2m]{-\frac{p}{r}}$ kad $t\to+\infty$, a koja su odredjena početnim vrijednostima $x(t_0)$ i $x_0(t_0)$ su ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu Ljapunova, a te klase rješenja $x_0(t)$ su i asimptotski stabilne pri stalnim poremećajima $\ell(t)x^{2m}$ u smislu definicije 6.

6° Ako su ispunjeni uslovi /31/, /32/, kao i

$$\left(|a_1(t)| - |\alpha(t)|\right)\varepsilon(t) > \frac{m(t) - \varepsilon'(t)}{2m\sqrt[2m]{\left(\frac{|f(t)|}{|a_1(t)|+|\alpha(t)|} - \varepsilon(t)\right)^{2m-1}}} \quad \text{za } t \geq t_0,$$

pri $\frac{|f(t)|}{|a_1(t)|+|\alpha(t)|} - \varepsilon(t) > 0$ za $t\geq t_0$, gdje je $m(t)$ funkcija koja ispunjava uslove /34/, tada postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da rješenja jednačina

/35"/ $$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x^{2m} + f(t) + \alpha(t)x^{2m},$$

/36"/ $$\frac{dx_0}{dt} = a_1(t)x_0^{2m} + f(t) \quad (m=1,2,\cdots)$$

koja, za sve $t\geq t_0$, ispunjavaju uslov /37/, odnosno uslov /29/, su:

a/ za $a_1(t)<0$ i $f(t)>0$, po bar jedno negativno rješenje tih jednačina, kao i po jedna klasa pozitivnih rješenja;

b/ za $a_1(t)>0$ i $f(t)<0$, po bar jedno pozitivno rješenje, kao i po jedna klasa negativnih rješenja.

Jednačina /36"/, pri $a_1(t)<0$, ima jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t\geq t_0$ ispunjava uslov

$$\sqrt[2m]{-\frac{f(t)}{a_1(t)} - \varepsilon(t)} < x_0(t) < \sqrt[2m]{-\frac{f(t)}{a_1(t)} + \varepsilon(t)},$$

a pri $a_1(t)>0$, jednu klasu negativnih rješenja koja za sve $t\geq t_0$ ispunjava uslov

$$-\sqrt[2m]{-\frac{f(t)}{a_1(t)} + \varepsilon(t)} < x_0(t) < -\sqrt[2m]{-\frac{f(t)}{a_1(t)} - \varepsilon(t)}.$$

Te klase rješenja $x_o(t)$ su ravnomjerno asimptotski stabilne u odnosu na početnu vrijednost t_o u smislu definicije 4 i ujedno su asimptotski stabilne pri stalnim poremećajima $\mathcal{L}(t)x^{2m}$ u smislu definicije 6.

Ako funkcija $a_1(t)$ ispunjava i uslov

/65/ $$|a_1(t)| \geq B \quad \text{za } t \geq t_o \text{ /B je poz. konst./,}$$

tada uslov /37/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_o$, ispunjavaju: u slučaju a/ sva rješenja oblasti

$$x \geq -\sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{|a_1(t)| + |\alpha(t)|} - \varepsilon(t)}\ ,\quad t \geq t_o\ ,$$

a u slučaju b/ sva rješenja oblasti

$$x \leq \sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{|a_1(t)| + |\alpha(t)|} - \varepsilon(t)}\ ,\quad t \geq t_o\ .$$

U ovom slučaju te oblasti predstavljaju oblasti asimptotske stabilnosti odgovarajućih klasa rješenja.

7^0 Ako funkcija $-\frac{f(t)}{a_1(t)}$ ispunjava uslov /53/ tada, pod uslovom /31/, kao i

/66/ $$\left(|a_1(t)| - |\alpha(t)|\right)\varepsilon(t) > \frac{|m'(t)| - \varepsilon'(t)}{2m\sqrt[2m]{\left(m(t)+\varepsilon(t)\right)^{2m-1}}} \quad \text{za } t \geq t_o\ ,$$

gdje je funkcija $m(t)$ neprekidna, pozitivna, teži nuli kad $t \to +\infty$ i ispunjava uslov

$$\frac{|f(t)|}{|a_1(t)| - |\alpha(t)|} \leq m(t) \quad \text{za } t \geq t_o\ ,$$

postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da rješenja jednačina /35"/ i /36"/ koja, za sve $t \geq t_o$, ispunjavaju uslov /37/, odnosno uslov /29/, su:

a/ za $a_1(t) < 0$ i $f(t) > 0$, po bar jedno negativno rješenje tih jednačina, kao i po jedna klasa pozitivnih rješenja;

b/ za $a_1(t) > 0$ i $f(t) < 0$, po bar jedno pozitivno rješenje, kao i po jedna klasa negativnih rješenja.

/Rješenja $x(t)$ i $x_o(t)$ respektivno jednačina /35"/ i /36"/, o kojima je riječ, ustvari, ispunjavaju uslove $|x(t)| < r(t)$, $|x_o(t)| < r(t)$ $(t \geq t_o)$.

Ovdje jednačina /36"/ ima jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t \geq t_o$ ispunjava uslov

$$0 < x_o(t) < \sqrt[2m]{-\frac{f(t)}{a_1(t)} + \varepsilon(t)}$$

pri $a_1(t) < 0$; dok pri $a_1(t) > 0$ ima jednu klasu negativnih rješenja koja za sve $t \geq t_o$ ispunjava uslov

$$-\sqrt[2n]{-\frac{f(t)}{a_1(t)}+\varepsilon(t)} < x_0(t) < 0 .$$

Te klase rješenja jednačine /36"/ su ravnomjerno asimptotski stabilne u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4 i ujedno su asimptotski stabilne pri stalnim poremećajima $\mathcal{L}(t)x^{2n}$ u smislu definicije 6.

Ako funkcija $a_1(t)$ ispunjava i uslov /65/, tada uslov /37/, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, ispunjavaju: u slučaju a/ sva rješenja oblasti $x \geqslant 0$ $(t \geqslant t_0)$, a u slučaju b/ sva rješenja oblasti $x \leqslant 0$ $(t \geqslant t_0)$. Te oblasti su i oblasti asimptotske stabilnosti odgovarajućih klasa rješenja.

Ako u gornjem tvrdjenju izostavimo uslov /66/, tada po bar jedno rješenje jednačina /35"/ i /36"/ ispunjavaju uslov /37/.

PRIMJERI

1. Jednačina

$$x' = \frac{1-t}{t}\, x^n + e^{-t}\sin t + 5 \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

za $t \geqslant t_0 > 1$, ima:

a/ za $n = 2k+1$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$, sva rješenja koja teže $\sqrt[2k+1]{5}$ kad $t \to +\infty$;

b/ za $n = 2k$ $(k = 1, 2, \cdots)$, bar jedno negativno rješenje koje teži $-\sqrt[2k]{5}$, a sva pozitivna i jedna klasa negativnih rješenja teže $\sqrt[2k]{5}$ kad $t \to +\infty$.

Klase rješenja $x(t)$ koja teže $\sqrt[2k+1]{5}$ i $\sqrt[2k]{5}$, a koja su odredjena početnim vrijednostima $x(t_0)$, su ravnomjerno asimptotski stabilne klase rješenja u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu Ljapunova.

Ovdje je: $a(t) = \frac{1-t}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} -1$, $-\frac{f(t)}{a(t)} = \frac{t}{t-1}\left(e^{-t}\sin t + 5\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 5$.

2. Jednačina

$$x' = \frac{1}{\sqrt{t}}\, x^n - \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

za $t \geqslant e^2$, ima:

a/ za $n = 2k+1$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, bar jedno pozitivno rješenje koje za sve $t \geqslant e^2$ ispunjava uslov

$$\sqrt[2k+1]{\ln t} < x(t) < \sqrt[2k+1]{\ln t + \frac{1}{\ln t}} ,$$

b/ za $n = 2k$ $(k = 1, 2, \dots)$, bar jedno pozitivno rješenje koje za sve $t \geqslant e^2$ ispunjava uslov

$$\sqrt[2k]{\ln t} < x(t) < \sqrt[2k]{\ln t + \frac{1}{\ln t}}$$

i jednu klasu negativnih rješenja koja za sve $t \geqslant e^2$ ispunjava uslov

$$-\sqrt[2k]{\ln t+\frac{1}{\ln t}} < x(t) < -\sqrt[2k]{\ln t}\ .$$

Klasa rješenja koja ispunjava zadnji uslov je ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost $t_0 = e^2$ u smislu definicije 4.

Ovdje je: $a(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $-\frac{f(t)}{a(t)} = \ln t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Uzmemo li da je $\varepsilon(t) = \frac{1}{\ln t}$ može se pokazati da su potrbni uslovi /16/, /9'/ i /61/ ispunjeni za $t \geq e^2$. Kako je kriva $\sqrt[n]{\ln t}$ $(t \geq e^2)$ monotona to se krive $\sqrt[2k+1]{\ln t}$ i $-\sqrt[2k]{\ln t}$ mogu uzeti kao jedna od dvije granice odgovarajućih "cijevi" metode retrakcije.

3. Posmatrajmo jednačinu

/67/ $$x' = 16(\sqrt{t}\cos t - t)x^n + t(30+\sin t) \quad (n=1,2,\cdots).$$

Napišimo jednačinu /67/ u obliku

/67'/ $$x' = -16\,t\,x^n + t(30+\sin t) + 16\sqrt{t}\cos t\, x^n \quad (n=1,2,\cdots).$$

Pored jednačine /67'/ posmatrajmo i jednačinu

/67"/ $$x_0' = -16t\,x_0^n + t(30+\sin t) \quad (n=1,2,\cdots).$$

/Ove jednačine uzete su kao primjer za jednačine /35/ i /36/, odnosno /35'/, /36'/ i /35"/, /36"/./

Ovdje imamo:

$$a(t) = 16(\sqrt{t}\cos t - t)\,,\quad a_1(t) = -16t\,,\quad \alpha(t) = 16\sqrt{t}\cos t\,,$$

$$f(t) = t(30+\sin t)\,,\quad -\frac{f(t)}{a_1(t)} = \frac{30+\sin t}{16}\,,\quad -\frac{f(t)}{a(t)} = \frac{t(30+\sin t)}{16(t-\sqrt{t}\cos t)}\ .$$

Dalje, za $t \geq 16$, važi:

1/ Uslovi /31/, /32/ i /38/ su očevidno ispunjeni;

2/ Za funkciju $m(t)$, koja ispunjava uslove /34/, možemo uzeti $m(t)=1$;

3/ Za $\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ nije teško pokazati da su ispunjeni uslovi /33/, /33'/ i /64/.

Prema tome, možemo dati sljedeće zaključke.

a/ Za $n = 2k+1$ $(k=0,1,2,\cdots)$:

1/ Jednačina /67"/ ima jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t \geq 16$ ispunjava uslov

$$\sqrt[2k+1]{\frac{30+\sin t}{16} - \frac{1}{\sqrt{t}}} < x_0(t) < \sqrt[2k+1]{\frac{30+\sin t}{16} + \frac{1}{\sqrt{t}}}\ ,$$

a za dovoljno veliko $t \geq t^* > 16$, taj uslov ispunjavaju sva rješenja jednačine /67"/;

2/ Jednačina /67'/ ima jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t \geq 16$ ispunjava uslov

$$\sqrt[2k+1]{\frac{t(30+\sin t)}{16(t-\sqrt{t}\cos t)}-\frac{1}{\sqrt{t}}} < x(t) < \sqrt[2k+1]{\frac{t(30+\sin t)}{16(t-\sqrt{t}\cos t)}+\frac{1}{\sqrt{t}}} ,$$

a za dovoljno veliko $t \geq t^* > 16$, taj uslov ispunjavaju sva rješenja jednačine /67'/.

b/ Za $n = 2k$ $(k = 1, 2, \cdots)$:

1/ Jednačina /67"/ ima bar jedno negativno rješenje koje za sve $t \geq 16$ ispunjava uslov

$$-\sqrt[2k]{\frac{30+\sin t}{16}+\frac{1}{\sqrt{t}}} < x_0(t) < -\sqrt[2k]{\frac{30+\sin t}{16}-\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

i jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t \geq 16$ ispunjava uslov

$$\sqrt[2k]{\frac{30+\sin t}{16}-\frac{1}{\sqrt{t}}} < x_0(t) < \sqrt[2k]{\frac{30+\sin t}{16}+\frac{1}{\sqrt{t}}} ,$$

a za dovoljno veliko $t \geq t^* > 16$, taj uslov ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \geq -\sqrt[2k]{\frac{30+\sin t}{16}-\frac{1}{\sqrt{t}}} , \quad t \geq 16 .$$

2/ Jednačina /67'/ ima bar jedno negativno rješenje koje za sve $t \geq 16$ ispunjava uslov

$$-\sqrt[2k]{\frac{t(30+\sin t)}{16(t-\sqrt{t}\cos t)}+\frac{1}{\sqrt{t}}} < x(t) < -\sqrt[2k]{\frac{t(30+\sin t)}{16(t-\sqrt{t}\cos t)}-\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

i jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t \geq 16$ ispunjava uslov

$$\sqrt[2k]{\frac{t(30+\sin t)}{16(t-\sqrt{t}\cos t)}-\frac{1}{\sqrt{t}}} < x(t) < \sqrt[2k]{\frac{t(30+\sin t)}{16(t-\sqrt{t}\cos t)}+\frac{1}{\sqrt{t}}} ,$$

a za dovoljno veliko $t \geq t^* > 16$, taj uslov ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \geq \sqrt[2k]{\frac{t(30+\sin t)}{16(t-\sqrt{t}\cos t)}-\frac{1}{\sqrt{t}}} , \quad t \geq 16 .$$

c/ Na osnovu rezultata pod a/ i b/ lako je primjetiti da postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da će odgovarajuća rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ /po bar jedno ili po jedna klasa/ respektivno jednačina /67'/ i /67"/ ispuniti uslov /37/, te i uslov /29/.

d/ Pitanje stabilnosti rješenja.

Klase rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ respektivno jednačina /67'/ i /67"/ koje ispunjavaju odgovarajuće uslove su ravnomjerno asimptotski stabilne u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4, a klase rješenja $x_0(t)$ koje ispunjavaju odgovarajuće navedene uslove su asimptotski stabilne pri stalnim poremećajima $16\sqrt{t}\cos t\, x^m$ u smislu definicije 6.

Funkcija poremećaja $16\sqrt{t}\cos t\, x^m$, u oblasti kojoj pripadaju asimptotski stabilne klase rješenja, nije ograničena. Ipak, ta funkcija čini male poremećaje u smislu definicije 6, čini male poremećaje stacionarne krive jednačine /67"/ u smislu definicije 6 - razlika stacionarnih krivih jednačina /67'/ i /67"/ teži nuli kad $t \to +\infty$, te postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $\delta(t)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i koja majorira moduo razlike stacionarnih krivih.

§ 2.

U ovom paragrafu posmatraćemo jednačinu

/1/ $$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t) + \varphi(t,x),$$

a zatim i jednačinu

/2/ $$\frac{dx}{dt} = a(t)x^m + f(t) + \varphi(t,x) \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

Funkcije $a(t)$ i $f(t)$ su definisane i neprekidne funkcije realne promjenljive $t \geq t_0$, a funkcija $\varphi(t,x)$ ispunjava uslove:

/a/ neprekidna i ograničena za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$,

/3/ /b/ $\varphi(t, 0) = 0$,

/c/ $|\varphi(t, X) - \varphi(t, x)| \leq \lambda(t)\,|X - x|$,

gdje je $\lambda(t)$ neprekidna i pozitivna funkcija realne promjenljive $t \geq t_0$. Dalje, neka jednačina

/4/ $$\frac{dx_0}{dt} = a(t)x_0 + f(t)$$

dopušta asimptotski ograničeno rješenje, tj.

/5/ $$|x_0(t)| \leq M \quad \text{za} \quad t \geq t_0 \text{ }^{1)},$$

gdje je M fiksirana konstanta /T. Pejović/.

Prema navedenim pretpostavkama o funkciji $\varphi(t,x)$ uzmimo da je

$$\varphi(t,x) = h(t,x)\,x.$$

---

1) U proučavanju jednačine /4/ T. Pejović je uglavnom koristio uslov $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = b$ /b je konačan broj/.

gdje funkcija $h(t,x)$, za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$, ispunjava uslove:

/6/ $\quad$ /a_1/ neprekidna i ograničena,

/b_1/ $|h(t,x)| \leq \lambda(t)$.

Tako ćemo umjesto jednačine /1/ posmatrati jednačinu

/1'/ $$\frac{dx}{dt} = \big(a(t) + h(t,x)\big)x + f(t),$$

a umjesto jednačine /2/ posmatrati jednačinu

/2'/ $$\frac{dx}{dt} = \big(a(t) + h(t,x)\big)x^n + f(t) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

§ 2.1.

Posmatrajmo prvo jednačine /4/ i /1'/ prateći rezultate T. Pejovića. Razlikovaćemo više slučajeva.

1°

TEOREMA A_1.

Ako je, pored osnovnih uslova /3/ i /5/,

/7/ $$\lim_{t\to+\infty} e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = k \neq 0, \infty \; ; \quad \lim_{t\to+\infty} \int_t^{\infty} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s)ds} \cdot \lambda(\xi)\, d\xi = 0 \; ;$$

$$\varepsilon_1(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \int_t^{\infty} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s)ds} \cdot \lambda(\xi)\, d\xi \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \,, \quad \varepsilon_1 = \max_{t\geq t_0} \varepsilon_1(t) < 1,$$

jednačina /1/, za $t \geq t_0$, dopušta jedno rješenje sa osobinom

/8/ $$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - x_0(t)| = 0 .$$

Uslovi /7/ T. Pejovića daju

/9/ $$\lim_{t\to+\infty} a(t) = 0 ,$$

$$\left| \frac{\lambda(t)}{-a(t)} \right| \leq M_1 \,, \quad a(t) \neq 0 \text{ za } t \geq t_0,$$

gdje je M_1 fiksiran broj, odakle slijedi da je

$$\lim_{t\to+\infty} \lambda(t) = 0 ,$$

te je i

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda(t)}{-a(t)}=a \qquad /a \text{ je konačan broj}/.$$

Dalje, iz uslova /5/ proističe uslov

$$\left|\frac{f(t)}{-a(t)}\right|\leqslant M \quad \text{za } t\geqslant t_0 \quad /M \text{ je poz. konst.}/,$$

a kako funkcija $a(t)$ ispunjava uslov /9/, to je i

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=0,$$

te je

/lo/ $$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{-a(t)}=b \qquad /b \text{ je konačan broj}/^{1)}.$$

Da bi obezbjedili uslov /8/ treba da pretpostavimo

/11/ $$\lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda(t)}{-a(t)}=0, \quad |\lambda(t)|<|a(t)| \quad \text{za } t\geqslant t_0 {}^{2)},$$

/12/ $$\text{sign} f(t)=\text{const.} \quad \text{za } t\geqslant t_0 {}^{3)}$$

/sign znači prosto znak i nema veze sa funkcijom sign $f(t)$/.

Sada možemo da damo sljedeću teoremu.

TEOREMA B_3.

Pod uslovima /6/, /9/, /lo/, /11/ i /12/ jednačine /1'/ i /4/, za $t\geqslant t_0$, imaju:

a/ za $a(t)>0$, po bar jedno ograničeno rješenje $x(t)$ i $x_0(t)$ koja zadovoljavaju uslov /8/;

b/ za $a(t)<0$, ako još dodamo uslov

/13/ $$\big(|a(t)|-\lambda(t)\big)\varepsilon(t)+\varepsilon'(t)>m(t) \quad \text{za } t\geqslant t_0,$$

gdje funkcija $\varepsilon(t)$ ispunjava osnovne uslove iz § 1 ove glave, a funkcija $m(t)$ neprekidna, nenegativna i ispunjava uslove

/14/ $$\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}\right)'\right|\leqslant m(t), \quad \left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}\right)'\right|\leqslant m(t) \quad \text{za } t\geqslant t_0,$$

postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ $(t\geqslant t_0)$ koja teži

---

1) U obzir mogu doći i slučajevi $b=\pm\infty$, samo pri tome treba pretpostaviti da je $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)\lambda(t)}{a^2(t)}=0$, što obezbjedjuje relaciju /18/, a slučajevi $b=\pm\infty$ ne isključuju uslov /13/.

2) Ako je $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{-a(t)}=0$, tada uslov /8/ obezbjedjen je i ako umjesto uslova /11/ stoji

/11'/ $$\frac{\lambda(t)}{|a(t)|}\leqslant \rho<\rho_1<1 \quad \text{za } t\geqslant t_0 \quad /\rho \text{ i } \rho_1 \text{ su fiksirani brojevi}/.$$

3) U obzir dolazi i specijalan slučaj $f(t)\equiv 0$.

nuli kad $t\to+\infty$ i takva da jedna klasa rješenja jednačine /1'/ i jedna klasa rješenja jednačine /4/ ispunjavaju uslov

$$|x(t)-x_0(t)| < r(t) \tag{15}$$

za sve $t \geq t_0$, te i uslov /8/.

Dokaz.

Neka je $f(t)>0$ za $t\geq t_0$ /za $f(t)<0$ važi sličan dokaz/.

Primjetimo prvo da, prema /6/ i /11/, za $t\geq t_0$ i $|x|<+\infty$, važi:

$$-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)} \leq -\frac{f(t)}{a(t)+h(t,x)} \leq -\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}, \tag{16}$$

$$-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)} < -\frac{f(t)}{a(t)} < -\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}, \tag{17}$$

i da je, prema /1o/ i /11/,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}+\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}\right) &= \lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{a(t)}\left(\frac{-a(t)}{a(t)+\lambda(t)}+\frac{a(t)}{a(t)-\lambda(t)}\right)= \\ =\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{a(t)}\cdot\frac{2a(t)\lambda(t)}{a^2(t)-\lambda^2(t)} &= \lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)\lambda(t)}{a^2(t)}\cdot\frac{2}{1-\left(\frac{\lambda(t)}{a(t)}\right)^2}=0,\end{aligned} \tag{18}$$

te postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $\delta(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da ispunjava uslov

$$\left|-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}+\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}\right| < \delta(t) \text{ za } t\geq t_0. \tag{19}$$

Prema /16/ i /17/ integralne krive jednačina /1'/ i /4/, za $a(t)<0$ u oblasti $x < -\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}$ $(t\geq t_0)$ imaju pozitivan, a u oblasti $x > -\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}$ $(t\geq t_0)$ negativan koeficijent smjera; dok u slučaju $a(t)>0$ integralne krive imaju suprotan koeficijent smjera.

a/ Prema /1o/, /11/ i /18/ postoje neprekidne i monotone funkcije $\vartheta_1(t)$ i $\vartheta_2(t)$ koje teže broju b, gdje je $\vartheta_1(t)$ monotono rastuća, a $\vartheta_2(t)$ monotono opadajuća, i takve da je

$$\vartheta_1(t) < -\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}, \quad -\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)} < \vartheta_2(t) \text{ za } t\geq t_0.$$

Prema tome, integralne krive jednačina /1'/ i /4/ prolaze kroz tačke krivih $\vartheta_1(t)$ i $\vartheta_2(t)$ $(t\geq t_0)$ izlazeći iz "cijevi" koju čine te krive. Otuda, prema metodi retrakcije, svaka od jednačina /1'/ i /4/ ima po bar jedno rješenje koje pripada toj "cijevi" za sve $t\geq t_0$, te ta rješenja i ispunjavaju uslov /8/.

b/ Neka je

$$\omega_1(t) = -\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}-\varepsilon(t), \quad \omega_2(t) = -\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}+\varepsilon(t) \quad (t\geq t_0). \tag{2o}$$

Kriva $\omega_1(t)$ pripada oblasti rastućih rješenja, a kriva $\omega_2(t)$ oblasti opadajućih rješenja jednačina /1'/ i /4/.

Pokažimo da, prema uslovima teoreme, integralne krive jednačina /1'/ i /4/ prolaze kroz tačke krivih /2o/ ulazeći u "cijev" koju čine te krive, i. u "cijev"

/21/ $$t \geq t_0, \quad -\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)} - \varepsilon(t) < x < -\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)} + \varepsilon(t).$$

Zaista je:

$$x'(\omega_1(t)) = \big(a(t)+h(t,\omega_1)\big)\Big(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)} - \varepsilon(t)\Big) + f(t) = \big(a(t)+h(t,\omega_1)\big)\frac{-f(t)}{a(t)-\lambda(t)} +$$

$$+ f(t) - \big(a(t)+h(t,\omega_1)\big)\varepsilon(t) \geq \big(a(t)-\lambda(t)\big)\frac{-f(t)}{a(t)-\lambda(t)} + f(t) - \big(a(t)+\lambda(t)\big)\varepsilon(t) >$$

$$> m(t) - \varepsilon'(t) \geq \Big(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}\Big)' - \varepsilon'(t) = \omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t)) = \big(a(t)+h(t,\omega_2)\big)\Big(\frac{-f(t)}{a(t)+\lambda(t)} + \varepsilon(t)\Big) + f(t) \leq \big(a(t)+\lambda(t)\big)\Big(\frac{-f(t)}{a(t)+\lambda(t)} + \varepsilon(t)\Big) +$$

$$+ f(t) = \big(a(t)+\lambda(t)\big)\varepsilon(t) < -m(t) + \varepsilon'(t) \leq \Big(-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}\Big)' + \varepsilon'(t) = \omega_2'(t);$$

$$x_0'(\omega_1(t)) = a(t)\Big(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)} - \varepsilon(t)\Big) + f(t) = a(t)\cdot\frac{-f(t)}{a(t)-\lambda(t)} + f(t) - a(t)\varepsilon(t) >$$

$$> \big(a(t)-\lambda(t)\big)\frac{-f(t)}{a(t)-\lambda(t)} + f(t) - a(t)\varepsilon(t) = -a(t)\varepsilon(t) > -\big(a(t)+\lambda(t)\big)\varepsilon(t) > \omega_1'(t),$$

$$x_0'(\omega_2(t)) = a(t)\Big(-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)} + \varepsilon(t)\Big) + f(t) \leq$$

$$\leq \big(a(t)+\lambda(t)\big)\Big(\frac{-f(t)}{a(t)+\lambda(t)} + \varepsilon(t)\Big) + f(t) = \big(a(t)+\lambda(t)\big)\varepsilon(t) < \omega_2'(t).$$

Prema tome, po jedna klasa rješenja jednačina /1'/ i /4/ pripadaju "cijevi" /21/ za sve $t \geq t_0$. To su ona rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ respektivno jednačina /1'/ i /4/ koja su odredjena početnim vrijednostima $x(t_0)$ i $x_0(t_0)$ koje pripadaju intervalu

$$\Big(-\frac{f(t_0)}{a(t_0)-\lambda(t_0)} - \varepsilon(t_0), \; -\frac{f(t_0)}{a(t_0)+\lambda(t_0)} + \varepsilon(t_0)\Big).$$

Uzmemo li da je

/22/ $$r(t) = \varepsilon(t) + \delta(t), \quad t \geq t_0,$$

možemo konstatovati da te klase rješenja jednačina /1'/ i /4/ ispunjavaju i uslov /15/, te i uslov /8/.

Što se tiče stabilnosti rješenja jednačina /1'/ i /4/, odnosno stabilnosti rješenja jednačine /4/ pri stalnim poremećajima $h(t,x)x$ o kojima je riječ u teoremi B_3, na osnovu razmatranja datih u glavi II § 3, kao i u § 1.2. ove glave, te na osnovu dokaza teoreme B_3, možemo konstatovati: da se u slučaju a/ teoreme B_3 radi o nestabilnim rješenjima u smislu Ljapunova; da je u slučaju b/ klasa rješenja jednačine /1'/ koja za sve $t \geq t_0$ pripada "cijevi" /21/ asimptotski stabilna klasa rješenja u smislu definicije 1 /II § 3.1./; da je klasa rješenja jednačine /4/ koja za sve $t \geq t_0$ pripada "cijevi" /21/ ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4 /II § 3.2./, te da je ta klasa rješenja jednačine /4/ asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima $h(t,x)x$ u smislu definicije 6 /II § 3.4./.

2^0

TEOREMA A_2.

Ako je, pored osnovnih uslova /3/ i /5/

/23/ $$\lim_{t\to+\infty} e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = 0 \,; \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\lambda(t)}{-a(t)} = 0 \,, \quad \underset{t\geq t_0}{a(t) \neq 0} \,,$$

$$\varepsilon_1(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s)ds} \lambda(\xi)\, d\xi \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \,, \quad \varepsilon_1 = \max_{t\geq t_0} \varepsilon_1(t) < 1 \,,$$

tada sva rješenja jednačine /1/, za sve $t \geq t_0$, ispunjavaju uslov /8/.

Iz uslova /23/ T. Pejovića proizilazi da je $a(t)<0$ za $t \geq t_0$, te i ovdje važi tvrdjenje b/ teoreme B_3, s tom razlikom što funkcija $a(t)$ ne mora da ispunjava uslov /9/. Dajući dopunske pretpostavke možemo formulisati sljedeću širu teoremu.

TEOREMA B_4.

a/ Ako je

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = r \quad / r \text{ je negativan broj, a može biti i } -\infty /$$

i ako su ispunjeni uslovi /6/, /10/, /11/ i /12/, tada sva rješenja jednačine /1'/, kao i jednačine /4/, za $t \geq t_0$, teže b kad $t \to +\infty$ /b je konačan broj/, te i ispunjavaju uslov /8/.

b/ Pod uslovima /6/, /11/, kao i

/24/ $$a(t) \leq A < 0 \quad \text{za } t \geq t_0 \quad /A \text{ je neg. konst.}/,$$

/25/ $$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = +\infty \;^{1)} \,,$$

tada sva rješenja jednačina /1'/ i /4/, za $t \geq t_0$, teže $+\infty$ kad $t \to +\infty$ tj.

/26/ $$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} x_0(t) = +\infty \,.$$

---

1) Ako je $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = -\infty$, tada sva rješenja teže $-\infty$ kad $t \to +\infty$.

c/ Pod uslovima /6/, /11/, /12/, /13/, /14/, kao i

/27/ $$a(t) < 0 \quad \text{za } t \geq t_0$$

/28/ $$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)\,\lambda(t)}{a^2(t)} = 0 \;[1],$$

jednačine /1'/ i /4/ imaju po jednu klasu rješenja koja za sve $t \geq t_0$ ispunjava uslov /15/, te i uslov /8/.

Ako funkcija $a(t)$ ispunjava još i uslov /24/, tada, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, sva rješenja jednačina /1'/ i /4/ ispunjavaju uslov /15/, te i uslov /8/.

d/ Pod uslovima /6/, /11/, /12/, /13/ [2], /28/, kao i

/29/ $$a(t) > 0 \quad \text{za } t \geq t_0$$

jednačine /1'/ i /4/ imaju po bar jedno rješenje koja ispunjavaju uslov /15/, te i uslov /8/.

e/ Ako je uz /6/, /11/, /12/, /28/ i

/30/ $$\lim_{t\to+\infty} |a(t)| = +\infty,$$

/31/ $$n(t) \leq N \quad \text{za } t \geq t_0 \quad /N \text{ je poz. konst.}/ \;[3]$$

/funkcija $n(t)$ ispunjava uslove /14//, tada za $a(t) \leq A < 0$ $(t \geq t_0)$ važi tvrdjenje navedeno pod c/; a ako je $a(t) \geq -A > 0$ $(t \geq t_0)$ važi tvrdjenje navedeno pod d/.

Dokaz.

a/ Za teženje svih rješenja jednačine /4/, za $t \geq t_0$, broju b kad $t \to +\infty$ vidjeti lemu B_2 b/. Koristeći isti rezultat, u slučaju jednačine /1'/, te kako je, prema /6/, /10/ i /11/,

$$\lim_{t\to+\infty} x' = \lim_{t\to+\infty} \left[\left(a(t) + h(t,x)\right)x + f(t)\right] = \lim_{t\to+\infty} a(t)\left\{\left[1 + \frac{h(t,x)}{a(t)}\right]x + \frac{f(t)}{a(t)}\right\} =$$
$$= r\left[(1+0)\cdot c - b\right] = 0 \;[4]$$

/odakle je $c = b$, odnosno $\lim_{t\to+\infty} x(t) = b$/, nalazimo da i sva rješenja jednačine /1'/, za $t \geq t_0$, teže b kad $t \to +\infty$.

b/ Posmatrajmo slučaj $f(t) > 0$ za $t \geq t_0$ /slučaj $f(t) < 0$ dokazuje se na sličan način/.

---

[1] Ovaj uslov i uslov /11/ dopuštaju da funkcija $-\frac{f(t)}{a(t)}$ ne mora da ispunjava uslov /10/.

[2] Ovdje se uslov /13/ može zamjeniti širim uslovom

/13₁/ $$\left(a(t) - \lambda(t)\right)\varepsilon(t) - \varepsilon'(t) > n(t) \quad \text{za } t \geq t_0.$$

[3] Ovaj uslov može biti zamjenjen uslovima: $n(t) \leq N$ za $t_0 \leq t < +\infty$ i $\lim_{t\to+\infty} \frac{n(t)}{-a(t)} = 0$.

[4] Prema /6/ i /11/ je i $\lim_{t\to+\infty} \frac{h(t,x)}{a(t)} = 0$ za svako $|x| < +\infty$.

Za jednačinu /4/ neposredno važi rezultat a/ teoreme B_1, a u slučaju jednačine /1'/, takodje možemo koristiti taj rezultat.

Primjetimo da u oblasti $x < -\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}$ $(t \geq t_0)$ rješenja jednačine /1'/ rastu. Neka je $\varphi_0(t) = -\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)} - \delta_0$ $(t \geq t_0)$, gdje je δ_0 pozitivan fiksiran broj. Prema /11/ i /25/ je $\lim_{t \to +\infty} \varphi_0(t) = +\infty$.

Pokažimo da sve integralne krive oblasti $x \leq \varphi_0(t)$ $(t \geq t_0)$ ispunjavaju uslov /26/. Neka je $P\left(t, X \equiv -\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)} - \delta\right)$ /$\delta \geq \delta_0$ je proizvoljan broj/ proizvoljna tačka te oblasti. Prema /6/, /11/ i /24/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, imamo

$$x'(P) = (a(t) + h(t,X))\left(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)} - \delta\right) + f(t) = (a(t) + h(t,X))\frac{-f(t)}{a(t)-\lambda(t)} + f(t) -$$

$$-(a(t) + h(t,X))\delta \geq (a(t) - \lambda(t))\frac{-f(t)}{a(t)-\lambda(t)} + f(t) - (a(t) + \lambda(t))\delta =$$

$$= -(a(t) + \lambda(t))\delta = -a(t)\left(1 + \frac{\lambda(t)}{a(t)}\right)\delta \geq -A(1-\varrho)\delta = B \cdot \delta \geq B\delta_0$$

/funkcija $-\frac{\lambda(t)}{a(t)}$ ispunjava uslov /11/, te za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ona ispunjava i uslov /11'/; B je pozitivan fiksiran broj/, što znači da integralne krive jednačine /1'/ oblasti $x \leq \varphi_0(t)$ $(t \geq t_0)$ imaju koeficijent smjera ne manji od pozitivnog fiksiranog broja $B\delta_0$, te i ispunjavaju uslov /26/.

S obzirom na jedinost rješenja jednačine /1'/ rješenja oblasti $x > \varphi_0(t)$ $(t \geq t_0)$ neće presjeći rješenja oblasti $x \leq \varphi_0(t)$ $(t \geq t_0)$, te i ona ispunjavaju uslov /26/.

c/ Uslovi /6/, /11/, /12/, /13/, /14/ i /27/ obezbjedjuju da rješenja jednačina /1'/ i /4/ koja prolaze kroz tačke krivih oblika /20/ ulaze u "cijev" koju čine te krive, tj. u "cijev" /21/ /vidjeti dokaz teoreme B_3 b//, a uslov /28/ obezbjedjuje relaciju /18/, te i funkciju $\delta(t)$ koja ispunjava uslov /19/ i funkciju $r(t)$ koja ispunjava uslov /22/, što i potvrdjuje tačnost prvog dijela navedenog tvrdjenja.

Uslov /24/ omogućuje da se dokaže da sva rješenja jednačina /1'/ i /4/, za $t \geq t_0$, ulaze u "cijev" /21/, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$. Za slučaj jednačine /4/ vidjeti teoremu B_1 b/.

Posmatrajmo sada jednačinu /1'/ uzimajući da je $f(t) > 0$ za $t \geq t_0$ /slučaj $f(t) < 0$ dokazuje se slično/.

Posmatrajmo, na primjer, oblast $x < \omega_1(t)$ $(t \geq t_0)$, oblast rastućih rješenja /slično bismo posmatrali i za oblast $x > \omega_2(t)$ $(t \geq t_0)$. Neka je $P\left(t, X \equiv -\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)} - \varepsilon(t) - \delta\right)$ /$\delta > 0$ proizvoljan broj/ proizvoljna tačka te oblasti. Prema uslovima teoreme imamo, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$,

$$x'(P) \doteq \left(a(t)+h(t,x)\right)\left(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}-\varepsilon(t)-\delta\right)+f(t)=\left(a(t)+h(t,x)\right)\frac{-f(t)}{a(t)-\lambda(t)}+$$

$$+f(t)-\left(a(t)+h(t,x)\right)\left(\varepsilon(t)+\delta\right) \geqslant \left(a(t)-\lambda(t)\right)\frac{-f(t)}{a(t)-\lambda(t)}+f(t)-\left(a(t)+\lambda(t)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\varepsilon(t)+\delta\right)=-\left(a(t)+\lambda(t)\right)\left(\varepsilon(t)+\delta\right)=-\left(a(t)+\lambda(t)\right)\varepsilon(t)-\left(a(t)+\lambda(t)\right)\delta > m(t)-\varepsilon'(t)-$$

$$-\left(a(t)+\lambda(t)\right)\delta \geqslant |\omega_1'(t)|-a(t)\left(1+\frac{\lambda(t)}{a(t)}\right)\delta \geqslant |\omega_1'(t)|-A(1-\varrho)\delta=|\omega_1'(t)|+B\delta$$

/$\varrho<1$ broj uzet prema uslovu /11'/, $B=-A(1-\varrho)$ je pozitivan fiksiran broj/, što pokazuje da integralna kriva jednačine /1'/ koja prolazi kroz proizvoljnu tačku P oblasti $x<\omega_1(t)$ $(t\geqslant t_0)$ ima koeficijent smjera u tački P veći od koeficijenta smjera krive $\omega_1(t)$ /u tački sa istom apscisom t/ za više od pozitivnog broja $B\delta$, te će za dovoljno veliko $t\geqslant t^*>t_0$, stići do krive $\omega_1(t)$, a zatim i ući u "cijev" /21/. Time smo dokazali i drugi dio tvrdjenja pod c/.

d/ Neka je $f(t)>0$ $(t\geqslant t_0)$.

I ovdje važe relacije /16/ i /17/, te za donju i gornju granicu "cijevi" metode retrakcije možemo uzeti respektivno krive $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ oblika /20/.

Navedeni uslovi obezbjedjuju da rješenja jednačina /1'/ i /4/ koja prolaze kroz tačke krivih $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ izlaze iz "cijevi" koju čine te krive, tj. izlaze iz "cijevi" oblika /21/, te prema metodi retrakcije i imaju po jedno rješenje koja pripadaju toj "cijevi" za sve $t\geqslant t_0$, a prema uslovima /11/ i /28/ ispunjavaju i uslov /15/.

Zaista, prema uslovima teoreme, imamo:

$$x'(\omega_1(t))=\left(a(t)+h(t,\omega_1)\right)\left(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}-\varepsilon(t)\right)+f(t)\leqslant\left(a(t)-\lambda(t)\right)\left(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}-\varepsilon(t)\right)+$$

$$+f(t)=-\left(a(t)-\lambda(t)\right)\varepsilon(t)<-m(t)-\varepsilon'(t)\leqslant\left(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}\right)'-\varepsilon'(t)=\omega_1'(t),$$

$$x'(\omega_2(t))=\left(a(t)+h(t,\omega_2)\right)\left(-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}+\varepsilon(t)\right)+f(t)=\left(a(t)+h(t,\omega_2)\right)\cdot\frac{-f(t)}{a(t)+\lambda(t)}+$$

$$+f(t)+\left(a(t)+h(t,\omega_2)\right)\varepsilon(t)\geqslant\left(a(t)+\lambda(t)\right)\frac{-f(t)}{a(t)+\lambda(t)}+f(t)+\left(a(t)-\lambda(t)\right)\varepsilon(t)=$$

$$=\left(a(t)-\lambda(t)\right)\varepsilon(t)>m(t)+\varepsilon'(t)\geqslant\left(-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}\right)'+\varepsilon'(t)=\omega_2'(t);$$

$$x_0'(\omega_1(t))=a(t)\left(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}-\varepsilon(t)\right)+f(t)<\left(a(t)-\lambda(t)\right)\left(\frac{-f(t)}{a(t)-\lambda(t)}-\varepsilon(t)\right)+f(t)=-\left(a(t)-\lambda(t)\right)\varepsilon(t)<\omega_1'(t),$$

$$x_0'(\omega_2(t))=a(t)\left(-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}+\varepsilon(t)\right)+f(t)=a(t)\frac{-f(t)}{a(t)+\lambda(t)}+f(t)+a(t)\varepsilon(t)>$$

$$>\left(a(t)+\lambda(t)\right)\frac{-f(t)}{a(t)+\lambda(t)}+f(t)+a(t)\varepsilon(t)=a(t)\varepsilon(t)>\left(a(t)-\lambda(t)\right)\varepsilon(t)>\omega_2'(t).$$

e/ Ovdje je dovoljno primjetiti da uslovi /30/ i /31/ obezbjedjuju uslov /13/. Kako je desna strana nejednakosti /13/ ograničena, a funkcija $a(t)$ ispunjava uslov /3o/, to postoji monotono opadajuća funkcija $\varepsilon(t)$ koja teži nuli, kao i njen prvi izvod, i takva da ispunjava uslov /13/.

Sada obratimo pažnju i na pitanje stabilnosti rješenja jednačina /1'/, /4/, kao i stabilnosti rješenja jednačine /4/ pri stalnim poremećajima $h(t,x)x$, a prema rezultatima teoreme B_4, koristeći i dosadašnja razmatranja.

1. Slučaj tvrdjenja a/.

Sva rješenja jednačine /4/ odredjena početnim uslovima $x_0(t_0)$ su ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu Ljapunova.

Svako rješenje jednačine /1'/ odredjeno početnim uslovom $x(t_0)$ je asimptotski stabilno u smislu definicije 1 /II § 3.1./, jer za ma koja dva rješenja $x_1(t)$ i $x(t)$ jednačine /1'/ bliska u trenutku $t=t_0$ može se naći monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ tako da je $|x_1(t)-x(t)|< r(t)$ za sve $t\geq t_0$, obzirom da je, prema tvrdjenju a/, $\lim\limits_{t\to+\infty}|x_1(t)-x(t)|=0$.

Takodje, možemo konstatovati da je svako rješenje jednačine /4/ odredjeno početnim uslovom $x_0(t_0)$ asimptotski stabilno pri stalnim poremećajima $h(t,x)x$ u smislu definicije 6 /II § 3.4./, jer za ma koja dva rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ respektivno jednačina /1'/ i /4/ koja imaju bliske početne vrijednosti $x(t_0)$ i $x_0(t_0)$ može se naći monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli, tako da je $|x(t)-x_0(t)|<r(t)$ za sve $t\geq t_0$, obzirom da ta rješenja teže istoj konstanti b, a kako i njihove krive stacionarnih tačaka $x=-\frac{f(t)}{a(t)+h(t,x)}$ i $x_0=-\frac{f(t)}{a(t)}$ teže b kad $t\to+\infty$, to su ispunjeni svi potrebni uslovi definicije 6.

2. Slučaj tvrdjenja b/.

Rješenja jednačine /4/, u slučaju tvrdjenja b/, su stabilna u smislu Ljapunova, ali nisu asimptotski stabilna, jer ne možemo pokazati da razmak rješenja bliskih u početnom trenutku $t=t_0$ teži nuli kad $t\to+\infty$.

Za rješenja jednačine /1'/ ne možemo pokazati da će dva rješenja proizvoljno bliska u trenutku $t=t_0$ ostati proizvoljno bliska za sve $t\geq t_0$, a niti da njihov razmak teži nuli kad $t\to+\infty$, te ne možemo reći da su rješenja stabilna u smislu Ljapunova, niti da su asimptotski stabilna u smislu definicije 1 /II § 3.1./.

Isto tako, za bilo koja dva rješenja $x(t)$ i $x_0(t)$ respektivno jednačina /1'/ i /4/, koja su bliska u trenutku $t=t_0$, ne možemo pokazati da su i dalje bliska, za $t>t_0$, u odgovarajućem smislu, niti da je $\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)|=0$, te ne možemo reći da su rješenja jednačine /4/ stabilna pri stalnim poremećajima.

3. Slučajevi c/ i e/.

Ovdje smo pokazali da jedna klasa rješenja jednačine /4/, kao i jednačine /1'/ pripadaju istoj "cijevi" za sve $t\geq t_0$ /u dokazu teoreme je navedeno o kojim klasama rješenja se radi/, a kako i stacionarne krive jednačina /4/ i /1'/ pripadaju toj "cijevi", to možemo konstatovati: da je jedna klasa rješenja jednačine /1'/ asimptotski stabilna u smislu definicije 1; da je jedna klasa rješenja jednačine /4/ ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4 i da je ta klasa rješenja jednačine /4/ asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima u smislu definicije 6, jer su /prema ranijim posmatranjima i dokazu teoreme/ ispunjeni svi potrebni uslovi navedenih definicija.

4. U slučaju tvrdjenja d/ radi se o nestabilnim rješenjima u smislu Ljapunova.

3^0

TEOREMA A_3.
Pod uslovima /3/ i /5/, kao i

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = +\infty\,;\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda(t)}{-a(t)}=0\,,\quad \underset{t\geq t_0}{a(t)\neq 0}\,;$$

$$\varepsilon_1(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\int_t^{\infty} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s)ds}\lambda(\xi)\,d\xi \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\,,\ \varepsilon_1=\max_{t\geq t_0}\varepsilon_1(t)<1\,,$$

jednačina /1/ ima, za $t\geq t_0$, jedno rješenje sa osobinom /E/.

Prema gornjim uslovima T. Pejovića funkcija $a(t)$ ispunjava uslov $a(t)>0$ za $t\geq t_0$, te i ovdje važi tvrdjenje a/ teoreme B_3 i tvrdjenje d/ teoreme B_4.

4^0

Neka je $a(t)=0$. Dobija se slučaj 1^0 za $k=1$ /T. Pejović/.

Za $a(t)=0$ jednačina /1'/ glasi

/32/ $$\frac{dx}{dt}=h(t,x)\,x+f(t)\,,$$

a jednačina /4/ glasi

$$\frac{dx_0}{dt} = f(t)$$

o čijim rješenjima ne možemo ništa reći sa gledišta koja koristimo, te ne možemo ni proučavati odnos rješenja tih jednačina.

Što se tiče jednačine /32/ funkcije $h(t,x)$ i $f(t)$ treba da su definisane i neprekidne, kao i da imaju stalan znak, te da su ispunjeni potrebni uslovi o jedinosti rješenja za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$.

Koristeći dosadašnje rezultate za jednačinu /32/ možemo dati sljedeću teoremu.

TEOREMA B_5.

a/ Ako je, za svako $|x| < +\infty$,

/33/ $$\lim_{t\to+\infty} h(t,x) = k$$ /k je konačan broj ili $\pm\infty$/,

/34/ $$\lim_{t\to+\infty} \frac{-f(t)}{h(t,x)} = b$$ /b je konačan broj/,

tada jednačina /32/, za $t \geq t_0$, ima: 1/ za $k < 0$, sva rješenja koja teže b kad $t \to +\infty$; 2/ za $k \geq 0$ $(h(t,x) > 0)$, bar jedno rješenje koje teži b kad $t \to +\infty$.

b/ Pod uslovom da postoje pozitivne i neprekidne funkcije $p(t)$ i $q(t)$ takve da je

/35/ $$p(t) \leq |h(t,x)| \leq p(t) + q(t) \quad za \quad t \geq t_0 \quad i \quad |x| < +\infty,$$

zatim, ako je

/36/ $$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{p(t)} \cdot \frac{q(t)}{p(t)+q(t)} = 0,$$

kao i

/37/ $$p(t)\varepsilon(t) + \varepsilon'(t) > m(t) \quad za \quad t \geq t_0 \text{ [1]},$$

gdje je funkcija $m(t)$ neprekidna, nenegativna i takva da je

/38/ $$\left|\left(\frac{f(t)}{p(t)}\right)'\right| \leq m(t), \qquad \left|\left(\frac{f(t)}{p(t)+q(t)}\right)'\right| \leq m(t) \quad za \quad t \geq t_0,$$

tada postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da jednačina /32/, za $t \geq t_0$, ima: 1/ za $h(t,x) < 0$, jednu klasu rješenja koja ispunjava uslov

/39/ $$\left| x(t) - \frac{f(t)}{p(t)} \right| < r(t)$$

---

[1] U slučaju $h(t,x) > 0$ ovaj uslov se može zamjeniti širim uslovom

$$p(t)\varepsilon(t) + \varepsilon'(t) > m(t) \quad za \quad t \geq t_0.$$

za sve $t \geq t_0$, a ako je

/40/ $p(t) \geq B$ za $t \geq t_0$ /B je poz. konst./,

tada taj uslov, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, ispunjavaju sva rješenja jednačine /32/; 2/ za $h(t,x) > 0$, bar jedno rješenje koje ispunjava uslov /39/.

c/ Ako je

/41/ $$\lim_{t \to +\infty} p(t) = +\infty$$

/42/ $m(t) \leq N$ za $t \geq t_0$ /N je poz. konst./ [1]

i ako su ispunjeni uslovi /35/, /36/ i /40/, tada, pri $h(t,x) < 0$, jednačina /32/ ima jednu klasu rješenja koja za sve $t \geq t_0$ ispunjava uslov /39/, a za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$ taj uslov ispunjavaju sva rješenja jednačine.

Dokazi navedenih rezultata u principu su isti kao dokazi odgovarajućih ranijih rezultata. Zato navedimo samo neke bitne napomene.

Za tvrdjenje a/ treba vidjeti dokaz leme B_2 b/ § 1.1. Ovdje je

$$\lim_{t \to +\infty} x' = \lim_{t \to +\infty} \left(h(t,x)\, x + f(t) \right) = \lim_{t \to +\infty} h(t,x) \left(x + \frac{f(t)}{h(t,x)} \right) = k\,(c - b) = 0,$$

odakle je $c = b$, tj. $\lim_{t \to +\infty} x(t) = b$.

Za tvrdjenje b/ treba primjetiti da za, na primjer, $f(t) > 0$ $(t \geq t_0)$, važe ocjene, za $t \geq t_0$ i $|x| < +\infty$:

/43/ $$0 < \frac{f(t)}{p(t) + q(t)} \leq -\frac{f(t)}{h(t,x)} \leq \frac{f(t)}{p(t)} \quad \text{pri } h(t,x) < 0,$$

/44/ $$-\frac{f(t)}{p(t)} \leq -\frac{f(t)}{h(t,x)} \leq -\frac{f(t)}{p(t) + q(t)} < 0 \quad \text{pri } h(t,x) > 0.$$

Dalje, da je

/45/ $$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{f(t)}{p(t)} - \frac{f(t)}{p(t) + q(t)} \right) = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{p(t)} \cdot \frac{q(t)}{p(t) + q(t)} = 0,$$

te da postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $\delta(t)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da je

$$\left| \frac{f(t)}{p(t)} - \frac{f(t)}{p(t) + q(t)} \right| < \delta(t) \quad \text{za } t \geq t_0.$$

Za funkcije $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ treba uzeti

$$\omega_1(t) = \frac{f(t)}{p(t) + q(t)} - \varepsilon(t), \quad \omega_2(t) = \frac{f(t)}{p(t)} + \varepsilon(t) \quad (t \geq t_0)$$

---

[1] Ovaj uslov može biti zamjenjen i uslovima:

$$m(t) \leq N \text{ za } t_0 \leq t < +\infty \text{ i } \lim_{t \to +\infty} \frac{m(t)}{p(t)} = 0.$$

u slučaju kada je $h(t,x)<0$, a u slučaju kada je $h(t,x)>0$ treba uzeti

$$\omega_1(t) = -\frac{f(t)}{p(t)} - \varepsilon(t), \quad \omega_2(t) = -\frac{f(t)}{p(t)+q(t)} + \varepsilon(t) \quad (t \geq t_0).$$

Uslov /37/ obezbjedjuje, pri $h(t,x)<0$, jednu klasu rješenja koja pripada "cijevi"

$$t \geq t_0, \quad \frac{f(t)}{p(t)+q(t)} - \varepsilon(t) < x < \frac{f(t)}{p(t)} + \varepsilon(t)$$

za sve $t \geq t_0$, a pri $h(t,x)>0$, bar jedno rješenje koje pripada "cijevi"

$$t \geq t_0, \quad -\frac{f(t)}{p(t)} - \varepsilon(t) < x < -\frac{f(t)}{p(t)+q(t)} + \varepsilon(t).$$

Otuda, postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t) = \varepsilon(t) + \delta(t)$ koja teži nuli kad $t \to +\infty$ i takva da rješenja gornjih "cijevi" ispunjavaju i uslov /39/.

U slučaju c/ navedeni uslovi obezbjedjuju ispunjenje uslova /37/, te i tačnost tvrdjenja.

5^0 Za $a(t)=r<0$ dobija se slučaj 2^0.

6^0 Za $a(t)=r>0$ dobija se slučaj 3^0.

7^0 Ako je $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t) = r \neq 0$ dobija se slučaj 5^0 ili 6^0, odnosno 2^0 ili 3^0, što zavisi od toga da li je $r<0$ ili $r>0$.

§ 2.2.

Sada ćemo se zadržati na uopštenju rezultata datih u § 2.1, tj. rezultata koje smo dali za jednačine /1'/, /4/ i /32/ sada ćemo uopštiti na jednačine

/2'/ $$\frac{dx}{dt} = \big(a(t) + h(t,x)\big)x^n + f(t),$$

/4'/ $$\frac{dx_0}{dt} = a(t)x_0^n + f(t),$$

/32'/ $$\frac{dx}{dt} = h(t,x)x^n + f(t) \quad (n=1,2,\cdots),$$

gdje funkcije $a(t)$, $f(t)$ i $h(t,x)$ ispunjavaju iste osnovne uslove.

Prvo posmatrajmo jednačine /2'/, /4'/ i /34'/ za n neparno, tj jednačine

/$2_1'$/ $$\frac{dx}{dt} = \big(a(t) + h(t,x)\big)x^{2n+1} + f(t),$$

/$4_1'$/ $$\frac{dx_0}{dt} = a(t)x_0^{2n+1} + f(t),$$

/$32_1'$/ $$\frac{dx}{dt} = h(t,x)x^{2n+1} + f(t) \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

Posmatrajmo jednačine /$2_1'$/ i /$4_1'$/. Treba da damo uopštenja teorema B_3 i B_4 i u slučaju jednačina /$2_1'$/ i /$4_1'$/. Možemo da damo sljedeće teoreme B_3' i B_4' koje sa osnovnim teoremama B_3 i B_4 čine odgovarajuće cjeline.

TEOREMA B_3'.

a/ Tvrdjenje a/ teoreme B_3 važi i u slučaju jednačina /$2_1'$/ i /$4_1'$/ u potpunosti.

b/ Tvrdjenje b/ važi samo ako se uslov /13/ zamjeni uslovom

/13'/ $$\left(|a(t)|-\lambda(t)\right)\varepsilon(t) > \frac{m(t)-\varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{\left(\dfrac{|f(t)|}{|a(t)|+\lambda(t)}-\varepsilon(t)\right)^{2m}}} \quad \text{za } t\geq t_0$$

u slučaju $b\neq 0$, a u slučaju $b=0$ zamjeni uslovom

/13"/ $$\left(|a(t)|-\lambda(t)\right)\varepsilon(t) > \frac{\left|\left(\dfrac{f(t)}{|a(t)|-\lambda(t)}\right)'\right|-\varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{\left(\dfrac{|f(t)|}{|a(t)|-\lambda(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2m}}} \quad \text{za } t\geq t_0 .$$

TEOREMA B_4'.

Tvrdjenja teoreme B_4 važe i za jednačine /$2_1'$/ i /$4_1'$/ uz odgovarajuće modifikacije i dopune i to:

a/ Tvrdjenja a/ i b/ teoreme B_4 važe i u slučaju jednačina /$2_1'$/ i /$4_1'$/ u potpunosti.

b/ Tvrdjenja c/ i d/ važe samo ako uslov /13/ zamjenimo uslovom /13'/, u slučaju kada je

/46/ $$\frac{|f(t)|}{|a(t)|+\lambda(t)}-\varepsilon(t)>0 \quad \text{za } t\geq t_0 ,$$

a u slučaju uslova

/47/ $$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{-a(t)}=0$$

zamjenimo uslovom /13"/.

c/ Tvrdjenje e/ važi samo ako uslovu /31/ dodamo uslov

$$\frac{|f(t)|}{|a(t)|+\lambda(t)}-\varepsilon(t)\geq B \quad \text{za } t\geq t_0$$

u slučaju uslova /46/, a u slučaju uslova /47/ uslov /31/ zamjenimo uslovom

$$\frac{\left|\left(\dfrac{f(t)}{|a(t)|-\lambda(t)}\right)'\right|-\varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{\left(\dfrac{|f(t)|}{|a(t)|-\lambda(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2m}}}\leq C \quad \text{za } t\geq t_0$$

/B i C su pozitivne fiksirane konstante/.

Dokaz navedenih tvrdjenja u principu je isti kao dokazi odgovarajućih osnovnih teorema B_3 i B_4, kao i teoreme B_2' § 1.3.

Istaknimo samo bitne momente koji ukazuju na tačnost tvrdjenja, prateći slučaj $f(t)>0$ za $t\geq t_0$.

Relacijama /16/, /17/ i /18/ odgovaraju respektivno relacije

$$\sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}} \leqslant \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)+\bar{h}(t,x)}} \leqslant \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}},$$

$$\sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}} < \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)}} < \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}},$$

/18'/

$$0 < \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}} - \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}} = \sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{a(t)}}\left(\sqrt[2m+1]{\frac{-a(t)}{a(t)+\lambda(t)}} - \sqrt[2m+1]{\frac{-a(t)}{a(t)-\lambda(t)}}\right) =$$

$$= \sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{a(t)}}\cdot\frac{\sqrt[2m+1]{a(t)\lambda(t)-a^2(t)} - \sqrt[2m+1]{-a(t)\lambda(t)-a^2(t)}}{\sqrt[2m+1]{a^2(t)-\lambda^2(t)}} = \sqrt[2m+1]{\frac{f(t)\lambda(t)}{a^2(t)}}\cdot\frac{\sqrt[2m+1]{1-\frac{a(t)}{\lambda(t)}} - \sqrt[2m+1]{-1-\frac{a(t)}{\lambda(t)}}}{\sqrt[2m+1]{1-\left(\frac{\lambda(t)}{a(t)}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt[2m+1]{\frac{f(t)\lambda(t)}{a^2(t)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[2m+1]{1-\left(\frac{\lambda(t)}{a(t)}\right)^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt[2m+1]{\left(1-\frac{a(t)}{\lambda(t)}\right)^{2m}} + \sqrt[2m+1]{\left(1-\frac{a(t)}{\lambda(t)}\right)^{2m-1}\cdot\left(-1-\frac{a(t)}{\lambda(t)}\right)} + \cdots + \sqrt[2m+1]{\left(-1-\frac{a(t)}{\lambda(t)}\right)^{2m}}} <$$

$$< \sqrt[2m+1]{\frac{f(t)\lambda(t)}{a^2(t)}}\cdot\frac{2}{\sqrt[2m+1]{1-\left(\frac{\lambda(t)}{a(t)}\right)^2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Za funkcije $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ treba uzeti, u slučaju uslova /46/,

$$\omega_1(t) = \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}-\varepsilon(t)}, \qquad \omega_2(t) = \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}+\varepsilon(t)} \quad (t\geq t_0),$$

a u slučaju uslova /47/ treba uzeti: za $a(t)<0$, $\omega_1(t)=0$; a za $a(t)>0$, $\omega_2(t)=0$.

Uslovi /13'/ i /13"/ obezbjedjuju ulaženje /za $a(t)<0$ /, odnosno izlaženje /za $a(t)>0$ / integralnih krivih iz "cijevi" koja je ograničena krivama $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$, tj. obezbjedjuju postojanje po jedne klase rješenja, odnosno po bar jedno rješenje jednačina /$2_1'$/ i /$4_1'$/ koja pripadaju toj "cijevi".

Prema relaciji /18'/ postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $\delta(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da ispunjava uslov

$$\left|\sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}} - \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}}\right| < \delta(t) \quad \text{za } t\geq t_0.$$

Dakle, postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli kad $t\to+\infty$ i takva da je

$$\left|\sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)}} - \omega_i(t)\right| < r(t) \quad \text{za } t\geq t_0 \quad (i=1,2).$$

Prema tome "cijev"

$$t \geq t_0, \quad \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)}} - r(t) < x < \sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{a(t)}} + r(t)$$

sadrži "cijev" ulaznih, odnosno izlaznih integralnih krivih koja je ograničena krivama $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$, što znači da uslov /15/, koji se navodi u tvrdjenjima, ima mjesta.

Posmatrajmo sada jednačinu /$32_1'$/. Kao uopštenja tvrdjenja teoreme B_5 na jednačinu /$32_1'$/ možemo dati sljedeću teoremu.

TEOREMA B_5'.

Tvrdjenja teoreme B_5 važe i za jednačinu /$32_1'$/ i to:

a/Tvrdjenje a/ važi u potpunosti.

b/ Tvrdjenje b/ važi samo ako uslov /37/ zamjenimo uslovom

/37'/
$$p(t)\varepsilon(t) > \frac{m(t) - \varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{\left(\frac{|f(t)|}{p(t)+q(t)} - \varepsilon(t)\right)^{2m}}} \quad \text{za } t \geq t_0,$$

u slučaju kada je

/48/
$$\frac{|f(t)|}{p(t)+q(t)} - \varepsilon(t) > 0 \quad \text{za } t \geq t_0,$$

a u slučaju uslova

/49/
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{p(t)} = 0$$

zamjeni uslovom

$$p(t)\varepsilon(t) > \frac{\left|\left(\frac{f(t)}{p(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{\left(\frac{|f(t)|}{p(t)} + \varepsilon(t)\right)^{2m}}} \quad \text{za } t \geq t_0 .$$

c/ Tvrdjenje c/ važi samo ako se uslovima /41/ i /42/ doda uslov

$$\frac{|f(t)|}{p(t)+q(t)} - \varepsilon(t) \geq B \quad \text{za } t \geq t_0$$

u slučaju uslova /48/, a u slučaju uslova /49/ uslov /42/ zamjeni uslovom

$$\frac{\left|\left(\frac{f(t)}{p(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t)}{(2m+1)\sqrt[2m+1]{\left(\frac{|f(t)|}{p(t)} + \varepsilon(t)\right)^{2m}}} \leq C \quad \text{za } t \geq t_0$$

/B i C su pozitivne fiksirane konstante/.

U uslovu /39/ funkciju $\frac{f(t)}{p(t)}$ ovdje treba zamjeniti funkcijom $\sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{p(t)}}$.

Tvrdjenja navedene teoreme prirodno proizilaze iz ranijih odgovarajućih posmatranja. Radi objašnjenja primjetimo samo da relacijama /43/, /44/ i /45/ odgovaraju respektivno relacije /posmatrajmo slučaj $f(t) > 0$ $(t \geq t_0)$/:

$$0<\sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{p(t)+q(t)}}\leqslant\sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{h(t,x)}}\leqslant\sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{p(t)}}\quad\text{pri }h(t,x)<0,$$

$$\sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{p(t)}}\leqslant\sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{h(t,x)}}\leqslant\sqrt[2m+1]{-\frac{f(t)}{p(t)+q(t)}}<0\quad\text{pri }h(t,x)>0,$$

$$0<\sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{p(t)}}-\sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{p(t)+q(t)}}=\sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{p(t)}}\cdot\frac{\sqrt[2m+1]{p(t)+q(t)}-\sqrt[2m+1]{p(t)}}{\sqrt[2m+1]{p(t)+q(t)}}=$$

$$=\sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{p(t)}\cdot\frac{q(t)}{p(t)+q(t)}}\left(\sqrt[2m+1]{1+\frac{p(t)}{q(t)}}-\sqrt[2m+1]{\frac{p(t)}{q(t)}}\right)=$$

$$=\sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{p(t)}\cdot\frac{q(t)}{p(t)+q(t)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[2m+1]{\left(1+\frac{p(t)}{q(t)}\right)^{2m}}+\sqrt[2m+1]{\left(1+\frac{p(t)}{q(t)}\right)^{2m-1}\cdot\frac{p(t)}{q(t)}}+\dots+\sqrt[2m+1]{\left(\frac{p(t)}{q(t)}\right)^{2m}}}<$$

$$<\sqrt[2m+1]{\frac{f(t)}{p(t)}\cdot\frac{q(t)}{p(t)+q(t)}}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0,$$

te da za funkcije $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ treba uzeti funkcije koje odgovaraju funkcijama $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$ uzetih u slučaju teoreme B_5, s tim što u slučaju uslova /49/ treba uzeti: za $h(t,x)<0$, $\omega_1(t)=0$; a za $h(t,x)>0$, $\omega_2(t)=0$.

Što se tiče stabilnosti rješenja jednačina $/2_1'/$, $/4_1'/$ i $/32_1'/$ možemo konstatovati da važe isti zaključci kao i za osnovne jednačine /1'/, /4/ i /32/.

Posmatrajmo sada jednačine /2'/, /4'/ i /32'/ za m parno, tj. jednačine

$/2_2'/$ $$\frac{dx}{dt}=\left(a(t)+h(t,x)\right)x^{2m}+f(t),$$

$/4_2'/$ $$\frac{dx_0}{dt}=a(t)x_0^{2m}+f(t),$$

$/32_2'/$ $$\frac{dx}{dt}=h(t,x)x^{2m}+f(t)\qquad(m=1,2,\cdots),$$

gdje funkcije $a(t)$, $f(t)$ i $h(t,x)$, pored ranije navedenih osnovnih uslova, ispunjavaju uslove

$$-\frac{f(t)}{a(t)}>0,\quad a(t)\neq0\quad\text{za }t\geq t_0,$$

u slučaju jednačina $/2_2'/$ i $/4_2'/$, a u slučaju jednačine $/32_2'/$

$$-\frac{f(t)}{h(t,x)}>0,\quad h(t,x)\neq0\quad\text{za }t\geq t_0\text{ i }|x|<+\infty,$$

što znači da funkcije $a(t)$, $f(t)$ i $h(t,x)$ imaju stalan znak u poluravni tOx $(t\geq t_0)$.

Koristeći prethodne rezultate izložićemo tabelarno samo neke bitno različite rezultate koji predstavljaju proširenje rezultata datih za jednačine /$2_1'$/, /$4_1'$/ i /$32_1'$/.

1^0 Pod uslovima /6/, /1o/ /$b \geq 0$/ i /11/ jednačine /$2_1'$/ i /$4_1'$/, za $t \geq t_0$, imaju:

a/ za $a(t) < 0$ i $f(t) > 0$, po bar jedno negativno rješenje koja teže $-\sqrt[2m]{b}$ kad $t \to +\infty$, te i ispunjavaju uslov /8/, a sva pozitivna rješenja i po jedna klasa negativnih rješenja su asimptotski ograničena.

b/ za $a(t) > 0$ i $f(t) < 0$, po bar jedno pozitivno rješenje koja teže $\sqrt[2m]{b}$ kad $t \to +\infty$, te i ispunjavaju uslov /8/, a sva negativna i po jedna klasa pozitivnih rješenja su asimptotski ograničena.

Rješenja koja teže $\pm\sqrt[2m]{b}$ kad $t \to +\infty$ su nestabilna u smislu Ljapunova. /I u sljedećim rezultatima gdje god imamo obezbjedjeno bar jedno rješenje to rješenje je nestabilno u smislu Ljapunova./

2^0 Pod uslovima /6/, /1o/ /$b \geq 0$ /, /11/, kao i

$$\lim_{t \to +\infty} a(t) = r \qquad /r \text{ je konačan broj ili } \pm\infty /,$$

jednačine /$2_1'$/ i /$4_1'$/, za $t \geq t_0$, imaju:

a/ za $r < 0$ i $f(t) > 0$, po bar jedno negativno rješenje koja teže $-\sqrt[2m]{b}$, kao i sva pozitivna i po jednu klasu negativnih rješenja koja teže $\sqrt[2m]{b}$ kad $t \to +\infty$;

b/ za $r > 0$ i $f(t) < 0$, po bar jedno pozitivno rješenje koja teže $\sqrt[2m]{b}$, kao i sva negativna i po jednu klasu pozitivnih rješenja koja teže $-\sqrt[2m]{b}$ kad $t \to +\infty$ /rješenja o kojima je riječ ispunjavaju uslov /8//;

c/ za $r = 0$, možemo uzeti u obzir prethodno tvrdjenje 1^0.

Što se tiče stabilnosti rješenja možemo reći: da su klase rješenja $x(t)$ jednačine /$2_1'$/, koja su odredjena početnim vrijednostima $x(t_0)$, asimptotski stabilne u smislu definicije 1 /II § 3.1./; da su klase rješenja $x_0(t)$ jednačine /$4_1'$/, koja su odredjena početnim vrijednostima $x_0(t_0)$ ravnomjerno asimptotski stabilne u smislu definicije 4 /II § 3.2./, te da su te klase rješenja jednačine /$4_1'$/ asimptotski stabilne pri stalnim poremećajima $h(t,x)x^{2m}$ u smislu definicije 6 /II § 3.4./.

3^0 Pod uslovima /6/, /11/, /25/, kao i

/5o/ $$|a(t)| \geq M \quad \text{za } t \geq t_0$$

/M je poz. konst./, jednačine /$2_1'$/ i /$4_1'$/, za $t \geq t_0$, imaju:

a/ za $a(t) \leqslant -M < 0$ i $f(t) > 0$, po bar jedno negativno rješenje koja teže $-\infty$, a sva pozitivna i po jedna klasa negativnih rješenja teže $+\infty$ kad $t \to +\infty$;

b/ za $a(t) \geqslant M > 0$ i $f(t) < 0$, po bar jedno pozitivno rješenje koja teže $+\infty$, a sva negativna rješenja i po jedna klasa pozitivnih rješenja teže $-\infty$ kad $t \to +\infty$.

Za klase rješenja jednačine /4$_1'$/ koja teže $\pm\infty$ kad $t \to +\infty$ možemo reći da su stabilna u smislu Ljapunova, dok o stabilnosti rješenja jednačine /2$_1'$/ ne možemo ništa reći, te ni o stabilnosti rješenja jednačine /4$_1'$/ pri stalnim poremećajima.

4° Pod uslovima /6/, /11/, /47/ i

$$\left(|a(t)| - \lambda(t)\right) \varepsilon(t) > \frac{\left|\left(\frac{f(t)}{|a(t)| - \lambda(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t)}{2m \sqrt[2m]{\left(\frac{|f(t)|}{|a(t)| - \lambda(t)} + \varepsilon(t)\right)^{2m-1}}} \quad \text{za } t \geqslant t_0$$

jednačine /2$_1'$/ i /4$_1'$/, za $t \geqslant t_0$, imaju:

a/ za $a(t) < 0$ i $f(t) > 0$, po bar jedno negativno rješenje koja za sve $t \geqslant t_0$ pripadaju "cijevi"

$$/51/ \qquad t \geqslant t_0, \quad -\sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{|a(t)| - \lambda(t)} + \varepsilon(t)} < x < 0$$

i po jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t \geqslant t_0$ pripadaju "cijevi"

$$/52/ \qquad t \geqslant t_0, \quad 0 < x < \sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{|a(t)| - \lambda(t)} + \varepsilon(t)} \;;$$

b/ za $a(t) > 0$ i $f(t) < 0$, po bar jedno pozitivno rješenje koja za sve $t \geqslant t_0$ pripadaju "cijevi" /52/ i po jednu klasu negativnih rješenja koja za sve $t \geqslant t_0$ pripadaju "cijevi" /51/.

Rješenja koja pripadaju "cijevima" /51/ i /52/, kao i ona izmedju njih, teže nuli kad $t \to +\infty$, te i ispunjavaju uslove /15/ i /8/.

Klase rješenja jednačine /2$_1'$/ koje pripadaju "cijevima" /51/ i /52/ su asimptotski stabilne u smislu definicije 1; klase rješenja jednačine /4$_1'$/ koje pripadaju "cijevima" /51/ i /52/ su ravnomjerno asimptotski stabilne u odnosu na početnu vrijednost t_0 u smislu definicije 4 i ta rješenja su asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima u smislu definicije 6.

Ako, pored navedenih uslova, funkcija $a(t)$ ispunjava i uslov /50/, tada, za dovoljno veliko $t \geqslant t^* > t_0$, uslov /51/ ispunjavaju, u slučaju a/, sva rješenja oblasti $x \geqslant 0$ $(t \geqslant t_0)$, a u slučaju b/ sva rješenja oblasti $x \leqslant 0$ $(t \geqslant t_0)$. Te oblasti su oblasti asimptotske stabilnosti odgovarajućih rješenja.

5^o Pod uslovima /6/, /11/, /28/, /46/ i

/53/ $$\left(|a(t)| - \lambda(t)\right)\varepsilon(t) > \frac{m(t) - \varepsilon'(t)}{2m \sqrt[2m]{\left(\frac{|f(t)|}{|a(t)| + \lambda(t)} - \varepsilon(t)\right)^{2m-1}}} \quad \text{za } t \geq t_o,$$

gdje funkcija $m(t)$ ispunjava uslove /14/, jednačine /$2_1'$/ i /$4_1'$/, za $t \geq t_o$, imaju:

a/ za $a(t) < o$ i $f(t) > o$, po bar jedno negativno rješenje koja za sve $t \geq t_o$ pripadaju "cijevi"

/54/ $$t \geq t_o, \quad -\sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{|a(t)| - \lambda(t)}} + \varepsilon(t) < x < -\sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{|a(t)| + \lambda(t)} - \varepsilon(t)},$$

kao i po jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t \geq t_o$ pripadaju "cijevi"

/55/ $$t \geq t_o, \quad \sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{|a(t)| + \lambda(t)} - \varepsilon(t)} < x < \sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{|a(t)| - \lambda(t)}} + \varepsilon(t);$$

b/ za $a(t) > 0$ i $f(t) < 0$, po bar jedno pozitivno rješenje koja za sve $t \geq t_o$ pripadaju "cijevi" /55/, kao i po jednu klasu negativnih rješenja koja za sve $t \geq t_o$ pripadaju "cijevi" /54/.

Rješenja jednačina /$2_1'$/ i /$4_1'$/ koja pripadaju gornjim "cijevima" ispunjavaju i uslove /15/ i /8/, jer širine tih "cijevi" teže nuli kad $t \to +\infty$.

Što se tiče stabilnosti gornjih rješenja važi isti zaključak kao i za prethodni slučaj 4^o, gdje samo umjesto "cijevi" /51/ i /52/ ovdje imamo "cijevi" /54/ i /55/.

Ako, pored navedenih uslova, funkcija $a(t)$ ispunjava i uslov /5o/, tada, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_o$, u slučaju a/, "cijevi" /54/ pripadaju sva rješenja jednačina /$2_1'$/ i /$4_1'$/ oblasti

$$x \geq -\sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{|a(t)| + \lambda(t)} - \varepsilon(t)}, \quad t \geq t_o,$$

a u slučaju b/ "cijevi" /55/ pripadaju sva rješenja jednačina /$2_1'$/ i /$4_1'$/ oblasti

$$x \leq \sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{|a(t)| + \lambda(t)} - \varepsilon(t)}, \quad t \geq t_o.$$

Te oblasti su, upravo, oblasti asimptotske stabilnosti odgovarajućih rješenja.

6^o Pod uslovima /33/, /34/ /$b \geq o$/ jednačina /$32_1'$/, za $t \geq t_o$, ima:

a/ za $k < o$ i $f(t) > o$, bar jedno negativno rješenje koje teži $-\sqrt[2m]{b}$, a sva pozitivna i jedna klasa negativnih rješenja teže $\sqrt[2m]{b}$ kad $t \to +\infty$

b/ za $k > o$ i $f(t) < o$, bar jedno pozitivno rješenje koje teži $\sqrt[2m]{b}$, a sva negativna i jedna klasa pozitivnih rješenja teže $-\sqrt[2m]{b}$ kad $t\to+\infty$,

c/ za $k=0$, bar jedno pozitivno rješenje koje teži $\sqrt[2m]{b}$ i bar jedno negativno rješenje koje teži $-\sqrt[2m]{b}$ kad $t\to+\infty$.

Klase rješenja jednačine /$32_1'$/ koje teže $\pm\sqrt[2m]{b}$ kad $t\to+\infty$ su asimptotski stabilne u smislu definicije 1.

7^0 Pod uslovima /35/, /49/ i

$$p(t)\varepsilon(t) > \frac{\left|\left(\frac{f(t)}{p(t)}\right)'\right| - \varepsilon'(t)}{2m\sqrt[2m]{\left(\frac{|f(t)|}{p(t)}+\varepsilon(t)\right)^{2m-1}}} \quad \text{za } t\geq t_0,$$

jednačina /$32_1'$/, za $t\geq t_0$, ima:

a/ za $h(t,x)<0$ i $f(t)>0$, bar jedno negativno rješenje koje za sve $t\geq t_0$ ispunjava uslov

/56/ $$-\sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{p(t)}+\varepsilon(t)} < x(t) < 0$$

i jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t\geq t_0$ ispunjava uslov

/57/ $$0 < x(t) < \sqrt[2m]{\frac{|f(t)|}{p(t)}+\varepsilon(t)} \;;$$

b/ za $h(t,x)>0$ i $f(t)<0$, bar jedno pozitivno rješenje koje za sve $t\geq t_0$ ispunjava uslov /57/ i jednu klasu negativnih rješenja koja za sve $t\geq t_0$ ispunjava uslov /56/. /Rješenja o kojima je riječ, kao i sva ona izmedju njih, teže nuli kad $t\to+\infty$./

Klase rješenja jednačine /$32_1'$/ koje ispunjavaju uslove /56/ i /57/ su asimptotski stabilne klase rješenja u smislu definicije 1.

Ako, pored navedenih uslova, funkcija $p(t)$ ispunjava i uslov /40/, tada, za dovoljno veliko $t\geq t''>t_0$, u slučaju a/, uslov /57/ ispunjavaju sva rješenja oblasti $x\geq 0$ $(t\geq t_0)$, a u slučaju b/, uslov /56/ ispunjavaju sva rješenja oblasti $x\leq 0$ $(t\geq t_0)$. Te oblasti su oblasti asimptotske stabilnosti odgovarajućih rješenja.

8^0 Pod uslovima /35/, /36/, /48/ i

/37"/ $$p(t)\varepsilon(t) > \frac{n(t)-\varepsilon'(t)}{2m\sqrt[2m]{\left(\frac{|f(t)|}{p(t)+2(t)}-\varepsilon(t)\right)^{2m-1}}} \quad \text{za } t\geq t_0,$$

gdje funkcija $n(t)$ ispunjava uslov /38/, jednačina /$32_1'$/, za $t\geq t_0$, ima:

a/ za $h(t,x)<0$ i $f(t)>0$, bar jedno negativno rješenje koje za sve $t\geq t_0$ ispunjava uslov

/58/ $$-\sqrt[2n]{\frac{|f(t)|}{p(t)}+\varepsilon(t)} < x(t) < -\sqrt[2n]{\frac{|f(t)|}{p(t)+q(t)}-\varepsilon(t)}$$

i jednu klasu pozitivnih rješenja koja za sve $t \geq t_0$ ispunjava uslov

/59/ $$\sqrt[2n]{\frac{|f(t)|}{p(t)+q(t)}-\varepsilon(t)} < x(t) < \sqrt[2n]{\frac{|f(t)|}{p(t)}+\varepsilon(t)} \ ;$$

b/ za $h(t,x)>0$ i $f(t)<0$, bar jedno pozitivno rješenje koje za sve $t \geq t_0$ ispunjava uslov /59/ i jednu klasu negativnih rješenja koja za sve $t \geq t_0$ ispunjava uslov /58/.

Klase rješenja jednačine /32$_2'$/ koje ispunjavaju uslove /58/ i /59/ su asimptotski stabilne klase rješenja u smislu definicije 1.

Ako, pored navedenih uslova, funkcija $p(t)$ ispunjava i uslov /4o/, tada, za dovoljno veliko $t \geq t^* > t_0$, u slučaju a/, uslov /59/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \geq -\sqrt[2n]{\frac{|f(t)|}{p(t)+q(t)}-\varepsilon(t)} \ , \ t \geq t_0 \ ,$$

a u slučaju b/, uslov /58/ ispunjavaju sva rješenja oblasti

$$x \leq \sqrt[2n]{\frac{|f(t)|}{p(t)+q(t)}-\varepsilon(t)} \ , \ t \geq t_0 \ .$$

Te oblasti su oblasti asimptotske stabilnosti odgovarajućih rješenja.

PRIMJERI

1. Jednačina

$$x' = \frac{t+\sin f(t,x)}{4t+1}\, x^n - \frac{t+\ln(t^2+10)}{t+2} \qquad (n=1,2,\cdots) \ ,$$

gdje je $f(t,x)$ definisana i neprekidna funkcija i ispunjava potrebne uslove za jedinost rješenja jednačine u oblasti $t \geq 2$ i $|x| < +\infty$, za $t \geq 2$, ima:

a/ Za $n=2k+1$ $(k=0,1,2,\dots)$, bar jedno pozitivno rješenje koje teži $\sqrt[2k+1]{4}$ kad $t \to +\infty$.

b/ Za $n=2k$ $(k=1,2,\dots)$, bar jedno pozitivno rješenje koje teži $\sqrt[2k]{4}$, a sva negativna i jedna klasa pozitivnih rješenja teže $-\sqrt[2k]{4}$ kad $t \to +\infty$. Klasa rješenja $x(t)$, koja su odredjena početnim uslovima $x(t_0)$, koja teži $-\sqrt[2k]{4}$ kad $t \to +\infty$ je asimptotski stabilna u smislu definicije 1.

Dovoljno je primjetiti da je

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t+\sin f(t,x)}{4t+1} = \frac{1}{4} \ \text{za sve } |x| < +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{t+\ln(t^2+10)}{t+2} = 1 \ .$$

2. Neka je data jednačina

/6o/ $$x' = \left(\frac{\sin t}{1+e(t,x)} - 2t\right) x^n + t(5-\cos t) \qquad (n=1,2,\cdots) \ ,$$

gdje je $\varphi(t,x) \geq 0$ definisana i neprekidna funkcija i ispunjava potrebne uslove za jedinost rješenja jednačine u poluravni tOx $(t \geq 4)$.

Uz jednačinu /6o/ posmatrajmo i jednačinu

/6o'/ $$x_0' = -2t\,x^n + t(5-\cos t) \quad (n=1,2,\cdots).$$

Ovdje imamo:

$$a(t) = -2t, \quad f(t) = t\,(5-\cos t), \quad h(t,x) = \frac{\sin t}{1+\varphi(t,x)}.$$

Za $t \geq 4$ i $|x| < +\infty$ važi:

$$|h(t,x)| \leq 1 = \lambda(t),$$

$$\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)-\lambda(t)}\right)'\right| = \left|\left(\frac{t\,(5-\cos t)}{2t+1}\right)'\right| < 1,$$

$$\left|\left(-\frac{f(t)}{a(t)+\lambda(t)}\right)'\right| = \left|\left(\frac{t\,(5-\cos t)}{2t-1}\right)'\right| < 1 = m(t).$$

Uslovi /24/, /28/ i /46/ očevidno su ispunjeni.

Uzmemo li da je $\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ može se pokazati da su i uslovi /13/, /13'/ i /53/ ispunjeni za $t \geq 4$.

Uzmimo sada sljedeće "cijevi"

/61/ $$t \geq 4, \quad \sqrt[n]{\frac{t(5-\cos t)}{2t+1} - \frac{1}{\sqrt{t}}} < x < \sqrt[n]{\frac{t(5-\cos t)}{2t-1} + \frac{1}{\sqrt{t}}},$$

/62/ $$t \geq 4, \quad -\sqrt[n]{\frac{t(5-\cos t)}{2t-1} + \frac{1}{\sqrt{t}}} < x < -\sqrt[n]{\frac{t(5-\cos t)}{2t+1} - \frac{1}{\sqrt{t}}}.$$

Koristeći teoreme B_4 c/ i B_4' b/ i tvrdjenje 5^0 a/ možemo dati sljedeće zaključke:

a/ Za $n=2k+1$ $(k=0,1,2,\cdots)$, jednačine /6o/ i /6o'/ imaju po jednu klasu pozitivnih rješenja koje za sve $t \geq 4$ pripadaju "cijevi" /61/, a za dovoljno veliko $t \geq t^* > 4$, "cijevi" /61/ pripadaju sva rješenja jednačina /6o/ i /60'/.

b/ Za $n=2k$ $(k=1,2,\cdots)$, jednačine /6o/ i /6o'/ imaju po jednu klasu pozitivnih rješenja koje za sve $t \geq 4$ pripadaju "cijevi" /61/, a za dovoljno veliko $t \geq t^* > 4$, toj "cijevi" pripadaju sva rješenja jednačina /6o/ i /6o'/ oblasti

$$x \geq -\sqrt[2k]{\frac{t(5-\cos t)}{2t+1} - \frac{1}{\sqrt{t}}}, \quad t \geq 4;$$

kao i po bar jedno negativno rješenje koja za sve $t \geq 4$ pripadaju "cijevi" /62/.

c/ Kako širina "cijevi" /61/, odnosno /62/, teži nuli kad $t \to +\infty$, to postoji neprekidna i monotono opadajuća funkcija $r(t)$ koja teži nuli i takva da za rješenja $x(t)$ i $x_o(t)$ respektivno jednačina /6o/ i /6o'/ koja pripadaju "cijevima" /61/ i /62/ važi ocjena

$$|x(t)-x_o(t)| < r(t) \quad \text{za } t \geq 4,$$

te i

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)-x_o(t)| = 0 .$$

d/ Pitanje stabilnosti rješenja. Klasa rješenja $x(t)$ jednačine /6o/ koja pripada "cijevi" /61/, za sve $t \geq 4$, je asimptotski stabilna u smislu definicije 1, a klasa rješenja $x_o(t)$ jednačine /6o'/ koja pripada "cijevi" /61/, za sve $t \geq 4$, je ravnomjerno asimptotski stabilna u odnosu na početnu vrijednost $t_o=4$ u smislu definicije 4 i ta klasa rješenja je asimptotski stabilna pri stalnim poremećajima $\frac{\sin t}{1+\varphi(t,x)}x^n$ u smislu definicije 6. To je ona klasa rješenja $x_o(t)$ koja su odredjena početnim vrijednostima $x_o(t_o)$ koje pripadaju "cijevi" /61/. "Cijevi" /61/ pripadaju i odgovarajuće stacionarne krive jednačina /6o/ i /6o'/.

3. Posmatrajmo jednačinu

/63/
$$x' = \left(4t + \frac{\ln t - \varphi(t,x)}{\sqrt{a+\psi(t,x)}}\right) x^n - 3t(8+\sin 2t) \quad (n=1,2,\cdots),$$

gdje je $a \geq 1$ konstanta, a funkcije $\varphi(t,x)$ i $\psi(t,x)$ ispunjavaju uslove: $0 \leq \varphi(t,x) \leq \ln t$, $\psi(t,x) \geq 0$, definisane i neprekidne funkcije i zadovoljavaju potrebne uslove za jedinost rješenja jednačine u poluravni tOx $(t \geq 4)$.

Prije svega uočimo sljedeću procjenu, za $t \geq 4$ i $|x| < +\infty$:

$$p(t) = 4t \leq h(t,x) \equiv 4t + \frac{\ln t - \varphi(t,x)}{\sqrt{a+\psi(t,x)}} \leq 4t + \ln t = p(t) + q(t) .$$

Dalje je, za $t \geq 4$ i $|x| < +\infty$:

$$f(t) = -3t(8+\sin 2t), \quad \left|\left(\frac{f(t)}{p(t)}\right)'\right| = \left|-\frac{3}{4}(8+\sin 2t)'\right| < 2 ,$$

$$\left|\left(\frac{f(t)}{p(t)+q(t)}\right)'\right| = \left|\left(-\frac{3t(8+\sin 2t)}{4t+\ln t}\right)'\right| < 2 = n(t) ,$$

$$0 < \frac{3t(8+\sin 2t)}{4t+\ln t} \leq -\frac{f(t)}{h(t,x)} \equiv \frac{3t(8+\sin 2t)}{4t + \frac{\ln t - \varphi(t,x)}{\sqrt{a+\psi(t,x)}}} \leq \frac{3}{4}(8+\sin 2t) .$$

Za funkciju $\varepsilon(t)$ možemo uzeti: $\varepsilon(t) = \frac{1}{t}$, te će, prema gornjem, potrebne "cijevi" biti:

/64/
$$t \geq 4, \quad \sqrt[n]{\frac{3t(8+\sin 2t)}{4t+\ln t} - \frac{1}{t}} < x < \sqrt[n]{\frac{3}{4}(8+\sin 2t) + \frac{1}{t}} ,$$

$$/65/ \qquad t \geq 4, \quad -\sqrt[n]{\frac{3}{4}(8+\sin 2t)+\frac{1}{t}} < x < -\sqrt[n]{\frac{3t(8+\sin 2t)}{4t+\ln t}-\frac{1}{t}} \, .$$

Nije teško pokazati da su, za $t \geq 4$, svi potrebni uslovi: /36/, /37/, /37'/, /37"/, /4o/ i /48/ ispunjeni, te se, na osnovu teorema B_5 b/ i B_5' b/ i tvrdjenja 8^0, može konstatovati:

a/ Za $n = 2k+1$ $(k=0,1,2,\dots)$, jednačina /63/ ima bar jedno pozitivno rješenje koje za sve $t \geq 4$ pripada "cijevi" /64/.

b/ Za $n=2k$ $(k=1,2,\dots)$, jednačina /63/ ima bar jedno pozitivno rješenje koje za sve $t \geq 4$ pripada "cijevi" /64/ i jednu klasu negativnih rješenja koja za sve $t \geq 4$ pripada "cijevi" /65/, a za dovoljno veliko $t \geq t^* > 4$ "cijevi" /65/ pripadaju sva rješenja jednačine /63/ oblasti

$$/66/ \qquad x \leq \sqrt[2k]{\frac{3t(8+\sin 2t)}{4t+\ln t}-\frac{1}{t}} \, , \quad t \geq 4 \, .$$

c/ Kako širine "cijevi" /64/ i /65/ teže nuli kad $t \to +\infty$, to sa gledišta stabilnosti možemo konstatovati da je pozitivno rješenje $x(t)$ koje pripada "cijevi" /64/ nestabilno u smislu Ljapunova, a da klasa negativnih rješenja /tačnih ili približnih/ koja pripada "cijevi" /65/, za sve $t \geq 4$, je asimptotski stabilna u smislu definicije 1 /odnosno, definicije 5/, te da je oblast /66/ oblast asimptotske stabilnosti te klase rješenja.

L I T E R A T U R A

[1] Барбашин Е. А.: Введение в теорию устойчивости. "Наука", Москва, 1967.

[2] Bertolino M.: Egzistencija asimptotskih rešenja jedne klase diferencijalnih jednačina /doktorska teza/. Vesnik Društva matematičara i fizičara SRS, XV, Beograd, 1963, 79-124.

[3] Bertolino M.: Asimptotska rešenja jedne diferencijalne jednačine prvog reda faktorizovane desne strane. Matematički vesnik, 1 /16/, Beograd, 1964, 23-27.

[4] Bertolino M.: Tuyaux curvilignes des solutions d'une équation différentielle. Matematički vesnik, 1 /16/, Beograd, 1964, 239-241.

[5] Bertolino M.: Solutions asymptotiques d'une équation différentielle au deuxième membre rationnel. Matematički vesnik, 3 /18/, Beograd, 1966, 275-285.

[6] Bertolino M.: Démonstration élémentaire d'un cas particulier du théorème de retracte de Ważewski. Matematički vesnik, 3 /18/, Beograd, 1966, pp. 3o2-3o3.

[7] Bertolino M.: Solutions approximatives presque stables des équations différentielles. Matematički vesnik, 4 /19/, Beograd, 1967, 71-74.

[8] Bertolino M.: Inégalités différentielles et l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires. Editions spéciales de l'Institut Mathématique de Beograd, T. 7, 1969, 61-152.

[9] Bertolino M.: Tuyaux étagés de l'approximation des équations différentielles. Publications de l'Institut Mathématique de Beograd, T. 12 /26/, 1971, 5-1o.

[1o] Borsuk K.: Sur les rétractes. Fund. Math. 17, /1931/, p. 152.

[11] Демидович Б. П.: Лекции по математической теории устойчивости. "Наука", Москва, 1967.

[12] Эльсгольц Л. Э.: Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. "Наука", Москва, 1965.

[13] Еругин Н. П., Штокало И. З. и др.: Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. "Вища школа", Киев, 1974.

[14] Камке Э.: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. "Наука", Москва, 1971.

[15] Лефшец С.: Геометрическая теория дифференциальных уравнений. ИЛ, Москва, 1961.

[16] Ла-Салль Ж., Лефшец С.: Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. "Мир", Москва, 1964.

[17] Малкин И. Г.: Теория устойчивости движения. "Наука", Москва, 1966.

[18] Немыцкий В. В. и Степанов В. В.: Качественная теория дифференциальных уравнений. ОГИЗ, Москва, 1947.

[19] Pejović T.: Diferencijalne jednačine - egzistencija rešenja. Beograd, 1958.

[2o] Peyovitch T.: Existence et quelques propriétés asymptotiques des équations différentielles ordinaires. Editions spéciales de l'Institut Mathématique de Beograd, T. 7, 1969, 9-57.

[21] Petrović M.: Računanje s brojnim razmacima. Beograd, 1969.

[22] Rašajski B.: Teorija običnih diferencijalnih jednačina. Beograd, 197o.

[23] Ważewski T.: Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires. Ann. Soc. pol. Math. T. XX, 279-313.

[24] Vrdoljak B.: Nove mogućnosti primjene metode retrakcije u kvalitativnoj analizi diferencijalnih jednačina. Matematički vesnik, lo /25/, Beograd, 1973, 45-58.

[25] Vrdoljak B.: Neki rezultati T. Pejovića sa stanovišta metode retrakcije sa dopunama i uopštenjima. Matematički vesnik, lo /25/, Beograd, 1973, 59-73.

[26] Зубов В. И.: Математические методы исследования систем автоматического регулирования, Судпромгиз, Ленинград, 1959.