BERNHARD RIEMANN'S

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE WERKE.

NACHTRÄGE

HERAUSGEGEBEN VON

ax ilhelm

M. NOETHER UND **W. WIRTINGER.**

MIT 9 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Vorrede.

In den seit dem Erscheinen der zweiten Auflage von Riemanns Werken nunmehr verflossenen zehn Jahren ist für die Hauptgebiete seiner Tätigkeit, die Theorien der Abelschen Funktionen und der linearen Differentialgleichungen, neues Material, und zwar vorwiegend in der Form von Nachschriften seiner *Vorlesungen*, zum Vorschein gekommen*), welches zeigt oder bestätigt, daß Riemann in seinen Vorlesungen erheblich weiter gegangen ist als in seinen Veröffentlichungen. Dieses Material allgemein zugänglich zu machen, ist der Zweck unserer Publikation der „Nachträge zu Riemanns Ges. Math. Werken".

Für die *Abelschen Funktionen* ist hierbei zunächst an die Wintervorlesung von 1861/62 gedacht. Diese war als Fortsetzung der Sommervorlesung „Über die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere elliptische und Abelsche" **) angekündigt und sollte dreistündig insbesondere***) „die allgemeine Theorie der Integrale algebraischer Differentialien" entwickeln. Auf sie führen eine ganze Reihe neuer und wichtiger Begriffe und Betrachtungsweisen in der Theorie der Theta- und der algebraischen Funktionen zurück, und sind als solche zerstreut in Abhandlungen, besonders von Roch und Prym, eingeführt und seitdem viel benutzt worden, ohne in den Werken Riemanns selbst bisher eine Stelle gefunden zu haben. Nur die Untersuchung über die Konvergenz der Thetareihe ist aus einem Rochschen Hefte in die Werke (XXX der 2., XXIX der 1. Aufl.) aufgenommen; und ebenso die Ausführungen, welche Riemann über die Funktionen im Fall $p = 3$ im Februar 1862 vorgetragen hat (XXXI, bezw. XXX),

---

*) Vgl. für einen Teil desselben: F. Klein, in den Göttinger Nachrichten, math.-phys. Klasse, 1897, Heft 2 und Geschäftl. Mitt. 1898, Heft 1.

**) Aus dieser Vorlesung ist der Teil über elliptische Funktionen von Herrn H. Stahl, Teubner 1899, herausgegeben (irrtümlich dabei dem W.-S. 1861/62 zugeschrieben). Das in Göttingen liegende Hattendorffsche Heft bezieht sich wesentlich auf diese Sommervorlesung 1861.

***) Nach dem in Akt 19_5 der Göttinger Riemann-Manuskripte im Entwurf enthaltenen Vorlesungsanschlag.

nach demselben Heft, das aber für diesen Teil eine Bearbeitung einer anderen Nachschrift, wohl eines Stückes der Prymschen, darstellt. Der letzte Teil der Vorlesung hat sich hauptsächlich auf die algebraische Darstellung von Thetaquotienten für $p = 3$ und für den allgemeinen hyperelliptischen Fall bezogen und wurde, täglich gehalten und in die Zeit vom 3. bis 11. März zusammengedrängt, zuletzt nur noch in großen Zügen und ohne Ausführung der Rechnungen vorgetragen.

Eine Herausgabe auch dieses interessanten Schlußteils wird durch die Nachschrift des Herrn F. Prym, die bis zum 8. März reicht, und durch ein auch die beiden letzten Tage umfassendes Heft von B. Minnigerode ermöglicht. Letzteres Heft ist eine mit Bleistift ausgeführte, fast wörtliche Nachschrift der Vorlesung, die sogar das Datum jedes Vortrags enthält*); es konnte noch genügend entziffert werden und bildet die Grundlage der Herausgabe, während das Prymsche zur Kontrolle verglichen wurde. Diese Märzvorträge**) werden hier (unter I) möglichst im Wortlaut veröffentlicht; zur Vollständigkeit wird zugleich eine Übersicht über die Wintervorlesung überhaupt, sowie eine authentische Darstellung der bisher nur zitatweise bekannten originalen Kapitel gegeben, endlich sind auch einige kurze Zusätze zu dem von Weber veröffentlichten Teil aufgenommen.

Die Anmerkungen zu dieser Bearbeitung, zu welchen auch die Göttinger Manuskripte herangezogen worden sind, haben besonders den Zweck, auf den Zusammenhang der Vorlesung mit der späteren Litteratur, sei es daß diese an die Vorlesung anschließt, sei es daß sie einzelne Resultate selbständig wiederfindet, hinzuweisen.

Daß Herr Prof. Prym und Frau Professor Minnigerode, letztere durch gütige Vermittlung der Herren Prym und Stahl, bereitwilligst die Freundlichkeit hatten, die Hefte dem Herausgeber zur Veröffentlichung zu überlassen, verpflichtet denselben zum wärmsten Danke.

---

*) Durch die mitangegebenen Wochentage konnten die meist irrig bezeichneten Datumszahlen richtig gestellt werden. Hiermit, und nach einer gef. Angabe von Herrn Prym, ist auch die Festlegung der ganzen Vorlesung auf W.-S. 1861/62 gesichert. Die Verlegung dieser Vorträge auf Sommer 1862 — Prym im Vorwort zu seinen „Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristiken-Theorie" (Teubner 1882); Stahl im Vorwort zu seinem oben zitierten Buche, und bei anderen — beruht auf einem Verwechseln der Zeit der Ausarbeitung einiger Bogen des Prymschen Heftes mit der der Nachschrift. Das Minnigerodesche Heft ist nun bei den Göttinger Papieren deponiert worden.

**) Auf einige der in denselben gemachten Fortschritte Riemanns hat schon Herr H. Stahl im Vorwort zu seiner „Theorie der Abelschen Funktionen" (Teubner 1896) hingewiesen, sowie der Bearbeiter dieser Herausgabe in Bd. 8, Heft 1 des Jahresber. der Deutschen Math.-Vereinigung.

Die *Theorie der linearen Differentialgleichungen und der hypergeometrischen Reihe* hat Riemann in zwei Vorlesungen, beide unter dem Titel: „Die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere hypergeometrische Reihen und verwandte Transcendenten“, behandelt, das erstemal dreistündig im Wintersemester 1856/57, das zweitemal vierstündig im Wintersemester 1858/59.

Von der Vorlesung von 1856/57 liegt eine etwa bis zu den Entwicklungen des Fragmentes XXIII der Gesammelten Werke reichende Nachschrift von E. Schering vor, aus welcher jedoch nur ein kurzer Abschnitt, der sich in der späteren Vorlesung nicht findet, aufgenommen wurde. Diese Nachschrift befindet sich als Akt Nr. 37 der Riemann-Papiere — zusammen mit derjenigen der Vorlesung über Abelsche Funktionen 1855/56 — auf der Göttinger Universitätsbibliothek.

Von der zweiten im Wintersemester 1858/59 gehaltenen Vorlesung existiert eine von Herrn Professor W. v. Bezold angefertigte, unmittelbare stenographische Nachschrift, welche als Akt Nr. 29 der Riemann-Papiere ebendort liegt. Das Heft trägt die spätere Aufschrift: „B. Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe, S.-S. 1859“, wobei aber die Datierung wohl irrtümlich ist*).

Dieses Heft läßt zwar überall die Gedanken Riemanns und mit Ausnahme einiger Stellen auch den Gang der Rechnung unzweideutig erkennen, bedurfte aber für den Druck natürlich einer redaktionellen Überarbeitung. Die Herausgabe beschränkte sich auf zwei Teile der Vorlesung, in welchen die neuen Gedanken Riemanns besonders hervortreten, zumal da der übrige Inhalt, soweit er Riemann eigentümlich ist, von ihm selbst oder aus seinem Nachlaß bereits publiziert ist.

Der erste der hier mitgeteilten Abschnitte handelt von der Herleitung der Eigenschaften der P-Funktion aus ihrem Ausdruck durch ein bestimmtes Integral, sowie von ihrem Verhalten im Falle des Auftretens einer ganzzahligen Exponentendifferenz und bildet so eine Ergänzung zu Abhandlung IV der Ges. Werke.

Der zweite Teil jedoch hat durchaus selbständige Bedeutung und behandelt die Transcendenten, welche aus der Umkehrung des Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, insbesondere derjenigen der hypergeometrischen Reihe entstehen. Er bringt ferner allgemeine Bemerkungen zur Integration nicht homogener Gleichungen und der dabei auftretenden Transcendenten, endlich die Durchführung dieser Gedanken an dem elliptischen Integral erster Gattung und seinen Perioden.

---

*) Vgl. das Vorlesungsverzeichnis am Schlusse dieser „Nachträge“.

Bei der erneuten Durchsicht der auf diese beiden Gebiete sich beziehenden Papiere Riemanns haben wir noch Einiges von allgemeinem Interesse vorgefunden, das wir in mehreren Zusätzen ebenfalls hier mitteilen. Als Schluß geben wir einen kurzen Bericht über die von uns benutzten Göttinger Manuskripte und eine Übersicht über die von Riemann angekündigten Vorlesungen.

Es ist selbstverständlich, daß durch die Feststellung einer Reihe von Gedanken, welche Riemann für sich oder vor einem kleinen Kreis von Zuhörern entwickelte, die Verdienste derjenigen nicht beeinträchtigt werden, ja eher in höherem Lichte erscheinen, welche später dieselben Probleme unabhängig erfaßt und ihnen durch eingehende Bearbeitung die gebührende Stellung in der heutigen Mathematik verschafft haben. Aber die Tatsache, daß diese Fragestellungen und Methoden dem ursprünglichen Riemannschen Gedankenkreis angehören, beansprucht ein ähnliches historisches Interesse, wie die andere, daß Gauß lange vor Abel und Jacobi im Besitz wesentlicher Teile der Theorie der elliptischen Funktionen war. Riemann selbst hatte — nach dem Entwurf*) eines Begleitbriefes von November 1865 zur Sendung seiner Abhandlung „Über das Verschwinden der Thetafunktionen“ (Werke XI) — den Plan gefaßt, während seines Aufenthaltes in Italien seine Untersuchungen über Abelsche Funktionen als Fortsetzung der ersten Abhandlung (Werke VI) im Zusammenhang auszuarbeiten, denselben aber aufgeben müssen: meist zu schwach zum Arbeiten, sei es ihm nur bei größter Hitze im Juli 1864 zu Pisa gelungen, jene Abhandlung niederzuschreiben. Unsere jetzige Veröffentlichung kann wohl, soweit sie die Abelschen Funktionen berührt, die Absichten Riemanns aufklären.

Die Anregung zur Herausgabe dieser „Nachträge“ ging von Noether aus, der auch die Stücke I, IV A—D bearbeitete und mit N. zeichnet. Die Stücke II, III, IV E, F sind von Wirtinger bearbeitet, der mit W. zeichnet. Das von den Bearbeitern im Text Hinzugefügte ist, von Unwesentlichem abgesehen, durch eckige Klammern und kleineren Druck kenntlich gemacht. Vor dem Druck ist das Manuskript durch die Hände der Herren Weber und Prym gegangen.

Der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und dem Kuratorium des Riemannschen Nachlasses, Herrn Direktor Schilling in Bremen und Herrn Professor Weber in Straßburg, haben wir unseren besten Dank auszusprechen für ihr Interesse an der Herausgabe und für die Bereitwilligkeit, mit der sie unseren Zweck förderten.

Erlangen und Innsbruck, im Mai 1902.

M. Noether. W. Wirtinger.

*) Akt „Varia 25“ der Göttinger Papiere.

Inhalt.

I.

Vorlesungen über die allgemeine Theorie der Integrale algebraischer Differentialien.

(Wintersemester 1861/62.)

Übersicht über die Vorlesungen vom 28. Oktober bis 6. November 1861.

28. Okt., 30. Okt., 1. Nov., 4. Nov. 1861: Konvergenz der p-fach unendlichen Thetareihe [s. Nr. XXX, S. 483—486 der zweiten (Nr. XXIX der ersten) Auflage von Riemann's Ges. Math. Werken].(1)

6. Nov: Bestimmung der Funktion ϑ durch Periodizitätseigenschaften (nach Art. 17 der Th. A. F.*)).

Prinzip der Zerlegung einer periodischen Funktion.(2)

(8., 11. Nov.):

Aus den Gleichungen (2) und (3) von Art. 17 der Th. A. F. folgt, daß für die $2p$ linear unabhängigen Systeme zusammengehöriger Periodizitätsmoduln der p unabhängigen Größen $v_1, v_2, \cdots, v_p$ sich

$$\log\vartheta(v_1, v_2, \cdots, v_p) + \log\vartheta(v_1+b_1, v_2+b_2, \cdots, v_p+b_p),$$

von ganzen Vielfachen von $2\pi i$ abgesehen, bezw. um

$$0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ -4v_1-2b_1-2a_{11},\ \cdots,\ -4v_p-2b_p-2a_{pp}$$

ändert; also wie eine Funktion

$$\log\vartheta(2v_1+b_1, \cdots, 2v_p+b_p),$$

aber gebildet mit den Doppelten der ursprünglichen Periodizitätsmoduln πi und $a_{\mu,\nu}$.

Setzt man nun

$$\vartheta(v_1, v_2, \cdots, v_p)\cdot\vartheta(v_1+b_1, v_2+b_2, \cdots, v_p+b_p) = f(2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_p),$$

so läßt sich diese Funktion nach folgendem Prinzip zerlegen:

Ist $f(u+2\pi i) = f(u)$, so spaltet sich die Funktion $f(u)$ durch die Formeln

---

*) Die Abhandlung „Theorie der Abelschen Funktionen", Nr. VI der Werke, wird im Folgenden mit „Th. A. F." zitiert.

$$f(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u),$$
$$\varphi_1(u) = \tfrac{1}{2}\{f(u) + f(u + \pi i)\}, \quad \varphi_2(u) = \tfrac{1}{2}\{f(u) - f(u + \pi i)\}$$

in zwei Teile, von denen bei Änderung von u um πi der eine den Faktor $+1$, der andere den Faktor -1 erlangt.

Wendet man diese Zerlegung auf das Produkt

$$f(2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_p),$$

betrachtet als Funktion von $u = 2v_1$, an, so zerfällt dasselbe in zwei Teile φ_1 und φ_2; jede dieser Funktionen zerlegt sich dann, als Funktion von $2v_2$ betrachtet, wieder in zwei Teile; etc. Im ganzen zerlegt sich also das Produkt $f(2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_p)$ in eine Summe von 2^p Funktionen φ, welche alle bei Änderung der $2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_p$ um πi nur Faktoren ± 1 annehmen. Es möge für irgend eine dieser Funktionen sein:

$$\varphi(2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_\nu + \pi i, \cdots, 2v_p) = e^{\varepsilon_\nu i \pi} \cdot \varphi(2v, \cdots, 2v_\nu, \cdots, 2v_p),$$

wo die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ die Werte $\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1}$ vorstellen. Dann hat die Funktion

$$e^{-2\sum\limits_{\nu=1}^{p} \varepsilon_\nu v_\nu} \cdot \varphi(2v_1, \cdots, 2v_p) = \psi(2v_1, \cdots, 2v_p)$$

die Eigenschaft, sich bei Änderung irgend eines der $2v_1, \cdots, 2v_p$ um πi nicht zu ändern, bei gleichzeitiger Änderung der $2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_p$ bezüglich um

$$2a_{1,\mu}, \; 2a_{2,\mu}, \; \cdots, \; 2a_{p,\mu}$$

aber den Faktor

$$e^{-4v_\mu - 2b_\mu - 2\sum\limits_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,\mu} - 2a_{\mu,\mu}}$$

anzunehmen. D. h. die Funktion $\psi(2v_1, \cdots, 2v_p)$ ist bis auf einen konstanten Faktor definiert als eine Funktion ϑ, gebildet mit den Argumenten:

$$2v_1 + b_1 + \sum_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,1}, \quad 2v_2 + b_2 + \sum_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,2}, \quad \cdots, \quad 2v_p + b_p + \sum_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,p},$$

und mit den Periodizitätsmoduln

$$2a_{1,\mu}, \; 2a_{2,\mu}, \; \cdots, \; 2a_{p,\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, p).$$

Der konstante Faktor kann von den b abhängen. Man erhält also durch das Prinzip das Produkt

$$\vartheta(v_1, v_2, \cdots, v_p) \cdot \vartheta(v_1 + b_1, v_2 + b_2, \cdots, v_p + b_p)$$

als Summe von 2^p ϑ-Funktionen, je multipliziert mit Faktoren der Form $e^{2\sum\limits_\nu \varepsilon_\nu v_\nu}$, und mit noch zu bestimmenden konstanten Koeffizienten.

Das Zerlegungsprinzip läßt sich auf das Produkt von n Faktoren:

$$\prod_{m=1}^{m=n} \vartheta(v_1 + b_1^{(m)},\ v_2 + b_2^{(m)},\ \cdots,\ v_p + b_p^{(m)}) = f(nv_1,\ nv_2,\ \cdots,\ nv_p)$$

ausdehnen. Das Produkt ändert sich nicht, wenn v_ν um πi, nv_ν also um $n\pi i$ zunimmt, und nimmt für die zusammengehörigen Änderungen

$$a_{1,\mu},\quad a_{2,\mu},\quad \cdots,\quad a_{p,\mu}$$

der $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p$ den Faktor

$$e^{-2nv_\mu - 2\sum\limits_m b_\mu^{(m)} - na_{\mu,\mu}}$$

an; es verhält sich wie eine Funktion

$$\vartheta\left(\cdots,\ nv_\mu + \sum_m b_\mu^{(m)},\ \cdots\right),$$

gebildet mit den n-fachen der ursprünglichen Periodizitätsmoduln πi und $a_{\mu,\nu}$.

Hat man nun eine Funktion $f(u)$ von der Eigenschaft, daß

$$f(u + n\pi i) = f(u)$$

ist, so läßt sich dieselbe in eine Summe von n Funktionen $\varphi_m(u)$ zerlegen, von denen jede bei Änderung von u um πi nur einen konstanten Faktor annimmt, der eine n^{te} Wurzel der Einheit wird.

Denn sei

$$\varphi(u + \pi i) = \alpha\varphi(u), \quad \varphi(u + n\pi i) = \varphi(u),$$

so wird zunächst

$$\alpha^n = 1;$$

sei dann α eine primitive n^{te} Wurzel von 1, und

$$\varphi_m(u + \pi i) = \alpha^{m-1}\varphi_m(u),$$

so setze man:

$$f(u) = \sum_{m=1}^{m=n} \varphi_m(u).$$

Hieraus wird

$$f(u + \varkappa\pi i) = \sum_m \alpha^{\varkappa(m-1)}\varphi_m(u) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots, n-1)$$

und diese n Gleichungen ergeben die n Funktionen $\varphi_m(u)$ in der Form:

$$\varphi_m(u) = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \alpha^{-\varkappa(m-1)} f(u + \varkappa\pi i) \qquad (m = 1, 2, \cdots, n).$$

Indem man diese Zerlegung auf das Produkt

$$f(nv_1,\ nv_2,\ \cdots,\ nv_p)$$

successiv als Funktion von $u = nv_1, nv_2, \cdots, nv_p$ betrachtet, anwendet, zerlegt sich dasselbe in eine Summe von n^p Funktionen φ, welche alle bei Änderung irgend einer der Größen nv_ν um πi nur Faktoren annehmen, die n^{te} Wurzeln der Einheit sind. Sei für eine dieser Funktionen:

$$\varphi(nv_1, nv_2, \cdots, nv_\nu + \pi i, \cdots, nv_p) = e^{\frac{2\varepsilon_\nu i\pi}{n}} \varphi(nv_1, \cdots, nv_\nu, \cdots, nv_p),$$

wo die ε_ν die Werte $0, 1, \cdots, n-1$ vorstellen; und sei

$$\varphi(nv_1, \cdots, nv_p) = e^{2\sum\limits_{\nu=1}^{p}\varepsilon_\nu v_\nu} \psi(nv_1, \cdots, nv_p),$$

so ändert sich $\psi(nv_1, \cdots, nv_p)$ bei Änderung irgend eines der nv_ν um πi nicht mehr, nimmt aber bei gleichzeitiger Änderung der nv_1, $nv_2, \cdots, nv_p$ bezüglich um

$$na_{1,\mu}, \quad na_{2,\mu}, \quad \cdots, \quad na_{p,\mu},$$

da die φ sich hierbei wie das Produkt f selbst verhalten, den Faktor

$$e^{-2nv_\mu - 2\sum\limits_m b_\mu^{(m)} - 2\sum\limits_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,\mu} - na_{\mu,\mu}}$$

an. D. h. die Funktion $\psi(nv_1, nv_2, \cdots, nv_p)$ ist bis auf einen konstanten Faktor definiert als eine Funktion ϑ, gebildet mit den Argumenten

$$nv_1 + \sum_m b_1^{(m)} + \sum_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,1}, \quad \cdots, \quad nv_p + \sum_m b_p^{(m)} + \sum_\nu \varepsilon_\nu a_{\nu,p},$$

mit den Perioden πi, und mit den Periodizitätsmoduln

$$na_{1,\mu}, \quad na_{2,\mu}, \quad \cdots, \quad na_{p,\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, p).$$

Die konstanten, noch zu bestimmenden Koeffizienten in dem Summenausdruck des Produkts durch die n^p ϑ-Funktionen werden von den $b^{(m)}$ abhängen.

Auf diesem Wege ergibt sich eine Menge von Relationen zwischen Thetareihen. Mit ihrer Hilfe beweist man für $p = 1$, daß der Quotient zweier Thetareihen eine elliptische Funktion ist, d. h. der betreffenden Differentialgleichung genügt, und so hat Jacobi die Theorie der elliptischen Funktionen behandelt. Einen analogen Weg ging Göpel für $p = 2$; außerdem gab er noch eine Tafel aller möglichen Thetarelationen bis zu einem gewissen Umfang hin. Für $p = 3$ würde das Verfahren ohne Hinzunahme algebraischer Prinzipien nicht zum Ziele führen.

Übersicht über die Vorlesungen vom 13. November 1861 bis 24. Januar 1862.

13.—27. Nov. 1861 [3]: Wiederholung aus dem Kolleg des Sommersemesters 1861 über Abelsche Funktionen (aus allgemeiner Funktionentheorie).

2.—11. Dez.: Algebraisches (Art. 6—12 der Th. A. F.).

13.—20. Dez.: Über die Thetafunktion (Art. 17—22 der Th. A. F.).

6. Jan. 1862: Die ersten beiden Absätze von Art. 15 der Th. A. F., mit Anwendung auf die Argumente der Thetafunktion; Bestimmung der immer endlich bleibenden Normalintegrale, und deren Einführung in die Thetafunktion.

8.—13. Jan.: Art. 23 der Th. A. F. (mit Art. 16 und 5).

15.—17. Jan.: Art. 24 der Th. A. F. Zum Beweis des Satzes: „daß ein beliebig gegebenes Größensystem $(e_1, \cdots, e_p)$ nur Einem Größensystem von der Form $\left(\sum_1^p \alpha_1^{(\nu)}, \cdots, \sum_1^p \alpha_p^{(\nu)}\right)$ kongruent gesetzt werden kann, oder aber unendlich vielen", wird hier zuerst gezeigt, daß, wenn noch ein zweites kongruentes Größensystem $\left(\sum_1^p \beta_1^{(\nu)}, \cdots, \sum_1^p \beta_p^{(\nu)}\right)$ vorhanden ist, eine rationale Funktion ξ von (s, z) existiert, welche in den p zu den Integralen $\alpha^{(\nu)}$ gehörigen Punkten unendlich groß von der ersten Ordnung, in den p zu den $\beta^{(\nu)}$ gehörigen Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Dies geschieht durch Darstellung von $\log \xi$ als Summe von Integralen dritter und erster Gattung. Hieraus wird dann der Satz über das identische Verschwinden von $\vartheta(u_1 - e_1, \cdots)$ geschlossen.

Statt Art. 25 der Th. A. F. wird nur die Bemerkung gegeben:

„Die nicht immer endlich bleibenden Integrale algebraischer Funktionen lassen sich durch Thetafunktionen ausdrücken, und hieraus lassen sich Relationen zwischen den Integralen herleiten, die sonst schwierig zu finden sind. Hierin besteht der Nutzen dieser Ausdrücke."

17.—22. Jan.: Ausdrücke algebraischer Funktionen von z durch Quotienten zweier Produkte von gleichvielen Funktionen $\vartheta(u_1 - e_1, \cdots)$, multipliziert mit Potenzen der Größen e^u (Art. 26 der Th. A. F.). (4)

24. Jan.: Quotient zweier Thetafunktionen (der Quotient in Art. 27 der Th. A. F., soweit er als Funktion von (s, z) betrachtet ist).

Die 2^{2p} Thetareihen. (5)

(24., 27. Jan. 1862:)

Das im Zähler des Ausdrucks (Art. 27 der Th. A. F.)

$$\frac{\vartheta\left(v_1 - g_1 \pi i - \sum_\nu h_\nu a_{1,\nu}, \cdots\right)}{\vartheta(v_1, \cdots, v_p)}\, e^{-2\sum_\nu h_\nu v_\nu}$$

vorkommende Produkt kann, wenn die h gebrochene Zahlen vorstellen, als allgemeine ϑ-Reihe dargestellt werden, in der die Summationsindices nicht ganze, sondern gebrochene Zahlen durchlaufen.

Der Exponent des allgemeinen Gliedes des Zählers

$$\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum_1^p \left(v_\mu - g_\mu \pi i - \sum_1^p h_\nu a_{\nu,\mu}\right) m_\mu - 2\sum_1^p h_\nu v_\nu$$

geht nämlich durch Zufügung der Konstanten

$$\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}h_\mu h_{\mu'} + 2\sum_1^p g_\mu h_\mu \pi i$$

über in

$$\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}(m_\mu - h_\mu)(m_{\mu'} - h_{\mu'}) + 2\sum_1^p (m_\mu - h_\mu)(v_\mu - g_\mu \pi i);$$

daher

$$e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}h_\mu h_{\mu'} + 2\sum_1^p g_\mu h_\mu \pi i - 2\sum_1^p h_\nu v_\nu} \cdot \vartheta\left(v_1 - g_1\pi i - \sum_\nu h_\nu a_{1,\nu}, \cdots\right) =$$

$$= \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p_{m_1, m_2, \cdots, m_p} e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}(m_\mu - h_\mu)(m_{\mu'} - h_{\mu'}) + 2\sum_1^p (m_\mu - h_\mu)(v_\mu - g_\mu \pi i)}.$$

Diese Reihe bleibt ungeändert, wenn die h um ganze Zahlen geändert werden, und nimmt, von dem konstanten Faktor $e^{2\sum g_\mu h_\mu \pi i}$ herrührend, den Faktor $e^{2h_\mu g'_\mu \pi i}$ an, wenn g_μ um die ganze Zahl g'_μ geändert wird.

Wir betrachten diese Reihen im einfachsten Fall, wo die g, h Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind, Reihen, welche bei der Darstellung von Quadratwurzeln aus rationalen Funktionen von (s, z) gebraucht werden. Eine solche Reihe bleibt bis aufs Vorzeichen ungeändert, wenn auch die g_μ um ganze Zahlen geändert werden. Setzt man daher (6)

$$h_\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{2}, \quad g_\mu = \frac{\varepsilon'_\mu}{2},$$

so erhält man eine Reihe, welche, bis aufs Vorzeichen, dadurch charakterisiert ist, daß man für die ε_μ, ε'_μ nur die Zahlen 0 und 1 einsetzt, welchen sie mod. 2 kongruent sind.

Die Reihe selbst entsteht aus der ursprünglichen Thetareihe:

$$\vartheta(u_1, \cdots, u_p) = \left(\sum\right)^p_{n_1, \cdots, n_p} e^{\left(\sum\right)^2 a_{\mu,\mu'}n_\mu n_{\mu'} + 2\sum n_\mu u_\mu},$$

indem man

$$n_\mu = m_\mu - \frac{\varepsilon_\mu}{2}, \quad u_\mu = v_\mu - \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i$$

substituiert, also den Index n_μ alle ganzen Zahlen oder halben ungeraden Zahlen durchlaufen läßt, je nachdem $\varepsilon_\mu = 0$ oder 1 ist. Wir bezeichnen sie durch

$$\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(v)=\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p\\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_p'\end{pmatrix}(v_1, v_2, \cdots, v_p)$$

$$=\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p_{m_1,\cdots,m_p} e^{\left(\sum\limits_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}\left(m_\mu-\frac{\varepsilon_\mu}{1}\right)\left(m_{\mu'}-\frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right)+2\sum\limits_1^p\left(m_\mu-\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(v_\mu-\frac{\varepsilon_\mu'}{2}\pi i\right)},$$

nämlich als *Thetareihe mit der Charakteristik* $\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p\\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_p'\end{pmatrix}$.

Die ursprüngliche Reihe hat also die Charakteristik $\begin{pmatrix}0, 0, \cdots, 0\\ 0, 0, \cdots, 0\end{pmatrix}$.

Die Anzahl aller dieser Thetareihen beträgt 2^{2p}, da jedes der $2p$ Elemente der Charakteristik die Werte 0 und 1 annehmen kann. Die ursprüngliche Thetareihe ist eine gerade Funktion. Um zu sehen, welche der übrigen gerade oder ungerade Funktionen sind, verwandle man zunächst in der obigen Reihe die $m_\mu - \frac{\varepsilon_\mu}{2}$ bezw. in $-m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}$, wodurch der Wert der Reihe ungeändert bleibt; ersetzt man dann die v_μ durch die $-v_\mu$, so erhält man nach Multiplikation mit $e^{\sum \varepsilon_\mu \varepsilon_\mu' \pi i}$ wieder die ursprüngliche Reihe; also

$$(-1)^{\sum\limits_1^p \varepsilon_\mu \varepsilon_\mu'}\,\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p\\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_p'\end{pmatrix}(-v_1, -v_2, \cdots, -v_p)$$
$$=\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p\\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_p'\end{pmatrix}(v_1, v_2, \cdots, v_p),$$

d. h.: die Thetareihe ist eine gerade oder ungerade Funktion ihrer Argumente, je nachdem ihre Charakteristik $\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p\\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_p'\end{pmatrix}$ „gerade“ oder „ungerade“, nämlich je nachdem

$$\sum_\mu \varepsilon_\mu \varepsilon_\mu' \equiv 0, \quad \text{oder} \quad \equiv 1 \pmod{2}.$$

In letzterem Fall geht die Entwicklung nur nach ungeraden Potenzen der v, in ersterem nur nach geraden Potenzen der v. Die ungeraden Funktionen verschwinden für die Nullwerte der Argumente, die geraden im allgemeinen nicht, sondern nur bei speziellen Werten der $a_{\mu,\mu'}$.

Um die Anzahl α_p der geraden, und β_p der ungeraden Charakteristiken zu bestimmen, beachte man, daß man jene Charakteristiken aus den α_{p-1} geraden und β_{p-1} ungeraden Charakteristiken, welche aus $p-1$ Gliedern $\begin{matrix}\varepsilon_\mu\\ \varepsilon_\mu'\end{matrix}$ bestehen, durch Vorsetzen eines Gliedes einer der vier Arten

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0, & 1, & 0, & 1 \end{matrix}$$

hervorgehen lassen kann, wobei nur die letztere Zufügung den Charakter des Geraden oder Ungeraden ändert. So erhält man

$$\alpha_p = 3\alpha_{p-1} + \beta_{p-1},$$
$$\beta_p = 3\beta_{p-1} + \alpha_{p-1};$$

hieraus, da $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 1$:

$$\alpha_p + \beta_p = 4(\alpha_{p-1} + \beta_{p-1}) = 2^{2p},$$
$$\alpha_p - \beta_p = 2(\alpha_{p-1} + \beta_{p-1}) = 2^p,$$

und somit

$$\alpha_p = 2^{p-1}(2^p + 1), \qquad \beta_p = 2^{p-1}(2^p - 1).$$

Die Abelschen Funktionen. (7)

(27., 29., 31. Januar, 3. Februar:)

Da

$$\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(v) = \vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'\end{pmatrix}(v_1, \cdots, v_p)$$
$$= e^{\frac{1}{4}(\sum)^2 a_{\mu,\mu'}\varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu'} + \frac{1}{2}\sum \varepsilon_\mu \varepsilon_\mu' \pi i - \sum \varepsilon_\nu v_\nu} \cdot \vartheta\left(v_1 - \frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i - \sum \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{\nu,1}, \cdots\right)$$

ist, so wird, sobald $\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(0, 0, \cdots, 0) = 0$, auch

$$\text{(1)} \qquad \vartheta\left(-\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i - \sum \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{\nu,1}, \cdots\right) = 0.$$

Dies tritt für ungerade Charakteristiken $\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}$ immer, und im allgemeinen nur für ungerade Charakteristiken, ein. Sind nun u_μ und u_μ' die Werte, welche das Integral erster Gattung u_μ für zwei unbestimmte Wertsysteme (s, z) und (s_1, z_1) annimmt, $\alpha_\mu^{(\nu)}$ der Wert von u_μ für $(s, z) = (\sigma_\nu, \zeta_\nu)$, $a_{\mu,\mu'}$ der Periodizitätsmodul der Funktion u_μ an dem Schnitt $b_{\mu'}$, so lassen sich, sobald die Gleichung (1) erfüllt ist, nach Art. 23 der Th. A. F. die $p-1$ Punkte (σ_ν, ζ_ν) so bestimmen, daß die Kongruenzen

$$\text{(2)} \quad \left(\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i + \sum \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{\nu,1}, \cdots, \frac{\varepsilon_p'}{2}\pi i + \sum \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{\nu,p}\right) \equiv \left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \cdots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right)$$

nach den $2p$ Modulsystemen der Funktionen u bestehen; daher verschwindet die Funktion

$$\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'\end{pmatrix}(u_1 - u_1', \cdots, u_p - u_p'),$$

als Funktion von (s, z) betrachtet, wenn sie als solche nicht identisch verschwindet, für $(s, z) = (s_1, z_1)$ und für die $p-1$ Punkte (σ_ν, ζ_ν).

Aus den Gleichungen (2) folgt

$$(3)\qquad \left(2\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)},\cdots,2\sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\nu)}\right)\equiv(0,\cdots,0).$$

Die $p-1$ Größenpaare (σ_ν, ζ_ν), jedes doppelt genommen, bilden also (Art. 23 der Th. A. F.) $2p-2$ durch eine Gleichung

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_p\varphi_p = 0$$

verknüpfte Wertepaare; d. h. man kann die $p-1$ Konstanten $c_1 : c_2 : \cdots : c_p$ so bestimmen, daß die $2p-2$ Nullpunkte des Ausdrucks $c_1\varphi_1 + \cdots + c_p\varphi_p$ paarweise zusammenfallen, bez. in die (σ_ν, ζ_ν), die Funktion φ also für die $p-1$ Wertsysteme (σ_ν, ζ_ν) unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Während die Anzahl der willkürlichen Konstanten in φ nur die Möglichkeit der algebraischen Aufgabe, die $2p-2$ Nullpunkte einer Funktion φ paarweise zusammenfallen zu lassen, aufzeigt, können wir nun schließen, daß die Aufgabe im allgemeinen, den ungeraden Charakteristiken entsprechend, $2^{p-1}(2^p-1)$ Lösungen zuläßt. Denn diese Aufgabe führt auch umgekehrt auf (3), also auf (2), und von da auf (1). Die Ausnahmefälle, in welchen mehr Lösungen existieren, schließen wir vorläufig aus.

Man bilde nun, unter Einführung einer zweiten ungeraden Charakteristik

$$\binom{\eta}{\eta'} = \begin{pmatrix}\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p\\ \eta_1', \eta_2', \cdots, \eta_p'\end{pmatrix},$$

den Quotienten

$$(4)\qquad r = \frac{\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(u_1-u_1', \cdots, u_p-u_p')}{\vartheta\binom{\eta}{\eta'}(u_1-u_1', \cdots, u_p-u_p')},$$

so wird derselbe, als Funktion von (s, z), da er an den Querschnitten nur die Faktoren ± 1 annimmt, nämlich an a_ν den Faktor $e^{-(\varepsilon_\nu-\eta_\nu)\pi i}$, an b_ν den Faktor $e^{(\varepsilon_\nu'-\eta_\nu')\pi i}$, nach Art. 27 der Th. A. F. die Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion von s und z. r wird ferner unendlich klein von der ersten Ordnung in den $p-1$ Punkten (σ_ν, ζ_ν), in welchen der Zähler, als Funktion von (s, z), außer in (s_1, z_1), verschwindet, und in welchen eine Funktion φ je von der zweiten Ordnung unendlich klein wird; und r wird unendlich groß von der ersten Ordnung in den $p-1$ Punkten $(\sigma_\nu', \zeta_\nu')$, in welchen der Nenner, als Funktion von (s, z), außer in (s_1, z_1), verschwindet, und in welchen ebenfalls eine Funktion φ je von der zweiten Ordnung unendlich klein wird. Bezeichnet man diese beiden Funktionen mit $\varphi(s, z)$ und mit $\psi(s, z)$, so wird also:

$$r = B \cdot \sqrt{\frac{\varphi(s, z)}{\psi(s, z)}},$$

wo B eine von (s_1, z_1) abhängige Konstante ist.

Um diese Konstante weiter zu bestimmen, beachte man, daß durch Vertauschen von (s, z) mit (s_1, z_1) die beiden ϑ-Funktionen nur ihr Vorzeichen, der Quotient r sich also gar nicht ändert. Daher wird

$$(4') \qquad r = A \cdot \sqrt{\frac{\varphi(s, z)}{\psi(s, z)}} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(s_1, z_1)}{\psi(s_1, z_1)}},$$

wo A von (s, z) und (s_1, z_1) unabhängig ist.

Der Quotient $\sqrt{\frac{\varphi(s, z)}{\psi(s, z)}}$ ist, nach seinem Ausdrucke (4), eindeutig in T' und wird in je $p - 1$ Punkten von T unendlich klein, bezw. unendlich groß von der ersten Ordnung; bei Überschreiten der Querschnitte nimmt er die Faktoren ± 1 an. Die Funktionen

$$\sqrt{\varphi(s, z)},$$

welchen die ungeraden ϑ-Funktionen proportional sind, nennen wir *Abelsche Funktionen**).

Die Abelschen Funktionen sind durch (4), (4′) den ungeraden ϑ-Funktionen in T' [aber in einer mit der Fläche T' sich ändernden Weise] einzeln eindeutig zugeordnet; und zwar auf doppelte Weise:

einmal [direkt], indem eine Abelsche Funktion $\sqrt{\varphi(s, z)}$ existiert, die in denselben $p - 1$ Punkten verschwindet, in denen auch

$$\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(u_1 - u_1', \cdots, u_p - u_p')$$

als Funktion von (s, z), außer in (s_1, z_1), verschwindet — eine Eigenschaft, die mit dem Bestehen der Kongruenzen (2) gleichbedeutend ist. Dieser Abelschen Funktion $\sqrt{\varphi(s, z)}$ schreiben wir daher ebenfalls die Charakteristik

$$(\sqrt{\varphi}) = \binom{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p}{\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'}$$

zu;

sodann [indirekt], indem der Quotient *zweier* Abelschen Funktionen $\sqrt{\frac{\varphi(s, z)}{\psi(s, z)}}$, welche zu den Charakteristiken $\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}$ und $\binom{\eta}{\eta'}$ gehören, am Querschnitte a_ν den Faktor $(-1)^{\varepsilon_\nu - \eta_\nu}$, an b_ν den Faktor $(-1)^{\varepsilon_\nu' - \eta_\nu'}$ annimmt, wie der Quotient (4) aus den beiden entsprechenden ϑ-Funktionen, und sich im übrigen in T' stetig ändert. Diese Eigenschaft

*) Führt man an Stelle von s und z andere Variable rational ein, so erhält eine Abelsche Funktion einen Faktor, der eine rationale Funktion von s und z ist; das Verhältnis zweier solcher Funktionen bleibt ungeändert.

kann man auch, unter Einführung einzelner Buchstaben für die Charakteristiken, so ausdrücken, daß man, wenn

$$(a) = \binom{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p}{\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'} = (\sqrt{\varphi})$$

$$(b) = \binom{\eta_1, \cdots, \eta_p}{\eta_1', \cdots, \eta_p'} = (\sqrt{\psi})$$

die Charakteristiken sind, zu denen nach der ersten Zuordnung bezw. $\sqrt{\varphi}$ und $\sqrt{\psi}$ gehören,

$$(a + b) \equiv \binom{\varepsilon_1 + \eta_1, \cdots, \varepsilon_p + \eta_p}{\varepsilon_1' + \eta_1', \cdots, \varepsilon_p' + \eta_p'} \equiv (a - b) \pmod{2}$$

setzt, also

$$(2a) \equiv \binom{0, \cdots, 0}{0, \cdots, 0}, \qquad (2b) \equiv \binom{0, \cdots, 0}{0, \cdots, 0},$$

und die Charakteristik $(a + b)$ der Funktion $\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}$ zuschreibt, deren Faktorensystem an den Querschnitten a_ν und b_ν sich bestimmt durch

$$(-1)^{\varepsilon_\nu + \eta_\nu}, \quad \text{bezw.} \quad (-1)^{\varepsilon_\nu' + \eta_\nu'} .$$

Dieselbe Charakteristik hat dann auch $\sqrt{\varphi \cdot \psi} = \psi \sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}$, da ψ an den Querschnitten nur die Faktoren $+1$ erhält. Bei *einer* Abelschen Funktion kann man noch nicht von bestimmten Faktoren reden, die sie an den Querschnitten annimmt, da sie auch im Unendlichen verzweigt ist, jene Faktoren also vom Wege abhängen.

Aufstellung der Ausdrücke der Abelschen Funktionen für die einfachsten Fälle.

1. Hyperelliptische Funktion.(8)

(3. Februar:)

Es ist zweckmäßig, die Gleichung zwischen s und z, $F(s, z) = 0$, durch Einführung rationaler Funktionen σ, ζ von (s, z) zuerst in eine einfache Form $F_1(\sigma, \zeta) = 0$ zu transformieren.

Was zunächst die Wahl von ζ betrifft, so führen wir, wenn eine Funktion ζ existiert, die nur für zwei Punkte vor T unendlich von der ersten Ordnung wird, d. h. im Falle der *hyperelliptischen Funktion*, diese ein.

Sei dann σ irgend eine andere rationale Funktion von (s, z), welche nur nicht für solche zwei Punkte, in denen ζ denselben Wert annimmt, ebenfalls denselben Wert erhält, also keine rationale Funktion von ζ allein sei. Wenn σ in m Punkten von T unendlich von der ersten Ordnung wird, so wird die transformierte Gleichung von der Form

$$\overset{2}{F_1}(\sigma, \overset{m}{\zeta}) = 0,$$

die φ werden dann in σ vom 0^{ten}, in ζ vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grad, also ganze Funktionen von ζ allein, vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade: $\overset{m-2}{\varphi(\zeta)}$.

Da jede Funktion, die für p oder weniger Werte unendlich wird, gleich dem Quotienten zweier Funktionen φ wird, hier also rational in ζ, so wird man für σ niedrigstens eine Funktion wählen, die für $p+1$ Werte unendlich von der ersten Ordnung wird, wobei die $p+1$ Punkte beliebig gewählt werden können [nur nicht so, daß in p der $p+1$ Punkte eine Funktion φ verschwindet]. Die Gleichung zwischen σ und ζ wird dann von der Form $F_1(\overset{2}{\sigma}, \overset{p+1}{\zeta}) = 0$, und die φ werden Funktionen $\overset{p-1}{\varphi(\zeta)}$.

Sei

$$F_1(\sigma, \zeta) = a_0\sigma^2 + 2a_1\sigma + a_2 = 0,$$

wo die a ganze Funktionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades von ζ sind. Dann wird

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial \sigma} = a_0\sigma + a_1 = \sqrt{a_1{}^2 - a_0a_2},$$

und irgend ein endlich bleibendes Integral wird die Form haben:

$$\int \frac{\overset{p-1}{\varphi(\zeta)}\, d\zeta}{2\sqrt{a_1{}^2 - a_0a_2}},$$

wo $\sqrt{a_1{}^2 - a_0a_2}$ die Quadratwurzel aus einem Ausdruck $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grades in ζ wird: ein „hyperelliptisches Integral". Als Verzweigungspunkte der über der ζ-Ebene ausgebreiteten Fläche T hat man, wenn $a_1{}^2 - a_0a_2 = 0$ nur einfache Wurzeln hat, die $w = 2p+2$ Nullpunkte von $a_1{}^2 - a_0a_2 = 0$; entsprechend der Formel $w = 2n + 2(p-1)$ für $n = 2$. Zugleich sieht man, daß, wegen $w = 2m(n-1) - 2r$, $n = 2, m = p+1$, auch $r = 0$ sein muß, wenn die endlichen Integrale wirklich zu einer $\overline{2p+1}$-fach zusammenhängenden Fläche gehören sollen. Andernfalls würde, wenn zwei Verzweigungspunkte sich aufhebend zusammenfielen, ein rationaler linearer Faktor aus der Quadratwurzel heraustreten, $\overset{p-1}{\varphi(\zeta)}$ müßte denselben enthalten, und das p würde um eine Einheit erniedrigt.

Bei der Transformation auf die einfachste Form werden im hyperelliptischen Fall die Beziehungen zwischen den Abelschen Funktionen zwar einfach, aber die Symmetrie geht verloren; es soll daher zweckmäßigerweise dieser Fall erst später weiter behandelt werden. Wenn $p = 1$, so wählt man für ζ und σ zwei beliebige verschiedene Funktionen, die in je zwei Punkten unendlich von der ersten Ordnung werden; wenn $p=2$, für ζ den Quotienten aus den beiden allein existierenden Funktionen φ, der in zwei Punkten ∞^1 wird, für σ eine weitere Funktion, die in drei Punkten ∞^1 wird. Wir wenden uns dem einfachsten Falle zu, in dem keine Funktion existiert, die in nur zwei Punkten unendlich wird, zu dem *allgemeinen* Fall $p=3$.

2. Allgemeiner Fall $p=3$.

5. Februar 1862: Aufstellung der homogenen Gleichung $\overset{2p-2}{F(x, y, z)}=0$ für den nicht-hyperelliptischen Fall $p \geqq 3$ (s. Werke, „Zur Theorie der Abelschen Funktionen für den Fall $p=3$", XXXI, S. 489—490; 1. Aufl. XXX, S. 458—459).

7.—26. Febr.: Der allgemeine Fall $p=3$. Von der homogenen Relation vierten Grades zwischen den Quadraten dreier Abelschen Funktionen $\sqrt{\varphi}$ ausgehend, werden die 28 Abelschen Funktionen und eine Zuordnung derselben zu den 28 ungeraden Theta-Charakteristiken aufgestellt (s. Werke XXXI, S. 491—504; 1. Aufl. XXX, S. 459—472).

Hierbei sind nur folgende zwei Zusätze nachzutragen: (9)

Zusatz zu Werke XXXI, S. 496, Formeln (16), (17) (1. Aufl. XXX, S. 464—465). *(17. Febr.:)*

Wir wollen den umgekehrten Satz beweisen, daß, wenn zwischen den sechs Quadraten von Abelschen Funktionen eine Gleichung (16) existiert, dann $\sqrt{pq}$, wo p, q auf S. 496 (1. Aufl. S. 464) je in doppelter Weise angeschrieben sind, ein zur Gruppe $\sqrt{x\eta}$ gehöriges Produkt Abelscher Funktionen ist.

Indem man zuerst $ax, by, cz, \frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}, \frac{\zeta}{c}$ bezw. durch $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ ersetzt, ändert sich die Relation

$$\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta}=0 \tag{10}$$

nicht. Wir nehmen daher zu (10) statt (16) die Relation

$$x+y+z+\xi+\eta+\zeta=0.$$

Indem man den hieraus gewonnenen Wert von ζ in (10), oder

$$z\zeta=x\xi+y\eta+2\sqrt{x\xi y\eta},$$

substituiert, erhält man

$$(z+x+y)\,(z+\xi+\eta)=x\eta+y\xi-2\sqrt{x\xi y\eta}$$

d. h.

$$\pm\sqrt{(z+x+y)\,(z+\xi+\eta)}-\sqrt{x\eta}+\sqrt{y\xi}=0,$$

was die Umkehrung aussagt. Diese einfache algebraische Bemerkung reicht zur Aufstellung aller Relationen zwischen den Abelschen Funktionen für $p=3$ hin.

Bemerkung ([10]) zu Werke XXXI, S. 503, Z. 7 v. o. (1. Aufl. XXX, S. 471, Z. 16 v. o.).

(24. Febr.:)

Ebenso hat man für die Gruppe $(\sqrt{x\xi}) = (p + q + r)$ formal noch die drei Zerlegungen:

$$(n + e + f + p + q + r),\ (n + e + f);$$
$$(n + e + g + p + q + r),\ (n + e + g);$$
$$(n + f + g + p + q + r),\ (n + f + g),$$

welche aber, da es nur 6 Zerlegungen der Gruppe gibt, mit drei der früheren übereinstimmen müssen. Daraus folgt, daß zwischen den eingeführten 7 Charakteristiken d, e, f, g, p, q, r eine lineare Relation bestehen muß; nämlich die Gruppe

$$(d + e + f + g + p + q + r)$$

ist die ausgeschlossene Gruppe

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Setzt man

$$n + d',\ n + e',\ n + f',\ n + g'$$

für d, e, f, g, wobei also d', e', f', g' Gruppencharakteristiken werden, so enthalten die Ausdrücke für die in (21) vorkommenden 22 Charakteristiken, sowie die der 6 Charakteristiken $(k_1), (k_2), \cdots, (k_2'')$, alle die Charakteristik (n) *explicite*; daher fällt aus den Ausdrücken der durch Summierung *irgend* zweier von ihnen gebildeten Gruppencharakteristiken dann das (n) ganz heraus. Man kann sonach alle existierenden $2^6 - 1 = 63$ Gruppencharakteristiken linear zusammensetzen aus den 6 Gruppencharakteristiken

$$d', e', f', p, q, r$$

in der Form

$$\alpha_1 d' + \alpha_2 e' + \alpha_3 f' + \alpha_4 p + \alpha_5 q + \alpha_6 r,$$

wo die α_i die Werte 0 oder 1 haben, ohne alle zu gleicher Zeit 0 zu sein; und da solcher Kombinationen überhaupt nur 63 existieren, so sind die erhaltenen Kombinationen alle von einander verschieden. Solche 6 Gruppencharakteristiken d', e', f', p, q, r sind daher linear-unabhängig.

Hieraus ergibt sich weiter, daß man alle 2^6 Charakteristiken von Thetafunktionen erhält, wenn man (n) selbst nimmt, und außerdem alle, welche aus den ebengenannten $2^6 - 1$ Kombinationen von Gruppencharakteristiken durch Addition von (n) entstehen.

Hat man so (n) mit α der Gruppencharakteristiken d', e', f', p, q, r verbunden, so ist, nach den in (21) und für die (k) gegebenen Ausdrücken, eine solche Kombination eine *ungerade* Charakteristik, wenn $\alpha = 1$ oder 2 ist, oder auch $= 5$ oder 6, welch letzteres aus dem ersteren auch daraus folgt, daß die Kombinationen zu 6 oder 5 vermöge der identischen Relation zwischen d', e', f', g', p, q, r bezw. in solche zu 1 oder 2 zwischen 6 anderen dieser Größen übergehen. Dies gibt die 28 ungeraden Charakteristiken. Für $\alpha = 0, 3, 4$ erhält man also die 36 *geraden* Charakteristiken.

Dieser Satz ist sehr wichtig, um die Abelschen Funktionen in Gruppen anzuordnen; und sein Analogon gilt für beliebiges p.

Die quadratischen Relationen zwischen den p Funktionen φ, insbesondere für $p = 4$. (11)

(28. Febr.):

Zuerst der in der zweiten Auflage zugesetzte Abschnitt XXXI, S. 490—491: über Funktionen, die für endliche Werte von ξ, η [ξ und η sind solche Quotienten von Funktionen φ, die in denselben $2p-2$ Punkten je ∞^1 werden] endlich bleiben und für unendliche ξ, η unendlich in der zweiten Ordnung werden; für die Gleichung $\overset{2p-2}{F}(\xi, \eta) = 0$.

Dann folgende Fortsetzung:

Diese Untersuchung läßt sich verallgemeinern. Eine Funktion, die für endliche Werte von ξ, η endlich bleibt und für unendliche ξ, η unendlich von der m^{ten} Ordnung wird, wird für $2m(p-1)$ Wertepaare von ξ, η unendlich klein von der ersten Ordnung, und enthält daher (Th. A. F. Art. 5) für $m > 1$

$$(2m-1)\ (p-1)$$

Konstanten . . .

[Dies ist so zu ergänzen:
Sie ist daher in der Form

$$\frac{f(\xi, \eta)}{\psi}$$

darstellbar, wo $f(\xi, \eta)$ eine ganze Funktion von der $(2p + m - 6)^{\text{ten}}$ Dimension in ξ, η ist, die für die $r = 2(p-1)(p-3)$ Wertepaare (γ, δ), in denen allein die Funktion $(2p-6)^{\text{ter}}$ Dimension, ψ verschwindet, ebenfalls verschwindet. Denn jene Funktion muß, nachdem man (Th. A. F. Art. 8)

$$\overset{2p+m-6}{f}(\xi, \eta) + \overset{m-4}{\varrho}(\xi, \eta) \cdot \overset{2p-2}{F}(\xi, \eta)$$

für $f(\xi, \eta)$ gesetzt und die $\frac{1}{2}(m-3)(m-2)$ Koeffizienten von ϱ willkürlich angenommen hat, noch

$$\tfrac{1}{2}(2p+m-5)(2p+m-4) - \tfrac{1}{2}(m-3)(m-2) - r = (2m-1)(p-1)$$

willkürliche Konstanten enthalten.

Zu diesen Funktionen gehört jede ganze Funktion m^{ten} Grades von den $p-1$ Variablen $\frac{\varphi}{\psi}$; eine solche enthält $\frac{p(p+1)\cdots(p+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}$ Konstanten.

Da aber $\frac{f}{\psi}$ nur $(2m-1)(p-1)$ Konstanten enthält, so müssen zwischen den p Funktionen φ [wenigstens]

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}-(2m-1)(p-1)$$

homogene Relationen m^{ten} Grades bestehen.] ([12])

Für $p=2$ und 3 existieren keine Gleichungen zweiten Grades zwischen den φ.

[Abgesehen von dem hyperelliptischen Fall bei $p=3$. ([13])]

Für $p=4$ findet im allgemeinen *eine* homogene Gleichung zweiten Grades zwischen den vier Funktionen φ statt. Eine homogene Funktion zweiten Grades von 4 Größen läßt sich aber immer als Summe von höchstens 4 Quadraten linearer Kombinationen dieser Größen darstellen. Sei also

$$\text{(A)} \qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=0$$

die eine existierende Gleichung zweiten Grades, wobei die y_i lineare Ausdrücke in den φ sind. Wir nehmen je zwei Quadrate zusammen:

$$y_1+y_2 i=z_1, \quad y_3+y_4 i=z_2, \quad y_1-y_2 i=z_3, \quad -y_3+y_4 i=z_4,$$

und haben

$$z_1 z_3=z_2 z_4,$$

wo auch die z_i lineare Ausdrücke in den den φ sind.

Hieraus würde nur folgen, daß, wenn $z_2=0$ ist, auch z_1, oder z_3, gleich 0 sein muß; und man kann nun, da die z_i je für $2p-2=6$ Werte zu Null werden, verschiedene Annahmen machen.

a) Die allgemeine Verteilung der 6 Nullwerte von z_2 ist die, daß für drei der Werte z_1, für die drei übrigen z_3 verschwindet. Dann werden

z_1 und z_2 für drei Werte gleichzeitig zu 0,
z_3 „ z_2 „ „ „ „ „ „,
z_1 „ z_4 „ „ „ „ „ „,
z_3 „ z_4 „ „ „ „ „ „.

Die beiden Funktionen

$$s=\frac{z_2}{z_3}=\frac{z_1}{z_4}, \qquad z=\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_3}{z_4}$$

werden also nur für je drei Werte unendlich von der ersten Ordnung, und die Gleichung zwischen s, z wird zu

$$F(\overset{3}{s},\overset{3}{z})=0,$$

als einfachste Form der Gleichung unter den gegebenen Annahmen.

Die zugehörigen Funktionen φ werden zu

$$c_0 sz + c_1 s + c_2 z + c_3.$$

[Vermöge einer Transformation

$$sz : s : z : 1 = z_2 : z_1 : z_3 : z_4$$

geht $F(s, z) = 0$ in eine homogene Relation dritter Dimension zwischen z_1, z_2, z_3, z_4 über, welche, nach Zufügung eines Ausdrucks der Form

$$(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4)(z_1 z_3 - z_2 z_4)$$

die allgemeinste ihrer Art ist. Die 9 Moduln ergeben sich, wenn man s durch eine lineare Funktion von s, und z durch eine solche von z, mit willkürlichen Konstanten, ersetzt.]

b) Es mögen von den sechs Nullwerten von z_2 vier solche von z_1 sein. Dann würden:

z_1	und	z_2	für	4	Werte	gleichzeitig	zu	0,
z_3	"	z_2	"	2	"	"	"	0,
z_1	"	z_4	"	2	"	"	"	0,
z_3	"	z_4	"	4	"	"	"	0.

Die beiden obigen Funktionen s und z würden bezw. 4-mal, 2-mal unendlich von der ersten Ordnung, und die einfachste Gleichung würde

$$F(\overset{2}{s}, \overset{4}{z}) = 0.$$

[Diese Gleichung ist nun entweder:

α) irreduktibel; dann gehört sie nicht mehr zu $p = 4$, sondern zum hyperelliptischen Falle von $p = 3$, wobei sich auch $sz : s : z : 1$ nicht mehr wie φ-Funktionen verhalten. Die Annahme (A), b) ist dann also unstatthaft. Oder:

β) reduktibel; $F(\overset{2}{s}, \overset{4}{z})$ wird ein vollständiges Quadrat einer Funktion $\Phi(\overset{1}{s}, \overset{2}{z})$. Alsdann definieren die beiden Gleichungen

$$z_1 z_3 - z_2 z_4 = 0, \qquad \Phi = 0$$

nicht mehr die algebraische Klasse; und letztere Gleichung läßt sich mittels ersterer unter Wegschaffen eines linearen Faktors z_4 auf die Form

$$z_3 (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4) + z_4 (a_5 z_1 + a_6 z_4) = 0$$

bringen, sodaß noch eine zweite quadratische Relation, und damit auch eine dritte, zwischen den vier Funktionen φ besteht: man hat den hyperelliptischen Fall $p = 4$.]

c) Wenn von sechs Nullwerten von z_2 fünf solche von z_1 wären, so würde für den sechsten z_3 zu Null, und die Gleichung würde

$$F(\overset{1}{s}, \overset{5}{z}) = 0$$

[eine zu $p = 0$ gehörige Gleichung, so daß auch diese Annahme (A), c) unstatthaft ist].

Man hat nun weiter den Fall zu untersuchen, daß die homogene Funktion zweiten Grades der vier Größen φ sich auf nur drei Quadrate reduziert:

$$\text{(B)} \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0,$$

[oder für

$$y_1 + y_2 i = z_1\,,\quad y_1 - y_2 i = z_3\,,\quad y_3 i = z_2$$

die Relation

$$z_1 z_3 = z_2{}^2.$$

In diesem Falle gibt die Substition

$$s = \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_2}\,,\quad z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2}$$

schon eine Relation $sz - 1 = 0$ zwischen s und z; die algebraische Klasse kann aber nicht durch diese Relation zwischen s und z definiert werden, sondern man wird für die in der quadratischen Relation nicht vorkommende vierte der Funktionen φ eine neue Variable einführen, etwa mittels

$$\sigma = \frac{z_4}{z_2}\,.$$

Nach der Gleichung $z_1 z_3 - z_2{}^2 = 0$ kann man nun zweierlei Annahmen machen:

a) In dreien der 6 Nullpunkte von z_2 verschwindet z_1 je in zweiter Ordnung. Dann verschwindet in den drei übrigen Nullpunkten von z_2 die Funktion z_3 je in zweiter Ordnung. In drei Punkten, für welche $z = \frac{z_3}{z_2}$ einen gegebenen Wert (s also den reziproken Wert) annimmt, hat σ drei verschiedene Werte; für gegebenes $\sigma + az$, bei beliebigem Wert von a, nimmt z sechs Werte an. Daher wird die Gleichung zwischen σ und z von der Form

$$F(\overset{3}{\sigma}, \overset{6}{z}) = 0\,,$$

worin aber auch die Gesamtdimension in σ, z nur bis auf den Grad 6 ansteigen darf. Da ferner für die Verhältnisse der vier Funktionen φ wird:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = s : 1 : z : \sigma = 1 : z : z^2 : \sigma z\,,$$

σ also in der Gleichung $F(\overset{3}{\sigma}, \overset{6}{z}) = 0$ nur in der Verbindung σz vorkommt, so ergibt sich für diese Gleichung die Form:

$$F(\sigma, z) \equiv \sigma^3 z^3 + \sigma^2 z^2 \overset{2}{f}(z) + \sigma z \overset{4}{f}(z) + \overset{6}{f}(z) = 0.$$

Unter Einführung der Größen z_i liefert diese Gleichung eine zu $z_1 z_3 - z_2{}^2 = 0$ hinzutretende homogene Relation dritter Dimension zwischen z_1, z_2, z_3, z_4.

Dabei kann auch die Gleichung $F(\overset{3}{\sigma}, \overset{6}{z}) = 0$ nicht reduktibel sein, weil F andernfalls die dritte Potenz eines Ausdrucks $\sigma z + \frac{1}{3}\overset{2}{f}(z)$ werden müßte, eine Relation $\sigma z + \frac{1}{3}\overset{2}{f}(z) = 0$, d. h. eine lineare Relation zwischen den φ-Funktionen z_i aber nicht existiert.

Die acht Moduln dieser algebraischen Klasse ergeben sich aus den 15 Konstanten von $F = 0$, indem man zunächst σz durch $(a\sigma + bz + c)(z + d)$, mit beliebigen Konstanten a, b, c, d ersetzt, dann auch z selbst durch eine beliebige gebrochene lineare Funktion von z.

b) Von den sechs Nullpunkten α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 von z_2 wird in zweien, α_1, α_2, auch z_1 zu 0^2, in zwei weiteren, β_1, β_2, auch z_3 zu 0^2, in den beiden letzten, γ_1, γ_2, sowohl z_1 als z_3 zu 0^1.

Die Funktion $s = \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_2}$ nimmt dann irgend einen gegebenen Wert nur an zwei Stellen an. Man hat also wieder einen hyperelliptischen Fall. Hat nun $\sigma = \frac{z_4}{z_2}$ an solchen zwei Stellen verschiedene Werte, ist also die Gleichung

$$F(\overset{2}{\sigma}, \overset{6}{s}) = 0$$

irreduktibel, so könnte σ nicht der Quotient zweier zugehöriger Funktionen φ sein, entgegen der Voraussetzung. $F(\sigma, s)$ muß daher ein vollständiges Quadrat sein; und σ nimmt für die zwei Punkte, in denen s einen gegebenen Wert annimmt, auch nur einen Wert an. Indem man z_4 durch $z_4 + \lambda z_3$ ersetzt, kann man dann bewirken, daß σ in den beiden Punkten α_1, α_2 verschwindet. Dann nimmt für gegebenes $\sigma + as$, bei beliebigem a, s nur noch zwei verschiedene Werte an, und es wird F das Quadrat einer Funktion $\Phi(\overset{1}{\sigma}, \overset{2}{s})$, wo

$$\Phi(\overset{1}{\sigma}, \overset{2}{s}) \equiv \sigma \overset{1}{\Phi}(s) + \overset{2}{\Phi}(s) = 0 .$$

Dies gibt, in den z_i geschrieben, eine zweite homogene quadratische Relation:

$$z_4 \Phi(z_1 \overset{1}{,} z_2) + \Phi(z_1 \overset{2}{,} z_2) = 0,$$

welche, mit $z_1 z_3 - z_2{}^2 = 0$ zusammengenommen, noch eine dritte solche bestimmt. Die drei Relationen bestimmen die algebraische Klasse nicht, stellen vielmehr im z_i-Raum nur eine, doppelt zu nehmende, Raumkurve dritter Ordnung dar. Man kommt so wieder auf den Fall (A), b), β.([14])]

Auf diese Weise läßt sich die Gleichung für $p = 4$ in allen Fällen auf die einfachste Form reduzieren. Das Verfahren ist auch auf $p > 4$ leicht ausdehnbar. Es läßt sich nämlich zeigen, daß sich aus

$$\tfrac{1}{2}(p-2)(p-3)$$

homogenen Funktionen zweiten Grades zwischen p Veränderlichen immer, und für $p > 4$ auf verschiedene Weisen, ein Aggregat kombinieren lasse, das gleich einer Summe von höchstens vier Quadraten linearer Ausdrücke der Veränderlichen ist. Man kann so z. B. die Kriterien erhalten, daß algebraische Funktionen auf hyperelliptische Integrale führen.

Die linearen Relationen zwischen je p, zur selben Gruppe gehörigen Produkten zweier Abelschen Funktionen.

(28. Febr., 3., 4. März:)

Wir gebrauchen für beliebiges p nun die Bezeichnung

$$x_1 = \frac{\varphi_1}{\psi}, \quad x_2 = \frac{\varphi_2}{\psi}, \quad \cdots, \quad x_p = \frac{\varphi_p}{\psi},$$

wo x_1, x_2 die Stelle der ξ, η von S. 15 vertreten, also eine Gleichung der Form $\overset{2p-2}{F}(x_1, x_2) = 0$ existiert, und wo ψ, in x_1, x_2 ausgedrückt, die dortige φ-Funktion ψ von der $(2p-6)^{\text{ten}}$ Ordnung in Bezug auf die Variablen x_1, x_2 vorstellt.

Wir betrachten ein Produkt aus zwei Abelschen Funktionen

$$\sigma = \sqrt{\xi\eta},$$

wo also ξ und η solche ganze lineare homogene Funktionen von $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sind, welche für je $p-1$ Stellen von $F = 0$ unendlich klein von der zweiten Ordnung werden.

Verwandelt man die ursprüngliche Fläche T durch Querschnitte in die einfach zusammenhängende Fläche T', so wird die Funktion $\sigma = \sqrt{\xi\eta}$, stetig durch T' fortgesetzt, allenthalben nur einen bestimmten Wert annehmen, nachdem das Vorzeichen von σ in *einem* Punkte willkürlich festgesetzt ist. Denn σ wird, wo es unendlich klein oder unendlich groß wird, dies überall nur von der ersten Ordnung, ohne Verzweigung; man kann auch sagen: über jeden innerhalb T' verlaufenden geschlossenen Weg ausgedehnt, gibt das Integral $\int d \log \sigma$ einen Wert $2\pi i \cdot k$, wo k eine ganze Zahl ist. Diese Unendlichkeitstellen von σ sind die $2p-2$ festen Stellen, in welchen $x_1, \cdots, x_p$ zu gleicher Zeit je ∞^1 werden.

In der Fläche T ist σ ebenfalls unverzweigt, aber zweiwertig. Beim Überschreiten eines Querschnittes von T' kann σ nur denselben oder den entgegengesetzten Wert annehmen; sodaß σ an dem Querschnittsystem von T' ein bestimmtes Faktorensystem ± 1 besitzt. Dasselbe ist, wenn die Charakteristiken der beiden Abelschen Funktionen $(a) = (\sqrt{\xi})$, $(b) = (\sqrt{\eta})$ einzeln gegeben sind, nach Seite 11 aus der Gruppencharakteristik $(a+b)$ bestimmt. Wir nennen nun zwei Produkte $\sigma = \sqrt{\xi\eta}$, $\sigma' = \sqrt{\xi'\eta'}$ von je zwei Abelschen Funktionen *zur selben Gruppe gehörig*, wenn sie an dem Querschnittsystem *dasselbe* Faktorensystem annehmen. Unser Ziel ist zu beweisen:

(A) *daß zwischen je p solchen Produkten von je zwei Abelschen Funktionen, die zu derselben Gruppe gehören, eine lineare homogene Relation stattfindet.*

Erster Beweis. Da die Anzahl aller Abelschen Funktionen $\sqrt{\xi}$ im allgemeinen gleich $2^{p-1}(2^p-1)$ ist, so ist die Anzahl aller Produkte zu zwei, von einander verschiedenen:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2^{p-1}(2^p-1) \cdot [2^{p-1}(2^p-1) - 1] = 2^{p-2}(2^{p-1}-1)(2^{2p}-1).$$

Überhaupt gibt es $2^{2p}-1$ Faktorensysteme ± 1 oder Gruppencharakteristiken; nimmt man nun an, daß zu jeder Gruppe gleichviel Produkte gehören — eine Annahme, deren Richtigkeit wir später erkennen werden ([15]) —, so folgt für die Anzahl der Produkte einer Gruppe:

$$2^{p-2}(2^{p-1}-1).$$

Ein solches Produkt sei $\sqrt{\xi\eta}$. Wir wollen nun den allgemeinen Ausdruck einer Funktion σ' bilden, welche mit $\sqrt{\xi\eta}$ zu derselben Gruppe gehört, also dasselbe Faktorensystem besitzt und zugleich in denselben $2p-2$ Punkten zu ∞^1 wird, wie $\sqrt{\xi\eta}$.

Die Funktion $\sigma' \cdot \sqrt{\xi\eta}$ wird dann an allen Querschnitten die Faktoren $+1$ annehmen, also rational in den Variablen x_1, x_2 sein. Da sie ferner nur für unendliche x_1, x_2 unendlich, und zwar von der zweiten Ordnung, wird, so wird nach dem früheren (S. 15):

$$\sigma' \cdot \sqrt{\xi\eta} = \frac{\overset{2p-4}{f}(x_1, x_2)}{\underset{}{\overset{2p-6}{\psi}}(x_1, x_2)},$$

wo $f(x_1, x_2)$ noch $3(p-1)$ willkürliche Konstanten linear und homogen enthält. Damit σ' endlich bleibt für $\xi = 0$ und $\eta = 0$, muß $f(x_1, x_2)$ für die je $p-1$ Nullpunkte von $\sqrt{\xi}$ und $\sqrt{\eta}$ verschwinden, was $2(p-1)$ lineare Bedingungsgleichungen für die Konstanten von $f(x_1, x_2)$ gibt. Es bleiben dann in $f(x_1, x_2)$ noch $p-1$ Konstanten willkürlich. σ' enthält somit $p-1$ willkürliche Konstanten in linearer homogener Weise.

Daher läßt sich auch jedes zur Gruppe $\sqrt{\xi\eta}$ gehörige Produkt zweier Abelscher Funktionen, als Funktion σ', durch $p-1$ spezielle dieser Funktionen σ' linear und homogen ausdrücken; d. h. zwischen je p solcher zu einer Gruppe gehörigen Produkte existiert eine lineare homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten, von der Form:

$$\sqrt{\xi_1\eta_1} + \sqrt{\xi_2\eta_2} + \cdots + \sqrt{\xi_p\eta_p} = 0,$$

q. e. d.

Dieser Beweis kann aber insofern nicht als streng und allgemein angesehen werden, als er nur auf Konstantenzählung beruht, ohne daß die $2(p-1)$ Bedingungsgleichungen, die zwischen den Koeffizienten bestehen, untersucht worden sind. ([16])

Zweiter Beweis. Der strenge Beweis des analogen Satzes:

(B) *daß zwischen je* $p+1$ *Quadraten von Abelschen Funktionen eine lineare homogene Relation stattfindet,*

beruht auf der Eigenschaft der Abelschen Funktionen, daß ihre Quadrate Funktionen φ sind, von denen Th. A. F. Art. 4 mittels des Dirichletschen Prinzips allgemein bewiesen war, daß es nur p linear unabhängige gibt. Einen analogen, auf den Periodizitätseigenschaften der Integrale über Abelsche Funktionen beruhenden Beweis des Satzes (A) wollen wir hier andeuten.

Seien $\varphi_\mu(s, z)$, $\varphi_\nu(s, z)$ zwei solche Funktionen φ, die für je $p-1$ Wertsysteme (s, z) von $F(s, z) = 0$ unendlich klein von der zweiten Ordnung werden, so betrachten wir das Integral

$$v = \int \frac{\sqrt{\varphi_\mu(s, z)\,\varphi_\nu(s, z)}\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}.$$

Dieser Ausdruck ist ein immer endlich bleibendes Integral, ist in der Fläche T' eindeutig und stetig, und zu beiden Seiten der Querschnitte ist [von der Gruppe, zu der $\sqrt{\varphi_\mu \varphi_\nu}$ gehört, abhängig]

für einige Querschnitte $\alpha)$ $v^+ = v^- + \text{const.}$

für die übrigen (≥ 1) Querschnitte $\beta)$ $v^+ = -v^- + \text{const.}$

So wie es für die endlichen Integrale w, für welche an allen Querschnitten die Beziehung $\alpha)$ gilt, geschehen, läßt sich nun ableiten, daß alle Funktionen v', welche in T' eindeutig und stetig sind und an den Querschnitten genau dieselben Beziehungen $\alpha)$, $\beta)$ haben, wie v, von $p-1$ willkürlichen Konstanten linear abhängen. Man braucht nur zu zeigen, daß der reelle Teil von v' durch die vorgeschriebenen Unstetigkeiten $\alpha)$, $\beta)$ hier völlig bestimmt([17]) ist, und dann, daß jedes v' durch $p-1$ unter ihnen linear ausdrückbar ist. Daraus folgt dann der Satz (A).([18])

Die in eine Relation

a) $$\sqrt{\xi_1\eta_1} + \sqrt{\xi_2\eta_2} + \cdots + \sqrt{\xi_p\eta_p} = 0$$

eingehenden Ausdrücke ξ_i, η_i sind lineare Funktionen von $x_1, x_2, \cdots, x_p$. Man nehme nun $p-2$ von einander unabhängige Relationen der Art a), so stellt dies zwischen den p Größen $x_1, x_2, \cdots, x_p$ $p-2$ unabhängige Gleichungen vor. Eliminiert man also aus denselben die $p-3$ Größen $x_4, \cdots, x_p$, so bleibt nur *eine* homogene Gleichung zwischen den drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 übrig, welche mit der ursprünglichen Gleichung $\overset{2p-2}{F}(x_1, x_2, x_3) = 0$ übereinstimmen muß. Die Gleichung $F(x_1, x_2, x_3)$ ist also ersetzbar durch $p-2$ Gleichungen der Form a); daher muß auch jede algebraische Gleichung $F(s, z) = 0$ für eine $\overline{2p+1}$-fach zusammenhängende algebraische Funktion s von z ersetzbar sein durch ein System von $p-2$ Gleichungen zwischen p Veränderlichen. Da aus diesen auch alle algebraischen Relationen zwischen den Abelschen Funktionen folgen müssen, so muß aus jenen $p-2$ Gleichungen auch algebraisch herzuleiten sein, daß zwischen je p zu einer Gruppe gehörigen Produkten eine Relation der Art a) besteht.

Somit sind die Konstanten in den $p-2$ Relationen nicht unabhängig; sie müssen vielmehr eben derart bestimmt werden, daß aus den $p-2$ Gleichungen der Form a) alle übrigen von derselben Form folgen. Man wird sich dabei der *beiden* Sätze (A) und (B) bedienen;

und diese beiden Sätze müßten auch ausreichen, um alle Relationen zwischen Abelschen Funktionen zu finden, wenn man noch deren Beziehungen zu den Thetacharakteristiken und die Sätze über den Zusammenhang der Charakteristiken benutzte, um zu untersuchen, welche Produkte zu derselben Gruppe gehören.

Die Konstanten in den $p-2$ Gleichungen müssen sich dabei so einrichten lassen, daß die Koeffizienten sämtlicher Quadrate von Abelschen Funktionen sich rational in $3p-3$ Größen ausdrücken, den $3p-3$ Moduln der Klasse; wie wir es für $p=3$ durch die sechs Größen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ getan haben.

So hat man für $p=4$ zwei Gleichungen zwischen je vier Produkten; und man wird diese so wählen, daß in den beiden Gleichungen dieselben acht Abelschen Funktionen vorkommen. ([19])

Algebraische Ausdrücke von einfachen Thetaquotienten. ([20])

(4. März:)

Um das Ziel: *die Konstanten in den Ausdrücken aller Abelschen Funktionen durch die Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente zu bestimmen,* zu erreichen, ist es zweckmäßig, mehr zu benutzen, als bloß die Beziehung der Abelschen Funktionen zu den Thetaquotienten (S. 10), also bloß die Charakteristikentheorie; wir wollen vielmehr die Quotienten von Thetafunktionen, deren Argumente nicht, wie bei jenen Funktionen, nur von zwei Punkten von T' abhängen, sondern beliebige Werte haben, algebraisch ausdrücken. Wir geben die Rechnung allgemein für beliebiges p, wenn sie sich auch nur für den Fall zu Ende führen läßt, daß man die *Fundamentalgleichungen* zwischen den Abelschen Funktionen schon kennt, wie bei $p=3$.

Zum Ausdruck des Quotienten zweier einfacher Thetafunktionen soll (Th. A. F. Art. 27) eine algebraische Funktion σ gebildet werden, welche an den Querschnitten von T' dieselben Faktoren annimmt, wie $\sqrt{\xi\eta}$, wo $\sqrt{\xi}$ und $\sqrt{\eta}$ zwei Abelsche Funktionen sind, und welche für p Punkte von T' unendlich von der ersten Ordnung wird.

Unter den Bezeichnungen des vorigen Abschnittes bilde man zwei verschiedene Funktionen

$$\frac{\overset{2p-4}{f(x_1, x_2)}}{\underset{\psi(x_1, x_2)}{\overset{2p-6}{}}}, \qquad \frac{\overset{2p-4}{f_1(x_1, x_2)}}{\underset{\psi(x_1, x_2)}{\overset{2p-6}{}}},$$

die beide je $3(p-1)$ willkürliche Konstanten enthalten und für je $2(2p-2)$ Punkte unendlich klein von der ersten Ordnung werden. Je $p-1$ dieser Konstanten sollen so bestimmt werden, daß $f(x_1, x_2)$ für die $p-1$ Nullwerte von $\sqrt{\xi}$, $f_1(x_1, x_2)$ für die $p-1$ Nullwerte von $\sqrt{\eta}$ verschwindet, wonach f und f_1 die Form erhalten:

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x_1, x_2) = c_1 \Pi_1 + c_2 \Pi_2 + \cdots + c_{2p-2} \Pi_{2p-2}, \\ f_1(x_1, x_2) = c_1' X_1 + c_2' X_2 + \cdots + c_{2p-2}' X_{2p-2}, \end{cases}$$

wo die c und c' willkürliche Konstanten sind und die Π, bezw. X, voneinander unabhängige Funktionen vorstellen, die für die Nullwerte von $\sqrt{\xi}$, bezw. $\sqrt{\eta}$, verschwinden.

Die in T' eindeutige Funktion

$$(2)\qquad \sigma = \frac{\sqrt{\eta} \cdot f(x_1, x_2)}{\sqrt{\xi} \cdot f_1(x_1, x_2)}$$

wird dann noch für $3(p-1)$ Punkte zu 0^1, für $3(p-1)$ Punkte zu ∞^1, und verhält sich an den Querschnitten wie $\sqrt{\xi\eta}$.

In σ bestimme man nun weiter die noch willkürlichen $2(p-1)$ Konstanten von f_1 so, daß f_1 für p willkürlich gegebene Punkte β zu Null wird; f_1 verschwindet dann in noch $2p-3$ weiteren Punkten α, von denen noch $p-3$ willkürlich sind. Die $2(p-1)$ noch willkürlichen Konstanten von f bestimme man alsdann so, daß f für die $2p-3$ Punkte α ebenfalls verschwindet, wodurch die p letzten Nullpunkte γ von f mitbestimmt sind.

Alsdann läßt sich σ als Quotient zweier Thetafunktionen darstellen. Seien die Werte des Integrals u_μ für die p Punkte β_ν mit $\beta_\mu^{(\nu)}$, für die p Punkte γ_ν mit $\gamma_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet. Wir betrachten den Quotienten

$$(3)\qquad r = \frac{\vartheta\left(u_1 - \sum_1^p \gamma_1^{(\nu)}, \cdots\right)}{\vartheta\left(u_1 - \sum_1^p \beta_1^{(\nu)}, \cdots\right)}$$

und führen in die in den Argumenten vorkommenden Summen die Werte der Integrale u_μ in den übrigen Punkten, in denen f und f_1 verschwinden, ein. Seien die Werte von u_μ in den $2p-3$ Punkten $\alpha_\varkappa$, in welchen $f(x_1, x_2)$ und $f_1(x_1, x_2)$ gleichzeitig verschwinden, mit

$$u_\mu^{(\varkappa)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, 2p-3)$$

bezeichnet; in den $p-1$ Nullwerten von $f(x_1, x_2)$ und $\sqrt{\xi}$ mit

$$\xi_\mu^{(\lambda)}, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, p-1)$$

in den $p-1$ Nullwerten von $f_1(x_1, x_2)$ und $\sqrt{\eta}$ mit

$$\eta_\mu^{(\lambda)}. \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, p-1)$$

Wenn dann $\sqrt{\xi}$ und $\sqrt{\eta}$ bezüglich zu den Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p \\ \xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_p' \end{pmatrix} = (a), \qquad \begin{pmatrix} \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p \\ \eta_1', \eta_2', \cdots, \eta_p' \end{pmatrix} = (b)$$

gehören, so kann man setzen ((2), S. 8):

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{p-1} \xi_1^{(\lambda)}, \cdots\right) \equiv \left(\frac{\xi_1'}{2}\pi i + \sum_1^p \frac{\xi_\nu}{2} a_{\nu,1}, \cdots\right) \equiv ((a)_1, \cdots),$$

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{p-1} \eta_1^{(\lambda)}, \cdots\right) \equiv \left(\frac{\eta_1'}{2}\pi i + \sum_1^p \frac{\eta_\nu}{2} a_{\nu,1}, \cdots\right) \equiv ((b)_1, \cdots),$$

und hat also, nach dem Abelschen Theorem:

$$\sum_{\nu=1}^{p} \gamma_\mu^{(\nu)} + \sum_{\varkappa=1}^{2p-3} u_\mu^{(\varkappa)} + (a)_\mu \equiv 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{p} \beta_\mu^{(\nu)} + \sum_{\varkappa=1}^{2p-3} u_\mu^{(\varkappa)} + (b)_\mu \equiv 0;$$

denn der erstere Ausdruck, der sich auf die $4(p-1)$ Punkte bezieht, in denen $\frac{f(x_1, x_2)}{\psi(x_1, x_2)}$ zu Null wird, ist kongruent der Summe, ausgedehnt über die $2(p-1)$ je doppelt zu rechnenden Wertesysteme, in denen x_1 und x_2 zugleich zu ∞^1 werden und die durch eine Funktion φ verknüpft sind (Th. A. F. Art. 23); während sich der zweite Ausdruck ebenso auf die $4(p-1)$ Nullpunkte von $\frac{f_1}{\psi}$ bezieht.

Hiernach wird

$$r = \frac{\vartheta\left(u_1 + \sum_1^{2p-3} u_1^{(\varkappa)} + (a)_1, \cdots\right)}{\vartheta\left(u_1 + \sum_1^{2p-3} u_1^{(\varkappa)} + (b)_1, \cdots\right)}. \tag{4}$$

Um den algebraischen Ausdruck für σ zu bilden, setze man auch in (1) die Koordinaten der $2p-3$ gleichzeitigen Nullpunkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2p-3}$ von $f(x_1, x_2)$ und $f_1(x_1, x_2)$ ein und bestimme hieraus die Verhältnisse der c und der c'. Seien die Werte bez. von Π_i und X_i in $\alpha_\varkappa$ bezeichnet mit

$$\Pi_i^{(\varkappa)}, \quad X_i^{(\varkappa)},$$

so wird, bis auf einen konstanten Faktor,

$$f = \sum \pm \Pi_1 \Pi_2^{(1)} \cdots \Pi_{2p-2}^{(2p-3)}, \quad f_1 = \sum \pm X_1 X_2^{(1)} \cdots X_{2p-2}^{(2p-3)},$$

und somit (nach Th. A. F. Art. 27):

$$B \cdot \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \cdot \frac{\sum \pm \Pi_1 \Pi_2^{(1)} \cdots \Pi_{2p-2}^{(2p-3)}}{\sum \pm X_1 X_2^{(2)} \cdots X_{2p-2}^{(2p-3)}}$$

$$= \frac{\vartheta\left(u_1 + \sum\limits_1^{2p-3} u_1^{(\varkappa)} + (a)_1, \cdots\right)}{\vartheta\left(u_1 + \sum\limits_1^{2p-3} u_1^{(\varkappa)} + (b)_1, \cdots\right)} e^{\sum\limits_1^p (\xi_\mu - \eta_\mu)\left(u_\mu + \sum\limits_1^{2p-3} u_\mu^{(\varkappa)}\right)}$$

$$= C \cdot \frac{\vartheta(a)\left(u_1 + \sum\limits_1^{2p-3} u_1^{(\varkappa)}, \cdots\right)}{\vartheta(b)\left(u_1 + \sum\limits_1^{2p-3} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)}.$$

Die hier eintretenden Konstanten B, C sind von dem Wertsystem (x_1, x_2), das in Π_1 und X_1 und in den Grenzen der $u_1, u_2, \cdots, u_p$ vorkommt, unabhängig. Zugleich ist der Determinantenquotient der linken und der Thetaquotient der rechten Seite symmetrisch in den Wertsystemen, die sich auf die $2p-2$ Punkte (x_1, x_2), $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2p-3}$ beziehen. Ersetzt man daher den Punkt (x_1, x_2) durch den beliebigen Punkt α_0, das zugehörige Integral u_μ durch $u_\mu^{(0)}$, so kann man schreiben:

$$(5)\quad \frac{\vartheta(a)\left(\sum\limits_{i=0}^{2p-3} u_1^{(i)}, \cdots\right)}{\vartheta(b)\left(\sum\limits_{i=0}^{2p-3} u_1^{(i)}, \cdots\right)} = A \cdot \sqrt{\frac{\eta^{(0)}\eta^{(1)} \cdots \eta^{(2p-3)}}{\xi^{(0)}\xi^{(1)} \cdots \xi^{(2p-3)}}} \cdot \frac{\sum \pm \Pi_1^{(0)} \Pi_2^{(1)} \cdots \Pi_{2p-2}^{(2p-3)}}{\sum \pm X_1^{(0)} X_2^{(1)} \cdots X_{2p-2}^{(2p-3)}},$$

wo $\sqrt{\xi^{(i)}}$, $\sqrt{\eta^{(i)}}$ die Werte bezüglich von $\sqrt{\xi}$, $\sqrt{\eta}$ im Punkte α_i sind, und wo nun der Faktor A unabhängig wird von sämtlichen $2p-2$ Punkten α_i, für deren Wertsysteme die in den Argumenten der Thetafunktionen vorkommenden Integralsummen gebildet sind.

Um die Konstante A zu bestimmen, beachte man, daß Argumente von Thetafunktionen, welche aus Summen über $2p-2$ Integrale mit beliebigen Grenzen bestehen, ganz allgemeine sind. Spezialisiert man diese Argumente, indem man $p-1$ der Grenzen, $\alpha_{p-1}, \cdots, \alpha_{2p-3}$, in die Nullpunkte einer Abelschen Funktion von der Charakteristik (c) legt, so kommt in der Formel (5) links ein Ausdruck der Form

$$(6)\quad \frac{\vartheta(a+c)\left(\sum\limits_{\nu=0}^{p-2} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)}{\vartheta(b+c)\left(\sum\limits_{\nu=0}^{p-2} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)}$$

zu stehen, wo nun die von nur $p-1$ Punkten abhängenden Argumente nicht mehr willkürliche Werte haben. Man sieht überhaupt, daß solche

Quotienten nur dann einen einfachen algebraischen Ausdruck erhalten können, wenn die Anzahl der Integrale in den Integralsummen der Argumente ein Vielfaches von $p-1$ ist; denn nach der Art, wie die unteren Grenzen in Art. 22, 23 der Th. A. F. bestimmt waren, wird die Summe der Integrale, ausgedehnt über $2(p-1)$ durch eine φ verknüpfte Punkte, kongruent Null.

Die Bestimmung der Konstanten A läßt sich nun weiter ähnlich vereinfachen, wie es von Jacobi in den Fundamenta (Art. 36) für die elliptischen Funktionen geschehen ist. Bei geeigneter Wahl von (c) ist es möglich, in (5) eine zweite Substitution zu machen, derart daß der *inverse* Ausdruck des obigen (6) resultiert. Das Produkt der beiden Ausdrücke liefert dann A^2, ausgedrückt durch die Klassenmoduln. (21)

[Sei nämlich die Charakteristik (c) in der Gruppe $(a+b)$ enthalten, d. h. $(a+b+c)$, wie (c), eine ungerade Charakteristik; so setze man auch für die $p-1$ Punkte $\alpha_{p-1}, \cdots, \alpha_{2p-3}$ die $p-1$ Nullpunkte der zur Charakteristik $(a+b+c)$ gehörigen Abelschen Funktion. Die linke Seite der ursprünglichen Formel nimmt dann die verlangte Form an:

$$(7) \qquad \frac{\vartheta(b+c)\left(\sum_{\nu=0}^{p-2} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)}{\vartheta(a+c)\left(\sum_{\nu=0}^{p-2} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)}.$$

Man findet hieraus, außer A^2, auch die Quotienten der geraden Thetafunktionen, für die Nullwerte der Argumente, ausgedrückt durch die Klassenmoduln, indem man in (6) für die Punkte $\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-2}$ die $p-1$ Nullpunkte einer Abelschen Funktion von solcher Charakteristik (d) setzt, daß die beiden Charakteristiken $(a+c+d)$, $(b+c+d)$ gerade werden.]

Geht man insbesondere für $p=3$ von der früheren Gleichungsform (Werke, XXXI, S. 492; 1. Aufl. XXX, S. 460)

$$(8) \qquad F \equiv \Phi^2 - xyzt = 0$$

aus, wo Φ eine beliebige homogene Funktion zweiten Grades von x, y, z ist, und nimmt $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$, mit den Charakteristiken (a), (b), für die beiden in der Formel (5) vorkommenden Abelschen Funktionen $\sqrt{\xi}$ und $\sqrt{\eta}$, so soll für das in (2) vorkommende $f(x_1, x_2)$ ein homogener Ausdruck zweiten Grades in x, y, z gesetzt werden, der für $x=0$, $\Phi(x,y,z)=0$ verschwindet, also

$$f \equiv c_1\Phi + c_2x^2 + c_3xy + c_4xz,$$

und analog

$$f_1 \equiv c_1'\Phi + c_2'y^2 + c_3'yx + c_4'yz;$$

wonach, wenn die Werte von $\Phi(x,y,z)$, x, y, z in den vier beliebigen Punkten α_i bezw. mit $\Phi^{(i)}$, x_i, y_i, z_i bezeichnet werden:

$$(9)\qquad \frac{\vartheta(a)\left(\sum_{i=0}^{3} u_1^{(i)}, \cdots\right)}{\vartheta(b)\left(\sum_{i=0}^{3} u_1^{(i)}, \cdots\right)} = A\sqrt{\frac{y_0\, y_1\, y_2\, y_3}{x_0\, x_1\, x_2\, x_3}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \Phi^{(0)} & x_0^{\,2} & x_0\, y_0 & x_0\, z_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi^{(3)} & x_3^{\,2} & x_3\, y_3 & x_3\, z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi^{(0)} & y_0^{\,2} & y_0\, x_0 & y_0\, z_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi^{(3)} & y_3^{\,2} & y_3\, x_3 & y_3\, z_3 \end{vmatrix}}.$$

Hier kann man nun für $(c) = \binom{\varepsilon^{(c)}}{\varepsilon'^{(c)}}$ einmal die Charakteristik von $\sqrt{z}$ wählen, α_2, α_3 als die Verschwindungspunkte von $\sqrt{z}$; dann wird

$$\Phi^{(2)} = 0, \quad \Phi^{(3)} = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0;$$

der Zähler des Determinantenquotienten zu

$$x_2 x_3 (x_2 y_3 - x_3 y_2)\ (\Phi^{(0)} \cdot x_1 z_1 - \Phi^{(1)} \cdot x_0 z_0),$$

der Nenner zu

$$- y_2 y_3 (x_2 y_3 - x_3 y_2)\ (\Phi^{(0)} \cdot y_1 z_1 - \Phi^{(1)} \cdot y_0 z_0).$$

Daher:

$$(10)\quad \frac{\vartheta(a)\,(u_1^{(0)} + u_1^{(1)} - (c)_1, \cdots)}{\vartheta(b)\,(u_1^{(0)} + u_1^{(1)} - (c)_1, \cdots)} = -A\sqrt{\frac{y_0\, y_1}{x_0\, x_1}} \cdot \sqrt{\frac{x_2\, x_3}{y_2\, y_3}} \cdot \frac{\Phi^{(0)} \cdot x_1 z_1 - \Phi^{(1)} \cdot x_0 z_0}{\Phi^{(0)} \cdot y_1 z_1 - \Phi^{(1)} \cdot y_0 z_0}.$$

[Da

$$\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(v_1 - (c)_1, \cdots)$$

$$= e^{-\frac{1}{4}\left(\sum\right)^2 a_{\mu,\mu'} - \frac{1}{2}\sum \varepsilon_\mu^{(c)}\left(\varepsilon'_\mu + \varepsilon'^{(c)}_\mu\right)\pi i + \sum \varepsilon_\nu^{(c)} v_\nu} \cdot \vartheta\binom{\varepsilon + \varepsilon^{(c)}}{\varepsilon' + \varepsilon'^{(c)}}(v_1, \cdots),$$

so wird die linke Seite zu

$$(10')\qquad e^{-\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(c)} \varepsilon'^{(a-b)}_\mu} \cdot \frac{\vartheta(a+c)\,(u_1^{(0)} + u_1^{(1)}, \cdots)}{\vartheta(b+c)\,(u_1^{(0)} + u_1^{(1)}, \cdots)}.$$

Man wird zweitens, wenn (c) zu $\sqrt{z}$ gehörte, in (9) für α_2, α_3 die Nullpunkte $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ von $\sqrt{t}$, mit der Charakteristik

$$(a + b + c) = \binom{\varepsilon^{(a+b+c)}}{\varepsilon'^{(a+b+c)}}$$

wählen, und hat dann, wenn

$$t = lx + my + nz,$$

wo l, m, n von den Klassenmoduln abhängen:

$$\Phi^{(2)} = 0, \quad \Phi^{(3)} = 0, \quad t_2 = lx^{(2)} + my^{(2)} + nz^{(2)} = 0,$$
$$t_3 = lx^{(3)} + my^{(3)} + nz^{(3)} = 0.$$

Somit wird der Zähler des Determinantenquotienten von (9) zu

$$\frac{1}{n} x^{(2)} x^{(3)} (x^{(2)} y^{(3)} - x^{(3)} y^{(2)}) \; (\Phi^{(0)} \cdot x_1 t_1 - \Phi^{(1)} \cdot x_0 t_0),$$

der Nenner zu

$$-\frac{1}{n} y^{(2)} y^{(3)} (x^{(2)} y^{(3)} - x^{(3)} y^{(2)}) \; (\Phi^{(0)} \cdot y_1 t_1 - \Phi^{(1)} \cdot y_0 t_0);$$

daher

$$\tag{11} \begin{aligned} &\frac{\vartheta(a)(u_1^{(0)} + u_1^{(1)} - (a+b+c)_1, \cdots)}{\vartheta(b)(u_1^{(0)} + u_1^{(1)} - (a+b+c)_1, \cdots)} \\ &= -A \sqrt{\frac{y_0 y_1}{x_0 x_1}} \sqrt{\frac{x^{(2)} x^{(3)}}{y^{(2)} y^{(3)}}} \cdot \frac{\Phi^{(0)} \cdot x_1 t_1 - \Phi^{(1)} \cdot x_0 t_0}{\Phi^{(0)} \cdot y_1 t_1 - \Phi^{(1)} \cdot y_0 t_0}. \end{aligned}$$

Da

$$\vartheta(2a+b)(v) = e^{\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(b)} \varepsilon_\mu'^{(a)}} \cdot \vartheta(b)(v),$$

so wird die linke Seite zu

$$\tag{11'} e^{\frac{1}{2}\pi i \sum \left(\varepsilon_\mu^{(b+c-a)} \varepsilon_\mu'^{(a)} - \varepsilon_\mu^{(a+c-b)} \varepsilon_\mu'^{(b)}\right)} \cdot \frac{\vartheta(b+c)(u_1^{(0)} + u_1^{(1)}, \cdots)}{\vartheta(a+c)(u_1^{(0)} + u_1^{(1)}, \cdots)}.$$

Multipliziert man die beiden Formeln (10′), (11′) miteinander und beachtet, daß

$$\frac{\Phi}{xz} = \frac{yt}{\Phi}, \quad \frac{\Phi}{yz} = \frac{xt}{\Phi},$$

so ergibt sich

$$\tag{12} A^2 = e^{-\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(a-b)} \varepsilon_\mu'^{(a+b)}} \cdot \sqrt{\frac{y_2 y_3 y^{(2)} y^{(3)}}{x_2 x_3 x^{(2)} x^{(3)}}}.$$

Benutzt man noch die Gleichungen:

$$h_1 \sqrt{xy} + h_2 \sqrt{zt} + h_3 \sqrt{pq} = 0,$$
$$\Phi = \frac{h_3{}^2 pq - h_1{}^2 xy - h_2{}^2 zt}{2 h_1 h_2},$$

$$p = l_1 x + m_1 y + n_1 z, \quad q = l_2 x + m_2 y + n_2 z,$$

so wird für $z = 0$, $\Phi = 0$:

$$h_3{}^2 p_2 q_2 - h_1{}^2 x_2 y_2 = 0, \; h_3{}^2 p_3 q_3 - h_1{}^2 x_3 y_3 = 0, \; x_3 y_3 p_2 q_2 - x_2 y_2 p_3 q_3 = 0,$$
$$p_2 = l_1 x_2 + m_1 y_2, \; q_2 = l_2 x_2 + m_2 y_2, \quad p_3 = l_1 x_3 + m_1 y_3, \; q_3 = l_2 x_3 + m_2 y_3,$$

woraus

$$\frac{y_2}{x_2} \cdot \frac{y_3}{x_3} = \frac{l_1}{m_1} \cdot \frac{l_2}{m_2};$$

und ebenso für $t = 0$, $\Phi = 0$:

$$\frac{y^{(2)} y^{(3)}}{x^{(2)} x^{(3)}} = \frac{(l_1 n - l n_1)(l_2 n - l n_2)}{(m_1 n - m n_1)(m_2 n - m n_2)}.$$

Daher, in Funktion der Klassenmoduln:

$$(12') \quad A^2 = e^{-\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(a-b)} \cdot \varepsilon_\mu'^{(a+b)}} \cdot \sqrt{\frac{l_1 l_2}{m_1 m_2} \cdot \frac{(l_1 n - l n_1)(l_2 n - l n_2)}{(m_1 n - m n_1)(m_2 n - m n_2)}}.$$

Man ersetze weiter in der Formel (10), (10′) die Punkte α_0, α_1 durch die beiden Nullpunkte der Abelschen Funktion $\sqrt{p}$, mit Charakteristik (d), wobei, nach der Relation

$$h_1 \sqrt{xy} + h_2 \sqrt{zt} + h_3 \sqrt{pq} = 0,$$

die Charakteristiken $(a + c + d)$, $(b + c + d)$ gerade sind (Werke, XXXI, S. 500; 1. Aufl. XXX, S. 468—469). In dem algebraischen Ausdruck der Formel (10) hat man dann aus $p = 0$:

$$h_1^2 xy - h_2^2 zt = 0, \quad \Phi = -\frac{h_1}{h_2} xy,$$

somit mittels $p = 0$:

$$\frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{y_1}{x_1} = \frac{l_1}{m_1} \cdot \frac{l n_1 - l_1 n}{m n_1 - m_1 n}, \quad \frac{y_0 z_1 - y_1 z_0}{x_0 z_1 - x_1 z_0} = -\frac{l_1}{m_1},$$

und, wie oben:

$$\frac{y_2 y_3}{x_2 x_3} = \frac{l_1 l_2}{m_1 m_2}.$$

Daher:

$$(13) \quad e^{-\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(c+d)} \varepsilon_\mu'^{(a-b)}} \cdot \frac{\vartheta(a + c + d)(0, 0, 0)}{\vartheta(b + c + d)(0, 0, 0)} = A \sqrt{\frac{m_2}{l_2} \cdot \frac{m n_1 - m_1 n}{l n_1 - l_1 n}},$$

oder:

$$(14) \quad e^{-\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(c+d)} \varepsilon_\mu'^{(a-b)} + \frac{1}{4}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{(a-b)} \varepsilon_\mu'^{(a+b)}} \cdot \frac{\vartheta(a + c + d)(0, 0, 0)}{\vartheta(b + c + d)(0, 0, 0)}$$
$$= \sqrt[4]{\frac{l_1 m_2}{l_2 m_1} \cdot \frac{(m n_1 - m_1 n)(l n_2 - l_2 n)}{(l n_1 - l_1 n)(m n_2 - m_2 n)}};$$

so daß diese vierte Wurzel durch die Thetamoduln eindeutig bestimmt ist.] (22)

Ausdrücke der Klassenmoduln bei $p = 3$ durch Thetaquotienten für die Nullwerte der Argumente.

(5., 6. März:)

Zunächst beweisen wir einen allgemeinen *Satz* (s. „Werke", XXXI, S. 487; 1. Aufl. XXX, S. 456):

Man hat [mit den Bezeichnungen der eben angeführten Arbeit, (1), (2)]:

$$\frac{\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)\, \vartheta(u_1 - u_1' + e_1, \cdots)}{\vartheta(u_1 - u_1' - f_1, \cdots)\, \vartheta(u_1 - u_1' + f_1, \cdots)} = \frac{\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z) \sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)}{\sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s, z) \sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)},$$

wo

$$\vartheta(e_1, \cdots) = 0, \quad \vartheta(f_1, \cdots) = 0,$$

$$(e_1, \cdots) \equiv \left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \cdots\right) \equiv \left(-\sum_p^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \cdots\right),$$

die Summen ausgedehnt über die $2p-2$ Punkte $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{2p-2}$, welche durch die Gleichung

$$\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s, z) = 0$$

verknüpft sind. In $\eta_1, \cdots, \eta_{p-1}$ verschwindet, außer in (s_1, z_1), die Funktion $\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)$, als Funktion von s, z betrachtet. Analog für den Nenner.

Unter $\varphi_1(s, z), \cdots, \varphi_p(s, z)$ sollen nun diejenigen Funktionen $\varphi(s, z)$ verstanden werden, welche in den Normalintegralen

$$u_\nu = \int \frac{\varphi_\nu(s, z)\, dz}{F'(s)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, p)$$

selbst vorkommen, wodurch die $\varphi_\nu(s, z)$ völlig bestimmt sind. Um alsdann die Verhältnisse der Konstanten c, b, welche von den (s, z) und (s_1, z_1) unabhängig sind, zu bestimmen, nehme man $(s, z) = (s_1, z_1)$, wonach die beiden Faktoren der linken Seite zunächst unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Durch Differentiation von Zähler und Nenner der beiden Faktoren nach z ergibt sich aber, wenn man setzt

$$\frac{\partial \vartheta(v_1, \cdots)}{\partial v_\nu} = \vartheta_\nu'(v_1, \cdots)$$

und beachtet, daß $\vartheta(v_1, \cdots)$ eine gerade, $\vartheta_\nu'(v_1, \cdots)$ eine ungerade Funktion ist:

$$\frac{\left[\sum_1^p \vartheta_\nu'(e_1, \cdots)\, \varphi_\nu(s_1, z_1)\right]^2}{\left[\sum_1^p \vartheta_\nu'(f_1, \cdots)\, \varphi_\nu(s_1, z_1)\right]^2} = \frac{\left[\sum_1^p c_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)\right]^2}{\left[\sum_1^p b_\nu \varphi_\nu(s_1, z_1)\right]^2};$$

und da es auf einen allen c und b gemeinsamen Faktor nicht ankommt, kann man also setzen:

$$\begin{aligned} c_\nu &= \vartheta_\nu'(e_1, \cdots), \\ b_\nu &= \vartheta_\nu'(f_1, \cdots). \end{aligned} \qquad (23)$$

Zur Anwendung des Satzes auf die Abelschen Funktionen setzen wir:

$$(e_1, \cdots) \equiv \left(-\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i - \sum \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{\nu 1}, \cdots\right),$$

$$(f_1, \cdots) \equiv \left(-\frac{\eta_1'}{2}\pi i - \sum \frac{\eta_\nu}{2} a_{\nu 1}, \cdots\right),$$

und nehmen

$$(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p' \end{pmatrix}, \quad (b) = \begin{pmatrix} \eta_1, \cdots, \eta_p \\ \eta_1', \cdots, \eta_p' \end{pmatrix}$$

als ungerade Charakteristiken, so wird

$$\vartheta(e_1, \cdots) = 0, \quad \vartheta(f_1, \cdots) = 0,$$
$$(e_1, \cdots) \equiv (-e_1, \cdots), \quad (f_1, \cdots) \equiv (-f_1, \cdots),$$

und es folgt wieder die Formel (4), (4′), S. 9, 10, nur mit Konstantenbestimmung in den φ. Es wird:

$$\frac{\vartheta(a)(u_1 - u_1', \cdots)}{\vartheta(b)(u_1 - u_1', \cdots)} = \sqrt{\frac{\varphi_a(s, z)}{\varphi_b(s, z)} \cdot \frac{\varphi_a(s_1, z_1)}{\varphi_b(s_1, z_1)}},$$

wo

$$\sqrt{\varphi_a(s, z)} = \sqrt{\sum_1^p \vartheta_\nu'(a)(0, \cdots)\, \varphi_\nu(s, z)}$$

$$\sqrt{\varphi_b(s, z)} = \sqrt{\sum_1^p \vartheta_\nu'(b)(0, \cdots)\, \varphi_\nu(s, z)}$$

die Abelschen Funktionen von den Charakteristiken (a), (b) sind. Die in diese Ausdrücke eingehenden Konstanten werden, nach S. 7:

$$\vartheta_\nu'(a)(0, \cdots)$$
$$= \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p_{m_1, \cdots, m_p} 2\left(m_\nu - \frac{\varepsilon_\nu}{2}\right)(-1)^{\sum\limits_1^p \left(m_\mu - \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\varepsilon_\mu'} \cdot e^{\left(\sum\limits_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}\left(m_\mu - \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(m_{\mu'} - \frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right)}.$$

Es sollen nun für $p = 3$, nach dem am Anfang des vorigen Abschnittes angegebenen Ziele, umgekehrt wie dort, die algebraischen Moduln α, β, γ, α', β', γ' durch die Thetamoduln bestimmt, also jene sechs Größen durch Thetaquotienten für die Nullwerte der Argumente, mit gegebenen Thetamoduln, ausgedrückt werden.

Wir gehen hier von den früher gegebenen Entwicklungen und Bezeichnungen aus (Werke XXXI, S. 495—504; 1. Aufl. XXX, S. 463—472), insbesondere von der dortigen Formel (10):

$$\sqrt{x\xi} + \sqrt{y\eta} + \sqrt{z\zeta} = 0.$$

Von den 28 Abelschen Funktionen stehen 22 in (21), l. c.; die sechs letzten sind die S. 503—4 (1. Aufl. S. 470—1) mit (k_1), (k_2); (k_1'), (k_2'); (k_1''), (k_2'') bezeichneten. Die Moduln α, β, γ, α', β', γ' sind die in den Formeln (17) vorkommenden Größen. Um sie zu bestimmen, drücken wir erst die Quadrate

$$\varphi_{n+p},\ \varphi_{n+q},\ \varphi_{n+r},\ \varphi_{n+q+r},\ \cdots$$

der Abelschen Funktionen, die bezw. zu den Charakteristiken

$$(n+p),\ (n+q),\ (n+r),\ (n+q+r),\cdots$$

gehören, durch diejenigen φ aus, welche in den Normalintegralen u_1, u_2, u_3 vorkommen. Seien diese letzteren φ bezw. mit x', y', z' bezeichnet, so wird, wenn man zur Abkürzung

$$\vartheta_\nu'(a)(0,\cdots) = \vartheta_\nu'(a)$$

schreibt:

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+p} &= \vartheta_1'(n+p)\cdot x' + \vartheta_2'(n+p)\cdot y' + \vartheta_3'(n+p)\cdot z'\\
\varphi_{n+q} &= \vartheta_1'(n+q)\cdot x' + \vartheta_2'(n+q)\cdot y' + \vartheta_3'(n+q)\cdot z'\\
\varphi_{n+r} &= \vartheta_1'(n+r)\cdot x' + \vartheta_2'(n+r)\cdot y' + \vartheta_3'(n+r)\cdot z'
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+q+r} &= \vartheta_1'(n+q+r)\cdot x' + \vartheta_2'(n+q+r)\cdot y' + \vartheta_3'(n+q+r)\cdot z'\\
\varphi_{n+r+p} &= \vartheta_1'(n+r+p)\cdot x' + \vartheta_2'(n+r+p)\cdot y' + \vartheta_3'(n+r+p)\cdot z'\\
\varphi_{n+p+q} &= \vartheta_1'(n+p+q)\cdot x' + \vartheta_2'(n+p+q)\cdot y' + \vartheta_3'(n+p+q)\cdot z'.
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Systemen berechnen wir φ_d, von der Charakteristik (d), doppelt, indem wir vermöge

$$\varphi_d = \vartheta_1'(d)\cdot x' + \vartheta_2'(d)\cdot y' + \vartheta_3'(d)\cdot z'$$

jeweils x', y', z' eliminieren. Wir führen zu dem Zwecke allgemein die Bezeichnung ein:

$$\begin{vmatrix}
\vartheta_1'(a) & \vartheta_2'(a) & \vartheta_3'(a)\\
\vartheta_1'(b) & \vartheta_2'(b) & \vartheta_3'(b)\\
\vartheta_1'(c) & \vartheta_2'(c) & \vartheta_3'(c)
\end{vmatrix} = (a,\ b,\ c),$$

wo a, b, c irgend drei ungerade Charakteristiken vorstellen, und erhalten:

$$\begin{aligned}
\varphi_d = {}& \frac{1}{(n+p,\ n+q,\ n+r)}\Big\{(d,\ n+q,\ n+r)\,\varphi_{n+p} + (n+p,\ d,\ n+r)\,\varphi_{n+q}\\
&\qquad + (n+p,\ n+q,\ d)\,\varphi_{n+r}\Big\}\\
= {}& \frac{1}{(n+q+r,\ n+r+p,\ n+p+q)}\Big\{(d,\ n+r+p,\ n+p+q)\,\varphi_{n+q+r}\\
&\qquad + (n+q+r,\ d,\ n+p+q)\,\varphi_{n+r+p}\\
&\qquad + (n+q+r,\ n+r+p,\ d)\,\varphi_{n+p+q}\Big\}.
\end{aligned}$$

Will man, daß die zu

$$(n+p),\ (n+q),\ (n+r),\ (n+q+r),\ (n+r+p),\ (n+p+q),\ (d)$$

gehörigen Abelschen Funktionen von der in (21), l. c. angegebenen Form

$$\sqrt{x},\ \sqrt{y},\ \sqrt{z},\ \sqrt{\xi},\ \sqrt{\eta},\ \sqrt{\zeta},\ \sqrt{x+y+z} = \sqrt{-\xi-\eta-\zeta}$$

werden, so setze man

$$x = \frac{(d,\, n+q,\, n+r)}{(n+p,\, n+q,\, n+r)}\, \varphi_{n+p}, \quad y = \frac{(n+p,\, d,\, n+r)}{(n+p,\, n+q,\, n+r)}\, \varphi_{n+q},$$

$$z = \frac{(n+p,\, n+q,\, d)}{(n+p,\, n+q,\, n+r)}\, \varphi_{n+r},$$

$$-\xi = \frac{(d,\, n+r+p,\, n+p+q)}{(n+q+r,\, n+r+p,\, n+p+q)}\, \varphi_{n+q+r},$$

$$-\eta = \frac{(n+q+r,\, d,\, n+p+q)}{(n+q+r,\, n+r+p,\, n+p+q)}\, \varphi_{n+r+p},$$

$$-\zeta = \frac{(n+q+r,\, n+r+p,\, d)}{(n+q+r,\, n+r+p,\, n+p+q)}\, \varphi_{n+p+q}.$$

Vertauscht man hier überall (d) mit (e), so gehen

$$x,\; y,\; z,\quad \xi,\; \eta,\; \zeta$$

bezw. über in

$$\varkappa\alpha x,\; \varkappa\beta y,\; \varkappa\gamma z,\quad \frac{\varkappa\xi}{\alpha},\; \frac{\varkappa\eta}{\beta},\; \frac{\varkappa\zeta}{\gamma},$$

wonach durch Division $\varkappa\alpha$ und $\frac{\varkappa}{\alpha}$ folgen, und hieraus:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(e,\, n+q,\, n+r)\,(d,\, n+r+p,\, n+p+q)}{(d,\, n+q,\, n+r)\,(e,\, n+r+p,\, n+p+q)}};$$

und analog β und γ, indem man p mit q, bezw. r vertauscht. Vertauscht man ferner e mit f, bezw. g, so ergeben sich auch

$$\varkappa',\; \alpha',\; \beta',\; \gamma', \quad \text{bezw.} \quad \varkappa'',\; \alpha'',\; \beta'',\; \gamma''.$$

Die Determinanten, die in diesen Ausdrücken vorkommen, haben alle die Eigenschaft, daß die Summe der in jede derselben eingehenden ungeraden Charakteristiken eine gerade Charakteristik ist, ([24]) da diese Summen die Formen

$$n,\; n+p+q+r,\; q+r+d = n+q+r+d' = n+p+e'+f'+g'$$

haben, also n mit 0, 3, oder 4 der Charakteristiken

$$p,\; q,\; r,\quad d',\; e',\; f',\; g'$$

verbunden ist (s. S. 15).

Die noch ziemlich kompliziert gebauten Ausdrücke für α etc. kann man vereinfachen, wenn man bemerkt, daß jede Determinante (a, b, c), für welche die Summe der drei ungeraden Charakteristiken (a), (b), (c) eine gerade Charakteristik ist, sich als Produkt von 5 geraden Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente darstellen läßt, wie wir später durch Entwicklung nach Potenzen der $e^{a_{\mu,\mu'}}$ nachweisen werden ([25]) — Formeln, aus denen sich überhaupt alle Relationen zwischen den geraden ϑ und den Differentialquotienten der ungeraden ϑ, für die Nullwerthe der Argumente, ergeben. So folgt

$$\alpha = j \cdot \frac{\vartheta(n+p+d+f)\cdot\vartheta(n+p+d+g)}{\vartheta(n+p+e+f)\cdot\vartheta(n+p+e+g)},$$

[wo j eine numerische Konstante ist];
und entsprechend β, γ, α', $\cdots$

Hyperelliptischer Fall.

1. Die Abelschen Funktionen und ihre Charakteristiken.

(6., 7. März:)

Die dem hyperelliptischen Fall $[p > 1]$ zu Grunde zu legende Gleichung nehmen wir (s. S. 12) in der Normalform an:

$$F(\overset{2}{s}, \overset{p+1}{z}) \equiv a_0 s^2 + 2a_1 s + a_2 = 0,$$

wo a_0, a_1, a_2 ganze Funktionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades sind.

Die Integrale erster Gattung werden, wenn s $\overline{2p+1}$-fach zusammenhängend sein soll:

$$w = \int \frac{\overset{p-1}{\varphi(z)}\, dz}{\sqrt{\Pi \overset{2p+2}{(z-a)}}},$$

wo

$$\prod^{2p+2} (z-a) = 4(a_1^2 - a_0 a_2)$$

ein Produkt von $2(p+1)$ verschiedenen Faktoren der Art $z-a$ ist.

Die Abelschen Funktionen, welche in je $p-1$ Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung werden, sind hier leicht zu bestimmen. Zunächst werden sie, wenn mit $c_1, c_2, \cdots, c_{p-1}$ die 0^1 Punkte einer Abelschen Funktion $\sqrt{\varphi_c}$ bezeichnet werden, von der Form

$$\sqrt{\varphi_c} = \sqrt{\prod^{p-1} (z-c)};$$

und hierbei müssen — da φ_c nur für $c_1, \cdots, c_{p-1}$, und zwar je in zweiter Ordnung, verschwindet, $z-c$ aber in c in erster oder zweiter Ordnung, je nachdem c von einem der Verzweigungspunkte a verschieden ist, oder mit einem solchen zusammenfällt — diejenigen Faktoren $z-c$, für welche c mit keinem der Punkte a zusammenfällt, zweimal vorkommen. Es wird daher

$$\sqrt{\varphi_c} = \sqrt{\prod^{p-1-2m} (z-a) \cdot \overset{m}{f(z)}}. \tag{1} \qquad (m=0,1,\cdots)$$

Um die Charakteristiken dieser Funktionen zu bestimmen, haben wir zunächst, wenn $\sqrt{\varphi_c}$ zur Charakteristik

$$(c) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^c, \cdots, \varepsilon_p^c \\ \varepsilon_1'^c, \cdots, \varepsilon_p'^c \end{pmatrix}$$

gehört, sei es im allgemeinen für ungerade (c), sei es im speziellen Falle für gerade (c):

$$(2)\qquad \left(\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\nu)},\cdots\right)\equiv\left(-\frac{\varepsilon_1'^c}{2}\pi i-\sum_1^p\frac{\varepsilon_\nu^c}{2}a_{\nu,1},\cdots\right),$$

die Summen links ausgedehnt über die $p-1$ Nullpunkte von $\sqrt{\varphi_c}$; und da dann

$$\vartheta(c)(0,\cdots)=0$$

wird, so verschwindet die Funktion

$$(3)\qquad \vartheta(c)(u_1-u_1',\cdots),$$

als Funktion von (s, z), wenn sie nicht identisch verschwindet, für (s_1, z_1) und für jene $p-1$ Nullpunkte.

Denn wir haben bewiesen (Th. A. F. Art. 4 und 15), daß, wenn $e_1,\cdots,e_p$ beliebig gegebene Größen sind, man $2p$ reelle Größen g_ν, h_ν so bestimmen kann, daß

$$e_\nu=g_\nu\pi i+\sum_{\mu=1}^p h_\mu a_{\nu,\mu}. \qquad (\nu=1,2,\cdots,p)$$

In der That, wenn $a_{\mu,\mu'}=p_{\mu,\mu'}+iq_{\mu,\mu'}$, so verlangt dies, daß die Determinante der $p_{\mu,\mu'}$ von Null verschieden ist, was der Fall ist, weil $\sum p_{\mu,\mu'}x_\mu x_{\mu'}$ eine wesentlich negative quadratische Form sein soll (Th. A. F. Art. 18). Wenden wir dies auf obige Summen

$$e_\nu=2\sum_1^{p-1}\alpha^{(\nu)}$$

an, so müssen die g_ν, h_ν ganze Zahlen werden, woraus wieder, aber nun für alle, auch die speziellsten Fälle, die Relation (2) resultiert. Sie liefert die zur Funktion $\sqrt{\varphi_c}$ gehörige Charakteristik $\begin{pmatrix}\varepsilon_1^c,\cdots,\varepsilon_p^c\\ \varepsilon_1'^c,\cdots,\varepsilon_p'^c\end{pmatrix}$, in der die ε, ε' etwa mod. 2 auf 0, 1 reduziert genommen werden können.

Wir haben ferner die S. 10 gegebene Definition der dem *Quotienten* zweier Abelschen Funktionen zuzuschreibenden Gruppencharakteristik auch auf unsere speziellen Fälle auszudehnen.

Nach Th. A. F. Art. 26 läßt sich eine beliebige algebraische Funktion von s, z, die in T', stetig fortgesetzt, allenthalben eindeutig ist und bei Überschreiten der Querschnitte nur Faktoren vom Modul 1 erlangt, als Quotient von Thetaprodukten ausdrücken. Hat man eine solche Funktion, die in m Punkten (s_ν, z_ν) zu 0^1, in m Punkten (σ_ν, ζ_ν) zu ∞^1 wird, und bezeichnet man die Integrale u_μ über die ersteren

Punkte mit $\gamma_\mu^{(\nu)}$, über die letzteren mit $\beta_\mu^{(\nu)}$, so wird

$$\sum_\nu \gamma_\mu^{(\nu)} - \sum_\nu \beta_\mu^{(\nu)} \equiv g_\mu \pi i + \sum_{\nu=1}^{p} a_{\nu,\mu} h_\nu ,$$

wo g_μ, h_ν rationale Zahlen sind.

Wenn insbesondere diese Zahlen g_μ, h_ν nur ganze Zahlen werden, also wenn die Kongruenzen

$$\sum_{\nu=1}^{m} u_\mu^{(\nu)} \equiv \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\mu^{(\nu)}$$

sich durch Werte $(s_\nu z_\nu)$ erfüllen lassen, die von den Grenzen (σ_ν, ζ_ν) der $\beta_\mu^{(\nu)}$ verschieden sind, so muß die Funktion, welche in den ersteren m Punkten zu 0^1, in den letzteren m Punkten zu ∞^1 wird, eine rationale Funktion von s, z sein. Ist sie der Quotient zweier Abelschen Funktionen (1), so wird ihre Gruppencharakteristik zu $\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ (s. S. 10). Ändert man daher in (1) nur die Koeffizienten von $\overset{m}{f}(z)$, unter Beibehaltung des Faktors $\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a)}$, so kommt man zu zwei Funktionen $\sqrt{\varphi_c}$, $\sqrt{\varphi_c'}$ von derselben Charakteristik (c). Und die einer bestimmten Charakteristik (c) entsprechenden Abelschen Funktionen werden so viele willkürliche Konstanten enthalten, als in $\overset{m}{f}(z)$ vorkommen, nämlich $m+1$.

Ist die Funktion überhaupt der Quotient zweier Abelschen Funktionen

$$\sqrt{\frac{\varphi_c}{\varphi_d}},$$

so wird

$$g_\mu = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_\mu'^{c} + \varepsilon_\mu'^{d}\right), \quad h_\mu = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_\mu^{c} + \varepsilon_\mu^{d}\right).$$

Die Faktoren, welche $\sqrt{\frac{\varphi_c}{\varphi_d}}$ an den Querschnitten a_μ, bezw. b_μ erlangt, werden $(-1)^{\varepsilon_\mu^c + \varepsilon_\mu^d}$, bezw. $(-1)^{\varepsilon_\mu'^c + \varepsilon_\mu'^d}$; und die Gruppencharakteristik des Quotienten wird $\begin{pmatrix} \varepsilon_1^c + \varepsilon_1^d, \cdots, \varepsilon_p^c + \varepsilon_p^d \\ \varepsilon_1'^c + \varepsilon_1'^d, \cdots, \varepsilon_p'^c + \varepsilon_p'^d \end{pmatrix}$.

Man erhält daher so viele wesentlich verschiedene Abelsche Funktionen, mit verschiedenen Charakteristiken, als Ausdrücke $\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a)}$ $(m = 0, 1, \cdots)$ existieren. Denn bei gleichen Charakteristiken müßte der Quotient rational sein, während niemals der Quotient von irgend

$p-1$ oder weniger Faktoren der Art $\sqrt{z-a}$ rational ist, sondern erst das Produkt der $2p+2$ verschiedenen Faktoren $\sqrt{\prod^{2p+2}(z-a)}$.

Obwohl wir bei diesen Zuordnungen der Abelschen Funktionen zu den Charakteristiken eine bestimmte Zerlegung der Fläche T zu Grunde legen mußten, braucht doch diese Zerlegung nicht ausgeführt zu werden, insofern die Resultate unabhängig von ihr sind.

Fortsetzung: 2. Anzahl der Abelschen Funktionen.

(7., 8. März:)

Zählen wir die den verschiedenen Fällen $m = 0, 1, 2, \cdots, \frac{p-2}{2}$, bez. $\frac{p-1}{2}$ entsprechenden Abelschen Funktionen im hyperelliptischen Fall an

$$\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a)}$$

((1), S. 35) ab.

1) $m = 2n$, $p-1-4n \geqq 0$.

Man hat

$$\frac{(2p+2)!}{(p-1-4n)!\,(p+3+4n)!}$$

Anordnungen, durch Zerlegung von $2p+2$ Faktoren in je $p-1-4n$ und $p+3+4n$; und ebenso viele Abelsche Funktionen, von verschiedenen Charakteristiken, je mit der Konstantenzahl $2n+1$.

Zur Summation Z dieser Charakteristiken für $n = 0, 1, 2, \cdots$, $n \leqq \frac{p-1}{4}$ bildet man aus dem binomischen Satze:

$$x^{-(p-1)}(1+x)^{2p+2} = \sum_{\nu=0}^{2p+2} x^{p+3-\nu} \cdot \frac{(2p+2)!}{\nu!\,(2p+2-\nu)!}$$

und summiert beide Seiten über $x = +1, -1, +i, -i$. Dabei heben sich rechts alle Glieder gegenseitig weg, in welchen der Exponent von x nicht durch 4 teilbar ist, und die rechte Seite wird für $\nu = p-1-4n$ zu:

$$4\sum_{\nu} \frac{(2p+2)!}{\nu!\,(2p+2-\nu)!} = 8 \sum_{n=0}^{n \leqq \frac{p-1}{4}} \frac{(2p+2)!}{(p-1-4n)!\,(p+3+4n)!},$$

die linke Seite zu

$$\sum_{\substack{x=1,-1\\ i,-i}} x^{-(p-1)}(1+x)^{2p+2} = 2^{p+2}(2^p-1).$$

Daher wird

$$Z = \sum_{n=0}^{n \gtreqless \frac{p-1}{4}} \frac{(2p+2)!}{(p-1-4n)!\,(p+3+4n)!} = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

also gleich der Anzahl β_p aller ungeraden Charakteristiken.

Sobald also noch ungerade m zulässig sind, was für $p \geqq 3$ der Fall ist, muß es noch ebensoviele Abelsche Funktionen mit *geraden* Charakteristiken — entsprechend geraden Thetafunktionen, die für die Nullwerte der Argumente verschwinden — geben, als Zerlegungen Z' von $2p+2$ Faktoren in je $p-3-4n$ und $p+5+4n$, für $n = 0, 1, \cdots, \lesseqgtr \frac{p-3}{4}$.

2) $m = 2n+1, \;\; p-3-4n \geqq 0, \;\; n = 0, 1, \cdots, \lesseqgtr \frac{p-3}{4}$.

[Man erhält im ganzen, durch analoge Rechnung, wie in 1):

$$Z' = \sum_{n=0}^{n \gtreqless \frac{p-3}{4}} \frac{(2p+2)!}{(p-3-4n)!\,(p+5+4n)!} = 2^{p-1}(2^p+1) - \frac{1}{2}\frac{(2p+2)!}{(p+1)!\,(p+1)!}$$

verschiedene Charakteristiken, je zu Abelschen Funktionen mit der Konstantenzahl $2n+2$ gehörig.]

Es ist $Z' = 1$ für $p = 3$; $Z' = 10$ für $p = 4$; $Z' = 66$ für $p = 5$. Ebensoviele gerade Thetafunktionen verschwinden für die Nullwerte der Argumente. Für $p = 3$ stellt dies eine, für $p = 4$ aber, da die hyperelliptische Funktion $p = 4$ noch 7 algebraische Moduln enthält, nicht 10, sondern nur 3 Relationen zwischen den Moduln der Thetafunktion vor.

Aus dem Umstande, daß es ebensoviel $[\beta_p]$ Abelsche Funktionen mit ungerader Charakteristik gibt, als Kombinationen Z von Produkten $\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a)}$ mit geradem m, und ebensoviele $[\alpha_p - \frac{1}{2}(2p+2)_{p+1}]$ Abelsche Funktionen mit gerader Charakteristik, als Kombinationen Z' von Produkten $\sqrt{\prod^{p-1-2m}(z-a)}$ mit ungeradem m, läßt sich vermuten, *daß den*

geraden, bezw. ungeraden m

die Abelschen Funktionen mit

ungerader, bezw. gerader Charakteristik

entsprechen mögen. Wir setzen diesen Satz, den wir später (s. Fortsetzung 7) vollständig beweisen werden, zunächst voraus.

Fortsetzung: 3. Relationen zwischen den Charakteristiken der Abelschen Funktionen.

(8. März:)

Die $2p + 2$ Verzweigungspunkte a seien bezeichnet mit

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2p+1}.$$

Die Charakteristik der Abelschen Funktion

$$\sqrt{(z - a_0)^{p-1}}$$

sei

$$(n) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^n, \cdots, \varepsilon_p^n \\ \varepsilon_1'^n, \cdots, \varepsilon_p'^n \end{pmatrix},$$

wobei

$$\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon_1'^n \pi i + \frac{1}{2}\sum_\mu \varepsilon_\mu^n a_{\mu,1}, \cdots\right) \equiv \left((p-1)\,u_1(a_0), \cdots\right),$$

wenn $u_\mu(a)$ der Wert von u_μ im Punkte a ist.

Wir schreiben dann der Funktion

$$\sqrt{\frac{z - a_\nu}{z - a_0}}$$

die Gruppencharakteristik (a_ν) zu, indem entweder ihr Faktorensystem an den Querschnitten bestimmt wird, oder

$$\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon_1'^{a_\nu} + \frac{1}{2}\sum \varepsilon_\mu^{a_\nu} a_{\mu,1}, \cdots\right) \equiv \left(u_1(a_\nu) - u_1(a_0), \cdots\right)$$

sei; beidemal ist die Zuordnung für eine bestimmte Zerschneidung von T gefunden.

Da das Produkt von $2p + 1$ verschiedenen Faktoren

$$\sqrt{\frac{\overset{2p+1}{\Pi}(z - a_\nu)}{(z - a_0)^{2p+1}}} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, 2p+1)$$

eine rationale Funktion von s, z wird, und da die Charakteristik desselben die Summe der Charakteristiken der einzelnen Faktoren ist, so hat man zwischen den Charakteristiken $(a_1), \cdots, (a_{2p+1})$ die identische Relation:

$$(a_1) + (a_2) + \cdots + (a_{2p+1}) \equiv (0),$$

d. h. (a_{2p+1}) ist durch die $2p$ ersteren Charakteristiken bestimmt. Dagegen findet zwischen diesen selbst keine lineare Identität statt, da keines der Produkte, aus irgend $\varkappa$ verschiedenen der $2p$ ersten Faktoren zusammengesetzt, eine rationale Funktion sein kann.

Aus der linearen Unabhängigkeit der Charakteristiken

$$(a_1), (a_2), \cdots, (a_{2p})$$

folgt, daß irgend zwei Charakteristiken, welche sich aus ihnen durch

Addition zusammensetzen, nur dann einander gleich sind, wenn sie in den $(a_1), \cdots, (a_{2p})$ denselben Ausdruck erhalten. Bildet man aus denselben alle Kombinationen

$$\alpha_1 \cdot (a_1) + \alpha_2 \cdot (a_2) + \cdots + \alpha_{2p} \cdot (a_{2p}),$$

wo die α nur die Werte 0 und 1 erhalten, so erhält man 2^{2p} von einander verschiedene Ausdrücke, und also auch 2^{2p} verschiedene Charakteristiken, wenn man (0) einschließt. Und da es nur ebensoviele Charakteristiken gibt, so lassen sich alle Gruppencharakteristiken aus $(a_1), (a_2), \cdots, (a_{2p})$ zusammensetzen; auch (0) eingeschlossen, wenn man $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2p} = 0$ setzt.

Addiert man weiter die Charakteristik (n) zu allen diesen Gruppencharakteristiken, (0) eingeschlossen, so erhält man wieder alle 2^{2p} Charakteristiken, da aus $(na) = (nb)$ auch $(a) = (b)$ folgt. Wir drücken daher alle Charakteristiken in der Form aus

$$(n) + \sum (a_\nu),$$

unter Σ irgend welche Summen der (a_ν) $(\nu = 1, 2, \cdots, 2p)$ verstanden.

Wenn man nun beachtet, daß der Quotient

$$\frac{f(z)^m \sqrt{\overset{p-1-2m}{\Pi} (z - a_\nu)}}{\sqrt{(z - a_0)^{p-1}}} = \frac{f(z)^m}{(z - a_0)^m} \sqrt{\frac{\overset{p-1-2m}{\Pi} (z - a_\nu)}{(z - a_0)^{p-1-2m}}}$$

die Gruppencharakteristik

$$\sum^{p-1-2m} (a_\nu), \quad \text{bezw.} \quad \sum^{p-2-2m} (a_\nu)$$

hat, je nachdem a_0 unter den a_ν des Zählers nicht vorkommt, oder ja, so folgt:

die Charakteristik von

$$f(z)^m \sqrt{\prod^{p-1-2m} (z - a_\nu)}$$

ist

$$(n) + \sum^{p-1-2m} (a_\nu), \quad \text{bezw.} \quad (n) + \sum^{p-2-2m} (a_\nu),$$

je nachdem a_0 unter den a_ν nicht oder ja vorkommt.

Setzt man nun den am Schluß des vorigen Abschnittes (S. 39) vermuteten Satz als richtig voraus, so folgt weiter:

Die *ungeraden* Charakteristiken werden von den Formen

$$(n) + \sum^{p-1-4m} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p-2-4m} (a_\nu),$$

wobei sich ν auf die Zahlen $1, 2, \cdots, 2p$ bezieht.

Da dasselbe auch bei Hinzunahme von a_{2p+1} gelten muß, so erhält man weiter, indem man (a_{2p+1}) durch $(a_1) + (a_2) + \cdots + (a_{2p})$ ersetzt:

Auch die Charakteristiken von den Formen

$$(n) + \sum^{p+2+4m} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p+3+4m} (a_\nu),$$

wobei sich ν ebenfalls auf die Zahlen $1, 2, \cdots, 2p$ bezieht, sind *ungerade*;

d. h. *alle aus* (n) *und den* $(a_1), \cdots, (a_{2p})$ *zusammengesetzten Charakteristiken sind ungerade, sobald die Anzahl dieser* $(a_\nu) \equiv p - 1$ *oder* $p - 2$ (*mod.* 4) *ist.*

Die übrigen Kombinationen müssen dann die *geraden* Charakteristiken liefern; diese werden also von den Formen

$$(n) + \sum^{p+4m} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p+1+4m} (a_\nu);$$

d. h. *alle aus* (n) *und den* $(a_1), \cdots, (a_{2p})$ *zusammengesetzten Charakteristiken sind gerade, sobald die Anzahl dieser* $(a_\nu) \equiv p$ *oder* $p + 1$ (*mod.* 4) *ist.*

In unserem hyperelliptischen Falle existiert auch unter den letzteren Formen von geraden Charakteristiken eine Reihe von Abelschen Funktionen, nämlich diejenigen, für welche die Summen die Formen annehmen:

$$(n) + \sum^{p-3-4m} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p-4-4m} (a_\nu),$$
$$(n) + \sum^{p+4+4m} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p+5+4m} (a_\nu),$$
$$\text{für } m \geqq 0.$$

Es bleiben daher noch die Formen, welche auch in unserem Falle keinen Abelschen Funktionen entsprechen:

$$(n) + \sum^{p} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{p+1} (a_\nu);$$

und dieses sind daher, unabhängig von dem oben vorausgesetzten Satze, jedenfalls gerade Charakteristiken. In unserm Falle können denselben keine Thetafunktionen entsprechen, welche für die Nullwerte der Argumente verschwinden; und umgekehrt entsprechen hier solchen Funktionen nur Charakteristiken der letzten beiden Formen.

Fortsetzung: 4. Ausdrücke von Quotienten Abelscher Funktionen durch Thetaquotienten.

(8. März:)

Betrachten wir die Thetafunktionen zunächst im Falle der Abelschen Funktionen, in dem $m > 0$ ist (s. (1) S. 35). Die Charakteristik einer solchen Thetafunktion sei (q).

Für $m > 0$ muß $\vartheta(q)(u_1 - u_1', \cdots)$ identisch verschwinden für jedes (s, z).

Denn sei

$$\vartheta(q)(u_1 - u_1', \cdots) = c\,\vartheta(u_1 - u_1' - \sum_\nu u_1^{(\nu)}, \cdots) \cdot e^{-\sum_\mu \varepsilon_\mu^q (u_\mu - u'_\mu)},$$

wo

$$\sum_\nu u_\mu^{(\nu)} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_\mu'^q \pi i + \frac{1}{2}\sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'}^q a_{\mu,\mu'} \equiv e_\mu, \qquad (\mu = 1, \cdots, p)$$

und $\sum\limits_\nu$ ausgedehnt wird über die $p - 1$ Punkte, für welche die (q) zugeordnete Abelsche Funktion verschwindet. Da für $m > 0$ *verschiedene* Systeme von Summen von $p - 1$ Integralen existieren, denen die e_μ kongruent gesetzt werden können, so muß $\vartheta(q)(u_1 - u_1', \cdots)$ nach der ersten Formel identisch verschwinden für jedes (s, z).

Für $m > 0$ verschwinden ferner auch die p Funktionen $\vartheta'_\mu(e_1, \cdots, e_p)$.

Denn

$$\sum_{\mu=1}^{p} \vartheta'_\mu(q)(u_1 - u_1', \cdots)\frac{du_\mu}{dz}$$

wird dann für $(s, z) = (s_1, z_1)$ ebenfalls zu Null, also auch die Koeffizienten $\vartheta'_\mu(q)(0, \cdots)$, weil zwischen den $\frac{du_\mu}{dz}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ keine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten stattfindet.

Umgekehrt: *Wenn sowohl $\vartheta(e_1, \cdots) = 0$, als die $\vartheta'_\mu(e_1, \cdots) = 0$ $(\mu = 1, 2, \cdots, p)$ sind, so muß die Funktion $\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)$ identisch für jedes (s, z) verschwinden.*

Denn da, nach dem früheren (S. 30, 31), für $\vartheta(e_1, \cdots) = 0$, $\vartheta(f_1, \cdots) = 0$:

$$\frac{\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)\;\vartheta(u_1 - u_1' + e_1, \cdots)}{\vartheta(u_1 - u_1' - f_1, \cdots)\;\vartheta(u_1 - u_1' + f_1, \cdots)} = \frac{\sum_\mu \vartheta'_\mu(e)\varphi_\mu(s, z) \cdot \sum_\mu \vartheta'_\mu(e)\varphi_\mu(s_1, z_1)}{\sum_\mu \vartheta'_\mu(f)\varphi_\mu(s, z) \cdot \sum_\mu \vartheta'_\mu(f)\varphi_\mu(s_1, z_1)},$$

so folgt aus $\vartheta'_\mu(e) = 0$ $(\mu = 1, \cdots, p)$ und zwar ohne Hinzunahme von $\vartheta'_\mu(f) = 0$, daß $\vartheta(u_1 - u_1' \pm e_1, \cdots)$ für jedes (s, z) identisch gleich Null sei; die beiden Ausdrücke $\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)$ und $\vartheta(u_1 - u_1' + e_1, \cdots)$ verschwinden aber gleichzeitig identisch, oder nicht [da ein solcher Ausdruck, wenn als Funktion von (s, z), auch als Funktion von (s_1, z_1) identisch verschwindet].

Hiernach bedingen sich die beiden Eigenschaften:

1) $\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots)$ verschwindet identisch für jedes (s, z);

2) $$\vartheta(e_1, \cdots) = 0, \quad \vartheta'_\mu(e_1, \cdots) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, p)$$

gegenseitig; und dann lassen sich die Kongruenzen

$$(e_1, \cdots) \equiv \left(\sum_{\nu=1}^{p-1} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)$$

auf verschiedene Weisen erfüllen. Hieraus folgt:

Für $m > 0$ *müssen alle Größen* $\vartheta'_\mu(q)$ *gleich Null sein. Wenn* $\vartheta(q) = 0$ *und alle* $\vartheta'_\mu(q) = 0$ *sind, so hat man verschiedene Integralsysteme für die e, also für den Faktor* $\overset{m}{f(z)}$ *der zugehörigen Abelschen Funktion* ((1), S. 35) *mindestens zwei Konstanten, d. h.* $m > 0$.

Beachtet man nun weiter, daß bei gerader Charakteristik (q) alle $\vartheta'_\mu(q)$ immer gleich Null sind, so ergibt sich:

Ist $\vartheta(q) = 0$ *und* (q) *gerade, so muß die zugehörige Abelsche Funktion mindestens zwei willkürliche Konstanten enthalten, also* $m > 0$ *sein.*

Und hieraus weiter:

Dem Fall $m = 0$ *können nur Abelsche Funktionen mit ungerader Charakteristik und ungerade Thetafunktionen entsprechen.*

Die früher gegebene algebraische Darstellung einfacher Thetaquotienten (S. 9, 10 (4), (4′) und S. 32) als Quotient zweier Abelschen Funktionen, nämlich

$$\frac{\vartheta(a)(u_1 - u_1', \cdots)}{\vartheta(b)(u_1 - u_1', \cdots)} = \sqrt{\frac{\varphi_a(s, z) \cdot \varphi_a(s_1, z_1)}{\varphi_b(s, z) \cdot \varphi_b(s_1, z_1)}},$$

ist nur anwendbar, wenn die beiden Thetafunktionen des Quotienten nicht identisch verschwinden; somit nur entsprechend solchen Abelschen Funktionen $\sqrt{\varphi_a}$, $\sqrt{\varphi_b}$, welche zu $m = 0$ gehören, also jedenfalls nur für ungerade Charakteristiken (a), (b).

Ist $m > 0$, so wäre

$$\frac{\overset{m}{f(z)} \sqrt{\overset{p-1-2m}{\Pi}(z - a_\nu)}}{\sqrt{(z - a_0)^{p-1}}}$$

als Quotient von Thetareihen auszudrücken. Tut man dies durch einen einfachen Thetaquotienten, so verschwindet der Zähler identisch in (s, z), und man muß dann, bei $m = 1$, dafür erste Derivierte nach irgend einem der Argumente u nehmen; zwischen den Derivierten existieren dabei lineare Relationen. Und ebenso muß man bei $m > 1$ auch auf die höheren Derivierten übergehen — was wir jetzt nicht weiter verfolgen können. Dabei würde sich auch die *allgemeine* Gültigkeit des oben vorausgesetzten Satzes (S. 39, 41) ergeben, analog wie oben für $m = 0$.([26]) Bisher ist von diesem Satze nur fest bewiesen, daß [was für $p = 3$ genügen würde] die Charakteristiken der Formen

$$(n)+\sum^{p}(a_\nu),\quad (n)+\sum^{p+1}(a_\nu)\quad \text{gerade},$$

$$(n)+\sum^{p-1}(a_\nu),\quad (n)+\sum^{p-2}(a_\nu),\quad (n)+\sum^{p+2}(a_\nu),\quad (n)+\sum^{p+3}(a_\nu)\quad \text{ungerade}$$

sind. Wir werden später den vollständigen Beweis des Satzes auf anderm Wege erbringen (s. Fortsetzung 7). Jetzt wenden wir uns den Quotienten aus geraden, nicht identisch verschwindenden $\vartheta(q)(0,\cdots)$ zu [Spezialisierung von obigen Abschnitten, S. 23—35].([27])

Fortsetzung: 5. Spezielle Thetaquotienten.

(10. März:)

Sei $m=0$, also eine ungerade Charakteristik (q) betrachtet, für welche $\vartheta(q)(u_1-u_1',\cdots)$ nicht identisch in (s,z) verschwindet. Wir bezeichnen mit

$$b_1,\, b_2,\cdots,\, b_{p-1}$$

irgend $p-1$ verschiedene der $2p+2$ Verzweigungspunkte a; mit

$$c_1,\, c_2,\cdots,\, c_{p-1}$$

irgend $p-1$ andere, von einander verschiedene, dieser Punkte a. Dann haben wir aus dem früheren allgemeinen Satze über die Quotienten von Thetas (S. 9, 10):

$$A\sqrt{\frac{\overset{p-1}{\Pi}(z-b_\nu)\,\overset{p-1}{\Pi}(z_1-b_\nu)}{\overset{p-1}{\Pi}(z-c_\nu)\,\overset{p-1}{\Pi}(z_1-c_\nu)}}$$
$$=\frac{\vartheta\left(u_1-u_1'-\sum\limits_\nu u_1(b_\nu),\cdots\right)}{\vartheta\left(u_1-u_1'-\sum\limits_\nu u_1(c_\nu),\cdots\right)}\,e^{-\sum\limits_\mu\left(\varepsilon_\mu^{(n+\Sigma b_\nu)}-\varepsilon_\mu^{(n+\Sigma c_\nu)}\right)(u_\mu-u_\mu')},$$

wo $u_\mu(b_\nu)$ der Wert von u_μ in b_ν ist, und wo

$$\sum_\nu u_\mu(b_\nu)=\frac{1}{2}\,\varepsilon_\mu'^{(n+\Sigma b_\nu)}\pi i+\frac{1}{2}\sum_{\mu'}\varepsilon_{\mu'}^{(n+\Sigma b_\nu)}a_{\mu,\mu'},$$
$$\sum_\nu u_\mu(c_\nu)=\frac{1}{2}\,\varepsilon_\mu'^{(n+\Sigma c_\nu)}\pi i+\frac{1}{2}\sum_{\mu'}\varepsilon_{\mu'}^{(n+\Sigma c_\nu)}a_{\mu,\mu'}.$$

Seien ferner

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

die vier noch übrigen Verzweigungspunkte a. Setzen wir z und z_1 gleich irgend zwei verschiedenen dieser vier Größen, und zwar

$$1)\quad z=\alpha,\ z_1=\beta;\qquad 2)\quad z=\gamma,\ z_1=\delta,$$

so wird

$$1)\quad A\sqrt{\frac{\Pi(\alpha-b_\nu)\;\Pi(\beta-b_\nu)}{\Pi(\alpha-c_\nu)\;\Pi(\beta-c_\nu)}} = \frac{\vartheta\left(u_1(\alpha)-u_1(\beta)-\sum\limits_\nu u_1(b_\nu),\cdots\right)}{\vartheta\left(u_1(\alpha)-u_1(\beta)-\sum\limits_\nu u_1(c_\nu),\cdots\right)}\, e^{-\sum\limits_\mu \varepsilon_\mu^{(\Sigma b_\nu-\Sigma c_\nu)}\left(u_\mu(\alpha)-u_\mu(\beta)\right)}.$$

$$2)\quad A\sqrt{\frac{\Pi(\gamma-b_\nu)\;\Pi(\delta-b_\nu)}{\Pi(\gamma-c_\nu)\;\Pi(\delta-c_\nu)}} = \frac{\vartheta\left(u_1(\gamma)-u_1(\delta)-\sum\limits_\nu u_1(b_\nu),\cdots\right)}{\vartheta\left(u_1(\gamma)-u_1(\delta)-\sum\limits_\nu u_1(c_\nu),\cdots\right)}\, e^{-\sum\limits_\mu \varepsilon_\mu^{(\Sigma b_\nu-\Sigma c_\nu)}\left(u_\mu(\gamma)-u_\mu(\delta)\right)}.$$

Aber hier wird die Thetareihe im Zähler des einen Ausdrucks jedesmal im wesentlichen gleich der Thetareihe im Nenner des anderen Ausdrucks; wie früher ergibt sich also durch Multiplikation A^2, und durch Division der Wert des Quadrates eines nicht verschwindenden Thetaquotienten für die Nullwerte der Argumente; wobei man für diese Thetafunktionen beliebige solche gerade Charakteristiken, zu denen überhaupt für die Nullwerte nicht verschwindende Thetafunktionen gehören, erhält.

Durch Multiplikation wird, bis auf einen Exponentialfaktor $\varkappa'$:

$$A = \varkappa' \sqrt[4]{\frac{\Pi(\alpha-c_\nu)\;\Pi(\beta-c_\nu)\;\Pi(\gamma-c_\nu)\;\Pi(\delta-c_\nu)}{\Pi(\alpha-b_\nu)\;\Pi(\beta-b_\nu)\;\Pi(\gamma-b_\nu)\;\Pi(\delta-b_\nu)}}.$$

Zur Division sei

$$u_\mu(a_\nu) - u_\mu(a_0) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_\mu'^{a_\nu}\pi i + \frac{1}{2}\sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'}''^{\nu} a_{\mu,\mu'},$$

gehörig zur Gruppencharakteristik (a_ν) von $\sqrt{\dfrac{z-a_\nu}{z-a_0}}$. Also wird

$$u_\mu(\alpha) - u_\mu(\beta) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_\mu'^{(\alpha)-(\beta)}\pi i + \frac{1}{2}\sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'}^{(\alpha)-(\beta)} a_{\mu,\mu'}$$

und die identische Relation

$$(a_1) + (a_2) \cdots + (a_{2p+1}) \equiv (0)$$

zu

$$\Sigma(b_\nu) + \Sigma(c_\nu) + (\alpha) + (\beta) + (\gamma) + (\delta) \equiv 0 \pmod{2},$$

wo die Gruppencharakteristiken $(\alpha), \cdots$ zu $\sqrt{\dfrac{z-\alpha}{z-a_0}}, \cdots$ gehören, und wo auf der linken Seite unter den $2p+2$ Gruppencharakteristiken auch $\begin{pmatrix}0,\cdots,0\\0,\cdots,0\end{pmatrix}$ vorkommt, entsprechend $\sqrt{\dfrac{z-a_0}{z-a_0}}$. Durch Division folgt daher, da:

$$(n) + (\alpha) - (\beta) - \Sigma(b_\nu) \equiv (n) + (\gamma) - (\delta) - \Sigma(c_\nu) \pmod{2}$$

wird, die Formel:

$$\frac{\vartheta(n+\alpha-\beta+\Sigma b_\nu)}{\vartheta(n+\alpha-\beta+\Sigma c_\nu)} = \varkappa_1 \sqrt[4]{\frac{\Pi(\alpha-b_\nu)\,\Pi(\beta-b_\nu)\,\Pi(\gamma-c_\nu)\,\Pi(\delta-c_\nu)}{\Pi(\alpha-c_\nu)\,\Pi(\beta-c_\nu)\,\Pi(\gamma-b_\nu)\,\Pi(\delta-b_\nu)}},$$

in der $\varkappa_1$ ein Exponentialfaktor ist.

Diese Darstellung genügt, um durch Vertauschungen und Produktbildungen alle Quotienten der Form

$$\sqrt[4]{\frac{(a-b)\,(c-d)}{(a-c)\,(b-d)}},$$

wo a, b, c, d irgend vier verschiedene aus den $2p+2$ Verzweigungswerten vorstellen, durch Thetaquotienten für die Nullwerte der Argumente auszudrücken. Denkt man noch eine lineare gebrochene Substitution zwischen z und z' ausgeführt, wobei der letztere Quotient in

$$\sqrt[4]{\frac{(a'-b')\,(c'-d')}{(a'-c')\,(b'-d')}}$$

übergehe, und nimmt drei der Größen a', b', c', d' als $0, 1, \infty$ an, so erhält man die Ausdrücke für die Moduln der hyperelliptischen Funktion.

[Ausgerechnet wird, mit Hilfe der Definition von $\vartheta\binom{\varepsilon}{\varepsilon'}(v)$ (Seite 8)

$$\varkappa'^2 = \varkappa^2 j,$$

$$\varkappa_1 = \sqrt{j}\cdot e^{\frac{1}{2}\pi i \sum\limits_\mu \varepsilon_\mu^{(\alpha)-(\beta)}\cdot \varepsilon_\mu'^{\,\Sigma(b_\nu)-\Sigma(c_\nu)}},$$

$$\varkappa^2 = e^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{\mu,\mu'}\right)^2 a_{\mu,\mu'}\,\varepsilon_\mu^{(n+\Sigma b_\nu)}\cdot\varepsilon_{\mu'}^{(n+\Sigma b_\nu)} + \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{\mu,\mu'}\right)^2 a_{\mu,\mu'}\,\varepsilon_\mu^{(n+\Sigma c_\nu)}\cdot\varepsilon_{\mu'}^{(n+\Sigma c_\nu)}},$$

$$j = e^{\frac{1}{2}\pi i \sum\limits_\mu \varepsilon_\mu^{(\alpha-\beta+\gamma-\delta)}\ \varepsilon_\mu'^{\,(\alpha-\beta+\gamma-\delta-2\Sigma c_\nu-2n)}}.]$$

Fortsetzung: 6. Thetaquotienten mit beliebigen Argumenten.

(10. März:)

Seien $(s_1, z_1), (s_2, z_2), \cdots, (s_p, z_p)$ irgend p Punkte von $F(s, z) = 0$, und $u_\mu^{(1)}, u_\mu^{(2)}, \cdots, u_\mu^{(p)}$ die zugehörigen Werte von u_μ. a, b seien irgend zwei Verzweigungspunkte. So kann man den Quotienten

$$\frac{\vartheta\left(\sum\limits_{\nu=1}^{p} u_1^{(\nu)} - u_1(a), \cdots\right)}{\vartheta\left(\sum\limits_{\nu=1}^{p} u_1^{(\nu)} - u_1(b), \cdots\right)}\, e^{-\sum\limits_{\nu,\mu}\varepsilon_\mu^{(a)-(b)} u_\mu^{(\nu)}},$$

wo

$$u_\mu(a) - u_\mu(b) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_\mu'^{(a)-(b)}\cdot\pi i + \frac{1}{2}\sum_{\mu'}\varepsilon_{\mu'}^{(a)-(b)}\, a_{\mu,\mu'},$$

algebraisch ausdrücken durch die Werte $(s_1, z_1), \cdots, (s_p, z_p)$.

Als Funktion von (s_1, z_1) verschwindet der Zähler dieses Ausdrucks in a und in den $p-1$ Punkten $(s_2', z_2'), \cdots, (s_p', z_p')$, für welche

$$\sum_{\nu=2}^{p} u_\mu'^{(\nu)} \equiv -\sum_{\nu=2}^{p} u_\mu^{(\nu)}.$$

Die Punkte $(s_2, z_2), \cdots, (s_p, z_p)$, $(s_2', z_2'), \cdots, (s_p', z_p')$ sind mit einander durch eine Funktion φ verknüpft; daher wird in unserem hyperelliptischen Falle $z_\nu' = z_\nu$, während s_ν' die von s_ν verschiedene Wurzel von $F(s, z_\nu) = 0$ wird. Ebenso verschwindet der Nenner des Quotienten, als Funktion von (s_1, z_1), in b und denselben $p-1$ Punkten (s_ν', z_ν'). Der Quotient wird daher zu

$$A\sqrt{\frac{z_1 - a}{z_1 - b}}$$

und wegen der Symmetrie in den p Punkten (s_μ, z_μ) zu

$$B\sqrt{\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{p}(z_\nu - a)}{\prod\limits_{\nu=1}^{p}(z_\nu - b)}},$$

wo B von den z_ν unabhängig wird und nach der früheren Methode zu bestimmen ist. Zu dem Zwecke teile man hier die $2p+2$ Verzweigungspunkte in drei Gruppen von einander verschiedener:

$$a, b; \quad c_1, \cdots, c_p; \quad d_1, \cdots, d_p;$$

indem man für die z_ν einmal die c_ν, dann die d_ν einsetzt, erhält man

$$B\sqrt{\frac{\prod(c_\nu - a)}{\prod(c_\nu - b)}} = \frac{\vartheta\left(\sum\limits_\nu u_1(c_\nu) - u_1(a), \cdots\right)}{\vartheta\left(\sum\limits_\nu u_1(c_\nu) - u_1(b), \cdots\right)} e^{-\sum\limits_{\nu,\mu} \varepsilon_\mu^{(a)-(b)} u_\mu(c_\nu)},$$

$$B\sqrt{\frac{\prod(d_\nu - a)}{\prod(d_\nu - b)}} = \frac{\vartheta\left(\sum\limits_\nu u_1(d_\nu) - u_1(a), \cdots\right)}{\vartheta\left(\sum\limits_\nu u_1(d_\nu) - u_1(b), \cdots\right)} e^{-\sum\limits_{\nu,\mu} \varepsilon_\mu^{(a)-(b)} u_\mu(d_\nu)};$$

und da

$$\sum_\nu u_\mu(c_\nu) + \sum_\nu u_\mu(d_\nu) + u_\mu(a) + u_\mu(b) \equiv 0 \text{ (mod. Perioden)},$$

so wird durch Multiplikation B algebraisch erhalten in der Form:

$$B = h\sqrt[4]{\frac{\prod\limits_{b'}(b - b')}{\prod\limits_{a'}(a - a')}},$$

wo unter a' alle Verzweigungspunkte außer a selbst, unter b' alle solche außer b selbst verstanden sind, h ein Exponentialfaktor [der noch die Moduln enthält].

Die hier vorkommenden Größen der Art

$$\frac{\sqrt{\prod_{\nu=1}^{p}(z_\nu - a)}}{\sqrt[4]{\prod_{a'}(a-a')}}$$

sind diejenigen, welche Weierstraß vorzugsweise „Abelsche Funktionen" nennt („Zur Theorie der Abelschen Funktionen", Formel (2), Crelles J., Bd. 47). Es verhalten sich nämlich, bei festen $z_1, \cdots, z_p$, diese Ausdrücke wie die entsprechenden Thetafunktionen

$$\vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{p} u_1^{(\nu)} - u_1(a), \cdots\right),$$

bis auf Exponentialfaktoren; um diese letzteren auszurechnen und zu beseitigen, müßte man die Charakteristiken der Thetafunktionen einführen und hierzu die Integrale alle von dem festen Verzweigungspunkte a_0 an nehmen, für welchen dem Ausdruck $\sqrt{(z-a_0)^{p-1}}$ die Charakteristik (n) zugelegt wurde (S. 40). Der Quotient, von dem wir ausgingen (S. 47), erhielte dann die Form

$$\frac{\vartheta(n+a)\left(\sum_{\nu=1}^{p}[u_1^{(\nu)} - u_1(a_0)], \cdots\right)}{\vartheta(n+b)\left(\sum_{\nu=1}^{p}[u_1^{(\nu)} - u_1(a_0)], \cdots\right)}.$$

Übrigens gibt auch Weierstraß die mit vierten Wurzeln der Einheit zusammenhängenden Faktoren nicht näher an, sondern läßt sie noch unbestimmt, wird sie aber wohl später hinzufügen. Ferner war beim hyperelliptischen Fall, den er allein behandelt, kaum Veranlassung, die vollständigen Ausdrücke für alle $\overset{m}{f}(z)\prod^{p-1-2m}(z-a)$ einzuführen.

Auf den allgemeinen, nicht-hyperelliptischen, Fall lassen sich die Weierstraßschen Formeln nicht verallgemeinern. Dann lassen sich die Thetaquotienten nicht als Produkte von Funktionen der einzelnen Variabeln, sondern nur als Quotienten von Determinanten aus Funktionen von je einer Variabeln darstellen, also durch viel kompliziertere Ausdrücke. Diese letzteren einzelnen Funktionen von einer Variabeln zeichnen sich alsdann schon so aus, daß eine besondere Benennung nötig wird; und wir haben sie früher (also in anderem Sinne als dem Weierstraßschen) „Abelsche Funktionen" genannt.

Wir haben auch noch die Konstanten in den Thetarelationen vollständig zu bestimmen; und gerade hierbei wird die Betrachtung der *hyperelliptischen* Funktionen von wesentlichem Nutzen sein. Insbesondere haben wir im allgemeinen Falle $p = 3$ die Relationen zwischen den $\vartheta'_\mu(0, \cdots)$ und den $\vartheta(0, \cdots)$ (S. 34—35) übersichtlich zu entwickeln.

Fortsetzung: 7. Beweis des vorausgesetzten Satzes (S. 39).

(11. März:)

Zur Ausfüllung der bei dem Satze (S. 39) gelassenen Lücke sollen die Charakteristiken mit Bezug auf eine *gegebene* Querschnittzerlegung für den hyperelliptischen Fall wirklich bestimmt werden.

Als bestimmte Zerlegung der die z-Ebene zweifach bedeckenden Fläche T, mit den Verzweigungspunkten

$$a_0, a_1, \cdots, a_{2p+1},$$

nehmen wir folgende: man verbinde die Punkte in der genannten Ordnung, zuletzt auch a_{2p+1} durch das Unendliche mit a_0, durch eine Linie. Auf beiden Seiten der Linie sind die Blätter von T unverzweigt; die Verbindung wechselt bei jedem Verzweigungswerte. Abwechselnd findet also Kreuzung der Blätter statt, so etwa zwischen $a_1 - a_2, a_3 - a_4, \cdots, a_{2p+1} - a_0$, während zwischen $a_2 - a_3, a_4 - a_5, \cdots, a_0 - a_1$ keine Kreuzung vorhanden ist. Zur Zerlegung von T in eine einfach zusammenhängende Fläche T' seien die Querschnitte

$$a_1', \cdots, a_p', \quad b_1', \quad b_2', \cdots, b_p'$$

bezw. um

$$a_1 - a_2, \cdots, a_{2p-1} - a_{2p},$$

$$a_2 - a_3 - \cdots - a_{2p+1}, \quad a_4 - a_5 - \cdots - a_{2p+1}, \cdots, a_{2p} - a_{2p+1}$$

gezogen.

Wir benutzen zunächst die Definition der Gruppencharakteristiken durch Integralsummen:

$$u_\mu(a_\nu) - u_\mu(a_0) = \frac{1}{2}\, \varepsilon_\mu'^{a_\nu} \pi i + \frac{1}{2} \sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu,\mu'}^{a_\nu} a_{\mu,\mu'}.$$

Wendet man diese Definition auf ein beliebiges Integral erster Gattung

$$w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p + \text{const.}$$

an, so wird

$$w(a_\nu) - w(a_0) = \frac{1}{2} \sum_\mu \varepsilon_\mu'^{\nu} k^{(\mu)} + \frac{1}{2} \sum_\mu \varepsilon_\mu^{\nu} l^{(\mu)},$$

wo die $\varepsilon_\mu^\nu, \varepsilon_\mu'^\nu$ ganze Zahlen sind und wo die $k^{(\mu)}, l^{(\mu)}$ die Periodizitätsmoduln von w am Querschnitte a_μ', bezw. b_μ' vorstellen.

Um die Wertänderung eines Integrals w auf einem in T' laufenden Weg zwischen zwei Punkten von T' zu erhalten, kann man auch einen nicht in T'' verlaufenden Weg zwischen denselben Punkten wählen, wenn man dabei die sprunghaften Änderungen an den Querschnitten mitnimmt. Insbesondere drückt sich so der Wert des Integrals zwischen zwei Verzweigungspunkten a_0 und a_ν, auf einem in T'' verlaufenden Wege, aus als der negativ genommene Wert desselben Integrals auf demselben Wege, aber je im anderen Blatt von T durchlaufen. Auf letzterem Wege liefert jede Überschreitung eines Querschnittes von T'' den bezüglichen Periodizitätsmodul als Beitrag zum Integral. Führt man dies für die einzelnen Integrale $u_1, \cdots, u_p$ aus, so ergibt sich für die Wege von a_0 bis $a_{2\nu-1}$, bezw. $a_{2\nu}$:

$$\text{Charakteristik } (a_{2\nu-1}) = \left(\binom{1}{0}^{\nu-1} \begin{matrix}0\\1\end{matrix} \binom{0}{0}^{p-\nu}\right),$$

$$\text{„} \qquad (a_{2\nu}) = \left(\binom{1}{0}^{\nu-1} \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \binom{0}{0}^{p-\nu}\right),$$

wo $\binom{1}{0}^{\nu-1}$ die $(\nu-1)$-malige Wiederholung von $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$ bedeutet.[28]

Ganz dasselbe erhält man, wenn man die Definition der Gruppencharakteristiken durch Querschnittsfaktoren benutzt.

Ist nun der zu beweisende Satz richtig, so muß eine Charakteristik (n) existieren, derart daß

$$(n) + \sum^{p+m} (a_\nu)$$

gerade ist für $m \equiv 0$ oder 1, ungerade für $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$.

Wir nehmen an, der Lehrsatz sei bewiesen für Charakteristiken aus bloß p Gliedern, und beweisen ihn dann für solche aus $p+1$ Gliedern. Für $p = 1$, wo $(a_1) = \binom{0}{1}$, $(a_2) = \binom{1}{1}$, $(n) = \binom{1}{1}$, gilt aber der Satz. Die p-gliedrigen Charakteristiken setzen wir aus

$$(n);\ (a_1),\ (a_2),\ \cdots,\ (a_{2p}),$$

die $(p+1)$-gliedrigen entsprechend aus

$$(n');\ (a_1'),\ (a_2'),\ \cdots,\ (a'_{2p+2})$$

zusammen. Dabei sollen die $2p+2$ Charakteristiken (a') aus den $2p$ Charakteristiken (a) entstehen, indem man

1) vor alle (a) das Glied $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$ setzt,

2) die zwei Charakteristiken $\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix} \binom{0}{0}^p\right)$, $\left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix} \binom{0}{0}^p\right)$ hinzunimmt.

Das gesuchte (n') ist dann, wie wir zeigen wollen, von der Form anzunehmen:

$$(n') = \left(\begin{matrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{matrix} n\right).$$

Ist nämlich zunächst

$$(a') = \left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\, a\right),$$

so wird $\sum\limits^{p}(a') = \left(\begin{matrix}p\\0\end{matrix} \sum\limits^{p} a\right)$, und

$$(n') + \sum^{p}(a') = \left(\begin{matrix}\varepsilon+p\\ \varepsilon'\end{matrix}\,(n + \sum^{p} a)\right);$$

da aber, nach Annahme,

$$(n) + \sum^{p}(a) \equiv 0 \pmod{2},$$

so wird, wie es sein soll:

$$(n') + \sum^{p}(a') \equiv 1 \pmod{2},$$

sobald $\varepsilon + p$ und ε' beide $\equiv 1 \pmod{2}$ genommen werden. Wir nehmen also

$$(n') = \left(\begin{matrix}p+1\\1\end{matrix}\, n\right).$$

Benutzt man nun dieses (n') für alle möglichen Kombinationen der (a'), so gilt der Satz. In der Tat: für die Frage, ob

$$(n') + \sum^{p+1+m}(a') \quad \begin{matrix}\text{gerade,}\\ \text{ungerade,}\end{matrix} \quad \text{wenn } m \equiv \begin{matrix}0,1\\2,3\end{matrix} \pmod{4},$$

sind vier Fälle zu betrachten:

1) die (a') der Summe sind alle von der Form $\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\, a\right)$;

2) eines der (a') der Summe hat die Form $\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^{p}\right)$;

3) eines der (a') hat die Form $\left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^{p}\right)$;

4) zwei der (a') sollen von den letzteren beiden Formen sein.

Im Fall 1) wird

$$(n') + \sum^{p+1+m}(a') = \left(\begin{matrix}p+1+p+1+m\\1\end{matrix}\,(n + \sum^{p+1+m} a)\right) \equiv \left(\begin{matrix}m\\1\end{matrix}\,(n + \sum^{p+1+m} a)\right),$$

und der Satz ist für alle Werte von m erfüllt; in den Fällen 2), 3), 4) wird bezw.

$$(n') + \sum^{p+m}(a') + \left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^{p}\right) \equiv \left(\begin{matrix}m+1\\0\end{matrix}\,(n + \sum^{p+m} a)\right),$$

$$(n') + \sum^{p+m}(a') + \left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^{p}\right) \equiv \left(\begin{matrix}m\\0\end{matrix}\,(n + \sum^{p+m} a)\right),$$

$$(n') + \sum^{p+m-1}(a') + \left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^{p}\right) + \left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^{p}\right) \equiv \left(\begin{matrix}m+1\\1\end{matrix}\,(n + \sum^{p+m-1} a)\right),$$

und auch hier ist der Satz für alle m erfüllt. Daher gilt der Satz für $p+1$. Nach dem Gesetz, nach dem (n') aus (n) gebildet wurde, wird zugleich

$$(n) = \begin{pmatrix} p, & p-1, & \cdots, & 1 \\ 1, & 1, & \cdots, & 1 \end{pmatrix},$$

mit abwechselnden Gliedern $\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$ und $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$, dem Schlußglied $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$; so z. B. für $p=3$ und 4:

$$(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{bezw.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Auffindung dieses bestimmten Ausdrucks (n) brauchte man übrigens gar nicht auf die Integrale zurückzugehen, da leicht zu zeigen ist, daß (n) durch seine früher genannten Eigenschaften schon völlig gegeben ist.(29) Die Folge ist, daß diese Systeme von Charakteristiken nicht nur für die hyperelliptischen, sondern für die *allgemeinen Abelschen Funktionen* verwendbar sind. So haben wir für $p=3$ solche sechs Gruppencharakteristiken $(a_1), \cdots, (a_6)$, nämlich

$$(p), (q), (r), (d'), (e'), (f')$$
$$[\text{mit } (g') \equiv (p) + (q) + (r) + (d') + (e') + (f')]$$

aufgestellt, daß alle Gruppencharakteristiken sich aus ihnen zusammensetzen lassen; und dann wurde (n) so bestimmt, daß die Charakteristiken

$$(n) + \sum^{1} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{2} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{5} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{6} (a_\nu) \quad \text{ungerade,}$$

$$(n), \quad (n) + \sum^{3} (a_\nu), \quad (n) + \sum^{4} (a_\nu) \quad \text{gerade}$$

waren. Dies war früher durch *Induktion* [aus den Gruppen von Paaren Abelscher Funktionen] gefunden; zugleich waren die den Gruppencharakteristiken zugeordneten halben Perioden auch ihrem Werte nach durch Integralsummen völlig bestimmt (S. 13—15, 27—30).

Fortsetzung: 8. Ergänzung der allgemeinen Entwicklungen bei $p=3$ durch die für den hyperelliptischen Fall geltenden.

(11. März:)

Wir betrachten den hyperelliptischen Fall $p=3$:

$$w = \int \frac{\overset{2}{\varphi}(z)\, dz}{\sqrt{\{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)(z-e)(z-f)(z-g)(z-h)\}}};$$

mit den Abelschen Funktionen $\sqrt{(z-a)(z-b)}$, wo für a, b irgend zwei verschiedene von den acht Verzweigungspunkten zu nehmen sind, und $\overset{1}{f(z)}$. Den ersteren 28 Funktionen entsprechen die 28 ungeraden Charakteristiken, der letzteren aber eine gerade Charakteristik und eine gerade Thetafunktion, die für die Nullwerte der Argumente verschwindet. Unter den 36 geraden Thetafunktionen werden also in unserm Falle für die Nullwerte der Argumente eine verschwinden, die übrigen von Null verschieden sein.

Umgekehrt: wenn eine der 36 geraden Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente verschwindet, so wird durch diese Thetafunktionen das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale gelöst. Sei nämlich, für (n) gerade,

$$\vartheta(n)(0,0,0) = 0;$$

so muß

$$\vartheta(u_1 - u_1' - e_1, \cdots),$$

wo

$$e_\mu = \frac{1}{2}\sum \varepsilon_\mu'^n \pi i + \frac{1}{2}\sum_{\mu'} \varepsilon_{\mu'}^n a_{\mu,\mu'},$$

so verschwinden für $(s, z) = (s_1, z_1)$, daß die Kongruenzen

$$(e_1, \cdots) \equiv \left(\sum_{\nu=1}^{2} u_1^{(\nu)}, \cdots\right)$$

auf zwei, und damit auf unendlich viele Weisen, erfüllt werden können (s. S. 43). Es existiert also eine Funktion, die für zwei Werte unendlich groß und unendlich klein wird: was eben der hyperelliptische Fall ist. Dieser Fall ist also für $p = 3$ notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine gerade Thetafunktion für die Nullwerte der Argumente zu Null wird.

Die Funktion, welche in je zwei Punkten 0^1 und ∞^1 wird, wäre

$$\frac{\vartheta_1'(n)(u_1 - u_1', \cdots)}{\vartheta_2'(n)(u_1 - u_1', \cdots)}. \;(^{30})$$

Für den hyperelliptischen Fall $p = 3$ zerfallen die 63 „Gruppen" von Paaren Abelscher Funktionen in zwei Kategorien:

a) Produkte von zwei eigentlichen Abelschen Funktionen, von der Form $\sqrt{(z-a)(z-b) \times (z-c)(z-d)}$, wo a, b, c, d alle von einander verschieden sind;

b) $(z-a)\sqrt{(z-a)(z-b)}$, wo a, b von einander verschieden sind.

In beiden Fällen bestimmen sich die sechs Zerlegungen jeder Gruppe leicht. Bei a), indem man einmal das Produkt von vier linearen Faktoren dreimal in Paare teilt, und ebenso das zur selben Gruppencharakteristik gehörige Produkt der vier übrigen linearen Faktoren: $\sqrt{(z-e)(z-f)(z-g)(z-h)}$; bei b), indem man die sechs Paare

$\sqrt{(z-a)(z-c)} \times \sqrt{(z-b)(z-c)}$, $\sqrt{(z-a)(z-d)} \times \sqrt{(z-b)(z-d)}$, $\cdots$, $\sqrt{(z-a)(z-h)} \times \sqrt{(z-b)(z-h)}$ bildet. Zu b) muß man hier noch

$$(z-\alpha) \times \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

hinzunehmen, als Produkt einer ungeraden Abelschen Funktion mit einer zur geraden Charakteristik (n) gehörigen, noch zwei willkürliche Konstanten enthaltenden Abelschen Funktion $\beta\,(z-\alpha)$.

Sei nun

$$\vartheta(n)(0, 0, 0) = 0.$$

Wir fragen: welche Relation existiert zwischen den Charakteristiken zweier ungeraden Abelschen Funktionen, damit sie einen Faktor der Art $\sqrt{z-a}$ gemeinschaftlich haben?

Seien die Charakteristiken derselben (k) und (l). Dann muß in der Gruppe $(k)+(l)$ nach b) die gerade Abelsche Funktion, die zu (n) gehört, vorkommen, so daß der andere Faktor die Charakteristik $(n)+(k)+(l)$ haben wird. Also wird $(n)+(k)+(l)$ eine ungerade Charakteristik. Und umgekehrt: wenn $(n)+(k)+(l)$ ungerade ist, so haben (k) und (l) die verlangte Eigenschaft.

Drei ungerade Charakteristiken seien $(k), (l), (m)$. Die Bedingung, daß sie zu je zwei einen gemeinsamen Faktor haben, ist also, daß

$$(k') = (n)+(l)+(m), \quad (l') = (n)+(k)+(m), \quad (m') = (n)+(k)+(l),$$

wobei

$$(k')+(l')+(m') \equiv (n) \pmod{2}$$

wird, alle ungerade seien.

Entweder haben dann $(k), (l), (m)$

1) alle drei denselben Faktor, die Funktionen sind also von der Form

$$\sqrt{\varphi_k} = \sqrt{(z-d)(z-a)}, \quad \sqrt{\varphi_l} = \sqrt{(z-d)(z-b)},$$
$$\sqrt{\varphi_m} = \sqrt{(z-d)(z-c)};$$

oder

2) die gemeinsamen Faktoren sind verschieden, die Funktionen werden von der Form

$$\sqrt{\varphi_k} = \sqrt{(z-b)(z-c)}, \quad \sqrt{\varphi_l} = \sqrt{(z-a)(z-c)},$$
$$\sqrt{\varphi_m} = \sqrt{(z-a)(z-b)},$$

und es wird

$$(n)+(k)+(l) \equiv (m) \equiv (m'), \text{ u. s. w.};$$

d. h. $(k'), (l'), (m')$ werden bezw. mit $(k), (l), (m)$ identisch oder nicht, je nachdem man im Fall 2) oder Fall 1) ist.

Im Fall 1) muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \vartheta_1'(k) & \vartheta_2'(k) & \vartheta_3'(k) \\ \vartheta_1'(l) & \vartheta_2'(l) & \vartheta_3'(l) \\ \vartheta_1'(m) & \vartheta_2'(m) & \vartheta_3'(m) \end{vmatrix} = (k, l, m) = 0$$

sein [da zwischen $\varphi_k, \varphi_l, \varphi_m$ dann eine lineare homogene Beziehung stattfindet]. Daraus folgt:

Die Determinante (k, l, m) *verschwindet, wenn* $\vartheta(k' + l' + m')(0,0,0) = 0$ *ist, wo*

$$(k') + (l') \equiv (k) + (l), \quad (k') + (m') \equiv (k) + (m), \quad (l') + (m') \equiv (l) + (m),$$

und $(k'), (l'), (m')$ *bezw. von* $(k), (l), (m)$ *verschieden sind.*

Um daher alle Fälle zu erhalten, in welchen $(k, l, m) = 0$ ist, hat man von den drei Gruppen

$$(k) + (l), \quad (k) + (m), \quad (l) + (m)$$

je alle fünf weiteren Zerlegungen zu bilden. Von irgend einer dieser Zerlegungen, etwa

$$(k) + (l) \equiv (k') + (l')$$

wird *eine* Charakteristik (bezw. Abelsche Funktion) (k') in einer Zerlegung der Gruppe $(k) + (m)$ vorkommen:

$$(k) + (m) \equiv (k') + (m'),$$

die andere Charakteristik (l') in einer Zerlegung der dritten Gruppe $(l) + (m)$:

$$(l) + (m) \equiv (l') + (m'),$$

so daß man auf diese Weise drei Abelsche Funktionen mit Charakteristiken $(k'), (l'), (m')$ erhält, deren Summe $\equiv (n')$ sei.

So ergeben sich, den fünf Zerlegungen einer dieser drei Gruppen $(k) + (l)$, $(k) + (m)$, $(l) + (m)$ *entsprechend, fünf Thetafunktionen, von der Eigenschaft, daß das Verschwinden irgend einer derselben für die Nullwerte der Argumente eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Determinante* (k, l, m) *verschwindet:*

$$\vartheta(n_1), \ \vartheta(n_2), \ \cdots, \ \vartheta(n_5),$$

wo

$$(n_1) \equiv (k_1) + (l_1) + (m_1), \ \cdots, \ (n_5) \equiv (k_5) + (l_5) + (m_5),$$

und $(k_\nu), (l_\nu), (m_\nu)$ *eines der eben gefundenen fünf Systeme* $(k'), (l'), (m')$ *vorstellt.*

Von diesen Bedingungen ist auch keine eine Folge der übrigen; und bildet man

$$\frac{(k, l, m)}{\prod\limits_{\nu=1}^{5} \vartheta(k_\nu + l_\nu + m_\nu)(0, 0, 0)},$$

so erhält man eine Funktion der $a_{\mu,\mu'}$, die für alle Wertsysteme der Thetamoduln endlich bleibt, also eine numerische Größe sein muß. Zum Beweis hat man für den allgemeinen Fall $p = 3$ zu zeigen, daß dieser Ausdruck eine algebraische Funktion der sechs Klassenmoduln $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ ist und für alle Werte derselben endlich bleibt, also auch von diesen, daher auch von den sechs Thetamoduln, unabhängig wird. — Durch Entwicklung nach den Potenzen der $e^{a_{\mu,\mu'}}$ und Vergleichung der ersten Glieder erhält man dann leicht den Zahlenwert, $= \pm 1$. — Um zu zeigen, daß der Quotient von den sechs Klassenmoduln algebraisch abhängt, muß man zeigen, daß derselbe von der Querschnittzerlegung der Fläche T unabhängig ist. Dies geschieht, indem man statt der Thetaargumente lineare Funktionen dieser Größen nimmt, derart, daß das Periodizitätsmodulsystem dieselbe Form behält; also durch lineare Periodentransformation der Theta, die durch eine Reihe von Vertauschungen der Querschnitte erzielt werden kann (vgl. Meissel, Cr. J. 48).

In der Beziehung

$$(k, l, m) = \pm \prod_{\nu=1}^{5} \vartheta(n_\nu)(0, 0, 0)$$

sind alle Relationen zwischen den $\vartheta'(a)$ und $\vartheta(b)$ enthalten; und die Beziehung wäre auch direkt durch Ausmultiplizieren, mit Hilfe der Theorie der ternären quadratischen Formen, beweisbar, was auch den Faktor ± 1 genauer bestimmte.

Folgerung. Wir benutzen im allgemeinen Fall $p = 3$ wieder die Bezeichnungen (S. 14):

$$(p), (q), (r), \quad (d'), (e'), (f'), (g'),$$
$$(p) + (q) + (r) + (d') + (e') + (f') + (g') = 0;$$
$$(n), (n) + (d') = (d), \;\; (n) + (e') = (e), \;\; (n) + (f') = (f), \;\; (n) + (g') = (g).$$

Man kann leicht die linearen homogenen Relationen zwischen den Quadraten von irgend vier Abelschen Funktionen, von den Charakteristiken

$$(n) + (p), \quad (n) + (q), \quad (n) + (r), \quad (n) + (d'),$$

für welche die Summe je dreier gerade ist, bilden. Denn da

$$\varphi_{n+p} = \vartheta_1'(n+p) \cdot x' + \vartheta_2'(n+p) \cdot y' + \vartheta_3'(n+p) \cdot z'$$

u. s. w. (s. S. 33, wo x', y', z' definiert sind), so braucht man aus den vier Ausdrücken für $\varphi_{n+p}, \varphi_{n+q}, \varphi_{n+r}, \varphi_{n+d'}$ nur x', y', z' zu eliminieren

(S. 33) und die entstehenden Determinantenkoeffizienten der Art (k, l, m) durch Produkte von Thetafunktionen für die Nullwerte auszudrücken. Entwickelt man so, indem man

$$(k) = (n) + (p), \quad (l) = (n) + (q), \quad (m) = (n) + (r)$$

setzt, die Zerlegungen der Gruppen

$$(p) + (q), \quad (p) + (r), \quad (q) + (r),$$

so ergibt sich, außer der Zerlegung $(n + p) + (n + q)$ der ersteren, noch:

$$(p) + (q) \equiv (n + p + r) + (n + q + r)$$
$$\equiv (n + p + d') + (n + q + d') \equiv \cdots \equiv (n + p + g') + (n + q + g'),$$

wonach die fünf Systeme von Charakteristiken (k'), (l), (m') bezw. werden:

1. $(n + q + r)$, $(n + p + r)$, $(n + p + q)$, mit Summe $n_1 = (n)$,

2. $(n + p + d')$, $(n + q + d')$, $(n + r + d')$,
mit Summe $(n_2) = (n + p + q + r + d') \equiv (e + f + g)$,

. . . .

5. $(n + p + g')$, $(n + q + g')$, $(n + r + g')$,
mit Summe $(n_5) = (n + p + q + r + g') \equiv (d + e + f)$.

Daher wird

$$(n + p, n + q, n + r)$$
$$= \pm\, \vartheta(n)\ \vartheta(e + f + g)\ \vartheta(d + f + g)\ \vartheta(d + e + g)\ \vartheta(d + e + f),$$

woraus durch Vertauschungen von $p, q, r,\ d', e', f', g'$ sich die übrigen Determinanten bis aufs Vorzeichen ergeben.

Die so gefundene Relation zwischen $\varphi_{n+p}, \varphi_{n+q}, \varphi_{n+r}, \varphi_{n+d'}$ muß identisch werden, wenn die φ_{n+p} u. s. w. wieder durch ihre Ausdrücke in x', y', z' ersetzt werden; aber die hierzu nur nötigen Relationen zwischen den *Verhältnissen* von Determinanten der Form (k, l, m) und den Quotienten von Thetaprodukten für die Nullwerte sind schon durch das *Additionstheorem* leicht zu beweisen, nach dem von Jacobi und Rosenhain für $p = 1$, bezw. 2 gegebenen Verfahren. Man hat nur das Additionstheorem selbst durch einfache Rechnung an den Thetareihen herzustellen. Daraus folgen dann schon die früher (S. 34, 35) gegebenen vollständigen Ausdrücke der Klassenmoduln durch die Thetaprodukte.

Von diesem Gesichtspunkte aus sind folgende Schriften zu nennen: Preisschrift von Rosenhain, in den Mém. Sav. Étrangers XI, 1851, über die ultraelliptischen Funktionen, auch die erweiterten elliptischen Funktionen umfassend; Göpel, Crelles Journal 35.([31])

Anmerkungen.

(1) (Zu Seite 1.) Die Vorlesung begann mit der Überführung einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten und mit dem bekannten einfachen Beweis des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen. Zu letzterem Beweis machte Riemann die für die Geschichte dieses Gesetzes nicht unwichtige Bemerkung (Minnigerodesches Heft, 30. Okt. 1861): „Der Beweis rührt von Gauß her, aus der Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate" [von Riemann wohl im Wintersemester 1846/47 gehört]; „in der Vorlesung hat ihn Gauß an die Spitze gestellt, niemals aber in der Abhandlung gebracht, weil er überall die Maxime hat, das Gerüst abzubrechen, nur das Gebäude stehen zu lassen." Vgl. übrigens Gauß, Disquisitiones arithmeticae, Nr. 271.

(2) (Zu Seite 1.) Mitgeteilt aus dem Rochschen und Minnigerodeschen Heft; auch noch in dem Hattendorffschen Heft enthalten. Das Prinzip ist, für $n = 2$, schon von Herrn Prym in dessen „Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie" (Leipzig, Teubner 1882), Abh. I, Art. 2 — als (s. dessen Vorrede) von Riemann herrührend und von demselben in einer Vorlesung als ein für die Theorie der Thetafunktionen fundamentales bezeichnet — mitgeteilt.

(3) (Zu Seite 4.) Die Mitteilungen über die Vorlesungen vom 13. Nov. 1861— 24. Jan. 1862 sind den Heften von Prym und Minnigerode entnommen.

(4) (Zu Seite 5.) Cf. G. Rochs Note von 1864 „Über die Doppeltangenten an Kurven vierter Ordnung", Crelles Journal Bd. 66 (1866), S. 97—120. Der erste Paragraph „Riemannsche Sätze; gerade und ungerade ϑ; Begriff der Abelschen Funktionen" dieser Note war im wesentlichen Riemanns Vorlesung von 1861/62 entnommen; dabei ist der unvollständige Beweis Rochs auf S. 99 durch Art. 26 der Th. A. F. zu ersetzen.

(5) (Zu Seite 5.) Rochs Wiedergabe (s. die unter (4) zitierte Note, S. 101—103) ist hier nach den Heften von Roch, Prym und Minnigerode etwas umgestellt. Vgl. Pryms „Neue Theorie der ultraelliptischen Funktionen" von 1863 (Denkschriften der Wiener Akad., Bd. XXIV, 1864; zweite Ausgabe, mit nachträglichen Bemerkungen und neuen Tafeln, Berlin, Mayer u. Müller 1885; sowie Dissertation, Berlin 1863), § 15; ferner dessen „Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche" (Denkschr. der Schweizerischen Naturf. Ges. Bd. XXII, Zürich 1866; Separatabzüge bei Mayer u. Müller, Berlin), Art. 11, 12, S. 27—30.

(6) (Zu Seite 6.) Die Bezeichnung der Thetafunktion und der Größen ε, ε' ist in völliger Übereinstimmung mit Riemanns Werken, 2. Aufl., XXXI, p. 488 (1. Aufl., XXX, p. 457) und mit Rochs unter (4) angeführter Abhandlung angenommen, während in Riemanns Vorlesung die Größen ε, ε' untereinander

vertauscht waren; sie stimmt mit den Bezeichnungen von Prym (Anm. 5) bis auf die Vorzeichen.

(7) (Zu Seite 8.) Vgl. zu dieser, aus dem Minnigerodeschen Heft gegebenen Darstellung die teilweise davon abweichende in Riemanns Werken, „Zur Theorie der Abelschen Funktionen für den Fall $p = 3$“, 2. Aufl., XXXI, S. 487—489 (1. Aufl., XXX, S. 456—458) und in Rochs Aufsatz (s. Anm. (4)), § 1; s. ferner auch Pryms erste Abhandlung (s. Anm. (5)), §§ 16, 17.

(8) (Zu Seite 11.) Diese Einleitung zu der erst vom 7. März 1862 an ausgeführten Behandlung der Abelschen Funktionen im hyperelliptischen Fall ist hier nach dem Minnigerodeschen Hefte wiedergegeben.

(9) (Zu Seite 13.) Seite 13—23 nach den drei Heften.

(10) (Zu Seite 14.) Die „Bemerkung“ fehlt in den beiden Ausgaben von Riemanns Werken. Aber die darin enthaltene Betrachtung ist sehr beachtenswert. Denn sie zeigt noch deutlicher, als schon die S. 10 dieser Nachträge mitgeteilte doppelte Zuordnung der Abelschen Funktionen zu Thetafunktionen, daß Riemann die $2^6 - 1$ Gruppencharakteristiken scharf von den 2^6 Charakteristiken von Thetafunktionen unterschieden hat, indem er *nur* die letzteren in ungerade und gerade einteilte. Die genauere Charakterisierung der 7 Gruppencharakteristiken, mit der Summe 0: d', e' f', g', p, q, r findet sich bei Riemann — wenigstens, was drei derselben p, q, r betrifft (s. XXXI, S. 498 und 500; 1. Aufl., XXX, S. 467, 468) — dahin gegeben: ihre je 6 Zerlegungen in Paare ungerader Charakteristiken haben die Eigenschaft, daß jede Zerlegung der einen Gruppe mit je einer Zerlegung jeder zweiten Gruppe einen Faktor gemein hat; d. h. in der Bezeichnung von Frobenius: diese Gruppencharakteristiken sind paarweise „azygetisch“. Daß Riemann aber hierbei nicht drei der sieben Gruppencharakteristiken bevorzugen wollte, sondern die sieben als gleichartig betrachtete, möchte schon aus der allgemeinen Regel des Textes hervorgehen, nach der aus Verbindung von (n) mit denselben sich die ungeraden, bezw. geraden, Thetacharakteristiken ergeben. Die azygetische Eigenschaft des Gruppencharakteristikensystems hat schon Herr H. Stahl in seiner Note „Beweis eines Satzes von Riemann über ϑ-Charakteristiken“, Crelles J. Bd. 88, als für beliebige p von Riemann angegeben bezeichnet. Dies trifft also mindestens teilweise zu. Vgl. übrigens Anm. (24).

Nach Akt Nr. 19 (Konv. 19_5 d), Bogen 24 der Göttinger Manuskripte) ist die Unterscheidung auf Juli 1861 anzusetzen.

(11) (Zu Seite 15.) Ebenfalls nach den drei Heften. Vgl. hierzu: H. Weber „Über gewisse in der Theorie der Abelschen Funktionen auftretende Ausnahmefälle“, Math. Ann. XIII; L. Kraus „Note über außergewöhnliche Spezialgruppen auf algebraischen Kurven“, ibid. XVI; M. Noether „Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen“, ibid. XVII.

(12) (Zu Seite 16.) Auf einem Blatt der Göttinger Manuskripte („Varia“ Akt 25. Bogen 34, Pisa 1865) bemerkt Riemann, daß die quadratischen Ausdrücke der φ vermöge der $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ quadratischen Relationen im allgemeinen auf die Form

$$f(\varphi_1, \overset{2}{\varphi_2}, \varphi_3) + \varphi_1 f_1(\varphi_4, \overset{1}{\cdots}, \varphi_p) + \varphi_2 f_2(\varphi_4, \overset{1}{\cdots}, \varphi_p) + \varphi_3 f_3(\varphi_4, \overset{1}{\cdots}, \varphi_p)$$

reduziert werden können.

(13) (Zu Seite 16.) Vgl. etwa die in Anm. (11) zitierten Arbeiten.

(14) (Zu Seite 19.) Nach der Betrachtung des Textes ist die von Herrn Weber,

S. 47 der in Anm. (11) zitierten Note, zu modifizieren. So sind im hyperelliptischen Falle $p = 4$ auch dessen Gleichungen (19) und (20) nicht miteinander verträglich.

(15) (Zu Seite 20.) S. den freilich nur für $p = 3$ geführten algebraischen Nachweis, Werke 2. Aufl. XXXI (1. Aufl. XXX). Eine allgemein giltige Bestimmung der Anzahl der Zerlegungen einer Gruppencharakteristik in Summen je zweier Thetacharakteristiken findet sich durch den Schluß von p auf $p+1$ auf einem Bogen von Riemanns in Göttingen befindlichen Manuskripten, Akt. Nr. 19 (s. das darin enthaltene Heft „Abelsche Funktionen", Bogen 11):

„Die Anzahl der geraden Charakteristiken ist $\alpha_p = 2^{p-1}(2^p+1)$, der ungeraden $\beta_p = 2^{p-1}(2^p-1)$. Sei ferner angenommen, daß für p die Anzahl der Zerlegungen irgend einer der $2^{2p}-1$ Gruppencharakteristiken $\begin{pmatrix}\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_p'\end{pmatrix}$ in Paare sei:

von je 2 geraden Charakteristiken: $\gamma_p = 2^{p-2}(2^{p-1}+1) = \alpha_{p-1}$,

„ „ 2 ungeraden „ $\zeta_p = 2^{p-2}(2^{p-1}-1) = \beta_{p-1}$.

Da die Anzahl aller Zerlegungen von $\begin{pmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{pmatrix}$ in Paare $= 2^{2p-1}$, so folgt dann, daß die Anzahl der Zerlegungen in Paare von je 1 geraden und 1 ungeraden Charakteristik sei:

$$\delta_p = 2^{2p-1} - \gamma_p - \zeta_p = 2^{2p-2} = \alpha_{p-1} + \beta_{p-1}.$$

Nun hat man aber bei Zufügung einer weiteren Kolonne zu $\begin{pmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{pmatrix}$ Rekursionsformeln, nämlich für die Paarzerlegung

von $\begin{pmatrix}\varepsilon & 0 \\ \varepsilon' & 0\end{pmatrix}$: $\quad \gamma_{p+1} = 3\gamma_p + \zeta_p, \quad \zeta_{p+1} = 3\zeta_p + \gamma_p, \quad \delta_{p+1} = 4\delta_p$;

von $\begin{pmatrix}\varepsilon & 0 \\ \varepsilon' & 1\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}\varepsilon & 1 \\ \varepsilon' & 0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}\varepsilon & 1 \\ \varepsilon' & 1\end{pmatrix}$:

$$\gamma_{p+1} = 2\gamma_p + \delta_p, \quad \zeta_{p+1} = 2\zeta_p + \delta_p, \quad \delta_{p+1} = 2\gamma_p + 2\zeta_p + 2\delta_p;$$

von $\begin{pmatrix}0 \cdots 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 1\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0 \cdots 0 & 1 \\ 0 \cdots 0 & 0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0 \cdots 0 & 1 \\ 0 \cdots 0 & 1\end{pmatrix}$:

$$\gamma_{p+1} = \alpha_p, \quad \zeta_{p+1} = \beta_p, \quad \delta_{p+1} = 2^{2p} = \alpha_p + \beta_p.$$

Setzt man hier die Werte von $\gamma_p, \zeta_p, \delta_p$, welche für $p = 1$ oder 2 direkt zu bestätigen sind, ein, so erhält man dieselben Formeln, für $p+1$ genommen."

Für einen direkten Beweis cf. Pryms in Anm. (2) angeführte Arbeit, Abh. III.

(16) (Zu Seite 21.) In der Einleitung zu seiner Habilitationsschrift „De theoremate quodam circa functiones Abelianas" (Halle, Okt. 1863), welche den vorliegenden Riemannschen Satz (A) behandelt, erwähnt G. Roch, daß Riemann einen abzählenden Beweis gegeben habe, der wegen seiner Abhängigkeit vom Ausdrucke $F(s, z) = 0$ nicht allgemein giltig sei. In der That aber ist dieser Beweis mit leichter Mühe weiter zu führen, indem man nur beachtet, daß die $2p-2$ Punkte, in denen $\sqrt{\xi\eta}$ verschwindet, durch keine Funktion φ verknüpft sein können, wenn $\sqrt{\xi\eta}$ nicht rational werden soll, also den Beweis auf den des Satzes (B) (s. dieselbe Seite) zurückbringt.

(17) (Zu Seite 22.) Riemann hatte durch Versehen gesagt: „bis auf eine additive Konstante bestimmt"; v' ist aber durch die reellen Teile der Periodizitätsmoduln bis auf eine rein imaginäre Konstante bestimmt. Cf. die in Anm. (18) zitierten Arbeiten.

(18) (Zu Seite 22.) Von diesem zweiten, mittels des Dirichletschen Prinzips geführten Beweise des Satzes (A) hat Roch in seiner Anm. (16) genannten Schrift eine Ausführung versucht. Wie Herr Prym („Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen etc.", Crelles J. 70, 1869 und „Beweis zweier Sätze der Funktionentheorie", ibid. 71, 1869) bemerkt, hat Roch dabei übersehen, daß die Funktionen v' auch an den Begrenzungslinien c von T' Periodizitätsmoduln haben müssen, und daß infolgedessen die reellen Teile der Periodizitätsmoduln von v' an den Querschnitten a, b nicht völlig willkürlich sind, daß vielmehr zwischen ihnen eine lineare homogene Relation bestehen muß. An Stelle der Untersuchung in den §§ II und III von Rochs Schrift hat daher die von Prym, insbesondere Art. 4 von dessen Aufsatz in Crelles J. 71, zu treten, um zu beweisen, daß der reelle Teil von v' durch die reellen Teile von $2p-1$ der $2p$ Periodizitätsmoduln in den Beziehungen α), β) völlig bestimmt ist. Die weitere Folgerung, daß jede der Funktionen v' durch $p-1$ von ihnen und eine imaginäre Konstante linear und homogen ausdrückbar ist, ist dann bei Roch § IV richtig (nur daß, da dessen Determinante D immer verschwindet, der erste der beiden Fälle dieses § IV wegfällt); aber das Verständnis dieses Satzes wird eben nur durch die Bemerkung Pryms geklärt. Man sehe auch den unten folgenden Bericht über die Fragmente zur Theorie der allgemeinen Thetafunktionen.

(19) (Zu Seite 23.) Am Schluß der Anm. (16) zitierten Schrift bemerkt Roch, daß Riemann sich auch für $p>3$ mit den $p-2$ Relationen und den in sie eingehenden Moduln in seinen Vorlesungen beschäftigt habe. Tatsächlich aber hat, nach den hierin zuverlässigen Heften, Riemann nur das vorgetragen, was im Texte, S. 15—23, in großem Drucke mitgeteilt ist. Insbesondere hat er die für $p=4$ existierenden beiden unabhängigen Gleichungen zwischen den Produkten je zweier Abelschen Funktionen nicht diskutiert.

Wohl aber finden sich in den Göttinger Papieren, Akt Nr. 19 (Bogen 9—14, 19—28, 33, 35, 44 desjenigen der fünf Konvolute dieses Aktes, das noch besonders mit „Abelsche Funktionen" überschrieben ist) und Nr. 25 („Varia", Bogen 2, 10, 19, 22—25, 28), eine Reihe zerstreuter Rechnungen über den Fall $p=4$, die aber alle nicht über die ersten Ansätze hinausreichen. Ein Teil derselben geht von drei Relationen der Form aus:

$$\begin{gathered}\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}+\sqrt{x_5x_6}+\sqrt{x_7x_8}=0\\ \alpha_1\sqrt{x_1x_3}+\alpha_1'\sqrt{x_2x_4}+\beta_1\sqrt{x_5x_7}+\beta_1'\sqrt{x_6x_8}=0\\ \alpha_2\sqrt{x_1x_4}+\alpha_2'\sqrt{x_2x_3}+\beta_2\sqrt{x_5x_8}+\beta_2'\sqrt{x_6x_7}=0,\end{gathered}$$

leitet daraus durch Quadrieren und lineare Elimination von $\sqrt{x_1x_2x_3x_4}$ und $\sqrt{x_5x_6x_7x_8}$ die quadratische Gleichung zwischen den φ her und vereinfacht diese durch verschiedenartige Bestimmungen der Konstanten α, β, wie

$$\begin{gathered}\alpha_1=\alpha_1'=\mu+\frac{1}{\mu},\quad \beta_1=\beta_1'=\lambda+\frac{1}{\lambda}\\ \alpha_2=\alpha_2'=\mu-\frac{1}{\mu},\quad \beta_2=\beta_2'=\lambda-\frac{1}{\lambda},\end{gathered}$$

oder

$$\alpha_1 = \mu\alpha,\ \alpha_1' = \frac{\mu}{\alpha},\quad \beta_1 = \beta,\ \beta_1' = \frac{1}{\beta}$$

$$\alpha_2 = \nu\gamma,\ \alpha_2' = \frac{\nu}{\gamma},\quad \beta_2 = \delta,\ \beta_2' = \frac{1}{\delta},$$

oder auch

$$\alpha_1\alpha_1' = \beta_1\beta_1',$$

bei welch letzterer Annahme sich die quadratische Relation schon aus den beiden ersteren Gleichungen unmittelbar ergibt.

Ein anderer Teil der Rechnungen geht von der Gleichungsform für $p = 4$

$$F(\overset{3}{s}, \overset{3}{z}) = 0$$

aus, nimmt verschiedenartige Normalformen für die vier Funktionen φ an, und sucht vier lineare Funktionen derselben $\varphi_1, \cdots, \varphi_4$ so zu bestimmen, daß eine Relation

$$f^2(\overset{2}{s}, \overset{2}{z}) - \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 \equiv F(\overset{3}{s}, \overset{3}{z})\,\psi(\overset{1}{s}, \overset{1}{z})$$

besteht, von hier aus aber den Übergang zu jenen Relationen zwischen Wurzelfunktionen zu machen. Als Grundgleichung findet sich auch:

$$(s-z)s^2z^2 + sz[\alpha(s^2-z^2) + \beta z(s-z) + cz^2] + [\gamma(s^3-z^3) + \delta z(s^2-z^2)$$
$$+ \varepsilon z^2(s-z) - 2cz^3] + [\zeta(s^2-z^2) + \eta z(s-z) + cz^2] + \vartheta(s-z) = 0,$$

mit 9 Moduln explicite.

Dazu kommen noch einige Rechnungen, um die allenthalben endlichen Integrale für $p = 4$ aus der Darstellung durch zwei homogene Gleichungen 2. und 3. Grades zwischen vier Variabeln direkt abzuleiten; sowie für $p = 4$ Zerlegungen von Gruppencharakteristiken in Summen von je zwei Charakteristiken.

(20) (Zu Seite 23.) Seite 23—45 nach den Heften von Prym und Minnigerode.

(21) (Zu Seite 27.) Die Einführung von $p + 1$ *symmetrisch* eingehenden Grenzen in die Argumente der beiden Thetafunktionen findet sich in F. Pryms Arbeiten (a. a. O.), dann bei H. Stahl: „Über die Behandlung des Jacobischen Umkehrproblems der Abelschen Integrale" (Crelles J. Bd. 89 und Dissertation Berlin 1882); die von $2p - 2$ symmetrisch eingehenden Grenzen für $p = 3$ bei H. Weber: „Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht 3" (Berlin 1876), für beliebiges p bei M. Noether: „Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abelschen Funktionen" (Math. Ann. Bd. 28), und zwar bei beiden für beliebige Charakteristiken (a), (b), während Riemann in seiner Vorlesung die Formel nur für ungerade Charakteristiken aufgestellt hat. Die Verallgemeinerung auf beliebige Vielfache von $2p - 2$ findet sich bei F. Klein: „Zur Theorie der Abelschen Funktionen" (Math. Ann. Bd. 36). Die Jacobische Konstantenbestimmungsmethode ist auch an allen diesen Stellen angewendet.

(22) (Zu Seite 30.) Riemann hat in seiner Vorlesung die Rechnung nur bis Formel (10) incl. vorgetragen und dieselbe dann mit der Bemerkung abgebrochen: „Wir können die Rechnung [für $p = 3$] nicht mehr ausführen, weil wir sonst keine Zeit für die hyperelliptischen Funktionen behalten. Man könnte auf diesem Wege die Relationen zwischen allen $\vartheta(0, 0, 0)$ erhalten, wenn man nur erst das ganze System der Quotienten der $\vartheta(0, 0, 0)$ durch die sechs algebraischen Moduln berechnete. Sie ergeben sich übrigens auch auf dem nachher folgenden umgekehrten Wege."

Die weitere Rechnung wurde nach Andeutungen Riemanns in den Göttinger Papieren (in dem obengenannten Akt Nr. 19, Bogen 14, 15, und „Varia" Nr. 25, Bogen 19) ergänzt; sie stimmt im wesentlichen mit der entsprechenden von Weber in dessen Buch, § 24, geführten überein. In Akt 25, Bogen 19, geht Riemann statt von (8) des Textes, von Gleichung (11) der Werke, Nr. XXXI (XXX der 1. Aufl.) aus, ersetzt also x, y, z, t, p, q bezw. durch $x, \xi, y, \eta, z, \zeta$, benutzt die Relationen zwischen diesen in der besonderen Form (17) von XXXI (XXX), und drückt daher A und den Quotienten $\frac{\vartheta(a+c+d)(0,0,0)}{\vartheta(b+c+d)(0,0,0)}$ durch die Determinanten (α, β, γ) etc. aus den dortigen Moduln aus.

(23) (Zu Seite 31.) Die Ausdrücke für eine durch $p-1$ Punkte bestimmte φ finden sich bei Riemann in dessen Aufsatz „Über das Verschwinden der Thetafunktionen" (Werke XI), Art. 4 enthalten.

(24) (Zu Seite 34.) Hier bieten sich Riemann zwei 7-Systeme von ungeraden Charakteristiken dar:

$$(n+p),\ (n+q),\ (n+r),\ (d),\ (e),\ (f),\ (g), \text{ mit Summe } (n),$$
$$(n+p+q),\ (n+p+r),\ (n+q+r),\ (d),\ (e),\ (f),\ (g),$$
$$\text{mit Summe } (n+p+q+r),$$

von der Art, daß die Summe je dreier Charakteristiken eines Systems gerade ist, also sogenannte „vollständige" 7-Systeme (vgl. Webers in Anm. (21) zitierte Schrift).

(25) (Zu Seite 34.) Ein indirekter Beweis ist von Riemann später mittels der Theorie der hyperelliptischen Funktionen angedeutet worden. Siehe S. 53—58. Bezüglich der daraus resultierenden Formel für α vgl. Anm. (31).

(26) (Zu Seite 44.) S. die in Anm. (23) zitierte Abhandlung Riemanns von 1865. Vgl. ferner dazu: Pryms Anm. (5) zitierte Abhandlung von 1866, Art. 12, sowie Webers Anm. (11) zitierte Note aus Math. Ann. XIII (1877).

(27) (Zu Seite 45.) Hier bricht das Prymsche Heft ab. Der Schluß ist nach dem Hefte von Minnigerode mitgeteilt.

(28) (Zu Seite 51.) Vgl. die vollständige Ausführung bei Prym in dessen Anm. (5) zitierten Züricher Abhandlung, Art. 3—6, wo nur für den Punkt a_0 der Punkt $z=\infty$ genommen ist.

(29) (Zu Seite 53.) Vgl. Prym am eben zitierten Orte, Art. 13, und die Vervollständigung dieses Art., wie der Art. 3—6, in der unter Anm. (2) angeführten Arbeit, Abh. IV.

(30) (Zu Seite 54.) In der Tat: da hier

$$\vartheta(n)(u_1 - u_1', \cdots)$$

identisch verschwindet für jedes (s, z) und jedes (s_1, z_1), so wird

$$\vartheta_1'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_1(s,z) + \vartheta_2'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_2(s,z) + \vartheta_3'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_3(s,z) = 0,$$

$$\vartheta_1'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_1(s_1,z_1) + \vartheta_2'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_2(s_1,z_1) + \vartheta_3'(n)(u_1-u_1', \cdots)\varphi_3(s_1,z_1) = 0,$$

woraus sich der Thetaquotient als ein φ-Quotient berechnet, dessen Zähler und Nenner für zwei feste Punkte (s_1, z_1), (s_1', z_1) zu Null werden.

(31) (Zu Seite 58.) Ein Ausdruck der im Fall p der Funktionaldeterminante (k, l, m) analogen Determinante als Produkt von $p+2$ geraden Thetafunktionen

für die Nullwerte der Argumente existiert für den hyperelliptischen Fall überhaupt, im allgemeinen Fall nur für $p = 3$. Außer Jacobi ($p = 1$) und Rosenhain ($p = 2$), bei welch letzterem die Ableitung der Formel nur angedeutet ist, ist bezüglich der hyperelliptischen Thetareihen Thomae (Crelles J. 71, pag. 218, Formel (14)) anzuführen, welcher die Formel nicht durch direkte Zerlegung, sondern durch Beziehung zu den algebraischen Ausdrücken erhält. Für den hyperelliptischen Fall, und für den allgemeinen Fall $p = 3$, hat Frobenius die Relation mittels der partiellen Differentialgleichung für die Thetafunktion direkt abgeleitet (Crelles J. 98). Das Vorzeichen $\pm$ im Ausdruck von (k, l, m) hängt von der Anordnung der Determinante ab.

Die Ableitung der Determinantenverhältnisse aus dem Additionstheorem für $p = 3$, und die Berechnung der Klassenmoduln, findet sich in den Schriften von Weber (s. Anm. (21)) und Schottky („Abriß einer Theorie der Abelschen Funktionen von 3 Variabeln", 1880) durchgeführt. Hiernach ergibt sich für ein vollständiges 7-System ungerader Charakteristiken (s. Anm. (24))

$$(a),\ (b),\ (c),\ (d),\ (e),\ (f),\ (g):$$

$$(b, c, d) : -(a, c, d)$$
$$= (-1)^{\sum \varepsilon_\mu^{efg} \varepsilon'^{a}_\mu} \vartheta_{aef} \vartheta_{aeg} \vartheta_{afg} : (-1)^{\sum \varepsilon_\mu^{efg} \varepsilon'^{b}_\mu} \vartheta_{bef} \vartheta_{beg} \vartheta_{bfg},$$

wo zur Abkürzung

$$abc \cdots \quad \text{statt} \quad (a) + (b) + (c) + \cdots$$
$$\vartheta_{abc \cdots} \quad \text{statt} \quad \vartheta(a + b + c + \cdots)(0, 0, 0)$$

gesetzt ist.

Wendet man dies auf die beiden Riemannschen Systeme (Anm. (24)) an, in welchen (a), (b), (c) gleich

$(n + p)$, $(n + q)$, $(n + r)$, bezw. gleich $(n + q + r)$, $(n + r + p)$, $(n + p + q)$,

sind, so folgt für die Größe $\varkappa$ von Seite 34 und den Klassenmodul α von Seite 34—35:

$$\varkappa = \delta \frac{\vartheta_{dfg}}{\vartheta_{efg}}, \quad \text{wo} \quad \delta = e^{\frac{1}{2}\pi i \sum \varepsilon_\mu^{pqr} \varepsilon'^{de}_\mu},$$

$$\alpha = \frac{1}{\delta} \cdot (-1)^{\sum \varepsilon_\mu^{de} \varepsilon'^{nqr}_\mu} \cdot \frac{\vartheta_{npdf} \vartheta_{npdg}}{\vartheta_{npef} \vartheta_{npeg}}.$$

(Vgl. Webers Schrift, pag. 107 (10), (11).)

Daß der Quotient

$$(n + p,\ n + q,\ n + r) : \vartheta_n \vartheta_{efg} \vartheta_{dfg} \vartheta_{deg} \vartheta_{def}$$

von der Querschnittzerlegung der Fläche T unabhängig ist, ergibt sich auch, indem man das erste der Riemannschen vollständigen 7-Systeme durch die Gesamtheit der vollständigen 7-Systeme ersetzt und dabei die Formel für die Determinantenverhältnisse in dieser Anmerkung benutzt.

Die Blätter des Riemannschen Nachlasses in Akt 19 (Heft 19_5) und 25 („Varia") enthalten überall zerstreut eine Menge hierher gehöriger Rechnungen und Formeln, teils auf hyperelliptische Thetafunktionen für die Nullwerte bei allgemeinem p, teils auf den allgemeinen Fall $p = 3$ bezüglich. Dieselben sind, wie es scheint, zum Teil aus den algebraischen Ausdrücken der Thetaquotienten, zum Teil aus der allgemeinen „Riemannschen Thetaformel" (vgl. Anm. (2)), die sich Nr. 19, Konv. 19_5, d), Bogen 3′ und Nr. 25, Bogen 17 findet, abgeleitet. So gibt Nr. 19_5, b), Bogen 32 (nach Rechnungen, die zu den hier S. 56 bis Schluß mitgeteilten Entwicklungen für $p = 3$ gehören) die Formeln des Additionstheorems zwischen den geraden $\vartheta(a)$ (0, 0, 0)-Produkten und den linear eingehenden Differentialquotienten der ungeraden ϑ (cf. Webers Schrift, p. 42), durch deren Auflösung der Determinantenquotient der letzteren erhalten wird; die entsprechenden Formeln für den hyperelliptischen Fall und $p \geqq 3$: Nr. 19_5, b), Bogen 50; Nr. 25, Blätter 8, 15 (aus Pisa vom 31. Aug. 1864), 21. Für die p-reihigen Determinanten aus Differentialquotienten $\vartheta_i'(\alpha)$ selbst enthält Nr. 25, Bogen 6 Darstellungen als *Summen von Produkten* von je $p+2$ geraden $\vartheta(0)$, für $p = 3, 4, \cdots, 7$; so als einfaches Produkt für $p = 3$, als Summe von 2 Produkten für $p = 4$; die Spezialisierung auf ein einfaches Produkt im hyperelliptischen Fall: Bogen 14, Ansätze auf Bogen 30 (auch Bogen 50, ibid.). Endlich kommen für den allgemeinen Fall $p = 3$ auch dreigliedrige Additionsformeln zwischen Produkten von je 4 geraden $\vartheta(0)$ vor (cf. Webers Schrift, pag. 44): Akt Nr. 19, Konv. 19_5, b), Bogen 34, aus der italienischen Zeit 1862—63 stammend; und 6-gliedrige Relationen zwischen geraden $\vartheta^4(0)$ (cf. Webers Schrift, p. 40) in Akt Nr. 25, Bogen 16; auf Bogen 17 auch 10-gliedrige zwischen $\vartheta^4(0)$ für $p = 4$ (cf. Noether, Math. Ann. 16). Die dabei benutzte Charakteristikentheorie ist in früherer Zeit, für $p = 3$, die Hessesche Darstellung durch 8 Indices von der Summe 0, wobei eine gerade Charakteristik ausgezeichnet ist; später die an den hyperelliptischen Funktionen von Riemann selbst entwickelte (cf. Vorlesung). N.

II.

Die Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Verzweigungspunkt.

(Aus einer Vorlesung Wintersemester 1856/57.)

Ist a ein Verzweigungspunkt der Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und geht, während x sich im positiven Sinn um a bewegt, z_1 über in z_3 und z_2 in z_4, was kurz durch $z_1 \to z_3$ und $z_2 \to z_4$ angedeutet werden soll, so ist

$$(1) \qquad \begin{aligned} z_3 &= t z_1 + u z_2 \\ z_4 &= r z_1 + s z_2. \end{aligned}$$

Ist ε irgend eine Konstante, so ist

$$z_1 + \varepsilon z_2 \to z_3 + \varepsilon z_4.$$

Nun ist

$$(2) \qquad z_3 + \varepsilon z_4 = (t + \varepsilon r) z_1 + (u + \varepsilon s) z_2.$$

Nimmt man ein solches ε, daß

$$(3) \qquad \varepsilon (t + \varepsilon r) = u + \varepsilon s$$

wird, so ist

$$(4) \qquad z_3 + \varepsilon z_4 = (t + \varepsilon r)(z_1 + \varepsilon z_2).$$

Es gibt also ein bestimmtes ε so, daß $z_1 + \varepsilon z_2$ in $(z_1 + \varepsilon z_2) \cdot \text{const.}$ übergeht.

Eine solche Funktion ist auch $(x - a)^\alpha$, welche nach einem positiven Umlauf den Faktor $e^{2\pi i \alpha}$ erlangt. Bestimmt man α so, daß $t + \varepsilon r = e^{2\pi i \alpha}$ wird, so nimmt die Funktion $(z_1 + \varepsilon z_2)(x - a)^{-\alpha}$ wieder denselben Wert an, wenn x einen positiven Umlauf um a macht. Daher ist

$$(5) \qquad (z_1 + \varepsilon z_2) = (x - a)^\alpha \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (x - a)^n.$$

Ist ε' die andere Wurzel der Gleichung (3), so ist ebenso

$$(6) \qquad z_1 + \varepsilon' z_2 = (x-a)^{\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a'_n (x-a)^n,$$

wo $e^{2\pi i \alpha'} = t + \varepsilon' r$.

Sind ε und ε' nicht einander gleich, so sind die beiden Lösungen $z_1 + \varepsilon z_2 = z^{(\alpha)}$ und $z_1 + \varepsilon' z_2 = z^{(\alpha')}$ voneinander verschieden, also ist jede andere Lösung durch $z^{(\alpha)}$, $z^{(\alpha')}$ linear darstellbar.

Sind aber die Wurzeln der Gleichung (3) einander gleich, so ist

$$-u = r\varepsilon^2, \quad -2r\varepsilon = t - s = \frac{2u}{\varepsilon},$$

also

$$z_3 = tz_1 + uz_2 = (t + \varepsilon r) z_1 + \frac{u}{\varepsilon} (z_1 + \varepsilon z_2)$$

und

$$z_3 (x-a)^{-\alpha} e^{-2\pi i \alpha} = z_1 (x-a)^{-\alpha} + (z_1 + \varepsilon z_2) k (x-a)^{-\alpha},$$

wenn $e^{2\pi i \alpha} = t + \varepsilon r$ und $k = \frac{u}{\varepsilon (t + \varepsilon r)}$ gesetzt wird.

Da nun

$$z_1 (x-a)^{-\alpha} \rightarrow z_3 (x-a)^{-\alpha} e^{-2\alpha\pi i},$$

so muß

$$z_1 (x-a)^{-\alpha} \rightarrow z_1 (x-a)^{-\alpha} + (z_1 + \varepsilon z_2) k (x-a)^{-\alpha}.$$

Da ferner

$$\frac{k}{2\pi i} (x-a)^{-\alpha} (z_1 + \varepsilon z_2)\, l(x-a) \rightarrow \frac{k}{2\pi i} (x-a)^{-\alpha} (z_1 + \varepsilon z_2)\, l(x-a) + k (x-a)^{-\alpha} (z_1 + \varepsilon z_2),$$

so muß die Funktion

$$z_1 (x-a)^{-\alpha} - \frac{k}{2\pi i} (x-a)^{-\alpha} (z_1 + \varepsilon z_2)\, l(x-a)$$

bei einem Umlauf von x um a ungeändert bleiben, also sich in der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n (x-a)^n$ darstellen lassen, daher ist

$$z_1 = (x-a)^{\alpha}\, l(x-a) \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (x-a)^n + (x-a)^{\alpha} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n (x-a)^n,$$

wenn

$$z_1 + \varepsilon z_2 = (x-a)^{\alpha} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$

ist.

Anmerkung: Die vorstehenden Ausführungen sind wörtliche Wiedergabe aus einer von E. Schering angefertigten Nachschrift der Riemannschen Vorlesung über Differentialgleichungen im Wintersemester 1856/57 und zwar von Seiten 222, 223 des Heftes. Sie zeigen ebenso wie die in III, A mitgeteilten Formeln, daß Riemann das Auftreten logarithmischer Integrale in der Tat in seinen Publikationen nur aus äußeren Gründen ausgeschlossen hat. Vgl. Werke pag. 69, oben (64 der 1. Aufl.) und pag. 381 (359) ff. W.

III.

Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe.

(Wintersemester 1858/59.)

A. Über die Definition der *P*-Funktion durch bestimmte Integrale.

Wir haben das Resultat erhalten, daß Integrale von der Form

$$\int s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds$$

zwischen den Grenzen 0, 1, ∞, x^{-1} genommen auf sehr viele Arten durch hypergeometrische Reihen darstellbar sind, und daher auch einer linearen Differentialgleichung genügen.

Wir wollen nun umgekehrt untersuchen, wie sich ein solches Integral als Funktion von x verhält, und werden direkt zeigen, daß es eine *P*-Funktion ist.

Betrachten wir nämlich das Integral

$$\int_0^1 s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds,$$

so wird die Funktion unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn s einen der Werte 0, ∞, 1, x^{-1} annimmt, sonst ändert sich die Funktion stetig.

Das Integral ist längs der reellen Achse von 0 bis 1 erstreckt, wir können es aber auch auf jedem andern Weg nehmen, wenn dieser nur keinen der Unstetigkeitspunkte mit der Strecke der reellen Zahlen von Null bis 1 einschließt.

Lassen wir daher x^{-1} einen positiven Umlauf um den Punkt 1 machen, so ändert sich das Integral immer stetig, solange x^{-1} nicht durch den Integrationsweg hindurchgeht. Lassen wir also den Integrationsweg immer in geeigneter Weise ausweichen, wenn x^{-1} den Umlauf um 1 macht, so wird auch am Ende des Umlaufes das Integral übergegangen sein in ein anderes, welches von Null ausgehend um x^{-1} herumläuft und dann erst nach 1 zurückkehrt.

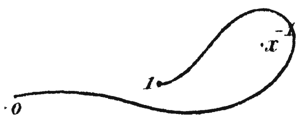

Fig. 1.

Der Faktor $(1 - xs)^c$ wird während der Integration von 1 nach x^{-1} einen andern Wert haben, als bei der Integration von x^{-1} nach 1, weil bei Umlaufung von x^{-1} das Argument um $2\pi c$ sich ändert. Ziehen wir daher die beiden Integrale zusammen, so erhalten wir

$$\int_0^1 + (1 - e^{2\pi i c}) \int_1^{x^{-1}}.$$

Wir sehen also, daß das Integral von Null bis 1 bei einem Umlauf von x^{-1} um den Punkt 1 übergeht in eine lineare Verbindung zweier der 6 Integrale, welche zwischen den Punkten $0, 1, \infty, x^{-1}$ möglich sind. Dasselbe Resultat würden wir bei jedem der 6 andern Integrale und den Verzweigungspunkten $0, \infty, 1$ finden.

Wir werden nun zeigen, daß man die folgenden Gleichungen ansetzen kann:

$$P_\alpha = \text{const.} \int_0^1 x^\alpha (1 - x)^\gamma s^{-\alpha' - \beta' - \gamma'} (1 - s)^{-\alpha' - \beta - \gamma} (1 - xs)^{-\alpha - \beta' - \gamma} ds$$

$$P_{\alpha'} = \text{const.} \int_{x^{-1}}^\infty x^\alpha (1 - x)^\gamma s^{-\alpha' - \beta' - \gamma'} (1 - s)^{-\alpha' - \beta - \gamma} (1 - xs)^{-\alpha - \beta' - \gamma} ds$$

$$P_\beta = \text{const.} \int_0^{x^{-1}} x^\alpha (1 - x)^\gamma s^{-\alpha' - \beta' - \gamma'} (1 - s)^{-\alpha' - \beta - \gamma} (1 - xs)^{-\alpha - \beta' - \gamma} ds$$

$$P_{\beta'} = \text{const.} \int_1^\infty x^\alpha (1 - x)^\gamma s^{-\alpha' - \beta' - \gamma'} (1 - s)^{-\alpha' - \beta - \gamma} (1 - xs)^{-\alpha - \beta' - \gamma} ds$$

$$P_\gamma = \text{const.} \int_{-\infty}^0 x^\alpha (1 - x)^\gamma s^{-\alpha' - \beta' - \gamma'} (1 - s)^{-\alpha' - \beta - \gamma} (1 - xs)^{-\alpha - \beta' - \gamma} ds$$

$$P_{\gamma'} = \text{const.} \int_1^{x^{-1}} x^\alpha (1 - x)^\gamma s^{-\alpha' - \beta' - \gamma'} (1 - s)^{-\alpha' - \beta - \gamma} (1 - xs)^{-\alpha - \beta' - \gamma} ds.$$

Wir untersuchen nämlich, wie sich diese Integrale verhalten für $x = 0, \infty, 1$.

Das erste Integral verhält sich in der Nähe von $x = 0$ wie $x^\alpha \cdot \text{const.}$, und um das zweite zu untersuchen braucht man bloß die Substitution $s = (s'x)^{-1}$ zu machen. Die Grenzen gehen dann in 0 und 1 über, und für $x = 0$ verhält sich das Integral wie $x^{\alpha'} \cdot \text{const.}$

Das Integral für $P_{\beta'}$ verhält sich im Unendlichen in der Tat wie $x^{-\beta'}$. Das Integral für P_β zeigt aber nach der Substitution $s' = xs$, daß es sich im Unendlichen verhält wie const. $x^{\alpha + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' - 1} = x^{-\beta}$.

Das Integral für P_γ zeigt direkt, daß es sich für $x = 1$ verhält wie const. $(1-x)^\gamma$ und das Integral für $P_{\gamma'}$ zeigt nach der Substitution $s = 1 - \frac{x-1}{x} s'$, daß es sich für $x = 1$ verhält wie const. $(1-x)^{\gamma'}$.

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, daß sich alle die obigen Integrale immer durch zwei unter ihnen linear ausdrücken lassen.

Wir haben die Funktionen P_α, $P_{\alpha'}$, P_β, $P_{\beta'}$, P_γ, $P_{\gamma'}$ erst bis auf konstante Faktoren bestimmt. Wir bestimmen nun diese konstanten Faktoren im ersten und letzten Paar so, daß wir die Basen der Potenzen für positives reelles x zwischen Null und Eins zwischen den Integrationsgrenzen immer reell und positiv haben.

Integrieren wir dann die Funktion

$$(-s)^a (1-s)^b (1-xs)^c ds$$

um das gesamte Gebiet der Größen mit positivem imaginärem Bestandteil, so ist das Integral Null und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{x^{-1}} + \int_{x^{-1}}^{\infty} = 0.$$

Drücken wir nun die einzelnen Integrale durch die nach der früheren Bedingung bestimmten P_α, $P_{\alpha'}$, $\cdots$ etc. aus, so bekommen wir:

$$P_\gamma + e^{-a\pi i} P_\alpha + e^{-(a+b)\pi i} P_{\gamma'} + e^{-(a+b+c)\pi i} P_{\alpha'} = 0,$$

und wenn wir ebenso um das Gebiet der s-Werte mit negativem imaginärem Teil integrieren:

$$P_\gamma + e^{+a\pi i} P_\alpha + e^{(a+b)\pi i} P_{\gamma'} + e^{(a+b+c)\pi i} P_{\alpha'} = 0,$$

wo

$$a = -\alpha' - \beta' - \gamma', \; b = -\alpha' - \beta - \gamma, \; c = -\alpha - \beta' - \gamma$$

gesetzt ist. Multipliziert man die erste Gleichung mit $e^{(\sigma - \alpha')\pi i}$, die zweite mit $e^{-(\sigma-\alpha')\pi i}$ und subtrahiert, so kommt

$$P_\gamma \sin(\sigma - \alpha')\pi + P_\alpha \sin(\sigma + \beta' + \gamma')\pi - P_{\gamma'} \sin(\sigma - \alpha)\pi$$
$$- P_{\alpha'} \sin(\sigma + \beta' + \gamma)\pi = 0.$$

Um aus dieser Formel eine Funktion zu eliminieren, braucht man bloß σ so zu wählen, daß der Faktor dieser Funktion verschwindet, so z. B. $\sigma = \alpha'$ für P_γ oder $\sigma = \alpha$ für $P_{\gamma'}$.

Aus diesen Formeln folgt dann, daß sich in der Tat jedes der 6 Integrale durch irgend zwei andere ausdrücken läßt. Denn es lassen sich die Integrale von $-\infty$ bis Null und von 1 bis x^{-1} ausdrücken durch die Integrale von Null bis 1 und von x^{-1} bis ∞, und für die beiden übrigen Integrale hat man

$$\int_0^{x^{-1}} = \int_0^1 + \int_1^{x^{-1}}$$

$$\int_1^{\infty} = \int_1^{x^{-1}} + \int_{x^{-1}}^{\infty}.$$

Es haben also in der Tat diese Integrale alle Eigenschaften, welche die P-Funktion definieren und zwar liefern sie gerade die Funktionen $P_\alpha, P_{\alpha'}, P_\beta, P_{\beta'}, P_\gamma, P_{\gamma'}$.

Denn sie gehen bei Umläufen um die Verzweigungspunkte in lineare Verbindungen derselben Integrale über, lassen sich durch zwei unter ihnen ausdrücken und zeigen das für die Verzweigungspunkte vorgeschriebene Verhalten.

Führt man zur Abkürzung die Bezeichnung ein:

$$P(a, b, c, x) = \int_0^1 s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds,$$

so gibt das obige Verfahren, angewendet auf die Funktion

$$(-s)^a (1-s)^b (1-xs)^c ds,$$

die Relation

$$\sin \pi\sigma \int_{-\infty}^{0} (-s)^a (1-s)^b (1-xs)^c ds + \sin\pi(\sigma + a) \int_0^1 s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds$$
$$+ \sin\pi(\sigma + a + b) \int_1^{x^{-1}} s^a (s-1)^b (1-xs)^c ds$$
$$+ \sin\pi(\sigma + a + b + c) \int_{x^{-1}}^{\infty} s^a (s-1)^b (xs-1)^c ds = 0$$

oder wenn man sämtliche Integrale auf die Grenzen 0, 1 transformiert, was im ersten durch die Substitution $s' = \frac{s}{s-1}$, im dritten durch $s' = \frac{x}{1-x}(s-1)$ und im vierten durch $s' = (xs)^{-1}$ geschieht und $a + b + c + d + 2 = 0$ setzt:

$$\sin\pi\sigma\, P(a, d, c, 1-x) + \sin\pi(\sigma + a)\, P(a, b, c, x)$$
$$+ \sin\pi(\sigma + a + b)\, P\left(b, c, a, \frac{x-1}{x}\right) x^{-b-1}(1-x)^{b+c+1}$$
$$+ \sin\pi(\sigma + a + b + c)\, P(d, c, b, x)\, x^{c+d+1} = 0.$$

Setzt man $\sigma = -a - b$, so erhält man

$$\sin\pi(c + d)\, P(a, d, c, 1-x) = \sin\pi b\, P(a, b, c, x) - \sin\pi c\, P(d, c, b, x)\, x^{c+d+1},$$

und diese Relation gestattet das Integral $P(a, d, c, 1-x)$ durch Potenzreihen nach x darzustellen, was direkt nicht möglich ist. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß nicht etwa $c+d$ gleich einer ganzen Zahl wird.

Doch kann man auch in diesem Fall die Darstellung von $P(a, d, c, 1-x)$ finden durch Differentiation der obigen Gleichung. Denken wir uns b und c konstant und a variabel, so ist d auch von a abhängig und wir erhalten

$$\frac{\partial d}{\partial a} = -1.$$

Nach der Differentiation nach a ist dann $a+b+1 = -(c+d+1) = m$ zu setzen. Wir erhalten so:

$$(-1)^m \pi P(a,d,c,1-x) = \frac{\partial P(d, c, b, x)}{\partial a} \sin \pi b + \frac{\partial P(d, c, b, x)}{\partial d} x^{-m} \sin \pi c$$
$$+ lx \cdot x^{-m} P(d, c, b, x) \sin \pi c$$

und bekommen

$$\frac{\partial P(a, b, c, x)}{\partial a} = \int\limits_0^1 ls \cdot s^a (1-s)^b (1-xs)^c ds$$

$$\frac{\partial P(d, c, b, x)}{\partial d} = \int\limits_0^1 ls \cdot s^d (1-s)^c (1-xs)^b ds.$$

Diese Integrale lassen sich nach Potenzen von x entwickeln, bequemer geht man aber von den Reihenentwicklungen selbst aus.

Es ist

$$\sin \pi b P(a, b, c, x)$$
$$= -\frac{\pi}{\Pi(-1-b)\Pi(-1-c)} \sum_0^\infty \frac{\Pi(-1-c+n)\Pi(a+n)}{\Pi n \Pi(a+b+n+1)} x^n$$

und daher

$$\sin \pi (c+d) P(a, d, c, 1-x)$$
$$= -\frac{\pi}{\Pi(-1-b)\Pi(-1-c)} \left(\sum_0^\infty \frac{\Pi(-1-c+n)\Pi(a+n)}{\Pi n \Pi(a+b+n+1)} x^n \right.$$
$$\left. - \sum_0^\infty \frac{\Pi(n-1-b)\Pi(n+d)}{\Pi(n)\Pi(n+c+d+1)} x^{n+c+d+1} \right).$$

Wird hier $a+b+1 = -(c+d+1) = m$ gesetzt, so würden bei positivem m in der zweiten Reihe Π-Funktionen mit negativen ganzen Zahlen als Argument auftreten, solange $n < m$. Diese müssen vorher umgeformt werden, indem man Zähler und Nenner mit $\Pi(-2-n-c-d)$ multipliziert.

Man erhält dann für diese Glieder:

$$\frac{\sin\pi(c+d)}{\pi}\sum_{0}^{m-1}(-1)^n\frac{\Pi(n-1-b)\,\Pi(n+d)\,\Pi(-2-n-c-d)}{\Pi(n)}\,x^{n+c+d+1}.$$

Differenziert man nun nach a, so erhält man

$$(-1)^{m-1}P(a,d,c,1-x)$$

$$=\frac{(-1)^m}{\Pi(-1-b)\,\Pi(-1-c)}\sum_{0}^{m-1}(-1)^n\frac{\Pi(n-1-b)\,\Pi(n+d)\,\Pi(m-n-1)}{\Pi(n)}\,x^{n-m}$$

$$+\frac{1}{\Pi(-1-b)\,\Pi(-1-c)}\sum_{0}^{\infty}\frac{\Pi(-1-c+n)\,\Pi(n+a)}{\Pi(n)\,\Pi(n+m)}\big(\Psi(n+a)-\Psi(n+m)\big)\,x^n$$

$$+\frac{1}{\Pi(-1-b)\,\Pi(-1-c)}\sum_{m}^{\infty}\frac{\Pi(n-1-b)\,\Pi(n+d)}{\Pi(n)\,\Pi(n-m)}\big(\Psi(n+d)-\Psi(n-m)+lx\big)\,x^{n-m}$$

oder nach Reduktion

$$(-1)^{m-1}P(a,d,c,1-x)\,\Pi(a-m)\,\Pi(d+m)$$

$$=\sum_{n=-1}^{n=-m}(-1)^n\frac{\Pi(n+a)\,\Pi(n+m+d)\,\Pi(-n-1)}{\Pi(m+n)}\,x^n$$

$$+\sum_{0}^{\infty}\frac{\Pi(n+a)\,\Pi(n+m+d)}{\Pi n\,\Pi(n+m)}\,x^n\big(\Psi(n+a)+\Psi(n+m+d)-\Psi(n)-\Psi(n+m)+lx\big).$$

Anmerkungen. Diese Abhandlung und die folgende ist der v. Bezoldschen Nachschrift einer Vorlesung über die hypergeometrische Reihe entnommen, über welche (s. auch Vorrede) weiter unten ausführlich berichtet wird. Für die hier behandelte Frage siehe Werke pag. 81 (76 der ersten Aufl.) unten.

Die Behandlung des Grenzfalles $c+d+1=-m$ ist in dieser Nachschrift von dem vorhergehenden durch eine Auseinandersetzung über die Normierung der konstanten Faktoren getrennt, welche aber ebenso wie die Entwicklungen über den Grenzfall in den Rechnungen und zum Teil auch im Text lückenhaft ist. Der letztere wurde daher nach einer Vorlesungspräparation mit dem Datum 12./II. 1857 (Heft 19_2 von Akt 19) gegeben, jedoch die Bezeichnung mit der vorhergehenden in Übereinstimmung gebracht. $\Psi(n)$ ist das Gaußsche Zeichen, dessen Werke III, S. 153.

Zur Behandlung des Ausnahmefalles sei bemerkt, daß er im wesentlichen mit den Nummern 44—47 der von Gauß nachgelassenen Abhandlung über die hypergeometrische Reihe Problem und Methode gemeinsam hat. Für die neuere Litteratur der hier behandelten Fragen vgl. man die Dissertation von Schellenberg, Göttingen 1892.

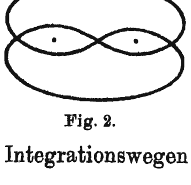

Fig. 2.

Was die Doppelumlaufintegrale betrifft (vgl. die Anmerkung (3) Werke pag. 87 der 2. Aufl.), so ist es vielleicht von Interesse, daß sich in den Riemannschen Papieren im Akt „Varia 28" auf einem einzelnen Blatt ohne jeden Text verschiedene Skizzen zu Integrationswegen, wie sie den kanonischen Querschnitten entsprechen, finden und ebenda auch zweimal die Doppelumlaufkurve gezeichnet ist und zwar in der vorstehenden Gestalt.

Hierher gehört auch noch ein Blatt aus „Varia 26", welches zwar ohne Text ist, jedoch zeigt, daß Riemann bereits das hypergeometrische Integral als absolute Invariante auffaßte.

Es sind die folgenden Formeln:

$$P\,dz = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{\frac{\gamma+\delta+1}{2}} \left(\frac{a-c}{d-b}\right)^{\frac{\delta+\beta+1}{2}} \left(\frac{a-d}{b-c}\right)^{\frac{\beta+\gamma+1}{2}}$$

$$\cdot\,[(a-b)(c-d)(a-d)(d-b)(a-c)(b-c)]^{1/6} \cdot (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}(z-d)^{\delta}\,dz$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+2=0$$

$$x = \frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$$

$$\int_a^b P\,dz = x^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}+\frac{1}{6}}(1-x)^{\frac{\alpha+\gamma+1}{2}+\frac{1}{6}} \int_0^1 y^{\alpha}(1-y)^{\beta}(1-xy)^{\delta}\,dy$$

$$= \frac{\Pi\alpha\,\Pi\beta}{\Pi(\alpha+\beta+1)}\, x^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}+\frac{1}{6}}(1-x)^{\frac{\alpha+\gamma+1}{2}+\frac{1}{6}} F(\alpha+1,-\delta,\alpha+\beta+2,x)$$

$$= \frac{\Pi\alpha\,\Pi\beta}{\Pi(\alpha+\beta+1)}\, x^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}+\frac{1}{6}}(1-x)^{\frac{\beta+\delta+1}{2}+\frac{1}{6}} F(\beta+1,-\gamma,\alpha+\beta+2,x)$$

$$\int_c^d P\,dz = x^{\frac{\gamma+\delta+1}{2}+\frac{1}{6}}(1-x)^{\frac{\alpha+\gamma+1}{2}+\frac{1}{6}} \int_0^1 y^{\gamma}(1-y)^{\delta}(1-xy)^{\beta}\,dy$$

$$= \frac{\Pi(\gamma)\,\Pi(\delta)}{\Pi(\gamma+\delta+1)}\, x^{\frac{\gamma+\delta+1}{2}+\frac{1}{6}}(1-x)^{\frac{\delta+\beta+1}{2}+\frac{1}{6}} F(\delta+1,-\beta,\gamma+\delta+2,x)$$

$$= \frac{\Pi(\gamma)\,\Pi(\delta)}{\Pi(\gamma+\delta+1)}\, x^{\frac{\gamma+\delta+1}{2}+\frac{1}{6}}(1-x)^{\frac{\gamma+\alpha+1}{2}+\frac{1}{6}} F(\gamma+1,-\beta,\gamma+\delta+2,x).$$

[Durch Integration längs beider Seiten einer geschlossenen Linie durch a, b, c, d erhält man ähnlich wie im Text die Formel]:

$$0 = \sin s\pi P_1 + \sin(s+\beta)\pi P_2 + \sin(s+\beta+\gamma)\pi P_3 + \sin(s+\beta+\gamma+\delta)\pi P_3 = 0$$

[und hieraus für]

$$\alpha+\beta+1 = m = -(\gamma+\delta+1):$$

$$\pi\cos(m-1)\pi P_2 = -\sin\alpha\pi\frac{\partial P_1}{\partial m} + \sin\delta\pi\frac{\partial P_3}{\partial m}.$$

Die Worte in eckiger Klammer sind hier hinzugefügt, und in der ersten Formel $1/6$ statt dem, wie das folgende zeigt, nur aus Versehen geschriebenen $1/8$ gesetzt. W.

B. Über die aus linearen Differentialgleichungen entspringenden Funktionen.

1.

Wir wollen eine Funktion betrachten, welche einer Differentialgleichung genügt

$$(1) \qquad a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Wenn wir zwei partikuläre Lösungen der Differentialgleichung mit Y_1, Y_2 bezeichnen, so muß sich jede Lösung der Differentialgleichung durch Y_1, Y_2 linear und homogen darstellen lassen.

Durchläuft x einen geschlossenen Weg, auf welchem a_0, a_1, a_2 wieder ihre ursprünglichen Werte annehmen, so werden Y_1, Y_2 übergehen in lineare homogene Funktionen der nämlichen Größen mit konstanten Koeffizienten.

Bezeichnen wir nun den Quotienten von Y_1, Y_2 etwa mit z, so wird dieser auf einem solchen Weg übergeführt in

$$(2) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Betrachten wir umgekehrt x als Funktion von z, so wird die Funktion

$$x = f(z)$$

die Eigenschaft haben, daß

$$f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Wenn die Funktion z mehrere Verzweigungsstellen hat, so wird es mehrere solche rationale Transformationen ersten Grades geben, bei denen $f(z)$ ungeändert bleibt, und da durch wiederholte Anwendung mehrerer solcher Transformationen nacheinander wieder eine rationale Transformation ersten Grades entsteht, welche man aus diesen zusammengesetzt nennen kann, so wird $f(z)$ ungeändert bleiben bei den zu Verzweigungsstellen gehörigen und den daraus zusammengesetzten Transformationen.

Nehmen wir nun an, wir hätten eine Funktion, welche die Eigenschaft hat, ungeändert zu bleiben bei gewissen Substitutionen dieser Art und stellen wir uns die Aufgabe, die Differentialgleichung, mit welcher die Funktion zusammenhängt, daraus abzuleiten.

Wenn z in $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ übergeht, so nimmt $x=f(z)$ wieder denselben Wert an. Wenn wir nach x differenzieren, so geht $\frac{dz}{dx}$ bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges von x über in die Derivierte von $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ nach x, wir haben also

$$\frac{dz'}{dx}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma z+\delta)^2}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ sei. Wir erhalten dann

$$\left(\frac{dz'}{dx}\right)^{-1/2}=\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}(\gamma z+\delta)$$

$$z'\left(\frac{dz'}{dx}\right)^{-1/2}=\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}(\alpha z+\beta).$$

Es gehen also $\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}$ und $z\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}$ über in lineare Ausdrücke derselben Funktionen.

Setzen wir daher

$$Y_1=\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}$$

$$Y_2=z\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2},$$

so sind Y_1, Y_2 zwei partikuläre Lösungen derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizienten algebraische Funktionen sind.

Wenn also eine Funktion mit einer solchen Eigenschaft gegeben ist, so kann man umgekehrt wieder zur Differentialgleichung übergehen und man wird die Koeffizienten der Differentialgleichung ableiten können, wenn man die Eigenschaften der Funktion x kennt. Man wird daraus die Eigenschaften von Y_1, Y_2 ableiten können und hieraus die Differentialgleichung. Wir verfahren so, daß wir aus Y_1, Y_2 die Ausdrücke bilden $Y_2'Y_1-Y_1'Y_2$, $Y_1''Y_2-Y_2''Y_1$, $Y_2''Y_1'-Y_1''Y_2'$.

Sind diese Funktionen proportional zu a_0, a_1, a_2, so findet die Gleichung

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=0$$

statt.

Wir erhalten

$$Y_2'Y_1-Y_1'Y_2=1,\quad Y_1''Y_2-Y_2''Y_1=0,$$

$$Y_2''Y_1'-Y_1''Y_2'=-\left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}.$$

Die Differentialgleichung für Y_1, Y_2 lautet also

$$y'' - \left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} y = 0\,,$$

und die Funktion z genügt der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} = -\, a_2\,,$$

wo a_2 eine algebraische Funktion von x ist.(1)

Dies ist also der Weg, den man einzuschlagen hat, um die Differentialgleichung abzuleiten, wenn eine Funktion mit der Eigenschaft gegeben ist, daß sie durch rationale Substitutionen ersten Grades ungeändert bleibt. Es lassen sich aber fast immer unmittelbar aus der Aufgabe noch andere Bedingungen herleiten, wodurch sich diese algebraische Funktion bestimmen läßt.

2.

Wir wollen dies anwenden auf die Funktionen, die sich in hypergeometrische Reihen und die damit zusammenhängenden Funktionen entwickeln lassen. Die Funktion, die wir durch $P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma'\end{pmatrix}, x\Big)$ bezeichnet haben, wollen wir jetzt als Funktion von x durch y bezeichnen und x betrachten als Funktion des Quotienten zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung, welcher diese Funktion y genügt. Dann können wir $P^{(\alpha)}$ als die Funktion Y_1 und als die andere Funktion $P^{(\alpha')}$ betrachten.

Wir müssen zunächst untersuchen, welche Änderungen Y_1/Y_2 mit x erfährt. Für $P^{(\alpha)}$ erhalten wir eine Reihe, welche mit x^α anfängt und für $P^{(\alpha')}$ eine ähnliche Reihe, welche mit $x^{\alpha'}$ beginnt und nach um 1 steigenden Potenzen von x fortschreitet.

Wenn wir zunächst annehmen, daß α, β, γ; α', β', γ' reell sind und daß die Koeffizienten der Anfangsglieder der Reihen für $P^{(\alpha)}$, $P^{(\alpha')}$ reell sind, dann sind die Koeffizienten aller folgenden Glieder ebenfalls reell, und es sind $P^{(\alpha)}$ und $P^{(\alpha')}$ für ein reelles x zwischen 0 und 1 beide reell und positiv. Daher wird auch $Y_1/Y_2 = z$ reell und positiv sein, während x von 0 nach 1 übergeht. Ist $\alpha > \alpha'$, so wird $z = 0$ für $x = 0$ und für $x = 1$ wird es einen endlichen Wert haben.

Wie verhält sich nun die Funktion für negative Werte von x? Hier wird

$$z = x^{\alpha - \alpha'} Q(x)\,,$$

wo Q der Quotient zweier nach ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihen mit reellen Koeffizienten und für kleine Werte von x positiv ist.

Also wird in der Nähe von $x = 0$

$$z = Q \cdot r^{\alpha - \alpha'} e^{(\alpha - \alpha') i \varphi},$$

wo $x = re^{i\varphi}$ gesetzt ist und φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genommen ist. Geht x in der Nähe der Null von $+r$ nach $-r$ durch Werte mit positivem imaginärem Bestandteil, so wird für $x = -r$

$$z = Q(-r) \cdot r^{\alpha - \alpha'} e^{(\alpha - \alpha') i \pi},$$

also, da für genügend kleines r $Q(-r)$ positiv ist, eine Größe mit dem Argument $(\alpha - \alpha')\pi$.

Es sei zunächst $(\alpha - \alpha') < 1$, dann wird z für negative Werte von x Werte durchlaufen, deren Argument $(\alpha - \alpha')\pi$ ist. Diese Werte liegen daher in der z-Ebene auf einer geraden Linie, welche mit der Achse der reellen z den Winkel $(\alpha - \alpha')\pi$ bildet.

Wir haben noch den Verlauf von z zu untersuchen, wenn x von 1 bis ∞ geht. Wir wissen, daß $P^{(\alpha)}$ und $P^{(\alpha')}$ gleich sind linearen Ausdrücken von $P^{(\gamma)}$, $P^{(\gamma')}$ mit konstanten Koeffizienten, und zwar sind diese Koeffizienten reell. Wenn x größer wird als 1, so ist

$$\frac{P^{(\gamma')}}{P^{(\gamma)}} = (1 - x)^{\gamma' - \gamma} (1 + A_1 (1 - x) + \cdots).$$

Wenn wir für $0 < x < 1$ das Argument von x gleich Null nehmen, so erhalten wir für die Werte von z die Form

$$z = \frac{p + p' e^{(\gamma - \gamma')\pi i}}{q + q' e^{(\gamma - \gamma')\pi i}}$$

und p, p', q, q' bleiben immer reell. Die Werte von z liegen daher auf einem Kreisbogen.

Es fragt sich nur noch, ob z jeden Wert, der innerhalb dieser Figur liegt, einmal und nur einmal annimmt.

Innerhalb dieses Größengebietes ist z eine stetige Funktion von x. Wenn wir umgekehrt x als Funktion von z betrachten, so wird die Derivierte $\frac{dz}{dx}$ immer endlich und stetig bleiben, wenn nicht x eine mehrdeutige Funktion von z ist; und umgekehrt, wenn dieses der Fall wäre, so würde für einen Verzweigungswert dieser Funktion $\frac{dz}{dx} = \infty$ oder $\frac{dz}{dx} = 0$ werden müssen.

Um also zu untersuchen, ob $\frac{dz}{dx}$ immer endlich bleibt, bilden wir

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1'}{Y_2^2}$$

Nun ist

$$Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = C x^{\alpha + \alpha' - 1} (1 - x)^{\gamma + \gamma' - 1},$$

und Y_2 nirgends im Innern unendlich. Also kann $\frac{dz}{dx}$ nicht verschwinden, außer in den Stellen $0, 1, \infty$. [Es wird aber auch nicht unendlich] und darum ist x innerhalb des von zwei Geraden und dem Kreisbogen begrenzten Gebietes eine eindeutige Funktion von z.(2)

Bei komplizierteren Differentialgleichungen wird im allgemeinen x nicht eine eindeutige Funktion von z werden.

In der Theorie der ganzen elliptischen Integrale hat man auch den Quotienten $\frac{K'}{K}$ als Variable eingeführt, und ähnlich ist es auch bei diesen Funktionen.

3.

Wir bedürfen jetzt der Abbildung der Kugelfläche auf eine Ebene, so daß die kleinsten Teile einander ähnlich werden.(3) Wir führen auf der Kugel vom Radius 1 Polarkoordinaten ein und verstehen unter Θ den Bogen eines größten Kreises durch einen festen Punkt O, von 0 an gezählt, und unter φ den Winkel dieses größten Kreises mit einem festen größten Kreis in O, so daß $\Theta = \text{const.}$ die Gleichung der Parallelkreise und $\varphi = \text{const.}$ die Gleichung der Meridiankurven wird.

Die Koordinaten eines Punktes in der Ebene bezeichnen wir mit u, v und diese werden zufolge der Abbildung Funktionen von Θ, φ.

Das Linienelement auf der Kugelfläche wird

$$d\Theta^2 + \sin\Theta^2 d\varphi$$

und in der Ebene

$$du^2 + dv^2.$$

Das Verhältnis

$$\frac{d\Theta^2 + \sin\Theta^2 d\varphi^2}{du^2 + dv^2} = \frac{(d\Theta + i\sin\Theta d\varphi)(d\Theta - i\sin\Theta d\varphi)}{(du + i\,dv)(du - i\,dv)}$$

soll nun unabhängig von dem Verhältnis $d\Theta : d\varphi$ sein. Daher müssen die Faktoren des Zählers einzeln durch die des Nenners teilbar sein, und zwar können wir immer annehmen, daß $du + idv$ den Faktor $d\Theta + i\sin\Theta d\varphi$ teilt. Denn wir können ja die Koordinaten in der Ebene beliebig annehmen. Würden wir die andere Annahme machen, so würde die Ähnlichkeit die entgegengesetzte sein.

Wenn wir $u + iv = z$ setzen, so ist

$$dz = m\,(d\Theta + i\sin\Theta d\varphi),$$

wo m eine Funktion von Θ und φ bedeutet und so zu wählen ist, daß die rechte Seite ein vollständiges Differential ist. Setzen wir $m = (\sin\Theta)^{-1}$, so bekommen wir

$$z = \log\operatorname{tang}\frac{\Theta}{2} + i\varphi.$$

Die allgemeinste Lösung der Aufgabe bekommen wir, wenn wir eine Funktion der complexen Variablen $\log \operatorname{tang} \frac{\Theta}{2} + i\varphi$ für z nehmen.

Wir setzen $z = \operatorname{tang} \frac{\Theta}{2} e^{i\varphi}$.

Diese Funktion nimmt auf der Kugeloberfläche jeden Wert einmal und nur einmal an, wenn Θ von 0 bis π geht und φ von 0 bis 2π. Für den einen Pol wird dann $z = 0$ und für den andern unendlich. Man kann den Punkt der Kugel, welcher einem Punkt der Ebene entspricht, leicht finden, wenn man sich die Kugel die z-Ebene im Nullpunkt berührend denkt, und dann von diesem aus auf der Kugel den Winkel Θ zählt. Man hat nur den andern Pol mit z zu verbinden und den Schnittpunkt von Pz mit der Kugel aufzusuchen. Zwei Punkten, welche auf der Kugel diametral gegenüber liegen, entsprechen die Werte c und $1/c'$, wenn c und c' konjugierte Größen sind. Geht ein Kreis durch die Punkte a und b, so ist auf diesem Kreis das Argument von $\frac{z-a}{z-b}$ konstant.

4.

Wir haben früher den Quotienten zweier Partikularlösungen $P^{(\alpha)} : P^{(\alpha')}$ durch z bezeichnet und haben untersucht, wie sich z ändert, wenn x die Begrenzung des Gebietes der Größen mit positivem imaginärem Bestandteil durchläuft. Wir erhalten so als Begrenzung des Gebietes für z zwei gerade Linien, welche den Winkel $(\alpha - \alpha')\pi$ miteinander bilden in dem $x = 0$ entsprechenden Punkte, und einen Kreisbogen, welcher mit den beiden Geraden resp. die Winkel $(\beta - \beta')\pi$, $(\gamma - \gamma')\pi$ bildet.

Wir setzen diese drei Winkel als positiv und kleiner als π voraus [Ist dann auch noch ihre Summe größer als π,] so kann man die Übertragung dieser ebenen Figur auf die Kugel immer so einrichten, daß den Begrenzungslinien größte Kreise entsprechen.

Dann wird das Gebiet von z auf der Kugel auf ein sphärisches Dreieck abgebildet, dessen Winkel $(\alpha - \alpha')\pi$, $(\beta - \beta')\pi$, $(\gamma - \gamma')\pi$ sind, und die wir mit $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ bezeichnen. Betrachten wir die Verteilung der Werte von x auf diesem sphärischen Dreieck, so wird an der Spitze des Winkels $\lambda\pi$: $x = 0$, an der Spitze von $\mu\pi$: $x = \infty$ und an der Spitze von $\nu\pi$: $x = 1$ werden. Denken wir uns die Funktion x fortgesetzt über eine der Begrenzungslinien, so wird, während x die Werte mit negativem imaginärem Bestandteil durchläuft, z die Werte durchlaufen müssen, welche in einem symmetrisch-kongruenten anstoßenden sphärischen Dreieck liegen. Es würden sich so beständig symmetrisch-kongruente sphärische Dreiecke anschließen. Auf diese Weise lassen sich die Werte, welche die Funktion z von x annimmt, wenn diese Funktion beliebig weit fortgesetzt wird, geometrisch darstellen.

5.

Betrachten wir also x als Funktion von z, $x = f(z)$, so wird diese Funktion außer von z nur noch abhängen von den Exponentendifferenzen λ, μ, ν. Denn die Ausdrücke für z bleiben ungeändert, wenn wir y mit einem Ausdruck von der Form $x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon}$ multiplizieren. Bezeichnet x_1 eine andere ähnliche Funktion von z mit den Exponentendifferenzen λ_1, μ_1, ν_1, so kann man sich die Frage stellen: *In welchen Fällen findet zwischen x und x_1 eine algebraische Relation statt?*

Wenn wir nun annehmen, daß zwischen x und x_1 eine algebraische Gleichung $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{x_1}) = 0$ besteht, so können wir ein Gebiet für z abgrenzen, so daß in diesem Gebiet die Funktionen x und x_1 jedes der Gleichung $F = 0$ genügende Wertepaar einmal und nur einmal annehmen. Nun entsprechen einem bestimmten Werte von x n Werte von x_1, es wird also jeder Wert von x in diesem Gebiete n-mal vorkommen müssen, also das Größengebiet von x die ganze unendliche Ebene n-mal überdecken. Dann aber besteht das Gebiet von z aus n Paaren symmetrisch-kongruenter, sphärischer Dreiecke, mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$. Ebenso wird aber jeder Wert von x_1 m-mal vorkommen müssen und es muß daher dieselbe Figur sich auch aus m Paaren symmetrisch-kongruenter Dreiecke mit den Winkeln $\lambda_1\pi$, $\mu_1\pi, \nu_1\pi$ zusammensetzen lassen.

Es muß sich also dann ein und dieselbe sphärische Figur sowohl aus n Paaren symmetrisch-kongruenter Dreiecke mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi, \nu\pi$ zusammensetzen lassen, als auch aus m Paaren solcher Dreiecke mit den Winkeln $\lambda_1\pi, \mu_1\pi, \nu_1\pi$.

Das ist dieselbe Frage, wie die folgende: Wann läßt sich eine Funktion $z(x)$ durch eine algebraische Substitution in eine ähnliche transformieren? (4)

Wir haben nun schon einige solche algebraische Transformationen kennen gelernt und wollen diese jetzt geometrisch deuten.

Es konnte jede der Funktionen $P(\mu, \nu, \frac{1}{2}, x)$, $P(\nu, 2\mu, \nu, x_1)$, $P(\mu, 2\nu, \mu, x_2)$ durch die andern ausgedrückt werden, wobei

$$x = 4x_1(1-x_1) = \frac{1}{4x_2(1-x_2)}$$

war.

Wir hätten also ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, in welchem ein Winkel $\mu\pi$, der andere $\nu\pi$ ist.

Wenn wir an dieses längs der Basis ein symmetrisch-kongruentes Dreieck anlegen, so können wir das sphärische Viereck $ABCD$ auch zerlegen in zwei symmetrisch-kongruente Dreiecke mit den Winkeln $2\mu\pi, \nu\pi, \nu\pi$ oder $2\nu\pi, \mu\pi, \mu\pi$.

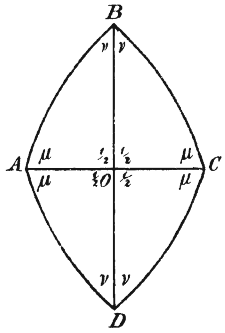

Fig. 3.

Wir können auch leicht die algebraischen Gleichungen zwischen den Funktionen x, x_1, x_2 finden, welche zu den einzelnen Dreiecken gehören, nämlich x zu AOB, x_1 zu ADB und x_2 zu ACB. Nehmen wir an, x erhalte in O den Wert 1, in B den Wert 0 und in C — und daher auch in A — den Wert ∞. Weil nun das Viereck einerseits aus zwei Paaren zu x gehöriger und andrerseits aus einem Paar zu x_1 gehöriger Dreiecke zusammengesetzt ist, so ist x eine rationale Funktion von x_1, welche jeden Wert zweimal annimmt, wenn x_1 alle seine Werte einmal annimmt. Nehmen wir an, x_1 nehme die Werte ∞, 1, 0 an resp. in ADB, so wird x_1 auch in C den Wert ∞ annehmen. Dann wird x nur unendlich, wenn es auch x_1 wird, und ist daher eine ganze rationale Funktion zweiten Grades von x_1, welche für $x_1 = 0, 1$ verschwindet. Daher ist

$$x = cx_1(1 - x_1),$$

wo die Konstante c durch die Bemerkung bestimmt werden kann, daß bei einmaliger Umlaufung des Punktes 0 mit der Variablen z der zugehörige Wert von x_1 einmal umkreist wird, dagegen von x der Wert 1 zweimal. Also verschwindet, wenn x_1 für $z = 0$ den Wert ξ_1 annimmt, auch die Derivierte $\frac{dx}{dx_1}$ für $x_1 = \xi_1$. Dies gibt $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $c = 4$. Damit ist die frühere Transformation

$$x = 4x_1(1 - x_1)$$

wiedergewonnen. Ebenso könnte man die Gleichung $x = \frac{1}{4x_2(1 - x_2)}$ erhalten.

Man würde auch auf geometrischem Wege finden, daß, wenn zwei Exponentendifferenzen ganz willkürlich bleiben sollen, keine andern Transformationen möglich sind, indem sich keine andere Figur auf mehr als eine Art aus Paaren symmetrisch-kongruenter Dreiecke zusammensetzen läßt. Für den Fall, daß nur eine Exponentendifferenz willkürlich ist, haben wir zunächst das gleichseitige Dreieck ABC (Fig. 4) mit den Winkeln $\nu\pi$. Zerlegen wir dieses durch die Winkel-

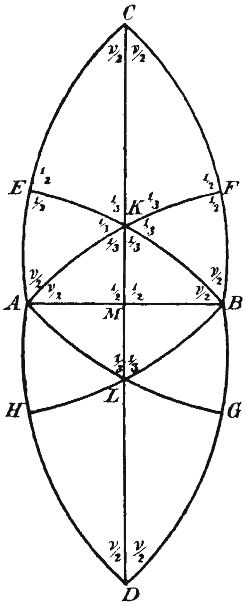

Fig. 4.

halbierenden, so erhalten wir drei Paare symmetrisch-kongruenter Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\nu\pi}{2}$, und daher läßt sich die Funktion $P(\nu, \nu, \nu, x)$ durch eine algebraische Transformation in die Funktion

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{\nu}{2}, x_1\right)$$

überführen oder auch unter Anwendung der vorigen Transformation in die Funktion

$$P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \nu, x_2\right) \text{ und } P\left(\frac{2}{3}, \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}, x_3\right),$$

und auch in

$$P\left(\nu, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x_4\right), \quad P\left(\frac{\nu}{2}, 2\nu, \frac{\nu}{2}, x_5\right).$$

Das rechtwinklig gleichschenklige sphärische Dreieck ABC (Fig. 5) würde zur Funktion

$$P\left(\frac{1}{2}, \nu, \nu, x\right)$$

gehören und die Transformation ergeben in $P(\nu, 2\nu, \nu, x_1)$ und $P\left(\frac{1}{4}, \nu, \frac{1}{2}, x_2\right)$, sowie in $P\left(\frac{1}{4}, 2\nu, \frac{1}{4}, x_3\right)$.

Außer diesen Transformationen, bei denen noch eine Exponentendifferenz willkürlich bleibt, müssen aber noch einige andere stattfinden, bei welchen alle Exponentendifferenzen feste Werte haben. Jeder reguläre Körper muß auf eine solche Transformation führen, denn wir haben ja hier die Zusammensetzung einer und derselben sphärischen Figur aus kongruenten sphärischen Dreiecken. Ist aber diese bekannt, so lassen sich die Transformationen leicht wirklich aufstellen.

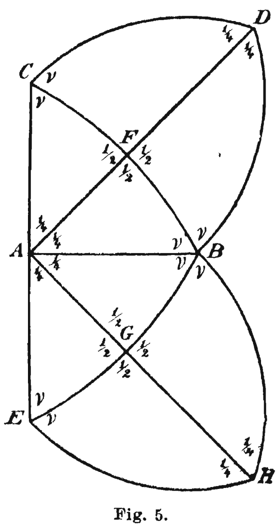

Fig. 5.

Eine besondere Behandlung würde der Fall erfordern, wo eine Exponentendifferenz gleich Null [oder die Summe der drei Winkel $\leqq \pi$ ist].(5) In diesem Falle wird man statt der sphärischen Dreiecke ebene Figuren zu betrachten haben.

6.

Wir wurden auf diese letztere Betrachtung geführt durch die Einführung des Quotienten zweier Partikularlösungen unserer Differentialgleichung oder vielmehr durch Betrachtung des Quotienten als Funktion der unabhängigen Variablen.

Wir müssen nun noch andere Funktionen betrachten, die ebenfalls mit den Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen zusammenhängen.

Wir haben bisher nur Differentialgleichungen von der Form behandelt

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_n y = 0,$$

wo die $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ rationale Funktionen von x waren, und die wesentlichste Eigenschaft der Lösungen war, daß, wenn wir n Partikularlösungen haben, jede andere Lösung ein linearer Ausdruck mit konstanten Koeffizienten eben dieser ist. Daraus folgt, daß, wenn die Koeffizienten und x wieder denselben Wert annehmen, diese Funktionen lineare Funktionen der früheren sein müssen. Wir haben aber den Fall noch nicht behandelt, wo die Differentialgleichung linear ist, aber nicht homogen, so daß die rechte Seite nicht Null ist, sondern eine gegebene Funktion von x. Wir wollen annehmen, wir hätten eine solche Differentialgleichung

$$a_0 \frac{d^n \eta}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \eta}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} \eta}{dx^{n-2}} + \cdots + a_n \eta = C(x).$$

Die Auflösung einer solchen Gleichung läßt sich zurückführen auf die Auflösung einer linearen homogenen Gleichung n^{ter} Ordnung, und zwar gibt es hauptsächlich zwei Methoden, die beide von Lagrange herrühren.

Wenn man die n partikulären Integrale $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ der Gleichung für $C(x) = 0$ kennt, so wird, wenn man für y den Ausdruck $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots + C_n y_n$ setzt, dieser Ausdruck der ersten Differentialgleichung genügen, wenn die C_i Konstanten sind. Wenn man aber diesen Ausdruck in die zweite Differentialgleichung einführt und die C_i als Funktionen von x betrachtet, so verschwinden die Glieder, welche die C_i selbst enthalten und man hat dann noch einen Ausdruck, der nur die Derivierten der C_i enthält. Diese Differentialgleichung für die Derivierten der C_i läßt sich dann integrieren und η daraus bestimmen. Man bekommt dann die C_i durch bloße Quadraturen, aber es sind mehrere Integrationen nacheinander auszuführen.

Es gibt nun eine andere, ebenfalls von Lagrange herrührende Methode, die bequemer ist. Diese besteht darin, daß man die gegebene Differentialgleichung mit einem unbestimmten Faktor v multipliziert und dann zwischen den Grenzen 0 und x beiderseits integriert. Die einzelnen Glieder der linken Seite sind dann durch partielle Integration so umzuformen, daß in jedem Glied η als Faktor unter dem Integralzeichen erscheint.

Man erhält so bei unbestimmter Integration

$$\int \eta \left(a_n v - \frac{d(a_{n-1}v)}{dx} + \frac{d^2(a_{n-2}v)}{dx^2} - \frac{d^3(a_{n-3}v)}{dx^3} + \cdots \right) dx$$

$$+ \eta \left(a_{n-1} v - \frac{d(a_{n-2}v)}{dx} + \cdots \right) + \frac{d\eta}{dx} \left(a_{n-2} v - \frac{d(a_{n-3}v)}{dx} + \cdots \right)$$

$$+ \cdots + a_0 v \frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}} = \int C(x) v \, dx.$$

Wird dann für v eine Lösung der Differentialgleichung (6)

$$a_n v - \frac{d(a_{n-1}v)}{dx} + \frac{d^2(a_{n-2}v)}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n(a_0 v)}{dx^n} = 0$$

gesetzt, so fällt das Integral links weg. Bezeichnen wir die n unabhängigen partikulären Lösungen derselben mit $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$, so können wir für v setzen $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$ und die Verhältnisse der $c_1, c_2, \cdots, c_n$ so bestimmen, daß, wenn wir die Integration zwischen 0 und x ausführen, an der obern Grenze alle Koeffizienten von η und seinen Derivierten verschwinden bis auf eine. Wir erhalten so η und seine Derivierten ausgedrückt durch einfache Integrale. Was nun die Eigenschaften dieser Funktionen betrifft, so haben wir früher nur bemerkt, daß dieselben sich zurückführen lassen auf die Lösungen einer homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. Wenn η irgend eine Lösung bedeutet, so ist auch $\eta + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n$ eine solche und jede andere ist in dieser Form enthalten, denn der Teil, der von den y herrührt, wird gleich 0 und der von η herührende $= C(x)$. Daraus folgt nun, daß die Funktion η übergeht in $\eta + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n$, wenn x und die Koeffizienten wieder denselben Wert annehmen.

7.

Gehen wir jetzt zu speziellen Fällen über, so haben wir gefunden, daß das Integral

$$\int s^a (1-s)^b (1-xs)^c \, ds$$

zwischen irgend zwei Werten genommen, für welche die Funktion unter dem Integralzeichen gleich Null wird, als Funktion von x einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten in x genügen muß, und zwar folgt dies daraus, daß sich die Werte, in welche das Integral übergeht, wenn x einen der Punkte $0, 1, \infty$ umläuft, homogen und linear mit konstanten Koeffizienten durch zwei unter ihnen ausdrücken ließen. Die Differentialgleichung können wir leicht verifizieren, indem wir das Integral einsetzen. Wenn wir nun links statt des bestimmten Integrals das unbestimmte einsetzen, so läßt sich die Integration auch unbestimmt ausführen, aber das Resultat verschwindet dann nicht an den Grenzen und die rechte Seite wird dann nicht gleich Null.

Es war

$$P\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}$$

$$= \text{const.}\ x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}(1-xs)^{\alpha-\beta-\gamma}\,ds,$$

das Integral genommen zwischen irgend zweien der Werte $0, 1, \infty, x^{-1}$. Wir wollen noch α und γ gleich Null setzen und schreiben

$$y = \int s^{a}(1-s)^{b}(1-xs)^{c}\,ds.$$

Die linke Seite der Differentialgleichung wird dann

$$(1-x)\frac{d^2y}{(d\log x)^2} + (a+b+1-(a-c+1)x)\frac{dy}{d\log x} + c(1+a)xy.$$

Substituieren wir für y die Funktion

$$\eta = \int_0^s s^{a}(1-s)^{b}(1-xs)^{c}\,ds,$$

so wird der obige Ausdruck eine Funktion von s und x, $F(s, x)$. Wenn nun s einen geschlossenen Weg durchläuft, so wird sich η ändern, aber der neue Wert von η wird sich homogen und linear ausdrücken lassen durch das Integral von 0 bis s und Integrale zwischen den Grenzen $0, 1, \infty, x^{-1}$. Da nun die letzteren Integrale den Differentialausdruck zu Null machen, so kann sich $F(s, x)$ nur um einen konstanten Faktor ändern, wenn s einen geschlossenen Weg durchläuft; außerdem muß es für $s = 0, 1, \infty, x^{-1}$ verschwinden bei geeigneter Beschränkung von a, b, c. Dadurch könnte man den Ausdruck direkt bestimmen. Rechnet man denselben durch Einsetzen des Integrals für η aus, so erhält man

$$F(s, x) = cx\int s^{a}(1-s)^{b}(1-xs)^{c-2}\big((a+1)(1-xs)(1-s)$$
$$-(b+1)s(1-xs)-(c-1)s(1-s)x\big)\,ds = cxs^{a+1}(1-s)^{b+1}(1-xs)^{c-1},$$

wenn für die untere Grenze eine Nullstelle der rechten Seite gewählt wird.

Wir erhalten also für das Integral

$$\eta = \int_0^s s^a (1-s)^b (1-xs)^c \, ds$$

die Differentialgleichung

$$(1-x)\frac{d^2\eta}{(d\log x)^2} + (a+b+1-(a-c+1)x)\frac{d\eta}{d\log x} + c(1+a)x\eta$$
$$= cxs^{a+1}(1-s)^{b+1}(1-xs)^{c-1}.$$

8.

Wir wollen annehmen, wir hätten eine Differentialgleichung von der Form

$$f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + g(x)\frac{dy}{dx} + h(x)y = 0$$

und wollen versuchen, unsere Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral zu lösen.

Dies gelingt sehr häufig durch den Ansatz(7)

$$y = \int (x-s)^\alpha v \, ds,$$

wobei v eine Funktion von s allein ist, und die Grenzen von x unabhängig sein sollen. Wir substituieren den Ausdruck in die Differentialgleichung und bekommen dann unter dem Integralzeichen

$$v\left(\alpha(\alpha-1)f(x)(x-s)^{\alpha-2} + \alpha g(x)(x-s)^{\alpha-1} + h(x)(x-s)^\alpha\right).$$

Wir können nun $f(x), g(x), h(x)$ nach Potenzen von $(x-s)$ entwickeln, und wenn die Funktionen f, g, h ganze rationale Funktionen sind, so werden wir nur eine endliche Anzahl von Gliedern erhalten von der Form

$$C\varphi(s)(x-s)^{\alpha+h} v.$$

Durch partielle Integration können wir dann den Exponenten von $(x-s)$ beliebig in jedem Glied erhöhen und so erreichen, daß wir unter dem Integralzeichen einen Ausdruck bekommen

$$(x-s)^{\alpha+n} P(v),$$

wo $P(v) = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung für v ist, welche zwar noch den Parameter α, aber nicht mehr x enthält.

Die Grenzen müssen dann so gewählt werden, daß der Ausdruck, welcher bei der partiellen Integration heraustritt, an diesen verschwindet.

Wenn wir z. B. setzen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad g(x) = b_0 + b_1 x, \quad h(x) = c_0,$$

so würde die Entwicklung von $f(x)$ nach Potenzen von $(x-s)$ nur drei Glieder, die von $g(x)$ nur zwei erhalten und der höchste Exponent von $(x-s)$ würde α sein.

Wir würden dann für v die Differentialgleichung erhalten

$$\frac{d^2(vf(s))}{ds^2}+\frac{d}{ds}(v(\alpha-1)f'(s)+g(s))+\left(\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)f''(s)+\alpha g'(s)+c_0\right)v=0,$$

und die Grenzen s_0, s_1 im Integral wären so zu bestimmen, daß

$$\Big|_{s_0}^{s_1}\alpha(x-s)^{\alpha-1}\cdot vf(s)+(x-s)^{\alpha}\left(\frac{d(vf(s))}{ds}+v((\alpha-1)f'(s)+g(s))\right)$$

verschwindet.

Ließen wir aber z. B. die obere Grenze veränderlich, so würden wir eine nicht homogene lineare Differentialgleichung erhalten, welcher das Integral

$$\eta=\int_{s_0}^{s}(x-s)^{\alpha}v\,ds$$

genügt.

Wendet man dieses Verfahren auf die Differentialgleichung für

$$y=\int_0^1 s^a(1-s)^b(1-xs)^c ds$$

an, nachdem man für x geschrieben hat x^{-1}, so erhält man wieder die früher abgeleitete Differentialgleichung für

$$\eta=\int_0^s s^a(1-s)^b(1-xs)^c ds.$$

Wenden wir nun diese Betrachtung auf die elliptischen Integrale erster Gattung an.

Man bezeichnet so die Integrale

$$\frac{1}{2}\int(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}x^{-1/2}dx.$$

Sind die Grenzen 0 und 1, so heißt das Integral ein ganzes elliptisches Integral:

$$K=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}x^{\;\,1/2}dx.$$

Die Differentialgleichung für die ganzen elliptischen Integrale lautet

$$(1-k^2)\frac{d^2K}{(2d\log k)^2}-k^2\frac{dK}{(2d\log k)}-\frac{1}{4}k^2K=0.$$

Wenn wir nun aus dieser Differentialgleichung die für das Integral

$$u=\int_0^x(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}x^{-1/2}dx$$

herleiten, so ergibt sich

$$(1-k^2)\frac{d^2u}{(2d\log k)^2}-k^2\frac{du}{(2d\log k)}-\frac{1}{4}k^2u=-\frac{1}{2}k^2x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-k^2x)^{-\frac{3}{2}}$$

als Differentialgleichung, welcher das unbestimmte elliptische Integral genügt.

Die allgemeine Lösung ist dann

$$u+CK+C'K'.$$

Sehr viele Eigenschaften der ganzen elliptischen Integrale wurden erst gefunden durch die Untersuchung des unbestimmten Integrals, und in der That ist dieses eine sehr einfache Funktion des Parameters x. Ebenso verhält es sich mit dem allgemeineren Integral

$$\eta=\int_0^s s^a(1-s)^b(1-xs)^c\,ds.$$

Es ist eine viel einfachere Funktion von s wie von x und die bestimmten Integrale zwischen den Grenzen 0 und 1 oder 1 und x^{-1} treten dann bei der Untersuchung des η als Funktion von s auf. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist dann

$$\eta+C\int_0^1+C'\int_1^{1/x}.$$

Auf die Differentialgleichungen, welche sich nach der auseinandergesetzten Methode durch bestimmte Integrale lösen lassen, kann man dieselben Bemerkungen anwenden. Aber auch bei solchen, welche sich nicht durch bestimmte Integrale lösen lassen, kann man ähnlich verfahren.

Sei die Differentialgleichung

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_ny=0$$

und setzt man in die linke Seite für y eine Funktion von x, welche einen Parameter enthält, so wird die rechte Seite eine Funktion von x und dem Parameter, welche wir mit X bezeichnen. Betrachten wir dann die Differentialgleichung

$$a_0\frac{d^n\eta}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}\eta}{dx^{n-2}}+\cdots+a_n\eta=X,$$

so wird bei passender Wahl von X und dem Parameter sehr häufig η eine viel einfachere Funktion vom Parameter sein als von x. Diese Transcendenten spielen eine sehr wichtige Rolle für die Theorie dieser Differentialgleichungen.

9.

Wir wollen noch die ganzen elliptischen Integrale etwas ausführlicher betrachten und untersuchen, wie sich K und K' ändern, wenn k^2 nach einem Umlauf um den Punkt 1 wieder denselben Wert annimmt. K würde dann übergehen in ein Integral von 0 ausgehend positiv um k^{-2} herum und wieder nach 1 zurück, und wenn wir den letzten Teil dieses Integrationsweges auf das Stück von 1 bis k^{-2} zusammenziehen, so erhalten wir für den neuen Wert von K

$$\int_0^1 \frac{1}{2} x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}\,dx$$

$$-2\int_1^{k^{-2}} \frac{1}{2} x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}\,dx = K - 2iK'.$$

Das Integral für K' wird dabei gar nicht geändert. Bei einem positiven Umlauf von k^{-2} um den Nullpunkt geht K über in $3K-2iK'$ und iK' in $2K-iK'$. Ein positiver Umlauf um den Punkt ∞, oder was dasselbe ist ein negativer um die Punkte 0, 1, würde K unverändert lassen und iK' überführen in $iK'+2K$.

Die Formeln, welche die Abhängigkeit der ganzen elliptischen Integrale vom Modul k^2 geben, sind von Jacobi in den *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* entwickelt worden. Er nahm als Variable $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, aber in der Differentialgleichung führte er bereits den Quotienten K'/K, also den Quotienten zweier Partikularlösungen, als Variable ein. Wenn wir nun K'/K als Variable einführen und k^2 als Funktion derselben betrachten wollen,(8) so müssen wir fragen: Wie verhält sich K'/K, wenn k^2 die Werte mit positivem imaginärem Teil durchläuft?

Wenn k^2 von 0 bis 1 geht, so bleibt K'/K reell, und zwar wird es ∞ für k^2 gleich 0 und 0 für $k'^2 = 1-k^2 = 0$, also $k^2 = 1$.

Nun läßt sich K in der Nähe von $k^2 = 0$ nach ganzen positiven Potenzen dieser Größe entwickeln und K' darstellen in der Form

$$-\frac{1}{\pi}\log k^2 - \frac{2}{\pi}(a_0 + a_1 k^2 + \cdots).$$

Daraus erkennt man, daß wenn k^2 durch Werte mit positivem imaginärem Teil übergeführt wird in $-k^2$ und dann nach $-\infty$ geht, $\frac{K'}{K}$ Werte annimmt, deren imaginärer Bestandteil beständig gleich $-i$ ist, also die Strecke $0, -\infty$ auf eine zur reellen Achse parallele Gerade durch den Punkt $-i$ abgebildet wird.

Ferner gehen K und K' ineinander über, wenn k^2 und $1-k^2$ miteinander vertauscht werden. Damit folgt dann aus der angegebenen Reihenentwicklung, daß der imaginäre Teil von $\frac{K}{K'}$ konstant, und zwar $+i$ wird, wenn k^2 von 1 bis ∞ geht, die Werte von K'/K also auf einem Halbkreis vom Radius $1/2$ liegen, dessen Mittelpunkt im Punkte $-\frac{1}{2}i$ gelegen ist, und der daher die beiden geraden Linien, nämlich die reelle Achse und die durch den Punkt $-i$ zu ihr gezogene Parallele, berührt. Diese Figur würde uns die Werte veranschaulichen, welche K'/K annimmt, wenn k^2 die Werte mit positivem imaginärem Bestandteil annimmt. Fügen wir dazu das Gebiet der Werte von K'/K, welche den Werten mit negativen imaginären Bestandteilen entsprechen und welches längs der Linie $k^2=0$ bis $k^2=1$ mit dem ersten zusammenhängt, so gibt uns das Innere dieser Figur die Werte, welche $\frac{K'}{K}$ annimmt, wenn k^2 die ganze Ebene durchläuft, ohne jedoch eine der Strecken $0, -\infty$ oder $1, \infty$ zu überschreiten.

Wir können nun auch untersuchen, welche Werte $\frac{K'}{K}$ annimmt, wenn k^2 eine dieser Strecken überschreitet und also z. B. einen positiven Umlauf um den Punkt 1 macht. Dann geht $\frac{K'}{K}$ über in $\frac{K'}{K-2iK'}$, und wir haben nur nachzusehen, welche Größen $\frac{K'}{K-2iK'}$ durchläuft, wenn $\frac{K'}{K}$ die erste Figur durchläuft. Wir würden dann finden, daß dieses Größengebiet ebenfalls von einem Halbkreis, welcher über der Strecke $0, i$ steht und drei kleineren Halbkreisen, von denen einer über $\frac{1}{2}i, i$ und die beiden andern über $\frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i$ und $\frac{1}{3}i, 0$ stehen, begrenzt wird.

Dem Werte $k^2=0$ würde jetzt der Wert $\frac{1}{2}i$ entsprechen, dem Werte $k^2=1$ der Wert $\frac{1}{3}i$. Wir würden überhaupt k bestimmen können, wenn $\frac{K'}{K}$ gleich wird $\sqrt{-1}$ multipliziert mit rationalen Zahlen, bloß dadurch, daß wir untersuchen, wie sich die Funktion $\frac{K'}{K}$ ändert, wenn k^2 immer wieder denselben Wert, aber auf verschiedenen Wegen, annimmt.

Wenn wir auf diese Weise die Funktion $\frac{K'}{K}$ verfolgen, so würden wir auch finden, daß, wie weit wir auch die Funktion fortsetzen mögen, $\frac{K'}{K}$ doch jeden Wert nur einmal annimmt, wenn k^2 beliebig oft sich um die Punkte $0, 1, \infty$ herum bewegt. Die Funktion nimmt also jeden komplexen Wert [mit positivem reellem Teil] nur einmal an.

Haben wir nun eine Funktion Y, die nur unstetig und vieldeutig wird für 0, 1, ∞, so können wir in diese Funktion für x setzen $\varphi(z)$, wo $k^2 = \varphi\left(\frac{K'}{K}\right)$ ist. Dann wird Y eine Funktion von z, die für

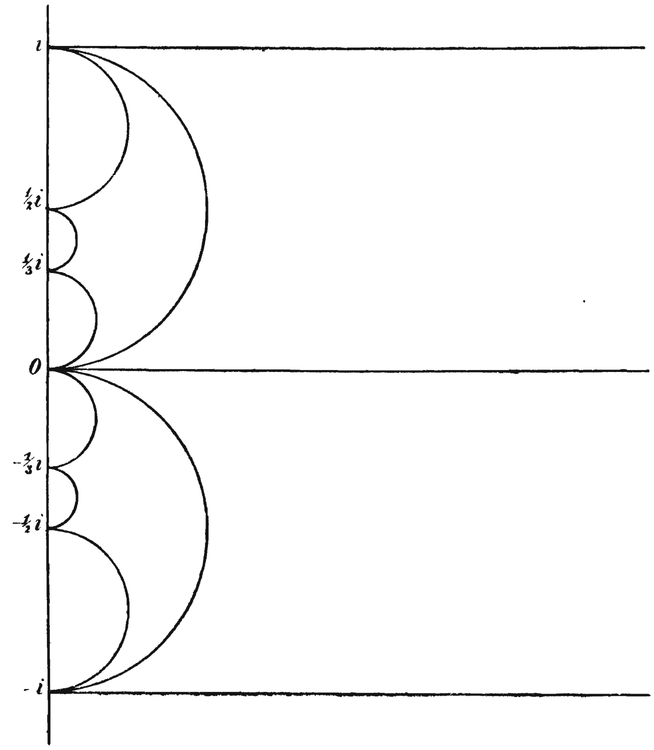

Fig. 6.

jeden Wert von z nur einen bestimmten Wert annimmt. Es würde dann z, wenn x sich z. B. um Null herumbewegt, aus einem Gebiet in ein anderes übergehen. Wir erhalten also Y und beliebige eindeutige Funktionen von Y als eindeutige Funktionen von z, wenn wir für x setzen $\varphi(z)$, wo φ die Funktion ist, welche k^2 [als Funktion von $\frac{K'}{K}$ liefert]. (9)

Anmerkungen.

Die hier entwickelten Gedanken Riemanns sind erst viel später und unabhängig von ihm zur Geltung gekommen. Für die hypergeometrische Reihe kommt hierbei zunächst die Arbeit von H. A. Schwarz, Crelles J. 75 (Ges. Abh. II, S. 211 ff., vgl. auch S. 353—355 u. 363 ff.) in Betracht.

Was die Entwicklung und Bedeutung der Lehre von den Kreisbogendreiecken, den Dreiecksfunktionen, elliptischen Modulfunktionen und allgemeinen automorphen Funktionen betrifft, so sei hier auf die autographierten Vorlesungen von F. Klein über die hypergeometrische Funktion und über lineare Differentialgleichungen, sowie auf dessen gemeinsam mit Fricke herausgegebenen Vorlesungen über Modulfunktionen und über automorphe Funktionen, ferner auf das Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen von Schlesinger verwiesen. Die Redaktion des Textes schließt so eng als möglich an den Wortlaut des Heftes an.

(1) (Zu Seite 78.) Vgl. Schwarz, Ges. Abh. II, S. 353 ff.

(2) (Zu Seite 80.) Die Richtigkeit dieser Behauptung hängt wesentlich von den Voraussetzungen über $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ ab. Vgl. Schwarz, Ges. Abh. II, S. 221—233. Weitere Untersuchungen über allgemeine Kreisbogendreiecke bei Klein, Math. Ann. 37; Schilling, Math. Ann. 39, 44, 46.

(3) (Zu Seite 80.) Dieser Abschnitt wurde aufgenommen, weil C. Neumann in der Vorrede seiner Vorlesungen über Abelsche Funktionen und auch Klein in seiner Schrift über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale auf eine derartige Mitteilung aus Riemanns Vorlesungen Bezug nehmen.

(4) (Zu Seite 82.) Man sehe hierzu E. Papperitz, Math. Ann. 27. Dort auch weitere Litteraturangaben.

(5) (Zu Seite 84.) Die in eckige Klammern eingeschlossenen Worte sind Zusatz des Herausgebers.

(6) (Zu Seite 86.) Vgl. Schlesinger, Handbuch I, Abschnitt 2, Kap. 3, 4.

(7) (Zu Seite 88.) Vgl. Schlesinger, Handbuch II, Abschnitt 12.

(8) (Zu Seite 91.) Über die weitverzweigte Litteratur der elliptischen Modulfunktionen sehe man Klein-Fricke, Modulfunktionen; Schlesinger, Handbuch II, Abschnitt 13.

(9) (Zu Seite 93.) Zu diesem Theorem s. F. Klein, Math. Ann. 14; E. Papperitz, Math. Ann. 34. Die Litteratur über weitergehende Verwertung und Verallgemeinerung dieses Satzes bei W. Osgood, Encyklop. d. math. Wiss. II B 2, Nr. 27—29.

W.

IV.

Mathematische Noten

(ausgezogen aus dem Nachlaß).

A. Über eine Verallgemeinerung der sechs Gleichungen (19) der Abhandlung Ges. Werke 2. Aufl. XXXI (XXX der 1. Aufl.).

(Aus Akt Nr. 19, Konv. 19_5, d) und Konv. 19_5, b), Bogen 4—6; Akt Nr. 25, Bogen 1, 24.)

Indem sich Riemann eine Abelsche Funktion für $p = 3$ in der Form

$$\sqrt{\alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x''}, \quad \text{wo} \quad \alpha \alpha' \alpha'' = 1,$$

geschrieben denkt, nimmt er die 6 Verhältnisse

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta, \quad \alpha' : \beta' : \gamma' : \delta'$$

aus den Koeffizienten von 4 Abelschen Funktionen

$$\sqrt{\alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x''}, \quad \sqrt{\beta x + \beta' x' + \beta'' x''}, \quad \sqrt{\gamma x + \gamma' x' + \gamma'' x''},$$
$$\sqrt{\delta x + \delta' x' + \delta'' x''}$$

als Klassenmoduln, und stellt bezüglich der 6 Paare von Abelschen Funktionen, welche in einer „Gruppe" enthalten sind, die Aufgabe:

„Wenn die Größen a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'' beliebig gegeben sind, die Lösungen der 6 Gleichungen

$$(1) \quad \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0, \quad \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \frac{d}{\delta} = 0;$$

$$(2) \quad \alpha' a' + \beta' b' + \gamma' c' + \delta' d' = 0, \quad \frac{a'}{\alpha'} + \frac{b'}{\beta'} + \frac{c'}{\gamma'} + \frac{d'}{\delta'} = 0;$$

$$(3) \quad \alpha\alpha' a'' + \beta\beta' b'' + \gamma\gamma' c'' + \delta\delta' d'' = 0, \quad \frac{a''}{\alpha\alpha'} + \frac{b''}{\beta\beta'} + \frac{c''}{\gamma\gamma'} + \frac{d''}{\delta\delta'} = 0$$

zu finden, d. h. die ihnen genügenden Wertsysteme der 6 Größen

$$\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}; \quad \frac{\beta'}{\alpha'}, \frac{\gamma'}{\alpha'}, \frac{\delta'}{\alpha'}$$

zu bestimmen.

Die Aufgabe hat 6 Lösungssysteme. Um sie zu finden, sei die Bezeichnung eingeführt:

$$(\beta a'b'' - \alpha a''b')\left(\frac{a'b''}{\beta} - \frac{a''b'}{\alpha}\right) \equiv a'^2b''^2 + a''^2b'^2 - a'a''b'b''\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$= (ab) = (ba), \quad \text{etc.};$$

so ergibt die Elimination von $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ aus (2), (3):

$$(4) \quad \begin{aligned} &(ab)(cd)[(ab)+(cd)-(ad)-(bc)-(ac)-(bd)] \\ &+ (ac)(bd)[(ac)+(bd)-(ad)-(bc)-(ab)-(cd)] \\ &+ (ad)(bc)[(ad)+(bc)-(ac)-(bd)-(ab)-(cd)] \\ &+ (ab)(ac)(ad)+(ba)(bc)(bd)+(ca)(cb)(cd)+(da)(db)(dc)=0. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (1) folgt

$$a^2 + d^2 + ad\left(\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\delta}{\alpha}\right) \equiv b^2 + c^2 + bc\left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) = r,$$
$$a^2 + c^2 + ac\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \equiv b^2 + d^2 + bd\left(\frac{\beta}{\delta} + \frac{\delta}{\beta}\right) = s,$$
$$a^2 + b^2 + ab\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) \equiv c^2 + d^2 + cd\left(\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\delta}{\gamma}\right) = t.$$

Man führe statt $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ die Unbekannten r, s, t ein, so folgt aus (1)

$$(5) \qquad r + s + t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

und aus der identischen Relation

$$l^2 + m^2 + n^2 - lmn - 4 = 0$$

zwischen

$$l = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}, \quad m = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}, \quad n = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$$

folgt mit Hilfe von (5)

$$(6) \quad \begin{aligned} &rst - s(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) - t(a^2 - c^2)(b^2 - d^2) - a^2d^2(a^2 + d^2) \\ &- b^2c^2(b^2 + c^2) + b^2c^2d^2 + a^2c^2d^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2c^2 = 0. \end{aligned}$$

Da (4), entwickelt, in den Gliedern 3. Dimension nur $r \cdot s \cdot t$ enthält, so erhält man aus (4) mit Hilfe von (6) eine Gleichung 2. Grades in r, s, t; dieser Gleichung, und (5), (6) genügen also 6 Wertsysteme von r, s, t; und jedem derselben entsprechen 2 zueinander reziproke Wertsysteme der Größen $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}; \frac{\beta'}{\alpha'}, \frac{\gamma'}{\alpha'}, \frac{\delta'}{\alpha'}$."

Um (4) zu erhalten, sei gesetzt:

$$\beta a'b'' - \alpha a''b' = (AB) = -(BA), \quad \frac{a'b''}{\beta} - \frac{a''b'}{\alpha} = (A_1B_1) = -(B_1A_1),$$

wo
$$(AB)(A_1B_1) = (ab),$$

so wird aus (2), (3):

$$\beta'(AB) + \gamma'(AC) + \delta'(AD) = 0, \quad \frac{(A_1B_1)}{\beta'} + \frac{(A_1C_1)}{\gamma'} + \frac{(A_1D_1)}{\delta'} = 0,$$

also

$$(ad) - (ab) - (ac) = \frac{\beta'}{\gamma'}(AB)(A_1C_1) + \frac{\gamma'}{\beta'}(AC)(A_1B_1); \quad \text{etc.}$$

Setzt man

$$(ad) - (ab) - (ac) = l', \ (bd) - (ba) - (bc) = m', \ (cd) - (ca) - (cb) = n',$$

$$(AB)(A_1C_1) = \lambda, \ (AC)(A_1B_1) = \lambda'; \ (BC)(B_1A_1) = \mu, \ (BA)(B_1C_1) = \mu';$$

$$(CA)(C_1B_1) = \nu, \ (CB)(C_1A_1) = \nu',$$

also

$$\lambda'\mu'\nu' = \lambda\mu\nu = -(ab)(ac)(bc),$$

und betrachtet die 3 Gleichungen

$$l' = \lambda\frac{\beta'}{\gamma'} + \lambda'\frac{\gamma'}{\beta'}, \quad m' = \mu\frac{\gamma'}{\alpha'} + \mu'\frac{\alpha'}{\gamma'}, \quad n' = \nu\frac{\alpha'}{\beta'} + \nu'\frac{\beta'}{\alpha'},$$

so hat man die identische Relation

$$l'm'n' - \lambda\mu\nu\left(\frac{l'^2}{\lambda\lambda'} + \frac{m'^2}{\mu\mu'} + \frac{n'^2}{\nu\nu'} - 4\right) = 0,$$

daher

$$[(ad)-(ab)-(ac)][(bd)-(ba)-(bc)][(cd)-(ca)-(cb)] - 4(ab)(ac)(bc)$$
$$+ (bc)[(ad)-(ab)-(ac)]^2 + (ca)[(bd)-(ba)-(bc)]^2$$
$$+ (ab)[(cd)-(ca)-(cb)] = 0,$$

was mit Gleichung (4) übereinstimmt. N.

B. Bedingungen für die Klassenmoduln von $p = 3$ zur Reduktion auf den Fall $p = 2$.

(Aus Akt Nr. 19, Konv. 19_5, b), Bogen 30; Akt Nr. 25, Blatt 18.)

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für sämtliche 6 Paare von Abelschen Funktionen *einer* Gruppe die beiden Glieder einander gleich werden (und folglich sich die 6-fach periodischen Thetareihen auf 4-fach periodische reduzieren lassen), ist die, daß eine lineäre Gleichung zwischen drei Gliedern verschiedener Paare einer Gruppe stattfindet“ [d. h. daß sich für die Kurve 4. Ordnung drei Doppeltangenten mit ungeraden Charakteristiken, deren Summe gerade ist, in einem Punkte treffen].

[Je nach der Gruppe hat man für die Moduln folgende Möglichkeiten:]

„(1) $(\alpha, \beta, \gamma) = 0$: $\alpha'' = \beta'' = \gamma'' = 0$; im ganzen 32 ähnliche Fälle.

(2) $\alpha = \beta$: $\alpha'\beta' = \alpha''\beta''$; „ „ 18 „ „

(3) $$\frac{\alpha + \frac{1}{\alpha} - \beta - \frac{1}{\beta}}{\alpha' + \frac{1}{\alpha'} - \beta' - \frac{1}{\beta'}} = \frac{\alpha + \frac{1}{\alpha} - \gamma - \frac{1}{\gamma}}{\alpha' + \frac{1}{\alpha'} - \gamma' - \frac{1}{\gamma'}} : \ \alpha'' = \beta'' = \gamma'' = 1;$$

im ganzen 6 ähnliche Fälle.

(4) $\alpha = \beta,\ \alpha' = \beta',\ \alpha'' = \beta''$; im ganzen 6 ähnliche Fälle.

(5) $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \gamma = \gamma' = 1$; 1 Fall.

Wenn man die halbe Gruppe, von der man ausgeht, mit der zuletzt erhaltenen vertauscht, geht (3) in (4) über, (1), (2), (5) in sich selbst."

Über letzteren Punkt enthält 19_5, b), 30 noch einige Rechnungen.

(Cf. Roch, in Crelles Journ. Bd. 66, S. 111; ferner Cayley in Crelles J. 94, S. 107 ff. (Werke XII, S. 87 ff.), F. Klein in Math. Ann. Bd. 36, S. 59 ff.) N.

C. Die Riemannsche Thetaformel.

(Aus Akt Nr. 19, Konv. 19_5, d); Nr. 25, Bogen 17; Andeutungen in Nr. 19, Konv. 19_5, b), Bogen 33, 34; Nr. 25, Bogen 10, 16.)

Die von Prym („Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel etc." Leipzig, Teubner 1882, und Crelles J. Bd. 93) sogenannte „Riemannsche Thetaformel" findet sich in folgender Gestalt vor:

$$\sum_{\varepsilon}\sum_{\varepsilon'}(-1)^{\sum(\varepsilon_\nu\eta_\nu'+\varepsilon_\nu'\eta_\nu)}\,\vartheta\left(x_\nu'+\varepsilon_\nu'\frac{\pi i}{2}+\sum\varepsilon_\mu\frac{a_{\mu,\nu}}{2}\right)e^{\sum\varepsilon_\nu x_\nu'+\sum\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\frac{a_{\mu,\nu}}{4}}$$
$$\times(y_\nu')\cdot(z_\nu')\cdot(t_\nu')$$
$$=2^p\cdot\vartheta\left(x_\nu+\eta_\nu'\frac{\pi i}{2}+\sum\eta_\mu\frac{a_{\mu,\nu}}{2}\right)e^{\sum\eta_\nu x_\nu+\sum\eta_\mu\eta_\nu\frac{a_{\mu,\nu}}{4}}\cdot(y_\nu)\cdot(z_\nu)\cdot(t_\nu),$$

wo

$$2x_\nu' = x_\nu + y_\nu + z_\nu + t_\nu,\qquad 2y_\nu' = x_\nu + y_\nu - z_\nu - t_\nu,$$
$$2z_\nu' = x_\nu - y_\nu + z_\nu - t_\nu,\qquad 2t_\nu' = x_\nu - y_\nu - z_\nu + t_\nu.$$

Nur steht an beiden Orten

$$\sum\varepsilon_\nu^2\frac{a_{\nu,\nu}}{4}\quad\text{statt}\quad\sum\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\frac{a_{\mu,\nu}}{4},$$
$$\sum\eta_\nu^2\frac{a_{\nu,\nu}}{4}\quad\text{statt}\quad\sum\eta_\mu\eta_\nu\frac{a_{\mu,\nu}}{4}.$$

Von hier geht Riemann durch die Substitutionen

$$x_\nu = 2s_\nu' + s_\nu,\qquad y_\nu = s_\nu + m_\nu'\frac{\pi i}{2}+\sum m_\mu\frac{a_{\mu,\nu}}{2}.$$
$$z_\nu = s_\nu + n_\nu'\frac{\pi i}{2}+\sum n_\mu\frac{a_{\mu,\nu}}{2},\quad t_\nu = s_\nu-(m_\nu'+n_\nu')\frac{\pi i}{2}-\sum(m_\mu+n_\mu)\frac{a_{\mu,\nu}}{2}$$

weiter (cf. auch Prym, Acta Math. III, Formel (R'')) und zu Additionsformeln für die Nullwerte über. N

D. Integrale einfacher totaler Differentialien erster Gattung, bezüglich einer algebraischen Fläche.

(Aus Akt Nr. 19, Konv. 19_5, d); Nr. 26, Bogen 1.)

An einigen Stellen der Papiere (Nr. 19_5, b), Bogen 44, 45; Nr. 25, Bogen 27, 30) finden sich Bildungen von Integralen erster Gattung, die zu einer vollständigen *Schnittkurve* zweier algebraischer Flächen, oder zu der Kurve, die aus q Gleichungen mit $q+1$ Variabeln entsteht, gehören; mit Abzählungen über die Zahl der Verzweigungspunkte.

Ebenso findet sich schon (Nr. 25, Bogen 27) der *Begriff eines zu einer algebraischen Fläche $F=0$ gehörigen Doppelintegrals erster Gattung,* mit Normierung für die nicht-homogene und für die homogene Form der Gleichung $F=0$. Dabei ist aber nur an isolierte Doppelpunkte der Fläche gedacht, und irrtümlich angenommen, daß die Zählerfunktion φ des Differentialausdrucks für diese Doppelpunkte verschwinden müsse. Analog (Nr. 19_5, b)) das m-fache Integral 1. Gattung für eine algebraische Gleichung mit $m+1$ Variabeln.

Der Begriff des *totalen einfachen Differentials erster Gattung für eine algebraische Fläche* ist von Riemann gefaßt und in einigen Rechnungen verfolgt worden.

Für die nicht-homogene Gleichungsform

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}, \overset{r}{z}) = 0$$

finden sich die Formeln (Nr. 19_5, d)):

$$du = \frac{\xi dy - \eta dx}{F'(z)} = \frac{\eta dz - \zeta dy}{F'(x)} = \frac{\zeta dx - \xi dz}{F'(y)},$$

wo $\xi = \xi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-2}{y}, \overset{r-2}{z})$ etc., und

$$\xi F'(x) + \eta F'(y) + \zeta F'(z) = F \cdot \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}, \overset{r-2}{z});$$

und aus der Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \varphi,$$

$$\xi F'(x) + \eta F'(y) + \zeta F'(z) = F \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right).$$

Aus der homogenen Form von

$$F(x, \overset{n}{y}, z) = 0,$$

nämlich

$$t^n F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) \equiv f(x, \overset{n}{y}, z, t)$$

wird

$$du = \frac{\xi' dy - \eta' dx}{f'(z)} = \cdots, \quad \xi', \eta', \zeta' \text{ homogen vom Grade } n-2,$$

abgeleitet; und aus dem Verhalten für $t = 0$ wird geschlossen:

$$\xi' = -\psi_4 x + \psi_1 t, \quad \eta' = -\psi_4 y + \psi_2 t, \quad \zeta' = -\psi_4 z + \psi_3 t,$$

und hieraus auf die Form der obigen ξ, η, ζ für die Gleichung $\overset{n}{F}(x, y, z) = 0$:

$$\xi = -\psi_4 x + \psi_1, \quad \eta = -\psi_4 y + \psi_2, \quad \zeta = -\psi_4 z + \psi_3,$$

wo $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ vom Grade $n - 3$ in x, y, z werden. Ferner die Formeln:

$$\psi_1 f'(x) + \psi_2 f'(y) + \psi_3 f'(z) + \psi_4 f'(t) = f \cdot \varphi,$$
$$\varphi = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi_4}{\partial t}.$$

Auch Versuche der Konstantenzählung für die Anzahl der durch diese Relationen hervorgebrachten Bedingungen. Sodann (ibid. und Nr. 26, Bogen 1) Anwendung auf die Bedingungen für vollständige Differentialien, bezüglich einer Gleichung

$$\overset{n}{F}(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0$$

mit mehr als 2 unabhängigen Variabeln.

Endlich wird (Nr. 26, Bogen 1) zur Anwendung eine Fläche

$$F(t, y, z) = 0$$

berechnet, deren Punkte den Punktpaaren einer Kurve mit $p = 2$ zugeordnet sind, vermöge

$$s_1^2 = \overset{6}{f}(x_1), \quad s_2^2 = \overset{6}{f}(x_2),$$
$$t = s_1 + s_2, \quad y = x_1 + x_2, \quad z = x_1 x_2;$$

und dafür werden die beiden Integralsummen u_1, u_2 des Umkehrproblems als zugehörige Integrale erster Gattung totaler Differentialien angegeben.

(Cf. Picard in Journ. de Math., sér. IV, t. 1, 1885.) N.

E. Die Perioden der hyperelliptischen Integrale erster Gattung als Funktionen eines Verzweigungspunktes.

(Akt Nr. 4.)

Die Werte der Funktion $s = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)(z-x)}$ seien auf der doppelt überdeckten z-Ebene derart ausgebreitet, daß die beiden Blätter längs der Verzweigungsschnitte $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $x\infty$, zusammenhängen Ist dann w ein zur Fläche gehöriges Integral erster Gattung, so sind

$$(1) \qquad y_1 = 2\int_{\infty}^{\alpha} dw, \quad y_2 = 2\int_{\alpha}^{\beta} dw, \quad y_3 = 2\int_{\gamma}^{\delta} dw, \quad y_4 = 2\int_{\delta}^{x} dw$$

die Perioden desselben. Dabei sollen die Integrale im ersten Blatt auf der obern Seite des Verzweigungsschnittes genommen werden.

Wird dann noch gesetzt

$$(2) \qquad u = \int_{\beta}^{\gamma} dw, \quad v = \int_{x}^{\infty} dw,$$

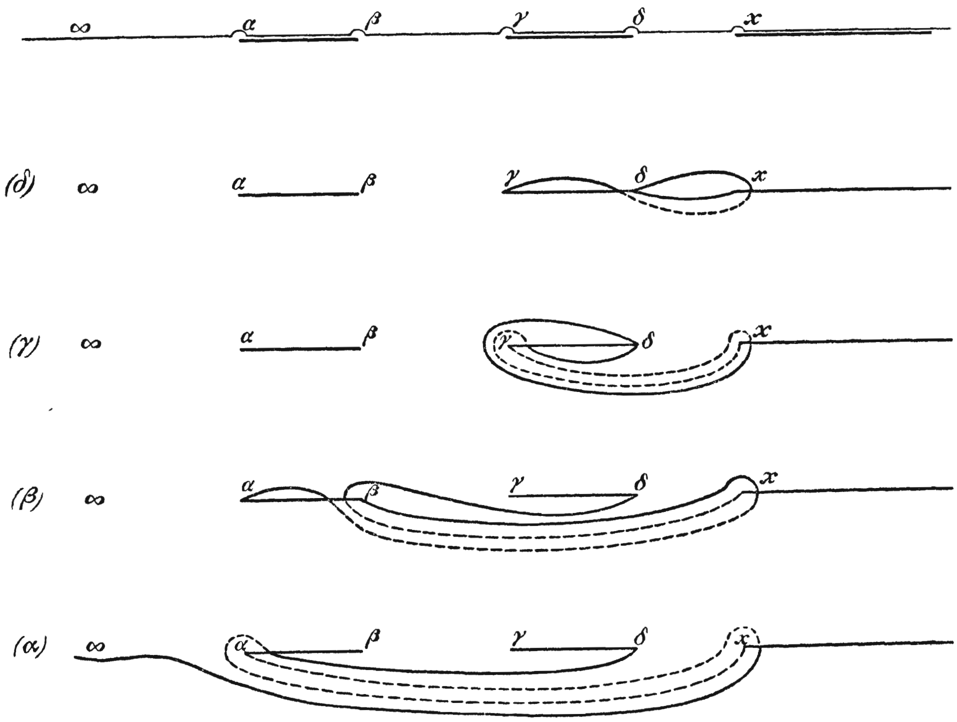

Fig. 7.

so erhält man die Relationen

$$(3) \qquad \begin{aligned} y_1 + y_2 + u + y_3 + y_4 + v &= 0 \\ y_1 - y_2 + u - y_3 + y_4 - v &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$(4) \qquad \begin{aligned} u + y_1 + y_4 &= 0 \\ v + y_2 + y_3 &= 0, \end{aligned}$$

indem man einmal an der obern Seite einer von $-\infty$ nach $\alpha\beta\gamma\delta$ und $+\infty$ ziehenden Linie integriert, das andere Mal an der untern Seite derselben Linie.

Setzt man

$$w = \int \frac{(z-x)}{s}\,dz, \tag{5}$$

so wird $\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{s}$ das zweite Integral erster Gattung mit den Perioden y_1', y_2', y_3', y_4', und es ist

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' + y_3 y_4' - y_4 y_3' = 0. \tag{6}$$

Vollzieht nun x der Reihe nach einen positiven Umlauf um $\delta, \gamma, \beta, \alpha$, so daß der Integrationsweg der y beständig vor dem Punkte x ausweicht, so erhält man die Substitutionen, welche die Perioden bei diesen Umläufen erleiden, indem man die Integrale auf dem abgeänderten Weg mit Hilfe von (4) durch die ursprünglichen ausdrückt. (In der Figur sind die im zweiten Blatt verlaufenden Linien gestrichelt.) Man erhält so

	δ	γ	β	α
y_1 geht über in	y_1	y_1	y_1	$-y_1-2y_2-2y_3$
y_2 „ „ „	y_2	y_2	$2y_1+y_2+2y_3$	$2y_1+3y_2+2y_3$
y_3 „ „ „	y_3-2y_4	$3y_3-2y_4$	y_3	y_3
y_4 „ „ „	y_4	$2y_3-y_4$	$2y_1+2y_3+y_4$	$2y_1+2y_2+2y_3$ $+y_4$

Bildet man nun die 6 Verbindungen $(y_i y_k' - y_k y_i') = (ik)$, so erleiden auch diese lineare homogene Substitutionen, und zwar folgende:

	δ	γ	β	α
(12)	(12)	(12)	(12) + 2 (13)	(12) + 2 (23) + 2 (13)
(43)	(43)	(43)	(43) + 2 (13)	(43) + 2 (23) − 2 (13)
(13)	(13) − 2 (14)	3 (13) − 2 (14)	(13)	− (13) − 2 (23)
(24)	(24)	2 (23) − (24)	(24) + 2 (14) − 2 (12) − 2 (23) + 2 (34)	− 2 (12) − 2 (23) + 2 (14) + 3 (24) + 2 (34)
(14)	(14)	2 (13) − (14)	2 (13) + (14)	2 (12) + 2 (13) − 2 (24) − (14) − 2 (34)
(23)	(23) − 2 (24)	3 (23) − 2 (24)	2 (13) + (23)	2 (13) + 3 (23)

Anmerkung. Das Blatt in Riemanns Nachlaß enthält nur die Formeln mit einigen hier verbesserten Versehen und einer verwischten Bleistiftskizze, aus welcher das Verfahren zu erkennen ist. Die zweite Tabelle ist überdies lückenhaft.

Über den Gegenstand selbst, der erst von Fuchs, Crelles J., Bd. 71 unabhängig wieder aufgenommen wurde, und die Litteratur vgl. man Schlesinger, Handbuch d. Th. d. linearen Differentialgleichungen, § 246—250. Für den Zusammenhang mit Riemanns Untersuchungen über Abelsche Funktionen Th. A. F., Art. 25 (Werke, S. 138 (131 der 1. Aufl.)), sowie den Schluß von Nr. IV, F dieser Nachträge. W.

F. Über die Abbildung der Verzweigungsfläche durch ein Integral erster Gattung.

(Schriftliche Mitteilung Riemanns an Fr. Prym auf eine mündliche Frage.)

Ich habe in meinen Vorlesungen bemerkt, daß man die Zerschneidung der Fläche T durch die p Linien a und b immer so einrichten könne, daß das Bild (S) der Fläche in der w-Ebene aus p Blättern bestehe, deren jedes durch zwei Paare kongruenter Kurven begrenzt ist, und $2p-2$ einfache Verzweigungspunkte habe. Dies Verfahren ist aber nicht in allen Fällen das bequemste und zweckmäßigste, so z. B., wie ich schon sagte, nicht für die Integrale, die ich durch u*) bezeichne, und auch nicht in Ihrem Falle. In diesen beiden Fällen kann man eine einblättrige Fläche (S) erhalten.

Sie wünschen jedoch zu wissen, was aus der obigen p-blättrigen Fläche für $p=2$ in Ihrem speziellen Falle wird.

Dies läßt sich am leichtesten übersehen, wenn man an die Fläche (S) eine kongruente benachbarte Fläche anfügt. In der Figur sind die beiden benachbarten Flächen längs einer Seite der kleineren Parallelogramme aneinander gefügt, so daß diese zusammen ein (blau gezeichnetes) Blatt bilden. Außerdem hat sowohl die Fläche (S), als die ihr kongruente ein anderes Blatt, welches für die eine rot, für die andere schwarz gezeichnet ist. Die Kreuzungslinien zweier Flächen haben die Farben beider.**)

Sie werden nun leicht erkennen, daß man, wenn man zwei Verzweigungspunkte, einen von (S) und einen der benachbarten Fläche, umkreist, erst nach drei Umläufen zum Ausgangspunkt zurückkommt.

Fallen also diese beiden Punkte zusammen, so erhält man einen Punkt, um welchen die Fläche sich dreimal windet.

Ihr Integral kann als ein spezieller Fall angesehen werden von dem Integral

$$w = \int \frac{\varphi(s, z)\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}},$$

*) Die transcendent normierten Integrale erster Gattung.

**) In der Figur sind hier die blauen Linien durch Strichelung, die roten durch Strichpunktierung gegeben.

worin φ das Quadrat einer sogenannten Abelschen Funktion, d. h. so beschaffen ist, daß die $2p-2$ Punkte, für welche $\frac{\varphi(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird, paarweise zusammenfallen.

In diesem Falle kann man diese $p-1$ Punkte zu gemeinschaft-

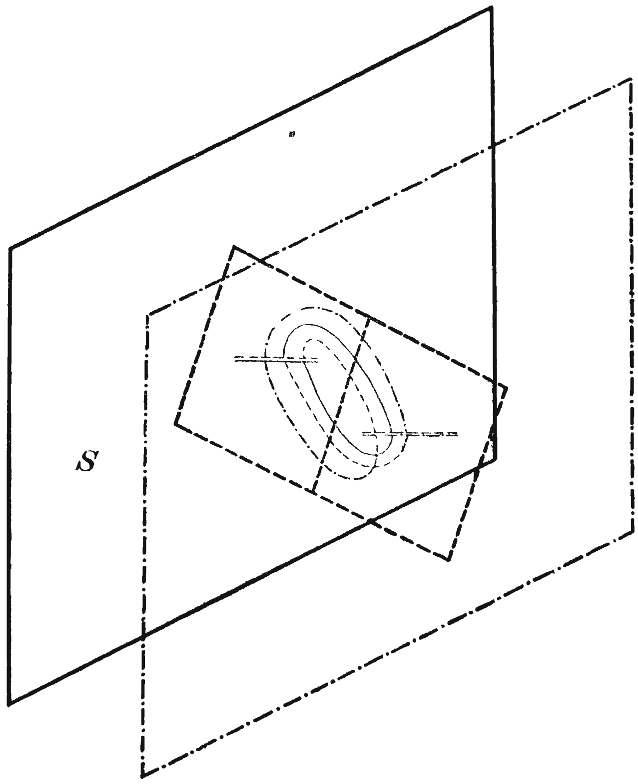

Fig. 8.

lichen Anfangs- und Endpunkten von $p-1$ Paaren der Linien a und b machen.

Die Fläche, welche die Werte von w repräsentiert, wird dann ein Parallelogramm, dessen Seiten die Bilder des p^{ten} Paares (a, b) sind, und aus welchem $p-1$ Parallelogramme ausgeschieden sind, in deren jedem die vier Eckpunkte Bilder Eines Punktes sind, in welchem $\frac{\varphi}{\frac{\partial F}{\partial s}}$ unendlich klein von der zweiten Ordnung wird.

(Für $p=2$ erhalten Sie ein Parallelogramm, aus welchem ein Parallelogramm ausgeschnitten ist.)

Die Betrachtung dieses Falles ist vorteilhaft für die Untersuchung der Differentialgleichungen, welche bei beliebigem p der bekannten Differentialgleichung

$$k(1-k^2)\frac{\partial^2 K}{\partial k^2}+(1-3k^2)\frac{\partial K}{\partial k}=kK$$

entsprechen.

Pisa, 27. März 65. B. R.

Anmerkung. Diese Mitteilung fand sich zunächst in einem Entwurf im Akte 26 („Varia"). Einer gütigen Mitteilung von Herrn F. Prym verdanken wir dann den Text des in seinem Besitz befindlichen Originals und die weitere Nachricht, daß dieser Aufsatz als Antwort auf seine mündliche Anfrage von Riemann niedergeschrieben wurde, als diesem das Sprechen schwer fiel. Die Mitteilung enthält auch die Skizze einer Figur, welche jedoch hier aus rein technischen Gründen etwas abgeändert wurde. Zum Gegenstande vgl. Th. A. F. Art. 12. Ferner F. Klein, Vorlesungen über Riemannsche Flächen, I, S. 60—77 mit weiteren Litteraturangaben. W.

G. Über Thetafunktionen, welche zu besondern Riemannschen Flächen gehören.

Im Akt 19 („Abelsche Funktionen VI"), sowie im Akt 25 („Varia") der Göttinger Papiere finden sich auf einigen Bogen Rechnungen und Andeutungen mit spärlichem Text, welche das im folgenden auseinandergesetzte Problem behandeln. Es sind dies die Bogen 4′, 5′, 6′ von Nr. 19_5, d), von denen 4′ das Datum „Göttingen, Oktober 1862", 5′ das Datum „Göttingen, Januar 1865" trägt. Ferner Bogen 4, 10, 29, 31, 32, 33 von Akt 25. Es sind verschiedene Spezialfälle behandelt, welche jedoch in der Bezeichnung nicht immer deutlich getrennt sind. Auch für die Deutung der Schlußformeln reicht der Text nicht aus, jedoch lassen sie etwa die Richtung erkennen, nach welcher Riemann vorzudringen suchte. Der Ansatz Riemanns gibt übrigens auch einen von den Thetafunktionen unabhängigen Existenzbeweis für die Wurzelfunktionen*).

Man denke sich eine Verzweigungsfläche vom Geschlechte p in der Gestalt eines Systems P von p Parallelogrammen, welche durch $2p-2$ Verzweigungspunkte zu einem Ganzen verbunden sind, gegeben und diese Fläche über a_p hinaus fortgesetzt und λ-mal wiederholt. Die Seite b_p wird dabei λ-mal so lang und die Seiten a_ν, b_ν $(\nu<p)$ vervielfältigen sich λ-mal zu $a_\nu^{(\alpha)}$, $b_\nu^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,\cdots,\lambda)$. Man sehe die Figur, zu welcher sich Skizzen auf den erwähnten Blättern finden.

*) Vgl. Anm. (18) zu der in diesen „Nachträgen" unter I publizierten Vorlesung.

Das so entstehende System P' von $\lambda(p-1)+1$ Parallelogrammen mit $\lambda(2p-2)$ Verzweigungspunkten ist vom Geschlechte $\lambda(p-1)+1$ und definiert seinerseits eine Klasse algebraischer Funktionen. Diejenige Funktion erster Gattung auf P', welche am Querschnitt $a_\nu^{(\alpha)}$ den Periodizitätsmodul 1, aber an den übrigen Schnitten a den Periodizitätsmodul 0 hat, sei $w_\nu^{(\alpha)}$. Der Modul von $w_\nu^{(\alpha)}$ am Querschnitt $b_{\nu'}^{(\alpha+\beta)}$, oder von $w_{\nu'}^{(\alpha+\beta)}$ an $b_\nu^{(\alpha)}$, sei $c_{\nu,\nu'}^{(\beta)} = c_{\nu',\nu}^{(-\beta)}$. Die Funktion, welche am Querschnitt a_p den Modul πi, an den übrigen Schnitten a den Modul 0 hat, ist $\frac{1}{\lambda} u_p$, wenn mit u_ν die Funktion erster Gattung des Systems P bezeichnet wird, welche an a_ν den Modul πi, an den übrigen Schnitten a den Modul 0 und am Schnitt b'_μ den Modul $a_{\nu,\mu}$ hat. Am Querschnitt $b_\nu^{(\alpha)}$

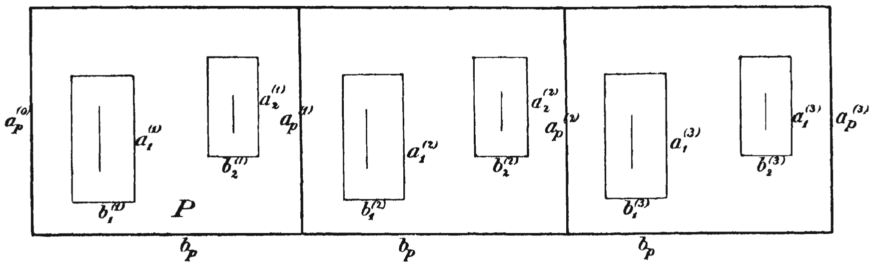

Fig 9.

hat sie den Modul $\frac{1}{\lambda} a_{\nu,p}$, folglich ist auch der Modul von $w_\nu^{(\alpha)}$ an dem Querschnitt b_p gegeben durch $\frac{1}{\lambda} a_{\nu,p}$. Der Modul von $\frac{1}{\lambda} u_p$ an diesem Querschnitt ist $\frac{1}{\lambda} a_{p,p}$.

Da nun das System P' längs $a_p^{(0)}$ und $a_p^{(\lambda)}$ geschlossen zu denken ist, so bleibt es bei cyklischer Vertauschung der λ Parallelogramme des Systems P' umgeändert. Es folgt dann aus der Betrachtung der Periodeneigenschaften ohne weiteres:

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} w_\nu^{(\alpha)} = u_\nu .$$

Versteht man unter ε eine primitive Wurzel der Gleichung $\varepsilon^\lambda = 1$ und setzt

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} w_\nu^{(\alpha)} \varepsilon^{\alpha\varkappa} = v_\nu^{(\varkappa)},$$

so folgt

$$\lambda w_\nu^{(\alpha)} = u_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{\lambda-1} v_\nu^{(\varkappa)} \varepsilon^{-\alpha\varkappa}.$$

Dabei haben die $dv_\nu^{(\varkappa)}$ die Eigenschaft, daß sie an entsprechenden Stellen des ersten, zweiten etc. Systems P sich verhalten wie $\varepsilon^\varkappa : \varepsilon^{2\varkappa} : \varepsilon^{3\varkappa}$ etc.

Man erhält die Perioden der $v_\nu^{(\varkappa)}$ an den Schnitten $a_\mu^{(\alpha)}$ gleich Null, wenn ν von μ verschieden ist und gleich $\pi i \varepsilon^{\alpha\varkappa}$, wenn $\mu = \nu$ ist. Setzt man ferner

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda} c_{\nu',\nu}^{(\alpha)} \varepsilon^{\alpha\varkappa} = b_{\nu,\nu'}^{(\alpha)},$$

so ist die Periode von $v_\nu^{(\varkappa)}$ am Schnitte $b_{\nu'}^{(\beta)}$ gegeben durch $\varepsilon^{\beta\varkappa} b_{\nu,\nu'}^{(\varkappa)}$.

Nun folgen verschiedene Ansätze und Rechnungen, welche zeigen, daß Riemann mit den Perioden der Größen $w_\nu^{(\alpha)}$ Thetareihen bildete, welche er mit Ω bezeichnet, und ebenso aus den Perioden der $v_\nu^{(\varkappa)}$ und denen der u_ν. Er untersuchte dann das Verhalten dieser drei Arten von Thetafunktionen, wenn einfache Integrale für die Argumente eingeführt werden und deren Beziehungen zueinander. Doch ist ein bestimmtes Resultat nicht erkennbar.

Auf andern Blättern finden sich Ansätze, in denen zuerst das System P über die Linie a_p hinaus einmal, sodann das ganze so entstandene System über b_p hinaus λ-mal wiederholt wird. Es finden sich Rechnungen, welche darauf hinweisen, daß Riemann diese Theta durch Heranziehung von den Integralen $\int d \log \vartheta$ und $\int \log \vartheta \, du$ analogen Integralen auf ihr Verschwinden auf dem System P' untersuchte. Nähere Ausführungen beziehen sich auf $\lambda = 2$, also einmalige Wiederholung der ursprünglichen Fläche. Diese tragen auch das Datum „Göttingen, Oktober 1862".

Hier bildet er $\vartheta(v_1 - e_1, v_2 - e_2, \cdots, v_{p-1} - e_{p-1})$ und sodann die Integrale $\int d \log \vartheta$, $\int \log \vartheta \, du_\nu$, $\int \log \vartheta \, dv_\nu$ und erhält so, wenn die Werte von v_ν an den $2p-2$ Stellen, für welche $\vartheta = 0$ ist, mit $\beta_\nu^{(\mu)} (\mu = 1, \cdots, 2p-2,\ \nu > 1, \cdots, p-1)$, entsprechend die von u_ν mit $\alpha_\nu^{(\mu)} (\nu = 1, \cdots, p)$ bezeichnet werden:

$$\sum_{\mu=1}^{2p-2} \alpha_\nu^{(\mu)} = (h_\nu' - h_\nu)\pi i + \sum_1^p a_{\nu,\mu}(g_\mu' - g_\mu) - 2a_{\nu,p} g_p,$$

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{2}\sum_1^{2p-2} \beta_\nu^{(\mu)} + \frac{h_\nu + h_\nu'}{2}\pi i + \sum_{\mu=1}^{p} \frac{g_\mu + g_\mu'}{2} b_{\nu,\mu} = r_\nu,$$

$$\sum_1^{2p-2} \alpha_p^{(\mu)} = h_p \pi i + \sum_{\mu=1}^{p-1} a_{p,\mu}(g_\mu' - g_\mu).$$

Es findet sich noch die Notiz:

$$\text{(B)}\quad \begin{matrix} \text{wenn } \vartheta \text{ gerade } h_p \equiv 0 \bmod 2 \text{ vorzusetzen } \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \\ \text{wenn } \vartheta \text{ ungerade } h_p \equiv 1 \bmod 2 \text{ vorzusetzen } \begin{matrix}1\\0\end{matrix} \end{matrix} \quad \text{Gruppe } \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\binom{0}{0}^{p-1},$$

so daß unverkennbar der Plan vorhanden ist, das Verschwinden von $\vartheta(g_h)(v_1 \cdots v_{p-1})$ in Zusammenhang zu bringen mit den Charakteristiken der auf P unverzweigten $\sqrt{\varphi}$. Die übrigen Aufzeichnungen konnte ich nicht in bestimmter Weise deuten.

Am Schlusse finden sich die auch sonst wiederkehrenden Formeln

$$1)\quad \frac{\Omega(2u_1, 2u_2, \cdots, 2u_p, 0, 0 \cdots 0)}{\vartheta(u_1 \cdots u_p)\,\vartheta\left(u_1, \cdots, u_{p-1}, u_p + \frac{\pi i}{2}\right)} \quad \text{unabhängig von den Größen } u,$$

$$2)\quad \frac{\Omega(0, 0 \cdots 0, 2v_1, 2v_2, \cdots, 2v_{p-1})}{(\Theta(v_1 \cdots v_{p-1}))^2} \quad \text{unabhängig von den Größen } v,$$

$$3)\quad \frac{\Omega(u_\nu - u'_\nu - a_{p,\nu}, v_\nu - v'_\nu - 2e_\nu)}{\Theta(v_\nu - e_\nu)\,\Theta(v'_\nu - e_\nu)} \quad \text{unabhängig von den Größen } e,$$

$$4)\quad \frac{\Omega(u_\nu - u'_\nu - 2e_\nu, v_\nu - v'_\nu)}{\vartheta(u_\nu - u'_\nu - e_\nu)\,\vartheta\left(e_1 \cdots e_{p-1}, e_p + \frac{\pi i}{2}\right)} \quad \begin{matrix}\text{unabhängig von den Größen } e, \\ \text{wenn } \vartheta(e_1 \cdots e_p) = 0,\end{matrix}$$

$$3^*)\quad \frac{\Omega(u_\nu - u'_\nu, 2s_\nu)}{\Theta\left(\frac{v_\nu - v'_\nu}{2} + s_\nu\right)\,\Theta\left(\frac{v'_\nu - v_\nu}{2} - s_\nu\right)} \quad \text{unabhängig von den Größen } s.$$

Hiernach steht es außer Zweifel, daß Riemann ähnliche Untersuchungen, wie sie der Herausgeber im zweiten Teil seines Buches „Untersuchungen über Thetafunktionen" 1895 angestellt hat, geplant und teilweise durchgeführt hat. Man vergleiche zu den Formeln (A) und (B) die § 40—48 dieser Schrift, wo sich das Ergebnis am Ende von § 48 mit (B) genau deckt.

Die Formeln 1, 2, 3, 4, 3* lassen erkennen, daß Riemann das Zerfallen der — übrigens wechselnd und nirgends vollständig definierten — Funktion Ω nach einer Transformation zweiten Grades in bloß von den v_ν und den u_ν einzeln abhängige Faktoren bereits ins Auge gefaßt hat.

Anmerkung. Auf Bogen 4′, Akt 19_5, d) der Riemann-Papiere stimmt die Tinte des Datums (Göttingen, Oktober 1862) nicht mit der des Textes überein, wohl aber mit Tinte des Textes und Datums (Pisa, Januar 1865) von Bogen 5′. Es scheint also, daß Riemann sich diese Notizen aus Göttingen mitgenommen und in Pisa nachträglich bei der Benutzung datiert hat. Beide Bögen machen einen durchaus zusammengehörigen Eindruck, und stellen sie wohl einen Teil der Untersuchungen über Abelsche Funktionen dar, welche Riemann in Italien auszuarbeiten beabsichtigte. W.

V.

Berichte.

Bericht über das Heft: „Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe, S.-S. 1859“

(niedergeschrieben von W. v. Bezold).

Cod. Msc. Riemann 29. Gr. 8. 136 Seiten, in Gabelsberger Stenographie, sogenanntes Pandektenpapier. Die einzelnen Vorlesungen sind nicht äußerlich getrennt und die Trennung nicht mehr festzustellen. Das Heft bezieht sich wahrscheinlich auf die W.-S. 1858/59 gehaltene Vorlesung (vgl. Vorrede dieser „Nachträge“).

S. 1—26 enthält eine ziemlich ausführliche Einleitung über komplexe Größen und Funktionen, Integrale und Integrierbarkeit im allgemeinen, den Cauchyschen Satz und seine Anwendung zu Reihenentwicklungen und Auswertung bestimmter Integrale.

S. 27—35. Die Konvergenz und die gliedweise Integration von Reihen, Potenzreihen, Hinweis auf Briot und Bouquet, Études des fonctions avec des variables imaginaires, J. d. l'école polytechnique, Cah. 36 (1856).

S. 36—42. Das Unendlichwerden der Funktionen, Definition der Ordnung desselben durch $\int d \log y$, die algebraischen Funktionen und ihre Verzweigung.

S. 43—60. Allgemeine Sätze über Verzweigung und lineare Substitutionen, das Funktionensystem $Q\begin{pmatrix} a, & b, & c \cdots & \\ A, & B, & C \cdots & x \end{pmatrix}$. Im wesentlichen der Inhalt des Fragmentes XXI bis etwa S. 385 (363 der 1. Aufl.) der Werke. Eingeschoben ein kurzer Abriß der Determinantentheorie unter Hinweis auf Vandermonde und Cramer.

S. 61. Es werden zunächst nur zwei Verzweigungspunkte angenommen und gezeigt, daß das ganze Funktionensystem Q sich dann zusammensetzen läßt aus Funktionen der Form $(x-a)^{\mu}(x-b)^{-\varkappa-\mu} g_{\varkappa}(x)$, wo $g_{\varkappa}(x)$ eine ganze Funktion $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von x ist.

S. 61—83. Gibt etwa den Inhalt der Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (Werke IV). Eingeschoben sind S. 71, 72 die Haupteigenschaften der Eulerschen Integrale und namentlich der Π-Funktion, insbesondere die Darstellung von $\Pi(\mu)$ als Schlingenintegral. (Die Formel

$$\frac{2\pi i}{\Pi(\mu)} = \int_{\infty}^{\infty} e^{-x}(-x)^{-\mu-1}\,dx$$

findet sich bereits in einer Vorlesungspräparation von 1855, Akt 19_3 „Best. Integrale. Funktionentheorie“. Vgl. auch Werke, S. 146 (137 der 1. Aufl.).)

Die in diesen Nachträgen unter III, A mitgeteilten Ausführungen finden sich von S. 75 an.

S. 84—97 enthält die Herleitung des Gaußschen Kettenbruches, insbesondere S. 89—94 die Entwicklungen des Fragmentes, Werke XXIII. (Der Anfang der Untersuchung, einschließlich des Beginnes der Herleitung der asymptotischen Formel, findet sich bereits auf den letzten Seiten und der Innenseite des Einbandes des Scheringschen Heftes über die Vorlesung W.-S. 1856/57, sodaß also diese Entwicklungen spätestens in diese Zeit zu datieren sind. Es sei bei der Gelegenheit bemerkt, daß aus der ganzen Fassung namentlich bei Schering hervorgeht, daß es sich bei der asymptotischen Formel um eine Weiterentwicklung der von Laplace herrührenden Methode zur Gewinnung asymptotischer Ausdrücke handelt. Man vergleiche Théorie analytique des probabilités, livre I, 2. partie. Mit diesen Gedanken stehen auch im Zusammenhang die Entwicklungen im § 13 der Habilitationsschrift [Werke, S. 260 (246)], welchen man übrigens in dieser Zeit auch bei andern Autoren z. B. Hamilton begegnet.)

Der Abschnitt enthält noch Anwendungen der Kettenbruchentwicklungen auf das Wahrscheinlichkeitsintegral und das Integral $\int_y^\infty e^{-t} t^{c-1} dt$, sowie Bemerkungen über semikonvergente Reihen und den Integrallogarithmus.

S. 97—106 enthält der Hauptsache nach die Anwendung der allgemeinen Theoreme auf die *functiones contiguas* und eine Andeutung, wie die Kettenbrüche zu benutzen seien zur wirklichen Herstellung der Relationen zwischen diesen.

S. 107 gibt die 24 Ausdrücke der P-Funktion durch die hypergeometrische Reihe und die Konvergenzverhältnisse.

S. 108—114 gibt als Beispiel die Anwendung der vorgetragenen Theorie auf die ganzen elliptischen Integrale, die Kugelfunktionen, die Entwicklungskoeffizienten von $(1 - 2r\cos\varphi + r^2)^{-1/2}$ nach $\cos n\varphi$ durch hypergeometrische Reihen.

S. 114—118 reproduziert den Hauptinhalt der Arbeiten Heines, Crelles J. 32, 34.

S. 118—136 ist im vorstehenden unter III, B wiedergegeben. W.

Bericht über die Akten Nr. 19, 25 (mit 18), 26, 4 des Riemannschen Nachlasses.

Die auf der kgl. Universitätsbibliothek zu Göttingen aufbewahrten Nachlaßpapiere Riemanns, welche zum größeren Teil aus losen Bogen und Blättern bestehen, sind von Herrn Weber behufs Herausgabe der Werke zu Konvoluten zusammengefaßt und benutzt worden. Da auf die Aktenhefte, nun bezeichnet als Nr. 19, 25, 26, 4, in unsern „Nachträgen" wiederholt Bezug genommen ist, und da wir vorstehend einige Riemannsche Untersuchungen aus diesen Papieren mitgeteilt haben, so sei über dieselben hier kurz berichtet, als Ergänzung zu dem bereits in den „Anmerkungen" zu den „Vorlesungen" und „Noten" angeführten.

Akt Nr. 19.

Dieser Akt zerfällt in 5 Hefte, die mit $19_1 - 19_5$ bezeichnet seien.

Heft 19_1: In 4°, „P-Funktion", aus Wintersemester 1856/57. Lose, datierte Vorbereitungen zur Vorlesung und zur Abhandlung, Werke IV.

Heft 19_2: In 4°, „P-Funktion durch bestimmte Integrale", 12. Februar 1857. Nur einige lose Blätter.

Heft 19_3: In 4°, „Bestimmte Integrale. Funktionentheorie". Teilweise datierte Vorbereitungen zur Vorlesung über Funktionentheorie, Winter 1855/56, den Gang der Abhandlung über Abelsche Funktionen, Werke VI, bis zum Abelschen Theorem gehend. Ferner Blätter zur Vorlesung über die Theorie der Funktionen einer komplexen Größe, Winter 1856/57, ausmündend in Betrachtung von Funktionen, die einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen, wozu Hefte 19_1, 19_2 gehören.

Einige Notizen. 7. Nov. 1855: „In der Mathematik muß man solche Begriffe, wie Stetigkeit, Unendlichkeit, Ähnlichkeit und Unähnlichkeit immer auf Gleichheiten und Ungleichheiten zurückzuführen suchen. Nur dadurch können die Methoden, durch welche man sie der Rechnung (Untersuchung) unterwirft, zur völligen Klarheit gebracht werden. Es werden die Beweise der Fundamentalsätze der Infinitesimalrechnung dadurch, daß man zugleich diese Aufgabe zu lösen hat, etwas umständlicher."

15. Nov. 1855: „Die Erkenntnis des Umstandes, daß die unendlichen Reihen und die mehrfachen Integrale in zwei Klassen zerfallen [je nachdem der Grenzwert unabhängig von der Anordnung, bezw. von der Art, wie man das Gebiet, wenn es ins Unendliche geht, wachsen läßt; oder nicht], bildet einen Wendepunkt in der Auffassung des Unendlichen in der Mathematik."

28. Febr. 1856, auf Jacobis Bemerkung über die Umkehrung eines Abelschen Integrals bezüglich: „Vielleicht etwas unvorsichtig, es lasse sich keine mehr als zweifach periodische Funktion von einer Variabeln denken."

Heft 19_4: In 4°, „Elliptische und Abelsche Funktionen. Funktionentheorie." Vorbereitung zur Vorlesung über elliptische Funktionen, von Sommer 1856, an Legendre anknüpfend und bis zur Transformationstheorie und Darstellung durch die Thetafunktionen gehend; sodann Fortsetzung über Abelsche Funktionen, von Sommer 1856. Ferner Manuskriptentwürfe und Abklatsch von Abhandlung VI. Zusatz zum ersten Absatz von XIV. Anfang der Vorlesung von Sommer 1859 über elliptische und Abelsche Funktionen.

Heft 19_5: In 2°, in blauem Umschlag mit Aufschrift „Abelsche Funktionen VI, 19". Dieses Heft zerfällt wieder in vier einzelne Konvolute:

a) Entwurf zu Abhandlung XI „Über das Verschwinden der Thetafunktionen"; der Abhandlung fast wörtlich entsprechend. Mit Briefentwurf an Dedekind, aus Italien 1865. — Einige Seiten aus der algebraischen Theorie von Weierstraß über Integrale erster und zweiter Gattung; sehr wahrscheinlich aus einer Mitteilung von Weierstraß an Riemann*).

b) 51 lose Bogen und Blätter, mit Bleistift nochmals überschrieben: „Abelsche Funktionen". Dieses Konvolut enthält hauptsächlich Vorbereitungen und Rechnungen zu der hier herausgegebenen Vorlesung von 1861/62, besonders über $p=3$, auch 4; beginnend 1858, wo schon die Gleichungen (17)—(20) von Werke XXXI (XXX der 1. Aufl.) auftreten. Dazu zahlreiche zerstreute Notizen anderer Art. (Dies ist das in den Anmerkungen zitierte Konvolut 19_5, b), Bogen 1—51.)

c) Überschrieben: „Abelsche Funktionen. Entwürfe zu der großen Abhandlung". Bleistiftentwürfe zu VI.

d) Überschrieben: „ϑ-Funktionen", innen: „Italien. ϑ-Funktionen". 6 Bogen, teilweise aus der italienischen Zeit (in den Anmerkungen mit 19_5, d), Bogen $1'$—$6'$ zitiert). N.

*) Diese Blätter sind Herrn Mittag-Leffler zur Publikation in den Acta Mathematica übergeben.

Akt Nr. 25, „Varia“, mit Akt Nr. 18.

Der Akt Nr. 25 enthält 47 lose Bogen und Blätter und eine Reihe besondere Konvolute. Die Blätter gehören mit Akt 19_5, b) zusammen. Einige der Hefte enthalten Notizen aus der Frühzeit, besonders physikalischen Inhalts. Ferner naturphilosophisch-mechanische Rechnungen: Variationsformeln bei sich zeitlich fortpflanzendem Potential; über Kräfte, die das „Widerstreben eines Raumatoms gegen die Verschmelzung mit einem benachbarten“ messen; wobei es sich um die Zurückführung von Fernwirkungen auf Aktionen von zwischenliegenden materiellen Atomen zu handeln scheint. Ferner einige Bogen mit historisch-litterarischen Anmerkungen über Leibniz' Leben und Schriften. Heftchen über Zahlentheorie, Vorlesungsheft über Elastizität und Elektrizität von 1858, Entwürfe zur Habilitationsschrift XII und zum Habilitationsgesuch, mit den [Werke, 2. Aufl. S. 547 (1. Aufl. S. 515) berührten] drei zur Probevorlesung vorgeschlagenen Thematen:

1) Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe.

2) Über die Auflösung zweier Gleichungen zweiten Grades mit zwei unbekannten Größen.

3) Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Akt Nr. 18, „Naturphilosophisches“, gehört eigentlich zu den Heften des Aktes Nr. 25; er enthält auch noch Blätter zu XII der Werke. N.

An einigen Stellen finden sich Rechnungen über das Integral

$$\int e^{-av}\,\vartheta(v-a)^{\alpha}\,\vartheta(v-b)^{\beta}\,\vartheta(v-c)^{\gamma}\,\vartheta(v-d)^{\delta}\,dv,$$

wo ϑ die elliptische Thetafunktion bezeichnet, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ und die Integration zwischen singulären Stellen zu verstehen ist. Doch ist ein bestimmtes Resultat nicht erkennbar. W.

Akt Nr. 26, „Varia“.

Enthält, außer wenigen Rechnungen — so über die Reihe

$$\varphi(b)=\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{an^4+bn^3+cn^2+dn},$$

in der c und d als Funktionen von b angesehen werden —, ein frühes Heft mit einem Aufsatz: „Über den Gang des Potentials auf der Achse einer Franklinschen Tafel mit kreisförmigen Belegungen“ und ähnlichem, nach Clausius; ferner ein Heft: „ϑ-Funktionen, Nobilische Ringe, Attraktion des elliptischen Zylinders. Reziprozitätsgesetz“. Dann den Vorschlag zu einer von der Fakultät zu stellenden hydrodynamischen Preisfrage; Berichtsentwürfe bez. der Hannoverschen Gradmessungsarbeiten und Arbeiten in Bezug auf die Gestalt der Erde, an denen sich Riemann theoretisch beteiligen will; und die folgenden Thesenentwürfe zur Doktor-Disputation:

1) Es existieren keine magnetischen Fluida.

2) Faradays „Induction in curved lines“ ist nicht haltbar.

3) Man kann ohne der Allgemeinheit zu schaden die Differentialrechnung der Analysis vorausschicken.

4) Das Reversionspendel ist nicht das geeignetste Mittel um die Pendellängen zu bestimmen.

5) Die Lehre von der Erhaltung der Kraft ist experimentell noch nicht genügend erwiesen.

6) Der Begriff Spannung ist bisher in der Elektrizitätslehre noch nicht mit der gehörigen Schärfe aufgefaßt worden. N.

Akt Nr. 4: „P-Funktionen, Svolgimento XXIII. 4."

Enthält 101 lose Blätter, darunter Entwürfe zu dem Fragment XXIII der Werke von H. Weber, und Korrespondenz, welche sich auf die Herausgabe bezieht. Auf einigen schlecht erhaltenen Blättern finden sich nicht näher zu entziffernde Ansätze und Rechnungen über P-Funktionen mit 4 und 5 Verzweigungspunkten. Auf einem Blatt ist die unter IV, E mitgeteilte Untersuchung skizziert. W.

Persönliches.

In den hier besprochenen Papieren Riemanns finden sich mitten unter Rechnungen auf einigen Blättern Zitate aus der antiken und deutschen Litteratur, welche, da er sie bei der Arbeit vor sich hatte, seinen Stimmungen und Anschauungen besonders entsprochen haben dürften. Einige darunter sind recht bezeichnend und wir setzen sie darum her.

1. Non hoc praecipuum amicorum munus est, prosequi defunctum ignavo questu, sed quae voluerit meminisse, quae mandaverit consequi.
(Tacitus, Annales II. 71.)

2. Wo es die Sache leidet, halte ich es immer für besser, nicht mit dem Anfang anzufangen, der immer das Schwerste ist.
(Schiller, Briefwechsel mit Goethe vom 5./II. 1796.)
(Das Original enthält nach „Schwerste" noch die Worte „und Leerste".)

3. Wenn Du Wissenschaft lehrst und sie nicht mit lebender Anmut
Vorträgst, gehet der Jüngling, der hört, zu dem lieberen Buche.
Schneller lernt er sie dort und besser, weil er sie froh lernt.
Aber es kann auch kein Buch den erfreuenden Lehrer verdrängen,
Der mit Beredtsamkeit sprechend den horchenden Jüngling begeistert.
Er bereitet sich vor, wie, wer gefällt auf dem Schauplatz.
Dies hat er oft zwei Stunden gethan, um eine zu lehren.
(Klopstock, Werke, Epigramm 62.)

4. Sei, wenn neues du wagst, so bestimmt als möglich; doch sei auch
Völlig gewiss, man seh's schief und erkläre dich falsch.
Denn du begehst ja nur einmal den schrecklichen Fehler der Neuheit,
Und kein Leisten ist noch, dem man sie passe, gemacht.
(Klopstock, Werke, Epigramm 67.)

5. Die Wissenschaft hat dreierlei Thun:
Suchen, Binden, Gestalten.
Sie denken, sie könnten lorbeerruhn,
Wenn sie's mit einem gehalten. (Franz Kugler.)

6. *Ταράσσει τοὺς ἀνθρώπους οὐ τὰ πράγματα ἀλλὰ τὰ περὶ τῶν πραγμάτων δόγματα.* (Epictet, Enchiridion c. 5.)

Das Interesse Riemanns an physiologischer Optik bezeugen zwei von ihm selbst angefertigte Aufnahmen des blinden Fleckes in beiden Augen. W. N.

Verzeichnis der von Riemann angekündigten Vorlesungen. (1)

W.-S. 1854/55: Die Theorie der Integration der partiellen Differentialgleichungen nebst Anwendung derselben auf verschiedene Probleme der Physik. (2)

S.-S. 1855: Bestimmte Integrale. 4 Std. wöch.

W.-S. 1855/56: Die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere elliptische und Abelsche. (3) 3 Std. wöch.

S.-S. 1856: Die mathematische Theorie der Elastizität fester Körper. 4 Std. wöch., morgens um 7 Uhr.

„ Auserlesene physikalische Probleme. 2 Std. wöch., unentgeltlich.

W.-S. 1856/57: Die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere hypergeometrische Reihen und verwandte Transcendenten. (4) Freit. von 12—1 Uhr, Sonnab. von 11—1 Uhr.

S.-S. 1857: Die Theorie der elliptischen und Abelschen Funktionen. 5 Std. wöch. um 11 Uhr.

W.-S. 1857/58: Die Theorie der elliptischen und Abelschen Funktionen. 4 Std. wöch. um 8 Uhr.

S.-S. 1858: Die mathematische Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. (6) 4 Std. wöch. um 9 Uhr.

„ Ausgewählte physikalische Probleme. Mittw. um 9 Uhr öffentlich.

W.-S. 1858/59: Über Funktionen einer veränderlichen Größe, insbesondere über hypergeometrische Reihen und verwandte Transcendenten. (5) 4 Std. wöch. um 10 Uhr.

„ Die höhere Mechanik. 4 Std. wöch. um 9 Uhr.

S.-S. 1859: Die mathematische Theorie der Schwere, des Magnetismus und der Elektrizität. (6) Mont., Dienst., Donnerst., Freit. um 9 Uhr.

„ Über elliptische Funktionen. Mont., Dienst., Donnerst., Freit. um 5 Uhr.

W.-S. 1859/60: Die mathematische Theorie der Elastizität fester Körper. 4 Std. wöch. um 11 Uhr.

S.-S. 1860: Die mathematische Theorie der Schwere, der Elektrizität und des Magnetismus. (6) Mont., Dienst., Mittw. u. Donnerst. um 9 Uhr.

„ Die Methode der kleinsten Quadrate. 2 Std. wöch. um 5 Uhr öffentl.

W.-S. 1860/61: Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit Anwendung auf physikalische Probleme. (2) Mont., Dienst., Mittw., Donnerst. u. Freit. um 11 Uhr.

S.-S. 1861: Die mathematische Theorie der Schwere, der Elektrizität und des Magnetismus. (6) 5 Std. wöch. um 9 Uhr.

„ Über Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere elliptische und Abelsche. (7) 4 Std. wöch. um 10 Uhr.

W.-S. 1861/62: Fortsetzung der Vorlesungen über die Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe. (8) 3 Std. wöch. um 11 Uhr, unentgeltlich.

S.-S. 1862: Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit Anwendungen auf physikalische Fragen. (2) 5 Std. wöch. um 9 Uhr.

W.-S. 1862/63: Die mathematische Theorie der Schwere, des Magnetismus und der Elektrizität. 5 Std. wöch. um 11 Uhr.

S.-S. 1863: [wie ad S.-S. 1862].

W.-S. 1863/64: Ausgewählte Kapitel der mathematischen Physik.

S.-S. 1864: [wie ad S.-S. 1862].
W.-S. 1864/65, S.-S. 1865, W.-S. 1865/66 (und W.-S. 1866/67): Ankündigung soll nach Rückkehr von der Reise erfolgen.
S.-S. 1866: Ankündigung wird erfolgen, sobald seine Gesundheit Riemann zu lesen erlaubt. (9)

Anmerkungen.

(1) Das Verzeichnis ist aus den „Göttinger Nachrichten", Jahrg. 1854—1866, gezogen.

(2) Auf diese Vorlesung bezieht sich K. Hattendorffs Herausgabe: „Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen von Bernh. Riemann," Braunschweig, Fr. Vieweg u. Sohn, 1869, von der jetzt, statt einer 4. Ausgabe, eine völlige Neugestaltung durch Herrn H. Weber vorliegt. Die Hattendorffsche Nachschrift (vgl. die Vorrede dieses Buches) war die der Vorlesung von W.-S. 1860/61. Das von Riemann herrührende Manuskript der Vorlesung, datiert Michaelis 1854, welches Hattendorff benutzt hat, liegt bei den Göttinger Papieren (vgl. F. Klein in Gött. Nachr. 1897, H. 2, S. 189).

(3) An diese Vorlesung schließt Riemanns Abhandlung über die Theorie der Abelschen Funktionen (Werke VI) an. Nach einer Bemerkung in der Einleitung zu dieser Abhandlung (Werke, S. 102 der 2., S. 95 der 1. Ausgabe) hat sich die Vorlesung noch auf das Sommersemester 1856 ausgedehnt, obwohl für dieses Semester keine Fortsetzung angekündigt war. Auf diese Vorlesung bezieht sich ferner der erste und größere Teil, S. 1—192, des bei den Göttinger Papieren als Akt Nr. 37 liegenden Heftes von E. Schering (vgl. F. Klein in Gött. Nachr., Gesch. Mitteil. 1898, H. 1, S. 18 Anm.). Aus dem ersten Stück des Heftes sei hervorgehoben, daß die Einleitung Begriff und Bedeutung der komplexen Größen eingehend bespricht und daß einige Ausführungen zum Dirichletschen Prinzip gegeben werden, welche in den ersten Versuchen etwas abweichen von der Ausführung in der Abhandlung; aus dem letzten Stück, neben dem von H. Stahl benutzten Teil über elliptische Funktionen (Sommer 1856), eine eingehende Diskussion der Abbildung der zweiblättrigen Riemannschen Fläche durch ein Integral erster Gattung, sowie für diesen nämlichen Fall die Erledigung der algebraischen Darstellung einfacher Thetaquotienten mit vollständiger Konstantenbestimmung. Diese letzteren Diskussionen scheinen nachträgliche Bearbeitungen Scherings zu sein. Eine kürzere Nachschrift der Vorlesung durch Herrn R. Dedekind erwähnt Herr H. Stahl in dem Vorwort zu seinen „Elliptische Funktionen, Vorlesungen von B. Riemann", Leipzig, B. G. Teubner 1899.

(4) An diese Vorlesung schließen IV, XXI und XXIII der Ges. Werke an; ferner II dieser „Nachträge". Auf sie bezieht sich der zweite Teil des in Anm. (3) angeführten Scheringschen Heftes, von S. 193—276. (Vgl. Vorrede und Anm. zu II dieser „Nachträge".)

(5) Zu dieser Vorlesung gehört III, A und III, B dieser „Nachträge". Über die bezügliche v. Bezoldsche Nachschrift, Akt Nr. 29 der Göttinger Papiere, vgl. den besonderen Bericht auf S. 109 und die Vorrede.

(6) Von dieser 1858—1861 viermal angekündigten Vorlesung existiert eine Bearbeitung durch K. Hattendorff: „Schwere, Elektrizität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von B. Riemann", Hannover 1876, C. Rümpler, welche, nach der Vorrede dieser Bearbeitung, auf einer Nachschrift der letzten Vorlesung von Sommer 1861 beruht.

(7) Zu dieser Vorlesung gehört die bei den Göttinger Papieren liegende Nachschrift von K. Hattendorff; einige jetzt nachträglich nach Göttingen abgegebene Bogen beziehen sich auf den Anfang der anschließenden Vorlesung von W.-S. 1861/62. Aus dieser Nachschrift ist das in einer kleineren Anzahl von Exemplaren autographisch vervielfältigte Heft von Herrn F. Prym entstanden, ebenso eine Reihe weiterer noch existierender Vorlesungshefte; das Rochsche Heft (vgl. Ges. Werke, S. 483 (456 der 1. Aufl.)) ist in diesem Teile vielleicht selbständige Nachschrift. Aus dem Hattendorff-Prymschen Hefte, in Verbindung mit dem in (3) angeführten Scheringschen, ist dann das ebenda angeführte Buch von Herrn H. Stahl (vgl. das Vorwort dieses Buches) hervorgegangen.

(8) Aus dieser Vorlesung stammen XXX und XXXI (XXIX u. XXX der 1. Aufl.) der Ges. Werke und I der „Nachträge". Vgl. darüber die Vorrede zu diesen Nachträgen, ebenso über die bezüglichen Nachschriften von Herrn F. Prym und B. Minnigerode, und die Bearbeitung eines Teils derselben durch G. Roch. Diese Vorlesung war zugleich die letzte vollständig gehaltene Vorlesung Riemanns.

(9) Von den angekündigten Vorlesungen S.-S. 1855 (Bestimmte Integrale), S.-S. 1856 und W.-S. 1859/60 (Elastizität fester Körper), S.-S. 1857 und W.-S. 1857/58 (Elliptische und Abelsche Funktionen), W.-S. 1858/59 (Höhere Mechanik), S.-S. 1859 (Elliptische Funktionen), S.-S. 1860 (Methode der kleinsten Quadrate) liegen bis jetzt keine Nachschriften vor. N.