1VA60

Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

O UTICAJU SLABOG SMICAJNOG STRUJANJA I ROTACIJE SISTEMA NA RASPROSTIRANJE INTERNIH NELINEARNIH DUGIH GRAVITACIONIH TALASA

(doktorska disertacija)

Mr Tankosić N. Milorad
dipl. maš. ing.

S A D R Ž A J

U V O D

Talasi su jedna od najrasprostranjenijih pojava u prirodi. Po neki put je talasna priroda pojave očigledna kao na primer pri kretanju na površini vode. Kod zvuka ili svetlosti talasna priroda pojave ostala je dugo skrivena i tek su je eksperimenti kasnije otkrili. Talas je bilo koji prepoznatljiv signal koji se prenosi iz jednog dela sredine u drugu sredinu sa prepoznatljivom brzinom prenošenja. Osnovna svojstva talasa je da se on širi u prostoru. Širenje talasa nije identično sa kretanjem fluidnih delića u medijumu po kojem se talas širi. Kod talasa se fluidni delići pomiču veoma malo iz svog položaja ravnoteže, ali ipak kažemo da se talas kreće. Poremećaj (talas) se može širiti pravilno ili nepravilno, ali on ne mora imati pravilan oblik. Brzina i smer širenja poremećaja ne moraju zavisiti od kretanja pojedinih fluidnih delića. Talasi mogu biti transvezalni i lungftudinalni. Transvezalni talasi su oni talasi kod kojih fluidni delići osciluju normalno na smer širenja talasa. Talasi kod kojih se smer širenja pomerećaja nalazi u pravcu pomeranja fluidnih delića zovu se longitudinalni talasi. Postoje i druge podele talasa, a prema G.B. WEHITHAM-u [1]. Talasi se dele na hiperbolične i disperzione. Hiperbolični talasi su oni talasi koji se mogu opisati hiperboličnom, parcijalnom, diferencijalnom jednačinom sledećeg oblika:

$$A_{tt} = C_o^2 \nabla^2 A$$

C_o - konstanta

Hiperbolični talasi mogu biti linearni i nelinearni. Linearni talasi su oni talasi kod kòjih je promena pritiska, gustine i brzine mala, a oni su opisani prethodnom jednačinom. Najistaknutiji primer nelinearnih hiperboličnih talasa su takozvani udarni talasi kod kojih imamo nagle skokove pritiska gustine i brzine. Osim hiperboličnih talasa postoji klasa disperzionih talasa, koji takođe mogu biti linearni i nelinearni. Disperzioni talasi su oni talasi kod kojih faza brzine nije konstantna i zavisi od talasnog broja. Ako faza brzine nije ista za sve talasne brojeve onda će se veličine koje se prenose rasuti odnosno imaćemo disperziju. Kod linearne disperzije disperzioni odnos je:

$$\omega^2 = gk$$

g - ubrzanje zemljine teže
k - talasni broj.

Kod nelinearne disperzije disperzioni odnos je definisan na sledeći način:

$$\omega^2 = gk\,(1 + a^2k^2 + \ldots\ldots\ldots)$$

Linearni disperzioni talasi su oni talasi kod kojih je rešenje sistema dato u obliku:

$$A = a\cos(kx - \omega t)$$

a - amplituda talasa
$(kx - \omega t)$ - faza talasa
ω/k - brzina talasa
k - talasni broj
ω - kružna frekvencija

Kod nelinearnih disperzionih talasa rešenje može biti dato u sledećem obliku:

$$A = a\cos(kx-\omega t) + \frac{1}{2}ka^2\cos 2(kx-\omega t) + \frac{3}{8}k^2a^3\cos 3(kx-\omega t)+\ldots$$

$$\omega^2 = gk(1 + a^2k^2 + \ldots\ldots)$$

Vrlo je teško strogo razdvojiti hiperbolične i disperzione talase pa imamo često slučajeve da se ove dve klase talasa mogu preklapati. Solitarni talasi koji su predmet izučavanja ovog rada spadaju u nelinearne disperzione talase. Solitarni talas se sastoji od jedne "grbe" konstantnog oblika i konstantne brzine. Ovaj talas je prvi eksperimentalno posmatrao SCOTT RUSSELL (1844.) a približan izraz za solitarni talas pronašli su BOUSSINESQ (1871.) i RAYLEIGH (1876.) . Solitarni talasi se proučavaju u stratefikovanom fluidu. Stratefikovani fluid je onaj fluid kod kojeg se gustina fluida menja a gustina fluidnih delića ostaje konstantna. Stratefikovani fluid imamo u morima, okeanima i zemljinoj atmosferi. Solitarni talasi se takođe mogu pojaviti u zemljinoj atmosferi kao i na morima i na okeanima na slobodnoj površini. Izučavanje internih solitarnih talasa spada u oblast nelinearne teorije sa primenom kod jednog veoma važnog problema geofizičke mehanike fluida. Može se pojaviti problem talasnih kretanja pri jednom smicajnom strujanju. Jednačine koje opisuju ova kretanja sadrže veoma jake singularitete u slučajevima u kojima je brzina rasprostiranja talasa jednaka brzini smicajnog strujanja, tako da neposredna okolina ovih slojeva zahteva poseban tretman poznat u literaturi pod nazivom "teorija nelinearnog kritičnog sloja". Do sada poznati rezultati koji daju strujnu sliku u okolini ovog sloja, upoređeni su sa najnovijim istraživanjima strujanja u atmosferi planete Jupiter i ukazuju na to da bi poznati strujni fenomen Jupitera - Velika crvena pega mogao ustvari da bude jedan solitarni talas. Hipotezu o ovakvom poreklu Velike crvene pege su pre nekoliko godina postavili T. MAXWORTHY i L. REDEKOPP sa Južno-Kalifornijskog univerziteta u Los Anđelosu. Međutim, kada je u pitanju atmosfera Jupitera, onda treba imati u vidu da su brzine strujanja relativno velike a temperature veoma niske, tako da uticaj stišljivosti ne može biti zanemaren. U ovom radu neće biti razmatrana strujanja sa veoma jakim singularitetima već takozvano slabo smicajno strujanje kod kojih je referentna brzina znatno manja od brzine rasprostiranja talasa. Razmatranjem modela slabo smicajnog strujanja ima potpuno opravdanje samo gde je rfferentna brzina smicajnog strujanja znatno manja od brzine rasprostiranja linearnih dugih gravitacionih talasa. Ovakva slaba smicajna strujanja mogu biti prisutna u zemljinoj atmosferi, morima i okeanima. U ovom slučaju postupak izvođenja jednačine KORTEWEG-de VRIES-a je znatno jednostavniji. Do sada ovakav model nije proučavan. U ovom radu proučavaće se interni (unutrašnji) talasi u stratefikovanoj tečnosti. Inače, nelinearna teorija talasnih kretanja se razvila veoma mnogo u poslednjih nekoliko godina, zahvaljujući tome što postoji velika primena ovih izučavanja u mehanici, fizici plazme, nelinearnoj optici itd. Ovom naglom razvoju nelinearne teorije talasnih kretanja, doprineo je nagli razvoj matematičkih metoda kao što su pertibacioni postupci, zatim inverzna metoda rasejanja koje su momogućile tačna i približna rešenja jednačina koje opisuju talasna kretanja kao što su: SCHRODINGER - ova jednačina, KLEIN-GORDON-ova jednačina, BENJAMIN-ONO-ova jednačina i jednačina KORTEWEG - de -VRIES-a. Gore spomenute jednačine imaju sledeći oblik:

$A_t + C_o \left(1 + \frac{3}{2}\frac{A}{h_o}\right)A_x + \gamma A_{xxx} = 0$ - jed. KORTEWEG-de VRIES-a

i $B_t + B_{xx} + |B|^2 B = 0$ - uopštena SCHRÖDINGER-ova jednačina

$A_{tt} - A_{xx} + V'(A) = 0$ - KLEIN-GORDON-ova jednačina

$A \;+\bar{U}_{us}A_{\xi} + \alpha AA_{\xi} - \beta\, \mathcal{H}[A]_{\xi\xi} = 0$ BENJAMIN-ONO-ova jednačina

Jednačina KORTEWEG-de VRIES-a opisuje one slučajeve talasa koji imaju manju ali konačnu amplitudu kod kojih se efikti disperzije i nelinearnosti, nalaze tačno u ravnoteži što omogućava nastajanje talasa stalnog oblika kao što su solitarni i knoidalni talasi [1]. Pod uslovom da je sloj tečnosti relativno tanak jednačinom KORTEWEG-de VRIES-a se mogu opisati gravitacioni talasi na slobodnoj površini jedne homogene tečnosti i talasi prouzrokovani stratifikacijom, koji nastaju unutar jedne nehomogene tečnosti. BENJAMIN-ONO-vom jednačinom [2] se opisuju talasna kretanja u nehomogenoj tečnosti velike debljine. BENNEY [3] je izučavao uticaj prisustva smicajnog strujanja kod talasa na slobodnoj površini pri čemu je referentna brzina istog reda kao i brzina rasprostiranja linearnih gravitacionih talasa. U radu LEE E. BEARDSLEY-a [4] posmatrani su unutrašnji talasi gde su tretirani samo takozvani regularni "modovi" singularni "modovi" se izučavaju u radu MASLOWE E. REDEKOPP [5]. Singularni "modovi" se pojavljuju na mestima gde nastaju nelinearni kritični slojevi. Nelinearni kritični slojevi nastaju kada je neka referentna brzina smicajnog strujanja istog reda veličina kao i brzina rasprostiranja linearnih dugih gravitacionih talasa.

U slučaju kada su ove dve brzine jednake nastaju singularni "modovi" a u svim ostalim slučajevima imamo regularne "modove". Za slučaj unutrašnjih talasa u relativno tankom sloju stratefikovane tečnosti koji je bar sa jedne strane ograničen beskonačno dubokim slojem homogene tečnosti izvodi se BENJAMIN-ONO-Ova jednačina. Svi dobijeni rezultati imaju veliku primenu u geofizičkoj mehanici fluida kod nelinearnih dugih gravitacionih talasa. Ovaj rad se sastoji iz sedam delova.
U prvom delu dat je kratak istorijat izučavanja solitarnih talasa. Takođe je pokazano da je solitarni talas rešenje jednačine KORTEWEG-de VRIES-a koja opisuje duge talase u plitkoj vodi. U drugom delu izučavani su interni solitarni talasi u stratefikovanom fluidu. Nehomogena neviskozna tečnost debljine (h) je sa obe strane ograničena ravnim pločama.

U trećem poglavlju izučavaju se solitarni talasi kod istog modela kao u prethodnom poglavlju s tim što još imamo i obrtanje (kružno kretanje) celog sistema (modela). Pri obrtanju celog sistema (modela) mogu se pojaviti tri slučaja u zavisnosti od vrednosti eksponenta n. Eksponent n se javlja u izrazu za recipročnu vrednost Rosbijevog broja koji predstavlja odnos konvektivnog i Koriolisavog ubrzanja

$$\frac{1}{R_o} = 2\varepsilon^n = \frac{\omega h}{\sqrt{gh}}$$

R_o - Rosbijev broj
ω - ugaona brzina
ε - mali parametar koji reprezentuje odnos amplitude talasa i debljine sloja stratefikovane tečnosti.
g - ubrzanje zemljine teže
h - debljina tečnosti

Eksponent n može da ima tri vrednosti:

1. $n > 1$ - rotacija je veoma mala i može se zanemariti a ovaj slučaj je detaljno izučen u drugom poglavlju.

2. $n = 1$ - u ovom slučaju rotacija se ne može zanemariti a njen uticaj se manifestuje u jednačinama drugog reda. Uticaj rotacije je detaljno pokazan u trećem delu (poglavlju).

3. $n = 0$ - ovaj slučaj je predmet izučavanja u četvrtom poglavlju (delu). Može se zaključiti da je pri $n = 0$ rotacija

najveća, što ima za posledicu komplikovaniju jednačinu KORTEWEG-de VRIES-a koja opisuje kretanje. U drugom, trećem i četvrtom poglavlju uzučavani su talasi kod kojih amplituda opada eksponencijalno sa udaljavanjem od vrha talasa. U petom poglavlju izučavaju se algebarski solitarni talasi koji nastaju u relativno tankom sloju stratefikovane tečnosti koji je sa jedne strane ograničen slojem homogene tečnosti beskonačne debljine, dok se sa druge strane može nalaziti ili ravna ploča ili slobodna površina. Ovakvi talasi se veoma često javljaju u atmosferi, morima i okeanima. Kod algebarskih solitarnih talasa amplituda opada algebarski sa udaljavanjem od vrha talasa. Algebarski talasi su otkriveni pre relativno kratkog vremena i opisuju se BENJAMIN-ONO-ovom [2] jednačinom.

U šestom poglavlju se takođe izučavaju algebarski solitarni talasi. Model koji se proučava u ovom poglavlju je isti kao i u prethodnom ali za razliku od prethodnog modela ovde imamo kružno kretanje celog sistema. U ovom slučaju (n = 1) uticaj rotacije je mali, ali se on ne može zanemariti. Uticaj rotacije se manifestuje preko dopunskih članova u BENJAMIN-ONO-ovim jednačinama.

Sedmo poglavlje takođe obuhvata algebarske solitarne talase. I u ovom slučaju imamo kružno kretanje celog sistema ali je sada uticaj rotacije veći (n = 0) što ima za posledicu pojavu novih dopunskih članova u karakterističnim jednačinama.

Rukovodilac ovog rada bio je prof. dr. Vladan Đorđević, dipl. maš. ing. redovni profesor Mašinskog fakulteta u Beogradu. Koristim priliku da mu se najtoplije zahvalim na mnogobrojnim savetima i velikoj pomoći koju mi je ukazao u toku rada.

S O L I T A R N I   I   K N O I D A L N I
T A L A S I

Pri proučavanju solitarnih talasa veoma je važna jednačina KORTEWEG-de VRIES-a koja je izvedena 1895. godine. STOKES je 1847. godine pronašao približan izraz za nelinearne periodične talase u slučaju beskonačno duboke tečnosti ili tečnosti umerene dubine, dok su BOUSSINESQ 1891[6]i RAYLEIGH[7] 1976. godine pronašli približan izraz za solitaran talas koji ima konstantan oblik i konstantnu brzinu. Prvi je eksperimentalno posmatrao solitarni talas SCOTT RUSSELL 1844[8] godine. Najlakše se solitarni talas dobija kao rešenje jednačine KORTEWEG-de VRIES-a. Takođe se može pokazati da su periodična rešenja, rešenja jednačine KORTEWEG-de VRIES-a. U relativno plitkoj vodi dugački talasi se mogu opisati nelinearnom jednačinom sledećeg oblika:

$$A_t + C_o \left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{A}{h_o}\right) A_x + \gamma A_{xxx} = 0 \qquad (1.1.)$$

do prethodne jednačine se dolazi rešavanjem jednačine kretanja i jednačine kontinuiteta pri čemu se koriste poznati granični uslovi za model tečnosti koja je sa jedne strane ograničena ravnom pločom, a sa druge strane se nalazi slobodna površina.

h_o - visina neporemećene tečnosti

C_o, γ - konstante

Jednačina (1.1.) je jednačina KORTEWEG-de VRIES-a čije je rešenje:

$$A = A_o \operatorname{sech}^2 \left\{ \left(\frac{3 A_o}{4 h_o^3}\right)^{\frac{1}{2}} (x - Ut) \right\} \qquad (1.2.)$$

prilog I.1.

Jednačina (1.1.) (što se može lako pokazati) može takođe da ima periodično rešenje koje se može izraziti pomoću Jakobljevih eliptičnih funkcija.

$$A = A_o \operatorname{cn}^2 \left\{ \left(\frac{3}{4 h_o^2}\right)^{\frac{1}{2}} (x - Ut) \right\} \qquad (1.3.)$$

prilog I.2.

Rešenja (1.3.) jednačine KORTEWEG-de VRIES-a zovu se knoidalni talasi.

Očigledno je da jednačina KORTEWEG-de VRIES-a može da ima neperiodična i periodična rešenja. Neperiodična rešenja jednačine su solitarni talasi, a periodična rešenja su knoidalni talasi.

Prilog I.1.

Dokaz da je $A=A_o \operatorname{sech}^2 \left\{\left(\frac{3 A_o}{4 h_o^3}\right)^{\frac{1}{2}} (x - Ut)\right\}$ rešenje jednačine $A_t + C_o \left(1 + \frac{3}{2} \frac{A}{h_o}\right) A_x + \gamma A_{xxx} = 0$:

U jednačini KORTEWEG-de VRIES-a $\gamma = \frac{1}{6} C_o h_o^2$

Pošto talasi imaju konstantan oblik i pošto se kreću konstantnom brzinom oni mogu biti opisani jednačinom:

$$A = h_o \xi(X); \quad X = x - Ut$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = A_x = h_o \frac{\partial \xi}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} = h_o \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{A}{t} = A_t = h_o \cdot \frac{\partial \xi}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = h_o \cdot \frac{\partial \xi}{\partial X} (-U)$$

$A_x = h_o \xi_x \qquad X = x - Ut$

$A_{xxx} = h_o \xi_{xxx} \qquad \frac{\partial X}{\partial t} = -U$

$A_t = -Uh_o \xi_x \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = 1$

Ako vrednosti A_t, A_x, A, A_{xxx}, γ zamenimo u jednačinu KORTEWEG-de VRIES-a dobijamo

$$-Uh_o \xi_x + C_o \left(1 + \frac{3}{2} \frac{h_o \xi}{h_o}\right) h_o \xi_x + \frac{1}{6} C_o h_o^2 h_o \xi_{xxx} = 0 / : C_o$$

$$\frac{1}{6} h_o^2 \xi''' + \frac{3}{2} \xi \xi' - \left(\frac{U}{C_o} - 1\right) \xi' = 0$$

Nakon prve integracije dobijamo:

$$\frac{1}{6} h_o^2 \xi'' + \frac{3}{4} \xi^2 - \left(\frac{U}{C_o} - 1\right)\xi + G = 0 / \xi'$$

Ako prethodnu jednačinu pomnožimo sa ξ' pri čemu je $\xi' = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ imamo:

$$\frac{1}{6} h_o^2 \xi' \xi'' + \frac{3}{4} \xi^2 \xi' - (\frac{U}{C_o} - 1) \xi \xi' + G \xi' = 0$$

Nakon druge integracije isledi:

$$\frac{1}{12} h_o^2 \xi'^2 + \frac{\xi^3}{4} - (\frac{U}{C_o} - 1) \frac{\xi^2}{2} + G\xi + \frac{H}{4} = 0/4; \int \xi' \xi'' = \frac{\xi'^2}{2}$$

$$\frac{1}{3} h_o^2 \xi'^2 - \xi^3 - 2 (\frac{U}{C_o} - 1) \xi^2 + 4 G \xi + H = 0$$

U specijalnom slučaju kada ξ i njegovi izvodi teže nuli u beskonačnosti onda je: G = H = 0 tako da prethodna jednačina ima oblik:

$$\frac{1}{3} h_o^2 (\frac{d\xi}{dx})^2 = \xi^2 (\alpha - \xi); \quad \frac{U}{C_o} = 1 + \frac{\alpha}{2}; \quad \alpha = \frac{A_o}{h_o}; \quad \xi = \frac{A}{h_o}$$

Ako prethodnu jednačinu korenujemo i razdvojimo promenljive pdobijamo:

$$\int \frac{\pm d\xi}{\xi \sqrt{\alpha - \xi}} = \int \frac{\sqrt{3}\, dx}{h_o}; \quad \int \frac{\sqrt{3}}{h_o} dx = \frac{\sqrt{3}}{h_o} x$$

Računanje integrala $\int \frac{\pm d\xi}{\xi \sqrt{\alpha - \xi}}$:

$$\alpha - \xi = y^2 \Rightarrow \xi = \alpha - y^2; \quad d\xi = -2ydy$$

$$\int \frac{\pm d\xi}{\xi \sqrt{\alpha - \xi}} = \int \frac{\pm d\xi}{(\alpha - y^2) y} = 2 \int \frac{d_y}{(y + \sqrt{\alpha})(y - \sqrt{\alpha})}$$

$$\frac{1}{(y + \sqrt{\alpha})(y - \sqrt{\alpha})} = \frac{C}{y - \sqrt{\alpha}} + \frac{B}{y + \sqrt{\alpha}} = \frac{Cy + c\sqrt{\alpha} + B_y - B\sqrt{\alpha}}{(y - \sqrt{\alpha})(y + \sqrt{\alpha})}$$

$$\frac{1}{(y+\sqrt{\alpha})(y-\sqrt{\alpha})} = \frac{(C+B)y+\sqrt{\alpha}(C-B)}{(y+\sqrt{\alpha})(y-\sqrt{\alpha})}$$

$$C + B = 0 \Rightarrow C = -B$$

$\sqrt{\alpha}(C-B) = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ odnosno $A = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$

$$2\int \frac{d_y}{(y+\sqrt{\alpha})(y-\sqrt{\alpha})} = 2\left(\int\frac{Cdy}{y-\sqrt{\alpha}}+\int\frac{Bdy}{y+\sqrt{\alpha}}\right) =$$

$$= 2\left(\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,dy}{y-\sqrt{\alpha}} + \int\frac{\frac{1}{-2\sqrt{\alpha}}\,dy}{y+\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{\alpha}}{y+\sqrt{\alpha}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{\alpha-\xi}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha-\xi}+\sqrt{\alpha}} = -\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{Arth}\sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha}}$$

Nakon rešavanja i razdvajanja promenljivih dobija se:

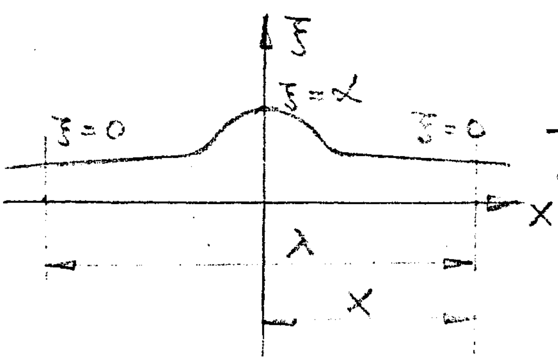
$-\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{Arth}\sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{h_o}x$ a odavde je:

$$\xi = \alpha\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{3\alpha}{4h_o^2}\right)^{\frac{1}{2}} X$$

Pošto je $A = h_o\xi$ onda je:

$$A = A_o\,\mathrm{sech}^2\left\{\left(\frac{3A_o}{4h_o^3}\right)^{\frac{1}{2}}(x-Ut)\right\}$$

Rešenje $\xi = \alpha\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{3}{4h_o^2}\right)^{\frac{1}{2}} X$ može se predstaviti dijagramski:



$x \to \infty;\ \xi = 0$

$x = 0 \Rightarrow \xi = \alpha$

$$\xi = \alpha\frac{4}{\left[e^{\left(\frac{3}{4h_o^2}\right)^{\frac{1}{2}}x}+e^{-\left(\frac{3}{4h_o^2}\right)^{\frac{1}{2}}x}\right]^2}$$

Prilog I.2.

Jednačina $A_t + C_o\left(1 + \frac{3}{2}\frac{A}{h_o}\right) A_x + \gamma A_{xxx} = 0$

može da ima periodična rešenja koja su izražena preko Jakobijevih eliptičnih funkcija.[9]

Polazi se od sledeće jednakosti:

$$\frac{1}{3} h_o^2 \xi'^2 = \xi^2(\alpha - \xi); \quad \xi'^2 = \varrho(\xi) \text{ onda je:}$$

$$\varrho = \frac{3}{h_o^2} \xi^2 (\alpha - \xi)$$

Očigledno je da gornja jednakost predstavlja polinom trećeg stepena koji ima tri nule i to:

1) $\xi = 0$
2) $\xi = \alpha$
3) $\xi = \alpha - \beta; \; \beta = \frac{h_o^2}{l^2}$

Očigledno je da se treća nula nalazi izmedju prve dve nule i da ona mora biti negativna posle čega je:

$$\frac{1}{3} h_o^2 \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \xi(\alpha - \xi)(\xi - \alpha + \beta); \quad \frac{U}{C_o} = 1 + \frac{2\alpha - \beta}{2}$$

Tačno rešenje prethodne jednačine je:

$$\xi = \alpha \operatorname{cn}^2 \left(\frac{3\beta}{4h_o^2}\right)^{\frac{1}{2}} X; \quad D = \left(\frac{3\beta}{4h_o^2}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad D^2 = \frac{3\beta}{4h_o^2}$$

$$\xi' = -2D\alpha \operatorname{cn}Dx \operatorname{sn}Dx \operatorname{dn}Dx$$

$$\xi'^2 = 4D^2\alpha^2 \operatorname{cn}^2Dx \operatorname{sn}^2Dx \operatorname{dn}^2Dx$$

Ako sada ove vrednosti uvrstimo u jednačinu

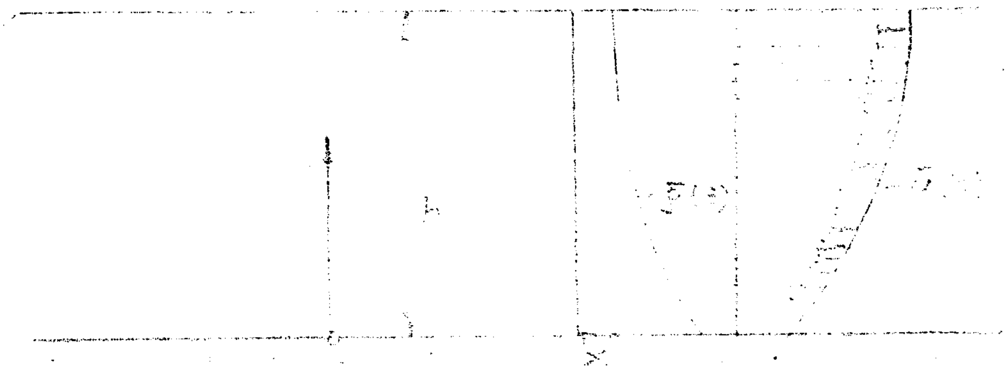
$\frac{1}{3} h_o^2 \xi'^2 = \xi(\alpha - \xi)(\xi - \alpha + \beta)$ dobijamo:

$$\frac{1}{3} h_o^2 4D^2\alpha^2 \operatorname{cn}^2Dx \operatorname{sn}^2Dx \operatorname{dn}^2Dx = \alpha \operatorname{cn}^2Dx(\alpha - \alpha\operatorname{cn}^2Dx)(\alpha \operatorname{Cn}^2Dx - \alpha + \beta)$$

$\beta \operatorname{dn}^2CX = \beta \operatorname{dn}^2CX$ što je i trebalo dokazati.

UTICAJ SLABOG SMICAJNOG STRUJANJA NA RASPROSTIRANJE NELINEARNIH DUGIH GRAVITACIONIH TALASA U STRATIFIKOVANOJ TEČNOSTI

U ovom slučaju izučavaćemo interne (unutrašnje) talase u stratifikovanoj tečnosti u jednom horizontalnom sloju nehomogene neviskozne tečnosti debljine h koje je sa obe strane ograničen ravni pločama.



$\bar{\rho} = \bar{\rho}\,(z)$ - zakon stratifikacije
$\bar{u} = \bar{u}\,(z)$ - funkcija smicajnog strujanja
Osu x postaviti ćemo u ravni donje ploče u pravcu prostiranja talasa, a osu z vertikalno naviše. Pri rešavanju ovog problema polazi se od osnovnih jednačina (jednačine kretanja i jednačine kontinuiteta) koje napisane u **vektorskom** obliku izgledaju:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{F} - \mathrm{grad}p$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (2.1.)$$

U jednačini kretanja $\vec{F} = -g\vec{k}$ a za stratifikovanu tečnost jednačina kontinuiteta se raspada na dve jednačine i to:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0; \quad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

gde su:
ρ - gustina stratifikovane tečnosti
$\vec{v}$ - brzina kretanja tečnosti
p - pritisak
$\vec{F} = -g\vec{k}$ (zapreminska sila - sila zemljine teže)

Vektorskim jednačinama (2.1.) odgovaraju sledeće **skalarne** jednačine:

$$\rho(u_t + uu_x + wu_z) = -p_x$$

$$\rho(w_z + uw_x + ww_z) = -\rho g - p_z$$

$$\rho_t + u\rho_x + w\rho_z = 0 \qquad (2.2.)$$

$$u_x + w_z = 0$$

Nakon nastanka poremećaja gustina, pritisak i brzina imaće sledeće vrednosti:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \,;\; p = \bar{p} + p' \,;\; u = \bar{u} + u' \;;\; w = w;\; \bar{p}_z = -g\bar{\rho}$$

ρ; p; u; w - vrednosti gustine, pritiska i brzine u tečnosti nakon nastanka poremećaja.

$\bar{\rho}$; $\bar{p}$; $\bar{u}$ - vrednosti gustine, pritiska i brzine u neporemećenoj tečnosti.

ρ'; p'; u'; w'- poremećajne vrednosti gustine, pritiska i brzine.

Posle nastanka poremećaja jednačine (2.2.) imaće sledeći oblik:

$$(\bar{\rho}+\rho')\{u'_t + (\bar{u} + u')u'_x + w'(\bar{u}_z + u'_z)\} = -P'_x$$

$$(\bar{\rho}+\rho')\{w'_t + (\bar{u} + u')w'_x + w'w'_z\} = -g(\bar{\rho}+\rho') - \bar{p}_z - p'_z$$

$$\rho'_t + (\bar{u} + u')\rho'_x + w'(\bar{\rho}_z + \rho'_z) = 0 \qquad (2.3.)$$

$$u'_x + w'_z = 0$$

Osnovne jednačine se na pogodan način mogu napisati u bezdimenzionalnom obliku koristeći sledeće razmere:

h - za dužinu

$\sqrt{gh}$ - za brzinu (g je ubrzanje zemljine teže)

$\dfrac{h}{\sqrt{gh}}$ - za vreme

$\rho_0 gh$ - za pritisak
ρ_0 - gustinu
h - debljina nehomogene neviskozne tečnosti

$$(\bar{\rho} + \rho)\{u_t + (\bar{u} + u)u_x + w(\bar{u}' + u_z)\} = -p_x$$

$$(\bar{\rho} + \rho)\{w_t + (\bar{u} + u)w_x + ww_z\} = -\rho - p_z \qquad (2.4.)$$

$$\rho_t + (\bar{u} + u)\rho_x + w(\bar{\rho}' + \rho_z) = 0$$

$$u_x + w_z = 0$$

Prilikom rešavanja prethodnih jednačina koristi se osnovna jednačina hidrostatike:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Za rešavanje ovog problema granični uslovi su:

$$w(o) = w(1) = 0$$

Za izvodjenje odgovarajućeg oblika jednačine KORTEWER-de VRIES-a iz sistema jednačina(2.4.) poslužićemo se postupkom uvodjenja dalekopoljnih koordinata:

$$\xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(x - ct)$$
$$\tau = \varepsilon^{\frac{3}{2}} t \qquad (2.5.)$$

S obzriom da su razmere za x i z iste (h) i da je:

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} x = O(z); \quad \varepsilon \ll 1,$$

očigledno je $z \ll x$ - to znači da je posmatrana oblast strujanja relativno plitka.

Koordinata ξ se kreće u pravcu ose x brzinom c. Pretpostavlja se da se talas sporo menja u tome koordinatnom sistemu. Da bi se te promene eksplicitno izrazile, uvodi se sporo vreme τ.

c - konstanta odgovorna za brzinu talasa koju ćemo odrediti u postupku koji sledi.

ε - mali parametar koji se koristi prilikom razvijanja pojedinih veličina po stepenima od (ε). Ako se poremećajne vrednosti brzine, gustine i pritiska izraze preko parametra (ε), imamo:

$$u = \varepsilon U; \quad \bar{u} = \varepsilon \bar{U}; \quad w = \varepsilon^{\frac{3}{2}} W; \quad \rho = \varepsilon Q; \quad p = \varepsilon P \qquad (2.6.)$$

pri čemu je:

$U = O\ (1)$

Proučavamo slabo smicajno strujanje pa ćemo stoga smatrati da je $\bar{u} = \varepsilon\ \bar{U}\ (z)$ gde je $\bar{U}(z) = O\ (1)$. Zahvaljujući ovako pretpostavljenom redu veličine smicajnog strujanja ono se neće pojaviti u sistemu za određivanje prve aproksimacije.

Ako u jednačini (2.4.) uvedemo dalekopoljne koordinate (2.5.) i relacije (2.6.) osnovne jednačine će imati sledeći oblik:

$$(\bar{\rho} + \varepsilon Q)\left\{-cU_{\xi} + \varepsilon U_{\tau} + (\bar{U} + U)U_{\xi} + \varepsilon W(\bar{U}_z + U_z)\right\} = -P_{\xi}$$

$$(\bar{\rho} + \varepsilon Q)\left\{-\varepsilon cW_{\xi} + O\ (\varepsilon^2)\right\} = -Q - P_z \qquad (2.7.)$$

$$-cQ_{\xi} + \varepsilon Q_{\tau} + \varepsilon(\bar{U} + U)Q_{\xi} + W\ (\bar{\rho}_z + \varepsilon Q_z) = 0$$

$$U_{\xi} + W_z = 0$$

Jednačine prvog reda

Brzina, pritisak i gustina mogu se pomoću parametra razviti u red na sledeći način:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)} \varepsilon^n$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)} \varepsilon^n$$

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)} \varepsilon^n \qquad (2.7'.)$$

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)} \varepsilon^n$$

Ako sada vrednosti U, W, P i Q u obliku reda uvrstimo u jednačine 2.7. i upoređujemo članove u svakoj od jednačina ponaosob uz isti stepen(ε) dobijamo sledeće jednačine:

$$c\bar{\rho}\,U_{\xi}^{(o)} = P_{\xi}^{(o)}$$

$$-\,Q^{(o)} = P_{z}^{(o)} \qquad (2.8.)$$

$$-\,cQ_{\xi}^{(o)} + \bar{\rho}_{z}W^{(o)} = 0$$

$$U_{\xi}^{(o)} + W_{z}^{(o)} = 0$$

Ako sada u jednačinama (2.8.) prvi jednačinu diferenciramo po (z) a drugu po (ξ) i izjednačimo strane sa leve strane znaka jednakosti onda dobijamo:

$$c\,(\bar{\rho}\,U_{\xi}^{(o)})_{z} = -\,Q_{\xi}^{(o)} \qquad (2.9.)$$

Množenjem jednačine (2.9.) sa c imamo:

$$c^{2}\,(\bar{\rho}\,U_{\xi}^{(o)})_{z} = -\,cQ_{\xi}^{(o)} \qquad (2.10.)$$

Koristeći treću i četvrtu jednačinu jednačina (2.8.) i jednačinu (2.10.) dobijamo sledeću jednačinu:

$$-\,c^{2}\,(\bar{\rho}\,W_{z}^{(o)})_{z} + \bar{\rho}'W^{(o)} = 0 \qquad (2.11.)$$

Rešavanjem jednačine (2.11.) dobijaju se vrednosti za pritisak, gustinu i brzinu uz poznate granične uslove W(o) = = W(1) = 0.

Ako se u jednačini (2.11.) izvrši razdvajanje promenljivih u $W^{(o)}$ na način: $W^{(o)} = -\,A_{\xi}\,(\xi,\tau)\,f(z)$, gde je $A\,(\xi,\tau)$ proizvoljna i za sada neodređena funkcija, lako se pokazuje da se dobija:

$$c^{2}\,(\bar{\rho}\,f_{o}')' - \bar{\rho}'f_{o} = 0 \qquad (2.11'.)$$

Važno je napomenuti da jednačine drugog reda daju željenu jednačinu za $A\,(\xi,\tau)$.

Pomoću jednačine (2.11'.) sa graničnim uslovima f(o) = f (1) = 0 mogu se odrediti sopstvene vrednosti funkcije f(z) i sopstvene vrednosti za c. Tako na primer ako se uzme eksponencijalni zakon stratifikacije, f (z) i c imaju sledeće vrednosti:

$$f\,(z) = 2ic_1 e^{\frac{H}{2} z} \sin n\pi z$$

$$c_n = \frac{4H}{H^2+4n^2\pi^2} \qquad \text{(prilog II.1.)}$$

pri čemu je $\bar{\varsigma} = e^{-Hz}$, $H > 0$; $n = 1,2,3,\ldots$

Pritisak, brzina i gustina se izračunavaju pomoću sopstvene vrednosti funkcije f (z).

$$\begin{aligned} W^{(o)} &= -A\bar{\varsigma}\, f_o(z) \\ U^{(o)} &= A\, f_o' \\ P^{(o)} &= cA\bar{\varsigma}\, f_o \\ Q^{(o)} &= -cA\,(\bar{\varsigma} f_o')' \end{aligned} \qquad (2.12.)$$

<u>Jednačine drugog reda</u>

Kod druge aproksimacije vrednosti za brzinu, pritisak i gustinu (2.7'.) u obliku reda uvrštavamo u jednačine (2.7.). I u ovom slučaju pokazaćemo kako izgleda prva jednačina nakon druge aproksimacije a za ostale jednačine (2.7.) postupak je isti.

$$(\bar{\varsigma}+\varepsilon Q)\left\{-cU_{\xi}+\varepsilon U_{\tau}+\varepsilon(\bar{U}+U)U_{\xi}+\varepsilon W(\bar{U}_z+U_z)\right\} = -P_{\xi}$$

$$(\bar{\varsigma}+\varepsilon(Q^{(o)}+\varepsilon Q^{(1)})]\left\{-c\,(U_{\xi}^{(o)}+\varepsilon U_{\xi}^{(1)})+\varepsilon[\bar{U}+(U^{(o)}+\varepsilon U^{(1)})(U_{\xi}^{(o)}+U_{\xi}^{(1)})]+\right.$$
$$\left.+\varepsilon(U_{\tau}^{(o)}+\varepsilon U_{\tau}^{(1)})+\varepsilon(W^{(o)}+\varepsilon W^{(1)})[\bar{U}_z+(U_z^{(o)}+U_z^{(1)})]\right\} = -P_{\xi}^{(o)}+\varepsilon P_{\xi}^{(1)}$$

Izjednačavanjem članova uz (ε) sa leve i desne strane dobijamo:

$$- c\bar{\rho}U_{\xi}^{(1)} - c\, Q^{(o)}U_{\xi}^{(o)} + \bar{\rho}\left\{U_{\tau}^{(o)} + (\bar{U}+U^{(o)})U_{\xi}^{(o)} + W^{(o)}(\bar{U}_z + U_z^{(o)}\right) = -P_{\xi}^{(1)}$$

Jednačine (2.7.) nakonb druge aproksimacije imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
P_{\xi}^{(1)} &= c\bar{\rho}\, U_{\xi}^{(1)} - F_1 \\
P_z^{(1)} &= -Q^{(1)} + c\bar{\rho}W_{\xi}^{(o)} \\
- cQ_{\xi}^{(1)} + \bar{\rho}'W^{(1)} &= - F_2 \\
U_{\xi}^{(1)} + W_z^{(1)} &= 0
\end{aligned} \qquad (2.13.)$$

U ovim jednačinama F_1 i F_2 imaju sledeće vrednosti:

$$F_1 = \bar{\rho}\left\{U_{\tau}^{(o)} + (\bar{U}+U^{(o)})U_{\xi}^{(o)} + W^{(o)}(\bar{U}_z + U_z^{(o)})\right\} - cQ^{(o)}U_{\xi}^{(o)}$$

$$F_2 = - Q_{\tau}^{(o)} - (\bar{U} + U^{(o)})\, Q_{\xi}^{(o)} - W^{(o)}Q_z^{(o)}$$

Ako prvu od jednačina (2.13.) diferenciramo po (z) a drugu jednačinu po (ξ) izjednačimo desne strane dobijamo:

$$c\,(\bar{\rho}U_{\xi}^{(1)})_z - F_{1z} = - Q_{\xi}^{(1)} + c\bar{\rho}W_{\xi\xi}^{(o)}$$

Množenjem prethodne jednačine sa c imamo:

$$c^2\,(\bar{\rho}U_{\xi}^{(1)})_z - cF_{1z} = - cQ_{\xi}^{(1)} + c^2\bar{\rho}\, W_{\xi\xi}^{(o)}$$

Četvrta jednačina (2.13.) daje nam sledeću vezu:

$U_{\xi}^{(1)} = - W_z^{(1)}$ koja kada se uvrsti u prethodnu jednačinu, daje:

$$c^2\bar{\rho}W_{zz}^{(1)} + c^2\bar{\rho}'W_z^{(1)} - \bar{\rho}'W^{(1)} = F_2 - cF_{1z} - c^2\bar{\rho}W_{\xi\xi}^{(o)} \qquad (2.14.)$$

Pomoću jednačine (2.14.) Grinovom formulom dobijamo jednačinu KORTEWEG-de VRIES-a

$$A_{\tau} + \bar{U}_{us}A_{\xi} + \frac{3}{2}\,\frac{\int_0^1 \bar{\rho}f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho}f_o'^2 dz}AA_{\xi} + \frac{c}{2}\,\frac{\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o'^2 dz}A_{\xi\xi\xi} = 0 \qquad (2.15.)$$

prilog II.2.

U prethodnoj jednačini član $\bar{U}_{us} A_{\xi}$ se eliminiše uvođenjem koordinate $X = \xi - \bar{U}_{us}\tau$ tako da jednačina KORTEWEG-de VRIES-a ima oblik:

$$A_{\tau} + a_1 A A_X + a_2 A_{XXX} = 0 \tag{2.15.}$$

Jedno od rešenja prethodne jednačine je solitarni talas

$$A = \alpha_o \operatorname{sech}^2 \beta_o \left\{ \xi - (\gamma_o + \bar{U}_{us})\tau \right\} \tag{2.16.}$$

prilog II.3.

U rešenju (2.16.) pojedinic simboli imaju sledeće vrednosti:

$$\beta = \sqrt{\frac{a_1 \alpha}{12 a_2}}; \quad \gamma = \frac{a_1 \alpha}{3}; \quad a_1 = \frac{3\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz}{2\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}; \quad a_2 = \frac{c\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o^2 dz}{2\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o'^2 dz}$$

$$\bar{U}_{us} = \frac{\int_0^1 \bar{u}\,\bar{\rho}' f_o'^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o'^2 dz}$$

$\bar{U}_{us}$ - uopštena srednja brzina smicajnog strujanja.

Analizirajući rešenje (2.16.) može se zaključiti da se smicajno strujanje odražava samo na brzinu talasa. Smicajno strujanje nema uticaja na amplitudu i dužinu talasa.

Izborom uopštene srednje vrednosti brzine ($\bar{U}_{us}$) mogu se pojaviti različiti slučajevi.

Tako na primer brzina solitarnog talasa može se "ukočiti" ukoliko se izabere da je uopštena srednja vrednost brzine smicajnog strujanja $\bar{U}_{us} = -\gamma$.

U ovom slučaju proučava se linearno smicajno strujanje pri eksponencijalnom zakonu stratifikacije.

$$\bar{\rho} = e^{-Hz}, \quad H > 0$$

$$f_{on} = e^{\frac{H}{2} z} \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$c_n^2 = \frac{4H}{H^2 + 4n^2\pi^2} < 1$$

Ako se pretpostavi da je raspored brzine $\bar{u}(z) = a + (b - a)\, z$ onda je:

$$\bar{U}_{us} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} cn^2 \qquad (2.17.)$$

prilog II.4.

Koeficijenti a_1 i a_2 imaju sledeće vrednosti:

$$a_2 = \frac{c}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho}' f_o'^2 dz} = \frac{c_n^3}{2H}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho}' f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho}' f_o'^2 dz} = \left[1 - (-1)^n e^{-\frac{H}{2}}\right] \frac{12\, c_n^2 n^3 \pi^3}{H^2 + 36 n^2 \pi^2}$$

Ako je (n) neparno onda je $a_1 > 0$

Ako je (n) parno onda je $a_1 < 0$

Važno je napomenuti da je strujanje koje smo proučavali stabilno pošto Ričardsonov broj zadovoljava uslov $R_i > \frac{1}{4}$ [10]. Pri ovako izabranom strujanju , Ručardsonov broj je:

$$R_i = - \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}\, \bar{U}'^2}$$

R_i je veličina reda O (ε^{-2}) pa će prema tome imati veoma velike vrednosti. Ovo je veoma važno napomenuti pošto Ričardsonov broj igra veliku ulogu pri proučavanju stabilnosti jednog smicajnog strujanja nehomogene tečnosti.

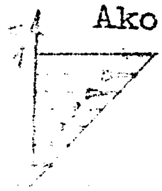
Strujna slika kod solitarnih talasa

Jednačina strujne funkcije za solitarne talase ima oblik:

$$\bar{\varphi}^{(o)} = \int_{c}^{t} \bar{U} dz + A f_o = \text{konst.} \qquad (2.18.)$$

prilog II.5.

Ako se usvoji sledeći zakon promene brzine:



Zamenom $\bar{U} = z$ u jednačinu (2.18.) dobija se:

$$\int_{c}^{t} z dz + A f_o = \text{konst.}$$

$$\frac{z^2}{2} + A f_o = \bar{\varphi}^{(o)} = \text{konst} \qquad (2.19.)$$

Pošto je $A = \alpha_o \operatorname{sech}^2 \beta_o (x - \gamma_o \tau)$; $f_o = e^{\frac{H}{2} z} \sin n\pi z$ te zamenom ovih vrednosti u jednačinu (2.19.) dobijamo:

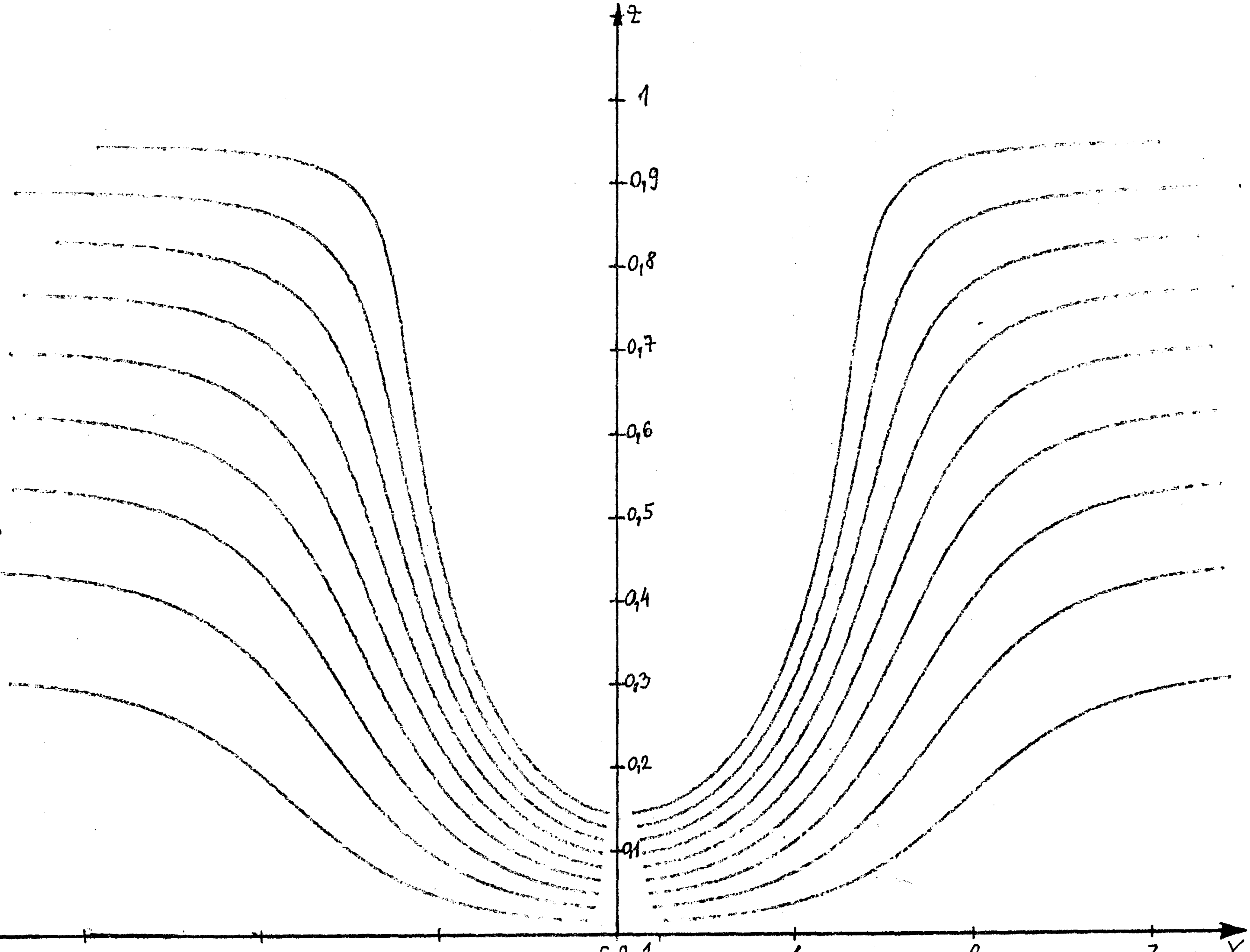
$$\frac{z^2}{2} + \alpha_o \operatorname{sech}^2 \beta_o (x - \gamma_o \tau)\, e^{\frac{H}{2} z} \sin n\pi z = c \text{ ili}$$

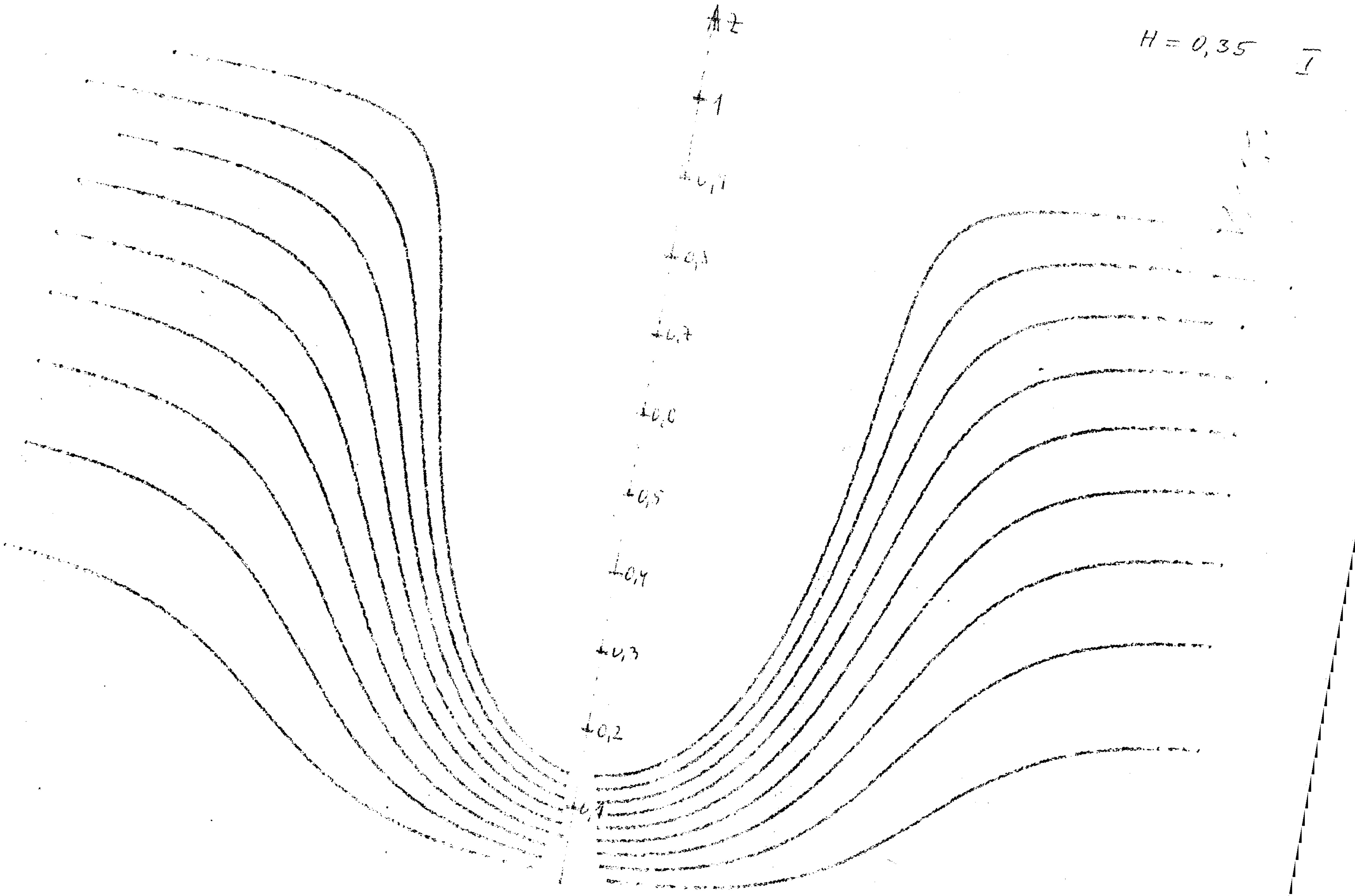
$$\sec h^2 X = \frac{c - \frac{z^2}{2}}{f_o} \qquad (2.20.)$$

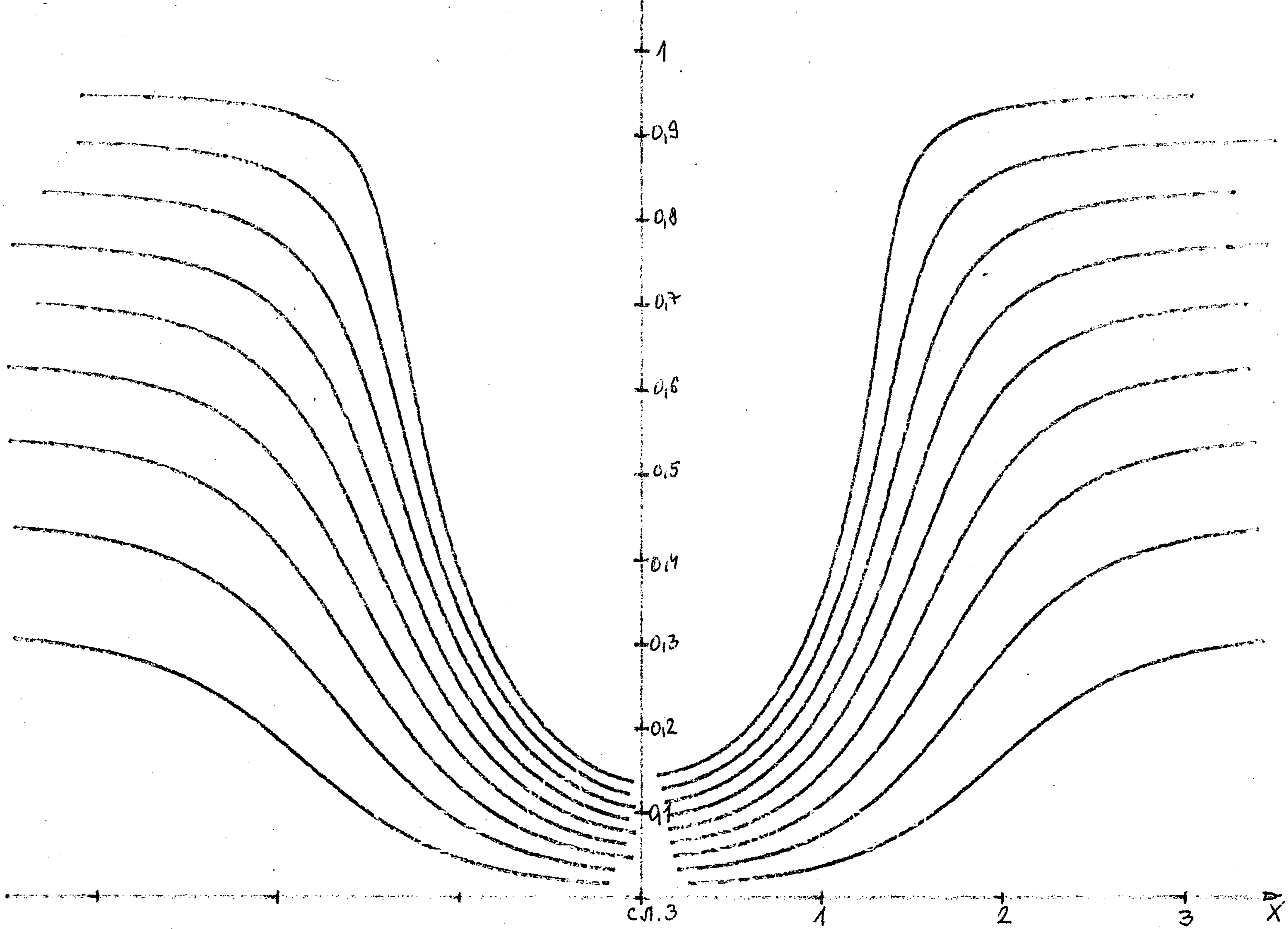
Pri tome je: $\alpha_o = 1$; $\beta_o(x - \gamma_o \tau) = X$

Jednačina 2.20. predstavlja jednačinu strujne funkcije koja se može predstaviti dijagramski. Na sl. 1, sl. 2, sl. 3, dat je prikaz strujne slike (2.20.) pri usvojenom zakonu stratifikacije, $\bar{\rho} = e^{-Hz}$, a za različite vrednosti H i to:

- Na sl. 1 $H = 0,1$
- na sl. 2 $H = 0,35$
- na sl. 3 $H = 0,91$


z
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1

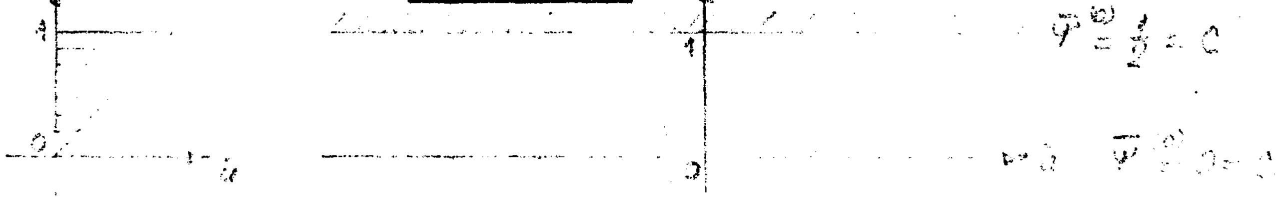

z
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
H = 0,35
I



сл.3

Strujna slika kod koje je zakon promene brzine

$$\bar{u} = 1 - z$$



Polazi se od jednačine strujne funkcije

$$\bar{\varphi}^{(o)} = \int^{z} \bar{u}dz + Af_o = c$$

Zamenom $\bar{u} = 1 - z$ u prethodnu jednačini dobija se:

$$z - \frac{z^2}{2} + Af_o = c \qquad (2.21.)$$

Zamenom vrednosti za f_o i A u jednačinu (2.21.) imamo:

$$z - \frac{z^2}{2} + \alpha_o \operatorname{sech}^2 \beta_o (x - \gamma_o \tau)\, e^{\frac{H}{2}z} \sin n\pi z = c \quad \text{ili}$$

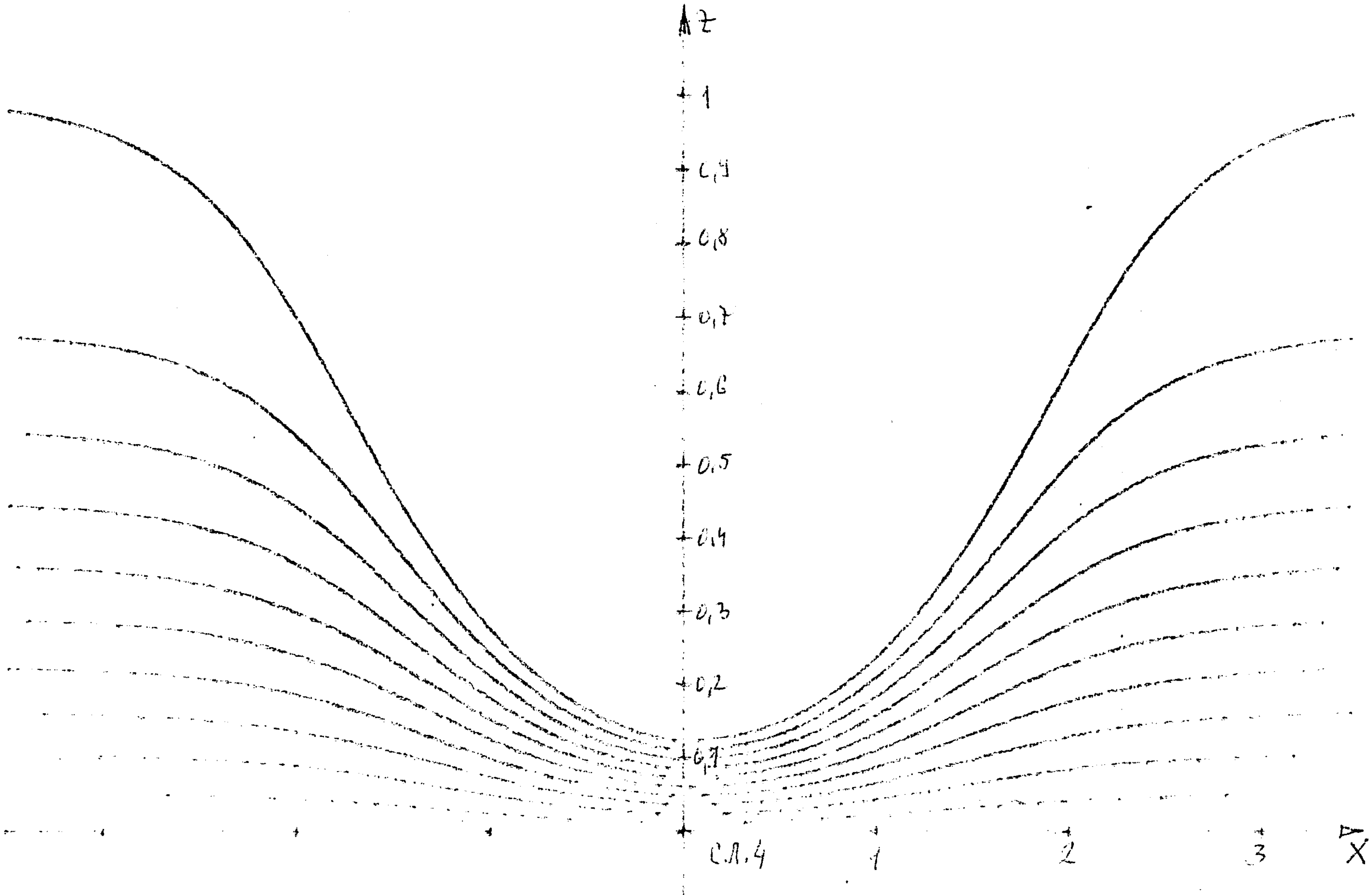
$$\operatorname{sech}^2 X = \frac{c + \frac{z^2}{2} - z}{f_o} \qquad (2.22.)$$

U jednačini 2.22. je: $\alpha_o = 1$; $X = \beta_o (x - \gamma_o \tau)$

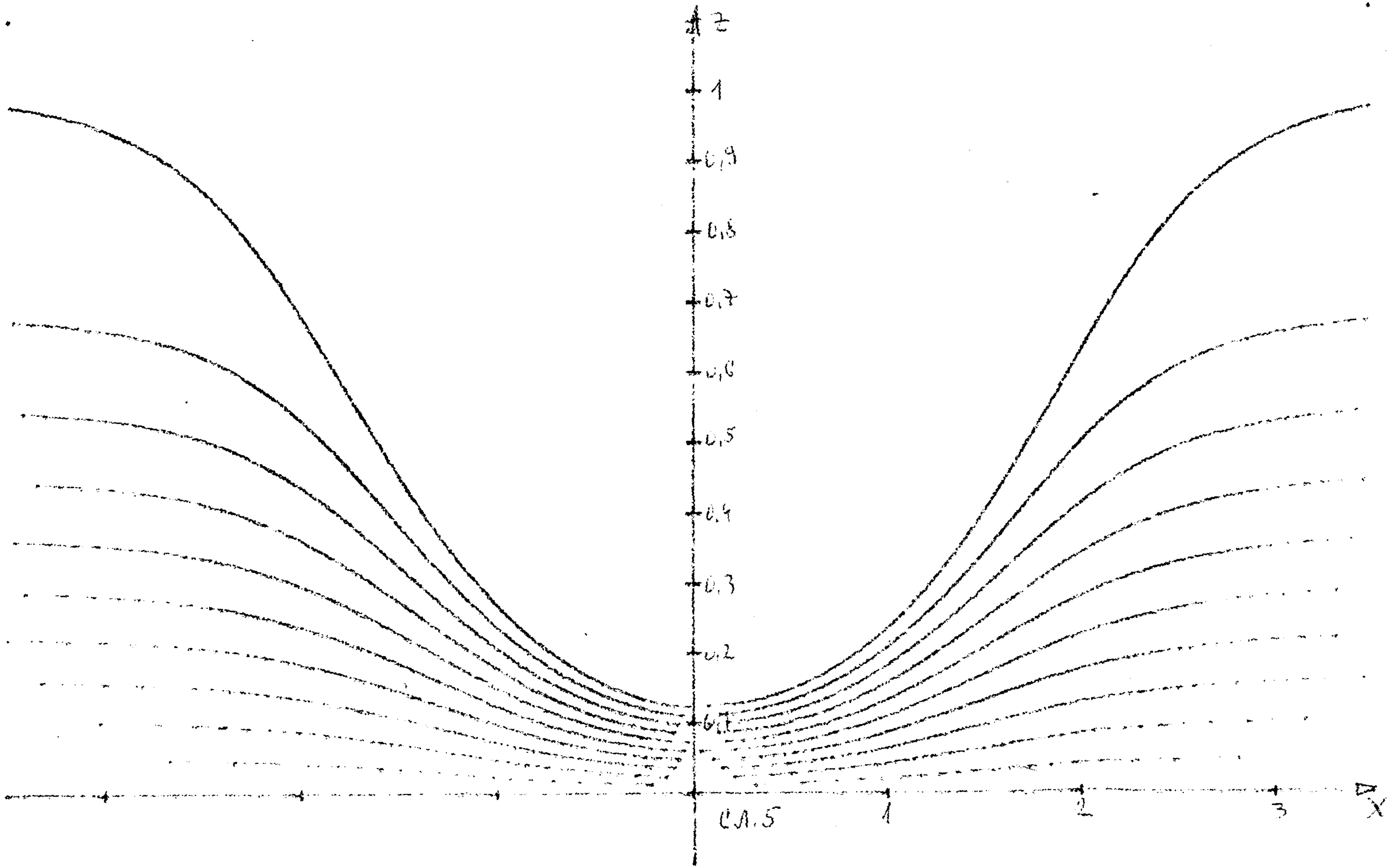
Jednačina (2.22.) je jednačina strujne funkcije za $\bar{\rho} = e^{-Hz}$ i ona se može prestaviti dijagramski: na sl. 4, sl. 5 i sl. 6 dat je prikaz strujnih linija za različite vrednosti H.

- na sl. 4 H = 0,1
- na sl. 5 H = 0,35
- na sl. 6 H = 0,91

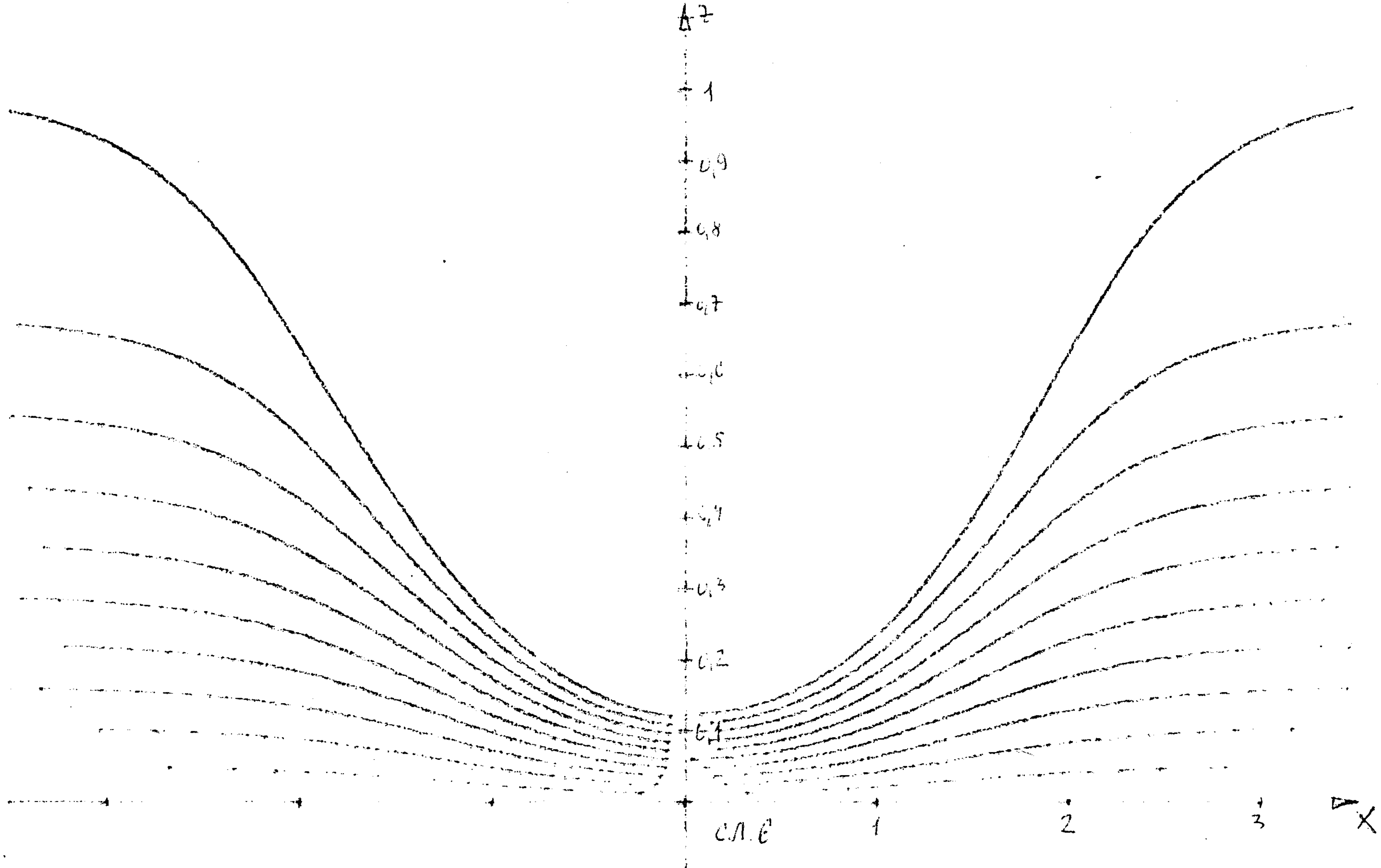
μ = 0,1 II



4 035 II

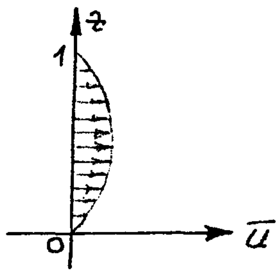


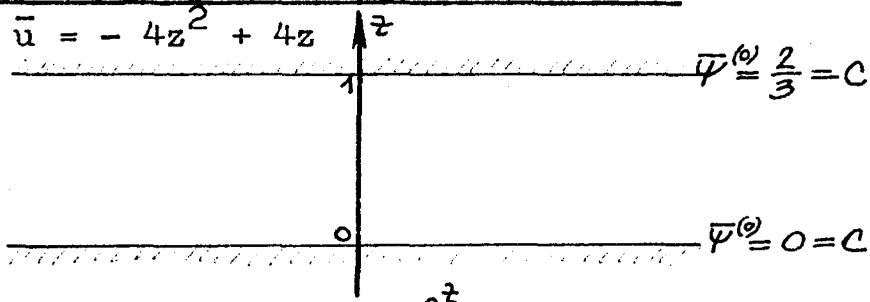
H = 0,31



Strujna slika kod koje je zakon promene brzine

$\bar{u} = -4z^2 + 4z$





Ako u jednačinu strujne funkcije $\bar{\psi}^{(0)} = \int^{z} \bar{u} dz + Af_o = c$ zamenimo $\bar{u} = -4z^2 + 4z$ dobijamo:

$$\int^{z} (-4z^2 + 4z) dz + Af_o = c$$

Nakon integracije jednačina strujne funkcije je:

$$4 \frac{z^2}{2} - 4 \frac{z^3}{3} + Af_o = c \text{ ili}$$

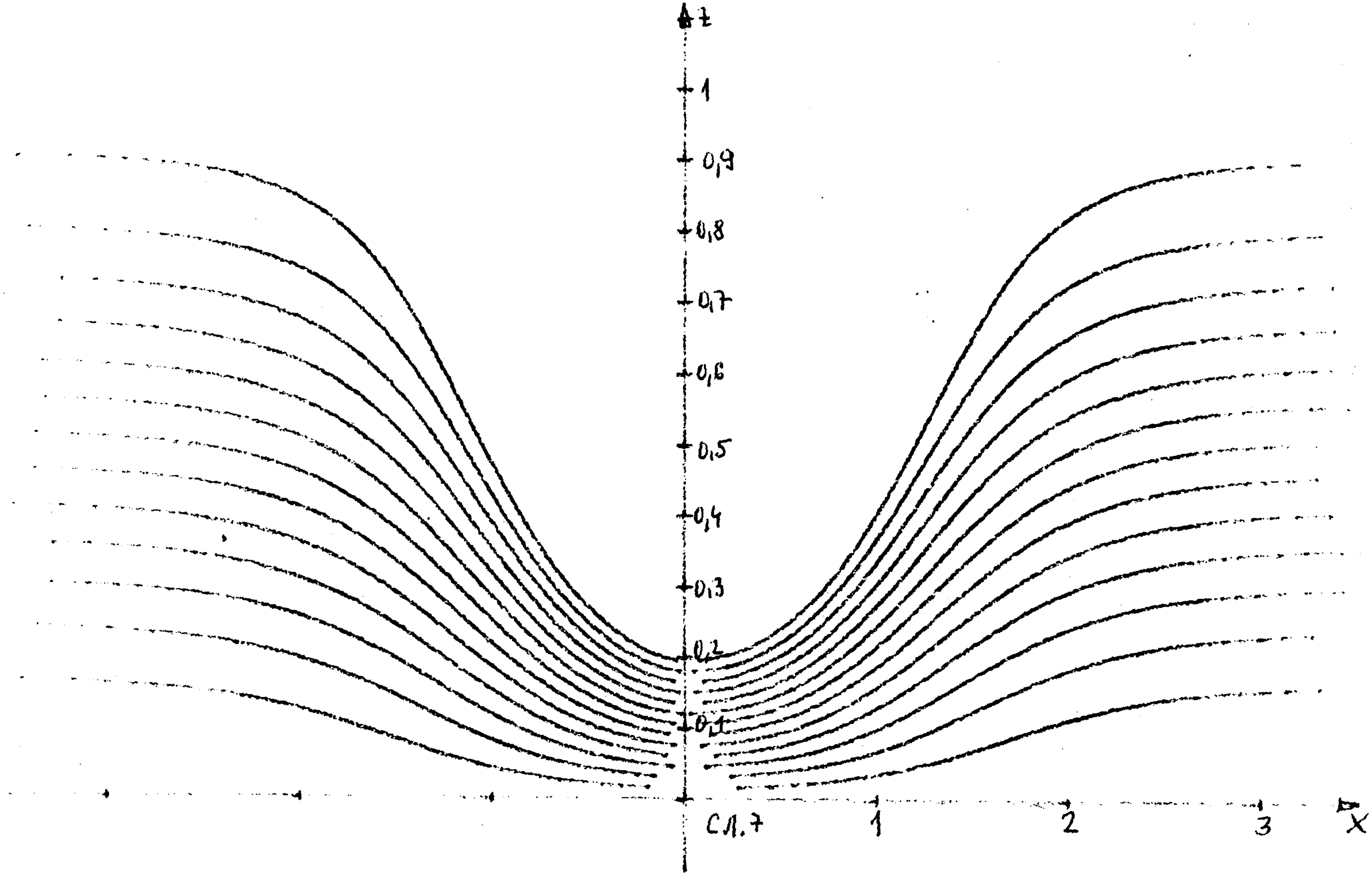
$$\operatorname{sech}^2 X = \frac{c - 2z^2 + \frac{4z^3}{3}}{f_o} \qquad (2.23.)$$

U jednačini 2.23. je: $\alpha_o = 1$; $X = \beta_o (x - \gamma_o \tau)$

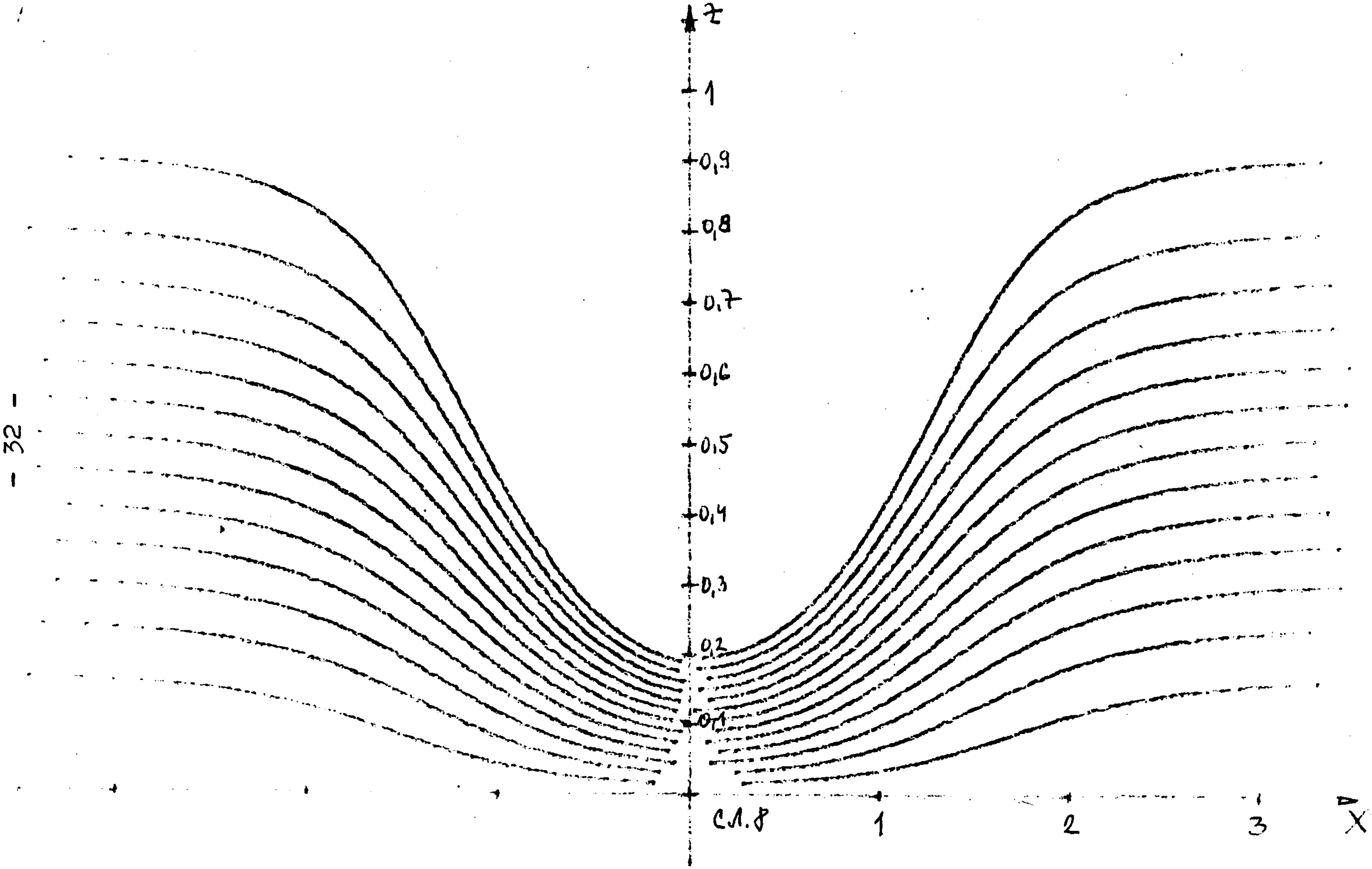
Jednačina 2.23. predstavlja jednačinu strujne funkcije koja se može predstaviti dijagramski. Na sl. 7, sl. 8 i sl. 9. dat je prikaz strujne funkcije za $\bar{\rho} = e^{-Hz}$ i za različite vrednosti H.

- Na sl. 7 H = 0,1
- na sl. 8 H = 0,35
- na sl. 9 H = 0,91

$\mu = 0,1$ III

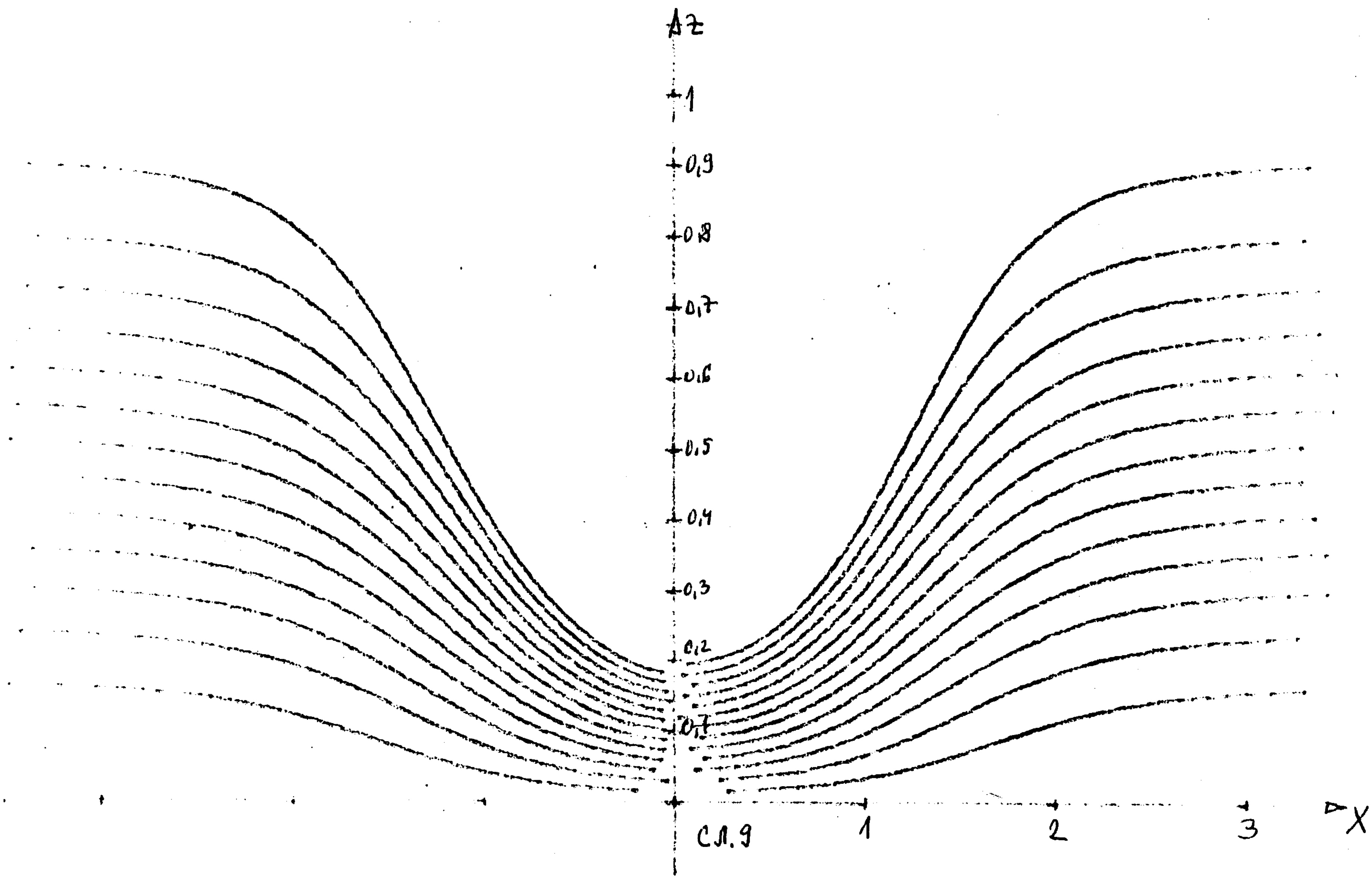


Сл. 7



Сл. 8

H=0,91 II



Сл. 9

Strujna slika kod knoidalnih talasa

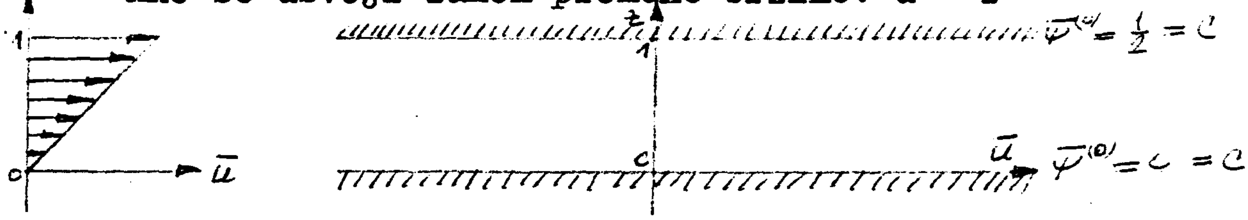
Rešenje jednačine KORTEWEG-de VRIES-a može se napisati u obliku:

$$A = \alpha_o \mathrm{cn}^2 \beta_o \,(x - \gamma_c \tau) \qquad \text{prilog II.6.}$$

Jednačina strujne funkcije je:

$$\bar{\psi}^{(o)} = \int^{z} \bar{u}\, dz + A f_o = c$$

Ako se usvoji zakon promene brzine: $\bar{u} = z$



Unoseći $\bar{u} = z$ u jednačinu strujne funkcije

$\int^{z} \bar{u}\, dz + A f_o = c$ dobijamo:

$$\frac{z^2}{2} + A f_o = c \text{ ili}$$

$$\frac{z^2}{2} + \alpha_o \mathrm{cn}^2 \beta_o \,(x - \gamma_c \tau)\, e^{\frac{H}{2} z} \sin n\pi z = c \text{ odnosno}$$

$$\mathrm{cn}^2 X = \frac{c - \frac{z^2}{2}}{f_o} \qquad (2.24.)$$

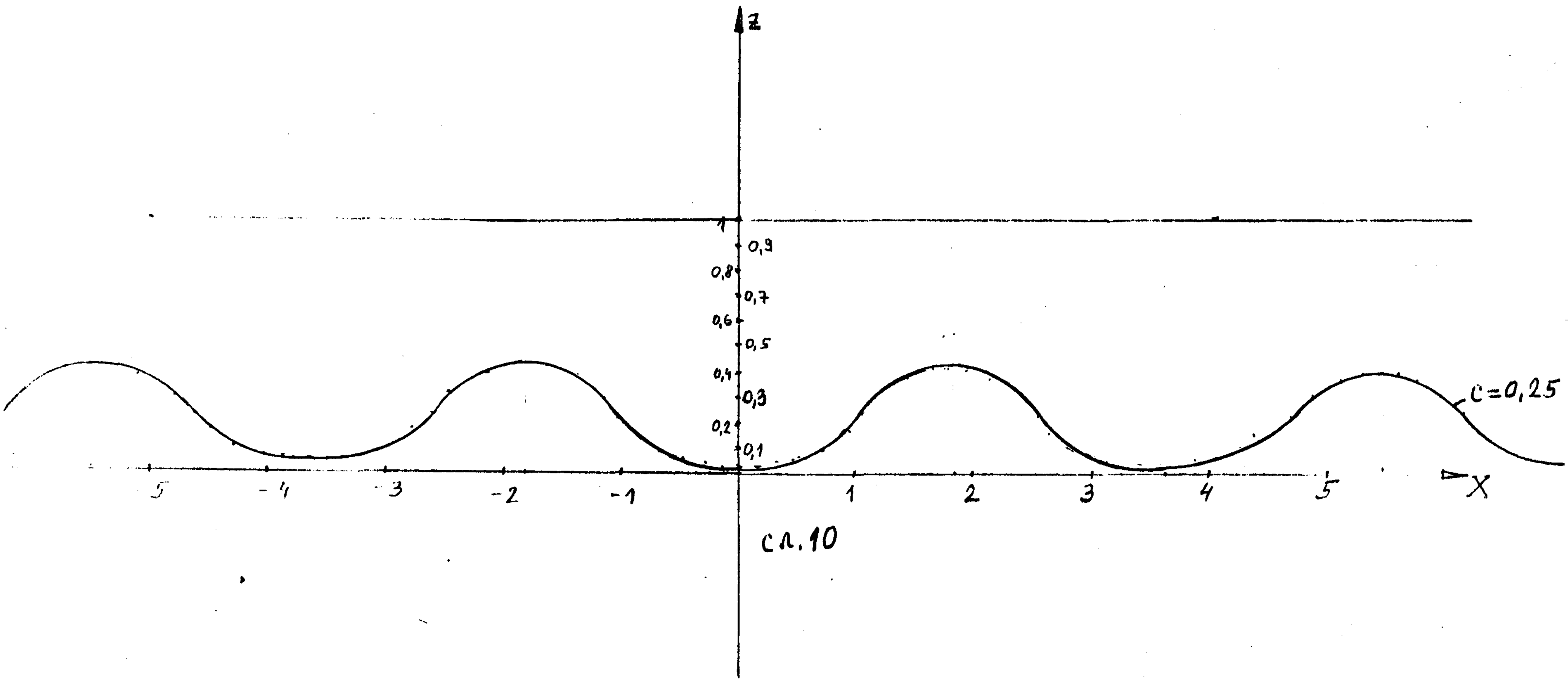
prilog II.7.

pri čemu je: $\alpha_o = 1$; $X = \beta_o\,(x - \gamma_c \tau)$

cnX - Jakobijeva eliptična funkcija 11 .

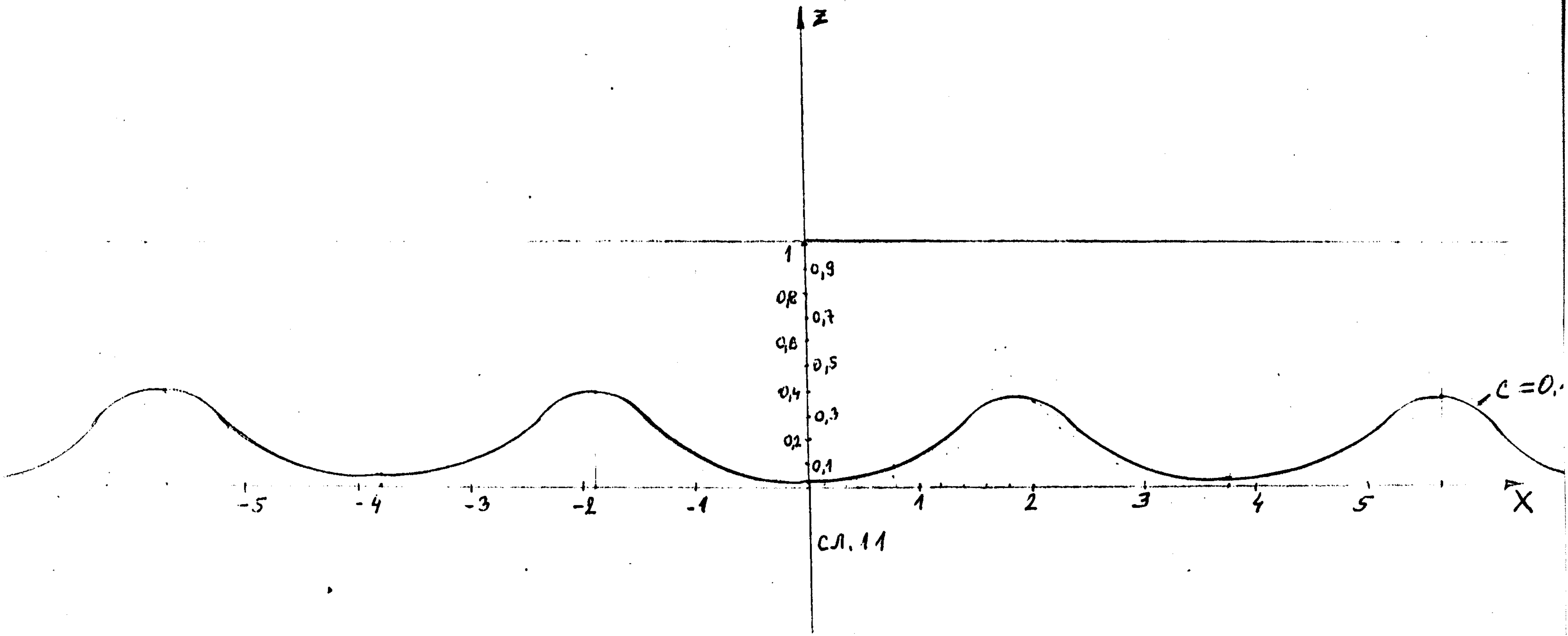
Jednačina 2.24. predstavlja jednačinu strujne funkcije koja se takođe može dijagramski prikazati. Na sl. 10, sl. 11, sl. 12. dat je prikaz strujne funkcije za $\bar{\varphi} = e^{-Hz}$ i za razčite vrednosti H.

- Na sl. 10 H = 0,1
- na sl. 11 H = 0,35
- na sl. 12 H = 0,91

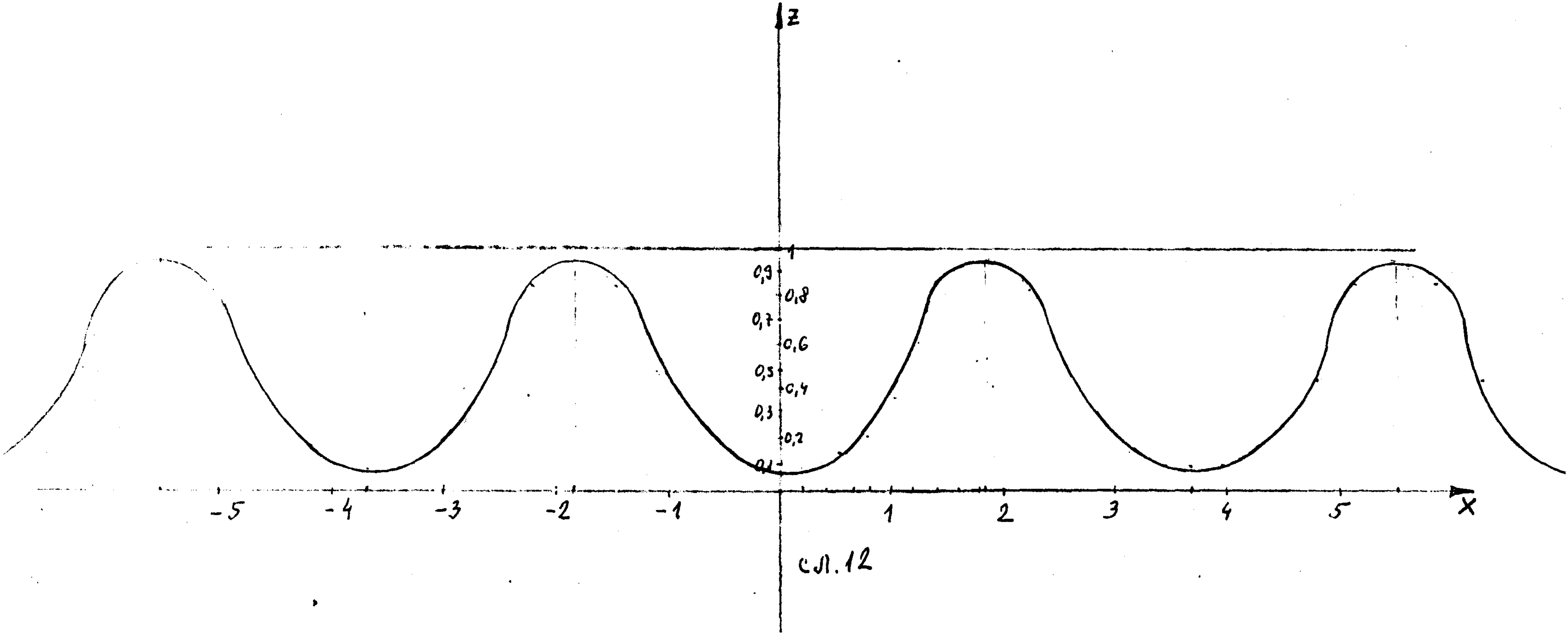


сл. 10

36.



Сл. 11



сл.12

Prilog II.1.

Rešavanje jednačine 2.11.

$$- c^2 (\bar{\rho} W_z^{(o)})_z + \bar{\rho}' W^{(o)} = 0; \quad z = 0,1; \; W^{(o)} = 0$$

$$W^{(o)} = - A_{\xi} f_o (z)$$

$$c^2(\bar{\rho} f_o')' - \bar{\rho}' f_o = 0$$

$$c^2\bar{\rho} f_o'' + c^2\bar{\rho}' f_o' - \bar{\rho}' f_o = 0$$

$$z = 0,1 : f_o = 0$$

$$f_o'' + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o - \frac{\bar{\rho}'}{c^2\bar{\rho}} f_o = 0$$

$$f_o'' - Hf_o' + \frac{H}{c^2} f_o = 0$$

$$\bar{\rho} = e^{- Hz}$$

$\ln \bar{\rho} = - Hz$ -(diferencirati)

$$\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} = - H$$

$$f_o = e^{\lambda z}$$

$$f_o' = \lambda e^{\lambda z}$$

$$f_o'' = \lambda^2 e^{\lambda z}$$

$$\lambda^2 - H\lambda + \frac{H}{c^2} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{H}{2} \pm \frac{a}{2}$$

$$f_o = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}$$

1) $z=0; f_o=0$

2) $z=1 \; f_o=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{H}{2}+\frac{a}{2}} & e^{\frac{H}{2}-\frac{a}{2}} \end{vmatrix} = 0$$

1) $0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = - c_1$

2) $0 = c_1 e^{\frac{H}{2}+\frac{a}{2}} + c_2 e^{\frac{H}{2}-\frac{a}{2}}$

$$e^{\frac{H}{2}+\frac{a}{2}} = e^{\frac{H}{2}-\frac{a}{2}+2n\pi i}$$

$$\cancel{\frac{H}{2}} + \frac{a}{2} = \cancel{\frac{H}{2}} - \frac{a}{2} + 2n\ i$$

$$a = 2n\pi i$$

$$a^2 = - 4n^2\pi^2$$

$$i^2 = - 1$$

$$a = \sqrt{H^2 - \frac{4H}{c^2}}$$

$$- 4n^2\pi^2 = H^2 - \frac{4H}{c^2}$$

$$c_n^2 = \frac{4H}{H^2 + 4n^2\pi^2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{H}{2} \pm in\pi$$

$$f_o = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}$$

$$f_o = c_1 e^{(\frac{H}{2} + in\pi)z} + c_2 e^{(\frac{H}{2} - in\pi)z} \; ; \; c_2 = - c_1$$

$$f_o = c_1 e^{\frac{H}{2}z} (e^{in\pi z} - e^{-in\pi z})$$

$$f_o = c_1 e^{\frac{H}{2}z} (\cos n\pi z + i\sin n\pi z - \cos n\pi z + i\sin n\pi z)$$

$$f_o = 2ic_1 e^{\frac{H}{2}z} \sin n\pi z \quad (2ic_1 \text{ ulazi u } A_\xi)$$

$$W^{(o)} = - A_\xi f_o$$

$$W^{(o)} = - A_\xi e^{\frac{H}{2}z} \sin n\pi z$$

Iz jednačine (2.8.) lako se izračunava na primer jed. na četvrtom mestu

$$U_\xi^{(o)} + W_z^{(o)} = 0 \qquad U_\xi^{(o)} = - W_z^{(o)} = A_\xi f_o' \qquad U^{(o)} = Af_o'$$

$$P^{(o)} = cA\bar{\rho} f_o' ; \; Q^{(o)} = - cA (\bar{\rho} f_o')'$$

Prilog II.2.

Izvodjenje jednačine KORTEWEG-de VRIES-a pri kretanju stratifikovanog fluida ograničenog dvema pločama.

Polazi se od jednačine (2.14.) koja je dobijena nakon druge aproksimacije

$$c^2\bar{\rho}\, W_{zz}^{(1)} + c^2\bar{\rho}' W_z^{(1)} - \bar{\rho}' W^{(1)} = F_2 - cF_{1z} - c^2\bar{\rho} W_{\xi\xi}^{(o)}$$

Za izvođenje jednačine KORTEWEG-de VRIES-a koristi se Grinova formula u intervalu 0,1 odnosno diferencijalni operator sa jednom nezavisnom promenljivom pri čemu je:

$$P_{(z)} = c^2\bar{\rho} \;;\quad q_{(z)} = c^2\bar{\rho}' \;;\quad r(z) = -\bar{\rho}'$$

Funkcije $P_{(z)}$, $q_{(z)}$ i $r_{(z)}$ su neprekidne u intervalu $[0, 1]$.

Ako se iskoristi osobina spregnutih operatora onda se može napisati Graniva formula.

$$c^2(\bar{\rho}f)'' - c^2(\bar{\rho}'f)' - \bar{\rho}'f = c^2(\bar{\rho}'f + \bar{\rho}f')' - c^2(\bar{\rho}'f)' - \bar{\rho}'f = c^2(\bar{\rho}f')' - \bar{\rho}'f$$

$$\int_0^1 (F_2 - c_1F_{1z} - c^2\bar{\rho}\, W_{\xi\xi}^{(o)})\, f_o dz = 0$$

$$\int_0^1 (F_2 - c^2\bar{\rho} W_{\xi\xi}^{(o)})\, f_o dz + c\int_0^1 F_1 f_o' dz = 0$$

$$F_1 = \bar{\rho}\left\{U_\tau^{(o)} + (\bar{U}+U^{(o)})U_\xi^{(o)} + (\bar{U}' + U_z^{(o)})\, W^{(o)}\right\} - cQ^{(o)}U_\xi^{(o)}$$

$$F_2 = Q_\tau^{(o)} + (\bar{U} + U^{(o)})\, Q_\xi^{(o)} + W^{(o)}Q_z^{(o)}$$

$$F_2 = -cA_\tau(\bar{\rho} f_o')' - (\bar{U}+Af_o')cA_\xi(\bar{\rho}f_o')' + (A_\xi f_o)\left[cA(\bar{\rho} f_o')'\right]$$

$$F_2 = -cA_\tau(\bar{\rho} f_o')' - cA_\xi \bar{U}(f_o'\bar{\rho})' + cAA_\xi\left\{f_o(\bar{\rho}f_o')'' - f_o'(\bar{\rho}f_o')'\right\}$$

$$F_1 = \bar{\rho}\, f_o'A_\tau + \bar{\rho}A_\xi(\bar{U}f_o' - \bar{U}'f_o) + \left\{\bar{\rho}(f_o'^2 - f_o f_o'') + c^2 f_o'(\bar{\rho} f_o')'\right\} AA_\xi$$

$$F_1 = \bar{\rho}\left\{A_\tau f_o' + (\bar{U}' + Af_o')A_\xi f_o - (\bar{U}' + Af_o'')A_\xi f_o\right\} + c^2A_\xi f_o' A(\bar{\rho}f_o')'$$

Zamenjujući izraze za F_1 i F_2 u jednačinu

$\int_0^1 (F_2 - c^2\bar{\rho} W^{(o)}_{\xi\xi})\, f_o dz + c\int_0^1 F_1 f_o' dz = 0$ i grupišući članove uz A_ζ, A_ξ, $A_{\xi\xi\xi}$, i AA_ξ dobijamo:

$$A_\zeta:\ -c\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o dz + c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz = c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz + c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz = 2c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz$$

$$A_\xi:\ -c\int_0^1 \bar{U}(\bar{\rho} f_o')' f_o dz + c\int_0^1 \bar{\rho}(\bar{U} f_o' - \bar{U}' f_o) f_o' dz =$$

$$= c\int_0^1 (\bar{U}' f_o - \bar{U} f_o')\bar{\rho} f_o' dz + c\int_0^1 \bar{\rho}(\bar{U} f_o' - \bar{U}' f_o) f_o' dz = 2c\int_0^1 \bar{U}\bar{\rho} f_o'^2 dz$$

$$A_{\xi\xi\xi}:\ c^2\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o^2 dz$$

$$AA_\xi:\ \int_0^1 F_2 f_o dz = c\int_0^1 \left\{(\bar{\rho} f_o')'' f_o^2 - f_o(\bar{\rho} f_o')' f_o\right\} dz =$$

$$= -c\left\{2\int_0^1 \left[f_o f_o'(\bar{\rho} f_o')' + f_o f_o'(\bar{\rho} f_o')'\right] dz = -3c\int_0^1 f_o f_o'(\bar{\rho} f_o')' dz + \ldots\right.$$

$$c\int_0^1 F_1 f_o' dz = c\int_0^1 \left\{\bar{\rho}(f_o'^2 - f_o f_o'') + c^2 f_o(\bar{\rho} f_o')'\right\} f_o' dz =$$

$$= c\int_0^1 \left\{\bar{\rho}(f_o'^2 - f_o f_o'') + \bar{\rho}' f_o f_o'\right\} f_o' dz +$$

$$= c\int_0^1 \left\{\bar{\rho}(f_o'^2 - f_o f_o'') f_o' - \bar{\rho}(f_o'^3 + 2 f_o f_o' f_o'')\right\} dz = -3c\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o f_o' f_o'' dz$$

$$\int_0^1 F_2 f_o d_z = 3c\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o'(f_o'^2 + f_o f_o'')dz$$

$$\int_0^1 F_2 f_o dz + \int_0^1 cF_1 f_o' dz = 3c\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o'^3 dz + \ldots\ldots$$

$$AA_\xi:\ 3c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz$$

Prilikom rešavanja prethodnih integrala korišćen je metod parcijalne integracije i pojedini integrali nakon rešavanja imaju sledeće vrednosti:

$$\int_0^1 -cF_{1z} dz = c\int F_1 f_o' d_z$$

$$-c\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o dz = c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz$$

$$-c\int_0^1 \bar{u}(\bar{\rho} f_o')' f_o dz = c\int_0^1 (\bar{U}' f_o + \bar{U} f_o')\bar{\rho} f_o' dz$$

$$\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')'' f_o^2 dz = f_o^2 (\bar{\rho} f_o')' \Big/_0^1 - 2\int_0^1 f_o f_o' (\bar{\rho} f_o')' dz$$

$$\int_0^1 c^3 f_o'^2 (f_o' \bar{\rho})' dz = \int_0^1 c \bar{\rho}' f_o f_o'^2 dz$$

$$c\int_0^1 \bar{\rho}' f_o f_o'^2 dz = f_o \bar{\rho} f_o'^2 \Big/_0^1 - \int_0^1 \bar{\rho} (f_o'^3 + 2 f_o f_o' f_o'') dz$$

$$-3c\int_0^1 f_o f_o' (\bar{\rho} f_o')' dz = 3c\int_0^1 \bar{\rho} f_o' (f_o'^2 + f_o f_o') dz$$

Sabirajući članove iuz $A_{\bar{\tau}}$, A_{ξ}, AA_{ξ}, $A_{\xi\xi\xi}$ dobijamo jednačinu KORTEWEG-de VRIES-a.

$$2c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz \cdot A_{\bar{\tau}} + 2c\int_0^1 \bar{U} \bar{\rho} f_o'^2 dz \cdot A_{\xi} + 3c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz AA_{\xi} + c^2 \int_0^1 \bar{\rho} f_o^2 dz A_{\xi\xi\xi} = 0$$

Ako ovu jednačinu podelimo sa $2c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz$ dobijamo:

$$A_{\bar{\tau}} + \bar{U}_{us} A_{\xi} + \frac{3}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} \cdot AA_{\xi} + \frac{c}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} A_{\xi\xi\xi} = 0$$

$$\bar{U}_{us} = \frac{\int_0^1 \bar{u} \bar{\rho} f_o'^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}$$

Prilog II.3.

Dokaz da je $A = \alpha_o \operatorname{sech}^2 \beta_o\{\xi - (\gamma_o + \bar{U}_{us})\tau\} = \alpha_o \operatorname{sech}^2 \beta_o(x - \delta_o\tau)$, rešenje jednačine

$A_\tau + a_1 A A_x + a_2 A_{xxx} = 0$ i računanje koeficijenata odnosno vrednosti za γ_o i β_o.

$$z = \beta_o(x - \delta_o\tau)$$

$$A_\tau + a_1 A A_x + a_2 A_{xxx} = 0 \qquad \frac{dz}{dx} = \beta_o$$

$$A = \alpha_o \operatorname{sech}^2 \beta_o(x - \delta_o\tau) \qquad \frac{dz}{d\tau} = -\beta_o\gamma_o$$

$$A = \alpha_o \operatorname{sech}^2 z \qquad A = \alpha_o \operatorname{sech}^2 z$$

$$A \cosh^2 z = \alpha_o \quad \text{(dif. po } \tau)$$

$$A \cosh^2 z - 2A\beta_o\gamma_o \cosh_z \sinh_z = 0 \qquad \operatorname{sech}^2 z = \frac{1}{\cosh^2 z}$$

$$A_\tau = 2A\beta_o\gamma_o \frac{\sinh z}{\cosh z} = 2A\beta_o\gamma_o \operatorname{tgh} z \,; \quad A = \alpha_o \frac{1}{\cosh^2 z}$$

$$A = 2A\beta_o\gamma_o \operatorname{tgh} z \qquad A \cos h^2 z = \alpha_o$$

$$A\cosh^2 z = \alpha_o \qquad \operatorname{tgh}^2 z + \operatorname{sech}^2 z = 1$$

$$A_x \cosh^2 z + A 2 \cosh z \sinh z \beta_o = 0$$

$$\operatorname{tgh}^2 z = 1 - \operatorname{sech}^2 z$$

$$A_x = -2A\beta_o \operatorname{tgh}_z$$

$$A_{xx} = -2\beta_o(A_x \operatorname{tgh} z + A\beta_o \operatorname{sech}^2 z) = -2\beta_o(-2A\beta_o \operatorname{tgh}^2 z + A\beta_o \operatorname{sech}^2 z)$$

$$A_{xx} = -2\beta_o[-2A(1-\operatorname{sech}^2 z) + A\operatorname{sech}^2 z] = -2\beta_o^2(-2A + 3A\operatorname{sech}^2 z)$$

$$A_{xxx} = -2\beta_o^2\left[-2(-)2A\beta_o \operatorname{tghz}+3A_x \operatorname{sech}^2 z+6A\beta_o \operatorname{sechz}(-\operatorname{sechztghz}) \right] =$$

$$= -2\beta_o^2\left[4A\beta_o \operatorname{tghz}-6A\beta_o \operatorname{sech}^2 z\operatorname{tghz}-6A\beta_o \operatorname{sech}^2 z\operatorname{tghz}\right] =$$

$$= -2\beta_o\left[4A\beta_o \operatorname{tghz} -12A\beta_o \operatorname{sech}^2 z\operatorname{tghz}\right]$$

$$A_{xxx} = - 8A\beta_o^3 \operatorname{tghz} (1-3\operatorname{sech}^2 z)$$

Uvrštavanjem ove vrednosti u jednačinama dobijamo:

$$2A\beta_o\gamma_o \operatorname{tghz} - 2a_1 A\beta_o^2 \operatorname{tghz} - 8Aa_2\beta_o^3 \operatorname{tghz} (1 - 3\operatorname{sech}^2 z) = 0$$

$$\gamma_o - a_1 A - 4a_2\beta_o^2 (1 - 3 \sec h^2 z) = 0$$

$$\gamma_o - 4a_2\beta_o^2 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$-a_1\alpha_o + 12a_2\beta_o^2 = 0 \dots\dots (2)$$

Iz prethodne jednačine (2) dobije se:

$$\beta_o = \sqrt{\frac{a_1\alpha_o}{12a_2}} \Rightarrow \beta_o^2 = \frac{a_1\alpha_o}{12a_2}$$

Iz jednačine (1) dobija se:

$$\gamma_o - 4a_2\beta_o^2 = 0 \qquad \beta_o^2 = \frac{\gamma_o}{4a_2}$$

$$\gamma_o = \frac{a_1\alpha_o}{3} \qquad \frac{a_1\alpha_o}{12a_2} = \frac{\gamma_o}{4a_2}$$

$$-a_1 A + 12a_2\beta_o^2 \operatorname{sech}^2 z = 0 /:\operatorname{sech}^2 z$$

$$-a_1\alpha_o + 12a_2\beta_o^2 = 0$$

$$A = \alpha_o \operatorname{sech}^2 z \Rightarrow \alpha_o = \frac{A}{\operatorname{sech}^2 z}$$

Prilog II.4.

Izračunavanje uopštene srednje vrednosti brzine

$\bar{\rho} = e^{-Hz}$; $H > 0$

$$f_{on} = e^{\frac{H}{2}z} \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$C_n^2 = \frac{4H}{H^2+4n^2\pi^2} < 1$$

$$f'_{on} = -\frac{H}{2} e^{-\frac{H}{2}z} \sin n\pi z + e^{\frac{H}{2}z} n\pi \cos n\pi z = e^{-\frac{H}{2}z}\left(\frac{H}{2}\sin n\pi z + n\pi \cos n\pi z\right)$$

$$f'_{on} = e^{Hz}\left(\frac{H^2}{4}\sin^2 n\pi z + Hn\pi \sin n\pi z \cos n\pi z + n^2\pi^2\cos^2 n\pi z\right)$$

$$\int_0^1 \bar{\rho} f'^2_{on} dz = \int_0^1 \left(\frac{H^2}{4}\sin^2 n\pi z + Hn\pi \sin n\pi z \cos n\pi z + n^2\pi^2 \cos^2 n\pi z\right) dz$$

$$\int_0^1 \sin^2 n\pi z\, dz = \frac{1}{2}; \quad \int_0^1 \cos^2 n\pi z\, dz = \int_0^1 (1-\sin^2 n\pi z) dz = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \sin n\pi z \cos n\pi z\, dz = \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi z\, d(\sin n\pi z) = \frac{\sin^2 n\pi z}{2n\pi}\Big/_0^1 = 0$$

$$\int_0 \bar{\rho} f'_{on} dz = \frac{1}{2}\left(\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2\right) = \frac{1}{2}\,\frac{H^2+4n^2\pi^2}{4} = \frac{H}{2C_n^2}$$

$\bar{u} = a + (b-a)\,z$ – zakon promene brzine

$$\int_0^1 \bar{u}\bar{\rho} f'^2_{on} dz = \frac{aH}{2C_n^2} + (b-a)\int_0^1 z\left(\frac{H^4}{2}\sin^2 n\pi z + Hn\pi \sin n\pi z \cos n\pi z \,+\right.$$

$$\left. + n^2\pi^2 \cos^2 n\pi z\right) dz$$

$$\int_0^1 z\sin^2 n\pi z\, dz = \frac{1}{4}; \quad \int_0^1 z\cos^2 n\pi z\, dz = \int_0^1 z(1-\sin^2 n\pi z) dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 z \sin n\pi z \cos n\pi z\, dz = \frac{1}{n\pi}\int_0^1 z\sin n\pi z\, d(\sin n\pi z) =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\,\frac{1}{2}\, z\sin^2 n\pi z\Big/_0^1 - \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \sin^2 n\pi z\, dz = -\frac{1}{4n\pi}$$

$$u = z;\ du = dz;\ v = \frac{1}{2}\sin^2 n\pi z \quad dv = \sin n\pi z\, d(\sin n\pi z)$$

$$\int_0^1 \bar{u}\zeta f'_{on}\,dz = \frac{aH}{2C_n^2} + (b-a)\left\{\frac{H^2}{16} - Hn\pi\frac{1}{4n\pi} + \frac{n^2\pi^2}{4}\right\} =$$

$$= \frac{aH}{2C_n^2} + (b-a)\,\frac{1}{4}\left\{\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2 - \right. =$$

$$= \frac{aH}{2C_n^2} + \frac{b-a}{4}\left(\frac{H}{C_n^2} - H\right) \Big/ \frac{2C_n^2}{H} \Big/;\ \frac{2C_n^2}{H}$$

$$\bar{U}_{us} = a + \frac{b-a}{2}\left(1 - C_n^2\right) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}C_n^2$$

Prilog II.5.

Strujna funkcija

Polazimo od jednačine kontinuiteta

$u_z + w_z = 0$

$u = \psi_z$; $w = -\psi_x$ (brzine pre poremećaja)

$\bar{u} + u' = \psi_z$; $w' = -\psi_x$ (brzine nakon poremećaja)

$\bar{u} = \varepsilon U \quad u' = \varepsilon U; \quad w = \varepsilon^{\frac{3}{2}} t$

$\xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}} (x - ct); \tau = \varepsilon^{\frac{3}{2}} t$

$\psi = \varepsilon \bar{\varphi}$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}$$

$\varepsilon (\bar{U} + U) = \varepsilon \bar{\varphi}_z$

$\varepsilon^{\frac{3}{2}} W = -\varepsilon \bar{\varphi}_\xi \varepsilon^{\frac{1}{2}}$

$W = -\bar{\varphi}_\xi$

$\bar{U} + U = \bar{\varphi}_z$

$U = U^{(o)} + U^{(1)} + \dots$

$W = W^{(o)} + \varepsilon W^{(1)} + \dots$

$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^{(o)} + \varepsilon \bar{\varphi}^{(1)} + \dots$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$-\psi_x = -\varepsilon \bar{\varphi}_\xi \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

Jednačine nakon prve aproksimacije imaju oblik

$\bar{U} + U^{(o)} = \bar{\varphi}_z^{(o)}$

$$W^{(o)} = -\overline{\varphi}_{\xi}^{(o)}$$

Od ranije je poznato da je: $U^{(o)} = A_{(\xi,\tau)} f'_{o(z)}$, $W^{(o)} = -A_{\xi} f_o$
i ako ovo uvrstimo u jednačinu dobijamo:

$$\overline{\varphi}^{(o)} = \int^{z} \bar{U} dz + Af_o + F_{(\xi)} \quad \text{(dif. po } \xi \text{ se dobija)}$$

$$A_{\xi} f_o + F' = A_{\xi} f_o \qquad\qquad F = c = \text{konst.}$$

$$\overline{\varphi}^{(o)} = \int^{z} \bar{U} dz + Af_o + c \quad \text{pre čemu je}$$

$$f_o = e^{\frac{H}{2}} \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Za $z = 0$; $\overline{\varphi}^{(o)} = 0 \Rightarrow c = 0$ onda je:

$$\overline{\varphi}^{(o)} = \int_{c}^{z} \bar{U} dz + Af_o = \text{konst.}$$

Prilog II.6.

Dokaz da je $A = \alpha_o \, cn^2 \beta_o (x - \gamma \tau)$ rešenje jednačine KORTEWEG-de VRIES-a

$A_\tau + a_1 A A_x + a_2 A_{xxx} = 0$ može se dokazati na sledeći način:

$A_\tau + a_1 A A_x + a_2 A_{xxx} = 0$ $\qquad z = \ _o(x - \quad)$

$A = \alpha_o \, cn^2 \ _o(x - \gamma \tau)$ $\qquad \frac{dz}{dx} = \beta_o$

$A = \alpha_o cn^2 z$ $\qquad \frac{dz}{d\tau} = -\beta_o \gamma_o$

$A_\tau = 2\alpha_o \beta_o \gamma_o \, snz \; cnz \; dnz$

$A_{xx} = -2\alpha_o \beta_o (-\beta_o sn^2 z \, dn^2 z + \beta_o cn^2 z dn^2 z - K^2 \beta_o sn^2 z cn^2 z) =$

$= -2\alpha_o \beta_o^2 (-sn^2 z dn^2 z + cn^2 z dn^2 z - K^2 sn^2 z cn^2 z)$

$A_{xxx} = 8\alpha_o \beta_o^3 \, snz \cdot cnzdnz \, (dn^2 z - K^2 sn^2 z + K^2 cn^2 z)$

$cn^2 z + sn^2 z = 1 \Rightarrow sn^2 z = 1 - cn^2 z$

$dn^2 z + K^2 sn^2 z = 1 \Rightarrow dn^2 z = 1 - K^2 sn^2 z = 1 - K^2 + K^2 cn^2 z$

$A_{xxx} = -8\alpha_o \beta_o^3 snzcnzdnz(2K^2 - 1 - 3K^2 cn^2 z)$

Ako vrednosti za A_τ, A, A_x, A_{xxx} uvrstimo u jednačinu KORTEWEG-de VRIES-a dobijamo:

$$\gamma_o - 4a_2 \beta_o^2 (2K^2 - 1) - a_1 \alpha_o cn^2 z + 12 K^2 \beta_o^2 a_2 cn^2 z = 0$$

1) $\gamma_o - 4a_2 \beta_o^2 (2K^2 - 1) = 0$

2) $12 K^2 \beta_o^2 a_2 cn^2 z - a_1 \alpha_o cn^2 z = 0$

Iz jednačine 1 dobija se:

$$\gamma_o = \frac{(2K^2 - 1) a_1 \alpha_o}{3K^2}$$

Iz jednačine (2) dobija se:

$$\beta_o = \sqrt{\frac{a_1\alpha_o}{12a_2K^2}}$$

Da je $A = \alpha_o cn^2 \beta_o(x - \gamma_o\tau)$ rešenje jednačine KORTEWEG-de VRIES-a može se dokazati i na drugi način

$$A_\tau + a_1AA_x + a_2A_{xxx} = 0 \qquad z = \beta_o(x - \qquad)$$

$$A = \alpha_o cn^2\beta_o\ (x - \gamma_o\tau)$$

$$A_\tau = A'\ (-\beta_o\gamma_o);\ A_x = A'\beta_o;\ A_{xx} = \beta_o A'';\ A_{xxx} = \beta_o^3 A'''$$

Ako sada ove vrednosti za izvode uvrstimo u jednačinu KORTEWEG-de VRIES-a dobijamo:

$$-\beta_o\gamma_o A' + a_1\ {}_oAA' + a_2\ {}_o^3A''' = 0$$

Integracijom ove jednačine dobijamo:

$$-\frac{\gamma_o}{2}A^2 + \frac{a_1}{6}A^3 + \frac{a_2\beta_o^2}{2}A'^2 = C_1A + C_2$$

$$cn^2z + sn^2z = 1 \Rightarrow sn^2z = 1 - cn^2z$$

$$dn^2z + msn^2z = 1$$

$$A = \alpha_o cn^2\ (X/\ m)$$

$$A' = 2\alpha_o cnz\ (-snzdnz)$$

$$dn^2z = 1 - msn^2z = 1 - m(1 - cn^2z) = 1 - m - mcn^2z$$

$$-\frac{\gamma_o}{2}\alpha_o^2\ cn^4z + \frac{a_1}{6}\alpha_o^3cn^6z + \frac{a_2\beta_o^2}{2}4\alpha_o^3\ cn^2z\ (1-cn^2z)(1-m+mcn^2z) =$$

$$= C_1\alpha_o cn^2z + C_2$$

1) $C_2 = 0$

2) cn^2z : $2\alpha_o^2\beta_o a_2(1-m) = C_1\alpha_o$

3) cn^4z: $-\frac{\gamma_o}{2}\alpha_o + 2\alpha_o\ a_2\beta_o^2\left\{m - (1 - m\ )\right\} = 0$

4) $cn^6 z$: $\frac{a_1}{6}\alpha_0^3 - 2\alpha_0^2\, a_2 \beta_0^2\, m = 0$

Iz četvrte jednačine se dobija :

$$\alpha_0 = 12\,\frac{a_2}{a_1}\,\beta_0^2 m \Rightarrow \beta_0 = \sqrt{\frac{a_1\alpha_0}{12a_2 m}}$$

Iz treće jednačine se dobija: $\gamma_0 = 4a_2\beta_0^2\,(2m - 1)$

$$\gamma_0 = \frac{a_1\alpha_0}{3m}\,(2m - 1)$$

prilog II.7.

H = .1

C	Z	CnX
.05	.05	.544457
.05	.1	.372184
.05	.15	.284941
.05	.2	.22034
.05	.25	.158818
.05	.3	.0766741
.1	.05	.774899
.1	.1	.540771
.1	.15	.431225
.1	.2	.359814
.1	.25	.304114
.1	.3	.254299
.1	.35	.203394
.1	.4	.141434
.15	.05	.951053
.15	.1	.668091
.15	.15	.539182
.15	.2	.458675
.15	.25	.399684
.15	.3	.351365
.15	.35	.307813
.15	.4	.264599
.15	.45	.216681
.15	.5	.15421
.2	.05	1.09933
.2	.1	.774763
.2	.15	.628873
.2	.2	.539721
.2	.25	.476455
.2	.3	.426903
.2	.35	.384874
.2	.4	.346442
.2	.45	.308391
.2	.5	.2671
.2	.55	.216681
.2	.6	.141434
.25	.05	1.22987
.25	.1	.868429
.25	.15	.707279
.25	.2	.610095
.25	.25	.542468
.25	.3	.490954
.25	.35	.448896
.25	.4	.412348
.25	.45	.378496
.25	.5	.344824
.25	.55	.308391
.25	.6	.264599
.25	.65	.203394
.25	.7	.0766737
.3	.05	1.34782

.3	.1	.952933
.3	.15	.777822
.3	.2	.673151
.3	.25	.601277
.3	.3	.547563
.3	.35	.504863
.3	.4	.469084
.3	.45	.437508
.3	.5	.408001
.3	.55	.378496
.3	.6	.346442
.3	.65	.307813
.3	.7	.254299
.3	.75	.158818
.35	.05	1.45624
.35	.1	1.03053
.35	.15	.842479
.35	.2	.730786
.35	.25	.654825
.35	.3	.598844
.35	.35	.555218
.35	.4	.519662
.35	.45	.489457
.35	.5	.46263
.35	.55	.437508
.35	.6	.412348
.35	.65	.384874
.35	.7	.351365
.35	.75	.304114
.35	.8	.22034
.4	.05	1.55714
.4	.1	1.10268
.4	.15	.902515
.4	.2	.784197
.4	.25	.704314
.4	.3	.646068
.4	.35	.60137
.4	.4	.565737
.4	.45	.536397
.4	.5	.511457
.4	.55	.489457
.4	.6	.469084
.4	.65	.448896
.4	.7	.426903
.4	.75	.399684
.4	.8	.359814
.4	.85	.284941
.45	.05	1.65188
.45	.1	1.17039
.45	.15	.9588
.45	.2	.834195
.45	.25	.750546
.45	.3	.690067
.45	.35	.644225
.45	.4	.608332
.45	.45	.579548
.45	.5	.556012
.45	.55	.536397
.45	.6	.519662
.45	.65	.504863
.45	.7	.490954

.45	.75	.476455
.45	.8	.458675
.45	.85	.431224
.45	.9	.372184
.5	.05	1.74148
.5	.1	1.23439
.5	.15	1.01196
.5	.2	.881361
.5	.25	.794092
.5	.3	.731424
.5	.35	.684401
.5	.4	.648133
.5	.45	.619702
.5	.5	.597253
.5	.55	.579548
.5	.6	.565737
.5	.65	.555217
.5	.7	.547563
.5	.75	.542468
.5	.8	.539721
.5	.85	.539182
.5	.9	.540771
.5	.95	.544457

H = .35

C	Z	CnX
.05	.05	.51147
.05	.1	.349635
.05	.15	.267677
.05	.2	.206991
.05	.25	.149196
.05	.3	.0720287
.1	.05	.72795
.1	.1	.508007
.1	.15	.405098
.1	.2	.338014
.1	.25	.285689
.1	.3	.238892
.1	.35	.191071
.1	.4	.132865
.15	.05	.893432
.15	.1	.627613
.15	.15	.506515
.15	.2	.430885
.15	.25	.375469
.15	.3	.330077
.15	.35	.289163
.15	.4	.248568
.15	.45	.203553
.15	.5	.144867
.2	.05	1.03273
.2	.1	.727822
.2	.15	.590771
.2	.2	.507021
.2	.25	.447588
.2	.3	.401039
.2	.35	.361556
.2	.4	.325452
.2	.45	.289706
.2	.5	.250917
.2	.55	.203553
.2	.6	.132865
.25	.05	1.15535
.25	.1	.815814
.25	.15	.664427
.25	.2	.573131
.25	.25	.509602
.25	.3	.461209
.25	.35	.421699
.25	.4	.387365
.25	.45	.355564
.25	.5	.323932
.25	.55	.289706
.25	.6	.248568
.25	.65	.191071
.25	.7	.0720283
.3	.05	1.26616

.3	.1	.895198
.3	.15	.730696
.3	.2	.632367
.3	.25	.564847
.3	.3	.514388
.3	.35	.474275
.3	.4	.440664
.3	.45	.411001
.3	.5	.383282
.3	.55	.355564
.3	.6	.325452
.3	.65	.289163
.3	.7	.238892
.3	.75	.149196
.35	.05	1.36801
.35	.1	.968094
.35	.15	.791436
.35	.2	.68651
.35	.25	.615151
.35	.3	.562562
.35	.35	.521579
.35	.4	.488178
.35	.45	.459802
.35	.5	.434601
.35	.55	.411001
.35	.6	.387365
.35	.65	.361556
.35	.7	.330077
.35	.75	.285689
.35	.8	.20699
.4	.05	1.46279
.4	.1	1.03587
.4	.15	.847834
.4	.2	.736685
.4	.25	.661642
.4	.3	.606924
.4	.35	.564935
.4	.4	.531461
.4	.45	.503899
.4	.5	.480469
.4	.55	.459802
.4	.6	.440664
.4	.65	.421699
.4	.7	.401039
.4	.75	.375468
.4	.8	.338014
.4	.85	.267677
.45	.05	1.5518
.45	.1	1.09948
.45	.15	.900709
.45	.2	.783654
.45	.25	.705073
.45	.3	.648258
.45	.35	.605193
.45	.4	.571475
.45	.45	.544435
.45	.5	.522325
.45	.55	.503899
.45	.6	.488178
.45	.65	.474275
.45	.7	.461209

.45	.75	.447588
.45	.8	.430885
.45	.85	.405098
.45	.9	.349634
.5	.05	1.63597
.5	.1	1.15961
.5	.15	.950647
.5	.2	.827962
.5	.25	.74598
.5	.3	.68711
.5	.35	.642935
.5	.4	.608865
.5	.45	.582156
.5	.5	.561067
.5	.55	.544435
.5	.6	.531461
.5	.65	.521579
.5	.7	.514388
.5	.75	.509602
.5	.8	.507021
.5	.85	.506515
.5	.9	.508007
.5	.95	.51147

H = .91

C	Z	CnX
.05	.05	.444651
.05	.1	.303958
.05	.15	.232708
.05	.2	.179949
.05	.25	.129705
.05	.3	.0626187
.1	.05	.632849
.1	.1	.44164
.1	.15	.352175
.1	.2	.293855
.1	.25	.248366
.1	.3	.207683
.1	.35	.166109
.1	.4	.115507
.15	.05	.776712
.15	.1	.545621
.15	.15	.440343
.15	.2	.374594
.15	.25	.326417
.15	.3	.286955
.15	.35	.251386
.15	.4	.216095
.15	.45	.17696
.15	.5	.125941
.2	.05	.897812
.2	.1	.632738
.2	.15	.513592
.2	.2	.440783
.2	.25	.389114
.2	.3	.348646
.2	.35	.314321
.2	.4	.282934
.2	.45	.251858
.2	.5	.218137
.2	.55	.17696
.2	.6	.115507
.25	.05	1.00442
.25	.1	.709234
.25	.15	.577625
.25	.2	.498256
.25	.25	.443026
.25	.3	.400955
.25	.35	.366607
.25	.4	.336759
.25	.45	.309112
.25	.5	.281613
.25	.55	.251858
.25	.6	.216095
.25	.65	.166109
.25	.7	.0626184
.3	.05	1.10074

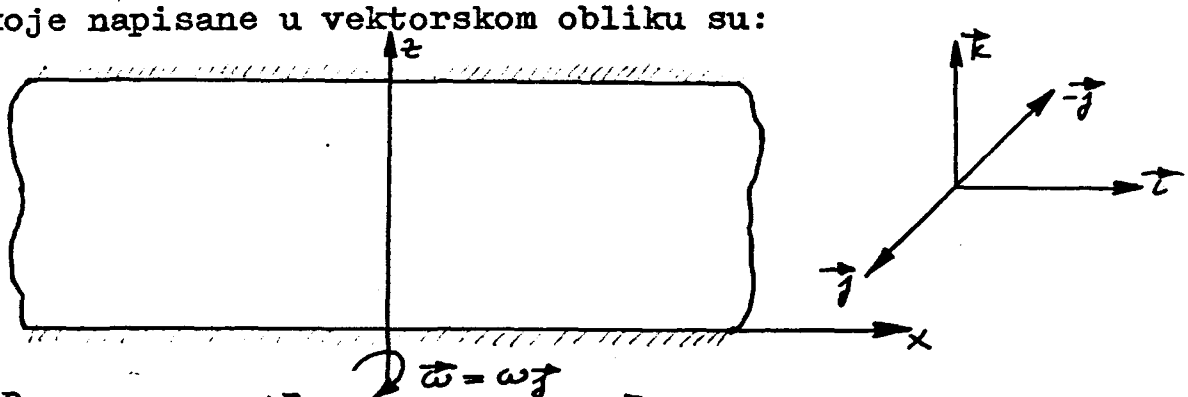
.3	.1	.778248
.3	.15	.635237
.3	.2	.549753
.3	.25	.491055
.3	.3	.447187
.3	.35	.412315
.3	.4	.383095
.3	.45	.357307
.3	.5	.333209
.3	.55	.309112
.3	.6	.282934
.3	.65	.251386
.3	.7	.207683
.3	.75	.129705
.35	.05	1.18929
.35	.1	.841621
.35	.15	.688041
.35	.2	.596823
.35	.25	.534787
.35	.3	.489068
.35	.35	.453439
.35	.4	.424401
.35	.45	.399733
.35	.5	.377824
.35	.55	.357307
.35	.6	.336759
.35	.65	.314321
.35	.7	.286955
.35	.75	.248366
.35	.8	.179949
.4	.05	1.27169
.4	.1	.900545
.4	.15	.737072
.4	.2	.640443
.4	.25	.575203
.4	.3	.527635
.4	.35	.491131
.4	.4	.46203
.4	.45	.438068
.4	.5	.4177
.4	.55	.399733
.4	.6	.383095
.4	.65	.366607
.4	.7	.348646
.4	.75	.326417
.4	.8	.293855
.4	.85	.232707
.45	.05	1.34907
.45	.1	.955844
.45	.15	.783039
.45	.2	.681276
.45	.25	.612961
.45	.3	.563568
.45	.35	.52613
.45	.4	.496816
.45	.45	.473309
.45	.5	.454088
.45	.55	.438068
.45	.6	.424401
.45	.65	.412315
.45	.7	.400955

.45	.75	.389114
.45	.8	.374594
.45	.85	.352175
.45	.9	.303957
.5	.05	1.42224
.5	.1	1.00811
.5	.15	.826453
.5	.2	.719796
.5	.25	.648524
.5	.3	.597344
.5	.35	.558941
.5	.4	.529321
.5	.45	.506102
.5	.5	.487768
.5	.55	.473309
.5	.6	.46203
.5	.65	.453439
.5	.7	.447187
.5	.75	.443026
.5	.8	.440783
.5	.85	.440343
.5	.9	.44164
.5	.95	.444651

UTICAJ ROTACIJE SISTEMA NA RASPROSTIRANJE NELINEARNIH DUGIH GRAVITACIONIH TALASA U STRATIFIKOVANOJ TEČNOSTI (n=1)

I u ovom slučaju takođe izučavamo talase u jednom sloju koji je ograničen ravnim pločama sa obe strane a za razliku od prethodnog slučaja imamo obrtanje celog sistema. Osa x je postavljena u ravni donje ploče u pravcu prostiranja talasa, a osa z je postavljena vertikalno naviše.

Obrtanjem modela se vrši oko y ose. Ovaj model se može poistovetiti sa zemljom i zemljinom atmosferom na polutaru. Pri rešavanju ovog problema polazi se od osnovnih jednačina, koje napisane u vektorskom obliku su:



$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + 2\rho[\vec{\omega}, \vec{v}] = - \text{grad}p - \rho g\vec{k}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \text{div}\,(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (3.1.)$$

$\vec{v} = \vec{v}_r$ - relativna brzina

$p = p^*$ - generalisani pritisak

$2\,[\vec{\omega}, \vec{v}]$ - KORIOLISOVO ubrzanje pri čemu je:

$$v = u\vec{i} + w\vec{k}$$

$$2[\vec{\omega}, \vec{v}] = 2\,[\omega\vec{j}, u\vec{i} + w\vec{k}] = -2\omega w\vec{i} + 2\omega u\vec{k}$$

Vektorskim jednačinama (3.1.) odgovaraju sledeće skalarne jednačine:

$$\rho(u_t + uu_x + wu_z - 2\omega w) = -p_x$$

$$\rho(w_t + uw_x + ww_z + 2\omega u) = -p_z - \rho g \qquad (3.2.)$$

$$u_x + w_z = 0$$

$$\rho_t + u\rho_x + w\rho_z = 0$$

Nakon nastanka poremećaja gustina, pritisak i brzina imaće sledeće vrednosti:

$$p = \bar{p} + p' ; \quad \varrho = \bar{\varrho} + \varrho' ; \quad u = \bar{u}\,(z) + u'\,(t,x,z); \quad w = w'$$

ϱ, ρ, u, w – gustina, pritisak i brzina nakon poremećaja.

$\bar{\varrho}$, $\bar{p}$, $\bar{u}$ – gustina, pritisak i brzina u neporemećenoj tečnosti.

ϱ', p', u', w' – poremećajne vrednosti gustine, pritiska i brzine

Posle nastanka poremećaja osnovne jednačine &(3.2.) imaju sledeći oblik

$$(\bar{\varrho} + \varrho')\left\{u'_t + (\bar{u} + u')\,u'_x + w'(\bar{u}_z + u'_z) - 2\omega w'\right\} = -\,p'_x$$

$$(\bar{\varrho} + \varrho')\left\{w'_t + (\bar{u} + u')w'_x + w'w'_z + 2\omega(\bar{u} + u')\right\} = -\varrho g - p_z$$

$$u'_x + w'_z = 0 \tag{3.3.}$$

$$\varrho'_t + (\bar{u} + u')\varrho'_x + w'(\bar{\varrho}_z + \varrho'_z) = 0$$

Osnovne jednačine mogu se napisati u bezdimenzionalnom obliku, ako uzmemo iste razmere koje smo koristili i u prethodnom poglavlju.

$$(\bar{\varrho} + \varrho)\left\{u_t + (\bar{u} + u)u_x + w(\bar{u}' + u_z) - \frac{2\omega h}{\sqrt{gh}}\,w\right\} = -\,p_x$$

$$(\bar{\varrho} + \varrho)\left\{w_t + (\bar{u} + u)w_x + ww_z + \frac{2\omega h}{\sqrt{gh}}\,u\right\} = -\varrho - p_z$$

$$\varrho_t + (\bar{u} + u)\varrho_x + w\,(\bar{\varrho}' + \varrho_z) = 0 \tag{3.4.}$$

$$u_x + w_z = 0$$

Pri rešavanju ovog zadatka granični uslovi su:

$$w_{(o)} = w_{(1)} = 0$$

Da bi smo dobili odgovarajući oblik jednačine KORTEWEG–de VRIES-a, jednačina (3.4.) takođe ćemo uvesti dalekopoljne koordinate:

$$\xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}} (x - ct)$$
$$\tau = \ ^{\frac{3}{2}} t \qquad (3.5.)$$

I u ovom slučaju se brzina, pritisak i gustina mogu izraziti preko parametra (ε).

$$u = \varepsilon U; \ \bar{u} = \varepsilon \bar{U}; \ w = \varepsilon^{\frac{3}{2}} W; \ \rho = \varepsilon Q; \ p = \varepsilon P \qquad (3.6.)$$

$$\frac{\omega h}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{R_o} = \Omega \varepsilon^{n}; \ \Omega = O(1); \ \Omega = \pm 1$$

$$R_o = \frac{\sqrt{gh}}{\omega h} \text{ - Rosbijev broj}$$

Nakon uvođenja dalekopoljnih koordinata jednačine imaju sledeći oblik:

$$(\bar{\rho} + \varepsilon Q)\left\{-cU_\xi + \varepsilon U_\tau + \varepsilon(\bar{U} + U)U_\xi + W(\bar{U}_z + U_z) - 2\Omega\varepsilon^{n}W\right. = -P_\xi$$

$$(\bar{\rho} + \varepsilon Q) - \varepsilon c W_\xi + O(\varepsilon^2) + 2\Omega\varepsilon^{n}U = -Q - P_z$$

$$-cQ_\xi + \varepsilon Q_\tau + \varepsilon(\bar{U} + U)Q_\xi + W(\bar{\rho}_z + \varepsilon Q_z) = 0 \qquad (3.7.)$$

$$U_\xi + W_z = 0$$

U zavisnosti od vrednosti eksponenta <u>n</u> mogu se dobiti tri različite jednačine KORTEWEG-de VRIES-a odnosno tri različita rešenja za solitarne, odnosno knoidalne talase:

1. $n > 1$ - Rotacija celog sistema je mala i može se zanemariti pa su rezultati isti kao i kad nemamo rotaciju.
2. $n = 1$ - Jednačine prvog reda su iste kao i u slučaju kada nemamo rotaciju. Jednačina drugog reda se menja odnosno ima dopunske članove što ima za posledicu da se menja jednačina KORTEWEG-de VRIES-a.
3. $n = 0$ - U ovom slučaju se već jednačine prvog reda menjaju pa je i jednačina KORTEWEG-de VRIES-a takva da ima više dopunskih članova.

Slučaj $n > 1$ detaljno je proučen u prethodnom poglavlju. U ovom poglavlju proučavaćemo slučaj kada je $n = 1$.

Izvođenje jednačine KORTEWEG-de VRIES-a u slučaju kada je n = 1:

Prva aproksimacija je ista kao i kada je n 1 tj. kada je rotacija celog sistema mala, ili ne postoji.

Jednačine drugog reda

Ako u jednačine (3.7.) unesemo vrednosti za brzinu, pritisak i gustinu koje kada se razviju u red imaju sledeći oblik:

$$
\begin{aligned}
U &= \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}\varepsilon^{n} \\
W &= \sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)}\varepsilon^{n} \\
P &= \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}\varepsilon^{n} \\
Q &= \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}\varepsilon^{n}
\end{aligned}
\qquad (3.8.)
$$

Kod druge aproksimacije redovi (3.8.) se unose u jednačinu (3.7.). Nakon druge aproksimacije jednačine imaju sledeći oblik:

$$
\begin{aligned}
&- c\bar{\rho}U^{(1)}_{\xi} - cQ^{(0)}U^{(0)}_{\xi} + \bar{\rho}\left\{U^{(0)}_{\tau} + (\bar{U}+U^{(0)})U^{(0)}_{\xi} + W^{(0)}(U_z + U^{(0)}_z) - \right. \\
&\left. - 2\Omega W^{(0)}\right\} = - P^{(0)}_{\xi} \\
&- c\bar{\rho}W^{(0)}_{\xi} + 2\bar{\rho}\Omega U^{(0)} = - Q^{(1)} - P^{(1)}_z \\
&- cQ^{(1)}_{\xi} + \bar{\rho}_z W^{(1)} + Q^{(0)}_{\tau} + (\bar{U} + U^{(0)})Q^{(1)}_{\xi} + W^{(0)}Q^{(0)}_z = 0 \\
&U^{(1)}_{\xi} + W^{(1)}_z = 0
\end{aligned}
\qquad (3.9.)
$$

Prethodne jednačine se mogu napisati u sažetijem obliku na sledeći način:

$$P^{(1)}_{\xi} = c\bar{\rho}U^{(1)}_{\xi} - F_1 + 2\bar{\rho}\Omega W^{(o)}$$

$$P^{(1)}_{z} = - Q^{(1)} + c\,\bar{\rho}\,W^{(o)} - 2\bar{\rho}\Omega U^{(o)} \qquad (3.10.)$$

$$- cQ^{(1)}_{\xi} + \bar{\rho}' W^{(1)} = - F_2$$

$U^{(1)}_{\xi} + W^{(1)}_{z} = 0$, pri čemu su vrednosti F_1 i F_2 s ledeće:

$$F_1 = \bar{\rho}\left\{U^{(o)}_{\tau} + (\bar{U}+U^{(o)})U^{(o)}_{\xi} + W^{(o)}(\bar{U}_z+U^{(o)}_z)\right\} - cQ^{(o)}U^{(o)}_{\xi}$$

$$F_2 = - Q^{(o)}_{\tau} - (\bar{U}+U^{(o)})Q^{(o)}_{\xi} - W^{(o)}Q^{(o)}_{z} \qquad (3.11.)$$

Prvu od jednačina (3.10.) diferenciramo po (z) a drugu jednačinu po (ξ) i oako izjednačimo desne strane tih jednačina dobijamo:

$$c(\bar{\rho}U^{(1)}_{\xi})_z - F_{1z} + 2(\bar{\rho}\Omega W^{(o)})_z = -Q^{(1)}_{\xi} + c\bar{\rho}W^{(o)}_{\xi\xi} - 2(\bar{\rho}\Omega U^{(o)})_{\xi} / c$$

$$c^2(\bar{\rho}U^{(1)}_{\xi})_z - cF_{1z} + 2c(\bar{\rho}\Omega W^{(o)})_z = -cQ^{(1)}_{\xi} + c^2\, W^{(o)}_{\xi\xi} - 2c(\bar{\rho}\Omega U^{(o)})_{\xi} \qquad (3.12.)$$

Iz četvrte jednačine, jednačina (3.10.) dobija se:

$$U^{(1)}_{\xi} = - W^{(1)}_{z}$$

Zamenom prethodne jednačine u (3.12.) imamo:

$$c^2\bar{\rho}W^{(1)}_{zz} + c^2\bar{\rho}'W^{(1)}_{z} - \bar{\rho}'W^{(1)} = F_2 - cF_{1z} - c^2\bar{\rho}W^{(o)}_{\xi\xi} + 2c\Omega\left[\bar{\rho}U^{(o)}_{\xi} + (\bar{\rho}W^{(o)})_z\right] \qquad (3.13.)$$

Očigledno je da u jednačini (3.13.) član

$2c\Omega\left[\bar{\rho}U^{(o)}_{\xi} + (\bar{\rho}W^{(o)})_z\right]$ u sebi sadrži uticaj rotacije.

Metodom-Grinovom formulom koja je detaljno opisana u prethodnom poglavlju može se dobiti jednačina KORTEWEG-de VRIES-a.

$$A + \bar{U}_{us}A_{\xi} - \Omega\frac{\int_0^1 \bar{\rho}' f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} A_{\xi} + \frac{3}{2}\,\frac{\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o'^2 dz} AA_{\xi} + \frac{c}{2}\,\frac{\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o'^2 dz} A_{\xi\xi\xi} = 0 \qquad (3.14.)$$

odnosno

$$A_{\tau} + a_1 A A_{\xi} + a_2 A_{\xi\xi\xi} = 0 \qquad (3.15.)$$

prilog III.1.

pri čemu je: $a_1 = \frac{3}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}$; $a_2 = \frac{c}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}$

Jednačina (3.15.) ima za rešenje solitarni talas:

$A = \alpha_o \operatorname{sech}^2 \beta_o \left\{ \xi - (\gamma_o + U_{us}) \tau \right\}$ pri čemu su

$\alpha_o = 1$; $\gamma_o = \frac{a_1 \alpha_o}{3}$; $\beta_o = \sqrt{\frac{a_1 \alpha_o}{12 a_2}}$

Jednačina (3.15.) može za rešenje takođe imati knoidalni talas: $A = \alpha_o \operatorname{cn}^2 \beta_o (x - \gamma_o \tau)$. Ovi dokazi su detaljno izvedeni u prethodnom poglavlju.

Upoređujući jednačine (3.14.) i (2.15.) zaključujemo da se u jednačini (3.14.) javlja dopunski član

$\Omega \frac{\int_0^1 \bar{\rho}' f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} A_{\xi}$ koji nastaje usled rotacije modela.

Prilog III.1.

Izvođenje jednačine KORTEWEG-de VRIES-a

$$c^2\bar{\rho}W^{(1)}_{zz}+c^2\bar{\rho}'W^{(1)}_{z}-\bar{\rho}'W^{(1)}=F_2-cF_{1z}-c^2\bar{\rho}W^{(1)}_{\xi\xi}+2c\Omega\left[\bar{\rho}U^{(o)}_{\xi}+(\bar{\rho}W^{(o)})_z\right]$$

Grinova formula

$$P\,(z)=c^2\bar{\rho};\quad q\,(z)=c^2\bar{\rho}';\quad r(z)=-\bar{\rho}'$$

$$c^2(\bar{\rho}f)''-c^2(\bar{\rho}'f)-\bar{\rho}'f=c^2(\bar{\rho}'f+\bar{\rho}f')'-c^2(\bar{\rho}'f)'-\bar{\rho}'f=c^2(\bar{\rho}f'')'-\bar{\rho}'f$$

$$\int_0^1-cF_{1z}f_o\,dz=\int_0^1 cF_1f_o'\,dz$$

$$\int\left\{F_2-cF_{1z}-c^2\bar{\rho}W^{(o)}_{\xi\xi}+2c\Omega\left[\bar{\rho}U^{(o)}_{\xi}+(\bar{\rho}W^{(o)})_z\right]\right\}f_o\,dz=0$$

$$F_1=\bar{\rho}A_{\tau}f_o'+\bar{\rho}A_{\xi}(\bar{u}f_o'-\bar{u}'f_o)+\left\{\bar{\rho}(f_o'^2-f_of_o'')+c^2f_o'(\bar{\rho}f_o')'\right\}AA_{\xi}$$

$$F_2=-cA_{\tau}(\bar{\rho}f_o')'-cA_{\xi}\bar{u}(f_o'\bar{\rho})'+cAA_{\xi}\left\{f_o(\bar{\rho}f_o')''-f_o'(\bar{\rho}f_o')'\right\}$$

A_{τ}: $\quad 2c\int_0^1\bar{\rho}f_o'^2\,dz$

$$A_{\xi}:\ -c\int_0^1\bar{u}(\bar{\rho}f_o')'f_o\,dz+c\int_0^1\bar{\rho}(\bar{u}f_o'-\bar{u}'f_o)f_o'\,dz+2c\Omega\int_0^1\left[\bar{\rho}f_o'-(\bar{\rho}f_o)'\right]f_o\,dz=$$

$$=c\int_0^1(\bar{u}'f_o+\bar{u}f_o')\bar{\rho}f_o'\,dz+c\int_0^1(\bar{u}f_o'-\bar{u}'f_o)f_o'\,dz-2c\Omega\int_0^1\bar{\rho}'f_o^2\,dz=$$

$$=2c\int_0^1\bar{u}\bar{\rho}f_o'^2\,dz-2c\Omega\int_0^1\bar{\rho}'f_o^2\,dz$$

$A_{\xi\xi\xi}$: $\quad c^2\int_0^1\bar{\rho}f_o^2\,dz$

AA_{ξ}: $\quad 3c\int_0^1\bar{\rho}f_o'^3\,dz$

Jednačina KORTEWEG-de VRIES-a

$$A_{\tau}+\bar{u}_{us}A_{\xi}-\Omega\frac{\int_0^1\bar{\rho}'f_o^2\,dz}{\int_0^1\bar{\rho}f_o'^2\,dz}A_{\xi}+\frac{3}{2}\,\frac{\int_0^1\bar{\rho}\,f_o'^3\,dz}{\int_0^1\bar{\rho}\,f_o'^2\,dz}AA_{\xi}+\frac{c}{2}\,\frac{\int_0^1\bar{\rho}f_o^2\,dz}{\int_0^1\bar{\rho}f_o'^2\,dz}A_{\xi\xi\xi}=0$$

$$\bar{u}_{us} = \frac{\int_0^1 \bar{u}\bar{\varrho} f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\varrho}\, f_o'^2 dz}$$

pri čemu je:

$$f_{on} = e^{\frac{H}{2}z} \sin n\pi z$$

$$f_{on}' = e^{\frac{H}{2}z}\left(\frac{H}{2}\sin n\pi z + n\pi \cos n\pi z\right)$$

$$\int_0^1 \bar{\varrho} f_o'^2 dz = \int_0^1 \left(\frac{H^2}{4}\sin^2 n\pi z + Hn\pi \sin n\pi z \cos n\pi z + n^2\pi^2 \cos^2 n\pi z\right) dz$$

$$\int_0^1 \sin^2 n\pi z\, dz = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \cos^2 n\pi z\, dz = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \bar{\varrho}\, f_o'^2 dz = \frac{H}{2cn^2}$$

$$\frac{\int_0^1 \bar{\varrho}' f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\varrho}\, f_o'^2 dz} = \frac{-H\int_0^1 e^{-Hz} e^{Hz} \sin n\pi z\, dz}{\frac{H}{2cn^2}} = -cn^2$$

U specijalnom slučaju kada je

$$\bar{\varrho} = e^{-Hz};\ H > 0$$

$$\frac{c}{2}\,\frac{\int_0^1 \bar{\varrho}\, f_o dz}{\int_0^1 \bar{\varrho}\, f_o'^2 dz} = \frac{cn^3}{2H} = a_2; \qquad \int_0^1 \bar{\varrho}\, f_o'^2 dz = \frac{H}{2cn^2}$$

$$\frac{3}{2}\,\frac{\int_0^1 \bar{\varrho}\, f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\varrho}\, f_o'^2 dz} = \left[1 - (-1)^n e^{\frac{H}{2}}\right] \frac{12cn^2n^3\pi^3}{H^2 + 36n^2\pi^2} = a_1$$

$$A_\tau + (\bar{u}_{us} + \Omega cn^2)A_\xi + a_1 A A_\xi + a_2 A_{\xi\xi\xi} = 0$$

$$X = \xi - (\bar{U}_{us} + \Omega cn^2)$$

$$A_\tau - (\bar{U}_{us} + \Omega cn^2)A_x + (\bar{U}_{us} + \Omega cn^2)A_x + a_1 A A_x + a_2 A_{xxx} = 0$$

$$A_{\bar{\tau}} + a_1 A A_X + a_2 A_{XXX} = 0$$

Uvođenjem nove koordinate $X = \bar{\xi} - (\bar{U}_{us} + \Omega c n^2)\bar{\tau}$ eliminišu se u jednačini KORTEWEG-de VRIES-a članovi

$$\bar{U}_{us} A_{\bar{\xi}} - \Omega \frac{\int_0^1 \bar{\varsigma}' f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\xi} f_o'^2 dz} A$$

Takođe se može zaključiti da sada na brzinu talasa imaju uticaj i smicajno strujanje i rotacija celog sistema. Takođe se može izvesti zaključak da rotacija i smicajno strujanje nemaju uticaj na amplitudu i dužinu talasa.

UTICAJ ROTACIJE SISTEMA NA RASPROSTIRANJE NELINEARNIH DUGIH GRAVITACIONIH TALASA U STRATIFIKOVANOJ TEČNOSTI (n=0)

Takođe ćemo proučiti talase u sloju koji je ograničen ravnim pločama sa obe strane koji ima još i obrtanje. Osa x je postavljena u ravni donje ploče u pravcu prostiranja talasa, a osa z je postavljena vertikalno naviše. Pri rešavanju ovog problema polazimo od osnovnih jednačina 3.7. nakon uvođenja dalekopoljnih koordinata.

$$
\begin{aligned}
&(\bar{\rho}+\varepsilon Q)\left\{-cU_{\xi}+\varepsilon U_{\tau}+\varepsilon(\bar{U}+U)U_{\xi}+\varepsilon W(\bar{U}_z+U_z)-2\Omega\varepsilon^{n}W\right. = -P_{\xi}\\
&(\bar{\rho}+\varepsilon Q)\left\{-\varepsilon cW_{\xi}+O(\varepsilon^{2})+2\Omega\varepsilon^{n}U\right\} = -Q-P_z\\
&-cQ_{\xi}+\varepsilon Q_{\tau}+\varepsilon(\bar{U}+U)Q_{\xi}+W(\bar{\rho}_z+\varepsilon Q_z) = 0\\
&U_{\xi}+W_z = 0
\end{aligned}
\qquad (4.1.)
$$

Pošto u ovom slučaju proučavamo solitarni talas kada je n=0 videćemo da se već prva aproksimacija menja i da jednačina KORTEWEG-de VRIES-a ima nove dopunske članove.

Jednačina prvog reda

Već smo objasnili da se brzina, pritisak i gustina mogu pomoću parametra razviti u red:

$$
\begin{aligned}
U &= \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}\varepsilon^{n}\\
W &= \sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)}\varepsilon^{n}\\
P &= \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}\varepsilon^{n}\\
Q &= \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}\varepsilon^{n}
\end{aligned}
\qquad (4.2.)
$$

Ako sada vrednosti u obliku reda (4.2.) i to samo sa prvim članom unesemo u jednačine 4.1. dobijamo:

$$c\bar{\rho}U_{\xi}^{(o)} + 2\bar{\rho}\Omega W^{(o)} = P_{\xi}^{(o)}$$

$$-2\bar{\rho}\Omega U^{(o)} - Q^{(o)} = P_{z}^{(o)} \qquad (4.3.)$$

$$-cQ_{\xi}^{(o)} + \rho_{z}W^{(o)} = 0$$

$$U_{\xi}^{(o)} + W_{z}^{(o)} = 0$$

Iz treće jednačine (4.3.) dobija se:
$-cQ_{\xi}^{(o)} = -\bar{\rho}'W^{(o)}$ a iz četvrte jednačine

$$U_{\xi}^{(o)} = - W_{z}^{(o)}$$

Ako prvu jednačinu (4.3.) diferenciramo po z a drugu po ξ i izjednačimo leve strane jednačina imamo:

$$c\,(\bar{\rho}U_{\xi}^{(o)})_{z} + 2\Omega(\bar{\rho}W^{(o)})_{z} = - Q_{\xi}^{(o)}-2\bar{\rho}\Omega U_{\xi}^{(o)}$$

Množenjem prethodne jednačine sa c i korišćenjem jednačine kontinuiteta dobijamo:

$$-c^{2}(\bar{\rho}W_{z}^{(o)})_{z}+(2\bar{\rho}'c\Omega\, W^{(o)}+2c\Omega\bar{\rho}W_{z}^{(o)}] +\bar{\rho}'W^{(o)}-2\bar{\rho}\Omega cW_{z}^{(o)} = 0$$

$$-c^{2}(\bar{\rho}W_{z}^{(o)})_{z} + (1 + 2c\Omega)\bar{\rho}'W^{(o)} = 0 \qquad (4.4.)$$

Ako se u jednačini (4.4.) izvrši razdvajanje promenljivih u $W^{(o)}$ na način $W^{(o)} = - A_{\xi}f_{o}$ gde je A proizvoljna i za sada neodređena funkcija lako se pokazuje da je: (prilog IV.1.).

$$c^{2}(\bar{\rho}f_{o}')' - (1+ 2\Omega c)\bar{\rho}'f_{o} = 0 \qquad (4.4.)$$

Važno je napomenuti da tek jednačine drugog reda daju željenu jednačinu za određivanje A (ξ,τ)

Pomoću jednačine (4.4.) sa graničnim uslovima f(o) = = f(1) = 0 mogu se odrediti sopstvene vrednosti funkcije f(z) i sopstvene vrednosti za c.

Tako na primer za eksponencijalni zakon stratifikacije je:

$$f_{on} = e^{\frac{H}{2}z} \sin n\pi z$$

U prethodnim poglavljima smo pretpostavili da je: (prilog IV.1.)

$$W^{(o)} = - A_{\xi} f_o \quad \text{odnosno} \quad -W_z^{(o)} = A_{\xi} f_o'$$

Iz četvrte jednačine (4.3.) dobijamo:

$$U_{\xi}^{(o)} = - W_z^{(o)}$$

$$U_{\xi}^{(o)} = A_{\xi} f_o'$$

$$U^{(o)}_{\xi} = A f_o'$$

Pomoću prve jednačine (4.3.) može se izračunati pritisak:

$$c\bar{\rho} U_{\xi}^{(o)} + 2\bar{\rho}\Omega W^{(o)} = P_{\xi}^{(o)}$$

$$c\bar{\rho} U_{\xi}^{(o)} - 2\bar{\rho}\Omega A_{\xi} f_o = P_{\xi}^{(o)}$$

$$P^{(o)} = \bar{\rho} A (c f_o' - 2\Omega f_o)$$

Gustinu $Q^{(o)}$ izračunavamo koristeći treću jednačinu:

$$cQ_{\xi}^{(o)} = \bar{\rho}' W(o) \qquad\qquad c^2(\bar{\rho} f_o')' - \bar{\rho}' f_o = 0$$

$$cQ_{\xi}^{(o)} = -\bar{\rho}' A_{\xi} f_o \qquad\qquad c^2(\bar{\rho} f_o')' = \bar{\rho}' f_o$$

$$cQ^{(o)} = - A\bar{\rho}' f_o$$

$$cQ^{(o)} = - Ac^2(\bar{\rho} f_o')'$$

$$Q^{(o)} = - cA\,(\bar{\rho} f_o')'$$

Vrednost za c izračunavamo iz sledeće jednačine: (prilog IV.1)

$$\frac{1}{c^2} + \frac{2\Omega}{c} = \frac{n^2\pi^2}{H} + \frac{H}{4} \tag{4.5.}$$

Rešavanjem jednačine (4.5.) dobijamo:

$$c_{1,2} = \frac{4H\Omega \pm 2\sqrt{4H^2\Omega^2 + H\,(H^2 + 4H^2\pi^2)}}{H^2 + 4n^2\pi^2}$$

pri čemu je:

$\Omega > 0$: $c_1 > 0$; $c_2 < 0$

$\Omega < 0$: $c_1 > 0$; $c_2 < 0$

Jednačine drugog reda.

Uvrštavanjem vrednosti za brzinu, pritisak i gustinu (4.2.) u jednačine (4.1.) imamo:

$$\begin{aligned}
P^{(1)}_{\xi} &= c\bar{\varsigma}U^{(1)}_{\xi} + 2\bar{\rho}\Omega W^{(1)} - F_1 + 2\Omega Q^{(o)}W^{(o)} - \\
P^{(1)}_{z} &= -\,Q^{(1)} - 2\bar{\rho}\Omega U^{(1)} + c\bar{\rho}W^{(1)}_{\xi} - 2\Omega Q^{(o)}U^{(o)} \\
-c\,Q^{(1)}_{\xi} &+ \bar{\rho}'\,W^{(1)} = -\,F_2 \\
U^{(1)}_{\xi} &+ W^{(1)}_{z} = 0
\end{aligned} \tag{4.6.}$$

Kao i u prethodnim poglavljima F_1 i F_2 imaju sledeće vrednosti:

$$F_1 = \bar{\rho}\left\{U^{(o)}_{\tau} + \mathcal{E}\,(\bar{U} + U^{(o)})U^{(o)}_{\xi} + W^{(o)}(\bar{U}_z + U^{(o)}_z)\right\} - cQ^{(o)}U^{(o)}_{\xi}$$

$$F_2 = -Q^{(o)}_{\tau} - (\bar{U} + U^{(o)})\,Q^{(o)}_{\xi} - W^{(o)}Q^{(o)}_{z}$$

Ako rprvu jednačinu (4.6.) diferenciramo po z a drugu po ξ i izjednačimo desne strane dobijamo:

$$c^2\bar{\rho}\,W^{(1)}_{zz} + c^2\bar{\rho}'\,W^{(1)}_{z} - \bar{\rho}'(1+2\Omega c)W^{(1)} = F_2 - cF_{1z} - c^2\bar{\rho}\,W^{(1)}_{\xi\xi} +$$

$$+ 2\Omega c\left[Q_{\xi}^{(o)}U^{(o)} + Q_{z}^{(o)}W^{(o)}\right] \qquad (4.7.)$$

Grinovom formulom izračunavamo pojedine članove jednačine KORTEWEG-de VRIES-a:

$$\int_0^1 \left\{F_2 - cF_{1z} - c^2\bar{\rho}\, W_{\xi\xi}^{(o)} + 2\Omega c\left(Q_{\xi}^{(o)}U^{(o)} + Q_{z}^{(o)}W^{(o)}\right)\right\} f_o dz = 0$$

$$F_2 = -cA_{\tau}(\bar{\rho} f_o')' - c\bar{U}A_{\xi}(\bar{\rho} f_o')' + cAA_{\xi}\left[(\bar{\rho} f_o')'' f_o - (\bar{\rho} f_o')' f_o\right]$$

$$F_1 = \bar{\rho} A_{\tau} f_o' + \bar{\rho} A_{\xi}(\bar{U} f_o' - \bar{U}' f_o) + \left\{\bar{\rho}(f_o'^2 - f_o f_o'') + c^2 f_o'(\bar{\rho} f_o')'\right\} AA_{\xi}$$

$$A_{\tau}:\ 2c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz$$

$$A_{\xi}:\ 2c\int_0^1 \bar{u}\bar{\rho} f_o'^2 dz$$

$$A_{\xi\xi\xi}:\ c^2\int_0^1 \bar{\rho} f_o^2 dz$$

$$AA_{\xi}:\ 3c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz - 6\Omega c^2\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o' f_o dz \qquad \text{(prilog IV.2.)}$$

Jednačina KORTEWEG-de VRIES-a ima oblik

$$A_{\tau} + \bar{U}_{us}A_{\xi} + \frac{3}{2}\,\frac{\left[\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz - 2\Omega c\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o' f_o dz\right]}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} AA_{\xi} + \frac{c}{2}\,\frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} A_{\xi\xi\xi} = 0$$

Uopštena srednja vrednost brzine je:

$$\bar{U}_{us} = \frac{\int_0^1 \bar{u}\bar{\rho} f_o'^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}$$

Uvođenjem nove koordinate $x = \xi - \bar{U}_{us}\tau$ eliminiše se u jednačini KORTEWEG-de VRIES-a član $\bar{U}_{us}A_{\xi}$ posle čega se može zaključiti da smicajno strujanje utiče na brzinu talasa. Isto tako se može zaključiti da smicajno strujanje ne utiče na amplitudu i dužinu talasa. Ako u jednačini KORTEWEG-de VRIES-a uvedemo:

$$x = \xi - \bar{U}_{us}\tau$$

Jednačina KORTEWEG-de VRIES-a je:

$$A_{\tau} - \bar{U}_{us} A_{\xi} + \bar{U}_{us} A_{\xi} + a_1 A A_x + a_2 A_{xxx} = 0, \text{ odnosno}$$

$$A_{\tau} + a_1 A A_x + a_2 A_{xxx} = 0 \tag{4.8.}$$

Jednačina KORTEWEG-de VRIES-a (4.8.) ima za rešenje solitarni talas

$A = \alpha_o \operatorname{sech}^2 \beta_o (x - \gamma_o \tau)$ ili knoidalni talas

$A = \alpha_o \operatorname{cn}^2 \beta_o (x - \gamma_o \tau)$ što je detaljno pokazano u drugom poglavlju.

U slučaju kada je raspored gustine, brzine dat u sledećem obliku:

$$\bar{\rho} = e^{-Hz}$$

$$\bar{u} = a + (b-a)z$$

koeficijenti a_1 i a_2 iznose:

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} - 2\Omega c \frac{\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o' f_o dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} = \left[1 - (-1)^n e^{\frac{H}{2}}\right] \frac{60\, Cn^2 n^3 \pi^3}{H^2 + 36 n^2 \pi^2}$$

(prilog IV.3.)

$$a_2 = \frac{c}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho} \cdot f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} = \frac{Cn^3}{2H}$$

Prilog IV.1.

Rešenje problema sopstvene vrednosti funkcije u slučaju kada je n = 0

$$- c^2(\bar{\rho} W_z^{(o)})_z + (1+2\Omega c)\bar{\rho}' W^{(o)} = 0 \qquad f_o = e^{\lambda z}$$

$$- c^2(\bar{\rho} f_o')' + (1+2c\ )\bar{\rho}' f_o = 0 \qquad f_o' = \lambda e^{\lambda z}$$

$$c^2\bar{\rho} f_o'' + c^2\bar{\rho}' f_o' - (1+2\Omega c)\bar{\rho}' f_o = 0 \qquad f_o'' = \lambda^2 e^{\lambda z}$$

$$f_o'' + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o' - \frac{1+2c\Omega}{c^2}\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o = 0 \qquad \bar{\rho} = e^{-Hz}$$

$$f_o'' - Hf_o' + \frac{1+2c\Omega}{c^2} Hf_o = 0 \qquad \bar{\rho}' = -He^{-Hz}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda z} - H\lambda e^{\lambda z} + \frac{1+2c\Omega}{c^2} He^{\lambda z} = 0 \qquad \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} = -H$$

granični uslovi su:

$$z = 0;\ f_o = 0$$

$$z = 1;\ f_o = 0$$

$$\lambda^2 - H\lambda + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{2\Omega}{c}\right)H = 0$$

$$_{1,2} = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4H\left(\frac{1}{c^2} + \frac{2\Omega}{c}\right)}}{2} \qquad a^2 = H^2 - 4H\left(\frac{1}{c^2} + \frac{2}{c}\right)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{H}{2} \pm \frac{a}{2} \qquad a = \sqrt{H^2 - 4H\left(\frac{1}{c^2} + \frac{2}{c}\right)}$$

$$f_o = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z} \qquad a = \sqrt{H^2 - 4H\left(\frac{H}{4} + \frac{n^2\pi^2}{H}\right)}$$

$$f_o = c_1 e^{\left(\frac{H}{2} + \frac{a}{2}\right)z} + c_2 4^{\left(\frac{H}{2} - \frac{a}{2}\right)z} \qquad a = \sqrt{H^2 - H^2 - 4n^2\pi^2}$$

granični uslovi su:

$$0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -c_1 \qquad a = 2\,n\pi\, i$$

$$0 = c_1 e^{\frac{H}{2} + \frac{a}{2}} + c_2 e^{\frac{H}{2} - \frac{a}{2}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{H}{2} + \frac{a}{2}} & e^{\frac{H}{2} - \frac{a}{2}} \end{vmatrix} = 0$$

$$e^{\frac{H}{2} - \frac{a}{2}} = e^{\frac{H}{2} + \frac{a}{2} + 2n\pi i}$$

$$\frac{H}{2} - \frac{a}{2} = \frac{H}{2} + \frac{a}{2} + 2n\pi i$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$-a = 2n\pi i$$

$$a^2 = 4n^2\pi^2 i^2$$

$$a_{1,2} = \pm 2n\pi i$$

$$-4n^2\pi^2 = H^2 - 4H\left(\frac{1}{c^2} + \frac{2\Omega}{c}\right)$$

$$\frac{1}{c^2} + \frac{2\Omega}{c} = \frac{H}{4} + \frac{n^2\pi^2}{H}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{H}{2} \pm in\pi$$

$$f_{on} = e^{\frac{H}{2}z} \sin n\pi z$$

$$f_o = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}$$

$$f_o = c_1 e^{\left(\frac{H}{2} + in\pi\right)z} + c_2 e^{\left(\frac{H}{2} - in\pi\right)z}$$

$$f_o = e^{\frac{H}{2}z}(c_1 \cos n\pi z + ic_1 \sin n\pi z + c_2 \cos n\pi z - ic_2 \sin n\pi z)$$

$$f_o = e^{\frac{H}{2}z}(c_1 \cos n\pi z + ic_1 \sin n\pi z - c_1 \cos n\pi z + ic_1 \sin n\pi z)$$

$$f_o = ic_1 e^{\frac{H}{2}z} \sin n\pi z$$

$$W^{(o)} = - A_{\bar{j}} f_o = - A_{\bar{j}} e^{\frac{H}{2} z} \sin n\sqrt{\ } z$$

vrednost (ic_1) ulazi u $A_{\bar{j}}$.

Prilog IV.2.

$$AA_{\xi} : 3c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz + 2c^2\Omega\int_0^1\left\{(\bar{\rho} f_o')'' f_o^2 - (\bar{\rho} f_o') f_o' f_o\right\} dz$$

$$2\Omega c(Q_{\xi}^{(o)} U^{(o)} + Q_z^{(o)} W^{(o)}) = 2\Omega c\left\{\left[-cA_{\xi}(\bar{\rho} f_o')'\right] Af_o' + \left[-cA(\bar{\rho} f_o')'' \cdot (-) A_{\xi} f_o\right]\right\} =$$

$$= 2\Omega c^2\left\{AA_{\xi}(\bar{\rho} f_o')'' f_o - AA_{\xi}(\bar{\rho} f_o')' f_o'\right\} = 2\Omega c^2 AA_{\xi}\left\{(\bar{\rho} f_o')'' f_o - (\bar{\rho} f_o')' f_o'\right\}$$

$$\int_0^1 (\bar{\rho} f_o)'' f_o^2 dz = -2\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o' f_o dz \quad \text{(od ranije poznato)}$$

$$AA_{\xi}: 3c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz - 6\Omega c^2\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o' f_o dz$$

Prilog IV.3.

$$\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o' f_o \, dz = ?$$

$$\bar{\rho} = e^{-Hz}$$

$$\bar{\rho}' = - He^{-hz}$$

$$f_o = e^{\frac{H}{2} z} \sin n z$$

$$f_o' = e^{\frac{H}{2} z} (\frac{H}{2} \sin n\pi z + n\pi \cos n\pi z)$$

$$f_o f_o' = e^{Hz} (\frac{H}{2} \sin^2 n\pi z + n\pi \sin n\pi z \cos n\pi z)$$

$$\bar{\rho} f_o' = e^{- \frac{H}{2} z} (\frac{H}{2} \sin n\pi z + n\pi \cos n\pi z)$$

$$(\bar{\rho} f_o')' = \bar{\rho}' f_o' + \bar{\rho} f_o''$$

$$f_o'' = e^{\frac{H}{2} z} [Hn\pi \cos n\pi z + (\frac{H^2}{4} - n^2\pi^2) \sin n\pi z$$

$$\bar{\rho}' f_o' = e^{- \frac{H}{2} z} (- \frac{H^2}{2} \sin n\pi z - Hn\pi \cos n\pi z)$$

$$\bar{\rho} f_o'' = e^{- \frac{H}{2} z} Hn\pi \cos n\pi z + (\frac{H^2}{4} - n^2\pi^2) \sin n\pi z$$

$$(\bar{\rho} f_o')' = - e^{- \frac{H}{2} z} (\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2) \sin n\pi z$$

$$f_o f_o' = e^{Hz} (\frac{H}{2} \sin^2 n\pi z + n\pi \sin n\pi z \cos n\pi z)$$

$$(\bar{\rho} f_o')' f_o' f_o = e^{\frac{H}{2} z} [- n\pi (\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2) \cos n\pi z - \frac{H}{2} (\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2) \sin^3 n\pi z +$$

$$+ n\pi (\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2) \cos^3 n\pi z$$

$$\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o' f_o \, dz = n\pi\left(\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2\right) \int_0^1 e^{\frac{H}{2} z} \cos^3 n\pi z \, dz$$

$$- \frac{H}{2}\left(\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2\right) \int_0^1 e^{\frac{H}{2} z} \sin^3 n\pi z \, dz -$$

$$- n\pi\left(\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2\right) \int_0^1 e^{\frac{H}{2} z} \cos n\pi z \, dz$$

$$\int_0^1 e^{\frac{H}{2} z} \cos n\pi z \, dz = \frac{\frac{H}{2}}{\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2} \left[e^{\frac{H}{2}} (-1)^n - 1 \right]$$

$$- n\pi\left(\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2\right) \int_0^1 e^{\frac{H}{2} z} \cos n\pi z \, dz = \frac{Hn\pi}{2} \left[1 - (-1)^n e^{\frac{H}{2}} \right]$$

$$n\pi\left(\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2\right) \int_0^1 e^{\frac{H}{2} z} \cos^3 n\pi z \, dz = \left(\frac{H^2}{4} + 7n^2\pi^2\right) \left[(-1)^n e^{\frac{H}{2}} - 1 \right] \frac{2Hn\pi}{H^2 + 36n^2\pi^2}$$

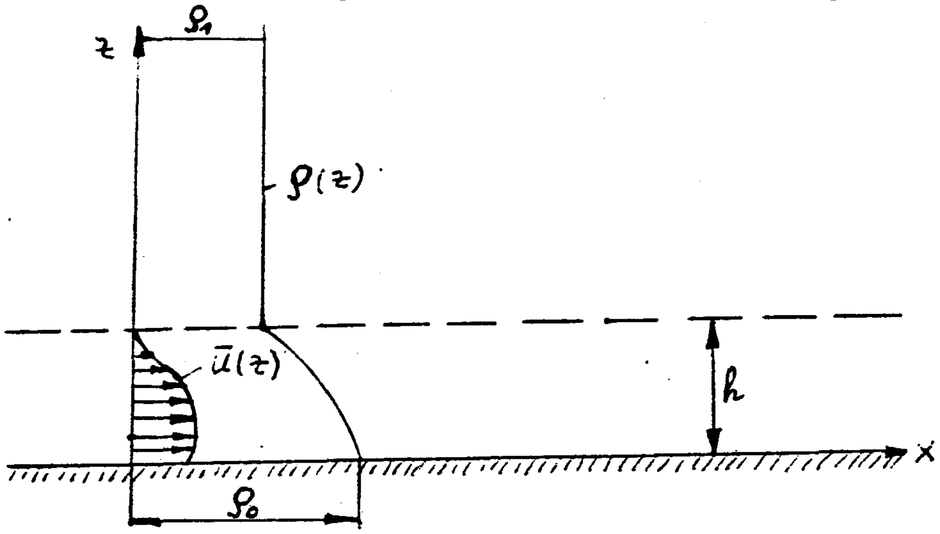
$$- \frac{H}{2}\left(\frac{H^2}{4} + n^2\pi^2\right) \int_0^1 e^{\frac{H}{2} z} \sin^3 n\pi z \, dz = \frac{12Hn^3\pi^3}{H^2 + 36n^2\pi^2} \left[-1 + (-1)^n e^{\frac{H}{2}} \right]$$

$$\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o' f_o \, dz = \left[1 - (-1)^n e^{\frac{H}{2}} \right] \frac{48Cn^2 n^3\pi^3}{H^2 + 36n^2\pi^2}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} - 3\alpha c \frac{\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')' f_o' f_o \, dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} = \left[1 - (-1)^n e^{\frac{H}{2}} \right] \frac{60 \; Cn^2 n^3\pi^3}{H^2 + 36n^2\pi^2}$$

ALGEBARSKI UNUTRAŠNJI SOLITARNI TALASI PRI SLABOM SMICAJNOM STRUJANJU

Klasični solitarni talasi se opisuju poznatim jednačinama KORTEWEG-de VRIES-a i izražavaju preko hiperboličkih funkcija, što znači da njihova amplituda opada eksponencijalno sa udaljavanjem od vrha talasa. Pored ovakvih solitarnih talasa postoje i talasa permanentnog oblika čija amplituda opada algebarski sa udaljavanjem od vrha talasa i koji se zbog toga nazivaju algebarskim solitarnim talasima. Algebarski solitarni talasi nastaju u slučaju kada je relativno tanak sloj stratifikovane tečnosti bar sa jedne svoje strane ograničen slojem homogene tečnosti beskonačne debljine, dok se sa druge strane može nalaziti ili ravna ploča ili slobodna površina. Ovakvi talasi često se javljaju u zemljinoj atmosferi i morima i okeanima u takozvanom termoklinu i zato imaju veliki praktičan značaj. Oni su otkriveni pre relativno kratkog vremena i opisuju se tzv.. BENJAMIN-ONO-ovom jednačinom, prema BENJAMIN-u i ONO-u koji su najviše doprineli teoriji ovih talasa. Pored osnovnih oblika jednačine KORTEWEG-de VRIES-a, BENJAMIN-ONO-a u literaturi se sreću i mnogi modifikovani oblici ovih jednačina koji nastaju uzimanjem u obzir raznih dopunskih efekata, kao što su na primer: prisustvo neke vrste nehomogenosti u pravcu prostiranja talasa, razni disipativni efekti, postojanje smicajnog strujanja i dr. Analiza strujanja u okolini nelinearnog kritičnog sloja je zbog pojave tzv. singularnih "modova" veoma komplikovana. Ova analiza je u slučaju algebarskih solitarnih talasa sprovedena u radu MASLOWE i L.G. REDEKOPP-a koji predstavljaju značajan doprinos teoriji nelinearnih gravitacionih talasa. U prethodnim poglavljima istaknut je praktičan značaj onih smicajnih strujanja kod kojih je referentna brzina znatno manja od brzine rasprostiranja linearnih dugih gravitacionih talasa i koji se zbog toga mogu nazvati slabim smicajnim strujanjima. U slučaju ovakvog smicajnog strujanja singularni, "modovi" se ne mogu pojaviti, analiza rasprostiranja talasa je relativno jednostavna, a dobijeni rezultati imaju dovoljan praktičan značaj. U prethodnim poglavljima je uticaj slabog smicajnog strujanja razmatran u slučaju solitarnih talasa tipa KORTEWEG-de VRIES-a, a u okviru sledećih poglavlja izvršiće se uopštavanje dobijenih rezultata na slučaj algebarskih solitarnih talasa. U tu svrhu pretpostaviće se da je horizontalni sloj stratifikovane tečnosti debljine (h) sa donje strane ograničen ravnom horizontalnom pločom a sa gornje strane homogenom neograničenom tečnošću gustine ρ_1 i da gustina u stratifikovanom sloju kontinualno opada od vrednosti ρ_0 na ploči do ρ_1. Tako će se radi jednostavnosti pretpostaviti da je slabo smicajno strujanje prisutno samo u donjem stratifikovanom sloju.



ρ_0 - gustina stratifikovanog fluida
ρ_1 - gustina nestišljivog fluida
$\bar{\rho}(z)$ - gustina pre nastanka poremećaja
h - visina stratifikovanog fluida

Pri proučavanju ovog problema osu (x) postavićemo u ravni ploče u pravcu kretanje stratifikovanog fluida, a osu (z) vertikalno naviše. I u ovom slučaju polazimo od jednačina (2.3.) koje nakon uvođenja razmera imaju sledeći oblik :

$$(\bar{\rho}+\rho)\left\{u_t + (\bar{u} + u)u_x + (\bar{u}' + u_z)\right\} = - p_x$$

$$(\bar{\rho}+\rho)\left\{w_t + (\bar{u} + u)w_x + \omega w_z\right\} = -\rho - p_z$$

$$\rho_t + (\bar{u} + u)\rho_x + \omega(\bar{\rho} + \rho_z) = 0 \qquad (5.1.)$$

$$u_x + w_z = 0$$

Očigledno je da jednačine (5.1.) važe za stratifikovani sloj tanke debljine h. Za gornji sloj (nestišljiv fluid)treba staviti :

$$\bar{u} = 0$$
$$\rho = 0 \qquad\qquad (5.2.)$$
$$\bar{\rho} = \text{konst} = \frac{\rho_1}{\rho_o} \quad \text{- razmera za gustinu je } \rho_o$$

I u ovom slučaju se uvode dalekopoljne koordinate i nastavlja transformacija jednačina (5.1.) za donji sloj

$$\xi = (x - ct), \; \tau = \varepsilon^2 t \qquad (5.3.)$$

Oblik dalekopoljnih koordinata diktiran je disperznom relacijom posmatranog problema. Kao što se vidi promena za ξ i τ je veoma spora. Disperzne relacije obrađene su u radovima ONO-a.

c - konstanta koja predstavlja brzinu talasa i koja treba da se odredi iz analize koja sledi.

U ovom poglavlju koristiće se sledeće veze:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \; \frac{\partial}{\partial t} = -\varepsilon c \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \qquad (5.4.)$$

U jednačine (5.1.) uvodimo sledeće vrednosti za brzinu, pritisak i gustinu:

$$\bar{u} = \varepsilon \bar{U}(z), \; u = \varepsilon U, \; p = \varepsilon P, \; \rho = \varepsilon Q, \; w = \varepsilon^2 W \qquad (5.5.)$$

Očigledno je da je brzina u pravcu ose (z), w manja od brzine u pravcu ose (x), u. Nakon zamene (5.3.) i (5.5.) korišćenjem veza (5.4.) u jednačine (5.1.) dobijamo:

$$(\bar{\rho} + \varepsilon Q)\left\{-cU_\xi + \varepsilon U_\tau + \varepsilon(\bar{U} + U)U_\xi + \varepsilon W(\bar{U}' + U_z)\right\} = -P_\xi$$

$$(\bar{\rho} + \varepsilon Q)\left\{-\varepsilon^2 cW + \ldots\right\} = -Q - P_z \qquad (5.6.)$$

$$-cQ_\xi + \varepsilon Q_\tau + \varepsilon(\bar{U} + U)Q_\xi + W(\bar{\rho}' + \varepsilon Q_z) = 0$$

$$U_\xi + W_z = 0$$

Jednačine prvog reda

Pritisak, gustina i brzina mogu se napisati i razviti u obliku reda na sledeći način:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}\varepsilon^n$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)}\varepsilon^n$$

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}\varepsilon^n \qquad (5.7.)$$

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}\varepsilon^n$$

Ako sada vrednosti (5.7.) uvrstimo u jednačine (5.6.) i ako izjednačimo najveće članove u jednačinama sa leve i desne strane dobijamo:

$$-c\bar{\rho}U_{\xi}^{(o)} = -P_{\xi}^{(o)}$$

$$Q^{(o)} = -P_{z}^{(o)} \qquad (5.8.)$$

$$-c\,Q_{\xi}^{(o)} + \bar{\rho}'W^{(o)} = 0$$

$$U_{\xi}^{(o)} + W_{z}^{(o)} = 0$$

Slično kao što je urađeno u prethodnim poglavljima korišćenjem jednačina (5.8.) možemo dobiti diferencijalnu jednačinu na sledeći način:

Diferenciranjem prve i druge jednačine (5.8.) prve po z, a druge po ξ i izjednačavanjem levih strana imamo:

$$Q_{\xi}^{(o)} = -(\bar{\rho}U_{\xi}^{(o)})_z \cdot c \qquad (5.9.)$$

Ako sada (5.9.) uvrstimo u treću jednačinu (5.8.) imamo:

$$c^2(\bar{\rho}U_{\xi}^{(o)})_z + \bar{\rho}'W^{(o)} = 0 \qquad (5.10.)$$

Iz četvrte jednačine (5.8.) koju kada pomnožimo sa $\bar{\rho}$ dobijamo sledeću vezu:

$$\bar{\rho}\, U_{\xi}^{(o)} = -\bar{\rho} W_z^{(o)} \tag{5.11.}$$

Uvrštavanjem (5.11.) u jednačinu (5.10.) imamo:

$$c^2\,(\bar{\rho} W_z^{(o)})_z - \bar{\rho}' W^{(o)} = 0 \quad \text{ili}$$

$$W_{zz}^{(o)} + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} W_z^{(o)} - \frac{1}{c^2}\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} W^{(o)} = 0 \tag{5.12.}$$

Ako se u jednačini prvog reda izvrši razdvajanje promenljivih u $W^{(o)}$ na sledeći način:

$$W^{(o)} = -A_{\xi} f_o(z) \Rightarrow W_z^{(o)} = -A_{\xi} f_o'(z) \tag{5.13.}$$

Korišćenjem četvrte jednačine (5.8.) i (5.13.) dobija se:

$$U^{(o)} = A f_o' \Rightarrow U_{\xi}^{(o)} = A_{\xi} f_o' \tag{5.14.}$$

Prva jednačina (5.8.) i jednačina (5.14.) daju:

$$P^{(o)} = c\bar{\rho} A f_o' \qquad P_z^{(o)} = cA(\bar{\rho} f_o')' \tag{5.15.}$$

Iz druge jednačine (5.8.) posredstvom jednačine (5.15.) imamo:

$$Q^{(o)} = -cA(\bar{\rho} f_o')'$$

Jednačina (5.12.)uzimajući u obzir (5.13.) se transformiše u sledeću jednačinu:

$$f_o'' + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o - \frac{1}{c^2}\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o = 0 \tag{5.16.}$$

Granični uslov na ploči daje f (o) = 0, dok granični uslov na granici između sloja stratifikovane tečnosti i sloja homogene tečnosti tek treba da se odrede spajanjem pojedinih rešenja koja važe u oba sloja. Jednačina (5.16.) sa potrebnim graničnim uslovima predstavlja problem sopstvenih vrednosti koja pri svakom zadatom zakonu stratifikacije treba da da sopstvene funkcije f (z) i sopstvene vrednosti c.

Očigledno je da je potrebno izračunati vrednosti funkcije $f_{(o)}$ u tački $z = 1$ (prilog V.4.)..

Jednačine drugog reda

S obzirom da je gornji sloj tečnosti homogen i da se smicajno strujanje obavlja samo u donjem sloju, jednačine koje opisuju strujanje u gornjem sloju se jednostavno dobijaju iz sistema (5.1.) stavljajući $\bar{\rho} = \bar{\rho}(1)$, $\rho = 0$ i $\bar{u} = 0$. Ovaj sloj tečnosti je neograničen u pravcu ose z pa će zato obe koordinate x i z u njemu biti ravnopravne

$W^{(o)}$ je proizvoljna funkcija koja treba da se odredi spajanjem rešenja u gornjem sloju sa odgovarajućim rešenjem koje važi u donjem sloju. Ako vrednosti (5.7.) uvrstimo u jednačine (5.6.), tako da dobijamo nakon izjednačavanja najvećih članova sa leve i desne strane sledeće jednačine.

$$
\begin{aligned}
&-\bar{\rho}cU_{\xi}^{(1)} + \bar{\rho}\left[U_{\tau}^{(o)} + (\bar{U}+U^{(o)})U_{\xi}^{(o)} + W^{(o)}(\bar{U} + U_{z}^{(o)})\right] - cU_{\xi}^{(o)}Q^{(o)} = -P_{\xi}^{(o)} \\
&Q^{(1)} = -P_{z}^{(1)} \\
&-cQ_{\xi}^{(1)} + Q_{\tau}^{(o)} + (\bar{U} + U^{(o)})Q_{\xi}^{(o)} + \bar{\rho}'W^{(1)} + W^{(o)}Q_{z}^{(o)} = 0 \qquad (5.17.) \\
&U_{\xi}^{(1)} + W_{z}^{(1)} = 0
\end{aligned}
$$

Ili sređivanjem ovih jednačina dobijamo:

$$
\begin{aligned}
&P_{\xi}^{(1)} = c\bar{\rho}U_{\xi}^{(1)} - F_1 \\
&P_{z}^{(1)} = -Q^{(1)} \qquad (5.18.) \\
&-cQ_{\xi}^{(1)} + \bar{\rho}'W^{(1)} = -F_2 \\
&U_{\xi}^{(1)} + W_{z}^{(1)} = 0
\end{aligned}
$$

U ovim jednačinama F_1 i F_2 imaju sledeće vrednosti:

$$F_1 = \bar{\rho}\left[U^{(o)}_{\tau} + (\bar{U} + U^{(o)})U^{(o)}_{\xi} + W^{(o)}(\bar{U}' + U^{(o)}_{z}) - cU^{(o)}_{\xi}Q^{(o)}\right.$$

$$F_2 = Q^{(o)}_{\tau} + (\bar{U} + U^{(o)})Q^{(o)}_{\xi} + W^{(o)}Q^{(o)}_{z} \qquad (5.19.)$$

Ako prvu jednačinu (5.18.) diferenciramo po z a drugu po ξ i izjednačimo desne strane dobijamo:

$$c(\bar{\rho}U^{(1)}) - F_{1z} = - Q^{(1)}_{\xi} \qquad (5.20.)$$

Jednačinu (5.20) množimo sa c:

$$c^2(\bar{\rho}U^{(1)}_{\xi}) - cF_{1z} = - cQ^{(1)}_{\xi} \qquad (5.21.)$$

Iz treće jednačine (5.18) imamo da je:

$$cQ^{(1)}_{\xi} = F_2 - \bar{\rho}'W^{(1)} \qquad (5.22.)$$

Uvrštanjem (5.22.) u (5.21.) imamo:

$$c^2(\bar{\rho}U^{(o)}_{\xi})_z - cF_{1z} + \bar{\rho}'W^{(1)} = - F_2 \qquad (5.23.)$$

Pomoću četvrte jednačine (5.18.) dobijamo sledeću vezu:

$$U^{(1)}_{\xi} = - W^{(1)}_{z} \qquad (5.24.)$$

Ako sada (5.24.) utvrstimo u (5.23.) dobijamo:

$$-c^2(\bar{\rho}W^{(1)}_{z})_z + \bar{\rho}'W^{(1)} = cF_{1z} - F_2 \text{ odnosno}$$

$$c^2(\bar{\rho}W^{(1)}_{z})_z - \bar{\rho}'W^{(1)} = F_2 - cF_{1z} \text{ ili} \qquad (5.25.)$$

$$c^2\bar{\rho}W^{(1)}_{zz} + c^2\bar{\rho}'W^{(1)}_{z} - \bar{\rho}'W^{(1)} = F_2 - cF_{1z}$$

Jednačina (5.25.) se rešava metodom Grina koja kaže: Ako imamo operator L(y):

$Ly \equiv P(x)y'' + q(x)y' + r(x)y$ koji je spregnut sa operatorom Mz:

$Mz = (P(x)z)'' - (q(x)z)' + r(x)z$ onda su operatori L i M međusobno vezani sledećim odnosom:

$zLy - yMz = \frac{d}{dx}\left[Pzy' - y(Pz)'\right] + qyz$ pri čemu su funkcije $P(x)$, $q(x)$, $r(x)$, neprekidne u intervalu $0 \leq x \leq 1$.

Ako sada primenimo Grinovu formulu za interval $[0,1]$ onda je:

$$\int_0^1 (zLy-yMz)dx = P_1 z_1 y_1' - y_1(P_1' z_1 + P_1 z_1') + q_1 y_1 z_1 -$$

$$- \left\{P_o z_o y_o' - y_o(P_o' z_o + P_o z_o') + q_o y_o z_o\right.$$

Primenjujući ovaj metod za rešavanje jednačine (5.25) imamo:

$$LW^{(1)} \equiv c^2\bar{\rho}W_{zz}^{(o)} + c^2\bar{\rho}'W_z^{(1)} - \bar{\rho}'W^{(1)} = F_2 - cF_{1z}$$

$$P = c^2\bar{\rho},\ q = c^2\bar{\rho}',\ r = -\bar{\rho}'$$

$$MW^{(o)} = c^2(\bar{\rho}W^{(o)})'' - c^2(\bar{\rho}'W^{(o)})' - \bar{\rho}'W^{(o)} =$$

$$= c^2(\bar{\rho}'W^{(o)} + \bar{\rho}W_z^{(o)})_z - c^2(\bar{\rho}''W^{(o)} + \bar{\rho}'W_z^{(o)}) - \bar{\rho}'W^{(o)} =$$

$$= c^2\bar{\rho}W_{zz}^{(o)} + c^2\bar{\rho}'W_z^{(o)} - \bar{\rho}'W^{(o)} = 0 \quad \text{onda je:}$$

$$\int_0^1 (W^{(o)}LW^{(1)} - W^{(1)}MW^{(o)})dz = \int_0^1 W^{(o)}LW^{(1)}dz =$$

$$= c^2\bar{\rho}_1 W_1^{(o)}W_{z1}^{(1)} - W_1^{(1)}\left\{c^2\bar{\rho}_1' W_1^{(o)} + c^2\bar{\rho}_1 W_{z1}^{(o)}\right\} + c^2\bar{\rho}_1' W_1^{(1)}W_1^{(o)} =$$

$$= c^2\bar{\rho}_1\left\{W_1^{(o)}W_{z1}^{(1)} - W_{z1}^{(o)}W_1^{(1)}\right\}$$

$$W^{(o)} = -A_\xi f_o(z),$$

$$W_1^{(o)} = -A_\xi f_o(1)$$

$$W_{z1}^{(o)} = -A_\xi f_o'(1)$$

$$\int_0^1 (F_2 - cF_{1z})f_o dz = c^2\bar{\rho}(1)\left\{f_o(1)\frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}\Big/_{z=1} - f_o'(1)W^{(1)}\Big/_{z=1}\right\} \quad (5.26.)$$

U daljem delu proučavanja posmatramo gornji sloj i polazimo od jednačina kretanja:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}(u_t + uu_x + wu_z) = -p_x ; \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = \bar{\rho}(1)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z ; \qquad (5.27.)$$

$$u_x + w_z = 0 ;$$

U drugoj jednačini sa desne strane nemamo ρ jer je $\rho = 0$ - nemamo poremećaja gustine.

Uvođenjem dalekopoljnih koordinata i drugih veza:

$$X = x - ct, \tau = \varepsilon^2 t$$

$$w = \varepsilon^2 W, \ u = \varepsilon^2 U; \ p = \varepsilon^2 P \qquad (5.28.)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}; \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x}$$

Koordinata x se ponaša kao i koordinata z jer je gornji sloj neograničene debljine, odnosno neograničen je. Očigledno je da obe projekcije brzine u gornjem sloju su istoga reda veličine. S obzirom da je strujanje u ovom sloju isključivo inicirano postojanjem vertikalne projekcije brzine u donjem sloju, brzina strujanja u gornjem sloju će biti reda veličine ε^2.

Uvođenjem (5.28) u jednačine (5.27) dobijamo:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}(-cU_x + \varepsilon^2 U_\tau + \varepsilon^2 U_x + \varepsilon^2 W U_z) = -P_x \qquad (5.29.)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}(-cW_x + \varepsilon^2 W_\tau + \varepsilon^2 U W_x + \varepsilon^2 W W_z) = -P_z$$

$$U_x + W_z = 0$$

Jednačina prvog reda

Razvijamo brzinu, pritisak i gustinu u red:

$$U = U^{(o)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \ldots$$

$$W = W^{(o)} + \varepsilon^2 W^{(2)} + \ldots \qquad (5.30.).$$

$$Q = Q^{(o)} + \varepsilon^2 Q^{(2)} + \ldots$$

$$P = P^{(o)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \ldots$$

Posle zamene (5.30.) u jednačine (5.29.) imamo:

$$- c\frac{\rho_1}{\rho_o}U_x = - P_x \qquad (5.31.)$$

$$- c\frac{\rho_1}{\rho_o}W_x = - P_z$$

$$U_x + W_z = 0$$

Ako prvu jednačinu (5.31.) diferenciramo po z a drugu po x i izjednačimo leve strane dobijamo:

$$+ c\frac{\rho_1}{\rho_o}U_{xz} = c\frac{\rho_1}{\rho_o}W_{xx} \qquad (5.32.)$$

$$U_{xz} = W_{xx}$$

Iz treće jednačine (5.31.) imamo sledeću vezu:

$$U_x = - W_z \qquad (5.33.)$$

Uvrštavanjem (5.33.) u (5.32) imamo:

$$W_{xx} + W_{zz} = 0 \qquad (5.34.)$$

Jednačina (5.34.) je poznata Laplasova jednačina. Granični uslovi su:

$$z \to \infty, \; W^{(1)} \to 0$$
$$z = 1, \; W^{(1)} = W_o(x, \tau)$$

$W_o(x,\overline{\tau})$ je proizvoljna funkcija koja treba da se odredi spajanjem rešenja u gornjem sloju sa odgovarajućim rešenjem u donjem sloju. Rešenje Laplasove jednačine (5.34.) uz navedene granične uslove je u literaturi dobro poznato i po ONO-u ono glasi [2].

$$W^{(1)}(x,\overline{\tau},z) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} W_o(x',\overline{\tau}) \frac{z-1}{(z-1)^2+(x-x')^2}\,dx' \qquad (5.35.)$$

Diferenciranjem ovog rešenja po (z) dobija se:

$$\left.\frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}\right/_{z=1} = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} W_o(x',\overline{\tau})\frac{dx'}{x-x'} \qquad (5.36.)$$

prilog V.1.

Spajanje rešenja

Da bi mogle da se odrede sve veličine koje nedostaju u jednačini (5.26) izvršiće se sada spajanje rešenja duž granice između gornjeg i donjeg sloja tečnosti. Ovo spajanje podrazumeva izjednačavanje vertikalnih projekcija brzina i njihovih izvoda u oba sloja duž (z = 1) uzimajući u obzir (5.7.) i činjenicu da je u gornjem sloju

$W = \sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)}\varepsilon^{2n}$ dobijamo:

a) z = 1

$$W = W^{(o)} + \varepsilon W^{(1)} + \ldots\,/\varepsilon^2 \text{ - u donjem sloju} \qquad (5.37.)$$

$$W = W + \varepsilon^2 W(2) + \ldots\ldots\,/\varepsilon^2 \text{ - u gornjem sloju}$$

$$\varepsilon^2 W^{(o)} + \varepsilon^3 W^{(1)} = \varepsilon^2 W + \varepsilon^4 W^{(2)}$$

Izjednačavanjem članova uz ε^2 i ε^3 imamo:

$$W^{(o)} = W \Rightarrow -A\xi(\xi,\overline{\tau})\, f_o(1) = W_o(x,\overline{\tau})$$

$$W^{(1)} = 0; \quad W_o(x,\overline{\tau}) = -f_o(1)\,A\xi(\xi,\overline{\tau}); \quad W^{(1)}/_{z=1} = 0$$

Izjednačavanjem izvoda brzina dobijamo:

b) z = 1

$$\varepsilon^2 \frac{\partial W^{(o)}}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial W^{(1)}}{\partial z} = \varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial z} + \varepsilon^4 \frac{\partial W^{(2)}}{\partial z}$$

S obzirom da je očigledno $\xi = \varepsilon X$, i $\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}$, iz poslednjeg izraza se uzimanjem u obzir (5.36.) i izraza za $W_o\ (x, \tau)$ dobija

$$\left.\frac{\partial W^{(o)}}{\partial z}\right|_{z=1} = 0, \text{ odnosno } f_o'(1) = 0 \qquad \text{prilog V.2.}$$

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial z} = \frac{f_o(1)}{\pi} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\ (\xi', \tau)\ d\xi}{\xi - \xi'} = f_o(1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{H}[A]$$

gde $\mathcal{H}[A]$ predstavlja Hilbertovu transformaciju funkcije A. Na ovaj način je izvršeno ne samo kompletiranje jednačine (5.26.) nego i problema sopstvenih vrednosti (5.16.)(prilog V.3.)

Rešavanjem jednačine (5.26.) dobija se:

$$A_\tau + \bar{U}_{us} A_\xi + \alpha A A_\xi - \beta \{\mathcal{H}[A]\}_{\xi\xi} = 0 \qquad (5.38.)$$

prilog V.3.

Pri čemu je:

$$\bar{U}_{us} = \left(\int_0^1 \bar{u} \bar{\rho}\, f_o'^2 dz\right) \Big/ \left(\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz\right)$$

$$\alpha = \left(3\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o'^3 dz\right) \Big/ \left(2\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz\right) \qquad (5.39.)$$

$$\beta_1 = c\bar{\rho}(1) \Big/ \left(2\int_0^1 \bar{\rho}\, f_o'^2 dz\right)$$

$$\beta = \beta_1 f_o(1)$$

Uvođenjem nove koordinate $X = \xi - \bar{U}_{us}\tau$, u jednačinu (5.38.) elimiše se član $\bar{U}_{us} A_\xi$.

Prisustvo slabog smicajnog strujanja ima uticaja samo na brzinu talasa a ne i na njegovu amplitudu i dužinu.

Ovaj uticaj se ostvaruje isključivo preko $\bar{U}_{us}$ koja se zove uopštena srednja vrednost brzine smicajnog strujanja.

$X = \xi - \bar{U}_{us}\tau, \tau$ onda je:

$$A_{\tau} - \bar{U}_{us}A_{x} + \bar{U}_{us}A_{x} + \ldots \qquad (5.40.)$$

$$A_{\tau} + AA_{x} - \beta\{\mathcal{H}[A]\}_{xx} = 0$$

Najpoznatije rešenje klasične jednačine BENJAMIN-ONO-a je kvazistacionarno rešenje jednačine solitarnog talasa. Odgovarajuće rešenje jednačine (5.38.):

$$A(\xi,\tau) = \frac{a\delta^{2}}{[\xi - (\bar{U}_{us}+\lambda)\tau]^{2}+\delta^{2}} \qquad (5.41.)$$

gde je:

$$\lambda = \frac{a\alpha}{4} \quad \text{i} \quad (\ ) = \frac{4\beta}{a\alpha}$$

koeficijenti $\bar{U}_{us}$, α i β očigledno zavise od zakona stratifikacije. U literaturi se najčešće koristi eksponencijalni zakon stratifikacije:

$\bar{\rho} = e^{-Hz}$, $H>0$.

Lako se pokazuje da je rešenje jednačine (5.16.):

$$f_{o} = e^{\frac{H}{2}z}\sin\gamma_{n}z \qquad \text{(prilog V.4.)}$$

gde su γ_{n} pozitivni koreni transedentne jednačine:

$$\operatorname{tg}\gamma + \frac{2\gamma}{H} = 0$$

Posle ovoga nije teško izračunati potrebne koeficijente (5.39.) i formirati rešenje (5.41.). Takodje se lako pokazuje da prisustvo smicajnog strujanja u gornjem sloju tečnosti koje bi bilo istog reda veličine, kao i u donjem ne bi dovelo ni do kakvih promena u jednačini za $A(\xi,\tau)$ odnosno jednačina (5.38) bi važila u tom slučaju. (prilog V.5.)

Prilog V.1.

$$w(x,\tau,z) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} w_o(x',\tau)\,\frac{z-1}{(z-1)^2+(x-x')^2}\,dx$$

Diferenciranjem ovog rešenja po (z) dobija se:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} w_o(x',\tau)\,\frac{(z-1)^2+(x-x')^2-2(z-1)^2}{\left[(z-1)^2+(x-x')^2\right]^2}\,dx' =$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} (w_o(x',\tau)\,\frac{(x-x')^2-(z-1)^2}{\left[(z-1)^2+(x-x')^2\right]^2}\,dx$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}\Big/_{z=1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} w_o\,(x',\tau)\,\frac{dx'}{(x-x')^2} = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} w_o(x',\tau)\,\frac{dx'}{x-x'}$$

Prilog V. 2

$$\frac{\partial w}{\partial z}\Big/_{z=1} = \frac{f_o(1)}{\pi}\,\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{-\infty}^{\infty} A_{\xi'}(\xi',\tau)\,\frac{d\xi'}{\xi-\xi'}$$

$$u = \frac{1}{\xi-\xi'},\quad dv = A_{\xi'}\,d\xi'$$

$$du = \frac{d\xi'}{(\xi-\xi')^2},\quad v = A\,(\xi',\tau)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}\Big/_{z=1} = \frac{f_o(1)}{\pi}\,\varepsilon\frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{P}\left\{\frac{A\,(\xi',\tau)}{\xi-\xi'}\Big/_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{A\,(\xi',\tau)\,d\xi'}{(\xi-\xi')^2}\right\} =$$

$$= \varepsilon\frac{f_o(1)}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{P}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{-\infty}\frac{A\,(\xi',\tau)}{\xi-\xi'}\Big/_{-\infty}^{\infty} = \frac{f_o(1)}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A\,(\xi',\tau)\,d\xi'}{\xi-\xi'}\right.$$

$$z = 1:\quad \frac{\partial w^{(o)}}{\partial z}\Big/_{z=1} = 0 \Rightarrow f_o'(1) = 0$$

$$\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} = \frac{f_o(1)}{\pi}\,\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A\,(\xi',\tau)\,d\xi}{\xi-\xi'} = f_o(1)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\mathcal{H}[A]$$

Prilog V.3.

$$\int_0^1 (F_2 - cF_{1z}) f_o\,dz = c^2\bar{\rho}(1)\; f_o^2(1)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{H}\left\{A\;(\xi,\tau)\right\}$$

$$\int_0^1 F_2 f_o\,dz + \int_0^1 -cF_{1z} f_o\,dz = c^2\bar{\rho}(1) f_o{}^2(1)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{H}\left\{A\;(\xi,\tau)\right\}$$

$\int_0^1 -\,cF_{1z} f_o\,dz = \int_0^1 cF_1 f_o'\,dz$ - ovaj dokaz imamo u poglavlju II.

$$\int_0^1 F_2 f_o\,dz + c\int_0^1 F_1 f_o'\,dz = c^2\bar{\rho}(1) f_o{}^2(1)\;\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{H}\left\{A(\xi,\tau)\right\}$$

$$F_2 = Q_\tau^{(o)} + (\bar{U} + U^{(o)})Q_\xi^{(o)} + W^{(o)}Q_z^{(o)}$$

$$F_1 = \bar{\rho}\left[U_\tau^{(o)} + (\bar{U} + U^{(o)})U_\xi^{(o)} + W^{(o)}(\bar{u} + U_z^{(o)})\right. - cU_\xi^{(o)}Q^{(o)}$$

$$F_2 = -\,cA_\tau\,(\bar{\rho}f_o')' - (\bar{U}+Af_o')cA_\xi(\bar{\rho}f_o')' + A_\xi f_o cA(\bar{\rho}f_o')''$$

$$F_2 = -\,cA_\tau(\bar{\rho}f_o')' - cA_\xi\bar{U}(\bar{\rho}f_o')' + cAA_\xi\left\{f_o(\bar{\rho}f_o')'' - f_o'(\bar{\rho}f_o')'\right\}$$

$$F_1 = \bar{\rho}\left[A_\tau f_o' + (\bar{U}+Af_o')A_\xi f_o' - (\bar{u}' + Af_o'')Af_o\right] + c^2AA_\xi f_o'(\bar{\rho}f_o')'$$

$$F_1 = \bar{\rho}\,f_o'A_\tau + \bar{\rho}\,(\bar{U}f_o' - \bar{U}'f_o)A_\xi + \left\{\bar{\rho}(f_o'^2 - f_of_o'') + c^2f_o'(\bar{\rho}f_o')\right\}AA_\xi$$

A_τ: $-\;c\int_0^1(\bar{\rho}f_o')'\;f_o\,dz + c\int_0^1\bar{\rho}f_o'^2dz = 2c\int_0^1\bar{\rho}f_o'^2dz$ dokaz u poglavlju II

A_ξ: $-c\int_0^1\bar{U}(\bar{\rho}f_o')'\;f_o\,dz + c\int_0^1\bar{\rho}(\bar{U}f_o' - \bar{U}'f_o)f_o'\,dz = 2c\int_0^1\bar{u}\bar{\rho}f_o'^2dz$

AA_ξ: $3c\int_0^1\bar{\rho}f_o'^3dz$

$$2c\int_0^1\bar{\rho}f_o'^2dz\,A_\tau + 2c\int_0^1\bar{u}\bar{\rho}f_o'^2dz\,A_\xi + 3c\int_0^1\bar{\rho}f_o'^3dz\,AA_\xi - c^2\bar{\rho}(1)f_o^2(1)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{H}\left\{A(\xi,\tau)\right\} = 0$$

$$A_\tau + \bar{u}_{us} A_\xi + \frac{3}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} A A_\xi - \frac{c^2}{2c} \frac{\bar{\rho}(1) f_o^2(1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{H}\{A(\xi,\tau)\}}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} = 0$$

$$\alpha = \frac{3\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}$$

$$\beta = \beta_1 f_o(1)$$

$$\beta_1 = \frac{c\bar{\rho}(1)}{2\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}$$

$$\bar{u}_{us} = \frac{\int_0^1 \bar{U} \bar{\rho} f_o'^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}$$

$$A_\tau + \bar{U}_{us} A_\xi + \alpha A A_\xi - \beta \{\mathcal{H}[A]\}_{\xi\xi} = 0$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} \; ; \; \bar{\rho} = e^{-Hz}; \; f_{on}' = e^{\frac{H}{2}z} \left(\frac{H}{2} \sin\gamma_n z + \gamma_n \cos\gamma_n z\right)$$

$$f_{on} = e^{\frac{H}{2}z} \sin\gamma_n z; \; f_{on}'^2 = e^{Hz}\left(\frac{H^2}{4}\sin^2\gamma_n z + H\gamma_n \sin\gamma_n z \cos\gamma_n z + \gamma_n^2 \cos^2\gamma_n z\right)$$

$$\int_0^1 \bar{\rho} f_{on}'^2 dz = \frac{1}{2}\left(\frac{H^2}{4} + \gamma_n^2 + H\sin^2\gamma_n\right) - \left(\frac{H^2}{16\gamma_n} - \frac{\gamma_n}{4}\right) \sin 2\gamma_n$$

$$\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz = ?$$

$$f_{on}'^3 = e^{\frac{3}{2}Hz}\left(\frac{H^3}{8}\sin^3\gamma_n z + \frac{3H^2\gamma_n}{4}\sin^2\gamma_n z \cos\gamma_n z + \frac{3H\gamma_n^2}{2}\sin\gamma_n z\cos^2\gamma_n z + \right.$$
$$\left. + \gamma_n^3 \cos^3\gamma_n z\right)$$

$$\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz = \int_0^1 e^{\frac{H}{2}z}\left(\frac{H^3}{8}\sin^3\gamma_n z + \frac{3H^2\gamma_n}{4}\sin^2\gamma_n z\cos\gamma_n z + \right.$$

$$\frac{3H\gamma_n^{\,2}}{2}\sin\gamma_n z\cos^2\gamma_n z+\gamma_n^{\,3}\cos^3\gamma_n z)=$$

$$=\Big\{(\frac{H^3}{8}-\frac{3H\gamma_n^{\,2}}{2})\Big[\frac{e^{\frac{H}{2}}\sin^2\gamma_n}{\frac{H^2}{4}+9\gamma_n^{\,2}}(\frac{H}{2}\sin\gamma_n-3\gamma_n\cos\gamma_n)+$$

$$+\frac{6\gamma_n^{\,2}e^{\frac{H}{2}}}{(\frac{H^2}{4}+9\gamma_n^2)(\frac{H^2}{4}+\gamma_n^2)}(\frac{H}{2}\sin\gamma_n-\gamma_n\cos\gamma_n)+$$

$$+(\gamma_n^3-\frac{3H^2\gamma_n}{4})\Big[\frac{e^{\frac{H}{2}}\cos^2\gamma_n}{\frac{H^2}{4}+9\gamma_n^{\,2}}(\frac{H}{2}\cos\gamma_n+3\gamma_n\sin\gamma_n)+\frac{6\gamma_n^{\,2}e^{\frac{H}{2}}}{(\frac{H^2}{4}+9\gamma_n^{\,2})(\frac{H^2}{4}+\gamma_n^2)}\cdot$$

$$\cdot(\frac{H}{2}\cos\gamma_n+\gamma_n\sin\gamma_n)+\frac{e^{\frac{H}{2}}}{\frac{H^2}{4}+\gamma_n^{\,2}}(\frac{3H^3\gamma_n}{8}\cos\gamma_n+\frac{3H^2\gamma_n^{\,2}}{4}\sin\gamma_n+$$

$$+\frac{e^{\frac{H}{2}}}{\frac{H^2}{4}+\gamma_n^2}(\frac{3H^2\gamma_n^2}{4}\sin\gamma_n-\frac{3H\gamma_n^{\,3}}{2}\cos\gamma_n)\Big\}-\Big\{\gamma_n(\frac{H^3}{8}-$$

$$-\frac{3H\gamma_n^{\,2}}{2})\frac{6\gamma_n^2}{(\frac{H^2}{4}+9\gamma_n^2)(\frac{H^2}{4}+\gamma_n^{\,2}}-\frac{H}{2}(\gamma_n^3-\frac{3H^2\gamma_n}{4})\frac{1}{\frac{H^2}{4}+9\gamma_n^{\,2}}-$$

$$-\frac{H}{2}(\gamma_n^{\,3}-\frac{3H^2\gamma_n}{4})\frac{6\gamma_n^{\,2}}{(\frac{H^2}{4}+9\gamma_n^2)(\frac{H^2}{4}+\gamma_n^{\,2})}-\frac{3H^3\gamma_n}{8(\frac{H^2}{4}+\gamma_n^2)}+\frac{3H\gamma_n^3}{2(\frac{H^2}{4}+\gamma_n^{\,2})}$$

Prilog V.3.'

$$f_o'' + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o' - \frac{1}{c^2} \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o = 0$$

$$\bar{\rho} = e^{-Hz}$$

$$\bar{\rho}' = -He^{-Hz}$$

Granični uslovi su:

$$z = 0 \qquad f_o = 0$$
$$z = 1 \qquad f_o' = 0$$

$$\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} = -H$$

$$f_o'' - Hf_o' + \frac{H}{c^2} f_o = 0$$

$$f_o = e^{\lambda z}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda z} - H\lambda e^{\lambda z} + \frac{H}{c^2} e^{\lambda z} = 0$$

$$f_o' = \lambda e^{\lambda z}$$

$$\lambda^2 - H\lambda + \frac{H}{c^2} = 0$$

$$f_o'' = \lambda^2 e^{\lambda z}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{H}{2} \pm i\gamma ; \qquad \alpha = \frac{H}{2} \qquad \gamma = \frac{\sqrt{4H - H^2c^2}}{2c}$$

Rešenje se traži u obliku:

$$f_o = e^{\alpha z} (C_1 \cos \gamma z + C_2 \sin \gamma z).$$

$$\gamma^2 = \frac{4H - H^2c^2}{(2c)^2}$$

$$\gamma^2 = \frac{H}{c^2} - \frac{H^2}{4}$$

$$c_n^2 = \frac{4H}{H^2 + 4\gamma^2}$$

Prilog V.4.

$$f_o'' + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o' - \frac{1}{c^2}\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o = 0$$

$$\bar{\rho} = e^{-Hz}$$

$$\bar{\rho}' = -He^{-Hz}$$

$$\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} = -H$$

$$f_o = e^{\lambda z}$$

$$f_o' = \lambda e^{\lambda z}$$

$$f_o'' = \lambda^2 e^{\lambda z}$$

$$\lambda^2 - H\lambda + \frac{H}{c^2} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{H}{2} \pm i\gamma$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{4H - H^2c^2}}{2c}$$

Rešenje se traži u obliku:

$$f_o = e^{\frac{H}{2}z}(C_1\cos\gamma_n z + C_2\sin\gamma_n z)$$

$$f_o' = \frac{H}{2}e^{\frac{H}{2}z}(C_1\cos\gamma_n z + C_2\sin\gamma_n z) + e^{\frac{H}{2}z}(-C_1\gamma_n\sin\gamma_n z + C_2\gamma_n\cos\gamma_n z)$$

Granični uslovi su:

1) $z = 0 \quad f_o = 0$

2) $z = 1 \quad f_o' = 0$

Prvi granični uslov daje:

$$C_1 = 0$$

Drugi granični uslov daje:

$$0 = C_2 e^{\frac{H}{2}}\left(\frac{H}{2}\sin\gamma_n + \gamma_n\cos\gamma_n\right) = 0 \qquad \text{odnosno}$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma_n + \frac{2\gamma_n}{H} = 0$$

U specijalnom slučaju kada je $H = \frac{1}{10}$ možemo izračunati γ_n.

$\gamma_1 = \pm 1{,}601$; $\gamma_2 = \pm 4{,}722$; $\gamma_3 = \pm 7{,}860$; $\gamma_4 = \pm 11{,}000$;

$\gamma_5 = \pm 14{,}140$; $\gamma_6 = \pm 17{,}281$; $\gamma_8 = \pm 23{,}564$; $\gamma_9 = \pm 26{,}705$

$\gamma_{10} = \pm 29{,}846$; $\gamma_{11} = \pm 32{,}988$; $\gamma_{12} = \pm 36{,}129$; $\gamma_7 = \pm 20{,}422$

$\gamma_{13} = \pm 39{,}271$; $\gamma_{14} = \pm 42{,}412$

$$f_{on} = C_2 e^{\frac{H}{2}z} \sin \gamma_n z \qquad f_{on} = e^{\frac{H}{2}z} \sin \gamma_n z$$

$$W^{(o)} = - A_\zeta f_{on}$$

$$W^{(o)} = - A_\zeta e^{\frac{H}{2}z} \sin \gamma_n z$$

Prilog V.5.

Dokaz da prisustvo smicajnog strujanja istoga reda veličine u gornjem sloju nema uticaja na krajnju jednačinu.

Polazimo od toga da je slabo smicajno strujanje prisutno u gornjem sloju. Jednačina kretanja i jednačina kontinuiteta je:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}\{u_t + (\bar{u} + u)u_x + w(\bar{u}' + u_z) = -p_x$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} w_t + (\bar{u} + u)w_x + ww_z = -p_z$$

$$u_x + w_z = 0$$

Transformacije:

$$X = x - ct, \quad = \varepsilon^2 t$$

$$w = \varepsilon^2 W, \; u = \varepsilon^2 U, \; p = \varepsilon^2 P, \quad \bar{u} = \varepsilon \bar{U}(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial X} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}$$

Nakon uvođenja dalekopoljnih koordinata jednačine kretanja i jednačina kontinuiteta su:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}\left\{-cU_X + \varepsilon^2 U_\tau + (\varepsilon\bar{U} + \varepsilon^2 U)U_X + W(\varepsilon\bar{U}' + \varepsilon^2 U_z)\right\} = -P_X$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}\left\{-cW_X + \varepsilon^2 W_\tau + (\varepsilon\bar{U} + \varepsilon^2 U)W_X + \varepsilon^2 WW_z\right\} = -P_z$$

$$U_X + W_z = 0$$

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots \quad - \text{prva aproksimacija.}$$

Jednačine nakon prve aproksimacije:

$$c \frac{\rho_1}{\rho_0} U_x^{(o)} = P_x^{(o)}$$

$$c \frac{\rho_1}{\rho_0} W_x^{(o)} = P_z^{(o)}$$

$$U_x^{(o)} + W_z^{(o)} = 0$$

Rešavanjem prethodnih jednačina dobija se sledeća Laplasova jednačina

$$W_{xx}^{(o)} + W_{zz}^{(o)} = 0$$

Granični uslovi su:

$$z \to \infty; \qquad W \to 0$$
$$z = 1 \qquad W = W_o(x, \tau)$$

Nakon druge aproksimacije jednačine kretanja i jednačina kontinuiteta su:

$$- c \frac{\rho_1}{\rho_0} U_x^{(1)} + \bar{U} U_x^{(o)} + \bar{U}' W^{(o)} = - P_x^{(1)}$$

$$- c \frac{\rho_1}{\rho_0} W_x^{(1)} + \bar{U} W_x^{(o)} = - P_z^{(1)}$$

$$U_x^{(1)} + W_z^{(1)} = 0$$

Sređivanjem prve prethodne jednačine dobijamo:

$$P_x^{(1)} = c \frac{\rho_1}{\rho_0} U_x^{(1)} - \left\{ \bar{u} U_x^{(o)} + \bar{u}' W^{(o)} \right\} = c \frac{\rho_1}{\rho_0} U_x^{(1)} - \left\{ \bar{U}' W^{(o)} - \bar{U} W_z^{(o)} \right\}$$

Sređivanjem druge jednačine dobijamo:

$$P_z^{(1)} = c \frac{\rho_1}{\rho_0} W_x^{(1)} - \bar{U} W_x^{(o)}$$

Ako sada $P_x^{(1)}$ diferenciramo po (z) a $P_z^{(1)}$ diferenciramo po (x) i izjednačimo desne strane imamo:

$$c\,\frac{\rho_1}{\rho_0}\,U^{(1)}_{xz}-\left\{\bar{U}''W^{(o)}+\bar{U}'W^{(o)}_{z}-\bar{U}'W^{(o)}_{z}-\bar{U}W^{(o)}_{zz}\right\}=c\,\frac{\rho_1}{\rho_0}\,W^{(1)}_{xx}-\bar{U}W^{(o)}_{xx}$$

$$c\,\frac{\rho_1}{\rho_0}\left\{W^{(1)}_{xx}+W^{(1)}_{zz}\right\}=\bar{U}W^{(o)}_{xx}+\bar{U}W^{(o)}_{zz}-\bar{U}''W^{(o)}$$

$$W^{(1)}_{xx}+W^{(1)}_{zz}=-\frac{1}{c}\,\frac{\rho_0}{\rho_1}\,\bar{U}''W^{(o)}$$

Granični uslovi su:

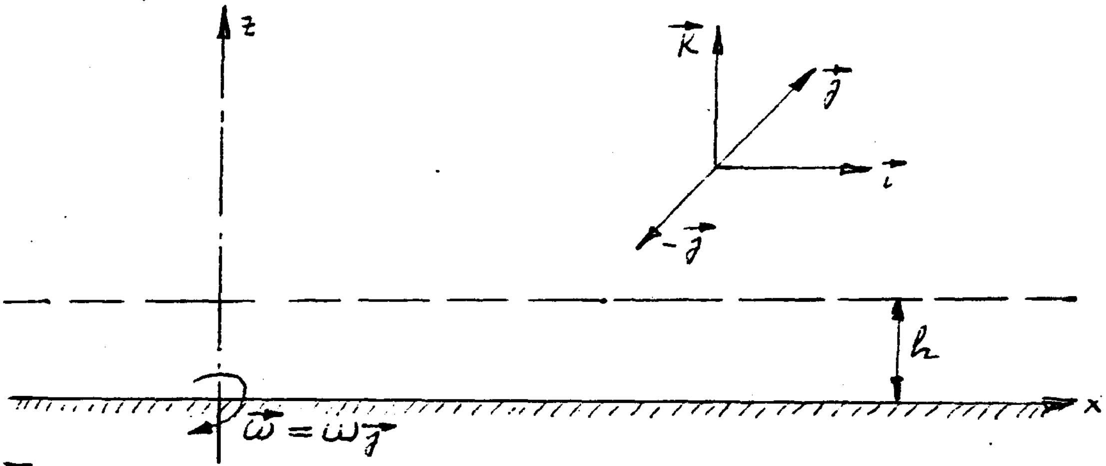
$$z\to\infty\;;\qquad W^{(1)}\to 0$$

$$z=1\;;\qquad W^{(1)}=W_1(x,\bar{\tau})$$

Ovo nema uticaja na jednačinu (5.26.) odnosno na rešenje za donji sloj, jer se u njemu $W^{(1)}/z = 1$ množi sa $f'_o(1)$, jer spajanjem prvih izvoda međusobno dovodi do $f'_o(1) = 0$.

UTICAJ ROTACIJE SISTEMA NA RASPROSTIRANJE
ALGEBARSKIH SOLITARNIH TALASA PRI
SLABOM SMICAJNOM STRUJANJU
$(n = 1)$

U ovom slučaju se posmatra stratifikovani fluid male debljine h. Ovaj fluid je sa jedne strane ograničen ravnom pločom, a sa druge strane nalazi se nestišljiv fluid koji je neograničen u pravcu osa x i z. Ceo sistem se obrće ugaonom brzinom $\vec{\omega}$. Obrtanje sistema se vrši oko ose (y) koja je normalna na ravan x i z. Osu x postavljamo u ravni ploče u pravcu kretanja fluida, a osu z vertikalno naviše.



$\vec{v}$ - relativna v brzina

$2[\vec{w}, \vec{v}]$ -Koriolisovo ubrzanje

$\vec{v} = \vec{v}_r$ - relativna brzina

$p = p^*$ - generisani pritisak

ρ_0 - gustina stratifikovanog fluida

ρ_1 - gustina nestišljivog fluida

$\bar{\rho}(z)$ - gustina fluida posle nastanka poremećaja

Pri proučavanju ovog problema polazi se od jednačine (3.4.) koje smo imali pri proučavanju uticaja rotacije sistema na rasprostiranje nelinearnih dugih gravitacionih talasa u stratifikovanoj tečnosti.

Uvođenjem razmera u jednačine (3.3.) dobijamo bezdimenzione jednačine:

$$(\bar{\rho}+\rho)\left\{u_t + (\bar{u} + u)u_x + w(\bar{u}' + u_z) - \frac{2\omega h}{\sqrt{gh}} w\right\} = - p_x$$

$$(\bar{\rho}+\rho)\left\{w_t + (\bar{u} + u)w_x + ww_z + \frac{2\omega h}{\sqrt{gh}} u\right\} = -\rho - p_z \qquad (6.1.)$$

$$\rho_t + (\bar{u} + u)\rho_x + w(\bar{\rho}' + \rho_z) = 0$$

$$u_x + w_z = 0$$

Jednačine (6.1.) važe za stratifikovani fluid debljine h. Za gornji sloj - nestišljiv fluid treba staviti:

$$\bar{u} \equiv 0$$
$$\rho \equiv 0 \qquad (6.2.)$$
$$\bar{\rho} = \text{konst.} = \frac{\rho_1}{\rho_0}\ .$$

Dalja transformacija jednačina se nastavlja uvođenjem dalekopoljnih koordinata:

$$\xi = \varepsilon(x - ct) \qquad \frac{\omega h}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{R_o} = \Omega\varepsilon^n$$
$$\tau = \varepsilon^2 t \qquad \Omega = 0\ (1)$$
$$\Omega = \pm 1 \qquad (6.3.)$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial \xi};\ \frac{\partial}{\partial t} = -\varepsilon c\frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \tau}$$

Takođe se u jednačinu (6.1.) uvode sledeće vrednosti za brzinu, pritisak i gustinu:

$$\bar{u} = \varepsilon\bar{U}(z),\ u = \varepsilon U,\ p = \varepsilon P,\ \rho = \varepsilon Q,\ w = \varepsilon^2 W \qquad (6.4.)$$

Nakon zamene (6.3.) i (6.4.) u jednačine (6.1.) dobijamo:

$$(\bar{\rho}+\varepsilon Q)\left\{-cU_\xi + \varepsilon U_\tau + \varepsilon(\bar{U} + U)U_\xi + \varepsilon W(\bar{U}' + U_z) - 2\Omega\varepsilon^n W\right\} = -P_\xi$$
$$(\bar{\rho}+\varepsilon Q)\left\{-\varepsilon^2 cW_\xi + \ldots + 2\Omega\varepsilon^n U\right\} = -Q - P_z \qquad (6.5.)$$
$$-cQ_\xi + \varepsilon Q_\tau + \varepsilon(\bar{U} + U)Q_\xi + W(\bar{\rho} + \varepsilon Q_z) = 0$$
$$U_\xi + W_z = 0$$

Ovde mogu nastupiti pri slučaja:

1. n> 1 - Postupak i rezultati su isti kao u prethodnom slučaju zato što je rotacija mala i može se zanemariti.
2. n=1 - Prva aproksimacija je ista kao i u slučaju kada nemamo rotaciju. Druga aproksimacija se menja i u karakterističnoj jednačini se javljaju dopunski članovi.
3. n = 0 - U ovom slučaju rotacija je daleko najveća što ima za posledicu da se već prva aproksimacija razlikuje od one kada nema kružnog kretanja.

Jednačine prvog reda n = 1

Pritisak, gustina i brzina mogu se napisati u razviti u obliku reda na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)} \varepsilon^{n} \\
Q &= \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)} \varepsilon^{n} \\
U &= \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)} \varepsilon^{n} \\
W &= \sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)} \varepsilon^{n}
\end{aligned}
\qquad (6.6.)
$$

Ako sada vrednosti (6.6.) uvrstimo u jednačine (6.5.) ali samo sa prvim članom reda, i o ako izjednačimo članove u jednačinama sa obe strane znaka jednakosti dobijamo:

$$
\begin{aligned}
- c\bar{\rho} U_{\xi}^{(o)} &= - P_{\xi}^{(o)} \\
Q^{(o)} &= - P_{z}^{(o)} \\
- cQ_{\xi}^{(o)} + \bar{\rho}' W^{(o)} &= 0 \\
U_{\xi}^{(o)} + W_{z}^{(o)} &= 0
\end{aligned}
\qquad (6.7.)
$$

U prethodnom poglavlju pokazano je kako se dolazi do sledećih vrednosti za pritisak, gustinu i brzinu

$$
\begin{aligned}
W^{(o)} &= - A_{\xi} f_{o}(z) \\
U^{(o)} &= A f_{o}' \\
P^{(o)} &= c\bar{\rho} A\, f_{o}' \\
Q^{(o)} &= - cA(\bar{\rho} f_{o}')'
\end{aligned}
$$

Korišćenjem jednačina 6.7. i prethodnih jednačina dobija se sledeća diferencijalna jednačina:

$$W_{zz}^{(o)} + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} W_z^{(o)} - \frac{1}{c^2} \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} W^{(o)} = 0$$

Prethodna jednačina se transformiše u sledeću jednačinu razdvajanjem promenljivih u $W^{(o)} = - A_{\xi} f_o(z)$

$$f_o'' + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o' - \frac{1}{c^2} \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o = 0$$

Granični uslov na ploči daje $f_{(o)}=0$, dok granični uslov na granici između sloja stratifikovane tečnosti i sloja homogene tečnosti tek treba da se odredi spajanjem rešenja. I u ovom slučaju potrebno je izračunati f_o u tački $z = 1$.

Jednačine drugog reda n=1

Kod jednačina drugog reda vrednosti 6.6. uvrštavamo u 6.5. i opet izjednačavamo najveće članove sa jedne i druge strane znaka jednakosti:

$$- c\bar{\rho}U_{\xi}^{(1)} - cU_{\xi}^{(o)}Q^{(o)} + \bar{\rho}\left\{U_{\tau}^{(o)} + (\bar{U}+U^{(o)})U_{\xi}^{(o)} + W^{(o)}(U_z+U_z^{(o)}) - 2\Omega W^{(o)}\right. = -P_{\xi}^{(1)}$$

$$2\bar{\rho}\Omega U^{(o)} = - Q^{(1)} - P_z^{(1)}$$

$$- cQ_{\xi}^{(1)} + \bar{\rho}_z W^{(1)} + Q_{\tau}^{(o)} + (\bar{U} + U^{(o)})Q_{\xi}^{(o)} + Q_z^{(o)}W^{(o)} = 0$$

$$U_{\xi}^{(1)} + W_z^{(1)} = 0$$

Ako sredimo prethodne jednačine:

$$P_{\xi}^{(1)} = c\bar{\rho}U_{\xi}^{(1)} - F_1 + 2\bar{\rho}\Omega W^{(o)}$$

$$P_z^{(1)} = - Q^{(1)} - 2\bar{\rho}\Omega U^{(o)}$$

$$- cQ_{\xi}^{(1)} + \bar{\rho}' W^{(1)} = - F_2$$

$$U_{\xi}^{(1)} + W_z^{(1)} = 0$$

i u prethodnom poglavlju poznatim transformacijama dobijamo sledeću jednačinu:

$$c^2\bar{\rho}W^{(1)}_{zz}+c^2\bar{\rho}'W^{(1)}_z-\bar{\rho}'\dot{W}^{(1)} = F_2-cF_{1z}+2c\Omega[\bar{\rho}U^{(o)}_{\xi}+(\bar{\rho}W^{(o)})_z]$$

Član $2c\Omega[\bar{\rho}U^{(o)}_{\xi} + (\bar{\rho}\dot{W}^{(o)})_z]$ predstavlja uticaj rotacije.

Posredstvom Grinove formule dobijamo:

$$\int_0^1\left\{F_2-cF_{1z}+2c\Omega[\bar{\rho}U^{(o)}_{\xi}+(\bar{\rho}W^{(o)})_z]\right\}f_o dz=c^2\bar{\rho}(1)\left\{f_o(1)\frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}\Big/_{z=1} - f_o'(1)W^{(1)}\Big/_{z=1}\right\}$$

U daljem radu proučavamo gornji sloj i polazimo od jednačina kretanja i jednačine kontinuiteta.

$$\frac{\rho_1}{\rho_o}\left(u_t + uu_x + wu_z - \frac{2\omega h}{\sqrt{gh}}w\right) = -p_x \qquad (6.8.)$$

$$\frac{1}{o}\left(w_t + uw_x + ww_z + \frac{2\ h}{\sqrt{gh}}u\right) = -p_z$$

$$u_x + w_z = 0$$

U daljem postupku uvodimo nove koordinate i veze:

$$X = x - ct, \tau = \varepsilon^2 t$$

$$w = \varepsilon^2 W,\ u = \varepsilon^2 U,\ \ p = \varepsilon^2 P$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \tau};\quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_o}\left(-cU_x + \varepsilon^2 U_{\tau} + \varepsilon^2 UU_x + \varepsilon^2 WU_z - 2\Omega\varepsilon^n W\right) = -P_x$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_o}\left(-cW_x + \varepsilon^2 W_{\tau} + \varepsilon^2 UW_x + \varepsilon^2 WW_z + 2\Omega\varepsilon^n U\right) = -P_z \qquad (6.9.)$$

$$U_x + W_z = 0$$

Jednačine prvog reda

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)} \varepsilon^n$$
$$W = \sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)} \varepsilon^n$$
$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)} \varepsilon^n \qquad (6.10)$$
$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)} \varepsilon^n$$

Ako sada vrednosti za pritisak, gustinu i brzinu (6.10.) unesemo u jednačine (6.9.) dobijamo jednačina nakon prve aproksimacije

$$c \frac{\rho_1}{\rho_0} U_x = P_x$$
$$c \frac{\rho_1}{\rho_0} W_x = P_x \qquad (6.11.)$$
$$U_x + W_z = 0$$

Rešavanjem jednačina (6.11.) dobijamo Laplasovu jednačinu:

$$W_{xx} + W_{zz} = 0$$

Granični uslovi su:

$$z \to \infty \ ; \quad W \to 0$$
$$z = 1 \ ; \quad W = W_o(x,\tau)$$

$W_o(x,\tau)$ treba da se odredi ako se izvrši spajanje rešenja sa donjim slojem:

Postoji rešenje Laplasove jednačine [2]

$$W(x,\tau, z) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} W_o(x',\tau) \frac{z-1}{(z-1)^2+(x-x')^2} dx'$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} W_o(x',\tau) \frac{(z-1)^2 + (x-x')^2 - 2(z-1)^2}{[(z-1)^2 + (x-x')^2]^2} dx'$$

$$= \frac{1}{\pi} \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} W_o(x',\tau) \frac{(x-x')^2 - (z-1)^2}{[(z-1)^2 + (x-x')^2]^2} dx$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}\Big/_{z=1} = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} W_o(x',\tau)\frac{dx'}{(x-x')^2} = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} W_o(x',\tau)\frac{dx'}{x-x'},$$

Spajanje rešenja

Da bi mogle da se odrede sve veličine izvršiće se spajanje rešenja duž granice između gornjeg i donjeg sloja tečnosti. Ovo spajanje podrazumeva izjednačavanje vertikalnih projekcija brzina i njihovih izvoda u oba sloja, duž (z=1)

a) $z = 1$

$$\varepsilon^2 w^{(o)} + \varepsilon^3 w^{(1)} = \varepsilon^2 W + \varepsilon^3 W_1$$

$$\varepsilon^2:\quad w^{(o)} = W \Rightarrow -A_\xi(\xi,\tau)\, f_o(1) = W_o\ (x,\tau)$$

$$\varepsilon^3:\quad w^{(1)} = W_1\ (x,\tau)$$

b) $z = 1$

$$\varepsilon^2\frac{\partial w^{(o)}}{\partial z} + \varepsilon^3\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} = \varepsilon^2\frac{\partial W}{\partial z} + \varepsilon^3\frac{\partial W_1}{\partial z}$$

$$\varepsilon^3:\quad w^{(1)} = W_1(x,\tau)$$

b) $z = 1$

$$\varepsilon^2\frac{\partial w^{(o)}}{\partial z} + \varepsilon^3\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} = \varepsilon^2\frac{\partial W}{\partial z} + \varepsilon^3\frac{\partial W_1}{\partial z}$$

$$\xi = \varepsilon x;\quad \xi' = \varepsilon x';\quad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}\Big/_{z=1} = \frac{f_o(1)}{\bar{u}}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} A_{\xi'}(\xi',\tau)\,\frac{d\xi'}{\xi-\xi'}$$

$$u = \frac{1}{\xi - \xi'} , \quad dv = A_{\xi'} d\xi'$$

$$du = \frac{d\xi'}{(\xi - \xi')^2} , \quad v = A\,(\xi';\tau)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}\Big/_{z=1} = \frac{f_o(1)}{\bar{u}} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \wp \left\{ \frac{A\,(\xi',\tau)}{\xi - \xi'} \Big/_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\,(\xi',\tau)\, d}{(\xi - \xi')^2} \right. =$$

$$= \varepsilon \frac{f_o(1)}{\bar{u}} \frac{\partial}{\partial \xi} \wp \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\,(\xi',\tau)\, d\xi'}{\xi - \xi'} \right. =$$

$$= \varepsilon \frac{f_o(1)}{\bar{u}}{}^{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\,(\xi',\tau)\, d\xi'}{\xi - \xi'}$$

$z = 1$

$$\frac{\partial W^{(o)}}{\partial z} = 0 \Rightarrow f_o'\,(1) = 0$$

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial z} = \frac{f_o(1)}{\bar{u}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\,(\xi',\tau)\, d\xi'}{\xi - \xi'}$$

Diferencijalna jednačina nakon prve aproksimacije posle razdvajanja promenljivih u $W^{(o)}$ima sledeći oblik

$$f_o'' + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o' - \frac{1}{c^2} \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o = 0$$

$$f_o(o) = 0; \; f_o'(1) = 0$$

Rešenje ove jednačine je dato u prilogu (V.4.)

BENJAMIN-ONO-ova jednačina ima oblik:

$$\int_0^1 \left\{ F_2 - cF_{1t} + 2c\,\Omega[\bar{\rho}U_{\xi}^{(o)} + (\bar{\rho}W^{(o)})_z] \right\} f_o dz = c^2\bar{\rho}(1)\left\{ f_o(1)\frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}\Big|_{z=1} - \right.$$

$$\left. - f_o'(1)\, W^{(1)}\Big/_{z=1} \right.$$

Koristeći prilog V.3. i prilog iz unutrašnje talasa između dve ploče dobija se:

$$2c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz A_{\tau} + (2c\int_0^1 \bar{u}\bar{\rho} f_o'^2 dz - 2c\Omega\int_0^1 \bar{\rho}' f_o'^2 dz) A_{\xi} + 3c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz\ AA_{\xi} =$$

$$= c^2\bar{\rho}(1)\ f_o^2(1) f_o^2(1)\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\mathcal{H}\{A(\xi,\tau)\} = 0$$

BENJAMIN-ONO-va jednačina

$$A_{\tau} + \bar{u}_{us}A_{\xi} - \Omega\frac{\int_0^1 \bar{\rho}' f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}A_{\xi} + \frac{3}{2}\frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}AA_{\xi} - \frac{c^2\bar{\rho}(1) f_o^2(1)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\mathcal{H}\{A(\xi,\tau)\}}{2c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} = 0 \tag{6.12.}$$

pri čemu je:

$$\bar{u}_{us} = \frac{\int_0^1 \bar{u}\bar{\rho} f_o'^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}$$ (uopštena srednja vrednost brzine smicajnog strujanja)

$$\mathcal{H}\{A(\xi,\tau)\} = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\xi',\tau)\, d\xi'}{\xi - \xi'}$$ (Hilbertova transformacija)

Ako u jednačinu (6.12.) uvedemo novu koordinatu $X = \xi - (\bar{U}_{us} + \Omega Cn^2)$ eliminišu se u jednačini BENJAMIN-ONO-a članovi

$$\bar{U}_{us}A_{\xi} - \Omega\frac{\int_0^1 \bar{\rho}' f_o^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}A_{\xi}$$

Takođe se može zaključiti da sada na brzinu talasa imaju uticaj i smicajno strujanje i rotacija celog sistema. Rotacija nema uticaj na amplitudu i dužinu talasa.

UTICAJ ROTACIJE SISTEMA NA RASPROSTIRANJE ALGEBARSKIH SOLITARNIH TALASA PRI SLABOM SMICAJNOM STRUJANJU ($n = 0$)

Ovde se takođe posmatra stratifikovani fluid male debljine h. Ovaj fluid je sa jedne strane takođe ograničen ravnom pločom a sa druge strane nalazi se nestišljiv fluid koji je neograničen u pravcu x i z ose. Ceo sistem se obrće ugaonom brzinom oko ose (y) koja je upravna na ravan (x,z). Osu x postavljamo u ravni ploče u pravcu kretanja fluida a osu z vertikalno naviše. Pošto je (n=0) uticaj rotacije je najveći.

Za rešavanje ovog problema polazimo od jednačina (6.5 .).

$$(\bar{\rho}+\varepsilon Q)\left\{-cU_{\xi}+\varepsilon U_{\tau}+\varepsilon(\bar{U}+U)U_{\xi}+\varepsilon W(\bar{U}'+U_z)-2\Omega\varepsilon^{n}W\right. = -P_{\xi}$$

$$(\bar{\rho}+\varepsilon Q)\left\{-\varepsilon^{2}cW_{\xi}+\ \ldots\ +2\Omega\varepsilon^{n}U\right\} = -Q-P_z \qquad (7.1.)$$

$$-cQ_{\xi}+\varepsilon Q_{\tau}+\varepsilon(\bar{U}+U)Q_{\xi}+W(\bar{\rho}+\varepsilon Q_{z}) = 0$$

$$U_{\xi}+W_z = 0$$

Jednačine prvog reda

Brzinu, pritisak i gustinu razvijamo u red na poznati način.

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}\varepsilon^{n}$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)}\varepsilon^{n}$$

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}\varepsilon^{n} \qquad (7.2.)$$

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}\varepsilon^{n}$$

Ako sada vrednosti (7.2.) uvrstimo u jednačina (7.1). i ako izjednačimo najveće članove sa obe strane znaka jednakosti dobijamo:

$$c\bar{\rho}U^{(o)}_{\xi} + 2\bar{\rho}\Omega W^{(o)} = P^{(o)}_{\xi}$$

$$-2\bar{\rho}\Omega U^{(o)} - Q^{(o)} = P^{(o)}_{z} \qquad (7.3.)$$

$$-cQ^{(o)}_{\xi} + \bar{\rho}_{z}W^{(o)} = 0$$

$$U^{(o)}_{\xi} + W^{(o)}_{z} = 0$$

Rešavanjem jednačine (7.3.) dobijamo vrednosti za brzinu, gustinu i pritisak:

$$W^{(o)} = -A\zeta f_o$$

$$U^{(o)} = Af_o' \qquad (7.4.)$$

$$P^{(o)} = \bar{\rho} A(cf_o' - 2\Omega f_o)$$

$$Q^{(o)} = -cA(\bar{\rho} f_o')'$$

Takođe se rešavanjem jednačine (7.3.) može dobiti sledeća jednačina:

$$W_{zz}^{(o)} + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} W_z^{(o)} - (1 + 2\Omega c)\frac{\bar{\rho}'}{c^2\bar{\rho}} W^{(o)} = 0$$

Razdvajanjem promenljivih u $W^{(o)}$ dobija se diferencijalna jednačina za određivanje sopstvenih vrednosti za $f_o(z)$ i c.

$$f_o'' + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o' - \frac{1 + 2c\Omega}{c^2} \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o = 0 \qquad (7.4.)$$

Jednačina (7.4.) ima sledeće rešenje:

$$f_{on} = e^{\frac{H}{2} z} \sin \gamma_n z \qquad \text{(prilog VII.1.)}$$

Granični uslov na ploči daje f(o) = 0, dok granični uslov na granici između sloja stratifikovane tečnosti i sloja homogene tečnosti tek treba da se odrede spajanjem rešenja koja važe u oba sloja.

Jednačine prvog reda n=0

Sličnim postupkom kao i u prethodnim poglavljima vrednost (7.2.) uvrstimo u jednačine (7.1.) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
P_{\xi}^{(1)} &= c\bar{\rho}U_{\xi}^{(1)} + 2\bar{\rho}\Omega W^{(1)} - F_1 + 2\Omega Q^{(o)}W^{(o)} \\
P_{z}^{(1)} &= - Q^{(1)} - 2\bar{\rho}\Omega U^{(1)} - 2\Omega Q^{(o)}U^{(o)} \\
-cQ_{\xi}^{(1)} + \bar{\rho}' W^{(1)} &= - F_2 \\
U_{\xi}^{(1)} + W_{z}^{(1)} &= 0
\end{aligned}
\qquad (7.5.)
$$

pri čemu je:

$$F_1 = \bar{\rho}\left\{U_{\xi}^{(o)} + \varepsilon(\bar{U} + U^{(o)})U_{\xi}^{(o)} + W^{(o)}(\bar{U}_z + U_z^{(o)})\right\} - cQ^{(o)}U_{\xi}^{(o)}$$

$$F_2 = - Q_{\xi}^{(o)} - (\bar{U} + U^{(o)})\, Q_{\xi}^{(o)} - W^{(o)}Q_z^{(o)}$$

Rešavanjem (7.5.)dobija se sledeća jednačina:

$$c^2\bar{\rho}\, W_{zz}^{(1)} + c^2\bar{\rho}' W_z^{(1)} - \bar{\rho}'(1+2\Omega c)W^{(1)} = F_2 - cF_{1z} + 2\Omega c\left[Q_{\xi}^{(o)}U^{(o)} + Q_z^{(o)}W^{(o)}\right]$$

Metodom Grina dobijamo:

$$Ly = p(x)y'' + q(x)y + r(x)y$$

$$Mz = (p(x)z)'' - (q(x)z)' + r(x)z$$

$$zLy - yMz = \frac{d}{dx}(pzy' - y(pz)' + qyz)$$

$$\int_0^1 (zLy - yMz)dx = p_1z_1y_1' - y_1(p_1'z_1 + p_1z_1') + q_1y_1z_1 - \left\{p_oz_oy_o' - y_o(p_o'z_o + p_oz_o') + q_oy_oz_o\right\}$$

$$LW^{(1)} = c^2\bar{\rho}W^{(1)}_{zz} + c^2\bar{\rho}'W^{(1)}_z - \bar{\rho}'(1+2\ c)W^{(1)} = F_2 - CF_{1z} + 2\Omega c\left[Q^{(o)}_{\xi}U^{(o)} + \right.$$
$$\left. + Q^{(o)}_z W^{(o)}\right]$$

$$p = c^2\bar{\rho}, \quad q = c^2\bar{\rho}', \quad r = -\bar{\rho}\ (1 + 2\Omega c)$$

$$MW^{(o)} = c^2(\bar{\rho}W^{(o)})'' - c^2(\bar{\rho}'W^{(o)})' - \bar{\rho}'(1+2\Omega c)W^{(o)} = 0$$

$$MW^{(o)} \quad c^2\bar{\rho}W^{(o)}_{zz} + c^2\bar{\rho}'W^{(o)}_z - \bar{\rho}'(1+2\Omega c)W^{(o)} = 0$$

$$\int_0^1 W^{(o)}LW^{(1)}dz = c^2\bar{\rho}_1 W^{(o)}_1 W^{(o)}_{z1} - W^{(1)}_1\left\{c^2\bar{\rho}'_1 W^{(o)}_1 + c^2\bar{\rho}_1 W^{(o)}_{z1} + \right.$$
$$\left. + c^2\bar{\rho}'_1 W^{(o)}_1 W^{(o)}_1 = c^2\bar{\rho}_1\left\{W^{(o)}_1 W^{(1)}_{z1} - W^{(o)}_{z1}W^{(1)}_1\right\}\right.$$

$$W^{(o)} = -A_{\xi}f_o(z), \quad W^{(o)}_1 = -A_{\xi}f_o(1), \quad W^{(o)}_{z1} = -A_{\xi}f'_o\ (1)$$

$$\int_c^1\left\{F_2 - cF_{1z} + 2\Omega c\left[Q^{(o)}_{\xi}U^{(o)} + Q^{(o)}_z W^{(o)}\right]\right\}f_o dz = c^2\bar{\rho}(1)\left\{f_o(1)\ \frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}\ \Big/_{z=1} - \right.$$
$$\left. - f'_o(1)W^{(1)}\Big/_{z=1}\right. \qquad (7.5.)$$

<u>Gornji sloj</u>

Polazimo od jednačina (6.15.)

$$\frac{\rho_1}{\rho_o}\ (-cU_x + \varepsilon^2 U_{\xi} + \varepsilon^2 UU_x + \varepsilon^2 WU_z - 2\Omega\varepsilon^n W\} = -P_x \qquad (7.6.)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_o}\ (-cW_x + \varepsilon^2 W_{\xi} + \varepsilon^2 UW_x + \varepsilon^2 WW_z + 2\Omega\varepsilon^n U) = -Pz$$

$$U_x + W_z = 0$$

Jednačine prvog reda n = 0

Brzina, pritisak i gustina se mogu razviti u obliku reda.

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}\varepsilon^{n}$$
$$W = \sum_{n=0}^{\infty} W^{(n)}\varepsilon^{n}$$
$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}\varepsilon^{n} \qquad (7.7.)$$
$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}\varepsilon^{n}$$

Uvrštavanjem (7.7. u jednačine (7.6.) dobijamo:

$$- c\frac{\rho_1}{\rho_o} U_x - 2\frac{\rho_1}{\rho_o}\Omega W = - P_x$$
$$- c\frac{\rho_1}{\rho_o} W_x + 2\Omega\frac{\rho_1}{\rho_o} U = - P_z \qquad (7.8.)$$
$$U_x + W_z = 0$$

Rešavanjem jednačina (7.8. dobijamo:

$$- c\frac{\rho_1}{\rho_o} U_{xz} - 2\frac{\rho_1}{\rho_o}\Omega W_z = - c\frac{\rho_1}{\rho_o} W_{xx} + 2\frac{\rho_1}{\rho_o} U_x$$

$$+ cW_{zz} - 2\Omega W_z = cW_{xx} - 2\Omega W_z$$

$W_{xx} + W_{zz} = 0$ (Ovo je poznata Laplasova jednačina i to je sretna okolnost da smo je dobili rešavanjem jednačine 7.8.)

Granični uslovi su:

$$z \to \infty\,; \quad W \to 0$$
$$z = 1\,; \quad W = W_o(x,\tau)$$

$W_o(x,\tau)$ se određuje na taj način da se vrši spajanje sa rešenjem za donji sloj: postoji rešenje Laplasove jednačine [2].

$$W(x,\bar{\tau},z) = \frac{1}{\bar{u}} \wp \int_{-\infty}^{\infty} W_o(x,\bar{\tau}) \frac{z-1}{(z-1)^2+(x-x')^2} dx'$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{\bar{u}} \wp \int_{-\infty}^{\infty} W_o(x, \ ) \frac{(z-1)^2 + (x-x')^2 - 2(z-1)^2}{[(z-1)^2 + (x-x')^2]^2} dx'$$

$$= \frac{1}{\bar{u}} \wp \int_{-\infty}^{\infty} W_o(x';\bar{\tau}) \frac{(x-x')^2 + (z-1)^2}{[(z-1)^2 + (x-x')^2]^2} dx'$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}\Big/_{z=1} = \frac{1}{\bar{u}} \wp \int_{-\infty}^{\infty} W(x',\bar{\tau}) \frac{dx'}{(x-x')^2} = -\frac{1}{\bar{u}} \frac{\partial}{\partial x} \wp \int_{-\infty}^{\infty} W_o(x',\bar{\tau}) \frac{dx'}{x-x'}$$

Spajanje rešenja za donji i gornji sloj duž granice između donjeg i gornjeg sloja z = 1

$$\varepsilon^2 w^{(o)} + \varepsilon^3 w^{(1)} = \varepsilon^2 W + 0\ (\varepsilon^4)$$

$$\varepsilon^2: \quad w^{(o)} = W \Rightarrow - A_\xi(\xi,\bar{\tau})\ f_o(1) = W_o(x,\bar{\tau})$$

$$\varepsilon^3: \ w^{(1)} = 0$$

$$W_o(x,\bar{\tau}) = - A_\xi(\xi,\bar{\tau}) f_o(1)$$

$$w^{(1)}\Big/_{z=1} = 0$$

b) z = 1

$$\varepsilon^3 \frac{\partial w^{(o)}}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} = \varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial z} + 0\ (\varepsilon^4)$$

S obzirom da je:

$\xi = \varepsilon X$ i $\frac{\partial}{\partial X} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}$ sledi:

$$\frac{\partial W}{\partial z}\Big|_{z=1} = \frac{f_o(1)}{\pi}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} A_{\xi'}(\xi',\tau)\,\frac{d\xi'}{\xi-\xi'}$$

$$u = \frac{1}{\xi-\xi'}\ ;\ dv = A_{\xi'}\,d\xi'$$

$$du = \frac{d\xi'}{(\xi-\xi')^2}\ ;\ v = A\,(\xi',\tau)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}\Big|_{z=1} = \frac{f_o(1)}{\pi}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{P}\left\{\frac{A(\xi',\tau)}{\xi-\xi'}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{A\,(\xi',\tau)\,d\xi'}{(\xi-\xi')^2}\right. =$$

$$=\varepsilon\frac{f_o(1)}{\pi}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{P}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A\,(\xi',\tau)\,d\xi'}{\xi-\xi'}\right. = \varepsilon\frac{f_o(1)}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A\,(\xi',\tau)\,d\xi'}{\xi-\xi'}$$

$$z = 1;\ \frac{\partial W^{(o)}}{\partial z} = 0 \qquad f_o'(1) = 0$$

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial z} = \frac{f_o(1)}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A\,(\xi',\tau)\,d\xi'}{\xi-\xi'}$$

BENJAMIN-ONO-va jednačina nakon rešavanja jednačine (7.5.) ima oblik

$$A_\tau + \bar{U}_{us}A_\xi + \alpha_1 AA_\xi - \beta\left\{\mathcal{H}[A]\right\} = 0 \qquad (7.9.)$$

prilog VII.2.

$$\beta = \beta_1 f_o(1)$$

$$\bar{U}_{us} = \frac{\int_0^1 \bar{u}\bar{\rho} f_o'^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}\,\frac{\int_0^1\bar{\rho} f_o'^3 dz - 2\varkappa c\int_0^1(\bar{\rho} f_o')'\,f_o' f_o\,dz}{\int_0^1\bar{\rho} f_o'^2 dz}$$

$$\beta_1 = \frac{c\bar{\rho}(1)}{\left(2\int_0^1 \bar{\rho} f_0'^2 dz\right)}$$

Uvođenjem nove koordinate $X = \xi - \bar{U}_{us}\tau$ eliminiše se u jednačini (7.9.) član $\bar{U}_{us}A\xi$ iz čega se zaključuje da smicajno strujanje utiče na brzinu talasa ali ne na njegovu amplitudu i dužinu.

Prilog VII. 1

$$f_o'' + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o' - \frac{(1+2\Omega c)}{c^2} \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} f_o = 0$$

$$\bar{\rho} = e^{-Hz}$$

$$\bar{\rho}' = -He^{-Hz}$$

$$\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} = -H$$

$$f_o = e^{\lambda z}$$

$$f_o' = \lambda e^{\lambda z}$$

$$f_o'' = \lambda^2 e^{\lambda z}$$

$$\lambda^2 - H\lambda + \frac{1+2\Omega c}{c^2} H = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{H}{2} \pm i\gamma$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{4(\frac{1}{c^2} + \frac{2\Omega}{c})H - H^2}}{2}$$

$$f_o = e^{\frac{H}{2}z}(C_1 \cos\gamma z + C_2 \sin\gamma z)$$

$$f_o' = \frac{H}{2} e^{\frac{H}{2}z}(C_1 \cos\gamma z + C_2 \sin\gamma z) + e^{\frac{H}{2}z}(C_1\gamma \sin\gamma z + C_2\gamma \cos\gamma z)$$

Granični uslovi su:

1) $z = 0$: $f_o = 0$

2) $z = 1$: $f_o' = 0$

Prvi granični uslov daje:

$$C_1 = 0$$

Drugi granični uslov daje:

$$0 = C_2 e^{\frac{H}{2}z}(\gamma \cos\gamma z + \frac{H}{2} \sin\gamma z)$$

$$\gamma \cos\gamma z + \frac{H}{2} \sin\gamma z = 0$$

$$\operatorname{tg}\gamma z + \frac{2\gamma}{H} = 0$$

za $H = \frac{1}{10}$ u prilogu V.4. data su rešenja za .

$$f_o = C_2 e^{\frac{H}{2} z} \sin \gamma z \, .$$

$$W^{(o)} = - A_{\zeta} f_{on}$$

$$W^{(o)} = - A_{\zeta} e^{\frac{H}{2} z} \sin \gamma_n z$$

$$f_{on} = e^{\frac{H}{2} z} \sin \gamma_n z$$

Prilog VII.2.

BENJAMIN-ONO-va jednačina

$$\int_0^1 \left\{F_2 - cF_{1z} + 2\Omega c\left[Q_\xi^{(o)}\check{U}^{(o)} + Q_z^{(o)}W^{(o)}\right]\right\} f_o dz = c^2\bar{\rho}(1)\left\{f_o(1)\frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}\Big|_{z=1} - f_o'(1)\, W^{(1)}\Big|_{z=1}\right.$$

$$2c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz\, A_\tau + 2c\int_0^1 \bar{u}\bar{\rho} f_o'^2 dz A_\xi + \left[3c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz - 6\Omega c^2\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')'\, f_o' f_o dz\right] AA_\xi =$$

$$= c^2\bar{\rho}(1)\ f_o^2(1)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{H}\left\{A\ (\xi,\tau)\right\} \quad ; \mathcal{H}\left\{A(\xi,\tau)\right\} = \frac{1}{\bar{u}}\wp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\xi',\tau)\ d\xi'}{\xi - \xi'}$$

$$A_\tau + \bar{U}_{us}A_\xi + \frac{3}{2}\,\frac{\left[\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz - 2\Omega c\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')'\ f_o' f_o dz\right]}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o^2 dz} AA_\xi =$$

$$= \frac{c^2\bar{\rho}(1) f_o^2(1)\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathcal{H}\left\{A\ (\xi,\tau)\right\}}{2c\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2\ dz}$$

$$\bar{u}_{us} = \frac{\int_0^1 \bar{u}\bar{\rho} f_o'^2 dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz} \quad \text{(uopštena srednja vrednost)}$$

$$A_\tau + \bar{U}_{us}A_\xi + \alpha_1 AA_\xi - \beta\left\{\mathcal{H}[A]\right\} = 0; \ \beta = \beta_1 f_o(1)$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}\,\frac{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^3 dz - 2\Omega c\int_0^1 (\bar{\rho} f_o')'\ f_o' f_o dz}{\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz}$$

$$\beta_1 = \frac{c\,\bar{\rho}\,(1)}{(2\int_0^1 \bar{\rho} f_o'^2 dz)}$$

L I T E R A T U R A

[1.] G.B. Whitham, Linear and nonlinear waves, John Wiley and Sons, Inc. (1974).

[2.] H. Ono, Algebraic solitary waves in stratified fluids, J. Phus. Soc. Japan 39, No.4, pp. 1082 -1091 (1975).

[3.] D.J.Benny, Long non-linear waves in fluid flows, J. Math. Phys 45, po. 52-63 (1966).

[4.] C. Lee & R. Beardsley, The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow, J. Geophys, Res. 79, pp 453-462 (1974).

[5.] S.A. Maslowe & L.C. Redekopp, Long nonlinear waves in stratified shear flows, priloženo za štampu i J. Fluid. Mech

[6.] J.S. Russel, Report on waves (British Ass Rep, 1844), London, 1845)

[7.] J. Boossinesq, Theorie de l'intuniescence liquide appelee onde solitaire ou de translation, se propageant dans on canal rectangulaire, C.R. Acad.Sci, Paris, 72 (1981).

[8.] Rayleigh (J.W.Strutt), On waves, Phil. Mag. (5) 1 (1876)

[9.] Soboljev, Metodi matematičke fizike, (na ruskom Moskva, 1970).

[10.] A. R. Richardson, Stationary waves in water, Phil. Mag. (6) 40 (1920)

[11.] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun Handbook of Mathematical functions