СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXV

ПРВИ РАЗРЕД

81

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

Д-р Н. САЛТИКОВ

Теорија линеарних парцијалних једначина другог реда са једном непознатом функцијом

БЕОГРАД, 1935

Цена 6 дин.

Ђорђе Мушицки

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXV

ПРВИ РАЗРЕД

81

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

Д-р Н. САЛТИКОВ

Теорија линеарних парцијалних једначина другог реда са једном непознатом функцијом

БЕОГРАД, 1935

ТЕОРИЈА ЛИНЕАРНИХ ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ РЕДА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ ФУНКЦИЈОМ

Од

Др. Н. САЛТИКОВА

ТЕОРИЈА ЛИНЕАРНИХ ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ РЕДА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ ФУНКЦИЈОМ

Од

Др. Н. САЛТИКОВА

(Приказано на скупу Академије природних наука 1 јуна 1934 год.)

Увод

1. После испитивања Ајлера[1]), Лежандр, Имшенецки и Г. Е. Гурза[2]) проучавали су проблем интегралења једне линеарне парцијалне једначине другог реда, нарочито помоћу генералисања Лапласове класичне методе за линеарне једначине хиперболичког облика. Ову је теорију најпростије изложио Лакроа[3]), који је, као и Г. Е. Гурза, у неким тачкама Лежандрове теорије нашао извесну сличност са теоријом карактеристика Монжа. Г. Е. Гурза је, у својим горе поменутим предавањима навео[4]) да се корист Лежандрове методе састоји у томе, што она дозвољава применv Лапласове трансформације пре одређивања карактеристика.

У овом чланку долазимо још до других закључака од значаја по интегралење линеарних парцијалних једначина.

---

[1]) *Euleri Institutiones Calculi Integralis,* v. III Lipsiae et Berolini. *MCMXIV.* Pars Prima Sectio Secunda p.p. 147—280. Pars Altera. Caput IV. p.p. 355—368.

[2]) *Legendre — Mémoire Sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles* (Histoire de l'Académie des Sciences, Paris 1787.

V. G. Imschenesky. — Etude sur les Méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. Paris 1872. p. 61. *E. Goursat. — Leçons sur l'Intégration des equations aux dérivées partielles du second ordre.* Paris. 1898. t. II. p. 32.

[3]) *S. F. Lacroix. — Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral.* Seconde Edition. T. II. Pariz 1814. n⁰ 769. p.p. 615—618.

[4]) В. стр. 36.

Заиста, проучавање Лежандрове методе показује да она потпуно замењује Монжову теорију за парцијалне једначине другог реда које су линеарне с обзиром на непознату функцију и њихове парцијалне изводе првог и другог реда. Овај је закључак од вредности, јер Лежандрова метода доводи до општег интеграла посматраних једначина на један простији и лакши начин него теорија Монжа.

Одиста, подробна истраживања Имшенецког различитих случаја у интеграцијама Монжа и Ампера, која је поновио Форзајт[5]), показују уколико су компликоване ове методе. Међутим, доле изложена расуђивања доказују, да за посматране једначине не треба не само не испитивати, него шта више ни уводити системе линеарних парцијалних једначина првог реда Монжа и Ампера.

Овај закључак произлази из тога, што Лежандрова метода, како се даље доказује, дозвољава, да се непосредно састави услов интеграбилности, који иначе код Монжа и Ампера следи из сагласности горе поменутих једначина.

Најзад овај услов интеграбилности појављује се на веома елегантан начин у облику дискриминанте квадратне хомогене форме са три променљиве количине, која је придружна (асоцирана) посматраној линеарној једначини.

Ова дискриминанта, која, уопште, има две вредности, игра исту улогу као и инваријанте Дарбуа у Лапласовој теорији.

Али има једна особина у општој теорији коју треба подвући. Узимајући у обзир Лапласова испитивања, писци који су се бавили Лежандровом теоријом обично су груписали чланове посматране једначине на два различита начина, па су тврдили да се према томе добивају два различита услова интеграбилности. Изузетак претставља излагање Лакроа, који није улазио у питање двеју трансформација посматраних једначина. Међутим, примена образаца у овом чланку изведених доказује да, за општу посматрану једначину, оба указана начина дају исте услове интеграбилности, а износе, напротив, различите услове само за неке једначине партикуларног облика, као, например, за Лапласову једначину.

---

[5]) *A. R. Forsyth.* — Theory of Differential Equations. Part. IV. vol. VI Cambridge 1906 p.p. 199 и 301.

Треба још поменути да се у случају једнаких корена карактеристичне једначине Монжа проблем интегралења посматраних једначина врши помоћу једног система Шарпија, који је већ проучен у чланку: *Equations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par un système de Charpit* [6]).

Најзад, лако је проширити Лежандрову теорију на једначине линеарне ма с којим бројем независно променљивих количина.

---

[6]) *N. Saltykow.* — Publications Mathémathiques de l'Université de Belgrade. T. II. Belgrade 1933, p. 66.

Глава I

Линеарне једначине са сталним коефицијентима.

2. *Општа једначина.* — Уочимо линеарну једначину:

$$Ar+2Bs+Ct+2Dp+2Eq+Fz+G=0, \tag{1}$$

са сталним коефицијентима A, B, C, D, E, F и G, где

$$p, \qquad q, \qquad r, \qquad s, \qquad t$$

значе парцијалне изводе првог односно другог реда од непознате функције z двеју независно промењљивих количина x и y, на име:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Под претпоставком да је коефицијент

$$A \gtrless 0, \tag{2}$$

груписаћемо чланове дате једначине (1) на следећи начин:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(Ap+Kq+Lz)+M\frac{\partial}{\partial y}(Ap+Kq+Lz)+\\ +N(Ap+Kq+Lz)+G=\mu z,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где су уведени непознати коефицијенти:

$$K, \; L, \; M, \; N, \; \mu, \tag{4}$$

које ћемо одредити тако да једначина (3) буде идентична са полазном датом једначином (1).

За то морају постојати, очигледно, следеће једнакости:

$$K+AM=2B, \quad KM=C, \tag{5}$$

$$L+AN=2D, \quad ML+KN=2E. \tag{6}$$

$$\mu=LN-F. \tag{7}$$

Претпоставимо да није дата једначина (1) параболичког облика; то значи да је:

$$B^2-AC \gtrless 0. \tag{8}$$

Тада се вредности коефицијената (4) одређују на веома лак начин овако. Прво, једначине (5) дају:

$$K=B \pm R, \quad AM=B \mp R, \quad R \equiv \sqrt{B^2-AC}\,. \tag{9}$$

Према томе, услед неједнакости (8), једначине (6) одредиће услед обрасца (9):

$$L=\frac{DK-AE}{\pm R}, \quad N=\frac{E-DM}{\pm R}\,. \tag{10}$$

Најзад, формула (7) постаће:

$$\mu=\frac{1}{R^2}\left[DEK-AE^2-D^2KM+ADEM-F\,(B^2-AC)\right].$$

Услед зависности (5) добивени образац имаће облик:

$$\mu=\frac{\Delta}{R^2}, \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Ову детерминанту Δ зваћемо *дискриминанта* дате једначине (1), из разлога које ћемо одмах објаснити доле.

Сад ћемо једначину (3) заменити системом двеју једначина, и то:

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+K\frac{\partial z}{\partial y}+Lz=z_1, \tag{12}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}+M\frac{\partial z_1}{\partial y}+Nz_1+G=\mu z, \tag{13}$$

где је z_1 уведена помоћна непозната функција.

Увешћемо, најзад, претпоставку да је коефицијент μ једнак нули, тј. да је:

$$\mu=0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0. \tag{14}$$

Онда ће једначина (13) имати облик:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}+M\frac{\partial z_1}{\partial y}+Nz_1+G=0. \tag{15}$$

Пошто добивена једначина (15) претставља једну линеарну парцијалну једначину првог реда само са једном непознатом функцијом z_1, она се може лако интегралити.

Чим ставимо овако одређену вредност функције z_1 у једначину (12), она ће постати исто тако једна линеарна парцијална једначина првог реда са једном непознатом функцијом z.

Општи интеграл ове последње једначине претстављаће, у исто време, општи интеграл дате једначине (1), у коме ће улазити две произвољне функције, све, разуме се, под претпоставком (14).

3. *Тумачење услова интеграбилности.* — Добивени услов (14) показује да се датој парцијалној једначини (1) придружена алгебарска форма трију независно промењљивих количина X, Y, Z,

$$AX^2+2BXY+CY^2+2DXZ+2EYZ+FZ^2, \tag{16}$$

раставља у два линеарна множитеља.

Ајлер је проучавао[7]) алгебарску форму (16) поводом интегралења једне хомогене линеарне парцијалне једначине другог реда са три независно промењљиве количине са сталним коефицијентима.

Растављајући форму (16) у два линеарна множитеља на следећи начин:

$$(aX+bY+cZ)\,(fX+gY+hZ),$$

Ајлер бележи зависности између коефицијената овако:

[7]) *Euleri* — Institutiones Calculi Integralis v. III p. 359.

$$A \equiv af, \quad C \equiv bg, \quad F \equiv ch,$$

$$2B \equiv ag + bf, \quad 2D \equiv ah + cf, \quad 2E \equiv bh + cg.$$

Према томе једначина (1) имаће облик:

$$afr + (ag + bf)\, s + bgt + (ah + cf)\, p + (bh + cg)\, q + chz + G = 0.$$

Груписаћемо сад чланове написане једначине тако да ће она, на основу услова (14), имати облик:

$$f \frac{\partial}{\partial x}(ap + bq + cz) + g \frac{\partial}{\partial y}(ap + bq + cz) + h\,(ap + bq + cz) + G = 0. \quad (17)$$

Онда ће систем одговарајућих парцијалних једначина првог реда (12) и (15) постати:

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = z_1,$$

$$f \frac{\partial z_1}{\partial x} + g \frac{\partial z_1}{\partial y} + hz_1 + G = 0.$$

Према томе општи интеграл једначине (17) написаће се помоћу скупа двеју једначина, овако:

$$z = -\frac{G}{ch} + e^{-\frac{c}{a}x}\left[\Psi\,(ay - bx) + \Phi(\xi, \omega)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{a}{h\,(ag - bf)}\, e^{\frac{cf - ah}{af\,(ag - bf)}\,(a\xi + f\omega)}\,\theta(\xi),$$

где су Ψ и θ две произвољне функције, а ξ и ω претстављају променљиве аргументе, који су одређени формулама:

$$\xi \equiv gx - fy, \quad \omega = ay - bx.$$

Благодарећи услову (14), лако се види да ли се нека дата једначина може интегралити изложеном методом. На пример, једначина која је линеарна и хомогена с обзиром на изводе другог реда, са сталним коефицијентима, увек се интеграли, јер су елементи последње колоне дискриминанте једнаки нули. Према томе постоји услов (14).

Међутим позната једначина:

$$r+q=0.$$

не може се интегралити изложеном методом, јер јој дискриминанта није равна нули.

4. *Параболичке једначине.* — Уочимо сад један изузетан случај, где нема услова (8), тј. да дата једначина (1) припада параболичком облику, за који постоји једнакост:

$$B^2-AC=0 \quad \text{или} \quad R\equiv 0. \tag{18}$$

Због тога, полазна једначина (1), чим у њу уврстимо вредност $C\equiv\frac{B^2}{A}$, имаће општи облик параболичких једначина:

$$A^2r+2ABs+B^2t+A(2Dp+2Eq+Fz+G)=0. \tag{19}$$

Ова једначина може се написати још друкчије овако:

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{\partial}{\partial x}(Ap+Bq)+B\frac{\partial}{\partial y}(Ap+Bq)+\\ &\qquad+2D(Ap+Bq)+A(Fz+G)=Qq, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где Q износи:

$$Q\equiv 2(BD-AE).$$

Ако сад претпоставимо да је коефицијент Q једнак нули, тј. да постоји услов:

$$Q=0 \quad \text{или} \quad AE=BD,$$

онда се једначина (20) своди на систем двеју једначина:

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{\partial z}{\partial x}+B\frac{\partial z}{\partial y}=z_1,\\ &A\frac{\partial z_1}{\partial x}+B\frac{\partial z_1}{\partial y}+2Dz_1+A(Fz+G)=0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где је z_1 уведена помоћна непозната друга функција.

Добивени систем (21) јесте Шарпијев. Према томе, општи интеграл дате једначине (19) лако се добива, како је то горе споменуто у уводу[6]).

5. *Упоређење с Монж-Амперовом методом.* — Ако применимо на дату једначину (1) Монж—Амперову методу, онда долазимо на интегралење система двеју линеарних парцијал-

них једначина првог реда са *једном непознатом функцијом*, које ће се написати, према обрасцима (9), овако:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial q}-\frac{K}{A}\frac{\partial u}{\partial p}=0\text{[8]},\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial u}{\partial y}+(p+Mq)\frac{\partial u}{\partial z}-\\
&\quad-\frac{1}{A}(2Dp+2Eq+Fz+G)\frac{\partial u}{\partial p}=0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{22}
$$

Да би проучили услове сагласности написаних једначина, саставимо из њих нову једначину, помоћу заграда Поасона, наиме:

$$R\frac{\partial u}{\partial z}\pm\frac{1}{A}(AE-DK)\frac{\partial u}{\partial p}=0, \quad A\gtrless 0. \tag{23}$$

Има сад два случаја за проучавање, и то, да ли је добивена једначина (23) идентички испуњена, или да ли се мора додати систему (22) као трећа једначина.

Са првом претпоставком долазимо до закључка да постоје две једнакости:

$$R=0, \quad AE-DK=0, \quad \text{или} \quad AE-BD=0.$$

Ова два услова потпуно се слажу са горе проученим случајем једне параболичке једначине (19).

Одавде се види да се у овом случају оба система (22), који одговарају двема различитим вредностима (9) коефицијената K и M, поклапају у Монж-Амперовој теорији, како је то добро познато.

Прелазимо сад на другу претпоставку, да једначина (23) неће бити идентички задовољена, па ствара са једначинама (22) један затворени систем од три линеарне парцијалне једначине првог реда са једном непознатом функцијом u.

Али, прво, приметимо, да чим R није једнако нули, једначина (23) имаће следећи простији облик:

---

[8]) Н. Н. Салтыковъ. — Способы Монжъ-Ампера и Дарбу интегрированія уравненій съ частными производными второго порядка; их обобщенія, (Записки Русскаго Научнаго Института въ Бѣлградѣ. Выпускъ 6. Бѣлградъ 1932. Стр. 9, уравненія (10)).

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{L}{A}\frac{\partial u}{\partial p}=0. \tag{24}$$

Прва једначина (22) налази се увек у инволуцији с једначином (24), јер су обе са сталним коефицијентима.

Међутим, друга једначина (22) и (24) производе, помоћу заграда Поасона, следећу нову једначину:

$$AL\frac{\partial u}{\partial z}+(AF-2DL)\frac{\partial u}{\partial p}=0. \tag{25}$$

Пошто ова једначина мора да буде алгебарска последица система трију једначина (22) и (24), то ћемо имати једнакост:

$$AL=-\frac{A(AF-2DL)}{L}, \quad \text{или} \quad (L-D)^2+AF-D^2=0.$$

Први образац (10) показује да је, услед прве формуле (9):

$$L-D=\frac{BD-AE}{\pm R}.$$

Према томе, добивена зависност постаће:

$$(BD-AF)^2+(AF-D^2)R^2=0,$$

или, чим упростимо написану једнакост, имаћемо пређашњи услов (14), наиме:

$$ACF+2BDE-AE^2-CD^2-FB^2=0. \tag{26}$$

Проучићемо сад другу претпоставку, да није једначина (25) последица једначине (22) и (24), тако да нема услова (26).

Тада ће систем четири једначине (22), (24) и (25) одредити следеће једнакости:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial p}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial q}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Одавде следи да под учињеном претпоставком Монж-Амперова теорија не даје општи интеграл за дату једначину (1).

Изложена истраживања доказују да за посматране линеарне парцијалне једначине Лежандрова теорија даје исте резултате као и Монж-Амперова метода.

6. *Својства Лежандрових једначина.* — Обе теорије, Лежандрова с једне стране, а Монж-Амперова с друге стране, имају још и друга слична својства, која ћемо одмах објаснити.

Обрасци (9) и (10) показују да коефицијенти K, M, L и N имају, уопште, по две вредности, које одговарају двоструким знацима поменутих формула.

Према томе, једначине (12) и (15) одређују два различита система, од којих један одговара горњим знацима, а други доњим знацима образаца (9) и 10).

Обележићемо коефицијенте другог система горњом цртом изнад слова тако да ће постојати следеће очевидне зависности:

$$\left.\begin{aligned} K &\equiv A\overline{M}, & \overline{K} &\equiv AM, \\ L &\equiv A\overline{N}, & \overline{L} &\equiv AN. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Најзад, кад постоји услов интеграбилности (14), означићемо са v решење прве једначине (15), а са w — решење друге једначине (15), која одговара другим вредностима посматраних коефицијената.

Услед наведених разлога добићемо следећа два система једначина (12) и (15), које ћемо, на основу обрасца (27), написати овако:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\equiv p+\overline{M}q+\overline{N}z+\frac{1}{A}\, v=0, \\ f_2 &\equiv p+Mq+Nz-\frac{1}{A}\, w=0, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x + Mv_y + Nv+G=0\,, \\ w_x + \overline{M}w_y + \overline{N}w+G=0, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где v_x, w_x, v_y, w_y означавају парцијалне изводе првог реда функција v и w по x, односно y.

Лако је доказати својство једначина (28), које показује да се ове једначине налазе у инволуцији.

Заиста, непосредни рачун заграда Поасона даје једнакост:

$$(f_1, f_2) \equiv (N-\overline{N})\, p+(\overline{M}N-M\overline{N})\, q+ \\ + \frac{1}{A}\,[v_x - Mv_y - (w_x + \overline{M}w_y)],$$

која према једначинама (29) и (28) добива облик:

$$(f_1, f_2) \equiv \left[N - \overline{N} + \frac{1}{A}(L - \overline{L})\right] p +$$

$$+ \left[\overline{M}N - M\overline{N} + \frac{1}{A}(\overline{K}\,\overline{N} - KN)\right] q +$$

$$+ \frac{1}{A}(\overline{L}\,\overline{N} - LN)\, z.$$

Обрасци (27) показују да се коефицијенти код p, односно код q и z, сваки засебно, уништавају идентички. Услед тога, из последње написане једнакости излази закључак да је:

$$(f_1, f_2) \equiv 0,$$

тј. да се *једначине* (*28*) *налазе у инволуцији.*

Добивени закључак користан је за интегралење дате једначине (1).

Одиста, сваки пут кад успемо проинтегралити обе једначине (29), онда тражени општи интеграл дате једначине (1) добије се интегралењем једне једначине у тоталним диференцијалама, и то:

$$dz = pdx + qdy,$$

где p и q означавају њихове вредности, које су одређене једначинама (28).

Уочимо, например, једначину [9]):

$$r - a^2 t + 2ab\,(p + aq) = 0.$$

Одмах се види да је њена дискриминанта једнака нули. Једначине (28), услед општих интеграла једначина (29), одређују вредности:

$$p = -abz + a\varphi\,(y - ax) + ae^{2by} f\,(y + ax),$$

$$q = bz - \varphi\,(y - ax) + e^{2by} f\,(y + ax).$$

Према томе интегралење једначине у тоталним диференцијалима одређује тражени интеграл у облику:

---

[9]) *E. Goursat.* — Leçons sur l'intégration d. Eq. aux d. p. 2 ordre T. I. p. 167.

$$z=e^{b(y-ax)}\left[\int e^{b(y-ax)}\varphi(y-ax)\,d(y-ax)+\right.$$

$$\left.+\int e^{b(y+ax)}f(y+ax)\,d(y+ax)\right],$$

где су φ и f произвољне функције.

Глава II

Једначине са променљивим коефицијентима

7. *Општа једначина.* — Претпоставимо да коефицијенти једначине:

$$Ar+2Bs+Ct+2Dp+2Eq+Fz+G=0 \tag{1}$$

означавају ма које функције од две независно променљиве количине x и y, при чему постоји услов:

$$A \gtrless 0. \tag{2}$$

Написаћемо једначину (1) на пређашњи начин овако:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(Ap+Kq+Lz)+M\,\frac{\partial}{\partial y}(Ap+Kq+Lz)+ \\ &\qquad\qquad +N\,(Ap+Kq+Lz)+G=\mu z. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

У садашњем случају тражени коефицијенти K, M, L, N μ претстављају функције независно променљивих количина x и y, па се одређују једнакостима:

$$K+AM=2B, \qquad KM=C,$$

$$L+AN=2D', \qquad ML+KN=2E',$$

$$\mu=LN-F',$$

где су уведене следеће ознаке:

$$2D' \equiv 2D-\psi(A), \qquad 2E' \equiv 2E-\psi(K),$$

$$F' \equiv F-\psi(L),$$

а симбол $\psi(\ldots)$ значи:

$$\psi(\ldots) \equiv \frac{\partial(\ldots)}{\partial x} + M\frac{\partial(\ldots)}{\partial y}\,.$$

Лако се види, ако постоји услов

$$B^2 - AC \gtrless 0, \tag{4}$$

да се тражене вредности коефицијената одређују обрасцима:

$$K = B \pm R, \quad AM = B \mp R, \quad R \equiv \sqrt{B^2 - AC} \gtrless 0\,, \tag{5}$$

$$L = \frac{D'K - AE'}{\pm R}, \quad N = \frac{E' - D'M}{\pm R}\,, \tag{6}$$

$$\mu = \frac{\Delta'}{R^2}, \qquad \Delta' \equiv \begin{vmatrix} A & B & D' \\ B & C & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Као и пре, називаћемо детерминанту Δ' *дискриминантом* дате једначине (1).

У случају једначине са сталним коефицијентима очевидно је да ће дискриминанта Δ' постати идентичка са Δ

Што се тиче једначине (3), она се замени системом двеју линеарних парцијалних једначина првог реда, наиме:

$$A\frac{\partial z}{\partial x} + K\frac{\partial z}{\partial y} + Lz = z_1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + M\frac{\partial z_1}{\partial y} + Nz_1 + G = \mu z, \tag{9}$$

где је z_1 нова уведена помоћна непозната функција.

Уведимо сад претпоставку, да је:

$$\mu = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} A & B & D' \\ B & C & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Онда ће једначина (9) постати:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}+M\frac{\partial z_1}{\partial y}+Nz_1+G=0, \tag{11}$$

па се може засебно интегралити.

После тога општи интеграл дате једначине (1) одређује се интеграљењем линеарне парцијалне једначине првог реда (8).

8. *Тумачење услова интеграбилности.* — Добивени услов интеграбилности (10) за општу једначину (1) показује да се алгебарска квадратна форма:

$$AX^2+2BXY+CY^2+2D'XZ+2E'YZ+F'Z^2, \tag{12}$$

коју ћемо називати формом придруженом датој једначини (1), *растављa у два линеарна множитеља.*

За сталне вредности коефицијената једначине (1) посматрана форма (12) поклапа се с горе уведеном квадратном формом која је обележена бројем (16) у Глави I.

9. *Параболичке једначине.* — Ако постоји партикуларан услов,

$$B^2-AC=0, \tag{13}$$

онда једначина (1) припада параболичком облику па ће имати следећи облик:

$$A^2r+2ABs+B^2t+A\,(2Dp+2Eq+Fz+G)=0. \tag{14}$$

Ова једначина може се написати овако:

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{\partial}{\partial x}(Ap+Bq)+B\frac{\partial}{\partial y}(Ap+Bq)+\\ &\qquad+2D''(Ap+Bq)+A\,(Fz+G)=Qq, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где су уведене ознаке:

$$2D''\equiv 2D-\psi'(A),\quad \psi'(\ldots)\equiv\frac{\partial(\ldots)}{\partial x}+\frac{B}{A}\frac{\partial(\ldots)}{\partial y},$$

$$Q\equiv 2\,(BD''-AE''),\quad 2E''\equiv 2E-\psi'(B).$$

Претпоставимо, најзад, да је коефицијент Q једнак нули, тј. да постоји услов:

$$2\,(BD''-AE'')=0. \tag{16}$$

Тада се једначина (15) доводи на систем Шарпија:

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+B\frac{\partial z}{\partial y}=z_1,$$

$$A\frac{\partial z_1}{\partial x}+B\frac{\partial z_1}{\partial y}+2D''z_1+A\,(Fz+G)=0,$$

где је z_1 помоћна непозната друга функција.

Што се тиче услова интеграбилности (16), написаћемо га у развијеном облику на следећи начин:

$$B\left(2D-\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{B}{A}\,\frac{\partial A}{\partial y}\right)-A\left(2E-\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{B}{A}\,\frac{\partial B}{\partial y}\right)=0,$$

или друкчије овако:

$$A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{A}\right)+B\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{A}\right)+2D\frac{B}{A}=2E. \tag{17}$$

Добивени услов интеграбилности параболичке једначине (14) потпуно се поклапа с условом, који се налази у горе поменутом чланку[6]), под бројем (9). Треба само прибележити да се једначина (14) разликује од једначине (3), у горе наведеном раду, бројним коефицијентима 2 код D и E.

10. *Упоређење с Монж-Амперовом методом.* — Уочимо за полазну тачку горе наведени систем (22), из Главе I, под претпоставком, да су коефицијенти неке функције одне-зависно промењљивих количина x и y.

Према томе, под овом претпоставком, заграде Поасона, које ћемо образовати за обе једначине, одредиће нову трећу једначину која ће изгледати овако:

$$\left(M-\frac{K}{A}\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\left[\frac{2DK}{A^2}-\frac{2E}{A}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{A}\right)+M\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{A}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial p}=0.$$

На основи пређашњих ознака, последња једначина може се написати краће овако:

$$R\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{L}{A}\,\frac{\partial u}{\partial p}\right)=0. \tag{18}$$

Ако претпоставимо да је ова једначина идентички задовољена, добићемо два услова, и то:

$$R=0, \qquad \text{или} \qquad B^2=AC, \tag{19}$$

$$RL\equiv\pm(D'K-AE')=0. \tag{20}$$

Према првом услову имаћемо једнакости:

$$K \equiv B, \qquad M \equiv \frac{B}{A},$$

па због тога други услов (20) постаје:

$$2\,(BD''-AE'')=0.$$

Нађени услов доказује да, под наведеном претпоставком, једначина (1) мора бити параболичког облика, па мора задовољавати горе добивени услов (16) или (17), који је изведен из груписања чланова параболичке једначине (14).

Сад ћемо проучити другу претпоставку, да добивена једначина (18) чини са једначинама (22), I-ве Главе, при промењљивим коефицијентима, један систем трију различитих једначина.

Пошто је $R \gtrless 0$, то једначина (18) постаје:

$$A\,\frac{\partial u}{\partial z} - L\,\frac{\partial u}{\partial p} = 0. \tag{21}$$

Она се налази у инволуцији са првом једначином (22), I-ве Главе, а њене заграде Поасона с другом једначином праве једнакост:

$$[\psi(A)+L]\,\frac{\partial u}{\partial z} + \left(F' - \frac{2DL}{A}\right)\frac{\partial u}{\partial p} = 0. \tag{22}$$

Проучићемо сада два различита случаја.

Претпоставимо, прво, да ова једнакост (22) претставља последицу једначине (21). Одавде излази закључак, да је:

$$\psi(A)+L = -\,\frac{AF'-2DL}{L},$$

или

$$(L-D')^2 + AF' - D'^2 = 0. \tag{23}$$

Услед очигледне зависности која постоји из обрасца (6), наиме:

$$L - D' \equiv \frac{BD'-AE'}{\pm R},$$

једнакост (23) имаће облик:

$$(BD'-AE')^2 + (B^2-AC)\,(AF'-D'^2) = 0,$$

па се може написати на овакав начин:

$$ACF' + 2BD'E' - AE'^2 - CD'^2 - F'B^2 = 0. \tag{24}$$

Ова идентичност показује, да је *дискриминанта једначине (1) једнака нули.*

Сад ћемо проучити други случај за једначину (22), где нема услова (24), то значи да није једначина (22) последица једначине (21). Тада обе једначине дају:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial p} = 0.$$

Према томе, полазне једначине (22), из Главе I, постаће:

$$\frac{\partial u}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + M\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

а изложена теорија не може одредити општи интеграл за дату једначину (1).

Због тога, у овом чланку изложена теорија даје за посматрану једначину (1) исти резултат као и Монж-Амперова метода, али има над њом преимућство, што даје тражени интеграл на знатно простији начин.

11. *Својства једначина Лежандра.* — Свака од једначина (8) и (11) одређује по две различите једначине, које одговарају двема нађеним вредностима коефицијената (5), (6) и (7).

Према томе, ако напишемо одвојено ове једначине, онда ћемо имати, прво, у место (8) две једначине:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\equiv Ap + Kq + Lz - v = 0, \\ f_2 &\equiv Ap + \overline{K}q + \overline{L}z - w = 0, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где p и q означавају парцијалне изводе z по x односно y, а v и w решења двеју једначина (11), наиме:

$$\left.\begin{aligned} v_x + Mv_y + Nv + G &= 0, \\ w_x + \overline{M}w_y + \overline{N}w + G &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Непосредни рачун заграда Поасона даје образац:

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) \equiv {} & [A_y(K - \overline{K}) + A(L - \overline{L})]\, p + \\ & + [A(\overline{K}_x - K_x) + K(\overline{K}_y + \overline{L}) - \overline{K}(K_y + L)]\, q + \\ & + [A(\overline{L}_x - L_x) + K\overline{L}_y - \overline{K}L_y]\, z + \\ & + A(v_x + Mv_y) - A(w_x + \overline{M}w_y).\end{aligned}$$

Сменимо у добивеном обрасцу чланове последње врсте са $-(Nv+G)$ односно $-(\overline{N}w+G)$, према једначинама (26), па затим елиминишимо v и w помоћу једначина (25). Онда ћемо добити следећи образац:

$$(f_1, f_2) \equiv Pp + Sq + Tz,$$

где коефицијенти P, R и T износе:

$$P \equiv A_y(K-\overline{K}) + A(\overline{L}-L) + A^2(\overline{N}-N),$$

$$S \equiv A(\overline{K}_x - K_x) + K(\overline{K}_y - \overline{L}) - \overline{K}(K_y + L) + A(K\overline{N} - KN),$$

$$T \equiv A(\overline{L}_x - L_x) + K\overline{L}_y - \overline{K}L_y + A(\overline{L}\,\overline{N} - LN).$$

Ако сад изразимо написане обрасце помоћу коефицијената дате једначине (1), узимајући у обзир зависности:

$$K \equiv A\overline{M}, \qquad \overline{K} \equiv AM,$$

онда ћемо одмах добити следећи закључак:

$$P \equiv 0, \quad S \equiv 0, \quad T \equiv A(\overline{\mu} - \mu) \equiv 0.$$

Према томе, једначине (25) налазе се у инволуцији.

Ово својство се увек искоришћује за интегралење једначине (1), чим су пронађена решења једначина (26).

12. *Примене.* — Г. Е. Гурза и В. Каптејн [10]) много су проучавали партикуларне случајеве где се парцијалне једначине другог реда могу интегралити Добивени услов интеграбилности, у облику дискриминанте дате једначине, знатно олакшава посматрани проблем за линеарне једначине облика (1).

Као пример навешћемо једначину жице променљиве густине, наиме [11]):

$$r - \lambda^2(x, y)\, t = 0. \tag{27}$$

Одговарајући јој коефицијенти јесу:

---

[10]) *W. Kapteyn. — Sur un cas particulier de l'équation différentielle de Monge* (Annales de L'Ecole Normale Supérieure, t. XVII, 1900; t. XX, 1903).

[11]) *E. Goursat. — Leçons sur l'intégration..* t. I, p. 139 n⁰ 53.

$$R \equiv \pm \lambda, \qquad K \equiv \pm \lambda, \qquad M \equiv \mp \lambda,$$

$$2D' \equiv 0, \qquad 2E' \equiv -\psi(\pm \lambda), \quad L \equiv \frac{1}{2\lambda}\, \psi(\lambda).$$

Према томе, чим изједначимо дискриминанту посматране једначине са нулом, одмах ћемо имати тражени услов интеграбилности:

$$2\lambda\psi\,[\psi(\lambda)] - 3\,[\psi(\lambda)]^2 = 0, \tag{28}$$

који, на скраћени начин, изражава услов Г. Гурза (25) на страни 141.

Предност добивеног облика једначине (28) састоји се још и у томе, да се ова парцијална једначина другог реда лако интеграли, помоћу система Шарпија. Заиста, чим уведемо помоћну непознату функцију ρ, коју ћемо изједначити са $\psi(\lambda)$, онда се добива наведени систем двеју једначина:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} \pm \lambda\,\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \rho, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial x} \pm \lambda\,\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{3\rho^2}{2\lambda}. \tag{29}$$

Интеграцијом одговарајућег система обичних диференцијалних једначина:

$$dx = \frac{dy}{\pm\lambda} = \frac{d\vartheta}{\rho} = \frac{d\rho}{\dfrac{3\rho^2}{2\lambda}},$$

општи интеграл система (29) одређује се скупом две једначине:

$$2\lambda^2 \pm y\rho = \rho f\left(\frac{\lambda^3}{\rho^2}\right), \qquad 2\lambda + x\rho = \rho\varphi\left(\frac{\lambda^3}{\rho^2}\right),$$

где су f и φ две произвољне функције.

За други пример уочимо параболичку једначину [12]):

$$r - 2\lambda\,(x,y)\,s + \lambda^2\,(x,y)\,t = 0;$$

---

[12]) *E. Goursat. — Leçons sur l'int.*, t. I p, 148.

њен услов интеграбилности одређује се непосредно формулом (17) у следећем облику:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda = \Phi\,(y + \lambda x),$$

где је Φ произвољна функција.

Глава III

Једначине с дискриминантом различитом од нуле

13. *Општа једначина.* — Свака парцијална једначина другог реда линеарна с обзиром на непознату функцију и парцијалне изводе првог и другог реда, која није хомогена, лако се доводи на хомогену једначину. За то је довољно увести једно партикуларно решење нехомогене једначине.

Према томе ћемо узети у обзир само линеарну парцијалну хомогену једначину другог реда са једном непознатом функцијом z, наиме:

$$Ar+2Bs+Ct+2Dp+2Eq+Fz=0, \tag{1}$$

где су коефицијенти неке функције од x и y.

Претпоставимо да јој дискриминанта није једнака нули.

(b. *Lacroix* — Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral t. II, 2 éd. Paris 1814. p. 615).

Дата једначина (1) своди се онда на систем следећих двеју једначина:

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+K\frac{\partial z}{\partial y}+Lz=z_1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}+M\frac{\partial z_1}{\partial y}+Nz_1=\mu z, \tag{3}$$

где коефицијенти имају вредности које су наведене у претходној Глави, а сагласно уведеној претпоставци имамо:

$$\mu \gtrless 0.$$

Лако се доказује да уведена функција z_1 задовољава једној линеарној парцијалној једначини другог реда, која има исте коефицијенте A, B и C са датом једначином (1). За то је потребно делимично диференцијалити једначину (3) по x односно y, да бисмо нашли једнакости:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+M\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}+N\frac{\partial z_1}{\partial x}+M_x\frac{\partial z_1}{\partial y}+N_x z_1=\mu\frac{\partial z}{\partial x}+\mu_x z, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}+M\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}+(M_y+N)\frac{\partial z_1}{\partial y}+N_y z_1=\mu\frac{\partial z}{\partial y}+\mu_y z. \tag{5}$$

Збир једначине (4) помножене са A и једначине (5) помножене са K даје, услед једначина (2) и (3), тражену једначину другог реда:

$$Ar_1+2Bs_1+Ct_1+2D_1p_1+2E_1q_1+F_1z_1=0, \tag{6}$$

где p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 означавају изводе првог и другог реда нове непознате функције z_1 по x односно y, а нови коефицијенти јесу:

$$\left.\begin{aligned}2D_1&\equiv 2D'-\varphi(\lg\mu),\\ 2E_1&\equiv 2E'+\varphi(M)-M\varphi(\lg\mu),\\ F_1&\equiv F'+\varphi(N)-N\varphi(\lg\mu),\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где је уведена ознака:

$$\varphi(\ldots)\equiv A\frac{\partial(\ldots)}{\partial x}+K\frac{\partial(\ldots)}{\partial y}.$$

Ако применимо на једначину (6) трансформацију која је објашњена у претходној глави, заменићемо на пређашњи начин једначину (6) скупом двеју једначина:

$$\left.\begin{aligned}Ap_1+Kq_1+L_1z_1&=z_2,\\ p_2+Mq_2+N_1z_2&=\mu_1z_1,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где p_2 и q_2 означавају парцијалне изводе првог реда друге уведене функције z_2 по x односно y, а нови коефицијенти L_1, N_1 и μ_1 одређују се помоћу формула:

$$L_1+AN_1=2D_1', \qquad ML_1+KN_1=2E_1', \tag{9}$$

$$\mu_1=L_1N_1-F_1', \tag{10}$$

где су уведене ознаке које су сличне претходним формулама, и то:

$$2D_1' \equiv 2D_1 - \psi(A), \qquad 2E_1' \equiv 2E_1 - \psi(K), \tag{11}$$

$$F_1' \equiv F_1 - \psi(L_1). \tag{12}$$

Најзад из линеарних једначина (9) и (10) биће

$$L_1 = \frac{D_1'K - AE_1'}{\pm R}, \quad N_1 = \frac{E_1' - D_1'M}{\pm R}, \tag{13}$$

$$\mu_1 = \frac{\Delta_1}{R^2}, \qquad \Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} A & B & D_1' \\ B & C & E_1' \\ D_1' & E_1' & F_1' \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Ову дискриминанту Δ_1 претворене једначине (6) зваћемо *прва дискриминанта* полазне једначине (1), или њена *дискриминанта првога реда.*

Ако је дискриминанта (14) равна нули, једначине (8) одређују функцију z_1. Према томе, формула (3) даје тражени општи интеграл z само помоћу диференцирања.

Буде ли дискриминанта (14) различита од нуле, извршићемо, на пређашњи начин, другу, трећу и тако даље трансформацију све док не нађемо, ако је то опште могуће, неку дискриминанту једног одређеног реда, која би се поништила.

Ако би се овакав случај десио, добићемо тражени интеграл једначине (1) узаступним диференцирањем из узаступних формула, чији се низ завршава обрасцем (3).

14. *Рачун услова интеграбилности $n+1$ реда.* — Да бисмо нашли тражени услов, место формирања дискриминанте $n+1$ реда, саставићемо образац облика (10) за $(n+1)$-ву трансформирану једначину.

За то ћемо изразити, прво, вредности коефицијената L_1, N_1, F'_1 и μ_1 помоћу коефицијената дате једначине (1) на следећи начин:

$$L_1 = L + \mathrm{A} - \beta,$$

$$N_1 = N + \mathrm{B},$$

$$F'_1 = F' + \varphi(N) - N\beta - \psi(L_1),$$

$$\mu_1 = \mu + \mathrm{B}L + \mathrm{A}N + \psi(L_1) - \varphi(N) - \mathrm{B}\beta + \mathrm{A}\mathrm{B},$$

где су уведене ознаке:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{A}\equiv\pm\frac{1}{2R}\left[A\psi(K)-K\psi(A)-A\varphi(M)\right],\\
&\mathbf{B}\equiv\pm\frac{1}{2R}\left[M\psi(A)+\varphi(M)-\psi(K)\right],\\
&\beta\equiv\varphi(\lg\mu).
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Лако се види, како се, на аналогички начин, изражавају везе што постоје између коефицијената две узаступне трансформиране једначине.

Према томе, биће:

$$L_r=L_{r-1}+\mathbf{A}-\beta_{r-1},\qquad(16)$$

$$N_r=N_{r-1}+\mathbf{B},\qquad(17)$$

$$F'_r=F'_{r-1}+\varphi(N_{r-1})-N_{r-1}\,\beta_{r-1}-\psi(L_r),$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_r=\mu_{r-1}+\mathbf{B}L_{r-1}+\mathbf{A}N_{r-1}+\psi(L_r)-\varphi(N_{r-1})&\\ -\mathbf{B}\beta_{r-1}+\mathbf{AB},&\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

$$\beta_{r-1}\equiv\varphi(\lg\mu_{r-1}).$$

Да би израчунали вредности L_r и N_r, помоћу L и N, сабраћемо све обрасце (16) односно (17), почев од вредности $r=1$, у претпоставци да је:

$$L_0\equiv L,\qquad N_0\equiv N,\qquad \beta_0\equiv\beta.$$

Онда ћемо имати формуле:

$$L_r=L+r\mathbf{A}-\varphi(\lg\mu\mu_1\ldots\mu_{r-1}),$$

$$N_r=N+r\mathbf{B}.$$

Према томе образац (18) биће:

$$\begin{aligned}\mu_r=\mu_{r-1}+\mathbf{B}L+\mathbf{A}N-\psi(L)-\varphi(N)&\\
-\mathbf{B}\varphi(\lg\mu\mu_1\ldots\mu_{r-1})-\psi(\varphi(\lg\mu\mu_1\ldots\mu_{r-1}))+&\\
+(2r-1)\,\mathbf{AB}+r\,\psi(\mathbf{A})-(r-1)\,\varphi(\mathbf{B}).&\end{aligned}$$

Сабирајући написане формуле за све вредности индекса r, почев од $r=1$ до $r=n+1$, где је $\mu_0\equiv\mu$ написаћемо добивени резултат на следећи начин:

$$\mu_{n+1} = M_n + (n+1)\,[\mathbf{C} + (n+2)\,\mathbf{E}], \qquad (19)$$

где су уведене ознаке:

$$\left.\begin{aligned}
M_n &\equiv \mu - \mathbf{B}\varphi(\lg M'_n) - \psi[\varphi(\lg M'_n)],\\
M'_n &\equiv \mu^{n+1}\mu_1^{\,n}\,\mu_2^{\,n-2}\ldots\mu_{n-1}^{2}\mu_n,\\
\mathbf{C} &\equiv \mathbf{B}L + \mathbf{A}N + \psi(L) - \varphi(N) + \varphi(\mathbf{B}) - \mathbf{AB},\\
\mathbf{E} &\equiv \mathbf{AB} + \frac{1}{2}\,[\psi(\mathbf{A}) - \varphi(\mathbf{B})].
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Ако претпоставимо да је $\mu_{n+1} = 0$, где је n цео број, то ће значити да је n-та претворена једначина интеграбилна по изложеној методи. За то је потребно и довољно да десна страна једнакости (19) буде идентички једнака нули за једну целу и позитивну вредност n, која се одређује квадратном једначином:

$$\mathbf{E}n^2 + (\mathbf{C} + 3\mathbf{E})\,n + \mathbf{C} + 2\mathbf{E} + M_n = 0.$$

Одакле имаћемо:

$$n = \frac{-(\mathbf{C} + 3\mathbf{E}) \pm \sqrt{(\mathbf{C} + \mathbf{E})^2 - 4\mathbf{E}M_n}}{2\mathbf{E}}. \qquad (21)$$

Према томе, *услов интеграбилности дате једначине (1), помоћу n узастопних трансформација, састоји се у томе, да десна страна обрасца (21) буде цео позитиван број, где су коефицијенти одређени обрасцима (15) и (20).*

Глава IV

Линеарне парцијалне једначине са више од две независно промењиве количине

15. *Општа једначина са сталним коефицијентима од три независно промењиве количине.* — Уочимо парцијалну једначину другог реда с непознатом функцијом z од три независно промењиве количине x_1, x_2, x_3, наиме:

$$\left.\begin{aligned} &Ap_{11}+A'p_{22}+A''p_{33}+2Bp_{23}+2B'p_{13}+2B''p_{12}+ \\ &\qquad +2Cp_1+2C'p_2+2C''p_3+Fz=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где p_1, p_2, p_3 означавају парцијалне изводе првог реда функције z по x_1 односно x_2, x_3, а p_{ik} претставља парцијални извод другог реда од z по x_i и x_k.

Написаћемо дату једначину (1) на следећи начин под претпоставком да је

$$A \gtrless 0, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}(Ap_1+Kp_2+Lp_3+Mz)+N\frac{\partial}{\partial x_2}(Ap_1+Kp_2+Lp_3+Mz)+ \\ &+P\frac{\partial}{\partial x_3}(Ap_1+Kp_2+Lp_3+Mz)+Q(Ap_1+Kp_2+Lp_3+Mz)= \\ &\qquad\qquad =\mu z, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где су уведени седам непознатих коефицијената:

$$K, \quad L, \quad M, \quad N, \quad P, \quad Q \quad \text{и} \quad \mu. \tag{4}$$

Полазећи од претпоставке да су дати коефицијенти једначине (1) стални, а да су и последњих седам тражених вред ности (4) такође сталне, одредићемо њихове вредности једнакостима:

$$\left.\begin{aligned} K+AN=2B'', \qquad KN=A', \\ L+AP=2B', \qquad LP=A'', \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$LN+KP=2B, \tag{6}$$

$$M+AQ=2C, \qquad NM+KQ=2C', \tag{7}$$

$$PM+LQ=2C'', \tag{8}$$

$$MQ=F+\mu. \tag{9}$$

Једначине (5), (7) одређују првих шест вредности (4) на веома прост начин, и то:

$$\left.\begin{aligned} & K=B''\pm R', \qquad AN=B''\mp R', \qquad R'\equiv\sqrt{B''^2-AA'}, \\ & L=B'\pm R'', \qquad AP=B'\mp R'', \qquad R''\equiv\sqrt{B'^2-AA''}, \\ & M=\frac{B''C-AC'}{\pm R'}+C, \qquad Q=\frac{A'C'-B''C}{\pm AR'}+\frac{C}{A}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где је уведена претпоставка да су

$$R'\gtrless 0, \qquad R''\gtrless 0. \tag{11}$$

Чим уврстимо у једнакост (6) вредности K, N, L и P које су одређене обрасцима (10), добићемо услов:

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}=0, \tag{12}$$

који је потребан да се чланови дате једначине (1) групишу на начин (3).

Најзад, једнакост (8) постаће, услед обрасца (10)

$$\frac{AC''-B'C}{R''}=\frac{AC'-B''C}{R'}.$$

Ако дигнемо на квадрат обе стране написане једнакости, па њима додамо $AF-C^2$, онда ћемо добити још другу зависност, која мора постојати између коефицијената дате једначине (1) за могућност трансформације (3), и то:

$$\frac{\Delta'}{R'^2} = \frac{\Delta''}{R''^2}, \tag{13}$$

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & F \end{vmatrix}, \qquad \Delta'' \equiv \begin{vmatrix} A & B' & C \\ B' & A'' & C'' \\ C & C'' & F \end{vmatrix}.$$

Што се тиче последње једнакости (9), она ће одредити вредност коефицијента μ:

$$\mu = \frac{\Delta'}{R'^2}.$$

Одавде, према обрасцу (13), обе добивене једнакости могу се написати на следећи начин:

$$\mu = \frac{\Delta'}{R'^2} = \frac{\Delta''}{R''^2}. \tag{14}$$

Сад ћемо једначину (3) заменити системом двеју једначина, под претпоставком да постоје услови (12) и (13), и то:

$$A\frac{\partial z}{\partial x_1} + K\frac{\partial z}{\partial x_2} + L\frac{\partial z}{\partial x_3} + Mz = z_1, \tag{15}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + N\frac{\partial z_1}{\partial x_2} + P\frac{\partial z_1}{\partial x_3} + Qz_1 = \mu z, \tag{16}$$

где је z_1 уведена помоћна непозната функција.

Уведимо, најзад, претпоставку да је коефицијент μ једнак нули, тј. да је:

$$\mu = 0, \qquad \Delta' = 0, \qquad \Delta'' = 0. \tag{17}$$

Према томе једначина (16) постаће:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + N\frac{\partial z_1}{\partial x_2} + P\frac{\partial z_1}{\partial x_3} + Qz_1 = 0. \tag{18}$$

Написана једначина има општи интеграл, који претставља зависност између промењљивих количина с једном произвољном функцијом од два промењљива аргумената.

Смењујући нађену вредност z_1 у једначину (15), одредићемо тражену функцију z која ће претстављати општи интеграл дате једначине (1).

16. *Тумачење услова интеграбилности.* — Назваћемо квадратну форму са четири независно променљиве количине X, Y, Z и U:

$$\left. \begin{aligned} & AX^2+2B''XY+A'Y^2+2BYZ+2B'XZ+A''Z^2+ \\ & \quad +2CXU+2C'YU+2C''ZU+FU^2 \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

придруженом датој парцијалној једначини (1).

Нађена три услова, и то (12) и два последња (17), показују да се квадратна форма (18) која је придружена датој једначини (1) мора раставити у два линеарна множитеља да би се дата парцијална једначина (1) интегралила на генералисани Лежандров начин.

17. *Параболичке једначине.* — Претпоставимо сад да нема услова (11), него да постоје једнакости:

$$AA'=B''^2, \qquad AA''=B'^2, \qquad A'A''=B^2.$$

Тада се интегралење врши на онај начин који је већ био горе поменут.

18. *Општа једначина са променљивим коефицијентима.* — Посматрајући коефицијенте у једначинама (1) и (3) као функције независно променљивих количина, морамо зависности (7), (8) и (9) заменити следећим једначинама:

$$\left. \begin{aligned} & M+AQ=2D', \qquad 2D'\equiv 2C-\psi(A), \\ & NM+KQ=2E', \qquad 2E'\equiv 2C'-\psi(K), \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

$$PM+LQ=2G', \qquad 2G'\equiv 2C''-\psi(L), \tag{20}$$

$$MQ=F'+\mu, \qquad F'\equiv F-\psi(M), \tag{21}$$

где симбол $\psi(...)$ значи:

$$\psi(...)\equiv\frac{\partial(...)}{\partial x_1}+N\frac{\partial(...)}{\partial x_2}+P\frac{\partial(...)}{\partial x_3}.$$

Једначине (5) и (6), под уведеном претпоставком, одређују исте вредности у првим двема врстама (10) и услов (12), као и под пређашњом претпоставком.

Али сад обрасци (19) и (21) дају вредности:

$$M=\frac{B''D'-AE'}{\pm R'}+D', \quad Q=\frac{AE'-B''D'}{\pm AR'}+\frac{D'}{A},$$

$$\mu=\frac{D'}{R'^2}, \qquad D'\equiv\begin{vmatrix} A & B'' & D' \\ B'' & A' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Према томе једнакост (20) постаће:

$$\frac{AG'-B'D'}{R''}=\frac{AE'-B''D'}{R'}.$$

Ако дигнемо на квадрат обе стране написане једнакости, па будемо њима додали $AF'-D'^2$, онда ћемо добити другу зависност која мора постојати између коефицијената једначине (1) за могућност трансформације (3), и то:

$$\frac{D''}{R''^2}=\frac{D'}{R'^2}, \qquad D''\equiv\begin{vmatrix} A & B' & D' \\ B' & A'' & G' \\ D' & G' & F' \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Уочимо, најзад, квадратну форму:

$$\left.\begin{aligned} &AX^2+2B''XY+A'Y^2+2BYZ+2B'XZ+A''Z^2+ \\ &\qquad +2D'XU+2E'YU+2G'ZU+F'U^2, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

чији коефицијенти имају горе одређене вредности.

Рећи ћемо за форму (24) да је придружена датој линеарној једначини (1) чији су коефицијенти променљиви.

Претпоставимо да се форма (24) раставља у два линеарна множитеља, тј. да су детерминанте (12) и (23) идентички нуле. Онда се лако види да се једначина (1) решава помоћу узастопног интегралења двеју линеарних парцијалних једначина првог реда, свака од једне различите непознате функције трију независно променљивих количина; ове једначине јесу облика (15) и (18) чији се коефицијенти одређују обрасцима прве две врсте (10), (19) и (21).

Ако коефицијенат μ (13) није једнак нули, то се система једначина (15) и (16) претвара у једну нову линеарну парцијалну једначину другог реда с новом непознатом функцијом z_1, како ћемо то доказати у идућој глави.

Глава V

Линеарне парцијалне једначине другог реда с n независно промењљивих количина

19. *Општа једначина са сталним коефицијентима.* — Написаћемо посматрану једначину овако:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{si}\,p_{si} + 2\sum_{s=1}^{n} D_s\,p_s + Fz + G = 0, \tag{1}$$

где имамо идентичности:

$$A_{is} \equiv A_{si}, \tag{2}$$

а p_s и p_{si} значе изводе првог односно другог реда од непознате функције z од n независно промењљивих количина x_1, x_2,... x_n, наиме:

$$p_s = \frac{\partial z}{\partial x_s}, \qquad p_{si} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_s \partial x_i}.$$

Под претпоставком, да је коефицијент:

$$A_{11} \gtrless 0, \tag{3}$$

груписаћемо чланове дате једначине (1) на следећи начин:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{n} K_s \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\sum_{i=1}^{n} L_i p_i + Mz\right) + \\ &\qquad + N\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\,p_i + Mz\right) + G = \mu z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

За то морају уведени непознати коефицијенти

$$K_s\,, \qquad L_i\,, \qquad M\,, \qquad N \text{ и } \mu \tag{5}$$

задовољавати једнакости:

$$K_s L_s = A_{ss}, \qquad (s=1, 2, \ldots n), \tag{6}$$

$$K_s L_i + K_i L_s = 2A_{si}, \qquad (s, i=1, 2, \ldots n), \tag{7}$$

$$K_s M + L_s N = 2D_s, \qquad (s=1, 2, \ldots n), \tag{8}$$

$$MN = \mu + F, \tag{9}$$

где симбол $(s, i=1, \ldots n)$ значи да индекси s и i примају све различите вредности од 1 до n.

Пошто је број $2n+3$ уведених неодређених коефицијената (5) мањи од броја

$$2n + \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

једнакости (6), (7), (8) и (9), то је очевидно да за постојање једначине (4) морају коефицијенти дате једначине (1) задовољавати накнадне услове које ћемо саставити на следећи начин.

Уочимо, прво, n једначина (6) и n једначина система (7) које одговарају вредности индекса $i=1$ и свим различитим вредностима индекса s, од 1 до n, у претпоставци (што је увек могуће), да је:

$$K_1 = 1, \qquad L_1 = A_{11}. \tag{10}$$

Према томе ове последње једначине постаће:

$$\left.\begin{array}{ll} L_s + A_{11} K_s = 2A_{s1}, & K_s L_s = A_{ss}, \\ (s=2, 3, \ldots n). & \end{array}\right\} \tag{11}$$

Сваки пар једначина (11), које се налазе у истој врсти, даје:

$$\left.\begin{array}{ll} L_s = A_{s1} \pm R_s, & A_{11} K_s = A_{s1} \mp R_s, \\ R_s \equiv \sqrt{A_{s1}^2 - A_{11} A_{ss}}, & (s=2, 3, \ldots n), \end{array}\right\} \tag{12}$$

у претпоставци да је:

$$R_s \gtrless 0, \qquad (s=2, 3, \ldots n).$$

Чим будемо сад уврстили пронађене вредности (10) и (12) коефицијената L и K у једнакости (7), за све различите вредности индекса s и i, од 2 до n, наћи ћемо тражене услове:

$$A_{11}A_{ii}A_{ss}+2A_{si}A_{ii}A_{si}-A_{11}A_{si}^2-A_{ii}A_{s1}^2-A_{ss}A_{i1}^2=0$$

$$(i,\ s=2, 3, \dots n).$$

Ови се услови бележе још друкчије, помоћу детерминаната, овако:

$$\Delta_{is}\equiv\begin{vmatrix} A_{11} & A_{1i} & A_{1s} \\ A_{i1} & A_{ii} & A_{is} \\ A_{s1} & A_{si} & A_{ss} \end{vmatrix}=0, \qquad (i,\ s=2,\dots n). \tag{13}$$

Прелазимо, најзад, на одређивање вредности коефицијената M и N.

Прве две једначине (8), према обрасцима (10), постаће:

$$M+A_{11}N=2D_1, \qquad K_2M+L_2N=2D_2.$$

Одавде, услед обрасца (12) за L_2 и K_2, добићемо:

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{A_{21}D_1-A_{11}D_2}{\pm R}+D_1, \\ N&=\frac{A_{11}D_2-A_{21}D_1}{\pm A_{11}R_2}+\frac{D_1}{A_{11}}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Уврстимо вредности (14) коефицијената M и N у једначине (8) које одговарају вредностима индекса s од 3 до n. Према томе имаћемо једнакости:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_{11}D_s-A_{s1}D_1}{R_s}&=\frac{A_{11}D_2-A_{21}D_1}{R_2}, \\ (s&=3,\ 4,\dots n) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

које претстављају још $n-2$ накнадних услова, поред (13), за могућност груписања чланова дате једначине (1) у облику (4).

На тај исти начин, образац (9) одређује за коефицијент μ следећу вредност:

$$\left.\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{A_{11}}\left[D_1^2 - \frac{(A_{11}D_2 - A_{21}D_1)^2}{R_2^2}\right] - F = \\ &= \frac{A_{11}A_{22}F + 2A_{21}D_1D_2 - A_{11}D_2^2 - A_{22}D_1^2 - FA_{21}^2}{R_2^2} = \\ &= \frac{1}{R_2^2}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & D_1 \\ A_{12} & A_{22} & D_2 \\ D_1 & D_2 & F \end{vmatrix} = \frac{\Delta_2}{R_2^2},\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где је уведена ознака:

$$\Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & D_1 \\ A_{12} & A_{22} & D_2 \\ D_1 & D_2 & F \end{vmatrix}.$$

Горе наведени услови (15) лако се доводе, симетрије ради, на нови облик. За то ћемо дигнути на квадрат обе њихове стране, па ћемо затим њима додати исти образац $A_{11}F - D_1^2$ Онда ћемо ставити једнакости (15) у следећи облик:

$$\frac{A_{11}A_{ss}F + 2A_{s1}D_1D_s - A_{11}D_s^{\,2} - A_{ss}D_1^{\,2} - FA_{s1}^{\,2}}{R^2_s} =$$

$$= \frac{A_{11}A_{22}F + 2A_{21}D_1D_2 - A_{11}D_2^{\,2} - A_{22}D_1^{\,2} - FA_{21}^{\,2}}{R_2^{\,2}},$$

или друкчије, помоћу детерминаната, написаћемо тражене услове овако:

$$\frac{\Delta_s}{R_s^{\,2}} = \frac{\Delta_2}{R_2^{\,2}}, \qquad (s = 3, 4, \dots n), \tag{17}$$

где су уведене ознаке:

$$\Delta_s \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{s1} & D_1 \\ A_{1s} & A_{ss} & D_s \\ D_1 & D_s & F \end{vmatrix}, \quad (s = 3, 4, \dots n). \tag{18}$$

Према томе обрасци (16) и (17) могу се написати укратко:

$$\mu = \frac{\Delta_s}{R_s^2}, \qquad (s = 2, 3, \dots n). \tag{19}$$

20. *Услови интеграбилности.* — Претпоставимо, да су услови (13) и (17) задовољени.

Тада се доводи једначина (1) на облик (4), па се може према томе, заменити скупом двеју једначина:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i p_i + Mz = z_1, \tag{20}$$

$$\sum_{s=1}^{n} K_s p'_s + N z_1 + G = \mu z, \tag{21}$$

где је z_1 нова помоћна непозната функција, а p'_s бележи парцијални извод $\frac{\partial z_1}{\partial x_s}$.

Ако је коефицијент μ једнак нули, тј. ако постоје услови:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta_s = 0, & s = 2, 3, \ldots n \\ \mu = 0, & \end{array}\right\} \tag{22}$$

онда се лако једначине (20) и (21) интеграле, као две засебне самосталне једначине, прво (21), а затим (20). Њен општи интеграл одредиће, у исто време, и општи интеграл дате једначине (1).

21. *Једначине с променљивим коефицијентима.* — Претпоставимо сад да су коефицијенти једначине (1) функције независно променљивих количина $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Груписање чланова посматране једначине извршиће се на начин (4) такође у оној претпоставци, чим будемо имали услове (6) и (7), а поред тога у условима (8) и (9) сменићемо коефицијенте D_s и F односно обрасцима D'_s и F' који гласе:

$$2D'_s \equiv 2D_s - \psi\,(L_s), \qquad F' \equiv F - \psi(M), \tag{23}$$

где се симбол $\psi(\ldots)$ одређује обрасцем:

$$\psi(\ldots) \equiv \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{\partial(\ldots)}{\partial x_i}.$$

У посматраном случају, услови свођења једначине (1) на облик (4) изражавају се помоћу прећашњих једнакости (13) и још следећих накнадних услова, уместо (17), наиме:

$$\frac{\Delta'_s}{R_s^2} = \frac{\Delta_2'}{R_2^2}, \qquad (s=3, 4, \ldots n) \tag{24}$$

где су уведене ознаке:

$$\Delta'_r \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{r1} & D_1' \\ A_{1r} & A_{rr} & D'_r \\ D_1' & D'_r & F' \end{vmatrix}, \qquad (r=2, 3, 4, \ldots n).$$

Осим тога ће коефицијент μ бити:

$$\mu = \frac{\Delta'_s}{R_s^2}, \qquad (s=2, 3, \ldots n) \tag{25}$$

Одавде излази на тај исти начин, као и за једначину (1) са сталним коефицијентима, да се у случају промењљивих коефицијената интегралење једначине (1) своди на две једначине:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i p_i + Mz = z_1,$$

$$\sum_{s=1}^{n} K_s p'_s + Nz_1 + G = 0,$$

ако будемо имали, поред услова (13), једнакости:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta'_s = 0, & (s=2, 3, \ldots n), \\ \mu = 0. & \end{array}\right\} \tag{26}$$

Називаћемо детерминанте Δ_s односно Δ'_s као *карактеристичне* за посматране једначине (1).

22. *Трансформација линеарних једначина чије се карактеристичне детерминанте разликују од нуле.* — Уочимо линеарну једначину (1) с промењљивим коефицијентима који задовољавају услове (13) и (24), па, према томе, своди се на систем двеју једначина првог реда, наиме:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i p_i + Mz = z_1, \tag{27}$$

$$\sum_{s=1}^{n} K_s p'_s + Nz + G = \mu z, \tag{28}$$

где нема услова (26).

Диференцијалимо, прво, по x_i једначину (28), затим множимо са L_i написану парцијалну једначину, па саберемо добивене резултате за све вредности индекса i од 1 до n. Онда ћемо добити, услед једнакости (6) и (7), овакав образац:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{si}p'_{si}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} L_i\frac{\partial K_s}{\partial x_i}p'_s+N\sum_{i=1}^{n}L_i p'_i+\\&\quad+z_1\sum_{i=1}^{n}L_i\frac{\partial N}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}L_i\frac{\partial G}{\partial x_i}=\mu\sum_{i=1}^{n}L_i p_i+z\sum_{i=1}^{n}L_i\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\,.\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

Уведимо сад симбол:

$$\varphi(\ldots)\equiv\sum_{i=1}^{n}L_i\frac{\partial(\ldots)}{\partial x_i}\,,$$

а у другом члану, у првој врсти једнакости (29), променимо индекс сабирања i са s.

Према томе, формула (29) постаће:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{si}p'_{si}+\sum_{s=1}^{n}[NL_s+\varphi(K_s)]\,p'_s+$$

$$+z_1\varphi(N)+\varphi(G)=\mu\sum_{i=1}^{n}L_i p_i+z\varphi(\mu).$$

Uврстимо у добивену једнакост вредност $\sum_{i=1}^{n}L_i p_i$ која се одређује формулом (27), па затим, у пронађеном резултату, елиминишемо μz, помоћу једначине (28). Према обрасцима који се добивају уместо (8) и (9), у претпоставци (23), трансформисана једначина примиће опет облик једне линеарне једначине, и то:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{si}p'_{si}+2\sum_{s=1}^{n}D_{s1}\,p'_s+F_1z_1+G_1=0,\tag{30}$$

где се коефицијенти $2D_{s1}$, F_1 и G_1 изражавају помоћу пређашњих коефицијената на следећи начин:

$$2D_{s1}\equiv 2D'_s+\varphi(K_s)-K_s\varphi(\lg\mu),\quad (s=1,2,\ldots n),$$

$$F_1\equiv F'+\varphi(N)-N\varphi(\lg\mu),$$

$$G_1\equiv MG+\varphi(G)-G\,\varphi(\lg\mu).$$

Добивена једначина (30) поседује ту особину да има исте коефицијенте код парцијалних извода другог реда, као што и полазна једначина (1). Према томе, услови (13) важе такође и за једначину (30). Онда, да би поново применили изложену методу груписања чланова на трансформисану једначину, треба само испитати вредности $n-1$ карактеристичних детерминаната ове једначине (30).