СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

# ГЛАС CLXXXV

ПРВИ РАЗРЕД

92

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

10

Н. САЛТИКОВ

# Испитивање сингуларних интеграла диференцијалних једначина

БЕОГРАД 1941

Цена 25 Динара

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

# ГЛАС CLXXXV

ПРВИ РАЗРЕД

92

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

10

Н. САЛТИКОВ

# Испитивање сингуларних интеграла диференцијалних једначина

БЕОГРАД 1941

Цена 25 Динара

# Испитивање сингуларних интеграла диференцијалних једначина

од

Н. САЛТИКОВА

# ИСПИТИВАЊЕ СИНГУЛАРНИХ ИНТЕГРАЛА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

од

Н. САЛТИКОВА

(Приказано на скупу Академије природних наука 21 октобра 1940)

## Садржај

Узајамне аналитичне везе између сингуларних интеграла сматраних било као анвелопе општих, односно потпуних интеграла, било као решења Лагранжевих изводних једначина. Критеријум Г.Г. Е. Пикара и М. Петровића. Критика решења неколиких примера код Г. Л. Бибербаха и М. Хамбургера. Генерализација добијених резултата на парцијалне једначине првог реда са једном непознатом функцијом двеју и више независно променљивих количина. Сингуларни интеграли линеарних парцијалних једначина првог реда.

## Увод

Лагранж је, 1774 године, у главном створио теорију сингуларних интеграла обичних и парцијалних диференцијалних једначина првог реда (I). Од овог доба постоје два начина за одређивање сингуларних интеграла. Они се траже или као анвелопе општег интеграла или као заједничка решења дате диференцијалне једначине, и њених нарочитих изводних једначина, које ћемо звати Лагранжевим једначинама. Доцније су г. Дарбу (II) и г. Е. Пикар (III) обрадили теорију сингуларних интеграла за обичне једначине, први са геометриског, а други са аналитичког гледишта.

Г. Е. Пикар у свом излагању показује да решење Лагранжевих једначина, ако постоји, претставља анвелопу интегралних кривих линија, под претпоставком, да је различит од нуле извод леве стране дате диференцијалне једначине по функционалној промењљивој количини.

Најзад је г. М. Петровић, 1898 године [IV], проучавао, за своје једначине посебног облика, између осталог, и питање, када решење Лагранжевих једначина претставља ипак само *једно партикуларно решење дате једначине.*

Г. Дарбу је проширио своја испитивања о сингуларним интегралима и на парцијалне једначине првог реда [V].

Да би сингуларни интеграли постојали, обичне диференцијалне, односно парцијалне једначине првог реда, морају имати сингуларне особине у извесној одређеној области варијације промењљивих количина. Заиста, под супротном претпоставком не би могле диференцијалне једначине допуштати друга решења сем једног холоморфног.

Малочас наведена истраживања полазе од претпоставке да, у посматраној области варијација промењљивих количина, диференцијалне једначине допуштају: обичне — општи интеграл, а парцијалне — потпуни, а сем тога и сингуларне интеграле. Ови се интеграли, у наведеним радовима, развијају у бескрајне редове. Нарочито је М. Хамбургер, 1893 године [VI], испитивао дотичне радове за обичне диференцијалне једначине.

Циљ је овог чланка успоставити што тешње аналитичне везе између општег интеграла обичних једначина односно потпуног интеграла парцијалних једначина и њихових сингуларних интеграла. При томе ћемо се ограничити једном претпоставком, да су сингуларитети посматраних диференцијалних једначина такви, да постоји њихов општи, односно потпуни, интеграл у извесној области варијације промењљивих количина.

Под наведеном претпоставком, добија се следећи закључак:

Ако се може аналитички наћи сингуларни интеграл као анвелопа општег интеграла обичне диференцијалне једначине првог реда, он ће увек задовољити и одговарајуће Лагранжеве изводне једначине. Обрнуто, решење Лагранжевих једначина претставља било анвелопу општег интеграла, било партикуларно решење дотичне диференцијалне једначине. Према томе се поклапају сингуларни интеграли, који се одређују на оба поменута и ако различита начина.

За обичне једначине, Пикаров услов је само довољан, али није неопходан да би нађено решење Лагранжевих једначина одређивало сингуларни интеграл. Напротив, Петровићев критеријум — да је Пикаров извод једнак нули, може се проширити на све обичне диференцијалне једначине првог реда и служи као неопходан услов партикуларности добијеног решења. Шта више, да би нађено решење било партикуларни интеграл, довољно је да се пониште, за његову вредност, сви могући парцијални изводи, почев од другог реда, леве стране дате једначине.

Најзад, изложена расматрања показују теориску могућност особите врсте решења, која задовољавају истовремено особине и сингуларних, и партикуларних интеграла. На њих је већ М. Хамбургер скренуо пажњу у поменутом раду.

Наведени резултати проширују се на парцијалне једначине првог реда са једном непознатом функцијом, и то потпуно једноставно у случају две или неколиких независно промењљивих, како је то нарочито подвучено у излагању II и III главе.

## Глава I

### *Обичне диференцијалне једначине.*

Узмимо обичну диференцијалну једначину првог реда

$$f(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Претпоставимо да у некој одређеној области варијације промењљивих количина $x$, $y$ и $y'$ функција $f$ није холоморфна, али ипак има по њима одређене парцијалне изводе првог реда и допушта у посматраној области општи интеграл

$$y = V(x, C), \tag{2}$$

где $C$ означава произвољну константу, а функција $V$ допушта парцијалне изводе првог и другог реда по $x$ и по $C$. Према томе уводи се претпоставка, да резултат замене интеграла (2) у једначини (1) даје идентичност:

$$f\left(x, V, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0. \tag{3}$$

Пошто ова идентичност важи за све вредности $x$ и $C$, онда добијамо помоћу диференцијаљења по $C$ и $x$ још две нове идентичности:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial c} + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C} = 0, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \tag{5}$$

где заграде означавају резултат извршене замене вредности (2) функције $y$.

Добијене идентичности дозвољавају да успоставимо тражену везу између обе наведене дефиниције сингуларних интеграла.

Заиста, претпоставимо, прво, да једначина (1) има сингуларни интеграл, који се одређује као анвелопа низа интеграла (2) за различите вредности параметра $C$. Овај се сингуларни интеграл одређује елиминацијом $C$ из интеграла (2) и његовог извода:

$$\frac{\partial V}{\partial C} = 0. \tag{6}$$

По себи се разуме да имамо право у нашим теориским истраживањима, да увек ставимо општи интеграл једначине

(1) у облик (2), решен под $y$. Међутим ако не бисмо могли решити по $y$ општи интеграл

$$F(x, y, C) = 0$$

у неким засебним применама, онда се проблем налажења сингуларног интеграла решава помоћу заједничког испитивања овог општег интеграла и једне од две једначине:

$$\frac{\partial F}{\partial C} = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = 0.$$

Пошто идентичности (4) и (5) постоје за макакве вредности $x$ и $C$, оне ће важити такође за вредности $C$, које се одређују једначином (6). Идентичности (4) и (5) добијају, за дотичну вредност $C$, следећи облик:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \cdot \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C}\right] = 0. \tag{7}$$

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right] = 0, \tag{8}$$

где угласте заграде означавају резултат извршене смене вредности $C$.

Сада ћемо проучити обе претпоставке, које одговарају условима, да је један од два чинитеља леве стране једнакости (7) једнак нули.

Ако је први чинитељ једнак нули, наиме:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] = 0, \tag{9}$$

онда једнакост (8) даје другу идентичност:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] = 0. \tag{10}$$

Препоставимо да једначина (6) одређује посматрану вредност $C$ у следећем облику

$$C = \psi(x),$$

тако да постоји идентичност

$$\left[\frac{\partial V}{\partial C}\right] = 0. \tag{11}$$

Означимо сингуларни интеграл, који се тада добија из општег интеграла (2), овако:

$$y = \varphi(x)$$

Према томе имамо идентичности:

$$\varphi \equiv V(x, \psi), \qquad \varphi' \equiv \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial V}{\partial C}\right]\psi'.$$

Али, услед идентичности (11), добија се образац:

$$\varphi' \equiv \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right].$$

Благодарећи изнесеним обрасцима, идентичности (9) и (10) могу се написати другојачије овако:

$$\left.\begin{aligned} &f'_{y'}(x, \varphi, \varphi') = 0, \\ &f'_x(x, \varphi, \varphi') + f'_y(x, \varphi, \varphi')\,\varphi' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

*Добијене идентичности (12) показују да сингуларни интеграл, који претставља анвелопу општег интеграла, задовољава идентички Лагранжеве једначине:*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,y' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Проучимо сада другу претпоставку, т.ј. да се поништава други чинитељ леве стране једнакости (7) и то:

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C}\right] = 0, \tag{14}$$

а да је први чинитељ различит од нуле:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \gtrless 0. \tag{15}$$

Онда би у овом случају изгледало да посматрани сингуларни интеграл не задовољава Лагранжеве једначине (13).

Међутим такав закључак не би био оправдан. Заиста, ако је услов (14) идентички испуњен:

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C}\right] \equiv 0,$$

онда дата једначина (1) не садржи непознату функцију $y$ и према томе нема сингуларног интеграла.

Изложена теорија дозвољава да се успостави најопштији облик једначина (1) које допуштају сингуларни интеграл. Ставимо за то:

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right] \equiv \varphi''(x).$$

Према томе идентичност (8) даје за одређивање тражене вредности функције $f$ једначину

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi'' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \tag{16}$$

која је линеарна парцијална једначина првог реда по непознатој функцији $f$ трију независно променљивих количина $x$, $y$ и $y'$.

Одговарајући систем обичних једначина

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{\varphi''(x)}$$

има два интеграла

$$y' - \varphi'(x) = C',$$

$$y - x[y' - \varphi'(x)] - \varphi(x) = C'',$$

где су $C'$ и $C''$ две произвољне константе.

Према томе општи облик тражених обичних једначина изгледа овако:

$$f \equiv y - x[y' - \varphi'(x)] - \varphi(x) - \Phi[y' - \varphi'(x)] = 0, \quad (17)$$

где $\Phi$ означава произвољну функцију. Добијена једначина уопштава Лагранжев резултат, који се добија за $\varphi(x) = 0$.

Нађена диференцијална једначина (17) има очевидно општи интеграл:

$$y = \varphi(x) + Cx + \Phi(C), \quad (18)$$

где је $C$ произвољна константа.

Одавде се сингуларни интеграл диференцијалне једначине (17) одређује као анвелопа општег интеграла (18) помоћу скупа једначине (18) и њене изводне једначине по $C$:

$$x + \Phi'(C) = 0. \quad (19)$$

Међутим обе Лагранжеве изводне једначине за једначину (17), пошто је $\varphi'' \gtreqless 0$, своде се само на једну једину једначину

$$x + \Phi'(z) = 0, \quad (20)$$

где је уведена ознака:

$$z \equiv y' - \varphi'(x).$$

Под овом се претпоставком једначина (17) пише:

$$y = \varphi(x) + z x + \Phi(z). \tag{21}$$

Према томе решење изводних Лагранжевих једначина претставља се скупом образаца (20) и (21), где уведена ознака $z$ игра улогу помоћног параметра. Одавде се види да се, упркос уведене претпоставке (15), ипак оба начина одређивања сингуларног интеграла потпуно поклапају, т.ј. да *увек сингуларни интеграл, који је одређен као анвелопа општег интеграла, истовремено задовољава такође и Лагранжеве једначине.*

Проучимо сад обрнуто питање, када решење Лагранжевих једначина претставља анвелопу општег интеграла. За то се вратимо на идентичности (4) и (5).

Пошто оне важе за макакве вредности количина $x$ и $C$, онда се исте идентичности задржавају и за ону вредност $C$, чијом се елиминацијом из једначине (2) и њеног извода по $x$ добија диференцијална једначина (1). Али за ову вредност $C$, идентичности (4) и (5) постају

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y}\left\{\frac{\partial V}{\partial c}\right\} + \frac{\partial f}{\partial y'}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C}\right\} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right\} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где велике заграде означавају резултат извршене замене наведене вредности $C$, при чему се пређашње округле заграде губе.

Према томе, ако једначине (1) и (13) имају заједничко решење, то идентичности (22) дају одговарајући услов:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C}\right\}\right] = 0 \tag{23}$$

где уведене нове заграде означавају резултат извршене смене. Лева страна добијене једнакости (23) претставља производ два чинитеља. Према томе треба проучити три различита случаја који се могу десити. Посматрајмо прву претпоставку:

$$\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C}\right\}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \gtrless 0. \tag{24}$$

Први образац (24) показује да је решења једначина (1) и (13) сингуларни интеграл, јер претставља анвелопу општег интеграла (2), под условом, израженим другим обрасцем (24), који се поклапа са Пикаровим условом.

Изведемо сада из једнакости (23) другу претпоставку:

$$\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C}\right\}\right] \gtrless 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = 0. \tag{25}$$

Први образац (25) показује да решење које се добија из Лагранжевих једначина (1) и (13) не може да буде анвелопа општег интеграла, него само једно партикуларно решење дате једначине (1). Зато је неопходно да буде испуњен критериум М. Петровића, који се изражава другим обрасцем (25). Али се довољан услов изражава првим обрасцем (25), што се може утврдити само из општег интеграла.

Најзад, може се десити да је услов (23) испуњен, и при томе се оба чинитеља леве стране једнакости поништавају идентички:

$$\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C}\right\}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = 0. \tag{26}$$

Према томе решење Лагранжевих једначина (1) и (13) одређује или анвелопу општег интеграла, где други услов (24) није неопходан, или нађено решење служи истовремено као *сингуларно и партикуларно* решење дате једначине (1).

Ова друга чињеница била је већ подвучена од Хамбургера у поменутом раду. Служећи се *Бул*-овом једначином

$$y'^4 - 4y(xy' - 2y) = 0,$$

писац је нагласио (стр. 245) да њено решење

$$y = 0 \tag{27}$$

претставља истовремено и *партикуларни*, и *сингуларни* интеграл. Заиста, општи интеграл Булове једначине гласи:

$$y = C^2 (x - C)^2 ,$$

где је $C$ произвољна константа.

Одатле се решење (27) добија или за $C = x$ као сингуларни интеграл, или за $C = 0$, као партикуларни интеграл.

Добијени резултат може се лако протумачити на следећи начин. Један од партикуларних интеграла дате једначине (1) додирује све друге партикуларне интеграле и према томе игра улогу њихове анвелопе. Према томе овај партикуларни интеграл служи у исто време и као сингуларни интеграл.

Вратимо се сада условима (25) и (26). Природа одговарајућег интеграла може се одредити само испитивањем општег интеграла једначине (1).

Међутим г. М. Петровић добио је за своје једначине начин за решавање постављеног питања о партикуларности посматраног интеграла, не служећи се општим интегралом. Ова метода да се проширити за једначине општег облика (1). Уведимо само претпоставку да лева страна дате једначине (1) и њен општи интеграл (2) допуштају парцијалне изводе, чији је ред већи од другог. Према томе добијамо диференцијаљењем идентичности (4) по $C$:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\frac{\partial V}{\partial C} + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\right)\frac{\partial V}{\partial C}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial C} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial C^2} + \\ &\qquad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial C}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^3 V}{\partial x\,\partial C^2} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Претпоставимо, да решење Лагранжевих једначина (1) и (13) задовољава, сем других услова (25) и (26), такође и једначине:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y'} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 0\,. \tag{29}$$

Тада се услов (28) своди на следећи:

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C}\right\}\right] = 0\,. \tag{30}$$

Ако постоји услов:

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] = 0\,,$$

онда други множитељ леве стране услова (30) не мора бити једнак нули.

Формирајмо нове услове диференцијаљењем поступно идентичности (4), (5) и (28) и оне, које се из њих добијају.

Пониште ли се сви могући парцијални изводи функције $f$ по $x$, $y$ и $y'$, почев од извода другог реда и вишег, онда је очевидно, да су наведени услови довољни да би решење Лагранжевих изводних једначина било партикуларни интеграл дате једначине (1).

Најзад, само испитивањем општег интеграла ове једначине може се решити питање, да ли нађено решење претстављa истовремено партикуларни и сингуларни интеграл дате диференцијалне једначине (1).

Наведимо неколико примера.

За једначину:

$$f \equiv y - xy' + e^{y'} = 0$$

добијамо одмах, према одговарајућим једначинама (1) и (13), решење:

$$y = x(\log x - 1). \tag{27}$$

Пошто је овде извод $\dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 1$, онда према Пикаровом ставу добијено решење (27) је сингуларни интеграл дате једначине. Заиста њен потпуни интеграл

$$y = Cx - e^{C},$$

где је $C$ произвољна константа, добија облик (27) за вредност

$$C = \log x.$$

За Клероову једначину

$$f \equiv 27\,(y - x y')^2 - 4\,y'^3 = 0$$

добијамо, према систему једначина (1) и (13), два решења:

$$y = 0\,,$$
$$y = x^3.$$

Прво решење претставља партикуларни интеграл, задовољава критеријум М. Петровића, и добија се из општег интеграла

$$y = Cx \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}\, C^{\frac{3}{2}}$$

за вредност константе

$$C = 0.$$

Међутим друго нађено решење је сингуларни интеграл, јер задовољава Пикаров услов. Заиста ово решење одговара услову:

$$\sqrt{C} = \mp \sqrt{3}\, x.$$

Овај пример налази се такође и у књизи *Г. Л. Бибербах-а,* [VII] *Theorie der Differentialgleichungen, dritte Auflage,* стр. 123,. Писац полази у излагању теорије сингуларних интеграла од испитивања Дарбу-а о дискриминантној кривој линији и уводи такозване сингуларне елементе. Затим се мора проучити питање, да ли могу неки од ових елемената произвести тражени сингуларни интеграл. Овај начин уопште води решењу проблема компликованијим путем него што је то случај с Лагранжевим једначинама. Заиста ове дају непосредно решења за која се може тврдити да су сингуларна, ако је одговарајућа вредност Пикаровог извода различита од нуле. А у супротном случају добијено решење може да буде и партикуларни интеграл.

Али Г. Л. Бибербах, да би доказао да је решење $y = 0$ партикуларно, уводи сувише компликована расуђивања за тако прост пример. Сем тога су његова проматрања доста произвољна и зато могу довести и до погрешног закључка, како се то показује на његовом другом примеру.

Овај други пример се налази на стр. 124 и претставља једначину:

$$f \equiv y'^2 - y^3 = 0 .$$

Она допушта једино решење одговарајућих Лагранжевих једначина (1) и (13), наиме:

$$y = 0 . \tag{28}$$

Критеријум Г. М. Петровића је задовољен за нађено решење (28). Осим тога оно се добија из општег интеграла дате једначине

$$y = \frac{4}{(x + C)^2} \tag{29}$$

за партикуларну вредност $C = \infty$. Према томе је решење (28) партикуларно.

Међутим Г. Л. Бибербах тврди да је решење (28) сингуларни интеграл. Пишчев доказ се оснива на чињеници, што свака крива (29), за ма коју вредност параметра $C$, додирује у бесконачности праву (28), која је због тога анвелопа кривих (29) по мишљењу писца. Ова особина интеграла не претставља одлучујући моменат за решење питања, да ли је добијено решење сингуларни или партикуларни интеграл, како смо то малочас доказали.

Узмимо сада једначину Г. Т. Cristobal de Losada y Puga [VIII]

$$y'^2 + y'\sqrt{x-y} - 1 = 0. \tag{30}$$

Ослободимо ову једначину корена, према Лагранжевом упутству, и напишемо је овако:

$$f \equiv (y'^2 - 1)^2 + (y-x)\,y'^2 = 0.$$

Према томе једначине (1) и (13) допуштају само једно-једино решење

$$y = x,$$

које претставља сингуларни интеграл једначине (30), јер је парцијални извод $\dfrac{\partial f}{\partial y} = y'^2$, за добијено решење. различит од нуле.

Најзад, проучимо једначину

$$f \equiv y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0. \tag{31}$$

Одговарајуће једначине (1) и (13) дају два решења:

$$y = 0, \tag{32}$$

$$y = \frac{4}{27}x^3. \tag{33}$$

Петровићев је критеријум испуњен за прво решење, а Пикаров услов за друго. Најзад, општи интеграл дате једначине (31)

$$y = C(x-C)^2 \tag{34}$$

одређује за партикуларну вредност $C = 0$, партикуларни интеграл (32).

Међутим метода варијације констаната даје за $C$ две вредности:

$$C = x,$$

$$C = \frac{1}{3} x.$$

Њима одговарају решења (32), односно (33), оба као сингуларни интеграли. Према томе решење (32) претставља истовремено и *партикуларно*, и *сингуларно решење*. Добијени резултат лако се даје протумачити геометриски. Заиста, општи интеграл (34) одређује низ партикуларних интеграла у облику парабола, које додирују $x$-осовину. Ове параболе су смештене испод осе $x$, за негативне вредности параметра $C$, а за његове позитивне вредности посматране параболе налазе се над осом $x$. Најзад, за вредност параметра $C = 0$, парабола (34) претвара се у осу $x$, и према томе додирује све остале параболе које одговарају вредностима $C$ различитим од нуле. Из наведених разлога партикуларно решење (32) може се сматрати такође као њихова анвелопа, јер испуњава све услове сингуларности интеграла. Што се тиче кубне параболе (33), она сече сваку од посматраних парабола, за $C \gtreqless 0$, у тачки чија је апсциса једнака $\frac{3}{2} C$, а додирује исту параболу у тачки са апсцисом $3C$. У координатном почетку парабола (33) има тачку превоја, где додирује осу $x$.

Посматрајмо још и овај интересантни пример:

$$y'^3 + 9y^2 = 0. \tag{35}$$

Одговарајуће Лагранжеве једначине дају једно једино решење:

$$y = 0. \tag{36}$$

Пикаров извод за њега се поништава. Међутим добијено решење (36) не претставља, у противречности са Петровићевим критеријумом, партикуларно решење. Супротно и са Пикаровим условом, решење (36) претставља сингуларни интеграл.

Заиста се општи интеграл дате једначине (35) изражава обрасцем:

$$y = -\frac{1}{3}(x - C)^3. \tag{37}$$

Према томе нађено решење (36) добија се као анвелопа општег интеграла за функционалну вредност параметра $C$:

$$C = x.$$

Узмимо најзад једначину

$$(y + xy')^2 - 2xy(1 + y'^2) = 0, \tag{38}$$

коју је проучио Хамбургер у поменутом раду, на стр. 246. Одговарајуће Лагранжеве једначине одређују два решења:

$$y = 0, \tag{39}$$

$$y = x. \tag{40}$$

Хамбургер доказује да је решење (39) сингуларни, а (40) — партикуларни интеграл.

Први резултат је тачан, јер је одговарајућа вредност Пикарова извода различита од нуле. Што се тиче решења (40), за њега је испуњен Петровићев услов.

Међутим једначина (38) доводи се решењем по $y$, у облик:

$$y = xf(y'), \tag{41}$$

где је уведена ознака

$$f(y') \equiv y'^2 - y' + 1 \pm (y' - 1)\sqrt{1 + y'^2},$$

при чему решење (39) задовољава само првој једначини (41), која одговара знаку $+$ у функцији $f(y')$.

Једначина (41), помоћу диференцијаљења, добија општи интеграл у облику скупа две једначине, наиме једначине

$$y = xf(u) \tag{42}$$

и следеће друге једначине:

$$C = x e^{\int \frac{f'(u)\, du}{f(u) - u}}, \tag{43}$$

где уведена ознака $u$ игра улогу помоћног промењивог параметра, а $C$ претставља произвољну константу.

Одмах се види из обрасца (42), да решење (40) одговара партикуларној вредности параметра $u$, која задовољава услов

$$f(u) \equiv 1 .$$

Према томе имамо:

$$u = 1, \qquad f'(1) \gtreqless 0 ,$$

и образац (43) одређује вредност $C$, која одговара решењу (40), у облику:

$$C = \infty .$$

Одавде излази закључак, да је решење (40) заиста партикуларно како то изводи М. Хамбургер, из посматрања бескрајних редова.

Испитивање може се такође извести строго рачунски и допунити на следећи начин. Извод по $C$ једначине (42) даје, у посматраном случају,

$$\frac{\partial V}{\partial C} \equiv x f'(u) \frac{\partial u}{\partial C} .$$

Одавде добијамо ове две могуће претпоставке:

$$f'(u) = 0 , \tag{44}$$

$$\frac{\partial u}{\partial C} = 0 . \tag{45}$$

Случај (44) је већ горе проучен и одређује сингуларни интеграл (39). Али што се тиче случаја (45), одредимо вредност извода $\frac{\partial u}{\partial C}$ диференцијалењем једначине (43) овако:

$$\frac{\partial u}{\partial C} = \frac{f(u) - u}{x e^{J} f'(u)}, \tag{46}$$

где је, краткоће ради, уведена ознака:

$$J \equiv \int \frac{f'(u)\, du}{f(u) - u}.$$

Извод (46) се поништава под једном од три следеће претпоставке:

$$f(u) = u, \tag{47}$$

$$\frac{1}{e^{J}} = 0, \tag{48}$$

$$\frac{1}{f'(u)} = 0. \tag{49}$$

У случају (47), образац (42) претставља ипак решење (40) једначине (38) као њен партикуларни интеграл.

Најзад, лако је увидети, да испитивање услова (48) и (49) не даје нових решења посматране једначине (38).

Наведимо, као последњи пример, једначину *Painlevé*-а [IX], наиме:

$$y' \sqrt{y} = x + \sqrt{x^2 + y}.$$

Ова се своди на једначину рационалног облика, према упутству Лагранжа,

$$y(y'^2 - 1)^2 - 4x^2 y'^2 = 0.$$

Одговарајући Лагранжев систем допушта једино решење

$$y = 0.$$

Што се тиче првобитне једначине

$$\pm y' \sqrt{y} = x - \sqrt{x^2 + y},$$

онда нађено решење претставља њен *сингуларни* интеграл према услову Г. Е. Пикара.

Међутим, вредност $y = 0$, противно тврђењу *Painlevé*-а уопште није решење друге првобитне једначине:

$$\pm y' \sqrt{y} = x + \sqrt{x^2 + y}.$$

Горе смо изнели, да изложена теорија одређује сингуларне интеграле непосредно, без посматрања дискриминантних кривих линија, које морају да служе за испитивање других особина интегралних кривих линија. Као пример узмимо једначину наведену од г. H. T. H. Piaggio [X]

$$f \equiv y'^2 (2 - 3y)^2 + 4 (y - 1) = 0 .$$

Лагранжеве једначине дају једино решење $y = 1$. За њега парцијални извод

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv - 6 y'^2 (2 - 3y) + 4$$

добија различиту од нуле вредност 4. Према томе је $y = 1$ сингуларни интеграл посматране једначине. То се види такође и стога, да се дотични интеграл добија из општег интеграла

$$(1 - y)\, y^2 = (x - C)^2$$

за функционалну вредност параметра $C = x$.

Међутим обе дискриминантне криве линије одређују тачке додиривања и дупле тачке интегралних кривих линија.

## Глава II.

### *Парцијалне једначине првог реда са непознатом функцијом двеју независно променљивих количина.*

Проширимо проучену теорију и услове Г. Г. Е. Пикара и М. Петровића на парцијалну једначину

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

где $p$ и $q$ означавају парцијалне изводе првог реда $\frac{\partial z}{\partial x}$ односно $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Теорија коју ћемо овде изложити потпуно је независна од теорије карактеристика, супротно испитивањима Е. Гурса, који везује обе теорије.

Међутим теорија карактеристика је изложена разним ограничавањима, као што сам већ то имао прилику да прикажем једним радом [XI].

Према томе постала би испитивања сингуларних интеграла сувише компликована надовезивањем и карактеристика парцијалних једначина.

Претпоставимо да се потпуни интеграл једначине (1) изражава обрасцем

$$z = V(x, y, C_1, C_2), \tag{2}$$

где су $C_1$ и $C_2$ две различите произвољне константе.

Према томе имамо идентичност

$$f\left(x, y, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0, \tag{3}$$

која је задовољена за све вредности независно промењљивих количина $x$, $y$ и констаната $C_1$ и $C_2$. Одавде се добијају нове идентичности диференцијаљењем идентичности (3), наиме:

$$\left.\begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\dfrac{\partial V}{\partial C_i} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_i} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_i} = 0 \\ (i = 1, 2) \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\dfrac{\partial V}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial x} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\dfrac{\partial V}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \end{array}\right\} \tag{5}$$

где заграде означавају резултат извршене замене вредности (2) функције $z$.

Добијене идентичности дозвољавају да се успостави веза између обе дефиниције сингуларних интеграла, наиме: као анвелопе површине, која се одређује потпуним интегралом (2) и као решења Лагранжевих једначина.

Тога ради, претпоставимо, прво, да се сингуларни интеграл једначине (1) одређује системом од три једначине, који се састоји из потпуног интеграла (2) и ових двеју једначина:

$$\frac{\partial V}{\partial C_1} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial C_2} = 0. \tag{6}$$

Имамо право, са теориског гледишта, да увек ставимо потпуни интеграл дате једначине (1) у облик (2) решен по $z$. Међутим, ако бисмо добили потпуни интеграл једначине (1) у облику

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \tag{7}$$

који не бисмо могли, из техничких разлога, решити по $z$, то се иде другим путем овако.

Узимају се било једначине:

$$\frac{\partial F}{\partial C_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial C_2} = 0,$$

било

$$\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = 0,$$

које служе, заједно са интегралом (7), за изналажење траженог сингуларног интеграла.

Вратимо се сада теориском проучавању општег случаја, где се сингуларни интеграл одређује помоћу изводних једначина (6).

Пошто идентичности (4) и (5) постоје за макакве вредности $x$, $y$, $C_1$ и $C_2$, оне ће важити такође за вредности $C_1$ и $C_2$, које се одређују једначинама (6). За дотичне вредности $C_1$ и $C_2$ идентичности (4) и (5) постају:

$$\left.\begin{array}{c}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_i}\right] + \left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_i}\right] = 0, \\ (i = 1, 2),\end{array}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right]=0,\\ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial y}\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right]=0,\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

где угласте заграде обележавају резултат смене наведених вредности $C_1$ и $C_2$.

Проучићемо сада две претпоставке, које се појављују, према томе, да ли су различите обе линеарне једнакости (8) по

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right],\quad \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right],\tag{10}$$

или се своде на једну једнакост. То зависи од вредности детерминанте

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix}\left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial C_1}\right] & \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial C_1}\right]\\[2ex] \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial C_2}\right] & \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial C_2}\right]\end{vmatrix}.$$

Испитујмо прво претпоставку да је

$$\Delta \gtreqless 0.\tag{11}$$

Тада са добије закључак да су оба израза (10) једнака нули, наиме:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]=0,\quad \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]=0.\tag{12}$$

Осим тога једнакости (9), под условом (12), постају:

$$\left.\begin{aligned}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]=0,\\ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial y}\right]=0.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Добијене идентичности (12) и (13) дају се протумачити на следећи начин.

Претпоставимо, да једначине (6) одређују за $C_1$ и $C_2$ вредности:

$$C_1 = \psi_1(x, y), \qquad C_2 = \psi_2(x, y)$$

тако да постоје идентичности:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial C_1}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial V}{\partial C_2}\right] = 0. \tag{14}$$

Ако сингуларни интеграл, који се добија из потпуног интеграла (2), постоји, обележимо са

$$z = \varphi(x, y). \tag{15}$$

Према томе имамо идентичности:

$$\varphi \equiv V(x, y, \psi_1, \psi_2),$$

$$\varphi'_x \equiv \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial V}{\partial C_1}\right]\psi'_{1x} + \left[\frac{\partial V}{\partial C_2}\right]\psi'_{2x},$$

$$\varphi'_y \equiv \left[\frac{\partial V}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial V}{\partial C_1}\right]\psi'_{1y} + \left[\frac{\partial V}{\partial C_2}\right]\psi'_{2y},$$

Последња два обрасца добијају, услед идентичности (14) следећи облик:

$$\varphi'_x \equiv \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right], \qquad \varphi_y' \equiv \left[\frac{\partial V}{\partial y}\right].$$

Благодарећи изведеним обрасцима, идентичности (12) и (13) могу се сада написати другојачије овако:

$$\left.\begin{aligned}
&f_p'(x, y, \varphi, \varphi_x', \varphi_y') = 0, \quad f_q'(x, y, \varphi, \varphi_x', \varphi_y') = 0,\\
&f_x'(x, y, \varphi, \varphi_x', \varphi_y') + f_z'(x, y, \varphi, \varphi_x', \varphi_y')\,\varphi_x' = 0,\\
&f_y'(x, y, \varphi, \varphi_x'\ \varphi_y') + f_z'(x, y, \varphi, \varphi_x', \varphi_y')\,\varphi_y' = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Добијене идентичности (16) показују да *сингуларни интеграл (15), који претставља анвелопу потпуног интеграла (2) задовољава идентички и Лагранжеве једначине:*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial p}=0\,, &&\frac{\partial f}{\partial q}=0\,, \\ &\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0\,, &&\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Овај је закључак добијен под претпоставком (11).

Проучимо сада другу претпоставку, т.ј. да се детерминанта $\Delta$ поништава:

$$\Delta=0\,.$$

Према томе би се могло закључити да изводи (10) нису једнаки нули, т.ј.

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\gtreqless 0\,, \qquad \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\gtreqless 0\,. \tag{18}$$

У овом би случају изгледало да посматрани сингуларни интеграл (15) не задовољава Лагранжеве једначине (17). Међутим је лако доказати, да такав закључак не би био оправдан.

Заиста, под уведеном претпоставком дата једначина (1) не садржи познату функцију $z$ и према томе може имати само интеграле, који се добијају варијацијом једне од две произвољне константе.

Изложена теорија дозвољава успоставити најопштији облик парцијалних једначина, које допуштају сингуларне интеграле. Зато диференцијаљењем горњих образаца $\varphi_x'$ и $\varphi_y'$ добијамо:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi''_{x^2} &\equiv \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right] + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_1}\right] \psi'_{1x} + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_2}\right] \psi'_{2x}\,, \\
\varphi''_{yx} &\equiv \left[\frac{\partial^3 V}{\partial y\, \partial x}\right] + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_1}\right] \psi'_{1x} + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_2}\right] \psi'_{2x}\,, \\
\text{или} \quad \varphi''_{xy} &\equiv \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right] + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_1}\right] \psi'_{1y} + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_2}\right] \psi'_{2y}\,, \\
\varphi''_{y^2} &\equiv \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_1}\right] \psi'_{1y} + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_2}\right] \psi'_{2y}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Претворимо идентичности (9) на тај начин што ћемо сменити вредности извода $\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right]$ и $\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial x}\right]$, у првој идентичности, а $\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right]$ и $\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right]$ у другој идентичности (9) према обрасцима (19). Узмимо при томе у обзир да посматрани изводи другог реда не мењају своје вредности независно од реда диференцијаљења по променљивим количинама $x$, $y$, $C_1$ и $C_2$.

На овај начин претворене идентичности (9) могу се написати овако:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\varphi''_{x^2} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\varphi''_{yx} -$$
$$-\left\{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_1}\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_1}\right]\right\}\psi'_{1x} -$$
$$-\left\{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_2}\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_2}\right]\right\}\psi'_{2x} = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial y}\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\varphi''_{xy} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\varphi''_{y^2} -$$
$$-\left\{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_1}\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_1}\right]\right\}\psi'_{1y} -$$
$$+\left\{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial C_2}\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial C_2}\right]\right\}\psi'_{2y} = 0.$$

Међутим чланови у другим редовима написаних идентичности поништавају се идентички, према идентичностима (8). Благодарећи овоме тражене идентичности постају:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\varphi''_{x^2}+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\varphi''_{yx}=0.$$

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial y}\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]\varphi''_{xy}+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\varphi''_{y^2}=0.$$

Одавде се изводи закључак да посматрани сингуларни интеграл (15) задовољава систем од два следећа услова:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\varphi''_{x^2}\frac{\partial f}{\partial p}+\varphi''_{xy}\frac{\partial f}{\partial q}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\varphi''_{xy}\frac{\partial f}{\partial p}+\varphi''_{y^2}\frac{\partial f}{\partial q}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

где је $f$ функција од пет променљивих количина $x$, $y$, $z$, $p$ и $q$, које се овде сматрају као независне променљиве.

Поставимо сада питање да се пронађе општи облик функција $f$, које испуњавају услове (20).

Одмах се види да је општи интеграл посебно посматране прве једначине (20):

$$f=z-\varphi-x(p-\varphi_x')-\Phi(y,p-\varphi_x',q-\varphi_y'),$$

где је $\Phi$ произвољна функција трију променљивих количина

$$y,\quad p-\varphi_x',\quad q-\varphi_y'.$$

Потражимо сада за $\Phi$ такав образац да нађена функција $f$ задовољи и другу једначину (20). Ради тога уведимо, уместо $f$, нову непознату функцију $\Phi$, која је одређена последњом једначином.

Обрасци трансформације постају

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\varphi_y'+x\varphi''_{xy}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\varphi''_{xy}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\varphi''_{y^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=1, \qquad \frac{\partial f}{\partial p}=-x-\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial q}=-\frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

где су уведене ознаке

$$u \equiv p-\varphi_x', \qquad v \equiv q-\varphi_y'.$$

Према томе друга једначина (20) добија облик:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=v$$

а функција $\Phi$ постаје

$$\Phi = vy + \Psi(u, v),$$

где је $\Psi$ нова произвољна функција од $u$ и $v$.

Благодарећи извршеном интеграљењу, тражена функција $f$ изражава се овако:

$$f = z-\varphi-x(p-\varphi_x')-y(q-\varphi_y')-\Psi(p-\varphi_x', q-\varphi_y').$$

Добијени Лагражем резултат добија се одавде под посебном претпоставком, да је

$$\varphi \equiv 0.$$

Лако је увидети да потпуни интеграл одговарајуће парцијалне једначине

$$f=0, \tag{21}$$

са непознатом функцијом $z$ двају независно променљивих количина $x$ и $y$, постаје

$$z=\varphi+C_1x+C_2y+\Psi(C_1, C_2), \tag{22}$$

где $C_1$ и $C_2$ означавају две произвољне константе.

Одавде се добија сингуларни интеграл парцијалне једначине (21) као анвелопа потпуног интеграла (22) у облику скупа трију следећих једначина: једначине (22) и њене две изводне једначине по $C_1$ и по $C_2$, наиме:

$$x + \frac{\partial \Psi}{\partial C_1} = 0, \qquad y + \frac{\partial \Psi}{\partial C_2} = 0, \tag{23}$$

Међутим Лагранжеве изводне једначине (17) гласе за парцијалну једначину (21):

$$x + \frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0, \qquad y + \frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0, \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi''_{x^2}\left(x + \frac{\partial \Psi}{\partial u}\right) + \varphi''_{xy}\left(y + \frac{\partial \Psi}{\partial v}\right) = 0, \\ \varphi''_{xy}\left(x + \frac{\partial \Psi}{\partial u}\right) + \varphi''_{y^2}\left(y + \frac{\partial \Psi}{\partial v}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Обе једначине (25) уништавају се идентички на основу једначина (24). Према томе сингуларни интеграл добија се из Лагранжевих једначина (21), (24) и (25) у следећем облику:

$$\left.\begin{aligned} & z = \varphi + xu + yv + \Psi(u, v), \\ & x + \frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0, \quad y = \frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где $u$ и $v$ обележавају променљиве помоћне параметре.

На овај се начин види да сингуларни интеграл, који се одређује као анвелопа потпуног интеграла, задовољава и изводне Лагранжеве једначине.

Проучимо сада обрнут став, да ли решења Лагранжевих изводних једначина (17) одређују анвелопу потпуног интеграла дате парцијалне једначине (1).

Претпоставимо дакле да су једначине (1) и (17) сагласне и да одређују вредности $z$, $p$ и $q$, које задовољавају услове:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Вратимо се сада на идентичности (4) и (5), које важе за макакве вредности количина $x$, $y$, $C_1$ и $C_2$.

Према томе ће идентичности (4) и (5) такође постојати и за вредности $C_1$ и $C_2$, које се одређују помоћу интеграла (2) и њихових изводних једначина првог реда по $x$ и по $y$, т.ј. за оне вредности $C_1$ и $C_2$ чијом се елиминацијом добија из потпуног интеграла посматрана парцијална једначина (1). Али за ове вредности $C_1$ и $C_2$ идентичности (4) и (5) постају:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial z}\left\{\frac{\partial V}{\partial C_i}\right\}+\frac{\partial f}{\partial p}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial C_i}\right\}+\frac{\partial f}{\partial q}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial C_i}\right\}=0, \\
&\qquad\qquad (i=1,2) \\
&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right\}+\frac{\partial f}{\partial q}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\right\}=0, \\
&\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right\}+\frac{\partial f}{\partial q}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right\}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где се пређашње заграде губе, због извршене инверзне замене, а уведене нове заграде $\{\ldots\}$ обележавају резултат извршене замене.

Ако уврстимо сада у једнакости (27) решење Лагражевих једначина (1) и (17), онда једнакости (27) постају

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C_i}\right\}\right]=0, \quad (i=1,2), \tag{28}$$

при чему се последње две једнакости (27) поништавају, а уведене угласте заграде обележавају извршену смену.

Леве стране оба добијена услова (28) претстављају производе двају чинитеља. Према томе је неопходно проучити три различита случаја, који се могу десити.

Посматрајмо прву претпоставку:

$$\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C_i}\right\}\right]=0, \quad (i=1,2), \tag{29}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right] \gtrless 0. \tag{30}$$

Обрасци (29) показују да, за променљиву вредност параметра $C$, посматрано решење Лагранжевих једначина претставља сингуларни интеграл парцијалне једначине (1), јер испуњава услове потребне за одређивање анвелопе потпуног интеграла. За то је довољан услов (30), који генералише Пикаров услов, из теорије обичних диференцијалних једначина првог реда.

Изведимо сада из једнакости (28) другу претпоставку:

$$\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C_i}\right\}\right] \gtrless 0, \quad (i = 1, 2), \tag{31}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0. \tag{32}$$

Обрасци (31) утврђују да решење, које је добијено из Лагранжевих једначина не може да буде анвелопа потпуног интеграла парцијалне једначине (1), него само партикуларно решење дате једначине. За то је неопходно да буде испуњен услов (32), који генералише критеријум М. Петровића за обичне диференцијалне једначине првог реда.

Најзад узмимо у обзир трећу могућу претпоставку, т.ј. да се оба чинитеља левих страна једнакости (28) поништавају истовремено, наиме:

$$\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C_i}\right\}\right] = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{33}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0. \tag{34}$$

Одговарајуће решење Лагранжевих једначина може се протумачити на два различита начина. Може се десити да је заиста добијено решење сингуларни интеграл, при чему, како то показује једнакост (34), услов (30), пошто није неопходан, није ни испуњен. Може се десити и други случај да нађено решење Лагранжевих једначина претставља истовремено и сингуларно и партикуларно решење дате парцијалне једначине (1).

Наведимо неколико примера.

Ајлерова једначина извијених цилиндара

$$z^2(1+p^2+q^2)=a^2$$

има сингуларно решење

$$z=\pm a,$$

које се добија из Лагранжевих једначина.

Помоћу Лагранжевих једначина добија се за једначину

$$pq-z=0$$

сингуларно решење

$$z=0,$$

а за једначину

$$p^2+q^2=z-a$$

сингуларно решење

$$z=a.$$

Да су ова три наведена решења сингуларна, то се одмах види на основу генералисаног Пикаровог услова (30) и вредности одговарајућих потпуних интеграла.

Напротив решење Лагранжевих једначина, која одговарају парцијалним једначинама:

$$pq-z^2=0, \qquad p^2+q^2=(z-a)^2,$$

па се одређују обрасцима

$$z=0$$

односно

$$z=a,$$

претстављају партикуларна решења. Заиста, потпуни интеграли посматраних једначина имају облик:

$$z = C_1 e^{Cx + \frac{1}{C} y},$$

односно

$$z = a + C_1 e^{Cx + \sqrt{1 - C^2} y}.$$

Према томе наведена решења одговарају партикуларним вредностима 0 произвољне константе $C_1$. У оба примера нађена решења задовољавају генералисани услов М. Петровића (32).

Проучимо још два класична примера наведена у предавањима Е. Гурса [XII]. Узмимо Монжеову једначину

$$(px - z)^2 - q^2 (x^2 + z^2 - 1) = 0, \tag{35}$$

која се своди на линеарну једначину. Према упутствима Лагранжа, задржаћемо једначину у написаном облику. Изводне Лагранжеве једначине дају решење

$$z = ax, \tag{36}$$

где је $a$ произвољна константа. Ово решење поништава парцијални извод по $z$ леве стране једначине. Према томе за одређивање природе нађеног решења неопходно је испитати потпуни интеграл дате једначине:

$$\left.\begin{aligned} z &= Cx(y \mp R \pm arctgR) + C_1 x, \\ R &\equiv \sqrt{x^2 + z^2 - 1}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где су $C$ и $C_1$ две произвољне константе. Одмах се види да решење (36) може се добити из обрасца (37) на два различита начина. Прво, интеграл (36) претставља партикуларно решење, које одговара партикуларној вредности потпуног интеграла (37) за $C = 0$.

Са друге стране, образац (36) може се сматрати као *семи сингуларни* интеграл, који се добија варијацијом једине константе $C$ за њену функционалну вредност:

$$C = \frac{C'}{y \mp R \pm arctgR},$$

где је $C'$ стална количина, при чему

$$C' + C_1 \equiv a.$$

Е. Гурса тумачи решење (36) као сингуларни интеграл, који он назива сингуларним интегралом прве категорије, на основу геометриских расматрања.

Ако узмемо једначину (35) у линеарном облику

$$px - z = \pm q \sqrt{x^2 + z^2 - 1}, \tag{38}$$

онда је генералисани Пикаров услов испуњен за решење (36). Према томе решење (36) претставља истовремено и *семи-сингуларни* и *партикуларни* интеграл.

За последњи пример узмимо једначину (сводљиву на линеарну)

$$(px + qy)^2 = (p^2 + q^2)(1 - z^2), \tag{39}$$

чија два решења Е. Гурса наглашава, на име: прво,

$$z = h, \tag{40}$$

и друго,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{41}$$

Прво решење испуњава услов М. Петровића, а друго задовољава Пикаров услов.

Према томе, друго решење (41) претставља сингуларни интеграл. За испитивање природе првог решења (40) узмимо потпуни интеграл дате парцијалне једначине (39), наиме:

$$F \equiv z - C\left(arctg\frac{y}{x} - arcsin\sqrt{\frac{1-z^2}{x^2+y^2}}\right) - C_1 = 0, \qquad (42)$$

где су $C$ и $C_1$ две произвољне константе. Одавде имамо да је

$$\frac{\partial F}{\partial z} \equiv 1 - \frac{Cz}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}.$$

Добијени парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ постаје бесконачан и за решење $\sqrt{1-z^2} = 0$, и за $\sqrt{x^2+y^2+z^2-1} = 0$.

Међутим прво решење, исто као и решење (40), добија се из потпуног интеграла (42) за партикуларне вредности констаната:

$$C = 0, \qquad C_1 = \pm 1,$$

односно

$$C = 0, \qquad C_1 = h.$$

Према томе су ова оба решења партикуларна, али истовремено и сингуларна. Заиста решење (40) добија се такође варијацијом једне константе $C$ у интегралу (42) за њену функционалну вредност:

$$C = \frac{C'}{arctg\dfrac{y}{x} - arcsin\sqrt{\dfrac{1-z^2}{x^2+y^2}}},$$

при чему је $C'$ стална количина, а

$$C' + C_1 \equiv h.$$

Међутим решење (41) не може се добити из потпуног интеграла (42) за сталне вредности $C$ и $C_1$, и зато претставља само *сингуларни* интеграл.

Линеарне парцијалне једначине, које имају особине сличне са тек посматраним једначинама, биле су потанко проучаване од многих чувених научника, чија имена наводи г. Н. Т. Н. Piaggio, у свом значајном раду [XIII].

Овде изложена теорија сингуларних интеграла примењује се такође и на поменуте једначине. Ове имају особину, да њихова решења падају у очи, благодарећи засебном облику једначина и одговарају сингуларитетима посматраних једначина. Н. Салтиков је показао [XIV] да општи интеграл не може обухватити одговарајућа решења. Међутим лако је увидети, да се иста решења добијају из потпуног интеграла варијацијом произвољних константата.

Наведимо за то једначине *J. Cockle*-а и *G. Chrystal*-а.

Прва једначина

$$(x+y+z)\,p+(x+y)\,q+x+y=0$$

има потпуни интеграл

$$F\equiv\frac{z}{x+y+z}+\log(x+y+z)-C(y+z)-C_1=0\,,$$

где су $C$ и $C_1$ две произвољне константе. Парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ постаје бесконачан за $z=-x-y$. Добијена вредност $z$ претставља сингуларни интеграл *Cockle*-ове једначине, који се не може добити из потпуног интеграла за партикуларне сталне вредности константата $C$ и $C_1$.

Друга једначина

$$(1+\sqrt{z-x-y})\,p+q=2 \tag{43}$$

има очевидно решење $z=x+y$. Ово решење добија се и из Лагранжевих једначина, које одговарају *Chrystal*-овој једначини ослобођеној од знака другог корена, наиме:

$$(z-x-y)\,p^2-(p+q-2)=0\,.$$

Генералисани Пикаров услов је испуњен за њено решење $z=x+y$, које према томе претставља сингуларни интеграл.

Најзад, узмемо ли потпуни интеграл једначине (43)

$$F \equiv y + 2\sqrt{z - x - y} - C(z - 2y) - C_1 = 0\,, \tag{44}$$

где су $C$ и $C_1$ две произвољне константе, онда парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ постаје бесконачан за $z = x + y$. Осим тога добијено решење не може се добити за партикуларне сталне вредности $C$ и $C_1$ потпуног интеграла (44). Одавде такође излази наглашени резултат.

## Глава III

*Парцијалне једначине првог реда са непознатом функцијом више независно променљивих количина*

Узмимо парцијалну једначину

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0\,, \tag{1}$$

где $p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ означавају парцијалне изводе првог реда:

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Претпоставимо да се потпуни интеграл дате једначине (1) изражава обрасцем

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n)\,, \tag{2}$$

где су $C_1, C_2, \ldots, C_n$ различите произвољне константе.

Према томе имамо идентичност

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0\,, \tag{3}$$

која је задовољена за све вредности независно променљивих количина $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и констаната $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Одавде се добијају нове идентичности диференцијаљењем идентичности (3), наиме:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial C_i}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial C_i}=0,\\ (i=1,\,2,\,\ldots,\,n),\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial x_i}=0,\\ (i=1,\,2,\,\ldots,\,n).\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Добијене идентичности дозвољавају да се успостави веза између обе дефиниције сингуларних интеграла наиме: као анвелопе површине, у $n+1$ димензионалном простору, која се одређује потпуним интегралом (2) и као решења Лагранжевих изводних једначина.

Тога ради, претставимо прво, да се сингуларни интеграл једначине (1) одређује системом $n+1$ једначина, који се састоји из потпуног интеграла (2) и ових $n$ једначина:

$$\frac{\partial V}{\partial C_i}=0,\quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n).\tag{6}$$

Увек имамо право, са теориског гледишта, да ставимо потпуни интеграл дате једначине (1) у облик (2) — решен по $z$. Међутим, ако се добија потпуни интеграл једначине (1) у облику:

$$F(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,z,\,C_1,\,C_2,\,\ldots,\,C_n)=0,\tag{7}$$

који није, из техничких разлога, решљив по $z$, то се иде другим путем овако.

Узимају се било једначине:

$$\frac{\partial F}{\partial C_i}=0,\qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

било

$$\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = 0 ,$$

које служе, заједно са интегралом (7), за изналажење траженог сингуларног интеграла.

Вратимо се сада теориском проучавању општег случаја, где се сингуларни интеграл одређује помоћу изводних једначина (6).

Пошто идентичности (4) и (5) постоје за ма какве вредности $x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$ оне ће важити такође за вредности $C_1, C_2, \ldots, C_n$, које се одређују једначинама (6). За дотичне вредности $C_1, C_2, \ldots, C_n$ идентичности (4) и (5) постају:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\right] \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \, \partial C_i}\right] = 0 , \\ &(i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}\right] + \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\right] \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \, \partial x_i}\right] = 0 , \\ &(i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где угласте заграде обележавају резултат смене наведених вредности $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Проучимо сада две претпоставке које се појављују, према томе, да ли су $n$ линеарних једнакости (8) различите по

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\right], \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

или се своде на $n - 1$ једнакост. То зависи од вредности детерминанте

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial C_1}\right] & \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial C_1}\right] & \dots & \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial C_1}\right] \\ \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial C_2}\right] & \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial C_2}\right] & \dots & \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial C_2}\right] \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial C_n}\right] & \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial C_n}\right] & \dots & \left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial C_n}\right] \end{vmatrix}$$

Испитајмо прво претпоставку да је

$$\Delta \gtreqless 0. \tag{11}$$

Тада се добија закључак да су $n$ израза (10) једнаки нули, наиме:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\right] = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{12}$$

Осим тога једнакости (9), под условима (12), постају:

$$\left.\begin{array}{c} \left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right] + \left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\dfrac{\partial V}{\partial x_i}\right] = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{array}\right\} \tag{13}$$

Добијене идентичности (12) и (13) дају се протумачити на следећи начин.

Претпоставимо, да једначине (6) одређују за $C_1, C_2, \dots, C_n$ вредности:

$$C_i = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

тако да постоје идентичности:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial C_i}\right] = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{14}$$

Ако постоји сингуларни интеграл, који се добија из потпуног интеграла (2), обележимо га са

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{15}$$

Према томе имамо идентичности:

$$\varphi \equiv V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \varphi_n)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \equiv \left[\frac{\partial V}{\partial x_k}\right] + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial V}{\partial C_i}\right] \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Последњих $n$ образаца добијају, услед идентичности (14), следећи облик:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \equiv \left[\frac{\partial V}{\partial x_k}\right], \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Благодарећи изведеним обрасцима, идентичности (12) и (13) могу се сада другојачије написати овако:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial p_k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0, \\ &\quad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Добијене идентичности (16) показују да сингуларни интеграл (15), који претставља анвелопу потпуног интеграла (2), задовољава идентички и Лагранжеве једначине:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial p_k} = 0, \\ & \qquad\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \\ &\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial z} p_k = 0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Проучимо сада другу претпоставку, т.ј. да се поништава детерминанта $\Delta$:

$$\Delta = 0 .$$

Према томе би се могло закључити да нису једнаки нули изводи (10) т.ј.

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\right] \lesseqgtr 0 , \quad (k = 1, 2, \ldots, n) . \tag{18}$$

У овом би случају изгледало да посматрани интеграл (15) не задовољава Лагранжеве једначине (17). Међутим је лако доказати да такав закључак не би био оправдан.

Заиста, под уведеном претпоставком дата једначина (1) не садржи непознату функцију $z$ и према томе може имати само *семисингуларне* интеграле.

Изложена теорија дозвољава успоставити најопштији облик једначина, које допуштају сингуларне интеграле. Зато диференцијаљењем горњих образаца добијамо:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} &\equiv \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}\right] + \sum_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial C_r}\right]\frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} , \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} &\equiv \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i}\right] + \sum_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial C_r}\right]\frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} , \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} &\equiv \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}\right] + \sum_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial C_r}\right]\frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} , \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} &\equiv \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2}\right] + \sum_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial C_r}\right]\frac{\partial \psi_r}{\partial x_k} .
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Претворимо идентичности (9) на тај начин што ћемо сменити, према обрасцима (19), вредности извода

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right] , \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_1}\right]$$

у идентичности (9), која одговара индексу $i$. Узмимо при томе у обзир да посматрани изводи другог реда не мењају своје вредности независно од реда диференцијаљења по промењљивим количинама $x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$.

На овај начин претворене идентичности (9) могу се написати овако:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right]+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\right]\left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i}-\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial C_r}\right]\frac{\partial \psi_r}{\partial x_i}\right\}=0,$$

$$(i=1, 2, \ldots, n),$$

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}\right]+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\right]\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i}-$$

$$-\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial \psi_r}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial C_r}\right]=0,$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Међутим чланови у другим редовима написаних идентичности поништавају се идентички, према идентичностима (8).

Благодарећи овоме, тражене идентичности постају:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right]+\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}\right]+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\right]\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i}=0,$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Одавде се изводи закључак да, под постављеном претпоставком, посматрани сингуларни интеграл задовољава систем $n$ парцијалних једначина првог реда:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial z}p_i+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_k}=0,\\&(i=1, 2, \ldots, n),\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

где је $f$ функција $2n+1$ променљивих количина

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

које се овде сматрају као независно променљиве.

Поставимо сад питање да се пронађе општи облик функција $f$ које испуњавају услове (20).

Одмах се види да је систем по $f$, линеарних једначина (20), Јакобијев и да се његови различити интеграли одређују интеграљењем система диференцијалних једначина у тоталним диференцијалима:

$$dz = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i,$$

$$dp_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} dx_i,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Одговарајући интеграли су очевидни:

$$p_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = C_k', \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$z - \varphi - \sum_{i=1}^{n} \left( p_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) x_i = C'_{n+1},$$

где су $C_1', C_2', \ldots, C_n', C'_{n+1}$ произвољне константе.

Благодарећи извршеном интеграљењу, тражена функција $f$ изражава се овако:

$$f = z - \varphi - \sum_{i=1}^{n} \left( p_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) x_i - \Psi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

где је $\Psi$ произвољна функција од $u_1, u_2, \ldots, u_n$, при чему ови параметри имају вредности

$$u_i \equiv p_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Лако је увидети да се потпуни интеграл парцијалне једначине

$$f = 0, \tag{21}$$

са непознатом функцијом $z$ од $n$ независно промењљивих количина $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $p_i$ обележавају парцијалне изводе првог реда $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, изражава овако:

$$z = \varphi + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i + \Psi(C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{22}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ означавају произвољне константе.

Одавде се добије сингуларни интеграл парцијалне једначине (21) као анвелопа потпуног интеграла (22), у облику скупа $n+1$ следећих једначина: потпуног интеграла (22) и његових $n$ парцијалних извода првог реда по $C_1, C_2, \ldots, C_n$, наиме:

$$x_i + \frac{\partial \Psi}{\partial C_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Међутим Лагранжеве изводне једначине (17) гласе за парцијалну једначину (21):

$$x_i + \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\left(x_i + \frac{\partial \Psi}{\partial u_i}\right) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Једначине (25) уништавају се идентички на основу једначина (24). Према томе сингуларни интеграл добија се из Лагранжевих једначина у следећем облику:

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi + \sum_{i=1}^{n} x_i u_i + \Psi(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ x_i &+ \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где су $u_i$ ознаке промењљивих помоћних параметара.

На овај се начин види, да сингуларни интеграл, који се одређује као анвелопа потпуног интеграла, задовољава такође изводне Лагранжеве једначине.

Проучимо сада обрнути став, да решење Лагранжевих изводних једначина (17) одређује анвелопу потпуног интеграла дате парцијалне једначине (1).

Претпоставимо дакле да су једначине (1) и (17) сагласне и да одређују вредности $z, p_1, p_2, \ldots, p_n$, које испуњавају услове

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Вратимо се сада на идентичности (4) и (5), које важе за ма какве вредности количина $x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Према томе ће идентичности (4) и (5) такође постојати и за вредности $C_1, C_2, \ldots, C_n$, које се одређују помоћу интеграла (2) и његових изводних једначина првог реда по $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Међутим елиминацијом ових вредности $C_1$, $C_2, \ldots, C_n$ посматрана диференцијална једначина (1) добија се из потпуног интеграла. Али за ове вредности $C_1, C_2, \ldots$, $C_n$ идентичности (4) и (5) постају:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial z}\left\{\frac{\partial V}{\partial C_i}\right\} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_k}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial C_i}\right\} = 0, \\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\
&\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial z} p_i + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_k}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i}\right\} = 0, \\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где се пређашње заграде губе, због извршене инверзне замене, а уведене нове велике заграде $\{\ldots\}$ обележавају резултат извршене замене.

Ако уврстимо сада у једнакости (27) решење Лагранжевих једначина (1) и (17), онда једнакости (27) постају

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C_i}\right\}\right] = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

при чему се $n$ последњих једначина (27) поништавају, а уведене угласте заграде обележавају извршену смену.

Леве стране добијених услова (28) претстављају производе двају чинитеља. Према томе проучимо три различита случаја, који се могу десити.

Посматрајмо прву претпоставку:

$$\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C_i}\right\}\right] = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{29}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right] \lesseqgtr 0. \tag{30}$$

Обрасци (29) показују, ако параметри $C_i$ имају функционалне вредности, да посматрано решење Лагранжевих једначина (17) претставља сингуларни интеграл парцијалне једначине (1), јер испуњава услове потребне за одређивање анвелопе потпуног интеграла. За то је довољан услов (30), који се поклапа са Пикаровим условом, из теорије обичних диференцијалних једначина првог реда.

Изведимо сада из једнакости (28) другу претпоставку:

$$\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C_i}\right\}\right] \lesseqgtr 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{31}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0, \tag{32}$$

Обрасци (31) утврђују да решење, које је добијено из Лагранжевих једначина, не може да буде анвелопа потпуног интеграла парцијалне једначине (1), него је само партикуларно решење дате једначине. За то је неопходно да буде испуњен услов (52), који се поклапа са критеријумом М. Петровића за обичне диференцијалне једначине првог реда.

Најзад, узмимо у обзир трећу могућу претпоставку, т.ј. да се оба чинитеља левих страна једнакости (28) поништавају истовремено, наиме:

$$\left[\left\{\frac{\partial V}{\partial C_i}\right\}\right] = 0\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{33}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0, \tag{34}$$

Одговарајуће решење Лагранжевих једначина може се протумачити на два различита начина. Може се десити да је добијено решење заиста сингуларни интеграл, при чему, како то показује једнакост (34), услов (30), пошто није неопходан није ни испуњен.

Може се десити и други случај да нађено решење Лагранжевих једначина претставља истовремено и сингуларно, и партикуларно решење дате парцијалне једначине (1).

## БИБЛИОГРАФСКИ ПОДАЦИ

1. Lagrange. — Oeuvres Complètes t. IV. p. 5 et p. 585. Sur les intégrales particulières des équations différentielles.

Lagrange. — *Leçons sur le calcul des Fonctions*, Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée par l'Auteur. Oeuvres Complètes t. X. Leçons quatorsième, quinzième, seizième et dix-septième.

2. G. Darboux. — Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques. t. IV, 1873, p. 158.

3. E. Picard. — Traité d'Analyse, t. III, 3 éd. p. 45.

4. M. Petrovitch. — Contribution à la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. Math. An. Bd. 50, 1898, p. 103.

5. G. Darboux. — Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. t. XXVII. №2.

E. Gau. — Sur les intégrales singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre (*Bul. des Sciences mathématiques- 2e Série.* t. L. octobre 1926).

6. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) Bd. 112, S. 205.

7. T. L. Biberbach. — Theorie der Differentialgleichungen, dritte Auflage, S. 123.

8. T. Cristobal de Losada y Puga. — Sobre las envoluentes de una familia de curvas planas dependiantes da un parametre, y sobre las solutiones singulares de las ecuaciones diferenciales de primen orden (Revista de Cientias; Lima, Marzo de 1938 p. 58).

9. P. Painlevé. — *Encyclopédie des Sciences Mathématiques.* Éd, Française T. II, Vol. 3 Façe. 1. p. 30.

10. H. T. H. Piaggio. — An Elementary Treatise on Differential Equations. London 1937. p. 75.

11. Н. Салтиков. — Испитивање интеграла С. Лиа парцијалних једначина првог реда с једном непознатом функцијом. Глас Срп. Кр. Академије CLXXVIII. Први разред 88. А. Мат. Науке. Београд 1939, стр. 259.

N. Saltykow. — Etude sur les intégrales de S. Lie des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue. Bulletin de l'Académie des Sciences Mathématiques et Naturelles A. Sciences Math. et Phys № 5. Belgrade 1939, p. 121.

12. E. Goursat. — Leçons sur l'Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Deuxième édition. Paris 1921. p.p. 247, 248.

13. H. T. H. Piaggio. — Special integrals of Lagrange's linear partial Differential Equation (*Journal of London Mathematical Society*. Vol. 13, 1938 p. 264).

14. N. Saltykow. — Etude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues *(Journ. de Math. pures et appliquées, 5 série, t. 3. p. 423. Paris 1897).*

N. Saltykow. — Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction. *(Nouvelles Annales de Mathématiques 3e série, t. 18. Paris, 1899, p. 534),*