СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXIII

ПРВИ РАЗРЕД

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

85

9

Н. САЛТИКОВ

Структура нормалног система парцијалних једначина првога реда, помоћу интеграла карактеристика

БЕОГРАД 1936

Штампарија „СЛОВО“ Немањина 20

Цена 3 дин.

Структура нормалног система парцијалних једначина првога реда, помоћу интеграла карактеристика

Од

Н. САЛТИКОВА.

СТРУКТУРА НОРМАЛНОГ СИСТЕМА ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГА РЕДА ПОМОЋУ ИНТЕГРАЛА КАРАКТЕРИСТИКА

Од

Н. САЛТИКОВА.

(Приказано на скупу Академије природних наука 4 маја 1936 г.).

Увод.

Поводом расправе Г. Д. Михњевића: „Састављење нормалног система парцијалних једначина првог реда, с једном непознатом функцијом, помоћу датих интеграла карактеристика" [1]), где је аутор покренуо важна питања, потребно је учинити следећу примедбу, имајући у виду да се попуне пишчеви резултати.

Посматрајмо, слично с Г. Д. Михњевићем, само једначине, које не зависе јавно од непознате функције и чији број карактеристичних функција не може никад прелазити број независно промењљивих количина.

За ове једначине доказаћемо два следећа резултата.

Прво, постављени од Г. Д. Михњевића проблем увек је решљив у случају, где се дати интеграли карактеристика налазе у инволуцији. Тражено се решење одма добије на основу теорије Н. Салтикова канонских интеграла система линеарних једначина Јакобија [2])

Друго, ако дати интеграли буду чинили функционалну

---

[1]) Примљена је за штампање на скупу Академије природних наука 4 маја 1936 г.

[2]) *N. Saltykow.* — Méthodes clasiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier-Villars et C-ie 1931. Chapitre IV.

групу, за број m тражених карактеристичних функција постоји следеће ограничење:

$$m \leq n - \rho,$$

где је n број независно промењљивих количина, а ρ означава половину разлике између реда дате функционалне групе и броја њезиних изузетних функција[3]).

Наведена су ограничења једина за могућност решења Михњевићевог проблема.

[3]) *N. Saltykow.* — Méthodes modernes d'intégration des équations aux dér ivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue. Paris. Gauthie r-Villars et C-ie. 1935. Chapitre III.

Глава I

Неопходни и довољни услови.

Прво питање које се понавља, то је да се генералише основна теорема [4]), коју је Г. Д. Михњевић опширно проучио у свом првом раду, у гласу Академије за 1935 годину: „Структура парцијалних једначина с датим интегралима карактеристика“, поводом образовања само једне парцијалне једначине.

Заиста, услов да дате функције морају чинити функционалну групу, јесте очевидно такође неопходан и за формирање нормалног система парцијалних једначина првога реда с датим интегралима карактеристика.

Узмимо за то систем неколико различитих функција:

$$f_1, f_2, \ldots, f_r \tag{1}$$

од $2n$ канонских променљивих количина

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{2}$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \tag{3}$$

где је r ма који број, који може бити већи или мањи од n.

Претпоставимо да се тражи нормални систем m парцијалних једначина првога реда с једном непознатом функцијом z од независно променљивих количина (2), наиме:

$$\left.\begin{array}{c} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0, \\ i=1, 2, \ldots, m, \end{array}\right\} \tag{4}$$

[4]) Структура парцијалних једначина са датим интегралима карактеристика (Глас Српске Краљевске Академије CLXXV, први разред 81 А Матем. Науке стр. 242).

где су променљиве количине (3) парцијални изводи односно:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Пошто дате функције (1) морају да буду интеграли карактеристика система (4), то значи да оне буду решења нормалног система парцијалних линеарних једначина првога реда с једном непознатом функцијом f, и то:

$$\left.\begin{array}{c}(F_i, f)=0 \\ i=1, 2, \ldots, m,\end{array}\right\} \qquad (5)$$

где су уведене заграде Поасона.

Према томе, заграде Поасона (f_k, f_s), за сваки пар низа функција (1), претстављају исто једно решење линеарног система (5).

Због тога услов, да дате функције (1) морају чинити функционалну групу, јесте очевидно неопходан.

Полазећи од овог закључка, чим будемо испитивали за формирање система (4) ма који систем датих функција (1), увек треба претпоставити да оне чине једну функционалну групу, чији ред r, по себи се разуме, мора да буде свакако мањи од броја $2n$.

Наведени неопходни услов за одређивање m карактеристичних функција F_i јесте, у исто време, и довољан, али само у границама, које је лако поставити на следећи начин.

Заиста, из једначина (5) излази, обрнуто, да тражене функције F_i јесу решења једног система парцијалних линеарних једначина с једном непознатом функцијом F:

$$\left.\begin{array}{c}(f_k, F)=0, \\ k=1, 2, \ldots, r.\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Сем тога су тражене функције F_i решења овог система (6), која се налазе међу собом у инволуцији.

Пошто функције f_k чине једну функционалну групу, систем линеарних једначина (6) јесте потпун и према томе интеграбилан, а број његових ма којих различитих решења јесте $2n-r$.

Услед тога, за постојање тражених m интеграла система (6), мора да постоји услов:

$$n \geqq m \leqq 2n - r, \tag{7}$$

где прва неједнакост излази из горе наведеног става да број карактеристичних функција не може никад прелазити број независно променљивих количина [5]).

Ове су неједнакости (7) увек задовољене у случају једне тражене карактеристичке функције. Међутим, чим се тражи нормални систем m парцијалних једначина (4), уместо само једне једначине, ограничења (7) долазе на ред услед природе посматраних једначина.

Проучићемо сад два различита случаја, који одговарају претпоставкама да је број r датих функција мањи од n или већи од овог броја.

Ако број r буде мањи од n, имаћемо:

$$2n - r \equiv n + n - r \geqq n,$$

што значи да се обе границе (7) поклапају с очевидним ограничењем, које је горе наведено [5]).

У другом случају уведимо претпоставку:

$$r = n + \alpha, \qquad (\alpha < n).$$

Одавде излази закључак:

$$2n - r \equiv n - \alpha.$$

Пошто је α позитиван број, то обе неједнакости (7) одређују само једно ограничење, наиме:

$$m \leqq n - \alpha.$$

Што се тиче система решења (1), која би се налазила у инволуцији, то ћемо ово питање расветлити накнадно, јер ћемо проучити следећа два случаја засебно: прво, кад се дате функције (1) налазе у инволуцији, и друго, кад оне чине ма коју функционалну групу.

---

[5]) *Д. Михњевић.* — Ђ. [4]) стр. 234, § 2.

Глава II.

Инволуциона група функција.

Претпоставимо, да се дате функције

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, \qquad r \leq n, \tag{1}$$

налазе у инволуцији.

Тада једначине (6) пређашње главе претстављају нормални систем следећих једначина Јакобија:

$$\left.\begin{array}{c}(f_k, F)=0,\\ k=1, 2, \ldots, r.\end{array}\right\} \tag{2}$$

Потпун систем $2n-r$ различитих решења овог нормалног система (2) лако се доводи на следећи *канонски облик*[6]) решења:

$$\begin{array}{l} f_1, f_2, \ldots, f_r, \ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-r}, \end{array}$$

која задовољавају идентички следеће канонске услове:

$$(f_k, \varphi_i) \equiv 0, \qquad (f_k, \psi_i) \equiv 0,$$

$$k=1, 2, \ldots, r; \quad i=1, 2, \ldots, n-r,$$

$$(\varphi_s, \varphi_i) \equiv 0, \qquad (\psi_s, \psi_i) \equiv 0,$$

$$s, \ i=1, 2, \ldots, n-r,$$

$$(\varphi_s, \psi_i) \equiv \begin{cases} 0, & s \gtrless i, \\ 1, & s = i. \end{cases}$$

---

[6]) *N. Saltykow* — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier-Villars et C-ie 1931. p. 37, n⁰ 20.

Одавде се добијају, за систем линеарних једначина (2), различити системи по n решења у инволуцији.

Општи облик тих решења може се написати овако:

$$f_1,\ f_2, \ldots, f_r,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots, \varphi_l,\ \psi_{l+1},\ \psi_{l+2}, \ldots, \psi_{n-r}, \tag{3}$$

где је l ма који број између 1 и $n-r$.

По себи се разуме да сваки систем m произвољних функција Ψ_i из образаца (3):

$$\Psi_i\,(f_1,\ f_2, \ldots, f_r,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots, \varphi_l,\ \psi_{l+1}, \ldots, \psi_{n-r}),$$

$$i=1,\ 2, \ldots, m$$

претставља тражене карактеристичне функције:

$$F_i \equiv \Psi_i, \qquad i=1, \ldots, m. \tag{4}$$

Изложена теорија много је погодна за одређивање тражених једначина с датим интегралима карактеристика у инволуцији, јер благодарећи њој знатно се смањи број неопходних рачуна за израчунавање тражених једначина.

Посматрајмо, на пример, следећу инволуциону групу трећег реда:

$$p_1+x_2, \qquad \frac{p_2+x_1}{p_4+x_3}, \qquad p_3+x_4, \tag{5}$$

с четири независно промењиве количине.

Да би саставили канонски систем интеграла, који је уведен у изложеној теорији, изједначимо функције (5) произвољним константама a_1, a_2 и a_3. На овај се начин добије нормалан систем парцијалних једначина првога реда:

$$p_1+x_2=a_1, \qquad \frac{p_2+x_1}{p_4+x_3}=a_2, \qquad p_3+x_4=a_3. \tag{6}$$

Прво, допунимо овај систем, по теорији Јакобија, четвртом једначином у инволуцији, која се лако добије:

$$p_4+x_3=C, \tag{7}$$

где је C нова произвољна константа.

Према томе се потпун интеграл система једначина (6) и (7) одређује помоћу једне квадратуре, у следећем облику:

$$z = a_1 x_1 + a_2 C x_2 + a_3 x_3 + C x_4 - x_1 x_2 - x_3 x_4 + C_1,$$

где је C_1 нова произвољна константа.

Због тога, генералисана теорема Јакобија [7]) сад даје, у посматраном случају, два интеграла:

$$\varphi_1 \equiv p_4 + x_3; \qquad \psi_1 \equiv \frac{x_2 (p_2 + x_1)}{p_4 + x_3} + x_4, \tag{8}$$

који задовољавају услов:

$$(\varphi_1, \ \psi_1) \equiv 1.$$

Али сваки од нађених интеграла (8) налази се у инволуцији с датим функцијама (5).

Због тога тражени систем нормалних једначина може се написати на један од два следећа начина:

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_i \left(p_1 + x_2, \ \dfrac{p_2 + x_1}{p_4 + x_3}, \ p_3 + x_4, \ p_4 + x_3\right) = 0, \\ \qquad i = 1, \ 2, \ldots, m, \end{array}\right\} \tag{9}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} \theta_i \left(p_1 + x_2, \ \dfrac{p_2 + x_1}{p_4 + x_3}, \ p_3 + x_4, \ \dfrac{x_2 (p_2 + x_1)}{p_4 + x_3} + x_4\right) = 0, \\ \qquad i = 1, \ 2, \ldots, m, \end{array}\right\} \tag{10}$$

где Ψ_i и θ_i значе произвољне функције.

Према жељи, броју m може се дати једна од 4 вредности: један, два, три или четири.

На овај се начин добива једна једначина или нормални систем две, три или четире једначине за које дате функције (5) претстављају интеграле карактеристика.

Лако је приметити, да у случају нормалног система четири једначине, обрасци (9) јесу повољнији од формула (10). Заиста, чим дамо индексу m, у формулама (10), вредност 4, онда би се могла једна од нађених једначина довести у облик, који не зависи од канонских променљивих количина друге класе p_1, p_2, p_3, p_4.

Ова примедба важи и за опште обрасце (4), јер теорија

[7]) *N. Saltykow.* — Méthodes classiques d'intégration... p. 34, n⁰ 18.

канонског система интеграла показује да само интеграли прве класе, наиме:

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r},$$

јесу увек различити односно канонских промењивих количина друге класе $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Наведено својство интеграла канонскога система неопходно је имати увек у виду, поводом образовања траженог нормалног система парцијалних једначина с датим интегралима карактеристика.

коју сам имао пре прилику да проучим[9]).

Ова група (9) има две изузетне функције, и то:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &\equiv p_1+p_3+x_2+x_4,\\ \Phi_2 &\equiv p_2+p_4+x_1+x_3.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Да би формирали општи облик нормалних система парцијалних једначина, за које су функције (9) интеграли карактеристика, напишемо, прво, одговарајући систем једначина (3), наиме:

$$\left.\begin{aligned}&(\Phi_1, F)=0, \quad (\Phi_2, F)=0,\\ &(f_3, F)=0, \quad (f_4, F)=0.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Лако се види да систем (11) има два различита интеграла

$$p_2+x_1, \quad p_4+x_3.\tag{12}$$

Оба нађена интеграла, срећом, се налазе у инволуцији. Због тога може се узети за тражену функцију Φ_3 следећи образац:

$$\Phi_3 \equiv \omega(p_2+x_1,\ p_4+x_3),\tag{13}$$

где је ω произвољна функција обеју променљиве количине (12).

У посматраном случају бројеви n, μ и ρ вреде:

$$n=4, \quad \mu=2, \quad \rho=1;$$

а број $n-\rho$ једнак је 3, па нема више других функција (5), сем обрасца (10) и (13).

Према томе се тражене једначине, које имају функције (9) за интеграле карактеристика, изражавају овако:

$$\Psi_i\,(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3)=0,$$
$$i=2,\ 3.$$

Ма да је проблем инволуционе групе датих интеграла карактеристика решен, у претходној Глави II, на сасвим други засебан начин који се разликује од овде изложене методе,

[9]) *N. Saltykow* — Etude sur l'évolution des méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier-Villars. 1934. p. 19, n⁰ 11.

ипак онај проблем може се посматрати као један партикуларан случај проблема ове Главе.

Заиста, чим уведемо претпоставку, да је $\rho=0$, т. ј. да група (1) јесте инволуциона, то се обрасци (7) ове Главе поклапају с обрасцима (4) Главе II. Овај закључак произлази с тога, што ће функције (5) за $\rho=0$, сачињавати инволуциону групу n интеграла система линеарних једначина (3).

Сем тога, у овој претпоставци, проблем Г. Д. Михњевића јесте увек решљив, јер је овде увек $m=n$, и не може, за $\rho=0$, постојати неједнакост (8).

Лако је одговорити и на последње питање односно услова, да би група (1) правила потпун систем интеграла карактеристика нормалног система m тражених парцијалних једначина.

За то треба да функције (1) чине потпун систем различитих решења нормалног система (5) из Главе I. Према томе мора постојати једнакост:

$$2n-m=r, \tag{14}$$

која се може написати још друкчије овако:

$$m=n+(n-r).$$

Пошто ту m не може бити већи од броја n, долазимо до следећег закључка:

$$r \geq n. \tag{15}$$

Добијени резултат (15) показује да *интеграли (1) претстављају потпун систем интеграла карактаристика тек онда, кад је њихов број већи од n и услов* (24) *има места; а за $r=n$, број m једначина траженог нормалног система једнак је броју независно променљивих количина.*

Према ознакама, које су уведене у овој Глави, услови (14) и (15) гласе:

$$m=2(n-\rho)-\mu,$$

односно

$$\mu+2\rho \geq n.$$

У свим другим случајевима функционална група (1) чини непотпун систем интеграла карактеристика. Тако, на пример, функције (5), у Глави II, чине увек један непотпун систем интеграла карактеристика и то за сваки од четире горе наведена случаја једне једначине или нормалног система две, три или четире једначине.