СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXXI

ПРВИ РАЗРЕД

90

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

2

Др. Н. САЛТИКОВ

Генералисање Јакобијевих испитивања о парцијалним једначинама

БЕОГРАД 1939

Цена 8 дин.

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXXI

ПРВИ РАЗРЕД

90

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

2

Др. Н. САЛТИКОВ

Генералисање Јакобијевих испитивања о парцијалним једначинама

БЕОГРАД 1939

Цена 8 дин.

Генералисање Јакобијевих испитивања о парцијалним једначинама

Поводом стогодишњице проналаска Јакобијеве Нове методе интеграљења

ОД

Др. Н. САЛТИКОВА

(Приказано на скупу Академије природних наука 2 маја 1938 г.)

ГЕНЕРАЛИСАЊЕ ЈАКОБИЈЕВИХ ИСПИТИВАЊА О ПАРЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА

Поводом стогодишњице проналаска Јакобијеве Нове методе интеграљења

ОД

Др. Н. САЛТИКОВА

(Приказано на скупу Академије природних наука 2 маја 1938 г.)

Увод

Ове 1938 године навршава се стогодишњица проналаска Јакобијеве методе *Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi.* Прошло је пуних 15 година после Јакобијеве смрти док је ова метода била објављена. Сад је међутим тачно утврђено да је ипак овај рад написан у лето 1838 године и појавио се као резултат Јакобијевих предавања одржаних, у претходном зимском семестру, из Механике и Варијационог рачуна. Ова се метода може сматрати као једна од најелегантнијих математичких метода, а у исто време претставља и темељ модерних испитивања о парцијалним једначинама.[1])

Треба навести да у сабраним Јакобијевим делима, која је објавила Берлинска Академија Наука, у Вајерштрасовој редакцији, поједини чланци нису штампани хронолошким редом.

---

[1]) *N. Saltykow — Les progrès et les problèmes actuels de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue.* Paris. Gauthier-Villars 1936.

N. Saltykow — Etude sur l'évolution des Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris Gauthier-Villars. 1934.

Према томе имамо много да захвалимо Лаву Кенигсбергеру за то што је, поводом стогодишњице Јакобијевог рођен-дана, објавио је, 1904 године, своја опширна истраживања, од скоро 600 страна, о Јакобијевом научном раду. Кенигсбергер је потанко проучио многобројна акта, писма и забележена предавања, која су била скупљена у Јакобијевом архиву, у Берлинској Академији Наука. Одатле се види јасно како су идеје Јакобија поникле и како су се развијале.

Јакоби је почео да обрађује теорију парцијалних једначина 1827 године. Кроз 9 година, 1836 године, он је саставио методу њиховог интеграљења за три независно промењљиве количине, изложену у раду под насловом *Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen vier Variabeln.* Објављено тек 1866 године, ово дело заузима место на крају последње свеске Јакобијевих дела о парцијалним једначинама[2]).

Међутим ту се налази прво решење проблема интеграљења парцијалних једначина првог реда са три независно промењљиве количине, на основу проширења Лагранж—Шарпијеве методе. Две године доцније Јакоби је решио општи проблем, али на другој основи, за ма који број промењљивих количина у поменутом раду Nova methodus. . .

Поводом стогодишњице овог рада, част ми је приказати Академији решење општег проблема интеграљења помоћу проширења првобитних идеја Јакобија, које је он изнео у првом свом раду, од 1836 године.

На овај се начин уводи најтешња веза између основних Јакобијевих појмова и његових теорија.

---

[2]) *Jacobi* — Gesammelte Werke, Bd. V, S. 439.

Глава I

Јакобијева метода интеграљења једначина са три независно променљиве количине

Добро је позната чувена такозвана Лагранж—Шарпијева метода за интеграљење једне парцијалне једначине првог реда са једном непознатом функцијом двају независно променљивих количина. Шарпи је покушао у раду *Mémoire sur lintégration des équations aux différences partielles*[3]), од 1784, године, да примени своја испитивања и на парцијалне једначине са више од две независно променљиве количине. Али је овде писац наишао на тешкоће, које није могао савладати[4]).

Међутим Јакоби[5]), имајући увек у виду радове Шарпија успео је да изврши генералисање, које је умакло Шарпију. Јакоби је то извршио на два различита начина. У првом свом већ наведеном раду о парцијалним једначинама, од 1936 године, Јакоби је решио постављени проблем за три независно променљиве количине. Али овај рад, на жалост, никако није био ни проучен, ни цитиран. Ни сам Јакоби није му се никад више вратио, да генералише добијене резултате. Он је био после тога јако загрејан за општо решење истог проблема помоћу других идеја, које су њим потпуно овладале. То се види из низа његових радова и писама, која су била

[3]) *N. Saltykow — Étude bibliographique sur le Mémoire inédit de Charpit* (Bul. des Sciences mathématiques, 2e sériè. t. LIV, août 1930; t. LXI, février 1937).

[4]) *Lacroix* — Traité du Calcul Differentiel et du Calcul Intégral Paris 1814. 2e ed. T. II, n⁰ 748 p. 567.

[5]) *Jacobi* — Gesammelte Werke, Bd. IV p. 151.

објављена после делимичног решења посматраног проблема. Јакоби је потпуно напустио пређашње решење, јер су на њега утицала испитивања других научника, а у највећој мери радови Поасона. Поводом смрти последњег, Јакоби је писао[6]) претседнику Париске Академије Наука: „...quelques remarques sur la plus profonde découverte de M. Poisson, mais qui, je croix, n'a été bien comprise ni par Lagrange, ni par les nombreux géomètres qui l'ont citée, ni par son auteur lui — même;... ce théorème vraiment prodigieux, et jusqu'ici sans exemple, est resté en même temps découvert et caché."

Колико је он имао право у свом тврђењу, најбоље се види из тога, што су Поасонове теореме створиле Јакобију могућност да пронађе своју општу методу од 1838 године за интеграљење парцијалних једначина. Ова нова метода може се сматрати као једна од најелегантнијих математичких теорија. Сем тога Јакоби је већ тада предосећао развој модерних открића, на основу истих Поасонових теорема. Шта више, Јакоби се сам ставља на чело нових истраживача, и заједно са Бертраном полаже темељ за нову теорију функционалних група, којом се толико бавио С. Ли и модерни математичари.

Међутим и тај први начин, који је Јакоби створио за интеграљење парцијалних једначина са три независно промењиве количине, од 1836 године, може се лако проширити на ма колики број независно промењивих количина. Корист, на овај начин створене методе интеграљења, састоји се у томе, што она непосредно излази из најпростијих основних идеја Д'Аламбера, Ојлера, Лагранжа и Шарпија. Према томе је ова теорија веома проста, особито за три независно промењиве количине.

Посматрајмо најпре овај Јакобијев случај трију независно промењивих количина да би што је могуће више упростили њено излагање и што тешње повезали главне Јакобијеве идеје. Узмимо зато парцијалну једначину у облику:

$$p = F(x, y, z, q, r). \qquad (1)$$

[6]) *Comptes rendus* t. XI. p. 529.
Jacobi — Gesammelte Werke, Bd. 4, S. 143—146.

где су x, y, z независно променљиве количине, а непозната функција u не улази експлицитно; p, q и r означавају парцијалне изводе првог реда од u по x, y и z тако да буде:

$$du = p\,dx + q\,dy + r\,dz.. \tag{2}$$

Јакоби поставља проблем да се одреде вредности извода p, q и r као функције независно променљивих количина, тако, да буде образац (2) потпун диференцијал, па према томе задовољавају Ојлерове услове, наиме:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y}. \tag{3}$$

Ако уврстимо у две прве једнакости (3) вредност променљиве p, која је одређена датом једначином (1), оне ће постати:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Услед трећег услова (3), ове ће једначине (4) добити облик:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Потражимо, прво, вредност функције q у облику:

$$q = \Phi(x, y, z, r), \tag{6}$$

која мора задовољавати постављене услове (5). Из једначине (6) одређују се вредности извода:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x}&=\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x},\\ \frac{\partial q}{\partial y}&=\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y},\\ \frac{\partial q}{\partial z}&=\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Чим уврстимо добијене обрасце у прву једначину (5), одмах ћемо добити, услед друге једначине (5), слдећу линеарну нехомогену парцијалну једначину првог реда за одређивање тражене функције Φ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial r}=\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{8}$$

Сад ћемо доказати да имамо право да искористимо ма које решење једначине (8) за интеграљење дате једначине (1).

Сматрајући за то израз (6) као једно решење једначине (8), испитаћемо, да ли вредност p и q, које су одређене обрасцима (1) и (6), задовољавају први услов (3). Чим будемо уврстили ове вредности у израз:

$$S\equiv\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y},$$

имаћемо:

$$S\equiv\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)-\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Сад S, на основу идентичности (8), добија облик:

$$S \equiv \frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial r}{\partial y}\right),$$

који, услед друге једначине (5) постаје:

$$S \equiv \frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial y}\right).$$

Први множитељ десне стране добијеног обрасца не може се никако уништити, пошто у општем случају p, које се одређује једначином (1), садржи r. Према томе вредност S ће се уништити, ако будемо одредили такву функцију r од x, y и z, која ће задовољавати трећи услов (3).

Интеграљењем линеарне једначине (8) израз за q, који је дат једанакошћу (6), садржаће још једну произвољну константу, коју ћемо означити са a. Онда ћемо добити:

$$q = \Phi\,(x,\ y\ z,\ r,\ a). \tag{9}$$

Према томе из једначине (1) добијамо:

$$p = f\,(x, y, z, r, a), \tag{10}$$

где је идентички:

$$f\,(x, y, z, r, a) = F\,(x, y, z, \Phi_1, r). \tag{11}$$

Сад ћемо потражити такву вредност за функцију $r\,(x, y, z)$ да би обе последње једнакости (3) биле задовољене. За то треба да r испуњава, услед образаца (9) и (10), услове:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Лако је доказати да су једнакости (12) не само неопходни него и довољни услови за одређивање трију вредности p, q и r које морају задовољити све три једнакости (3).

Заиста, одмах се види да систем линеарних нехомогених једначина (12), са непознатом функцијом r одговара систему ових хомогених линеарних једначина с непознатом функцијом φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - (f, \varphi) = o,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - (\Phi_1, \varphi) = o,$$

где се Поасонове заграде проширују само на један пар каноничких промењљивих z и r.

Да би овај систем био Јакобијев, требало би да буду испуњени услови[7]):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\Phi_1, f\right\} = o,^{3})$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\Phi_1, f\right\} = o.$$

Њима се изражава интеграбилност *каноничког система једначина у тоталним диференцијалима*[8]), који одговара Јакобијевом

[7]) *Н. Н. Салтыковъ — Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.* Харьковъ 1899 Стр. 41—42, n⁰ 14.

[8]) *N. Saltykow — Généralisation de la première méthode de Jacobi sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles.* (C. R. de l'Ac. des Sc. à Paris, 23 janvier 1899).

N. Saltykow — Sur la généralisation de la première méthode de Jocobi (C. R. de l'Ac. des Sc. à Paris, 30 janvier 1899).

систему линеарних једначина (12). Овде симбол великих заграда $\left\{\Phi_1, f\right\}$[9]) означава овај израз:

$$\left\{\Phi_1, f\right\} \equiv \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + (\Phi_1, f),$$

где Поасонова заграда (Φ, f) претставља ознаку

$$(\Phi_1, f) \equiv \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial r}.$$

Да су наведени услови испуњени, излази из ових података: Вредност (9) функције Φ_1 задовољава идентички једнакост (8). Међутим се из идентичности (11) добијају нове идентичности:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Ако сад сменимо вредности извода

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial r},$$

[9]) Овај смо симбол великих заграда увели у општем случају, где посматране парцијалне једначине садрже експлицитно и непознату функцију. Види

N. Saltykow — Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Journal de Mathématiques. Cinquième série. t. V. 1899. p. 435).

према обрасцима (14) у идентичност (8), она ће постати:

$$\{\Phi_1, f\} = o.$$

Зато је очевидно да су услови (13) идентички испуњени, и да збиља једначине (12) претстављају Јакобијев систем.

Због тога је довољно да му одредимо из одговарајућег *каноничког система у тоталним диференцијалима:*

$$\left.\begin{aligned} dz &= -\frac{\partial f}{\partial r}\,dx - \frac{\partial \Phi}{\partial r}\,dy, \\ dr &= \frac{\partial f}{\partial z}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

један интеграл у облику

$$r = \psi\,(x, y, z, a, b) \tag{16}$$

где је b нова произвољна константа. Одмах се види да свака на овакав начин одређена функција ψ, помоћу интеграљења система (15) или њему једнаког система (12), задовољава постављене услове.

Заиста, за вредности p, q и r, које су одређене обрасцима (10), (9) и (16), добијамо:

$$S_1 \equiv \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z}, \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$S_2 \equiv \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\,\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Међутим су ови изрази идентички једнаки нули, јер функција ψ задовољава идентички прву и другу једначину (12). Тада обрасци (10), (9) и (16) чине израз (2) тоталним диференцијалом.

Због тога се потпуни интеграл дате парцијалне једначине (1) одређује помоћу квадратуре тоталног диференцијала (2).

Приметимо да је дефинитивно добијени канонички систем (15) баш онај, који излази исто из такозване Јакоби-Мајерове методе интеграљења парцијалних једначина. На овај начин изложена метода интеграљења поклапа се и са Јакобијевом Новом методом. Према томе је важно запазити да наведена расуђивања остварају непосредни начин излагања посматране методе интеграљења парцијалних једначина (1) на основу елементарних идеја оснивача теорије парцијалних једначина. Због тога је доказ ове методе потпуно независан од Јакобијеве Нове методе која се заснива на појмовима *инволуције функција.*

Интегралимо, на пример, једначину:

$$p = (x + q)(y + r) + z. \tag{16}$$

Интеграл линеарне једначине (11) добија се у облику

$$q = a - z\,.$$

А систем (15) даје други очевидан интеграл:

$$(1 - y - r)\, e^{x} = b\,.$$

Према томе тражени потпуни интеграл једначине (16) постаје:

$$u = \tfrac{1}{2}(a + x)^2 + b\,(1 + a + x - z)\, e^{-x} + (a - z)\, y + z + C$$

са три произвољне константе a, b и C.

Глава II

Генералисање Јакобијеве методе интеграљења парцијалних једначина са више независно променљивих количина

Сад ћемо генералисати изложена испитивања на парцијалне једначине са ма колико независно променљивих количина.

За то посматрајмо једначину:

$$p_1 = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_2, p_3, \ldots, p_n) \tag{1}$$

где су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n независно променљивих количина, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ означавају парцијалне изводе првог реда непознате функције z по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тако да буде:

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s \,. \tag{2}$$

За интеграљење дате једначине (1) траже се вредности

$$p_2, p_3, \ldots, p_n \tag{3}$$

као функције независно променљивих количина $x_1, x_2, \ldots, x_n$, које морају задовољавати услове:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k}\,, \\ &(k, i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Према овим условима (4), за вредност индекса $k = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, тражене вредности (3) морају задовољавати услове који се добивају диференцијаљењем дате једначине (1), наиме:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_\sigma}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_\sigma}\sum_{k=2}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_\sigma}, \\ &(i = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Одавде, на основу образаца (4), имамо систем $n - 1$ једначина, и то:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_i}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=2}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial p_i}{\partial x_k}, \\ &(i = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где свака једначина садржи парцијалне изводе само једне промењљиве p_i.

Сад ћемо потражити, прво, вредност промењљиве p_2, у облику:

$$p_2 = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_3, p_4, \ldots, p_n). \tag{7}$$

која би задовољавала прву од једначина (6).

Пошто образац (7) одређује изводе

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_2}{\partial x_s} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \sum_{\sigma=3}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial p_\sigma}\frac{\partial p_\sigma}{\partial x_s}, \\ &(s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

то ће прва једначина (6) постати:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{\sigma=3}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial p_\sigma}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} + \\ + \sum_{k=2}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \sum_{\sigma=3}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial p_\sigma}\frac{\partial p_\sigma}{\partial x_k}\right),$$

или:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \sum_{\sigma=3}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_\sigma} \left(\frac{\partial p_\sigma}{\partial x_1} - \right. \\ \left. - \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_\sigma}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial F}{\partial x_2} \,.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Услед осталих једначина (6), за вредности

$$i = 3, 4, \ldots, n,$$

једначина (9), која служи за одређивање тражене вредности (7) променљиве p_2, добија облик једне нехомогене линеарне парцијалне једначине првог реда, наиме:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \sum_{\sigma=3}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial F}{\partial x_2} \,. \tag{10}$$

Одговарајућа јој линеарна хомогена једначина са једном непознатом функцијом, коју ћемо означити φ, има облик:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + (F, \varphi) = o, \tag{11}$$

где се Поасонова заграда проширује на каноничке променљиве од x_2, p_2 све до x_n, p_n.

Интеграљењем једначине (10) или (11) одређује се вредност (7) променљиве p_2 са једном произвољном константом C_1. Онда ћемо имати заједно са једначином (1) обрасце:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_3, p_4, \ldots, p_n, C_1), \\ p_2 &= \Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_3, p_4, \ldots, p_n, C_1), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где је идентички:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_3, p_4, \ldots, p_n, C_1) = \\ = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Phi_1, p_3, p_4, \ldots, p_n). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Лако је сад доказати да се свако решење једначине (10) или (11) може искористити за интеграљење дате једначине (1). У ту сврху проучимо услове, кад ће количине p_1 и p_2, које су одређене обрасцима (12), задовољити услов (4), за вредности индекса $k = 1$, $i = 2$.

Израчунајмо зато на основу идентичности (13) вредност нове разлике:

$$S \equiv \frac{\partial p_2}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \sum_{\sigma=3}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\sigma} \frac{\partial p_\sigma}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_2} -$$

$$- \frac{\partial F}{\partial p_2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + \sum_{\sigma=3}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\sigma} \frac{\partial p_\sigma}{\partial x_2}\right) - \sum_{\sigma=3}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_\sigma} \frac{\partial p_\sigma}{\partial x_2} .$$

Овај ће образац, на основу идентичности која се добија из (10) заменом Φ_1, уместо Φ, постати:

$$S \equiv \sum_{\sigma=3}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial p_\sigma}{\partial x_2}\right) + \sum_{\sigma=3}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\sigma}\left(\frac{\partial p_\sigma}{\partial x_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial F}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial p_\sigma}{\partial x_2}\right) .$$

Али искоришћујући идентичности (5), за вредности индекса $\sigma = 3, \ldots, n$, добијамо:

$$S \equiv \sum_{\sigma=3}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_\sigma} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial p_\sigma}{\partial x_2}\right) .$$

Одавде излази закључак да ће се разлика S уништити, ако одредимо за количине

$$p_3, p_4, \ldots, p_n \tag{14}$$

такве вредности, које ће задовољити услове:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma} = \frac{\partial p_\sigma}{\partial x_s} , \\ &\begin{pmatrix} s = 2, 3, 4, \ldots, n \\ \sigma = 3, 4, \ldots, n \end{pmatrix} , \end{aligned}\right|$$

$$\{\Phi_1, f\} = o, \tag{20}$$

Одавде излази закључак да су услови (17) идентички задовољени. Према томе је систем (16) збиља Јакобијев, и своди се на интеграљење *каноничког система у тоталним диференцијалима*:

$$\left.\begin{aligned} d\,x_s &= -\frac{\partial f}{\partial p_s}\,d\,x_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_s}\,d\,x_2\,, \\ d\,p_s &= \quad \frac{\partial f}{\partial x_s}\,d\,x_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_s}\,d\,x_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$(s = 3, 4, \ldots, n).$$

Потражимо количине (14) редом, почев од прве p_3. Доказаћемо, прво, да се сваки интеграл система (21), који садржи промењљиву p_3, може узети за одређивање прве тражене функције (14).

Претпоставимо, заиста да смо нашли један интеграл овог система (21), који би одредио вредност количине p_3:

$$p_3 = \Phi_2\,(x_1, x_2, \ldots, x_n\,, p_4, p_5, \ldots, p_n\,, C_1, C_2), \tag{22}$$

Смењујући у изразима (13) вредност p_3, која је одређена обрасцем (22), имамо:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= f'\ (x_1, x_2, \ldots, x_n\,, p_4, p_5, \ldots, p_n\,, C_1, C_2), \\ p_2 &= \Phi'_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n\,, p_4, p_5, \ldots, p_n\,, C_1, C_2), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где постоје идентичности:

$$f'\ (x_1, x_2, \ldots, x_n\,, p_4, p_5, \ldots, p_n\,, C_1, C_2) = $$
$$= f\,(x_1.\ x_2, \ldots, x_n\,, \Phi_2, p_4, p_5, \ldots, p_n) + C_1).$$

$$\Phi'_1\,(x_1\ x_2, \ldots, x_n\,, p_4, p_5, \ldots, p_n\,, C_1, C_2) =$$
$$= \Phi_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n\,, \Phi_2, p_4, p_5, \ldots, p_n) + C_1.$$

Из њих се помоћу диференцијаљења, добијају ове нове идентичности:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f'}{\partial x_s}=\frac{\partial f}{\partial x_s}+\frac{\partial f}{\partial p_3}\,\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_s},\\
&\frac{\partial \Phi_1'}{\partial x_s}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_s}+\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_3}\,\frac{\Phi\,\partial_3}{\partial x_s},\\
&(s=1,\,2,\ldots,\,n).\\
&\qquad\frac{\partial f'}{\partial p_\sigma}=\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}+\frac{\partial f}{\partial p_3}\,\frac{\partial \Phi_2}{\partial p_\sigma},\\
&\qquad\frac{\partial \Phi_1'}{\partial p_\sigma}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\sigma}+\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_3}\,\frac{\partial \Phi_2}{\partial p_\sigma},\\
&\qquad(\sigma=4,\,5,\ldots,\,n).
\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

Најзад се функција Φ_2, која се налази у обрасцу (22), одређује интеграљењем система (21), или линеарног хомогеног система (16). Према томе Φ_2 задовољава одговарајући му систем линеарних нехомогених једначина тако да постоје идентичности:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial p_3}\,\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}-(f,\Phi_2)-\frac{\partial f}{\partial x_3}=o,\\
&\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}-\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_3}\,\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}-(\Phi_1,\Phi_2)-\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3}=o,
\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

где се Поасонове заграде проширују на вредности каноничких промењивих количина почев од x_4, p_4 све до x_n, p_n. Да би смо доказали да интеграл (22) задовољава постављене захтеве, израчунајмо изразе:

$$S_1\equiv\frac{\partial p_3}{\partial x_1}-\frac{\partial p_1}{\partial x_3},\qquad S_2\equiv\frac{\partial p_3}{\partial x_2}-\frac{\partial p_2}{\partial x_3}.$$

Зато се услови да би ове једначине (28) чиниле Јакобијев систем, изражавају обрасцима:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial p_s}\left\{\Phi_1', f'\right\} = o\,,\\
&\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\Phi_1', f'\right\} = o,\\
&\frac{\partial}{\partial p_s}\left\{\Phi_2, f'\right\} = o\,,\\
&\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\Phi_2, f'\right\} = o,\\
&\frac{\partial}{\partial p_s}\left\{\Phi_2, \Phi'_1\right\} = o\,,\\
&\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\Phi_2, \Phi'_1\right\} = o,
\end{aligned}
\right\}
\tag{26}
$$

$$(s = 4,\ 5, \ldots, n).$$

Да би доказали да су заиста услови (29) задовољени идентички, вратимо се идентичностима (25), које ћемо написати овако:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \sum_{\sigma=3}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_\sigma} + \sum_{i=4}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial x_3}\,,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} - \sum_{\sigma=3}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\sigma} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_\sigma} + \sum_{i=4}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_i} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3}\,.$$

Сменимо овде вредности извода

$$\frac{\partial f}{\partial x_s}\,,\quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_s}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\,,\quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\sigma}\,,$$

$$(s = 3, 4, \ldots, n, \qquad \sigma = 4, 5, \ldots, n)$$

који се добијају из идентичности (27). Онда добијамо идентичности:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f'}{\partial x_3} + \sum_{\sigma=4}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial p_\sigma} \frac{\partial f'}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_\sigma} \frac{\partial f'}{\partial p_\sigma} \right) = o,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x_3} + \sum_{\sigma=4}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial p_\sigma} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial p_\sigma} \right) = o,$$

које се, помоћу уведених симбола великих заграда, обележавају овако:

$$\{\Phi_2, f'\} = o, \quad \{\Phi_2, \Phi'\} = o. \tag{30}$$

Најзад се, на сличан начин, горња идентичност (20) постаје:

$$\{\Phi_1', f'\} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_3} \{\Phi_2, f'\} + \frac{\partial f}{\partial p_3} \{\Phi_2, \Phi_1'\} = o. \tag{31}$$

Али ће ова идентичност (31), благодарећи идентичностима (30), добити облик:

$$\{\Phi_1', f'\} = o. \tag{32}$$

Добијене идентичности (30) и (32) доказују да се обрасци (29) задовољавају идентички. Према томе је систем (28) Јакобијев.

Систем једначина у тоталним диференцијалима, који одговара Јакобијевом систему (28), има овај *канонички* облик:

$$\left.\begin{aligned} dx_s &= -\frac{\partial f'}{\partial p_s} dx_1 - \frac{\partial \Phi_1'}{\partial p_s} dx_2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_s} dx_3, \\ dp_s &= \frac{\partial f'}{\partial x_s} dx_1 + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x_s} dx_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_s} dx_3. \\ & (s = 4, 5, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Четврта тражена функција p_4 може се одредити помоћу ма којег интеграла овог система (33), који би садржавао променљиву p_4.

Лако је доказати, сходно пређашњим расуђивањима, да сваки поменути интеграл задовољава постављене захтеве.

Затим потражимо, на пређашњи начин, пету количину p_5 итд., све док будемо нашли све вредности количина (3) које, заједно са једначином (1), чине образац (2) тоталним диференцијалом. Онда се њеном квадратуром одређује потпуни интеграл дате једначине (1).

Изложена теорија се према добијеним резултатима слаже са Јакоби Мајеровом теоријом интеграљења парцијалних једначина. Али смо се за доказ основних ставова наведеног излагања служили класичним Ојлеровим особинама за тотални диференцијал, уместо новије Јакобијеве теорије инволуције функција. Важно је само запазити да интеграљењем узастопних каноничких система у тоталним диференцијалима добијамо све неопходне интеграле. При томе не треба водити бригу о њиховој инволуцији, јер уведени Ојлерови услови потпуно осигуравају изналажење тражених иитеграла.

Наведимо као пример интеграљење парцијалне једначине са четири независно променљиве количине

$$p_1 = (x_1 + p_2)(x_2 + p_3)(x_3 + p_4) - x_4 . \qquad (34)$$

Први се интеграл одмах добија из одговарајуће једначине (10), која овде има облик:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - (x_2 + p_3)(x_3 + p_4)\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - (x_1 + p_3)(x_3 + p_4)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} -$$
$$- (x_1 + p_2)(x_2 + p_3)\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} - (x_1 + p_2)(x_2 + p_3)\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} -$$
$$- \frac{\partial \Phi}{\partial p_4} = (x_1 + p_2)(x_3 + p_4).$$

Ако узмемо интеграл

$$p_2 = C_1 - x_3, \qquad (35)$$

где је C_1 произвољна константа, онда ће дата једначина (34) постати:

$$p_1 = (C_1 + x_1 - x_3)(x_2 + p_3) x_3 + p_4) - x_4, \tag{36}$$

Канонички систем у тоталним диференцијалима (21), који одговара једначинама (36) и (37) у нашем случају, постаје:

$$dx_3 = -(C_1 + x_1 - x_3)(x_3 + p_4)\, dx_1$$

$$dx_4 = -(C_1 + x_1 - x_3)(x_2 + p_3)\, dx_1.$$

$$dp_3 = -(C_1 + x_1 - 2x_3 - p_4)(x_2 + p_3)\, dx_1, - dx_2$$

$$dp_4 = -dx_1.$$

Из последње се једначине добија интеграл:

$$p_4 = C_2 - x_1, \tag{37}$$

где је C_2 произвољна константа. Према томе једначина (36) постаје:

$$p_1 = (C_1 + x_1 - x_3)(C_2 - x_1 + x_3)(x_2 + p_3). \tag{38}$$

Најзад добијамо канонички систем у тоталним диференцијалима (33) у овом облику:

$$\left.\begin{aligned} dx_3 &= -(C_1 + x_1 - x_3)(C_2 - x_1 + x_3)\, dx_1, \\ dp_3 &= (x_2 + p_3)[\, C_1 - C_2 + 2(x_1 - x_3)\,]\, dx_1 - dx_2 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Интеграл прве једначине (39) изражава се у облику:

$$\left(\frac{u - \alpha}{u - \beta}\right) e^{mx_1} = C, \tag{40}$$

где је C произвољна константа и где су уведене ознаке:

$$\left.\begin{aligned} u \equiv x_1 - x_3\,,\ \alpha \equiv \frac{C_2 - C_1 + m}{2}\,,\quad \beta \equiv \frac{C_2 - C_1 - m}{2}\,,\\ m \equiv \sqrt{(C_1 + C_2)^2 + 4.} \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Једначина (40), због везе $\alpha - \beta = m$, даје:

$$u = \frac{m}{1 - C e^{-m x_1}} + \beta$$

Према томе се добија интеграл друге једначине (39), чим му се елиминише константа C, према једначини (40):

$$p_3 = \frac{m^2 C_3 e^{m x_1}}{(u - \beta)^2} - x_2\,,$$

где је C_3 произвољна константа. Најзад, једначина (38) даје:

$$p_1 = \frac{m^2 C_3 e^{m x_1} (C_1 + u)(C_2 - u)}{(u - \beta)^2} - x_4,$$

Ако запазимо да постоји идентичност:

$$(u - \alpha)(u - \beta) = (C_1 + u)(u - C_2) - 1,$$

онда интеграљењем тачног диференцијала

$$dz = \sum_1^4 p_s\, dx_s,$$

налазимо тражени потпуни интеграл дате парцијалне једначине (34):

$$z = C_1 x_2 + C_2 x_4 - x_1 x_4 - x_2 x_3 + \\ + m\, C_3\, e^{m x_1} \left(\frac{\alpha - x_1 + x_3}{x_1 - x_3 - \beta}\right) + C_4,$$

са четири произвољне константе C_1, C_2, C_3, C_4 и где m α и β имају наведене вредности (41).

Глава III

Јакобијеви радови о парцијалним једначинама

Ма да је Л. Кенигсбергер штампао наведену књигу о Јакобијијевом делу, треба ипак истакнути све тесне везе које би скупиле Јакобијеве радове о парцијалним једначинама у једну импозантну целину.

Из свега овога следи, да би требало специјално проучити посмртне Мемоаре који садрже теорију парцијалних једначина првога реда. Они садрже врло важне резултате и чак су неки од тих радова постали славни. Довољно је за то поменути, на пример, „Нову методу“ или „Предавања из динамике“—који су на гласу класичних дела. На основу свега тога природно би било поставити питање, зашто Јакоби није сам већ објавио своје радове? То нас питање може још у толико више занимати, пошто је Јакоби објавио доста радова, који су у истини обрађени после ових поменутих посмртних мемоара. Да би смо расветлили то последње питање, ми ћемо опширније анализирати Јакобијеве радове, одакле ће се свакако добити вероватна објашњења за одговор који тражимо.

* * *

Да би смо могли претставити тачан развој Јакобијевих идеја, које нас сада интересују, поређајмо најпре његова испитивања по хронолошком реду. На почетку своје професорске делатности Јакоби је 1827 године објавио своја прва испитивања о парцијалним једначинама. Те је године он издао два своја мемоара:

I. *Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*“[11]).

II. *Über die Pfaff'sche Methode, eine gewöhnliche lineare*

[11]) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. IV. S. 1

Differentialgleichung zwischen 2n Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren[12]).

После девет година, које је посветио објављивању рада на елиптичним функцијама, у главном, Јакоби се 1836 враћа на теорију парцијалних једначина. Треба ипак узети да су тих девет година посвећене у исто време и дугим разматрањима о парцијалним једначинама. Заиста Јакоби саставља идућих година велики број мемоара о њиховом интеграљењу, који су од велике научне вредности. Први од мемоара, који је објављен 1836 је:

III. *Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen*[13]).

Тај је леп мемоар, сем своје велике вредности по рачун варијација, још интересантан са тог гледишта што садржи разматрање о тада познатим начинима интеграљења парцијалних једначина. Том приликом Јакоби износи карактеристичне особине своје „Нове методе" интеграције, коју је међутим, објавио у својим чувеним Мемоарима тек две године касније.

Проблем изопериметра рачуна варијација навео је Јакобија на то да састави два мемоара, али који су објављени после његове смрти:

IV. *De aequationum differentialum isoperimetricarum transformationibus earumque reductione od aequationem differentialam partialem primi ordinis non linearem*[14]).

V. *De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando*[15]).

Затим, исте 1836 године, Јакоби објављује Мемоаре:

VI. *Über die Reduction der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwisehen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen*[16]).

Овима пак следи рад:

---

12) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. IV. S. 17
13) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. IV. s. 39
14) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. V. s. 465
15) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. V. s. 483.
16) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. IV. s. 57

VII. *Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen vier Variabeln*[17]) који је објављен тек после његове смрти. Ми узимамо ова последња два дела у обрнутом реду него Л. Кенигсбергер, јер, у историском уводу свог другог рада, Јакоби наводи, на првој страни, свој претходни Мемоар. Изгледа да је Л. Кенигсбергер[18]) извршио ту измену под утицајем III Мемоара који смо баш навели: *Zur Theorie der Variations-Rechnuug und der Differential-Gleichungen.* Тај је рад, наиме, непосредно претходио посматраним Мемоарима.

Јакоби ту прилази проблему генерализације Лагранжеве методе интеграљења парцијалних једначина са две независно променљиве. Али он наводи у исто време и Хамилтона. Ми ћемо ипак са наше стране да се држимо највише текста самога Јакобија. За сада, без даљег задржавања на томе, пратићемо историски ред посматраних испитивања. Остали Мемоари, које би још требало навести, посмртни су и то следили би овим редом:

VIII. *Über diejenige Probleme der Mechanik in welchen eine Kräftefunction existiert und über die Theorie der Störungen*[19]).

IX. *Über die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*[20]).

Овим су радовима следили:

X. *Nova methodus aequationes differentiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi.*[21]). Овај је последњи рад уметнут на почетку V свеске Јакобијевих целокупних дела.

Последње је, најзад, посмртно издање:

XI. *Vorlesungen über Dynamik*, које је Јакоби предавао за време зимског семестра, године 1841—43.

Наведени су посмртни Мемоари објављени, захваљујући Клебшу, у Journal de Crelle. Затим су се јавили као до-

---

17) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. V. s. 439.
18) *L. Königsberger* — C. G. L. Jacobi Festschrift 1904, s. 209, s. 214
19) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. V. s. 217.
20) *Jacobi — Gesammelte Werke* t. V. s. 397.
21) *Jacobi — Gesammelte Werke* t. V. s. 1.

датак специјалном издању „Предавања из динамике", објављеном такође од Клебша. Међутим, ово је издање давно распродато. Ново пак издање, допунска свеска Целокупним делима Јакобија, садржи само „Предавања из динамике".

Сем ових последњих испитивања, Јакоби је био објавио још у току свог живота важне Мемоаре о линеарним парцијалним једначинама, о последњем мултипликатору и о интеграљењу једначина динамике и небеске механике. Ми ћемо их, када буде потребно, навести у даљем раду, назначећи тачно време њиховог објављивања. Баш ова дела ће да нам пруже решење постављеног питања у вези са посмртним Мемоарима.

* * *

Ми ћемо се засад ограничити на испитивање наведених радова од I до XI. Они у себи садрже суштину Јакобијева открића која се односе на проблеме интеграљења парцијалних једначина првога реда,

Мемоари I, II и VI показују да је Јакоби, прилазећи томе раду о парцијалним једначинама, хтео свакако да почне испитивањем тада познатих општих метода, тј. методе Пфафа и Хамилтона. Јакоби им је дао важне допуне.

У I Мемоару: *Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung,* изнета је метода интеграљења линеарног система парцијалних једначина првога реда са више непознатих функција, који се иначе до сада називао „систем Јакобија". На основу овога је интеграљења Јакоби у исто време успео и да упрости у своме II Мемоару решење Пфафовог проблема. Занимљиво је, међутим, напоменути да је проблем интеграљења поменутог система већ био решен од Шарпија, у његовом необјављеном Мемоару од 1784 године[22]), отприлике 50 година пре Јакобија. Овај је историски податак доста важан, јер показује да је Јакоби својим изванредним умом био наведен на то, да започне свој рад баш тамо, где га је био прекинуо његов истакнути претходник, Шарпи. Иако је тачна садржина Шарпијевог открића била њему непозната, Јакоби је ипак могао имати известан

[22]) *N. Saltykow — Étude bibliographique sur le Mémoire inédit de Charpit* (Bul. des sc. Math., 2 série, t. LIV, août 1930, t. LXI, février 1937).

појам о њему, прегледајући радове Лакроа. Интервенцији г. Е. Пикара и г. А. Вилата може се захвалити да је рукопис Шарпија пронађен 1928 године.

Мемоар VI Јакобија о свођењу парцијалних диференцијалних једначина на обичне диференцијалне једначине, износи тзв. *прву методу интеграљења Јакобија*. Ту он даје важне допуне и генерализације Хамилтонове теорије.

Што се тиче мемоара VII, које Јакоби није објавио, износи он прву генерализацију Лагранжеве и Шарпијеве методе интеграљења у случају да је број независно променљивих три. Шарпијев, тада још непознат, Мемоар садржавао је један покушај такве генерализације; међутим, он није успео. Али је једна скица тога била и у књизи Лакроа. Јакоби је имао ту срећу да реши поменути проблем. Он узима за полазну тачку основне особине једног тачног диференцијала са три независно променљиве, дате са три Ојлерове релације. На овај је начин генералисана класична метода којом су се били служили Д'Аламбер, Ојлер, Лагранж и Шарпи при интеграљењу парцијалних једначина са две независно променљиве. Јакоби се био задовољио тиме да да генерализацију само за случај од три независно променљиве. Али је та генерализација свакако могућа како је то показано у претходној глави II.

Врло је интересантно приметити о овом случају да се метода интеграљења, која се на тај начин добија, своди на тзв. *Јакоби-Мајерову* методу. Стварна се разлика налази само у начину претстављања. Док се метода Јакоби-Мајера оснива на Јакобијевој теорији инволуције, дотле је последњи појам замењен, у генерализованој методи о којој је реч, са Ојлеровим условима потпуног диференцијала са више независно променљивих. На овај се начин јавља извесна веза између генералисане Јакобијеве методе и његове „Нове методе". Јакобијев начин „интеграљења једначина са четири независно променљиве" требало би, дакле, да се сматра као увод у нова разматрања Јакобија.

Задржимо се мало више на питањима која су тамо обрађена. Прва четири §§-а износе познате чињенице Лагранжевих радова. Јакобијеве су формуле ту додате зато, да би се, у случају две независно променљиве, поставио општи интеграл обичних диференцијалних једначина карактеристика када је познат потпуни интеграл одговарајуће парцијалне једначине. У § 5 постављене су једначине које се односе на проблем са три независно променљиве. Али за крајње решење проблема су најважнији §§ 6—12. Јакоби ту даје решење проблема интеграљења система две линеарне парцијалне једначине првога реда. Та је лепа теорема дата, да би се могло саставити једно ново решење на основу једног већ датог решења. Ту је први пут, са теориског гледишта, испитиван проблем симултаних линеарних парцијалних једначина. Што се тиче практичног решења, предност још увек носи Шарпи. Испитујући, у своме необјављеном Мемоару, проблем класификације интеграбилних једначина, Шарпи је интегралио различите системе симултаних линеарних парцијалних једначина партикуларног облика.

Горе посматрани проблеми су од великог значаја, али су њихова решења компликована, тако да изгледа да ни сам писац није био задовољан са њима. Али је бар постављен темељ. Међутим, Јакобијева се пажња односи на питања генерализације. Два се идућа Мемоара, VIII и IX, баве тиме и постављају у исто време нове проблеме о варијацији произвољних констаната у проблемима механике. У истом раду Јакоби генералише и своју прву методу интеграљења једначина које експлицитно садрже непознату функцију. Други Мемоар садржи једно дубље испитивање о потпуним интегралима са било колико променљивих, али је овај рад нажалост врло мало познат.

Пређимо сада на Мемоар X о „Новој методи" интеграљења. Јакоби полази ту са новог гледишта. Он избегава да непосредно генералише разматрања постављена у Мемоару VII о „интеграљењу једначина са четири променљиве." За основу својих испитивања писац сада уводи нову теорију о *функцијама у инволуцији,* коју испитује у различитим облицима. Покушавало се некипут да се критикује тачност Јакобијевог излагања, али ту критику треба узети са извесном резервом. Тако је г. Г. Ковалевски, објавивши на немачком превод посматраног Јакобијевог дела *(Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, № 156),* додао томе један критички чланак. Он наводи на 222 страни један пример да би побио Јакобијево тврђење. Међутим, одмах се може видети, да дати пример не одговара ни мало критикованој теорији, јер не задовољава услове које је Јакоби стриктно поставио. Теорија инволуција функције даје предност да се упрости проблем интеграљења система линеарних парцијалних једначина првога реда. Захваљујући томе, Јакоби доста усавршава своју једноставну теорију о симултаним линеарним једначинама, коју је објавио 1836. Поменути Мемоар садржи сем тога много важних резултата о интеграљењу једначина у механици, као и о теорији варијације произвољних констаната, које је он већ обрађивао у пређашњем VIII Мемоару[23]).

Ипак теорија о инволуцији функција није још достигла своју крајњу елеганцију. Јакоби наставља рад на њеном усавршавању.

У колико је Јакоби имао право, показао је постављањем славне методе од 1838, која претставља једну од најелегантнијих теорија у математичкој анализи. Пре сто година, у другом добу, Јакоби је већ предвидео модеран развитак теорији парцијалних једначина, и то захваљујући важном открићу Поасона. Сада се показује све већи и већи одлучни утицај Јакобија на стварање модерне теорије о парцијалним једначинама[24]).

На то ћемо се касније вратити при једној специјалној расправи: *Радови С. Лиа и развитак модерне теорије парцијалних једначина.* Тамо ће се Јакобијева улога опширније испитати. То је у толико потребније већ и због тога, јер је до последњега времена било геометричара који су идентификовали радове С Лиа са модерном теоријом парцијалних једначина. Али, полазећи од те хипотезе, ми губимо из вида постигнути напредак посматране теорије у XX веку.

[23]) *Jacobi — Gesammelte Werke*, t. V. s. 217.

[24]) *N. Saltykow — Les progrès et les problèmes actuels de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue* Paris, Gauthier Villars 1936.

N. Saltykow — Étude sur l'évolution des Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, Gauthier Villars, 1934.

У „Предавањима из динамике“ наилазимо на нове напретке који се односе на поменуте резултате у „Новој методи“. Не улазећи у појединости тог истакнутог Јакобијевог дела, задовољићемо се тиме, да наведемо тридесет прво, тридесет друго и тридесет треће предавање. Она претстављају, у једном истакнутом облику, нову Јакобијеву методу интеграљења парцијалних једначина првога реда са произвољним бројем независно променљивих. У односу на поменуто, последња се два предавања могу сматрати за ремекдело приказивања теорије инволуције функција и теорије система симултаних линеарних парцијалних једначина.

Тридесет треће је предавање уистини скица теорије инфинитезималних трансформација, са којима се касније С. Ли толико бавио.

Прегледајући све наведене радове, долазимо до закључка, да је Јакоби у својим необјављеним испитивањима систематски радио на проналажењу једне опште методе интеграљења. Два су проблема стално привлачила његову пажњу: проналазак потпуног интеграла парцијалне једначине и проналазак општег интеграла одговарајућих једначина карактеристика. Сваки је рад требао да усавршава већ раније добивене резултате и да даје нова генералисања.

Мора да је Јакоби сам своје необјављене радове сматрао за недовршене. Посмртни су Мемоари претстављали претходне податке које је Јакоби хтео да задржи за сопствену употребу, па да помоћу њих касније изда нове Мемоаре.

* * *

Задржимо се више на малочас поменутим хипотезама. Академија у Берлину поверила је Вајерштрасу да изда Целокупна дела Јакобија. Мемоар VIII: *Über diejenigen Probleme der Mechanik,* је он лично ставио. У томе баш раду, у једном на крају прикљученом чланку, Вајерштрас потврђује горе формулисане хипотезе у вези са свима посмртним Мемоарима Јакобија.

Последња два рада: „Нова метода“ и „Предавања из динамике“ довршавају читав један низ испитивања, крунишући Јакобијева истраживања на пољу израде једне опште теорије за интеграцију парцијалних једначина. Током својих истраживања од 1836 до 1842, славни је писац укратко формулисао различите резултате које је добио примењујући своје методе на проблеме механике. Ти су закључци објављени у овим чланцима :[25])

Sur le mouvement d'un point et sur le cas particulier du problème des trois corps.

Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique.

Neues Theorem der analytischen Mechanik.

De motu punctis singularis.

Sur un nouveau principe de la mécanique analytique.

Сви су ти чланци богати садржином и врло елегантно састављени. 1842 је Јакоби објавио свој чувени Мемоар[26]): *Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps.* Овом је последњем раду следовао један важан чланак.[27]) Из њега се могло тачно утврдити да је Јакоби у свим својим испитивањима имао пред очима напредовање механике, а највише проблем трију тела.

Најзад је дошао тренутак када се Јакоби био решио да приђе коначном објављивању добивених закључака на пољу парцијалних једначина и једначина механике. 1841 прилази он делу, да би остварио један дубоко испитани програм на систематски начин.

Јакоби је током својих претходних испитивања стално наилазио на појам функционалних детерминаната, којима се морао служити при доказима. Посматрајући њихову теорију као један од важних елемената математичке анализе, Јакоби се био решио, да прво посвети њима нека специјална испитивања. Он објављује, дакле, 1841 године, прво два Мемоара:

De formatione et proprietatibus determinantium.[28])

De determinantibus functionalibus[29]).

Сада се може закључити, уколико је Јакоби имао право.

[25]) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. IV. s. s. 35, 129, 137, 263, 289.

[26]) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. IV. s. 295.

[27]) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. IV. s. 315.

[28]) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. III. s. 355.

[29]) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. III. s. 393.

Појмови функционалних детерминаната много се јављају у модерним питањима анализе, и то међу првим елементима диференцијалног рачуна.

У другом реду, нова Јакобијева испитивања базирају на теорији линеарних парцијалних једначина првога реда. О овој последњој теорији постојала су тада само испитивања Лагранжа и геометриска претстава Монжа[30]). Јакобија је нарочито интересовала аналитичка теорија. Лагранжов је, међутим, рад увек имао траг очигледно једноставне методе Д'Аламбера. Посматрана је теорија, дакле, постала врло компликована. Јакоби поставља нову аналитичку теорију. Она је требала да се оснива на једној теорији система обичних диференцијалних једначина. Али ни та последња није постојала. Обични су, наиме, појмови били уведени са стране Ојлера, само за три и четири једначине. Јакоби их, дакле, генералише, уводећи појам интеграла система обичних диференцијалних једначина и њихових интегралних фактора.

Закључци су свих тих дубоких испитивања објављени, још 1841 године, у класичном Мемоару:

Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis aerumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis[31]).

Ова околност доказује и указује на Јакобијева дубоко научна размишљања, која се огледају у његовом начину рада. У своме раду, од 1836, „о интеграљењу једначина са четири непознате", Јакоби наводи Мемоар Лагранжа од 1772, где је реч о потпуним интегралима. Међутим се тај појам у њима и не налази, пошто га у томе добу није ни било. До скора су, наиме, мешали две различите методе: методу Лагранжа и методу Лангранж-Шарпиа, које су сасвим различите. С. Ли је дошао чак дотле, да је порекао важност ове друге методе, као и важност целог Јакобијевог дела о теорији линеарних парцијалних једначина[32]). Јакоби је, међутим, тачно форму-

[30]) *N. Saltykow — Étude bibliographique de la seconde partie du Mémoire inédit de Charpit,* (Bul. des. Scien. Math. 2 Série, t. LXI, férier 1937 No 3.)

[31]) *Jacobi — Gesammelte werke,* t. IV. s. 147.

[32]) *S. Lie — Sur les anciennes recherches de la théorie des équations partielles* (S. Lie — G. Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen).

лисао оно што је Лагранж био учинио за теорију линеарних једначина са стране. Шта више, Јакоби је тачно осетио да постоји Шарпијево тада непознато дело, о којем је добио кратки извештај преко Лакроа. Наводећи га, дакле, у уводу своје теорије о линеарним једначинама, он додаје следеће речи, на страни 151: „*Si commentatio iuvenis praematura morte abrepti, a 1784 Academiae Parisiensi communicata per tot discrimiae rerum adhoc conservata est, optandum est, ut cl. Liouville eam in insigni, cujus publicationi praest, Diario Mathematico collocare atque e seriniis academicis resuscitare velit*".

Трећа тачка Јакобијевог програма садржала је нова разматрања о проблему интеграљења система обичних диференцијалних једначина. Ту је било речи о једном важном појму о *последњем мултипликатору*, који је увео Јакоби. У својим „Предавањима из динамике" он је осам предавања посветио теорији последњег мултипликатора, и то почев од десетог па све до осамнаестога предавања. Јакоби објављује у Comptes rendus Академије наука у Паризу 1842, прве податке о последњем мултипликатору, који смо горе напоменули[33]). Један је опширнији чланак о истоме објављен на талијанском 1844 године[34]). Исте је године Јакоби дао један леп допринос теорији система обичних диференцијалних једначина у своме предавању на Академији у Берлину, које објављено тек после његове смрти, под насловом: *De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujusqunque*[35]). Закључке што садржи овај Мемоар употребио је сместа Јакоби, 1845, у своме опширном мемоару који је објавио под насловом: *Theoria novi Multiplicatoris systemati aequationum differentialium applicandi*.

Садржај тог Мемоара нема никаквих недостатака. Ту је чак са много пажње изнета најкомпликованија тачка теорије која се односи на постављене једначине дефиниције. Што се

Leipzig 1896, p. 514, No 5) *N. Saltykow — Méthode classique d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris, Gauthier — Villars, 1931. Chapitre II.

[33]) *Jacabi — Gesammelte Werke*, t. IV. s. 289.

[34]) *Jacobi — Gesammelte Werke*, t. IV. s. 511

[35]) *Jacobi — Gesammelte Werke*, t. V. s. 191.

тиче овога дела теорије, он је у „Предавањима из динамике" мање обрађен, па би чак на неким местима требао бити прерађен[36]). 1846 године, Јакоби објављује један чланак[37]): *Zwei Beispiele zur neuen Methode der Dynamik,* где износи решење проблема једнога тела и геодетских линија елипсоида, који су решени у његовим „Предавањима из динамике". У новом је издању уведена једна згодна подесна промена у ознаци коефицијената.

IV свеска Сабраних Јакобијевих дела завршена је једним посмртним чланком о проблему три тела, кад привлачења стоје у обрнутом односу са кубом отстојања.

* * *

Последњих својих година живота, Јакоби је много писао и објавио о различитим питањима анализе и механике. Али се није био вратио на своје велико дело о парцијалним једначинама.

Јакоби је издахнуо 1851, у 46 години живота. Пре него што су његови посмртни Мемоари објављени, велики је број њихових резултата пронађен и од других писаца. Али није ипак никако довршен важан програм постављен од Јакобија у своме главном делу о нелинеарним парцијалним једначинама. Ми смо то покушали 1905, када смо изнели скуп испитивања Јакобијевих проблема који се односе на интеграљење парцијалних једначина и канонских једначина са обичним диференцијалима[38]). У исто смо време сматрали за потребно да се прошири Јакобијев програм. У томе је циљу додата генерализација Јакобијевих резултата о системима симултаних једначина и о одговарајућим једначинама са тоталним диференцијалима. На тај је начин посматрана теорија до највеће могућности генералисана.

---

[36]) *Jacobi — Vorlesungen über Dynamik,* 1887, s. 88, четири прва реда.

[37]) *Jacobi — Gesammelte Werke,* t. IV. s. 523.

[38]) *N. Saltykow — Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue.* (Communication de la S-té Mathématique de Kharkow, 1905).

Године 1931 нови програм објављен је у једном другом раду о класичним методама интеграљења парцијалних једначина[39]). Од тада се тај програм опширно проучавао у предавањима последњих година на белгиским Универзитетима под организацијом Fondation Universitaire de Belgique.

Драгоцено је научно наследство што нам је Јакоби оставио. Оно би требало стално да се испитује и да се о томе размишља са дивљењем и поштовањем.

[39]) *N. Saltykow — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Paris, Gauthier-Villars, 1931.