СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXXI

ПРВИ РАЗРЕД

90

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

9

Др. Н. Салтиков

Непосредне методе интеграљења парцијалних једначина другог реда

БЕОГРАД 1939

Цена 10 дин.

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXXI

ПРВИ РАЗРЕД

90

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

9

Др. Н. Салтиков

Непосредне методе интеграљења парцијалних једначина другог реда

БЕОГРАД 1939

Цена 10 дин.

Непосредне методе интеграљења парцијалних једначина другог реда

од

Др. Н. САЛТИКОВА

НЕПОСРЕДНЕ МЕТОДЕ ИНТЕГРАЉЕЊА ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ РЕДА

од

Др. Н. САЛТИКОВА

(Приказано на скупу Академије природних наука 25 септембра 1939)

Увод

Звaћемо *непосредним* оне методе интеграљења, које омогућују да се изналазе интеграли парцијалних једначина чим их ставимо у облике, који се могу одмах интегралити. Чувено Дело Ајлера, наиме трећа свеска Institutiones Calculi Integralis, претставља један леп извор поменутих метода. Само се мало радило на проширавању оваквих идеја, јер је свет тражио да се пронађу општије методе интеграљења. Њихова предност би се морала испољавати у томе што би ове опште методе дозволиле интеграљење већег броја једначина, које се не могу непосредно решити. Овим правцем увек је напредовало развијање математике.

Међутим могло би се приметити да то није увек случај у теорији парцијалних једначина другог реда. Веома се често њене опште методе примењују на једначине, чије је интеграљење скоро очевидно. Наведимо за то Дарбуово излагање1) Монж-Амперове методе интеграљења, која се увек сматра као најсавршеније. Али Дарбу, да би показао вредност посма-

---

1) *G. Darboux: Leçons sur la Théorie des Surfaces.* Troisième partie. Paris 1894, p. 273, № 716.

тране методе, примењује њу на четири једначине, и то: на једначину развојних површина, на површине са линијама кривина у равни, на праволиниске површине са директорном равни и на једначину механичке теорије топлоте. Ове се једначине често употребљавају у исту сврху такође и у другим књигама. Али згодно је напоменути да се непосредна интеграљења једначина у два прва задатка налази у првој свесци *Traité d'Analyse E. Picard*-а (Paris, 1801, p. 296) и у другој свесци *Cours d'Analyse G. Humbert*-а (Paris 1904, p. 471). Што се тиче два друга проблема, интеграљење њима одговарајућих једначина навешћемо у овом раду.

Методе, које се проучавају овде послужиле су као предмет мојих предавања на Белгиским Универзитетима, под организацијом *Fondation Universitaire de Belgique,* као увод у општу теорију парцијалних једначина другог реда.

I. Парцијалне једначине које су сводљиве на обичне диференцијалне једначине

Претпоставимо да дата парцијална једначина садржи само два извода, и то да су оба узета по једној истој независно промењљивој количини. Одговарајуће једначине припадају једном од ових двају образаца, на име:

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, r) &= 0, \\ \Phi(x, y, z, q, t) &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Свака се од једначина (1) мора посматрати као обична диференцијална једначина.

Заиста прва једначина (1) садржи непознату функцију z и њене изводе $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; а друга независно промењљива количина y игра улогу једног сталног параметра, јер дата једначина нема извода по y.

Што се тиче друге од једначина (1), то она садржи z, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Према томе сада је x стална количина, па се ова једначина мора интегралити као обична диференцијална једначина са непознатом функцијом z независно промењљиве количине y.

Али постоји разлика између посматраних једначина и обичних диференцијалних једначина. Ова се разлика састоји у томе што морамо увести у општи интеграл прве од једначина (1), уместо двеју произвољних констаната, две произвољне функције независно промењљиве количине y. Међутим општи интеграл друге једначине (1) мора да садржи две произвољне функције независно промењљиве x.

Тако ће, на пример, парцијална једначина

$$t - 2xq + 2x^2 z = 0$$

имати општи интеграл у облику:

$$z = e^{xy}(X_1 \sin xy + X_2 \cos xy),$$

где су X_1 и X_2 две произвољне функције независно промењљиве x.

Другом облику једначина, које се интеграле исто као обичне једначине, припадају једначине:

$$\begin{aligned} F(x, y, p, s) &= 0, \\ \Phi(x, y, q, s) &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Ове једначине не садрже експлицитно непознату функционалну промењљиву количину z, него садрже само по један извод првог и другог реда, али је овај други извод узет по обе независно промењљиве количине x и y.

Обе једначине (2) лако се стављају у облик обичних једначина, и то овако:

$$\left.\begin{aligned} F\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial y}\right) &= 0, \\ \Phi\left(x, y, q, \frac{\partial q}{\partial x}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Пошто у првој једначини (3) x игра улогу сталног параметра, то ће њен први интеграл, уместо произвољне константе, добити произвољну функцију независно промењљиве количине x. Нека одговарајући интеграл буде:

$$\Psi(x, y, p\,X) = 0,$$

где је X произвољна функција x-са.

Решавајући добијену једначину по изводу p, или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, имамо да је

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, y, X).$$

Одавде, помоћу квадратуре, налазимо општи интеграл прве једначине (2) у облику

$$z = \int \theta(x, y, X)\,\partial x + Y,$$

где је Y друга произвољна функција која зависи само од y.

На сличан начин добија се и општи интеграл друге једначине (2). Зато, прво, треба интегралити обичну диференцијалну једначину, која је написана у другом обрасцу (3), где се y сматра као стални параметар. Према томе општи интеграл одговарајуће једначине садржи произвољну функцију y. Најзад, добија се тражени општи интеграл друге једначине (2), помоћу квадратуре по y.

Према томе, у овај интеграл улази и друга произвољна функција независно промењљиве количине x.

Навели смо четири типа једначина, које би се, збиља, могле сматрати као веома једноставне. Али су још једноставније једначине, које интеграли Ајлер у свом наведеном класичном делу, да би објаснио своју идеју интеграљења парцијалних једначина свођењем истих на обичне диференцијалне једначине.

Међутим је ова идеја од велике користи за више једначина. За доказ овог тврђења, узимамо Амперову једначину којом се бавио и G. V. Imschenetsky[2]) да би на њу применио своју методу трансформација. Међутим се ова једначина

$$z s + \frac{z}{q^2} t + p q = 0 \tag{4}$$

може сматрати као најпростија обична једначина, на име:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z p - \frac{z}{q}\right) + 1 = 0.$$

где се израз $zp - \frac{z}{q}$ мора узети као нова функција. Општи интеграл ове једначине гласи

$$z p - \frac{z}{q} + y = X, \tag{5}$$

где X означава произвољну функцију x-*са*.

Згодно је, за интеграљење добијене парцијалне једначине првог реда (5), да уведемо нову функцију $z_1 = z^2$. Онда једначина (5) постаје

$$p_1 - \frac{4 z_1}{q_1} + 2 y = 2 X,$$

где су p_1 и q_1 респективно парцијални изводи $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ односно $\frac{\partial z_1}{\partial y}$. Добијена једначина има интеграл карактеристика

$$q_1 = 2 x + C_1,$$

---

[2]) *G. V. Imschenetsky — Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* Paris 1872 p. 149 (n°143).

где је C_1 произвољна константа. Ове две једначине одређују, помоћу квадратуре, тражени општи интеграл Амперове једначине (4) у облику две једначине:

$$z^2 = (2x + C_1)\, y + (2x + C_1)^2 \,[f(x) + \varphi(C_1)],$$

$$y + 2(2x + C_1)\,[f(x) + \varphi(C_1)] + \\ + (2x + C_1)^2 \left[\varphi'(C_1) - 4 \int \frac{X\,dx}{(2x + C_1)^3} \right] = 0,$$

где је уведена ознака

$$f(x) \equiv 2 \int \frac{X\,dx}{(2x + C_1)^2},$$

при чему C_1 служи као помоћни промењив параметар.

II. Парцијалне једначине другог реда које се своде на парцијалне једначине првог реда

Овој врсти једначина припадају, прво, једначине које садрже у себи само независне промењиве количине, а од извода првог и другог реда садрже или p, r и s, или q, s и t, на име:

$$\begin{aligned} &F(x, y, p, r, s) = 0, \\ &\Phi(x, y, q, s, t) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Заиста ове се једначине одмах своде на парцијалне једначине првог реда:

$$\begin{aligned} &F\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0, \\ &F\left(x, y, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Буду ли њихови интеграли решљиви по p или q, добијају се из њих тражени интеграли полазних једначина (1) помоћу квадратура.

Проинтегралимо, на пример, једначину

$$s + y t = 0,$$

која се своди на линеарну једначину првог реда по q, и то:

$$\frac{\partial q}{\partial x} + y \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Њен општи интеграл је

$$q = f'(e^{-x} y),$$

где је f' извод произвољне функције f, а x се сматра сталним параметром. Због тога добијена једначина претставља обичну диференцијалну једначину са раздвојеним промењљивим количинама.

Према томе ће општи интеграл полазне једначине бити

$$z = e^{x} f(e^{-x} y) + X,$$

где је X друга произвољна функција независно промењљиве количине x.

Али, овде треба приметити да се сем случајева, где су једначине (2) линеарне, њихов општи интеграл изражава скупом двеју једначина.

Према томе тада, у општем случају, наилазимо на тешкоће за даљи рачун.

Но сем једначина (1) има још и других врста које су, ма да садрже у себи експлицитно непознату функцију z, ипак такве природе да су сводљиве на парцијалне једначине првог реда. То су једначине којима се, на пример, бавио и Е. Гурса, а овакoг су облика:

$$\Phi\left(x, z, p, r, \frac{s}{q}\right) = 0,$$

$$\Phi\left(y, z, q, \frac{s}{p}, t\right) = 0. \tag{3}$$

Заиста, потражимо за прву једначину (3) решење у облику

$$p = \mu(x, z), \tag{4}$$

где је μ нова непозната функција.

Према обрасцима трансформације:

$$r = \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\mu, \quad s = \frac{\partial \mu}{\partial z} q,$$

прва једначина (3) прелази у овај облик:

$$F\left(x, z, \mu, \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\mu, \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = 0.$$

Добијена једначина је парцијална првог реда са непознатом функцијом μ две независно промењиве x и z.

Чим буде пронађена функција μ онда се тражена функција z одређује интеграљењем обичне једначине, која се добија из обрасца (4):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mu(x, z).$$

Општи интеграл ове једначине ће садржати, уместо константе, произвољну функцију промењиве y.

Тако се може, на пример, интегралити једначина

$$s = \frac{p\,q}{x+z},$$

чији се општи интеграл изражава овако:

$$z = \frac{X+Y}{X'} - x,$$

где су X и Y две произвољне функције x односно y.

На сличан се начин интеграли и друга једначина (3), чим будемо потражили њено решење у облику

$$q = \vartheta\,(y, z)\,,$$

где је ϑ нова непозната функција.

Као пример може се навести једначина

$$z\,s = p\,(q-y),$$

коју ћемо даље интегралити и на други начин.

III. Свођење парцијалних једначина на тачне изводе

Све су методе које се овде проучавају тесно везане тако да се неке од једначина могу интегралити помоћу ма које од изложених метода. На пример, тек наведена једначина

$$z\,s = p\,(q-y) \tag{1}$$

лако се пише у облику тачног извода, наиме:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q-y}{z}\right) = 0.$$

Одавде се добија интеграл

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Yz + y ,$$

где је Y произвољна функција независно промењиве y. Пошто је добијена једначина обична диференцијална једначина по z, то се тражени интеграл једначине (1) изражава овако:

$$z = \frac{y\,(X + Y)}{Y'} ,$$

где су X и Y произвољне функције x односно y.

Forsyth-ова једначина (Vol. VI. стр. 493, зад. 2)

$$q\,y\,s = (t\,y + q)\,p \tag{2}$$

лако се може написати овако:

$$y \frac{\partial}{\partial y}\left(\log \frac{p}{q}\right) = 1 ,$$

чији први интеграл постаје линеарна једначина по p и q

$$\frac{p}{X'} = yq ,$$

где X' извод произвољне функције X промењиве x. Према томе општи интеграл дате једначине (2) јесте:

$$z = \Psi\,(X + \log y) ,$$

где је Ψ ознака произвољне функције.

Добијена парцијална једначина првог реда раздваја променљиве тако да имамо:

$$q = C, \qquad p = \pm \sqrt{1 + C^2}\, X',$$

где је C произвољна константа. Према томе се тражене површине одређују скупом двеју једначина:

$$z = \pm \sqrt{1 + C^2}\, X + Cy + f(C),$$

$$\pm \frac{CX}{\sqrt{1 + C^2}} + y + f'(C)\,. = 0,$$

где је f друга произвољна [функција, а C сад игра улогу променљивог помоћног параметра.

За нови пример искористимо једначину Е. Гурса

$$s = \varphi(z)\, p\, q\,, \tag{3}$$

где је φ ма каква функција од z. Ова се једначина може написати овако

$$\frac{s}{p} = \varphi(z)\, q\,,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial y} [\log p - \int \varphi(z)\, dz] = 0.$$

Због тога се добија интеграл

$$\log p - \int \varphi(z)\, dz = \log X',$$

где је X' извод произвољне функције независно променљиве количине x. Ако напишемо добијену једначину у овом облику

$$e^{-\int \varphi(z)\, dz}\, p = X'\,,$$

На сличан начин, Амперова једначина, коју смо навели под бројем (4), у I ом одељку, такође претставља тачан извод:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(zp-\frac{z}{q}+y\right)=0.$$

Слично се интеграле и једначине

$$(x-y)\,s+q=0\,,\quad (x-y)\,s-q=0,$$

које су наведене код E. Goursat-a, *Cours d'Analyse Mathématique, 4 éd., T. III, Paris 1927.* Заиста, ове се једначине доводе на облик тачних извода:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-y)\,q\right]=0.,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{x+y}\right)=0.$$

Што се тиче парцијалних једначина површина са линијама кривине, које су паралелне координантној равни yOz:

$$(1+q^2)\,s-p\,q\,t=0\,,$$

она се лако доводи, (делењем са p^3), на тачан извод

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q^2+1}{p^2}\right)=0.$$

Онда добијамо интеграл:

$$q^2+1=\frac{p^2}{X'^2}\,,$$

где је произвољна функција *x–са* означена са $\frac{1}{X'^2}$, ради упрошћења за даљи рачун.

$$\int \frac{dz}{f(z)} = \int \partial x \int F(x,y)\, \partial y + X + Y,$$

где су X и Y одговарајуће произвољне функције од x и од y.

Један партикуларан случај посматране једначине налази се у III-ој свесци Cours d'Analyse Mathématique (4 éd. Paris 1927 страна 88) од Е. Гурса, где је наведена једначина

$$s = p\,q + e^{z} f(x,y).$$

За интеграљење ове једначине довољно је ставити у пређашњем обрасцу

$$\varphi(z) \equiv 1\,, \qquad f(z) \equiv e^{z}\,.$$

Према томе се општи интеграл горње једначине изражава обрасцем

$$e^{-z} + \int \partial x \int f(x,y)\, \partial y + X + Y = 0.$$

Наведимо још другу једначину Е. Гурса

$$s + z^2 t + 2\,z\,q^2 = 0\,. \tag{5}$$

Она претставља тачан извод:

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(p + z^2 q) = 0\,.$$

Њен интеграл гласи:

$$p + z^2 q = X'',$$

где је X'' други извод произвољне функције X независно променљиве x.

онда интегралење по x даје тражени општи интеграл посматране једначине (3)

$$\int e^{-\int \varphi(z)\,dz}\,dz = X + Y,$$

где је Y друга произвољна функција само независно промењљиве y.

Једначина (3) је била генералисана од професора А. Демулена на овај начин8)

$$s = \frac{f'(z)}{f(z)}\,p\,q + f(z)\,F(x,y). \tag{4}$$

Заиста, ако ставимо да је

$$f(z) = e^{\int \varphi(z)\,dz},$$

то се једначина (4) изражава овако:

$$s = \varphi(z)\,p\,q + e^{\int \varphi(z)\,dz}\,F(x,y).$$

Полазећи од једначине (4) написаћемо је на овакав начин

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p}{f(z)}\right] = F(x,y).$$

Према томе лако се добија општи интеграл дате једначине (4)

---

1) *Bul. de la Société Math. de France.* (t. XXI, 1893 г.). Само у свом чланку г. А. Демулен ставља функцију $F(x, y)$ у облику $\sum_{i=1}^{n} X_i\ Y_i$.

парцијалним изводима једног од бинома $p \pm aq$, који претстављају нову непознату функцију.

Према томе се одређују два прва општа интеграла полазне једначине (1):

$$\left.\begin{aligned} p + a q &= 2 a f' (y + a x), \\ p - a q &= 2 a \varphi' (y - a x), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где f' и φ' означавају изводе произвољних функција, а коефицијенти су $2a$ уведени ради олакшице за идући рачун.

Пошто се оба интеграла (2) налазе у инволуцији, онда решавајући их по p и q може се лако извести тражени интеграл дате једначине (1) помоћу интеграљења одговарајућег тоталног диференцијала $dz = p\,dx + q\,dy$.

Али би се могао и друкчије саставити општи интеграл тиме што би се интегралила једна од једначина (2), које су парцијалне једначине првог реда. Полазећи, на пример, од прве једначине (2) одмах налазимо тражени интеграл

$$z = f(y + a x) + \psi (y - a x),$$

где су f и ψ две произвољне функције.

Као пример друге врсте груписања чланова узмимо једначину развојних површина

$$r t - s^2 = 0.$$

Напишимо је друкчије овако у облику функционалне детерминанте:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial q}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} & \dfrac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Пошто је она једнака нули, онда постоји зависност

$$q = f(p),$$

где f означава произвољну функцију.

У овој једначини променљиве су раздвојене.

Према томе ставимо

$$p = C, \qquad q = f(C),$$

где је C стална количина. Онда се општи интеграл једначине развојних површина изражава као скуп двеју једначина:

$$z = Cx + f(C)y + \varphi(C),$$

$$x + f'(C)y + \varphi'(C) = 0,$$

где је φ друга произвољна функција, а C сад игра улогу променљивог помоћног параметра.

За нови пример узмимо класичну Ајлерову једначину

$$r - t + \frac{2p}{x} = 0. \tag{3}$$

Лако ју је написати помоћу груписања чланова овако:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p + q + \frac{z}{x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p + q + \frac{z}{x}\right) + \frac{1}{x}\left(p + q + \frac{z}{x}\right) = 0.$$

Пошто је добијена једначина линеарна првог реда по новој непознатој функцији $p + q + \frac{z}{x}$, интеграл јој се пише овако

$$p + q + \frac{z}{x} = \frac{2}{x} f'(x + y),$$

где је f произвољна функција. Добијена је једначина опет парцијална линеарна једначина првог реда. Према томе се интеграл дате једначине (3) добија у облику

$$z = \frac{1}{x}\left[f(x+y) + \varphi(x-y)\right],$$

где је φ друга произвољна функција.

Узмимо новији пример из модерне теорије вероватноће

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{a'^2}{a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'}\right)\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

где су a' и a'' први и други извод дате функције a од једне независно променљиве количине t.

Лако је груписати чланове посматране једначине (4) на два различита начина овако:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} \pm i\,\frac{a'}{a}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \pm i\,\frac{a'}{a}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial t} \pm i\,\frac{a'}{a}\frac{\partial f}{\partial y}\right) +$$
$$+\left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial t} \pm i\,\frac{a'}{a}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

где горњим и доњим знацима одговарају две различите једначине. Према томе се интеграљење једначине (4) своди на интеграљење ова два система од по две једначине у сваком:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} \pm i\,\frac{a'}{a}\frac{\partial f}{\partial y} = u, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} \mp i\,\frac{a'}{a}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'}\right)u = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Интеграљење сваке од једначина друге врсте (5) одређује по једну вредност функције u, које ћемо означити са u_1 и u_2, а које одговарају горњем односно доњем знаку узете друге једначине (5). Према томе имамо:

$$u_1 = 2\,i \frac{a'}{a}\,\Phi'\,(y + i\log a),$$

$$u_2 = -\,2i \frac{a'}{a}\,\Psi'\,(y - i\log a),$$

где су Φ' и Ψ' ознаке двеју произвољних функција, а коефицијенти $2i$ и $-2i$ су уведени ради олакшице следећих рачуна.

Због тога се тражења функција одређује системом две сагласне линеарне једначине

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\,\frac{a'}{a}\,\frac{\partial f}{\partial y} = 2i\,\frac{a'}{a}\,\Phi'\,(y + i\log a),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - i\,\frac{a'}{a}\,\frac{\partial f}{\partial y} = -\,2i\,\frac{a'}{a}\Psi'(y - i\log a).$$

Одавде се добија, помоћу квадратуре, општи интеграл дате једначине (4) у веома простом облику:

$$f = \Phi\,(y + i\log a) + \Psi\,(y - i\log a)\,.$$

Проучимо сад обе у уводу поменуте једначине. Једначина праволиниских површина са директорном равни, коју ћемо узети управно на осу кота, гласи:

$$q^2\,r - 2\,p\,q\,s + p^2\,t = 0\,, \qquad (6)$$

Ова се једначина лако претставља у облику функционалне детерминанте

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{q}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{q}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 .$$

Према томе се добија једначина

$$\frac{p}{q} = \varphi(z),$$

са φ, произвољном функцијом од z. Али се ова једначина, множењем са q, своди на линеарну парцијалну једначину првог реда. Према томе тражени општи интеграл дате једначине (6) постаје

$$y + x\varphi(z) = \psi(z),$$

где је ψ друга произвољна функција.

Ако директорна раван праволиниске површине заузима произвољан положај у координатном систему, онда одговарајућа диференцијална једначина постаје

$$(B + Cq)^2 r - 2(A + Cp)(B + Cq)s + (A + Cp)^2 t = 0 , \quad (7)$$

где су коефициенти A, B и C сталне количине.

Пошто уведемо нову непознату функцију u, која је везана са старом функцијом везом

$$u = Ax + By + Cz,$$

једначина (7) постаје

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Но ова једначина има исти облик као и једначина (7).

Најзад, претпоставимо да је директорна раван паралелна оси z. Одговарајућа једначина праволиниских површина тада постаје

$$B^2 r - 2\,ABs + A^2 t = 0, \tag{8}$$

где су A и B стални коефицијенти.

Једначина (8) може се написати овако:

$$B \frac{\partial}{\partial x}(Bp - Aq) - A \frac{\partial}{\partial y}(Bp - Aq) = 0$$

и може се интегралити на један од два ова начина. Добијена једначина се заиста сматра или као линеарна по $(Bp - Aq)$, или се своди на Шарпијев систем.[4])

Према томе се општи интеграл дате једначине (8) изражава овако:

$$Bz = xf(Ax + By) + \varphi(Ax + By),$$

са две произвољне функције f и φ.

Приђимо сад једначини механичке теорије топлоте, која се такође налази код Дарбуа¹):

$$rt - s^2 + a^2 = 0 \tag{9}$$

где је a стални коефицијенат. Једначина (9) се може написати у два различита облика, и то:

$$\frac{\partial}{\partial x}(p \pm ay) \frac{\partial}{\partial y}(q \mp ax) - \frac{\partial}{\partial y}(p \pm ay) \frac{\partial}{\partial x}(q \mp ax) = 0.$$

---

4) *N. Saltykow — Equations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par un système de Charpit* (Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade, t. II, 1933, p. 66; t. III, 1934, p. 161).

Према томе се добијају два интеграла:

$$p + ay = \varphi'(q - ax),$$

$$p - ay = \psi'(q + ax)$$

где φ' и ψ' означавају изводе две произвољне функције φ и ψ.

Интеграљење полазне једначине (9) може да се изведе интеграљењем само једног од два добијена интеграла.

Узмимо на пример први интеграл.

Ако уведемо нову непознату функцију z_1 која је везана са старом једнакошћу

$$z_1 = z + axy,$$

онда ће први од добијених интеграла постати

$$p_1 = \varphi'(q_1 - 2ax),$$

где p_1 и q_1 означавају $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ односно $\frac{\partial z_1}{\partial y}$.

Пошто су у добијеној једначини промењљиве раздвојене, добија се непосредно потпуни интеграл

$$z_1 = -\frac{1}{2a}\varphi(C - 2ax) + Cy + C_1,$$

где C и C_1 означавају произвољне константе.

Саставимо сад одговарајући општи интеграл па се вратимо старим промењљивим количинама. Према томе општи интеграл посматране једначине (9) изражава се скупом двеју једначина:

$$z + axy = -\frac{1}{2a}\varphi(C - 2ax) + Cy + \theta(C),$$

$$-\frac{1}{2a}\varphi'(C - 2ax) + y + \theta'(C) = 0,$$

где је θ друга произвољна функција, а C игра улогу помоћног промењивог параметра.

Могу се, на други начин, искористити заједно оба посредна интеграла, који претстављају систем двеју једначина у инволуцији. Али за то би требало извући извод q изван аргумената произвољних функција. За то је довољно извести Лежандрову трансформацију узимајући промењиву q као нову независну промењиву количину.[5]) Ако је означимо са Y, онда ћемо, помоћу квадратуре и обрнуте трансформације, добити тражени општи интеграл у облику двеју једначина:

$$z = yY + \frac{1}{2a}[\psi(Y + ax) - \varphi(Y - ax)],$$

$$2ay = \varphi'(Y - ax) - \psi'(Y + ax),$$

где је Y помоћни промењиви параметар. Добијени интеграл може се лако претворити у пређашњи, чим будемо увели подесан нови промењиви параметар.

Узмимо сад за нови пример једначину Е. Гурса из области његових испитивања трансформације површина:

$$Xpt + rt - s^2 = 0, \tag{10}$$

где X означава неку функцију независне промењиве x.[6])

---

[5]) *Н. Салтиков — Примена тангенцијалних трансформација за интеграљење парцијалних једначина* (Глас Српске Краљевске Академије CLXX, први разред 83 А. Мат. Науке стр. 111).

[6]) American Journal of Mathematics, Vol. XIV и Cours d'Analyse, 4 éd. T. III. Paris 1927 „Exercices“ p. 88. Функција X је тамо замењена са $f'(x)$.

Ако ставимо

$$X = \frac{\mathcal{X}'}{\mathcal{X}}, \quad \mathcal{X} = e^{\int X dx},$$

онда се Гурсаова једначина (10) пише овако:

$$(\mathcal{X}'p + \mathcal{X}r)t - s \,.\, \mathcal{X} \,.\, s = 0,$$

а може се још и овако изразити

$$\frac{\partial(\mathcal{X}p)}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial(\mathcal{X}p)}{\partial y} = 0.$$

Према томе добија се веза

$$\mathcal{X}p = \varphi(q),$$

где је φ произвољна функција.

Пошто је ова једначина парцијална једначина првог реда, а сем тога интеграли се помоћу раздвајања променљивих количина, онда се тражени општи интеграл једначине (10) изражава скупом двеју једначина:

$$z = \varphi(C)\,\theta(x) + Cy + \psi(C),$$

$$\varphi'(C)\,\theta(x) + y + \psi'(C) = 0,$$

где се $\theta(x)$ изражава као функција X помоћу обрасца:

$$\theta(x) = \int e^{-\int X dx} dx,$$

а ψ означава другу произвољну функцију променљивог помоћног параметра C.

Сад ћемо проучити једну нову једначину, коју ми је професор предложио А. Демулен да проинтегралим

$$rt - s^2 + \varphi(z)\,(p^2 t - 2pqs + q^2 r) = 0, \qquad (11)$$

а чији је он интеграл пронашао на основу геометриских расматрања.

Да бисмо проинтегралили једначину (11) приметимо прво да постоје идентичности:

$$rt - s^2 \equiv p\left[\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{p}\right) - \frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{p}\right)\right],$$

$$p^2 t - 2pqs + q^2 r \equiv p^2\left[\,p\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{p}\right) - q\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{p}\right)\right].$$

Према томе може се једначина (11) написати на овај начин:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \varphi(z)\,p^2\right]\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{p}\right) - \left[\frac{\partial p}{\partial y} + \varphi(z)\,pq\right]\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{p}\right) = 0.$$

Ако сад поделимо оба члана добијене једначине са p и уведемо ознаку

$$e^{\int \varphi(z)\,dz} \equiv Z',$$

где је Z' функција само $z - ma$, онда посматрана једначина постаје

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(\log Z'\,p)\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\,(\log Z'\,p)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{p}\right) = 0.$$

Лако се види да одавде излази закључак да је

$$Z' p = f\left(\frac{q}{p}\right),$$

где је f произвољна функција.

Међутим добијена једначина припада једначинама, које се интеграле као Лагранжеве једначине са помоћним интегралом карактеристика

$$\frac{q}{p} = C,$$

где је C произвољна константа. Према томе општи интеграл посматране једначине (11) изражава се помоћу двеју једначина:

$$\int e^{\int \varphi(z)\,dz}\, dz = f(C)\,(x + Cy) + \psi(C),$$

$$f(C)\,y + f'(C)\,(x + Cy) + \psi'(C) = 0,$$

где су f и ψ две произвољне функције, а C игра улогу помоћног промењљивог параметра.

Метода груписања чланова дозвољава интеграљење више различитих једначина. Наведимо у ту сврху ова четири типа једначина:

$$r - t + \varphi(z)\,(p + q)\,f(p - q) = 0, \tag{12}$$

$$r - t + f(x, y, p - q) = 0, \tag{13}$$

$$r + 2s + t + \varphi(z)\,f(p + q) = 0, \tag{14}$$

$$r + 2s + t + f(x, y, p + q) = 0, \tag{15}$$

где су функције φ и f ма какве.

Г. А. Демулен ми је саопштио једну непосредну методу за интеграљење једначине (12) у случају, где је $f(p-q)\equiv p-q$, и једначине (14) у случају, где је $f(p+q)\equiv(p+q)^2$.

Да бисмо интегралили једначину (12) у најопштијој претпоставци, одузмимо и додајмо s првој страни једначине (12); тада претворена једначина постаје

$$\frac{1}{f(p-q)}\left[\frac{\partial}{\partial x}(p-q)+\frac{\partial}{\partial y}(p-q)\right]+\varphi(z)(p-q)=0.$$

Ако уведемо ознаке:

$$\int\frac{d(p-q)}{f(p-q)}\equiv\Phi(p-q),$$

$$\int\varphi(z)\,dz\equiv Z,$$

добијена ће једначина постати

$$\frac{\partial}{\partial x}[\Phi(p-q)+Z]+\frac{\partial}{\partial y}[\Phi(p-q)+Z]=0.$$

Ова је једначина линеарна и хомогена по парцијалним изводима првог реда нове непознате функције

$$\Phi(p-q)+Z.$$

Према томе она се лако интеграли и општи јој интеграл постаје

$$\Phi(p-q)+Z=\Psi(y-x), \tag{16}$$

где је Ψ произвољна функција.

Уведимо сад нове независно промењљиве количине ξ и η, које су везане са старим независно промењљивим количинама помоћу образаца

$$y-x=\xi,\qquad y+x=\eta. \tag{17}$$

Претворена линеарна парцијална једначина (16) доводи се сада на једну обичну диференцијалну једначину

$$\Phi\left(-2\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)+Z=\Psi(\xi).$$

Интеграљење добијене једначине зависи од облика функција Φ, Z и Ψ. Њен општи интеграл садржаће, уместо једне произвољне константе, једну произвољну функцију независно променљиве η. Општи интеграл полазне једначине (12) добиће се одавде помоћу обрнуте трансформације независно променљивих количина.

Што се тиче једначине (13), она се може написати овако:

$$\frac{\partial}{\partial x}(p-q)+\frac{\partial}{\partial y}(p-q)+f(x,y,p-q)=0. \tag{18}$$

и претставља линеарну парцијалну једначину првог реда по новој функцији

$$p-q.$$

Њено интеграљење зависи од интеграљења једне обичне једначине, која зависи од израза функције f. Ако будемо извршили наведено интеграљење, добија се нова линеарна парцијална једначина првог реда, чији општи интеграл претставља тражени интеграл једначине (13).

Узмимо, на пример, једначину

$$r-t+\frac{2(p-q)}{x-y}=0.$$

Ставимо је у овај облик:

$$\frac{\partial(p-q)}{\partial x}+\frac{\partial(p-q)}{\partial y}+\frac{2(p-q)}{x+y}=0.$$

Пошто је добијена једначина линеарна по $p-q$, онда њен општи интеграл гласи:

$$p-q=-\frac{2\,\Phi'(y-x)}{x+y},$$

где је Φ' произвољна функција аргумента $y-x$. Интеграљење ове једначине, која је парцијална линеарна по z, даје тражени општи интеграл полазне једначине у следећем облику

$$z=\frac{1}{x+y}\left[\Phi(y-x)+\psi(x+y)\right],$$

где је ψ друга произвољна функција по $x+y$.

Пређимо сад на једначину (14), која се може написати овако

$$\frac{p+q}{f(p+q)}\left[\frac{\partial}{\partial x}(p+q)+\frac{\partial}{\partial y}(p+q)\right]+\varphi(z)(p+q)=0.$$

Друкчије се ова једначина пише

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[U(p+q)+Z\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[U(p+q)+Z\right]=0, \qquad (19)$$

где су уведене ознаке:

$$U(p+q)\equiv\int\frac{(p+q)\,d(p+q)}{f(p+q)},$$

$$Z\equiv\int\varphi(z)\,dz.$$

Према томе општи интеграл једначине (19) гласи:

$$U(p+q)+Z=\Psi(y-x), \qquad (20)$$

где Ψ означава произвољну функцију.

Трансформација независно променљивих количина, према формулама (17), доводи једначину (20) на овај облик:

$$U\left(2\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)+Z=\Psi(\xi).$$

Добијена је једначина обична диференцијална једначина чије интеграљење зависи од природе функција U и Z. Према томе општи интеграл посматране једначине садржаће, уместо једне произвољне константе, произвољну функцију променљиве ξ. Обратна трансформација променљивих количина пружиће тражени општи интеграл једначине (14).

Најзад, једначина (15) може се изразити у овом облику

$$\frac{\partial}{\partial x}(p+q)+\frac{\partial}{\partial y}(p+q)+f(x, y, p+q)=0.$$

Добијена једначина је линеарна парцијална једначина првог реда по $p+q$, па ће се интегралити слично као и једначина (18)

На слични начин могу се интегралити још следеће две једначине

$$r-t+\varphi(z)(p-q)f(p+q)=0,$$

$$r-2s+t+\varphi(z)f(p-q)=0.$$

Навешћу још две једначине мога ученика Лава Н. Шчедрина. Прва је од њих

$$r+2ys+y^2t+yq+az=0,$$

где је a стални коефицијенат.

Груписањем чланова добија се парцијална једначина првог реда

$$\frac{\partial}{\partial x}(p+yq)+y\frac{\partial}{\partial y}(p+yq)=-az.$$

Ова се једначина доводи на систем Шарпија две парцијалне једначине првог реда са две функције·

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = - az.$$

Одговарајући систем обичних једначина

$$dx = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} = \frac{dz}{-az}$$

има три интеграла

$$y e^{-x} = C_1,$$

$$u^2 + az^2 = C_2,$$

$$\arcsin \sqrt{\frac{a}{az^2 + u^2}}\, z - \sqrt{a}\, x = C_3,$$

где су C_1, C_2 и C_3 три произвољне константе. Према томе тражени општи интеграл дате једначине постаје

$$z = f(e^{-x} y) \sin [\sqrt{a}\, x + \varphi (e^{-x} y)],$$

где су f и φ две произвољне функције.

Друга једначина г. Шчедрина

$$a^2 r + 2 ab s + b^2 t + 2 ap + 2 bq + cz = 0,$$

линеарна са сталним коефицијентима a, b и c, пише се у облику:

$$a \frac{\partial}{\partial x} (ap + bq) + b \frac{\partial}{\partial y} (ap + bq) + 2 (ap + bq) + cz. = 0.$$

Сада се добијена једначина доводи на систем Шарпија две парцијалне једначине првог реда са две функције:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=u,$$

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=-2u-cz.$$

Одговарајући систем обичних једначина гласи:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{-2u-cz}.$$

Интеграли овог система одређују се једначинама:

$$ay-bx=C_1,$$

$$z=C_2e^{\theta_1 x}+C_3e^{\theta_2 x},$$

и изводом последњег обрасца, где су C_1, C_2 и C_3 три произвољне константе, а

$$\theta_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-c}}{a}.$$

Према томе тражени општи интеграл добија облик:

$$z=e^{\theta_1 x}f(ay-bx)+e^{\theta_2 x}\varphi(ay-bx),$$

где су f и φ две произвољне функције.

VI. Интеграљење већег броја једначина другог реда које се често помињу

Интегралићемо у овом одељку више једначина, чијим се интеграљењем баве Goursat, Forsyth, Piaggio и неки други научници у својим делима, износећи Монж-Амперову методу интеграљења.

Проучимо прво неколико једначина, код којих Гурса препоручује да се примени Монж—Амперова теорија *(Goursat, Cours d'Analyse Mathématique,* 4^e éd. T. III, Paris 1927. Exercices p. 88). Узмимо једначину

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = 0. \qquad (1)$$

коју ћемо помоћу груписања чланова, написати овако:

$$x \frac{\partial}{\partial x}(xp + yq) + y \frac{\partial}{\partial x}(xp + yq) = xp + yq.$$

Општи интеграл ове линеарне парцијалне једначине првог реда, по непознатој функцији $xp + xq$, гласи

$$xp + yq = xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

где је f произвољна функција. Општи интеграл добијене једначине првог реда, која је опет ланеарна парцијална првог реда, изражава се овако:

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

и претставља општи интеграл дате једначине (1), где је φ друга произвољна функција.

Једначина, која се такође налази у уџбенику Е. Гурса

$$xyr + (x^2 + y^2)s + xyt - yp - xq = o, \qquad (2)$$

може се написати и овако:

$$y \frac{\partial}{\partial x}(x p + y q - 2 z) + x \frac{\partial}{\partial y}(x p + y q - 2 z) = o.$$

Због тога општи интеграл једначине (2) постаје

$$z = (y^2 - x^2) f\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\,(y^2 - x^2),$$

где f и φ означавају две произвољне функције.

Једначина познатог проблема Осијана Бонеа[7])

$$x^2 r - y^2 t = 0 \tag{3}$$

може се лако написати и овако:

$$x \frac{\partial}{\partial x}(x p + y q - z) - y \frac{\partial}{\partial y}(x p + y q - z) = 0.$$

Према томе општи интеграл једначине (3) добија се у облику

$$z = f\,(x y) + x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

са две произвољне функције f и φ.

Проучимо још Бертранову једначину

$$x^2 r + 2 x y s + y^2 t + x p + y q = n^2 z, \tag{4}$$

која се интеграли помоћу свођења на систем једначина Шарпија,[8]) а може се у исто време интегралити и помоћу групи-

---

[7]) *G. Darboux.* — *Théorie des Surfaces,* t. I. p. 246.

[8]) Види [4]).

сања чланова овако:

$$x\frac{\partial}{\partial x}(xp+yq+nz)+y\frac{\partial}{\partial y}(xp+yq+nz)=$$

$$=n(xp+yq+nz).$$

Према томе општи јој интеграл гласи:

$$z=x^{n}f\left(\frac{y}{x}\right)+x^{-n}\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Проучимо сад једначину

$$xy^3r-yx^3t+x^3q-y^3p=0, \qquad (5)$$

која одмах добија облик

$$y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{x}+\frac{q}{y}\right)-x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{x}+\frac{q}{y}\right)=0.$$

Према томе ове две функције

$$x^2+y^2, \quad \frac{p}{x}+\frac{q}{y},$$

везане су једнакошћу, која се пише овако:

$$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}=2f'(x^2+y^2),$$

где је f' произвољна функција.

Ако извршимо интеграљење добијене линеарне парцијалне једначине првог реда, добијамо општи интеграл једначине (5)

$$z = f(x^2 + y^2) + \varphi(x^2 - y^2),$$

где је φ друга произвољна функција.

Проинтегралимо сада једначину

$$xy(r - t) + (y^2 - x^2)s + k(yp - xq) = 0,$$

која се може написати овако:

$$x\frac{\partial}{\partial x}(yp - xq) + y\frac{\partial}{\partial y}(yp - xq) + (k - 1)(yp - xq) = 0.$$

Сматрајући ову једначину као линеарну по $yp - xq$, добијамо њен општи интеграл

$$yp - xq = \frac{1}{x^{k-1}} f\left(\frac{y}{x}\right),$$

где је f произвољна функција. Интегралећи одговарајући систем обичних једначина

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{\frac{1}{x^{k-1}} f\left(\frac{y}{x}\right)},$$

налазимо његове интеграле:

$$x^2 + y^2 = C_1,$$

$$z - (x^2 + y^2)^{\frac{1-k}{2}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_2,$$

где се функција φ изражава помоћу f овако:

$$\varphi(u) \equiv \int f(u)(1 + u^2)^{\frac{1-k}{2}} du.$$

Према томе тражени општи интеграл полазне једначине добија израз:

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{1-k}{2}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(x^2 + y^2),$$

где су φ и ψ две произвољне функције.

Најзад, узмимо једначину

$$r + y = t + x \tag{6}$$

која се налази у уџбеницима Forsyth-a и Piaggio-a. Ова се једначина доводи, помоћу груписања чланова, на један од два облика:

$$r \pm s - x \mp (s \pm t \mp y) = 0 .$$

Добијене једначине се пишу иначе овако:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p \pm q - \frac{x^2 \pm y^2}{2}\right) \mp \frac{\partial}{\partial y}\left(p \pm q - \frac{x^2 \pm y^2}{2}\right) = 0,$$

где се морају узети заједно или горњи или доњи знаци. Интеграљење обеју написаних једначина доводи до два прва општа интеграла

$$p + q = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 2f'(x + y),$$

$$p - q = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2\varphi'(x - y),$$

где f' и φ' означавају производе произвољних функција f и φ, а коефицијенат 2 је уведен као упрошћење ради следећих рачуна.

Добијени обрасци дају:

$$p = \frac{x^2}{2} + f' + \varphi',$$

$$q = \frac{y^2}{2} + f' - \varphi'.$$

Према томе, помоћу једне квадратуре, добија се општи интеграл дате једначине (6)

$$z = \frac{1}{6}(x^3 + y^3) + f(x + y) + \varphi(x - y)$$

са две произвољне функције f и φ.

Наведимо још три једначине, чији коефицијенти зависе од парцијалних извода првог реда непознате функције, и то:

$$z(r - t) = p^2 - q^2, \tag{7}$$

$$q^2 r - p^2 t = 0, \tag{8}$$

$$(1 + pq + q^2) r + (q^2 - p^2) s - (1 + p^2 + pq) t = o. \tag{9}$$

Једначина (7) (Forsyth, v. IV, стр. 219, Ex. 2) припада типу једначине (12) коју смо навели у V одељку ове расправе. У исто време посматрана једначина (7) може се написати и овако:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p+q}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p+q}{z}\right) = 0.$$

Лако је добијену парцијалну једначину узастопно два пута проинтегралити. Према томе општи интеграл једначине (7) изражава се овако.

$$z = f(x+y) \,.\, \varphi(x-y)\,,$$

где су f и φ две произвољне функције.

Што се тиче једначине (8), њој се може дати овај облик:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(pq) - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(pq) = 0\,.$$

Према томе добијемо први општи интеграл

$$pq = f(z)\,,$$

са произвољном функцијом f. Потпуни интеграл ове једначине се добија по Лагранжовој методи, уводећи његов интеграл карактеристика:

$$\frac{p}{q} = C\,,$$

где је C произвољна константа. Због тога се општи интеграл полазне једначине (8) изражава скупом двеју једначина:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} = \sqrt{C}\,x + \frac{1}{\sqrt{C}}\,y + \varphi(C)\,,$$

$$\frac{x}{2\sqrt{C}} - \frac{y}{2\sqrt{C^3}} + \varphi'(C) = 0\,,$$

где је φ друга произвољна функција, а C игра улогу помоћног променљивог параметра.

Најзад једначину (9), која се налази у Traité d'Analyse од Lacroix, 2 éd., t. II, стр. 586, n° 755, написаћемо овако:

$$[1 + q\,(p+q)]\,\frac{\partial}{\partial x}\,(p+q) - [1 + p\,(p+q)]\,\frac{\partial}{\partial y}\,(p+q) = 0.$$

Добијену једначину ћемо написати на овај новији начин

$$\frac{\partial}{\partial y}[x+y+z(p+q)]\frac{\partial}{\partial x}(p+q)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}[x+y+z(p+q)]\frac{\partial}{\partial y}(p+q)=0,$$

чији је општи интеграл

$$x+y+z(p+q)=f(p+q), \tag{10}$$

где је f произвољна функција.

Да бисмо проинтегралили једначину (10) трансформисаћемо је овако. Ставимо

$$p+q=x_1. \tag{11}$$

Сматрајући x_1 као сталну количину, лако добијамо потпуни интеграл једначине (11):

$$z=(x_1-y_1)\,x+y_1\,y+z_1,$$

где су y_1 и z_1 две нове произвољне константе. Узмимо сад наведену једнакост као основну формулу тангенцијалне трансформације, сматрајући x_1 и y_1 као нове независно промењиве количине, а z_1 као нову непознату функцију[8]. Онда претворена једначина (10) постаје

$$(x_1^2+2)\,p_1+(x_1\,y_1+1)\,q_1=x_1\,z_1-f(x_1),$$

где p_1 и q_1 означавају респективно нове изводе $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial z_1}{\partial y_1}$.

---

[8] *Н. Салтиков. — Примена тангенцијалних трансформација за интеграљење парцијалних једначина* (Глас Српске Краљевске Академије CLXX. Први разред 83 А. Мат. Науке, стр. 111).

Општи интеграл добијене једначине гласи

$$z_1 = \sqrt{x_1^2 + 2} \left\{ \int \frac{f(x_1)\, d x_1}{(x_1^2 + 2)^{3/2}} + \varphi \left[\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + 2}} + \int \frac{d x_1}{(x_1^2 + 2)^{3/2}} \right] \right\},$$

где φ означава другу произвољну функцију.

Према томе општи интеграл полазне једначине (9) добија се помоћу обрнуте трансформације променљивих количина.

За последњи пример узмимо једначину

$$qr + (zq - p) s - zpt = 0,$$

којом се Е. Гурса више пута бавио (Bul. de la Société Math. de France, t. XXIII, 1895; Leçons sur l'intégration d. éq., aux d. p. du second ordre T. I. p. 146; Cours d'Analyse Math., 4 éd., T. III. 1927).

Одмах се види да се може посматрана једначина претставити друкчије, помоћу функционалне детерминанте, овако:

$$D\left(\frac{z,\, p + zq}{y, x}\right) = 0.$$

Према томе имамо

$$p + zq = \frac{1}{f''(z)},$$

где је $f''(z)$ други извод произвољне функције f.

Општи интеграл добијене линеарне једначине, а истовремено и полазне Гурсаове једначине, гласи:

$$f(z) - zf'(z) + y = \varphi[x - f'(z)],$$

где је φ друга произвољна функција.

VII. Генералисање изнесених метода

Ајлер је у свом чувеном делу Institutiones Calculi Integralis, T. III, показао како се може доћи од интеграљења најпростијих једначина до интеграљења најкомпликованијих. За то може да послужи једначина жице сталне густине која трепери. Одмах иза решења овог проблема Ајлер интеграли парцијалну једначину[9])

$$t - P^2 r = 0\,, \tag{1}$$

где је P функција промењљивих x и y, која задовољава услов

$$\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial P}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Благодарећи овом услову сад се може лако извести до краја интеграљење посматране једначине (1). Заиста према услову (2) једначина (1) се може написати као једначина првог реда овако

$$\frac{\partial u}{\partial y} - P\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

где је уведена ознака

$$\frac{\partial z}{\partial y} + P\frac{\partial z}{\partial x} = u. \tag{4}$$

Две једначине (2) и (3) претстављају систем Шарпија[4]) са две функције P и u. Одговарајући систем обичних Шарпијевих једначина гласи:

$$dy = \frac{dx}{-P} = \frac{dP}{0} = \frac{du}{0}\,.$$

---

[9]) *Institutiones Calculi Integralis*, V. III, p. 193. Probl. 49.

Општи интеграл овог система изражава се помоћу једначина

$$P = C_1, \qquad u = C_2, \qquad x + Py = C_3,$$

где су C_1, C_2 и C_3 три произвољне константе. Према томе општи интеграл Шарпијевог система једначина (2) и (3) постаје

$$P = \varphi(\omega), \qquad u = \psi(\omega), \tag{5}$$

где се ω одређује једнакошћу

$$\omega = x + \varphi(\omega)\, y, \tag{6}$$

а φ и ψ означавају произвољне функције.

Приђимо сад интеграљењу линеарне једначине (4) смењујући у њој P и u према обрасцима (5). Сем тога трансформишимо једначину (4) тако што ћемо увести, уместо x, нову независно промењљиву количину ω, која је везана са x обрасцем (6). Трансформисана једначина (4) постаје

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{2\varphi}{1 - y\varphi'} \frac{\partial \theta}{\partial \omega} = \psi, \tag{7}$$

где са θ означавамо израз, који добија функција z после увођења нових независно промењљивих количина ω и y.

Добијена линеарна парцијална једначина првог реда (T) има општи интеграл, који се изражава обрасцем

$$z = \left[\int \frac{d\omega}{2\sqrt{\varphi(\omega)}} - y\sqrt{\varphi(\omega)}\right] \int \frac{\psi(\omega)\, d\varphi(\omega)}{\left[\varphi(\omega)\right]^{2/3}} +$$

$$+ \int \frac{\psi(\omega)}{2\varphi(\omega)} \left[1 - \frac{\varphi(\omega)}{2\sqrt{\varphi'(\omega)}} \int \frac{d\omega}{\sqrt{\varphi(\omega)}}\right] d\omega +$$

$$+ f\left[y\sqrt{\varphi(\omega)} - \int \frac{d\omega}{2\sqrt{\varphi(\omega)}}\right],$$

где је f друга произвољна функција, а ω игра улогу промењљивог параметра, који се одређује условом (6); што се тиче произвољне функције φ, она одређује општи облик коефицијента P дате једначине (1), за који се може извршити интеграљење.

Најзад Ајлер даје[10]) и други пример генералисања проблема интеграљења једначине жице која трпери. За то се посматра једначина

$$t - P^2 r + Q q + \left(P Q + \frac{\partial P}{\partial y} - P \frac{\partial P}{\partial x}\right) p = 0 , \tag{8}$$

где су P и Q ма какве функције независно промењљивих x и y.

Ми ћемо свести једначину (8) на систем двеју једначина:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - P \frac{\partial u}{\partial x} + Q u = 0 , \tag{9}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} + P \frac{\partial z}{\partial x} = u . \tag{10}$$

Према томе, прво, треба проинтегралити по u једначину (9) да бисмо нашли израз функције u. Смењујући тако нађено u у једначини (10), одредићемо општи интеграл једначине (8) помоћу интеграљења линеарне једначине (10).

Изложена Ајлерова испитивања претстављају прави увод у Лежандрово дело интеграљења линеарних парцијалних једначина другог реда.

Као што је добро познато ова теорија сједињује и упрошћава испитивања Монжа и Дарбуа за интеграљење посматраних линеарних једначина[11]).

Сад се поставља проблем изналажења неке нове методе интеграљења, која би морала уопштити обе наведене методе.

---

[10]) Ibid., p. 202. Prob. 50.

[11]) *Н. Салтиков — Теорија линеарних парцијалних једначина другог реда са једном непознатом функцијом* (Глас Српске Краљевске Академије CLXV први Разред 81 А. Мат. Науке, стр. 1)

[11]) *N. Saltykow — Note sur la méthode de Legendre pour intégrer les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre* (Travaux du deuxième Congrès des Mathématiciens slaves. Prague 1934)