СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

# ГЛАС CLXXIX

ДРУГИ РАЗРЕД

ФИЛОСОФСКО-ФИЛОЛОШКЕ, ДРУШТВЕНЕ
И ИСТОРИСКЕ НАУКЕ

91

3

БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

# Прилог основама опште Аритметике

БЕОГРАД 1938

Цена 5 дин.

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

# ГЛАС CLXXIX

ДРУГИ РАЗРЕД

ФИЛОСОФСКО-ФИЛОЛОШКЕ, ДРУШТВЕНЕ
И ИСТОРИСКЕ НАУКЕ

91

3

БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

# Прилог основама опште Аритметике

БЕОГРАД 1938

Цена 5 дин.

# Прилог основама опште Аритметике

ОД
Др-а БРАНИСЛАВА ПЕТРОНИЈЕВИЋА

(Примљено на скупу Академије философских наука 31-X-1938)

Општом Аритметиком називамо науку о бројевима, која бројеве означава општим знацима (писменима). Њу делимо на чисту Аритметику н на Алгебру. Чиста Аритметика бави се природним целим бројевима, а Алгебра проширује област природних целих бројева увођењем нових врста бројева. Ми ћемо у следећем најпре (у Првом одељку) изложити укратко основне ставове чисте Аритметике, па ћемо затим (у Другом одељку) додирнути и неколика питања из Алгебре.

I

Природни цели бројеви дају се поређати у низ, који почиње са јединицом, у коме је сваки следећи број за један већи од претходног и који се продужује у бесконачност.

Природни цео број да̂ се дефинисати на два начина: или као спој јединица, или као спој јединице са претходним бројем. Прву дефиницију називамо *индепендентном,* јер се у њој сваки цео број схвата као посебан индивидуум независан од осталих целих бројева, док другу дефиницију називамо *рекурентном,* јер у њој дефиниција једног целог броја претпоставља дефиницију њему претходећег броја у низу природних целих бројева. У првој дефиницији јединица је (недељиви) елемент целих бројева, а два је први прави број, док је у другој дефиницији јединица и елемент броја и први број (један).

Природне целе бројеве:

|, ||, |||, ||||, |||||, |||||| и т. д.

означавамо цифрама:

1, 2, 3, 4, 5, 6 и т. д.

У почетку чисте Аритметике сваки такав број морао би се означити посебном цифром, јер се бројни системи дају увести тек по дефиницији аритметичких операција. Срећом наш десетни бројни систем означава првих девет бројева посебним цифрама, а на њима се природа основних аритметичких операција дâ потпуно утврдити и илустровати.

Аритметичке операције у области природних целих бројева само су оне могућне и допуштене, чији је резултат опет један природан цео број. Њих делимо на директне и инверзне. Директне су операције сабирање, множење и степеновање, а индиректне одузимање, делење, логаритмовање и кореновање. Свака се директна операција дâ дефинисати или индепендентно или рекурентно.

Индепендентна дефиниција сабирања гласи: *сабрати два цела броја значи наћи трећи, који у себи садржи онолико јединица колико их има у оба броја,* тј.

$$a+b=a+(\underbrace{1+1+1+\cdot\cdot\cdot\cdot+1}_{b})=(\underbrace{1+1+1+\cdot\cdot\cdot\cdot+1}_{a})+$$

$$+(\underbrace{1+1+\cdot\cdot\cdot\cdot+1}_{b})=\underbrace{1+1+1+1+1+1+\cdot\cdot\cdot\cdot+1}_{c}\cdot$$

Рекурентна дефиниција сабирања гласи: *сабрати два цела броја значи додати један од њих (addendus) другом (augendus-у) тако да се јединице оног једна по једна додају овоме,* т ј.

$$a+b=a+(n+1)=(a+n)+1=\cdot\cdot\cdot\cdot=[\{(a+1)+1\}+1]+1+\ldots$$

Рекурентна дефиниција сабирања изражена је формулом:

$$a+b=a+(n+1)=(a+n)+1\,,$$

по којој се сабирање бројева $a$ и $b$ своди на сабирање бројева $a$ и $n$ и т. д., док се не дође до броја $a+1$ (т. ј. до рекурентне дефиниције броја за један већег од augendus-a).

Упоређењем ових двеју дефиниција да̂ се лако увидети, да се сабирање као рачунска операција да̂ извести само на основу друге дефиниције.[1])

Сабирање је подложно овим трима основним законима:

1. закону комутације $a + b = b + a$,

2. закону асоцијације $a + (b + c) = (a + b) + c$, и

3. „ „ $(a + b) + c = (a + c) + b$.

Прва два закона не дају се, строго узев, доказати индепендентно већ само рекурентно, тзв. математичком индукцијом (закључивањем од $n$ на $n + 1$).

Да би се видело како је рекурентни доказ једног по изгледу тако простог става као што је закон комутације компликован, ја ћу тај доказ извести овде у потпуности.

Најпре доказујемо математичком индукцијом закон комутације $1 + a = a + 1$ овако.

На основу рекурентне дефиниције сабирања имаћемо:

$$1 + (b + 1) = (1 + b) + 1 .$$

[1]) Сабирање два посебна цела броја, нпр. бројева 7 и 5, изводи се, строго логички узев, овако.

Најпре ћемо, применом формуле $a + (n + 1) = (a + n) + 1$ добити следећи регресивни низ:

$$7 + 5 = 7 + (4 + 1) = (7 + 4) + 1 ,$$

$$7 + 4 = 7 + (3 + 1) = (7 + 3) + 1 ,$$

$$7 + 3 = 7 + (2 + 1) = (7 + 2) + 1 ,$$

$$7 + 2 = 7 + (1 + 1) = (7 + 1) + 1 .$$

Па затим применом њеног резултата следећи прогресивни низ:

$$7 + 1 = 8$$

$$(7 + 1) + 1 = 8 + 1 ,$$

$$(8 + 1) + 1 = 9 + 1 ,$$

$$(9 + 1) + 1 = 10 + 1 ,$$

$$(10 + 1) + 1 = 11 + 1 ,$$

$$11 + 1 = 12 .$$

Претпоставимо даље да закон важи за $a = n$, т. ј. да је $1 + n = n + 1$.

$$\text{Из} \quad 1 + n = n + 1$$

следоваће непосредно да је:

$$(1 + n) + 1 = (n + 1) + 1,$$

а из $1 + (b + 1) = (1 + b) + 1$ да је:

$$(1 + n) + 1 = 1 + (n + 1).$$

Према томе је:

$$1 + (n + 1) = (n + 1) + 1, \text{ ако је } 1 + n = n + 1.$$

Како је за $n = 1$, $1 + 1 = 1 + 1$, биће и за $n = 2$, $1 + 2 = 2 + 1$, за $n = 3$, $1 + 3 = 3 + 1$, и т. д. Према томе биће уопште $1 + a = a + 1$.

Затим доказујемо сам општи закон комутације $a + b = b + a$ овако.

Претпоставимо да је доказан закон комутације $1 + a = a + 1$ и да важи као рекурентна дефиниција сабирања израз $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

Претпоставимо даље, да закон важи за $b = n$, т ј. да је $a + n = n + a$.

Тада ће из

$$a + n = n + a$$

следовати непосредно да је:

$$(a + n) + 1 = (n + a) + 1$$

Даље ће из

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \text{ и } 1 + a = a + 1$$

следовати с једне стране:

$$(a+n)+1=a+(n+1),$$

а с друге:

$$(n+a)+1=n+(a+1)=n+(1+a)=(n+1)+a.$$

Према томе биће:

$$a+(n+1)=(n+1)+a,$$

ако је $a+n=n+a$.

Како је за $n=1$, $a+1=1+a$, биће за $n=2$, $a+2=$ $=2+a$, за $n=3$, $a+3=3+a$ и т. д., дакле уопште $a+b=b+a$[1].)

Закон асоцијације $(a+b)+c=(a+c)+b$ следује аналитички из прва два закона.[2])

Индепендентна дефиниција множења изражена је формулом:

$$a\cdot b=a\cdot\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{b}=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{b\text{ пута}},$$

[1]) Гррњи докази узети су из пишчевог француског чланка *„Les lois de l'addition arithmétique et le principe de l'induction mathématique"*, штампаног у „Revue générale des Sciences", 1924. Упор. и пишчеве *„Основе Логике"*, 1932, стр. 211.

Да је индепендентни доказ закона комутације немогућ, могло би се показати на следећи начин. Претпоставимо да је $a>b$ и $a=b+c$. Тада је $a+b=(b+c)+b=b+(c+b)$. Да би могло да се стави $c+b=a$ (чиме би закон био доказан) требало би да је $c+b=b+c$, требало би дакле да већ важи закон комутације.

[2]) Доиста из та два закона имаћемо с једне стране:

$$a+(b+c)=a+(c+b)=(a+c)+b,$$

а с друге: $a+(b+c)=(a+b)+c,$

биће дакле: $(a+b)+c=(a+c)+b.$

а рекурентна формулом:

$$a \cdot b = a \cdot (n + 1) = a \cdot n + a = \cdot \cdot \cdot \cdot =$$

$$= [(a \cdot 1 + a) + a] + a + \cdot \cdot \cdot \cdot = \underbrace{a + a + a + \cdot \cdot \cdot \cdot + a}_{b \text{ пута}},$$

обе дефиниције воде дакле истом крајњем резултату.

Стога се и основни закони множења, а то су:

1. закон комутације $a \cdot b = b \quad a$,
2. „ дистрибуције $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
3. „ „ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,
4. „ асоцијације $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ и
5. „ „ $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$,

(сем последњег који аналитички следује из закона комутације и првог закона асоцијације) дају доказивати како индепендентно тако и рекурентно.

Закон комутације $a \cdot b = b \cdot a$ доказује се индепендентно овако:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \cdot + a}_{b \text{ пута}} = b \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{1 + 1 + \cdot \cdot \cdot \cdot + 1}^{a} \\ + \overbrace{1 + 1 + \cdot \cdot \cdot \cdot + 1}^{a} \\ + \overbrace{1 + 1 + \cdot \cdot \cdot + 1}^{a} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ + \underbrace{1 + 1 + \cdot \cdot \cdot + 1}_{a} \end{array} \right. = b \cdot a,$$

а закон дистрибуције $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ овако:

$$a\,(b + c) = \underbrace{a + a + a + \cdot \cdot \cdot \cdot + a + a + a + a + \cdot \cdot \cdot \cdot + a}_{b\,+\,c \text{ пута}} =$$

$$= \underbrace{(a + a + a + \cdot \cdot \cdot \cdot + a)}_{b \text{ пута}} + \underbrace{(a + a + a + a + \cdot \cdot \cdot \cdot + a)}_{c \text{ пута}} =$$

$= a \cdot b + a \cdot c$.[4])

Индепендентна дефиниција степеновања изражена је формулом:

$$a^b = a^{\overbrace{1+1+1+\cdot\cdot\cdot+1}^{b}} = a \cdot a \cdot a \quad \cdot \cdot \cdot a\,,$$

а рекурентна формулом:

$$a^b = a^{n+1} = a^n \cdot a = \cdot \cdot \cdot \cdot = a \cdot a \cdot a \cdot \cdot \cdot \cdot a\,,$$

које воде истом резултату.

Стога се од четири основна закона којима подлежи степеновање, а то су

1. закон дистрибуције $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$,
2. „ „ $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$,
3. „ асоцијације $(a^b)^c = a^{bc}$ и
4. „ „ $(a^b)^c = (a^c)^b$,

прва три дају доказати како индепендентно тако и реку-

---

[4]) Упор. *E. Schröder*, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Erster Band, 1873 (стр. 75 и 85).

Закон комутације множења да̂ се индепендентно доказати и овако:

$$a \cdot b = \underbrace{(1 + 1 + 1 + \cdot \cdot \cdot + 1)}_{a} \cdot b = \underbrace{b + b + b + \cdot \cdot \cdot + b}_{a \text{ пута}} = b \cdot a$$

(упор. *M. Stuvvaert*, Introduction à la Méthodologie mathématique, 1923, p. 24; види и *Мочник-Димић*, Аритметика и Алгебра, 1909, стр. 16).

рентно, док четврти следује аналитички из трећег и закона комутације за множење.[5])

Закон асоцијације $(a^b)^c = a^{bc}$ доказује се индепендентно овако:

$$(a^b)^c = \underbrace{a^b \cdot a^b \cdot a^b \cdot \ldots \cdot a^b}_{c \text{ пута}} = a^{\overbrace{b+b+b+\ldots+b}^{c \text{ пута}}} = a^{bc}.^{6)}$$

Одузимање је инверзна операција сабирања. У сабирању додали смо датом броју $a$ јединице броја $b$; у одузимању одузимамо од збира $c$ додате јединице броја $b$. Према томе је $c - b = a$, одн. $c - (\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{b}) = \{[(c-1)-1]-1\} - 1 \ldots$, дефиниција одузимања. Али поред ове овако дефинисане инверзне операције сабирања, постоји логички још једна таква операција, коју можемо изразити формулом $c \smile a = b$. Ову другу инверзну операцију сабирања сводимо на прву само зато што за сабирање важи закон комутације. Тиме наиме што је $a + b = b + a$, $c \smile a$ постаје $= c - a$ (јер ако из $a + b = c$ следује $c - b = a$, онда ће из $b + a = c$ следовати $c - a = b$).

Дељење је инверзна операција множења. У множењу смо дати број $a$ узели као сабирак $b$ пута; у дељењу од производа $c$ одузимамо број $b$ све дотле док се $c$ потпуно не исцрпе. Према томе, ако је $a \; b = c$, биће $\frac{c}{b} = a$, одн. $c - (\underbrace{b+b+b+\ldots}_{x \text{ пута}})$ тако да буде $c = (\underbrace{b+b+b+\ldots}_{x \text{ пута}})$, дефиниција дељења.

[5]) Да закон комутације $a^b = b^a$ не важи за степеновање, да̂ се индиректно закључити овако. Кад би тај закон важио, његов рекурентни доказ морао би поћи од закона $1^a = a^1$. Како је пак овај последњи нетачан, не може ни он бити тачан.

Код закона асоцијације $a^{(b^c)} = (a^b)^c$, који такође не важи за степеновање, истина $a^{(b^1)}$ равно је $(a^b)^1$, али већ $a^{(b^2)}$ није више $= (a^b)^2$.

[6]) Упор. *E. Schröder*, н. н. м., стр. 105.

И овде поред $\frac{c}{b} = a$ постоји и $c/a = b$. Како и при множењу важи закон комутације, то и овде другу инверзну операцију сводимо на прву. Тима наиме што је $a \cdot b = b \cdot a$, $c/a$ постаје $= \frac{c}{a}$ (јер ако из $a \cdot b = c$ следује $\frac{c}{b} = a$, онда ће и из $b \cdot a = c$ следовати $\frac{c}{a} = b$).

Како за степеновање не важи закон комутације, његове две инверзне операције не могу се свести једна на другу. Али као што се примарно делење да̂ схватити као одузимање, тако се логаритмовање да̂ схватити као делење. Ако је $a^b = c$ биће $\log_a c = b$, а експонент $b$ моћи ће се одредити формулом $\underbrace{\{[(c:a):a]:a\}:a \cdot}_{x \text{ пута}} = 1$, т.ј. делењем логаритманда базом све дотле док количник тога делења не постане јединица (или, друкчије речено, све дотле докле је делење могуће). Кореновање пак да̂ се схватити само као инверзна операција којом се из познатог степена и познатог изложитеља тражи непознати корен, т.ј. ако је $a^b = c$ онда је $\sqrt[b]{c} = a$ (и корен се у најпростијим случајевима одређује директним обртањем степеновања).

Наначлетку треба напоменути, да је у области природних целих бројева одузимање изводљиво само ако је $a > b$ (или, друкчије речено, ако је $c = b + n$, где је $n$ редом $= 1, 2, 3,$ и т. д.); делење само ако је $c = bn$; кореновање ако је $c = n^b$; а логаритмовање ако је $c = b^n$.[7])

---

[7]) Овде ћемо додирнути и питање виших аритметичких операција.

Прву вишу директну операцију (коју пожемо назвати *йрво више сшейеновање)* обележавамо изразом ${}^b a = c$. Ближе испитивање показало би нам, да овај израз има све већи број вредности што је $b$ веће (тако ${}^3 3$ има две разне вредности, јер ${}^{2+1)}3 \neq 3^{(1+2)}$, већ је ${}^{(2+1)}3 = (3^3)^3 = 3^9$, а ${}^{(1+2)}3 = 3^{(3^3} = 3^{27}$; ${}^4 3$ има пет разних вредности; ${}^5 3$ има 14 разних вредности, и т. д.). Такво испитивање показало би нам даље, да је уопште ${}^{(n+1)}a \neq {}^{(1+n)}a$, јер, ако се $n$ стави редом $= 1, 2, 3, 4$ и т. д., биће ${}^{(n+1)}a = ({}^n a)^a = a^{(a^n)}$, док је ${}^{(1+n)}a = (a)^n a = a \underbrace{\left\{ a[a^{\cdot^{\cdot^{\cdot (a^a)}}}\right.}_{n \text{ пута}}$.

## II

Прво проширење области природних целих бројева почиње увођењем нуле, и с тим увођењем почиње област Алгебре. Нулу дефинишемо као разлику између два једнака природна цела броја: $a - a = 0$. Док у области чисте Аритметике та разлика не постоји (што је једино са строго логичког гледишта правилно), у области Алгебре ми је замишљамо као један нарочити број, који је за јединицу мањи од 1 (т. ј. стављамо $1 - 1 = 0$).

Полазећи од ове последње једнакости Алгебра затим уводи још једно ново проширење бројне области, наиме негативне целе бројеве. Ако се од 1 дâ одузети један, зашто се од 1 неби могло одузети и два, и три и т. д. На тај начин постају изрази: $1 - 2 = -1$, $1 - 3 = -2$, . . . . и т. д., дакле низ негативних целих бројева:

$$-1, -2, -3, \ldots \ldots -n, \ldots \ldots$$

Питање настаје, какав је однос низа природних целих бројева према нули и низу негативних целих бројева? Овај однос могуће је схватити на два битно различна начина.

Или ће се за природне целе бројеве тврдити, да су *већи* од нуле и као такви (насупрот негативним, који су мањи од нуле) позитивни. Или ће се за природне целе бројеве тврдити, да као такви нису *ни већи ни мањи* од нуле, да дакле нису ни позитивни ни негативни, већ апсолутни у правом смислу.

Прва виша директна операција испитивана је досада врло мало (остале скоро нимало). О њој види *E. Schröder*, н. н. м. стр. 111 и 112, а нарочито расправу *„Zur vierten Rechnungsstufe"* од *H. Gerlach-a*, штампану у Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 1882. Герлах је увео израз $^{b}a = c$, али он тај израз идентифицира потпуно са нашим изразом $^{(1+n)}a = \underbrace{a^{(a^{(a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}_{n \text{ пута}}$ тврдећи (заједно са Шредером и другим аритметичарима), да једино ова вредност нашег израза $^{b}a = c$ претставља праву четврту директну операцију. Он даље уводи и обе инверзне операције ове овако дефинисане директне операције (н. н. м. стр. 425).

У првом случају позитивни број преставља апсолутну вредност негативног:

$$|-a| = +a,$$

док је у другом апсолутна вредност једног позитивног и њему одговарајућег негативног броја иста:

$$|+a| = |-a|.$$

У првом случају негативни број је резултат одузимања позитивног броја (који је у исто доба апсолутан само у томе смислу што се апстрахира од његове позитивности) од нуле:

$$0-(+a) = 0-a = -a,$$

док је у другом случају негативност једног броја независна од операције одузимања (као што је позитивност независна од операције сабирања), и апсолутни број позитиван кад га замислимо да је већи, а негативан кад га замислимо да је мањи од нуле:

$$+a > 0 \,(\text{одн. } +1 > 0) \text{ и } -a < 0 \,(\text{одн. } -1 < 0).$$

Ми ћемо у следећем најпре извести основне формуле сабирања, одузимања и множења два броја у првом, па затим сабирања и множења у другом схватању[8]), па ћемо напослетку (у завршној примедби) побројати укратко добре стране и тешкоће оба та становишта.

---

[8]) Могли бисмо покушати да тврдимо (то би било треће схватање), да је позитивни број исто тако резултат сабирања апсолутног броја нули, као што је негативни резултат његовог одузимања од нуле, т.ј. да је:

$$+a = 0 + a \text{ и } -a = 0 - a.$$

Али такво једно тврђење немогуће је, пошто би из $0 + a = (a - a) + a = a - a + a = a$ и $0 + a = +a$ следовало, да је $a$ нужним начином $= +a$.

## ПРВО СХВАТАЊЕ

### А. САБИРАЊЕ

1. $(+a)+(+b)=$ (пошто је $+a=a$ и $+b=b$) $=a+b$;

2. $(+a)+(-b)=a+(0-b)=a+0-b=(a+0)-b=a-b$ за $a>b$;

3. $(+a)+(-b)=a+(0-b)=(0-b)+a=0-b+a=0-(b-a)=-(b-a)$ за $a<b$;[9]

4. $(-a)+(+b)=(0-a)+b=0-a+b=0-(a-b)=-(a-b)$ за $a>b$;

5. $(-a)+(+b)=(0-a)+b=b+(0-a)=b+0-a=b-a$ за $a<b$;

6. $(-a)+(-b)=(0-a)+(0-b)=0-a+0-b=0-(a+b)=-(a+b)$.

### В. ОДУЗИМАЊЕ

1. $(+a)-(+b)=a-b$ за $a>b$;

2. $(+a)-(+b)=a-b=a+(0-b)=(0-b)+a=0-b+a=0-(b-a)=-(b-a)$ за $a<b$;

3. $(+a)-(-b)=a-(0-b)=a-0+b=a+b$;

4. $(-a)-(+b)=(0-a)-b=0-a-b=0-(a+b)=0-(a+b)=-(a+b)$;

5. $(-a)-(-b)=(0-a)-(0-b)=0-a-0+b=0-(a-b)=-(a-b)$ за $a>b$;

6. $(-a)-(-b)=(0-a)-(0-b)=(0-a)+b=b+(0-a)=b+0-a=b-a$ за $a<b$.

---

[9]) Овде примењујемо најпре закон комутације чисте Аритметике, проширујући га и на нулу; па затим (као и код претходне формуле) правило о заградама, које у чистој Аритметици проистиче из самих дефиниција сабирања и одузимања, проширујући и њега и на нулу.

### C. МНОЖЕЊЕ

1. $(+a) \cdot b = ab$;

2. $(-a) \cdot b = (0-a) \cdot b = 0 \cdot b - a \cdot b = 0 - ab = -ab$;

3. $a \cdot (+b) = ab$;

4. $a \cdot (-b) = a \cdot (0-b) = a \cdot 0 - a \cdot b = 0 - ab = -ab$;

5. $(+a) \cdot (+b) = ab$;

6. $(+a) \cdot (-b) = a \cdot (-b) =$ (на основу формуле 4) $= -ab$;

7. $(-a) \cdot (+b) = (-a) \cdot b =$ (на основу формуле 2) $= -ab$;

8. $(-a) \cdot (-b) = (0-a)(0-b) = (0-a) \cdot 0 - (0-a) \cdot b = 0 - (0 \cdot b - a \cdot b) = 0 - (0 - ab) = 0 - 0 + ab = +ab$.[10])

## ДРУГО СХВАТАЊЕ

### А. САБИРАЊЕ

#### I. Аксиоматичне формуле

1. $(+a) + (+b) = +(\alpha + \beta) = +c$;[11])

2. $(-a) + (-b) = -(\alpha + \beta) = -c$.

#### II Формуле изведене под претпоставком да је позитивни број раван апсолутном

1. $\alpha + (+b) =$ (кад се стави $+b = \beta$) $= \alpha + \beta$;

2. $\alpha + (-b) = \alpha - \beta$ за $\alpha > \beta$, јер кад би било $= \alpha + \beta$, било би (на основу претходне формуле) $\alpha + (+b) = \alpha + (-b)$, дакле $+b = -b$, што је немогуће;

3. $\alpha + (-b) = -(\beta - \alpha)$ за $\alpha < \beta$, јер кад би било $= \alpha + \beta$ било би (на основу формуле 1) $\alpha + (+b) = \alpha + (-b)$,

[10]) Овде примењујемо формулу чисте Аритметике $(a-b)(c-d) = (a-b)c - (a-b)d$, коју проширујемо и на нулу (а несмемо применити алгебарску формулу множења два бинома).

И *Мочник-Димић* (н. н. м. стр. 20) изводи понеку од ових формула (иако непотпуно) употребом нуле.

[11]) Пошто по другом схватању постоји потпуна разлика између апсолутних целих бројева с једне и позитивних и негативних с друге стране, то ћемо (зарад лакшег схватања природе формула) у следећем прве обележавати грчким а друге латинским писменима.

дакле $+b=-b$, што је немогуће; а кад би било $=\beta-\alpha$, било би (на основу формуле 2) $\beta+(-a)=\alpha+(-b)$, дакле $\alpha=\beta$, што противречи претпоставци;

4. $(+a)+\beta=$ (кад се стави $+a=\alpha$) $=\alpha+\beta$;

5. $(-a)+\beta=-(\alpha-b)$ за $\alpha>\beta$, јер кад би било $=\alpha+\beta$ било би (на основу претходне формуле) $(+a)+\beta=$ $=(-a)+\beta$, дакле $+a=-a$, што је немогуће; кад би било $=-(\alpha+\beta)$ било би (на основу друге аксиоматичне формуле) $(-a)+(-b)=(-a)+\beta$, дакле $-b=\beta$, што противречи претпоставци да је само позитивни број раван апсолутном; а када би било $=\alpha-\beta$ било би (на основу формуле 2) $\alpha+(-b)=(-a)+\beta$, било би дакле и $\alpha=-a$ и $\beta=-b$, што опет противречи истој претпоставци;

6. $(-a)+\beta=\beta-\alpha$ за $\alpha<\beta$, јер кад би било $=\alpha+\beta$ било би (на основу формуле 4) $(+a)+\beta=(-a)+\beta$, дакле $+a=-a$, што је немогуће; а кад би било $=-(\beta-\alpha)$ било би (на основу формуле 3) $\alpha+(-b)=(-a)+\beta$, било би дакле и $\alpha=-a$ и $\beta=-b$, што противречи претпоставци да је само позитивни број раван апсолутном;

7. $(+a)+(-b)=\alpha+(-b)=$ (према формули 2) $=\alpha-\beta$ за $\alpha>\beta$, $a=$ (према формули 3) $=-(\beta-\alpha)$ за $\alpha<\beta$;

8. $(-a)+(+b)=(-a)+\beta=$ (према формули 5) $=$ $=-(\alpha-\beta)$ за $\alpha>\beta$, а $=$ (према формули 6) $=\beta-\alpha$ за $\alpha<\beta$.

**III Формуле изведене под претпоставком на је негативан број раван апсолутном**

1. $\alpha+(-b)=$ (кад се стави $-b=\beta$) $=\alpha+\beta$;

2. $\alpha+(+b)=\alpha-\beta$ за $\alpha>\beta$;

3. $\alpha+(+b)=-(\beta-\alpha)$ за $\alpha<\beta$;

4. $(-a)+\beta=$ (кад се стави $-a=\alpha$) $=\alpha+\beta$;

5. $(+a)+\beta=-(\alpha-\beta)$ за $\alpha>\beta$;

6. $(+a)+\beta=\beta-\alpha$ за $\alpha<\beta$;

7. $(-a)+(+b)=\alpha+(+b)=$ (према формули 2) $=$ $=\alpha-\beta$ за $\alpha>\beta$, $a=$ (према формули 3) $=-(\beta-\alpha)$ за $\alpha<\beta$;

8. $(+a)+(-b)=(+a)+\beta=$ (према формули 5) $= -(\alpha-\beta)$ за $\alpha>\beta$, $a=$ (према формули 6) $=\beta-\alpha$ за $\alpha>\beta$.[12])

## В. МНОЖЕЊЕ

### I Аксиоматичне формуле

$$1.\ (+a)\cdot\beta=\underbrace{(+a)+(a)+(a)+\cdots}_{\beta\ \text{пута}}=+\underbrace{(\alpha+\alpha+\alpha+\cdots)}_{\beta\ \text{пута}}=+(\alpha\cdot\beta);$$

$$2.\ (-a)\cdot\beta=\underbrace{(-a)+(-a)+(-a+\cdots}_{\beta\ \text{пута}}=-\underbrace{(\alpha+\alpha+\alpha\cdots)}_{\beta\ \text{пута}}=-(\alpha\cdot\beta).$$

### II Формуле изведене под претпоетавком да је позитивни број раван апсолутном

1. $\alpha\cdot(+b)=$ (кад се стави $+b=\beta$) $=\alpha\cdot\beta=+(\alpha\cdot\beta)$;

2. $\alpha\cdot(-b)=-(\alpha\cdot\beta)$, јер би иначе из $\alpha\cdot(+\beta)=\alpha\cdot(-b)$ следовало $+b=-b$, што је немогуће;

3. $(+a)\cdot(+b)=$ (кад се стави $+a=\alpha$ и $+b=\beta$) $=\alpha\ \ \beta=+(\alpha\cdot\beta)$;

4. $(+a)\cdot(-b)=$ (кад се стави $+a=\alpha$) $=\alpha\cdot(-b)=$ (према формули 2) $=-(\alpha\cdot\beta)$;

5. $(-a)\cdot(+b)=$ (кад се стави $+b=\beta$) $=(-a)\cdot\beta=$ (према другој аксиоматичној формули) $=-(\alpha\cdot\beta)$;

6. $(-a)\cdot(-b)=+(\alpha\cdot\beta)$, јер кад би било $=-(\alpha\cdot\beta)$ било би (на оснору претходне формуле) $(-a)\cdot(+b)=(-a)\cdot\cdot(-b)$, дакле $+b=-b$, што је немогуће;

### III Формуле изведене под претпоставком да је негативни број раван апсолутном

1. $\alpha\cdot(-b)=$ (кад се стави $-b=\beta$) $=\alpha\cdot\beta=-(\alpha\cdot\beta)$;

2. $\alpha\cdot(+b)=+(\alpha\cdot\beta)$, јер иначе би из $\alpha\cdot(-b)=\alpha\cdot(+b)$ следовало $-b=+b$, што је немогуће;

---

[12]) Ове формуле су супротне формулама II, а изведене су на основу доказа сличних доказима ових последњих.

3. $(-a)\cdot(-b) =$ (кад се свави $-b=\alpha$ и $-b=\beta$) $=$ $= \alpha\cdot\beta = -(\alpha\cdot\beta)$;

4. $(-a)\cdot(+b) =$ (кад се стави $-a=\alpha$) $= \alpha\cdot(+b) =$ (према формули 2) $= +(\alpha\cdot\beta)$;

5. $(+a)\cdot(-b) =$ (кад се стави $-b=\beta$) $= (+a)\cdot\beta =$ $=$ (према првој аксаоматичној формули) $= +(\alpha\cdot\beta)$;

6. $(+a)\ (+b) = -(\alpha\cdot\beta)$, јер кад би било $= +(\alpha\ \ \beta)$ било би (на основу претходне формуле) $(+a)\ \ (-b) = (+a)\ \ (+b)$, дакле $-b = +b$, што је немогуће.

## ЗАВРШНА ПРИМЕДБА

Кад се оба схватања упореде, долази се до ових констатација.

Прво схватање супериорно је другоме у томе што се у њему формуле изводе директно, док смо формуле сабирања морали у другом схватању у већини случајева изводити индиректно.

Прво схватање супериорно је другоме и у томе што оно води једном јединoм алгебарском систему, док су по другом схватању могућа два таква система.

С друге стране опет логичке тешкоће првог схаатања много су веће од логичких тешкоћа другог. Јер ако су природни цели бројеви *као такви* позитивни (т.ј. већи од нуле), како је могуће да ти исти бројеви буду у исто доба и негативни (тј. мањи од нуле)? Очевидно да то није могуће, негативни бројеви, ако би постојали, неби у овом случају могли бити цели. Друкчије речено, негативан број као такав преставља у првом схватању једну очевидну противречност.

У другом схватању пак ова противречност отпада. Јер по њему природни цели бројеви нису као такви ни позитивни ни негативни, могу се дакле без тешкоће замислити и као позитивни и као негативни.

Логичка тешкоћа првог схватања лежи и у употреби нуле, коју и једно и друго схватање час сматра да је број, а час да није број (напр. у формули $a+0=a$). Тиме што се основне алгебарске формуле могу, као што смо показали у првом схватању директно извести само употребом нуле, ово схватање приморано је да са противречном нулом оперерише много више од другог.

Констатујући на овај начин позитивне и негативне стране и једног и другог схватања, писац се осећа побуђен да се уздржи од дефинитивне одлуке о томе, које се од њих има, по његовом мишљењу, сматрати за једино исправно са логичког гледишта. Математичком читаоцу стоји до воље, да усвоји или једно или друго.

Уосталом главни циљ овог чланка био је у томе да се покаже, да је чиста Аритметика (коју бисмо стога могли назвати „рајем Математике“) једна потпуно логична и савршено егзактна математичка дисциплина, док већ са Алгебром почињу математичке сумње и логичке тешкоће.