ГЛАС

СРПСКЕ КРАЉЕВСКЕ АКАДЕМИЈЕ

CXVI

ПРВИ РАЗРЕД

52

1925.
ГРАФИЧКИ ЗАВОД »МАКАРИЈЕ« А. Д. — БЕОГРАД-ЗЕМУН

ЦЕНА 10·— ДИН.

ПРЕГЛЕД
ИЗДАЊА СРПСКЕ КРАЉЕВСКЕ АКАДЕМИЈЕ НАУКА

(АКАДЕМИЈИНЕ СУ КЊИЖАРЕ: С. Б. ЦВИЈАНОВИЋА И Г. КОНА У БЕОГРАДУ)

I ГЛАС (ПРВОГ РАЗРЕДА)

(Цена књизи 4 д., ако друкчије није означено)

(Бројева означених звездицом (*) нема више за продају)'

Књига

*III (1). — **Јован Жујовић,** Лампрофири у Србији. — Београд. 1888, 8^0, 31. Цена 1 дин.

VI (2). — **Д. Нешић,** Поглед на Лајбницову инфинитезималну методу. — Београд, 1888. 8^0, 18. Цена 1 дин.

VII (3). — **Љуб. Клерић,** О компензацији вертикалног клатна. — Београд, 1888, 8^0, 19. Цена 1 дин.

*VIII (4). — **Светолик Радовановић,** Грађа за геологију и палеонтологију Источне Србије. А. Увод у геологију Источне Србије. — Б. Лијас код Рготине. — Београд, 1888, 8^0, VI, 110 (с једним профилом, једном геолошком картицом и с двема литографским табелама). Цена 2 дин.

IX (5). — **Ј. М. Жујовић,** Приступна Академска Беседа. — Београд, 1888, 8^0, 28. Цена 1 дин.

XI (6) — **М. Лерх,** Примедбе о теорији виших инволуција. — **М. Лерх,** О интеграљењу једног система тоталних диференцијалних једначина, и о једном својству детерминаната. — **М. Лерх,** Прост доказ једног особеног случаја Ермаковљеве теореме, која се тиче збирљивости редова. — **Љ. Клерић,** О средишту сила у равни. — **Мита Петровић,** О квантитативном одређивању креча. — Београд, 1889, 8^0, 46. Цена 2 дин.

XIX (7). — **Мита Петровић,** Анализе земаља из Славоније. — Београд, 1889, 8^0, 18. Цена 2 дин.

XXI (8). — **Д. Нешић,** Одговор на неколико питања из науке о бесконачно малим количинама. — Београд, 1890, 8^0, 66. Цена 1 дин

XXIII (9). — **Д. Нешић,** Прилог теорији интеграљења помоћу бесконачних редова. Београд, 1890, 8^0, 10. Цена 1 дин.

Књига

*XXVI (10). — **М. Петровић,** Артески бунар у Сомбору. — Београд, 1891, 8^0, 54. (с профилом артеског бунара). Цена 1 дин.

XXVII (11). — **С. М. Лозанић,** О ароматичним дитиокарбаматима. — Београд 1890, 8^0, 27. Цена 1 дин.

XXIX (12). — **Д-р Св. Радовановић и П. С. Павловић,** О терцијеру Тимочке Крајине. — Београд, 1891, 8^0, 111 (са девет профила у тексту, једном геолошком картицом и једном таблицом слика). Цена 2 дин.

XXXIII (13). — **Д. Нешић,** Доказ обрасца:

$$\lim\left\{\frac{1^m+2^{m\cdots}+(n-1)^m}{n^m+1}\right\}=\frac{1}{m+1}.$$

— Примедбе о обрасцу: $f(b)-f(a) = (b-a)\,f\{a+\vartheta\,(b-a)\}$. — Услов да је $f(x)$ за $x=c$ непрекидна и ако је $f(x)=\infty$. О максималним и минималним дијаметрима. — Београд, 1892, 8^0, 29. Цена 1 дин.

XXXIV (14). **Петар Живковић,** Прилог алгебарским влацима вишег степена. — Београд, 1892, 8^0, 26. Цена 2 дин.

*XLI (15). — **С. М. Лозанић,** Милошин, Александролит и Авалит. — **Коломан пл. Сили,** Тракторија круга при сталној раздаљини, — Београд, 1894, 8^0, 23. Цена 1 дин.

*XLVI (16). — **Јов. Цвијић,** Пећине и подземна хидрографија у Источној Србији. — Београд, 1895, 8^0, 101 (са 7 аутотипија, 7 скица и две таблице планова). Цена 3 дин.

L (17). — **Мих. Петровић,** О асимптотним вредностима интеграла диференцијалних једначина првога реда. — Београд; 1895, 8^0, 43. Цена 1 дин.

ГЛАС

СРПСКЕ КРАЉЕВСКЕ АКАДЕМИЈЕ

CXVI

ПРВИ РАЗРЕД

52

1925.
ГРАФИЧКИ ЗАВОД »МАКАРИЈЕ« А. Д. — БЕОГРАД-ЗЕМУН

САДРЖАЈ:

SOMMAIRE:

ПРОДУКТИ ЈЕДНАКИ ЗБИРУ СВОЈИХ ЧИНИЛАЦА.

ОД МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

(Приказано на скупу Акад. прир. наука 22. Децембра 1924. г.).

I

Продуктом P_n зваћемо сваки продукат од $n+1$ чинилаца

$$u_0 u_1 u_2 \cdots u_n \tag{1}$$

који су такви да је

$$\begin{aligned} u_0 u_1 &= u_0 + u_1 \\ u_0 u_1 u_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ u_0 u_1 u_2 u_3 &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_0 u_1 u_2 \cdots u_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_u \end{aligned} \tag{2}$$

тако да је за ма колики број узастопних таквих чинилаца *логаритам збира једнак збиру логаритама.*

Чиниоци u_k могу, у осталом, бити ма какви: реални или имагинарни, позитивни или негативни, цели бројеви или разломци:

Ми ћемо, пре свега, поставити и решити овај проблем: *Формирати све продукте* P_n *т. ј. наћи општи закон формације за све чиниоце* u_k *чији продукат саставља један продукат* P_n.

У томе циљу приметимо да се из (2) добија да је

$$u_k = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1}}{u_0 u_1 u_2 \cdots u_{k-1} - 1} \tag{3}$$

а у исто време и да је

$$u_k = \frac{u_0 u_1 u_2 \cdots u_{k-1}}{u_0 u_1 u_2 \cdots u_{k-1} - 1} \tag{4}$$

одакле је

$$u_0 u_1 u_2 \cdots u_{k-1} = \frac{u_k}{u_k - 1} \tag{5}$$

Множењем са u_k добија се из (5)

$$u_0\, u_1\, u_2 \cdots u_k = \frac{u_k^2}{u_k - 1} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots n) \tag{6}$$

одакле је, сменивши k са $k-1$

$$u_0\, u_1\, u_2 \cdots u_{k-1} = \frac{u_{k-1}^2}{u_{k-1} - 1} \qquad (k = 2, 3, \cdots n) \tag{7}$$

$$u_k = \frac{u_{k-1}^2}{u_{k-1}^2 - u_{k-1} + 1} \qquad (k = 2, 3, \cdots n) \tag{8}$$

$$u_1 = \frac{u_0}{u_0 - 1} \tag{9}$$

из чега се види *да је општи закон формације чинилаца* u_k *дат рекурентним обрасцем* (8).

У томе се закону јавља једна произвољна количина u_0, која ако се означи са x, добија се низ образаца који дају узастопне чиниоце u_0, u_1, u_2, $\cdots$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{x}{x-1} \\ u_2 &= \frac{x^2}{x^2 - x - 1} \end{aligned} \tag{10}$$

$$u_3 = \frac{x^4}{x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$

$$u_4 = \frac{x^8}{x^8 - x^7 + 3x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}$$

$$u_5 = \frac{x^{16}}{x^{16} - x^{15} + 4x^{14} - 12x^{13} + 30x^{12} - 64x^{11} + 118x^{10} - 188x^9 +}$$

$$\frac{x^{16}}{+ 258x^8 - 302x^7 + 298x^6 - 244x^5 + 162x^4 - 84x^3 + 32x^2 - 9x + 1}$$

. . . .

За специјалну вредност н. пр. $x = 2$ имало би се

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 & u_2 &= \frac{4}{3} = 1,33333 \\ u_3 &= \frac{16}{13} = 1,230869 & u_4 &= \frac{256}{217} = 1,17972 \\ u_5 &= \frac{65536}{57073} = 1,14828 & u_6 &= \frac{4294966}{3921955} = 1,09518 \end{aligned} \tag{11}$$

. . . .

Множењем са u_k добија се из (5)

$$u_0 u_1 u_2 \cdots u_k = \frac{u_k^2}{u_k - 1} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots n) \tag{6}$$

одакле је, сменивши k са $k-1$

$$u_0 u_1 u_2 \cdots u_{k-1} = \frac{u_{k-1}^2}{u_{k-1} - 1} \qquad (k = 2, 3, \cdots n) \tag{7}$$

$$u_k = \frac{u_{k-1}^2}{u_{k-1}^2 - u_{k-1} + 1} \qquad (k = 2, 3, \cdots n) \tag{8}$$

$$u_1 = \frac{u_0}{u_0 - 1} \tag{9}$$

из чега се види *да је општи закон формације чинилаца* u_k *дат рекурентним обрасцем* (8).

У томе се закону јавља једна произвољна количина u_0, која ако се означи са x, добија се низ образаца који дају узастопне чиниоце u_0, u_1, u_2, $\cdots$

$$\tag{10} \begin{aligned} u_1 &= \frac{x}{x-1} \\ u_2 &= \frac{x^2}{x^2 - x - 1} \end{aligned}$$

$$u_3 = \frac{x^4}{x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$

$$u_4 = \frac{x^8}{x^8 - x^7 + 3x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}$$

$$u_5 = \frac{x^{16}}{x^{16} - x^{15} + 4x^{14} - 12x^{13} + 30x^{12} - 64x^{11} + 118x^{10} - 188x^9 +}$$

$$\frac{x^{16}}{+ 258x^8 - 302x^7 + 298x^6 - 244x^5 + 162x^4 - 84x^3 + 32x^2 - 9x + 1}$$

. . . .

За специјалну вредност н. пр. $x = 2$ имало би се

$$\tag{11} \begin{aligned} u_1 &= 2 & u_2 &= \frac{4}{3} = 1,33333 \\ u_3 &= \frac{16}{13} = 1,230869 & u_4 &= \frac{256}{217} = 1,17972 \\ u_5 &= \frac{65536}{57073} = 1,14828 & u_6 &= \frac{4294966}{3921955} = 1,09518 \end{aligned}$$

. . . .

Као што се види, *сви су чиниоци* u_k *рационалне функције једне променљиве количине* x, *са коефицијентима који су цели бројеви.* Функција, што представља чинилац u_k једнога датог ранга k *иста је за све продукте* P_n; оно што се мења од једног продукта P_n до другог, јесте вредност броја x и целокупан број n фактора што састављају посматрани продукат P_n.

Тако се исто лако налази и општи закон формације свих продуката P_n, јер се из једначине

$$u_k = P_k - P_{k-1} \tag{12}$$

и једначине (3) написане у облику

$$u_k = \frac{P_{k-1}}{P_{k-1} - 1} \tag{13}$$

добија

$$P_k = \frac{P_{k-1}^2}{P_{k-1} - 1} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots n) \tag{14}$$

То је рекурентни образац који даје P_k помоћу P_{k-1}.

Али се може ићи и даље. Ако се, као и мало час, стави да је $u_0 = x$, образац (14) показује да је P_n *рационална* функција променљиве x

$$P_n = \frac{f_n}{\varphi_n} \tag{15}$$

где су f_n и φ_n полиноми по x са коефицијентима који су *цели* бројеви.

Из (14) и (15) добија се тада да је

$$P_n = \frac{f_{n-1}^2}{f_{n-1}\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2} \tag{16}$$

из чега се види да су полиноми f и φ међу собом везани рекурентним релацијама

$$f_n = f_{n-1}^2 \quad (17) \qquad , \qquad \varphi_n = f_{n-1}\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2 \quad (18)$$

а пошто је

$$f_0 = x$$

из (17) и (18) добија се поступно

$$f_n = x^{2^{n-1}} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \varphi_n = x^{2^{n-1}} \varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2 \\ \varphi_0 = 1 \end{cases} \tag{20}$$

Општи закон формације продуката P_n дат је рекурентним обрасцима (19) и (20) у вези са обрасцем (15). На тај се начин добија низ образаца који дефинишу узастопне такве продукте:

$$P_0 = x$$

$$P_1 = \frac{x^2}{x - 1}$$

$$P_2 = \frac{x^4}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} \tag{21}$$

$$P_3 = \frac{x^8}{x^7 - 3x^6 + 6x^5 - 9x^4 + 10x^3 - 8x^2 + 4x - 1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Давши промењивој x једну одређену вредност, имаће се бројне вредности продуката P_n састављених из чинилаца u_k који се добивају кад се у обрасцима (10) да промењивој x та иста вредност.

Навешћемо и ову везу између продуката P_n и њихових чинилаца u_k. Ако се уоче функције двеју промењивих x и Z, представљене редовима

$$F(x, Z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n Z^n$$

$$\phi(x, Z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n Z^n$$

оне ће, за све вредности x и z у области конвергенције ових редова, бити везане релацијом

$$F(x, Z) - (1 - Z)\,\phi(x, Z) = 0$$

што излази из обрасца

$$P_n = u_0 u_1 u_2 \cdots u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

и познатог факта да су две функције

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n Z^n$$

$$\varphi(Z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) Z^n$$

везане релацијом

$$\varphi(Z) = \frac{f(Z)}{1 - Z}$$

II.

Изрази u_k, као што се види, представљају једну *интересантну класу рационалних функција* које имају ту особину да је продукат од ма коликог броја узастопних таквих функција једнак њиховом збиру, тако да им је логаритам збира једнак збиру логаритама.

Међутим, за извесне просте комбинације тих функција добијају се рекурентни закони формације још простији од напред наведених. Тако, ако се на место u_k уведу нове функције w_k дефинисане релацијом

$$(22) \qquad u_k = \frac{1}{1 + w_k} \qquad (k = 1, 2, 3 \cdots)$$

имаће се за њих рекурентна релација

$$(23) \qquad \begin{aligned} w_k &= w_{k-1} + w_{k-1}^2 \\ w_1 &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

тако, да ако се стави

$$-\frac{1}{x} = t$$

биће

$$(24) \qquad w_k = t\,(1 + w_1)\,(1 + w_2) \cdots (1 + w_{k-1}) = t \prod_{n=1}^{n=k-1} (1 + w_n)$$

Изрази w_k су *полиноми* по променљивој t, и то w_k је полином 2^{k-1} — ог степена. Тако се налази да је

$$(25) \qquad \begin{aligned} w_1 &= t \\ w_2 &= t + t^2 \\ w_3 &= t + 2t^2 + 2t^3 + t^4 \\ w_4 &= t + 3t^2 + 6t^3 + 9t^4 + 10t^5 + 8t^6 + 4t^7 + t^8 \\ w_5 &= t + 4t^2 + 12t^3 + 30t^4 + 64t^5 + 118t^6 + 88t^7 + \\ &\quad + 258t^8 + 302t^9 + 298t^{10} + 244t^{11} + + 162t^{12} + \\ &\quad + 84t^{13} + 32t^{14} + 9t^{15} + t^{16} \end{aligned}$$

. . . .

Ови полиноми постају једнаки нули за

$$t = o \qquad \text{и} \qquad t = -1$$

а не постају једнаки нули ни за коју другу реалну вредност t.

На сличан се начин може упростити и рекурентни образац за формацију продуката P_n. Ако се на место ових уведу нови изрази Q_n дефинисани релацијом

$$(26)\qquad Q_k = -\frac{1}{P_k} \qquad\qquad Q_0 = -\frac{1}{x} = t$$

добије се

$$(27)\qquad Q_k = Q_{k-1} + Q_{k-1}^2 \qquad\qquad (k = 1, 2, 3 \cdots)$$

из чега се види *да је закон формације функција* Q_k *исти као и за функције* w_k. А пошто је

$$(28)\qquad Q_0 = w_1 = t$$

то се добија образац

$$(29)\qquad Q_k(t) = w_{k+1}(t)$$

тако, да су и Q_k *полиноми* по променљивој t. Према (15) и (27) добија се тада

$$(30)\qquad P_k(x) = \frac{u_{k+1}(x)}{u_{k+1}(x) - 1}$$

који се образац добија и непосредно из једначине (13).

Као што се, дакле, види, *испитивање продуката* P_n *и њихових чинилаца* u_k *може се свести на испитивање полинома* Q_n *или полинома* w_n дефинисаних рекурентним обрасцима (16), (27) и (29).

III.

У случају кад су чиниоци u_k сви *реални и позитивни* бројеви, из прве једначине (10) и (13) види се да мора бити

$$(31)\qquad u_0 > 1 \qquad u_k > 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

што показује да је тада

$$(32)\qquad P_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n > n$$

као и да је

$$(33)\qquad P_n > P_{n-1}$$

т. ј. да P_n расти са рашћењем ранга n.

Из неједначине (32) види се у исто време и то да је тада бескрајни ред

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

дивергентан. У исто време из обрасца (13) види се да чиниоци u_k не могу сви бити цели бројеви.

Од интереса је још и аритметички проблем: *представити један дати број* М *као продукат* P_n *са датим бројем* n *чинилаца* u_k, т. ј. раставити га на збир чланова u_k

$$M = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

тако да буду испуњене погодбе (2). Пошто тада треба да је

$$P_n - M = 0 \tag{34}$$

где је P_n рационална функција променљиве x, дата одговарајућим обрасцем (21), то свакоме броју M одговара одређена вредност x која се добија решењем алгебарске једначине 2^n-тог степена (34); кад би се та вредност сменила у обрасцима (10), добила би се одговарајуће вредности чланова $u_1, u_2, \cdots u_n$, чиме би задатак био решен.

Међу тим *решење проблема може се свести на решавање једнога система од* $n+1$ *квадратних једначина.* Јер из једначина

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_n &= M = u_0 u_1 \cdots u_n \\ u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} &= u_0 u_1 \cdots u_{n-1} \end{aligned} \tag{35}$$

добија се

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = M - u_n = u_0 u_1 \cdots u_{n-1} = \frac{M}{u_n}$$

тако да је

$$M - u_n = \frac{M}{u_n} \tag{36}$$

што значи да се u_n добија као корен квадратне једначине

$$u_n^2 - M(u_n - 1) = 0 \tag{37}$$

Знајући u_n, знаће се и вредност

$$M - u_n = M_1 \tag{38}$$

па ће се из једначине

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-2} = u_0 u_1 \cdots u_{n-2} = M_1 - u_{n-1} = \frac{M}{u_n u_{n-1}} = \frac{M_1}{u_{n-1}}$$

имати u_{n-1} као корен квадратне једначине

$$u_{n-1}^2 - M_1(u_{n-1} - 1) = 0 \tag{39}$$

Знајући u_{n-1}, знаће се и вредност

$$M_1 - u_{n-1} = \frac{M_1}{u_{n-1}} = M_2 \tag{40}$$

па ће се из једначине

$$M_2 - u_{n-2} = \frac{M_2}{u_n u_{n-1} u_{n-2}} = \frac{M_2}{u_{n-2}} \tag{41}$$

имати u_{n-2} као корен квадратне једначине

$$u_{n-2}^2 - M_2(u_{n-2} - 1) = 0 \tag{42}$$

Према томе у опште:

Чинилац

$$u_{n-k} \qquad (k = o_1 1_1 2_1 \cdots n)$$

добија се као корен квадратне једначине

$$(43) \qquad u_{n-k}^2 - M_k (u_{n-k} - 1) = o$$

где је

$$M_0 = M,$$

$$M_1 = \frac{M_0}{u_n}$$

$$(43) \qquad M_2 = \frac{M_1}{u_{n-1}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$M_k = \frac{M_{k-1}}{u_{n-k+1}}$$

Ако се тражи да сви чиниоци u_k буду *реални*, треба да буде

$$M \geq 4$$

а тако исто и

$$M_k \geq 4 \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

у коме су случају сви чиниоци u_k у исто време и *позитивни*. И број n фактора u_k, што одговарају једноме датоме броју M, ограничен је погодбом да су u_k реални. Тако се н. пр. број

$$M_0 = 10$$

може раставити на највише 5 фактора u_k, при чему се налази (са пет децимала тачно) да је

$$\begin{array}{ll} M_0 = 10 & u_5 = 1{,}12701 \\ M_1 = 8{,}872299 & u_4 = 1{,}15044 \\ M_2 = 7{,}72255 & u_3 = 1{,}18047 \\ M_3 = 6{,}54209 & u_2 = 1{,}23203 \\ M_4 = 5{,}31006 & u_1 = 1{,}34629 \\ M_5 = 3{,}96377 & u_0 = 3{,}96377 \end{array}$$

Ови су фактори такви да је

$$10 = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$$

и да међу њима постоје релације (2) где је $n = 5$.

PRODUITS ÉGAUX A LA SOMME DE LEURS FACTEURS

PAR MICHEL PETROVITCH

(Résumé)

L'auteur traite le problème: détérminer la loi générale des quantités u_n jouissant de la propriété

$$u_0 u_1 u_2 \cdots u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_k$$
$$(k = 1, 2, 3 \cdots)$$

et trouve que les u_k sont des *fonctions rationnelles* de la variable $x = u_0$ à coefficients *nombres entiers* dont il trouve la loi de reccurence ainsi que l'expréssion explicite. Diverses propriètés de ces fonctions.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГА РЕДА СА ОСЦИЛАТОРНИМ ИНТЕГРАЛИМА.

ОД МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

(Приказано на скупу Акад. прир. наука 26. Јануара 1925 г.)

I.

Најважнији тип диференцијалних једначина са осцилаторним интегралима представљају, без сумње, хомогене линеарне једначине другога реда. Кад је таква једначина сведена на облик

$$(1) \qquad y'' + \bar{\omega}(x)\, y = 0$$

познато је да, кад год је функција $\bar{\omega}(x)$ у једноме датом, довољно пространом, размаку променљиве x коначна, непрекидна и *позитивна*, интеграли једначине (1) у опште су *осцилаторне* функције те променљиве у томе размаку. Честина и ритам осцилација могу се, у таквоме једном размаку, одредити непосредно из квалитативних података о начину на који се функција $\bar{\omega}(x)$ мења у томе размаку.

Међутим, једначине (1) задовољавају и интеграли појединих диференцијалних једначина првога реда

$$(2) \qquad y' = f(x, y)$$

тако, да кад год одговарајућа функција $\bar{\omega}(x)$ задовољава погодбе везане за осцилаторни карактер интеграла једначине (1), и интеграли једначине (2) су осцилаторни.

Које су што једначине (2) *чији општи интеграл задовољава једну једначину облика* (1)?

Из једначине

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = -\bar{\omega}(x)\, y$$

или

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} + \bar{\omega}(x)\, y = 0$$

која се добија из једначина (1) и (2), види се *да су шо оне једначине* (2) *за које се израз*

$$(4) \qquad \frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

своди на једну функцију само променљиве x, тако да у (4) не фигурише y. Ова функција представљаће тада функцију $-\overline{\omega}(x)$ што фигурише у једначини (1), а одговара посматраној једначини првога реда (2).

Тако н. пр. за једначину

$$(5) \qquad y'^2 + y^2 = \varphi(x)$$

израз (4) има облик

$$(6) \qquad \frac{\varphi'}{2y\sqrt{\varphi - y^2}} - 1;$$

да би он био независан од y, потребно је и довољно да буде

$$\varphi = \text{const}$$

чему одговара

$$\overline{\omega}(x) = \text{const} = 1$$

Једина једначина (5) чији општи интеграл задовољава једну једначину (1), јесте, дакле, једначина

$$(7) \qquad y'^2 + y^2 = a \qquad (a = \text{const})$$

а њој одговара јддначина (1) облика

$$(8) \qquad y'' + y = o$$

Општи интеграл једначине (8)

$$x = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

је осцилаторан, па ће, дакле, то бити случај и са општим интегралом једначине (7), који је у осталом

$$y = C \sin x \pm \sqrt{a^2 - C^2} \cos x$$

Да би линеарна једначина првога реда

$$y' = uy + v$$

(где су u и v функције променљиве x) припадала истој класи једначина првога реда, потребно је и довољно да буде

$$u = -\frac{v'}{v}$$

и да одговарајућа функција

$$\bar{\omega}(x) = u' + u^2$$

буде осцилаторна.

Да би такав случај био са једначином

$$y' = uy + \sqrt{v + wy^2}$$

(где су u, v, w функције промењиве x) потребно је и довољно да буде

$$w' + 4uv = 0$$

$$v' + 2uw = 0$$

и да одговарајvћа функција

$$\bar{\omega}(x) = u' + u^2 + w$$

буде осцилаторна. Једначина такве врсте, н. пр.

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi}y + \sqrt{\varphi - k\varphi^2 y^2}$$

(где је φ функција промењиве x) има за општи интеграл

$$y = k\sqrt{\varphi}\sin\left(k\int\varphi\,dx + C\right)$$

а функција $\bar{\omega}(x)$ има облик

$$\bar{\omega}(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - k^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi}$$

II.

Задржимо се на задатку: *одредити све једначине* (2) *које задовољавају једначину облика* (1).

Проблем се своди на интеграцију парцијалне диференцијалне једначине првога реда

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = -\bar{\omega}y \tag{9}$$

где је $\bar{\omega}$ функција само промењиве x. Једначина се своди на систем

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{\bar{\omega}y} \tag{10}$$

еквивалентан систему

$$\frac{dy}{dx} = z \qquad \frac{dz}{dx} = -\bar{\omega}y \tag{11}$$

који се своди на једначину (1). Ако су

$$(12)\qquad \begin{aligned} py + qy' &= C_1 \\ ry + sy' &= C_2 \end{aligned}$$

(p, q, r, s функције променљиве x) два прва интеграла једначине (1) (а ови се, као што је познато, могу извести из једнога партикуларног интеграла исте једначине), онда ће једначине

$$\begin{aligned} py + qz &= C_1, \\ ry + sz &= C_2 \end{aligned}$$

представљати два интеграла једначине (9), а њен општи интеграл биће

$$\phi\,(py + qy', ry + sy') = o$$

где је ϕ произвољна функција двеју променљивих. Према томе:

Најопштији облик једначина првога реда

$$(13)\qquad y' = f\,(x_1\, y)$$

чији општи интеграл задовољава линеарну једначину (1), *јесте онај за који одговарајућа функција* f *задовољава једначину*

$$(14)\qquad \phi\,(py + q\,f, ry + s\,f) = o$$

До решења истога проблема долази се и на овај начин. Пошто општи интеграл једначине (13) има да задовољи једначину (1), чији је општи интеграл облик

$$(15)\qquad y = C_1\,\lambda + C_2\,\mu$$

(где су λ и μ два њена партикуларна интеграла), то једначине (13), које задовољавају једначину (1), јесу оне чији је општи интеграл облика (15) где су интеграционе константе C_1 и C_2 међу собом везане једном релацијом

$$(16)\qquad \phi\,(C_1, C_2) = o$$

Проблем одређивања свих једначина првога реда које имају такве опште интеграле, расправљан је у једноме моме ранијем раду[1] где се, у томе погледу, дошло до овога резултата:

Свака диференцијална једначина првога реда, чији је општи интеграл облика (15), где су C_1 и C_2 две међу собом везане константе, може се довести на облик

$$(17)\qquad \phi\,(\alpha y + \beta y', \gamma y + \delta y') = o$$

---

[1] Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohème (classe des Sc. mathém. et natur.) Prag 1901.

где је φ функција двеју променљивих; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ су функције променљиве x међу собом везане релацијама

$$(18) \qquad \begin{aligned} \frac{\gamma}{\beta\gamma-\alpha\delta} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}\right) \\ \frac{\alpha}{\beta\gamma-\alpha\delta} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}\right) \end{aligned}$$

Ако је $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ један скуп таквих функција, општи интеграл посматране једначине првога реда биће

$$(19) \qquad y = C_1 e^{-\int \frac{\alpha}{\beta} dx} + C_1 e^{-\int \frac{\gamma}{\delta} dx}$$

где су C_1 и C_2 везане релацијом

$$(20) \qquad \varphi(C_1, C_2) = o$$

Проблем да се на једној датој једначини првог реда распозна да ли она испуњава горње погодбе, може се знатно упростити непосредним проучавањем сингуларитета њенога општег интеграла. Пошто једначине, што задовољавају те погодбе, имају општи интеграл облика (15), где су константе C_1 и C_2 везане једном релацијом, то су *сви интегрални сингуларитети, за такве једначине, стални т. ј. независни од интеграционе константе.* А у аналитичкој теорији диференцијалних једначина првог реда познате су методе помоћу којих се за дату једначину увек може распознати да ли је такав случај, или не, са њеним општим интегралом.

Помоћу тих метода се н. пр. долази се до ових резултата[1]:

Међу свима једначинама првога реда и првог степена

$$(21) \qquad y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

где су P и Q полиноми по y, једина која испуњава горње погодбе, јесте линеарна једначина првога реда.

Међу свима једначинама облика

$$(22) \qquad y'^m = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

где је m цео и позитиван број, поред линеарне једначине, једине које задовољавају исте погодбе, јесу две једначине

---

[1] M. Petrovitch: *Sur les zèros et les infinis des intégrales des équations différentiélles algèbriques* (Paris, Gauthier — Villars, 1894. p. 32.).

$$(23) \qquad y'^m = \varphi(x)(y-a)^{m-1}$$

$$(24) \qquad y'^2 = \varphi(x)(y-a)(y-b)$$

где су a и b сталне количине, а φ(x) ма каква функција променљиве x.

Интеграл прве једначине је

$$y = a + \left[C + \frac{1}{m}\int \sqrt[m]{\varphi}\,dx\right]^m$$

а интеграл друге

$$y = \frac{1}{2}(a+b) + C e^{\int \sqrt{\varphi}\,dx} + \frac{(a-b)^2}{4C} e^{-\int \sqrt{\varphi}\,dx}$$

Прва се једначина, сменивши y са y + a, своди на једначину истога типа чији је општи интеграл

$$y = C + \frac{1}{m}\int \sqrt[m]{\varphi}\,dx$$

а друга се, сменом y са $y + \frac{a+b}{2}$ своди се на једначину истога типа која има за општи интеграл

$$y = C e^{\int \sqrt{\varphi}\,dx} + \frac{(a-b)^2}{4C} e^{-\int \sqrt{\varphi}\,dx}$$

Ако се, на напред наведени начин, нађе да дата једначина првога реда

$$(25) \qquad y' = f(x, y)$$

испуњава погодбе везане за облик

$$y = C_1 \lambda + C_2 \mu$$
$$\phi(C_1, C_2) = o$$

општега интеграла, онда је тиме утврђено да овај интеграл задовољава једну хомогену линеарну диференцијалну једначину облика (1). И тада: кад год је одговарајућа функција ω(x) у овој последњој једначини у једном датом, довољно пространом размаку променљиве x, коначна, непрекидна и позитивна, *општи интеграл посматране једначине првога реда биће осцилаторан у томе размаку.*

III.

Али једначина (1) није једина диференцијална једначина другога реда са осцилаторним интегралима и таква да се тај осцилаторни карактер може распознати на самој једначини. У једноме моме ранијем раду[1] показано је да је исти случај и са бескрајно многим типовима диференцијалних једначина свих редова. За ствар о којој је овде реч, од интереса је овај факт:

Постоји бескрајно много, како алгебарских, тако и трансцендентних функција

$$(27) \qquad F(x, y)$$

које, кад се променљива x буде кретала у једноме датом размаку (a, b), остају непрестано позитивне и веће од једнога сталног позитивног броја N, па ма каквом реалном вредношћу (коначном или бескрајном) сменули у (27) променљиву y.

Таква би н. пр. међу алгебарским функцијама, била функција $F(x, y)$ која је полином $P(x, y)$ по променљивој y а садржи само *парне* степене те променљиве, са коефицијентима који су, као и $P(x, o)$, или сталне позитивне количине, или ма какве функције променљиве x позитивне у размаку (a, b).

Таква би, такође, међу трансцендентним функцијама, била функција

$$(28) \qquad F(x, y) = f(x) + \varphi(x)\, e^{-P(x, y)}$$

где је $P(x, y)$ малопређашњи полином, а f и φ ма какве функције променљиве x, коначне, непрекидне и позитивне у размаку (a, b).

Тако исто постоји и бескрајно много и бескрајно разноврсних, како алгебарских, тако и трансцендентних функција

$$(29) \qquad \phi(x, y)$$

таквих, да док се x мења у једном датом размаку (a, b), вредност је функције непрестано позитивна и налази се између два стална броја

$$N \text{ и } M \qquad\qquad (N < M)$$

па ма каквом реалном вредношћу (коначном или бескрајном) сменули променљиву y. Таква би н. пр. била функција

$$(30) \qquad \phi(x, y) = \frac{u + v y^2}{w + s y^2}$$

---

[1] *Fonctions implicites oscillantes* (International Congress of Mathematicians, Cambridge 1912).

где су u, v, w, s или сталне позитивне количине, или коначне, непрекидне и позитивне функције променљиве x у размаку (a, b).

Таква би била и функција

$$(31) \qquad \phi(x, y) = \frac{u^2 + v^2 y^4}{(u + v y^2)^2}$$

или трансцендентна функција (28) и т. д.

За сваку од диференцијалних једначина другога реда

$$(32) \qquad y'' + y F(x, y) = o$$

$$(33) \qquad y'' + y \phi(x, y) = o$$

везане су ове особине њихових интеграла:[1]

1^0 Сваки интеграл. кад год су он и његова два прва извода, коначне и непрекидне функције променљиве x у довољно пространом размаку (a, b), *има у томе размаку осцилаторан карактер*, т. ј. има у томе размаку само простих нула, мењајући знак сваки пут при пролаcку кроз једну, ма коју, од тих нула.

2^0 Ако се са N означи једна *доња* граница функције $F(x, y)$ за вредности x у размаку (a, b) и за све реалне вредности y, *интеграл једначине* (32) *мења у размаку* (a, b) *свој знак најмање онолико пута колико се пута вредност*

$$(34) \qquad \frac{\pi}{\sqrt{N}}$$

садржи у разлици $(b - a)$.

3^0 Ако се са N и M означе једна *доња* и једна *горња* граница функције $\phi(x, y)$ за поменуте вредности x и y, *интеграл једначине* (22) *мења у размаку* (a, b) *свој знак најмање онолико пута колико се пута вредност* (34) *садржи у разлици* $(b - a)$, *а највише онолико пута колико се вредност*

$$(35) \qquad \frac{\pi}{\sqrt{M}}$$

садржи у истој разлици, или још један пут више.

Тако н. пр. једначини

$$(36) \qquad y'' + \alpha y + \beta y^3 = o$$

(где су α и β позитивне константе), која се интеграли помоћу елиптичких функција, одговара функција

---

[1] Fonct. impl. oscillantes (Internat. Gengress of Mathem.. Cambridge 1912).

$$(37) \qquad F(x, y) = \alpha + \beta y^2$$

чија је вредност увек већа од α; њен ће интеграл, дакле, у размаку (a, b) променути знак најмање онолико пута колико се вредност $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ садржи у разлици (b — a).

Једначини

$$(38) \qquad (u + vy^2)\,y'' + y\sqrt{v^2 y^4 + u^2} = 0$$

(где су u и v или сталне позитивне количине, или функције променљиве x које су коначне, непрекидне и позитивне у размаку (a, b), одговара функција

$$(39) \qquad \phi(x, y) = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 y^4}}{u + vy^2}$$

чија вредност, за све вредности x у размаку (a, b) и за све реалне вредности y, лежи, као што је познато, између вредности $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1. Према томе: интеграл једначине (38) мења у размаку (a, b) свој знак најмање онолико пута колико се вредност $\pi\sqrt{2}$ садржи у разлици (b — a), а највише онолико пута колико се број π садржи у тој разлици, или још један пут више. Број промена знака интеграла у размаку (a, b) једнак је, дакле, броју целих јединица садржан у вредности

$$1 + \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2\pi}(b - a) = 1 + 0{,}27169\,(b - a)$$

са грешком која ни у коме случају не прелази број целих јединица садржином у вредности

$$1 + \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2\pi}(b - a) = 1 + 0{,}04661\,(b - a)$$

IV

Критеријум да би општи интеграл једне једначине првога реда

$$(40) \qquad y' = f(x, y)$$

задовољавао једну једначину (32) или (33), састојао би се у овоме: *потребно је и довољно да функција* f(x, y) *задовољава погодбу да се израз*

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{41}$$

своди на једну функцију (27) *или* (29). Најопштија функција такве врсте добија се интеграцијом парцијалне једначине првога реда

$$\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=y\,\lambda(x,y) \tag{42}$$

где је $\lambda(x,y)$ једна од функција (27) или (29). Једначина се своди на систем

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{\lambda(x,y)} \tag{43}$$

еквивалентан систему

$$\frac{dy}{dz}=z \qquad \frac{dz}{dx}=\lambda(x,y) \tag{44}$$

или једначини

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda(x,y) \tag{45}$$

Нека је

$$\varphi_1(x,y,y')=C_1 \tag{46}$$

један први интеграл једначине (45); тада се помоћу једне квадратуре може наћи још један њен први интеграл

$$\varphi_2(x,y,y')=C_2 \tag{47}$$

Општи интеграл једначине (46) биће

$$\theta(\varphi_1,\varphi_2)=o$$

где је θ произвољна функција двеју променљивих, а *најопштија* функција f тражене врсте јесте $f=z$, где је z један корен једначине

$$\theta[\varphi_1(x,y,z),\varphi_2(x,y,z)]=o \tag{48}$$

Тако, кад функција $f(x,y)$ задовољава погодбу

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\phi(x,y) \tag{49}$$

где је ϕ функција облика (39), сваки интеграл једначине (40) [који би, као и његова два прва извода, био коначан и непрекидан у размаку (a, b)] је осцилаторна функција променљиве x и мења у томе размаку знак најмање онолико пута колико има целих јединица у вредности

$$\frac{b-a}{\pi\sqrt{2}}=0{,}2251\,(b-a)$$

а највише онолико пута колико има целих јединица у вредности

$$1+\frac{b-a}{\pi}=1+0{,}3183\,(b-a)$$

У општијем случају, кад функција $f(x, y)$ задовољава погодбу (49) где је

$$\phi(x, y)=y\,\frac{u+v\,y^2}{(u^p+v^p\,y^{2p})^{\frac{1}{p}}} \tag{50}$$

(где је p ма какав реалан позитиван број), пошто за позитивне вредности x_1 и x_2 вредност израза

$$\frac{(x_1+x_2)^p}{x_1^p+x_2^p}$$

увек лежи између 1 и 2^{p-1}, интеграл једначине (40) је осцилаторан и мења знак у размаку (a, b) најмање онолико пута колико се број π садржи у разлици $(b-a)$, а највише онолико пута колико се број

$$\frac{\pi}{2^{\frac{p-1}{2p}}}$$

садржи у тој разлици, или за једну јединицу више.

V.

Исте методе дају могућности да се и за дати систем симултаних једначина првога реда

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx}&=f_1(x, y_1, y_2, \cdots y_n)\\
\frac{dy_2}{dx}&=f_2(x, y_1, y_2, \cdots y_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_n}{dx}&=f_n(x, y_1, y_2, \cdots y_n)
\end{aligned} \tag{51}$$

истакне на видик *егзистенција осцилаторних интеграла.* То је случај кад се бар један од n израза

$$\frac{1}{y_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}=\sum f_i\,\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right) \qquad (i=1, 2, \cdots n) \tag{52}$$

своди на функцију само променљиве x, негативну у посматраном размаку (a, b), или на коју од функција

$$(53) \qquad F(x, y_1, y_2, \cdots y_n)$$

која, кад се променљива x буде мењала у датоме размаку (a, b), остаје непрестано мања од једног сталног негативног броја — N, па ма каквим се скупом реалних, коначних или бескрајних, вредности сменуле у F променљиве $y_1, y_2, \cdots y_n$. Тада се добија једначина

$$(54) \qquad \frac{d^2 y_k}{dx} - y_k F = o$$

на којој се за интеграл, према напред наведеним погодбама, може распознати његов осцилаторни карактер у размаку (a, b).

Такав је н. пр. случај са системом

$$(55) \qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= u y_1 + v y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= w y_1 + s y_2 \end{aligned}$$

где су u, v, w, s функције променљиве x везане релецијом

$$v' + v(u + s) = o$$

у коме се случају одговарајућа функција функција F за интеграл y_1 своди на

$$F = u' + u^2 + vw$$

само променљиве количине x.

За систем

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha y_2 y_3 \qquad \frac{dy_2}{dx} = \beta y_1 y_3$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \gamma y_1 y_2$$

на који се налази у проблему кретања чврстог тела и који се интеграли помоћу елиптичких функција, налази се да интегралу y_1 одговара функција

$$F = \alpha(\gamma y_2^2 + \beta y_3^2)$$

на коју је лако применити горње резултате.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE A INTEGPALES OSCILLANTES.

PAR MICHEL PETROVITCH.

Résumé.

Les intégrales de l'équation linéaire du second ordre

$$(1) \qquad y'' + \bar{\omega}(x)\, y = 0$$

où $\omega(x)$ est une fonction réelle, finie, continue et positive dans un intervalle considèré de la variable x, sont généralement des fonctions oscillantes dans cet intervalle. La frèquence et le rythme d'oscillations peuvent se déterminer directement de la connaissance des particularités qualitatives de variation de $\bar{\omega}(x)$ dans cet intervalle (procèdé de Sturm).

L'auteur se propose, en premier lieu, de déterminer toutes les équations du premier ordre

$$(2) \qquad y_1 = f(x, y)$$

dont l'intègrale générale satisfait à une équation de la forme (1), de manière que les théorèmes de Sturm lui soient appliquables.

En second lieu, en remarquant que les mêmes procèdés peuvent s'étendre à une infinité d'autres types d'équations [non — linéaires du second ordre. de la forme

$$(3) \qquad y'' + \varphi(x, y) = 0$$

l'auteur cherche les équations (2) dont l'intégrale générale satisfait à une équation (3) et auxquelles les mêmes procédés seront alors appliquables. On parvient ainsi à mettre en évidence le caractère oscillant d'une multitude d'équations du premier ordre, sans récourir à leur intégration.

Les resultats obtenus s'étendent aussi à des systémes d'équations simultanées du premier ordre.

О LAGRANGE-ОВОЈ АДЈУНГОВАНОЈ ЈЕДНАЧИНИ

ОД Т. ПЕЈОВИЋА

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 26. I. 1925.).

Нека је дата једна линеарна диференцијална једначина $n^{\text{тога}}$ реда

$$(1)\qquad f(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_{n-2} y'' + \\ + a_{n-1} y' + a_n y = o,$$

где су $a_1, a_2, \cdots a_n$ ма какве функције од x. *Lagrange*[1] је поставио и решио задатак: *Наћи такву једну функцију* $\lambda(x)$, *да производ* $\lambda f(y)$ *буде извод по* x *једне друге линеарне функције од* $y, y', y'', \cdots y^{(n-1)}$.

Да би решио задатак, *Lagrange* множи једначину (1) са $\lambda\, dx$ и интеграли делимичном интеграцијом сваки члан за себе докле је то могуће тако да добија образац

$$(2)\qquad \begin{aligned} \int \lambda f(y)\, dx = y & \left[a_{n-1}\lambda - \frac{d(a_{n-2}\lambda)}{dx} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}\lambda}{dx^{n-1}}\right] + \\ & + y'\left[a_{n-2}\lambda - \frac{d(a_{n-3}\lambda)}{dx} + \cdots\cdots + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}\lambda}{dx^{n-2}}\right] + \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + \\ & + y^{(n-1)}\lambda + \int y \left[a_n\lambda - \frac{d(a_{n-1}\lambda)}{dx} + \frac{d^2(a_{n-2}\lambda)}{dx^2} - \right. \\ & \left. - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{d^n\lambda}{dx^n}\right] dx. \end{aligned}$$

Ставивши

$$\varphi(\lambda) = a_n\lambda - \frac{d(a_{n-1}\lambda)}{dx} + \frac{d^2(a_{n-1}\lambda)}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n\lambda}{dx^n},$$

---

[1] Oeuvres de Lagrange, t. I, p. 471.

$$\psi(y, \lambda) = y \left[a_{n-1} \lambda - \frac{d(a_{n-2} \lambda)}{dx} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} \lambda}{dx^{n-1}} \right] +$$

$$+ y' \left[a_{n-2} \lambda - \frac{d(a_{n-3} \lambda)}{dx} + \cdots\cdots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} \lambda}{dx^{n-2}} \right] +$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; +$$

$$+ y^{(n-1)} \lambda,$$

релација (2) постаје

$$(3) \qquad \int [\lambda f(y) - y \varphi(\lambda)] \, dx = \psi(y, \lambda);$$

одакле се види да је бином

$$\lambda f(y) - y \varphi(\lambda)$$

извод функције

$$\psi(y, \lambda)$$

за све могуће облике функција y и λ. Ако се за λ узме један интеграл једначине

$$(4) \qquad \varphi(\lambda) = a_n \lambda - \frac{d(a_{n-1} \lambda)}{dx} + $$

$$+ \frac{d^2(a_{n-2} \lambda)}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n \lambda}{dx^n} = 0,$$

онда је, према (3), производ $\lambda f(y)$ извод функције $\psi(y, \lambda)$, која је линеарна по $y, y', \cdots y^{(n-1)}$ и једначина $f(y) = 0$ је еквивалентна једначини $(n-1)^{\text{вог}}$ реда облика

$$\psi(y, \lambda) = \text{const.},$$

где λ треба заменити интегралом једначине (4). Према томе да би производ $\lambda f(y)$ био извод по x једне линеарне функције од $y, y', \cdots y^{(n-1)}$, треба функција $\lambda(x)$ да задовољава једначину (4). Једначина (4) је линеарна диференцијална једначина $n^{\text{тога}}$ реда и назива се *адјунгована једначина* једначине (1). Лако је доказати и *обрнут* случај т. ј. ако је $\varphi(\lambda) = 0$ *адјунгована једначина* једначине $f(y) = 0$, онда је $f(y) = 0$ *адјунгована једначина* једначине $\varphi(\lambda) = 0$ [1]

Једна од најважнијих особина *адјунговане* једначине јесте та, што се, познавањем p њених партикуларних интеграла,

---

[1] Lagrange loc. cit,

може за p снизити ред дате једначине, ако је пак $p=n$ онда се општи интеграл дате једначине налази без иједне квадратуре.

Ми се овде нећемо задржавати на испитивању особина *адјунговане* једначине, на чему је доста рађено[1], него ћемо показати да се *адјунгована једначина може формирати и на један начин*, који нам изгледа простији од *Lagrange*-овог.

Пођимо, дакле, од једначине (1) и *потражимо директно такву функцију* $\lambda(x)$ *да производ* $\lambda f(y)$ *буде извод по* x *једне линеарне функције* $(n\text{-}1)^{\text{вог}}$ *реда по* y, *т. ј. да је*

$$\begin{aligned}&\lambda\,(y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\cdots\cdots+a_{n-2}y''+a_{n-1}y'+\\ (5)\qquad &+a_n y)=\frac{d}{dx}(b_1 y^{(n-1)}+b_2 y^{(n-2)}+\cdots\cdots+b_{n-2}y''+\\ &+b_{n-1}y'+b_n y).\end{aligned}$$

Изједначујући коефицијенте уз $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots$ у леве и десне стране једначине (5), после диференцијалења њене десне стране, добиће се релације

$$(6)\qquad\begin{aligned}\lambda &= b_1,\\ \lambda a_1 &= b_1'+b_2,\\ \lambda a_2 &= b_2'+b_3,\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \lambda a_{n-1} &= b_{n-1}'+b_n,\\ \lambda a_n &= b_n'.\end{aligned}$$

Ако се из $n+1$ релација (6) елиминише n непознатих коефицијената $b_1, b_2, \cdots b_n$, добиће се услов који треба да задовољи $\lambda(x)$, т. ј. биће

$$o=\lambda a_n-\frac{d}{dx}\left(\lambda a_{n-1}-\frac{d}{dx}\left(\lambda a_{n-2}-\cdots\cdots\frac{d}{dx}\left(\lambda a_1-\frac{d\lambda}{dx}\underbrace{\right)\right)\cdots\right)}_{n-1}$$

или

$$(7)\qquad o=\lambda a_n-\frac{d(\lambda a_{n-1})}{dx}+\frac{d^2(\lambda a_{n-2})}{dx^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{d^n\lambda}{dx^n}.$$

Као што се види, једначина (7) је идентична једначини (4), т. ј. то је *адјунгована једначина* једначине (1); а десна страна релације (5) под знаком извода, после замене коефицијената $b_1, b_2, \cdots b_n$ вредностима (6), идентична је функцији $\psi(y,\lambda)$, т. ј.

---

[1] Darboux, Théorie des Surfaces, t. II. p. 99.

$$\psi(y, \lambda) = y^{(n-1)} \lambda + y^{(n-2)} \left[\lambda a_1 - \frac{d\lambda}{dx}\right] + y^{(n-3)} \left[\lambda a_2 - \frac{d(\lambda a_1)}{dx} + \right.$$
$$\left. + \frac{d^2\lambda}{dx^2}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots + $$
$$+ y' \left[\lambda a_{n-2} - \frac{d(\lambda a_{n-3})}{dx} + \frac{d^2(\lambda a_{n-4})}{dx^2} - \ldots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}\lambda}{dx^{n-2}}\right] +$$
$$+ y \left[\lambda a_{n-1} - \frac{d(\lambda a_{n-2})}{dx} + \frac{d^2(\lambda a_{n-3})}{dx^2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}\lambda}{dx^{n-1}}\right].$$

Према томе кад је функција $\lambda(x)$ дефинисана једначином (7), онда се једначина (1) своди на линеарну једначину $(n-1)^{\text{вог}}$ реда облика

$$\psi(y, \lambda) = \text{const.},$$

као и код *Lagrange*-а, где λ такође треба заменити интегралом једначине (7).

Посматрајмо сад *обрнут случај*, т. ј. нека је дата једначина (7) коју ћемо написати у овом облику

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{(n)} + p_1 \lambda^{(n-1)} + p_2 \lambda^{(n-2)} + \ldots + p_{n-2} \lambda'' + + p_{n-1} \lambda' + p_n \lambda = 0 \tag{7}$$

где је

$$\begin{aligned} p_1 &= -a_1, \\ p_2 &= a_2 - (n-1) a_1', \\ p_3 &= -a_3 + (n-2) a_2' - \binom{n-1}{2} a_1'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Радећи као напред, добиће се за једначину (7) следећа *адјунгована једначина*

$$f(y) = p_n y - \frac{d(p_{n-1} y)}{dx} + \frac{d^2(p_{n-2} y)}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

или

$$f(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + + a_n y = 0$$

где је

$$\begin{aligned} a_1 &= -p_1, \\ a_2 &= p_2 - (n-1) p_1', \\ a_3 &= -p_3 + (n-2) p_2' - \binom{n-1}{2} p_1'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

замењујући $p_1, p_2, p_3, \cdots$ вредностима (8) у овим последњим релацијама добиће се идентичности

$$a_k = a_k, \quad (k = 1, 2, \cdots n)$$

што показује да је једначина (1) *адјунгована једначина* једначине (7).

Примери. 1⁰ Нека је једначина (1) другога реда

$$(1) \qquad f(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = o,$$

и потражимо такву функцију $\lambda(x)$ да је

$$\lambda(y'' + a_1 y' + a_2 y) = \frac{d}{dx}(b_1 y' + b_2 y).$$

Изједначујући коефицијенте леве и десне стране уз y'', y' и y последње једначине, после диференцијалења њене десне страпе, добиће се следеће релације

$$\lambda = b_1,$$
$$\lambda a_1 = b_1' + b_2,$$
$$\lambda a_2 = b_2'.$$

Ако се сад елиминише b_1 и b_2 из ове три релације, добија се *адјунгована једначина* једначине (1)

$$\varphi(\lambda) = \lambda'' - a_1 \lambda' + (a_2 - a'_1)\lambda = o,$$

а $\psi(y, \lambda)$ у овом случају има облик

$$\psi(y, \lambda) = \lambda y' + (\lambda a_1 - \lambda')y = \text{const.}$$

2⁰ Нека је пак једначина (1) трећега реда

$$(1) \qquad f(y) = y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = o;$$

после извршене операције као у првом примеру, добија се њена *адјунгована једначина*

$$\varphi(\lambda) = \lambda''' - a_1 \lambda'' + (a_2 - 2a_1')\lambda' - (a_3 - a_2' + a_1'')\lambda = o,$$

а $\psi(y, \lambda)$ гласи

$$\psi(y, \lambda) = \lambda y'' + (\lambda a_1 - \lambda')y' + (\lambda a_2 - \lambda' a_1 - \lambda a'_1 + \lambda'')y = \text{const.}.$$

Из напред изложенога види се, да је начин формирања *адјунговане једначине*, који смо овде изнели, простији од *Lagrange*-овог, јер се састоји у обичном диференцијалењу и елиминацији, док је *Lagrange* за то употребио делимичну интеграцију.

SUR L'ÉQUATION ADJOINTE DE LAGRANGE

PAR TADIA PEYOVITCH

(Résumé)

Formation de l'équation adjointe d'une équation différenbielle linéaire donnée, par un procédé plus simple que celui de Lagrange.[1]

---

[1] Oeuvres de Lagrange, t. I, p. 471.

ДОКАЗ ЕГЗИСТЕНЦИЈЕ ИНТЕГРАЛА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА.

ПРОФЕСОРА Н. САЛТИКОВА.

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 26. I. 1925).

Има неколико различних доказа постојања тражених интеграла. Али чини ми се да је најпростији онај, који ћу изложити овде. Овај је доказ независан од услова Липшица и осим тога представља значајно упрошћавање добро познатих класичких доказа Коши-Липшица и Г. Пикара. Објаснио сам идеју моје методе у једном приказу у *Comptes rendus* Паријске Академије Наука (од 29 септембра 1924 г., стр. 590), а сад ћу ју проучити детаљније.

Нека је једна обична диференцијална једначина првога реда

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где је f непрекидна функција двеју реалних променљивих количина x и y, у њеним границама

$$(x_0, x_0 + a) \quad , \quad (y_0 - b, y_0 + b),$$

за вредности

$$a > o \quad , \quad b > o.$$

Забележимо са M највећу вредност од $|f(x, y)|$ у унутрашњости горе указане области. Нека је h најмања вредност од двају бројева

$$a \quad \text{и} \quad \frac{b}{M}.$$

Ограничимо се само посматрањем граница за x, које се одређују размаком

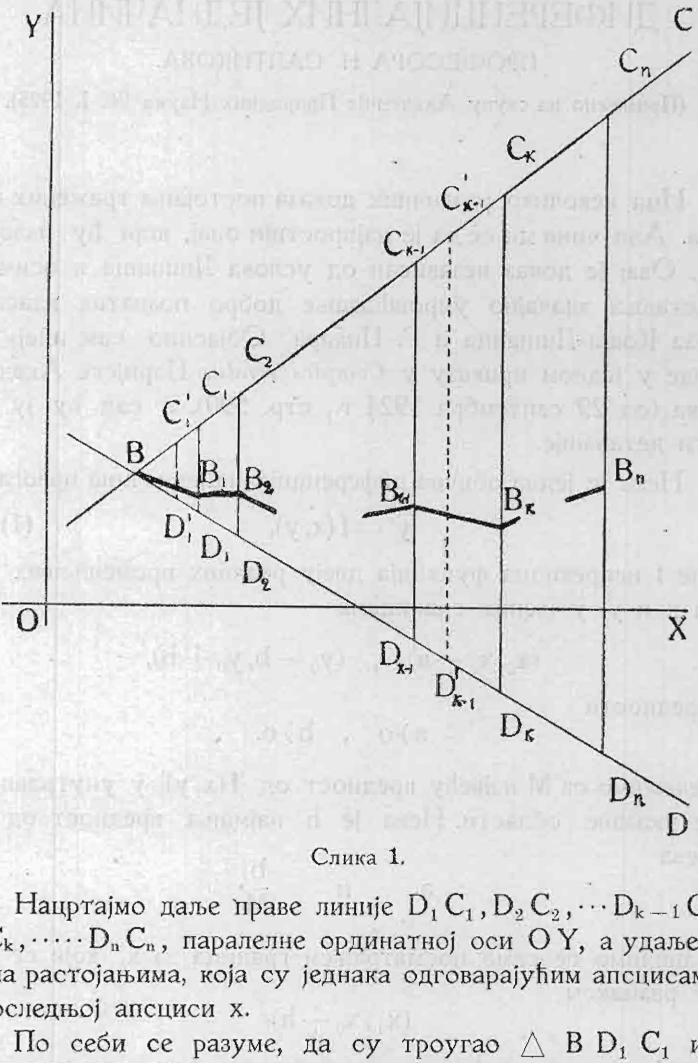
$$(x_0, x_0 + h).$$

Уметнимо између x_0 и x неки произвољан број посредних количина

$$x_1, x_2, \cdots x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \cdots x_{n-1}, \tag{2}$$

чије се вредности повећавају у правцу од x_0 до x.

За доказ тражене теореме конструишимо један многоугаоник на следечи начин. Односно неког правог, правоуглог координатног система XOY (сл. 1) повућимо кроз тачку $B(x_0, y_0)$ две праве линије са одговарајућим угаоним коефицијентима M и $-M$; нека су оне BC и BD.



Слика 1.

Нацртајмо даље праве линије $D_1 C_1, D_2 C_2, \cdots D_{k-1} C_{k-1}$, $D_k C_k, \cdots\cdots D_n C_n$, паралелне ординатној оси OY, а удаљене од ње на растојањима, која су једнака одговарајућим апсцисама (2) и последњој апсциси x.

По себи се разуме, да су троугао $\triangle\ B D_1 C_1$ и сви трапези $C_1 D_1 D_2 C_2, \cdots C_{k-1} D_{k-1} D_\kappa C_k, \cdots$ распоређени у области, која је одређена размацима

$$(x_0, x_0 + h) \qquad \text{и} \qquad (y_0 - b, y_0 + b)$$

и коју ћемо називати *области правилности* дате једначине (1).

Наместимо сад прво теме траженог многоугаоника у тачку B; и забележимо са бројевима

$$m_0, m_1, m_2, \cdots m_k, \cdots m_{n-1}$$

угаоне коефицијенте страна нашег многоугаоника. Метнимо даље остала темена нашег многоугаоника у тачке

$$B_1, B_2, \cdots B_k, \cdots B_{n-1}, B_n, \qquad (3)$$

које се налазе на паралелним странама нацртаних трапеза.

Вредности забележених угаоних коефицијената, су такве, да је број m_0 најмања вредност функције $f(x, y)$ за спољашност троугла $\triangle\ B D_1 C_1$, а сваки број m_{k-1} нека је најмања вредност исте функције $f(x, y)$, али за спољашност трапеза $C_{k-1} D_{k-1} D_k C_k$.

Пошто се вредност сваког угаоног коефицијента m_{k-1}, једне стране многоугаоника, налази између граница $-M$ и M, та су темена (3) распоређена у унутрашњости угла $\llcorner DBC$.

Најпосле, узајамне се ординате

$$y_1, y_2, \cdots y_k, \cdots y_{n-1}, y_n$$

темена (3) одређују лако, помоћу формула Аналитичке Геометрије на следећи начин:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 - y_0 = m_0(x_1 - x_0), \\
y_2 - y_1 = m_1(x_2 - x_1), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
y_k - y_{k-1} = m_{k-1}(x_k - x_{k-1}), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
y_n - y_{n-1} = m_{n-1}(x - x_{n-1}).
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Последње формуле доводе до истог закључака, као и геометријско грађење. Одиста, збир k првих једнакости (4) даје овај резултат

$$y_k - y_0 = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1} - x_i);$$

откуд добијамо да је

$$|y_k - y_0| < M(x_k - x_0).$$

Написана неједначина доказује, да се заиста теме B_k налази у унутрашњости одсечка $D_k C_k$.

Ако забележимо, да је $x = x_n$, онда систем (4) одређује следећи резултат

$$y_n - y_0 = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k). \tag{5}$$

За доказ постојања траженог интеграла дате једначине (1), треба утврдити, да y_n тежи одређеној граници, кад број n страна посматраног многоугаоника $B B_1 B_2 \cdots B_n$ бесконачно расте, ма на какав начин, а при том сви размаци (x_k, x_{k+1}) теже нули.

Претпоставимо, одиста, да се први размак (x_0, x_1) подели ма каквом тачком са апсцисом x_0', у два размака, па се такође сваки размак (x_{k-1}, x_k) подели произвољном тачком са апсцисом x_{k-1}' и т. д. Према томе за нову вредност y_n, коју ћемо означити са y_n', први члан збира (5) смениће се збиром двају чланова:

$$\mu_0 (x_0' - x_0) + \mu_0' (x_1 - x_0'), \tag{6}$$

а сваки ће се k — ти члан истог збира (5) сменити збиром:

$$\mu_{k-1} (x_{k-1}' - x_{k-1}) + \mu_{k-1}' (x_k - x_{k-1}') \tag{7}$$

и т. д.

Што се тиче вредности коефицијената

$$\mu_0, \mu_0', \cdots \mu_{k-1}, \mu_{k-1}', \ldots,$$

они се рачунају на следећи начин. Повућимо праве линије паралелне ординатној оси OY (сл. 1), на растојањима

$$x_0', \ldots x_{k-1}', \ldots$$

Нека су

$$D_1', \ldots D_{k-1}', \ldots \quad \text{и} \quad C_1', \ldots C_{k-1}', \ldots$$

тачке пресека нацртаних правих линија са странама угла $\llcorner CBD$.

Према прећашњој одредби број μ_0 је најмања вредност функције $f(x, y)$ за спољашност новог троугла $\Delta B D_1' C_1$, а број μ_0' означава најмању вредност функције $f(x, y)$ за спољашност транеза $C_1' D_1' D_1 C_1$. Али m_0 представља најмању вредност наше функције $f(x, y)$ за спољашност троугла $\Delta B D_1 C_1$, која је сложена из прећашњег троугла $\Delta B D_1' C_1'$ и трапеза $C_1' D_1' D_1 C_1$. Због тога један од два броја, μ_0 и μ_0', раван је броју m_0, па је други већи од њега, или бар раван m_0. Према томе израз (6), или је већи од првог члана збира (5), или је раван овоме члану. На тај начин види се, да је образац (7), или већи од k-ог члана збира (5), или бар раван њему.

Услед тога вредност y'_n је већа од y_n или бар равна њој.

Али по себи се разуме, да су све количине

$$y_n, y'_n, \dots$$

мање од коначног броја

$$M(x - x_0).$$

Одакле је очигледно, да количина y_n тежи одређеној граници, кад број n непрестано расте; означимо ову границу са y (x).

Јасно је, да, за $x = x_0$, функција y (x) узима вредност y_0.

Лако је пак доказати, да је нађена функција y (x) непрекидна, у посматраној области правилности дате једначине (1), и да у тој области постоји њен први извод, па према томе y (x) представља тражени интеграл једначине (1).

Овај се доказ може извршити на исти начин, као што га је изложио Жордан у свом уџбенику[1], независно од услова Липшица.

Одиста, нека независно промењива количина x добије неки прираштај h; примењујући формуле (4) за размак (x, x + h), посматрајмо h као безконачно малу количину и према томе ограничимо се на једну једначину:

$$y(x+h) - y(x) = f(x', y') . h,$$

где су x' и y' одговарајуће вредности x и y, које одговарају најмањој вредности функције f (x, y) за спољашност почеточног троугла наше теорије.

Пошто је функција f (x, y) непрекидна у послеењој области, то се пређашња једнакост може написати овако:

$$y(x+h) - y(x) = [f(x, y) + \epsilon] h,$$

где ϵ тежи нули са h.

Услед тога добијамо

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = f(x, y) + \epsilon.$$

Обе последње формуле доказују, да је функција y (x) непрекидна и да она задовољава дату једначину (1).

Формула (5), која одређује тражени интеграл, може се проширити на овај начин.

Означимо са

$$\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \dots \xi_k, \eta_k, \dots \xi_{n-1}, \eta_{n-1}$$

---

[1] *Cours d' Analyse*, t. III, 2^e éd., p. 92. Paris 1896.

вредности променљивих количина x и y, које задовољавају услове:

$$m_0 \equiv f(\xi_0, \eta_0), m_1 \equiv f(\xi_1, \eta_1), \ldots$$

$$m_k \equiv f(\xi_k, \eta_k), \ldots\ldots m_{n-1} \equiv f(\xi_{n-1}, \eta_{n-1}).$$

где су m_k одговарајуће вредности у једначинама (4).

Обележимо сад на оси OX (сл. 1.), у сваком размаку (x_k, x_{k+1}), једну *потпуно произвољну* тачку са апсцисом ξ'_k. Саставимо даље образац, претпостављајући, да је $x_n \equiv x$,

$$y''_n = y_0 + \sum_{k=o}^{n-1} m'_k (x_{k+1} - x_k), \qquad (8)$$

где број m'_k вреди:

$$m'_k \equiv f(\xi'_k, \eta_k).$$

Ако се број тачака делења размака (x_0, x) повећава ма на какав начин, а сваки размак (x_k, x_{k+1}) тежи нули, онда ћемо добивати, да је

$$|m'_k - m_k| < \epsilon_k, \qquad (9)$$

где је ϵ_k бесконачно мала позитивна количина, јер је m_k, сагласно одредби, најмања вредност функције $f(x, y)$, у области одговарајућег трапеза.

Услед неједнакости (9) и на основу формуле (5), израз (8) постаје

$$|y''_n - y_n| < \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k (x_{k+1} - x_k).$$

Нека је ϵ највећа вредност од свих бесконачно малих количина ϵ_k; тада добијамо

$$|y''_n - y_n| < \epsilon (x - x_0).$$

Откуд имамо, да је

$$\lim y''_n = \lim y_n.$$

Према томе *израз* (8) *представља нову проширену одредбу интеграла обичне диференцијалне једначине* (1).

Добијена општа формула (8) дозвољава нам да изразимо тражени интеграл једначине (1) још на следећи начин.

За то ћемо искористи горе одређене вредности ξ_k, η_k променливих количина x и y, па израчунајмо вредности ордината $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, помоћу следећих формула

$$Y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \eta_0)\, \partial x,$$

$$Y_2 - Y_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \eta_1)\, \partial x,$$

. . . .

. . . .

$$Y_n - Y_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, \eta_{n-1})\, \partial x.$$

Збир написаних n једначина даје за Y_n следећи образац

$$Y_n = y_0 + \sum_{k=o}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, \eta_k)\, \partial x, \qquad (10)$$

где је опет $x_n \equiv x$.

Пошто је функција $f(x, y)$ непрекидна у посматраној области, то можемо ставити

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, \eta_k)\, \partial x = f(\xi_k'', \eta_k)(x_{k+1} - x_k),$$

где ξ_k'' представља једну вредност независно променљиве количине x, која се налази у интервалу $x_k\, x_{k+1}$.

Услед тога формула (10) добиће израз

$$Y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k'', \eta_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Откуд се види, да вредност Y_n припада општој формули (8). Због тога Y_n дато једначином (10) тежи интегралу $y(x)$ дате диференцијалне једначине (1).

Изложена се расматрања могу проширити на један систем обичних диференцијалних једначина првог реда. Посматрајмо, например, систем двеју једначина

$$y' = f(x, y, z) \quad , \quad z' = F(x, y, z), \qquad (11)$$

где су y и z две функције једне независно променљиве количине x, а f и F су непрекидне функције за вредности промењивих количина, које су одређене размацима

$$(x_0, x_0 + a) \quad , \quad (y_0 - b, y_0 + b) \quad , \quad (z_0 - c, z_0 + c),$$

где су a, b и c позитивне количине.

Означимо са M највећу границу од $|f(x, y)|$ и $|F(x, y)|$, у унутрашњости горе наведене области. Нека је даље h најмања вредност од

$$a, \frac{b}{M}, \frac{c}{M}.$$

Претпоставимо, да се x налази у размаку $(x_0, x_0 + h)$. Уметнимо произвољан број количина (2) између x_0 и x. Најпосле израдимо, за сваку од функција y и z, слику, која је слична са 1-ом.

Нека су m_k и n_k респективно најмање вредности функција $f(x, y, z)$ и $F(x, y, z)$ за $k + 1$ — ве трапезе, који оба одговарају размаку (x_k, x_{k+1}).

Доказаћемо лако на исти начин, као и горе за једну једначину, забележећи $x \equiv x_n$, да обрасци

$$y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k),$$

$$z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} n_k (x_{k+1} - x_k)$$

теже потпуно одређеним границама, кад се број n страна наших многоугаоника повећава по ма каквом закону тако, да би сваки размак (x_k, x_{k+1}) тежио нули.

Добијене функције, које ћемо забележити респективно са $y(x)$ и $z(x)$, одређују за систем (11) тражене интеграле, непрекидне у размаку $(x_0, x_0 + h)$. Лако се види, да осим тога ови интеграли постају респективно y_0 и z_0, за $x = x_0$.

Нека су узајамно

$$\xi_k, \eta_k, \zeta_k \quad \text{и} \quad \overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k, \overline{\zeta}_k$$

вредности промењивих количина x, y, z, које одговарају условима, да су

$$m_k \equiv f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), \quad n_k \equiv F(\overline{\xi}_k, \overline{\eta}_k, \overline{\zeta}_k).$$

Лако се види на тај исти начин, као и за једну једначину, да систем једначина (11) допушта такође проширен образац за њене интеграле, који представљају граиице следећих израза

$$\left.\begin{aligned} y''_n &= y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi'_k, \eta_k, \zeta_k)(x_{k+1} - x_k), \\ z''_n &= z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} F(\bar{\xi}'_k, \bar{\eta}_k, \bar{\zeta}_k,)(x_{k+1} - x_k), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

где су ξ'_k и $\bar{\xi}'$ апсцисе ма каквих произвољних тачака одговарајућег размака (x_k, x_{k+1}).

С обзиром на последње формуле (12), тражени се интеграли система (11) добијају такође као граничне вредности израза

$$Y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, \eta_k, \zeta_k)\, \partial x,$$

$$Z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} F(x, \bar{\eta}_k, \bar{\zeta}_k)\, \partial x.$$

Одиста, на основу теореме о средњој вредности одређеног интеграла, написани образци одма се, претварају у облик (12) и према томе одређују тражене интеграле система диференцијалних једначина (11).

DÉMONSTRATION DE L'EXISTENCE DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. N. SALTYKOW.

Professeur à l'Université de Belgrade.

La démonstration exposé concerne l'existance des intégrales dans le domaine de la régularité des équations différentielles ordinaires données, indépendamment de la condition restrictive de Lipschitz, en supposant seulement que les seconds membres des équations différentielles données, résolues par rapport aux dérivées, soient continues, La démonstrations, dont il s'agit, simplifie les démonstrations classiques de Cauchy—Lipschitz et de M. E. Picard. On introduit les valeurs minima des seconds membres des équations en question. Il en résulte immédiatement que les sommes, représentant les valeurs approchées des intégrales requises, tendent vers des limites bien déterminées. Ce résultat s'obtient par une méthode analogue à celle dont avait profité M. P. Painlevé dans sa théorie des intégrales définies.

Enfin, la méthode développée présente l'avantage de donner une nouvelle formule générale pour les intégrales étudiées, sans avoir recours à la condition mentíonnée de Lipschitz.

Cette nouvelle formule permet de représenter les intégrales des équations considèrées moyennant une série des quadratures, d' ailleurs d'une manière toute différente à celle de la mèthode des approximations successives de M. E. Picard. Grâce à la forme nouvelle des intégrales en question, on obtient immédiatement que la série des quadratures considérées converge vers l'intégrale requise, indépendamment de la restriction de Lipschitz.

АДИАБАТИЧНО ОХЛАЂИВАЊЕ ВОДЕ И ТЕМПЕРАТУРА ЊЕЗИНЕ НАЈВЕЋЕ ГУСТИНЕ У ЗАВИСНОСТИ ОД ПРИТИСКА.

НАПИСАЛИ Н. А. ПУШИН И И. В. ГРЕБЕНШЧИКОВ.

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 3. XI. 1924.).

Промена температуре воде, која се опажа код адиабатичке промене њезине запремине, била је већ предметом истраживања[1]. Не улазећи у разматрање наведених радња, од којих су неке данас само од историјског интереса, рећи ћемо само, да се резултати ових радња међусобно често знатно разликују, и да су ти резултати добивени за притиске испод 500 kg/cm². Тек је недавно Bridgman[2] теоретски израчунао вредност коефицијента адиабатичког охлађења за притиске до 12.000 kg/cm². Но како је наша властита метода за испитивање равнотеже код високих притисака[3] пружила могућност одредити експериментално и промену температуре субстанције код адиабатичне промене њезине запремине, одлучили смо да одредимо коефицијенат адиабатичког охлађивања воде код различних температура до притисака од 4000 kg/cm².

Споменимо овде укратко суштину саме методе. Бомба, која је саграђена по типу Тамановe бомбе[4], уроњена је у термо-

---

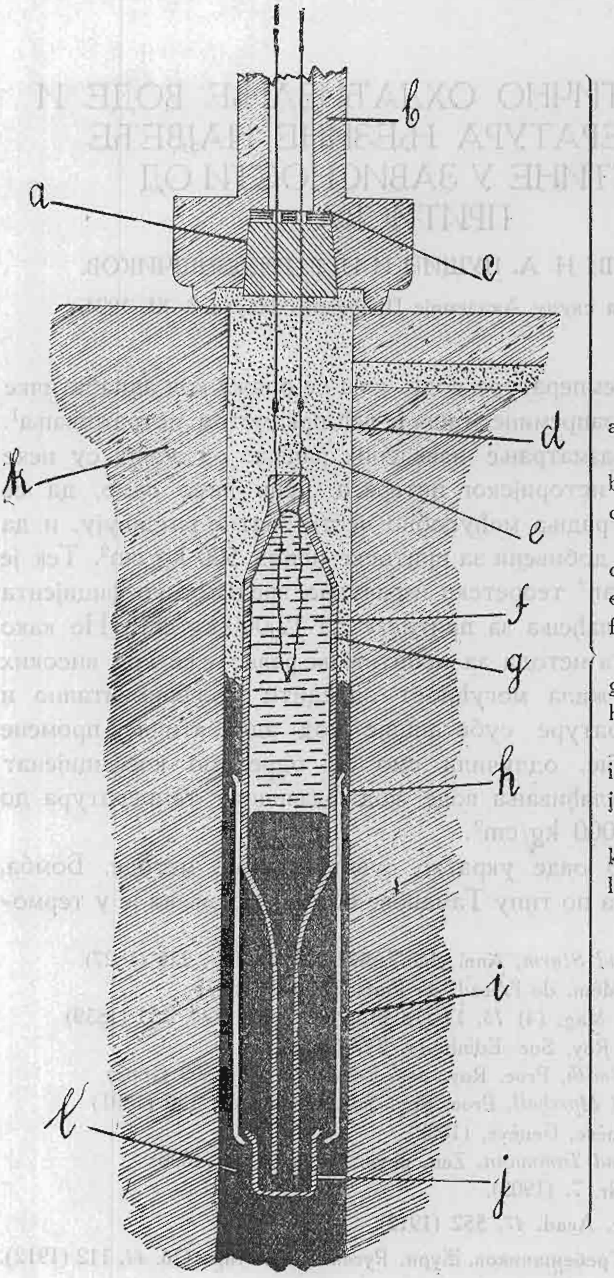
[1] *Colladon und Sturm*, Ann. chim. phys. [2] *36*, 113, 225 (1827)
Regnault, Mém. de l'Acad. de Paris *21*, 462 (1847)
Joule, Phil. Mag. (4) *15*, 17 (1858); Phil. Trans. *149*, 133 (1859)
Tait, Proc. Roy. Soc. Edinb. *11*, 217 (1881)
Marchall, Smith, Proc. Roy. Soc. Edinb. *11*. 626, 809 (1882)
Burton and Marchall, Proc. Roy. Soc. London *50*, 130 (1891)
Galopin, Thèse, Genève, (1893).
Rogoyski und Tammann, Zeit. phys. Chem. *20*, 1 (1896)
Richards, Nr. 7. (1903).

[2] Proc. Amer. Acad. *47*, 552 (1912).

[3] Пушин и Гребенщчиков. Журн. Русск. Физ. Хим. Об. *44*, 112 (1912).

[4] Tammann, Kristallisieren und Schmelzen, 1903, 195.

стат, који је напуњен парафинским уљем или другом прикладном течности. Субстанција, која се је испитивала, била је затворена



a — чеп од слонове кости
b — чеп од челика
c — челична плочица
d — рициново уље
e — термоелеменат
f — истражна субстанца
g — стаклена цев
h — прстен од каучука
i — конац
j — стаклена чашица
k — челична бомба
l — жива

Слика 1. — **Бомба, вертикални пресек.**

у стаклену цев (сл. 1.), урођену у бомбу, и одељена живом од течности, којом се преносио притисак и за коју је обично служило рициново уље. Температура се у термостату помоћу електричног грејала држала константном точношћу од $\pm 0{,}01^0$. Због великог садржаја термостата (70 литара) и због тога, што је био са свих страна заштићен коморицом, његова се температура мењала веома споро. Температура субстанције, која се испитивала у бомби, мерила се помоћу термоелемента железо-никелин, који је био утаљен у горњи затворени крај стаклене цеви, која је садржавала субстанцију. Један део жица термоелемента, који је пролазио унутар цеви са субстанцијом, био је танак, да му осетљивост за промене температуре буде што већа. Спојени се крај термоелемента налазио у средини цеви у једнаком одстојању од њезиних зидова. Пошто је максимални уклон галванометра трајао само неколико секунада, то ради лоше спроводљивости за топлоту неметалних течности и стаклене цеви, температура околиша термоелемента није доспела да осетно утиче на податке галванометра. Други су крајеви термоелемента излазили кроз чеп у бомби и прошавши кроз термостат са ледом били су спојени са стезаљкама осетљивог зрцалног галванометра. Уклони се галванометра бијежили аутоматски помоћу апарата за регистрирање од Н. С. Курнакова на фотографском папиру и истовремено се пратили непосредним опажањем, да би се у сваки час знало, шта се збива унутар бомбе. У круг је галванометра била укопчана компензациона справа, која је допуштала да се праве мерења са истом точношћу код било које температуре.

Притисак се мерио помоћу Бурдоновог манометра (саграђеног као и бомба од фирме Schäffer und Budenberg, Magdeburg-Buckau), који је допуштао мерење притиска до 6000 kg/cm², а могло се још прочитати 5—3 kg/cm².

Пре одређивања промене температуре субстанције код адиабатичког процеса, у термостату су се начиниле редом две или три сталне температуре, међу којима се могла мењати температура код адиабатичког процеса. И ове су се сталне температуре наносиле на фотографски папир. Тако су напр. код одређивања адиабатичког процеса код 25^0 на папир осим ове температуре биле нанешене још константе $24{,}00^0$ и $26{,}00^0$. У овом је интервалу један милиметар скале галванометра одговарао $0{,}0136^0$.

Након што су нанесене константне температуре, у термостату се начинила одређена температура, код које се имао извести опит. Одређивања су се правила како са адиабатичким растезањем тако и са адиабатичким притискавањем. Одређивања су са растезањем давала уопће поузданије резултате, него са притискавањем, особито код високих притисака: прва су се могла извести готово моментано у току од 1—2 секунде, док су друга тражила нешто више времена. Ради тога су већим делом била изведена опажања о адиабатичком растезању супстанције.

Сам се опит изводио на следећи начин. Након што је у бомби настала константна температура, што се је видело из података галванометра, један од опажача, забележивши податке манометра, спојеног са бомбом, и извадивши претходно чеп за стлачивање на прикладан размак, брзим кретом отворио је вентил, који је одељивао чеп од бомбе, и одмах га опет затворио. Притисак је у бомби падао, и опажач је одмах бележио нови податак манометра. У исто је време други опажач забележио податак галванометра, који је одмах регистрирао промену температуре истраживане течности. Истовремено се ради контроле податци писали фотографски у апарату за регистрирање.

У ниже наведеним таблицама I—VII и на дијаграму 2. приказани су резултати одређивања којефицијента адиабатичног охлађења (и угрејавања) $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ воде код температура 0^0, 25^0, 37^0, 54^0, и 80^0. У таблицама означује p средњу вредност притиска између почетног и коначног притиска код адиабатичког процеса, $\triangle p$ разлику између потоњих двију вредности[1], $\triangle t$ промену температуре воде запажену код процеса, $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ — промену температуре воде, која одговара промјени притиска за 1 kg/cm², код притиска p.

Споменимо још, да би било правилније да се вредности за $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$, које су наведене у таблицама, не односе на температуре $t = 0^0, 25^0, 37^0, 54^0$, и 80^0, него за којефицијент охлађивања на

---

[1] Одавде се може лако израчунати почетни p_1 и коначни притисак p_2, који у таблицама нису наведени, а који су били прочитани на манометру пре и после адиабатичког растезања: $p_1 = p + \frac{\triangle p}{2}$; $p_2 = p - \frac{\triangle p}{2}$.

температуре $t - \frac{\triangle t}{2}$, а за којефицијент угрејавања на температуре $t + \frac{\triangle t}{2}$, које се, макар и незнатно, разликују од t.

Таблица I.

Промена температуре воде код адиабатичког стискавања код 0^0.
Le changement de la température de l'eau en cas de compression adiabatique à 0^0.

$\triangle p$ kg/cm²	$\triangle t^0$	p kg/cm²	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
78	— 0,0750⁰	141	— 96
75	— 0,0637	213	— 85
78	— 0,0512	286	— 66
85	— 0,0438	360	— 52
125	— 0,0375	463	— 30
740	— 0,2262	470	— 30
125	— 0,0025	588	— 2
137	+ 0,0262	704	+ 19
240	+ 0,1337	883	+ 56
180	+ 0,1275	1050	+ 71
210	+ 0,2012⁰	1230	+ 96

Како се види из таблице I. и II. крива $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ код 0^0 испитана је од нас до притиска 3155 kg/cm² за процес адиабатичког растезања и до 1125 kg/cm² за процес адиабатичког стискавања. Обе су серије одређивања дале резултате, који се врло добро подударају. Са повећањем притиска деривација $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ код 0^0 непрестано расте мењајући се од — 0,00096 код p = 141 kg/cm² до + 0,00187 код 3000 kg/cm², при чему се крива изразито завија према оси притиска. Према рачунима Bridgman-овим у близини притиска од 4000 kg/cm² крива прелази кроз максимум.

Таблица II.

Промена температуре воде код адиабатичког растезања код 0⁰.
Le changement de la température de l'eau en cas de dilatation adiabatique à 0⁰.

Δp kg/cm²	Δt^0	p kg/cm²	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
— 575	+ 0,2713	388	— 47
— 400	+ 0,1562	400	— 39
— 60	+ 0,0185	430	— 31
— 50	+ 0,0112	480	— 22
— 50	+ 0,0087	525	— 17
— 35	+ 0,0012	568	— 4
— 50	0,0000	600	0
— 40	— 0,0012	630	+ 3
— 43	— 0,0063	666	+ 15
— 115	— 0,0262	732	+ 23
— 410	— 0,1600	835	+ 39
— 362	— 0,3113	1181	+ 86
— 388	— 0,4613	1534	+ 119
— 482	— 0,7087	1936	+ 147
— 405	— 0,6600	2352	+ 163
— 335	— 0,6213	2708	+ 185
— 305	— 0,5701	3002	+ 187

Промена температуре највеће густине воде са променом притиска.

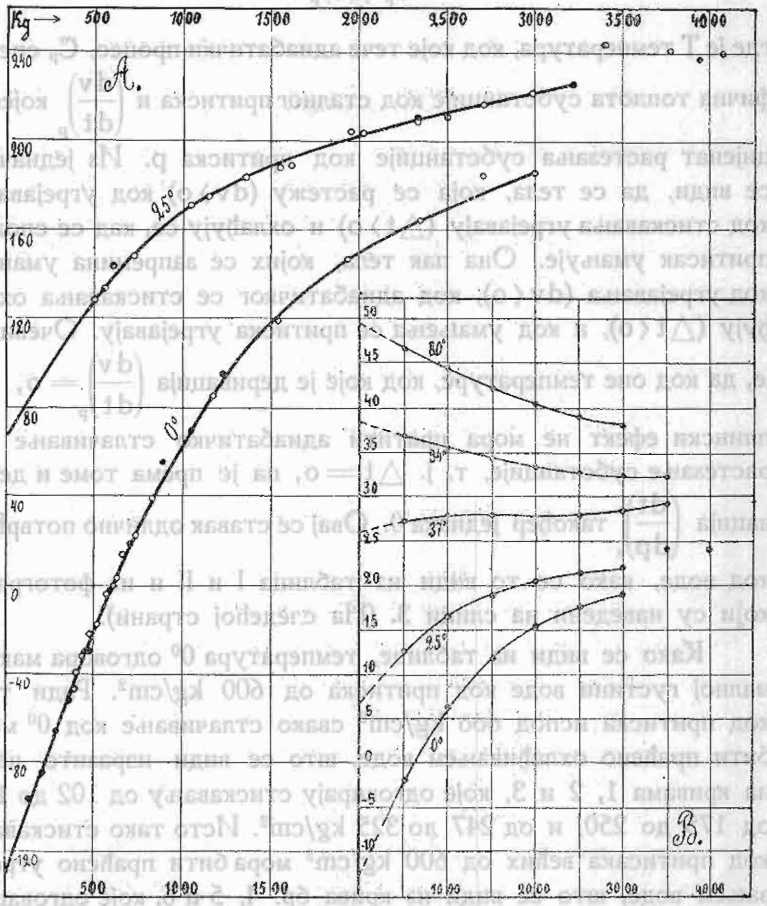
Још је Amagat[1] приметио, кад је одређивао притиске, код којих одређена запремина воде остаје стална код промене температуре, да се максимум густине воде са повећањем притиска помиче према нижим температурама. Према његовим одређивањима температура од 0⁰ одговара максималној густини воде код притиска, који лежи између 143 и 197 kg/cm². Исту приближну вредност нашао је и Lussana[2], који је нашао, да се максимум густине воде помиче према 0⁰ код притиска око 180 kg/cm².

---

[1] *Amagat*, Ann. chim. phys. [6] *29*, (1893) 559.

[2] *Lussana*, Nuovo Cim. (4) *2*, 233 (1895). — *Cohen* und *Schut*, Piezochemie condensierter Syst., 172.

Bridgman је у својем одличном испитивању термодинамичких константа воде утврдио факат, да најмању запремину вода заузима код температуре, која лежи испод 0^0 (око — 4^0) код повећања притиска до 1500 kg. Према његовим одређивањима температура 0^0 одговара максималној густини воде код притисака, који леже између 500 и 1000 kg. Одређивање нам је деривације $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ дало могућност, да тачније одредимо притисак, код којега максимална густина воде лежи код 0^0. Термодинамички се



Слика 2. — **Коефицијенат адиабатичког охлађивања воде као функција од притиска.**

---

[3] *Bridgman,* Zeit. anorg. Chem. 77 (1912), 387,

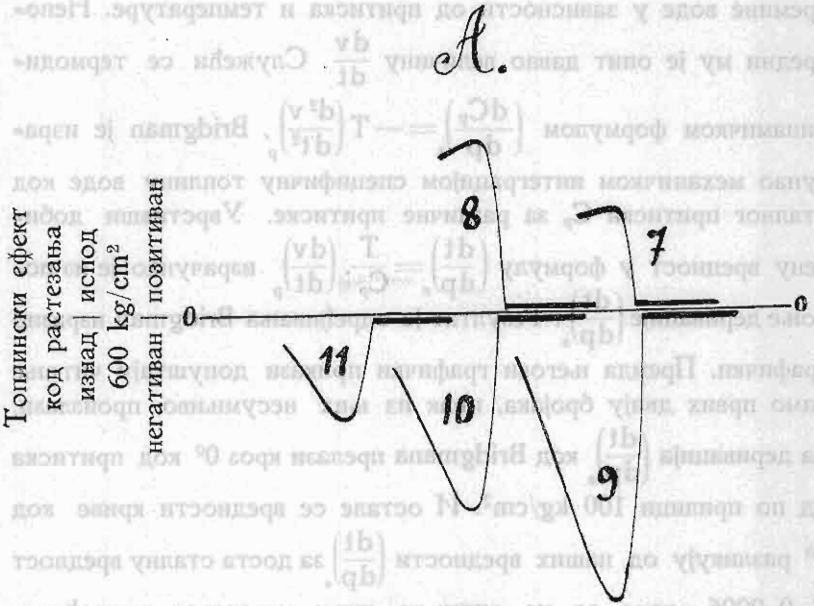
промена температуре $\triangle t$ код адиабатичког процеса, како је познато, може израчунати из једначине:

$$\triangle t = \frac{T}{C_p}\left(\frac{dv}{dt}\right)_p \cdot \triangle p,$$

где је T температура, код које тече адиабатички процес, C_p специфична топлота субстанције код сталног притиска и $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p$ којефицијенат растезања субстанције код притиска p. Из једначине се види, да се тела, која се растежу ($dv > o$) код угрејавања, код стискавања угрејавају ($\triangle t > o$) и охлађују се, кад се спољни притисак умањује. Она пак тела, којих се запремина умањује код угрејавања ($dv < o$), код адиабатичког се стискавања охлађују ($\triangle t < o$), а код умањења се притиска угрејавају. Очевидно је, да код оне температуре, код које је деривација $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = o$, топлински ефект не мора пратити адиабатичко стлачивање или растезање субстанције, т. ј. $\triangle t = o$, па је према томе и деривација $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ такођер једнака 0. Овај се ставак одлично потврђује код воде, како се то види из таблица I и II и из фотограма, који су наведени на слици 3. (На следећој страни).

Како се види из таблице, температура 0^0 одговора максималној густини воде код притиска од 600 kg/cm^2. Ради тога код притиска испод 600 kg/cm^2 свако стлачивање код 0^0 мора бити праћено охлађивањем воде, што се види изразито напр. на кривама 1, 2 и 3, које одговарају стискавању од 102 до 180, од 175 до 250, и од 247 до 325 kg/cm^2. Исто тако стискавање код притисака већих од 600 kg/cm^2 мора бити праћено угрејавањем воде, што се види из крива бр. 4, 5 и 6, које одговарају стискавању воде од 763 до 1003, од 960 до 1140 и од 1125 до 1335 kg/cm^2. На фотограмима се види, да се галванометар отклањао на противну страну него што је то чинио код опита 1, 2, 3.

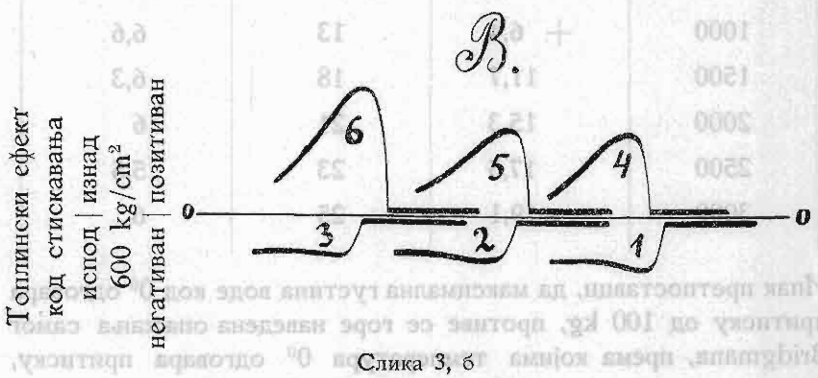
Адиабатичко растезање воде код притисака испод 600 kg. обратно је праћено угрејавањем, како се види из крива бр. 7 и 8. (растезање од 675 до 100 и од 600 до 200 kg/cm^2) а у подручју, које лежи више од 600 kg, охлађењем, као и код свих нормалних течности, криве бр. 9, 10 и 11 (1728—1340, 1362—1000,



Слика 3, а

1040—630 kg/cm²). Крива $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ пролази кроз вредност 0 код 600 kg. Баш код овог притиска максимум густоће воде лежи код 0⁰.

Како је било горе наведено промена је температуре воде код адиабатичке промене њезине запремине служила за предмет теоретских рачуна Bridgman-ових[1], који је одредио промене за-



Слика 3, б

---

[1] Bridgman, Proc Amer. Acad. *48* (1912) 310—355—362

премине воде у зависности од притиска и температуре. Непосредни му је опит давао величину $\frac{dv}{dt}$. Служећи се термодинамичком формулом $\left(\frac{dC_p}{dp}\right)_t = -T\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)_p$, Bridgman је израчунао механичком интеграцијом специфичну топлину воде код сталног притиска C_p за различне притиске. Уврстивши добивену вредност у формулу $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s = \frac{T}{C_p} \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)_p$ израчунао је из потоње деривације $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$. Резултат је одређивања Bridgman изразио графички. Премда његови графички прикази допуштају читање само првих двију бројака, ипак из њих несумњиво произлази, да деривација $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ код Bridgmana прелази кроз 0^0 код притиска од по прилици 100 kg/cm². И остале се вредности криве код 0^0 разликују од наших вредности $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ за доста сталну вредност $+0,0006$, како се то види из ниже наведеног упоређења.

p	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^4$ код 0^0		
	Pušin i Grebenščikov Пушин и Гребенщиков	Bridgman Бриджмен	△
500	— 2,0	7	9
1000	+ 6,4	13	6,6
1500	11,7	18	6,3
2000	15,3	21	6
2500	17,5	23	5,5
3000	19,1	25	6

Ипак претпоставци, да максимална густина воде код 0^0 одговара притиску од 100 kg, противе се горе наведена опажања самог Bridgmana, према којима температура 0^0 одговара притиску, који лежи у границама 500—1000 kg/cm².

Снижењем се температуре максималне густине воде код повишеног притиска могу добро објаснити неке појаве геофизичког карактера. Тако је температура у морским дубинама

Таблица 3.

Промена температуре воде код адиабатичке промене њезине запремине код 25^0.

Le changement de la température de l'eau en cas de changement adiabatique de son volume. à 25^0.

<table>
<tr><td colspan="4">Стискавање — Compression</td></tr>
<tr><td>Δp kg/cm^2</td><td>Δt</td><td>p kg/cm^2</td><td>$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$</td></tr>
<tr><td>725</td><td>1,042^0</td><td>607</td><td>144</td></tr>
<tr><td>490</td><td>1,027</td><td>2330</td><td>210</td></tr>
<tr><td>423</td><td>0,952</td><td>3214</td><td>225</td></tr>
<tr><td>330</td><td>0,784</td><td>3935</td><td>237</td></tr>
<tr><td colspan="4">Растезање — Dilatation</td></tr>
<tr><td>390</td><td>0,498^0</td><td>495</td><td>128</td></tr>
<tr><td>507</td><td>0,680</td><td>569</td><td>134</td></tr>
<tr><td>458</td><td>0,677</td><td>731</td><td>148</td></tr>
<tr><td>500</td><td>0,855</td><td>1045</td><td>171</td></tr>
<tr><td>460</td><td>0,807</td><td>1155</td><td>175</td></tr>
<tr><td>165</td><td>0,302</td><td>1367</td><td>183</td></tr>
<tr><td>425</td><td>0,799</td><td>1562</td><td>188</td></tr>
<tr><td>425</td><td>0,803</td><td>1627</td><td>189</td></tr>
<tr><td>413</td><td>0,845</td><td>1954</td><td>204</td></tr>
<tr><td>455</td><td>0,922</td><td>2033</td><td>203</td></tr>
<tr><td>400</td><td>0,835</td><td>2340</td><td>209</td></tr>
<tr><td>565</td><td>1,195</td><td>2507</td><td>211</td></tr>
<tr><td>430</td><td>0,933</td><td>2720</td><td>217</td></tr>
<tr><td>465</td><td>1,025</td><td>2992</td><td>221</td></tr>
<tr><td>263</td><td>0,641</td><td>3384</td><td>243</td></tr>
<tr><td>375</td><td>0,909</td><td>3388</td><td>243</td></tr>
<tr><td>440</td><td>1,061</td><td>3770</td><td>241</td></tr>
<tr><td>195</td><td>0,468</td><td>4078</td><td>240</td></tr>
</table>

нађена знатно нижа од $+ 4^0$, што би било несхватљиво, кад се неби узимао обзир на притисак горњих слојева. Занимљиво је, да је експедиција Challenger[1] одредила температуру на дну оцеана у дубини 2800 енгл. поморских квати (5 100 m) са $+ 0{,}3^0$. Ако се узме у обзир, да се специфична тежина воде под притиском од 500 атмосфера код концентрације соли $3{,}5^0/_0$ повећава приближно са $5^0/_0$, то ће се притисак у дубини од 5100 m. изразити бројем 535 kg/cm^2. Одакле можемо израчунати да 0^0 одговара притиску од 580 kg/cm^2 — број, који је близу ономе, што смо га ми добили (600 kg/cm^2).

Из таблице се 3. и сл. 2. види, да вредност коефицијента адиабатичког охлађивања код 25^0 као и код 0^0 са повишењем

Таблица 4.

Промена температуре воде код адиабатичког растезања код 37^0.
Le changement de la température de l'eau en cas de dilatation adiabatique à 37^0.

$\triangle$ p kg/cm^2	$\triangle\, t^0$	p kg/cm^2	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
500	$1{,}348^0$	435	270
315	0,886	818	281
400	1,125	1150	281
363	1,004	1507	277
465	1,314	1892	282
415	1,140	2308	275
375	1,060	2678	283
415	1,180	3048	285
315	0,916	3873	291

притиска непрекидно расте, а не умањује се као код других текућина и приближава се некој граничној величини. У близини притиска од 3400 kg. опажа се промена правца у криви, те она иде готово хоризонтално, т.ј. релативно угрејавање воде код промене притиска za 1 kg./cm^2 у подручју 3400—4000 kg/cm^2 постаје готово независно од притиска. Мора се приметити, да у близини притиска од 3000 kg. према Bridgman-овим одређи-

---

[1] Report voyage Challenger 1873—1876, vol I, 91.

вањима[1] лежи тачка прелаза кристалне модификације леда III у лед V. Није искључена могућност, да различним модификацијама воде у кристалном стању одговара различни ступањ асоцијације текуће воде, чиме се можда и објашњава промена у правцу криве деривације $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$

Таблица 5.

Промена температуре воде код адиабатичког растезања код 54^0.
Le changement de la température de l'eau en cas de dilatation adiabatique à 54^0.

$\triangle$ p kg/cm^2	$\triangle$ t^0	p kg/cm^2	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
385	1,408^0	642	366
385	1,392	1008	361
425	1,457	1388	343
505	1,712	1822	339
525	1,690	2312	322
560	1,867	2825	331
270	0,856	3715	318

Таблица 6.

Промена температуре воде код адиабатичког растезања код 80^0.
Le changement de la température de l'eau en cas de dilatation adibatique à 80^0.

$\triangle$ p kg/cm^2	$\triangle$ t^0	p kg/cm^2	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
335	1,577^0	418	471
430	1,972	765	459
560	1,539	1230	436
453	1,846	1719	408
455	1,809	2588	397
462	1,761	3031	381

---

[1] *Bridgman*, Proc. Amer. Acad. *47*, 524; Zeit. an. chem. *77*, 377. (1912).

Вредности, које смо добили за $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ код 80⁰, врло се добро подударају са теоретски израчунанима по Bridgmanu, како се то види из доњег упоређења.

p	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^4$ код 80⁰		
	Pušin i Grebenščikov Пушин и Гребеншчиков	Bridgman	△
1000	44,5	46	— 1,5
1500	42,3	43	— 0,7
2000	40,6	40	+ 0,6
2500	39,2	38	+ 1,2
3000	38,2	37	+ 1,2

Таблиц 7.

Вредности су деривације $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ код $p = 1$ kg/cm² добивене графичком екстраполацијом и ради тога су од мање точности него све остале, које су добивене графичком интерполацијом експерименталних података.

Les valeurs de la dérivation $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ pour $p = 1$ kg/cm² ont été obtenues au moyen d'une extrapolation graphique des données experimentales et sont par conséquent moins exactes, que tontes les autres valeurs obtennes par l'interpolation graphique.

p kg/cm²	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$				
	0⁰	25⁰	37⁰	54⁰	80⁰
1	— 130	+ 66	260	390	492
500	— 20	+ 130	273	371	468
1000	+ 64	167	279	357	445
1500	116	188	279	344	423
2000	150	203	279	335	406
2500	173	213	279	329	392
3000	189	223	284	325	382
3500	—	242	293	322	—
4000	—	240	—	—	—

Из задње се таблице, а такођер и из слике 2 јасно види, да вредност $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ kod 0^0 и код 25^0 са повишењем притиска непрекидно расте и приближава се некој граничној величини. Код 37^0 је она у границама притисака 1—3500 kg/cm² готово независна од притиска, а код 54^0 и 80^0 она се са повећањем притиска непрекидно умањује, као што се то опажа за све друге субстанције, које смо испитивали[1]. Одавде се може закључити, да се она својства, којима се вода код ниских температура разликује од велике већине других твари, нестају код 54^0 и више.

---

[1] Резултати ће бити засебно објављени.

LE REFROIDISSEMENT ADIABATIQUE DE L'EAU ET LA TEMPERATURE DE SA DENSITE MAXIMALE EN DEPENDANCE DE LA PRESSION

PAR N. A. POUCHINE ET I. V. GREBENŠČIKOV.

L'élévation et l'abaissement de la température de l'eau, qui accompagne sa compression et dilatation adiabatiques, ont été déterminées par la méthode „pyrometrique". Cette méthode était elaborée par les auteurs afin de servir à l'étude des équilibres sous des grandes pressions. La substance examinée se trouvait dans un tube de verre placé dans la bombe. Pour la transmission de la pression on a employé la paraffine liquide. La paraffine était separée de la substance examinée par le mercure. La pression jusqu'a 4000 kg/cm^2 a été déterminée au moyen d'un manométre d'après Bourdon et la température au moyen d'un thermocouple, qui était soudé dans la partie supérieure du tube de verre et d'un galvanométre à miroir trés sensible. Moyennant d'un appareil de compensation il était possible de mésurer la température dans tout intervale avec la même précision. Afin d'avoir un controle, les indications du galvanométre ont été lues par l'oeil et en même temps registrées automatiquement sur le papier photographíque. La température du procès adiabatique a été mésurée avec une précision de 0,0001^0 et la pression avec une précision de 3—5 kg/cm^2. Les déterminations ont été faites également pendant la compression comme pendant la dilatation adiabatiques. Les dernieres déterminations ont donné d'ordinaire des résultats plus précis parcequ'on a pu les faire presque instantanément.

Comme on peut voir des tableaux et des diagrammes, le coefficient du refroidissement adiabatique à 0^0 et 25^0 s'augmente avec l'élévation de la pression. Il ne diminue, comme c'est le cas avec les autres liquides, et il s'approche d'une valeur limitée. Autour de la pression de 3400 kg/cm^2 on peut discerner un changement de direction dans le courbe. A portir de ce point elle va presque horizontalement. Or l'échauffage de l'eau en cas d'un changement de pression pour 1 kg/cm^2 dans le domaine de 3400 à 4000 kg/cm^2 devient presque indépendant de la pression. A 37^0 la valeur pour le coefficient du refroidissement adiabatique dans les limites de la pression 1—3500 kg/cm^2 est presque indépendante de la pression. A 54^0 et à 80^0 le coefficient se diminue avec l'élévation de la pression. C'est aussi le cas pour tous les autres substances, qui ont été examinées par les auteurs. De ce fait on peut conclure que les propriétés de l'eau, par lesquelles elle diffère de la plupart des autres substances, disparaissent à une température, qui surpasse 54^0.

Le changement de température de la densité maximale de l'eau avec le changement de la pression

Amagat[1] a déjà fait l'observation que la densité maximale de l'eau s'approche des températures inférieures avec l'augmentation de la pression. Selon ses determinaisons une densité maximale à 0^0 correspond à une pression entre 143 et 197 kg/cm^2. D'après Lussana[2] cette pression est de 180 kg/cm^2 et d'après Bridgman[3] elle est entre 500 et 1000 kg/cm^2

De l'équation thermodynamique

$$\triangle t = \frac{T}{C_p}\left(\frac{dv}{dt}\right) \cdot \triangle p$$

il résulte, que les corps, qui se dilatent par le chauffage, se chauffent par la pression et se réfroidissent par la dilatation. Les corps par contre, qui diminuent leur volume, si on les chauffe, se refroidissent par la pression et se chauffent par la dilatation. L'eau en donne un exemple evident, comme on en peut conclure de la fig. 3. Il est évident, que en cas de pression et d'une température, qui correspondent à la densité maximale de l'eau, la compression ou la dilatation adiabatiques ne sont suivies d'aucun effet thormale. Comme on peut voir des tableaux 1 et 2 à 0^0, le coeffieient du refroidissment adibatique $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ devient zero en cas d'une pression de 600 kg/cm^2. Il en

---

[1] Ann. chim. phys. [6], 29, (1893), 559

[2] Nuovo Cim. (4), *2*, 233 (1895)

[3] Zeit. anorg. Chem., *77* (1912), 387.

résulte, que sous une pression de 600 kg/cm^2 la densité maximale de l'eau est à 0^0.

Ce fait a sans doute une importance hydrographique. Il explique pourquoi la température de l'eau dans les profondeurs des océans est toujours inférieure à $+ 4^0$. L'expédition anglaise de Challenger a trouvée à une profondeur de 5100 m. une température de $+ 0,3^0$. Si on prend en considération la pression des couches superieures et la concentration du sel dans l'eau de mer (3, 5$^0/_0$), la pression à une profondeur de 5100 m. est égale à 535 kg/cm^2. Il en dérive, que sous une pression de 580 kg/cm^2 la température doit ètre de 0^0, se qui s'approche à la valeur déterminée par nous (0^0 à 600 kg/cm^2).

АДИАБАТИЧКО ОХЛАЂИВАЊЕ НЕКИХ ОРГАНСКИХ СУБСТАНЦИЈА У ЗАВИСНОСТИ ОД ПРИТИСКА

Н. А. ПУШИН И И. В. ГРЕБЕНЩЧИКОВ.

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 3. XI. 1924.)

По методи, којом смо се служили код испитивања адиабатичког стискавања и растезања воде[1], проучили смо промену температуре код адиабатичког растезања неких других субстанција и то: фенола, бензола, уретана, паратолуидина, етилног алкохола, глицерина и рициновог уља. За прве четири субатанције и за њихове смесе одабрене су температуре испитивања (80^0 и 90^0) тако, да испитивана субстанциа остане капљевита и код највећих притисака, који су употребљени. Ради тога се сви за њих добивени резултати односе на текуће стање субстанције.

Адиабатичко је охлађење етилног алкохола било испитано код 30^0, глицерина код 25^0 и 98, 2^0, а рициновог уља код 0^0. Чисти етилни алкохол кристализује код — 112^0[2], а чисти глицерин код $+ 18^0$.[3] Зависност температуре кристализације алкохола и глицерина од притиска досада још није одређена. За већину досада испитаних органских субстанција са повећањем притиска до 3000 kg/cm^2 температура кристализације расте мање него за 75^0, ради тога може се држати највероватнијим, да су и алкохол код 30^0 и глицерин код 98, 2^0 за време нашег истраживања били у стабилном текућем стању. Код 25^0 и притиска вишег од 1000 kg/cm^2 глицерин је без сумње био у прехлађеном стању. Исто се мора предпоставити о рициновом уљу код 0^0 и виших притисака.

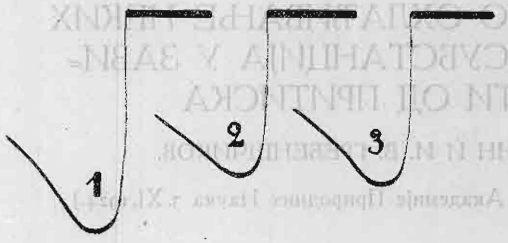
---

[1] Н. Пушин и И. Гребенщчиков, Глас Српске Академије Наука 1925, Т... стр. 41.

[2] Н. Пушин и А. Глатолева, Жур. Рус. Хим. Об. *47* (1915) 100

[3] Н. Пушин и А. Глаголева, Journ. Chem. Soc. London, 1922, *121*, 2813.

Промена се температуре код адиабатичког процеса мерила помоћу термоелемента и регистрирала фотографски. На слици су наведени неки фотограми, који су добивени за фенол. На слици се 1. јасно види, да је галванометар након што је постигао код адиабатичког процеса максимални уклон, доста дуго (око 30 секунда) остао непомичан.



Слика 1.

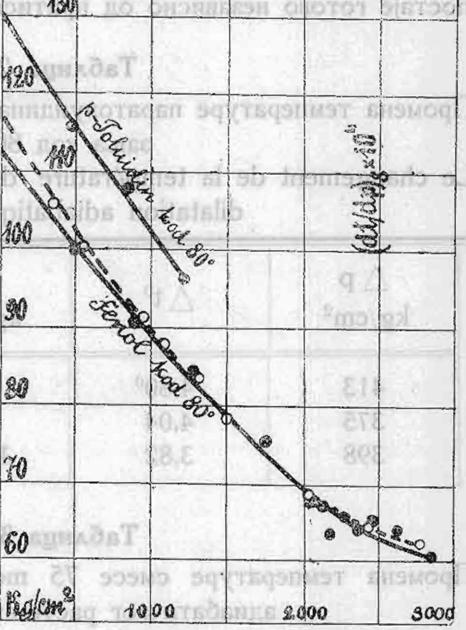
Очевидно је, да поради смештаја термоелемента у централном делу испитиване течности, температура бомбе и течности, која је преносила притисак, (обично рициново уље) као и стаклене посуде, која је садржавала истражну субстанцију, само полагано прелази на термоелемент. Ради тога се максимална промена температуре, која је одговарала адиабатичком процесу,

Таблица 1.

Промена температуре фенола код адиабатичког растезања код 80^0.
Le changement de la température du phénol en cas de dilatation adiabatique à 80^0.

$\triangle$p kg/cm^2	$\triangle$ t^0	p kg/cm^2	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
380	3,792^0	510	997
415	3,773	878	909
475	3,978	1293	837
507	3,844	1753	758
255	1,738	2078	681
360	2,437	2120	677
472	3,004	2186	636
617	4,064	2293	659
405	2,602	2403	642
510	3,317	2467	650
457	2,924	2627	640
325	1,965	2868	605

могла мерити потпуно тачно. Резултати су опита наведени у таблицама I — X. и графики приказани на слици 2 и 3. У таблицама p. означује притисак, средњи између почетног и коначног притиска адиабатичког процеса, $\triangle$ p. разлику између ове две величине, $\triangle$t опажену промену температуре субстанције код процеса, $\left(\frac{\triangle t}{\triangle p}\right)_s$ промену температуре субстанције, која одговара промени притиска за 1 kg/cm^2 код притиска p. Споменимо још, да је исправније односити вредности $\left(\frac{\triangle t}{\triangle p}\right)_s$, које су наведене у таблицама, не на температуре t = 80^0 и t = 90^0, него на средње температуре $t - \frac{\triangle t}{2}$, које се за 1^0 — 3^0 разликују од 80 и 90^0.



Слика 2.

Коефициенат адиабатичког охлађивања као функција од притиска.

-o---o-- смеса: 75 мол. $^0/_0$ фенола + 25 мол. $^0/_0$ п-толуидина.

Из таблице се 1. и из сл. 2. види, да се с повишењем притиска деривација $\left(\frac{\triangle t}{\triangle p}\right)_s$ за фенол умањује као и за све друге течности, које смо испитивали (осим воде код температура нижих од + 37^0). Она код 500 kg/cm^2 износи 0,00999, а код 2120 kg/cm^2 пада до 0,00677, т. ј. умањује се за једну трећину. У правцу се криве коефицијента адиабатичког охлађења $\left(\frac{\triangle t}{\triangle p}\right)_s$ за фенол опажа нека особина, кcја се вероватно налази у вези са ексистенцијом друге модификације фенола код виших притисака. У истину, како су показали опити одређивања температуре талишта фенола код високих притисака[1], код повећања притиска

---

[1] Резултати ће бити публицирани посебно; упореди такође: Tammann, Kristallisieren und Schmelzen, 1903, 308; Zeit. phys. Chem. *75*, 75 (1910). Bridgman: Proc. Amer. Acad. *51*, 112 (1915).

до 2250 kg/cm^2, фенол прелази код температуре 64,7^0 у гушћу модификацију фенол II, и изнад притиска од 2250 kg/cm^2, стабилна је ова потоња модификација. Баш крај истог притиска крива коефицијента охлађења прелази у хоризонтални део т. ј. релативно охлађење фенола (код промене притиска за 1 kg/cm^2) постаје готово независно од притиска.

Таблица 2.

Промена температуре паратолуидина код адиабатичког растезања код 80^0.

Le changement de la température du paratoluidine en cas de dilatation adiabatique à 80^0.

$\triangle$ p kg/cm^2	$\triangle$ t^0	p kg/cm^2	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
413	4,80^0	486	1161
375	4,04	862	1077
398	3,82	1234	961

Таблица 3.

Промена температуре смесе 75 mol. $^0/_0$ паратолуидина код адиабатичког растезања код 80^0.

Le changement de la température du melange de phénol 75 mol. $^0/_0$ avec p-toluidine 25 mol. $^0/_0$ en cas de dilatation adiabatique à 80^0.

$\triangle$ q kg/cm^2	$\triangle$ t^0	p kg/cm^2	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
345	3,66^0	363	1060
378	3,78	549	1000
410	3,75	960	915
456	4,01	1110	879
350	2,91	1320	832
392	3,06	1506	780
475	3,26	2037	687
393	2,54	2452	647
370	2,30	2800	623

Таблица 4.

Промена температуре бензола код адиабатичког растезања код 90^0.
Le changement de la température du benzol en cas de dilatation adiabatique à 90^0.

Δp kg/cm^2	Δt^0	p kg/cm^2	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
330	6,67^0	470	202
380	6,70	785	176
410	6,23	1145	152
460	5,62	1960	122
547	5,62	2738	103
465	4,38	3233	94

Таблица 5.

Промена температуре уретана код адиабатичког растезања код 80^0.
Le changement de la température d'urethane en cas de dilatation adiabatique à 80^0.

Δp kg/cm^2	Δt^0	p kg/cm^2	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
355	3,89^0	447	1096
447	4,40	688	985
465	3,95	1107	850
495	3,79	1488	767
443	3,20	1928	721
480	3,12	2187	651
430	2,73	2620	634

Таблица 6.

Промена температура смесе од 75 mol. $^0/_0$ бензола + 25 mol. $^0/_0$ уретана код адиабатичког растезања код 90^0.
Le changement de la température du mélange de 75 mol. $^0/_0$ benzol avec 25 mol. $^0/_0$ urethan en cas de dilatation adiabatique à 90^0.

$\triangle p$ kg/cm^2	$\triangle t^0$	p kg/cm^2	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
355	$7{,}00^0$	382	197
424	6,07	750	172
371	5,48	1127	148
398	4,54	1850	114
422	4,07	2650	96
403	3,42	3142	85

Таблица 7.

Le changement de la température d'alcool éthylique en cas de changement adiabatique de son volume à 30^0.

Промена температуре етилног алкохола код адиабатичке промене његове запремине код 30^0.

$\triangle p$ kg/cm^2	$\triangle t^0$	p	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 105$
	растезање — dilatation		
285	$3{,}72^0$	262	1304
481	5,36	592	1114
392	4,24	736	1081
545	5,21	1052	956
372	2,94	1454	791
845	6,22	1913	736
865	6,12	2107	708
473	3,17	2228	670
560	3,62	2693	645
	стискавање — compression		
380	$4{,}68^0$	365	1233
390	4,10	725	1052
409	4,16	775	1017
485	4,31	1125	887
580	4,47	1560	770
705	4,97	2042	700

Таблица 8.

Промена температуре глицерина код адиабатичког растезања.
Le changement de la température du glycerine en cas de dilatation adiabatique.

$\triangle\ \rho$ kg/cm^2	$\triangle\ t^0$	p kg/cm^2	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
код 25^0 — à 25^0			
460	1,91^0	375	416
357	1,45	529	405
372	1,49	776	399
385	1,49	877	387
398	1,49	1141	375
450	1,66	1265	368
342	1,19	1529	348
465	1,55	1907	334
482	1,56	2009	325
502	1,54	2351	307
542	1,65	2476	304
584	1,73	3000	296
код 98,2^0 — à 98,2^0			
435	2,49^0	458	573
330	1,76	825	533
365	1,85	1148	506
400	1,89	1500	473
435	1,95	1893	448

Таблица 9.

Промена температуре рициновог уља код адиабатичког растезања код 0^0

Le changement de la temperature d'huile de ricin en cas de dilatation adiabatique à 0^0

Δp kg/cm²	Δt^0	p kg/cm²	$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$
355	2,55⁰	362	720
518	3,44	729	664
417	2,53	1157	608
488	2,63	1579	538
483	2,45	2029	506
315	1,49	2412	472
440	2,00	2730	455
205	0,94	3042	458

Таблица 10.

Промена температуре код адиабатичког растезања твари.

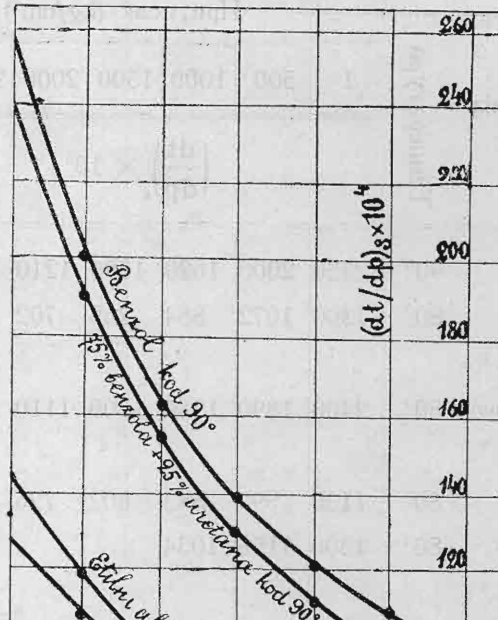
Вредности су за $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ код $p = 1$ kg/cm² добивене графичком екстраполацијом и зато су мање тачне, него све остале вредности, које су добивене графичком интерполацијом опитних података.

Le changement de la temperature en cas de dilatation adiabatique de la substance.

Les valeurs de la dérivation $(dt/dp)_s$ pour $p = 1$ kg/cm² ont été obtenues au moyen d'une extrapolation graphique des données experimentales et sont par consequent moins exactes, que toutes les autres valeurs obtenues par l'interpolation graphique.

Субстанција	Температура	Притисак (kg/cm^2)						
		1	500	1000	1500	2000	2500	3000
		$\left(\frac{dt}{dp}\right)_s \times 10^5$						
бензол	90^0	2550	2000	1620	1390	1210	1090	990
уретан	80^0	1300	1072	884	765	702	639	
Смеса: 75 mol. % бензола + 24 mol. % уретана	80^0	2400	1890	1560	1300	1110	990	880
Фенол	80^0	1130	999	883	802	726	648	
Паратолуидин	80^0	1300	1158	1034				
Смеса: 75 mol. % фенола + 25 mol. % паратолуидина	80^0	1160	1016	905	782	691	644	
Етилни алкохол	30^0	1450	1180	965	805	715	658	
Вода	0	−130	− 20	+ 64	+116	+150	+173	+189
	80	492	468	445	423	406	392	382
Глицерин	25	437	407	380	352	327	308	294
	98,2	625	570	520	475	441		
Рициново уље	0	785	700	628	564	507	468	448

Из горе се наведених таблица и цртежа види, да од свих субстанција, које смо испитали, највећи коефицијент адиабатичког охлађења $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ има бензол, за којега је код притиска од 500 kg/cm^2 $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s = 0{,}0200$. Уретану, фенолу и паратолуидину одговара коефицијент приближно два пута, а глицерину четири пута мањи. Ради упоређивања у таблици је наведен



Слика 3.

Коефициенат адиабатичког охлађивања као функција од притиска.

и коефицијент адиабатичког охлађења воде[1], која од свих субстанција, које смо истражили, има најмањи коефицијент охла-

---

[1] Н. Пушин и И. Гребеншчиков, Глас Срп. Кр. Акад, 1925. Т... стр. 41.

ђења. Са повећањем притиска вредност се $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ за све проучене течности постепено умањује и то тако, да се вредности деривација $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ међусобно приближавају. Експериментално је деривација $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ била одређена досада само за бензол код притисака око 200 kg/cm² по Burtonu и Marshalu[1], који су нашли за собну температуру вредност 0,0166. Због немања температурног коефицијента деривације $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ није могуће упоредити овај број с нашим.

Прелазећи на криве, које смо добили за фенол, п-толуидин и њихове смесе, можемо опазити, премда је вредност којефицијента адиабатичког охлађивања за п-толуидин знатно већа, него за фенол, да ипак додавање 25 mol $^0/_0$ (27,5 утезних $^0/_0$) п-толуидина фенолу јако мало повећава, а код виших притисака шта више умањује вредност $\left(\frac{dt}{dp}\right)_s$ за фенол. Могуће је, да се ова појава налази у вези са стварањем фенолата п-толуидина, чија се ексистенција у кристалном стању потврђује диаграмом стања[2].

---

[1] Proceed. Roy. Soc. London, *50,* 130 (1891).

[2] Резултати ће бити публицирани посебно. Упореди такође: Philip, Journ. Chem. Soc. 1903, *83,* 828.

Kremann, Mon. Chem. 1906. *27,* 91.

LE REFROIDISSEMENT ADIABATIQUE DE QUELQUES SUBSTANCES ORGANIQUES EN DEPENDANCE DE LA PRESSION.

PAR N. A. POUCHINE ET I. V. GREBENŠČIKOV.

Par la méthode déjà décrite[1] les auteurs ont étudié les changements de la température pendant la dilatation adiabatique de benzol, phénol, p-toluidine, urethan, alcool éthylique, glicerine, mélanges de benzol avec l'urethan, de phénol avec le p-toluidine et l'huile de ricin sous des pressions entre 1—3000 kg/cm^2. Sous la pression atmosphérique le benzol possède à 90^0 le plus grand coefficient du refroidissement adiabatique: $(dt/dp)_s = 0{,}0255$ et l'eau à 0^0 le plus petit, $(dt/dp)_s = — 0{,}0013$. Avec l'élévation de la température le coefficient du refroidissement adiabatique augmente. Avec l'accroissement de la pression il diminue de sorte que toutes les valeurs de la dérivation $(dt/dp)_s$ pour les diverses substances s'aprochent successivement. En cas de phénol on observe une particularité: Sous une pression d'environ 2200 kg/cm^2 la courbe de la derivation $(dt/dp)_s$ change sa direction et jusqu'a 3000 kg/cm^2 elle ne depend presque pas de la pression. Les tables inserées dans l'article montrent les données numeriques, qui expliquent les indications précedentes.

---

[1] Journ. Chem. Soc., *123,* (1923), 1717.

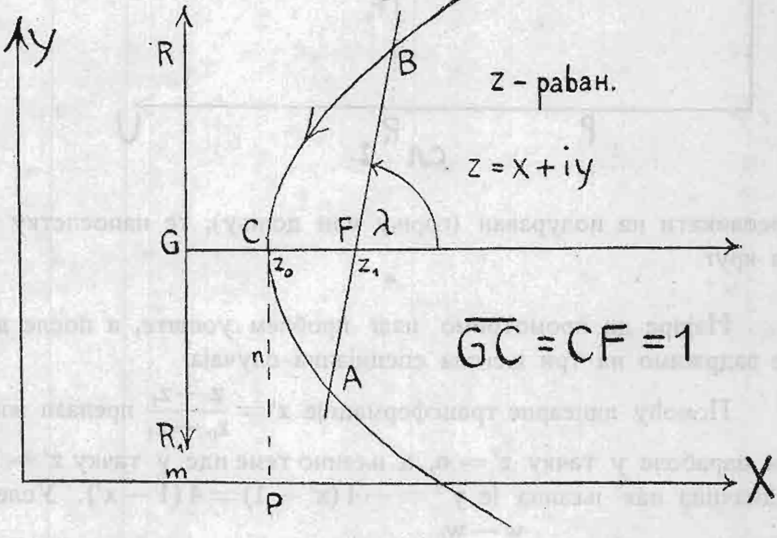
ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ КОНФОРМНОГ ПРЕСЛИКАВАЊА ПОМОЋУ ЕЛИПТИЧКИХ ФУНКЦИЈА.

НАПИСАО ПРОФ. Д-Р ВИЦКО ЛИПАНОВИЋ.

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 4. V. 1925).

Међу остале случајеве конформног пресликавања помоћу елиптичких функција спада и случај конформног пресликавања једног одсечка параболе на круг.

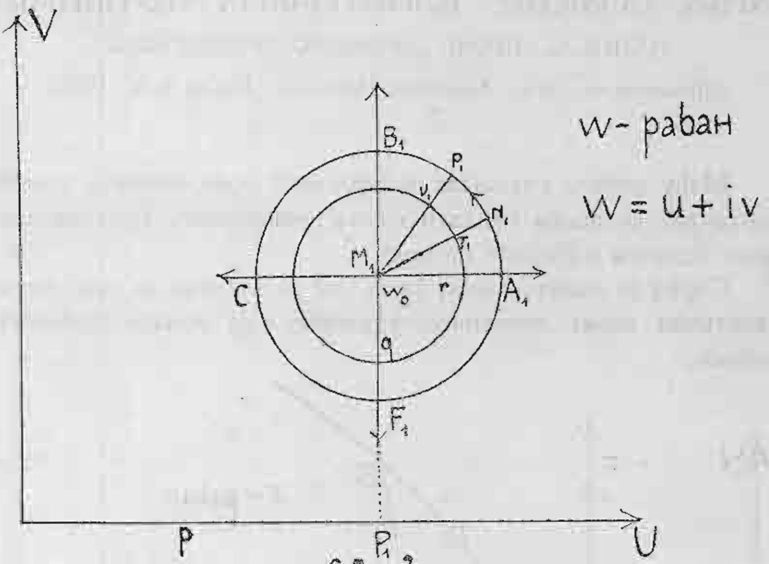
Сврха је нашег, дакле, рада, да се одреди за овај случај аналитички израз елиптичке функције, која решава споменути проблем.



Слика 1.

Већ овде упозорујемо, да се наш рад бави само случајем, у коме права, која ограничава одсечак параболе, иде кроз жижу исте (сл. 1., 2.)

У овоме је случају конформно пресликавање задано познатим аналитичким функцијама. Од угла λ зависи облик одсечка, ABC, параболе. Сви случајеви, у којима права, која ограничава одсечак, иде кроз жижу исте, даду се помоћу функције $w = \sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$, конформно пресликати на један правоугли троугао, који се тада може већ познатим начином



сл. 2.

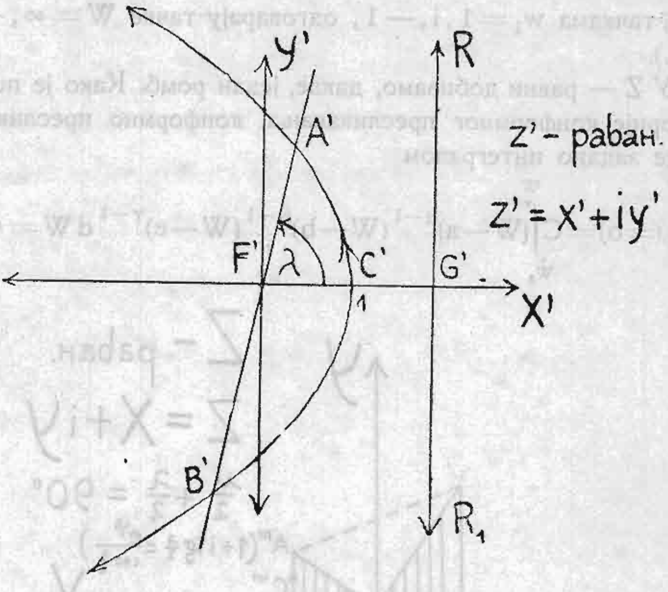
пресликати на полураван (горњу или доњу), те напослетку и на круг.

*

Најпре да промотримо наш проблем уопште, а после да се задржимо на три његова специјална случаја.

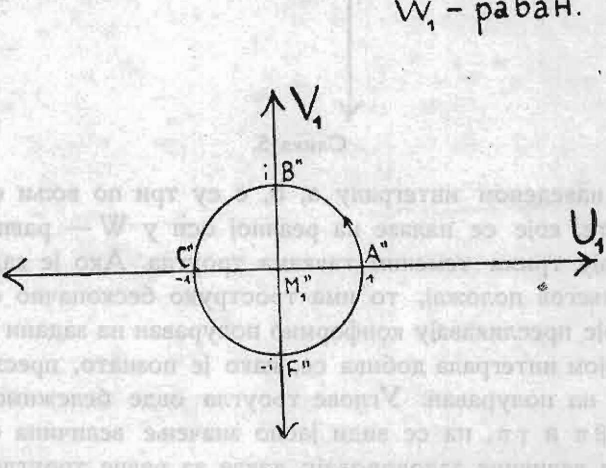
Помоћу линеарне трансформације $z' = \frac{z - z_1}{z_0 - z_1}$ прелази жижа параболе у тачку $z' = 0$, а њезино теме иде у тачку $z' = 1$. Једначина пак њезина је $y'^2 = -4(x' - 1) = 4(1 - x')$. Услед трансформације $w_1 = \frac{w - w_0}{r}$ прелази кружна линија, са средиштем w_0 и полупречником r, у јединичну кружну линију, чије је средиште у $w_1 = 0$. Њезина је једначина $u_1^2 + v_1^2 = 1$ (сл. 3., 4.).

Споменути одсечак параболе прелази надаље помоћу функције $Z = \sqrt{z'} = \sqrt{\frac{z - z_1}{z_0 - z_1}}$ у два конгруентна правоугла тро-



Слика 3.

угла у Z — равни. Риманова се плоха протеже повише z′ — равни, а њезине су раздвојне тачке o и ∞ (сл. 5.)

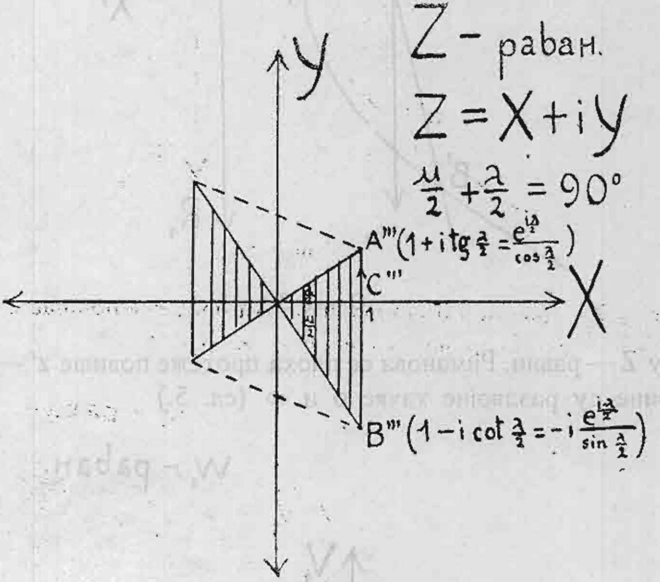


Слика 4.

Помоћу функције $W = i\frac{1+w_1}{1-w_1}$ пресликава се конформно јединична кружна линија на горњу полураван W. Узећемо да, на пр., тачкама $w_1 = 1, i, -1$, одговарају тачке $W = \infty, -1, o$ (сл. 6.).

У Z — равни добивамо, дакле, један ромб. Како је познато из теорије конформног пресликавања, конформно пресликавање је овде задано интегралом

$$Z - Z_0 (= o) = C \int_{W_0}^{W} (W-a)^{\alpha-1} (W-b)^{\beta-1} (W-c)^{\gamma-1} \, dW = \Phi(W).$$



Слика 5.

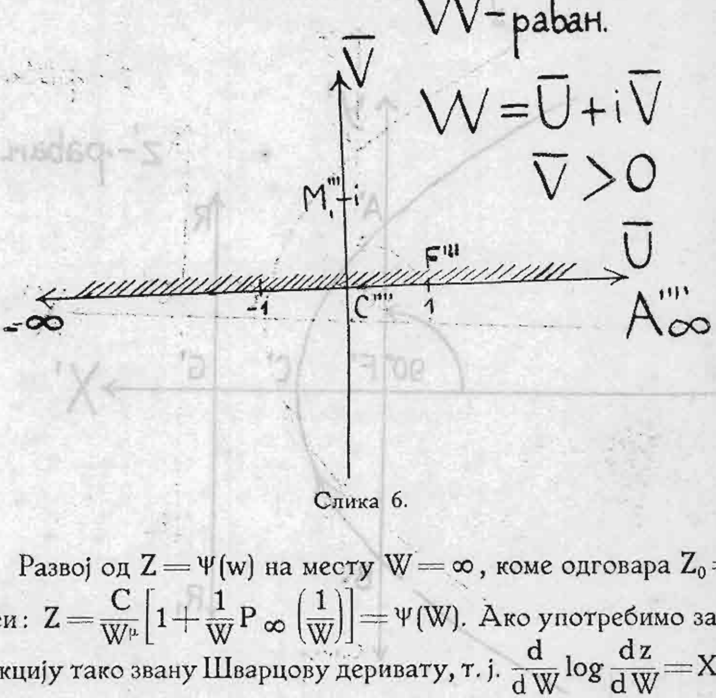
У наведеном интегралу a, b, c су три по вољи одабране константе, које се налазе на реалној оси у W — равни и које одговарају трима теменим тачкама троугла. Ако је задан троугао и његов положај, то има тространо бесконачно функција (∞^3), које пресликавају конформно полураван на задани троугао. Инверзијом интеграла добива се, како је познато, пресликавање троугла на полураван. Углове троугла овде бележимо обично са $\alpha\pi$, $\beta\pi$ и $\gamma\pi$, па се види јасно значење величина α, β и γ. Ове три величине задовољавају дакле за равне троугле услову $\alpha + \beta + \gamma = 1$, а осим тога и $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma < 1$.

У нашем је случају једна од ових трију величина, на пр. $\gamma = \frac{1}{2}$, јер је један угао троугла у Z — равни раван $\frac{\pi}{2}$.

За величине a, b, c узећемо: тачкама $Z = o, -\frac{i e^{\frac{i \lambda}{2}}}{\sin\frac{\lambda}{2}}, \frac{e^{\frac{i \lambda}{2}}}{\cos\frac{\lambda}{2}}$ нека одговарају тачке: $W = \infty, -1, 1.$

Одавде видимо, да се горња полураван конформно пресликава на унутрашњу плоху троугла у Z — равни.

Како по овој претпоставци $Z = o$ и $W = \infty$ заједно припадају, т. ј. lim. inf. нашега интеграла је ∞, а константа $Z_0 = o$.



Слика 6.

Развој од $Z = \Psi(w)$ на месту $W = \infty$, коме одговара $Z_0 = o$, гласи: $Z = \frac{C}{W^\mu}\left[1 + \frac{1}{W} P_\infty\left(\frac{1}{W}\right)\right] = \Psi(W)$. Ако употребимо за ову функцију тако звану Шварцову деривату, т. ј. $\frac{d}{dW} \log \frac{dz}{dW} = X(W)$, која има исту вредност за функцију $Z = \Psi(W)$ као и за функцију $C_1 Z + C_2$, то имамо најпре $\frac{dZ}{dW} = -\frac{C\mu}{W^{\mu+1}}\left(1 + \frac{1}{W} P_\infty^{(1)}\left(\frac{1}{W}\right)\right)$ и напослетку

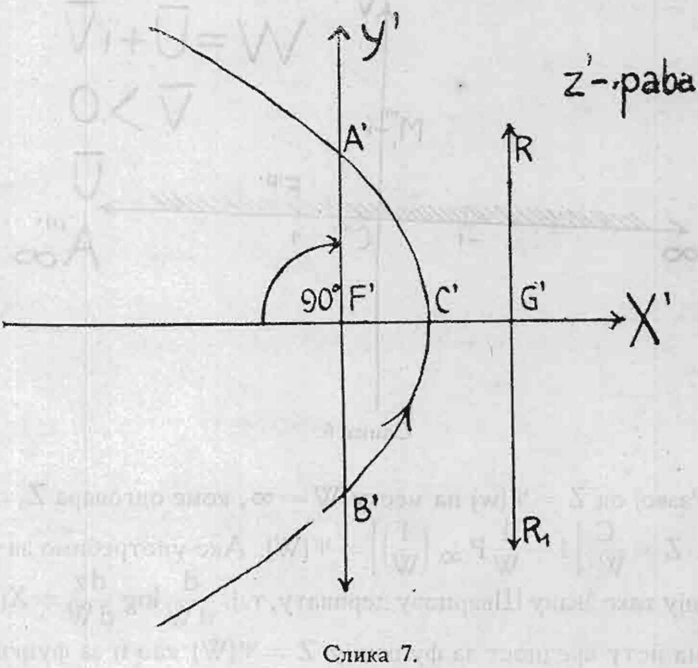
$$X(W) = \frac{d}{dW} \log \frac{dZ}{dW} = \frac{\frac{C\mu(\mu+1)}{W^{\mu+2}} + \frac{C_1(\mu+2)}{W^{\mu+3}} + \ldots\ldots}{-\frac{C\mu}{W^{\mu+1}} + \frac{C_1}{W^{\mu+2}} + \ldots\ldots} =$$

$= -\frac{\mu+1}{W} + \frac{1}{W^2} P\left(\frac{1}{W}\right)$, т. ј. $X(W)$ је на месту $W = \infty$ регуларна и има карактер рационалне функције са $W=a$ и $W=b$ као половима I. реда.

Њезин дакле облик гласи $X(W)=\frac{\alpha-1}{W-a}+\frac{\beta-1}{W-b}$

Интегрирамо ли ово два пут, долазимо од Шварцове деривате поново на нашу функцију $Z=\Psi(W)$, која је на концу уопште задана следећим интегралом

$$Z=C\int_{\infty}^{W}(W-a)^{\alpha-1}(W-b)^{\beta-1}\,dW.$$



Слика 7.

Ако се још постави за $a=1$, $b=-1$, то напокон излази

$Z=C\int_{\infty}^{W}(W-1)^{\alpha-1}(W+1)^{\beta-1}\,dW$, а ово је уопште један Абелов интеграл. Ово, до сада, је уопште проматрање нашега проблема, а сада да пређемо на посматрање трију специјалних случајева (сл. 7., 8.).

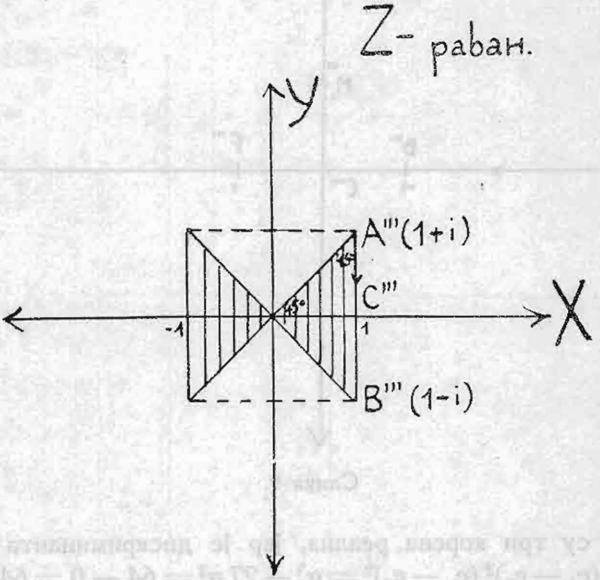
$$\text{I.} \quad \lambda = \frac{\pi}{2}$$

Овде добивамо један квадрат као конформмо пресликавање двоструке Z' — равни.

Како троугао, тако и јединични круг пресликавају се конформно на горњу полураван W (сл. 9.), како смо видели код случаја уопште.

Овде је $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$. Имамо дакле следећи интеграл:

$$Z = C \int_{\infty}^{w} (w-1)^{-\frac{4}{3}} (w+1)^{-\frac{4}{3}} \, dw = C \int_{\infty}^{w} \frac{dw}{\sqrt[4]{(w^2-1)^3}},$$



Слика 8.

а то је један Абелов интеграл и он се згодном супституцијом даде свести на један елиптичан интеграл I. врсте. Ако најпре уведемо супституцију: $t = W + \sqrt{W^2 - 1}$, то добивамо:

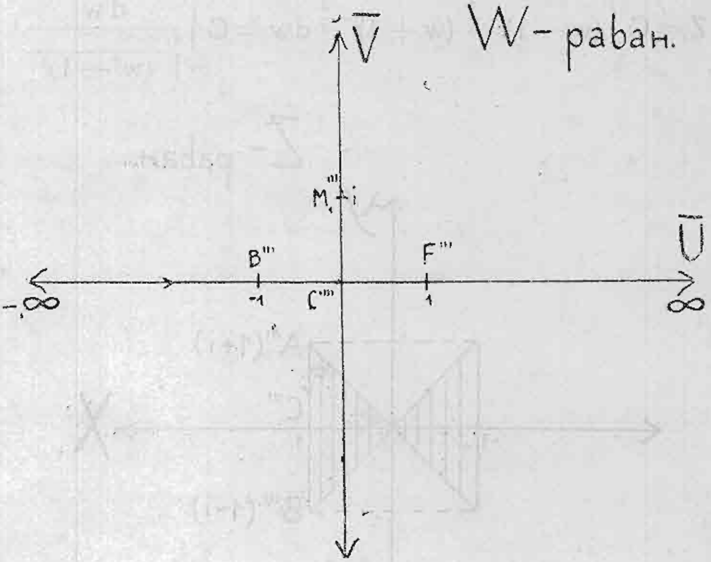
$$W = \frac{t^2+1}{2t}, \quad dW = \frac{t^2-1}{2t^2} dt$$

Уведемо ли ово у последњи интеграл, добивамо лаким рачуном $Z = C' \int_{t}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 4t}}$ где је $C' = -2C\sqrt{2}$ нова константа.

Ово је један елиптичан интеграл I. врсте, и то Вајерштрасова (Weierstrass) облика. Инверзијом пак долазимо до p — функције, т. ј. $t = p\left(\frac{Z}{c'}\right)$.

Корени су радиканда $4t^3 - 4t$ следећи: $t_1 = o$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$.

Надаље ћемо узети овај распоред међу коренима, које Weierstrass бележи са e_1, e_2, e_3; $e_1 > e_2 > e_3$, т. ј. $e_1 = 1$, $e_2 = o$, $e_3 = -1$.



Слика 9.

Сва су три корена реална, јер је дискриминанта $\Delta = 16 (e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2 = g_2^3 - 27 g_3^2 = 64 - 0 = 64 > 0$, јер је $g_2 = 4$, $g_3 = o$.

Сада можемо израчунати модуле k и k′. Формуле за њих гласе:

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Како је пак $k = k'$, то је

$$K = K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(1 - t^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)}}$$

Надаље можемо израчунати још неке величине, које долазе код теорије елиптичних функција, и то: $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = i\frac{K'}{K} = i$, јер је овде $K = K'$, па $q = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi} = 0{\cdot}0432139 \cdots < \frac{1}{23}$. Паралелограм периода је дакле један квадрат.

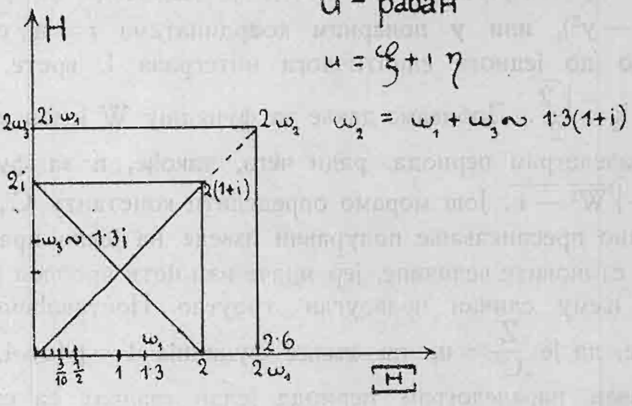
Имамо пред нама случај лемнискатичних функција, јер код ректификације лемнискате, чија је једначина $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, или у поларним координатама $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, долазимо до једнога елиптичнога интеграла I. врсте, и то модула $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Добивамо дакле за функцију W један квадрат као паралелограм периода, ради чега, такође, и за функцију $t = W + \sqrt{W^2 - 1}$. Још морамо определити константу C′, да се конформно пресликавање полуравни изведе на један правоугли троугао становите величине, јер иначе нам исти проблем решава којигод њему сличан правоугли троугао. Поставићемо ради краткоће, да је $\frac{Z}{C'} = u$, па имаде функција $t = p(u;\, 4,\, o)$ за примитиван паралелограм периода један квадрат са страном $2\omega_1 = \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{2K}{\sqrt{2}} = K\sqrt{2}$.

Ради трансформације $Z = C'u$ мења се дуж сваке стране у омеру $|C'|: 1$. Имамо дакле $K\sqrt{2}\,|C'| = 2\omega_1 |C'| = 2$, јер је у нашем случају дуж стране квадрата периода равна 2. Из последње једначине излази $|C'| = \frac{1}{\omega_1}$, где је ω_1 реална периода и позитивна.

Још морамо определити аргуменат од C′. Уздуж праве OA''' (полудијагонала у квадрату периода) је W реално и позитивно, јер тачкама: $Z = o$, $1 - i$, $1 + i$ одговарају вредности $W = \infty$, -1, 1, ради чега је и $t = W + \sqrt{W^2 - 1}$ уздуж речене праве реално и позитивно (јер је $W > 1$). Наша је, дакле, p — функција, чији аналитички израз гласи $p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \cdots$, уздуж реалне осовине у u — равни реална и позитивна, јер је $g_2 = 4$, а $g_3 = o$, т. ј. обоје реално и позитивно. Ако дакле хоћемо, да правац реалне осовине у u — равни падне са правцем праве OA''' (или обратно), то морамо u — раван ротирати за $\frac{\pi}{4}$, ради чега је $\operatorname{arc} C' = \frac{\pi}{4}$. Имамо потом

$C' = |C'|\, e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{i}\, |C'| = \frac{\sqrt{i}}{\omega_1}$, јер је $|C'| = \frac{1}{\omega_1}$ и напослетку за аргуменат $u = \frac{Z}{C'} = \frac{Z\omega_1}{\sqrt{i}}$ $\left(\text{где је } C = \frac{C'}{\sqrt{2}}\right)$.

Наша нам слика приказује паралелограм периода p — функције у u — равни (сл. 10.)



сл. 10.

Примитивне периоде и овде су дефиниране са праволинијским интегралима, и то:

$$\omega_1 = \int'^{\infty}_{e_1=1} \frac{dt}{\sqrt{4t^3-4t}}, \quad \omega_3 = \int'^{\infty}_{e_3=-1} \frac{dt}{\sqrt{4t^3-4t}}.$$

Из ових интеграла следи инверзијом $1 = p(\omega_1) = p\left(\frac{K\sqrt{2}}{2}\right)$, $-1 = p(\omega_3)$.

Како је пак $\omega_3 = i\,\omega_1 = \frac{iK\sqrt{2}}{2}$, то излази одавде једно карактеристично својство лемнискатичних функција, наиме $p\left(\frac{iK\sqrt{2}}{2}\right) = p(i\,\omega_1) = -p(\omega_1)$ или, уопште, за којигод аргуменат u $p(i\,u) = -p(u)$.

У нашем посматраном случају, где је $g_3 = 0$, чине 4 корена једначине $t(t^2-1) = 0$ т. ј. $\infty, e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = -1$ једну двоструку размеру, која је хармонична, јер једна од 6 вредноси двоструке размере $D(\infty, e_1, e_2, e_3) = D(\infty, 0, 1, -1) = \sigma$ једнака је -1. Што се тиче нумеричног израчунавања периода, то се могу оне прорачунати или помоћу ϑ — редова или помоћу B — и Γ — функције и то овако:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots\cdots = \vartheta_3(o, \tau) =$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}, \text{ а одавде}$$

$$\frac{2K}{\pi} = (1 + 2q + 2q^4 + \cdots\cdots)^2, \text{ те напослетку}$$

$$K = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + \cdots\cdots)^2.$$

Овде је $q = e^{-\pi} \langle \frac{1}{23}$, т. ј. доста малено, ради чега нам је доста да ред наставимо до IV. члана, т. ј. до $q^{16} \langle \frac{1}{23^{16}} = \frac{10^{-18}}{6133}$ или тачније изражено $q^{16} = 1477 \cdot 10^{-25}$, што је сигурно без утецаја на седмо децимално место. K ћемо, дакле, рачунати ради коректуре на 8 децимала. Величииу $q^{-\pi}$ можемо израчунати или помоћу бесконачног реда:

$q = e^{-\pi} = 1 - \frac{\pi}{1!} + \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} - + \cdots\cdots$ или згодније помоћу логаритамских таблица. Рачун изведен помоћу логаритамских таблица даје:

$$\frac{2K}{\pi} = \left[1 + 2\left(q + q^4 + q^9\right)\right]^2 = \left[1 + 2\begin{pmatrix}0{,}0432139 + 0{,}0000035 + \\ + 0{,}0000000000005255\end{pmatrix}\right]^2$$

$= 1{,}0864348^2 = 1{,}1803243$ (q^9 је пак без утицаја на 7. децимално место, те се може испустити). Напослетку излази за $K = \frac{\pi}{2} . 1{,}1803243 = 1{,}8531092$. Када смо нашли K излази за $\omega_1 = \frac{K\sqrt{2}}{2} = 1{,}3064420$ и напокон за $\omega_3 = i\omega_1$.

Пре смо добили $t = \wp(u; 4{,}o) = \wp\left(\frac{\omega_1 Z}{\sqrt{i}}; 4, 0\right)$, а за $W = \frac{p^2(u) + 1}{2p(u)}$. Како је пак $W = i\frac{1 + w_1}{1 - w_1} = i\frac{1 + \frac{1}{r}(w - w_0)}{1 - \frac{1}{r}(w - w_0)} =$

$= i\frac{r + (w - w_0)}{r - (w - w_0)}$, то добивамо на концу $i\frac{r + (w - w_0)}{r - (w - w_0)} = \frac{p^2(u) + 1}{2p(u)}$ као функцију, која нам конформно пресликава један одсечак параболе у z-равни на круг у w-равни. Општи облик функције, која нам решава исти проблем, гласио би:

$$\frac{A i\frac{r+(w-w_0)}{r-(w-w_0)}+B}{C i\frac{r+(w-w_0)}{r-(w-w_0)}+D}=\frac{p^2(u)+1}{2p(u)}, \text{ где је } AD-BC\neq 0$$

Уредивши предњу страну последње једначине добивамо:

$$\frac{A i[r+(w-w_0)]+B[r-(w-w_0)]}{C i[r+(w-w_0)]+D[r-(w-w_0)]}=\frac{p^2(u)+1}{2p(u)}$$

Ако поједине трансформације проматрамо, можемо закључити, да тачкама $z=A, B, C, [F]$ параболе, т. ј. тачкама (z_2), (z_3), (z_0), $[z_1]$ одговарају тачке кружне линије:

$$w=A_1, B_1, C_1, [F_1]$$

т. ј. (r), (ri), $(-r)$, $[-ri]$.

Поставивши још за $u=\frac{\omega_1 Z}{\sqrt{i}}$, то добивамо као специјалну функцију, која решава наш проблем, следећу: $i\frac{r+(w-w_0)}{r-(w-w_0)}=\frac{p^2\left(\frac{\omega_1 Z}{\sqrt{i}};4,0\right)+1}{2p\left(\frac{\omega_1 Z}{\sqrt{i}};4,0\right)}$. Како је $Z=\sqrt{z'}=\sqrt{\frac{z-z_1}{z_0-z_1}}$, то излази на концу за наш случај $\sphericalangle\lambda=\frac{\pi}{2}$ следеће:

$$i\frac{r+(w-w_0)}{r-(w-w_0)}=\frac{p^2\left(\omega_1\sqrt{\frac{z-z_1}{(z_0-z_1)i}};4,0\right)+1}{2p\left(\omega_1\sqrt{\frac{z-z_1}{(z_0-z_1)i}};4,0\right)}$$

Ако хоћемо да w представимо као експлиците функцију од z, то после кратког рачуна добивамо $w=r\frac{p^2+1-2ip}{p^2+1+2pi}+w_0=f(z)$, где ради једноставности испуштамо аргуменат и инваријанте од p-функције. Већ смо пре споменули да се периоде могу изразити и помоћу Ајлерових (Euler) интеграла. Периода „ω_1“ гласи $\omega_1=\int_{\infty}^{1}\frac{dt}{\sqrt{4t^3-4t}}$.

Ако уведемо супституцију $t = \frac{1}{x}$, то је $dt = -\frac{dx}{x^2}$, па излази после кратког рачунања $\omega_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$. Даљом супституцијом $x^2 = y$, $x = \sqrt{y}$, $dx = \frac{dx}{2\sqrt{y}}$ добива се на концу:

$$\omega_1 = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt[4]{y^3}\sqrt{1-y}} = \frac{1}{4}\int_0^1 y^{-\frac{3}{4}}\left(1-y\right)^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).^{*}$$

Како је познато однос је између B- и Γ-функције следећи:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Па зато за наш случај излази:

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

По горе наведеној релацији излази такођер

$B(a, 1-a) = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a)$; а ово је, по теорији одређених интеграла, равно $\frac{\pi}{\sin a\pi}$. Према томе закључујемо, да је $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$. Надаље излази, да је $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$, т. ј. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Γ-функција је пак дефинирана следећим интегралом:

$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx = (n-1)!$ Из свега овога изводимо, да је

$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$. Ако ово уметнемо у израз за ω_1 то, на концу, добивамо:

---

* Confer. Dr H. Burkhardt. Elliptische Funktionen. Zürich, Pag. 219.

$$\omega_1 = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{2\pi}}.$$

Како нам је ω_1 познат и на други начин, то можемо помоћу тога извести једну релацију између $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ i $\vartheta_3\,(o,\tau)$ на овај начин: Пре смо добили за $\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{2}}$, ради чега је $\frac{K}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$, а одавде пак излази: $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{K\sqrt{\pi}}$.

Како је надаље $K = \frac{\pi}{2}\,\vartheta_3^2\,(o,\tau)$, то лаким рачуном добивамо

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 2\,\vartheta_3\,(o,\tau)\sqrt{\frac{\pi}{2}\sqrt{2}} = \varphi\,(\vartheta_3)$$

Напоменућемо још, да можемо наш добивени резултат изразити и помоћу sin amu, ако се подсетимо на познату релацију између p (u) и sin am u, наиме $p\,(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin am^2 v}$, где је $v = u\sqrt{e_1 - e_3}$.

У нашем је случају пак $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, $e_3 = -1$, па зато излази $\wp\,(u) = -1 + \frac{2}{\sin am^2\,(u\sqrt{2})}$.

Други директни начин, како можемо доћи до sin am u, јесте да наш интеграл пренесемо у елиптички интеграл I. врсте, облика Лежандрова (Legendre). То се догађа ради ове трансформације $t = \frac{e_1}{y^2} = \frac{1^{*}}{y^2}$, по којој $\int_{\infty}^{t}\frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 4t}}$ прелази у: $\int_{o}^{y}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}}$

Ово је један елиптичан интеграл I. врсте облика Лежандрова, а његов је модул $k = \pm i$. Овакав интеграл долази управо код ректификације лемнискате. На концу се добива:

$$Z = C\int_{o}^{y}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}},\quad \text{а инверзијом}\quad y = \sin am\left(\frac{Z}{C}\right)$$

---

[*] Ernesto Pascal: Funzioni ellittiche, § 8., Pag. 74. m.

Што се тиче изотермичких линија, њих ћемо наћи на начин, који је теоретички могућ, али је практички тежак и скоро неизведив.

Да их нађемо, узимамо у w — равни неколико тачака N_1, P_1, T_1, V_1 и тражимо одатле $\wp(u)$[*] помоћу квадратне једначине за $\wp(u)$, па затим морамо да израчунамо заданој вредности од $\wp(u)$ припадни аргуменат, т. ј. морамо, другим речима, да израчунамо припадни елиптички интеграл. Ово се врши развијањем у бесконачан ред и делимичним интегрирањем, тако, да добивамо одговарајуће тачке у z — равни. Математички се то изражава овако:

$$u=\int_{s=p(u)}^{\infty}\frac{d\,s}{\sqrt{4\,s^3-g_{2s}-g_3}}\quad \text{или у нашем проматраном случају}$$

$$u=\int_{t=p(u)}^{\infty}\frac{d\,t}{\sqrt{4\,t^3-4\,t}}.$$

Тако одредимо тачку по тачку у z — равни, које одговарају тачкама w — равни, да узмогнемо, после дугог и тегобног рачунања изотерме код одсечка параболе, приближно конструисати, које одговарају изотермама код круга, т. ј. систему концентричних кружних линија и зрачном снопу, чије је теме средиште наше кружне линије (сл. 2).

Прелазимо на посматрање другог специјалног случаја: $\sphericalangle\lambda=\frac{\pi}{3}$, т. ј. Права, која ограничава одсечак параболе, иде кроз њезину жижу и затвара са осовином параболе угао од 60^0 (сл. 11., 12., 13., 14.).

Примитиван паралелограм периода је овде ромб, чија страна, како се даде лако из слике израчунати, јер се узело $F'C'=1$, износи $\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, јер је $A'''B'''=A'''C'''+C'''B'''=\operatorname{tg}30^0+$ $+\operatorname{cotg}30^0=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

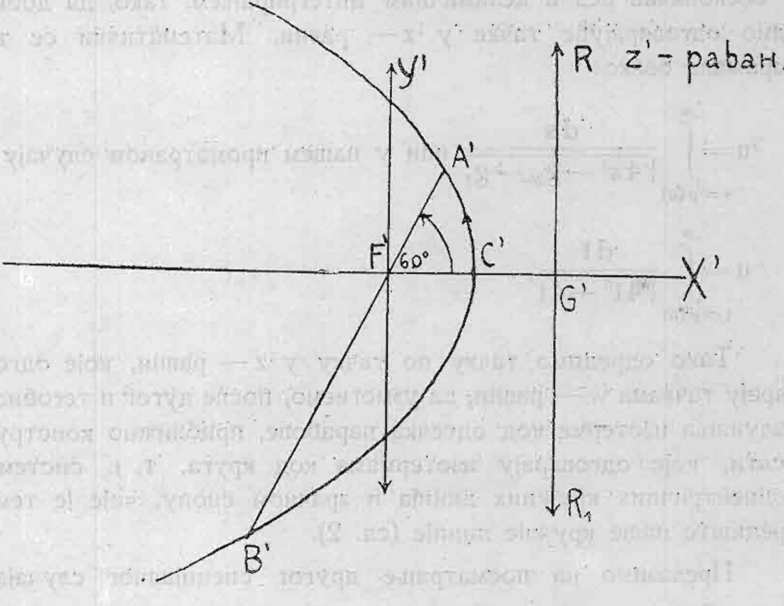
Темене тачке ромба приказују нам ове комплексне бројеве:

---

[*] т. ј. помоћу нађеног израза на стр. 86: $w=r\frac{p^2+1-2\,i\,p}{p^2+1+2\,i\,p}+W_0=f(z)$

$A'''\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{i\pi}{6}}\right)$, $B'''\left(1-i\sqrt{3}=2e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)$, $A''''\left(-1-\frac{i}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{7i\pi}{6}}\right)$, $B''''\left(-1+i\sqrt{3}=2e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$. Овде поступамо на овај начин:

Тачкама $Z=o,\ 1-i\sqrt{3},\ 1+\frac{i}{\sqrt{3}}$ нека одговарају тачке $W=1,\ \infty,\ o$, ради чега је конформно пресликавање задано овим интегралом:

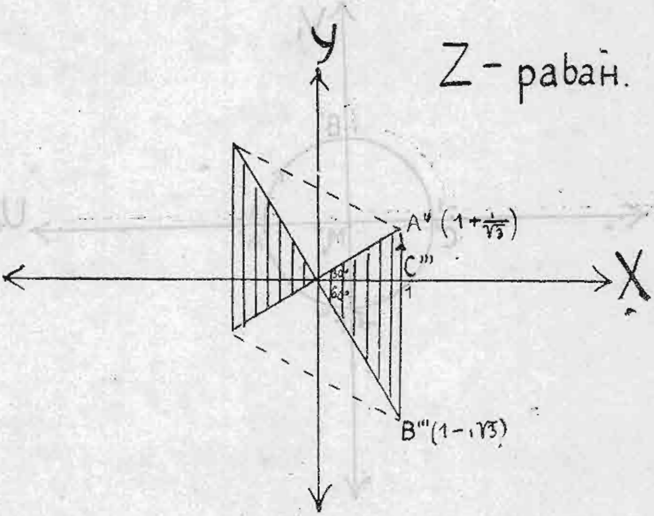


Слика 11.

$Z-Z_0=C\int\limits_{\infty}^{W}\frac{dW}{(W-1)^{1-\alpha}\,W^{1-\beta}}$. Како је овде $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{3}$, $\left[\gamma=\frac{1}{6}\right]$, то излази:

$$Z-Z_0=C\int\limits_{\infty}^{W}\frac{dW}{(W-1)^{\frac{1}{2}}\,w^{\frac{2}{3}}},$$ где је $Z_0=1-i\sqrt{3}=2e^{-\frac{i\pi}{3}}$, што је уопште један Абелов интеграл, који се може свести, помоћу згодно одабране супституције, на елиптичан интеграл I. врсте типа Вајерштрасовог. Ако најпре поставимо $\sqrt{W-1}=w'$, т. ј.

$W = w'^2 + 1$, $dW = 2\, w'\, d\, w'$, то задани интеграл прелази у интеграл $Z - Z_0 = \zeta = 2\, C \int\limits_{\infty}^{w} \frac{d\, w'}{\sqrt[3]{(w'^2 + 1)^2}}$. Надаље уводимо супституцију $\sqrt[3]{w'^2 + 1} = t$, одакле $w' = \sqrt{t^3 - 1}$, па после кратког и лаког рачуна излази коначно $\zeta = 3\, C \int\limits_{\infty}^{t} \frac{d\, t}{\sqrt{t^3 - 1}} = C' \int\limits_{t}^{\infty} \frac{d\, t}{\sqrt{4\, t^3 - 4}}$,



Слика 12.

т. ј. један елиптичан интеграл I. врсте типа Вајерштрасовог, где је $g_2 = 0$, $g_3 = 4$.

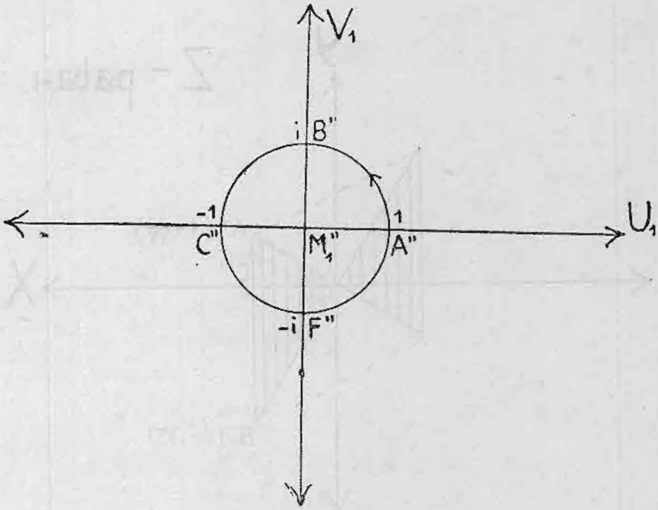
Инверзијом интеграла излази $t = \wp\left(\frac{\zeta}{C'};\, 0,\, 4\right)$, где је $\zeta = Z - Z_0$. Сада настаје питање, како ћемо одредити константу C'.

У овоме су случају корени једначине $t^3 - 1 = 0$ ови: $e_2 = 1$, $e_1 = \epsilon^2 = e^{\frac{4\, i\, \pi}{3}}$, $e_3 = \epsilon = e^{\frac{2\, i\, \pi}{3}}$. Дискриминанта је $\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2 = -432 < 0$, $\omega_1 = \int\limits_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{d\, t}{\sqrt{4\, t^3 - 4}}$, $\omega_3 = \int\limits_{\epsilon}^{\infty} \frac{d\, t}{\sqrt{4\, t^3 - 4}}$,

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_3 = '\int\limits_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3-4}} \text{ или } \omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}} = \frac{Ke^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt[4]{3}}, \quad \omega_3 =$$

$$= \frac{iK'}{\sqrt{e_1-e_3}} = \frac{iK'e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{K'e^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt[4]{3}}, \text{ јер је овде } \sqrt{e_1-e_3} = \sqrt{\epsilon^2-\epsilon} =$$

$$= \sqrt{-i\sqrt{3}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt[4]{3}.$$



Слика 13.

Реални делови од K и K′ су позитивни, јер је $k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \frac{1-\epsilon}{\epsilon^2-\epsilon} = -\frac{1-\epsilon}{\epsilon(1-\epsilon)} = -\frac{1}{\epsilon} = -\epsilon^2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$, т. ј. $I(k^2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle o$, па се одатле може закључити, да је троугао o, $2\omega_1$, $2\omega_3$ оштроугао.*

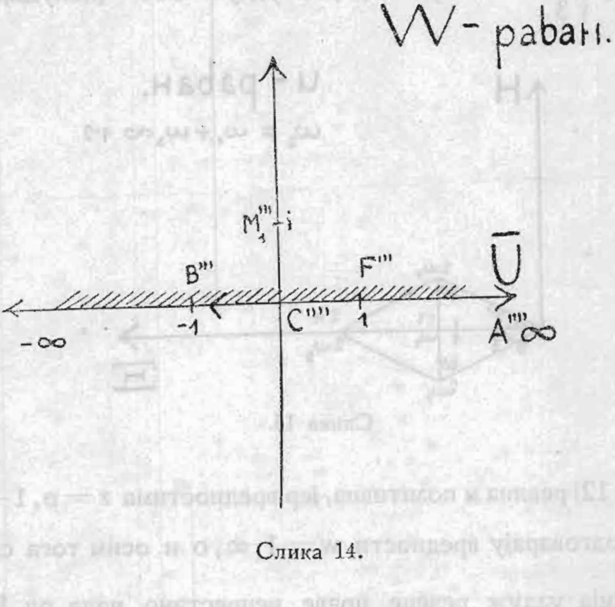
Обе су периоде коњугирано комплексне. Можемо сада конструирати примитивни парелелограм периода p-функције у $\frac{Z-Z_0}{C'} = \frac{z}{C'} = u$ — равни. (сл. 15.). Ово је тако звани еквиан-

---

* Conf. Dr. H. A. Schwarz: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Pag. 32. Art. 27.

хармонични случај, јер једна вредност од 6 вредности двојаке размере корена ∞, e_1, e_2, e_3, т. ј. $D(\infty\, e_1\, e_2\, e_3) = -\epsilon$, где ϵ назначује који год трећи корен од 1 (т. ј. $\sqrt[3]{1} = \epsilon$). Колико је познато из теорије елиптичких функција, задовоља p-функција за овај случај овом услову: $p(\epsilon u) = \epsilon\, p(u)$, где је $\epsilon = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Примитивни је дакле паралелограм периода за p-функцију један ромб са странама $|2\omega_1|, |2\omega_3|$. Али тако, да је $|\omega_1| = |\omega_3|$,



Слика 14.

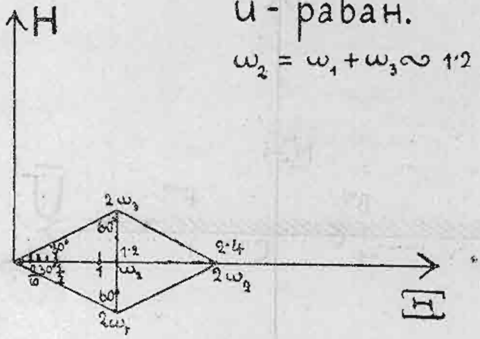
а већа дијагонала, т. ј. $|2\omega_2|$, пада скупа са реалном оси. Непосредно из слике излази $\omega_3 = \omega_1 e^{\frac{i\pi}{3}}$, $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3 = \omega_1 + \omega_1 e^{\frac{i\pi}{3}} = \omega_1\left(1 + e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \omega_1 \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$.

Размера периода је овде $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = e^{\frac{i\pi}{3}} = -\epsilon^2 = 1 + \epsilon$, т. ј. једнак трећему корену из -1. Величина $q = e^{i\pi\tau} = e^{i\pi(1+\epsilon)} = -e^{i\pi}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = i\, e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}}$, где је $e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} < \frac{1}{15}$, или тачније изражено $e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} = 0,0658757$, а затим се нађе

$$K = \frac{\pi}{2}(1+2q+2q^4+\cdots)^2\, i\,\omega_1 = \frac{K e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Константа C' израчунава се аналогно као у првом случају.

Из задње слике излази, како је $C'F = 1$, $2\omega_1 = e^{-\frac{i\pi}{6}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$, т. ј. $\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{i\pi}{6}}$. Функција је w уздуж OA''' (полудијагонала ромба сл. 12) реална и позитивна, јер вредностима $z = o, 1 - i\sqrt{3}, 1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$ одговарају вредности $w = 1, \infty, o$ и осим тога се види, да функција уздуж речене праве непрестано пада од 1 до o, а односај пак између t и W је овај:
$\sqrt{W-1} = w' \equiv \sqrt{t^3-1}$, одакле излази $W = t^3$. Види се, да је t уздуж праве OA''' како реално, тако и комплексно, јер је $t = \sqrt[3]{W}$, а трећи корен из W, који је уздуж исте праве реалан, јесте трозначан. Уздуж реалне оси у „u — равни" t је реално, јер је $g_2 = o$, $g_3 = 4$, т. ј. обоје реално.



Слика 15.

Да пак реална ос у u — равни падне заједно са правом OA''', морамо раван — u обртати око „O" за угао $\frac{\pi}{6}$, ради чега је $\operatorname{arc} C' = \frac{\pi}{6}$, т. ј. $C' = |C'|\, e^{\frac{i\pi}{6}}$.

После трансформације $\zeta = u\,C'$ добивамо $|2\,\omega_1|\,|C'| = \left|\frac{2\,K\,e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{3}}\right|\,|C'| = \frac{2\,|K|}{\sqrt[4]{3}}\,|C'| = \frac{4}{\sqrt{3}}$, т. ј. дуж једне стране примитивног паралелограма периода мора да је после продужења тачно равна $\frac{4}{\sqrt{3}}$, одакле излази $|C'| = \frac{2}{|\omega_1|\,\sqrt{3}} = \frac{2}{|K|\,\sqrt[4]{3}}$, т.ј. $C' = \frac{2e^{\frac{i\,\pi}{6}}}{\sqrt{3}\,|\omega_1|} = \frac{2e^{\frac{i\,\pi}{6}}}{\sqrt[4]{3}\,|K|}$.

Функција пак, која нам пресликава конформно наш случај, гласи овако:

Пре смо нашли, да је $W = t^3 = p^3(u)$. Како је $W = i\,\frac{1+w_1}{1-w_1} = i\,\frac{r+(w-w_0)}{r-(w-w_0)}$, то имамо напокон $p^3(u) = i\,\frac{r+(w-w_0)}{r-(w-w_0)}$ или експлиците w као функција од z гласи:

$$w = \frac{p^3(u)\,(r+w_0) + i\,(w_0-r)}{p^3(u)+i} = f(u),$$ а како је $u = \frac{\zeta}{C'} = \frac{Z-Z_0}{C'} = \frac{\sqrt{\frac{z-z_1}{z_0-z_1}}-Z_0}{C'}$, то је w на концу изражено као функција од z, т. ј.

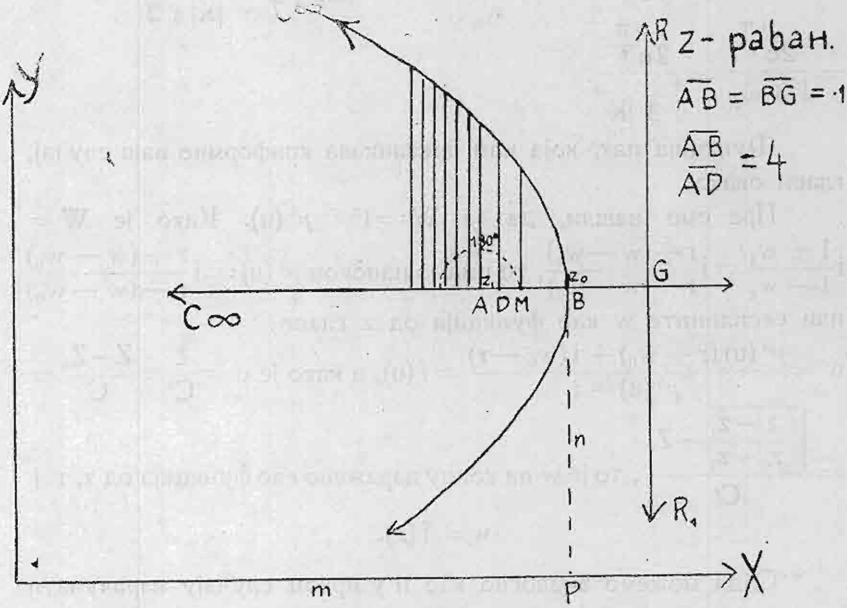
$$w = f(z).$$

Сада можемо аналогно као и у првом случају израчунати ω_1, а онда и ω_3, јер су овде ω_3 и ω_1 коњугирано комплексни бројеви, како смо то већ истакли, па је $\omega_3 = \omega_1, e^{\frac{i\,\pi}{3}}$, како то излази из слике 15.

Из $\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(o,\tau)$ следи $K = \frac{\pi}{2}\,\vartheta_3^2(o,\tau)$ и $\omega_1 = \frac{K\,e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\pi\,\vartheta_3^2(o,\tau)\,e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt[4]{3}}$. Сада ћемо најпре да израчунамо $\vartheta_3^2(o,\tau)$. Рачунаћемо као и у првом случају до 8. децимале, не би ли нам 7. децимала била поуздана. У свом случају $q = i\,e^{-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}}$, где је $e^{-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}} = 0{,}0658.757 < \frac{1}{15}$.

$$\vartheta_3^2(o,\tau) = [1 + 2(q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots\cdots)]^2$$

У обзир ћемо да узмемо само прва два члана од израза, који је у загради (аналогно као и у првоме случају) $\vartheta_3^2(o,\tau) \sim [1 + 2(q + q^4)]^2 = [1 + 2(i \cdot 0{,}0658757 + 0{,}0000188])^2 =$ $= (1{,}0000376 + 0{,}1317514\, i)^2 = 0{,}9830820 + 0{,}2635090\, i$



Слика 16.

Ако ово уврстимо у формулу за $\omega_1 = \dfrac{\pi\,\vartheta_3{}^2(o,\tau)\, e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt[4]{3}} =$

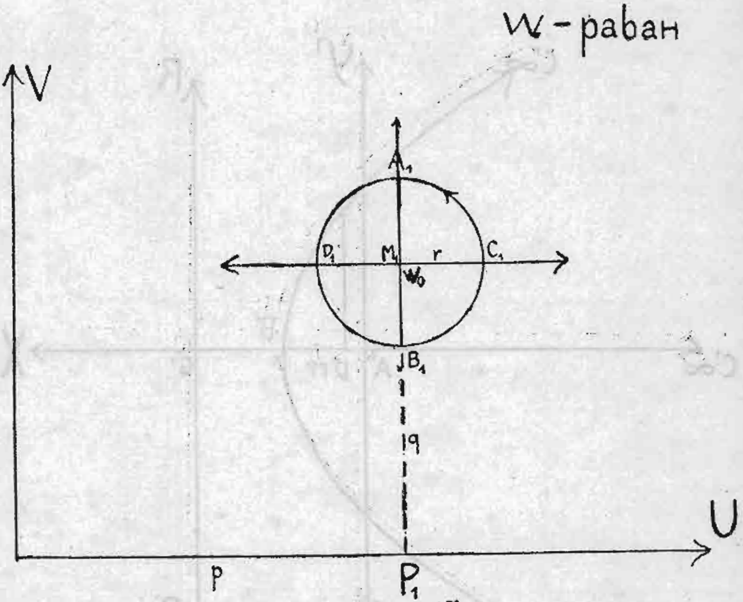
$$= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}\pi(0{,}9830801 + 0{,}2635090\, i)}{2\sqrt[4]{3}} = \frac{\pi(0{,}9830820 + 0{,}2635090\, i)(1+i)}{2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}};$$

ако узмемо за $e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{i}$ огранак (вредност) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, т.ј. $R(\sqrt{i}) > o$, то излази напослетку

$$= \frac{(0{,}7195730 + 1{,}2465910\, i)\,\pi}{2\sqrt[4]{12}} = \frac{(0{,}3597865 + 0{,}6232955\, i)\,\pi}{\sqrt[4]{12}},$$ а за

$\omega_3 = \omega_1\, e^{\frac{i\pi}{3}}$.

Могли бисмо још (аналогно као у првом случају) израчунати периоде помоћу Ајлерових интеграла на овај начин: најпре ω_2, а онда $\omega_1 = \frac{\omega_2}{1 + e^{\frac{i\pi}{3}}}$. Периода ω_2 задана је $\int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 4t}}$.



Сл. 17.

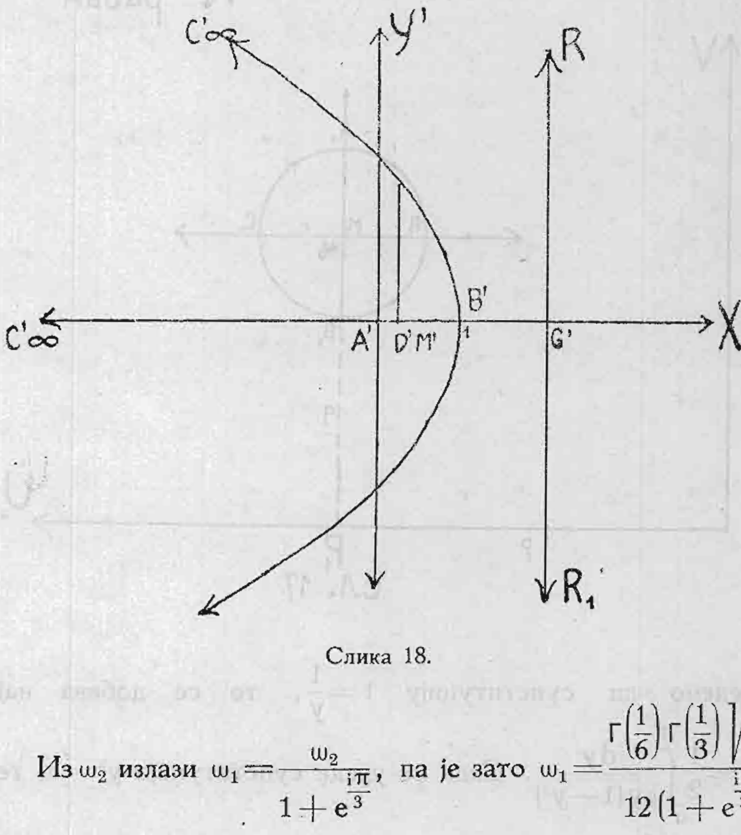
Уведемо ли супституцију $t = \frac{1}{y}$, то се добива најпре $\omega_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y^3)}}$. Сада се уведе супституција $y^3 = z$, те се добије

$$\omega_2 = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt[6]{z^5}\sqrt{1-z}} = \frac{1}{6}\int_0^1 z^{-\frac{5}{6}}(1-z)^{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{6}B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{6\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Надаље је $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, а одавде излази $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$.

Имамо дакле за $\omega_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{3\pi}}{12\pi}$, а како је $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

то коначно излази за $\omega_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{3\pi}}{12\pi} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{\pi}}}{12}$.



Слика 18.

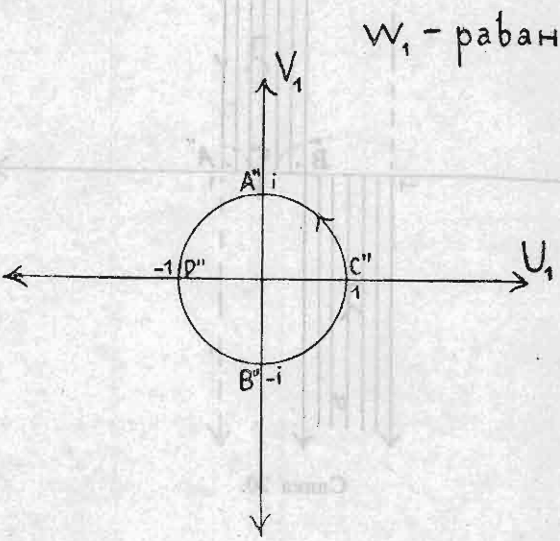
Из ω_2 излази $\omega_1 = \frac{\omega_2}{1 + e^{\frac{i\pi}{3}}}$, па је зато $\omega_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{\pi}}}{12\left(1 + e^{\frac{i\pi}{3}}\right.}$.

Како је ω_1 и на други начин познато, т. ј. $\omega_1 = \frac{K e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt[4]{3}}$, то можемо $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ изразити као функцију од K, или, ако место K поставимо $\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(o, \tau)$, као функцију од $\vartheta_3(o, \tau)$. Облик ове функције нађемо овако:

$\frac{K e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{\pi}}}{12\left(1+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)}$, а одавде $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{12 K e^{\frac{i\pi}{4}}\left(1+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{27}{\pi^2}}} =$

$= 12 K e^{\frac{i\pi}{4}}\left(1+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\sqrt[4]{\frac{\pi^2}{27}} = f(K)$, или како је $K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(o, \tau)$,

излази $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 6\pi\vartheta_3^2(o, \tau)\, e^{\frac{i\pi}{4}}\left(1+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\sqrt[4]{\frac{\pi^2}{27}} = \Psi(\vartheta)$.



Слика 19.

На концу се нађе $\omega_3 = \omega_1 e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{\omega_2 e^{\frac{i\pi}{3}}}{1+e^{\frac{i\pi}{3}}}$.

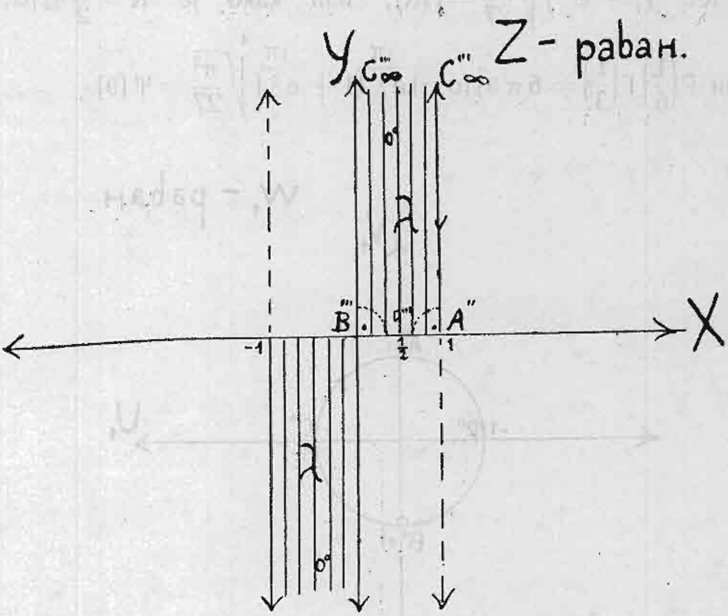
III. $\lambda = o$, односно π.

Права, која ограничава одсечак параболе, је бесконачно дуга, т. ј. имамо сада половицу параболе горњу (I) или доњу (II) пресликати конформно на круг.

1. Услед трансформације $Z' = \frac{Z - Z_1}{Z_0 - Z_1}$ добивамо из пређашње слике следећу слику (сл. 18).

2. Услед трансформације $w_1 = \frac{w - w_0}{r}$ прелази задана кружна линија (сл. 17.) са средшитем w_0 и полупречником r у јединичну кружну линију, чије је средиште у изходишту (сл. 19.).

3. Услед трансдормације $Z = \sqrt{Z'}$ добивамо следећу слику (слика 20.)



Слика 20.

Сада ћемо пругу λ конформно пресликати на полураван W, и то тако да тачкама W = — 1, 1, ∞, одговарају тачке Z = o, 1, ∞.

Овде је $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = o$.

Пресликавање је задано овим интегралом $Z = C \int_{-1}^{W} (W + 1)^{-\frac{1}{2}} (W - 1)^{-\frac{1}{2}} dW = C \int_{-1}^{W} \frac{dW}{\sqrt{W^2 - 1}} = C' \int_{-1}^{W} \frac{d \quad W}{\sqrt{1 - W^2}} =$ $C' \left(\arcsin W + \frac{\pi}{2} \right)$, одакле излази $W = - \cos \frac{Z}{C'}$.

Константу C′ одређујемо тако, да тачка $Z=1$ одговара $W=1$. Излази дакле за C′, $1=-\cos\frac{1}{C'}$ или $\frac{1}{C'}=\pi$ и напослетку $W=-\cos\pi Z$, а та функција има за примитивну пругу периоду у Z — равни пругу (λ), чија је ширина $2=1-(-1)$.

На концу имамо као решење нашега случаја $w=$

$$i\frac{1+w_1}{1-w_1}=i\frac{1+\frac{w-w_0}{r}}{1-\frac{w-w_0}{r}}=i\frac{r+(w-w_0)}{r-(w-w_0)}=-\cos\left(\pi\sqrt{\frac{z-z_1}{z_0-z_1}}\right)$$ или

експлиците $w=f(z)$

имамо

$$w=\frac{w_0\left(i-\mathrm{Cos}\,\pi\sqrt{\frac{z-z_1}{z_0-z_1}}\right)-r\left(\cos\pi\sqrt{\frac{z-z_1}{z_0-z_1}}+i\right)}{i-\cos\pi\sqrt{\frac{z-z_0}{z_0-z_1}}}=f(z)$$

⁂

Да резимирамо: Код три специјална случаја конформног пресликавања једног параболичног сегмента на круг, која смо посматрали, видели смо да се конформно пресликавање даде извести помоћу познатих трансцедената. У прва је два случаја конформно пресликавање задано једнозначним двопериодичним функцијама (елиптичним функцијама). Само је у првоме случају, тако званом хармоничном случају, пресликавање задано лемнискатичном Вајерштрасовом $\wp$ — функцијом, за коју вреди $\wp(iu)=-\wp(u)$.

Њезин је примитивни паралелограм периода један квадрат омер периода $\tau=i=\sqrt{-1}$, а Вајерштрасовя величина $q=e^{i\pi\tau}=e^{-\pi}\langle\frac{1}{23}$. У другоме је пак случају (еквианхармоничан случај) конформно пресликавање задано опет Вајерштрасовом $\wp$ — функцијом, за коју вреди релација $\wp(\epsilon u)=\epsilon\wp(u)$, где је $\epsilon=\sqrt[3]{1}=e^{\frac{2ki\pi}{3}}$ $(k=0,1,2.)$. Њезин је примитиван паралелограм периода један ромб, а размера је периода $\tau=e^{\frac{i\pi}{3}}=-\epsilon^2=1+\epsilon$, што је један трећи корен из -1, т. ј. $\sqrt[3]{-1}=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{3}}$, где је $k=0, 1, 2$, или $\sqrt[6]{1}=e^{\frac{k\pi i}{3}}$, где је $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

У трећем је случају конформно пресликавање задано једном елементарном функцијом, и то косинусом. Спомената се функција може схватити као једна дегенерисана елиптична функција. Из теорије елиптичних функција је познато, да прелазе за специјалне вредности модула k у тригонометричне, односно у експоненцијалне функције. У тригонометричне прелазе за $k=0$ или $k'=1$, а у екслоненцијалне за $k=1$ или $k'=0$, јер ја $k^2+k'^2=1$. Из $u=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, где је $\varphi=\mathrm{am}\,u$, добивамо, за $k=0$, $u=\int\limits_0^{\varphi}d\varphi=\varphi$, т. ј. $\varphi=\mathrm{am}\,u=\varphi=u$; $\mathrm{sn}\,u=$ $=\sin\varphi=\sin u$; $\mathrm{cn}\,u=\cos\varphi=\cos u$; $\mathrm{dn}\,u=\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u}=1$. За периоде K и K' овако дегенерисане елиптичне функције имамо:

$$K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi}{2}$$

или $\frac{\pi}{2}=\mathrm{am}\,K$;

$$K'=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\left[l\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]^{\frac{\pi}{2}}=\infty;$$

$\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{iK'}{K}=i\infty$, а величина $q=e^{i\pi\tau}=e^{-\frac{\pi K'}{K}}=e^{-\infty}=0$.

Примитивна је пруга периоде за овај случај, како смо већ видели, једна пруга (λ) ширине „2“ у I. и у III. квадранту. Размера τ расте преко свих граница, али се креће на $+y-$ оси.

RÉSUMÉ.

In drei behandelten speziellen Fällen der konformen Abbildung eines Parabelsegments auf eine Kreisfläche hat sich herausgestellt, dass die Abbildung sich durch bekannte Transcendenten darstellen lässt. In beiden ersten Fällen ist die Konf. Abbildung durch je eine p-Funktion und im III. Falle durch die Cosinus — Funktion gegeben. Im I. oder sogenannten harmonischen Falle $\left[\lambda = \frac{\pi}{2}\right]$ geschieht die konf. Abbildung durch die lemniskatische p-Funktion, für welche bekanntlich die Relation: $p\,(ui) = -p\,(u)$ gilt. Die spezielle Gestalt der die konf. Abbildung vermittelnden Funktion in expliziter Form lautet:

$$w = r\,\frac{p^2 + 1 - 2\,ip}{p^2 + 1 + 2\,ip} + w_0 = f\,(z),$$

wobei der Einfachheit halber das Argument der p — Funktion weggelassen wird. Das primitive Periodenparallelogram ist ein Quadrat von der Seite $2\,\omega_1 \sim 2{\cdot}6$ (Figur 10), was durch ϑ_3 — Reihe berechnet wurde; das Periodenverhältnis ist $\tau = i$ und die Grösse $q = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi} = 0{\cdot}0432139 < \frac{1}{23}\cdot$ Es wurde weiter im Laufe der Arbeit interessante Beziehungen zwischen Γ-Funktion und Grösse K einerseits und zwischen Γ-Funktion und ϑ_3 — Reihe anderseits abgeleitet. Diese Beziehungen lauten:

1) $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{K\sqrt{\pi}} = f\,(K)$ und

2) $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 2\,\vartheta_3\sqrt{\frac{\pi}{2}\sqrt{\pi}} = \varphi\,(\vartheta_3)$, da bekanntlich

$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3\;(0, \tau)$ ist. Im II. oder sogenannten equianharmonischen Falle $\left[\lambda = \frac{\pi}{3}\right]$ ist die konf. Abbildung wieder durch eine p-Funktion gegeben, fur welche bekanntlich die Relation:

$p(\epsilon u) = \epsilon p(u)$ gilt, wobei $\epsilon = \sqrt[3]{1}$ ist, gegeben. Das primitive Periodenparallelogram ist ein Rhombus mit Winkeln: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, dessen grössere Diagonale mit der reellen Axe zusammenfällt.

Die primitive Periode $2\,\omega_1$, wurde wieder durch ϑ_3 — Reihe berechnet, woraus dann $\omega_3 = \omega_1 e^{\frac{i\pi}{3}}$ und $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3 \sim 1{\cdot}2$ (Figur 15) folgt. Das Periodenverhältnis ist $\tau = e^{\frac{i\pi}{3}} = -\epsilon^2 = 1 + \epsilon$, was eigentlich eine dritte Wurzel aus -1 oder eine sechste Wurzel aus 1 ist, und für die Grösse q gilt $q = e^{i\pi\tau} = e^{i\pi(1+\epsilon)} = i\,e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}}$, wobei $e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} = 0{\cdot}0658757 < \frac{1}{15}$ ist. Die spezielle Gestalt der die konf. Abbildung vermittelnden Funktion in expliziter Form ist: $w = \frac{p^3(r + w_0) + i(w_0 - r)}{p^3 + i} = f(z)$, wobei wieder das Argument von p-Funktion weggelassen wird. Zum Schlusse wurde auch in diesem Falle eine Beziehung zwischen Γ-und K und schliesslich eine Beziehung zwischen Γ-Funktion und ϑ_3 — Reihe aufgestellt, welche Beziehungen lauten:

1) $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 12\,K\,e^{\frac{i\pi}{4}}\left(1 + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\sqrt[4]{\frac{\pi^2}{27}} = \varphi(K)$ und, da aber $\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0, \tau)$ ist:

2) $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 6\,\pi\,\vartheta_3^2\,e^{\frac{i\pi}{4}}\left(1 + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\sqrt[4]{\frac{\pi^2}{27}} = \Psi(\vartheta_3)$.

Im dritten Falle ($\lambda = o$, respective π) ist die geradlinige Begrenzung des Parabelsegments unendlich lang dh. sie fällt mit der Axe der Parabel zusammen. Hier handeltes sich um die konf. Abbildung einer halben Parabelfläche (obere oder untere Hälfte in Figur 16), die als ein ausgeartetes Parabelsegment anzusehen ist, auf eine Kreisfläche. In diesem Falle ist die konf. Abbildung mittels der Kosinus-Funktion, welche Funktion als eine ausgeartete elliptische Funktion zu betrachten ist, gegeben. Es ist aber aus der Theorie der Jacobischen elliptischen Funktionen bekannt, dass diese für spezielle Werte des Moduls „k“

in trigonometrische, beziehungsweise in Exponentialfunktionen übergehen, und zwar gehen dieselben in trigonometrische Funktionen für $k = o$ oder $k' = 1$, da $k^2 + k'^2 = 1$ ist, und in Exponentialfunktionen für $k = 1$ oder $k' = o$ über. Aus $u = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$, wobei $\varphi = \text{amu}$ ist, folgt nämlich für $k = o$ $u = \int\limits_0^{\varphi} d\varphi = \varphi$ dh. $\varphi = \text{amu} = u$, $\text{smu} = \sin\varphi = \sin u$, $\text{cnu} = \cos\varphi = \cos u$ und dnu $= \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 u} = 1$. Für K und K' der so ausgearteten elliptischen Funktion bekommen wir: $K = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{\pi}{2} = \text{am} K = K$,

$$K' = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \left[\text{ltg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \infty$$ und für $\tau = \frac{\omega 3}{\omega 1} = \frac{i K'}{K} = i\,\infty$ und $q = e^{i \pi \tau} = e^{-\infty} = O$. Das Periodenverhältnis $\tau = i\,\infty$ wächst über alle Grenzen hinaus, bleibt aber dabei auf $+ y -$ achse. Die Funktion, die uns die konf. Abbildung hier vermittelt, ist: $W = -\cos(\pi Z) = \varphi(Z)$ oder, da $W = i \frac{r + (w - w_0)}{r - (w - w_0)}$ und $Z = \sqrt{\frac{z - z_1}{z_0 - z_1}}$ ist, so bekommen wir $w = f(z)$ in folgender expliziten Form:

$$w = \frac{w_0 \left(i - \cos \pi \sqrt{\frac{z - z_1}{z_0 - z_1}} \right) - r \left(\cos \pi \sqrt{\frac{z - z_1}{z_0 - z_1}} + i \right)}{i - \cos \pi \sqrt{\frac{z - z_1}{z_0 - z_1}}} = f(z).$$

Die primitive Periode für $W = -\cos(\pi Z) = \varphi(Z)$ ist 2, was auch aus dem Umstande folgen würde, dass wir dieselbe Funktion als eine ausgeartete elliptische Funktion betrachten. Es sind nämlich die primitiven Perioden für cnu 4 K und 4 i K'. Wir haben gesehen, dass für diesen Fall $K = \frac{\pi}{2}$ und $K' = \infty$ ist, woraus $4\,K = 2\,\pi$ und $4\,i\,K' = i\,\infty$ folgt. Unsere elliptische Funktion reduziert sich also auf eine einperiodische Funktion. Da aber das Argument der in Betracht gezogenen Funktion „$\pi\,Z$" ist, so ist klar, dass sie die Periode „2" hat. Der primitive Periodenstreifen für diesen Fall ist ein Streifen (in Fig. 20) von der Breite $1 - (-1) = 2$ und derselbe ist von den Geraden $x = -1$ und $x = 1$ begrenzt. Endlich können wir nebenbei zeigen, wie eine elliptische Funktion für $k = 1$ oder $k' = o$ in eine exponential, respektive hyperbolische Funktion übergeht. Es lässt sich leicht berechnen, dass hier $K = \infty$, $K' = \frac{\pi}{2}$, $\tau = -\frac{i\,K'}{K} = o$ und $q = e^{i\pi\tau} = e^{-\frac{\pi K'}{K}} = 1$ ist. Aus $u = \int\limits_{0}^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ folgt:

$$u = \int\limits_{0}^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{\cos\varphi} = \left[l\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\varphi} = l\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$ woraus $tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = e^u$ oder $\frac{1 + tg\,\frac{\varphi}{2}}{1 - tg\,\frac{\varphi}{2}} = e^u$ folgt. Aus der letzten Gleichung resultiert nach leichter Rechnung: $tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{e^u - 1}{e^u + 1}$, woraus dann $\sin\frac{\varphi}{2}$ und $\cos\frac{\varphi}{2}$ leicht zu berechnen sind. Wir bekommen dann weiter

$$snu = \sin\varphi = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{shu}{chu},$$ wobei

$$ch^2 u - sh^2 u = 1$$ ist und endlich

$$c\,n\,u = \cos\varphi = \frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{1}{c\,h\,u}$$ und

$$dnu = \cos\varphi = cnu.$$

Am Ende können wir bemerken, dass in allen drei behandelten Fällen die konf. Abbildung durch je eine gerade Funktion gegeben ist.

LI (18). — **Јов. Цвијић,** Извори, тресаве и водопади у Источној Србији. **Мих. Петровић,** Методе за трансформацију бесконачних редова у одређене интеграле. — **Љ. Клерић,** Тракториограф и конструисање Лудолфовог броја »π« и основице »e« природног логаритма. — Београд. 1896, 8°, 316, (са 6 фотографских снимака и 4 табеле скица и профила).

*LIV (19). — **Јов. Цвијић,** Трагови старих глечера на Рили. — **Мих. Петровић,** О карактеристичним кривим линијама диференцијалних једначина првога реда. — **Мих. Петровић,** О једној класи диференцијалних једначина другога реда. — **М. З. Јовичић,** О једињењима досада непознате прстенасте конституције. — **С. Урошевић,** Оптичке особине и класификација авалита, милошина и александролита. — **С. Урошевић,** Нов начин ближњења биотина. — **С. М. Лозанић** и **М. З. Јовичић,** Електролиза соли и база поред амонијика. — **С. М. Лозанић,** и **М. З. Јовичић,** Хемијске синтезе помоћу тамног (тихог) електричног испражњивања. — **Св. Радовановић,** О геотермском ступању терцијарног терена код Младеновца, — Београд, 1897, 8°, 252 (са 4 слике у тексту, 3 таблице снимака и 2 географске карте).

LVI (20) — **П. Ј. Живковић,** Други прилог алгебарским влацима вишег степена. — **П. Ј. Живковић,** Један метод за цртање кривих линија у равнини. — **Мих. Петровић,** О електричним осцилацијама при испражњивању кондензатора. — **П. С. Павловић,** Прилог познавању форaминифера из II медитеранских слојева у Србији — **Ж. Јуришић,** Прилог флори Кнежевине Бугарске. — **Д-р Рад. Лазаревић,** Прилози за грађу етнологије Краљевине Србије: II Макролепидоптере околине Београда, II **Heterocera.** — **Ј. М. Жујовић,** О вулканској области под Источним Балканом. — Београд, 1898, 8°, 265 (са 35 слика у тексту).

LVII (21). — **Јов. Цвијић,** Глацијалне и морфолошке студије о планинама Босне, Херцеговине и Црне Горе. — **Љуб. Клерић,** О инструментима за цртање линија другог степена. —

Мих. Петровић, Прилози хемијској кинетици. — **С. Урошевић,** Цер. петрографска студија. — **Д-р Рад. Лазаревић,** Досад опажена варирања неколико наших лепидоптера. — Београд, 1899, 8°, 341 (са 14 табли скица, карата и профила).

LIX (22). — **С. М. Лозанић,** Хемијске комбинације. — **Јов. Цвијић,** Карсна поља западне Босне и Херцеговине. — **Мих. Петровић,** О математичкој теорији активности узрока. — **Мил. З. Јовичић,** О дејству азотасте киселине у присуству азотне киселине. — Београд, 1900, 8°, 263.

LXI (23). — **Д-р Богдан Гавриловић,** О тежинама алгебарских склопова. **Д-р Богдан Гавриловић,** О аналитичким изразима неких функција. — **С. Урошевић,** Студије исконског терена у Србији: II Венчац, Букуља, Ваган. — **Л. В. Адамовић,** Зимзелени појас Јадранског Приморја. — **Д-р Живојин Ђорђевић,** Прилози за познавање српске фауне. Амфибије и рептилије. — Београд, 1900, 8°, 201 (са 3 карте и 1 скицом профила).

LXIII (24). — **Јов. Цвијић,** Структуре и поделе планина Балканског Полуострва. — **Мих. Петровић,** Прилог теорији бескрајних редова. — **Богдан Гавриловић,** О једној важној особини детерминаната. — **Богдан Гавриловић,** О Бернуљијевим и Ајлеровим бројеоима. — **Љуб. Клерић,** О инверсним сликама трактрије круга за сталну дирку. — **Мих. Петровић,** О представљању функција одређеним интегралима. — **Јов. Цвијић,** Криптодепресије у Јевропи. — **Богдан Гавриловић,** О особинама једне специјалне детерминанте. — **Богдан Гавриловић,** О поларно коњугованим трансформацијама. — Београд, 1902, 8°, 268.

LXV (25). — **Љуб. Клерић,** Геометријска конструкција мреже за Меркаторову цилиндарску пројекцију. — **С. Урошевић,** Борања студија контактно-метаформних појава гранита. — **Богдан Гавриловић,** О једној особини просторних детерминаната. — **Богдан Гавриловић,** О аналитичком представљању једнограних функција у области тачке у бесконачности. — **Мих. Петровић,** Проучавање функција представљених одређеним интегралима. — **П. Јанковић,** Глацијални трагови на Пирину. — **Јов. Цвијић,** Нови резултати о глацијалној епоси Балканског Полуострва. — Београд, 1903, 8^0, 333 (с једном геолошком картицом).

LXVII (26). — **Мих. Петровић,** Примедбе о интегралима диференцијалних једначина првог реда. **Коста Стојановић,** Потенцијал отпора. — **Богдан Гавриловић,** О неким тригонометријским идентичностима. — **Мих. Петровић,** О утицају нетачних цодатака за резултате квантпативних хемијских анализа. — **Жив. Ђорђевић,** Прилози за познавање српске фауне. — **Коста Стојановић,** О условима интеграбилитета извесне балистичне једначине. — **Јов. Цвијић,** Балканска алпијска и карпатска глацијација. — Београд, 1905, 8^0, 227.

LXIX (27). **С. М. Лозанић,** Радиоактивни минерали у Србији. — **Мих. Петровић.** Покушај једне опште механике узрока. — **Коста Стојановић,** О једној генерализацији Бертрановог проблема. — **С. М. Лозанић,** Међе природног система хемијских елемената. — **Јефта Дедијер** и **Васиљ Грђић,** Глацијални трагови на Зелен-Гори, Товарници и Маглићу. — **Жив. Ђорђевић,** Прилози за познавање слатковадне фауне Балканског Полуострва, I Планктоорганизми великих језера Балканског Полуострва. — **Богдан Гавриловић,** Један нов прилог теорији бројева. — Београд 1905, 8^0, 278.

LXXI (28). — **Мих. Петровић,** Примедбе о једној класи кривих линија у простору. — **Мих. Петровић,** О алгебарским једначинама са имагинарним коренима. — **Коста Стојановић,** Обртање једног тела око утврђене тачке у релативном кретању. — **Мих. Петровић,** О распореду корена једне опште класе алгебарских једначина. **Жив. Ђорђевић,** Прилози за познавање слатководне фауне Балканског Полуострва. II. Македонске хидрахниде. — **Мил. З. Јовичић,** О конституцији некојих, досада непознатих деривата фениландиоксдиацина. — **Лујо В. Адамовић,** Вегетациони појас Риле планине. — Београд, 1906, 8^0, 264 (са 6 табли слика и једном картом.

LXXIII (29). — **Мих. Петровић,** Непосредна примена реалних одређених интеграла на алгебарске и трансцендентне једначине. — **Жив. Ђорђевић,** Прилози за познавање слатководне фауне Балканског Полуострва IV Српске диаптомиде — **С. М. Лозанић,** О ароматичким дитиокарбаматима. — **Петар Ђорђевић,** Нуклеол и његов постанак у вегетативним ћелидама код биљака **lupinus augustifolius** и **alum сера.** — **Мих. Петровић,** Примедбе о модулима целих функција. — **Љуб. Клерић,** Кинемагичћо мерење бројних вредности елиптичких интеграла. — **Јеленко Михаиловић,** Утицај помрачења сунца на метеролошке елементе у Београду. — **Милорад Поповић,** Прилог теорији физичког двојног клатна. — **Богдан Гавриловић,** О системама фокалних кругова. — **Богдан Гавриловић,** О једној симетричној функцији нула полинома трећег степена. — **С. М. Лозанић,** О електросинтезама. — **Мил. З. Јовичић,** О кондензацији етилена и ацетилена под утицајем тамне електричне струје. — Београд 1907, 8^0, 296 (с једном таблом слика и три таблице).

LXXV (30). — **Нед. Кошанин,** Даиђско језеро, хидро-биолошка студија. — **Петар Ђорђевић,** Цитолошке промене у вегетативним ћелијицама из корена **Galtonija candicans** под утицајем екстремних температура. — **Мих. Петровић,** Једна симетрична функција корена и њене особине. — **С. Урошевић,** Централни Копаоник, студија контактно-метаформних појава гранита. — **С. М. Лозанић,** О електросинтезама. — **Мих. З. Јовичић,** О кондензационим продуктима етилена и ацетилена под утицајем тамне електричне струје — **Мих. З. Јовичић,** О хрому као елементу, поводом једног непознатог хромног минерала. — **Мих. З. Јовичић,** О хетероцикличним једињењима досада непознате конституције. — Београд, 1908, 8^0, 256 (са две табле слика и једном картом).

(Завршиће се)