НЕКИ КРИТЕРИЈУМИ У ТЕОРИЈИ ЈЕДНОЗНАЧНИХ АНАЛИТИЧНИХ ФУНКЦИЈА И ГЕОМЕТРИЈА ЛОБАЧЕВСКОГ КОЈА ИХ ПОВЕЗУЈЕ

Лазар КАРАЦИЋ (Београд)

I УВОД

1.1-У савременим курсевима анализе износи се на познати начин биунивока коресподенција између тачака еуклидске равни и равни комплексне променљиве $z = x+yi$. Међутим нигде се не помиње директно како се помоћу Weierstrass-ових координата и то посредним путем успоставља биунивока коресподенција између тачака равни Лобачевског и тачака равни z. Овим путем у I дијелу овог рада изнесени су само они обрасци који су нужни за даљи ток рада. Тако су ови обрасци уз помоћ принципа хиперболичне метрике од R. Nevanlinna[12] нашли дијелу примену у теорији једнозначних аналитичких функција, која је изложена у II и III дијелу овог рада. У IV дијелу коришћена је у почетку еуклидска геометрија да би се даље јасније истакао значај и улога билинеарних трансформација у теорији функција које су дефинисане Taylor-овим или Dirichlet-овим редом.

1.2.-Уочимо у равни Лобачевског двије тачке

$$M_1(u_1, v_1) \text{ и } M_2(u_2, v_2)_2$$

чији је положај у односу на правоугли координатни систем Ouv одређен помоћу првих координата. Растојање $M_1M_2 = r$ дато је образцем[7]

$$(I,1)\quad \begin{cases} \operatorname{ch} r = \operatorname{ch}(u_2-u_1)\operatorname{ch} v_1 \operatorname{ch} v_2 - \operatorname{sh} v_1 \operatorname{sh} v_2 = \\ (\operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} v_1)(\operatorname{ch} u_2 \operatorname{ch} v_2) - (\operatorname{sh} u_1 \operatorname{ch} v_1)(\operatorname{sh} u_2 \operatorname{ch} v_2) - \operatorname{sh} v_1 \operatorname{sh} v_2 \end{cases}$$

Овај образац, кад се узму у обзир Weierstrass-ове **координате :**

$$(I,2)\quad \{\ \vartheta = \operatorname{sh} v,$$

где су u **и** v **прве координате тачке** $M(u,v)$ **,може се написати у облику**

$$(I,3)\quad \operatorname{ch} r = \mathcal{W}_1\mathcal{W}_2 - \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 - \vartheta_1\vartheta_2$$

Релацијама (I,2) одређена је бијунивока кореспонденција између тачака равни Лобачевског и тачака двокрилног хиперболоида

$$(I,4)\quad \mathcal{W}^2 - \mathcal{U}^2 - \vartheta^2 = 1 .$$

1.3.-Познате релације

$$(I,5)\quad \mathcal{W} = \frac{R^2+|z|^2}{R^2-|z|^2},\ \mathcal{U} = \frac{2Rx}{R^2-|z|^2},\ \vartheta = \frac{2Ry}{R^2-|z|^2},$$

где је z **комплексан број** $z = x+yi$ **,одређују бијунивоку кореспонденцију између тачака двокрилног хиперболоида (I,4) и равни** z .

Из (I,2) и (I,5) произлазе ове релације

$$(I,6)\quad \begin{cases} \dfrac{R^2+|z|^2}{R^2-|z|^2} = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v, \\ \dfrac{2Rx}{R^2-|z|^2} = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v, \\ \dfrac{2Ry}{R^2-|z|^2} = \operatorname{sh} v. \end{cases}$$

Из релација (I,6) следују ове

$$(I,7)\qquad x=\frac{R\,sh u\,ch v}{1+ch\varrho},\ y=\frac{R\,sh v}{1+ch\varrho},\ (ch\varrho=ch u\,ch v),$$

где је ϱ отстојање тачке $M(u,v)$ до почетка O. Због тога је

$$(I,8)\qquad x^2+y^2=|z|^2=R^2 th^2\frac{\varrho}{2}.$$

Дакле, помоћу релација (I,7) одређена је биунивока коресподенција између тачака равни Лобачевског и тачака у кругу $|z|=R$. Ако тачка $M(u,v)$ опише праву линију l, њој одговарајућа тачка z описаће криву линију (C) која је ортогоналну кругу $|z|=R$. Крива (C) зове се неeуклидска права.

1.2.1.-Сљедеће познате релације

$$(I,9)\quad U^{c}=\frac{|z|^2+1}{2x},\ \mathcal{U}=\frac{|z|^2-1}{2x},\ V^{c}=\frac{y}{x},$$

или релације

$$U^{c}=\frac{|z|^2+1}{2y},\ \mathcal{U}=\frac{|z|^2-1}{2y},\ V^{c}=\frac{x}{y},$$

одређују биунивоку коресподенцију између тачака двокрилног хиперболоида (I,4) и једне од полуравнина $x\lessgtr 0,\ y\lessgtr 0$.

Упоређивањем (I,2) са (I,9) као и са (I,13) добијају се одређене релације из којих произлазе ове:

$$y=e^{u}\,th v,\quad x=\frac{e^{u}}{ch v},$$

односно ове [17]:

$$y=\frac{e^{u}}{ch v},\quad x=e^{u}\,th v.$$

На овај начин је успостављена биунивока кореспонденција између тачака равни Лобачевског и једне од полуравнина $x>0$ или $y>0$. Према геометрији Poincaré-a полукругови са центром на x оси а који леже у полуравнини $y>0$ су неуклидске праве.

1.4.-Тачкама $M_1(u_1,\vartheta_1)$ и $M_2(u_2,\vartheta_2)$ у равни Лобачевског одговараће на двокрилном хиперболоиду (I,4) тачке (U_1,ξ_1,W_1) и (U_2,ξ_2,W_2) а овима у равни Z тачке $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$. Тада образац(I,3) према (I,5) добија овај облик

$$sh\frac{r}{2}=R\sqrt{\frac{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}{(R^2-|z_1|^2)(R^2-|z_2|^2}},$$

или овај

$$(I,11)\qquad sh\frac{r}{2}=\frac{R\,|z_2-z_1|}{\sqrt{(R^2-|z_1|^2)(R^2-|z_2|^2}}$$

Дакле,нееуклидско растојање између двеју тачака z_1 и z_2, које леже у кругу $|z|=R$, дато је овим обрасцем

$$r=2\lg\left(\frac{R|z_2-z_1|}{\sqrt{(R^2-|z_1|^2)(R^2-|z_1|^2}}+\sqrt{\frac{R^2|z_2-z_1|^2}{(R^2-|z_1|^2)(R^2-|z_1|^2}+1}\right).$$

Одавде се добива овај познати образац за линијски елеменат лука неке ректификабилне криве који лежи у кругу $|z|=R$

$$dr=\frac{2R|dz|}{R^2-|z|^2}.$$

Образац (I,3) према (I,9) као и према (I,10) добија респективно овај облик:

$$(I,12) \qquad \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2} = \frac{|z_2 - z_1|^2}{4 \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2}, \quad x > 0,$$

$$(I,13) \qquad \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2} = \frac{|z_2 - z_1|^2}{4 \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}, \quad y > 0.$$

Одавде се добија ово неуклидско растојање између двеју тачака z_1 и z_2 које леже у полуравнини $x > 0$ односно у полуравнини $y > 0$:

$$r = 2 \lg \left(\frac{|z_2 - z_1|}{2\sqrt{x_1 x_2}} + \sqrt{\frac{|z_2 - z_1|^2}{4 x_1 x_2} + 1} \right), \quad x > 0,$$

$$r = 2 \lg \left(\frac{|z_2 - z_1|}{2\sqrt{y_1 y_2}} + \sqrt{\frac{|z_2 - z_1|^2}{4 y_1 y_2} + 1} \right), \quad y > 0.$$

Према томе линијски елеменат ректификативне криве која лежи у полуравнини $x > 0$ или у полуравнини $y > 0$, као што је познато, респективно гласи

$$dr = \frac{|dz|}{x}, \quad x > 0,$$

$$dr = \frac{|dz|}{y}, \quad y > 0.$$

1.5.-Уочимо у равни Лобачевског четири тачке M_1, M_2, M_3 и M_4. Њима ће у равни z одговарати тачке z_1, z_2, z_3 и z_4. Дворазмјери граничних лукова:

$$\operatorname{sh} \frac{M_1 M_3}{2}, \quad \operatorname{sh} \frac{M_1 M_4}{2}, \quad \operatorname{sh} \frac{M_2 M_3}{2}, \quad \operatorname{sh} \frac{M_2 M_4}{2}$$

одговараће према (I,14) или (I,12), или (I,13) ова дворазмера

$$\frac{sh\frac{M_1M_3}{2}}{sh\frac{M_1M_4}{2}} : \frac{sh\frac{M_2M_3}{2}}{sh\frac{M_2M_4}{2}} = \left|\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1} : \frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}\right| = \left|(z_1 z_2 z_3 z_4)\right|$$

Познато је да у изразу

$$\frac{s_2}{s_1} = e^{r},$$

где су s_1 и s_2 коаксијални гранични лукови, r одређује растојање између ова два гранична лука. Према томе израз

$$r = lg\left|(z_1 z_2 z_3 z_4)\right|$$

дефинише растојање између два произвољно узета коаксијална гранична лука. На овај начин је по метрици Cayley-Klein-a изражено нееуклидско растојање између тачака z_3 и z_4.

Ако горе четри поменуте тачке у равни Лобачевског леже у (природном реду) на једној правој линији, онда ће њима одговарајуће тачке у равни z лежати на правој или кругу када је дворазмера $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ позитивна. Ако на пр. тачке z_1 и z_2 леже на кругу $|z| = R$, нееклидска права биће дуж која спаја ове две тачке или лук круга који пролази кроз ове две тачке и стоји нормално на датом кругу. За апсолуту у комплексној равни z може се узети не само круг $|z| = R$ него ма која крива другог степена коју ће права сећи у тачкама z_1 и z_2. Ако се узме за апсолуту у равни z права l, нееуклидске праве биће лук круга који пролази кроз тачке z_3 и z_4 и стоји нормално на њој.

Из горе реченог, дакле, налази да израз

(14) $$r = lg(\alpha\beta z_1 z_2)$$

дефинише нееуклидско отстојање тачака z_1 и z_2 када тачке α и β, које леже на некој апсолути, заједно са тачкама z_1 и z_2 леже на нееуклидској правој .

Постоји суштинска разлика између нееуклидске праве неке апсолуте и нееуклидске праве круга $|z| = R$ или полуравнине $x > 0$ или $y > 0$.Јер ,између тачака макоје нееуклидске праве једне апсолуте и тачака праве у равни Лобачевског непостоји увијек биунивока коресподенција.Та коресподенција једино егзистира код апсолуте $|z| = R$ ако су нееуклидске праве они лукови или оне праве које стоје нормално на њој,а код апсолуте $x = 0$ или $y = 0$ ако су оне полукругови који леже у полуравнини $x > 0$, односно у полуравнини $y > 0$,са центром на x ,односно на y-оси. Ако се уочи у једној од ових апсолута нееуклидски троугао $z_1 z_2 z_3$, онда се све познате тригонометриске формуле из геометрије Лобачевског могу примјеном образаца из тачке 1.3. изразити помоћу координата његових темена.

1.6.-Слиједеће релације

$$(I,15)\qquad u = \frac{1+\lambda\mu}{\lambda-\mu}, \quad v = i\,\frac{1-\lambda\mu}{\lambda-\mu}, \quad w = \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}$$

показују да је тачка (u, v, w) на двокрилном хиперболоиду(I,4) одређена паром комплексних бројева λ и μ .Према томе између тачака равни Лобачевског и тачака двеју комплексних равнина λ и μ може се успоставити биунивока коресподенција.Тако је на пр.

$$(I,16)\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{u + vi}{w - 1}, & (|w| \geq 1, |\lambda| \geq 1) \\[2ex] \mu = \dfrac{u + vi}{w + 1}, & (|\mu| \leq 1) \end{cases}$$

која лежи ван круга $|\lambda|=1$, одговараће ова функција

$$\varphi(\lambda,\mu) = (A-C-B_i)\lambda^2\mu^2 + 2(D+E_i)\lambda\mu^2 + 4F\mu^2 + 2(A+C)\lambda\mu +$$
$$+ 2(D-E_i)\mu + A - C + B_i = 0,$$

док оном њеном дијелу који лежи у кругу $|\lambda|=1$ одговараће ова функција

$$\psi(\mu,\lambda)=0.$$

Кривој (C), ако је круг, одговараће ова једначина

$$\varphi(\lambda,\mu) = (D+E_i)\lambda\mu + 2F\mu + 2A\lambda + D - E_i = 0.$$

Одавде се добива ова супституција

$$\text{I, 17)} \qquad \mu = \frac{\lambda-\lambda_0}{\bar{\lambda}_0\lambda - |\lambda_0|^2 + \rho^2},$$

где је λ_0 центар круга (C) а ρ његов полупречник. Двојне тачке ове супституције, када је $|\lambda_0|>\rho$ и $|1-|\lambda_0|^2|>\rho$ су симетричне у односу на круг $|\lambda|=1$, али када је $|\lambda_0|>\rho$ и $|1-|\lambda_0|^2|<\rho$, онда се налазе на кругу $|\lambda|=1$. У првом случају ова је супституција хиперболична или семихиперболична са атрактивном тачком

$$\lambda_1 = \frac{1+|\lambda_0|^2-\rho^2-\sqrt{[(1-|\lambda_0|)^2-\rho^2][(1+|\lambda_0|)^2-\rho^2]}}{2\bar{\lambda}_0},$$

која лежи у кругу $|\lambda|=1$, док је у другом случају она елиптична.

Дакле, супституција (I,17) за $|\lambda_0|^2-\rho^2=1$ је хиперболична инволуција и она чини инваријантним круг $|\lambda|=1$. Према томе ће се имати $|\mu|\le 1$ за $|\lambda|\le 1$. Због тога се према обрасцу (I,8) може писати

$$|\ | = t^{?}\frac{r}{2}, \ (\lambda\ ).$$

Израз

$$|m(\lambda)| = \ \ = th\frac{r}{2}$$

представља једначину нееуклидског круга са центром у тачки λ_0 $|\lambda_0| <$.Од трансформације (I,17) за λ_0 $\varrho^2 = R^2$ добива се трансформација

$$m \ \frac{\lambda_0 - \lambda}{R^2 - \bar{\lambda}_0 \lambda}$$

Лако је даље показати да ће трансформација

(I,15) $$m = \frac{\ \ \lambda_0}{\ _0 \ \ - R}$$

пресликати круг $\ \ = R$ у круг $|m| =$

II ПРИНЦИП ХИПЕРБОЛИЧНЕ МЕТРИКЕ ОД Carathéodory-a У ПРИМЈЕНИ

2.1.-Нека буде $|\ \ | < M$ за $\ | < R$.двјема тачкама (z_1) и (z_2) одговараће према (I,14) овај гранични лук

(II,1) $$sh\frac{r}{2} = \frac{M\left|f(z_2) - f(z_1)\right|}{\sqrt{(M^2-|f(z_1)|^2)(M^2-|f(z_2)|^2)}}.$$

Овај гранични лук не може бити бесконачно велики ако је $|z|<R$.
Он постаје једнак нули када је $f(z_1)=f(z_2)$ за $z_1=z_2$ или за $z_1\neq z_2$.Према томе код мултивалентних функција овај гранични лук постаје једнак нули у оним тачкама у којима је $f(z_1)=f(z_2)$ за $z_1\neq z_2$,док овај гранични лук није никад једнак нули код унивалентних функција сем у тачкама $f(z_1)\equiv f(z_2)$ за $z_1=z_2$.

Став 1.-Ако је функција $w=f(z)$ регуларна у кругу $|z|\le R$ и ако је $|f(z)|\le M$ за $|z|\le R$,тада је

$$\frac{M\,|f(z)-f(z_0)|}{\sqrt{(M^2-|f(z)|^2)(M^2-|f(z_0)|^2)}} \le \frac{R\,|z-z_0|}{\sqrt{(R^2-|z|^2)(R^2-|z_0|^2)}},$$

где се једнакост достиже само у случају када је $f(z)=\frac{M}{R}z$.

Овај став произлази из слиједећег принципа хиперболичне метрике: [12].

Es seien G_z und G_w zwei schlichte Gebiete, welche mindestens ~~drei~~ drei Randpunkte haben, und w(z) eine analytische Funktion, die innerhalb G_z unbeschrankt fortsetzbar ist, in der Weise dass ihre Werte innerhalb G_w fallen. Ist dann l_z ein beliebiger Kurvenbogen auf G_z und l_w sein vermittels der Abbildung w=w(z) erklarter Bildbogen in G_w, so ist die hyperbolische Lange von l_z (gemessen auf G_z) mindestens so gross wie die hyperbolische Lange von l_w(mit G_w als Massgebiet).

Die Langen sind einander gleich in dem einzigen Fall, wo w=w(z) die universellen Uberlagerungsflachen G_z^∞ und G_w^∞ eineindeuti aufeinander bezieht.

Према овом принципу нееуклидско растојање r између тачака z и z_0 ,које се добива помоћу израза (I,14),је најмање толико једнако колико нееуклидско растојање r_1 њима одговарајућих тачака
~~(рајућих тачака)~~

рајућих тачака $f(z)$ и $f(z_0)$, које се добива помоћу израза (II,1), тј.

$$\text{th}\frac{\tau_1}{2} \le \text{th}\frac{\tau}{2}$$

Одавде произлази и неједнакост (II,2), што је требало доказати.

Ако је $f(0)=0$, тада се израз (II,2) за $z_0=0$ своди на облик $|f(z)| \le \frac{M}{r}|z|$. Према томе из става 1, када је $f(0)=0$, произлази позната Schwarz-ova лема.

2.2.-Ако вриједности функције $w=f(z)$ за $z \in G_z$ леже у једној од полуравнина $\operatorname{Im} w > 0$ или $\operatorname{Re} w > 0$, тада се према тачки (I,3) може писати

$$\text{(II,3)} \qquad \text{th}\frac{\tau_1}{2} = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{\sqrt{\operatorname{Im} f(z)\operatorname{Im} f(z_0)}}.$$

односно

$$\text{(II,4)} \qquad \text{th}\frac{\tau_1}{2} = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{\sqrt{\operatorname{Re} f(z)\operatorname{Re} f(z_0)}}.$$

<u>Став 2.-Ако је функција $w=f(z)$ регуларна у полуравнини $\operatorname{Im} z > 0$, или у полуравнини $\operatorname{Re} z > 0$, и ако она пресликава прву од ових полуравнина у полуравнину $\operatorname{Im} f(z) > 0$, или другу полуравнину у полуравнину $\operatorname{Re} f(z) > 0$, тада се респективно има</u>

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{\sqrt{\operatorname{Im} f(z)\operatorname{Im} f(z_0)}} \le \frac{|z-z_0|}{\sqrt{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} z_0}},$$

<u>односно</u>

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{\sqrt{\operatorname{Re} f(z)\operatorname{Re} f(z_0)}} \le \frac{|z-z_0|}{\sqrt{\operatorname{Re} z \operatorname{Re} z_0}},$$

<u>где једнакост је достигнута функцијом $f(z)=Mz$</u>.

Према горе наведеном принципу ,када је функција $W=f(z)$ регуларна у једној од горе наведених полуравнина промењиве z и када њене вриједности падају у одговарајућу полураванину саме функције,тада је нееуклидско растојање τ_1 између тачака $f(z)$ и $f(z_0)$,~~[illegible]~~ мање или једнако од одговарајућег нееуклидског растојања τ тачака z и z_0 ,тј.

$$\operatorname{sh}\frac{\tau_1}{2}\leq \operatorname{sh}\frac{\tau}{2}.$$

Одавде,кад се упореде резултати из тачке (I,3) са (II,3),односно са (II,4) произлази (II,5),односно (II,6), што је требало доказати.

2.3.-Нека буде функција $W=f(z)$ регуларна у кругу $|z|=R$ и нека се у овом кругу има $|f(z)|\leq M$,тада је према (I,26)

$$\left|\mu\left(\frac{f(z)}{M}\right)\right|=\left|\frac{M(f(z)-W_0)}{M^2-\overline{W_0}f(z)}\right|=\operatorname{th}\frac{\tau_1}{2},\quad (W_0=f(z_0))$$

где је τ_1 нееуклидско растојање између тачака $\mu\left(\frac{f(z)}{M}\right)$ и $\mu\left(\frac{W_0}{M}\right)$. Према горе наведеном принципу нееуклидско растојање између тачака $\mu\left(\frac{f(z)}{M}\right)$ и $\mu\left(\frac{W_0}{M}\right)$ је мање од нееуклидског растојања њима одговарајућих тачака $\mu\left(\frac{z}{R}\right)$ и $\mu\left(\frac{z_0}{R}\right)$,тј.

$$\operatorname{th}\frac{\tau_1}{2}\leq \operatorname{th}\frac{\tau}{2}=\left|\mu\left(\frac{z}{R}\right)\right|$$

Одавде произлази овај познати резултат

<u>Ако је функција $W_0=f(z)$ регуларна у кругу $|z|=R$ и ако је $|f(z)|\leq M$ за $|z|<R$,тада је</u>

$$\left|\frac{M(f(z)-W_0)}{M^2-\overline{W_0}f(z)}\right|\leq\left|\frac{R(z-z_0)}{R^2-\overline{z_0}z}\right|,$$

<u>где се једнакост достиже функцијом $f(z)=\frac{R}{M}z$</u> .

Образац (II,7) једнозначан је када је функција   у кругу $|z|<R$ унивалентна, али ако је она мултивалентна, тј. ако је

$$f(z_0)=f(z_1)=\cdots=f(z_n)=w_0\ ,$$

где је

$$|z_n|<R\ ,\ z_{n-1}\neq z_n\ ,\ n=1,2,3,\ldots\ ,$$

тада се има овај познати образац

$$\left|\frac{M(f(z)-w_0)}{M^2-\bar{w}_0 f(z)}\right| \le \left|\frac{R(z-z_0)}{R^2-\bar{z}_0 z}\right|\cdots\left|\frac{R(z-z_n)}{R^2-\bar{z}_n z}\right|<1.$$

Одавде, када је $f(z_0)=w_0=0$, произилази позната пропозиција Jensen-a [6]

Из последњег обрасца следује да рационална функција

$$R(z)=\prod\frac{R(z-z_m)}{R^2-\bar{z}_m z}\ ,\ (|z_m|<R\ ,\ m=1,2,3,\ldots n),$$

преоликава круг $|z|<R$ на круг $|w|<1$.

2.4.-Ако је $|f(z)|<R$ за $|z|<R$, где је $f(z)$ једнозначна функција, ~~и~~ онда за низ итерација ове функције, тј. за низ

$$\{f_n(z)\}\ ,\ |z|<R\ ,$$

важи однос

$$|f_n(z)|<R,\ n=1,2,3,\ldots$$

Према томе ниједан члан низа граничних лукова

$$\left\{\frac{R\,|f_n(z_1)-f_n(z_2)|}{\sqrt{(R^2-|f_n(z_1)|^2)(R^2-|f_n(z_2)|^2}}\right\}$$

не може бити бесконачно велики. Ако би један од ових чланова низа за $z_1\neq z_2$ био једнак нули, онда би и сви остали чланови вишег ранга такође били једнаки нули. Овај случај може да наступи као што смо видјели у тачки 2.1., само ако је функција $\phi(z)$ мултивалентна, док овај случај не може да наступи када је она унивалентна. Сви су чланови овог низа међусобно различити сем у случају ако је функција $\phi(z)$ хомографија.

Из горе реченог као из става 1 излази: ако $\phi(z)$ није хомографија, низ (II,9) је монотоно опадајући низ. Према томе он је конвергентан, а кад је он конвергентан онда је конвергентан и низ

$$\{\phi_n(z)\},\ |z|<R.$$

Границе низа $\{\phi_n\}$ у двема произвољним тачкама z_1 и z_2 не могу да леже једна на рубу круга $|z|=R$ а друга у његовој унутрашњости, или да се обје налазе у двјема различитим тачкама на рубу. Јер кад би се имао један од ова два случаја, нееуклидско растојање њихово било би, према реченом у првој глави, бесконачно велико. То би значило да тада низ (II,9) дивергира, што је немогуће. Ако низ $\{\phi_n(z)\}$ у некој тачки $z,(|z|<R)$, конвергира једној тачки на рубу круга $|z|=R$ тј. тачки $z=Re^{\alpha i}$, он ће конвергирати у свим осталим тачкама које леже у кругу $|z|<R$, ка тачки $z=Re^{\alpha}$. Према томе тачка $z=Re^{\alpha}$ биће инваријантна за ову функцију. Број инваријантних тачака у кругу $|z|\leq R$ добива се решењем једначине

$$\phi(z)=z.$$

Број решења ове једначине $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, која леже у кругу $|z|=R$, мора бити коначан, јер кад би их било бесконачно много функција $\phi(z)$ била би тада идентички једнака аргументу z. Дакле, низ $\{\phi_n(z)\}$ не конвергира ка одређеној функцији него некој константи. Ако се претпостави да низ $\{\phi_n(z)\}$ у кругу $|z|=R$ може да конвергира у двјема различитим тачкама ка двјема различитим границама, тада низ (II,9) не би био увек монотон, што је немогуће. Ако број чланова у низу (II,9) није стално бесконачан за све тачке z_1 и z_2 које леже у области D_z, која је смјештена у кругу $z=R$, тада је ова функција у овј области мултиваалентна. Ако је број чланова у низу (II,9) стално бесконачно велики за било које двије тачке у области D_z, тада је функција $f(z)$ унивалентна у овој области. Овај се последњи случај мора десити у оној области D_z која садржи атрактивну тачку, тј. тачку $z=a$ којој низ итерација конвергира. Остале фиксне тачке ове функције могу да леже само на рубу

Из горе реченог произлази овај

Став 3.- Ако је функција $W=f(z)$ регуларна у кругу $|z|=R$, ако она није хомографија, и ако јој све вриједности мање за $|z|<R$ у кругу мање $|W|<R$, онда ће низ $\{f_n(z)\}$ њених итерација конвергирати одређеној константи $z=a$, која лежи у кругу $z=R$ или на његовом рубу.

Постоји извјесна област D_z, која се може смјестити у круг, рецимо, врло малог полупречника а која садржи у својој унутрашњости или на рубу тачку $z=a$, у којој је дата функција унивалентна.

Тако на пр. ако се у рационалној функцији (II,8) стави $R=1$, па се потом помножи са $\mu z^q, |\mu|=1$, где је $\mu=const.$, добиће се тада функција Fatou-а [ ] облика

$$R_1(z)=\mu z^q \prod_{p=1}^{n} \frac{z-z_p}{1-\bar{z}_p z},\ |\mu|=1,\ q\geq 1,$$

која чини инваријантним круг $|z|=1$ и има тачку $z=0$ као атрактивну, јер јој низ $\{R_n(z)\}$ њених итерација конвергира униформно ка нули. Све остале фиксне тачке могу да леже на рубу круга $|z|=1$ или ван њега и оне нису атрактивне. Исту ову особину има функција

$$\mu z^q \prod_{p=1}^{\infty} \frac{z-z_p}{1-\bar{z}_p z}\mu_p,\ |\mu|=1,\ \mu_p=-\frac{|z_p|}{z_p}$$

коју је Poincaré [14] искористио у теорији униформизације.

Када је дата у општем случају једна аналитичка трансформација $W = f(z)$ инваријантне тачке ове трансформације се добијају решењем једначине

$$f(z) = z .$$

Ако је $z_0, |z_0| < M$, корен ове једначине и ако је функција $f(z)$ холоморфна у тачки z_0, тада се у околини ове тачке има

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)^2 + \cdots$$

Одавде, кад се стави $z - z_0 = \zeta$ и $f_1(\zeta) = f(\zeta + z_0) - f(z_0)$, добива се овај развој

$$f_1(\zeta) = s\zeta + \cdots \qquad , \quad (s = f'(z_0)).$$

Према томе низ итерација функције $f_1(\zeta)$ гласи

$$f_1(\zeta) = s\zeta + \cdots, \quad f_2(\zeta) = s^2\zeta^2 + \cdots, \quad \cdots,$$
$$f_n(\zeta) = s^n\zeta^n + \cdots, \cdots$$

Ако је $|s| = |f'(z_0)| < 1$, тачка z_0 је атрактивна, али ако је $|s| > 1$, она је репулзивна, али ако је $|s| = 1$, она је индиферентна. Дакле, по овом поступку може се одредити суштина корена горње једначине. Тако ће напр. за функцију (II,10) бити атрактивна тачка $z = 0$, јер је $|s| < 1$. Ако се са $\{R_n(z)\}$ означи низ итерација ове функције тада се функција

$$K(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{R_n(z)}{s^n}, \quad K'(0) = 1,$$

зове функција Koenigs-a [11]

Ако је $|f(z)| \le M$ за $|z| \le R$,тада се према смјени $z=\frac{R}{M}\zeta$ добива функција $\varphi(\zeta)= f(\frac{R}{M}\zeta)$ која је $|\varphi(\zeta)| \le M$ за $|\zeta| \le M$. Према горе реченом ова функција може имати у кругу $|\zeta|=M$ само атрактивну тачку,све остале фиксне тачке леже на рубу овог круга. Због тога једначина $f(z)=z$ може имати само једно решење у кругу $|z|=R$ а сва остала решења леже на рубу овог круга или ван њега.Тачка α може бити у овом случају индиферентна или репулзивна а никако атрактивна.Она може бити атрактивна једино у случају када је $|f(z)|\le R$ за $|z|\le R$.Тако напр. функција $f(z)$, где је $f(0)=0$ и $|f(z)| \le 1$ за $|z| \le 1$,може се развити у Mac-Laurin-ов ред

$$(\text{II},11) \qquad f(z)=\sum_{1}^{\infty} a_n z^n$$

код кога је $|a_1|<1$, јер је тада тачка $z=0$ атрактивна тачка.Ако је $|a_1| \ge 1$,тада тачка $z=0$ није атрактивна,па је према томе и максимална вриједност модула ове функције већа од 1.Обрнуто може се тврдити,ако је функција (II,11) холоморфна у кругу $|z| \le 1$ и ако је $|f(z)| \le 1$ за $|z| \le 1$,тада је $|a_1|<1$, али ако је $|f(z)| \le M$ за $|z| \le 1$,тада је $|a_1| \ge 1$.

2.5.-Уочимо функцију $f(z)$ која једнозначно пресликава полураван $Re\, z>0$ у полураван $Re\, f(z)>0$.Према низу итерација ове функције,тј.према низу $\{f_n(z)\}$,може се формирати овај низ граничних лукова

$$\left\{\frac{|f_n(z_2)-f_n(z_1)|}{\sqrt{Re\, f_n(z_1)\, Re\, f_n(z_2)}}\right\},$$

где је $Re\, z_i>0$, $i=1,2$.Ако је број чланова овог низа у области D_z , $z_i \in D_z$, $i=1,2$,која лежи у полуравнини $Re\, z>0$ у извјесним тачкама коначан,тада је ова функција у овој области мултивалентна.Ако је стално у области D_z број чланова овог низа бесконачно велики тада је ова функција униваленгна у овој области. Сви чланови овог низа међусобно различити сем у случају када је дата функција хомографија.

Према ставу 2 низ (II,12) монотоно опада кад год функција $f(z)$ није хомографија. Због тога он је конвергентан а кад је он конвергентан онда је конвергентан и низ итерација ове функције. Овде као и у предходној тачки очевидно излази да функција $f(z)$ има само једну атрактивну тачку $z=a$ која лежи у полуравнини $Re\,z>0$, јер кад би их било више низ (II,12) не би монотоно опадао. Ако је $z=b$ инваријанта функције $f(z)$, она не може да лежи у полуравнини $Re\,z>0$, јер тада низ (II,12) у ~~њеним~~ тачкама не би монотоно опадао. Дакле, од инваријантних тачака : $a, b, c, \ldots$ функција $f(z)$, које се налазе решењем једначине $f(z)=z$, само једна и то атрактивна може да лежи у полуравнини $Re\,z>0$. Према томе низ $\{f_n(z)\}$ конвергира униформно за $Re\,z>0$ ка тачки $z=a$. Атрактивна тачка ове функције може да лежи и у безконачности. Област униваленције може тада да се смести у сектору $|y|=kx,\ k>0$.

Из горе реченог произлази овај

Став 4.-Ако је функција $f(z)$ регуларна у полуравнини $Re\,z>0$, ако она није хомографија и ако је $Re\,f(z)>0$ за $Re\,z>0$, онда низ итерација ове функције конвергира униформно ка броју a, $Re\,a>0$ или тежи бесконачности.

Постоји извјесна област D_z, која садржи тачку $z=a$, у којој је ова функција униваленгна. Ако је $a=\infty$, онда се област униваленције ове функције протеже почев од $|z|>R$, где је R врло велики број, у сектору $y=kx$, $k>0$, до бесконачности.

У овм ставу садржан је познати став Wolff-a[18] и Denjoy-a [3].

Ако је функција $f(z)$ регуларна у полуравнини и $Im\,z>0$ и ако је $Im\,f(z)>0$ за $Im\,z>0$, тада горе добивене резултате треба пренети из полуравнина $\mathrm{Re}\, z>0$ и $\mathrm{Re}\, f(z)>0$ у полуравнине $\mathrm{Im}\, z>0$ и $\mathrm{Im}\, f(z)>0$.

2.6.-Нека буде функција $w=f(z)$ холоморфна у кругу $|z|=R$ и нека је $|f(z)|\leq M$ за $|z|\leq R$. Ако z опише у кругу $|z|\leq R$ извјесну криву (C), функција $f(z)$ описаће у кругу $|w|\leq M$ њој одговарајућу криву (C_1). Кад се узме у обзир да свакој тачки z_0 на кривој (C) и њој одговарајућој тачки на кривој (C_1) одговара једна тачка у равни Лобачевског (u_0, v_0), то ће овим двјема кривим одговарати у равни Лобачевског крива (A) чија је једначина

$$v=\varphi(u).$$

Према резултатима из тачке 1.3. биће очевидан овај резултат

$$\frac{dv}{du}=\frac{R^2-|z|^2}{M^2-|f(z)|^2}|f'(z)|, \tag{A_1}$$

у коме је изражен неeуклидски извод дате функције $f(z)$ у произвољној тачки z, $|z|<R$.

Ако је функција $f(z)$ холоморфна, рецимо, у полуравнини $\mathrm{Re}\, z>0$, и ако је $\mathrm{Re}\, f(z)>0$ за $\mathrm{Re}\, z>0$, онда према тачки 1.3. неeуклидски извод има ову вриједност

$$\frac{dv}{du}=\frac{\mathrm{Re}\, z}{\mathrm{Re}\, f(z)}|f'(z)|. \tag{A_2}$$

У полуравнини $\mathrm{Im}\, z>0$ и $\mathrm{Im}\, f(z)>0$ за $\mathrm{Im}\, z>0$ имаће се овај неeуклидски извод

$$\frac{dv}{du}=\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Im}\, f(z)}|f'(z)|. \tag{A_3}$$

Из (II,2),(II,5) и (II,6) добијају се под горњим условима ови резултати:

$$(\mathrm{II},13)\quad |f'(z)| \le \frac{R}{M}\cdot\frac{M^2-|f(z)|^2}{R^2-|z|^2},\ |f(z)|\le M \text{ за } |z|\le R.$$

$$(\mathrm{II},14)\quad \begin{cases} |f'(z)| \le \dfrac{\mathrm{Im}\, f(z)}{\mathrm{Im}\, z}, & \mathrm{Im}\, f(z) > 0 \text{ за } \mathrm{Im}\, z > 0, \\ |f'(z)| \le \dfrac{\mathrm{Re}\, f(z)}{\mathrm{Re}\, z}, & \mathrm{Re}\, f(z) > 0 \text{ за } \mathrm{Re}\, z > 0. \end{cases}$$

Из образаца (A_1), (A_2) и (A_3) следује

$$\frac{dv}{du} = |f'(z)| \text{ за } z = a,$$

где је a фиксна тачка функције.Одавде јасно налазим да у фиксној тачки први извод функције $f(z)$ је различит од нуле.

Ако је код израза (II,13) $R = M$,тада функција $f(z)$ има у $|z| = R$ атрактивну тачку.Из овог образца као и (II,14) следује да је први извод функције $f(z)$ у атрактивној тачки различит од нуле а по модулу мањи од један.Како је функција $f(z)$ унивалентна у околини атрактивне тачке,то је први извод ове функције у овој околини различит од нуле.

Ако је тачка $z = Re^{\alpha i}$ фиксна тачка функције $f(z)$, где је $|f(z)| \le R$ за $|z| \le R$,и ако низ тачака $\{z_n\}$ у $|z| \le R$ конвергира ка тачки $Re^{\alpha i}$,тада се према (II,13)има

$$(\mathrm{II},15)\quad \lim_{n\to\infty} |f'(z_n)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{R^2-|f(z_n)|^2}{R^2-|z_n|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{R-|f(z)|}{R-|z|} = k.$$

Одавде ,кад се узме у обзир (II,2) ,проналазим овај резултат

$$(\mathrm{II},16)\quad \frac{|Re^{\alpha i} - f(z)|^2}{R^2-|f(z)|^2} \le \frac{|Re^{\alpha i}-z|^2}{R^2-|z|^2} \lim_{n\to\infty} \frac{R-|f(z_n)|}{R-|z_n|}.$$

Из става 1 и образаца (II,15) и (II,16) произлази овај став Julia [8] и Bieberbach-a [2]

Ако је функција $f(z)$ регуларна у кругу $|z|\leq R$,и ако је $|f(z)|\leq R$ за $|z|\leq R$;тада је

$$\frac{|Re^{\alpha i}-f(z)|^2}{R^2-|f(z)|^2}\leq k\,\frac{|Re^{\alpha i}-z|^2}{R^2-|z|^2},$$

где је број k коначан и има једно од ових вриједности

$$k=\lim_{z_n\to Re^{\alpha i}}\frac{R-|f(z_n)|}{R-|z_n|},\ |z_n|\leq R,$$

$$k=|f'(Re^{\alpha i})|.$$

Ако је тачка $z=Re^{\alpha i}$ атрактивна тачка за функцију $f(z)$, онда се може ставити

$$\{z_n\}\equiv\{f_n(z_0)\},\ |z_0|<R,$$

где је $\{f_n(z)\}$ низ итерација ове функције. Тада ће се очевидно имати

$$k=|f'(Re^{\alpha i})|=\lim_{n\to\infty}\frac{R-|f_n(z_n)|}{R-|z_n|}<1,$$

$$z_n=f(z_{n-1}),\ n=1,2,3,\ldots$$

Даље очевидно произлази у атрактивној тачки овај резултат

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{Re^{\alpha i}-f(z_n)}{Re^{\alpha i}-z_n}\right|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{R-|f(z_n)|}{R-|z_n|},$$

$$z_n\to Re^{\alpha i},\ |z_n|\leq R,\ n=1,2,3,\ldots$$

Из услова (II,15) произлази и овај резултат:

Да би трансформација $f(z)$,где је $f(z)$ регуларна функција у $|z|<R$, $|f(z)|\leq R$ за $|z|\leq R$,била конформна у тачки $z=Re^{\alpha i}$, потребно је и довољно да егзистирају ове границе

$$(\mathrm{II},17) \qquad \lim_{z\to Re^{\alpha i}}|f'(z)|, \quad \lim_{z\to Re^{\alpha i}}\frac{R-|f(z)|}{R-|z|}, \ |z|\leq R,$$

које морају бити једнаке ,коначне и различите од нуле.

Из услова (II,15) следује іако је код израза (II,17) прва граница беконачно велика, онда је и друга граница такође беоконачно велика,али ако је друга граница коначна онда егзистира прва граница и биће тада једнака другој .Детаљнија обавештења о егзистенцији прве границе могу се наћи у књизи: *Mémorial des sciences mathématiques* [13] и [ ].

2.6.1.-Нека функција $W=f(z)$ конформно пресликава полураванину $Re\, z>0$ у полураванину $Re\, f(z)>0$.Тада према (II,14) следује

$$(\mathrm{II},18) \qquad \lim_{Re\, z\to\infty}|f'(z)|\leq \lim_{Re\, z\to\infty}\frac{Re\, f(z)}{Re\, z}, \ (|y|\leq kx, k>0).$$

Ову функцију можемо сматрати као линеарну трансформацију функције $\varphi(z)$, где је $|\varphi(z)|\leq 1$ за $|z|\leq 1$, и

$$\varphi(1)=1.$$

Трансформација облика

$$\mu=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

пресликава круг $|\lambda|=1$ као и круг $|\lambda|=|W|=1$ респективно у полуравнине $Re\,\lambda>0$ и $Re\, W>0$.Према томе и тачка $\zeta=\infty$ биће инваријантна тачка за функцију

$$f(\zeta) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}\ ;\ (\varphi(1)=1).$$

Одавде се добива

$$\lim_{z\to 1}\frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \lim_{z\to 1}\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2} = \lim_{\zeta\to\infty}\frac{Re f(\zeta)}{Re\,\zeta}\cdot\frac{|\zeta|^2}{|f(\zeta)|^2}.$$

Ако је c^2, $c>0$, граница последњег низа ,тада је

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Re f(z)}{Re\,z} = c^2\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z}\right|^2.$$

Отуд израз (II,18) добива овај облик

$$\lim_{x\to\infty}|f'(z)| \le c^2\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^2,\ c>0.$$

Ако се уоче вриједности функције $f(z)$ које леже на правој $Im\, f(z)=const.$,тада се последња неједначина може написати у облику

(II,19) $$\lim_{x\to\infty} f'(z) \le c^2\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^2,\ c>0.$$

Када је у овом обрасцу $c<1$,тада је тачка $z=\infty$,према реченом у претходној тачки,атрактивна,али када је $c\ge 1$, онда је она репулзивна или индиферентна.Према томе ако атрактивна тачка дате функције $f(z)$ лежи у полуравнини $Re\, z>0$, тада тачка $z=\infty$,због $f(\infty)=\infty$,може бити само индиферентна. У овом случају $c=1$.Ако је тачка $z=\infty$ атрактивна за ову функцију,тада је $c<1$.Отуд из оба ова случаја произлази ова неједнакост

$$\lim_{x\to\infty} f'(z) \leq \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^2.$$

Ове границе очевидно егзистирају, јер свака једнозначна функција $f(z)$, која пресликава полураввину $Re\, z>0$ у полуравнину $Re\, f(z)>0$ има у полуравнини $Re\, z>0$ једну атрактивну тачку која може да лежи у самој полуравнини или у бесконачности.

Из горе реченог произлази овај

<u>Став 5 -Ако је функција $f(z)$ холоморфна у полуравнини $Re\, z>0$ и ако је $Re\, f(z)>0$, тада егзистира неједнакост</u>

$$\lim_{x\to\infty} f'(z) \leq \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^2, \ |y|\leq kx, k>0). \tag{II,19}$$

Из овог става произлази да се функција $f(z)$ може написати у облику

$$f(z) = cz + \psi(z), \ c>0,$$

где је

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(z)}{z} = 0.$$

Тако постаје очевидан став Wolff-a [18]:

Ако се уоче оне вриједности дате функције $f(z)$ које леже на правој

$$Im\, f(z) = const.,$$

тада ће се имати

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Re\, f(z)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(z)}{z}.$$

Одавде,кад се узме у обзир (II,18),следује

$$\lim_{x\to\infty} f'(z) \leq \lim_{x\to\infty} \frac{f(z)}{z}.$$

Из ове неједнакости као из става 5 проналази овај резултат за угаони извод функције $f(z)$ у тачки $z=\infty$

$$(\mathrm{II},20) \qquad C = \lim_{x\to\infty} \frac{f(z)}{z} \geq 1.$$

Из горе реченог следује овај резултат:

Ако је угаони извод дате функције $f(z)$,тј. извод (II,20), већи од 1 ,тада је $z=\infty$ атрактивна тачка,али ако је овај извод једнак јединици тада је тачка $z=\infty$ индиферентна . У првом случају,тј.када је $C>1$,дата функција према ставу 4 биће унивалентна у сектору

$$|y| \leq kx,\ k>0,\ \text{за } |z|>R,$$

где је R врло велико .Детаљније о овом случају као и случају $C=1$ може се наћи код Wolff-а [18] и Valiron-а [16].

III ЈЕДАН СПЕЦИЈАЛАН СЛУЧАЈ КОНФОРМНОГ ПРЕТСТАВЉАЊА ОБЛАСТИ ОГРАНИЧЕНЕ СА ЛУКОВИМА КРУГОВА

3.1.-У чланку аутора [10] је показато да ред

$$(\mathrm{III},1) \qquad \sum (1-e^{-a_n})\, th\, b_n,\ (a_n, b_n > 0),$$

конвергира ако је

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{S_{n-1}} Ak b_n < M\,,\quad S_n=\sum_1^n a_m .$$

Одавде очевидно произлази да према уолову

(III,2) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{S_{n-1}} b_n < M$$

конвергира не само ред (III,1) него и ред

(III,3) $$\sum a_n b_n\,,\quad (a_n, b_n>0).$$

Израз (III,2) одређује поступак за одређивање конвергенције реда (III,3). Овај поступак изгледа тривијалан, јер не обухвата случај

$$e^{S_{n-1}} b_n \to \infty\,,\ n\to\infty$$

Ригурозност овог поступка се манифестује кад се дати ред напише у облику

(III,4) $$\sum a_n b_n \equiv \sum \frac{a_n}{c_n}\cdot b_n c_n\,,\quad c_n>0 .$$

Овај ред према горњем поступку конвергира ако је

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, e^{S_n'} b_n c_n < M,\quad S_n'=\sum_1^n \frac{a_m}{c_m} .$$

Ако не би егзистирао низ $\{c_n\}$, који би овај услов задовољавао, тада дати ред дивергира.

Уочимо напр. ред

$$\sum \frac{1}{n^{1+\alpha}} .$$

Услов (III,2) за $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ је задовољен када је $\alpha \geq 2$. Међутим кад се овај ред напише у облику (III,4) и стави $c_n = \frac{1}{c}$, $n=1,2,3,\ldots$,тада је услов (III,5) задовољен за $0 < c \leq \alpha$, али није задовољен за $\alpha \leq 0$.Познато је да овај ред конвергира у првом случају а дивергира у другом.

Израз (III,5) је задовољен за $c_n = |z|^{-n}$, $z = \varrho e^{\theta i}$,када је

$$b_n = O(|z|^n), n \to \infty, |z| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}},$$

$$(\text{III}, 6) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{S_n} < M.$$

Док услов (III,2) даје низу $\{S_n\}$ знатно ограничење, дотле слиједећа лема даје му знатно проширење.

<u>Лема</u> - <u>Ако је</u>

$$S_{n,i}^\lambda S_{n,i-1} \cdots S_{n,1} S_n b_n = O(1), n \to \infty,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{S_n} < M,$$

<u>где је</u>

$$S_{n,1} = \sum_1^n \frac{a_m}{S_m}, \ S_{n,2} = \sum_1^n \frac{a_m}{S_{m,1} S_m}, \ldots, S_{n,i} = \sum_1^n \frac{a_m}{S_{m,i-1} \cdots S_{m,1} S_m}, \ldots,$$

<u>тада ред (III,3)конвергира за $\lambda > 1$ а дивергира за $\lambda \leq 1$</u>.

Овај став произлази из услова (III,6) као и става Abel [1]-Dini-a [4]:

<u>Ако ред</u> $\sum a_n$, $a_n > 0$, <u>дивергира,ред</u>

$$\sum \frac{a_n}{S_n^\lambda}$$

<u>конвергира за $\lambda > 1$ а дивергира за</u> $\lambda \leq 1$.

Према овом ставу ред

$$\sum \frac{a_n}{S_{n,i}^{\lambda} S_{n,i-1} \cdots S_{n,1} S_n}$$

конвергира за $\lambda > 1$, а дивергира за $\lambda \leq 1$. Због тога је израз (III,5) задовољен за

$$c_n = S_{n,i}^{\lambda} S_{n,i-1} \cdots S_{n,1} S_n$$

када је у изразу (III,7) $\lambda > 1$, али ако је у изразу (III,7) $\lambda \leq 1$, тада израз (III,5) није задовољен. У првом случају дати ред конвергира а у другом дивергира, што је требало доказати.

3.2.-Код реда (III,1) израз e^{-a_n} преставља однос два гранична лука, који се, као што је речено у I глави, може написати као дворазмјера четири тачке у комплексној равни. Према томе, ако се у равни z уочи низ тачака $\{z_n\}$, где је

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \alpha,$$

тада се према реду (III,3) може формирати овај ред

$$\sum b_n \lg |(z \alpha z_n z_{n+1})|, \quad |(z \alpha z_n z_{n+1})| > 1,$$

где је

$$(z \alpha z_n z_{n+1}) = \frac{z - z_n}{z - z_{n+1}} : \frac{\alpha - z_n}{\alpha - z_{n+1}}.$$

Ако је овај ред конвергентан у тачки $z = z_0$ и ако се означи $b_n = sh\,r_n,\ r_n > 0$, тада израз $\lg|(z_0 \alpha z_n z_{n+1})|$ означава растојање између коаксијалних граничних лукова: $sh\,r_n$ и $sh\,r_{n+1}$. У овом случају дати ред преставља геометриски површину сектора неког граничног лука.

Предпоставимо ли се да су чланови низа $\{z_n\}$ распоређеђени на рубу једног круга или на једној правој,тада егзистира лук $\widehat{z'z''}$ овог круга,односно сегмент $\overline{z'z''}$ ове праве на коме се има

$$|(z\alpha z_n z_{n+1})| = (z\alpha z_n z_{n+1}),\ n = 1,2,3,\ldots$$

Тада ће функција

$$(\text{III},8) \qquad f(z) = \sum b_n \lg(z\alpha z_n z_{n+1}),\ b_n = c_n + d_n i,$$

бити реална за $d_n = 0$ и за z које лежи на уоченом луку односно полуправој.Овај ред у тачкама које леже,рецимо,на датом луку $\widehat{z'z''}$,конвергира према леми ако је задовољен услов

$$(\text{III},9) \qquad \begin{cases} \left[\lg \prod_1^n |(z\alpha z_m z_{m+1})|\right]^{\lambda} |b_n| = O(1),\ n\to\infty,\ \lambda > 1, \\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\lg \prod_1^n |(z\alpha z_m z_{m+1})|} < M,\ |z\alpha z_n z_{n+1}| > 1, \end{cases}$$

за овако z на луку. $\widehat{z'z''}$.Ако z лежи ван лука $\widehat{z'z''}$,онда се може формулисати овај

<u>Став 6.- Ако су чланови конвергентног низа</u> $\{z_n\}$, $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$, <u>поређани на рубу круга C тако да је $(z\alpha z_n z_{n+1}) > 1$, ако је у области D_z задовољен услов (III,9) и ако је у њој ред</u>

$$\sum b_n \arg(z\alpha z_n z_{n+1})$$

<u>конвергентан,тада ред (III,8) униформно конвергира у области D_z и добива реалну вриједност за $\mathrm{Im}\, b_n = 0,\ n = 1,2,3,\ldots,$ и за z које лежи на луку $\widehat{z'z''}$ круга C</u>

Нека трансформација

$$\mu = \frac{az+b}{cz+d}$$

пресликава област D_z у област $D_{z,1}$. Тада овој области одговара ред који у њој униформно конвергира. Уочимо у општем случају p таквих трансформација које пресликавају област D_z у области : $D_{z,1}, \ldots, D_{z,p}$. У њима одговарајући редови $f_i(z), i=1,2,3,\ldots,p$ конвергирају униформно. Ове се трансформације могу изабрати тако да је област D_z' заједничка свим областима: $D_z, D_{z,1}, \ldots, D_{z,p}$. У овој области нека буде уписан ~~је~~ један такав криволиниски многоугао G_z са $p+1$ тјеменом која леже на рубу области D_z', да ред

$$F(z) = \sum_0^p f_i(z),$$

$$f_0(z) = f(z), \quad f_1(z) = \sum b_{n,1} \lg(\mu\, d_1 \mu_n \mu_{nn}), \ldots,$$

униформно конвергира у области G_z и на његовом рубу добива за $\mathrm{Im}\, b_{n,i} = 0, i=0,1,2,\ldots,$ реалну вриједност. Темена овако добивеног криволинијског многоугла, пошто леже на рубу области D_z', могу бити сингуларне тачке ове функције.

На горе изложен начин може се формирати функција $F(z)$ која дату област G_z, која је ограничена луковима кругова или сегментима правих, пресликава једнозначно у полураванину $\mathrm{Im}\, F(z) > 0$. Инверзна функција ове фучкције пресликава једнозначно полураванину $\mathrm{Im}\, F(z) > 0$ у област G_z, а њену реалну осу у руб ове области. Ако z пређе руб датог многоугла, онда ће функција прећи у полураванину $\mathrm{Im}\, F(z) < 0$.

Горе наведене функције спадају у општу категорију аутоморфних функција које је открио и изучавао Poincaré [14].

Ако се узме извод функције (III,8) онда ће се добити ред

$$\varphi(z) = f'(z) = \sum \frac{b_n(z_{n+1}-z_n)}{(z-z_n)(z-z_{n+1})},$$

који ће униформно конвергирати у оној области $\mathcal{E}_z$ у којој је према наведеној леми униформно испуњен услов

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |b_n(z_{n+1}-z_n| \left[\sum_1^n \left|\frac{1}{(z-z_m(z-z_{m+1})}\right|\right]^\lambda < M, \ \lambda > 1,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sum_1^n \left|\frac{1}{(z-z_n)(z-z_{n+1})}\right|} < M.$$

Дакле, функција $\varphi(z)$ конформно пресликава ону област H_z, која је заједничка области D_z и $\mathcal{E}_z$. Према томе може се формирати таква функција $F(z)$ која ће конформно пресликати дати криволинисни многоугао у област $\mathrm{Im}\, F(z) > 0$.

Ред $\varphi(z)$ може се довести у општем случају на облик

$$\Theta(\zeta) = \sum \frac{b_n}{(r_n\zeta+s_n)^2}, \ \zeta = x+yi,$$

где је

$$\frac{d}{d\zeta}T_n = \left(\frac{p_n\zeta+q_n}{r_n\zeta+s_n}\right)' = \frac{1}{(r_n\zeta+s_n)^2}, \ n=1,2,3,\dots,$$

када се над сваким чланом реда $\varphi(z)$ изврши одговарајућа трансформација облика

$$z = \alpha_n\zeta+\beta_n.$$

Ако је $\mathcal{E}_\zeta$ она област која се садржи у свим областима $\mathcal{E}_{\zeta,1}$, $\mathcal{E}_{\zeta,2}, \dots, \mathcal{E}_{\zeta,n}, \dots$, које су трансформати функције $z = \alpha_n\zeta+\beta_n$, онда ће ред $\Theta(\zeta)$ униформно конвергирати у овој области.

Функција $\Theta(\zeta)$ биће Тета-функција ако супституције (ζ, T_n) чине групу аутоморфних супституција које чине инваријантно област $\mathcal{E}_\zeta'$, која садржи област $\mathcal{E}_\zeta$.

IV ФУНКЦИЈЕ КОЈЕ СУ ДЕФИНИСАНЕ Taylor-ОВИМ ИЛИ Dirichlet-ОВИМ РЕДОМ

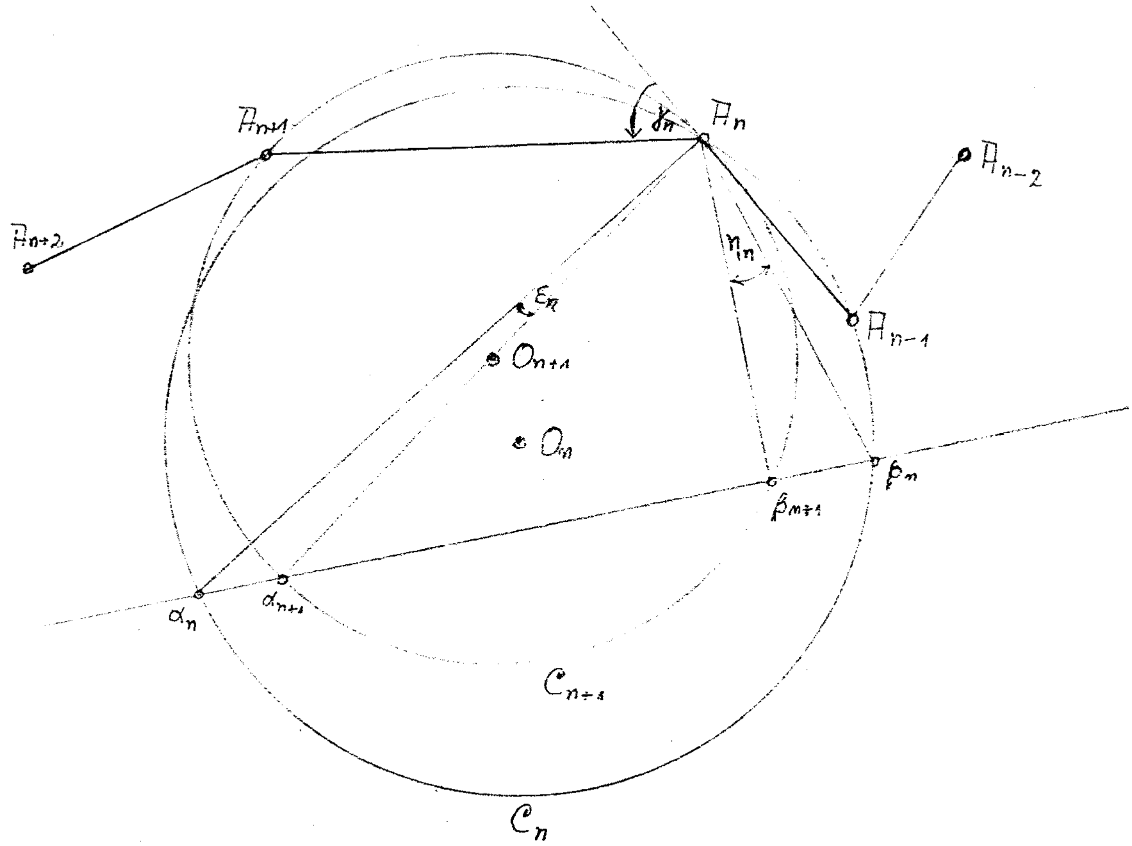
4.1.- Уочимо у комплексној равни оријентисану полигоналну линију $A_0 A_1 A_2 \ldots$ и праву $y = mx + n$. Овој полигоналној линији одговара ред

$$\sum d_n e^{\varphi_n i},$$

где је

$$\overline{A_n A_{n+1}} = d_n, \ \gamma_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Око стране $\overline{A_n A_{n+1}}$, $n=0,1,2,\ldots$, описаћемо круг C_n, $n=0,1,2,\ldots$, тако да он сијече дату праву у тачкама α_n и β_n, $n=0,1,2,\ldots$



Према слици добива се овај резултат

$$(\text{IV},2)\qquad \gamma_n = \frac{\theta_{n-1}+\theta_n}{2} + \varepsilon_n - \eta_n ,$$

јер је

$$\gamma_n = \pi - (\sphericalangle A_{n-1}A_n\alpha_n + \sphericalangle \alpha_{n+1}A_nA_{n+1} - \varepsilon_n),$$

где је

$$\sphericalangle A_{n-1}A_n\alpha_n = \pi - \left(\frac{\theta_{n-1}+\theta_n}{2} - \eta_n + \sphericalangle \alpha_{n+1}\beta_{n+1}A_{n+1}\right),$$

$$\sphericalangle \alpha_{n+1}A_nA_{n+1} = \sphericalangle \alpha_{n+1}\beta_{n+1}A_{n+1}$$

У горњем обрасцу θ_n означава угао пот којим се дуж $\overline{A_nA_{n+1}}$ види из центра круга C_{n+1}. Лако се увјерити да горњи образац добива облик

$$(\text{IV},2a)\qquad \gamma_n = \frac{\theta_{n-1}+\theta_n}{2} + \eta_n - \varepsilon_n ,$$

кад тачке α_{n+1} и β_{n+1} леже ван дужи $\overline{\alpha_n\beta_n}$. Ако једна од тачака α_{n+1} или β_{n+1} лежи само на дужи $\overline{\alpha_n\beta_n}$, тада се има овај образац

$$(\text{IV},2b)\qquad \gamma_n = \frac{\theta_{n-1}+\theta_n}{2} \pm (\varepsilon_n+\eta_n) .$$

4.2. -Познато је да атрактивну тачку могу имати хиперболичне, семихиперболичне, локсодромичне и параболичне трансформације. Од ових трансформација само локсодромичне не чине инваријантним руб оног круга који пролази кроз њине фиксне тачке. Означимо са H скуп трансформација: хиперболичних, семихиперболичних и параболичних које чине инваријантним сваки круг који пролази кроз њине фиксне тачке.

Нека буду тачке α_n и β_n, које леже на датој правој $y = mx+n$, фиксне тачке неке од трансформација из скупа H од којих је, рецимо, α_n атрактивна тачка. Трансформација

$$(\mathrm{IV},3) \qquad \mu_{n+1} = \frac{a_n \mu_n + b_n}{c_n \mu_n + d_n}, \; n=1,2,3,\ldots,$$

преводи тачку A_n чији је афикс μ_n, у тачку A_{n+1} са афиксом μ_{n+1}. На овај начин може се свакој полигоналној линији придружити не само низ кругова него и низ трансформација облика (IV,3).

Познато је да је свака билинеарна трансформација одређена кад су јој познате фиксне тачке и мултипликатор. Према томе ако су тачке α_n и β_n фиксне тачке трансформација (IV,3) са одговарајућим мултипликатором из низа $\{k_n\}$, чији су чланови подешени тако да атрактивне тачке припадају или низу $\{\alpha_n\}$ или низу $\{\beta_n\}$, тада се може једнозначно формирати полигонална линија $A_0A_1A_2\ldots$ чије су стране

$$A_nA_{n+1} = \mu_{n+1} - \mu_n, \; n=1,2,3,\ldots,$$

где је $|\mu_{n+1} - \mu_n| = d_n$.

Дакле, сваки ред облика (IV,1) може се сматрати да је постао на горе изложен начин. Ако је

$$\gamma_{n+1} = \varphi_{n+1} - \varphi_n < \pi, \; n=1,2,3,\ldots,$$

тада су атрактивне тачке горњег низа трансформација стално тачке из низа $\{\alpha_n\}$, али ако је ова разлика стално негативна и $|\varphi_{n+1} - \varphi_n| < \pi$, онда су атрактивне тачке из низа $\{\beta_n\}$.
Ако је

$$0 < \varphi_{n+1} - \varphi_n < 2\pi,$$

тада су атрактивне тачке низа (IV,3) припадају час низу $\{\alpha_n\}$, а час низу $\{\beta_n\}$.

Ред облика (IV,1), који је настао на горе изложен начин, конвергира ако је

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n$$

он не конвергира али је ограничне ако је

$$|\alpha| = \lim_{n\to\infty} |\alpha_n| \neq |\beta| = \lim_{n\to\infty} |\beta_n| \ , \quad (|\alpha|, |\beta| < M),$$

тежи бесконачности ако је

$$\beta_n \to \infty \ , n \to \infty$$

Ако су чланови низова $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ распоређени на датој правој по слједећем поступку

$$(\mathrm{IV},4) \qquad \begin{cases} |\alpha_0| \leq |\alpha_1| \leq \cdots \leq |\alpha_n| \leq \cdots , \\ |\beta_0| \geq |\beta_1| \geq \cdots \geq |\beta_n| \geq \cdots , \\ \qquad |\alpha_n| < |\beta_n| \ , n = 0,1,2,\ldots ; \end{cases}$$

тада је угао γ_n дат једино образцем (IV,2),или образцем (IV,2а). Обрнуто,ако је $\gamma_n = \frac{\theta_{n-1}+\theta_n}{2}$, $n=1,2,\ldots$, или ако је $\gamma_n = \theta$, $n=1,2,3,\ldots$ тада чланови низа $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ задовољавају једино ове услове.

4.2.1.- Нека буде $\{C_n\}$ низ свију кругова који одговарају датој полигоналној линији а који пролазе респективно кроз фиксне тачке α_n и β_n, које задовољавају услов (IV,4).Тада њихов центар лежи у тачки

$$O_{n-1} = \beta_{n-1} + i\,\frac{(\beta_n - \beta_{n-1})\exp\left(\frac{\theta_n i}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta_n}{2}} \ , n = 1,2,3,\ldots$$

Низ полупречника ових кругова ,тј. низ

$$r_n = \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{2\sin\frac{\theta_n}{2}} \ , \quad n = 0,1,2,\ldots ,$$

биће монотон кад год је испуњен услов (IV,4).

Ова тврдња може се доказати на слједећи начин.Из једначина

$$r_n = \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{2\sin\frac{\theta_n}{2}} = \frac{|\alpha_n-\beta_n|}{\sin\frac{\omega_n}{2}}, \; n=0,1,2,\dots,$$

где је $\frac{\omega_n}{2} = \sphericalangle \beta_n A_n \alpha_n$,добивају се,кад се узме у обзир једначина

$$\omega_n = \omega_{n+1} + \varepsilon_n + \eta_n = \omega_{n+1} + \delta_n,$$

која је према слици очевидна , ове

$$|\alpha_n-\beta_n| = \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{\sin\frac{\theta_n}{2}}\sin\frac{\omega_n}{2} = \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{\sin\frac{\theta_n}{2}}\sin\frac{\omega_{n+1}+\delta_n}{2} =$$

$$= \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{\sin\frac{\theta_n}{2}}\left(K_n\sin\frac{\omega_{n+1}}{2} + \sqrt{1-K_n^2}\cos\frac{\omega_{n+1}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}\sin\frac{\theta_n}{2}}\left[K_n|\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}|\sin\frac{\theta_{n+1}}{2} + \sqrt{1-K_n^2}\sqrt{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}^2 - |\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}|^2\sin^2\frac{\theta_{n+1}}{2}}\right],$$

где је

$$K_n = \cos\delta_n = \cos(\varepsilon_n+\eta_n).$$

Одавде даље следује,кад се узме у обзир претпоставка (IV,4),ова неједнакост

$$\left(\overline{A_{n+1}A_{n+2}}\sin\frac{\theta_n}{2} - K_n\overline{A_n A_{n+1}}\sin\frac{\theta_{n+1}}{2}\right)|\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}| \leq$$

$$\leq \sqrt{1-K_n^2}\;\overline{A_n A_{n+1}}\sqrt{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}^2 - |\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}|^2\sin\frac{\theta_{n+1}}{2}}.$$

Одавде ,ако је

(IV,6
$$\frac{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}}{\overline{A_n A_{n+1}}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta_n}{2}}{\sin\frac{\theta_{n+1}}{2}} = \frac{r_{n+1}}{r_n} \leq K_n \leq 1, \; n=1,2,3,\dots,$$

следује ова неједнакост

$$|\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}| \le \frac{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}\sqrt{1-K_n^2}}{\sin\frac{\theta_{n+1}}{2}\sqrt{1-2K_n\frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta_n}{2}}{\sin\frac{\theta_{n+1}}{2}}+\frac{\overline{A_nA_{n+1}}^2}{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\theta_n}{2}}{\sin^2\frac{\theta_{n+1}}{2}}}} \le 2r_{n+1}$$

Ова ће неједнакост бити задовољена ако је

$$\sqrt{1-K_n^2} \le \sqrt{1-2K_n\frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta_n}{2}}{\sin\frac{\theta_{n+1}}{2}}+\frac{\overline{A_nA_{n+1}}^2}{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\theta_n}{2}}{\sin^2\frac{\theta_{n+1}}{2}}}\ ,$$

тј. ако је

$$(\mathrm{IV},7)\qquad K_n \le \frac{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}}{\overline{A_nA_{n+1}}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta_n}{2}}{\sin\frac{\theta_{n+1}}{2}} = \frac{r_{n+1}}{r_n}\ ,$$

или ако је испуњен услов (IV,6).

Неједнакост (IV,6)показује да низ $\{r_n\}$ монотоно опада,док неједнакост (IV,7) показује да он монотоно расте.Овај ће последњи случај наступити када се у изразу (IV,4) промјени смисао знака неједнакости.Овим је наша горња тврдња доказата.

У услову (IV,6) садржан је потребан али не и довољан услов да би низови $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ задовољавали услов (IV,4).У услову (IV,6) биће садржани довољни услови када је

$$(\mathrm{IV},8)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}}{\overline{A_nA_{n+1}}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta_n}{2}}{\sin\frac{\theta_{n+1}}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n} = \lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon_n)=1,\ (\varepsilon_n>0),$$

односно када је

$$\lim\frac{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}}{\overline{A_nA_{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon_n)=1,\ \lim\frac{\sin\frac{\theta_n}{2}}{\sin\frac{\theta_{n+1}}{2}} = \lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon_n')=1,$$
$$(\varepsilon_n,\varepsilon_n'>0).$$

Ако је у услову (IV,8)

$$\overline{A_nA_{n+1}} = \overline{A_{n+1}A_{n+2}} = A = const.,\ n=0,1,2,\dots,$$

тада низ $\{\theta_n\}$ због услова (IV,6) мора бити монотоно растући низ.

Исто тако биће и низ страна полигоналне линије $\{\overline{A_n A_{n+1}}\}$ ~~тј. низ~~ монотоно опадајући низ када је $\theta_n = \theta_{n+1} = \theta$, $n=1,2,3,\ldots$ Према томе горњи услов биће задовољен када низ $\{\overline{A_n A_{n+1}}\}$ задовољава услове

$$\overline{A_0A_1} \geq \overline{A_1A_2} \geq \ldots$$

а низ $\{\theta_n\}$ услове

$$0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \ldots < \pi .$$

Ако низ $\{\gamma_n\}$ монотоно расте и ако је

$$\frac{\theta_{n-1}+\theta_n}{2} = \gamma_n < \pi , \quad n=1,2,\ldots ,$$

тада се услов (IV,8) може написати у облику

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}}{\overline{A_n A_{n+1}}} = 1 .$$

Низ асоцираних кругова $\{C_n\}$ из чијег се центра O_n види дуж $\overline{A_n A_{n+1}}$ под углом $\theta_n < \frac{\pi}{2}$ биће идентичан низу кругова који су горе наведени једино у случају када је $\varepsilon_n = \eta_n$, $n=1,2,3,\ldots$ Они ће сјечи тада одређену праву у тачкама α_n и β_n, $n=0,1,2,\ldots$, које ће задовољавати услов (IV,4). За монотонију ових кругова потребан је поред услова монотоније страна $\overline{A_n A_{n+1}}$, $n=0,1,2,\ldots$, и услов [15]

$$(\text{IV},9) \qquad \begin{cases} \gamma_n - 2\gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} > 0 , & n=4,5,\ldots , \\ \gamma_2 - \theta_1 > 0 , \quad \gamma_3 - 2\gamma_2 + \theta_1 > 0 . \end{cases}$$

Уопштен случај када је

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n < \ldots < 2\pi ,$$

тада се датој полигоналној линији може на горе изложен начин асоцирати низ кругова чији полупречници чине један низ који монотоно опада или монотоно расте. Она се тада може смјестити, када је низ $\{z_n\}$ монотоно опадајући, у круг чији се полупречник може у извесним случајевима одредити. Тако напр. низу

$$\sum_{1}^{n} e^{2\pi \lambda_n i},$$

$$0 < \theta' < \lambda_2-\lambda_1 < \lambda_3-\lambda_2 < \ldots < \lambda_n-\lambda_{n-1} < \theta'' < 1,$$

одговара полигонална линија која се може смјестити у круг полупречника [9]

$$R = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta'}{2} + \operatorname{tg}\frac{\theta''}{2}\right).$$

Ако је

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} k_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \cos(\varepsilon_n+\eta_n) = l < 1,$$

тада је

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\overline{A_{n+1}A_{n+2}}}{\overline{A_nA_{n+1}}} \cdot \frac{\sin\frac{\theta_n}{2}}{\sin\frac{\theta_{n+1}}{2}} \leq l < 1.$$

У овом случају чланови низова $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ не задовољавају увјек услов (IV,4). Али ако је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_nA_{n+1}}{\sin\frac{\theta_n}{2}} = 0,$$

тада је $\lim(\alpha_n-\beta_n)=0$.

4.2.-Уочимо Taylor-ов ред

$$(\text{IV}, 10) \qquad f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_0 \neq 0;$$

који конвергира у кругу $|z| \leq 1$. Свакој тачки $z = z_0$, у којој овај ред униформно конвергира, одговара нека полигонална линија $A_0A_1A_2\ldots$ Тачка

$$f(z_0) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n$$

лежи у овом случају на правој $y = mx$.Према томе ће трансформација

$$\mu_1 = \frac{p_1\lambda + q_1}{r_1\lambda + s_1},$$

која има за фиксне тачке 0 и β_0 ,где β_0 лежи на правој $y = m_1x$, преносиши тачку $\lambda = a_0$ у тачку $\mu_1 = a_0 + a_1 e^{\theta i}$.Наставили се овај поступак даље добива се тако трансформација облика (IV,3) чије двојне тачке леже на правој $y = mx$ која тачку

$$\lambda = \sum_0^{n-1} a_m e^{m\theta i}$$

пресликава у тачку

$$\mu_n = \sum_0^{n} a_m e^{m\theta i}$$

Ако тачка $\lambda = a_0$ не лежи на правој $y = mx$, онда се неће наћи ни једна од тачака $\mu_n,\ n=1,2,3,\dots$, која ће лежати на овој правој.Јер кад би ова тачка лежала на датој правој,права би тада била инваријантна за ову функцију.

Из горе реченог произлази овај закључак:

Ако функција (IV,10) униформно конвергира у кругу,ако она не чини инваријантном ни-једну праву облика ~~xxxxxxx~~ $y = mx$, и ако је

$$0 < \arg a_n z^n - \arg a_{n-1} z^{n-1} < 2\pi,\ n=1,2,3,\dots,$$

тада је аргумент свију нула полинома

$$S_n = \sum_0^{n} a_m z^m$$

које се налазе у кругу увјек различит од аргумента функције

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n$$

4.3.1.- Резултате из тачке 4.2.1. лако је пријенети на Dirichlet-ов ред

$$(IV,11) \qquad f(s) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = x+yi,$$

$$(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

Тако напр, ако је

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})C} = 1, \quad \left(C = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lg|a_n|}{\lambda_n}\right),$$

и ако је

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < 2\pi,$$

где је

$$\gamma_n = \arg a_{n-1} e^{-\lambda_{n-1} s} - \arg a_n e^{-\lambda_n s},$$

тада је потребно али није довољно да функција $f(s)$ нема нула у размаку

$$0 < y \leq \lim \frac{2\pi - (\arg a_{n-1} - \arg a_n)}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}.$$

Овај ред униформно конвергира на сегменту

$$0 < y < \lim \frac{\pi - (\arg a_{n-1} - \arg a_n)}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$$

који лежи на апсциси конвергенције $X = C$, када је низ $\{a_n e^{-\lambda_n C}\}$ монотон нула - низ, а низ γ_n монотоно расте и задовољава услов (IV,9). У овом размаку функција $f(s)$ нема нула.

Одавде за Taylor-ов ред произлази овај резултат М. Томића :

Taylor-ов ред (IV,10), где модули његових коефицијената образују један монотон -нула -низ,а њихови аргументи су троструко монотони,тј. задовољавају услов (IV,9),је униформно конвергентан и нема нула у интервалу

$$0 < \theta < \pi - \lim_{n\to\infty} (\arg a_n - \arg a_{n-1}).$$

Ако је низ $\{\gamma_n\}$ конвергентан ,тада ће у изразима (IV,2), (IV,2а) и (IV,2б) конвергирати и низови $\{\theta_n\}$ и $\{\delta_n\} \equiv \{\pm(\varepsilon \mp \eta_n)\}$. Због тога је

$$\lim \frac{\theta_n}{2} = \lim \frac{\gamma_n - \delta_n}{2}.$$

Тада ће се за полигоналну линију која одговара реду (IV,11) имати у тачки $s_0 = c + y_0 i$, где је c апсциса апсолутне конвергенције овог реда,овај резултат

$$2 \lim_{n\to\infty} r_n = \lim \frac{|a_n| e^{-\lambda_n c}}{\sin \frac{\theta_n}{2}},$$

где је r_n полупречник круга C_n који је на горе изложен начин асоциран страни $|a_n|$.Ако је низ $\{\gamma_n\}$ конвергентан и задовољава услов

$$0 < \gamma_n \leq l < 2\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

тада ће се очевидно имати

$$2 \lim_{n\to\infty} r_n = \lim \frac{|a_n| e^{-\lambda_n c}}{\sin \frac{\gamma_n - \delta_n}{2}} \leq \lim \frac{|a_n| e^{-\lambda_n c}}{\sin \frac{\gamma_n - \varepsilon}{2}},$$

где је $\varepsilon = \lim |\delta_n| \geq 0$.Према томе дати ред у уоченој тачки конвергира ако $r_n \to 0, n \to \infty$.Дакле,ако је низ

$$\{a_n e^{-\lambda_n c}\}$$

нула-низ,тада дати ред униформно конвергира у свакој тачки у којој је $\gamma_n \neq \varepsilon, n \to \infty$.Како је за овај ред $\gamma_n = (\lambda_n - \lambda_{n-1}) y + \varphi_n$, где је $\varphi_n = \arg a_{n+1} - \arg a_n$, то ће бити

$$y < \frac{2\pi - \varphi}{g},$$

где је

$$g = \lim_{n\to\infty}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n}, \quad \varphi = \lim_{n\to\infty}\varphi_n .$$

Према горе изложеном може се формулисати овај

<u>Став 7.-Ако је</u>

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)} = 1,$$

$$g = \lim_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n), \quad \varphi = \lim_{n\to\infty}(\arg a_{n+1} - \arg a_n),$$

<u>тада је ред (IV,11) на сегменту</u>

$$0 < \operatorname{Im} s < \frac{2\pi - \varphi}{g},$$

<u>који лежи на апсциси конвергенције</u> $x = C$, <u>униформно конвергентан када је</u>

$$|a_n| e^{-\lambda_n C} = o(1), \; n\to\infty,$$

<u>а униформно је ограничен када је</u>

$$|a_n| e^{-\lambda_n C} = O(1), \; n\to\infty .$$

<u>Тачка</u> $x = C + \exp\left(i\,\frac{2\pi-\varphi}{g}\right)$ <u>јесте сингуларна тачка.</u>

Ако се пренесе горње резоновање на ред (IV,10) тада се добива овај

<u>Став 8.-Ако је</u>

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha, \quad (|\alpha| = 1),$$

тада ред

$$\sum a_n z^n$$

униформно конвергира у свим тачкама на рубу конвергенције сем у тачки α када је

$$a_n = o(1),\ n \to \infty,$$

или је у свим тачкама униформно ограничен сем у тачки α када је

$$a_n = O(1),\ n \to \infty.$$

Тачка α јесте сингуларна тачка.

Из овог става произлази став Fatou-a

4.3.2.-Ако низ $\{\gamma_n\}$ има p тачака нагомилавања и то : $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$. Уочимо парцијалан низ $\gamma_{n_{m,k}}, m=1,2,3,\dots$, који има једну тачку нагомилавања и то ξ_k. Тада се може писати

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{n_{m,k}}}{2} = \lim \frac{\gamma_{n_{m,k}} - \delta_{n_{m,k}}}{2},$$

где је

$$\delta_{n_{m,k}} = \pm\left(\varepsilon_{n_{m,k}} \mp \eta_{n_{m,k}}\right).$$

Ако је

$$\lim \frac{a_{n_{m,k}}}{a_{n_{m+1,k}}} = e^{\xi_k i},\ k=1,2,3,\dots p,$$

тада ред

$$\sum a_{n_{m,k}} z^{n_m}$$

конвергира у свим тачкама на рубу конвергенције или је у овим тачкама ограничен сем у тачки $e^{\xi_k i}$. Према томе дати Taylor-ов ред има на рубу конвергенције p сингуларних тачака.

Из горе реченог произлази овај резултат:

ако низ

$$\left\{ \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\}$$

има p тачака нагомилавања које леже на кругу $|z| = 1$, тадаће дати ред униформно конвергирати у кругу $|z| \leq 1$ и имаће на његовом рубу p сингуларних тачака.

Ако је у овом случају испуњен и овај услов

$$a_n = O(1),\ n \to \infty,$$

тада је наш ред на рубу конвергенције $|z| = 1$ по апсолутној вриједности ограничен у свим тачкама сем у сингуларним тачкама у којима постаје бесконачан. Ове ће тачке бити у општем случају полови збира овог реда када је према Hadamard-ову ставу [5]:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{n+p-1} \\ \vdots & & & \\ a_{n+p-1} & a_{n+p} & \ldots & a_{n+2p-2} \end{vmatrix}^{\frac{1}{n}} = 1.$$

4.4.-Нека буде функција $f(z)$ дефинисана овим Taylor-овим редом

$$(\mathrm{IV}, 12) \qquad f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

који је конвергентан у кругу $|z|=1$. Тачка $z=0$ јесте фиксна тачка ове функције. Трансформација

$$\zeta = Mz ,$$

где је

$$|f(z)| \leq M \text{ за } |z| \leq 1 ,$$

пресликава круг $|z|=1$ у круг $|\zeta|=M$. Према томе функција $f(z)=f(\frac{\zeta}{M})=\varphi(\zeta)$ пресликава круг $|\zeta| \leq M$ у област D која се може смјестити у круг $|W| \leq M$. Тачка $\zeta=0$ јесте сада атрактивна тачка за ову функцију. Према ставу 3 постоји извјесна област δ која обухвата тачку $\zeta=0$ у којој је функција $\varphi(\zeta)$ унивалентна. Остале фиксне тачке ове функције леже на рубу круга $|\zeta|=M$.

Из горе реченог излази да је функција $f(z)$ унивалентна у извесној области која садржи тачку $z=0$, да она има бар једну атрактивну тачку која лежи на рубу круга $|z|=1$. Према томе она је у извесној области δ_1, која лежи у кругу $|z|=1$, а која садржи ову атрактивну тачку, унивалентна. Полупречник круга униваленције ове функције са центром у тачки $z=0$ одређује се слједећим ставом [ ] и [ ]:

Ако је функција (IV,12) холоморфна за $|z| \leq 1$ и ако је $|f(z)| \leq M$ за $|z| \leq 1$, тада је $f(z)$ унивалентна функција у кругу

$$|z| \leq M - \sqrt{M^2-1} , \qquad (IV,13)$$

где је једнакост достигнута функцијом

$$f(z) = \frac{Mz(1-Mz)}{M-z} .$$

Нека буде

$$|f(z)| < M \text{ за } |z| < 1.$$

Према реченом ова је функција унивалентна у извесном кругу који је описан око координатног почетка и то, рецимо, у кругу $|z|<\varrho$, $\varrho<\varrho_1<1$. Нека на самом кругу $|z|=\varrho$ она добива у двјема тачкама a_1 и a_2 ову врједност

$$f(a_1) = f(a_2) = \alpha .$$

Према ставу 1 за функцију

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z},$$

где је $|\varphi(z)| < M$ за $|z|<1$, важиће у тачкама a_1 и a_2 ова неједнакост

$$\frac{M^2|\varphi(a_2)-\varphi(a_1)|^2}{(M^2-|\varphi(a_2)|^2)(M^2-|\varphi(a_1)|^2)} \leq \frac{|a_2-a_1|^2}{(1-|a_1|^2)(1-|a_2|^2)},$$

из које проилази сљедећа

$$\frac{M|\alpha|}{M^2\varrho^2-|\alpha|^2} \leq \frac{1}{1-\varrho^2},$$

а из ове следује на крају

$$|\alpha| \leq M\varrho^2. \tag{IV, 14}$$

Како је $\varphi(0)=1$, то се према обрасцу (II,1) може писати

$$sh^2\frac{\overline{z}}{2} = \frac{M^2|\frac{f(z)}{z}-1|^2}{(M^2-|\frac{f(z)}{z}|^2)(M^2-1)} \geq \frac{M^2(|\frac{f(z)}{z}|-1)^2}{(M^2-|\frac{f(z)}{z}|^2)(M^2-1)} \geq \frac{M^2(|\frac{f(z)}{z}|-1)^2}{(M^2-|\frac{f(z)}{z}|)^2},$$

јер је

$$(M^2-|\frac{f(z)}{z}|^2)(M^2-1) \geq (M^2-|\frac{f(z)}{z}|)^2 \text{ за } |\frac{f(z)}{z}|<1.$$

Дакле,следује ова доња граница за граничин лук

$$K = \mathrm{sh}\frac{z}{2} \geq \frac{M\left(1-\left|\frac{f(z)}{z}\right|\right)}{M^2-\left|\frac{f(z)}{z}\right|}.$$

Одавде ,ако је $KM < 1$,добива се ова неједнакост

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \geq \frac{M(1-KM)}{M-K}, \tag{IV,15}$$

а ова кад се упореди са (IV,14)за $K = |a| = \varrho$ и $f(a) = \alpha$ добива се ова

$$M\varrho\,\frac{1-M\varrho}{M-\varrho} \leq M\varrho^2.$$

Одавде резултира неједнакост (IV,13),што је требало доказати. Ако се (IV,15) узме као једнакост и замени K са z ,а $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ са $\frac{f(z)}{z}$ добива се горе поменута функција којом се достиже једнакост у изразу (IV,13).

B I B L I O G R A F I J A

[1] Abel, N.- Oeuvres II , str. 197.
[2] Bieberbach, L.-Lehrbuch der Funktionentheorie (1931)
[3] Denjoy, A.- Comptes Rendus, 182 (1926)
[4] Dini, U.- Ann. Univ. Toscana 9 (1867)
[5] Hadamard, M- Journal de Math. 8 (1892)
[6] Jensen, J.- D. Kgl. Danske Selsk. Skrifter, Natur og Math. Afd., 8 Raeke, II, 3,(1916)
[7] Jefimov, N.- Više geometrija
[8] Julia, G.- Acta math. 42 (1918)
[9] Karamata, J.. i Tomić, M.- Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sciences 3 (1950)
[10] Karadžić, L.- Bull. Acad. royaale de Belgique, 1(1956)
[11] Koenigs, h.- Annales Ecole nor. (3),1 (1884) i (3),2 (1885)
[12] Newanlinna, R.- Eindeutige Analytische Funktionen (1953),str, 50
[13] Ostrowski, . i Gattegno,C.- Representation conforme à la frontiere domaines particuliers (1955)
[14] Poincaré, H.- Oeuvres.II , (1916)
[15] Tomić, M.- Zbornik radova srpske Akad.-Mat. Institut-(1952)
[16] Valiron,G- Bull.sciences math. 55 (1931)
[17] Varicak, V.-Primjedbe o jednoj interpretaciji geometrije Lobačevskog,Rad ,knj. 154 (1903)
[18] Wolff, J.- Comptes Rendus, 182(1926)