СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXV

ПРВИ РАЗРЕД

86

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

15

Др. Н. САЛТИКОВ

Теорија тангенцијалних трансформација

БЕОГРАД 1937

Цена 5 дин.

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXV

ПРВИ РАЗРЕД

86

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

15

Др. Н. САЛТИКОВ

Теорија тангенцијалних трансформација

БЕОГРАД 1937

Теорија тангенцијалних трансформација

Од

Др. Н. САЛТИКОВА

ТЕОРИЈА ТАНГЕНЦИЈАЛНИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА

Од

Др. Н. САЛТИКОВА

(Приказано на скупу Академије природних наука 19 октобра 1936)

УВОД.

У овом раду бавим се структуром тангенцијалних трансформација. Полазећи од њихових класичних формула, изводим, прво, закључак да $2n+1$ једначина, које везују старе и нове променљиве количине, зависе међу собом тако, да се n последњих једначина изводе из $n+1$ првих једначина.

Ако овај став, који одређује структуру тангенцијалних трансформација, узмемо као основу њихове теорије, онда читава теорија добива најпростији облик.

Зато полазимо од тако званих *основних* формула трансформација, чији број зависи од *класе* посматране трансформације.

Али, сем тога, лако је увести још једну нову функцију, коју ћемо назвати *карактеристичном функцијом S тангенцијалне трансформације.*

Ова се функција изражава помоћу функција, које улазе у споменуте основне формуле.

Уведена карактеристична функција, за трансформације нулте класе, поклапа се са Јакобијевом, из његове теорије варијације каноничних констаната.

Предност уведене функције S је у томе, што се све формуле једне дате трансформације изражавају, сем основних формула, још помоћу једначина, које садрже само парцијалне изводе првог реда карактеристичне функције. Ови обрасци нису само важни због своје елегантности, него су веома корисни за извођење неопходних и довољних услова за једначине, које одређују посматране трансформације.

Заиста, доказ наведених услова, који су изнели S. Lie, A. Mayer, G. Darboux и E. Goursat, претставља веома компликован рачун. Године 1905, Н. Салтиков дао је један нови доказ[1]), који знатно упрошћава ову теорију. Ипак, испитивања о структури тангенцијалних трансформација и њихових карактеристичних функција, изложена сад у овом раду, дају тражени доказ у још много простијем и кратком облику.

---

[1]) *N. Saltykow* — Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. Kharkow. 1905 Chapitre V, p. 115 (en russe).

N. Saltykow — Sur la Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue, Paris. Gauthier-Villars. 1924 Chapitre XI, p. 150, n⁰ 99.

Глаʙа I

Дефиниција тангенцијалних трансформација.

Посматрајмо, прво, тангенцијалну трансформацију у равни.

Означимо са x независну променљиву количину, са y њену функцију, а са p обележимо трећу променљиву количину тако, да ове три променљиве количине задовољавају услов:

$$dy - pdx = 0. \tag{1}$$

Ако је p извод y', то написана једнакост (1) прима облик основне релације диференцијалног рачуна.

Уведимо нове променљиве количине x_1, y_1 и p_1.

Претпоставимо сад да су старе и нове променљиве количине везане међу собом једначинама:

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, p) &= x_1, \\ Y(x, y, p) &= y_1, \\ P(x, y, p) &= p_1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где су X, Y, P три одређене различите функције старих променљивих количина, у некој одређеној области њихове варијације.

Према томе је први неопходан услов, који морају задовољавати обрасци (2) за одређивање једне тангенцијалне трансформације, да се једначине (2) могу решити по старим променљивим количинама; због тога се њихове вредности изражавају у новим променљивим количинама, у посматраној области варијације наших количина.

Има, најзад, два начина за одређивање посматраних трансформација, које ћемо овде изнети.

Прво, горе наведене формуле одређују једну тангенцијалну трансформацију, ако оне трансформишу Пфафову једначину (1) у исто тако Пфафову једначину у новим променљивим количинама, на име:

$$dy_1 - p_1 dx_1 = 0 \,. \tag{3}$$

Другим речима *обрасци* (2) *чине једну тангенцијалну трансформацију, ако Пфафов образац $dy - pdx$ служи за њих као инваријанта.*

Друга дефиниција гласи: *обрасци* (2) *одређују једну тангенцијалну трансформацију ако задовољавају услов*

$$dy_1 - p_1 dx_1 = \rho\,(dy - pdx)\,, \tag{4}$$

где је ρ *нека функција старих променљивих количина* x, y *и* p [1]).

Обе дефиниције нису истоветне. Заиста, у првом случају, посматра се трансформација једног дводимензионалног тангенцијалног елемента С. Ли у други дводимензионални тангенцијални елеменат.

Међутим се, у другој дефиницији, испитује тангенцијални елеменат простора са четири димензије у облику

$$dy_1 - p_1 dx_1 - \rho dy - q dx = 0\,, \tag{5}$$

где је уведена ознака:

$$q \equiv -\rho p\,.$$

У овоме се другом случају, појављују логичне тешкоће у примени посматраних трансформација (2) за интеграљење обичних диференцијалних једначина, кад је неопходно увести једнакост (3) [2]). Једини излаз из створене ситуације је да се тада послужимо само првом дефиницијом тангенцијалних трансформација.

Треба подвући да су наведене тешкоће само логичке природе, јер иначе, полазећи од ма које од две изнете дефиниције, долазимо увек до истих закључака.

Зато уврстимо вредности нових променљивих количина

---

[1]) *S. Lie. Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen* (Gesammelte Abhandlungen, Bd. III, Erste Abteilung. Leipzig 1922. S. 96).

[2]) *S. Lie — G. Scheffers. Geometrie der Berührungstransformationen.* Leipzig 1896. Kapitel 1, § 4, S. 31—33.

(2) у прву страну једнакости (3). Написаћемо добијени резултат, укратко, овако:

$$dy_1-p_1dx_1=(Y_x-PX_x)\,dx+(Y_y-PX_y)\,dy+(Y_p-PX_p)\,dp, \quad (6)$$

где доњи индекси означавају парцијалне изводе посматраних функција. Услед замене вредности dy из обрасца (1), имаћемо:

$$dy_1-p_1dx_1=(Y_x'-PX_x')\,dx+(Y_p-PX_p)\,dp\,, \quad (7)$$

где су уведене ознаке

$$Y_x'\equiv Y_x+Y_yp\,, \qquad X_x'\equiv X_x+X_yp\,.$$

Пошто, према одредби, обрасци (2) не дају зависности између старих променљивих количина, то се образац (7) може поништити само кад је:

$$Y_x'-PX_x'=0\,,$$

$$Y_p-PX_p=0\,.$$

Први услов, на основи другог, постаће

$$[X,\ Y]=0\,, \quad (8)$$

где су праве заграде Вејлерове; а други услов даје:

$$P=\frac{Y_p}{X_p}\,. \quad (9)$$

Према томе, да би обрасци (2) одређивали тангенцијалну трансформацију, прве две функције X и Y морају се налазити у инволуцији, а трећа функција P мора се изражавати помоћу две прве, на основи формуле (9).

Из услова (8), према формули (9), долазимо одмах до закључка

$$\frac{Y_x-PX_x}{Y_y-PX_y}=-p\,. \quad (10)$$

Одакле ће образац (6) примити, услед једнакости (9), облик:

$$dy_1-p_1\,dx_1=(Y_y-PX_y)\,(dy-pdx)\,.$$

Узимајући у обзир једнакост (4), налазимо одговарајућу вредност за ρ:

$$\rho = Y_y - PX_y = \frac{D\left(\frac{X,\, Y}{p,\, y}\right)}{X_p}, \qquad (11)$$

која не сме да буде једнака нули [3]).

Исти обрасци (8), (9) и (11) добијају се такође, ако се полази у одређивању тангенцијалних трансформација од услова [4]) (4).

Лако је доказати и обрнути став који гласи да чим функције X, Y, P и ρ задовољавају обрасце (8), (9) и (11), онда формуле (2) одређују једну тангенцијалну трансформацију.

Заиста, пошто образац (10) претставља непосредну последицу формула (8) и (9), то услед ових формула и формуле (11), добијамо једнакост

$$dy - pdx = \frac{1}{\rho}(dY - PdX).$$

Одавде следује инваријантност Пфафова обрасца

$$dy - pdx,$$

јер је вредност ρ различита од нуле.

---

[3]) *S. Lie.* — *Theorie der Transformationsgruppen.* Unter Mitwirkung v. F. Engel. Leipzig 1890. S. 6, § 2.

[4]) *S. Lie.* — Theorie der Transf... S. 26, § 7.

Глава II

Карактеристичне функције тангенцијалних трансформација.

Посматрајмо сад $2n+1$ старих променљивих количина

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_n$$

и исти број нових количина

$$x_1',\ x_2', \ldots, x_n',\ z',\ p_1',\ p_2', \ldots, p_n',$$

које су везане међу собом са $2n+1$ једнакости

$$\left.\begin{array}{l} X_i(x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_n) = x_i', \\ Z(x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_n) = z', \\ P_i(x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_n) = p_i', \\ \qquad (i=1,\ 2, \ldots, n). \end{array}\right\} \tag{1}$$

Претпоставимо да су функције X_i, Z и P_i различите односно старих променљивих количина, тако да ове последње нису везане никаквим једначинама.

Обрасци (12) одређују једну тангенцијалну трансформацију, ако старе променљиве количине чине један тангенцијалан елеменат у простору од $n+1$ димензија, т. ј. задовољавају услов

$$dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0\,, \tag{2}$$

где је Пфафов образац, у првој страни једначине (2), инваријанта према формулама трансформације (1).

Другим речима, формуле (1) одређују једну тангенцијалну трансформацију, ако постоји једнакост:

$$dz' - \sum_{i=1}^{n} p_i' dx_i' = \rho \, (dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i), \tag{3}$$

где је вредност ρ различита од нуле. Иначе једнакост:

$$dz' - \sum_{\sigma=1}^{n} p_\sigma' dx_\sigma' = 0 \tag{3}$$

мора да буде последица (2), услед обрасца (1).

Тангенцијалне трансформације се разликују по класама према броју зависности, које се добијају између старих и нових променљивих количина

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ z,$$

$$x_1',\ x_2', \ldots, x_n',\ z',$$

помоћу елиминације старих променљивих

$$p_1,\ p_2 \ldots, p_n$$

из $n+1$ првих једнакости (1).

Претпоставимо, на пример, да је број оваквих једначина једнак $q+1$, па да се оне могу написати на следећи начин:

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi\,(x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-q},\ x_1',\ x_2', \ldots, x_n',\ z'), \\ x_{n-q+k} &= \varphi_k(x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-q},\ x_1',\ x_2', \ldots, x_n',\ z'), \\ &(k=1,\ 2, \ldots, q). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ове се формуле зову *основне формуле тангенцијалне трансформације* (1), која према броју q једначина друге врсте (5), припада *q-ој класи.*

Појам основних формула потиче још од Јакобија, и помоћу њих формуле (1) могу се претворити у други облик.

Зато ћемо диференцијалити једнакости (5):

$$\left.\begin{aligned} dz &= \sum_{v=1}^{n-q} \frac{\partial\varphi}{\partial x_v} dx_v + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i'} dx_i' + \frac{\partial\varphi}{\partial z'} dz', \\ dx_{n-q+k} &= \sum_{v=1}^{n-q} \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_v} dx_v + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i'} dx_i' + \frac{\partial\varphi_k}{\partial z'} dz', \\ &(k=1,\ 2, \ldots, q). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Чим сад уврстимо написане вредности (6) за dz и $dx_{n-q+1}, dx_{n-q+2}, \dots, dx_n$ у једначину (2), она ће примити следећи облик:

$$\sum_{\nu=1}^{n-q}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}-p_\nu-\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\nu}p_{n-q+k}\right)dx_\nu+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i'}-\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i'}p_{n-q+k}\right)dx_i'+$$

$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z'}-\sum_{n=1}^{q}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z'}p_{n-q+k}\right)dz'=0.$$

Сменимо у ову формулу вредност dz' која је одређена помоћу обрасца (5). Према томе добићемо следећу једнакост:

$$\sum_{\nu=1}^{n-q}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}-p_\nu-\sum_{k-1}^{q}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\nu}p_{n-q+k}\right)dx_\nu+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i'}-\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i'}p_{n-q+k}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_,}-\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z'}p_{n-q+k}\right)p_i'\right]dx_i'=0.$$

Због уведене претпоставке (5) која показује да посматрана тангенцијална трансформација (1) припада класи q, морају промењиве количине

$$x_1,\ x_2, \dots, x_{n-q},\ x_1',\ x_2', \dots, x_n'$$

да буду нез зисне. Услед тога добијена једнакост може се задовољити само, ако изједначимо са нулом коефицијенте код диференцијала

$$dx_1,\ dx_2, \dots, dx_{n-q},\ dx_1',\ dx_2', \dots, dx_n'.$$

Одавде се добијају обрасци:

$$p_\nu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}-\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\nu}p_{n-q+k},$$

$$(\nu=1,\ 2, \dots, n-q),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i'}-\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i'}p_{n-q+k}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z'}-\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z'}p_{n-q+k}\right)p_i'=0,$$

$$(i=1,\ 2, \dots, n).$$

Уведимо сад ознаку:

$$S \equiv \varphi - \sum_{k=1}^{q} \varphi_k p_{n-q+k} \,. \tag{7}$$

Према томе се горе написани обрасци изражавају на следећи веома прост начин:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial x_r}, \quad (r=1,\ 2, \ldots, n-q), \tag{8}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_i'} + \frac{\partial S}{\partial z_i} p_i' = 0, \quad (i=1,\ 2, \ldots, n)\,. \tag{9}$$

Пошто не сме постојати, сем једначина (1), других зависности између старих и нових промењљивих количина, то је очевидно, да обрасци (5), (8) и (9) одређују за њих исте вредности као и формуле (1), у истој области варијације наших промењљивих количина. Другим речима обрасци (5), (8) и (9) морају претстављати само алгебарску трансформацију формула (1).

Одавде долазимо до следећих закључака. Прво, пошто једначине (8) не зависе од нових промењљивих количина друге класе $p_1', p_2', \ldots, p_n'$, то су оне, заједно са једначинама (5), једнаке са $n+1$ првим једначинама (1), које су решене односно нових промењљивих количина

$$x_1',\ x_2', \ldots, x_n',\ z'. \tag{10}$$

Због тога морају се једначине (8) и (5) такође решавати односно истих промењљивих количина (10). Према томе мора постојати услов, који ћемо написати овако у облику једне функционалне, детерминанте n—1-ог реда:

$$\Delta \equiv D\left(\frac{\varphi,\ S_1,\ S_2, \ldots, S_{n-q},\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots, \varphi_q}{z',\ x_1',\ x_2', \ldots, x'_{n-q},\ x'_{n-q+1},\ x'_{n-q+2},\ x_n'}\right) \gtrless 0\,, \tag{11}$$

где су уведене, краткоће ради, следеће ознаке:

$$S_r \equiv \frac{\partial S}{\partial x_r}, \quad (r=1,\ 2, \ldots, n-q)\,. \tag{12}$$

Према томе прве $n+1$ једначине (1) могу се заменити

$$\Delta \equiv (-1)^q \begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial z'} & \frac{\partial S}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial S}{\partial x_s'} & \cdots & \frac{\partial S}{\partial x_n'} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_s' \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_{n-q}} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial x_{n-q}} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_s' \partial x_{n-q}} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial x_{n-q}} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_{n-q+1}} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial p_{n-q+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_s' \partial p_{n-q+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial p_{n-q+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_n} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial p_n} & \cdots & \frac{\partial_2 S}{\partial x_s' \partial p_n} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial p_n} \end{vmatrix} . \quad (13)$$

Прелазимо сад на једначине (9), које одређују следећи други закључак, да су n последњих једначина (1) једнаке са једначинама (9). Према томе имамо идентичности:

$$P_i \equiv -\left(\frac{\frac{\partial S}{\partial x_i'}}{\frac{\partial S}{\partial z'}} \right), \qquad (i=1,\ 2, \ldots, n), \qquad (14)$$

где заграде показују резултат замене вредности нових променљивих количина, из $n+1$ првих једначина (1), у изразе, који се налазе унутра заграда.

Добијени обрасци (14) доказују *да n последњих формула* (1) *претстављају последицу $n+1$ првих, пошто се одређују само помоћу карактеристичне функције S.*

Једначине (9), сем тога, имају својство да се могу решити по променљивим количинама

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-q},\ p_{n-q+1},\ p_{n-q+2}, \ldots, p_n .$$

За доказ овог става посматраћемо следећу функционалну детерминанту:

$$D \equiv \left| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial x_1} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_1} p_1' & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial x_1} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_1} p_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial x_{n-q}} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_{n-q}} p_1' & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial x_{n-q}} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_{n-q}} p_n' \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial p_{n-q+1}} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_{n-q+1}} p_1' & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial p_{n-q+1}} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_{n-q+1}} p_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial p_n} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_n} p_1' & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial p_n} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_n} p_n' \end{array} \right| .$$

Сваки од елемената ове детерминанте се састоји из два дела, од којих други делови су међу собом сразмерни. Према томе посматрана детерминанта изражава се као збир $n+1$ следећих детерминаната:

$$D \equiv \Delta' + \sum_{i=1}^{n} p_i' \Delta_i', \tag{15}$$

где су уведене следеће ознаке:

$$\Delta' \equiv \left| \begin{array}{cccccc} \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_2' \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_i' \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial x_{n-q}} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_2' \partial x_{n-q}} & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_i' \partial x_{n-q}} & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial x_{n-q}} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial p_{n-q+1}} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_2' \partial p_{n-q+1}} & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_i' \partial p_{n-q+1}} & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial p_{n-q+1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial p_n} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_2' \partial p_n} & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_i' \partial p_n} & \dots & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial p_n} \end{array} \right| ,$$

а детерминанта Δ_i' добија се из Δ' кад јој се смене елементи, који се налазе у i-тој колони, респективно са следећим елементима:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_{n-q}}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_{n-q+1}}, \ldots, \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_n}.$$

Уврстимо сад у образац (15) вредности количина p_i, које се одређују једначинама (9). Према томе добићемо:

$$D \equiv \frac{1}{\frac{\partial S}{\partial z'}} \left(\frac{\partial S}{\partial z'} \Delta' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i'} \Delta_i' \right).$$

Образац у заградама не претставља ништа друго него развијање детерминанте, која се налази на десној страни обрасца (13), по елементима прве врсте. Услед тога, на основу (11), наш је став доказан, јер имамо:

$$D \equiv \frac{(-1)^q}{\frac{\partial S}{\partial z'}} \Delta \gtrless 0 .$$

Као пример, за примену образаца (5), (8) и (9) на формуле тангенцијалних трансформација, наведимо, прво, трансформацију С. Ли, која се одређује као трансформација прве класе двема једначинама:

$$z = -(x' + iy') - xz',$$

$$y = -x\,(x' - iy') + z'.$$

Овде ћемо имати:

$$S = -(x' + iy') - xz' + [x\,(x' - iy') - z']\, q .$$

Према томе обрасци (8) и (9) одређују три остале формуле посматране трансформације

$$p = -z' + (x' - iy')\, q .$$

$$p' = \frac{xq - 1}{x + q}, \qquad q' = -\frac{xq + 1}{x + q}\, i .$$

За други пример уочимо тангенцијалну трансформацију друге класе, која се одређује обрасцима:

$$z = x_3 x_3' + z', \quad x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2'.$$

Карактеристична функција сад вреди:

$$S = x_3 x_3' + z' - x_1' p_1 - x_2' p_2 .$$

Према томе четири остале формуле трансформације постаће:

$$p_3 = x_3',$$

$$p_1' = p_1 , \quad p_2' = p_2 , \quad p_3' = -x_3 .$$

Глава III

Својства тангенцијалних трансформација

Посматрајмо сад једну тангенцијалну трансформацију, која припада q-ој класи и одређује се једначинама

$$\left.\begin{aligned} z-\varphi\ (x_1,\ x_2,\ldots,x_{n-q},\ x_1',\ x_2',\ldots,x_n',\ z')=0\ , \\ x_{n-q+k}-\varphi_k(x_1,\ x_2,\ldots,x_{n-q},\ x_1',\ x_2',\ldots,x_n',\ z')=0\ , \\ (k=1,\ 2,\ldots,q) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$p_r=\frac{\partial S}{\partial x_r}=0\ ,\quad (r=1,\ 2,\ldots,n-q)\ , \tag{2}$$

где функција S значи

$$S\equiv\varphi-\sum_{j=1}^{q}\varphi_j p_{n-q+j}\ ,$$

Ако је посматрана трансформација нулте класе, где је $q=0$, онда је очевидно да формуле (1) и (2) одређују један затворен систем парцијалних једначина. Према томе се $n+1$ формуле (1) Главе II налазе у инволуцији.

Исто вреди и за тангенцијалну трансформацију ма које класе q.

Заиста, лако се види да постоје једнакости:

$$[z-\varphi,\ x_{n-q+k}-\varphi_k]\equiv 0\ ,$$

$$[x_{n-q+i}-\varphi_i\ ,\ x_{n-q+k}-\varphi_k]\equiv 0\ ,$$

$$\left[z-\varphi,\quad p_r-\frac{\partial S}{\partial x_r}\right]\equiv-\left(p_r-\frac{\partial S}{\partial x_r}\right),$$

$$\left[x_{n-q+k}-\varphi_k\ ,\quad p_r-\frac{\partial S}{\partial x_r}\right]\equiv 0\ ,$$

$$\left[p_i - \frac{\partial S}{\partial x_i},\quad p_r - \frac{\partial S}{\partial x_r}\right] \equiv 0\,,$$

Заграде се у трећој врсти уништавају на основу једначина (2). Што се тиче заграда у осталим врстама, оне се идентички задовољавају. Према томе је систем једначина (1) и (2) затворен.

С. Ли претвара овај систем, помоћу Лежандрове трансформације, у формуле тангенцијалне трансформације нулте класе[5]). Према томе, услед инваријантности заграда, проширује се доказ инволуције формула (1), од II главе, на ма коју класу тангенцијалних трансформација. Иначе је лако доћи до истог закључка такође непосредно на овакав начин.

Заиста, посматрајмо следећи систем једначина:

$$\left.\begin{array}{c} H_s(x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_n) = 0\,, \\ (s = 1,\ 2, \ldots, n+1) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

које претстављају макакву трансформацију једначина (1) и (2). Према томе резултат замене вредности

$$x_{n-q+1}\,,\ x_{n-q+2}\,, \ldots, x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_{n-q},$$

које су одређене обрасцима (1) и (2), у једначине (3) чини идентичности:

$$\left.\begin{array}{c} H_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-q}, \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots, \varphi_q,\ \varphi,\ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-q},\ p_{n-q+1}, \ldots, p_n) = 0, \\ (s = 1,\ 2, \ldots, n+1)\,, \end{array}\right\} \quad (4)$$

где су уведене ознаке:

$$\psi_r \equiv \frac{\partial S}{\partial x_r}\,,\quad (r = 1,\ 2, \ldots, n-q)\,,$$

Добићемо нове идентичности, кад будемо диференцијалили идентичности (4) по промењивим количинама

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-q},\ p_{n-q+1}\,,\ p_{n-q+2}\,, \ldots, p_n\,,$$

---

[5]) *S. Lie. — Zur Theorie der Berührungsformationen* (Gesam. Abhandlungen. Bd. IV. Zweite Abteilung. Leipzig 1929) S. 265. Овде С. Ли зове Лежандрове трансформације Ајлеровима.

наиме:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial H_r}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial H_r}{\partial x_{n-q+i}}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}+\frac{\partial H_r}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}+\sum_{\mu=1}^{n-q}\frac{\partial H_r}{\partial p_\mu}\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_k}=0\,,\\
&\qquad\sum_{\mu=1}^{n-q}\frac{\partial H_r}{\partial p_\mu}\frac{\partial \psi_\mu}{\partial p_{n-q+j}}+\frac{\partial H_r}{\partial p_{n-q+j}}=0\,,\\
&\qquad\qquad\frac{\partial \psi_\mu}{\partial p_{n-q+j}}\equiv-\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\mu}\,,\\
&\frac{\partial H_h}{\partial x_\mu}+\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial H_h}{\partial x_{n-q+j}}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\mu}+\frac{\partial H_h}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}+\sum_{k=1}^{n-q}\frac{\partial H_h}{\partial p_k}\frac{\partial \psi_k}{\partial x_\mu}=0\,,\\
&\qquad\sum_{k=1}^{n-q}\frac{\partial H_h}{\partial p_k}\frac{\partial \psi_k}{\partial p_{n-q+i}}+\frac{\partial H_h}{\partial p_{n-q+i}}=0\,,\\
&\qquad\qquad\frac{\partial \psi_k}{\partial p_{n-q+i}}\equiv-\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\,.
\end{aligned}
\right\}\qquad(5)
$$

С друге стране имамо очевидне идентичности:

$$
\frac{\partial \psi_k}{\partial x_\mu}\equiv\frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_k}\,. \qquad (6)
$$

Према томе, због идентичности (5) и (6), заграде

$$
[H_h,\ H_r] \qquad (7)
$$

добијају следећи облик:

$$
[H_h,\ H_r]\equiv\sum_{k=1}^{n-q}\frac{\partial H_h}{\partial p_k}\frac{\partial H_r}{\partial z}\left(p_k-\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\,p_{n-q+i}\right)-
$$

$$
-\sum_{\mu=1}^{n-q}\frac{\partial H_r}{\partial p_\mu}\frac{\partial H_h}{\partial z}\left(p_\mu-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}+\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\mu}\,p_{n-q+j}\right).
$$

Обрасци у округлим заградама не претстављају ништа друго него прве стране једначина (2), услед раније уочене вредности функције S.

Одавде излази закључак да се заграде (7) уништавају на основу једначина (2); а према томе је затворен сваки систем једначина, који се добија трансформацијом једначина (1) и (2).

На тај начин долазимо до закључка, да се једначине система (1), главе II, морају налазити у инволуцији, јер за њих заграде (7), које не зависе од нових променљивих количина, не могу се уништити услед самих једначина (1), главе II.

Обрасци (1) и (2) једне тангенцијалне трансформације, који су изражени помоћу карактеристичне функције, дозвољавају на прост начин извести познате изразе заграда између сваке функције P_k са другим функцијама X_i, L и P_i једне тангенцијалне трансформације (1), главе II.

Зато полазимо од горе изведених образаца

$$P_k \equiv -\left(\frac{\frac{\partial S}{\partial x_k'}}{\frac{\partial S}{\partial z'}}\right), \quad (k=1,\ 2,\dots,n)\,. \tag{8}$$

Из ових формула следује, да се вредности функција P_k могу обележити на следећи начин.

Уведимо зато ознаке:

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial x_k'}}{\frac{\partial S}{\partial z'}} \equiv f_k(x_1, x_2,\dots,x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2},\dots,p_n, x_1', x_2',\dots,x_n', z'). \tag{9}$$

Онда ћемо написати:

$$P_k \equiv f_k(x_1, x_2,\dots,x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2},\dots,p_n, X_1, X_2,\dots,X_n, Z,$$

или укратко

$$P_k \equiv (f_k)\,, \tag{10}$$

где заграде означавају резултат извршене замене у функцији f_k.

Према томе добићемо изразе првих посматраних заграда у следећем облику:

$$[X_i,\ P_k] \equiv \sum_{\nu=1}^{n-q} \frac{\partial X_i}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_\nu}\right) - \sum_{j=1}^{q} \frac{dX_i}{dx_{n-q+j}}\left(\frac{\partial f_k}{\partial p_{n-q+j}}\right), \tag{11}$$

где се диференцијаљење врши само по променљивим количинама, које улазе непосредно у функције f_k, јер се функције X_1, $X_2,\dots,X_n$, Z налазе међу собом у инволуцији. Због тога се губе одговарајући чланови заграде; а округле заграде садрже не функције f_k но њихове изводе.

Имамо, с друге стране, следеће идентичности:

$$\left.\begin{aligned} X_i(x_1, x,\ldots,x_q, \varphi_1, \varphi_2,\ldots,\varphi_q, \varphi, \psi_1, \psi_2,\ldots, \psi_{n-q}, p_{n-q+1},\ldots,p_n) \equiv x_i', \\ (i=1,\ 2,\ldots,n), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

где ψ_v означавају, краткоће ради, вредности $\dfrac{\partial S}{\partial x_v}$.

Нове се идентичности добијају диференцијаљењем идентичности (12) по x_k' и z' у следећем облику:

$$\left.\begin{aligned} &\sum^{q}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_{n-q+j}}\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k'}+\left(\frac{\partial X_i}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k'}+\sum_{v=1}^{n-q}\left(\frac{\partial X_i}{\partial p_v}\right)\frac{\partial\psi_v}{\partial x_k'}=\begin{cases}0, & k\gtrless i,\\ 1, & k=i,\end{cases}\\ &\sum_{=1}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_{n-q+j}}\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial z'}+\left(\frac{\partial X_i}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z'}+\sum_{v=1}^{n-q}\left(\frac{\partial X_i}{\partial p_v}\right)\frac{\partial\psi_v}{\partial z_i}=0, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

где заграде означавају резултат замене, која је извршена у обрасцима (12).

Приметимо сад да још постоје очевидне идентичности:

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k'}\equiv-\frac{\partial^2 S}{\partial x_k'\partial p_{n-q+j}},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k'}\equiv\frac{\partial S}{\partial x_k'}+\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k'}p_{n-q+j},$$

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial z'}\equiv-\frac{\partial^2 S}{\partial z'\partial p_{n-q+j}},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\equiv\frac{\partial S}{\partial z'}+\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z'}p_{n-q+j},$$

Кад уврстимо написане вредности извода

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k'},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_k'},\quad \frac{\partial\varphi_j}{\partial z'},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z'}$$

у једнакости (13), оне ће дати следеће иденти ности:

$$-\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{dX_j}{dx_{n-q+j}}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial x_k'\partial p_{n-q+j}}+\left(\frac{\partial X_i}{\partial z}\right)\frac{\partial S}{\partial x_k'}+\sum_{r=1}^{k-q}\left(\frac{\partial X_i}{\partial p_r}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial x_r\partial x_k'}=\begin{cases}0, & k\gtrless i,\\ 1, & k=i\end{cases} \quad (14)$$

$$-\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{dX_i}{dx_{n-q+j}}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial z'\,\partial p_{n-q+j}}+\left(\frac{\partial X_i}{\partial z}\right)\frac{\partial S}{\partial z_k'}+\sum_{r=1}^{n-q}\left(\frac{\partial X_i}{\partial p_r}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial x_r\partial z'}=0, \quad (15)$$

где је уведена ознака:

$$\frac{dX_i}{dx_{p-q+j}}\equiv\frac{\partial X_i}{\partial x_{n-q+j}}+\frac{\partial X_i}{\partial z}\,p_{n-q+j}\,,$$

Помножимо сад идентичности (14) са $\frac{\partial S}{\partial z'}$, а (15)-ту са $-\frac{\partial S}{\partial x_k'}$. Онда ће збир добијених формула дати, на основу услова (9), следеће идентичности:

$$-\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{dX_i}{dx_{n-q+j}}\right)\frac{\partial f_k}{\partial p_{n-q+j}}+\sum_{r=1}^{n-q}\left(\frac{\partial X_i}{\partial p_r}\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_r}=\begin{cases}0, & k\gtrless i,\\ -\dfrac{1}{\dfrac{\partial S}{\partial z'}}, & k=i.\end{cases}$$

Уврстимо сад у ове идентичности, уместо количина

$$x_1',\ x_2',\ldots,x_n',\ z',$$

респективно њихове вредности

$$X_1,\ X_2,\ldots,X_n,\ Z;$$

тада се губе округле заграде, код првих чинитеља, а појављују се, према условима (10), код других чинитеља тако, да ћемо добити идентичности (мењајући ред оба збира):

$$\sum_{r=1}^{n-q}\frac{\partial X_i}{\partial p_r}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_r}\right)-\sum_{j=1}^{q}\frac{dX_i}{dx_{n-q+j}}\left(\frac{\partial f_k}{\partial p_{n-q+j}}\right)=\begin{cases}0, & k\gtrless i\,,\\ \rho, & k=i\,,\end{cases}$$

за све различите вредности индекса i и k, при чему је уведена ознака:

$$\rho=-\frac{1}{\left(\dfrac{\partial S}{\partial z'}\right)}\,.$$

Према томе обрасци (11) постаће:

$$[X_i,\ P_k]=\begin{cases}0, & k\gtrless i\,,\\ \rho, & k=i\,.\end{cases}$$

На аналоган начин лако се доказују још следећи обрасци:

$$[Z, P_k] \equiv P_k \rho ,$$

$$[P_i, P_k] \equiv 0 .$$