D^r. S. TOMIĆ
PROFESOR

MATEMATIKA

ZA SVE RAZREDE SREDNJIH ŠKOLA

PRVI DIO

ALGEBRA

FORMULE, TIPIČNI PRIMJERI I ZADACI

KOMISIONA NAKLADA KNJIŽARE KUŠAN

SARAJEVO
DRŽAVNA ŠTAMPARIJA
1931.

Uvod

Broj — elemenat aritmetike § 1

Posebni brojevi: 1, 2, 10, ... $\pi = 3{\cdot}14\ldots$, $\sqrt{2}$, $e = 2{\cdot}71828\ldots$ označuju određenu množinu jedinica. Pišu se ciframa (znamenkama).

Opći ili algebarski brojevi*): $a, b, c, \ldots A, B, C \ldots x, y, z, u, v$**) ... $\alpha, \beta \ldots$ označuju svaki poseban broj i mogu imati bilo koju posebnu vrijednost. Radi toga su podesni za izražavanje matematičkih zakona i odnosa (formule!).

Prirodni brojevi: 1, 2, 3, 4, 5 ... ($\rightarrow \infty \equiv$ neizmjerno veliko). Predočuju se na brojnoj liniji.

Relativni brojevi: $\left\{\begin{array}{l}\text{pozitivni: } +1, +2, \ldots +a, +b \ldots \\ \text{negativni: } -1, -2, \ldots -a, -b \ldots\end{array}\right\}$ a je apsolutna vrijednost; $+$ (plus) i $-$ (minus) su predznaci.

$+a \equiv a$ jedinica iznad nule t. j. a jedinica brojeno u pozitivnom smjeru; $-a$ je brojeno u negativnom smjeru. Podesni za označivanje temperature, vodostaja, dobitka, gubitka i t. d.

$$-\infty \leftarrow \ldots -a \ldots -3 \;\; -2 \;\; -1 \;\; 0 \;\; +1 \;\; +2 \;\; +3 \ldots +a \ldots \rightarrow +\infty$$

Sl. 1. Brojna linija relat. brojeva.

Odnos (relacija) između brojeva § 2

— izražen matematski —

Odnose između veličina izražava matematika posebnim znacima (jezik matematike jezik je matematskih formula!):

1. Jednadžbe:

1. $a = b$ (jednako)
2. $a^1 \equiv a$ (—„—, identično, definisano)
3. $a \cong$ (sukladno)
4. $a \rightarrow b$ (a teži, približuje se b)
5. $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} Sn = \frac{a}{1-q}$ (lim. = limes)

   t. j.
   Sn prima graničnu vrijednost $\frac{a}{1-q}$ kad je $n = \infty$
6. $a \backsim b$ (slično)

2. Nejednadžbe:

1. $a > b$ (veće)
2. $a < b$ (manje)
3. $a \gtrless b$ (neodređen odnos)
4. $a \neq b$ (a i b bez odnosa, različito)

Pomoću posebnih pravila, koja vrijede za pojedine računske operacije, matematika iz poznatih veličina određuje druge nepoznate.

*) Općim brojevima bavi se opća aritmetika (algebra!) a posebnim brojevima posebna.
**) $x =$ „iks"; $y =$ „ipsilon".

3. Računske operacije:

1. $a + b$	1. Sabiranje	Operacije I stepena
2. $a - b$	2. Oduzimanje	
3. $a \times b \equiv a \,.\, b \equiv ab$	3. Množenje	Operacije II stepena
4. $a : b \equiv \frac{a}{b}$	4. Dijeljenje	
5. $a^n \equiv a^{\underline{1}} \,.\, a^{\underline{2}} \,.\, a^{\underline{3}} \,.\,.\,.\, a^{\underline{n}}$	5. Potenciranje	Operacije III stepena
6. $\sqrt[n]{a} \equiv n$-ti korijen iz a	6. Radiciranje	
7. ${}^{10}log\,a \equiv$ logaritam od a na bazu 10	7. Logaritmiranje	

§ 3 Brojni izrazi

(= naznačene a neizračunate rač. operacije =)

1. Monomi ili jednočlani izrazi

(brojevi spojeni znacima operacija višeg stepena):

a) $2,\ ab,\ \frac{ab}{cd} : c \ldots$

b) $a^2 = a \,.\, a;\quad a^3 = a \,.\, a \,.\, a$*)

c) $3a = a + a + a$: ovdje je $3 \equiv$ koeficijent
$a \equiv$ glavna količina

Monomi su istoimeni, ako su im glavne količine (opći dio monoma) jednake, inače su raznoimeni.

2. Polinomi (višečlani izrazi)

(Članovi su spojeni sa + ili —):

a) $a \pm b \rightarrow$ binom (sa 2 člana!).

a) $a \pm b \pm c \rightarrow$ trinom (sa 3 člana!).

3. Zagrade su:

1) okrugle: ( ), 2) ugleste: [ ], 3) vitičaste: { }.

Ako treba računati sa brojnim izrazom kao sa jednim brojem, meće se on u zagrade. Razlikuj: $3 \,.\, 2 + 4 = 10$ i $3 \,.\, (2 + 4) = 18$. Zagrade naznačuju i red kojim treba vršiti računske operacije: najprije se izvrše operacije u okruglim, onda u uglastim pa vitičastim zagradama (iznutra prema vani, rijetko obratno!), a zagrade se ispuštaju. Izraz bez zagrada rješava se: najprije operacije višeg stepena pa nižeg; ali ako se radi o istom stepenu onda onim redom kako su napisane.

Na pr. $abc = (ab) \,.\, c$

Opaska: *a)* $a : 3b$ mjesto $a : (3b)$
$a : 3b$ „ $a : (3b)$
$\frac{a + c}{b}$ „ $\frac{(a + c)}{b}$

b) Katkada se zagrade upotrebljavaju samo zato, da se istakne jedan izraz.

*) a^2 = „a kvadrat“ ili „a druge“, „a na drugu“.
a^3 = „a kub“ ili „a treće“, „a na treću“.

Primjeri:

1) Suma brojeva 2 i 3 ima se pomnožiti sa razlikom brojeva 6 i 4 a produkt uvećan za 2 razdijeliti sa razlikom brojeve 3 i 1.

Rješenje: $[(2+3)\ (6-4)+2]:(3-1)=[5\,.\,2+2]:2=12:2=6$

2) **Riješi:** $3\,.\,12+4:2-3\,.\,6+5\,.\,2-2\,.\,14.$

Rješenje: Najprije se izvede množenje i dijeljenje pa onda sabiranje i oduzimanje; dakle:

$$\begin{aligned} 3\,.\,12+4:2-3\,.\,6+5\,.\,2-2\,.\,14 &= 36+2-18+10-28 \\ &= 38-18+10-28 \\ &= 20+10-28 \\ &= 30-28=2 \end{aligned}$$

3) $\{[5\,(4+3)-2\,.\,7+12:(3+1)]\ (8-18:3)\}:(10-2)=$
$=\{[5\,.\,7-14+12:4]\,2\}:8=\{[35-14+3]\,2\}:8=$
$=\{24\,.\,2\}:8=48:8=6$

4) Analiziraj i izračunaj:

1) $100-2\,.\,12-5\,.\,2+4$ ($R.=70$)
2) $(100-2)\,12-5\,(2+4)$ ($R.=1146$)
3) $100-(2\,.\,12-5\,.\,2+4)$ ($R.=82$)
4) $100-\{2\,[(12-5)\,2+4]\}$ ($R.=64$)
5) $8+32:8-4$ ($R.=8$)
6) $(8+32):(8-4)$ ($R.=10$)
7) $24:6:2$ ($R.=2$)
8) $24:(6:2)$ ($R.=8$)
9) $\{[(6+3)-2]+7\}-(2+1)$
10) $[(6+3)-2]+[(7-2)+1]$
11) $(6+3)-\{2+[7-(2+1)]\}$

5) Napiši mat. znacima: Suma brojeva a i b ima se umanjiti za razliku istih brojeva, a dvostruki rezultat uvećati za sumu brojeva c i d.

Aksiomi. Zakon permanencije § 4

Aksiomi (osnovni i očigledni zakoni):

1. Svaki je broj jednak samom sebi: $a=a$

2. $\dfrac{a=b \quad b=c}{a=b=c}$ **3.** $\dfrac{a=b \quad a>c}{b>c}$ i t. d.

Aritmetika polazi od prirodnih brojeva i brojenja. Uz prirodne brojeve bilo je potrebno uvesti i druge vrste brojeva, ali se pri tome novi pojmovi moraju tako definirati (odrediti), da poznata pravila ostanu i nadalje valjana (**zakon permanencije).** Tako da bi se omogućilo oduzimanje jednakih brojeva ili većeg broja od manjeg uvedena je nula $\equiv \Theta$ i relativni brojevi.

1) $a-a=\ b-b\equiv 0$ 2) $a-(a+b)=\ a-a-b=0-b \equiv -b$

§ 5 Supstituiranje

(= zamjenjivanje općih brojeva sa posebnim ili sa brojnim izrazima)

1) Odredi **brojnu vrijednost** izraza:

$[(a-b)+c]-[(c-d)+c]$ za $a=6$, $b=4$, $c=2$, $d=1$

2) Stranice su trokuta $a=13$, $b=14$, $c=15$, proračunaj:

a) površinu $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $s=\frac{a+b+c}{2}$;

b) polumjer opisanog kruga

$$R=\frac{abc}{4P};$$

c) polumjer upisanog kruga

$$\varrho=\frac{P}{s}.\ ^{*)}$$

3) U jednadžbi $x^2+ax+b=0$ korijeni su: $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$; odredi vrijednost korijenâ jedn.: $x^2+4x-2=0$.

Rješenje:

1) $[(6-4)+2]-[(2-1)+2]=[2+2]-[1+2]=4-3=1$

2) *a)* $P=\sqrt{21.8.7.6}=84$; $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21$

b) $R=\frac{13.14.15}{4.84}=?$

c) $\varrho=\frac{84}{21}=4$

3) $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+2}$
$=-2\pm\sqrt{6}$

*) ϱ = „ro“

Prvi dio

Transformiranje algebarskih identitetâ

Računske operacije $1^{\underline{og}}$ stepena §1

I Sabiranje (adicija)

(= pribrajanje jedinica jedne grupe drugoj, brojenje unapred)

Definicija:

Sabrati zadane brojeve znači odrediti onaj broj, koji ima toliko jedinica koliko ti brojevi zajedno.

$$a+b=s=\overbrace{(1+1+\dots+1)}^{a}+\overbrace{(1+1+\dots+1)}^{b}$$

$$=\overbrace{1+1+\dots+1+1\dots+1}^{s}$$

a plus (više) $b=s$

$s=$ suma (zbroj, zbir)

$\left.\begin{array}{l} a \\ b \end{array}\right\}$ sumandi (pribrojnici)

Pravila:

1. $a+b=b+a$	1. **Komutativni zakon** (Sumandi se mogu pribrojiti bilo kojim redom).
2. $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$	2. **Asocijativni zakon**
3. $a+b$ → dalje nesvodivo!	3. **Raznoimeni brojevi** (Naznačena suma kao brojni izraz!)
4. $\begin{cases} 3a+2a=5a \\ ma+na=(m+n)a \end{cases}$	4. **Istoimeni brojevi (reduciranje, stezanje)** (Koeficijenti se saberu, glavna količina ostaje nepromijenjena).
5. $\begin{cases} (+a)+(+b=+(a+b) \text{ ili } =a+b \\ (-a)+(-b=-(a+b) \;\; „ \;\; =-a-b \\ (+a)+(-b)=+(a-b)=-(b-a) \text{ za } a \gtrless b \\ (-a)+(+b)=+(b-a)=-(a-b) \;\; „ \;\; a \lessgtr b \end{cases}$	5. **Relativni brojevi** (Kod jednako označenih brojeva se apsolutne vrijednosti zbroje i uzme zajednički predznak, kod nejednako označenih se odbiju, a predznak se uzme veće apsolutne vrijednosti).
6. $A+(+a)=A+a$ $A+(-a)=A-a$	6. **Pribrajanje relativnih brojeva** $10+(-5)=10-5=5$

Opaska:

1. $\dfrac{a = b \qquad c = d}{a + c = b + d}$ $\quad$ $\dfrac{a > b \qquad c = c}{a + c > b + c}$ $\quad$ $\dfrac{a > b \qquad c > d}{a + c > b + d}$

2. **Dokaz:** Gornja pravila izlaze iz definicije sabiranja. Mogu se izvesti i na brojnoj liniji.

1. **Aksiomi**

II Oduzimanje (suptrakcija)

(= suprotna ili inverzna operacija sabiranja)

Definicija:

1. $b + x = a;\ x = ?$

   $x = a - b$ [a minus (manje) b]

2. $(a - b) + b = a$

   $\underbrace{(a-b)}_{\text{diferencija}} + \underbrace{b}_{\text{suptrahend}} = \underbrace{a}_{\text{minuend}}$

1. Problem
   a = minuend (umanjenik)
   b = suptrahend (umanjitelj)
   $a - b$ = diferencija ili razlika; označuje za koliko je broj a veći od broja b.
2. Sabiranje i oduzimanje, suprotne operacije, ukidaju se. (Proba za oduzimanje!).

Pravila:

1. Iz $a - b = c$ slijedi $(a \pm n) - (b \pm n) = c$
2. $a - (b + c) = a - b - c$
   $a - (b - c) = a - b + c = (a + c) - b$
3. $a - b \rightarrow$ naznačena diferencija, nesvodivo!
4. $ma - na = (m - n)a$
   $5a - 3a = 2a$
5. $A - (+a) = A + (-a) = A - a$
   $A - (-a) = A + (+a) = A + a$

1. Diferencija se ne mijenja ako se minuend i suptrahend za isti broj uvećaju ili umanje. $6 - 4 = 10 - 8 = 2$
2. **Oduzimanje sume i deferencije**
   $12 - (6 + 4) = 12 - 4 - 6 = 2$
   $12 - (6 - 4) = 12 - 6 + 4 = (12 + 4) - 6$
3. **Raznoimeni brojevi**
4. **Istoimeni brojevi (reduciranje, stezanje)** (koeficijenti se odbijaju!).
5. **Odbijanje relativnih brojeva** (= pribrajanje istih brojeva sa suprotnim predznakom).
   $10 - (+4) = 10 + (-4) = 6$
   $10 - (-4) = 10 + (+4) = 14$

Opaska:

a) **Prvo raširivanje brojnog područja:**

1. $a-a=b-b=0$ $a+0=a$ $0\pm 0=0$	1. Nula
2. $a-(a+b)=a-a-b$ $=0-b=-b$ $=b=+b$	2. **Relativni brojevi:** → negativni → pozitivni
3. „+" i „—" su predznaci $\lvert a\rvert = a =$ apsolutna vrijednost	
4. $a-b=-(b-a)$	
5. $(+a)+(-a)=0$	5. **Nejednako označeni jednaki brojevi ukidaju se.**

6. **Dokaz:**
Sva se pravila izvode iz
$(a-b)+b=a$

b) **Rješavanje zagradâ kod algebarskih izrazâ:**

1. $a+(b+c-d-e+\ldots.)=a+b+c-d-e+\ldots.$
2. $a-(b+c-d-e+\ldots.)=a-b-c+d+e-\ldots.$

3. **Ako je pred zagradom +, zagrada se ispušta bez ikakve promjene u zagradi, a ako je —, svakom se članu u zagradi promijeni predznak („+" u „—", a „—" u „+").** Ili:
4. Polinom se pribroji tako, da mu se aditivni članovi pribroje, a suptraktivni odbiju, a odbija, da se aditivni odbiju a suptraktivni pribroje t. j. polinom se odbije, da mu se članovi sa promijenjenim predznacima pribroje.
5. $\underset{\text{polinom}}{\underset{\downarrow}{a+b-c+d}} = \underset{\text{algebarski zbroj}}{\underset{\downarrow}{(+a)+(+b)+(-c)+(+d)}}$

Na početku polinoma aditivni član nema predznaka.

6.
$$\begin{array}{c} a=b \\ c=d \\ \hline a-c=b-d \end{array} \qquad \begin{array}{c} a>b \\ c=c \\ \hline a-c>b-c \end{array} \qquad \text{Aksiomi.}$$

7. **Pazi!** $a+[b-(c+d)]$ mjesto $a+[+b-(+c+d)]$, t. j. gdje nema predznaka, uzima se „+".

Primjer I

Sabiranje i oduzimanje izvađaj bilo kojim redom.
Pazi! $a - b + c - d + e = (a + c + e) - (b + d)$. Riječima?

1. Izračunaj najkraćim putem: $93 - 64 - 75 + 7 + 2 - 6 + 98 - 25$

R.: $93 - 64 - 75 + 7 + 2 - 6 + 98 - 25 = (93 + 7 + 98 + 2) -$
$- (64 + 6 + 75 + 25) = 200 - 170 = 30$

2. $(2x - y - z) + (x + 2y - z) - (x + y - 3z) = ?$

R.: Riješi zagrade pa reduciraj istoimene članove; dakle:

$(2x - y - z) + (x + 2y - z) - (x + y - 3z) =$
$= 2x - y - z + x + 2y - z - x \quad y + 3z =$
$= 2x + z$

ili

$$\begin{array}{r|l}
2x - y - z & \\
x + 2y - z & + \\
-(x + y - 3z) & \rightarrow \\
- \quad - \quad + & \\
\hline
2x + z &
\end{array}$$

Promijeni predznake članovima suptrahenda pa zbroj.

Primjer II

1)
$$\begin{array}{r|l}
21a^2 - 15ab + 3a - 4b & \\
11a^2 + 5ab - 7a - 3b & + \\
\hline
32a^2 - 10ab - 4a - 7b &
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l}
21a^2 - 15ab + 3a - 4b & \\
11a^2 + 5ab - 7a - 3b & - \\
- \quad - \quad + \quad + & \\
\hline
10a^2 - 20ab + 10a - b &
\end{array}$$

Primjer III

1) $(+3x) - (-5x) + (+6y) + (-3y) - (+2x) - (+4y)$

R.: *a)* Oduzimanje relat. brojeva $\equiv$ zbrajanje istih brojeva sa suprotnim predznacima; dakle:

$(+3x) - (-5x) + (+6y) + (-3y) - (+2x) - (+4y) =$
$= (+3x) + (+5x) + (+6y) + (-3y) + (-2x) + (-4y)$
$= (+6x) + (-y) = \underline{6x - y}$

ili *b)* Osloboditi se zagrada i reducirati; prema tome:

$(+3x) - (-5x) + (+6y) + (-3y) - (+2x) - (+4y) =$
$= 3x + 5x + 6y - 3y - 2x - 4y$
$= \underline{6x - y}$

Primjer IV

1. *a)* $10x - 4x - 2x - 3x - x = 0$

b) $10x - [4x - (2x - 3x - x)] = 10x - [4x - 2x + 3x + x] =$
$= 10x - 6x = 4x$

c) $10x - \{4x - [2x - (3x - x)]\} = 10x - \{4x - [2x - 2x]\}$
$= 10x - \{4x - 0\} = 6x$

d) $(6x+5y)-(4x-3y)-(2x-y)=6x+5y-4x+3y-$
$-2x+y=9y$

e) $(6x+5y)-\{4x-[(3y-2x)-y]\}=6x+5y-\{4x-[3y-$
$-2x-y]\}=6x+5y-\{4x-3y+2x+y\}=6x+5y-4x+$
$+3y-2x-y=7y$

2. $3y-(10x-2y)-\{-3y+[-2z-(3x+2y-z)+(3z-x)]-$
$-2z\}=3y-10x+2y-\{-3y+[-2z-3x-2y+z+3z-$
$-x]-2z\}=3y-10x+2y-\{-3y-2z-3x-2y+z+3z-$
$-x-2z\}=3y-10x+2y+3y+2z+3x+2y-z-3z+x+2z=$
$=10y-6x$

Proba: za $x=2,\ y=3,\ z=4$

$3\,.\,3-(10\,.\,2-2\,.\,3)-\{-3\,.\,3+[-2\,.\,4-(3\,.\,2+$
$+2\,.\,3-4)+(3\,.\,4-2)]-2\,.\,4\}=10\,.\,3-6\,.\,2$ i t. d.

Zadaci

1. $2-6-8+4-3-5+10=?$
2. $3x-8x+2x-3x=?$
3. $(x+y)-(x-y)-2y$ (R. $=0$)
4. $8-[8-(8-\{8-[8-(8-5)]\})]$ (R. $=5$)
5. $a-[a-\{a-(a-[a-\{a-(a-b)\}])\}]$
Proba: za $a=2,\ b=1$
6. $x+(x+y+z)-(y-z-x)-(z-y-x)+(x-y+z)-(x+y-z)$
R.: $4x-y+3z)$
Proba: $y=2,\ x=1,\ z=3$
7. Izračunaj najkraćim putem: $996-97+28-3+4+2-108+8$
8. *a)* $\{2x-[3y+(3x-y)-2x]-(x+y)\}+(2x+3y)$ (R.: $2x$)
b) $2x-\{3y+[3x-(y-2x)]-(x+y)+2x\}+3y$ (R.: $2y-4x$)
c) $2x-3y+\{3x-[y-(2x+y)-(y-2x)]+3y\}$
9. $12x-\{-3y-[2z+(-4x+y-z)-x]-2z\}$ (R.: $7x+4y+3z$)
10. $(+xy^2)+(+3x^2y)+(-2xy^2)-(-x^2y)+(-3x^2y)-(-4xy^2)+(+2x^3)$
11. $-\{-[-(x-y+z)+(-x+y-z)]+(-x+y-z)\}-[-(x+y)-(y-z)]$
(R.: $3y-2z$)
12. $2a^2+3ab-\{-[b^2-(-3a^2+2ab)+(4b^2-3ab)]+2ab-b^2\}$
(R.: $5a^2-4ab+6b^2$)
13. *a)* $\begin{array}{r|l} 4x-3y+6z-3 & \\ 2x+3y-5z+5 & + \\ \hline \end{array}$ *b)* $\begin{array}{r|l} 4x-3y+6z-3 & \\ 2x+3y-5z+5 & - \\ \hline \end{array}$

14. Izračunaj slijedeće izraze:
a) $X+[Y-(Z+U)]$ za $X=2x-(3y+z)$
b) $X+[Y-(Z-U)]$ $Y=x+(y-2z)$
c) $X-[Y-(Z-U)]$ $Z=2x-(3y+z)$
$U=x+(4y-2z)$
15. Koji je broj za $6a+(3b-2a)$ manji (veći) od broja $3a-(4a+2b)$?
[R.: $-5a-5b$; $(3a+b)$]

16. Polinom $3a - 2b + c - 1$ pretvoriti u binom (sumu ili razliku!), kojemu će prvi član biti 1) $3a$; 2) $3a - 2b$; 3) $3a - 1$; 4) $5a + 3b$; 5) $5a + b + 3$ (R.: 1) $3a - (2b - c + 1)$; 5) $5a + b + 3 - (2a + 3b - c + 4)$.

17. Što izađe, kad se razlika dvaju brojeva odbije od minuenda? Kako se mijenja razlika, kad se mijenja minuend, a kako, kad suptrahend? Kako se mijenja diferencija, kad se minuend i suptrahend zamijene?

18. *a)* Jedna je osoba stara a godina, druga b. Koliko je svaka bila stara prije x-godina, a koliko će biti iza y-godina; kolika im je razlika u starosti sada, kolika je bila prije x-godina, a kolika će biti iza y-godina? (Poučak?) (*R.*: $a - x$, $b - x$, i t. d.)

18. *b)* A ima x-D više nego B. Ako B ima y-D, koliko ima A?

18. *c)* Jedan je broj veći od drugog za 6. Ako je prvi $= x$, koliko je drugi?

19. Razlika brojeva a i b ima se povećati za njihovu sumu, rezulatat umanjiti za $2a$, dobiveni novi rezultat uvećati za razliku $b - 2a$. Napiši to matematski! Proba za $a = 2$, $b = -3$.

20. Kaži tako riječima i izračunaj brojnu vrijednost izraza:
(za $a = 6$, $b = -3$, $c = -1$, $d = 2$)
a) $[a + (b - c) + d] - (a - b)$
b) $\{a - [b - (c - d)]\} + (a - d)$.

21. Koji problem dovodi do nule i relativnih brojeva? Izvedi poznata pravila sabiranja i oduzimanja na brojnoj liniji. Kojim relat. brojevima odgovaraju nejednadžbe: $a > 0$, $a < 0$? (R.: $+a \equiv a > 0$; $-a \equiv a < 0$).

22. Za koliko je 1) -6 veće od -8
2) -6 manje „ -2.
3) $+a$ manje „ $+b$?

22. *a)* Za koji broj moramo uvećati m da dobijemo 0?

23. *a)* $\dfrac{\begin{matrix} a > b + c \\ d < c \end{matrix}}{a - d \,?\, b}$ *b)* $\dfrac{\begin{matrix} a + x > b + y \\ x < y \end{matrix}}{a \,?\, b}$ *c)* $\dfrac{|a| + |b| \geqq |a + b|}{\text{Dokaz?}}$ *d)* $\dfrac{\begin{matrix} a \neq b \\ b = c \end{matrix}}{a \neq c}$

24. *a)* Iz $a > b > c$ slijedi $\dfrac{3a > 2a + b > a + 2b > 3c}{\text{Dokaz!}}$ *b)* Iz $a_1 > a_2 > a_3 \ldots > a_n$ izlazi $\dfrac{na_1 > a_1 + a_2 + \ldots a_n > na_n}{\text{Dokaz!}}$

25. Odrediti x iz izraza: *a)* $a - x = b$; *b)* $a - x > b$; *c)* $a + x < b$.

26. Koje vrijednosti može x imati u odnosima: *a)* $-3 < x \geqq 1$; *b)* $-2 \geqq x > -5$?

27. Za koje su vrijednosti od x slijedeći izrazi *a)* jednaki nuli; *b)* negativni; *c)* pozitivni 1) $x - 5$; 2) $x + 3$; 3) $a - b - x$; 4) $x - a - b$?

28. *a)* $\dfrac{\begin{matrix} \alpha + \beta + \gamma = 180 \\ \gamma = 90 \end{matrix}}{\alpha + \beta = ?}$ *b)* $\dfrac{\begin{matrix} \alpha + \beta = \gamma + \delta \\ \alpha > \gamma \end{matrix}}{\beta \,?\, \gamma}$

c) $\left.\begin{matrix} a > b \\ -3 < 3 \end{matrix}\right| +$ *d)* $\dfrac{\begin{matrix} \alpha + \beta + \gamma = 180 \\ \gamma > 90 \end{matrix}}{\alpha + \beta = ?}$

29. Dokaži ove stavove:
a) $(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c)$
$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$
$(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c)$
$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$

$$
\begin{aligned}
b)\quad & a+(b+c)=(a+b)+c \\
& a-(b+c)=a-b-c \\
& a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b \\
& a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b
\end{aligned}
$$

Riječima: Na sumi se izvodi rač. operacija I stepena da se ona izvede bilo na kojem sumandu; na diferenciji, da se ista operacija izvede na mimendu ili suprotna na suptrahendu. Sa sumom se izvodi rač. operacija I stepena, da se ona izvede sa svakim sumandom, a sa diferencijom da se ista izvede sa mimendom a suprotna sa suptrahendom.

Računske operacije 2-og stepena §2

I Množenje (multiplikacija)

(= sabiranje jednakih pribrojnika)

Def.:

$$\boxed{a+a+a+\ldots+a=a\times b=a\,.\,b=ab}$$

a uzeto b-puta kao sumand

→ a puta (pomnoženo sa) b

a = multiplikand (množenik) } faktori
b = multiplikator (množitelj) } faktori
ab = produkt, umnožak

Pravila:

1. $a\,.\,b=b\,.\,a$	1. **Komutativni zakon** (proba za množenje!)
2. $(ab)\,.\,c=(ac)\,.\,b=a\,.\,(bc)$	2. **Asociativni zakon**
3. $abc=(ab)\,.\,c$	
4. $a\,.\,b=ab$ → nesvodivo!	4. **Raznoimeni brojevi**
5. $\begin{cases} a\,.\,a=a^2;\ a\,.\,a\,.\,a=a^3 \\ a^m\,.\,a^n=a^{m+n}\ ^{*)} \end{cases}$	5. **Istoimeni brojevi — potenciranje (stepenovanje)** a^m = potencija, a = baza, m = eksponent
6. $(+a)\,.\,(+b)=+ab$ $(-a)\,.\,(-a)=+ab$ $(-a)\,.\,(+a)=-ab$ $(+a)\,.\,(-b)=-ab$	6. **Relativni brojevi** (jednako označeni daju pozitivan produkt, nejednako označeni negativan).
7. $(a\pm b)c=ac\pm bc$, obratno: $ac\pm bc=c(b\pm b)$	7. **Množenje polinoma monom** (Svaki se član prvog pomnoži drugim).
8. $(a\pm b)(c+d)=(a\pm b)\cdot c+(a\pm b)\,d$ itd. $(a\pm b)(c-d)=(a\pm b)\,c-(a\pm b)\,d$ „	8. **Množenje polinoma polinomom** (Prvi se pomnoži sa svakim članom drugoga, a parcijalni produkti stegnu).

*) a^n = „a na n" ili „a n-te", „a na n-tu".

Opaska:

1. $\begin{array}{r} a=b \\ c=d \\ \hline ac=bd \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} a>b \\ c>d \\ \hline ac>bd \end{array}$ 3a) $\begin{array}{r} 2>1 \\ -3=-3 \\ \hline -6<-3 \end{array}$	1.—3a) Aksiomi
3. $0 \,.\, a=a \,.\, 0=0$ $abc \ldots 0=0$ 4. $1 \,.\, a=a \,.\, 1=a$ 5. $(-1) \,.\, a=a(-1)=-a$	3. Nula 5. Faktor (-1) mijenja produktu predznak
6. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ *) 7. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 8. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 9. $(a \pm b)^3=a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3$	6.—9. Važni produkti 6. Kvadrat sume 7. „ razlike 8. Produkt sume i razlike 9. Kub dvočlanika
10. $5m \,.\, 3=15m$	10. Množenje imenovanih brojeva
11. $(a+b)c=\overset{1}{(a+b)}+\overset{2}{(a+b)}+.+\overset{c}{(a+b)}$ $=(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\ldots+\overset{c}{a})+(\overset{1}{b}+\overset{2}{b}+\ldots\overset{c}{b})$ $=ac+bc$ 12. $(a+b)(c+d)=m(c+d)$, gdje je $m=a+b$ itd. 13. $(-a)(+b)=-ab \rightarrow$ neposredno iz definicije 14. $(-a)(-b)=(-a) \,.\, b(-1)=-ab \,.\, (-1)$ $=+ab$, ili $(-a) \,.\, (-b)=(0-a)(0-b)$ itd.	11.— 14. Dokazi **Dokaz:** $6\,kg=6000.000\,g!$ *R.* $2\,kg=2000\,g$ $3\,kg=3000\,g$ $\times$ $6\,kg=6000.000\,g$ Pogreška = ?

Pitanja:

1. Koje veličine razlikujemo kod množenja? Kako se mijenja produkt, kad se mijenja bilo koji faktor? Kako glasi komutat. zakon množenja?
2. Kako se množe raznoimeni, a kako istoimeni monomi?
3. Kako se množe relativni brojevi?
4. Kako se množi polinom sa monomom, a kako polinom sa polinomom?
4. Važne produkte napamet!
5. Multiplikator je uvijek neimenovan broj.

*) $(a+b-c+\ldots)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab-ac-bc)$.

Primjer I

$2a^2bx^2 \,.\, 3ab^3x^3y^2 \,.\, 5xy^2z^3 \,.\, 7a^3b^3x^2y^2z^4 = ?$

R.: Faktore množiti bilo kojim redom ($2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 = 10 \,.\, 21 = 210$), iste faktore stegni u potencije ($a^2 \,.\, a \,.\, a^3 = a^6$ i t. d.), u rezultatu koeficijente stavi pred opći broj, opće brojeve alfabetski poredati; dakle:

$$2a^2bx^2 \,.\, 3ab^3x^3y^2 \,.\, 5xy^2z^3 \,.\, 7a^3b^3x^2y^2z^4 =$$
$$= 210\, a^{2+1+3}\, b^{1+3+3}\, x^{2+3+1+2}\, y^{2+2+2}\, z^{3+4}$$
$$= 210\, a^6 b^7 x^8 y^6 z^7$$

Primjer II

1. $a^2(a^2 - ab + b^2) + (a^3 - 3a^2b)\,b - (a^3 - 3ab^2)\,a + ab^3 = ?$

R.: Izmnoži članove polinoma sa monomom, reduciraj i poredaj polinom po rastućoj (padajućoj) potenciji; prema tome je:

$$a^2(a^2 - ab + b^2) + (a^3 - 3a^2b)\,b - (a^3 - 3ab^2)\,a + ab^3 =$$
$$= a^4 - a^3b + a^2b^2 + a^3b - 3a^2b^2 - a^4 + 3a^2b^2 + ab^3$$
$$= a^2b^2 + ab^3$$

2. Rastavi na faktore t. j. zadani broj predoči kao produkt:

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = x^2(x - y) - y^2(x - y) = (x - y)(x^2 - y^2) =$$
$$= (x - y)(x + y)(x - y)$$

Primjer III

1. $(a^4 + a^3b - ab^3 - b^4)(a^2 - ab + b^2)$

R.: Množe se kao i posebni brojevi: multiplikand se pomnoži sa svakim članom multiplikatora (istoimene monome potpisati pod istoimene!), a parcijalni produkti saberu; dakle:

$$\begin{array}{l}
(a^4 + a^3b - ab^3 - b^4)(a^2 - ab + b^2) \\
\hline
a^6 + a^5b - a^3b^3 - a^2b^4 \\
\quad - a^5b - a^4b^2 + a^2b^4 + ab^5 \\
\qquad + a^4b^2 + a^3b^3 - ab^5 - b^6 \\
\hline
\qquad\quad a^6 - b^6
\end{array}$$

2. $(x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1) - (x^3 + 1)(x^3 - 1)$

$$\begin{array}{l}
x^6 - x^4 + x^2 \\
\quad + x^4 - x^2 + 1 \\
\hline
\quad x^6 + 1 - (x^6 - 1) = x^6 + 1 - x^6 + 1 = 2
\end{array}$$

3. Važne produkte napamet!

$$(2x - y)(4x^2 + y^2)(2x + y) - (2x - 3y)(4x^2 + 3y^2)(2x + 3y) =$$
$$= (4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2) - (4x^2 - 9y^2)(4x^2 + 9y^2)$$
$$= (16x^4 - y^4) - (16x^4 - 81y^4) = \underline{80y^4}$$

Primjer IV

1. Kvadriranje posebnih brojeva [prema $(a+b)^2 = ?$] (Kod decimalnih brojeva uzme se u rezultatu 2 puta toliko decimalnih mjesta koliko ih je u zadanom broju).

1.
$$\begin{array}{ll} \underline{24^2} & \\ 2^2 \,.\,.\,.\,.\,. & 4. \\ 2\,.\,2\,.\,4\,.\,. & 16. \\ 4^2 & \underline{16} \\ & 576 \end{array}$$

ili 24^2 [prema: $(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)\,b$]
$$\begin{array}{ll} \underline{2^2} \,.\,.\,.\, & 4.. \\ 44\,.\,4 & \underline{176} \\ & 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \underline{2{\cdot}34^2} & \\ 2^2 \,.\,.\,. & 4. \\ 2\,.\,\underline{2\,.\,3} & 12. \\ 3^2 & 9. \\ 2\,.\,23\,.\,4 & 184. \\ 4^2 & \underline{16} \\ & 5{\cdot}4756 \end{array}$$

ili
$$\begin{array}{ll} \underline{2{\cdot}34^2} & \\ 2^2 \,.\,.\,.\,. & 4.. \\ 43\,.\,3\,.\,. & 129.. \\ 464\,.\,4\,.\,. & \underline{1856} \\ & 5{\cdot}4756 \end{array}$$

2. Kubiranje posebnih brojeva [prema $[a+b)^3 = ?$] (Kako se kubiraju decimalni brojevi?).

2.
$$\begin{array}{ll} \underline{23^3} & \\ 2^3\,.\,. & 8. \\ 3\,.\,2^2\,.\,3\,.\,. & 36. \\ 3\,.\,2\,.\,3^2\,.\,. & 54. \\ 3^3\,.\,. & \underline{27} \\ & 12167 \end{array}$$

$\underline{23{\cdot}4^3}$ (prema?)
$$\begin{array}{ll} 2^3 \ldots\ldots\ldots & 8. \\ 3\,.\,2^2\,.\,3 \ldots\ldots & 36. \\ 3\,.\,2\,.\,3^2 \ldots\ldots & 54. \\ 3^3 \ldots\ldots & 27. \\ 3\,.\,23^2\,.\,4 \ldots & 6348. \\ 3\,.\,23\,.\,4^2 \ldots & 1104. \\ 4^3 \ldots & \underline{64} \\ & 12812{\cdot}904 \end{array}$$

Zadaci

1. Izračunaj najkraćim putem:
   1) $4\,.\,2\,.\,8\,.\,6\,.\,25\,.\,5\,.\,125\,.\,3$ (R.: $10\,.\,100\,.\,1000\,.\,18 = ?$)
   2) $315\,.\,45 - 315\,.\,35$ (R.: $315\,.\,10 = ?$)
2. 1) $2\,ax^{n+1}\,.\,3a^2x^{2n+2}\,.\,10\,ab^3x^{3n-1}$ (R.: $60\,a^4b^3x^{6n}$)
   2) $0{\cdot}1\,a^2b\,.\,0{\cdot}01\,ab^3\,.\,0{\cdot}001\,a^2b\,.\,10^6\,a^3b^3$ (R.: a^8b^8)
   3) Napiši potpuno: $3\,ab$, a^3b, ab^3, $(ab)^3$ (R.: $ab + ab + ab$; $aaab$.)
   4) $(3\,a^2x^3)^2 = 3\,a^2x^3\,.\,3\,a^2x^3 = \ldots$
3. 1) $(a-b)^2 = (b-a)^2$, Dokaz?
   2) $(a-b)^3 = -(b-a)^3$, Dokaz?
   3) *a)* $-(1+a^2)^2$, *b)* $[-(1+a^2)]^2$
   4) *a)* $-(1+a^2)^3$, *b)* $[-(1+a^2)]^3$

4. 1) $(x+2)\,2x-3x(x-3)+x^2$.
2) $x^2(x^2-xy+y^2)+y(x^3-2x^2y)-x(x^3+2xy)$ (R.: $-x^2y^2-2x^2y$)
3) $x(a+b+c)-(a-b+c)x+x(a+b-c)-x(b+c-a)$
4 $[(x^2+2x+1)\,2-2x(x-1)]\,2-[2x(x+1)-2x^2]-2(x+2)$ (R.: $8x$)
5) $a^4-a\{a-a[a-a(a+1)]\}$ (R : $-a^2$)
6) $2-2\{2-2[2-2(2-x)]\}$

5. Analiziraj i izračunaj za $a=5,\ b=7,\ c=10$:
1) $a-(bc+d)$ 3) $(a-b)(c+d)$
2) $a-b(c+d)$ 4) $(a-b)\ c+d$

6. 1) $(x+1)(x-1)+1$ (R.: x^2)
2) $x^2-(x-3)(x+3)$
3) $(x+2y)^2-(x-2y)^2$ (R.: $8xy$)
4) $(2x\pm 1)^3$; $(3x+2y)^2$; $(2x-y)^2$
5) $(x+2y)^3$
6) $(-x-y)^2$
7) $(-2x+3y)(-2x-3y)(-4x^2-9y^2)$
8) Prema $(a-b)^2=(b-a)^2$ i $(a-b)^3=-(b-a)^3$ odredi $(5a^3-1)(1-5a^3)$
9) $(-a+b-c)(a+b-c)$
10) $(x^2+x+1)^2$
11) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-(b+c-a)^2$
12) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ Dokaz?
13) $(a^2b+ab^2)(ab-b^2)$ (R.: $a^3b^2-ab^4$)
14) $a^2-(b-c)^2-\{[(b+c)(b-c)-(a+b^2)+b^2]\}$
15) $(a+b+c)(a+b-c)-(a-b+c)(a+b-c)$
16) $(a^2-x^2+b^2)(a^2+x^2+b^2)$ (R.: $a^4+2a^2b^2+b^4-x^4$)
17) $(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)(x^3-2x^2y+2xy^2-y^3)$ (R.: x^6-y^6)

7. 1) $(x^2+xy+y^2)(x-y)+(x^2-xy+y^2)(x+y)$
2) $(a^2+a+1)(a-1)$
3) $(a^4-a^3+a^2-a+1)(a+1)$ (R.: a^5+1)
4) $(z^4+z^3u+z^2u^2+zu^3+u^4)(z-u)$
5) $(x^{5n}-x^{4n}+x^{3n}-x^{2n}+x^n-1)(x^n+1)$ (R.: $x^{6n}-1$)
6) $(u^3\pm uv+v^3)(u\mp v)$
7) $(x^6-x^4y^2+x^2y^4-y^6)(x^2+y^2)-(x^4-y^4)(x^4+y^4)$ (R.: 0)

8. 1) $(a+1)(a+2)(a+3)$
2) $(r^3-r^2s+rs^2-s^3)(r^3+r^2s-rs^2+s^3)$
3) $(x^3+2x^2+2x+1)(x^3-2x^2+2x-1)$
4) $(a^3+a^2+a+1)(a^3-a^2-a+1)$ (R.: $a^6-a^4-a^2+1$)
5) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$ Dokaz!
6) $(a^4-x^2+b^4)(a^4+x^2+b^4)$ (R.: $a^8+2a^4b^4-x^4+b^8$)

9. 1) $2x\{-x-x[2x-(x+1)^2]-x(x-1)(x+1)\}-x^2$ (R.: x^2)
2) $x^8-\{[4x^6-(2x^3+1)(2x^3-1)]x^6-(x^3-1)^2\}$ (R.: x^8-2x^3+1)
3) $x^3-[(a^2-1)x^2-a^2(x^2+1)]-(a^2+1)(x^2+1)$
4) $[x^2+(y^2-z^2)][x^2-(y^2-z^2)]-[(x-y)^2]^2-(x-y)^3(x+y)$
5) $[x^2+(a+b)x+a^2+b^2][x^2-(a-b)x+a^2-b^2]$

10. 1) $(A^2-2BC)(B+C)$
2) $2AB-C^2+(A^2-B^2)C$
za $A=2x-3y$, $B=x+2y$
$C=1-x$

11. 1) $(x-y)(-z)-(x-y)(-y)-(y-z)(+x)$
2) $(2-3x+x^2y)(-2x^2y)-3xy[-(x^2-2xy^2)]$
3) $[(-1)+(-1)^2-(-1)^3+(-1)^4]\,[(-2)-(-2)^2+(-2)^3]$
(R.: -28)
4) $(+a)^{2n}\,.\,(-b)^{2n+1}(-a)^3\,.\,(-b)^3$ [R.: $(-a^{2n+3})\,.\,(+b^{2n+4})=?$]

12. 1) $\begin{array}{r|l} -2=-2 & \\ 2<3 & \times \\ \hline & \end{array}$ 2) $\begin{array}{c} a>b \\ -1=-1 \\ \hline -a\,(?)-b \end{array}$

13. Izračunaj izlučujući faktore:
$3(2a-b)(x-3y)+4(b-2a)(x-3y)+2(b-2a)(3y-x)=?$

14. Za koje su vrijednosti od x slijedeći izrazi 1) jednaki nuli; 2) negativni; 3) pozitivni:
$x(x+2)$; $x(x-2)$?
4) $\frac{x}{2}-3>0,\ x=?$ $-\frac{x}{2}-3>0,\ x?$ $-\frac{x}{2}+3<0,\ x=?$
(R.: $x>6$ i t. d.).
5) Jedan je broj 3-puta veći od drugog. Ako je prvi x, koliki je drugi?

Kvadriranje i kubiranje.

15. 1) $3{\cdot}14^2$ 2) $0{\cdot}036^2$ 3) $7{\cdot}84^2$ 4) $\left(\frac{3{\cdot}2}{6{\cdot}3}\right)^2=\frac{3{\cdot}2}{6{\cdot}2}\cdot\frac{3{\cdot}2}{6{\cdot}2}=\frac{3{\cdot}2^2}{6{\cdot}2^2}$ 5) $234{\cdot}05^2$

16. 1) $3{\cdot}2^3$ 2) $0{\cdot}32^3$ 3) $23{\cdot}41^3$ 4) $\left(\frac{7}{8}\right)^3=?$ 5) $\left(2\frac{3}{4}\right)^2$

II Dijeljenje (divizija)

(inverzna operacija množenja)

Def.: Broj a podijeliti brojem b znači odrediti onaj broj, koji pomnožen sa b daje a.

1. **Probl.:** $b\,.\,x=a;\ x=?$
R.: $x=a:b$ → razdijeljeno
$x=\frac{a}{b}$ → kroz

1. $a=$ dividend (dijeljenik)
$b=$ divizor (djelitelj)
$\frac{a}{b}=(a:b)=$ kvocijent (pokazuje za koliko je puta prvi broj veći od drugog)

2. Iz $a:b=c$ slijedi
r
$a=b\,.\,c+r$
dividend = divizor × kvocijent (+ ostatak)

2. Proba za dijeljenje

3. $\frac{a}{b}\,.\,b=a$

3. Dijeljenje i množenje, suprotne operacije, ukidaju se.

Pravila:

1. $\frac{a}{b}=\frac{a\,.\,m}{b\,.\,m}=\frac{a:m}{b:m}$	1. Kvocijent se ništa ne mijenja, ako se dividend i divizor istim brojem pomnože ili razdijele.
2. $\frac{abcd\,..}{m}=\frac{a}{m}\,.\,bcd\,..=a\frac{b}{m}\,.\,c\,.\,d\,..$	2—3. Dijeljenje umnoška brojem
3. $(ab):c=\frac{a}{c}\,.\,b=a\,.\,\frac{b}{c}$	
4. $a:(bc)=(a:b):c=\frac{a}{bc}$	4. Dijeljenje broja umnoškom
5. $a:(b:c)=\frac{ac}{b}$	4. Dijeljenje broja kvocijentom
6. $(a:b):c=(a:c):b=a:(bc)$	6. Dijeljenje kvocijenta brojem
7. $a:b$ ili $\frac{a}{b}\rightarrow$ nesvodivo dalje	7. **Raznoimeni monomi**
8. $a^m:a^n=a^{m-n}$, jer $a^n\,.\,a^{m-n}=a^m$	8. **Potencije iste baze** (eksponenti se oduzimaju)
9. $(+a):(+b)=+(a:b)=+\frac{a}{b}$ $(-a):(-b)=+(a:b)=+\frac{a}{b}$ $(-a):(+b)=-(a:b)=-\frac{a}{b}$ $(+a):(-b)=-(a:b)=-\frac{a}{b}$	9. **Relativni brojevi**
10. $(a\pm b):c=\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}$	10. **Dijeljenje polinoma monomom**
11. $(a^3-1):(a-1)=a^2+a+1$ a^3-a^2 $-\quad+$ a^2-1 a^2-a $-\quad+$ $a-1$ $a-1$ $-\quad+$ $\emptyset$ Polinomi se poredaju po potencijama i dijele kao i posebni brojevi.	11. **Dijeljenje polinoma polinomom** (Prvi član dividenda razdijeljen sa prvim članom divizora daje prvi član kvocijenta. S tim se pomnoži divizor i odbije od dividenda (promijene mu se predznaci i pribroji!) a ostatku doda sljedeći član. Ostatak se podijeli opet prvim članom divizora i t. d.).

Opaska:

1. $\frac{0}{a} = 0$; $\frac{a}{0}$ jest besmisao (nedjeljivo!),

ali $\frac{a}{x \to 0} \to \infty$

$\frac{a}{a} = 1$ i $\frac{a}{1} = a$

$\infty \pm a = \infty$; $\frac{a}{x \to \infty} \to 0$

$\frac{0}{0} = 1, 2, 3 \dots \to$ neodređeno

2. $$\begin{array}{ll} a = b & a > b \\ c = d & c < d \\ \hline a : c = b : d & a : c > b : d \end{array}$$ itd.

3. Koje veličine dolaze kod dijeljenja?
4. Šta predočuje kvocijent (količnik) dvaju brojeva?
5. Kako se mijenja kvocijent, kad se mijenja divizor i dividend? Kako se dijele potencije; kako relativni brojevi?
6. Kako se dijeli polinom sa monomom, a kako polinom sa polinomom?
7. **Dijeljenje sa 0 (nulom) neizvodivo je u području konačnih brojeva ($\frac{a}{0}$ je besmisao, jer nema konačnog broja koji pomnožen sa 0 daje a); ali ako divizor neograničeno opada i postaje 0 (nula), onda kvocijent neograničeno raste i postaje ∞ neizmjerno velik) t. j. $\frac{a}{x \to 0} = \infty$ i obratno. Pri tome je $a \neq 0$**

Gdje je pogreška? Dokaz: 1 = 2!

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2 \,|$$
$$a(a - a) = (a + a)(a - a) \,|\, : (a - a)$$
$$a = 2a \,|\, : a$$
$$1 = 2!$$

Primjer I

1. $10a^m b^n x^p \,.\, 4a^2 b^3 x^4 : 5a^{n-2} b^2 x^3 \,.\, 2ab^2 x^{1-p} =$
$= 40a^{m+2} b^{n+3} x^{p+4} : 5a^{n-2} b^2 x^3 \,.\, 2ab^2 x^{1-p}$
$= 8a^{m+2-(n-2)} b^{n+3-2} x^{p+4-3} \,.\, 2ab^2 x^{1-p}$
$= 16a^{m-n+5} b^{n+3} x^2$

P. Kod dijeljenja potencijâ zajednička baza ostaje nepromijenjena, a eksponenti se oduzimaju.

2. $(12a^2x^3 - 8a^3x^3 + 4a^4x^2) : 4a^2x^2 + (12a^2x^3 - 8a^3x^3 + 4a^4x^2) : (-4a^2x^2)$. R. : Svaki se član dividenda razdijeli divizorom; dakle:
$3x - 2ax + a^2 + (-3x + 2ax - a^2) =$
$= 3x - 2ax + a^2 - 3x + 2ax - a^2 = 0$

Primjer II

1. $(a^8 - 2a^4b^4 + b^8) : (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

$$\begin{array}{l} a^8 - 2a^6b^2 + a^4b^4 \\ - \quad + \quad - \\ \hline 2a^6b^2 - 3a^4b^4 \\ 2a^6b^2 - 4a^4b^4 + 2a^2b^6 \\ - \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$a^4b^4 - 2a^2b^6 + b^8$$
$$a^4b^4 - 2a^2b^6 + b^8$$
$$- \quad + \quad -$$
$$\varnothing$$

2. $(x^3 + y^3)^2 : (y^2 - xy + x^2) =$

$$(x^6 + 2x^3y^3 + y^6) : (x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^3y + xy^3 + y^4$$
$$x^6 - x^5y + x^4y^2$$
$$- \quad + \quad -$$
$$x^5y - x^4y^2 + 2x^3y^3$$
$$x^5y - x^4y^2 + x^3y$$
$$- \quad + \quad -$$
$$x^3y^3 + y^6$$
$$x^3y^3 - x^2y^4 + xy^5$$
$$- \quad + \quad -$$
$$x^2y^4 - xy^5 + y^6$$
$$x^2y^4 - xy^5 + y^6$$
$$- \quad + \quad -$$
$$\varnothing$$

3. $a : (a + x) = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} -$

$$a \pm x$$
$$-x$$
$$-x - \frac{x^2}{a}$$
$$+ \quad +$$
$$\frac{x^2}{a}$$
$$\frac{x^2}{a} \pm \frac{x^3}{a^2}$$
$$\frac{x^3}{a^2}$$

4. Svi su brojevi međusobno jednaki! Dokaz:

$$a = b + c \mid (a - b)$$
$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$$
$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$
$$a(a - b - c) = b(a - b - c)$$
$$a = b$$

4a) $2 \cdot 2 = 5$. Dokaz!

$$a = b + c \mid$$
$$\left.\begin{array}{l} 4b + 4c = 4a \\ 5a = 5b + 5c \end{array}\right| +$$
$$5a + 4b + 4c = 4a + 5b + 5c$$
$$9a \quad = 9a$$
$$4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a$$
$$4(b + c - a) = 5(b + c - a)$$
$$4 = 5 \text{ ili}$$
$$2 \cdot 2 = 5. \text{ Pogreška?}$$

4b) $(16u^4 - 9v^2) : (4u^2 + 3v) = 4u^2 - 3v$

$$16u^4 + 12u^2v$$
$$- \quad -$$
$$-12u^2v - 9v^2$$
$$-12u^2v - 9v^2$$
$$\varnothing$$

Isti zadatak riješiti napamet!

Zadaci

1. 1) $(-42a^{n-3}b^{n-2}x^{p}) : 7a^{n-4}b^{2}x^{1-p} \,.\, 3abx$ (R.: $-18a^{2}b^{n-3}$)

2) $(-42a^{n-3}b^{n-2}x^{p}) : (7a^{n-4}b^{2}x^{1-p} \,.\, 3abx)$

3) $(-12a^{3}b^{4}x^{4}y^{5}) : (+6ab^{3}xy^{-3}) : (-2abxy^{2})$

4) $\frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c} = -\frac{a-b}{d-c} = -\frac{b-a}{c-d}$ Dokaz!

2. 1) $\frac{4z+y}{z-y} + \frac{2z-y}{z-y} - \frac{5z+y}{z-y}$ $(=1)$

2) $(a+2b)^{8} : (a+2b)^{5}$

3) $\left(xy \,.\, \frac{x}{y} - xy \,.\, \frac{y}{x}\right) : (x-y) + \left(x : \frac{x}{y^{2}} - y : \frac{y}{x^{2}}\right) : (x-y)$

4) $(16x^{2}y^{4} - 12x^{4}y^{2} + 8x^{2}y^{2}) : (-4a^{2}x^{2}y^{2})$

5) $(-ax^{2m-n} + bx^{m} - cx^{m+n} - dx^{n}) : (-x^{n})$

6) $a^{2} + x^{2} - \left(\frac{a^{2}}{x^{2}} - \frac{a}{x} + 1\right)x^{2} + 2a - 3x - \frac{a-2x}{c} \,.\, 2c + a : \frac{a}{x}$

(R.: $ax + 2x$)

3. 1) $(x + x^{2} - 5x^{3} + 3x^{4}) : (1-x)$

2) $(a^{4}b^{6} - a^{6}b^{4}) : (a^{2}b^{3} - a^{3}b^{2})$ (R.: $a^{2}b^{3} + a^{3}b^{2}$)

3) $(xz + xu + yz + yu) : (x+y)$ (R.: $u + z$)

4) $(a^{2}x^{2} + abxy - 2b^{2}y^{2}) : (ax - by)$ (R.: $ax + 2by$)

5) $(x^{6} - x^{5} + x^{3} - 2x^{2} + 1) : (1 - x^{2})$

6) $(ax^{3} + bx^{2}y + cx^{2}z - ax - by - cz) : (x^{2} - 1)$ (R.: $ax + by + cz$)

7) $(x^{3} + 1) : (x + 1)$

8) $(1 - 5x^{2} + 3x^{3} - 3x^{4} + 2x^{5}) : (-2x + 1)$ (R.: $1 + 2x - x^{2} + x^{3} - x^{4}$)

9) $(a^{3} - b^{3}) : (a - b)$

10) $(z^{4} - 1) : (z \pm 1)$

11) $(x^{5} + y^{5}) : (x + y)$

11a) $(a^{n} + b^{n}) : (a + b)$

12) $(a^{6} - b^{6}) : (a - b)$

12a) $(a^{n} - b^{n}) : (a - b)$

13) $(a^{6} - b^{6}) : (a^{2} - b^{2})$

14) $(8a^{3} - 27b^{3}) : (3b - 2a)$ (R.: $-(4a^{2} + 6ab + 9b^{2})$)

15) $(x^{3} - 27y^{3}) : (3y - x)$

16) $(x^{4}y^{9} + x^{3}y^{4}) : (xy^{2} + x^{2}y)$

17) $(64x^{6}y^{6} - 1) : (2xy - 1)$

18) $(x^{3n} + 1) : (x + 1)$

19) $(a^{5} + b^{5}) : (a \pm b)$; b) $(a^{5} + b^{5}) : (a^{2} + b^{2})$

20) $(x^{10} + 1) : (x^{2} + 1)$

21) $x^{m+1}y^{m+2} - x^{2m}y^{3} + x^{3}y^{2m} - x^{m+2}y^{m+1}) : (xy^{m} - x^{m}y)$

(R.: $x^{m}y^{2} + x^{2}y^{m}$)

22) $\left(2x^{3} - \frac{16}{27}\right) : 2\left(x - \frac{2}{3}\right)$

23) $(81a^{2n} - 16b^{2n}) : (9a^{n} + 4b^{n})$

24) $(16x^{4}y^{4} - 1) : (4x^{2}y^{2} - 1)$ (R.: $4x^{2}y^{2} + 1$)

25) $(1 - a^{10}) : (1 - a^{2})$

26) $(8x^{3} + 27y^{3}) : (2x + 3y)$

27) $[x^{2} + (a - b)x - ab] : (x - b)$ (R.: $x + a$)

4. 1) $(a^6+2a^3x^3-a^4x^4+x^6):(a^3+a^2x^2+x^3)$ (R.: $a^3-a^2x^2+x^3$)
2) $(a^2x^4+4ax^3+4x^2-4):(ax^2+2x-2)$
3) $(-0{\cdot}5x^2+0{\cdot}3xy+0{\cdot}8xz+0{\cdot}2yz-0{\cdot}3z^2):(0{\cdot}5x+0{\cdot}2y-0{\cdot}3z)$
4) $(3x^5-8x^4+8x^3-5x^2+3x-1):(-x^2+2x-1)$
(R.: $-3x^3+2x^2-x+1$)
5) $(x^4-x^3y+2x^2y^2-xy^3+y^4):(x^2-xy+y^2)$ (R.: x^2+y^2)
6) $(a^4+2a^2b^2+b^4-1):(1+a^2+b^2)$ (R.: a^2+b^2-1)
7) $(1-x-x^6+x^7):(1-x-x^2+x^3)$ (R.: $1+x^2+x^4$)
8) $(x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1):(x-1)^3$
9) $(z^8-u^8):[(z^4-u^4):(z^2+u^2)]$
9a) $(x^4+a^2x^2+a^4):(x^2+ax+a^2)$ (R.: x^2-ax+a^2)
10) $(u^4-u^3v+uv^3-v^4):[(u^2-uv+v^2)\,(u+v)]$ (R.: $u-v$)
11) $[(a^4+b^4)^2-2b^4(a^4-b^4)]:[(a^2-b^2)^2+2b^2(a^2-b^2)]$
12) $[(x^6-3x^4+3x^2-1):(x^2-1)]:[(x^2-1):(x-1)]$ (R.: x^3-x^2-x+1)
13) $\{[(x^6-3x^4+3x^2-1):(x^2-1)]:(x^2-1)\}:(x-1)$ (R.: $x+1$)
14) $\{[(x^{12}-2x^6y^6+y^{12}):(x^3+y^3)]:(x-y)\}:(x^2+xy+y^2)$ (R: x^6-y^6)
15) $(x^{12}-2x^6y^6+y^{12}):[(x^3+y^3)\,(x-y)\,(x^2+xy+y^2)]$ (R: x^6-y^6)
16) $\{[x^3+(a+b-c)x^2+(ab-ac-bc)x-abc]:(x+a)\}:(x-c)$
(R.: $x+b$)
17) $(x^3-y^3)^2:(x^2+xy+y^2)$ (R. $(x^4-xy^3-x^3y+y^4)$
18) $(x^2-y^2)^3:(x-y)^2$ (R.: $x^4+2x^3y-2xy^3-y^4$)
19) $(1-64u^6):(1-2u+4u^2-8u^3+16u^4-32u^5)$
20) $(3x^5+7x^2y^3-4x^4y-10x^3y^2-12xy^4+2y^5):(x^3-3x^2y+2xy^2-2y^3)$
(R.: $3x^2+5xy-y^2$)
21) $(1-r^{10}):(1+2r+2r^2+2r^3+2r^4+r^5)$

5. 1) $-\dfrac{(-4)\,(-10)\,(-6)}{(-2\,.\,(-3)}+\dfrac{(-2)^3}{(-1)^4}$

2) Skratiti $\dfrac{a^4-b^4}{b^2-a^2}$, $\dfrac{x-y+2}{y-x-2}$

3) $ax>-b,\ x=?$

4) $\dfrac{(x+a)\,(ax+b)}{x^3+a}=0,\ x=?$

5) Iz $a:b=c$ slijedi: $\begin{cases}(am):b=mc\\ a:(bm)=\dfrac{c}{m}\end{cases}$

6) Na umnošku se izvodi rač. op. 2-og stepena tako da se izvede bilo na kojem faktoru, a na kovcijentu na taj način da se izvede ili ista operacija na dividendu ili suprotna na divizoru; sa umnoškom se izvodi operacija 2-og stepena tako da se ona izvede sa svakim faktorom, a sa kvocijentom, da se sa dividendom izvede ista a sa divizorom suprotna operacija t. j.:
1) $(ab)\,.\,c=(ac)\,.\,b=a\,(b\,.\,c)$
2) $(ab):c=(a:c)\,b=a\,(b:c)$
3) $(a:b)\,.\,c=(ac):b=a:(b:c)$
4) $(a:b):c=(a:c):b=a:(b\,.\,c)$
5) $a\,(b\,.\,c)=abc$
6) $a:(b\,.\,c)=(a:b):c=(a:c):b$
7) $a\,.\,(b:c)=(ab):c=(a:c)\,b$
8) $a:(b:c)=(a:b)\,.\,c=(ac):b$

Dokaz?

6. Jedan je broj m-puta manji od drugoga; ako je ovaj x, koliki je prvi? (Šta predočuje kvocijent između dva broja?)
7. Neki broj x razdijeljen sa 3 daje za kvocijent 5, a ostatak 2; koliki je taj broj x? (R.: $x = 3 . 5 + 2 = 17$. Čemu je jednak dividend?)
8. Za koje su vrijednosti od x slijedeći izrazi jednaki
   1) nuli, 2) negativni, 3) pozitivni:
   $3x - 2$; $-2x + 3$; $-3x - 6$?
9. $2x - 3 = 0$; $x = ?$
   $-2x + 3 > 0$ „
   $-2x - 3 < 0$ „
10. $1 : (1 - x)$
11. $\dfrac{1}{1 + x^2}$
12. Koju vrijednost mora imati k u trinomu $x^4 + k x^2 y^2 + y^4$ da on bude djeljiv sa $x^2 - xy + y^2$? (R.: $k = 1$)
13. Treba odrediti tako k u trinomu $a^6 + 2k\, a^3 b^3 - b^6$ da on bude djeljiv sa $a^3 - 2a^2 b + 2ab^2 - b^3$ (R.: $k = 0$)

Skraćeno računanje

1. Korektura od 5—15 jest 1
   „ „ 15—25 „ 2
   „ „ 25—35 „ 3
2. Broj 28·7326 skraćen na 3 decimale: 28·733
   „ 36·29 „ „ 1 . „ 35·3
3. Tačnost nepotpuna broja jednaka je tome broju podijeljenu jedinicom njegova najnižeg mjesta.
4. 35·04679 + 0·4662 + 632·549 = 668·062 (3 dec.)

5. **Skraćeno množenje**

```
18·2651 × 73·1416 (2 dec.)
614137
-------
1278557
  54795
   1827
    730
     18
     11
-------
1335,938 = 1335,94
```

Uzme se tačniji broj kao multiplikator, najviša se njegova cifra potpiše ispod najniže cifre multiplikanda, a ostale obrnutim redom. Multiplikator se skraćuje svaki put za 1 cifru itd.

6. **Skraćeno dijeljenje**

```
                (4 dec.!)
79·961 : 25·452668 = 3·1416.   Riječima?
 3603
 1058
   40
   15
   11
```

Primjer :

1) $24\frac{5}{11} \times 5\frac{4}{9}$ (3 dec.)
2) $0{\cdot}19645 \ldots \times 2{\cdot}1567 \ldots$ $(0{\cdot}42368 \ldots)$
3) $1 : \pi$ (5 dec.)
4) $6{\cdot}80734 : 3{\cdot}159$ (2 dec. : $2{\cdot}15$)
5) $180^0 : 3{\cdot}14$ $(= 57^0\, 17'\, 44{\cdot}88'')$
6) $\dfrac{3{\cdot}027 \ldots \times 8.2579 \ldots}{9{\cdot}461 \ldots \times 6{\cdot}3047 \ldots}$
7) 1 dm^3 uzduha teži $1{\cdot}29349\, g$, 1 dm^3 vodika $0{\cdot}089551\, g$. Koliku gustoću ima vazduh obzirom na vodik?

Primjena osnovnih rač. operacija

Dekadski brojni sustav § 3

(baza 10)

1. Broj N u dekadskom brojnom sustavu piše se:

$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots a_1 10 + a_0$

$324_{(10)} = 3 \,.\, 10^2 + 2 \,.\, 10 + 4;$

$324_{(5)} = 3 \,.\, 5^2 + 2 \,.\, 5 + 4 = 89$

$\vdots \qquad \vdots$

2. Broj $2789_{(10)}$ treba predočiti u sistemu baze 5.

R.: $5^0, \; 5^1, \; 5^2, \; 5^3, \; 5^4 \ldots$

$\;\;\;\;\; 1, \; 5, \; 25, \; 125, \; 625 \ldots$

$2789 : 625 = 4$
$289 : 125 = 2$
$39 : 25 = 1$
$14 : 5 = 2.$
4

$2789_{(10)} = 4 \,.\, 5^4 + 2 \,.\, 5^3 + 1 \,.\, 5^2 + 2 \,.\, 5 + 4_{(5)}$

Dokaži:

a) $2789_{(10)} = 1745_{(12)}$
b) $461_{(7)} = 239_{(10)}$
c) $6774_{(10)} = 15166_{(8)}$
d) $\dfrac{57}{16} = 3 \,.\, 6^0 + 3 \,.\, 6^{-1} + 2 \,.\, 6^{-2} + 1 \,.\, 6^{-3} + 3 \,.\, 6^{-4} = 3{\cdot}3216_{(6)}$

Djeljivost dekadskih brojeva § 4

1. Dekad. je broj djeljiv (bez ostatka!) sa: 2, 5, 10, ako mu je jednoznamenkasti svršetak djeljiv s tim brojevima; sa: 4, 25 ili 100, ako mu je dvoznamenkasti svršetak, a sa: 8, 125 ili 1000, ako mu je troznamenkasti svršetak djeljiv tim brojevima.

2. Sa 3 i 9 broj je onda djeljiv, ako mu je suma znamenaka djeljiva sa tim brojevima, a sa 11, ako je razlika sume znamenaka na neparnim i sume znamenaka na parnim mjestima djeljiva sa 11. (Dokaz se izvodi iz načina pisanja broja u dekad. sustavu.)

§ 5 Rastavljanje brojeva na proste faktore

1. Broj koji nije djeljiv ni s jednim drugim brojem osim sa 1 ili sam sobom zove se (apsolutno) prosti broj, na pr.: 2, 3, 5, 11... a, b, $(a+b)$. Svaki drugi broj je **složen** (nastaje množenjem drugih brojeva!), na pr.: 12, 24... ab, a^2-ab, $(a+b)^2$.

2. Ako je $a=b\,.\,c\,.\,d$, onda su brojevi b, c, d **mjere** broja **a**, a on njihov višekratnik. 12 je trokratnik od 4, a četverokratnik od 3. Broj 3 **zajednička je mjera** brojeva 9 i 12, jer se u oba nalazi bez ostatka.

3. Složeni brojevi, koji nemaju zajedničke mjere zovu se relativno prosti brojevi [na pr.: 12 i 35, $(a+b)^2$ i $(a-b)^2$].

4. Svaki se složen broj dade rastaviti na proste faktore (primfaktore) i predočiti kao produkt prostih brojeva:

a) Izlučivanjem zajedničkog faktora

(koji se metne pred zagradu, a u zagradi ostane zadani polinom podijeljen tim faktorom), na pr.:

1. $12ax^5y^2-8bx^3y^3+4cx^2y^3=4x^2y^2(3ax^3-2bxy+cy)$
2. $$\begin{aligned} a^2-a+b-b^2 &= a^2-b^2-(a-b) \\ &= (a+b)\,(a-b)-(a-b) \\ &= (a-b)\,(a+b-1) \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} x^3-x^2y+xy^2-y^3 &= x^2(x-y)+y^2(x-y) \\ &= (x-y)\,(x^2+y^2) \end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned} a(x-y)+2b(y-x) &= a(x-y)-2b(x-y) \\ &= (x-y)\,(a-2b) \end{aligned}$$
5. Odredi sve proste i složene mjere brojeva: $36x^2y^3$, 66, 360.

R.: *a)*
$$\begin{array}{r|l} 66 & 2 \\ \hline 33 & 3 \\ 22 & 6 \\ 11 & \end{array}$$
$9^2>66$

b)
$$\begin{array}{r|l} 36x^2y^3 & 2xy \\ \hline 18xy^2 & 2xy \\ 9y & 3y \\ 3 & 3 \end{array}$$

Broj 66 djeljiv je sa 33, 22, 11, 2, 3, 6.

b) Pomoću važnih produkata:

1) $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)(a\pm b)$

2) $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)(a\pm b)(a\pm b)$

3) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
5) $a^n + b^n = (a + b)(a^{n+1} - a^{n+2}b + \ldots - ab^{n+2} + b^{n-1})\,;\ n = ?$

Na pr.:

1) $2x^5y - 32xy^5 = 2xy(x^4 - 16y^4)$
$= 2xy(x^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2)$
$= 2xy(x^2 + 4y^2)(x + 2y)(x - 2y)$

2) $x^5 - x^3 - x^2 + 1 = x^5 + 1 - x^2(x + 1)$
$= (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - x^2)$
$= (x + 1)(x^4 - x^3 - x + 1)$

3) $5x^2 - 10xy + 5y^2 + 3xz - 3yz = 5(x^2 - 2xy + y^2) + 3z(x - y)$
$= 5(x - y)^2 + 3(x - y)z$
$= (x - y)[5(x - y) + 3z]$

4) $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac - bd) = a^2 + 2ac + c^2 - (b^2 + 2bd + d^2)$
$= (a + c)^2 - (b + d)^2$
$= (a + b + c + d)(a + c - b - d)$

5) $a^4 - a^2b^2 = a^2(a^2 - b^2) = a^2(a + b)(a - b)$

c) Kvadratični trinom:

1) $x^2 + (m + n)x + m\,.\,n = x^2 + mx + nx + m\,.\,n$
$= x(x + m) + n(x + m)$
$= (x + m)(x + n)$

2) $mx^2 + (m + n)x + n = mx^2 + mx + nx + n$
$= mx(x + 1) + n(x + 1)$
$= \underline{(x + 1)(mx + n)}$

(Srednji se član rastavi na 2 broja koji pomnoženi daju produkt vanjskih članova).

3) $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 3x + 2x + 6$
$= x(x + 3) + 2(x + 3)$
$= (x + 3)(x + 2)$

4) $x^2 - 2x - 15 = x^2 - 5x + 3x - 15$
$= x(x - 5) + 3(x - 5)$
$= (x - 5)(x + 3)$

5) $6x^2 + 17xy + 12y^2 = 6x^2 + 9xy + 8xy + 12y^2$
$= 3x(2x + 3y) + 4y(2x + 3y)$
$= \underline{(2x + 3y)(3x + 4y)}$

Zadaci

1. Rastavi na proste faktore:

1) $60a^4x^2y^3z^4$, 2) 1064, 3) 420

2. Rastavi na faktore:

1) $x^2 - ax - bx + ab$ [R.: $(x - a)(x - b)$]

2) $2ax - 3ay + 2bx - 3by$

3) $ax + ay - bx - by - cx - cy$ [R.: $(a - b - c)(x + y)$]

4) $a(a - 2b) - 2b(2b - a) - a + 2b$

3. 1) $a(1 - b^4) + b(1 - b^4)$

2) $81x^4y^4 - 16z^4$

3) $16(x + y)^2 - 9z^2$

4) $(a + x)^2 - 4ax - a^2 + x^2$ [R.: $(x - a)2x$]

5) $9a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2$

6) $x^8 - 1$ [R.: $(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$]

7) $8r^3 + 27s^3$

8) $a^{10} + b^{10}$

9) $v^6 - y^6$

10) $729m^6 + 64$

11) $a^2 - b^6$

12) $16x^{4n} - y^{4p}$; 12a) $1 - 16a^4$

13) $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(ad - bc)$

14) $9 - x^2 + 9x^3 - x^5$ [R.: $1 + x^3)(3 + x)(3 - x)$]

15) $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ [R.: $(x - 3)(x^2 + 5)$]

16) $x^5 - xy^4 + x^4y - y^5$

17) $12x^2 + x - 1$ [R.: $(3x + 1)(4x - 1)$]

18) $8a^2b^2 + 12abcd - 36c^2d^2$

19) $9x^2 - 6xy + y^2 - z^2$ [R.: $(3x - y + z)(3y - y - z)$]

20) $x^2 + 2xy - 15y^2$

21) $3a^2 - 5ab - 12b^2$ [R.: $(a - 3b)(3a + 4b)$]

22) $x^2 - 7x + 12$

23) $x^2 - 2x - 15$

24) $x^2 - 2bx + b^2 - a^2$ [R.: $(x + a - b)(x - a - b)$]

25) $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(a + c)(b + c)$. Dokaz!

4. Razvi površinu trokuta iz zadanih stranica a, b, c

$$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}, \text{ gdje je } s = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\text{R.: } P = \frac{c}{2}\sqrt{\left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)}$$

5. Isto za tetivni četverokut iz stranica a, b, c, d

$$P = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}. \text{ R.: Izvesti iz}$$

$$P = (ab + cd)\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)}$$

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}$$

6. Suma triju uzastopnih brojeva je uvijek djeljiva sa 3, a njihov produkt sa 6. Dokaz?
7. Broj razdijeljen sa 9 (3) daje isti ostatak kao suma cifara toga broja razdijeljena sa 9 (3). Prcba sa 9 (3)! Dokaz?
8. Diferencija dvaju brojeva sa istim ciframa uvijek je djeljiva sa 9. Dokaz?
9. Isto tako diferencija broja i broja sa obrnutim ciframa.
10. Zajednička mjera dvaju ili više brojeva mjera je i njihove sume ili razlike.
11. Broj djeljiv sa drugim brojem djeljiv je i sa njegovim faktorima. Dokaz?

Najveća zajednička mjera §6

(= najveći broj koji se nalazi u zadanim brojevima bez ostatka)
nalazi se:

a) Rastavljanjem na proste faktore

(Najveća zaj. mjera $M(\ .\ .\ .\ )$ = produkt svih zajedničkih mjera), na pr.:

1. $M(10a^2x^4,\ 5a^3x^3,\ 20a^4x^4) = ?$

R.:
$$\begin{array}{lll|l} 10a^2x^4, & 5a^3x^3, & 20a^4x^4 & 5ax \\ \hline 2ax^3, & a^2x^2, & 4a^3x^3 & ax \\ 2x^2, & ax, & 4a^2x^2 & x \\ 2x, & a, & 4a^2x & \end{array}$$

$$M(10a^2x^4,\ 5a^3x^3,\ 20a^4x^4) = 5ax\ .\ ax\ .\ x = 5a^2x^3$$

2. $M(x^4y^2 - x^2y^4,\ x^4 - x^2y^2,\ x^4 - x^3y) = ?$

R.:
$$\begin{array}{lll|l} x^2y^2(x-y)\ (x+y), & x^2(x-y)\ (x+y), & x^3(x-y & x^2 \\ \hline y^2(x-y)\ (x+y), & (x-y)\ (x+y), & x(x-y), & x-y \\ y^2(x+y), & (x+y), & x & \end{array}$$

$$M(x^4y^2 - x^2y^4,\ x^4 - x^2y^2,\ x^4 - x^3y) = x^2(x-y)$$

3. $M(x^2 + 4xy + 4y^2,\ x^2 + 2xy - 3xy^2 - 6y^3) = ?$

R.: Polinomi se najprije rastave na faktore i uzme produkt zajedničkih faktora; dakle:
$$\begin{array}{ll|l} (x+2y)\ (x+2y), & (x+2y)\ (x-3y^2) & x+2y \\ \hline x+2y, & x-3y^2 & \end{array}$$

$$M(\ .\ .\ .\ ) = x + 2y$$

4. $M(a^4 - y^4,\ a^2x^2 + x^2y^2)$

R.:
$$\begin{array}{ll|l} (a^2+y^2)\ (a^2-y^2), & x^2(a^2+y^2) & a^2+y^2 \\ \hline a^2-y^2, & x^2 & \end{array}$$

$$M(\ .\ .\ .\ ) = a^2 + y^2$$

Zadaci

1) $M(6x^3y^2 - 6x^2y^3,\ 12x^4y^2 - 12x^2y^4) = ?$
2) $M(27a^2 - 12b^2,\ 27a^2 - 36ab + 12b^2) = ?$
3) $M(2x^3 - 3xy - 2y^2,\ x^2 - 4y^2) = ?$
4) $M(3x^2 - 12,\ x^4 - 16) = ?$ (R.: $x^2 - 4$)
5) $M(x^2 - 9,\ x^2 - x - 6) = ?$ (R.: $x - 3$)
6) $M(x^5 + x^2y^3 - x^3y^2 + y^5,\ x^5 + x^2y^3 + x^3y^2 + y^5) = ?$
7) $M(a^2 - 5ab + 6b^2,\ a^2 + 3ab - 10b^2) = ?$
8) $M(x^3 + y^3,\ x^2 - y^2) = ?$ (R.: $x + y$)

b) Verižnim dijeljenjem

(Veći se broj podijeli manjim, divizor ostatkom, novi divizor novim ostatkom i t. d. do ostatka nule. Divizor u zadnjoj diviziji = najveća zaj. mjera):

1. $\underline{M(1008,\ 520) = ?}$

R.: $1008 : 520 = 1$
$\quad 488$
$520 : 488 = 1$
$\quad 32$
$488 : 32 = 15$
$\quad 8$
$32 : 8 = 4$

$M(1008,\ 520) = 8$

2. $\underline{M(x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24,\ x^3 - 7x^2 + 4x + 12) = ?}$

R.: $(x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24) : (x^3 - 7x^2 + 4x + 12) = x + 5$

$$\begin{array}{l}
x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 12x \\
\underline{- \quad + \quad - \quad -} \\
5x^3 - 17x^2 + 2x + 24 \\
5x^3 - 35x^2 + 20x + 60 \\
\underline{- \quad + \quad - \quad -} \\
18x^2 - 18x - 36
\end{array}$$

(Ovaj ostatak podijeliti najprije sa 18, dakle)

$(x^3 - 7x^2 + 4x + 12) : (x^2 - x - 2) = x - 6$

$\underline{M(\ .\ \ .\ \ .\ ) = x^2 - x - 2}$

Zadaci

1) $M(32481,\ 4329) = ?$
2) $M(3x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 8x + 3,\ 2x^3 - 9x^2 + 9x - 7) = ?$

3) $M\ 8a^3 + 22a^2 + 27a + 18,\ 6a^3 + 5a^2 - 3) = ?$
4) $M(6x^4 - 5x^2 - 1,\ 5x^3 - 4x - 1,\ 2x^2 - 2) = ?$
5) $M(4p^6 - 2p^5 - 10p^3 - 10p^2 - 2p,\ 12p^6 - 6p^5 - 12p^4 - 12p^3 - 24p^2 - 6p) = ?$ $= 2p(2p^2 - 3p - 1)$. (Najprije se izluči zajednički faktor $2p$ i onda provede verižno dijeljenje).

Najmanji zajednički višekratnik V § 7

(= najmanji broj u kojem se zadani brojevi nalaze bez ostatka)

nalazi se:

a) Rastavljanjem na faktore

(V = produkt prostih faktora zadanih brojeva, i to svaki uzet u najvišoj potenciji u kojoj dolazi bilo u kojem od zadanih brojeva; ili V = produkt prostih zajedn. faktorâ $\times$ svi ostali), na pr.:

1. $V(6abc,\ 10ab^2c,\ 2abc^2) = ?$

R.: $6abc,\ 10ab^2c,\ 2abc^2 \mid 2abc$

$3,\ 5b,\ c$

$V(6abc,\ 10ab^2c,\ 2abc^2) = 2abc \cdot 3 \cdot 5b \cdot c$
$= 30ab^2c^2$

2. $V(x^3 - xy^2,\ y^3 - yx^2,\ x^4 - y^4,\ x^2y^2) = ?$

R.: $x(x+y)(x-y),\ y(y+x)(y-x),\ (x^2+y^2)(x+y)(x-y),\ x^2y^2 \mid x+y$

$x(x-y),\ y(y-x),\ (x^2+y^2)(x-y),\ x^2y^2$

$V(\ .\ .\ .\ ) = (x+y)\,x(x-y) \cdot y(y-x)\,(x^2+y^2)(x-y) \cdot x^2y^2$
$= x^3y^3(x^4-y^4)[-(x-y)^2]$ i t. d.

3. $V(9a^3 - a,\ (3a-1)^2,\ 6ab - 2b) = ?$

R.: $a(3a+1)(3a-1),\ (3a-1)^2,\ 2b(3a-1) \mid 3a-1$

$a(3a+1),\ (3a-1),\ 2b$

$V(\ .\ .\ .\ ) = (3a-1)(3a-1) \cdot 2ab \cdot (3a+1)$
$= 2ab(3a-1)^2(3a+1)$ i t. d.

b) Pomoću najveće zajedn. mjere:

P.	$M(ab) = m$
Z.	$V(ab) = \dfrac{ab}{m} = \dfrac{a}{m} \cdot b = \dfrac{b}{m} \cdot a$

1. $V(8,\ 12) = \frac{8}{4} \cdot 12 = 24$

2. $V(x^4 - 2x^2y^2 + y^4,\ x^4 - y^4) =$
$$= \frac{(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)\,(x^4 - y^4)}{x^2 - y^2} =$$
$$= \underline{x^6 - x^4y^2 - x^2y^4 + y^6}$$

c) **V (relativno-prostih brojeva** jednak je njihovu umnošku):

1. $V(x - y,\ x + y,\ x^2 + y^2) = (x - y)\,(x + y)\,(x^2 + y^2)$
$= x^4 - y^4$.

2. $V(a^3 + b^3,\ a^3 - b^3) = ?$

3. $V(x^2 + xy + y^2,\ x^2 - xy + y^2,\ x + y,\ x - y) = ?$

d) $V(8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 32) = ?$
R.: $V(8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 32) = V(24,\ 32)$ i t. d.

Zadaci

a) 1) $V(12a^2x^3y^4,\ 8a^2x^2y^2,\ 16a^4x^3y^4) = ?$
2) $V(x^2 + 5x + 6,\ x^2 + x - 6,\ x^2 - 4) = ?$
3) $V(2x - y,\ 4x^2 - y^2,\ 8x^3 - y^3) = ?$
4) $V[2x,\ x - 1,\ 3(x + 1),\ 6(x^2 - 1),\ 12(x + 1)^2] = ?$
5) $V(x^2 - y^2,\ x^4 - y^4,\ x^6 - y^6,\ x^8 - y^8) = ?$
6) $V(3x^2 - x,\ 6x^4 - 2x^2,\ 9x^5 - 6x^4 + x^3) = ?$
7) $V(x^2 - y^2,\ x^2 + xy + y^2,\ x^2 - xy + y^2,\ x^6 - y^6) = ?$
8) $V(a^2 - x^2,\ a^2 + ax + x^2,\ a^4 + a^2x^2 + x^4) = ?$
9) $V(x + y,\ x - y,\ 3xy + 3y^2) = ?$ R.: $3y\,(x^2 - y^2)$
10 $V(3x^2 + x - 2,\ 4x^2 + 12x + 9,\ 10x^2 + 19x + 6)$
11) $V(x^3 + 27y^3,\ x^3 - 27y^3,\ x^3 + 2x^2y - 6xy^2 - 27y^3) = ?$

b) 12) $V(x^4 - 16y^4,\ x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4) = ?$
13) $V(x^2 + 6x + 9,\ x^2 + 5x + 6) = ?$
14) $V[a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,\ 2a^2 - b^2] = ?$
15) $V(x^2 + xy - 6y^2,\ x^2 + 3xy + 2x + 6y) = ?$
16) $V(a^3 - 2a^2 + 5a + 6,\ a^3 - 3a + 2) = ?$
17) $V(x^4 - 3x^2 - 6x + 8,\ x^3 - 2x^2 - x + 2^2) = ?$

Razlomci — Raširivanje brojnog područja § 8

Definicija:

Razlomak ≡ kvocijent oblika $\frac{a}{b}$	$a \equiv$ brojnik, $b \equiv$ nazivnik →a kroz b ili a „betina"
„—" razlomkova crta!	a i b mogu biti i relativno prosti brojevi.

$\frac{a}{b} \equiv$ recipročna vrijednost od $\frac{b}{a}$

Pravila:

1. $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$	1. **Raširivanje razlomaka**
2. $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$	2. **Skraćivanje razlomaka** (Brojnik i nazivnik podijele se zajedničkom mjerom)
3. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$	3. **Sabiranje i oduzimanje istoimenih razlomaka** (Brojnici se reduciraju, nazivnik ostaje nepromjenjen)
4. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	4. } **Sabiranje (oduzimanje) raznoimenih razlomaka** (Najprije se svedu na zajednički nazivnik i onda reduciraju brojnici)
5. $a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$	5. }
6. $\frac{a}{b} c = \frac{ac}{b} = \frac{a}{b:c}$	6. **Množenje razlomka cijelim brojem** (Brojnik mu se pomnoži tim brojem, a nazivnik ostaje nepromijenjen)
7. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	7. **Množenje razlomka razlomkom** (Produkt brojnika kroz produkt nazivnika!)
8. $\frac{am}{bn} \cdot \frac{cn}{dm} = \frac{ac}{bd}$	8. **Pri množenju se najprije krati** (unakrst, t. j. brojnik sa nazivnikom i obratno)
9. $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b} = \frac{a}{bc}$	9. **Dijeljenje razlomka cijelim brojem**
10. $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$	10. } **Dijeljenje razlomkom** (= množenje sa njegovom recipr. vrijednošću). Riječima?
11. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	11. }
12. $\frac{bm}{bn} : \frac{cm}{dn} = \frac{ad}{bc}$	12. **Kod dijeljenja najprije se krati** paralelno (brojnik s brojnikom, nazivnik nazivnikom!)

Opaska:

1. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ 2. $-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} < \frac{a}{b}; \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$	Riječima?
3. $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}; a : \frac{1}{b} = ab$	
4. $\frac{1}{a} : b = \frac{1}{ab}; 1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$	
5. $1 : \frac{1}{a} = a; \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$	
6. $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{b}{a}$	
7. $(a \pm b) : c = \frac{a \pm b}{c}$ Razlomkova crta mjesto zagrade, zato se sa brojnikom računa kao da je u zagradi ili se meće u zagradu.	
8. Dokaz! Razlomak smatraj kao kvocijent i t. d.	
9. $\frac{\frac{a}{b}}{c} = a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$	**9.—10. Dupli razlomci**
10. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ Dupli se razlomak svodi na jednostavni: produkt vanjskih kroz produkt unutarnjih članova.	
11. $\frac{2}{8} = 0{\cdot}25$ (iz $2:8$)	**11.—12. Pretvaranje običnog razlomka** u decimalni i obratno
12. $0{\cdot}25 = \frac{25}{100} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	
13. $\frac{2}{3} = 0{\cdot}\dot{6}$ mjesto $0{\cdot}666\ldots$	**13. Čisto periodičan** decimalni razlomak (beskonačan!)
14. $0{\cdot}\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	
15. $2{\cdot}3\dot{5}\dot{4} = 2{\cdot}34545\ldots$	**15. Mješovito periodičan** decimalni razlomak (beskonačan!)
16. $2{\cdot}3\dot{4}\dot{5} = 2\frac{345-3}{990} = 2\frac{342}{990}$ i t. d.	

Primjer I

1. Svedi na najmanji zajednički nazivnik razlomke:

$$\frac{ax}{x+2a}, \quad \frac{x+a}{x^2-4a^2}, \quad \frac{x-a}{x-2a}, \quad \frac{ax+1}{x^2-4ax+4a^2}$$

R.: Zajednički nazivnik = (redovno) najmanji zajednički višekratnik svih zadanih nazivnika; zato je:

$$V(x+2a, x^2-4a^2, x-2a, x^2-4ax+4a^2) =$$
$$= V(x^2-4a^2, x^2-4ax+4a^2)$$
$$= \underline{(x-2a)^2 (x+2a)}$$

$$\frac{ax}{x+2a} = \frac{ax \cdot (x-2a)^2}{(x+2a)(x-2a)^2} \text{ itd.;}$$

$$\frac{x+a}{x^2-4a} = \frac{(x+a)(x-2a)}{(x+2a)(x-2a)^2} \text{ itd.;}$$

$$\frac{x-a}{x-2a} = \frac{(x-a)(x+2a)(x-2a)}{(x+2a)(x-2a)^2} \text{ itd.;}$$

$$\frac{ax+1}{x^2-4ax+4a^2} = \frac{(ax+1)(x+2a)}{(x+2a)(x-2a)^2} \text{ itd.}$$

2. **Skrati razlomke:**

$$\frac{3x^4y^2-12x^2y^2}{4x^4y^3+8x^3y^3}$$

R.: Brojnik se i nazivnik rastave na faktore i skrate zajedničkim faktorima; prema tome:

$$\frac{3x^4y^2-12x^2y^2}{4x^4y^3+8x^3y^3} = \frac{3x^2y^2(x^2-4)}{4x^3y^3(x+2)} = \frac{3(x-2)}{4xy}$$

3. Isto $\dfrac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$ za $x=a$

R.: Zadani razlomak za $x=a$ nema određene vrijednosti. Ali ako se prije skrati, pa onda supstituira $x=a$, dobije određenu graničnu vrijednost:

$$\frac{x^2-a}{x^3-a^3} = \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \frac{x+a}{x^2+ax+a^2} = \frac{2a^2}{3a_{(x=a)}} = \frac{2}{3a}$$

Primjer II

1. Reduciraj razlomke:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^4+3x^2} - \frac{2(x+1)}{x^2-9}$$

R.: Najprije razlomke svesti na zajednički nazivnik pa reducirati brojnike; prema tome:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x^4+3x^2}-\frac{2(x^2+1)}{x^2-9}=\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{x^2(x+3)}-\frac{2(x^2+1)}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{(x+3)(x-3)+(x+1)(x-3)-2x^2(x^2+1)}{x^2(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-9+x^2-2x-3-2x^4-2x^2}{x^2(x+3)(x-3)}$$

$$=-\frac{2(x^4+x+6)}{x^2(x+3)(x-3)}$$

2. $$a^2-b^2-\frac{a^4-2a^2b^2-b^4}{a^2+b^2}=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)-a^4+2a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}=$$

$$=\frac{a^4-b^4-a^4+2a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$$

3. $$\frac{x-2}{(x+1)(x+2)}-\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}-\frac{x}{1-x^2}=$$

$$=\frac{x-2}{(x+1)(x+2)}-\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}+\frac{x}{x^2-1}=$$

$$=\frac{(x-2)(x-1)-(x+1)(x+1)+x(x+2)}{(x+2)(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x^2-3x+2-x^2-2x-1+x^2+2x}{(x+2)(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-3x+1}{(x+2)(x^2-1)}$$

Primjer III

1. $$\frac{a-b}{a^3+a^2b}\cdot(a+b)=\frac{(a-b)(a+b)}{a^2(a+b)}=\frac{a-b}{a^2}$$

2. $\dfrac{a^2-b^2}{x+1}:(a+b)$ R.: Razlomak se dijeli sa cijelim brojem, ili da mu se podijeli brojnik tim brojem, a nazivnik ostaje nepromijenjen ili da mu se tim brojem pomnoži nazivnik a brojnik ostavi nepromijenjen. Prvi je slučaj kad je brojnik djeljiv zadanim brojem. Dakle:

$$\frac{a^2-b^2}{x+1}:(a+b)=\frac{(a^2-b^2):(a+b)}{x+1}=\frac{a-b}{x+1}$$

3. $\dfrac{a^3x^2}{b^4y^3}:\dfrac{a^2x}{b^3y^2}$ • R.: Dijeli se brojnik brojnikom, nazivnik sa nazivnikom,

ako se dadu podijeliti; inače se prvi razlomak množi recipročnom vrijednošću drugoga:

$$\frac{a^3x^2}{b^4y^3} : \frac{a^2x}{b^3y^2} = \frac{a^3x^2 : a^2x}{b^4y^3 : b^3x^2} = \frac{ax}{by}$$

3 a) $(a^2 - b^2) : \frac{a+b}{2a}$ [R.: Razlomkom se dijeli da se množi njegovom recipročnom (obrnutom) vrijednošću].

$$(a^2 - b^2) : \frac{a+b}{2a} = (a^2 - b^2)\frac{2a}{a+b} = 2a(a-b)$$

4. $$3x^2y^3z^4 \cdot \frac{5abc}{6x^3y^4z^5} \cdot \frac{2abc}{5xyz} - \frac{12a^6b^5c^4}{5x^3y^2z^2} : 6a^3b^3c^2 : \frac{2a}{5x}$$

$$= \frac{5abc}{2xyz} \cdot \frac{2abc}{5xyz} - \frac{2a^3b^2c^2}{5x^3y^2z^2} : \frac{2a}{5x} = \frac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2} - \frac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2} = 0$$

5. $$\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2b^2 + ab^3}{a^3 - b^3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 + a^2b} - \frac{9a^2 - 16b^2}{a^3 - b^3} \cdot \frac{a-b}{3a-4b} : \frac{3a+4b}{a^2+ab+b^2} =$$

$$= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{ab^2(a+b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a^2(a+b)} - \frac{(3a-4b)(3a+4b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \cdot$$

$$\cdot \frac{a-b}{3a-4b} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{3a+4b} = \frac{a}{a-b} - 1 = \frac{a-(a-b)}{a-b} = \frac{b}{a-b}$$

6. $$\left(\frac{x^3}{y^3} - \frac{5x^2}{6x^2} + \frac{19x}{6y} - 1\right) : \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{2y} + 3\right) = ?$$

R.: Dijeljenje polinoma polinomom gdje su članovi razlomci!

$$\left(\frac{x^3}{y^3} - \frac{5x^2}{6y^2} + \frac{19x}{6y} - 1\right) : \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{2y} + 3\right) = \frac{x}{y} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad (18) \\
\underline{\frac{x^3}{y^3} \mp \frac{x^2}{2y^2} \pm \frac{3x}{(6)\,y}} \qquad -\frac{5x^2}{6y^2} + \frac{x^2}{2y^2} = \frac{-5x^2 + 3x^2}{6x^2} \\
-\frac{x^2}{3y^2} + \frac{x}{6y} - 1 \\
\underline{\mp \frac{x^2}{3y^2} \pm \frac{x}{6y} \mp 1} \\
\qquad \emptyset
\end{array}$$

7. Razlomak $\frac{26}{65}$ skraćen sa 6 daje $\frac{2}{5}$ t. j. $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$; rezultat tačan, pogrešno rađeno! Isto $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ (U oba slučaja 6 se precrta kao tobožnji zajednički faktor!).

8. $\dfrac{x+1}{x-1}$ za $x = \dfrac{a+b^2}{2ab}$

R.: $$\frac{\dfrac{a^2+b^2}{2ab}+1}{\dfrac{a^2+b^2}{2ab}-1} = \frac{\dfrac{a^2+b^2+2ab}{2ab}}{\dfrac{a^2+b^2-2ab}{2ab}}$$

$$= \frac{(a+b)^2 \cdot 2ab}{(a-b)^2 \cdot 2ab}$$

$$= \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

Zadaci

1. Svedi razlomke:

1) $\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ na x^3-1; 2) $\dfrac{xy}{x-y}$, $\dfrac{x^2y^2}{x^2+xy+y^2}$, $\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ na zajed. nazivnik

3) $\dfrac{x}{x+1}$, $\dfrac{2x}{x-2}$, $\dfrac{3}{x+2}$, $\dfrac{4}{x^2-4}$, $\dfrac{2}{x^2-1}$ na zajednički nazivnik.

2. Kako se skraćuje razlomak? Skrati razlomke:

1) $\dfrac{36a^3b^2c^3x^6 \,.\, 48a^2b^3xy^4}{24c^2y^5 \,.\, 32a^2b^4x^5}$ 2) $\dfrac{ax^3+a}{a^2x+a^2}$ 3) $\dfrac{x^3-4x^2y+4xy^2}{x^2y-4x^3}$

4) $\dfrac{x^3-4x^2y+4xy^2}{x^2y-4y^3}$ 5) $\dfrac{a+b}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$; R.: $\dfrac{1}{a^2+b^2}$.

6) $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2-x+2}$; R.: $\dfrac{x+2}{x-2}$. 7) $\dfrac{2x^2+5xy+2y^2}{2x^2+3xy-2y^2}$; R.: $\dfrac{2x+y}{2x-y}$.

8) $\dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$ (Najprije raširiti razlomak sa $x-1$; R. $= x^3+1$)

9) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$ za $x=2$ 10) $\dfrac{x^6-2x^5+x^4}{x^6-x^4}$ za $x=1$

11) $\dfrac{a^4-2a^3b+2ab^3-b^4}{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$; R.: $\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$.

12) $\dfrac{9(a+b)^2-4c^2}{[3(a+b)-2c]^2}$; R.: $\dfrac{3(a+b)+2c}{3(a+b)-2c}$. 13) $\dfrac{(a-b)^2-b^2}{(a+b)^2-b^2}$.

14) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$; R.: $\dfrac{a+b-c}{a+c-b}$.

3. Kako se sabiraju (oduzimaju) istoimeni a kako raznoimeni razlomci? Reduciraj:

1) $$\left(\frac{xy^2}{2}-\frac{x^3y}{3}\right)-\left[-\left(\frac{xy^2}{4}+\frac{xy^2}{3}\right)\right]+\left\{-\left[-\left(-\frac{x^2y}{6}+\frac{xy^2}{8}\right)\right]\right\}$$

2) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; R.: $\dfrac{(a+b)^2+2ab}{a^2-b^2}$.

3) $x^2+xy+x^2-\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$; R.: $-\dfrac{2y^3}{x-y}$.

4) $\frac{a^4+b^4}{2a^2b^2}-1-\frac{(a^2+b^2)^2}{2a^2b^2}$ (R.: -2) 5) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{1-x}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{2-x}$

5a) $\frac{3xy}{x+y}-\frac{x^2y-xy^2}{x^2-y^2}-\frac{x^3+x^2y}{(x+y)^2}+\frac{x(x-2y)}{x+y}$; R.: Ø.

6) $\frac{x^2+1}{x^2-4}-\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x+2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$; R. : $\frac{x^5-7x^4+x^3+5x^2-4}{x^5-4x^3}$

7) $\frac{1}{x^2-9}-\frac{2}{(3-x)^2}+\frac{3}{(x+3)^2}$

7a) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\frac{a^2+b^2(2b-1)}{a^2-b^2}$; R.: 1

8) $\frac{4x^2}{10x-15y}-\frac{9y^2}{10x-15y}$ 9) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{3}{x^2+x-2}$

10) $\frac{x}{1-x}-\frac{1-2x}{x^3-1}+\frac{x}{x^2+x+1}$; R. : $-\frac{x^3+1}{x^3-1}$

11) $\frac{x^2y-x^4}{2y^2-6x^2y}-\frac{5x^2}{6y-18x^2}+\frac{27x^4+x^2y}{6y^2-54x^2}+\frac{x^2+6y}{6y}$; R.: 1

12) $\frac{2a(a+b)}{2ab+3b^2}-\frac{4ab}{4a^2-3b^2+4ab}-\frac{a}{b-2a}$; R.: $\frac{a}{b}$

13) Dokaži identitete: $\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)$

14) $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$ Dokaz!

15) $\frac{a^2+b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ Dokaz!

16) $\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}=\frac{b+c}{a(a+b+c)}$ Dokaz!

17) Iz $ad \gtreqless bc$ slijedi $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{c}{d}$

18) $\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{(x^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(a^2-b^2)}+\frac{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}{a^2(a^2-b^2)}$; R.: 1

Kako se množi razlomak cijelim brojem, a kako razlomak razlomkom?

1) $(-2x^3y^4)\cdot\frac{3abc}{4x^2y^4}\cdot\frac{-4xyz}{3a^2b^2c^2}$

2) $1-(x^2-4)\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-2}\right)$; R.: $x+11$

3) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(x^2-y^2)-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)(x^2+y^2)$

4) $\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1\right)(x^5+x^4)$

5) $\frac{a^2-3a+2}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2-9}+\frac{a-3}{a+3}\cdot\frac{9-a^2}{a-3}$

6) $\left(\frac{x}{y}+2\right)\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{2x}{y}+4\right)\left(\frac{x^3}{y^3}-8\right)-\frac{x^6}{y^6}+64$ R.: Ø

7) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)$

8) $\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{x}{y}-1\right)$; R.: $\frac{x^5}{y^5}-1$

9) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)-\left[\frac{x}{(x+1)^2}-\frac{x}{(x-1)^2}\right]\frac{x^2-1}{x}$

10) $\frac{x^2+3x+2}{x-3}\cdot\frac{x^2-9}{x+2}-\frac{x^2}{3+x}\cdot\frac{x^2-9}{3x}\cdot\frac{3x+9}{x^2-3x}$; R.: x^2+3x

5 Kako se dijeli razlomak cijelim brojem, a kako broj razlomkom? Kako se dijeli razlomak razlomkom?

1) $\left(\frac{x^4}{4}+ax^3-4a^2x^2\right):x^2-\frac{x^2-a^2}{2}:(x-a)$

2) $(a-b):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ 3) $\left(a^2+1+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}\right):\left(a+\frac{1}{a}\right)$; R.: $a+\frac{1}{b}$

4) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):(a-b)$; R.: $-\frac{1}{ab}$ 5) $x-y+\left[(z+u):\frac{z+u}{y}\right]$

6) $\left[1+\frac{2x}{(x-1)^2}\right]:\frac{x^2+1}{x^2-1}$ 7) $1:\left\{1:\left[1:\left(1:\frac{1}{a}\right)\right]\right\}$; R.: $\frac{1}{a}$

8) $\left(1:\frac{x^3-y^3}{x^3+x^2y^2+y^3}\right):\frac{x^3+x^2y^2+y^3}{x^4-xy^3-x^3y+y^4}$ (R.: $x-y$)

9) $\frac{ax+x}{ax+a}:\frac{-(1-a^2)}{(x+1)^2}$ 9a) $\left(\frac{15x^5}{16a^4}-\frac{25x^4}{4a^3}-\frac{25x^3}{28a^2}\right):\frac{5x^2}{4a^2}$

10) $x^2-y^2-\left[(x^2+y^2):\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right]$; R.: Ø

11) $\left(\frac{-x^3y^3}{z^3}\right):\left(-\frac{y^2}{z^2}\right):\left(\frac{x}{-y}\right)$ 12) $\frac{x^4}{y^2}:\left[\frac{x^2y^2}{z^2}:\left(\frac{y^4}{x^2}:z^2\right)\right]$; R.: 1

13) $\frac{x^4}{y^2}:\frac{x^2y^2}{z^2}:\frac{y^4}{x^2}:z^2$; R.: $\frac{x^4}{y^8}$ 14) $\frac{x}{y}:\left\{\frac{x^2}{yu}\left[\frac{x}{z}:\frac{y}{u}\left(\frac{x}{y}:\frac{z}{x}\right)\right]\right\}$; R.: 1

15) $\frac{a^6}{b^5c^2}:\left\{\left[\left(\frac{a^2}{bc}:\frac{b^2}{ac}\right):\left(\frac{b^2}{ac}:\frac{ab}{c}\right)\right]:\frac{bc^2}{a}\right\}$; R.: 1.

16) $\left(\frac{3c}{a-b}-\frac{a-b}{3c}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{3c}\right)$

17) $\left(\frac{x^2}{z}-\frac{xu}{y}-\frac{y^2z}{u^2}-\frac{yz^2}{xu}\right):\left(\frac{x}{y}-\frac{z}{u}\right)$

18) $\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{x^2}{y^2}+1\right):\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}+1\right)$; R.: $\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+1$

19) $\left(\frac{x^4}{a^4}+2\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^2}{a^2}-1\right):\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}-1\right)$; R.: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1$

20) $\left(a^4+\frac{a^2}{4}+\frac{1}{16}\right):\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)$; R.: $a^2-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}$

21) $\left(\frac{x^4}{y^3}-\frac{5x^3}{2y^2}+\frac{3x^2}{2y}+\frac{2x}{y}-\frac{x}{4}-1\right):\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right)$; R.: $\frac{x^3}{y^2}-\frac{2x^2}{y}+\frac{x}{2}+2$

22) $\left(\frac{5}{9}u^2 - \frac{10}{5}uv + 4sv - \frac{4}{5}s^2\right) : \left(\frac{u}{3} + \frac{2}{5}s + 2v\right)$

23) $\left(\frac{8x^6}{27y^3} - \frac{27a^3}{8b^6}\right) : \left(\frac{2x^2}{3y} - \frac{3a}{2b^2}\right)$

6. Kako se dupli razlomak svađa na jednostavan?

1) $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}}}$

2) $\dfrac{x+y}{x-y} : \dfrac{\dfrac{x+y}{x-y} - 1}{\dfrac{x-y}{x+y} + 1}$; R.: $\dfrac{x}{y}$

3) $\dfrac{\dfrac{a}{2-b}}{\dfrac{3a}{2-b}} + 3 - \dfrac{3}{3 - \dfrac{3}{3 - \frac{3}{2}}}$; R.: $\dfrac{1}{3}$

4) $\dfrac{x - \dfrac{1}{x}(x^2+1)}{\dfrac{x^2-1}{x} \cdot \dfrac{x^3-1}{x+1}}$

5) $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z}} : \left[1 + \dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right]$; R.: $\dfrac{2yz}{(x+y+z)^2}$

6) $\dfrac{\dfrac{-27a^3y^3}{a^3-a^2y} : \dfrac{8a^3y^3}{(1-y)^2}}{\dfrac{3y^3}{a^2} \cdot [-(a-ay)]}$

7) $\left\{\dfrac{\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2} - 1}{\dfrac{2xy}{x^2+y^2} + 1} : \dfrac{\dfrac{x^2}{y^2} - 1}{\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2x}{y} + 1}\right\} : \left(-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)$; R.: 1

8) $\dfrac{x+1}{x-1}$ za $x = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}, \dfrac{a^2+b^2}{2ab}$

9) $\dfrac{\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}} + \dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$

10) $\dfrac{a+b+c}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}} \cdot \dfrac{ab+ac+bc}{\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc}} : \dfrac{1}{\dfrac{1}{abc}}$; R.: abc; P.: $a = b = 1$, $c = 2$.

11) Pretvori u obične razlomke : *a*) $0{\cdot}\dot{3}\dot{0}$; *b*) $0{\cdot}\dot{9}$; *c*) $1{\cdot}2\dot{6}$ *d*) $2{\cdot}\dot{3}0\dot{3}$

Proporcionalnost (razmjernost) § 9

I Omjer

Def.:

Omjer ≡ kvocijent uzet u smislu poređenja ili mjerenja

$a : b$ ili $\dfrac{a}{b} \ldots (k)$ → a naprama b t. j. na a jedinica prve veličine odpada b jedinica druge veličine

$a = b \cdot k$, $a = b \cdot k^{\text{-ova}}$

k ≡ eksponent, faktor omjera, pokazuje za koliko je puta a veće od b; to je ona vrijednost od a, za koji je $b = 1$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m} = \frac{am}{bm}$$

Pojednostavljanje omjera!

Primjer I

Osoba A ima 20.000 Din, a osoba B 30.000 Din. Kako se odnose njihovi imeci?
R.: Odnose se kao 20.000 : 30.000 ili 2 : 3 t. j. na svaka 2 Din prvog otpada 3 Din drugog imetka.

Primjer II

1) Pojednostavi omjere *a*) $2\frac{1}{3} : 1\frac{2}{3}$ *b*) 0·45 : 0·75, *c*) $\left(x+\frac{1}{y}\right) : \left(x-\frac{1}{y}\right)$
2) A radi 12 dana dnevno 8 sati, a B 16 dana dnevno 6 sati. U kakvom odnosu stoje njihove plate, ako se rad prvog dvostruko cijeni: (R. 2 : 1)
3) Istostraničan trokut i krug imaju istu površinu; u kojem odnosu stoje njihovi opsezi? Kako se odnosi visina trokuta prema r kruga?
4) Kako se odnose površine u istostr. trokut upisanog i oko njega opisanog kruga? (R. 1 : 4)
5) Cilinder, polukugla i čunj nad istom bazom imaju jednake visine; kako se odnose njihovi volumeni (3 : 2 : 1)
6) Pješak pređe za 5 minuta 400 m, a automobil za 1^h 60 klm. Kako se odnose njihove brzine? (R.: 2 : 25)
7) U kojem omjeru dijeli visina hipotenuzu c, ako je jedna kateta a, a u kojem odnosu površinu trokuta? [R.: $a^2 : (c^2 - a^2)$]
8) U kojem odnosu dijeli pravac površinu kvadrata $ABCD$, ako on dijeli stranisu AB u omjeru $m : n$ (3 : 2), a stranicu CD u omjeru $p : q$ (1 : 2)? {R.: $[m(p+q)+p(m+n)] : [n(p+q)+q(m+n)]$ ili 7 : 8}
9) U kojem omjeru dijeli srednjica zadanog trapeza njegovu visinu?
10) Oko kugle polumjera r opisan je istostraničan valjak i istostraničan čunj. Kako se odnose volumeni tih triju tjelesa? (R.: 4 : 6 : 9)

II Razmjer (proporcija)

(Jednadžba između jednakih omjera)

a) **Jednostavni razmjer** (geometrijski!)

Def.:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ldots = k$ $a : b = c : d \ldots (=k)$	→ a naprama b odnosi se kao c naprama d	→ a i d vanjski, b i c nutarnji } članovi razmjera
$a = b \,.\, k$ $c = d \,.\, k$	$k \equiv$ konstanta, faktor proporcionalnosti, pokazuje da je a za toliko puta veće od b za koliko je puta c veće od d.	$c \equiv$ treća, $d \equiv$ četvrta proporcionala
$k \equiv$ ona vrijednost od a za koju je $b = 1$		

Pravila:

1. Iz $a : b = c : d$ $(=k)$ slijedi: $ad = bc$, ili $a = \frac{bc}{d}$, $b = \frac{ad}{c}$	**1. Produkt vanjskih = produktu unutarnjih članova**

2. $an : b = cn : d$ $a : bn = c : dn$ $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$ itd.	2. **Pojednostavljanje razmjera**
3. $a^n : b^n = c^n : d^n$ $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$	3.—5. **Transformacija**
4. $a : b = c : d$ $a : c = b : d$ $b : a = d : c$ itd.	
5. $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d$ $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$ $a : (a \pm b) = c : (c \pm d)$ itd.	
6. Iz $ad = bc$ slijedi $a : b = c : d$	6. **Jednaki se produkti** daju predočiti kao razmjer
7. Aritmetička sredina između $a_1 \; a_2 \ldots a_n$ $x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}$	7. Aritmetička sredina
8. $a : x = x : b$ $x^2 = ab$ $x = \sqrt{ab}$ Opć.: $x = \sqrt{a_1 \; a_2 \ldots a_n}$	8. **Postojan (neprekidan) razmjer** → $x \equiv$ druga geometr. proporcionala ili geometr. sredina između a i b
9. $(a - b) : (c - d) = a : d$	9. **Harmonijski razmjer**
10. $(a - x) : (x - b) = a : b$, ili $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ ili $\frac{a - x}{x - b} = \frac{a}{b}$ Harmonijska sredina $x = \frac{2ab}{a + b}$, ili $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ Opć.: $\frac{1}{x} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots \frac{1}{a_n}\right)$	10. **Harmonijski postojan razmjer** → $x \equiv$ **Harmonijska sredina** između a i b

b) Produženi razmjer

(Jednadžba između više jednakih omjera)

Def.:

1. $a_1 : b_1 = a_1 : b_2 = a_3 : b_3 = \ldots = k$
2. $a_1 : a_2 : a_3 : \ldots a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots b_n = k$
3. $a_1 = kb_1 \quad a_3 = kb_3$
   $a_2 = kb_2 \quad a_n = kb_n$

Pravila:

4. $(a_1 \pm a_2 \pm \ldots) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots) = a_1 : b_1 = a_2 : b_2 \ldots$
5. $a : b = c : d$
   $\underline{a_1 : b_1 = c_1 : d_1}$
   $a_1 a : b_1 b = c c_1 : d d_1$
   $\frac{a}{a_1} : \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} : \frac{d}{d_1}$

6. $a : b = p : q$, $b : c = r : s$, $c : d = t : u$ ili $a : b = p : q = prt : qrt$, $a : c = pr : qs = prt : qst$, $a : d = prt : qsu = prt : qsu$
7. $a : b : c : d = prt : qrt : qst : qsu$

Iz zadanih razmjera načiniti produženi razmjer

Praktični postupak: a se stavi $= 1$ pa se iz drugih razmjera izračuna b, c, d i stave u produženi razmjer.

8. $a : b = 2 : 5;\ b : c = 3 : 4;\ c : d = 4 : 5$
   $a : b : c : d = ? : ? : \ldots$

R.: Neka je $a = 1$, onda je $b = \frac{5}{2}$, $c = \frac{10}{3}$, $d = \frac{50}{12}$; dakle

$a : b : c : d = 1 : \frac{5}{2} : \frac{10}{3} : \frac{50}{12}$, ili svedeno na nazivnik 12:

$a : b : c : d = 12 : 30 : 40 : 50$

III Proporcionalnost veličina

Veličina je zavisna od druge, ako promjenu ove prati promjena prve. Površina ili opseg kruga zavise o njegovu radiusu. Veličine su proporcionalne, ako su tako zavisne, da posebne vrijednosti jedne veličine, sa odgovarajućim posebnim vrijednostima druge, čine produženi razmjer.

a) Upravno (direktno) razmjerne veličine

(Koje god vrijednosti jedne veličine odnose se kao odgovarajuće vrijednosti druge veličine, uzete istim redom; kad jedna raste, raste i druga, i obratno).

Def.:

$$x \to x_1, x_2, x_3 \dots x_n$$
$$y \to y_1, y_2, y_3 \dots y_n$$

1. $x_1 : x_2 = y_1 : y_2 = x_3 : x_4 = y_3 : y_4 \dots$
2. $y_1 : y_2 : \dots y_n = x_1 : x_2 : \dots x_n$
3. $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = \frac{y}{x} = k$
4. $\underline{y = x \,.\, k}$, gdje je $k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots$

a) **Upravno su razmjerne:**

1) Množina robe x i njezina vrijednost y, pa je: $y = x \,.\, k$ | $k \equiv$ faktor razmjernosti $\equiv$ cijena robe: vrijednost jedinice množine robe.
2) Promjer kruga ($2r$) i opseg O, $O = 2r\pi$ | $k \equiv \pi = 3{\cdot}14$ t. j. mjerni broj opsega za $2r = 1$
3) Luk i središnji kut α: $l = k \,.\, \alpha$ | $k \equiv$ luk za $\alpha^0 = 1$
$l = \frac{r \pi \alpha}{180}$ | t. j. $K = \frac{2 r \pi}{360}$

b) Obrnuto razmjerne veličine

(Posebne vrijednosti jedne veličine odnose se kao odgovarajuće vrijednosti druge veličine, uzete obrnutim redom, t. j. kad jedna raste druga opada, i obratno):

Def.:

$$x \to x_1, x_2, x_3 \dots x_n$$
$$y \to y_1, y_2, y_3 \dots y_n$$

1. $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$
2. $x_1 : x_2 : \dots x_n = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \dots \frac{1}{y_n}$
3. $x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 \dots = x_n y_n$
4. $y = \frac{k}{x}$, gdje $k = x_1 y_1 = \dots$

b) **Obrnuto razmjerne:**

1) Broj radnika (r) i vrijeme (t) za koje obave posao, pa je: $r = \frac{k}{t}$ | $k \equiv$ vrijeme za koje jedan radnik obavi cijeli posao ili broj radnika, koji u jedinici vremena obave posao.
2) Obujam gasa (v) i njegova napetost (p): $p = \frac{k}{v}$ ili $p \,.\, v = k$ | $k \equiv$ napetost jedinice volumena ili volumen jedinice napetosti.

c) Složena proporcionalnost veličinâ

(Jedna veličina x upravno je razmjerna sa veličinama y, z, a obrnuto sa u, v):

Def.: $\boxed{x = k \frac{y \,.\, z}{u \,.\, v}}$ $k \equiv$ faktor razmjernosti t. j. ona vrijednost od x, za koju je $y = z = u = v = 1$

c) Sila kojom se privlače dvije mase m_1 i m_2 upravno je razmjerna sa masama, a obrnuto sa kvadratom njihove udaljenosti. (Newtonov zakon gravitacije): $P = k \frac{m_1 \, m_2}{r^2}$ | $k \equiv$ gravitaciona konst. $= 6{\cdot}7 . 10^{-8}$ $(= 6{\cdot}7 : 10^8)$

Opaska:

1. $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$	1. a je razmjerno sa b (linearna razmjernost)
2. $a_1 : a_2 = b_1^2 : b_2^2$	2. a „ „ kvadratom b (kvadr. razmjernost)
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	
3. $a_1 : a_2 = \sqrt{b_1} : \sqrt{b_2}$	3. a „ „ kvadratnim korenom od b. .

IV Primjena razmjernosti

a) Pravilo trojno

(Iz tri poznate veličine jednog razmjera može se odrediti četvrta)

1. 40 kg neke robe stoji 60 D; koliko će stajati 50 kg iste robe?
R.: Ovdje su veličine upravno razmjerne.

1ᵛⁱ način:

Uvjet: . . . | 40 kg . . . . 60 D
Upit: | 50 kg . . . . x D

Zaključak: $40 : 50 = 60 : x$

$$x = \frac{50 \cdot 60}{40} = 75$$

2ᵍⁱ način:

$x = y \cdot k$ | x = broj dinara, y = „ kg

$$k = \frac{x_1}{y_1} = \frac{60}{40}$$

$$x = \frac{3}{2} \cdot 50 = 75$$

2. 18 ljudi potroše neku zalihu živeža u 42 dana; za koliko bi dana potrošilo istu zalihu 12 ljudi?
R.: Ovdje su veličine obrnuto razmjerne.

1ᵛⁱ način:

| 18 lj . . . 42 ↑ dana
| 12 lj . . . x

$18 : 12 = x : 42$

$$x = \frac{18 \cdot 42}{12} = 63$$

2ᵍⁱ način:

$$x = \frac{k}{12} = \frac{18 \cdot 42}{12} = 63$$

3. Komad sukna dug a m, širok b m stoji c Din. Koliko mora biti široko sukno dugo a_1 m, ako stoji c_1 Din.?
R.: 1ᵛⁱ način:

a dugo . . . b šir. . . c D
a_1 „ . . . y „ . . . c „
a_1 „ . . . x „ . . . c_1 „

$a : a_1 = y : b$
$c_1 : c = x : y$
$ac_1 : a_1c = x : b$

$$x = \frac{abc_1}{a_1c}$$

2ᵍⁱ način:

$c_1 = k \cdot a_1 x$ | $k = ?$

$$c = k \cdot ab, \quad k = \frac{c}{ab}$$

$$c_1 = \frac{ca_1}{ab} \cdot x$$

$$x = \frac{abc_1}{a_1c}$$

3ći način:

$$\begin{array}{ll} \text{Uvjet:} & a_1 \ldots b_1 \ldots c \\ \text{Upit:} & a_1 \ldots x \ldots c_1 \end{array}$$

$$x : b = c_1 : c$$
$$= a : a_1$$
$$a_1 c x = a b c_1$$
$$x = \frac{a b c_1}{a_1 c}$$

b) Društveni i diobeni račun

Osoba A uloži u neko poduzeće $a = 3000$ Din, osoba B $b = 4000$ Din i C $c = 2000$ Din. Kako će međusobno podijeliti dobitak od $d = 6000$ Din?

R.: Dobici x, y, z upravno su razmjerni sa ulošcima a, b i c; zato je:

$$x : y : z = a : b : c$$
$$(x + y + z) : (a + b + c) = x : a$$
$$d : (a + b + c) = x : a$$
$$x = \frac{d}{a + b + c} \cdot a = \frac{6000}{9000} \cdot 3000 = 2000$$
$$y = \frac{d}{a + b + c} \cdot b = \frac{6000}{9000} \cdot 4000 = \frac{8000}{3}$$

c) Kamatni račun

Kamate (svota, koju nosi uložena glavnica) upravno su razmjerne sa glavnicom G, vremenom v i postotkom ($^0/_0$) p; zato je:

$$K = k \cdot G \cdot v \cdot p \text{ ili}$$

$$K = \frac{G \cdot v \cdot p}{100} \quad \Big| \quad k = \frac{1}{100} \equiv \text{kamate za } g = v = p = 1$$

$$G = \frac{100 K}{v \cdot p}, \qquad p = \frac{100 K}{G \cdot v}$$

d) Verižno dijeljenje

Koliko iznosi $4^2/_3$ rala u hektarima; jedno ralo ima 1600 kvadratnih hvati, 1 kvadratni hvat 36 kvadratnih stopa, 1 m^2 ima 10·00931 kvadratnih stopa?

Riješenje:

$4^3/_2$	x *ha*
1 *ha*	10.000 m^2
1 m^2	10·00931
36	1
1600	1

$x \,.\, 10.000 \,.\, 10{\cdot}00931 \,.\, 1 \,.\, 1 = 4^2/_3 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 36 \,.\, 1600$

$x = 2{\cdot}6855$ *ha* t. j. $4^2/_3$ rali $= 2{\cdot}6855$ *ha*

Objasni postupak!

Zadaci

1. Načini proporcije:

   a) $(x^2 - y^2)(x^2 - y^2) = (x - y)^2 (x + y)^2$; *b)* $ax = b \cdot c$

2. Pojednostavi razmjer:

   a) $x : \frac{1}{3} = 2 : 3$; *b)* $(a^4 - b^4) : (a^2 + b^2) = x : (a^2 - b^2)$

3. Odredi četvrtu proporcionalu: *a)* 0·4, 0·9, 0·5; *b)* $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$

4. Nađi geom. sredinu:

   a) 2 i 8; *b)* $(a + b)^2$ i $(a - b)^2$; *c)* $\frac{a^2 - b^2}{b}, \frac{b(a - b)}{a + b}$

5. Nađi harmoničnu sredinu od: *a)* 2 i 4; *b)* $(a - b)$ i $(a + b)$

6. Riješi proporcije (izračunati x!)

   1) $0\dot{3} : 0{\cdot}6 = x : 0{\cdot}\dot{6}$ 2) $(1 + x) : 0{\cdot}5 = 8 : 2$

   3) $\left[\frac{(a + b)^2}{4ab} - 1\right] : \frac{a - b}{4ab} = x : \frac{ab}{a - b}$. (R. : $x = ab$)

   4) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} : x = \left(1 + \frac{b}{a}\right) : \left(1 - \frac{a}{b}\right)$

   5) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : x = \frac{a + b}{a - b} : ab$ [R. : $x = (a - b)^2$]

   6) $(a - b) : (a + b) = \left[a - b - \frac{2(b - a)}{a + b}\right] : x$

   7) $(a^3 - b^3) : x = (a^4 + a^2 b^2 + b^4) : (a^3 + b^3)$ [R. : $x = a^2 - b^2$]

7. Dokaži:

   1) Recipročne vrijednosti brojeva a, $a + b$, $a + 2b$ stoje u postojanom harmoničnom razmjeru.

   2) Geom. sredina dvaju brojeva ujedno je geom. sredina između aritm. i harm. sredine tih brojeva.

   3) Iz $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$ slijedi $(a_1 m \pm a_2 n \pm a_3 p) : (b_1 m \pm b_2 n \pm b_3 p) = a_1 : b$. Dokaži!

8. $x : y = ? : ?$ iz

   1) $(x + y) : (x - y) = 8 : 9$

   2) $(mx + ny) : (mx - nx) = a : b$

9. 1) Zadano je $a : b = 3 : 2$, $a : d = 5 : 4$, $e : c = 2 : 1$, $a : c = 3 : 5$, $a : b : c : d : e = ?$

   2) $x : y = 3 : 5$, $y : u = 7 : 8$, $z : u = 15 : 11$, $u : x : y : z = ?$

   3) $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 9$, $c : d = 3 : 5$, $d : c = 3 : 8$, $a : b : c : d : e = ?$

10. Kolika je visina tornja, koji baca sjenu od 20·2 m, ako stup pokraj njega, dug 4 m baca sjenu od 2·5 m? (R. : 32·32 m)

11. Neko može opskrbiti 300 ovaca kroz 20 nedelja; koliko ovaca mora prodati da mu zaliha traje 30 nedelja?

12. Na karti je omjer $1 : n$ (1 : 25.000), kolika je prirodna veličina jezera koje na karti iznosi 1 cm^2? [$1 : n^2 = 1 : x$]

13. Promjer prvog točka kod kola je 36, i dok se ono okrene 100 puta zadnje se okrene 90 puta. Koliki je promjer zadnjeg točka? (R. : $2r = 40$)

14. Težine dviju kocaka od istog materijala odnose se kao 2 : 3. Kako se odnose njihovi bridovi? $(R. : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{3})$
15. Visine dvaju sličnih trokuta odnose se kao 2 : 3. Površina je prvog $P = 28$, kolika je drugog? $[28 : x = 4 : 9;\ x = 63]$
16. Težina tijela obrnuto je razmjerna sa kvadratom njegove udaljenosti od središta zemlje. Koliko teži 3·6 *kg*, ako ih od zemlje postavimo u daljinu mjeseca (60 *R* zemaljskih)? [R. : 1 *g*]
17. Tijelo za 10 sek. padne 490 *m*, a prevaljeni se putevi odnose kao kvadrati vremena. Kako je visoka zgrada, s koje crijep padne za 4·5 sek.? $[490 : 10^2 = x : 4.5^2$ i t. d.]
18. Radiusi kugli odnose se kao 2 : 3; $V_1 : V_2 = ?$
19. Kutevi se trokuta odnose kao 2 : 3 : 4. Koliki su? [R. : 40, 60, 80]
20. Kutevi peterokuta odnose se kao 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Koliki su?
21. Stanice su $\triangle : 6, 8, 10$; koliki su otsjeci na koje simetrale kuteva dijele: stanice?
22. A pozajmi nekom poduzeću 2000 Din kroz 8 mj. B 4000 Din kroz 5 mj. i C 3000 Din kroz 10 mj. Kako će međusobno podijeliti dobitak od 10.000 Din?
23. U sumpornoj kiselini H_2SO_4 je odnos $H : S = 1 : 6$, $S : O = 1 : 2$. Koliko svakog elementa ima u 100 *gr* sumporne kiseline? $[H : S : O = 1 : 6 : 12$ i t. d.]
24. Mlin sa 4 kamena samelje u 10 dana 200 *q* brašna; koliko samelje u 6 dana, ako su u pogonu samo 2 kamena?
25. A radnika mogu svršiti neki posao za t dana na dnevni rad od h sati. Nakon n dana bude otpušteno b radnika a dnevni se rad povisi za 1 sat. Kad će biti gotov posao?
26. Dokaži zakon smjese: $(s_1 - s) : (s - s_2) = b : a$, gdje je $a =$ tekućina spec. težine s, b tekućina spec. t. s_2, a $s =$ sp. t. smjese.
27. Koja glavnica daje uz 4% za 6 godina isto toliko kamata kao glavnica od 3000 Din uz 3% za 10 godina?
28. Uz koliko % glavnica od 2000 Din donese za 5 god. 600 Din kamata?
29. Neko treba iza 8 mj. platiti 3000 Din. Koliki popust (diskont) može zahtijevati, ako želi odmah platiti, a uzima se 4%?
30. Od kojeg broja 3% iznosi 750?
31. Koliko Din stoji 1 *m* tkanine, od koje 10 jarda u Londonu stoje 1.50 funti, kad 1 jarda čini 0,914 *m*, a jedna funta vrijedi 253·5 Din?

Tačan diskont (matemat.) : Sadašnja vrijednost + interes od sadašnje vrijednosti = buduća vrijednost. Uobičajeni diskont: Buduća vrijednost — interes od buduće vrijednosti = sadašnja vrijednost.

Računske operacije 3eg stepena § 10

I Potenciranje

(Množenje jednakih faktora)

Def.: $\boxed{a^n = \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdot \overset{3}{a} \ldots \overset{n}{a}}$ → $a^n \equiv$ potencija
$a \equiv$ baza
$n \equiv$ eksponent

Pravila: *a)* Eksp. $n > \varnothing$

1. $a^m \pm a^n \rightarrow$ nesvodivo $a^n \pm b^n \neq (a \pm b)^n$ 2. $5a^n - 3a^n - b^n = 2a^n - b^n$	1—2. **Reduciranje (stezanje) potencija** (moguće samo uz istu bazu i isti eksponent)
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$	3. **Množenje potencija jednakih bazâ** (baza nepromijenjena, eksponenti se zbroje!)
4. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ $(ab)^m = a^m \cdot b^m$	4. **Množenje potencija jednakih eksponenâtâ** (produkt baza potencira se zajedn. eksponentom)
5. $a^m : a^n \equiv \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a^{m-n} = a^m : a^n$	5. **Dijeljenje potencija jednakih bazâ** (baza se potencira razlikom eksponenta)
6. $a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ $\left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}$	6. **Dijeljenje potencija jednakih eksponenata** (kvocijent baza se potencira zajedničkim eksponentom)
7. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$	7. **Potenciranje potencija** (baza se potencira umnoškom eksponenata)

b) Eksp. $\leqq \varnothing$

1. $a^0 = 1$	1. **Potenciranje sa Ø**
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	2. **Potencija sa negativ. eksponentom** ($\equiv$ recipročnoj vrijednosti baze sa pozitivnim jednakim eksponentom) Razlomak sa negat. eksp. = recipročna vrijednost istog razlomka sa pozitivnim jednakim eksponentom
3. $a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$ $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$ itd.	3. **Za operacije sa potencijama negativnih eksponenata vrijede ista pravila kao i za potencije sa pozitivnim eksponentima**
4. $(-a)^{2n} = + a^{2n}$ $(-a)^{2n+1} = - a^{2n+1}$ $a^1 \equiv a;\ 0^n = \varnothing$ $a^\infty = \begin{cases} \varnothing \\ 1 \\ \infty \end{cases}$ za $a \lesseqgtr 1$	4. **Relativni brojevi**

Opaska

1. Dokaz

1. $a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$

$$a^{-m} = a^{0-m} = a^0 : a^m = \frac{1}{a^m} \text{ i t. d.}$$

Pitanja:

2. Šta pokazuje eksponent? (— Koliko se puta baza sama sobom množi —)
3. Kako se množe potencije jednakih baza; a kako jednakih eksponenata?
4. Isto pitanje za dijeljenje.
5. Kako se potencija potencira?
6. Kako se može zadana potencija pretvoriti u produkt ili u kvocijent potencija?
7. Čemu je jednaka potencija sa negativnim eksponentom?
8. Čemu je jednaka potencija sa eksponentom $= \emptyset$?
9. Kako se brojevi prenose iz brojnika u nazivnik i obratno?

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}, \ \frac{1}{100} = 10^{-2} \ldots$$

Primjer I

1. $4a^n - \{5b^n - [3b^n - (3a^n - b^n)]\} = ?$

R.: Reducirati se mogu samo potencije jednakih baza i jednakih eksponenata; dakle:

$$4a^n - \{5b^n - [3b^n - (3a^n - b^n)]\} =$$
$$= 4a^n - \{5b^n - [3b^n - 3a^n + b^n]\} =$$
$$= 4a^n - \{5b^n - 3b^n + 3a^n - b^n\} =$$
$$= 4a^n - 5b^n + 3b^n - 3a^n + b^n = \underline{a^n - b^n}$$

2. $(ab)^{x-y} \cdot (ac)^{x+y} \cdot (bc)^{y-x} = ?$

R.: Produkt se potencira, da mu se svaki faktor potencira zajedničkim eksponentom; zato je:

$$(ab)^{x-y} \cdot (ac)^{x+y} \cdot (bc)^{y-x} =$$
$$= a^{x-y} b^{x-y} \cdot a^{x+y} c^{x+y} \cdot b^{y-x} c^{y-x} =$$
$$= a^{2x} b^0 c^{2y} = a^{2x} c^{2y}, \text{ jer je } b^0 = 1$$

3. $\left(\frac{4x^2 - 4}{a^2 b - b}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{a+1}{1-x}\right)^{2x} : \left[\frac{4}{b(a-1)}\right]^{2x}$ R.: Ovdje potencije imaju isti eksponent $(2x)$, pa se najprije baze pomnože (podijele), a konačni rezultat potencira tim eksponentom. [Pazi! Najprije se izvedu sa bazama računske operacije nižeg pa onda višeg stepena, ili obratno, prema zadatku!]. Prema tome:

$$\left(\frac{4x^2-4}{a^2b-b}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{a+1}{1-x}\right)^{2x} : \left[\frac{4}{b(a-1)}\right]^{2x} =$$
$$= \left[\frac{4x^2-4}{a^2b-b} \cdot \frac{a+1}{1-x} : \frac{4}{b(a-1)}\right]^{2x} = \left[\frac{4(x^2-1)}{b(a^2-1)} \cdot \frac{a+1}{1-x} \cdot \frac{b(a-1)}{4}\right]^{2x}$$
$$= [-(x+1)]^{2x} = (x+1)^{2x}, \text{ jer je } (-a)^{2n} = +a^{2n}$$

4. $3x^{n-2} \cdot 2x^{n+2}y^{n-1} \cdot 6x^{n+1} : 18x^{2n-2}y^{1-n}$
$$= 36x^{3n+1}y^{n-1} : 18x^{2n-2}y^{1-n} = 2x^{3n+1-(2n-2)}y^{n-1-(1-n)}$$
$$= 2x^{n+3}y^{2n-2}$$

5. Potencije se potenciraju, da im baza ostane nepromijenjena, a eksponenti se množe.
$$\left\{\frac{(2x^3y^3)^3 \cdot (x^3y^3)^2}{8x^2y^3}\right\}^3 : \left\{\frac{(6x^2y^2)^2}{36x^3y^3}\right\}^2 = \left\{\frac{8x^9y^9x^6y^6}{8x^2y^3}\right\}^3 : \left\{\frac{36x^4y^4}{36x^3y^3}\right\}^2$$
$$= \left\{\frac{x^{15}y^{15}}{x^2y^3}\right\}^3 : (xy)^2 = x^{39}y^{36} : x^2y^2 = \underline{x^{37}y^{34}}$$

6. $a^{10} = a^4 \cdot a^6 = a^5 \cdot a^4 \cdot a;\ a^{10} = a^{12} : a^2 = a^{14} : a^4 = \ldots$

Rastavljanje zadane potencije u produkt ili kvocijent potencija iste baze.

Opaska.: Kod računanja sa potencijama svejedno je kojim redom izvađali računske operacije sa bazama višeg pa onda nižeg stepena ili obratno, već prema zadatku. Izuzetak kod sabiranja i oduzimanja!

Primjer II

Čemu je jednaka potencija sa negativnim eksponentom?

$$\left(2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}\right)$$

1. $$0{\cdot}1^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - (0{\cdot}25)^{-1} + [0{\cdot}03^0]^{-2} =$$
$$= \frac{1}{0{\cdot}1^2} + 4^2 - \frac{1}{0{\cdot}25} + 1 = 100 + 16 - 4 + 1$$
$$= 113$$

2. Za negativne eksponente vrijede ista pravila kao i za pozitivne pri računskim operacijama sa potencijom. (Razlomak sa negativnim eksponentom = svojoj recipročnoj vrijednosti sa jednakim pozitivnim eksponentom!)
$$\left(\frac{(x^{-1}y^{-n})^2}{xz^{-1}}\right)^{-3} : \left[\frac{y^{-1}z^2}{x^2y^n}\right]^{-2} =$$
$$= \left(\frac{x^{-2}y^{-2n}}{xz^{-1}}\right)^{-3} : \left(\frac{y^{-1}z^2}{x^2y^n}\right)^{-2} =$$
$$= \left(\frac{xz^{-1}}{x^{-2}y^{-2n}}\right)^3 : \left(\frac{x^2y^n}{y^{-1}z^2}\right)^2 = \frac{x^9z^{-3}}{y^{-6n}} : \frac{x^4y^{2n+2}}{z^4}$$
$$= \frac{x^5z}{y^{2-4n}} = \underline{x^5y^{4n-2}z}$$

3. $(625x^4 + 4x^{-4}) : (25x^2 + 10 + 2x^{-2}) = 25x^2 - 10 + 2x^{-2}$

$$\begin{array}{l}
625x^4 + 250x^2 + 50 \\
\underline{- \quad\;\; - \quad\;\; -} \\
-250x^2 - 50 + 4x^{-4} \\
-250x^2 - 100 - 20x^{-2} \\
\underline{+ \quad\;\; + \quad\;\; +} \\
50 + 20x^{-2} + 4x^{-4} \\
50 + 20x^{-2} + 4x^{-4} \\
\underline{- \quad\;\; - \quad\;\; -} \\
\qquad \emptyset
\end{array}$$

4. Broj se može iz brojnika prenijeti u nazivnik, samo pri tome eksponent broja mijenja predznak.

$$\frac{3a^2b^{-3}c^4}{2x^{-1}yz^2} = 3 \cdot 2^{-1}a^2b^{-3}c^4xy^{-1}z^{-2} = \frac{3a^2xc^4}{2b^3yz^2} = \dots$$

Zadaci

1. Kad se potencije mogu sabirati i oduzimati?
$5x^n - \{-[(3x^{n-1} + 2y^n) - (-2x^n + 2x^{n-1} - y^n)] - 2x^n\} = ?$

2. Kako se množe potencije? Kako se potencira produkt? Kako se može zadana potencija rastaviti u produkt potencija?
1) $2x^{a+2b-c} \cdot 3x^{2a-b+c}y^{a+b} \cdot x^{a-2b} \cdot y^{2b-c}$
2) $(xy)^{m+n}(yz)^{m-n}(xz)^{m+n}$; R.: $x^{2m+2n}y^{2m}z^{2m}$
3) $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3 \cdot (x+y)^2(x^2-y^2)$; R.: $(x-y)^4$
4) $(x^2-xy+y^2)^m \cdot (x+y)^{m+n}(x-y)^n$; R.: $(x^3+y^3)^m(x^2-y^2)^n$
5) $(a^{4x}-a^{2x}b^{2x}+b^{4x})(a^{2x}+b^{2x})$; R.: $a^{6x}+b^{6x}$
6) $(x^{3n}+x^{2n}y^m+x^ny^{2m}+y^{3m})(x^n-y^m)$
7) $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{y-x}{-x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{y^2-x^2}\right)^3$; R.: -1
7a) $(x-y-z)^{n+1}(z+y-x)^{2n-2}$; R.: $(x-y-z)^{2n-1}$
7b) $(a-b)^n \cdot (b-a)^{2n-1}$; R.: $-(a-b)^{3n-1}$
7c) $(a^{x+1}-b^{y-1})^2$; $\quad (a^{x-1}+b^y)^3$

3. 1) $\left(\frac{c+d}{a-b}\right)^n \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}\right)^n \cdot \left[\frac{c^2-d^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\right]^n$
2) $\left(\frac{x^2-4}{x-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-x^2}{x^2-5x+6}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2$; R.: $-x^2-2x-1$
3) $\left(\frac{x^2}{x^3-1}\right)^n \left(\frac{1-x^2}{x}\right)^n \left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)^{n+2} \left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)^2$; R.: $(-1-x)^n$
4) $\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{a-b}{x+y}\right)^n \cdot \frac{a^2-b^2}{x^2+y^2}$
5) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^4 \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5 \cdot \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3$

4. Kako se dijele potencije? Kako se potencira kvocijent? Kako se može zadana potencija rastaviti u kvocijent potencija?

1) $a^{x+y} : a^{x-y} : a^{2y}$; R.: 1

2) $(a+b)^{2x+3y}(a-b)^{3x+2y} : (a+b)^{x+2y}(a-b)^{2x+y}$

3) $\left[\dfrac{ab+b}{27(x-y)^2}\right]^2 \left[\dfrac{9(y^2-x^2)}{b^2-1}\right]^3 : \left(\dfrac{x+y}{b+1}\right)^3 : \dfrac{b^2(a+1)^2}{(b-1)^3(x^2-y^2)}$; R.: $-y-x$

4) $\left(1-\dfrac{1}{a}\right)^n : (a-1)^n$; R.: $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$

5) $\left\{\left[\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y}\right]^n : \left[\dfrac{x+y}{x^2-4}\right]^n\right\} : \left[\dfrac{x+y}{x-2}\right]^n$ 6) $x^n : \left(\dfrac{1}{x}\right)^n : x^{2n}$; R.: 1

7) $1 : \left\{\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{2n-1}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{x-y}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{(x+y)^{n+1}}{x^2-y^2}\right\}$; R.: 1

8) $\dfrac{1}{x^n+y^n} - \dfrac{1}{x^n-y^n} + \dfrac{2}{x^{2n}+2(xy)^n+y^{2n}} - \dfrac{1}{x^{2n}-y^{2n}}$

9) $(-a)^{2n} \,.\, (-a)^{2n-1} \,.\, (-a)^{2n+1} : (-a)^{2n}$ 10) $(16^x-1) : (2^x-1)$

10a) $\left(6u^{4v} - 5u^{3v} - \dfrac{7}{6}u^{2v} + \dfrac{5}{6}u^v + \dfrac{1}{6}\right) : \left(3u^{2v} - u^v - \dfrac{1}{3}\right)$

11) $(81^x+1) : (3^x+1)$

12) $\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\right)^2 : \left(\dfrac{1-x^2}{x^2-5x+6}\right)^2 : \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2 : \left(\dfrac{x^2-4}{1-x^2}\right)^4$; R.: 1

13) $\left(\dfrac{x^2}{x^3-1}\right)^n \cdot \left(\dfrac{1-x^2}{x}\right)^n : \left(\dfrac{x^2+x+1}{x}\right)^{n+2} \cdot \left(\dfrac{x}{x^2+x+1}\right)^2$

14) $\left(\dfrac{x+y}{a-b}\right)^{n+1} : \left(\dfrac{a-b}{x+y}\right)^n : \dfrac{a^2-b^2}{x^2-y^2}$ 14a) $(x^{4a}-1) : (x^a-1)$

15) $\dfrac{25a^2b^3x^{n-1}}{49c^3y^{n-2}} : \dfrac{5a^3b^2x^{n-3}}{7c^2y^{n-1}}$ 16) $\left(3 - \dfrac{x^{2n}}{y^{2n}} - \dfrac{y^{2n}}{x^{2n}}\right) : \left(\dfrac{y^n}{x^n} - \dfrac{x^n}{y^n} + 1\right)$

17) $\dfrac{a^{2n}+1}{a^{2n}-1} - \dfrac{1}{a^n-1} - \dfrac{1}{a^n+1}$; R.: $\dfrac{a^{2n}+1}{a^{2n}-1}$

Skrati razlomke:

17a) $\dfrac{a^{n+2}-2a^n+a^{n-2}}{a^{n+2}-a^{n+1}+a^n-a^{n-1}}$; $\dfrac{a^{x+1}-a^{x-1}}{a^{y+1}-a^{y-1}}$

18) $\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^{n-1}\left(\dfrac{y^2}{z}\right)^{n-1} : \left(\dfrac{z}{xy}\right)^n$ 19) $\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^n y^n : (y+x)^n$ (R.: 1)

20) $\left(\dfrac{x^6-y^6}{x^3y^3}\right)^3 : \left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}\right)^4 : \dfrac{x^6-y^6}{x^2y^2} \cdot \left(\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{xy}$; R.: 1

21) Zadane potencije razviti *a*) u produkt potencija; *b*) u kvocijent potencija: 1) $x^{2a+b+c-d}$; 2) a^{3+n-2x}; 3) a^{2n}

4. Kako se potencira potencija? Kako se zadana potencija razvija u potenciju potencije? $[(a^n)^m = ?]$

1) $\left(\dfrac{2x^3y^2}{3a^2b^3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{5x^2b^4}{2a^4y^3}\right)^3 : \left(\dfrac{10x^3b^3}{3a^2y^2}\right)^5$

2) $\left[\left(\dfrac{x^{n-1}y^{n+1}}{z^{2n-1}}\right)^3 : \left(\dfrac{x^{n+1}y^{n-1}}{z^{2n+1}}\right)^2\right] : \left(\dfrac{yz^{n+1}}{x^{n-1}}\right)^3$

3) $\{[4a^2b^2c^3]^3 : (2abc^0)^2\}^2$

4) $\left[\left(\frac{4a^2}{3b^3}\right)^2\right]^n : \left[\left(\frac{4a^3}{3b^2}\right)^n\right]^2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$; R.: $\left(\frac{1}{a^2}\right)^{2n} = \frac{1}{a^{4n}}$

5) $\left(\frac{x^a}{y^b}\right)^p : \left(\frac{y^a}{x^b}\right)^q$ 6) $(a^3b^n)^2[(-a)^3b^{2n}]^2(2ab^n)^2$

7) $\{[16a^6]^p\}^q : [(8a^4)^q]^p$ [R.: $(2a^2)^{pq}$]

8) $[(x^2-y^2)^{a+b}]^{a-b} : (x+y)^{a^2-b^2}$; R.: $(x-y)^{a^2-b^2}$

9) $[(x^3-y^3)^n]^m : [(x^2+xy+y^2)^m]^n$

9a) $\left\{\frac{(3ax^3)^4(2x^2z^3)^5 . (5x^2y^3)^3}{6x^2y^3)^2(4y^3z^4)^3}\right\}^2$

10) Pretvori u potenciju potencije 1) $a^{x^2-y^2}$; 2) a^{2n}; 3) $b^{x^2-5xy+6y^2}$

5. Kolika je potencija sa eksponentom nulom? Koji smisao ima potencija sa negat. eksponentom? Dokaz! [$a^{-n}=?$; $a^0=?$]

1) $(a-b)^{2n}=(b-a)^{2n}$ Dokaz? 2) $(a-b)^{2n+1}=-(b-a)^{2n+1}$ Dokaz?

3) $a^0+(a+b)^0-(abc)^0+a^0b^0c^0-(a^0)^b+(a:b)^0$; R.: 2

4) $0{,}01^{-1}-1:(1:10)^{-2}$; R.: 99·99

5) $16 . 2^{-4}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-0{,}1^{-1}+(-0{\cdot}1)^{-2} . (-3)^{-2}(-2)^{-2} . 6^{-1}$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{-3}$ 6a) $(0{,}25)^{-2}\,100-10^{-2}:10^{-3}$

7) $a^6 . a^{-8} . a^0 : a^{-3} . a^{-2}+4a^{-2} . 6a^{-2}:8a^{-2}$

8) $a^{-1}:a^{-2}-a^0:a^{-1}+a^{-x}:a^{1-x}:a^{-2}$; R.: a

9) $(x^2+2+x^{-2})(x^2-2+x^{-2})$

10) $\left[\frac{xb^{-1}c^{-z}}{y^{-2}z^{-1}}\right]^{-1} : \left[\frac{y^{-1}z^{-2}}{z^{-1}bc}\right]^{-2}$ 10a) $(x^{-10}-y^{-8}):(x^{-5}+y^{-4})$

11) $\left[\frac{(x^2-y^2)^3}{(x^2+y^2)^{-6}} : \frac{(a-b)^{-2}}{(a^2+b^2)^{-3}}\right] : \frac{(a+b)^{-3}}{(a^2+b^2)^{-4}}$

12) $\left[\frac{x^2-1}{x}\right]^{-1} : \frac{x}{x+1}$; R.: $\frac{1}{x-1}$

13) $\{[6x^2y^{-1}:3x^3y]^{-2}\}^{-1}$; R.: $\frac{4}{x^2y^4}$

14) $\left\{\left(\frac{1}{1-x}\right)^{-2} : \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}\right\}^2$ 15) $\frac{[(a-x)^3ax^{-1}]^{-2}}{[a^2x^2(x-a)^{-2}]^3}$

16) $[(-a)^{-4}]^{-6}:[(-a)^{-1}]^{-12}$; R.: a^{12} 17) $(a-b)^{-2}:(b-a)^{-3}$; R.: $b-a$

17b) $\left(\frac{4a^{-1}-3b^{-2}}{2x^{-4}+3y^{-5}}\right)^{-3} : \left(\frac{16a^{-2}-9b^{-4}}{4x^{-8}-9y^{-10}}\right)^{-3}$

18) $\frac{(x^3+y^3)^{-n}}{a^{-p}} : \left[\frac{(x+y)^{-n}}{a^{-2p}} : \frac{a^{-3p}}{(x^2-xy+y^2)^{-n}}\right]$

19) $(a+b)^{-2}:[-(a-b)]^{-1}$

20) $1:(a^{-1}-b^{-1})^{-2}$; R.: $a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$

21) $(4x^2-7+x^{-2}):(2x+3+x^{-1})$ 22) $(a^x\pm a^{-x+1})^2$

23) $(a^x\pm a^{-x})^3$ 23a) $\left(\frac{x^{-a}+y^{-b}}{x^{-2a}-y^{-2b}}\right)^{-2} : \left(\frac{x^{-2a}+y^{-2b}}{x^{-4a}-y^{-4b}}\right)^{-3}$

24) Ukloni negativne eksp. u izrazima:

a) $x^{-2}yz^{-1}$; b) $\dfrac{x^{-1}y^2z^{-1}}{a^{-2}bc^{-1}}$

25) Napiši 0·01, 0·000.001 kao potencije od 10!

26) Za $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ je

a) $a^3 + b^3 + c^3 > 3\,abc$ b) $(a + b + c)^3 > 27\,abc$

c) $a^2 + b^2 > 2\,ab$ Dokaz! Stavi $b = a + h$, $c = a + k$

27) $(a^{-3} + b^{-3}) : (a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2})$

28) $(x^{-2n} - 2\,(xy)^{-n} + y^{-2n} - x^{-2}y^2) : (x^{-n} - y^{-n} - x^{-1}y)$

29) $(3x^4 + 4x^2 + x^{-4}) : (3x^2 - 2 + x^{-2})$

29a) $(x^4 - 4 + y^{-4}) : (x^2 + 2 + y^{-2})$ 29b) $(729x^6 - 64y^{-6}) : (9x^2 - 4y^{-2})$

30) $\left(-\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{-1} : \left(-\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{-2}$ 30a) $\left(\dfrac{a^0\,x}{y}\right)^{-3} \cdot \left(-\dfrac{x}{y}\right)^{-5} : \left(-\dfrac{x}{y}\right)^{-2}$

31) $(x^{-6} - 2x^{-3}y^{-3} + y^{-6}) : [(x^{-2} + (xy)^{-1} + y^{-2})\,(x^{-1} - y^{-1})]$

31a) $\dfrac{10^{-2}}{(-1)^{-3}} \cdot 0{\cdot}1^{-2} + 1 : 0,2^{-3} - \left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-3} : \left(\dfrac{9}{10}\right)^{-2}$; R.: 127·75

32) $\left(\dfrac{1}{x^6} - \dfrac{2}{x^3y^3} + \dfrac{1}{y^6}\right) : (x^{-2} - 2\,(xy)^{-1} + y^{-2})$;

R: $x^{-4} + 2\,x^{-2}y^{-2} + y^{-4} + 2\,x^{-3}y^{-1} + 2\,x^{-1}y^{-3}$.

6. 1) $(2a - 3b)^2$ 2) $(x + 2y)^3$ 3) $(2u \pm 3v)^3$ 4) $(2x - y + 1)^2$

5) $(a^m + b^n)^2 - (a^m - b^n)^2$ 6) $(0{\cdot}\dot{3}\dot{9} : 0{\cdot}\dot{1}\dot{3})^2$ 7) $12{\cdot}6^4$

8) $(u^2 + u + 1)^3 = [u^2 + (u + 1)]^3$ 9) $(13{\cdot}14\ldots)^2$ 10) $(3{\cdot}14\ldots)^3$

11) $(2{\cdot}718\ldots)^2$ 12) $\left(1\,\dfrac{12}{13}\right)^2$ 13) $0{\cdot}44^3$ 14) 6^9

15) $(0{\cdot}\dot{3}\dot{9})^3 : (0{\cdot}2\dot{7})^3$ 16) $5{\cdot}6^3$ 17) $\left(1\,\dfrac{2}{3}\right)^3$

7. 1) Kolika je pogreška, ako se za malene vrijednosti od x stavi: a) $(1 + x)^2 = 1 + 2\,x$; b) $(1 - x)^2 = 1 - 2\,x$?

2) Prema tome izračunaj: a) $0{\cdot}999^2$; b) $1{\cdot}004^2$; c) $0{\cdot}98^2$

3) Kvadrat kojeg god broja i kvadrat ostatka što se dobije kad se taj broj podijeli sa 9, dadu podijeljeni sa 9 isti ostatak. Dokaz!

8. 1) Kolika je pogreška, ako se za malene vrijednosti od x stavi da je: a) $(1 + x)^3 = 1 + 3x$, b) $(1 - x)^3 = 1 - 3x$?

2) Po tim formulama izračunaj na 5 decimala: a) $1{\cdot}001^3$, b) $0{\cdot}999^3$

9. $(a + b)^n = ?$

R.: Potencija prvog člana opada, drugog raste, a koeficijenti članova dobiju se po „Pascalovom trokutu“:

1	$(a + b)^0 = 1$
1 1	$(a + b)^1 = a + b$
1 2 1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
1 4 6 4 1	$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1	$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
1 6 15 20 15 6 1	
— — — — — — —	

1) $(a \pm b)^7$ 2) $(x-1)^5$ 3) $(x-3)^6$ 4) $(y+2)^6$ 5) $(y-2)^7$
6) $(x+2y)^5$ 7) $(x^{-1}+y^{-1})^{-4}$

10. Dokaži da je svaki cio broj oblika $3^{4n}-2^{2n}$ djeljiv sa 9 i 11.
[R.: $3^{4n}-2^{2n}=(9^n+2^n)(9^n-2^n)$ i t. d.]

11. Ako je $a+b+c=0$, onda je $a^3+b^3+c^3=3abc$. Dokaz!
(R.: $a+b=-c$ i t. d.)

II Radiciranje (korijenovanje)

(Prva inverzna operacija potenciranja)

Def.: Izvaditi n-ti korijen iz broja a znači odrediti broj koji potenciran sa n daje a.

$x^n=a,\ x=?\ \ldots$	1.
$x \equiv \sqrt[n]{a}$ (n-ti korijen iz a)	
$(\sqrt[n]{a})^n=a=\sqrt[n]{a^n}\ \ldots$	2.

1. $a \equiv$ radikand
   $n \equiv$ eksponent korijena
2. Radiciranje i potenciranje, inverzne operacije, ukidaju se

3. Iz $a=b$ slijedi $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[n]{0}=0$

Pravila:

a)

	Primjeri	Pravila	
1.	$\sqrt[3]{3}=\sqrt[3.2]{3^2}=\sqrt[6]{9}$	$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nr]{a^{mr}}=\sqrt[n:r]{a^{m:r}}$	**1. Transformiranje korijena**
2.	$\sqrt{25}-\sqrt{16}\neq\sqrt{25-16}$ $5-4\neq 3$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}\\ \sqrt[n]{a^n\pm b^n}\end{array}\right\}$ nesvodivo $\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}\neq\sqrt[n]{a\pm b}$	**2. Reduciranje** (Samo uz isti eksponent korijena i istu bazu: $2\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$)
3.	$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot 2}=2\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$ $\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}$	**3. Unašanje broja** pod korijen i obratno
4.	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2.$ $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3}=\sqrt[6]{9^2\cdot 3^3}=$ $=\sqrt[6]{3^9}=3\sqrt{3}$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n.m]{a^m b^n}$	**4. Množenje korijenâ** (Produkt se radikandâ radicira zajedn. eksponentom korijena; raznoimeni se najprije svedu na isti eksponent)
5.	$\sqrt[4]{80}:\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{16}=2$	$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[n]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[n.m]{a^m:b^n}$	**5. Dijeljenje korijenâ** (Kvocijent radikanda se radicira zajedn. eksponentom korijenâ, a kod raznoimenih najprije se svedu na zajedn. eksponent korijenâ)

6. $(\sqrt[4]{a})^8 = \sqrt[4]{a^8} = a^{8:4} = a^2$

7. $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$

6. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m:n}$	6. Potenciranje korjenâ
7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	7. Radiciranje korijenâ

b)

8. $\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \sqrt[\frac{1}{n}]{a} = \sqrt[n]{a^{-1}}$	8. Eksponent kvocijenta $< \emptyset$
9. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	9. Korijen $\equiv$ potencija sa razlomljenim eksponentom i obratno
10. $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ $\sqrt[\frac{1}{n}]{a} = a^n$	10. Eksponent korijena $\equiv$ razlomak
11. $a^{-\frac{n}{m}} = 1 : \sqrt[m]{a^n}$	
12. $\sqrt[2]{a} \equiv \sqrt{a}$; $\sqrt[1]{a} = a$	
13. $\sqrt[2n+1]{\pm a} = \pm \sqrt[2n+1]{a}$	13. Relativni brojevi
14. $\sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a}$ $\sqrt{9} = \pm 3$	14. Radiciranje je višeznačna operacija: $\sqrt[n]{a}$ ima n vrijednost!
15. Dokaz izvađa se pomoću potenciranja, na pr. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, jer je $(\sqrt[m]{a^n})^m = (a^{\frac{n}{m}})^m = a^n$ i t. d.	

Opaska:

a) Racionaliziranje nazivnika

1. $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \dfrac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$

2. $\dfrac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \dfrac{a(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{(\sqrt{b} \pm \sqrt{c})(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})} = \dfrac{a(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{a-b}$

4.—5. Transformacija sume (razlike) korijena

3. $$\frac{a}{\sqrt[n]{b} \mp \sqrt[n]{c}} = \frac{a(\sqrt[n]{a^{n-1}} \pm \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots \pm \sqrt[n]{b^{n-1}})}{a-b}$$

4. $$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

5. $$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}}$$

b) Iracionalni, imaginarni i kompleksni brojevi

(Raširivanje brojnog područja)

1. $\sqrt{2} = 1{\cdot}4142\ldots$ (beskonačan neperiodičan decimal. razlomak $\equiv$ iracionalan broj)
2. $x^2 + 1 = 0,\ x = \sqrt{-1} = ? \neq \pm 1$, jer $(\pm 1)^2 = +1$;

   zato $\boxed{\begin{matrix} i = \sqrt{-1} \\ i^2 = -1 \end{matrix}}$ → imaginarna ili Gausova jedinica
3. $ai \equiv a\sqrt{-1}$ (imaginaran broj)
4. $a \pm bi \equiv$ kompleksan broj

Pravila:

1. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i\sqrt{a} \cdot i\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$
2. $(a \pm bi) \pm (c \pm di) = a \pm c \pm (b \pm d)i$
3. $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$
4. $$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
5. $$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{b^2+a^2}-a}{2}}$$

1.—5. Stavi li se $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$, onda za imaginarne korijene i za kompleksne brojeve vrijede sva poznata pravila rač. operacija. Isto je sa irac. brojevima.

1. $i^0 = 1$ $\quad i^{4n} = +1$
   $i^2 = -1$ $\quad i^{4n+1} = +i$
   $i^3 = -i$ $\quad i^{4n+2} = -1$
   $i^4 = +1$ $\quad i^{4n+3} = -i$
   $\frac{1}{i} = -i$

Pazi! *a)* $i = \sqrt{-1},\ i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$
dakle $i = \sqrt{1}$, greška?

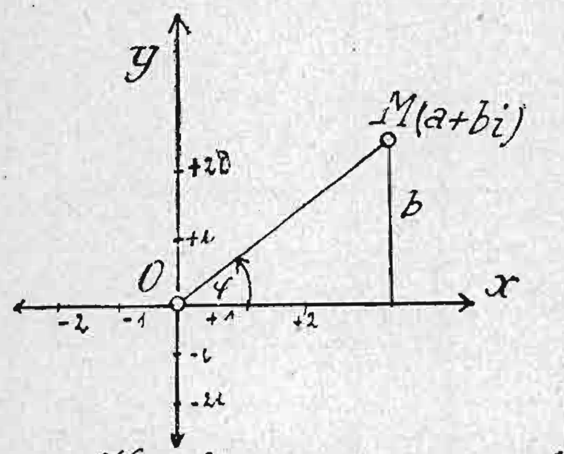
b) $3 = -3$. Dokaz!

$\sqrt{-1}\ \sqrt{-9} = \sqrt{(-1)(-9)} = \sqrt{9} = 3$
$\sqrt{-1}\ \sqrt{-9} = i \cdot 3i = -3$

Pogreška?

Pravila:

6. $a \pm bi = r[\cos(\varphi + 2k\pi) \pm i \sin(\varphi + 2k\pi)]$
$k = 0, 1, 2\ldots$
$r = \sqrt{a^2 + b^2} \equiv |a + b| \equiv$ modul
$\sphericalangle \varphi \equiv$ argumenat, polarni $\sphericalangle$, amplituda
$tg\varphi = \frac{b}{a}$



Koordinantni sustav (Sl. 2)

7. $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) . r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ldots =$
$= r_1 r_2 \ldots [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots)]$

8. $\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

9. $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

10. $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{2}\right)$

11. $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}\varphi\,(+2k\pi)$
$k = 0, 1, 2\ldots, n - 1$

12. $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0^0 + i\sin 0^0} = \cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$
za $k = Ø \ldots = \cos 0^0 + i\sin 0^0 = 1$
$k = 1 \ldots = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$
$k = 2 \ldots = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

13. $\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}$ i t. d.

14. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$

15. $\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right)$

6. Kompleksan broj u trigonometr. obliku

$-1 + i\sqrt{3} =$
$= 2(\cos 120^0 + i\sin 120^0)$,
jer $r = \sqrt{1 + 3} = 2$
$\cos\varphi = -\frac{1}{2}$
$\varphi = 120^0$

9—11. Moavrov poučak

a) Kako se množe, a kako dijele trigonometrijskim putem kompl. brojevi?

b) Kako glasi Moiorov obrazac?

c) $\sqrt[3]{1} = ?$ $\sqrt[3]{-1} = ?$

d) $\sqrt[3]{a} = ?$ $\sqrt[3]{-a} = ?$

Aritmetika polazi od prirodnih brojeva i radi raznih problema proširuje brojno područje sve više. Najopćenitiji su kompleksni brojevi:

Kompleksni broj: $a + bi$

realni a — imaginarni ai, $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

racionalni $\left(= \frac{m}{n}\right)$ — iracionalni $\left(\neq \frac{m}{n}\right)$

cijeli — razlomljeni

(Svi mogu biti + ili —)

Područje brojeva

1) $\left.\begin{matrix} a + bi \\ a - bi \end{matrix}\right\} \rightarrow$ konjugirano kompl. brojevi

2) $\begin{array}{r|} a + bi \\ a - bi \\ \hline 2a \end{array} +$ $\quad$ $\begin{array}{r|} a + bi \\ a - bi \\ \hline 2bi \end{array} -$

Riječima?

Drugi korijen (kvadratni!):

1)
$$\sqrt{x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25} = x^2 + 3x - 5$$
$$\begin{array}{l} -x^4 \\ \hline 6x^3 - x^2 \quad : (2x^2 + 3x) \cdot 3x \\ 6x^3 \pm 9x^2 \\ \hline -10x^2 - 30x + 25 \quad : (2x^2 + 6x - 5)(-5) \\ \mp 10x^2 \mp 30x \pm 25 \\ \hline \varnothing \end{array}$$

2)
$$\sqrt{68|72|41} = 829$$
$$\begin{array}{l} 47\underline{2} : 162 \cdot 2 \\ 1484\underline{1} : 1649 \cdot 9 \\ 14841 \\ \hline \varnothing \end{array}$$

3)
$$\sqrt{2} = 1{,}4142$$
$$\begin{array}{l} 10\underline{0} : 2 \\ 40\underline{0} : 28 \\ 1190\underline{0} : 282 \end{array}$$

4)
$$\sqrt{7|23{\cdot}61} = 26{\cdot}9$$
$$\begin{array}{l} 32.3 : 46.6 \\ 4761 : 529.9 \\ \varnothing \end{array}$$

3. Podijeli se s desna na lijevo (ili od decimalne tačke na obe strane kod decimalnih brojeva!) broj u grupe po 2 znamenke. Izvadi se iz prve grupe na lijevo drugi korijen i dobije prva znamenka korijena; njezin kvadrat odbije se od prve grupe, ostatku doda slijedeća grupa, dobiveni broj razdijeli (pošto se odvoji zadnja znamenka!) sa dvostrukom prvom znamenkom korijena i dobije tako druga znamenka korijena. Izvedu se ostali dijelovi kvadr. trinoma $(2a + b)b$ i odbiju od ostatka i t. d.

Treći korijen (kubni):

1)
$$\sqrt[3]{a^6 - 6a^5 + 21a^4 - 44a^3 + 63a^2 - 54a + 27} = a^2 - 2a + 3$$
$$\begin{array}{l} -a^6 \\ \hline -6a^5 + 21a^4 - 44a^3 : 3a^4 \\ -6a^5 + 12a^4 - \ \ 8a^3 \\ + \quad\ - \quad\ + \\ \hline 9a^4 - 36a^3 + 63a^2 - 54a + 27 : (3a^4 - 12a^3 + 12a^2) \\ +9a^4 - 36a^3 + 36a^2 \\ - \quad\ + \quad\ - \\ \quad +27a^2 - 54a + 27 \\ \quad - \quad\ + \quad\ - \\ \hline \varnothing \end{array}$$

2) $\sqrt[3]{77|854|483} = 427$

$13\,854 : 48 \; (=3a^2)$

$3a^2$	96	$3 \,.\, 4^2 \,.\, 2$
$3a \,.\, b^2$	48	$3 \,.\, 4 \,.\, 2^2$
b^3	8	2^3

$3766483 : (3 \,.\, 42^2 = 5292)$

37044 .	$3 \,.\, 42^2 \,.\, 7$
6174	$3 \,.\, 42 \,.\, 7^2$
343	7^3

Ø

Riječima?

Pogreška: $\frac{1}{2}$ D = 5 para!

Dokaz! $\frac{1}{4}$ D = 25 para

$\sqrt{\frac{1}{4}\text{ D}} = \frac{1}{2}\text{ D} = \sqrt{25} = 5$ para

$\frac{1}{2}$ D = 5 para!

Primjer I

1. $3\sqrt{2} - \{2\sqrt[3]{2} - [(3\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{2}) - (3\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{2}] - \sqrt{3}\} = ?$

R.: Reducirati se mogu samo istoimeni brojevi, koji imaju jednake radikande; dakle:

$$3\sqrt{2} - \{2\sqrt[3]{2} - [(3\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{2}) - (3\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{2})] - \sqrt{3}\} =$$
$$= 3\sqrt{2} - \{2\sqrt[3]{2} - [3\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{2}] - \sqrt{3}\} =$$
$$= 3\sqrt{2} - \{2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}\} = \underline{3\sqrt{2} - 6\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}}$$

2. $\sqrt[12]{(a^{-6})^{-2}} + [(\sqrt[15]{b})^{-5}]^{-5} - [\sqrt[n]{(a-b)^n} : \sqrt[3]{c^4}]\sqrt[3]{c^4} = ?$

R.: Potenciranje i radiciranje, inverzne računske operacije, ukidaju se; zato je:

$$\sqrt[12]{a^{12}} + \sqrt[15]{b^{15}} - \sqrt[n]{(a-b)^n} = a + b - a + b = 2b$$

3. $\sqrt{18(a-b)}\,\sqrt{6\,(a+b)}\,\sqrt{3\,(a^2-b^2)} - \sqrt[3]{27(a+b)^2.4(a-b)^2.2(a^2-b^2)} = ?$

R.: Istoimeni se brojevi množe da se umnožak radikanda radicira zajedn. eksponentom korijena. Produkt se radicira tako da mu se radiciraju pojedini faktori. Slično kod dijeljenja. Prema tome:

$$\sqrt{18(a-b)\,.\,6(a+b)\,3(a^2-b^2)} - \sqrt[3]{27\,.\,8\,(a+b)^3.\,(a-b)^2\,(a^2-b^2)} =$$
$$\sqrt{18\,.\,6\,.\,3(a+b)^2\,(a-b)^2} - \sqrt[3]{27\,.\,8\,(a+b)^2.\,(a-b)^2\,(a+b)\,(a-b)}$$
$$= 18\,(a^2-b^2) - 6\,(a^2-b^2) = 12\,(a^2-b^2)$$

4. $$\frac{\sqrt[3]{xy^2}\,.\,\sqrt[4]{ab}\,.\,\sqrt[3]{cz}}{\sqrt[6]{ax^5}\,.\,\sqrt[3]{a^2b}\,.\,\sqrt[12]{xyz}} : \frac{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{y^3}}} = ?$$

R.: Raznoimene korijene najprije svesti na istoimene. Prema tome:

$$\frac{\sqrt[3]{xy^2}\cdot\sqrt[4]{ab}\,\sqrt{cz}}{\sqrt[6]{ax^5}\cdot\sqrt[3]{a^2b}\,\sqrt[12]{xyz}}:\frac{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{y^3}}}=\sqrt[12]{\frac{x^4y^8a^3b^3c^6z^6}{a^2x^{10}a^8b^4xyz}:\frac{x^8a^6}{x^8y^3}}$$

$$=\sqrt[12]{\frac{c^6y^7z^5}{a^7x^7b}:\frac{a^6}{y^3}}=\sqrt[12]{\frac{c^6y^7z^5y^3}{a^7x^7a^6b}}=\sqrt[12]{\frac{c^6y^{10}z^5}{a^{13}x^7b}}$$

5. $(x-y):(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})=?$

R.: $(\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{y^3}):(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$

$$\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{x^2y}$$
$$-\quad+$$
$$\sqrt[3]{x^2y}$$
$$+\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}$$
$$-\quad+$$
$$\sqrt[3]{xy^2}-\sqrt[3]{y^3}$$
$$\sqrt[3]{xy^2}-y$$
$$-\quad+$$
$$\emptyset$$

O.: Dijeljenje polinoma, gdje su članovi korijeni.

6. $(a+\sqrt{ab}+b):(\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b})=\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}$

$$a-\sqrt[4]{a^3b}+\sqrt{ab}$$
$$-\quad+\quad-$$
$$\sqrt[4]{a^3b}$$
$$\sqrt[4]{a^3b}-\sqrt{ab}+\sqrt[4]{ab^3}$$
$$-\quad+\quad-$$
$$\sqrt{ab}-\sqrt[4]{ab^3}+b$$
$$\sqrt{ab}-\sqrt[4]{ab^3}+b$$
$$-\quad+\quad-$$
$$\emptyset$$

7. Potenciranje i radiciranje izvađaj bilo kojim redom i pri tome krati!

$$\left\{\frac{\sqrt[4]{(a^3)^2(ab^2)^3}}{\sqrt{\sqrt[4]{(a^2)^3}}}\right\}^8 : \left\{\frac{\sqrt{(\sqrt[6]{a^5b})^2}}{\sqrt[3]{(ab^2)^2(a^2b)^3}}\right\}^6 = \frac{[(a^3)(ab^2)^3]^2}{a^6} : \frac{a^5b}{[(ab^2)^2(a^2b)^3]^2} =$$

$$= \frac{(a^6a^3b^6)^2}{a^6} : \frac{a^5b}{(a^2b^4 \,.\, a^6b^3)^2} = \frac{a^{18}b^{12}}{a^6} : \frac{a^5b}{a^{16}b^{14}} = a^{12}b^{12} \,.\, \frac{b^{13}}{a^{11}} = ab^{25}$$

Primjer II

1. Potencije sa razlomljenim eksponentima pretvori najprije u korijene. Za razlomljene eksponente vrijede ista pravila kao i za cijele.

$$9^{\frac{1}{2}} - 25^{0\cdot5} + 8^{0\cdot\dot{6}} - (-0\cdot125)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{9} - 25^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{2}{3}} - (-0\cdot125)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$\sqrt{9} - \sqrt{25} + \sqrt[3]{8^2} - \left(-\frac{125}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}} = 3 - 5 + 4 - \left(\sqrt[3]{-\frac{1000}{125}}\right) = 3 - 5 + 4 + 2 = 4$$

2. $$\sqrt[-3]{x^{\frac{3}{2}}} : \sqrt[1\cdot2]{x^{\frac{1}{2}}} : \sqrt[0\cdot\dot{6}]{x^{-\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{1}{2}} : x^{-1} : x^{-1} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$$

3. $$\sqrt[0\cdot8]{5\tfrac{1}{16}} - \sqrt[-2/3]{49} + (6\tfrac{1}{4})^{\frac{3}{2}} + (\tfrac{5}{4})^{\frac{1}{2}} \,.\, (\tfrac{3}{10})^{\frac{1}{2}} \,.\, (\tfrac{8}{3})^{\frac{1}{2}} \,.$$

$$= \sqrt[4/5]{\tfrac{81}{16}} - \sqrt[2/3]{\tfrac{1}{49}} + \sqrt{(\tfrac{25}{4})^3} + \sqrt{\tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{3}{10} \cdot \tfrac{8}{3}} \,.$$

$$= \sqrt[4]{(\tfrac{81}{16})^5} - \sqrt{(\tfrac{1}{49})^3} + \sqrt{(\tfrac{25}{4})^3} + 1$$

$$= \tfrac{81}{16} \cdot \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{49} \cdot \tfrac{1}{7} + \tfrac{25}{4} \cdot \tfrac{5}{2} + 1 \text{ i t. d.}$$

4. $\sqrt[0]{a} = a^{\frac{1}{0}} = a^{\infty} = \infty$; $\sqrt[0]{a^{-1}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{0}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\infty} = \varnothing$ U koliko je ovaj postupak ispravan?

5. Računske operacije sa potencijama razlomljenih eksponenata riješavaju se: ili da se potencije najprije pretvore u korijene, ili da se postupa kao sa potencijama cijelih eksponenata.

1) $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$, ili

2) $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a^2} : \sqrt{a} = \sqrt[6]{a^4} : a^3 = \sqrt[6]{a}$

Zadaci

1. Od kojeg je broja $a = n$-ti korijen? Koji problem dovodi do korjenovanja? Koji broj treba potencirati sa $a + b$, da se dobije $a + b$ $\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = ?\right]$. Kakav je odnos između potenciranja i korijenovanja? Kad se mogu korijeni reducirati?

1) $\sqrt{169 - 25} - \left(\sqrt{169} - \sqrt{25}\right)$ 2) $\sqrt[7]{(x^2 - y^2)(x + y)^3(x - y)^3}$

3) $\sqrt{a^2} - \left(-\sqrt[3]{b}\right)^3 + \left[\sqrt[5]{a - b}\right]^5 + 2\sqrt[3]{(a - b)^3} + \sqrt[n]{(a - b)^n}$

4) $3\sqrt[5]{x} - \left\{-\left[-2\sqrt[3]{y} + \left(-2\sqrt[5]{x} + 3\sqrt[3]{y}\right)\right]\right\}$; R. : $\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{y}$

2. Kako se množe istoimeni, a kako raznoimeni korjeni? Kako se produkt radicira?
$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = ?,\ \sqrt[n]{a^n b} = ?\right)$

1) $\sqrt{18a} \cdot \sqrt{6b}\quad \sqrt{8}\quad \sqrt{6ab} - \sqrt[3]{5a^2b^2}\quad \sqrt[3]{25ab}$

2) $\sqrt[3]{10 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 30} = \sqrt[3]{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = ?$

3) $\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2}$; R.: ab

4) $\sqrt[3]{27\,(ay^3 - by^3)}\quad \sqrt[3]{8\,(ax^3 - bx^3)}\quad \sqrt[3]{a-b}$; R.: $6xy\,(a-b)$

4a) $\sqrt[5]{-0{\cdot}00001\,a^{10n+20}\,b^{(5n-10)x}} \cdot \sqrt[n-1]{5^{1-n}\,a^{2n-2}\,b^{2n-1}}$

5) $\sqrt[x]{a^{x+1}\,b^x - a^x\,b^{x+1}} - \sqrt[x-1]{a^x\,b^{x-1} + a^{x-1}\,b^x}$;

R. $ab\left[\sqrt[x]{a-b} - \sqrt[x-1]{a+b}\right]$

6) $5\sqrt{50} - 3\sqrt{32} - 3\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54}$; R.: $13\sqrt{2}$

7) $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 3\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

8) $\left(1 - \sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}}$ (R.: i)

9) $\left(\sqrt{\frac{x^2}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x^2}} + 1\right)\left(\sqrt{\frac{y}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{y}} + 1\right)$

10) $\left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt[3]{\sqrt{2} + 1}$

11) $\left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{2}\right)$

12) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)$ (R.: $a - b$)

13) $\sqrt[3]{\sqrt{a^3} + \sqrt{a^3 + b^3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^3} - \sqrt{a^3 + b^3}}$ (R.: $-b$)

14) $\left\{\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{2}} \pm \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2-1}}{2}}\right\}^2$ (R.: $x \pm 1$)

15) $\left(a - \sqrt{ab} + b\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}\right)$ (R.: $a^2 + ab + b^2$)

15a) $\left(\sqrt{10} - \sqrt{6}\right)\sqrt{4 + \sqrt{15}}$ (R.: 2)

16) $\frac{a-b}{\sqrt{a^{-1}\,b^{-1}}}\sqrt{a^{-1}\,b^{-1}} - (a+b)\,ab\sqrt{a^{-2}\,b^{-2}}$ (R.: $-2b$)

17) $\left(\sqrt{x} - \sqrt[1]{x}\right)^2,\ \left(\sqrt{x} + \sqrt[1]{x}\right)^3$

18) $\left\{\sqrt{x - \sqrt{x^2 - y}} - \sqrt{x + \sqrt{x^2 - y}}\right\}^2$

19) $\left\{\sqrt{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} \pm \sqrt{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}\right\}^2$

20) $\sqrt[3]{\frac{x-y}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2-1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^3}{(x+1)^3}}$

21) $n\sqrt{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}}}}$ (R.: $\sqrt[8]{n}$)

22) $(2a - 3b)\sqrt[3]{\frac{4a^2 - 9b^2}{(2a-3b)^4}}$; R.: $\sqrt[3]{2a + 3b}$

3. Kako se dijele istoimeni, a kako raznoimeni korijeni? Kako se kvocijent radicira?

$\left(\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = ?,\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = ?\right)$ 1) $\left(3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + \sqrt{2}\right) : \sqrt{2}$ (R.: 1)

2) $\sqrt[3]{\frac{54}{16}} + \sqrt{\frac{50}{2}} - \sqrt[3]{\frac{9}{4}} : \sqrt[3]{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt{75} : \sqrt{3}$ 3) $\sqrt{\frac{25 \cdot 18 \cdot 21 \cdot 14}{20 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 3}}$

3a) $\sqrt[4]{\frac{x^{4n+m} y - 10n - 12}{a^{17n} - 13\, b^{8n} - 9m + 1}}$; R.: $\frac{x^n b^{2(m-n)}}{a^{4n-3} y^{2n+3}} \sqrt[4]{\frac{b^{m-1} x^m}{a^{n-1} y^{2n}}}$

3b) $\sqrt[x]{\frac{a^{1-3x} b^{-2x}}{c^{-3x-5}}}$; R.: $\frac{c^3}{a^3 b^2} \sqrt[x]{ac^5}$

3c) $\sqrt[2n-1]{-\frac{x^{5n-6n^2-1}}{y^{4(4n-2)} z^{3-6n}}}$; R.: $-\frac{x}{yz}\sqrt[2n-1]{\frac{x^{1-3n} z^3}{y^8}} = -\frac{1}{yz}\sqrt[2n-1]{\frac{z^3}{x^n y^8}}$

4) $(a-b) : \sqrt[n]{\frac{(a-b)^{n-1}}{a+b}}$ 5) $(a+b) : \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)$ 6) $(a+b) : \sqrt[3]{a+b}$

6a) $(x-y) : \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right)$ 7) $\left(\sqrt{ax} + \sqrt{bx} - \sqrt{cx} - \sqrt{ay} + \sqrt{by} - \sqrt{cy}\right) : \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$

8) $\left(\sqrt[n]{x^2} - 3\sqrt[n]{x} + 2\right) : \left(\sqrt[n]{x} - 2\right)$

8a) $(a^2b^2 + ab + 1) : \left(ab - \sqrt{ab} + 1\right)$; R.: $ab + \sqrt{ab} + 1$

9) $(ab+1) : \left(\sqrt[3]{ab} + 1\right)$ 10) $\sqrt{\frac{a + 2\sqrt{a} + 1}{a-1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}}$

10a) $\left(xy + \sqrt{xy} + 1\right) : \left(\sqrt{xy} + \sqrt[4]{xy} + 1\right)$; R.: $\sqrt{xy} - \sqrt[4]{xy} + 1$

11) $\left(a^3 + b^3 - 2a^2\sqrt{b} - 2b^2\sqrt{a} + 2ab\sqrt{ab} + ab\right) : \left(a\sqrt{a} - \sqrt{ab} + b\sqrt{b}\right)$ $\left(\text{R.: } a\sqrt{a} - \sqrt{ab} + b\sqrt{b}\right)$

12) $\left(x^3 - y^3 + xy\sqrt[3]{xy^2} - xy\sqrt[3]{x^2y}\right) : \left(x\sqrt[3]{x} - y\sqrt[3]{y}\right)$; R.: $x\sqrt[3]{x^2} + y\sqrt[3]{y^2}$

13) $\left(a^3 + a^3b\sqrt{b} - ab^3\sqrt{a} - b^3\right) : \left(a\sqrt{a} - b\sqrt{b}\right)$

14) $\left(16x\sqrt[3]{x} - 9x\sqrt[5]{x}\right) : \left(4\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[5]{x^3}\right)$

15) $\left(1 - 4\sqrt{a} + 4a - a^2\right) : \left(1 - \sqrt{a}\right)^2$; R.: $1 - 2\sqrt{a} - a$

16) $\left(2 - 3\sqrt[3]{9}\right) : \left(\sqrt[5]{2} - \sqrt[3]{3}\right)$

17) $\left(xy - 2\sqrt{xy} + 1\right) : \left(\sqrt{xy} + 2\sqrt[4]{xy} + 1\right)$; R.: $\sqrt{xy} - 2\sqrt[4]{xy} + 1$

18) $\left(a - 2\sqrt{a} + 1\right) : \left(\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{a} + 1\right)$; R.: $\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{a} + 1$

19) $\left(\frac{2x}{y} + 2 - \sqrt{2} + \frac{y}{2x}\right) : \left(\sqrt{\frac{2x}{y}} - \sqrt[4]{2} + \sqrt{\frac{y}{2x}}\right)$; R.: $\sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt[4]{2} + \sqrt{\frac{y}{2x}}$

20) $1:\left[1:\left(1:\sqrt{\dfrac{x-2y}{x^3-3xy^2-2y^3}}\right)\right]$

21) $(a^2b^2-ab+1)\sqrt{ab+1}:\sqrt{a^3b^3+1}$; R.: $\sqrt{a^2b^2-ab+1}$

22) $\left(a-\sqrt[6]{a^5b}-\sqrt[6]{ab^5}+\sqrt[3]{ab}+b\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)$; R.: $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$

23) $\left(81\sqrt[5]{m^4}-16\sqrt[5]{n^4}\right):\left(9\sqrt[5]{m^2}+4\sqrt[5]{n^2}\right)$

24) $\left(x^2+2x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}+x\right):\left(x-\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)$ 24a) $\left(\dfrac{x^2}{b^2}-\sqrt{\dfrac{b}{x}}\right):\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{b^2}}-\sqrt[6]{\dfrac{b}{x}}\right)$

25) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}-\dfrac{4\sqrt{x^2-y^2}}{y^2}$ (R.: Ø)

26) Iz $a:b:c=x:y:z$ slijedi: $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{a}{x}$. Dokaz!

27) $\dfrac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}-\dfrac{2\left(\sqrt{a}+2a\right)}{1-a}-\dfrac{a+2\sqrt{a}-1}{a-1}$ (R.: 1)

28) $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\dfrac{2ab}{a+b}$. Riječima? Dokaz!

29) $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ za $a>b$. Dokaz?

30) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right):\sqrt{x}=2:3$, $x:y=?$

31) $B_1:B_2=(v+x)^2:x^2$, $x=?$ $\left(=\dfrac{v\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}\right)$

4. Kako se korijen potencira, a kako radicira? $\left[(\sqrt[n]{a})^m=?,\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=?\right]$

1) $2\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}+3\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}-4\sqrt[4]{\sqrt[6]{a^2}}+2\sqrt[6]{\sqrt{a}}$

2) $3\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}-2\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}+\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}$

3) $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m-2\left(\sqrt[3]{\sqrt[-2]{\sqrt[4]{a^2}}}\right)^{-12}+\sqrt[-m]{\sqrt[n]{a^{-mn}}}$ (R.: 0)

4) $a\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}:\sqrt{a^{-1}\sqrt[4]{a^{-3}}}-a\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[4]{a^{-1}}}\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}}$ (R.: 0)

5) $\sqrt{\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{16}{3}}}:\sqrt[6]{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{27}{8}}}:\sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{2}}\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}}$

6) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{(a+b)^5}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{(a+b)^7}}:\left[\sqrt[6]{\sqrt{(a+b)^{17}}}:\sqrt{\sqrt[6]{(a+b)^5}}\right]$

7) $\sqrt[x]{a^{x-1}}:\left(\sqrt[x]{a}\right)^{x+1}:\left(\sqrt[x]{a}\right)^{1-x}:\sqrt[x]{a^{x-3}}$ $(=1)$

8) $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{x^n y^n}}\right)^m:\sqrt{\dfrac{x}{y}}:\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ [R.: xy]

9) $\sqrt{xy\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2} : \sqrt{x-y} \quad [= \sqrt{x-y}]$

10) $\sqrt[x-y]{a^{x^2-y^2}} \cdot \sqrt[x-2]{a^{2xy-4y}} : \left(\sqrt[x+y]{a}\right)^{x^2-y^2}$ (R.: a^{4y})

11) $\sqrt{3\sqrt{48}}-\sqrt{6\sqrt{12}}+3\sqrt{12\sqrt{3}}-3\sqrt[4]{432}$ (R.: Ø)

12) $\left[\sqrt[x-1]{\frac{a^{2x-2}}{(b^x-1)^2}}-\sqrt[x+1]{\frac{(b^x+1)^2}{a^{2x+2}}}\right] : \sqrt[1]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$; R.: $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$

13) $\left[\sqrt[n]{x^a \cdot \sqrt[m]{x^b \cdot \sqrt[p]{c}}} : \sqrt[m]{x^a\sqrt[p]{x^b\sqrt[n]{x^c}}}\right] \cdot \sqrt[p]{x^a}$

14) $\left\{\frac{\sqrt{(a^3)^2(ab^3)^4}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{a^3}\right)^4}}\right\}^6 : \left\{\frac{\sqrt{\sqrt[6]{a^5 b}}}{\sqrt{(ab^2)^3(a^3b)^2}}\right\}^8$

15) $\sqrt{xy\sqrt[3]{x^2y^2\sqrt[4]{x^3y^3}}} : \sqrt[4]{x^3y^3\sqrt[3]{x^2y^2\sqrt{xy}}} \cdot \sqrt{xy} \; (= \sqrt{xy})$

16) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}\sqrt[3]{\frac{(1+x)^2}{(1-x)\sqrt{1-x}}}\sqrt[4]{\frac{(1-x)^3}{(1+x)\sqrt{1+x}}}} :$

$: \frac{\sqrt[6]{1+x}\;\sqrt[16]{1+x}\cdot\sqrt[24]{1+x}\cdot\sqrt[12]{(1-x)^{-7}}}{\sqrt[3]{(1-x)^{-1}}\;\sqrt[12]{(1-x)^{-1}}\;\sqrt[24]{(1-x)^{-1}}}$; R.: $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

17) $\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt[3]{\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{y^3}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}}$; R.: y

5. $\sqrt[x^2-y^2]{a^{2x}}$ predočiti a) kao korijen korijena; b) produkt korijena; c) kvocijent korijena.

6. Koji smisao imaju korijeni sa negat. eksponentom, a koji potencije sa razlomljenim eksponentom? Kako se može potencija predočiti kao korijen, a kako korijen kao potencija? $\sqrt[n]{a^m} = a^{(?)}$, $\sqrt[-n]{a} = ?$

1) Napiši kao korijen: a) $(x-y)^{\frac{2}{3}}$, b) $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$, c) $\frac{1}{(a-b)^{-0·6}}$; d) $x^{\frac{ab}{2n}-\frac{1}{4n}}$

1a) $a^{-\frac{1}{2}}$; b) $a^{\frac{m+n}{2}-n}$; c) $0·125^{0·6}$; d) $27^{1·5}$

2) Napiši kao stepen: 1) $\sqrt[n]{ab^m}$; 2) $\sqrt[n]{(ab)^m}$; 3) $\sqrt[n]{(a\pm b)^m}$, $\sqrt[5]{\frac{a^3(x-y)^6}{5x^4+4x^5}}$

3) $\sqrt[-3]{\frac{1}{64}}-\sqrt[-2]{0·25}+\sqrt[0]{\frac{1}{4}}+\sqrt[4]{0}$ [R.: 2]

4) $\left\{\sqrt{\frac{1}{9}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}+\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\right\} : \left\{\left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}$; R.: $-\frac{1}{36}$

5) $\left(-\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(+\frac{9}{4}\right)^{-0·5}+36^{1\frac{1}{2}}-8^{0·\dot{3}}+\left[\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$

6) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + 16^{0,75} - \sqrt[-0]{3} + 0{\cdot}25^{-\frac{1}{2}} : \sqrt{0{\cdot}25^{-\frac{3}{4}}}$

7) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{\frac{1}{36}} + \sqrt[-\frac{3}{4}]{\frac{8}{27}} - \sqrt[\frac{1}{3}]{3} - \sqrt[\frac{1}{2}]{3} + \sqrt[-\frac{2}{3}]{6\frac{1}{4}}$ 7a) $0{,}0016^{-\frac{3}{4}}$; R.: 125

7b) $(-0.00032)^{\frac{3}{5}} : (-0.064)^{\frac{2}{3}}$ 7c) $\sqrt[-0{\cdot}5]{0{\cdot}5} + \sqrt[1{\cdot}5]{1{\cdot}5} - \sqrt[0{\cdot}\dot{6}]{0{\cdot}\dot{6}} + \sqrt[-1]{0{\cdot}5} + \sqrt[-0]{2}$

8) $\sqrt[4^{-0{\cdot}5}]{0{\cdot}5} - \left(\sqrt[-3]{3\frac{3}{8}}\right)^{-2} + \sqrt[0{\cdot}2]{2} + \left(-3\frac{3}{8}\right)^{0{\cdot}\dot{6}}$; R.: $32\frac{1}{4}$

9) $\sqrt[-2]{\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{x}{y} + 1} : \sqrt[-3]{\frac{x^3}{y^3} - 3\frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} - 1}$; R.: $\frac{x-y}{x+y}$

10) $\left[\frac{(a+1)^{\frac{1}{2}}}{(a-1)^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{a}\right]^{\frac{3}{2}}$ 11) $\sqrt[3]{a} : \sqrt[-2]{a} - \sqrt{a} : \sqrt[-1]{a} - a^{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{a}$

12) $\dfrac{x^{\frac{3}{n}} + y^{\frac{3}{n}}}{x^{\frac{2}{n}} - y^{\frac{2}{n}}} : \dfrac{x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}}}$

13) $[(ab)^{\frac{3}{4}} - 1] : [(ab)^{\frac{2}{3}} - 1]$; R.: $(ab)^{\frac{2}{3}} + 1$, a) $(x - y) : (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{8}})$,

b) $\left(a^{\frac{2}{n}} b^{\frac{6}{n}} - c^{\frac{1}{n}}\right) : \left(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{3}{n}} - c^{\frac{1}{n}}\right)$

14) $[(a - x)^{\frac{3}{2}} + (x - b)^{\frac{3}{2}}] : [(a - x)^{\frac{1}{2}} + (x - b)^{\frac{1}{2}}]$

15) $(a^{\frac{4}{n}} b^{\frac{6}{n}} - c^{\frac{2}{n}}) : (a^{\frac{2}{n}} b^{\frac{3}{n}} + c^{\frac{1}{n}})$

16) $(x^{\frac{5}{6}} - (xy)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + 1) : (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}} + 1)$; R.: $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + 1$

17) $\left[a + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - 6b^{-1}\right] : (a^{\frac{1}{2}} - 2b^{-\frac{1}{2}})$; R.: $a^{\frac{1}{2}} + 3b^{-\frac{1}{2}}$

17a) $(x - x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} - 1) : (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} + 1)$; R.: $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} - 1$

18) $(x + 2x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}} - 1) : (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} - 1)$; R.: $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + 1$

19) $\left(\sqrt[-1]{a} - 2\sqrt[-2]{ab} + \sqrt[-1]{b}\right) : \left(\sqrt[-2]{a} - \sqrt[-2]{b}\right)$

20) $\left(x^{-\frac{1}{2}} - y^{-0{\cdot}5}\right)^2$ 20a) $\left(a^{1 + \frac{x}{2}} - b^{-\frac{y}{2}}\right)^2$

21) $(a^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}} - 1)(1 - a^{\frac{1}{2}})$

22) $\left(\sqrt[\frac{1}{8}]{a} + \sqrt[\frac{1}{8}]{b}\right) : \left(\sqrt[\frac{1}{2}]{a} + \sqrt[\frac{1}{2}]{b}\right)$ 22a) $a^{\frac{1}{3}} : \sqrt{a} - \sqrt{a} \,.\, (a)^{-\frac{4}{3}}$

23) $\left(\frac{1}{a\sqrt{a}} - \frac{3}{a\sqrt{b}} + \frac{3}{b\sqrt{a}} - \frac{1}{b\sqrt{b}}\right) : \left(\sqrt[-1]{a} - 2\sqrt[-2]{ab} + \sqrt[-1]{b}\right)$

24) $(x^{-\frac{2}{n}} - 3x^{-\frac{1}{n}} + 2) : (x^{-\frac{1}{n}} - 2)$ 25) $\left(x^{-1} \mp \sqrt[-1]{x}\right)^2$, $\left(x^{-1} + \frac{1}{\sqrt[-1]{x}}\right)^2$

26) $(x^{-3} - x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - x^{-1}) : \left(x^{-1} - \frac{1}{\sqrt[-1]{x}}\right)$

27) $\left(x^{-2} + x^{-1} + 1 - \sqrt[-2]{x} - \sqrt[-1]{x}\right)\left(x^{-1} - \sqrt[1]{x}\right)$

28) $(x^{-0})^{-\frac{1}{3}} : \sqrt[\frac{1}{2}]{(x^5)^{0{\cdot}1}} \,.\, \sqrt[1]{x}$; R.: 1

29) $\left(\sqrt[\frac{1}{2}]{x} + 3xy - 10\sqrt[\frac{1}{2}]{y}\right) : (x - 2y)$; R.: $x + 5y$

29a) $\left(x^{\frac{2a}{b}} - 5x^{\frac{a}{b}} + 6\right) : \left(x^{\frac{a}{b}} - 2\right)$; R.: $x^{\frac{a}{b}} - 3$

29b) $\left(x^{\frac{3}{n}} + y^{\frac{3}{n}}\right) : \left(x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}\right)$

30) $\left(x^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{x^{-3/5}y^2}\right)^{\frac{5}{4}} \cdot \left(\sqrt[6]{xy^{-3/4}}\right)^{\frac{12}{9}} : \left(\sqrt[8]{x^{3/7}y^{-3/2}}\right)^{\frac{14}{3}} : \left(\frac{x^{-3/14}}{y^{-4/21}}\right)^{-\frac{7}{6}}$

31) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{x^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[\frac{2}{3}]{x^{\frac{2}{3}}} : \sqrt[\frac{3}{4}]{x^{-2}} \cdot \sqrt[-\frac{1}{2}]{x^{-2}}$

32) $\sqrt[\frac{1}{3}]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[\frac{1}{4}]{\frac{b}{a}} : \sqrt[\frac{3}{4}]{\frac{b}{a}}$; R.: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

32a) $\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}} \cdot \sqrt[3]{\{x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1\}}$

33) $\sqrt[\frac{m}{2}]{\sqrt[\frac{2}{m}]{\sqrt[\frac{2}{3}]{x}}} \cdot \sqrt[\frac{2}{n}]{\sqrt[\frac{n}{3}]{\sqrt[\frac{3}{2}]{x}}} : \sqrt[\frac{1}{2}]{\sqrt[\frac{1}{3}]{\sqrt[6]{x}}}$ $(= x)$

34) $10^{0,30103} = 2$, $4 = 10^{(?)}$, $5 = 10^{(?)}$

7. Koji problem dovodi do imaginarnih i kompleksnih brojeva? Kako se predočuju? Definiraj imaginarnu jedinicu!

1) $2i - \{3 - [-3i - (2i + 1) - i^2] + 2i^3\} - 3 = ?$

2) $2i \cdot 3i - 2i^4 + 2i^3 \cdot 3i^3$ 3) $(a + 1)(a - 1)(a + i)(a - i)$

4) $\left(2\sqrt{-12} - 3\sqrt{-18} + 2\sqrt{-8}\right) : \sqrt{-2}$ 5) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{-b}$, $\sqrt{ab} : \sqrt{-b}$

6) $\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{-2}\right)\left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{-2}\right)$

7) $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^3$, $\frac{(u + v\sqrt{-1})^2}{u^2 - v^2 - 2uvi} = ?$ 8) $\frac{3}{1 - 2i}$, $\frac{2 + 3i}{2 - 3i}$, $\frac{1 + i}{1 - i}$

9) $\frac{\sqrt{-a} + \sqrt{-b}}{\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}$, $\frac{1}{1 - i - \sqrt{-2}}$, $\frac{(1 - i)^3}{(1 + i)^3}$

10) $\left(ai + 2abi + b\sqrt{-1}\right) : i\left(\sqrt{a} + \sqrt{-b}\right)$

11) $(1 - a) : \left(1 - i\sqrt[4]{a} - \sqrt{a} + i\sqrt[4]{a^3}\right)$ 12) $(a^3 + 2a^2 + 2a + 1) : \left(\sqrt{a} - i\right)$

13) Rastavi na faktore: $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^4 + 1$ 14) $\sqrt{10 - 6i}$

15) $\sqrt{2 + \sqrt{-5}}$ 16) $\sqrt{\sqrt{-4}} = \sqrt{0 + \sqrt{-4}}$, $\sqrt{-2 + \sqrt{-1}} = ?$, $\sqrt{\sqrt{-i}} = ?$

17) Riješi pomoću Moavrovog obrasca: *a)* $\sqrt[3]{2 + 3i}$; *b)* $x^3 + 8 = \varnothing$; *c)* $\sqrt[4]{-16}$; *d)* $\sqrt[6]{-64}$, $\sqrt[3]{8}$; *e)* $\sqrt[5]{-8}$; *f)* $\sqrt[8]{256}$; *g)* $\sqrt[8]{-256}$

8. Koji problem dovodi do iracionalnih brojeva? (Realan broj koji $\neq \frac{m}{n}$). Koja im je glavna karakteristika? ($\sqrt{2} = ?$, $\sqrt{3} = ?$, $\sqrt[3]{3} = ?$)

9. Racionaliziraj (oslobodi nazivnik od korijena!) nazivnik:

1) $\frac{16}{\sqrt{8}}$ 2) $\frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ 3) $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt{2}$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$ 5) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

6) $\frac{22}{\sqrt{11}}$ 7) $\frac{ab}{\sqrt{ab}}$ 8) $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 9) $\frac{3}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}}$ 10) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$;

10a) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=?$ 11) $\frac{x+y+\sqrt{x^2-x^3}}{x+y-\sqrt{x^2-y^2}}$

12) $\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt[4]{a}}$ 13) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}$ 14) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ 15) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}}$.

16) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a-b}}$ 17) $\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}}{\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}}$ 18) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

19) $\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x-y+\sqrt{x^2+y^2}}$ $(=1)$

10. Svesti pod jedan korijen:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\mp\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ 2) $\sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}\pm\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}$

3) $\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$ 4) $\sqrt{x+2x^2+2x\sqrt{2x}}-\sqrt{x+2x^2-2x\sqrt{2x}}$

5) $\sqrt{\frac{4+\sqrt{10}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{10}}{2}}$ 6) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}$ (Dokaz!)

11. Svesti na sumu (razliku) korijena:

1) $\sqrt{5+\sqrt{7}}$ 2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 3) $\sqrt{2\sqrt{3}\pm\sqrt{18}}$ 4) $\sqrt{\frac{2}{3}-\sqrt{2}}$

5) $\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}$

12. Drugi korijen:

1) $\sqrt{3190}$ 2) $\sqrt{163216}$ 3) $\sqrt{13\cdot69}$ 4) $\sqrt{201\cdot64}$ 5) $\sqrt{0\cdot04129}$

6) $\sqrt{31\cdot8}$ 7) $\sqrt{0\cdot0318}$ (3 dec.) 8) $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\pi}$ (3 dec.) 9) $\sqrt{8\frac{15}{49}}$

10) $\sqrt[4]{\frac{625}{2401}}$ 11) $\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{3087049}}}}$ 12) $\sqrt{x^2-2x\sqrt{y}+y}$

13) $\sqrt{9x^6-12x^5+10x^4-28x^3+17x^2-8x+16}$

14) $\sqrt{\left[4-4\sqrt{u}+3u-\sqrt{u^3}+\left(\frac{u}{2}\right)^2\right]}$

15) $\sqrt{\left[y^{\frac{4}{5}}-4y^{\frac{11}{15}}+4y^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[5]{y^2}-4y^{\frac{1}{3}}+1\right]}$

16) $\sqrt{a^2\pm b}=a\sqrt{1\pm\frac{b}{a^2}}=\ldots$ (prema $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{6}x^3-\ldots$)

17) $\sqrt{51}=\sqrt{7^2+2}=\ldots$ (prema 16!); $\sqrt{26}$ 18) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 19) $\sqrt[8]{1475789056}=?$

20) $s_{2n}=\sqrt{2r\left(r-\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}\right)}$ za $r=1$, $s_4=r\sqrt{2}$, $s_8=?$

13. Treći korijen:

1) $\sqrt[3]{12167}$ 2) $\sqrt[3]{24,389}$ 3) $\sqrt[3]{0,038}$ (3 dec.) 4) $\sqrt[3]{6\frac{303}{512}}$ 5) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}}$

6) $\sqrt[3]{u^3v^6+3u^2v^4yz^2+3uv^2y^2z^4+y^3z^6}$ 7) $\sqrt[3]{27a^{\frac{3}{2}}-54ab^{\frac{1}{2}}+36a^{\frac{1}{2}}b-8b^{\frac{3}{2}}}$

8) $\sqrt[3]{(a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - b\sqrt{b})}$ 9) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 -$

10) $\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a\sqrt[3]{1 \pm \frac{b}{a^3}} = \dots$ 11) Prema 10) $\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{4^3 + 1}$; $\sqrt[3]{63}$; $\sqrt[3]{241}$

12) $\sqrt[4]{\frac{16a^8}{81b^{12}} + \frac{16a^3}{9b^7} + \frac{6}{a^2 b^2} + \frac{9b^3}{a^7} + \frac{81b^8}{16a^{12}}} = ?$ 13) $\sqrt[9]{5429 \cdot 503678976} = ?$ (2·6)

14) $\sqrt[3]{x^2 - 3x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{2}{3}} - 7 + 6x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{4}{3}} + x^{-2}}$

15) $\sqrt[6]{(x^6 - 12x^5y + 60x^4y^2 - 160x^3y^3 + 240x^2y^4 - 192xy^5 + 64y^6)}$ [R.: $x - 2y$]

$\sqrt{1} = \pm 1$	$\sqrt{49} = \pm 7$	$1^3 = 1$	$7^3 = 343$
$\sqrt{4} = \pm 2$	$\sqrt{64} = \pm 8$	$2^3 = 8$	$8^3 = 512$
$\sqrt{9} = \pm 3$	$\sqrt{81} = \pm 9$	$3^3 = 27$	$9^3 = 729$
$\sqrt{16} = \pm 4$	$\sqrt{100} = \pm 10$	$4^3 = 64$	$10^3 = 1000$
$\sqrt{25} = \pm 5$	$\sqrt{121} = \pm 11$	$5^3 = 125$	
$\sqrt{36} = \pm 6$	$\sqrt{144} = \pm 12$	$6^3 = 216$	

III Logaritmiranje

(Druga inverzna operacija potenciranja)

Def.: Logaritam broja a na bazu b ($= {}^b\log a$) jest onaj eksponent kojim se mora potencirati baza b, da se dobije zadani broj a.

1.	$b^x = a,\ x = ?$ $x \equiv {}^b\log a$	$2^3 = 8$ (potencija) $3 = {}^2\log 8$ (logaritam)
2.	$b^{{}^b\log a} = {}^b\log(b^a) = a$ $x \equiv$ ekspon. baze $b \equiv$ logarit. potencije a	

1. $x \equiv$ logaritam
   $a \equiv$ numerus, logaritmand
   $b \equiv$ baza, osnova
2. **Logaritm. i potenciranje,** inverzne operacije, ukidaju se.

Pravila:

a) Logaritmiranje (traženje logaritma)

1. $\log(a \pm b) \rightarrow$ nesvodivo!
2. $\log(abc\dots) = \log a + \log b + \log c \dots$
3. $\log(a : b) \equiv \log\frac{a}{b} = \log a - \log b$
4. $\log a^n = n \log a$
5. $\log\sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log a$

1. **Logaritam sume (razlike)** (ostaje naznačen izraz)
2. **Logaritam produkta** (= sumi logaritama faktora)
3. **Logaritam kvocijenta** (= log. dividenda — log. divizora)
4. **Logaritam potencije** (= eksponent $\times$ log. baze)
5. **Logaritam korijena**

b) **Delogaritmiranje (numerus = ?)**

1. $\log a + \log b = \log (a \cdot b)$
2. $\log a - \log b = \log \left(\frac{a}{b}\right)$
3. $n \log a = \log a^n$
4. $\frac{1}{n} \log a = \log \sqrt[n]{a}$

Opaska:

$\frac{1}{{}^{10}\log e} \equiv$ modul za e

$\frac{1}{\mathrm{l}\, a} \equiv$ modul za 10

1. ${}^{10}\log a \equiv \log a$
2. ${}^{e}\log a \equiv \mathrm{l}\, a$ ili log nat. a
3. $\mathrm{l}\, a = \frac{\log a}{\log e} = 2{,}30259 \log a$
4. $\log a = \frac{\mathrm{l}\, a}{\mathrm{l}\, 10} = 0{,}43429\, \mathrm{l}\, a$
5. $\log \frac{1}{n} = -\log n$
6. $\log 0 = \infty$; $\log 1 = \emptyset$
7. $\log 10^n = n$; $\log 10 = 1$
8. $\log (a \cdot 10^n) = n + \log a$
9. $\log \frac{a}{10^n} = \log a - n$

1. **Dekadski (Briggsovi) logaritmi** (baza 10)
2. **Prirodni (Neperovi) logarit.** (baza $e = \lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{\cdot}71828.. = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + ..$)

3—4. **Prelaz iz jednog logarit. sistema u drugi** (iz $e^x = a$; $x = \frac{\log a}{\log e} = \mathrm{l}\, a$)

5. **Logaritam pravih razlomaka** $< \emptyset$

7. **Logaritam dekad. jedinica jest cio broj**

8—9. **Logaritam broja (drugog)** je beskonačan dec. razlomak
$10^n < a < 10^{n+1}$
$n < \log a < n + 1$
$0 < \log a - n < 1$

1.	$\log 483{,}2 = 2{,}68413$;	$\log 10 = 1$
	$\log 4{,}832 = 0{,}68413$;	$\log 100 = 2$
		$\log 1000 = 3$
	$\log 0{,}04832 = 0{,}68413 - 2.$	$\log 0{\cdot}1 = -1$
2.	$\log 0{,}004832 = 0{,}68413 - 3.$	$\log 0{\cdot}01 = -2$

1. $2 \equiv$ karakteristika (neovisna o ciframa!) $= n - 1$, gdje $n \equiv$ broj cijelih cifara zad. broja
2. $68413 \equiv$ mantisa (ovisna o ciframa!)

1. $a = x^{\log a}$, $b = x^{\log b}$ — Dokaz!

$\log(ab) = \log x^{\log a + \log b}$
$= \log a + \log b$

2. $a = b$ $\quad a \lesseqgtr b$

$\log a = b$; $\quad \log \gtreqless \log b$

3. Logaritmiranje vodi do rač. operacijâ za 1 stepen nižih, delog. obratno

1. $\log x^2 = 2\log x \neq \log^2 x \equiv \log x . \log x$

2. $a^n \neq n^a$ $(2^4 = 4^2!)$

$a^b = x$, $x = ? = c$ (potenciranje)

$x^n = a$; $x = ? = \sqrt[n]{a}$ (korijenovanje)

$a^x = a$; $x = ? = {}^b\log a$ (log.)

3. $a^{2x} = a^3$; $2x = 3$; $x = \frac{3}{2}$

Primjena logaritama i log. tablica

1) $12{\cdot}637^2 \times 0{\cdot}54384 : 0{\cdot}0765 = x$

R.: $\log x = 2\log 12{\cdot}637 + \log 0{\cdot}54384 - \log 0{\cdot}0765$

N	L
$12{\cdot}637^2$	$2{\cdot}20330$
$0{\cdot}54384$	$0{\cdot}73547 - 1$
$0{\cdot}0765$	$0{\cdot}88366 - 2$
	$- \quad +$

$\log x = 3{\cdot}05511$

$x = 1135{\cdot}29$

2) $\sqrt[3]{\dfrac{0{\cdot}21537^2 \,.\, 7{\cdot}7856}{0{\cdot}93572^2}} = x$

R.: $\log x = \frac{1}{3}(2\log 0{\cdot}21537 + \log 7{\cdot}7856 - \log 0{\cdot}93572)$

N	L
$0{\cdot}21537^2$	$2(0{\cdot}33319 - 1) = 0{\cdot}66638 - 2$
$7{\cdot}7856$	$0{\cdot}89129$
$0{\cdot}93572^2$	$0{\cdot}94230 - 1$
	$- \quad +$
	$0{\cdot}61537 - 1 =$
	$= 2{\cdot}61537 - 3$

$\log x = (2{\cdot}61537 - 3) : 3 = 0{\cdot}87179 - 1$

$x = 0{\cdot}74437$

3) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{0{\cdot}2} - \sqrt[3]{0{\cdot}9}} = x$

R.: $\log x = \frac{1}{5} \log \left(\sqrt[4]{0{\cdot}2} - \sqrt[3]{0{\cdot}9}\right)$

$\sqrt[4]{0{\cdot}2} = ?,\ \sqrt[3]{0{\cdot}9} = ?$

N	L
	$+0{\cdot}75 \qquad -0{\cdot}75$
$\sqrt[4]{0{\cdot}2}$	$0{,}07526 - \frac{1}{4} = 0{,}82526 - 1$ iz $= 0{,}07526 - 0{\cdot}25$
	$0{\cdot}66667 - 0{\cdot}66667$
$\sqrt[3]{0{,}9}$	$0{,}31808 - \frac{1}{3} = 0{\cdot}98475 - 1$ iz $0{,}31808 - 0{\cdot}33333$ $+$

$\sqrt[4]{0{\cdot}2} = 0{\cdot}66875,\ \sqrt[3]{0{\cdot}9} = 0{\cdot}9655$

$\log x = \frac{1}{5} \log(-0{\cdot}29675);\quad \frac{0{\cdot}47239 - 1}{5} = \overset{0\cdot8}{0{\cdot}09448} - \overset{-0\cdot8}{0{\cdot}2}$

$\log x_1 = 0{\cdot}89448 - 1 \qquad\qquad = 0{\cdot}89448 - 1$

$x = -x_1 = -0{\cdot}78430$

4) $x \dfrac{1{\cdot}045^{20} - 1}{0{\cdot}045} = 240520$

R.: $x = \dfrac{240520 \cdot 0{\cdot}045}{1{\cdot}045^{20} - 1}$

$\log x = 5{\cdot}38116 + 0{\cdot}65321 - 2 - 0{\cdot}14986$

$= 3{\cdot}88451$

$x = 7665$

5) Volumen istostraničnog čunja $V = 25{\cdot}074\ m^3$; koliki je polumjer osnovke?

R.: $V = \dfrac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3} = 25{\cdot}074;\quad r = \sqrt[3]{\dfrac{25{\cdot}074 \cdot 3}{\pi\sqrt{3}}}$

$\log r = \frac{1}{3}[\log 25{\cdot}074 + \log 3 - \log \pi - \frac{1}{2}\log 3] = 0{\cdot}38021;$

$r = 2{\cdot}4\,m$

Primjer I

1. Izračunaj x iz ovih izraza: a) ${}^8\log 4 = x$; b) ${}^x\log 0{\cdot}125 = -2$; c) ${}^5\log x = 1$; d) ${}^x\log 8 = -\frac{3}{4}$

R.: **Prema def.:** Baza potencirana sa logaritmom daje numerus i logaritmiranje prelazi u potenciranje; dakle:

a) ${}^8\log 4 = x$

$8^x = 4$

$2^{3x} = 2^2$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

b) ${}^{x}\log 0{\cdot}125 = -2$

$x^{-2} = 0{\cdot}125$

$x = \pm \sqrt[-2]{0{\cdot}125}$

$x = \pm \sqrt{\frac{1}{0{\cdot}125}}$

$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

c) ${}^{5}\log x = -1$

$5^{-1} = x$

$x = \frac{1}{5} = 0{\cdot}2$

d) ${}^{x}\log 8 = -\frac{3}{4}$

$x^{-\frac{3}{4}} = 8$

$x = \sqrt[-3/4]{8} = \sqrt[3/4]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^4}}$

$x = \frac{1}{16}$

Primjer II

P.: Kod logaritmiranja bilo kojoj rač. operaciji numerusâ odgovara direktna rač. operacija logaritama tih numerusa za 1 stepen niža, a kod delogaritmiranja obratno. [„×“ numerusa prelazi u „+“ logaritama; „:“ num. u „—“ log. i t. d., i obratno]

1. $\log\left(5\sqrt[3]{\frac{a+1}{a-1}}\right) = \log 5 + \frac{1}{3}[\log(a+1) - \log(a-1)]$

2. $\log\dfrac{c\sqrt[n]{a+b}\,\sqrt[m]{ab}}{b\sqrt[m+n]{a+b}\,.\,\sqrt[m-n]{ab}} = \log c + \frac{1}{n}[\log(a+b)] + \frac{1}{m}[(\log a +$
$+ \log b)] - \log b - \frac{1}{m+n}\log(a+b) - \frac{1}{m-n}(\log a + \log b)$

3. Delogaritmirati: $\log(a^2 - ab + b^2) + \log(a^2 - b^2) - \log(a-b) = \log(?)$
R.: $\log(a^2 - ab + b^2) + \log(a^2 - b^2) - \log(a-b) =$
$= \log\dfrac{(a^2 - ab + b^2)(a^2 - b^2)}{a-b} = \log(a^3 + b^2)$. Numerus $= a^3 + b^3$

Pazi! a) $\log\frac{1}{2} = \log\frac{1}{2}$
$\quad 3 < 4 \quad \Big| \times$

$3\log\frac{1}{2} < 4\log\frac{1}{2}$ | delog.

$(\frac{1}{2})^3 < (\frac{1}{2})^4$ ili

$\frac{1}{8} < \frac{1}{16}$! Pogreška?

Dokaz da je $\frac{1}{8} < \frac{1}{16}$!

b) $2\log a = \log(a^2) = \log[(-a)^2] = 2\log(-a)$ t. j. $\log a =$
$= \log(-a)$. Na pr. $\log 10 = \log(-10) = 1$
Ggdje je pogreška? Ili $2\log(-1) = \log 1 = 0$; $\log(-1) = 0$
Zato je $10^0 = -1$, $10^0 = +1$ t. j. $1 = -1$. Pogreška?

Zadaci

1. Koji problem dovodi do logaritmiranja? ($b^x = a$, $x = ?$) Kako se zove eksponent baze neke potencije obzirom na tu potenciju? [$b^x = a$; šta je ovdje x od a, šta od b?]
1) Koliki je logaritam od $\frac{4}{9}$ na bazu $\frac{2}{3}$? [$(\frac{2}{3})^x = \frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$; $x = 2$]
2) Na koju je bazu logaritam od 49 jednak $0{\cdot}\dot{6}$? [R.: 343]

3) Od kojeg je broja logaritam na bazu 0·5 jednak $= -1$?

4) Koliki je logaritam od 27 na bazu $\frac{1}{3}$? [R.: ${}^{\frac{1}{3}}\log 27 = -3$]

2. Neka se odredi x iz slijedećih izraza:

1) ${}^{3}\log 81 = x$

2) ${}^{\frac{3}{4}}\log \frac{16}{9} = x$ [R.: $x = -2$]

3) ${}^{-3}\log(-27) = x$

4) ${}^{8}\log 0{\cdot}5 = x$ [R.: $x = -\frac{1}{3}$]

5) ${}^{0{\cdot}4}\log \frac{125}{8} = x$ [R.: $x = -3$]

6) ${}^{-2}\log 8 = x$ (!)

7) ${}^{x}\log 27 = -0{\cdot}75$

8) ${}^{x}\log 49 = 0{\cdot}\dot{6}$ [R.: $x = 343$]

9) ${}^{x}\log 4 = 0{\cdot}5$

10) ${}^{x}\log 3 = -2$

11) ${}^{81}\log x = 0{\cdot}25$ [R.: $x = 3$]

12) ${}^{x}\log 0{,}027 = -3$ [R.: $x = 3{\cdot}\dot{3}$]

13) ${}^{x}\log 4 = 1{\cdot}75$ $\left[\text{R.: } x = 2\sqrt[7]{2}\right]$

14) ${}^{x}\log 0{,}125 = -\frac{3}{2}$

15) ${}^{x}\log 2{\cdot}25 = -0{\cdot}\dot{6}$

16) ${}^{3}\log x = -\frac{5}{2}$; ${}^{-0{\cdot}5x}\log 16 = 2$

17) ${}^{10}\log x = -1$

18) ${}^{-0{\cdot}\dot{3}}\log x = \frac{4}{3}$ $\left[\text{R.: } x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right]$

19) ${}^{3}\log 9^{\frac{2}{3}} = x$

20) ${}^{x}\log \sqrt[-2/3]{0{,}04} = 3$ [R.: $x = 5$]

21) ${}^{a}\log \sqrt[c]{a^{-b}} = x$ $\left[\text{R: } x = -\frac{b}{c}\right]$

22) ${}^{x}\log a^{-\frac{1}{2}} = -1{\cdot}5$ $\left[\text{R.: } x = \sqrt[3]{a}\right]$

23) ${}^{x}\log \sqrt[n]{2x} = n$ $\left[\text{R.: } x = 2^{\frac{1}{n^2-1}}\right]$

24) ${}^{a}\log \sqrt[b]{\frac{1}{a^3}} = x$ $\left[\text{R.: } x = -\frac{3}{b}\right]$

3. Kako se logaritmira zadani izraz?

a) Iz ${}^{10}\log 2 = 0{\cdot}30103$, ${}^{10}\log 3 = 0{\cdot}47712$ odrediti:

1) $\log 0{\cdot}2$; 2) $\log 6$; 3) $\log 5$; 4) $\log 125$; 5) $\log\sqrt{6}$; 6) $\log 1{\cdot}5$; 7) $\log\frac{10}{9}$; 8) $\log\frac{2}{3}$

b) Iz ${}^{10}\log x = a$, koliko je ${}^{100}\log x$, ${}^{1000}\log x$? $\left[\text{R.: } \frac{a}{2}, \frac{a}{3} \ldots\right]$

4. Treba logaritmirati:

1) $\log\frac{12abc}{7def}$ 2) $\log 0.75$ 3) $\log\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^4}$ 4) $\log\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ 5) $\log\frac{1}{\sqrt[n]{x(a+b)}}$

6) $\log\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{x^2})^5}}{\sqrt{(xy^2)^3(xy)^2}}$ 7) $\log\frac{5}{22} + \log\frac{11}{10} + \log\frac{2}{3} - \log\frac{3}{4}$ [R.: $\log 2 - 2\log 3$]

8) $\log\left\{\left[\frac{a}{b^2}\right]^n : \left[\frac{c^3}{d^4}\right]^{-m}\right\}^2$ R.: $2[n(\log a - 2\log b) + m(3\log c - 4\log d)]$

9) $\log\left(a\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}\right)$ R.: $\log a + \frac{1}{2}\left[\log a + \frac{1}{3}\left(\log a + \frac{1}{4}\log a\right)\right]$

10) $\log\left\{\left(\sqrt[m]{x^a\sqrt[n]{x^b}} : \sqrt[n]{x^a\sqrt[m]{x^b}}\right)\sqrt[n]{x^a}\right\}$

11) $\log\frac{a(a+b)\sqrt[3]{ab}}{b(a-b)\sqrt{a:b}}$

12) $\log\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x^2y^3}}\right)^p$ $\left[\text{R.: } \frac{1}{mn}\left(2p\log x + 3p\log y\right)\right]$

13) $\log\sqrt[n]{\frac{ab\sqrt{a+b}}{c\sqrt[3]{a-b}}}$

14) $\log\frac{xz}{y}\sqrt[n]{\frac{ab^2}{yz^2}}$

15) $\log\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}y}{z^3}\right]^{-\frac{1}{2}}$ $\left[\text{R.: } -\frac{1}{2}\left(\frac{}{2}\log x + \log y - 3\log z\right)\right.$

16) $\log[\log 10^{ab}]$ [R.: $\log a + \log b$]

17) $\log\left[\log\sqrt[a]{10^b}\right]$

18) $\log\left[\log \sqrt[y]{a^x}\right]$ [R.: $\log x + \log(\log a) - \log y$] 19) $\log\{\log[(e^x)^x]^x\}$

20) $\log[\log(x^x)]^x$ 21) $\log\left[\frac{x^a y^{b-c}}{z^d}\right]^{-2}$ [R.: $-2[a\log x + (b-c)\log y - d\log z]$

22) $\log\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[-2]{a}}{\sqrt[5]{a^4}}$ 23) $\log\left[\sqrt[n]{a-b}\,\sqrt[m]{a(a+b)}\right]^{-1}$ 24) $\log\left(a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{(a+b)c}}\right)$

25) $\log\left\{\frac{a^3(a-b)}{c-d}\sqrt[4]{\frac{ax-d}{cx-d}}\cdot\frac{ax-b}{x\sqrt{y-2}}\right\}^{-\frac{2}{3}}$ 26) $\log\{a:[b:(c:d)]\}$

27) $\log\frac{1}{(ab)^n:(a:b)^m}$ [R.: $(m-n)\log a - (n+m)\log b$] 28) $\log\left(a^b : c^d : e^f : g^h\right)$

29) $\log\left\{\sqrt[n]{a:b}:(a+b)^x\right\}$ 30) $\log\left[(a+b)^m(ab)^{\frac{1}{n}}(a:b)^{-n}\right]$

31) $\log\left(\frac{abd}{c}\sqrt[n]{a^b b}:\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)$ 32) $\log\frac{\sqrt[n]{xy}\,\sqrt[n]{x+y}}{\sqrt[x+n]{x-y}\,\sqrt[xy]{x:y}}$

33) $\log\left\{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^s b^p}}:\left(\sqrt[\frac{m}{n}]{c^q d^a}:\sqrt{\sqrt{e^f}}\right)\right\}$ 33a) $\log\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x}}}$; $\log\left[\log\left(\log 10^{x^2}\right)\right]$

34) $\log\sqrt[x+y]{(a+b)^{-\frac{1}{x-y}}:(ab)^{\frac{x}{y}}}$ 35) $\log\left\{\log\left[\log\sqrt[y]{10^x}\right]\right\}$

36) $\log\left\{\log\left[\log\left(10a^{x^2}\right)\right]\right\}$ [R.: $2\log x + \log(\log a)$]

5. Treba delogaritmirati izraze:

1) $3\log x + 2\log y - 4\log z = \log(?)$

2) $-\log a - \log b - \log c + \log d$; R.: $\frac{d}{abc}$

3) $\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{3}\log y + \frac{1}{4}\log z - n\log n$

4) $\log(a^3 - b^3) - \log(a^2 + ab + b^2) + \log(a+b)$; R.: $a^2 - b^2$

4a) $\frac{1}{x}\left\{\log a + \frac{1}{x}\left[\log a + \frac{1}{x}\left(\log a + \frac{1}{x}\log a\right)\right]\right\}$

5) $\frac{n}{a}\left\{\left[\log x + \frac{n}{a}\left[\log x + \frac{n}{a}\left(\log x + \frac{n}{a}\log x\right)\right]\right\}$

5a) $2\log(a^4 - 1) - 2\log(a^2 + 1) - \log(a^2 - 1)$ [R.: $a^2 - 1$]

6) $\log a - \log b + \log(a-b) - \log(a+b) - 3\log\sqrt{ab} + \log\frac{b^2(a+b)}{a-b} +$
$+\log\left(\frac{a}{b}\right) - \log\sqrt{\frac{a}{b}} = \log(?)$ $\left[\text{R.}: \frac{1}{b}\right]$ 7) $x\log(\log a) - \log(\log a)$

8) $\frac{1}{3}\left[\log a - \frac{1}{2}\log b + 2\log(a+b) - \frac{1}{2}\log c\right]$

9) $\frac{1}{2}\left\{\frac{m}{n}\log(a-b) - \frac{1}{3}\left[\frac{p}{q}\log(a+b) - \frac{1}{2}\log(a-b)\right]\right.$

R.: $\sqrt{\sqrt[n]{(a-b)^m}:\sqrt[3]{\sqrt[q]{(a+b)^p}}:\sqrt{a-b}}$

10) $\frac{1}{2}\left\{\log\frac{a}{b} + \log(ab) - 2\log(a+b) - \log\sqrt{\frac{a}{b}}\right\}$; R.: $\frac{a}{a-b}\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$

6. Odrediti pomoću logaritamskih tablica:

1) $\log 267{\cdot}834$ 2) $\log 2784$ 3) $\log\sqrt[13]{\left(\frac{5}{9}\,\frac{4}{3}\,\frac{7}{5}\right)^{15}}$ 4) $\log(\log 3)$

5) $\log(\log 2{\cdot}7)$ 6) $\log[20 + \log(20 + \log 20)]$ 7) $\log\left(\frac{3}{4}\right)^{30} = ?$

7. Pomoću tablica delogaritmirati:

1) $\log x = 0{\cdot}41430,\ x = ?$ 2) $\log x = -1{\cdot}78265$

3) $\log x = \frac{2}{3}(0.34719 - 2);\ x = 0{\cdot}079091$ 4) $\log x = 1{,}8 - 3$

5) $\log x = -0{,}213$ 6) $\log x = -1\frac{4}{25}$ [R.: $x = 0.069183$)

7) $\log(\log x) = 0{,}61275 - 1$ 8) $\log(\log x) = 0{,}54949 - 1$; R.: $x = 2{\cdot}2616$

8. Zašto su 0, 1 i negata brojevi nepodesni kao baza log. sustava?

9. Riješi pomoću logaritamskih tablica:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{3.25{\cdot}074}{\pi\sqrt{3}}} = x$ [R.: $x = 2{\cdot}4$) 2) $\dfrac{8\pi\,.\,0{\cdot}29674^3}{6} = x\ (= 0{\cdot}10945)$

3) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} : \sqrt[4]{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ 4) $\dfrac{-13{\cdot}179\,.\,4{\cdot}256^{-1}\,.\,0{\cdot}27965^{-1}}{11{\cdot}073}$ [R.: -1]

5) $\sqrt[3]{\dfrac{77{\cdot}844}{26\pi}}\ (= 0{\cdot}984075)$ 6) $\sqrt[7]{\frac{25}{4}\sqrt{0{\cdot}\overline{6}}}$ 7) $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}}$

8) $\sqrt[5]{\dfrac{6^{\frac{3}{4}} - \sqrt{0{,}729}}{2{\cdot}5498^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{7{,}375}}}$ 8a) $\dfrac{3\log 3 - \log 10}{\log 3 - \log 2} = x$ [R.: $2{\cdot}4496$]

9) $\left\{\sqrt[\frac{2}{3}]{38\,.\,2^{\frac{1}{5}}\,.\,\sqrt[3]{9}}\right\}^{-\frac{1}{3}}$ 10) $\dfrac{2{,}06^{-\frac{1}{8}}\,.\,1{,}6^{\frac{2}{3}}}{785\,.\,1{,}24^{-\frac{3}{4}}}$ 11) $\dfrac{\log 2 - \log(\log 2)}{1{\cdot}7237\log 3} = x;\ x = 1$

12) $\sqrt[10]{\dfrac{6452\sqrt[4]{0{\cdot}8}}{12\sqrt[3]{0{,}2}}}$ 13) $\sqrt[7]{\dfrac{360\,.\,\sqrt[9]{0{,}0865}}{182\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}}$ 14) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{2{\cdot}75\sqrt[5]{378}}{924^2\sqrt{36{\cdot}1}}}}$

15) $(1{\cdot}04 - \sqrt[5]{0{\cdot}3})^3 + \sqrt[5]{\sqrt[4]{0{\cdot}2} - \sqrt[3]{0{\cdot}4}} = x$; R.: $x = -0{\cdot}76791$

16) $\sqrt[10]{\dfrac{0{\cdot}68^{3\frac{1}{3}} + \sqrt[5]{26}}{\sqrt[3]{17} + 2{\cdot}78^{\frac{2}{3}}}}$ 17) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[10]{5} + \sqrt[10]{3}}{\sqrt[5]{5} - \sqrt[5]{3}}}$

18 $\sqrt{\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{9} + \sqrt{3}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}}} + \sqrt[6]{\sqrt{\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt[10]{2}}{\sqrt{5} - \sqrt[10]{2}}}}$ 19) $\dfrac{\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{5}} - \sqrt[5]{5 + \sqrt[5]{5 + \sqrt[5]{5}}}$

R.: $0{\cdot}4075$

10. 1) Površina je istostranična trokuta $P = 2{,}36567\ cm^2$, $a = ?$

2) Kad bi molekuli gasa u $1\ cm^3$ ($n = 28.10^{18}$ Loschmidt-ov broj!) pri normalnom tlaku šireći se zauzeli prostor kugle, čiji je polumjer jednak srednjem polumjeru ekliptike zemlje ($r = 149{,}000.000\ km$), koliko bi poprečno bio udaljen molekul od molekula? [R.: okruglo 79 km]

3) Stranice su trokuta: $a = 6{\cdot}26$, $b = 8{\cdot}24$, $c = 10{\cdot}2$. Treba proračunati
1) $P_\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; 2) $\varrho = \frac{P}{s}$; 3) $R = \frac{abc}{4P}$, gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$

4) $a)$ $\rho = ?$ i $P_\triangle = ?$, ako je $\rho_1 = 8{\cdot}2$, $\rho_2 = 6{\cdot}4$, $\rho_3 = 10{\cdot}8$ (ρ = polumjer upisanog kruga u trokut, ρ_1, ρ_2, ρ_3 su polumjeri tangencijalnih krugova trokuta).

$\left[\text{R.}: \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\ \text{i}\ P = \sqrt{\rho\rho_1\rho_2\rho_3}\right]$; $b)$ $S_n = \sqrt[r\,s_n]{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}$;

c) $s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s_n^2}\right)}$. S_n = stranica opisanog, s_n = stranica upisanog n — terokuta; s_{2n} = stranica upisanog 2_n — terokuta u krug polumjera r. Potrebne veličine uzeti po volji.

5) Visina brda $H = 18382\,(\log h_1 - \log h_2)$, gdje su h_1 i h_2 barometarska stanja na dnu i na vrhu brda. $H = ?$ za $h_1 = 756$ i $h_2 = 743$

5a) Volumen kocke $V = 3{\cdot}046$; koliki joj je brid ?

6) $Cq^n - r\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = x = ?$ (Za $C = 240000$, $q = 1{\cdot}03$, $r = 4612$, $n = 45$, $x = 480000$)

7) $x = 420\,\frac{1{\cdot}045^{18} - 1}{0{\cdot}045\,(1{\cdot}045^{18} - 2)}$ $(= 54100)$

8) $15000 \,.\, 1{\cdot}04^{17} - x\,\frac{1{\cdot}04^{17} - 1}{0{\cdot}04} = 5521$ $(R : x = 1000)$

Drugi dio

A. Jednadžbe

(= izjednačeni jednaki izrazi)

Def.:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 2. $a = a$	**1-2. Identitet (identična jednadžba)** (Za bilo koje posebne vrijednosti općih brojeva jedn. je zadovoljena t. j. lijeva strana = desnoj).
3. $2x + 1 = 3$	3. **Odredbena** (pogodbena). (Za određene vrijednosti **nepoznanice** x jednadžba je zadovoljena).
4. $ax + b = c$ 5. $ax^2 + bx + c = \emptyset$ 6. $ax^n + bx^{n-1} + \ldots + c = \emptyset$	4. **Linearna** (1^i stepen nepoznanice). 5. **Kvadratna** (2^i " "). 6. **Jedn. n-tog stepena.**
7. $\underline{2x + 1 = 3}$ $x = 1$ ≡ korijen jednadžbe t. j. ona vrijednost od x, za koju je jedn. zadovoljena.	
8. Rješavanje jedn. = traženje njezina korijena.	
9. **Proba:** Mjesto x supstituirati nađenu vrijednost i lijeva strana jednadžbe mora biti jednaka desnoj.	

Transformacija jednadžbe:

Jednadžba ostaje valjana, ako se na obe strane sa istim brojem izvrši ista računska operacija:	**Obje strane jednadžbe su:**
1. Iz $x + a = b$ izlazi $x = b - a$	1. Za a umanjene
2. „ $x - a = b$ „ $x = b + a$	2. „ a uvećane
3. „ $ax = b$ „ $x = \frac{b}{a}$	3. Sa a podijeljene
4. „ $\frac{x}{a} = b$ „ $x = ab$	4. „ a pomnožene
5. Iz $x^n = a$ izlazi $x = \sqrt[n]{a}$	5. „ n radicirane
6. „ $\sqrt[n]{x} = a$ „ $x = a^n$	6. „ n potencirane

7. Iz $a^x = b$ izlazi $x \log a = \log b$ $x = \log b : \log a$	7. Logaritmirane
8. Iz $\log x = a$ izlazi $x = 10^a$	8. Delogaritmirane
9. Iz $a(x-b) + c(x-b) = d(x-b)$ slijedi $x - b = \emptyset$ ili $x = b$ 10. Iz $(x-a)(x-b) = \emptyset$; $x - a = \emptyset$; $x - b = \emptyset$ 11. „ $ax + bx + cx = \emptyset$ izlazi $x = \emptyset$ 12. „ $a + x = b + x$ izlazi $x = \infty$	9—11. Izlučen je zajedn. faktor i nulificiran (izjednačen sa $\emptyset$).

Jednadžbu riješiti znači nepoznanicu izraziti pomoću poznatih brojeva t. j. sama se nepoznanica ostavi na jednoj strani, a sve drugo prenese na drugu stranu znaka jednakosti po pravilu: da se sa brojevima, koji se prenašaju, vrši na drugoj strani suprotna rač. operacija nego na prvoj.

1. **Članovima se promijeni predznak** („+" u „—" i obratno);
2. **Sa faktorom se druga strana dijeli;**
3. **Sa divizorom** (nazivnikom) množi;
4. **Sa eksp. baze radicira;**
5. **Sa eksp. korijena** potencira;
6. **Sa logaritmom baza** *(10)* potencira itd.

1. Kako se dijele jednadžbe prema stepenu nepoznanice?
2. Koje je osnovno pravilo pri transformaciji jednadžbe?
3. Odredi stepen jednadžbe: a) $x^2 - \frac{a}{x^2} = b$; b) $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} = 2$
4. Šta se razumije pod korijenom jednadžbe?
5. Šta će to reći riješiti jednadžbu?
6. $\boxed{6x - 5 = 10x - 3}$ Dokaz: $3 = 5$!

R.: $6x + 3 = 10x + 5$

$3(2x+1) = 5(2x+1) \mid : 2x+1$

$3 = 5$ Pogreška?

(Vidi Transf. 9.!)

6a. $2 \times 2 = 5$! Dokaz!

$$3(1+2x) = \frac{15x}{2} + 3$$
$$3(1+2x) = 3\left(\frac{5x}{2} + 1\right)$$
$$1 + 2x = \frac{5x}{2} + 1$$
$$2x = \frac{5x}{2} \;\Big|\; .\, 2$$
$$2 \,.\, 2x = 5x \mid : x$$

$2 \,.\, 2 = 5.$ Pogreška?

I Linearne jednadžbe

(Nepoznanica u 1-om stepenu)

1. Linearne jedn. sa 1 nepoznanicom

a) Racionalne:

Def. (normalni oblik):

1. $ax + bx + c = d$

R.: $ax + bx = d - c$

$x(a + b = d - c$

$x = \dfrac{d - c}{a + b}$

Jednadžbu treba najprije svesti na normalni oblik:

1. Riješiti se zagrada u kojima je nepoznanica;
2. Osloboditi se razlomaka množeći cijelu jedn. zajedničkim nazivnikom;
3. Članove sa nepoznanicom prenijeti na jednu, a druge na drugu stranu jedn.;
4. Reducirati i izlučiti zajedničku nepoznanicu;
5. Nepoznanicu osloboditi koeficijenta.

b) Iracionalne:

Def. (n. o.):

1. $\sqrt[n]{ax + b} + c = d$

R.: $\sqrt[n]{ax + b} = d - c$

$ax + b = (d - c)^n$

$ax = (d - c)^n - b$

$x = \dfrac{(d - c)^n - b}{a}$

2. Nepoznanica se oslobodi korijena potencirajući jedn. sa eksponentom korijena.

Primjer I

1. $a(x - a) + b(x - b) = 2ab$

R.: $ax - a^2 + bx - b^2 = 2ab$

$ax + bx = 2ab + a^2 + b^2 = (a + b)^2$

$x(a + b) = (a + b)^2$

$x = \dfrac{(a + b)^2}{a + b} = a + b$

2. $\dfrac{x - a}{x - b} = \dfrac{x - c}{x - d} \Big| \ (x - b)(x - d)$

R.: $(x - a)(x - d) = (x - c)(x - b)$

$x^2 - ax - dx + ad = x^2 - cx - bx + bc$

$- ax - dx + ad = - cx - bx + bc$

$- ax - dx + cx + bx = bc - ad$

$x(b + c - a - d) = bc - ad$

$x = \dfrac{bc - ad}{b + c - a - d}$

3. $\dfrac{6x - 5}{6} - \dfrac{8x - 1}{10} = \dfrac{2x - 3}{15} \Big| \ 30$

R.: $5(6x - 5) - 3(8x - 1) = 2(2x - 3)$

$30x - 25 - 24x + 3 = 4x - 6$

$2x = 16; \ x = 8$

Proba: $\dfrac{6.8 - 5}{6} - \dfrac{8.8 - 1}{10} = \dfrac{2.8 - 3}{15}$ i t. d.

4. $0{\cdot}3 = \dfrac{0{\cdot}6}{x - 2} \Big| \ (x - 2)$

$0{\cdot}3(x - 2) = 0{\cdot}6; \ 0{\cdot}3x = 1{\cdot}2; \ x = 4$

Primjer II

5. $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3} = \dfrac{10}{\sqrt{x - 2}} \Big| \ \sqrt{x - 2}$

R.: $\sqrt{(x - 2)^2} + \sqrt{(x + 3)(x - 2)} = 10$

$x - 2 + \sqrt{x^2 + x - 6} = 10$

$\sqrt{x^2 + x - 6} = 12 - x \ \Big|^2$

$x^2 + x - 6 = 144 - 24x + x^2$

$25x = 150$

$\underline{x} = \dfrac{150}{25} = \underline{6}$

c) Transcendentne: { eksponencijalne (nepoznanica kao eksponent) / logaritamske („ „ logaritam)

Def. (n. o.):

1. $a^x + b = c$

R.: $a^x = c - b$

$$x \log a = \log (c - b)$$

$$x = \frac{\log (c - b)}{\log a}$$

2\. *a)* $a^x = a^n$; R.: $x = n$

b) $\sqrt[x]{a} = \sqrt[n]{a}$; $x = n$

3\. $\log (ax + b) + \log c = \log (dx + e)$

R.: $\log [(ax + b) . c] = \log (dx + e)$

$(ax + b) c = bx + e$ i t. d.

4\. $\log (ax + b) = c$

R.: $ax + b = 10^c$ i t. d.

5. **Logaritamske jednadžbe rješavaju se delogaritmiranjem.**
6. **Eksponencijalne logaritmiranjem ili izjednačujući eksponente jednakih baza.**

Primjer III

1\. $\log (1 - x) - \log (4 - 2x) = \log (x + 2) - \log (2x + 1)$

R.: $\log \frac{1 - x}{4 - 2x} = \log \frac{x + 2}{2x + 1}$

$$\frac{1 - x}{4 - 2x} = \frac{x + 2}{2x + 1} \Big| (4 - 2x)(2x + 1)$$

$$(1 - x)(2x + 1) = (x + 2)(4 - 2x)$$

$$2x - 2x^2 + 1 - x = 4x + 8 - 2x^2 - 4x$$

$$x = 7$$

2\. $2 \log x + 2 = \varnothing$

R.: $2 \log x = -2$

$$x^2 = 10^{-2} = 0{\cdot}01$$

$$x = \pm \sqrt{0{,}01} = \pm 0{\cdot}1$$

3\. $2^{\log x} = 3$

$$\log x \log 2 = \log 3$$

$$\log x = \log 3 : \log 2$$

$$x = 10^{\frac{\log 3}{\log 2}} = 10^{\frac{0{\cdot}47712}{0{\cdot}30103}}$$

$$\log (\log x) = 0{\cdot}47712 - 0{\cdot}30103$$

$$\log (\log x) = 0{\cdot}17609$$

$$\log x = 1{\cdot}5$$

$$x = 31{\cdot}62\ldots$$

4\. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7^{x-2} + 7^{x-1}$

$$2^x + 2^x . 2 + 2^x . 2^2 = 7^x . 7^{-2} + 7^x . 7^{-1}$$

$$2^x (1 + 2 + 4) = 7^x \left(\tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{7}\right)$$

$$7 . 2^x = 7^x . \tfrac{8}{49}$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x = \frac{8}{49.7} = \left(\frac{2}{7}\right)^3 ; \quad x = 3$$

5. $a^{x+m} + a^{x+n} = b^{x+r} + b^{x+s}$

R.: $a^x \cdot a^m + a^x \cdot a^n = b^x \cdot b^r + b^x \cdot b^s$

$a^x(a^m + a^n) = b^x(b^r + b^s)$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{b^r + b^s}{a^m + a^n}$; $x(\log a - \log b) = \log(b^r + b^s) - \log(a^m + a^n)$ i t. d.

6. $a^{\log(100x)} + b^{1-\log x}(ab)^{\log(10x)} = a(a + b^2)$

R.: $a^{2+\log x} + b^{1-\log x}(ab)^{1+\log x} = a^2 + ab^2$

$a^{2+\log x} + b^{1-\log x} \cdot a^{1+\log x} \cdot b^{1+\log x} = a^2 + ab^2$

$a^2 \cdot a^{\log x} + b^{1-\log x+1+\log x} \cdot a^1 \cdot a^{\log x} = a^2 + ab^2$

$a^{\log x}(a^2 + ab^2) = a^2 + ab^2$

$a^{\log x} = 1$

$\log x = \emptyset$

$x = 1$

7. $a^{\log x^2} + a^{1-\log x}[\sqrt{a}]^{\log(100x^2)} = 2a^2$. $[x = 10]$

8. **Pazi!** $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^5$ ili $\frac{4x}{5x} = \frac{5^5}{5^5}$; dakle: $4^{x+5} = 5^{x+5}$ t. j. $4 = 5$. Gdje je pogreška?

2. Linearne jednadžbe sa 2 ili više nepoznanica

Jednadžbe sa 2 nepoznanice:

Glavno pravilo:

> Eliminiraj (ukloni) iz dviju jednadžbi istu nepoznanicu, riješi novu jednadžbu sa 1 nepoznanicom i nađenu vrijednost (redovno!) supstituiraj u zadanu jednadžbu.
>
> Koliko nepoznanica, sistem od toliko simultanih (skupa pripadaju!) jednadžbi.

Metode rješavanja:

I. Met. jednakih koeficijenata	II. Met. komparacije	III. Met. supstitucije
I. Pomnoži jednadžbe tako, da koeficijenti pred istom nepoznanicom u obe jedn. budu suprotno označeni i jednaki, pa jedn. saberi.	II. Riješi obe jednadžbe po istoj nepoznanici pa te vrijednosti izjednači.	Vrijednost nepoznanice nađena iz jedne jednadžbe supstituira se u drugu jednadžbu.
a) I...$2x + 3y = 7 \mid 2 \mid 3$ II...$3x - 2y = 4 \mid 3 \mid -2$ $4x + 6y = 14$ $9x - 6y = 12$ $+$ $13x = 26$ $x = 2$ *b)* $3(\mathrm{I}) + \mathrm{II}(-2) = 13$ $13y = 13$ $y = 1$ *c)* $2 \cdot 2 + 3y = 7$ $y = 1$	I...$2x + 3y = 7$ $\quad x = \frac{7-3y}{2}$ II...$3x - 2y = 4$ $\quad x = \frac{4+2y}{3}$ $\frac{7-3y}{2} = \frac{4+2y}{3} \mid 6$ $21 - 9y = 8 + 4y$ $13 = 13y$ $y = 1$ $2x + 3 = 7$ $x = 2$	I...$2x + 3y = 7$ II...$3x - 2p = 4$ Iz I $x = \frac{7-3y}{2}$; supstit. u II dobije se $3\frac{7-3y}{2} - 2y = 4$ $21 - 9y - 4y = 8$ $y = 1$ $x = 2$ Proba: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$!

Opaska:

a) **Specijalni slučajevi:**

1. Uvađanje novih (pomoćnih) nepoznanica

$$\left.\begin{aligned}\frac{9}{x+y}-\frac{4}{x-y}&=-3\\ \frac{3}{x+y}+\frac{2}{x-y}&=2\tfrac{1}{3}\end{aligned}\right| \quad \begin{aligned}\frac{1}{x+y}&=u\\ \frac{1}{x-y}&=v\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}9u-4v&=-3\\ 3u+2v&=\tfrac{7}{3}\end{aligned}\right|$$

$$u=\frac{1}{9}=\frac{1}{x+y}$$

$$v=1=\frac{1}{x-y}$$

$x=5$
$y=4$

O.: Jednadžba se može riješiti bez uvađanja novih nepoznanica. Donja se pomnoži sa 2 pa se jednadžbe saberu i nađe se $x+y$; na isti način $x-y$ i t. d.

2. Nemoguće jednadžbe

a)
$$\left.\begin{aligned}x+y&=2\\ 3x+3y&=6\end{aligned}\right| -3$$

$$\emptyset=\emptyset$$

Donja jednadžba jednaka je gornjoj, dakle nijesu 2 razne jednadžbe.

b)
$$\left.\begin{aligned}x+3y&=1\\ 2x+6y&=4\end{aligned}\right| :2$$

$$\left.\begin{aligned}x+3y&=1\\ x+3y&=2\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

Jednadžbe kao sistem nemoguće, jer su kontradiktorne (protuslovne).

Primjeri:

1.
$$\left.\begin{aligned}\frac{x+1}{4}-\frac{y-1}{12}&=\frac{2(x-y)}{9}\\ \frac{x+2}{5}-\frac{y-2}{10}&=\frac{x-y}{4}\end{aligned}\right|\begin{aligned}&36\\ &20\end{aligned}$$

R.: $9(x+1)-3(y-1)=8(x-y)$
$4(x+2)-2(y-2)=5(x-y)$

$$9x+9-3y+3=8x-8y$$
$$4x+8-2y+4=5x-5y$$

$$\left.\begin{aligned}x+5y&=-12\\ -x+3y&=-12\end{aligned}\right| +$$

$$8y=-24$$

$$\left.\begin{aligned}y&=-3\\ x&=3\end{aligned}\right\}$$

2.
$$\left.\begin{aligned}ax+by&=2\\ a^2x-b^2y&=a\,.\,b\end{aligned}\right| b$$

$$\left.\begin{aligned}abx+b^2y&=2b\\ a^2x-b^2y&=a-b\end{aligned}\right| +$$

$$x(ab+a^2)=a+b$$

$$x=\frac{a+b}{ab+a^2}=\frac{1}{a}$$ i t. d.

3.
$$\left.\begin{aligned}x:y&=3:2\\ 4x-3y&=12\end{aligned}\right|\begin{aligned}&\mathrm{I}\\ &\mathrm{II}\end{aligned}$$

Iz I $y=\frac{2x}{3}$

$$4x-3\frac{2x}{3}=12$$
$$4x-2x=12$$
$$2x=12$$
$$x=6$$
$$y=4$$

4.
$$\left.\begin{aligned}x^{\sqrt{y}}&=8\\ x^2&=4\end{aligned}\right| \log.!$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{y}\log x&=3\log 2\\ 2\log x&=2\log 2\end{aligned}\right|$$ (Podijeliti jednadžbe jednu s drugom!)

$$\sqrt{y}=3$$

$$\left.\begin{aligned}y&=9\\ x&=2\end{aligned}\right|$$

b) Jednadžbe sa 3 i više nepoznanica:

Iz dvije i dvije jednadžbe elinimira se poznatim metodama ista nepoznanica i dobije sistem jednadžbi sa jednom nepoznanicom manje. Tako se proslijedi, dok se ne dobije jedna jednadžba sa 1 nepoznanicom.

1.
$$\begin{array}{rl} x-2y=1 & \mathrm{I} \\ 2y+x=5 & \mathrm{II} \\ 2z-3x=-1 & \mathrm{II} \end{array}$$

$\mathrm{I}+\mathrm{II}: 2x=6$

$x=3$

$y=1$

$z=4$

2.
$$\begin{array}{rl} 3x+y+3z=13 & \mathrm{I} \\ x+2y+3z=8 & \mathrm{II} \\ 2x+3y+z=10 & \mathrm{III}\ 3 \end{array}$$

$\mathrm{I}-\mathrm{II} \ldots 2x-y=5 \quad | 7$

$3\,\mathrm{III}-\mathrm{II} \ldots 5x+7y=22$

$$\begin{array}{r} 14x-7y=35 \\ 5x+7y=22 \end{array} \; +$$

$19x=57$

t. d.

3.
$$\begin{array}{r} x+y=2 \\ y+z=3 \\ z+x=5 \end{array} \; +$$

$x+y+z=5$

$x+y=2$

$z=3$

$x=2$

$y=0$

4.
$$\begin{array}{rl} ax+by+cz=d & \mathrm{I} \\ x:y:z=m:n:p & \mathrm{II} \end{array}$$

Iz II $x=mk, y=nk, z=pk$

Supst. u I $amk+bnk+cpk=d$

$$k=\frac{d}{am+bn+cp}$$

$$x=k\,.\,m=?=\frac{md}{am+bn+cp}$$

i t. d.

ili

$$\begin{array}{r} ax+by+cz=d \\ x:y:z=m:n:p \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ax+by+cz=d \\ x:y=m:n \\ x:z=n:p \end{array}$$

i t. d.

5.
$$\begin{array}{rl} x+2y=4 & \mathrm{I} \\ 3y+z=3 & \mathrm{II} \\ z+x=2 & \mathrm{III} \end{array}$$

Iz I $x=4-2y$

Supst. u III:

$$\begin{array}{rl} 3y+z=3 & \mathrm{II} \\ z+4-2y=2 & \mathrm{III} \end{array}$$

$y=1$

$z=0$

$x=2$

6.
$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{x}+\frac{2}{z}=3 & \frac{1}{x}=u \\ \frac{3}{y}-\frac{1}{x}=-1 & \frac{1}{y}=v \\ \frac{6}{y}+\frac{4}{z}=4 & \frac{1}{z}=s \end{array}$$

$u+2s=3$

$3v-u=-1$

$6v+4s=4$ i t. d.

$x=0{\cdot}5, \quad y=3, \quad z=2$

7. $$\frac{5xy}{x+y}=6 \quad \text{I}$$
$$\frac{2x+4z}{xz}=4 \quad \text{II}$$
$$y-z=\frac{2yz}{3} \quad \text{III}$$

ili
$$\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=5 \quad \text{I}$$
$$\frac{2}{z}+\frac{4}{x}=4 \quad \text{II}$$
$$\frac{3}{z}-\frac{3}{y}=2 \quad \text{III}$$

R.: Ako se prva jednadžba pomnoži sa $(x+y)$ i podijeli sa xy, druga podijeli sa xz, a treća sa yz dobije se sistem:

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=5 \qquad \frac{1}{x}=u$$
$$\frac{2}{z}+\frac{4}{x}=4 \qquad \frac{1}{y}=v$$
$$\frac{3}{z}-\frac{3}{y}=2 \qquad \frac{1}{z}=s$$

$$x=2,\ y=3,\ z=1$$

$\text{I}+2\,.\,\text{III}=$
$$\frac{6}{x}+\frac{6}{z}=9$$
$$\frac{2}{z}+\frac{4}{x}=4 \quad \Big|\ -3$$
$$\frac{6}{x}+\frac{6}{z}=9$$
$$-\frac{12}{x}-\frac{6}{z}=12 \quad \Big|\ +$$
$$-\frac{6}{x}=-3;\ x=2$$
$$\frac{6}{z}=6\ ;\ z=1$$

Dodatak: Nejednadžbe rješavaju se kao i jednadžbe, osim što nejednadžba pomnožena sa (— 1) mijenja znak (smisao!).

a)
$$2<3$$
$$-3=-3$$
$$-6>-9$$

b)
$$a>b$$
$$-c=-c$$
$$-ac<bc$$

1. $(x-3)(x+1)>x^2-3x+2$
$$x^2-2x-3>x^2-3x+2$$
$$-5>-x$$
$$\frac{-2}{-1}<x$$
$$5<x$$

2. $$25-3x>\varnothing \quad \text{I}$$
$$5x-32>2 \quad \text{II}$$
Sistem!

Iz I $x<8\tfrac{1}{3}$
„ II $x>6\tfrac{4}{5}$
dakle
$$6\tfrac{4}{5}<x<8\tfrac{1}{3}$$

O.: $100<0$ Dokaz!
$$2n-1<2n$$
$$-100=-100$$
$$-200n+100<-200n$$
$$100<\varnothing.$$ Pogreška = ?

Zadaci

a) Racijonalne jednadžbe sa 1 nepoznanicom:

1. Kako se rješava jedn. sa 1 nepoznanicom? Kako se pravi proba da je jednadžba pravo riješena?

a) Riješi slijedeće jednadžbe po svakom općem broju, što u njima dolazi:

1) $K=\frac{G.v.p}{100}$ 2) $V_v=r^2\pi h$ 3) $O=2r\pi(r+h)$

4) $P=\varrho s$ 5) $V=\frac{4r^3\pi}{3}$

b) Dokaži indentitete:

1) $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$;

2) $\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2=1$

2. Svaki se član jednadžbe može prenijeti na drugu stranu sa promijenjenim predznakom. Kako se prenaša faktor, a kako divizor?

$(x\pm a=b,\ x=?;\ ax=b,\ x=?;\ \frac{a}{x}=b,\ x=?;\ \frac{a}{x}=b,\ x=?)$

1) $2x-3=9$ 2) $3-2x=9$ 3) $2=6-2y$

4) $-4-2x=-6$ $[x=1]$ 5) $a-x=a-b$ 6) $x-a+b-c+d=0$

7) $\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-x=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$ $[x=ab]$

8) $2y-4+3y=2y+3-y$ 9) $0{\cdot}3x-0{\cdot}7+1{\cdot}7x=2{\cdot}4x-1{\cdot}4x+2$

10) $\frac{a^3+1}{a^3-1}x-\frac{4a^2}{a^6-1}=\frac{a^3-1}{a^3+1}x$ 11) $a^4x-b^6-a^2b^2x=a^6-b^4x$

12) $ax+b^2=bx+a^2$; $x=a+b$ 13) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)x-a=\frac{2ab}{a^2-b^2}x-b$

14) $\frac{1}{0{\cdot}2}\cdot x=15$ 15) $\frac{x}{a-b}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$ 15a) $\frac{a}{-x}=\frac{a}{b}$; $x=-b$

16) $x:\frac{1}{2}=0{\cdot}06$ 17) $x:(-0{\cdot}\dot{3})=0{\cdot}4$ 18) $0{\cdot}\dot{3}x=0{\cdot}\dot{6}$; $x=2$

19) $x:(-2)=-3$; $x=6$ 20) $(\frac{2}{3}):(-x)=-1\frac{1}{3}$; $x=0{\cdot}5$

21) $\frac{6}{x}=3$ 22) $6:x+3=5$; $x=3$ 23) $1{\cdot}2=\frac{2{\cdot}4}{x}$; $x=2$

24) $8=\frac{4}{8}:x$ 25) $0{\cdot}6:z=0{\cdot}2$ 26) $0{\cdot}5=\frac{3}{y-3}$ 27) $\frac{3-x}{0{\cdot}5}=0{\cdot}4$; $x=2{\cdot}8$

28) $\frac{0{\cdot}2-5x}{0{\cdot}6}=3$ 29) $0{\cdot}2=\frac{0{\cdot}4}{x-8}$ 30) $\frac{x-a}{b}=\emptyset$

31) $\frac{a^3+b^3}{x}=a^2-ab+b^2$; $x=a+b$ 32) $(-ab):x=-b$; $x=a$

33) $\frac{a^2-b^2}{a-u}=a+b$; $u=b$

3. Riješi zagrade u kojima je nepoznanica (izvedi naznačene rač. operacije!), a ako u njima nema nepoznanice samo onda, kad se time pojednostavlja račun.

1) $2x-3(2x+1)=3+2(x-1)$

2) $3x-(2x+1)-[x-(2x+3)]=2-(3x+1)$

3) $5:\left[4:\left(3:\frac{2}{x}\right)\right]=15$; $x=8$ 4) $a:\left\{a:\left[a:\left(a:\frac{a}{x}\right)\right]\right\}=a$; $x=1$

5) $1-\{2-[3-(4-[5-(6-y)])]\}=\emptyset$; $y=3$

6) $x-\{a-[x-(a-[x+(a-x)])]\}=a$; $x=a$

7) $[2(x-1)-3]2-[3(2x-1)-1]3=3x+1$

8) $u-\{-[a+b-(c-d+u)]\}=3u-(a-b)$

9) $2\{2[2(2-v)-v]-v\}-v=1;\quad v=1$

10) $x-\{2x-[3x-(4x-a)]\}=a-\{2a-[3a-(2x-a)]$

11) $(x-a+b+c)(x-a-b-c)=x^2-2bc-b^2-c^2+3a^2;\quad x=-a$

12) $(x+a-b-c)(x+a+b+c)=x^2+a^2-c^2+2ab-2bc-b^2;\quad x=b$

13) $(x+1)^3-(x-1)^3+(x+1)^2-(x-1)^2=2x(3x+1)$

14) $x(x+2)^2=x^3+4(x^2+2);\quad x=2$

15) $(5y-2)^2-(3y+1)^2=(4y+1)^2;\quad y=\frac{1}{17}$

16) $(x-1)(x-2)(x+3)=x^3+5x^2+6$

4.

1) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{5}=x+\dfrac{x}{6}-1$

2) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x+2}{2}+1=\dfrac{x-6}{6}$

3) $\dfrac{x+1}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x+2}-\dfrac{2x+1}{x-2};\quad x=-\frac{1}{11}$

4) $\frac{2}{3}(x+5)-3(2x-1)-\frac{3}{4}(x+1)=\frac{1}{3}(x+3)-1$

5) $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{6}{x-2}$

6) $(1-x):(x-2)=(x+3):(4-x);\quad x=\frac{5}{3}$

7) $\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{2x+3}{x^2+5x+6};\quad x=0$

8) $\dfrac{a+1}{b+1}:\dfrac{a^2-1}{x-1}=\dfrac{b+1}{a+1}:\dfrac{a-1}{x+1}$

9) $\dfrac{ax}{ab-bx}-1=\dfrac{bx}{a^2-ax}+\dfrac{b}{a}$

10) $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{a}{x-a}=\dfrac{ax+a^2}{x^2-a^2}$

11) $\dfrac{ab}{cx}+\dfrac{ac}{bx}+\dfrac{bc}{ax}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2};\quad x=abc$

12) $\dfrac{a^3}{bx^3}-\dfrac{b^3}{ax^3}=a^2+b^2;\quad x=\sqrt[3]{\dfrac{a^2-b^2}{ab}}$

13) $\dfrac{a}{x^n}+\dfrac{b}{x^n}=\dfrac{a^2-b^2}{x^{n+1}}$

14) $\dfrac{x^7-x}{a^6-1}=\dfrac{x^6-1}{a^3+1};\quad x=a^3-1$

15) $\frac{1}{3}\{\frac{1}{3}[\frac{1}{3}(\frac{1}{3}[\frac{1}{3}(243x-81)-27]-9)-3]-3\}-3=2$

16) $\dfrac{1-ax}{bc}+\dfrac{1-bx}{ac}+\dfrac{1-cx}{ab}=0$

17) $a\left\{a\left[a\left(a-x\right)-\frac{1}{a^2}\right]+\frac{1}{a}\right\}=a^4+1;\quad x=-\frac{1}{a^3}$

18) $\dfrac{3}{x-4}+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{2}{x-3}$

19) $2-\dfrac{x}{2+\frac{x}{2-x}}=-x+1;\quad x=-4$

20) $\dfrac{\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{a}}=\dfrac{b}{a}$

21) $\left(\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{1}{b}\right)=\left(\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{1}{b}\right)^2$

22) $b-\dfrac{b}{b-\frac{b}{x}}=a;\quad x=(b-a):(b-a-1)$

23) $\dfrac{\dfrac{az+b}{a-b}}{\dfrac{az-b}{a-b}}+\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-1}{\dfrac{a+b}{a-b}+1}=\dfrac{z+a}{az-b}$

24) $\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\dfrac{2}{3}}{x-\dfrac{2}{3}}-\dfrac{3}{2}$

25) $\dfrac{x+\pi}{x-\pi}=1-\pi;\quad x=\pi-2$

26) $\dfrac{\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x+3}{4}}{2x+\dfrac{4}{1-\frac{x+1}{x-1}}}=3;\quad x=29$

27) $\dfrac{a^2x+1}{a+1}=a^2-a+1;\quad x=a$

28) $\dfrac{2\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x+\frac{1}{2}}=\dfrac{2x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}$

29) $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{2}}=\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{3}}$

30) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{x}}+\frac{1}{2}=2$

31) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}=1{\cdot}5$

5. Riješi rastavljanjem na faktore:

1) $x-a=a^2-x^2$

2) $x^2-x+ax=0$

3) $a-b+x=(a-b)^2-x^2;\quad x_1=a-b-1$
$x_2=b-a$

4) $x^3-2x^2-x+2=0;\quad x_1=2,\ x_{2,3}=\pm 1$

5) $\dfrac{a-x}{ax}\cdot(a+x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}$

6.

1) $\left(\dfrac{a^2-x^2}{x-b}\right)^3\cdot\left(\dfrac{x+c}{x-a}\right)^3\cdot\left(\dfrac{b^2-x^2}{x^2-c^2}\right)^3=(x+c)^3$

2) $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^{-1}:\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-1}=\dfrac{3}{2x-1};\quad x=2$

3) $\left\{\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{-2}:\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\right\}^{-1}=\dfrac{x+2}{x-3}$

4) $(a-x)^{-3}:(x-a)^{-4}=x-a;\quad x=a$

5) $(9x^2+2x^0+x^{-2}):(3x+2x^0+x^{-1})=4+x^{-1}$

6) $[(x^3-1)^{-n}]^m:[(x^2+x+1)^{-m}]^n=\left(\dfrac{3x-2}{2x-3}\right)^0\cdot a;\quad x=\dfrac{\sqrt[mn]{a}+1}{\sqrt[mn]{a}}$

7) $x^{-1}:x^{-3}:x^{-1}\cdot x^{-2}=a\,(x+a);\quad x=\dfrac{a^2}{1-a}$

7. Uvesti nove nepoznanice:

1) $\dfrac{x+a}{x+b}-2a=2b-\dfrac{x+a}{x+b}\ \Big|\ \dfrac{x+a}{x+b}=y$

2) $\dfrac{a+b\sqrt[n]{cx+d}}{e+f\sqrt[n]{cx+d}}=g$

3) $\dfrac{a\,(bx+c)-d}{b\,(bx+c)+e}=f$

8. Izuzetni slučajevi:

1) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}=\dfrac{x(a+b)}{ab}+1$

2) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}=\dfrac{x^2-4x+3}{x(x+2)};\quad x_1=1,\ x_2=\infty.$

3) $6x+25=10x+15$
$3(2x-5)=5(2x-5)$
$3=5.$ Pogreška?

4) $4x-15=10x-6$
$4x+6=10x+15$
$2(2x+3)=5(2x+3)$
$2=5.$ Gdje je pogreška?

5) $(y+2):(2y-1)=1:2$
R.: $y=\infty$, zašto?

9. Riješi nejednadžbe:

1) $3x+2<0$; 2) $0<2x+3<1$; 3) $\frac{x+3}{2}<\frac{2x-1}{2}$; 4) $\frac{x+1}{2x-3}<3$

b) Iracionalne jednadžbe sa 1 nepoznanicom:

1) $10-2\sqrt{2x+1}=4$

2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}$

3) $\sqrt{x+1}:\sqrt{x+2}=\sqrt{x+3}:\sqrt{x+4}$

4) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x}+2}\right)^3=8$

5) $\sqrt[3]{21+2\sqrt{4x-3}}=3$; $x=3$

6) $\sqrt{9+4\sqrt{\frac{3x+4}{2x-7}}}=5$; $x=4$

7) $\sqrt{x-2+\sqrt{3x+10}}+\sqrt{x-2-\sqrt{3x+10}}=2$

8) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+4}}$

9) $x-b=\sqrt{b^2+x\sqrt{x^2-b^2+a^2}}$

10) $\sqrt[3]{a^3x^3+3a^2bx(x+1)-c^2}=ax+b$

11) $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3-x}}}=\sqrt{5}$

12) $\sqrt{\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x}{2}+\ldots}}}=2$

12b) $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{4}{x}$; $x=-3$

13) $\sqrt[2n]{9x^2+6x-3}=\sqrt[n]{3x-1}$

14) $\frac{3+2\sqrt[n]{x-1}}{4+5\sqrt[n]{x-1}}=6$

15) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{x-29}=0$; $x=2$

16) $\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{x+b}{a}$

17) $x\sqrt[n-1]{(x^n)^n}:\sqrt[n-1]{x}:x^n=2$; $x=\sqrt{2}$

17a) $2x-3>\sqrt{4x^2-5x+1}$

18) $(x-0)^{\frac{1}{2}}:\sqrt[\frac{1}{2}]{(x^5)^{0\cdot1}}\sqrt[1]{x^2}=a$; $x=a$

19) $\left[\left(x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}:\left[\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{-1}\cdot x^{\frac{5}{6}}=0\dot{6}$; $x=\frac{2}{3}$

20) $x^{-\frac{1}{2}}:\sqrt{x^{-\frac{3}{4}}}=\frac{1}{256}$

21) $\sqrt{x\sqrt[3]{a^2x}}:\sqrt{a\sqrt{ax}}\cdot\sqrt[1\frac{1}{2}]{x}=a^{1\frac{1}{2}}$; $x=a$

22) $x^{-\frac{1}{2}}:\sqrt[-2]{x}:x^{0\dot{3}}:x^{-2}:\sqrt[1/2]{x}=2$; R.: $x=0\cdot125$

23) $\sqrt[a-b]{x^{a^2-b^2}}\cdot\sqrt[a-2]{x^{2ab-4b}}:\left(\sqrt[a+b]{x}\right)^{a^2-b^2}=a^{2b}$; $x=\sqrt{a}$

24) $\left\{\sqrt[x-2]{\frac{(a^{2x-4})^{\frac{1}{2}}}{(x^{3x-6})^{\frac{1}{3}}}}+\sqrt[x+2]{\frac{(a^{3x+6})^{\frac{1}{3}}}{(b^{2x+4})^{\frac{1}{2}}}}\right\}:\sqrt[1]{\frac{a}{x}+\frac{a}{b}}=\frac{x}{b}$; $x=b$

25) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\sqrt[\frac{8}{2}]{x^{\frac{2}{3}}}:\sqrt[\frac{3}{4}]{x^{-2}}\cdot\sqrt[-\frac{1}{2}]{x^{-2}}=a$

26) $\frac{2x+a}{2x+b}=\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$

27) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b$

28) $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$; $x=0$

29) $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt{2}$; R.: $x=1$

c) Logaritamsko-eksponencijalne jednadžbe

1) $\log(x+1)+\log(x-2)=\log(x-3)+\log x$; $x=1$

2) $\log(2x-1)-\log(x+2)=\log(x-2)-\log(2x+1)$

3) $^{(x-1)}\log x + {}^{(x-1)}\log (x+1) = 2$

4) $\log (x^{2n} + x^n \sqrt{2} + 1) + \log (x^{2n} - x^n \sqrt{2} + 1) = \log 17$; $x = \sqrt[n]{2}$

5) $\log (x+7) - \log (x-3) = 0{\cdot}47712$

6) $3 \log x + 1 = Ø$; $x = \sqrt[3]{0{\cdot}1}$

7) $\log 2 + \dfrac{\log (5x-2)}{3} = \dfrac{\log (2x+60)}{3}$; $x = 2$

8) $\log \left(\dfrac{7}{x-5} - \dfrac{1}{2}\right) + \log \left(\dfrac{7}{x-5} + \dfrac{2}{3}\right) = 2 \log \left(\dfrac{7}{x-5} + \dfrac{1}{2}\right)$; $x = -5$

9) $\log (a-2x) - \log (6x-b) = \log (a-x) - \log (3x-b)$

10) $n \log x + \log x = n \log a$

10*a)* $^{x}\log \left(\sqrt[n]{nx}\right)^{\frac{1}{n}} + {}^{x}\log \left(\sqrt[n]{x}\right)^{\frac{1}{n}} = n$; R. : $x = \dfrac{1}{n}$ Iz : $x^n (n^n x^n - 1) = Ø$ i t. d.

10*b)* $^{a}\log (a^{-2})^{\frac{1}{b}} = x$; R. : $x = -\dfrac{2}{b}$

11) $(a^{x-2})^{x-1} = (a^{-x})^{3-x}$. $[x = \frac{7}{3}]$ 12) $a^{x+1} . a^{x-2} . a^{x+3} = a^x . a^{x-4}$

13) $4^x : 16 = 2^x : 8$; $x = 1$ 14) $(\frac{3}{4})^{2x-3} = (\frac{4}{3})^{x+1}$ 15) $2^{3x} . 3^{2x} = 72$; $x = 1$

16) $\sqrt{16^{x-1}} = 4^{3x+1}$; $x = -1$ 17) $\sqrt[\frac{1}{x}]{27} = 3^{x+2}$ 18) $\sqrt[-x]{\sqrt[3]{0{\cdot}\dot{3}}} = \sqrt[x-2]{\sqrt[5]{3}}$; $x = 5$

19) $4^{\sqrt{x}} = 0{\cdot}25$; $x = 1$ 20) $\sqrt{a^{1-2x}} : \sqrt[3]{a^{2-x}} = a$

21) $\sqrt[\frac{1}{x-1}]{32} = \sqrt[\frac{1}{x}]{2}$; $x = {}^5/_4$ 22) $\left(\dfrac{169}{144}\right)^{2x-1} = \left(\dfrac{12}{13}\right)^{5x+1}$; $x = 0{\cdot}\dot{1}$

23) $\sqrt{11^x - 7} + \sqrt{11^x - 2} - \sqrt{11^x - 10} = \sqrt{11^x + 5}$; $x = 1$

24) $\sqrt[3]{2^{\log x} - 1} + \sqrt[3]{2^{\log x} + 6} + \sqrt[3]{2^{\log x} - 29} = Ø$; $x = 10$

24*a)* $\dfrac{1}{1 - \sqrt{1 - 2^u}} - \dfrac{1}{1 + \sqrt{1 - 2^u}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2^u}$; $u = -2$

25) $a^{\log x} : a^{-\log x + 1} = a^{3 \log x - 1} : a^{-\log x + 3}$; $x = \pm 10 \sqrt{10}$

26) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+1} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+2}$ 26*a)* $a^{\frac{x+2}{x-1}} . a^{\frac{x-1}{x+2}} = a^{\frac{2x^2+3x-1}{x^2+x-2}}$; $x = 6$

27) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1+\frac{1}{x}} . \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2+\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{3-\frac{1}{x}} . \dfrac{1}{3}$; $x = 1$

28) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{2+x} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x+3} \cdot \dfrac{27}{10}$; $x = -1$

29) $9 . 5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^{x+3} = 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}$; $x = -1$

30) Riješi logaritmiranjem : $a^x . b^x = c$ 31) $a^{bx} . b^{ax} = ab$; $x = \dfrac{\log a + \log b}{b \log a + a \log b}$

32) $a^{2x} : b^{2x} = ab$; $x = \dfrac{\log a + \log b}{2 (\log a - \log b)}$ 33) $(a \pm b)^x = c$ 34) $a^{bx} = c$

34*a)* $\sqrt[x]{a^b} = c$; $\sqrt[0{\cdot}5x]{a} = \sqrt[3]{a^2}$ 35) $a^{x^b} = c$ 36) $a^{b^x} = c$; $x = \dfrac{\log (\log c) - \log (\log a)}{\log b}$

36*a)* $a^{x^2} = c$ 37) $a\ b^{x+c} = d\ e^{x+f}$ 37*a)* $\sqrt[x]{3} = 4$ 38) $5^x = 3$

38a) $5^{\log x}=10$ 39) $4^{3^x}=5$ 40) $\sqrt[x]{a^{x-1}}\,\sqrt[x-1]{a^x}=a^2$

40a) $\sqrt[x]{\dfrac{a^{1-x}b^{-2x}}{c^{-x-1}}}=\dfrac{c}{ab^2}\sqrt[n]{ac};\ x=n$ 41) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x+1}-5^x+5^{x-1}$

42) $5^{2x-1}-3^{3x-1}=5^{2x+3}-3^{x+1}$ 43) $5^x-7^{x+2}=5^{x+4}-7^{x+3}$

43a) $\sqrt{12^x+13}+\sqrt{12^x-8}=\sqrt{12^x+4}+\sqrt{12^x-3};$ R.: $x=1$

43b) $\sqrt{13^{\log x}+3}+\sqrt{13^{\log x}-4}=\sqrt{13^{\log x}+12}+\sqrt{13^{\log x}-9};\quad x=10$

43c) $\sqrt{x^x+\sqrt{x^x}}+\sqrt{x^x-\sqrt{x^x}}=\sqrt{2};\quad x=1!$ 43d) $\sqrt[x]{x}=100^{\log x};\quad x_1=0{\cdot}5, x_2=1$

43e) $8^{\log(100x)}-8^{\log(10x)}+8^{\log x}=57;\quad x=1$

44) $7^x+7^{x+1}+7^{x+2}=5^x+5^{x-1}+5^{x+2}$

45) $3^{1-x}+3^{2-x}+3^{3-x}=4^{1+x}+4^{2+x}+4^{3+x}$

46) $10^{\log(1000x)}-10^{\log(100x)}+10^{\log(10x)}-10^{\log x}=909;\quad x=1$

47) $7^{\log x}+2^{1-\log x}\cdot 14^{2+\log x}=393;\quad x=1$

48) $7^{\log x}+3^{1-\log x}\cdot 21^{\log x}=28;\quad x=10$

49) $5^{\log x}+2^{-\log x}\cdot 10^{\log(1000x)}=1001;\quad x=1$ 50) $a^{v+a}+b^{v+b}=c\,b^v$

51) $\log(3^x-2)+0{\cdot}30103=x\log 3$ 52) $\dfrac{2^{4y}}{16^y(a+b)^{2y}}=\dfrac{(a-b)^{2y}}{(a^2-b^2)^{16}};\quad y=8$

53) $2\log 7-\log(9\cdot 5^u+8\cdot 5^{u+1})=-2\log 5$

54) $\log(3^x+1)+\log 2=\log(2^x+1)-\log 2$

55) $3\cdot 2^x=4\sqrt[x]{9};$ R.: $3^{x-2}=(2-x)^{x-2}.\ .\ x-2=\emptyset, 3=2^{-x}\ x=2, x_2=?$

56) $2433{\cdot}25\cdot 1{\cdot}04^x=300\,\dfrac{1{\cdot}04^x-1}{1{\cdot}04\ -1};\quad x=10$ 56a) $\left(\dfrac{1}{10x}\right)^{\frac{1}{\log x}}=10;\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{0{\cdot}1}$

57) $5760\cdot 1{\cdot}04^n+575\,\dfrac{1{\cdot}04^n-1}{1{\cdot}04\ -1}=24825;\quad n=16{\cdot}99$

58) $\dfrac{1000}{1{\cdot}05^{18}}\cdot\dfrac{1{\cdot}05^{18}-1}{1{\cdot}05\ -1}=\dfrac{20000}{1{\cdot}05^x};\quad x=11$ 59) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\log\sqrt{x}}}=x;\quad x_1=0{\cdot}01,\ x_2=1$

Jednadžbe sa dvije i više nepoznanica

a) Racionalne:

1) $2x-3y=2$
$x:y=2:1;\ x=4,\ y=2.$

2) $0{,}1x-y=0{\cdot}2$
$0{,}4x+y=3{\cdot}3;\ x=7,\ y=0{\cdot}5.$

3) $3x+2y=4$
$2x-3y=1$

4) $\dfrac{2x+3y}{4}=2y-3x+2$
$\dfrac{x+2y}{2}-1=\dfrac{5y-2x}{4};\quad x=2,\ y=4.$

5) $\dfrac{x-1}{y+1}=\dfrac{x-3}{y-1}$
$x+y=3(x-y);\quad x=4,\ y=2$

6) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{4}$
$\dfrac{2y+1}{4}-\dfrac{3x-4}{3}=\dfrac{3y-x+2}{6};\quad x=1{\cdot}5,\ y=-\frac{8}{3}$

7) $2x-y=3(x-5+\frac{2}{3}y)$
$5x+y=\frac{3}{4}(2+x-y)$

8) $x-\dfrac{y-x}{2-x}=0{\cdot}5-\dfrac{3-2x}{2}$
$y+\dfrac{y-1}{x-3}=3{\cdot}5-\dfrac{5-2y}{2};\quad x=4,\ y=2.$

9) $x-\dfrac{3x-y}{3-x}=6-\dfrac{11-2x}{2}$

$y+\dfrac{y-2}{x+2}=5-\dfrac{4-3y}{3}$

9a) $b_1\dfrac{q^8-1}{q^2-1}(q-1)=1275$

$b_1\dfrac{q^8-1}{q-1}=425;\ q=-2,\ b=-5$

10) $\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=2-\dfrac{(x-2)(2y-3)}{xy}$.

$\dfrac{2x}{3}+\dfrac{5y}{9}=8$

11) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{a}{xy}$

$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{ab}{xy}$

12) $\dfrac{x+2y+1}{2x-y+1}=2$

$\dfrac{3x-y+1}{x-y+3}=3;\ x=5,\ y=4$

13) $x+\dfrac{a}{y}=-b$

$x-\dfrac{b}{y}=a$

14) $2\{x+2[y-2(x+2)]\}=5$

$2\{y-2[x-2(y+2)]\}=7$

15) $\dfrac{x+y}{x+a}=\dfrac{x+y}{x-a+1}$

$\dfrac{x-y+a}{x+y-a}=\dfrac{x-y-a}{x+y+a}$

16) $(a-b)x+(a+b)y=a$

$(a+b)x-(a-b)y=b$

17) $(x+y):(x+1):(x-1)=3:4:5$

18) $(x+y+2):(x-y+2)=(x+y+1):(x-y+2)$

$3x=2y+1$

19) $\dfrac{\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}+\dfrac{\dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}=\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$

$ax+bx=ab$

20a) $(ax+by):(ax-by)=a:b$

$(b+ax):by=(a+b):(a^2-b^2)$

20b) $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{y}{y-b}=2$

$ax+by=2ab$

Riješiti kao linearne jednadžbe (21—22):

21) $x^2+3x-6y=14+2xy$

$x^2+4y=4+2x+2xy;\quad x=4,\ y=1.$

22) $x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6=\dfrac{a}{x^2-y^2}$

$x^3+x^2y+xy^2+y^3=\dfrac{b}{x-y}$

$\left[x=\sqrt[4]{\dfrac{a+b^2}{2b}},\ y=\sqrt[4]{\dfrac{a-b^2}{2b}}\right]$

23) $\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{2}{3y+2}=\dfrac{2}{3}$ (nova nepoznanica!)

$\dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{4}{3y+2}=\dfrac{1}{2}$

24) $\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{3y}{1-y}=1$

$\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{2y}{1-y}=1{\cdot}5;\quad x=1,\ y=\varnothing.$

25) $\dfrac{12}{3x+4y-5}+\dfrac{15}{7x-3y+4}=5$

$\dfrac{3x+4y-5}{2}=\dfrac{7x-3y+4}{5}$

26) $\dfrac{16}{3x+2y+4}+5x-6y+16=9$

$\dfrac{32}{3x+2y+4}+15x=18y-22$

$[x=2,\ y=3]$

27) $\dfrac{2x}{x-y}+2\left(\dfrac{2x}{2}+\dfrac{y}{2}\right)=10$

$\dfrac{3x}{x-y}-\dfrac{2x}{3}-\dfrac{y}{2}=2$

$[x=3,\ y=1]$

28) $\dfrac{xy}{x-y}=1$

$\dfrac{xy}{ax-by}=1$

29) $\dfrac{1}{1-x+y}-\dfrac{1}{x+y-1}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{1-x+y}-\dfrac{1}{1-x-y}}=\dfrac{3}{4}$

$u-v=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{u+v}=\dfrac{2}{3}$

$x=2,\ x=2$

29a) $2\,\dfrac{x+y}{x-2y}-3\,\dfrac{x+y}{y-1}=5$

$6\,\dfrac{x+y}{y-1}-5\,\dfrac{x+y}{x-2y}=2$

29b) $(x-1)^2+y^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$(x-2)^2+(y-3)^2=(x-1)^2+(y-2)^2$

29c) $\dfrac{4}{4-x+y}-\dfrac{5}{x+y-1}=1$

$\dfrac{1}{\dfrac{4}{4-x+y}-\dfrac{5}{1-x-y}}=\dfrac{1}{3}$

$[x=4,\ y=2]$

30) $\dfrac{2}{\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{x-\frac{2y}{3}}$

$2\left(\frac{y}{3}-x\right)=x+[-3(y-1)-(x-1)]$

31) Za koje je vrijednosti od λ sistem jednadžbi nemoguć (moguć), a za koje neodređen:

a) $2x+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)y=3, \quad 4x-2y=1$

b) $(1-\lambda)x+3y-2, \quad x+3y=2$?

32) $\dfrac{x-3}{3}=y, \quad x^2+x-2=2(xy+2y)$

33) $\dfrac{x+y}{x-y}=-5, x:y=2:3$ (Izuzetak!)

34) $\dfrac{3x^2+1}{x^4-1}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{x-1}$ [A = ?, $B=?$, $C=?$, $D=?$]

34a) $\dfrac{2x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{C}{x+4}$

35) $x=y+2z$, $2x+y=4z$, $3x-2y=z+1$ $[x=0{\cdot}4, y=0, z=0{\cdot}2]$

36) $x+y=a$, $x+z=b$, $y+z=c$

37) $0{,}2x+0{,}3y+0{,}4z=2$, $0{,}3x+0{,}5y+0{,}7z=2{\cdot}4$, $0{,}4x+0{,}6y+0{,}9z=4{\cdot}3$ $[x=1, y=2, z=3]$

38) $\dfrac{3(2x-3y)}{x-2z}=2$, $\dfrac{3y+2z}{y-z}=3$, $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y-2}{3}+\dfrac{z}{4}=\emptyset$

39) $x+2y-3z=4$, $x:y:z=2:3:4$ $[x=-2, y=-3, z=-4]$

40) $ax+by+cz=d$, $x:y:z=m:n:p$

41) $ax+by+cz=abc$, $x:y:z=bc:ac:ab$ $\left[x=\dfrac{bc}{3}, y=\dfrac{ac}{3}, z=\dfrac{ab}{3}\right]$

42) $x:y=1:2$, $y:z=2:3$, $z:x=3:4$

42a) $a^0u+av+a^2z=a^3$, $b^0u+bv+b^2z=b^3$, $c^0u+cv+c^2z=c^3$ $[u=abc, z=a+b+c]$

43) $\dfrac{x+y-z}{x+y+z}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{x-y+z}{x+y-z}=\dfrac{b}{c}$, $\dfrac{y-x+z}{y+x-z}=\dfrac{a}{c}$

44) $x+ay+a^2z=-a^3$, $x+by+b^2z=-b^3$, $x+cy+c^2z=-c^3$

44a) $au+bv+cw=d$, $bu+av+cw=d$, $cu+bv+aw=d$ $[u=v=w=d:(a+b+c)]$

45) $a^0x+b^0y+c^0z=d^0$, $ax+by+cz=d$, $a^2x+b^2y+c^2z=d^2$ $\left[x=\dfrac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}\right]$

46) $3x+2y=5xy$, $2x-z=3xz$, $3y+z=2yz$

47) $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{x-y}{xz}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{4}{5}$

47a) $\dfrac{xy}{x+y}=1{\cdot}2$, $\dfrac{yz}{3y+z}=0{\cdot}3$, $\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{z}=-1$ $[x=2, y=3, z=1]$

47b) $\dfrac{a+b}{x}=\dfrac{c}{y}-\dfrac{c}{z}$, $x+y=(a-b)xy$, $xyz=\dfrac{xy+yz+xz}{a-b+c}$

47c) $\dfrac{4}{1+x-y-z}-\dfrac{5}{x+y-z}=1$

$\dfrac{1}{\dfrac{4}{1+x-y-z}-\dfrac{5}{z-x-y}}=\dfrac{1}{3}$

$2y+z=x+1; \quad x=4, y=2, z=1$

48) $2x+3y=z+5$, $4z-5u=x-9$, $3x-4u=y-19$, $2x+3z=u+8$

49) $x + 2y = 5$
$y + 2z = 8$
$z + 2u = 11$
$u + 2x = 6$
$[x = 1,\ y = 2,\ z = 3,\ u = 4]$

50) $2x + 3y + 4z + 5u = 10$
$3x + 2y - 5z = -5$
$3y + 2z = 12$
$3z = 6$

51) $3x - 2y + z + 6u = 30$
$x : y : z : u = 1 : 2 : 3 : 4$

51a) $ax = by = cz,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = d$
$\left[x = \frac{d(a+b+c)}{a},\ y = \frac{d(a+b+c)}{b} \ldots\right]$

52) $(x - y) : (2x + y) : (3z - 2u) : (u + x) = 2 : 3\ \ 4 : 5$
$2x + 3y + 4z + 5u = 20$

52a) $\frac{2}{x - y + z} + \frac{3}{x + y + z} = 1{\cdot}5,\quad \frac{2}{x - y + z} + \frac{8}{x + y - z} = 3$
$\frac{6}{x + y + z} - \frac{2}{x + y - z} = 0{\cdot}5,\quad [x = 3,\ y = 2,\ z = 1]$

53) $3y - 4z = 5$
$2z - 3x = 7$
$4x - 2y = 9$

54) $3xy - yz + 2xz = 6xyz$
$2xy - 3yz + xz = 5xyz$
$xy + yz - 2xyz = \emptyset$

b) **Iracionalne:**

1) $3\sqrt{x + 7} + \sqrt{y + 10} = 19$
$4\sqrt{x + 7} - 2\sqrt{y + 10} = 2;\quad x = 9,\ y = 39$

2) $2\sqrt{x - 1} + 3\sqrt{y + 6} = 7$
$\sqrt{2x - 4} = \sqrt{y + 1}$

3) $\sqrt{\frac{x + y}{y}} + 2 = 2\sqrt{1 + \frac{x}{y}}$
$x - 2y = 4;\quad x = 12,\ y = 4$

4) $\sqrt{x - y} : \sqrt{20 - y} = 3 : 2$
$\sqrt{y} + \sqrt{y - x} = \sqrt{20 - x}$

5) $\sqrt{y^2 + 3x} = y + 1$
$\sqrt{x^2 + 2y} = 2 - x;\quad x = \frac{5}{7},\ y = \frac{4}{7}$

6) $\sqrt{x - y} + \sqrt{2x + y} = 1$
$3\sqrt{x - y} - 2\sqrt{2x + y} = 2$

7) $\sqrt{y - x} : \sqrt{2 - x} = 3 : 1$
$\frac{x + y}{x - y} - \frac{1}{3} = \frac{2 - 3x + y}{x - y}$
$[x = -4,\ y = 50]$

8) $\frac{4}{\sqrt{x - 3}} - \frac{3}{\sqrt{z - 2}} = 1$
$\frac{6}{\sqrt{x - 3}} + \frac{1}{\sqrt{y + 2}} = 3{\cdot}5$
$\frac{4}{\sqrt{y + 2}} - \frac{3}{\sqrt{z - 2}} = 1;\quad x = 7,\ y = 2,\ z = 11$

9) $\sqrt{x} : \sqrt{y} : \sqrt{z} : \sqrt{u} = 2 : 3 : 4 : 5$
$x + y + z + u = 216$
$[x = 16,\ y = 36,\ z = 64,\ u = 100]$

10) $\sqrt{xy\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2} : \sqrt{x + y} = 3$
$(x - y)\sqrt{x + y} : \sqrt{x^2 - y^2} = 1;\quad x = 5,\ y = 4$

11) $(x - 3y)^{-\frac{3}{2}} = 0{\cdot}125$
$\left(x + \sqrt{xy} + y\right) : \left(\sqrt{y} + \sqrt[4]{xy} + \sqrt{x}\right) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{xy} + 0{\cdot}25^{-0{\cdot}5};\quad x = 16,\ y = 4$

12) $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$
$\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$

c) Logaritamsko-eksponencijalne jednadžbe:

1) $3^{x+1} = 3^{y-1} \cdot 27$
$2^{x+y} = 32$

2) $a^{0{\cdot}3x} \cdot a^{0{\cdot}2y} = a^{0{\cdot}1}$
$b^{2x} : b^{3y} = b^0$

3) $2^{x-2} y^2 = 9$
$3^{x+1} y = 9$

4) $2^x \cdot 3^y = 108$
$3^x \cdot 2^y = 72$; $x = 2,\ y = 3$

5) $4^{1-\frac{1}{x}} \cdot 8^{1-\frac{2}{y}} = 4$
$3^{1+\frac{1}{x}} : 27^{1+\frac{1}{y}} = \sqrt{3^{-5}}$

6) $3^x = 2^y$
$x^3 = y^2$

7) $x^y = y^x$
$100^x = 10^y$; $x = 2,\ y = 4$

8) $a^{\sqrt{x}} = b^{\sqrt{y}}$
$\sqrt[a]{x} = \sqrt[b]{y}$

9) $x^a = y^b$
$y = cx$; $x = c^{\frac{b}{a-b}},\ y = ?$

10) $x^{\sqrt{y}} = a$
$x^2 = b$

11) $a^{\log x} = by$
$cx = dy$

12) $2^x \cdot 3^y = 12$
$x + y = 3$; $x = 2,\ y = 1$

13) $x^{\log x} : y^{\log y} = 1000$
$\log x + \log y = 3$; $x = 100$
$y = 10$

14) $2 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^y = 2$
$4 \cdot 3^x + 2 \cdot 5^y = 3$

15) $2^y \cdot \sqrt[x]{36} = 48$
$3^y \cdot \sqrt{144} = 324$

16) $x^y = 8$
$\sqrt[y]{216} = 6\left(\frac{x}{2}\right)^3$; $x = 2$
$y = 3$

17) $\sqrt[x]{216} : \sqrt[-y]{\frac{1}{4}} = 3$
$\sqrt[x]{8} = \sqrt[y]{4}$; $x = 3,\ y = 2$

18) $\sqrt[\frac{1}{x-3}]{5} \cdot y = 375$
$\sqrt[\frac{1}{x-1}]{2} \cdot \sqrt[\frac{1}{2}]{y} = 288$

19) $\sqrt[x]{4} \cdot 3^y = 54$
$\sqrt[x]{9} \cdot 2^{y+1} = 4$; $x = 2$
$y = 3$

20) $\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a}$
$\sqrt[x]{b^2} \cdot \sqrt[y]{b^3} = \sqrt[y]{\sqrt[x]{b^2}}$

21) $\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{0{\cdot}\dot{3}}$
$y^x = 9$; $x = 2,\ y = 3$

22) $\sqrt[3]{a^x} \cdot \sqrt{a^{y-1}} = a^5$
$\sqrt[3]{a^{x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{y+2}} = a^{-3}$

23) $\sqrt[x]{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^y = 3$
$\sqrt[2x]{81} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^y = 4$; $x = 2,\ y = 1$

24) $x^y = \sqrt[y]{b} = x^n$

25) $3^{\log x} \cdot 4^{\log y} = 4$
$\log x + \log y = 1$; $x = 1,\ y = 10$

26) $a^{\frac{1}{x}} = by$
$c^x = d^{\log y}$

27) $\sqrt[x]{x + y} = 3$
$(x + y)^{-1} \cdot 2^x = \frac{4}{9}$; $x = 2,\ y = 7$

27a) $x^y = 5$
$y^x = 1$; $x = 5,\ y = 1$

28) $\sqrt[x]{xy^{-1}} = 27$
$x \cdot 3^x = 81y$; $x = 1,\ y = \frac{1}{27}$

29) $x^y = y^x$
$x = y^2$; $x = 4,\ y = 2$

30) $x^y = y^x$
$a^x = b^y$

31) $\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[5]{3^y} = 36$
$\sqrt{4-x} : \sqrt[-16]{256^y} = 4$

32) $(a^y)^{2z} \cdot (a^x)^z \cdot (a^x)^y = a^{2xyz}$
$(a)^{yz} \cdot (a^x)^{3y} : (a^{xz}) = a^{3xyz}$
$(a^{4z})^y : (a^x)^z \cdot (a^x)^y = a^{xyz}$

32a) $3 \cdot 2^{2x-z} + 3^{x-y+1} + 5^{z-y} = 26$
$2 \cdot 2^{2x-z} - 3^{x-y} + 5^{z-y+1} = 30$
$2^{2x-z} + 3^{x-y} - 4 \cdot 5^{z-y} = -13$; $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$

33) $x^{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = x^2$
$y^{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = y^6$; $x = 4$, $y = 16$

34) $x^{\sqrt{y}} = y^{-1}$
$y^{\sqrt{y}} = y^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

35) $\log(x - y + 1) - \log(x - y - 1) = \log(2 + a) - \log(2 - a)$
$\log(x + a + 1) - \log(x - a - 1) = \log(y + a - 1) - \log(y - a + 1)$

36) $3x + 2 \log y = 0{\cdot}47712$
$x - \log(y^3) = 1{\cdot}30103$

37) $\log x + \log y - \log(x + y) = \log a$
$\log y + \log z - \log(y + z) = \log b$
$\log z + \log x - \log(x + z) = \log c$

Primjena linearnih jednadžbi

[Problemi ili jednadžbe, zadane tekstom (riječima)]

Postavljanje jednadžbe:

Podatke teksta treba izraziti matematski:

1. Najprije se ustanovi veličina koja će se uzeti kao nepoznanica (obično ona za koju se u tekstu pita) i obilježi se općim brojem, na pr.: $x, y, z \ldots$;
2. Sa nepoznanicom se naznače sve rač. operacije koje tekst traži;
3. Dva jednaka izraza (prema tekstu) izjednače se;
4. Ispita se da li nađena vrijednost zadovoljava tekst;
5. Rezultat se prodiskutuje t. j. ispita pod kojim je uvjetima moguć i odrede značajni slučajevi.

Primjer I

1. Koji se broj mora oduzeti od brojnika razlomka $\frac{3}{4}$ i pribrojiti njegovu nazivniku da se dobije $\frac{1}{6}$?

R.: Traženi broj $= x$, a traženi razlomak $\frac{3 - x}{4 + x}$ mora biti jednak $\frac{1}{6}$; dakle:

$$\frac{3 - x}{4 + x} = \frac{1}{6}$$

$$18 - 6x = 4 + x$$

$$\underline{\underline{x = 2.}} \qquad \text{Proba: } \frac{3 - 2}{4 + 2} = \frac{1}{6}$$

2. Prije 10 godina bio je A 3 puta stariji nego B, a iza 5 godina biće od njega 2 puta stariji. Koliko je godina jednom, a koliko drugom?
R.: A sada ima x godina, prije 10 godina imao je $x-10$, iza 5 g. imaće $x+5$. B sada ima y i t. d. Prema tome:

$$\begin{array}{l} x-10=3(y-10) \\ x+5=2(y+5) \\ \hline x-10=3y-30 \\ x+5=2y+10 \\ \hline x-3y=-20 \\ x-2y=5 \\ \hline y=25, \quad x=55 \end{array}$$

3. U nekoj familiji ima brat dvaputa više sestara nego braće, a sestra jednako sestara i braće. Koliko je bilo jednih, a koliko drugih?
R.: Braće je bilo x, sestara y. Brat je imao $x-1$ brata, a y sestara, dok je sestra imala x braće, $y-1$ sestru. Prema tome je:

$$\begin{array}{l} 2(x-1)=y \\ x=y-1 \\ \hline x=3, \quad y=4 \end{array}$$

4. Od tri kruga dva i dva dotiču se izvana; koliki su njihovi polumjeri, ako im centrale iznose 17 cm, 18 cm i 25 cm?
R.: Polumjeri su x, y, z, a centrale jednake sùmi polumjera, dakle:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=17 \\ y+z=18 \\ x+z=25 \end{array}\right| +$$

$$\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ x+z=25 \\ \hline y=5, \quad x=12, \quad z=13 \end{array}$$

Primjer II

1. **Zadaci o brojevima**

Trocifren broj sa ciframa x, y, z piše se u dekadskom sustavu: $\underline{100x+10y+z}$

1) Zbroj znamenaka dvoznamenkasta broja iznosi 13. Ako mu se zamjene znamenke broj se umanji za 45. Koji je to broj?
R.: Znamenke su x i y; dakle:

$$\begin{array}{l} x+y=13 \\ 10x+y=10y+x+45 \\ \hline x+y=13 \\ 9x-9y=45 \\ \hline x=9, \quad y=4. \quad \underline{\text{Broj je } 94.} \end{array}$$

Disk.: Kao rezultat moraju izaći cijeli brojevi $> \emptyset$. Zašto?

2. **Diobeni i društveni račun** osniva se na razmjerima.

Pazi! $\left\| \begin{array}{l} x:y:z = a:b:c \\ (x+y+z):(a+b+c) = x:a \text{ itd.} \end{array} \right.$

1) Za neko poduzeće pozajmi A 10.000 Din na 1 g. i 2 mj., B 8.000 Din na 18 mj. i C 12.000 Din na 10 mj. Kako će međusobno podijeliti dobitak od 20.000 Din?

R.: Dobitak osobe A jest x, osobe B y, osobe C z. Dobici su upravo razmjerni sa uloščima i vremenom; zato je:

$$x = k \,.\, 10.000 \,.\, 14$$
$$y = k \,.\, 8.000 \,.\, 18$$
$$z = k \,.\, 12.000 \,.\, 10$$

$$x:y:z = 5 \,.\, 7 : 4 \,.\, 9 : 3 \,.\, 10 = 35 : 36 : 30,$$
$$(x+y+z):(35+36+30) = x:35 = y:36 = z:30$$
$$20.000 : 101 = x : 35$$
$$x = \frac{20.000}{101} \,.\, 35, \quad y = \frac{20.000}{101} \,.\, 36 \text{ itd.}$$

2) Kutevi se trokuta odnose kao 2 : 3 : 4. Koliki je svaki?

R.: $x:y:z = 2:3:4$; $(x+y+z):(2+3+4) = x:2$,

$$(x+y+z):9 = x:2$$
$$180:9 = x:2$$
$$x = 40, \quad y = 60, \quad z = 80$$

3. **Kamatni račun** prema formuli:

$$K = \frac{G \,.\, v \,.\, p}{100} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} K = \text{kamate}, \quad v = \text{vrijeme}, \\ G = \text{glavnica}, \quad p = \text{postotak} \end{array}$$

1) Dva kapitala, koji zajedno iznose 14.700 Din i od kojih je prvi uložen uz $3\frac{1}{2}\,\%$ a drugi uz $4\frac{1}{2}\,\%$, nose jednake godišnje kamate. Koliko iznosi svaki od njih?

R.: $x + y = 14700$, $\dfrac{3{\cdot}5x}{100} = \dfrac{4{\cdot}5y}{100}$ i t. d., x, y su kapitali!

$$x + \frac{3{\cdot}5x}{4{\cdot}5} = 14700, \; x = ? \; y = ?$$

2) C_1, C_2, C_3 su dužne sume koje treba isplatiti poslije t_1, t_2, t_3 uz $p\,\%$, $C (= C_1 + C_2 + C_3 + ..)$ cjelokupni dug, $x =$ srednji rok: onda je

$$\frac{C_1 p t_1}{100} + \frac{C_2 p t_2}{100} + \ldots = \frac{Cpx}{100} \text{ ili: } C_1 t_1 + C_2 t_2 + \ldots = C \,.\, x$$

4. Račun smjese

Čistina (finoća) smjese = količina plemenitog metala u 1 *kg* smjese (legure).

a) $\underline{q = Q \cdot f}$ $\quad q =$ težina plemenitog metala u smjesi $\quad \left.\begin{array}{l} Q = \text{apsol. tež.} \\ f = \text{finoća} \end{array}\right\}$ smjese

b) $\underline{q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3 + \ldots = Q \cdot F}$

Težina plemenitog metala prije miješanja = težini pl. metala smjese. q_1, $q_2 \ldots$ težine pojedinih smjesa, f_1, $f_2 \ldots$ njihove finoće, težina je smjese $Q (= q_1 + q_2 \ldots)$, F njezina finoća.

1) Koliko se zlata čistine 0·6 mora pomiješati sa zlatom čistine 0·76 da se dobije 1·2 *kg* čistine 0·7?

R.: $0{\cdot}6x + 0{\cdot}76y = 1{\cdot}2 \cdot 0{\cdot}7 \mid 10$

$x + y = 1{\cdot}2 \mid 6$

$6x + 7{\cdot}6y = 8{\cdot}4 \mid -$

$6x + 6y = 7{\cdot}2$

$1{\cdot}6y = 1{\cdot}2; \; y = \frac{3}{4}$

Na isti se način rješavaju i druge smjese (robe razne cijene, alkoholi raznih gradi, tekućine raznih spec. težina ili temperatura).

5. Rad (cijevi!)

Dio rada u jedinici vremena?

1) A, B i C zajedno trebaju za neki posao 3 dana. A i B svršili bi ga skupa za 4 dana, a B i C za 5 dana. Koliko bi vremena trebao za to svaki sam?

R.: A bi sam svršio posao za x dana, B za y, C za z dana.

Za 1 dan obavi $A \frac{1}{x}$ posla, $B \frac{1}{y}$, $C \frac{1}{z}$; dakle:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad z = 12, \quad y = 8\tfrac{4}{7}, \quad x = 7\tfrac{1}{2} \text{ dana}$$

2) Vodeni se sud može napuniti kroz cijevi A_2 i A_3 za 80 minuta, A_1 i A_3 za 60, a kroz A_1 i A_2 za 40 minuta. Koliko bi vremena trebalo, da se sud napuni kroz svaku cijev napose, a koliko kroz sve 3 cijevi zajedno?

R.: a) Kroz cijev A_1 napunio bi se za x, kroz A_2 za y, kroz A_3 za z minuta. Za jednu minutu napuni se $x^{\text{-ti}}$ dio, t. j. $\frac{1}{x}$ posude kroz prvu cijev, $\frac{1}{y}$ kroz drugu, $\frac{1}{z}$ kroz treću. Kad je otvorena druga i treća skupa, napuni se $\frac{1}{80}$ posude t. j. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{80}$ itd.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{80}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{60}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{40}\end{aligned}\right|\quad \begin{aligned}x&=68\tfrac{4}{7}\text{ minute}\\ y&=96\ \text{,,}\\ z&=480\ \text{,,}\end{aligned}$$

b) $\left(\frac{1}{68\frac{4}{7}}+\frac{1}{96}+\frac{1}{480}\right)x=1$

6. Zadaci o kretanju

Put = brzina × vrijeme ili $s=ct$. Kretanje je jednoliko.

Kod suprotnog kretanja je prvotna udaljenost jednaka sumi, a kod istosmjernog razlici pojedinačnih puteva.

1) Po zatvorenoj krivoj liniji, dugoj a (1000) m, susreću se dva sklizača nakon svakih n (40) sek., ako se skližu u suprotnom smjeru, a svakih p (90) sek., ako se skližu u istom smjeru. Kolike su im brzine.

R.: Put je prvoga nx, drugog ny i t. d., ako su im x i y brzine; dakle:

$$\left.\begin{aligned}nx+ny&=a\\ px-py&=a\end{aligned}\right|\ \text{i t. d.}$$

2) Kad će kazaljke na satu prvi puta iza podne zatvarati $\sphericalangle 90^\circ$?
[R. : $x-\frac{x}{12}=15$; $x=16\frac{4}{11}$. Za put i vrijeme ovdje je ista veličina].

Primjer III

1. Dvije tačke, udaljene za a m, kreću se istim pravcem jedna za drugom brzinama c_1 i c_2. Kada će se sastati?

R.: Put prve tačke je c_1x, druge c_2x. Mora biti:

$$c_2x-c_1x=a$$

$$x=\frac{a}{c_2-c_1}$$

Disk.: Zadatak, kako je postavljen, ima rješenje, kad je $c_2>c_1$. Za $c_1=c_2$ neće se nikad sastati ($x=\frac{a}{0}=\infty$!). Za $c_2<c_1$ x je negativno; tačke se neće više sastati, ali su se sastale prije $\frac{a}{c_1-c_2}$ sekunda.

2. Zlatni lanac težak je ng a čistina mu je t; koliko se g drugog zlata čistine t' treba dodati da se dobije legura čistoće t''?

R.: $t'x + nt = (n + x)\,t''$

$$x = \frac{(t - t'')\,n}{t'' - t'}$$

Disk.: Zadatak je moguć za $x > \emptyset$ t. j. za $t' < t'' < t$.
Za $t = t' = t''$ $x = \frac{0}{0}$ (neodređeno!), t. j. ako su oba zlata iste čistine može se od svakoga uzeti bilo koliko da se dobije opet ista čistina.

3. Šesnaest lica, koje muških koje ženskih, trebalo je za podvoz platiti vozaru ukupno 75 Din; ako je svaki muški platio po 7 Din, a svaka žena po 5 Din, koliko je bilo jednih, koliko drugih?

R.: $x + y = 16$, $7x + 5y = 75$

$$x = -\tfrac{5}{2}$$
$$y = 18{\cdot}5$$

Po prirodi zadatka x i y moraju biti cijeli i pozitivni brojevi, zato je zadatak nemoguć.

4. **Problem je nemoguć:**

1. Kad su rješenja negativna ili razlomci, a po prirodi zadatka ne mogu to biti;
2. Kad nađene vrijednosti ne zadovoljavaju sve pogodbe zadatka;
3. Kad je rezultat $x = \dfrac{m}{0}$;
4. Razlikuj algebarski korijen od korijena, koji zadovoljava tekst jednadžbe!

Zadaci

1) Trokratnik nekoga broja oduzet od 50 daje dvokratnik istog broja pribrojen broju 30. Koji je to broj?
2) Ako se neki broj pomnoži sa a, od produkta odbije b, a ostatak razdijeli sa c i količniku pridoda d, dobije sam broj. Koji je to broj?
3) Broj 50 treba razdijeliti na 2 dijela tako da dijelovi međusobno razdijeljeni, daju za kvocijent 1 i ostatak 1. Koji su to dijelovi?
4) Koji se broj mora dodati brojniku i nazivniku razlomka $\frac{2}{3}$ da se dobije aritm. sredina između $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{4}$, a koji, da se dobije harmonijska sredina između zadanih brojeva?
5) Zadnja znamenka troznamenkasta broja je 4. Kad se ona premjesti na prvo mjesto, dobije se broj uvećan za 189; koji je to broj? [R. : 234; $10x + 4 + 189 = 400 + x$].
6) Šestznamenkasti broj ima 1 na prvom mjestu. Ako se ta znamenka prenese sa prvog mjesta na pošljednje, dobije se trokratnik toga broja. Koji je to broj? [$3(100.000 + x) = 10x + 1$; broj je 142.857].

7) Srednja cifra trocifrena broja je 5. Ako se ona premjesti na zadnje mjesto dobije se broj za 18 manji od prethodnoga. Koji je to broj, ako je prva cifra jednaka aritmetičkoj sredini drugih dviju? (R. : 453).

8) Troznamenkast broj, čija je suma znamenaka 11, ima zadnju znamenku tri puta veću nego prvu. Ako mu se doda 396, dobiju se cifre prvotnog broja obrnutim redom. Koji je to broj? [R. : $100x + (11 - 4x)\,10 + 3x + 396 = 300x + (11 - 4x)\,10 + x$, ili sa 3 nepoznanice? Broj : 236]

8a) Suma cifara trocifrena broja iznosi 7; srednja je cifra sedmina broja iz krajnih cifara, a ako se zadanom broju doda 297 dobije se broj sa obrnutim ciframa. Koji je to broj? [R. : $x + y + z = 7$, $7y = 10x + z$, $100x + 10y + z + 297 = 100z + 10y + x$. Broj je 124]

8b) Naći ona dva broja, čiji je produkt 2·4 puta veći od njihove sume, a ta suma 5 puta veća od njihove razlike. ($x = 4$, $y = 6$).

9) Kak se svakom od tri broja pribroji aritm. sredina drugih dvaju, dobiju se redom 10, 20, 30. Koji su to brojevi?

10) Neki otac želi razdijeliti jabuke među djecu. Dadne li svakome po 5, ostanu 3 jabuke; dadne li svakome po 6 fali mu 1. Koliko ima djece, a koliko jabuka? (4, 23).

11) Dvije posude zajedno sadrže 300 *l*. Izlije li se iz prve u drugu koliko ova ima; onda iz druge u prvu onoliko koliko je u prvoj ostalo; na koncu iz prve u drugu onoliko, koliko ova sad ima: to u obe posude ostane jednako. Koliko je svaka na početku imala?

12) Otac upitan za godine sina odgovori: Prije 5 godina bio sam 5 puta toliko star kao moj sin, a iza 3 godine biću 3 puta star kao on. Koliko godina ima svaki? [45, 13].

13) Jedan humoristički list iznosi da su se ljudi u New-Yorku neko vrijeme susretali sa pitanjem: »Kako je stara Ana«? Radilo se o ovome problemu: Mariji je sada 24 godine. Ona je 2 puta toliko stara, koliko je bila Ana onda, kad je Marija imala toliko godina, koliko Ana sada. Koliko je godina sada Ani? [R. : 18 godina; $24 - y = x$, $24 = 2\,(x - y)$].

14) U skupštini od 360 poslanika primljen je prijedlog sa 30 glasova većine; koliko je glasova za, a koliko protiv?

15) Rastavi razlomak $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x}$ na sumu razlomaka sa nazivnicima x i $x + 1$.

---

16) A, B i C trebaju za jedan posao a dana. A i B bi ga dovršili za b dana, a B i C za c. Koliko bi vremena trebao svaki od njih sam? Na pr. $a = 20$, $b = 30$, $c = 36$. [R. : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}$ i t. d.]

16a) Dva radnika mogu zajedno da svrše neki posao za 18 dana. Poslije zajedničkog rada od 6 dana prvi se razboli, a drugi produži i završi posao poslije 15 dana. Za koliko dana može da dogotovi taj posao svaki radnik?

17) A, B i C mogu dovršiti neki posao napose radeći za 30, 35, 40 dana. A i B su već radili 4 dana, kad je došao C. Kada će oni dovršiti posao?

18) Rezervoar se može napuniti kroz 3 cijevi: na prvu za 10, na drugu za 12, na treću za 15 sati. Za koliko će se vremena napuniti, ako su a) sve tri zajedno otvorene; b) ako prve dvije dovode, a treća odvodi vodu?

18a) Jedan se bazen može da napuni na 2 načina: ili ako su otvorene obe cijevi 10 sati, ili ako se ostavi otvorena prva cijev 8 sati druga 6. Za koje vrijeme svaka cijev napuni bazen? $\left(\mathrm{R.}: \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}, \frac{8}{x}+\frac{6}{y}=1\right)$

19) Rezervoar se napuni kroz cijev A i B za a (36) dana, A i C za b (40), kroz B i C za c (42) dana. Za koliko će se vremena napuniti, *a)* kad su sve tri cijevi otvorene; *b)* kroz svaku napose?
$\left(\mathrm{R.}: \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{36}, \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{40}, \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{42}\right)$

---

20) A, B i C kupe zajedno srećku: A dade 30 D, B 45 D i C 50 D. Srećka dobije 120.000 D. Koliko će svaki od njih dobiti, ako se odbije 16% poreza?

21) Među tri nasljednika ima se podijeliti imetak od a D (280.000) tako da prvi dobije $\frac{1}{n}$ $(\frac{1}{3})$ drugi $\frac{1}{m}$ $(\frac{1}{4})$ a treći ostatak. Kako se ima razdijeliti imetak, ako treći u međuvremenu umre?

22) Kod neke banke uložio je A 2000 Din kroz 2 godine uz 4%, B 3000 Din uz 3.5% kroz 3 godine i C 4000 Din uz 3% kroz 18 mj. Kako će oni međusobno podijeliti dobit od 10000 Din? [$x+y+z=10000$; $x:y:z=$ $=2000.2.4.k:3000.3.3{\cdot}5\,k:4000.3.1{\cdot}5\,k$].

23) Za neki posao dadne A najprije 600 Din, a iza 4 mj. još 1000 Din; B u početku 2000 Din, a iza 6 mj. izvadi 300 Din. Kako će međusobno podijeliti dobit od 1000 Din?

24) Tri poduzetnika sudjeluju kod nekog poduzeća: A sa 30 radnika kroz 60 dana po 7 sati dnevno, B sa 40 radnika kroz 45 dana po 8 sati dnevno i C sa 20 radnika kroz 50 dana dnevno po 9 sati. Kako će međusobno podijeliti dobit od 20.000 Din?

25) Koliko natrija ima u 1 *kg* kuhinjske soli *(Na Cl)* (atomska težina *Na* 23, *Cl* 35·4)? (R.: $x+y=1000$, $x:y=23:35{\cdot}4$).

26) Koliko ugljika, kisika i dušika ima u 1 m^3 uzduha?

27) U ugljičnoj kiselini na 12 dijelova ugljika otpada 32 dijela kisika. Koliko ima ugljika, a koliko kisika u 600 *gr* ugljične kiseline?

28) Koliko vodika (H) a koliko kisika (O) ima u 1 *l* vode (H_2O)?

28a) Trgovac kupi za 5600 Din dvije vrste kafe od 40 Din i 36 Din po kilogramu. Pri prženju prva je izgubila 10%, druga 16% svoje težine. Prodavajući *kg* prve po 48 Din, druge po 46 Din zarada je 424 Din; koliko je kupio svake vrste? ($x=50$, $y=100$).

29) Trgovac proda robu za a D uz p% dobitka, pošto ju je kupio?

30) Dva kapitala uložena jedan uz 4% drugi uz 5% donose godišnje 600 D kamata zajedno. Da je prvi bio uložen uz 5% a drugi uz 4% kamate bi iznosile za 10 D manje. Koliki su kapitali?

31) Dvije glavnice iznose 14.000 D. Prva uložena uz 6% nosi dvaputa toliko kamata kao druga uložena uz 4%. Kolike su glavnice? [R.: $x=800$, $y=600$].

32) Uz koji % glavnica a D donese za t godina isto toliko kamata kao glavnica b uz p% za t' godina?

33) Trgovac treba platiti dug od 10.000 D u 4 rate: a (6000) D nakon r (4) mj.), b (2000) D nakon s (6) mj. i c (2000) D koncem godine (nakon t mj.). Kad bi mogao odjednom sve platiti? $\left(x = \frac{ar + bs + ct}{a + b + c}\right)$

34) Dug od 4000 D, koji treba da se plati poslije 8 mj. isplaćen je odmah uz 4% odbitka god. diskonta, koliko je isplaćeno?
Tačan diskont: Sadašnja vrijednost + interes od sad. vrijednosti = buduća vrijednost.
Uobičajen diskont: Buduća vrijednost — interes od buduće vrijednosti = sadašnja vrijednost.

35) Koliko se l tekućine spec. težine s_1 treba pomiješati sa $n\,l$ spec. tež. s_2 da smjesa imadne spec. težinu s? R.: $x = \frac{n\,(s - s_2)}{s_1 - s}$

36) Koliko se bakra i cinka mora pomiješati da se dobije 1 kg mjedi spec. tež. 8·2? Spec. težina bakra $s_1 = 8·8$, cinka $s_2 = 7·2$.

37) Koliko se kg robe po a D treba pomiješati sa p kg po b D, da 1 kg smjese stoji c D? Na pr. $a = 40$, $b = 60$, $p = 10$, $c = 52$.

38) Pomiješavši žestu od 60 gradi sa žestom od 90 gradi trgovac je dobio 10 hl žeste od 80 gradi. Koliko je uzeo svake vrste?

38a) Zlatar ima dvije vrste zlata. Ako pomiješa 120 gr od prve vrste sa 60 gr od druge vrste, dobije 14 karatno zlato. Ako se doda još 200 gr druge vrste dobije 16 karatno zlato. Od koliko je karata svaka vrsta?

39) Kruna sirakuškog kralja težila je na zraku 10 kg, a u vodi 9·375 kg. Glasoviti matematičar i fizičar Arhimed trebao je pronaći koliko je unutra zlata, a koliko srebra. Koliko je našao jednog metala, a koliko drugog? R.: $x + y = 10$, $\frac{x}{19} + \frac{y}{10} = 0·625$; $x = 7\frac{11}{12}$, $y = ?$

40) Koliko kg pluta ($s = 0·24$) u plivaćem pojasu mora imati čovjek aps. težine 80 kg, a sp. težina 1·2, ako želi upravo plivati?

41) Koliko se kg srebra čistine f_1 mora pomiješati sa a kg srebra čistine f_2 da se dobije b kg smjese čistine f?

42) 20 l vode temperature 40° pomiješa se sa 60 l od 20°. Kolika je temperatura smjese?

---

43) Dva sklizača skližu se po zatvorenoj krivoj liniji dugoj l (600) m i sastaju se svakih p (20) sek., kad se skližu u istom smjeru, a svakih s (18) sek. kad se skližu u suprotnom smjeru. Kolike su im brzine?

43a) Dva tijela kreću se po opsegu kruga dužine 800 m, a počinju kretanje iz iste tačke jedno za drugim. Prvo, koje ima manju brzinu, počinje se kretati 10 sek. ranije. Ako se prvi puta sustignu poslije 20 sek., od polaska drugog tijela, a po drugi put poslije 100 sek., kolike su im brzine? [$x = 30m$, $y = 20m$] Kad će se sastati treći put?

44) Iz mjesta A pođe putnik u 6 sati izjutra prema mjestu B, udaljenu od A za 36 km, sa brzinom od $4\frac{1}{2}$ km na sat. Za njim se pošalje u potjeru biciklista, koji iz A pođe u 8 sati i goni brzinom $\frac{2}{3}$ km na minuti. Kada će i gdje će on stići prvog putnika?

45) Put od a *km* prevali biciklist za m sati. Za povratak treba n sati više. Ravnicom goni brzinom od c_1 *km*, uz brdo c_2, niz brdo c_3 *km* na sat. Koliko *km* vozi ravnicom, koliko uz brdo, a koliko niz brdo?

46) Pas goni lisicu, koja je 100 svojih skokova pred njim, i koja načini 5 skokova dok pas načini 4. Ako je 7 lisičijih skokova koliko 4 psećih, koliko mora pas još poskočiti, da bi stigao lisicu? R.: Pas načini x skokova, licica $\frac{5x}{4}$; dakle $\left(100+\frac{5x}{4}\right)\frac{4}{7}=x$, $x=200$; ako je dužina psećeg skoka y, onda je lisičijeg $\frac{4y}{7}$.

47) Jedna lađa doplovi uz vodu iz A do B za m sati, a niz vodu isti taj put prevali za n sati prije. Kolika je brzina rijeke i lađe, ako je udaljenost $AB=a$.

48) Kad će se prvi puta pokriti kazaljke na satu iza 2 sata? Kad će zatvarati međusobno kod $\sphericalangle$ 90°, $\sphericalangle$ 120° nakon 12 sati?

48a) Iz mjesta A do mjesta B, koja su udaljena 600 *km* prešao je aeroplan za 6 sati, a natrag je trebao 4 sata više, jer je vjetar neprestano duvao od A prema B. Kolika je brzina aeroplana a kolika vjetra? [$x=80$ *km*, $y=20$ *km*].

---

49) Kod kojeg pravilnog mnogokuta jedan kut iznosi 135°? [8-kut].

50) Zbroj je kuteva u poligonu 1080°. Koliko ima on stranica? [8-kut].

51) Površina kruga naraste za 6·28 cm^2, kad se radius poveća za 1. Koliki je radius kruga?

51a) Oko kruga polumjera $\rho=2$ opisan je trokut čije se stranice odnose kao 5 : 4 : 3. Kolike su mu stranice i koliki je polumjer opisanog kruga?

R.: Stranice su $5x$, $4x$, $3x$, **površina** $P=\frac{a+b+c}{2}\rho=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ **gdje je** $s=\frac{a+b+c}{2}$ i t. d. $a=8$, $b=6$, $c=10$ i t. d.

51b) Opseg istokračna trokuta $o=32$ *cm*, visine mu se odnose kao 5 : 6; treba odrediti površinu kružnoga vijenca između upisanoga i oko trokuta opisanoga kruga. [$a=12$, $b=10$; $\rho=3$, $R=\frac{25}{4}$

52) Koji mnogokut ima dvaputa toliko dijagonala kao stranica?

53) Površina se pravokutnika poveća za 13, ako mu se visina poveća za 1, a osnovka za 2, obrnuto se poveća površina za 9, ako mu se visina poveća za 2, osnovka za 1. Kolike su mu stranice i dijagonala?

53a) Stranice su paralelograma a (8), b (6); kut među njima $\gamma=30^0$. Kolika mu je površina?

53b) Hipotenuza je pravokutna trokuta $c=10$, a otsječci, što ih na njoj čini visina odnose se kao 3 : 2. Kolike su katete?

53c) Razlika paralelnih stranica trapeza iznosi a, zadana mu je površina P i visina h. Kolike su stranice?

53d) Opseg romba $o=20$ *cm*, a dijagonale se odnose kao 4 : 3. Koliki je polumjer upisanog kruga?

53e) Zadane su stranice istokračna trapeza $a=10$, $b=d=5$, $c=4$. Kolika mu je visina? Isto tako, ako je $a=12$, $b=8$, $c=6$, $d=10$.

54) Stranice su trokuta $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$; odrediti udaljenost težišta od stranice b. Koliki je polumjer opisanog (upisanog) kruga? R.: $d = \frac{1}{3} h_b = 4$

54a) U pravokutan trokut sa katetama a i b upisati kvadrat i odrediti mu stranicu. $\left[x = \frac{ab}{a + b}\right]$

54b) Ako se dijagonala kvadrata poveća za 5 njegova se površina poveća za 37 . 5. Koliki mu je opseg?

54c) Suma osnovice i visine istostranična trokuta $s = 3(2 + \sqrt{3})$; u kojem odnosu stoje površine upisanog i opisanog kruga i trokuta?

54d) Tri jednaka kruga polumjera r dotiču se izvana; odrediti koji % površine jednog kruga iznosi površina lika između njih?

54e) Tetiva kružnog otsječka (segmenta) $s = 30$, a visina luka $h = 9$; koliki je polumjer kruga?

54f) Nad hipotenuzom pravokutna istokračna trokuta opisan je polukrug, a sa katetom a kružni kvadrant. Kolika je površina između oba luka?

54g) Oko deltoida opisan je krug. Površina deltoida iznosi 48 cm, a stranice mu se odnose kao 4 : 3; koliki je polumjer kruga? $[2r = 10]$.

54h) Dijagonale su trapeza $d_1 = 17$, $d_2 = 10$, a visina $h = 8$. Kolika mu je površina? $[P = 84]$. Kolike su stranice, ako je jedna paralelna stranica $= \frac{1}{4}$ druge?

54k) U pravokutnom trokutu sa katetama a i b povuče se sredinom jedne katete paralela prema hipotenuzi. Treba odrediti površinu nastalog trapeza.

54l) Širina kružnoga vijenca $= d$, svaka tetiva većeg kruga, koja dodiruje manji $=$ s. Koliki su polumjeri krugova?

54n) Stranice su istokračna trapeza $a = 10$, $b = d = 5$, $c = 4$. Ako se njihova središta spoje dobije se romb. Kolika je njegova površina? Koliki je polumjer u romb upisanog kruga?

55) Na krajevima poluge duge 2 m hvataju sile od 80 i 60 kg. Gdje je hvatište njihove rezultante? (R. : $x + y = 2$, $x : y = 80 : 60$ i t. d.)

55a) Iz jezera strši šaš $v = 1\,m$. Ako se vrh šaša položi u ravan vode udaljiće se od svoga pređašnjeg položaja za $d = 5\,m$. Kolika je dubina jezera, ako se pri tome šaš nije svinuo u luk? $[h = 12\,m]$.

55b) Arhimed je rekao: »Daj mi, gdje ću stati pa ću zemlju pokrenuti«. Koliko bi morao uzeti pomičnih kolotura u potencijalnom koloturniku, da uzmogne zemlju dići silom $P = 60\,kg$, ako je masa zemlje $6 \cdot 10^{24}\,kg^*$;

R. : $P = \frac{Q}{2^x}$

55c) Opseg dijagonalnog presjeka kocke iznosi $10(1 + \sqrt{2})$; koliki je volumen kocke?

55d) Istostraničan čunj, kojemu opseg osnovke iznosi 6·28 cm pretvori se u istostraničan valjak. Kako se odnose površine obaju tjelesa?

55e) U kuglu polumjera r upisan je tetraedar; odrediti njegov brid.

55f) U kuglu polumjera r upisan je a) istostraničan čunj; b) istostraničan valjak. Treba odrediti površinu i volumen tih tjelesa.

55g) Pravokutan trokut sa kutetama a i b rotira oko hipotenuze; odrediti volumen i površinu rotacionog tijela.

55h) Zadan je osnovni brid $a = 6\,cm$ i pobočni brid $b = 8\,cm$ trostrane piramide kojoj je osnovka istostraničan trokut; odrediti površinu i volumen te uspravne piramide.

55i) Isto tako za kvadratičnu piramidu, gdje je $a = 10\,cm$, $b = 8\,cm$.

55j) Najdulja stranica kosog čunja ($a = 8$) i najkraća ($b = 6$) zatvaraju kut $\alpha = 90°$. Koliki je polumjer baze i volumen čunja?

---

56) Razlomak, kojemu je vrijednost $\frac{3}{4}$ podvostruči se, ako mu se brojniku doda 3 a nazivniku oduzme 2; koji je to razlomak?
$\frac{3x+3}{4x-2} = \frac{3x}{2x}$, $x = 2$, razlomak $\frac{6}{8}$

57) Prva cifra na lijevo jednog troznamenkasta broja $= 3$. Ako se ona premjesti s lijeve strane na desnu nastane broj uvećan za 108. Koji je to broj? ($300 + x = 10\,x + 3 - 108$; $x = 45$, broj 345).

58) Suma znamenaka troznamenakasta broja $= 6$; treća je znamenka $= \frac{1}{4}$ broja iz prve dvije, a kad se broju pridoda 198 dobije se broj sa obrnutim ciframa. Koji je to broj? R.: $x + y + z = 6$, $10x + y = 4z$, $100x + 10y + z + 198 = 100z + 10y + x$. Broj $= 123$

59) Neko ima 3 vrste tekućine. Pomiješa li 16 g prve, 20 g druge i 18 g treće smjesa će imati 1·5 spec. težinu; pomiješa li gornje vrste po smjeru 5 : 6 : 7 spec. težina smjese je 1·2; pomiješa li konačno 10 g prve, 8 g druge i 13 g treće, spec. težina smjese je 1·6. Kolika je spec. težina pojedinih tekućina?
(R.: Težina prve smjese $16 + 20 + 18 = 54$. $\left(\frac{16}{x} + \frac{20}{y} + \frac{18}{z}\right) 1{\cdot}5 = 54$,
$\left(\frac{5}{x} + \frac{6}{y} + \frac{7}{z}\right) 1{\cdot}2 = 18$, $\left(\frac{10}{x} + \frac{8}{y} + \frac{13}{z}\right) 1{\cdot}6 = 31$ i t. d.

60) Tri su metala pomiješana u omjeru 1 : 2 : 3; ako se ovoj leguri doda još $1^1/_2$ puta toliko od jedne druge legure iz istih metala mijenja se gornji omjer u 3 : 5 : 7. U kojem omjeru stoje metali u pošljednjoj leguri?
$X : Y : Z = 2 : 3 : 4$. Iz $x : y : z = 1 : 2 : 3$, $x = \frac{s}{6}$, $y = \frac{s}{3}$, $z = \frac{s}{2}$, $x + y + z = s$;
$x_1 : y_1 : z_1 = 3 : 5 : 7$, $x_1 + y_1 + z_1 = \frac{5}{2} s$; $x_1 = \frac{s}{2}$, $y_1 = \frac{5s}{6}$, $z_1 = \frac{7s}{6}$; $X = x_1 - x$ itd.

61) a (42) dkg cinka izgubi u vodi n (6) dkg na težini, b (50) dkg olova izgubi m (4) dkg. Ako legura olova i cinka, teška c (121) dkg, izgubi u vodi p (11) dkg, koliko je unutra olova, a koliko cinka?
[21 dkg cinka, 100 dkg olova; $x + y = c$, $\frac{nx}{a} + \frac{my}{b} = p$ i t. d.]

62) Neko je trebao da svoj dug plati u roku od 1 godine. Činilo mu se prikladnije da odmah dadne 3000 Din, nakon 2 mj. 2000, nakon daljnih 3 mjeseca 5000 Din, opet iza 6 mjeseci 2000 Din i na koncu iza još 3 mjeseca ostatak. Koliki mu je bio dug?
$0.3000 + 2 . 2.000 + 5000 . 5 + 2000 . 11 + (x - 12000)\,14 = 12x$

63) Trgovac treba platiti iza 3 mj. 2000 Din, a iza slijedećih 7 mj. 1000 Din; Kad on to može skupa platiti? R.: $3 . 2000 + 1000 . 7 = 3000 . x$

64) Godišnji račun plati se unapred uz odbitak 4% diskonta sa 560 Din. Koliki je račun? $\left(x - \frac{4x}{100} = 560\right)$

65) Dvije mjenice na 2000 i 3000 Din, od kojih prva pada nakon 10, druga nakon 8 mj. prodaju se za 4600 Din. Koliko se % računa diskont?
$$\left(3000 - \frac{3000 \,.\, 8 \,.\, x}{100 \,.\, 12} + 2000 - \frac{2000 \,.\, 10 \,.\, 12x}{100} = 4600\right)$$

66) Rezervoar se može napuniti prvom cijevi za a sati, drugom za b sati, trećom za c sati, a četvrtom isprazniti za d sati. Za koje će vrijeme rezervoar biti napunjen ako se otvore sve četiri cijevi?
$$\left(x = \frac{abcd}{bcd + acd + abd - abc}\right)$$

67) Nad stranicama kvadrata kao promjerima opišu se polukrugovi. Kolika je površina nastalih listova u kvadratu?

Kvadratne jednadžbe

(Kvadrat nepoznanice!)

1. Kvadratne jedn. sa 1 nepoznanicom

Definicija: (Normalni opći oblik)

1. $F(x) \equiv x^2 + a = 0$ R.: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$	**1. Čista kvadratna jednadžba** $a \equiv$ apsolutni član.
2. $F(x) \equiv x^2 + ax + b = 0$ R.: $x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ t. j. $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ $x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$	**2. Mješovita kvadratna jednadžba** (kvadr. trinom)
3. **Dokaz:** $x^2 + ax = -b$ $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$ $x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ $x = ?$	

Svojstva jedn.: odnos korijenâ i koeficijenatâ jednadžbe

1. Za $\frac{a^2}{4} - b \gtreqless 0$ korijeni su $\begin{cases} \text{realni različiti} \\ \text{realni jednaki} \\ \text{konjugir. kompleksni} \end{cases}$

2. $x_1 + x_2 = -a$
3. $x_1 \, . \, x_2 = c$
4. $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + ax + b = 0$
5. Svaka je jedn. jednaka produktu svojih korijenih faktora.

6. **Dokaz:** Za $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$x_1 + x_2 = ?$ i t. d.

1. $\frac{a^2}{4} - b = D$ (= diskriminanta jednadžbe)
2. **Suma korijena** jedn. = ?
3. **Produkt korijena** = ?
4. $x - x_1$ i $x - x_2$ jesu **korijeni faktori**

Postupak:

(Svađanje jedn. na normal. oblik)

1. **Jednadžbu treba pojednostaviti** t. j. izvesti naznačenje operacije;
2. **Urediti jednadžbu**: poredati po potenciji i reducirati na Ø oslobodivši se zagradâ i nazivnikâ;
3. Podijeliti jedn. sa faktorom ispred x^2;
4. **Dobiveni normalni oblik riješiti po gornjoj shemi;**
5. **Katkada je jedn. kvadratična po cijelim izrazima u kojima dolazi nepoznanica, mjesto kojih se redovno uvede nova nepoznanica i transcedentne se jedn. time svode na algebarske.**

Primjer I

1. $(3x - 6)^2 = 144$

R.: $3x - 6 = \pm\sqrt{144} = \pm 12$

$$3x - 6 = 12$$
$$3x - 6 = -12$$
$$x_1 = 6, \quad x_2 = -2$$

2. $\frac{\sqrt[n]{a + x^2}}{a} + \frac{\sqrt[n]{a + x^2}}{x^2} = \sqrt[n]{x^2}$

R.: $\sqrt[n]{a + x^2}\,(a + x^2) = ax^2 \sqrt[n]{x^2} \;\Big|^n$

$$(a + x^2)^{n+1} = a^n x^{2(n+1)}$$

$$\left(\frac{a}{x^2} + 1\right)^{n+1} = a^n$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{\sqrt[n+1]{a^n} - 1}}$$

3. $\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x+a}=\sqrt[3]{2x} \mid {}^3$

R.: $x-a+3\sqrt[3]{(x-a)^2(x+a)}+3\sqrt[3]{(x-a)(x+a)^2}+x+a=2x$

$3\sqrt[3]{(x-a)(x+a)}\left(\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x+a}\right)=\emptyset$

$\sqrt[3]{(x-a)(x+a)}\,.\,\sqrt[3]{2x}=\emptyset$

$\sqrt[3]{x^2-a^2}=\emptyset;\ \sqrt[3]{2x}=\emptyset$

$x_{1,2}=\pm a;\ x_3=\emptyset$

4. $$\frac{2a^2}{x+\sqrt{4a^2-x^2}}+\frac{2a^2}{x-\sqrt{4a^2-x^2}}=x$$

R.: Jedn. treba osloboditi zajedničkog nazivnika

$\left(x+\sqrt{4a^2-x^2}\right)\left(x-\sqrt{4a^2-x^2}\right)=2x^2-4a^2$; dakle:

$$\frac{2a^2\left(x-\sqrt{4a^2-x^2}\right)+2a^2\left(x+\sqrt{4a^2-x^2}\right)}{\left(x+\sqrt{4a^2-x^2}\right)\left(x-\sqrt{4a^2-x^2}\right)}=x$$

$$\frac{2a^2x-2a^2\sqrt{4a^2-x^2}+2a^2x+2\sqrt{4a^2-x^2}}{2x^2-4a^2}=x$$

$4a^2x=2x^3-4a^2x$

$8a^2x=2x^3$

$x_1=\emptyset;\ x_{2,3}=\pm 2a$

5. $(2x-1):(x+1)=(x-2)(x+3)$

R.: $(2x-1)(x+3)=(x+1)(x-2)$

$2x^2+5x-3=x^2-x-2$

$x^2+6x-1=\emptyset$

$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9+1}$

$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{10};\ x_1=-3+\sqrt{10},\ x_2=-3-\sqrt{10}$

Primjer II

1. $$\left(\frac{3x+2x}{2-x}\right)^2=4\,\frac{3+2x}{2-x}+5$$

R.: Jednadžba je kvadratna po izrazu

$\frac{3+2x}{2-x}=y$; dakle:

$y^2=4y+5$

$y^2-4y-5=\emptyset$

$y_{1,2}=2\pm\sqrt{4+5}$

$y_1=5$

$y_2=-1$

$\frac{3+2x}{2-x}=5,\ x_1=1$

$\frac{3+2x}{2-x}=-1,\ x_2=-5$

2. $$\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}}+\sqrt{\frac{x-5}{3x-4}}=\frac{5}{2}\ \Big|\ \sqrt{\frac{3x-4}{x-5}}=y$$

R.: $y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$

$y^2-\frac{5}{2}y+1=\emptyset$

$y_{1,2}=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25-16}{16}}$

$y_1=\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}}$

$y_2=2=\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}}$

$x_1=1,\ x_2=16$

3. $3^x + 6 \,.\, 3^{-x} = 5$

R.: $3^x = y$; $3^{-x} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

$$y + \frac{6}{y} = 5$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25-24}{4}}$$

$$y_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

$$3^x = 3;\ x_1 = 1;\ 3^x = 2$$

$$x_2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0{\cdot}30103}{0{\cdot}47712}$$

$$x_2 = ?$$

4. $x^{\log x} - 96 x^{\log\sqrt{x}} = 400 \mid x^{\log\sqrt{x}} = y$

R.: $y^2 - 96y - 400 = \varnothing$

$$y_{1,2} = 48 \pm \sqrt{48^2 + 400}$$

$$y_{1,2} = 100, -4$$

$$x^{\log\sqrt{x}} = 100$$

$$\frac{\log^2 x}{2} = 2$$

$$\log^2 x = 4$$

$$\log x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x_{1,2} = 10^{\pm 2}$$

$$x_1 = 100;\ x_2 = 0{\cdot}01$$

Razlikuj:

a) $x^{\log\sqrt{x}} = -4 \mid$ Log.!

$$\frac{\log^2 x}{2} = \log(-4)$$

$$\log^2 x = 2\log(-4)$$

$$\log x_{3,4} = \pm\sqrt{2\log(-4)}$$

$$x_{3,4} = 10^{\pm\sqrt{2\log(-4)}}$$

b) $x^{\log\sqrt{x}} = -4 \mid$ Kvadrirati!

$$x^{2\log\sqrt{x}} = 16$$

$$x^{\log x} = 16$$

$$\log^2 x = \log 16 = 4\log 2$$

$$\log^2 x = 4\sqrt{2}$$

$$\log x_{3,4} = \pm\sqrt{4\sqrt{2}} = \pm 2\sqrt{\sqrt{2}}$$

$$x_{3,4} = 10^{\pm 2\sqrt{\sqrt{2}}}$$

Da li je postupak b) ispravan, t j. da li nađeni korijen zadovoljava prvu jednadžbu ili samo njen kvadrat?

5. $(x + \sqrt{x})^2 - 4(x + \sqrt{x}) + 3 = 0$

$$(x + \sqrt{x})_{1,2} = ?$$

6. $x^{\log x + a} = b \mid$ Logarit.!

R.: $(\log x + a)\log x = \log b$

$\log^2 x + a\log x - \log b = 0 \mid$ Jednadžba kvadratična po $\log x$!

$$\log x_{(1,2)} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \log b}$$

$$x_{1,2} = 10^{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \log b}}$$

Primjer III

1. Koja jednadžba ima za korijene brojeve 2 i -3?

R.: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$; dakle:

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

2. $x^2 + ax = 0$

$$x(x + a) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -a$$

3. Pod kojim je uslovom jedan korijen jedn. $x^2 + ax + b = 0$ jednak dvostrukom drugom korijenu?

R.: $x_1 = 2x_2$, dakle:

$$x_1 + x_2 = 3x_2 = -a \quad \Big| \quad x_2 = -\frac{a}{3}$$

$$x_1\, x_2 = 2x_2^{\,3} = b$$

$$2\,.\left(-\frac{a}{3}\right)^2 = b \text{ ili } 2a^2 = 9b$$

Proba: $x^2 + 3x + 2 = 0$?

a) Svaka su dva broja međusobno jednaka. Dokaz?

$(x-a)^2=(x-b)^2$

$x-a=x-b$

$a=b$

Na pr. $(x+4)^2=(x+2)^2+6x+21$

$(x+4)^2=x^2+10x+25$

$(x+4)^2=(x+5)^2$

$x+4=x+5$

$\underline{4=5}$ Pogreška?

b) Svaki je broj jednak nuli!

$\underline{x=a}\,|^2$

$x^2=a^2$

$\underline{x^2-a^2=0}\,|:(x-a)$

$x+a=0$

$x=-a \quad | \quad a=-0$

$x=+a \quad | \quad 2a=0$

$\underline{a=0}$ Pogreška?

Jednadžbe višeg stepena sa 1 nepoznanicom

(koje se daju svesti na kvadratne).

1. Simetrične, (recipročne) jednadžbe

Def. (n. opći oblik):

1. $F(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=\emptyset$
2. **Koeficijenti, jednako udaljeni od krajeva, numerički su jednaki.**
3. **Ako je x_1 = korijen jednadžbe, onda je to i $\frac{1}{x_1}$ (recipročni!)**

Postupak

Ove se jednadž. svode na kvadratne i rješavaju:

1. **Rastavljanjem na faktore nižeg stepena koji se nulificiraju i posebno rješavaju;**
2. **Uvađanjem pomoćnih nepoznanica.**

1. $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$
2. $x^n+a_1x_1^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=\emptyset$

$$\begin{cases} a_1=-(x_1+x_2+\ldots+x_n) \\ a_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots x_{n-1}x_n \\ a_n=(-1)^n x_1x_2x_3\ldots x_n \end{cases}$$

$\rightarrow x_1, x_2 \ldots$ korijeni

$a_1, a_2 \ldots$ koeficijenti jednadžbe

1. **Svaka je jednadžba djeljiva bilo kojim svojim korijenim faktorom.**
2. **Odnos između koeficijenata i korijena jednadžbe.**

a) Jednadžbe 3eg stepena

1. $ax^3 + bx^2 + bx + a = \emptyset$

R.: $a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = \emptyset$

$(x + 1)[a(x^2 - x + 1] + bx) = \emptyset$

$x + 1 = \emptyset;\ x_1 = 1$

$a(x^2 - x + 1) + bx = \emptyset$ i t. d.

2. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = \emptyset$

R.: $2x^3 - 2 - 7x^2 + 7x = \emptyset$

$2(x^3 - 1) - 7x(x - 1) = \emptyset$

$(x - 1)[2(x^2 + x + 1) - 7x] = \emptyset$

$x - 1 = \emptyset;\ x_1 = 1$

$2x^2 + 2x + 2 - 7x = \emptyset$

$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = \emptyset$

$x_{2,3} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25 - 16}{16}}$

$x_{2,3} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$

$x_2 = 2$

$x_3 = \frac{1}{2}$

b) Jednadžbe 4og stepena

1. $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = \emptyset$

R.: $(x^4 - 1 - 2x(x^2 - 1) = \emptyset$

$(x^2 - 1)[x^2 + 1 - 2x] = \emptyset$

$x^2 - 1 = \emptyset;\ x_{1,2} = \pm 1$

$x^2 - 2x + 1 = \emptyset$

$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1$

2. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = \emptyset \mid : x^2$

R.: $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = \emptyset$

$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = \emptyset$

Supstituirati $x + \frac{1}{x} = y$

ili $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

$a(y^2 - 2) + by + c = \emptyset$ i t. d.

3. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \emptyset \mid : x^2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = \emptyset$

$y^2 + y + 1 = \emptyset$

i t. d.

4. $9x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = \emptyset$

a) R.: Supst. $x = y \cdot k$ i odredi k tako da jedn. bude simetrična $(k = \sqrt{\tfrac{1}{3}})$ ili (kao pod 2):

b) Podijelivši jedn. sa x^2 dobivamo:

$9x^2 - 12x + 6 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = \emptyset$

$9x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left(3x + \frac{1}{x}\right) + 6 = \emptyset$

$y^2 - 6 - 4y + 6 = \emptyset$ i t. d.

Supst. $\left|\begin{array}{l} 3x + \frac{1}{x} = y \\ 9x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 6 \end{array}\right.$

c) Jednadžbe 5og stepena

1. $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + 9 = 0$

R.: $a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0$

$(x + 1)[a(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + bx(x^2 - x + 1) + cx^2] = 0$ i t. d.

d) Jednadžbe 6og, 7og . . . stepena

Rješavaju se na isti način kao i one 3eg ili 4og stepena: rastavljanjem na faktore ili uvađanjem pomoćnih nepoznanica.

2. Binomne jednadžbe

Def. (opći n. o.):

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x) \equiv x^n + a = 0 \\ \text{R.}: x = \sqrt[n]{-a} \\ n \text{ rješenja!} \end{array}}$$

$a \equiv$ apsolutni član

1. $x^3 - 8 = 0$

R.: *a)* $(x-2)(x^2+2x+4) \doteq 0$

$x - 2 = 0;\ x_1 = 2$

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm i\sqrt{3}$

b) $x = y\sqrt[3]{8} = 2y$

$8y^3 - 8 = 0$

$y^3 - 1 = 0$

$(y-1)(y^2+y+1) = 0$ i t. d.

c) $x = \sqrt[3]{8}\,.\,\sqrt[3]{1}$

$x = 2\left[\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right]$

$k = 0,\ 1,\ 2$

$x_1 = 2(\cos 0^0 + i\sin 0^0) = 2$

$x_2 = 2(\cos 120^0 + i\sin 120^0, =$

$= -1 + i\sqrt{3}$

$x_3 = 2(\cos 240^0 + i\sin 24^0) =$

$= -1 - i\sqrt{3}$

2. $x^n + a = 0$

$x = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{-1}$

$= \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{180 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{18) + 2k\pi}{n}\right)$

$k = 0,\ 1,\ 2 \ldots (n-1)$

3. Trinomne jednadžbe

Def.:

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x) \equiv x^{2n} + ax^n + b = 0 \\ \text{R.}: y^2 + ax + b = 0 \\ y_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \\ x = \sqrt[n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} \end{array}}$$

Supst.: $x^n = y$

2. $(x^2 + ax)^4 + a(x^2 + ax)^2 + b = 0$

R.: $(x^2 + ax)^2 = y$

$y^2 + ay + c = 0$

$y_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = (x^2 + ax)^2$

$x^2 + ax = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}$

$x_{1-8} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \pm \sqrt{-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}}$

3. $\sqrt[x]{16} + \sqrt[2x]{16} = 6 \,\Big|\, \sqrt[2x]{16} = y;\ y^2 + y - 6 = \emptyset$

$y_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{4}};\ y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2};\ \sqrt[2x]{16} = 2 = \sqrt[x]{4};\ 2^{\frac{2}{x}} = 2;\ x_1 = 2,\ x^2 = ?$

1. $9\sqrt[3]{x^2} - 2x\sqrt[3]{x} = 10$

R.: $9\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x^4} = 10 \,\Big\|\, \sqrt[3]{x^2} = y$

$-2y^2 + 9y - 10 = 0$

$y^2 - \frac{9}{2}y + 5 = 0$

$y_{1,2} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81 - 80}{16}}$

$y_1 = \frac{5}{2} = \sqrt[3]{x^2};\ x^2 = \frac{125}{8};$

$x_{1,2} = \sqrt{\frac{125}{8}} = ? = \pm\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}};$

$y_2 = 2 = \sqrt[3]{x^2};\ x^2 = 8;$

$x_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}$

4. $\sqrt[4]{15+x}+\sqrt[4]{82-x}=5$ (R.: Jednadžba se najprije zgodnom supstitucijom racionalizira):

$\sqrt[4]{15+x}=y$ ili $x=y^4-15$, $\sqrt[4]{81-x}=\sqrt[4]{97-y}$, dakle $\sqrt[4]{97-y^4}=5-y$ ili

$$97-y^4=(5-y)^4=625-500y+150y^2-20y^3+y^4$$
$$2y^4-20y^3+150y^2-500y+528=\emptyset$$
$$y^4-10y^3+75y^2-250y+264=\emptyset$$
$$(y^2-5y)^2-25y^2+75y^2-250y+264=\emptyset$$
$$(y^2-5y)^2-50(y^2-5y)+264=\emptyset \quad | \quad y^2-5y=z$$
$$z^2-50z+264=\emptyset \text{ i t. d.}$$

5. $a\sqrt[n]{x^{2r}}+b\sqrt[n]{x^r}+c=\emptyset$ | R.: Supst. $\sqrt[n]{x^r}=y!$ $ay^2+by+c=\emptyset$ i t. d.

Jednadžbe 2og i višeg stepena sa 2 i više nepoznanica

Eliminacijom jedne nepoznanice iz sistema kvadr. jedn. dobiva se općenito jednadžba 4og stepena, u osobitim slučajevima i kvadratna. Nepoznanice se eliminiraju i jednadžbe rješavaju:

1. **Metodom jednakih koeficijenata ili komparacije** (redovno su obe nepoznanice istog stepena);
2. **Supstitucijom** (jedna je jednadžba redovno linearna);
3. **Rastavljanjem na faktore;**
4. **Iz jedne jednadžbe, obe ili njihove kombinacije** (sume, razlike, kvocijenta...) **nađe se jednostavnija veza između nepoznanica** $[y=f(x)]$.
5. Zgodnom kombinacijom zadanih jednadžbi dolazi se katšto do jednadžbe, gdje je nepoznanica: $x+y$, $x-y$, $x^2\pm y^2$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, xy, $\frac{x}{y}$;

Ako su jednadžbe simetrično građene t. j. ako se ne mijenjaju kad se x zamijeni sa y, onda se uvode pomoćne nepoznanice: $x+y=u$, $xy=v$. (Primjer III).

Opaska: Jednadžba (izraz!) je homogena, ako su joj članovi iste dimenzije (= suma eksponenata nepoznanica koje dolaze u pojed. članovima) na pr.:

$$x^3+a\,x^2y-bxy^2+c\,x^{-1}y^4+\,.\,.=\emptyset$$

Primjer I

1. $x^2+y^2=13$
 $x^2-y^2=5$ | +

 R.: $2x^2=9$
 $x_{1,2}=\pm 3$
 $y_{1,2}=\pm 2$

2. $x^2+y^2=13$
 $xy=6$

 R.: $x=\frac{6}{y}$
 $y^2+\frac{36}{y^2}=13$
 $y^4-13y^2+36=\emptyset \mid y^2=z$
 $z^2-13z+36=\emptyset$ i t. d.

3. $x^2-2y^2=1$
 $x+y=5$

 R.: $x=5-y$
 $(5-y)^2-2y^2=1$
 $25-10y+y^2-2y^2=1$ i t. d.
 $x_1=3$, $x_2=17$, $y_1=2$, $y_2=-12$

6. **Homogene jednadžbe supstitucijom $y = x \cdot k$** (i diobom tih jedn. dobije se k i t. d.);
7. **Diobom sa y^2 ili x^2 i traženjem $\frac{x}{y}$ kod homogene jedn. bez apsolutnog člana;**
8. **Kvadriranjem, kubiranjem i kombinovanjem jednadžbi;**
9. **Transcedentne se jednadžbe supstitucijom svode na algebarske.**

4. $10x^2 - 15xy + 14x - 21y = \varnothing$ | I
$xy + y^2 - 2x - 2y = \varnothing$ | II

R.: Rastavljanjem na faktore:

$(2x - 3y), (5x + 7) = \varnothing$ | I
$(x + y)(y - 2) = \varnothing$ | II

Iz I $\quad 5x + 7 = \varnothing, \quad x = -\frac{7}{5}$

u II s. $\left(-\frac{7}{5} + y\right)(y - 2) = \varnothing$

$y_1 = \frac{7}{5}, \; x_1 = -\frac{7}{5}$

$y_2 = 2 \;\; x_2 = 3$

Primjer II

Najprije se nađe jednostavniji odnos između nepoznanica $[y = f(x)]$.

1. $4x^2 - 10x = 15y + 104 - 12xy - 9y^2$ | I
$\sqrt{xy} + 10 = xy + 8$ | II

R.: Iz II: $xy - \sqrt{xy} - 2 = \varnothing$

$\sqrt{xy} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$

$\sqrt{xy}_{(1,2)} = 2, -1$

$xy = 4, \; 1$

$x = \frac{4}{y}, \; \frac{1}{y}$

Supst. to u I i t. d.

O.: Mogli smo najprije supstituirati $\sqrt{xy} = u$. kao kod 3 pr. II.

2. $x + y + \sqrt{x + y} = 2$ | I
$x^3 + y^3 = 7$ | II

R.: Iz I: $\sqrt{x + y} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1 + 8}{4}} =$

$= -2, \; 1$

$x + y = 1$
$x^3 + y^3 = 7$ | (:)

$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = 7$

$x^2 - xy + y^2 = 7$
$x + y = 1$ | $y = 1 - x$

$x^2 - x(1 - x) + (1 - x)^2 =$
$= 7$ i t. d.

$x_1 = 2 = y_2$

$x_2 = -1 = y_1$

3. $\sqrt{x + y} + \sqrt{xy} = 17$ | I
$x^2y + xy^2 = 360$ | II

R.: Iz II: $xy(x + y) = 360$

$\sqrt{xy}\sqrt{x + y} = 60$ | $\sqrt{xy} = u$
$\sqrt{x + y} + \sqrt{xy} = 17$ | $\sqrt{x + y} = v$

$uv = 60$
$u + v = 17$ | $u = 17 - v$

$v(17 - v) = 60; u_1 = v_2 = 5, u_2 = v_1 = 12$

$x_1 = y_2 = 9$

$x_2 = y_1 = 16$

4. $x^2 + y\sqrt{xy} = 9$ | I
$y^2 + x\sqrt{xy} = 18$ | II

R.: $\sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right) = 9$
$\sqrt{y}\left(y^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) = 18$ | (:)

$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 2$; ili $y = 4x$ supstituirano u I daje $x_{1,2} = \pm 1, \; y_{1,2} = \pm 4$

Ili riješiti je kao homogenu jednadžbu supstitucijom $y = kx$.

$x^2\left(1 + k\sqrt{k}\right) = 9$
$x^2\left(k^2 + k\sqrt{k}\right) = 18$ | (:)

$\sqrt{k} = 2$

$k = 4$ t. j. $y = 4x$, što se dalje supstituira.

5. $$\begin{array}{r|l} x^2+4xy+2y^2=9 & \text{Homogene jedn.} \\ -3x^2+2xy+4y^2=81 & y=x\,.\,k \end{array}$$

R.: $$\begin{array}{r|} x^2+4x^2k+2x^2k^2=9 \\ -3x^2+2x^2k+4x^2k^2=81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2(1+4k+2k^2)=9 & \\ x^2(-3+2k+4k^2)=81 & (:) \end{array}$$

$$\frac{-3+2k+4k^2}{1+4k+2k^2}=\frac{81}{9}=9, \text{ ili}$$

$$7k^2+17k+6=\emptyset$$

$$k_1=k_2=-2, \quad k_3=k_4=-\tfrac{3}{7}$$

Iz toga $x_{1,2}=\pm 3,\quad x_{3,4}=\pm\frac{21 \text{ i}}{17}$

$$y_{1,2}=\mp 6,\quad y_{3,4}=\pm\frac{9 \text{ i}}{17}$$

6. $$\begin{array}{r|l} x^2-2xy-3y^2=\emptyset & \text{I} \quad \text{Homogene} \\ 2x^2+xy-4y^2=17 & \text{II} \quad \text{jedn.} \end{array}$$

R.: Iz I: $\frac{y^2}{y^2}-2\frac{x}{y}-3=\emptyset$

$$\frac{x}{y}_{(1,2)}=1\pm\sqrt{4}$$

$$\frac{x}{y}_{(1,2)}=3, \quad -1$$

$x=3y$ supst. u II

$$2\,.\,9y^2+3y^2-4y^2=17$$

$$17y^2=17$$

$$\begin{array}{r|} x_{1,2}=\pm 3 \\ y_{1,2}=\pm 1 \end{array}$$

Primjer III

1. $$\begin{array}{r|l} x^2+y^2=97 & \text{I} \\ xy=36 & \text{II} \end{array}$$

R.: $2xy=72$ III

$$\begin{array}{ll} \text{I}+\text{III} & (x+y)^2=169 \\ \text{I}-\text{III} & (x-y)^2=25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|} x+y=\pm 13 \\ x-y=\pm 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|} x_{1,2}=\pm 9 \\ y_{1,2}=\pm 4 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r|l} x+y=5 & \text{I} \\ x^3+y^3=35 & \text{II} \end{array}$$

R.: Supst. $x+y=u=5$

$$xy=v$$

$$x^3+y^3=u^3-3uv$$

$$5^3-3\,.\,5v=35$$

$$v=?=6$$

$$x+y=5$$

$xy=6$ i t. d.

O. Do istog se rezultata dođe, ako jedn. II podijelimo sa I.

3. $$\begin{array}{r|l} x+y=a & \text{I} \\ x^4+y^4=b & \text{II} \end{array}$$

R.: $(x+y)^4=x^4+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2+y^4=a^4$

$$x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad +y^4=b$$

$$4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2=a^4-b$$

$$x^2+y^2=a^2-2xy$$

$$4xy(a^2-2xy)+6x^2y^2=a^4-b$$

$$-2(xy)^2+4(xy)a^2+b-a^4=\emptyset$$

$$\begin{array}{r|} xy=? \\ x+y=a \text{ i t. d} \end{array}$$

3*a)* $(x+2)^4-(x-1)^4=81$

R.: $x-1=u,\quad x+2=v$

$$v-u=3$$

$$\begin{array}{r|l} v^4-u^4=81 & \\ v-u=3 & \text{Daljni postupak kao pod 3 pr. III.} \end{array}$$

3b) $x^3 + y^3 = 9$

$x^2y + xy^2 = 6$

R.: $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = u^3 - 3uv$

$x^2y + xy^2 = xy\,(x + y) = uv$

$$\left.\begin{array}{r} u^3 - 3uv = 9 \\ uv = 6 \end{array}\right| \begin{array}{l} x + y = u \\ xy = v \end{array}$$

$u = 3$

$v = 2$ i t. d.

4. $$\begin{array}{r|l} x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 100 & \text{I} \\ x + y = 3 & \text{II} \\ x + u = 7 & \text{III} \\ x : z = u : y & \text{IV} \end{array}$$

R.: Jedn. I može se napisati

$(x + y)\,(x^2 - xy + y^2) + (z + u)\,(z^2 - zu + u^2) = 100$

t. j. $3\,(x^2 - xy + y^2) + 7\,(z^2 - zu + u^2) = 100$

Supstituirano $x^2 + y^2 = 9 - 2xy$ (iz II)

i $z^2 + u^2 = 49 - 2uz$ (iz III)

daje $3\,(9 - 3xy) + 7\,(49 - 3uz) = 100 \;\|\; xy = uz$

$3\,(9 - 3xz) + 7\,(49 - 3xy) = 100$

$$\left.\begin{array}{r} xy = ? = 2 \\ x + y = 3 \end{array}\right|$$

$x_1 = 1 = y_2$

$x_2 = 2 = y_1$

$z_{1,2} = ?$ i t. d:

5. $$\left.\begin{array}{r} x^3 = ayz \\ y^3 = bxz \\ z^3 = cxy \end{array}\right| \times$$

R.: $x^3y^3z^3 = abc\,x^2y^2z^2$

$xyz = abc$

$yz = \dfrac{abc}{x}$

$x^3 = \dfrac{a^2bc}{x}$

$x^4 = a^2bc$

$x_1 = \sqrt[4]{a^2bc}$

$y_1 = \sqrt[4]{ab^2c}$

$z_1 = \sqrt[4]{abc^2}$

i t. d.

6. $$\begin{array}{r|l} x^2 + x^2 + z^2 = 14 & \text{I} \\ x + y + z = 6 & \text{II} \\ 3xy = 2z & \text{III} \end{array}$$

R.: II² $x^2 + 2xy + y^2 = 36 - 12z + z^2$

I $\;x^2 + y^2 + z^2 = 14$

$- z^2 + 2xy = 22 - 12z + z^2$

$xy = \dfrac{2z}{3}$ $\quad 2z^2 - 2\dfrac{2z}{3} - 12z + 22 = \varnothing$

$z^2 - \dfrac{20z}{3} + 11 = \varnothing$

$z_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100 - 99}{9}} = \frac{10}{3} \pm \frac{1}{3}$

$x_1 = 1,\; y_1 = 2,\; z_1 = 3$

$x_2 = ?,\; y_2 = ?,\; z_2 = ?$

7. $$\left.\begin{array}{r} x\,(x + y + z) = 6 \\ y\,(x + y + z) = 12 \\ z\,(x + y + z) = 18 \end{array}\right| +$$

I $(x + y + z)^2 = 36$

II $x + y + z = \pm\,6$ | podijeliti II sa III

III $x\,(x + y + z) = 6$

$x_{1,2} = \pm\,1,\; y_{1,2} = ?,\; z_{1,2} = ?$

Primjer IV

1. $$\left.\begin{aligned} 2^{\log x} + 3^{\log y} &= 7 \\ 2^{\log x} \cdot 3^{\log y} &= 12 \end{aligned}\right|$$

R.: $2^{\log x} = u$, $3^{\log y} = v$

$$\left.\begin{aligned} u + v &= 7 \\ u \cdot v &= 12 \end{aligned}\right| \quad u = (7 - v)$$

$$7v - v^2 = 12$$

$$v_{1,2} = \tfrac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{2}} = 4,\ 3$$

$$v_1 = 3^{\log y} = 3 = 3^1$$

$$\log y = 1$$

$$y_1 = 10$$

$$2^{\log x} = 7 - 3^{\log 10} = 4 = 2^2$$

$$\log x = 2$$

$$x_1 = 100$$

$$3^{\log y} = 4$$

$$\log y \log 3 = \log 4$$

$$\log y = \frac{\log 4}{\log 3}$$

$$y_2 = 10^{\frac{\log 4}{\log 3}} = 10^{\frac{0{\cdot}60206}{0{\cdot}47712}}$$

$$y_2 = 18{\cdot}27\ .\ .$$

2. $$\left.\begin{aligned} x^{\frac{2}{y+1}} - 8x^{\frac{1}{y+1}} &= 20 \\ 10^{2y-1} &= 0{\cdot}1\,x \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\mathrm{I} \\ &\mathrm{II} \end{aligned}$$

R.: Iz jednadžbe I je:

$$x^{\frac{1}{y+1}} = 4 \pm \sqrt{16 + 20}$$

$$= 4 \pm 6$$

Iz $$\left.\begin{aligned} x^{\frac{1}{y+1}} &= 10 \\ 10^{2y-1} &= 0{\cdot}1x \end{aligned}\right| \log!$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{y+1} \log x &= 1 \\ 2y - 1 &= \log x - 1 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\log x}{y+1} &= 1 \\ \log x &= 2y \end{aligned}\right| (:)$$

$$\frac{\log x}{(y+1)\log x} = \frac{1}{2y}$$

$$\frac{1}{y+1} = \frac{1}{2y}$$

$$2y = y + 1$$

$$y_1 = 1$$

$$x_1 = 100$$

$$y_2 = ?$$

$$x_2 = ?$$

3. $$\left.\begin{aligned} 2y^{x} + 3y^{-x} &= \frac{11}{2} \\ y^{\frac{1}{x}} + 3y^{-\frac{1}{x}} &= \frac{7}{2} \end{aligned}\right| \begin{aligned} & y^{x} = u\,;\ y^{\frac{1}{x}} = v \\ & y^{-x} = \frac{1}{u}\,;\ y^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{v} \end{aligned}$$

R.: $$\left.\begin{aligned} 2u + \frac{3}{u} &= \frac{11}{2} \\ v + \frac{3}{v} &= \frac{7}{2} \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} 2u^2 - \frac{11}{2}u + 3 &= \emptyset \\ v^2 - \frac{7}{2}v + 3 &= \emptyset \end{aligned}\right|$$

$$u_{1,2} = \frac{11}{8} \pm \frac{5}{8} = 2,\ \frac{3}{4}$$

$$v_{1,2} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49-48}{16}} = 2,\ \frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} y^{x} &= 2 \\ y^{\frac{1}{x}} &= 2 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} x \log y &= \log 2 \\ \frac{\log y}{x} &= \log 2 \end{aligned}\right| (:)$$

$$x^2 = 1$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

$$y_1 = 2$$

$$y_2 = 0{\cdot}5$$

Zadaci

Kvadratne jedn. sa 1 nepoznanicom

1) $(x + a)(x - a) = b(2a + b)$

2) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = (x + 1) : \sqrt{x+2}$

3). $2 : x^2 = 1 : 0{\cdot}18$; R.: $x_{1,2} = \pm 0{\cdot}6$

4) $\left(\frac{a}{b}x\right)^2 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^2 b^2}$

5) $\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2-x}}+\dfrac{1}{a-\sqrt{a^2-x}}=2a\,x$; R. : $x_{1,2}=\pm 1$

6) $\dfrac{b}{b-\sqrt{b^2-x^2}}-\dfrac{b}{b+\sqrt{b^2-x^2}}=\dfrac{2}{x}$

7) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{8}{x}$; R. : $x_{1,2}=\pm 2$

8) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}=\sqrt[3]{2a}$; $x_{1,2}=\pm a$ 8a) $\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{x-4}=\sqrt[3]{2x}$

9) $\sqrt[3]{x+\sqrt{a}}\;(+)\;\sqrt[3]{x-\sqrt{a}}=\sqrt[3]{2\sqrt{a}}$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{a}$

9a) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{2x^2-2ax-a^2}{a^2}$ 9b) $\dfrac{2}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\dfrac{2}{a-\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{1}{a}$; $x_{1,2}=\pm 2a$

10) $\sqrt{x\sqrt[3]{2x^2}}=\sqrt[3]{3x\sqrt{2x}}$ 10a) $\dfrac{x+a}{a}=\dfrac{a}{x+a}$ 11) $\dfrac{(a-x^2)^{\frac{1}{n}}}{x^2}-\dfrac{(a-x^2)^{\frac{1}{n}}}{a}=x^{\frac{2}{n}}$

12) $\dfrac{\sqrt[n]{1-x^2}}{x^2}-\sqrt[n]{1-x^2}=\sqrt[n]{x^2}$; $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

13) $\dfrac{1}{x^{n-1}}+\dfrac{2}{x^{n+1}}=\dfrac{3}{x^{n+1}}$; $x_{1,2}=\pm 1$ 14) $\dfrac{\sqrt{a}}{x}+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{a\sqrt{a}}{x^3}$ 14a) $\dfrac{x-a}{a}=\dfrac{3a}{x+a}$

15) $\frac{x}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\frac{x}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)=1$ 16) $\dfrac{(a-x)^{\frac{3}{2}}-(x-b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}=a-\sqrt{-ab}-b$

16a) $a^2x^2-b^4=a^4-b^2x^2$

17) $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(a-x)\sqrt{a-x}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{a-x}}=\sqrt{2ax}$; $x_{1,2}=\pm ai$

18) $\sqrt[n]{\dfrac{(x+a-b)(x-a+b)}{(x+a+b)(a+b-x)}}=1$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{a^2+b^2}$

18a) $\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{4-x}=0{\cdot}125^{-\frac{1}{3}}$ 19) $x(x+2\sqrt{3})-6=0$

20) $(x+1)^3-(x-2)^3=10$ 21) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{x+3}=0$

22) $0{,}4x=0{,}2x^2-0{,}6$; $x_1=3$, $x_2=-1$ 23) $0{,}2x^2-2{\cdot}4=0{\cdot}8x$

24) $(x+2)^2+(x+1)^2=(x-3)^2$ 25) $(x+2):(x+3)=(2x+1):(x+4)$

26) $2x^2-6x-4ix+6+6i=0$ 27) $x^2-2\sqrt{ab}\,.\,x=a^2+ab+b^2$

28) $x^2-x(b-x)=a-(b-x)^2$ 28a) $x^2-2ax+(a+b)^2=2ab+2b^2$

28b) $\dfrac{x+6}{x-1}-\dfrac{x^2+17}{x^2+x+1}=\dfrac{x+30}{x^3-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

28c) $6abx^2-(9a^2+4b^2)x+9a^2-4b^2=0$ 29) $\dfrac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x}}=\dfrac{a}{x}$

30) $3x(x+1)+2x=2x(x-6)+3(x-1)-1$

31) $(1+\sqrt{a})x^2-2(1-a)x+1=a$ 31a) $x-4+3\sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}=\dfrac{10}{x-4}$

32) $x^2-x\sqrt{a}=x\sqrt{b}-\sqrt{ab}$

33) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+2}=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{\dfrac{13}{2}}$

34) $\frac{a+b}{x+b}+\frac{a+c}{x+c}=2\frac{a+b+c}{x+b+c}$ 35) $\frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2}=\frac{13}{3}$; $q_1=\frac{5}{2}$, $q_2=\frac{2}{5}$

35a) $\frac{2}{3-\frac{2}{3-x}}=x$ 36) $\frac{3}{4-\frac{3}{4-\frac{3}{4-x}}}=x$; $x_1=1$, $x_2=3$

37) $\left(x+\frac{b}{x}\right)^2-2b\left(x+\frac{b}{x}\right)=-b^2$; 37a) $\left(\frac{3x}{2-x}\right)^2+\frac{5x}{2-x}-14=0$

38) $x+a-2\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}=\frac{3}{x-a}$ 38a) $\frac{q}{1+q+q^2}=\frac{2}{7}$; $q_1=2$, $q_2=\frac{1}{2}$

38b) $\frac{q^6-q^2}{q^6-q^4}=\frac{5}{4}$; $q_{1,2}=\pm 2$ 39) $\sqrt{3\sqrt[3]{2x-9}}=\sqrt[3]{x-1}$

40) $\sqrt[3]{3x+2+\sqrt{(2x+3)(x-2)}}=2$ 41) $\sqrt{ax+b+\sqrt{x^2+abx+b^2}}=\sqrt{b}$

41a) $\left(\frac{4x}{3-x}\right)^2+\left(\frac{6-2x}{4x}\right)^2=5$; $x_1=1$, $x_2=?$

42) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{15(x^2+ax+b)}}=\sqrt[3]{2\sqrt[4]{x^2+ax+b}}$; $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$

43) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=x-a$; $x_{1,2}=a+1\pm\sqrt{a+1}$

44) $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}=x$; $x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4a}\right)$

45) $\sqrt[n]{(1+x)^2}+2\sqrt[n]{(1-x)^2}=3\sqrt[n]{1-x^2}$; $x_1=0$, $x_2=\frac{1-2^n}{1+2^n}$

Uputa: podijeliti jedn. sa $\sqrt[n]{1+x^2}$ i staviti $\sqrt[n]{\frac{1-x}{1+x}}=y$

46) $(a-y)^{\frac{2}{n}}+(a+y)^{\frac{2}{n}}=2(a^2-y^2)^{\frac{1}{n}}$; $y_{1,2}=0$ 47) $\sqrt[3]{9-u}+\sqrt[3]{7+u}=4$

48) $\sqrt[3]{18-v}+\sqrt[3]{2+v}=4$ 48a) $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x-a}=\sqrt[3]{2x}$

49) $\sqrt{1-z}+\sqrt{1+z}=\sqrt[4]{1-z^2}$; Up. Supst.: $\sqrt[4]{\frac{1-z}{1+z}}=u$ ili najprije kvadrirati!

50) $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{b-x}=c$; 50a) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-2}=2$

51) $\sqrt{u+3}+\sqrt{2u-1}=\sqrt{3u+1}$ 52) $(ax-b)(cx+d)=0$(!)

52a) $ax-bx=\frac{a}{x}\cdot\frac{a-2bx}{a+b}$ 53) $\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}-3a^2\sqrt{\frac{a-bx}{a+bx}}=2a$

53a) $\frac{\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}+a^2\frac{a-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2a$; $x_{1,2}=\frac{a^4}{(a+1)^2}$

53b) $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}+\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{a-x}}=\frac{8a}{3\sqrt{x}}$

53c) $\frac{x}{x+\sqrt{x^2-4}}+\frac{x}{x-\sqrt{x^2-4}}=\frac{4x-3}{2}$; $x_1=1$, $x_2=3$

54) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}+3\,\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=4$ 54a) $\dfrac{a-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}-3a^2\,\dfrac{\sqrt[4]{x}}{a-\sqrt[4]{x}}=2a$

55) $\sqrt[4]{\dfrac{x-a}{x+a}}+a^2\sqrt[4]{\dfrac{x+a}{x-a}}=2a$ 56) $\sqrt[5]{\dfrac{3-x}{1+x}}+2\sqrt[5]{\dfrac{1+x}{3-x}}=3$; $x_1=1,\ x_2=-\dfrac{29}{33}$

57) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2=4\,\dfrac{x+1}{x-1}+3$; 57a) $\left(\dfrac{3x}{2-x}\right)^2+\left(\dfrac{4-2x}{2x}\right)^2=10$

58) $\dfrac{9}{x^6+6x+9}+\dfrac{6}{x+3}=-1$ 59) $\sqrt[9]{\left(\dfrac{2x^2-5}{x+1}\right)^8}=1{\cdot}30103$

59a) $\sin^2 x+\frac{4}{3}\sin x\cos x+\frac{5}{3}\cos^2 x=2$; $\operatorname{tg} x_1=1,\ \operatorname{tg} x_2=\frac{1}{3}$

60) $\left(\dfrac{y+1}{y-2}\right)^{\frac{5}{2}}=8y^{-\frac{5}{2}}$ 60a) $\sin x-\sin(90-x)=0{\cdot}\dot{3}$; $x_1=58^0\,38'$

60b) $(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{2}{3}}+12(1-\operatorname{tg} x)^{\frac{2}{3}}=7(1-\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{3}}$; $\operatorname{tg} x_1=\frac{13}{14},\ \operatorname{tg} x_2=\frac{63}{65}$

61) $\sqrt[5]{\dfrac{a^4x-6}{y^2}}:\sqrt[5]{\dfrac{x^4y-2}{a}}+a\sqrt[6]{\dfrac{x-1\,b^4}{z^3}}:\sqrt[6]{\dfrac{x^5z-3}{b^2}}=a^2$

62) $\sqrt{\dfrac{(x^2+a^2)^2}{x^2}-\dfrac{(x^2-a^2)^2}{x^2}}=2ax^2$; $x_{1,2}=\pm 1$

63) $\left(a^{\frac{4}{n}}x^{\frac{4}{n}}-1\right):\left(a^{\frac{2}{n}}x^{\frac{2}{n}}-1\right)=\sqrt[n]{a^4+1}$; $x_{1,2}=\pm a$

64) $\left(x^{-2}+2x^{-\frac{3}{2}}+3x^{-1}+4x^{-\frac{1}{2}}+2\right):\left(x^{-1}+2\right)=4$

65) $\left(\sqrt[-1]{x}-2\sqrt[-2]{ax}+\sqrt[-1]{a}\right):\left(\sqrt[-2]{x}-\sqrt[-2]{a}\right)=4x\sqrt{x}-\sqrt[-2]{a}$; $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$

66) $(1-4\sqrt{x}+4x-x^2):(1-\sqrt{x})^2=0$ 67) $\sqrt[-3]{x^{3/2}}:\sqrt[1/2]{x^{-1/2}}:\sqrt[0{\cdot}\dot{6}]{x^{-3/2}}=2\sqrt{2}$

68) $(x+1)^{0{\cdot}\dot{6}}-3(x+2)^{\frac{2}{3}}=2\sqrt[3]{x^2+3x+2}$ $x_1=-1{\cdot}5,\ x_2=-\frac{53}{26}$

69) $(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}-4(x^2-1)^{-0{\cdot}\dot{6}}+3=0$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{2},\ x_{3,4}=\,?$

70) $0{,}01\,x^{0{,}4}-0{,}4\,.\,0{,}1x^{0{,}2}=0{,}05$

71) $\left\{\dfrac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2-4x+3)^{\frac{2}{3}}}\right\}^{\frac{3}{2}}:\left\{\left(\frac{x}{16}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=1$; $x_1=-1,\ x_2=5$

72) Riješiti nejednadžbe: 1) $x^2+3x-6>0$; 2) $x^2-4x+1<0$

73) $3q^2+10q+3=0$; $q_1=-3.\ q_2=-\frac{1}{3}$

73a) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x-5}=\dfrac{5}{2-x}+\dfrac{5}{3-x}+\dfrac{3}{4-x}$ R.: Prenijeti sve na jednu stranu, spojiti članove sa jednakim brojnicima, izlučiti zajednički faktor $2x-5$ i t. d.
$x_1=\dfrac{5}{2},\quad x_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2},\quad x_{4,5}=\dfrac{5\pm\sqrt{\frac{29}{5}}}{2}$

Simetrične (recipročne) jednadžbe

74) $x^3-5x^2+5x-1=0$ 75) $ax^3-(a^2-a+1)x(x+1)+a=0$

76) $x^3+6x^2-9x-3{\cdot}375=0$; $3{\cdot}375=\frac{27}{8}$

76a) $8x^3+10x^2+15x+27=0$

77) $x^3-2x^2+4x-8=0$; $x_1=2$, $x_{2,3}=\pm 2i$

77a) $3q^3+13q^2+13q+3=0$; $q_1=-3$, $q_2=-\frac{1}{3}$, $q_3=-1$

78) $x^3-3x^2+5x-15=0$

79) Neka je $x=m$ korijen jednadžbe $x^3+ax^2+bx+c=0$, dokaži da je zadana jednadžba djeljiva sa korijenim faktorom $x-m$. [$m^3+am^2+bm+c=0$
$x^3+ax^2+bx+c-(m^3+am^2+bm+c)=0=(x^3-m^3)+a(x^2-m^2)+$
$+b(x-m)$ i t. d.]

80) Riješi jednadžbe: $x^3-2x+4=0$, ako se zna $x_1=-2$; $x^3-3x^2-4x+12=0$, ako se zna $x_1=2$

81) Neka je $x=m$ korijen jednadžbe $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (a, b, c cijeli brojevi!), dokaži da je apsolutni član djeljiv cijelim korijenima; $(am^2+bm+c)m=-d$

82) Prema tome (81!) riješi $x^4+2x^3-2x^2+2x-3=0$

83) $27x^3+18x^2-12x-8=0$ [$x_{1,3}=\pm\frac{2}{3}$]

83a) $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$

83b) $3\,\mathrm{tg}^4x-16\,\mathrm{tg}^3x+26\,\mathrm{tg}^2x-16\,\mathrm{tg}\,x+3=0$

80c) $\cos 3x+6\cos 2x-9\cos x+2=0$

84) $x^4+2x^3+2x-1=0$; 84a) $\sqrt{u-\frac{1}{u}}+\sqrt{1-\frac{1}{u}}=u$

85) $4x^4-12x^3+5x^2-18x+9=0$; $x_1=3$, $x_2=0{\cdot}5$, $x_{3,4}=\frac{1}{4}[-1\pm i\sqrt{23}]$

86) $x^4+5x^3+10x^2+15x+9=0$

86a) $10q^4-29q^3+30q^2-29q+10=0$; $q_1=2$, $q_2=\frac{1}{2}$, $q_{3,4}=\frac{1\pm 2i\sqrt{6}}{5}$

87) $(x^3+4)(x+1)=x^2(11-x)$ 88) $2y^5+y(y^3-1)=19y^2(y-1)+2$

89) $(x-1)^5+5(x-1)^4+(x-1)^3-16x^2+12(x-1)=0$

90) $z^5-9z^3+z^2-9=0$; $z_{1,2}=\pm 3$, $z_3=-1$, $z_{3,4}=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$

91) $x^6+3x^5-6x^4+7x^3+6x^2+13x+1=0$

92) $x^6+ax^5+bx^4-bx^2-ax-1=0$

93) $6x^8-35x^6+62x^4-35x^2+6=0$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, $x_{5,6}=\pm\sqrt{2}$, $x_{7,8}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

93a) $\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{8}{x^6}}+\sqrt{\frac{4}{x^4}-\frac{8}{x^6}}=1$ (Up.: $x^2=2y$; $y^4-2y^3-y^2+2y+1=0$ i $x=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{5}}$

Binomne jednadžbe

94) $x^3+1=0$ 95) $x^3-27=0$ 96) $27y^3+8=0$

97) $16u^4-1=0$ 98) $y^4+16=0$ 99) $x^5+32=0$

100) $a^3x^6-b^3=0$ 100a) $16x^4=81$ 101) $y^6+1=0$

102) $x^8-1=0$; $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm i$, $x_{5,4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$, $x_{7,8}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$

103) $x^8+256=0$ 103a) $\mathrm{tg}\,x-2\sin x\cos x=\mathrm{cotg}\,x$; $\sin x=\pm\sqrt[4]{0{\cdot}5}$

Trinomne jednadžbe

104) $x^2+2=\frac{3}{x^2}$ 104a) $\left(\frac{3x}{2-x}\right)^3-\left(\frac{2-x}{x}\right)^3=26$ 105) $x^3-ax\sqrt{x}+b=0$

106) $x+3x^{\frac{1}{5}}=4\sqrt[5]{x^3}$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 1$, $x_{4,5}=\pm 9\sqrt{3}$

107) $4(2x^2)^{\frac{1}{3}} - (4x^4)^{\frac{1}{3}} = 4;\quad x_{1,2} = \pm 2$ 108) $3x^2 + 6x + \sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2$

109) $\sqrt[3]{3x^2 + 6x + 1} - 4\sqrt[6]{3x^2 + 6x + 1} = -3$

110) $x^2(x+2)^2 + 4x^2 + 8x = 5;\quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2},\ x_{3,4} = -1 \pm 2i$

111) $[(x-2)^2 - x]^2 - 10 = 3(x-2)^2 - 3x;\quad x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_{3,4} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{29})$

112) a) $x\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x^4} = 3,$ b) $x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{2}{n}} = -2$ c) $3x^{\frac{1}{2}} + 2x^2 = 56x^{-1}$

113) a) $\sqrt{x}\left(x - 4\sqrt[4]{x}\right) = 5,$ b) $7x + \sqrt{x^5} = 8 \,.\, x^{-\frac{1}{2}}$

114) $\sqrt[3]{x^2 + a^2} - 2b^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x^2 + a^2} = -b^{\frac{2}{3}};\quad x_{1,2} = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$

115) a) $\left(x + \sqrt{x}\right)^4 - 4\left(x + \sqrt{x}\right)^2 + 3 = \emptyset$

b) $\left(x^{\frac{2}{n}} - 4x^{\frac{1}{n}}\right)^4 - 2\left(x^{\frac{2}{n}} - 4x^{\frac{1}{n}}\right)^2 + 1 = \emptyset;\quad x = \left(2 \pm \sqrt{5}\right)^n$

116) $\left(x - 2a\sqrt{x}\right)^6 - 4\sqrt[3]{a^2}\left(x - 2a\sqrt{x}\right)^3 = -3\sqrt[3]{a^4}$

117) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2 = \emptyset$

118) $x^4 + \frac{1}{x^4} - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 = \emptyset;\quad x_{1-4} = \pm\sqrt{\pm i},\ x_{5-8} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})}$

119) $v^{\frac{4}{3}} + av^{\frac{2}{3}} + b = \emptyset$ 120) $x^{-6} - 4x^{-3} + 3 = \emptyset;\quad x_{1-3} = 1;\ x_{4-6} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

121) $y^{-\frac{4}{3}} - 4y^{-\frac{2}{3}} = -3$ 122) $0{,}04\,x^{0,4} - 0{,}4 \,.\, 0{\cdot}2x^{0{\cdot}2} = 0{,}05$

123) $\sqrt[5]{(2x-1)^3} - 16\sqrt[5]{(2x-1)^{-3}} = 6$ 123 a) $x\sqrt[3]{1 + \frac{7}{x^2}} = (x^2+3)^{\frac{1}{2}}$

124) $\sqrt[m]{(x^2 - a^2)^n} + a^{\frac{2n}{m}}\sqrt[m]{(x^2-1)^{-n}} = 2a^{\frac{n}{m}}$

125) $\sqrt[n]{x^n - a^{2n}} - 2a\sqrt[2n]{x^n - a^{2n}} + a^2 = 0;\quad x_{1,2} = a^2\sqrt[n]{2}$

126) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 4;$

126a) $\dfrac{x^2+2}{x} + \dfrac{6x}{x^2+2} = 5;$ R.: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_{3,4} = 1 \pm i$

127) $x(x+3)(x+4)(x+7) = 160;$ R.: $x^2 + 7x$ staviti y

128) $x^4 + b^2 = 2\left(x\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(x\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$

129) $\sqrt[4]{x+10} + \sqrt[4]{x-5} = 3;$ R.: $(a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4ab(a+b)^2 - 2a^2b^2$

130) $\sqrt[4]{y+9} - \sqrt[4]{y-7} = 2;$

131) $x^4 + (1 - x^4) = 17$

131a) $x^5 + (1 - x^5) = 1;\quad x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_{3,4} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$

132) $\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{1-x} = 1$ 133) $\sqrt[5]{u+12} + \sqrt[5]{21-u} = 3$

134) $x^4 + 2x^3 - (x^2+2)(2x-3) = 0;\quad x_{1,2} = \pm i\sqrt{2},\ x_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{2}$

135) $x^3 - 6x^2 + (x-6)^2 + 3x(x-6) = 0$ 136) $(6-x)^3 = x - 6$

137) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 3 + 0;$ R.: $(x^2 - 3x)^2 + 4(x^2 - 3x) + 3 = 0$

138) $4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x = 3.$ Svedi na: $(2x^2 - 3x)^2 + 2(2x^2 - 3x) = 3$

139) $x^8 - 4x^6 + 8x^4 - 8x^2 + 3 = 0;$ R.: $(x^4 - 2x^2)^2 + 4(x^4 - 2x^2) = 3$ i t. d.

140) $x^3 - 3x + 2 = 0$; R.: $x^3 - 2x^2 + 2x^2 + x - 4x + 2 = 0$
$(x^2 - 2x + 1)(x + 2) = 0$ i t. d.

141) $2\sqrt{x} - \sqrt{-1}\sqrt{-x^2} = -1$;

142) $\sqrt[3]{y} + 2i\sqrt[6]{y} = -3$

143) $x^{\frac{2}{3}} - 2i(-x)^{\frac{1}{3}} = 3$

144) $\sin^6 x + \cos^6 x = m$

145) $\sin^2 x + \cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{cotg}^2 x + \sec^2 x + \mathrm{cosec}^2 x = 7$
R.: $\mathrm{tg}\, x_{1,2} = \pm 1$; $x_1 = 45^0$, $x_2 = 135^0$

Logaritamsko-eksponencijalne jednadžbe

145) $\sqrt[x]{a} : \sqrt[x-1]{a} = a$

146) $3^{x(x-3)} . 9^{x+1} . 0{\cdot}3^{x+1} = (0{\cdot}9)^0$; $x_{1,2} = 1$

147) $\sqrt[x-1]{3^x} \cdot 2^{x-1} = 18$

148) $7^{x+1} - 7^{2x-1} = 42$; $x_1 = 1$, $x_2 = ?$

149) $5^{1+x} + 5^{1-x} = 2$

150) $(\frac{1}{3})^{2x} - 2(\frac{1}{3})^x = 3$; $x_1 = -1$, $x_2 = ?$

151) $a^{2x} - 2a^{x+1} + a^2 = 0$; $x_{1,2} = 1$

152) $0{,}04^u + 0{,}2^u - 0{\cdot}6 = 0$

152a) $\log x^2 . \log x^3 = 6$; $x_1 = 10$, $x_2 = 0{\cdot}1$

153) $x^{2\log x - 6} + 3 = 4x^{\log x - 3}$; $x_1 = 1000$, $x_2 = 1$ $x_{3,4} = ?$

154) $x^{\log x^2} - 5x^{\log x} = 50$; $x_1 = 10$, $x_2 = 0{\cdot}1$, $x_{3,4} = 10^{\pm\sqrt{\log(-5)}}$

155) $x^{\log x^2 - 6} = 7x^{\log x - 3} - 6$; $x_1 = 1$, $x_2 = 1000$, $x_{3,4} = \sqrt{10^{3 \pm \sqrt{9 + 4\log 6}}}$

156) $x^{\log x^n} . x^{-2n^2} . 10^{n^3} = (10x)^0$; $x_{1,2} = 10^n$

157) $x^{\log\sqrt[n]{x}} . x^{-2} . 10^n = (10x)^0$; $x_{1,2} = 10^n$

158) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{x^{\log\sqrt[n]{x}}}} = 10^{\frac{2}{n^2}}$; $x_{1,2} = 10^{\pm\sqrt{2n}}$

159) $x^{n\log\sqrt[n]{x}} = 100^2$; $x_1 = 100$, $x_2 = 0{\cdot}01$

160) $\sqrt[n]{x^{\log x}} - 4\sqrt[n]{x^{\log\sqrt{x}}} = 60$; $x_{1,2} = 10^{\pm\sqrt{2n}}$, i ?

160a) $\left(\frac{1}{10x}\right)^{\frac{1}{\log x}} - 4\left(\frac{1}{10x}\right)^{\frac{1}{\log\sqrt{x}}} = 60$; $x_{1,2} = \sqrt[3]{0{\cdot}1}$

161) a) $x^{\sqrt[n]{x}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^x$ b) $x^{\sqrt[3]{x}} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^x$ $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}$

162) $\sqrt[5]{x^{\log\sqrt{x}}} - 2\sqrt[5]{x^{\frac{\log x}{4}}} = -1$

163) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{x^{\log\sqrt[n]{x}}}} = 10^{\frac{1}{n}}$ $(x = 10^{\pm n})$

164) $\sqrt[3]{x^{2\log x}} + 4\sqrt[6]{x^{\log x^2}} = 5$

165) $3^{2x^2 - 2x + 4} + 3 = 4 . 3^{x^2 - x + 2}$

166) $\sqrt[n]{x^{\log\sqrt[n]{x}}} = 10$; $x_{1,2} = 10^{\pm n}$

167) $x^{\log x} = \frac{x^3}{100}$; $x_1 = 100$, $x_2 = 10$

168) $x^{\log x} = 100 . x^{-3}$

169) $\frac{2}{3 - \log x} - \frac{1}{1 + \log x} = 0{\cdot}5$; $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-5}$

170) $\frac{a}{a - \log y} + \frac{a}{a + \log y} = -2$

171) a) $(3x)^{\frac{3}{2}\log x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[-1]{x}}\right)^2$, b) $(3x)^{\frac{3}{2}\log x} = \left(\frac{4}{x}\right)^2$

172) $x^x + 27\,x^{-x} = 28$

173) $4^{3y} - 4^{6y+2} + 16 = 0$

174) $x^{\log x} - 2\sqrt{10}\;x^{\log\sqrt{x}} = -10$

175) $x^{2\log\sqrt{x}} - 99x^{\log\sqrt{x}} = 100$

176) ${}^{(x-a)}\log(x+a) + {}^{(x-a)}\log(2x-b) = 2$

177) $(ax+b)^{\log(ax+b)-2} = [(ax+b)^0]^3$

178) $100x^{\log^2 x - 2\log x} = \left(x^{\log x}\right)^0$

178) a) $\left(10x^2\right)^{1-2\log x} = 0{\cdot}001$; $x_1 = 10$, $x_2 = 0{\cdot}1$

178) b) $\left(10^{nx} : x^{-x}\right)^{nx - \log x^x} = \sqrt[\frac{1}{nx}]{0{\cdot}001^{nx}}$; $x_1 = 100^n$, $x_2 = 0{\cdot}01^n$

178) c) $\left[(10^n x)^x\right]^{nx - \log x^x} = 10^{-3n^2x^2}$

179) a) $\sqrt[x]{16} + \sqrt[2x]{16} = 6$, b) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^x = \left(\sqrt[x]{x}\right)^n$; $x = \pm n$

180) a) $\sqrt[x]{a^2} - 2a\sqrt[x]{a} + a^2 = 0$ b) $\log x^3 = \frac{2+\log x}{\log x}$

181) $2\,\frac{2^x + 10}{2^x + 1} = 3\,.\,2^x + 2$; $x_1 = 1$,

182) $\frac{\sqrt[x]{16}}{4 + \sqrt[2x]{16}} = 0{\cdot}\dot{6}$; $x_1 = 2$

182a) $\sqrt[x]{\sqrt[x]{x}} = \sqrt[u]{\sqrt[n]{10^{\log x}}}$; $x_{1,2} = \pm n$

183) $\sqrt[4]{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + 5\,\frac{x^2}{x+1}} = -2{,}4231$

184) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\log x} - 4\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{\log x}{2}} = 60$; $x_{1,2} = 10^{\pm\sqrt{2}}$, $x_{3,4} = ?$

185) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\log x} - 2\left(\frac{1}{x}\right)^{-\log\sqrt{x}} = -1$; $x_{1,2} = 1$

186) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\log x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)^{-\log x} = 2$; $x_{1,2} = 1$, $x_{2,3} = 10^{\pm\sqrt{\log(-2)}}$

187) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{\log^2 x}} - 4\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\log^2 x}} = 60$; $x = 0{\cdot}1$, $x_2 = ?$

188) $x^{\frac{2}{\log^n x}} + n^2 = 2nx^{\frac{1}{\log^n x}}$; $\log x = \sqrt[n-1]{\frac{1}{\log n}}$; $x_{1,2} = 10^{\sqrt[1-n]{\log n}}$

189) $\frac{5 - \sqrt[4]{x^{\log x}}}{\sqrt[4]{x^{\log x}}} - \frac{\sqrt[4]{x^{\log x}}}{5 - \sqrt[4]{x^{\log x}}} + \frac{3}{2} = 0$; $x_1 = 100$, $x_2 = 0{\cdot}01$, $x_{3,4} = ?$

190) $(a+b)^{x-1}(a-b)^x + \frac{a(a+2b)}{(a+b)^{x+1}\,(a-b)^x} = 2$

191) $3^{4x+1} - 16\,.\,3^{3x} + 26\,.\,3^{2x} - 16\,.\,3^x + 3 = 0$

192) $2^{4\log x + 3} - 27\,.\,2^{3\log x + 1} + 101\,.\,2^{2\log x} - 216\,.\,2^{\log x - 2} + 8 = 0$;
$x_1 = 10$, $x_2 = 0{\cdot}1$, $x_3 = 100$, $x_4 = 0{\cdot}01$

193) $2x^{2\log x} + 3x^{\log x} + 3x^{-\log x} + 2x^{-2\log x} = 233{\cdot}02$

194) $\log\left(x + \sqrt{x}\right) - \log\left(x - \sqrt{x}\right) = \log(x^2 - x) - \log 25$

195) $3[\log(b+x)-\log(b-x)]=\log(a+x)-\log(a-x)$

196) $\dfrac{\log[x(x+a)^2]}{\log(x+b)}=3$

197) $4\log(z-1)-\log(z^4+1)=\log 81-\log 7$

198) $\dfrac{\log x}{2}+\log(x+1)-\log(x-\sqrt{x})=\log(x^2-x)-\log 36$; $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=9$, $x_4=4$, $x_{5,6}=?$

199) $\dfrac{\log(33-x)}{5}=\log\left(3-\sqrt[5]{x}\right)$; $x_1=1$, $x_2=32$, $x_{3,4}=\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{19}\right)^5$

200) $\dfrac{\sqrt{2^x+1}+\sqrt{2^x-1}}{\sqrt{2^x+1}-\sqrt{2^x-1}}+\dfrac{\sqrt{2^x+1}-\sqrt{2^x-1}}{\sqrt{2^x+1}+\sqrt{2^x-1}}=4\sqrt{2^x-1}$; $\sqrt{2^x+1}=u$, $\sqrt{2^x-1}=v$; $u^2+v^2=2v(u^2-v^2)$ ili $2^{4x}-4\,.\,2^x+4=0$ i t. d.

201) $\sqrt{\dfrac{1}{9}+\sqrt{\dfrac{4}{9\,.\,6^{2x}}+\dfrac{9}{6^{4x}}}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6^x}$; $x_1=1$, $x_{2-4}=\infty$

202) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\sin^2 x}+\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\cos^2 x}=\dfrac{4}{3}$

203) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\mathrm{tg}^2 x}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\mathrm{tg}^2 x}=\dfrac{13}{6}$; $x_1=45$, $x_2=135$

204) $\left(10^{\sqrt{nx}}\,.\,x^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{nx}-\sqrt{x}\log x}=0{\cdot}001^{nx}$

205) $\left(10^{\sqrt{nx}}:x^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{nx}+\sqrt{x}\log x}=0{\cdot}001^{nx}$; $x_{1,2}=100^{\pm\sqrt{n}}$

Jednadžbe kvadratne i višeg stepena sa 2 i više nepoznanica

1. 1) $\begin{array}{l}3xy+4x^2=22\\ 2xy-2x^2=-4\end{array}$; $x_{1,2}=\pm 2$, $y_1=\pm 1$

2) $\begin{array}{l}x^2+3xy+y^2=11\\ x^2+3xy-y^2=9\end{array}$

3) $\begin{array}{l}x+y=\sqrt{x^2+2y^2}\\ \sqrt{xy}=6\end{array}$

2. 1) $\begin{array}{l}\dfrac{2x+y-1}{3x-2y+2}=1\\ 2x^2-y^2=y+x+2\end{array}$

2) $\begin{array}{l}x^2+y^2=r^2\\ y=kx+b\end{array}$

3) $\begin{array}{l}xy=a\\ y=k\,.\,x\end{array}$

4) $\begin{array}{l}(a-d)^2+a^2=(a+d)^2\\ a(a-d)=21{\cdot}6\,(a+d)\end{array}$; $d=9$, $a=36$

3. Pod kojim uvjetom zadane jednadžbe imaju samo jedno rješenje?

1) $\begin{array}{l}b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\\ y=Ax+B\end{array}$

2) $\begin{array}{l}b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\\ Ax+By+C=0\end{array}$

3) $\begin{array}{l}y^2=2px\\ y=kx+b\end{array}$

R.: Vrijednost pod $\sqrt{\ }$ mora biti $=0$; 2) $A^2a^2-B^2b^2=C^2$

4) $\begin{array}{l}x^2+y^2=9\\ y^2=8x\end{array}$

4 a) $\begin{array}{l}4{\cdot}8^2b^2+2{\cdot}4^2a^2=a^2b^2\\ 3{\cdot}6^2b^2+3{\cdot}2^2a^2=a^2b^2\end{array}$; $a=6$, $b=4$

5) $\begin{array}{l}x+\sqrt{xy}+y=19\\ xy=16\end{array}$

6) $\begin{array}{l}x+y=10\\ xy=16\end{array}$

7) $\begin{array}{l} b + bq + bq^2 = 13 \\ b^2q^2 = 9 \end{array}$; $q_1 = 3$, $q_2 = \frac{1}{3}$, $b_1 = 1$, $b_2 = 9$

4. Riješi rastavljanjem na faktore:

1) $\begin{array}{l} 3x^2 + 6xy - 2x - 4y = 0 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 0 \end{array}$

2) $\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 2(x - y) \\ 3x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 2 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} x + y + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{20}{x-y} \\ x(9 - x) = y(9 - y) \end{array}$

4) $\begin{array}{l} xy - 2x - y + 2 = 0 \\ xy + x^2 + x + y = 0 \end{array}$

5) $\begin{array}{l} (2x + y - 1)(x - 3y + 2) = 0 \\ x^2 + y^2 + 3y - 3x = 3 \end{array}$

5. Kako se rješavaju homogene jednadžbe?

1) $\begin{array}{l} 3x^2 + 7xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 3xy - y^2 = 35 \end{array}$

2) $\begin{array}{l} \frac{x-3}{y-4} + \frac{x-6}{y-8} = \frac{xy - 60}{(y-4)(y-8)} \\ 4x^2 + 3y^2 - 7xy = 0 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} x^3y + xy^3 = 10(x - y)^4 \\ x^3y - xy^3 = 3xy \end{array}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$

4) $\begin{array}{l} (x + y)(x^3 + y^3) = 27 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{array}$

5) $\begin{array}{l} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 8 \\ y^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 8 \end{array}$

6) $\begin{array}{l} x + \sqrt[3]{xy^2} = 10 \\ y + \sqrt[3]{x^2y} = 5 \end{array}$

7) $\begin{array}{l} x^2 + y\sqrt{xy} = a = 18 \\ y^2 + x\sqrt{xy} = b = 9 \end{array}$

8) $\begin{array}{l} (x^2 + y^2)(x^3 - y^3) = 35 \\ (x^2 - y^2)(x^3 + y^3) = 27 \end{array}$

9) $\begin{array}{l} (x^3 + y^3)^2 = a(x^n + y^n) \\ (x + y)(x^5 + y^5) = b(x^n + y^n) \end{array}$

6. Iz zadanih jednadžbi ili njihove kombinacije nađe se jednostavnija veza između nepoznanica $[y = f(x)]$.

1) $\begin{array}{l} b(1 + q + q^2) = 35 \\ b^3q^3 = 1000 \end{array}$; $b_1 = 5$, $b_2 = 20$, $q_1 = 2$, $q_2 = \frac{1}{2}$

2) Riješi tako jedn. pod 4.: 5), 6) i 7)

3) $\begin{array}{l} (x^2 + 3y - 2)^2 + 3(x^2 + 3y - 2) = 4 \\ (x^2 + 2y + 1)^2 - 5(x^2 + 2y + 1) = -4 \end{array}$

4) $\begin{array}{l} 2\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} = 3 \\ 3xy + x = 21 \end{array}$

5) $\begin{array}{l} \frac{x^4}{y^2} + \frac{3x^2}{y} = 28 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{array}$; $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $x_2 = ?$, $y_2 = ?$

6) $\begin{array}{l} \left(\frac{a}{x}\right)^2 + (y - b)^2 = b^2 \\ \left(\frac{a}{x}\right)^2 - 2by = 2b \end{array}$

7) $\begin{array}{l} 3x^2 - 4x = 2xy + 6 \\ 4\sqrt{xy} + 3 = xy \end{array}$

8) $\begin{array}{l} x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0 \\ x^2 + xy - y^2 + x - y = 0 \end{array}$

9) $\begin{array}{l} x^3 + x^2y^2 + xy + y^3 = 15 \\ x^3 - x^2y^2 + xy + y^3 = 7 \end{array}$

10) $\begin{array}{l} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{7}{4} \\ x(x - y) + y(x + y) = 1 + 2xy \end{array}$

11) $\begin{array}{l} (x^2y^2 + xy + 1)^2 + (x^2y^2 + xy + 1) = 56 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array}$

12) $\begin{array}{l} x - y + \sqrt{x - y} = 2 \\ x^3 - y^3 = 19 \end{array}$

13) $\begin{array}{l} b + bq^2 + bq^4 = 1092 \\ bq + bq^3 = 272 \end{array}$ (Sim. jedn.)

14) $\begin{array}{l} (x^2 + y^2 - 4)^2 - 4(x - y)^2 = 8xy - 4 \\ x^2 - y^2 = 6 \end{array}$

15) $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+x}+\sqrt{x-y}}+\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=2$

$23+10\sqrt{x^2+2xy-2}+x^2=-2xy$; $x_{1,2}=\pm 3$, $y_{1,2}=\pm 3$

15a) $\begin{matrix} bq^6=bq^2+60 \\ b\,(q^6-q^4)=48 \end{matrix}$; $q_{1,2}=\pm 2$, $b=1$

16) $\begin{matrix} x+y+\sqrt{x+y}=a=12 \\ xy=b^2=20 \end{matrix}$

17) $x+y+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{20}{x-y}$, $x^2+y^2=34$

18) $\begin{matrix} x^4+y^4=17 \\ xy=2 \end{matrix}$

19) $\begin{matrix} b\,(1+q^4)=1285 \\ b^2q^4=6400 \end{matrix}$; $q_1=4$, $q_2=\dfrac{1}{4}$, $b_1=5$, $b_2=1280$

20) $\begin{matrix} \sqrt{x-y}+\sqrt{xy}=a=2 \\ x^2y-xy^2=b^2=1 \end{matrix}$; $x_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$, $y_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$

20a) $\begin{matrix} x^2+\sqrt{x^2+2y}=42-2y \\ 10x^3-19x^2y=19xy^2-10y^3 \end{matrix}$ (R.: Donja je jednadžba recipročna obzirom na $\frac{x}{y}=?$ i t. d.)

20b) $\begin{matrix} (uv+1)^2+2uv=-3 \\ u+v+2\sqrt{u+v}=3 \end{matrix}$

21) $\begin{matrix} x^3+y^3=9 \\ x^2y+xy^2=6 \end{matrix}$; $x_1=2$, $y_1=1$, $x_2=?$, $y_2=?$

22) $\begin{matrix} x+y=35 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{matrix}$

23) $\begin{matrix} x^2+xy=10 \\ y^2+xy=15 \end{matrix}$

24) $\begin{matrix} (x+3y)^2+(3x-y)^2=17 \\ (x+3y)\,(3x-y)=3 \end{matrix}$

25) $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{10}{3}$

$x^2-y^2=10$

26) $\begin{matrix} (b+bq^3):(bq+bq^2)=3:2 \\ bq^3=bq+72 \end{matrix}$

27) $\begin{matrix} b+bq+bq^2=21 \\ b^2q+b^2q^3=90 \end{matrix}$; $q_1=2$, $q_2=\frac{1}{2}$, $q_{3,4}=?$, $b_1=3$, $b_2=12$, $b_{3,4}=?$

28) $\begin{matrix} b\,(1-q-q^2+q^3)=64 \\ b^2\,(1-q^2-q^4+q^6)=2560 \end{matrix}$; $q_1=-3$, $q_2=-\frac{1}{3}$, $b_1=54$, $b_2=-2$

29) $\begin{matrix} x^4+y^4=107 \\ x^3y+x^2y^2+xy^4=114 \end{matrix}$

30) $\begin{matrix} x^2+5y=41-2\sqrt{x^2+5y+7} \\ x^2=y^2-21 \end{matrix}$; $x_1=2$, $y_1=5$

31) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=5$

$\sqrt{xy}=6$

31a) $\begin{matrix} u+uv=21-uv^2 \\ u^2v=90-u^2v^3 \end{matrix}$; $u_1=3$, $u_2=12$, $v_1=2$, $v_2=\frac{1}{2}$, $u_{3,4}=?$, $v_{3,4}=?$

32) $\sqrt{\dfrac{2x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{2x}}=2\frac{1}{6}$

$xy-(x+y)=5$

33) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+5}}=\frac{5}{6}$

$\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)\,(y+5)}}=\frac{1}{6}$

34) $3\sqrt{x-y}=2+\dfrac{8}{\sqrt{x-y}}$

$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=6$

35) $\begin{matrix} x^4+y^4=17 \\ x^2+y^2=5 \end{matrix}$

7. 1) $\begin{matrix} x^2+2xy+5y^2=25 \\ y\,(x+y)=6 \end{matrix}$

2) $\begin{matrix} x^6+y^6=65 \\ x^3+y^3=9 \end{matrix}$

3) $\begin{matrix} x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=3 \\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5 \end{matrix}$

3a) $\begin{matrix} 455-bq^4=b\,(1+q^2) \\ bq^3=150-bq \end{matrix}$; R. Sim. jednadžba! $b_{1,2}=5$, 405, $q_{1,2}=3$, $\frac{1}{3}$ i t. d.

4) $\left(\sqrt{x^3}+y^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{x}=162$
$\left(x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{y^3}\right)y^{\frac{1}{2}}=81$

5) $x-y=65$
$x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}=1$

6) $\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=10$
$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{4}$

7) $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{x}=34$
$x^2+xy+y^2=28$

8) $(x^3+y^3)(x^2+y^2)=45$
$3(x+y)+2\sqrt{x+y+6}=15$

9) $xy+xy^3=30$
$x+xy^2+xy^4=63$

10) $x+xy^3-xy-xy^2=3$
$x^2+x^2y^6-x^2y^2-x^2y^4=45$

11) $(x^n-y^n)(x^n+y^n)=a$
$xy=b$

12) $x^3-y^3=\frac{21}{x+y}$
$x^3+y^3=\frac{7}{x-y}$

13) $\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=5$
$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}=\frac{17}{9}$

14) $x+y+\sqrt{x}+\sqrt{y}=18$
$(x+\sqrt{x})(y+\sqrt{y})=72$

15) $xy^2+y=3$
$x^2y^4+y^2=5$

15a) $3x+2y=7$
$27x^3+8y^3=45{\cdot}5xy$

16) $\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{x^2}+2xy=81$
$x+y=6$
$\left\{\begin{array}{l} x_1=4, \\ y_1=2; \\ x_2=? \end{array}\right\}$

17) $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=a=20\frac{5}{16}$; $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=?$
$x-y=b=1$

18) $a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+aq^5=185$
$aq^6+aq^7+aq^8+aq^9+aq^{10}+aq^{11}=11840$; $q=2$

19) $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=a=4{\cdot}5$
$x^2+y^2=b=5$

20) $x-y+\frac{y^2}{x}=3$
$x^2-y^2+\frac{y^4}{x^2}=13$

21) $x+xy+xy^2+xy^3=8$
$x^2+x^2y^2+x^2y^4+x^2y^6=16$

22a) $x^4+y^4=17$
$x-y=1$

22) $x^4+y^4+3x^2y^2=a=29$
$x^2+y^2+xy=b=7$

23) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13$
$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}=25$

24) $x^3+x^3y^3+y^3=17$
$x+xy+y=5$
. Supst. $x+y=u$, $xy=v$, $u+v=s$, $us=t\ldots$

25) $x^3-3xy+y^3=13$
$x+y=4$
. Stavi $y=-z$!

26) $x+y=a$
$xy=b$
; Riješi kao korijene jedn. $z^2-az+b=0$

27) $u^3q^3=216$
$u^2q+u^2q^2+u^2q^3=126$; $q_{1,2}=2;\frac{1}{2}$; $u_{1,2}=3;\ 12$

28) $x+y=xy=x^2+y^2$

29) $x+\sqrt{xy+y^2-5}=8$
$x^2+xy+y^2=37$

29a) $u^2v^9=4608$
$uv^4=144-uv^5$; $u_1=3$, $u_2=1536$; $v_1=2$, $v_2=\frac{1}{2}$

30) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=x-y=x-\sqrt{xy}+\sqrt{y}$

31) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=a=4$
$x+y=b=2$

32) $x^3+y^3=(x+y)xy=axy$

33) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$
$\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x-y}{y^2}$

34) $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(y - \frac{1}{y}\right) = 4$
$9\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 73$

35) $x^2y^2 - 4xy = \frac{8xy - 30}{3}$
$\sqrt{3x + y - 1} + 18 - 6x = 3y$

36) $x = a\sqrt{x+y}$
$y = b\sqrt{xy}$

37) $a\sqrt[4]{a+x} + \sqrt[4]{a-x} = b$. Stavi se $\sqrt[4]{a+x} = u$, $\sqrt[4]{a-x} = v$

38) $\sqrt[4]{90 - x} - \sqrt[4]{9 - y} = 2$; $x_1 = 9$ $x_2 = 89$, $y_1 = 8$
$x + y = 17$ $\quad y_2 = -72$ i t. d.

39) $x^5 + y^5 = 33$
$x + y = 3$

40) $x - y = 50$
$\sqrt[5]{143 + x} - \sqrt[5]{y - 18} = 1$; $x_1 = 100$, $y_1 = 50$, $x_2 = 175$, $y_2 = 225$, $x_{3,4} = \frac{1}{2}(-75 \pm 87\, i\sqrt{3}$

8. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 29$
$x + y = 5$
$y + z = 7$

2) $x(y + z) = 14$
$y(x + z) = 18$
$z(x + y) = 20$

3) $xy = 6$
$xz = 8$
$yz = 12$

3a) $(3 - u)^2 + (4 - v)^2 = r^2$
$(4 - u)^2 + (5 - v)^2 = r^2$
$u^2 + v^2 = 50$
$(u_1 = 7,\ u_2 = 1,\ v_1 = 1,$
$r = \sqrt{13})$

3b) $a : x = x : y = y : z = z : b$
$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{a^3b}$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{a^3b}$,
$y_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{ab}$, $z_{1,2} = \pm\sqrt[4]{ab^3}$,
$z_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{ab^3}$

4) $x^3y^2 = a$
$y^3z^2 = b$
$z^3x^2 = c$

5) $x^2y = a$
$y^2z = b$
$z^2x = c$

6) $ax = by = cz = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

7) $b(1 + q + q^2) = 31$
$bq + 8 = a + d$
$bq^2 = a + 2d$
$a = b$
(R.: $a = b = 1$, $d = 12$, $q = 5$)

8) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$
$xy + yz + xz = 11$
$x + y + z = 6$

9) $xy = 2$
$xy + yz + xz = 11$
$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{6}{xyz}$

10) $x : y = y : z$
$x + y + z = 18$
$xyz = 64$

10a) $p^2 + q^2 = r^2$
$(4 - p)^2 + q^2 = r^2$
$(2 - p)^2 + (1 - q)^2 = r^2$;
$r = \frac{5}{2}, p = 2,\ q = -\frac{3}{2}$

11) $x + y = z + u$
$xy = zu + 3$
$x^2 + y^2 + x + y = z^2 + u^2$
$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 198$

12) $xu = yz$
$x + u = 9$
$y + z = 6$
$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 585$

13) $x + y + z + u = 12$
$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 56$
$x^4 + y^4 + z^4 + u^2 = 1394$
$x : z = u : y$

14) $b = a + 1$
$bq = a + d + 2$
$bq^2 = a + 2d + 8$
$bq^3 = a + 3d + 24$
$[a = 4,\ d = 4,\ b = 5,\ q = 2]$

15) $a = b + 1$
$a + d = bq + 2$
$a + 2d = bq^2 + 1$
$a + 3d + 5 = bq^3 + 1$
$[a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ q_1 = 2,\ d_1 = 3 \ldots]$

16) $(-3 - p)^2 + (4 + q)^2 = r^2$
$(4 - p)^2 + (3 - q)^2 = r^2$
$(8 - p)^2 + q^2 = (r + 3)^2$
$(r_1 = 5,\ p_1 = q_1 = 0,\ r_2 = ?)$

17) $(1 + q + q^2)\, b = 26$
$a + 8 = b$
$a + d = bq$
$a + 2d = bq^2$

$b_1 = 2,\ b_2 = 18$
$a_1 = -6,\ a_2 = 10$
$q_{1,2} = 3, \frac{1}{3};\ d_{1,2} = 12, -4$

18) $(2 - p)^2 + (9 - q)^2 = r^2$
$(1 - p)^2 + (2 - q)^2 = r^2$
$$\frac{q - \frac{3p}{4} - \frac{30}{4}}{\sqrt{\frac{15}{16}}} = r$$

19) $\sin^2 x + \cos^2 y = a$
$\cos^2 x - \sin^2 y = b$

20) $x^2 + y^2 - 2xy \cos\gamma = 52$
$xy \sin\gamma = 24\sqrt{3}$
$x + y = 14$

Logaritamsko - eksponencijalne jednadžbe

1) $x^2 + y^2 = 101$
$\log x + \log y = 2$

2) $x^4 + y^4 = 17$
$\log x + \log y = 0{\cdot}30103;\quad x_1 = 2,\ y_1 = 1$

3) $\log(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - 1 = \log 2$
$\log(x + y) - \log(x - y) = 2\log 3$

4) $3^x \cdot 2^y = 72$
$(2^x)^y = 64$

5) $7^{xy} = 49$
$5^{x + y - 1} = 25$

6) $3^{x + y} = \sqrt[y]{9^{y + 4}}$
$2^{x - 2} = \sqrt[y+1]{4^{2y - 1}};\quad x_1 = 4,\ y_1 = 2$

7) $a^{3(x+2)} \cdot a^{2(x-2)} = \left(a^{y^2}\right)^4$
$\dfrac{b^{x^2 + 2xy + y^2}}{b^{x^2 - 2xy + y^2}} = \left(b^8\right)^2$

8) $(a^{nx} - a^{ny})(a^{nx} + a^{ny}) = b$
$a^{x + y} = c$

8a) $8^x - 8^y = 56$
$2^{x + y} = 8$
$x_1 = 2,\ y_1 = 1$

9) $16^{3x} + 16^{3y} = 17$
$16^{x + y} = 2\sqrt[3]{2}$
$x_1 = \frac{1}{3},\ y_1 = 0$

10) $3^{x + 2} + 3^{y + 2} = 108$
$3^{x + y} = 27$

11) $2^x \cdot 3^y = 72$
$3^y = \sqrt[x]{729}$

12) $a^{2x} + a^{2y} = a(a + 1)$
$a^{x + y} = \sqrt{a^3}$

13) $2^{\log u} + 3^{\log v} = 11$
$2^{\log u} \cdot 3^{\log v} = 18;\quad u_1 = 10,\ v_1 = 100$

14) $3^{\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt{y + 1}} = 9^0$
$2^{\sqrt{2x^2 + 3y + 2}} \cdot 2^{\sqrt{4y^2 - 2x}} = 1$

15) $xy = 40$
$x^{\log y} = 4;\quad x_1 = 4,\ y_1 = 10$

16) $xy = 25$
$x^{\frac{1}{\log y}} = 0{\cdot}5$

17) $y^x = 64$
$y^{\frac{1}{x}} = 2\sqrt{2};\quad x_1 = 2,\ y_1 = 8$

18) $y^x = a$
$\sqrt[x]{y} = b$

19) $2^{3\log y} + 3^{3\log z} = 9$
$2^{\log y} + 3^{\log z} = 3$

20) ${}^{(x^2 + y^2)}\log 8 = \frac{3}{4}$
${}^{(x^2 - y^2)}\log 8 = \frac{3}{4}$

21) $y^{\frac{x+1}{x-1}} = 4^{x + 1}$
$y^{\frac{1}{x^2 - x}} = 2;\quad x_1 = 2,\ y_1 = 4$

22) $u^{v + \frac{1}{v}} = a$
$u^{v^3 - 7} = a^{\frac{v}{v^2 + 1}};\quad v_1 = 2,\ u_1 = \sqrt[5]{a^2}$

23) $y^x = 16$
$5\sqrt[x]{y} - \sqrt[x]{y^2} = 6$

24) $y^{2x} = 3y^x + 54$
$y = 3.10^{x-2}$ $\quad x_1 = 2,\ y_1 = 3$

25) $2^{x+1} + 3.2^{1-x} = 11$
$y^x = 9$

26) $x^y + 4x^{-y} = 5$
$x^{\frac{2}{y+1}} - 4x^{\frac{1}{y+1}} + 4 = 0$

27) $y^{2x} - 4y^x = 32$ $\quad x_1 = 1,\ x_2 = ?$
$y^{\frac{1}{x}} - 8y^{-\frac{1}{x}} = 7;$ $\quad y_1 = 8,\ y_2 = ?$

28) $y^{\frac{2}{x}} + 10y^{\frac{1}{x}} = 200$
$y^x = 100$

29) $4^{2x} - 4 \,.\, 3^{-2y} = 12$
$4^x + 3^{-y} = 5$

30) $2y^{\frac{1}{x}} = \sqrt{10\, y^{\frac{1}{2x}} + 10}$
$\log y = x$

31) $y^x + 16y^{-x} = 10$
$3\sqrt[x]{y} + 2\sqrt[x]{y^{-1}} = 3$

32) $\sqrt[y]{x^2} = 5\sqrt[y]{x} - 6$
$y = 2{\cdot}60206 - \log x$

33) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y-1}} = 11\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y-1}} - 10;$ $\quad x_1 = 1,\ x_2 = 0{\cdot}1,$
$10^y = 1000x$ $\quad y_1 = 3,\ y_2 = 2$

34) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}} = 2\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}} + 8$
$y = 1 - \log x$

34a) $\sqrt[y]{x^2} + 10 = 11\sqrt[y]{x}\,;$ $\quad x_1 = y_1 = 1,$
$10^y = 10x^{-1}$ $\quad y_2 = \frac{1}{2},\ x_2 = \sqrt{10}$

35) $x^{\frac{2}{y-1}} - 8\sqrt[y-1]{x} = 20$
$10^{2y-3} = x;$ $\quad x_1 = 10,\ y_1 = 2$

36) $\sqrt[u]{v} + 2\sqrt[-u]{v} = 3\,;$ $\quad u_{1,2} = \pm 2$
$v^u - 32v^{-u} = 14$ $\quad v_1 = 4,\ v_2 = \frac{1}{4}$

37) $3^{x+1} - 27^{-\frac{x}{3}} = 24$
$y^{2x} - 5y^x = 36$

38) $3^{x+1} - 3^{3-x} = 24$
$y^x - 36y^{-x} = 5$

39) $x^{\frac{2}{y+1}} - 8x^{\frac{1}{y+1}} = 20$
$10^{y+3} = x^2$

40) $y^{2\log x - 4} - 4 = 3y^{\log x - 2}$
$y^{\frac{2}{\log x - 2}} - 8 = 2y^{\frac{1}{\log x - 2}}$ $\quad ;\ x_1 = 1000,\ x_2 = 10;\ y_1 = 4,\ y_2 = \frac{1}{4}$

41) $\left(\frac{1}{y}\right)^{-\log x} - 4\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{\log x}{2}} + 4 = 0$
$\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{2}{\log x}} - 8\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{\log x}} + 16 = 0$ $\quad ;\ x_1 = 10,\ x_2 = 0{\cdot}1,\ y_1 = 4,\ y_2 = \frac{1}{4}$

42) $u^{2\log v} - 2u^{\log v} - 2u^{-\log v} + u^{-2\log v} + \frac{8}{4} = 0,\ u = 3 - \log v;$
$u_1 = 2,\ v_1 = 10$ i t. d.

43) $(a^x)^y : (a^y)^z = (a^2)^2,\ b^{x^2} : b^{z^2} = (b^z)^5,\ [(c^x)^y]^z = c^6;\ x_1 = 3,\ y_1 = 2,\ z_1 = 1$

44) $z^2 y^{x-1} = -288$
$z + zy^{x-1} = 93$ $\quad ;\ x = 6,\ y_{1,2} = -2,\ -\frac{1}{2},\ z_{1,2} = 96,\ -3$
$z\,\dfrac{y^x - 1}{y - 1} = 63$

45) $u\,\dfrac{v^x - 1}{v - 1} = 2188,\ uv^{x-1} = 2920 - u,\ u^2v^{x-1} = 11664\,;$ $\quad u_1 = 4,\ u_2 = 2916,\ v_1 = -3,$
$v_2 = -\frac{1}{3},\ x = 7$

46) $3^{\sin x + \sin y} = 3\sqrt{3}$
$9^{4(\sin^2 x - \sin^2 y)} = 27\,;$ $\quad x = 61^0\, 2'\, 42'',\ y = 38^0\, 40'\, 58''$

Problemi $2^{\underline{og}}$ i višeg stepena

1. Suma recipročnih vrijednosti dvaju uzastopnih brojeva iznosi $\frac{5}{6}$; koji su to brojevi? (R.: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{6}$; $x_1=2$, $x_2=-\frac{3}{5}$
Druga vrijednost ne zadovoljava jedn. (neupotrebiva!). Brojevi su 2 i 3.

2. Jedna se posuda može napuniti kroz 2 cijevi; kroz prvu za n sati prije nego kroz drugu, a kroz obe zajedno napuni se za t sati. Za koliko se napuni kroz svaku cijev napose?
R.: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-n}=\frac{1}{t}$; $x_{1,2}=\frac{n+2t}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2+4t^2}{4}}$; $\frac{1}{x}$ posude napuni druga cijev u 1 satu.

3. U rov pusti neko da padne kamen i nakon 5·95 sekunda kasnije čuje, kako je kamen udario. Koliko je dubok rov?
R.: Vrijeme za koje je kamen pao + vrijeme, za koje je do nas došao zvuk = 5·95; dakle (ako je x = prevaljeni put = dubina rova):

$$\frac{x}{333}+\sqrt{\frac{2x}{9{\cdot}81}}=5{\cdot}95\,;\quad x=148{\cdot}6\ m.$$

4. Riješiti pravokutan trokut, ako je zadan polumjer upisanog kruga $\varrho=1$ i površina trokuta $P=6$.
R.: Poznato je iz geometrije:

$$\frac{a+b+c}{2}=\frac{P}{\varrho},\quad \frac{a+b-c}{2}=\varrho,\ \text{dakle:}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=12\\ a+b-c=2\\ a^2+b^2=c^2\\ \hline a=3\\ b=4 \end{array}\right|\quad \begin{array}{l} c=5\\ a+b=7\\ a^2+b^2=25 \end{array}\quad \text{ili}\quad \begin{array}{l} \frac{x+y+z}{2}=\frac{1}{6},\quad \frac{xy}{2}=P=6,\\ x^2+y^2=z^2\ \text{i t. d.} \end{array}$$

5. U zadani trokut (a, h) upisati pravokutnik, čija površina iznosi $n\%$ površine trokuta.
R.: Stranice pravokutnika su x i y; postoji relacija $xy=\frac{n\,.\,a\,.\,h}{2.100}$, $a:h=$
$=x:(h-y)$, ili iz ovoga $y^2-hy+\frac{nh^2}{200}=0$; $y_{1,2}=\frac{h}{2}\left(1\pm\sqrt{\frac{50-n}{50}}\right)$
D.: Smisao ima samo druga vrijednost. n može prema formuli maksimum biti 50 t. j. površina pravokutnika 50% površine trokuta.

6. Odrediti $\sqrt[3]{1}$
R.: $x^3=1$; $(x-1)\,(x^2+x+1)=0$, $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{1}{2}\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)$

Primjena kvadr. jednadžbi i jedn. višeg stepena

1) Koja jednadža ima za korijene recipročne vrijednosti od korijena jedn. $x^2+5x+6=0$? (R.: $6x^2+5x+1=0$).

2) Kakav odnos mora postojati između koeficijenata jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$, da jedan korijen zadane jedn. bude jednak *a)* drugom korijenu; *b)* dvostrukom drugom; *c)* n-terostrukoj vrijednosti drugog korijena; *d)* recipr. vrijednosti drugoga; *e)* kvadratu drugog; *f)* n-tom korijenu drugoga korijena? Navesti posebne primjere.

R.: a) $a^2 = 4b$; e) $b = \frac{1}{8}\left(-1 \pm \sqrt{1-4a}\right)^3$

3) Korijeni jednadžbe $ax^2 \pm bx + a = 0$ jesu recipročni. Dokaz?

4) Jedn. $\frac{a^2}{x-b} + \frac{c^2}{x-d} = 1$ ima uvijek realne vrijednosti. Dokaz?

5) Koju vrijednost mora imati m u jedn. $(x-3)(x-m) = a$, da jedn. imadne samo realne korijene?

6) Za koje su vrijednosti od η korijeni jedn. $(\eta + 1)x^2 - 2(\eta - 1)x + (3\eta - 3) = 0$ realni, a za koje korijene trinom $(\eta + 1)x^2 - 2(\eta - 1)x + (3\eta - 3)$ pozitivan (negativan)? Ispitaj predznak tih korijena! Isto za $x^2 - 2\eta x + 3 = 0$.

7) Između kojih se granica mora kretati vrijednost od m, pa da jedn. $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x+m}$ imade dva realna korijena? (R.: m mora biti izvan intervala a, b).

8) U jedn. $x^2 - \eta ax + a = 0$ treba η tako odrediti, da jedan korijen jedn. bude jednak dvostrukoj vrijednosti drugog korijena.

9) Za koje je vrijednosti od a jedn. $x^2 - 4x + a^3 = 0$ jedan njezin korijen jednak kvadratu drugog korijena?

10) Kako glasi jedn., čiji su korijeni *a)* za η veći (manji); *b)* η-puta veći (manji) od korijena jedn. $x^2 + ax + b = 0$. (R.: $x = y \mp \eta$ i t. d.)?

11) Odredi η jedn. $x^2 - (8\eta - 2)x + 15\eta^2 - 2\eta - 7 = 0$ tako, da suma kvadrata njezinih korijena iznosi 24.

12) Rastavi u linearne faktore $(a^2 - 4b^2)x^2 + 2(a^3 + 2b^3)x + (a^4 - b^4)$.

13) Koja jedn. ima za korijene brojeve a) $2, -\frac{1}{3}$; b) $a - \sqrt{b}$, $a + \sqrt{b}$; c) $\pm i$; d) $2 + i\sqrt{3}$, $2 - i\sqrt{3}$? Uvjeri se!

14) Pod kojim uslovom jedn. $x^2 + ax + b = 0$ i $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ imaju jedan korijen zajednički?

15) Skrati razlomak $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$; R.: $\frac{x-2}{x+3}$

16) Kakav odnos mora postajati između a, b, i a_1, b_1 da izraz $f(x) \equiv (a + bx)^2 + (a_1 + b_1x)^2$ bude potpuni kvadrat? ($a : a_1 = b : b_1$).

16a) Rastavi na proste faktore trinom $1 + 5x^{-1} + \left(\frac{x}{2}\right)^{-2}$; R.: $\frac{1}{x^2}(x+1)(x+4)$

16b) Jednadžbu trećeg stepena $x^3 + ax^2 + bx + c = o$ reducirati na oblik $y^3 + py + q = Ø$. R.: Supstituirati $y = x - \frac{a}{3}$. Primjer $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. Reduciranu jednadžbu riješiti: (R.: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$).

17) Izletnici jednom prilikom podijele međusobno fotografije; od prigotovljenih 40 duceta ostane još 100 fotografija. Koliko je bilo izletnika?

17a) Suma dvaju brojeva iznosi 3, a suma njihovih kubusa 9; koji su to brojevi?

18) Razlika recipročnih vrijednosti dvaju uzastopnih brojeva iznosi $\frac{1}{12}$. Koji su to brojevi? $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{12}\right)$

19) Suma znamenaka dvoznamenkasta broja iznosi 13, a njihov produkt 36. Koji je to broj? (R.: 94)

20) Suma znamenaka troznamenkasta broja iznosi 7, a njihov umnožak 8. Koji je to broj, ako je zadnja znamenka jednaka $\frac{1}{3}$ broja iz prve dvije? (R.: 124)

21) Suma znamenaka dvoznamenkasta broja iznosi 9. Produkt broja i razlike njegovih znamenaka iznosi 54. Koji je to broj?

21a) Odredi $\sqrt{i}$. R.: $\sqrt{i} = x + yi$; $i = x^2 - y^2 + 2xyi$ ili izjednačujući koeficijente dobije se $x^2 - y^2 = 0$, $2xy = 1$ i t. d. $x = ?$, $y = ?$

21b) Dokazati na gornji način odnose: 1) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$;

2) $\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$

22) Trošak putovanja iznosi *a* Din. Putuje li *n* osoba na račun ostalih, to svakog zapada da više plati *b* Din. Koliko je putnika? $\left(\frac{a}{x-n} - \frac{a}{x} = b\right)$

23) *A* i *B* svrše neki posao za *n* (10) dana. *B* bi sam svršio posao za *a* (2) dana prije nego *A*. Koliko dana treba svaki napose da dogotovi posao?

24) Dvije cijevi zajedno otvorene napune rezervoar za *n* dana. Jedna bi cijev trebala za to *m* sati više. Koliko bi trebala svaka cijev napose? Diskusija? Primjer : $n = 10$, $m = 2$.

25) Iz bureta od *a* (240) *l* napunjena vinom otoči se nešto vina i napuni vodom. Kad se izmiješalo otoči se ponovno *b* (60) *l* više nego prvi puta pa se opet nalije vode. U buretu je konačno ostalo jednako vina i vode. Koliko je *l* prvi puta otočeno?

26) U zajednički posao uloži *A* 500 Din više nego *B* i to kroz 10 mj., a *B* svoj novac kroz 8 mj. Koliko je svaki uložio, ako je prvi zajedno sa uloškom dobio 4200 Din, a zajednička dobit iznosi 1800 Din?

27) Kapital naraste kroz *n* godina na *a* Din. Na istu bi sumu narastao za *m* godina da je bio ukamaćen uz 1% više. Koliki je kapital?

28) Dva kruga sa polumjerima r_1 (6), r_2 (2) i središtem na kracima pravog kuta kreću se prema vrhu brzinama c_1 (2) i c_2 (3). Prvi je udaljen od vrha za *a* (24), a drugi za *b* (36). Nakon kojeg će se vremena oni dotaći *a)* izvana; *b)* iznutra?

29) Na krakovima $\sphericalangle \alpha = 45°$ nalaze se tačke *A* i *B* udaljene međusobno za a. Ako se prva pomakne prema vrhu za *b*, međusobna im je udaljenost *c*. Koliko su bile udaljene od vrha $\sphericalangle$?

30) Na kojem bi mjestu između mjeseca i zemlje ostalo tijelo lebdeći? Neka je njihova udaljenost $d = 385000$ *km*, a masa mjeseca $= \frac{1}{8}$ mase zemlje. (R. : Udaljenost od zemlje iznosi 346500 *km*).

31) $t = 3$ sek. nakon što se čuo prasak počelo je na zemlji padati meteorno kamenje. U kojoj se visini meteor raspao?

R.: $x = \frac{c}{g}(c - gt \pm \sqrt{c(c-2gt)}$ $c = 340{,}18\ m$, $g = 9{,}808$, $x_1 = 21508{\cdot}1$, $x_2 = 84{\cdot}4$

Koji korijen zadovoljava jednadžbu?

32) Kako bi visoko morao vulkan na mjesecu baciti kamen, da on dospije u privlačnu sferu zemlje i pane na zemlju?

33) Kojom bi se brzinom moralo ispaliti topovsko tane horizontalno da neprestano oblijeće oko zemlje? $\left(\frac{c^2}{R} = 9{\cdot}81;\ R = \text{polumjer zemlje u metrima}\right)$

34) Tijelo je bačeno u bunar i nakon t sekunda čuo se zvuk. Koliko je dubok bunar? R.: $\frac{x}{333} + \sqrt{\frac{2x}{9{\cdot}81}} = t$

35) U krug je upisan pravokutan trokut površine 6 i sume kateta $= 7$. Koliki je polumjer kruga?

35a) Odrediti stranice pravokut. trokuta ako je zadano $h\,(8)$ i $a + b - c = d\,(6)$.

35b) Odrediti stranice pravokutnog trokuta, ako je zadano:

a) Površina P i opseg $= 2\,s$.

R.: $a_{1,2} = \frac{1}{s}(s^2 + P + \sqrt{(s^2 + P^2) - 8s^2P}) = b_{2,1}$

b) Opseg $= 2\,s$ i simetrala pravog kuta $= w$ R.: $a = \frac{2s\,(\sqrt{2} - w)}{2s\sqrt{2} - w}$

d) Površina P i $q : p = m : n$ (p i q su otsječci na hipotenuzi)

R.: $a = \sqrt{2P\sqrt{\frac{m}{n}}}$, $b = \sqrt{2P\sqrt{\frac{n}{m}}}$

f) Zadane su katete a i b, odrediti težišnice

$\left[t_3 = R = \frac{c}{2};\ t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2};\ t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}\right]$

g) Težišnice t_1 i t_2, odrediti stranice

$\left[a = 2\sqrt{\frac{(2t_1 - t_2)(2t_1 - t_2)}{15}};\ b = 2\sqrt{\frac{4t_2^2 - t_1^2}{15}};\ c = ?\right]$

h) Zadane su katete a i b pravokutna trokuta. Treba odrediti a) površinu upisanog kvadrata; b) stranice onoga pravokutnika, čija površina iznosi n-ti dio površine trokuta. (Diskusija)?

k) Stranice su istokračna trapeza $a = 10$, $b = d = 3$, $c = 2$. Treba odrediti polumjer opisanog kruga oko trapeza. Ako se spoje središta stranica trapeza dobije se romb. Koliki je polumjer u romb upisanog kruga?

36) Dužinu a razdijeliti po zlatnom rezu $[a : x = x : (a - x)]$

37) Dokazati odnos između stranica trokuta a, b, c i polumjera r_s opisanog kruga: $2rc = a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2}$

38) Oko kruga (r) opisati istokračan trapez a) opsega $4\,s$; b) zadane površine P. Riješiti trapez. R.: a) $(2x - s)^2 + 4r^2 = s^2$; $x = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - r^2}$

38a) U polukrug (r) upisati trapez sa opsegom $2s$.

39) U krug (r) upisati istokračan trokut površine P. Kolike su stranice trokuta?

40) Riješi trokut, ako je zadano $a+b=m\,(2)$, $r\,(1)$ i $h_c=n\,(0{\cdot}5)$;
U.: $4rP=abc$; $a=b=1$, $c=\sqrt{3}$.

41) Poznata je površina trokuta $\frac{1}{2}\,k^2$ i stranice a i b. Kolika je treća stranica?
R.: $[(b+c)^2-x^2][x^2-(b-c)^2]=4k^2$; $x=\sqrt{b^2+c^2\pm2\sqrt{b^2c^2-k^4}}$
Na pr. $a=6\,cm$, $b=8$, $P=24$, $c=?$

42) Polumjer upisanog kruga dijeli hipotenuzu pravokutna trokuta na otsječke $m\,(8)$ i $n\,(6)$. Koliki je opseg trokuta i njegova površina?

43) Na centrali $\overline{CC}=2d$ dvaju jednakih krugova odredi onu tačku s koje tangente na krugove stoje jedna na drugoj okomito?
R.: $x=\sqrt{d^2+r^2-r\sqrt{4d^2+r^2}}$

44) U kvadrat (a) upisati istokračan trokut površine P, i jednim zajedničkim vrhom sa kvadratom.

45) U kvadrant (a) upisati pravokutnik sa stranicama koje su paralelne sa dijagonalama kvadrata i površinom $=n\%$ površine kvadrata. Stranice pravokutnika $=$?
Diskusija? R.: $4xy=P=\frac{na^2}{100}$, $x+y=\frac{a}{2}\sqrt{2}$ i t. d.

46) U kvadrat (str. a) upisan je istostraničan trokut sa jednim zajedničkim vrhom. Odredi stranice trokuta. $\left[x=2a\sqrt{2-\sqrt{3}}\right]$

47) U istostraničan trokut upisati pravokutnik sa površinom $=n\%$ površine trokuta i odrediti njegove stranice. Diskusija?
$\left[xy=\frac{na^2\sqrt{3}}{400},\ \frac{a}{2}:\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{a-x}{2}:y\right]$

48) U kvadrant kruga polumjera (r) upisati a) istostraničan trokut kojemu je jedan vrh 1) na obodnici; 2) u središtu kvadranta, i odrediti mu stranicu; b) upisati krug i odrediti mu površinu.

49 Zadani trokut (v, h) treba raspoloviti paralelom prema bazi. U kojoj se visini mora ona povući i kolika je?

49a) Ako se podvostruči broj stranica nekog pravilnog mnogokuta onda svaki kut naraste za 36°. Koji je to mnogokut? $[n=5]$.

49b) Ako se broj stanica nekog poligona povisi za 3, broj se dijagonala potrostruči; koji je to poligon? $[n=6]$.

50) U istostraničan trokut upisati istokračan trokut površine P, da mu vrh leži u središtu osnovke prvoga trokuta. U kojem omjeru dijeli osnovka ovoga trokuta stranice zadanog?

51) Izračunati stranice pravokutnika, koji ima sa zadanim kvadratom (a) istu površinu, a dvaputa veći opseg; $x=a\,(2\pm\sqrt{3})$; $y=a\,(2\mp\sqrt{3})$]

52) Izračunati težišnice trokuta: t_1, t_2, t_3 iz njegovih stranica a, b, c.
$b^2=h_a{}^2+\overline{CE}^2=h^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2$; $c^2=h_a{}^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$; $x^2=t_1{}^2-h^2$;
$2t_1=\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; $2t_2=\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$;
$P=\frac{1}{3}\sqrt{(t_1+t_2+t_3)\ (t_1+t_2-t_3)\ (t_1+t_3-t_2)\ (t_2+t_3-t_1)}$

52a) Iz stanica trokuta (*a*, *b*, *c*) odrediti simetrale kuteva od vrha do sjecišta sa suprotnom stranicom.

R.: $w_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{s(s-c)ab}$, $w_a = \sqrt{bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right]}$

52b) Stranice se trokuta razlikuju jedna od druge za 3, a površina mu je $= 54$. Kolike su stranice trokuta? R.: stranice su: $x-3$, x, $x+3$ i t. d. $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$

53) Odrediti stranice trokuta iz težišnica (Upotrebi: $a^2 + b^2 = 2t_c^2 + \frac{c^2}{2}$;

R.: $a = \frac{2}{3}\sqrt{2t_2^2 + 2t_3^2 - t_1^2}$

54) Izračunati stranice trokuta iz ρ_1, ρ_2, ρ_3 tangencijalnih krugova trokuta.

55) Trapez treba raspoloviti paralelom sa osnovkama. Kolika je dužina te linije, ako je zadano *a*, *c* i *h*?

56) Treba otsjeći stranice kvadrata (a) da se dobije pravilan osmerokut. Kolika je stranica osmerokuta?

56a) Isto tako za istostraničan trokut, da se dobije pravilan šesterokut.

57) Površina kružnog sektora (isječka) je *P*, a opseg 2s. Koliki je polumjer kruga?

58) U krugu povuku se paralelne tetive *a* i *b* udaljene međusobno za c. Koliki je promjer kruga? $2r = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 : 16c^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2c^2)}$

59) Koliki je kut onog pravilnog mnogokuta koji ima 5 puta više dijagonala nego stranica?

60) Zadana kugla otsijeca na svim kuglama koje prolaze njezinim središtem kalote konstante površine ($r^2\pi$). Dokaži!

60a) Kalota kuglina segmenta četiri puta je veća od njegove osnovke; kolika je visina segmenta, ako mu volumen iznosi 72π. [R.: $h = 6$, $r = 4$].

60b) Iz koje se udaljenosti od središta kugle polumjera *r* vidi *n*-ti dio njezine površine? Primjer: $\frac{1}{n} = \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ Diskusija!

60c) Kako visoko mora se uspeti balon da se vidi s njega $\frac{1}{10}$ površine zemlje?

61) U kojoj udaljenosti od središta treba presjeći kuglu (r), da je površina presjeka $=$ razlici nastalih kapica (kalota)?

62) Bridovi se kvadera odnose kao $m:n:p$, a dijagonala je *d*. Koliki su bridovi?

62a) Koliki je volumen uspravne prizme, ako joj je zadana visina *h* (?) površina *O* (?), a njezina osnovka jeste pravokutan trokut sa hipotenuzom *c* (?)

62b) Visina trostrane uspravne piramide $h = 60$ *cm*, a osnovka je zadana sa stranicama $a = 14$ *cm*, $b = 15$ *cm* i polumjerom upisanog kruga $\rho = 4$. Koliki je volumen i površina piramide?

62c) Normalni presjek kosog valjka je romb s kraćom dijagonalom $d = 6$; visina je valjka $h = 4{\cdot}8$. Koliki mu je volumen?

62d) U kvadratičnoj piramidi osnovni je brid $= a$, a pobočni $= \frac{5}{6}a$; u piramidi je upisana kocka tako da njezina gornja osnovka prestavlja ujedno presjek piramide. Koliki je volumen kocke?

62e) Zadan je volumen uspravna čunja $V = 12\pi$ i oplošje (površina) $O = 24\pi$. Koliki je polumjer osnovke i visina čunja? $r = 3$, $v = 4$

62f) Os kosa čunja (konusa) $a = 10$, najmanja stranica $b = \sqrt{73}$, najveća $c = 17$; Koliki je polumjer osnovke i volumen čunja? $r = 9$

62g) Krnju piramidu (v = visina, a i b osnovni bridovi) treba presjeći ravninom, paralelnom sa bazama piramide, da se dobiveni dijelovi odnose kao $p : q$. R. : $y : v = (a - x) : (a - b)$; $\frac{y}{3}(a^2 + ax + x^2) : \frac{v}{3}(a^2 + ab + b^2)$ $= p : (p + q)$; x stranica presjeka $= \sqrt[3]{\frac{qa^3 + pb^3}{p + q}}$; y = visina donjeg dijela piramide = ?

62h) Oko kugle polumjera $r = 5$ *cm* opisan je uspravan krnji čunj. Koliki mu je volumen i površina, ako je opseg donje baze čunja dvaputa veći od opsega gornje baze čunja?

62i) Kolike su baze krnje piramide, ako je $V = 72$, $h = 3$, $B_1 + B_2 = 10$? Kolika je površina piramide ako je ona kvadratična?

63) U kojoj udaljenosti treba presjeći zadanu piramidu (B i h), da se volumen raspolovi?

64) Volumen uspravna krnja čunja jest V (120π), visina h (10), $R : r = 1 : 5$. Izračunaj R, r i s.

64a) Odrediti plašt (omotač), krnjeg čunja iz $V = 7\pi$, $h = 3$, $R + r = 3$.

65) Kuglin sektor (isječak) ima volumen $V = 72\pi$, pripadajući segment $V_1 = 45\pi$ cm^3. Koliki je polumjer osnovke i visina segmenta?

66) Debljina gvozdene šuplje kugle je $d = 3$ *cm*, a njezina težina $T = 96{,}28$ *kg*. Koliki joj je polumjer? (Spec. težina željeza $s = 7{,}2$).

66a) Odrediti volumen i kalotu onog kuglina segmenta, koji nadopunjuje istostraničan čunj u kuglin isječak.

67) Leća sa 36 *cm* žarišne duljine stvara sliku predmeta, koja se približi leći za 36 *cm*, kad se predmet udalji za 68 *cm* od leće. Kolika je udaljenost predmeta i slike? $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$

68) Dva koncentr. kruga (R i r) treba presjeći nekim pravcem, da na njemu dobijemo 3 uzastopna jednaka dijela.

68a) Površinu kruga polumjera R treba pomoću druga 2 koncentrična kruga razdijeliti na dijelove koji se odnose kao 1 : 2 : 3. Koliki su polumjeri tih krugova?

68b) Površinu zadanog kruga (R) razdijeliti sa druga 2 koncentrična kruga na tri jednaka dijela.

68c) Dijagonale su deltoida $d_1 = 15$, $d_2 = 22$ i opseg $2s = 56$: kolike su mu stranice? $a = 8{\cdot}5$, $b = 19{\cdot}5$.

68d) Istokračan trapez sa paralelnim stranicama $a = 8$, $c = 2$ ujedno je tangencijalni četverokut. Kolika je površina između upisanog kruga i trapeza? $P = \frac{a + c}{2}\sqrt{ac} - \frac{ac}{4}\pi$ i t. d.

69) Izvan dva koncentr. kruga (R i r) odrediti tačku S, da je tangenta iz te tačke na unutarnji krug n-puta veća od tangente na vanjski krug. Diskusija? Na pr. $n = 2, 3$; $d = \sqrt{\frac{R^2 n^2 - r^2}{n^2 - 1}}$

70) Harmonijska sredina dvaju brojeva je a (4·8) a produkt između aritm. sredine i geom. je b ($10\sqrt{6}$). Koji su to brojevi? (6,4).

71) Suma cifara četiriznamenkasta broja iznosi 12, a broj iz zadnje dvije cifre jednak je trostrukom broju iz prve dvije; suma vanjskih cifara za 2 je veća od sume unutarnjih, suma dviju prvih cifara pomnožena sa zadnjom daje šesterokratnik treće cifre. Koji je to broj? (1236).

72) Dvije kugle, udaljene 120 m, kotrljaju se jedna prema drugoj i susreću se nakon svakih 20 sekunda; jedna treba za 1 m $\frac{1}{3}$ sekunde manje nego druga. Kolike su brzine obiju kugala?

73) Volumen između dvije koncentrične kugle $= \frac{61}{3}\pi$, a udaljenost površina $= 1$; koliki su im polumjeri?

73a) Krnji (zarubljeni) čunj (R, r, h) treba paralelnim prosjekom raspoloviti. $\left(\text{Polumjer prosjeka} = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}\right)$

73b) Donja osnovka kuglina sloja jest glavni kuglin krug. Koji dio kugline površine zauzima zona sloja, ako je njegov volumen $V = \frac{34}{3}\pi$, polumjer gornje osnovke $\varrho_2 = 1$, a visina $h = 2$?

73c) Volumen uspravna krnjeg čunja $V = 39\pi$, polumjer veće osnovke $R = 5$ i visina $h = 4$. Koliki je volumen oko njega opisane kugle?

73d) Koliko je oplošje (površina) uspravna zarubljenja čunja, čija je visina $=$ harmonijska sredina između polumjera? $O = 2\pi(R^2 + r^2)$

73e) Volumen i kalotu segmenta izraziti pomoću visine h i polumjera osnovke ϱ.
$V = \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + h^2)$; $P = \pi(\varrho^2 + h^2)$

73f) Koliki je paralelni presjek koji visinu zarubljene piramide dijeli u odnosu $m : n$?
$P = \left(\frac{m\sqrt{B_1} + n\sqrt{B_2}}{m + n}\right)^2$

74) Suma članova proporcije je 56, umnožak unutarnjih je 84, a suma kvadrata svih članova iznosi 1250. Kako glasi proporcija?

74a) Suma vanjskih članova geom. proporcije $= 4$, suma unutarnjih $= 5$, a suma kubusa svih članova $= 81$. Kako glasi proporcija. $(2 : 1 = 4 : 2)$.

75) Kako glasi postojana proporcija kod koje suma članova 18, a njihov produkt 256? $(2 : 4 = 4 : 8)$

76) U tetivnom četverokutu stranice čine proporciju; suma njihovih kvadrata je $= 65$, opseg četverokuta $= 15$, a produkt dijagonala $= 26$. Kolike su stranice? (Stranice su: 4, 6, 2, 3)

77) Volumen kvadera je $V = 60\,cm^3$, površina $= 94\,cm^2$, opseg osnove $= 14\,cm$. Koliki su bridovi? $(a = 3,\ b = 4,\ c = 5)$

78) Odredi polumjer osnovke uspravna kruga čunja, koji ima jednak volumen, jednaku površinu i jednaku visinu sa polukuglom polumjera $r = 4$.

79) Oko vrhova trokuta $(a = 10,\ b = 12,\ c = 13)$ opišu se tri kugle, koje se dodiruju; koliki je volumen kugle opisane oko tih kugala?

80) Osnovni bridovi trostrane piramide su 7, 8, 9, a pobočni stoje međusobno okomito; koliki su ti bridovi?

81) Hipotenuza pravokutnog trokuta za 2 je manja od obiju kateta skupa, a površina trokuta $= 6$. Kolike su mu stranice? (3, 4, 5).

82) U pravok. trokutu visina na hipotenuza $h = 2{\cdot}4$, polumjer upisanog kruga $\varrho = 1$. Kolike su stranice i površina? $(a = 3,\ b = 4,\ c = 5)$

83) Opseg pravokutnog trokuta $2s = 12$, stranica upisanog kvadrata sa zajedničkim vrhom $= \frac{12}{7}$. Kolike su stranice i površina trokuta? (3, 4, 5; $P = 6$).

84) Riješiti pravokutan trokut, ako je zadano $2s = 252$ i $\varrho + r = 73$ ($\varrho =$ polumjer upisanog, $r =$ polumjer opisanog kruga, $2s =$ opseg).

85) Riješiti pravokutan trokut, ako polumjer upisanog kruga $\varrho = 1$ a površina $P = 6$. (3, 4, 5 stranice).

86) Riješiti pravokutan trokut, kojemu je polumjer opisanog kruga $r = 2{\cdot}5$, a stranica upisanog kvadrata sa zajedničkim vrhom $= \frac{12}{7}$. (Stranice 3, 4, 5)

87) Isto tako ako je zadano *a)* $\varrho = 2$, $P = 24$; *b)* $h = 4{\cdot}8$ (visina na hipotenuzu) i $r = 5$; *c)* hipotenuza ($c = 10$), i stranica upisanog kvadrata $m = \frac{24}{7}$. [R.: *a), b), c)* stranice su 6, 8, 10]

Neodređene (Diofantove) jednadžbe

(više nepoznanica nego jednadžbi)

a) Linearne jednadžbe

Def.:

1. $ax + by = c$ ima ∞ rješenjâ — **1. Funkcionalna jednadžba**
2. $ax + by = c$ ima rješenjâ u cijelim brojevima, ako su a i b relat. prosti. — **2. Neodređena Diofantova jedn.** (rješenja u cijelim brojevima . . .)

Pravila:

3. $ax + by = c$ — **3. Opće rješenje Diofantove jednadžbe**

$$\text{R.}: \begin{array}{l|l} x = \alpha - bu & (\text{ili } x = \alpha + bu \\ y = \beta + au & \phantom{(\text{ili }} y = \beta - au) \end{array}$$

gdje su $x = \alpha$, $y = \beta$... posebna rješenja

4. $x > 0$ i $y > 0$ za — **4. Uvjet za cijele i pozitivne korijene**

$$-\frac{\beta}{a} \leq u \leq \frac{\alpha}{b}$$

5. $ax + by = c$ — **5. Metoda supstitucije**

$$\text{R.}: x = \frac{c - by}{a}, \quad x = 0, 1, 2 \ldots$$

$$(x = \alpha - bu, \; y = \beta + au)$$

6. $5x + 7y = 52$ — **6. Eulerova metoda** (dovodi do jedn. u kojoj jedna nepoznanica ima koef. 1, pa se jedn. lako dade riješiti)

$$\text{R}: x = \frac{52 - 7y}{5} = 10 - y - \frac{2y - 2}{5}$$

$$= 10 - y - u \quad \Big| \; \frac{2y - 2}{5} = u$$

$$2y - 2 = 5u$$

$$y = 2u + 1 + \frac{u}{2} \quad \Big\| \; \frac{u}{2} = u_1$$

$$y = 2u + 1 + u_1$$

$$u = 2u_1$$

$$u_1 = 0$$

$$u = 0, \; x_1 = 9, \; y_1 = 1$$

$$\text{Opće rj.}: \begin{array}{l} x = 9 - 7u \\ y = 1 + 5u \end{array}$$

Za

u	0	1	2	3 . . .
x	9	2	-5	-12 . .
y	1	6	11	16 . . .

1. $ax + by = c$ ima ograničen broj cijelih i pozitivnih korijena.
2. $ax - ay = c$ ima neograničen . . .
3. Sistem od n jedn. sa $n + 1$ nepoznanica eliminacijom svede se na 1 jedn. sa 2 nepozn.
3. Dokaz: ad 3)

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ a\alpha + b\beta = c \end{array} \quad \Big| \; \text{Neka su korijeni } \alpha \text{ i } \beta$$

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0$$

$$x - \alpha = -\frac{b(y - \beta)}{a}$$

Za cijele brojeve mora biti $y - \beta = au$

b) Kvadratne jednadžbe

1. $x^2 + y^2 = z^2$

   R.: $x = u^2 - v^2$; $y = 2uv$; $z = u^2 + v^2$

2. Na pr.

u	v	x	y	z
2	1	3	4	5
4	1	15	8	17
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29

1. **Pitagorina jednadžba**
   [Rješenja iz $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$; u i v su cijeli brojevi]
2. **Pitagorini trokuti**
   [$a = 2m$, $b = m^2 - 1$, $c = m^2 + 1$]
3. $x^n + y^n = z^n$ nerješivo u cijelim brojevima za $n > 2$ (Fermatov veliki stav!)

Primjer I

1. $9x - 4y = 7$

$$\text{R.}: y = \frac{9x - 7}{4} = 2x + \frac{x - 7}{4} \quad \left\| \quad \frac{x-7}{4} = u \right.$$

$$x = 7 + 4u$$
$$y = 14 + 9u$$

Za u	0, 1, 2, -1 ...
x	7, 11, 15, 3 ...
y	14, 23, 32, 5 ...

2. Koji troznamenkasti brojevi podijeljeni sa 13 daju ostatak 4, a djeljivi su sa 9?

R.: $N = 13x + 4 = 9y$

$$= 13x - 9y = -4$$

$$y = 1 + \frac{4x + 4}{9}$$

$$x = 2u - 1 + \frac{u}{4} \quad \left\| \quad \frac{u}{4} = u_1 \right.$$

$$u = 4u_1$$
$$x = 2u - 1 + u_1$$
$$y = 1 + u$$

za $u = 0$

$x = -1$

$y = 1$

Opće rj.: $x = -1 + 9u$

$$N = 13(-1 + 9u) + 4$$
$$= 117u - 9$$

Iz $99 < 117u - 9 < 1000$ slijedi

$u = 1, 2, \ldots 8,$

$N = 108, 225, 341, \ldots$

3. U troznamenkastom je broju cifra jedinica $\frac{1}{9}$, a cifra stotica $\frac{1}{4}$ preostalog broja. Koji je to broj?

R.: $z = \dfrac{10x + y}{9}$, $x = \dfrac{10y + z}{4}$

$$10x + y - 9z = 0$$
$$4x - 10y - z = 0$$
$$26x - 91y = 0$$

$$x = 3y + \frac{y}{2} \quad \Big| \quad (= u)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 2u \\ x &= 7u \\ z &= 8u \end{aligned}\right\} \text{ Broj je } 728$$

4. Diferencija dvaju pozitivnih i cijelih brojeva za 11 je veća od njihova kvocijenta. Koji su to brojevi?

R.: $x - y - \dfrac{x}{y} = 11$

$$x = (y^2 + 11y) : (y - 1)$$

$$= y + 12 + \frac{12}{y - 1} \quad \Big| \quad y - 1 \text{ je mjera od } 12 \text{ i t d.}$$

5. Za koje je vrijednosti od x izraz $a^2x^2 + b$ puni kvadrat?

R.: $m\sqrt{a^2x^2 + b} = max + n$

$$x = \frac{bm^2 - n^2}{2am \,.\, n}$$

6. $6x - 5y + 3z = 1$

R.: Za jednu nepoznanicu uzme se vrijednost po volji i onda se rješava kao i obično.

Zadaci

1. Riješi u cijelim brojevima:

   a) $5x - 7y = 4$, b) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$, c) $x - 2y + 3z = 4$, $5x + 4y + 3z = 7$,
   d) $x + 5y + 7z = 2$

2. Riješiti u cijelim i pozitivnim brojevima:

   a) $5x + 7y = 52$, $\begin{array}{l|l} x = 2 & 9 \\ y = 6 & 1 \end{array}$, b) $3x + 5y + 7z = 67$, d) $17\,x - 11y = 86$.

   e) Koje vrijednosti od x i y, koje se nalaze između 10 i 30, zadovoljavaju jednadžbu $16x + 9y = 576$? $(x = 27,\ y = 16$

3. a) Odrediti troznamenkaste brojeve koji su djeljivi sa 7, a podijeljeni sa 9 daju ostatak 3.

   b) Periferiju kruga razdijeliti u 2 dijela od kojih prvi ima 9 a drugi 12 jednakih dijelova. Koliko stupanja iznosi svaki dio?

   c) Neko treba iz posude od $17\frac{1}{2}\,l$ pretočiti u boce po $\frac{3}{4}\,l$ i $\frac{2}{3}\,l$. Koliko mora uzeti jednih i drugih?

4. Kolo sa 84 zupca goni drugo sa 222. U početku hvata prvi zubac prvog kotača zadnji zubac drugoga. Nakon koliko okretaja prvog kotača hvata njegov prvi zubac 18-ti zubac drugog kotača? Koje zupce on nikada ne zahvata? (Perioda doticaja je 37 okretaja prvoga ili 14 okretaja drugoga).

5. Trošak izleta od 3000 D platio je svaki muškarac po 80 D, svaka žena po 60 D, a svako dijete po 30 D. Koliko je bilo jednih, a koliko drugih?

6. Broj 1000 podijeliti u takva 3 dijela, da je prvi djeljiv sa 18, a drugi sa 24 i treći sa 30.

7. Neka je žena prodala guske po 50 D, patke 30, kokoši 20 i golubove po 10 D u svemu za 480 D. Koliko je bilo svake vrste? (3, 5, 4, 10)

8. U nekom računu stoji: ° 1 *kg* po 2,8 D = ° 98,38 D. Tamo gdje je ° brojka je nejasna i prebrisana. Koje su prebrisane cifre?

9. Neko želi da kupi za 100 D olovaka po 2, 4 i 6 D. Koliko će dobiti od svake vrste?

10. Jedan kemijski proces zbiva se po jedn.: $u.\,Al_2\,Cl_6 + x.\,Na_2 = y\,Al_2 + z\,Na\,Cl$; odredi najmanje cijele brojeve za u, x, y, z, da ova jedn. postoji. $[8\,u + 2\,x = 2\,y + 2\,z]$.

10a. Isto za $x\,Ca\,C_2 + y\,H_2O = u\,Ca\,(OH)_2 + v\,C_2\,H_2$ (proces u acetilnoj lampi!). $[CaC_2 + 2\,H_2O = Ca(OH)_2 + C_2H_2]$.

10b. Isto za: $x\,Zn_3\,As_2 + y\,H_2\,SO_4 = u\,As\,H_3 + v\,Zn\,SO_4$ [Formula: $Zn_3\,As_2 + 3\,H_2SO_4 = 2\,As\,H_3 + 3\,Zn\,SO_4$].

11. Razlomak $\frac{421}{140}$ rastaviti u 3 razlomka sa jednocifrenim nazivnicima. $(\frac{7}{5} + \frac{6}{7} + \frac{3}{4})$

12. Jedan kut nekog trokuta djeliv je sa 8, drugi sa 9, a treći sa 16. Koji su to kutevi? (36, 48, 96)

13. Vodovodna cijev duga 150 *m* može se sastaviti iz komada po 2 *m*, 2·5 *m* i 3 *m*; od prvih treba uzeti što je moguće manje komada. Koliko je potrebno svake vrste?

14. Jedan kotač sa 17 zubaca zahvata u drugi sa 13 zubaca. Koliko je okretaja potrebno, da svaki zubac prvog zahvati u istu luknju drugoga? (Iza 13 *u* okretaja prvoga ili 17 *u* drugoga).

15. Za koje je cijele ili razlomljene brojeve $x^y = y^x$? R.: $y = mx$; ... $x = 1, 2, \frac{9}{4} \dots y = 1, 4, \frac{27}{8} \dots ; x = \sqrt[m-1]{m},\ y = m \sqrt[m-1]{m}$

16. Za koju je vrijednost od x izraz $a^2 x^2 + b x + c$ potpuni kvadrat? [R.: $x = (c - n^2) : (2an - b)$].

17. Odrediti trokute, čije su stranice uzastopni brojevi, a površina racionalna. (R.: $x-1$, x, $x+1$, jedn.: $3x^2 - y^2 = 12$ riješiti u cijelim brojevima. $x = (a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n$ ..... Poznata rješenja $x = 4 \cdot (3, 4, 5)$ i $x = 14$ $(13, 14, 15)$, $x = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \dots 51, 52, 53$

18. Neko kupi na berzi 48 tona žita za 10.000 Din i to pšenicu po 260 Din, raž 190 Din, zob 170 Din. Sjetio se poslije da je broj tona raži djeljiv sa 10; koliko je kupio svake vrste žita?

B. Funkcije. Grafičko rješavanje jednadžbi

Def.:

1—2. Vrste veličina

1. **Konstante:** (stalne veličine) $\pi, e, a, b \dots 1, 2, \dots 100$. zadržavaju tokom računa uvijek istu vrijednost.

2. **Varijable:** (promjenljive vel.) $u, v, r \dots x, y, x \dots$ mijenjaju tokom računa vrijednost.

3. Odnos između varijabli ($V = abc$; V je **funkcija** ili **zavisno-promjenljiva** vel. od a, b, c, dok su ove međusobno **nezavisno-promj.**

3. **y je funkcija od x** ako zadanoj vrijednosti od x odgovaraju određene vrijednosti od y t. j. **promjenu x-a prati promjena y-a ...**

Za	$x \longrightarrow$	x_1	x_2	$x_3 \dots$	x_n
slijedi:	$y = f(x) \rightarrow$	y_1	y_2	$y_3 \dots$	y_n

4. $y = f(x)$ — y = funkcija (zavisna varijabla); x = argumenat (nezavisna varijabla)

4. Opseg ($o \equiv y$) istostran. trokuta je funkcija njegove stranice ($a \equiv x$): $y = 3x$

$x \longrightarrow$	1	2	3	4...
$y = 3x \rightarrow$	3	6	9	12...

Pazi! Formule $\equiv$ funkcionalni odnosi
Fizik. zakoni $\equiv$ funkcionalni odnosi
Primjeri = ?

5. Površina kruga P jest funkcija njegova polumjera

$P = r^2\pi$

$r \rightarrow$	1	2	3	...
$P \rightarrow$	π	4π	9π	...

6. Opća oznaka funkcionalnog odnosa
a) Eksplicitna funkcija
b) Implicitna „

6. a) $y = f(x)$ ili b) $f(x, y) = \emptyset$
$y = F(x)$ $\quad F(x, y) = \emptyset$
$\vdots \qquad \vdots$

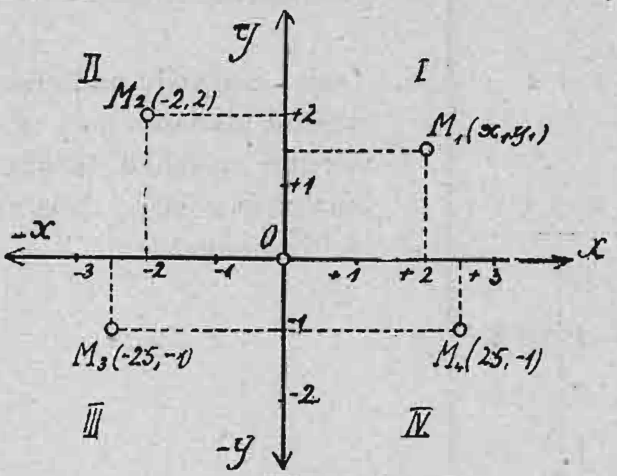
7. Funkcionalne jednadžbe (izriču način, kako ovisi jedna varijabla o drugoj)

7. $P = r^2\pi$, $\quad (P = f(r))$
$O = 2r\pi$ $\quad (O = \varphi(r))$
$s = \frac{g}{2} t^2$ $\quad (s = \varphi(t))$

8. z je funkcija od $x, y \dots$

8. $z = f(x, y \dots)$

Grafičko predočivanje funkcije



Slika 3

$O \equiv$ ishodište koordantnog sustava

$X \equiv$ os apscisa

$Y \equiv$ os ordinata

$M_1(x_1, y_1) \equiv$ koordinate tačke

M_1 i to $x_1 \equiv$ apscisa

$y_1 \equiv$ ordinata

I, II . . . kvadranti

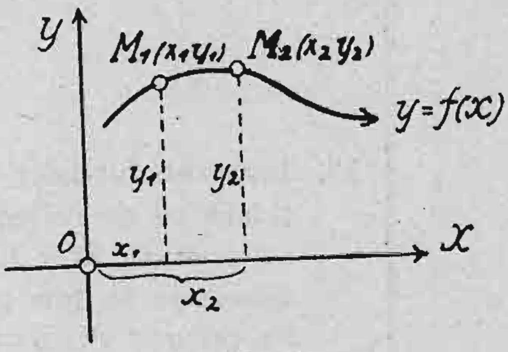
1. Pravokutni koordinantni sustav (Sl. 3)
2. $O\ (o,\ o) \equiv$ koordinate ishodišta

Šta se razumije pod koordinatama tačke? (Mjerni brojevi njezine projekcione udaljenoati od Y-osi i X-osi)

Nacrtaj tačke M_1 $(-1, 3)$, M_3 $(3, -4)$

Osnovka istrostr. trokuta pada u X-os a visina u Y-os. Koordinate vrhova trokuta $=$?

3. **Funkcionalni odnos $y = f(x)$ grafički (geom. slika) predočuje se linijom,** i to:
   a) Argumenat x odgovara apscisi
   b) Funkcija y odgovara ordinati
   c) Svakom paru argumenta i funkcije t. j. pripadajućim rješenjima: $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$... odgovara geometrijski tačka, a nizu rješenja linija (Sl. 4).



Slika 4

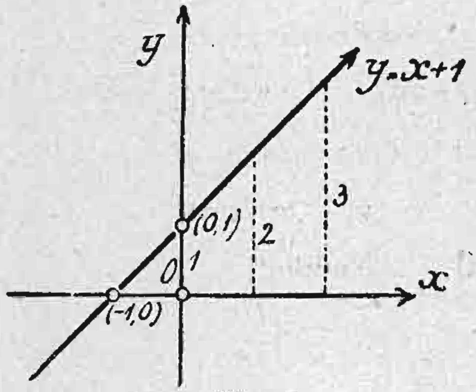
4. **Koordinate svake tačke jedne linije zadovoljavaju njezinu jednadžbu i obratno: svakom paru rješenja zadane jadnadžbe odgovara 1 (ili više) tačaka pripadajuće linije.**

3. **Funkcionalnoj jedn.** $y = f(x)$ pripada linija i obratno

3—4. **Odnos između linije i funkc. jednadžbe**

5. $X \equiv y = 0,$ ordinate *su* : 0
$Y \equiv x = 0,$ apscise *su* : 0

6. Odnose 3—4 provjeri na liniji $y = x + 1$ (Sl. 5).



Slika 5

x	y
0	1
1	2
2	3
-1	0
-2	-1

5: **Jednadžba** X-osi i Y-osi

6. **Treba najprije naći** nekoliko rješenja zadane jedn. i time odrediti nekoliko tačaka kojima prolazi linija i dalje na njoj ispitivati odnose.

7. Jednadžbe su nulificirane funkcije.

8. $\left.\begin{aligned} f(x) &\equiv y = kx + b \\ &\equiv Ax + By + c = 0 \end{aligned}\right\}$ Linearna funkcija

9. $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

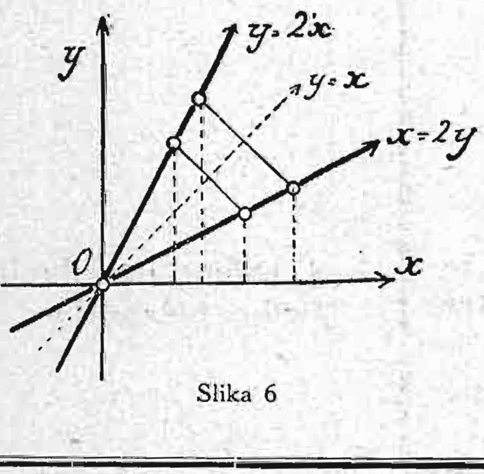
10. $y = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots}$

(9.–10.) Racionalna

11. $y = \sqrt[n]{a^2 - x^2}$ } Iracionalna

12. $y = a^x$ — Eksponencialne
$y = {}^a\log x$ — Logaritamske
$y = \sin x$
$y = \cos x$
$y = \operatorname{tg} x$
$y = \operatorname{cotg} x$
($\sin$, $\cos$, tg, cotg) Goniometrijske

13.



Slika 6

7. **Jednadžbe i funkcije**

8—11. **Algebarske funkcije**
(Varijable su vezane algebarskim operacijama: sabiranjem, oduzimanjem, korijenovanjem, stepenovanjem)

12. **Transcedentne funkcije**

13. **Inverzne funkcije** (Sl. 6)
(Linije su simetrične obzirom na pravac $y = x$ t. j. ogledavaju se na tom pravcu.
Na pr. $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$

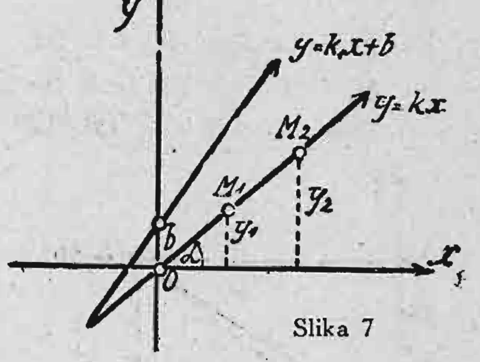
a) Algebarske funkcije

Primjer I

1. Linearna funkcija — pravac

1. Funkcija $y = kx + b$ pretstavlja pravac p
2. Jednadžba pravca $p \equiv \ldots y = kx + b$
3. $b \equiv$ otsječak na Y-osi

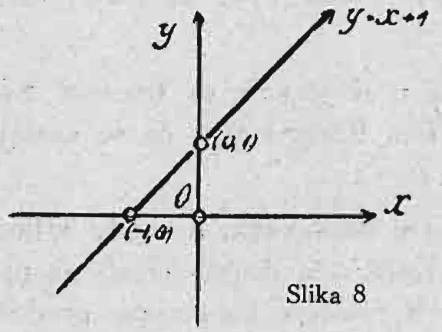
$k \equiv \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \ldots tg\alpha \equiv$ koeficijent smjera



Slika 7

1) Predočiti grafički $y = x + 1$

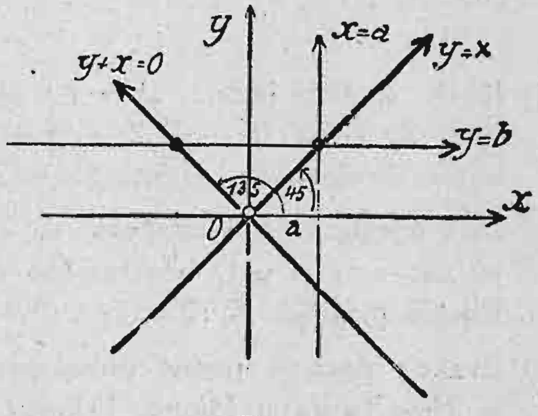
R.: Odrediti najprije nekoliko tačaka (dvije) kojima prolazi zadani pravac (sl. 8)



x	y
0	1
1	2

Slika 8

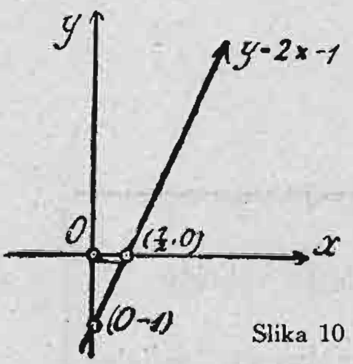
2) Na sl. 7 i 9 objasni pojedine funkcije



Slika 9

3) Riješi grafički linearnu jednadžbu: $2x - 2 = 0$

R.: Konstruiše se pravac $y = 2x - 1$ i njegovo sjecište sa X — osiju ($y = 0$) daje korijen jedn. (sl. 10)



x	y
0	-1
$\frac{1}{2}$	0

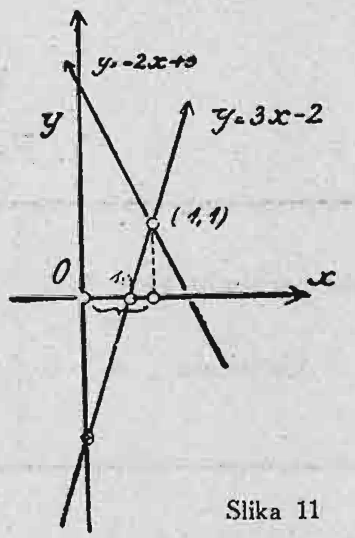
Rješenje: $x = \frac{1}{2}$

Slika 10

4) Riješi sistem jednadžbi: $y - 3x = -2$, $y + 2x = 3$

R.: Koordinate sjecišta pravacâ $y = 3x - 2$ i $y = -2x + 3$ jesu korijeni jedn. (sl. 11).

Rješenje: $x = 1$ $y = 1$

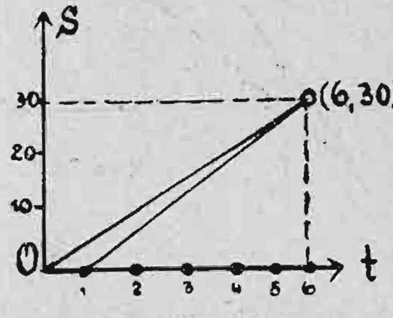


Slika 11

5) Iz mjesta 0 krene glasnik sa brzinom $c = 5\,km$ na sat. Nakon jednog sata krene za njim drugi sa brzinom od $6\,km$. Kada i gdje će se sastati? ($s = ct$!)

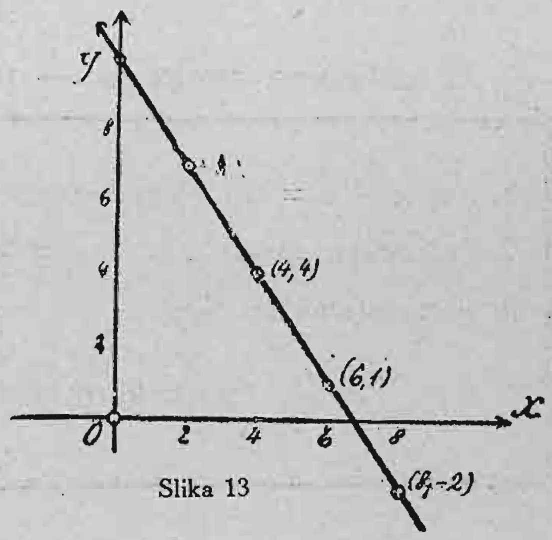
R.: Put prvoga je $s = 5t$, drugog $s = 6(t-1) = 6t - 6$. Sjecište gornjih pravaca = ? (sl. 12)

R.: $t = 6$ $s = 30$



Slika 12

6) Riješi Diofantovu jedn.: $3x + 2y = 20$ (sl. 13) u cijelim brojevima.



Slika 13

7) Riješi grafički jedn.: a) $-3x + 2 = 0$; b) $2x + 3 = 0$; c) $5x + 2y + 1 = 0$, $2x + 3y + 2 = 0$; d) $2x - y + 5 = 0$, $6x - 3y + 1 = 0$; e) $2x + 3y = 16$ u cijelim brojevima; f) isto $5x + 2y = 16$.

8) Dva mjesta O i A udaljena su $22\,km$. Iz O pođe u A glasnik sa brzinom $5\,km$ na sat, a iz A u O istovremeno drugi brzinom $6\,km$. Kada i gdje će se sastati? Riješiti grafički. R.: $S = 5t$ i $S = -6t + 22$; ... $t = 2$ ...

9) Svakog dana o podne polazi parobrod iz Havrea u New-York, a u isto vrijeme iz New-Yorka u Havre. Prijevoz traje 7 dana. Koliko će drugih sresti na putu parobrod koji danas o podne ostavlja Havre? R.: Puteve parobroda predočiti grafički. 1 u luci pri polasku, 1 u luci pri dolasku i 13 na otvorenom moru.

10) Suma je funkcija sumandâ, diferencija minuenda i suptrahenda; predoči to grafički ($a + x = y$, $a - x = y$; $x - a = y$...; $a = 1, 2$...)

11) Na 12^h pokrivaju se kazaljke na satu; kada će se drugi puta pokrivati? Riješiti grafički.

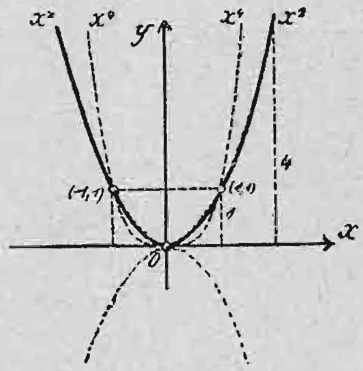
Primjer II

1. Funkcija $y = x^n$

predočuje parabolu za $n > 0$	$y = ax^n \rightarrow$ upravno razmjerne veličine
hiperbolu „ $n > 0$	$y = ax^{-n}$ ili $y = \dfrac{a}{x^n} \rightarrow$ obrnuto " veličine

a) $n =$ parni broj > 0:

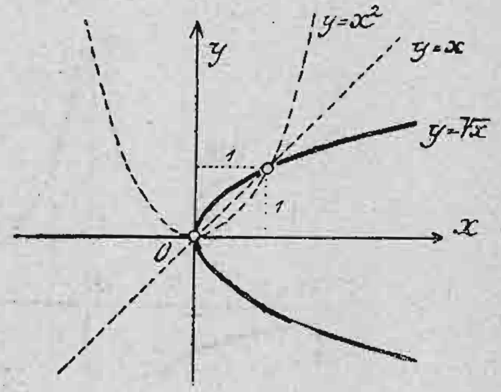
1) $F(x) \equiv y = x^2$ (parabola)



x	y
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4
:	:

Slika 14

2) $y = \sqrt{x}$ ili $x = y^2$ (sl. 15)

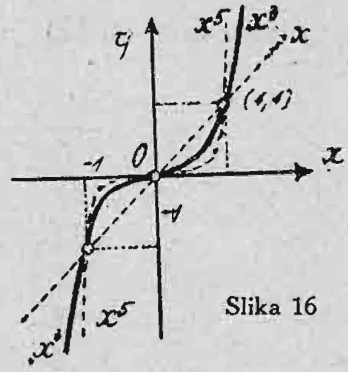


x	y
0	0
1	1
4	± 2
9	± 3
∞	∞

Slika 15

b) $n =$ neparni broj > 0:

3) $F(x) \equiv y = x^3$ (kubična parabola)



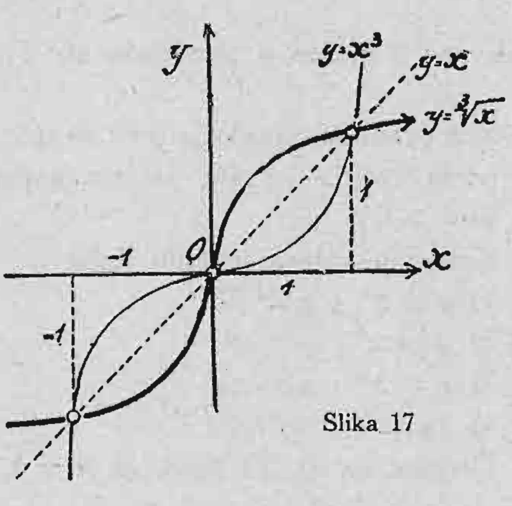
Slika 16

Tok funkcije:

$x \to 1,\ 2,\ -1,\ -2$

$y \to 1,\ 8 \ldots -1,\ -8 \ldots$

4) $F(x) \equiv y = \sqrt[3]{x}$ ili $x = y^3$



Slika 17

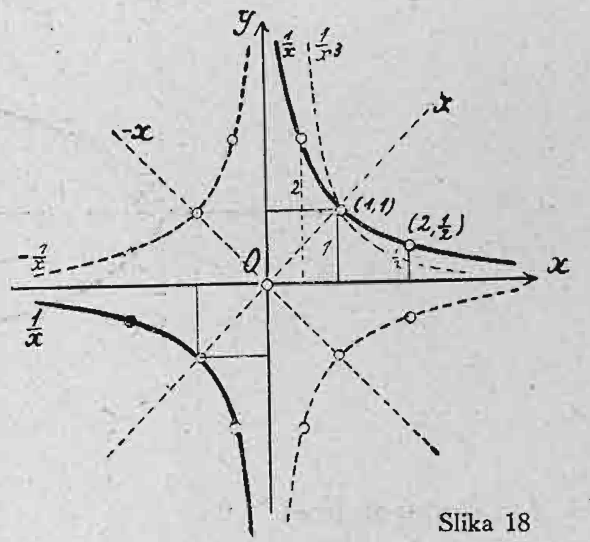
Tok funkcije:

x	$y = \sqrt[3]{x}$
$-\infty$	$-\infty$
$-\infty < x_1 < x_2 \ldots < 0$	$-\infty < y_1 < y_2 \ldots < 0$
$0 < x_1 < x_2 \ldots < +\infty$	$0 < y_1 < y_2 \ldots < +\infty$
$+\infty$	$+\infty$

Koje vrste parabola razlikujemo? Koju proporcionalnost predočuju one grafički? Kakvu ulogu igraju kod parabola tačke 0 $(0, 0)$ M_1 $(1, 1)$ i M_2 $(-1, +1)$?

c) $n =$ **neparni broj** < 0:

5) $y = x^{-1}$ ili $y = \frac{1}{x}$ (istostranična hiperbola sl. 18)

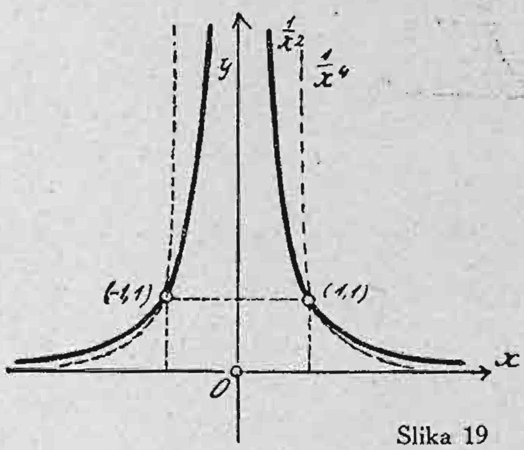


x	y
± 0	$\pm \infty$
$\pm \infty$	± 0
1	1
-1	-1
2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	2

Slika 18

d) $n =$ **paran broj** < 0:

6) $y = x^{-2}$ ili $y = \frac{1}{x^2}$ (hiperbola sl. 19)

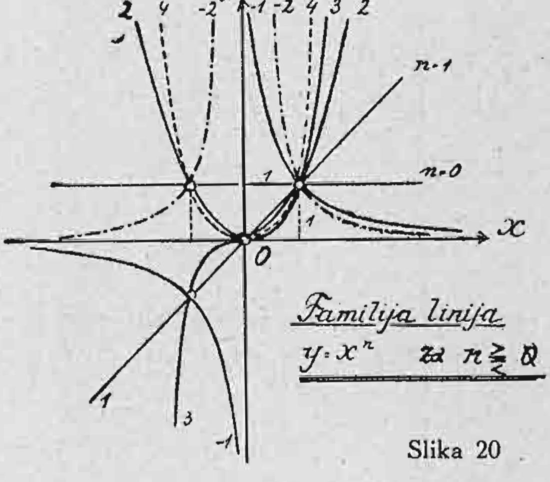


x	y
± 0	$\pm \infty$
1	1
± 2	$\frac{1}{4}$
$\pm \frac{1}{2}$	4
± 3	$\frac{1}{9}$
:	:

Slika 19

Koordinatne su osi asimptote linije (sijeku se s njome u neizmjernosti i neprestano joj se približuju!)

7) Familija linija $y = x^n$ za $n \gtreqless 0$



Slika 20

a) Šta predočuje funkcija $y = x^n$ za $n =$ parni broj > 0 a šta za $n =$ neparni broj > 0?

b) Kakav je odnos između linija
1) $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$
2) $y = x^2$ i $y = x^4$
3) $y = x^2$ i $x = ax^2$
4) $xy = 1$ i $xy^2 = 1$?

c) Objasni na sl. 20 linije za $n = 1, 0, -1, \frac{1}{p}, \ldots$

d) Predoči grafički 1) sve vrste parabolâ; 2) sve vrste hiperbola.

Pazi: Linije za $-n$ neparno spadaju u grupu slike 18, a sa $-n$ parno u grupu slike 19.

2. Grafičko rješavanje jedn. višeg stepena pomoću parabola

1) Riješi grafički jedn. $ax^2+bx+c=0$

R. Rješenje = sjecište linija:

$y=ax^2$, $ay+bx=c$ | na pr.: $2x^2+3x+1=0$?

2) Riješi grafički jednadžbu:

$$\frac{a}{x}+bx+c=0$$

R.: Sjecište hiperbole i pravca:

$$y=\frac{1}{x} \quad \text{i}$$

$$ay+bx+c=0$$

Isto tako $\frac{a}{x^n}+bx+c=0$ ili

$$px^n+qx^{n+1}+r=0$$

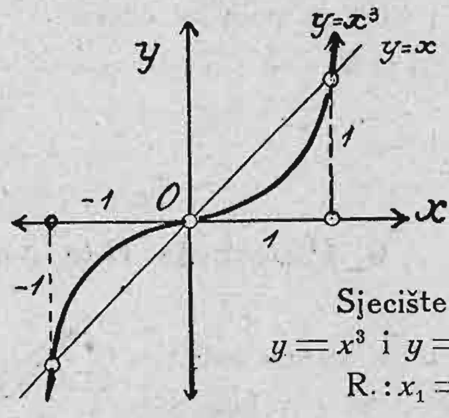
3) Riješi grafički $ax^3+bx+c=0$

Rješenje = sjecište linija

$y=x^3$ i

$ay+bx+c=0$,

na pr.: $x^3-x=0$



Slika 21

Sjecište linija:

$y=x^3$ i $y=x$ (Sl. 21)

R.: $x_1=0$

$x_2=1$

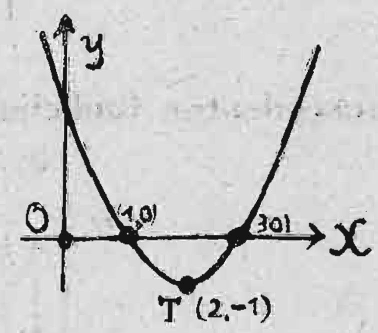
$x_3=-1$

3. Funkcija (kvadr.) $y=ax^2+bx+c$

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$ ≡ parabola, koja ima tjeme (vrh) u tački $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$;

os joj je pravac $x=-\frac{b}{2a}$

1) $y=x^2-4x+3$ grafički prestavlja parabolu sl. 22



R.: $y=x^2-4x+3$

$=(x-2)^2-1$

Sjecište sa Y-osi = ?

" " X-osi = ?

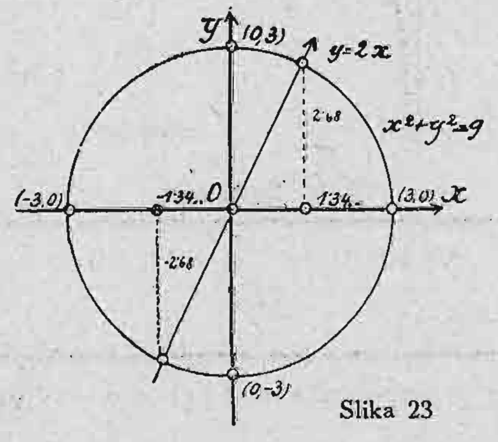
Tjeme parabole: $T(2,-1)$

4. Kružnica $K(0, 0\ r) \equiv x^2+y^2=r^2$

Središte $C(0,0)$, $r \equiv$ polumjer; općenito $K(p,q,r) \equiv (x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

1) Riješi grafički jednadžbe: $x^2+y^2=9$, $y=2x$

R.: Sjecište kružnice i pravca (Sl. 23) = ?



Slika 23

R: $x_{1,2}=\pm 1{\cdot}34$

Tok funkcije $x^2+y^2=r^2$:

$-r \leq x \leq r$

$-r \leq y \leq r$

5. Elipsa $(0,\ 0\ a,\ b) \equiv bx^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

1) Riješi grafički sistem jednadžbi:

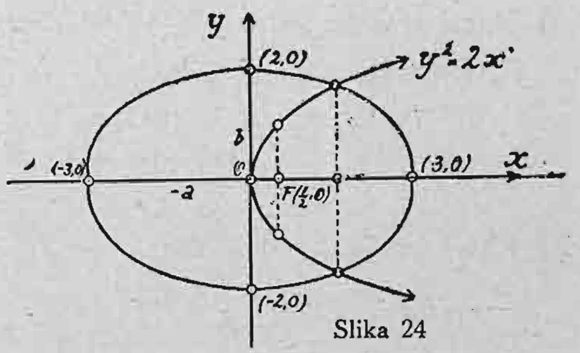
$$\begin{array}{r|l} 4x^2 + 9y^2 = 36 & \rightarrow \text{elipsa} \\ y^2 = 2x & \rightarrow \text{parabola} \end{array}$$

R.: Sjecište elipse i parabole (sl. 24)!

O: $a(3)$ i $b(2)$ su polu-osi elipse

Tok $f(x, y) = 0$: $-a \leq x \leq +a$

$-b \leq y \leq +b$



Slika 24

R.: $x = 1{\cdot}5,\ y_{1,2} = \pm 1{\cdot}73$

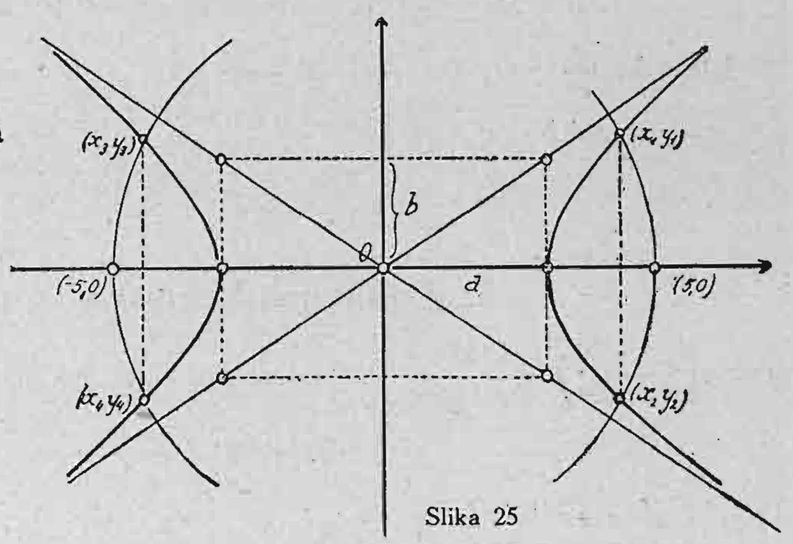
6. Hiperbola $H(0,\ 0\ a,\ b) \equiv b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

1) Riješi grafički sistem jedn.:

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 - 9y^2 = 36 & \rightarrow \text{hiperbola} \\ x^2 + y^2 = 5 & \rightarrow \text{krug} \end{array}$$

R.: Sjecište hiperbole i kruga (sl. 25) = ?

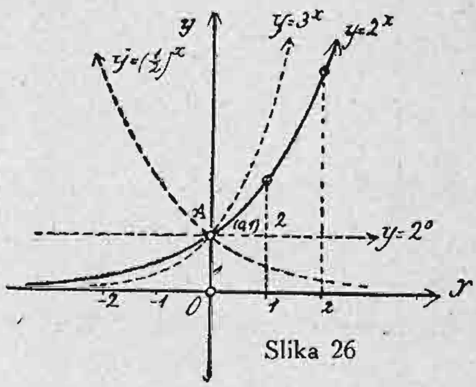
O: Pravac $p \equiv y = \pm \dfrac{b}{a} x$ zove se asimptota hiperbole [tangenta hiperbole u tački $M(\infty, \infty)$]



Slika 25

b) Transcedentne funkcije

1) $y = 2^x$



Slika 26

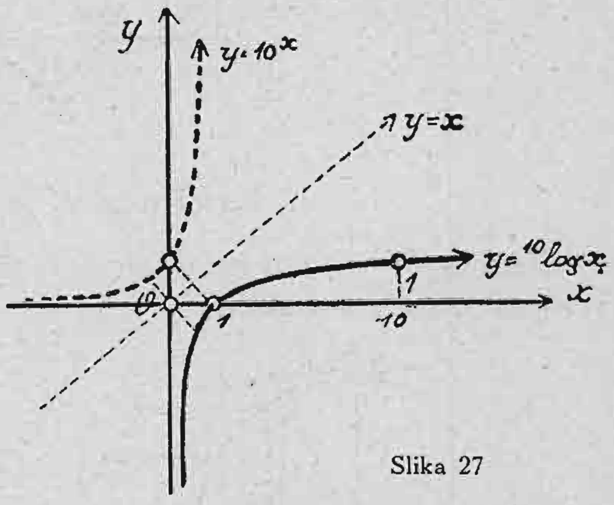
Tok funkcije:

x	0	1	2...	-1	-2	...	∞
y	1	2	4...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		0

X-os je asimptota od $f(x) \equiv y = a^x$

Sjecište linije sa Y-osi $\equiv$?

2) $y = {}^{10}\log x$



Slika 27

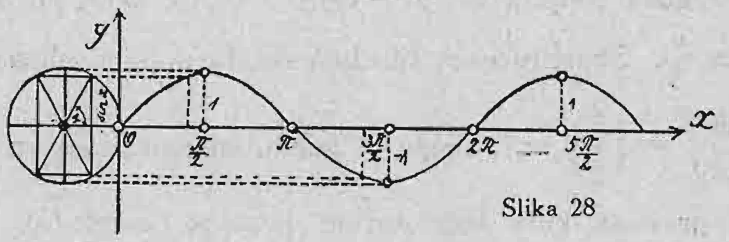
Tok funkcije:

x	1	10	100	...	0·1	0·01	...
y	0	1	2	...	-1	-2	...

Y-os je asimptota od $f(x) \equiv y = {}^{a}\log x$

3) $y = \sin x$

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

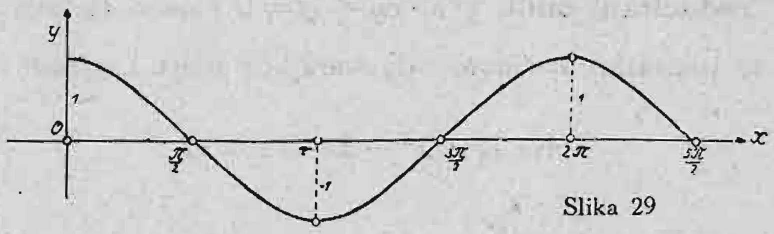


Slika 28

Sinus linija (sinusoida)

4) $y = \cos x$

x	y
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



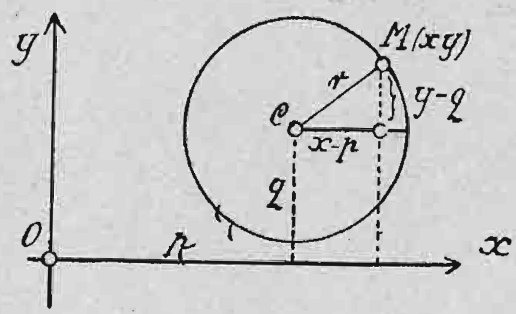
Slika 29

***c)* Geometrijsko mjesto:** niz tačaka, koje zadovoljavaju zadani uslov.

Pokretna tačka koja neprekidno mijenja svoje koordinate prema zadanom uslovu opisuje geometr. mjesto (liniju!). Taj uslov izražen pomoću relacije koordinata pokretne tačke jest jednadžba odgovarajućeg geometrijskog mjesta.

1) Odredi geom. mjesto tačaka čije koordinate sa koordinantnim osima zatvaraju pravokutnike konstantne površine a. R.: $\underline{x \cdot y = a}$ | t. j. hiperbola sl. 18

2) Odredi geom. mjesto tačaka koje su jednako udaljene od zadane tačke $C(p, q)$.



Slika 30

R.: Udaljenost $\equiv r$. Za pokretnu tačku $M(x, y)$ vrijedi odnos:
$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, t. j. kružnica!

3) Koje je geom. mjesto središtâ svih krugova koji dodiruju zadani krug $K(8, 0, 5)$ i pravac $x = -3$?
R.: Neka je $M(u, v)$ središte takvog jednog kruga sa polumjerom r.
Postoji sistem jednadžbi:

$$\begin{array}{c|} (u-8)^2 + v^2 = (5+r)^2 \\ u + 3 = r \\ \hline \end{array}$$

$(u-8)^2 + v^2 = (8+u)^2$ ili $\underline{v^2 = 32u}$; dakle parabola!

4) Odrediti gem. mjesto težišta svih trokuta nad velikom osi elipse, ako im se suprotan vrh nalazi na opsegu elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
R.: Koordinate vrhova trokuta su $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(x, y)$, a koordinate težišta $u = \frac{x}{3}$, $v = \frac{y}{3}$. Supstitucijom tih koordinata u jedn. elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dobiva se: $\left(\frac{u}{\frac{a}{3}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\frac{b}{3}}\right)^2 = 1$; dakle je geom. mjesto elipsa sa poluosnima $\frac{a}{3}, \frac{b}{3}$.

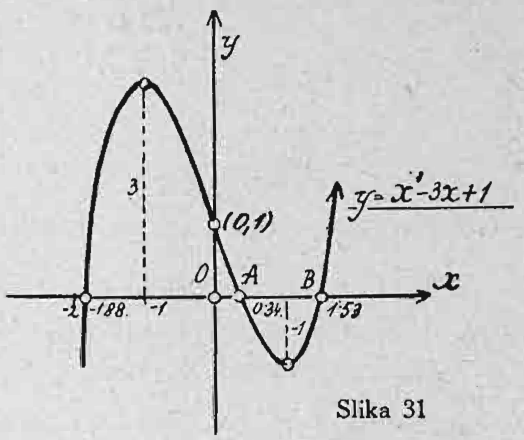
5) Među kracima pravoga kuta leže dužine jednako duge (s). Gdje leže središta tih dužina? (R.: na krugu $4u^2 + 4v^2 = s^2$, slika?)

b) Rješavanje jedn. 3eg stepena:

1. Jednadžba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ supstitucijom $x = y - \frac{a}{3}$ najprije se svede na **reducirani oblik** $y^3 + py + q = 0$ i onda rješava grafički:

1) Konstruiše se poznatim načinom odgovarajuća linija i odrede njezina sjecišta sa X-osi.

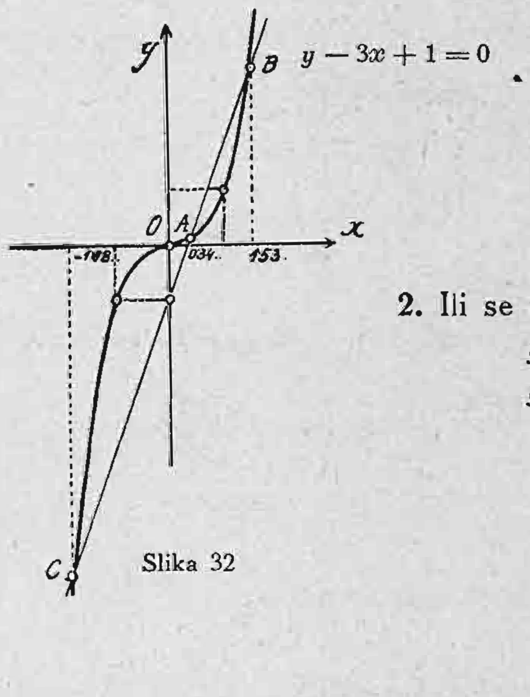
Na pr.: $x^3 - 3x + 1 = \varnothing$



Rješenja:
$x_1 = 1{\cdot}53$
$x_2 = 0{\cdot}34$
$x_3 = -1{\cdot}88$

Slika 31

2) Odrede se rješenja sistema $y = x^3$ → kubična parabola!
$y - 3x + 1 = 0$ → pravac.



Slika 32

2. Ili se traže koordinate sjecišta linija
$y = x^3$ i
$y + ax^2 + bx + c = 0$

3. Algebarski prema formuli (Kardanovoj):

1) $x^3 + px + q = 0$. Za: $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ ili $27q^2 + 4q^2 > 0$;

$$R,: x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = u + v$$

$$\left[x_2 = i_1 u + i_2 v;\ x_3 = i_2 u + i_1 v;\ i_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right]$$

Za $27q^2 + 4p^3 < 0$:
(**Casus irreducibilis!**)

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\gamma}{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\gamma}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\gamma}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Korjeni su realni

$$\cos\gamma = \mp \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}};$$

mora biti $p < 0$

Prema tome su rješenja jednadžbe $x^3 - px + q = 0$: $x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\frac{\gamma}{3}$,

$x_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\gamma}{3} - 60^0\right)$, $x_3 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\gamma}{3} + 60^0\right)$, gdje je

$$\cos\gamma = -\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Zadaci

1. 1) Dokaži za funkciju $f(x) = x^2$ odnos $f(-x) = f(+x)$.

2) Nacrtaj grafički funkcije $y = \pm 3x^2$ i $y = \pm\frac{1}{3}x^2$. Kakav je njihov odnos prema $y = \pm x^2$?

3) Pretstavi grafički funkcije $y = x^4$ i $y = \pm x^6$. Kakav je njihov odnos prema $y = x^2$?

4) Pretstavi grafički funkcije $y = 3x^3$ i $y = \frac{1}{3}x^3$. Kakav je njihov odnos prema $y = x^3$?

5) Dokaži za funkciju $f(x) = x^3$ odnos $f(-x) = -f(+x)$.

6) Predočiti grafički odnos između površine kruga i polumjera ($y = \pi . x^2$).

7) Isto za odnos između volumena kocke (kugle) V i brida (polumjera) ($y = x^3$ i $y = \frac{4\pi}{3}x^3$).

8) Predočiti grafički: a) $y = -x^2$; b) $y = -x^3$; c) $y = -x^5$. Kakav je njihov odnos prema $f(x) = x^2, x^3 \ldots$?

9) Ispitati grafički i aritmetički tok funkcija $f(x) = \pm x^2, \pm x^3 \ldots$

2. 1) Grafički predočiti i ispitati tok funkcije a) $f(x) = \sqrt{x}$; b) $f(x) = -\sqrt{x}$; c) $f(x) = 2\sqrt{x}$. Kakav je odnos te funkcije prema $y = x^2$?

2) Isto tako za funkcije: a) $y = \sqrt[3]{x}$; b) $y = 2\sqrt[5]{x}$; c) $y = \sqrt[3]{4x}$. Kakav je odnos funkcije $y = \sqrt[n]{x}$ prema $y = x^n$?

3) Grafički i aritmetički ispitati tok funkcije a) $y = \sqrt[3]{x^2}$; b) $O = 6\sqrt[3]{V^2}$; c) $y^4 = x^2$ $\left[R.: \sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right) . \left(\sqrt[3]{x}\right)\right]$.

4) Predočiti grafički odnos između brida i volumena kocke $\left(y = \sqrt[3]{x}\right)$.

5) Kako se konstruiše linija $y = \sqrt[m]{x^n}$ iz $f(x) = \sqrt[m]{x}$?

6) Energija mase m upravno je razmjerna sa kvadratom brzine i sa masom $\left(E = \frac{m v^2}{2}\right)$. Predočiti taj odnos grafički.

3. 1) Predočiti grafički i ispitati grafički i algebarski tok zadanih funkcijâ: a) $f(x) = \pm \frac{1}{x}$; b) $y = \frac{2}{x}$; c) $y = \frac{1}{2x}$; d) $y = -\frac{3}{x}$

2) Napetost i volumen gasa uz stalnu temperaturu jesu obrnuto razmjerni (Boyle-Mariottov zakon!). Predočiti taj zakon grafički. $\left(\text{R.}: xy = k,\ y = \frac{k}{x}\right)$

3) Predočiti grafički funkcije: a) $y = \frac{1}{x^3}$; b) $yx^5 = 2$; c) $2y^2 = 3x^{-3}$

4) Kakav odnos postoji između funkcije $y = \frac{a}{x}$ i $y = \frac{a}{x^n}$, gdje je $n =$ neparan cio broj?

5) Predočiti grafički i ispitati tok funkcije a) $y = \frac{1}{x^2}$; b) $y = -\frac{1}{x^2}$

6) Isto za funkcije a) $y = \frac{1}{x^4}$; b) $y x^6 = 2$. Kakav je odnos između funkcija $y = \frac{1}{x^2}$ i $y = \frac{1}{x^n}$ za $n =$ paran cio broj?

7) Newtonov zakon gravitacije predočiti grafički $\left(y = \frac{m_1 m_2}{x^2} \cdot k \text{ ili } y = \frac{a}{x^2}\right)$.

8) Jakost polja sile opada sa kvadratom udaljenosti od izvora. Predočiti taj odnos grafički!

9) Predočiti grafički $y = x^n$ za $n \lesseqgtr 0$ na istom koord. sustavu.

4. 1) Predočiti grafički i ispitati tok funkcije a) $x^2 + y^2 = 4$; b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$; c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$.

2) Predočiti grafički i ispitati tok funkcije a) $4x^2 + 25y^2 = 100$; b) $4x^2 - 25y^2 = 100$; c) $x^2 - y^2 = 4$; d) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

3) Predočiti grafički a) $y = x^2 + 2x + 5$; b) $y = -2x^2 + 4x - 8$.

4) Predočiti grafički a) $y = x + x^2 - 2$; b) $y = (x+1)(x-1)(x+2)$; c) $y = x + \frac{1}{x}$; d) $y = x - \frac{1}{x^2} + 1$; e) $y = \frac{x}{x-1}$; f) $y = \frac{x}{x^2-1} + 1$.

5. 1) Predočiti grafički na istom koodr. sustavu funkcije: a) $y = 3^x$ i $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; b) $y = 3^x$ i $y = {}^3\log x$; c) $y = 10^x$ i $y = {}^{10}\log x$. Kakav odnos postoji između njih? Ispitati grafički i aritmetički tok zadanih funkcija.

2) Predočiti grafički funkcije i ispitati njihov tok: a) $y = e^x$; b) $y = x + e^x$; c) $y = x \pm 10^x$; d) $y = x^2 - 2^x$; e) $y = {}^e\log x$; f) $y = x - {}^{10}\log x$; g) $y = {}^{10}\log x + 1$.

6. 1) Predočiti grafički: a) $y = \sin x$; b) $y = \cos x$; c) $y = \operatorname{tg} x$; d) $y = \operatorname{cotg} x$

2) Isto za funkcije: a) $y = x \pm \sin x$; b) $y = \sin x \pm \cos x$.

7. Riješi grafički sistem jednadžbi:

1) $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$; 2) $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13 \\ \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}$; 3) $\begin{aligned} y^2 &= 6x \\ 2x - y &= 6 \end{aligned}$;

4) $\begin{aligned} xy &= 10 \\ 2x + 3y &= 19 \end{aligned}$; 5) $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ y^2 &= 2x + 10 \end{aligned}$; 6) $\begin{aligned} y &= 3x^2 + 4x - 5 \\ y + x &= 1 \end{aligned}$:

7) $\begin{matrix} x^2 + y = 5 \\ y^2 + x = 3 \end{matrix}$; 8) $\begin{matrix} \frac{x^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1 \\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = \frac{16}{25} \end{matrix}$; 9) $\begin{matrix} y = (x-1)^2 + 2 \\ y + x = 3 \end{matrix}$.

8. Riješi grafički 1) $\begin{matrix} y = x^3 \\ x^3 = y \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} y^2 = 2px \\ x^2 = 2py \end{matrix}$; 3) $\begin{matrix} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{matrix}$

9. Riješiti grafički i algebarski: a) $x^3 - 12x + 16 = 0$ $(x_1 = -4,\ x_{2,3} = 2)$; b) $x^3 - 3x + 2 = 0$ $(x_1 = -2,\ x_{2,3} = 1)$; c) $x^9 - x = 0$ (grafički i algebarski); d) $x^3 + 12x^2 + 45x + 50 = 0$; e) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$; f) $x^5 - 3x + 2 = 0$; g) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ (R.: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$); h) $x^4 - x = 0$; i) $x^2 - \sqrt{x} = 0$.

10. Riješiti grafički jednadžbe: 1) $x^4 + x^3 = 2$; 2) $x^5 + 7x = 3$; 3) $x^7 + 2x^6 = 1$; 4) $\sqrt[x]{x} = 0{\cdot}5$; 5) $x^x = x$; 5a) $10^x = -x$; 6) $x - (\frac{1}{2})^x = 0$; 7) ${}^{10}\log x = (\frac{1}{10})^x$ 7a) $x^x = 10$; 8) $x = \sin x$; 9) $\sin x = \operatorname{tg} x$; 10) $\sin x = \sin 2x$; 10a) $\log x = 4x$; 11) $\cos x - x^2 = 0$; 12) $\cos x = x$ $(x_1 = 42^0\,20'\,47'')$; 13) $x^x = 100\,x$ $(x_1 = 4{\cdot}2,\ x_2 = 0{,}009)$

11. Riješiti grafički: 1) $\log x = -x$; 1a) $x + \log x = 2$; 2) $x + \log x = x \log x$; $(x_1 = 12{,}3\ldots\ x_2 = 0{,}3)$
Isto tako jednadžbe: a) $a \cos x \pm b \sin x = c$. Up.: Staviti $\cos x = u$, $\sin x = v$ i odrediti sjecište linija $au \pm bv = c$ i $u^2 + v^2 = 1$ (krug!). Tako riješi: a) $5 \cos x = 3 \sin x$; c) $4 \cos x + 2 \sin x = 1$; d) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; e) $\sin x \,.\, \cos x = \frac{1}{2}$; f) $2 \sin x = \cos^2 x$ (parabola i krug!); g) $\sin x + \cos x = 1$

12. Koja jedn. ima za korijene: a) $1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4}$; b) $\pm 2,\ \pm 2i$; c) $\pm 1,\ \pm i,\ 3$?

13. Riješiti grafički (i računski!) simultane jedn. $x - y = 20^0$, $\cos x + \cos y = 0{\cdot}6$
R.: Najprije se nacrta linija $u = \cos x + \cos (x - 20^0)$, što se najzgodnije čini tako da se nacrta $u = \cos x$ i $u = \cos (x - 20^0)$ i ordinate jednakih apscisa zbroje; slika se funkcije $u = \cos (x - 20^0)$ dobije tako da se slika funkcije $\cos x$ pomakne za 20^0 u osi x. Rješenje zadatka daju apscise tačaka, u kojima pravac $u = 0{\cdot}6$ siječe liniju $u = \cos x + \cos (x - 20^0)$
Na isti način riješi: 1) $x + y = 60$; $\cos x + \sin x = 0{\cdot}8$; 2) $x - y = 40$, $2 \sin x + \sin y = 1$; 3) $x + y = 30^0$; $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2$

Infinitezimalni račun

(diferencijalni i integralni)

1. Beskonačno mala veličina je ona **varijabla,** čija apsolutna vrijednost može postati manja od ma kako malene stalne veličine: $\frac{x}{\infty}$ ili $x \longrightarrow 0$

2. Beskonačno velika veličina $x \rightarrow \infty$ postaje veća od ma kako velike stalne veličine.

1—2. Neizmjerno male i neizmjerno velike veličine

1)

$\frac{a}{10^n}$	a	$0{\cdot}1a$	$0{\cdot}01a$	$\ldots 0$
n	0	1	2	$\ldots \infty$

2)

10^n	1	10	100	1000	...	∞
n	0	1	2	3	...	∞

3. Granične vrijednosti zadane varijable

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a + bx}{b + ax}\right) = \lim_{x \to \infty} \left\{\frac{\frac{a}{x} + b}{\frac{b}{x} + b}\right\} = \frac{b}{a}$$

3. **Granica zadane varijable** je onaj stalni broj kojemu se varijabla po vrijednosti tako približuje, da je razlika između njih beskonačno mala.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ b - f(a) \to 0\end{array}\right\} \to \text{limes } f(x) \text{ za } x \to a \text{ je } b!$$

1)

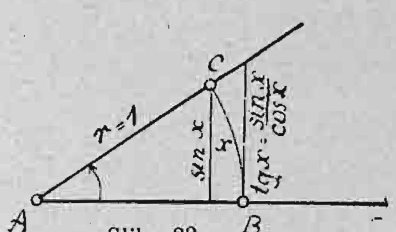
$\frac{1}{10^n}$	1	0·1	0·01	0·001	0·0001	. . . Ø
n	0	1	2	3	4	. . . ∞

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a}{10^n} = 0$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty$

4) $\lim\limits_{n \to \infty} 10^n = \infty$ 4a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{3}{3 + x}\right) = 1$



Slika 33

$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ i t. d.

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2{\cdot}71828\ldots \equiv e$

4. Neprekidna funkcija

4. Funkcija je neprekidna, ako uzastopnim vrlo malim prirastajima argumenata odgovaraju uzastopni vrlo mali prirastaji funkcije. Vrijednosti su funkcije određene i konačne.

I Diferencijalni račun

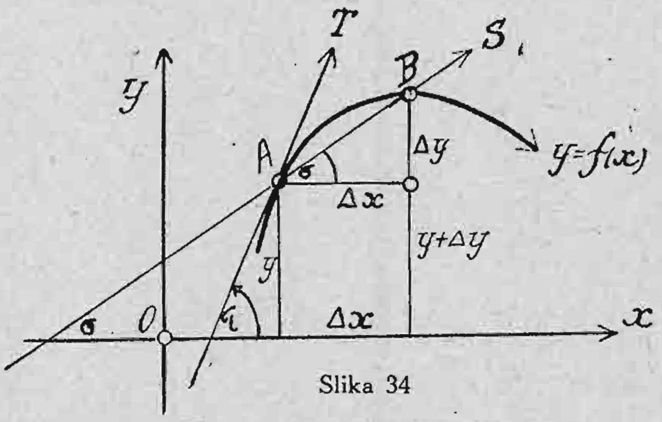
Def.:

1—2. Čim se bavi diferencijalni račun?

1. Omjer beskonačno malih veličina može prestavljati određen broj $\left(\frac{4}{10^n} : \frac{2}{10^n} = \frac{0}{0} = 2, \text{ za } n = \infty\right)$. Takav omjer igra veoma veliku ulogu pri ispitivanju funkcija u fizici i matematici.

2. **Diferencijalni račun bavi se ispoređivanjem beskon. malih veličina i time proračunava konačne veličine.**

3.



Slika 34

3. Derivacija, izvod ili diferencijalni kvocijent (sl. 34)

$A[x, f(x)]$; $B[x + \Delta x, f(x + \Delta x)]$;

$\Delta x \equiv$ prirast argumenta; $\Delta y \equiv$ prirast funkije;

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \sigma = k,$

(= koeficijent smjera sekante

= srednja brzina pokretne tačke A)

2) $S \equiv$ sekanta, $T \equiv$ tangenta — 2) Izvod kao granična vrijednost . . .

Za $B \to A$, $\Delta y \to dy \equiv$ diferencijal funkcije $\to 0$

$S \to T$, $\Delta x \to dx \equiv$ „ argumenta $\to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{B \to A} \operatorname{tg} \sigma =$$

$$= \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = k$$

3) $\dfrac{df(x)}{dx} \equiv \dfrac{dy}{dx} \equiv y' \equiv f'(x) = \operatorname{tg} \tau = k$ — → (y' čit. y-crta, $f'(x)$: f-crta x, $\frac{dy}{dx}$: de y kroz de x)

($\equiv$ koeficijent smjera tangente)

4) $\dfrac{dy}{dx} \equiv \dfrac{\text{diferencijal funkcije}}{\text{diferencijal argumenta}}$ — 4) Računsko značenje 1og izvoda

5) $\dfrac{dy}{dx} \equiv \operatorname{tg} \tau = k$ (koeficijent smjera tangente zadane linije) — 5) Geometrijsko značenje 1og izvoda

6) $\dfrac{ds}{dt} = v$ (momentana brzina pokretne tačka A)

7) $dy = f'(x)\, dx$ — 7) Diferencijal funkcije

8) $\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $y''' = ?$, $y^{(n)} = ?$ — 8) 2-gi, 3-ći . . . izvod

9) $y = x$ — **9—11. Primjeri**

$y + \Delta y = x + \Delta x$ $\qquad \lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 1$

$\Delta y = \Delta x$

10) $\underline{y = x^2}$

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x$$

11) $y = \sin x$

$y + \Delta y = \sin (x + \Delta x)$

$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

za $\Delta x \to 0$:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

Pravila

1. $\underline{y = a}$

$y' = 0$

2. $\underline{y = a f(x)}$

$y' = a f'(x)$

3. $\underline{y = x^n}$

$y' = nx^{n-1}$

4. $y = \frac{a}{x^n} = a \cdot x^{-n}$

$y' = -anx^{-n-1} = -\frac{an}{x^{n+1}}$

1. **Izvod konstante** $(= 0)$
2. **Konstanta ne utječe na izvod** $f(x)$
3. **Izvod potencije**

$y = x;\ y' = 1$

5. $y = \sqrt{f(x)} = [f(x)]^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

6. $\underline{y = u(x) \pm v(x) \pm}$

$y' = u' \pm v' \pm \ldots$

7. $\underline{y = u \cdot v = F(x) \cdot f(x)}$

$y' = u'v + v'u$

8. $\underline{y = \frac{u}{v} = \frac{u(x)}{v(x)}}$

$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

9. $\begin{cases} y = F[f(x)] \text{ ili} \\ y = F(u),\ u = f(x) \end{cases}$

$y' = F(u)' \cdot f'(x)$ ili

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

10. $\underline{y = \sin x}$

$y' = \cos x$

13. $\underline{y = \operatorname{cotg} x}$

$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5. **Kvadratni korijen**

6. **Izvod sume (razlike)**

$$\left[\frac{dy}{dx} = \frac{d(u \pm v \pm \ldots)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \ldots\right]$$

7. **Izvod produkata funkcijâ**

8. **Izvod kvocijenta**

9. **Posredna funkcija**

(Funkcija od funkcije!)

$\underline{y = F(f(x))}$ na pr.

$y^2 = \sqrt{u} = \sqrt{1 + x^2}$

10.—15. **Transcedentne funkcije**

11. $y = \cos x$

$y' = -\sin x$

12. $y = \operatorname{tg} x$

$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

14. $y = a^x$

$y' = a^x \log a$

15. $y = \log [f(x)]$

$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

14. **Baza logaritama** $= e$

$y = e^x;\ y' = e^x;\ y'' = e^x \ldots$

$y = \log x$

$y' = \dfrac{1}{x}$

Opaska:

1. $z = f(xy)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

2. $f(xy) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

Funkcija se diferencira po svakoj varijabli napose (parcijalni izvodi), a pri tom se smatra druga varijabla konstantnom pa se **djelomični diferencijali** zbroje i t. d.

3. $x^2 + y^2 = r^2$

$2xdx + 2ydy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

4. Dokazi se izvađaju iz osnovnog pojma izvoda kao granične vrijednosti količnika $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$, na pr.:

a) $y = uv$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$$

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \quad \Bigg| \begin{array}{l} 3a\ \Delta x \to 0 \\ \Delta v \to 0 \end{array}$$

b) $y = \dfrac{u}{v} = uv^{-1}$ i t. d.

c) $y = F[f(x)]$, gdje $f(x) = u$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

1. $\dfrac{\partial f(xy)}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial f(xy)}{\partial y}$ zovu se **parcijalni izvodi**

2. **Implicitna funkcija**

3. **Primjer**

4. **Dokazi**

Primjer I

1. $y = ax + b$

$y' = a; \quad y'' = 0; \quad y''' = 0; \quad y^{(n)} = 0$

2. $y = x^n + ax^3 + x - \frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^3} + \frac{1}{x} + c - \frac{a}{b}$

R. : $y = x^n + ax^3 + x - ax^{-n} + bx^{-3} + x^{-1} + c - \frac{a}{b}$

$y' = nx^{n-1} + 3ax^2 + 1 + anx^{-n-1} - 3bx^{-4} - x^{-2}$

$y' = nx^{n-1} + 3ax^2 + 1 + \frac{an}{x^{n+1}} - \frac{3b}{x^4} - \frac{1}{x^2}$

3. $y = 3x^5 - 7\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^{-\frac{1}{3}}}$

R. : $y = 3x^5 - 7x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}$

$y' = 15x^4 - \frac{7}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$

$y' = 15x^4 - \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$y' = 15x^4 - \frac{7}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$

4. $y = \sqrt{x} + x\sqrt{x} + x\sqrt[n]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x\sqrt{x}} + \frac{n}{x\sqrt[n]{x}}$

$y = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{n+1}{n}} + 2x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{3}{2}} + nx^{\frac{-n-1}{n}}$

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{n+1}{n}x^{\frac{n+1}{n}-1} - x^{-\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}x^{-\frac{5}{2}} - (n+1)x^{\frac{-n-1}{n}-1}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{n+1}{n\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{9}{2\sqrt{x^5}} - \frac{n+1}{\sqrt[n]{x^{2n+1}}}$

5. $y = x^n - 3x^3 + 2x^2 - 1; \quad y' = nx^{n-1} - 9x^2 + 4;$

$y'' = n(n-1)x^{n-2} - 18x + 4; \quad y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3} - 18; \quad y^{(VI)} = ?$

Primjer II

1. $y = (ax + b)(ax - b)$

R. : $y' = a(ax - b) + (ax + b)\,a = 2a^2x$

$y'' = 2a^2; \quad y''' = 0; \quad y^{(IV)} = 0$

2. $y = \frac{2x^2 + x + 3}{4x - 1}$

$y' = \frac{(4x+1)(4x-1) - (2x^2 + x + 3)\,4}{(4x-1)^2} =$

$= \frac{8x^2 - 4x - 13}{16x^2 - 8x + 1}$

3. $y = \sqrt{1 + x^2}$ (Posredna funkcija !)

$\frac{dy}{da} = \frac{d\sqrt{1+x^2}}{d(1+x^2)} \cdot \frac{d(1+x^2)}{dx}$

$= \frac{d(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{d\,1 + x^2)} \cdot \frac{d(1+x^2)}{dx}$

$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\,2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

4. $y = \sin^n x$

$y' = \frac{d \sin^n x}{d \sin x} \cdot \frac{d \sin x}{dx}$

$y' = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x$

5. $y = \cos ax \mid$

R.; Supst. $ax = z$, $dz = adx$

6. $y = (a + bx + cx^2)^n$

$y' = \frac{d(a + bx + cx^2)^n}{d(a + bx + cx^2)} \cdot \frac{d(a + bx + cx^2)}{dx}$

$y' = n(a + bx + cx^2)^{n-1} \cdot (b + 2cx)$

7. $y = ax + \sin ax - b \cos\frac{x}{b}$

$y' = a + a \cos ax + \sin\frac{x}{b}$

Primjer III

1. $y = x^6 + \frac{x^5}{10} - x^2 + 2x - a$

$y' = 6x^5 + \frac{x^4}{2} - 2x + 2$

$y'' = 30x^4 + 2x^3 - 2$

$y''' = 120x^3 + 6x$

2. $3y = \sqrt{bx + y}$

R.: $9y^2 = bx + y$

$18ydy = bdx + dy$; $18ydy - dy = bdx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{18y - 1}$

3. $y^2 = 2py$

$2ydy = 2pdx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$

4. $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$

$2xb^2dx \pm 2a^2ydy = 0$

$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2x}{a^2y}$

Zadaci

1) Odrediti izvod funkcije $y = 2x^2 + 2 - 3x$ za $x_1 = -3$; $(y' = 4x - 3 = -15)$

2) Isto funkcije $f(x) = 3x^8 + 2x^9 - x^6$ za $x_1 = 1$; $\left(\frac{dy}{dx} = 8 \cdot 3x^7 + 2 \cdot 9x^8 - 6x^5 = 36\right)$

3) $y = \frac{3}{4} x^4 + 5$
$(y' = 3x^3)$
$y''' = ?)$

4) $y = x^3 - 3x + 2$
$(y' = 3x^2 - 3)$
$y''' = ?)$

5) $y = ax^3 \pm bx^2 \pm cx + d$
$(y' = 3ax^2 \pm 2bx \pm c)$

6) $y = x^3 + \sqrt[3]{x}$
$(y''' = ?)$

7) $y = \sqrt{2px}$

8) $y = x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{x}$; $y' = ?\, y'' = ?$

9) $y = x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$
$(y' = \frac{3}{2}\sqrt{x})$

10) $y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x + \frac{1}{x} + 1$
$\left(y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + 1 - \frac{1}{x^2}\right)$

11) $y = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}$
$y' = -\frac{4}{x^5} - \frac{6}{x^4} + \frac{6}{x^3}$

11a) Koliki je uspon krive linije $y = x^3$ u tački $(1, ?)$ $(y' = \operatorname{tg} \alpha = 3)$. Predočiti grafički.

12) $y = ax^2 + \frac{b}{x^2} - \sqrt[n]{x}$
$\left(y' = 2ax - \frac{2b}{x^3} - \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}\right)$

13) $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2} = y$
$(y' = ?)$

14) $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

14a) $4y = \sqrt{3x^2 + 2x}$

15) $y = x^2(x^2 + 1)(x - 1)$
$(y''' = ?)$

16) $y = (ax + b) \sin x$
$y' = (ax + b) \cos x + a \sin x$

17) $y = a \cos x + b \sin x + c$

18) $y = (x^2 + x)\sqrt[3]{x} + x\sqrt{a^2 - x^2}$

19) $y = \sin x \cos(\alpha - x)$
$y' = \cos x \cos(\alpha - x) + \sin x \sin(\alpha - x$

20) $y = x \sin x + \sin\frac{1}{x}$
$\left(y' = x \cos + \sin x - \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)$

21) $y = \frac{x^2}{x^3 + 4} + \frac{1}{2x - 1}$

22) $y = (ax + b)^n + (x^n - 1)^m$
$\left[y' = an(ax + b)^{n-1} + m(x^n - 1)n \cdot x^{n-1}\right]$

23) $y = \frac{a - x}{b^2 + x^2}$

24) $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$
$\left(y' = \mp\frac{b^2x}{a^2y}\right)$

24a) $y^2 = 2px$
$\left(\frac{dy}{dy} = \frac{p}{y}\right)$

24b) $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$
$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - p}{y - q}$

24c) $b^2(x - p)^2 \pm a^2(y - q)^2 = a^2b^2$
$\frac{dy}{dx} = \mp\frac{b^2(x - p)}{a^2(y - q)}$

24d) $\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1$

25) $2y = \sqrt{x^2 - y^2}$
$\left(y' = \frac{x}{5y}\right)$

26) $xy - 4x + 6 = 0$
$\left(y' = \frac{6}{x^2}\right)$

27) $y^2 - 2px - \frac{p}{a}x^2 = 0$ 28) $x + y^3 - 3axy = 0$ 29) $a^2y = x^2(a - x)$

30) $y = \cos^2 x + \cos 2x - x \sin x$ 31) $y = a \sin^n x + \sin 2\pi \cdot \cos(bx + c)$

32) $y = \sin nx + \sin^n x$ 33) $y = e^{\cos x} + xa^x$ 34) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$

35) $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x} + 2\cos^3\frac{x}{2} - \sin\frac{1}{x} + \sin x \sin(1 - x)$

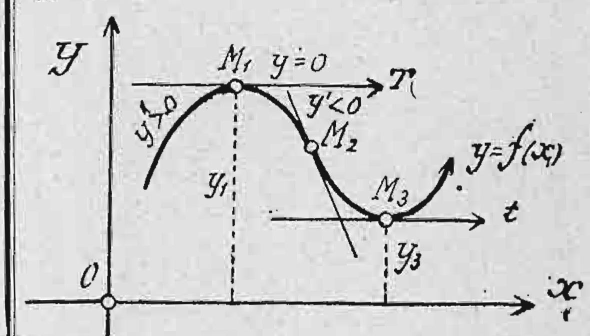
36) $y = a \cos\frac{2\pi}{T} \cdot t + \log 2t^2 + 10^t + e^t$

Primjena diferencijalnog računa

1. $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$
2. $y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$

Ovdje je $f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} = k$

3.



Slika 35

$y_1 \equiv$ maksimum
$y_3 \equiv$ minimum
$M_2(x_2 y_2) \equiv$ infleksiona (prevojna) tačka: $y'' = 0$

$y \equiv$ **maksimum** za $x = a$, kad je $f'(x) = 0$, $f''(a) > 0$

$y \equiv$ **minimum** za $x = a$, kad je $f'(x) = 0$, $f''(a) > 0$

1. **Jednadžba tangente** na zadanu liniju $f(x)$ u tački $M_1(x_1, y_1)$
2. **Normala** (okomica na tangentu u $M_1(x_1 y_1)$]
3. **Ekstremne vrijednosti funkcije** (maksimum je najveća, a minimum najmanja vrijednost funkcije $f(x)$ u zadanom intervalu od x)

O.: Tangente su na zadanu liniju u t. M_1 i M_3 (sl. 35) paralelne sa X-osi, zato je $k = f'(x) = \operatorname{tg} 0^0 = 0$

4. $y=\frac{u}{v}$ ima ekstremnu vrijednost za $u'v-v'u=0$ 5. $y=\sqrt[n]{F(x)}$ ima ekstremnu vrijednost za $F'(x)=0$ 6. $y=\frac{a}{F(x)}$ ima ekstremnu vrijednost za $F'(x)=0$	**4—6. Neki specijalai slučajevi**
7. Funkcija $f(x)$ raste (linija se penje) za $y'>0$, a opada za $y'<0$	**7. Tok funkcije**
8. $\varDelta y=f'(x)\,\varDelta x$	**8. Pogreška $\varDelta y$** (Pogrešci argumenta $=\varDelta x$ odgovara pogreška funkcije $f'(x)\,\varDelta x$
9. **Normala** $N=y\sqrt{1+y'^2}$ **Tangenta** $T=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}$ **Subnormala** $S_n=yy'$; **Subtangenta** $S_t=\frac{y}{y'}$	**9. Dirališne veličine**

Primjer I

1. Odrediti jednadžbu tangenatâ linije $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ u njezinim sjecištima sa X-osi.

R. : Sjecišta se nađu iz jednadžbe $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ (zašto?), a ta su $M_1(1,0)$, $M_2(2,0)$ i $M_3(3,0)$. Tangenta u tački $M_1: y-y_1=\frac{dy}{dx}(x-x_1)$, gdje je $x_1=1$, $y_1=0$, $\frac{dy}{dx}=?$ $y=(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+$ $+11x-6$. $\frac{dy}{dx}=f'(x_1)=3x^2-12x+11=3\ 1^2-12\,.\,1+11$ $=2$.

Konačno je tangenta u $M_1(1,0)$: $y=2(x-1)$

2. U kojoj tački linije $y=2px^2$ njezina tangenta zatvara X-os $\sphericalangle 45$?

R. : Mora biti $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}45^0=1$, dakle $\frac{dy}{dx}=4px=1$, ili $=x_1=\frac{1}{4p}$ i $y=f\left(\frac{1}{4p}\right)=2p\left(\frac{1}{4p}\right)^2=\frac{1}{8p}$. Tražena tačka je $M_1\left(\frac{1}{4p},\frac{1}{8p}\right)$

3. Zakon puta kod nekog kretanja je $s=c\sin\alpha\,.\,t-\frac{g}{2}t^2$. a) Kako glasi zakon brzine i akceleracije? b) Kolika je brzina nakon 10 sek.?

R. : a) $v=\frac{ds}{dt}=c\sin\alpha-gt$, $a=\frac{d^2s}{dt^2}=-g$. b) $v_{10}=c\sin\alpha-10\,g$

Primjer II

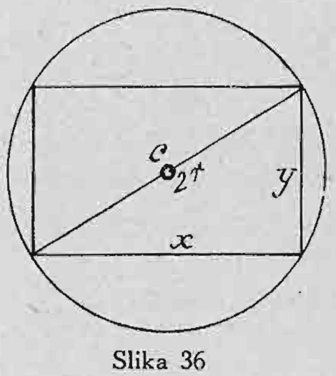
1. Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije $y=x^3-6x^2+9x+4$

R. : Prvi se izvod funkcije izjednači sa 0 i odatle odredi x; dakle: $y'=3x^2-12x+9=0$, $x_1=3$, $x_2=1$. Za $x=1$ je $f'(x)=0$, $f''(1)=-6<0$; Funkcija za tu vrijednost prima svoj maksimum t. j. $y=1^3-6\,.\,1^2+9\,.\,1+4=8$, a za $x=3$ prima minimum $=4$.

2. Pomoću ekstremne vrijednosti odrediti središte (p, q) i poluosi elipse $E \equiv 4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$

R. : $2b = y\max - y\min.$; $q = y\max - b$; $a = 3$, $b = 2$; $S(2, 1)$ Za tjemena lijevo i desno postoji $y' = \infty$, a za druga dva $y' = 0$.

3. U zadani krug (r) upisati pravokutnik maksimalne površine (sl. 36).



Slika 36

R. : Površina pravokutnika $P = xy$.

Po Pitagorinu poučku nađe se $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$.

Zato je $P(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2 x^2 - x^4}$.

Površina je maksimalna, kad je izraz pod korijenom maksimalan; dakle:

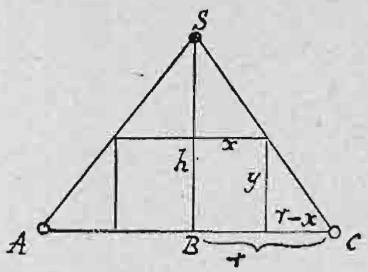
$$f(x) = 4r^2 x^2 - x^4$$

$$f'(x) = 8r^2 x - 4x^3 = 0$$

$$x_1 = r\sqrt{2}, \quad y = r\sqrt{2}$$

Pravokutnik je kvadrat!

4. U uspravan konus (v, h) upisati valjak maksimalnog volumena (sl. 37).



Slika 37

$$\underline{V = x^2 y \pi}$$

$\triangle BSC \backsim EDC$ pa je $h : r = y : (r - x)$

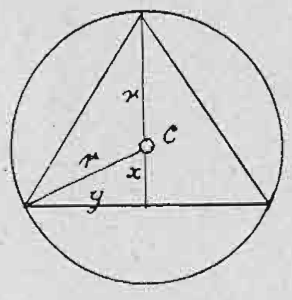
$$y = \frac{h(r-x)}{r}, \text{ dakle } V = \frac{x^2\pi \cdot h(r-x)}{r}$$

$$\frac{rV}{h\pi} = f(x) = rx^2 - x^3; \quad f'(x) = 2rx - 3x^2 = 0$$

$$\underline{x = \frac{2r}{3}, y = \frac{h}{3}} \qquad V\text{maks.} = \frac{4r^2 h\pi}{27}$$

5. U zadanu kuglu (r) upisati: a) konus maksimalnog volumena (sl. 38);

b) cilindar maksimalnog plašta



Slika 38

R.: a) $V = \dfrac{y^2(x + r)\pi}{3} = \dfrac{(x + r)(r^2 - x^2)\pi}{3}$

$$\frac{3V}{\pi} = f(x) = (x + r)(r^2 - x^2)$$

$$f'(x) = x^2 + \frac{2r}{3}x - \frac{r^2}{3} = 0$$

$$x = \frac{r}{3}, \; y = \frac{2r}{3}\sqrt{2}, \; h = \frac{4r}{3}$$

$$f''\left(\frac{r}{3}\right) < 0; \qquad \text{V maks} = \frac{32r^3\pi}{81}$$

b) $P = 2\varrho\pi h = 2xy\pi$; $y = \sqrt{4r^2 - 4x^2}$; $P = 2\pi x\sqrt{4r^2 - 4x^2} = 2\pi\sqrt{4rx^2 - 4x^4}$

$f(x) = 4r^2 x^2 - 4x^4$; $f'(x) = 8r^2 x - 16x^3 = 0$, $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, $y = r\sqrt{2} = 2x$

$\underline{P\text{ maks} = 2r^2\pi}$ (istostraničan cilindar!)

6. Iznad sredine stola nalazi se vertikalno pokretljiva lampa. U koju se udaljenost (x) iznad stola mora ona postaviti da najbolje osvijetli jednu tačku na stolu udaljenu od njegova središta za $a = 3\sqrt{2}$?

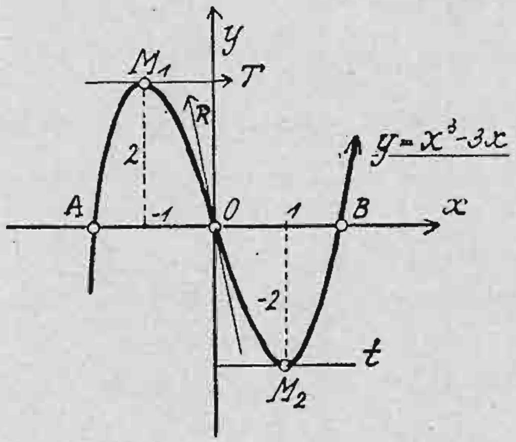
R.: Ako je jakost svjetla i, onda će u udaljenosti od izvora $= d$ biti jakost $y = \frac{i \sin \varphi}{d^2}$, gdje je $\varphi = \measuredangle$ priklona zrake svjetlosti i ravnine, dakle:

$$y = \frac{i \sin \varphi \cos^2 \varphi}{a^2} = \frac{i(\sin \varphi - \sin^3 \varphi)}{a^2}$$

$$y' = \cos \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi = 0; \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad x = a \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{\sqrt{2}} = 3$$

Primjer III

1. Ispitati tok funkcije $y = x^3 - 3x$ (slika 39).



Slika 30

R.: $y' = 3x^2 - 3 = 0$

$x_{1,2} = \pm 1$

$y'' = 6x$

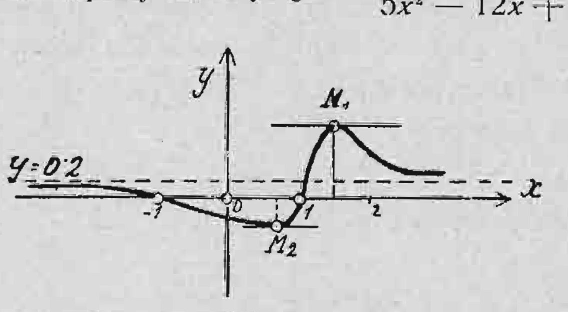
Maks.: $f(-1) = +2$

Minim.: $f(1) = -2$

$0(0, 0) \equiv$ infleksiona t.

Iz oblika $f(x) = x(x^2 - 3)$ slijedi da je funkcija neprekidna; da je za $x = \pm \infty$ i $y = \pm \infty$. Linija prolazi ishodištem (1 korijen jedn. $= 0$). Druga 2 korijena jedn. dobiju se iz $x^2 - 3 = 0$ pa će linija sjeći X — os u tačkama. $A(-\sqrt{3}, 0)$ i $B(\sqrt{3}, 0)$. U intervalu $-\infty \leq x < -1$ linija se penje i konveksna joj je strana okrenuta na više što slijedi iz $3(x^2 - 1) = y' > 0$ za gornje vrijednosti od x, i $y'' < 0$. U intervalu $-1 < x < 1$ linija opada a nakon toga raste.

2. Ispitaj funkciju $y = \frac{x^2 - 1}{5x^2 - 12x + 8}$



Slika 40

R.: $-12x^2 + 26x - 12 = 0$; $x_{1,2} = \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

Maks. u $M_1(\frac{3}{2}, 1)$, minim. $M_2(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4})$

$y = \frac{1}{5} \equiv$ asimptota linije. Funkcija raste u intervalu $[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$ inače opada.

3. Isto tako za funkciju $y = x^2 + x - 1$

4. Ispitaj tok funkcije $y = x + \frac{1}{x}$. (Prekidna linija! Grafički predočiti).

5. Kojim uvjetima moraju zadovoljiti koeficijenti općenite funkcije $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ da a) ta funkcija poprimi za $x = -1$ maks., a za $x = 1$ minimum i otsijeca na Y-osi dužinu 3; b) ta funkcija ima infleksionu tačku (2, 0), a siječe X-os u tačkama $(-3, 0)$ i $(2, 0)$?

R.: a) -1 i $+1$ moraju biti korijeni jedn. $y' = 0$ t. j. $3x^2 + 2ax + b = 0$, ili $\frac{2a}{3} = -(-1 + 1) = 0$ i $\frac{b}{3} = -1$, dakle $a = 0$, $b = -3$.

Tražena je funkcija: $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Predočiti je grafički i ispitati!

6. Svaka tačka u krugu mora ležati u njegovu centru! Dokaz: $P(e, 0) \equiv$ zadana tačka, $M(x, y)$ tačka $K(0, 0, r)$ onda je $\overline{PM} = u^2 = (x - e)^2 + y^2 = (x - e)^2 + r^2 - x^2$; $u = \sqrt{e^2 + r^2 - 2xe}$. Iz toga je $\frac{du}{dx} = -\frac{e}{u} = 0$ t. j. $e = 0$! Dakle je tačka $P(e, o)$ središte kruga! Pogreška?

Zadaci

1. Odrediti jednadžbu tangente i normale pomoću difer. računa slijedećih linija:
   1) $x^2 + y^2 = r^2$ 2) $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ 3) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
   4) $xy = k$ 5) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
   6) $y^2 = 2px$ u tački $M_1(x_1y_1)$; $T \equiv y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$
   R : Tang. 1) $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$; 2) $(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2$
2. Odrediti jedn. tangente i normale na liniju $y = x^3 + x^2 - 4x + 4$ u tački $M(-1, 0)$.
3. Isto za liniju $xy = 4$ u tački $M(\pm 1, ?)$.
4. U kojoj tački tangenta parabole $y = 2x^2 + 2x + 1$ zatvara sa X-osi $\measuredangle 135°$?
5. Pod kojim kutem siječe linija *a)* $y = \sin x$; *b)* $y = \cos x$; *c)* $y = x^3 - 3x + 2$ X-os?
6. Pod kojim se kutem sijeku krive linije $x^2 - y^2 = 2$; $x^2 + y^2 = 16$.
7. Naći tangentu na parabolu $y = x^2 + 4x - 1$ u njezinim sjecištima sa X-osi.
8. Isto za krug $x^2 + y^2 - 2x = 3$ u tačkama, gdje krug siječe Y-os.

8a. Naći jedn. tangente krive linije $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 39$ a) općenito; b) one tangente koja je paralelna (okomita) sa pravcem $y = x - 1$. Isto za normalu.

---

9. Pomoću ekstremnih vrijednosti odrediti:
   a) Polumjer kruga $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$ $(r = 5)$; b) Poluosi i središte elipse $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$; c) Poluosi i središte hiperbole $4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y = 41$; d) Tjeme parabole $y = x^2 + 2x - 1$.
10. Treba odrediti ekstremne vrijednosti funkcije:
    1) $= ax^2 + bx + c$
    2) $y = x + \frac{1}{x}$; Ymin. $= 2$ za $x = 1$, Ymaks. $= -2$ za $x = -1$
    $= x^3 - 3x^2$ 4) $y = x\sqrt{r^2 - x^2}$; Y maks. $= \frac{r^2}{2}$ za $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$
    5) $y^2 = x^2(1 - x)$; R.: za $x = 0$, $y = 0$; $x = \frac{2}{3}$, $y = \pm\sqrt{\frac{4}{27}}$, istovremeno maks. i minimum! Nacrtaj.
    6) $f(x) = 2\pi x^2\sqrt{r^2 - x^2}$; R.: maks. za $x = \frac{r}{3}\sqrt{6}$
    6a) $O = 4\sqrt{\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}}$, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; $O = 4(a + b) \equiv$ minimum
    7) $V = \frac{x^2\pi}{3} \cdot \frac{2x^2r}{x^2 - r^2}$; R.: Min. $V = \frac{8\pi}{3}r^3$ za $x = r\sqrt{2}$ 8a) $y = x + \frac{F}{x}$

8b) $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$; y maks. $= 4$ za $x = 3$, y min. $= 0$ za $x = 5$

9) $2y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 6$; Maks.. za $x = -1$, min. za $x = 4$

10) $s = 4\sqrt{\frac{a^4}{x^2} + \frac{a^2b^2}{a^2 - x^2}}$; R.: $\frac{a^2}{\sqrt{a(a+b)}}$, $\frac{a^2}{\sqrt{b(a+b)}}$, $s = 4(a+b)$

11) $b^2x^2 + a^2y = a^2b^2$
$xy = P$

Ekstr. vrijednosti od $P = ?$

11a) $V\text{min.} = \frac{a^2b^4\pi}{3xy^2} = ?$, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; V min. $= \frac{ab^2\pi\sqrt{3}}{2}$

11b) $V\text{maks} = \frac{y^2(x+r)\pi}{3} = ?$, ako je $x^2 + y^2 = r^2$; R.: Vmaks. $= \frac{32r^3\pi}{81}$ za $x = \frac{r}{3}$

11c) Isto Pmaks. $= 2xy\pi = ?$ ako je $4r^2 = y^2 + 4x^2$; $P = 2r^2\pi$ za $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ i $y = 2x$

12) $y = \frac{x^3 - x}{x^4 - x^2 + 1}$ 13) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ 14) $x - \operatorname{tg} x = y$

15) $y = a\sin^2 x + b\sin x + c$ 16) $y = P\cos x \cdot \cos(a - x)$

17) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (asteroida!) 18) $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y) - k^2 = 0$ (lemniskata!)

18a) $P_{\text{maks.}} = 2(a-x)y$, $y^2 = 2px$; $P = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{2ap}{3}}$ za $x = \frac{a}{3}$

11. Koje vrijednosti moraju poprimiti koeficijenti funkcije a) $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ da funkciju za $x = 1$ primi maksimum $= 8$, za $x = 3$ minimum $= 4$, a na Y-osi odrezuje dužinu 4 ($y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$). Kako glasi jedn. njezine tangente u $M(4, 8)$? Kolike su joj dužine tangente, normale, subnormale i subtagente

za tu tačku? $N = y\sqrt{1 + y'^2}$, $(8\sqrt{82})$, $T = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} = \frac{8}{9}\sqrt{82}$, $S_t = \frac{y}{y'} = \frac{8}{9}$

$S_n = y\,y' = 72$. b) Koje posebne koef. mora imati funkcija $y = ax^2 + bx + c$, da bude $y = 0$ za $x = 4$ i y minimum $= 8$ za $x = 6$?

12. Ispitati tok funkcije: odrediti ekstr. vrijednosti, prijevojnu tačku i predočiti je grafički!

1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = x^2 + 4x - 1$; 4) $y = x^3 - x$;

5) $y = x^3 - 3x + 2$; 6) $y = x^4 - x^2 - 1$; 7) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$; 8) $x^3 - ay^2 = 0$

12a) Ispitati tok funkcije $y = x^2 - 3x + 1$ u tački a) $x_1 = ?$, $y_1 = ?$, b) $x_1 = 1$, $y = ?$ Isto za $y = x^3 - x$ u tačkama $x_1 = 0, 1, 2 \ldots$

13. U kvadrat stranice a upisati 1) istokračan trokut sa jednim zajedničkim vrhom i maksimalnom površinom (opsegom); 2) pravokutnik maksimalne površine; 3) kvadrat minimalne površine.

R.: 1) Osnovka $x = a\sqrt{2}$, visina $h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; 2) Kvadrat: $y = x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$;

$P = \frac{a^2}{2}$; 3) $P = x^2 = y^2 + (a - y)^2$; $y = \frac{a}{2}$; $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; $P = \frac{a^2}{2}$

13a. Oko kvadrata stranice a opisati istokračan trokut tako da stranica kvadrata pada u osnovku trokuta. Kolika mora biti visina trokuta, da mu površina bude minimalna?

[$P = xy$; $x : \frac{a}{2} = y : (y - a)$; visina $y = 2a$, $P = 2a^2$]

13b. Oko zadanog pravokutnika opisati drugi maksimalne površine. [R.: Stranice opisanog pravokutnika moraju biti nagnute prema stranicama zadanog pod $\sphericalangle$ 45°].

14. Oko pravokutnika sa stranicama $2a$ i $2b$ opisati 1) romb minimalne površine čije su dijaganale simetrale stranica pravokutnika; 2) istokračan trokut na čiju osnovku pada osnovka pravokutnika, a opseg (površina) mu je minimalan. R.: 1) Dijagonale su romba $4a$, $4b$; stranica: $2\sqrt{a^2+b^2}$.

15. U krug polumjera r treba 1) upisati najveći istokračan trokut. R.: $P = (x+r)\sqrt{r^2-x^2}$; $x =$ udaljenost središta kruga od osnovke; $a = r\sqrt{3}$, $h = \frac{3r}{2}$;

2) Opisati oko njega minimalan istokračan trokut (trapez); 3) Nad dijametrom polukruga upisati trapez maksimal. površine (opsega); R.: $o = 5r$

16. 1) Koji kružni isječak opsega $2s$ ima maksimal. površinu? R.: $x = \frac{s}{2}$

2) Koji kružni isječak površine P ima maksimalan opseg?

17. U kružni isječak $(r, 2\alpha)$ upisati pravokutnik maksim. površine (opsega), da mu stranice budu paralelne sa simetralom centričnog kuta. U kakvom odnosu stoje površine toga pravokutnika i isječka?

18. Nad tetivom t kružnog otsječka visine h upiše se maksimalan trapez. Kolika je površina izmedu luka i stranice trapeza?

19. Koji trokut sa vrhom u centru kruga (r) ima maksim. površinu ako mu je osnovka tetiva? R.: $P = xy = x\sqrt{r^2-x^2}$; osnovka: $r\sqrt{2}$, $P = \frac{r^2}{2}$

20. 1) Dužinu a razdeliti na takva dva dijela da je suma površina istostr. trokuta sastavljenih iz tih dijelova minimalna.

2) Koji od trokuta stranice a i sume drugih dviju stranica $= s$ ima maksimalnu površinu? $b = c = \frac{s}{2}$

3) Odredi maksimalan trokut stranice a i supratnog kuta α. R.: trokut je istoskračan.

4) Odrediti najveći trokut, ako je zadan kut α i suma stranica $b + c = s$.

5) Koji od svih pravokut. trokuta zadane hipotenuze ima najveći srp Hipokratov?

6) Zadana je suma kateta pravokutnog trokuta $a + b = s$; treba odrediti trokut minimalne hipotenuze. Isto, ako je zadana površina trokuta $= P$.

7) U krug (r) povući tetivu, da ona rotacijom oko paralelnog dijametra opiše površinu maksimalnog volumena.

8) Koji pravokutan trokut opsega $= 2s$ ima maksimalnu površinu?

21. Od trokuta ABC dužinom DE odreže se trokut $ADE = \frac{1}{n} \Delta ABC$ tako da je DE minimalno; R.: $x = y = \sqrt{\frac{bc}{n}}$

21a) Koji trokut opsega $= 2s$ ima maksimalnu površinu?

22. Odrediti površinu kruga za koji sektor opsega $2s$ ima maksimalnu površinu. $y = s, x = \frac{s}{2}$

22. Odrediti polumjer kruga za koji sektor površine P ima maksimalni opseg. R. : $r = \sqrt{P}, l = 2\sqrt{P}$

23. Tetraedar treba presjeći ravninom, paralelnom sa 2 brida koji se sijeku, da presjek bude maksimalan. R.: $x = y$ Isto za uspravan čunj

23a) Koji oblik mora imati zlatni novac određene vrijednosti da se najmanje izliže?

24. Kanal pravokutna poprečnog presjeka površine $= P$ mora se napraviti uz minimalan potrošak materijala; koje dimenzije mora imati presjek?

25. Odrediti onaj istokračan trokut kraka a, u koji će upisani krug imati maksimalnu površinu. R.: osnovka $x = a(\sqrt{5} - 1)$

26. U kakvom odnosu mora stajati osnovka prema vinisi trokuta, da upisani kvadrat bude iznosio što veći dio trokuta?

27. U zadanu elipsu $b^2x^2+a^2y^2 = {}^2ab^2$ treba 1). upisati najveći pravokutnik; 2) upisati najveći istokračan trokut sa vrhom u jednom tjemenu elipse.

28. Na zadanu elipsu povući tangentu tako da 1) sa koord. osima zatvara minimalan trokut; 2) da površina između nje i koord. osi opiše rotacijom oko X-osi čunj minim. volumena. Isti zadatak sa kružnicom $x^2 + y^2 = r^2$ R.: 1) Dirałište je $M(x_0 y_0)$; $P = \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{x_0y_0}$; $x_0 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $y_0 = \frac{b}{2}\sqrt{2}$, 2) $x = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $y = \frac{b}{3}\sqrt{6}$

29. U zadani kvadrat upisati najveću elipsu. R.: krug!

30. Oko elipse opisati romb minimalnog opsega i dokazati da je površina u taj romb upisanog kruga jednaka površini elipse. R.: $Omin = 4\sqrt{\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}} = 4(a+b)$

31. Koliki je polumjer kruga koji je koncentričan sa elipsom $E(0, 0, 3, 2)$ i siječe je pod najvećim kutem?

32. 1) U istokračan trokut (a, h) upisati najveću elipsu i odrediti u kojem odnosu stoji njezina površina prema površini preostalog dijela trokuta. (Velika je os elipse paralelna sa osnovkom trokuta).
    2) Isto za istostraničan trokut.

33. U kojoj tački elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tangenta zatvara sa radij vektorom najmanji kut? $x_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $y_1 = \frac{b}{2}\sqrt{2}$

34. Na osi parabole $y^2 = 2px$ nalazi tačka $M(x = 3p)$. Odrediti onu tačku parabole koja je najbliža tački M.

35. U zadan istokračan trokut upisati parabolu maks. segmenta sa tjemenom u središtu osnovice trokuta. R. : visina parabol. segmenta $x = \frac{h}{2}$, tetiva $y = \frac{a}{3}$

35a. Istokračnom trokutu opsega $= 2s$ treba tako odrediti stranice, da on rotacijom oko svoje visine opiše čunj ekstremnog volumena.

36. Zadana je tačka $P\, a), b)$ u paraboli $y = x^2$. Njom se mora tako povući sekanta, da se dobije parabol. segment minimalne površine.

37. Iz uspravnog čunja sa vršnim $\sphericalangle\ 2\alpha$ i stranicom s treba isjeći parabolu maksimalnog segmenta.

37a. Među kuglinim segmentima zadanog volumena $V = 100\pi$ odrediti onaj minimalne površine.

38. Odrediti jedn. pravca koji prelazi tačkom $P(3, 1)$ i zatvara sa koord. osima minimalan trokut.

39. Iz trokuta $(a = 12,\ b = 14,\ c = 10)$ treba izrezati pravokutnik da se iz njega može saviti cilinder maksim. volumena.

40. Kružni isječak zadanog kruga (r) smota se u lijevak. Koliki mora biti središnji kut, da bi lijevak zahvatio maksimum tekućine.

40a. Treba napraviti cilindričnu posudu zadanog volumena V tako da se utroši što manje materijala.

40b. Treba napraviti bure oblika krnjeg čunja sa volumenom V i zadanim nagibom $\frac{h}{R - r} = k$, da mu površina bude što manja. $r = \sqrt[3]{3\, V : \pi\, k^2 (k^2 + 3k + 3)}$
$R = (k + 1)\, r$

41. Odrediti maksimalan istokračan trapez opisan oko kruga (r).
R. $y = x + \frac{r^2}{x}$; izlazi kvadrat!

41a. Prozor se sastoji iz pravokutnika sa polukrugom na gornjoj strani; kako se moraju izabrati dimenzije prozora kojemu je opseg $= u$, da kroz njega prodire najviše svijetla?
R.: $u = x + 2y + \frac{x}{2}\pi$; $P = xy + \frac{x^2\pi}{8}$; $x = \frac{2u}{4 + \pi}$

41b. U zadani čunj (r, h) upisati valjak maksimalne 1) površine; 2) volumena; 3) plaštu
2) $x = \frac{2r}{3}$; visina $= \frac{h}{3}$; V maks. $= \frac{4r^3\pi h}{27}$

42. **U krugu (r) upisati 1) uspravan čunj maksim. volumena; 2) uspravan valjak maksim. volumena; 3) najveću kvadratičnu piramiru. 1) $V = \frac{32r^3\pi}{81}$; 2) Valjak maks. volumena $V = \frac{4r^3\pi\sqrt{3}}{9}$**

42a. Oko kugle opisati čun minimalnog volumena. V min. $= \frac{8r^3\pi}{3}$

42b. Na površini kugle (r) leži središte druge kugle. Koliki se mora uzeti radius posljednje, da njezina kalota unutar prve kugle bude maksimalna?
Traženi radius $= \frac{4r}{3}$

43. U trokut (a, h) upisati pravokutnik iz kojeg se da saviti cilindar maksim. volumena.

44. Na centrali $c = 35$ dviju kugala $(r_1 = 9$ i $r_2 = 4)$ treba odrediti onu tačku s koje je suma osvijetljenih kuglinih površina maksimalna.
R.: $\frac{c r_1 \sqrt{r_1}}{r_1\sqrt{r_1} + r_2\sqrt{r_2}} = 27$

45. U paraboloid visine h upisati maksimalan cilindar. U kojem odnosu stoje volumeni obaju tjelesa?

46. Među svim kuglinim a) sektorima, b) segmentima, c) slojevima treba odrediti onaj sa maksim. volumenom, ako im je zadan pripadajući dio kugline površine P.

47. Koje je najtamnije mjesto na liniji koja spaja dva izvora svjetlosti i_1 i i_2, udaljena za dužinu d? $x = d\sqrt[3]{i_1} : (\sqrt[3]{i_1} + \sqrt[3]{i_2})$

47a. U koju se udaljenost x od plakata dužine a m koji je prilijepljen u visini b, mora postaviti posmatrač, da ga najbolje vidi. Oko posmatračevo je nad horizontom za c. [R.: $x = \sqrt{(a+b-c)(b-c)}$. Vidni ∢ $y = y_1 - y_2$; tg y = tg $(y_1 - y_2)$ i t. d.; y_1 i y_2 su kutevi između horizontale kroz oko i vizirnih linija prema krajnim tačkama plakata].

48. Koji kut priklona mora imati kosa ravan sa bazom b da tijelo niz nju pane u najkraćem vremenu? (R.: 45°).

48a. Oko posmatračevo nalazi se h metara iznad horizonta. U koju udaljenost moramo staviti kip visine m vertikalno, da bi ga posmatrač najbolje vidio?

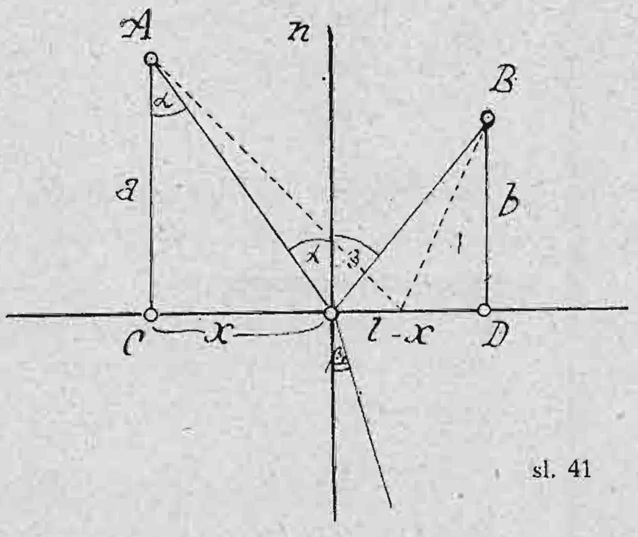
49. Dvije sile P_1, P_2 zatvaraju ∢ α. U kojem je smjeru suma rada ovih sila na putu s maksimalna?

49a. Središnja udaljenost dviju masa m_1 i m_2 jest r; koju tačku između njih jednako privlače obe mase?
$x : (r - x) = \sqrt{m_1} : \sqrt{m_1}$; $x = \dfrac{r\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}$, $y = \dfrac{r\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}$; x i y **su udaljenosti tačke od pojedinih masa).**

50. Sa smjerom vjetra zatvara brod ∢ α. Kako se mora postaviti jadro, da pogon vjetra bude maksimalan? $x = \dfrac{\alpha}{2}$.

51. Iz cilindričkog drveta (r) treba istesati pravokutan balvan tako, da on uzmogne podnijeti što veći teret. $(P = x^2y$, x = visina, y = širina balvana).

52. Kako se mora reflektirati sunčana zraka od glatke površine da prevaljeni put od tačke A do tačke B bude minimalan?



sl. 41

R.: $s = \overline{AC} + \overline{BC} = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (l - x)^2}$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{b^2 - (l - x)^2}} = \sin\alpha - \sin\beta = 0 \text{ t. j. } \alpha = \beta$$

(zakon refleksije).

53. Koji put treba odabrati zraka svjetlosti za prelaz iz tačke A jednog sredstva u tačku B drugog sredstva da upotrebljeno vrijeme bude minimum? (R. : Slično kao pod 52. Mora biti $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n$, (zakon loma svjetlosti)!

54. Galvanske elemente sa unut. otporom w i elektromotornom silom e treba tako spojiti sa vanjskim otporom x da jakost struje bude maksimalna. Koliki se mora uzeti vanjski otpor? [R. : $w = w_1$].

55. Pobočna ploha jedne posude treba da dobije otvor, da kod konstantnog nivoa tekućina najviše skače; kako duboko pod površinom treba da bude taj otvor?

56. U udaljenosti $BC = b$ od ravne ceste $AB = a$ leži na manje prohodnom terenu zgrada C. Na kojem mjestu M mora neko, koji se uzduž AB vozi kolima konstantnom brzinom c_1, saći s kola, i ići pješice brzinom $c_2 < c_1$ da dođe što brže do zgrade C? [R. : $x = bc_2 : \sqrt{c_1^2 - c_2^2}$

56a. Katete pravokutnog trokuta $a = 200$, $b = 300$ izmjere se sa maksimalnom greškom $\triangle = 0.01\%$. Kolika je ta kod hipotenuze?

$$\Delta c = \frac{a\Delta a + b\Delta b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

57. Greška kod mjerenja polumjera $r = 5\,cm$ i visine $h = 6\,cm$ uspravnog čunja jest maksimum 0·1 mm; kako utječe ona na 1) površinu i 2) volumen tijela? R.: 2) $\frac{2r\pi h}{3}\Delta r + \frac{r^2\pi}{3}\Delta h$! **Isto tako za kuglu.**

58. Određivanje gustoće : $p \equiv$ težina tijela u zraku, p_1 u vodi, $\triangle p$ i $\triangle p_1$ odgovarajuće maksimalne pogreške pri mjerenju.

$$S = \frac{p}{p - p_1} \quad \text{i} \quad \Delta S = \frac{p\Delta p_1 - p_1\Delta p}{(p - p_1)^2}$$

Integralni račun

(= inverzna operacija diferencijalnog)

(bavi se sabiranjem neizmjerno malih veličina)

Def. : Integrirati zadanu fnnkciju znači iz poznatog diferencijala te funkcije $f'(x)\,dx$ odrediti prvotnu funkciju $f(x)$.

1. $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$, $f(x) = ?$ $f(x) \equiv \int f'(x)\,dx$	**1.** $f(x) \equiv$ integral (prvotna f.) $f'(x) \equiv$ integrand „$\int$" č. integral
2. $d\int \frac{f(x)\,dx}{dx} = f(x)$	**2. Integriranje i diferenciranje,** suprotne operacije, ukidaju se
3. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$	**3. Neodređeni integral** ($C \equiv$ integraciona, adiciona konstanta koja kod diferenciranja iščezava)
4. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$ 5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ 6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ 7. $\int af(x)\,dz = a\int f(x)\,dx$	**4—8. Pravila**

8. $\int [F(x) \pm f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int F(x)\,dx \pm$
$\pm \int f(x)\,dx \pm \int f(x)\,dx$

9. $\int_a^b f'(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(b)$

9. Određeni integral
(č.: integral od a do b)
a i b su granice integrala

10. $\int_a^b f(x)\,dx \equiv \lim_{n=\infty} [f(a)\,\Delta x + f(a+\Delta x)\,\Delta x + \ldots]$
Sumiranjem neizmjerno malih veličina mogu se proračunati konačne veličine!

10. Integral kao suma
od neizmjerno mnogo neizmjerno malih veličina (elemenata!)

11. Određeni integral nađe se iz neodređenog tako da se argumenat x ovoga posljednjeg supstituira sa gornjom (b) i donjom (a) granicom i odredi razlika nađenih vrijednosti.
a) $\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \ldots$
$+ \ldots \int_c^d f(x)\,dx$; b) $\int_a^b = -\int_b^a$

11. Kako se nađe određeni integral?

12. Dokaz: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{x+1} + C$ jer
$\dfrac{d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)}{dx} = x^n$ i t. d.

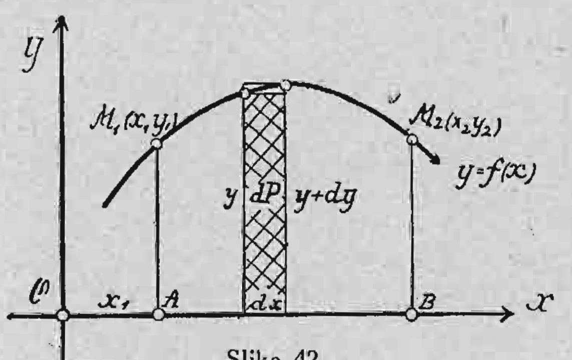
12. Dokaz

Primjena integralnog računa

1. **Osnova primjene:** Suma neizmjerno malih elemenata (diferencijala) neke veličine može biti konačan broj.

1. Integral kao suma elemenata neke veličine.

2.



Slika 42

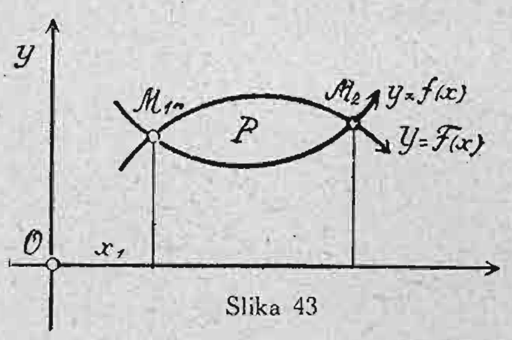
$$ydx < dP < (y + dy)\,dx$$
$$< ydx + dy\,dx$$

$dP = ydx|$ → elemenat ili diferencijal površine

$$\underline{P = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dy}$$

2. **Površina linije**
$y = f(x)$
$(P \equiv ABM_2M_3)$
sl. 42. - **Kvadratura**

3\.

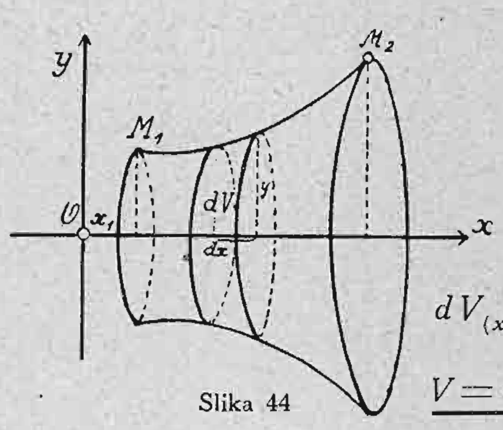


Slika 43

$$P = \int_{x_1}^{x_3} (Y - y)\, dx$$

3. Zajedn. površina zadanih linija (sl. 43)

4\.



Slika 44

$$d V_{(x)} = y^2 dx$$

$$\underline{V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^2 dx}$$

4. Volumen rotacionog tijela (sl. 44) Kubatura. (Linija $f(x)$ rotira oko X-osi)

O.: Šta predočuje formula $V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\, dy$?

5\.

$$\underline{V = \int_{x_1}^{x_2} P(x) dx}$$

5. Volumen bilo kojeg tijela $P(x) \equiv$ presjek okomit na X-os

Primjer I

1\. $$\int (1 + x + x^2 \pm \ldots \pm x^n \pm \frac{1}{x^2} \pm \frac{1}{x^n})\, dx = \int dx + \int x dx + \int x^2 dx \pm \ldots \pm \int x^n dx \pm$$
$$\pm \int \frac{dx}{x^2} \pm \int \frac{dx}{x^n} = \int dx + \int x dx + \int x^2 dx \pm \ldots \pm \int x^n dx \pm \int x^{-2} dx \pm \int x^{-n} dx =$$
$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \ldots \frac{x^{n+1}}{n+1} \mp x^{-1} \pm \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \ldots \frac{x^{n+1}}{n+1} \mp \frac{1}{x} \mp$$
$$\mp \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

2\. $$\int \left(\sqrt{x} + x\sqrt{x} + x\sqrt[n]{x} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt[n]{x}} \right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{\frac{n+1}{n}} dx +$$
$$+ \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{n+1}{n}} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{n x^{\frac{2n+1}{n}}}{2n+1} + 2x^{\frac{1}{2}} + n x^{-\frac{1}{n}} + C =$$
$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{n\sqrt[n]{x^{2n+1}}}{2n+1} + 2\sqrt{x} + \frac{n}{\sqrt[n]{x}} + C$$

3\. $$\int (a \sin x + b \cos x)\, dx = a \int \sin x dx + b \int \cos x dx = - a \cos x + b \sin x + C$$

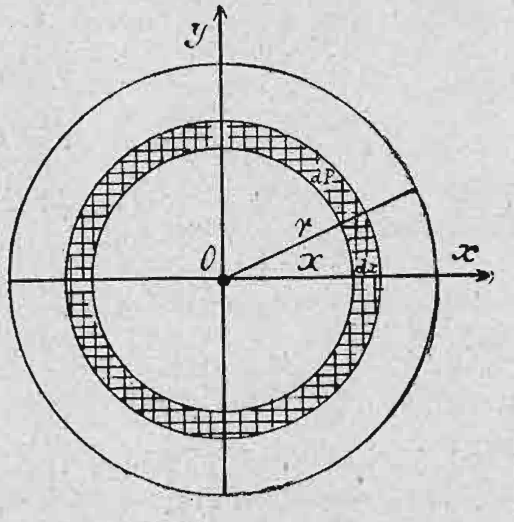
4\. $$\int_1^2 4x\, dx = 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2(2^2 - 1^2) = 6$$

5. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \int\limits_1^\infty x^{-2} dx = \Big[-x^{-1} \Big]_1^\infty = -\infty^{-1} + 1^{-1} = -\frac{1}{\infty} + 1 = 1$

6. $\int\limits_0^\pi (a \sin x + b \cos x + c) dx = \Big[-a \cos x + b \ \text{in}\, x + cx \Big]_0^\pi = -a \cos \pi + b \sin \pi +$
$+ c\pi + a \cos 0^0 - b \sin 0^0 - c \,.\, 0 = a + c\pi + a = 2a + c\pi$

Primjer II

1. Površina kruga (slika 45)



Slika 45

R.: Elemenat površine
$dP = 2x\pi\, dx$

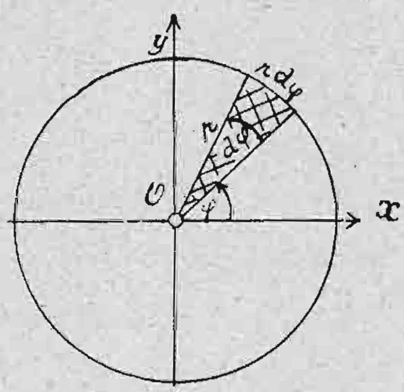
$$P = \int\limits_0^r 2x\pi\, dx = 2\pi \int\limits_0^r x\, dx$$

$$= 2\pi \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_0^r$$

$\underline{P = r^2\pi.}$ $\Big[$ O.: $P_{\text{vijenca}} = 2\pi \int\limits_r^R x\, dx =$

$= r\,(R^2 - r^2) \Big]$

2. Pomoću integralnog računa odrediti opseg kruga (slika 46)



Slika 46

R.: Elemenat (diferencijal) luka:
$dl = r d\varphi$

$$l = \int\limits_0^{2\pi} r d\varphi = r \Big[\varphi \Big]_0^{2\pi} = 2r\pi$$

3. Površina elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

R. $P = 4 \int\limits_0^a y\, dx = 4 \frac{b}{a} \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}$. Prema zadatku 1. je $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2\pi}{4}$

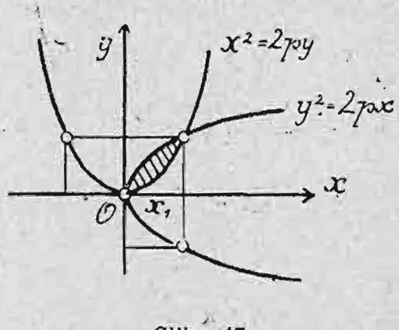
(četvrtina kruga), dakle $P = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a^2\pi}{4} = \underline{ab\pi}$

4. Površina parabolično segmenta.

Jedn. parabole $y^2 = 2px$; $\frac{P}{2} = \int\limits_0^{x_1} \sqrt{2px}\, dx = \sqrt{2p} \int\limits_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p} \Big[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big]_0^{x_1} = \underline{\frac{2\sqrt{2px_1}\, x_1}{3}}$

$$\underline{P = \frac{4x_1y_1}{3}}$$

5. Odrediti zajedničku površinu krivih linija: $y^2 = 2px$ i $x^2 = 2py$ (slika 47).



Slika 47

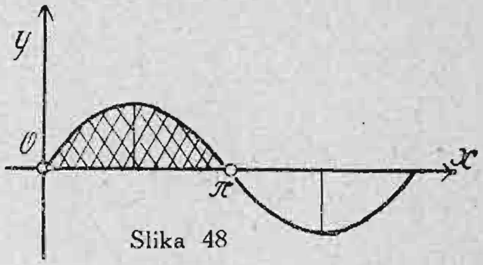
$$P = \int_0^{x_1} (Y - y)\, dx = \int_0^{x_1} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{6p}\right]_0^{x_1} = \left[\frac{2\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{6p}\right]_0^{2p}$$

$$= \frac{2\sqrt{2p}\,.\,\sqrt{8p^3}}{3} - \frac{8p^3}{6p} = \frac{4p^2}{3}$$

(O. Sjecište parabola dobije se rješenjem njihovih jedn. pa je $x_1 = 2p$).

6. Površina simsoide $y = \sin x$ (slika 48).



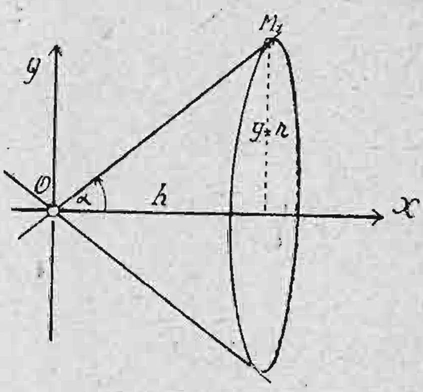
Slika 48

$$\text{R.} : P = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} =$$

$$= -\cos \pi - (-\cos 0^0) = 2$$

Primjer III

1. Odrediti volumen uspravnog čunja pomoću integralnog računa (slika 49).



Slika 49

R.: Konus nastaje rotacijom pravca $y = kx$ oko X-osi;

$$\text{dakle}: V = \pi \int_0^h k^2x^2\, dx = \pi k^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \pi k^2 \frac{h^3}{3} = \frac{\pi h\,.\,h^2k^2}{3}$$

$$V = \frac{r^2 \pi h}{3}, \text{ jer je } kh = h \text{ tg } \alpha = r$$

[O.: Za krnji konus integriraj u granicama h_1 i h_2. Razlika $h_2 - h_1 = h$. Dobije se $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$]

2. Integrirati volumen kugle.

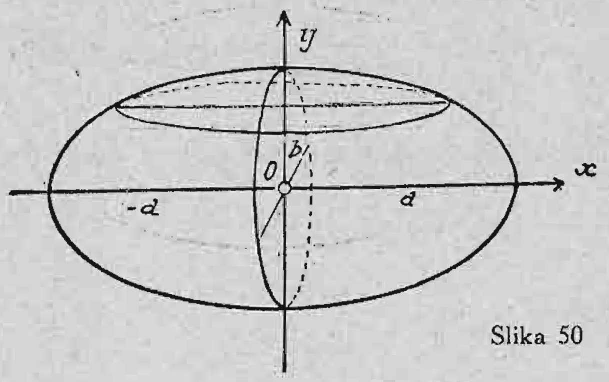
$$\text{R.} : V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}; \quad V = \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}$$

2a) **Kuglin segment**

$$V_s = r \int_0^h (2rx - x^2)\, dx; \quad V_s = \frac{rh^2}{3}(3r - h)$$

3. Volumen rotacionog elipsoida (sl. 50)



Slika 50

R. : Oko X-osi rotira elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; prema tome:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)\, dx$$

$$V_x = \frac{b^2\pi}{a^2} \Big[a^2x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-a}^{a} = \frac{4ab^2\pi}{3}$$

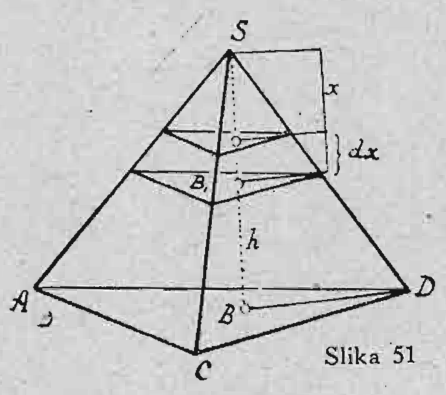
$$V_y = \frac{4a^2b\pi}{3} \text{ (sferoid!)}$$

4. Volumen paraboloida

$$\text{R.: } V = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi \int_0^x 2px dx = 2p\pi \Big[\frac{x^2}{2} \Big]_0^x = p\pi x^2, \quad V_y = \frac{\pi x^2 y}{5}$$

4a) Volumen, što ga rotacijom oko X-osi opiše zajednička površina linija $Y = F(x)$ i $y = f(x)$ prema međusobnom položaju linija jest: kubatura prve linije $\pm$ kubatura druge linije.

5. Odrediti pomoću integr. računa volumen piramide (sl. 51).



Slika 51

R. : Neka je B_1 površina presjeka, onda je $B : B_1 = h^2 : x^2$

$$B_1 = \frac{Bx^2}{h^2}$$

$$V = \int_0^h \frac{B}{h^2} x^2\, dx = \frac{B}{h^2} \int_0^h x^2\, dx = \frac{Bh}{3}$$

6. Objasni slijedeće odnose :

a) $v = \frac{dt}{dt}$; $s = \int v dt$

b) $dR = Pds = mads = m \frac{d^2s}{dt^2s} ds$

$$R = \int_{so}^{s} Pds = \int_{so}^{s} mads = \int_{so}^{s} m \frac{dv}{dt} ds = \int_{so}^{s} mdv \frac{ds}{dt} = \int_{v}^{v} mvdv = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

7a) Funkcija $y = \sin x$ grafički prestavlja X-os! Dokaz:
$\int_0^{2n\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{2n\pi} = -1 + 1 = 0.$ Pogreška?

b) Sinusi i cosinusi svih kuteva su $= \pm 1$!
$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{tg^2 x}{2} = \frac{1}{2\cos^2 x}$; $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2}$; $\sin^2 x = 1$; $\sin x_{1,2} = \pm 1$. Integriranje provjeri diferenciranjem!

c) $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos^2 x$ ili $\mathrm{tg} x = \pm\, i$

d) Hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ rotira oko X-osi; volumen desnog dijela hiperboloida u granicama $x = 1$ i $x_2 = 2$ $V_1 = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1) = \frac{4\pi}{3}$. Volumen dvostrukog tolikog dijela $V_2 = \pi \int_{-2}^{+2} y^2 dx = \frac{4\pi}{3}$, t. j. tijelo dvaput veće od samog sebe! Pogreška?

Zadaci

1. **Integrirati**

1) $\int\left(a + bx + cx^2 + \frac{d}{x^2} - \frac{e}{x^n}\right) dx$; R.: $ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} - \frac{d}{x} + \frac{e}{(n-1)x^{n-1}} + c$

2) $\int\left(1 + x + \frac{1}{x^2} + x\sqrt{x} - x^2\sqrt{x} + \frac{a}{\sqrt{x}}\right)dx$;

R.: $x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{2\sqrt{x^7}}{7} + 2a\sqrt{x} + c$

3) $\int\left(\sqrt{ax} + \sqrt[3]{bx} + \sqrt[r]{x^s} + x^n\sqrt{x} + \frac{1}{x^n\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[r]{x^s}}\right) dx$

4) $\int \frac{x+2}{2\sqrt{x}} dx$ 4a) $\int \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx$

5) $\int (x-1)(x-2)(x+3)\, dx$; R. $\frac{x^4}{4} - \frac{7}{2}x^2 + 6x + c$

6) $\int\left(a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ 7) $\int (x^2 + ax + b)^2 dx$

7a) $\int \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx$; R.: $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} + c$

8) $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{2\sqrt[3]{x}} dx$; R.: $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{10} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{8} + \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{4} + c$

9) $\int (ct \sin\alpha + ct\cos\alpha + at^2)\, dt$

10) $\int\left(a\sin x - b\cos x + \frac{\pi}{x^2}\right) dx$; R.: $-a\cos x - b\sin x - \frac{\pi}{x} + c$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \int \frac{2y\,dy}{by} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$ | $a + bx = y^2$, $bdx = 2ydy$

12) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int -y\,dy = -\sqrt{a^2 - x^2}$ | Iz $a^2 - x^2 = y^2$

13) $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$ i t. d.

14) $\int \cos ax\,.\,dx = \frac{1}{a}\int \cos z\,.\,dz$ | $ax = z$, $dx = \frac{dz}{a}$

14a) $\int \frac{x^7 + 3x^2 + 7}{x^2} dx$; R.: $\frac{1}{6}x^6 + 3x - \frac{7}{x} + c$

2. Izračunati određeni integral:

1) $\int_1^2 (x^2+1)dx$ 2) $\int_1^2 x^3 dx$ $\left(\text{R.} = \frac{15}{4}\right)$ 3) $\pi \int_{-a}^{+a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx$

4) $\int_0^2 (x^3+x^2+1)dx = \int_0^1 (x^3+x^2+1)\,dx + \int_1^2 (x^3+x^2+1)\,dx$ (Provjeri!)

5) $\pi\int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)\,dx$ $\left(\text{R.}: \frac{4r^3\pi}{3}\right)$ 5a) $\pi\int_o^h (2rx - x^2)\,dx = \frac{rh^2}{3}(3r - h)$

6) $\int_a^b \left(\sqrt{x} - a\right)\left(\sqrt{x} + b\right)dx$ 6a) $\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ (R.: $13\frac{1}{3}$)

7) $\frac{\pi}{9}\int_0^3 x(x-3)^2\,dx = \frac{3}{4}\pi$ (Provjeri!) 8) $\sqrt{2p}\int_{\frac{p}{2}}^{2p} \sqrt{x}\,dx = \frac{7}{3}p^2$ (Provjeri!)

9) $\pi\int_1^4 [16x - (\frac{4}{3}x + \frac{8}{3})^2]\,dx$ (R : 8π) 10) $\frac{\pi}{a}\int_o^a x(a-x)^2\,dx$ $\left(\text{R.}: \frac{a^3\pi}{12}\right)$

11) $\int_3^5 (x^3 - 12x^2 + 45x + 20)\,dx$ (R.: 144) 12) $\int_r^\infty \frac{a\,dx}{x^2}$

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ (Provjeri!) 13a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x + 1)\,dx$

14) $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ 14a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\,dx$ 15) $\int_0^{16} \left(\sqrt{4x} - \frac{x^2}{32}\right)dx$ (R.: $42\frac{2}{3}$)

16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + b\cos x)\,dx$ $\left(\text{R.}: \frac{a\pi^2}{8} + b\right)$

16a) $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos x}\,dx$ $\left(\text{R.}: \int_0^\pi \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = \sqrt{2}\right)$

3. 1) Odrediti pomoću integralnog računa a) opseg kruga, b) površinu kruga, c) površinu kružnog vijenca, d) površinu parabol. segmenta parabole $y^2 = 2px$

2) Naći zajedničku površinu linija a) $y^3 = x$ i $y = x^3$; b) $y = x^3$ i $y = kx$; c) $y^2 = 4x$ i $x^2 = 8y$; d) $y = ax^3$ i $y = kx$ [R.: a) $P = 1$]

3) Izračunati površinu koju na paraboli $y^2 = 4x$ reže pravac $x + y = 1$ [R.: 7·5]

3a) Parabola $y = ax^3$ ogledava se na pravcu $y = x$. Kolika je površina između tih krivih linija? Rj: $P = \frac{1}{a}$

4) Kolika je površina između X-osi i krive linije a) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$; b) $y = x^3 - 4x$; c) $y = x^3 - x$; d) $y = x^3 - 4x^2$; e) $y = x^3 - 3x + 2$; R.: c) $P = \frac{1}{2}$, e) $P = 8\frac{3}{4}$

5) Neka se odredi površina omeđena lukom krive linije $y = x^3 - 3x + 2$, osi apscisa i ordinatama koje pripadaju ekstremnim vrijednostima od y. [R.: $P = 4$]

6) Isto za krive linije: a) $y = x^3 - 3x$; b) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$; c) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12$; d) $y = x^3 - 12x$; e) $y = x^3 - x$.

7) Odrediti površinu krive linije a) $y = \frac{e}{x^2}$ u granicama r_1, ∞; b) $y = \sin x$ $(0, 2\pi)$; c $y = \cos x$ $(0, 2\pi)$

8) Treba raspoloviti površinu linije $y = a \sin b\, x$ (granice o, π) paralelom sa Y — osi i odrediti položaj paralele.

9) Povući okomicu na X — os tako, da ona dijeli površinu linije $y = \sqrt{x}$ (granice: 0, 10) u omjeru $m : n$ i odrediti položaj okomice.

10) Žarištem parabole $y^2 = 2p\, x$ povući pravac pod $\sphericalangle$ 135° prema X — osi. Odrediti površinu dobivenog parabol. segmenta.

11) Površina kruga i elipse:

$$\int_{-r}^{r} y dx = -4r^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 \varphi d\varphi = r^2 \pi. \quad \text{b)} \quad P = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\varphi = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \text{ i t. d.}$$

$x = r \sin \varphi$ i $dx = dr \cos x = - r \sin \varphi d\varphi$. Izvedi slično i za elipsu kao pod a)

12) Kolika je površina linije $y^2 = x^3$ u granicama o i x? $P = \frac{2\,xy}{5}$

4. Pomoću integralnog računa odrediti a) volumen kugle; b) volumen kuglina sloja; c) volumen kuglina segmenta; d) volumen valjka; f) volumen kruje piramide i krujeg konusa; g) elipsoida i sferoida; f) volumen krnje piramide i krnjeg konusa; g) elipsoida i sferoida; elipsoida i sferoida.

5. Parabola a) $y^2 = 2px$; b) $y = ax^3$ rotira oko X-osi. Odrediti volumen tijela što ga opiše zajednička površina zadane parabole i pravca $y = kx$

$$\text{R.: a)} \quad V = \int_0^{\frac{2p}{k^2}} (2px - k^2x^2)\, dx = \frac{4p^3}{3k^4}$$

6. U kakvom odnosu stoje volumeni elipsoida i sferoida zadane elipse? Prvi nastaje rotacijom elipse oko X-osi, drugi oko Y-osi.

6a. Parabola $y = ax^3$ rotira oko X-osi; koliki je volumen rotacionog tijela omeđenog sa ravninom $x = k$.

R.: $\frac{1}{7} \pi a^2 k^7$

7. U kakvom odnosu stoje volumeni što ih opiše zajednička površina linija $y^2 = 2py$ i $x^2 = 2py$ vrtnjom jedamput oko X-osi, drugiput oko Y-osi?

8. U onoj tački elipse u kojoj radiji-vektori stoje međusobno okomito povučena je tangenta u prvom kvadrantu. Odrediti volumen tijela, što ga opiše površina između luka elipse, X-osi i tangente, od dirališta do sjecišta sa X-osi, rotacijom oko X-osi?

9. Integrirati volumen sloja elipsoida što ga opiše elipsa $4x^2 + py^2 = 36$ između ravnina okomitih u fokusima.

10. U kakvom odnosu stoje volumeni paraboloida visine $\frac{p}{2}$ koji nastaju rotacijom parabole $y^2 = 2px$ oko X-osi i Y-osi? [R.: općenito $5p : y$].

11. Koliki je volumen paraboličnog ogledala, kojemu je normalni presjek parabole $y^2 = 8x$, a visina $= 10$?

R : $V = \pi \int_0^{10} 8x dx$

12. Integriraj volumen sferne leće, kojoj su zadani radiji krivina $r_1 = 5$, $r_2 = 3$ i debljina $d = 2$. [R.: Leća nastaje rotacijom zajedničke površine krugova $x^2 + y^2 = 25$ i $(x - 6)^2 + y^2 = 9$].

13. U krajnim tačkama parametara elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ povuku se tangente na elipsu, a cijeli sistem zavrti oko X-osi. Treba izračunati veličinu prostora između nastalog rot. elipsoida i duplog konusa. Isto tako za elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

14. Iz tačke $M(-4, 0)$ povuku se tangente na parabolu $y^2 = 6x$. Treba odrediti površinu između tangenata i paraboličnog luka i volumen tijela, koje nastaje rotacijom te površine oko X-osi.

15. U elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ upiše se pravokutnik maksimalne površine, a cijeli sistem zavrti oko X-osi. Odrediti a) površinu između pravokutnika i elipse; b) veličinu prostora koji nastaje rotacijom te površine oko X-osi.

15a. U krajnjim tačkama parametra parabole $y^2 = 6x$ povuku se tangente. Treba odrediti površinu lika između paraboličnog luka i tangenata i volumen koji nastaje rotacijom te površine oko X-osi.

16. Na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ povučene su tangente tako, da sa koord. osima zatvaraju minimalne trokute. Treba odrediti površinu između tangenata i elipse i volumen tijela koje nastaje potacijom te površine oko X-osi.

16a. U paraboloid izvodnice $y^2 = 2px$ upiše se kugla sa središtem u žarištu paraboloida tako, da se oba tijela sijeku pod maksimal. kutem. Odrediti veličinu zajedničkog prostora.

17. Kolika je veličina prostora koji nastaje rotacijom sinosoide $y = \sin x$ oko X-osi $(o, 2\pi)$? Isto za cosinusoidu u granicama o i $\frac{\pi}{2}$

R.: $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}$

18. Koliki je volumen rotacionog tijela koje nastaje vrtnjom a) linije $y = \frac{k}{x^2}$ oko X — osi (e, ∞); b) zajedn. površine linija $y = x^3$ i $y = \sqrt[3]{x}$

18a. Oko X-osi rotira hiperbola $xy = 2$. Koliki je volumen rotacionog tijela u granicama 2 i ∞?

19. Integrirati volumen tijela koje nastane rotacijom zajedničke površine linija a) $x + y^2 = 9$ i $y^2 = 8x$; b) $9x^2 + 25y^2 = 225$ i $x^2 + y^2 = 16$; c) $y^2 = 2px$ i $x^2 = 2py$; d) $4x^2 + 9y^2 = 36$ i $y^2 = 4x$; e) $y^2 = 2px$ i $y = kx$.

19a. Površina omeđena lukom krive linije $y = x^3 - 3x$, X-osi i ordinatama koje pripadaju ekstremnim vrijednostima od y, rotira oko X-osi; odrediti volumen rotacionog tijela. R.: $3\frac{31}{35}\pi$

20. Akceleracija kod harmoničnog kretanja $a = -r \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$, gdje su r i T konstante. Odrediti brzinu i elongaciju (udaljenost od položaja mira).

R.: $v = \int a dt = \frac{rT}{2\pi}\left(\cos\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$; $x = s = \int v dt = \frac{rT^2}{4\pi^2} \sin\frac{2\pi t}{T} = -\frac{aT^2}{4\pi^2}$

21. Akceleracija kod kretanja niz kosu ravninu $a = g \sin \alpha$, gdje $\alpha =$ kut priklona. Odrediti zakon brzine i puta.

Za $c = 0$: $v = g \sin \alpha \, . \, t$; $s = \frac{g \sin \alpha}{2} t^2$?

22. Isto za vertikalni hitac u vis, ako je $a = -g$, odrediti v i s.

23. Težište homogene ravne žice dužine l: $T \left[\xi = \frac{\int_0^l x dx}{\int_0^l dx} \right]$

24. Težište površine: $T \left[\xi \frac{\int_{x_1}^{x} xy dx}{\int_{x1}^{x_2} y dx}, \ \eta = \frac{1}{2} \frac{\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} y dx} \right]$

25. Sila u električnom polju $P = - \frac{d\left(\frac{E}{r}\right)}{dr} = \frac{E}{r^2}$ = (derivacija potencijala $\frac{E}{r}$ po smjeru sile s protiv. predznakom).

Potencijal? U električnom polju naboja E u tački čija je udaljenost od izvora $= r$ potencijal je $V = \int_r^{\infty} \frac{E dr}{r^2}$

26. Površina rotacionog tijela $P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx$

Treći dio

Red (progresija)

(= niz brojeva po određenom pravilu)

I Aritmetički red

Def.: Niz brojeva u kojem je razlika svakog člana i člana pred njim stalna

1. $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \rightarrow$ aritm. red, ako je $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = \ldots = a_2 - a_1 \equiv d$	**1.** $a_1 \equiv$ početni, prvi član $a_n \equiv$ opći član reda $d \equiv$ diferencija reda
2. $a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d \ldots$	**2. Red predočen pomoću** a_1 **i** d (dvije nepoznanice!)
3. $a_n = a_1 + (n-1)\,d$	**3. Opći član reda**
4. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = ?$ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\,d]$	**4. Suma reda.** (Kada ćemo upotrebiti prvu, a kada drugu formulu?)
5. $\delta = \frac{b-a}{r+1} = \frac{d}{r+1} \ldots \equiv$ razlika interpoliranog reda	**5. Interpolacija (umetanje!)** aritm. reda od r članova među brojeve a i b.
6. $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots a_1 + (n-1)\,d$ $S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots a_n - (n-1)\,d$ $2S_n = n\,(a_1 + a_n)$ i t. d. Dokaz za $a_n = ?$ pomoću indukcije od a_n na a_{n+1}.	**6. Dokaz!**

II Geometrijski red

Def.: Niz brojeva, u kojem je kvocijent svakog člana i člana pred njim stalan.

1. $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n \rightarrow$ geom. red, ako je $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots = \frac{b_n}{b_{n-1}} \equiv q$	**1.** $b_1 \equiv$ početni član $b_n \equiv$ opći član $q \equiv$ kvocijent reda
2. $b_1,\ b_1 q,\ b_1 q^2,\ b_1 q^3 \ldots$	**2. Red predočen pomoću** b_1 **i** q (dvije nepoznanice!)
3. $b_n = b_1 q^{n-1}$	**3. Opći član geom. reda**

4. $S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1}$

4. Suma geom. reda. (Kad ćemo upotrebiti koju formulu?)

5. Geom. red je konačan ili beskonačan prema tome, da li ima određen broj članova ili neizmjerno mnogo. Beskonačan je red konvergentan ili divergentan prema tome, da li mu suma prima određenu i konačnu graničnu vrijednost ili ne za $n \to \infty$

5. Beskonačni geom. red je: konvergentan za $|q| < 1$ t. j. $-1 < q < 1$, **divergentan** za $|q| \leq 1$

6. $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$, gdje je $S \equiv \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ $\quad |q| < 1$

6. Suma besk. konverg. reda

7. $q_1 = \sqrt[r+1]{\dfrac{b}{a}} = \sqrt[r+1]{q}$

7. Interpolacija reda

8. $S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots b_1 q^{n-1}$

$$\begin{aligned} S_n q &= b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^n \\ \hline S_n q - S_n &= b_1 q^n - b_1 \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

8. Dokaz!

Primjena geom. progresije

I Račun složenih kamata (kamatno-kamatni)

Kamate se u određenim intervalima pribrajaju glavnici (kapitaliziraju se!), da i one nose kamate

Svota C uložena uz $p\%$ na složene kamate naraste za n godina na:

1. $C_n = Cq^n$. Ovdje je $q = 1 + \frac{p}{100} \equiv$ kamatni faktor

2. $C_n = Cq^{m + \frac{s}{r}} = cq^m \left(1 + \frac{p \cdot s}{100 r}\right) = cq^m \cdot q^{\frac{s}{r}}$

$= cq^m \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{s}{r}}$, gdje $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{s}{r}}$ $\equiv$ konformni kamatnjak

3. $C_n = C\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{m \cdot n}$

4. $C_n = \lim\limits_{m = \infty} C\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{m \cdot n} = Ce^{\frac{p \cdot n}{100}}$,

gdje $e = 2{\cdot}71828 \ldots .$ $D.$: $\dfrac{100m}{p} = x$

ili $m = \frac{px}{100}$, $C_n = \underset{x = \infty}{C}\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{np}{100}} = Ce^{\frac{p \cdot n}{100}}$

1—2. Godišnje ukamaćivanje

C = početna glavnica; C_n = konačna (nakon n god.); q = kamatni faktor: 1 Din uložen uz 1% na 1 godinu naraste na q.

2. m = cio broj; $\frac{s}{r}$ $\equiv$ pravi razlomak

3. **Ukamaćivanje** svakog m-tog dijela godine.

4. **Neprekidno ukamaćivanje** (rast, rasplođivanje organskih bića!)

5. Dokaz: Na kraju prve godine $C_1 = C + \frac{Cp}{100} =$

$$= C\left(1 + \frac{p}{100}\right) = Cq$$

$$C_2 = C_1 + \frac{C_1 p}{100} = Cq^2 \text{ i t. d.}$$

II Račun renta

Ulaže li neko kroz n godina svotu r na složene kamete uz $p^0/_0$, to je njegovo potraživanje:

$$S_n = rq^{n-1} + rq^{n-2} + \ldots + rq + r \text{ ili:}$$

1. $S_n = r\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ (u vrijeme zadnje uplate);

2. $S_n = r\dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$ (godinu dana iza zadnje uplate)

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

P. Primitak i izdatak svesti na isti momenat!

1. Pravo na neki periodičan prihod (rentu) stičemo ili jednom uplatom (mizom) ili obročnim uplatama (premijama)

---

3. a) $C = \dfrac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$ (dekurzivna)

b) $C = \dfrac{r(q^n - 1}{q^{n-1}(q - 1}$ (anticipativna)

$\left[\text{Anticipativno ukamaćivanje: } 1 - \dfrac{p}{100} = q!\right]$

3. Sadanja (kupovna!) vrijednost rente: a) **dekurzivna renta** t. j. diže se krajem godine i b) **anticipativna** (diže se početkom godine)

---

4. $Cq^n = r\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

5. $Cq^n \pm r\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = x$

4. Amortizacija (otplata) duga C (u obročnim ratama r)

5. Uloženoj svoti C **dodaje se (oduzima) u obrocima svota** r

---

6. a) $C = \dfrac{r(q^n - 1)}{q^{n+k-1}(q - 1}$ (dekurzivna)

b) $C = \dfrac{r(q^n - 1)}{q^{n+k-2}(q - 1)}$ (anticipativna)

6. Kupovna vrijednost n**-godišnje rente** koja počinje tek poslije k godina

---

7. $C = r\dfrac{q(q^n - 1) - n(q - 1)}{q^n(q - 1)^2}$ $(r, 2r, 3r \ldots)$

8. $C = r\dfrac{q^n - e^n}{q^n(q - e)}$ $(r, er, e^2 r \ldots)$

7. Sadanja vrijednost rente koja raste u aritm. progresiji

8. Isto tako kad renta raste u geom. progresiji

---

9. $S_n = a_1 b_1 + (a_1 + d) b_1 q + (a_1 + 2d) b_1 q^2 + \ldots$

$$= a_1 b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} + b_1 dq \frac{1 - nq^{n-1} + (n - 1)q^n}{(1 - q)^2}$$

9. Geometrijsko-aritm. red

10. $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2 =$$

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

10. Suma kvadrata i kubusa prirodnih brojeva

Primjer I

1. Odrediti aritmetički red, ako je zadano: $a_3 + u_7 = 18$. $a_6^2 = 121$.

R.: Članovi se izraze pomoću a_1 i d; dakle:

$$a_1 + 2d + a_1 + 6d = 18$$
$$(a_1 + 5d)^2 = 121$$
$$a_1 + 4d = 9$$
$$a_1 + 5d = \pm 11$$
$$a_1 = 1, d_1 = 2 \qquad \text{Red; } 1, 3, \ldots \text{ i}$$
$$a' = 89, d_2 = -20 \qquad 89, 69, 49 \ldots$$

2. Pet brojeva čine aritm. red; njihov je zbroj 15, njihov produkt 120. Koji su to brojevi??

R: Označivši srednji broj sa x, biće red: $x - 2d$, $x - d$, x, $x + d$, $x + 2d$.

Zato je:

$$x - 2d + x - d + x + x + d + x + 2d = 15$$
$$(x - 2d)(x - d)x(x + d)(x + 2d) = 120$$
$$5x = 15;\ x = 3$$
$$(3 - 2d)(3 - d) . 3(3 + d)(3 + 2d) = 120$$
$$d^4 - \frac{45}{4}d^2 = -\frac{41}{4},\ d_{1,2} = \pm 1$$ Brojevi su (racionalni): 1, 2, 3, 4, 5.

3. Stranice pravokutnog trokuta stoje u aritm. progresiji; visina na hipotenuzu iznosi 2·4. Kolike su stranice?

R.: Stranice su: $a - d$, a, $a + d$, dakle:

$$(a - d)^2 + a^2 = (a + d)^2,\ 2P = a(a - d) = (a + d)\,2{\cdot}4$$
$$d = 1,$$ **stranice su 3, 4, 5**

4. Korijeni jednadžbe 4og stepena stoje u aritm. progresiji; njihova je suma $= 0$, a suma njihovih kvadrata $= 80$. Kako glasi jednadžba?

R.: Korijeni su: $a - 3d$, $a - d$, $a + d$, $a + 3d$ (srednja su dva: $a - d$, $a + d$, ostali?); dakle: $a - 3d + a - d + a + d + a + 3d = 0$; $a = 0$

$$20d^2 = 80,\ d_{1,2} = \pm 2;\ d = 2d_1$$

Korijeni su: $-6, -2, 2, 6$

Jednadžba: $(x + 6)(x + 2)(x + 2)(x - 6) = 0$

ili $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$

5. Treba interpolirati između prvih 10 članova aritm. reda, koji je zadan sa $a_8 - a_5 = 12$, $a_8 . a_5 = 540$, novi red da suma interpoliranog reda iznosi 380. Kako glasi interpolirani red?

R.: $(a_1 + 7d) - (a_1 + 4d) = 12$

$$(a_1 + 7d)(a_1 + 4d) + 54$$
$$a_1 = 2,\ d = 4,\ a_{10} = 38$$
$$380 = a_1 + an)\frac{n}{2} = \frac{40 . n}{2} = 20n;\ n = 19,\ d_1 = 2$$

Red je: 2, 4, 6 ...

Primjer II

1. Tri broja čine geom. red. Suma njihova iznosi 14, a zadnji je dvaput veći od srednjeg; koji su to brojevi?

R.: Članovi se izraze sa b_1 i q, dakle:

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 14$$
$$\underline{2b_1 q = b_1 q^2}$$
$$q = 2 \qquad b_1 = 2 \qquad \text{Brojevi: } 2,\ 4,\ 8$$

2. Dužina, širina i visina kvadera formiraju geom. red. Kolika je površina kvadera, ako mu je volumen $V = 216$, dijagonala $= 3\sqrt{21}$?

R.: $216 = b_1 \cdot b_1 q \cdot bq^2 = b_1^3 q^3 \quad | \ \mathrm{I}$

$b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 = 189 \quad | \ \mathrm{II}$

$b_1 q = \sqrt[3]{216} = 6\,;\ b = \dfrac{6}{q}$ Supst. u II:

$$\frac{36}{q^2} + 36 + 36\,q^2 = 189$$

$$q^4 - \frac{17}{4} q^2 + 1 = 0\,;\ q_{1,2} = \pm 2,\ q_{3,4} = \pm \tfrac{1}{2}$$

Bridovi su: 3, 6, 12; površina: 252

3. U posudi ima a (30) l žeste. Izvadimo b (5) l žeste, i dodamo b l vode, i tako pet puta uzastopce radimo. Koliko je žeste još ostalo u posudi?

R.: Iza kako smo izvadili b l žeste ostalo je u posudi žeste $a - b$, a na 1 l smjese $\dfrac{a-b}{a}\ l$. Nakon ponovnog vađenja ostane u posudi $a - b - \dfrac{a-b}{a} \cdot b =$ $= \dfrac{(a-b)^2}{a}$ žeste ili na 1 l smjese $\dfrac{(a-b)^2}{a^2}$ i t. d.

R.: $= \dfrac{(a-b)^5}{a^4}\ l = \dfrac{25^5}{20^4}\ l$ (žeste)

4. Pet brojeva čine geom. red; njihova sumâ iznosi 15·5, a produkt 32; koji su to brojevi?

R.: Brojevi su: $\dfrac{b_1}{q^2}, \dfrac{b_1}{q}, b_1, b_1 q, b_1 q_2$, pa je $\dfrac{b_1}{q^2} \cdot \dfrac{b_1}{q} \cdot b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 = b_1^5 = 32$

$$\underline{b_1 = 2}$$

$$\frac{2}{q^2} + \frac{2}{q} + 2q + 2q^2 = 15{\cdot}5$$

$$2\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 2\left(q + \frac{1}{q}\right) = 13{\cdot}5 \ \Big\| \ q + \frac{1}{q} = u\,;\ q_1 = 2,\ q_2 = \tfrac{1}{2}\ q_{3,4} = ?$$

Brojevi su: $\tfrac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8.

Primjer III

1. Nad visinom istostraničnog trokuta stranice a nacrtan je drugi istostraničan trokut, nad njegovom visinom treći i t. d. Koliki je zbroj površina svih trokuta?

R.: Površine čine beskonačan konvergentan geom. red.

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}+\frac{v^2}{4}\sqrt{3}+\ldots=\frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}{1-q},\ q=\frac{v^2}{a^2}=?;\ v=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$q=\frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}{a^2}=\frac{3}{4},\ S_{(p)}=\frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}{1-\frac{3}{4}}=a^2\sqrt{3}$$

2. Izračunaj zbroj beskonačnog geom. reda, koji nastaje iz beskonačnog reda $a+aq+aq^2+\ldots$ $(q<1)$, kad se između svaka njegova dva člana interpolira $(n-1)$ broj.

R.: $S=\frac{a}{1-q_1}$, gdje je $q_1=$ kvocijent novoga reda.

$$q_1=\sqrt[n]{\frac{aq}{a}}=\sqrt[n]{q},\ \text{dakle}\ S=\frac{a}{1-\sqrt[n]{q}}$$

3. U kocku brida a upisana je kugla, u kuglu kocka i t. d. U kojem odnosu stoji suma površina svih kocaka prema sumi površina svih kugala? Isto tako za volumene.

R.: Polumjer prve kugle $r_1=\frac{a}{2}$, zato je $a=2r_1=a_1\sqrt{3}$ t. j. $a_1=\frac{a}{\sqrt{3}}=$ brid druge kocke, a polumjer druge kugle $r_2=\frac{a_1}{2}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$ i t. d.

$$O_1=6a^2+6a_1^2+\ldots=\frac{6a^2}{1-q},\ q=\frac{a_1^2}{a^2}=\frac{1}{3},\ O_1=\frac{6a^2}{1-\frac{1}{3}}=9a^2;$$

$$O_2=\frac{4r^2\pi}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3a^2\pi}{2}\quad \text{Dakle je}\ O_1:O_2=9:\frac{3\pi}{2}\ \text{ili}\ 6:\pi$$

4. Zadanom tačkom povučeno je n međusobno jednako razmaknutih pravaca. Iz jedne tačke prvog pravca, koja je udaljena od zadane tačke za dužinu a, spuštena je normala na drugi pravac, iz njezina podnožišta normala na treći pravac i t. d. Kolika je dužina nastale izlomljene spirale?

R.: Dijelovi spirale su: $a\sin\alpha$, $a\sin\alpha\cos\alpha$ . . .

$$S=a\sin\alpha+a\sin\alpha\cos\alpha+\ldots$$

$$=\frac{a\sin\alpha}{1-q}=\frac{a\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=a\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},\ \text{gdje je}\ \alpha=\frac{360^0}{2n}$$

Primjer IV

1. Zbroj triju brojeva, koji čine geometrijski red jest 14. Oduzme li se od trećeg člana 2, red prelazi u aritmetički; koji su to brojevi?

R.: $b(1+q+q^2)=14$

$$\underline{bq^2-2-bq=bq-b}$$

$$\frac{(1+q+q^2)}{(q^2-2q+1)}=\frac{14}{2}=7;\ q^2-\tfrac{15}{6}q-1=0;\ q_{1,2}=\tfrac{15}{12}\pm\tfrac{9}{12},\ q_1=2,\ q_2=\tfrac{1}{2}$$

Brojevi su: 2, 4, 8 i 8, 4, 2.

2. Tri broja čine geom. red. Ako se srednjemu pribroji 8, red prelazi u aritmetički; ako se na to zadnjem doda 64, red prelazi poslije opet u geometrijski. Koji su to brojevi?

R. : $b, \quad bq, \quad bq^2$ geom. red
$a, \quad a + d, \quad a + 2d$ aritm. red
$b, \quad bq + 8, \quad bq^2 + 64$ geom. red

$$a = b$$
$$bq + 8 = a + d$$
$$bq^2 = a + 2d$$
$$\frac{bq^2 + 64}{bq + 8} = \frac{bq + 8}{b}$$

$$a(q-1) = d - 8$$
$$a(q^2 - 1) = 2d$$
$$b^2q^2 + 64b = b^2q^2 + 16bq + 64$$

$$a(q-1) = d - 8$$
$$a(q^2 - 1) = 2d$$
$$a(4 - q) = 4$$

$$q + 1 = \frac{2d}{d-8}, \quad \frac{q-1}{4-q} = \frac{d-8}{4}, \quad q_1 = 3, \; q_2 = -5$$

Brojevi su: $4, \; 12, \; 36; \; \frac{4}{9}, \; -\frac{20}{9}, \; \frac{100}{9}$

3. Tri broja čija je suma 10 čine aritm. red, a druga 3 geom. Oduzmemo li od članova geom. reda odgovarajuće članove aritm. dobijemo redom 2, 5, 11. Kako glase redovi?

R. : $a + a + d + a + 2d = 10$
$$b - a = 2$$
$$bq - (a + d) = 5$$
$$bq^2 - (a + 2d) = 11$$

Redovi: 2, 3, 5; 4, 8, 16 i ?

Primjer V

1. Kapital 16.590 Din uložen je na složene kamate prvih 10 godina uz 5%, slijedećih 10 godina uz 4%. Na koju je sumu narastao nakon 20 godina?

R : $x = 16590 \cdot 1{\cdot}05^{10} \cdot 1{\cdot}04^{10}$
$$\log x = \log 16590 + 10 \log 1{\cdot}05 + 10 \log 1{\cdot}04$$
$$x = 40000 \text{ Din}$$

2. Kako se mora promijeniti $q = 1 + \frac{p}{100}$ da konačna godišnja vrijednost kapitala bude ista, kad je kapitaliziranje svakog $\frac{1}{m}$ dijela godine kao kad je godišnje?

R. : $Cq = Cq_1^{\,m}$ ili $\underline{q_1 = \sqrt[m]{q}}$ t. j. $q_1 = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}}$

3. Prije koliko je godina neki kapital uložen uz 4% na složene kamate iznosio $^1/_3$ svoje sadašnje vrijednosti?

R. : $C\, 1{\cdot}04^x = 3C$
$$1{\cdot}04^x = 3$$
$$x \log 1{\cdot}04 = \log 3$$
$$x = \frac{\log 3}{\log 1{\cdot}04}$$
$x = 28$ godina i 3 dana.

4. Koja glavnica uložena uz 9% na složene kamate za 8 god., 7 mjeseci i 20 dana i polugodišnje kapitaliziranje naraste na 25677,25 Din?
R.: Glavnica x uložena je 17 polugodišta uz 4·5%, a zatim na prosti interes od te vrijednosti kroz 50 dana. Zato je:

$$x \cdot 1,045^{17} + \frac{x \cdot 1 \cdot 045^{17} \cdot 9 \cdot 50}{360 \cdot 100} = 25677,25$$

$$x = \frac{25677,25 \cdot 360 \cdot 100}{36000 \cdot 1,045^{17} + 1,045^{17} \cdot 9 \cdot 50}$$

$x = 12000$ Din.

5. Izračunaj diskont od 2350 Din (4%), koji beskamatno dospijevaju iza $3\frac{1}{2}$ g., ako je kapitaliziranje polugodišnje. R.: Sadanja otplatna vrijednost $C = \frac{C_n}{q_1^{\,n}} = \frac{2350}{1{\cdot}02^7} = 2045{\cdot}80$. $D_i = 2350 - 2045{\cdot}8 = 204{\cdot}2$

Primjer VI

1. A ulaže na početku svake godine n D kroz 30 godina, B pak ulaže za to vrijeme $2n$ D na početku svake druge godine. Ko će na kraju 30 godina dobiti više i za koliko?

Na kraju 30 godine imaće B : $2n \frac{q^{30}-1}{q^2-1} q^2$ A : $n \frac{q^{30}-1}{q-1} q$

$$2n \frac{q^{30}-1}{q^2-1} q^2 - n \frac{q^{30}-1}{q-1} q = n \frac{2q^2(q^{30}-1) - q(q+1)(q^{30}-1)}{q^2-1} = n \frac{(q^{30}-1)q}{q+1}$$

2. a) A ulaže 20 godina na početku svake godine $2r$ D uz 4%, B ulaže kroz to vrijeme svako pola godine r D na početku polugodišta; koji će dobiti više na kraju 20 godine i za koliko. Kapitaliziranje polugodišnje.
R. : Na kraju 20 godine svi ulošci, što ih ulaže A imaju vrijednost:
$2rq_1^{\,40} + 2rq_1^{\,38} + \ldots + 2rq_1^{\,2}$, a osobe B:
$rq_1^{\,40} + rq_1^{\,39} + \ldots + rq_1$, $q_1 = 1 + \frac{p}{200}$ (polugodišnje)

$$\text{Razlika dobitaka} = r \frac{q_1^{\,40}-1}{q_1-1} q_1 - 2r \frac{q_1^{\,40}-1}{q_1^{\,2}-1} q_1^{\,2}$$

$$= r \frac{1{\cdot}02^{40}-1}{1{\cdot}02-1} \cdot 1{\cdot}02 - 2r \frac{1{\cdot}02^{40}-1}{1{\cdot}02^2-1} \cdot 1{\cdot}02^2$$

Koji smisao ima negativna razlika? Primjer $r = 500$ Din

b) Kako se mijenja gornji rezultat, ako osoba A ulaže $2r$ D kroz 20 godina krajem godine, a B r D kroz to vrijeme polugodišnje (krajem polugodišta) uz godišnje i polugodišnje kapitaliziranje?
R.: Nakon 20 godina ulošci osobe A vrijede:
$2r \frac{q^{20}-1}{q-1}$; osobe B: $r \frac{q_1^{\,40}-1}{q_1-1}$ i t. d,
(Neka je kapitaliziranje godišnje za A i B).

3. Koliki se dug može otplatiti polugodišnjim ratama od 3348·7 Din kroz 15 godina, ako se računa 4%?

R. : $x = \frac{a}{q_1} + \frac{a}{q_1^{\,2}} + \ldots + \frac{a}{q_1^{\,30}}$; $x = \frac{3348{\cdot}7}{1{\cdot}02} + \frac{3348{\cdot}7}{1{\cdot}02^2} + \ldots + \frac{3348{\cdot}7}{1{\cdot}02^{30}}$

$$x = \frac{3348{\cdot}7\ (1{\cdot}02^{30}-1)}{1{\cdot}02^{30}} = 75000$$

4. U nekoj šumi ima sada 145678 m^3, a godišnji je prirast $2^1/_4\%$. Koliko se smije godišnje izvoziti kroz 18 god. da konačno ostane 191.720 m^3 drva?

R.: $145678 \cdot 1{\cdot}225^{18} - x \dfrac{1{\cdot}225^{18} - 1}{0{\cdot}225} = 191720$; $x = 1175\ m^3$

5. Neko ima kroz 20 godina na koncu godine da plaća 2500 Din; mjesto toga on bi htio da otplati dug u 4 jednaka obroka i to na početku 1., 6., 11. i 16. godine. Koliki je pojedini obrok, ako se 4% kamate priklapaju glavnici koncem svake godine?

R.: Isporede li se sadanje vrijednosti obaju obročnih otplata izlazi:

$$\frac{2500}{1{\cdot}04} + \frac{2500}{1{\cdot}04^2} + \ldots \frac{2500}{1{\cdot}04^{20}} = x + \frac{x}{1{\cdot}04^5} + \ldots + \frac{x}{1{\cdot}04^{15}};$$

$$\frac{2500}{1{\cdot}04^{20}} \cdot \frac{1{\cdot}04^{20} - 1}{1{\cdot}04 - 1} = \frac{x}{1{\cdot}04^{15}} \cdot \frac{1{\cdot}04^{20} - 1}{1{\cdot}04^5 - 1} \text{ i t. d.}$$

6. Neko ima pravo na godišnju rentu od 3000 Din kroz 20 godina, no prvih 6 godina ne diže rente, nego ugovori s bankom, da mu povisi preostale obroke. Koliki su novi obroci?

R.: Sadanje se vrijednosti renta izjednače:

$$\frac{3000\,(q^{20} - 1)}{q^{20}\,(q - 1)} = x \frac{q^{14} - 1}{(q - 1)\, q^{20}};\ x = \frac{3000\,(q^{20} - 1)}{q^{14} - 1};\ q = 1{\cdot}04$$

7. Neko želi godišnju rentu r pretvvoriti u mjesečnu x; kolika je mjesečna renta?

R.: $r = xq^{\frac{11}{12}} + xq^{\frac{10}{12}} + \ldots, r = x \dfrac{q - 1}{q^{\frac{1}{12}} - 1}$; $x = r \dfrac{q^{\frac{1}{12}} - 1}{q - 1}$

O: Za četvrtgodišnju rentu r, uz $p\%$ i n g. $S_n = r \dfrac{q^n - 1}{q^{\frac{1}{4}} - 1}$ ili $S_n = r \dfrac{q_1^{4n} - 1}{q_1 - 1}$

8. Za uporabu mosta mora jedna općina drugoj platiti svake godine (ili m-te godine) na kraju godine $r = 500$ Din (4%). Kojom se sumom može to odjednom isplatiti?

R.: Jedna općina ima pravo na doživotnu rentu

$C\, q^n = r \dfrac{q^n - 1}{(q - 1)}$, gdje je $n = \infty$. **Sadanja vrijednost doživotne rente je:**

$C = \dfrac{r}{q - 1} = \dfrac{100r}{p}$ **ili za** m **intervale** $C = \dfrac{r}{q^m - 1}$; $p = {}^0/_0$

9. Koju svotu mora neko uložiti, da iza 12 godina na koncu svakog mjeseca prima 2000 Din kroz 10 godina, ako se 4% kamate priklapaju glavnici krajem godine?

R.: Vrijednost svih svota, što se primaju mjesečno, na kraju godine jeste:

$$a = 2000 + \frac{2000 \,.\, 4 \,.\, 11}{12 \,.\, 100} + 2000 + \frac{2000 \,.\, 4 \,.\, 10}{12 \,.\, 100} + \ldots = 2000 \,.\, 12 +$$

$$+ \frac{4.2000}{1200}(11 + \ldots + 1) = 12 \,.\, 2000 + \frac{66 \,.\, 2000}{100};\ a = \frac{1266 \,.\, 2000}{100} = 25320.$$

Zato je: $x = \dfrac{a}{q^{13}} + \dfrac{a}{q^{14}} + \ldots + \dfrac{a}{q^{22}} = ?$

Dodatak. Amortizacioni plan

(Pregledna tabela stanja duga i otplatâ)

Dug se redovno amortizira obročnim uplatnim sumama: anuitetima (obično godišnje) ili amortizacionim ratama. Jedan dio anuiteta služi za smanjivanje duga (amortizaciona kvota, otplata), a drugi za isplatu interesa. Neka je $c \equiv$ dug (zajam), $a \equiv$ anuitet, $k \equiv$ kamate, $b \equiv$ amortizaciona kvota.

a*)

Godine	Godišnje kamate	God. amortizaciona kvota, otplata	Cjelokupna uplata	Ostatak duga
1	$k_1 = \frac{cp}{100}$	$b_1 = c\frac{q-1}{q^n-1}$, ili $= a - k_1$	$k_1 + b_1 = a$	$c - b_1$
2	$k_2 = (c - b_1)\frac{p}{100}$	$b_2 = b_1 q$	$k_2 + b_2 = a$	$c - b_1 - b_2 = c - b_1 - b_1 q$
3	$k_3 = (c - b_1 - b_2)\frac{p}{100}$	$b_3 = b_1 q^2$	.	$c - b_1 - b_1 q - b_1 q^2$
.		.	.	.
.		.	.	.
.		.	.	.
m	$k_m = (c - b_1 - b_2 \ldots - b_m)\frac{p}{100}$	$b_m = b_1 q^{m-1} = c q^{m-1}\frac{(q-1)}{(q^n-1)}$	$k_m + b_m = a$	$c - b_1 \frac{q^m - 1}{q - 1}$

$$\boxed{a = c\frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}} \rightarrow \text{anuitet.}$$

Dokaz: $b_1 = a - k_1 = a - \frac{cp}{100}$; $b_2 = a - k_2 = a - (c - b_1)\frac{p}{100}$

$$= a - \frac{cp}{100} + \frac{b_1 p}{100} = b_1 + \frac{b_1 p}{100}$$

$$= b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_1 q \text{ i t. d.}$$

Primjer: Zajam od 10000 Din treba amortizirati za 5 godina sa 8‰ kamata. Amortizacioni plan?

R.: Anuitet $a = \frac{cq^n(q-1)}{q^n - 1} = \frac{10000 \cdot 1{\cdot}08^5 \cdot 0{\cdot}08}{1{\cdot}08^5 - 1} = \underline{2504{\cdot}55}$

$$a = 2504{\cdot}55$$

God.	God. kamate	Otplata	Cjelokupno	Dug
1	800	1704,55	2504,55	10.000
2	663,64	1840,91		8295,45
3	516,36	1988,19		6454,54
4	357,31	2147,24		4466,35
5	185,53	2319,02		2319,11

Svega: 9999,91 ∞ 10.000

b*) **Zajam u obligacijama:** Veći se zajmovi podijele na manje dijelove, na obveznice ili obligacije sa nominalnom vrijednošću 100, 500 i t. d. Broj izvučenih obveznica raste sa obrocima, jer amortizaciona kvota raste, a kamate opadaju. Neka je $c =$ dug, $x =$ broj obveznica u pojedinim godinama, $v =$ njihova nominalna vrijednost. Broj svih obveznica $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$

$$\boxed{a = c\frac{q^n(q-1)}{q^n-1}} \rightarrow \text{anuitet}$$

God.	Dug	Broj obveznica	Godišnje kamate	Godišnja amort. kvota	Potrebna suma
1	c	$x_1 = m\frac{q-1}{q^n-1}$	$\frac{cp}{100} = k_1$	$x_1v = a - \frac{cp}{100}$	$x_1v + k_1$
2	$c - x_1v$	$x_2 = x_1q$	$(c-x_1v)\frac{p}{100} = k_2$	$x_2v = a - (c - x_1v)\frac{p}{100}$ $= x_1qv$	$x_2v + k_2$
3	$c = x_1v - {}$ $- x_2v$	$x_3 = x_1q^2$	.	$x_3v = x_1q^2v$	
.	.		.		
.	.	$x_n = x_1q^{n-1} =$	.		
.					
n		$= m\frac{q^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$		$x_nv = ?$	

*) Za anticipativno ukamaćivanje: $a = \frac{c(1-q)}{1-q^n}$; $b_n = \frac{c(1-q)q^{n-1}}{1-q^n}$; $b_2 = \frac{b_1}{q}$, $b_3 = \frac{b_2}{q} \ldots$; $b_1 + b_2 + \ldots b_n = c$. Odmah se plati $\frac{cp}{100}$; $q = 1 - \frac{p}{100}$

1. Neka općina pozajmi 600.000 Din uz 4% za kanalizaciju grada. Dug je podijeljen na obligacije sa nominalnom vrijednošću od 500 Din i treba se isplatiti u 20 godina. Napraviti plan otplate.

R.: Anuiteta $a = c\frac{q-1}{q^n-1} \cdot q^n = 44150$ Din

1a godina: Kamate $k_1 = \frac{cp}{100} = 24000$ Din; amortizaciona kvota $b_1 = a - k =$ $= 20150$ Din. S tom se svotom može prikupiti 40 obligacija, a ostatak amortizacione kvote od 150 Din doda se slijedećoj amortizacionoj kvoti i ukamaćuje se;

2a godina: Dug je $600.000 - 20.000 = 580.000$ Din; kamate: 23.200; amortizaciona rata $44.150 + 150 + 150 \cdot 0{\cdot}04 = 44.306$, od čega ostane 44.306 Din — 23.200 Din = 21.106 Din za otplatu duga. Tim se može kupiti 42 obligacije i t. d.

$a = 44.150$ Din

God.	Dug	God. kamate (k)	Amort. kvota ($a - k$)	Broj oblig. po 500 Din	Ostatak anuiteta a
1	600.000	24.000	20.150	40	150
2	580.000	23.200	21.106	42	106
3	.	.	.		
.	.	.	.		
.	.	.	.		
Svega					

2. Zajam uz 5% izdan u 400 obligacija po 1000 Din treba otplatiti u 15 god. a pri tome uz 5% povišene vrijednosti obligacija.

R.: Neka je m = broj svih obligacija, a = anuiteta, v = nominalna, v^1 = povišena vrijednost obligacija, onda je:

1a godina: Anuitet $a = \frac{cp}{100} + x_1 v'$; ostatak duga: $c - x_1 v$

2a „ $a = (c - x_1 v)\frac{p}{100} + x_2 v'$ i t. d.

$$\left(x_1 = m\frac{Q-1}{Q^n - 1};\ x_n = x_1 Q^{n-1},\ \text{gdje je } Q = 1 + \frac{v}{v'}\cdot\frac{p}{100}\right)$$

3. Amortizaciona rata zajma c (4%) iznosi $x = 2\%$ cijelog duga. Kada će se moći dug isplatiti?

R.: $\frac{pc}{100} + \frac{xc}{100} = a = cq^n\frac{q-1}{q^n - 1}$ i t. d.

4. Zajam od 1,000.000 Din sa 9% podijeljen na 1000 obveznica, otplatiti za 6 god. Izraditi plan otplate (Karljiković).

R.: Ovdje je $m = 1000$, $v = 1000$, $a = 222919{,}78$; $x_1 = \frac{1000 \cdot 0{,}09}{1{,}09^6 - 1} = 132{,}55 \sim 133$

$x_2 = 132{,}55 \cdot 1{,}09 = 144{,}48 \sim 145$

$x_3 = 144{,}48 \cdot 1{,}09 = 157{,}48 \sim 158$

Plan otplate: $a = 222919{,}78$

God	Dug	Broj obvezn. za isplatu	God. kamate	Amort. kvota (otplata)	Potrebna kvota
1	1000000	133	90000	133000	223000
2	867000	145	78030	145000	223030
3	722000	158	64980	158000	222980
4	564000	172	50760	172000	222760
5	392000	187	35280	187000	222280
6	205000	205	18450	205000	223450
Svega		1000	337500	1000000	1337500

Zadaci*)

Aritmetički redovi

1. Odrediti a_{10} i s_{20} aritm. reda: 4, 2, 0, —2...
2. Sabrati sve godine od rođenja Kristova do danas.
3. Koliko se članova reda 33, 30, 27... mora sabrati, da suma bude = 0? [$n = 23$].
4. Odrediti red, ako je zadano:

1) $a_4 + a_6 = 8$, $a_4^3 + a_6^3 = 224$ (R.: —4, —2...; 12, 10)

2) $a_4 - a_2 = 4$, $a_4^3 - a_2^3 = 16$ (R.: —4, —2...)

3) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 64$

4) $a_3 - a_2 = 6$, $a_2 : a_3 = 3 : 5$

5) $a_1 = 2$, $a_n = -(4 + 3n)$

* Rezultati su dani redovno u racion. cijelim brojevima.

6) $a_1 = 3$ $\quad$ $d = 4a_1$

7) $a_1 a_2 a_3 a_4 = 75$ $\quad$ $a_2 + a_3 = 8$

8) $a_3 + a_5 = 9$ $\quad$ $a^2_4 = 25$

9) $S_5 = 15$, $S_3 (a_2 + a_3 + a_4) = 54$ (Red: 1, 2, ...)

10) $a^5_3 + a^5_6 = 63$; $a_4 + a_6 = 1$; $\quad$ 11) $a^4_3 + a^4_6 = 17$, $a_3 \cdot a_6 = -2$

5. Kako glasi red, kojemu je a) $S_n = n^2$, b) $S_n = n\,(n-2)$. R.: a) $a_1 = 1$; $d = 2$.

6. Koliki je početni član i suma svih članova reda koji je zadan sa $a_n = 24$, $d = \frac{5}{7}$, $n = 22$ R.: $a_1 = 9$, $S_n = 363$.

7. U rastućem aritm. redu od 10 članova produkt krajnih članova iznosi 19, a produkt srednjih 99. Odrediti sumu reda. R.: 1, 3, 5..

8. a) Četiri broja čine aritm. progresiju; njihova suma iznosi 16, a produkt 105. Koji su to brojevi? b) Suma od 4 broja, koji stoje u aritm. progresiji iznosi 16, a suma njihovih kvadrata 84. Koji su to brojevi? R.: a), b): 1, 3, 5, 7 i 7, 5, 3, 1.

9. Tri broja čine aritm. progresiju sa diferencijom d; zbroj njihovih recipročnih vrijednosti $= 0$. Koji su to brojevi?

10. Tri broja čine rastuću aritm. progresiju; suma je njihova 18, a umnožak 162. Koji su to brojevi? [3, 6, 9].

11. Koji je član aritm. reda 20, 18, 16... jednak jednoj devetini sume svih predhodnih članova? [$n = 6$].

12. Koji je član aritm. reda 28, 26... jednak svome rangu? [$n = a_n = 10$].

13. Bilo koje tri veličine iz slijedeće tablice uzmi kao zadane, a ostale 2 proračunaj.

a_1	d	n	a_n	S_n
7	$^2/_3$	10	(13)	(100)
3	$-\,^2/_3$	10	?	(0)
8·5	$-$ 0·5	12	(3)	?
0	1 2	(16)	(?)	144

14. Koliko ima troznamenkastih brojeva, koji su djeljivi sa 13? ($n = 76$)

15. Cifre troznamenkasta broja stoje u aritm. progresiji; njihov je zbroj 9, a srednja je cifra osmina broja iz krajnih cifara. Koji je to broj [234].

16. a) U aritm. redu je a_n jednako aritm. sredini između a_{n-r} i a_{n+r} Dokaz?
b) Aritmetička sredina od ma koliko uzastopnih članova aritm. reda jednaka aritm. sredini prvoga i pošljednjeg člana. Dokaz?
c) Kako mora biti građena aritm. progresija, da suma bilo kojih dvaju članova bude jednaka opet jednom članu reda? R.: $a_1 + (k-1)\,d + a_1 + (l-1)\,d = a_1 (x-1)\,d \ldots$ a_1 mora biti višekratnik od d!
d) Ako izrazi $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$ i $\frac{1}{c+a}$ čine aritm. red to isto čine i brojevi a^2, b^2, c^2. Dokaz?

17. U kojoj je aritm. progresiji treći član jednak kvadratu prvoga, a ujedno i četvrtini produkta prvog i četvrtog? (3, 6, 9).

17a. Aritm. red sa diferencijom $d = 2$ i sumom $= 28$ ima početni član jednak broju članova. Koji je to red? [4, 6, 8, 10].

18. Suma cifara trocifrena broja jednaka je njihovu produktu $= 6$. Koji je to broj, ako mu cifre stoje u aritm. progresiji? [123 ili 321].

19. Suma korijena jednadžbe četvrtog stepena iznosi 10, a njihov produkt 24. Kako glasi jednadžba, ako korijeni čine aritm. progresiju? $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0$.

20. Suma korijena jedn. trećeg stepena iznosi 2, a suma njihovih kvadrata 5. Koji su koeficijenti jednadžbe, ako korijeni stoje u aritm. progresiji? [Jedn.: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

21. Koeficijenti a, b i c jedn. trećeg stepena $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ čine rastuću aritm. progresiju sa sumom 14 i produktom $= 64$. Odrediti korijene jednadžbe? ($x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$; $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \pm 2i$).

22. Korijeni jedn. trećeg stepena stoje u aritm. progresiji. Kako glasi jedn., ako je **suma korijena** $= 14$, **a suma njihovih recipročnih vrijednosti** $= \frac{7}{8}$? R.: $x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$; 2, 4, 8.

23. Korijeni jedn. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ čine aritm. progresiju. Treba riješiti jednadžbu. R.: 1, 2, 3.

24. Odrediti vrijednost od k jedn. $x^4 - (3k + 4) + k^2 = 0$, za koju korijeni te jedn. stoje u aritm. progresiji.

25. Tijelo padajući prevali u prvoj sekundi $\frac{g}{2} = \frac{9{\cdot}81}{2}\,m$; u svakoj slijedećoj za g više nego u prehodnoj. Koliki je put nakon t sekunda? R.: $S = \frac{g}{2} t^2$

25a. Od dva aritm. reda sa jednakim početnim članom suma prvoga iznosi 207, a zadnji mu je član 39, suma drugoga $= 917$, a zadnji član 123. Koliko članova imaju pojedine progresije? R.: neodređene jedn., 9; 14; **a** $= 7$.

26. Dvije tačke A i B, koje su udaljene a m kreću se jedna prema drugoj. A prevali u prvoj sekundi b m a u svakoj slijedećoj za c m više nego u predhodnoj. B krene n sek. kasnije, prevali u prvoj sekundi d m u drugoj $d - e$, u trećoj $d - 2e$ i t. d. Kada i gdje će se sastati?

27. Po opsegu kruga kreću se dvjie tačke A i B. Tačka A prevali u **prvoj** sekundi 1°, a u svakoj slijedećoj sekundi za 1° više nego u predhodnoj. Tačka B kreće se jednoliko sa brzinom $c = 1°$. Kada i gdje će se sastati prvi puta ako se kreću u istom smjeru, a kada i gdje ako se kreću u suprotnom smjeru?

28. Na cilindričnom mosuru promjera 3 cm i visine 20 cm namotan je konac debljine 0.25 cm i pravi 4 cm debeo namot. Kolika je dužina konca?

29. U gramofonsku ploču utisnuta je pjesma na spirali *sa* 230 jednako razmaknutih zavoja; kolika je dužina spirale ako je dijametar najšireg zavoja $= 240$ mm a najužeg $= 121$ mm? (Naputak: Neka se spirala zamjeni *sa* 230 koncentr. kruga). R. $x = 130$ m.

30. Neko je pozvao sebi u goste nekoliko svojih drugova. Svaki se drug pri ulazu pozdravi sa svima prisutnima. Takvih je pozdrava bilo 120. Koliko je bilo pozvano drugova? ($n = 15$).

31. Prvi i drugi član rastućeg aritm. reda jesu racionalni korijeni simulantnih jednadžbi $3^{2x} - 4 \cdot 2^{-2y} = 80$ i $3^x + 2^{-y} = 9{\cdot}5$. **Treba između njih interpolirati** red tako, da se suma tih dvaju članova podvostruči. Koliko je članova interpolirano? [$x_1 = 2$, $y_1 = 1$; red je 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2, interpolirano je 2 člana].

32. Korijeni sistema jedn. $\sqrt[4]{x+7y}=3$, $(x+7y)\,2^{x}=1296$ predočuju šesti i sedmi član rastuće aritm. progresije; koliko se članova mora sabrati, da suma iznosi 5? [$a_6=4$, $a_7=11$; $n=10$].

33. Veći racionalni korijen jedn. $\sqrt[4]{15+x}+\sqrt[4]{82-x}=5$ predočuje sumu, a manji prvi član i diferenciju jednog aritmetičkog reda. Koliko članova ima red? R.: $x_1=1$, $x_2=66$, $n=11$.

34. Stranice pravokutnog trokuta stoje u aritm. progresiji; odrediti stranice (i kuteve), ako je zadan a) radius upisanog kruga $\rho=2$; b) polumjer opisanog kruga $r=5$; c) opseg $o=12$. R.: 3, 4, 5; d) površina $P=150$. R.: 15, 20, 25; f) visina na hipotenuzu $h=9{\cdot}6$. R.: 12, 16, 20; h) diferencija $d=\rho$; Stranice su 3ρ, 4ρ, 5ρ; [R.: Stranice su: a) 6, 8 i 10; b) 6, 8 i 10]

35. Stranice trokuta stoje u aritm. progresiji sa diferencijom $d=\frac{\rho}{n}$ ($\rho=$ polumjer upisanog kruga). Treba odrediti stranice i polumjer opisanog kruga? Primjer $n=4$, 3.

R.: $P=s\,.\,\rho=\sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$; za $n=4$ stranice su: $\frac{14\rho}{4}$, $\frac{13\rho}{4}$, $\frac{15\rho}{4}$

36. Stranice trokuta stoje u aritm. progresiji. Površina mu je $^2/_3$ površine istostraničnog trokuta sa istim opsegom; koliki su kutevi trokuta?

37. Stranice trokuta formiraju aritm. progresiji. Uveća li se svaka stranica za 50, polumjer upisanog kruga uveća se za 17; doda li se svakoj stranici 60, to se polumjer upisanog kruga poveća za 20. Kolike su stranice i polumjer opisanog kruga? R.: stranice su $x-d$, x, $x+d$ pa je

$$\rho=\sqrt{\frac{x^2-4d^2}{12}},\quad \rho+17=\sqrt{\frac{(x+50)^2-4d^2}{12}}\quad \text{i}\quad \rho+20=\sqrt{\frac{(x+60)^2-4d^2}{12}};$$

$a=15$, $b=26$, $c=37$

38. Polumjeri tangencijalnih krugova na zadani trokut ρ_1, ρ_2, ρ_3 stoje u aritm. progresiji sa sumom $=9$. Kolike su stranice i površina trokuta, ako je polumjer u njega upisanog kruga $\rho=\frac{12}{13}$?

R.: $P=\frac{12}{13}\sqrt{26}$; $\rho_1=2$, $\rho_2=3$, $\rho_3=4$, $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}$

39. Zadane su dijagonale tetivna četverokuta $d_1=5\frac{1}{4}$, $d_2=4$, a stranice mu stoje u aritm. progresiji; odrediti stranice, ako je a) poznata površina $P=2\sqrt{30}$ [R.: $P=\sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$]
b) opseg $=14$. [Stranice su 2, 3, 4, 5].

40. Bridovi kvadratične krnje piramide stoje u aritm. progresiji sa diferencijom $d=1$, a pobočni je brid srednji član reda. Koliki je volumen piramide, ako joj je visina $h=\sqrt{2}$? $V=\frac{\sqrt{2}}{3}(10+\sqrt{3})$

41. Polumjeri od 11 koncentr. krugova stoje u aritm. progresiji; opseg najmanjeg kruga iznosi 4π a najvećeg 24π. Kolika je površina srednjeg kruga? [$P=49\pi$]

42. Stranice od 5 istostr. trokuta čine aritm. red, a cjelokupna im je dužina $=40$. Suma površina najmanjeg i najvećeg trokuta za $10\sqrt{3}$ manja je od sume površina ostalih trokuta. Kolike su stranice trokuta? Koliki je volumen onog tetraedra, čija je površina jednaka sumi površina svih trokuta? [Stranice su 4, 6, 8, 10, 12].

43. Polumjeri od 5 krugova stoje u aritm. progresiji, a cjelokupna im je dužina 40π. Površina najmanjeg i najvećeg kruga zajedno za 40π je manja od sume površina ostalih krugova. Treba odrediti volumen one kugle čija je površina jednaka sumi površina zadanih krugova. [Polumjeri: 4, 6, 8, 10, 12].

44. Stranice istokračnog trapeza stoje u aritm. progresiji u kojoj je srednji član krak trapeza; kolike su mu stranice i površina, ako je visina trapeza $v = 2\sqrt{15}$, a polumjer opisanog kruga $r = \sqrt{17\frac{1}{15}}$; R.: Stranice su 10, 8, 6].

45. Koliki su kutevi pravokutnog trokuta, ako mu stranice stoje u aritm. progresiji?

46. Kutevi deseterokuta stoje u aritm. progresiji sa diferencijom $d = 10^\circ$. Koliki su oni?

47. Opseg deseterokuta jednak je $\frac{11}{7}$ broja njegovih dijagonala, a stranice mu stoje u aritm. progresiji. Prva stranica jednaka je kvadratu diferencije; kolike su pojedine stranice?

48. Tangensi kuteva trokuta čine aritm. progresiju sa diferencijom $= 1$. Koliki su kutevi? R.: $\mathrm{tg}\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\beta = 2$, $\mathrm{tg}\gamma = 3$. Prema: $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma$

49. U pravokut. trokutu sinusi kuteva čine aritm. progresiju; koliki su kutevi? R.: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\sin\gamma = 1$

50. Isto za cosinuse. R.: $\cos\gamma = 0$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

51. Stranice trokuta čine aritm. progresiju sa diferencijom $d = 1$. Površina trokuta je 84; kolike su stranice i kutevi? [R.: 13, 14, 15].

52. Površina trokuta, kojemu stranice stoje u aritmetičkoj progresiji sa diferencijom $d = 1$, data je izrazom $\displaystyle\int_{1\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{7dx}{x^2}$. Odrediti stranice i najmanji kut trokuta. [R.: Stranice su: 13, 14, 15].

53. Minimum funkcije $y = x^2 - 12x + 1$ jednak je brojčano površini pravokutna trokuta, čije stranice stoje u aritm. progresiji. Riješiti trokut. [R.: Stranice su 3, 4, 5].

54. Dijagonala i stranice pravokutnika stoje u aritm. progresiji, a njegova površina jednaka je površini linije $y = x^3 - 3x$ u granicama ekstremnih vrijednosti te funkcije. Odrediti površinu segmenta, što ga na opisanom krugu otsjeca manja stranica pravokutnika.

55. Stranica romba sa njegovim poludijagonalama čini opadajući aritm. red, kojemu je diferencija $d = 1$. Odrediti kuteve romba i polumjer upisanog kruga. [$d_1 = 8$, $d_2 = 6$, $a = 5$ i t. d.].

55a. Oko deltoida može se opisati krug, a njegova veća dijagonala formira sa stranicama opadajući aritm. red diferencije $d = 2$. Kolika je površina kružnog vijenca između opisanog i u deltoid upisanog kruga?

Geometrijski redovi*)

1. Neka se odredi b_7 (b_{10}) i s_n (s_{20}) geom. reda: 1) 3, 9, 27...
2) 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$... 3) -1, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{9}$... 4) 1, $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$

2. Riješi red ako je zadano: 1) $b_1 = 2$, $q = 3b$

2) $\begin{matrix} b_7 - b_3 = 60; \\ b_7 - b_5 = 48, \end{matrix}$ $(S_{10} = ?)$; R.: $\frac{bq^2(q^4-1)}{bq^4(q^2-1)} = \frac{5}{4} \ldots$ $q = \pm 2$, red.: 1, 2, 4...

3) $\begin{matrix} b_1 + b_7 = 65; \\ b_3 \,.\, b_5 = 64, \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} b_1 + b_4 + b_7 = 73; \\ b_3 + b_5 = 20, \end{matrix}$ R.: kao pod 2).

5) $\begin{matrix} b_1 + b_3 + b_5 = 21, \\ b_2 + b_4 = 10; \end{matrix}$ R.: kao pod 2)

3. Koliko se članova geom. reda 4, 6, 9... mora sabrati, da suma iznosi 32·5?

4. Iz slijedeće tablice uzeti po 3 broja poznata i odrediti druga dva (ona u zagradi!).

b_1	q	n	b_n	S_n
12	-0.5	5	$(\frac{3}{4})$	(8·25)
5	2	(6)	(160)	315
2	2	(5)	32	(62)
1	(-2)	(5)	16	11
-4	$(-\frac{3}{2})$	4	13·5	(6·5)

5. Odrediti a_n i S_n geom. redova:

1) $r + rq + rq^2 + \ldots + rq^{n-1} = ?$; 2) $r + \frac{r}{q} + \ldots + \frac{r}{q^{n-1}} = ?$;

3) $\sqrt[7]{a^6} + \sqrt[7]{a^5 b} + \sqrt[7]{a^4 b^2} + \ldots + \sqrt[7]{b^6}$; 4) $x + \sqrt[4]{x^3 y} + \sqrt[4]{x^2 y^2} + \ldots + y$;

5) $ax^{n-1} + ax^{n-2} + ax^{n-3} + \ldots + a$; 6) $S_8 = a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} \ldots ?$

6. Prvi je član geom. progresije $x^{\frac{5}{2}}$ a treći $\frac{a^2}{\sqrt{x}}$; treba odrediti

1) sumu prvih 5 članova; 2) S_n; 3) S_{2n}.

6a. Odrediti sumu beskonačnih geom. redova:

1) $1 - \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 - (\frac{3}{4})^3 + \ldots$; 2) $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \ldots (a > b)$;

3) Odrediti S_n i S_∞ geom. reda $x^{\frac{3}{2}} - ax + a^2\sqrt{x} \ldots$;

4) $(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots) + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots) + \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots) + \ldots$;

5) $$\frac{\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \ldots\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots\right)}{\left(3 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} - \ldots\right)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \ldots\right)} = ?;$$

*) Rezultati su dati redovno u racionalnim brojevima.

5a) $\frac{a}{a+3}+\left(\frac{a}{a+3}\right)^2+\ldots a>0$

6) Pretvoriti dec. brojeve a) $1{\cdot}\dot{3}\dot{3}$; b) $2{\cdot}3\dot{6}$; c) $0{\cdot}54\dot{5}\dot{6}$; d) $2{\cdot}4\dot{5}$ u obične razlomke
7) Između x i y treba interpolirati n članova; kako glasi red?
8) Izračunati sumu geom. reda od r članova koji su interpolirani između a i b.
9) Izračunaj zbroj beskonačnog geom. reda koji nastane iz beskonačnog reda $a+aq+aq^2+\ldots(q<1)$, kad se između svaka 2 člana interpoliraju 3 broja; $S=\frac{a}{1-\sqrt[4]{q}}$
10) Treba između članova reda $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\ldots$ interpolirati takav red, da se suma zadanog reda time potrostruči; koliki je kvocijent novog reda i koliko se brojeva interpolira između prva dva člana?

7. Odrediti onaj član reda 1, 2, 4... koji je jednak kvadratnom korijenu umnoška svih predhodnih članova. $[n=6]$.

8. Koji je član reda 1, 3, 9... jednak a) kvadratu četvrtoga člana; b) produktu drugoga i petoga člana?

9. U geom. redu je $s_3=13$ i $s_6-s_3=351$. Kako glasi red?

10. Koji red ima za a) $S_4=\frac{3^n-2^n}{3\,.\,2^{n-2}}\left(a=\frac{2}{3},\ q=\frac{3}{2}\right)$; b) $S_n=\frac{a^n-b^n}{a-b}$?

11. U geom. progresiji od 10 članova produkt prvog i zadnjeg 3, a suma srednjih članova 4. Kako glasi red? [R.: $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{27}\ldots 243$?]

12. U kojem je geom. redu šesti član jednak umnošku prvog i desetog, a osmi član kubu šestoga? R.: kao kod 11).

13. Treba dokazati slijedeće odnose kod geom. progresije: 1) $S_{n+1}-S_n=b_n$
2) Ako brojevi $b_1, b_2, b_3\ldots$ čine red sa kvocijentom $=q$, onda tvore geom. red i brojevi $\frac{1}{b_2^2-b_1^2}$, $\frac{1}{b_3^2-b_2^2}$, $\frac{1}{b_4^2-b_3^2}\ldots$ sa kvocijentom $=\frac{1}{q^2}$;

3) $b_p=\sqrt[k-i]{\frac{b_k^{p-1}}{b_i^{p-k}}}$ 4) $b_n=\sqrt{b_{n-r}\,.\,b_{n+r}}$ (riječima?)

5) Ako se u geom. redu zbroji po r članova koji dolaze jedan iza drugog, opet se dobije geom. red. Dokaz?
6) Produkt P od n članova geom. reda jednak je drugom korijenu iz n-te potencije prvog i zadnjeg člana. Dokaz?

$$P=b_1\,b_2\ldots b^n=(b_1\,b_n)^{\frac{n}{2}}=b^n\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

7) $b_1 b_n=b_2\,.\,b_{n-1}=\,.\;\,.=k$

8) $P_{(n)}^2=\left(\frac{S_n}{S_n'}\right)^n$ Dokaz! ($P\equiv$ umnožak od n članova, $S_n=$ suma, $S_n'=$ suma recipročne vrijednosti od n članova)
9) $S_n\,(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$

14. Kako mora biti građen geom. red da produkt bilo kojih dvaju članova bude opet jedan član reda.
R.: $b_1q^{k-1}\,.\,b_1q^{l-1}=b_1\,q^{x-1}=b_1^2q^{k+l-2}$; dakle $b_1=$ potencija od q.

15. Logaritmi geom. reda čine aritm. red. Dokaz? Kolika je diferencija reda?

16. Tri broja koji stoje u geom. progresiji imaju sumu 13, a sumu kvadrata 91; koji su to brojevi? R. : 1, 3, 9; $(1 + q^2 + q^4) : (1 + q + q^2) = ?$

17. Tri broja čija je suma $= 13$, a umnožak $= 27$, stoje u geom. progresiji; koji su to brojevi? R.: Brojevi su $\frac{b}{q}$, b, $\frac{b}{q}$ ... i t. d.

18. Četiri broja stoje u geom. progresiji kod koje je kvocijent jednak trećem članu; koji su to brojevi, ako njihov umnožak iznosi 81? [$\frac{1}{9}$, 1, 9, 81]

19. Cifre jednog trocifrenog broja čine geom. red; zadnja je cifra jednaka trećini broja iz prve dvije, a broj čije cifre idu obratnim redom veći je za 297 od danog broja. Odrediti taj broj. [124.].

20. Suma prva četiri člana geom. progresije $= 3·75$, a suma slijedeća četiri $= 60$. Koja je to progresija?

21. U geom. progresiji kvocijent jednak je četvrtom članu, a suma trećeg i četvrtog iznosi 4. Koji član reda pomnožen sa predhodnim članovima daje sam sebe? R.: $n = 6$; red je $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1 ...

22. Suma neparnih članova geom. reda iznosi 1010·10101, a suma parnih 10101·0101; kako glasi red, ako mu je broj članova 10?

23. Korijeni jednadžbe trećega stepena stoje u geometrijskoj progresiji; njihova suma iznosi 7, a suma njihovih kvadrata 21. Kako glasi jednadžba? R.: Korijene označiti sa $\frac{b}{q}$, b, bq ...; jedn. glasi: $(x - 1)(x - 2(x - 4) = 0$ i t. d.

24. Produkt korijena jedn. četvrtog stepena $= 24$, a njihova suma $= 10$. Kako glasi jedn., ako korijeni stoje u geom. progresiji?

25. Korijeni jednadžbe četvrtog stepena čine geom. red. Odbijemo li sumu srednjih članova od sume vanjskih članova, dobićemo 3. Odbijemo li sumu kvadrata srednjih članova od sume kvadrata vanjskih članova, dobivamo 45. Kako glasi jednadžba? R.: $(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 8) = 0$

26. a) Cifre četveroznamenkastog broja stoje u geom. progresiji; produkt prve i zadnje iznosi 8, njihova suma 9. Koji je to broj? [1248].

b) Produkt prvog i zadnjeg člana geom. reda iznosi -288, njihova suma 93, a suma svih članova 63. Odrediti red. R.: $b_1 = 96$, $b'_1 = -3$, $q = -\frac{1}{2}$, $q' = -2$, $n = 6$

27. Tri broja čine geom. red. Suma njihova jest 13. Odrediti red a) ako produkt geom. i aritmetičke sredine krajnih članova iznosi 15; b) ako produkt geom. sredine i sume krajnih članova iznosi 30. R.: Rac. cijeli brojevi: 1, 3, 9.

28. Koeficijenti jedn. 4-og stepena $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = \emptyset$ stoje u geometrijskoj progresiji; njihova je suma 31, a umnožak 1024. Odrediti korijene te jednadžbe. R.: racion. koeficijenti: 1, 2, 4, 8, 16; jedn. $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0$; staviti $x + \frac{4}{x} = y$ i t. d.

29. Suma neparnih članova geom. reda $= 21$, a parnih $= 10$. Kako glasi red, ako mu je broj članova $n = 5$. [Red: 1, 2, 4, 8, 16].

30. Kolika je suma beskon. geom. reda u kojem umnožak prva tri člana iznosi 1 a suma kubusa tih članova $= 9\frac{1}{8}$? Red.: 2, 1, $\frac{1}{2}$...; $S = 4$

31. Stranice trokuta stoje u geom. progresiji, a opseg mu iznosi 9·5. Suma prvih dviju stranica za 0·5 veća je od treće stranice. Kolika je površina trokuta? [Stranica: 2, 3, 4·5; $P = ?$]. Koliki je kut nasuprot najmanjoj stranici?

32. Površina trokuta $= \sqrt{\frac{2}{7}}$, polumjer upisanog kruga $\varrho = \frac{2}{7}$, a polumjer i tangencijalnih krugova na zadani trokut stoje u geom. progresiji. Riješiti trokut. R.: $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = \frac{1}{2}$ i t. d.
33. Stranice pravokutnog trokuta stoje u geom. progresiji; koliki su kutevi trokuta?
34. Dvadeset elastičnih kugli, čije mase stoje u geom. progresiji sa $q = \frac{1}{2}$, dodiruju se tako, da svi njihovi centri stoje u istom pravcu. S kojom se brzinom kreče najmanja kugla, ako najveća sa masom 1 udari slijedeću sa brzinom 1?
35. Stranica romba čini sa njegovim poludijagonalima geom. red. Odrediti kuteve romba?
36. Kod kojeg tangencijalnog četverokuta stranice stoje u geom. progresiji? R.: kvadrat.
37. Diagonale deltoida čine drugi i zadnji član jedne geom. progresije, kojoj su ostali članovi stranice deltoida. Površina deltoida je 18, a umnožak dviju nejednakih stranica $= 16$. Kolike su stranice?
38. Polumjeri koncentričnih krugova čine opadajući geom. red sa kvocijentom $q = \frac{1}{2}$, površina vijenca izmedu krajna dva kruga iznosi 48π. Kolik je volumen one kugle, čija je površina jednaka sumi površina od neizmjerno mnogo zadanih krugova? Red: 8, 4...
39. Bridovi kvadera tvore geom. progresiju; volumen je kvadera 1000 cm^3, a površina 700 cm^2; Koliki su bridovi? [5, 10, 20].
40. Bridovi kvadera tvore geom. red; volumen mu je $= 216$, a površina osnovaka prema cjelokupnoj površini pobočnih ploha odnosi se kao 1 : 6. Kolika je površina kvadera?
41. Stranica krnjeg uspravnog čunja srednji je član geom. reda sa kvocijentom $q = {}^3/_2$ kojemu su polumjeri čunja ostala dva člana; koliki je volumen čunja, ako mu je visina $\sqrt{11}$? [4, 6, 9]
42. Polumjeri od 5 koncentričnih krugova stoje u geom. progresiji. Opseg svih 5 krugova zajedno iznosi 31π, a suma površina prvog i zadnjeg iznosi $64{\cdot}25\pi$. Kolika je površina kružnog vijenca izmedu dva krajna kruga? (R.: $r_5 = 8$, $r_4 = 4$; $P = 48$
43. Recipijent uzdušne pumpe ima volumen $R = 3\,dm^3$, a njezina sara volumen $V = 1{\cdot}2\,dm^3$; koliko se puta mora čep potegnuti, da se napetost uzduha $b_0 = 760\,mm$ snizi na napetost $b_n = 4\,mm$? [15·47].
44. Metalno zrcalo apsorbira kod svake refleksije 10% svjetlosti, koja na nj pada. Koliki je intezitet jedne zrake svjetlosti, koja se reflektira n puta, ako joj je intenzitet na početku bio $= I$?
45. Onaj koji je pronašao šah tražio je za nagradu toliko zrna pšenice, koliko ih treba, da na prvo polje šaha stavi 1 zrno, na drugo 2 i tako na svako slijedeće polje dvaputa toliko zrna koliko je na prećašnjem; koliko bi *hl* pšenice morao dobiti ako u 1 *hl* ima 1,500.000 zrna? (R.: 12·298 . . . bilijuna hektolitara).
46. Metalna zrcala postavljena su tako, da zraka jakosti $= I$ pada na prvo pod $\sphericalangle\ 60^\circ$, od ovoga reflektuje na drugo pod istim kutem, a od njega na treće i tako dalje. Svako zrcalo apsorbira 10% jakosti upadnute zrake; a) na kojem ćemo zrcalu dobiti samo 0·001 prvotne jakosti zrake, b) kolika je jakost zrake, koja se reflektuje od 10-tog zrcala? [R.: $I_1 = \frac{I \cos\alpha}{10}$ i t. d.]

47. Iz tačke A na kraku kuta $\alpha = 45^\circ$, udaljene od vrha za dužinu a, spusti se normala na drugi krak; iz njezina produžišta opet normala na prvi i t. d. Kolika je dužina nastale cik-cak linije? $\left(\frac{a \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)$

48. Korijeni jednadžbe $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$ ujedno su prva dva člana rastuće geom. progresije; koliko se članova reda mora sabrati da suma bude jednaka kvadratu manjeg korijena jednadžbe?

49. Leptiri legu godišnje najviše 100 jaja. Ako od toga uspije da se razvije a) 10 leptira, b) 5 leptira i ako površina svakog leptira iznosi 10 cm^2; kada bi potomci samo jednog leptira prekrili a) cijelo kopno ($= 146.10^6$ km^2) b) cijelu površinu zemlje uz pretpostavku da ne nastane nikakva izvanredna poremetnja u njihovom razvoju? (R. : Kopno bi prekrili za a) 17·16 . . god.; b) 24·56 . . god.).

50. Neke gljive oblika kugle sa $r = 0.005$ mm množe se dijeljenjem. Ako podvostručavanje uslijedi svakog sata, nakon koliko bi se vremena a) posuda od 1 cm^3 ispunila gljivom b) nakon kojeg bi se vremena od jedne gljive razvila kugla velika kao naša zemlja? [R. : a) 30·8 sati b) 120·6 sati].

51. Iz jutra u 8 sati neko saopšti novost dvojici svojih prijatelja; nakon $\frac{1}{4}$ sata svaki od ovih saopšti istu novost dvojici novih prijatelja i tako se to ponavlja svako $\frac{1}{4}$ sata. Nakon koliko bi vremena doznali za tu novost svi stanovnici Sarajeva?

52. Kada bi neki zavodnik kroz 20 godina života svojim primjerom ili namjerno zaveo svake godine samo jednog čovjeka, a od ovih svaki opet godišnje po jednog; koliko bi zavedenih imao na duši onaj prvi u času smrti? (R. : 1048575).

53. 76 g srebra stopi se sa 20 g bakra. Od mješavine uzme se 20 g i doda ponovno 20 g bakra. Koliko će još ostati srebra u smjesi, nakon što je ovaj proces ponovljen 24 puta (0,27911 g)

54. 278 kg plave boje pomiješa se sa 213 kg žute; 278 kg mješavine pomiješa se po drugi puta sa 213 kg žute boje. Koliko se puta mora poduzeti ovako miješanje, da u smesi ostane $\frac{1}{100}$ plave boje (oko 8 puta!).

55. U Burmeisterovoj: »Grundriß der Naturgeschichte« nalazi se ovaj zadatak: Uzima se da na zemlji ima 1 milijarda ljudi (naime g. 1848.) i da svake 33 godine izumre jedna generacija, dok je po prilici prirast žiteljstva $\frac{1}{8}$. Pretpostavljajući da je to tačno, prije koliko je godina živio prvi par ljudi, a koliko je ljudi živjelo u vrijeme Kristovo? (R. 5610 god. židovska godina!)

56. a) U istostr. trokut stranice a upiše se krug, u krug istostr. trokut i t. d. Kolika je suma površina 1) svih krugova; 2) svih trokuta?

b) U zadani istostr. trokut upisati drugi, kojemu su vrhovi u središtu stranica prvoga; u drugi na isti način, treći i t. d. Kolika je površina (opseg) svih trokuta zajedno? Isto tako za trokut sa stranicama: $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

c) U istostraničan se trokut upiše kvadrat, nad ovim drugi, nad drugim treći i t. d. Suma površina svih kvadrata $= ?$

57. a) U krug upiši kvadrat, u kvadrat krug, u ovaj opet kvadrat i t. d. U kojem odnosu stoje površine svih kvadrata prema površinama svih krugova?

b) Isto tako za krug i pravilan šesterokut?

c) U kvadrant kruga (r) upisati drugi krug, u njegov kvadrant treći i t. d. Kolika je površina svih krugova zajedno?

58. a) U trokut (a, h) upišu se krugovi jedan iznad drugog. Suma površina svih krugova = ?

b) Isto tako za čunj (r, h) i kugle.

c) U elipsu je upisana druga elipsa jednakog numeričkog ekscentriciteta $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{3}{5}$ čija je velika os jednaka maloj osi prve elipse. Slično je u drugu elipsu upisana treća i t. d. Koliki je zbroj površina svih elipsa? [$Sp = 20a^2\pi : 9$]

59. Na kocku brida a postavi se druga tako da joj uglovi leže u sredini osnovnih bridova prve; na isti način postavi se na drugu treća i t. d. a) Koliki je volumen i površina svih kocki; b) Do koje visine dopire ovaj stup od kocki?

60. U kuglu polumjera r upiše se kocka, u kocku kugla i t. d. a) U kojem odnosu stoje volumeni svih kugli prema volumenu svih kocki; b) Dokazati da je suma od beskrajno mnogo volumena kuglinih slojeva između pojedinih kugli jednaka volumenu zadane kugle.

61. U $\sphericalangle\ 2\alpha$ upisati kvadrat stranice a tako, da mu dva vrha leže na simetrali kuta, do ovoga drugi manji, do njega na isti način treći i t. d. Neka se izračuna površina svih kvadrata? [R.: $45° = \alpha + x$, $a_1 = a$ tg $(45 - \alpha)$ i t. d.].

62. U kut $2\alpha = 60°$ upisati krug polumjera $r = 5\,cm$; ovaj krug i krakove kuta dodiruje drugi manji, njega na isti način treći i t. d. Neka se izračuna suma površina svih tih krugova? $\left[\text{R.}: S = \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 : 4\sin\frac{\alpha}{2}\right]$

63. U čunj, polumjera r i kuta pri vrhu 2α, upisati jedan iznad drugog a) valjke, b) kugle. Naći sumu 1) površina, 2) volumena svih tih tjelesa.

64. U čunj (r, h) upisati jedan iznad drugog valjke maksimal. volumena. Odrediti sumu površina svih tih maksimalnih valjaka.

65. U istostraničan trokut stranice a upisati jednu iznad druge maksimalne elipse. Odrediti 1) površinu pete elipse; 2) sumu površina svih elipsa.

66. U istostr. trokut upisati jedan iznad drugog pravokutnike maksimalne površine i odredi sumu svih tih pravokutnika?

67. U istostraničan trokut upisati krug, u preostali dio trokuta krugove tako, da se svaki dotiče stranica trokuta i jednog kruga. Kolika je površina onog dijela trokuta koji se nalazi između krugova?

68. U krug polumjera r upisati istokračan trokut maksimalne površine, u njega krug, a u taj krug opet trokut maksimalne površine i t. d. Odrediti sumu površina svih trokuta.

69. a) U kvadrat (a) upiše se istokračan trokut maksimalne površine, u njega kvadrat, a u taj opet istokr. trokut maksimalne površine; u kakovom odnosu stoje sume površina kvadrata prema sumi površina svih trokuta?

b) U kvadrat (a) upiše se drugi minimalan kvadrat, u njega na isti način treći i t. d. Traži se suma površina svih kvadrata?

70. Beskonačan geom. red sa kvocijentom $q = \frac{9}{10}$ ima isti početni član i istu sumu kao i aritm. red od n članova, kojemu je zadnji član $a_n = 6$, a diferencija $d = 1$. Koliki je prvi član beskonačnog reda i koliko članova ima aritm. red? R.: $S = \frac{a}{1 - \frac{9}{10}} = \frac{n}{2}(a + 6)$, $6 = a + n - 1$; $n_1 = 6$, $a_1 = 2$, $n_2 = 28$, $a_2 = -21$

71. U rastućem geom. redu realnih članova suma prvi triju članova $= 14$, a produkt $= 64$; u aritm. redu suma prvih triju članova iznosi 18, produkt 192. Koji se član aritm. reda podudara sa četvrtim članom geom. reda? R.: a) 2, 4, 8... b) 4, 6... $n = 7$.

72. Kvocijent rastućeg geom. reda realnih članova jednak je diferenciji jednog rastućeg aritm. reda realnih članova. Suma prva tri člana geom. reda iznosi 14, aritm. 18, a oba se reda slažu u trećem članu. Koji je član geom. reda jednak petnaestom članu aritm. reda? [$n = 5$, kao pod 71].

73. Aritm. i geom. red podudaraju se u prva dva člana, diferencija prvoga jednaka je kvocijentu drugoga. Treći član geom. reda za 2 je veći od trećeg člana aritm. reda. Kako glase oba reda?

74. Zbroj triju članova, koji tvore geom. red iznosi 14; oduzme li se od trećeg člana 2, red prelazi u aritmetički. Kako glase oba reda?

75. Tri broja čine aritmetički, a druga tri geometriski red. Pribrojimo li članovima prvoga redom 1, 1, 2 dobije se drugi. Kako glase redovi ako je suma prvoga 15?

76. Prvi, treći i sedmi član jednog aritm. reda čine geom. red, kojemu suma prva tri člana iznosi 28. Koji je član aritm. reda ujedno peti član geom. reda?

77. Tri broja čine geom. red. Ako se srednjem pribroji 3, red prelazi u aritmetički; doda li se ponovno zadnjem članu 13·5, red opet prelazi u geometrijski. Koji su to brojevi? [6, 12, 24 i = ?].

78. Ako se dijagonale romba smatraju kao prva dva člana aritm. progresije, razlika između četvrtog i trećeg člana iznosi 2; a ako se smatraju kao prvi članovi geom. progresije, razlika četvrtog i trećeg iznosi 4·5. Kolika je površina u romb upisanog kruga? [$d_1 = 4$, $d_2 = 6$.....].

78a. U kvadrat stranice a upiše se krug, a u preostale dijelove krugovi jedan za drugim. Kolika je suma površina svih krugova?

78b. Prvi članovi triju geometrijskih progresija čine opet geom. progresiju sa kvocijentom $= 3$; kvocijenti sve triju redova stoje u aritm. redu sa diferencijom $d = 1$. Suma drugih članova sve triju progresija $= 47$, a suma prvih triju članova prve progresije $= 7$; kako glase progresije? [1, 2, 4.. 3, 9, 27... 9, 36, 144... i = ?]

79. a) Iz bureta u kojemu je 60 *l* čistog alkohola izvadi se 6 *l* i nalije toliko vode. Iz te smjese izvadi se opet 6 *l* i napuni bure vodom i t. d. Koliko se puta to mora ponoviti da na koncu u buretu ostane a) 30 *l* alkohola; b) 1 l alkohola.

b) Isti zadatak ako je u buretu 100 *l* vina i vadi se po 1 *l* kao gore svega 69 puta. Koliko je ostalo u buretu? [50 *l*].

79. c) U posudi ima 180 l vina; doda se vode, izmiješa i vadi od smjese onoliko, koliko se dodalo vode. Ovako se učini 25 puta i ostane $\frac{1}{18}$ dio vina; Koliko je vode naliveno prvi puta? 37,465 *l*).
[Uputa: Imade li u bačvi *a l* vina, to će pošto smo *x* puta izvadili po *b l* vina i dodali svaki put po *b l* vode, ostati u bačvi vina:
$(a-b)\left(1-\frac{b}{a}\right)^{x-1}$

80. a) $a,\ a+a,\ a+2d\ldots$
$b,\ bq\ \ bq^2\ \ldots$

$$S_n = ab + (u+d)bq + \ldots = \frac{ab(q^n-1)}{q-1} + \frac{bdq}{(q-1)^2}\{nq^{n-1}(q-1)-(q^n-1)\}$$

Izvesti

b) $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\ldots$ c) $1+5x+9x^2+14x^3+\ldots$

d) $S_5 = 1+2x+3x^2+\ldots+5x^4 = \frac{1}{x-1}\left(5x^5-\frac{x^5-1}{x-1}\right)$

81. Estremne vrijednosti funkcije $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ čine prvi i treći član jedne geom. progresije, a argumenti koji odgovaraju tim vrijednostima prvi i treći član jedne aritmet. progresije. Koji član aritmet. progresije odgovara petom članu geometr. progresije? [$x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $y_1 = 4$, $y_2 = 8$, $n = 16$].

82. Prvi član i diferencija opadajućeg aritm. reda jednak je vrijednostima nenepoznanice *y* sistema $x^{\frac{2}{y}} + 10 = 11\sqrt[y]{x}$, $x = 10^{1-y}$ a vrijednosti od druge nepoznanice odgovaraju prvom i drugom članu rastuće geom. progresije; Koliko se članova aritm. reda mora sabrati, da se dobije četvrti član geom. progresije?

83. U istostraničan čunj upiše se kugla, u kuglu istostr. čunj i t. d. Suma volumena svih kugli jednaka $\frac{16}{7}$ volumena rotacionog tijela, koje nastaje rotacijom oko *X*-osi luka linije $3y^2 - x(x-3)^2 = 0$, što ga na njoj otsječe *X*-os; Koliki je volumen čunja?

R.: Volumen rotacionog tijela: $\frac{\pi}{3}\int_0^3 x(x-3)^2 dx = \frac{9}{4}\pi$; $V = \frac{81\pi}{8}$

84. Kroz tačku *A* povučeno je šest jednako razmaknutih pravaca. Iz tačke *B* prvoga pravca može se doći do *A* ili tako da se ide okomicom od prvoga pravca na drugi, od ovoga na isti način na prvi i t. d. ili da se ide okomicom od prvoga na drugi, od drugoga okomicom na treći i t. d. Koji je put duži, ako prva okomica $= a$? R. : putevi su jednaki.

Račun složenih kamata

1. Na koji će iznos narasti svota od 30.000 Din uz 7% godišnjeg kapitaliziranje za 20 godina? Na koji uz polugodišnje kapitalizirunje?
2. Neko je pred 15 god. uložio 10.000 Din uz $4^1/_2\%$ godišnjeg (polugodišnjeg) kapitaliziranja. Koju svotu može sada tražiti?
3. Neko uloži 1740 Din uz $4^1/_2\%$ god. kapital. Koliko će moći dići nakon 11 godina? (R. : 2823·76 Din).
4. Da je 1 Din bio uložen na složene kamate uz 4% u vrijeme Kristovo, koliko bi se danas moglo tražiti?

5. a) Na koju vrijednost naraste glavnica 1500 Din za 4 godine i 3 mjeseca uložena uz 4% i četvrtgodišnje kapitaliziranje? (R. : 1776·44 Din).
b) Isto za glavnicu 1000 Din uz 4% za 24 godine i polugodišnje kapitaliziranje.

6. U nekoj šumi ima 100.000 m^3 drva, a godišnji je prirast 1·5%. Koliko će drveta biti u toj šumi nakon 20 godina?

7. Kraljevina Jugoslavija ima sada 13,929.988 žitelja, a godine 1921 imala je 11,982.911. Koliko će imati stanovništva u god. 1940, ako prirast ostane isti? (Apsolutni prirast za to vrijeme jest 16.23%).

8. Koja glavnica uložena uz $3^1/_2$% na složene kamate naraste kroz 16 godina na 3467·97 Din? (R. : 2000 Din).

9. Koja glavnica naraste uz 4·5% god. kapitaliziranja za 11 god. i 8 mjeseci na istu vrijednost kao glavnica 1044·04 Din uz 4% za 12 godina? (R. : = 1000 D).

10. Neko treba da iza 6 godina plati beskamatan dug od 10.000 Din; kojom bi svotom mogao sada isplatiti dug, ako se uzima 8% i polugodišnje kapitaliziranje?

11. Kapital, koji se trebao isplatiti nakon 6 godina, isplati se odmah sumom 2372 Din uz odbitak od 460·3 Din. Koliko se postotaka računalo? R.: $2832{\cdot}3 = 2372\left(1+\frac{p}{100}\right)^6$, $\%=3$

12. Neka glavnica uložena 6 godina uz 4% na složene kamate pa onda $10\frac{1}{2}$ godina uz 6% naraste na 100.000 Din. Kolika je bila ta glavnica, ako je kapitaliziranje godišnje? (R.: $c \cdot 1{\cdot}04^6 \cdot 1{\cdot}06^{10} \cdot 1{\cdot}03 = 100.000$ i t. d.)

13. Za koje se vrijeme podvostruči (n-terostruči) neka glavnica a) uz 4% god. kapitaliziranja; b) 8% polugod. kapitaliziranja?

14. Za koje vrijeme glavnica od 1300 Din uz $4\frac{1}{2}$ % i polugodišnje kapitaliziranje naraste na 2478·5 Din (R. : $14\frac{1}{2}$ god.).

15. Japan broji prema zadnjem popisu žiteljstva iz 1930 god. 64,447.000 duša; kroz pet zadnjih godina poraslo je stanovništvo za 4,017.000. Koliki je godišnji procentualni prirast žiteljstva u Japanu? Koliko će žitelja imati Japan god. 1950?

16. Zajam od 10.000 Din osigura sebi lihvar mjenicom od 16.500 Din, koja dospijeva nakon 4 godine. Koliko je % računao?

17. Uz koliko % se glavnica poenterostruči (potrostruči) za n (30) godina, ako je kapitaliziranje svakog n-tog (trećeg) dijela godine? (R. : 3·69%).

18. Ako se kamate priklapaju glavnici svake godine, uz koliko će % glavnica u godini dana narasti toliko, koliko naraste uz 4% kad se kamate kapitaliziraju svake a) polovine; b) četvrtine; c) n-tog dijela godine? (R.: b): uz $100\ (1{\cdot}04^4 - 1)\%$.

19. Za pet godina narasla je glavnica na 7402·4 Din, a za 12 god. na 10.415·9 Din Kolika je glavnica i uz koliko je % bila uložena?

20. Mašina koja stoji 22.500 Din kroz 12 godina uslijed uporabe spane na vrijednost 7750 Din. Koliko se % svagdašnje vrijednosti oduzima radi godišnje uporabe? [$22500\left(1-\frac{p}{100}\right)^{12} = 7750$ ($p = 8^1/_2\%$)

20a. Mašina stoji 26.700 Din, godišnji troškovi oko nje 2400 Din i svake desete godine mora se kupiti nova. Koliki je potreban kapital da se kupi nova mašina i trajno uzdržaje? ($p = 4\%$). R.: $x = 26700 + 60000 + 55625 = 142325$

21. Tri veličine iz slijedeće tablice smatraj poznatim i odredi ostale

c	%	n	Kapitaliziranje	C_n
32500	3	24	god. 1	33566
5000	4	7·35	$\frac{1}{2}$	6689·31
5800	5	15	1	12058
c	$4\frac{1}{2}$	16,65	1	$2c$
60000	$3\frac{3}{4}$	9	$\frac{1}{4}$	83954,2

22. Suma od 100.000 Din. uložena je uz 8% na složene kamate kroz 10 godina; koliko bi godina trebala ista svota ležati pod prostim interesom 6%, pa da dostigne istu vrijednost?

23. Instalacija fabrike stoji 500.000 Din; kolika će joj vrijednost biti nakon 10 godina, ako se godišnje otpisuje 10% svagdanje vrijednosti?

R.: $x = c\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n = 500.000\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10}$

24. Od duga 50.000 Din otplati se poslije 10 god. 20.000 Din, a poslije daljnih 5 godina još 15.000; koliki je taj dug poslije 18 godina, ako se uzima 6% složenih kamata?

R.: $K = [(cq^{n_1} - c_1)q^{n_2} - c_2]q^{n_3} = [(50.000 \cdot 1{\cdot}06^{10} - 20.000)1{\cdot}06^5 - 15{,}000]1{\cdot}06^3$

25. Neki čovjek zaduži se 300.000 Din uz 10% složenih kamata da otvori radnju. Poslije 5 godina vrati povjereniku 120.000 Din, a opet poslije 4 god. 170.000 Din; 5 godina nakon drugog plaćanja htio bi platiti sav zaostatak duga. Koliko još ima da plati? ($x = \{(300.000 \cdot 1{\cdot}1^5 - 120.000) \cdot 1{\cdot}1^4 - 170.000\}1{\cdot}1^5$)

26. Kada će se izjednačiti kapitali 18.000 Din i 20.000 Din uloženi uz 8% složenih kamata, ako se prvi kapitalizira polugodišnje, drugi godišnje?

R : $18.000\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{2n} = 20.000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^n$

27. Neko je uložio 1925 god. 30.000 Din uz 8%, a 1930 god. 40.000 Din uz 6%. Kada će moći dići sumu od 100.000 Din?

28. Otac uloži u štedionicu na dan rođenja svoga sina neku sumu uz 8%; nakon 10 godina snizi se stopa na 4 % i on plati još 10.000 Din, da mu sin u 21 godini primi 80.000 Din. Koliko je prvi puta uložio?

R.; $80.000 = [x \cdot 1{\cdot}08^{10} + 10.000]\,1{\cdot}045^{11}$

Račun renta

1. Neki trgovac uloži u radnju glavnicu 500.000 Din, koja mu nosi 8%, ali na kraju godine mora da otpiše 1·2% od svagdašnje vrijednosti u ime troškova. Kojim će kapitalom raspolagati poslije 20 godina?

R.: $x = 500.000 \cdot 1{\cdot}08^{20} - \frac{1{\cdot}2 \cdot 500.000}{100}\,\frac{1{\cdot}08^{20} - 1}{1{\cdot}08 - 1}$

1. Prvog januara rodi se dvoje djece. Otac prvoga uloži 15.000 Din uz 10% slož. kamata i polugodišnje kopitaliziranje. Otac drugoga godišnje ulaže po 300 Din. Koje će djece navršetkom 20 godina dobiti više?

3. Neko ulaže 24 godine na početku svake godine 246·03 Din uz 4%. Koliko će dobiti koncem 24 godine? $\left(x = r\dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q = 10.000\right)$

4. Ako se 20 godina na početku svake godine ulaže 500 Din uz 6%. Koliko će se dobiti koncem 20 godine, ako se kamate kapitaliziraju polugodišnje? $\left(r\dfrac{q_1{}^{40} - 1}{q_1{}^2 - 1} \cdot q_1{}^2 = x = 500\dfrac{1{\cdot}02^{40} - 1}{1{\cdot}03^2 - 1}\,1{\cdot}03^2\right)$

5. Svaki puta kad minu 2 godine ulaže osoba A uz $p\%$ C Din. Koju će svotu dobiti 2 godine nakon n-te uplate? $\left(x = c\dfrac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}\,q^2\right)$

6. A ulaže 30 godina na početku svake godine 500 Din, B ulaže za to vrijeme na početku svake druge godine 1000 Din. Ko će na kraju 30 godine dobiti više i za koliko? $\left(B \text{ dobiva više za } \dfrac{500\,(q^{30} - 1)\,q}{q + 1}\text{; iz ? P. II. 2}\right)$

7. Svaki put. kad prođu dvije godine uloži se neka svota uz 4·5% složenih kamata. Dvije godine iza desete uplate dobije se 20.102 Din. Kolika se svota ulagala?

8. Koliku svotu treba neko uložiti sada i iza 5 godina da sebi osigura rentu od 763·23 Din, koja bi trajala 20 godina, a počela iza 10 godina? (R. : 4000 Din).

9. Kolika je svota bila uložena uz 3%, ako se od nje oduzimalo krajem svake godine 4612 Din i za 45 godina glavnica se podvostručila? $\left(x \,.\, 1{\cdot}03^{45} - 4612\,\dfrac{1{\cdot}03^{45} - 1}{1{\cdot}03 - 1} = 2x \ldots \quad x = 240.000 \text{ Din}\right)$

10. a) A ima u banci 400.000 Din uz 4%. Koju svotu ne smiju njegovi izdaci premašiti, ako hoće da mu se imetak ne umanji?
   b) Koliko će mu ostati iza 10 godina, ako godišnje troši 30.000 Din. (R.: Ako neće da mu se imetak umanji, trošiće samo kamate 16.000 godišnje. b) $S_n = 400.000 \,.\, 1{\cdot}04^{10} - 30.000\,\dfrac{1{\cdot}04^{10} - 1}{0{\cdot}04}$
   c) U šumi ima 150.000 m^3 drva, a godišnji prirast iznosi 1·6%. Koliko se drveta smije svake godine sjeći da nakon 15 godina ostane u šumi 100.000 m^3 drva?

11. 3 -postotni zajam treba otplatiti u 35 godina; koliki procenat zajma treba upotrebiti za godišnju otplatu kamata i duga (amortizaciju). $\left(c \,.\, 1{\cdot}035^{35} = \right.$ $\left.= \dfrac{c}{100} \cdot x\,\dfrac{1{\cdot}035^{35} - 1}{0{\cdot}035},\; x = 5\%\right)$. Napraviti plan otplate.

12. Treba amortizirati zajam od 11,000.000 Din, sklopljen uz 5% za 30 godina. Kolike su godišnje otplate (anuiteti)? (R. : 715.566 Din). Napraviti plan otplate.

13. Neki se dug otplati u 12 obroka koji dospijevaju iza 2, 4,.. 24 godine, a svaki obrok iznosi 856·3 Din. Koliki je bio dug? Plan otplate? (R. : 6400 Din).

14. Dug c treba otplatiti u n jednakih obroka koji dospijevaju na koncu svake godine. Prvih $\frac{n}{2}$ godina ukamaćuje se po 5% a onda po 4%. Koliki je jedan obrok? R.: $\left(cq^{\frac{n}{2}} - x\,\dfrac{q^{\frac{n}{2}} - 1}{q - 1}\right)q_1{}^{\frac{n}{2}} - x\,\dfrac{q_1{}^{\frac{n}{2}} - 1}{q_1 - 1} = \emptyset$. N. pr. $c = 100.000$, $n = 12$

15. Neko ima pravo da iza 11 godina podigne najednom svotu od 20.000 Din. Mjesto toga on bi želio dizati koncem godine rentu kroz 18 godina. Kolika je ta renta, ako se računa 5% složenih kamata?

(R.: Sadašnje vrijednosti: $\frac{x}{q^{18}} \cdot \frac{q^{18}-1}{q-1} = \frac{20000}{q^{11}}$, $x = 1000$ D)

16. Osoba A ima pravo da svake 3 godine u svemu 10 puta digne kod banke svaki puta 10.000 Din. Koju bi svotu mogao za to odmah dobiti ako se računa 6%?

(R.: $10.000 \frac{1 \cdot 06^{30} - 1}{1 \cdot 06^{3} - 1} = x \cdot 1 \cdot 06^{30}$)

17. Renta r Din dospijeva kroz n godina na koncu svake godine. Kad ima ona vrijednost nr? [Na pr. $n = 25$ i $nr = 25r$; R.: Iza 13·011 god.].

18. Neko uloži sada i iza 6 godina 10.000 Din, da sebi osigura rentu koja bi trajala 20 godina, a godišnje bi iznosila 1200 Din. Kad je može početi uživati, ako se uzima 4%? R.: $(10.000 : 1 \cdot 04^{6} + 10.000)\, 1 \cdot 04^{x} = 1200 \frac{1 \cdot 04^{20} - 1}{0 \cdot 04 \,.\, 0 \cdot 04^{19}}$

19. Koju bi svotu morao neko uložiti, da osigura sebi rentu od 20.000 Din, koja počinje 3 godine kasnije i teče 25 godina?

O.: Do posljednjeg obroka rente proteče 27 godina.

20. a) Renta r, koja je proračunata na n godina, ima se odgoditi m godina i onda isto tako teći n godina. Koliko iznosi odgođena renta?

R.: $r \frac{q^n - 1}{q - 1} q^m = x \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $x = r q^m$

b) Neko će iza m godina uživati rentu r proračunatu na n godina, no rado bi je zamjenio drugom, koja počinje odmah i teče isto tako n godina. Kolika je ta renta? R.: $\frac{r}{q^m} \frac{q^n - 1}{q - 1} = x \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $x = \frac{r}{q^m}$

21. Otac uloži za svoga sina najprije na njegov rođendan pa onda 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 godine svaki put po 1000 Din. Koliku rentu može on uživati kroz 10 godina iza navršene 24 godine? R.: $\frac{r q^3 (q^{24} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{x (q^{10} - 1)}{q^9 (q - 1)}$

22. Mjesto da se kroz 20 godina na početku svake godine prima renta r Din, radije bi se pet puta, i to na početku svakog kvadrenija primila svota koja odgovara. Kolika je ta svota? $\left(\frac{r}{q^{19}} \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = \frac{x}{q^{16}} \cdot \frac{q^{20} - 1}{q^4 - 1},\ x = \frac{r (q^4 - 1)}{q^3 (q - 1)}\right)$

23. Posjednik dvadesetgodišnje rente r (10.000 Din) ne diže je prvih deset godina. Kolika je renta slijedećih 10 godina, ako se računa 5%? $\left(r \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = x \frac{q^{10} - 1}{q - 1}\right)$

24. Kolika je kupovna vrijednost polugodišnje rente od 800 Din, koja traje 35 godina, ako se računa 4%? $\left(x \cdot 1 \cdot 02^{70} = 800 \frac{1 \cdot 02^{70} - 1}{0 \cdot 02},\ x = 30.000 \text{ Din}\right)$

25. Osoba A želi pretvoriti godišnju rentu od 1000 Din, koja traje 10 godina u polugodišnju rentu, koju bi vukla 8 godina. Kolika je ta renta, ako se uzima 4% sl. kamata? $\left(x \frac{1 \cdot 02^{16} - 1}{1 \cdot 02^{16} \,.\, 0 \cdot 02} = 1000 \frac{1 \cdot 04^{10} - 1}{0 \cdot 04 \,.\, 1 \cdot 04^{10}},\ x = 597 \cdot 7 \text{ D}\right)$

26. Neko ima pravo na godišnju rentu r, koja traje n godina. Koju svotu mora on uplatiti, ako bi želio dizati rentu r_1, koja traje m godina manje od prve, a računa se $p\%$? $\left(r_1 \frac{q^{n-m}-1}{(q-1)q^{n-m}} - r\frac{q^n-1}{(q-1)q^n} = x\right)$

27. Renta od 16.000 Din, koja dospijeva na početku svake godine ima se pretvoriti u drugu, koja teče isto toliko godina, a dospijeva svake pola godine. U oba slučaja je polugodišnje kapitaliziranje. $\left(\frac{rq_1^2(q_1^{2n}-1)}{q_1^2-1} = x\frac{q_1(q_1^{2n}-1)}{q_1-1},\ x = \frac{rq_1}{q_1+1}\right)$

28. Neko ima pravo na rentu 1297·19 Din, koja dospijeva 16 puta koncem svake godine; on je želi pretvoriti u drugu rentu od 1200 Din, koja traje 24 godine a isplaćuje se krajem godine. Koliko još mora položiti u banku, da dobije pravo na drugu rentu? $\left(\frac{1200}{q^{24}}\cdot\frac{q^{24}-1}{q-1} = \frac{1297{\cdot}19}{q^{16}}\cdot\frac{q^{16}-1}{q-1} + x,\ x = 2500\text{ Din}\right)$

29. Koliko godina mora neko ulagati početkom svake godine 1000 Din, da stekne pravo na rentu od 2716·7 Din, koja počinje godinu dana iza posljednje uplate, a isplaćuje se svega osam puta, ako se računa 6% složenih kamata?
$$\left(\frac{1000}{q^{x-1}}\frac{q^x-1}{q-1} = \frac{2716{\cdot}7}{q^{x+7}}\cdot\frac{q^8-1}{q-1},\ x = 12\right)$$

30. Neko ulaže kroz n godina na početku svake godine r Din, daljnjih n godina isto tako $2r$ Din, a još daljnjih n godina $3r$ Din. Koliko puta može on za to uživati godišnju rentu od a Din, koja počinje godinu dana iza posljednje uplate, ako se uzima $p\%$?
$$\frac{r}{q^{n-1}}\frac{q^n-1}{1-1} + \frac{2r}{q^{2n}-1}\cdot\frac{q^n-1}{q-1} + \frac{3r}{q^{3n}-1}\cdot\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a}{q^{n-1+x}}\cdot\frac{q^x-1}{q-1}$$
$$q^x\cdot rq^{2n}(q^n-1)\left(1+\frac{2}{q^n}+\frac{3}{q^{2n}}\right) = aq^n \text{ i t. d.}$$

31. Renta od 4000 Din, koja se ima isplatiti u 10 puta na početku svake godine, ima se pretvoriti u četvrtgodišnju rentu, koja počinje u isto doba, a ima se isplatiti 40 puta. Kolika je ta, ako se kamate uz 4% kod prve priklapaju glavnici godišnje, a kod druge na koncu svaka 3 mjeseca?

R.; a) $\frac{4000}{1{\cdot}04^9}\frac{1{\cdot}04^{10}-1}{0{\cdot}04} = \frac{1{\cdot}01^{40}-1}{0{\cdot}01}\frac{x}{1{\cdot}01^{39}}$

b) Ako će kamatnjak ostati nepromjenjen t. j. kamatni se faktor tako udesi, da je vrijednost godišnjih iznosa ista priklapale se kamate svake godine ili svake $^1/_4$ godine, onda je $xq = xq^4 \ldots q_1 = \sqrt[4]{q}$ što se supstituira gore.

32. a) Godišnja renta, koja se isplaćuje 25 puta na početku godine, a iznosi 2246·63 Din, ima se pretvoriti u drugu rentu od 10.000 Din, koja traje isto toliko godina, a isplaćuje se na početku godine u jednakim obrocima; koliko se puta može ta isplatiti, ako se računa 4% i počinje u isto vrijeme?
$$\frac{2246{\cdot}63}{1{\cdot}04^{25}}\ \frac{1{\cdot}04^{25}-1}{0.04} = \frac{10.000}{1{\cdot}04^{25-x}}\ \frac{1{\cdot}04^{25}-1}{1{\cdot}04^x-1};\ x = 5$$

b) Neko ima pravo na desetgodišnju rentu od 1000 Din; koliko godina mora otkazati uživanje rente, da nakon toga vuče drugu od 1400 Din kroz 6 godina?

c) Rentu r koja teče 20 godina treba pretvoriti u veću koja počinje istodobno i teče 12 godina. Kolika je ta, ako se računa 6% složenih kamata?

$$\frac{rq^{20}-1}{q^{19}(q-1)} = x\,\frac{q^{12}-1}{q^{11}(q-1)}$$

33. Neko uloži 10.000 Din u banku na početku dvadeset prve godine života, a u početku 22 godine i daljnih 9 godina ulaže po 400 Din na složene kamate, da bi svršetkom trideset i pete godine osigurao rentu, koja bi trajala 25 godina anticipativno. Kolika je ta, ako se uzima 5% složenih kamata?

$$10.000q^{15}+400q^{14}+\ldots 400q^{5} = 10.000q^{15}+400q^{5}\,\frac{q^{10}-1}{q-1} = x\,\frac{q^{25}-1}{q^{24}(q-1)}$$

34. Na ime duga od 100.000 Din otplaćeno je poslije 4 godine 50.000 Din a poslije kasnijih 5 godina još 20.000 Din. Koliko je još ostalo nakon 10 godina, ako se uzima 6%?

35. Neko je ulagao u banku kroz 25 godina po 5000 Din uz 6% složenih kamata; koliko će godina poslije toga uživati rentu od 10.000 Din.

$$\text{R.}: r\,\frac{q^{n}-1}{q-1} = r_1\,\frac{q^{x}-1}{(q-1)\,q^{x}}$$

36. Koja svota se mora uložiti da se iza n godina na koncu svakog mjeseca kroz m godina prima r Din, ako se p % složenih kamata u oba slučaja priklapaju glavnici na koncu godine?

Godišnji iznos svih mjesečnih primitaka

$$c = 12r + \frac{rp}{1200}\overbrace{(11+10+\ldots+1)}^{\frac{11}{2}\cdot 12} = 12r + \frac{66rp}{200},\ \text{dakle}$$

$$x = \frac{c}{q^{n+1}}+\ldots+\frac{c}{q^{n+m}} = \frac{c}{q^{n+m}}\cdot\frac{q^{m}-1}{q-1}$$

(Primjer: $n = 12$, $m = 18$, $p\% = 4$, $r = 1031{\cdot}64$ Din).

37. Neko uloži svotu C, da iza n godina na početku svakog mjeseca prima stanovitu svotu kroz m godina; kolika je ta, ako se p % kamata priklapaju glavnici u oba slučaja na koncu godine?

Godišnjem iznosu svih mjesečnih primitaka equivalentna je svota:

$$r = x + \frac{x\cdot 4\cdot 12}{12\cdot 100} + x + \frac{x\cdot 4\cdot 11}{12\cdot 100} + \ldots + x + \frac{x\cdot 4}{12\cdot 100} = 12x + \frac{26x}{100}$$

$$r = \frac{1226x}{100}$$

$$C = \frac{1226x}{100\cdot q^{n+1}} + \frac{1226x}{100\cdot q^{n+2}} + \frac{1226x}{100\cdot q^{n+m}} = \frac{1226x\,(q^{m}-1}{100\cdot q^{n+m}(q-1)}$$

(Primjer : $c = 112189{\cdot}5$ Din, $p = 4\%$, $n = 10$, $m = 20$).

38. Neko računa da je još 20 godina sposoban za rad; koliko treba za to vrijeme 1) godišnje, 2) mjesečno ulagati uz 4% složenih kamata, da nakon toga uživa a) kroz 15 godina godišnju rentu od 10.000 Din; b) mjesečnu rentu od 1000 Din kroz 15 godina?

39. Kad se od nekog kapitala uložena uz 5% troši a) godišnje 30.000 Din, b) mjesečno 2500 Din, on bi trajao 15 godina; za koliko se mora umanjiti godišnji rashod da kapital traje 20 godina?

40. Neko uloži u banku 100.000 Din uz 5% s time, da mjesečno diže 2500 Din dok sve ne utroši; koliko će trajati to dizanje?

41. Neko se osigura za slučaj smrti sa 120.000 Din; za to mora plaćati a) godišnje 4000 Din, b) mjesečno 250 Din. Kad je poslije 20 godina umro, koliki je gubitak ili dobitak osiguravajućeg društva?

42. Neko uloži početkom 20 godine svotu 100.000 Din, da osigura svome sinu dvadesetgodišnju rentu, koja počinje iza m godina, pada na početak godine, a iz godine u godinu raste za 200 Din; kolika je ta, ako se računa p %?

$$x + \frac{x+b}{q} + \frac{x+2b}{q^2} + \ldots + \frac{x+(n-1)b}{q^{n-1}} = \frac{x(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)} +$$

$$+ \frac{b\,[q^n - nq + (n-1)]}{q^{n-1}(q-1)^2} = cq^m$$

43. Zajam od 500.000 Din uz 3·5% treba otplatiti u 30 godišnjih rata koje svaki puta narastu za 1·5%. Kolika je prva rata?

$$r \,.\, q^{29} + r \,.\, q^{28} \,.\, q_1 + rq^{27} q_1^{\,2} + \ldots rq_1^{\,29} = 500.000 \quad 1{\cdot}035^{30} = 1403395$$

$$rq^{29} \frac{\left(\frac{q^1}{q}\right)^{30} - 1}{\left(\frac{q^1}{q} - 1\right)} = r\,\frac{q_1^{\,30} - q^{30}}{q_1 - q}, \; q_1 = 1{\cdot}015, \; q = 1{\cdot}035 \; (r = 22575{\cdot}5)$$

44. Neko uloži 4687·2 Din i želi da iza 20 godina digne neku rentu, koja traje 10 godina, a iz godine u godinu raste za 10%; kolika je ta renta, ako se računa 5%.

$$4687{\cdot}2 = \frac{x}{q^{20}} + \frac{xq_1}{q^{21}} + \ldots \frac{xq_1^{\,9}}{q^{29}} = \frac{xq_1^{\,9}}{q^{29}} \frac{(q^{10} - q_1^{\,10})}{q - q_1} \; (q_1 = 1{\cdot}1, \; q = 1{\cdot}05)$$

Kombinatorika

[bavi se spajanjem i razmještanjem elemenata u grupe (kompleksije) po određenom pravilu]

I Permutacije: Elementi se tako redaju u kompleksije (permutacije!), da svaka kompleksija sadržaje sve zadane elemente, a pojedine kompleksije razlikuju se samo poređajem elemenata

1. $P(n) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, n = n!$ [„n faktoriel" ili „n fakultet")
2. $P_{r,\,s}(n) = \frac{n!}{r!\,s!}$
3. n elemenata se tako permutira, da se svaki elemenat spoji sa permutacijama od $(n-1)$ elemenata, na pr. elementi a, b, c daju $3! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 6$ permutacija: *abc, acb, bac, bca, cab, cba.* Elementi su viši, koji u rasporedu dolaze kasnije; elementi u početnom rasporedu čine najnižu kompleksiju. Bilo koja dva elementa čine inverziju, ako je prvi elemenat viši od drugog.

Permutacije = ?

1. $P(n) \equiv$ broj permutacija od n raznih elemenata.
2. $P_{r,\,s}(n) \equiv$ broj permutacija od n elemenata, među kojima su r i s međusobno jednaki

Pazi! Formule 1. i 2. izvedi iz načina kako se redaju elementi. Početi sa $n = 1, 2, 3 \ldots$ i zaključiti.

II Kombinacije: Kombinirati n elemenata do k-tog razreda znači od zadanih elemenata sastavljati kompleksije od k članova tako da se nijedna ne podudara u svim članovima sa drugom t. j. da nema inverzija. Za $k = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ imamo: unione, ambe, terne, kvaterne, kvinterne . . .

1. $C_{k(n)} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$

2. $C'_{k(n)} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$

3. Kombiniranje elemenata bez ponavljanja: Svaki se elemenat spoji sa svakim od njega višim, a kod kombiniranja sa ponavljanjem svaki se elemenat spoji sa sobom i sa svakim višim. Na. pr ambe od a, b, c, d

a)	b)
ab, ac, ad	aa, ab, ac, ad
bc, bd	bb, bc, bd
cd	cc, cd
	dd

4. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$;

$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Kombinacije = ?

1. $C_{k(n)} = \binom{n}{k}$ t. j. n nad $k \equiv$ broj kombinacija k-toga razreda bez ponavljanja
2. $C'_{k(n)}$ sa ponavljanjem

Dokaz za formule izvodi se iz načina kako se redaju elementi. Početi sa $n = 1, 2, 3 \ldots$ i zaključiti (indukcija).

III. Varijacije (k-tog razreda): elemente kombinirati do k-tog razreda pa ih onda permutirati.

1. $V_{k(n)} = \binom{n}{k} k! = n(n-1)\ldots(n-k+1)$

2. $V'_{k(n)} = n^k$

3. Varijacije sa ponavljanjem prave se: a) drugog razreda da se svaki elemenat spoji sa svakim zadanim; b) k-tog razr. do se svakom elementu pripoji svaka varija (k — 1)-tog razreda.
Varijacije drugog razreda od a, b, c, d:

1) bez ponavljania	2) sa ponavljanjem
ab, ac, ad	aa, ab, ac, ad
ba, bc, bd	ba, bb, bc, bd
ca, cb, cd	ca, cb, cc, cd
da, db, dc	da, db, dc, dd

Varijacije = ?

1. $V_{k(n)} \equiv$ broj varijacija, k-tog razreda bez ponavljanja
3. $V'_{k(n)}$ sa ponavljanjem

Za dokaze vrijedi gornja primjedba.

IV Binomni (Newtonov) poučak (binom izražen potencijama obaju članova):

1. $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots b^n$

2. **Opći oblik svakog člana:** $a_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$

3 **Paskalov trokut:**

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
— & & — & & — & & — & & — & & —
\end{array}
$$

1 Pazi! $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dokaz. Iz produkta: $(x+a)(x+b)(x+c)\dots$ nađi pravilo za koeficijente.

3. Horizontalni redovi trokuta sadrže koeficijente razvijenih binoma 0te, 1te, 2e, 3e ... potencije

Račun vjerojatnosti

(radi o slučajnim događajima)

1. **Matematska vjerojatnost događaja (apsolutna!)** za kojeg govori a govoljnih, n mogućih slučajeva: $v = \frac{a}{n}$

2. **Protivna vjerojatnost** $v' = 1 - v$

3. **Totalna vjerojatnost** — „ili, ili" —, da će se od nekoliko događaja sa istim brojem mogućih slučajeva zbiti jedan, bilo koji:
$$v = v_1 + v_2 + \dots v_n$$

4. **Složena vjerojatnost** — „i, i" — da će se zajedno ili jedan iza drugoga zbiti više događaja:
$$v = v_1\, v_2 \dots v_n$$
Isto vrijedi za događaje međusobno ovisne, samo treba vjerojatnost svakog slijedećeg događaja uzeti onako kakva je kad su se već zbili predhodni događaji. Na pr.: kolika je vjerojatnost, da će se iz žare od 4 bijele i 6 drugih kugala tri puta redom izvući bijela kugla? R.: $v_1 = \frac{4}{10}$, $v_2 = \frac{3}{9}$ (jedna je već izvučena!), $v_3 = \frac{2}{8}$; dakle $v = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$

5. **Relativna vjerojatnost:** događaj $A_{(v)}$ prije će se zbiti od događaja $B_{(v)}$ $V = \frac{v_1}{v_1 + v_2}$

1. **Matematska vjerojatnost** je vjerojatnost „a priori"; suprotna joj je „a posteriori" osnovana na pokusima. One se sve to više slažu, što broj pokusa raste (Bernouillijev zakon velikih brojeva).

Primjer 1

1) Kolika je vjerojatnost da se sa 2 kocke baci suma 8?
R.: Mogući slučajevi su varijace 2og razr. sa ponavljanjem od 6 elemenata, dakle $n = 6^2 = 36$. Povoljni su slučajevi: 2, 6; 3, 5; 4, 4; 5, 3; 6, 2, dakle $a = 5$.
Prema tome $v = \frac{5}{36}$

2) Kolika je vjerojatnost sa 2 kocke baciti ili sumu 8 ili sumu 12?
R.: Ovdje je totalna vjerojatnost.
$v_1 = \frac{5}{36}$ $v_2 = \frac{1}{36}$, dakle
$v = \frac{5+1}{36} = \frac{1}{6}$

6. Matematska nada: umnožak između očekivanog dobitka i njegove odgovarajuće vjerojatnosti

1) $N = c_1\ v_1$

2) $u_1 : u_2 = v_1 : v_2 \ldots u_1,\ u_2 \ldots$ ulošci

3) $c_1\ v_1 = c_2\ v_2$

7. Opaska:

1) Za $v = 0$ događaj je nemoguć

$o < v < \frac{1}{2}$ „ „ nevjerojatan

$v = \frac{1}{2}$ „ „ dvojben

$\frac{1}{2} < v < 1$ „ „ vjerojatan

$v = 1$ „ „ siguran

2) Vjerojatnost da će se događaj desîti n puta izasobice $V = v^n$

3) Vjerojatnost događaia A je v_1, B v_2 pa je

a) Vjerojatnost da će se desiti i A i B:
$V = v_1\ v_2$

b) Vjerojatnost da će se desiti A ne B:
$V = (1 - v_2) v_1$

c) Vjerojatnost da se neće desiti A nego B:
$V = (1 - v_1) v_2$

d) Vjerojatnost da se neće desiti *ni* A ni B:
$V = (1 - v_1)(1 - v_2)$

e) Vjerojatnost da će se zbiti samo jedan bilo koji
$V = v_1 (1 - v_2) + v_2 (1 - v_1)$

f) Vjerojatnost da će se zbiti barem jedan:
$V = 1 - (1 - v_1)(1 - v_2)$

g) Vjerojatnost da se neće zbiti oba, nego jedan (najviše jedan):
$V = 1 - v_1\ v_2$

h) Vjerojatnost da će zbiti obadva ili ni jedan:
$V = 1 - v_1 (1 - v_2) - v_2 (1 - v_1)$

i) Vjerojatnost da će se desiti A n-puta, B m-puta izvjesnim redom:
$V = v_1{}^n\ v_2{}^m$

j) Vjerojatnost da će deseti bilo kojim redom:
$$V = \frac{(n+m)!}{n!\ m!} v_1{}^n\ v_2{}^m$$

k) Najmanje jedan $V = v_1 + v_2 - v_1\ v_2$

3) Lutrija između 100 brojeva ima 60 koji dobivaju; kolika je vjerojatnost sa 10 loza izvući 3 zgoditka?

R.: $n = \binom{100}{10}$, $a = \binom{60}{3}\binom{40}{7}$

ili $n = \binom{100}{60}$,

$a = \binom{10}{3}\binom{90}{57}$

$$v = \frac{\binom{10}{3}\binom{90}{57}}{\binom{100}{60}} = \frac{\binom{60}{3}\binom{40}{7}}{\binom{100}{10}}$$

4) Kolika je vjerojatnost, da se između 2 izvučena broja lutrije od 90 brojeva, nalazi izvjesna terna?

R.: $n = \binom{90}{5}$, $a = \binom{87}{2}$

$v = \binom{87}{2} : \binom{80}{5}$

5) Kolika je vjerojatnost, da je jedan bilo koji dvoznamenkost broj djeljiv sa 3 ili sa 4?

R.: $v_1 = \frac{22}{90}$, $v_2 = \frac{14}{90}$

$v_3 = \frac{8}{90}$ (djeljivi sa 3 i sa 4)

$v = \frac{22}{90} + \frac{14}{90} + \frac{8}{90} = \frac{22}{45}$

(v_1 djeljivi sa 3 a nijesu sa 4!)

6) A se kladi sa B, da će on sa 2 kocke baciti dva jednaka broja i meće sumu 100 Din; koliko mora položiti B?

R.: $v_1 = \frac{1}{6}$, $v_2 = \frac{5}{6}$, $u_1 = 100$

$u_1 : v_1 = u_2 : v_2$, $\underline{u_2 = 500}$

Primjena računa vjerojatnosti — Zadaci o osiguranju života

1. Tablice o pomoru rade na temelju statistike.
$n \equiv$ broj godina
$l_n \equiv$ broj osoba, koje su iza n-god. još na životu
$S_n = \frac{l_n}{q^n} + \frac{l_{n+1}}{q^{n+1}} + \ldots + \frac{l_z}{q^z}$, $q = 1 + \frac{p}{100}$,
ili $S_n = D_n + D_{n+1} + \ldots D_{n+z}$; $p = \%$,
$l_z \equiv$ zadnja vrijednost l_n različita od 0, obično l_{100}
$D_n \equiv$ diskontirani broj živih starih n-godina.

1. Šta pokazuju tablice o pomoru?
O.: U nekim je tablicama $N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots$ D 100 $\equiv S_x$

2. **Vjerojatnost života** (da će n-godišnja osoba doživjeti svršetak godine):
$v = \frac{l_{n+1}}{l_n}$; vjerojatnost smrti $= 1 - \frac{l_{n+1}}{l_n}$

2. Kolika je vjerojatnost života n-godišnje osobe?

3. **Vjerojatnost n-god.** osobe da će doživjeti još x godina. $v = \frac{l_{n+x}}{l_n}$

3. Kolika je vjerojatnost, da će n-godišnja osoba doživjeti još x-godina.

4. **Srednje trajanje** života n-god. osobe:
$M_n = \frac{1}{2} + \frac{l_{n+1} + l_{n+2} + \ldots + l_z}{l_n}$
(Granica pogreške manja od $\frac{1}{2}$ godine)

4. Srednje trajanje života?

5. **Vjerojatno trajanje (x) n-godišnje osobe:**
(vrijeme za koje je vjeroj. života $= \frac{1}{2}$) $l_{n+x} = \frac{l_n}{2}$

5. Vjerojatno trajanje života n-god. osobe = ?

6. **Osiguranje glavnice za slučaj doživljenja uplatom mize.**

Koliki iznos x treba platiti zavodu n-godišnja osoba, da iza m godina dobije glavnicu C, ako doživi, u protivnom slučaju dobije svotu zavod?

R.: l_n istogodišnjih osoba, koje sklope isti ugovor sa zavodom uplatiće Din $x\,l_n$. Međutim zavod isplati iza m godina, onima, koji ostanu na životu, a tih je l_{n+m} svotu $C\,l_{n+m}$ ili sadanju vrijednost toga $\frac{C\,l_{n+m}}{q^m}$. Prema tome je

$$x\,l_n = \frac{C\,l_{n+m}}{q^m} \text{ ili } x = \frac{C}{q^m} \cdot \frac{l_{n+m}}{l_n} = C\frac{D_{n+m}}{D_n}$$

6. **Uvijek se uzima, da sa zavodom sklapaju pogodbe mjesto jedne osobe njih l_n vršnjaka.** Isplata pada na kraj godine.

7. **Osiguranje glavnice za slučaj smrti uplatom mize.** Nasljednicima se nakon smrti n-godišnje osobe osigura svota C uplatom mize

$$x\,l_n = C\left(\frac{l_n - l_{n+1}}{q} + \frac{l_{n+1} - l_{n+2}}{q^2} + \dots\right) =$$

$$= C q^n \left(\frac{d_n}{q^{n+1}} + \frac{d_{n+1}}{q^{n+2}} + \dots\right) \text{ ili}$$

$$x\,l_n = C\left(\frac{l_n}{q} + \frac{l_{n+1}}{q^2} + \dots + \frac{l_z}{q^{z-n+1}}\right) -$$

$$- C\left(\frac{l_{n+1}}{q} + \dots + \frac{l_z}{q^{z-n}}\right)$$

$$x = \frac{Cq^{n-1} S_n - Cq^n S_{n+1}}{l_n} =$$

$$= \frac{Cq^{n-1}(S_n - q S_{n+1})}{l_n} = C\frac{M_n}{D_n}$$

8. **Osiguranje glavnice C našljednicima za slučaj smrti plaćanjem godišnje premije x:**

$$x l_n + \frac{x l_{n+1}}{q} + \dots + \frac{x l_z}{q^{z-n}} = x q^n S_n =$$

$$= Cq^{n-1}(S_n - q S_{n+1})$$

$$x = \frac{C(S_n - q S_{n+1})}{q S_n} = C\frac{M_n}{S_n}$$

9. **Sadašnja vrijednost doživotne rente**

$$x = \frac{r q^n S_{n+1}}{l_n} = \frac{r S_{n+1}}{D_n}$$

10. **Sadašnja vrijednost temporarne doživotne rente** $x = \dfrac{rq^n(S_{n+1} - S_{n+k+1})}{l_n} =$

$$= r\frac{S_{n+1} - S_{n+k+1}}{D_n}$$

7. U nekim je tablicama $l_n - l_{n+1} = d_n \equiv$ broj umrlih

$C_n = \dfrac{d_n}{q^{n+1}} \equiv$ diskontirani broj mrtvih

$C_n + C_{n+1} + C_{n+2} + \dots = M_n.$

Pazi:

Društvo isplati našljednicima:

$C\dfrac{d_n}{q} + \dfrac{d_{n+1}}{q^2} + \dots = Cq_n\, M_n$

9. Iz $x = \dfrac{l_{n+1}}{l_n} \cdot \dfrac{r}{q} + \dots \dfrac{l_z}{l_n} \cdot \dfrac{r}{q^{z+n}}$

10. Renta traje k-godina ili do smrti osobe, ako prije umre.

Primjer I

1. Kako glasi 68. permutacija od elemenata 1, 2, 3, 4, 5?

R.: Sa prvim elementom počinje 4! permutacije t. j. 24. Tako sa drugim Prema tome 49. permutacija glasi 31245. Od 24 permutacije, koje počinju sa 3 sa svakim slijedećim brojem počinje ih $3! = 6$ i t. d. 67 permutacija je 35124 a 68. 35142.

2. Iz koliko se elemenata dade napraviti 4845 kvaterna bez ponavljanja?

R.: $\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845$

$$(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 116280 \mid x^2 - 3y = y$$

$$y^2 + 2y = 116280$$

$$y = 340,\ \underline{x = 20}$$

3. U koliko se tačaka siječe n pravaca od kojih je m paralelnih?

R.: Radi se o kombinacijama drugog reda dakle $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)}{2}$

4. Na koliko se načina može 12 karata razdijeliti među 3 osobe tako, da prva dobije 2, druga 4, a treća 6?

R.: $\binom{12}{2}\binom{10}{4}\binom{6}{6} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1 = 13860$

5. Broj terna bez ponavljanja iz nekih elemenata odnosi se prema ternama sa ponavljanjem iz istih elemenata kao 7 : 15. Koliko je elemenata?

R.: $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} : \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 : 15;\quad \underline{n = 8}$

6. Koliko ima troznamenkastih brojeva, kod kojih su cifre međusobno različite?

R.: Ako se uzme 10 cifara, varijacije od 10 elemenata trećeg reda daće broj trocifrenih brojeva: $V_3(10)$. Međutim ih sa nulom počimlje $V_2(9)$. Prema tomu je $V_3(10) - V_2(9) = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 648$ brojeva.

7. Koliko se četiriznamenkastih brojeva dade napisati iz cifara 1, 4, 6?

R.: Radi se o varijacijama sa ponavljanjem četvrtog razr. od 3 elementa. $V'_4(3) = 3^4 = 81$.

Koliko takovih brojeva počinje sa 6. R.: $V'_3(3) = 3^3 = 27$.

8. Optički telegraf ima 6 prečki od kojih svaka može zauzeti 4 razna položaja. Koliko se znakova može njime dati? R.: $V'_4(6) = 6^4 = 4096$.

Primjer II

9. Neka lutrija ima n (30) srećaka i m (6) zgoditaka. Neko imade p (5) srećaka; kolika je vjerojatnost, da će on dobiti a) s (4) zgoditaka, b) barem (p-2) (3) zgoditka, c) da će uopće dobiti?

R.: a) m zgoditaka može izaći na $\binom{m}{n}$ načina što su mogući slučajevi. Povoljni su, kad se između izvučenih brojeva nalaze igračevih s; to je moguće na $\binom{p}{s}$ načina. Jer se vuče m brojeva, to $(m-s)$ zgoditaka izlazi iz ostalih $(n-p)$ srećaka. Svaka $\binom{p}{s}$ kombinacija sa svakom $\binom{n-p}{m-s}$ kombinacijom daje jedan povoljan slučaj, ili svega $\binom{p}{s}\binom{n-p}{m-s}$ povoljnih slučajeva. Prema tome je:

$$V_s = \frac{\binom{p}{s}\binom{n-p}{m-s}}{\binom{n}{m}} = \frac{\binom{5}{4}\binom{25}{2}}{\binom{30}{6}}$$

b) Vjerojatnost da će dobiti barem 3 zgoditka sastoji se iz vjerojatnosti, da će dobiti ili 3 ili 4 t. j. $V = V_3 + V_4$.

c) $V = V_1 + V_2 + \ldots V_p$. Zadatak se može riješiti i pomoću protivne vjerojatnosti.

10. Ako bacamo 2 kocke, onda je a) vjerojatnost nakon 1 hica, da će u obe izići broj 6 jest $\frac{1}{36}$;

b) da u obe neće izići broj 6 jest $1-\frac{1}{36}$;

c) da u obje n puta po redu neće izići broj 6 : $(1-\frac{1}{36})^n$;

d) da će u n hitaca u obje bar jedanput izići 6 vjerojatnost je: $1-(1-\frac{1}{36})^n$;

e) za $1-(1-\frac{1}{36})^n = \frac{1}{2} \ldots$ t. j. za $n < 24$ vjerojatno je da će u obe kocke izaći barem jedanput broj 6. Provjeri to!

11. U žari u kojoj je n kugala izvuče se jedan dio (ili sve); kolika je vjerojatnost da ćemo povući parni broj kugala?

R.: Jedna se kugla može na toliko načina izvući koliko je kugli t. j. n načina, dvije kugle na $\binom{n}{2}$, tri $\binom{n}{3}$ i t. d., dakle

mogući sl.: $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots\binom{n}{n}=2^n-1$

povolj. sl.: $a=\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=2^{n-1}-1$,

$v=\dfrac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$ (na pr. $n=8$)

12. Kolika je vjerojatnost sa 3 kocke baciti a) najmanje dva jednaka broja; b) tri uzastopna broja ili tri jednaka?

R.: a) $n = V'_3(6) = 216$. Nepovoljni su slučajevi $V_3(6) = 6 . 5 . 4 = 120$. Protivna vjerojatnost $=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$, tražena $=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$. b) Svaki hitac: 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5; 4, 5, 6 moguć je na 6 načina, zato je $v_1=\frac{24}{216}=\frac{1}{9}$; $v_2=\frac{6}{216}$; prema je v: $v_1+v_2=\frac{5}{36}$

13. A se okladi sa B da će sa 3 kocke najmanje baciti sumu 15 i meće kao okladu 100 D; koliko mora položiti B?

R.: Polozi su upravno razmjerni sa vjerojatnostima.
Za sumu 15 povoljnih je slučajeva 10, za 16 povoljnih 6, za 17 povoljnih 3, za 18 samo 1. Zato je $v_1=\frac{10+6+3+1}{216}=\frac{5}{54}$. Protivna je vjerojatnost $1-\frac{5}{54}=\frac{49}{54}$

$\frac{5}{54}:\frac{49}{54}=100:x;\ x=980\,D.$

14. Otac ima 33 godine, majka 28 a sin 6 godina. Kolika je vjerojatnost da će 1) sve troje biti na životu iza 15 godina; 2) dijete ostati bez oca nakon 10 godina; 3) ostati bez roditelja nakon 20 godina?

R.: a) Vjerojatnost da će otac biti na životu iza 15 godina

$v_1=\frac{l_{48}}{l_{33}}$; $v_2=\frac{l_{43}}{l_{28}}$; $v_3=\frac{l_{21}}{l_6}$; a) $v=v_1\,v_2\,v_3$ i t. d.

15. Tridesetgodišnja osoba položi osiguravajućem društvu 10.556·75 D i želi vući zato rentu, koja počinje nakon 10 godina i pada na početak godine. Kolika je ta renta? ($\% = 3{\cdot}5$)

R. : l_{30} osoba uplate društvu $10.556{\cdot}75 \,.\, l_{30}$. Nakon 10 godina plati društvo $x\, l_{40}$, god. kašnje $x\, l_{41}$ i t. d.; dakle $10.556{\cdot}75 \,.\, l_{30} = x\left(\frac{l_{40}}{q^{10}} + \frac{l_{41}}{q^{11}} + \ldots\right)$

$$10.556{\cdot}75 \,.\, \frac{l_{30}}{q_{30}} = x\,(D_{40} + D_{41} + \ldots)$$

$$x = \frac{10.556{\cdot}75\, D_{30}}{S_{40}}, \text{ ili } x = \frac{10.556{\cdot}75\, l_{30}}{S_{40} \,.\, 1{\cdot}035^{30}}$$

16. Četrdesetgodišnja osoba plaća godišnju premiju 607·73 D, da po svojoj smrti osigura nasljednicima neku svotu; kolika je ta, ako se računa 4%?

R. : $607{\cdot}73 \left(l_{40} + \frac{l_{41}}{q} + \ldots \frac{l_z}{q^{z-40}}\right) = x\left[\left(\frac{l_{40}}{q} + \ldots + \frac{l_z}{l_{z-39}}\right) - \left(\frac{l_{41}}{q} + \ldots + \frac{l_z}{q^{z-40}}\right)\right]$; $607{\cdot}73 \,.\, q^{40} \,.\, S_{40} = x q^{39}\,(S_{40} - q S_{41})$

$$x = \frac{607{\cdot}73 \,.\, S_{40} \,.\, q}{S_{40} - q S_{41}} \text{ ili } x = \frac{607{\cdot}73 \,.\, S_{40}}{M_{40}}$$

17. Dvadesetgodišnja osoba plaća godišnje neku svotu i želi time osigurati u 60 godini života rentu u iznosu $r = 1500{\cdot}50$ D. Koliku godišnju rentu uplaćuje ta osoba? $x\left(l_{20} + \frac{l_{21}}{q} + \ldots \frac{l_{59}}{q^{39}}\right) = r\left(\frac{l_{60}}{q^{40}} + \frac{l_{61}}{q^{41}} + \ldots\right)$;

$$x q^{20}\left(\frac{l_{20}}{l_{20}} + + \ldots \frac{l_{59}}{q^{59}}\right) = r q_{20}\left(\frac{l_{60}}{q^{60}} + \ldots \frac{l_{61}}{b^{61}} + \ldots\right);$$

$$x\,(S_{20} - S_{60}) = r S_{60}\,;\; x\,(S_{20} - S_{60}) = 1510{\cdot}50\, S_{60} = ?$$

18. Tridesetgodišnja osoba plaća kroz 10 godina premiju x, da osigura svojim nasljednicima 10000 D. Kolika je premija?

$$x\left(l_{30} + \frac{l_{31}}{q} + \ldots + \frac{l_{39}}{q^{9}}\right) = 10000\left(\frac{d_{30}}{q} + \frac{d_{31}}{q^{2}} + \ldots\right)$$

$$x q^{30}\left(\frac{l_{30}}{q^{30}} + \frac{l_{31}}{q^{31}} + \ldots + \frac{l_{39}}{q^{39}}\right) = 10000\, q^{30}\left(\frac{d_{30}}{q^{31}} + \frac{d_{31}}{q^{32}} + \ldots\right)$$

$$x\,(S_{30} - S_{40}) = 10000\,(C_{30} + C_{31} + \ldots)$$

$$x\,(S_{30} - S_{40}) = 10000\, M_{30}$$

$$x = \frac{10000\, M_{30}}{S_{30} - S_{40}} = ? \text{ (Vidi 8!)}$$

19. Provjeri ove formule:

a) Sadanja vrijednost anticipativne doživotne rente n-godišnje osobe

$$A = r \,.\, \frac{Sn}{Dn}$$

b) Isto za rentu, koja se odgodi m godina

$$A = r\,\frac{Sn + m}{Dn} \text{ ili} = r\,\frac{Sn + m \,.\, q^{n}}{ln}$$

(Diskontna obveza osiguranih je $= ADn$!)

c) Sadanja vrijednost temporarne rente od m godine: $A = r\,\frac{Sn - Sn + m}{Dn}$

d) Kupovna vrijednost osigurane svote C, koja se isplaćuje nakon m godina

$$A = C\frac{D_{n+m}}{D_n}$$

e) Kupovna vrijednost osigurane glavnice C za slučaj smrti:

$$A = C\frac{\frac{1}{q}S_n - S_{n+1}}{D_n}$$

f) Ako osigurani umre u m godina nije dužno društvo ništa platiti; kupovna vrijednost osigurane svote: $A = C\frac{S_{n+m}\frac{1}{q} - S_{n+m+1}}{D_n}$

g) Svotu C isplaćuje društvo u slučaju smrti osigurane osobe, a najkašnje nakon m godina (nasljednicima!)

Kupovna vrijednost: $A = C\frac{\frac{1}{q}(S_n - S_{n+m}) - (S_{n+1} - S_{n+m+1})}{D_n}$

h) n-godišnja osoba osigura sebi doživotnu rentu r uplatom mize:

$$xl_n = r\left(\frac{l_{n+1}}{q} + \frac{l_{n+2}}{q^2} + \frac{l_{100}}{q^{100-n}}\right)$$

$$x = r\frac{S_{n+1}}{D_n}$$ ili za anticipativnu

rentu $x = r\frac{S_n}{D_n}$

k) n-godišnja osoba plaća godišnje r D osiguravajućem zavodu da nakon m godina uživa rentu x: $r\left(l_n + \frac{l_{n+1}}{q} \ldots \frac{l_{n+m-1}}{q^{m-1}}\right) = x\left(\frac{l_{n+m}}{q^m} + \ldots\right)$

$$x = r\frac{S_n - S_{n+m}}{S_{n+m}}$$

Pazi! $D_{n+x} + D_{n+x+1} + \ldots + D_{99} + D_{100} = S_{n+x}$; $D_n + D_{n+1} + \ldots + D_{n+x-1} = S_n + S_{n+x}$

Od teoretske premije („neto premija") uzima se obično $\frac{1}{5}$ više („bruto premija")

Zadaci

P.

1. Na koliko se načina daju poredati faktori produkta a) $abcdefgh$, b) $a^2b^3 = aa\ bbb$, c) $a^{n-x-y}b^xc^y$? Poredaj ih!

2. a) Kako glasi 51. permutacija od elemenata 1, 2, 3, 4, 5? (R.: 31425).
b) Koja je permutacija c a d a a b od elemenata a a a b c d? (R. 90).
c) Koja je permutacija taoc od otac?
d) Koja je permutacija Toma od atom; mir od Rim?

K.

3. Koliko se amba, terna, kvaterna, kvinterna nalazi u 90 brojeva? (R.: 4005 amba, 117480 terna i t. d.).

4. Dokazati a) $\binom{n-1}{k-1} + \ldots + \binom{k-1}{k-1} = \binom{n}{k}$; b) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

5. Na koliko se načina da rastaviti produkt a b c d e f g u tri faktora? (R.: 35). Isto produkt $2n$ faktora rastavi u produkte po 2 faktora.

6. Poznata je trigonometrijska formula $a = 2r\sin\alpha$; dvije veličine moraju biti zadane, koliko je moguće sastaviti raznih zadataka koji se rješavaju pomoću te formule?

7. Isto za a) $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$; *b)* $S = \frac{a}{1-q}$; c) $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$
Sastaviti nekoliko zadataka u slučaju c).

8. U kemiji ima 80 elemenata; koliko može biti tjelesa koja se sastoje iz 2, 3 ili 4 elementa?

9. Na koliko se načina mogu pomiješati po 2, 3, 4, 5 od šest boja: crvena narančasta, žuta, zelena, modra, violetna. Nabroj neke smjese!

10. Koliko ima desetznamenkasti brojeva sa raznim ciframa (3265920)?

11. Koliko se pravaca može povući kroz a) n (12) tačaka, od kojih nikoje 3 ne stoje u istom pravcu; b) Koliko dijagonala ima n-terokut?
R. : a) $\frac{n(n-1)}{2} = 66$; b) $\frac{n(n-3)}{2} \left(\text{iz } \frac{n(n-1)}{2} - n\right)$

12. Koliko se trokuta dobije spajanjem 14 tačaka, od kojih nikoje 3 ne leže na istom pravcu? (R. : 364 trokuta)

13. Koliko presječnih tačaka i presječnih pravaca tvori 10 ravnina, od kojih nikoje 4 ne prolaze istom tačkom? (45 pravaca, 120 tačaka)

14. a) $1.2 + 2.3 \ldots + n(n+1) = 2\binom{n+2}{3}$ b) $1 + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \ldots = \binom{n+1}{3}$

15. Koliko četverokuta (peterokuta) može se dobiti sa n-pravaca koji se sijeku; koliko, ako ih je m paralelnih? Na pr. $n = 24$, $m = 4$.

16. Između *A*, *B* i *C* treba podijeliti 15 raznih knjiga, tako da A dobije 4, B 5, C 6. Na koliko se načina može to učiniti? R. : $\binom{15}{4}\binom{11}{5}\binom{6}{6} = ?$

16a. Neko ima 5 kaputa 2 prsluka i 4 pantalone; na koliko se načina može obući? (R. : 40).

17. Zadaci Apolonijevi određuju krug iz 3 elementa, od kojih svaki može biti tačka, pravac ili krug; koliko ima raznih zadataka Apolonijevih i koji su?
R.: $\frac{n(n+1)(n+2)}{1, 2, 3} = 10$ gdje je $n = 3$.

18. Koliko dužina možemo povući između sjecišta od n pravaca?
R. : $\frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3)$

19. Koliko se 2, 3, 4, n —složnih stopa dade napraviti iz kvantiteta —, ⏑?
R. : 4 Dvosložne: — — (spondens), — ⏑ (trohej), ⏑ — (jambus), ⏑⏑ (Pyrrhichius), 8 trosložnih. 2^n n-složnih

20. Koliko vrsta heksametara ima? (R.: Heksametar se sastoji iz 6 daktila (— ⏑⏑), od kojih mjesto zadnjih stoji uvijek spondej ili trohej. Prva 4 mjesta dopuštaju bez razlike spondej mjesto daktila. 5. mjesto ima katkada spondej, a vrlo rijetko sa prethodnim spondejom).

[1])	— —	— —	— —	— —	— —	— ⏓	(Katul 116 . 3)
[2])	— —	— —	— —	— —	— ⏑⏑	— ⏓	Vergil.
[3])	— —	— —	— —	— ⏑⏑	— —	— ⏓	
[4])	— —	— —	— —	— ⏑⏑	— ⏑⏑	— ⏓	

21. Na koliko se načina daju po 3 glasa c e g u 7 oktava međusobno spojiti (343).

22. Koliko ima troznamenkastih brojeva svega? $V'_3(10) - V'_2(10) = 900$

23. Pismo Morzeovog telegrafa sastoji se iz tačaka i crta, a ti se znaci upotrebljavaju ili pojedince ili se sastavljaju po 2, 3 ili 4 elementa. Koliko se raznih znakova može dobiti tim načinom?
R. : $V'_1(2) + V'_2(2) + V'_3(2) + V'_4(2)$.

24. Sa znamenkama 0, 3, 4, 5 može se napisati $V'_6(4) - V'_5(4) = ?$ brojeva; s koliko su znamenaka ti brojevi? (R. : 6).

B. p.

25. 1) $(3+\sqrt{3})^6 - (3-\sqrt{3})^6$ 1a) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^5$

2) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ Dokaz! $2^n = (1+1)^n$ i t. d.

2a) $(1-y)^5 = ?$ 3) $(3i+1)^5 = 316 - 12i$

4) Kako glasi 6-ti član binoma $(\sqrt{x} - x\sqrt{y})^7 = ?$

5) Kako glasi 3-član binoma $\left(\sqrt{\frac{a}{3}} + \sqrt{\frac{3b}{a}}\right)^6$

6) Isto za srednji član binoma $(a+b)^{2n}$

7) Koji je srednji član binoma $(a + 3\sqrt{b})^8$ $(= 5670\, a^4 b^2)$

8) $0{\cdot}99^8 = (1 - \frac{1}{100})^8$ $(= 0{\cdot}9227469\ldots)$ 9) $\sqrt[4]{1 - x^4}$ razviti u red

10) $\dfrac{1 - \sqrt[n]{1-x}}{x}$ za $x = 0$ 10a) $1{\cdot}05^5 = (1 + \frac{5}{100})^5$

11) Koliki je koeficijent od $a^{n-r} b^r$, kad se razvije $\left(a + \frac{b}{3}\right)^n$, ako se zna, da je n treći član geom. reda, čija suma od prva 3 člana iznosi 19, a suma njihovih kvadrata 133; r je broj članova aritm. progresije kod koje suma parnih članova iznosi 12, a neparnih 18? Geom. red je: 4, 6, 9; aritm.: 2, 4, 6, 8 10; $n = 9$, $r = 5$

12) $\sqrt[3]{1 - 0{\cdot}5 \sin 60^0}$ na 9 dec. pomoću binomnog poučka 12a) $(a-b)^{-\frac{2}{3}}$

V.

26. Vjerojatnost da ćemo sa 3 kocke baciti sumu manju od 10 jest $\frac{81}{216} = \frac{3}{8}$, a da ćemo baciti sumu 10 : $\frac{27}{216}$. Provjeriti!

27. U jednoj žari nalazi se 8 crnih i 3 bijele, a u drugoj 5 crnih i 7 bijelih kugli. Kolika je vjerojatnost, da ćemo od prvi put izvući bijelu kuglu? Kolika bi bila, da je samo jedna žara? (R. : Vjerojatnost, da će pogoditi rukom u prvu žaru $= \frac{1}{2}$ prema tome da ćemo izvući bijelu kuglu $v_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11}$ i t. d. Slično je i sa drugom žarom. $v = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{11} + \frac{7}{12}\right)$; $v_1 = \frac{3+5}{11+12}$

28. Kolika je vjerojatnost sa 3 kocke baciti sumu 11?

29. Dječak koji ima 7 kugli za igranje, igra sa »parom« i »neparom«. Kako se odnosi vjerojatnost »par dobiti« prema par ne dobiti«? (63 : 64).

30. Kolika je vjerojatnost da ćemo sa 3 kocke dobiti brojeve koji stoje a) u aritmetičkoj progresiji; b) u geometrijskoj progresiji?

31. Ako od 100 lozova dobiva 10, a neko ima 20 lozova, kolika je vjerojatnost za njega 1) da ne dobije ni jedan, 2) da dobije jedan?

R. : $v_1 = \left(\frac{\binom{80}{10}}{\binom{100}{10}}\right)$; $v_2 = 1 - v_1$

32. Kuglom polumjera 5 *cm* baca se prema prozoru sa kvadratičnim pregradama dužine 8 *cm;* kolika je vjerojatnost da će kugla ulètiti kroz prozor? Koliko se zgoditaka može očekivati, ako se kugla baci 30 puta?

33. Oklada između *A* i *B* iznosi 1000 Din, da će A sa 2 kocke baciti sumu 10; koliko mora položiti *A*, a koliko *B*?

33a. Kolika je vjerojatnost da će između *n* učenika jednog razreda makar jedan imati danas svoj rođendan? R. : $v = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$

34. *A* i *B* se slože da onaj dobije cijeli iznos koji prvi dobije 4 partije šaha, a vjerojatnost je za svaku partiju $\frac{1}{2}$. *A* dobije 1 partiju *B* 3 i prekinu igru; kako će podijeliti okladu? (R : Da *A* dobije $v_1 = \frac{1}{8}$, za *B* $\frac{7}{8}$. **Dijelovi će se odnositi kao 1 : 7. *A* da dobije morao bi izasobice dobiti triputa** $v_1 = \frac{1}{2}, \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$)

35. Četrdesetgodišnja osoba položi osiguravajućem društvu $C = 10.000$ Din i obveže još uplaćivati godišnje početkom godine $r = 500$ Din, da nakon $n = 10$ godina počne vući doživotnu rentu x; kolika je ta?

$$Cl_{40} + r\left(\frac{l_{41}}{q} + \ldots + \frac{l_{49}}{q^9}\right) = x\left(\frac{l_{50}}{q^{10}} + \frac{l_{61}}{q^{11}} + \ldots\right)$$

$$x = \frac{1000\,D_{40} + 500\,(S_{41} - S_{50})}{S_{50}} \quad (p = 3\tfrac{1}{2}\%)$$

36. 36. godišnja osoba uplati 55.000 Din, da diže rentu kroz 30 godina ili doživotno, ako ranije umre; kolika je renta?

37. Četrdesetpet godišnja osoba plati osiguravajućem zavodu 4894·2 Din. Koliko će dobiti nasljednici nakon smrti te osobe?

38. Dvadesetčetirigodišnja osoba plaća godišnju premiju 1216·14 Din. Koliku je svotu time osigurala svojim nasljednicima?

39. Neka tridesetgodišnja osoba želi kroz 20 godina plaćati osiguravajućem društvu premiju *x*, da iza toga vremena uzmogne uživati doživotnu rentu od 10.000 Din. Kolika je ta premija?

$$x\left(l_{30} + \frac{l_{31}}{q} + \ldots + \frac{l_{49}}{q^{19}}\right) = 10.000\left(\frac{l_{50}}{q^{20}} + \frac{l_{56}}{q^{21}} + \ldots\right)$$

$x\,(S_{30} - S_{50}) = 10.000\,S_{50}$ i t. d.

40. *N*-godišnja osoba treba *m* godina ili do svoje smrti, ako ranije umre, plaćati premiju x Din osiguravajućem društvu, da iza *r* godina sebi, ili svojim nasljednicima, ako ranije umre osigura glavnicu c.

$$x\,q^n(S_n - S_{n+m}) = c\,q^{n-1}(S_n - S_{n+m}) - Cq^n(S_{n+1} - S_{n+m+1})$$

41. Četrdesetgod. osoba uplati sumu $c = 30.000$ Din, da stekne rentu koju će početi uživati nakon 20 godina kasnije i uživaće je 15 godina ili do smrti, ako ranije umre na početku svake godine. Kolika je ta renta?

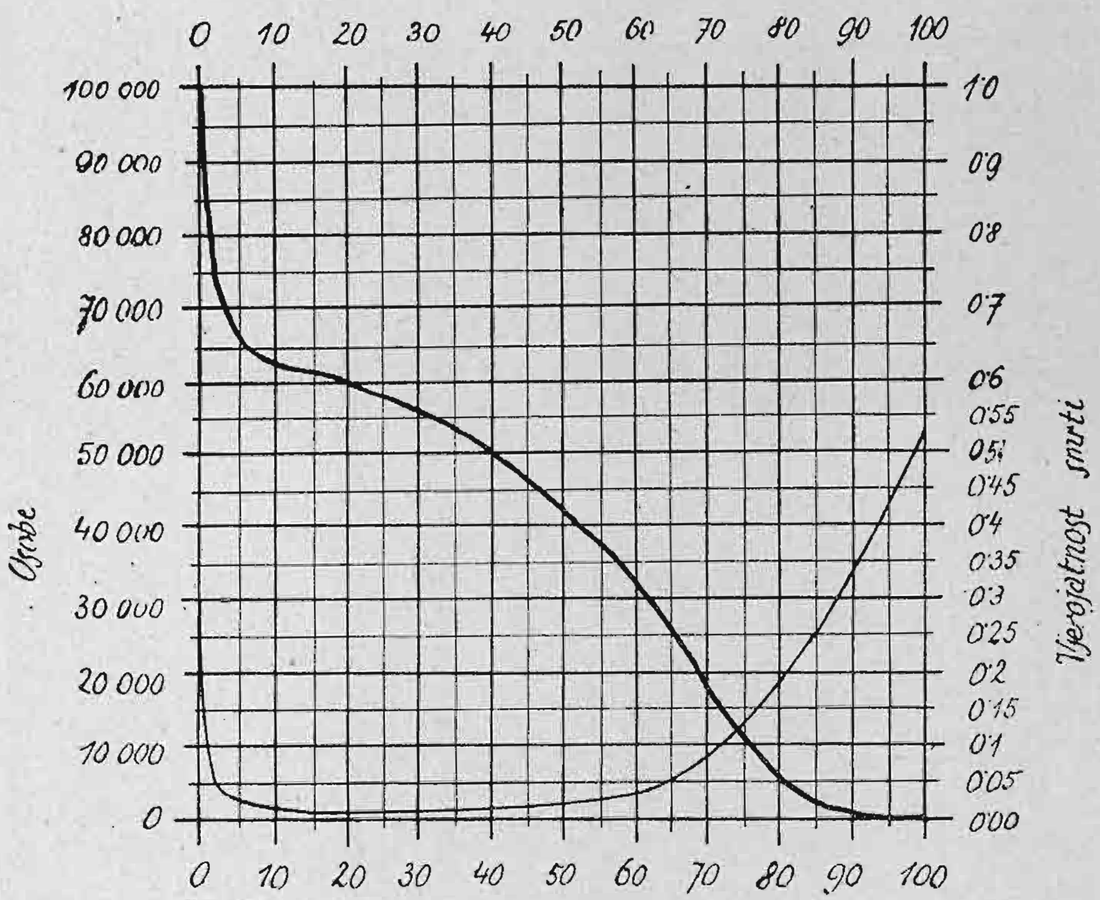
$$l_{40} \cdot c = x\left(\frac{l_{60}}{q^{20}} + \frac{l_{61}}{q^{21}} + \ldots \frac{l_{88}}{q^{34}}\right) \text{ ili } l_{30} \cdot c = x\,q^{40}(S_{60} - S_{75})$$

42. Četrdesetpetgodišnja osoba plaća kroz 10 godina neku premiju, da svojim nasljednicima osigura 100.000 Din. Kolika je premija?

$$x\left(l_{45}+\frac{l_{46}}{q}+\ldots+\frac{l_{54}}{q^{9}}\right)=100.000\left(\frac{d_{45}}{q}+\frac{d_{46}}{q^{47}}+\ldots\right)$$

$$x\,q^{45}\left(\frac{l_{45}}{q^{45}}+\ldots\frac{l_{54}}{v^{54}}\right)q^{46}=100.000\,q^{45}\left(\frac{d_{45}}{q^{46}}+\frac{d_{46}}{q^{47}}+\ldots\right)$$

$$x\left(S_{45}-S_{55}\right)=100.000\,M_{45}\ \text{i t. d.}$$



Godine života

a Linija vjerojatnosti života Po Czuberu

b Linija vjerojatnosti smrti

Tabla mortaliteta H^M dvadeset britanskih društava. — $3^1/_2\,\%$

n	l_n	d_n	D_n	S_n	C_n	M_n	n
0	127 283	14 358	127 283	2 553 055	13 872	40 948·	0
1	122 925	3 962	109 110	2 425 772	3 698·5	27 075·5	1
2	108 963	2 375	101 720	2 316 662	2 142·1	23 377·0	2
3	106 588	1 646	96 137	2 214 942	1 434·4	21 234·9	3
4	104 942	1 325	91 451	2 118 805	1 115·6	19 800·5	4
5	103 617	1 061	87 243	2 027 354	863·14	18 684·94	5
6	102 556	852	83 430	1 940 111	669·67	17 821·80	6
7	101 704	683	79 939	1 856 681	518·68	17 152·13	7
8	101 021	557	76 717	1 776 742	408·70	16 633·45	8
9	100 464	464	73 714	1 700 025	328·94	16 224·75	9
10	100 000	408	70 892	1 626 311	279·46	15 895·81	10
11	99 592	369	68 215	1 555 419	244·20	15 616·35	11
12	99 223	346	65 664	1 487 204	221·24	15 372·15	12
13	98 877	337	63 224	1 421 540	208·19	15 150·91	13
14	98 540	337	60 877	1 358 316	201·15	14 942·72	14
15	98 203	360	58 615	1 297 439	207·61	14 741·57	15
16	97 843	384	56 426	1 238 824	213·96	14 533·96	16
17	97 459	425	54 304	1 182 398	228·80	14 320·00	17
18	97 034	465	52 238	1 128 094	241·87	14 091·20	18
19	96 569	508	50 231	1 075 856	255·30	13 849·33	19
20	96 061	548	48 277	1 025 625	266·09	13 594·03	20
21	95 513	582	46 378	977 348	273·04	13 327·94	21
22	94 931	609	44 537	930 970	276·05	13 054·90	22
23	94 322	631	42 754	886 433	276·35	12 778·85	23
24	93 691	647	41 033	843 679	273·77	12 502·50	24
25	93 044	658	39 371	802 646	269·02	12 228·73	25
26	92 386	664	37 771	763 275	262·29	11 959·71	26
27	91 722	673	36 231	725 504	256·86	11 697·42	27
28	91 049	678	34 750	689 273	250·01	11 440·56	28
29	90 371	686	33 324	654 523	244·41	11 190·55	29
30	89 685	691	31 953	621 199	237·86	10 946·14	30
31	88 994	700	30 634	589 246	232·81	10 708·28	31
32	88 294	709	29 366	558 612	227·83	10 475·47	32
33	87 585	719	28 145	529 246	223·23	10 247·64	33
34	86 866	729	26 970	501 101	218·69	10 024·41	34
35	86 137	742	25 839	474 131	215·06	9 805·78	35
36	85 395	756	24 750	448 292	211·70	9 590·66	36
37	84 639	770	23 702	423 542	208·33	9 378·96	37
38	83 869	786	22 692	399 840	205·47	9 170·63	38
39	83 083	806	21 719	376 148	203·58	8 965·16	39
40	82 277	823	20 781	355 429	200·84	8 761·58	40
41	81 454	846	19 877	334 648	199·47	8 560·74	41
42	80 608	871	19 006	314 771	198·42	8 361·27	42
43	79 737	895	18 165	295 765	196·99	8 162·85	43
44	78 842	924	17 353	277 600	196·49	7 965·86	44
45	77 918	954	16 570	260 247	196·02	7 769·37	45
46	76 964	986	15 814	243 677	195·74	7 573·35	46
47	75 978	1 021	15 083	227 863	195·83	7 377·61	47
48	74 957	1 061	14 377	212 780	196·63	7 181·78	48
49	73 896	1 101	13 694	198 403	197·14	6 985·15	49

n	l_n	d_n	D_n	N_n	C_n	M_n	n
50	72 795	1 144	13 034	184 709	197·91	6 788·01	50
51	71 651	1 193	12 395	171 675	199·41	6 590·10	51
52	70 458	1 243	11 777	159 280	200·74	6 390·69	52
53	69 215	1 296	11 178	147 503	202·22	6 189·95	53
54	67 919	1 353	10 598	136 325	203·98	5 987·73	54
55	66 566	1 414	10 035	125 727	205·96	5 783·75	55
56	65 152	1 475	9 490·1	115 691·8	207·58	5 577·79	56
57	63 677	1 541	8 961·5	106 201·7	209·54	5 370·21	57
58	62 136	1 612	8 448·9	97 240·2	211·78	5 160·67	58
59	60 524	1 682	7 951·5	88 791·3	213·51	4 948·89	59
60	58 842	1 755	7 469·1	80 839·8	215·24	4 735·38	60
61	57.087	1 830	7 001·3	73 370·7	216·85	4 520·14	61
62	55 257	1 906	6 547·6	66 369·4	218 21	4 303·29	62
63	53 351	1 983	6 108·0	59 821·7	219·35	4 085·08	63
64	51 368	2 059	5 682·1	53 713·7	220·06	3 865·73	64
65	49 309	2 133	5 270·0	48 031·6	220·26	3 645·67	65
66	47 176	2 204	4 871·5	42 671·6	219·59	3 425·41	66
67	44 972	2 273	4 486·8	37 890·1	219·11	4 205·52	67
68	42 699	2 334	4 116·0	33 403·3	217·38	2 986·41	68
69	41 365	2 388	3 759·5	29 287·3	214·89	2 769·03	69
70	37 977	2 434	3 417·4	25 527·8	111·62	2 554·24	70
71	35 543	2 468	3 090·2	22 110·4	207·32	2 342·52	71
72	33 075	2 490	2 778·4	19 020·2	202·09	2 135·20	72
73	30 585	2 496	2 482·3	16 241·8	195·73	1 933·11	73
74	28 089	2 487	2 202·7	13 759·5	188·43	1 737·38	74
75	25 602	2 459	1 939·7	11 556·8	180·01	1 548·95	75
76	23 143	2 412	1 694·1	9 617·1	170·60	1 368·94	76
77	20 731	2 343	1 466·3	7 923·0	160·11	1 198·34	77
78	18 388	2 255	1 256·6	6 456·7	148·89	1 038·23	78
79	16 133	2 146	1 065·2	5 200·1	136 90	889·34	79
80	13.987	2 018	892·26	4 134·89	124·38	752·44	80
81	11 969	1 873	737·72	3 242·63	111·54	628·06	81
82	10 096	1 712	601·23	2 504·91	98·503	516·521	82
83	8 384	1 540	482·39	1 903·68	85·611	418·018	83
84	6 844	1 361	380·47	1 421·29	73·102	332·407	84
85	5 483	1 180	294·50	1 040·82	61·236	259·305	85
86	5 303	1 002	223·31	746·32	50.241	198·069	86
87	3 301	830	165·52	523·01	40·210	147·828	87
88	2 471	671	119·71	357·49	31·407	107·618	88
89	1 800	527	84·252	237·784	23·833	76·211	89
90	1 273	402	57·571	153·532	17·565	52·378	90
91	871	296	38·058	95·961	12·496	34·813	91
92	575	209	24·275	57·903	8,5251	22·3170	92
93	366	144	14·929	33·628	5·6751	13·7919	93
94	222	93	8·749	18·699	3·5412	8·1168	94
95	129	58	4·912	9·950	2·1338	4·5756	95
96	71	34	2·612	5·038	1·2086	2·4418	96
97	37	18	1·315	2·426	0·6183	1·2332	97
98	19	10	0·653	1·111	0·3317	0·6149	98
99	9	5	0·296	0·458	0·1603	0·2832	99
100	4	3	0·128	0·159	0·0930	0·1229	100
101	1	1	0·031	0·031	0·0299	0·0299	101
102	0	—	—	—	—	—	102

Tabla mortaliteta 23 njemačka društva

God. n	Broj živih l_n	Diskontirani broj živih D_n	Suma diskontiranog broja živih S_n	God. n	Broj živih l_n	Diskontirani broj živih D_n	Suma diskontiranog broja živih S_n
20	100 000	50 257	1 031 224	**60**	55 892	7 094·6	72 808·2
21	99 081	48 111	980 967	61	53 916	6 612·3	65 713·6
22	98 173	46 058	932 856	62	51 878	6 147·3	59 101·3
23	97 286	44 098	886 798	63	49 781	5 699·3	52 954·0
24	96 425	42 230	842 700	64	47 632	5 268·8	47 254·7
25	95 590	40 449	800 470	65	45 435	4 855·9	41 985·9
26	94 774	38 747	760 021	66	43 189	4 459·7	37 130·0
27	93 970	37 119	721 274	67	40 887	4 079·3	32 670·3
28	93 173	35 560	684 155	68	38 532	3 714·3	28 591·0
29	92 378	34 064	648 595	69	36 133	3 365·3	24 876·7
30	91 578	32 627	614 531	**70**	33 701	3 032·6	21 511·4
31	90 770	31 246	581 904	71	31 249	2 716·9	18 478·8
32	89 952	29 917	550 658	72	28 794	2 418·8	15 761·9
33	89 121	28 639	520 741	73	26 358	2 139·2	13 343·1
34	88 280	27 409	492 102	74	23 952	1 878·2	11 203·8
35	87 424	26 225	464 693	75	21 592	1 635·9	9 325·6
36	86 551	25 085	438 468	76	19 293	1 412·3	7 689·7
37	85 662	23 988	413 383	77	17 083	1 208·3	6 277·4
38	84 756	22 932	389 395	78	14 980	1 023·7	5 069·1
39	83 828	21 914	366 463	79	12 998	858·2	4 045·4
40	82 878	20 933	344 549	**80**	11 150	711·29	3 187·2
41	81 903	19 987	323 616	81	9 420	580·61	2 475·91
42	80 897	19 074	303 629	82	7 821	465·75	1 895·30
43	79 862	18 193	284 555	83	6 378	366·97	1 429·55
44	78 799	17 344	266 362	84	5 114	284·30	1 062·58
45	77 707	16 525	249 018	85	4 034	216·67	778·28
46	76 590	15 737	232 493	86	3 138	162·85	561·61
47	75 450	14 978	216 756	87	2 423	121·488	398·76
48	74 281	14 247	201 778	88	1 857	89·962	277·272
49	73 077	13 543	187 531	89	1 415	66·232	187·310
50	71 831	12 861	173 988	**90**	1 071	48·435	121·078
51	70 528	12 201	161 127	91	724	31·635	72·643
52	69 166	11 561	148 926	92	463	19·546	41·008
53	67 741	10 940	137 365	93	275	11·217	21·462
54	66 251	10 337·5	126 425	94	149	5·872	10·245
55	64 695	9 753·3	116 087·5	95	72	2·742	4·373
56	63 074	9 187·4	106 334·2	96	30	1·104	1·631
57	61 383	8 638·7	97 146·8	97	11	0·391	0·527
58	59 624	8 107·4	88 508·1	98	3	0·103	0·136
59	57 792	7 592·5	80 400·7	99	1	0·033	0·033
60	55 892	7 094·6	72 808·2	**100**	0	0	0

Ispravci

Pokraj i najveće pažnje prokralo se nekoliko štamparskih grešaka, koje treba odmah, prije same upotrebe ove knjige, ispraviti:

Na strani 22, zadatak 1. 1) treba da stoji: R.: $-18a^2b^{n-3}x^{2p}$

„ „ 38, redak 1 odozdo treba da stoji na početku: y^2 mjesto x^2

„ „ 43, „ 8 „ „ „ „ : Opć.: $x = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots an}$

„ „ 47, „ 2 odozgo „ „ „ : Uvjet: $a \ldots b \ldots c$

„ „ 48, zadatak 8. 2) „ „ „ : $(mx + ny) : (mx - ny) = a : b$

„ „ 53, „ 3. 2) „ „ „ : R.: $x^2 + 2x + 1$

„ „ 58, redak 3 odozgo „ „ „ : 8. Eksponent korijena < 0

„ „ 60, „ 4 „ „ „ „ : $r = \sqrt{a^2 + b^2} = | a + bi |$

„ „ 96, zadatak 47) jed. druga treba da stoji: $\frac{x - z}{xz} = \frac{3}{4}$

„ „ 97, „ 51a) „ „ „ „ „ : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{d}$

„ „ 111, „ 65) „ „ „ „ „ : $3000 - \frac{3000 \,.\, 8 \,.\, x}{100 \,.\, 12} +$

$+ 2000 - \frac{2000 \,.\, 10 \,.\, x}{100 \,.\, 12}$ i t. d.

„ „ 113, Primjer II 1. „ „ „ „ „ : $\left(\frac{3 + 2x}{2 - x}\right)^2 = 4\frac{3 + 2x}{2 - x} + 5$

„ „ 118, „ I 1. „ „ „ „ „ : R.: $x^2 = 9$ mjesto $2x^2 = 9$

„ „ 127, zadatak 131) „ „ „ „ „ : $x^4 + (1 - x)^4 = 17$

„ „ 127, „ 131a) „ „ „ „ „ : $x^5 + (1 - x)^5 = 1$

„ „ 165, redak 6 odozdo treba da stoji: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mjesto $\frac{\Delta u}{\Delta x}$

„ „ 168, „ 3 „ „ „ „ : $f'\ x) = 0, \quad f''(\ ) < 0$

„ „ 168, na klišeju „ „ „ : $M_1,\ y' = 0.$

„ „ 179, redak 3 odozgo „ „ „ : $\int_a^b f'(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$

Napomena za đake

Zadatke pod rubrikom „Primjeri“ treba više puta izraditi; najbolje bi bilo svaki zadatak raditi toliko puta, dok ga ne budemo znali potpuno sigurno i samostalno riješiti bez uputa u knjizi. Istom tada možemo pristupiti rješavanju drugih zadataka.