NACRTNA (DESKRIPTIVNA)

GEOMETRIJA

ZA

SEDMI RAZRED SREDNJIH ŠKOLA

Prema novoj naučnoj osnovi napisao

ADOLF ŠTEFAN

profesor državne II realne gimnazije u Zagrebu

Knjiga je na osnovu mišljenja Glavnog prosvetnog saveta odobrena za udžbenik odlukom g. Ministra prosvete S. N Br. 41511 od 4 novembra 1929 godine

167 crteža i 560 zadataka

IZDAVAČKA KNJIŽARNICA GECE KONA
B E O G R A D
1 9 3 0

CENA 40 DINARA

NACRTNA (DESKRIPTIVNA)
GEOMETRIJA

ZA

SEDMI RAZRED SREDNJIH ŠKOLA

Prema novoj naučnoj osnovi napisao

ADOLF ŠTEFAN

profesor državne II realne gimnazije u Zagrebu

Knjiga je na osnovu mišljenja Glavnog prosvetnog saveta odobrena za udžbenik odlukom g. Ministra prosvete S. N. Br. 41511 od 4 novembra 1929 godine.

167 crteža i 560 zadataka

IZDAVAČKA KNJIŽARNICA GECE KONA

B E O G R A D

1 9 3 0

Štamparija „PRIVREDNIK“ Beograd, Knez Mihailova 3

PREDGOVOR

Reč namenjena učenicima

Ova je knjiga pisana samo za Vas da se njome pomažete kod kuće, kod učenja nacrtne geometrije.

Kad se studira nacrtna geometrija, ne sme se nikada preći u t. zv. mehanizam. To znači da se ne sme otvoriti crtarija u knjizi i ovako učiti: Ovde se pusti normala, tamo se opet povuče paralela, onde se nanese ova ili ona dužina (duž) itd. Knjigu treba čitati redom, polagano i pažljivo. Ono što se čita, treba uspoređivati s onim što je nacrtano, a kod svega toga treba još i tačno razumeti ili, kako se to kaže u deskriptivnome govoru, videti da sve što je u crtariji nacrtano, potpuno odgovara onome kako je to u prostoru. Dakle kod nacrtne se geometrije više gleda negoli uči. Tim se gledanjem prima a primanjem se stvara, te nam se nekako čini kao da se sve ono i pre znalo negoli se o tom čulo, čitalo i videlo.

Važno je da se u proučavanju nacrtne geometrije nikada ne prelazi dalje dok se nije ono što je pred tim potpuno usvojilo. Videćete da će Vam ono, što ste naučili prvoga momenta u nacrtnoj geometriji, trebati uvek dok ćete se njome baviti. Zbog toga se ne sme nikako dogoditi, ako se želi nacrtnu geometriju znati, da se koji njen deo, po izgledu možda i neznatan, površnije prouči.

Ako se tačno držite toga naputka, biće Vam nacrtna geometrija najlaglji i najmiliji predmet, jer kod nje nema mehaničkoga pamćenja.

Nacrtna je geometrija kao lepota prirode koju, što je više gledamo, to više volemo i upoznajemo. Lepota se prirode ne uči nego gleda. Tako je i s nacrtnom geometrijom. Dobro otvoriti oči i promatrati.

Radeći tako, i Vi ćete se uveriti da je svaki posao kod nacrtne geometrije neke vrsti lakši ili teži problem koji zabavlja, oštri pogled, a kod toga ne umara.

UVOD

§ 1 Zadatak i značaj nacrtne (deskriptivne) geometrije

Prva i temeljna zadaća nacrtne geometrije je predočivanje *prostornih telesa crtanjem u ravnini (ravni)*, tako da se iz *njihovih slika* može tačno odrediti položaj, veličina, oblik, omer dimenzija i nagib svih ploha kojima su ta tela omeđena i rešavati crtanjem raznolike geometričke zadatke koji se odnose na te prestavljene oblike (tako je nastao i naziv *„nacrtna geometrija“).*

Već kog prostoručnoga crtanja i u matematici svaki je učenik crtao na ploči i u pisanci razna jednostavnija i sastavljenija geometrička tela. Iz takve slike ne znamo kako je telo veliko, ne vidimo tačno za koliko je koja ploha veća ili manja od druge plohe, i ne znamo pod kojim se kutovima (uglovima) pravci (prave) i ravnine (ravni) među sobom seku. Sama fotografska snimka nam verno predočuje svaki predmet, ali ipak iz nje ne možemo tačno odrediti veličinu predmeta, omer dimenzija i nagib ploha među sobom. Dobra crtarija ili fotografska snimka jasno nam predočuje neki predmet, ali ga zato ipak ne možemo izraditi, kad bismo bili i vešti izrađivanju, upravo onako i baš u onoj veličini kakav je on doista. Kod crtarija u nacrtnoj geometriji, naročito u onoj vrsti nacrtne geometrije koja je ovde u ovoj knjizi obrađivana, ne vidi se predočeni predmet onako zorno kako to pokazuje fotografija ili dobra crtarija, ali zato je moguće svakome onome koji nacrtnu geometriju razume da iz takve deskriptivne crtnje tačno odredi veličinu i položaj svake i najmanje sitnice dotičnoga predmeta. U stanju smo da dotični predmet koji je deskriptivski predočen izradimo upravo onako kakav on zaista jest. Poznavanjem nacrtne geometrije možemo da one deskriptivski predočene predmete koji još ne postoje izradimo upravo onako kako si ih je zamišljao onaj koji ih je predočivao. Upravo u tome najveća je vrednost nacrtne geometrije kod njene primene u praksi.

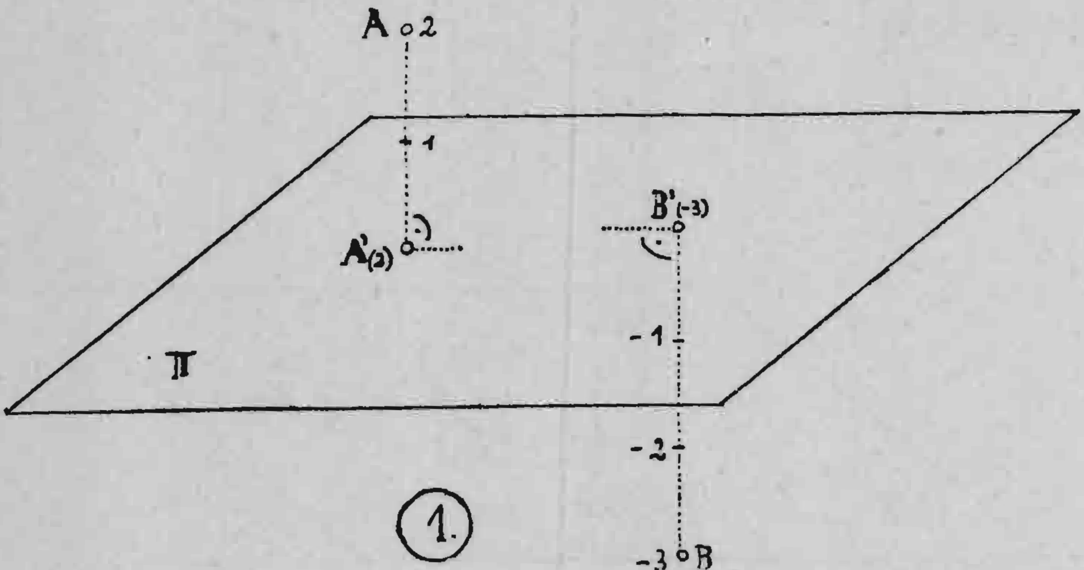
Već iz ovoga kratkoga prikaza vidi se veliko značenje nacrtne geometrije u praktičnom životu kod izrade planova za najjednostavnije i najsloženije objekte. Danas ne možemo zamisliti gradnju i jednostavnih kuća, a kamoli oblakodera, kazališta, monumentalnih građevina, velikih mostova, tunela itd., ako nemamo plan (deskriptivnu sliku) za takve objekte. Čim uđemo malo dublje u sam predmet, videće se koliko značenje ima nacrtna geometrija ne samo u praktičnu životu nego i za vas učenike koji ćete, učeći nacrtnu geometriju, dobiti bolji i precizniji pogled na prostor, jasnije i tačnije predodžbe o prostornim odnosima. Dobar će deskriptivar uza sve to još i vežbati svoj mladi duh u logičnom zaključivanju kod rešavanja zadataka, te time pospešiti buđenje onoga svojstva u sebi koje će ga povesti do samostalnoga, stvaralačkoga rada.

I DEO

PROJECIRANJE NA JEDNU RAVNINU (RAVAN)

2. Projekcija tačke i prušca (duži)

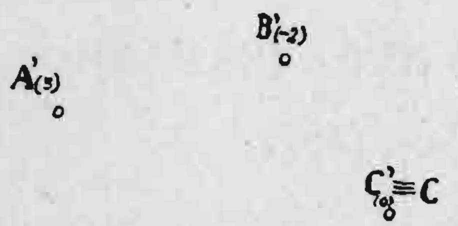
Tačke imenujemo velikim slovima A, B, C, ... Pusti li se se iz neke tačke $A, B \ldots$ (slika 1) u prostoru okomica (normala) na neku ravninu (ravnu) π i nađe probodište te normale s tom ravninom π, onda se to probodište naziva normalna projekcija ili samo *projekcija* tačke A, tačke $B, \ldots$ na π, a obilježuje se s A' (čitajte: A crtano) ili B' (B crtano). Budući da se iz jedne tačke u prostoru na neku ravninu može pustiti samo jedna normala, izlazi jasno da *jednoj tački u prostoru odgovara samo jedna* (normalna) *projekcija na jednu ravninu.* Ravnina π, na koju se iz tačke pušta normala, naziva se *ravnina projekcija* ili *ravnina crtnje.* Sam postupak naziva se projeciranje. Za ravninu projekcija uzima se ravnina na kojoj crtamo (crtanka, ploča). Ravninu projekcija smatramo neizmerno velikom. Prema tome je rav-



1.

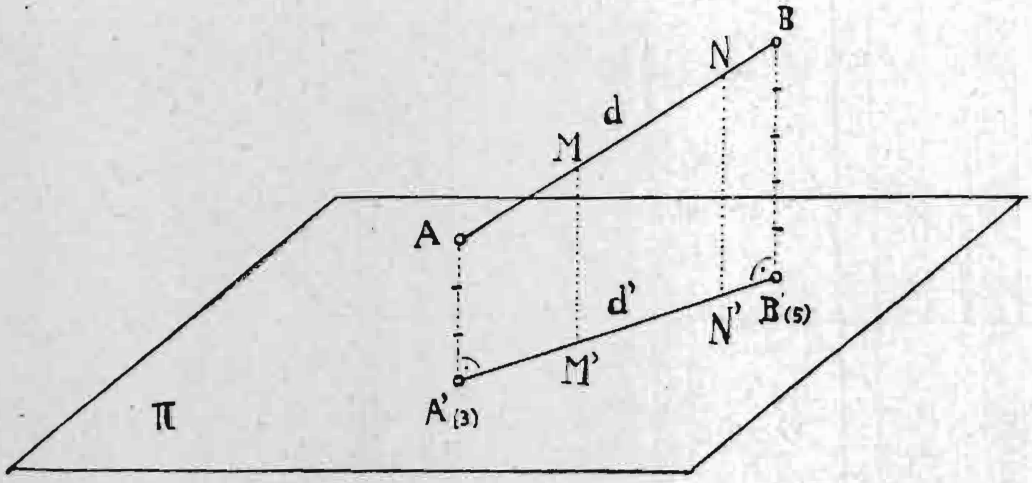
ninom projekcija čitav prostor podeljen u dva dela i to: *pozitivni* (+) deo i *negativni* (—) deo. Pozitivni deo je onaj deo prostora *nad* ravninom π kada crtamo na horizontalnoj ravnini (crtanka), ili *pred* ravninom π kada crtamo na vertikalnoj ravnini (ploča); negativni deo prostora je onaj deo *ispod*, odnosno *iza* ravnine π.

Tačka u prostoru nije dostatno određena, ako je poznata samo njena projekcija, jer ta projekcija odgovara svim onim tačkama u pozitivnom i negativnom delu prostora koje se nalaze na normali puštenoj iz projekcije tačke na ravninu projekcija. Zbog toga je potrebno pokraj projekcije tačke zabeležiti i *udaljenost* tačke u prostoru od ravnine projekcija (slika 2). Ta se udaljenost tačke u prostoru od ravnine projekcija naziva *kota*, a prema koti naziva se ta vrsta normalnoga projeciranja *kotirana projekcija*. Ako je kota +, tačka je nad ravninom (pred ravninom) crtnje, ako je kota —, tačka je pod ravninom (iza ravnine) crtnje. Na pr. $A'_{(5)}$, $B'_{(-2)}$, $C'_{(0)}$ (slika 2).



2.

Veličina jedinice za kotu uzima se po volji. U slici 2 predočene su tako projekcije tačaka *A*, *B* i *C* s kotama 5, —2,0. Želimo li prikazati gde se u prostoru nalazi tačka *A*, moramo u *A*' (projekcija tačke *A*) pustiti normalu na ravninu π (znači pustiti normalu na ravninu na kojoj crtamo) i naneti 5 jedinica mere nad π, ako je ravnina π horizontalna ili 5 jedinica pred π, ako je ravnina π vertikalna. Kod tačke *B* nanašamo na normalu u njenoj projekciji *B*' *pod*, odnosno *iza* π, dve jedinice, jer *B*' ima kotu —2. Budući da tačka *C* nema nikakve udaljenosti od π, mora se *C* nalaziti baš u π. S toga je kod projekcije *C*' stavljen indeks O.



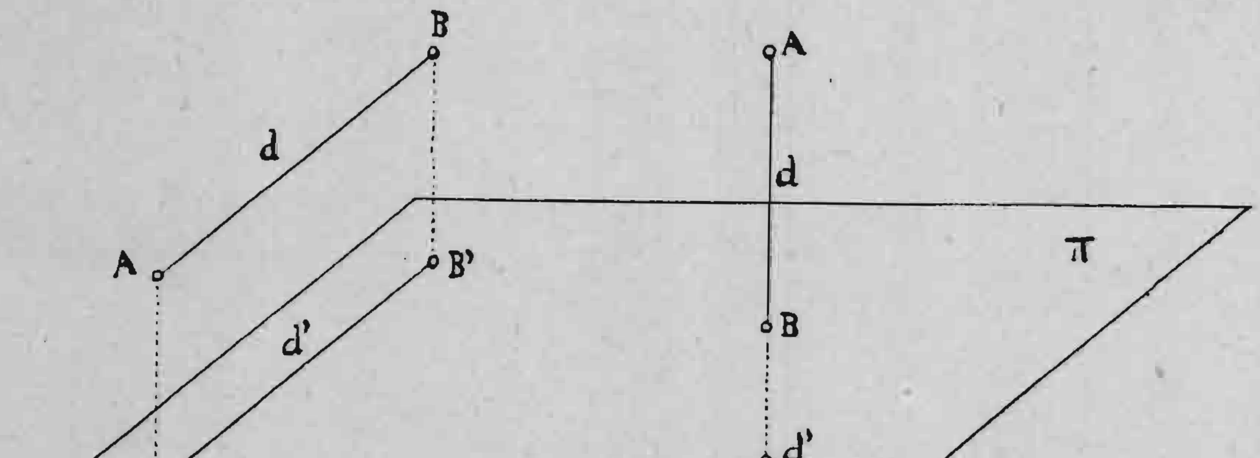
3

U praksi se kod kotirane projekcije uzima redovno ravnina projekcija horizontalno, jer nam ona najčešće služi za prikazivanje visinskih odnosa na tlu (terenu).

Spojimo li pravom crtom dve tačke prostora, nastaje pružac (duž) Uopće, kad će se govoriti o spojnici dveju tačaka, misliće se na spojnicu tih tačaka u pravcu. *Pružac i pravac (pravu) imenujemo malim slovima a, b, c...*

U slici 3 pružac d i normale puštene iz krajnjih tačaka A i B prušca d na ravninu projekcija π određuju ravninu koja mora biti *normalna na π, jer se normalom na neku ravninu mogu položiti samo normalne ravnine na tu ravninu* (stereometrički zakon). Takva se normalna ravnina na π, koja u sebi sadržaje pružac, naziva *ravnina prometalica* ili *projecirajuća ravnina* za ravninu π. Budući da se sve normale puštene ma iz koje tačke prušca $\overline{AB}$ (sl. 3 tačke M, N) nalaze u ravnini prometalici, moraće se i projekcije sviju tačaka prušca d nala ziti u presečnici ravnine prometalice s ravninom π. *Kako je presečnica dveju ravnina uvek pravac* (prava), *mora biti projekcija prušca* (duži) *opet pružac* (duž). U slici 3 je dakle $\overline{A'B'}$ projekcija prušca $\overline{AB}$. Spojimo li projekcije tih tačaka, dobićemo projekciju toga prušca.

Ako je u prostoru $\overline{AB} = d$, onda je projekcija $\overline{A'B'} = d'$; ako je $d \parallel \pi$ (d paralelno π), onda je $d = d'$ (slika 4). Što strmije stoji d prema π, to je d' kraće. Ako je je $d \perp \pi$ (d normalno π), onda je projekcija prušca d tačka, tj. A' i B' padaju u istu tačku, pa je prema tome dužina projekcije $d' = O$ ili $A' \equiv B'$ (A' identično B'). (Slika 4 a).



4.

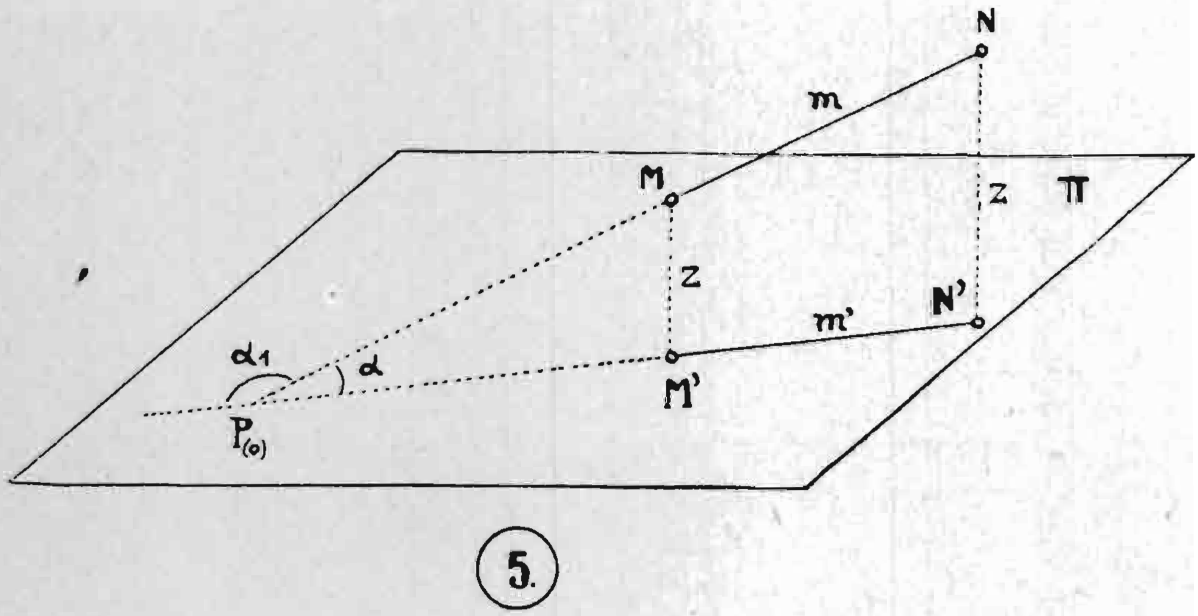
4a

I zakon: Projekcije pružaca paralelnih s ravninom crtnje (π) jednake su svojoj naravnoj dužini; prušci normalni na ravninu crtnje imaju za projekciju tačku.

Produži li se (slika 5) pružac $\overline{MN} \equiv m$ sve dok ne seče svoju produženu projekciju $M'N' \equiv m'$, dobije se tačka $P_{(0)}$ u ravnini π. Kut (ugao) α, koji je nastao produženjem prušca m i njegove projekcije m', je najmanji kut između svih pravaca ravnine π povučenih tačkom $P_{(0)}$ i produženoga prušca m koji je izvan ravnine π. Iz stereometrije znamo da se takvi najmanji kut naziva *priklonim kutom* (uglom) *pravca* odnosno prušca prema ravnini.

Iz ovoga što je rečeno i zakona I jasno sledi da projekcija nekoga prušca, koji nije paralelan s ravninom crtnje, ni normalan na ravnini crtnje, nije jednaka ni njegovoj naravnoj dužini ni tački. Prema tome je dužina projekcije prušca ovisna o priklonu kutu samoga prušca prema ravnini crtnje. Što je prikloni kut prušca prema π veći, to je i njegova projekcija kraća. Ako je prikloni kut jednak 90^0, projekcija prušca je tačka; ako je prikloni kut 0^0, njegova je projekcija jednaka dužini prušca u prostoru.

Pružac u prostoru i njegova projekcija čine prema π zapravo dva kuta (ugla) (α i α_1) koji su među sobom suplementni. (Slika 5). Kad se govori o priklonu kutu prušca, uvek se misli na onaj manji kut. Dakle, prikloni kut prušca prema ravnini crtnje uvek se nalazi između 0^0 i 90^0. Budući da je projekcija prušca kod 0^0 (slika 4) jednaka njegovoj dužini u prostoru, a kod 90^0 (slika 4 a.) jednaka tački, sledi da se veličina projekcije prušca kreće između njegove dužine u prostoru i tačke.



5.

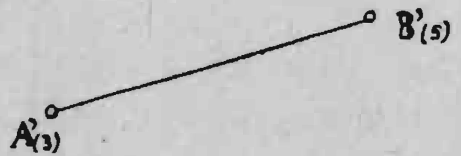
II zakon: Projekcija prušca, koji nije paralelan s ravninom crtnje, uvek je manja od njegove dužine u prostoru.

Spojen I s II zakonom glasio bi ovako: $m' < m$ ili $m > m'$, ako je pružac kos prema π; $m' = 0$, ako je pružac normalan na π; $m' = m$, ako je pružac paralelan s π.

Iz svega što je dosad pokazano o taćki i prušcu vidi se da je i pružac istom onda u prostoru potpuno određen, ako poznajemo njegovu projekciju i kote dveju njegovih krajnjih tačaka.

3. Dužina i prikloni kut prušca (duži) (Trapez prometač)

Kad crtamo projekciju nekoga prušca, onda to ne radimo onako kako je to učinjeno u slici 3, već uzimamo našu crtanku, odnosno ploču kao ravninu crtnje (π), i na njoj nacrtamo samo projekciju prušca. U slici 6 je tako predočen pružac AB. Pokraj projekcija krajnjih tačaka stavimo u zagradi kote njihove [$A'_{(3)}$, $B'_{(5)}$]. To znači da se A (tačka u prostoru, izvan ravnine crtnje) nalazi na normali na π iz A' 3 jedinice u pozitivnomu delu prostora, a B na normali na π u B' 5 jedinica od B' također u pozitivnom delu prostora. Pružac AB nije paralelan s ravninom crtnje, jer je točka B (kota 5) udaljenija od π negoli A (kota 3). Prema tome je i projekcija $A'B'$ kraća od prušca AB u prostoru.



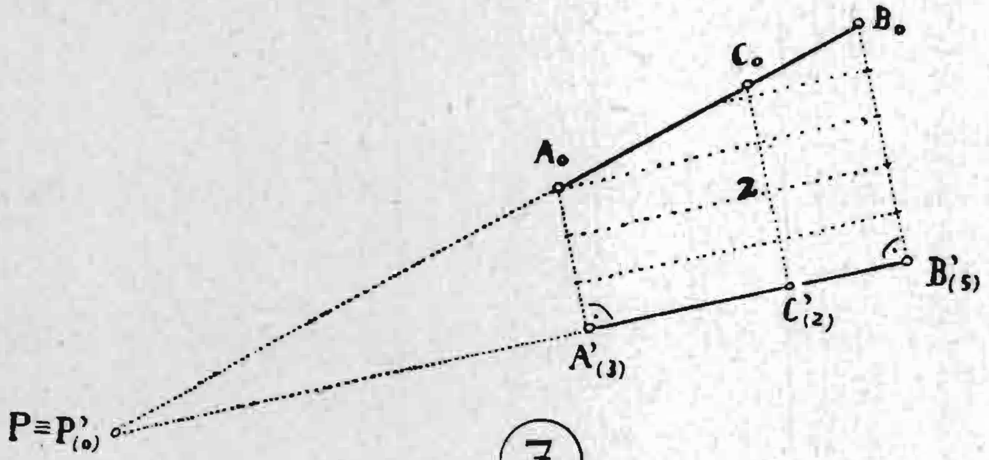
6.

Da odredimo dužinu prušca AB, treba da razmotrimo četverokut $ABB'A'$. (Slika 3). Prema stereometričkom poučku koji kaže: *Svi su pravci, koji prolaze nožištem normale na neku ravninu a leže u toj ravnini, normalni na onoj normali*; sledi da je $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ normalno na $\overline{A'B'}$. Osim toga, kad znamo da su *sve normale neke ravnine među sobom paralelne,* sledi da je $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$. Prema tome je četverokut $ABB'A'$ trapez kojemu su kutovi na stranici $A'B'$ pravi. Taj se trapez naziva *trapez prometač.*

Što dakle poznajemo od trapeza prometača $ABB'A'$?

Poznajemo $\overline{A'B'}$; to je zadana projekcija. (Slika 3). Poznajemo kutove u A' i B' ($\sphericalangle A' = \sphericalangle B' = 90^0$). Znamo dužine stranice AA' i stranice BB' ($\overline{AA'} = 3$, $\overline{BB'} = 5$). Trapez prometač $ABB'A'$ je dakle potpuno poznat, jer poznajemo njegove tri stranice i dva kuta njegova. Ovaj se trapez može konstruisati u ravnini projekcija ovako: (Slika 7) Postavimo u A' i u B' normale na $\overline{A'B'}$ (obje normale na istu stranu, jer su kote istoimene) i nanesemo od A' 3 jedinice a od B' 5 jedinica.

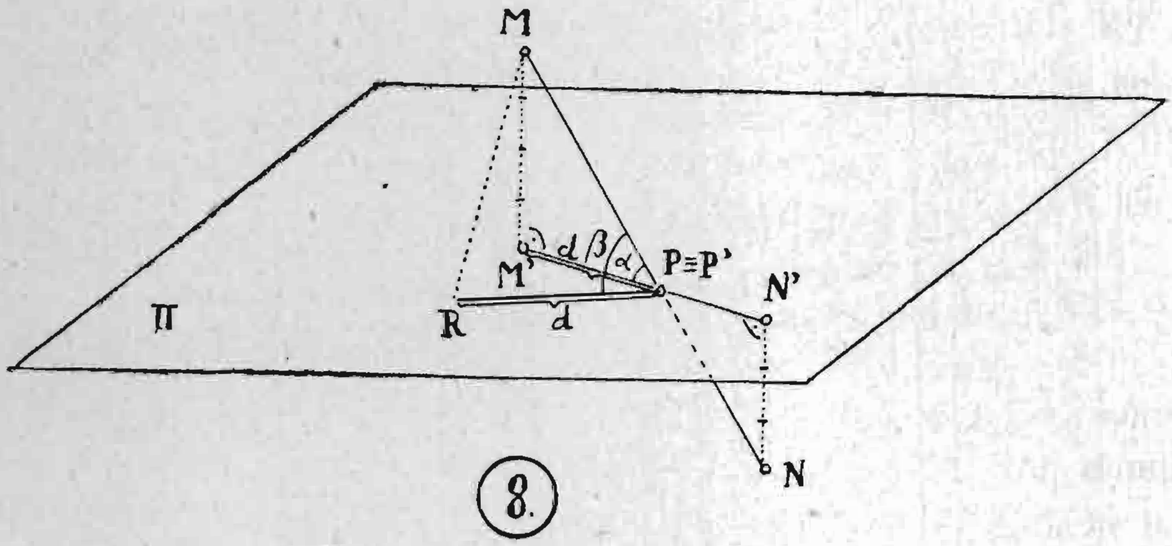
Te dobivene tačke označimo s A_0 i B_0. Spojnica $\overline{A_0B_0}$ daje nam onu četvrtu stranicu trapeza, tj. dužinu prušca AB. $\overline{A_0B_0} = \overline{AB}$. Takvo određivanje dužine prušca je određivanje pomoću trapeza prometača. Mi



7

smo zapravo, nacrtavši u slici 7 trapez $A'B'B_0A_0$, rotirali (obrtali) onaj prostorni trapez prometač $ABB'A'$ oko $A'B'$ dok nije pao u π. Drugim rečima to kazano: *pružac AB preložen je oko svoje projekcije u ravninu crtnje (π), i u tom se preloženom položaju pokazuje njegova dužina.*

Tačke prostora preložene u ravninu slike imenuju se istim slovom kako se i u prostoru zovu, a dodaje im se indeks nula ili se stave u zagradu. Na pr. tačke A, B, C obilježene su u preloženom položaju s A_0, B_0 odnosno C_0 (slika 7) ili tačke M i N u preložaju označene su s *(M)*, *(N)* (slika 9).



8

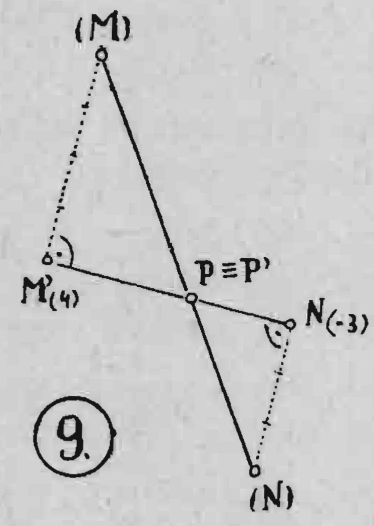
Produžimo li preloženi položaj i projekciju prušca do njihovoga secišta $P \equiv P'_{(0)}$, dobijemo probodište produljenoga prušca s ravninom crtnje (slika 7). Da je to doista probodište, vidi se odatle, što ta tačka P' ima kotu = *O*. Prema tome se mora tačka *P* nalaziti u ravnini π.

Ima li se odrediti udaljenost *z* neke tačke *C* prušca *AB* kojoj poznajemo projekciju *C'*, onda se to određuje pomoću trapeza prometača kako je to pokazano u slici 7.

Nalaze li se krajnje tačke prušca na raznim stranama ravnine crtnje, onda se trapez prometač izrodio u nešto drugo kako se to vidi u slici 8.

Za lik *MNN'M'* kažemo da je *izrođeni trapez.* Trapez prometač prelazi u izrođeni trapez samo u onom slučaju, ako su tačke prušca na raznim strana ravnine crtnje, tj. jedna je krajnja tačka u pozitivnom, a druga u negativnom delu prostora. Takav pružac uvek probada ravninu slike. To probodište *P* kod obrtanja ostaje na miru.

Kod određivanja dužine prušca, kojemu su krajnje tačke na raznim stranama ravnine π (slika 9), moraju se one normale $\overline{M'(M)}$ i $\overline{N'(N)}$ na projekciju prušca $(M'N')$ puštati svaka na drugu stranu. I u ovome slučaju je $\overline{(M)(N)} = \overline{MN}$.

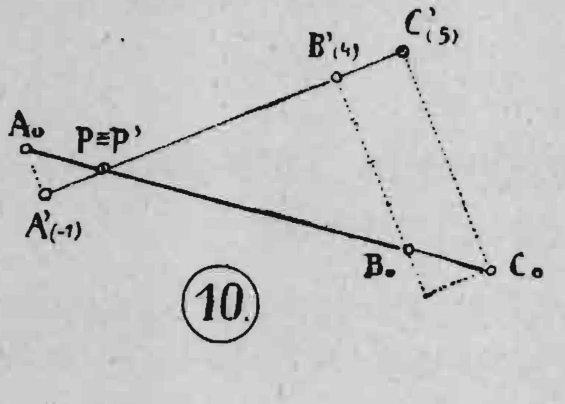


9.

III zakon: Tačke prušca s iste strane ravnine crtnje imaju i svoje preložene položaje na istoj strani projekcije prušca; tačke prušca na raznim stranama ravnine crtnje imaju svoje preložene položaje na raznim stranama projekcije prušca. Probodište prušca s ravninom crtnje ostaje kod prelaganja na svome mestu.

Zadaci:

1.) Zadano je $A'_{(-1)}$, $B'_{(4)}$; $\overline{A'B'} = 3$ cm. Odredite: a) položaj prušca u prostoru; b) dužinu prušca; c) projekciju tačke *C* na prušcu *AB* koja ima kotu 5. d) probodište *P* prušca *AB* s ravninom π (tačka *P* ima kotu = *O*, dakle je *P* u secištu preloženoga položaja i projekcije).



10.

(Rešenje zadatka 1) nalazi se u slici 10).

Jedinica za kote uzima se po volji, ako nije izrekom označena njena veličina. U našem slučaju uzeli smo jedinicu za kote po volji, a $\overline{A'B'}$ je 3 cm, jer je tako zadano. a) Da pokažemo položaj prušca u prostoru, zamislimo u A' normalu pod ravninu (iza ravnine) crtnje; na tu normalu nanesemo jedinicu za kote, jer je to označeno s $A'_{(-1)}$; u B' na normalu nad (pred) ravninu crtnje nanesemo 3 jedinice, jer je $B'_{(3)}$. Spojnica tako dobivenih tačaka u prostoru pokazuje prostorni položaj prušca AB. b) Zašto su A i B na raznim stranama $\overline{A'B'}$? Hoće li biti A_0B_0 uvek jednako dugo, ako je jedinica kote veća ili manja negoli je to uzeto u slici 10? c) Vidi se iz slike kako je postupano. d) Hoće li P menjati svoje mesto, ako se menja veličina jedinice kote?

2.) Zadan je pružac MN sa svojom projekcijom $\overline{M'_{(-2)}\,N'_{(3)}}$; $\overline{M'N'} = 6$ cm; jedinica kote je 0,5 cm. Odredite dužinu prušca MN; na $\overline{M'N'}$ uzmite po volji S' i odredite kotu točke S.

3.) Na pružac ST [$\overline{S'_{(1)}\,T'_{(4)}}$; $\overline{S'T'} = 4$ cm] nanesite od S prema T i od T prema S po 1 cm i odredite projekcije tih tačaka.

4) Pružac AB [$\overline{A'_{(-2)}\,B'_{(-5)}}$; $\overline{A'B'} = 3$ cm) produžite u pozitivni deo prostora, pa od njegova probodišta s π nanesite na pružac 4 cm; odredite projekciju krajnje tačke produženoga prušca.

5.) Zadana je projekcija prušca $\overline{A'_{(3)}B'} = 5$ cm; odredite kotu tačke B, ako je $\overline{AB} = 7$ cm. A je bliže π negoli B (Odredi se A_0, pa se iz A_0 preseče normala u B' dužinom od 7 cm).

6.) Zadana je projekcija prušca $\overline{P'_{(2)}R'} = 4$ cm; odredite kotu tačke R, ako je $\overline{PR} = 6$ cm. R neka bude u negativnom delu prostora.

7.) Nacrtajte u naravnoj veličini trokut (trougao) ABC, ako je zadano $A'_{(2)}$, $B'_{(-1)}$, $C'_{(4)}$. A', B' i C' uzmite po volji. (Odrede se dužine trokutovih stranica i na strani se nacrta trokut ABC.)

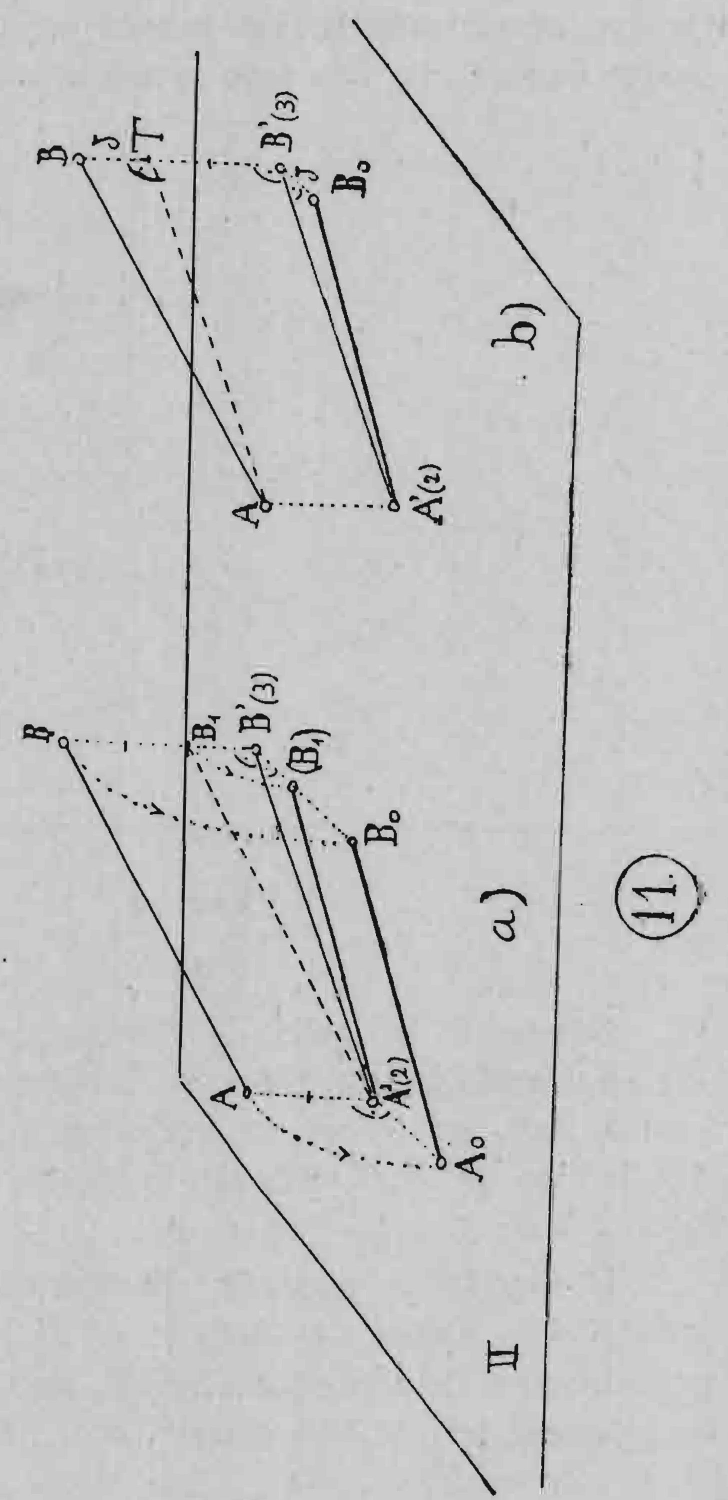
8.) Odredite presečnicu s π i vidljivost trokuta ABC u 7 zadatku. (Odrede se probodišta prušca AB i prušca BC s π; spojnica tih probodišta je tražena presečnica; deo trokuta u pozitivnom delu prostora je vidljiv.)

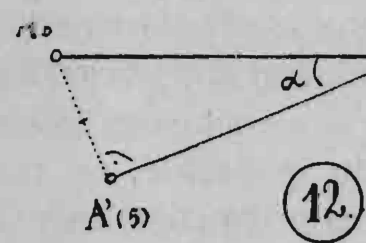
9.) Kakav položaj ima pružac AB prema ravnini π i kolika je njegova dužina u centimetrima, ako je $A'_{(2)} \equiv B'_{(9)}$? Jedinica za kote neka je 0,5 cm.

4. Određivanje dužine i priklonoga kuta prušca pomoću diferencionoga trokuta

Dosad smo određivali dužinu prušca pomoću trapeza prometača. Taj se postupak može nešto skratiti, ako se radi pomoću razlike (diferencije) kota.

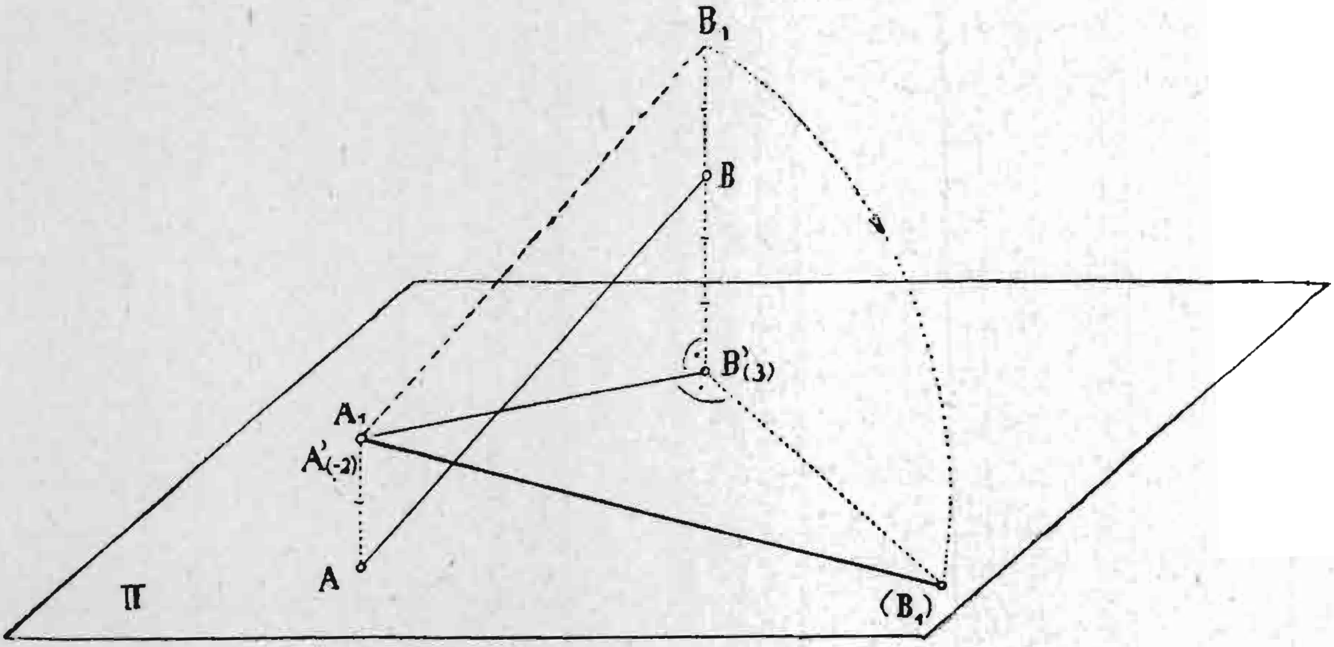
Zamislimo (slika 11) da je pružac AB paralelno pomaknut po projecirajućim zrakama u položaj $A'B_1$. Time se trapez rastavio u trokut i paralelogram. Tada se taj paralelogram i trokut rotira oko svoje projekcije $A'B'$ u π. Iz slike se 11 vidi da je nakon rotacije u prostoru $\overline{B'B} = \overline{B'B_0} = 3$, a $\overline{B'B_1} = \overline{B'(B_1)} = 1$, jer je paralelnim pomakom isti put prevalila tačka B kao i tačka A. Tačka A prevalila je put $= 2$, dakle isti put i tačka B. Budući da je $\overline{BB'} = 3$, mora biti $\overline{B_1B'} = 1$, dakle i u preloženom položaju mora biti $\overline{B'(B_1)} = 1$. Prema tome je $\overline{B'B} - \overline{BB_1} = \overline{B'B_0} - \overline{B_0(B_1)} = 3 - 2 = 1$. Ne moramo dakle, ako želimo odrediti dužinu prušca, nanašati obe kote normalno na svoju projekciju kako je to rađeno kod trapeza prometača, nego je dostatno da u jednoj (svejedno kojoj) projekciji krajnje tačke prušca nanesemo na normalu razliku kota.





U slici 12 prikazana je na taj način dužina prušca AB. [$\overline{A'_{(5)}B'_{(3)}} = 3$ cm.] Puštena je naime normala u A' na $\overline{A'B'}$ i nanesene 2 jedinice na tu puštenu normalu, jer je razlika kota $= 2$. $(5 - 3 = 2)$.

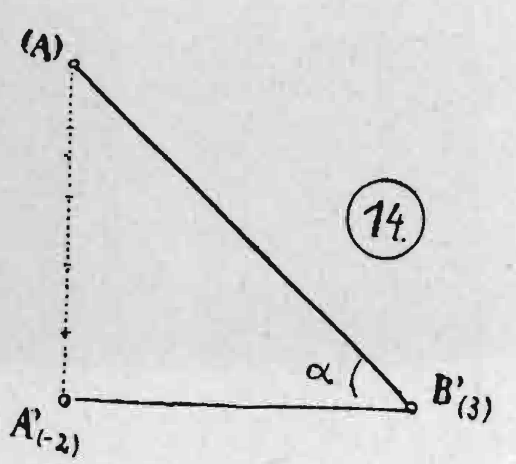
Tako je dobivena tačka A_0; spojnica $\overline{A_0B'}$ je dužina prušca AB. Ovakvo određivanje dužine prušca je određivanje pomoću *diferencionoga trokuta.* To isto smo mogli učiniti mesto u A' u B'.



13.

Nalaze li se tačke A i B na raznim stranama ravnine (slika 13), postupak je isti. Opet se $\overline{AB}$ pomakne paralelno u položaj $\overline{A_1B_1}$, i onda $\overline{A_1B_1}$ preloži u π. Preloženi položaj $\overline{A'(B_1)}$ je dužina prušca AB. I ovde je $\overline{B_1B'}$ jednako $\overline{B'(B_1)} = 5$, tj. 5 je diferencija kota tačaka A i B; $3 - (-2) = 5$.

U slici 14 je pomoću diferencionoga trokuta određena dužina prušca AB. Tačka A (kota je -2) je u negativnom, B (kota $= 3$) u pozitivnom delu prostora. Morali smo dakle na normalu u A' naneti 5 jedinica, jer je difirencija kota tačaka A i B jednaka 5; $[3 - (-2) = 5]$



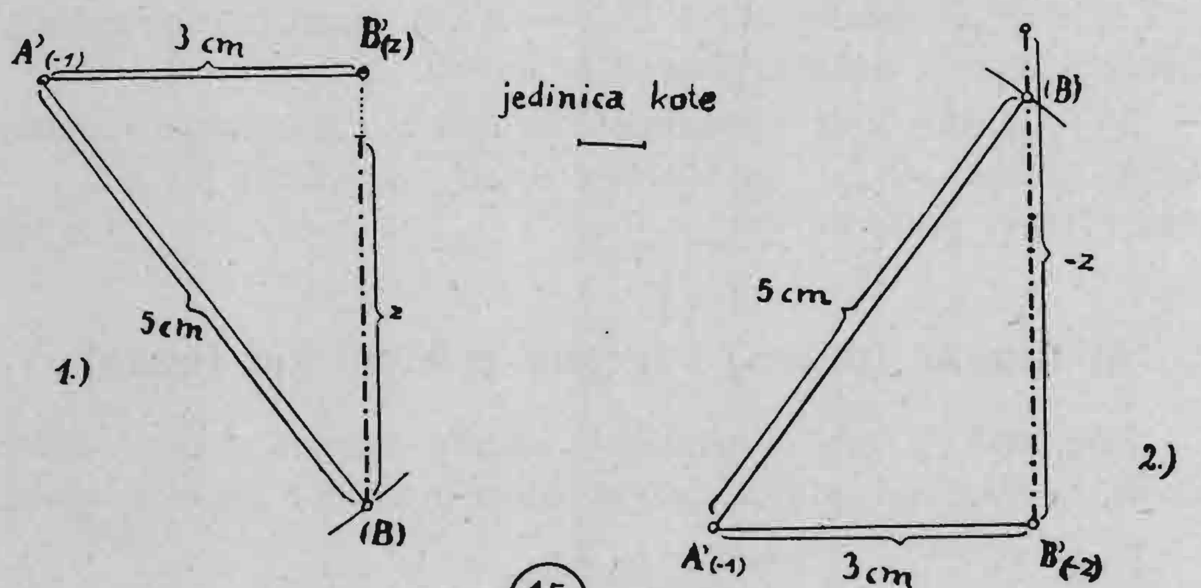
14.

Dužina prušca određivaće se uvek diferencionim trokutom, ako se naročito nezahteva određivanje pomoću trapeza prometača, jer je način diferencionoga trokuta kraći a usto *pokazuje se redovno i veličina priklonoga kuta* (α) *prušca prema ravnini crtnje* π. *Kod diferencionoga trokuta* treba dobro držati na umu da *secište preložena polažaja s projekcijom nije probodište prušca s ravninom* π kako je to bilo pokazano kod trapeza prometača, jer kod diferencionoga trokuta pomičemo pružac paralelno po projecirajućim zrakama dok ne padne jedna njegova tačka u π.

U slikama 12 i 14 prikazana je pomoću diferencionoga trokuta dužina prušca $\overline{AB} = \overline{A_0 B'}$ odnosno $\overline{AB} = \overline{(A)B'}$ i veličina priklonoga kuta (α) prušca AB prema ravnini crtnje π.

Zadaci:

10.) Odredite dužinu prušca AB, ako je zadana njegova projekcija: a) $\overline{A'_{(1)} B'_{(2)}} = 4$ cm. b) $\overline{A'_{(-3)} B'_{(2)}} = 5$ cm.



15.

11.) Odredite kotu tačke B, ako je zadana projekcija $\overline{A'_{(-1)}B'} = 3$ cm prušca $\overline{AB} = 5$ cm. [izrada toga zadatka je u slici 15. Zadatak ima dva rešenja. Tačku B, jer njena kota nije zadana nego se traži, možemo zamišljati 1) u pozitivnom, 2) u negativnom delu prostora.]

12.) Odredite prikloni kut prušca $\overline{PR}$ prema π, ako je: a) $\overline{P'_{(2)} R'_{(5)}} = 4$ cm; b) $\overline{P'_{(-1)} R'_{(-3)}} = 3$ cm; c) $\overline{P'_{(-2)} R'_{(3)}} = 3$ cm.

13.) Odredite kotu tačke N, ako je od prušca $\overline{MN}$ poznata njegova projekcija $\overline{M'_{(2)} N'} = 4$ cm. i priklon prema π: a) $\alpha = 30^0$; b) $\alpha = 60^0$; c) $\alpha = 45^0$; d) $\alpha = 90^0$; e) $\alpha = 0^0$. Tačka N neka se nalazi u pozitivnom delu prostora.

14.) Odredite geometričko mesto probodišta sviju pružaca s ravninom π koji prolaze tačkom $V'_{(3)}$, a zatvaraju s π: a) 30^0; b) 60^0; c) 45^0.

15.) Odredite geometričko mesto probodišta s ravninom π sviju pružaca $\overline{VP} = 6$ cm, ako je zadano $V'_{(4)}$.

16.) Nacrtajte trokut ABC u njegovoj naravnoj veličini, ako je zadano: a) $A'_{(3)}$, $B'_{(0)}$, $C'_{(2)}$; b) $A'_{(-1)}$, $B'_{(-3)}$, $C'_{(2)}$; c) $A'_{(3)}$, $B'_{(3)}$, $C'_{(0)}$; d) $A'_{(2)}$, $B'_{(2)}$, $C'_{(2)}$. (Pogledajte zadatak 7) Što ste primetili kod d?

17.) Odredite projekcije C' i D' romboida $ABCD$, ako je zadano $\overline{A'_{(0)}B'_{(0)}} = 4$ cm. Ravnina romboida neka je normalna na π, a stranica $\overline{AD}$ s $\overline{AB}$ neka zatvara kut od 30^0; $\overline{AD} = 3$ cm. (Projekcija romboida pada u isti pravac)

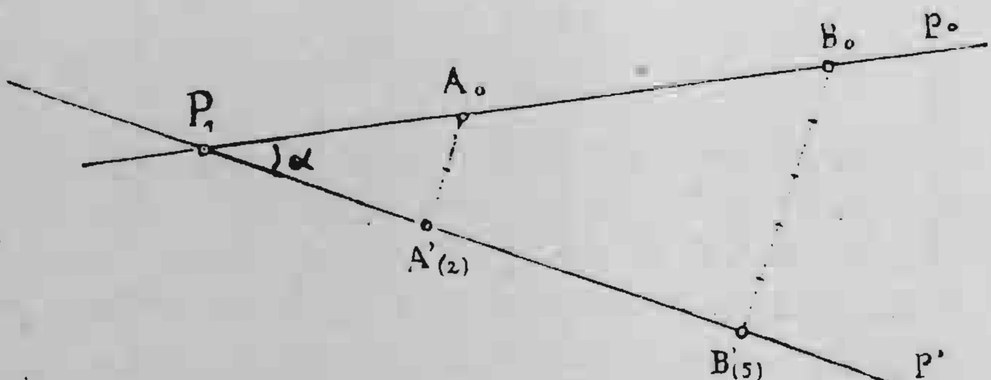
18.) Odredite projekcije P' i R' kvadrata $MNPR$, ako je zadano $\overline{M'_{(1)}N'_{(2)}} = 3$ cm, a ravnina kvadrata normalna je na π. (M_0 i N_0 odredite trapezom prometačem)

19.) Odredite projekciju C' istostranoga trokuta ABC, ako je $ABC \perp \pi$, i ako je zadano $A'_{(-1)} B'_{(2)} = 3$ cm. Nacrtajte oba rešenja i odredite vidljivost trokuta. (Trapez prometač)

20.) Odredite kote i projekcije središta S i M upisane i opisane kružnice trokutu $ABC \perp \pi$. Zadano: $\overline{A'_{(2)}B'_{(-3)}} = 2$ cm, $\overline{B'_{(-3)}C'_{(1)}} = 1$ cm. (Trapez prometač)

5. Pravac (prava) i njegov prikloni kut (ugao)

Zamislimo li pružac produžen na obe njegove strane u beskonačnost, postaje od prušca pravac. Kako je *pravac potpuno određen*



16

sa svoje dve tačke, sledi da će nam pravac u prostoru biti potpuno poznat, ako smo si ga zadali s dve projekcije njegovih tačaka obeleženih kotama.

U slici 16 je tako predočen pravac $\overline{AB} = p$. Želimo li prikazati položaj pravca p u prostoru, moramo u A' i u B' postaviti normale na ravninu π (ravninu crtnje) i naneti od A' na normalu 2 jedinice za kote, i od B' na onu normalu u B' 5 jedinica. I 2 jedinice, i 5 jedinica nanašamo u pozitivni deo prostora, jer su obe kote pozitivne. Na taj način dobili smo u prostoru tačke A i B; spojnica tačaka A i B produžena preko A i B daje nam pravac p u prostoru.

Svaki pravac koji nije paralelan s ravninom crtnje probada je. Kad se govori o probodištu pravca, a ne spominje se s kojom ravninom, razumeva se probodište s ravninom π.

IV zakon: Secište preloženoga pravca, određenoga pomoću trapeza prometača, sa svojom projekcijom daje njegovo probodište. (Sl. 16) Probodište označujemo velikim slovom pravca kojemu dodajemo indeks 1. Na pr. pravac p ima probodište P_1; pravac a — A_1; b — B_1; t — T_1. Preloženi položaj pravca označujemo istim malim slovom s indeksom 0 (nula) ili ( ) (zagrada). Na pr. preloženi položaj pravca p označujemo s p_0 ili (p); a — a_0 ili (a); b — b_0 ili (b).

Svaki pravac u svome probodištu prelazi iz pozitivnoga dela prostora u negativni deo ili okrenuto. Dakle, sve projekcije tačaka s iste strane probodišta na p' imaju kote istoga predznaka. U slici 16 sve tačke desno od P_1 na p' imaju pozitivne kote, a levo od P_1 na p' negativne. Deo pravca u pozitivnom delu prostora je vidljiv, a onaj u negativnom delu je nevidljiv. Vidljivost se pravca prema tome menja u probodištu njegovu. Često se zbog toga crta projekcija pravca tako da onaj deo do P_1, koji je u pozitivnom delu, bude izvučen, a onaj u negativnom delu crtkan. Za tako nacrtani pravac kažemo da je uz projekciju određena i njegova vidljivost.

Ovde neka bude pokazano da je prikloni kut prušca, odnosno pravca, prema ravnini π najmanji kut što ga čini s kojimgod pravcem koji ide probodištem produženoga prušca, odnosno pravca u ravnini π. U slici 8 povučen je iz $P \equiv P'$ kakvigod pravac i učinjeno je da je $\overline{PR} = \overline{PM'} = d$. Budući da je $\overline{MM'} < \overline{MR}$, jer je $\overline{MM'} \perp \pi$, mora biti i kut $\alpha < \beta$, jer trokuti $MM'P$ i MRP imaju dve stranice među sobom jednake (stranica MP im je zajednička, a $\overline{M'P} = \overline{RP}$).

Veličinu priklonoga kuta određujemo isto kao i kōd prušca. Nacrtamo preloženi položaj pravca (slika 16). Kut što ga zatvaraju preloženi položaj pravca i projekcija njegova, određuje veličinu priklonoga kuta pravca prema ravnini crtnje.

V zakon: Preloženi položaj pravca i njegova projekcija određuju veličinu priklonoga kuta s ravninom π.

Kad se govori o priklonom kutu pravca, a ne spominje se naročito s kojom ravninom, razumeva se kut s ravninom π.

Zadaci :

21.) Odredite probodište, vidljivost i prikloni kut pravca: a)m $= AB$ $[\overline{A'_{(3)}\ B'_{(1)}} = 4$ cm]; b) n $= CD$ $[\overline{C'_{(-2)}\ D'_{(3)}} = 3$ cm]; c) o $= PR$ $[\overline{P'_{(-4)}\ R'_{(-1)}} = 4$ cm]; d) p $= MN$ $[\overline{M'_{(3)}\ N'_{(-1)}} = 5$ cm].

22.) Zadana je projekcija p' pravca p i na njoj $A'_{(3)}$; odredite probodište njegovo, ako je prikloni kut $\alpha = 60^0$.

23.) Odredite projekcije tačaka na pravcu koje imaju kote 2,1,—3 i —5, ako je zadana projekcija pravca i njegov preloženi položaj. Jedinica za kotu neka je 0,5 cm.

24.) Odredite kotu tačke A, ako je poznato A′, ako je poznata projekcija pravca p, probodište P_1 i prikloni kut njegov. A je na pravcu p, prikloni kut α je 30^0.

25.) Projekcije pravaca p i r padaju u isti pravac ($p' \equiv r'$); odredite projekciju sjecišta pravaca p i r i veličinu kuta što ga ta dva pravca zatvaraju, ako je ovako zadano: $p = AB$ $[\overline{A'_{(-1)}\ B'_{(3)}} = 5$ cm]; $r = CD$ $[\overline{C'_{(3)}\ D'_{(1)}} = 3$ cm]; $A' \equiv C'$. (Sve će se to odrediti iz preloženoga položaja.)

II DEO
PROJECIRANJE NA DVE RAVNINE

1 otsek

TAČKA I PRUŽAC (DUŽ)

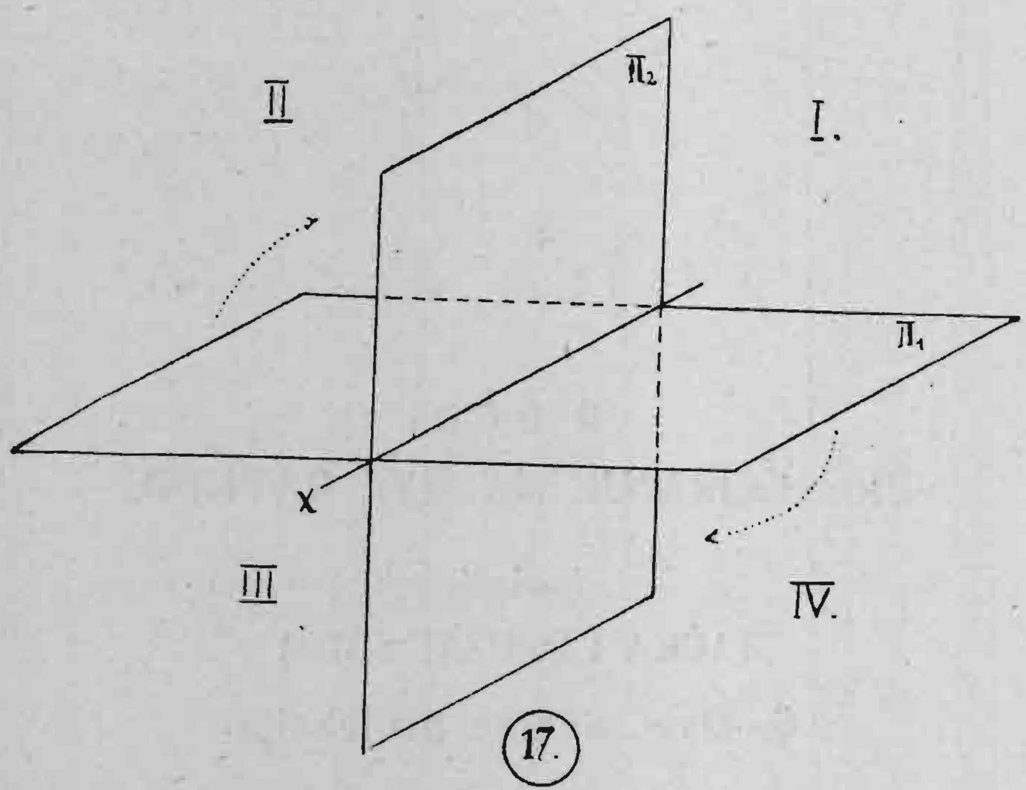
6. Dve ravnine projekcija

Dosadašnji način projeciranja (kotirana projekcija) sastojao se u određivanju tačaka u prostoru, pomoću projekcija tih tačaka na *jednu* ravninu. Kod toga je bilo potrebno da se kod svake projekcije neke tačke zabeleži i njena kota da bi se mogao dotičnoj tački odrediti njen položaj u prostoru. Da se tome izbegne, projecira se na dve ravnine. Kotirana se projekcija upotrebljava, kako je bilo rečeno, većinom kod prikazivanja terena na topografičkim kartama, te kod rešavanja geodetičkih problema i slično.

Metoda kotirane projekcije za tačku, pružac i pravac prikazana je u ovoj knjizi samo zbog toga da se lakše razume projeciranje na dve ravnine. Ako se uporedi ono što će biti kazano o projekciji tačke, prušca i pravca na dve ravnine s onim, što je bilo kazano kod projeciranja na jednu ravninu, opaziće se da zapravo nije to ništa novo, nego je samo ono isto primenjivano kod dveju ravnina. Naročito se s toga preporuča da se, pre negoli se pređe na dve ravnine, dobro prouče i *potpuno shvate* one nekoje konstrukcije koje su dosad pokazane.

Kod projeciranja na dve ravnine služimo se dvema ravninama koje stoje jedna na drugoj normalno. (Slika 17) Jedna od tih ravnina je *vertikalna,* a druga prema tome mora biti *horizontalna.* Vertikalnu ravninu označujemo s π_2. Vertikalna ravnina ili ravnina π_2 je uvek crtanka ili ploča, dakle tavnina na kojoj crtamo, pa se prema tome naziva i *ravnina crtnje.*

Rekli smo da je π_2 vertikalna ravnina. Crtamo li u crtanku na stolu, onda je ravnina π_2 (ravnina crtnje, horizontalna. Zbog toga *moramo uvek,*



17.

kada predočujemo ono što je u crtanki projecirano, našu crtanku postaviti u vertikalan položaj, i to tako da nam površina crtanke bude paralelna s licem.

Onu drugu, horizontalnu ravninu, označujemo s π_1.

Svakome je učeniku neophodno potrebno, ako hoće potpuno razumeti takvo projeciranje na dve ravnine, da učini od tvrda papira (kartona) takve dve ravnine. To će se učiniti ovako:

Iz tvrda papira izrezaće se dva dostatno velika, najzgodnije, među sobom sukladna (podudarna), pravokutnika (pravougaonika). Pravokutnici se u polovištu svoje duže stranice prorežu do svoga središta. Sada se ti prerezi ture jedan u drugi i postave tako da jedan pravokutnik stoji na drugom normalno. Jedan od njih uzimamo za π_2 i držimo vertikalno tako da površina njegova bude paralelna s licem onoga koji drži π_1 i π_2. Drugi pravougaonik je ravnina π_1, $\pi_1 \perp \pi_2$. Ti pravokutnici prema tome moraju imati izgled kako je to pokazano u slici 17. Tim se pravokutnicima moramo u početku kod projeciranja neprestano pomagati.

Projekcije pojedinih tačaka prostora dobivamo normalnim projeciranjem na horizontalnu (π_1), odnosno vertikalnu (π_2) ravninu isto onako kako je to pravljeno kod kotirane projekcije, a same projekcije zovu se horizontalna, odnosno vertikalna projekcija.

Projekciju tačke, prušca ili pravca na π_1 označujemo sa $'$, a na π_2 sa $''$. Sve horizontalne projekcije označene su istim imenom kako se tačka, pružac ili pravac zove u prostoru, samo što imenu dodajemo

', a kažemo *prva projekcija*. Vertikalne se projekcije imenuju također istim imenom kao u prostoru, s tom razlikom što im se doda '', a zovu se *druga projekclja*. Na pr. hor. projekcija točke A je A' (A crtano), hor. projekcija pravca p je p' (p crtano); vert. projekcija točke A je A'' (čitaj: A dvaput crtano), vert. projekcija pravca p je p'' (p dvaput crtano). Da pokraj horizontalne, odnosno vertikalne projekcije tačke nije potrebno staviti kotu u zagradi, kao što je dosad bilo rađeno u kotiranoj projekciji, biće pokazano posle.

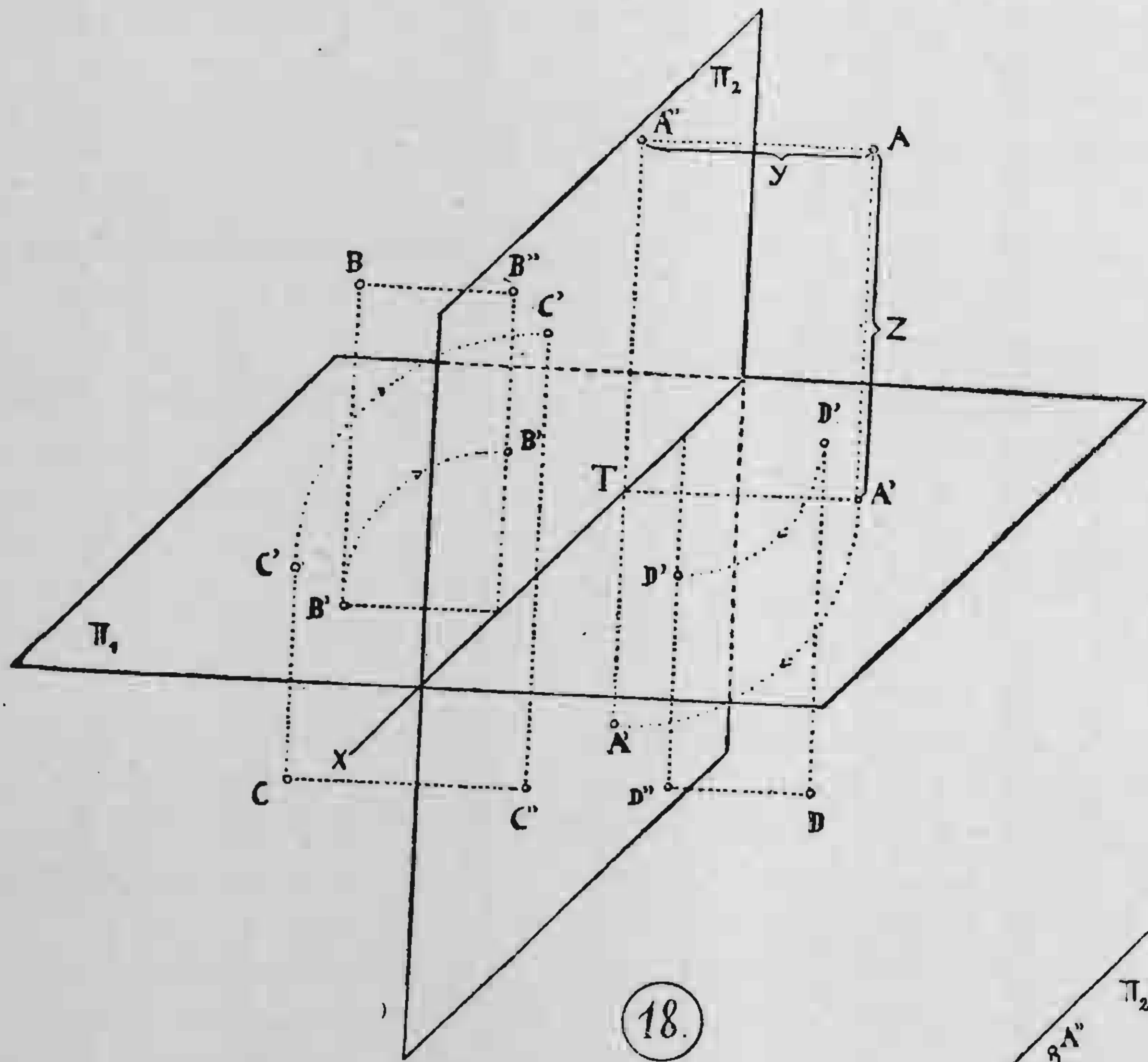
Presečnicu horizontalne ravnine s vertikalnom ravninom označujemo s x, a naziva se *os x*. [$(_1\pi \times \pi_2) = x$.] Os x je neomeđeni pravac, budući da ravnine π_1 *i* π_2 *smatramo neograničeno velikima.* Prema tome je ravninama π_1 i π_2 čitav prostor podelen u četiri dela koje nazivamo *kvadrantima*. Prostor pred π_2 iznad π_1 je I kvadrant, prostor iza π_2 iznad π_1 je II kvadrant, prostor iza π_2 ispod π_1 je III kvaprant, a prostor pred π_2 ispod π_1 je IV kvadrant. (Slika 17)

Da možemo horizontalnu projekciju (projekciju na π_1), koja je izvan ravnine crtnje (π_2), ipak predočiti u ravnini crtnje, rotiramo prednji deo ravnine π_1 oko osi x dole dok ne padne u π_2. Tim obrtanjem preloži se onaj stražnji deo ravnine π_1 oko osi x gore kako je to lukom pokazano na slici 17. Prema tome sve one *prve projekcije koje se nalaze pred* π_2, posle rotacije budu *ispod osi x*, a *prve projekcije* koje su *iza* π_2. budu nakon obrtanja *iznad osi x*. Ovde neka bude odmah spomenuto da *sve što se nalazi iznad* π_1 *ima svoju drugu projekciju iznad osi x, a sve što je ispod* π_1 *ima svoju drugu projekciju ispod osi x.*

Ovu vrstu projeciranja na dve ravnine nazivamo Mongeovom (Monžovom) projekcijom, jer ju je osnovao Gaspard Monge u 18 veku.

7. Projekcije tačke

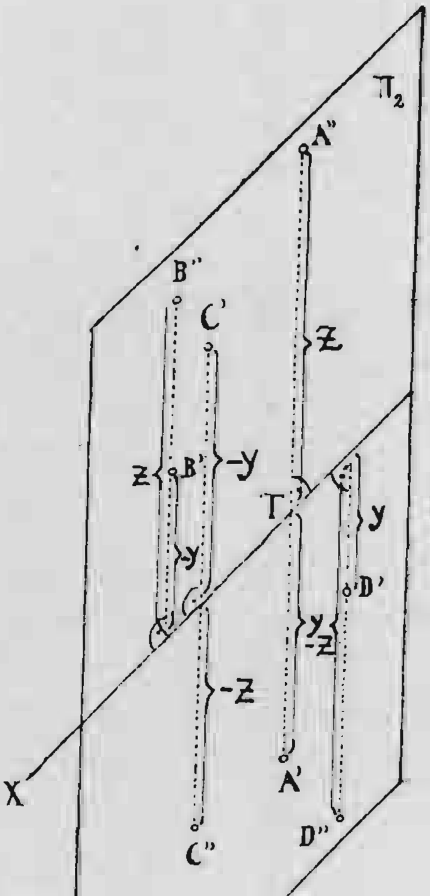
U slici 18 prikazana je tačka A u I kvandrantu. Pustimo li normalu na π_1, dobijemo A' (A crtano, prva projekcija tačke A ili horizontalna projekcija tačke A); normala na π_2 daje nam A'' (A dvaput crtano, druga projekcija tačke A ili vertikalna projekcija tačke A). Pravci AA' i AA'' određuju ravninu koja je normalna na π_1 i na π_2, dakle i na os x. Ta ravnina ($AA'A''$) seče π_2 u pravcu $A''T$, a π_1 u pravcu $A'T$. Tačke AA' i AA'' zatvaraju pravokutnik (pravougaonik) i zbog toga je AA'' jednako $A''T$, a $AA'' = A'T$. Te udaljenosti $A'T$ i $A''T$ zovu se ordinate. Rotirali se ravnina π_1 oko osi x (prednji deo dole dok ne padne u π_2), rotiraće se i pravac $A'T$. Nakon rotacije pašće $A'T$ u produženje $A''T$. Rotirano A' nalaziće se u produženju $A''T$ ispod osi x, od T udaljeno



18.

upravo za $A'T$. Za tu dužinu $\overline{A'T}$ tačka A je udaljena od π_2. Tom rotacijom doveli smo prvu i drugu projekciju tačke A u π_2. Jer je ravnina $AA'A''$ normalna na os x, moraće, nakon što je A' rotirano u π_2, biti $A'T$ također normalno na os x, te prema tome $A'TA''$ *pada u jedan pravac koji je normalan na os x*, a koji se zove ordinala.

Pretpostavimo sada (slika 19) da imamo samo π_2 (π_1 je sada u π_2), i u π_2 nacrtanu os x. Zadamo li si A'' i rotirano A', pa u A'' zamišljamo postavljenu normalu na π_2 i na tu normalu nanesenu udaljenost od rotiranoga A' do osi x, đobićemo položaj tačke A u prostoru. Taj si postupak možemo pomišljati i tako da je π_1 podignuto u svoj prostorni položaj i da je onda izdignuta normala u prvoj i drugoj projekciji. Secište tih normala daje tačku u prostoru. Zbog

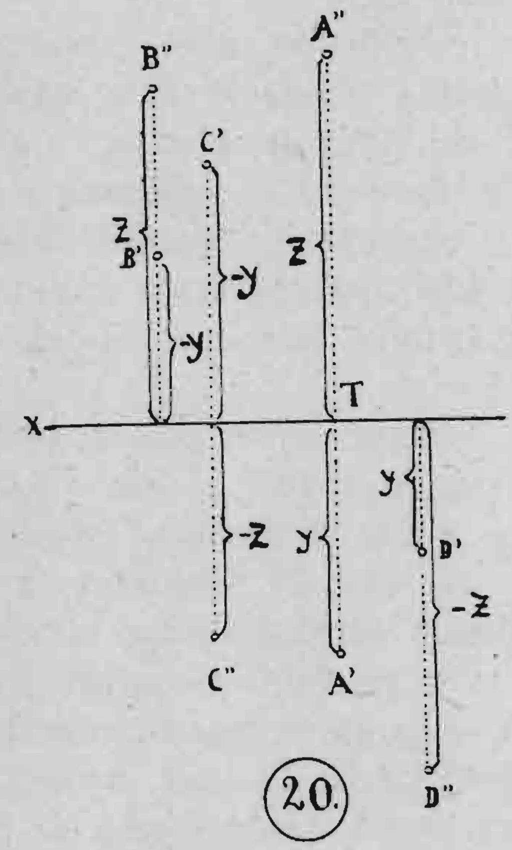


19.

toga nije potrebno pokraj projekcija pojedinih tačaka označivati kote, jer nam udaljenost druge projekcije tačke od osi x pokazuje udaljenost tačke od π_1, a udaljenost prve projekcije od osi x pokazuje udaljenost tačke od π_2.

Uzmemo li napokon da je ravnina π_2 naša ravnina crtnje i da je u njoj nacrtana horizontalno os x s projekcijama A' i A'' (slika 20), pa postupamo isto tako kao u slici 19, dobićemo tačku A u prostoru.

Ponovo upozoravam da treba uzeti one kvadrante načinjene od dvaju pravokutnika, postaviti ih u pravilni položaj, zamisliti tačku A u *I.* kvadrantu (naš slučaj), odrediti projekcije tačke A i onda rotirati prednji deo ravnine π_1 oko osi x dole dok ne padne u π_2. Na taj način doveli smo ravninu π_1 u π_2, tj. A' u π_2. Naši pravokutnici s projekcijama tačke A sada izgledaju kao u slici 19. Uzmemo li sada π_2 (naše pravokutnike u novom položaju) i položimo na našu crtanku tako da se os x u crtanci (slika 20) pokriva s osju x na π_2 (pravokutniku), opazićemo da je u slici 20 osju x i projekcijama A' i A'' tačka A u prostoru potpuno određena. Crtanku moramo svakako kod toga podići u vertikalan položaj i postaviti tako da nam ravnina crtanke bude paralelna s licem, a os x horizontalna.



Kod određivanja projekcija tačke B (slika 18, 19 i 20) postupano je isto kao i kod tačke A. Budući da se B nalazi u II kvadrantu, mora se B' nalaziti iznad osi x, jer se rotacijom ravnine π_1 u π_2 njen stražnji deo prebaci nad os x. Prema tome se nalaze obe projekcije tačke B nad osi x.

Tačka C nalazi se u III kvadrantu slika 18, 19 i 20. Postupajući isto kao i kod tačaka A i B dolazimo do prve projekcije C' nad osi x i do druge projekcije C'' ispod osi x.

U slici 18, 19 i 20 pokazano je to isto i za tačku D u IV kvadrantu. D$'$ je ispod osi x, jer je D pred π_2, D$''$ je takoder ispod osi x, jer je D ispod π_1.

I kod tačaka B, C i D treba se služiti onim pomoćnim kvadrantima. Svaku pojedinu tačku treba projecirati na π_1 i na π_2, obrtati prednji deo ravnine π_1 oko osi x dole i promatrati položaj prve i druge projekcije tačke obzirom na os x. Tim promatranjem dolazimo do *VI zakona: Sve tačke koje se nalaze pred π_2 imaju svoje prve projekcije ispod osi x, a tačke iza π_2 imaju svoje prve projekcije iznad osi x; sve tačke iznad π_1 imaju svoje druge projekcije iznad osi x, a tačke ispod π_1 imaju svoje druge projekcije ispod osi x. I okrenuto, položaj tačke u prostoru ovisan je o smeštaju njenih projekcija prema osi x.*

Osim toga pokazano je, da spojnica prve i druge projekcije neke tačke uvek stoji *normalno* na os x. Ta se spojnica naziva *ordinala* dotične tačke.

Udaljenost prve projekcije do osi x označujemo s y. Ta udaljenost y pokazuje nam udaljenost tačke od π_2. Ako je y ispod osi x, tačka je pred π_2, a ako je y nad osi x, tačka je iza π_2. Ako je y ispod osi x, smatramo y pozitivnim, ako je y iznad osi x, onda je y negativan. Udaljenost druge projekcije do osi x označujemo sa z. Ta udaljenost pokazuje prostornu udaljenost tačke od π_1. Ako je z nad osi x, tačka je nad π_1 $(+ z)$, ako je z ispod osi x tačka je ispod π_1 $(- z)$.

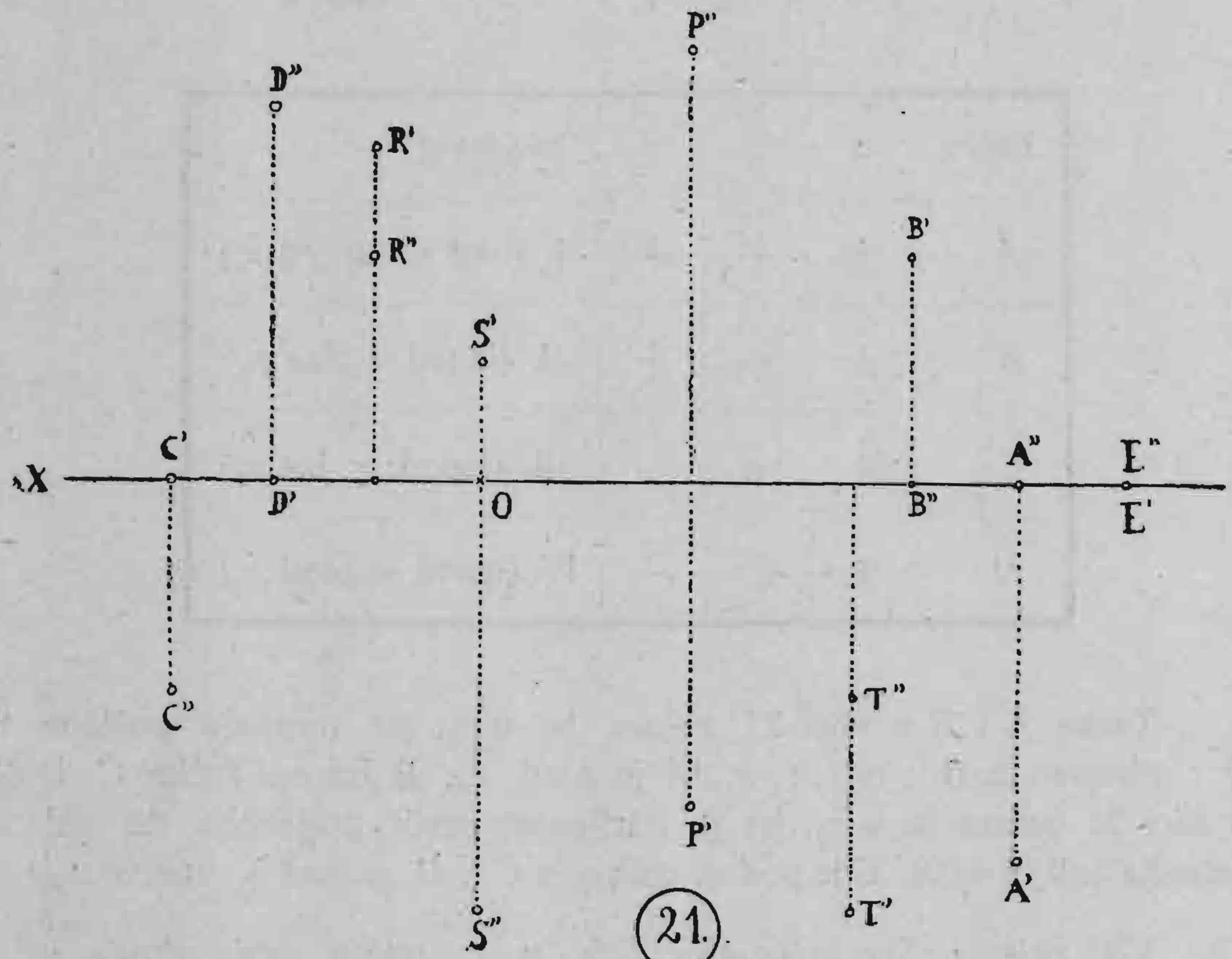
Da se odredi položaj ordinale, uzima se gdegod na osi x tačka O koja se zove *ishodište*. Udaljenost ordinale od ishodišta obeležuje se s $+ x$ ako je desno od ishodišta, a s $- x$ ako je levo.

U slici 21 predočene su tačke P, R, S, i T. Naša je zadaća da tim tačkama odredimo tačno njihov položaj u prostoru. Jedinica mere može se uzeti po volji. U našem primeru uzimamo za jedinicu mere 1 cm.

Ponovo se upozoravate da, pre negoli određujete prostorni položaj tih tačaka, morate ravninu crtnje (knjigu u ovome slučaju) podići u vertikalan položaj tako da bude paralelna s vašim licem i da os x leži horizontalno. Sad zamišljamo da osju x prolazi horizontalna ravnina. Ta horizontalna ravnina je π_1, a ravnina crtnje (podignuta knjiga) je π_2.

Drugu projekciju svake tačke dobili smo tako da smo iz tačke u prostoru postavili normalu na π_2. Obrnuto, poznajemo li drugu projekciju tačke, a želimo odrediti njen položaj u prostoru, moramo *u njenoj drugoj projekciji postaviti normalu na ravninu* π_2 (ravninu crtnje). Sasvim sigurno na toj normali mora se tačka nalaziti spreda ili straga ravnine π_2. Spreda će se nalaziti, ako je njena *prva projekcija ispod osi x*, a *straga*, ako je *prva projekcija iznad osi x*. Budući da udaljenost prve projekcije tačke do osi x pokazuje udaljenost tačke od π_2, nanećemo tu udaljenost *na* onu zamišljenu *normalu na π_2 u drugoj projekciji tačke* napred ili natrag, već prema tome da li je prva projekcija ispod ili iznad osi x. Istom onda, kada je to sve potpuno shvaćeno, ići ćemo na određenje položaja tačke P.

Ordinala tačke P nalazi se desno od ishodišta O za 2 jedinice. (Slika 21) Tačka P dakle ima $x = 2$. Prva projekcija P' je *ispod* osi x za 3 jedinice, dakle 3 jedinice *pred* π_2. Prema tome tačka P ima $y = 3$. Druga projekcija P'' je *iznad* osi x za 4 jedinice, dakle nad π_1, pa je prema tome $z = 4$. To beležimo kraće P $(x = 2,\ y = 3,\ z = 4)$ ili još kraće P (2, 3, 4). Prva brojka označuje x tj. udaljenost ordinale od ishodišta. Druga brojka označuje udaljenost prve projekcije od osi x, a jer je $+y$, nalazi se P' ispod osi x. Treća brojka označuje udaljenost druge projekcije od osi x, a jer je $+z$, nalazi se P'' iznad osi x. Postavimo li sada, podigavši ravninu crtnje u njen određeni položaj, normalu u P'' i nanesemo na tu normalu od P'' napred 3 jedinice, dobićemo tačku P u prostoru. Tačka P nalazi se u I kvadrantu.



21.

Tačka R (—1, —3, 2), jer ima x = — 1, nalazi se za 1 levo od ishodišta. Prva projekcija R′ je nad osi x, jer je y = — 3. Druga projekcija R″ je također nad osi x, jer je z = 2. Tačka je dakle iza π_2 iznad π_1. Da prikažemo tačku R u prostoru, moramo u R″ pustiti normalu na ravninu crtnje i na nju naneti 3 jedinice natrag. Prema tome se tačka R nalazi u II kvadrantu.

S (0, —1, —4). Da S prikažemo u prostoru, treba u S'' pustiti normalu i na nju naneti 1 jedinicu natrag. Tačka S nalazi se u III kvadrantu.

T (3·5, 4, —2). Da T prikažemo u prostoru, moramo u T'' pustiti normalu i na nju naneti 4 jedinice napred. Tačka T nalazi se u IV kvadrantu.

O udaljenosti ordinale od ishodišta desno ili levo nije ovisan položaj tačke obzirom na kvadrante.

VII zakon: $x = +$ (desno); $x = -$ (levo);
$y = +$ (dole) $y = -$ (gore);
$z = +$ (gore); $z = -$ (dole);

Tačka	x	y	z	kvadrant
A	$\pm$	$+$	$+$	I. (nad π_1 ispred π_2)
B	$\pm$	$-$	$+$	II. (iznad π_1 iza π_2
C	$\pm$	$-$	$-$	III. (ispod π_1 iza π_2)
D	$\pm$	$+$	$-$	IV. (ispod π_1 pred π_2)

Tačke A i B u slici 21 nalaze se u π_1, jer normala puštena u A'', odnosno u B'', leži u π_1. A je pred π_2, B iza π_2. Tačke C i D u slici 21 nalaze se u π_2, jer je udaljenost prvih projekcija do osi x jednaka nuli ($y = 0$). C je pod π_1 upravo u C'', D je nad π_1 upravo u D''.

VIII zakon: *Sve tačke koje leže u π_1 imaju svoje druge projekcije u osi x, a sve tačke koje leže u π_2 imaju svoje prve projekcije u osi x.*

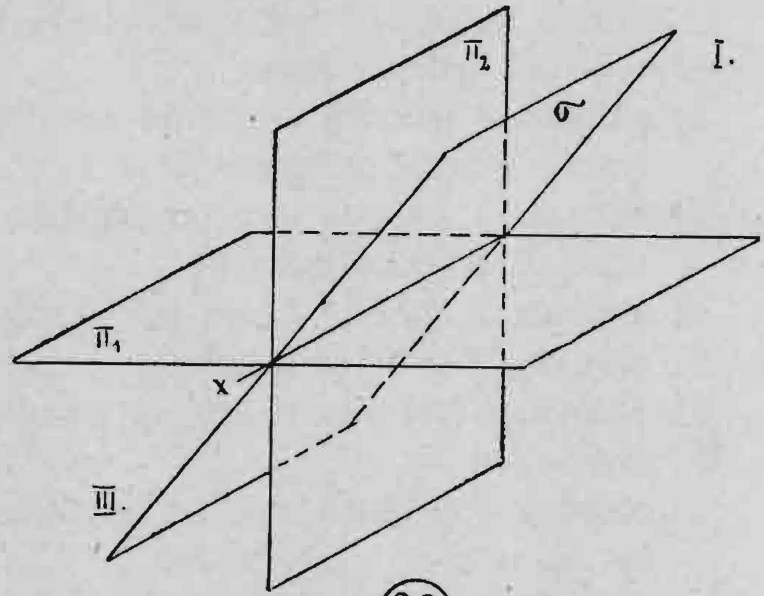
Tačka E u slici 21 nalazi se u osi x.

Za tačke koje leže u π_1 ili u π_2 ne kažemo da se nalaze u ovome ili onome kvadrantu, već kažemo da se tačka nalazi u π_1, pred π_2 ili u π_2 ispod π_1 itd.

Ovde neka bude spomenuto zbog zadataka koji slede da je ravnina *sumernosti* (σ, slika 22) ravnina koja prolazi osju x kroz I i III kvadrant i raspolavlja prikloni kut ravnina π_1 i π_2,

Ravnina *istovetnosti* (ρ, slika 23) je ravnina koja prolazi osju x i raspolavlja II i IV kvadrant.

Sve tačke, koje leže u ravnini sumernosti (simetrije) ili u ravnini istovetnosti (koincidencije), jednako su udaljene od π_1 i od π_2, jer su obe ravnine simetralne ravnine ravnina π_1 i π_2.

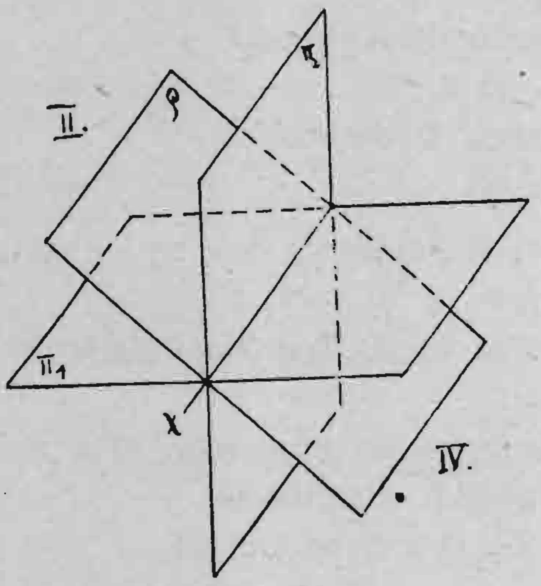


(22.)

Zadaci: (Služite se vašim kvadrantima od papira).

26.) U kojem se kvadrantu nalaze tačke *A*, *B*, *C* i *D*, ako su ovako zadane: *A* iza π_2 iznad π_1; *B* pred π_2 ispod π_1; *C* iza π_2 ispod π_1; *D* pred π_2 nad π_1.

27.) Bez obzira na ishodište *O* nacrtajte projekcije tačaka: *A* u III kvadrantu; *B* u I.; *C* u π_1 pred π_2; *D* u osi *x*; *E* u ravnini sumernosti u I.; *F* u π_2 ispod π_1; *G* u ravnini istovetnosti u IV.; *H* u π_1 iza π_2; *I* u ravnini sumernosti u III.; *K* u IV.; *L* u π_2 iznad π_1; *M* u II.; *N* u ravnini istovetnosti u II kvadrantu.



(23.)

28.) Bez obzira na ishodište nacrtajte projekcije tačaka: *A* u I kvadrantu tako da bude tačka bliža ravnini π_1 negoli ravnini π_2; *B* u III bliža π_2 negoli π_1; *C* u I. bliža π_2; *D* u IV. bliža π_1; *E* u II. bliža π_1; *F* u III. bliža π_1; *G* u II. bliža π_2; *H* u IV. bliža π_2.

29.) Nacrtajte projekcije tačaka *A* (1,—2, 3); *B* (—2, 1, 2); *C* (0, 2, —3); *D* (—3, —4, 4); *E* (4, 0, —2); *F* (3, —2, 0); *G* (2, 3, —3); *H* (—4, —4, —4); *I* (5, 3, 0); *K* (—5, 0, 3); odredite tačan prostorni položaj svake pojedine tačke i napišite gde se koja tačka nalazi.

30.) Odredite projekcije tačaka, ako je:

a) ordinala 2 jedinice levo od ishodišta, tačka je 3 jedinice pred π_2, 2 jedinice ispod π_1 . . . . A,

b) ordinala 3 jedinice desno od ishodišta, tačka je 3 jedinice iza π_2, 4 jedinice ispod π_1 . . . . B;

c) ordinala 4 jedinice levo od ishodišta, tačka je 1 jedinicu iza π_2, 2 jedinice iznad π_1 . . . . C;

d) ordinala 2 jedinice desno od ishodišta, tačka je 2 jedinice pred π_2, 3 jedinice iznad π_1 . . . . D;

e) ordinala 1 jedinicu desno od ishodišta, tačka je 4 jedinice pred π_2, u π_1 . . . . E;

f) ordinala 1 jedinicu levo od ishodišta, tačka je 2 jedinice iza π_2, u π_1 . . . . F;

g) ordinala 4 jedinice desno od ishodišta, tačka je u π_2 3 jedinice iza π_1 . . . . G;

h) ordinala u ishodištu, tačka je u π_2, 2 jedinice pred π_1 . . H;

31.) Nacrtajte projekcije tačke P u ravn. sumernosti u I kvadr., udaljene 4 jedinice od π_1;
Nacrtajte projekcije tačke R u ravn. istovetnosti u IV kvadr., udaljene 2 jedinice od π_2;
Nacrtajte projekcije tačke S u ravn. istovetnosti u II kvadr., udaljene 3 jedinice od π_1;
Nacrtajte projekcije tačke T u ravn. sumernosti u III kvadr., udaljene 2 jedinice od π_2;

32.) Nacrtajte projekcije nekih tačaka II kvadranta koje su jednako udaljene: a) od π_2; b) od π_1.

33.) Koja je karakteristika projekcija tačaka jednako udaljenih: a) od π_1; b) od π_2?

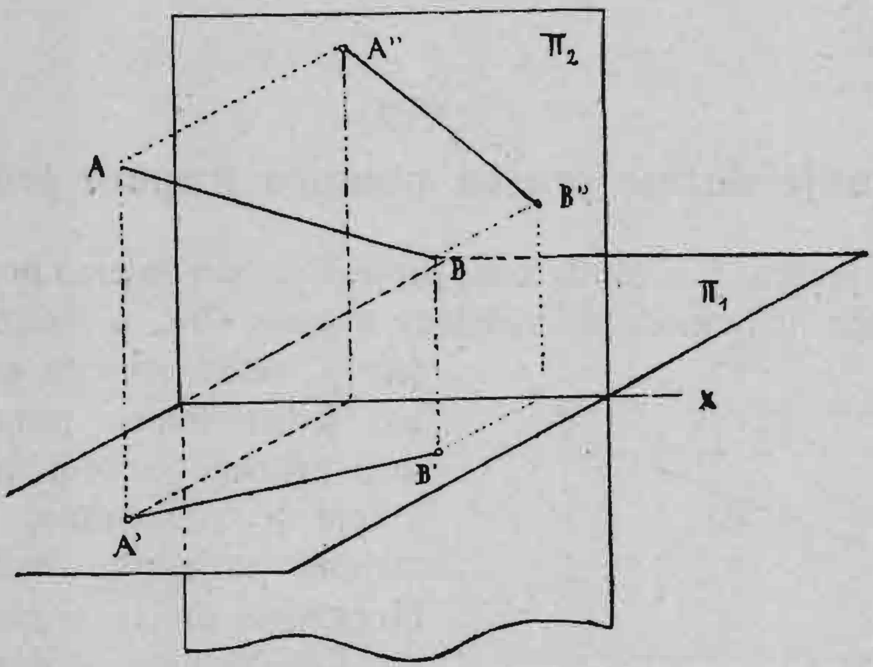
34.) Koja je karakteristika projekcija tačaka koje leže: a) u π_1; b) u π_2; c) u ravnini sumernosti; d) u ravnini istovetnosti?

35.) Odredite položaj tačaka A, B, C, D i E u slici 21.

8. Projekcije prušca (duži)

Znamo da je pružac najkraća spojnica dveju tačaka. Kako je pružac omeđen dvema tačkama, a za tačke znamo da imaju svaka po dve svoje projekcije, to mora prema tome i pružac imati dve projekcije. Spojnica drugih projekcija krajnih tačaka prušca određuje drugu projekciju prušca, a spojnica prvih projekcija krajnjih tačaka prušca određuje prvu projekciju njegovu.

U slici 24 pružac AB i normale, puštene iz A i B na π_1, odnosno na π_2, određuju ravninu prometalicu za π_1, respektive za π_2 (kao kod



24.

tumačenja sl. 3). Prema tome presečnica ravnine prometalice ($AA'BB'$) za π_1 s ravninom π_1 daje prvu (horizontalnu) projekciju prušca AB, a presečnica ravnine prometalice ($AA''BB''$) za π_2 s ravninom π_2 daje drugu (vertikalnu) projekciju prušca AB. Vidimo da je i u Mongeovoj projekciji projekcija prušca opet pružac.

U slici 25 $\overline{A''B''} = d''$ je druga (vertikalna) projekcija prušca d, a $\overline{A'B'} = d'$ je prva (horizontalna) projekcija prušca d. Budući da je druga i prva projekcija normalna projekcija prušca na π_2, odnosno na π_1, vrede i ovde isti zakoni koji su pokazani pre u § 2. (I i II zakon)

Kako neki pružac može da bude prema π_1 strmiji, a prema π_2 položitiji i obrnuto, to se prva i druga projekcija među sobom po veličini razlikuju. U slici 25 lako na temelju toga zaključimo da je priklon prušca prema π_1 manji od priklona prema π_2, jer je $d' > d''$. (Predočite tačke A i B u slici 25 prostorno, uzmite olovku, položite je preko prostornih tačaka A i B, pa ćete opaziti da je priklon prema π_1 manji od priklona prema π_2.)

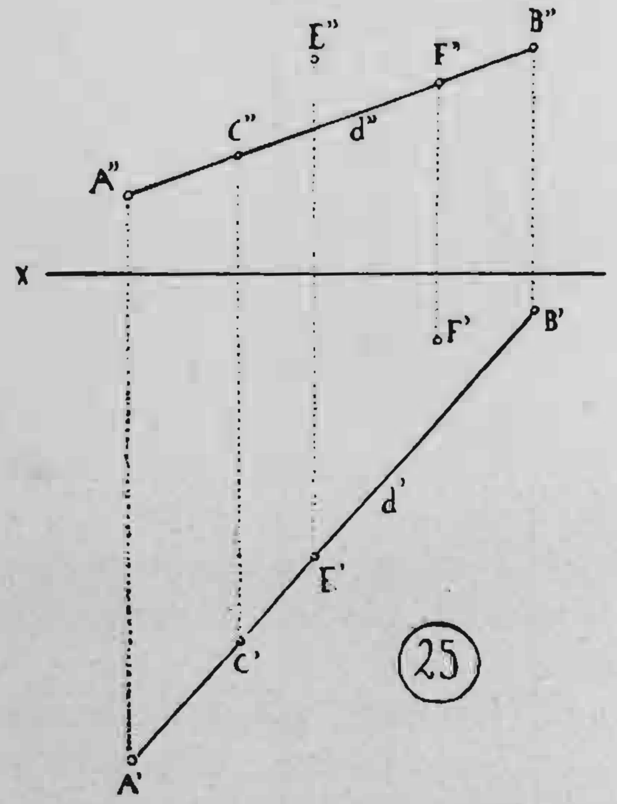
Pružac možemo zamišljati da je sastavljen od samih tačaka koje su posve jedna pokraj druge. Kako svaka takva tačka ima svoje dve projekcije, i kako spojnica drugih projekcija sviju tačaka određuje drugu projekciju prušca, a spojnica prvih projekcija sviju tačaka određuje prvu projekciju prušca, sledi sam po sebi

IX zakon: Tačka je na prušcu, ako je njena druga projekcija na drugoj projekciji prušca, a prva projekcija na prvoj projekciji prušca.

U slici 25 tačke E i F nisu na prušcu $\overline{AB} = d$; tačka C jest na prušcu d.

9. Određivanje dužine prušca pomoću trapeza prometača

Dužinu prušca, i u Mongeovoj projekciji, određujemo pomoću trapeza prometača ili pomoću diferenciona trokuta. Pre, u kotiranoj projekciji, videli smo da postoji samo jedan trapez prometač za neki pružac, obzirom na ravninu π koja je u kotiranoj projekciji ravnina projekcija. Budući da u Mongeovoj projekciji projeciramo na dve ravnine, postoje i dva trapeza prometača: jedan za ravninu π_1, a drugi za ravninu π_2. Ta se dva trapeza među sobom ne podudaraju niti su jednaka, nego imaju jednu zajedničku stranicu kako se to vidi u slici 24. Trapez prometač za π_1 je $ABB'A'$, a za π_2 $ABB''A''$. Zajednička im je stranica $\overline{AB}$.

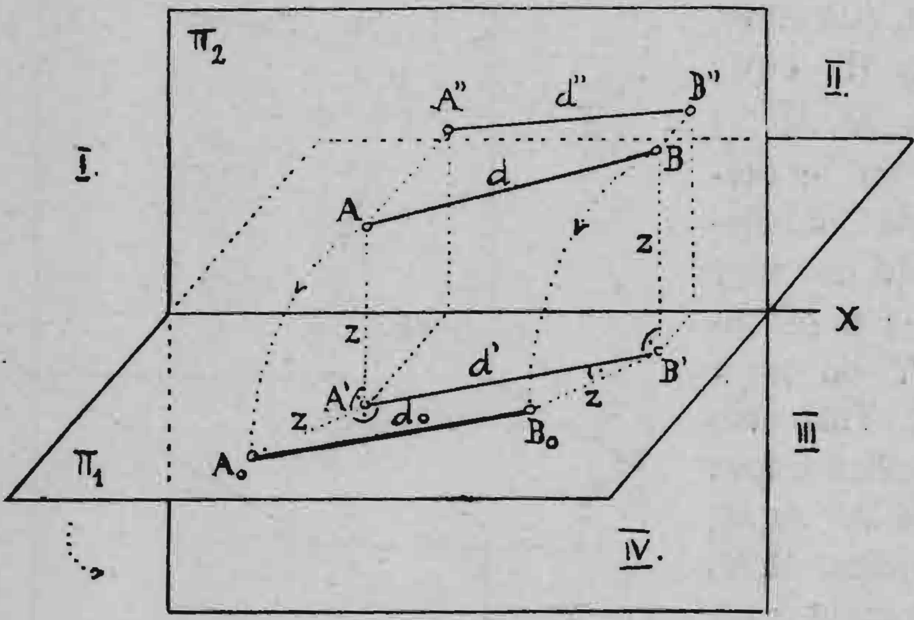


25

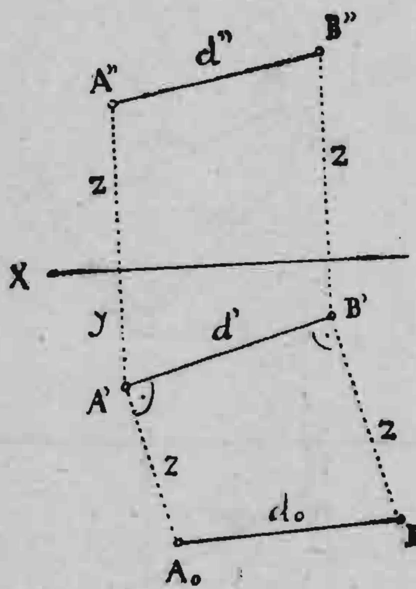
Kad određujemo dužinu prušca pomoću trapeza prometača, postupamo isto kao i u kotiranoj projekciji.

Trapez prometač za ravninu π_1 (slika 26) je $ABB'A'$. U A' i B' su pravi kutovi, a paralelne stranice trapeza su $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$. Trapez $ABB'A'$ rotiramo oko $\overline{A'B'} = d'$ dok ne padne u π_1, a onda π_1 oko osi x dok ne padne u π_2. Paralelne stranice trapeza $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ pokazuju udaljenosti tačaka A i B od π_1. Te udaljenosti, koje označujemo, kako znamo, sa z, vide se tačno iz drugih projekcija tačaka A i B: $\overline{AA'} = A''$ do osi x, to je z tačke A; $\overline{BB'} = B''$ do osi x, to je z tačke B.

Pružac $\overline{AB} = d$, prostorni trapez prometač $ABB'A'$ i njegov preloženi položaj $A'B'B_0A_0$ prikazani su zorno u slici 26. Taj isti pružac d i njegova dužina prikazani su u Mongeovoj projekciji u slici 27. Da



26

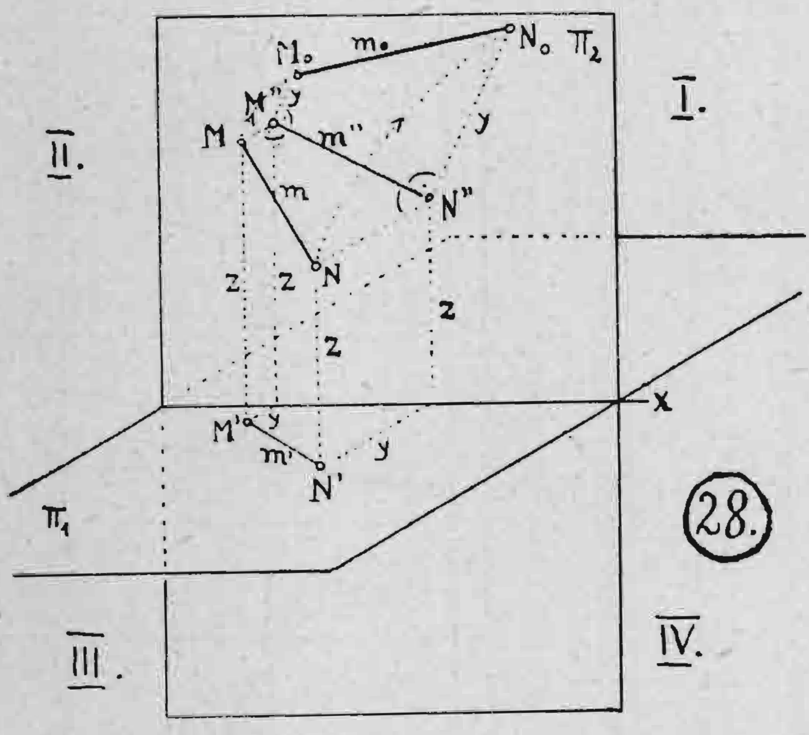


27

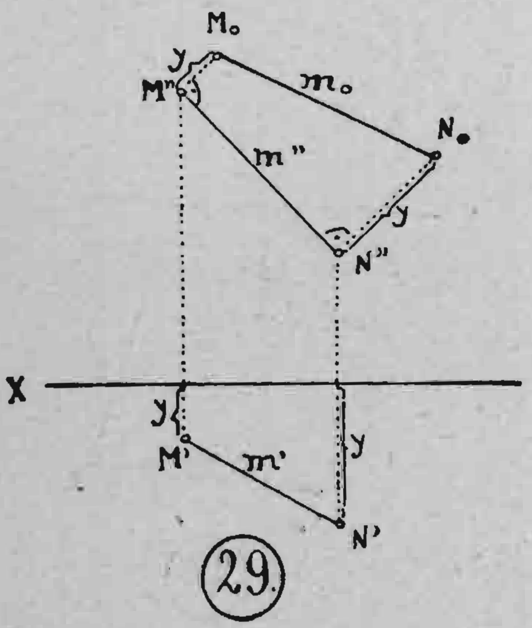
odredimo A_0 i B_0 (slika 27), puštamo u A' i B' normale na $\overline{A'B'}$ i nanašamo na te normale od A' udaljenost A'' do osi x, a u B' udaljenost od B'' do osi x. Tako smo dobili preloženi trapez prometač $A'B'B_0A_0$ u π_1. Spojnica $\overline{A_0B_0} = d_0$ pokazuje nam dužinu prušca $\overline{AB} = d$ u prostoru.

U slici 28 prikazan je trapez prometač $MNN''M''$ za π_2. U M'' i N'' su pravi kutovi, a paralelne stranice trapeza su $\overline{MM''}$ i $\overline{NN''}$. Trapez $MNN''M''$ rotiramo oko $\overline{M''N''}$ u π_2. Paralelne stranice trapeza $MM'' \parallel NN''$ pokazuju udaljenost tačaka M i N od π_2. Te udaljenosti koje označujemo s y vide se tačno iz prvih projekcija tačaka M i N. $MM'' = M'$ do osi $x = y$ tačke M; $NN'' = N'$ do osi $x = y$ tačke N.

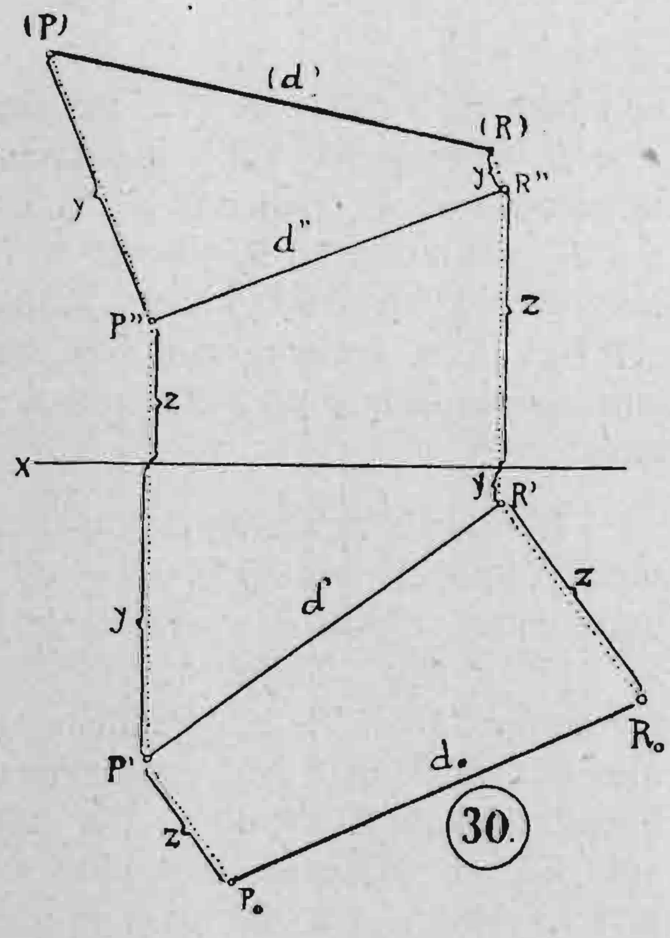
Pružac $\overline{MN} = m$, prostorni trapez prometač $MNN''M''$ i njegov preloženi položaj m_0 prikazani su zorno u slici 28. Taj pružac $\overline{MN} = m$ i njegova dužina prikazani su u Mongeovoj projekciji, u slici 29. Da odredimo $M_0N_0 = m_0$ (slika 29), puštamo u M'' i N'' normale na $\overline{N''M''}$ i nanašamo na te normale od M'' udaljenost M' do osi x (y tačke M), a u N'' udaljenost N' do osi x (y tačke N). Tako smo dobili preloženi trapez prometač $M''N''$ $\overline{N_0M_0}$ u π_2. Spojnica $\overline{M_0N_0}$ $= m_0$ pokazuje nam dužinu prušca $\overline{MN} = m$ u prostoru.



28.



29.

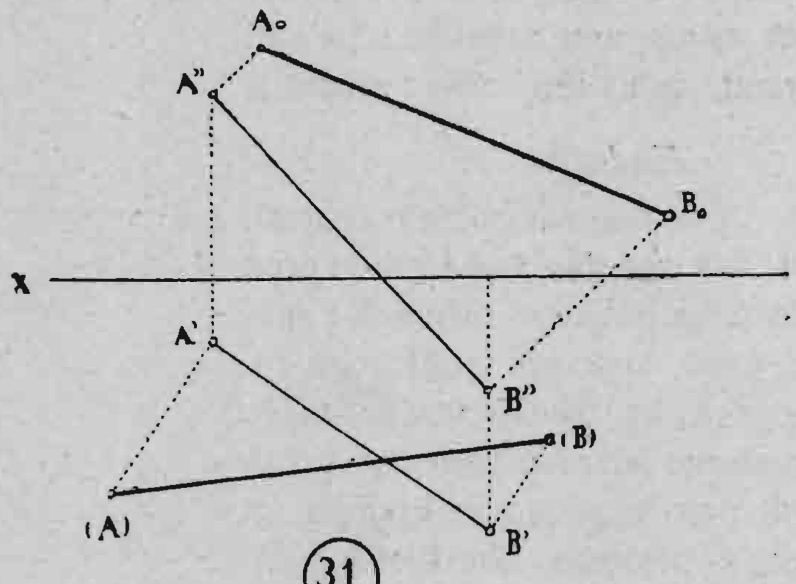


30.

U slici 30 pružac $\overline{PR} = d$ preložen je u π_1 oko svoje prve projekcije d' i u π_2 oko svoje druge projekcije d''. Prelaganjem u π_1 i u π_2 dobili smo dužinu prušca $\overline{PR}$. Kod prelaganja u π_1 postupali smo kao u slici 27, a kod prelaganja u π_2 kao u slici 29. Iako su kod preloženoga trapeza prometača različite veličine projekcija ($\overline{P'R'} > \overline{P''R''}$) i različite veličine onih paralelnih stranica koje odgovaraju udaljenostima tačaka P i R od π_1 (z), odnosno od π_2 (y), ipak je $\overline{P_0R_0} = \overline{(P)(R)}$, jer i $\overline{P_0R_0}$ i $\overline{(P)(R)}$ pokazuju dužinu jednoga te istoga prušca PR. To se tačno vidi u slici 30. Ako i sami nacrtate po volji kakavgod pružac, pa odredite njegovu dužinu prelaganjem na π_1 i na π_2, videćete da će se dužine toga prušca podudarati.

Često se događa da su krajnje tačke prušca u raznim kvadrantima, a ne u istom kvadrantu kao što je to bio slučaj u našem primeru. U takvu se slučaju moramo setiti drugoga dela III zakona koji glasi: Tačke prušca na raznim stranama ravnine na koju se projecira imaju i svoje preložene položaje na raznim stranama projekcije. Uočimo li još usto da sve tačke pred π_2 imaju svoje prve projekcije ispod osi x, a one iza π_2 iznad osi x, i da sve tačke nad π_1 imaju svoje druge projekcije iznad osi x, a one pod π_1 ispod osi x, lako ćemo opaziti da je u Mongeovoj projekciji položaj tačke u prostoru ovisan samo o smeštaju njenih projekcija prema osi x. Dakle, kod određivanja dužine prušca pomoću trapeza prometača, nećemo nikada pogrešiti, ako kod prelaganja na π_1 pazimo na položaj *drugih projekcija* prema osi x. Čim su *druge projekcije* dveju tačaka *na raznim stranama osi x*, znak je da su te *tačke na raznim stranama ravnine* π_1. Dakle, kod prelaganja u π_1 nanašaće se udaljenosti drugih projekcija do osi x na razne strane. Ako su opet prve projekcije dveju tačaka na raznim stranama osi x, znači da se i te tačke nalaze na raznim stranama ravnine π_2. Prema tome će se, kod prelaganja u π_2 udaljenosti prvih projekcija do osi x, nanašati i na razne strane.

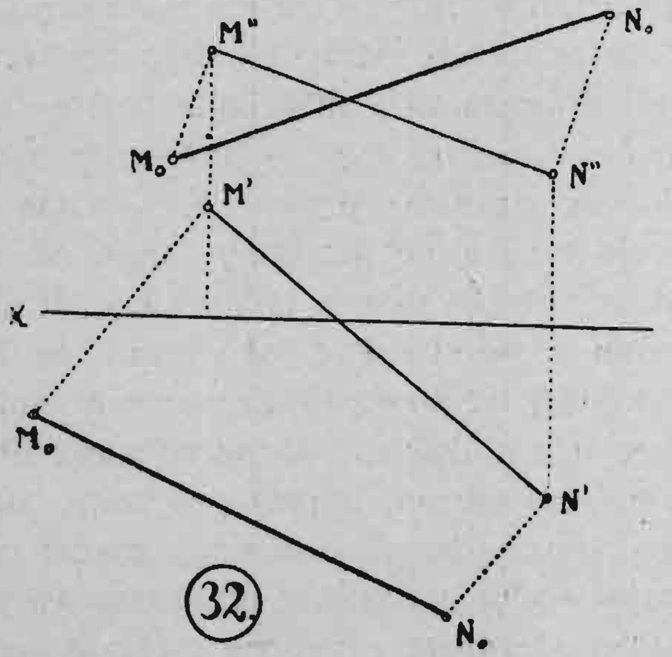
U slici 31 prikazan je pružac $\overline{AB}$. Tačka A je u I kvadrantu, a tačka B u IV kvadrantu. Prema tome se tačke A i B nalaze na raznim stranama ravnine π_1, a s iste strane ravnine π_2. Kod određivanja dužine prušca $\overline{AB}$ morali smo to uzeti u obzir. Prelaganjem prušca $\overline{AB}$ na π_1 nanašali smo udaljenosti drugih projekcija na razne strane, jer se i druge projekcije nalaze na raznim stranama osi x. U prostoru su, dakle, tačke na raznim stranama ravnine π_1. (Pogledajte sliku 8 i



31.

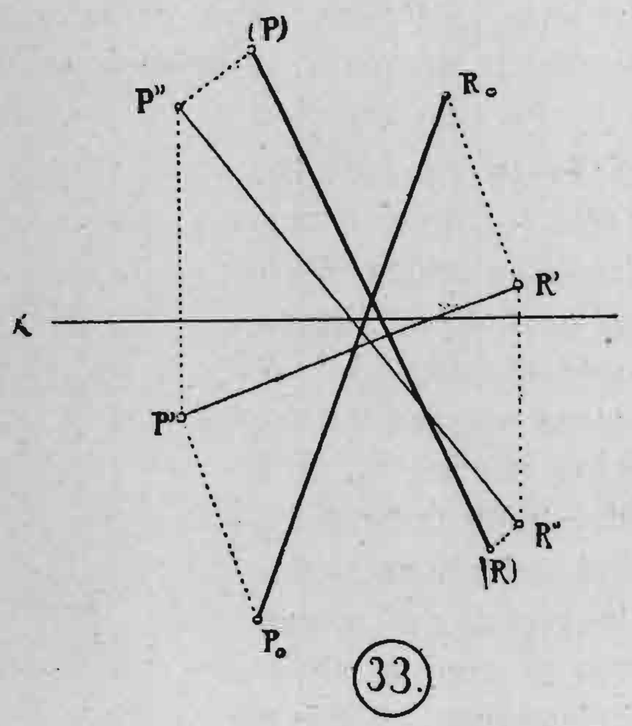
njeno tumačenje o izrođenu trapezu) Kod prelaganja prušca $\overline{AB}$ na π_2 učinjeno je to na istu stranu, jer su i prve projekcije s iste strane osi x. U prostoru su, dakle, tačke s iste strane ravnine π_2.

U slici 32 nalaze se tačke M i N s iste strane ravnine π_1, a na raznim stranama ravnine π_2. M je u II., a N u I kvadrantu. Zbog toga su druge projekcije tačaka M i N na istoj strani osi x, a prve projekcie na raznim stranama osi x. Prema tome je udešeno i određivanje dužine prušca $\overline{MN}$ u slici 32.



U slici 33 nalaze se tačke P i R na raznim stranama i ravnine π_1, i ravnine π_2. P je u I., a R u III kvadrantu. Dakle, kod određivanja dužine prušca $\overline{PR}$ morale su se u obe projekcije nanašati udaljenosti projekcija od osi x na razne strane.

U slikama 31, 32 i 33 određivana je dužina prušca prelaganjem trapeza prometača na obe ravnine projekcija samo zato da se pokaže, kako se u pojedinim slučajevima postupa; inače se prelaže trapez ili samo na π_1, ili samo na π_2. Prelaže se na onu ravninu i na onu stranu, gde ima više prostora.



Zadaci:

Pre nego li počnete rešavati sve ove zadatke, treba građu pred zadacima potpuno razumeti i znati; osim toga pre grafičkoga rešenja treba *svaki pružac tačno prostorno odrediti* tako da se odredi položaj njegovih krajnjih tačaka u prostoru. Umišljena spojnica tako dobivenih prostornih tačaka daje nam prostorni položaj prušca. *Od 36—39 zadatka bezuvetno se morate služiti vašim kvadrantima načinjenima od papira.*

36.) Predočite pružac u Mongeovoj projekciji tako da se on čitav nalazi: a) u I kvadrantu; b) u II.; c) u III.; d) u IV kvadrantu.

37.) Prikažite projekcije prušca koji ide: a) iz I. u II kvadrant; b) iz II. u III.; c) iz III. u IV.; d) iz IV. u I kvadrant.

38.) Prikažite projekcije prušca koji prolazi: a) iz I. kroz II. u III kvadrant; b) iz I. kroz IV. u III kvadrant; c) iz II. kroz III. u IV kvadrant; d) iz II. kroz I. u IV kvadrant. (Na svakom tom prušcu možemo odabrati tačke koje se nalaze u dotičnome kvadrantu kroz koje on mora prolaziti)

39.) Predočite pružac koji: a) leži u ravnini sumernosti; b) leži u ravnini istovetnosti; c) seče os x i prolazi I. i III kadrantom; d) seče os x i prolazi II. i IV kvadrantom; e) paralelan je s π_1, a prema π_2 neka je nagnut; f) paralelan je s π_2, a prema π_1 nagnut; g) paralelan je s osi x u I., pa onda u II., u III. i u IV kvadrantu; h) normalan je na π_1 u I; u II.; u III.; i u IV kvadrantu; i) normalan je na π_2 u I.; u II.; u III.; pa u IV kvadrantu; k) nalazi se u π_1 pred π_2; l) nalazi se u π_2 nad π_1; m) nalazi se u $\pi_1 \perp \pi_2$ pred π_2; n) nalazi se u $\pi_2 \perp \pi_1$ pod π_1.

40. — 43.) Predočite pružac $\overline{AB}$ u Mongeovoj projekciji i odredite njegovu dužinu, ako je on ovako zadan:

40.) A (— 3, 1, 4), B (1, 3, 3).

41.) A (2, — 3, 1), B (0, — 1, 5).

42.) A (—1, —2,—5), B (2, — 4, —1).

43.) A (—5, 2, — 3), B (— 1, 4, — 1).

44. — 48. Predočite pružac $\overline{MN}$ u Mongeovoj projekciji i odredite njegovu dužinu, ako je zadano:

44.) M (1, 3, 5), N (4, — 2, 1). (Kroz koje kvadrante prolazi?)

45.) M (—2, 1, 3), N (1,—2,—1). („ „ „ „ ?)

46.) M (—4, 2, 4), N (0, 5, — 1). („ „ „ „ ?)

47.) M (3, — 1, 4), N (— 1, 2, 1). („ „ „ „ ?)

48.) M (2,—2,—2), N (5, 1, 4). („ „ „ „ ?)

49. — 53. Odredite prostorni položaj zadanoga prušca $\overline{PR}$ prema π_1, odnosno prema π_2. Što ste konstatirali kod određivanja njegove dužine? (I zakon, § 2)

49.) P (— 2, 3, 2), R (1, 5, 2).

50.) P (3, 4, 1), R (1, 4, 5).

51.) P (1, — 2, 3), R (— 3, - 2, — 1).

52.) P (2, 3, 1), R (2, 3, 5).

53.) P (—3, 4, — 2), R (— 3, — 2, — 2).

54. — 57. Odredite dužinu prušca $\overline{CD}$, ako je on zadan ovako:

54.) C (2, 3, — 3), D (5, — 2, 2). (Što znate kazati o tom prušcu?)

55.) C (— 1, 4, 4), D (3, 2, 2). („ „ „ „ „ „ ?)

56.) C (—1,—3,—3), D (3, 2, 2). („ „ „ „ „ „ ?)

57.) C (—1, 4,—4), D (—5, 1,—1). („ „ „ „ „ „ ?)

58.) Odredite B'' prušca $\overline{AB} = 5$, ako je zadano A (— 1, 2, 3) i B ($x = 1$, $y = 3$, $z = ?$).

59.) Odredite L' prušca $\overline{KL} = 6$, ako je zadano K (3, — 2, 1) i L (0, ?, 3).

60.) Odredite na prušcu $\overline{MN}$ [M (2, 4, 3), N (—1, 1, — 5)] tačku S koja je od π_1 udaljena 1, i tačku F koja je od π_2 udaljena — 1.

61.) Zadani pružac $\overline{PR}$ [P (—2, 4, —3), R (2, 2, 1)] produžite preko R do S tako da S bude od π_1 udaljeno 3; odredite dužinu produženoga prušca.

62.) Zadani pružac $\overline{MN}$ [M (—2, 4, 2), N (1, 2, —1)] produžite preko N za njegovu dvostruku dužinu. (Je li potrebno crtati preloženi položaj prušca?)

63.) Zadani pružac $\overline{CD}$ [C (—1, 2, 0,5), D (0, 1, 1)] produžite preko C do π_1, a preko D do π_2 i odredite dužinu prušca od π_1 do C i od D do π_2.

64.) Zadani pružac $\overline{TV}$ [T (3, 1,5, 3); V (1,5, 1, 1)] produžite preko V do π_2, onda do π_1, pa odredite dužinu onoga dela prušca između π_2 i π_1.

10. Određivanje dužine i priklona prušca pomoću diferencionoga trokuta*

Pre negoli započnete s ovim paragrafom, opetujte o diferecionom trokutu ono, što je protumačeno i pokazano 11 i 12 slikom.

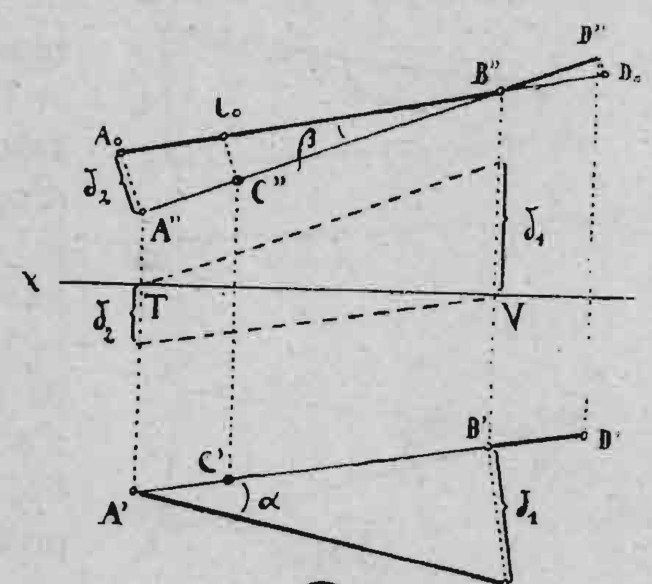
Znamo da kod diferencionoga trokuta crtamo normalu na projekciju samo u jednoj tački, a ne u dve kako je to rađeno kod trapeza prometača. Kao što smo radili u kotiranoj projekciji, radićemo i u Mongeovoj projekciji. Razlika je jedino u tome, što kod Mongeove projekcije postoje dva diferenciona trokuta, jer se projecira i na dve ravnine, a u kotiranoj projekciji imali smo samo jedan diferencioni trokut.

Znamo da je kod diferencionoga trokuta najvažnije određenje diferencije kota. U kotiranoj smo projekciji dobili diferenciju tako da smo kote odbili. Tu dobivenu diferenciju naneli smo na onu normalu koja je puštena u jednoj tački na projekciju prušca. U Mongeovoj projekciji činimo to isto s tom razlikom što ovde ne provađamo

* U ovome je paragrafu, ako vreme ne dopušta, dostatno uzeti samo jedan diferencioni trokut. *Kod crtanja je najjednostavniji onaj u sl. 36.*

odbijanje brojčano, već odbijamo udaljenosti tačaka od π_1, odnosno udaljenosti tačaka od π_2.

Svaka tačka određena svojim projekcijama tačno nam pokazuje udaljenost tačke u prostoru od π_1 i od π_2. Od prve projekcije svake tačke do osi x je udaljenost tačke u prostoru od π_2, a od druge projekcije tačke do osi x je udaljenost tačke od π_1. Ako imamo, dakle, zadane projekcije prušca (slika 34 i 35), lako ćemo doznati udaljenosti krajnjih tačaka od π_2 i od π_1. I u Mongeovoj ćemo projekciji diferenciju odaljenosti tačaka A i B od π_2, odnosno od π_1, odrediti paralelnim pomakom prušca $\overline{AB}$ po kotama dok ne padne jedna od krajnjih tačaka u π_2, odnosno u π_1. Takvim paralelnim pomakom određena je diferencija δ_1 za π_1 i diferencija δ_2 za π_2 u slici 34. Dužina δ_1 *naziva se prva diferencija,* dužina δ_2 *druga diferencija.*



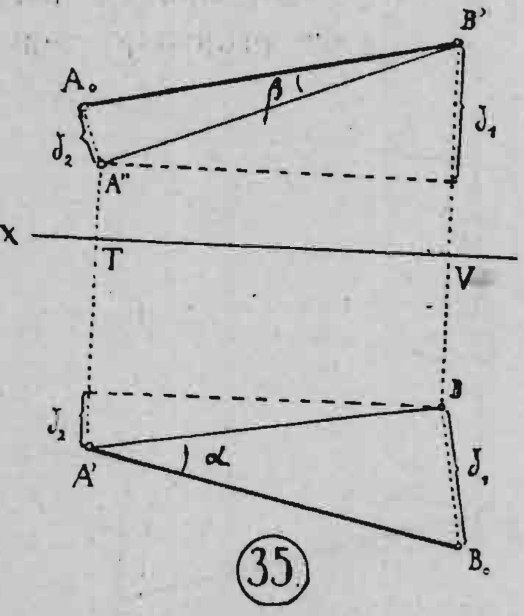
34.

Prva se dakle diferencija nađe, ako se vuče paralela s drugom projekcijom prušca $\overline{AB}$ iz osi x (T) do ordinale tačke B. Od secišta te paralele s ordinalom do osi x je diferencija δ_1. To isto mogli smo učiniti i iz V tako da smo vukli paralelu s $\overline{A''B''}$ do ordinale tačke A. Od secišta te paralele s ordinalom do osi x bila bi također diferencija δ_1.

Da odredimo dužinu prušca $\overline{AB}$, nanesemo diferenciju δ_1 na normalu na $\overline{A'B'}$ u B' ili u A'. Tako dobijemo A_0, odnosno B_0. Kod nas u slici 34 puštena je ta normala u B' i na nju nanesena diferencija δ_1, te je dobivena tačka B_0. Spojnica $\overline{B_0A'}$ pokazuje dužinu prušca $\overline{AB}$. Da smo u A' pustili normalu i naneli na nju δ_1, dobili bismo A_0. Onda bi $\overline{A_0B'}$ pokazalo dužinu prušca $\overline{AB}$.

Dužinu prušca možemo odrediti i pomoću druge diferencije δ_2. Diferenciju δ_2 nađemo, ako vučemo paralelu s prvom projekcijom prušca $\overline{AB}$ iz osi x (V) do ordinale tačke A. Od secišta te paralele s ordinalom do osi x je δ_2. To isto mogli smo učiniti i iz tačke T, pa bismo opet dobili δ_2. Kako nam δ_2 pokazuje diferenciju udaljenosti tačaka A i B od π_2, moramo tu diferenciju δ_2 naneti na normalu na drugu projekciju prušca $\overline{AB}$. Svejedno je, da li δ_2 nanašamo na normalu u A'' ili u B''. Tako je dobivena tačka A_0. (Slika 34) Spojnica $\overline{A_0B''}$ pokazuje dužinu prušca $\overline{AB}$. Da smo to učinili u B'', dobili bismo B_0. U tom bi slučaju bilo $\overline{B_0A''} = \overline{AB}$.

Diferencije δ_1 i δ_2 možemo odrediti i na drugi način. (Slika 35)

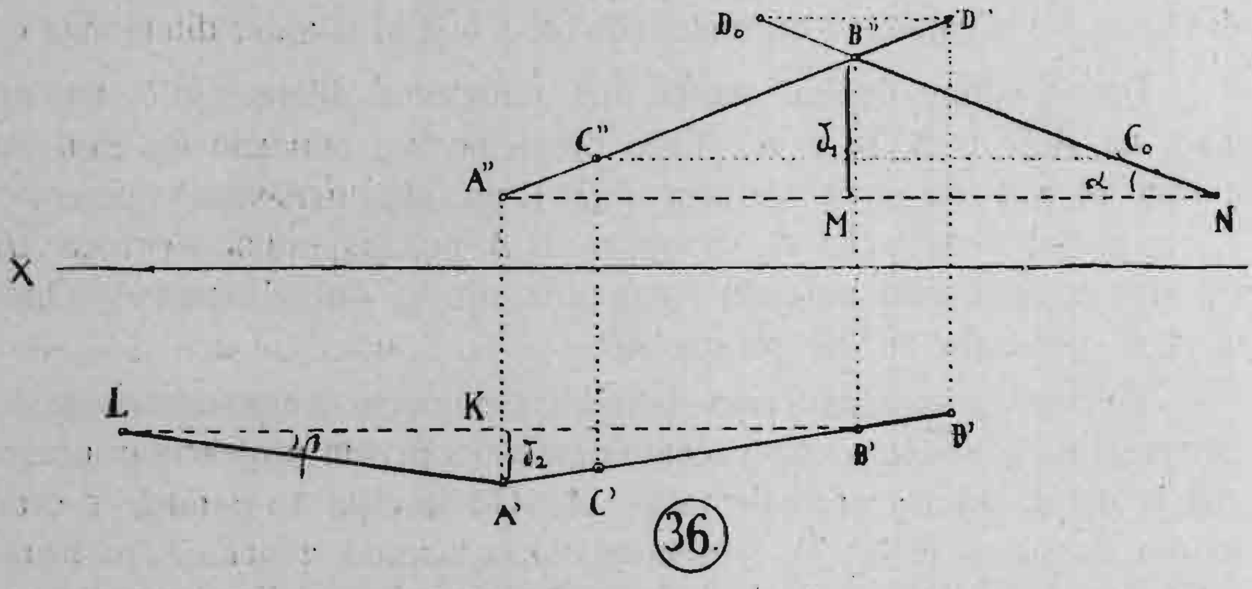


35

Da odredimo prvu diferenciju δ_1, moramo naći razliku udaljenosti tačaka A i B od π_1. Te udaljenosti su kote tačaka A i B za ravninu π_1, a vide se iz drugih projekcija tačaka A i B. $\overline{A''T}$ je udaljenost tačke A od π_1; $\overline{B''V}$ je udaljenost tačke B od π_1. $\overline{B''V} - \overline{A''T} = \delta_1$. U slici 35 dobiveno je δ_1 tako da je iz A'' povučena paralela s osi x do ordinale tačka B. Od secišta te paralele s ordinalom tačke B do B'' je prva diferencija δ_1.

Kako nam δ_2 pokazuje diferenciju udaljenosti tačaka A i B od π_2, a znamo da je od A' do osi x, odnosno od B' do osi x, udaljenost tačaka od π_2, to moramo odrediti upravo diferenciju udaljenosti prvih projekcija tačaka A i B od osi x. Diferenciju δ_2 tih udaljenosti $(\overline{A'T} - \overline{B'V} = \delta_2)$ nađemo, da $\overline{B'V}$ nanesemo od T na $\overline{A'T}$. U slici 35 nađeno je δ_2 tako da je iz B' povučena paralela s osi x. Od secišta te paralele s ordinalom tačke A do A' je druga diferencija δ_2.

Kad smo doznali δ_1 i δ_2, postupa se isto kao u slici 34.



36

Videli smo da za svaki pružac postoje dva diferenciona trokuta. Onaj s diferencijom δ_1 naziva se *prvi diferencioni trokut*, a onaj s diferencijom δ_2 naziva se *drugi diferencioni trokut*. Kod određivanja dužine prušca upotrebljava se ili samo prvi, ili samo drugi diferencioni trokut.

Kod nas u našim slikama nacrtana su oba diferenciona trokuta samo zbog toga da se prikaže kako se koji trokut konstruira, te da se pokaže da su prvim i drugim diferencionim trokutom dobivene dužine prušca među sobom jednake.

Ima još i treći način za određivanje dužine prušca (slika 36). Katete prvoga diferencionoga trokuta su δ_1 i $A'B'$ (znamo iz slike 34 i 35); katete drugoga diferencionoga trokuta su δ_2 i $A''B''$ (sl. 34 i 35). Znamo da su dva pravokutna trokuta među sobom kongruentna (podudarna), ako imaju jednake katete. U slici 36 je trokut MNB'' prvi, a KLA' je drugi diferencioni trokut, jer su mu katete $\overline{MN} = \overline{A'B'}$ i ϑ_1, odnosno $\overline{KL} = \overline{A''B''}$ i δ_2. Prema tome je hipotenuza trokuta MNB'' dužina prušca $\overline{AB}$, a isto je tako i hipotenuza trokuta KLA'' dužina prušca $\overline{AB}$. Mora dakle biti $\overline{B''N} = \overline{A'L} = \overline{AB}$.

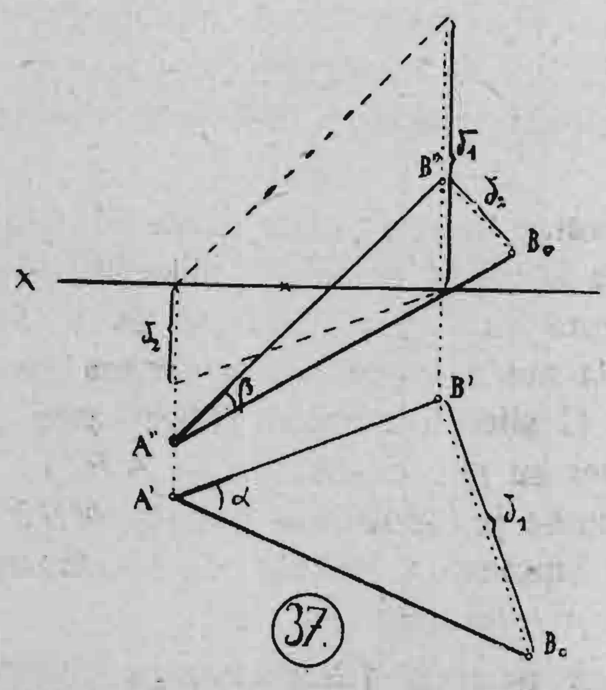
Kod određivanja dužine prušca pomoću diferencionoga trokuta svejedno je koji ćete od ta tri načina upotrebljavati.

Kut, što ga zatvara nađena dužina prušca (hipotenuza) i projekcija njegova, je prikloni kut prušca. Budući da u Mongeovoj projekciji projeciramo na dve ravnine, postoje i dva priklona. Priklon prema π_1 označujemo s α, a priklon prema π_2 označujemo s β. U prvom diferencionom trokutu prikazana je veličina priklona prema π_1 (α), u drugom prema π_2 (β). Ti su prikloni kutovi označeni s α odnosno s β u slikama 34, 35 i 36.

Pre negoli pređemo na rešavanje zadataka, svakako je potrebno razmotriti tačni sastav diferencionih trokuta. Oba diferenciona trokuta su pravokutna. Kod prvoga diferencionoga trokuta katete su δ_1 i prva projekcija prušca, a hipotenuza je dužina prušca. Prva projekcija prušca i dužina prušca pokazuju priklon (α) prema π_1. Drugi diferencioni trokut ima za katete δ_2 i drugu projekciju prušca, a hipotenuza je dužina prušca. Druga projekcija prušca i dužina prušca pokazuju priklon (β) prema π_2.

Sad ćemo da rešimo neke tipičnije primere o prušcu. Kod rešavanja zadataka, koji zahtevaju stanovito razmišljanje, mora se u prvom redu zadatak potpuno razumeti, tj. tačno znati što zadatak zahteva. Nakon toga treba, pre konstruktivnoga rešavanja, ispitati njegovo prostorno rešenje. Istom onda rešava se zadatak konstruktivno. Samo se sobom razume da se kod prostornoga rešavanja mora uočiti: da li je rezultat uvek moguć, da li je jednoznačan, dvoznačan ili višeznačan.

1. *Odredite dužinu i priklone kutove prušca AB [A (— 2, 4, —3) B (3, 2, 2)].* (Slika 37)



37.

Samu provedbu konstrukcije nije potrebno tumačiti, jer se sve iz crtnje tačno razabira. Kako su tačke A i B na raznim stranama ravnine π_1, mora paralelnim pomakom biti $\delta_1 = 2 - (-3) = 5$ što se na slici i vidi. Ovde je upotrebljen diferencioni trokut prema slici 34.

2. *Odredite projekcije tačke C na prušcu AB, ako je $\overline{AC} = 1$ cm.*

Izrada toga primera je u slici 34 i 36. Na nađenu dužinu prušca $\overline{AB}$ nanese se od A_0 (slika 34) odnosno od N (slika 36) 1 cm. Tako se dobije C. Vraćanjem C_0 na drugu projekciju prušca dobijamo C'', pa onda u ordinali na $\overline{A'B'}$ dobijemo C'.

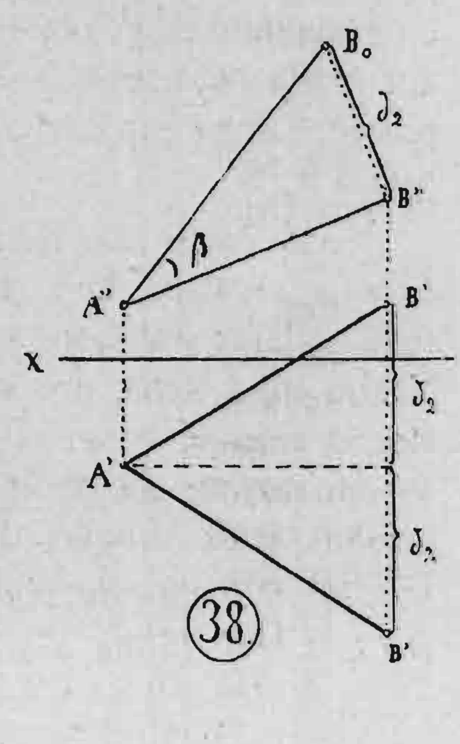
3. *Produžite pružac $\overline{AB}$ preko B za 1 cm.* (Slika 34 i 36)

Nađenu dužinu prušca $\overline{AB}$ produžimo za 1 cm do D_0. Vraćanjem na drugu projekciju dobijemo D'', pa onda u ordinali D'.

U 2 i 3 zadatku mogli smo to isto raditi pomoću prvoga diferencionoga trokuta (slika 34), odnosno pomoću drugoga diferencionoga trokuta (slika 36). Dobili bismo bili C', odnosno D' na istome mestu.

4. *Odredite prvu projekciju prušca $\overline{AB}$* [A (0, 2, 1), B ($x = 5$, $z = 3$)], *ako on s π_2 zatvara kut* $\beta = 30^0$. (Slika 38)

Prema zadatku poznata je druga projekcija prušca $\overline{A''B''}$, A' i kut β. Od drugoga diferencionoga trokuta, dakle, poznajemo $\overline{A''B''}$ i kut $\beta = 30^0$. Budući da je $A''B''B_0$ pravokutan trokut, on je s dva uveta potpuno određen. U A'' nacrtamo kut $\beta = 30^0$ i u B'' normalu na $\overline{A''B''}$. Secište kraka kuta β s normalom daje B_0. $\overline{B''B_0} = \delta_2$. Iz A' paralela s osi x seče ordinalu tačke B u tački od koje gore ili dole naneseno δ_2, te tako dobijemo B'. Zadatak ima, kako se vidi, dva rešenja. Ovde je upetrebljen dijerencioni trokut kao u slici 35.

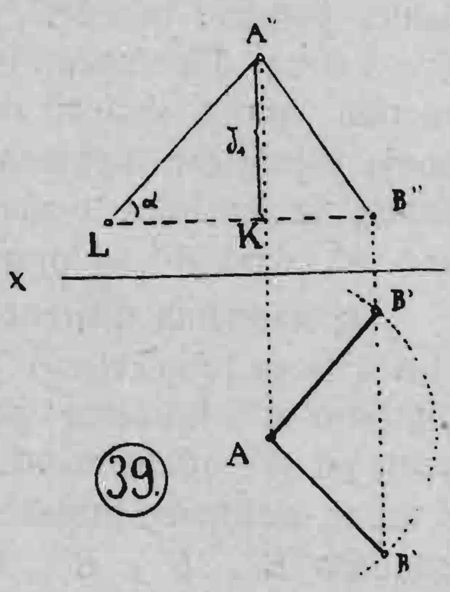


38.

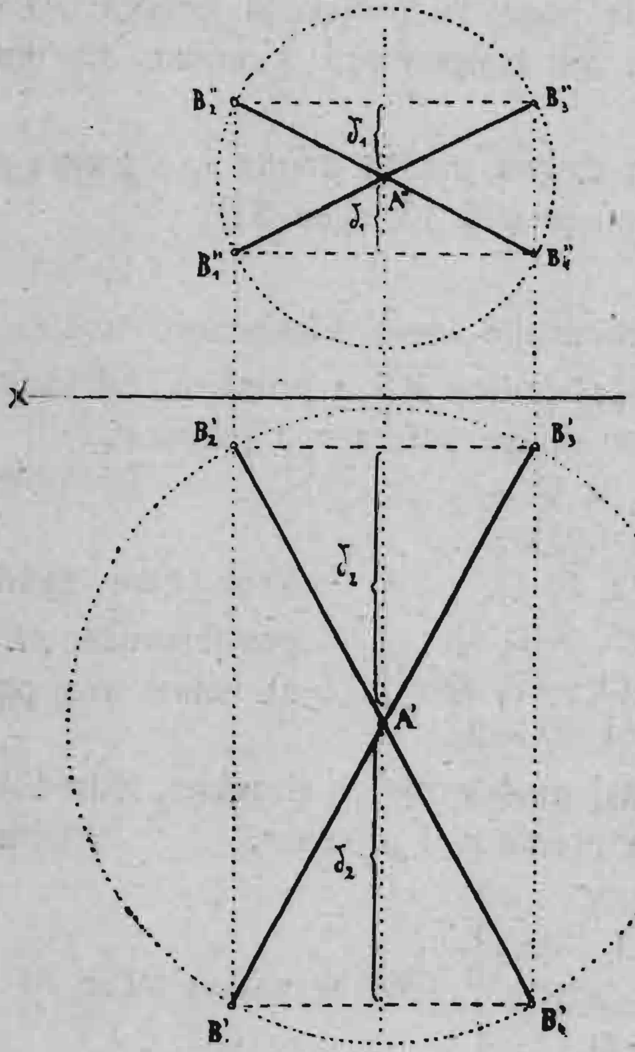
5. Kad bi zadatak glasio isto kao pod 4. (slika 38), samo bi *mesto kuta* β bila *zadana dužina prušca,* onda bi se u B'' postavila normala na $\overline{A''B''}$ i iz A'' preseklo normalu sa zadanom dužinom prušca, pa bi se dobilo B_0. Dalje bi se postupalo isto kao u slici 38. (Pogledajte zadatak 11)

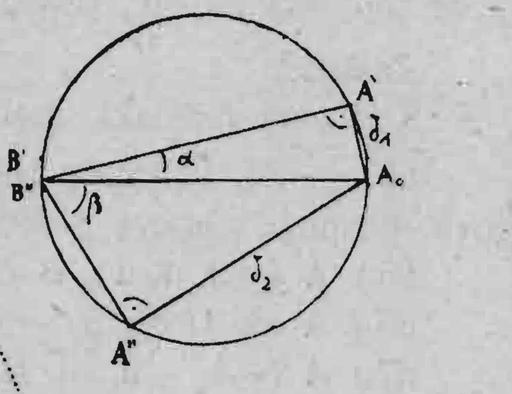
6. *Odredite prvu projekciju prušca* $\overline{AB}$ [A (— 2, 3, 4), B (0, ?, 1)], *ako on ima prema* π_1 *kut priklona* $\alpha = 45^0$. (Slika 39)

Poznato je $\overline{A''B''}$, A' i kut α. Prvi diferencioni trokut potpuno je određen, jer poznajemo δ_1 i kut α. Upotrebom prvoga diferencionoga trokuta doznali smo dužinu prve projekcije $(\overline{A'B'} = \overline{KL})$. Lukom iz A' polumera (poluprečnika) $\overline{KL}$ presečemo ordinalu tačke B, te dobijemo B'. Zadatak ima dva rešenja. Ovde je upotrebljen diferencioni trokut kao u slici 36.



(39)





(40)

7. *Predočite pružac AB = 6, ako on ima kutove priklona* $\alpha = 15^0$, $\beta = 60^0$. *Zadana je tačka A (0,6, 4).* (Slika 40)

U ovom primeru poznata je jedna krajnja tačka prušca, kutovi priklona prema π_1 i prema π_2 i dužina prušca. Prema tome nam je od prvoga i od drugoga diferencionoga trokuta poznata hipotenuza i u svakome trokutu po jedan kut uz hipotenuzu. Diferencioni su trokuti, dakle, potpuno određeni, jer znamo od svakoga po dva uveta. Kako prvi i drugi diferencioni trokut za isti pružac imaju jednake hipotenuze, nacrtali smo u slici 40 na strani ova dva difereciona trokuta tako da imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{A_0B''} = \overline{A_0B'} = 6$. Oko hipotenuze nacrtana je kružnica i nanesen kut α kod B' i kut β kod B''. Kutovi kod A' i kod A'' su pravi, jer su periferni nad polukružnicom.

Iz nacrtanih diferencionih trokuta doznamo dužinu prve projekcije $\overline{A'B'}$ i druge projekcije $\overline{A''B''}$ i dužinu diferencija δ_1 i δ_2. Opišemo li iz A', odnosno A'', kružnicu polumera $A'B'$, respektive $\overline{A''B''}$, pa u udaljenosti od A', odnosno od A'', za δ_1, respektive za δ_2, povučemo paralele s osi x, dobijemo projekcije druge krajnje tačke prušca B'_1, B'_2, B'_3, B'_4 odnosno B''_1, B''_2, B''_3, B''_4. Time je traženi pružac predočen. Zadatak, vidimo, ima četiri rešenja. Da se još bolje uverimo o ispravnosti te konstrukcije, nacrtajte iz sada poznatih projekcija prušca $\overline{AB}$ diferencione trokute. Ti će trokuti biti kongruentni s onima, što smo ih crtali na strani.

[Da zbroj (zbir) priklonih kutova prušca prema π_1 i prema π_2 ne može biti veći od 90^0, pokazano je u § 13, slika 51]

Zadaci:

Kod ovih zadataka upotrebljavajte samo diferencioni trokut.

65. — 70. Prikažite položaj prušca $\overline{AB}$ u prostoru, odredite njegovu dužinu i njegove priklone kutove prema π_1 i prema π_2.

65.) *A* (—2, 4, 1), *B* (3, 2, 5).
66.) *A* (3, 1, 3), *B* (—1, 4, 5).
67.) *A* (— 1, —2, 4), *B* (2, 3, 1).
68.) *A* (2, —3, —1), *B* (5, —1, 4).
69.) *A* (—2, 4, —1), *B* (3, —2, 2).
Kroz koje kvadrante prolazi pružac $\overline{AB}$? Gde se nalazi ovaj pružac? (67.–69.)
70.) *A* (—1, —3, 3), *B* (4, 2, —2).

71. — 75. Prikažite položaj prušca $\overline{MN}$ u prostoru, odredite njegovu dužinu i priklone kutove prema π_1 i prema π_2.

71.) *M* (— 1,0,3), *N* (2,1,0).
72.) *M* (3, —1,2,), *N* (0,3, —1).
73.) *M* (2,0, — 1), *N* (— 3,3,0).
74.) *M* (3,—4,0,) N (0,0,2).
75.) *M* (—1,—3,0), *N* (2,0,—4).
Gde se nalaze tačke *M* i *N*?

76. — 80. Odredite dužinu i priklonì kut prema π_1, odnosno prema π_2 prušca $\overline{PR}$. (Najpre odredite prostorni položaj prušca, pa ćete uočiti, a da i ne tražite, njegovu dužinu i prikloni kut)

76.) P (—2,0, 3), R (5,0,0).
77.) P (1,0,0), R (— 2,4,0).
78.) P (0,0,0), R (— 3, — 2,0).
79.) P (—2, 3, 0), R (3,3,0).
80.) P (2,0,1), R (2,0,5).

$\Big\}$ Gde se nalazi pružac $\overline{PR}$?

Kod primera od 81 — 84 treba da se naročito pomažete kvadrantima načinjenim od papira.

81.) Predočite pružac $\overline{ST} \parallel \pi_1$ tako da bude prikloni kut $\beta = 30^0$; $\overline{ST} = 5$ cm. a) $\overline{ST}$ je u I kvadrantu; b) $\overline{ST}$ je u II kvadrantu; c) $\overline{ST}$ je u III kvadrantu; d) $\overline{ST}$ je u IV kvadrantu.

82.) Predočite pružac $\overline{AB} \parallel \pi_2$ tako da ima prikloni kut $\alpha = 60^0$ i da je 2 cm udaljen od π_2. $\overline{AB} = 4$ cm. a) $\overline{AB}$ je u I.; b) $\overline{AB}$ je u II.; c) $\overline{AB}$ je u III.; d) $\overline{AB}$ je u IV kvadrantu.

83.) Predočite pružac $\overline{CD} = 6$ cm u π_1 tako da bude prikloni kut $\beta = 45^0$: a) pred π_2; b) iza π_2.

84.) Predočite pružac $\overline{KL} = 5$ cm u π_2 tako da je prikloni kut $\alpha = 30^0$: a) nad π_1; b) pod π_1.

85.) Zadano je: $\overline{AB}$ [A (2, 3, 1), B (3, 1, ?)]; odredite B'', ako je $\overline{AB} = 9$.

86.) Zadano je: $\overline{MN}$ [M (—3, —1, 2), N (—1, ?, 4)]; odredite N', ako je $\overline{MN} = 8$.

87.) Odredite drugu projekciju prušca $\overline{PR}$, ako je zadano: a) P (3, 2, 1), R (0, 5, ?) i kut $\alpha = 60^0$; b) P (— 1, — 3, ?), R (2, 2, 3) i kut $\alpha = 45^0$; c) P (1, — 2, —4), R (—2, — 1, ?) i kut $\alpha = 30^0$. (Sličan je zadatak u slici 38)

88.) Odredite prvu projekciju prušca $\overline{MN}$, ako je zadano: a) M (— 2, 1, 3), N (1, ?, —1) i kut $\beta = 45^0$; b) M (2, —3, —2), N (—1, ?, 1) i kut $\beta = 30^0$. (Sličan je zadatak u slici 38)

89.) Odredite prvu projekciju prušca $\overline{AB}$, ako je zadano: a) A (1, 3, 5), B (1, ?, - 2) i kut $\alpha = 30^0$; b) A (—1, —1, 1) B (2, ?, 3) i kut $\alpha = 60^0$. (Sličan je zadatak u slici 39)

90.) Odredite drugu projekciju prušca $\overline{PR}$, ako je zadano: a) P (3, 2, ?), R (0, 4, 1) i kut $\beta = 45^0$; b) P (2, — 1, — 3), R (— 2, 3, ?) i kut $\beta = 60^0$. (Sličan je zadatak u slici 39)

91.) Nacrtajte prvu i drugu projekciju prušca $\overline{TV} = 5$, ako je poznata: a) tačka $T(3, 5, 7)$, kut $\alpha = 30^0$, kut $\beta = 45^0$; b) tačka T $(2, -3, 6)$, kut $\alpha = 45^0$, kut $\beta = 30^0$; c) tačka $T(-2, 4, 3)$, kut $\alpha = 60^0$, kut $\beta = 30^0$. (Sličan je zadatak u slici 40) [U ovome zadatku pod c) moraće, ako je tačno crtano, projekcije prušca TV stajati normalno na os x. Zadatak pod c) ima samo 2 rešenja]

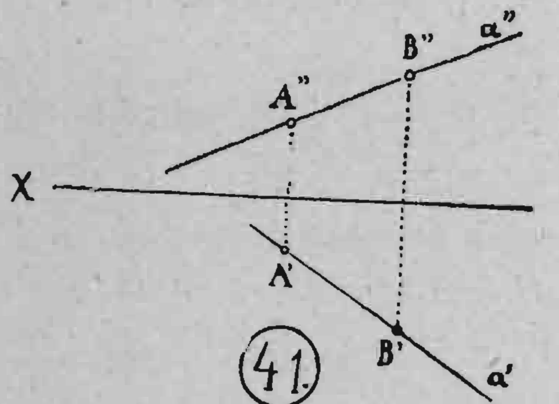
2 otsek

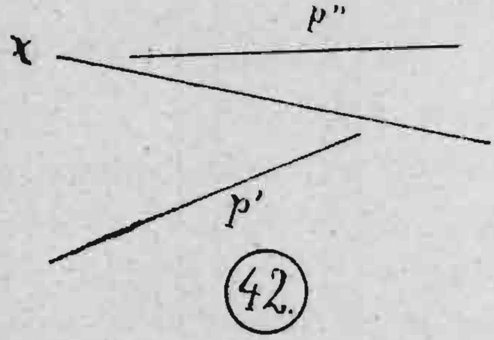
PRAVAC (PRAVA)

11. Projekcije pravca (prave)

Znamo da pravac nastaje, ako pružac neograničeno produžimo preko njegovih krajnjih tačaka. Prema tome možemo od svakog prušca preći na pravac tako da ga jednostavno produžimo. Učinimo li to isto s projekcijama prušca, postaće od projekcija prušca projekcije pravca. (Slika 41) I za pravac vredi zakon da se samo onda tačka nalazi na pravcu, ako ona ima svoju drugu projekciju na drugoj projekciji pravca, a svoju prvu projekciju na prvoj projekciji pravca.

Kod predočivanja prušca služili smo se predočenjem dveju njegovih krajnjih tačaka. Da on bude potpuno određen, dostatno je kod pravca nacrtati samo njegovu drugu i prvu projekciju (sl. 42). Tima



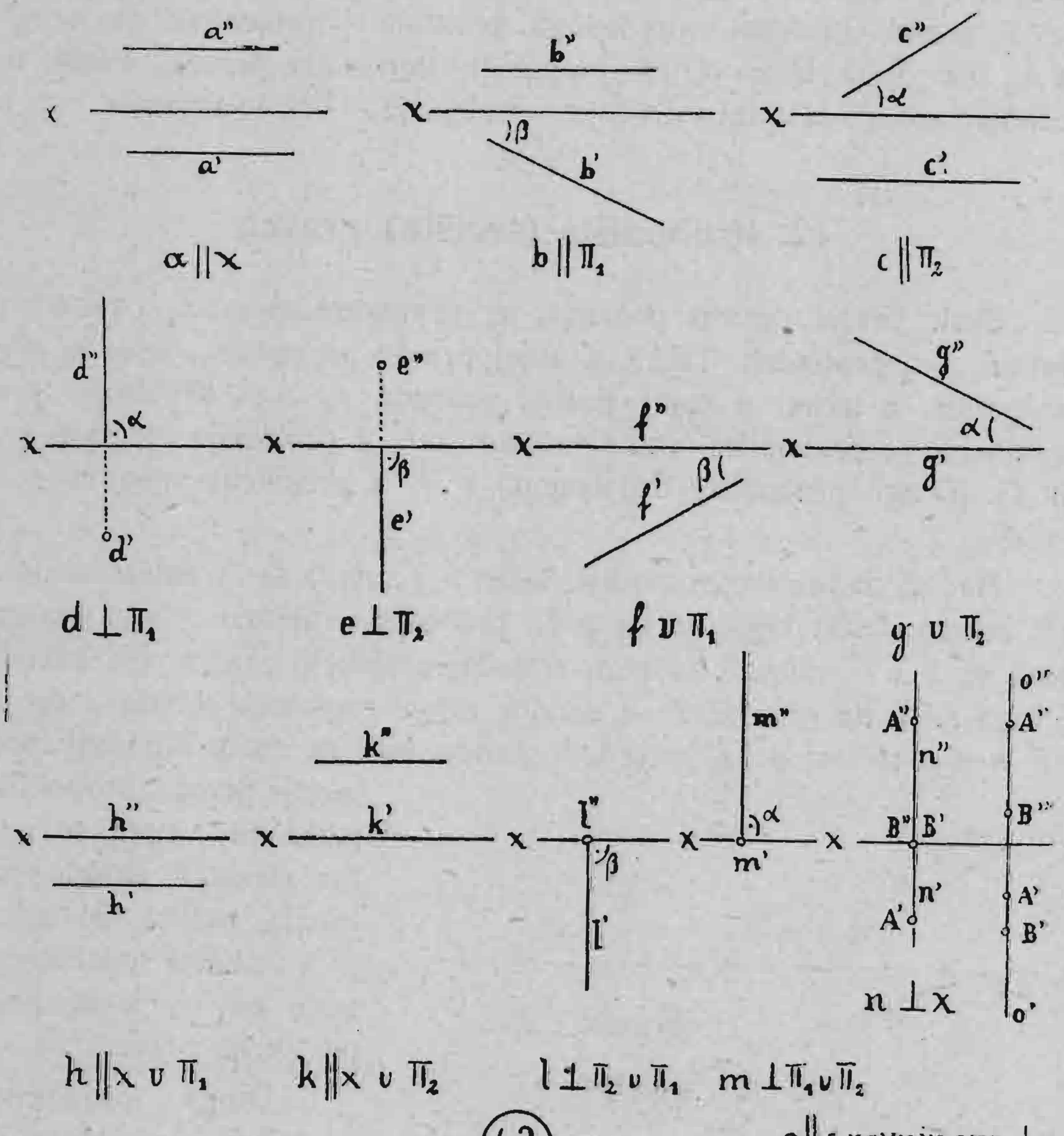


dvema projekcijama, a da i nisu istaknute dve tačke pravca, on je potpuno određen.

Izuzetak čini jedino pravac kojemu su obe projekcije normalne na os x. Kod ovakva pravca (pravci n i o u slici 43) ne dostaju samo njegove projekcije nego je potrebno da se na njemu istaknu dve tačke da on bude potpuno određen. Za pravce kojima su projekcije normalne na os x, kažemo da leže u ravnini, normalnoj na os x.

Kod određivanja prostornoga položaja pravca određenoga samo njegovim projekcijama, moramo si zamišljati gdegod na tom pravcu dve tačke. Odredivši položaj tih tačaka u prostoru određujemo i sam pravac.

Nacrtamo li drugu projekciju pravca sasvim po volji, pa onda prvu projekciju po volji, uvek je tim dvema projekcijama pravac potpuno određen. Jedino se ne sme učiniti da bude jedna od projekcija kosa prema osi x ili paralelna s osi x, a druga da bude normalna na os x ili da bude tačka. (Zašto?) Ako je jedna od projekcija normalna na os x, onda mora biti i druga projekcija normalna na os x ili može biti tačka. (Zašto?) Obe projekcije pravca ne mogu biti tačke. (*Zašto?*)



(43)

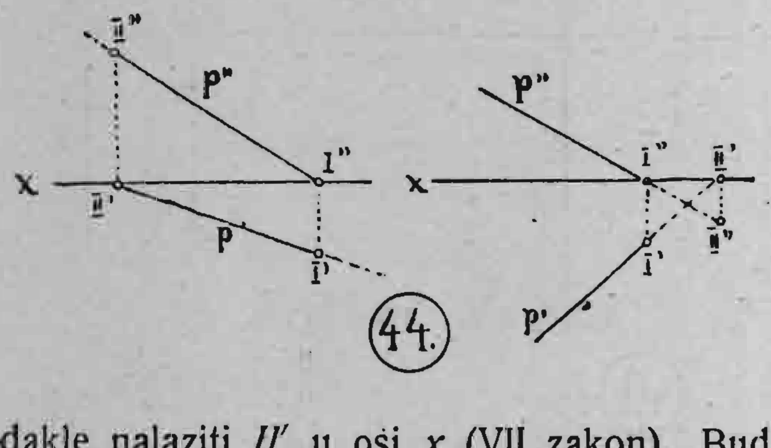
Za pravce koji su nagnuti prema π_1 i prema π_2 kažemo da su *općenoga položaja* (slika 41, 42 i 44), a oni drugi su *posebnoga položaja*. Kod pravaca općenoga položaja obe su projekcije nagnute prema osi x (slika 41, 42 i 44), a kod pravaca posebnoga položaja ima svaki od njih neku svoju karakteristiku. Prema tome ovisan je položaj projekcija prema osi x o položaju pravca prema π_1 i π_2 kao što je ovisan i položaj pravca u prostoru prema π_1 i π_2 o položaju projekcija prema osi x.

U slici 43 nacrtane su projekcije pravaca u raznim posebnim položajima. Kod svakoga pravca je zabeležen njegov položaj. Te položaje ne smete učiti napamet, nego trebate kod svakog pravca ispitati pomoću svojih kvadranata ispravnost projekcija. Kad se bude od vas zahtevalo da predočite pravac u nekome položaju, uzećete kvadrante, tamo postaviti pravac (olovku) određenoga položaja i projecirati ga na π_1 i na π_2, pa onda istom crtati projekcije dotičnoga pravca. Posle, tek vežbom, postići ćete da određujete projekcije i bez kvadranata.

12. Probodišta (secišta) pravca

Svaki pravac općena položaja, jer je nagnut prema π_1 i prema π_2, mora π_1 i π_2 probadati. Tačka, u kojoj pravac probada π_1, zove se *prvo probodište*, a tačka, u kojoj pravac probada π_2, zove se *drugo probodište*. Prvo probodište označivaćemo s I, a projekcije njegove s I' i s I''. Drugo probodište označujemo s II, a projekcije njegove s II' i s II''.

Budući da je prvo probodište tačka u π_1, mora se I'' nalaziti u osi x (VII zakon). Osim toga, jer je prvo probodište ujedno i tačka pravca, mora se I' i I'' nalaziti na odgovarajućoj projekciji pravca (IX zakon). Iz toga sledi *da je uvek I'' u secištu druge projekcije pravca s osi x, a I' u ordinali na prvoj projekciji pravca.* Kad se dakle određuju projekcije prvoga probodišta (slika 44), mora se najpre produžiti druga projekcija pravca do osi x (I''), i odavle spustiti normala na os x do prve projekcije pravca (I').

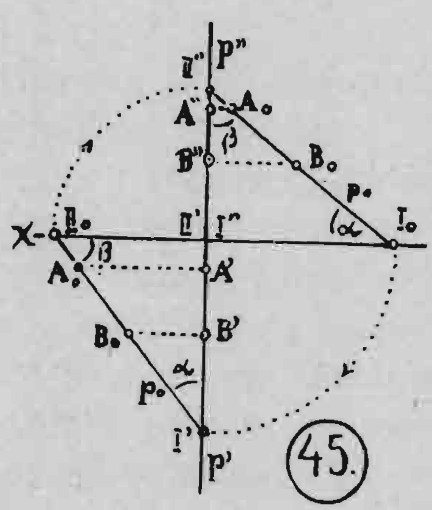


Drugo probodište je tačka u π_2. Mora se dakle nalaziti II' u osi x (VII zakon). Budući da je drugo probodište također tačka pravca, mora se II' i II'' nalaziti na odgovarajućoj projekciji pravca (IX zakon). Iz toga sledi *da je uvek II' u secištu prve projekcije pravca s osi x, a II'' u ordinali, na drugoj projekciji pravca.*

Prema tome, kad se određuju projekcije drugoga probodišta (slika 44), mora se najpre produžiti prva projekcija do osi x (II'), i odavle spustiti normala na os x do druge projekcije pravca (II'').

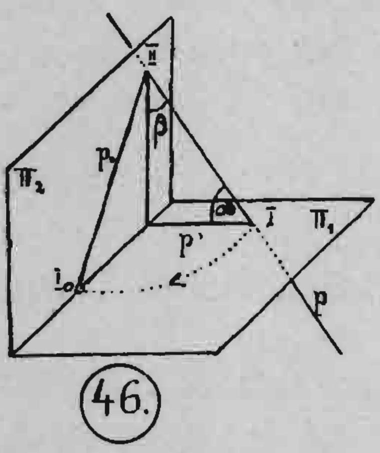
Kod pravaca paralelnih s π_1 (a, b, i c u slici 43), jer nemaju prvoga probodišta, ne možemo ni konstrukcijom odrediti to prvo probodište. Kazali smo da je za određenje prvoga probodišta potrebno odrediti najpre secište druge projekcije s osi x. Kako je druga projekcija pravaca paralelnih s π_1 paralelna s osi x, ne možemo odrediti njihovo secište s osi x, pa prema tome ni projekcije prvoga probodišta. I konstrukcijom, eto, dolazimo do toga da pravci paralelni s π_1 nemaju prvoga probodišta, odnosno možemo reći da im je prvo probodište (I) u neizmernosti.

Slično ćemo opaziti i kod pravaca paralelnih s π_2. Pravcima koji su paralelni s osi x ne možemo odrediti ni prvo ni drugo probodište, jer su oni paralelni s π_1 i s π_2.



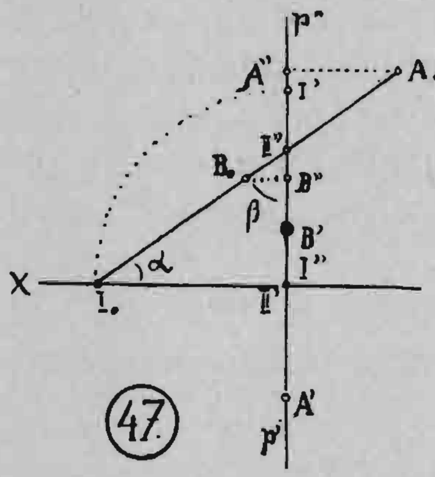
Ako je pravac u r vnini normalnoj na os x, onda se probodišta određuju pomoću preloženoga položaja pravca (IV' za kon). To je pokazano u slici 45. Trapez prometač preloži se u π_2 oko druge projekcije pravca U secištu preloženoga položaja pravca s drugom projekcijom pravca nalazi se II''. Prva projekcija I' nađe se sličnim postupkom.

U slici 45 prelagan je pravac p oko p'' u π_2 i oko p' u π_1. Da se dobije prvo i drugo probodište, ne treba oba prelaganja. Dosta je da se pravac preloži ili samo u π_2, ili samo u π_1. Kod pravaca drugačega položaja, videli smo, nije potrebno prelaganje za određenje probodišta.



U slici 46 prikazan je pravac p zorno i označena su njegova probodišta s I i s II. Pravac je rotiran oko svoje druge projekcije u π_2. Kod te rotacije klizi prvo probodište I po π_1 dok ne padne u π_2. Drugo probodište II ostaje kod te rotacije na miru. Prvo se, dakle, probodište nakon rotacije nalazi u osi x. Primenivši to u slici 45 gde već imamo preloženi položaj pravca p u π_2, dobili smo I_0 u secištu p_0 s osi x. Vraćajući I_0 natrag dobili smo I'. Kod toga moramo biti na oprezu, ako je prvo probodište takvoga pravca iza π_2, da onda kad vraćamo natrag, okrenemo I_0 nad os x, jer se kod tačaka iza π_2 nalazi prva projekcija iznad osi x. Tako isto treba paziti da li je drugo probodište nad π_1 ili pod π_1.

U slici 47 rotacijom samo u π_2 određena su oba probodišta pravca $p = AB$ [A (1, 2, 4), B (1, – 1, 2)]. Pravac p nije naime rotiran i u π_1 i u π_2 kako je to bilo pokazano u slici 45.



47

U slici 45 vidi se da je I' dobiveno na istome mestu rotacijom, kao i prelaganjem oko p' u π_1. Možemo, dakle, da odredimo I', a da ne prelažemo posebno pravac u π_1. Istim načinom možemo dobiti i drugo probodište prelaganjem pravca p samo u π_1.

Deo pravca u I kvadrantu između prvoga i drugoga probodišta je vidljiv. Tako je na pr. u slici 44 vidljivi deo pravca izvučen a nevidljivi crtkan. Uopće su vidljive samo one tačke pravca koje se nalaze u prvome kvadrantu.

Odredivši probodišta pravca lako određujemo njegov prostorni položaj, pa onda i kvadrante kroz koje on prolazi. Najzgodnije ćemo odrediti iz projekcija prostorni položaj pravca, ako uzmemo kao odredbenike pravca prvo i drugo probodište. Budući da je drugo probodište pravca tačka u π_2 (tačka u ravnini crtnje), *mora svaki pravac prolaziti upravo kroz $II \equiv II''$*. Odredimo li još položaj tačke I u prostoru pa spojimo II s I, dobijemo položaj pravca u prostoru.

Za pravce posebnoga položaja koji nemaju oba probodišta, odnosno, kojima se koje od probodišta nalazi u neizmernosti odredićemo položaj u prostoru onoga probodišta, koje za odnosni pravac postoji i onda još položaj kojegod tačke pravca. Spojnicom te tačke s odnosnim probodištem određen je prostorni položaj pravca. Promatrajući položaj pravca u prostoru određujemo kroz koje kvadrante on prolazi. U slici 44 onaj pravac levo ide iz II kvadranta u I. pa u IV.; onaj desno iz I. u IV., pa u III. Svaki pravac općenoga položaja, ako ne seče os x, prolazi kroz tri kvadranta.

Zadaci:

92.) Prikažite prostorni položaj pravaca nacrtnih u slici 43 i odredite njihovo probodište s π_1, odnosno s π_2.

93.) Nacrtajte projekcije pravca koji prolazi tačkom A (— 2,3, — 1) tako da on bude: a) $\perp \pi_2$; b) $\parallel x$; c) $\parallel \pi_1$; d) $\parallel \pi_2$; e) $\perp \pi_1$; f) u ravnini koja je normalna na os x. Odredite probodišta i vidljivost tih pravaca. [Da li je pravac pod f) određen?]

94.—104. Nacrtajte projekcije pravca $p = AB$; odredite njegovu vidljivost i probodišta; napišite kojim kvadrantima on prolazi i odredite obe projekcije tačke C ako je zadano:

94.) $A\,(-1, 3, -2)$, $B\,(3, -2, -5)$, $C\,(y = -1)$. Odredite dužinu prušca $\overline{BC}$.

95.) $A\,(-3, -2, -4)$, $B\,(2, -2, 3)$, $C\,(z = -3)$. Odredite dužinu prušca $\overline{AC}$.

96.) $A(3, 3, 0)$, $B(-1, -2, 3)$, $C(x = -4)$. Odredite dužinu prušca $\overline{I\,II}$.

97.) $A(3, -3, -2)$, $B(0, -1, 2)$, $C(y = 1)$. Odredite dužinu prušca $\overline{I\,II}$.

98.) $A(-1, 3, 2)$, $B(3, 1, -3)$, $C(z = 1)$. Odredite dužinu prušca $\overline{AC}$.

99.) $A(2, 3, 1)$, $B(-3, 0, 3)$, $C(y = 2)$. Odredite dužinu prušca $\overline{AC}$.

100.) $A(-3, -3, -3)$, $B(2, 1, 1)$, $C(z = 2)$. Odredite dužinu prušca $\overline{BC}$.

101.) $A(-2, 0, 0)$, $B(3, 2, 2)$, $C(x = -3)$. Odredite dužinu prušca $\overline{I\,II}$.

102.) $A(2, 3, 5)$, $B(2, 1, 2)$, $C(y = 4)$. Odredite dužinu prušca $\overline{AB}$.

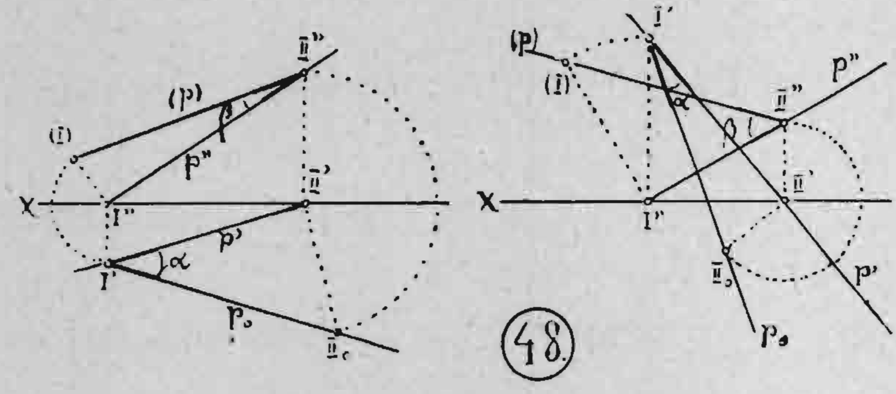
103.) $A(-3, 6, 4)$, $B(-3, 4, 2)$, $C(z = -2)$. Odredite dužinu prušca $\overline{BC}$.

104. $A(2, -3, 1)$, $B(2, 5, -4)$, $C(y = 2)$. Odredite dužinu prušca $\overline{I\,II}$.

13. Prikloni kutovi pravca

Već otpre znamo da se prikloni kut pravca prema nekoj ravnini očituje u kutu što ga čine preloženi položaj pravca i projekcija njegova. Budući da kod Mongeove projekcije projeciramo na dve ravnine, postoje i dva priklona kuta. *Prvi prikloni kut* (α) je kut pravca *prema* π_1 a *drugi prikloni kut* (β) je kut pravca *prema* π_2.

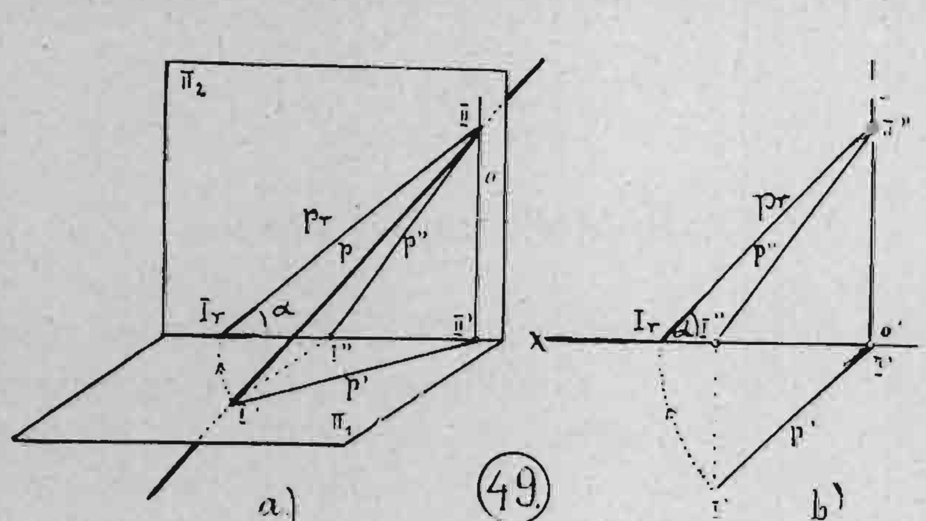
Veličinu kuta α određuje prva projekcija pravca i njegov preloženi položaj u π_1; veličinu kuta β određuje druga projekcija pravca i njegov preloženi položaj u π_2. U slici 48 preložen je pravac p oko p' tako da je preloženo njegovo drugo probodište u II_0. Prvo probodište I ostaje na miru kod prelaganja, jer se već nalazi u π_1. Kut $(p'\ p_0)$ daje kut α. Istim postupkom preložen je pravac p oko p'' u π_2. Kod toga se prelaganja preloži I u (I), a II ostaje na miru, jer je već u π_2. Kut $[p''\ (p)]$ daje kut β. Kod toga postupka zapravo nije ništa drugo učinjeno nego određena dužina prušca $\overline{I\ II}$ pomoću trapeza prometača. Kako taj trapez ima jednu od paralelnih stranica jednaku nuli izrodio se on prema tome u trokut. Vidimo, dakle, *da se kod određivanja priklonoga kuta pravca prema* π_1 *ili* π_2 *upotrebljava određivanje dužine onoga dela pravca koji je između prvoga i drugoga probodišta. To činimo pomoću trapeza prometača ili, možemo reći, i pomoću diferencionoga trokuta.* (Slika 48)



48

Priklone kutove pravca možemo odrediti još i tako da pravac rotiramo oko osi koja je normalna na π_1, odnosno na π_2, već prema tome koji od priklonih kutova želimo odrediti.

Tako ćemo na pr. prviprikloni kut pravca p (slika 49) odrediti zamišljajući da se pravac p rotira oko pomoćnoga pravca o dok ne padne u π_2. Pomoćni pravac o je onaj koji prolazi drugim probodištem pravca $p \perp \pi_1$. Ta rotacija prikazana je u slici 49 a) zorno, a u slici 49 b) u projekciji. Kod te rotacije ostaje II na miru, a I klizi po π_1

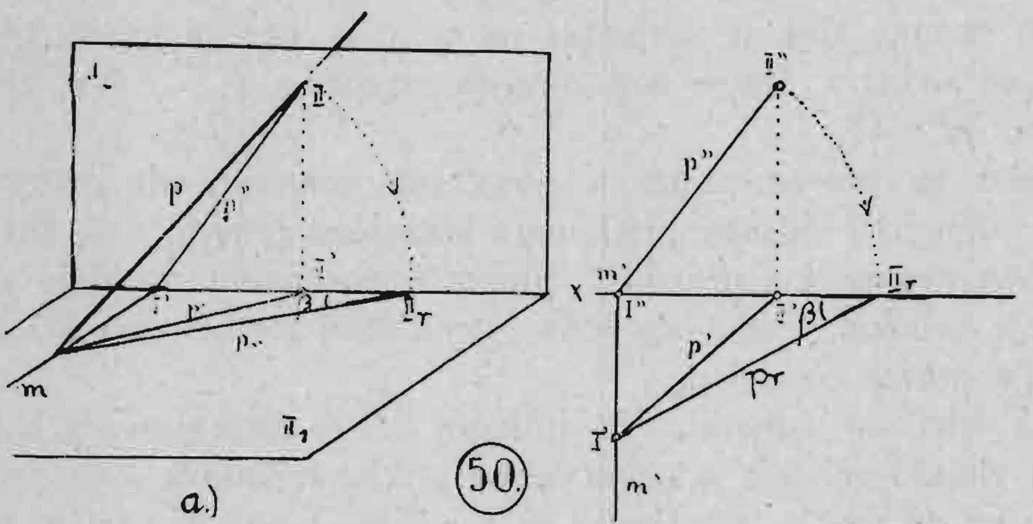


a) 49 b)

dok ne padne u os x. *Rotirano* I *označeno je s* I_r. Središte rotacije je u $o' \equiv II'$, a polumer rotacije je $\overline{I'\ II'}$. Kut, što ga zatvara spojnica

$II\,I_r$ s osi x, pokazuje veličinu priklonoga kuta pravca p prema π_1 (kut α). $\overline{II''I_r}$ je ujedno dužina dela pravca p od prvoga do drugoga probodišta.

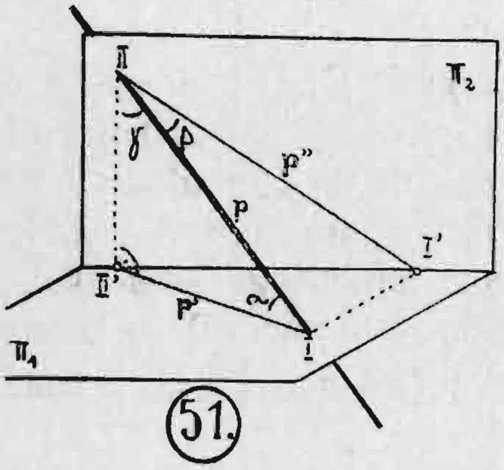
Kod određivanja drugoga priklonoga kuta rotiramo pravac p oko pravca m dok ne padne u π_1. Pravac m je pomoćni pravac koji prolazi prvim probodištem pravca $p \perp \pi_2$. Kod te rotacije I miruje, a II klizi po π_2 dok ne padne u os x. Rotirano II označeno je s II_r. Rotirani pravac p_r i os x pokazuju veličinu drugoga priklonoga kuta (kut β). Ta rotacija pravca p oko m prikazana je u slici 50 a) zorno, a u slici 50 b) u projekciji. $\overline{I'II_r}$ ujedno je dužina dela pravca p između prvoga i drugoga probodišta.



Vidimo, dakle, da veličinu prvoga i drugoga priklonoga kuta određujemo: 1) određivanjem dužine $(\overline{I\,II})$ dela pravca od prvoga do drugoga probodišta ili 2) rotacijom pravca oko pravca koji je normalan na π_1, odnosno na π_2, a prolazi drugim, odnosno prvim, probodištem pravca.

Već otpre znamo da možemo i pomoću diferencionoga trokuta odrediti priklon prušca. Dogodi li se da kod predočenoga pravca pada jedno od probodišta ili oba probodišta predaleko, onda se na pravcu odaberu dve tačke po volji. Te dve tačke pretstavljaju pružac na pravcu. Taj pružac ima isti prikloni kut prema π_1 i prema π_2 kao i pravac. Odredivši, dakle, dužinu toga prušca (slika 34, 35 i 36) pomoću diferencionoga trokuta odredili smo i priklone kutove pravca.

Sad ćemo još da razmotrimo odnošaj prvoga i drugoga priklonoga kuta pravca. U slici 51 nacrtan je pravac p sa svojim probodištima I i II. Kut $(p''\,p)$ je drugi prikloni kut (β) pravca p, a kut $(p'p)$ je prvi prikloni kut (α) pravca p. Znamo da je prikloni kut pravca prema nekoj ravnini najmanji kut od svih kutova, što ga taj pravac zatvara sa svima pravcima ravnine koji prolaze probodištem pravca s ravninom. Budući da p'' i $\overline{II\ II'}$ leže u π_2 i prolaze probodištem pravca p s π_2, mora biti kut β manji od kuta γ, jer je kut β prikloni kut pravca p. (Slika 51) Kako je $\gamma + \alpha = 90^0$, jer je trokut $II\ II'\ I$ pravokutan, te budući da je β manji od kuta γ, mora $\beta + \alpha$ biti manje od 90^0. *Dakle, suma priklonih kutova pravca prema π_1 i prema π_2 manja je od 90^0.*



51

$\alpha + \beta$ *imaće upravo 90^0* samo u onom slučaju, ako možemo pravcem položiti ravninu koja je normalna na os x, tj. *ako su projekcije pravca normalne na os x*. Da je kod takvoga pravca $\alpha + \beta = 90^0$, vidi se u slici 45, 46 i 47.

Ako se pravac nalazi u posebnom položaju, nije potrebno posebno određivati veličinu priklonoga kuta toga pravca. Kut, što ga zatvara ona neparalelna projekcija pravca u posebnom položaju s osi x, pokazuje veličinu priklonoga kuta prema onoj ravnini projekcija s kojom nije pravac paralelan.

U slici 43 označeni su prikloni kutovi onih pravaca kod kojih odmah vidimo veličinu njihovu. Suma priklonih kutova kod pravaca n i o u slici 43 iznaša 90^0. Pravci ***a***, h i k ne zatvaraju s π_1 ni s π_2 nikakve kutove.

X zakon: Suma priklonih kutova pravca prema π_1 i prema π_2 ne može biti veća od 90^0.

Zadaci:

105.—110. Odredite priklone kutove prema π_1 i prema π_2 i vidljivost pravca p = AB, ako je zadano:

105.) $A(-2, 3, 1)$, $B(2, 1, 5)$ [pomoću određenja dužine prušca $\overline{I\ II}$].

106.) $A(1, 1, 2)$, $B(4, 3, 1)$ [pomoću rotacije].

107.) $A(-2, 1, 3)$, $B(-4, 0{,}5, 1)$ [pomoću rotacije].

108.) $A(1, 1, 4)$, $B(5, 0{,}5, 3)$ [pomoću određenja dužine prušca $\overline{I\ II}$].

109:.) $A(0, 2, 4)$, $B(-4, 0{,}5, 0{,}5)$ [pomoću određenja dužine prušca $\overline{I\ II}$].

110.) $A(-1, 3, 2)$, $B(3, 0{,}5, -2)$ [pomoću rotacije].

111.) Nacrtajte projekcije pravca m i odredite njegov prikloni kut, ako on prolazi tačkom $M(2, 3, 2)$ i ako je: a) paralelan s π_1; b) paralelan s π_2; c) normalan na π_1; d) normalan na π_2.

112.) Odredite projekcije pravca s, ako on prolazi tačkom $S(0, 2, 3)$ i ako je: a) paralelan s π_1, a s π_2 zatvara kut $\beta = 60^0$; b) paralelan s π_2, a s π_1 zatvara kut $\alpha = 30^0$.

113.) Predočite pravac općenoga položaja u ravnini sumernosti i odredite njegove priklone kutove. (Što ste opazili kod priklonih kutova?)

114.) Predočite pravac općenoga položaja u ravnini istovetnosti i odredite njegove priklone kutove. (Što ste opazili kod priklonih kutova?)

115.) Zadana je tačka II (3, 0, 4); odredite projekcije tačke A ($y = 1$) na pravcu p, ako on prolazi tačkom II i ima priklone kutove $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$. (Pazite na položaj pravca p u prostoru)

116.) Tačkom M (0, 2, 3), položite pravac m koji ima priklone kutove $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$. Odredite projekcije tačke N na pravcu m, ako se tačka N mora nalaziti u drugome kvadrantu.

117.) Odredite probodišta pravca p, ako on prolazi tačkom P (3, 4, 3) i normalan je: a) na ravninu sumernosti; b) na ravninu istovetnosti ($\alpha = \beta = 45^0$).

118.) Odredite p' i kut α, ako je od pravca $p = AB$ [A (—2, 4, 1), B (1, ?, 3)] poznat kut $\beta = 30^0$. (Pogledajte sliku 38)

119.) Odredite r'' i kut β, ako je od pravca $r = MN$ [M (3, 2, 5), N (—1, 4, ?)] poznat kut $\alpha = 60^0$. (Pogledajte sliku 38)

120.) Nacrtajte projekcije pravca, ako on prolazi tačkom P (0, 3, 4) i ako ima priklone kutove $\alpha = 30^0$, $\beta = 45^0$. (Pogledajte sliku 40)

121.) Odredite p' i kut β, ako je od pravca $p = MN$ [M (—2, ?, 3), N (1, 2, 1)] poznat i kut $\alpha = 60^0$. (Pogledajte sliku 39)

122.) Odredite p'' i kut α, ako je od pravca $p = PR$ [P (3, 1, ?), R (—1, – 3, 5)] poznat i kut $\beta = 60^0$. (Pogledajte sliku 39)

123.) Odredite p'', ako je od pravca p poznato p', njegova tačka A (2, 3, 4) i dužina prušca od A do prvoga probodišta $\overline{AI} = 6$; p' s osi x zatvara 45^0.[1])

124.) Odredite p', ako je od pravca p poznato p'', njegova tačka M (0, 2, 4) i dužina prušca od M do drugoga probodišta $\overline{MII} = 6$; p'' s osi x zatvara kut od 60^0.

125.) Odredite geometričko mesto prvih probodišta sviju pravaca koji prolaze tačkom V (2, 3, 6), ako je od tačke V do prvoga probo-

---

[1]) Kut, što ga zatvara projekcija s osi x, merimo desno od secišta projekcije s osi x, i to uvek od osi prema dole za prvu projekciju, a od osi x prema gore za drugu projekciju.

dišta $\overline{VI} = 5$. Pokažite veličinu priklona α svih tih pravaca. (Svi ti pravci čine stožac (kupu) kojemu je vrh u tački V, a baza u π_1)

126.) Odredite geometričko mesto drugih probodišta sviju pravaca koji prolaze tačkom V (1, 5, 2), ako je od tačke V do drugoga probodišta $\overline{VII} = 4$. Pokažite veličinu priklona β svih tih pravaca.

127.) Odredite geometričko mesto prvih probodišta sviju pravaca koji prolaze tačkom V (—1, 2, 4), ako svi ti pravci zatvaraju s π_1 kut $\alpha = 60^0$.

128.) Odredite geometričko mesto drugih probodišta sviju pravaca koji prolaze tačkom V (0, —1, 5), ako svi ti pravci zatvaraju s π_2 kut $\beta = 30^0$.

129.) Odredite na pravcu $p = MN$ [M (—1, 2,5, 1), N (1, 0,5, 1,5)] tačke P i R koje su jednako udaljene od π_1 i od π_2. (Od P' do osi x = od P'' do osi x; tačka P je u ravninl sumernosti. $R' \equiv R''$; tačka R je u ravnini istovetnosti. Pogledajte sliku 126)

III DEO

PROJECIRANJE NA TRI RAVNINE

14. Bočna ili profilna ravnina

a) Tačka

U konstruktivnim zadacima nacrtne geometrije često je potrebno pomagati se trećom ravninom projekcija da se dođe do željenoga rezultata. To činimo da se pojednostavi postupak ili da bude telo predočeno i svojom trećom projekcijom, te time bolje uočeno.

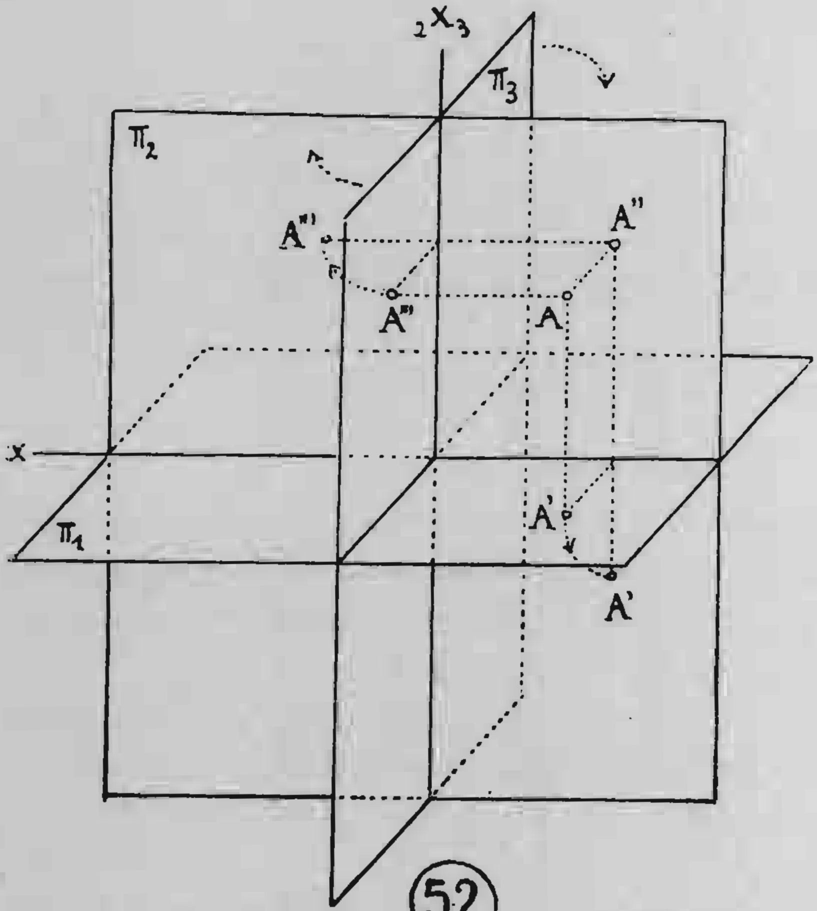
Zapravo postoje tri vrste trećih ravnina projekcija. U ovome paragrafu zabavićemo se trećom ravninom koja je normalna na π_1 i na π_2 i razmotrićemo odnošaj projekcija na tu ravninu prema projekcijama na π_1 i na π_2.

Iz stereometrije znamo *da je ravnina koja je normalna na dve ravnine, normalna i na presečnicu tih dveju ravnina.* Postavimo li neku ravninu normalno na π_1 i na π_2, biće ona normalna i na os x. Projecira li se na takvu ravninu, normalnu na os x, onda se ona naziva *treća ravnina projekcija* ili *profilna ili bočna ravnina.* Tu ravninu imenujemo π_3, a projekcije na nju nazivamo *trećim projekcijama.* Treće se projekcije označuju znakom triju crtica ($'''$). Na pr. A''' (A triput crtano) ili p''' itd. Presečnicu ravnina π_3 i π_2 nazivamo osju ${}_2x_3$, a presečnicu ravnina π_3 i π_1 osju ${}_1x_3$. Prema tim nazivima često se os x naziva osju ${}_1x_2$. Os ${}_1x_3$ kod profilne ravnine, ne ćemo upotrebljavati u ovoj knjizi, jer sve što možemo da postignemo osju ${}_1x_3$ postizava se i osju ${}_2x_3$.

Treću projekciju neke tačke dobivamo, ako pustimo normalu na π_3 iz te tačke. Probodište te normale s ravninom π_3 određuje treću projekciju tačke.

U slici 52 zorno su predočene sve tri ravnine projekcija. Izvan tih ravnina nalazi se tačka kojoj je određena prva, druga i treća projekcija. Ako hoćemo, da A' dođe u π_2, znamo, da moramo π_1 rotirati oko osi x dole dok ne padne u π_2. Kako je A''' izvan ravnine crtnje (π_2), moraćemo i π_3 rotirati da A''' dođe u π_2. Ravnina π_3 rotira se oko osi ${}_2x_3$, svejedno je desno ili levo, dok ne padne u π_2.

Ravnina se π_3 zove bočna ravnina jer se uzima desno ili levo (kao o boku) od onoga što je već predočeno svojom prvom i drugom projekcijom, a profilna zato, jer su slike u njoj crtane u profilu. U slici 52 prednji je deo ravnine π_3 preložen levo oko osi ${}_2x_3$ u π_2. Ravnina π_3 smela se preložiti u π_2 i desno, ali to nije učinjeno zato, jer je leva strana slobodnija. Time što smo preložili π_3 u π_2 dospelo je i A''' u ravninu crtnje (π_2). Iz slike 52 vidimo da je od A''' do osi ${}_2x_3$ jednako daleko kao od tačke A u prostoru do π_2. Kako je $\overline{A\,A''}$ = od A' do osi x, mora biti i A''' do osi ${}_2x_3 = A'$ do osi x. Iz toga sledi



52.

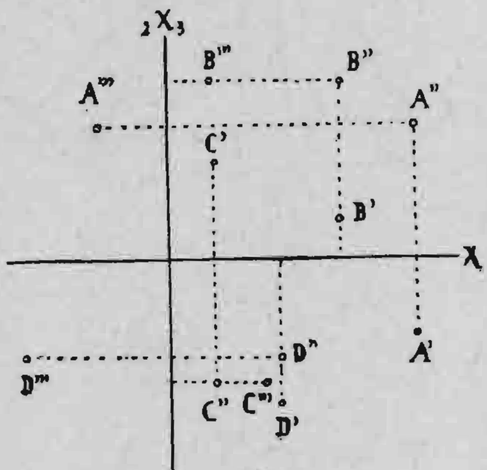
XI zakon: Udaljenost od treće projekcije svake tačke do osi ${}_2x_3$ jednaka je udaljenosti od prve projekcije te tačke do osi x.

Kod profilne ravnine stoji uvek os ${}_2x_3$ normalno na os x. (Slika 53) Budući da su ravnine π_2 i π_3 jedna na drugoj normalne, *vrediće isti zakoni* za odnošaj između *druge i treće projekcije kao* oni za odnošaj između *prve i druge projekcije*. U prvome redu spojnica druge i treće projekcije neke tačke uvek je normalna na os ${}_2x_3$. (Zašto?) (Pročitajte § 7 u početku) Iz prve i druge projekcije dobije se treća projekcija tačke tako da se u drugoj projekciji pusti normala na os ${}_2x_3$, i na tu normalu od osi ${}_2x_3$ nanese udaljenost od prve projekcije tačke do osi x. Os ${}_2x_3$ uzima se po volji.

U slici 53 u A'' puštena je normala na os ${}_2x_3$ i na tu normalu nanesena je levo od osi ${}_2x_3$ udaljenost od A' do osi x. Mogli smo učiniti i tako, da smo udaljenost od A' do osi x naneli na desno od osi ${}_2x_3$. Zavisi o tom na koju smo stranu preložili ravninu π_3.

Kad se određuju treće projekcije od više tačaka koje su u raznim kvadrantima, moramo se uvek ravnati po trećoj projekciji tačke koju smo prvu odabrali. Sve tačke s iste strane π_2 imaju svoje treće projekcije na istoj strani osi ${}_2x_3$. Iz toga sledi

XII zakon: Sve tačke, kojima su prve projekcije na raznim stranama osi x, imaju i treće projekcije na raznim stranama osi ${}_2x_3$.



53

U slici 53 sve tačke, kojima su prve projekcije ispod osi x, imaju treće projekcije s sleve strane osi ${}_2x_3$, a tačke, kojima su prve projekcije iznad osi x, imaju svoje treće projekcije s desne strane osi ${}_2x_3$. Smelo je to biti i okrenuto. U slici 53 preloženo je π_3 u π_2 levo, a da smo na drugu stranu postavili treće projekcije tačaka, onda bi π_3 bilo preloženo desno u π_2.

U slici 53 pokazane su treće projekcije tačaka u raznim kvadrantima. Iz slike se tačno razabira da se treće projekcije onih tačaka, kojima su prve projekcije ispod osi x, nalaze levo od osi ${}_2x_3$, a desno od osi ${}_2x_3$ one, kojima su prve projekcije iznad osi x.

Zadaci:

130) Odredite treće projekcije tačaka A (1, — 2, 3); B (3, 4 — 2); C (2, 3, 1); D (4, — 3, —1).

131.) Odredite treće projekcije tačaka A (— 2, 0, 3); B (2, 3, 0); C (1, 0, 0); D (— 1, 0, — 4); E (— 3, — 2, 0).

132.) Odredite prve projekcije tačaka, ako ste ih po volji odabrali tako da su im poznate druge i treće projekcije.

133.) Koja je karakteristika trećih projekcija tačaka koje leže u π_2?

134.) Koja je karakteristika trećih projekcija tačaka koje leže u π_1?

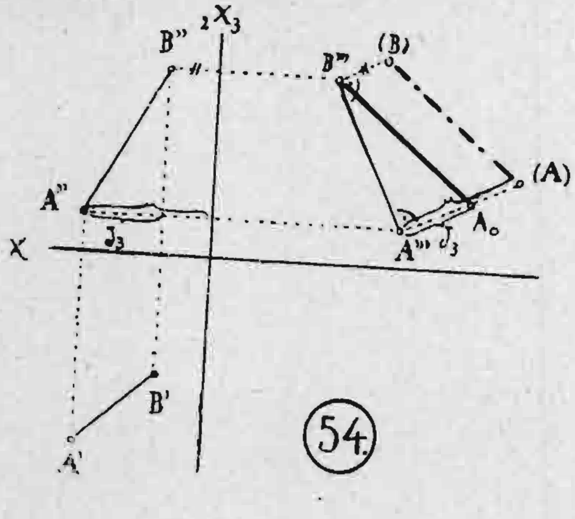
135.) Koja je karakteristika prvih i drugih projekcija tačaka koje leže u π_3?

b) Pružac i pravac

Ravnom spojnicom trećih projekcija dveju tačaka određena je treća projekcija prušca. Produži li se treća projekcija prušca preko svojih krajnjih tačaka, dobije se treća projekcija pravca.

Dužina se prušca određuje prelaganjem na π_3 pomoću trapeza prometača ili pomoću diferencionoga trokuta.

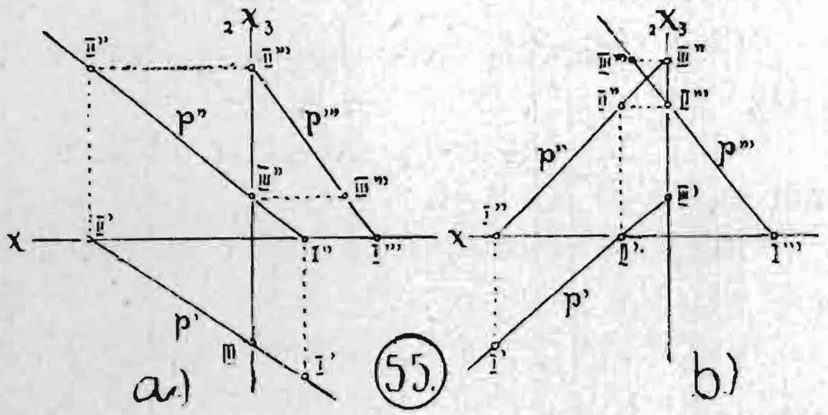
U slici 54 prikazana je dužina prušca $\overline{AB}$ u trećoj projekciji pomoću diferencionoga trokuta i pomoću trapeza prometača.



Iz same se slike razabira kako je nađena diferencija δ_3, te kako je pomoću te diferencije određena dužina prušca $\overline{AB}$. Diferenciju δ_3 moglo se je naneti i na normalu u B'''. Iz slike se također vidi kako je određena dužina prušca pomoću trapeza prometača. Samo se sobom razume da će ta dužina biti potpuno jednaka dužini prušca određenoga prelaganjem na π_1 ili na π_2.

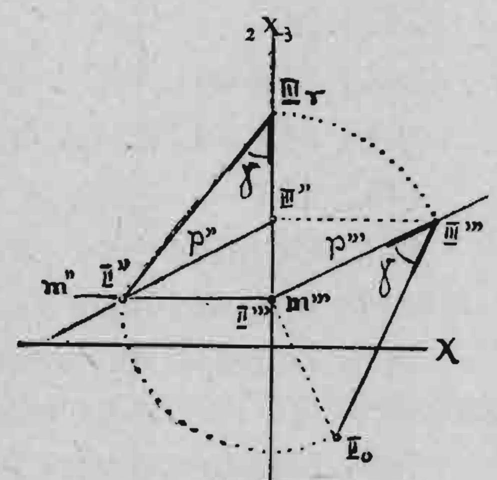
S ravninama π_3 i π_2 postupa se isto kao i s ravninama π_1 i π_2. Razlika je, mogli bismo reći, samo u tome, što os x ne stoji horizontalno već vertikalno i što su projekcije označene s- $''$ i s- $'''$ a ne s-$''$ i s-$'$.

U slici 55 a) i b) prikazan je pravac p sa sva tri svoja probodišta. Treću projekciju pravca odredili smo da smo odredili treće projekcije prvoga i drugoga probodišta. Spojnica I''' II''' daje p'''. Kako smo dobili prvo i drugo probodište i njihove treće projekcije, znamo već otpre. Treće probodište je tačka III u kojoj pravac p probada ravninu π_3. Budući da sve tačke koje leže u π_3 imaju svoje druge projekcije u osi $_2x_3$, a kako je tačka III na pravcu p, mora se III'' nalaziti u secištu p'' s osi $_2x_3$. Budući da se prema IX zakonu tačka nalazi na pravcu samo u onome slučaju, ako se i treća projekcija tačke nalazi na trećoj projekciji pravca, moraće se III''' nalaziti u p'''. *Da, se, dakle odredi treće probodište pravca, mora se druga projekcija pravca produžiti do osi* $_2x_3$ *(*III''*) i u tome secištu pustiti normala do treće projekcije pravca (*III'''*).* Tako je dobiveno III'' i III'''. Prva projekcija trećega probodišta (III') mora se nalaziti na prvoj projekciji pravca (p'). Ako je tačno crtano, mora biti udaljenost od III''' do osi $_2x_3$ jednaka udaljenosti od III' do osi x, jer je treća projekcija tačke uvek jednako udaljena od osi $_2x_3$ kao prva projekcija odnosne tačke od osi x.



U slici 55 b) nalazi se *III'* iznad osi x, a *III'''* s leve strane osi $_2x_3$, jer smo kod određivanja *I'''* (to je prva tačka kojoj smo odredili treću projekciju) ravninu π_3 preložili desno. To znači da pravac p probada ravninu iza π_2, a π_1 pred π_2. U slici 55 a) to nije slučaj, jer se prvo i treće probodište nalazi pred π_2. Vidi se, dakle, kako mora doći kod konstrukcije do izražaja raznolikost položaja tačke u prostoru prema π_2 i u trećoj projekciji.

U slici 56 određen je treći prikloni kut γ pravca p. Prema prvome i drugome priklonom kutu jasno je da je i *treći prikloni kut pravca najmanji kut što ga pravac zatvara s ravninom* π_3. U slici 56 nije crtana prva projekcija pravca p, nego samo druga i treća projekcija pravca samo zato da se bolje istakne jednakost postupka kod određivanja trećega priklonoga kuta s postupkom određivanja prvoga, odnosno drugoga, priklonoga kuta. Određivanje trećega priklonoga kuta pokazano je u slici 56 na dva načina, i to: 1) pomoću određenja dužine dela pravca od drugoga do trećega probodišta i 2) pomoću rotacije pravca u π_2 oko pomoćnoga pravca $m \perp \pi_3$ (m je *os* rotacije, a $\overline{II'''III'''}$ je polumer rotacije). Ta dva načina za određenje priklonoga kuta upotrebljavali smo i kod određivanja prvoga i drugoga priklonoga kuta.



56

Postavi li se u slici 56 os $_2x_3$ horizontalno i druga projekcija smatra prvom projekcijom, a treća drugom projekcijom, odgovaraće π_2 ravnini π_1, a π_3 ravnini π_2. Ako sada u tom položaju određujemo prikloni kut prema π_2 (a doista je to prikloni kut prema π_3), dobićemo istu konstrukciju koja je pre bila provedena kad smo određivali treći prikloni kut. Vidi se dakle potpuna podudarnost postupka kod određivanja trećega priklonoga kuta s onim drugoga, odnosno prvoga, priklonoga kuta.

Već pre je kazano da između druge i treće projekcije vrede isti zakoni kao između prve i druge projekcije. Ponovo se upozoravate na I i II zakon u § 2 i III zakon u § 3. Vašim kvadrantima možete još priključiti i ravninu π_3, pa se i sami još uveriti o ispravnosti svih zakona za π_2 i π_3, koji vrede za π_1 i π_2.

Zadaci:

136. — 140. Nacrtajte treću projekciju prušca $\overline{AB}$, ako je on ovako zadan:

136.) A (—2, 3, 2), B (3, 1, 5).

137.) A (—1, —2, 4), B (3, 4, 1).

138.) A (2, 1, 4), B (2, 3, 1).
139.) A (—1, —2, 3), B (—1, 4, 1).
140.) A (1, 2, 4), B (—3, 2, 4).
Koji položaj ima pružac $\overline{AB}$ obzirom na π_3?

141. — 145. Odredite dužinu prušca $\overline{MN}$ pomoću trećega trapeza prometača, ako je pružac ovako zadan·

141.) M (2, 1, 4), N (5, 4, 3).

142.) M (—1, —3, 1), N (3, 2, 4).

143.) M (—1, —3, —2), N (2, 3, —1).

144.) M (—1, 2, 3), N (2, 2, 1).

145.) M (—3, 2, 1), N (—3, 5, 2).

146.) Odredite prvu projekciju i sva tri probodišta pravca, ako je poznata njegova druga i treća projekcija. (p'' i p''' uzmite po volji)

147.) Odredite prvu projekciju i prvo probodište pravca, ako je njegova druga i treća projekcija paralelna s osi $_2x_3$.

148.) Odredite prvu i drugu projekciju i treće probodište pravca, ako je njegova treća projekcija tačka. (p''' uzmite po volji)

149.) Odredite prvu i treću projekciju i prvo i treće probodište pravca, ako je njegova druga projekcija tačka. (p'' uzmite po volji)

150.) Odredite drugu i treću projekciju i drugo i treće probodište pravca, ako je njegova prva projekcija tačka. (p' uzmite po volji)

151.) Nacrtajte veličinu trokuta A (1, 2, 3), B (1, 4, 1), C (1, 1, 5). (Zašto je $A''' B''' C''' \cong ABC$?)

152.) Predočite kvadrat $ABCD \parallel \pi_3$, ako je poznata njegova tačka A (—3, 4, 3) i tačka B (—1, 3, 4). (Zašto je $A''' B''' C''' D''' \cong ABCD$?)

153.) Istražite da li se tačke A (3, 2, 4), B (3, 1, 2) i C (3, 5, 1) nalaze se na istome pravcu?

154.) Koliko je tačka P (1, —2, 1) udaljena od pravca $a = AB$ [A (1, 2, 3), B (1, 4, 1)]?

155.) Odredite treći prikloni kut pravca $p = MN$ [M (—2, 2, 3), N (—4, 1, 5)].

156.) Odredite treći prikloni kut pravca $s = ST$ [S (1, 3, 2), T (—1, 1, 1)].

157.) Odredite prvi i drugi prikloni kut pravca $p = PR$ [P (2, 3, 1), R (2, 1, 4)] pomoću njegove treće projekcije.

158.) Odredite probodišta pravca p, ako on prolazi tačkom A (2, 3, 1) i paralelan je s π_3, a s π_2 zatvara kut $\beta = 30^0$.

159.) Odredite projekcije tačaka B i C istostranoga trokuta ABC, ako je vrh trokuta u A (—1, 3, 1), stranica $AB = 3$ i zatvara s π_1 60^0, a s π_2 30^0. Trokut ABC leži u ravnini koja je paralelna s ravninom π_3.

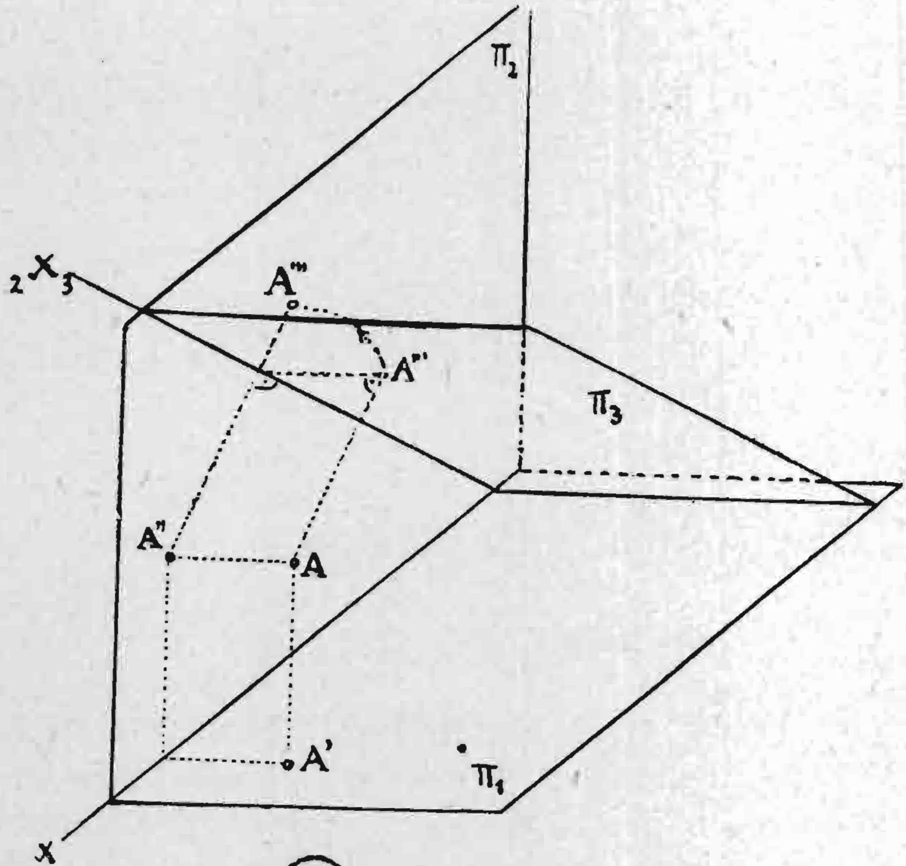
160.) Odredite sva tri probodišta pravca općenoga položaja, ako poznajete njegovu treću i prvu projekciju. (Treću i prvu projekciju pravca uzmite po volji, ali prema zadatku moraju biti obe projekcije kose prema osi $_2x_3$, i prema osi x.)

15. Transformaciona ravnina

a) Tačka

Videli smo, naročito kod zadataka prijašnjega paragrafa, da se najčešće služimo profilnom ravninom u slučajevima u kojima je ono što predočujemo normalno na π_3 ili paralelno π_3. Od profilne ravnine nemamo gotovo nikakve koristi, ako se njome želimo ispomoći kod nečega što je u općenome položaju prema π_3. U takvim slučajevima služimo se novom vrstom projekcionih ravnina. Takva projekciona ravnina imenuje se također π_3, a normalna je ili samo na π_2 ili samo na π_1. Projeciranjem na tu novu ravninu π_3 koja je po strani zamenjujemo ravnine projekcija, tj. premeštavamo (transformiramo) udruženu prvu i drugu projekciju u položaj da bude prva, odnosno druga, projekcija udružena s trećom. To nadopunjavanje ravnina projekcija π_1 i π_2 naziva se *transformacijom*, a sama ravnina π_3 transformaciona ravnina.

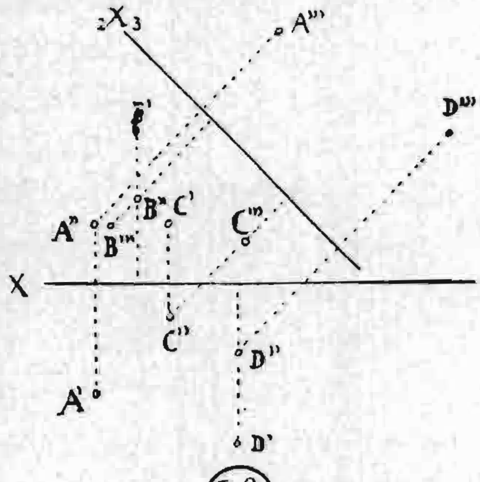
U slici 57 prikazane su zorno ravnine π_1, π_2 i π_3. Ravnine π_1 i π_2 stoje u svome običnome položaju, dok je ravnina π_3 postavljena normalno na π_2, a s ravninom π_1 zatvara neki šiljati kut. U takvome položaju *zove se ravnina π_3 transformaciona ravnina.* Da se odredi treća projekcija neke tačke (na π_3), pusti se iz tačke normala na π_3. U secištu te normale s π_3, nalazi se treća projekcija odnosne tačke. Budući da je tako dobivena treća projekcija tačke izvan ravnine crtnje, mora se π_3 preložiti u ravninu crtnje (π_2). Zbog toga se ravnina π_3 rotira oko presečnice ravnina π_3 i π_2, svejedno na koju stranu, dok ne padne u π_2. Tom rotacijom ravnine π_3 dospe i treća projekcija tačke u π_2. Time se udruže druga i treća projekcija. Presečnicom ravnina π_2 i π_3 nastane os $_2x_3$. I ovde će spojnica druge projekcije s trećom projekcijom tačke stajati normalno na os $_2x_3$.



(57)

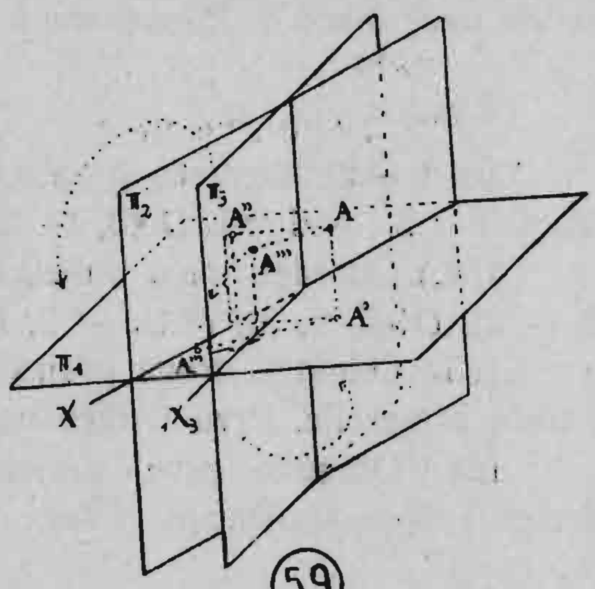
U slici 57 vidimo da je (pre prelaganja ravnine π_3 u π_2) udaljenost od A''' do osi $_2x_3$ jednaka udaljenosti $\overline{AA''}$. Budući da je $\overline{AA''}$ = od A' do osi $x=y$ tačke A, biće i nakon preložaja ravnine π_3 u π_2 od A''' do osi $_2x_3$ = od A' do osi x. Dakle, i kod transformacije za određenje treće projekcije neke tačke moraće se puštati normala iz druge projekcije na os $_2x_3$, i od sečišta te normale s osi $_2x_3$ naneti udaljenost od prve projekcije do osi x. (§ 14, zakon X) Tačke na raznim stranama ravnine π_2 imaće i svoje treće projekcije na raznim stranama osi $_2x_3$. Vidimo, dakle, da je postupak isti kao i kod profilne ravnine s tom razlikom, što os $_2x_3$ ne stoji normalno na os x, već je os $_2x_3$ prema osi x po volji nagnuta.

U slici 58 određene su na taj način treće projekcije tačaka koje se nalaze u raznim kvadrantima. Budući da su tačke A i D (I i IV kvadrant) s iste strane ravnine π_2 imaju i svoje treće projekcije A''' i D''' s iste strane osi $_2x_3$. Tačke B i C (II i III kvadrant) imaju B''' i C''' s iste strane osi $_2x_3$, ali protivno od A''' i D''', jer se nalaze s druge strane ravnine π_2 negoli tačke A i D. Iz prvih projekcija pojedinih tačaka razabiramo raznolikost položaja tačaka obzirom na π_2. Ako su prve projekcije tačaka na raznim stranama osi x, onda su i njihove treće projekcije na raznim stranama osi $_2x_3$. Vidimo, dakle, da i za transformacionu ravninu vredi XI zakon u § 14.



(58)

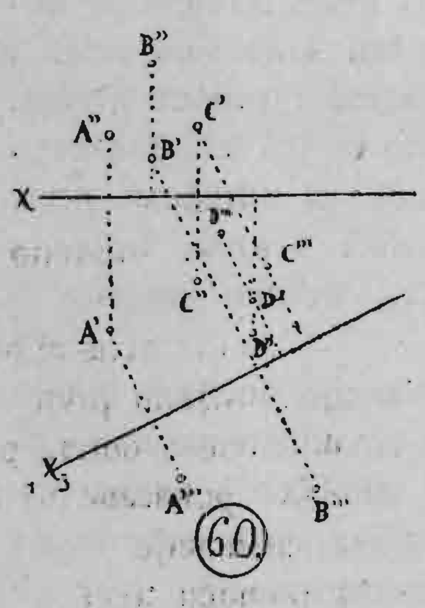
Kao što smo pre uzeli ravninu π_3 normalno samo na π_2, tako isto možemo da uzimamo ravninu π_3 normalno samo na π_1, tako da bude nagnuta prema ravnini π_2. U ovome slučaju je *presečnica ravnina* π_1 i π_3 os ${}_1x_3$, a udružene će biti prva i treća projekcija. U slici 59 zorno je prikazana takva ravnina π_3. Budući da su prva i treća projekcija udružene projekcije, mora spojnica prve projekcije tačke s trećom projekcijom stajati normalno na os ${}_1x_3$. Kao i dosad, preloži se π_3 oko osi ${}_1x_3$ dok ne padne u π_1. Dosad smo prelagali oko presečnice (os ${}_2x_3$) ravnina π_2 i π_3 u π_2, a sada, jer prelažemo oko presečnice (os ${}_1x_3$) ravnina π_1 i π_3, ne možemo π_3 preložiti u π_2, nego samo u π_1, a onda istom zajedno preloženu ravninu π_3 i ravninu π_1 oko osi x preložimo u π_2, i to, kao uvek, prednji deo ravnine π_1 dole. Od treće projekcije tačke do osi ${}_1x_3$ biće isto tako daleko kao od tačke u prostoru do prve projekcije. Budući da je od tačke u prostoru do prve projekcije isto toliko, koliko je od druge projekcije do osi x, sledi



59

XIII zakon: Treća se projekcija tačke dobije, ako se u prvoj projekciji tačke pusti normala na os ${}_1x_3$ i nanese od secišta te normale s osi ${}_1x_3$ na normalu udaljenost od druge projekcije do osi x.

Budući da se prelaže oko osi ${}_1x_3$, tj. oko pravca u ravnini π_1 moraće tačke na raznim stranama ravnine π_1 imati i svoje treće projekcije na raznim stranama osi ${}_1x_3$.



60

U slici 60 prikazane su tačke A, B, C i D u I, II, III i IV kvadrantu. Budući da se tačke A i B nalaze s iste strane π_1 (A'' i B'' je nad osi x), nalazi se i A''' i B''' s iste strane osi ${}_1x_3$, a budući da se tačke C i D nalaze ispod π_1 u III odnosno u IV kvadrantu, nalazi se, dakle, i C''' i D''' na protivnoj strani od A''' i B''', jer se i C'' i D'' nalazi na protivnoj strani od A'' i B''. Vidimo da se iz drugih projekcija određuje smeštaj trećih projekcija. Odavde sledi

XIV zakon: Ako su druge projekcije na raznim stranama osi x, onda su i njihove treće projekcije na raznim stranama osi $_1x_3$. (Uspoređite ovaj zakon s XII zakonom u § 14)

Zadaci:

161.) Odredite treće projekcije tačaka A (2, 3, — 1), B (—1, 3, 2), C (– 2, — 1, 4), D (3, — 2, — 4): a) $\pi_3 \perp \pi_2$; b) $\pi_3 \perp \pi_1$.

162.) Odredite treće projekcije tačaka M (— 2, 3, 0), N (— 1, 0, — 2), O (0, 0, 3), P (1, — 2, 0), R (3, 0, 0): a) $\pi_3 \perp \pi_2$; b) $\pi_3 \perp \pi_1$.

163.) Odredite druge projekcije tačaka, ako su im poznate prva i treća projekcija. Prvu i treću projekciju uzmite po volji. ($\pi_3 \perp \pi_1$)

164.) Odredite prve projekcije tačaka, ako su im poznate druge i treće projekcije. Druge i treće projekcije uzmite po volji. ($\pi_3 \perp \pi_2$)

165.) Koja je karakteristika prvih, odnosno drugih, projekcija tačaka koje leže u tranformacionoj ravnini, normalnoj na π_1, odnosno na π_2?

166.) Gde se mora nalaziti tačka u prostoru: 1) ako se prva projekcija tačke nalazi u osi $_1x_3$; 2) ako se druga projekcija nalazi u osi $_2x_3$; 3) ako se treća projekcija nalazi: a) u osi $_2x_3$; b) u osi $_1x_3$?

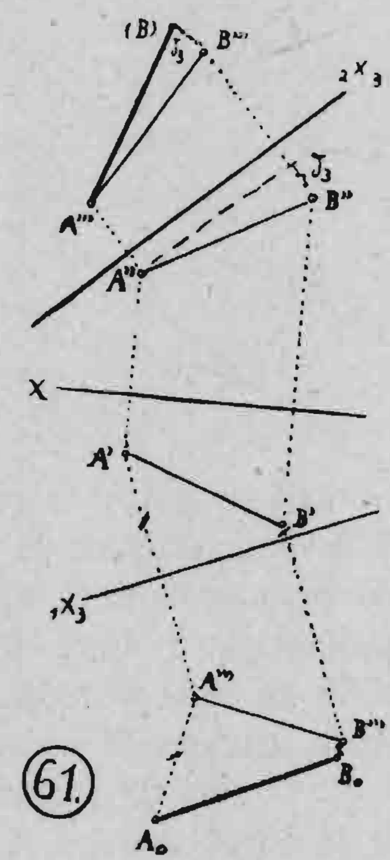
b) Pružac i pravac

Kod transformacione ravnine koja je normalna samo na π_1 ili samo na π_2 udružuje se prva s trećom, odnosno druga s trećom, projekcijom. Budući da su π_1 i π_3, odnosno π_2 i π_3, ravnine među sobom normalne kao ravnine π_1 i π_2 i budući da se i na π_3 normalno projecira, moraju za prvu i treću, odnosno za drugu i treću, projekciju vrediti svi oni zakoni i konstrukcije o prušcu i pravcu koje smo videli i naučili kod njihove prve i druge projekcije. Dužina i priklon prušca, probodišta i prikloni kut pravca i u opće sve što će još biti pokazano kod prve i druge projekcije, moći će se primeniti na udruženu prvu, odnosno drugu, s trećom projekcijom. Sva je razlika u tome, što os x stoji uvek horizontalno, a os $_1x_3$, odnosno os $_2x_3$, nekako nagnuto ili vertikalno.

Ako se znadu i razume sve dosadašnje konstrukcije, doista ne bi bilo ni potrebno da se posebice provađaju konstrukcije za udruženu prvu, odnosno drugu, s trećom projekcijom, jer su one identične s onima prijašnjima. Ipak, za jače utvrđenje srodnosti postupka, pokazane su na primerima neke konstrukcije izvedene pomoću transformacije.

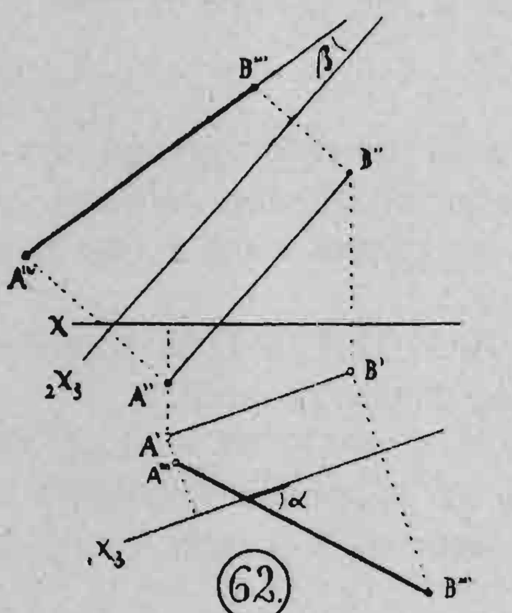
U slici 61 određena je dužina prušca $\overline{AB}$: 1) pomoću trećega trapeza prometača udružene prve i treće projekcije i 2) pomoću trećega diferencionoga trokuta udružene druge i treće projekcije. Iz same slike jasno izlazi provedba konstrukcije. Na taj način određena dužina prušca $\overline{AB}$ $[\overline{AB} = \overline{A_0B_0} = \overline{A'''(B)}]$ pokazuje samo srodnost postupanja, ali nam ne pruža nikakve prednosti koju bismo imali od transformacije.

U slici 62 naprotiv pokazano je određenje dužine i priklon prušca zgodnim smještajem osi ${}_1x_3$, odnosno osi ${}_2x_3$, tako da iz same treće projekcije odmah vidimo i njegovu dužinu i njegov priklon prema π_1, odnosno prema π_2. Ako je pružac paralelan s nekom od ravnina projekcija, znamo da je projekcija toga prušca na tu ravninu jednaka njegovoj dužini (§ 2, I zakon) i da je kut, što ga projekcija zatvara s osi, jednak priklonu prušca prema onoj udruženoj ravnini. (Pogledajte otsečak u § 13 pred X zakonom)



Budući da je os ${}_1x_3$, odnosno os ${}_2x_3$, uzeta paralelno s $\overline{A'\,B'}$, odnosno s $\overline{A''\,B''}$, mora biti pružac $\overline{AB}$ paralelan s ravninom π_3, a prema tome mora da bude $\overline{A'''B'''}$ dužina prušca $\overline{AB}$ $(\overline{AB} = \overline{A'''B'''})$, a kut, što ga $A'''\,B'''$ zatvara s osi ${}_2x_3$, mora da pokazuje veličinu priklona prušca prema π_1, odnosno prema π_2.

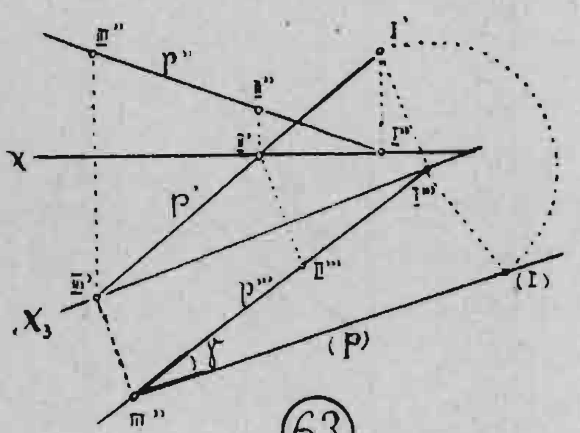
Kod određivanja trećih projekcija A''' i B''', obzirom na os ${}_1x_3$, nanašane su udaljenosti od drugih projekcija do osi x na razne strane osi ${}_1x_3$, jer je A'' i B'' na raznim stranama osi x. (§ 15, XIV zakon) Kod A''' i B''', obzirom na os ${}_2x_3$, to se ne sme učiniti, jer su prve projekcije s iste strane osi x.



U slici 62 pokazano je kako se *pomoću transformacije* može da odredi dužina i priklon prušca prema π_1, odnosno prema π_2. Ovde je dakle došla do izražaja vrednost transformacije koja će se naročito posle još bolje očitovati kod prereza uglatih (rogljastih) telesa.

Često se uzima os ${}_1x_3$ ili os ${}_2x_3$ kroz prvu, odnosno drugu, projekciju prušca ili pravca da se uštedi na prostoru i na crtama.

U slici 63 prikazano je kako se određuje treće probodište pravca kad su udružene prva i treća projekcija. Kod određivanja trećega probodišta pravca ne može se pogrešiti, ako se drži na umu da je treće probodište *tačka pravca u* π_3. Tačka se nalazi samo onda na pravcu, ako je prva, druga i treća projekcija tačke na prvoj, drugoj i trećoj projekciji pravca. Tačka je u π_3, ako je njena prva projekcija u osi ${}_1x_3$. Treće probodište *III* je tačka na pravcu, i u π_3, dakle, *III'* mora biti na p', i u osi ${}_1x_3$. To je moguće samo u sečištu p' s osi ${}_1x_3$. Treća projekcija trećeg probodišta *III'''* je u ordinali za os ${}_1x_3$ u p'''.



63

Kod određivanja bilo kojega probodišta početnici rado zamenjuju, — kad se govori o prvom, drugom ili trećem probodištu — probodišta s prvom, drugom ili trećom projekcijom. Mora se dakle misliti na to da prvo probodište nije prva projekcija, da drugo probodište nije druga projekcija, a treće probodište da nije treća projekcija. *Svako probodište za sebe je tačka koja ima svoje dve ili tri projekcije, već prema tome, služimo li se samo s* π_1 *i s* π_2 *ili takođe i s* π_3.

U slici 63 prikazana je i veličina trećega priklonoga kuta γ. Kut γ je određen tako da se odredila dužina dela pravca između prvoga i trećega probodišta.

Ima li se odrediti treće probodište i treći prikloni kut obzirom na os ${}_2x_3$, postupa se isto kao s profilnom ravninom, s tom razlikom, što je sada os ${}_2x_3$ nagnuta prema osi x, a kod profilne ravnine je normalna na os x.

Zadaci:

167.) Nacrtajte treću projekciju i sve tri projekcije prvoga, drugoga i trećega probodišta pravca p, ako je on određen tačkama A (— 1, 2, 2) i B(2, 6, 5). Uzmite da: a) os ${}_1x_3$ zatvara s osi x tupi kut; b) os ${}_2x_3$ zatvara s osi x tupi kut.

168.) Odredite dužinu prušca A(— 4, 2, 1) B (0, 1, 3) pomoću trećega trapeza prometača. Os ${}_1x_3$ ili os ${}_2x_3$ uzmite po volji.

169.) Odredite dužinu prušca M(— 5, 2, — 1) N(— 1, 1, 3) pomoću trećega trapeza prometača, ako: a) os ${}_1x_3$ prolazi ishodištem i zatvara s osi x kut od 120°; b) os ${}_2x_3$ seče os x u tački — 7 od ishodišta i zatvara s osi x kut od 60°.

170.) Odredite pomoću transformacije prvi i drugi prikloni kut pravca $p = AB$ [A(— 1, 3, 2), B(3, 6, 5)]. (Za kut α biće os ${}_1x_3 \parallel p'$, a za kut β biće os ${}_2x_3 \parallel p''$)

171.) Zadajte si po volji p''', os ${}_2x_3$ i p''; odredite p'.

172.) Zadajte si po volji p', os x i p'''; odredite p''.

173.) Odredite treće probodište pravca $p \perp \pi_1$; os ${}_2x_3$ uzmite po volji.

174.) Odredite treće probodište pravca $o \perp \pi_2$; os ${}_1x_3$ uzmite po volji.

175.) Odredite treće probodište pravca $p \parallel x$; os ${}_1x_3 \perp x$.

176.) Smestite os ${}_1x_3$ tako da pravac $a \parallel \pi_1$ bude normalan na π_3. Što će biti treća projekcija pravca a? (${}_1x_3 \perp p'$)

177.) Smestite os ${}_2x_3$ tako da pravac $b \parallel \pi_2$ bude normalan na π_3 i onda odredite b'''. (${}_2x_3 \perp p''$)

178.) Poznato je A'', A' i p' pravca p; odredite pomoću transformacije p'', ako je prvi prikloni kut pravca $p = 30^0$. Odredite i veličinu drugoga priklonoga kuta (β) pravca p.

179.) Poznato je A'', A' i p'' pravca p; odredite pomoću transformacije p', ako je drugi prikloni kut pravca $p = 60^0$. Odredite i veličinu prvoga priklonoga kuta (α) pravca p.

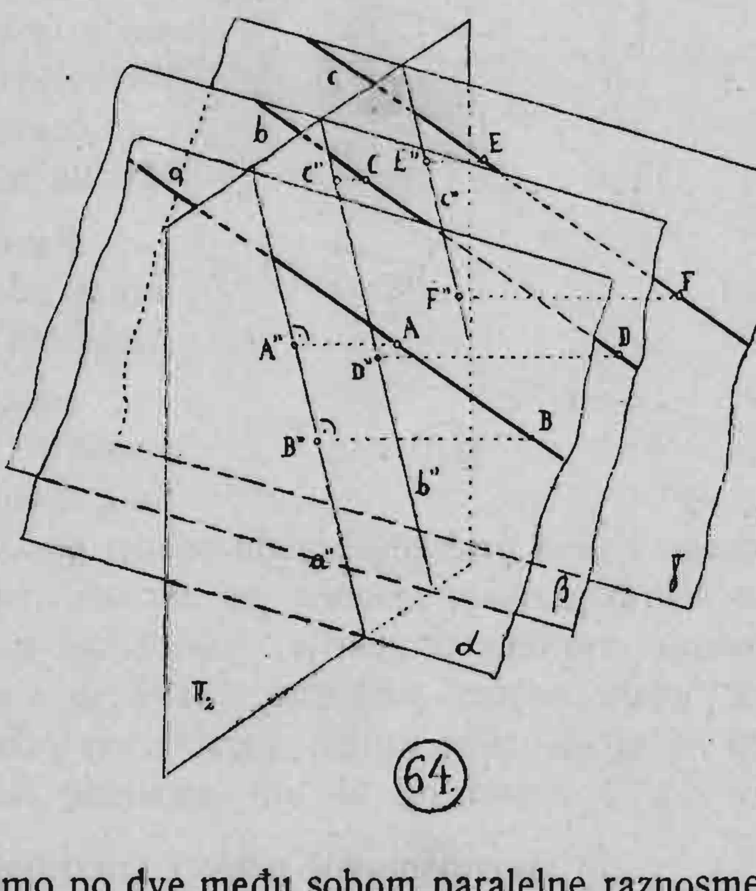
180.) Odredite drugu projekciju pravca $p \parallel \pi_2$, ako on prolazi tačkom $A(-3, 2, 4)$. Po volji odaberite os ${}_2x_3$ i p'''.

181.) Odredite p' i sva tri probodišta pravca p, ako ste po volji odabrali p'', os ${}_1x_3$ i p'''.

Položaj pravaca među sobom

a) Paralelni pravci (paralele)

U slici 64 prikazani su zorno pravci $a \parallel b \parallel c$. Pravcem a i normalama $\overline{AA''}$, odnosno $\overline{BB''}$, određena je ravnina α, pravcem b i normalama $\overline{CC''}$, odnosno $\overline{DD''}$, određena je ravnina β, pravcem c i normalama $\overline{EE''}$, odnosno $\overline{FF''}$, određena je ravnina γ. Ravnine α, β i γ moraju biti među sobom paralelne ravnine,



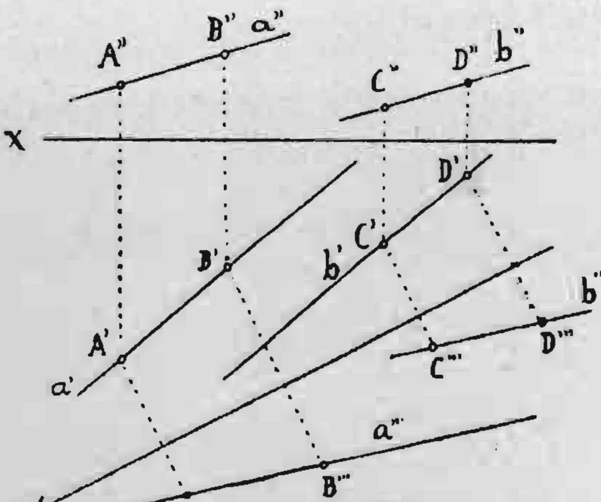
64

jer u svakoj od njih imamo po dve među sobom paralelne raznosmernice. Taj je zaključak izveden prema stereometričkom zakonu koji kaže da *su dve ravnine među sobom paralelne, ako možemo dve raznosmernice (dva pravca, koji se seku) jedne ravnine nacrtati paralelno u drugoj ravnini.* Budući da *paralelne ravnine seku treću ravninu u samim među sobom paralelnim pravcima* (stereometrički zakon), moraju i presečnice ravnina α, β i γ s ravninom π_2 biti među sobom paralelne. *Svaka ravnina, koja prolazi normalom na neku ravninu i sama je na tu ravninu normalna* (stereometrički zakon). Prema tome ravnine α, β i γ, osim što su među sobom paralelne, još su i normalne na π_2. Odavde izlazi da su presečnice ravnina α, β i γ s ravninom π_2 projekcije pravaca a, b i c na π_2. Kako te presečnice moraju biti među sobom paralelne, sledi da je $a'' \parallel b'' \parallel c''$. Dakle su ravnine α, β i γ *ravnine prometalice* pravaca a, b i c za π_2, jer prolaze pravcima normalno na ravninu projekcija.

Za ravninu π_1 postoje također *ravnine prometalice*, tj. ravnine koje prolaze pravcima normalno na π_1. I te ravnine prometalice biće među sobom paralelne, pa će prema tome i njihove presečnice (upravo prve projekcije pravaca) biti među sobom paralelne. Iz toga sledi

XV zakon: Paralelni pravci imaju među sobom paralelne istoimene projekcije.

U slici 65 prikazani su pravci a i b. Pravac a paralelan je s pravcem b, jer je $a'' \parallel b''$ i $a' \parallel b'$. Kad bi bile samo druge projekcije među sobom paralelne a prve ne — ili okrenuto, pravci ne bi bili među sobom paralelni. U istoj slici nacrtane su i treće projekcije pravaca a i b. Iz slike se vidi da je i $a''' \parallel b'''$.



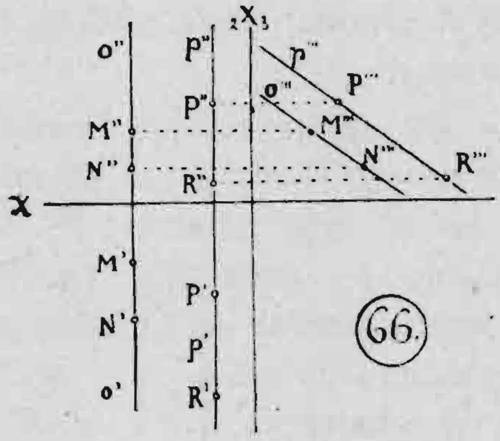
65

Paralelizam pravaca dostatno je određen međusobnom paralelnošću prvih i drugih projekcija.

Izuzetak čine pravci koji su paralelni s profilnom ravninom. Kod takvih pravaca uvek su njihove druge i prve projekcije među sobom paralelne. Da ispitamo paralelizam takvih pravaca, moramo još nacrtati i njihovu treću projekciju (najzgodnije profilnu projekciju). Istom kad su treće projekcije takvih pravaca među sobom paralelne, pravci su i u prostoru paralelni. U slici 66 na taj je način ispitan paralelizam pravaca o i p. Kad ne bi bilo $o''' \parallel p'''$, pravci ne bi bili paralelni, iako je $o'' \parallel p''$ i $o' \parallel p'$.

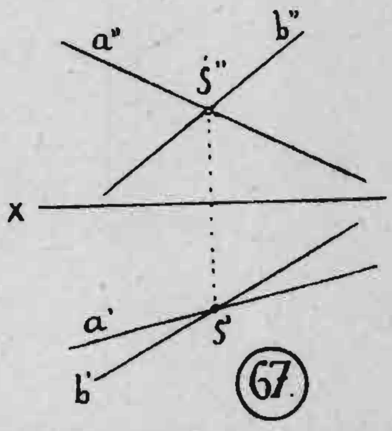
b) **Raznosmerni pravci (raznosmernice)**

Raznosmernicama nazivamo pravce koji se seku. Dve raznosmernice prema tome moraju imati jednu zajedničku tačku. To znači da će morati kod projekcija raznosmernica postojati jedna zajednička tačka kojoj će se druga projekcija nalaziti na drugoj projekciji jednoga i drugoga pravca, a prva projekcija na prvim projekcijama obiju pravaca. Usto moraju biti projekcije te zajedničke tačke (toga secišta tih raznosmernica) u ordinali.



66

U slici 67 prikazani su pravci a i b tako da im se secište drugih projekcija i secište prvih projekcija nalazi u ordinali. Budući da se tačka S nalazi i na pravcu a i na pravcu b (IX zakon, § 8), mora tačka S biti zajednička tačka pravaca a i b, te prema tome i njihovo secište. Iz toga sledi

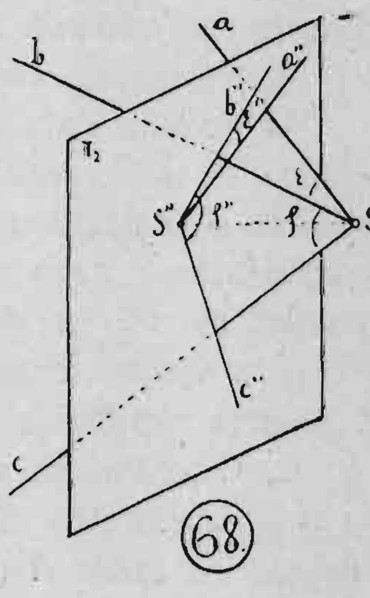


67

XVI zakon: Dva se pravca u prostoru samo onda seku, ako im se secišta istoimenih projekcija nalaze u ordinali.

Dve raznosmernice čine uvek četiri kuta od kojih su dva susedna, suplementni kutovi. Kad se govori o kutu dvaju pravaca, misli se uvek na onaj šiljasti kut. Ako su pravci jedan na drugom normalni, onda su ona četiri kuta pravi kutovi.

U projekciji je veličina kuta dvaju pravaca ovisna o svome položaju prema ravninama projekcija. Projekcija takvoga kuta može biti veća ili manja od svoje veličine u prostoru kako nam to zorno pokazuje slika 68. Lako se iz slike može uočiti da će biti $\varepsilon'' < \varepsilon$; $\varphi'' > \varphi$.



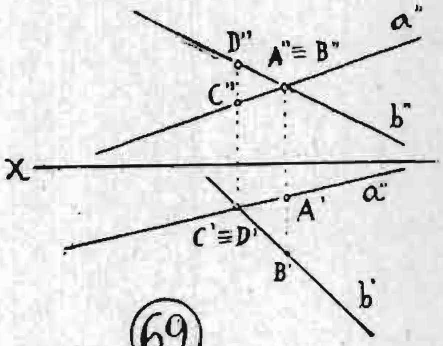
68

Ako su oba kraka kuta paralelna s jednom od ravnina projekcija, onda se kut u toj projekciji vidi u svojoj veličini.

Ako je samo jedan od krakova paralelan s jednom ravninom projekcija, projekcija je kuta manja od njegove veličine. *Ako dva pravca zatvaraju pravi kut, a jedan je od njih paralelan s jednom od ravnina projekcija, onda i projekcije tih pravaca na tu ravninu čine pravi kut.* (O ispravnosti tih nekih spomenutih tvrdnji za projekcije kuta dvaju pravaca lako se uverite i bez dokaza — dobrim razmatranjem kod projeciranja)

c) Mimosmerni (vitoperi) pravci ili mimosmernice

Dva su pravca mimosmerna, ako se ne seku niti su paralelni. Budući da mimosmerni pravci nisu paralelni, ne smeju imati ni istoimene projekcije među sobom paralelne, a jer se mimosmerni pravci ne seku, ne smeju im ni sečišta istoimenih projekcija ležati u ordinali. Prema tome, ako nacrtamo projekcije dvaju pravaca tako da oni ne zadovoljavaju uvete XV i XVI zakona, onda smo nacrtali mimosmernice.



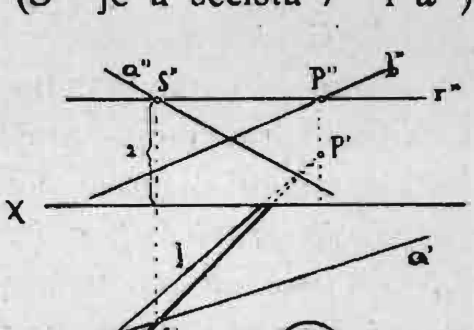
69

U slici 69 prikazani su mimosmerni pravci a i b. Pravci a i b su mimosmernice, jer a'' nije paralelno b'' ni a' nije paralelno b'; osim toga sečište a'' s b'' ne leži u ordinali sa sečištem a' i b'. Iz slike vidimo da se a'' i b'' seku u tački koja je obeležena s $A'' \equiv B''$. Kad bi to bila zajednička tačka pravaca a i b, onda bi ta tačka morala prema XVI zakonu imati svoju prvu projekciju u sečištu prvih projekcija a' i b'. Povučemo li ordinalu u $A'' \equiv B''$, seče ta ordinala a' u A' a b' u B'. Prema tome su to dve tačke kojima se druge projekcije pokrivaju. To isto vredi i za tačke C i D. Pravci su a i b dakle mimosmerni, jer im istoimene projekcije nisu među sobom paralelne i jer se sečišta istoimenih projekcija ne nalaze u ordinali.

Pre negoli pređemo na zadatke, rešeni su neki primeri u savezu s položajem pravaca među sobom. Ti će primeri biti kao vodič za rešavanje narednih zadataka.

1. *Odredite projekcije pravca $r \parallel \pi_1$ $(z=2)$ tako da on bude transverzala zadanih mimosmernica a i b.* (Slika 70)

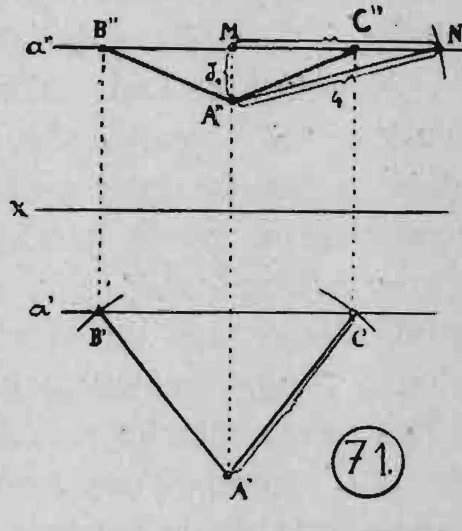
Transverazala dvaju pravaca je pravac koji oba pravca seče. U prvome redu znamo da je $r'' \parallel x$, jer je $r \parallel \pi_1$. Budući da je $z=2$, biće r'' od osi x udaljeno za 2 jedinice. Ako pravac r seče pravac a mora se S' nalaziti na a' u ordinali iz S''. (S'' je u sečištu r'' i a'') Kako pravac r treba da seče i pravac b, nalaziće se P' na b' u ordinali iz P''. (P'' je u sečištu b'' i r'') Spojnica S' P' je prva projekcija (r') pravca r.



70

2. *Odredite na pravcu a $(y=2,\ z=3) \parallel x$ tačke B i C tako da budu one udaljene od tačke* A (0, 5, 2) *za* 4 *jedinice.* (Slika 71)

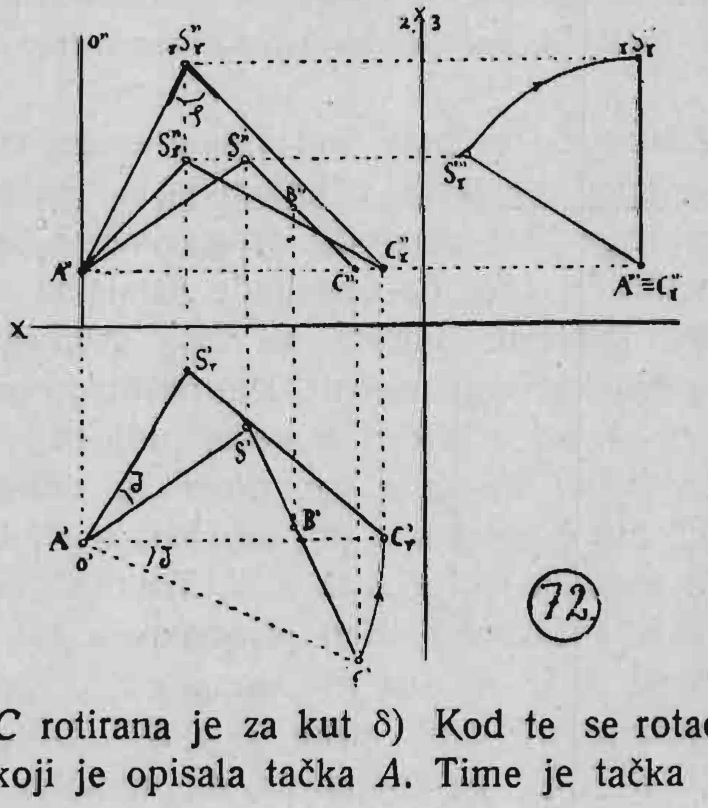
Budući da će se B'', odnosno C'', nalaziti na a'', biće diferencija δ_1 za tačke A i B, odnosno A i C, jednaka udaljenosti od A'' do a''. U slici je to označeno s $\overline{A''M} = \delta_1$. Kako je prvi diferencioni trokut sastavljen od prve diferencije, prve projekcije prušca, dužine prušca i pravoga kuta, lako ga konstruiramo, jer kod M imamo pravi kut, a poznajemo diferenciju δ_1; ako sad iz A'' presečemo a'' dužinom 4, dobijemo N. Time je sastavljen prvi diferencioni trokut $A''MN$. (Pogledajte o tom difer. trokutu sliku 36) Kod trokuta $A''MN$ stranica MN je dužina prve projekcije. Ako, dakle, sada iz A' presečemo a' dužinom $\overline{MN}$, dobićemo B', odnosno C'. Zadatak je time i rešen. Ispravnost toga rešenja možemo kontrolisati, ako pođemo okrenutim putem, te odredimo, kojimgod načinom, dužinu prušca $\overline{AB}$, odnosno $\overline{AC}$. Videćemo da će biti $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$.



71

3. *Odredite veličinu kuta ASB (slika 72)*[1])

I način: Najpre se uzme na svakome kraku po jedna tačka u istoj visini nad π_1. Kod nas je krak SB produžen do tačke C. Time smo postigli da su tačke A i C u istoj visini nad π_1 $(A''C'' \parallel x)$.



72

Učinivši to, rotiramo čitavi kut oko pvavca $o \perp \pi_1$. Pravac o prolazi jednom od onih dveju tačaka na kracima. U našoj smo slici uzeli da pravac $o \perp \pi_1$ prolazi tačkom A. Kod rotacije rotira se tačka C oko tačke A dok ne padne u C_r tako da bude $\overline{AC_r}$ paralelno s osi x. Luk $\widehat{CC_r}$ vidi se u prvoj projekciji u svojoj veličini, jer je paralelan s π_1. Druga se projekcija toga luka projecira u pružac $C''C_r'' \parallel x$. (Tačka C rotirana je za kut δ) Kod te se rotacije rotira i tačka S za isti kut δ koji je opisala tačka A. Time je tačka S dospela u tačku S_r. I tačka S

---

[1]) Ovaj se način rešavanja zasad može izostaviti pa uzeti posle, ako za nj dostaje vremena.

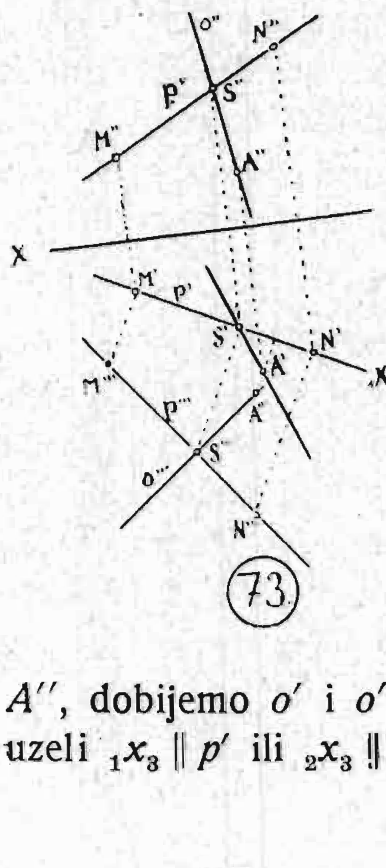
opiše luk paralelan s π_1, te se on zato vidi u prvoj projekciji u svojoj veličini, a u drugoj projekciji taj je luk pružac, paralelan s osi x. ($S''S_r''$ $\parallel$ x) Tom rotacijom doveden je zadani kut u položaj $AS_r C_r$ kod čega su tačke A i C_r došle u položaj paralelan s osi x.

Napokon se sada tačka S ponovo rotira oko A C_r tako da bude čitav kut $AS_r C_r$ paralelan s π_2. Budući da je $AC_r \perp \pi_3$ (profilna ravnina), videće se luk što ga ponovo opisuje tačka S_r u trećoj projekciji u svojoj veličini, jer je paralelan s π_3. Druga se projekcija toga luka projecira u pružac $_rS_r''S_r'' \perp x$, a u trećoj projekciji nastane $A_r'''S_r''' \parallel {}_2x_3$. Budući da je sada taj dvostruko rotirani kut ASB paralelan s π_2, vidi se on u drugoj projekciji u svojoj veličini. Samo se sobom razume da se kod obeju rotacija rotirala i tačka B. U slici to nije označeno, jer nije bilo potrebno za određenje veličine kuta. Taj način određivanja veličine kuta dvaju pravaca nazvaćemo određivanjem pomoću *dvostruke rotacije.*

II način: Taj isti zadatak mogao se rešiti i tako da se zadani kut ASB smatra trokutom. Odrede se dužine pojedinih stranica trokuta, te se onda na strani konstruira taj trokut ASB u svojoj veličini, gde će se pokazati i veličina traženoga kuta.

Najzgodnije ćemo veličinu kuta dvaju pravaca odrediti pomoću prelaganja njihove ravnine u π_1 ili u π_2. To će biti pokazano posle u § 26 u slici 140 s pravcima m i n. Š toga se razloga ni ne mora zasad, ta dvostruka rotacija uzeti, i ako je zgodna za vežbu u predočivanju.

4. *Na zadani pravac p iz tačke A pustite normalu pomoću transformacije.* (Slika 73)



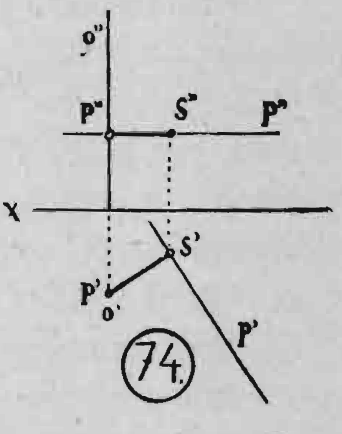
73

Znamo da se pravi kut vidi u svojoj veličini u onoj projekciji s kojom je bar jedan krak pravoga kuta paralelan. Postavimo li dakle ravninu π_3 tako da ona bude paralelna sa zadanim pravcem moraće se zbog gornjega uveta pravi kut koji nastane, ako pustimo normalu iz A na p, videti u trećoj projekciji u svojoj veličini. Ako je $\pi_3 \parallel p$, mora ${}_2x_3$, odnosno ${}_1x_3$, biti paralelno s p'', odnosno s p'. U slici 73 uzeta je os ${}_1x_3$ baš u p'. To znači da π_3 prolazi pravcem p. Kad je određeno p''' i A''', pusti se iz A''' na p''' normala o'''. Treće projekcije o''' i p''' seku se u S'''. Odredimo li S' i S'' pa spojimo s A', odnosno s A'', dobijemo o' i o''. Na istome mestu dobili bismo o' i o'', da smo uzeli ${}_1x_3 \parallel p'$ ili ${}_2x_3 \parallel p''$.

Taj se način određivanja normale na neki pravac naziva *određivanje pomoću transformacije.*

5. *Odredite os mimosmernih pravaca o i p, ako je o* $\perp$ π_1, *a* $p \parallel \pi_1$. (Slika 74)

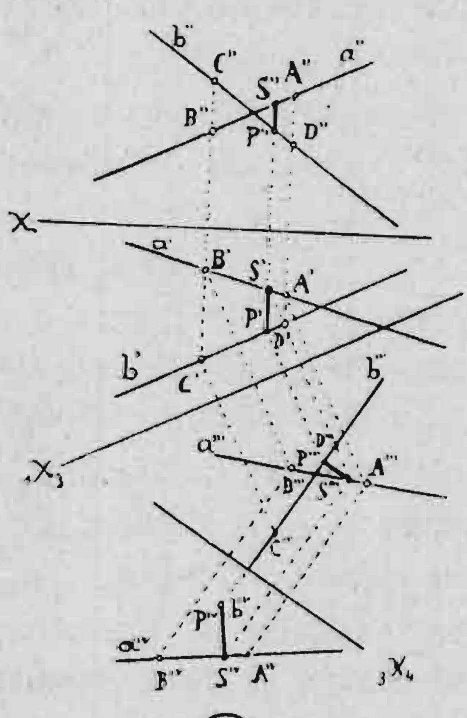
Os dvaju mimosmernih pravaca je njihova najkraća udaljenost. Ta os je pružac kojemu su krajnje tačke na mimosmernim pravcima, te stoji normalno na obe mimosmernice.



74

Budući da je $o \parallel \pi_2$, a $p \parallel \pi_1$, moraće se pravi kut videti u prvoj i u drugoj projekciji. Svaka tačka pravca o ima svoju prvu projekciju u o'. Biće, dakle, i ona jedna krajnja tačka osi mimosmernih pravaca u o'. U našem slučaju to je tačka P. Spustimo li iz P' normalu na p', dobijemo S'. Druga projekcija S'' je na p''. Pružac $\overline{SP}$ je os mimosmernih pravaca o i p. Budući da je $\overline{SP} \parallel \pi_1$, vidi se os u prvoj projekciji u svojoj dužini.

6. *Odredite os mimosmernih pravaca a i b, ako su oni općenoga položaja.* (Slika 75)


75

Da odredimo os takvih mimosmernih pravaca, moramo zgodnom transformacijom dovesti pravce prema ravninama projekcija u položaj kakav je u prijašnjem zadatku. To se može postići, ako upotrebimo četvrtu pomoćnu transformacionu ravninu (π_4). Taj se način naziva *dvostruka transformacija.*

U slici 75 uzeta je os ${}_1x_3 \parallel b'$ što znači, $\pi_3 \parallel b$. Poznatim postupkom određeno je a''' i b''' Udružene su projekcije prva i treća. Da se odredi četvrta projekcija tih pravaca, uzima se $\pi_4 \perp \pi_3$ tako da je ${}_3x_4 \perp b'''$. Četvrte se projekcije pojedinih tačaka nađu da se na normale na os ${}_3x_4$ (ordinale za četvrtu i treću projekciju) u trećim projekcijama nanašaju od osi ${}_3x_4$ udaljenosti od prvih projekcija do osi ${}_1x_3$. Općenito je odnošaj između treće i četvrte projekcije spojene s prvom projekcijom isti kao odnošaj između prve i treće projekcije spojene s drugom projekcijom.

U našem slučaju uzeli smo π_4 tako da je pravac $p \perp \pi_4$. Prema tome je ${}_3x_4 \perp b'''$. Četvrta projekcija pravca b je tačka $\equiv b^{IV}$ (b

četiriput crtano). Od b^{IV} do ${}_3x_4$ je isto toliko kao od b' do ${}_1x_3$. Četvrta projekcija a^{IV} je određena pomoću prve projekcije, tj. u A''' i B''' puštene su normale na ${}_3x_4$ i nanesene od ${}_3x_4$ udaljenosti od A', odnosno B', do osi ${}_1x_3$.

Promatramo li sada a''' i b''' i a^{IV} i b^{IV} obzirom na os ${}_3x_4$ videćemo da imamo isti položaj kao u slici 74. Isto ćemo, dakle, i postupati: $P^{IV} S^{IV} \perp a^{IV}$. To je os $\overline{PS}$ u četvrtoj projekciji. Vidi se u svojoj dužini, jer je $\overline{P'''S'''} \parallel {}_3x_4$. Budući da se tačke P i S nalaze na pravcima b i a, mora se i P' i S', odnosno P'' i S'', nalaziti na b' i na a', odnosno na b'' i na a''. (U našem primeru je sasvim slučajno ispalo tako, te je $\overline{P'S'}$ i $\overline{P''S''}$ normalno na os x. To inače ne mora da bude)

Pre rešavanja zadataka treba svakako dobro razumeti i znati provesti konstrukcije ovih 6 nacrtanih primera.

Zadaci:

182.) Tačkom A (2, 3, 1) povucite pravac $m \parallel p$ i odredite probodišta pravca m s ravninama π_1 i π_2. Pravac p neka je određen tačkama P (2, 1, 3) i R (—1, 5, 1).

183.) Odredite projekcije tačke D romboida $ABCD$, ako su poznate njegove tačke A (−1, 2, 3), B (2, 1, 5) i C (3, 3, 2).

184.) Odredite probodišta pravca $p \parallel m = MN$ [M (2, 3, 1), N (2, —1, 5)], ako pravac p prolazi tačkom P (—1, 2, 3). (Pogledajte sliku 66)

185.) Odredite prvu projekciju pravca $b \parallel a$ ($y = 3$, $z = 1$) $\parallel x$, ako pravac b prolazi tačkom A ($z = 3$) i udaljen je od pravca a za 4 jedinice. (Pomozite si profilnom ravninom. Ovaj zadatak ima dva rešenja. U kojem slučaju bi imao jedno, a u kojem nijedno rešenje?)

186.) Odredite o' pravca o, ako je on paralelan s pravcem p ($x = 3$, $y = 4$) $\perp \pi_1$ u udaljenosti od pravca p za 3 jedinice. Druga projekcija o'' ima $x = 2$. (Dva, jedno ili nijedno rešenje?)

187.) Odredite o'' pravca o, ako je on paralelan s pravcem p ($x = -1$, $z = 3$) $\perp \pi_2$ u udaljenosti od pravca p za 4 jedinice. Prva projekcija o' ima $x = 1$.

188.) Odredite a' pravca a, ako je on paralelan s pravcem b ($y = 3$, $z = 2$) $\parallel x$ u udaljenosti od pravca b za 2 jedinice. Druga projekcija a'' ima $z = 3$.

189.) Odredite n'' pravca n. ako je on paralelan s pravcem $m = MN$ [M (1, 2, 2), N (— 2, 5, 2)] i od njega udaljen za 3 jedinice. Pravac n neka prolazi tačkom A [A' ($x = 2$, $y = 3$)]. (Uzmite u pomoć os ${}_1x_3 \perp m'$)

190.) Na dva među sobom paralelna pravca općenoga položaja nacrtajte transverzalu $t \parallel \pi_2$ u udaljenosti od π_2 za 1 cm. (Pogledajte sliku 70)

191.) Odredite udaljenost pravaca a $(y=2,\ z = 2) \parallel x$ i b $(y = 2,\ z = 5) \parallel x$.

192.) Odredite udaljenost među sobom paralelnih pravaca $m = MN$ $[M\ (-2, 3, 4),\ N\ (1, 3, 2)]$ i n, ako pravac n prolazi tačkom P $(0, 4, 0{,}5)$. (Uzmite u pomoć os ${}_2x_3 \perp m''$)

193.) Kakav položaj obzirom na os x imaju projekcije pravaca: a) paralelnih s ravninom sumernosti; b) paralelnih s ravninom istovetnosti?

194.) Nacrtajte raznosmernice p i r, ako je: a) $p \perp \pi_1$, $r \parallel \pi_1$; b) $p \parallel \pi_2$, $r \parallel \pi_1$; c) $p \perp \pi_2$, $r \parallel \pi_1$; d) p u π_1, $r \parallel \pi_2$; e) p u ravnini istovetnosti, r u općenom položaju.

195.) Položite tačkom M $(-2, 3, 1)$ pravac $m \parallel \pi_2$, tako da on seče pravac n. Pravac n zadajte si u općenom položaju, tako da on ne prolazi tačkom M.

196.) Odredite a' $[a''$ $(z = 3)]$ pravca $a \parallel x$, ako on seče pravac $b = AB$ $[A\ (1, 3, 2),\ B\ (1, -1, 4)]$. (Pomozite si profilnom ravninom)

197.) Dvema zadanima mimosmernicama općenoga položaja nacrtajte transverzalu u općenom položaju i odredite dužinu onoga dela transverzale koji se nalazi između secišta sa zadanim pravcima.

198.) Zadani su pravci $a = AS$ $[A(3,2,4),\ S(-1,1,2)]$ i $b = BS$ $[B(5,1,2)]$; odredite na zadanima pravcima tačke P i R, tako da tačke SPR čine istokračni trokut kojima su kraci $\overline{SP} = \overline{SR} = 4$. Odredite dužinu stranice $\overline{PR}$.

199.) Nacrtajte transverzalu na mimosmerne pravce $a \parallel \pi_1$ i b $(x = 1{,}5,\ y = 2{,}5) \perp \pi_1$, tako da bude transverzala paralelna s pravcem $p = MN$ $[M\ (-1,2,4),\ N\ (-3,1,2)]$. Pravac a prolazi tačkom $A(O,2,\ 1{,}5)$ i ima drugi prikloni kut $\beta = 60^0$. Odredite dužinu onoga dela transverzale koji se nalazi između secišta sa zadanim pravcima.

200.) Tačkom $M(0{,}2,\ 3{,}5)$ položite pravac p koji seče zadani pravac $a \parallel \pi_1$ u tački S, tako da je $\overline{MS} = 5$. Pravac a prolazi tačkom $A(2{,}3{,}2)$ i ima kut $\beta = 30^0$. (Pogledajte § 16, 2., slika 71)

201.) Isto kao u 200 zadatku, samo neka je pravac a $\parallel \pi_2$ a kut α neka je 30^0.

202.) Zadan je pravac $a = AB$ $[A\ (-1,4,2),\ B(1,1,2)]$ i tačka P $(0,4,3)$; tačkom P položite pravac p koji seče pravac a u tački S, tako da je $\overline{PS} = 6$. (Pomoću ${}_1x_3 \parallel a'$ doveščete a' i a''', P' i P''' u ist položaj kao u slici 71, pa pomoću diferencionoga trokuta kao u slici 71 odredite projekcije tačke S.)

203.) Odredite udaljenost tačke B (0,4,3) od pravca p ($x = 3$, $z = 1$) $\perp \pi_2$.

204.) Odredite udaljenost tačke A (—2,3,2) od pravca $p \parallel \pi_2$, ako pravac p prolazi tačkom P (—2,1,2) i zatvara s π_1 kut od 60°. (U drugoj se projekciji vidi pravi kut u svojoj veličini; treba još odrediti dužinu te udaljenosti. Može se rešiti i pomoću ${}_2x_3 \perp p''$)

205.) Odredite udaljenost tačke P (—1,3,2) od pravca $a = AB$ [A (—1,4,1), B (1,1,0)]. [Pomoću jednostruke (slika 73) ili dvostruke (slike 75) transformacije]

206). Odredite veličinu kuta, što ga zatvaraju pravci $a = AB$ [A (– 2, 3, 1), B (—2, 1, —3)] i $b = CD$ [C —2, 1, 2), D (—2, —2, 5)].

207). Odredite veličinu kuta što ga zatvaraju pravci $p \perp \pi_2$ i $s = MN$ [M (—1, 3, 2), N (—3, 1, 1)], ako pravac p prolazi tačkom M. (Tačku N rotirajte oko pravca p tako da bude N_r u istoj visini s tačkom M. Luk rotacije vidi se u π_2 u svojoj veličini)

208). Odredite veličinu kuta, što ga zatvara pravac p ($y = 2, z = 3$) $\parallel x$ s pravcem $r = PR$ [P (—3, 2, 3), R (—1, —1, 4)]. (Pravac r rotirajte oko p, tako da bude $r_r \parallel \pi_1$ ili $r_r \parallel \pi_2$. Luk rotacije vidi se u profilnoj ravnini u svojoj veličini)

209). Odredite veličinu kuta, što ga zatvaraju pravci $a = AB$ [A (—2, 9, 1), B (1, 3, 4)] i $b = BC$ [B (1, 3, 4), C (3, —1, 8). (Pomoću dvostruke rotacije; slika 72.)

210). Odredite os mimosmernih pravaca a ($x = -1$, $z = 3$) $\perp \pi_2$ i $b \parallel \pi_2$. Pravac b prolazi tačkom B (0, 2, 1) i zatvara s π_1 kut od 30°.

211). Odredite os mimosmernih pravaca a ($x = 2$, $y = 4$) $\perp \pi_1$ i $b \parallel \pi_2$. Pravac b prolazi tačkom B (2, 2, 3) i zatvara s π_1 kut od 60°.

212). Odredite os mimosmernih pravaca a ($y = 3$, $z = 4$) $\parallel x$ i $b = AB$ [A (—2, 2, 0), B (—2, 1, 5)].

213.) Odredite os mimosmernih pravaca $a = AB$ [A(0, 1, 2) B(— 2, 2, 1)] i $b = CD$ [C(— 1, 1, 5), D(3, 0, 3)]. (Pomoću dvostruke transformacije; slika 75.)

214.) Odredite os mimosmernih pravaca $p \parallel \pi_2$ i $r = MN$ [M(1, 4, 1), N(— 2, 2, 3)], ako pravac p prolazi tačkom P(0, 2, 3) i zatvara s π_1 kut od 45°. (${}_2x_3 \perp p''$)

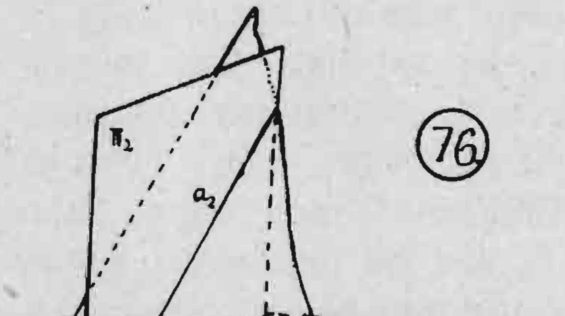
IV DEO

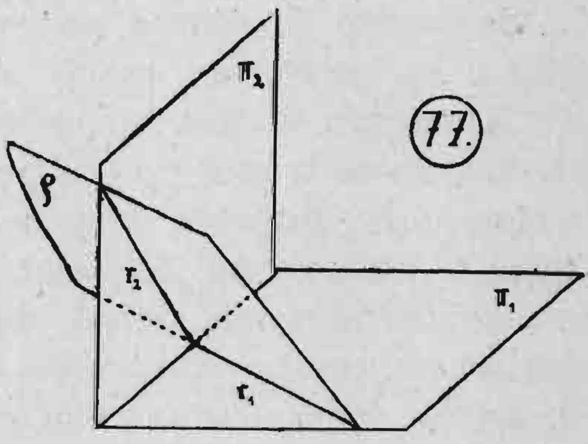
RAVNINA

17. Prvi i drugi trag ravnine

Iz stereometrije znamo da je ravnina potpuno određena: 1) s tri tačke; 2) pravcem i tačkom izvan pravca; 3) dvema raznosmernicama i 4) dvema paralelama.

U nacrtnoj se geometriji obično predočuje ravnina s dva pravca koja se seku (dvema raznosmernicama). *Te* su dve raznosmernice upravo one u kojima *ta* ravnina seče ravnine π_1 i π_2. *Ti* se



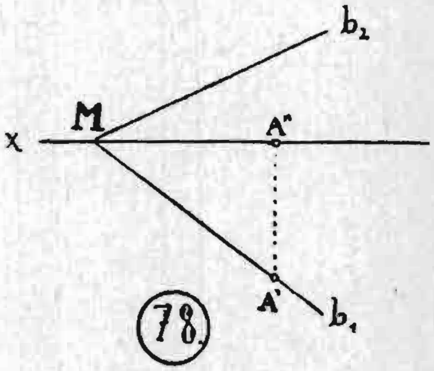


pravci nazivaju *tragovima ravnine*, i to prosečnica ravnine s π_1 je *prvi trag*, a presečnica s π_2 je *drugi trag* ravnine. Ravnine imenujemo grčkim slovima, a tragove njene odgovarajućim latinskim slovom s indeksom 1 ili 2, već prema tome, da li je prvi ili drugi trag. Na pr. ravnina α ima tragove a_1 i a_2; $\beta \ldots b_1$ i b_2; $\rho \ldots r_1$ i r_2; itd. U slici 76 i 77 zorno su prikazane ravnine α i ρ s tragovima a_1 i a_2, odnosno r_1 i r_2.

Iz stereometrije znamo da se tri ravnine, koje ne prolaze jednim pravcem i nisu među sobom paralelne, seku u tri pravca koji prolaze jednom tačkom [vrh trostranoga ugla (roglja)]. Iz toga poučka sledi

XVII zakon: Prvi i drugi trag ravnine seku se uvek u osi x.

U slici 78 prikazani su tragovi b_1 i b_2 ravnine β u projekciji. Budući da su tragovi b_1 i b_2 pravci, morali bi imati i svoje projekcije b'_1, $b'_1{}'$ i b'_2, $b'_2{}'$. Kod ravnina nije običaj da se tragovi obeležuju sa ′, odnosno sa ″ zbog toga što su to pravci u π_1, odnosno u π_2, te imaju svoju drugu, odnosno svoju prvu, projekciju u osi x. Za b_1 moramo uvek znati, da je to uistinu b_1'. Budući da je b_2 upravo na onome mestu gde je i nacrtano, nije zabeleženo krivo kad se napiše, kako je običaj, samo b_2 bez ″.



78

Budući da su tragovi ravnine (u slici 78 prvi trag je b_1 a drugi je b_2) takva dva pravca koja određuju onu predočenu ravninu, moći će se i prostorni položaj ravnine potpuno odrediti, ako se ta dva traga prikažu u prostoru i onda njima (tim dvema pravcima ravnine) položi ravnina.

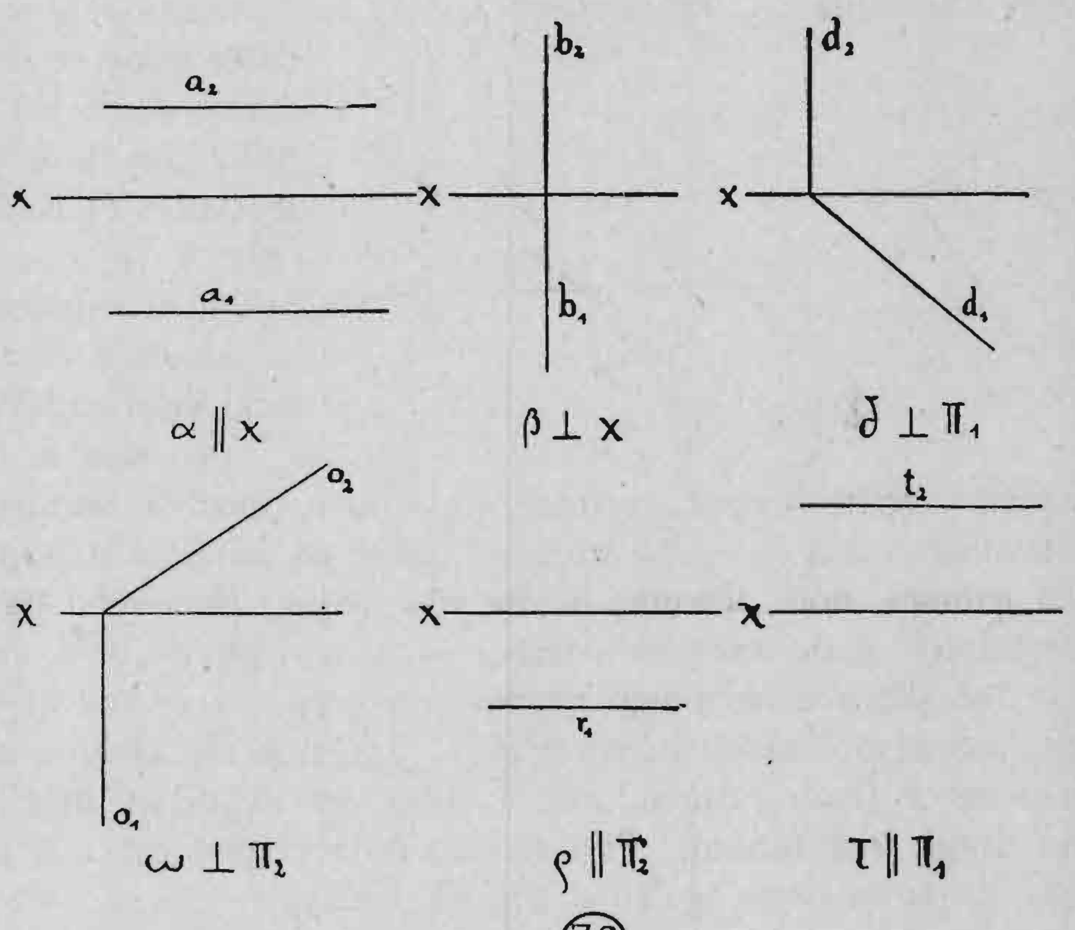
Položaj ravnine u prostoru, kad već imamo nacrtana oba traga ravnine, pokazaćemo najzgodnije tako da uzmemo trokut kojim crtamo i da prislonimo njegovu hipotenuzu na drugi trag ravnine (u našoj 78 slici prislonimo hipotenuzu trokuta na b_2), jer se drugi trag ravnine nalazi u π_2, upravo na onome mestu gde je i prikazan (nacrtan).

Zamislimo si zatim π_1 podignuto dok ne bude $\perp$ π_2. Time je prvi trag došao u svoj prvotni položaj. Rotiramo li sada trokut, tako da hipotenuza miruje na drugome tragu b_2 dok on ne prolazi prvim tragom (b_1) u prostoru, dobićemo upravo prostorni položaj ravnine zadane svojim tragovima. *Svaka*, dakle, *ravnina* koja je predočena tragovima *prolazi upravo nacrtanim drugim tragom* i prostornim položajem *prvoga traga.* Prema tome nacrtamo li kakvagod dva pravca, da se oni seku u osi x, te jedan od njih smatramo prvim, a drugi drugim tragom ravnine, oni nam onda predočuju i određuju jednu jedinu ravninu u prostoru.

Svaka je dakle ravnina potpuno određena sa svoja dva traga. Izuzetak čini ravnina koja prolazi osju x, jer se kod svih takvih ravnina nalaze oba traga u osi x. Da takvu ravninu imamo potpuno određenu, moramo, osim tragova u osi x, nacrtati još i projekcije jedne njene tačke, odnosno njen treći (profilni) trag, kako će to biti posle i pokazano.

I ravnine mogu da se nalaze u općenom ili u posebnom položaju. Ravnina je *općenoga* položaja, ako nije ni paralelna ni normalna obzirom na π_1 i π_2, niti prolazi, niti je paralelna s osi x, inače se kaže da je u *posebnom* položaju. U slici 78 predočena ravnina je ravnina općenoga položaja, jer s π_1 i s π_2 zatvara kut veći od 0^0 a manji od 90^0, a ne prolazi niti je paralelna s osi x. Projekcijom je to istaknuto, ako nijedan od tragova ne zatvara s osi x ni 0^0, ni 90^0. Čim je jedan od tragova normalan na os x ili paralelan s osi x i ravnina prestaje biti u općenom položaju, ona prelazi u posebni položaj.

U slici 79 prikazane su ravnine u raznim posebnim položajima. Uzmite svoje kradrante od papira i ravninu[1]), pa se uverite za svaku



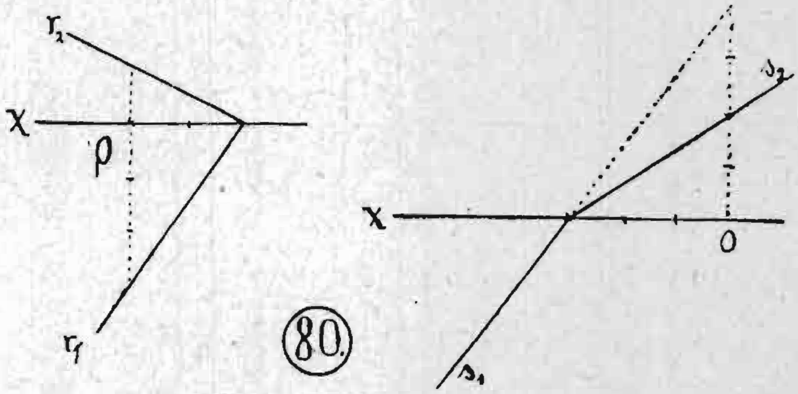
79

predočenu ravninu u slici 79 da joj doista tragovi moraju imati onaj položaj kako je to u slici prikazano. Ravnina ρ ima samo prvi trag (r_1), jer je paralelna s π_2, a drugi trag r_2 nalazi se u neizmernosti. Ravnina τ ima samo drugi trag (t_2), jer je paralelna s π_1, a prvi trag t_1 nalazi se u neizmernosti. Postavite pravokutnik ili knjigu kroz druge tragove ravnina prikazanih u slici 79 i odredite tačan položaj svake pojedine ravnine pomoću prostornog položaja prvoga traga. Ako ravnina jedan od tragova nema, onda je ona s odnosnom ravninom projekcija paralelna.

[1]) Kod ravnina posebnoga položaja najbolje ćete se ispomoći, ako uzmete kakvigod pravokutnik (pravougaonik), recimo knjigu.

Tragove ravnina zadajemo brojkama: ρ (x, y, z). Brojka x označuje udaljenost secišta tragova (M u slici 78) od ishodišta. Pozitivno x je desno, a negativno x je levo od ishodišta. Nakon što smo odredili u osi x secište tragova ravnine, pustimo normalu uvek u samome ishodištu. Pozitivno y nanašamo od ishodišta dole, a negativno y od ishodišta gore na normalu puštenu u ishodištu. Tom tačkom i onom pre, određenom u osi x, prolazi prvi trag ravnine. Drugi trag ravnine određen je tačkom na normali puštenoj u ishodištu, tako da pozitivno z nanesemo gore a negativno z dole i onom tačkom, određenom u ishodištu.

U slici 80 prikazane su ravnine ρ (2, 3, 1) i σ (— 3, — 4, 2) sa svojim tragovima r_1 i r_2, odnosno s_1 i s_2. Kod ravnine ρ je $x = 2$, dakle u osi x dve jedinice desno od ishodišta (ishodište je označeno s 0). Kod ravnine σ je $x = -3$, dakle, tri jedinice levo od ishodišta. U toj se tački seku tragovi r_1 i r_2, odnosno s_1 i s_2.



80

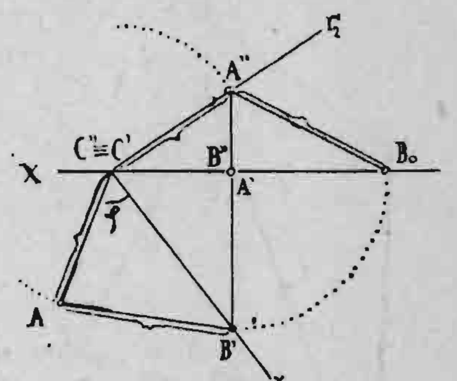
Kad znamo secište tragova ravnine, pustimo u ishodištu normalu na os x. Ravnina ρ ima $x = 3$. Moramo, dakle, na normalu u ishodištu naneti 3 jedinice dole. Ravnina σ ima $y = -4$. Nanesemo na normalu 4 jedinice gore. Ravnina ρ ima $z = 1$, a σ ima $z = 2$. Jednu, odnosno dve, jedinice nanašamo na normalu gore. Da je kod koje od ravnina z negativno, naneli bismo z dole. Spojnica tih tačaka s onom tačkom u osi x (kod ρ desno, kod σ levo od ishodišta) daje prvi, odnosno drugi, trag ravnine. Prvi se trag izvlači ispod osi x, a drugi iznad osi x, jer su samo ti delovi tragova vidljivi.

Kod ravnina posebnoga položaja uvek je po koja vrednost za x, y ili z neizmerno (∞) velika. Na pr. u slici 79 ravnina α ima $x = \infty$, jer se a_1 i a_2 seku u osi x u neizmernosti; ravnina β ima $y = \infty$ i $z = \infty$, jer b_1 i b_2 seku normalu puštenu u ishodištu u neizmernosti; ravnina δ ima $z = \infty$; ravnina ω ima $y = \infty$; ravnina ρ ima $x = \infty$ i $z = \infty$; ravnina τ ima $x = \infty$ i $y = \infty$.

Kad se ravnina zadaje secištem tragova i kutovima što ga prvi, odnosno drugi, trag ravnine zatvara s osi x, onda se taj kut meri uvek desno od sečišta traga s osi x, i to od osi x prema dole za prvi trag, a od osi y prema gore za drugi trag ravnine.

Kut, što ga čine tragovi ravnine u prostoru (osim ravnina paralelnih s osi x), uvek je manji od kuta što ga čine tragovi ravnine predočene svojim tragovima, jer se prelaganjem ravnine π_1 u π_2 uvek i prvi trag preloži u π_2, te time odmakne od svoga drugoga traga.

U slici 81 prikazana je ravnina ρ i određena je veličina kuta što ga tragovi ravnine r_1 i r_2 čine u prostoru. Veličina se toga kuta φ određuje tako, da se u prvome (tačka B) i u drugome (tačka A) tragu uzme po jedna tačka, tako da je AB paralelno s profilnom ravninom. Te dve tačke (A i B) sa secištem (C) tragova čine trokut. Dužina se stranice $\overline{AB} = \overline{A''B_0}$ odredi poznatim načinom. Stranica $\overline{AC} = \overline{A''C''}$, jer leži u π_2, a stranica $\overline{BC} = \overline{B'\ C'}$, jer leži u π_1. Sad poznajemo veličine svih triju stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$, pa lako takav trokut konstruiramo. Kut što ga zatvaraju stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ pokazuje veličinu kuta φ. Taj trokut ABC nacrtan je sa stranicom $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ na prvome tragu r_1, a stranice $\overline{AC} = \overline{AC'}$ i $\overline{AB} = \overline{AB'}$ su konstruisane. Kut $AC'B' = \varphi$; to je veličina kuta što ga tragovi r_2 i r_1 čine u prostoru. Posle ćemo videti da se veličina kuta φ može i jednostavnije odrediti.



81

Zadaci:

215.) Predočite nekoliko ravnina općenoga položaja te prikažite njihov tačni prostorni položaj.

216.) Predočite ravnine: a) $\alpha \parallel x$, tako da tragovi a_1 i a_2 budu iznad osi x; b) $\beta \parallel x$, tako da oba traga budu ispod osi x; c) $\delta \parallel x$, tako da trag d_1 bude iznad osi x, a trag d_2 ispod osi x. Pokažite za svaku ravninu njen prostorni položaj.

217.) Nacrtajte tragove ravnine: a) $\rho \parallel \pi_1$ ispod π_1; b) $\sigma \parallel \pi_2$ iza π_2; c) $\tau \parallel x$, tako da ravnina τ seče π_1 iza π_2, a π_2 iznad π_1.

218.) Nacrtajte tragove ravnine: a) α (— 1, 2, — 3); b) β (4, — 3, 3); c) γ (∞, 2, ∞); d) δ (2, ∞, ∞); e) φ (∞, ∞, — 4); f) ρ (3, — 2, ∞); g) σ (— 5, 3, — 4); h) τ (— 2, ∞, 5). Pokažite prostorni položaj svake pojedine ravnine.

219.) Nacrtajte tragove ravnine koja prolazi ishodištem: a) ρ [kut $(r_1\ x) = 30^0$, kut $(r_2\ x) = 135^0$]; b) σ [kut $(s_1\ x) = 120^0$, kut $(s_2\ x) = 30^0$]; c) τ [kut $(t_1\ x) = 60^0$, kut $(t_2\ x) = 120^0$]; d) α [kut $(a_1\ x)$ = kut $(a_2\ x) = 45^0$]; c) β [kut $(b_1\ x) = 120^0$, kut $(b_2\ x) = 135^0$.] Prikažite svaku ovu ravninu u prostornom položaju.

220.) Nacrtajte tragove ravnine koja prolazi tačkama A(3, 2, 0), B(2, 0, 4) i ishodištem; odredite kut što ga čine tragovi ravnine u prostoru. (Pogledajte sliku 81)

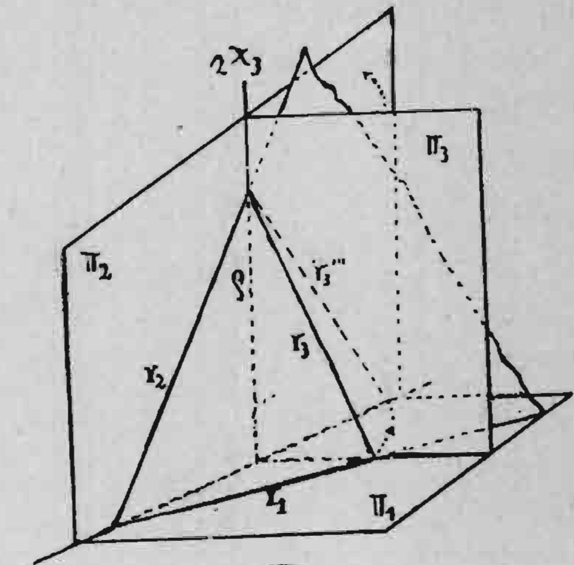
221.) Odredite kut tragova ravnine ρ (— 2, 3, — 1).

222.) Odredite kut tragova ravnine σ (3, ∞, 2). Koliko stepeni mora da iznaša taj kut?

18. Treći trag ravnine

a) Trag na profilnu ravninu

Kao što je prvi i drugi trag ravnine presečnica ravnine s ravninom π_1, odnosno s ravninom π_2, tako je i treći trag ravnine (profilni trag) presečnica ravnine s profilnom ravninom π_3.

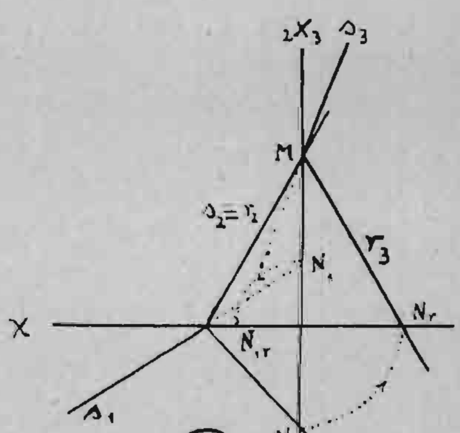


(82)

Budući da ravnine π_2, π_3 i ρ (slika 82) ne prolaze jednim pravcem i nisu među sobom paralelne, moraju se njihove presečnice seći u jednoj tački (ugao, rogalj). To znači da se tragovi r_2 i r_3 moraju seći u osi $_2x_3$, a to se u slici 82 lepo vidi. Nazovemo li presečnicu ravnina π_3 i π_1 osju $_1x_3$, moraće se iz istih razloga tragovi r_1 i r_3 seći u presečnici $_1x_3$. U prostoru dakle prolazi treći trag ravnine secištem drugoga traga r_2 s osi $_2x_3$ i secištem prvoga traga r_1 s osi $_1x_3$.

Budući da se treći trag r_3 nalazi u π_3, tj. izvan ravnine π_2, znamo da ravninu π_3 moramo preložiti oko osi $_2x_3$ levo ili desno u π_2. Kod nas je π_3 preloženo desno. Kod toga će se prelaganja preložiti i r_3 u π_2. U slici 82 to prelaganje je označeno, a preloženi treći trag r_3 je crtkan i označen s r_3'''. Kod toga prelaganja secište tragova r_2 i r_3 s osi $_2x_3$ ostaje na miru.

Taj postupak prenesen u projekciju prikazan je u slici 83 kod ravnine ρ. U prvome redu prelaže se, osim ravnine π_3, i ravnina π_1 oko osi x u π_2. Kod toga pravac $_1x_3$ i os $_2x_3$ padnu u isti pravac, a r_1 u položaj kako je to u slici označeno. Onaj luk u π_1 iz slike 82 prikazuje se u projekciji u svojoj veličini. Da se dakle odredi treći trag neke ravnine, važno je secište M drugoga traga s osi $_2x_3$ i secište N prvoga traga s osi $_2x_3$. Tačka M ostaje uvek na miru, a tačka N se okrene lukom sa središtem u secištu osiju $_2x_3$ i x dok ne padne u os x (u tačku N_r). Tačka N može se okrenuti u N_r, desno ili levo, već prema tome na koju smo se stranu odlučili preožiti ravninu π_3. Spojnica tačaka M i N^r daje treći trag r_3 rav-



(83)

nine ρ. Treći se trag ravnine označuje kao prvi i drugi, samo s r_3 bez $'''$.

U slici 83 prikazana je i ravnina σ kod koje prvi trag s_1 seče ravninu π_3 iza π_2 (N_1 je iznad osi x). Prelaganjem ravnine π_3 na desno mora pasti N_1 levo u tačku N_{1r}. I ovde je spojnica MN_{1r} treći trag s_3 ravnine σ. (Kod crtanja se ne imenuju nikako tačke M, N i N_r)

Zadaci:

223.) Nacrtajte trag na profilnu ravninu ovih ravnina: a) α (2, 3, 5); b) β (—3, 3, —2); c) γ (3, —5, 5); d) δ (∞, 3, 2); e) ρ (—3, ∞, 4); f) σ (5, 3, ∞); g) τ (∞, ∞, 2); h) ε (∞, 3, ∞).

224.) Nacrtajte tragove na profilnu ravninu ravnina ρ i σ, ako su ravnine zadane ovako: a) ρ (— 3, 2, 4), σ (— 3— 5, 4); b) ρ (2, 3, 4) σ (2, —3, —4); c) ρ (∞, 4, 2), σ (∞, —2, 4); d) ρ (∞, 3, 4), σ (∞, 3, —3).

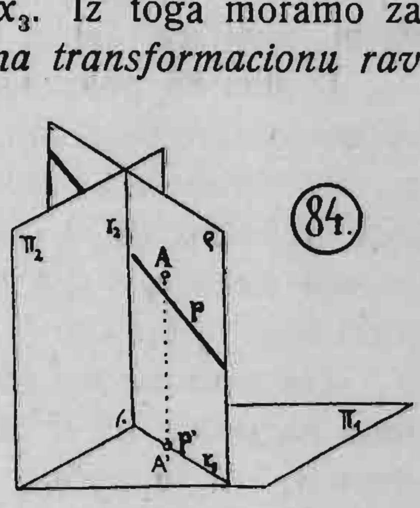
225.) Nacrtajte trag na profilnu ravninu: a) ravnine sumernosti; b) ravnine istovetnosti. (s_3, odnosno i_3, prolazi secištem osi x i ${}_2x_3$, i raspolavlja kut osi s desne, respektive s leve, strane osi ${}_2x_3$, ako smo π_3 preložili na desno)

226.) Nacrtajte treći trag ravnine koja prolazi osju x i tačkom A (2, 1, 4).

b) **Trag na transformacionu ravninu**

Pre negoli pređemo na određivanje traga na transformacionu ravninu, potrebno je da razmotrimo ravninu koja je normalna na koju od ravnina projekcija (ravnina prometalica, slika 64).

Čim je jedan od tragova normalan na os x, i ravnina je normalna na jednu od ravnina projekcija. U slici 79, jer je $d_2 \perp x$, i ravnina je $\delta \perp \pi_1$; isto tako je $o_1 \perp x$, pa je i $\omega \perp \pi_2$. Ravnina α u slici 79 normalna je na profilnu ravninu te je i $a_2 \perp {}_2x_3$. Iz toga moramo zaključiti *da će neka ravnina biti normalna i na transformacionu ravninu, ako je os ${}_1x_3$, ili os ${}_2x_3$ normalna na prvi, odnosno na drugi, trag ravnine.*

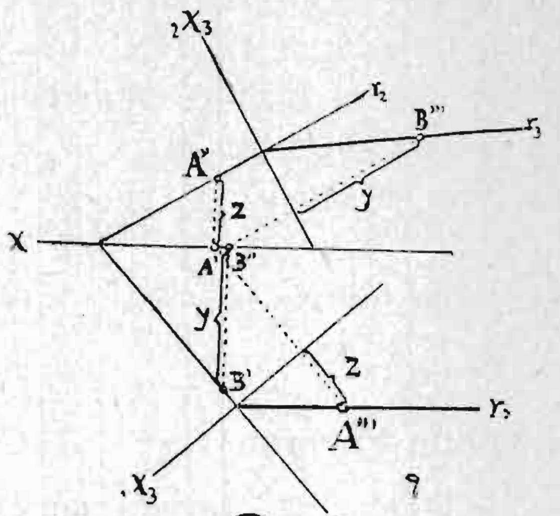


U slici 84 imamo predočenu ravninu prometalicu $\rho \perp \pi_1$ za tačku A i za pravac p. Već od pre znamo da će se A' i p' nalaziti u presečnici ravnina ρ i π_1. Sada, kad znamo za tragove ravnine, možemo ovo gornje kazati i ovako: Tačka A i pravac p imaće svoju prvu projekciju A', odnosno p', u prvome tragu ravnine ρ ako ta ravnina ρ prolazi tačkom A, odnosno pravcem p, normalno na π_1. U slici 84 vidimo da se A' i p' nalazi u τ_1.

U slici 64 a'', b'' i c'' ujedno su i drugi tragovi a_2, b_2 i c_2 ravnina α, β i γ, jer smo kazali za te tri ravnine da stoje normalno na π_2 (ravnine prometalice za π_2).

Iz svega ovoga možemo zaključiti da će se i treće projekcije (projekcije na profilnu ili na transformacionu ravninu) svih tačaka i pravaca koje se nalaze u nekoj ravnini koja je normalna na π_3 nalaziti u trećem tragu određene ravnine, jer je isti odnošaj između π_1 i π_3, odnosno π_2 i π_3, kao i između π_1 i π_2.

XVIII zakon: Svaka tačka i svaki pravac ravnine koja je normalna na π_1, na π_2, odnosno na π_3, ima svoju prvu, svoju drugu, odnosno svoju treću, projekciju u prvom, u drugom, odnosno u trećem, tragu ravnine.



85

U slici 85 prikazana je ravnina ρ sa svojim tragovima r_1 i r_2. Da se odredi treći trag ravnine r_3 (presečnica ravnine ρ s ravninom π_3), uzima se *uvek* π_3 (transformaciona ravnina) normalno ili na r_1, ili na r_2. Prema tome mora stajati $_1x_3 \perp r_1$, odnosno $_2x_3 \perp r_2$.

Uzmemo li os $_1x_3$ (svakako je $_1x_3 \perp r_1$) biće udruženi tragovi r_1 i r_3. Budući da je $r_1 \perp {}_1x_3$, biće ravnina $\rho \perp \pi_3$, a odavde, prema XVIII zakonu, nalaziće se treće projekcije svih tačaka ravnine u trećemu tragu r_3. Uzmemo li, dakle, tačku A u drugome tragu [to je tačka ravnine (A'' u r_2, a A' u osi x)], te odredimo A''', mora r_3 prolaziti tačkom A'''. Kako se tragovi r_1 i r_3 moraju seći u osi $_1x_3$, prolaziće r_3 i tim sečištem. Spojnica, dakle, toga sečišta s A''' je treći trag r_3 ravnine ρ.

U slici 85 pokazano je također kako se određuje treći trag r_3, ako je transformaciona ravnina za π_2 preložena na π_3. U tome se slučaju uzme $_2x_3 \perp r_2$. Odabere se jedna tačka (B) u prvome tragu r_1 i odredi njena treća projekcija (B'''). Treći trag mora prolaziti tačkom B''' i sečištem drugoga traga r_2 s osi $_2x_3$. U tome su slučaju združeni drugi trag r_2 i treći trag r_3 ravnine ρ.

Transformacionu ravninu π_3 uzimamo uvek normalno na r_1, odnosno normalno na r_2 zbog toga da nam ona zadana ravnina, koja je prema π_1 i π_2 u općem položaju, pređe u ravninu prometalicu za π_3. S takvom nam je onda ravninom (u trećoj projekciji) jednostavnije rešavati mnoge zadatke. Vrednost će se transformacije naročito istaknuti kod određivanja prereza telesa.

Zadaci:

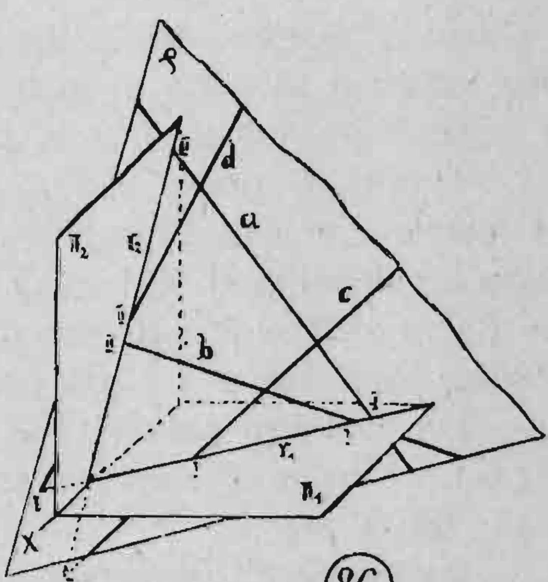
228.) Nacrtajte treći trag ravnine: a) α (3, 2, 4); b) β (—3, 2, —4); c) γ (3, —2, 4); d) δ (3,—2,—4) uzevši os ${}_1x_3$, normalno na prvi trag zadane ravnine.

229.) Nacrtajte treći trag ravnine: a) α (2, 1, 3); b) β (2, —1, 3); c) γ (2, 1, —3); d) δ (2, —1, —3) uzevši os ${}_2x_3$, normalno na drugi trag zadane ravnine.

230.) Odredite drugi trag ravnine ρ, ako je zadano r_1 ($x = 4$, $y = 2$), ${}_1x_3 \perp r_1$, a kut $(r_3\ {}_1x_3) = 30^0$.

19. Pravci i tačke ravnine

Svi pravci neke ravnine, ako nisu među sobom paralelni, moraju se seći. Zamislimo li kakavgod pravac neke ravnine koji nije paralelan ni s prvim ni s drugim tragom te ravnine, moraće, prema gornjemu zakonu odnosni pravac seći prvi i drugi trag ravnine. Budući da su tragovi ravnine pravci u π_1, odnosno u π_2, moraće se sećišta pravca ravnine s tragovima nalaziti u π_1, odnosno u π_2. Tačke, koje se nalaze u π_1, odnosno u π_2, i koje se nalaze na nekom pravcu ravnine, nisu ništa drugo negoli prvo, odnosno drugo, probodište njegovo.

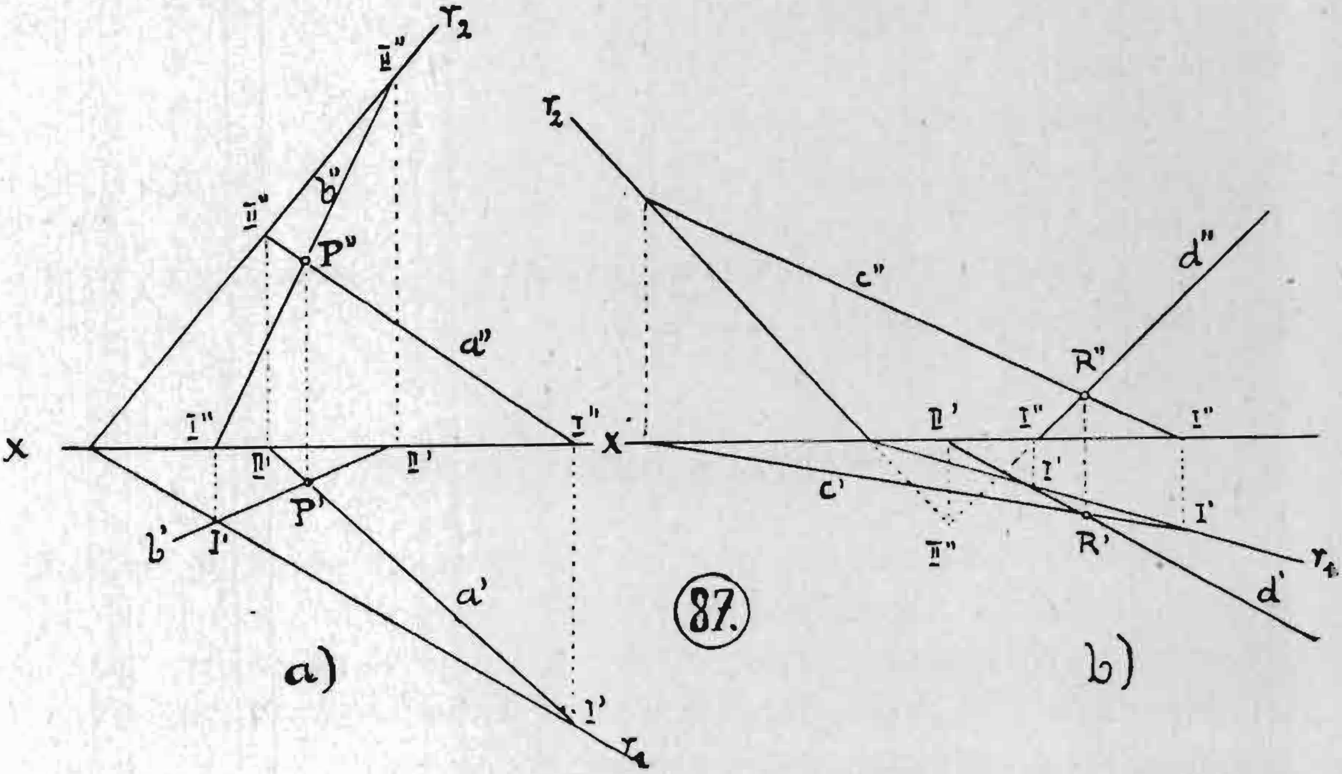


86

U slici 86 zorno je prikazana ravnina ρ i ravnine π_1 i π_2. Ravnina ρ seče π_1 i π_2 u tragovima r_1 i r_2. Na slici se lepo vidi kako se prva probodišta (*I*) pravaca *a*, *b*, *c*, i *d* moraju nalaziti na r_1, a druga probodišta (*II*) na r_2. Iz toga sledi

XIX zakon: Pravac se nalazi samo onda u ravnini, ako je njegovo prvo probodište u prvome, a drugo u drugome tragu ravnine.

U slici 87 a) i b) prikazana je ravnina σ u Mongeovoj projekciji. Prema XIX zakonu pravci *a*, *b*, *c* i *d* nalaze se u ravnini σ, jer su im druga probodišta u drugome tragu, a prva u prvome tragu ravnine. Budući da svako probodište (kao i svaka druga tačka) ima svoje dve projekcije (*II'* i *I''* u osi *x*, a *II''*, odnosno *I'* u s_2, respektive u s_1) mora *a''*, *b''*, *c''* i *d''* ići kroz *II''* i *I''*, a *a'*, *b'*, *c'* i *d* kroz *I'* i *II'*. Prema tome vidimo da se ne sme, ako se želi prikazati pravac u nekoj ravnini, po volji odabrati obe projekcije pravca. Prva projekcija pravca ovisna je o drugoj projekciji njegovoj, a druga projekcija o prvoj projekciji. Možemo kazati da je a' funkcija od a'', isto tako je b'' funkcija od b' itd.



87.

i okrenuto. Smemo, dakle, ako pravac ima da leži u nekoj zadanoj ravnini, odabrati ili samo prvu ili samo drugu projekciju pravca po volji, a onda drugu, odnosno prvu, projekciju moramo istom odrediti.

U slici 87 pravci a, b, c i d nisu među sobom paralelni. Kako svi oni leže u jednoj ravnini, moraju se među sobom seći, pa prema tome i zadovoljavati XVI zakonu. Iz slike se to razabira: a'' b'' seče se u P'', a' b' u P'. Budući da P'' P' leži u ordinali, pravci se a i b seku; tako isto je i s pravcima c i d.

Evo nekoliko primera koji su u savezu s pravcima ravnine.

1. Odredite a', ako pravac a leži u ravnini σ, a zadano je s_1, s_2 i a''. (Slika 87)

Projekcija a'' se produži, tako da seče s_2 i os x. U secištu a'' s drugim tragom s_2 nalazi se II'', a u secištu a'' s osi x nalazi se I''. Ordinala u II'' seče os x u II', a ordinala u I'' seče s_1 u I'. Spojnica II' I' određuje prvu projekciju a' pravca a. Pravac a je sigurno u ravnini σ, jer mu se II'' nalazi u s_2, a I' u s_1. (XIX zakon)

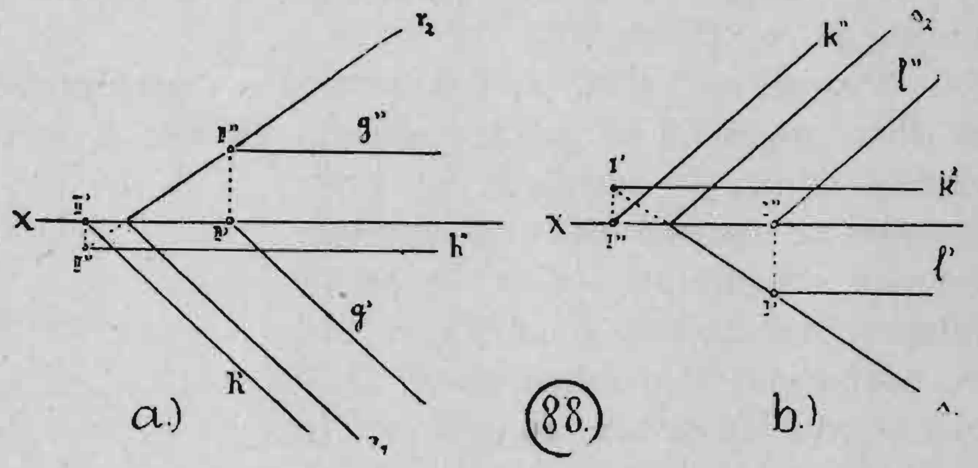
2. Odredite c'', ako pravac c leži u ravnini σ, a zadano je s_1, s_2 i c'. (Slika 87)

Produženo c' seče s_1 u I', a os x u II'. Ordinala u I' seče os x u I'', a ordinala u II' seče produženi s_2 u II''. Spojnicom I'' II'' određeno je c''. Ovde smo videli da se kojiput moraju tragovi ravnine, odnosno projekcije pravca, ako je to potrebno, produžiti i preko osi x.

Može se desiti da bude ravnina crtnje premalena za takvo produženje projekcije pravca i traga ravnine. Kod toga si pomažemo naročitom vrstom pravaca u ravnini. To su t. zv. *glavni pravci ili sutražnice*.

Glavni pravac ili sutražnica je pravac koji leži u ravnini, a paralelan je s prvim, odnosno s drugim, tragom te ravnine. Prema tome postoje dve skupine glavnih pravaca: skupina pravaca ravnine paralelnih s prvim tragom, to su *glavni pravci (sutražnice) prve skupine* ili kraće prve sutražnice, i skupina pravaca ravnine paralelnih s drugim tragom ravnine, to su *glavni pravci* (*sutražnice*) *druge skupine*, ili kraće, druge sutražnice. Budući da su prve sutražnice paralelne s prvim tragom ravnine, one su paralelne i s π_1, te im je prema tome druga projekcija paralelna s osi x, a prva projekcija paralelna s prvim tragom. Osim toga, jer prve sutražnice leže u ravnini, moraju im se druga probodišta nalaziti u drugome tragu ravnine.

U slici 88 a) prikazane su prve sutražnice g i h ravnine ρ. Po volji odaberemo $g' \parallel r_1$ ili $h' \parallel r_1$ i onda pomoću II' i II'' odredimo $g'' \parallel x$, odnosno $h'' \parallel x$. To smo mogli učiniti i tako da smo najpre odabrali $g'' \parallel x$ ili $h'' \parallel x$, pa onda odredili pomoću II'' i II' prve projekcije g', odnosno h'.



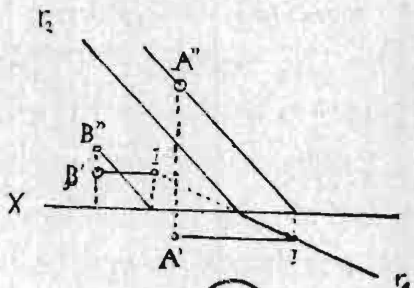
Kako su pak druge sutražnice paralelne s drugim tragom ravnine, one su paralelne i s π_2, te prema tome imaju prve projekcije paralelne s osi x, a druge projekcije paralelne s drugim tragom. Prva probodišta drugih sutražnica nalaze se u prvome tragu, jer su pravci ravnine.

U slici 88 b) prikazane su druge sutražnice k i l ravnine σ. Po volji se odabere $k'' \parallel s_2$, ili $l'' \parallel s_2$, i pomoću I'' i I' odredi $k' \parallel x$, odnosno $l' \parallel x$. Može se i okrenuto postupati da se najpre po volji odabere $k' \parallel x$, ili $l' \parallel x$, pa pomoću I' i I'' odredi $k'' \parallel s_2$, odnosno $l'' \parallel s_2$.

Sutražnicama se ponajčešće služimo kod određivanja projekcija tačke koja se nalazi u ravnini. Svejedno je, kojom se sutražnicom služimo. Na pr. sledeći zadatak:

3. Odredite A'' i B', ako se tačke A i B nalaze u zadanoj ravnini ρ. Poznato je A' i B''. (Slika 89)

Taj bi se zadatak mogao rešiti i pomoću pravca općenoga položaja u zadanoj ravnini, koji prolazi tačkom A, odnosno tačkom B.



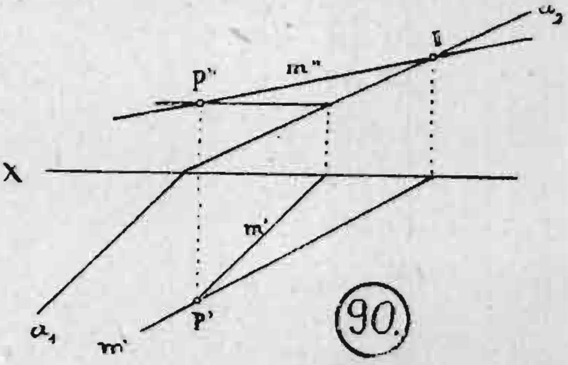
89

Upotrebljava se, jer je praktičnije, sutražnica prve ili druge skupine. Za određenja traženih projekcija tačaka A i B upotrebljena je u slici 89 druga sutražnica. Opisivanje postupka nije potrebno, jer sama slika sve jasno pokazuje.

Beleška. Budući da se kod rešavanja raznih zadataka mnogo upotrebljavaju glavni pravci, oni se najčešće nikako ne imenuju u slici. Još se više moramo ispomagati probodištima pravca kod rešavanja raznih zadataka, pa se zbog toga najobičnije ni probodišta nikako ne označuju ili, ako se već označe, onda se označe samo s *II* mesto s *II''* ili samo s *I* mesto s *I'*, a *II'* i *I''* uopće se ne beleže. Tako je to učinjeno i u slici 89.

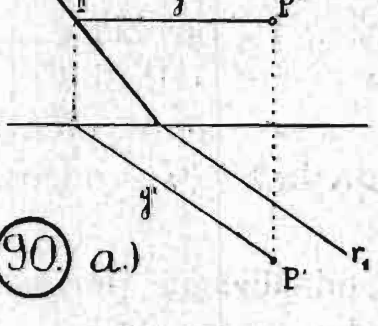
4. Odredite m'' pravca m ravnine α, ako poznajete njegovu prvu projekciju m'. (Slika 90)

Poznati su tragovi a_1 i a_2 ravnine α i prva projekcija m' pravca m. Prva projekcija m' je tako zadana, da seče a_1 izvan dohvata naše ravnine crtnje. Za određenje m'' ispomažemo se sutražnicom prve ili druge skupine. Znamo da će m'' proći drugim probodištem *II* pravca m. Na m' odaberemo P' i odredimo P'' pomoću prve sutražnice (mogla se je uzeti i druga sutražnica). Spojnica *II* P'' daje m''.



90.

5. Kad bi bilo zadano, da zadana projekcija pravca neke ravnine ne seče u dohvatu ravnine crtnje ni trag ravnine, ni os x, pomogli bismo si tako da na zadanoj projekciji pravca odaberemo dve tačke, pa pomoću sutražnica odredimo one nepoznate projekcije onih dveju odabranih tačaka. Spojnica tih dobivenih projekcija tačaka onoga zadanoga pravca dala bi nam traženu projekciju pravca.



90. a.)

U slici 90 a) poznat je od ravnine ρ njen prvi trag r_1 i jedna njena tačka P; treba odrediti drugi trag r_2 ravnine ρ.

Ta ravnina ρ potpuno je određena, jer poznajemo jedan njen pravac r_1 i jednu njenu tačku P. Mora, dakle, da postoji samo jedan r_2 na svome određenome mestu. Odmah znamo da će r_2 prolaziti secištem traga r_1 s osi x. Dalje znamo da je prva sutražnica paralelna s prvim tragom. Biće dakle $g' \parallel r_1$, a $g'' \parallel x$. Nacrtamo kroz P' projekciju $g' \parallel r_1$, a kroz P'' projekciju $g'' \parallel x$. Odredivši drugo probodište II pravca g, dobili smo još jednu tačku drugoga traga r_2 ravnine ρ.

Zadaci:

231.) Odredite druge projekcije tačaka $A(x = 2, y = 3)$, $B(x = 3, y = 4)$, $C(x = -4, y = 2)$ i $D(x = 1, y = -5)$, ako one leže u ravnini ρ $(-2, \infty, 3)$. (XVIII zakon)

232.) Odredite m', ako pravac m leži u ravnini σ $(-2, 3, 4)$. $m'' = A''B''$ $[A''$ $(x = 2, z = 1)$, B'' $(x = 1, z = 2)]$. (Slika 87)

233.) Odredite a'', ako pravac a leži u ravnini α $(3, -1, 4)$. $a' = A'B'$ $[A'$ $(x = 4, y = 1)$, B' $(x = 2, y = 2)]$. Predočite tačke M, N, O i P u ravnini α, tako da bude M u I, N u II, O u III, a P u IV kvadrantu.

234.) Zadana je ravnina ρ $(\infty, 3, 4)$ i $p'' = P''R''$ $[P''$ $(x = 2, z = 1)$, R'' $(x = -1, z = 3)]$; odredite p', ako pravac p leži u ravnini ρ.

235.) Odredite m'', ako pravac m leži u ravnini ρ $(\infty, 3, -1)$. $m' = M'N'$ $[M'$ $(x = 0, y = 2)$, N' $(x = -1, y = 4)]$.

236.) Odredite A'', B'', C'' i D'', ako tačke A, B, C i D leže u ravnini α $(3, 1, 4)$. Uzmite, da je: A' $(x = -4, y = 2)$, B' $(x = 0, y = 1)$. C' $(x = 2, y = -2)$, D' $(x = 3, y = 2)$.

237.) Zadana je ravnina β $(2, 1, -2)$ i A'' $(x = -2, z = 1)$, B'' $(x = 4, z = 2)$, C'' $(x = -1, z = -2)$ i D'' $(x = 6, z = 2)$; odredite A', B', C' i D', ako te tačke leže u ravnini β.

238.) Zadana je ravnina δ $(\infty, 2, 4)$; A' $(x = 2, y = 1)$ i B' $(x = -1, y = 3)$; odredite A'' i B'', ako tačke A i B leže u ravnini δ. (Sutražnicom se kod paralelnih ravnina s osi x ne možete pomoći. Pomozite si pravcem AB)

239.) Odredite treći trag profilne ravnine α $(-3, 2, 3)$ i pokažite da se treće probodište pravca p nalazi u a_3, ako pravac p leži u ravnini. Uzmite $p = A'B'$ $[A'$ $(x = 2, y = 2)$, B' $(x = 4, y = 1)]$.

240.) Zadana je ravnina ρ $(7, 5, 7)$ i $p' = A'B'$ $[A'$ $(x = 4, y = 2)$, B' $(x = 6, y = 4)]$; odredite p'', ako pravac p leži u ravnini ρ. (Slika 90)

241.) Odredite m', ako pravac m leži u ravnini σ $(6, -10, 6)$. Zadano je $m'' = A''B''$ $[A''$ $(x = -10, z = 6)$, B'' $(x = -7, z = 5)]$. (§ 19, 4)

242.) Zadana je ravnina ρ (∞, 6, 4) i $a' = A'B'$ [A' ($x = -4$, $y = 4$), B' ($x = 2$, $y = 3{,}5$)]; odredite a'', ako pravac a leži u zadanoj ravnini ρ. (§ 19, 5) (U ovome slučaju nećemo si moći pomoći sutražnicom, jer je ravnina $\rho \parallel x$. Namesto sutražnica uzećemo pravce općenoga položaja u ravnini ρ prema uputi za sutražnice u § 19, 5. Možemo si pomoći i profilnom ravninom)

243.) Gde se nalaze prve projekcije tačaka svake ravnine, ako se druge projekcije tih tačaka nalaze u drugome tragu?

244.) Gde se nalaze druge projekcije tačaka svake ravnine, ako su njihove prve projekcije u prvome tragu?

245.) Zadana je ravnina σ (3,4,5) i druga projekcija trokuta A (1,?,1), B (—2,?,2), C (—1,?,4); odredite prvu projekciju trokuta ABC, ako on leži u zadanoj ravnini.

246.) Zadana je ravnina ρ (—3,—4,2); predočite: a) pravac g ravnine ρ, tako da je pravac $g \parallel \pi_1$ i da se nalazi 2 jedinice nad π_1; b) pravac h ravnine ρ, tako da je pravac $h \parallel \pi_2$ i da se nalazi za 3 jedinice pred π_2.

247.) Nalazi li se tačka A (3,2,4) u ravnini ρ (—2,2,3)?

248.) Zadan je r_1 ($x = 5, y = 4$) i tačka P (—1,2,3) ravnine ρ; odredite r_2. (Slika 90 a)

249.) Odreditte r_1 ravnine ρ, ako poznajete njen drugi trag r_2 ($x = 5$, $z = 3$) i jednu njenu tačku P (2,2,2).

250.) Zadano je r_2 ($z = 3$) ravnine $\rho \parallel x$; odredite r_1, ako ravnina ρ zatvara s π_2 kut $\beta = 60^0$. (Pomozite si profilnom ravninom)

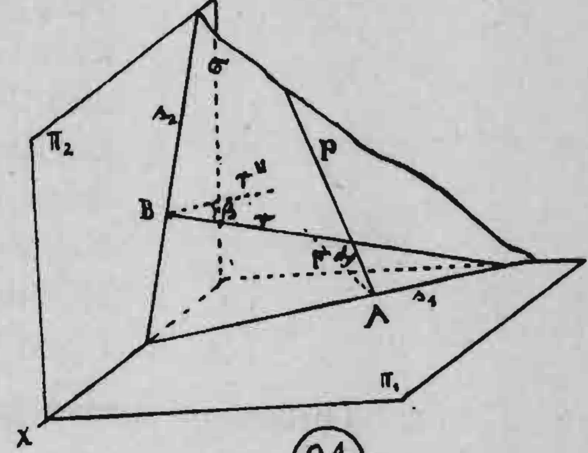
251.) Odredite r_2 ravnine $\rho \parallel x$, ako je zadano r_1 ($y = 5$) i ako ravnina ρ s π_1 zatvara kut $\alpha = 30^0$. (Pomozite si profilnom ravninom)

252.) Zadan je r_1 ($y = 4$) ravnine $\rho \parallel x$; odredite r_2, ako je drugi priklon ravnine ρ (kut ravnine ρ s ravninom π_2) jednak 45^0. (Pomozite si profilnom ravninom)

20. Prikloni kutovi ravnine

Svaka ravnina zatvara s π_1 i s π_2 neki određeni kut. Kut s π_1 naziva se, kao i kod pravca, prvi prikloni kut i označuje se s α, a kut ravnine s π_2 naziva se drugi prikloni kut, i označuje s β. Svaka ravnina čini s ravninom π_1 jedan prostorni kut ili kut diedar, a s ravninom π_2 drugi prostorni kut. Veličina se prostornog kuta određuje, tako da se u bilo kojoj tački presečnice onih dveju ravnina koje čine prostorni kut povuče normala u jednoj i u drugoj ravnini na presečnicu. Kut, što ga zatvaraju te dve normale, je kut što ga čine one dve ravnine.

U slici 91 prikazana je zorno ravnina σ i ravnine π_1 i π_2. Presečnica ravnina σ i π_1 je s_1, a σ i π_2 je s_2. Ako tačkom A u s_1 pustimo normalu p' na s_1, tako da ona leži u π_1, pa onda još iz A u s_1 pustimo normalu p na s_1, tako da ona leži u ravnini σ, pokazaće nam te normale p' i p prvi prikloni kut α ravnine σ. Drugi prikloni kut β ravnine σ dobili smo tako da smo u tački B pustili normale na s_2 (presečnica ravnina σ i π_2). Normala r'' leži u π_2, a normala r leži u ravnini σ.

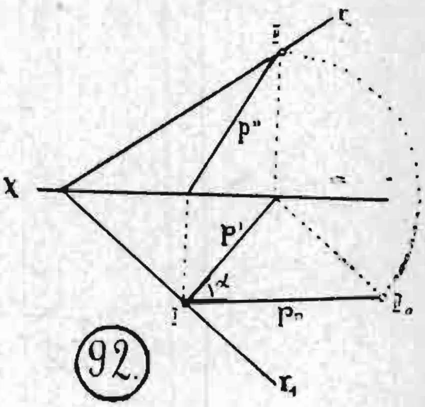


91

Budući da pravci p i p', odnosno r i r'' čine ravninu, koja je normalna na π_1, respektive na π_2, biće p' prva projekcija pravca p, a r'' druga projekcija pravca r. Iz toga sledi da će prvi prikloni kut pravca p biti jednak prvome priklonome kutu ravnine σ, a drugi prikloni kut pravca r biće jednak s drugim priklonim kutom ravnine σ. Pravci p i r zovu se *prva*, odnosno *druga, priklonica* ravnine σ. Prema tome postoje dve skupine priklonica za svaku ravninu. *Priklonice prve skupine, ili kraće, prve priklonice su pravci ravnine koji stoje normalno na prvome tragu, a priklonice druge skupine (druge priklonice) su pravci ravnine koji stoje normalno na drugome tragu.* Kut s π_1, što ga čini koja od priklonica prve skupine, je prvi prikloni kut ravnine, a kut s π_2, što ga čini jedna od priklonica druge skupine, je drugi prikloni kut ravnine. Inače svi pravci koji leže u ravnini a nisu normalni na prvi, odnosno na drugi, trag ravnine, zatvaraju manji kut negoli je prvi, odnosno drugi, prikloni kut ravnine. Iz toga sledi

XX zakon: Priklonice su pravci ravnine koji zatvaraju s π_1, odnosno s π_2, najveći mogući kut.

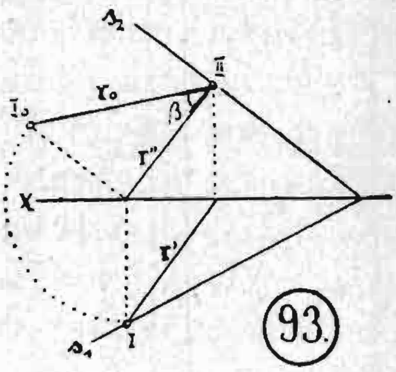
Zadana ravnina i ravnine π_1 i π_2 čine trostrani ugao (rogalj). Iz stereometrije znamo *da je suma kutova, što ih zatvaraju među sobom plohe trostranoga ugla, veća od 180°*. Kako π_1 i π_2 čine kut od 90°, biće suma priklonih kutova svake ravnine s π_1 i s π_2 veća od 90°. Dakle, za priklone kutove ravnine je $(\alpha + \beta) > 90°$. Kod pravaca smo videli da je $(\alpha + \beta) < 90°$. Izutetak čini pravac paralelan s profilnom ravninom, jer je kod njega $(\alpha + \beta) = 90°$. I kod ravnina ima izuzetaka. Suma priklonih kutova ravnina paralelnih s osi x jednaka je 90°. Kod takve su ravnine priklonice prve i druge skupine među sobom paralelne i paralelne s profilnom ravninom. Dakle, kod ravnina, paralelnih s osi x, suma priklonih kutova mora biti jednaka 90^0. $(\alpha + \beta = 90^0)$ Prema tome je kod ravnina $(\alpha + \beta) \geqq 90^0$.



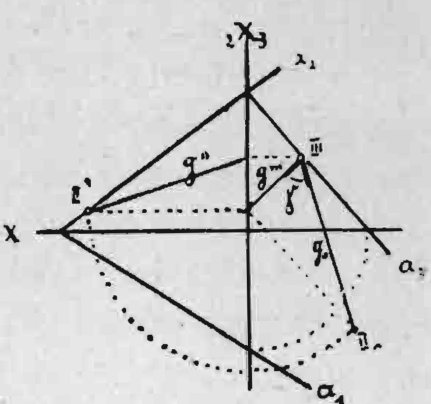
92.

U slici 92 prikazana je ravnina ρ i određen njen prvi prikloni kut α. Prvi prikloni kut određujemo pomoću prvih priklonica. Nacrta se najpre $p' \perp r_1$. Budući da se priklonica p nalazi u ravnini ρ, lako odredimo poznatim postupkom p''. (XIX zakon) Nakon toga odredimo prvi prikloni kut priklonice p. Prvi priklon pravca p ujedno je i prvi priklon ravnine ρ.

U slici 93 prikazana je ravnina σ i njen drugi prikloni kut β. Drugi se prikloni kut određuje pomoću druge priklonice. Nacrta se $r'' \perp s_2$. Budući da se priklonica r nalazi u ravnini σ, poznatim načinom odredimo r'. Nakon toga odredimo drugi prikloni kut priklonice r. Taj priklon β pravca r ujedno je drugi prikloni kut ravnine.



93.



94.

U slici 94 prikazan je treći prikloni kut γ ravnine α. Prikloni kut γ određen je pomoću *priklonice treće skupine* (*treće priklonice*). $g''' \perp a_3$. Drugu projekciju g'' odredimo pomoću zakona o pravcu ravnine. Kut, što ga čini treća priklonica g s ravninom π_3, je treći prikloni kut ravnine α.

Sad ćemo rešiti neke značajnije primere koji su u savezu s priklonim kutovima ravnine.

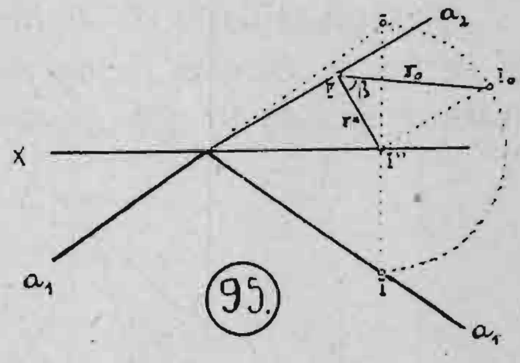
1. *Odredite prvi trag ravnine* α, *ako je zadan drugi trag* a_2 *ravnine* α *i drugi prikloni kut* β. (Slika 95)

Kod izrade toga primera postupaćemo isto kao u slici 93, samo što ćemo prema slici 93 iz rezultata ići na zadatak.

Znamo da druga projekcija druge priklonice stoji normalno na drugome tragu ravnine α. Nacrtamo dakle $r'' \perp a_2$. U drugome probodištu II priklonice r nacrtamo zadani kut β. Tako smo dobili preloženu priklonicu r_0. Gde paralela s a_2 iz I'' seče r_0, dobije se I_0. Ako sada na ordinalu u I'' nanesemo udaljenost $\overline{I''I_0}$ gore ili dole, dobijemo I. Time nam je određen prvi trag a_1 ravnine α i zadatak je rešen.

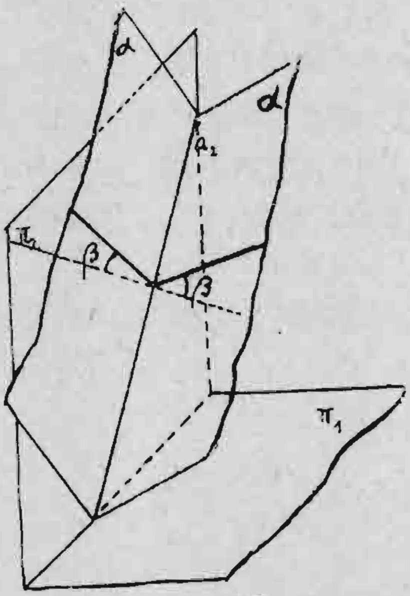
Zadatak ima dva rešenja. Uistinu i u prostoru možemo jednim pravcem položiti dve ravnine koje zatvaraju neki određeni kut prema nekoj ravnini. (Slika 96)

2. *Odredite prvi trag r_1 ravnine* ρ, *ako je zadan njen drugi trag r_2 i prvi prikloni kut* α. (Slika 97 i 98) Sve tangencijalne ravnine na neki uspravni stožac (kupu) zatvaraju s ravninom baze jednake kutove. Ti su kutovi jednaki kutovima što ih stoščeve izvodnice čine s ravninom baze. Na temeiju te spoznaje osniva se rešenje gornjega zadatka.

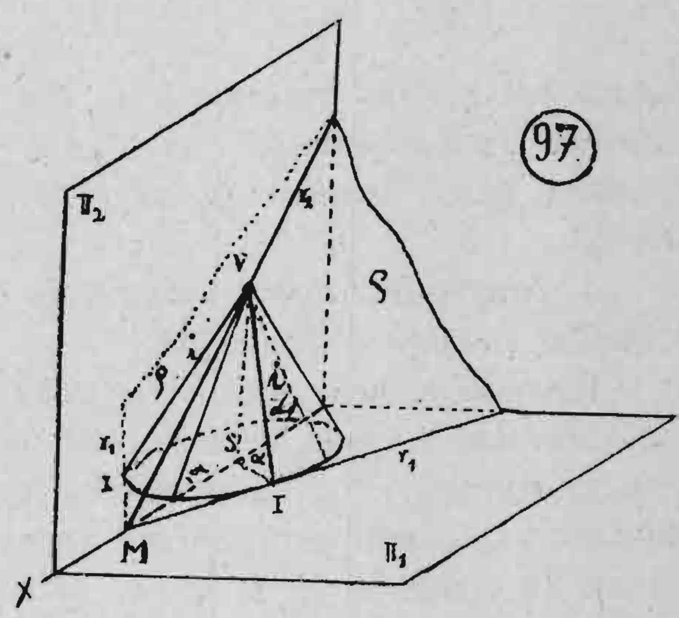


(95)

U slici 97 prikazano je rešenje zadatka zorno. U drugome tragu r_2 uzme se gdegod stoščev vrh V s bazom u π_1, tako da njegove



(96)



(97)

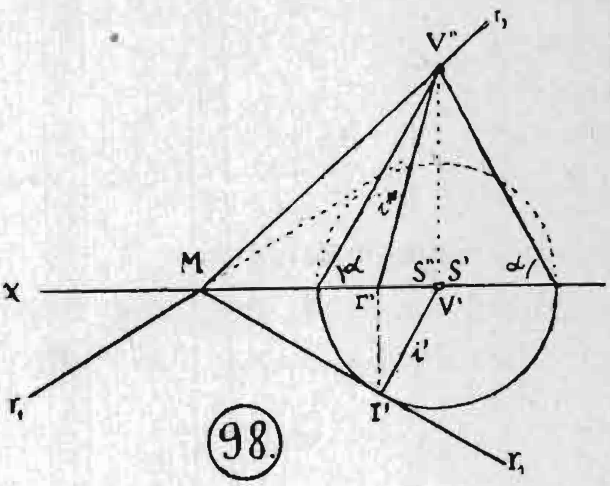
izvodnice zatvaraju s π_1 zadani kut α. Pravcem r_2 koji prolazi vrhom položene su na stožac dve tangencijalne ravnine (tangiraju stožac u izvodnicama i). Te ravnine seku π_1 u r_1. To su dakle prvi tragovi ravnine ρ. Da ti pravci r_1 moraju biti tangente iz M na bazu, jasno je samo po sebi. Vidimo, dakle, da zadatak ima dva rešenja.

Kad bi se desilo, da je r_2 baš sama izvodnica stošca [kut (r_2 os x) $= \alpha$], zadatak bi imao jedno rešenje. Ravnina ρ bila bi normalna na π_2. Tačka M nalazila bi se upravo na konturi stoščeve baze.

Konačno, kad bi se desilo da je kut (r_2 os x) $> \alpha$, tačka M bi pala u stoščevu bazu, pa ne bismo mogli nacrtati tangencijalne ravnine na stožac. Zadatak ne bi imao rešenje.

Prema tome je primer pod 2 u ovome paragrafu rešiv samo u onome slučaju, ako je kut (r_2 os x) $<$ α (dva rešenja), ili, ako je kut (r_2 os x) $=$ α (jedno rešenje).

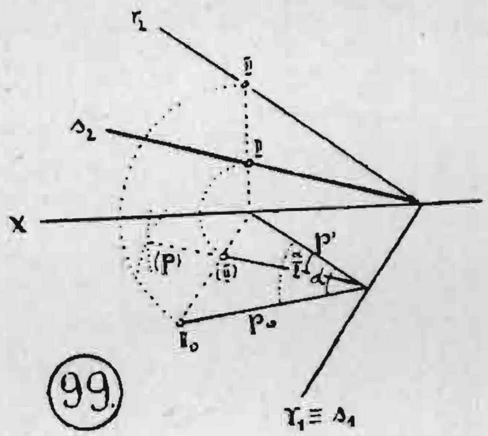
Rešenje zadatka 2 u Mongeovoj projekciji nalazi se u slici 98. Da se bolje razume tumačenje slike 98, mora se neprestano upoređivati sa slikom 97 gde je sve prikazano zorno.



U drugome tragu r_2 uzme se gdegod V''. Prva projekcija V' je u osi x. Visina stošca nalazi se u π_2, a baza u π_1. Jedna polovina baze nalazi se pred π_2, a druga polovina iza π_2. *Prva projekcija čitavoga stošca je kružnica. Druga projekcija stošca je istokračni trokut kojemu je osnovka u osi x, jedan vrh u V'', a kraci mu zatvaraju s osi x zadani kut* α. Ona kružnica u π_1 (baza stošca) ima svoje središte u polovištu baze trokuta ($S'' \equiv S'$), a polumer joj je jednak polovini trokutove baze. Tangente iz tačke M određuju prve tragove r_1 traženih ravnina.

3. *Nacrtajte tragove ravnine* σ, *ako ona raspolavlja prikloni kut* α *zadane ravnine* ρ. (Slika 99)

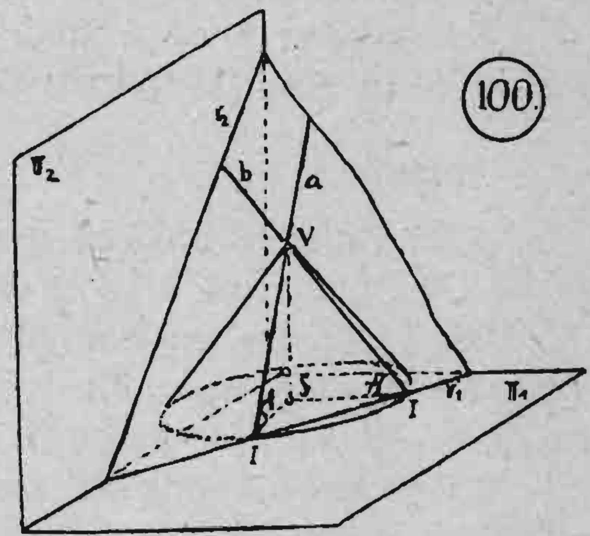
Ravnina σ, koja raspolavlja prikloni kut α ravnine ρ, zove se simetralna ravnina ravnina ρ i π_1. Ta simetralna ravnina mora prolaziti presečnicom ravnina ρ i π_1. To znači da će se r_1 i s_1 nalaziti u istome pravcu. Prvi prikloni kut tražene ravnine σ biće za polovinu manji od prvoga priklonoga kuta zadane ravnine ρ. Zbog toga odredimo kut α ravnine ρ pa ga raspolovimo. Budući da je $r_1 \equiv s_1$, pokrivaće se prve projekcije prvih priklonica obeju ravnina, zadane i tražene.



Prema tome raspolovnica je kuta α ujedno i preložena priklonica p ravnine σ. Sad, već poznatim načinom, odredimo (II) pa II. Time je s_2 potpuno određen i zadatak rešen.

4. *Zadanom tačkom V u zadanoj ravnini* ρ *treba položiti pravac p tako da on leži u ravnini* ρ *i da ima prvi prikloni kut* $\varphi = 60^0$. (Slika 100 i 101)

U slici 100 prikazana je zorno zadana ravnina ρ i u njoj tačka V. Tačku V smatramo vrhom uspravnoga stošca. Središte baze je u π_1, a izvodnice moraju da zatvaraju s π_1 zadani kut φ. Ravnina ρ, koja prolazi vrhom V pomoćnoga stošca, seče stožac u dve izvodnice, ako je prvi priklon zadane ravnine veći od kuta φ. Ravnina ρ diraće pomoćni stožac, ako je prvi priklon zadane ravnine upravo jednak zadanome kutu φ. Napokon, ravnina ρ ne će seći oblinu (plašt) pomoćnoga stošca (osim u V), ako je njen prvi priklon manji od zadanoga kuta φ.



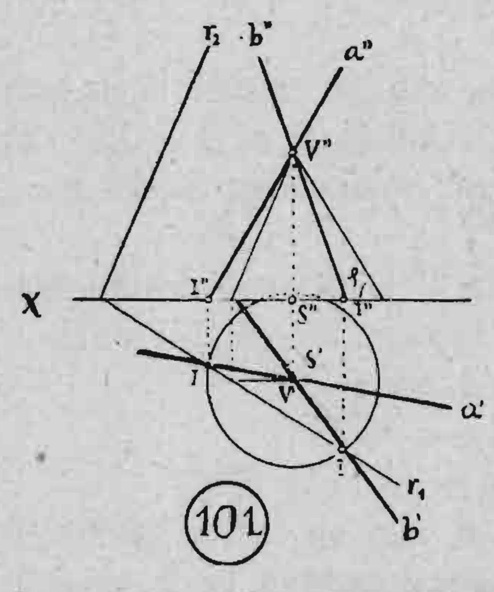
100

U slici 100 sve izvodnice zatvaraju s π_1 kut φ. Budući da ravnina ρ seče taj stožac u izvodnicama a i b, one leže u zadanoj ravnini ρ, zatvaraju s π_1 kut φ i prolaze zadanom tačkom V. Vidimo da zadatak ima dva rešenja.

Kad bi kut α ravnine ρ bio upravo jednak kutu φ, zadatak bi imao jedno rešenje.

Prema XX zakonu, ako je kut $\alpha < \varphi$, zadatak se ne može rešiti, jer ne možemo u nekoj ravnini nacrtati pravac koji bi imao prikloni kut veći od priklonoga kuta ravnine.

U slici 101 rešen je zadatak 4 u Mongeovoj projekciji. I ovde treba kod tumačenja slike 101 uspoređivati sliku 100 u kojoj je sve prikazano zorno.



101

Pomoću sutražnice prikazane su projekcije V'' i V' tačke V ravnine ρ. Druga projekcija pomoćnoga stošca je istokračni trokut kojemu je vrh V'', a kraci toga istokračnoga trokuta zatvaraju s osi x kut $\varphi = 60^0$. Prva projekcija stošca je krug sa središtem u V'. Polumer toga kruga (prve projekcije stošca) jednak je polovini baze istokračnoga trokuta (druge projekcije stošca). U tačkama, u kojima r_1 seče krug, nalaze se prva probodišta pravaca a i b. Prve projekcije a' i b' prolaze tačkom V' i njihovim probodištima I. Druge projekcije a'' i b'' prolaze tačkom V'' i tačkama I''. Time su predočena ona dva moguća pravca a i b

koji prolaze tačkom V, leže u ravnini ρ i zatvaraju s π_1 kut od 60^0, a to se i tražilo zadatkom pod 4.

Da slučajno r_1 dira krug, onda bi imao zadatak jedno rešenje. Kad r_1 ne bi sekao krug, zadatak ne bi imao rešenja.

Zadaci:

253.) Odredite priklone kutove α i β ravnine: a) α (3, 2, 4); b) β (— 2, 4, 3); c) γ (4, 3, — 1); d) δ (— 3, — 2, 4).

254.) Odredite priklone kutove α i β ravnine: a) ρ (— 2, ∞, 4); b) σ (3, 2, ∞); c) τ (∞, ∞, 3); d) φ (∞, 2, ∞); e) α (— 3, ∞, ∞); f) β (∞, 3, 4). Morate li se kod ovih ravnina pomagati priklonicama?

255.) Odredite prikloni kut γ prema profilnoj ravnini ravnina, određenih u zadatku 242. (Pogledajte sliku 94)

256.) Zadan je drugi trag r_2 ($x = 3$, $z = 4$) ravnine ρ. Odredite prvi trag r_1, ako ravnina ρ zatvara s π_2 kut: a) $\beta = 30^0$; b) $\beta = 45^0$; c) $\beta = 60^0$. (Pogledajte sliku 95)

257.) Zadan je prvi trag s_1 ($x = -3$, $y = 2$) ravnine σ. Odredite drugi trag s_2, ako ravnina σ zatvara s π_1 kut: a) $\alpha = 30^0$; b) $\alpha = 45^0$; c) $\alpha = 60^0$. (Slično kao u slici 95)

258.) Odredite tragove simetralne ravnine, ako ona mora raspolavljati prvi prikloni kut α ravnine: a) ρ (— 4, 5, 4); b) ρ (3, — 2, 4). (Pogledajte sliku 99)

259.) Odredite tragove simetralne ravnine, ako ona raspolavlja drugi prikloni kut β ravnine: a) α (3, 3, 5); b) α (— 3, 3, — 3). (Slično kao u slici 99)

260.) Odredite prvi trag ravnine ρ, ako je zadan njen drugi trag r_2 ($x = 5$, $z = 3$) i njen prvi prikloni kut: a) $\alpha = 45^0$; b) $\alpha = 60^0$. (Pogledajte sliku 98)

261.) Odredite drugi trag ravnine σ, ako je zadan njen prvi trag s_1 ($x = -5$, $y = 3$) i njen drugi prikloni kut: a) $\beta = 45^0$; b) $\beta = 60^0$. (U ovome ćete primeru uzeti vrh pomoćnoga stošca u s_1, a bazu u π_2. Slično kao u slici 98)

262.—263. Zadana je ravnina ρ i tačka V u zadanoj ravnini. Nacrtajte projekcije pravca p, ako on prolazi tačkom V, leži u ravnini ρ i zatvara s π_1 kut α. (Pogledajte sliku 101) Uzmite:

262.) ρ (2, 3, 6), V ($x = -1$, $z = 1$), $\alpha = 45^0$.

263.) ρ (— 2, — 3, 1), V ($x = -1, y = 3$), $\alpha = 30^0$.

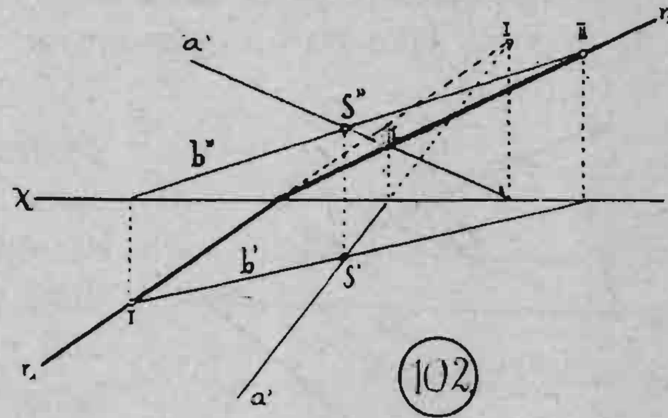
264.—265. Odredite projekcije pravca p, ako on leži u ravnini ρ (2, 2, 4), zatvara s π_2 kut $\beta = 30^0$, a prolazi tačkom V($x = -2$, $z = 3$) ravnine ρ. (Tačka V je vrh pomoćnoga stošca s bazom u π_2. Slično kao u slici 101) Uzmite:

264.) $\rho\ (2, 2, 4),\ V\ (x = -2,\ z = 3),\ \beta = 30^0.$

265.) $\rho\ (3, -1, 3),\ V\ (x = -4,\ y = 3),\ \beta = 45^0.$

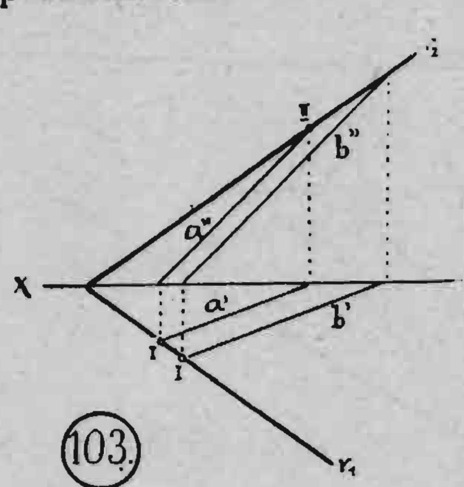
21. Određivanje tragova ravnine

Iz Stereometrije znamo da je ravnina određena: a) dvema raznosmernicama (dva pravca koja se seku); b) dvema paralelama; c) pravcem i tačkom izvan pravca i d) trima tačkama koje ne leže na jednome pravcu.



U slici 102 zadane su raznosmernice a i b i onda određeni tragovi ravnine ρ *koju te raznosmernice određuju.* Budući da raznosmernice određuju jednu jedinu ravninu, moraće postojati samo jedan prvi i samo jedan drugi trag te ravnine, a usto moraće se tragovi seći u osi x. Odrede se, dakle, oba probodišta pravaca a i b. Spojnica prvih probodišta određuje prvi trag r_1 ravnine ρ, a spojnica drugih probodišta određuje drugi trag r_2 ravnine ρ. Prema XIX zakonu pravci a i b leže u ravnini ρ. Time je zadatak rešen.

Kod određivanja tragova ravnine nije potrebno naći oba druga i oba prva probodišta zadanih raznosmernica. Dostatno je da se nađu oba prva i jedno drugo probodište, odnosno oba druga i jedno prvo probodište pravaca. Ako smo odredili dva prva i jedno drugo probodište, onda spojnica prvih probodišta daje prvi trag, a drugi trag dobijemo, ako spojimo secište prvoga traga s osi x s onim drugim probodištem. Slično radimo, ako smo odredili dva druga i jedno prvo probodište.



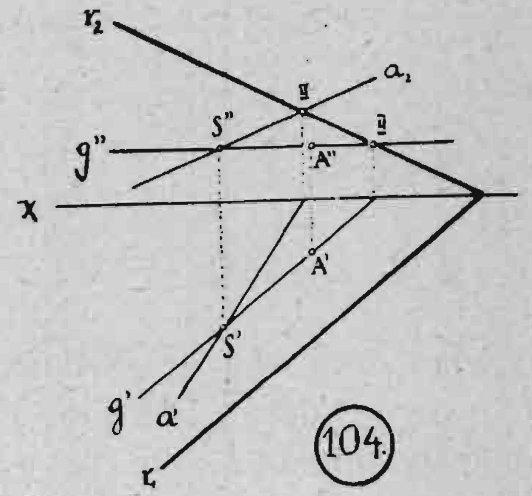
U slici 103 zadane su paralele a i b i određeni tragovi r_1 *i* r_2 *ravnine* ρ *koju te paralele određuju.*

Postupak je sasvim isti kao kad su zadane dve raznomernice. I kod paralela dostatno je odrediti ili oba druga i jedno prvo probodište, odnosno oba prva i jedno drugo probodište.

Ako je zadan pravac a i neka tačka A izvan pravca, pa treba odrediti tragove ravnine koja je određena pravcem a i tačkom A, onda se tačkom A povuče kakavgod pravac koji seče zadani pravac a. Time je sveden zadatak na dve raznosmernice, pa se nakon toga i postupa isto kao u slici 102.

Isti se zadatak može rešiti i tako da se tačkom A povuče paralela sa zadanim pravcem a. Time je zadatak sveden na dve paralele kao što je to u slici 103.

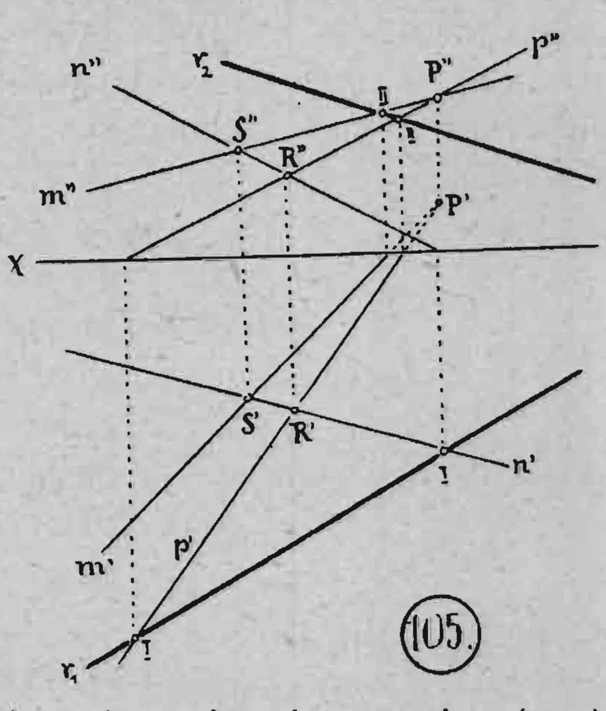
Najpraktičnije je da se tačkom A povuče pravac koji je paralelan s π_1 ili s π_2, tako da on seče pravac a.



U slici 104 na taj su način određeni tragovi ravnine ρ *koja je zadana pravcem* a *i tačkom* A. Iz slike se vidi da je određeno drugo probodište pravca a i pomoćnoga pravca g koji prolazi zadanom tačkom A paralelno s π_1 i seče pravac a u tački S. Spojnicom drugih probodišta pravaca a i g prolazi r_2, a secištem r_2 s osi x prolazi prvi trag $r_1 \parallel g'$, jer je pravac g prva sutražnica ravnine ρ. Prvo probodište pravca nismo morali ni odrediti.

Ako određujemo tragove ravnine koja je zadana trima tačkama A, B i C, postupamo ovako: Spojimo dve i dve tačke (npr. AB i AC). Time je zadatak sveden na dve raznosmernice. (Sl. 102)

Ili, spojimo dve tačke, a treća tačka ostane izvan pravca (spojnice). Zadatak je sveden na pravac i tačku izvan pravca. (Slika 104)



Pre negoli pređemo na zadatke u savezu s tim paragrafom potrebno je pokazati na nekoliko primera neke slučajnosti koje se dešavaju kod određivanja tragova ravnine.

1. Zadane su raznomernice m i n svojim projekcijama; treba odrediti tragove ravnine (mn). (Slika 105)

U ovome su zadatku pravci m i n zadani tako da od pravca m zbog nedostatnog mesta na kom crtamo, ne možemo naći prvo, a od pravca n drugo, probodište. Osim toga tragovi r_1 i r_2 ravnine $(m\ n)$ seku os x predaleko, te se tom tačkom u osi x ne možemo pomoći.

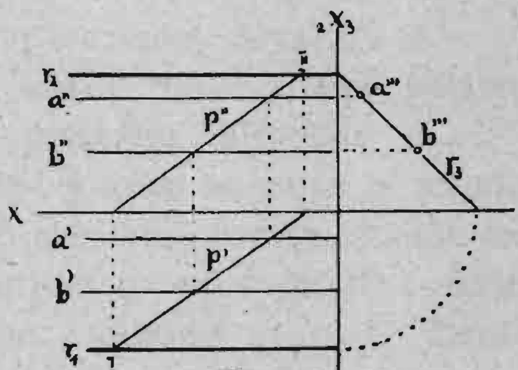
Da se ipak odrede tragovi te ravnine, uzme se u pomoć treći pravac *p*, tako da on seče zadane pravce *m* i *n*. Kod toga treba paziti da se odabere takav pravac *p* kojemu će se moći odrediti prvo i drugo probodište.

Pravac *p* seče pravce *m* i *n* u tačkama *P* i *R*. Odredivši druga probodišta *II* pravaca *m* i *p*, pa onda prva probodišta *I* pravaca *n* i *p*, dobijemo spojnicom tih drugih, odnosno tih prvih, probodišta drugi trag r_2, odnosno prvi trag r_1 ravnine $(m\ n) = \rho$.

Mogli smo se kod toga primera ispomoći također sutražnicom ravnine ρ. Nacrtali bismo, naime, prvu sutražnicu, tako da ona seče zadane pravce *m* i *n*. Njome bi nam bio određen smer prvoga traga ravnine ρ. Prvi trag prolazio bi prvim probodištem pravca *n* paralelno s prvom projekcijom prve sutražnice. Zatim bismo nacrtali drugu sutražnicu, tako da ona seče zadane pravce *m* i *n*. Njome bi nam bio određen smer drugoga traga ravnine ρ. Drugi trag r_2 ravnine ρ prolazio bi drugim probodištem pravca *m* paralelno s drugom projekcijom druge sutražnice. Samo se sobom razume da bi se na taj način određeni tragovi r_1 i r_2 morali pokrivati s onima koje smo pre, drugim postupkom, dobili.

2. Nacrtajte tragove ravnine ρ, ako je ona zadana pravcima $a \parallel b \parallel x$. (Slika 106)

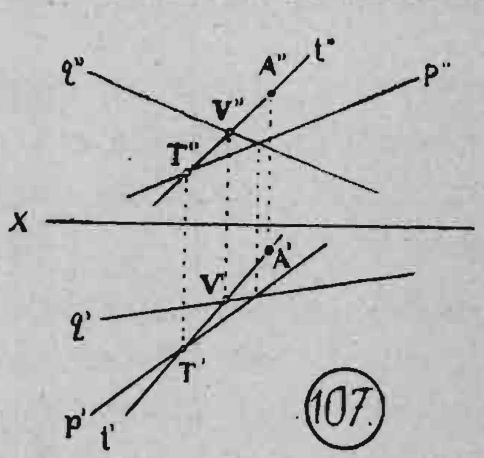
Budući da su pravci *a* i *b* paralelni s osi *x*, moraće i ravnina ρ biti paralelna s osi *x*. Tragovi r_1 i r_2 moraće, dakle, biti također paralelni s osi *x*. Odredimo a''' i b'''. Jer je ravnina $\rho \perp \pi_3$ (profilna ravnina), prolaziće r_3 ravnine ρ tačkama a''' i b'''. Kad znamo r_3, lako ćemo odrediti r_1 i r_2 kod ravnine koja je paralelna s osi *x*.



106

Taj smo primer mogli rešiti i bez profilne ravnine. Može se, naime, nacrtati kakavgod pravac *p* koji seče zadane pravce *a* i *b*. Tragovi r_1 i r_2 ravnine ρ, koja je određena pravcima $a \parallel b \parallel x$, prolaziće prvim, odnosno drugim, probodištem pravca *p* paralelno s osi *x*. I na taj su način u slici 106 određeni tragovi r_1 i r_2. Iz slike se vidi da su tragovi dobiveni na istome mestu kao i pre. Samo se sobom razume da kod rešavanja toga zadatka, kao i uopće kod svakog drugog zadatka, nisu potrebna oba postupka.

Vrlo je često praktičnije neke primere, koji se rešavaju pomoću ravnine, rešavati tako da se tragovi ravnine ni ne nacrtaju. Taj postupak imademo u sledećem zadatku:



107

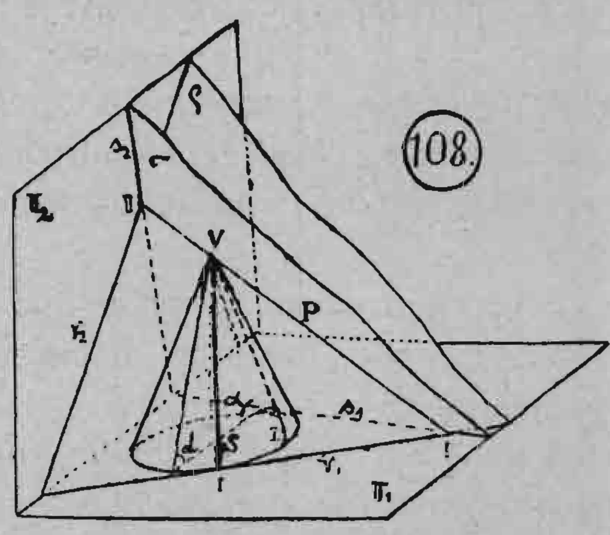
3. *Odredite A', ako je zadano A'' i ako tačka A leži u ravnini zadanih raznosmernica p i q.* Taj ćemo zadatak rešiti ne upotrebivši tragove ravnine (pq). (Slika 107)

Tačkom A položi se kakavgod pomoćni pravac t koji seče zadane mimosmernice u tačkama T i V. Druga projekcija t'' seče p'' u T'', a q'' u V''. Odrede se prve projekcije T' i V' na p', odnosno na q'. Spojnica $T'V'$ daje prvu projekciju t' pravca t. Budući da pravac t seče pravce p i q, on se mora nalaziti u ravnini (p q), pa se prema tome i A' nalazi na t'.

Jednim se pravcem može položiti neizmerno mnogo ravnina, ako nije izrekom još štogod o ravnini, osim pravca, zadano. Zbog toga se mora, ako se baš želi nekim pravcem položiti samo jedna ravnina, još štogod o ravnini istaknuti. Na pr. zadanim pravcem p treba položiti ravninu ρ normalno na π_1, ili na π_2, ili paralelno s osi x, ili tako da pravac p bude priklonica prve ili druge skupine, itd. Evo jedan sličan primer.

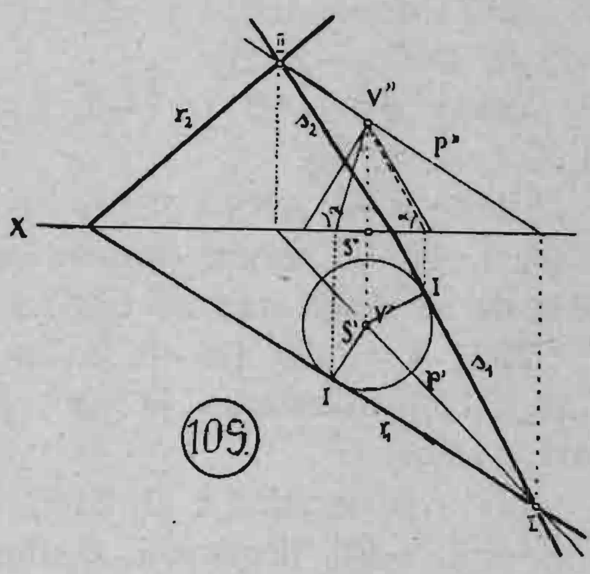
4. *Zadanim pravcem p neka se položi ravnina* ρ *koja ima prvi prikloni kut* $\alpha = 60^0$. (Slika 108 i 109)

U slici 108 prikazano je rešenje zadatka zorno. Gdegod na pravcu p uzme se tačka V i smatra vrhom uspravnoga stošca. Središte i baza toga pomoćnoga štošca je u π_1. Izvodnice zatvaraju s π_1 zadani kut α. Položimo li zadanim pravcem p tangencijalne ravnine ρ i σ na pomoćni stožac, one će sigurno zatvarati s π_1 kut α, jer su tangencijalne ravnine stošca kojemu izvodnice zatvaraju s π_1 kut α. Prvi su tragoví r_1 i s_1 ravnina ρ i σ tangente iz prvoga probodišta pravca p na bazu stošca. Sve se to tačno razabira u slici 108.



108

To isto je prikazano Mongeovom projekcijom u slici 109. Gdegod na pravcu p odabere se tačka V (V'' na p'', a V' na p'). Prva projekcija pomoćnoga stošca je kružnica, a druga njegova projekcija je istokračni trokut kojemu kraci s bazom čine zadani kut α. Tangente iz I na kružnicu daju prve tragove r_1 i s_1, a drugi tragovi r_2 i s_2 prolaze drugim probodištem II pravca p. Time je zadatak rešen. Vidimo da zadatak ima dva rešenja.



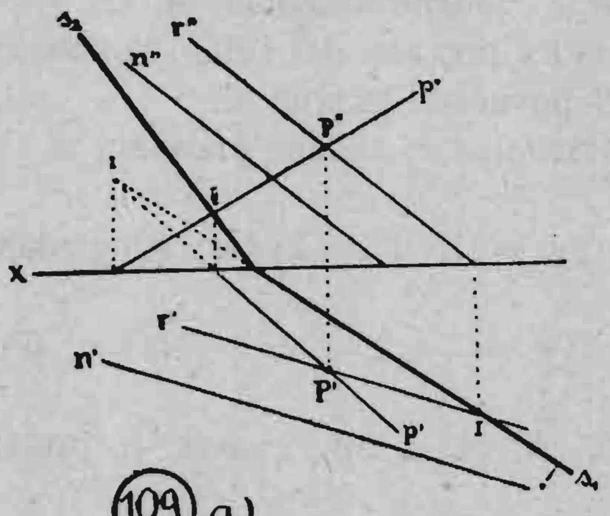
109

Kad bi baza pomoćnoga stošca prolazila upravo prvim probodištem I pravca p, mogli bismo nacrtati samo jednu tangencijalnu ravninu na stožac. To bi značilo da zadani pravac zatvara s π_1 upravo zadani prikloni kut α, tj. taj bi pravac bio prva priklonica tražene ravnine.

Kad bi se desilo da I pada unutar baze pomoćnoga stošca, ne bismo mogli iz I povući tangente na bazu, pa prema tome takav zadatak ne bi imao uopće rešenja. To se događa u onome slučaju, ako se zahteva da se pravcem položi ravnina koja zatvara manji kut s π_1 negoli što ga zatvara sam pravac.

Zadatak 4 prema tome ima dva rešenja, ako je kut α veći od prvoga priklonoga kuta pravca p; jedno rešenje, ako je kut α jednak prvome priklonome kutu pravca p; ili nijedno rešenje, ako je kut α manji od prvoga priklonoga kuta pravca p.

5. *Pravcem p treba položiti ravninu σ, tako da bude paralelna sa zadanim pravcem n.* [Slika 109 a)]



109 a)

Odabere se na pravcu p gdegod tačka P i povuče tom tačkom pravac $r \parallel n$. Pravci r i p određuju ravninu σ koja je paralelna s pravcem n, jer prolazi pravcem r, a r je paralelno sa n. Osim toga ravnina σ prolazi i pravcem p, dakle, zadovoljava zadatku.

Zadaci:

266. — 275. Nacrtajte tragove ravnine, ako je ona zadana raznosmernicama a i b. Uzmite:

266.) $a = AB$ [A (2, 1, 3), B (3, 3, 2)], $b = BC$ [B (3, 3, 2), C (5, 1, 5)].

267.) $a = AB$ [A (—2, —1, 4), B (—4, 5, 1)], $b = AC$ [A (—2, —1, 4), C (1, —2, 2)].

268.) $a = AB$ [A (—2, 2, 1), B (4, 1, 3)], $b = BC$ [B (4, 1, 3), C (—2, 3, 2)].

269.) $a = AB$ [A (2, 1, 3), B (5, 4, 2)], $b = BC$ [B (5, 4, 2), C (8, 4, 4)]. (U ovome primeru dostatno je odrediti samo dva probodišta da se mogu nacrtati tragovi ravnine)

270.) $a = AB$ [A (0, 3, 2), B (2, 3, 5)], $b = BC$ [B (2, 3, 5), C (6, 6, 5)]. (Dostatno je naći jedno probodište da se odrede tragovi ravnine)

271.) $a = AB$ [A (2, 5, 5), B (—6, 6, 2)], $b = AC$ [A (2, 5, 5), C (—4, 4, —2)]. (Pomozite si drugom sutražnicom)

272.) $a = AB$ [A (2, 6, 2), B (2, 6, 3)], $b = CD$ [C (2, 6, 5), D (4, 4, 6)]. ($\rho \perp \pi_1$)

273.) a ($y = 2$, $z = 4$) $\parallel x$, $b = AC$ [A (2, 2, 4), C (4, 3, 5)]. ($\rho \parallel x$)

274.) a ($x = 3$, $z = 4$) $\perp \pi_2$, $b \parallel x$. ($\rho \parallel \pi_1$)

275.) $a = AB$ [A (0, 3, 2), B (0, 2, 4)], $b = BC$ [B (0, 2, 4), C (—2, 7, 3)].

276.) Zadani su pravci $a = AB$ [A (2, 1, 2), B (—1, 2, 1) i $b = CD$ [C (4, 1, 2), D (—2, 2, 4)]. Može li se pravcima a i b položiti ravnina?

277.) Nacrtajte tragove ravnine ρ, zadane tačkama A (3, 3, 3), B (7, 6, 1) i C (5, 2, 4) i to: a) pomoću pravaca AB i BC; b) pomoću pravca AB i paralele s pravcem AB povučene tačkom C.

278. — 281. Nacrtajte tragove ravnine σ, zadane pravcima $m \parallel n$. Uzmite da je:

278.) m ($y = 3$, $z = 5$) $\parallel n$ ($y = 1$, $z = 2$) $\parallel x$. (Pogledajte sliku 106)

279.) m ($y = 4$, $z = 2$) $\parallel n$ ($y = -2$, $z = -4$) $\parallel x$. (Pogledajte sliku 106)

280.) $m = MN$ [M (2, 4, 2), N (4, 4, 3)]; pravac n prolazi tačkom P (—2, 2, 4).

281.) $m = LM$ [L (0, 0, 0), M (3, 2, 2)]; pravac n prolazi tačkom N (0, 5, 3).

282.) Nacrtajte tragove ravnine, ako je ona određena pravcem a u ravnini sumernosti i pravcem b u ravnini istovetnosti. Pravci se a i b seku. Uzmite da je kut (a' os x) = 30°, kut (b' os x) = 60°. (Pomozite si sutražnicom koja seče pravce a i b)

283. — 288. Nacrtajte tragove ravnine ρ, ako je ona određena pravcem p i tačkom M. Uzmite da je:

283.) p $(y = -2, z = 3) \parallel x$; M (0, 2, 1).

284.) p $(x = -2, z = 4) \perp \pi_1$; M (1, 1, 3).

285.) p $(x = 3, z = 4) \perp \pi_2$; M (0, 2, 4).

286.) $p = PR$ [P (2, 3, —3), R (—4, —1, 1)]; M (—2, 1, 3).

287.) $p = PR$ [P (3, 2, —3), R (3, 3, —2)]; M (0, 2, 5).

288.) $p = PR$ [P (—2, 3, —3), R (—2, —3, 3)]; M (1, 4, 2).

289.) Nacrtajte prvi trag ravnine σ, ako je zadan njen drugi trag $s_2 = MN$ [M (—2, 0, 0), N (0, 0, 4)] i njena tačka P (3, 3, 3).

290.) Nacrtajte drugi trag ravnine ρ, ako je zadan njen prvi trag $r_1 = AB$ [A (3, 0, 0), B (0, 3, 0)] i njena tačka C (3, 2, 3).

291.) Odredite drugi trag ravnine $\alpha \parallel x$, ako je zadan njen prvi trag a_1 $(y = 3)$ i njena tačka A (—2, 1, 2).

292.) Nacrtajte drugi trag ravnine ρ, ako ona prolazi tačkom V (—2, 3, 5) i zatvara s π_1 kut $\alpha = 60^0$. Prvi trag r_1 zatvara s osi x kut od 45^0. (Pomozite si uspravnim stošcem kojemu je tačka V vrh, baza u π_1, a izvodnice čine s π_1 kut od 60^0. Tangenta na bazu pod kutom od 45^0 s osi x je prvi trag r_1. Drugi se trag odredi pomoću sutražnice, položene tačkom V)

293. — 294. Pravcem p položite ravninu koja zatvara s π_1 kut α, odnosno, s π_2 kut β. Uzmite:

293.) $p = PR$ [P (—2, 2, 3), R (2, 5, 5)]; kut $\alpha = 60^0$. (Pogledajte sliku 109)

294.) $p = PR$ [P (2, 3, 2), R (—2, 4, 5)]; kut $\beta = 45^0$. (Pomoću stošca s bazom u π_2, a vrhom u pravcu p)

295. — 296. Odredite drugu projekciju A'' tačke A (—2, 3, ?), ako ona leži u ravnini $(m\ n)$, tako da ne crtate tragove ravnine $(m\ n)$. (Pogledajte sliku 107)

295.) $m = LM$ (L (3, 3, 5), M (4, 2, 7)]; $n = LN$ [L (3, 3, 5), N(—1, —1, 3)].

296.) m $(y = 1, z = 4) \parallel n$ $(y = -2, z = 5) \parallel x$.

297.) Zadane su tačke A (3, —2, 5), B (1, 3, 2) i C (—1, 1, 1); odredite P' tako da ne crtate tragove ravnine (ABC), ako tačka P (2, ?, 3) ima ležati u ravnini (ABC).

298.) Zadanim pravcem $p = MN$ [M (—2, 2, 3), N (2, 4, 6)] položite ravninu: a) $\rho \perp \pi_1$; b) $\rho \perp \pi_2$; c) $\rho \parallel x$; d) ρ tako da pravac p bude prva priklonica; e) ρ tako da pravac p bude druga priklonica.

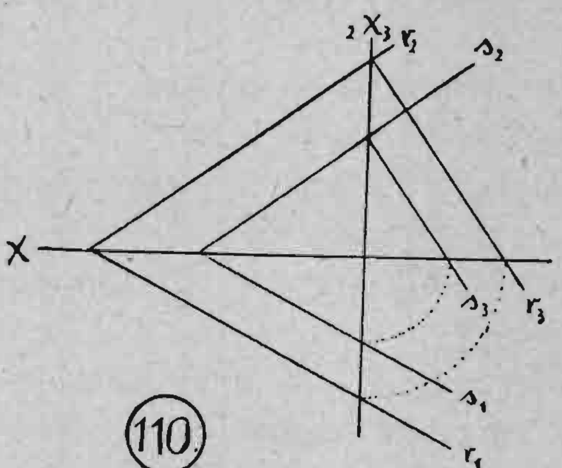
299.) Zadanim pravcem $p = MN$ [M (—2, 3, 1), N (4, 5, —1)], položite ravninu ρ, tako da bude paralelna s pravcem $a = AB$ [A (—2, 1, 2), B (2, 4, 1)]. (Pogledajte sliku 109 a)

22. Paralelne ravnine

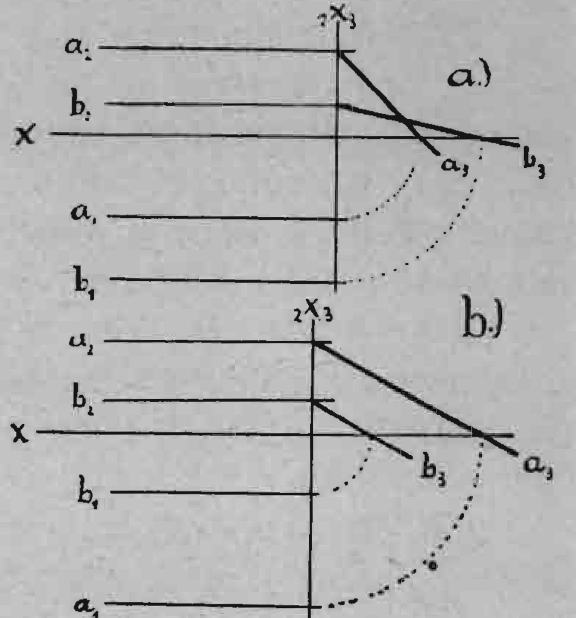
Iz stereometrije znamo da ravnine koje su među sobom paralelne seku kakvugod ravninu u paralelnim pravcima. Budući da su tragovi ravnine, presečnice ravnine s ravninama π_1 i π_2, moraju kod paralelnih ravnina prvi tragovi — a također i drugi — među sobom biti paralelni. Ako su kod ravnina među sobom paralelni prvi tragovi, a drugi nisu, ili okrenuto, ravnine nisu među sobom paralelne. U takvu je slučaju ravnina π_1, odnosno ravnina π_2 paralelna s presečnicom onih među sobom neparalelnih ravnina. Odavle sledi

XXI zakon: *Dve su ravnine među sobom paralelne, ako su im istoimeni tragovi među sobom paralelni.*

Da se konstatira paralelizam dveju ravnina, dostatno je da budu među sobom paralelni prvi tragovi i drugi tragovi. To je pokazano u slici 110. Budući da je $r_1 \parallel s_1$ i $r_2 \parallel s_2$, moraju biti ravnine ρ i σ također među sobom paralelne, a prema XXI zakonu mora biti i $r_3 \parallel s_3$.



110.



111.

Izuzetak čine ravnine koje su paralelne s osi x.

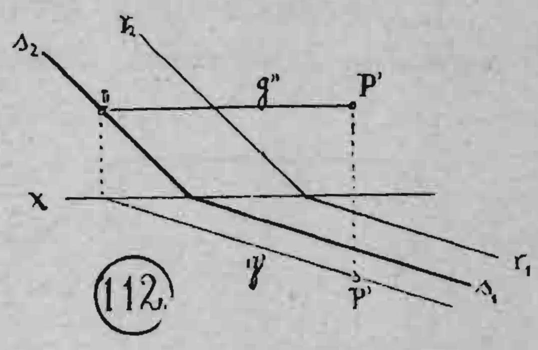
U slici 111 nacrtane su ravnine $\alpha \parallel x$ i $\beta \parallel x$. Kod takvih je ravnina uvek $a_1 \parallel b_1$ i $a_2 \parallel b_2$, pa ipak te ravnine ne moraju biti uvek među sobom paralelne. Istom onda su te ravnine među sobom paralelne, ako su im i treći tragovi među sobom paralelni.

U slici 111 a) ravnina α nije paralelna s ravninom β, jer nije $a_3 \parallel b_3$. U slici 111 b) paralelne su među sobom ravnine α i β, jer je $a_3 \parallel b_3$.

1. *Nacrtajte tragove ravnine σ, ako ona mora prolaziti zadanom tačkom P paralelno sa zadanom ravninom ρ.* (Slika 112)

Znamo već unapred da će biti $s_2 \parallel r_2$ i $s_1 \parallel r_1$, jer moraju biti ravnine ρ i σ među sobom paralelne. Budući da znamo smer tragova tražene ravnine σ, možemo nacrtati zadanom tačkom P sutražnicu prve ili druge skupine i odrediti njeno drugo, odnosno prvo, probodište. U slici 112 položili smo tačkom P prvu sutražnicu g. Mora dakle biti: $g' \parallel r_1$, a $g'' \parallel x$. Drugim probodištem II sutražnice g prolazi drugi trag s_2 ravnine σ paralelno s r_2, a prvi trag s_1 je paralelan s r_1. Time je zadatak rešen.

Treba upamtiti *da se uvek ispomažemo sutražnicama kod određivanja tragova ravnina, ako znamo smer tragova.*

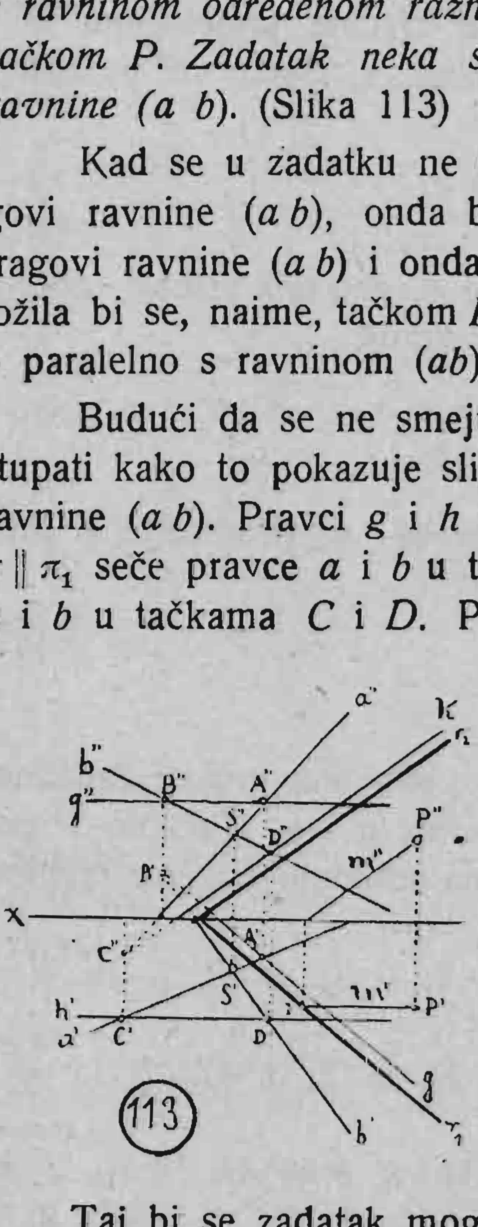


112

2. *Odredite tragove ravnine* ρ, *ako ona treba da bude paralelna s ravninom određenom raznosmernicama a i b, i mora prolaziti zadanom tačkom P. Zadatak neka se reši, a da se ne crtaju tragovi zadane ravnine (a b).* (Slika 113)

Kad se u zadatku ne bi naročito zahtevalo da se ne crtaju tragovi ravnine $(a\,b)$, onda bi se taj zadatak rešio tako da se nacrtaju tragovi ravnine $(a\,b)$ i onda bi se postupalo isto kao u slici 112. Položila bi se, naime, tačkom P, pomoću prve ili druge sutražnice, ravnina ρ paralelno s ravninom (ab).

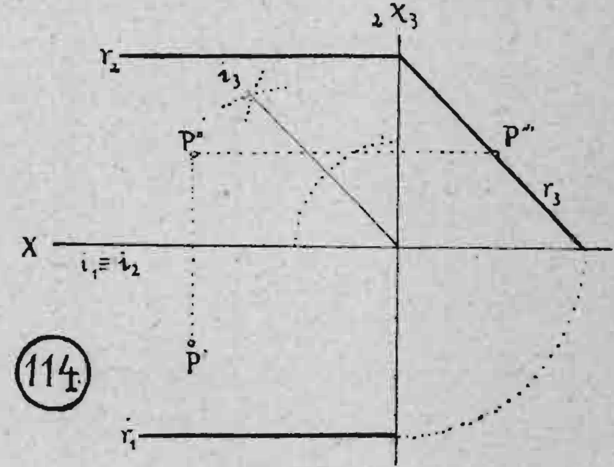
Budući da se ne smeju crtati tragovi ravnine (ab), mora se postupati kako to pokazuje slika 113. Nacrtaju se glavni pravci g i h ravnine $(a\,b)$. Pravci g i h moraju seći zadane pravce a i b. Pravac $g \parallel \pi_1$ seče pravce a i b u tačkama A i B, a pravac $h \parallel \pi_2$ seče pravce a i b u tačkama C i D. Prva projekcija g' pokazuje smer prvoga traga r_1 $(r_1 \parallel g')$; druga projekcija h'' pokazuje smer drugoga traga r_2 $(r_2 \parallel h'')$. Sada, kad znamo smer tragova ravnine ρ, povuče se zadanom tačkom P prva ili druga sutražnica, odredi njeno drugo, odnosno prvo, probodište i nacrtaju tragovi r_1 i r_2. U slici 113 nacrtana je tačkom P druga sutražnica m $(m'' \parallel h'', m' \parallel x)$ i određeno njeno prvo probodište I. Prvi trag r_1 prolazi probodištem I paralelno s g', a $r_2 \parallel h''$.



113

Taj bi se zadatak mogao i ovako rešiti: Tačkom P povukla bi se dva pomoćna pravca od kojih bi jedan bio paralelan s pravcem a, a drugi s pravcem b. Odredila bi se probodišta tih pomoćnih pravaca nacrtali tragovi i zadatak bi bio rešen. Taj je način jednostavniji i praktičniji od onoga u slici 113. Ipak se u slici nismo držali toga načina, jer se je htela pokazati upotreba sutražnica.

3. *Odredite tragove ravnine* ρ, *ako ona prolazi zadanom tačkom* P *paralelno s ravninom istovetnosti.* (Slika 114)



114

U prvome redu moramo opaziti da će ravnina ρ biti paralelna s osi x, jer ravnina istovetnosti prolazi osju x. Prema tome će biti $r_1 \parallel r_2 \parallel x$. Treći trag i_3 ravnine istovetnosti raspolavlja kut (os x os $_2x_3$) s leve strane osi $_2x_3$, jer π_3 prelažemo na desno. Treći trag r_3 tražene ravnine ρ prolazi trećom projekcijom P''' paralelno s i_3. Sada, već poznatim načinom, odredimo r_1 i r_2.

Zadaci:

300. — 306. Nacrtajte tragove ravnine σ, ako ona prolazi tačkom A i paralelna je sa zadanom ravninom ρ. Uzmite:

300.) A (4, 1, 3); ρ (— 4, 2, 3).

301.) A (0, 3, 3); ρ (— 2, — 5, 1).

302.) A (2, — 1, 3); ρ (4, 6, 3).

303.) A (— 2, 4, 3); ρ (y = — 1, z = 4) $\parallel x$. (Pomozite si profilnom ravninom)

304.) A (—2, 2, 3); ρ (4, 3, ∞).

305.) A (— 1, 3, 5); ρ (∞, ∞, 3).

306.) A (2, 4, 1); ρ (— 1, ∞, ∞).

307.—313. Odredite tragove ravnine ρ, ako ona prolazi zadanom tačkom P i paralelna je sa zadanim pravcima a i b. (Tačkom P položeni pravci paralelno sa zadanim pravcima određuju traženu ravninu ρ) Uzmite:

307.) P (— 2, 3, 4); $a = AB$ [A (— 3, 1, 3), B (0, 2, 2)], $b = CD$ [C (0, 1, 2), D (2, 4, 3)].

308.) P (2, 3, 5); $a = AB$ [A (0, 6, 1), B (2, 3, 4)], b ($x = 5$ $y = 4$) $\perp \pi_1$.

309.) P (—2, —3, 6); a (y = 2, z = 4) $\parallel x$, $b = AB$ [A (0, 2, 3), B (2, 1, 5)]. (Zašto mora biti $\rho \parallel x$?)

310.) P (3, 3, 2); a (y = 2, z = 3) $\parallel b$ (y = — 4, z = 1) $\parallel x$.

311.) P (— 4, 4, 3); $a = AB$ [A (— 2, 3, 2), B (1, 3, 4)], $b = CD$ [C (— 2, 0, 5), D (2, 3, 1)].

312.) P (1, 4, 2); $a = AB$ [A (— 2, 3, 1), B (2, 3, 4)], $b = CD$ [C (0, 2, 4), D (4, 1, 4)].

313.) P(— 2, 3, — 6); a ($x = 2, z = 4$) $\perp \pi_2$, b ($y = 4, z = 3$) $\parallel x$,

314.) Tačkom P (0, — 3, 6) položite ravninu ρ tako da bude: a) paralelna s ravninom sumernosti ($r_2 \equiv r_1$); b) paralelna s ravninom istovetnosti.

315.) Tačkom M (3, 4, 3) položite ravninu ρ tako da ona bude paralelna s ravninom, određenom tačkom A (1, 1, 6) i osju x.

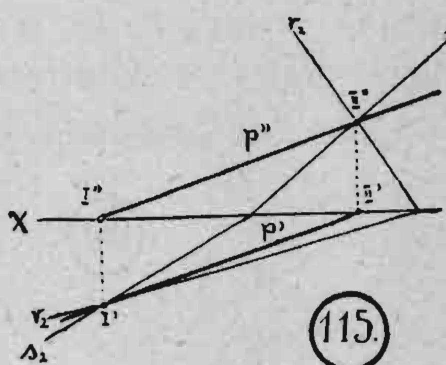
316.) Istražite da li su ravnine α ($y = 3$, $z = — 1$) $\parallel x$ i β ($y = 2$, $z = 3$) $\parallel x$ među sobom paralelne.

317.) Zadana je ravnina α ($y = — 2$, $z = 4$) $\parallel x$; odredite drugi trag b_2 ravnine β ($y = 2$), ako su ravnine α i β među sobom paralelne.

23. Presečnica dveju ravnina

Dve ravnine koje među sobom nisu paralelne, seku se u pravcu koji se naziva presečnica. Budući da je presečnica pravac koji se nalazi u jednoj i u drugoj ravnini, moraće se prema XIX zakonu nalaziti prvo probodište u prvome tragu jedne i druge ravnine, a drugo probodište u drugome tragu jedne i druge ravnine. Probodišta se presečnice nalaze, dakle, u secištu istoimenih tragova.

U slici 115 prikazane su ravnine ρ i σ i određena njihova presečnica p.



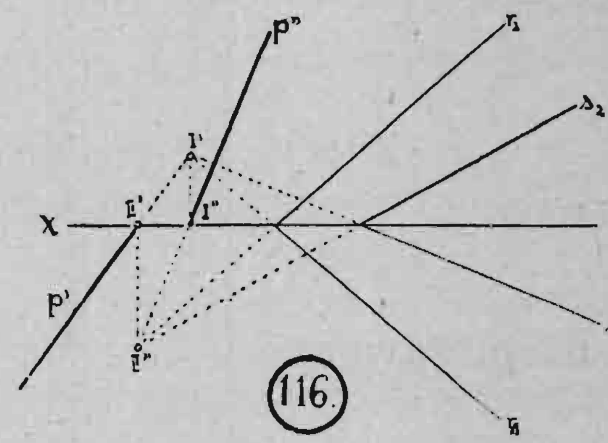
115

Budući da kod ravnina ρ i σ nisu istoimeni tragovi među sobom paralelni, nisu ni ravnine među sobom paralelne. Da odredimo presečnicu ravnina ρ i σ, moramo odrediti secište (II'') drugih tragova r_2 i s_2 i secište (I') prvih tragova r_1 i s_1. Prva projekcija drugoga probodišta II' i druga projekcija prvoga probodišta I'' nalaze se u ordinali u osi x. Spojnica II'' i I'' daje p'', a spojnica I' II' daje p'. Prema tome je p, presečnica ravnina ρ i σ, potpuno određena, jer poznajemo obe njene projekcije p'' i p'. Prema XIX zakonu nalazi se p u ravnini ρ i u ravnini σ. To je, dakle, zajednički pravac ravnina ρ i σ, pa prema tome i njihova presečnica.

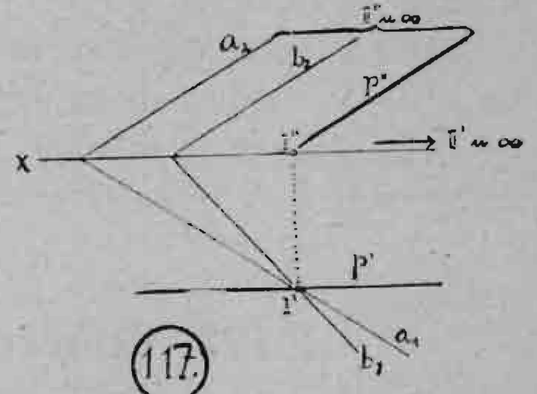
Drugi, odnosno prvi, tragovi dveju neparalelnih ravnina ne moraju se uvek seći iznad, odnosno ispod, osi x. U takvome se slučaju produže prvi, odnosno drugi, tragovi dok se ne seku, i tamo se onda dobije prvo, odnosno drugo, probodište presečnice. U slici 116 seku se drugi tragovi ispod osi x u II'', a prvi tragovi iznad osi x u I'. Opet spojnica II'' I'' daje p'', a spojnica I' II' daje p' kako to slika 116 pokazuje.

Dogodi li se da su samo drugi ili samo prvi tragovi među sobom paralelni, ravnine se ipak seku, pa prema tome moraju imati i presečnicu.

U slici 117 zadane su ravnine α i β tako da je $a_2 \parallel b_2$.



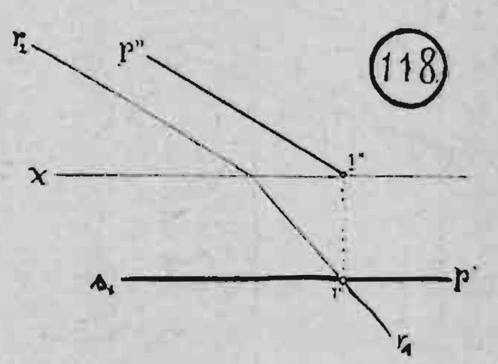
116



117

Prvo se probodište presečnice p ravnina α i β nalazi u secištu prvih tragova. Određimo dakle I' i I''. Druga projekcija p'' presečnice p mora prolaziti tačkom I'' i secištem drugih tragova a_2 i b_2. Budući da se to secište II'' drugih tragova nalazi u neizmernosti, biće $p'' \parallel a_2$, odnosno $p'' \parallel b_2$, a to se iz slike razabira. Prva projekcija p' moraće ići paralelno s osi x kroz I', jer je to druga sutražnica ravnina α i β. (Vidi § 19 glavni pravci ili sutražnice)

U slici 118 prikazana je presečnica ravnine ρ s ravninom $\sigma \parallel \pi_2$.



118

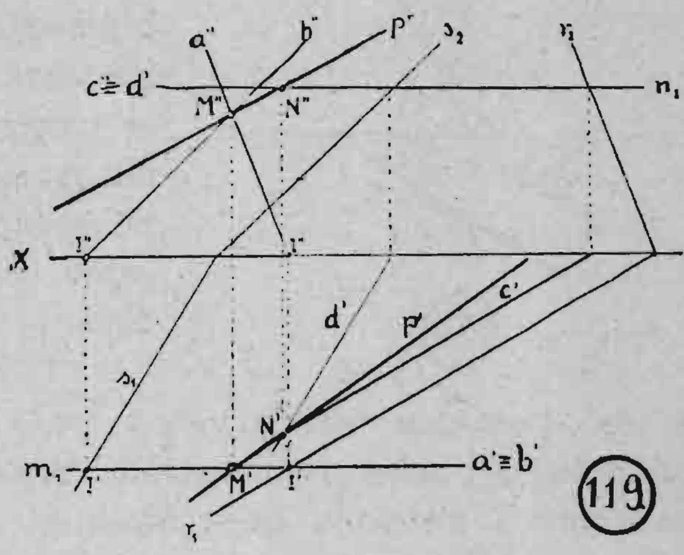
Kako je ravnina σ zbog toga, što je paralelna s π_2, ujedno i normalna na π_1 (ravnina prometalica za π_1), moraće se p' presečnice p nalaziti u prvome tragu s_1 ravnine σ. ($p' \equiv s_1$, XVIII zakon) Budući da je $p' \parallel x$, moraće biti $p'' \parallel r_2$. (§ 19 glavni pravci ili sutražnice)

Kad bi bila ravnina $\sigma \parallel \pi_1$, onda bi bilo $p' \parallel s_1$, a $p'' \equiv s_2$.

Presečnica ravnine paralelne s π_1, ili paralelne s π_2 s nekom drugom ravninom istaknuta je ovde zbog toga, što se njome često moramo ispomagati kod određivanja presečnice dveju ravnina kod kojih se prvi ili drugi tragovi, odnosno prvi i drugi tragovi, seku negde izvan dohvata ravnine na kojoj crtamo.

U slici 119 prikazana je presečnica ravnina ρ i σ kojima se secišta istoimenih tragova nalaze izvan dohvata ravnine na kojoj crtamo.

Znamo otpre, a i u ovoj je knjizi spomenuto u § 17 pred XVII zakonom, da se tri ravnine, ako ne prolaze jednim pravcem i nisu među sobom paralelne, seku u jednoj tački. Ako, dakle, imamo zadane dve ravnine koje nisu među sobom paralelne, te ih sečemo nekom trećom ravninom, onda će se presečnice te treće ravnine s onima zadanima ravninama seči u tački koja pripada presečnici onih dveju zadanih ravnina. Na temelju toga osniva se rešenje zadatka u slici 119.



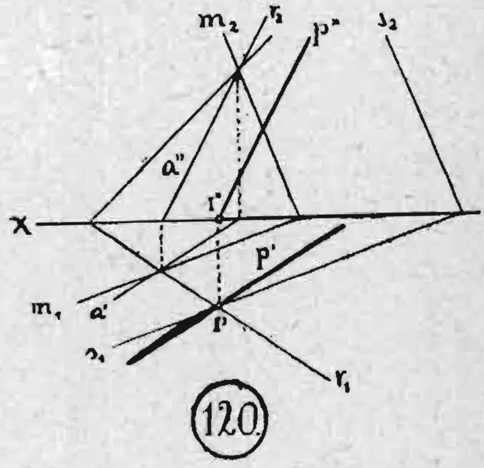
119

Uzme se pomoćna ravnina $\mu \parallel \pi_2$ i odrede presečnice a i b te ravnine sa zadanim ravninama ρ i σ. Biće dakle: $a' \equiv b' \equiv m_1$; $a'' \parallel r_2$, $b'' \parallel s_2$. Presečnice a i b seku se u tački M. Druga projekcija a'' seče b'' u M'', a u ordinali na a', odnosno na b', nalazi se M'. Tačka M je ona tačka koja pripada traženoj presečnici p ravnina ρ i σ. Zatim se uzme još jedna pomoćna ravnina $\eta \parallel \pi_1$ i odrede presečnice c i d te ravnine η sa zadanim ravninama ρ i σ. Biće: $c'' \equiv d'' \equiv n_2$; $c' \parallel r_1$, $d' \parallel s_1$. Presečnice c i d seku se u tački N. Prva projekcija c' seče d' u N', a u ordinali na c'', odnosno na d'', nalazi se N''. Tačka N također je tačka tražene presečnice p zadanih ravnina ρ i σ. Poznavajući dve tačke M i N tražene presečnice p ravnina ρ i σ poznajemo i samu presečnicu p.

Zadatak u slici 119 mogao se rešiti i tako, da su bile, obe uzete ravnine μ i η, paralelne s π_2 ili s π_1. Najvažnije je kod toga da se nađu dve tačke tražene presečnice koje onda određuju samu presečnicu. Štaviše te pomoćne ravnine μ i η ne bi morale ni biti paralelne s π_1, odnosno s π_2, već bi mogle biti i u općenu položaju. Ali obično se ovako uzimaju te ravnine zato, jer se brže nađe presečnica ravnine paralelne s π_1 ili s π_2 s nekom drugom ravninom negoli što bi to bilo moguće, kad bi ravnina bila u općenu položaju.

Često se ispomažemo kod određivanja presečnice i tako, da odredimo smer tražene presečnice. Ako poznajemo jednu tačku i smer presečnice, presečnica je opet određena.

U slici 120 prikazana je presečnica ravnina ρ *i* σ, *ako se secište drugih tragova nalazi izvan dohvata ravnine na kojoj crtamo.* (Slika 120)

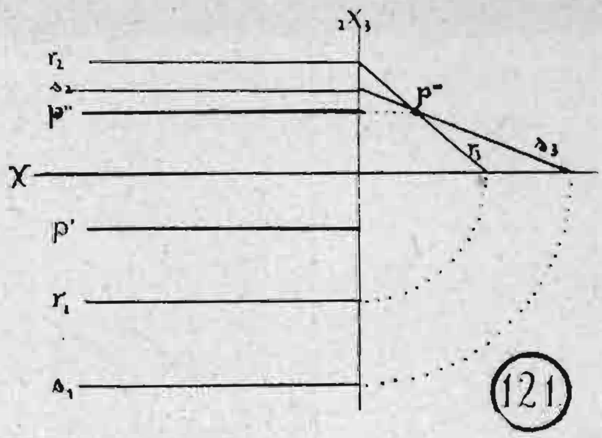


120

U sećištu prvih tragova nalazi se prvo probodište I' presečnice p. Druga projekcija I'' je u osi x. Poznata je, dakle, jedna tačka presečnice p. Sad bismo se mogli ispomoći s jednom od paralelnih ravnina s π_1 ili s π_2 kako je to bilo pokazano u slici 119, i odrediti još jednu tačku presečnice. Time bi bio zadatak i rešen.

U slici 120 nije tako rešavano. Uzeli smo pomoćnu ravninu $\mu \parallel \sigma$ ($m_1 \parallel s_1$, $m_2 \parallel s_2$), tako da se i prvi i drugi tragovi seku još u dohvatu. Presečnica a ravnina ρ i μ mora biti paralelna s traženom presečnicom p, jer dve međusobom paralelne ravnine seku treću ravninu u paralelnim pravcima. Tačkom I prolazi, dakle, presečnica p ravnina ρ i σ paralelno s pravcem a.

U slici 121 prikazano je određenje presečnice ravnina ρ *i* σ, *ako su one paralelne s osi* x.



121

Budući da su ravnine ρ i σ paralelne s osi x, moraće i njihova presečnica biti paralelna s osi x. Profilna će projekcija p''' presečnice p ravnina ρ i σ biti tačka upravo u sećištu trećih tragova r_3 i s_3. Kad znamo p''', i kad znamo da je presečnica $p \parallel x$, lako ćemo odrediti p'' i p' kako se to vidi u slici 121.

Zadaci:

318. — 334. Odredite projekcije presečnice p zadanih ravnina ρ i σ. Ravnine uzmite ovako:

318.) ρ (—3, 1, 2), σ (5, 7, 3).

319.) ρ (—3, 1, 2), σ (—5, 7, 3).

320.) ρ (—3, —4, —2), σ (4, 1, 10).

321.) ρ (—9, 4, 5), σ (—3, 2, 2). (Pogledajte sliku 120)

322.) ρ (2, 2, —1), σ (4, 5, 3).

323.) ρ (5, 8, 5), σ (2, 2, 3). (Pogledajte sliku 119)

324.) ρ (—3, 6, 2), σ [s_2 ($x = 6$, $z = 6$), $s_1 \parallel r_1$]. (Pogledajte sliku 117)

325.) ρ (4, ∞ 4), σ (—3, 3, 2).

326.) ρ (—7, ∞, 5), σ (—2, 5, 2).

327.) ρ (2, 3, ∞), σ (6, 5, ∞). ($p \perp \pi_1$).

328.) ρ (4, ∞, 4) σ (∞, ∞, 2). ($p \perp \pi_2$).

329.) ρ (4, 3, ∞), σ (7, 2, ∞). ($p \perp \pi_1$).

330.) ρ (3, 3, ∞), σ (—4, ∞, — 3).

331.) ρ (∞, ∞, 3), σ (∞, 4, ∞).

332.) ρ (—8, 5, 6), σ je ravnina sumernosti. (Pomozite si profilnom ravninom. Presečnica p prolazi secištem tragova ravnine ρ)

333.) ρ (—8, —10, 6), σ je ravnina istovetnosti.

334.) ρ (4, 2, 8), σ (4, 4, 6).

335.) Nacrtajte ravninu ρ paralelno s ravninom sumernosti i ravninu σ paralelno s ravninom istovetnosti; odredite presečnicu tih dveju ravnina.

336.) Zadana je ravnina ρ tačkama A (—3, 2, 1), B (2, 3, — 3) i C (0, 5, 3) i ravnina σ (3, 4, 2); odredite presečnicu ravnina ρ i σ. (Nacrtajte tragove ravnine ρ)

337.) Zadana je ravnina ρ pravcima $a \parallel b$ i ravnina $\sigma \parallel x$. Odredite presečnicu tih dveju ravnina, ako je zadano ovako: $a = AB$ [A (—5, 6, 2), B (— 2, 1, 3,)], pravac b prolazi tačkom C (0, 2, 1) $\parallel a$; ravnina $\sigma \parallel x$ određena je pravcem $m = MN$ [M (2, 1, 3), N (4, 3, 1)].

338. — 341. Nacrtajte projekcije pravca m, ako on prolazi tačkom M i paralelan je s ravninama ρ i σ. Odredićete presečnicu p ravnina ρ i σ i tačkom M položiti pravac $m \parallel p$. Uzmite ovako:

338.) ρ (—5, 3, 4), σ (—9, —5, 5), M (3, 3, 3).

339.) ρ (—4, —5, 3), σ (∞, 3, —5), M (2, 4, —1).

340.) ρ (2, —2, 2), σ (∞, ∞, —3), M (—4, 2, 2).

341.) ρ (—4, 1, —4), σ (—4, —8, 8), M (2, 4, 5).

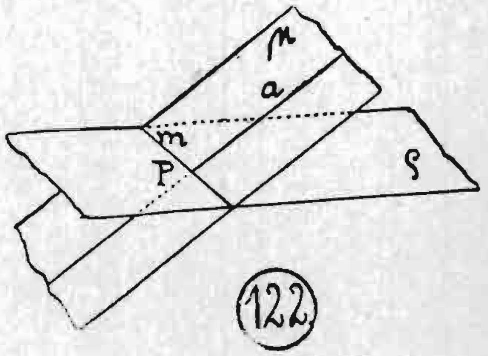
342.) Odredite presečnicu p ravnina ρ (—4, 2, — 2) i σ (— 4, —7, 7). (Presečnica p je paralelna s profilnom ravninom)

24. Probod pravca s ravninom

Svaki pravac koji nije paralelan s ravninom probada je u jednoj tački. Tu zajedničku tačku pravca i ravnine nazivamo *probodom*.

U slici 122 prikazan je zorno probod P pravca a s ravninom ρ. Probod se P nađe, ako se pravcem a položi kakvagod pomoćna ravnina μ i odredi presečnica m ravnina μ i ρ. U secištu presečnice m

i zadanoga pravca a mora se nalaziti probod P, jer je P tačka na pravcu a i u ravninama ρ i μ.

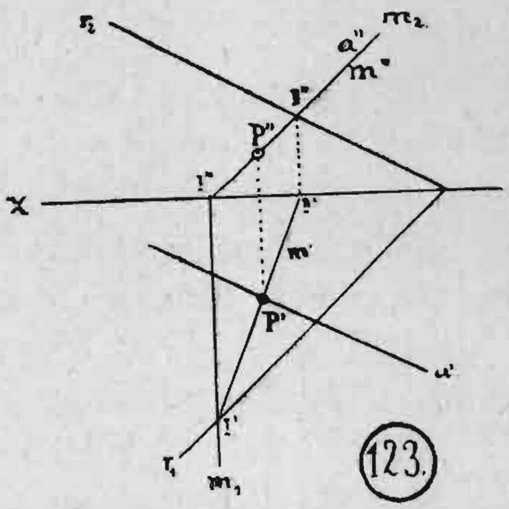


(122)

Kod određivanja proboda pravca s ravninom u Mongeovoj projekciji ne uzima se ta pomoćna ravnina μ kakogod, nego se ona uzima tako, da bude normalna na π_1, ili na π_2 (ravnina prometalica) zbog toga, što se takvom ravninom najbrže odredi ona presečnica m.

U slici 123 prikazan je probod zadanoga pravca a sa zadanom ravninom ρ.

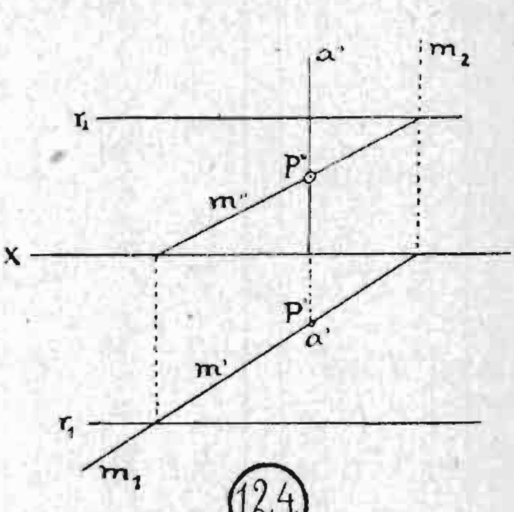
Pravcem a položi se pomoćna ravnina (ravnina prometalica) $\mu \perp \pi_2$ ($m_2 \equiv a''$, $m_1 \perp x$) i odredi presečnica m pomoćne ravnine μ i zadane ravnine ρ. Dobivši poznatim načinom m'' i m' odredićemo secište P pravaca m i a. Prva projekcija P' je u secištu m' i a'. U ordinali iz P' na a'' je P''. Time je i probod P potpuno određen. Svejedno bi bilo, da smo pravcem a položili ravninu $\mu \perp \pi_1$.



(123)

U slici 124 prikazan je probod pravca $a \perp \pi_1$ *s ravninom* $\rho \parallel x$.

Sve tačke koje se nalaze na pravcu a imaju svoje prve projekcije u a'. Prema tome će se i prva projekcija P' probodišta P morati nalaziti u a'. Pomoću pravca m u zadanoj ravnini ρ odredi se druga projekcija P'' proboda P. Budući da je tačka P u ravnini ρ i na pravcu a, ne može da bude tačka P drugo, negoli probod pravca a s ravninom ρ.

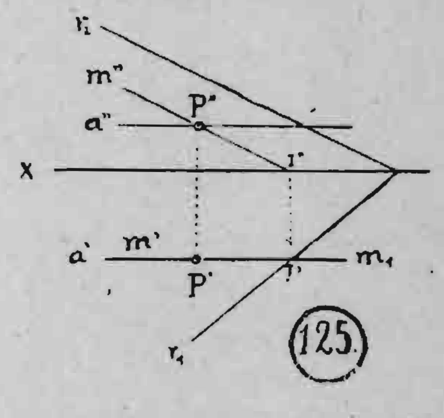


(124)

Možemo si kod toga primera zamišljati da smo pravcem a položili ravninu prometalicu $\mu \perp \pi_1$ ($m_1 \equiv m'$, a $m_2 \perp x$), te onda zadatak rešili kao u slici 123.

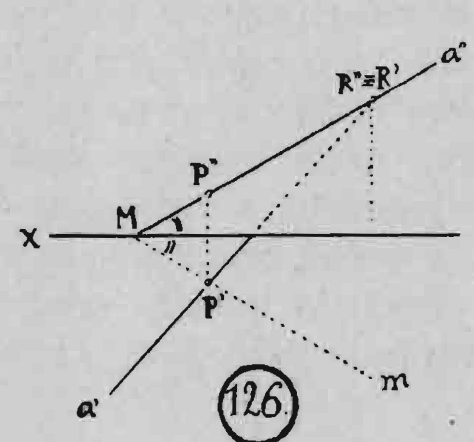
U slici 125 prikazan je probod pravca $a \parallel x$ *s ravninom* ρ *u općenome položaju.*

Pravcem a položi se pomoćna ravnina prometalica $\mu \perp \pi_1$. Ravnina μ ujedno je i paralelna s π_2, jer je pravac $a \parallel x$. Dakle je $m_1 \equiv a'$, a m_2 ne postoji, odnosno nalazi se u neizmernosti. Odredi se presečnica m ravnina μ i ρ. (Pogledajte sliku 118) U ovome slučaju ta presečnica m je prva sutražnica ravnine ρ. U secištu zadanoga pravca a s presečnicom m nalazi se probod P. Taj se je primer mogao rešiti i tako, da smo upotrebili ravninu prometalicu za π_2.



U slici 126 prikazan je probod pravca a s ravninom sumernosti i s ravninom istovetnosti. (Pogledaj sliku 22 i 23, i zadatak 31 i 129)

Tačka se nalazi u ravnini sumernosti, ako je prva projekcija tačke isto tako daleko od osi x kao i druga projekcija tačke. Nacrta se, dakle, u secištu M druge projekcije a'' s osi x pomoćna zraka m, tako da m s osi x zatvara isti kut kao a'' s osi x. Os x je sada simetrala kuta $(a''m)$. U secištu pomoćne zrake m s a' dobije se P', a P'' je u ordinali na a''. Budući da je tačka P jednako udaljena od osi x, nalazi se ona u ravnini sumernosti. Osim toga je P' na a', a P'' na a''. Tačka P je dakle i na pravcu a. Iz toga sledi da je tačka P probod pravca a s ravninom sumernosti.

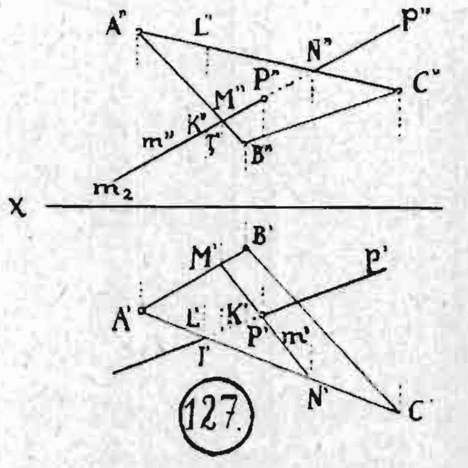


Probod R pravca a s ravninom istovetnosti nalazi se u secištu projekcija pravca. (Slika 126) Budući da je $R' \equiv R''$, nalazi se tačka R u ravnini istovetnosti, a jer je R' na a', a R'' na a'', nalazi se tačka R i na pravcu a. Prema tome ne može tačka R biti drugo, negoli probod pravca a s ravninom istovetnosti.

U slici 127 prikazan je probod P zadanoga pravca p s ravninom, određenom tačkama A, B i C tako da nisu nacrtani tragovi ravnine (ABC).

Postupak kod traženja proboda pravca p s trokutom ABC, može se reći da je jednak postupku kad se određuje probod pravca s ravninom. Položi se pravcem p ravnina prometalica $\mu \perp \pi_2$. U tom je slučaju $m_2 \equiv p''$. Prvi trag m_1 ravnine μ nije potrebno ni crtati. Ravnina μ seče trokut ABC u pravcu m. Druga se projekcija m'' presečnice m pokriva s m_2. ($m'' \equiv m_2$) Zašto? Budući da presečnica m leži u ravnini trokuta ABC, moraće ona seći stranice trokuta ABC. U slici 127 druga projekcija m'' seče $\overline{A''B''}$ u M'', a $\overline{A''C''}$ u N''. Prve projekcije M' i N' nalaze se u ordinali na $\overline{A'B'}$, odnosno na $\overline{A'C'}$. Spojnica $M'N'$

daje m'. Gde m' seče p', nalazi se P'. Druga projekcija P'' je u ordinali na p''. Time je traženi probod P potpuno određen, jer poznajemo obe njegove projekcije.



127

Kod takve vrste primera redovno se određuje i vidljivost pravca p. Jedan deo pravca, ako pravac trokut probada, mora trokutom biti prekriven. Onaj prekriveni deo pravca neće se videti, stoga se to u projekciji crtka ili uopće ne izvlači. Kod određivanja vidljivosti treba gledati na π_1 odozgo, u smeru zraka projeciranja za π_1, a na π_2 spreda, u smeru zraka projeciranja za π_2. Prema tome će se one više tačke (udaljenije od π_1) videti u prvoj projekciji, a one niže se neće videti. U drugoj će se projekciji videti one tačke koje se nalaze najdalje pred π_2, a one bliže π_2 neće se videti. *Što je neka tačka viša nad π_1, to joj je i druga projekcija više nad osi x. Što je neka tačka jače pred π_2, to joj je prva projekcija niže ispod osi x.* Kad se, dakle, određuje *vidljivost u prvoj projekciji, ravna se po drugoj projekciji*, a kad se određuje *vidljivost u drugoj projekciji, ravna se prema prvoj projekciji.* Onaj deo pravca, koji je u projekciji izvan projekcije trokuta, sasvim sigurno se vidi, jer nije ničim prekriven. Nadalje je jasno da će pravac promeniti vidljivost u samome probodu.

Nastaje, dakle, pitanje, koji će se deo pravca do proboda videti, a koji ne?

Kod određivanja vidljivosti u drugoj projekciji postupamo ovako: (Slika 127) Pravci p i AB su mimosmerni pravci, dakle se ne seku. $A''B''$ i p'' seku se u tački $M'' \equiv K''$. Tačka M je na AB, a K je na p. Prema tome se M' nalazi na $A'B'$, a K' na p'. Budući da je K' niže ispod osi x od M', znači da je tačka K na pravcu p dalje odmaknuta od π_2 negoli tačka M, pa će se i p'' videti sve do svoga proboda. Onaj deo p'' u trokutu od proboda P'' se ne vidi dok ne iziđe iz druge projekcije trokuta.

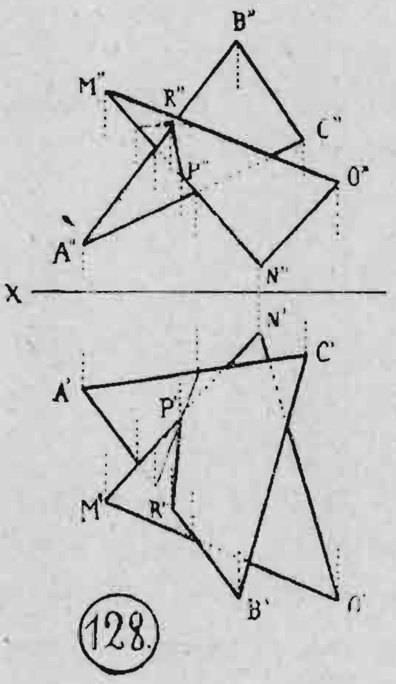
Kod određivanja vidljivosti u prvoj projekciji postupamo ovako: $A'C'$ i p' seku se u $I' \equiv L'$. Tačka I je na pravcu p, a tačka L na pravcu AC, jer su to mimosmernice. Druga projekcija I'' nalazi se, dakle, na p'', a L'' na $A''C''$. Budući da je L'' više iznad osi x od I'', znači da je tačka L na stranici AC trokuta ABC više nad π_1 negoli tačka I. Prema tome je deo pravca od tačke I do proboda P' u prvoj projekciji prekriven trokutom ABC. Od K' dalje projekcija pravca će se opet videti.

Ovde neka bude još spomenuto i to da lik može imati, obzirom na gledanje na π_1, odnosno na π_2, takav položaj, da on pokazuje gledajući na π_1 *istu stranu* kao i kod gledanja na π_2 ili da pokazuje *razne svoje strane.* Ako je kod obeju projekcija lika poređaj vrhova lika u istome smislu, vide se i iste strane njegove kad gledamo na π_1 (odozgo) i kad gledamo na π_2 (spreda).

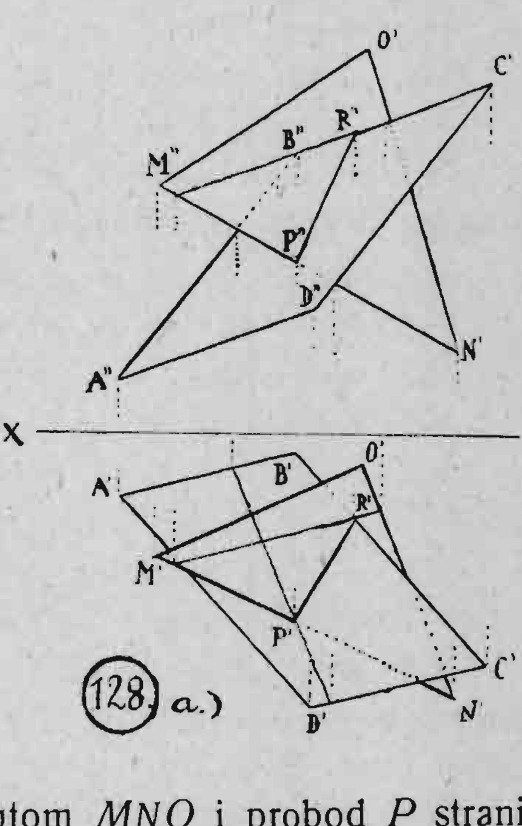
U slici 127 kod trokuta ABC vide se njegove razne strane gledajući na π_1, te onda na π_2, jer sled vrhova $A'B'C'$ ide smerom kazaljke na uri, a kod $A''B''C''$ protivno od smera kazaljke na uri. U slici 128 kod oba trokuta ABC i MNO vide se razne strane. Zašto? U slici 128a) kod trokuta i kod paralelograma vide se njihove iste strane. Zašto?

Ravnine koje su zadane tragovima pokazuju istu stranu kod gledanja na π_1 i na π_2, ako im oba traga zatvaraju šiljati, odnosno tupi, kut s osi x, a razne strane, ako jedan trag zatvara šiljati, a drugi tupi kut s osi x. Ako je prvi, odnosno drugi, trag normalan na os x, onda, gledajući na π_2, odnosno na π_1, ne vidimo nijedne strane ravnine. Čitavu ravninu vidimo kao pravac.

U slici 128 prikazana su dva trokuta kako jedan u drugi zadiru.



128



128 a.)

Probod R stranice $\overline{AB}$ s trokutom MNO i probod P stranice $\overline{MN}$ s trokutom ABC određen je istim postupkom kao probod pravca p s trokutom ABC u slici 127. Iz drugih projekcija vidimo da stranice $\overline{BC}$ i $\overline{NO}$ uopće ne probodaju. Ako bismo tražili probod stranice $\overline{MO}$ ili $\overline{AC}$, videli bismo da ona presečnica, koju dobijemo polaganjem normalne ravnine na π_1 ili na π_2 stranicom $\overline{MO}$, odnosno $\overline{AC}$, ne bi sekla projekciju $\overline{MO}$, odnosno $\overline{AC}$. Zbog toga te stranice ne probodaju trokut, nego im je samo jedan deo trokutom prekriven. Vidljivost određujemo kao u slici 127.

U slici 128a) prikazan je zador trokuta i paralelograma.

Postupa se isto kao i u slici 127 i 128.

Kod predočivanja likova, koji imaju više od tri stranice ne smeju se u projekciji sasvim po volji uzimati svi vrhovi, jer je već trima tačkama ravnina potpuno određena. Projekcije triju vrhova lika možemo uzeti sasvim po volji. Čim želimo predočiti četvorokut, smemo od četvrtoga vrha po volji uzeti samo drugu ili samo prvu projekciju, a onda istom odrediti preostalu. Četvrti, peti itd. vrh mora ležati u ravnini onih po volji odabranih triju vrhova. Kako se određuju projekcije četvrtoga, petoga itd. vrha, pokazano je 107 slikom.

Zadaci:

343. — 347, Odredite probod pravca a s ravninom ρ. Uzmite:

343.) $a = AB$ [A (0, 1, 2), B (2, 3, 0,5)]; ρ (— 6, 3, 5).

344.) $a = AB$ [A (— 2, 3, 3), B (2, 2, 1)]; ρ (— 2, 1, — 4).

345.) $a = AB$ [A (— 2, 1, 4), B (2, 3, 1)]; ρ (— 3, — 2, 2)

346.) $a = AB$ [A (0, 4, 1,) B (3, 0, 3)]; ρ (— 5, 1, 3).

347.) $a = AB$ [A (0, 2, 1), B (4, 3, 2)]; ρ (— 7, 4, 5).

348. — 353. Zadana je ravnina σ i pravac p; odredite probod zadanoga pravca sa zadanom ravninom. Uzmite:

348.) σ (∞, 2, 5); $p = MN$ [M (2, 2, 1), N (4, — 1, 3)].

349.) σ (— 6, ∞, 4); p ($y = 4$, $z = 2$) $\parallel x$.

350.) σ (— 2, 2, ∞); p ($x = 2$, $z = 4$) $\perp \pi_2$.

351.) σ (∞, ∞, 3); $p = MN$ [M (0, 1, 1), N (— 2, 3, 0,5)].

352.) σ (∞, — 3, 4); p ($x = 3$, $y = 3$) $\perp \pi_1$.

353.) σ (— 3, 3, — 3); p ($y = 4$, $z = 3$) $\parallel x$.

354. — 359. Odredite probod pravca p s ravninom, određenom njenim odredbenicima, a da ne crtate tragove ravnine. Uzmite ovako:

354.) $p = MN$ [M (0. 7, 6), N (4, 3, 3)]; ravnina je zadana paralelama $a = AB$ [A (— 2, 1, 3), B (4, 3, 6)] i b. Pravac b prolazi tačkom C (4, 7, 2) $\parallel a$.

355.) $p = MN$ [M (— 2, 10, 1), N (6, 1, 6)]; ravnina je zadana pravcem $a = AB$ [A (0, 1, 4), B (3, 3, 0)] i tačkom C (5, 7, 3).

356.) $p = MN$ [M (— 3, 5, 1), N (2, 3, 4)]; ravnina je zadana tačkama A (— 4, 8, 2), B (1, 1, 7) i C (5, 0,5, 3).

357.) $p = MN$ [M (— 2, 5, 6), N (2, 2, 3)]; ravnina je zadana pravcima a ($x = -1$, $y = 6$) $\perp \pi_1$ i b ($y = 6$, $z = 4$) $\parallel x$.

358.) $p = (x = -3, y = 6) \perp \pi_1$; ravnina je zadana pravcima a $(y = 4, z = 2) \parallel b$ $(y = 7, z = 3) \parallel x$.

359.) p $(y = 3, z = 5) \parallel x$; ravnina je zadana tačkamà A (— 4, 1, 2), B (0, 6, 8) i C (4, 0, 4).

360.) Odredite presečnicu ravnine ρ (— 6, ∞, 5) s ravninom, određenom tačkàma A (— 3, 6, 1), B (1, 1, 8) i C (6, 3, 4) tako da ne crtate tragove ravnine (ABC).

361.) Odredite presečnicu ravnine ρ (— 7, 4, 6) s ravninom određenom raznosmernicama $a = AB$ [A (— 4, 2, 7), B (0, 3, 4)] i $b = BC$ [B (0, 3, 4), C (— 2, 6, 1)] tako da ne crtate tragove ravnine (ab). (Spojnica proboda pravaca a i b s ravninom ρ daje traženu presečnicu)

362. — 263. Odredite prodor trokuta ABC i trokuta MNO. Uzmite ovako:

362.) A (— 4, 3, 2), B (0, 8, 8), C (8, 1, 4); M (— 3, 1, 7), N (3, 7, 1), O (8, 1, 6).

363.) A (— 2, 6, 8), B (— 2, 6, 2), C (6, 4, 4); M (—4, 1, 5), N (4, 7, 2), O (5, 2, 8).

364. — 365. Odredite prodor trokuta MNO i paralelograma $ABCD$. Uzmite ovako:

364.) M (— 5, 8, 5). N (— 2, 14, 12), O (8, 2, 1); A (— 8, 4, 2), B (— 2, 2, 8), C (10, 8, 10). (Tačku D treba odrediti)

365.) M (— 6, 2, 2), N (4, 12, 10), O (10, 8, 4); A (—5, 7, 9), B (5, 4, 0), C (9, 6, 2). (Tačku D treba odrediti)

366.) Odredite prodor paralelograma A (— 4, 2, 2), B (0, 8, 10), C (8, 10, 8), D i paralelograma M (— 5, 9, 5), N (1, 12, 3), O (9, 1, 11), P. (Tačke D i P treba odrediti)

367.) Nacrtajte četvorokut A (2, 2, 0), B (— 1, 3, 1), C (5, 5, 7), D (10, ?, 4). (Nacrtaćete dijagonale $\overline{A''C''}$ i $\overline{B''D''}$ i dijagonalu $\overline{A'C'}$. Dijagonalu $\overline{B'D'}$ moći ćete odrediti, ako nacrtate prvu projekciju secišta dijagonala)

368.) Zadan je pravac $a = AB$ [A (— 4, 3, 3), B (4, 6, 7)], pravac $p = MN$ [M (—4, 3, 7), N (4, 0, 5)] i tačka T (3, 8, 3). Odredite projekcije pravca s koji prolazi tačkom T i seče zadane mimosmernice a i p. (Pravac s je spojnica tačke T s probodom jednoga od zadanih pravaca s ravninom, određenom drugim pravcem i tačkom T)

369.) Odredite probod pravca $p = MN$ [M (— 3, 5, 2), N (—3, 2, 3)] s ravninom sumernosti.

370.) Odredite probod pravca $p = MN$ [M (— 2, 6, 3), N (—2, 4, 1)] s ravninom istovetnosti.

371.) Odredite probod pravca p $(x = -3, z = 4) \perp \pi_2$ s ravninom sumernosti i s ravninom istovetnosti.

372.) Nacrtajte pravac p u ravnini ρ (4, 2, — 4) tako da on seče mimosmernice a ($y = 5$, $z = 5$) $\parallel x$ i $m = MN$ [M (4, 2, 6), N 6, 3. 5)]. (Odrede se probodi pravaca a i m s ravninom ρ)

373.) Nacrtajte pravac $m \parallel n = NP$ [N (— 6, 1, 3), P (— 2, 3, 4)] tako da on seče mimosmernice $a = AB$ [A (0, 6, 5), B (4, 4, 10) i $b = CD$ [C (4, 1, 5), D (6, 2, 3)]. (Položi se jednim od mimosmernih pravaca pomoćna ravnina paralelno s pravcem n (slika 109 a) i nađe probod one druge mimosmernice s pomoćnom ravninom. Tim probodom prolazi pravac $m \parallel n$)

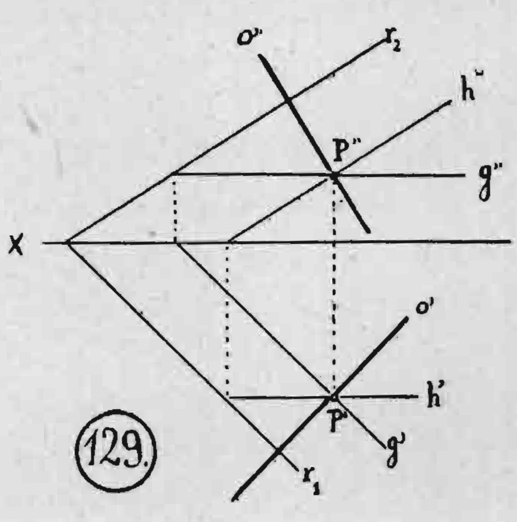
25. Normalitet pravca i ravnine

a) Pravac normalan na ravninu

Iz stereometrije znamo *da je pravac normalan na ravninu, ako je on normalan na dva pravca ravnine koji prolaze njegovim probodom.*

U slici 129 predočena je ravnina ρ *i u tački P ravnine uzdignuta je normala na ravninu* ρ.

U ravnini ρ tačkom P prolaze glavni pravci g i h. Glavni pravac g je paralelan s π_1, a glavni pravac h je paralelan s π_2. Iz § 16 znamo, ako dva pravca čine pravi kut a jedan je od tih pravaca paralelan s π_1 ili s π_2, da se onda vidi u prvoj, odnosno u drugoj, projekciji pravi kut u svojoj veličini. Postavivši, dakle, u P' normalu na g', a u P'' normalu na h'', dobili smo o' i o''. To su projekcije normale o na ravninu ρ, jer je pravac $o \perp g$ i $o \perp h$, tj. pravac o normalan je na dva pravca ravnine ρ. Budući da je $g' \parallel r_1$, a $h'' \parallel r_2$, mora biti i $o' \perp r_1$, a $o'' \perp r''$. Iz toga sledi



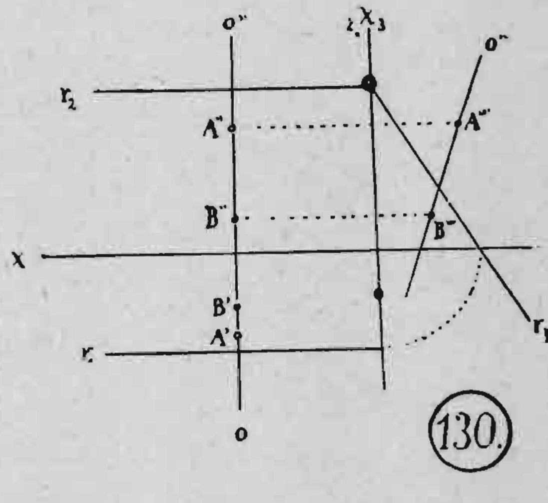
129

XXII zakon: *Pravac je normalan na ravninu, ako mu je druga projekcija normalna na drugi trag, a prva projekcija na prvi trag ravnine.*

Izuzetak čini ravnina koja je paralelna s osi x, a pravac paralelan s profilnom ravninom. Kod takve je ravnine uvek $r_2 \parallel r_1 \parallel x$, a o'' i o' je normalno na x. Prema tome je uvek $o'' \perp r_2$, a $o' \perp r_1$, ako i pravac o nije normalan na ravninu ρ. Kod takve ravnine i pravca ispitujemo normalitet pomoću profilne ravnine.

U slici 130 predočena je ravnina $\rho \parallel x$ i pravac $o \parallel \pi_3$ (profilna ravnina).

Odredili smo r_3 i o'''. Budući da o''' nije normalno na r_3, ne stoji pravac o normalno na ravnini ρ. Kad bi pravac o bio normalan na ravninu ρ, onda bi moralo biti i $o''' \perp r_3$.



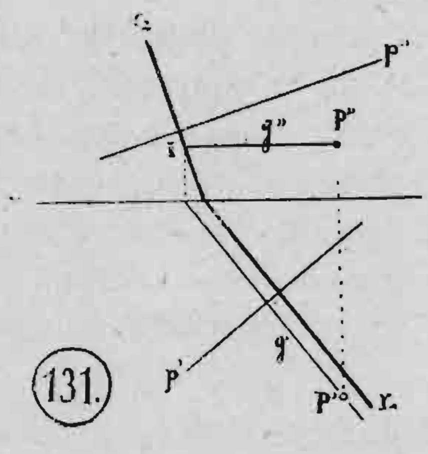
b) Ravnina normalna na pravac

Ako je pravac normalan na neku ravninu, onda je i ravnina normalna na pravac. Mora dakle vrediti i ovaj

XXIII zakon: Ravnina je normalna na pravac, ako joj je drugi trag normalan na drugu projekciju, a prvi trag na prvu projekciju pravca.

I u ovome zakonu čine izuzetak ravnina koja je paralelna s osi x, i pravac koji je paralelan s profilnom ravninom.

U slici 131 pokazano je kako se određuju tragovi ravnine ρ, *normalne na pravac p, ako ona mora prolaziti zadanom tačkom P.*



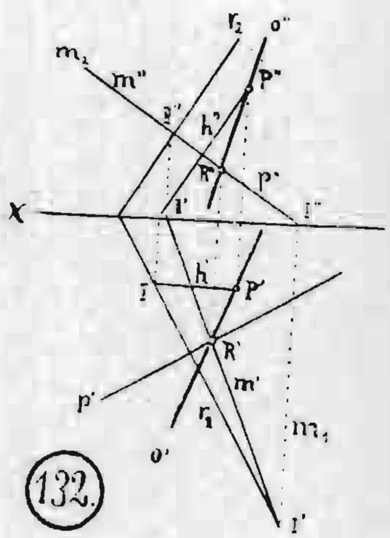
Već unapred znamo (XXIII zakon) da će biti $r_2 \perp p''$, a $r_1 \perp p'$. Prema tome možemo nacrtati sutražnicu prve ili druge skupine ravnine ρ, jer znamo smerove tragova ravnine. U našoj slici uzeli smo prvu sutražnicu g i odredili njeno drugo probodište. Drugim probodištem II prolazi $r_2 \perp p''$, a secištem drugoga traga r_2 s osi x prolazi $r_1 \perp p'$. Ravnina ρ je normalna na pravac p, jer zadovoljava XXIII zakon. Tačka P leži u ravnini ρ, jer leži u glavnome pravcu g ravnine ρ. Dakle je ravnina normalna na zadani pravac p i prolazi zadanom tačkom P.

Videli smo, ako pravac postavljamo normalno nekom tačkom na ravninu, da jednostavno nacrtamo normalu na drugi i na prvi trag kroz drugu, odnosno prvu, projekciju tačke. Postavljamo li ravninu normalno na pravac, moramo se ispomoći sutražnicom, jer poznajemo smer tragova.

c) Pravac normalan na pravac

Kod pravaca koji stoje jedan na drugome normalno *istoimene projekcije ne stoje jedna na drugoj normalno,* ako su oba pravca u općenome položaju.

U slici 132 pokazano je kako se na zadani pravac p pušta normala o iz zadane tačke P.



132

Ima li se iz neke tačke pustiti normala na neki pravac, ne može se takav zadatak direktno rešiti, ako je pravac općenoga položaja. Najpre se zadanom tačkom položi ravnina normalno na zadani pravac, a zatim se odredi probod te normalne ravnine sa zadanim pravcem ; spojnica proboda sa zadanom tačkom daje normalu na zadani pravac.

U slici 132 položena je pomoću druge sutražnice (h'' h') ravnina $\rho \perp p$ i određen je probod R ravnine ρ i pravca p. ($\mu \perp \pi_2$) Spojnica $R\,P$ daje normalu o. Pravac o mora biti normalan na pravac p, jer o leži u ravnini ρ ($\rho \perp p$) i prolazi probodom normale p s ravninom ρ.

d) Ravnina normalna na ravninu

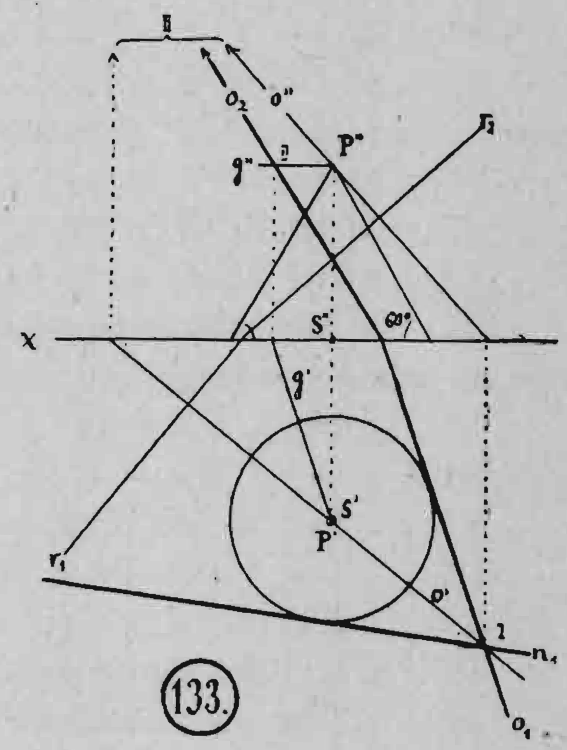
Ravnina je normalna na ravninu, ako prolazi jedna od njih pravcem koji je normalan na drugu ravninu. Ima li se dakle nekom tačkom položiti ravnina normalno na drugu ravninu, mora se tom tačkom pustiti normala na onu ravninu i tom normalom položiti kakvagod ravnina. Zadatak je mnogoznačan, jer se jednim pravcem (onom normalom) može položiti neizmerno mnogo ravnina. Kod takvoga se zadatka mora osim tačke još štogod zadati da on ne bude mnogoznačan.

Ako su ravnine među sobom normalne, istoimeni im tragovi nikad nisu jedan na drugome normalni. Štaviše, ravnine mogu stajati jedna na drugoj normalno, a kod toga su im prvi, odnosno drugi, tragovi među sobom paralelni. Ako je ravnina normalna na neku ravninu, a usto je ona normalna i na π_1, odnosno na π_2, onda će im biti među sobom normalni prvi, odnosno drugi, tragovi. Izuzetak čine ravnine od kojih je jedna paralelna s osi x, a druga je paralelna s profilnom ravninom. Kod takvih su ravnina istoimeni tragovi među sobom normalni, a i ravnine u prostoru su jedna na drugoj normalne.

U slici 133 položena je tačkom P ravnina ω normalno na ravninu ρ, tako da ona s π_1 zatvara kut $\alpha = 60^0$.

Najpre se predoči uspravni stožac kojemu je vrh tačka P, baza u π_1, a izvodnice s π_1 zatvaraju zadani kut α. Svaka tangecijalna ravnina na taj stožac zatvara s π_1 kut α. Zatim se tačkom P nacrta normala na zadanu ravninu ρ ($o'' \perp r_2$, $o' \perp r_1$). Svaka ravnina položena pravcem o normalna je na ravninu ρ. Položi li se pravcem o tangencijalna ravnina ω na stožac biće, svakako, ravnina ω normalna na ravninu ρ, jer je $o \perp \rho$, i zatvaraće s π_1 kut α, jer je tangencijalna ravnina stošca kojemu izvodnice s π_1 zatvaraju kut α.

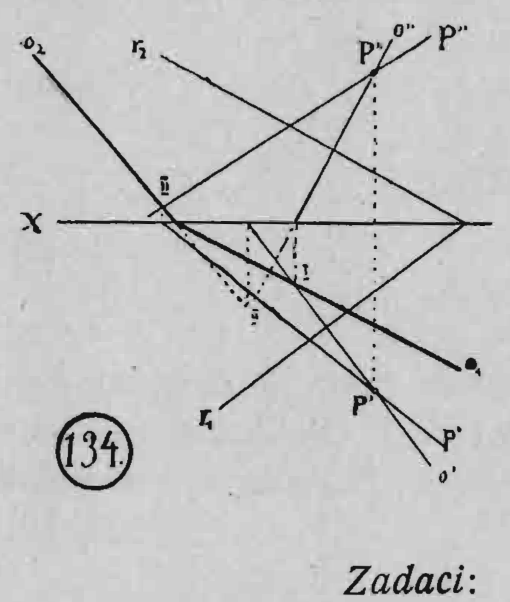
Kako izgleda u projekciji stožac i njegova tangencijalna ravnina, znamo otpre iz slike 98 i 109. Budući da u našem slučaju ravnina ω (slika 133) mora prolaziti pravcem o, nacrtaćemo iz prvoga probodišta I pravca o tangente na bazu stošca. To su prvi tragovi o_1 i n_1 ravnina ω i η normalnih na ravninu ρ. Prema tome ima zadatak dva rešenja. Drugi tragovi o_2 i n_2 prolaze secištem prvih tragova s osi x i drugim probodištem II pravca o.



133.

U našoj se slici drugo probodište II pravca o nalazi izvan dohvata. Pomogli smo si s toga glavnim pravcem g kao u slici 90 a), te smo dobili o_2. Drugi trag n_2 ravnine η potpuno je izvan dohvata za naše ograničeno mesto u knjizi, te se nije mogao ni nacrtati.

I ovde takvi zadatak ima dva, jedno ili nijedno rešenje. (Pogledajte tumačenje slike 109)



134.

U slici 134 prikazano je kako je pravcem p položena ravnina ω normalno na zadanu ravninu ρ.

Gdegod na pravcu p uzme se tačka P i tom tačkom položi normala o na ravninu ρ. Zadanim pravcem p i normalom o određena je ravnina ω. Odredivši probodišta pravaca p i o nacrtamo tragove o_1 i o_2 ravnine ω. Budući da ravnina ω prolazi zadanim pravcem p i normalom o na ravninu ρ, odgovara ona ravnini traženoj u zadatku.

Zadaci:

374. — 279. Odredite udaljenost tačke M od ravnine ρ (slika 129). (Tačkom M položi se normala na ravninu ρ i odredi s njom probod P.

Dužina $\overline{MP}$ pokazuje udaljenost tačke od ravnine. Dužinu prušca MP određujte pomoću diferencionoga trokuta) Uzmite ovako:

374.) M (0, 6, 2), ρ (— 5, 4, 3).

375.) M (— 2, 4. 4), ρ (— 2, 1, 3).

376.) M (— 3, 4, 5), ρ (∞, 5, 3). (Pomozite si profilnom ravninom. Zašto je $\overline{M'''P'''}$ jednako $\overline{MP}$?)

377.) M (— 1, 2, 5), ρ (∞, ∞, 3). (Zašto je $\overline{M''P''} = \overline{MP}$?)

378.) M (1, 6, 4), ρ (3, 3, ∞). (Zašto je $\overline{M'P'}$ jednako $\overline{MP}$?)

379.) M (0, — 6, 6), ρ (— 4, — 4, 4).

380. — 386. Odredite udaljenost paralelnih ravnina ρ i σ. (Određuje se pomoću normale na obe ravnine) Uzmite ovako:

380.) ρ (6, 6, 5) $\|$ σ ($x = 10$).

381.) ρ (— 2, 2, — 4) $\|$ σ ($x = -2$).

382.) ρ (∞, 4, 3) $\|$ σ ($y = 2$).

383.) ρ (— 4, ∞, 3) $\|$ σ ($x = 2$).

384.) ρ (∞, 3, ∞) $\|$ σ ($y = 6$).

385.) ρ (ravnina sumernosti) $\|$ σ ($y = 3$). (Pogledajte sliku 126)

386.) ρ (ravnina istovetnosti) $\|$ σ ($z = 4$).

387.) Zadana je ravnina raznosmernicama $a = AB$ [A (— 4, 4, 1), B (2, 4, 5)] i $b = BC$ [B (2, 4, 5), C (0, 2, 5)]; odredite udaljenost tačke M (6, 5, 3) od ravnine (ab), a da ne crtate njene tragove. (Zašto je $o'' \perp a''$, $o' \perp b'$? Pogledajte sliku 127)

388.) Odredite udaljenost tačke M (— 2, 3, 5) od ravnine zadane tačkama A (3, — 1, 2), B (— 1, 2, 4), C (1, 3, 1), tako da ne crtate tragove ravnine (ABC). (Pomoći ćete si glavnim pravcem prve i druge skupine da doznate smer tragova)

389. — 394. Položite tačkom M na zadani pravac a normalnu ravninu ρ. (Slika 131)

389.) M (2, 6, 2), $a = AB$ [A (— 2, 1, 2), B (2, 3, 4)].

390.) M (2, 3, 4), $a = AB$ [A (— 2, 1, 4), B (2, 2, 1)].

391.) M (— 4, 4, 4), $a = AB$ [A (4, — 3, 3), B (— 6, 2, — 2)],

392.) M (— 3, 1, 5), $a = AB$ [A (— 2, 4, 3), B (2, 2, 3)].

393.) M (1, 1, 4), a ($x = -3$, $y = 5$) $\perp$ π_1.

394.) M (— 2, 6, 2), $a = AB$ [A (— 2, 2, 7), B (— 2, 1, 5)].

395. — 402. Nacrtajte ravninu σ, tako da bude sa zadanom ravninom ρ paralelna i od nje udaljena za dužinu d. (Nacrtaćete normalu ravnine ρ i na nju od proboda naneti dužinu d. Pogledajte 3 u § 10) Uzmite:

395.) ρ (3, 2, 4); $d = 2$.

396.) ρ (3, — 3, 1); $d = 3$.

397.) ρ (∞, 4, 1); $d = 3$.

398.) ρ (∞, — 5, 3); $d = 3$.

399.) ρ (— 4, 3, ∞); $d = 4$.

400.) ρ (∞, ∞, 3); $d = 2$.

401.) ρ (ravnina sumernosti); $d = 5$.

402.) ρ određuju paralele $a = AB$ [A (— 2, 3, 2), B (2, 1, 4)] i b. Pravac b prolazi tačkom C (4, 3, 3); $d = 3$.

403. — 409. Odredite udaljenost tačke P od pravca m. (Tačkom P položićete normalnu ravninu na pravac m. Slika 132) Uzmite ovako:

403.) P (3, 6, 3), $m = MN$ [M (— 2, 1, 3), N (2, 3, 5)].

404.) P (4, 6, 3), $m = MN$ [M (0, 3, 3), N (6, 1, 5)].

405.) P (0, 0, 6), $m = MN$ [M (— 2, 5, 4), N (4, 2, 4)].

406.) P (4, 3, 6), m ($x = 1$, $z = 3$) $\perp \pi_2$.

407.) P (— 1, 2, 3), m ($y = 5$, $z = 7$) $\parallel x$.

408.) P (—2, 1, 3), m ($y = — 2$, $z = 5$) $\parallel x$.

409.) P (2, 2, 5), m se nalazi u osi x.

410.) Tačkom P (3, 8, 2) položite ravninu ω normalno na zadanu ravninu ρ (— 4, 2, 4), tako da bude: a) $\omega \perp \pi_1$; b) $\omega \perp \pi_2$; c) $o_1 \parallel r_1$; d) $o_2 \parallel r_2$; e) $\omega \parallel x$.

411.) Zadanom tačkom P (— 9, 7, 5) položite ravninu ω normalno na zadanu ravninu ρ (— 4, 1, — 3), tako da ona zatvara a) s π_1 kut $\alpha = 45^0$; b) s π_2 kut $\beta = 60^0$. (Slika 133)

412. — 415. Zadanim pravcem p položite ravninu ω normalno na zadanu ravninu ρ. (Slika 134) Uzmite ovako:

412.) $p = MN$ [M (— 2, 2, 3), N (2, 3, 1)]; ρ (— 4, 4, 2).

413.) p ($y = 4$, $z = 5$) $\parallel x$; ρ (4, — 3, 3).

414.) $p = MN$ [M (— 2, 3, 1), N (5, 3, 4)]; ρ (3, 2, ∞).

415.) $p = MN$ [M (— 2, 1, 3), N (2, 4, 6)]; ρ (∞, 5, 3).

V DEO

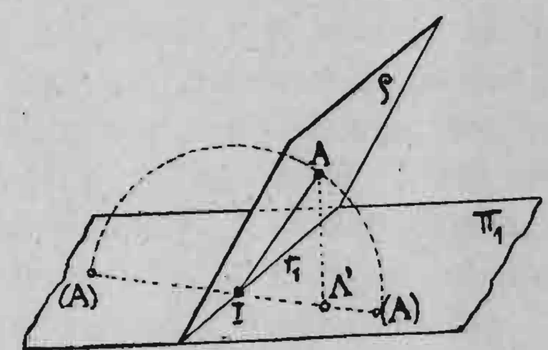
PREDOČIVANJE LIKOVA

26. Prelaganje ravnine

Znamo da se projekcije kutova, projekcije likova itd., ako se nalaze u ravninama koje su nagnute prema ravninama projekcija, pokazuju drugačijima, negoli su oni u istini. Da se odredi projekcija nekoga lika kojemu poznajemu oblik, veličinu i ravninu u kojoj se nalazi, mora se on nacrtati u preložaju. *Preložiti ravninu znači okrenuti je oko njenoga prvoga ili oko njenoga drugoga traga u ravninu π_1, odnosno u ravninu π_2.* Tim prelaganjem ravnine biva preložen i sam lik. Lik se u preloženu položaju pokazuje u svome pravome obliku, jer se nalazi u π_1, odnosno u π_2.

Pre negoli se pređe na samo predočivanje likova pomoću prelaganja ravnine, razmotrićemo ponajpre što se događa kod prelaganja tačke oko traga ravnine u π_1, odnosno u π_2.

U slici 135 prikazana je zorno tačka A u ravnini ρ.



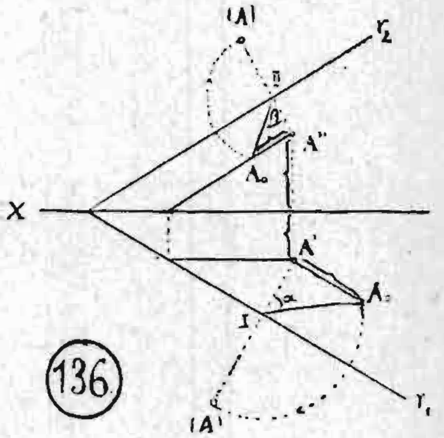
135

Kod prelaganja ravnine ρ oko r_1 u π_1 rotiraće se i tačka A oko r_1. Budući da luk $A(A)$ (slika 135) leži u ravnini koja je normalna na r_1 (dakle i na π_1), moraće se preložena tačka A, koja je označena s (A), nalaziti u normali iz A' na r_1, jer se sve projecira u prvi trag te normalne ravnine. Pružac $\overline{AI}$ je prva priklonica ravnine ρ. U preloženu položaju mora biti $\overline{(A)I} = \overline{AI}$. Svejedno je na koju se stranu prelaže ravnina.

Kod prelaganja u π_2 oko r_2 događa se isto, samo s tom razlikom, što je $A''(A) \perp r_2$ i što je $\overline{(A)II} = \overline{AII}$.

U slici 136 prikazan je preložaj (A) *tačke oko prvoga i oko drugoga traga u Mongeovoj projekciji.* Tumačenje slike 136 upoređujte sa slikom 135.

Već smo rekli da se (A) mora nalaziti u normali na r_1 iz A' odnosno u normali na r_2 iz A''. U sečištu normale s r_1, odnosno s r_2, nalazi se prvo, odnosno drugo, probodište prve, odnosno druge, priklonice. Radi se još samo o tom, kako će se odrediti udaljenost (A) do I, odnosno (A) do II. Odredi se dužina priklonice $\overline{AI}$, ili $\overline{AII}$, prelaganjem pravokutnoga trokuta $AA'I$, odnosno trokuta $\overline{AA''II}$ oko katete $\overline{A'I}$, respektive $\overline{A''II}$. Budući da je I, odnosno II u π_1, respektive u π_2, ostaju tačke I i II kod prelaganja na miru. Pomoću diferencionoga trokuta odredi se A_0 u π_1 i A_0 u π_2 i zaokrene do (A).

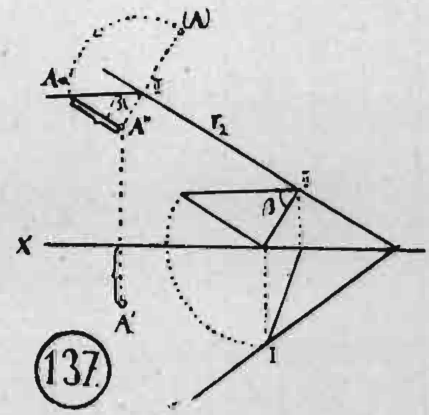


136

Budući da je $\overline{A'I}$ projekcija prve priklonice, a A_0I preloženi položaj prve priklonice, mora biti kut što ga zatvaraju $A'I$ i A_0I, prvi prikloni kut α ravnine ρ. Isto je tako $A''II$ projekcija druge priklonice, a A_0II preložena druga priklonica. Kut, što ga čine $A''II$ i A_0II, je drugi prikloni kut β ravnine ρ. Ta nas spoznaja dovodi do toga da možemo iz preloženoga položaja tačke neke ravnine odrediti prvu, odnosno drugu, projekciju tačke.

U slici 137 pokazano je kako se iz preložaja (A) tačke A oko r_2 *došlo do* A'', *pa* A', *ako A leži u ravnini* ρ.

Najpre se odredi, pomoću druge priklonice, drugi prikloni kut β ravnine ρ, jer je ravnina preložena oko drugoga traga r_2. Sad se crta sasvim isto kao u slici 136, samo što se sada radi okrenutim putem. Ide se, naime, od rezultata na zadatak. Iz (A) pusti se normala na r_2 i u sečištu s r_2 nanese kut β. Učini se da je $\overline{A_0II} = \overline{(A)II}$, te se tako dobije A_0. Paralela iz A_0 seče normalu na r_2 u A''. Prva se projekcija A' odredi pomoću glavnoga pravca ili se nanese $\overline{A_0A''}$ od osi x do A' na ordinalu tačke A.



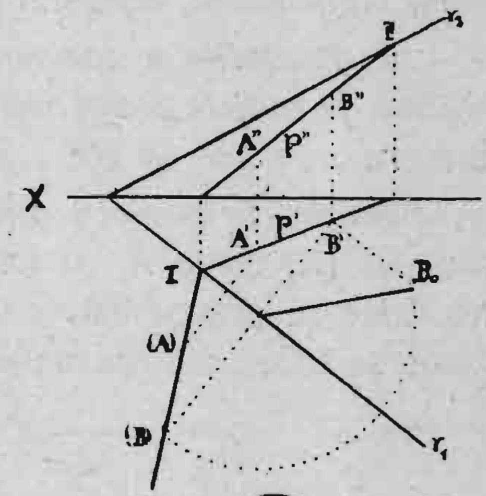
137

Kad bi tačka A bila preložena oko r_1, onda bi se morao odrediti prvi prikloni kut α ravnine ρ i pomoću njega bi se odredila najpre prva, a onda druga, projekcija tačke A.

Kod prelaganja više tačaka oko traga ravnine u koju od ravnina projekcija ne postupa se kod svake pojedine tačke onako kako je to pokazano u slici 136. Čitav se postupak znatno pojednostavljuje primenom tzv. *afiniteta* ili *afine srodnosti* koja postoji između preloženoga položaja i projekcije. (Posle ćemo videti da postoji i kolinearna srodnost ili kolineacija)

U slici 138 pokazan je pravac p ravnine ρ *i određen pomoću afiniteta njegov preloženi položaj.*

Da se odredi preloženi položaj nekoga pravca ili lika, svakako se mora najpre da odredi preložaj jedne njegove tačke. Kod nas u slici 138 odredili smo najpre preložaj (B) tačke B već poznatim načinom, istumačenim u slici 136. Kod prelaganja ravnine ρ oko r_1 ostaju sve tačke traga r_1 i nakon prelaganja na svom prijašnjem mestu. Kako je prvo probodište I pravca p tačka u tragu, ostaće I i nakon preložaja na istome mestu. U I nalaziće se i (I). $[I \equiv (I)]$ Spojnica (B) I određuje preložaj (P) pravca p.



138.

Imademo li, dakle, da odredimo preložaj tačke A, a (B) smo već pre odredili, ne moramo provesti za tačku A onu istu konstrukciju koju smo proveli kod tačke B. Dostatno je da se u A' pusti normala na r_1, te odredi secište te normale s (p). U tom secištu nalazi se (A).

Za pružac se $\overline{A'B'}$ kaže da je *afino srodan s prušcem* $\overline{(A)(B)}$, jer ima to svojstvo da se produženo $A'B'$ i (A) (B) *sastaje u pravcu* r_1, i što je A' (A) $\|$ B' (B). Trag r_1 zove se *os afiniteta*. Tačke A' i (A), B' i (B) zovu se *homologne*, korespondentne ili *odgovarajuće* tačke, a pružac $\overline{A'B'}$ je homologan s prušcem $\overline{(A)\ (B)}$ ili pružac $A'B'$ odgovara prušcu $\overline{(A)\ (B)}$ u afinitetu. Spojnice A' (A), B' (B) zovu se *zrake afiniteta.*

XXIV zakon: Dva su lika afino srodna ili u afinitetu, ako su im spojnice homolognih tačaka među sobom paralelne, a secišta se homolognih produženih stranica lika nalaze na jednome pravcu koji se zove os afiniteta.

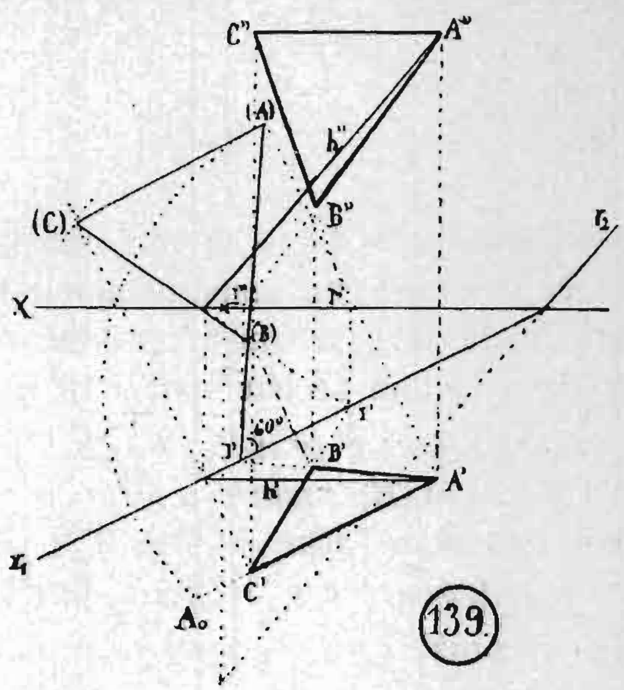
Prva projekcija i preloženi lik, oko prvoga traga ravnine u π_1, su u afinitetu. Isto su tako druga projekcija i preloženi lik, oko drugoga traga ravnine, u afinitetu. Os afiniteta je prvi, odnosno drugi, trag ravnine, a zrake afiniteta u oba su slučaja normalne na os afiniteta, tj. na prvi, odnosno na drugi, trag ravnine.

Vrlo se često početnici bune kad imaju nekoliko ravnina, te ako treba da nešto prelažu, ne znaju, koju će od ravnina prelagati. *Treba dobro upamtiti da se može prelagati samo ono, oko prvoga ili oko drugoga traga u* π_1, *odnosno u* π_2, *što leži u ravnini koja se prelaže.*

Sad ćemo na primerima od 1—8 u ovome paragrafu pokazati praktičnu stranu prelaganja ravnine s upotrebom afiniteta. Pre negoli se pređe na proučavanje tih primera, svakako neka učenici predoče pravilne i nepravilne likove koji se nalaze ili su paralelni s horizontalnom, vertikalnom, odnosno profilnom, ravninom.

1. *Predočite u zadanoj ravnini* ρ *(6, 3, — 7) istostranični trokut kojemu poznajete jedan vrh A (4, ?, 5). Jedna stranica iz vrha A neka zatvara s* r_1 *kut od 60° i neka bude duga 4.*

Najpre se pomoću druge sutražnice h odredi A'; zatim se odredi preložaj (A) tačke A. Iz (A) se povuče pravac koji s r_1 zatvara 60°. Na tome se pravcu nalazi tačka (B). Učini se tako da je $\overline{(A)(B)} = 4$. Zatim se konstruira istostraničan trokut $(A)(B)(C)$. Produžena stranica trokuta $(A)(B)$ seče r_1 u I'. Budući da je I' prvo probodište pravca AB, ostaje kod prelaganja ravnine I' na miru. Na spojnici I' A' i i na normali na r_1 iz (B) nalazi se B'. Produžena stranica trokuta $(C)(B)$ seče r_1 u I'. Na spojnici I' B' i na normali na r_1 iz (C) nalazi se C'. Time je dobivena prva projekcija $A'B'C'$ trokuta ABC.



139

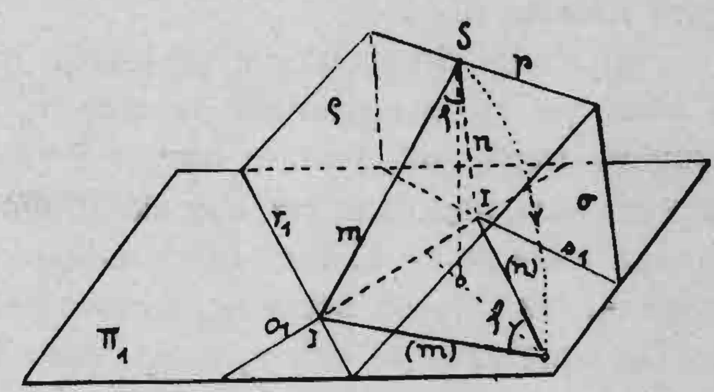
Druga projekcija tačaka B i C mogla bi se dobiti pomoću glavnih pravaca. Kraći je postupak da se odredi I'' (u osi x) pravaca AB i BC. Na spojnici I'' A'' i u ordinali iz B' nalazi se B'', a na spojnici I'' B'' i u ordinali iz C' nalazi se C''. Tako su konačno dobivene i druge projekcije B'' i C'', te je time i potpuno određena druga projekcija trokuta ABC.

U slici 139 $(A)(C)$ seče r_1 u neizmernosti, jer je $(A)(C) \parallel r_1$. (Tako to izlazi prema zadatku) Zbog afiniteta mora i $A'C'$ seći r_1 u neizmernosti. Prema tome je i $A'C' \parallel r_1$. Taj se paralelizam mogao zgodno primeniti za određenje prve projekcije, a i druge projekcije trokuta, jer je zbog tog paralelizma takođe $A''C'' \parallel x$. (Pružac $AC \parallel \pi_1$)

Tu smo videli, *ako je preloženi položaj pravca paralelan s tragom oko kojega se on prelaže, da je onda i njegova odgovarajuća projekcija paralelna s tim tragom.* Vredi i okrenuto. To se svojstvo afiniteta ima redovno primeniti kod konstrukcije, jer se time konstrukcija mnogo puta znatno pojednostavi.

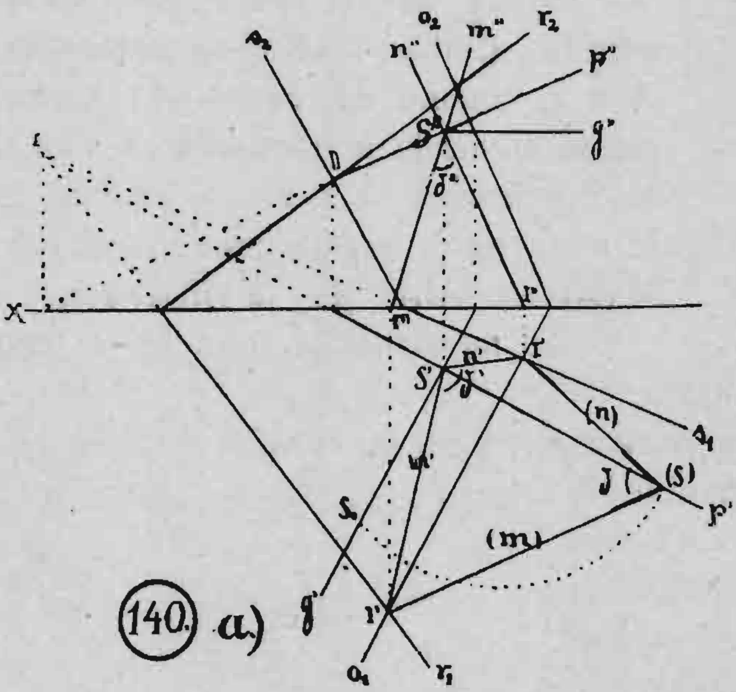
2. *Odredite veličinu kuta* δ *što ga čine ravnine* ρ *i* σ. (Slika 140)

Da se odredi kut dveju ravnina ρ i σ, položi se normalna ravnina ω na presečnicu p ravnina ρ i σ. *Kut, što ga zatvaraju presečnice m i n ravnine* ω *s ravninama* ρ *i* σ, *je traženi kut zadanih ravnina.* To prostorno rešenje prikazano je u slici 140. Isto se tako postupa i u projekciji. Sliku 140 uporeďujte sa slikom 140 a).



140

U slici 140 a) nađena je najpre presečnica p ravnina ρ i σ. Na presečnici p odabrana je po volji tačka S; tačkom S pomoću glavnoga pravca g položena je ravnina ω normalno na p. Ravnina ω je normalna na obe ravnine ρ i σ, jer je normalna na njihovu presečnicu. Zatim se odrede presečnice m i n ravnine ω s ravninama ρ i σ. Pravci m i n moraju prolaziti tačkom S, jer se oba pravca nalaze u ravnini ω koja prolazi tačkom S i kod toga je pravac m u ravnini ρ, a pravac n u ravnini σ. Projekcije m' i n' prolaze, dakle, secištem tragova r_1, odnosno s_1, s tragom o_1 i projekcijom S'. ($m' = S'I'$, $n' = S'I'$) Projekcije m'' i n'' prolaze projekcijama I'' i S''. ($m'' = I''S''$, $n'' = I''S''$)



140 a)

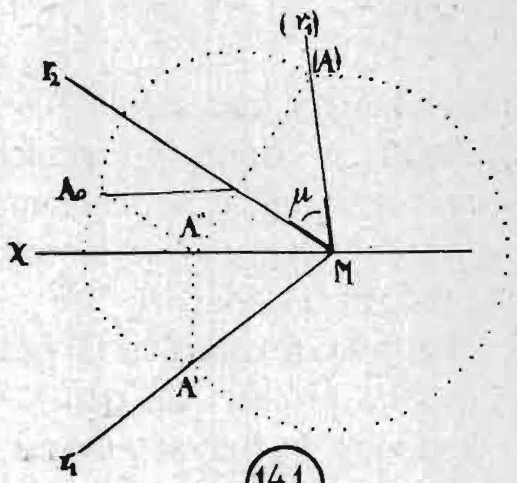
U slici 140 svakako moramo prelagati oko o_1 ili oko o_2, jer se oba pravca m i n nalaze u ravnini ω. Ne možemo prelagati oko r_1 ili oko r_2, jer se pravac n ne nalazi u ravnini ρ. Tako isto ne možemo prelagati ni oko s_1, ni oko s_2, jer se pravac n ne nalazi u ravnini σ.

Pošto se preloži ravnina ω oko prvoga traga o_1, bivaju preloženi i pravci m i n. Prva probodišta I' pravaca m i n kod prelaganja ostaju na miru, a (S) dobijemo već poznatim načinom. Spojnice (S) I' daju nam preložaje (m) i (n) pravaca m i n, te prema tome i veličinu kuta δ. (Kut dvaju pravaca AS i BS prikazan je u slici 72 pomoću dvostruke rotacije) I ovde smo mogli odrediti veličinu kuta pravaca m i n

pomoću dvostruke rotacije, ali to nismo činili, jer je jednostavnije pomoću preložaja ravnine (mn).

3. *Odredite veličinu kuta* μ *što ga među sobom zatvaraja tragovi ravnine* ρ.

a) Prvi i drugi trag u projekciji pokazuju veći kut negoli je on u istini, jer se prelaganjem ravnine π_1 u π_2 odmakne prvi trag od drugoga traga, pa kroz to nastaje i veći kut. Da se odredi veličina takvoga kuta, preloži se prvi trag oko drugoga traga u π_2 ili drugi trag oko prvoga traga u π_1. U slici 141 preložen je prvi trag r_1 oko drugoga traga r_2, tako da se uzela u prvome tragu tačka A (A' u r_1, a A'' u osi x) i preložila se oko r_2 u π_2. Tako se je dobio prelōžaj (A) tačke A. Budući da secište tragova M ostaje kod prelaganja na miru, mora spojnica toga secišta M s preloženim (A) dati preloženi trag (r_1) u π_2. Kut, što ga čine (r_1) i r_2, je traženi kut μ tragova r_1 i r_2,



141.

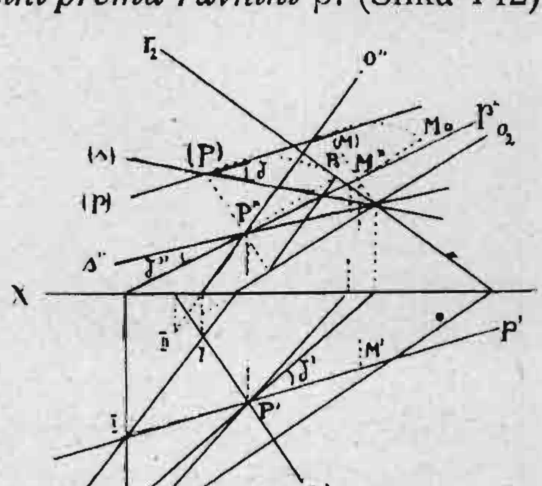
b) Taj se kut može još i ovako odrediti. (Šlika 141) Kad se uzela tačka A u r_1, znamo da će se (A) nalaziti nakon preložaja u normali iz A'' na r_2. $\overline{MA'}$ prikazuje se u svojoj veličini, jer je u π_1, pa će prema tome morati biti i $\overline{M(A)} = \overline{MA'}$, jer je $\overline{M(A)}$ u π_2.

Ta konstrukcija pod b) je zgodnija od one pod a), jer je kraća.

4. *Odredite kut* δ *što ga pravac* p *čini prema ravnini* ρ. (Slika 142)

Kut se pravca prema ravnini određuje, da se pravcem položi ravnina normalno na onu ravninu s kojom se određuje kut. Kut, što ga čini zadani pravac s presečnicom normalne ravnine sa zadanom ravninom, je kut pravca prema ravnini.

U slici 142 na taj je način određen kut δ. Najpre je odreden probod P pravca p s ravninom ρ. (Za konstrukciju određenja proboda pravca s ravninom pogledajte sliku 123) U tački P puštena je normala o na ravninu ρ. (Pogledajte sliku 129). Ravnina ω, položena pravcima o i p, normalna je na ravninu ρ. Sad se odredi presečnica s ravnina ρ i ω. (Pogledajte sliku 115) Pravci p i s moraju

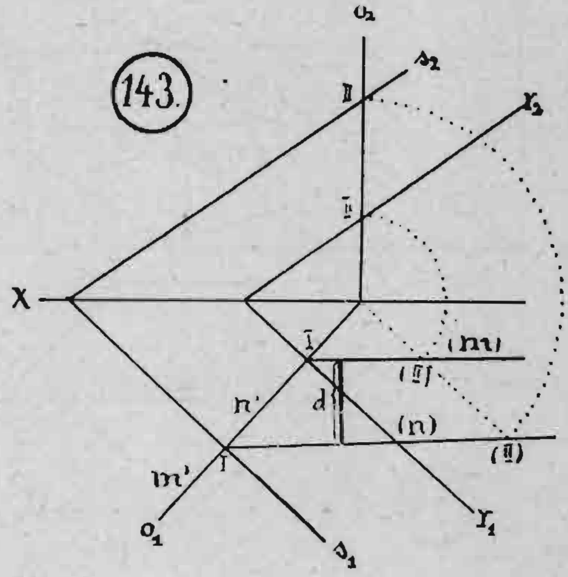

142.

se seći u tački P. Preloženi položaj pravaca p i s oko o_2 (moglo se je i oko o_1) pokazuje veličinu kuta δ, što ga pravac p čini prema ravnini ρ.

5. *Odredite udaljenost d paralelnih ravnina* ρ *i* σ.

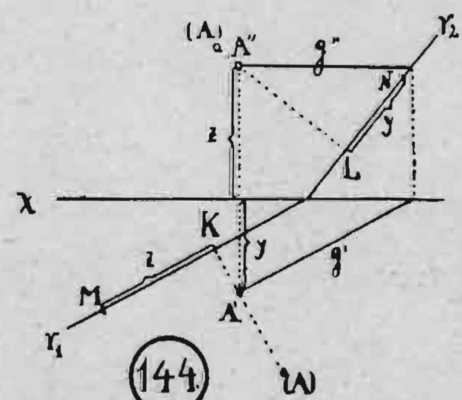
Kako se rešava takav zadatak, pokazano je već u zadacima od 380 — 386. Zgodnije se gornji zadatak rešava pomoću prelaganja, tako da se na zadane ravnine položi normalna ravnina koja je ujedno normalna ili na π_1 ili na π_2. Preložene presečnice normalne ravnine s paralelnim ravninama pokazuju veličinu tražene udaljenosti.

U slici 143 zadane su paralelne ravnine ρ i σ. Gdegod se postavi normalna ravnina ω na ravnine ρ, σ i π_1 (pogledajte § 25 d); odrede se presečnice m i n ravnine ω s ravninama ρ i σ. $m' \equiv n'$ a m'' i n'' nije ni crtano, jer nije potrebno za određenje preložaja pravaca m i n. Razmak d preloženih presečnica m i n pokazuje udaljenost zadanih paralelnih ravnina.



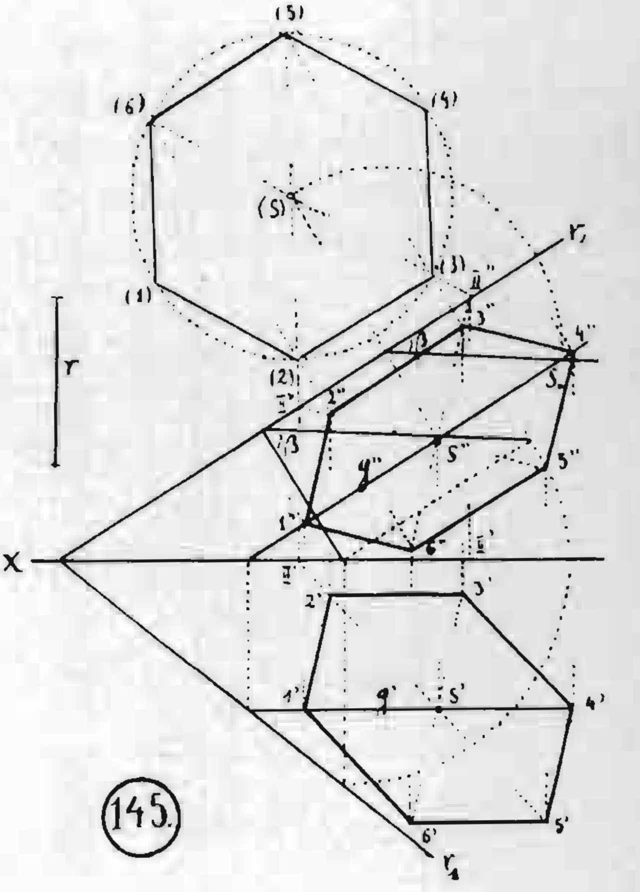
6. *U slici 144 pokazano je kako se može tačka ravnine oko traga preložiti u* π_1 *ili u* π_2 *nešto kraćim postupkom negoli je to dosad pokazano.*

Prema slici 136 morali bismo u A', odnosno u A'', povući paralelu s r_1, odnosno s r_2 i na nju naneti z, odnosno y tačke A, da dobijemo A_0. Nanese li se dužina z, odnosno y tačke A na sam trag r_1, odnosno r_2 (slika 144), biće $A' M = A_0 K$ (preložena prva priklonica), odnosno $A''N = A_0 L$ (preložena druga priklonica), jer su to dijagonale pravokutnika. Nanese li se zatim $\overline{A' M}$ na normalu iz A' od K, odnosno nanese li se $\overline{A'' N}$ na normalu iz A'' od L, dobije se preložena tačka (A).



7. *Nacrtajte projekcije pravilnoga šestorokuta, ako je zadana njegova ravnina* ρ, *preloženo središte (S) i dužina polumera r njemu opisane kružnice. Jedna dijagonala šestorokuta koja prolazi središtem S, neka bude paralelna s* π_2. (Slika 145)

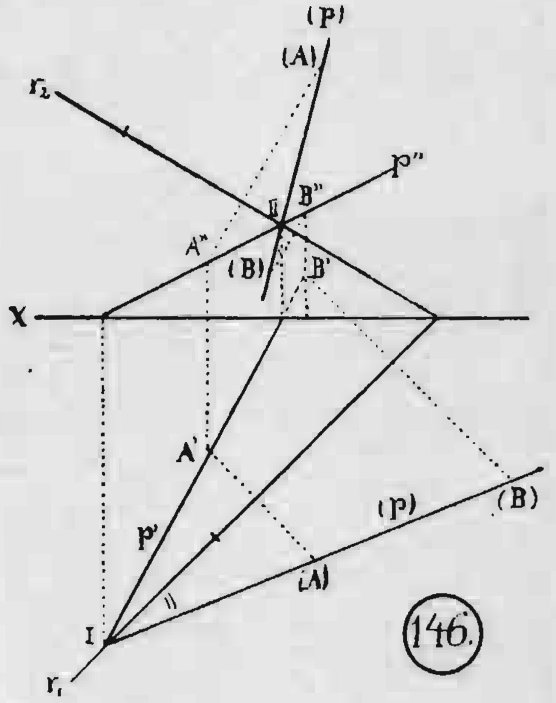
Zadano je, dakle, r_1, r_2, (S) i r opisane kružnice. Pomoću priklonoga kuta β odredi se S'' (pogledajte sliku 137), a pomoću glavnoga pravca g odredi se S'. U preloženom se položaju nacrta oko (S) kružnica polumera r. U tu se kružnicu upiše pravilni šestorokut tako da mu je dijagonala $\overline{(1)\,(4)} \parallel r_2$. To znači da je dijagonala $\overline{14}$ i u prostoru paralelna s r_2, te je prema tome $\overline{14}$ paralelno i s ravninom π_2. Budući da je $\overline{(1)\,(4)} \parallel r_2$, biće i $\overline{1''4''} \parallel r_2$, a $\overline{1'\,4'} \parallel x$. Pomoću afiniteta odrede se tačke $5''$ i $2''$. Kako dijagonala $(5)\,(2)$ seče os afiniteta r_2 u II'' i prolazi preko (S), mora i $5''$ i $2''$ prolaziti tačkom II'' koja miruje, i tačkom S''. Pomoću zraka afiniteta određene su tačke $2''$ i $5''$. Istim se postupkom dobiju tačke $6''$ i $3''$.



145

Prve se projekcije II' drugih probodišta dijagonala $\overline{25}$ i $\overline{36}$ nalaze u osi x. Budući da se tačke 2 i 5 i tačke 3 i 6 nalaze na pravcima $S\ II$, mora se $2'\ 5'$ i $3'\ 6'$ nalaziti na spojnicama $II'\ S'$. Time je određena i prva projekcija šestorokuta 123456.

8. *Ako se dve tačke ravnine nalaze na raznim stranama ravnine* π_1, *odnosno ravnine* π_2, *onda je i njihov preložaj oko* r_1, *odnosno oko* r_2 *na raznim stranama tragova*, jer preložaj dela ravnine s jedne strane ravnine π_1, odnosno ravnine π_2, padne na jednu stranu, a onaj deo ravnine s druge strane π_1, odnosno π_2, kod preložaja padne na protivnu stranu prvoga, odnosno drugoga traga.



146

U slici 146 prikazana je ravnina ρ i u njoj dve tačke A i B na pravcu p, tako da se tačka A nalazi u I, a B u II kvadrantu. Nakon preložaja oko r_2 nalazi se (A) s jedne, a (B) s druge strane r_2, jer su i u prostoru tačke A i B

na raznim stranama traga r_2. Vidi se iz slike da i sama konstrukcija (afinitet) tome dovodi.

Kad se prevaljuju tačke A i B oko r_1, dobije se (A) i (B) s iste strane traga r_1, jer su tačke A i B i u prostoru s iste strane traga r_1. Preložaj tačke A određen je postupkom koji je protumačen u slici 144, a tačka (B) određena je pomoću afiniteta.

Kod određivanja preložaja tačaka pomoću afiniteta, ako se i ne misli na to kako se tačke u prostoru nalaze obzirom na trag oko kojega prelažemo, dolazi se do ispravnoga rezultata. Kad bismo prelagali tačku po tačku (bez afiniteta), svakako bismo morali na to mnogo paziti da se ne dogodi da tačke ravnine, koje su na raznim stranama traga, ne padnu kod preložaja na istu stranu.

Zadaci:

416. — 422. Odredite preložaj tačke A, ako ona leži u ravnini ρ. Prelažite ravninu ρ prvi put oko r_1, drugi put oko r_2 načinom istumačenim u slici 144.

416.) A (2, ?, 2), ρ (—6, 3, 4).
417.) A (6, 4, ?), ρ (3, —2, 5).
418.) A (0, ?, 5), ρ (—4, 2, ∞). Preložite tačku A oko r_1.
419.) A (2, 6, ?), ρ (5, ∞, 6). Tačku A preložite oko r_2.
420.) A (0, 1, ?), ρ (∞, 3, 4).
421.) A (4, 2, ?), ρ (∞, —2, 5).
422.) A (4, ?, 3), ρ (5, 7, 3).

423. — 430. Odredite prvu i drugu projekciju tačke A, ako je poznat njen preložaj (A) i ravnina u kojoj se tačka A nalazi. (Pogledajte sliku 137) Kod ovih će se primera smatrati da je A preloženo oko onoga traga kojemu je (A) bliže.

423.) (A) $[x = -4,\ z = 6]$, ρ (—8, 7, 5).
424.) (A) $[x = -2,\ y = 6]$, ρ (3, 2, 3).
425.) (A) $[x = 9,\ z = 7]$, ρ (3, 2, —6).
426.) (A) $[x = 6,\ y = 1]$, ρ (—5, 2, —8).
427.) (A) $[z = 5]$, ρ (∞, 5, 3).
428.) (A) $[y = 6]$, ρ (∞, 2, 4).
429.) (A) $[x = -2,\ z = 6]$, ρ (—5, ∞, 4).
430.) (A) $[x = 0,\ y = 2]$, ρ (5, 6, ∞).

431.) Nacrtajte preložaj prve i druge sutražnice ravnine ρ (—3, 2, 5). (Preložite secište sutražnica i onda radite dalje pomoću afiniteta. Pogledajte sliku 138)

432.) Nacrtajte prvu i drugu projekciju pravca m ravnine ρ (3, — 2, 3), ako preloženi položaj (m) pravca m prolazi tačkom I ($x = -1$), i zatvara s r_1 kut od 60^0. [Uzme se gdegod na (m) tačka (M)]

433.) Odredite kut što ga pravac $p = AB$ [A ($x = 2$, $z = 4$) B ($x = -1$, $z = -1$)] zatvara s r_2, ako on leži u ravnini ρ (10, 6, 7). (Pogledajte sliku 146)

434.) Nacrtajte projekcije pravca p, ako on leži u ravnini ρ (∞, —3, 5), ako prolazi tačkom P ($x = 3$, y — 2) i zatvara s r_1 kut od 45^0.

435.) Odredite dužinu prušca A (2, 3, 5), B (—5, 4, 2) pomoću preložaja njegove ravnine prometalice.

436.) Predočite u ravnini ρ (—8, 3, 6) kvadrat kojemu je jedna dijagonala ($d = 4$) normalna na r_1 i, ako se jedan njegov vrh A ($x = 0$) nalazi u r_1.

437.) Predočite u ravnini σ (5, 4, —7) istostrani trokut od kojega poznajemo preložaj središta (S) [$x = 4$, $y = 7$] njemu opisane kružnice s polumerom $r = 3$. Nijedna stranica trokuta neka ne bude paralelna s r_1.

438.) Predočite u ravnini ρ (∞, 4, 5) pravilan šestorokut, ako je njegovo središte u tački S ($x = 0$, $y = 2$), a polumer opisane mu kružnice $r = 2$. Jedna glavna dijagonala šestorokuta neka zatvara s r_2 kut od 60^0.

439. — 442. Odredite veličinu kuta μ što ga među sobom zatvaraju tragovi ravnine ρ. (Pogledajte sliku 141)

439.) ρ (—2, 3, 5).

440.) ρ (3, —2, 4).

441.) ρ (—2, ∞, 3).

442.) ρ (—3, 4, —4).

443.) Predočite u ravnini ρ (∞, 5, 2) pravilan šestorokut, tako da mu se jedna stranica nalazi u r_1, a druga, nasuprotna, u r_2. (Preložićete r_2 oko r_1 ili r_1 oko r_2)

444.) Predočite u ravnini ρ (—5, 3, 5) trokut ABC, ako se njegov vrh A nalazi u osi x, stranica $\overline{AB} = 4$ u r_1, vrh C u r_2, tako da je stranica $\overline{BC} = 7$. ($A' \equiv A''$ u secištu tragova. Drugi trag r_2 preložite oko r_1)

445.) Predočite istokračni trapez u ravnini ρ (6, 4, 6), tako da mu jedan krak leži u r_1, a drugi u r_2; jedna paralelna stranica $= 3$, a druga je 7. (Preložićete r_1 oko r_2 ili r_2 oko r_1)

446.) Predočite u ravnini ρ (5, 3, —5) deltoid kojemu je dulja dijagonala (d = 12) simetrala tragova ravnine ρ, a kraće se njegove stranice $a = b = 5$ nalaze u tragovima njegove ravnine.

447.) Odredite drugi trag r_2 ravnine ρ, ako je zadan njen prvi trag r_1 (x = — 3, y = 3) i ako preloženi drugi trag r_2 zatvara s r_1: a) 30°; b) 120°.

448.) Zadan je pravac $a = AB$ [A (—2, 2, 1), B (2, 1, 3)], pravac $b = BC$ [B (2, 1, 3), C (0, 4, 5)] i tačka A (x = — 0,5, z = 3) u ravnini pravaca a b; odredite veličinu kuta što ga pravac p zatvara s pravcem b, ako pravac p leži u ravnini (ab), ako prolazi tačkom A i ako s pravcem a zatvara kut od 45°. (Nacrtaćete tragove ravnine ρ i u preloženom položaju nacrtati pravac p pod zadanim uvetima)

449. — 452. Odredite kut δ što ga čini pravac p prema ravnini ρ. (Pogledajte sliku 142)

449.) $p = MN$ [M (—4, 1, 4), N (1, 3. 1)]; ρ (—7, 4, 5).

450) p (y = 3, z = 4) $\parallel$ x; ρ (4, 4, —4).

451.) p (x = —2, y = 6, $\perp$ π_1; ρ (—4, 1, —3).

452.) $p = MN$ [M (—2, 5, 2), N (3, 5, 5)], ρ (—3, 4, ∞).

453. — 455. Odredite razmak paralelnih ravnina ρ i σ. (Pogledajte sliku 143)

453.) ρ (—3, 1, 4) $\parallel$ σ (x = 1).

454.) ρ (2, 4, —1) $\parallel$ σ (x = 5).

455.) ρ (—2, —3, 3) $\parallel$ σ (x = 2).

456. — 460. Odredite veličinu kuta δ što ga čine ravnine ρ i σ. (Pogledajte sliku 140)

456.) ρ (—5, 2, 3), σ (—2, 2, 2).

457.) ρ (—4, 3, 2), σ (5, —1, 7).

458.) ρ (—4, ∞, 3), σ (—8, 9, 4).

459.) ρ (8, 6, ∞), σ (5, 8, ∞).

460.) ρ (∞, 3, 4), σ (—2, —4, 2).

Zadaci za ponavljanje

U ovome ćemo se delu ograničiti samo na nekoliko zadataka koji su u tesnoj vezi s gradivom što je dosad protumačeno, i koji će obuhvatati uglavnom sav materijal, potreban za dalji studij nacrtne geometrija. Kod zadataka neće se upozoravati na slična rešenja u knjizi, niti će se pokazivati put kojim valja poći da se dođe rezultata. Svaki će učenik po dosad skupljenom znanju morati sam te zadatke rešiti. Istom onda kad budete načistu sa čitavim gradivom, moći ćete nastaviti dalji studij bez smetnje, štaviše, biće vam nacrtna geometrija jedan od najlaganijih i prema tome i najmilijih predmeta.

461.) Na zadani pravac $p = MN$ [M (—2, 1, —3), N (3, 5, 1)] postavite normalnu ravninu ω, tako da ona buda od tačke M udaljena 4 jedinice.

462.) Predočite romb kome su stranice u pravcima $a = AB$ [A (—2, 1, 3), B (2, 4, 6)] i $b = BC$ [B (2, 4, 6) C (6, 2, 8)]. Tragove ravnine romba nemojte crtati; stranica romba duga je 3 jedinice. Koliko rešenja ima zadatak?

463.) Odredite priklone kutove α i β ravnine, određene pravcima $m = MN$ [M (—4, 6, 5), N (1, 2, 3)] i $n = NO$ [N (1, 2, 3), O (—1, 1, 3)].

464.) Nacrtajte prvu projekciju pravca p, ako je od njega poznato: tačka M (2, 4, 3), druga projekcija tačke M ($x = 6$, $z = 4$) i drugi prikloni kut $\beta = 60^0$. Drugo probodište pravca p neka se nalazi desno od ishodišta.

465.) Tačkom P (—1, 6, 8) na pravce $a \parallel b$ položite normalnu ravninu i odredite udaljenost proboda paralela s ravninom ω. Uzmite: $a = AB$ [A (0, 1, 2), B (2, 1, 3)], pravac b neka prolazi tačkom C (0, 4, 5).

466.) Odredite udaljenost tačke M (2, 2, 4) od ravnine α (—5, 4, —4).

467.) Odredite središte S upisane kružnice trokutu, koji postane tragovima r_1, r_2 i r_3 ravnine ρ (—7, 4, 7). Profilna ravnina neka prolazi ishodištem.

468.) Odredite udaljenost tačke A (3, 2, 4) od ravnine koja prolazi osju x i tačkom M (4, 3, 1).

469.) Na mimosmernice m ($y = 4$, $z = 3$) $\parallel x$ i $n = MN$ [M (— 7, 1, 3), M (3, 3, 6)] nacrtajte transverzalu o, tako da ona bude normalna na pravac m i da bude udaljenost secišta te transverzale s pravcima m i n jednaka 3 jedinice.

470.) Odredite, probodište pravca $p = MN$ [M (0, 4, 6), N (6, 7, 3)] s ravninom ρ (4, 3, 6) pomoću transformacione ravnine.

471.) Odredite, pomoću dvostruke transformacije, projekcije pravca p tako da on bude paralelan s paralelama $a = AB$ [A (— 4, 1, 4) B (— 2, 2, 6),] i $b =$ [C (0, 6, 3)] i da je od pravca a udaljen za 3, a od pravca b za 4 jedinice.

472.) U polovištu prušca A (— 4, 2, 2) B (6, 10, 6) nacrtajte na njega normalu n, tako da ta normala zatvara s π_1 kut od 45^0. Odredite dužinu dela normale od polovišta prušca AB do prvoga probodišta. Ima li više takvih normala?

473.) Tačkom S ($x = 2$, $z = 3$) u zadanoj ravnini ρ ($-8, 6, 5$) nacrtajte pravac p, tako da on s π_1 zatvara kut od 30^0. Odredite projekcije pravca m, ako on mora prolaziti tačkom S i zatvarati s pravcem p i s ravninom ρ kut od 60^0. Predočite istostrani trokut kojemu je jedan vrh u tački S, a one dve njegove stranice koje polaze iz toga vrha, neka se nalaze u pravcima p i m. Stranica istostranoga trokuta duga je 5 jedinica. Hoće li biti više rešenja?

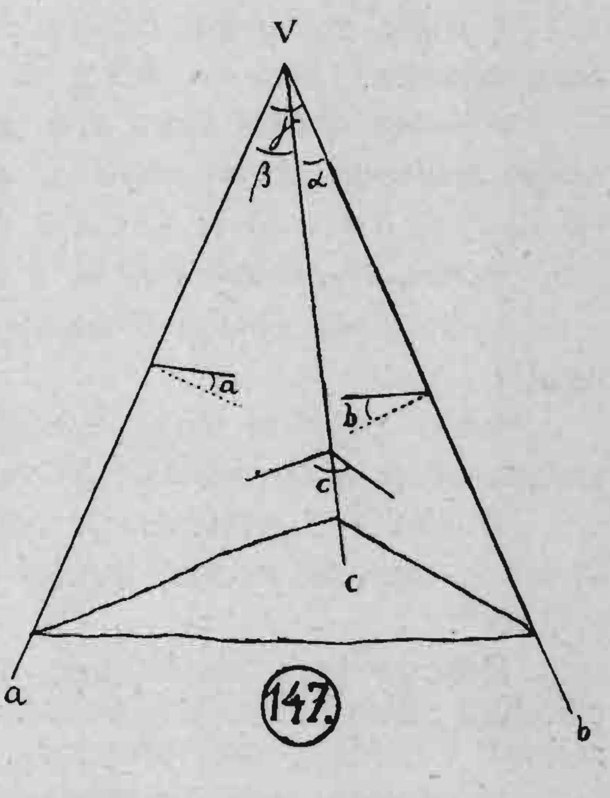
474.) Predočite u ravnini ρ ($-6, 5, 4$) kvadrat kojemu je stranica duga 6 jedinica, a leži u r_1. Jedan vrh kvadrata neka bude u r_2.

VI DEO

PROJEKCIJE UGLATIH (ROGLJATIH) TELESA

27. Trostrani ugao ili trostrani rogalj

Trostrani ugao (trobridac ili trostrani rogalj) poznajemo već otpre iz stereometrije. Ovde neka budu, pre negoli pređemo na samo predočivanje njegovo, spomenuti samo nazivi i najvažniji poučci o njemu. Tačku V u kojoj se sastaju plohe (ab), (bc) i (ac) nazivamo *vrhom* trostranoga ugla. (Slika 147) Bridove ćemo označivati s a, b i c, a kutove što ih čine bridovi ab, bc i ac, nazivaćemo γ, α, odnosno β. Dakle: kut $(ab) = \gamma$, kut $(bc) = \alpha$, kut $(ac) = \beta$. Kutovi α, β i γ zovu se *bridni kutovi. Suma je bridnih kutova uvek manja od 360°.* $(\alpha + \beta + \gamma) < 360°$. (Na to treba paziti kod zadataka) *Suma dvaju bridnih kutova uvek je veća od trećega bridnoga kuta.* (I na to treba paziti kod sastavljanja zadataka) Kutovi, što ih čine plohe trostranoga ugla, nazivamo *plošnim kutovima.* Plohe (ca) i (ab) čine plošni kut a, plohe (ab) i (bc) čine plošni kut b, plohe (bc) i (ca) čine plošni kut c. Vrhovi plošnih kutova a, b i c nalaze se na bridovima a, b, odnosno c. Bridnome kutu α leži nasuprot plošni kut a, bridnome kutu β plošni kut b, a bridnome kutu γ plošni kut c. Osim toga, dva bridna kuta zatvaraju jedan plošni kut. Na pr. α i β čine kut c; β i γ kut a; α i γ kut b. Jednom bridnom kutu susedna su dva plošna



kuta. Na pr. kutu α susedni su kutovi b i c, kutu β kutovi a i c, kutu γ kutovi a i b. *Suma je plošnih kutova veća od 180°, a manja od 540°.* ($180^\circ < a + b + c > 540^\circ$) *Većem plošnom kutu leži nasuprot veći bridni kut i okrenuto. Ako su u trostranome uglu dva plošna kuta među sobom jednaka, onda su im i bridni kutovi koji im leže nasuprot među sobom jednaki. Vredi i okrenuto.*

Vidimo, dakle, da kod trostranoga ugla uglavnom razlikujemo tri bridna (α, β, γ) i tri plošna kuta (a, b, c). Da bude trostrani ugao potpuno određen, potrebno je poznavati:

1 *sva tri bridna kuta* α, β *i* γ;

2 *dva bridna kuta i jedan plošni kut koji se nalazi između ona dva zadana bridna kuta* Prema tome mora biti zadano za taj slučaj ili α, β i c, ili α, γ i b, ili β, γ i a;

3 *dva bridna kuta i jedan plošni kut koji je jednome od zadanih bridnih kutova nasuprot.* Za taj slučaj mora biti zadano α, β i kut a ili kut b; dalje β, γ i kut b ili kut c; i napokon α, γ i kut a ili kut c;

4 *jedan bridni kut i dva plošna kuta koja su zadanome bridnome kutu susedna.* Dakle: α, b i c, ili β, a i c, ili γ, a i b;

5 *jedan bridni kut i dva plošna kuta od kojih je jedan zadanome bridnome kutu susedan, a drugi mu je nasuprot.* Na pr. α, a i b ili c; β, b i a ili c; γ, c i a ili b;

6 *sva tri plošna kuta a, b i c.*

Vidimo da postoji 6 slučajeva za potpuno određenje trostranoga ugla.[1])

Svaki pojedini slučaj trostranoga ugla *razrešiti* znači: iz ona tri zadana uveta naći preostale tri veličine.

U slici 148 prikazano je rešenje 1 slučaja. Traže se plošni kutovi a, b i c, ako su poznati bridni kutovi α, β i γ. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

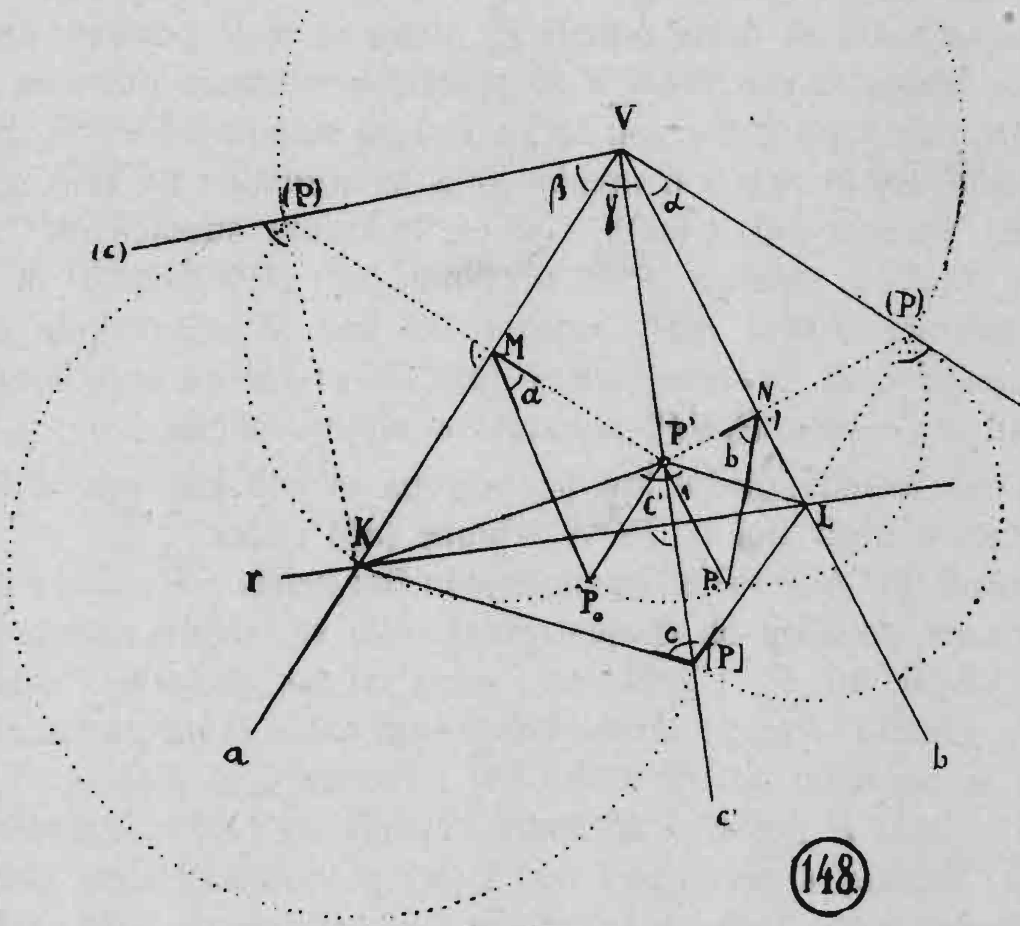
Rešenje toga trostranoga ugla prikazano je u kotiranoj projekciji. Kad znamo rešenje u kotiranoj projekciji, lako ćemo sve o njemu rešavati i u Mongeovoj projekciji.

U prvome redu pretpostavimo da nam je ugao zadan tako da njegovi bridovi a i b leže u ravnini slike. Kako oni zatvaraju bridni kut γ, prikazaće se taj bridni kut γ, a i bridovi a i b ne samo u svojoj veličini nego upravo na istome mestu kako je to u prostoru. Brid se c izdiže iz tačke V nad ravninu slike, te čini s bridom a kut β, a s bridom b kut α. Time su nastale ravnine (ca), (cb) i (ab) koje

---

[1]) 2, 3, 5 i 6 slučaj mogu se svesti na 1 i 4 slučaj. Uzimajte s toga samo 1 i 4 slučaj, a ostale slučajeve koliko vreme dopusti.

među sobom čine plošne kutove c, b, odnosno a. Naš je zadatak odrediti veličinu tih plošnih kutova.



148

U slici 148 nacrtani su bridovi a i b tako da zatvaraju zadani kut $\gamma = 60^0$. Ako ravninu (ac) i ravninu (bc) oko a, odnosno oko b, preložimo (razastremo) u ravninu slike, dobićemo (c) na dve strane. Kako je sad i brid c u ravnini slike [došao je u (c)], pokazuju se bridni kutovi β i α u svojoj veličini. Treba, dakle, kad smo nacrtali a i b, uz a nacrtati kut $\beta = 45^0$, a uz b kut $\alpha = 30^0$. Sad imamo kutove: $\alpha = [b\ (c)]$, $\beta = [a\ (c)]$ i $\gamma = (ab)$. U (c) uzme se tačka (P). Budući da oba (c) pretstavljaju jedan te isti preloženi brid c (jedanput oko a, drugiput oko b), mora $\overline{V(P)}$ na obema stranama biti jednako dugo. [I ona dva (P) pretstavljaju jedan prostorni P] Kad rotiramo plohu $a(c)$ oko a, odnosno $b(c)$ oko b u njen traženi položaj, opisaće tačka P luk koji se projecira kao pružac iz (P). Projekcija toga luka je normalna na a, odnosno na b. Ta se dva prušca (u prostoru zapravo dva luka) seku u P'. Secište P' je projekcija tačke P. Spojnica VP' daje projekciju c' brida c.

Kad imamo c', moći ćemo odrediti plošne kutove a i b. Tačka P u prostoru nalazi se u normali na ravninu slike iz P'. Tačke P, P' i M čine pravokutan trokut, kome su katete $\overline{PP'}$ i $\overline{P'M}$. Taj pravokutni (pravougli) trokut $PP'M$ preložimo oko katete $\overline{P'M}$ u ravninu slike. Tačka P, kad je preložena, dolazi u položaj P_0. Pružac $P'P_0$ je normalan na $P'M$, jer se i u prostoru kod P' nalazi pravi kut. Od M do P je isto toliko, koliko je od M do (P), jer se pružac $\overline{MP}$ nalazi u ravnini (ac). Da se dakle odredi P_0, mora se u P' postaviti normala na MP' i lukom sa središtem u M preseći ta normala dužinom $M(P)$. To secište daje nam preloženu tačku P koju smo označili s P_0. Budući da se trokut PP'M nalazi u ravnini koja je normalna na brid a [a je presečnica ravnina (ab) i (ac))], i jer se trokutova stranica $\overline{MP}$ nalazi u ravnini (ac), a stranica $\overline{P'M}$ u ravnini (ab) ($\overline{PM} \perp a$ i $\overline{P'M} \perp a$), moraju stranice $\overline{PM}$ i $\overline{MP'}$ zatvarati kut koji je jednak kutu što ga među sobom čine ravnine (ab) i (ac). U preloženu se položaju taj plošni kut a = kutu P_0MP' pokazuje u svojoj veličini.

Da se odredi plošni kut b, postupa se isto kao pre, samo što onde dolazi u obzir trokut $PP'N$ i plohe (ab) i (bc).

Trokuti $PP'M$ i $PP'N$ imaju zajedničku katetu $\overline{PP'}$. To se očituje i u preloženu položaju tih dvaju trokuta. Ako se, naime, zabode šestar u P' i otvori do P_0 i opiše luk, mora taj luk prolaziti i kroz onaj drugi P_0. Dužina $\overline{PP_0}$ *je upravo udaljenost tačke* P *od ravnine* (ab).

Da se napokon odredi plošni kut c što ga čine plohe (ac) i (bc), mora se u tački P postaviti normalna ravnina na brid c. Presečnice te normalne ravnine s ravninama (ac) i (bc) pokazuju veličinu plošnoga kuta c. Prema tome tačkom P prolaze dve normale na brid c od kojih se jedna nalazi u ravnini (ac), a druga u ravnini (bc). Te normale na c pokazuju se i u preloženu položaju. Moramo dakle u jednom i u drugom (P) postaviti normalu na (c) dok ne seče a u tački K, a b u tački L. Spojnica KL (tačke K i L leže u ravnini crtnje; dakle su to probodišta normala PK i PL s ravninom crtnje) je trag r one ravnine koja je položena tačkom P normalno na c. Ako je tačno crtano, mora biti $r \perp c'$. Zašto?

Da se odredi $[P]$ (to je tačka P preložena oko traga r u ravninu crtnje), opišu se lukovi iz K, odnosno iz L, polumera $\overline{K(P)}$, odnosno $\overline{L(P)}$, dok se oni ne seku. Ako je tačno crtano, moraju se ta dva luka sastati upravo u c'. (Zašto?) Tačku $[P]$ mogli smo naći i tako da smo postupali kako se postupa kod prelaganja tačke oko traga ravnine. To je bilo pokazano u slici 136.

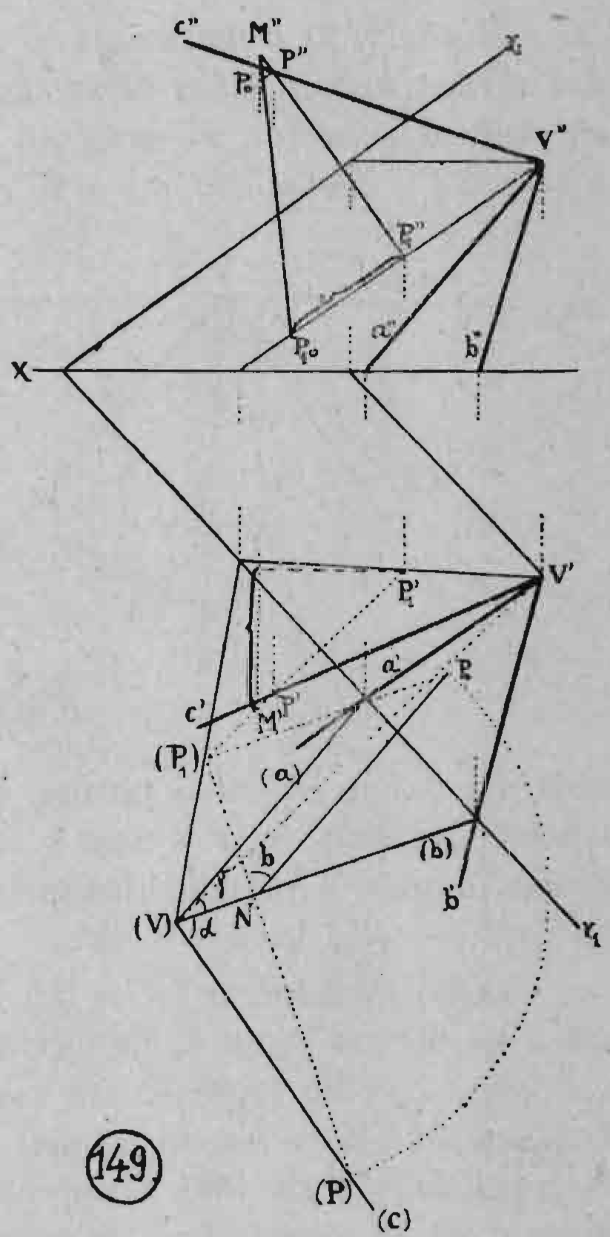
Spojimo li dobivenu tačku $[P]$ s tačkama K i L, pokazuje nam kut tih spojnica veličinu plošnoga kuta c. Spojnice KP' i LP' čine projekciju c' kuta c.

Ima li se trostrani ugao rešiti u Mongeovoj projekciji, postupa se načinom kako je to pokazano u slici 148 s tom razlikom, što se sve to prenaša među ravnine π_1 i π_2.

Kad znamo rešiti 1 slučaj trostranoga ugla, onda možemo da rešimo i sledeći zadatak: *Nacrtajte pravac c koji prolazi secištem pravaca a* i *b* i *zatvara s pravcem a određeni kut* β, *a s pravcem b određeni kut* α. Taj se zadatak rešava pomoću trostranoga ugla.

Kako se prenosi trostrani ugao u Mongeovu projekciju, pokazano je u slici 149.

Upozoravate se da nipošto ne rešavate i ne studirate sledeće primere o trostranome uglu dok niste sliku 148 (1 slučaj trostranoga ugla) ne samo potpuno razumeli nego i konstruktivno upamtili, jer će se kod sledećih slučajeva trostranoga ugla vrlo često morati tražiti iz rezultata zadatak obzirom na sliku 148, pa prema tome konstrukcije koje su u slici 148 izvoditi okrenutim redom.



149

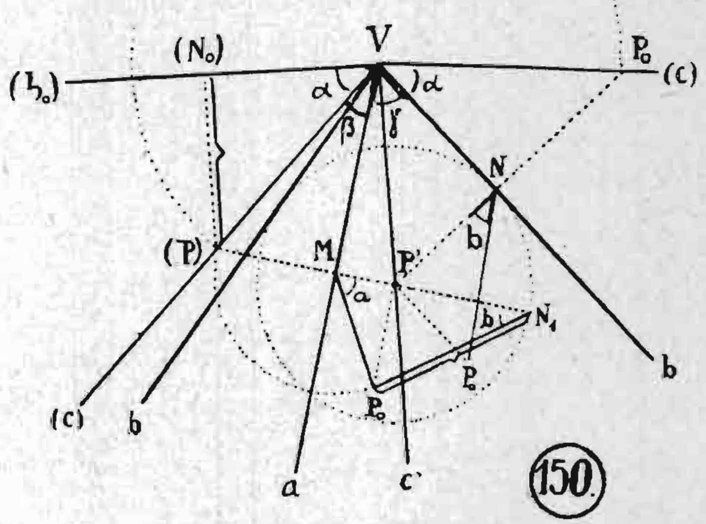
U slici 149 predočen je trostrani ugao u Mongeovoj projekciji, ako je zadana ravnina plohe (ab) = ρ, vrh *V* i brid *a* u ravnini (*ab*). *Bridni kut* γ *neka je 30*° (čine ga bridovi *a* i *b*). *Bridni kut* α *neka je 75*° (čine ga bridovi *b* i *c*), *a plošni kut b uzmite da je 60*° [njega zatvaraju plohe (*cb*) i (*ab*)]. *To je 2 slučaj trostranoga ugla. Poznata su, naime, dva bridna kuta* γ *i* α *i plošni kut b koji se nalazi među tim bridnim kutovima.*

U slici 149 nacrtana je ravnina ρ i u njoj odabran vrh *V* kojim prolazi brid *a*. Oko r_1 (može se i oko r_2) preloži se vrh *V* i brid *a*. U preloženom se položaju nacrtaju kutovi γ = 30°, α = 75°. Dakle, u preložaju imamo (*a*), (*b*) i (*c*). U (*c*) (prema slici 148) odaberemo po volji (*P*). Iz (*P*) pustimo normalu na (*b*) i u nožištu *N* te normale nacrtamo zadani plošni kut *b* = 60°. Okrenuvši (*P*) do P_0 i pustivši iz P_0 normalu na produženo (*P*) *N* dobijemo (P_1). U preloženom položaju vidimo da je tačka *P* nad ravninom (*ab*) za dužinu P_0 (P_1). Treba, dakle, odrediti P_1' i P_1'' i u toj tački pustiti normalu na ravninu *(ab)*. Na tu se normalu nanese od P_1 pomoću diferencionoga trokuta dužina P_0 (P_1), te dobije tačka P. Spojnica PV daje brid c.

Kad bismo hteli još odrediti bridni kut β i plošne kutove a i c, morali bismo postupati isto kao u slici 148. (U našoj slici to nije provedeno da se ono prvašnje jasnije razabira)

Rešenjem 2 slučaja trostranoga ugla znademo rešiti sledeći zadatak: *Sečištem pravaca a i b položite pravac c tako da bude kut pravaca b i c* $= 75^0$, *te da ravnine (ab) i (bc) čine kut od* 60^0.

U slici 150 prikazan je 3 slučaj trostranoga ugla. Poznata su dva bridna kuta i jedan plošni kut koji je jednome od zadanih bridnih kutova nasuprot. U našoj su slici zadani bridni kutovi $\alpha = 45^0$ *i* $\beta = 30^0$ *i plošni kut* $a = 60^0$.



150

Da se taj trostrani ugao razreši nacrta se bridni kut β [čine ga bridovi a i (c)] i kut α [čine ga bridovi (c) i (b)]. Kod toga smatramo da je brid a u ravnini crtnje, brid (c) pretstavlja preloženi brid c oko brida a, brid (b_0) pretstavlja brid b koji je preložen najpre oko c u ravninu (ac), a onda sve skupa oko a u ravninu crtnje. Vidimo da je brid b prelagan zapravo dva puta, te je s toga i označen u preloženom položaju sa (b_0) (čitajte: b nula u zagradi). Bridovi a i (c) čine zadani kut $\beta = 30^0$, a bridovi (c) i (b_0) kut $\alpha = 45^0$.

Na (c) odaberemo tačku (P) i poznatim načinom, nacrtavši plošni kut $a = 60^0$ na bridu a, dobijemo P'. Time smo doznali projekciju c' brida c i visinu tačke P nad ravninom (ab). (Bridovi se a i b nalaze u našem slučaju u ravnini crtnje) Ta visina je $\overline{P'P_0}$. Setimo li se sada (pogledajte sliku 148) onog pravokutnog trokuta $P'P_0N$ vidimo da nam je od toga trokuta poznata kateta $\overline{PP'} = \overline{P'P_0}$. Dužinu hipotenuze $\overline{P_0N}$ nađemo prema slici 148, ako u (P) postavimo normalu na (b_0). U nožištu te normale dobijemo tačku (N_0). Budući da je (P) $(N_0) \perp (b_0)$, što odgovara u prostoru normali iz P na b, doznali smo dužinu hipotenuze $\overline{PN}$ pravokutnoga trokuta $PP'N$. Tu smo hipotenuzu u slici 148 označili s $\overline{P_0N}$. Ako poznajemo katetu $\overline{PP'}$ i hipotenuzu $\overline{PN} = \overline{P_0N}$, lako konstruiramo taj pravokutni trokut, te tako doznamo i dužinu druge katete $\overline{NP'}$. Taj se pravokutni trokut može nacrtati gdegod na strani, ali je ipak zgodnije, ako se iz P_0 preseče produžena spojnica $(P)P'$ dužinom (N_0) (P). U tome se secištu dobije N_1. Pružac $\overline{P'N_1}$ je dužina tražene katete $\overline{P'N}$. Opiše li se sada iz P' kružnica polumera $\overline{P'N_1}$, i povuče tangenta iz V na tu kružnicu, dobije se traženi brid b. Spojnica dirališta N s tačkom P' daje traženu katetu $\overline{P'N}$. Dalje se postupa isto kao u slici 148.

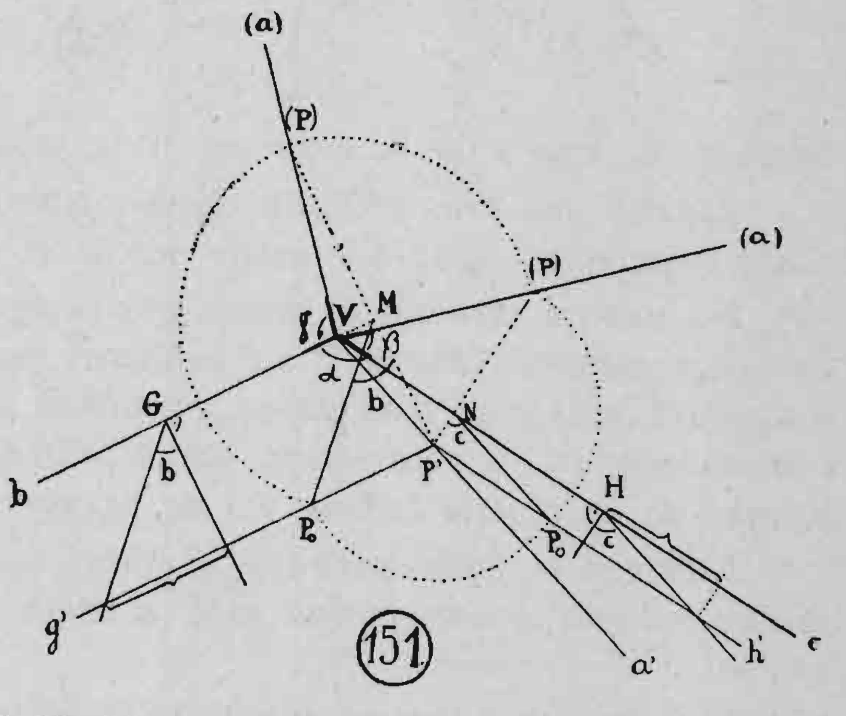
Budući da iz V možemo povući dve tangente, ima taj zadatak (3 slučaj trostranoga ugla) i dva rešenja. Zbog toga imamo u slici 150 dva brida b.

Zadatak bi imao jedno rešenje, kad bi ona kružnica prolazila upravo vrhom V, a nijedno kad bi vrh V pao u kružnicu.

Kad znamo rešiti taj trostrani ugao (3 slučaj), znali bismo rešiti i sledeći zadatak: *Tačkom V na pravcu a povucite pravce c i b tako da pravci a* i *c čine kut od 30^0, pravci b i c kut od 45^0, a ravnine (ac) i (ab) da zatvaraju kut od 60^0.* Samo se sobom razume da se veličine tih kutova mogu uzeti po volji, ukoliko se ne moraju podvrgavati zakonima o trostranome uglu.

U slici 151 prikazan je četvrti slučaj trostranoga ugla. Poznat je, naime, jedan bridni kut $\alpha = 120^0$ i dva susedna plošna kuta $b = 45^0$ i $c = 75^0$.

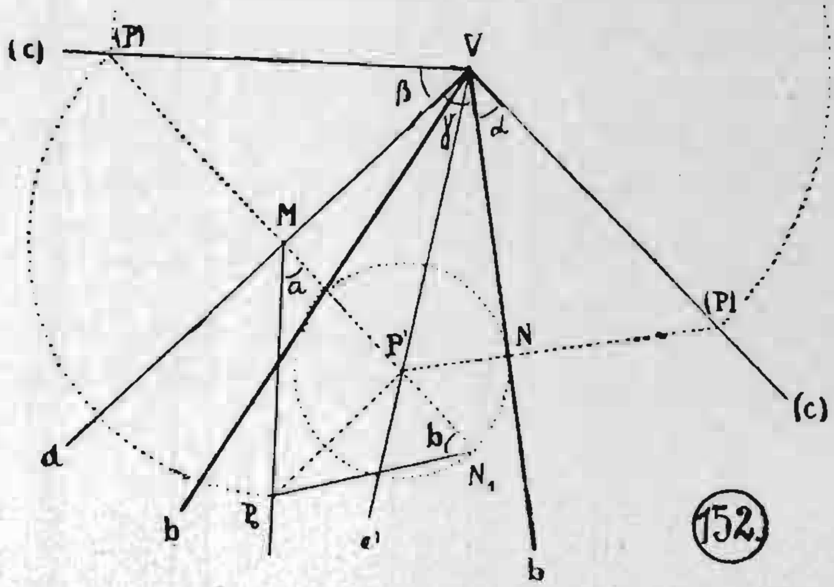
Uzmimo bridove b i c u ravnini crtnje, tako da oni zatvaraju 120^0. Gdegod na b odaberemo tačku G i nacrtamo kut $b = 45^0$, i gdegod na c odaberemo tačku H i nacrtamo kut $c = 75^0$. U ravnini (ba) nacrtamo gdegod glavni pravac g ($g' \parallel b$), pa onda glavni pravac h ($h' \parallel c$) tako da su secišta projekcije h' s krakovima kuta c jednako udaljena kao i secišta projekcije g' s krakovima kuta b. Zbog tih se jednakih udaljenosti nalaze sutražnice g i h u istoj visini nad ravninom (bc), te se prema tome moraju ta dva pravca seći. Oni se seku u tački P, a njihove projekcije u P'. Pustimo li iz P' normale na b i na c, dobi



ćemo tačku M, odnosno N. U M i N nacrtaju se plošni kutovi b, odnosno c. Time dobijemo one dve tačke P_0. Crtavši dalje okrenutim postupkom negoli je to u slici 148, dobićemo one dve tačke (P). Kad imamo (a), doznali smo i bridne kutove β i γ.

Na temelju toga razrešenja trostranoga ugla može se rešiti sledeći zadatak: *Nacrtajte secištem V pravaca b i c pravac a, tako da ravnine (ba), odnosno (ca) zatvaraju s ravninom (ab) kut $b = 45^0$, odnosno kut $c = 75^0$.*

U slici 152 prikazan je peti slučaj trostranoga ugla. Poznat je, naime, jedan bridni kut $\beta = 45^0$, jedan susedni plošni kut $a = 45^0$ i nasuprotni plošni kut $b = 60^0$.



152

Nacrta se a i (c). Ta dva brida čine kut β. Nacrtavši, gdegod na bridu a u tački M, zadani plošni kut a, dobićemo P' i c'. Na $P' P_0$, u produženju MP', nacrta se trokut $P_0P'N_1$ tako da je kut kod N_1 jednak zadanome plošnome kutu b. Iz P' opiše se kružnica polumera $\overline{P' N_1}$ i povuče tangenta iz vrha V na tu kružnicu, te se tako dobije brid b.

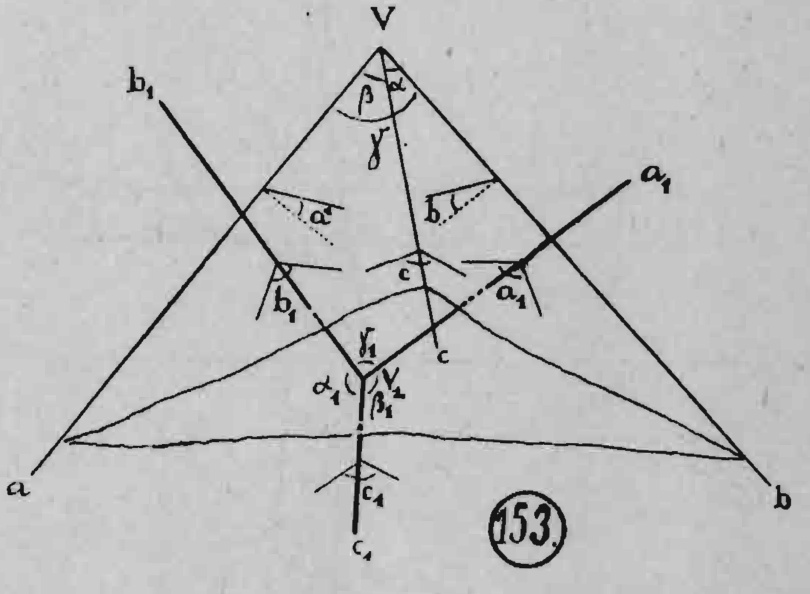
Zadatak ima dva, jedno ili nijedno rešenje kao i u slici 150 (3 slučaj trostranoga ugla). Sve ostalo odredi se već poznatim načinom.

Na temelju razrešaja 5 slučaja trostranoga ugla osniva se rešenje sledećega zadatka: *Tačkom V na zadanome pravcu a u zadanoj ravnini ρ nacrtajte pravac c, tako da on s pravcem a zatvara zadani kut β i da ravnine (ac) i ρ zatvaraju kut a; odredite u ravnini ρ pravac b, tako da on prolazi tačkom V i da ravnine (bc) i ρ čine kut b.*

Napokon bi došao poslednji, *6 slučaj* razrešaja trostranoga ugla, ako *su poznata sva tri plošna kuta, a imaju se odrediti bridni kutovi njegovi.*

Iz stereometrije znamo da se, ako iz kojegod tačke V_1 (slika 153) unutar trostranoga ugla puste normale na plohe zadanoga ugla, dobije novi trostrani ugao koji se naziva *polarni ili suplementni ugao* zadanoga ugla. Isto vredi i okrenuto. Onaj zadani trostrani ugao je polarni ili suplementni ugao spram onoga dobivenoga trostranoga ugla.

Takva dva međusobom suplementna trostrana ugla imaju, kako znamo iz stereometrije, to svojstvo da *je svaki bridni kut* jednoga trostranoga ugla *suplementan* (suma dvaju kutova $= 180^0$) *s onim plošnim kutom* drugoga trostranoga ugla. Posle će se to još jasnije videti.



Takva dva suplementna trostrana ugla prikazana su zorno u slici 153. Najpre se nacrta trostrani ugao V (abc). Gdegod unutar toga trostranoga ugla uzme se tačka V_1. Iz V_1 puste se normale $a_1 \perp (bc)$, $b_1 \perp (ac)$ i $c_1 \perp (ab)$. Time nastane novi trostrani ugao V_1 $(a_1\ b_1\ c_1)$ koji je s prijašnjim suplementan ili polaran. Kod trostranoga ugla V_1 $(a_1\ b_1\ c_1)$ bridni su kutovi α_1, β_1 i γ_1, a plošni a_1, b_1 i c_1. Prema pre spomenutom zakonu mora biti $\alpha + a_1 = \beta + b_1 = \gamma + c_1 = \alpha_1 + a = \beta_1 + b = \gamma_1 + c = 180^0$, jer su sve to među sobom suplementni kutovi.

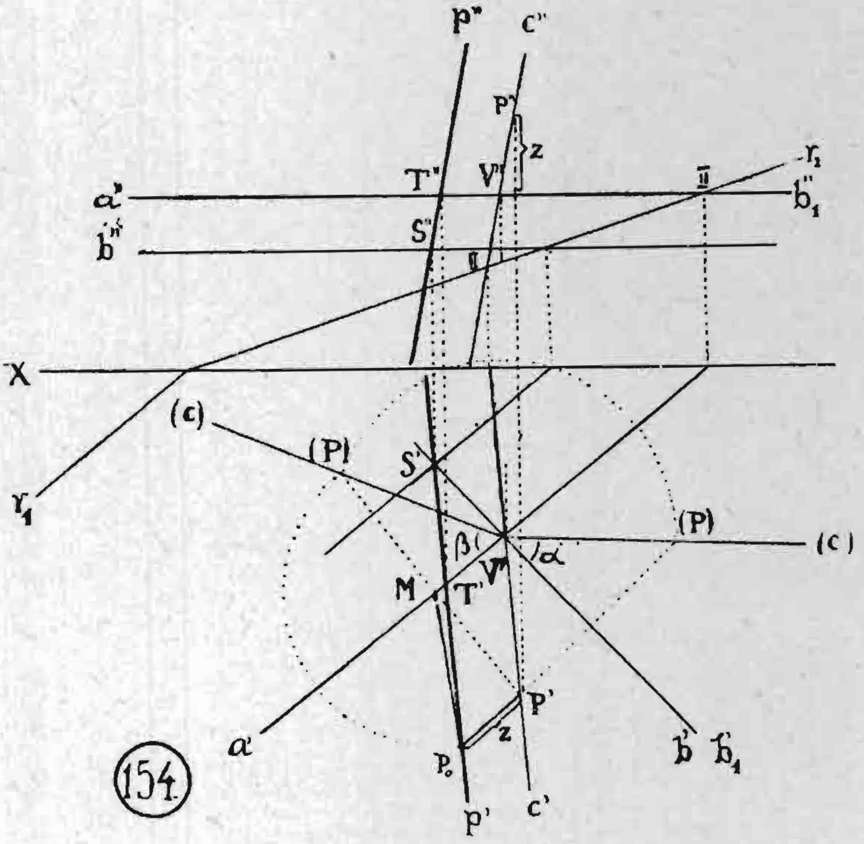
Kad to znamo, 6 slučaj trostranoga ugla rešićemo indirektnim putem. Nacrtaćemo, naime, trostrani ugao tako da su mu bridni kutovi suplementni sa zadanim plošnim kutovima. Našavši već poznatim načinom plošne kutove toga nacrtanoga trostranoga ugla, znademo i bridne kutove traženoga trostranoga ugla, jer je svaki taj dobiveni plošni kut suplementan s bridnim kutom onoga traženoga trostranoga ugla.

Drugim načinom možemo odrediti veličine bridnih kutova, tako da nacrtamo trostrani ugao kome su bridni kutovi suplementni sa zadanim plošnim kutovima. Nacrtamo li sada polarni trostrani ugao ovome nacrtanome trostranome uglu, dobijemo trostrani ugao koji ima upravo zadane plošne kutove. Odredivši bridne kutove toga polarnoga trostranoga ugla rešili smo zadatak.

Ima i direktnih načina za razrešenje 6 slučaja trostranoga ugla, ali ih ovde ne spominjem, jer je za njih potrebno veće poznavanje nacrtne geometrije negoli je to dosad.

U slici 154 prikazano je rešenje zadatka koje se osniva na trostranome uglu.

Zadani su mimosmerni pravci a i b paralelni s π_1; treba nacrtati pravac p (prečnica ili transverzala) koji seče zadane pravce a *i b tako da pravac p s pravcem b zatvara kut* $\alpha = 45^0$, *a s pravcem a kut* $\beta = 60^0$. (Slika 154)



154

Uzme se na pravcu a ili na pravcu b gdegod tačka V i nacrta pravac koji je paralelan s pravcem b, odnosno s pravcem a. U slici 154 uzeto je V' u secištu projekcija a' i b'. Druga projekcija V'' nalazi se u ordinali na a''. (Znači da smo mi uzeli tačku V na pravcu a) Kroz tačku V povučen je pravac $b_1 \| b$. Jer je tako uzeto, izlazi da je $b_1' \equiv b'$, a $a'' \equiv b'_1{}'$. Pravci a i b_1 leže u ravnini paralelnoj s ravninom π_1. Ta dva pravca smatramo bridovima trostranoga ugla. Naš je sada zadatak nacrtati pravac c (brid trostranopa ugla), tako da s pravcem a zatvara kut $\beta = 60^0$, a s pravcem b_1 kut $\alpha = 45^0$. Kako je a i b_1 paralelno s π_1, konstruiraćemo u prvoj projekciji trostrani ugao kojemu znamo bridove a i b_1 (to su kod nas projekcije a' i b'_1) i bridne kutove α i β.

Iz slike se vidi kako je dobiveno (c) pomoću kutova α i β.

Pomoću tačke (P) na (c) dobijemo P'. Pomoću P_0 doznali smo visinu $z = \overline{P'P_0}$ tačke P nad ravninom (ab). Tu visinu nanesemo na ordinalu u P' nad a'' te dobijemo P''. Spojnice $P'V' \equiv c'$, odnosno $P''V'' \equiv c''$ daju nam prvu i drugu projekciju pravca c. Pravac c zatvara s pravcima a i b_1 zadane kutove.

Sad se pravcem a i pravcem c položi ravnina ρ i nađe probodište S pravca b s tom ravninom ρ. Povuče li se tačkom S pravac $p \| c$, dobijemo traženi pravac p. Pravac p mora sigurno seći pravce b i a (a seče u tački T), jer prolazi tačkom S na pravcu b i jer leži u ravnini ρ koja prolazi pravcem a. Pravac p, osim toga, mora da zatvara s pravcima a i b zadane kutove, jer je paralelan s pravcem c.

Zadaci:

475. — 481. Predočite trostrani ugao u kotiranoj projekciji i odredite njegove nepoznate bridne i plošne kutove. Uzmite, da su zadani:

475.) Bridni kutovi $\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$ i $\gamma = 120^0$.

476.) Bridni kutovi $\alpha = 45^0$, $\beta = 90^0$ i $\gamma = 60^0$. (Prema slici 148 pašće tačka *M* u tačku *V*, ako ste uzeli da se bridovi *a* i *b* nalaze u ravnini crtnje)

477.) Bridni kutovi $\alpha = 60^0$ i $\beta = 45$ i plošni kut $c = 75^0$. (Taj ćete trostrani ugao rešiti prema slici 149 u kotiranoj projekciji. Bridove *b* i *c* uzmite u ravnini crtnje)

478.) Bridni kut $\beta = 60^0$ i plošni kutovi $a = 60^0$ i $c = 75^0$. (Pogledajte sliku 151. Bridove *a* i *c* uzmite u ravnini crtnje)

479.) Bridni kutovi $\alpha = 60^0$ i $\gamma = 75^0$ i plošni kut $c = 45^0$. [Pogledajte sliku 150. Brid *c*, te preloženo (*b*) i dva puta preloženo (a_0) uzmite u ravnini crtnje]

480.) Bridni kut $\gamma = 75^0$ i plošni kutovi $b = 60^0$ i $c = 75^0$. [Pogledajte sliku 152. Brid *c* i preloženo (*a*) uzmite u ravnini crtnje.]

481.) Plošni kutovi $a = 120^0$, $b = 135^0$ i $c = 60^0$. (Bridne kutove zadanoga trostranoga ugla odredićete tako da polarnom trostranom uglu, koji ima bridne kutove $\alpha = 180^0 - 120^0 = 60^0$, $\beta = 180^0 - 135^0 = 45^0$ i $\gamma = 180^0 - 60^0 = 120^0$, odredite plošne kutove. Pogledajte tumačenje kod slike 153)

482.) Nacrtajte pravac *c* koji prolazi tačkom *V* i zatvara s pravcem $a = AV$ [*A* (0, 6, 1), *V* (2, 3, 2)] kut od 60^0, a s pravcem $b = BV$ [*B* (4, 9, 1), *V* (2, 3, 2)] kut od 45^0. (*1* slučaj trostranoga ugla)

483.) Secištem pravaca $a = AB$ [*A* (— 2, 0, 2), *B* (0, 0, 4)] i $b = CD$ [*C* (2, 0, 8), *D* (3, 0, 4)] položite pravac *c*, tako da ravnine (*ac*) i (*ab*) čine kut od 60^0, a ravnine (*bc*) i (*ab*) kut od 30^0. (4 slučaj trostranoga ugla)

484.) Nacrtajte transverzalu *p* na mimosmerne pravce $a = AB$ [*A* (— 6, 2, 5), *B* (— 6, 5, 2)] i $b = CD$ [*C* (— 3, 2, 2), *D* (— 3, 6, 4)], tako da ta transverzala s pravcem *a* zatvara kut od 75^0, a s pravcem *b* kut od 30^0. (Rešićete pomoću profilne ravnine istim postupkom kao u slici 154 gde nije bila potrebna profilna ravnina)

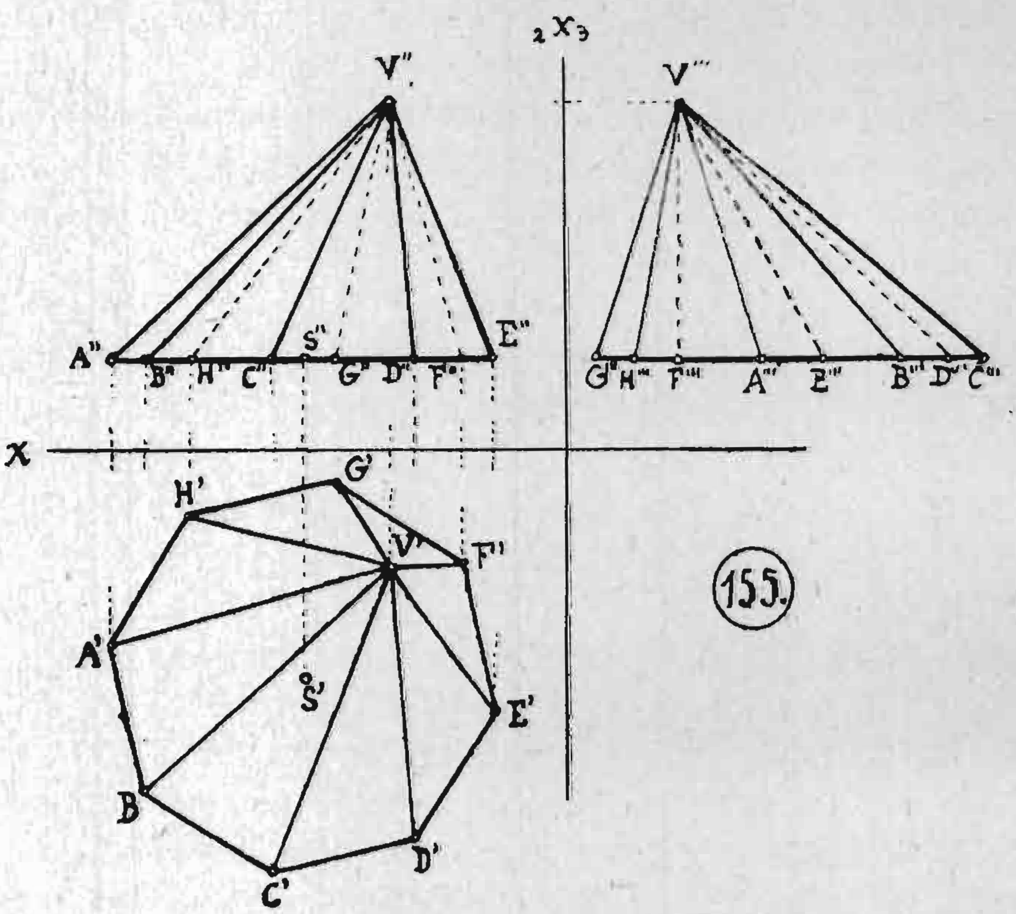
485.) Tačkom *V* (— 4, 6, 5) položite ravninu koja ima prema π_1 priklon od 45^0, a prema π_2 priklon od 60^0. (Tačkom *V* položićete pravac $a \perp \pi_1$ i $b \perp \pi_2$, te pomoću profilne ravnine nacrtaćete pravac *c* tačkom *V*, tako da s pravcem *a* čini kut od 45^0, a s pravcem *b* kut od 60^0. Tražena ravnina biće normalna na pravac *c*. Na čemu se temelji to rešenje?)

28. Piramida i njena mreža

Razlikujemo *uspravne* i *kose piramide.* Svaka piramida, bila ona uspravna ili kosa, ima *bazu* ili *osnovku, pobočne trokute (plašt)* i *vrh.* Bridove na osnovici nazivamo *osnovnim bridovima,* a bridove koji čine pobočje zovemo *pobočnim bridovima.* Udaljenost vrha od ravnine baze zovemo *visinom piramide.* Piramide kojima je baza pravilan lik a uspravna je nazivamo *pravilnima.*

Kod predočivanja piramide najvažnije je da se predoči baza i vrh. Spojnice vrha piramide s uglovima baze čine piramidu predočenom. Vrlo je važno da se odredi vidljivost osnovnih i pobočnih bridova.

Kod svakog predočenog tela razlikujemo *pravu konturu* i *prividnu konturu.* Pod pravom konturom tela razumevamo sve one plohe koje omeđuju određeni prostor te čine telo. Pod prividnom konturom razumevamo sve one međašnje bridove (osnovne i pobočne) koji čine u projekciji zatvoreni poligon tako da se izvan te prividne konture neće nalaziti nijedan brid, nego će se svi bridovi nalaziti unutar nje (zatvorenoga poligona).



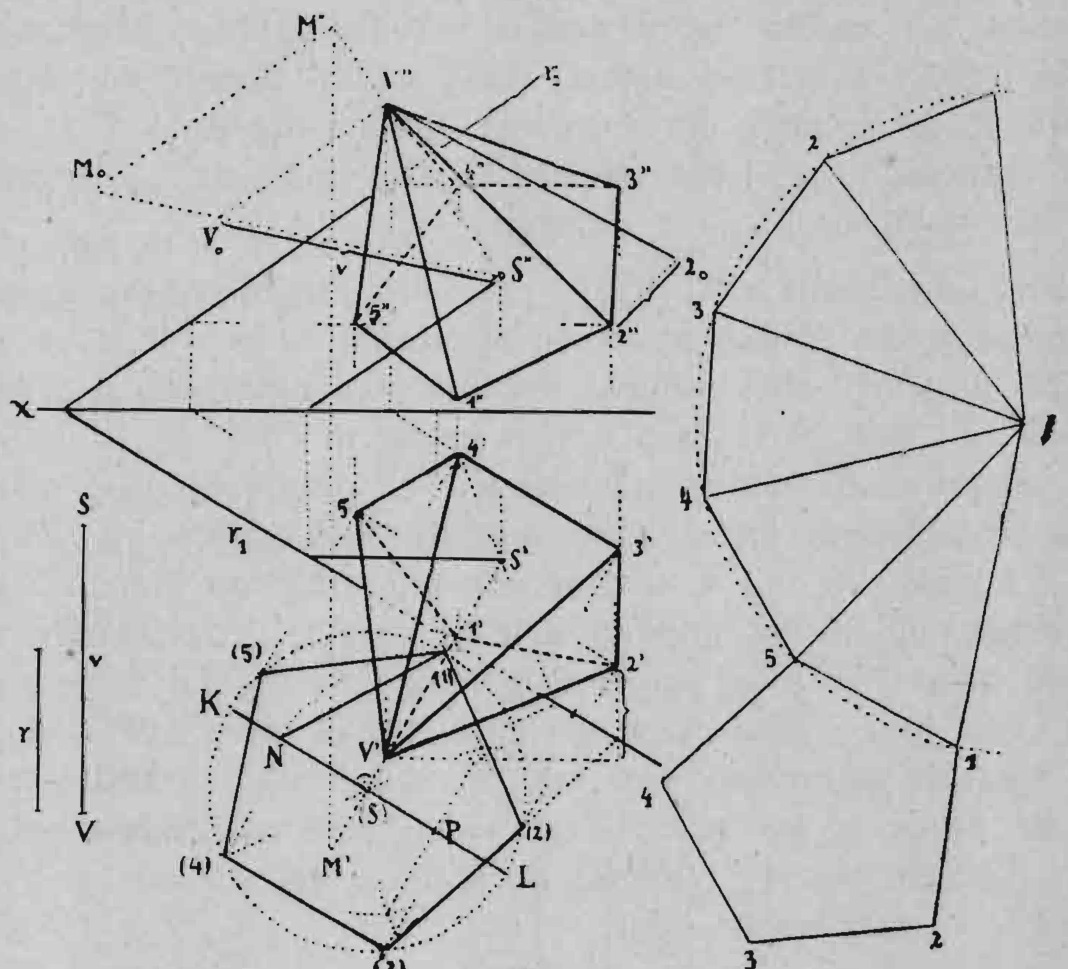
(155.)

Kad se govori o konturi tela u nacrtnoj geometriji misli se uvek na prividnu konturu.

Ovde neka bude odmah spomenuto *da se kontura uvek vidi,* a vidljivost bridova unutar konture, dobrom predodžbom, lako će se odrediti. Posle se tačnije govori o određivanju vidljivih i nevidljivih bridova.

U slici 155 predočena je u horizontalnoj, vertikalnoj i profilnoj projekciji kosa osmorostrana piramida kojoj je baza u ravnini, paralelnoj s π_1. Kontura u prvoj projekciji je $A'B'C'D'E'F'G'H'$, u drugoj $A''B''H''C''G''D''F''E''V''$, a u trećoj $G'''...C'''V'''$. Kod određivanja vidljivosti znamo da se uvek gleda u smeru zraka projeciranja za onu ravninu projekcija u kojoj se određuje vidljivost.

U slici 155a prikazana je pravilna petorostrana piramida u u Mongeovoj projekciji. U istoj slici nacrtana je i njena mreža. Zadana je ravnina baze ρ, središte S, polumer r opisane kružnice bazi i visina v piramide.



155. a)

Budući da S'' i S' poznajemo, a poznajemo i ravninu baze, lako odredimo (S). U (S) opiše se kružnica polumera r i konstruira petorokut u preloženom položaju.

Da se odredi dužina stranice pravilnoga petorokuta, nacrta se, gdegod u kružnici koja je petorokutu opisana, promer KL. [Slika 155a] Iz središta se kružnice na promer $\overline{KL}$ postavi normala dok ne seče kružnicu. U našoj slici ta normala seče kružnicu u tački (1). Polumer $\overline{(S)\ L}$ se raspolovi te se tako dobije tačka P. Zabode se šestar u P i otvori do (1), te preseče lukom (1) N promer $\overline{KL}$. Spojnica $\overline{N(1)}$ je dužina tražene stranice petorokuta. Naš je petorokut smešten tako da mu je $\overline{(4)(3)} \parallel \overline{(5)(2)} \parallel r_1$. Sad imamo preloženi petorokut (1) (2) (3) (4) (5).

Pomoću afiniteta odredi se prva projekcija petorokuta, a onda iz prve projekcije odredi se njegova druga projekcija. Kako se kod toga imade postupati, znamo otpre (slika 139 i 145), a vidi se i iz slike 155a).

Da se odredi vrh V piramide, pusti se normala iz središta S na ravninu baze ρ, jer je piramida uspravna. Budući da nam je visina v zadana, moramo na normalu od S naneti tu zadanu visinu. Kako se na pravac od zadane tačke nanaša određeni pružac, pokazano je u slici 34 i 36. Odaberemo, naime, (naša slika) gdegod na normali iz S tačku M, pa pomoću diferencionoga trokuta dobijemo $\overline{S''M_0} = \overline{SM}$. Od S'' nanesemo na $\overline{S''M_0}$ visinu v. Tako dobijemo V_0. Vrativši V_0 na $S''M''$ dobijemo V'' a u ordinali V'.

Kod određivanja vidljivosti u prvoj i u drugoj projekciji piramide postupa se ovako: Najpre se izvuče njena kontura koja je, kako znamo, u svakoj projekciji uvek vidljiva. Kontura je u našoj slici u prvoj projekciji $V'\ 2'\ 3'\ 4'\ 5'\ V'$, a u drugoj projekciji $V''\ 3''\ 2''\ 1''\ 5''\ V''$. U prvoj je projekciji unutar konture $1'$ a u drugoj $4''$. Kod slike 127 bilo je protumačeno tačno, kako se gleda, kod određivanja vidljivosti, na π_1, a kako na π_2, i kako se određuje vidljivost pojedinih tačaka koje mogu biti nečim prekrivene te se ne vide. Kod određivanja vidljivosti tačke $1'$ u prvoj projekciji gledamo na položaj projekcije $1''$. Budući da je $1''$ blizu osi x, što znači, da je nisko nad π_1, i prema tome sigurno prekriveno plohama piramide koje su nad tačkom 1, neće se $1'$ kao ni svi bridovi iz $1'$ videti. Kod određivanja vidljivosti za $4''$ gledamo na $4'$. Vidimo, $4'$ je blizu osi x, dakle se $4''$ i svi bridovi iz $4''$ također ne vide.

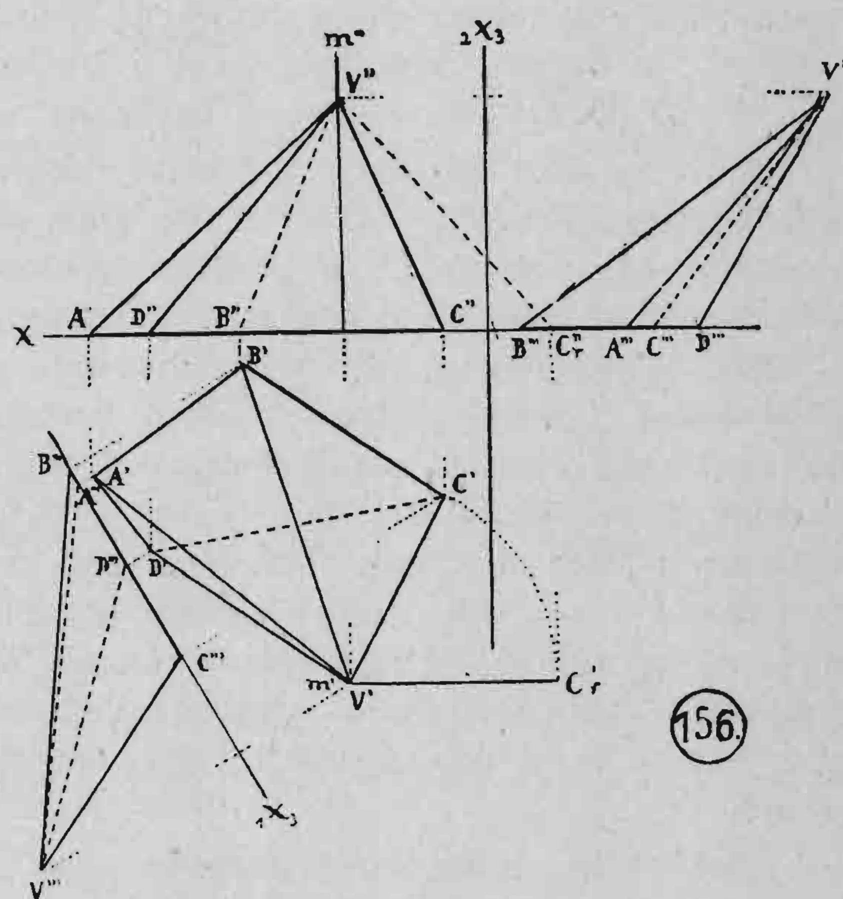
Ovde se u ovoj slici lepo očituje ono što je bilo rečeno u § 24 pre tumačenja slike 128 da se, naime, ako je poredak vrhova lika u prvoj i u drugoj projekciji protivnoga smera, vide njegove razne strane, a ako je poredak istoga smera, iste strane. Evo na pr. baza 12345 i pobočka $23V$ pokazuju istu stranu, dok ostale pobočke pokazuju razne strane, obzirom na gledanje prema π_1 i prema π_2.

Mreža se piramide nacrta tako da se iz V opiše luk polumera, koji je jednak pobočnome bridu piramide i na nju nanese 5 stranica osnovke. (Dužina kojegagod pobočnoga brida, jer su svi jednaki, odre-

-đena je pomoću diferencionoga trokuta. U našoj slici $\overline{V''2_0} = \overline{V2}$. Na jednu stranicu petorokuta prisloni se baza piramide. Time je nacrtana i mreža zadane piramide.

U slici 156 prikazana je kosa nepravilna četvorostrana piramida s bazom u π_1 i nacrtana njena projekcija na profilnu ravninu i na transformacionu ravninu.

Po volji je odabran trapezoid u prvoj projekciji. Druga se projekcija trapezoida (baza piramide) nalazi u osi x. V' i V'' (vrh piramide) uzeto je sasvim po volji.



156

$A'B'C'V'D'A'$ je vidljivo, jer je to kontura prve projekcije piramide. Budući da je vrh najviša tačka piramide, moraju se svi pobočni bridovi u prvoj projekciji (gledano odozgo) iz V' videti.

Kako svi osnovni bridovi, osim brida $\overline{C'D'}$, padaju u konturu, oni se svi i vide. $\overline{C'D'}$ se ne vidi, jer ga prekrivaju pobočne plohe.

U drugoj se projekciji sigurno vidi kontura $A''V''C''A''$. Budući da na π_2 gledamo spreda, onaj se pobočni brid iz B'' neće videti, jer je B' najbliže ravnini π_2, tj. B' je najbliže osi x.

Projekcija se piramide na profilnu ravninu odredi tako da se odrede treće projekcije pojedinih uglova piramide. Kontura se $B'''V'''D'''B'''$ kao uvek sigurno vidi. Pobočni se brid iz C''' ne vidi, jer na ravninu π_3 (profilnu ravninu) gledamo u smeru zraka projeciranja za π_3. Tačka C je najbliža ravnini π_3, jer je C'' najbliže osi $_2x_3$. Prema tome se brid iz C''' ne vidi.

Da je profilna ravnina bila postavljena s leve strane piramide, onda bi i os $_2x_3$ bila na levoj strani druge projekcije piramide. Vidljivost bi se piramide u tom slučaju određivala kao i pre, samo što se gleda s desna na levo u smeru zraka projeciranja za π_3. Uopće se na treću ravninu projekcija redovno gleda kao i kod ravnina π_1 i π_2 u smeru zraka projeciranja.

U slici 156 prikazana je projekcija piramide i u transformacionoj ravnini. Najpre se odrede treće projekcije svih uglova. Kontura $B''' V''' C''' B'''$ je vidljiva. Budući da je A' i D' blizu osi ${}_1x_3$, što znači da je A i D blizu π_3, bridovi se iz tih tačaka neće videti.

Iz ove se slike vidi da je kod svake od ove četiri projekcije drugačija kontura i drugačija vidljivost, što znači da je piramida gledana s raznih strana. Kako telo i u prostoru gledano s raznih strana izgleda drugačije, mora se to izražavati i kod projekcija.

Kad bismo hteli nacrtati mrežu piramide predočene u slici 156, morali bismo odrediti dužine pobočnih bridova. Najzgodnije će se dužina pobočnih bridova u ovome slučaju naći onako, kako je to bilo slično pokazano u slici 45, 47, 49 i 50. U našoj je slici, kao primer, određena dužina brida $\overline{V\,C}$, tako da je brid rotiran oko pravca $m \perp \pi_1$ (m prolazi vrhom V) dok nije došao u položaj paralelan s π_2. U momentu, kad je rotiran brid $\overline{V\,C} \parallel \pi_2$, prikazuje se on u drugoj projekciji u svojoj dužini. Odredivši dužine sviju pobočnih bridova nacrtaćemo pobočne trokute svaki uz svoj osnovni brid na osnovci koja je nacrtana u svojoj veličini.

Konstrukcija mreže kose piramide nalazi se u slici 157, s tom razlikom da tamo nisu određivane dužine pobočnih bridova pomoću rotacije.

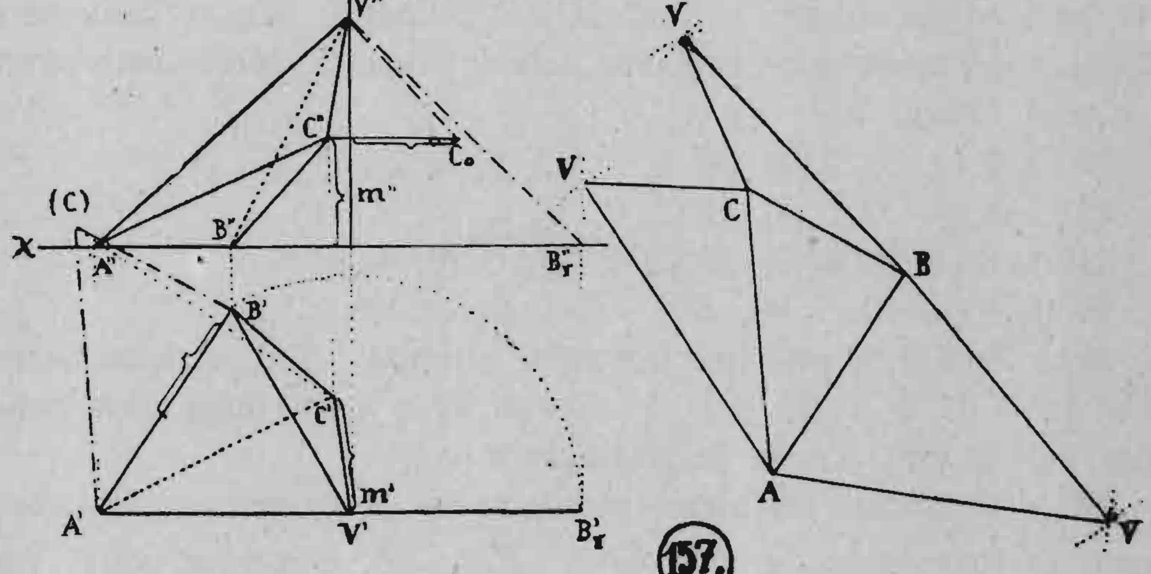
U slici 157 prikazana je kosa trostrana piramida sa svojom mrežom.

Ta piramida smeštena je tako da joj se osnovni brid $\overline{AB}$ nalazi u π_1, a pobočni brid $\overline{A\,V}$ je paralelan s π_2. Prema tome je $\overline{A'B'} = \overline{A\,B}$, a $\overline{A''V''} = \overline{A\,V}$. Bridovima $\overline{A\,B}$ i $\overline{A\,V}$ ne će se morati određivati njihova dužina.

Nacrtavši bazu i vrh piramide izvučemo konturu u prvoj i u drugoj projekciji. U prvoj će projekciji biti nevidljiv ili brid $\overline{A'C'}$ ili brid $\overline{B'V'}$, jer su ostali bridovi u konturi koja se uvek vidi. Gledajući piramidu odozgo (na π_1 u smeru zraka projeciranja), jasno je da će se u prvoj projekciji videti svi bridovi koji polaze iz vrha V, jer je vrh najviša tačka piramide. Prema tome se sigurno $\overline{B'\,V'}$ vidi. Čim je $\overline{B'\,V'}$ vidljivo, ne može biti više vidljivo $A'C'$.

U drugoj se projekciji neće videti ili $\overline{B''\,V''}$ ili $\overline{A''C''}$, jer su ostali bridovi u konturi. Gledajući na π_2 ispred π_2 nećemo onaj pobočni brid iz B videti, jer je on najbliži ravnini π_2 (B' je najbliže osi x). Dakle se $\overline{B''V''}$ ne vidi a $\overline{A''C''}$ vidi.

Mreža se kose piramide dobije, ako se nacrta baza u svojoj naravnoj veličini. To je u slici 157 nacrtano na strani. Baza je ABC.



157.

Dužine stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ nađene su tako da ravninu (ABC) oko svoga traga $A'B'$ preložimo u π_1. ($\overline{A'B'}$ je u π_1, dakle je to prvi trag ravnine baze) Preloženo (C) spojeno s A' i B' daje dužinu stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Dužina pobočnoga brida $\overline{BV}$ određena je pomoću rotacije oko osi m dok ne bude brid $\overline{BV} \parallel \pi_2$. Tačka B dolazi u položaj B_r, a tačka V ostaje kod rotacije na miru. U tome je položaju $\overline{V''B_r''} = \overline{BV}$. Dužina brida $\overline{CV}$ određena je pomoću diferencionoga trokuta kako je to bilo pokazano u slici 36, a i u slici 157 jasno se to razabira.

Sad poznajemo dužine svih pobočnih i osnovnih bridova. Na svaki osnovni brid pricrtamo, na onu bazu na strani, dužine pobočnih bridova, tako da dobijemo uz bazu razastrte pobočne trokute. Kad bismo sve te pobočne trokute preklopili oko osnovnih bridova, da se sva tri V združe u jednu tačku, dobili bismo upravo onu piramidu koja je u slici 157 predočena.

Zadaci:

486.—489. Predočite trostranu piramidu kojoj je baza trokut ABC, a vrh tačka V. Sastavite mrežu te piramide. Uzmite:

486.) A (3, 2, 1), B (—1, 1, 3), C (1, 3, 2); V (4, 4, 5).
487.) A (— 2, 3, 2), B (0, 1, 2), C (1, 5, 2); V (— 1, 3, 6).
488.) A (3, 0, 2), B (1, 0, 4), C (— 2, 0, 1); V (— 5, 6, 5).
489.) A (— 2, 1, 4), B (— 2, 5, 8), C (— 2, 8, 2); V (4, 4, 6).

490.—493. Predočite uspravnu trostranu piramidu kojoj je baza trokut ABC, a visina joj je jednaka najduljoj stranici baze. Sastavite mrežu te piramide. [Visina se uzdiže u sred štu opisane kružnice bazi. To će se središte odrediti u preloženom položaju, ako se baza ne pokazuje, u kojoj svojoj projekciji, već u svojoj veličini. Mrežu ćete nacrtati kao u slici 155a)]

490.) A (2, 3, 3), B (4, 2, 5), C (6, 5, 2).

491.) A (— 2, 1, 4), B (2, 2, 1), C (6, 9, 7).

492.) A (— 3, 6, 2), B (2, 2, 2), C (6, 8. 2).

493.) A (— 10, 7, 4), B (— 6, 5, 6), C (0, 2, 2).

494.) Predočite pravilnu trostranu piramidu, ako je zadan osnovni brid A ($x = 2$, $y = 3$), B ($x = 8$, $y = 7$) u π_1; ravnina baze neka s π_1 čini kut od 60^0. Visina je piramide 6.

495.) Predočite trostranu piramidu s osnovkom u π_2, ako su osnovni bridovi $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{CA} = 6$. Pobočka ABV, BCV, odnosno CAV priklonjena je prema π_2 pod kutom od 60^0, 45^0, odnosno 75^0. (Te tri ravnine pobočaka seku se u vrhu V piramide)

496.) U ravnini ρ (3, 2, — 7) predočite po volji kvadrat sa središtem u tački S ($x = 0$, $z = 7$). U središtu uzdignite na ravninu kvadrata normalu na jednu i na drugu stranu ravnine, nanesite na normalu na obe strane pola dijagonale kvadrata i smatrajte te dve tačke kao vrhove dveju piramida, a kvadrat kao zajedničku bazu. (Dobiveno telo je oktaedar)

497.) Predočite pravilnu četvorostranu piramidu kojoj je vrh u tački V (— 4, 8, 8), a baza u ravnini ρ (∞, 4, 6). Pobočni bridovi te piramide neka su dugi 9. Jedan ugao baze nalazi se u pravcu $m = MN$ [M ($x = -7$, $z = 2$), N ($x = -7$, $y = 6$)] ravnine ρ.

498.) Predočite pravilnu šestorostranu piramidu s bazom u ravnini ρ (5, 8, 3), a vrhom u tački V u π_1. Središte bazi opisane kružnice s polumerom $r = 2{,}5$ nalazi se u tački S ($x = -1{,}5$, $z = 2$).

499.) Predočite pravilnu šestorostranu piramidu s bazom u ravnini ρ (∞, 4, 5) tako da joj je jedan osnovni brid u π_1 a drugi nasuprotni u π_2. Vrh se piramide neka nalazi u π_2.

500.) Predočite piramidu kojoj je baza kvadrat $ABCD$. ako je zadan ugao kvadrata A (— 3, 2, 7) i pravac $m = MN$ [M (2, 2, 4) N (— 2. 5, 4)] u kojem se nalazi jedna stranica baze. Vrh V neka se nalazi u osi x i neka bude udaljen od tačke A za 11 jedinica. Nacrtajte mrežu te piramide.

501.) Predočite i nacrtajte mrežu pravilne petorostrane piramide, ako joj je baza u ravnini ρ (∞, ∞, 3), središte bazi opisane kružnice s polumerom $r = 5$ nalazi se u tački S (0, 6, 3). Za visinu piramide uzmite 8 jedinica.

502.) Predočite tetraedar kojemu je jedan pobočni brid pružac A $(-3, 10, 1)$, B $(-1, 6, 3)$, a pobočka u kojoj je brid $\overline{AB}$ zatvara s π_1 kut od 30^0. (Ravninu te pobočke nacrtaćete pomoću stošca kako je to pokazano u slici 108 i 109.)

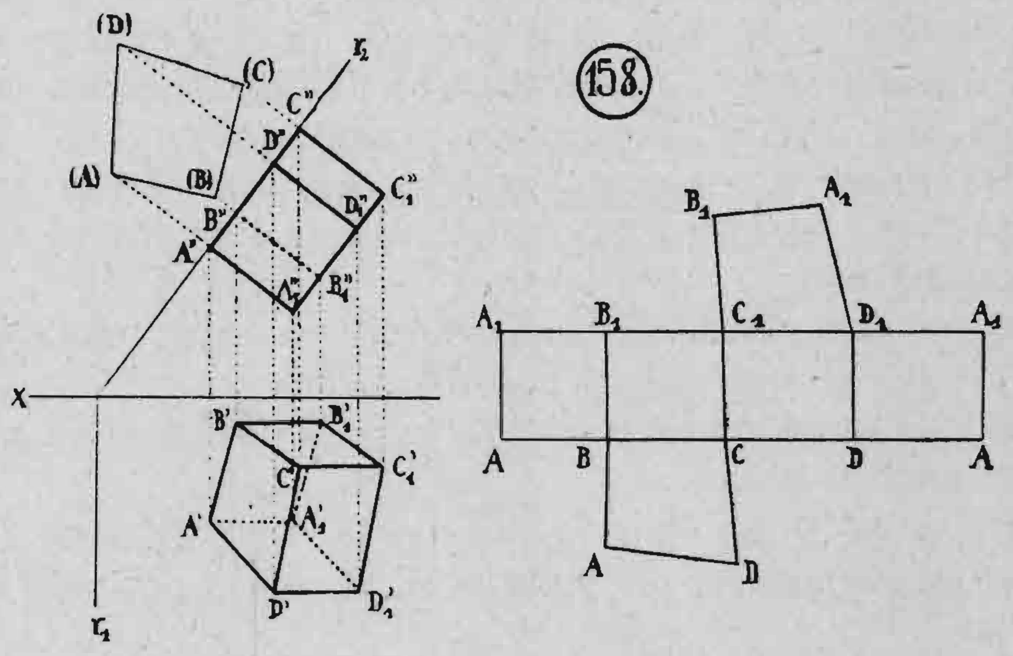
29. Uspravna i kosa prizma

Svaku prizmu možemo smatrati piramidom kojoj se vrh nalazi u neizmernosti. Prema tome za predočivanje prizme nema nekih novih konstrukcija koje bi se morale naročito istaknuti. Kako su svi pobočni bridovi prizme, bila ona uspravna ili kosa, među sobom paralelni, moraju biti i istoimene projekcije pobočnih bridova među sobom paralelne.

Imademo li, dakle, predočiti prizmu, moramo najpre predočiti bazu u osnovnoj ravnini. Ako je prizma uspravna, postavićemo normale na osnovnu ravninu u svakome uglu baze i naneti već određenu (zadanu) dužinu pobočnoga brida. Na taj način dobijemo uglove one druge baze koja je uvek sa zadanom bazom sukladan (podudaran, kongruentan) lik i u projekciji.

Ako je prizma kosa, postupamo jednako, samo s tom razlikom, što pobočni bridovi neće stajati normalno na ravnini baze, već nekako nagnuto. Taj se nagib pobočnih bridova kose prizme, ako se hoće da ona bude potpuno određena, uvek zada.

U slici 258 prikazana je uspravna četvorostrana prizma s *bazom*



u ravnini normalnoj na π_2. *Baza je nepravilni četvorokut (trapezoid); visina je jednaka najkraćoj stranici baze,* Nacrtana je najpre ravnina $\rho \perp \pi_2$. U preloženu položaju nacrtan je po volji nepravilni četvorokut $ABCD$ (baza). Druga se projekcija baze prikazuje kao pružac u r_2. Prvu projekciju baze nađemo, ako na ordinale iz drugih projekcija od osi x nanesemo odgovarajuću udaljenost od r_2 do preloženoga položaja pojedinih tačaka (A) (B) (C) (D).

Pobočni se bridovi u drugoj projekciji vide u svojoj veličini, jer su paralelni s ravninom π_2 ($A''A_1'' \perp r_2$, $B''B_1'' \perp r_2, \ldots$), a prve se projekcije tačaka A_1, B_1, C_1 i D_1 nalaze na ordinalama iz A_1'', B_1'', C_1'' i D_1''. ($A'A_1' \perp r_1$, $B'B_1' \perp r_1, \ldots$)

Kod određivanja vidljivosti izvuče se kontura u prvoj i u drugoj projekciji. U prvoj se projekciji A_1' ne vidi, jer je A_1'' najbliže osi x U drugoj se projekciji ne vidi $B''B_1''$, jer je $B'B_1'$ najbliže osi x.

Pokraj predočene *uspravne* nepravilne četvorostrane prizme nacrtana je i njena mreža koja se uvek lako nacrta, kad se pozna baza i dužina pobočnih bridova. Nacrtati mrežu kose prizme nešto je sastavljeniji posao. Mreža kose prizme posebno je obrađena u § 31.

Zadaci:

503.) Predočite uspravnu trostranu prizmu kojoj je baza trokut A (3, 3, 5), B (—6, 12, 11), C (—2, 4, 2), ako je visina prizme jednaka polumeru opisane kružnice bazi. Nacrtajte mrežu te prizme. (Nacrtaćete ravninu baze koju određuju tačke ABC, i u preloženu položaju naći veličinu polumera opisane kružnice)

504.) Predočite pravokutni paralelepiped, ako mu se baza $ABCD$ (pravokutnik, pravougaonik) nalazi u ravnini ρ (8, 10, 6). Uzmite da je A ($x = 0$, $y = 4$), A ($x = 4$, $y = 2$). Tačka C neka je viša od tačke B i neka je $\overline{BC} = {}^1/_4\, \overline{AB}$; visina paralelepipeda jednaka je dužini dijagonale baze. Nacrtajte mrežu toga paralelepipeda.

505.) Predočite kosokutni paralelepiped, ako mu je romboid $ABCD$ [A (—2, 7, 1), B (4, 9, 5), C (1, 3, 6)] baza, a AA_1 [A_1 (—6, 9, 10)] jedan pobočni brid.

506. — 509. Predočite kocku kojoj se donja baza nalazi u ravnini ρ i ako je njen osnovni brid $\overline{AB}$. Uzmite:

506.) ρ (–4, 4, 5); A ($x = 1$, $y = 2$), B ($x = 3$, $y = 5$), Nacrtajte mrežu te kocke.

507.) ρ (6, 5, ∞); A ($x = -1$, $z = 1$), B ($x = 2$, $z = 2$). Nacrtajte transformacionu projekciju te kocke, ako ${}_2x_3$ zatvara s osi x kut od 30^0.

508.) ρ (∞, 3, 6); A ($x = -2$, $y = 2$), B ($x = 1$, $y = 1$).

509.) ρ (—4, ∞, ∞); A (—4, 2, 6), B (—4, 3, 10).

510.) Predočite kocku kojoj je poznat brid A (2, 2, 0), B (6, 5, 0) osnovke $ABCD$. Tačka D neka se nalazi u π_2. (Brid AB nalazi se u π_1, a tačkom D upire se kocka na π_2)

511.) Predočite kocku s pobočkom u ravnini općenoga položaja i na svaku njenu pobočku postavite uspravnu piramidu tako da je baza piramide pobočka kocke, a visina svake piramide jednaka je polovini pobočnoga brida kocke. (Dobićete rombički dodekaedar)

512.) Predočite pravilnu šestorostranu prizmu kojoj je S (1, 6, 4) središte donje baze, a O (8, 4, 9) središte gornje baze. Nijedan osnovni brid neka ne bude paralelan ni s π_1 ni s π_2 i svaki neka je dug 3 jedinice. (Ravnina donje baze prolazi tačkom S normalno na $\overline{SO}$)

513.) Predočite pravokutni paralelepiped kojemu je baza pravokutnik $ABCD$ [A (—12, 4, 0), B (—4, 4, 0), $\overline{BC} = 4$]. Gornji nasuprotni osnovni brid $\overline{A_1 B_1}$ neka se nalazi u π_2. Pobočni brid $\overline{AA_1} = 10$. (Ispomognite si profilnom ravninom)

514.) Predočite pravilnu šestorostranu prizmu kojoj je poznat pobočni brid A (—2, 6, 0), A_1 (3, 0, 12). Brid $\overline{AB} = 3$ donje baze nalazi se u π_1. Odredite projekciju te prizme na transformacionu ravninu, ako je os $_1x_3 \perp r_1$. (ρ je ravnina baze)

515.) Predočite pravilnu trostranu prizmu s bazom u ravnini ρ (∞, 5, 3). Visina prizme neka je jednaka osnovnome bridu.

516.) Predočite pravilnu trostranu prizmu kojoj je zadan pobočni brid A (—2, 10, 3) A_1 (- 8, 6, 12), ako se osnovni brid BC nalazi u π_1. Odredite projekciju te pravilne trostrane prizme na profilnu ravninu.

30. Ravan presek piramide i prizme

a) Kolineacija i afinitet

Određivanje preseka piramide ili prizme sastoji se u tome da se odrede probodi pojedinih bridova s ravninom prereza.

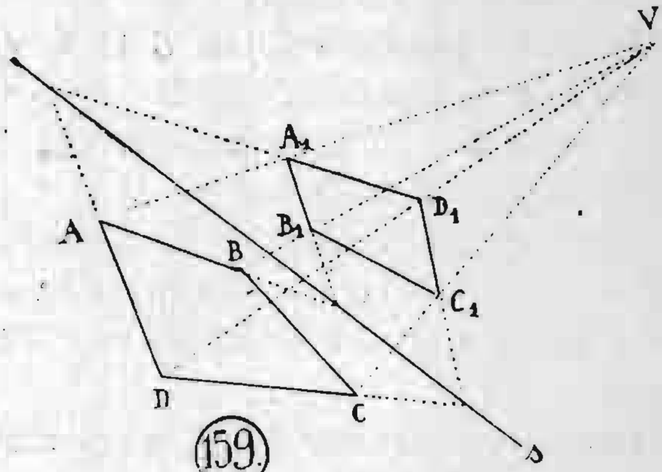
Preseče li se piramida ili prizma ravninom paralelnom s ravninom baze, presečni je lik *sličan* liku baze kod uspravne i kose piramide, a kongruentan bazi kod uspravne i kose prizme.

Kod određivanja paralelnoga preseka piramide i prizme postupa se tako, te se nađe probodište jednoga pobočnoga brida s ravninom preseka, a onda se iz onog probodišta nastavljaju stranice presečnoga lika paralelno sa stranicama baze.

Seče li se piramida, odnosno prizma ravninom koja seče sve pobočne bridove a usto je ona nagnuta prema ravnini baze, presečni je lik kod piramide *kolinearno srodan* ili u *kolineaciji* s likom baze, a kod prizme je *afino srodan* ili u *afinitetu* s likom baze.

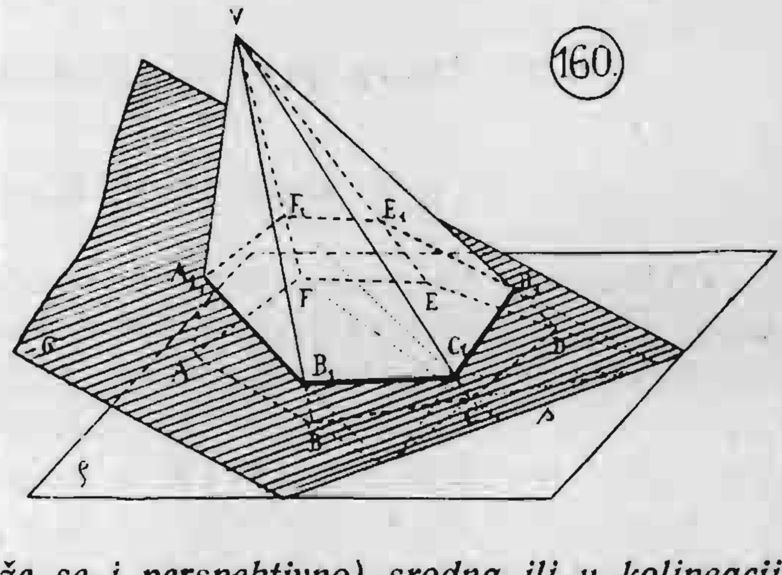
Pre negoli se pređe na samu konstrukciju preseka, potrebno je poznavati svojstva kolinearno srodnih likova. O likovima u afinitetu govorili smo već pre u § 26 zakonu XXIV.

U slici 159 nacrtan je četvorokut ABCD i njemu kolinearno srodan četvorokut $A_1B_1C_1D_1$. Zadamo si kakavgod lik, u našem slučaju četvorokut *ABCD*. Uzmemo gdegod u ravnini četvorokuta pravac *s* i izvan pravca gdegod tačku *V*. Pravac se *s* zove *os kolineacije*, tačka *V vrh* ili *centar kolineacije*, a spojnice tačaka *ABCD* sa centrom kolineacije zovu se *zrake kolineacije.*



159

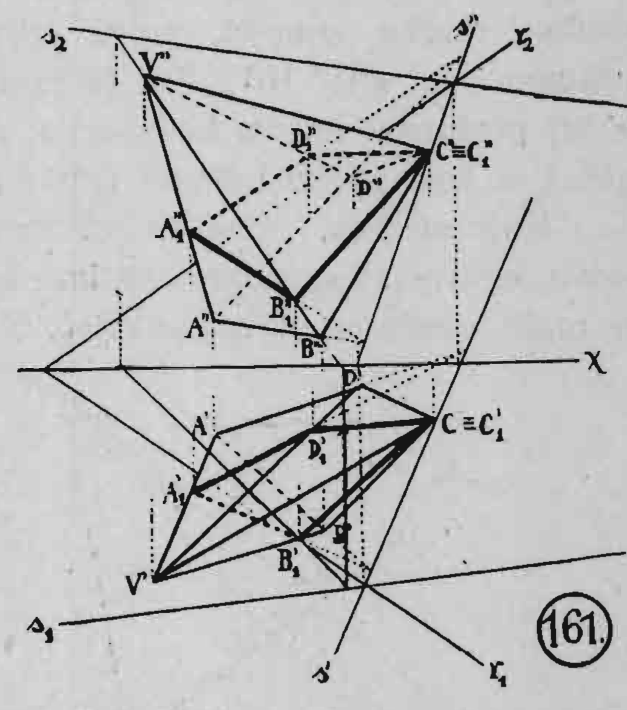
Odaberemo gdegod na spojnici *AV*, *BV*, *CV* ili *DV* tačku A_1, B_1, C_1 ili D_1. S jednom od ovih odabranih tačaka započinjemo. Uzmimo da smo počeli s tačkom A_1 tj. na *AV* odabrali smo gdegod A_1. Produžimo na pr. *AB* (svakako produžujemo jednu stranicu četvorokuta ili njegovu dijagonalu koja prolazi tačkom *A*) do osi *s*. Secište te produžene četvorokutove stranice s osi *s*. spojimo s A_1 (A_1 je homologna tačka s tačkom *A*) dok ne seče zraku kolineacije koja prolazi tačkom *B*. Time je dobivena tačka B_1. Tako se to i dalje nastavlja dok se ne nađu sve homologne tačke. Vidi se da je to gotovo isti postupak kao i kod afiniteta. Jedina je razlika u tome što su zrake afiniteta među sobom paralelne, a kod kolineacije zrake polaze iz jedne tačke.


160

XXV zakon: Dva su lika kolinearno — (kaže se i perspektivno) srodna ili u kolineaciji, ako im spojnice homolognih tačaka polaze iz jedne tačke koja se zove centar ili vrh kolineacije, a secišta se svih homolognih produženih stranica lika nalaze na jednome pravcu koji se zove os kolineacije.

U slici 160 prikazan je zorno ravni presek nepravilne kose piramide s ravninom σ. Ravnina baze je ravnina ρ. Iz slike se vidi da su baza $ABCDEF$ i presek $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ kolinearno srodni likovi, jer im spojnice (zrake kolineacije) homolognih tačaka AA_1, BB_1, CC_1, ... prolaze jednom tačkom V (centrom kolineacije), a produžene se homologne stranice AB i A_1B_1, BC i B_1C_1, . . . sastaju u jednome pravcu s (os kolineacije). Iz slike vidimo da je *centar* kolineacije *vrh piramide*, da su *zrake* kolineacije *pobočni bridovi* njeni, a *os* je kolineacije *presečnica ravnine baze* s ravninom *preseka*. Kako se projeciranjem dovodi prostornost u ravninu, vrediće ti zakoni iz prostornosti i u projekciji.

U slici 161 prikazan je ravni presek nepravilne kose četvorostrane piramide. Ravnina baze je ravnina ρ, *a ravnina preseka je ravnina* σ.



U prvome se redu odredi presečnica s ravnina ρ i σ. Presečnica s je os kolinacije, i to s' za prvu projekciju a s'' za drugu projekciju. Nakon toga odredi se probodište kojegagod pobočnoga brida s ravninom preseka. U našoj je slici određen probod B_1 brida $\overline{BV}$ s ravninom σ. Tačke B i B_1 su homologne tačke. U projekciji su homologne tačke B' i B_1' za os kolineacije s', a u drugoj su projekciji homologne tačke B'' i B_1'' za os kolineacije s''.

161

Sad se postupa kako je pokazano u slici 159, odnosno 160. Stranica $A'B'$ produži se dok ne seče s'. To se secište spoji s homolognom tačkom A_1'. Ta spojnica seče $A'V'$ u A_1'. U ordinali na $A''V''$ nalazi se $A'_1{}'$. Time je pomoću kolineacije određen probod brida AV s ravninom σ. Zatim se produži $A'D'$ do s'; to se secište spoji s A_1'; ta spojnica seče $D'V'$ u D'_1; u ordinali iz D_1' na $D''V''$ nalazi se $D'_1{}'$. Tako se to nastavlja dok se ne dobiju sve tačke preseka. Spojnice pojedinih tačaka preseka, onako kako je to na bazi, daju presečni lik $A_1B_1C_1D_1$. Na vidljivim pobočkama su i stranice presečnoga lika vidljive, a na nevidljivim su nevidljive.

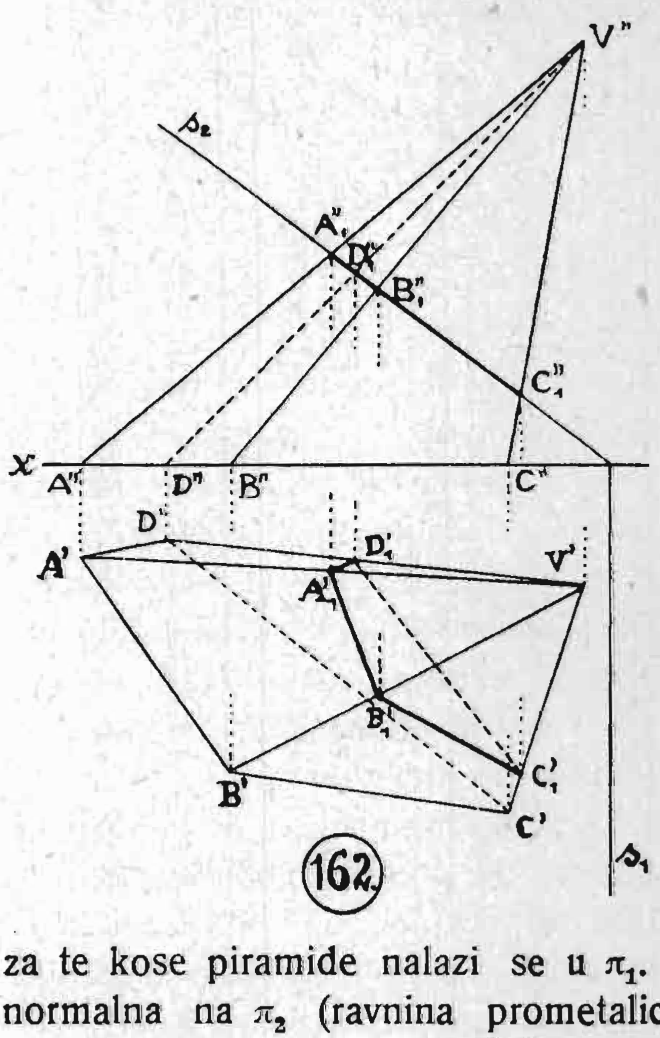
Dogodili se da koja stranica baze seče predaleko os kolineacije, onda si pomažemo njenom dijagonalom, pa pomoću homolognih dijagonala odredimo tačku, koja nam još manjka.

U našoj slici pokazano je, što inače nije potrebno, da su i likovi $A''B''C''D''$ i $A_1''B_1''C_1''D_1''$ kolinearno srodni za os kolineacije s''. Svejedno je, dakle, koja se projekcija presečnice s uzima kao os kolineacije. Često se događa da se iz jedne projekcije prelazi na drugu, ako se pokaže da je u onoj drugoj projekciji zgodnije raditi negoli u onoj kojom se je započelo.

U našoj se slici sasvim slučajno dogodilo da ravnina preseka prolazi upravo tačkom C. Zbog toga je $C' \equiv C_1'$ i $C'' \equiv C_1''$.

Ima li se odrediti ravni presek prizme, postupa se sasvim jednako kao i kod piramide. Odredi se, naime, najpre probod jednoga pobočnoga brida s ravninom preseka; produži se ona stranica baze, koja prolazi onom tačkom kojom i pobočni brid, do osi s' ili do osi s''; ta se tačka u s', odnosno u s'' spoji s pre dobivenim probodom. Time se dobila nova tačka preseka. Tako se to nastavlja dok se ne dobiju konačno sve tačke preseka. Vidimo, dakle, da apsolutno nema nikakve razlike između ovoga postupka i onoga koji je pokazan i protumačen u slici 161. Sva je razlika samo u imenu. Kod piramide se taj postupak naziva kolineacija (zrake kolineacije polaze iz jedne tačke), a kod prizme afinitet (zrake afiniteta su među sobom paralelne).

Kolineacijom, odnosno afinitetom dobivene tačke preseka nisu posve sigurne zbog pogrešaka koje nastaju netačnim crtanjem, a kojima ne može izbeći ni najveštiji crtač. S toga treba dobivene tačke preseka kontrolisati i kojom drugom metodom. Osim toga mora se kod upotrebe kolineacije, odnosno afiniteta odabirati takve stranice ili dijagonale koje os kolineacije ili os afiniteta neće seći pod suviše malim kutom, jer se takvo secište teško tačno odredi.



162

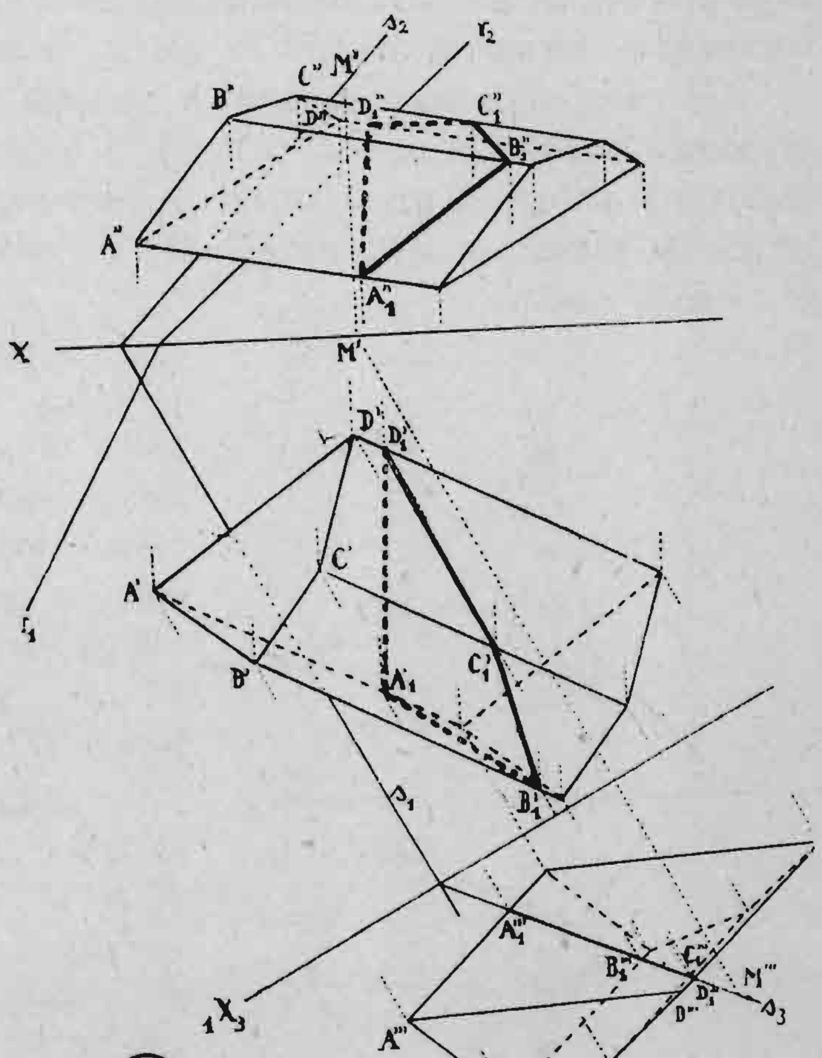
b) **Transformacija**

Presek se piramide ili prizme može odrediti i pomoću transformacije (pomoću ravnine π_3).

Pre negoli se pređe na samo određivanje preseka pomoću transformacije, prikazan je u slici 162 presek kose četvorostrane piramide s ravninom $\sigma \perp \pi_2$. Baza te kose piramide nalazi se u π_1. Budući da je ravnina preseka σ normalna na π_2 (ravnina prometalice za π_2), moraće se prema XVIII zakonu prikazati čitav presek kao pružac u drugome tragu s_2 presečne ravnine. Prve se projekcije pojedinih uglova preseka nalaze na odgovarajućim prvim projekcijama bridova kako to pokazuje slika 162.

U slici 162 a) prikazana je nepravilna kosa četvorostrana prizma i određen njen presek pomoću transformacije. Ravnina baze je ravnina ρ, *a ravnina preseka ravnina* σ. *Transformaciona ravnina* π_3 *uzme se normalno na ravninu preseka* σ zbog toga da se dovede ravninu preseka koja je općega položaja u položaj ravnine prometalice. Kod toga mora biti os $_2x_3$, odnosno os $_1x_3$ normalna na s_2, odnosno na s_1. U slici smo uzeli os $_1x_3 \perp s_1$. Nakon toga odredi se treća projekcija prizme i treći trag s_3 ravnine preseka σ. Budući da je ravnina $\sigma \perp \pi_3$, nalaziće se sve treće projekcije sviju tačaka ravnine σ u s_3 (XVIII zakon). Prema tome će i probodi A_1''', B_1''', C_1''' i D_1''' pobočnih bridova prizme s ravninom σ pasti u treći trag ravnine s_3. Kad poznajemo treću projekciju preseka, lako odredimo pomoću ordinala na odgovarajućim pobočnim bridovima prvu, odnosno drugu, njegovu projekciju.

Istim bismo načinom — pomoću transformacije — odredili i presek piramide s nekom ravninom.



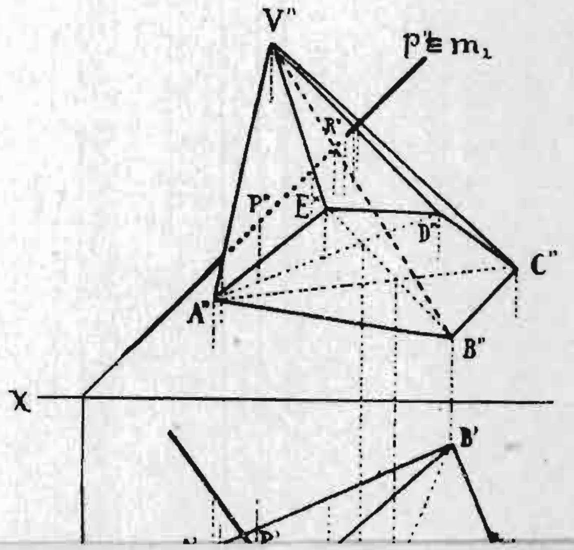
(162) *a)*

U slici 163 prikazane su tačke P i R u kojima pravac p probada nepravilnu petorostranu piramidu.

Najpre je predočen nepravilni petorokut *ABCDE*. Kako u toj slici nije crtana ravnina baze kojom bismo se mogli pomagati kod određivanja prve i druge projekcije petorokuta, morali smo si pomoći njegovim dijagonalama da odredimo njegove obe projekcije. To smo učinili, tako da smo si po volji zadali čitavu drugu projekciju petorokuta i njegove tri tačke u prvoj projekciji. Uzeli smo, dakle, po volji A'', B'', C'', D'', E'' i A' B' i C'. Dijagonala B'' i E'' seče dijagonalu $A''C''$. U tom se secištu nacrta ordinala na $A'C'$. Spojivši B' s onom tačkom u ordinali na $A'C'$, dobijemo dijagonalu $B'E'$. Isto tako dobijemo i D'.

Da se odredi probod pravca s piramidom ili s prizmom, položi se pravcem kakvagod ravnina i odredi presek te ravnine s piramidom, odnosno s prizmom. Tačke, u kojima pravac seče presek (ako pravac probada telo, onda on mora seći i presek) jesu tačke u kojima pravac probada telo. Najzgodnije se to rešava tako da se pravcem, za koji tražimo probod, položi ravnina normalna na π_1 ili na π_2. Presek, takvom normalnom ravninom na π_1 ili na π_2, moći ćemo najbrže odrediti.

U našoj slici smo pravcem p položili ravninu $\mu \perp \pi_2$. Druga projekcija preseka je pružac. (Zašto?) U ordinalama, na odgovarajućim bridovima, dobije se prva projekcija preseka. Projekcija p' seče prvu projekciju preseka u tačkama P' i R'. U ordinalama na p'' dobije se P'' i R''.



Iz prve projekcije vidimo da je tačka P na pobočki ABV, a tačka R na pobočki EDV. Te se dve pobočke u prvoj projekciji vide. Prema tome su tačke P' i R' vidljive, te će se i čitavo p' videti, osim onoga dela koji se nalazi između P' i R', jer je taj deo pravca u piramidi.

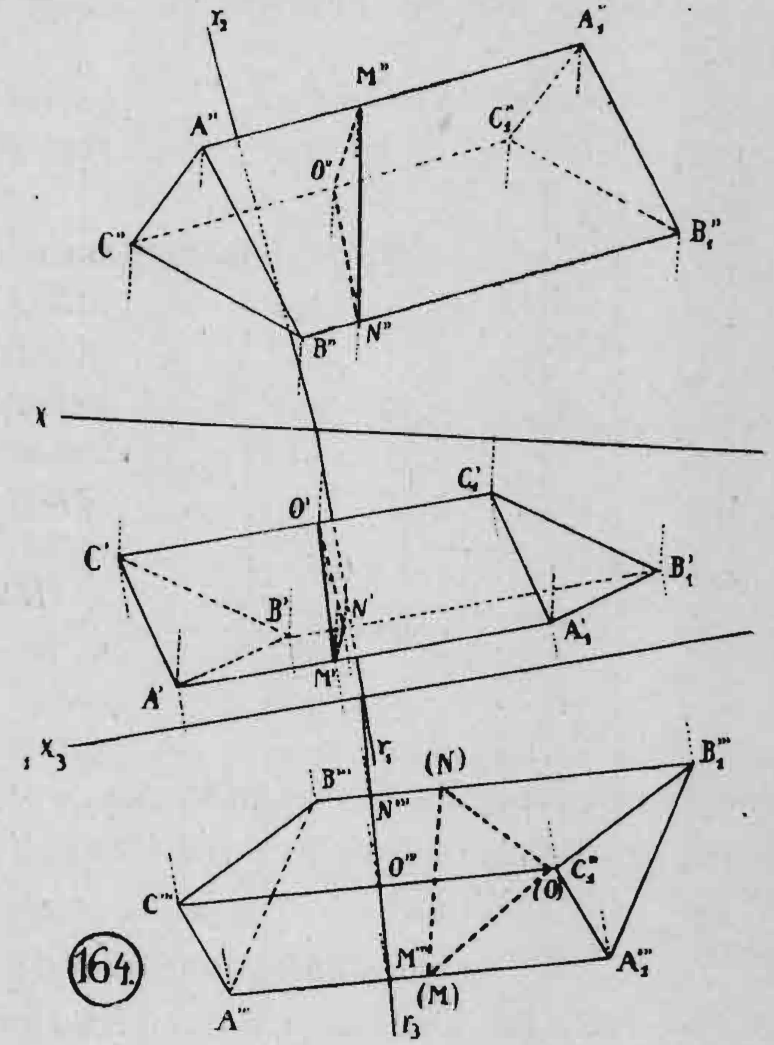
U drugoj se projekciji pobočka $A''B''V''$ ne vidi dok se pobočka $E''D''V''$ vidi. Prema tome je P''

528.) Zadajte si pravilnu šestorostranu prizmu s bazom u ravnini općenoga položaja. U pobočnoj plohi koju čine bridovi iz A i B, uzmite pravac m blizu donje osnovke, a u plohi određenoj pobočnim bridovima iz E i D uzmite tačku M blizu gornje baze. Odredite presek koji nastane ravninom (Mm).

529.) Presecite pravokutni paralelepiped koji je zadan u primeru 504 ravninom, tako da presečna ravnina prolazi jednim osnovnim bridom i polovištem jednoga pobočnoga brida.

Konstrukcija mreže kose prizme pomoću normalnoga preseka provedena je u slici 164 i u slici 165.

U slici 164 određen je normalni presek i njegova prava veličina, a u slici 165 nacrtana je mreža one prizme, predočene u slici 164.



164

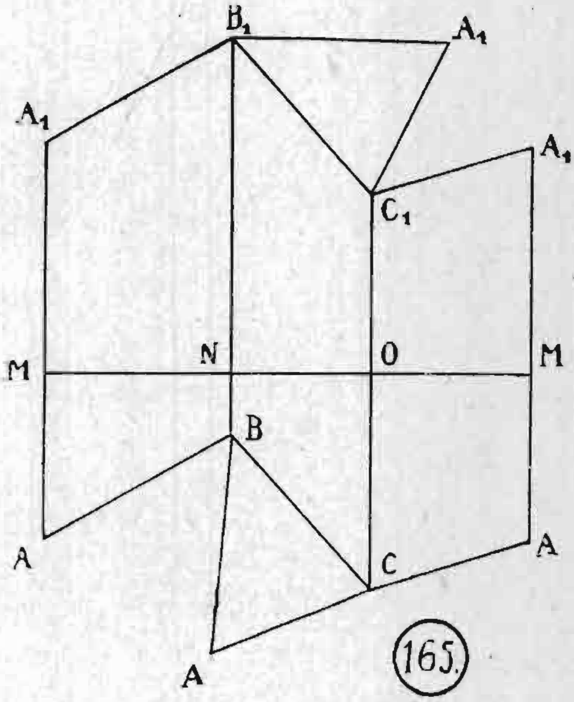
U našem slučaju uzeta je nepravilna kosa trostrana prizma. Ravnina baze nije crtana. Normalni presek proveden je transformacijom, tako da smo transformacionu ravninu π_3 uzeli paralelno s pobočnim bridovima prizme (os ${}_1x_3$ paralelna je s prvim projekcijama pobočnih bridova), i to zbog toga da nam se u trećoj projekciji pobočni bridovi prikažu u svojoj dužini. Dužinu ćemo pobočnih bridova trebati kod mreže.

Kad nacrtamo treću projekciju prizme, postavimo treći trag r_3 presečne ravnine ρ normalno na treće projekcije pobočnih bridova prizme. Prvi trag r_1 normalan je na prve projekcije pobočnih bridova i prolazi sečištem trećega traga r_3 s osi ${}_1x_3$; drugi je trag r_2 normalan na druge projekcije pobočnih bridova prizme i prolazi sečištem prvoga traga r_1 s osi x. Dakle je ravnina ρ normalna na pobočne bridove zadane prizme, te prema tome određuje i njen normalni presek.

Dobivši $M'''N'''O'''$ (treća projekcija normalnoga preseka), odredićemo, već poznatim načinom, prvu i drugu projekciju preseka.

Još nam treba odrediti veličinu presečnoga trokuta MNO. Najbrže i najjednostavnije dobićemo veličinu toga trokuta tako da ravninu preseka preložimo oko r_3. Budući da je ravnina preseka ρ normalna na π_3, nalaziće se tačke (M) (N) (O) (to je veličina normalnoga preseka) u normalama na r_3 iz M''',N''' i O''' u udaljenosti od r_3 za M' do osi ${}_1x_3$, N' do osi ${}_1x_3$, odnosno O' do osi ${}_1x_3$. [Ovde je isti odnošaj između prve i treće projekcije i preloženoga položaja (M) (N) (O) kao u slici 158 između druge i prve projekcije i preloženoga položaja (A) (B) (C) (D)]

Time bi bile sve pripreme za crtanje mreže gotove.



165

U slici 165 nacrtana je mreža kose prizme, predočene u slici 164.

Kad prizmu razastremo u ravninu, padaju stranice trokuta MNO, kako je već pre rečeno, u jedan pravac. Zbog toga odaberemo gdegod pravac i na njega nanesemo dužine stranica preseka MNO. Tako smo dobili na pravcu tačke $MNOM$. $\overline{MN} = \overline{(M)(N)}$, $\overline{NO} = \overline{(N)(O)}$, $\overline{OM} = \overline{(O)(M)}$. Budući da pobočni bridovi u prostoru stoje normalno na stranicama preseka, moraće oni stajati i kod mreže normalno na pravac MM, nakon što su razastrti u ravninu. Iz tačaka $MNOM$ na normale nanesemo iz trećih projekcija veličine $\overline{M''' A'''}$, $\overline{N''' B'''}$, $\overline{O''' C'''}$, i $\overline{M''' A'''}$ na jednu stranu, a $\overline{M''' A_1'''}$, $\overline{N''' B_1'''}$, $\overline{O''' C_1'''}$ i $\overline{M''' A_1'''}$ na drugu stranu, tako da je $\overline{M''' A'''} = \overline{MA}$, $\overline{N''' B'''} = \overline{NB}$, itd. Dobivenoj mreži plašta prislone se na odgovarajuću stranicu baze. Veličinu baze $ABC \cong A_1B_1C_1$ ne moramo tražiti, jer se njene stranice mogu izmeriti iz mreže plašta prizme.

Zadaci:

536.) Nacrtajte mrežu nepravilne četvorostrane kose prizme s bazom $ABCD$ [A' $(-3, 1)$, B' $(-8, 6)$, C' $(-4, 11)$, D' $(5, 5)$] u π_1, ako je poznato A_1' $(12, 6)$ i visina $v = 14$.

537.) Nacrtajte mrežu kose prizme kojoj je baza istostrani trokut ABC [A' $(-3, 7)$, B' $(1, 3)$] u ravnini ρ $(-5, \infty, 5)$ i, ako su njeni pobočni bridovi dugi 10 i paralelni s osi x.

538.) Nacrtajte mrežu kose prizme, ako je baza kvadrat $ABCD$ [A' $(-1, 3)$, B' $(-4, 9)$] u π_1 i, ako su pobočni bridovi paralelni s profilnom ravninom, tako da zatvaraju s π_1 kut od 60^0. Ugao A_1 gornje osnovke neka se nalazi u π_2.

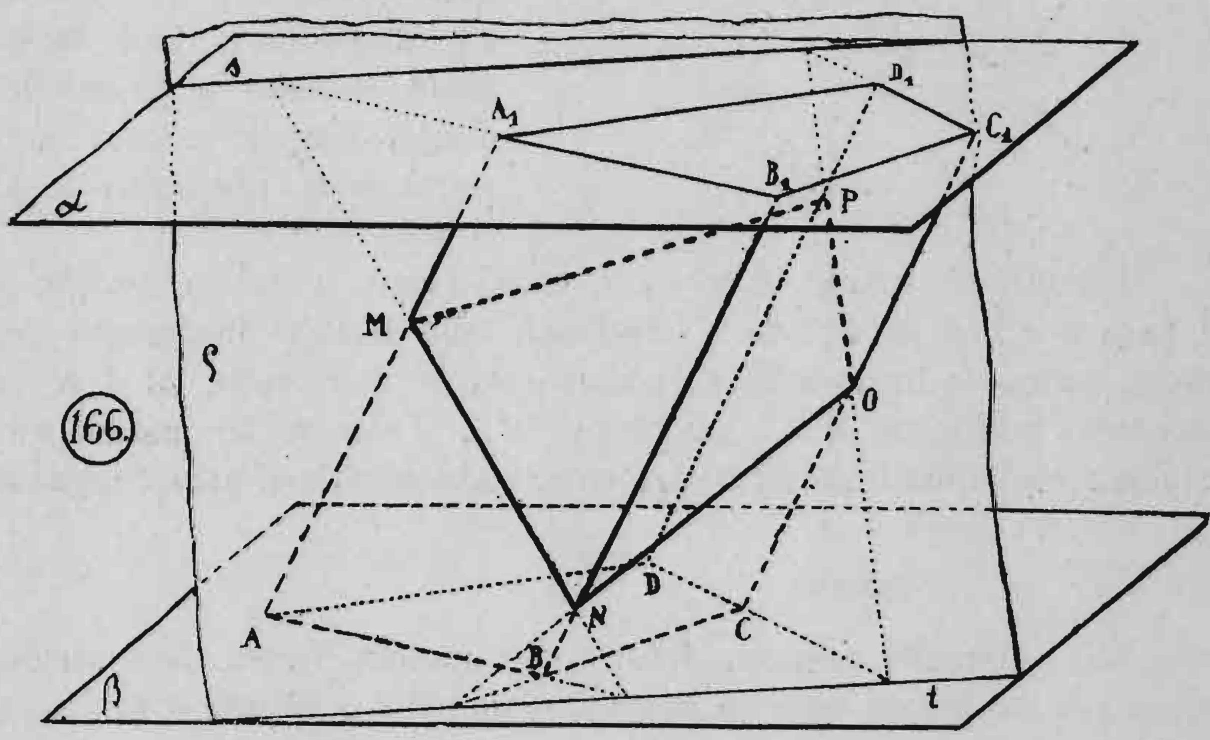
539.) Nacrtajte mrežu prizme zadane u primeru 523.

32. Dvostruki afinitet

Dvostruki afinitet sasvim je sličan afinitetu koji smo već spominjali i njime se služili kod ravnoga preseka prizme. Kod dvostrukoga se afiniteta služimo *dvema afinitetnim osima*. Prednost je dvostrukoga afiniteta u tome, što kod njega ne moramo najpre tražiti probod jednoga pobočnoga brida s ravninom preseka te onda nastaviti pomoću afiniteta, već to činimo direktno čim poznajemo obe afinitetne osi, a prednost mu je i u tom, što su dobivene tačke na bridovima sigurne, jer se svaka tačka dobiva kao secište presečnica susednih pobočaka, a ove se opet dobivaju kao spojnice dveju sigurnih tačaka.

U slici 166 prikazana je zorno nepravilna kosa četvorostrana prizma.

Kod te prizme ravnina donje baze je ravnina β, a ravnina gornje baze je ravnina α. Ravnina preseka je ravnina ρ. Pravci s i t su pre-

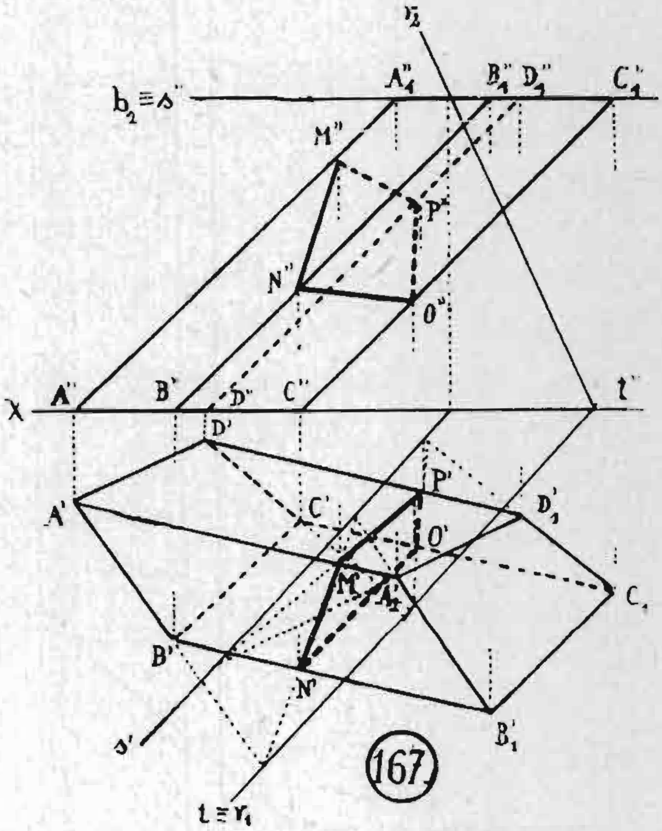


166

sečnice ravnina α i β s ravninom ρ. *Te dve presečnice s i t ravnina baza s ravninom preseka su afinitetne osi.*

Donji osnovni brid AB produži se do osi t, a gornji odgovarajući osnovni brid A_1B_1 produži se do osi s. Budući da se spojnica tih secišta osnovnih bridova s osima s i t nalazi u pobočki ABB_1A_1 i u ravnini preseka ρ, mora $\overline{MN}$ biti jedna stranica preseka $MNOR$. Isto se tako dalje nastavija s ostalim osnovnim bridovima (BC i B_1C_1, CD i C_1D_1, itd.) dok se ne dobije čitav presek.

Dogodi li se da koji od osnovnih bridova predaleko seče koju od afinitetnih osi, onda se ispomažemo dijagonalama kako smo to radili i kod običnog afiniteta.



Sve se to može zgodno primeniti u Mongeovoj projekciji. Taj način određivanja ravnoga preseka prikazan je u slici 167.

U našem je slučaju ravnina donje baze u π_1. Zbog toga je jedna afinitetna os (presečnica donje baze s ravninom preseka) upravo prvi trag r_1 ravnine ρ ($t' \equiv r_1$); druga je afinitetna os (presečnica gornje baze s ravninom preseka) prva sutražnica s. Sad se postupa jednako u prvoj ili u drugoj projekciji kako je to zorno bilo prikazano u slici 166.

Produži se, naime, $A'B'$ do $t' \equiv r_1$ (samo u našem slučaju, jer je baza u π_1), a $A_1'B_1'$ do s'. Spojnica onih secišta produženih projekcija osnovnih bridova sa t', odnosno sa s' daje tačke M' i N' na pobočnim bridovima $A'A_1'$, odnosno $B'B_1'$. Tako se to nastavlja i s ostalima osnovnim bridovima dok se ne nađu svi vrhovi presečnoga lika.

Zadaci:

540.) Odredite pomoću dvostrukoga afiniteta presek kose šestorostrane prizme [donja baza je pravilni šestorokut u ravnini ρ (∞, ∞, 4); središte opisane kružnice bazi je u tački S (— 10, 8, 4), $r = 5$; središte gornje baze je u tački S_1 (0, 12, 14); nijedna stranica baze nije paralelna s osi x ni normalna na os x] s ravninom ρ (— 9, — 2, 6).

541.) Predočite uspravnu trostranu prizmu kojoj je baza trokut A (— 5, 3, 2), B (— 3, 1, 6), C (0, 6, 4) a visina $v = 14$; odredite pomoću dvostrukoga afiniteta presek s ravninom ρ (— 9, — 4, 5).

542.) Predočite pravilnu četvorostranu prizmu s bazom u ravnini ρ (7, ∞, 6), ako je jedan njen osnovni brid A ($x = -3$, $y = 5$) B ($x = 2$, $y = 3$) a visina $v = 12$. Odredite presek, ako je prizma presečena ravninom ρ (15, —5, 5).

Zadaci za ponavljanje

U ovome se paragrafu većina zadataka može rešiti na razne načine. Svakome se učeniku prepušta na volju, koji će način odabrati. Uvek se za rešenje zadatka smatra onaj način boljim koji vodi kraćim putem do rezultata.

Neki zadaci nisu potpuno jednoobrazno zadani, već se prepušta učeniku da kod zadatka i sam bira položaj, bilo čega, po volji.

543.) Odredite prve projekcije tačaka A i B, ako su poznate njene druge projekcije A'' ($x = -4$, $z = 3$) i B'' ($x = 4$, $z = 6$) i, ako je udaljenost od prvoga do drugoga probodišta pravca AB jednaka 10. Prvo se probodište pravca AB neka nalazi 4 jedinice pred π_2.

544.) Zadan je prvi trag r_1 ($x = -8$, $y = 4$) ravnine ρ i A'' ($x = 0$, $z = 5$); odredite A', ako ravnina ρ s π_2 zatvara kut od 60^0.

545.) Predočite pravokutni trokut ABC, ako je poznata njegova hipotenuza A (-3, 3, 2) B (5, 7, 4) i druga projekcija C'' ($x = 0$, $z = 6$) tačke C.

546.) Zadanim pravcem $a = A''B''$ [A'' ($x = 2$, $z = 2$), B'' ($x = 6$, $z = 6$)] u ravnini ρ (2, 1, -2) položite ravninu σ koja sa zadanom ravninom ρ zatvara kut od 30^0.

547.) Zadan je pravac $a = AB$ [A (-2, 3, 4), B (4, 7, 8)] i tačka C (4, 5, 4). Položite tačkom C ravninu, tako da je pravac b probada u tački, koja je od C udaljena 8 i da ta ravnina s π_1 zatvara kut od 75^0.

548.) Odredite presečnicu ravnine ρ (-8, -4, 8) i σ (4, 3, -6).

549.) Predočite kocku u I kvadrantu ako se jedna njena pobočka nalazi u ravnini ρ (-4, 3, -6), a druga, nasuprotna pobočka u ravnini koja prolazi tačkom A (0, 3, 7).

550.) Predočite kocku kojoj je poznat brid A (-6, 6, 0), B (4, 6, 0), ako se brid $\overline{A_1B_1}$ nalazi u π_2.

551.) Predočite pravokutni paralelepiped koji se donjim osnovnim bridom $\overline{AB}$ upire na π_1, a uglom B_1, koji leži na gornjoj bazi, na π_2. Uzmite: A (-6, 4, 0), B (0, 2, 0), visina $v = 10$, osnovni brid $\overline{BC} = 4$. Nacrtajte mrežu toga pravokutnoga paralelepipeda.

552.) Predočite pravilnu šestorostranu piramidu kojoj se pobočka ABV nalazi u π_1, ako ravnina baze zatvara s π_1 kut od 60^0. Uzmite: A (-2, 2, 0), B (1, 6, 0), V (5, 1, 0). Nacrtajte mrežu te piramide.

553.) Predočite pravilnu četvorostranu prizmu kojoj se pobočni brid $\overline{AA_1}$ nalazi u π_1, ako joj pobočka ABB_1A_1 (ta je pobočka bliže π_2 negoli pobočka ADD_1A_1) čini s π_1 kut od 30^0. Uzmite A (-3, 9, 0), A_1 (3, 4, 0). Presecite zadanu prizmu ravninom ρ (-7, 13, 7).

554.) Predočite pravilnu trostranu piramidu kojoj je središte baze u tački S (—6, 2, 6), ako je ravnina baze paralelna s osi x tako da je središte S jednako udaljeno od prvoga i od drugoga traga ravnine baze; visina piramide neka je 6, a jedan ugao baze neka je u π_2.

555.) U ravnini ρ (— 6, 7, 4) u I kvadrantu predočite kvadrat $ABCD$. Nacrtajte kosu prizmu (baza je kvadrat $ABCD$, visina $v = 4$) i njenu mrežu, ako joj je pobočni brid $\overline{AA_1} = 6$. Čitava prizma neka bude u I kvadrantu.

556.) Odredite tačke u kojima pravac $p = MN$ [M (—2, 11, 1), N (5, 2, 6)] probada piramidu A (—4, 4, 6), B (2, 1, 2), C (6, 8, 4), V (1, 12, 0).

557.) Predočite pravilnu šestorostranu piramidu kojoj je baza u ravnini paralelnoj s π_1 u I kvadrantu, tako da joj se vrh nalazi u π_1. Presecite piramidu ravninom $\sigma \parallel x$ tako da presek bude petorokut.

558.) Predočite po volji pravilnu šestorostranu prizmu s bazom u ravnini općenoga položaja. Odredite presek te prizme pomoću dvostrukoga afiniteta, ako ste i ravninu preseka odabrali po volji.

559.) Odredite tačke u kojima pravac m ($y = 4$, $z = 5$) $\parallel x$ probadą prizmu kojoj je baza A (2, 2, 0),B (6, 6, 0), C (—5, 8, 0), D (—3, 4, 0), a pobočni joj je brid $\overline{AA_1}$ [A_1 (5, 0, 8)].

560.) Odredite presek koji nastane, ako prizmu A (—10, 2, 0), B (—16, 8, 0), C (12, 12, 0), D (6, 6, 0), A_1 (4, 6, 12) presečemo ravninom ρ (11, 22, 16). Nacrtajte mrežu te kose četvorostrane prizme i u mreži onaj presek koji je nastao kad je prizma presečena ravninom ρ.

Kazalo za neke stručne izraze

Četvorokut = četvorougaonik
Deskriptivna geometrija = nacrtna geometrija
Identično = posve jednako, istovetno.
Kongruentan = podudaran
Kut = ugao
Normala = upravna prava
Normala na ravninu = upravna prava na ravan
Normalan = upravan
Nožište normale = presek upravne prave
Okomit = upravan
Omer = razmera
Osnovka = osnovica (baza)
Petorokut = petougaonik
Polumer = poluprečnik (radius)
Poučak = teorem
Pravac = prava
Probodište = secište
Pravokutnik = pravougaonik
Pravokutni trokut = pravougli trougao
Prikloni kut = nagibni ugao
Promer = prečnik (dijametar)
Pružac = duž
Ravnina = ravan
Rotacija = obrtanje
Rotirati = obrtati
Simetralna ravnina = simetrijska ravan
Stožac = kupa
Sukladan = podudaran
Šestorokut = šestougaonik
Tangenta = dirka
Transverzala = prečnica
Trobridac = trostrani rogalj
Trokut = trougao
Ugao = rogalj
Usporedan = paralelan
Zbroj = zbir
Zorno = uočljivo (plastično)

V deo

PREDOČIVANJE LIKOVA

VI deo

PROJEKCIJE UGLATIH (ROGLJASTIH) TELESA

Štamparske greške

Popravak onih grešaka koje mogu dovesti do nerazumevanja:

Str.	24	redak	11	odozgo:	mesto	$N(_3)$	treba da bude	$N'(_3)$
„	21	„	1	odozdo:	„	(ravnina crtnje,	treba da bude	(ravnina crtnje)
„	82	„	20	„	„	$x = 3$	treba da bude	$y = 3$
„	86	„	7	odozgo	„	određene	„ „ „	odnosne
„	86	„	11	odozdo	„	na π_3	„ „ „	na π_2
„	86	„	10	„	„	(B)	„ „ „	B
„	86	„	9	„	„	(B''')	„ „ „	B'''
„	120	„	12	„	„	$o'' \perp r''$	„ „ „	$o'' \perp r_2$
„	128	„	1	odozgo	„	iz A''	„ „ „	iz A'
„	129	„	15	„	„	(P)	„ „ „	(p)