NAPOMENA

KNJIGA JE BILA U JAKO LOŠEM STANJU TAKO DA NA POJEDINIM STRANAMA NEDOSTAJE TEKSTA

А. Р. ФОРСАЈТ

УЏБЕНИК

ОБИЧНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

са решењима 276 задатака

ПРЕВЕЛИ

Иван Атанасијевић

Хајнрих Покорни

Удружење студената математике

БЕОГРАД

1939

Литографија Косте М. Војковића, Скадарска 6

Увод.

1/. Када је нека промењива y функција неке друге промењиве величине x, онда се однос између њих може претставити једначином $\varphi(x,y)=0$

У овој се једначини могу јављати константе; означимо једну од њих са a. Ако се ова једначина реши по y, онда ће a ући у израз за y, и, уопште, ако a добија разне вредности добиће се за y известан број одговарајућих вредности. Ако у првобитној једначини треба назначити околност да вредност y зависи од вредности коју има a, онда се једначина може писати у облику $\varphi(x,y,a)=0$ ....(1)

Из ове се једначине може извести друга, и то таква која обухвата све вредности од y које се добијају ако се константи a дају све могуће вредности.

Извод од y по x одређен је једначином

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \text{............} (2)$$

у којој $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ означавају парцијалне изводе по x и y. Уопште ће једначина /2/ исто тако садржати константу a која се јавља у (1); ако из обе елиминишемо константу, онда ће резултат елиминације имати облик $f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0$ ....(3)

функције φ у једначини /1/. Једначина /3/ обухвата све вредности од y које се могу добити из једначине /1/; јер иако је она изведена из једначина /1/ и /2/ од којих обе садрже a, ипак није дошла у обзир нека одређена вредност те величине; и како се константа више не јавља у резултату, то би се добио исти резултат да је у појединим деловима елиминације место константе a била стављена нека друга константа a'.
Аналого се, ако y зависи од две константе на начин дефинисан једначином $\phi(x,y,a,b)=0$ помоћу једначина које одређују први и други извод од y по x, могу елиминисати обе константе a и b, и резултујућа једначина биће облика

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3')$$

Функције f и F могу се у сваком случају доиста извести /помоћу метода диференцијалног рачуна и више алгебре/, ако су дате функције φ и ϕ.

Ако је, специјално, $\vartheta(x,y)=a$ нека таква функција из које треба елиминисати a, онда као једначину која обухвата све вредности од y добијамо одмах

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

а да никаква даља елиминација није потребна.

следеће $y = 2x\frac{dy}{dx}$ а то је општа једначина свих парабола које имају заједничку осовину и исто теме.

2/. Везе као што су /3/ и /3 / зову се диференцијалне једначине; једначина /1/, у којој се не јављају никакви изводи зове се решење једначине /3/. И, као што је при прелазу од /1/ на /3/ била избачена једна произвољна константа, сме се, обратно, очекивати да ће при прелазу од /3/ на /1/ бити уведена једна једина произвољна константа; а како су за елиминацију n произвољних констаната потребне једначине које одређују првих n извода и првобитна једначина може се, обратно, очекивати: ако од релације између извода, до n -тог закључно, пређемо на једначину у којој се изводи не јављају, а која је еквивалентна првој биће потребно да се уведе n прозвољних констаната.

3/. Није тешко видети како те произвољне величине улазе у решење једначине. Ради веће једноставности посматраћемо једначину $M + N\frac{dy}{dx} = 0$, у којој су M и N функције од x и y . Нека x и y одређују декартове координате неке тачке P у односу на две управне осе; тада је /1/ једначина криве линије, а $\frac{dy}{dx}$ тангенс угла што га тангента у тачки P на криву заклапа са x -осом, тако да диференцијална једначина у свакој тачки равни одређује неки правац. Узмимо неку тачку A на y -оси и пођимо ношћу од $\frac{dy}{dx}$ у тачки A ; тако ћемо стићи до неке тачке B . Од B пођимо опет врло мало у правцу који је одређен вредношћу од $\frac{dy}{dx}$ у тачки B , па ћемо стићи до неке тачке C . Ако во поновимо за известан број праваца, онда ће у равни бити описана нека изломљена линија, и, ако свака од дужи коју тачка, описујући по претпоставци изломљену линију, треба да пређе, постаје бесконачно мала, онда ће слика прећи у криву која пролази кроз тачку A . Ова ће крива имати одређену једначину коју можемо написати у облику $F(x,y,y_0)=0$, где је y_0 ордината тачке A . Да је уместо тачке A узета нека друга почетна тачка A' , добила би се нека друга крива линија, а у њеној би се једначини јављала ордината од A' ; исти бисмо резултат добили да смо, редом, узимали све тачке на y -оси, јер кроз сваку тачку на њој пролази, уопште, само једна крива линија. Како се свака једначина, или само једна као претставник свих, може сматрати за решење диференцијалне једначине, јасно је да ће решење садржати једну произвољну константу; и, ако на неки, начин добијемо једначину у којој се не јављају изводи, сме се очекивати да ће се у њој јавити једна произвољна константа. Произвољна константа која се тако добија не мора бити ордината тачке у којој крива линија, претстављена решењем, сече y -осу; произвољна константа би се линије почели из неке друге тачке у равни, из тачке која не мора да лежи на једној од координатних оса.

У посматраном примеру има једначина која одређује $\frac{dy}{dx}$ само један корен; ако је једначина облика:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P\frac{dy}{dx} + Q = 0$$

онда ће њен интеграл бити облика:

$$A^2 + AP' + Q' = 0$$

где је A произвољна константа, и није тешко видети да ће, ако је диференцијална једначина n -тог степена по $\frac{dy}{dx}$, одговарајући интеграл садржати једну произвољну константу на n -том и нижим степенима.

4/. Из онога што је речено о методама помоћу којих се могу образовати диференцијалне једначине, могло би се закључити да је лако вратити се од диференцијалне једначине на општи интеграл; али то није тачно. Поједини стадијуми неке елиментације не могу се прећи уназад, и због тога се мора тражити друга метода или друге методе. Сретства и поступци који се са највише успеха могу применити на решавање диференцијалних једначина, биће доцније тачније изложени.

5/. Када се од неке дате функције прелази на одговарајућу диференцијалну једначину, онда ова последња не мора бити садржана међу већ познатим функцијама. Обратно, ако се полази од неке дате диферендоћи до функције која спада међу оне чије су особине познате. Због тога ће бити корисно да се означи шта у том случају треба подразумевати под решењем диференцијалне једначине.

Када се у алгебри питамо да ли се нека једначина може решити, онда при том хоћемо да знамо да ли се вредност променљивих, што се у њој јављају, могу изразити "познатим" функцијама. Тако се на пример у једначини $ax = b$ вредност од x може непосредно добити деобом. Да бисмо, међутим, решили једначину $\xi^2 = K$ морамо увести функцију која за прву једначину није била потребна, и, изражавајући ξ помоћу $\xi = \pm\sqrt{K}$, сматрамо да је једначина решена. Могу се, даље, решити једначине трећег и четвртог степена помоћу функција које су сасвим аналоге овој, наиме помоћу трећег и четвртог корена из изведених величина; опште једначине петог и вишег степена не могу се више решити овим функцијама или њиховим везама са аналогим функцијама. Не сме се из тога закључити да решења тих једначина уопште не постоје, него се оне могу решити само ако се уведеу функције које се при решавању једначина нижег степена не употребљују.

Ако, аналого, у случају неке диференцијалне једначине кажемо да се она може решити, то онда не ским функцијама, експоненцијалним функцијама, логаритамским функцијама, трогонометриским функцијама и циклометриским функцијама. Једначина

$\frac{dy}{dx} = 2x$ еквивалентна је једначини:

$$y = x^2 + A$$

Претпоставимо међутим да су нам особине логаритма непознате, а да треба решити диференцијалну једначину

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

добили бисмо $y = A + \int \frac{dx}{x}$. Стављајући $\int \frac{dx}{x} = f(x$ доказали бисмо једначину $f(x) + f(y) = f(xy)$, те бисмо се тиме упознали са особинама нове функције тако да би је могли уврстити у функције које су нам већ познате.

Али и онда, кад не бисмо умели да изведемо особине функције $f(x)$, сматрали бисмо вредност од y дату изразом $A + \int \frac{dx}{x}$ за решење диференцијалне једначине.

Уопште:

<u>Сматраћемо да је диференцијална једначина решена и онда када је вредност зависно променљиве претстављена као функција независно променљиве, било то помоћу "познатих" функција, било помоћу интеграла,</u>

иста извести помоћу познатих функција или не.

Тако је на пример: $y = A + \int \frac{e^x}{x} dx$ решења једначине $x \frac{dy}{dx} = e^x$ иако се вредност од y може дати само у том облику, уколико нећемо да уведемо нову функцију чије се особине могу утврдити. Тако решавање диференцијалних једначина стално доводи до нових функција које повећавају број оних које већ познајемо.

6/. Пре него што пођемо даље објаснићемо неколико уобичајених израза.

Свака једначина која даје везу између зависно променљивих, њихових извода ма кога реда и независно променљивих зове се "диференцијална једначина".

Диференцијалне једначине се деле у две врсте:

I. "Обичне диференцијалне једначине": то су оне у којима се јавља само једна независно променљива, било експлицитно или имплицитно, и у којој су сви изводи узети по тој променљивој. Ако би било више зависно променљивих онда је за њихово потпуно одређивање потребно онолико једначина колико има зависно променљивих. Тако нам на пример може бити дато $\frac{d^2x}{dt^2} + \mu x = 0$, где је x функција независно променљиве t;

или:
$$\left.\begin{aligned}(x^2+y^2)^{3/2}\frac{d^2x}{dt^2} + \mu x = 0\\ (x^2+y^2)^{3/2}\frac{d^2y}{dt^2} + \mu y = 0\end{aligned}\right\},$$

где су x и y функције од t

II. "Парцијалне диференцијалне једначине": то су оне у којима се јављају најмање две независно променљиве и парцијални изводи узети по једној или по свима променљивим. Ако има више зависно променљивих онда мора бити исто онолико једначина колико има зависно променљивих; но такви се систему једначина сразмерно ретко јављају.

Као пример парцијалних диференцијалних једначина навешћемо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0\,,$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial y}&=\frac{\partial \psi}{\partial y}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}&=-\frac{\partial \psi}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

"Ред" неке диференцијалне једначине једнак је реду највишег извода кога она садржи.

Претпоставићемо да су све диференцијалне једначине које се јављају алгебарске у односу на изводе.

"Степен" диференцијалне једначине је у том случају изложитељ највишег извода, када је једначина доведена на рационални облик, и када у њој нема разломака.

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{a}{\frac{dy}{dx}}$$

је првога реда другог степена; једначина

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = a\frac{d^2y}{dx^2}$$

је другога реда и другога степена.

Диференцијална једначина се зове **линеарна** ако је таква да се у њој, пошто је рационализована и ослобођена разломака, налазе изводи и зависно промењива на првом степену и да се сем тога не јављају поризводи тих величина, док су коефицијенти или константе или функције независно промењиве.

Следеће једначине су примери линеарних једначина:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

Најопштија релација која постоји између промењивих а не садржи њихове изводе, назива се опште решење или општи интеграл.

7/. Да би се из неке дате диференцијалне једначине добио општи интеграл, поступа се најчешће тако да се изведе први интеграл једначине, тј. једначина чији је ред за јединицу нижи од реда првобитне једначине, и која садржи једну произвољну, тада се тражи први интеграл ове последње једначине, а то је онда други интеграл првобитне једначине итд., све док изводи не ишчезну. То ће наступити онда, када је тај поступак поновљен онолико пута колико износи ред првобитне диференцијалне једначине. Но, свака трансформација којој можемо подвргнути јендачину пре интеграције имаће утицаја на облик првог интеграла, и како се једна једначина може трансформисати на разне начине, то ћемо имати одговарајући број различитих првих интеграла. Међутим сви они не морају бити независни један од другога; и, доиста, показаће се ово: ако је једначина n -тога реда, онда она не може имати више од n независних првих интеграла.

Тако су на пример први интеграли диференцијалне једначине $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ ови:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=A^2$$

$$\frac{dy}{dx}\mathrm{Cos}\,x+y\,\mathrm{Sin}\,x=B$$

$$-\frac{dy}{dx}\mathrm{Sin}\,x+y\,\mathrm{Cos}\,x=C,\quad \frac{dy}{dx}=y\,\mathrm{Ctg}(x+\alpha);$$

Но они нису независни, јер су четири константе A, B, C, α, везане једначинама

$$B=A\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$C=A\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

Ако смо тако у ма коме случају добили систем првих интеграла, онда га можемо употребити као симултани систем из кога се могу елиминисати изводи највишег реда, а када се добије онолико независних првих интеграла колико износи ред једначине, онда се из њих могу елиминисати сви изводи да би се добио општи интеграл. Тако из другог и трећег интеграла у претходном систему можемо извести $y = B\sin x + C\cos x$ а из првог и четвртог: $y = A\sin(x+\alpha)$, а сваки од ових резултата је општи интеграл; но како се из релација између констаната види ова се решења поклапају.

8/. Прећи ћемо сада на доказивање тврђења што смо их поставили у последњем параграфу; стварно, ми ћемо их само учинити вероватним, али их нећемо строго доказати. Строги доказ изискује сретства теорије функција и мора се заснивати на теореми егзистенције, која се може наћи на неком другом месту.

<u>Диференцијална једначина n -тог реда има само n независних првих интеграла.</u>

Из онога што је до сада речено, јасно је да однос између x и y који садржи n констаната доводи до диференцијалне једначине n -тог реда. Ако дати однос диференцијалимо $n-1$ пута узастопно, онда ће n добијених једначина садржати све изводе до $n-1$ закључно, тако да ће са првом бити свега n једначина. Но из n једначина у којим се јављају n величина, могу се, уопште, елиминисати све величине сем једне. Означићемо произвољне константе са $C_1, C_2 \ldots\ldots C_n$, а из n једначина које имамо, елиминисаћемо све произвољне константе сем C_1. Добијена једначина садржаће промењиве, изводе од y до $n-1$, закључно и најзад произвољну константу C_1 она ће зато претставити први интеграл диференцијалне једначине n -тог реда која одговара датом односу. Узмимо исто тако да елиминишемо све константе сем C_2 једначина коју ћемо добити садржаће C_2 и, као и раније, изводе од y до $n-1$ закључно, те ће претстављати још један први интеграл диференцијалне једначине; но овај ће бити независан од претходнога, јер је C_2 независно од C_1 . Поступимо ли овако редом са свима константама, то ћемо добити n првих интеграла, који не зависе један од другога, и од којих се свако добија елиментацијом свих n независних констаната сем једне.

Како се у општој једначини јавља само n међусобно независних констаната, то мора свака друга која би се јавила да зависи од $C_1, C_2 \ldots\ldots\ldots C_n$ Нека је A једна така константа, и нека је веза између њих претстављена једначином $\psi(A_1, C_1, C_2 \ldots\ldots C_n) = 0$ онда се из ове једначине, првобитног односа и $n-1$ једначина добијених диференцијом /дакле из укупно $n+1$

једначина/, могу елиминисати n константата C, а резултат ће садржати изводе до $n-1$ закључно и константу A. Али први интеграл нађен на овај начин није независан од оних n које смо већ добили; јер ако замислимо да смо помоћу разних једначина у којима се јавља само једна једина величина C изразили вредност ових величина као функцију извода и y n заменили у једначину $\psi = 0$, онда ће она садржати све изводе до $n-1$ и константу A, те ћемо добити исту једначину коју и мало пре. Стварно су оба поступка само различите методе које се употребљавају да би се постигао исти резултат, а други нам поступак показује да се тако добијени први интеграл може извести ив осталих n првих интеграла. Зато диференцијална једначина n-тог реда не може имати више од n независних првих интеграла.

9/. Овде је потребно извести два помоћна става којима ћемо се у будуће често служити.

<u>I помоћни став.</u> Нека су $u_1, u_2 \dots\dots u_n$ функција n независно променљивих $x_1, x_2 \dots\dots x_n$. Ако ове функције идентички задовољавају релацију

$$(1) \quad F(u_1, u_2, \dots\dots u_n) = 0$$

тако да $u_1, u_2 \dots\dots u_n$ нису међусобно независни, онда је идентички задовољена и једначина

$$(2)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

Како је једначина /1/ идентички задовољена ако се у њој замене $u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$, са њиховим вредностима израженим помоћу независно промењљивих, то су парцијални изводи од F по свакој од ових промењљивих, једнаки нули. Зато ћемо добити

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots\cdots \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots\cdots \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \cdots\cdots \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0 \end{vmatrix}$$

Ако из ових n једначина које су линеарне и хомогене по $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ елиминишемо те величине добићемо као резултат елиминације детерминанту:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

а она је идентички задовољена. Но, вредност детерминанте се не мења ако се смене врсте и колоне; ако из-онда ће ова једначина прећи у једначину /2/ која је, дакле, идентички задовољена.

<u>II помоћни став.</u> И обрнуто је тачно; ако су $u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots u_n$, функције n независно променљивих $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$, и ако је идентички задовољена једначина

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

онда су функције $u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots u_n$, зависне једна од друге и везане релацијом облика $F(u_1, u_2 \ldots\ldots u_n) = 0$

Ако $n-1$ функција $u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots u_n$, нису међусобно независне, онда је став кога треба доказати без даљнега тачан; мићемо зато претпоставити да су оне независне.

Између n функција u можемо елиминисати $n-1$ променљиву, ако на тај начин не буде елиминисана променљива x_n, онда се резултат може писати у облику $u_n = \varphi(u_1, u_2 \ldots\ldots u_{n-1}, x_n)$. Ако условну једначину /2/ напишемо

$$\frac{\partial(u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots u_n)}{\partial(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n)} = 0$$

онда се став о множењу детерминаната може написати у облику

$$\frac{\partial(u_1,u_2\dots u_n)}{\partial(x_1,x_2\dots x_n)}=\frac{\partial(u_1,u_2\dots u_{n-1}\varphi)}{\partial(u_1,u_2\dots u_{n-1}x_n)}\times\frac{\partial(u_1u_2\dots u_{n-1},x_n)}{\partial(x_1x_2\dots x_{n-1}x_n)}$$

Лева је страна по претпоставци једнака нули. Како су функције $u_1, u_2 \dots\dots u_{n-1}$, међусобно независне, то је први чинилац на десној страни једнак $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$ док је други једнак

$$\frac{\partial(u_1,u_2\dots\dots u_{n-1})}{\partial(x_1,x_2\dots\dots x_{n-1})}$$

Зато мора један од њих бити једнак нули. Ако је то први, онда је φ експлицитно независно од x_n, тако да је u_n функција од $u_1, u_2 \dots\dots u_{n-1}$, и стога постоји веза између првобитних n функција. Ако је последњи чинитељ једнак нули, онда је $\partial(u_1\dots u_{n-1})=0$ а ова је једначина потпуно аналога датој условној једначини, само се у њој јавља само $n-1$ функција $n-1$ променљиве, јер се за диференцијације које се још јављају x_n може сматрати за константу. Са овом једначином поступамо исто као и са пређашњом, и налазимо: или постоји веза између $u_1, u_2 \dots\dots u_{n-1}$ као функција од $x_1, x_2 \dots\dots x_{n-1}$, или мора важити нови услов за $n-2$ функције $n-2$ променљиве. Ако постоји релација између $u_1, u_2 \dots\dots u_{n-1}$, онда ће она бити облика $\psi(u_1,u_2\dots u_{n-1},x_n)=0$ а она ће садржати x_n јер смо претпоставили да су $u_1, u_2 \dots\dots u_{n-1}$ међусобно независне. Из $\psi=0$ и $u_n=\varphi$ можемо елиминисати x_n, те тако добијамо релацију између

$$u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots u_{n-1}$$

Поступајући даље тако и смањујући увек за јединицу број функција које улазе у условну једначину, можемо да докажемо да је тврђење, изнесено у нашем ставу једна од нужних последица сваке редукције ма које релације. И када је најзад редукција поновљена $n-1$ пут онда као јединa последица остаје то, да је свака функција произвољно изабрана између n функција, u рецимо u_r, таквога облика да задовољава једначину $\frac{\partial u_r}{\partial x_s}=0$, где је x_s, једна од n промењљивих x. Но то није случај, јер свака функција u садржи по неколико од промењљивих. Из тога следи тачност нашега става.

10/. Специјалан случај општег помоћног става је следећи: нека су U и V две функције од две независно промењљиве x и y; ако се V може изазити као функција само од U, онда мора бити задовољена једначина:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}=0$$

и, обратно, ако је та једначина задовољена, онда за све вредности од x и y постоји између U и V релација облика $V=f(U)$

Пример 1. Да ли су функције:

$x+2y+z, \ x-2y+3z, \ 2xy-xz+4yz-2z^2$

међусобно независне?

Условна једначина је:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2y-z \\ 2 & -2 & 2x+4z \\ 1 & 3 & -x+4y-4z \end{vmatrix} = 0$$

а она је очигледно задовољена, јер је: 3. ред = 2. /први ред/ -½/други ред/. Да бисмо нашли релацију која постоји између њих, означимо их са u_1, u_2, u_3 па ћемо имати: $2x=u_1+u_2-4z$, $4y=u_1-u_2+2z$ а одатле супституцијом ових вредности $4u_3=u_1^2-u_2^2$

Пример 2. Доказати да су функције:

$ax^2+by^2+cz^2, \ Ax+By+Cz,$

$a^2x^2(B^2c+C^2b)+b^2y^2(C^2a+A^2c)+c^2z^2(A^2b+B^2a)-2abc(BCyz+CAzx+ABxy)$

међусобно независне и наћи везу између њих.

ДРУГО ПОГЛАВЉЕ

диференцијалне једначине првог реда

11/. Општа диференцијална једначина првог реда може се написати у облику $F(x,y,\frac{\delta y}{\delta x})=0$ где је F рационална функција у односу на изводе. У овом општем облику се диференцијална једначина не може интегрирати; али постоје зато извесни специјални облици на које се могу свести многе једначине, а који дозвољавају непосредно решавање. Те облике ћемо звати главни облици.

12/. Но пре но што би их појединачно посматрали доказаћемо један став који је само специјалан случај општег става наведеног у параграфу 8, наиме, да диференцијална једначина, која се може написати у облику

$$M\frac{dy}{dx} = N$$

где су M и N једнозначне функције од x и y, има само један једини независни општи интеграл.

Претпоставино да смо, када би то било могуће, добили два општа интеграла $\varphi_1(x,y) = a$, $\varphi_2(x,y) = b$. Онда из прве једначине добијамо за $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

па је зато: $M\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + N\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0$

Поступимо ли на исти начин и са другом једначином, то ћемо добити једначину:

$$M\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + N\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0$$

Елиминацијом M и N из ових једначина добијамо:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

а то нам показује да је φ_2 функција од φ_1. Зато општи интеграли нису независни један од другога, него се други може написати у облику $F(\varphi_1) = b$ што се може разрешити у једначину облика: $\varphi_1 = a$, а свака од њих је само понављање првог од два општа интеграла.

Ако се, дакле, приликом решавања неке такве диференцијалне једначине добије ма који општи интеграл, онда се он може сматрати за опште решење једначине, јер се из њега могу извести сви други интеграли.

ПРВИ ГЛАВНИ ОБЛИК: ПРОМЕНЉИВЕ СЕ МОГУ РАСТАВИТИ

13/. Једначина $Mdy = Ndx$ може се увек решити ако се променљиве могу раздвојити.

У том случају се једначина може написати у облику $Ydy = Xdx$ где је Y функција од y, а X функција од x

Једначина се онда може интегралити у облику $\int Ydy = \int Xdx + A$ где је A произвољна константа.

Пример 1. Решити једначину

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1-y^2}{1-x^2}\right)^{1/2} = 0$$

Променљиве се могу раставити, те једначина постаје

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Њен интеграл је $\arcsin y + \arcsin x = C$. Но једначина се може написати и у облику

$$\sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$$

што нам после парцијалних интеграција даје

$$y\sqrt{1-x^2} + \int\frac{xy\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + x\sqrt{1-y^2} + \int\frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

Но како је

$$\frac{xy\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

то је интеграл: $y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} = C$

Ово нам даје објашњење става из претходног параграфа, јер се други општи интеграл може извести из првог на тај начин што ће се на обема странама узети синус а између констаната поставити релацију $C = \sin c$

Пример 2. Решити једначину:

$$(x-y^2)dx + 2xy\,dy = 0$$

Променљиве се неће моћи раставити одмах, него тек после једне супституције. Ако ставимо $y^2 = v$, онда ће једначина постати $x\,dx + x\,dv - v\,dx = 0$

или $\frac{dx}{x} + d\left(\frac{v}{x}\right) = 0$

па је $\lg x + \frac{v}{x} = \text{const.}$

или $xe^{\frac{y^2}{x}} = A$

Пример 3. Решити једначине:

/1/ $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0$

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$$

2/ $\sec^2 x \, tg\, y \, dx + \sec^2 y \, tg\, x \, dy = 0$

$tg\,x . tg\,y = C$

3/ $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$

Ставити $x+y=u$ онда je: $x+y=a\,tg\,\frac{y-C}{a}$

4/ $(1+y^2)dx - \left[y+\sqrt{1+y}\right]\sqrt{(1+x)^3}\,dy = 0$

$C - 2\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}\log(1+y^2) = \int \frac{\sqrt{1+y}\,dy}{1+y^2}$

5/ $(y-x)\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = n\sqrt{(1+y^2)^3}$

Ставити: $y = \frac{x+tg\,u}{1-x\,tg\,u}$ онда je $arc\,tg\,y = C + n\int\frac{du}{n-\sin u}$

ДРУГИ ГЛАВНИ ОБЛИК:

ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА ПРВОГА РЕДА.

14/. Ако je једначина првога реда линеарна, онда се она може писати у облику $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ где су P и Q функције од x

Ако je Q идентички једнако нули, онда се интеграл може наћи по § 13 те излази да je

$$y = u . e^{-\int Pdx}$$

где je u нека константа.

Али када Q није идентички једнако нули ставићемо y у исти облик, само нећемо u сматрати за константу. Стављајући ту вредност од y у првобитну једначину добијамо

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx} - Pu\right)e^{-\int Pdx}$$

$$\frac{}{dx}e \quad = Q$$

тако да је $$\frac{du}{dx} = Qe^{\int Pdx}$$

дакле $$u = C + \int Qe^{\int Pdx}dx$$

где је C произвољна константа.

Зато је $$y = ue^{-\int Pdx}$$

$$= Ce^{-\int Pdx} + e^{-\int Pdx}\int Qe^{\int Pdx}dx$$

општи интеграл наше диференцијалне једначине.

Примедба 1. Ова метода, да се прво постави интеграл диференцијалне једначине за Q које је идентички једнако нули, а затим за Q које није идентички једнако нули, да се величина u у интегралу узме као променљива, зове се метода варијација констаната. Она се често примењује на диференцијалне једначине другог и вишег реда.

Примедба 2. Горње испитивање показује да је $$\frac{dy}{dx} + Py = \frac{du}{dx}e^{-\int Pdx}$$

и да стога $$e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right)dx$$

постаје тотални диференцијал. Функција као што је $e^{\int Pdx}$ којом треба помножити неку функцију $\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)dx$ да би ова постала тотални диференцијал, назива се често интеграциони фактор.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

Као и у општем случају, овде је:

$$ye^{\int\frac{xdx}{1+x^2}} = C + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} e^{\int\frac{xdx}{1+x^2}}$$

$$y\sqrt{1+x^2} = C + \int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = C + \log\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

Пример 2. Решити једначине:

/1/ $x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y = ax^3$

$$y = Cx\sqrt{x^2-1} + ax$$

/2/ $\frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$$

/3/ $y\frac{dy}{dx} + cy^2 = a\cos(x+\beta)$

Ставити $y^2 = \eta$; онда се за η добива једначина посматраног облика, па се добива:

$$y^2 = Ce^{-2cx} + \frac{2a}{4c^2+1}\left\{2c\cos(x+\beta) + \sin(x+\beta)\right\}$$

/4/ $\frac{dy}{dx} + y\frac{d\varphi}{dx} = \varphi(x)\frac{d\varphi}{dx}$

$$x = Ce^{-\varphi} + \varphi - 1$$

Пример 3. Показати да се решење опште једначине може написати у облику:

$$y = \frac{Q}{P} - e^{-\int Pdx}\left(C + \int e^{\int Pdx} d\frac{Q}{P}\right)$$

/прву вредност добијену за y парцијално интегрирати и заменити C са $-C$ /

15/. Један важан облик који је у вези са првим, а може се решити по истој методи, jесте:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

где су P и Q функције од x

ти $$-\frac{1}{n-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)+P\frac{1}{y^{n-1}}=Q$$

или $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)-(n-1)P\frac{1}{y^{n-1}}=-Q(n-1)$$

а то је главни облик кога смо управо обрадили. Опште решење је $\frac{1}{y^{n-1}}e^{-(n-1)\int P dx}=C-(n-1)\int Qe^{-(n-1)\int Pdx}dx$

Пример 4. Решити једначину

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^2\log x$$

После показане трансформације једначина ће постати:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y}\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\log x$$

а њен општи интеграл је:

$$\frac{1}{y}e^{-\int\frac{dx}{x}}=C-\int\frac{\log x}{x}e^{-\int\frac{dx}{x}}dx$$

$$\frac{1}{xy}=C-\int\frac{\log x}{x^2}dx=C+\frac{\log x}{x}+\frac{1}{x}$$

па је: $$\frac{1}{y}=1+cx+\log x$$

Пример 5. Решити једначине:

/1/ $\frac{dz_1}{dx}+2xz=2ax^3z^3$ $\left[z^{-2}=Ce^{2x^2}+ax^2+\frac{1}{2}a\right]$

/2/ $(1-x^2)\frac{dz}{dx}-xz=axz^2$ $\left[z^{-1}=C\sqrt{x^2-1}-a\right]$

/3/ $\frac{dy}{dx}+xy=y^2\sin x$ $\left[y^{-1}=Ce^{\frac{1}{2}x^2}-e^{\frac{1}{2}x^2}\int e^{-\frac{1}{2}x^2}\sin x\,dx\right]$

/4/ $\frac{dy}{dx}(x^2y^3+xy)=1$ $\left[x^{-1}=Ce^{-\frac{1}{2}y^2}-y^2+2\right]$

Пример 6. Показати да све четири једначине у § 7 доводе до истог општег интеграла.

16/. Ако је једначина првог степена и облика $M\frac{dy}{dx}=N$, онда се зове "хомогена" ако су M и N хомогене функције истога степена од x и y. У том случају можемо ставити:

$$M = x^r\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$N = x^r\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

где је r степен од M и N. Ако ставимо $y=vx$ где је v нова променљива, то ће једначина прећи у следећу:

$$\left(v + x\frac{dv}{dx}\right)\varphi(v) = \psi(v)$$

или:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\varphi(v)dv}{v\varphi(v)-\psi(v)} = 0$$

у којој су променљиве растављене. Интеграл овога је:

$$\log x + \int\frac{\varphi(v)\,dv}{v\varphi(v)-\psi(v)} = A$$

Општи интеграл се добива кад се после извршене интеграције v замени са $\frac{y}{x}$.

Примедба. Овај нам резултат даје још један пример за интеграцијони фактор, за који је већ био дат пример у § 14, примедба 2.

Једначина се може написати у облику $Mdy-Ndx=0$, тако да је: $x^r\varphi(v)(vdx+xdv)-x^r\psi(v)dx=0$ или $x^r\left[\varphi(v)v-\psi(v)\right]dx+x^{r+1}\varphi(v)dv=0$

Ако је $\varphi(v)v-\psi(v)$ идентички једнако нули онда је x^{-r-1} интеграцијони фактор, јер претвара једначиренцијал. Али ако $v\varphi(v)-\psi(v)$ није идентички једнако нули, онда ће наша једначина деобом са $x^{r+1}[v\varphi(v)-\psi(v)]$ прећи у:

$$\frac{dx}{x}+\frac{\varphi(v)\,dv}{v\varphi(v)-\psi(v)}=0$$

чија је лева страна потпун диференцијал.

Но како је:

$$My-Nx=x^r y\varphi\left[\left(\frac{y}{x}\right)\right]-x^{r+1}\psi\left(\frac{y}{x}\right)=x^{r+1}[v\varphi(v)-\psi(v)],$$

то је $\frac{1}{My-Nx}$ интеграциони фактор, под претпоставком да $My-Mx$ није идентички једнако нули.

В/. Ако једначина није првог степена, али је хомогена по x и y онда се може писати у облику:

$$F\left(\frac{y}{x},\frac{dy}{dx}\right)=0$$

То је случај који смо већ продискутовали. Постоје два пута којима се може ићи даље.

Први је тај да се једначина реши по $\frac{dy}{dx}$ нека једно од решења буде претстављено једначином:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Други пут је тај да се једначина реши по $\frac{y}{x}$; тада се добија:

$$\frac{y}{x}=f_1\left(\frac{dy}{dx}\right)=f_1(p),$$

или $y=xf_1(p)$, где је p написано уместо $\frac{dy}{dx}$. Диференцијацијом по x следује одавде:

$$p=f_1(p)+xf_1(p)\frac{dp}{dx}$$

а одатле: $$\frac{dx}{x}=\frac{f_1'(p)\,dp}{p-f(p)}$$

$$\log x = C + \int \frac{f_1(p)\,dp}{p - f(p)} = C + \psi(p)$$

Ако елиминирамо p из те једначине и из једначине $y = xf_1(p)$ добићемо општи интеграл.

Није, међутим, увек корисно елиминисати p оно се штавише може задржати као параметар тачке на одговарајућој кривој, аналого примени ексцентричног угла код тачке на елипси.

C/. У случају једначине:

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

је каткад корисније или лакше изразити $\frac{y}{x}$ и $\frac{dy}{dx}$ неком помоћном променљивом u , него решити једначину по $\frac{y}{x}$ или по $\frac{dy}{dx}$. Тада добијамо једначине облика.

$$\frac{y}{x} = f(u) \quad , \quad \frac{dy}{dx} = g(u)$$

Прва нам даје $y = xf(u$ па је отуда:

$$\frac{dy}{dx} = f(u) + xf(u)\frac{dy}{dx}$$

те следује:

$$g(u) - f(u) = xf'(u)\frac{du}{dx}$$

Променљиве се могу раставити, те добијамо:

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{f'(u)\,du}{g(u) - f(u)}$$

а одатле:

$$\log x = A\frac{f'(u)\,du}{g(u) - f(u)}$$

Где је **A** нека произвољна константа. Комбинована са једначином $y = xf(u)$ ова нам једначина даје општи интеграл првобитне једначине.

$$x + y\frac{dy}{dx} = 2y$$

Ако ставимо $y = vx$, то ће једначина прећи у:

$$\frac{v\,dv}{(1-v)^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

одакле следује:

$$\frac{1}{1-v} + \log(1-v) + \log x = A$$

или:

$$(x-y)e^{\frac{x}{x-y}} = e^{A} = C$$

Пример 2. Решити једначине:

/1/ $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$ $\left[y = Ce^{\frac{y}{x}}\right]$

/2/ $x + y\frac{dy}{dx} = my$

/Интеграл ће бити различитог облика према томе да ли је $m \gtreqless 2$. Ако је $m > 2$ и $1 - mv + v^2 = (\mu - v)\left(\frac{1}{\mu} - v\right)$, онда је: $\log(x^2 - mxy + y^2) + \frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\log\frac{y-\mu x}{\mu y - x} = C$

Ако је $m < 2$, и $m = 2\cos\lambda$, биће: $\log(x^2 - mxy + y^2) + 2\,\mathrm{cotg}\,\lambda\,\mathrm{arctg}\frac{y - x\cos\lambda}{\sin\lambda} = C$, Ако је, најзад, $m = 2$, биће:

$$(x-y)e^{\frac{x}{x-y}} = C$$

Пример 3. Решити једначину:

$$(ax + by + c)\frac{dy}{dx} = Ax + By + C$$

Треба ставити $x = h + \xi$, $y = k + \eta$ и изабрати h и K тако да буде

$$ah + bk + c = 0, \quad Ah + Bk + C = 0$$

тада ће једначина постати:

$$(a\xi + b\eta)\frac{d\eta}{d\xi} = A\xi + B\eta$$

различито од ових разломака, онда једначине које одређују h и k не могу заједно постојати. Ставимо ли да је сваки од једнаких разломака једнак m , то је:

$$(ax+by+c)\frac{dy}{dx} = m(ax+by)+C$$

Ако се стави $ax+by=v$, биће:

$$a+b\frac{mv+C}{v+c} = \frac{dv}{dx}$$

те су на тај начин променљиве растављене. Ако је $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = n$, онда једначина гласи:

$$\frac{dy}{dx} = n$$

па је: $y = nx + E$

Пример 4. Решити једначине

/1/ $3y-7x+7=(3x-7y-3)\frac{dy}{dx}$ $\left[(y+x-1)^5\cdot(y-x+1)^3 = C\right]$

/2/ $(2x+4y+3)\frac{dy}{dx}=2y+x+1$ $\left[4x+8y+5=Ce^{4x-8y}\right]$

/3/ $(3x+5y+6)\frac{dy}{dx}=7y+x+2$ $\left[x+5y+2=C(x-y+2)^4\right]$

Пример 5. Показати да се једначина:

$$(P+Qx)\frac{dy}{dx}=R+Qy$$

у којој су P, Q и R хомогене функције од x и y , и то P и R истога степена, може решити супституцијом $y = vx$

Решење: ако је $P=x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $Q=x^n\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $R=x^m\chi\left(\frac{y}{x}\right)$ и $\frac{y}{x}=v$ добија једначина облик:

$$dv \qquad v\varphi(v)-\chi(v) \qquad v\varphi(v-\chi(v))$$

који је одређен у § 15.

Пример 6. Решити једначину:

$$(Ax^2+Bxy+\alpha x+\beta y+\gamma)\frac{dy}{dx}=Axy+By^2+\alpha' x+\beta' y+\gamma'$$

Решење: Кад би било $\gamma=\gamma'=0$ онда би једначина имала онај облик који је одређен у претходном задатку. Да би се довела на тај облик, треба ставити $x=\xi+h$; $y=\eta+k$ и: $Ah+Bk=\lambda$, $\alpha h+\beta k+\gamma=\mu$, $\alpha' h+\beta' k+\gamma'=\nu$

С тим дата једначина постаје:

$$\{\lambda h+\mu+(\lambda+\alpha)\xi+(Bh+\beta)\eta+(A\xi+B\eta)\xi\}\,d\eta=$$
$$=\{\lambda k+\nu+(Ak+\alpha')\xi+(\lambda+\beta')\eta+(A\xi+B\eta)\eta\}\,d\xi$$

а ова ће добити облик који желимо ако ставимо

$\lambda h+\mu=0$ и $\lambda k+\nu=0$. Да бисмо одредили h и k треба их елиминисати из три једначине:

$$Ah+Bk=\lambda,\ \alpha h+\beta k+\gamma=-\lambda h,\ \alpha' h+\beta' k+\gamma'=-\lambda k$$

и израчунати један корен $\lambda=\lambda_1$ кубне једначине која се добија из израза

$$\begin{vmatrix} -\lambda & A & B \\ \gamma & \alpha+\lambda & \beta \\ \gamma' & \alpha' & \beta+\lambda \end{vmatrix}=0$$

Ако сада ставимо ту вредност од λ у ма које две од претходних једначина, онда се из њих добијају вредности од h и k.

17/. Ако нацртамо криве чије су једначине општи интеграли хомогених диференцијалних једначина, онда видимо да оне чине систем сличних кривих. Јер који сече све те криве, а са x -осом заклапа угао ϑ , онда ће нагиб тангенте на криву, у тачки у којој радиус вектор сече криву, према x -оси бити одређен једначином:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = f_1\left(\frac{y}{x}\right) = f_1(\operatorname{tg}\vartheta),$$

па су зато све тангенте у оним тачкама које леже на радиус вектору паралелне. Зато су све криве међу собом сличне и слично леже.

ЧЕТВРТИ ГЛАВНИ ОБЛИК

18/. Ради се о диференцијалним једначинама у којима се једна од променљивих не јавља експлицитно. Посматраћемо прво класу у којој недостаје независно променљива. Једначина ће тада бити облика:

$$\varphi\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Као и код опште једначине III главног облика може се и овде на два начина ићи даље. Можемо, ако је то могуће, решити једначину по $\frac{dy}{dx}$, тако да добијемо

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

а у овој су једначини променљиве растављене. Општи интеграл ће бити

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + A$$

Или можемо, ако је то могуће, да решимо једначину по y ; и , ако је једно решење једначине

$$y = f_1\left(\frac{dy}{dx}\right) = f_1(p)$$

$$p = f_1'(p)\left[\frac{dp}{dx}\right]$$

у којој се променљиве могу раставити. Њен интеграл је

$$x = \int \left[\frac{f_1'(p)}{p}\right] dp + A$$

и, ако одавде и из једначине $y = f_1(p)$, елиминишемо величину p добићемо општи интеграл. Може, међутим бити корисно да се p не елиминише.

Посматраћемо сада класу једначина у којој се зависно променљива не јавља експлицитно. Те ће једначине бити облика:

$$\varphi_1\left(x, \left[\frac{dy}{dx}\right]\right) = 0$$

Но како је $\left[\frac{dy}{dx}\right] \cdot \left[\frac{dx}{dy}\right] = 1$, можемо писати:

$$\varphi_1\left(x, \left[\frac{1}{\left[\frac{dx}{dy}\right]}\right]\right) = 0$$

или $\Phi\left(x, \left[\frac{dx}{dy}\right]\right) = 0$; ова једначина спада у класу која је управо испитана и може се, интегралити. И једначина $\varphi_1 = 0$ се може интегралити непосредно, без трансформације у $\Phi = 0$, решавајући, ако је то могуће, $\varphi_1 = 0$ по $\left[\frac{dy}{dx}\right]$:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right] = F(x)$$

па је општи интеграл: $y = \int F(x)\,dx + A$

Или ћемо, ако је то могуће, изразити x као функцију од $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ и добити

$$x = F_1\left(\left[\frac{dy}{dx}\right]\right) = F_1(p)$$

Диференцирамо ли ову једначину по y /а та променљива недостаје/, биће:

$$\frac{1}{p} = F_1 (p)\frac{\quad}{dy},$$

а интеграл ове једначине је:

$$y = \int p F_1'(p)\,dp + C$$

Ако ову једначину спојимо са $x = F_1(p)$ добићемо општи интеграл.

У једначини $\varphi(y,p)=0$ је понекад корисније или лакше изразити y и p помоћу неке помоћне променљиве u, него решавати једначину по y или p. Тада ћемо добити једначине облика, $y = f(u)$, $p = g(u)$. Прва нам даје: $p = f'(u)\frac{du}{dx}$, па је стога $dx = \frac{f'(u)}{g(u)}du$; а одавде је

$$x - c = \int \frac{f'(u)}{g(u)}du$$

Ова једначина даје, спојена са $y = f(u)$, општи интеграл.

Пример 1. Показати како се може добити општи интеграл $\psi(x,p)=0$ ако се x и p изразе помоћу помоћне промењиве u, уместо да се једначина решава по p.

Пример 2. Решити једначине:

/1/ $$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(x+a)^2}{x^2 + 2ax}$$

$$\left[x + a = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y+c}{a}} + e^{\frac{-y+c}{a}}\right)\right]$$

/2/ $$y = a\frac{dy}{dx} + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Решење: треба елиминисати p из једначина $y = ap + bp^2$ и $x = C + a\log p + 2bp$

ПЕТИ ГЛАВНИ ОБЛИК

19/. Нека је диференцијална једначина првога реда а η -тог степена. Нека је она уређена по степенима извода тако да се може писати у облику:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + P_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n = 0$$

где су $P_1, P_2 \ldots\ldots\ldots P_n$, функције од x и y . Ако је сматрамо за алгебарску једначину по $\frac{dy}{dx}$ са n коренова $p_1 p_2 \ldots\ldots\ldots p_n$, /који су функције од x и y /, онда се она може написати у облику:

$$\left(\frac{dy}{dx} - p_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - p_2\right)\ldots\ldots\left(\frac{dy}{dx} - p_n\right) = 0$$

Ова једначина може постојати само ако су један или више чинитеља на левој страни једнаки нули; због тога ће свака релација између x и y , за коју један од чинитеља на левој страни бива једнак нули, бити једно од решења диференцијалне једначине, док релација за коју ниједан од чинитеља на левој страни није једнак нули, неће бити решење. Претпоставимо да су општи интеграли једначина:

$$\frac{dy}{dx} - p_1 = 0\ ;\ \frac{dy}{dx} - p_2 = 0\ ;\ \ldots\ldots\ \frac{dy}{dx} - p_n = 0,$$

/добијени једном од метода које су раније дате/, следећи: $\varphi_1(x, y, C_1) = 0\ ;\ \varphi_2(x, y, C_2) = 0\ ;\ \varphi_n(x, y, C_n) = 0$

нда израз: $\varphi_1(x, y, C_1) \cdot \varphi_2(x, y, C_2) \ldots\ldots \varphi_n(x, y, C_n) = 0$

садржи сва могућа решења дате диференцијалне једначине. Општост овога интеграла биће сачувана и онда ако ставимо да су све константе $C_1, C_2 \ldots\ldots\ldots C_n$ једнаке једна другој, а све заједно некој константи C; јер да бисмо нашли неку вредност од y, морамо једног од чинитеља на левој страни нове једначине изједначити са нулом, што нам даје једначину облика:

$$\varphi_r(x,y,C)=0$$

Но, C је произвољна константа; ако јој се даду све могуће произвољне вредности онда низ једначина које се тако добијају мора садржати све интеграле који се из одговарајућег чинитеља горњег производа могу извести. Зато добијамо општи интеграл првобитне диференцијалне једначине израз:

$$\varphi_1(x,y,C)\cdot\varphi_2(x,y,C)\ldots\ldots\varphi_n(x,y,C)=0$$

Пример 1. Решити једначину $x^2p^2-2pxy+y^2=x^2y^2+x^4$. Овде је $xp-y=\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)$, а из ове се једначине заменом $y=xz$ добија следећа:

$$\left(\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\right)=\pm dx$$

Ако се узме позитиван знак, онда је решење:

$$z=\frac{1}{2}\left[e^{x+c}-e^{-(x-c)}\right]=\mathrm{Sinhyp}(x+c)$$

Негативан знак даје: $z=\mathrm{Sinhyp}(c-x)$. Опште решење је, према томе, ово:

$$\left[y-x\,\mathrm{Sinhyp}(x+c)\right]\left[y-x\,\mathrm{Sinhyp}(c-x)\right]=0$$

Пример 2. Решити једначине:

/1/ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{a}{x}=0$ $\left[(y+C)^2=4ax\right]$

/2/ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}=1$ $\left[x^2(x^2-3y^2)^2-2Cy(y^2-3x^2)-C^2=0\right]$

/1/ $x^2p^2 + 3xyp + 2y^2 = 0$ $\quad \left[(xy - C)(x^2y - C) = 0\right]$

/2/ $x^2p^2 + 3xyp + 3y^2 = 0$ $\quad \left[x^3y^2 - 2Cx^{3/2}y\mathrm{Cos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\log x) + C^2 = 0\right]$

/3/ $p(p+y) = x(x+y)$ $\quad \left[(y - \frac{1}{2}x^2 - c)(y + x - 1 - Ce^{-x}) = 0\right]$

/4/ $p^3 - (x^2 + xy + y^2)p^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)p - x^3y^3 = 0$

$$\left[(y - \frac{x^3}{3} - C)(y - Ce^{1/2x^2})(y - \frac{1}{C - x}) = 0\right]$$

/5/ $(a^2 - x^2)p^3 + bx(a^2 - x^2)p^2 - p - bx = 0$

$$\left[(y - C + \frac{bx^2}{2})\{(y - C)^2 - (\mathrm{arc\,Sin}(\frac{x}{a})^2\} = 0\right]$$

/6/ $(1 - y^2 + \frac{y^4}{x^2})p^2 - 2\frac{y}{x}p + \frac{y^2}{x^2} = 0$

Решење: ако се једначина напише у облику $(xp - y)^2 = p^2y^2(x^2 + y^2)$ и тада стави $y = xv$ биће

$$\left(\frac{dv}{dx} + v\right)\left(\frac{dv}{dx} + 1\right) = 0$$

према томе је: $(ye^x - Cx)(y + x^2 - Cx) = 0$

/7/ $p^2 + (x + y - 2\frac{y}{x})p + xy + \frac{y^2}{x} - y - \frac{y^2}{x} = 0$

Решење: за $y = xv$ једначина постаје

$$\left(\frac{dv}{dx} + v\right)\left(\frac{dv}{dx} + 1\right) = 0$$

Отуда се добија: $(ye^x - Cx)(y + x^2 - Cx) = 0$

Пример 4. Показати да се општа једначина, хомогена по x и y , може решити супституцијама:

$$y = tx \quad , \quad x\frac{dt}{dx} = z$$

Решити затим једначину

$$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{x}{y}p - \frac{x}{2y} = 0$$

Решење. Ако је у општој једначини првога реда и n -тога степена

$$P_0 p^n + P_1 p^{n-1} + \dots\dots P_{n-1} p + P_n = 0$$

уопште за свако x, $P_x = x^r \varphi_x\left(\frac{y}{x}\right)$

и ако се стави $y = xt$ и $x\frac{dt}{dx} = z$ биће $\varphi_0(t)(z+t)^n + \varphi_1(t)(z+t)^{n-1} + \dots\dots \varphi_n(t) = 0$ или, ако уредимо по степенима од z, $\psi_0(t)z^n + \psi_1(t)z^{n-1} \dots + \psi_{n-1}(t)z + \psi_n(t) = 0$

Ако се ова једначина реши по z, добиће се n једначина облика $z = \chi_\nu(t)$ или $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\chi_\nu(t)}$

Опште решење се добија као у § 19. Решење једначине

$$p^3 - \frac{p^2}{2} + \frac{x}{y}p - \frac{x}{2y} = 0$$

јесте $(y - \frac{x}{2} - C)\{(y^{3/2} - C)^2 - x^3\} = 0$

ШЕСТИ ГЛАВНИ ОБЛИК

20/. Диференцијална једначина, која се обично назива Clairaut - ова, гласи:

$$y = px + f(p),$$

где је p стављено уместо $\frac{dy}{dx}$. Ако једначину диференцијалимо по x, биће

$$p = p + [x + f'(p)]\frac{dp}{dx}$$

тако да је или $\frac{dp}{dx} = 0$ /1/. или $x + f'(p) = 0$ /2/. Ако претпоставимо да важи /1/ онда је $p = \mathrm{Const} = C$, те општи интеграл гласи $y = Cx + f(C)$. У једначини /2/ се x јавља као функција p; ако се p елиминише из те једначине и из једначине $y = px + f(p)$, добија се исто тако један однос између x и y. Први јалне једначине, и из њега се она опет може непосредно извести: доиста, диференцирација даје $p=c$, а ако еилиминишемо c , биће: $y=px+f(p)$. Ако се сада вратимо другој релацији између x и y , добијеној елиминишући p из једначина

$$\left.\begin{aligned} y &= px+f(p) \\ 0 &= x\ +f'(p) \end{aligned}\right\}$$

онда је одмах јасно да она не садржи никакву произвољну константу и да, стога, није опште решење. Она, међутим, може ипак бити решење диференцијалне једначине; јер ако диференцијалимо прву једначину онда помоћу друге добијамо

$$\frac{dy}{dx} = p+\left[x+f'(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

уколико $\frac{dp}{dx}$ није бесконачно. Ако сада p елиминишемо из једначина

$$y = px+f(p) \qquad \frac{dy}{dx}=p$$

добићемо $$y = x\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Треба напоменути да је, што се саме елиминације тиче, p само величина која вероватно на неки начин зависи од x и y ; не мора означавати $\frac{dy}{dx}$.

Примедба: Веза између оба решења може се лако разјаснити геометриским расматрањем. Прво решење, $y=cx+f(c)$, претставља фамилију правих линија; ако та фамилија има обвојницу, онда ће се једначина ове последње добити диференцијацијом горње једначине по c,

, а одатле је $0=x+f'(c)$. Елиминишући C из ових једначина добићемо исти резултат као и да смо елиминисали p из једначина $y=px+f(p)$, $0=x+f'(p)$. Зато је крива линија претстављена првим решењем обвојница фамилије правих, коју претставља друго решење, под претпоставком да та обвојница уопште постоји. Решење диференцијалне једначине кога општи интеграл не садржи, /а може се из њега извести на начин који смо показали/, зове се "сингуларно" решење. Ми ћемо ускоро обрадити општу теорију сингуларних решења.

Пример 1. Решити једначину

$$y=xp+\frac{a}{p}$$

Прво решење је $y=Cx+\frac{a}{c}$

Друго ћемо одредити елиминишући p из прве једначине и из једначине $0=x-\frac{a}{p^2}$. Ако се p елиминише биће $y^2=4ax$. То је сингуларно решење; криву коју оно претставља додирују све праве које садржи општи интеграл.

Пример 2. Решити једначине.

/1/ $y=px+\sqrt{1+p^2}$, $\left[y=Cx+\sqrt{1+C^2}\right.$ Сингуларно решење: $\left.x^2+y^2=1\right]$

/2/ $y=px+p-p^2$ $\left[y=Cx+C-C^2\right.$ Сингуларно решење: $\left.(x^2+1)^2=4y\right]$

/3/ $ayp^2+(2x-b)p=y$

Решење: решити по x, ставити $p=\frac{1}{q}$ и диференцијалити по y. Излази да је опште решење $y^2=C(aC-b+2x)$; сингуларно решење је: $(2x-b)^2+4ay^2=0$, али оно само за негативно a претставља стварну обвојницу.

/4/ $x^2(y-xp)=yp^2$ $\left[y^2+Cx^2=C^2\right.$;нема обвојнице] /5/ $y=2xp+y^2p^3$

Решење: решити по x, ставити $p=\frac{1}{q}$ и диференцијалити по y. Опште решење је: $y^2=2Cx+C^3$, а сингуларно: $27y^4+32x^3=0$, но оно претставља стварну обвојницу само за негативно x.

21/. Постоји још један општи облик диференцијалне једначине који се може обрадити на сличан начин, наиме облик $y=xf(p)+\varphi(p)$. Да бисмо је решили диференцијалићемо је по x. Тада је

$$p=f(p)+\left[xf'(p)+\varphi'(p)\right]\frac{dp}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dp}+x\frac{f'(p)}{f(p)-p}=\frac{\varphi'(p)}{p-f(p)}$$

Ова је једначина линеарна по x, и спада у други главни облик. Ако јој је интеграл $F(x,p,C)=0$, онда се општи интеграл може добити елиминишући p из ове и првобитне диференцијалне једначине.

Пример 1. Решити једначину $x+yp=ap^2$ или $y=ap-\frac{x}{p}$. Диференцијацијом по x добија се:

$$p=a\frac{dp}{dx}-\frac{1}{p}+\frac{x}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

па је, према томе,

$$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p(1+p^2)}=\frac{ap}{1+p^2}$$

интеграл овога је

$$\frac{x\sqrt{1+p^2}}{p}=C+a\log\left\{p+\sqrt{1+p^2}\right\}$$

и са датом једначином, претставља општи интеграл.Једначина би се могла решити и диференцијацијом по y.

Пример 2. Решити једначине

/1/ $$x = yp + ap^2$$

Решење: елиминисати p из $x = yp + ap^2$, и

$$x = \left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right)(C + a \arcsin p)$$

/2/ $$y = xp + ax\sqrt{1+p^2}$$

Решење: општи интеграл чине симултане једначине

$$x = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}\,.\,[p+\sqrt{1+p^2}]^{1/a}}\,, \qquad y = \frac{C[p+a\sqrt{1+p^2}]}{\sqrt{1+p^2}[p+\sqrt{1+p^2}]^{1/a}}$$

Како је једначина хомогена, може се на њу применити § 16.

/3/ $$y = xmp + n(1+p^3)^{1/3}$$

Решење: елиминисати p из $y = mxp + n(1+p^3)^{1/3}$ и

$$x = p^{-\frac{m}{m-1}}\left(C - \frac{n}{m-1}\int \frac{p^{\frac{2m-1}{m-1}}}{(1+p^3)^{2/3}}\,dp\right.$$

/4/ $$y = yp^2 + 2px \qquad [y^2 = 2Cx + C^2]$$

/5/ $$y\sqrt{1+p^2} = n(x + yp)$$

Решење: Опште решење је: $(x-C)^2 + y^2 = (nC)^2$ сингуларно: $n^2x^2 = (1-n^2)y^2$ али оно претставља стварну обвојницу само за $n<1$, а то су праве: $nx = \pm\sqrt{1-n^2}\,y$

СИНГУЛАРНА РЕШЕЊА

22/. Из испитивања у § 20 излази да се каткад може наћи решење диференцијалне једначине које, уопште, није садржано у општем интегралу; такво решење не садржи произвољну константу. Општи интеграл мојалну вредност произвољне константе; тада то треба схватити тако да је то у исто време и сингуларно решење и специјалан случај општег решења. Прећи ћемо сада на излагање теорије сингуларних решења опште диференцијалне једначине првог реда: $\varphi(x,y,p)=0$. Ако је једначина линеарна или ако се може раставити /као код петог главног облика/ у систем рационалних линеарних једначина, онда она нема сингуларног решења; свако решење које је привидно такво претставља само партикуларни интеграл који је из општег интеграла добијен на тај начин, што је произвољној константи, коју он садржи, дата нека специјална вредност.

Можемо узети да се једначина не може раставити по p ; а ако би се могла раставити на чинитеље, који нису линеарни и не могу се раставити на линеарне, онда бисмо редом посматрали сваког од тих недељивих чинитеља.

Можемо зато сматрати да је $\varphi=0$ рационална једначина n -тог степена, која се не може редуковати. Претпоставићемо још да је φ једнозначна функција и да у њој нема члана независног од p ; ако бисмо задржали таквог чинитеља и изједначили га са нулом, он би, додуше, задовољавао једначину, али не би садржао извод. Ако се у неком случају такви чланови јављају претпоставићемо да су они прво избачени.

23/. Из расматрања у уводу / § 3 / излази да, ако су x и y координате неке тачке у равни, диференцијална једначина одређује у тој равни фамилију кривих која зависи од једног једног независног, променљивог параметра; и како диференцијална једначина у свакој тачки одређује правац криве која кроз ту тачку пролази, то ће за исту тачку бити n праваца одређених вредношћу од p у тој тачки и, према томе, n кривих које пролазе кроз сваку тачку равни.

Да би смо овај систем претставили алгебарски, потребна нам је једначина облика: $f(x,y,\ldots\ldots C_1 C_2 \ldots C_m)=0$, у којој су константе рационалне и алгебарске. Но, како је потребан само један једини независни параметар, то ће између ових m, констаната постојати $m-1$ алгебарска релација. Сем тога ће функција f бити једнозначна, а сваки ће се чинитељ, који садржи x и y /или једно од њих/, али ни једну од констаната, избацити из истог разлога који нам је дао повода да аналоге факторе избацимо из диференцијалне једначине. Како се диференцијална једначина не може раставити на простије једначине нижег степена, то се ни алгебарска једначина неће моћи раставити; јер ако би то било могуће, онда би свакој алгебарској једначини нижег степена одговарала једна диференцијална једначина нижег степена, а то је по претпоставци немогуће. У функцију смо уместо једне, увели m констаната везаних $m-1$ релацијом, из овог разлога: једначина би, у последњем случају била иста као и она која би се, у првом случају, добила када би се елиминисале све константе сем једне; а како су за те елиминације обично потребни поступци /на пр. дизање на квадрат итд./ који ће увести друге једначине а не оне које ми желимо, то ће последица свега тога бити, да завршна једначина даје више него једначину коју смо тражили. Претпоставимо на пр., да смо на неки начин добили интеграл облика.

$$\left[x^2+y^2-a(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\right]^2=a^2(x^2+y^2)$$

или, ако узмемо алгебарске константе:

$$\left[x^2+y^2-a(lx+my)\right]^2=a^2(x^2+y^2)$$

при чему константе морају задовољавати услов $l^2+m^2=1$

. Тада ће одговарајућа једначина која садржи само једну од констаната, m на пр., претстављати не само последњу једначину већ, са истим ограничењем, и следећу:

$$\left[x^2+y^2-a(-lx+my)\right]^2=a^2(x^2+y^2)$$

и због тога она не би била еквивалентна првој од једначина. Сем тога, пролазе кроз сваку тачку равни n кривих, те због тога мора једначина $f=0$ и $m-1$

релација између констаната давати за сваку тачку n система вредности за константе. Ако скуп свих констаната означимо са C, онда ће C у свакој тачки у равни имати n вредности.

24/. Посматраћемо сада образовање диференцијалне једначине из општег интеграла $f(x,y,c)=0$. Диференцијална једначина се добија ако се елиминишу константе из ове једначине из $m-1$ релација и из једначине

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\cdot\left[\frac{dy}{dx}\right]=0$$

Претпоставимо да су величине C замењене функцијама од x и y; тада ће се извођење извршити на исти начин, само као последњу једначину треба написати

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\cdot\left[\frac{dy}{dx}\right]+\left[\frac{\partial f}{\partial c}\right]\left[\frac{dc}{dx}\right]=0$$

Исти резултат као и мало пре добићемо ако је

$$\left[\frac{\partial f}{\partial c}\right]\cdot\left[\frac{dc}{dx}\right]=0$$

А да би ова једначина била задовољена мора бити или $\left[\frac{dc}{dx}\right]=0$, што значи да је C константно, или ће C бити одређено једначином ......$\left[\frac{\partial f}{\partial c}\right]=0$. Ако се вредност од C добијена на овај начин замени у функцију f, моћи ћемо, уопште, да би добили решење те диференцијалне једначине, изједначити са нулом дискриминанту од f по C, што ћемо писату у облику.

$$\mathrm{Disct}_c\, f(x,y,c)=0$$

25/. Геометриско место претстављено овом једначином јесте геометриско место свих тачака равни у којој параметарске константе C имају две или више једнаких вредности. Оно ће, дакле, претстављати:

1. Место свих чворних тачака /двојних, тројних тачака итд./ система кривих; јер у свакој таквој тачки има C, већ према броју грана криве линије које кроз њу пролазе, две или више једнаких вредности, пошто гране припадају истој кривој.

2. Место свих врхова система - ово из сличних разлога,

3. Обвојницу система кривих, коју чине једна или више кривих линија. Јер, можемо сматрати да свака тачка обвојнице припада двема узастопним кривама система, јер константе тих узастопних кривих најзад бивају једнаке. /У случају када је обвојница састављена из више кривих линија може се десити да је једна од њих само нека специјална крива система $f(x,y,c)=0$; њена једначина даје истовремено и један део обвојнице, и један партикуларни интеграл/. Ова три геометриска места називаћемо "место чворних тачака", "место врхова" и "обвојницу".

Напомена. Објаснићемо поближе како једначина

$$\mathrm{Disct}_c\, f(x,y,c)=0$$

може да претставља место чворова и врхова. Дискриминанта се добија елиминишући C из једначина:

$$f=0 \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]+p=0$$

Ако дуж неког дела криве $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$ и $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$ случајно бивају једнаки нули, онда је дуж те криве друга једначина задовољена, без обзира на p, и у том случају тачна вредност од p за диференцијалну једначину није одређена, а диференцијална једначина не мора бити задовољена.

Нека је $\varphi=0$ једначина те криве; онда ће том елиминацијом из горњих једначина у дискриминанту бити уведено φ као члан. Знамо да су за чвор или врх неке криве $f=0$ задовољене једначине

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=0 \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=0$$

зато се може очекивати да ће у дискриминанту ући место свих чворова и врхова криве $f=0$ што одговарају разним вредностима C.

26/. Ако посматрамо диференцијалну једначину $\varphi(x,y,p)=0$ и систем кривих чија је једначина њен општи интеграл, онда је јасно да је обвојница система једно решење диференцијалне једначине; јер у свакој тачки обвојнице /а то је тачка на двема узастопним кривим/ тангента има исти правац који и тангента на сваку од ових кривих у датој тачки, а како диференцијалне једначине задовољавају величине које припадају елементу неке криве система, то ће она бити задовољена и /непромењеним/ величинама које припадају елементу обвојнице.

Место чворова није решење диференцијалне једнаине; ако би то био случај, онда би вредност од x и y у ма коме чвору и одговарајућа вредност од p задовољавали диференцијалну једначину. Ако имамо у виду да је место чворова састављено из низа тачака нашег система кривих, онда ће, као што знамо, диференцијална једначина бити задовољена оним вредностима од p (у таквој тачки) које су одређене кривим линијама система што пролази кроз ту тачку. Али како тангента геометриског места чворова у таквој тачки не мора у исто време бити и тангента у тој тачки на грану неке криве система, то излази да је вредност од p за геометриско место чворова различита од оних вредности p за криву система, које заједно са координатама дотичне тачке задовољавају диференцијалну једначину. А само се случајно може десити да се вредност од p за геометриско место чворова поклапа са бредношћу од p која не припада кривој, на којој се чвор налази, већ некој другој кривој система која пролази кроз ту тачку. Због тога вредност од p за место чворова и координате те тачке неће задовољавати диференцијалну једначину, те према томе геометриско место чворова неће бити решење диференцијалне једначине. Сасвим аналога расматрања о месту врхова доводе до сасвим сличног закључка: место врхова није, уопште, решење диференцијалне једначине.

27/. Једначина обвојнице система може се извести из саме диференцијалне једначине, тј. не познајући општи интеграл. У свакој тачки обвојнице поклапају се, по правцу, најмање две гране различитих кривих; у свакој тачки имаћемо, дакле, једнаке вредности од p које припадају узастопним кривама. . Ако помоћу једначине $\left[\frac{\delta\varphi}{\delta p}\right]=0$ изразимо услов да су две вредности од p једнаке и елиминишемо p из ове и првобитне једначине /тј. ставимо да је дискриминанта од φ једнака нули/, онда ће геометриско место претстављено једначином $\mathrm{Disct}_p\varphi(x.y.p)=0$ бити геометриско место тачака у којима су две вредности од p једнаке, те ће то место очевидно претстављати и обвојницу. Но сем обвојнице ова ће једначина дати и геометриско место свих тачака:

1. У којима се додирују две гране исте криве, тј. она ће одредити све врхове; дакле, она даје, као и пре, место врхова;

2. у којима се додирују две различите али не узастопне криве; ово се место зове "место додирних тачака". Ако су, на пр., дате две фамилије концентричних кругова описаних око два средишта, онда ће место додирних тачака од по два круга, који припадају различитим системима, бити права која спаја средишта, продужена

Пошто место врхова није решено, ми ћемо га, као и пре, оставити на страни; а разлози слични онима због којих смо идбацили место чворова, показују да ни место додирних тачака није никакво решење. Према томе ће од свих ових геометриских места само једначина обвојнице претстављати једно решење диференцијалне једначине и једино ћемо њега звати сингуларно решње диференцијалне једначине. Тражећи обвојницу можемо доћи до неких других места, а она, као што смо малопре видели, нису решења, те је због тога у оваком поједином случају, уколико није добијена једначина очевидно обвојница и ништа више, потребно уверити се да ли резултат задовољава диференцијалну једначину. Ако ово не би био случај, онда може бити могућно да се једначина разложи на друге простије једначине, и једна или више од њих могу задовољавати диференцијалну једначину; оне ће онда претстављати сингуларно решење, а показаће се да су оне, које не задовољавају диференцијалну једначину, геометриска места, која по изложеним принципима, треба одбацити. Приметићемо још да место које се добија када се стави да је C -дискриминанта једнака нули садржи обвојницу као једноструког, место чворова као двоструког, а место врхова као троструког чинитеља; а да место које се добија изједначујући p -дискриминанту са нулом садржи обвојницу и место врхова као једнотеља. Ови се резултати често пишу у облику

$$\mathrm{Disct}_c f(x,y,c) = 0\, C^2 V^3 \qquad \mathrm{Disct}_p \varphi(x,y,p) = 0\, D^2 V$$

28/. Навешћемо један аналитички услов под којим ће једначина добијена елиминацијом од p из једначина $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$ претстављати једно решење диференцијалне једначине, које ће, природно, бити сингуларно решење. Замислимо да је друга једначина решена по p, да је, дакле, p изложено помоћу x и y. Замислимо да је тако добијена вредност стављена у φ и то ново φ означимо са $\bar{\varphi}$. Једначина ће постати $\bar{\varphi} = 0$. Ако ова једначина треба да буде једно од решења диференцијалне једначине, онда нас она мора довести до оне исте вредности од p, која је у њу стављена. Да би смо нашли p даје нам $\bar{\varphi}$:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} p = 0$$

а, с друге стране је $\bar{\varphi} = \varphi$, те добијамо:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + p \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

јер је $\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$. Зато је p дато једначини:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

а та се вредност од p мора поклапати са оном која би се добила из $\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$ и која би у $\varphi = 0$ по претпоставци дала решење диференцијалне једначине $\varphi(x,y,p) = 0$

, морају истовремено бити задовољени услови

$$\varphi = 0\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

Ако је p бесконачно онда мора $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ бити једнако нули.

Најбоља метода коју треба у том случају употребити да би се одлучило какав је карактер једначине која се добија елиминишући p, јесте та да се доиста испита да ли једначина претставља решење диференцијалне једначине.

29/. Треба добро пазити на то да несводљива диференцијална једначина не мора имати сингуларно решење. Означимо, на пр. дискриминату од $\varphi(x,y,p)=0$ у односу на p са u, где је u функција променљивих коефицијената од p у тој једначини, и претпоставимо да се u не може раставити на просте чинитеље. Ако је $u=0$ решење диференцијалне једначине онда се вредност од p одређује једначином

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta y}p=0$$

а једначина

$$\varphi\left(x,y-\frac{\frac{\delta u}{\delta x}}{\frac{\delta u}{\delta y}}\right)=0$$

мора идентички постојати за све вредности од x и y везане једначином $u=0$; мора, другим речима, постојати иста релација између коефицијената од p и φ и њихових извода по x и y. Но то, уопште, неће бити случај. Посматрајмо специјално једначину другог степена облика

$$Lp^2+2Mp+N=0$$

онда је сингуларно решење, ако постоји, $S=0$ где је S или једнако $LN-M^2$ или је неки чинитељ овога израза. Уопште се $LN-M^2$ неће моћи раставити на чинитеље, те оно неће ни бити решење, уколико није

$$L\left(\frac{\delta S}{\delta x}\right)^2+2M\frac{\delta S}{\delta x}\cdot\frac{\delta S}{\delta y}+N\left(\frac{\delta S}{\delta y}\right)^2=0$$

а при томе и $LN=M^2$, а то би, уопште, биле две независне симултане једначине за одређивање x и y као међусобна независна величина. Али, као што смо видели, општи интеграл диференцијалне једначине је облика $L'c^2+2M'c+N'=0$. Нека једначина има обвојницу; ако је то случај, онда $L'N'-M'^2=0$ садржи обвојницу и претставља сингуларно решење диференцијалне једначине. Кад општи интеграл нема обвојнице - а он је не мора имати чак и онда када је једначина алгебарска онда нема ни синугларног решења. Стварно су изузеци у првом случају - када диференцијална једначина има сингуларно решење - истовремено и изузеци у другом - када општи интеграл претставља систем кривих који има обвојницу. Расмотрићемо сада неколико примера за општу теорију.

Пример 1.

$$p^2y+p(x-y)-x=0$$

Услов да p буде двоструки корен јесте: $(x-y)^2+4xy=0$, тј.: $(x+y)^2=0$ или $y=-x$ а то није решење. Но, једначина се може писати у облику: $(p-1)(py+x)=0$, а решења ове једначине јесу $y-x=C$ и $x^2+y^2=C$. Лако је видети које криве линије она претстављају. Ово је пример за напомену / § 22 / да једначина која се може раставити на линеарне рационалне чинитеље нема сингуларног решења. У оба случаја треба нацртати одговарајућу слику.

Пример 2.

$$p^2 y^2 \cos^2\alpha - 2pxy\sin^2\alpha + y^2 - x^2\sin^2\alpha = 0$$

Услов да p буде двоструки корен јесте:

$$x^2y^2\sin^4\alpha = y^2\cos^2\alpha\,(y^2 - x^2\sin^2\alpha)$$

тј. $(x^2\sin^2\alpha - y^2\cos^2\alpha)y^2=0$, отуда $y=0$ и $y=\pm x\,\mathrm{tg}\,\alpha$

Општи интеграл је: $x^2+y^2-2cx+c^2\cos^2\alpha=0$, а услов да c буде двоструки корен јесте: $x^2=(x^2+y^2)\cos^2\alpha$ или $y=\pm x\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Криве линије које општи интеграл претстављају јесу фамилије кругова чије су обвојнице праве $y=\pm x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ оне чине сингуларно решење. Права $y=0$ место додирник рачака. Лако је показати да праве $y=\pm x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ задовољавају услове из § 28, тако да претстављају једно решење доференцијалне једначине.

Пример 3.

$$4p^2x(x-a)(x-b) = \left[3x^2-2x(a+b)+ab\right]^2$$

Услов да p буде двоструки корен јесте:

$$x(x-a)(x-b)\left[3x^2-2x(a+b)+ab\right]^2 = 0$$

Општи интеграл је: $(y+c)^2 = x(x-a)(x-b)$

а услов да c буде двоструки корен гласи: $x(x-a)(y-b)=0$

. Диференцијална једначина је задовољена за: $x=0$, $x=a$, $x=b$, /и за одговарајуће бесконачне тељ који остаје у p -дискриминанти даје:

$$3x = a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

а криве линије претстављене овим јесу места додирних тачака. Криву $y^2 = x(x-a)(x-b)$, $0 < a < b$ чини овал, који x -осу сече у координатном почетку и апсциси a и параболична крива која x -осу сече у апсциси b . У свима овим тачкама су тангенте паралелне y -оси. Праве $x = 0$, $x = a$, $x = b$, су обвојнице система. Систем кривих се добија ако ову криву померимо паралелно y -оси. Права:

$$3x = a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

је место реалних, а права

$$3x = a + b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

место имагинарних додирних тачака.

Пример 4. Ако у претходном задатку ставимо $a = b$, и уклонимо чинитељ $(x-a)^2$, диференцијална једначина ће постати: $4xp^2 = (3x-a)^2$. Услов да p буде двоструки корен гласи: $x(3x-a)^2 = 0$. Општи интеграл је $(y+c)^2 = x(x-a)^2$, а услов да c буде двоструки корен гласи

$$x(x-a)^2 = 0$$

Заједничко за оба услова је $x = 0$, а то је /са одговарајућом бесконачном вредношћу од p / једно од решења једначине, и то сингуларно решење. Свака крива система има двојну тачку; оне леже на правој $x = 0$ која је према томе место чворова. Права

Пример 5. Ставимо у претохном задатку $\partial = 0$ и уклонимо чинитељ x ; онда диференцијална једначина постаје: $4p^2 = 9x$. Услов да p буде двоструки корен гласи: $x = 0$. Општи интеграл је: $(y+c)^2 = x^3$ а услов да C буде двоструки корен јесте: $x^3 = 0$. Диференцијалну једначину не задовољава $x = 0$ /и одговарајуће бесконачно p /. Крива $y^2 = x^3$ је семикубна парабола са врхом у почетку; а цео се систем добија ако се крива помера паралелно y -оси, тако да је $x = 0$ место врхова те не претставља сингуларно решење.

Пример 6.

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$$

Услов да p буде троструки корен гласи:

$$y^4 - \frac{4}{27}x^3y^3 = 0$$

Општи интеграл је: $y = c(x-c)^2$, а услов да C буде троструки корен добија се елиминишући C из ове једначине $(x-c)(x-3c) = 0$, тако да је, у сагласности са првим условом, или $y = 0$, или $y = \frac{4}{27}x^3$. Обе функције задовољавају диференцијалну једначину. Прва од њих је партикуларни интеграл / који одговара случају $C = 0$ па је, према томе, истовремено и сингуалрно решење и партикуларни интеграл, друга је само сингулавно решење.

постоје/ сингуларна решење следећих једначина, и испитати природу места која нису решења али се добијају са сингуларним решењима:

(α) $$xp^2 - 2yp + 4x = 0$$

Општи интеграл: $x^2 = c(y-c)$

Сингуларна решења: $y = \pm 2x$

(β) $$(x^2 - a^2)p^2 - 2xyp - x^2 = 0$$

Општи интеграл:

$$c^2 - 2cy + a^2 = x^2$$

Сингуларно решење: $x^2 + y^2 = a^2$

Место додирних тачака: $x = 0$

(γ) $$p^4 = 4y(xp - 2y)^2$$

Општи интеграл: $y = c^2(x-c)^2$

Сингуларна решења:

$x^4 - 16y = 0$ и $y = 0$

Друго решење, $y = 0$, је истовремено сингуларно решење, и /за $C = 0$ /, партикуларни интеграл.

(δ) $$xyp^2 + (x^2 - y^2 - b^2)p - xy = 0$$

Решење. Ова једначина, која претставља пројекције на раван xy линија кривина неког елипсоида, може се свести или супституцијом $x^2 + y^2 = 2u$ на облик:

$$u = x\frac{2^2 + b^2}{2q} - \frac{b^2}{2}$$

који је одређен у § 21, и где је $q = \frac{du}{dx}$, или супституцијом: $s=x^2, \ t=y^2$ на Clairaut -ов облик:

$$t = s\frac{dt}{ds} - b^2\frac{\frac{dt}{ds}}{1+\frac{dt}{ds}}$$

Као општи интеграл добијамо једначину конфокалних конусних пресека

$$\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c-b^2} = 1$$

Реална обвојница не постоји.

(ε) $\quad (1-y^2)p^2 = 1$

Решење: општи интеграл је: $y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y = 2x+C$. Праве $y=\pm 1$ јесу места врхова.

(ζ) $\quad p^2(1-x^2) = 1-y^2$

Решење: општи интеграл је: $x^2+y^2-2Cxy=1-C^2$

Сингуларна решења јесу:

$$x=\pm 1; \quad y=\pm 1$$

(η) $\quad (bx-ay)^2(b^2+a^2p^2) = c^2(b+ap)^2$

Решење: општи интеграл је: $(bx-C)^2+(ay-c)^2 = c^2$. Он претставља фамилију конгруентних елипси, чије су главне осе паралелне координатним, а средишта им леже на правој $bx-ay=0$. Ова последња је уједно и геометриско место додирних тачака. Праве $bx-ay=\pm c\sqrt{2}$ претстављају обвојницу фамилије елипси и уједно сингуларно решење дате једначине.

ДУАЛНА ТРАНСФОРМАЦИЈА

30/. Код обичних диференцијалних једначина постоји дуалитет, због кога је свака једначина везана са извесном другом једначином истога реда, релацијама потпуно реципрочне природе. Ми ћемо овде посматрати само диференцијалне једначине првога реда. Уводимо нову зависно променљиву Y једначину $Y = px - y$, и добијамо $dY = pdx + xdp - dy = xdp$. Затим изабирамо p за нову променљиву n , ради симетрије, означавамо је са X , дакле: $X = p$, тада је

$$x = \frac{dY}{dp} = \frac{dY}{dX} = P$$

Сада је $Y = px - y$, $y = PX - Y$, тако да између променљивих постоје реципрочни односи.

Ако нам је дата једначина облика $\varphi(x, y, p) = 0$ онда ће она због горњих једначина добити облик

$$\varphi(P, PX - Y, X) = 0$$

Ако је познат интеграл једне од ових двеју једначина онда се други може наћи алгебарском елиминацијом.

Нека је један интеграл друге једначине дат једначином $f(X, Y) = 0$ (1) Тада је

$$\frac{\partial f}{\partial X} + P\frac{\partial f}{\partial Y} = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial X} + x\frac{\partial f}{\partial Y} = 0 \qquad (2)$$

даље је

$$-y\frac{\partial f}{\partial Y} = (Y - px)\frac{\partial f}{\partial Y} = Y\frac{\partial f}{\partial Y} + X\frac{\partial f}{\partial X} \qquad (3)$$

Елиминишући X и Y из /1/ до /3/ добија се једначина између x и y која претставља инте-

Напомена. Горње образовање једне диференцијалне једначине помоћу друге је аналитички еквивалент геометриског конструирања поларе неке дате криве.

Нека је нацртана нека крива C. Једначина њене тангенте у тачки x, y је $\eta - y = p(\xi - x)$, где су ξ и η текуће координате. Нека су X и Y координате пола ове тангенте у односу на (непомичну) параболу $\xi^2 - 2\eta = 0$. Тада се једначина тангенте може писати у облику $X\xi - \eta - Y = 0$. Упоређивањем једначина добија се $X = p$, $Y = px - y$. Геометриско место тачака X, Y је нека крива C', полара криве C. Као што је познато C је, обрнуто, поларна криве C', тј. геометриско место полова тангената на C' у односу на параболу. Зато је x, y на C пол тангенте на C' у тачки X, Y; на одговарајући начин налазимо: $x = P$, $y = PX - Y$. А то су управо релације којима су, малопре, диференцијалне једначине биле аналитички везане.

Пример 1. Решити једначину $(y-px)x = y$. Када се изведе трансформација $px - y = Y$, $p = X$, $x = P$ добија се једначина $-YP = PX - Y$ или $P = \frac{Y}{Y+X}$

Ако се стави $Y = VX$, добиће се $X\frac{dV}{dX} = \frac{V}{V+1} - V = -\frac{V^2}{V-1}$

па је зато:
$$\left(\frac{1}{V} + \frac{1}{V^2}\right)dV + \frac{dX}{X} = 0$$

Интеграција даје: $\log V - \frac{1}{V} + \log X = Const.$

то јест: $f(X, Y) = \log Y - \frac{x}{y} = Const.$

Но како је: $\frac{\delta I}{\delta x} = -\frac{1}{y}$, $\frac{\delta I}{\delta y} = \frac{x+y}{y^2}$

следи: $x = \frac{y}{x+y}$, $y = -\frac{y}{x+y}$ или $y = -\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{x} - 1$,

тако да с обзиром на: $\log y - \frac{x}{y} = \text{Const.}$

добијамо: $\log\left(-\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x} + 1 = \text{Const.}$

Општи интеграл је, према томе $y = ax^e$

Пример 2. Интегрирати једначине $(y-px)x = cy$ где је C нека константа;

(2) $(y-px)(py+y-px) = p$

МЕШОВИТИ ЗАДАЦИ ЗА ДРУГО ПОГЛАВЉЕ

1. Решити једначине:

/1/ $y - xp = x + yp$

/2/ $a(xp + 2y) = xyp$

/3/ $x^2 + y = p^2$

/4/ $p^2 + 2xp = y$

/5/ $my - nxp = yp^2$

/6/ $p^3 = y^4(y + xp)$

/7/ $p^3 + x^3 = axp$

/8/ $x^3p^2 + x^2yp + a^3 = 0$

/9/ $ax^2y^np + y = 2xp$

/10/ $p \quad 2yp\,\mathrm{cotg}\,x = y$

/11/ $y - 2xp = f(xp^2)$

/12/ $x^2 - \frac{xy}{p} = f(y^2 - xyp)$

/13/ $(1-p)^2 - e^{-2y} = p^2 e^{-2x}$

/14/ $(nx + yp)^2 = (1+p^2)(y^2 + nx^2)$

/15/ $(1 + 6y^2 - 3x^2y)\,p = 3xy^2 - x^2$

/16/ $y = x\left[p + \sqrt{1+p^2}\right]$

/17/ $ay + bxp = x^m y^n (cy + exp)$

/18/ $yp(x^2 + y^2 + a^2) + x(x^2 + y^2 - a^2) = 0$

/19/ $(xp - y)^2 = p^2 - 2\frac{y}{x}p + 1$

/20/ $(xp - y)^2 = a(1+p^2)\sqrt{(x^2+y^2)^3}$

/21/ $\sqrt{a^2 + x^2}\;p + y = \sqrt{a^2 + x^2} - x$

/22/ $y = px + \sqrt{1+p^2}\;\varphi(x^2 + y^2)$

/23/ $(x\,\mathrm{Cos}\frac{y}{x} + y\,\mathrm{Sin}\frac{y}{x})\,y = (y\,\mathrm{Sin}\frac{y}{x} - x\,\mathrm{Cos}\frac{y}{x})\,xp$

/24/ $(x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1)\,y + (x^3y^3 - x^2y^2 - xy + 1)\,xp = 0$

/25/ $\left\{(x^2 - y^2)\,\mathrm{Sin}\alpha + 2xy\,\mathrm{Cos}\alpha - y\sqrt{x^2+y^2}\right\}p =$
$= 2xy\,\mathrm{Sin}\alpha - (x^2 - y^2)\,\mathrm{Cos}\alpha + x\sqrt{x^2+y^2}$

Решења:

/1/ $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) = C$

/2/ $(x^2y)^a = C e^y$

/3/ Ако се стави $y=x^2u$ добија се једначина:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{\sqrt{1+u}-2u}$$

/5/ Решити по y и диференцирати по x. Општи интеграл се добија елиминацијом од p из $my-nxp=yp^2$ и $Cx^{2(m-n)}=p^{2n}(p^2-m)^{2(m-n)}(p^2-m+n)^{n-2m}$

/6/ Ставити $y=\frac{1}{z}$. Опште решење: $\frac{1}{y}=Cx-C^3$

Сингуларно решење $\left(\frac{x}{3}\right)^3(2y)^2=1$

/7/ Ако се стави $p=xu$, добија се $x=\frac{au}{1+u^3}$ дакле $p=\frac{au^2}{1+u^3}$. Даље је $p=\frac{du}{dx}\frac{dy}{du}=\frac{(1+u^3)^2}{a(1-2u^3)}\frac{dy}{du}$ дакле: $\frac{dy}{du}=a^2\frac{(1-2u^3)u^2}{(1+u^3)^3}$ а из тога следи:

$$y=C+\frac{a^2}{6}\frac{1+4u^3}{(1+u^3)^2}$$

Ако се из овога и из $x=\frac{au}{1+u^3}$ елиминише величина u, добија се општи интеграл дате диференцијалне једначине. Права линија $x=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}a$ претставља место врхова.

/8/ Ставити $y=\frac{u}{x}$ и диференцијалити по x. Опште решење је $C^2x-Cxy+a^3=0$, сингуларно:

$$xy^2=4a^3$$

/9/ Решити по p и онда сматрати x као зависно промењливу. Према параграфу 15 је:

$$y^2=Cx+\frac{a}{n+2}xy^{n+2}$$

/10/ Решити по p. $C=y(1\pm\cos x)$

/11/ Обратити пажњу на то да диференцијација једначина $y-2xp=C_1$ и $xp^2=C$ доводи до исте диференијалне једначине другога реда. Због тога су обе једначине њени први интеграли, а општи интеграл се добија елиминишући p из њих. Како диференцијална једначина између константанта C_1 и C успоставља везу $C_1 = f(C)$, то се као општи интеграл добија:

$$\{y - f(C)\}^2 = 4Cx$$

/12/ Иста примедба као у горњем задатку доводи нас до израза: $\{x^2 - f(C)\}C + y^2 f(C) = 0$

/13/ Написати једначину у облику

$$(1-p)^2 - p^2 e^{-2x} = e^{-2y}$$

узети на обе стране логаритам и диференцијалити по x На тај начин се добија:

$$\left\{\frac{dp}{dx} - p(1-p)\right\}(1 - p + pe^{-2x}) = 0$$

а одавде је опште решење

$$(1 - C^2)e^{2y} = (Ce^x + 1)^2$$

а сингуларно: $e^{2x} + e^{2y} = 1$

/14/ Ако ставимо $y = xu$ онда ће бити

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + n}} = \pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\ \frac{dx}{x}$$

па је зато:

$$y + \sqrt{y^2 + nx^2} = Cx^{1 \pm \sqrt{\frac{n-1}{n}}}$$

/15/ Ако чланове с десне стране пребацимо на леву, онда је израз на левој страни тотални диференцијал, па је према томе

$$y + 2y^3 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = C$$

/17/ Написати једначину у облику:

$$a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} = x^m y^n \left(C\frac{dx}{x} + e\frac{dy}{y}\right),$$

и ставити $x\ y = u$, $x\ y = v$ и $bc-ae=\alpha$, $bc-ae=\beta$.

тада је $u^{\alpha-1}du=v^{\beta-1}dv$, па је према томе $\frac{u^{\alpha}}{\alpha}-\frac{v^{\beta}}{\beta}=C$

или, $\frac{(x^a y^b)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{(x^c y^e)^{\beta}}{\beta}=C$

/18/ Ставити $x^2+y^2=2u$. Тада је $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=$
$=C$

/19/ Ставити $y=xu$. Опште решење:

$$(y^2-Cx^2)^2-2(y^2+Cx^2)+4Cy^2+1=0$$

Сингуларно решење: $y=\pm x$

/20/ У том случају једначина чији је облик

$$xp-y=\sqrt{1+p^2}\ f(x^2+y^2)$$

ставити $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$; тада се добија:

$$\varphi+\alpha=\int\frac{dr}{r\sqrt{\left(\frac{r}{f(r)^2}\right)^2-1}}$$

где је α произвољна константа. У датом задатку је према томе $\varphi+\alpha=\sqrt{a}\int\frac{dr}{\sqrt{r(1-ar)}}$ дакле: $2ar=1+\sin(\varphi+\alpha)$

/21/ Ставити $x=a\,tg\,\varphi$. Излази

$$y\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)+a\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=C$$

/22/ Види /20/.

/23/ $xy\cos\frac{y}{x}=C$

/24/ Пошто је уклоњен чинитељ $xy+1$, ставити $xy=u$. Тада се добија:

$$Cy^2=e^{xy-\frac{1}{xy}}$$

/25/ За $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, прелази једначина у: $Ctg\frac{\varphi+\alpha}{2}\,d\varphi=\frac{dr}{r}$, а из тога следи:

$r = C\sin^{2}\frac{}{2}$ или $C(x^2+y^2) = \sqrt{x^2+y^2} - x\cos\alpha - y\sin\alpha$

2. Показати да је, ако је

$$u = 1 + A_1 x + \frac{1}{2!}A_2 x^2 + \frac{1}{3!}A_3 x^3 + \ldots\ldots$$

при чему су величине A везане релацијом

$$A_m = mA_{m-1} - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)A_{m-3}$$

задовољена једначина

$$\log\left(u\sqrt{1-x}\right) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

Решење: Реалција међу коефицијентима показује да u задовољава диференцијалну једначину

$$2(1-x)\frac{du}{dx} = (2-x^2)u$$

чији је општи интеграл

$$C + \log\left(u\sqrt{1-x}\right) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

Ако после овога развијемо u у ред по степенима од x онда упоређујући оне чланове из оба реда који не зависе од x излази да је $C = 0$

3. Интегралити једначину

$$\cos\theta(\cos\theta - \sin\alpha\sin\varphi)d\theta + \cos\varphi(\cos\varphi - \sin\alpha\sin\theta)d\varphi = 0$$

Показати да ће, ако се произвољна константа одреди из услова $\varphi = \alpha$ за $\theta = 0$, једначина бити задовољена ако се стави $\theta + \varphi = \alpha$

Решење: Лева страна је тотални диференцијал од $\frac{1}{2}(\theta+\varphi) + \frac{1}{4}(\sin 2\theta + \sin 2\varphi) - \sin\alpha\sin\theta\sin\varphi$

Решење је према томе:

$$C + \frac{\theta+\varphi}{2} + \frac{1}{4}(\sin 2\theta + \sin 2\varphi) - \sin\alpha\sin\theta\sin\varphi$$

За $\theta=0,\ \varphi=\alpha$ биће $C=-\frac{}{2}-\frac{}{4}\sin 2\alpha$. Сем тога је за макакво θ и φ :

$$\sin 2\theta+\sin 2\varphi=\sin 2(\theta+\varphi)+4\sin\theta\sin\varphi\sin(\theta+\varphi)$$

Отуда $\frac{\theta+\varphi+\alpha}{2}+\frac{1}{4}\{\sin 2(\theta+\varphi)-\sin 2\alpha\}+\sin\theta\sin\varphi\{\sin(\theta+\varphi)-\sin\alpha\}=0$

а ову једначину задовољава $\theta+\varphi=\alpha$

4. Ако се једначина

$$cydx-(y+a+bx)dy-nx(xdy-ydx)=0$$

супституцијом $u(y+a+bx+nx^2)=y(c+nx)$

може трансформисати у једначину између u и x ,онда се промењиве могу раставити; довести, сем тога, супституцијом $v=\alpha u+\beta$, где су α и β погодно изабрани, једначину на облик

$$\frac{dv}{\varphi(v)}=\frac{dx}{\varphi(x)}$$

Решење: Једначина се може написати у облику

$$\frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nx^2}=\frac{dy}{dx}$$

па је према томе $\frac{dy}{dx}=u$. Ако из дате супстанције израчунамо $\frac{dy}{dx}$ и ставимо да је тако добијена вредност једнака u , онда следи

$$\frac{du}{\{c^2-bc+na+(b-2c)u+u^2\}u}=\frac{dx}{(a+bx+nx^2)(c+nx)}$$

за $u=c+nv$ је $\frac{dv}{\varphi(v)}=\frac{dx}{\varphi(x)}$

при чему је: $\varphi(x)=(a+bx+nx^2)(c+nx)$

(Euler, Inst. calc. int I345)

5. Довести једначину $axyp^2+(x^2-ay^2-b)p-xy=0$ на Clairaut -ов облик, па је потом решити. Где је a произвољна константа.

Решити једначину: $\alpha \frac{}{dx} + \beta \frac{}{dy} + \gamma \frac{}{dx+dy} = 0$
где је $\alpha+\beta-\gamma=0$

Решење: Ставити: $x^2=S$, $y^2=t$, па је:

$$t = sq - b\frac{q}{1+aq}$$

где је $q=\frac{dt}{ds}$. Одавде је опште решење

$$y^2 - Cx^2 = -\frac{bC}{1+aC}$$

Ако је a негативно и једнако $-m^2$, онда постоји стварна обвојница, а то је систем од четири праве

$$x \pm my = \pm\sqrt{b}$$

Опште решење друге једначине је

$$y = Cx + \frac{(\alpha+\beta)C}{\alpha C-\beta}$$

а сингуларно: $(\alpha y+\beta x)^2 - 2(\alpha+\beta)(\alpha y+\beta x)+(\alpha+\beta)^2=0$

6. Ако су y_1 и y_2 решења једначине $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, где су P и Q функције од x и ако ставимо $y_2=y_1 z$, онда је z дато изразом:

$$z = 1 + ae^{-\int\frac{Q}{y_1}dx}$$

Решење: Ако се у једначину $\frac{dy^2}{dx}+Py^2=Q$ стави $y_2=y_1 z$ и обрати пажња на то да је и:

$$\frac{dy_1}{dx}+Py_1=Q$$

следује:

$$\frac{dz}{z-1} = -\frac{Q}{y_1}dx$$

па је према томе:

$$z = 1 + ae^{-\int\frac{Q}{y_1}dx}$$

7. Показати да се промењиве у једначини:

$$\left\{x(x+y)+a^2\right\}\frac{dy}{dx} = y(x+y)+b^2$$

могу раставити помоћу супституције: $x=u+v$ и $y=ku-v$

, под претпоставком да је K погодно изабрано, и интегралити једначину.

Решење: За $K=\frac{b^2}{a^2}$ добија се између u и v једначина:

$$\frac{dv}{v}=\frac{(a^2+b^2)u\,du}{(a^2+b^2)u^2+a^4} \quad \text{дакле:} \quad (a^2+b^2)u^2+a^4=Cv^2$$

или ако се промене произвољне константе:

$$(x+y)^2+a^2+b^2=C'(b^2x-a^2y)^2$$

Дата једначина би се могла интегралити и непосредно по методи која је примењена у 5. примеру § 16. ако би се ставило

$$P=a^2,\quad R=b^2,\quad Q=x+y$$

8. Показати да се једначине:

$$y-xp=a(y^2+p) \quad \text{и} \quad y-xp=b(1+x^2p)$$

могу извести из једног заједничког општег интеграла, и одредити га.

Могу ли се и једначине:

$$x+p(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}=a \quad \text{и} \quad y-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=b$$

$$yp=ax \quad \text{и} \quad y^2(1-p^2)=b$$

извести из истих општих интеграла?

Решење: Да би се две диференцијалне једначине првога реда, свака са по једном произвољном константом, могле извести из једног општег интеграла, мора се из њих, пошто су доведене на облик $a=f(x,y,p)$ $b=f_1(x,y,p)$, поновном диференцијацијом по x добити иста диференцијална једначина другога реда. Заједнички општи интеграл добија се тада елиминишући p

из првобитних једначина. Тако први пар наведених једначина доводи до једначине другога реда.

$$(1+xy)\frac{dp}{dx}=2p(xp-y)$$

а други до:

$$\frac{dp}{dx}+(1+p^2)^{-3/2}=0$$

а њихови општи интеграли јесу: $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+1=xy$

и $(x-a)^2+(y-b)^2=1$

Трећи пар нема, међутим, заједнички општи интеграл.

9. Интегралити диференцијалну једначину:

$$x\{ay^3+(ay+bx)^3\}+y\frac{dy}{dx}\{bx^3+(ay+bx)^3\}=0$$

Тангента на криву у некој тачки P сече тангенту и нормалну у сталној тачки O криве у тачкама M и N н и конструисан је правоугаоник $OMP'N$ Одредити такву криву да је троугао што га образују тангенте у било којим тачкама P,Q,R , једнак троуглу који је образован од одговарајућих тачака P',Q',R'

Решење: Једначина се може написати у облику:

$$\frac{\frac{dx}{ax^2}+b\frac{dy}{y^2}}{\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)^3}+x\,dx+y\,dy=0$$

а види се да је њена лева страна тотални диференцијал. Зато се добија

$$(ay+bx)^2(x^2+y^2-C)+x^2y^2=0$$

Да би се решио други задатак треба једну од тачака узети за координатни почетак, правац тангенте у њој за x -осу а координате и вредност од $\frac{dy}{dx}$ у обема другим тачкама означити са x, y, p односно x_1, y_1, p_1 ; тада се добија једначина

$$p_1^2(y-px)^2-2pp_1(y-px)(y_1-p_1x_1)+p^2(y_1-p_1x_1)^2=(p-p_1)^2(y-px)$$
$$(y_1-px)(y_1-p_1x_1)$$

или:

$$\frac{p_1(y-px)}{p(y_1-p_1x_1)}+\frac{p(y_1-p_1x_1)}{p_1(y-px)}=\frac{p}{p_1}+\frac{p_1}{p}$$

одавде излази или да је

$$\frac{p_1(y-px)}{p(y_1-p_1x_1)}=\frac{p_1}{p} \qquad \text{или} \qquad \frac{p_1(y-px)}{p(y_1-p_1x_1)}=\frac{p}{p_1}$$

Прва претпоставка доводи нас до $y-px=C$ тј. до једне праве;

По другој претпоставци је:

$$\frac{y-px}{y_1-p_1x_1}=\frac{p^2}{p_1^2}$$

а одавде следи: $y-px=Cp^2$

Сингуларно решење $x^2+4Cy=0$ показује да је тражена крива парабола:

10. Одредити систем кривих који задовољава диференцијалну једначину

$$dx\left\{\sqrt{1+x^2}+ny\right\}+dy\left\{\sqrt{1+y^2}+nx\right\}=0$$

и показати да крива линија која пролази кроз тачку $x=0$ и $y=n$ садржи као део конични пресек

$$x^2+y^2+2xy\sqrt{1+n^2}=n^2$$

Решење: Једначина система кривих јесте:

$$x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}+2nxy+\mathrm{Log}\left\{\sqrt{1+x^2}+x\right\}\left\{\sqrt{1+y^2}+y\right\}=C$$

Да би крива ишла кроз тачку $x=0, y=n$ мора да буде:

$$C = n\sqrt{1+n^2} + \lg\left\{\sqrt{1+n^2}+n\right\}$$

па је зато

$$\log\left\{\sqrt{1+x^2}+x\right\}\left\{\sqrt{1+y^2}+y\right\}\times\left\{\sqrt{1+n^2}-n\right\}+x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}-$$
$$-n\sqrt{1+n^2}+2nxy=0$$

Ако се стави

$$2x = e^{-u},\ 2y = e^{v}-e^{-v},\ 2n = e^{\alpha}-e^{-\alpha}$$

то ће једначина прећи у

$$u+v-\alpha+\frac{1}{4}\left\{e^{2u}-e^{-2u}+e^{2v}-e^{-2v}-(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})+(e^{u}-e^{-u})(e^{v}-e^{-v})(e^{\alpha}-e^{-\alpha})\right\}=0$$

Ако се ради скраћења стави: $u+v+\alpha=2s,\ u+v-\alpha=2\delta$

Онда је идентички

$$e^{2u}-e^{-2u}+e^{2v}-e^{-2v}-(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})=(e^{2s}+e^{-2s})(e^{2\delta}-e^{-2\delta})-(e^{u}-e^{-u})(e^{v}-e^{-v})(e^{u+v}-e^{-u-v})$$

па је према томе

$$2\delta+\frac{1}{4}(e^{\delta}-e^{-\delta})\left\{(e^{2s}+e^{-2s})(e^{\delta}+e^{-\delta})-(e^{u}-e^{-u})(e^{v}-e^{-v})(e^{s}+e^{-s})\right\}=0$$

или

$$2\delta\left[1+\frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{8\delta}\left\{(e^{2s}+e^{-2s})(e^{\delta}+e^{-\delta})-(e^{u}-e^{-u})(e^{v}-e^{-v})(e^{s}+e^{-s})\right\}\right]=0$$

Израз у средњој загради остаје коначан и за $\delta=0$; зато $\delta=0$ задовољава ову једначину, те $\delta=0$ тј. $u+v-\alpha=0$ претставља део криве која пролази кроз тачку $x=0, y=n$. Изражена помоћу x и y гласи једначина овога дела криве:

$$x^2+y^2+2xy\sqrt{1+n^2}=n^2$$

11. Интегралити једначину:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=\frac{(a-b)(x-yp)}{(a+b)(x+yp)}$$

и испитати природу решења:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$$

Решење: Ако се уместо x и y као нове промењљиве уведу корени λ_1 и λ_2 квадратне једначине у погледу λ :

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}=1$$

то ће диференцијална једначина прећи у:

$$\frac{a+b}{2ab}(d\lambda_1+d\lambda_2)=\frac{\lambda_2 d\lambda_1+\lambda_1 d\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}$$

Решење овога је:

$$\lambda_1\lambda_2=Ce^{\frac{a+b}{2ab}(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Но како је: $\lambda_1+\lambda_2=a+b-x^2-y^2$, $\lambda_1\lambda_2=ab-bx^2-ay^2$

добија се променом произвољних констаната:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=C'e^{-\frac{a+b}{2ab}(x^2+y^2)}$$

Према томе је $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ партикуларно решење.

12. Испитати да ли је $y=0$ партикуларни интеграл или сингуларно решење једначине:

$$2\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)^3=y\frac{dy}{dx}$$

Решење: Ако се стави $xy=u$ и $\frac{du}{dx}=q$, онда је $2x^3q^3=uxq-u^2$. Ако се одавде израчуна u , потом диференцијали по x и стави: $xq=v$ добија се једначина:

$$2\frac{dx}{x}=\frac{dv}{v}+\frac{1-12v}{\sqrt{1-8v}}dv$$

из које следи:

$$q\frac{\sqrt{1-8xq}-1}{\sqrt{1-8xq}+1}e^{3\sqrt{1-8^{xq}}}=Cx$$

Општи интеграл дате диференцијалне једначине добија се елиминишући q из ове једначине и из једначине: $2xq^3=yq-y^2$ за $C=0$ је $q=0$ па је и $y=0$. Према томе је y партикуларно решење.

13. Одредити опште интеграле и /уколико по-

стоје/ сингуларна решења једначина:

$$/1/ \quad p^3 + \mu p^2 = a(y + \mu x)$$

$$/2/ \quad xp^2 - 2yp + x + 2y = 0$$

$$/3/ \quad y(1 + p^2) = 2xp$$

$$/4/ \quad p^2 = (4y + 1)(p - y)$$

Решења: Општи интеграл од: $p^3 + \mu p^2 = a(y + \mu x)$ добија се елиминишући p из ове једначине и из једначине: $2ax + C = 3p^2 - 2\mu p + 2\mu^2 \log(p + \mu)$

Сингуларно решење не постоји; $y + \mu x = 0$ је партикуларно решење.

/2/. Опште решење једначине: $xp^2 - 2yp + x + 2y = 0$ је:

$$C^2x^2 + 2C(x - p) + 2 = 0$$

а сингуларно: $x = (1 \pm \sqrt{2})y$

/3/. Опште решење једначине: $y(1 + p^2) = 2xp$ је:
$y^2 = 4C(x - C)$, а сингуларно: $x \pm y = 0$

/4/. Опште решење једначине: $p^2 = (4y + 1)(p - y)$ је:
$y = C^2e^{2x} - Ce^{x}$, а сингуларно: $4y + 1 = 0$

14. Ако се може наћи место превојних тачака кривих чије су једначине општи интеграли једначине $\varphi(x, y, p) = 0$ онда је оно садржано у једначини која се добија елиминишући p из једначина:

$$\varphi = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

Дискутовати решење једначине:

$$(2p + x + x^3)^2 = (1 + x^2)(16y + 4x^2 + x^4) \qquad \text{(Darboux)}$$

15. Одредити општи интеграл диференцијалне једначине: $2y = xp + \frac{a}{p}$

и показати да се исти резултат добија ако се постави услов да p има једнаке вредности као двоструки корен диференцијалне једначине као и кад се постави услов да C /произвољна константа/ има једнаке вредности као корен општег интеграла, и одреди геометриско значење ових једначина. Да ли је то сингуларно решење?

Решење: Као општи интеграл добија се:

$$a^2C^2 - 12aCxy + 8Cy^3 + 16ax^3 - 12x^2y^2 = 0$$

Као услов да C као двоструки корен има исте вредности следи одавде: $(y^2 - ax)^3 = 0$, док је $y^2 - ax = 0$ услов да p као двоструки корен има исту вредност. Но $y^2 - ax = 0$ није сингуларно решење него место додирних тачака.

16. Општи интеграл диференцијалне једначине: $(2x^2+1)p^2 + (x^2+2xy+y^2+2)p + 2y^2 + 1 = 0$

је $c^2 + c(x+y) + 1 - xy = 0$ доказати ово и наћи сингуларно решење како из једначине по p тако и из једначине по C, и растумачити геометриско значење осталих чинитеља који се при том јављају.

Решење: Ставити: $x+y=u$, $xy=v$. Као опште решење добија се $C^2 + C(x+y) + 1 - xy = 0$

а као сингуларно:

$$x^2+6xy+y^2=4$$

Прво решење претставља систем равностраних хипербола чије су асимптоте паралелне координатним осама, а чија средишта леже на правој: $x-y=0$, која је уједно и место додирних тачака. Хипербола $x^2+6xy+y^2=4$ је обвојница система.

17. Показати да је решење једначине $a^2yp^2-4xp+y=0$ следеће:

$$c^2+2cx(3a^2y^2-8x^2)-3x^2a^4y^4+a^6y^6=0$$

Да ли је $2x=\pm ay$ сингуларно решење?

Нацртати криве и геометриско место кога дају једначине независне од једне произвољне константе.

Решење: Да би се добио општи интеграл ставити $y=xu$ па решити по $x\frac{du}{dx}$. Услов да p буде двоструки корен јесте: $4x^2-a^2y^2=0$ а услов да C буде двоструки корен је $(4x^2-a^2y^2)^3=0$. Но $2x=\pm ay$ није синкуларно решење него место додирних тачака.

ДОДАТАК I

Runge -ова метода за нумеричко решавање диференцијалних једначина.

Није увек могућно наћи експлицитни израз за неку функцију y дефинисану диференцијалном једначином, па ни онда када је ова првога реда. Потребне квадратуре не морају довести до "познатих" функција, може се десити да и редукција на квадратуре уопште неће да успе, тј. диференцијална једначина се аналитички не може решити.

Али је, специјално за нумеричке проблеме, важно моћи бар наћи <u>нумеричко решење</u>. За то је Runge дао једну методу.

Ми ћемо се, при скицирању Runge-ове методе, ограничити на диференцијалне једначине првога реда; за њену примену на диференцијалне једначине вишег реда упућујемо на Runge-ову расправу /Mathematische Annalen 46, 168 - 178/.

Укратко, можемо овако поставити задатак: нека функција y дефинисана је диференцијалном једначином /1/: $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ као почетне услове стављамо да мора бити $y=b$ за $x=a$, и питамо: која је вредност од y за $x=c$? При том претпостављамо да су a, b, c реалне величине, и нека је $c>a$ а $f(x,y)$ да буде коначно у уоченом интервалу. Сем тога нека је свуда $|f(x,y)|\leqq 1$; а ако у неком интервалу тај услов није испуњен, то ћемо тамо употребити једначину

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}=g(x,y)$$

која га испуњава. Поделићемо сада интервал /ac/ на пединтервале који не морају бити једнаке дужине.

Нека је h један од тих подинтервала: као полазну тачку за даље испитивање узећемо захтев да наш рачун мора бити тачан до реда величина h^3, да се, дакле, виши степени од h могу занемарити. Величину интервала h одредићемо дакле по тачности која се захтева. Ставићемо, ради скраћења:

$$\left[f(x,y)\right]_{\substack{x=a\\y=b}}=f_0\,;\ \left[\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right]_{\substack{x=a\\y=b}}=f_1\,;\ \left[\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right]_{\substack{x=a\\y=b}}=f_2$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)\right]_{\substack{x=a\\y=b}}=f_{11}\ ;\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f(x,y)\right]_{\substack{x=a\\y=b}}=f_{12}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)\right]_{\substack{x=a\\y=b}}=f_{22}$$

Још ћемо ставити:

$$\text{I}\left\{\begin{aligned} K_1 &= f\left(a+\frac{h}{2},\, b+\frac{1}{2}f_0h\right)h\\ K_2 &= \frac{1}{2}\left(\kappa'+\kappa'''\right)\end{aligned}\right.$$

где је

$$\text{II}\left\{\begin{aligned} \kappa' &= f_0h\\ \kappa'' &= f(a+h,\, b+\kappa')h\\ \kappa''' &= f(a+h,\, b+\kappa'')h\end{aligned}\right.$$

Развијајући и занемарујући степене од h више од трећег добијамо:

$$/2/\left\{\begin{aligned} K_1 &= f_0h+1/2(f_1+f_0f_2)h^2+1/8(f_{11}+2f_0f_{12}+f_0^2f_{22})h^3\\ K_2 &= f_0h+1/2(f_1+f_0f_2)h^2+1/4\left[f_{11}+2f_0f_{12}+f_0f_{22}+2f_2(f_1+f_0f_2)\right]\end{aligned}\right.$$

Нека је за $x=a+h$, $y=b+\kappa$. Ако је тада

$$\kappa=a_1h+1/2\,a_2h^2+1/6\,a_3h^3$$

онда из /1/ следи: $a_1+a_2h+1/2a_3h^2=f(a+h,b+\kappa)$

$$=f_0+hf_1+\kappa f_2+1/2(h^2f_{11}+2h\kappa f_{12}+\kappa^2f_{22})$$

$$=f_0+h(f_1+a_1f_2)+1/2\,h^2(a_2f_2+f_{11}+2a_1f_{12}+a_1^2f_{22})$$

Зато је: $a_1 = f_0$, $a_2 = f_1 + f_0 f_2$, $a_3 = f_{11} + 2f_0 f_{12} + f_0^2 f_{22} + f_2(f_1 + f_0 f_2)$ (4)

То су почетни коефицијенти за развијање K. Но из /3/ користећи /2/ и /4/ добијамо:

$$K = \tfrac{2}{3} K_1 + \tfrac{1}{3} K_2$$

или

$$K = K_1 + \tfrac{1}{3}(K_2 - K_1)$$

Ако K_1, сматрамо за прву апроксимацију од K онда је разлика $\tfrac{1}{3}(K_2 - K_1)$ која је сразмерна трећем степену од h, мера за тачност те апроксимације.

Када смо на тај начин одредили $b+K$ као вредност од y која одговара вредности $x+h$ можемо на исти начин наставити, сматрајући $x+h$ и $b+K$ за почетне вредности: тада, са истим степеном тачности, добијамо $b+K+\bar{K}$ као вредност од y која одговара вредности $x+h+\bar{h}$. И тако, корак по корак, доспевамо до тражене вредности y која одговара вредности $x = c$.

Пример 1. Нека је дата диференцијална једначина

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2x}{y + x}$$

са почетним вредностима $y = 1$ за $x = 0$. Коју вредност има y за $x = 0{,}5$?

Поделићемо интервал од 0 до $0{,}5$ на два дела: од 0 до $0{,}2$ /интервал h / и од $0{,}2$ до $0{,}5$ /интервал $\bar{h}$ /. За интервал h је $a = 0$, $b = 1$, $h = 0{,}2$, $f_0 = 1$. Дакле:

$$K_1 = f(0{,}1 | 1{,}1) . 0{,}2 = \frac{1{,}01}{1{,}31} \cdot 0{,}2 = 0{,}154$$

$$K' = 0{,}2$$

$$K'' = f(0{,}2 | 1{,}2) . 0{,}2 = \frac{1{,}44 - 0{,}4}{1{,}44 + 0{,}2} \cdot 0{,}2 = 0{,}127$$

$$K''' = f(0{,}2 | 1{,}127) . 02 = \frac{1{,}270 - 0{,}4}{1{,}270 + 0{,}2} \cdot 0{,}2 = 0{,}118$$

$$K_2 = 1/2 (K' + K''') = 0{,}159 \;, \quad 1/3 (K_2 - K_1) = 0{,}002$$

Дакле: $K = K_1 + 1/3 (K_2 - K_1) = 0{,}156$

Према томе је за $x = 0.2$, $y = 1{,}156$. Слична рачунања дају за интервал $\overline{h}$:

$$\overline{a} = 0{,}2 \;, \quad \overline{b} = 1{,}156 \;, \quad \overline{h} = 0{,}3$$

$$\overline{K}_1 = 0{,}135 \;, \quad \overline{K}' = 0{,}183 \;, \quad \overline{K}'' = 0{,}104$$

$$\overline{K}''' = 0{,}085 \;, \quad \overline{K}_2 = 0{,}134 \;, \quad \overline{K} = 0{,}135$$

Отуда је за $x = 0.5$, $y = 1{,}156 + 0{,}135 = 1{,}291$

Пример 2. Применити методу на једначину

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

при чему треба да интеграл буде једнак 1, за $x = 0$; показити да ће за $x = 1$ бити $y = 1{,}499$. /Препоручује се да се интервал подели на три дела: од $0{,}0$ до $0{,}2$, од $0{,}2$ до $0{,}5$, и од $0{,}5$ до $1{,}0$ /. Интегрирати једначину непосредно и упоредити вредност добијену нашом методом са тачном вредношћу.

ТРЕЋЕ ПОГЛАВЉЕ

Општа линеарна диференцијална једначина са констатним коефицијентима

Припремни обрасци

31/. Пре него што пређемо на дискусију линеарне диференцијалне једначине n -тог реда са константним коефицијентима, биће, изгледа, корисно да се поставе и докажу извесни ставови о диференцијацији и интеграцији, који су за то потребни.

Напишимо D уместо $\frac{d}{dx}$, D^2 уместо $\frac{d^2}{dx^2}$ итд. Тада се симбол D покорава основним законима аритметике. Јер је, очевидно:

$$(D^r+D^n)u=(D^n+D^r)u\,;\; D^r.D^n.u=D^n.D^r u=D^{n+r}u\,;\; D(u+v)=Du+Dv$$

Али ми морамо увести и негативне индексе. Ако, на пр. имамо $Du=v$ и ако, по аналогији са ознаком уобичајеном у алгебри, напишемо $u=D^{-1}v$ онда је $v=Du=D.D^{-1}v$, па је према томе $D.D^{-1}=1$

Према томе је дејство операције D^{-1}, када се она изврши на некој величини, такво, да величина остаје непромењена ако се истом изврши операција коју [illegible] претставља D. Уједно излази да се и симболи са негативним индексима покоравају законима аритметике,

а операција са негативним индексом значи исто што и интеграција. Важно је обратити пажњу на то да је специјална сврха те инверзне операције налажење макога интеграла, а не општег интеграла; ми ћемо због тога изоставити произвољну константу, која се јавља при интеграцији.

Убудуће је ψ ознака за функцију, а $\psi(x)$ свуда означава целу рационалну функцију од x која може бити уређена по растућим или опадајућим степенима /или и по једним и по другим/ од $\mathcal{X}$.

32/. Први став $\psi(D)e^{ax}=\psi(a)e^{ax}$

Како D стоји уместо $\frac{d}{dx}$, то је $De^{ax}=ae^{ax}$. Ако на свакој страни извршимо операцију D^{-1}, добићемо јед начину

$$D^{-1}.De^{ax}=aD^{-1}e^{ax}$$

или ако променимо стране једначине и поделимо са

$$a: D^{-1}e^{ax}=a^{-1}e^{ax}$$

Понављањем овог поступка добијамо једначине:

$$D^{n}e^{ax}=a^{n}e^{ax},\ D^{-m}e^{ax}=a^{-m}e^{ax}$$

А како је ψ рационална функција која се може развити по степенима, можемо писати:

$$\psi(D)e^{ax}=\left[A_0+A_1D+\dots A_rD^r+\dots B_1D^{-1}+B_2D^{-2}+\dots\right]e^{ax}=\left[A_0+A_1a+\dots A_ra^r+\dots+B_1a^{-1}+B_2a^{-2}\dots\right]e^{ax}$$

$$\psi(D)e^{ax}=\psi(a)e^{ax}$$

33/. Други став. Ако $\mathcal{X}$ означава неку функцију од x, онда је

$$\psi(D)\left[e^{ax}\mathcal{X}\right]=e^{ax}\psi(D+a)\mathcal{X}$$

Једна једина операција помоћу D даје: $D\left[e^{ax}\mathcal{X}\right]=$ $=e^{ax}(D+a)\mathcal{X}$ а одавде, ако се обе стране помноже са e^{-ax}, следи: $(e^{-ax}De^{ax}).\mathcal{X}=(D+a)\mathcal{X}$

тако да операција изведена на $\mathcal{X}$ помоћу $e^{-ax}De^{ax}$ има исто дејство као и операција $(D+a)$. Ако операцију поновимо биће:

$$(e^{-ax}De^{ax})(e^{-ax}De^{ax})\mathcal{X}=(D+a)(D+a)\mathcal{X} \text{ или } (e^{-ax}D^2e^{ax})\mathcal{X}=(D+a)^2\mathcal{X}$$

ако још једном извршимо операцију помоћу $e^{-ax}De^{ax}$ биће:

$$(e^{-ax}De^{ax})(e^{-ax}D^2e^{ax})\mathcal{X}=(D+a)(D+a)^2\mathcal{X}$$

или $(e^{-ax}D^3e^{ax})\mathcal{X}=(D+a)^3\mathcal{X}$

Ако се операција понови n пута добиће се:

$$e^{-ax}D^n\left[e^{ax}X\right]=(D+a)^nX$$

што, помножено са e^{ax}, даје:

$$D^n\left[e^{ax}X\right]=(D+a)^nXe^{ax}$$ где је n позитиван цео број.

Посматраћемо случај са негативним индексима и ставићемо $(D+a)^nX=X_1$ тако да је

$$X=(D+a)^{-n}X_1$$

Резултат који смо горе добили можемо сада написати

$$D^ne^{ax}(D+a)^{-n}X_1=e^{ax}X_1$$

Ако се на свакој страни изврши операција помоћу D^{-n} добиће се резултат:

$$e^{ax}(D+a)^{-n}X_1=D^{-n}e^{ax}X_1$$

Не постоје никаква ограничења што се тиче облика од X, па их зато нема ни за облик од X_1, те оно може претстављати сваку функцију од x. Ако дакле заменимо X_1 са X, имаћемо:

$$D^{-n}\left\{e^{ax}X\right\}=e^{ax}(D+a)^{-n}X$$

Сада треба развити $\psi(D)$ по целим позитивним и /ако је потребно/ негативним степенима од D извршити помоћу њих операсање са $e^{ax}X$ заменивши еквивалентне вредности које су изведене из претходне једначине и као и пре скупити чланове. Тада је резултат:

$$\psi(D)\left\{e^{ax}X\right\}=e^{ax}\psi(D+a)X$$

<u>Примедба</u>. Ако ставимо $e^{ax}X=Y$ тако да је

функција од x онда је:

$$\psi(D)Y = e^{ax}\psi(D+a)\{Ye^{-ax}\}$$

а овај се став често примењује. Ако, на пр. треба наћи партикуларну вредност од y која задовољава једначину

$$\frac{dy}{dx} + ky = V$$

онда ће она, са узетим ознакама, бити:

$$y = \frac{1}{D+k}V = e^{ax}\frac{1}{D+k+a}\left[Ve^{-ax}\right]$$

или, ако a изаберемо тако да буде $a+k=0$, онда је:

$$y = e^{-kx}\frac{1}{D}Ve^{kx} = e^{-kx}\int Ve^{kx}dx$$

34/. <u>Трећи став</u>. Ако је $\psi(x^2)$ парна функција од x, онда је

$$\psi(D^2)\sin(ax+\alpha) = \psi(-a^2)\sin(ax+\alpha)$$

јер је $$D^2\sin(ax+\alpha) = (-a^2)\sin(ax+\alpha)$$

те се став доказује као и горе.

<u>Примедба.</u> Ако $\psi(x)$ није парна функција од x онда се она може написати у облику: $\varphi(x^2)+x\chi(x^2)$, где су φ и χ парне функције. У том случају је

$$\psi(D)\sin(ax+\alpha) = \{\varphi(D^2)+D\chi(D^2)\}\sin(ax+\alpha) = \varphi(-a^2)\sin(ax+\alpha)+a\chi(-a^2)\cos(ax+\alpha)$$

Ако функција на којој треба извршити операцију није синус него косинус, онда су одговарајуће промене очевидне.

35/. <u>Четврти став.</u> Овај став је уопштавање Лајбницове теореме о вишим изводима производа двају функција, чији су изводи појединачно познати. Ако $\psi(x$ означава рационалну функцију која се може развити по целим степенима од x , и ако $\psi'(x), \psi''(x), \psi'''(x)$ итд. означавају њен први, други, трећи .... итд. извод по x , онда је

$$\psi(D)uv = u\psi(D)v + Du\,\psi'(D)v + \frac{D^2u}{2!}\psi''(D)v + \frac{D^3u}{3!}\psi'''(D)v \pm \ldots$$

Доказ се заснива на Лајбницовој теореми и сличан је доказима претходних ставова. Корисност овога става се показује у случајевима где је једна од величина u и v неки степен од x , или збир степена од x . Ако је, на пр., $u = x^{m-1}$, онда се ред на десној страни завршава m -тим чланом. Сем тога је довољно инверзне операције, које се изводе на производњу, извршити само на једном чинитељу.

Пример. Показати да је, ако је $(D+K)^2y = x^2V$ где је V функција само од x . y дато изразом:

$$e^{-Kx}\left(x^2\iint e^{Kx}V\,dx^2 - 4x\iiint e^{Kx}V\,dx^3 + 6\iiiint e^{Kx}V\,dx^4\right)$$

Решење.

Према примедби у § 33 биће:

$$y = \frac{1}{(D+K)^2}x^2V = e^{ax}\frac{1}{(D+a+K)^2}\left\{e^{-ax}x^2V\right\}$$

дакле, за $K + a = 0$

$$y = e^{-Kx}\frac{1}{D^2}\left(x^2e^{Kx}V\right)$$

Примена обрасца у § 35 на $u = x^2, v = e^{Kx}V$ даје онда једначину текста.

36/. Један други важан оператор је $x\frac{d}{dx}$ или, са узетом ознаком xD . О њему се могу изрећи аналоги ставови. Ако $F(z)$ означава рационалну функцију која се може развити по целим степенима од z онда ће се у $F(xD)$ јављати чланови облика $(xD)^n$, под којим не треба подразумевати $x^n\frac{d^n}{dx^n}$ него $x\frac{d}{dx}\cdot x\frac{d}{dx}\cdots\cdots$

Први став. $F(xD)x^m = F(m)x^m$

Јер је $(xD)x^m = mx^m$

$$(xD)^2x^m = (xD)mx^m = m^2x^m$$

и тако даље за све позитивне и негативне степене. Одатле непосредно следује став.

Пример. Доказати да: ако је U функција од x облика $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots$

важи једначина: $\frac{1}{F(xD)}U = \frac{A}{F(0)} + \frac{B}{F(1)}x + \frac{C}{F(2)}x^2 + \frac{D}{F(3)}x^3 + \ldots\ldots$

Решење: из става I, § 36, следује $x^m = \frac{F(xD)x^m}{F(m)}$ за сваку вредност од m; зато је $A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots$

$$= \frac{F(xD)Ax^0}{F(0)} + \frac{F(xD)Bx}{F(1)} + \frac{F(xD)Cx^2}{F(2)}$$

па је, према томе,

$$\frac{1}{F(xD)}U = \frac{A}{F(0)} + \frac{B}{F(1)}x + \frac{C}{F(2)}x^2 + \ldots\ldots$$

Други став. Ако са V означимо неку функцију од x, онда је: $F(xD)x^mV = x^mF(xD+m)V$

имамо: $xD(x^mV) = x^m(xD+m)V$ или $(x^{-m}\cdot xD.x^m)V = (xD+m)V$ тако да су операције $x^{-m}.xD.x^m$ и $xD+m$ еквивалентне. Даљи ток доказа је сасвим аналог за одговарајућу теорему која се односи на $F(D)$, а резултат има дати облик.

37/. Веза између оператора D^n и xD дата је обрасцем

$$x^n D^n = xD(xD-1)(xD-2)\dots\dots(xD-n+1)$$

Овај се став може непосредно доказати. Јер ако ту операцију извршимо на u и развијемо u у ред чији су чланови облика $A_m x^m$, онда је производ од x^n са резултатом операције D^n извршеном на том члану једнак нули ако је $m<n$, а једнак је $m(m-1)(m-2)\dots\dots(m-n+1)A_m x^m$ ако је $m \geqslant n$. А то је и резултат операције симболом који стоји с десне стране. Према томе су оба оператора еквивалентна за сваки члан од u, па према томе и за збир свих чланова од u, тј. за u само.

Став се, међутим, може доказати и индукцијом. Јер ако претпостављамо да је $x^n D^n u = xD(xD-1)(xD-2)\dots\dots(xD-n+1)u$ и ако ставимо: $u=(xD-n)v$ онда је $D^n u = xD^{n+1}v$ па је зато:

$$x^{n+1} D^{n+1} v = xD(xD-1)(xD-2)\dots\dots(xD-n)v$$

А како је u ма каква функција то је и v макаква функција. Ако, дакле, став важи за n, онда важи и за $n+1$; но он је очигледно тачан за вредности 1 и 2, па је, према томе, уопште тачан.

Неке особине опште линеарне диференцијалне једначине.

38/. Општи облик линеарне диференцијалне једначине n -тог реда је

$$\frac{d^ny}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots X_{n-1}\frac{dy}{dx}+X_ny=V$$

где су $X_1, X_2, \dots X_n, V$ функције само од x, или константе. Ради краткоће написаћемо диференцијалну једначину у облику $\Phi(D)y=V$ ./1/. Интегралимо ли ову једначину снижавајући сваком интеграцијом њен ред за јединицу, окда свака инеграција уводи по једну произвољну константу, па ће се, према томе, када се добије општи интеграл, јављати свега n констананата, смемо, другим речима, да очекујемо да ће општи интеграл неке дате линеарне диференцијалне једначине садржати онолико произвољних констаната колико је ред те једначине.

Размотрићемо сада заједничке особине свих линеарних диференцијалних једначина које у неколико упрошћавају интеграцију. Најважније од њих су следеће:

39/. I. Ако је η неко партикуларно решење које задовољава једначину /1/, и ако ставимо $y=\eta+Y$, и заменимо ту вредност од y у једначини, добићемо: $\Phi(D)Y+\Phi(D)\eta=V$. Како је η једно од решења једначине $\Phi(D)y=V$ то једначина прелази у $\Phi(D)Y=0$ /2/, тако да треба, да бисмо решили првобитну једначину, решити хомогену једначину /2/ која се добија из првобитне ако се стави да је десна страна једнака нули.

Ако општем интерегралу једначине, који садржи n константата, додамо η , онда је резултат, стављајући да је једнак y , општи интеграл дате једначиме.

Општи интеграл диференцијалне једначине /1/ састоји се из два дела: прво, из величине η која се назива "партикуларни интеграл" - то је неко произвољно партикуларно решење једначине /1/. Треба га изабрати да буде што простије.

Друго: из величине Y , која се назива "комплиментарна функција" - то је општи интеграл једначине /2/ која се из /1/ добија ако се у овој стави да је десна страна једнака нули.

Збир та два дела је општи интеграл диференцијалне једначине /1/

Ако је, специјално, десна страна већ једнака нули онда се први део уопште неће ни јављати. Доцније ће, у § 46, бити дате методе које су корисне при одређивању партикуларног интеграла. Испитивања која овде одмах следе односе се на тражење комплементарне функције.

40/. II. Ако је $Y=Y_1$ решење хомогене једначине $\Phi(D)Y=0$ онда је и $Y=C_1Y_1$ где је C_1 константа, решење, и ако су $Y_1, Y_2 \dots Y_n$ партикуларна решења, онда је и $Y=C_1Y_1+C_2Y_2+\dots$ где су $C_1, C_2 \dots C_n$ константе, једно решење. Јер је: $\Phi(D)Y=\Phi(D)C_1Y_1+\Phi(D)C_2Y_2+\dots\dots$

и сваки члан десне стране је нула. Вредности константа C су потпуно произвољне. Дата једначина је према томе потпуни интеграл једначине $\Phi(D)Y=0$ и због тога и комплементарна функција једначине $\Phi(D)y=V$ На овај начин одређивање комплементарне функције свели смо на одређивање n партикуларних интеграла помоћне једначине.

41/. III. Ако је дат само један партикуларан интеграл помоћне једначине, онда се може ред дате диференцијалне једначине снизити за јединицу.

Ако је наиме Y_1 неко решење једначине $\Phi(D)Y=0$

и ако замислимо да је у једначини $\Phi(D)y=V$ извршена замена вредности Y_1z онда по § 35, лева страна постаје:

$$z\Phi(D)Y_1+Dz\frac{\delta\Phi}{\delta D}Y_1+\frac{D^2z}{2!}\frac{\delta^2\Phi}{\delta D^2}Y_1+\cdots\frac{D^nz}{n!}\frac{\delta^n\Phi}{\delta D^n}Y_1$$

при чему су симболи за операције $\frac{\delta\Phi}{\delta D}$ изведени из $\Phi(D)$ тако што је за тренутак D посматрано као променљива и парцијални диференцијални количници одређени су према D

А сада је

$$\frac{\partial^n\Phi}{\delta D^n}=n!$$

$$\frac{\delta^{n-1}\Phi}{\delta D^{n-1}}=\frac{n!}{1!}D+(n-1)!\,\mathcal{X}_1$$

$$\frac{\delta^{n-2}\Phi}{\delta D^{n-2}}=\frac{n!}{2!}D^2+\frac{(n-1)!}{1!}\mathcal{X}_1D+(n-2)!\,\mathcal{X}_2$$

због тога добијамо, ако нашу једначину пишемо обрнутим редом:

$$Y_1D^nz+(\mathcal{X}_1Y_1+nDY_1)D^{n-1}z+\ldots\ldots Dz\frac{\delta\Phi}{\delta D}Y_1+z\Phi(D)Y_1=V$$

Али по претпоставци је $\Phi(D)Y_1=0$ тако да последњи члан на левој страни отпада. Претпоставили смо да нам је позната величина Y_1 отуда се све функције од Y_1 могу сматрати као познате. Ако се Dz замени са z онда једначина постаје:

$$Y_1 D^{n-1}Z+(X_1 Y_1+nDY_1)^{n-2}Z+\ldots\ldots Z\frac{\delta\phi}{\delta D}Y_1=V$$

и то је једначина $(n-1)$- вог реда.

Пример: Као додатак овоме покажи да се ред првобитне диференцијалне једначине може снизити за m јединица кад је познато m партикуларних интеграла помоћне једначине / упор. §§ 76, 77 /.

Решење: Нека су $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ датих m линеарних, међусобно независних партикуларних интеграла помоћне једначине: $\Phi(D)Y=0$ Заменом $y=Y_1\int z dx$ једначина n- тог реда $\Phi(D)y=V$ прелази, као што је показано, у једначину $(n-1)$- вог реда $\Phi_1(D)z=V_1$ чији се коефицијенти састоје из коефицијената дате једначине $\Phi(D)y=V$ и из делимичног интеграла Y_1 и зато их треба сматрати познатим. При том је $\Phi(D)y=Y_1\Phi_1(D)z$ Ако се место y стави било која од вредности које задовољавају једначину $\Phi(D)Y=0$ онда ће одговарајућа вредност

$$Z=\frac{d}{dx}\frac{Y}{Y_1}$$

задовољавати једначину $\Phi_1(D)Z=0$ и тако су тада $m-1$ функција:

$$Z_1=\frac{d}{dx}\frac{Y_2}{Y_1},\ Z_2=\frac{d}{dx}\frac{Y_3}{Y_1},\ldots\ldots Z_{m-1}=\frac{d}{dx}\frac{Y_m}{Y_1}$$

партикуларни интеграли диференцијалне једначине $\phi_1(D)Z=0$ који су, то се лако може показати, међусобно линеарно независне. Помоћу једнога од тих $m-1$ партикуларних интеграла од $\phi_1(D)Z=0$ може се опет као раније једначина $\phi_1(D)Z=V_1$ свести на аналогу једначину $(n-2)$ ог реда $\phi_2(D)u=V_2$ за коју нам је познато $m-2$ партикуларних интеграла једначине $\phi_2(D)u=0$ итд. све док се не дође до линеарне једначине $(n-m)$ тог реда, чији се коефициенти састоје из коефицијената дате једначине и m партикуларних интеграла $Y_1, Y_2 \ldots Y_m$

42/. IV. Дата једначина може да се трансформише у једначину у којој недостаје члан чији је ред други по висини /тј. члан који садржи диференцијални количник чији је ред за јединицу мањи од реда једначине/.

Замена $Y_1 Z$ место y даје коефициенте уз

$D^{n-1}z$: $$X_1 Y_1 + nDY_1$$

/до те тачке последњег параграфа још се није дотакла претстављена вредност Y_1 јер је једначина била потпуно општа./.

Пошто треба да недостаје члан са $D^{n-1}z$ то

добијамо $$X_1 Y_1 + nDY_1 = 0$$

и зато је $$\log Y_1 = -\frac{1}{n}\int X_1\,dx.$$

или $$Y_1 = e^{-\frac{1}{n}\int X_1 dx}$$

где није додата ниједна произвољна константа пошто диференцијална једначина остаје линеарна и n-тог реда. Ако се замени вредност Y_1 онда је диференцијална једначина по Z ослобођена члана са $D^{n-1}Z$

Од показаних резултата непосредно ће бити примењени у I и II.

Општа линеарна диференцијална једначина са константним коефицијентима

43/. Ако су у општој линеарној диференцијалној једначини коефицијенти за x_i константе, онда се она може писати:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = V$$

или исто тако: $f(D)y=V$ при чему је $f(D)$ нека цела рационална функција од D са константним коефицијентима, а V је било која функција од x Речено је да се решење једначине састоји из два дела који се могу посебно добити. То треба сад извести једно за другим.

44/. Треба наћи комплементарну функцију.

Комплементарна функција је потпуни интеграл од

$$f(D)y=0$$

Показали смо да је

$$f(D)e^{ax}=f(a)e^{ax}$$

тако да $y=e^{ax}$ постаје партикуларно решење једначине, када је a такво да задовољава једначину $f(a)=0$ Пошто је $f(z)$ цела рационална функција n- тог степена, онда једначина $f(z)=0$ има n корена. Ако их означимо са

$\alpha, \beta, .. \lambda$ онда су $e^{\alpha x}, e^{\beta x} \dots e^{\lambda x}$, n партикуларних интеграла једначине $f(D)y=0$ и зато је општи интеграл

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \dots\dots Le^{\lambda x}$$

где су $A, B, \dots\dots L$ произвољне константе.

То је онда комплементарна функција првобитне једначине, и онда је потпуна кад су сви корени реални и један од другог различити.

Ако су пак два корена међусобно једнака, на пр. α и β онда y има вредност

$$y = (A+B)e^{\alpha x} + Ce^{\gamma x} + \dots\dots Le^{\lambda x}$$
$$= A_1 e^{\alpha x} + Ce^{\gamma x} + \dots\dots Le^{\lambda x}$$

где је A једна једина константа /једнака збиру две произвољне константе/. Пошто се у том решењу јавља само $n-1$ произвољних констаната то она не претставља општи интеграл. Тада добијамо општи интеграл процесом граничне вредности, где прво узимамо да корени нису једнаки већ да се разликују за извесну величину h коју ћемо потом пустити да се приближава нули. Онда је део који зависи од α и од $\beta = \alpha + h$

$$Ae^{\alpha x} + Be^{(\alpha+h)x}$$
$$= e^{\alpha x}\left\{A + B\left(1 + hx + \frac{h^2x^2}{2!} + \dots\dots\right)\right\}$$
$$= e^{\alpha x}\left\{(A+B) + Bhx + Bh\frac{h}{2!}x^2 + \dots\right\}$$

Пошто су величине A и B произвољне, можемо их узети бесконачно велике тако да кад се h приближава нули, Bh остаје коначно и једнако B_1 док су A и B супротно означени и њихов збир је коначан и једнак A_1. На тај начин збир оба члана

$$Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$

када се стави да је $h=0$ најзад прелази у:

$$e^{\alpha x}\left\{A_1 + B_1\left(x + \frac{h}{2!}x^2 + \frac{h^2}{3!}x^3 + \cdots\right)\right\} = (A_1 + B_1 x)e^{\alpha x}$$

На сличан начин, када имамо r једнаких корена, r одговарајућих чланова у комплементарној функцији свешће се очигледно на један једини члан: а лако је показати сличним закључком који смо навели за случај двају једнаких корена, да се чланови који се поклапају могу заменити са

$$e^{\alpha x}(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots\ldots A_r x^{r-1})$$

где α означава заједничку вредност r једнаких корена; и комплементарна функција ће тада бити

$$y = e^{\alpha x}(A_1 + A_2 x + \ldots\ldots A_r x^{r-1}) + Le^{\lambda x}$$

Ако, даље, нису сви корени реални, онда комплексни корени морају бити два и два коњугована; такав пар корена нека је $\theta \pm \varphi i$ Одговарајући чланови комплементарне функције биће:

$$e^{\theta x}(A' e^{x\varphi i} + B' e^{-x\varphi i})$$

и понекад је потребно да их претставимо у облику без имагинарних величина. Ако се за експоненцијалне величине њихове вредности замене косинусом и синусом, онда тај израз постаје:

$$e^{\theta x}\{(A'+B')\cos\varphi x + i(A'-B')\sin\varphi x\}$$

Пошто су A' и B' произвољне константе, момемо ставити да је

$$A' + B' = F\,, \quad i(A' - B') = G$$

где ће F и G бити произвољни, и зато одговарајуће вредности у комплементарној функцији биће:

$$e^{\theta x}(F\,\mathrm{Cos}\,\varphi x + G\,\mathrm{Sin}\,\varphi x)$$

Ако се, најзад, комплексан корен понови, онда ће се поновити и коњуговано комплексни корен, и одговарајући чланови у y биће:

$$e^{x(\theta+\varphi i)}(A' + A''x) + e^{x(\theta-\varphi i)}(B' + B''x)$$

Ако применимо исти поступак као и раније и ставимо да је

$$A' + B' = F\,, \quad A'' + B'' = F'$$

$$i(A' - B') = G\,, \quad i(A'' - B'') = G'$$

добијамо као одговарајући део комплементарне функције

$$e^{\theta x}\{(F + F'x)\,\mathrm{Cos}\,\varphi x + (G + G'x)\,\mathrm{Sin}\,\varphi x\}$$

Приликом поклапања више од два комплексна корена поступа се аналого случају реалних корена.

45/. У појединим случајевима опште линеарне једначине где коефициенти нису констатне него било које функције x-а, може се применити један метод, у одговарајућем смислу аналого претходноме. Тако се може каткад у једначини

$$(D^n + X_1 D^{n-1} + X_2 D^{n-2} + \ldots\ldots X_{n-1} D + X_n)y = 0$$

изабраном подесном заменом $y=\psi(m,x)$ постићи то, да резултујућа једначина садржи чиниоца независног од x, на пр. $\varphi(m)$ У том случају, чинилац ће обично бити n- тог степена и зато ће, замењен нулом, задовољавати диференцијалну једначину и дати n вредности од m које се могу означити $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ Према томе општи интеграл биће

$$y = A_1\psi(m_1,x)+A_2\psi(m_2,x)+\ldots\ldots A_n\psi(m_n,x)$$

У случају да су два корена једнака, на пр. m_1 и m_2 онда бисмо стављајући да је $m_2=m_1+h$ за одговарајући де y -а добили:

$$(A_1+A_2)\psi(m_1,x)+hA_2\left\{\frac{\partial\psi(m_1,x)}{\partial m_1}+\frac{h}{2!}\frac{\partial^2\psi(m_1,x)}{\partial m_1^2}+\cdots\right\}$$

или ако као и пре променимо константе и најзад пустимо да се h приближава нули:

$$A'\psi(m_1,x)+B'\frac{\partial}{\partial m_1}\psi(m_1,x)$$

Сличан поступак важи и у случају кад се један корен m_1 више пута понавља, а у случају имагинарних корена требало би по правилу константе у одговарајућем делу од у тако променити да у промењеном изразу нема имагинарних величина.

Овај поступак био је примењиван у случају константних коефициената где је e^{mx} употребљени специјални облик од ψ Ако је једначина једнодимензијална, тј. има облик:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots\dots A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = 0.$$

где су величине A константе, онда је x^m одговарајући облик од ψ Понекад, нека дата једначина може се целисходном променом променљивих свести на дати облик.

Пример 1. Решити једначину:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Ако се уведе $y = e^{mx}$ онда једначина по m постаје

$$(m+1)(m+2) = 0$$

тако да је $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$

Пример 2. Решити једначину:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\lambda \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 + \mu^2) y = 0$$

Једначина по m је: $(m-\lambda)^2 + \mu^2 = 0$ стога је:

$$y = e^{\lambda x} C \,\mathrm{Cos}(\mu x + \alpha) = e^{\lambda x}(A \,\mathrm{Cos}\, \mu x + B \,\mathrm{Sin}\, \mu x)$$

Последица. Решење једначине

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mu^2 y = 0$$

је

$$y = A \,\mathrm{Cos}\, \mu x + B \,\mathrm{Sin}\, \mu x$$

Пример 3. Решити једначину:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Једначина по m је $(m-1)^2 = 0$ и зато је $y = e^{x}(A + Bx)$

Пример 4. Решити једначину:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2n^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + n^4 y = 0$$

Једначина по m је $(m^2 + n^2)^2 = 0$ а вредност од y је:

$$(Ax + Bx)\,\mathrm{Cos}\, nx + (C + Dx)\,\mathrm{Sin}\, nx$$

Пример 5. Решити једначину:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$$

Ако се x^m замени са y, једначина по m гласи:

$$m(m-1)+m-1=0$$

тако да је $m=+1$ или $m=-1$, и зато y има вредност $$Ax+\frac{B}{x}$$

Пример 6. Решити једначину:

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}-8y=0$$

При истој замени као у примеру 5, једначина по m гласи: $m(m-1)(m-2)-3m(m-1)+7m-8=0$ или $m^3-6m^2+12m-8=0$ Одатле добијамо три пута да је $m=2$ Стога y има вредност:

$$Ax^m+B\frac{\partial x^m}{\partial m}+C\frac{\partial^2x^m}{\partial m^2}$$

где после диренцирања треба ставити $m=2$ Зато је интеграл $$x^2\left[A+B\log x+C(\log x)^2\right]$$

Пример 7. Решити једначину:

$$(a+bx)^2\frac{d^2y}{dx^2}+A(a+bx)\frac{dy}{dx}+By=0$$

Ако ставимо да је $a+bx=z$ једначина ће имати облик сличан двема последњим једначинама.

Ако у општем случају:

$$(a+bx)^n\frac{d^ny}{dx^n}+A_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots$$
$$+A_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx}+A_ny=0$$

и ако се стави $y=(a+bx)^{\lambda}$ онда за одређивање λ слеци једначина:

$$[\lambda]_n b^n + [\lambda]_{n-1} b^{n-1} A_1 + \ldots\ldots \lambda b A_{n-1} + A_n = 0$$

где је: $[\lambda]_K = \lambda(\lambda-1)\ldots\ldots(\lambda-K+1)$. Ако су $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 \ldots \lambda_n$ корени те једначине онда $y = C_1(a+bx)^{\lambda_1} + C_2(a+bx)^{\lambda_2} + \ldots$ $\ldots\ldots C_n(a+bx)^{\lambda_n}$ претставља потпуни интеграл дате једначине. Ако су два корена λ_1 и λ_2 међусобно једнаки и ако се одговарајући део од y означи са $C_1\varphi(\lambda_1) + C_2\varphi(\lambda_2)$ а са ε једна величина која тежи нули, онда тај део кад ставимо да је $\lambda_2 = \lambda_1 + \varepsilon$ постаје:

$$C_1\varphi(\lambda_1) + C_2\{\varphi(\lambda_2) + \varepsilon\varphi'(\lambda_1) + \theta_\varepsilon\} \text{ или } C'\varphi(\lambda) + C''\varphi'(\lambda_1 + \theta_\varepsilon)$$

где је θ_ε једна величина која са ε истовремено исчезава. Пошто је $\varphi'(\lambda) = (a+bx)^{\lambda}\log(a+bx)$ онда, кад се пређе на граничну вредност, интеграл у случају два једнака корена постаје $y = (a+bx)^{\lambda_1}\{C' + C''\log(a+bx)\} + C_3(a+bx)^{\lambda_3} + \ldots$ $\ldots C_n(a+bx)^{\lambda_n}$

и у општем случају за K једнаких корена:

$$y = (a+bx)^{\lambda_1}\{C' + C''\log(a+bx) + C'''[\log(a+bx)]^2 + \ldots\ldots C^{(K)}[\log(a+bx)]^{K-1}\} +$$
$$+ C_{K+1}(a+bx)^{\lambda_{K+1}} + \ldots\ldots C_n(a+bx)^{\lambda_n}$$

Ако су два корена коњуговано комплексна, на пр. $\lambda_1 = \mu + \nu i$, $\lambda_2 = \mu - \nu i$ онда, као што се лако види, одговарајући део од y је:

$$(a+bx)^{\mu}\{C_1\cos[\log(a+bx)^{\nu}] + C_2\sin[\log(a+bx)^{\nu}]\}$$

Пример 8. Решити једначину:

/1/ $(D^4 + 5D^2 + 6)y = 0$

/2/ $(D^4 + a^4)y = 0$

/3/ $(D^6 - a^6)y = 0$

/4/ $$\frac{d^8y}{dx^8} = y$$

/5/ $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

/6/ $$(1+x)^3\frac{d^3y}{dx^3} + (1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3(1+x)\frac{dy}{dx} - 8y = 0$$

Решења:

/1/ $$y = C_1 \cos(\sqrt{2}\,x + a) + C_2 \cos(\sqrt{3}\,x + \beta)$$

/2/ $$y = C_1 e^{\frac{ax}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{ax}{\sqrt{2}} + \alpha\right) + C_2 e^{-\frac{ax}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{ax}{\sqrt{2}} + \beta\right)$$

/3/ $$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 e^{\frac{ax}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}ax + \alpha\right) + C_3 e^{-\frac{ax}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + ax + \beta\right)$$

/4/ $$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x + \alpha) + C_4 e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \beta\right) + C_5 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \gamma\right)$$

/5/ $$y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 \log x)$$

/6/ $$y = C_1 (1+x)^2 + C_2 \cos[\log(1+x)^2] + C_3 \sin[\log(1+x)^2]$$

46/. Ако се вратимо нехомогеној диференцијалној једначини са константним коефициентима, имаћемо тада да тражимо партикуларни интеграл једначине

$$f(D)y = V$$

где је $f(D)$ цела рационална функција n- тог степена, а V је функција од x. Ако је решимо по методи оператора, где на обема странама примењујемо операцију $f^{-1}(D)$ тада добијамо: $y = \frac{1}{f(D)}V$ где израчунавање десне стране даје једну вредност y која задовољава једначину.

У појединим нарочитим случајевима облик и је V дато, олакшава нам то израчунавање.

I. <u>Нека је V цела рационална функција од x.</u>

Нека је највиши степен x-а у V m-ти степен. Да бисмо нашли делимични интеграл морамо $\frac{1}{f(D)}$ развити по растућим степенима од D Тада D^{m+1} као и оператори вишег реда, све чланове од V своде на нулу: дакле, можемо да занемаримо све чланове преко D^m.

Ако је, најнижи степен од $f(D)$ који се заиста јавља код D баш k-ти степен. онда ће развој од $f^{-1}(D)$ почети са D^{-k} и не треба да се прошири и после D^m тј. $D^{-k+(m+k)}$

Отуда следи: у $f(0)$ сви чланови реда вишег од D^{m+2k} могу се занемарити.

<u>Пример 1.</u> Решити једначину:

$$(D^2-4D+4)y=x^2$$

$$y=\frac{1}{(2-D)^2}\,x^2=\tfrac{1}{4}\left(1+2\frac{D}{2}+3\frac{D^2}{2^2}\right)x^2=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{8};$$

Комплементарна функција је $e^{2x}(A+Bx)$ А општи интеграл је

$$y=e^{2x}(A+Bx)+\tfrac{1}{8}(2x^2+4x+3)$$

<u>Пример 2.</u> Решити једначину: $(D^4-a^4)y=x^3$

Општи интеграл је очигледно:

$$y=-\frac{x^3}{a^4}+Ae^{ax}+Be^{-ax}+C\cos(ax+\alpha)$$

Пример 3. Решити једначину:

$$(D^4-2D^3+D^2)y=x^3$$

$$y=\frac{1}{D^2(1-D)^2}=\frac{1}{D^2}(1+2D+3D^2+4D^3+5D^4+6D^5)x^3$$

где су задржани чланови до трећег степена. Сад морамо посматрати $1+2D+\dots$ и $\frac{1}{D^2}$ појединачно као операторе. Оперишући најпре првим и пазећи на то да се само тражи партикуларан интеграл, тако да уз $\frac{1}{D^2}$ не треба ставити никакву константу, онда y има вредност

$$\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{2}+3x^3+12x^2$$

Оперишући пак најпре са $\frac{1}{D^2}$ /или, исто тако, ако се други оператор реши у поједине делове множећи сваки члан знака са $\frac{1}{D^2}$ онда то прелази у

$$\frac{1}{D^2}+\frac{2}{D}+3+4D+5D^2+6D^3$$

и y има вредност

$$\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{2}+3x^3+12x^2+30x+36$$

Општи интеграл је:

$$y=(A+Bx)e^x+C+Dx+\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{2}+3x^3+12x^2$$

и део партикуларног интеграла који још треба да се дода, а који добијамо кад се оператор употреби на други начин, очигледно је обухваћен у комплементарној функцији, пошто су C и D произвољне константе.

Лако је видети да се у општем случају могу без даљег из $f(D)$ занемарити не само чланови реда вишег од $D^{m+2к}$ већ да се и у самом развоју сви чланови вишег реда од $D^{m-2к}$ смеју изоставити, а примењени опер тивни знак $D^{\pm k}$ може да буде било вишег било нижег реда него m. Ако је у специјалном случају V нека константа, онда треба задржати само најнижи степен.

Пример 4. Решити једначине:

$$/1/\quad (D^4+2D^3+3D^2+2D+1)y=1+x+x^2$$

$$/2/\quad (D^3+D^2-D+15)y=x^2$$

Решења:

$$/1/\quad y=e^{-\frac{x}{2}}\left\{(C_1+C_2x)\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+(C_3+C_4x)\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right\}+x^2-3x+1$$

$$/2/\quad y=C_1e^{-3x}+e^{x}(C_2\sin 2x+C_3\cos 2x)+\frac{x^2}{15}+\frac{2x}{15^2}-\frac{28}{15^3}$$

II. Исти метод може да послужи за:израчунавање вредности y кад је V експоненцијална функција, за упрошћавање /и самим тим олакшавање/ рачуна кад V садржи експоненцијалну функцију као фактор.

У оба случају стављамо: $V=e^{ax}X$ тада следи:

$$y=\frac{1}{f(D)}V=\frac{1}{f(D)}e^{ax}X=e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}X$$

Ако је X константа, онда се по претходном методу вредност y може од једном добити.

Величина a може бити или не бити корен од $f(z)=0$

Ступањ њене многозначности означићемо са r тако да је за један једноставан корен $r=1$ Ако a није корен, онда је $r=0$ Ако затим развијемо $f(D+a)$ по Тајлоровом обрасцу добијамо:

$$f(D+a)=\frac{D^r}{r!}f^{(r)}(a)+\frac{D^{r+1}}{(r+1)!}f^{(r+1)}(a)+\ldots\ldots,$$

где $f^{(r)}(a)$ значи r -ти диференцијални количник од $f(z)$ по z за вредност $z=a$

По примедби на крају примера трећег од тога развоја за израчунавање y треба узети у обзир само први члан и тако се добија:

$$y=e^{ax}\frac{1}{\frac{f^{(r)}a}{r!}D^r}C=C\frac{e^{ax}x^r}{f^{(r)}a}$$

Ако је у специјалном сличају $r=0$ онда је:

$$y=C\frac{e^{ax}}{f(a)}$$

Пример 1. Решити једначину: $(D^2+D+1)y=e^{2x}$

Овде 2 није корен од $x^2+z+1=0$ стога је

$$y=\frac{e^{2x}}{2^2+2+1}=\frac{1}{7}e^{2x}$$

а општи интеграл је

$$y=e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+B\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+\frac{1}{7}e^{2x}$$

Пример 2. Решити једначину: $(D^2-4D+3)y=2e^{3x}$

Овде је

$$y=\frac{1}{(D-1)(D-3)}2e^{3x}=e^{3x}\frac{1}{D(D+2)}2=e^{3x}\frac{1}{2D}2=xe^{3x}$$

а општи интеграл је $y=Ae^{x}+Be^{3x}+xe^{3x}$

Пример 3. Решити једначине:

/1/ $(D-a)^n y=e^{ax}$

/2/ $(D^2-6D+8)y=ex+e^{2x}$

Решење:

$$/1/\quad y = e^{ax}\left(C_1 + C_2 x + \dots\dots C_n x^{n-1} + \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$/2/\quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{3}e^{x} - \frac{x}{2}e^{2x}$$

Пример 4. Једначина $f(z)=0$ има n корена, наиме, $a_1, a_2, \dots a_n$ Одредити партикуларни интеграл једначине

$$f(D)y = e^{a_1 x} + e^{a_2 x} \dots\dots e^{a_n x}$$

и дискутовати случај када су два корена међусобом једнака /а$_1$ и а$_2$/.

Ако је X цела рационална функција од x и према томе може да се развије по степенима од x онда величина $\frac{1}{f(D+a)}X$ има вредност као и у I.

Решење: $$y = X\left\{\frac{e^{a_1 x}}{f'(a_1)} + \frac{e^{a_2 x}}{f'(a_2)} + \dots\dots \frac{e^{a_n x}}{f'(a_n)}\right\}$$

Ако је $a_1 = a_2$ дакле дата једначина је: $f(D)y = 2e^{a_1 x} + e^{a_3 x} + \dots\dots e^{a_n x}$, онда развој од $f(D+a_1)$ почиње са $f''(a_1)\frac{\delta^2}{2}$ док развој од $f(D+a_k)$ за $K=3\dots\dots n$ почиње као и раније са $f'(a_k)D$ Стога је затим:

$$y = x\left\{2x\frac{e^{a_1 x}}{f''(a_1)} + \frac{e^{a_3 x}}{f'(a_3)} + \dots\dots \frac{e^{a_n x}}{f'(a_n)}\right\}$$

Пример 5. Решити једначину: $(D^2 - 2D + 1)y = x^2 e^{3x}$

Овде је: $y = \frac{1}{(D-1)^2}x^2 e^{3x} = e^{3x}\frac{1}{(D+2)^2}x^2 = e^{3x}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\right)$,

Општи интеграл је $y = (A + Bx)e^{x} + e^{3x}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\right)$

Пример 6. Решити једначину:

$$(D-2)^3 y = x^2 e^{2x}$$

Овде је: $y = \frac{1}{(D-2)^3}x^2 e^{2x} = e^{2x}\frac{1}{D^3}x^2 = \frac{1}{50}x^5 e^{2x}$, а општи интеграл је

$$y = e^{2x}\left(A + Bx + Cx^2 + \frac{1}{60}x^5\right)$$

Пример 7. Решити једначине:

$$/1/\quad (D^2 + D + 1)^2 y = xe^x$$

$$(D^4 - 1)^2 y = x^4 ex$$

Решење:

$$/1/\quad y = e^{-\frac{x}{2}}\left\{(C_1 + C_2 x)\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + (C_3 + C_4 x)\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right\} + \frac{e^x}{9}(x-2)$$

$$/2/\quad y = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 + C_4 x)e^{-x} + (C_5 + C_6 x)\cos x + (C_7 + C_8 x)\sin x +$$
$$+ e^x\left(\frac{x^6}{480} - \frac{3x^5}{80} + \frac{19x^4}{64} - \frac{5x^3}{4} + \frac{171x^2}{64}\right)$$

III. Претпостављамо да V као чинитеља садржи неки синус или косинус, тако да је: $V = X\cos(mx + \alpha)$ где су m и α константе. Тада треба да израчунамо:

$$y = \frac{1}{f(D)} X\cos(mx + \alpha)$$

Ако ставимо:

$$y_1 = \frac{1}{f(D)} X\sin(mx + \alpha)$$

онда је /§ 33/: $y + iy_1 = \frac{1}{f(D)} X e^{i(mx+\alpha)} = e^{i(mx+\alpha)} \frac{1}{f(D + im)} X$

Преостаје још да се израчуна израз $\frac{1}{f(D+im)} X$ што често може да потпадне под један или други пропис. Ако је његова вредност $u + iv$ онда добијамо изједначавајући реалне и имагинарне делове

$$y = u\cos(mx + \alpha) - v\sin(mx + \alpha)$$

$$y_1 = u\sin(mx + \alpha) + v\cos(mx + \alpha)$$

У случају када је X константа а $\cos mx$ није део комплементарне функције, тако да mi није корен једначине $f(z)=0$ може се израчунавање непосредно извести, јер је онда:

$$\frac{1}{f(D+im)}X = \frac{1}{f(im)}C$$

Ако би међутим $\cos mx$ био део комплементарне функције, ако би, дакле, im био r - тоструки корен једначине $f(z)=0$ онда бисмо због:

$$f(D+im) = \frac{D^r}{r!}f^{(r)}(im) + \frac{D^{r+1}}{(r+1)!}f^{(r+1)}(im) + \dots\dots$$

добили: $$\frac{1}{f(D+im)}C = \frac{Cx^r}{f^{(r)}(im)}$$

Затим ћемо као и раније раздвојити и изједначити реални и имагинарни део.

Пример 1. Решити једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = x\cos ax$$

Овде је: $$y = \frac{1}{D^2+n^2}x\cos ax$$

$$= R\left(e^{axi}\frac{1}{(D+ai)^2+n^2}\right)x = R\left\{e^{axi}\frac{1}{n^2-a^2}\left(1-\frac{2ai}{n^2-a^2}D\right)x\right\}$$

$$= R\left\{e^{axi}\left(\frac{x}{n^2-a^2}-\frac{2ai}{(n^2-a^2)^2}\right)\right\} = \frac{x\cos ax}{n^2-a^2} + \frac{2a\sin ax}{(n^2-a^2)^2}$$

Пример 2. Решити једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$$

Овде је: $$y = \frac{1}{D^2+1}\cos x$$

$$= R\left(e^{xi}\frac{1}{(D+i)^2+1}1\right) = R\left(e^{xi}\frac{1}{2iD+D^2}1\right)$$

$$R\left(e^{xi}\frac{x}{2i}\right) = \frac{x}{2}\sin x$$

а општи интеграл је:

$$y = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$$

Пример 3. Решити једначину:

$$\varphi(D)y = \cos nx$$

где је φ рационална функција са константним коефицијентима под претпоставком да $\cos nx$ није део комплементарне функције.

Ако се стави $\varphi(D) = \varphi_1(D^2) + D\varphi_2(D^2)$

онда је по напомени из § 34

$$y = \frac{1}{\varphi_1(D^2) + D\varphi_2(D^2)}\cos nx = \frac{1}{\varphi_1(-n^2) + D\varphi_2(-n^2)}\cos nx$$

$$= \frac{\varphi_1(-n^2) - D\varphi_2(-n^2)}{\{\varphi_1(-n^2) + D\varphi_2(-n^2)\}\{\varphi_1(-n^2) - D\varphi_2(-n^2)\}}\cos nx$$

$$= \frac{\varphi_1(-n^2)\cos nx + n\varphi_2(-n^2)\sin nx}{\{\varphi_1(-n^2)\}^2 + n^2\{\varphi_2(-n^2)\}^2}$$

Ако је пак $\cos nx$ део комплементарне функције, онда ће имеиоц бити једнак нули а партикуларни интеграл привидно бесконачан. Међутим, само је један део комплементарне функције помножен бескрајно великом константом која се може уврстити у произвољну константу. Да бисмо нашли партикуларни интеграл било би довољно да израчунамо вредност од:

$$\frac{1}{\varphi_1(D^2) + D\varphi_2(D^2)}\cos(n+h)x$$

узимајући део који постаје бесконачан /када је h једнако нули/ заједно са комплементарном функцијом а задржавајући коначни део као партикуларни интеграл. Боље је, међутим, да се у оваквим случајевима примени општи поступак.

Пример 4. Решити једначине:

/1/ $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\operatorname{Sin} nx$ (за $n=1$, као и за $n\neq 1$)

/2/ $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=\operatorname{Sin} 2x$

/3/ $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{Sin}\frac{\sqrt{3}x}{2}$

/4/ $\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}+y=x^2\operatorname{Cos} ax$ (за $a=1$, као и за $a\neq 1$)

/5/ $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=x\operatorname{Sin}^2x$

/6/ $(D^2+m^2)^r y=(1-x^2)\operatorname{Cos} mx$

/7/ $(D^2+2D+4)^2 y=xe^x\operatorname{Cos}(\sqrt{3}x+a)$

/8/ $\frac{d^2y}{dx^2}+K\frac{dy}{dx}+n^2y=E\operatorname{Cos} px$

/9/ $\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{dy}{dx}+4y=e^x\operatorname{Cos} x$

/10/ $\frac{d^4y}{dx^4}+n^4y=\operatorname{Sin}\lambda x+\rho^{\mu x}+x^5$

/11/ $\{D^4+(m^2+n^2)D^2+m^2n^2\}y=\operatorname{Cos}\frac{m+n}{2}x\operatorname{Cos}\frac{m-n}{2}x$

/12/ $\frac{d^6y}{dx^6}+y=\operatorname{Sin}\frac{3}{2}x\operatorname{Sin}\frac{1}{2}x$

Решења:

/1/ $y=C_1\operatorname{Cos} x+C_2\operatorname{Sin} x-\frac{\operatorname{Sin} nx}{n^2-1}$

Ако је $n=1$, онда треба ставити:

$$C_2=C'+\frac{1}{n^2-1}$$

па је према томе:

$$y=C_1\operatorname{Cos}x+C'\operatorname{Sin}x+\frac{\operatorname{Sin}x-\operatorname{Sin}nx}{n^2-1}$$

те при прелазу ка граници бива: $y=C_1\operatorname{Cos}x+C'\operatorname{Sin}x-\frac{1}{2}x\operatorname{Cos}x$

$$/2/\ y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\operatorname{Cos}\frac{\sqrt{3}x}{2}+C_2\operatorname{Sin}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)-\frac{2}{13}\operatorname{Cos}2x-\frac{3}{13}\operatorname{Sin}2x$$

$$/3/\ y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\operatorname{Cos}\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\operatorname{Sin}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}xe^{-\frac{x}{2}}\operatorname{Cos}\frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$/4/\ y=(C_1+C_2x)\operatorname{Cos}x+(C_3+C_4x)\operatorname{Sin}x+$$

$$+\left(\frac{x^2}{(1-a^2)^2}-\frac{4+20a^2}{(1-a^2)^4}\right)\operatorname{Cos}ax+\frac{8ax}{(1-a^2)^3}\operatorname{Sin}ax$$

За $a=1$ је: $y=(C_1+C_2x)\operatorname{Cos}x+(C_3+C_4x)\operatorname{Sin}x+\left(\frac{3x^2}{16}-\frac{x^4}{48}\right)\operatorname{Cos}x+$

$$+\frac{x^3}{12}\operatorname{Sin}x$$

$$/5/\ y=C_1\operatorname{Cos}2x+C_2\operatorname{Sin}2x+\frac{x}{8}-\frac{x}{32}\operatorname{Cos}2x-\frac{x^2}{16}\operatorname{Sin}x$$

/6/ Ако $\mathcal{R}$ има исто значење као и раније онда је партикуларни интеграл:

$$y=\mathcal{R}\left[\frac{i^r}{(2m)^r}\left\{\left(\frac{2}{(r+2)!}(1-x)^{r+2}-\frac{r(r+1)}{4m^2.r!}(1-x)^r\right)\operatorname{Cos}mx\right.\right.$$

$$\left.+\frac{r}{m.(r+1)!}(1-x)^{r+1}\operatorname{Sin}mx\right\}$$

$$+\frac{i^{r+1}}{(2m)^r}\left\{\left(\frac{2}{(r+2)!}(1-x)^{r+2}-\frac{r(r+1)}{4m^2.r!}(1-x)^r\right)\operatorname{Sin}mx\right.$$

$$\left.\left.-\frac{r}{m.(r+1)!}(1-x)^{r+1}\operatorname{Cos}mx\right\}\right]$$

Према томе да ли је r паран или непаран број биће реални део овога израза једнак првом или другом реду. Комплиментарна функција је:

$$(C_1+C_2x+\ldots\ldots C_rx^{r-1})\operatorname{Cos}mx+C'+C''x+\ldots\ldots C^{(r)}x^{r-1})\operatorname{Sin}mx$$

$$/7/\ y=e^x\left\{(C_1+C_2x)\operatorname{Cos}(\sqrt{3}x)+(C_3+C_4x)\operatorname{Sin}(\sqrt{3}x)\right\}$$

$$+e^x\left\{\frac{x^2}{24.\sqrt{3}}\operatorname{Sin}(\sqrt{3}x+\alpha)-\frac{x^3}{72}\operatorname{Cos}(\sqrt{3}x+\alpha)\right\}$$

/8/ $$y = C_1 e^{\frac{-K-\lambda}{2}x} + C_2 e^{-\frac{K+\lambda}{2}x} + \frac{E}{(n^2+p^2)^2+K^2p^2}x$$

$$\{(n^2+p^2)\mathrm{Cos}\,px + Kp\,\mathrm{Sin}\,px\}$$ где је $\lambda = \sqrt{K^2-4n^2}$

/9/ $$y = C_1 e^{-2x} + ex(C_2 \mathrm{Cos}\,x + C_3 \mathrm{Sin}\,x) + \frac{x}{20}e^{x}(3\,\mathrm{Sin}\,x - \mathrm{Cos}\,x)$$

/10/ Уместо $\rho^{\mu x}$ написати $e^{\mu x \log \rho}$. Као општи интеграл добија се израз:

$$y = C_1 \mathrm{Cos}\left(\frac{nx}{\sqrt{2}}+\alpha\right)e^{\frac{nx}{\sqrt{2}}} + C_2 \mathrm{Cos}\left(\frac{nx}{\sqrt{2}}+\beta\right)e^{-\frac{nx}{\sqrt{2}}} + \frac{\mathrm{Sin}\,\lambda x}{\lambda^4+n^4}$$

$$+ \frac{\rho^{\mu x}}{(\mu\log\rho)^4+n^4} + \frac{x^5}{n^4} - \frac{120x}{n^8}$$

/11/ $$y = C_1 \mathrm{Cos}(mx+\alpha) + C_2 \mathrm{Cos}(nx+\beta) + \frac{x\,\mathrm{Sin}\,mx}{4m(n^2-m^2)} + \frac{x\,\mathrm{Sin}\,nx}{4n(m^2-n^2)}$$

/12/ $$y = C_1 \mathrm{Cos}(x+\alpha) + C_2 e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}+\beta\right) + C_3 e^{-\frac{\sqrt{3}x}{2}}\mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}+\gamma\right)$$

$$+ \frac{1}{12}x\,\mathrm{Sin}\,x + \frac{1}{126}\mathrm{Cos}\,2x$$

IV.. Нека V садржи као чинитељ степен од x

Нека је $V = x^m T$. Да бисмо одредили партикуларни интеграл употребићемо уопштени облик Лајбницове теореме /§ 35/, те добијамо:

$$y = \frac{1}{f(D)}x^m T = x^m \frac{1}{f(D)}T + mx^{m-1}\left\{\frac{d}{dD}\frac{1}{f(D)}\right\}T + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}\left\{\frac{d^2}{dD^2}\frac{1}{f(D)}\right\}T$$

где ред треба продужити до $m+1$ -вог члана. Често ће се интеграција појединих чланова моћи извршити по једној од датих метода. Иначе треба употребити методу коју ћемо дати под V: она је најопштија и обухвата све случајеве које смо до сада обрадили. Она, свакако, изискује алгебарско решавање једне једначине чије је решење и онако потребно да би се добила комплементарна функција, и интеграцију израза који се при том добијају.

V. Најопштији облик функција V .

Претпостављамо да су сви чинитељи који се јављају у V и који се могу обрадити једном од претходних метода изнесени пред оператор, а да преостала величина не спада ни у један од обрађених облика, тако да треба израчунати изразе облика:

$$\frac{1}{\psi(D)}V$$

Замислимо да је $\frac{1}{\psi(D)}$ разложено на просте чинитеље, чији су имениоци линеарни чинитељи од $\psi(D)$ и у којима се не морају јављати само реалне константе; тада ће прости чинитељи бити облика:

$$\frac{A_n}{(D-\alpha)^n}$$

где је n неки цео број, а A_n и α константе и то је α корен једначине $\psi=0$. Одатле следи:

$$\frac{1}{\psi(D)}U=\sum\frac{A_n}{(D-\alpha)^n}U=\sum e^{\alpha x}\frac{A_n}{D^n}e^{-\alpha x}U=\sum A_n e^{\alpha x}\int\int\dots\int e^{-\alpha x}U dx^n$$

Ако се у једном простом чинитељу јављају комплексне величине, онда ће се у неком другом јавити њима конјуговане величине: ако у експлицитном изразу партикуларног интеграла не треба да буде ниједне имагинарне величине, онда се оваква два коњугована израза морају спојити.

Пример 1. $(D^2-5D+6)y = \log x$

добијамо

$$\frac{1}{D^2-5D+6} = \frac{1}{D-3} - \frac{1}{D-2}$$

Зато је партикуларни интеграл:

$$\frac{1}{D-3}\log x - \frac{1}{D-2}\log x = e^{3x}\int e^{-3x}\log x dx - e^{2x}\int e^{-2x}\log x d$$

а комплиментарна функција је: $Ae^{2x}+Be^{3x}$

Пример 2. Нека је у претходном задатку десна страна $x\log x$ уместо x ; тада можемо употребити или парцијалну интеграцију или уопштену Лајбницову теорему. Ова последња даје:

$$y = x\frac{1}{D-3}\log x - \frac{1}{(D-3)^2}\log x - x\frac{1}{D-2}\log x + \frac{1}{(D-2)^2}\log x$$

$$= xe^{3x}\int e^{-3x}\log x dx - e^{3x}\iint e^{-3x}\log x dx^2 - xe^{2x}\int e^{-2x}\log x dx + e^{2x}\iint e^{-2x}\log x d$$

Пример 3. Решити једначину

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = U$$

где је U нека функција од x .

добијамо

$$y = \frac{1}{D^2+n^2}U$$

$$= \frac{1}{2in}\left\{\frac{1}{D-in}U - \frac{1}{D+in}U\right\}$$

$$= \frac{1}{2in}\left\{e^{inx}\int U_e^{-inx}dx - e^{-inx}\int U_e^{-inx}dx\right\}$$

или, ако променимо променљиве под знаком интеграла

$$y = \frac{1}{2in}\int^x U_\xi\left\{e^{in(x-\xi)} - e^{-in(x-\xi)}\right\}d\xi$$

$$= \frac{1}{n}\int^x U_\xi \sin n(x-\xi)\, d\xi$$

где је U_ξ функција од ξ истог облика кога и U од x

Постоји још једна метода помоћу које се ова једначина може интегрирати. Ако обе стране помножимо са $\mathrm{Sin}\,nx$, онда је:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\mathrm{Sin}\,nx-ny\,\mathrm{Cos}\,nx\right)=U\,\mathrm{Sin}\,nx$$

па је зато

$$\frac{dy}{dx}\mathrm{Sin}\,nx-ny\,\mathrm{Cos}\,nx=-An+\int^{x}U_{\xi}\,\mathrm{Sin}\,n\xi\,d\xi$$

Ако првобитну једначину помножимо са $\mathrm{Cos}\,nx$ и напишемо у одговарајућем облику, онда се аналого добија интеграл:

$$\frac{dy}{dx}\mathrm{Cos}\,nx+ny\,\mathrm{Sin}\,nx=Bn+\int^{x}U_{\xi}\,\mathrm{Cos}\,n\xi\,d\xi$$

Ако се $\frac{dy}{dx}$ елиминише из обе једначине, добија се:

$$y=A\,\mathrm{Cos}\,nx+B\,\mathrm{Sin}\,nx+\frac{1}{n}\int^{x}U_{\xi}\,\mathrm{Sin}\,n(x-\xi)\,d\xi$$

у сагласности са првим резултатом.

Или се поступа на следећи начин. Множећи обе стране са e^{nxi}, добијамо:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}e^{nxi}-inye^{nxi}\right)=Ue^{nxi}$$

па је према томе

$$\frac{dy}{dx}-iny=A'e^{-nxi}+\int^{x}U_{\xi}\,e^{ni(\xi-x)}\,d\xi$$

и, аналого:

$$\frac{dy}{dx}+iny=B'e^{nxi}+\int^{x}U_{\xi}\,e^{-ni(\xi-x)}\,d\xi$$

Одузимајући једну једначину од друге и мењајући променљиве добијамо ранији резултат.

Пример 4. Решити једначине:

/1/ $\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=x^2\,\mathrm{Cos}\,ax$ (за $n\neq a$ и за $n=a$)

/2/ $\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = V$ (где је V било која функција од x)

/3/ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 4x^2e^{x^2}$

Решења:

/1/ $a \neq n$:

$$y = C_1 \operatorname{Cos} nx + C_2 \operatorname{Sin} nx + \left(\frac{x^2}{n^2-a^2} - \frac{2n^2+6a^2}{(n^2-a^2)^2}\right)\operatorname{Cos} ax + \frac{4ax}{(n^2-a^2)^2}\operatorname{Sin} ax$$

$a = n$

$$y = C_1 \operatorname{Cos} nx + C_2 \operatorname{Sin} nx + \left(\frac{x^3}{6n} - \frac{x}{4n^2}\right)\operatorname{Sin} x + \frac{x^2}{4n^2}\operatorname{Cos} nx$$

/2/ $$y = C_1e^{nx} + C_2e^{-nx} + \frac{1}{2n}\int^x V_\xi e^{n(x-\xi)}d\xi - \frac{1}{2n}\int^x V_\xi e^{-n(x-\xi)}d\xi$$

/3/ Ако на ово применимо образац који смо управо добили, треба ставити $n = \sqrt{2}$ и $V_\xi = 4\xi^2e^{\xi^2}$, дакле:

$$y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,e^{x\sqrt{2}}\int_0^x \xi^2e^{\xi^2-\xi\sqrt{2}}d\xi - \sqrt{2}\,e^{-x\sqrt{2}}\int_0^x \xi^2e^{\xi^2+\xi\sqrt{2}}d\xi$$

ако у првом интегралу ставимо $\xi = u + \frac{1}{\sqrt{2}}$ а у другом $\xi = v - \frac{1}{\sqrt{2}}$, биће:

$$y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}} + \sqrt{2}e^{x\sqrt{2}-1/2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}(u^2+u\sqrt{2}+1/2)e^{u^2}du - \sqrt{2}e^{-x\sqrt{2}-1/2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}(v^2-v\sqrt{2}+1/2)e^{v^2}dv$$

Интеграција се може извести, те се добија:

$$y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2} - 1/2\left(e^{x\sqrt{2}} + e^{-x\sqrt{2}}\right) = C'e^{x\sqrt{2}} + C''e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}$$

Пример 5. Помоћу једначине /3/ из претходног задатка, доказати да је

$$\sqrt{2}e^{x\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x}x^2e^{x^2-x\sqrt{2}}dx-\sqrt{2}e^{-x\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x}x^2e^{x^2+x\sqrt{2}}dx=e^{x^2}$$

Решење: из једначине /3/ претходног примера, јасно је да је e^{x^2} партикуларни интеграл једначине

$$\frac{d^2y}{dx}-2y=4x^2e^{x^2}$$

Но општи интеграл y из претходног примера може се написати и у облику

$$y=\sqrt{2}e^{x\sqrt{2}}\int_{\alpha}^{x}\xi^2e^{\xi^2-\xi\sqrt{2}}d\xi-\sqrt{2}e^{-x\sqrt{2}}\int_{\beta}^{x}\xi^2e^{\xi^2-\xi\sqrt{2}}d\xi$$

где су α и β произвољне константе које треба да се могу тако одредити да буде $y=e^{x^2}$. Ако се при интеграцији поступа исто као и раније биће:

$$y=e^{x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{\alpha^2-\alpha\sqrt{2}+x\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{\beta^2+\beta\sqrt{2}-x\sqrt{2}}$$

Ако се дакле стави $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, биће $y=e^{x^2}$ па је према томе

$$e^{x^2}=\sqrt{2}e^{x\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x}\xi^2e^{\xi^2-\xi\sqrt{2}}d\xi-\sqrt{2}e^{-x\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x}\xi^2e^{\xi^2+\xi\sqrt{2}}d\xi$$

47/. "Једнодимензионалне линеарне једначине" у блиској су сродности са линеарним диференцијалним једначинама са константним коефицијентима: зато ћемо и њих одмах овде обрадити.

Оне су облика:

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+A_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+A_{n-1}x\frac{dy}{dx}+A_ny=V$$

где су A_i константе, V је функција од x или константа.

У специјалном случају када је V једнако некој константи C, може се један партикуларни интеграл одмах одредити; то је, очигледно:

$$\frac{1}{A_n}\cdot C$$

Ако се оператор $x\frac{d}{dx}$ означи са ϑ, онда је /§ 37/

$$x^m\frac{d^m}{dx^m}=\vartheta(\vartheta-1)(\vartheta-2)\ldots.(\vartheta-m+1).$$

а диференцијална једначина се може овако написати:

$$F(\vartheta)y=V$$

Одредићемо прво комплементарну функцију. Она је интеграл од $F(\vartheta)y=0$ Но као што смо већ видели:

$$F(\vartheta)x^p=F(p)x^p$$

Ако се, дакле, p изабере тако да је $F(p)=0$, онда је x^p једно решење једначине; и ако су $p_1, p_2, \ldots. p_n$ корени од $F(z)=0$, онда је комплементарна функција.

$$y=A_1x^{p_1}+A_2x^{p_2}\ldots.+A_nx^{p_n}$$

Случај када су корени једнаки је већ /§ 15/ је већ продискутован; ако су два корена комплексна p_1 и p_2, тако да је

$$p_1=\alpha+i\beta\ ;\quad p_2=\alpha-i\beta$$

онда је одговарајућа вредност да од y :

$$x^{\alpha}\left\{A_1'\operatorname{Cos}(\beta\log x)+A_2\operatorname{Sin}(\beta\log x)\right\}$$

где су произвољне константе промењене.

Пример: Ако су комплексни корени $\alpha \pm i\beta$ r-тоструки, онда је одговарајући део комплементарне функције:

$$x^{\alpha}\Big\{\Big[A_1'+A_2'\log x+A_3'(\log x)^2+\ldots\ldots+A_r'(\log x)^{r-1}\Big]\operatorname{Cos}(\beta\log x)$$
$$+\Big[B'+B_2'\log x+B_3'(\log x)^2+\ldots\ldots+B_T'(\log x)^{r-1}\Big]\operatorname{Sin}(\beta\log x)$$

48/. Партикуларни интеграл кога ћемо сада одредити јесте вредност од:

$$\frac{1}{F(V)}V$$

Овај се израз може израчунати на два разна начина који су стварно еквивалентни: они се само формално разликују по операторима који су употребљени.

Ако је V или неки степен од x или садржи као чинитељ неки такав степен, рецимо x^m, онда је:

$$y=\frac{1}{F(v)}x^mT=x^m\frac{1}{F(v+m)}T$$

Ако је T константа онда се вредност може лако израчунати. Ако m није корен једначине $F(t)=0$ онда се $\{F(v+m)\}^{-1}$ може развити по растућим степенима од V и изоставити све чланове сем првога који је независан од V и даје.

$$y=\frac{Cx^m}{F(m)}$$

Иста метода развијања може се употребити и онда када је T цела рационална функција од $\log x$; а како је $V.\log x = 1$ то се развијање не мора продужити преко V^n где је n највиши експонент од $\log x$ у T.

Ако је m, r -тоструки корен од $F(t)=0$ онда је:

$$F(v+m) = \frac{v^r}{r!} F^{(r)}(m) + \frac{v^{r+1}}{(r+1)!} F^{(r+1)} \cdot m + \ldots\ldots$$

и остаје да се одреди вредност од:

$$y = \frac{1}{\frac{v^r}{r!} F^{(r)}(m) + \ldots\ldots} T$$

Ако је T нека константа C, онда је због

$$\frac{1}{v} 1 = \log x$$

вредност од y:

$$\frac{C(\log x)^r}{F^{(r}(m)}$$

Ако је T као и раније функција од $\log x$ онда ће се оператор развити по растућим степенима од V до V^n /а V^r остаје у имениоцу/ а вредност од y биће збир чланова облика.

$$\frac{1}{V^r} (\log x)^s$$

тј. збир чланова чији облик:

$$\frac{s!}{(s+r)!} (\log x)^{s+r}$$

Општи израз за партикуларни интеграл може се дати у случају када V нема ни један од ових облика. Ако замислимо да је $\frac{1}{F(v)}$ растављено на просте факторе, и претпоставимо да је $\frac{A}{v-d}$

неки члан, онда ће y бити збир чланова облика:
$\frac{A}{V-\alpha}V$, а то је еквивалетно са

$$Ax^{\alpha}\frac{1}{V}Vx^{-\alpha} \quad \text{или} \quad Ax^{\alpha}\int Vx^{-\alpha}\,dx$$

Други поступак се састоји у томе да се уместо независно променљиве x једначином $x=e^{z}$ уведе нова променљива z. Због тога V прелази у $\frac{d}{dz}$ или D, те се могу применити све методе из § 46. Лако је видети да су случајеви који су дати за V аналоги случајевима које смо навели за D.

Пример: Решити једначине:

/1/ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+6y=x$

/2/ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2y=x\log x$

/3/ $\frac{x^3d^3y}{dx^3}-\frac{x^2d^2y}{dx^2}+\frac{2xdy}{dx}-2y=x^3+3x$

/4/ $\frac{x^4d^4y}{dx^4}+\frac{6x^3d^3y}{dx^3}+\frac{9x^2d^2y}{dx^2}+\frac{3xdy}{dx}+y=(1+\log x)^2$

/5/ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=2x^2$

/6/ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=x^2+\frac{1}{x}$

/7/ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-(2m-1)x\frac{dy}{dx}+(m^2+n^2)y=n^2x^m\log x$

Решења:

/1/ $y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{1}{2}x$

/2/ $y = x\left\{C_1 \operatorname{Cos}(\log x) + C_2 \operatorname{Sin}(\log x)\right\} + x\log x$

/3/ $y = x\left(C_1 + C_2\log x\right) + C_3x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x(\log x)^2$

/4/ $y = (C_1 + C_2\log x)\operatorname{Cos}(\log x) + (C_3 + C_4\log x)\operatorname{Sin}(\log x)$

$+ (1 + \log x)^2 - 4$

/5/ $y = x^2\left(C_1 + C_2\log x\right) + x^2(\log x)^2$

/6/ $y = C_1x^{-1} + C_2x^2 + \frac{1}{3}\left[(x^2 - x^{-1})\log x - \frac{x^{-1}}{3} - \frac{x^2}{3}\right]$

/7/ $y = x^m\left\{C_1\operatorname{Cos}(n\log x) + C_2\operatorname{Sin}(n\log x) + x^m\log x\right.$

МЕШОВИТИ ЗАДАЦИ УЗ III ПОГЛАВЉЕ

1. Ако су дате две линеарне диференцијалне једначине m -тог и n -тог реда /$n>m$/ које су задовољене истом независном променљивом, онда се из њих без икакве интеграције може извести трећа једначина /$n-m$/ - тог реда, а једначине m - тога и $n-m$ - тога реда биће, када се интегрирају, довољне да се нађе интеграл једначине n - тога реда.

Решење: Нека су

$$F(D)y = y^{(m+K)} + f_1 y^{(m+K-1)} + \ldots\ldots f_m + K - 1\,y' + f_{m+x}y = 0$$

и $\Phi(D)z = z^{(m)} + \varphi_1 z^{(m-1)} + \ldots\ \varphi_{m-1}z' + \varphi_m z = 0$

дате линеарне диференцијалне једначине $m+K=n$ тога и n - тога реда, и нека су сви партикуларни интеграли друге једначине уједно и интеграли прве. Ако је тада y општи интеграл прве једначине а z општи интеграл друге, онда z садржи m произвољних констаната, док y мора садржати $m+k$, тако да ће y бити облика:

$$y = z + C_1 \tilde{y}_1 + C_2 y_2 \ldots\ldots C_x y_x$$

где су $y_1 \ldots\ldots y_k$ осталих k партикуларних интеграла од $F(D)y=0$. Ако ставимо: $\phi(D)y=u$ и заменимо лево ту вредност од y, онда ће z нестати из резултата због $\phi(D)z=0$, те ће овај према томе бити линеарна хомогена функција констаната $C_1 C_2 \ldots\ldots C_k$. Према томе u задовољава линеарну диференцијалну једначину k - тог реда, која се може написати у облику:

$$\psi(D)u = u^{(k)} + \psi_1 u^{(k-1)} + \ldots\ldots + \psi_{k-1} u' + \psi_k u = 0$$

а чији се коефициенти могу лако одредити. Доиста, као што се диференцијацијом једначина $\phi(D)y=u$ добија, за сваку вредност од i је:

$$y^{(m+1)} + \lambda_i 1 y^{(m+i-1)} + \lambda_i 2 y^{(m+i-2)} + \ldots + \lambda_i m{+}1 y = u^{(i)}$$

Ако се стави $i=1,2 \ldots k$ па се вредност од $u, u' \ldots u^{(k)}$ замени у једначини $\psi(D)u=0$ следује:

$$y^{(m+k)} + \lambda_{k,1} + \psi_1)y^{(m+k-1)} + (\lambda_{k,2} + \psi_1 \lambda_{k-1,1} + \psi_2)y^{(m+k-2)} + \ldots = 0$$

Упоређујући ову једначину са датом диференцијалном једначином $m+k$ - тог реда добијају се за одредбу коефициената једначине:

$$\lambda_{k,1}+\psi_1=f_1$$

$$\lambda_{k.2}+\psi_1\lambda_{k-1,1}+\psi_2=f_2$$

$$\lambda_{k.k}+\psi_1\lambda_{k-1,k-1}+\dots\psi_k=f_k$$

$$\lambda_{k,k+1}+\psi_1\lambda_{k-1,k}+\dots\psi_k\lambda_{0.1}=f_{k+1}$$

$$\lambda_{k,k+m}+\psi_1\lambda_{k-1,k+m-1}+\dots\psi_k\lambda_{0,m}=f_{k+m}$$

где су $\lambda_{0,1}\dots\lambda_{0,m}$ идентични са $\varphi_1\dots\varphi_m$. Ово су у свему свега $m+k$ једначина, од којих првих k одређују коефициенте $\psi_1,\psi_2\dots\psi_k$ док су осталих m услови да сви интеграли једначине m - тога реда по z буду уједно и интеграли једначине $m+k$ - тог реда по y. Како је то по претпоставци случај види се да је сада интеграција једначине $m+k=n$ тога реда зависна од интеграције једначина $\psi(D)u=0$ $\Phi(D)y=u$, које су $k=(n-m)$ - тог и m - тог реда.

2. Решити једначине:

/1/ $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}=n^2y$$

/2/ $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}=\left(n^2+\frac{2}{x^2}\right)y$$

/3/ $$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\sin x\sin 2x$$

Решење:

/1/ Ставити $xy=u$, тада је $xy=C_1e^{nx}+C_2e^{-nx}$

/2/ Ставити $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=u$, тада је

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du}{dx}=n^2u$$

дакле:

$$u=C_1\frac{e^{nx}}{x}+C_2\frac{e^{-nx}}{x}$$

па је према томе: $y=\frac{C_1}{n^2x^2}e^{nx}(nx-1)-\frac{C_2}{n^2x^2}e^{-nx}(nx+1)$

/3/ $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{16}\cos 3x+\frac{1}{4}x\sin x$

3. Доказати да се решење једначине:

$(D+c)^n y=\cos ax$ може написати у облику:

$$y=e^{-ex}(A_1+A_2x+\dots A_nx^{n-1}+(c^2+a^2)^{-\frac{n}{2}}\cos(ax-n\,\mathrm{arc}\cot\frac{c}{a})$$

Решење: Партикуларни интеграл добија се из једначине

$$y=\frac{1}{(D+c)^n}\cos ax=\mathcal{R}\left\{e^{axi}\frac{1}{(D+ai+c)^n}=\mathcal{R}\left\{e^{axi}\frac{1}{(c^2+a^2)^{n/2}}\left(\frac{c-ai}{c+ai}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}\right.\right.$$

Но како је

$$\frac{1}{2i}\log\frac{c-ai}{c+ai}=-\mathrm{arc}\cot\frac{c}{a}$$

дакле

$$\left(\frac{c-ai}{c+ai}\right)^{1/2}=e^{-i\,\mathrm{arc}\cot\frac{c}{a}}$$

па је према томе

$$y=(c^2+a^2)^{-\frac{n}{2}}\cos(ax-n\,\mathrm{arc}\cot\frac{c}{a})$$

Комплиментарна функција је: $e^{-cx}(A_1+A_2x+\dots\dots A_nx^{n-1})$

4. Написати опште решење једначине:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k\frac{dy}{dt}+n^2y=u$$

у облику

$$y=e^{-\frac{1}{2}kt}(A\cos n't)+B\sin n't)+\frac{1}{n'}\int e^{-\frac{1}{2}k(t-t')}\sin n'(t-t')u'dt'$$

где је u' функција од t' истога облика као и u од t а n' је одређено једначином $n'^2=n^2-\frac{1}{4}k^2$

Решење: Поступити као и у § 46, V. пример 3

5. Решити једначине:

/1/ $$x^4\frac{d^4y}{dx^4}+6x^3\frac{d^3y}{dx^3}+4x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=$$
$$=x^2+2\cos(\log x)$$

/2/ $$\frac{d^4y}{dx^4}-12\frac{d^2y}{dx^2}+12y=16x^4e^{x^2}$$

/3/ $$\frac{d^4y}{dx^4}+32\frac{dy}{dx}+48y=xe^{-2x}+e^{2x}\cos 2^{3/2}x$$

/4/ $$\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-2y=e^x+\cos x$$

/5/ $$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}+y=ax^2+be^{-x}\sin 2x$$

/6/ $$\left(\frac{d}{dx}+1\right)^3y=e^{-x}+x^2+x^{-1}$$

Решење:

/1/ $$y=C_1x^2+C_2x^{-2}+C_3\cos(\log x)+C_4\sin(\log x)+$$
$$+\frac{1}{20}x^2\log x-\frac{1}{5}\log x\sin(\log x)$$

/2/ Ако се стави $y=e^{x^2}v$ добија се једначина:

$$\frac{d^4v}{dx^4}+8x\frac{d^2v}{dx^3}+24x^2\frac{d^2v}{dx^2}+32x^3\frac{dv}{dx}+16x^4v=16x^4$$

која је задовољена за $V=1$. Зато је $y=e^{x^2}$ партикуларни интеграл дате једначине, па је општи интеграл:

$$y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3e^{\beta x}+C_4e^{-\beta x}+ex^2$$

где је $\alpha=(6+2.6^{1/2})^{1/2}$; $\beta=(6-2.6^{1/2})^{1/2}$

$$/3/\quad y=e^{-2x}(C_1+C_2x)+C_3e^{2x}\operatorname{Cos}(2^{3/2}x+\alpha)+\frac{e^{-2x}}{144}(x^3+x^2)$$
$$-\frac{xe^{2x}}{576}\left\{4\operatorname{Cos}(2^{3/2}x)-2^{1/2}\operatorname{Sin}(2^{3/2}x)\right\}$$

$$/4/\quad y=C_1e^{x}+e^{x}(C_2\operatorname{Cos}x+C_3\operatorname{Sin}x)+xe^{x}+\frac{1}{10}\operatorname{Cos}x+\frac{3}{10}\operatorname{Sin}x$$

$$/5/\quad y=C_1e^{1/2x}\operatorname{Cos}\left(\frac{3^{1/2x}}{2}+\alpha\right)+C_2e^{-1/2x}\operatorname{Cos}\left(\frac{3^{1/2x}}{2}+\beta\right)+$$
$$+a(x^2-2)-\frac{e^{-x}}{481}(9\operatorname{Sin}2x+20\operatorname{Cos}2x)$$

$$/6/\quad y=e^{-x}(C_1+C_2x+C_3x^2)+x^2-6x+12+\frac{1}{6}x^3e^{-x}+e^{-x}\iiint\frac{e^x}{x}dx^3$$

6. Написати комплементарну функцију једначине:

$$\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}-a^{2n}y=f(x)$$

у облику:

$$y=Ce^{ax}+De^{-ax}+\sum_{r=1}^{r=n-1}e^{ax\operatorname{Cos}\frac{r\pi}{n}}\left\{A_r\operatorname{Cos}\left(ax\operatorname{Sin}\frac{r\pi}{n}\right)+B_2\operatorname{Sin}\left(ax\operatorname{Sin}\frac{r\pi}{n}\right)\right\}$$

и показати да део партикуларног интеграла који одговара општем члану под знаком сабирања, гласи:

$$\frac{1}{na^{2n-1}}\int^{x}e^{a(x-\xi)\operatorname{Cos}\frac{r\pi}{n}}\operatorname{Cos}\left\{\frac{r\pi}{n}+a(x-\xi)\operatorname{Sin}\frac{r\pi}{n}\right\}f(\xi)\,d\xi$$

Решење: Решења једначине $Z^{2n}-a^{2n}=0$ јесу, осим $+a$ и $-a$, још и све оне вредности које се добијају из: $t = a\left(\cos\frac{r\pi}{n} \pm i\sin\frac{r\pi}{n}\right)$

ако се стави $r = 1, 2, \dots n-1$. Према томе је део компл ментарне функције који одговара пару коњугованих кор нова:

$$C_1 e^{ax(\cos\frac{r\pi}{n} + i\sin\frac{r\pi}{n})} + C_2 e^{ax(\cos\frac{r\pi}{n} - i\sin\frac{r\pi}{n})},$$

или: $$e^{ax\cos\frac{r\pi}{n}}\left\{A_r\cos\left(ax\sin\frac{r\pi}{n}\right) + B_r\sin\left(ax\sin\frac{r\pi}{n}\right)\right\}$$

тако је комплементарна функција

$$Ce^{ax} + Dc^{-ax}\sum_{r=1}^{r=n-1} e^{ax\cos\frac{r\pi}{n}}\left\{A_2\cos\left(ax\sin\frac{r\pi}{n}\right) + B_r\sin\left(ax\sin\frac{r\pi}{n}\right)\right)$$

Растављањем израза $\frac{1}{D^{2n}-a^{2n}}$ на просте чинитеље доб јају се као разломци који одговарају коренима $\left(\cos\frac{r\pi}{n} \pm i\sin\frac{r\pi}{n}\right)$ ови:

$$\frac{1}{2na^{2n-1}}\left\{\frac{e^{\frac{r\pi i}{n}}}{D-a\left(\cos\frac{r\pi}{n}+i\sin\frac{r\pi}{n}\right)} + \frac{e^{-\frac{r\pi i}{n}}}{D-a\left(\cos\frac{r\pi}{n}+i\sin\frac{r\pi}{n}\right)}\right\}$$

па је према томе одговарајући део партикуларног интеграла: $$\frac{1}{2na^{2n-1}}\left\{e^{\frac{r\pi i}{n}+ax\left(\cos\frac{r\pi}{n}+i\sin\frac{r\pi}{n}\right)}\int^{x} e^{-a\xi\left(\cos\frac{r\pi}{n}+i\sin\frac{r\pi}{n}\right)}f(\xi)d\xi\right.$$

$$\left. + e^{-\frac{r\pi}{n}+ax\left(\cos\frac{r\pi}{n}-i\sin\frac{r\pi}{n}\right)}\int^{x} e^{-a\xi\left(\cos\frac{r\pi}{n}-i\sin\frac{r\pi}{n}\right)}f(\xi)d\xi\right\}$$

$$= \frac{1}{na^{2n-1}}\int^{x} e^{a(x-\xi)\cos\frac{r\pi}{n}}\cos\left\{\frac{r\pi}{n}+a(x-\xi)\sin\frac{r\pi}{n}\right\}f(\xi)d\xi$$

7. Доказати да решење једначине:

$$\left(\cos\frac{d}{dx}\right)y = \cos x$$

гласи: $$y=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{A_n e^{(n+1/2)\pi x}+B_n e^{-(n+1/2)\pi x}\right\}+\frac{2\cos x}{e+e^{-1}}$$

Решење: Коренови једначине $\cos Z=0$ добијају се из $Z=\pm(n+1/2)\pi$ ако n добије све вредности од 0 до ∞. Према томе је комплементарна функција:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{A_n e^{(n+1/2)\pi x}+B_n e^{-(n+1/2)\pi x}\right\}$$

Партикуларни интеграл је

$$y=R\left\{\frac{1}{\cos D}e^{ix}\right\}=R\left\{e^{ix}\frac{2}{e^{-1+Di}+e^{1-Di}}\cdot 1\right\}$$

Ако $\frac{2}{e^{-1+Di}+e^{+1-Di}}$ развијемо по растућим степенима од D онда треба задржати само члан који не зависи од D, па је према томе:

$$y=\frac{2\cos x}{e+e^{-1}}$$

Општи интеграл је:

$$y=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{A_n e^{(n+1/2)\pi x}+B_n e^{-(n+1/2)\pi x}\right\}+\frac{2\cos x}{e+e^{-1}}$$

8. Доказати да је:

$$f\left(\frac{d}{dx}-\frac{p}{x+a}\right)(x+a)^p\varphi(x)=(x+a)^p f\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)$$

9. Доказати једначине:

/1/ $2^{n+1}D^n x^{n+1/2}D^{n+1}e^{x^{1/2}}=e^{x^{1/2}}$

/2/ $D^m x^{m+r}D^r x^{-m}D^{n-r}\varphi(x)=x^r D^{m+n}\varphi(x)$

/3/ $D^n(v-n)^r y=v^r D^n y$

Решење:

/1/ Овај се образац добија или вишеструком применом Leibniz -ове теореме, /§ 35/ или простије развијајући $e^{x^{1/2}}$ по степенима од $x^{1/2}$.

/2/ По Leibniz-овој теореми је

$$D^r x^{-m} D^{n-r}\varphi = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} (-1)^{\lambda} m(m+1)\ldots\ldots(m+\lambda-1) r_{\lambda} x^{-m-\lambda} D^{n-\lambda}\varphi.$$

где је r_λ ради скраћења написано уместо $\frac{r(r-1)\ldots\ldots(r-\lambda+1)}{\lambda!}$

Одавде се добија $D^m x^{m+r} D^r x^{-m} D^{n-r}\varphi(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r}(-1)^{\lambda} m(m+1)\ldots(m+\lambda-1)r_{\lambda}$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\mu=m}(r-\lambda)(r-\lambda-1)\ldots(r-\lambda-\mu+1)m_{\mu} x^{r-\lambda-\mu} D^{n+m-\lambda-\mu}\varphi(x) =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r}\sum_{\mu=0}^{\mu=m}(-m)_{\lambda} m_{\mu} \cdot r_{\lambda+\mu}(\lambda+\mu)!\, x^{r-(\lambda+\mu)} D^{n+m-(\lambda+\mu)}\varphi(x)$$

Ако се скупе сви чланови у којима $\lambda+\mu$ има исту вредност, и ако се при сабирању коефицијената употреби познати образац

$$\sum_{p=0}^{p=n}\alpha_p\beta_{n-p} = (\alpha+\beta)_n$$

за $\alpha = -m$; $\beta = m$

наћи ће се да сви збирови нестају а да преостаје само члан за кога је $\lambda+\mu=0$. Одатле следи образац из текста.

/3/ По § 37 је $D^n(v-n)y = xD^{n+1}y = vD^n y$ па је према томе:

$$D^n(v-n)^r y = vD^n(v-n)y = v^r D^n y \text{ те је уопште } D^n(v-n)^r y = v^r D^n y$$

10. Доказати да је, ако се $\frac{xd}{dx}$ означи са v

$$\frac{v-n}{v!}0 = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots A_{n-1}x^{n-1}$$

где су $A_0, A_1 \ldots\ldots\ldots A_{n-1}$ произвољне константе.

Решење: Како је

$$\frac{(v-n)!}{v!} = \frac{1}{v(v-1)\ldots.(v-n+1)} = \frac{1}{x^n D^n}$$

мора бити: $\frac{1}{x^n D^n}0 = A_0 + A_1 x + \ldots.\ A_{n-1}x^{n-1}$ а тачно т овога резултата је очигледна.

11. Ако су P, Q и R комутативни оператори онда је решење једначине:

$$P.Q.R.u = 0$$

дато изразом: $u = P^{-1}.0 + Q^{-1}.0 + R^{-1}.0$

ЧЕТВРТО ПОГЛАВЉЕ

Разне методе интеграције

49/ Пре него што продискутујемо линеарне једначине другога реда са променљивим коефицијентима, сматрамо да ће бити добро да расмотримо разне методе интеграције. Оне се могу применити на једначине које се или могу потпуно решити, или се могу решити на тај начин што се може наћи један партикуларни интеграл. Али се мора напоменути да су једначине које ће бити наведене типичне а да не претстављају само поједине разне једначине, које се, као случајно, могу интегралити. Често је могуће уврстити друге једначине у неку од следећих класа, помоћу погодно изабраних супституција било за зависно било за независно променљиву. Али такве супституције одређују границе у којима те методе доводе циљу; зато се никад не сме заборавити да ове методе у њиховој доцнијој примени на једначине другога реда немају општу важност.

50/. Најпростији од свих је случај када је диференцијална једначина облика.

$$\frac{d^u y}{dx^u} = X$$

где је X функција од x. Интеграцијом се непосредно добија

$$\frac{d^{u-1} y}{dx^{u-1}} = \int X dx + A_1$$

где A_1 означава произвољну константу. Друга интеграција даје:

$$\frac{d^{u-2} y}{dx^{u-2}} = \int dx \int X dx + A_1 x + A_2$$

где је A_2 нека друга произвољна константа. Ако на овај начин продужимо, наћи ћемо после n интеграција као опште решење:

$$y = \int \dots \int X (dx)^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \dots\dots B_{n-1} x + B_n$$

где B_r стоји уместо $\frac{A_r}{(u-r)!}$, те је према томе произвољна константа.

Пример: Показати да се партикуларни интеграл може написати у облику:

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^x T (x-t)^{n-1} dt$$

где је T функција од t истог облика кога је и X од x.

51/. Друга врло једноставна једначина је:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = Y$$

где је Y функција од y; али она се, уопште, може интегралити само ако је n једнако 1 или 2. У случају када је $n=2$ треба једначину помножити са $2\frac{dy}{dx}$ онда се свака страна може интегралити те се добија:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int Y dy + A, \text{ или } \left(\frac{dy}{dx}\right)^y = \psi(y) + A$$

У овој се једначини променљиве могу раставити, те се тако налази:

Општи интеграл диференцијалне једначине:

јесте:

$$\int \frac{dy}{\left[\psi(y)+A\right]^{1/2}} = x + B$$

Пример: Решити једначину: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$

Један од првих интеграла је: $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + a^2y^2 = A = a^2c^2$

где је C произвољна константа. Растављање променљивих даје:

$$\frac{dy}{(c^2-y^2)^{1/2}} = a\,dx$$

Дакле: $\arcsin\frac{y}{c} = ax + \alpha$ или $y = C\sin(ax+\alpha)$

52/. Може се решити свака једначина између извода чији се редови разликују за јединицу или две. Као претставника диференцијалних једначина код којих се редови разликују за јединицу, можемо узети

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

ако се стави:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = Y$$

Једначина прелази у:

$$\frac{dY}{dx} = F(Y)$$

а њен је интеграл

$$\psi(Y) = \int \frac{dY}{F(Y)} = x + A$$

Ако претпоставимо да се једначина може решити по Y и да је $Y = \varphi(x+A)$, решење, онда је:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \varphi(x+A)$$

То је онда један од лучајева који су раније обрађени /§ 50/, и у коме се општи интеграл може одредити.

Пошто смо добили једначину $\psi(Y)=x+A$ можемо наставити на следећи начин: како је

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{u-2}y}{dx^{u-2}}\right)=Y$$

биће:

$$\frac{d^{u-2}}{dx^{u-2}}=\int Y dx=\int\frac{YdY}{F(Y)}$$

Аналого се добија:

$$\frac{d^{u-3}y}{dx^{u-3}}=\int dx\int\frac{YdY}{F(Y)}=\int\frac{dY}{F(Y)}\int\frac{YdY}{F(Y)}$$

итд. до

$$y=\int\frac{dY}{F(Y)}\int\frac{dY}{F(Y)}\cdots\cdots\int\frac{YdY}{F(Y)}$$

где после сваке интеграције треба увести по једну произвољну константу, а интеграције се морају вршити с десна на лево. Тако добијамо две једначине између x , y , Y , из којих се може елиминисати Y : једначина која се тако добија јесте општи интеграл.

Јасно је да се овом методом може решити и једначина: $f\left(\frac{d^ny}{dx^n},\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0$

Пример 1. Решити једначину:

$$a\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

ако се стави $\frac{d^2y}{dx^2}=\xi$

онда је: $a\frac{d\xi}{dx}=\xi.$

а интеграл ове једначине је: $\xi = A' e^{\frac{x}{a}}$

Дакле: $y = Ae^{\frac{x}{a}} + Bx + C$

где су A , B и C произвољне константе.

Пример 2. Решити једначине:

$$/1/ \quad a\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$/2/ \quad -a\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$$

$$/3/ \quad a^3\frac{d^3y}{dx^3}\ \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + c^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}^{1/2}$$

Решење:

$$/1/ \quad y + C_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-c}{a}} + e^{-\frac{x-c}{a}}\right)$$

$$/2/ \quad (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$$

/3/ Ако је $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, добија се прво:

$$dx = a^3\frac{q\,dq}{(1 + c^2q^2)^{1/2}}$$

дакле:

$$x = C_1 + \frac{a^3}{c^2}(1 + c^2q^2)^{1/2}$$

Даље је: $$\frac{dy}{dx} = \int q\,dx = \int\frac{a^3q^2\,dq}{(1 + c^2q^2)^{1/2}} = C_2 + \frac{a^3}{2c^3}\left\{cq(1 + c^2q^2)^{1/2} - \log cq + (1 + c^2q^2)^{1/2}\right\}$$

Ако сад опет ставимо уместо dx његову вредност изражену помоћу q и интегралимо добићемо:

$$y = C_3 + C_2\frac{a^3}{c^2}(1 + c^2q^2)^{1/2} + \frac{a^6}{2c^4}q + \frac{a^6}{6c^2}q^3 - \frac{a^6}{2c^5}(1 + c^2q^2)^{1/2}\log\left\{cq + (1 + c^2q^2)^{1/2}\right\}$$

Из ове се једначине и вредности од x елиминише q .

53/. Као претставника једначине између извода чији се редови разликују за две јединице можемо узети једначину:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)$$

Ако се стави: $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = z$

Једначина прелази у: $\frac{d^2 z}{dx^2} = f(z)$

чије је решење према § 51:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A + 2\int f(z)\,dz}} = x + B$$

Ако се ова једначина, по извршеној интеграцији, може решити по z, рецимо $z = \theta(x)$, /при чему ће функција $\theta(x)$ /садржати константе A и B /, онда ће $n-2$ директних интеграција дати општи интеграл. Али ако се једначина не би могла решити по z, онда имамо

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{A + 2\int f(z)\,dz}$$

дакле $\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = \int z\,dx = \int \frac{z\,dx}{\sqrt{A+2\int f(z)\,dz}}$

$$\frac{d^{n-4} y}{dx^{n-4}} = \int \frac{dz}{\sqrt{A+2\int f(z)\,dz}} \int \frac{z\,dz}{\sqrt{A+2\int f(z)\,dz}}$$

итд. На крају ћемо добити y као функцију од z, а општи интеграл биће резултат елиминације z из једначина између y и x и између x и z.

Пример 1. Решити једначину:

$$a^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Ако напишемо z уместо $\frac{d^2 y}{dx^2}$, једначина прелази у:

$$a^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = z$$

тако да се добија:

$$z = C_1 e^{\frac{x}{a}} + C_2 e^{-\frac{x}{a}}$$

дакле: $y = Ae^{\frac{x}{a}} + Be^{-\frac{x}{a}} + Cx + D$

где су A и B стављени уместо C_1a^2 и C_2a^2

Пример 2. Решити једначине:

/1/ $$x^2\frac{d^4y}{dx^4} = \lambda\frac{d^2y}{dx^2}$$

/2/ $$c^2\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2$$

Решење:

/1/ $y = C_1 + C_2x + C_3x^{\frac{5+\alpha}{2}} + C_4x^{\frac{5-\alpha}{2}}$ где је $\alpha = \sqrt{1+4\lambda}$

/2/ Из једначина:

$$x + C_2 = c\int\frac{dp}{\sqrt{\left(C_1+\frac{1}{3}(1+p^2)\right)^3}}$$

и

$$y + C_3 = c\int\frac{p\,dp}{\sqrt{\left(C_1+\frac{1}{3}(1+p^2)\right)^3}}$$

у којима p стоји уместо $\frac{dy}{dx}$, еилиминисати p.

54/. У специјалним случајевима може се ред опште диференцијалне једначине другога реда снисити, тако да остаје диференцијална једначина првога реда. Ово наступа онда када се једна од променљивих не јавља експлицитно у једначини.

а/. Посматрајмо прво једначину у којој се не јавља x, тако да се она може писати у облику:

$$\psi\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

Ако се стави $\frac{dy}{dx} = p$ те је $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$, једначина прелази у

$$\psi\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

а то је диференцијална једначина првога реда из које се добија p као функција од y . Ако је њено решење $p=f(y)$ где $f(y)$ садржи једну произвољну константу, онда се променљиве могу раставити, јер можемо писати:

$$\frac{dy}{f(y)} = dx$$

Интеграција ове једначине довод нас до општег интеграла.

б/. Посматрајмо сада једначину у којој се y не јавља, тако да се она може написати у облику:

$$\varphi\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

Ако се стави $\frac{dy}{dx}=p$, те је $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$

једначина прелази у

$$\varphi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)=0$$

а ово је једначина првога реда из које се може наћи p као функција од x . Ако је $p=F(x)$ решење, где $F(x)$ садржи једну произвољну константу, и ако извршимо интеграцију, добијамо општи интеграл:

$$y = A+\int F(x)dx$$

Примедба. Горње посматрање односи се на диференцијалне једначине другога реда; али оно важи на сличан начин и за једначине ма кога реда. Увек када се једна од променљивих не јавља експлицитно у диференцијалној једначини могу се изведене супституције извести, ма кога реда била једначина; ред трансформисане једначине мањи је за јединицу од реда првобитне.

Пример 1. Решити једначину:

$$2(2a-y)\frac{d^2y}{dx^2} = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Ако се стави $\frac{dy}{dx}=p$ једначина прелази у:

$$\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{2a-y}$$

а њен је интеграл:

$$(1+p^2)(2a-y)=\mu$$

где је μ произвољна константа. Општи интеграл је дат изразом $\int dy\sqrt{\frac{2a-y}{\mu-2a+y}} = x+B$

Пример 2. Решити једначину:

$$a^2\frac{d^2y}{dx^2} = 2x\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$$

Супституцијом $\frac{dy}{dx}=p$ једначина прелази у:

$$\frac{a^2}{(1+p^2)^{3/2}}\,dp = 2x\,dx$$

Интеграцијом се добија:

$$\frac{a^2p}{\sqrt{1+p^2}} = x^2+A$$

дакле:

$$p^2 = \frac{(x^2+A)^2}{a^4-(x^2+A)^2}$$

тако да општи интеграл гласи:

$$y=\int p\,dx = B+\int\frac{x^2+A}{\sqrt{a^4-(x^2+A)^2}}\,dx$$

Пример 3. Решити једначине:

/1/ $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2y}{dx^2}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}$

/2/ $ab\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{y^2+a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

/3/ $$y\frac{d^2y}{dx^2}+\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

/4/ $$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

/5/ $$\frac{dy}{dx}+a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=2ax\frac{d^2y}{dx^2}$$

/6/ $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2$$

/7/ $$y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y^2\log y$$

/8/ $$y(1-\log y)\frac{d^2y}{dx^2}+(1+\log y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

Решење:

/1/ За $\frac{dy}{dx}=p$ једначина постаје $d\left(x\sqrt{1+p^2}\right)=a\,dp$

дакле:

$$x=\frac{ap+b}{\sqrt{1+p^2}}$$

даље је:

$$y=\int p\,dx=\frac{bp-a}{\sqrt{1+p^2}}-b\log\left(\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{c}\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2-x^2}-b\log\frac{b+\sqrt{a^2+b^2-x^2}}{c(x-a)}$$

где су b и c произвољне константе.

/2/ Извршити замену $dx=\frac{dy}{p}$, $y=pz$ па је $\sqrt{a^2+z^2}=uz$ и ставити $\frac{a}{b}=2n$, тада је:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{u\,du}{u^2-2nu-1}$$

дакле

$$y^{2n_1}=C_1\frac{(u-n+n_1)^{n-n_1}}{(u-n-n_1)^{n+n_1}}$$

где је $n_1=\sqrt{n^2+1}$. Ако се вредност од y означи са U, биће

$$p=\frac{1}{a}U\sqrt{u^2-1}$$

дакле

$$dx=a\frac{dU}{U\sqrt{u^2-1}}=-a\frac{u\,du}{(u^2-2nu-1)\sqrt{u^2-1}}$$

Одазде се добија x као функција од u .

/3/ Ако ставимо $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=pz$ дакле: $dp=zdy$ биће: $p-zy=\sqrt{1+a^2z^2}$

Ако се овај израз диференцијали биће:

$$-ydz=a^2\frac{zdz}{\sqrt{1+a^2z^2}}$$

дакле или је $dz=0$, или је $y=-a^2\frac{z}{\sqrt{1+a^2z^2}}$

За $dz=0$ добићемо опште решење: $C_1y+C_2=e^{C_1x}$ док се из

$$y=-\frac{a^2z}{\sqrt{1+a^2z^2}}$$

добија сингуларно решење:

$$y=a\sin\frac{c-x}{a}$$

/4/ $y+C_1x+C_2=(1+C_1^2)\log(x+C_1)$

/5/ Ставити $\frac{dy}{dx}=p$ па је $p=x^2(1-z^2)$, тако да следи:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{2dz}{(z-1)(z+1-\frac{1}{2a})}$$

Одавде се добија z као функција од x , а потом из $dy=x^2(1-x^2)dx$ и y као функција од x .За $a=\frac{1}{2}$ добија се: $y=Cx(x-C)+C_1$

/6/ $y+C_2=C_1\arc\sin x+(\arc\sin x)^2$

/7/ $\log y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$

/8/ Ставити $\log y=u$ биће $\log u=\frac{x+C_1}{x+C_2}$

Једнодимензионалне диференцијалне једначине

55/. Постоје класе диференцијалних једначина које су у неку руку једнодимензионалне. Њихово се решење може погодним трансформацијама довести у зависност од решење једначина нижег реда. Једнодимензионалност се састоји у овоме: ако се y сматра као величина са m димензија где је m неки произвољан цео број, а x је прве димензије, онда је $\frac{dy}{dx}$ као гранична вредност од $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $m-1$ димензије, даље је $\frac{d^2y}{dx^2}$ као гранична вредност од $\frac{\Delta p}{\Delta x}$, $m-2$ дименвија итд. Диференцијална једначина зваће се једнодимензионална ако су њени чланови у поменутом смислу сви исте димензије. Најпростији је према томе случај када је $m=1$. Нека је, дакле, прве $m=1$ тако да се x и y могу сматрати за величине исте димензије. Ако се стави

$$y = xz \quad и \quad x = e^{\theta}$$

онда следи:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{d\theta} + z$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{d\vartheta} + \frac{dz}{d\theta}\right)e^{-\vartheta}$$

а резултујућа диференцијална једначина биће нека једначина између z и ϑ. Треба приметити да коефициенти од θ у изложитељима експоненцијалне функције с десне стране дају димензију извода на левој страни: ако се дакле изврши супституција у диференцијалној једначини /за коју се претпоставља да је једнодимензионална/ биће коефицијент од θ у експоненту за сваки члан једначине исти, тако да ће та величина бити чинитељ који се може изоставити. Нова независно променљива ϑ неће се више у једначини јављати експлицитно, те ће једначина бити оне врсте о којој је било говора у § 54, тако да ће јој се ред моћи снизити за јединицу.

Пример 1. Решити једначину:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{mx^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+ny^2}$$

Ако се изврше поменуте супституције добија се:

$$\frac{d^2z}{d\vartheta^2}+\frac{dz}{d\vartheta}=\left[m\left(\frac{dz}{d\vartheta}+z\right)^2+nz^2\right]^{1/2}$$

Ако се стави $\frac{dz}{d\vartheta}=v$ једначина постаје:

$$\frac{dv}{d\vartheta}+v=\sqrt{m(v+z)^2+nz^2}$$

или, ако је $v=zs$:

$$s^2+\frac{ds}{d\theta}+s=\sqrt{m(1+s)^2+n}$$

дакле:

$$\frac{ds}{\sqrt{m(1+s)^2+n}-s^2-s}=d\vartheta$$

Овде су променљиве растављене те се једначина може интегралити.

Пример 2. Решити једначине:

/1/ $$n\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3}$$

/2/ $$nx^3\frac{d^2y}{dx^2}=\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2$$

/3/ $$x^4\frac{d^2y}{dx^2}=\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^3$$

Решења:

/1/ Ако се стави $x=e^{\vartheta}$, $y=e^{\vartheta}z$ и $\frac{dz}{d\vartheta}+z=u$ једначина прелази у:

$$n(u-z)\sqrt{1+z^2}\frac{du}{dz}=\sqrt{(1+u^2)^3}$$

овде треба ставити $u=\operatorname{tg}\alpha$, $z=\operatorname{tg}\beta$, $\alpha-\beta=\gamma$, па следи:

$$\beta-C_1=\int\frac{n\sin\gamma d\gamma}{1-n\sin\gamma}$$

Даље је:

$$\frac{dx}{x}=d\vartheta=\frac{dz}{u-z}=\frac{\cos(\beta+\gamma)d\beta}{\cos\beta\sin\gamma}=\frac{n\cos\gamma d\gamma}{1-n\sin\gamma}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}d\beta$$

те је зато

$$x=C\frac{\cos\beta}{1-n\sin\gamma},\quad y=C\frac{\sin\beta}{1-n\sin\gamma}$$

Општи интеграл се добија елиминишући β и γ из једначина $x=C\frac{\cos\beta}{1-n\sin\gamma}$, $y=C\frac{\sin\beta}{1-n\sin\gamma}$, $\beta-C_1=\int\frac{n\sin\gamma d\gamma}{1-n\sin\gamma}$

/2/ Опште решење : $y=nx\log\frac{x}{C_1+C_2x}$ друго решење до којега се долази, наиме $y=Cx$ само је специјална случај општег, а из овога се добија ако се стави $C_1=0$ и $n\log\frac{1}{C_2}=C$

/3/ $y=x\left(C-\arcsin\frac{C_1}{x}\right)$

Прелазећи на општи случај где постоји једнодимензионалност, под претпоставком да y има m димензија, ставићемо:

$$x=e^{\theta},\quad y=x^mz=ze^{m\vartheta}$$

те добијамо: $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dz}{d\vartheta}+mz\right)e^{(m-1)\vartheta}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{\frac{d^2z}{d\vartheta^2}+(2m-1)\frac{dz}{d\vartheta}+m(m-1)z\right\}e^{(m-2)\vartheta}\text{ и т.д.}$$

Коефициент од ϑ у експонентима експоненцијалне функције на десној страни даје опет димензију извода на левој страни. Ако је, дакле, дата једначина једнодимензионална, експоненцијални чинитељи ће се опет потирати. У трансформисаној диференцијалној једначини се независнопроменљива више не јавља експлицитно, па се ред једначине опет може снизити за јединицу.

Пример 3. Решити једначину:

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}=(x^3+2xy)\frac{dy}{dx}-4y^2$$

Она је једнодимензионална, ако се сматра да је y дводимензионално а x једнодимензионално. Зато ћемо ставити: $x=e^{\vartheta}$, $y=x^2z=ze^{2\vartheta}$

те добијамо једначину:

$$\frac{d^2z}{d\vartheta^2}+3\frac{dz}{d\vartheta}+2z=(1+2z)\left(\frac{dz}{d\vartheta}+2z\right)-4z^2$$

или

$$\frac{d^2z}{d\vartheta^2}+2(1-z)\frac{dz}{d\vartheta}=0$$

Први интеграл је дат изразом

$$\frac{dz}{d\vartheta}-(1-z)^2=A$$

а у њему се променљиве могу раставити на следећи начин:

$$\frac{dz}{A+(1-z)^2}=d\vartheta$$

Интеграл ове једначине биће, различит /или ће то бити циклометриска или логатирамска функција, према знаку од A.

Пример 4. Решити једначине:

/1/ $x^4\frac{d^2y}{dx^2}-x^3\frac{dy}{dx}=x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4y^2$

/2/ $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y^2$

/3/ $\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x^4}y=\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Решење:

/1/ Ставити $x=e^{\vartheta}$, $y=x^2z$ и $\frac{dz}{d\vartheta}=u$ тада је:
$u=Ce^{z}-4z-2$ дакле: $\vartheta-C_1=\int\frac{dz}{Ce^{z}-4z-2}$

Одавде се добија z као функција од ϑ, тј. као функција од x, а тиме је одређено и y као функција од x.

/2/ Ставити $y=x^{-1}z=e^{-\vartheta}z$; тада се добија:

$$\vartheta-C_1=\int\frac{dz}{Ce^{z}+2z+1}$$

Нарочитоваља поменути случај кад се претпоставља да је m бесконачно. Величине $y, \frac{dy}{dx}$........ су тада све истих димензија. Најпростија је метода решавања та да се изврши супституција

$$y=e^{\int u dx}$$

Ред једначине између x и y која се добија, биће за јединицу нижи од реда дате једначине.

Пример 5. Решити једначину:

/1/ $ay\frac{d^2y}{dx^2}+b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y\frac{dy}{dx}\frac{1}{\sqrt{c^2+x^2}}$

/2/ $xy\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y\frac{dy}{dx}+bx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Решење:

/1/ Супституција $y=e^{\int u dx}$ даје једначину:

$$\frac{du}{dx}-\frac{u}{a\sqrt{c^2+x^2}}=-\left(1+\frac{b}{a}\right)u^2$$

Из овога се налази u по § 15, па онда y као функција од x. Или треба дату једначину помножити са $\frac{dx}{yp}$, где је $p=\frac{dy}{dx}$, тако да се добија:

$$a\frac{dp}{p}+b\frac{dy}{y}=\frac{dx}{\sqrt{c^2+x^2}}$$

одакле следи:

$$y^{\frac{b}{a}}dy=C\left\{x+\sqrt{c^2+x^2}\right\}^{1/a}dx$$

дакле:

$$y^{\frac{b+a}{a}}+C_1=C'\left\{x+\sqrt{c^2+x^2}\right\}^{1/a}\times\left\{\sqrt{c^2+x^2}-ax\right\}$$

где је:

$$C'=\frac{(a+b)C}{1-a^2}$$

/2/ Супституција $y=e^{\int u dx}$ даје

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=\frac{bu^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

дакле $u=\frac{x}{C+b\sqrt{a^2-x^2}}$

и $\log\frac{y}{C_1}=-\frac{1}{b}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{C'}{b^2}\log\left\{C+b\sqrt{a^2-x^2}\right\}$

Егзактне диференцијане једначине

56/. Диференцијалне једначине облика:

$$V=f\left(\frac{d^ny}{dx^n},\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\cdots\frac{dy}{dx},y,x\right)=0$$

зове се егзактна, ако је израз Vdx тотални диференцијал неке функције U, која тада нужно мора бити облика:

$$U=f_1\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\cdots\frac{dy}{dx},y,x\right)$$

Посматрајно прво линеарну диференцијалну једначину:

$$P_n\frac{d^ny}{dx^n}+P_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots P_1\frac{dy}{dx}+P_0y=P$$

у којој су сви коефициенти функције од x . Једначина овог облика обично неће бити егзактна диференцијална једначина: али ми ћемо показати да се једначина може једанпут интегралити ако величина P испуњава извесан услов. Ако ради једноставности означимо изводе по x цртицама, добијамо парцијалним интеграцијама:

$$\int P_0 y dx = \int P_0 y dx$$

$$\int P_1 \frac{dy}{dx} dx = -\int P_1' y dx + P_1 y$$

$$\int P_2 \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int P_2'' y dx - P_2' y + P_2 y'$$

$$\int P_3 \frac{d^3y}{dx^3} dx = -\int P_3''' y dx + P_3'' y - P_3' y' + P_3 y''$$

те је дакле:

$$\begin{aligned}\int P dx = &\int (P_0 - P_1' + P_2'' - P_3''' + \ldots.) y dx \\ &+ (P_1 - P_2' + P_3'' - \ldots\ldots) y \\ &+ (P_2 - P_3' + P_4'' - \ldots.) y' \\ &+ (P_3 - P_4' + P_5'' - \ldots..) y''\end{aligned}$$

$$= \int Q_0 y dx + Q_1 y + Q_2 y' + \ldots.. Q_n \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

где се узастопни коефициенти $Q_0, Q_1, Q_2 \ldots.. Q_n$ покоравају закону који је лако открити. У специјалном случају је $Q_n = P_n$, $Q_{n-1} = P_{n-1} - P_n'$. Услов интеграбилности је сада, као што се види, то, да не сме преостати члан који садржи y под знаком интеграла; а потребан и довољан услов за ово је: $Q_0 = 0$ или:

$$P_0 - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^nP_n}{dx^n} = 0$$

Ако сад коефициенти Q' задовољавају одговарајући услов

наиме $$Q_1 - \frac{dQ_2}{dx} + \frac{d^2Q_3}{dx^2} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}Q_n}{dx^{n-1}} = 0$$

онда је једначина опет интеграбилна па се поступак може наставити догод коефициенти који се на тај начин добијају задовољавају услов интеграбилности.

Пример 1. Једначина:

$$(ax^2-bx)\frac{d^3y}{dx^3} + (cx-e)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x$$

је егзактна диференцијална једначина; јер је $P_0 = 1$. $P_1' = 1$, $P_2'' = 0$, $P_3''' = 0$ па је услов интеграбилности испуњен. Ако се обе стране интеграле добија се:

$$(ax^2-bx)\frac{d^2y}{dx^2} - \{(2a-c)x + c - b\}\frac{dy}{dx} + (2a-c+x)y = \tfrac{1}{2}x^2 + \text{Д}$$

У пракси се каткад може лако видети да ли се не на дата једначина може интегралити. У неким случајевима величине P су облика ax^m или су збирови израза овога облика, а $x^m\frac{d^ny}{dx^n}$ је тотални извод ако је m мање од n. Јер, ако се изврши парцијална интеграција, добија се:

$$x^m\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - mx^{m-1}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + m(m-1)x^{m-2}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} - \ldots + (-1)^m m!\frac{d^{n-m-1}y}{dx^{n-m-1}}$$

Ако је $n = m+1$, последњи члан је $(-1)^m m! y$

Ако то применимо на наш пример видимо да су чланови који садрже $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, тотални изводи, даље је $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{d}{dx}(xy)$ тако да је лева страна тотални извод, те је једначина егзактна.

Пример 2. Доказати да се једначина из последњег примера не може даље интегрирати по горњој методи.

Решење: Условна једначина није испуњена.

Пример 3. Одредити прве интеграле једначина

$$/1/\ x\frac{d^3y}{dx^3}+(x^2-3)\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0,$$

$$/2/\ 2x+y^2+2xy\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}$$

и показати да ће једначина

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3}+4x\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2+2)\frac{dy}{dx}+3xy=2$$

постати интеграбилна ако се помножи са неким степеном од x. Одредити њен интеграл.

Решења:

/1/ Први интеграл:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2-4)\frac{dy}{dx}+xy=C;$$

а други:

$$x\frac{dy}{dx}+(x^2-5)y=Cx+C_1$$

најзад $y=C_2x^5e^{-\frac{x^2}{2}}+C\left\{-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^5}{8}e^{-\frac{x^2}{2}}\int x^{-1}e^{\frac{x^2}{2}}dx\right\}$
$+C_1\left\{-\frac{1}{5}-\frac{\partial^2}{15}-\frac{x^4}{15}+\frac{x^5}{15}e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{\frac{x^2}{2}}dx\right\}$

/2/ Први интеграл је

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+xy^2+x^2=C$$

/3/ Ако се једначина помножи са x, добија се као први интеграл:

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}+x^3y=C+x^2$$

57/. Објаснићемо на примеру методу интеграције егзактних диференцијалних једначина које нису линеарне.

Пример 1. Решити једначину:

$$y+3x\frac{dy}{dx}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\left(x^2+2y^2\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

Под претпоставком да је ово егзактна диференцијална једначина можемо писати

$$dU=(y+3xp+2yp^3)dx+(x^2+2y^2p)\,dp$$

где p стоји уместо $\frac{dy}{dx}$. Означимо са U_1 вредност од U која би се добила када би p била једина промењива, тако да је $U_1=x^2p+y^2p^2$

Но ако се сад U_1 сматра за функцију од x и p то ће бити $dU_1=(2xp+2yp^3)dx+(x^2+2y^2p)\,dp$,

дакле: $dU-dU_1=(y+xp)dx=d(xy)$

Одавде се добија интеграцијом

$$U-U_1=xy+A$$

дакле:

$$U=x^2\frac{dy}{dx}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+xy+A$$

те је први интеграл

$$x^2\frac{dy}{dx}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+xy=C$$

Горња метода како се види доводи до општег правила за интеграцију егзактних диференцијалних једначина n-тога реда. Треба одмах обратити пажњу на то да једначина која се може извести непосредном диференцијацијом из једначине $n-1$-вог реда, може садржати $\frac{d^n y}{dx^n}$ само на првом степену. Ако овај услов у једначини n - тога реда није испуњен, она сигурно није егзактна.

Али ако дата диференцијална једначина садржи највиши извод само на првом степену, треба је написати у облику $V=0$ и интегралити Vdx као да је $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ једина променљива која се у V јавља, а $\frac{d^n y}{dx^n}$ њен извод. Означимо резултат са U_1. Онда $Vdx-dU_1$ не садржи изводе од y вишег реда од $n-1$ -вог, и уколико је, то тотални извод, највиши извод од y који се јавља, појавиће се само на првом степену.

Ако се тај поступак понови довољан број пута, добиће се коначно $Vdx-dU_1-dU_2-\ldots\ldots=0$

а први интеграл дате једначин је $U_1+U_2+\ldots\ldots=C$

Пример 2. Решити једначине

$$/1/\ \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-yx^2\frac{dy}{dx}=xy^2,$$

$$/2/\ x^2\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{d^2y}{dx^2}+(2xy-1)\frac{dy}{dx}+y^2=0$$

Решења:

$$/1/\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x^2y^2=C$$

$$/2/\ x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+xy^2=C$$

Пример 3. Показати да једначина:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^2y}{(y^2+x^2)^2} = 0$$

постаје интеграбилна множењем са $2x^2\frac{dy}{dx} - 2xy$

Отуда одредити први и општи интеграл.

Решење: Ако се једначина помножи са $2x^2\frac{dy}{dx}-2xy$

а потом интеграли, она ће постати

$$\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2 - \frac{a^2x^2}{y^2+x^2} = C$$

или, за $y = ux$

$$\frac{dx}{x^2} = \pm\sqrt{\frac{1+u^2}{C(1+u^2)+a^2}}\,du,$$

дакле

$$\frac{1}{x} = C_1 \pm \int\sqrt{\frac{1+u^2}{C(1+u^2)+a^2}}\,du$$

Пример 4. Интегралити једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha y}{(\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)^2} = 0$$

ако се зна да је њен интеграциони фактор облика

$$X_1\frac{dy}{dx} + X_2 y$$

Решење: Ако се дата једначина помножи са:

$2X_1p + 2X_2y$ где је $p = \frac{dy}{dx}$,

производ треба да постане тотални извод $\frac{dV}{dx}$ дакле:

$$dV = (2X_1p+2X_2y)\,dp + \frac{\alpha y(2X_1p+2X_2p)}{(\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)^2}\,dx = 0$$

Ако се ова једначина интеграли под претпоставком да је $dx=0$, а p једина променљива, и резултат означи са U_1, онда је $U_1 = X_1p^2 + 2X_2yp$

Овај израз треба диференцијалити без ограничења и одузети од првобитног. То даје

$$dV - dU_1 = \left\{\frac{\alpha y(2X_1p+2X_2y)}{(\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)^2} - p^2\left(\frac{dX_1}{dx}+2X_2\right) - 2yp\frac{dX_2}{dx}\right\}dx = 0$$

Пошто постоји p^2 , овај израз може бити тотални диференцијал само ако је коефициент од p^2 једнак нули, дакле ако је $\frac{dX_1}{dx}+2X_2=0$

Онда бива

$$dV-dU_1=\frac{\alpha\, 2X_1 y\, dy}{(\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)^2}-2\frac{dX_2}{dx}y\, dy$$

$$-\frac{\alpha y^2\frac{dX_1}{dx}}{(\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)^2}dx=0$$

Ову једначину треба поново интегралити као да је $dx=0$, а y једина променљива. Резултат је

$$U_2=\frac{-\alpha X_1}{\beta(\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)}-y^2\frac{dX_2}{dx}$$

Ако се овај израз диференцијални укидајући опет сва ограничења, а резултат одузме од $dV-dU_1=0$, следи:

$$dV-dU_1-dU_2=\left\{\frac{\alpha}{\beta}\frac{(\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)\frac{dX_1}{dx}-(2\delta+2\varepsilon x)X_1}{(\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)^2}+y^2\frac{d^2X_2}{dx^2}\right\}dx=0$$

Ова једначина је задовољена ако је

$$(\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)^2\frac{dX_1}{dx}-2(\delta+2\varepsilon x)X_1=0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2X_2}{dx^2}=0$$

или $X_1=\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2$ и $X_2=a+bx$. Али како већ треба да буде $X_2=-\frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx}=-\delta-\varepsilon x$

биће $a=-\delta$, $b=-\varepsilon$. Према томе је $2(\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)\frac{dy}{dx}-2(\delta+\varepsilon x)y$ интеграциони фактор, а први интеграл једначине гласи: $U_1+U_2=C$ или

$$(\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2(\delta+\varepsilon x)y\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha(\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)}{\beta(\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)}+\varepsilon y^2=C$$

Ако се обема странама дода $\frac{\alpha}{\beta}$ и стави $C+\frac{\alpha}{\beta}=C_1$ једначина се своди на

$$(\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2(\delta+\varepsilon x)y\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha y^2}{\beta y^2+\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2}+\varepsilon y^2=C_1$$

Ако се, најзад, стави

$$y=u\sqrt{\frac{\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2}{\beta}}$$

и $C_1=\frac{C}{\beta}$

добија се

$$\frac{dx}{\gamma+2\delta x+\varepsilon x^2}=\sqrt{\frac{1+u^2}{C+(C-\alpha+\delta^2-\varepsilon\gamma)u^2+(\delta^2-\varepsilon\gamma)u^4}}\,du$$

Овим је одређено u као функција од x па према томе и y као функција од x .

ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

ДРУГОГА РЕДА

58/. Доказаћемо овде неколико главних особина линеарних диференцијалних једначина: Али ово истраживање неће бити само специјализовање теорије диференцијалних једначина n -тога реда, јер већина особина које ћемо овде доказати важе само за једначине другога реда. Општи облик линеарне диференцијалне једначине другога реда је:

$$/1/ \quad \frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Q=R$$

где су P , Q и R функције од x или константе. У /1/ треба ставити $y=vw$ /1/ где су и v и w

функције од x за које за сада постоји само ограничење да њихов производ мора бити y . Тада је:

$$w\frac{d^2v}{dx^2}+\left(2\frac{dw}{dx}+Pw\right)\frac{dv}{dx}+\left(\frac{d^2w}{dx^2}+P\frac{dw}{dx}+Qw\right)v=R$$

Како између v и w можемо да произвољно одредимо још једну везу, гретпоставимо да се w може тако одредити да коефициент од v буде једнак нули, да, дакле, постоји једначина:

$$/2/\quad \frac{d^2w}{dx^2}+P\frac{dw}{dx}+Q=0$$

Једначина /2/ добија се /а на то треба пазити/ из првобитне када се у овој стави да је десна страна једнака нули. Ако се сад сматра да је величина w позната, онда једначина /1/ прелази у

$$/3/\quad \frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{2}{w}\frac{dw}{dx}+P\right)\frac{dv}{dx}=\frac{R}{w}$$

биће, дакле:

$$w^2\frac{dv}{dx}e^{\int Pdx}=A+\int wRe^{\int Pdx}dx$$

а одатле излази

$$/4/\quad v=B+A\int\frac{dx}{w^2}e^{-\int Pdx}+\int\frac{dx}{w^2}\left\{e^{-\int Pdx}\int wRe^{\int Pdx}dx\right\}$$

отуда следи став:

Ако се може пронаћи макако решење једначине која се из првобитне добија стављајући да јој је десна страна једнака нули, може се наћи и општи интеграл првобитне диференцијалне једначине.

Задатак, да се одреди општи интеграл сведен је дакле на задатак да се нађе макако решење хомогене једначине. Овај се последњи у најопштијем случају, када P и Q нису неке специјалне функције, додуше не може решити; али је у специјалним случајевима могуће одредити једно решење, некада и на први поглед, некада помоћу конвергентних редова а некада и помоћу одређеног интеграла. Али се у последња два случаја /који су обично у тесној међусобној вези/ V може експлицитно одредити само веома тешко или је то немогуће: ипак ће тај израз остати решење /§ 5/.

Пример 1. Решити једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=x^{m+1}$$

Партикуларно решење једначине

$$\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=0$$

је очевидно $y=x$. Зато ћемо, ако у првобитну једначину уврстимо $y=xv$, добити:

$$x\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}-x^2\left(x\frac{dv}{dx}+v\right)+x^2v=x^{m+1}$$

или:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{2}{x}-x^2\right)\frac{dv}{dx}=x^m$$

Стога је:

$$\frac{dv}{dx}x^2e^{-\frac{x^3}{3}}=A+\int x^{m+2}e^{-\frac{x^3}{3}}dx$$

те је дакле

$$V=B+A\int\frac{dx}{x^2}e^{\frac{x^3}{3}}+\int\frac{dx}{x^2}\left\{e^{\frac{x^3}{3}}\int x^{m+2}e^{-\frac{x^3}{3}}dx\right\}$$

У случају $m=0$, овај се израз може упростити.

Пример 2. Решити једначине:

$$/1/ \quad \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = X$$

$$/2/ \quad (ax+bx^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} + 2by = x^{n-1}$$

$$/3/ \quad (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = X$$

Решење:

$$/1/ \quad W = e^x, \; v = B + A\int e^{\frac{x^2}{2}-2x}dx + \int dx\left\{e^{\frac{x^2}{2}-2x}\int Xe^{-\frac{x^2}{2}+x}dx\right\}$$

$$/2/ \quad W = \frac{1}{x}, \; v = B + A(a-bx)^3 + \int dx\left\{(a-bx)^2\int\frac{x^n}{(a-bx)^2}dx\right\};$$

$$y = wv$$

Може се осим тога видети да је ово егзактна диференцијална једначина.

59/. Ако се не може наћи решење једначине која се добија за $R=0$ онда је понекад корисно избацити члан $\frac{dv}{dx}$ из диференцијалне једначине која је трансформисана помоћу $y=vw$. То за w даје диференцијалну једначину:

$$2\frac{dw}{dx} + Pw = 0$$

из које налазимо $w = e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$

Овде није потребно да при интеграцији уведемо константу, јер ће она доцније опет нестати. Ако се ова вредност од w уврсти у диференцијалну једначину и стави:

$$I = Q - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} - \frac{1}{4}P^2$$

она прелази у

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=Re^{1/2\int Pdx}$$

У неким се специјалним случајевима ова једначина може непосредно решити; али се ови случајеви далеко ређе јављају него случајеви на које се може применити горња метода, а она има друга преимућства која ћемо ускоро показати. Ми већ знамо да се може одредити општи интеграл опште једначине, ако се може наћи једно решење једначине која се из прве добија ако се стави да јој је десна страна једнака нули, те се зато можемо ограничити на једначине облика:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=0$$

Пример 1. Решити једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dv}{dx}+\frac{y}{4x^2}\left(-8+\sqrt{x}+x\right)=0$$

Овде је $P=-\frac{1}{\sqrt{x}}$

дакле:

$$w=e^{-1/2\int Pdx}=e^{\sqrt{x}}$$

Даље је

$$I=\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{4\sqrt{x^3}}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}-\frac{1}{4x}=-\frac{2}{x^2}$$

тако да једначина за V постаје:

$$\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{2}{x^2}v=0$$

Њено је решење: $V=Ax^2+\frac{B}{x}$

па је општи интеграл прве једначине:

$$y=\left(Ax^2+Bx^{-1}\right)e^{\sqrt{x}}$$

Пример 2. Решити једначине:

$$/1/ \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2bx\frac{dy}{dx} + b^2x^2y = x$$

$$/2/ \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \left(a^2 + \frac{2}{x^2}\right)y = 0$$

$$/3/ \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + (4x^2-3)y = e^{x^2}$$

Решења:

$$/1/ \quad w = e^{\frac{bx^2}{2}}; \quad \frac{d^2v}{dx^2} + bv = xe^{-\frac{bx^2}{2}}$$

Из ове једначине следи према трећем примеру § 46 V:

$$v = A\operatorname{Cos}(\sqrt{b}x) + B\operatorname{Sin}(\sqrt{b}x) + b^{-1/2}\int_0^x \xi e^{-\frac{b\xi^2}{2}} \operatorname{Sin}\{\sqrt{b}(x-\xi)\}d\xi; \; y = vw$$

$$/2/ \quad w = x; \quad v = A\operatorname{Cos}ax + B\operatorname{Sin}ax; \quad y = vw$$

$$/3/ \quad w = e^{x^2}; \frac{d^2v}{dx^2} - v = 1$$ Одавде је: $v = Ae^{x} + Be^{-x} - 1$

$$y = wv$$

60/. Ако се уместо једначине

$$/1/ \quad \frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

узме једначина облика: $\dfrac{d^2v}{dx^2} + Iv = 0$

за претставника линеарних диференцијалних једначина другога реда, добија се ово: ако се у првој једначини изврши нека супституција $y = Zf(x)$, па се у једначини

$$/2/ \quad \frac{d^2z}{dx^2} + P_1\frac{dz}{dx} + Q_1z = 0$$

која се тако добија, супституцијом $Z=we^{-1/2\int P_1dx}$ избаци други члан онда је I функција од P и Q, тако да једначина /2/ опет добија облик:

$$\frac{d^2w}{dx^2}+Iw=0$$

I је дакле управо иста функција од P_1 и Q_1 као и од P и Q. Стога можемо да назовемо I инваријанта коефициената диференцијалне једначине.

Рећи ћемо да је редукована једначина написана у нормалном облику; ако ма које две линеарне једначине имају исти нормални облик, као једначине по y и по Z, онда се оне могу претворити једна у другу.

Ако се зна да се две дате једначине могу трансформисати једна у другу, а тражи се једначина супституције између зависно променљивих, онда се она може лако добити ако се нормални облик употреби као посредна трансформисана једначина. Тако ће у општем примеру једначина по y прећи у једначину по V ако се стави

$$ye^{1/2\int Pdx}=V$$

а једначина по V прелази, због $V=U$, у једначину по Z, ако ставимо

$$V=Ze^{1/2\int P_1dx}$$

Према томе је

$$ye^{1/2\int Pdx}=Ze^{1/2\int P_1dx}$$

веза помоћу које се непосредно једначина по y трансформише у једначину по z .

Пример 1. Показати да се једначине

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}+(1-3x)\frac{dz}{dx}+Kz=0$$

и

$$(1-x^2)\frac{d^2\zeta}{dx^2}-(1+x)\frac{d\zeta}{dx}+(K+1)\zeta=0$$

могу претворити једна у другу; наћи везу између z, ζ и x .

Решење: За обе једначине је

$$I=\frac{K}{1-x^2}-\frac{(3x-5)(1+x)}{4(1-x^2)^2}$$

Даље је: $z(1+x)=\zeta$

Пример 2. Одредити Q тако да се једначина

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dv}{dx}+Qy=0$$

супституцијом $y=zf(x)$ може трансформисати у

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)z=0$$

и наћи $f(x)$.

Решење:

$$Q=1+\tfrac{1}{4}a^2-\frac{4n^2-1}{4x^2};\quad f(x)=\sqrt{x}\,e^{-\frac{ax}{2}}$$

61/. Ако су y_1 и y_2 два партикуларна интеграла једначине $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$

а v_1 и v_2 одговарајући партикуларни интеграли једначине $\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=0$

онда је, као што смо малочас показали:

$$v_1=y_1e^{\frac{1}{2}\int Pdx} \quad \text{и} \quad v_2=y_2e^{\frac{1}{2}\int Pdx}$$

те је: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{v_1}{v_2} = S$

тако да је S количник по два решења сваке једначине.

Сада ћемо поставити диференцијалну једначину за S. Како се сваки од величина y /или v / може састојати од два члана од којих сваки садржи по једну произвољну константу, то ће њихов количник садржати три произвољне константе, а не четири, јер се може ставити да је једна од констаната једнака јединици, а да се вредност или општост количника не промени. Зато ће диференцијална једначина коју задовољава S, дакле функција са три произвољне константе, бити трећега реда.

Ако извод по x означимо цртицама, можемо писати $v_1''+Iv_1=0$; $v_2''+Iv_2=0$ Ако заменимо у првој једначини v_1 са Sv_2, добијамо: $S''v_2+2S'v_2'+Sv_2''+ISv_2=0$

или $$S''v_2+2S'v_2'=0$$

дакле $$\frac{S''}{S'}=-2\frac{v_2'}{v_2}$$

Ако ово диференцирамо добићемо:

$$\frac{S'''}{S'}-\left(\frac{S''}{S'}\right)^2=-2\frac{v_2''}{v_2}+2\left(\frac{v_2'}{v_2}\right)^2=2I+1/2\left(\frac{S''}{S'}\right)^2$$

и, ако пребацимо последњи члан на другу страну:

$$\frac{S'''}{S'}-3/2\left(\frac{S''}{S'}\right)^2=2I \tag{S}$$

Ово је тражена диференцијална једначина за S , она је, као што смо и претпоставили, трећега реда. Леву страну једначине / S / назвао је Cauley "Шварцова инваријанта", и означио са $\{S.x\}$. О њој је Schvarz у Crelle -овом журналу 75 написао значајну расправу. Али је он није први поставио.

62/. Ако се може добити макоје решење "Шварцове инваријанте", онда се може непосредно извести и једно решење првобитне диференцијалне једначине. Јер ако једно такво решење нове једначине означимо са S добићемо, због

/1/ $$\frac{V_2'}{V_2} = -\frac{1}{2}\frac{S''}{S'}$$

интеграцијом:

/2/ $$V_2 = CS^{1-1/2}$$

где је C произвољна константа. То је једно решење; а друго је:

/3/ $$V_1 = V_2 S = CS^{1-1/2} S$$

а из њих се одговарајућа решења једначине по y изводе додавањем експоненцијалног чинитеља. А ако је познато неко решење линеарне диференцијалне једначине другога реда, може се наћи и опште решење. Стога макоји партикуларни интеграл S Schwarz-ове инваријанте води до потпуног решење првобитне диференцијалне једначине.

Овај став важи за општу линеарну диференцијалну једначину другога реда; али ће његова главна примена бити на једначину коју задовољава тзв. хипергеометриски ред.

Пример 1. Доказати да је Schwarz -ова инваријанта од S нула, ако је $s(ax+b)=cx+d$

Решење: Вредности $y_1=cx+d$; $y_2=ax+b$ задовољавају као партикуиларни интеграли једначину $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ за коју је $I=0$. Ако је $\frac{y_1}{y_2}=\frac{cx+d}{ax+b}=S$ онда је $2I$ вредност Schwarz -ове инваријанте од S па је зато $\{s,x\}=0$.

Пример 2. Наћи општу вредност од S, када је

$$x^2\{s,x\}+a=0$$

где је a константа.

Решење: Ако су V_1 и V_2 два интеграла једначине $\frac{d^2V}{dx^2}+IV=0$ па се стави $\frac{V_1}{V_2}=S$ онда S задовољава једначину $\{s,x\}=2I$. Ако је тако дато I и ако се могу наћи два интеграла једначине.

$$\frac{d^2V}{dx^2}+IV=0$$

онда се зна и вредност од S. Но у нашем случају је $2I=-\frac{a}{x^2}$ дакле $\frac{d^2V}{dx^2}-\frac{\alpha}{2x^2}V=0$ а отуда $V=\sqrt{x}\left(Cx^{a'}+C'x^{-a'}\right)$

где је $a' = \frac{1}{2}\sqrt{1+2a}$

Зато је $$S = \frac{C_1 x^{a'} + C_2 x^{-a'}}{C_3 x^{a'} + C_4 x^{-a'}}$$

Једначина се може и непосредно интегралити; за то треба ставити $\frac{S''}{S'} = \frac{u}{x}$

Пример 3. Доказати једначине

/1/ $\{S, x\} = -\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \{x, s\}$

/2/ $\left\{\frac{as+b}{cs+d}, x\right\} = \{S, x\}$

/3/ $\{S, x\} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left[\{S, y\} - \{x, y\}\right]$

/4/ $\{S, x\} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \{S, y\} - \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \{xv\} + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \{y, v\}$

Решења:

/1/ Познати обрасци за замену зависно и независно промењиве доводе одмах до ове једначине.

/2/ Ако V_1 и V_2 задовољавају једначину $\frac{d^2 v}{dx^2} + Iv = 0$ онда је задовољавају и $aV_1 + bV_2$ и $cV_1 + dV_2$. Ако је дакле:

$S = \frac{V_1}{V_2}$ онда је $\{S, x\} = 2I = \left\{\frac{as+b}{cs+d}, x\right\}$

/3/ $S' = \frac{ds}{dy} y'$; $S'' = \frac{d^2 s}{dy^2} y'^2 + \frac{ds}{dy} y''$, $S''' = \frac{d^3 s}{dy^3} y'^3 + 3\frac{d^2 s}{dy^2} y'' y' + \frac{ds}{dy} y'''$

Зато је $\{S, x\} = y'^2 \{sy\} + \{y, x\}$, па због /1/:

$$\{S, x\} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left[\{S, y\} - \{x, y\}\right]$$

/4/ До ове се једначине долази примењујући два пута узастопце /3/. /Cauleu/ .

63/. Друга метода интеграције састоји се у промени независно промењливе.

Ако се z узме за нову независно промењливу, онда је

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dz^2}$$

а првобитна једначина прелази у

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\left(\frac{d^2z}{dx^2}+p\frac{dz}{dx}\right)+Qy=0$$

До сада је промењлива z још произвољна; али се она може изабрати тако да задовољава неки произвољно постављени услов, на пр. услов да коефициент од $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ буде једнак нули, тако да је

$$\frac{d^2z}{dx^2}+p\frac{dz}{dx}=0$$

те је z зато као функција од x једначином:

/1/ $$z=\int e^{-\int p dx}dx$$

Једначина која се добија као резултат елиминације од x из ове везе између z и x и из трансформисане једначине може бити интеграбилна. Случај интеграбилности се јавља ако z задовољава једначину:

/2/ $$M\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=Qz^2$$

где је μ константа. Тада једначина добија облик:

$$Z^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \mu y = 0$$

а њен интеграл је $$y = Az^\alpha + Bz^\beta$$

где су α и β корени једначине $m(m-1) + \mu = 0$

Да би услов /2/ био испуњен мора, што није тешко доказати, између P и Q постојати релација

$$\frac{Q}{\sqrt{\mu}} + \left(\frac{d\sqrt{Q}}{dx}\right) + P\sqrt{Q} = 0$$

Други случај интеграбилности наступа када је

$$\mu\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = Q$$

и у сличним случајевима. При том треба приметити да се једначина у сваком случају своди на једначину која се може означити као једначина позната облика, тј. на једначину чији се општи интеграл може наћи.

Пример 1. Решити једначину:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = c^2 y$$

Овде је $$P(1-x^2) = -x$$

дакле: $$\frac{dz}{dx} = e^{-\int P dx} = e^{\int \frac{x dx}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

и $$z = \text{arc Sin}\, x$$

Ако уведемо нову променљиву Z онда ће једначина прећи у

$$\frac{d^2y}{dz^2} = c^2 y$$

па је према томе

$$y = Ae^{c\,\text{arc Sin}\,x} + Be^{c\,\text{arc Cos}\,x}$$

Пример 2. Решити једначине:

$$/1/ \quad (x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=c^2y$$

$$/2/ \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\,tg\,x+y\,Cos^2x=0$$

$$/3/ \quad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3x+1}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}+y\left\{\frac{6(x+1)}{(x-1)(3x+5)}\right\}^2=0$$

$$/4/ \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\,\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{x^4}y=0$$

$$/5/ \quad (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

Решења:

$$/1/ \quad z=Sin\,x,\ y=Cos(c\,arc\,Sin\,x)+B\,Sin(c\,arc\,Sin\,x)$$

$$/2/ \quad z=Sin\,x,\ y=A\,Cos(Sin\,x)+B\,Sin(Sin\,x)$$

$$/3/ \quad \frac{dz}{dx}=(x-1)^2(x+1),\ z=\frac{1}{12}(x-1)^3(3x+5)$$

Одавде следи $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{4z^2}y=0$, те је $y=\sqrt{z}\,(A+B\log z)$

$$/4/ \quad z=\frac{1}{x},\ y=A\,Cos\,\frac{a}{x}+B\,Sin\,\frac{a}{x}$$

64/. Особина коју смо у § 60 употребили да би нашли односе између зависно промењивих двају једначина које се могу претворити једна у другу - наиме двају једначина које имају исти нормални облик - та се особина може употребити и при тражењу односа између зависно промењљивих у двема једначинама са различитим независно промењљивим, под претпоставком да једначине ипак одређују исту функцију. Поступак који треба применити биће сличан ономе који смо поменули, јер се обе једначине своде на своје нормалне облике по истој промењљивој, те ће оне - пошто смо претпоставили да су идентичне - дати услове који су потребни да би се доказала тачност претпоставке.

Нека буду

$$/1/ \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 2P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

$$/2/ \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2R\frac{dv}{dz} + Sv = 0$$

где су P и Q функције од x , а R и S функције од z , те две једначине које се на тај начин променом зависно и независно промењљивих могу претворити једна у другу. Ако се у /1/ стави:

$$ye^{\int P dx} = y_1 \quad \text{и} \quad I = Q - \frac{dP}{dx} - P^2$$

онда се добија

$$/3/ \quad \frac{d^2y_1}{dx^2} + Iy_1 = 0$$

Ако се исто тако:

$$ve^{\int P dz} = v_1 \quad \text{и} \quad J = S - \frac{dR}{dz} - R^2$$

уврсти у /2/ добија се

$$/4/ \quad \frac{d^2v_1}{dz^2} + Jv_1 = 0$$

Ако у /3/ заменимо независно променљиву x са z излази:

$$\frac{d^2y_1}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy_1}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}+Iy_1=0$$

или:

$$\frac{d^2y_1}{dz^2}+\frac{dy_1}{dz}\frac{z''}{z'^2}+\frac{I}{z'^2}y_1=0$$

где цртице означавају изводе по x . Да би ову једначину довели на нормални облик ставићемо:

$$y_1 e^{\frac{1}{2}\int\frac{z''}{z'^2}dz}=y_2$$

или, ако израчунамо интеграл у изложитељу:

$$y_1^{\sqrt{z'}}=y_2$$

Тада једначина прелази у:

$$/5/\qquad \frac{d^2y_2}{dz^2}+Gy_2=0$$

где је:

$$G=\frac{I}{z'^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{z''}{z'^2}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z''}{z'^2}\right)$$

$$/6/\qquad =\frac{I}{z'^2}-\frac{1}{4}\frac{z''^2}{z'^4}-\frac{1}{2}\left(\frac{z'''}{z'^2}-2\frac{z''^2}{z'^3}\right)\frac{1}{z'}$$

$$=\frac{I}{z'^2}-\frac{1}{2}\frac{\{z,x\}}{z'^2}$$

а $\{z,x\}$ Schwarz -ова инваријанта од z . Ако се једначине могу претворити једна у другу и ако су изражене истом независно променљивом, оне ће имати исти нормални облик. Ако, дакле, упоредимо нормалне облике /4/ и /5/, добијамо: $y_2=v_1$ /7/ и $G=J$ /8/. Ако сада уместо G ставимо његову вредност из /6/, биће:

$$/9/\qquad I-\frac{1}{2}\{z,x\}=Jz'^2$$

или

$$(9')\quad \frac{1}{2}\{z,x\}+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(S-\frac{dR}{dz}-R^2\right)-\left(Q-\frac{dP}{dx}-P^2\right)=0$$

па ако уврстимо за y_2 и V_1 њихове вредности из /7/ добијамо:

$$/10/ \quad y\sqrt{\frac{dz}{dx}}\,e^{\int P dx} = v e^{\int R dx}$$

Једначине /9/ и /10/ јесу услови да диференцијалне једначине /1/ и /2/ имају претпостављену особину; прва даје однос који мора да постоји између независно промењивих, а друга, ако је овај услов испуњен, даје везу која мора постојати између зависно промењивих.

Горње једначине омогућују да нађемо општи облик свих диференцијалних једначина које се могу трансформисати у /1/ и да уједно одредимо везу између две дате еквивалентне једначине. Тако би на пр.

$$/4/ \quad \frac{d^2 V_1}{dz^2} + V_1 J = 0 \quad \text{где је} \quad V_1 = y\sqrt{\frac{dz}{dx}}\,e^{\int P dx}$$

$$\text{и} \quad J = \frac{I}{z'^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\{z,x\}}{z'^2}$$

био нормални облик једначине која садржи једну дату независно промењиву Z а еквивалентна је једначини /1/; а како су Z и I познате као функције од x, онда је познато и J као функција од x, те се оно може претставити као функција од x.

/4/ мора бити нормални облик сваке диференцијалне једначине која је еквивалентна једначини /1/, а Z јој је независно промењива.

Пример 1. Показати да се једначине

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+n(n+1)z=0$$

и

$$(1-k^2)\frac{d^2v}{dk^2}+\frac{1-3k^2}{k}\frac{dv}{dk}=\left\{1+\frac{(2n+1)^2}{1-k^2}\right\}V$$

релацијом $x(1-k^2)=1+k^2$ могу претворити једна у другу и наћи однос између Z и V.

Решење:

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\left\{\frac{1}{(1-x^2)^2}+\frac{n(n+1)}{1-x^2}\right\}w=0$$

је заједнички нормални облик прве једначине и друге, када се ова трансформише у једначину по x; а веза између V и Z је:

$$V=Z\sqrt{\frac{x+1}{2}} \qquad \text{или} \qquad Z=V\sqrt{1-k^2}$$

Пример 2. Доказати да се једначине:

$$\frac{d^2v}{dz^2}(1-z)^2+2(B-1+z)\frac{dv}{dz}+k(1-k)v=0$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2k}{x}\frac{dy}{dx}-B^2y=0$$

могу претворити једна у другу помоћу реалације $x-1=xz$ одредити однос између y и v.

Решење: Заједнички нормални облик друге једначине и прве, када се ова трансформише у једначину по x, гласи:

$$\frac{d^2w}{dx^2}-\left(B^2+\frac{k(k-1)}{x^2}\right)w=0$$

а веза између y и v је: $V=ye^{-2Bx}x^{2k+1}$

МЕТОДА ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНАТА

65/. У § 58 доказали смо да се општи интеграл једначине

/1/ $$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$$

може наћи, ако је могуће одредити једна интеграл једначине

/2/ $$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

Благодарећи следећој методи полази за руком да се за ову /идруге линеарне једначине/ одреди она функција коју смо у последњем поглављу звали партикуларни интеграл; она се може применити и у случајевима на које се раније методе не могу применити.

Нека је y_1 једно решење једначине

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

тако да је:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+Qy_1=0$$

Ако елиминишемо Q, добијамо:

$$y_1\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\left(y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}\right)=0$$

па је дакле:

/3/ $$y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}=Ae^{-\int Pdx}$$

Интеграл ове једначине је: $y=By_1+Ay_1\int\frac{dx}{y_1^2}e^{-\int Pdx}$

Ако ставимо да је y_2 величина чији је коефициент Д, онда је

/4/ $y=By_1+Ay_2$ општи интеграл,

а y_2 је други партикулатни интеграл од /2/.

Претходно испитивање показује:

Веза између макоја два партикуларна решења y_1 и y_2 је једначина:

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = Ce^{-\int P dx}$$

притом вредност од C није произвољна него зависи од избора партикуларних решења y_1 и y_2 .

66/. Сада ћемо уврстити потпуни интеграл хомогене једначине у нехомогену једначину

$$/1/ \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$$

претпостављајући притом да A и B нису више константе, него функције од x које се морају изабрати тако да једначина /1/ буде задовољена. Према томе је облик од y за обе једначине исти, али су се константе, које се у првом случају јављају, у другом претвориле у функције независно промењљиве. Овај се поступак зове "варијација констаната" /§ 14, примедба 1/.

Сада су нам на расположењу две функције, A и B , помоћу којих је изражено y , једина непозната величина; и зато можемо произвољно утврдити неку релацију између њих, која изгледа најподеснија за нашу сврху. Ако y диференцијалимо, добијамо:

$$\frac{dy}{dx} = B\frac{dy_1}{dx} + A\frac{dy_2}{dx} + y_1\frac{dB}{dx} + y_2\frac{dA}{dx} = B\frac{dy_1}{dx} + A\frac{dy_2}{dx}$$

под претпоставком да је $y_1\frac{dB}{dx}+y_2\frac{dA}{dx}=0$

Изабраћемо ову последњу једначину за релацију која постоји између A и B. Ако $\frac{dy}{dx}$ диференцијалимо још једном, тако да буде:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=B\frac{d^2y_1}{dx^2}+A\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dB}{dx}\frac{dy_1}{dx}+\frac{dA}{dx}\frac{dy_2}{dx}$$

и ове вредности уврстимо у првобитну једначину /1/, добићемо, пошто су y_1 и y_2 партикулатна решења хомогене једначине, као резултат:

$$\frac{dB}{dx}\frac{dy_1}{dx}+\frac{dA}{dx}\frac{dy_2}{dx}=R$$

тако да излази

$$\frac{\frac{dA}{dx}}{y_1}=\frac{\frac{dB}{dx}}{-y_2}=\frac{R}{y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}}=\frac{R}{C}e^{\int Pdx}$$

стога је:

$$A=E+\frac{1}{C}\int Ry_1e^{\int Pdx}dx\ ;\qquad B=F-\frac{1}{C}\int Ry_2e^{\int Pdx}dx$$

где су E и F произвољне константе, а C апсолутна која зависи од избора партикуларних интеграла y_1 и y_2. Ако сада у диференцијалној једначини напишемо $\varphi(x)$ уместо P и $\psi(x)$ уместо R, и још $f_1(x)$ уместо y_1, $f_2(x)$ уместо y_2 добијамо став:

Потпуни интеграл диференцијалне једначине:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(x)\frac{dy}{dx}+Qy=\psi(x)\qquad \text{je:}$$

$$y=Ef_2(x)+Ff_1(x)+\frac{1}{C}\int^x\psi(\xi)e^{\int^\xi\varphi(z)dz,}\left[f_2(x)f_1(\xi)-f_1(x)f_2(\xi)\right]d\xi$$

Овде су $f_1(x)$ и $f_2(x)$ као партикуларни интеграли од

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(x)\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

везани једначином:

$$f_1\frac{df_2}{dx}-f_2\frac{df_1}{dx}=Ce^{-\int^x\varphi(z)\,dz}$$

треба приметити да бисмо могли ставити да је $C=1$, а да не ограничимо општу важност; јер ако не би било $C=1$, могли бисмо да уместо $f_2(x)$ ставимо $\frac{1}{C}f_2(x)$ а то би, као партикуларно решење, учинило да константа буде једнака јединици.

Пример 1. Решити једначину:

$$x\frac{dy}{dx}-y=(x-1)\left(\frac{d^2y}{dx^2}-x+1\right)$$

Написана у облику /1/ она гласи:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{x-1}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x-1}=x-1$$

Партикуларна решења једначине у којој је на десној страни $x-1$ замењено нулом, јесу x и e^x . Ако дакле ставимо $f_1(x)=x,\ f_2(x)=e^x$ добијамо општи интеграл:

$$y=Ae^x+Bx$$

Ставимо, као и у општем случају:

$$\frac{dA}{dx}e^x+\frac{dB}{dx}x=0$$

и још:

$$\frac{dA}{dx}e^x+\frac{dB}{dx}=x-1$$

Отуда следи

$$\frac{dA}{dx}=xe^{-x}\quad \text{и}\quad \frac{dB}{dx}=-1$$

па је према томе: $A=E+\int^x\xi e^{-\xi}d\xi=E-e^{-x}(x+1)$ и $B=F-x$

Стога је општи интеграл: $y=Ee^x+Fx-(x^2+x+1)$

Пример 2. Интегралити помоћу ове методе једначину:

$$\frac{dy}{dx}+Qy=Ry^2$$

где су Q и R функције од x .

Решење: Ако се у изразу $y = Ce^{-\int Qdx}$ који је општи интеграл од $\frac{dy}{dx} + Qy = 0$, величина C сматра за функцију од x , следи:

$$\frac{dy}{dx} + Qy = e^{-\int Qdx} \frac{dC}{dx}$$

Ако се, дакле, стави:

$$e^{-\int Qdx} \frac{dC}{dx} = Ry^2 = RC^2 e^{-2\int Qdx}$$

биће: /§ 13/: $\frac{1}{C} = C' - \int Re^{-\int Qdx} dx$

те се општи интеграл једначине:

$$\frac{dy}{dx} + Qy = Ry^2$$

добија у облику:

$$\frac{1}{y} e^{-\int Qdx} = C' - \int Re^{-\int Qdx} dx$$ /види § 15/.

Пример 3. Решити једначине:

/1/ $$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = \sec nx$$

/2/ $$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} - (1 + x^2)y = x$$

(стр. 121 пример 3)

Решење:

/1/ Општи интеграл редуковане једначине је:

$$y = C_1 \operatorname{Cos} nx + C_2 \operatorname{Sin} nx$$

а интеграл дате је:

$$y = \left(A + \frac{1}{n^2} \log \operatorname{Cos} nx\right) \operatorname{Cos} nx + \left(B + \frac{x}{n}\right) \operatorname{Sin} nx$$

/2/ Општи интеграл редуковане једначине је:

$$y = \frac{1}{1-x^2}\left(C_1 \operatorname{Cos} x + C_2 \operatorname{Sin} x\right)$$

Онда се за C_1 и C_2 добија:

$$C_1 = A + x\operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x, \quad C_2 = B + x \operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x$$

Зато је интеграл дате једначине:

$$y=\frac{1}{1-x^2}\left(A\cos x+B\sin x+x\right)$$

67/. Да би се добио један помоћни интеграл чије се константе потом могу узети за променљиве параметре, може се метода варијације констаната употребити и на начин који се од онога што смо га показали разликује по избору чланова који се одмах избацују. Ако на пр. посматрамо једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 f(y)+F(y)=0$$

И, да бисмо добили помоћни интеграл, изоставимо члан $F(y)$, онда ће помоћни интеграл бити одређен једначином $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 f(y)=0$

па је према томе: $\frac{dy}{dx}e^{\int f(y)dy}=C$

Ако се сада претпостави да C није константа него нека функција од x, па се једначина диференцијали, биће:

$$\left\{\frac{d^2y}{dx^2}+f(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}e^{\int f(y)dy}=\frac{dC}{dx}$$

или:

$$-F(y)e^{\int f(y)dy}=\frac{dC}{dx}$$

дакле:

$$C\frac{dC}{dx}=-F(y)e^{2\int f(y)dy}\frac{dy}{dx}$$

те је:

$$C^2=A-2\int F(y)e^{2\int f(y)dy}dy$$

Први интеграл првобитне једначине је према томе:

$$\frac{dy}{dx}e^{\int f(y)dy}=\sqrt{A-2\int F(y)e^{2\int f(y)dy}dy}$$

Овај се израз може још једнапут интегралити јер се променљиве могу раставити.

Пример 1. Решити на овај начин једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}f(x)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\varphi(x)=0$$

и показати да се њен интеграл може добити по методи из § 54.

Заменити у овом задатку зависне и независне променљиве и тако одредити интеграл једначине:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(y)\frac{dy}{dx}+\varphi(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

Решење: Ако се прво стави $\varphi(x)=0$ добија се:

$$\frac{dy}{dx}=Ce^{-\int f(x)dx}$$

као интеграл једначине $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}f(y)=0$

Ако се сматра да је овде C функција од x и изврши диференцијација по x биће:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}f(x)=\frac{dC}{dx}e^{-\int f(x)dx}=-\varphi(x)C^2e^{-2\int f(x)dx}$$

па је према томе:

$$C=\left\{A+\int\varphi(x)e^{-\int f(x)dx}dx\right\}^{-1}$$

Општи интеграл дате једначине је дакле:

$$y=B+\int\left\{A+\int\varphi(x)e^{-\int f(x)dx}dx\right\}^{-1}e^{-\int f(x)dx}dx$$

Да је прво било стављено да је $f(x)=0$, добила би се једначина:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\varphi(x)=0$$

чији је интеграл: $\frac{dy}{dx}=\left\{C+\int\varphi(x)dx\right\}^{-1}$

Ако се овде C сматра за функцију од x и изврши диференцијација по x, следи:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\varphi(x)=-\left\{C+\int\varphi(x)dx\right\}^{-2}\frac{dC}{dx}=$$

$$= -f(x)\left\{C+\int\varphi(x)\,dx\right\}^{-1}$$

Отуда је $\frac{dC}{dx}-Cf(x)=f(x)\int\varphi(x)\,dx$; а ова је једначина линеарна. Из ње следи:

$$C+\int\varphi(x)\,dx=e^{\int f(x)dx}\left\{A+\int\varphi(x)e^{-\int f(x)dx}dx\right\}$$

дакле:

$$y=B+\int\left\{A+\int\varphi(x)e^{-\int f(x)dx}dx\right\}^{-1}e^{-\int f(x)dx}dx$$

као и горе.

Да би се применила и метода из § 54, треба ставити:

$\frac{dy}{dx}=p$ онда ће бити $\frac{d\frac{1}{p}}{dx}-f(x)\frac{1}{p}=\varphi(x)$

а ова је једначина линеарна.

Пример 2. Интегралити општу једначину

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

прво, изостављајући и последњи члан и варијацијом параметара, да би се добила помоћна једначина;

Друго, примењујући исти поступак на интеграл који се добија изостављањем другога члана;

Треће, множећи са $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$ и интегралећи сваки члан;

Решење: Ако се прво стави $F(y)=0$, добија се као и у прошлом задатку

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}=e^{-\int f(x)dx}\frac{dC}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{C}\frac{dC}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Но, с друге стране је:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}=-F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

па је отуда:

$$\frac{1}{C}\frac{dC}{dy}=-F(y)$$

дакле: $C = Ae^{-\int F(y)dy}$

према томе се као општи интеграл дате једначине добија:
$$\int e^{\int F(y)dy} dy = A\int e^{-\int f(x)dx} dx + B$$

Ако се, даље, претпостави да је $f(x)=0$ онда је:
$$\frac{d^2y}{dx^2} + F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

дакле, ако је
$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dy} + F(y)\,p = 0 \qquad \text{или} \quad p = Ce^{-\int F(y)dy}$$

Ако се ово диференцијали по x, биће:
$$\frac{d^2y}{dx^2} + F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{C}\frac{dC}{dx}\frac{dy}{dx}$$

С друге стране је:
$$\frac{d^2y}{dx^2} + F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -f(x)\frac{dy}{dx}$$

дакле:
$$\frac{1}{C}\frac{dC}{dx} = -f(x) \quad \text{или} \quad C = Ae^{-\int f(x)dx}$$

те је:
$$\int e^{\int F(y)dy} dy = A\int e^{-\int f(x)dx} dx + B$$

као и пре.

Ако се, најзад, једначина помножи са $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$

следи: $$\frac{d}{dx}\log\frac{dy}{dx} + F(y)\frac{dy}{dx} + f(x) = 0$$

те је: $$\frac{dy}{dx} = Ae^{-\int F(y)dy} . e^{-\int f(x)dx}$$

или $$\int e^{\int F(y)dy} dy = A\int e^{-\int f(x)dx} dx + B$$

Из ових примера следи да је једначина
$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$
интеграбилна у случајевима:

/1/ када су P и Q функције од x.

/2/ када су P и Q функције од y ,

/3/ када је P функција од x, а Q функција од y .

ДВЕ СПЕЦИЈАЛНЕ МЕТОДЕ

68/. Ако је у једначини $\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=0$, величина I разломљена рационална функција тако да је именитељ у односу на променљиву вишег степена него бројитељ, онда је понекад корисна следећа метода:

Ако се уместо V уврсти величина

$$ze^{\int P_1 dx}$$

једначина прелази у

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2P_1\frac{dz}{dx}+P_2 z=0$$

где је

$$P_2=I+P_1^2+\frac{dP_1}{dx}$$

Ако се ова једначина интеграли као да јој је лева страна потпун диференцијал, добија се:

$$\frac{dz}{dx}+2P_1 z+\int z\left(P_2-2\frac{dP_1}{dx}\right)dx=A$$

Како су величине P_1 и P_2 до сада биле међусобно везане само једном јединoм једначином, можемо између њих поставити још један услов, наиме да буде

$$P_2=2\frac{dP_1}{dx}$$

а то за P_1 даје једначину: $\frac{dP_1}{dx}-P_1^2=I$

Ако је већ нађена нека вредност од P_1 која задовољава једначину, добиће се први интеграл првобитне једначине облика: $\frac{dz}{dx}+2P_1 z=A$

Треба обратити пажњу на то да корист ове методе зависи од облика једначине за P_1, она би постала илузорна супституцијом:

$$P_1 = -\frac{1}{w}\frac{dw}{dx}$$

јер би се онда једначина за P_1 претворила у првобитну једначину.

Под претпоставком коју смо учинили за облик од I, можемо писати:

$$I = \frac{V}{T^2U} = \frac{VU}{T^2U^2} = \frac{UV}{\varphi^2}$$

где су T, U и V целе рационалне функције од x. Тада можемо ставити:

$$P_1 = \frac{f(x)}{\varphi}$$

где су константе у $f(x)$ величине које из једначине треба одредити. Али уопште у f неће бити на расположењу довољно констананата које би се могле одредити тако да једначина буде задовољена. Зато се она метода и не може увек употребити.

Пример 1. решити једначину:

$$x(1-x)^2\frac{d^2V}{dx^2} = 2V$$

Овде је једначина за P_1 :

$$\frac{dP_1}{dx} - P_1^2 = -\frac{2}{x(1-x)^2}$$

Треба ставити и извршити замену

$$P_1 = \frac{E}{x} + \frac{F}{1-x}$$

Тада ће једначина биви задовољена за $E = F = -1$ е је први интеграл:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x(1-x)}\, z = A$$

где је $$\log\frac{v}{z} = -\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{1-x}$$

или: $$v x = z(1-x)$$

Општи интеграл се може лако извести јер је једначина линеарна по Z и првога реда.

Пример 2. Решити једначине:

$$/1/\quad (1-x^2)^2\,\frac{d^2v}{dx^2} + v = 0$$

$$/2/\quad (2x+1)^2(x^2+x+1)\frac{d^2v}{dx^2} = 18v$$

$$/3/\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4y\,\frac{\sin 3x}{\sin^3 x}$$

Ако се у датој једначини јавља члан са $\frac{dy}{dx}$ онда се он мора изоставити. Обратити пажњу на то у следећим задацима.

Решење:

$$/1/\quad P_1 = \frac{x}{1-x^2};\quad v = \frac{z}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}\left(B + A\log\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$/2/\quad P_1 = \frac{3}{(2x+1)(x^2+x+1)};\quad v = \frac{(2x+1)^2}{x^2+x+1}\; z =$$

$$= \frac{x^2+x+1}{(2x+1)^2}\left\{B + A\int\frac{(2x+1)^4}{x^2+x+1}\,dx\right.$$

$$/3/\quad P_1 = -4\operatorname{ctg} x;\quad y = \frac{z}{\sin^4 x} = B\sin^4 x + A\frac{\cos x}{\sin^3 x}\left\{5 + 6\sin^2 x + \right.$$

$$\left. + 8\sin^4 x + 16\sin^6 x\right\}$$

Пример 3. Решити једначине:

$$/1/\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+2)x}{x(1-x)}\,\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha y}{x(1-x)}=0$$

$$/2/\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\alpha-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\,\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha\beta y}{x(1-x)}=0$$

$$/3/\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\alpha+1-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\,\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha\beta x}{x(1-x)}=0$$

Решење:

/1/ Ако се стави $y=Vx^{-\frac{\gamma}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}(\alpha+2-\gamma)}$ биће:

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{\gamma(2-\gamma)-2\alpha(2-\gamma)x+\alpha(2-\alpha)x^2}{4(1-x)^2x^2}V=0$$

$$P_1=\frac{\gamma-2-(\alpha-2)x}{2(1-x)x};\quad V=x^{\frac{1}{2}(\gamma-2)}(1-x)^{\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}Z;$$

$$Z=x^{2-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\left\{B+A\int x^{\gamma-2}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx\right\}$$

Дакле:

Једноставније се до овога резултата може доћи ако се уочи да је једначина

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\{\gamma-(\alpha+2)x\}\frac{dy}{dx}-\alpha y=0$$

егзактна диференцијална једначина. Једна интеграција даје:

$$x(1-x)\frac{dy}{dx}+(\gamma-1-\alpha x)y=A$$

дакле као и раније:

$$y=x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\left\{B+A\int x^{\gamma-2}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx\right\}$$

/2/ Супституцијом $y=x^{-\frac{1}{2}\alpha}(1-x)^{-\frac{1}{2}(\beta+1)}V$ прелази једначина у:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{\alpha(2-\alpha)+2\alpha(\alpha-\beta-1)x-(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta+1)x^2}{4x^2(1-x)^2}v=0$$

Овде ће бити:

$$P_1=-\frac{\alpha(\alpha-\beta+1)x}{2x(1-x)};\quad v=x^{-1/2\alpha}(1-x)^{-1/2(1-\beta)}z:\quad z=x^{\alpha}(1-x)^{1-\beta}\left\{B+A\int x^{-\alpha}(1-x)^{\beta-1}.dx\right\}$$

те је коначно: $y=(1-x)^{-\beta}\left\{B+A\int x^{-\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx\right\}$

/3/ Супституцијом $y=x^{-1/2(\alpha+1)}(1-x)^{-1/2\beta}v$ прелази једначина у:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{(\alpha+1)(1-\alpha)+2(\alpha-1)(\alpha-\beta+1)x-(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta+1)x^2}{4x^2(1-x)^2}$$

Овде ће бити: $P_1=\frac{(\alpha-1)-(\alpha-\beta-1)x}{2x(1-x)}$;

$$v=x^{1/2(\alpha-1)}(1-x)^{-1/2\beta}z;\quad z=x^{1-\alpha}(1-x)^{\beta}\left\{B+A\int x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}dx\right\}$$

И најзад је: $y=x^{-\alpha}\left\{B+A\int x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}dx\right\}$

Пример 4. Показати да се ова метода може применити на једначину:

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{A'x^2+2B'x+C'}{(x^2+2Ax+B)^2}v$$

ако између A', B', C' постоји нека релација, и одредити ту релацију.

Решење: Једначина за P_1 биће:

$$\frac{dP_1}{dx}-P_1^2=-\frac{A'x^2+2B'x+C'}{(x^2+2Ax+B)^2}$$

Ако покушамо да једначину задовољимо са

$$P_1=\frac{M}{x-\alpha}+\frac{N}{x-\beta}$$

где су α и β корени једначине $x^2+2Ax+B=0$ а M и N константе, добијају се за одредбу тих величина ове три једначине:

$$(A)\quad \begin{cases} M(M+1)+N(N+1)+2MN=A' \\ \beta M(M+1)+\alpha N(N+1)+(\alpha+\beta)MN=-\beta' \\ \beta^2 M(M+1)+\alpha^2 N(N+1)+2\alpha\beta MN=C' \end{cases}$$

Да би оне могле заједно постојати мора између њихових коефициената постојати нека условна једначина. Да бисмо је извели, сматраћемо величине $M(M+1)$, $N(N+1)$, MN за непознате; тако се добија:

$$(B)\quad \begin{cases} M(M+1)=(\alpha-\beta)^{-2}(\alpha^2A'+2\alpha B'+C') \\ N(N+1)=(\alpha-\beta)^{-2}(\beta^2A'+2\beta B'+C') \\ MN\ =-(\alpha-\beta)^{-2}(\alpha\beta A'+(\alpha+\beta)B'+C') \end{cases}$$

Ако се прва једначина система (A) подели другом, добија се:

$$\frac{M+N}{M\beta+N\alpha}=-\frac{A'}{B'} \qquad \text{дакле} \qquad \frac{M}{N}=-\frac{A'\alpha+B'}{A'\beta+B'}$$

Одавде и из треће једначине система (B) следују ове две једначине:

$$M=\pm(\alpha\pm\beta)^{-1}\left(\frac{A'\alpha+\beta'}{A'\beta+B'}\right)^{1/2}(\alpha\beta A'+(\alpha+\beta)B'+C')^{1/2}$$

$$N=\mp(\alpha-\beta)^{-1}\left(\frac{A'\beta+B'}{A'\alpha+B'}\right)^{1/2}(\alpha\beta A'+(\alpha+\beta)B'+C')^{1/2}$$

Ако се сад вредност од M односно од N, уврсти у прву, односно у другу једначину система (B), добија се с обзиром на релацију $\alpha+\beta=-2A, \alpha\beta=B$ условна једначина:

$$(B'^2-A'C')^2=(A'^2B-2A'B'A+B'^2)(A'B-2B'A+C')$$

Ако је она задовољена, онда се на дату једначину може применити метода из § 68.

69/. Једна се класа линеарних диференцијалних једначина може решити растављајући оператор код y на производ оператора. Посматрајмо, на пр. једначину:

$$u\frac{d^2y}{dx^2}+v\frac{dy}{dx}+wy=0$$

где су u , v и w функције од Z ; ако се оператор $u\frac{d^2}{dx^2}+v\frac{d}{dx}+w$ може раставити на производ

$$\left(p\frac{d}{dx}+q\right)\left(r\frac{d}{dx}+s\right)$$

где су p , q , r и s функције од x , онда се једначина може интегралити. Јер, ако ставимо

$$\left(r\frac{d}{dx}+s\right)=z \qquad \text{добијамо } p\frac{dz}{dx}+qz=0$$

дакле

$$z=Ae^{-\int\frac{p}{q}dx}$$

те треба да интегралимо једначину:

$$r\frac{dy}{dx}+sy=Ae^{-\int\frac{p}{q}dx}$$

која је линеарна и првога реда. Да би растављање било могуће, морају постојати три једначине:

$$pr=u\ ;\quad qr+p\left(\frac{dr}{dx}+s\right)=v\ ;\quad qs+p\frac{dr}{dx}=w$$

а из њих треба одредити 4 величине p , q , r , и s . Али можемо да сматрамо p и r за два члнитеља од u , а да остале две једначине употребимо за одредбу од q и s . Но оне се обично не могу решити, те се стога ова метода може употребити само у нарочитим случајевима.

Пример 1. Решити једначину:

$$(x^2+x-2)\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2-x)\frac{dy}{dx}-(6x^2+7x)y=0$$

Овде можемо ставити $p=x+2$, $r=x-1$

ако је тада $q=\mathcal{E}x+F$; $s=\mathcal{E}x+F'$ онда добијамо:

$$E+E'=1 \qquad\qquad EE'=-6$$

$$-E+F+2E'+F'=-2\,;\ F-2F'=2\,;\ E'F+EF'+E'=-7\,;\ FF'+2E'=0$$

а ове су једначине задовољене за $E=3$, $E'=-2$, $F=4$, $F'=1$

. Стога се једначина може писати у облику:

$$\left\{(x+2)\frac{d}{dx}+3x+4\right\}\left\{(x-1)\frac{d}{dx}-(2x-1)\right\}y=0$$

Први је интеграл

$$(x-1)\frac{dy}{dx}-(2x-1)y=A(x+2)^2e^{-3x}$$

а општи

$$y=(x-1)e^{2x}\left\{B+A\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2e^{-5x}dx\right\}$$

Пример 2. Решити једначине

/1/ $$ax\frac{d^2y}{dx^2}+(3a+bx)\frac{dy}{dx}+3by=0$$

/2/ $$(x-1)(x-2)\frac{d^2y}{dx^2}-(2x-3)\frac{dy}{dx}+y=0$$

/3/ $$(2x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-(3x-4)\frac{dy}{dx}+(x-3)y=0$$

/4/ $$(x^2+3x+2)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(5x^2+\frac{21}{2}x+4\right)\frac{dy}{dx}+\left(6x^2+\frac{17}{2}x+4\right)y=0$$

/5/ $$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}-(3x+1)\frac{dy}{dx}-(x^2-x)y=0$$

/6/ $$x^2(a-bx)\frac{d^2y}{dx^2}-2x(2a-bx)\frac{dy}{dx}+2(3a-bx)y=6a^2$$

Решење:

/1/ $$\left(x\frac{d}{dx}+3\right)\left(a\frac{d}{dx}+b\right)y=0$$

Ако се стави $\left(a\frac{d}{dx}+b\right)y=z$ биће: $x\frac{dz}{dx}+3z=0$ дакле:

$z=Ax^{-3}$; даље је: $a\frac{dy}{dx}+by=Ax^{-3}$, дакле:

$$y=Be^{-\frac{b}{a}x}-\frac{A}{2}\left\{\frac{1}{x^2}+\frac{b}{a}\frac{1}{x}-\frac{b^2}{a^2}e^{-\frac{b}{a}x}\int\frac{e^{\frac{b}{a}x}}{x}dx\right\}$$

/2/ $\left\{(x-1)\frac{d}{dx}-1\right\}\left\{(x-2)\frac{d}{dx}-2\right\}y=0$

Ако ставимо: $\left\{(x-2)\frac{d}{dx}-2\right\}y=Z$ добићемо: $(x-1)\frac{dz}{dx}-Z=0$ дакле: $Z=C_1(x-1)$ Даље је: $(x-2)\frac{dy}{dx}-2y=C_1(x-1)$ те је према томе

$$y=C_2(x-2)^2-C_2(x-2)-\tfrac{1}{2}C_1 \quad .$$

/3/ $\left\{(2x-1)\frac{d}{dx}-x+3\right\}\left\{\frac{d}{dx}-1\right\}y=0$

Ако се стави $\left(\frac{d}{dx}-1\right)y=Z$ онда је: $(2x-1)\frac{dz}{dx}(x-3)z=0$ те је:

$$Z=Ce^{1/2x}(2x-1)^{-5/4}$$

даље је

$$\frac{dy}{dx}-y=C_1e^{1/2x}(2x-1)^{-5/4}$$

дакле:

$$y=e^x\left\{C_2+C_1\int e^{-1/2x}(2x-1)^{-5/4}dx\right.$$

/4/ Ако се стави $p=x+1$; $r=x+2$; $q=Ex+F$; $s=E'+F$ добијају се за одредбу четири величине $E. F. E'$; F' једначине

$$E+E'=5 \quad 2E+F+E'+F'=\frac{19}{2} \quad 2F+F'=3$$

$$EE'=6 \quad FE'+EF'+E'=\frac{17}{2} \quad FF'+E'=4$$

а оне су задовољене за $E=2$, $F=1/2$, $E'=3$, $F'=2$

Отуда излази:

$$\left\{(x+1)\frac{d}{dx}+2x+1/2\right\}\left\{(x+2)\frac{d}{dx}+3x+2\right\}y=0$$

Ако се стави

$$\left\{(x+2)\frac{d}{dx}+3x+2\right\}y=Z$$

биће

$$(x+1)\frac{dz}{dx}+(2x+1/2)z=0$$

дакле $Z=C_1e^{-2x}(x+1)^{3/2}$. Даље ће једначина за y бити: $(x+2)\frac{dy}{dx}+(3x+2)y=C_1e^{-2x}(x+1)^{3/2}$

дакле $y=(x+2)^4e^{-3x}\left\{C_2+C_1\int e^x\frac{(x+1)^{3/2}}{(x+2)^5}dx\right\}$

/5/ $$\left\{(x-1)\frac{d}{dx}-x-1\right\}\left\{(x+1)\frac{d}{dx}+x-1\right\}y=0$$

Ако се стави $\left\{(x+1)\frac{d}{dx}+x-1\right\}y = z$

биће: $(x-1)\frac{dz}{dx}-(x-1)z=0$

дакле: $z=Ce^{x}(x-1)^2$ даље $(x+1)\frac{dy}{dx}+(x-1)y=Ce^{x}(x-1)^2$

дакле: $y=e^{-x}(x+1)^2\left\{C_2+C_1\int e^{2x}\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}\,dx\right\}$

/6/ $$x\left(\frac{d}{dx}-3\right)\left\{x(a-bx)\frac{d}{dx}+bx-2a\right\}y=6a^2$$

Ако се стави $\left\{x(a-bx)\frac{d}{dx}+bx-2a\right\}y = z$

биће: $x\frac{dz}{dx}-3z=6a^2$

дакле: $z=C_1x^3-2a^2$:даље је: $x(a-bx)\frac{dy}{dx}-(2a-bx)y=C_1x^3-2a^2$

стога је $y=\frac{x^2}{a-bx}\left(A+Bx+\frac{a^2}{x^2}\right)$

Једначина се супституцијом $y=\frac{x^2}{a-bx}$ а по § 59 може једноставније довести на њен нормални облик: $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{6a^2}{x^4}$ а отуда непосредно следује

$$V=A+Bx+\frac{a^2}{x^2}$$

што је у сагласности са горњим резултатом.

70/. Постоји још један нарочити облик на који се обична линеарна диференцијална једначина другога реда може довести. Ако једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

помножимо са $e^{\int P dx}$ онда је можемо написати овако:

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{\int P dx}\frac{dy}{dx}\right\} + Qe^{\int P dx}y = 0$$

Ако се уведе нова независно променљива тако да буде $dz = Qe^{\int P dx}dx$ онда једначина прелази у:

$$\frac{d}{dz}\left\{Qe^{2\int P dx}\frac{dy}{dx}\right\} + y = 0$$

Но $Qe^{2\int P dx}$ је одређена функција од x па према томе и од Z ; означимо је са $\frac{1}{u}$, где је u функција од Z . Тада ће диференцијална једначина постати:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{u}\frac{dy}{dz}\right) + y = 0$$

а то је поменути облик. William Thomson је дао приближну методу за решавање ове једначине механичким путем.

Пример. Написати $P\frac{d^2u}{dx^2} + Q\frac{du}{dx} + Ru = 0$ у облику

$$\frac{d^2V}{dx^2} + MV = 0$$

Ако се онда стави $S_0 = C + C'x$, $S_{n+1} = \int_0^x dx\int_0^x MS_n dx$ онда је $V = S_0 - S_1 + S_2 \dots\dots$ интеграл у облику реда. Ред конвергира за све вредности од x под претпоставком да M остаје коначно. Доказати то, и израчунати случај када је $M = x^n$

Решење: Ако се претпостави да је V ред: $V = S_0 - S_1 + S_2 - \dots$ мора постојати једначина

$$\frac{d^2S_0}{dx^2} - \frac{d^2S_1}{dx^2} + \frac{d^2S_2}{dx^2} - \dots\dots = -MS_0 + MS_1 - MS_2 + \dots$$

Ова ће једначина бити задовољена ако се стави

$$\frac{d^2S_0}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^2S_1}{dx^2} = MS_0 \quad \frac{d^2S_2}{dx^2} = MS_1 \dots\dots$$

и уопште $\dfrac{d^2 S_{m+1}}{dx^2} = M S_m$

Одавде следи: $S_0 = C + C'x, \; S_{m+1} = \int\limits_0^x dx \int\limits_0^x M S_n \, dx$

Под претпоставком да је доња граница 0 тако да је M између граница интерграције коначно и непрекидно; иначе треба уместо 0 узети неку другу произвољну границу a која има ту особину. Није тешко извести доказ да је ред за V конвергентан за све вредности од x за које је M коначно. Нека наиме $|A|$ означава апсолутну вредност од A, а M највећу апсолутну вредност коју M може имати у посматраном интервалу. Онда је: $|V| < |S_0| + |S_1| + |S_2| + \ldots\ldots$

Даље је:

$$|S_1| < 1/2\, M x^2 |S_0| \; |S_2| < 1/4!\, M^2 x^4 |S_0| \ldots. \; |S_n| < \frac{1}{(2n)!} M^n x^{2n} |S_0|$$

Према томе је

$$|V| < |S_0| \left\{ 1 + \frac{Mx^2}{2!} + \frac{M^2 x^4}{4!} \ldots. \right\} < 1/2 |S_0| \left(e^{x\sqrt{M}} + e^{-x\sqrt{M}} \right)$$

Но како $|S_0|$ и израз у загради остају коначни за сваку вредност од x следи да ред за V конвергира ако је M у посматраном интервалу коначно.

Ако је $M = x^n$, биће:

$$V = C\left\{ 1 - \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \ldots\ldots\ldots\ldots \right\} +$$
$$+ C'x \left\{ 1 - \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \frac{x^{n+4}}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} - \ldots\ldots \right\}$$

За $n = 0$ добија се $V = \mathrm{Cos}\, x + C' \mathrm{Sin}\, x$ а то је стварно интеграл од $\dfrac{d^2 V}{dx^2} + V = 0$

ОПШТЕ ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

71/. Општа линеарна диференцијална једначина са промењљивим коефицијентима је облика:

$$/1/\quad X_0\frac{d^ny}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots X_{n-1}\frac{dy}{dx}+X_ny=V$$

где су $X_0, X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$, и V функције од x. Већ смо посматрали случај када су X_i константе. Ми ћемо се ограничити на случајеве у којима су X_i рационалне функције од x : онда можемо претпоставити да су оне и целе функције, јер имените̂ље који се јављају можемо уклонити множећи заједничким именитељем.

Решење једначина састоји се из два дела.

1. Из партикуларног интегралатј. из неког партикуларног решења једначине /1/

2. Из комплементарне функције, тј. општег интеграла једначине која се добија ако се у /1/ стави да је десна страна једнака нули, наиме:

$$/2/\quad X_0\frac{d^ny}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots X_{n-1}\frac{dy}{dx}+X_ny=0$$

Једначина /2/ садржи n произвољних констаната јер је n тога реда; а то је управо онолико колико је потребно за потпуно решење једначине /1/. Општи интеграл је збир ова два дела.

72/. Ако је y_1 једно решење од /2/, онда је и $A_1 y_1$ једно решење, пошто је једначина линеарна; ако су, дакле, $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$, партикуларна решења од /2/, онда је и

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots\ldots + A_n y_n$$

где су $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$, произвољне константе, једно решење. Но ако су $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$, међусобно линеарно независни, тако да се ниједно од њих не може изразити линеарном функцијом свих осталих или само неких, онда једначина садржи n независних констаната, те је она стога комплементарна функција.

Да би то био случај не сме ни за које λ_i да постоји једначина облика.

$$\lambda_i y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots\ldots \lambda_n y_n = 0$$

сем ако нису сви λ_i једнаки нули. Ако би постојала релација за коју нису сви λ_i једнаки нули, добили бисмо једначине:

$$\lambda_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \lambda_2 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + \lambda_n \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} = 0$$

$$\lambda_1 \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + \lambda_2 \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + \lambda_n \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 \frac{dy_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots\ldots + \lambda_n \frac{dy_n}{dx} = 0$$

а како нису сви λ_i једнаки нули, онда би морала да буде једнака нули детерминанта која се добија елиминишући λ_i;

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \cdots\cdots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} & \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} & \cdots\cdots & \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots\cdots & \frac{dy_n}{dx} \\ y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \end{vmatrix} = 0$$

Услов да y_i буду међусобно независни, или другим речима: да дата вредност од y претставља комплементарну функцију, јесте да Δ не буде једнако нули.

73/. Може се лако доказати да, ако је $\Delta = 0$ мора постојати једначина сблика:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots\dots + \lambda_n y_n = 0$$

јер би у другом случају могло бити $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots \lambda_n y_n = u$, ако се онда колоне од Δ множе са $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ па се првој колони додаду остале, добија се:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \cdots\cdots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} & \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} & \cdots\cdots & \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u & y_2 & \cdots\cdots & y_n \end{vmatrix} = 0$$

а то је диференцијална једначина $(n-1)$ -ог реда за u, она је задовољена за $u = y_1\ y_2 \dots\dots y_n$ те има n партикуларних интеграла, за које се претпоставља да су међусобно независни. Но број независних партикуларних интеграла диференцијалне једначине једнак је њеноме реду, а томе се овај резултат противи. Зато мора диференцијална једначина за U бити само идентитет, тако да је. $U=0$: према томе постоји између n величина y_i једна линеарна релација под претпоставком да је $\Delta=0$

74/. Ако је вредност од Δ различита од нуле, онда се она може наћи на овај начин. Ако се у једначину /2/ § 71 уврсте вредности $y=y_1, y_2 \cdots y_n$ па се из ових n нових једначина елиминишу $X_2, X_3 \dots X_n$ добија се:

$$X_0\begin{vmatrix} \frac{d^n y_1}{dx^n} & \frac{d^n y_2}{dx^n} & \cdots & \frac{d^n y_n}{dx^n} \\ \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} & \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} & \cdots & \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} \\ \frac{d^{n-3} y_1}{dx^{n-3}} & \frac{d^{n-3} y_2}{dx^{n-3}} & \cdots & \frac{d^{n-3} y_n}{dx^{n-3}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1 & y_2 & & y_n \end{vmatrix} + X_1\Delta = 0$$

Детерминанта која је помножена са X_0 јесте $\frac{d\Delta}{dx}$, па ће бити: $X_0\frac{d\Delta}{dx}+X_1\Delta=0$

а отуда се интеграцијом добија: $\Delta = Ce^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}$

Како су Δ и $\int\frac{X_1}{X_0}dx$ одређене функције од x мора се константа C одредити неком другом методом. Често је успешно и упоређивање специјалних чланова. Јасно је да ће се вредност од C променити ако се промени ред првобитних интеграла

$$y_1,\ y_2 \cdots\cdots y_n$$

Пример: Нека је y_1 неки партикуларни интеграл једначине:

$$X_0\frac{d^m y}{dx^m}+X_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\dots\dots X_{m-1}\frac{dy}{dx}-X_m y=0$$

Ако ставимо $y_1\int z dx$ за y онда ће једначина за z /види доле § 76/ бити: $(m-1)$ -ог реда. Нека је z_1 партикуларни интеграл ове једначине, тако да је $y_1\int z_1 dx$ неки други партикуларни интеграл једначине по y, и ставимо $z_1\int u dx$ уместо z; онда је једначина по u $(m-2)$ -ог реда. Ако је u_1 неки партикуларни интеграл ове једначине, онда је $y_1\int z_1 dx\int u_1 dx$ трећи партикуларни интеграл првобитне једначине. Ако на тај начин извршимо узастопне $m-1$ супституцију, доћи ћемо до једначине облика:

$$\frac{dw}{dx} = zw$$

чији се један интеграл може наћи, тако да ћемо добити свега m партикуларних интеграла.

Показати да су сви партикуларни интеграли линеарно независни, и да је за њих

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} y_1^m z_1^{m-1} u_1^{m-2} \ldots\ldots w_1$$

Решење: Ако се интеграли добијени на овај начин означе са y_1 . $y_2 \ldots\ldots y_n$, онда би, да они нису међусобно линеарно независни, морала постојати релација облика

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots\ldots + \lambda_m y_m = 0$$

где су λ_i константе које нису све једнаке нули. Како су $y_2\ y_3 \ldots\ldots y_m$, сразмерни y_1, то се ова једначина може поделити са y_1 и диференцијалити по x. На овај начин λ_1 уколико није већ раније било једнако нули, испада из једначине, а једначина која се тако добија може се, због нарочито облика величина $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1} \ldots\ldots \frac{y_m}{y_1}$ поделити са z_1. Ако је то учињено и ако се поново изврши диференцијација, отпашће λ_2 а нова једначина моћи ће се делити са u_1. Настављајући тако доћи ћемо до закључка да је или w_1 или, ако је нула, једна од ранијих одговарајућих величина морала бити једнака нули. Али то је бесмислица. Стога су партикуларни интеграли дате једначине добијени на овај начин међусобно линеарно независни.

Ако сада образујемо детерминанту биће:

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots\ldots & y_m \\ y_1' & y_2' & & y_m' \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} \Delta_1$$

Ако скраћивања ради ставимо

$$\int z_1 dx = A_1 \quad \int z_1 dx \int u_1 dx = A_2 \ldots \int z_1 dx \int u_1 dx \ldots \int w_1 dx = A_{m-1}$$

излази:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 A_1 & y_1 A_2 \ldots\ldots & y_1 A_{m-1} \\ y_1' & y_1' A_1 + y_1 z_1 & y_1' A_2 + y_1 z_1 A_1 \ldots & y_1' A_{m-1} + y_1 z_1 A_{m-2} \\ y_1'' & y_1'' A_1 + P_1 & y_1'' A_2 + P_1 A_1 + y_1 z_1 u_1 \ldots & y_1'' A_{m-1} + P A_{m-2} + y_1 z_1 u_1 A_{m-3} \\ \hdashline y_1^{(m-1)} & y_1^{(m-1)} A_1 + P_{m-2} & y_1^{(m-1)} A_2 + P_{m-2} A_1 + P_{m-3}' & \\ & & & y_1^{(m-1)} A_{m-1} + P_{m-2} A_{m-2} P_{m-3}' A_{m-3} + \ldots y_1 z_1 \ldots w_1 \end{vmatrix}$$

где P означавају извесне изразе чија нарочита вредност овде није важна. Сада треба од елемената друге, треће,.... m те колоне одузети елементе прве колоне, помножене са $A_1, A_2 \ldots\ldots A_{m-1}$. Како се на овај начин вредност детерминанте не мења, а осим тога нестају сви чланови првога реда сем првога од њих, биће:

$$\Delta_1 = y_1 \begin{vmatrix} y_1 z_1 & y_1 z_1 A_1 \ldots\ldots & y_1 z_1 A_{m-2} \\ P_1 & P_1 A_1 + y_1 z_1 u_1 \ldots\ldots & P_1 A_{m-2} + y_1 z_1 u_1 A_{m-3} \\ P_{m-2} & P_{m-2} A_1 + P'_{m-3} & P_{m-2} A_{m-2} + P'_{m-3} A_{m-3} + y_1 z_1 \ldots w_1 \end{vmatrix}$$

Сада треба од елемената друге, треће,...$(m-1)$ колоне одузети елементе прве колоне који су респективно помножени са $A_1, A_2 \ldots\ldots\ldots A_{m-2}$.

Како опет нестају сви елементи првога реда осим првога од њих, добија се

$$\Delta_1 = y_1^2 z_1 \begin{vmatrix} y_1 z_1 u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & y_1 z_1 u_1 A_{m-3} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ P'_{m-3} \ldots\ldots\ldots & P'_{m-3} A_{m-3} + \ldots + y_1 z_1 \ldots w_1 \end{vmatrix}$$

Настављајући тако добијамо на крају да је вредност од Δ_1, једнака производу величина што се јављају у елементима на дијагонали

$$y_1 \quad y_1 z_1 \,, \quad y_1 z_1 u_1 \ldots\ldots \quad y_1 z_1 \ldots\ldots w_1$$

да је дакле $\Delta_1 = y_1^m z^{m-1} u_1^{m-2} \ldots\ldots w_1$. Према томе је најзад $\Delta = (-1)^{1/2 m(m-1)} y_1^m z_1^{m-1} u_1^{m-2} \ldots\ldots w_1$

75/. Општи интеграл нехомогене једначине /1/ § 71 може се извести и методом варијације констаната. Ова је метода најсиметричнија али ми ћемо у следећем делу дати још један поступак. Узмимо да су у једначини

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots\dots A_n y_n$$

величине A_i функције од x а не константе. Онда је вредност од $\frac{dy}{dx}$ дата једначином:

$$\frac{dy}{dz} = A_1\frac{dy_1}{dx} + A_2\frac{dy_2}{dx} + \dots\dots A_n\frac{dy_n}{dx} + \\ + y_1\frac{dA_1}{dx} + y_2\frac{dA_2}{dx} + \dots\dots y_n\frac{dA_n}{dx}$$

Но како имамо n функција A које су до сада морале задовољавати само један услов, наиме да вредност од y коју она образују, задовољава једначину /1/ § 71, можемо поставити још / $n-1$ / произвољних услова.

Узмимо да је: $(1)\quad y_1\frac{dA_1}{dx} + y_2\frac{dA_2}{dx} + \dots\dots y_n\frac{dA_n}{dx} = 0$

један од тих услова, па је тада

$$\frac{dy}{dx} = A_1\frac{dy_1}{dx} + A_2\frac{dy_2}{dx} + A_3\frac{dy_3}{dx} + \dots\dots A_n\frac{dy_n}{dx}$$

Ако диференцијалимо још једанпут добићемо:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + A_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + \dots\dots + A_n\frac{d^2y_n}{dx^2}$$

под претпоставком да смо узели још један услов:

$$/2/\quad \frac{dy_1}{dx}\frac{dA_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dA_2}{dx} + \dots\dots + \frac{dy_n}{dx}\frac{dA_n}{dx} = 0$$

Настављајући на тај начин и претпостављајући да A_i

још задовољавају и једначине:

$$/3/\begin{cases} \frac{d^2y_1}{dx^2}\frac{dA_1}{dx}+\frac{d^2y_2}{dx^2}\frac{dA_2}{dx}+\ldots\ldots+\frac{d^2y_n}{dx^2}\frac{dA_n}{dx}=0 \\ \frac{d^3y_1}{dx^3}\frac{dA_1}{dx}+\frac{d^3y_2}{dx^3}\frac{dA_2}{dx}+\ldots\ldots+\frac{d^3y_n}{dx^3}\frac{dA_n}{dx}=0 \\ \text{-------------------------------} \\ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dA_1}{dx}+\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{dA_2}{dx}+\ldots\ \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dA_n}{dx}=0 \end{cases}$$

(које са /1/ /2/ чине $(n-1)$ услова које смемо да поставимо а који нису у противречности/ добијамо:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=A_1\frac{d^3y_1}{dx^3}+A_2\frac{d^3y_2}{dx^3}+\ldots\ldots A_n\frac{d^3y_n}{dx^3}$$

$$\text{-------------------------------}$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=A_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+A_2\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots A_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}$$

Последња од свих даје када се диференцијали:

$$\frac{d^ny}{dx^n}=A_1\frac{d^ny_1}{dx^n}+A_2\frac{d^ny_2}{dx^n}+\ldots\ A_n\frac{d^ny_n}{dx^n}+\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dA_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dA_2}{dx}$$
$$+\ldots\ldots\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dA_n}{dx}$$

Како су једначинама /1/ до /3/ исцрпљени сви услови којинам стоје на расположењу, то у последњој једначини не можемо ништа одредити о другом делу на десној страни. Ако изразе за изводе од y помножимо коефицентима који им припадају у једначини /1/ § 71 и саберемо резултате, добијамо, пошто је y једно решење једначине /1/ § 71 а $y_1, y_2 \ldots y_3 \ldots\ldots y_n$ решења од /2/ § 71:

$$/4/\quad V=X_0\left(\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dA_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dA_2}{dx}+\ldots\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dA_n}{dx}\right)$$

Ако је Δ_r дубдетерминанта која одговара елементу $\frac{d^{n-1}y_r}{dx^{n-1}}$ у Δ $(r=1,2,\ldots n)$ добија се за $\frac{dA_r}{dx}$ као непознату из једначине /1/ до /4/: $X_0\Delta\frac{dA_r}{dx}=V\Delta_r$

а отуда следи: $\dfrac{dA_r}{dx} = \dfrac{V\Delta_r}{X_0\Delta}$ $(r=1,2,\dots n)$

па је зато:

$$A_r = C_r + \int \frac{V\Delta_r}{X_0\Delta}\,dx$$

где је C_r произвољна константа.

Вредност од y је према томе:

$$y = \sum_{r=1}^{n} y_r\left[C_r + \int \frac{V\Delta_r}{X_0\Delta}\,dx\right]$$

При томе је

$$y_1\int\frac{V\Delta_1}{X_0\Delta}\,dx + y_2\int\frac{V\Delta_2}{X_0\Delta}\,dx + \dots\dots\, y_n\int\frac{V\Delta_n}{X_0\Delta}\,dx$$

партикуларни интеграл.

Пример 1. Ако су $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ три партикуларна решења једначине

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \varphi(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + Sy = 0$$

где су Q и S функције од x, онда је потпуни интеграл једначине

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \varphi(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + Sy = \psi(x)$$

дати изразом $y = C_1f_1(x) + C_2f_2(x) + C_3f_3(x)$

$$+\int \psi(\xi)\, e^{\int_a^{\xi}\varphi(z)dz} \begin{vmatrix} \dfrac{df_1(\xi)}{d\xi} & \dfrac{df_2(\xi)}{d\xi} & \dfrac{df_3(\xi)}{d\xi} \\ f_1(\xi) & f_2(\xi) & f_3(\xi) \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \end{vmatrix} d\xi$$

Решење: Ако се претпостави да је и општи интеграл потпуне једначине облика:

$$y = A_1f_1(x) + A_2f_2(x) + A_3f_3(x)$$

где су пак $A_1\ A_2\ A_3$, функције од x, добијају се означавајући цртицама изводе по x, ове три једначине за одредбу A_1, A_2, A_3

$$f_1A'_1 + f_2A'_2 + f_3A'_3 = 0$$

$$f'_1A'_1 + f'_2A'_2 + f'_3A'_3 = 0$$

$$f''_1A'_1 + f''_2A'_2 + f''_3A'_3 = \psi(x)$$

а из њих ако се ради скраћења напише $\sum \pm f_1 f'_2 f''_3 = \Delta$

следи:

$$A'_1 = \frac{\psi(x)}{\Delta}(f_2f'_3 - f_3f'_2),\ A'_2 = \frac{\psi(x)}{\Delta}(f_3f'_1 - f_1f'_3),\ A'_3 = \frac{\psi(x)}{\Delta}(f_1f'_2 - f_2f'_1)$$

Зато ће бити

$$A_1 = C_1 + \int^x \frac{\psi(\xi)}{\Delta(\xi)}\left\{f_2(\xi)f'_2(\xi) - f_3(\xi)f'_3(\xi)\right\}d\xi$$

и аналогно за A_2 и A_3.

Но по § 74 је:

$$\Delta(\xi) = Ce^{-\int^{\xi}\varphi(z)dz} = e^{-\int_a^{\xi}\varphi(z)dz}$$

где C као и a означавају одређене константе.

Зато је:

$$A_1 = C_1 + \int^x \psi(\xi)e^{\int_a^{\xi}\varphi(z)dz}\left[f_2(\xi)f'_2(\xi) - f_3(\xi)f'_2(\xi)\right]d\xi$$

Ако ове вредности уврстимо у израз за y и обратимо пажњу на то да је:

$$f_1(x)\left\{f_2(\xi)f'_3(\xi) - f_2(\xi)f'_2(\xi)\right\} + f_2(x)\left\{f_3(\xi)f'_1(\xi) - f_1(\xi)f'_3(\xi)\right\} + f_3(x)\left\{f_1(\xi)f'_2(\xi) - f_2(\xi)f'_1(\xi)\right\}$$
$$= \sum \pm f'_1(\xi)f_2(\xi)f_3(x)$$

добијамо образац из текста.

Пример 2. Решити једначине:

$$/1/\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1+x)\frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x$$

$$/2/\ (x^2+2)\frac{d^3y}{dx^3}-2x\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2+2)\frac{dy}{dx}-2xy=x^2+2$$

Решење:

/1/ Партикуларни интеграли редуковане једначине јесу: $y_1=x$ и $y_2=xe^{2x}$. Одавде се као општи интеграли потпуне једначине добија:

$$y=C_1x+C_2xe^{2x}-xe^{2x}\int x^{-1}e^{-2x}dx$$

/2/ Лако је наћи партикуларна интеграла редуковане једначине $y_1=\cos x,\ y_2=\sin x,\ y_3=x^2$. По општем обрасцу из § 76 добија се тада као потпуни интеграл дате једначине:

$$y=\cos x\left(C_1+2\int\frac{\cos x+x\sin x}{x^2+2}dx\right)+\sin x\left(C_2+2\int\frac{\sin x-x\cos x}{x^2+2}dx\right)+x^2\left\{C_3+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right\}$$

76/. Ако је познат један или више партикуларних интеграла диференцијалне једначине /2/ § 71, онда се ред једначине може снизити за онолико колико се зна партикуларних интеграла.

Ако је на пр. y_1 један партикуларни интеграл једначине ставимо: $y=uy_1$

па ћемо добити $X_0y_1\frac{d^nu}{dx^n}+X_2\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\dots\dots+X_{n-1}\frac{du}{dx}$

$$+u\left(X_0\frac{d^ny_1}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\dots\dots+X_{n-1}\frac{dy_1}{dx}+X_ny_1\right)=0$$

или, што је исто:

$$X_0y_1\frac{d^nu}{dx^n}+X_1'\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\dots\dots+X_{n-1}'\frac{du}{dx}=0,$$

где су $X'_1, X'_2 \ldots\ldots X'_{n-1}$ функције од $X_0, X_1 \ldots\ldots X_{n-1}$ и од извода од y_1. Ако сада уместо $\frac{du}{dx}$ ставимо v, нова ће једначина бити $(n-1)$ -ога реда, а тиме је ред првобитне једначине снижен за јединицу.

Ако је y_2 неки други партикуларни интеграл /2/ § 71 онда је $\frac{y_2}{y_1}$ једна вредност од u, па је према томе $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ једно од решења једначине по v. Ред ове једначине може се дакле снизити за јединицу, а ред нове једначине биће за две јединице нижи од реда једначине /2/ из § 71. Настављајући тако можемо за m снизити ред нове једначине ако је само познато m партикуларних интеграла. Свака од једначина које се добијају остаје линеарна.

77/. Ако је познато $n-1$ интеграла једначине n -тог реда, онда се њен ред може снизити, тако даостане линеарна једначина првога реда; како се таква једначина увек може интегрирати следи:

Опште решење једначине n -тога реда да може се наћи ако је познато $n-1$ партикуларних интеграла.

Следећом методом одређивања општег интеграла избегава се процес сталнога снижавања реда диференцијалне једначине.

Нека су $y_1, y_2 \ldots\ldots y_{n-1}$ партикуларни интеграли једначине /2/ § 71, а $C_1, C_2 \ldots\ldots C_{n-1}$ функције од x, тако да је

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots + C_{n-1} y_{n-1}$$

решење од /2/. Како је то до сад једини услов који постоји између $n-1$ функције, онда можемо произвољно поставити још $n-2$ релације под претпоставком да оне не противрече једна другој. Нека то буду

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + y_3 \frac{dC_3}{dx} + \ldots\ldots + y_{n-1} \frac{dC_{n-1}}{dx} = 0$$

$$\frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dC_2}{dx} + \ldots\ldots + \frac{dy_{n-1}}{dx} \frac{dC_{n-1}}{dx} = 0$$

$$\frac{d^{n-3}y_1}{dx^{n-3}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-3}y_2}{dx^{n-3}} \frac{dC_2}{dx} + \ldots\ldots + \frac{d^{n-3}y_{n-1}}{dx^{n-3}} \frac{dC_{n-1}}{dx} = 0$$

Тада ће вредности узастопних извода бити дати изразима:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots\ldots + C_{n-1} \frac{dy_{n-1}}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots\ldots + C_{n-1} \frac{d^2y_{n-1}}{dx^2},$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = C_1 \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} + C_2 \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + C_{n-1} \frac{d^{n-2}y_{n-1}}{dx^{n-2}}$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + C_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + C_{n-1} \frac{d^{n-1}y_{n-1}}{dx^{n-1}} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{dC_r}{dx} \frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}},$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = C_1 \frac{d^ny_1}{dx^n} + C_2 \frac{d^ny_2}{dx^n} + \ldots\ldots + C_{n-1} \frac{d^ny_{n-1}}{dx^n} + 2\sum_{r=1}^{n-1} \frac{dC_r}{dx} \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{d^2C'_r}{dx^2} \frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}}$$

Супституцијом ових вредности у диференцијалну једначину /2/ § 71 добијамо, како су $y_1, y_2 \ldots\ldots y_{n-1}$ партикуларна решења:

$$X_0 \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} \left(\frac{d^2C_r}{dx^2} \frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}} + 2 \frac{dC_r}{dx} \frac{d^{n-1}y_r}{dx^{n-1}} \right) \right\} + X_1 \sum_{r=1}^{n-1} \frac{dC_r}{dx} \frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}} = 0$$

Но ако ставимо

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}, & \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}, \ldots\ldots & \frac{d^{n-2}y_{n-1}}{dx^{n-2}} \\ \frac{d^{n-3}y_1}{dx^{n-3}}, & \frac{d^{n-3}y_2}{d^{n-3}}, \ldots\ldots & \frac{d^{n-3}y_{n-1}}{dx^{n-3}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1 & y_2 & y_{n-1} \end{vmatrix}$$

и означимо са Δ'_r субдетерминанту која одговара елементу $\frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}}$ за $r=1,2,\ldots n-1$ добићемо:

$$\frac{\frac{dC_1}{dx}}{\Delta'_1} = \frac{\frac{dC_2}{dx}}{\Delta'_2} = \ldots\ldots \frac{\frac{dC_{n-1}}{dx}}{\Delta'_{n-1}} = Z$$

па је према томе:

$$\frac{dC_r}{dx} = Z\Delta'_r \quad (r=1,2,\ldots\ldots n-1)$$

Одавде следи:

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{dC_r}{dx}\frac{d^{n-1}y_r}{dx^{n-1}} = Z\sum_{r=1}^{n-1}\Delta'_r\frac{d^{n-1}y_r}{dx^{n-1}} = Z\frac{d\Delta'}{dx}$$

и:

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{dC_r}{dx}\frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}} = Z\sum_{r=1}^{n-1}\Delta'_r\frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}} = Z\Delta'$$

Даље је:

$$\frac{d^2C_r}{dx^2} = \frac{dz}{dx}\Delta'_r + z\frac{d\Delta'_r}{dx} \quad \text{и} \quad \sum_{r=1}^{n-1}\frac{d\Delta'_r}{dx}\frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}} = 0$$

тако да је:

$$\sum_{r=1}^{n-1}\frac{d^2C_r}{dx^2}\frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}} = \frac{dz}{dx}\sum_{r=1}^{n-1}\Delta'_r\frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}} = \Delta'\frac{dz}{dx}$$

Диференцијална једначина према томе прелази у

$$X_0\Delta'\frac{dz}{dx} + 2X_0\frac{d\Delta'}{dx}z + X_1\Delta' z = 0$$

Ако извршимо деобу са: $X_0\Delta'$, добијамо једначину:

$$\frac{dz}{dx} + \left(\frac{2}{\Delta'}\frac{d\Delta'}{dx} + \frac{X_1}{X_0}\right)z = 0$$

а њен је интеграл: $Z = A\Delta'^{-2} e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}$

Сада се вредност од C_r добија из:

$$\frac{dC_r}{dx} = Z\Delta'_r = A\frac{\Delta'_r}{\Delta'^2} e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx}$$

па је према томе

$$C_r = A_r + A\int \frac{\Delta'_r}{\Delta'^2} e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx} dx\,(r=1,2\ldots\ldots n-1)$$

Према томе имамо n произвољних констаната, наиме:

$$A, A_1, A_2 \ldots\ldots A_{n-1}$$

Општи интеграл једначине /2/ § 71 је према томе

$$y = \sum_{r=1}^{n-1} A_r y_r + A\sum_{r=1}^{n-1} y_r \int \frac{\Delta'_r}{\Delta'^2} e^{-\int\frac{X_1}{X_0}dx} dx$$

Пример. Наћи потпуно решење једначине:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = P\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y\right) + Q$$

где су P и Q функције од x .

Решење: Два партикуларна интеграла једначине

$$\frac{d^3y}{dx^3} = P\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx}+2y\right)$$

јесу $y_1 = x$, $y_2 = x^2$. Као трећи добија се према општем обрасцу § 77 израз:

$$y_3 = y_1\int\frac{\Delta'_1}{\Delta'^2} e^{\int Px^2dx} dx + y_2 \int \frac{\Delta'_2}{\Delta'^2} e^{\int Px^2 dx} dx$$

где треба ставити $\Delta' = x^2 \quad \Delta'_1 = x^2 \quad \Delta'_2 = -x$

Зато бива:

$$y_3 = x\int e^{\int Px^2dx} x^{-2} dx - x^2 \int e^{\int Px^2dx} x^{-3}dx$$

Из ова три интеграла добија се онда општи интеграл дате једначине као у примеру 1 § 75.

ПРИМЕНА НА ГЕОМЕТРИЈУ

ТРАЈЕКТОРИЈЕ

78/. Напоменули смо већ да је диференцијална једначина за неку особину криве прави израз, који стоји у вези са њеним правцем и кривином, те из тога следи да решење многих геометриских питања на крају крајева зависи од решења неке диференцијалне једначине. У вишој математици јављају се скоро само диференцијалне једначине; али у другим областима ван геометрије мање је могућно навести примера, јер не постоји нека општа метода да би се дошло до диференцијалне једначине, док се оне у задацима из геометрије скоро непосредно изводе применом образаца из диференцијалног рачуна. Нећемо овде покушати да дамо макакву потпуну поделу примене на геометрију, него ћемо говорити само о једном јединoм општем проблему, наиме о проблему трајекторија.

Трајекторија се дефинише као линија која криве некога система датог неком једначином, сече по неком закону.

79/. Нека је, у најопштијем случају, фамилија кривих претстављена једначином $f(x,y,a)=0$, где је a параметар; кроз сваку тачку неке криве пролазиће, уопште, једна трајекторија и тако ће настати још један други систем кривих кога чине све трајекторије. Нека буду ξ и η текуће координате овог другог система, и претпоставимо да је аналитички израз закона који важи у свакој тачки пресека, следећи:

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots,\xi,\eta,\frac{d\eta}{d\xi},\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\ldots\ldots\right)=0$$

У овој су једначини у свакој тачки пресека ξ и η идентични са x и y, јер су то координате те тачке; није међутим $\frac{d\eta}{d\xi}$,.... идентично са $\frac{dy}{dx}$,.

Да бисмо добили диференцијалну једначину између ξ и η , поступићемо на следећи начин:

Из једначине $f(x,y,a)=0$ добијамо диференцијацијом изводе од y који се јављају у $F=0$ као функције од x,y и a . У свaки од ових израза уврстимо a као функцију од x и y , онако како се то добија из једначине криве. То је исто што и елиминација од a из $f=0$ и једначина за изводе од y . Ако се ове вредности извода од y уврсте у једначину $F=0$, то ће она прећи у једначину која садржи x,y,ξ,η и изводе од η по ξ . Али ми смо видели да су x и y исто што и ξ и η , пошто су оба пара вредности координате исте тачке; према томе ће $F=0$ бити диференцијална једначина по η и ξ .

80/. Најчешће се јављају трајекторије које секу дати систем кривих под неким константним углом.

Оне се, специјално, зову ортогоналне ако је тај угао прав. Ако угао није прав, зову се косоугле.

У случају ортогоналних трајекторија стоје тангенте у заједничким тачкама управно једна на другу; па је према томе.

$$1+\frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{d\xi}=0$$

То је у овом случају једначина $F=0$. За дати систем кривих имамо: $f(x,y,a)=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Ако одавде елиминишемо a, добијамо као диференцијалну једначину датог система кривих, једначину између x, y и $\frac{dy}{dx}$. Нека је та једначина

$$\psi(x,y,\frac{dy}{dx})=0$$

Тада ћемо за трајекторују имати

$$\xi=x,\quad \eta=y,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}$$

па је према томе диференцијална једначина трајекторије:

$$\psi(\xi,\eta,-\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}})=0$$

Најпростије ће се елиминација параметра моћи извршити ако је једначина датог система кривих облика: $\varphi(x,y)=a$. Јер тада добијамо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

а отуда се непосредно може наћи $\frac{dy}{dx}$ које је независно од a : та је једначина већ диференцијална једначина $\psi=0$.

81/. Ако је једначина криве дата у поларним координатама опет се може применити иста метода. Јер тада је $\chi(r,\vartheta,c)=0$ једначина фамилије кривих.

Као смер радиус вектора узећемо смер од почетка до тачке $/r,\vartheta/$ на кривој, а означимо са φ угао за који треба радиус вектор окренути у позитивном смислу да би он имао смер као и тангента на криву. Тада је:

$$\operatorname{tg}\varphi=r\frac{d\vartheta}{dr}$$

и, ако су Φ, R и Θ одговарајуће величине за трајекторију:

$$\operatorname{tg}\Phi=R\frac{d\Theta}{dR}$$

Како су тангенте управне, биће: $\Phi-\varphi=\frac{\pi}{2}$, па је према томе:

$$r\frac{d\vartheta}{dr}\cdot R\frac{d\Theta}{dR}+1=0$$

где су R и r, Θ и ϑ /али не и њихови изводи/ исте величине. Даље је:

$$\frac{\partial\chi}{\partial r}+\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}\frac{d\vartheta}{dr}=0$$

Ако елиминишемо c из ове једначине и из једначине криве, добићемо релацију облика:

$$\psi\left(r,\vartheta,\frac{d\vartheta}{dr}\right)=0$$

За трајекторију је:

$$R=r,\ \Theta=\vartheta \text{ и } \frac{d\vartheta}{dr}=-\frac{1}{R^2\frac{d\Theta}{dR}}=-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{d\Theta}$$

те је према томе диференцијална једначина трајекторије:

$$\psi\left(R,\Theta-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{d\Theta}\right)=0.$$

Интеграцијом ове једначине добија се тражени систем кривих.

Пример 1. Наћи ортогоналну трајекторију система правих
$$y = mx$$
Овде је
$$\frac{dy}{dx} = m$$
па је према томе диференцијална једначина ових кривих:
$$x\frac{dy}{dx} = y$$
Стога је по нашем правилу диференцијална једначина система ортогоналних трајекторија
$$\xi = -\eta\frac{d\eta}{d\xi}$$
а отуда се интеграцијом добија:
$$\xi^2 + \eta^2 = c^2$$
дакле систем концентричних кругова чији је центар заједничка тачка свих правих.

Пример 2. Наћи ортогоналну трајекторију од:
$$r^n = a^n \operatorname{Sin} n\vartheta$$
Логаритмичном диференцијацијом добијамо
$$\frac{n}{r}\frac{dr}{d\vartheta} = n\frac{\operatorname{Cos} n\vartheta}{\operatorname{Sin} n\vartheta}$$
а то је диференцијална једначина фамилије кривих. За трајекторију је:
$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta} = -R\frac{d\theta}{dR}$$
па је зато диференцијална једначина трајекторије:
$$R\frac{d\theta}{dR} + \frac{\operatorname{Cos} n\theta}{\operatorname{Sin} n\theta} = 0$$

Промењљиве се могу раставити, па се добија:

$$n\frac{dR}{R}=-n\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}d\theta$$

тако да:

$$R^n = A^n \cos n\theta$$

претставља тражени систем кривих.

Пример 3. Доказати да су, без обзира на вредност од n , ортогоналне трајекторије кривих које садржи једначина $y = cx^n$

систем коничних пресека.

Решење: Једначина трајекторије је $\xi^2+n\eta^2=C$

Пример 4. Показати да су ортогоналне трајекторије система конфокалних елипси систем хипербола, који је кофокалан са системом елипси.

Решење: Диференцијална једначина трајекторије иста је као и диференцијална једначина система елипси, наиме, ако је $2e$ удаљена жижа конфокалних елипси:

$$xyp^2+(x^2-y^2-c^2)p-xy=0$$

/види стр. 48, § 29, пример 7, / δ /. Отуда следује да је тражена трајекторија исто тако систем конфокалних пресека чија се жижа поклапа са жижом система елипси, па се према томе може претставити системом хипербола који је конфокалан са системом елипси.

Пример 5. Наћи ортогоналне трајекторије система кривих:

/1/ $r^n \sin n\vartheta = a^n$

/2/ $r^2 = a^2 \log(ctg\,\vartheta)$

где се C произвољно.

Решење:

/1/ $R^n \cos n\Theta = A^n$

/2/ $R^2(C-\cos 2\Theta) = a^2$, или у Декартовим координатама:

$$X^2(C-1)+X^2(C+1)=a^2$$

Пример 6. Показати: ако се $f(x+iy)$ означи са $u+iv$ где су u и v реални, да су системи кривих $u=Const$, $v=Const$. међусобно ортогоналне трајекторије.

Показати специјално, да је, ако је u добијено на тај начин хомогена функција n-тога степена вредност од u дата изразом

$$nu = x\frac{\partial v}{\partial y} - y\frac{\partial v}{\partial x}$$

Како се може наћи вредност од u ако је n једнако нули?

Решење: Ако се $f(x+iy)=u+iv$ прво диференцијали парцијално по x а затим по y добија се:

$$f'(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\quad if'(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$$

дакле:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=i\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Како су u и v реални мора бити $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

Отуда следи: $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0$

Како су $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dy}$ одн. $\frac{\delta v}{\delta x}, \frac{\delta v}{\delta x}$ пропорционални косинусима смера нормале на криве $u = Const$, $v = Const$ онда из последње једначине следи да су ове криве међусобно ортогоналне трајекторије.

Из једначина

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \quad и \quad \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}$$

следи даље:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0 \quad и \quad \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} = 0$$

Ако ову последњу једначину трансформишемо релацијом $y = xt$ уводећи у место y нову промењљиву t добићемо једначину:

$$\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} - 2\frac{t}{x}\frac{\delta^2 v}{\delta x \delta t} + \frac{1+t^2}{x^2}\frac{\delta^2 v}{\delta t^2} + \frac{2t}{x^2}\frac{\delta v}{\delta t} = 0$$

Да би V било хомогена функција n -тога степена од x и y, да би дакле било $V(x,y) = x^n\varphi(t)$ мора $\varphi(t)$ задовољавати услов

$$\frac{d^2 v}{dt^2}(1+t^2) - 2(n-1)t\frac{d\varphi}{dt} + n(n-1)\varphi = 0$$

Али је

$$du = \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy = \frac{\delta v}{\delta y}dx - \frac{\delta u}{\delta x}dy$$

Ако овде опет уведемо t уместо y, биће:

$$\frac{\delta v}{\delta x} = x^{n-1}\left(n\varphi - t\frac{d\varphi}{dt}\right), \quad \frac{\delta v}{\delta y} = x^{n-1}\frac{d\varphi}{dt}$$

дакле

$$du = \left\{(1+t^2)\frac{d\varphi}{dt} - nt\varphi\right\}x^{n-1}dx + x^n\left(t\frac{d\varphi}{dt} - n\varphi\right)dt$$

Ако овде овде прво сматрамо да је t непромењљиво и интегралимо, излази: $nu = \left\{(1+t^2)\frac{d\varphi}{dt} - nt\varphi\right\}x^n + A$, где је A у односу на x константно али може бити функција од t . Ако овај израз диференцијалимо и упоредимо добијену вредност du са претходном, добијамо:

$$\frac{dA}{dt}+x^n\left\{(1+t^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2}-2(n-1)t\frac{d\varphi}{dt}+n(n-1)\varphi\right\}=0$$

или, с обзиром на услов који φ испуњава: $\frac{dA}{dt}=0$

тј. A је стварно константа. Она не мора бити једнака нули, него има неку одређену вредност која резултује из облика дате функције $f(x+iy)$.

Дакле
$$nu=\left\{(1+t^2)\frac{d\varphi}{dt}-nt\varphi\right\}x^n+A$$

или с обзиром на вредност од $\frac{\delta v}{\delta x}, \frac{\delta v}{\delta y}$:

$$A+x\frac{\delta v}{\delta y}-y\frac{\delta v}{\delta y}=A+x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=nu$$

тј. u је исто тако, занемарујући једну произвољну константу, хомогена функција n -тога степена. - Одавде се може лако извести какав облик треба да има $f(x+iy)$ да би v било хомогена функција n -тога степена. Наиме, тада је:

$nv=x\frac{\delta v}{\delta x}+y\frac{\delta v}{\delta y}$ па је према томе:

$$n(u+iv)=A+x\left(\frac{\delta u}{\delta x}+i\frac{\delta v}{\delta x}\right)+y\left(\frac{\delta u}{\delta y}+i\frac{\delta v}{\delta y}\right)=(x+iy)\frac{\delta}{\delta x}(u+iv)$$

зато је $(x+iy)f'(x+iy)+A=nf(x+iy$

а одавде следи: $f(x+iy)=\frac{1}{n}A+B(x+iy)^n$

Ако је n једнако нули онда φ испуњава услов

$$(1+t^2)\frac{d^2v}{dt^2}+2t\frac{d\varphi}{dt}=0$$

зато је $\varphi=A+B\operatorname{arc\,tg}t$, па је према томе $v=A+B\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$

даље је: $du=\frac{\delta v}{\delta y}dx-\frac{\delta v}{\delta x}dy=B\frac{xdx-ydy}{x^2+y^2}$

па је према томе

$$u=C+B\log\sqrt{x^2+y^2},\ \text{и}\ f(x+iy)=\alpha+B\log(x+iy)$$

Пример 7. Наћи систем кривих које систем концентричних кругова секу под неким углом који није права.

Решење: Ако је m тангенс угла под којим трајекторије секу кругове, онда је њихова једначина

$$\log\sqrt{\xi^2+\eta^2}=m\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}+C$$

/логаритамске спирале/.

82/. Ако је једна променљива дата као експлицитна функција друге и параметра, онда ће једначина система кривих бити облика $y=\varphi(x,a)$

Уместо да елиминишемо a можемо поступити на следећи начин: Једначина ортогоналне трајекторије нека буде:

$$\eta=\varphi(\xi,a)$$

где у последњој једначини a треба сматрати за непознату функцију од ξ, која треба да буде таква, да крива буде ортогонална трајекторија. Али је:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\quad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{da}{d\xi}$$

па је према томе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{da}{d\xi}\right)+1=0$$

Како се даље не могу извести никакве диференцијације, онда можемо уместо $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$ ставити $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, јер је x једнако ξ. Према томе добијамо

$$1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial a}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot\frac{da}{d\xi}=0$$

То је једначина између променљивих a и ξ . Када се она интегрира, биће њоме одређена вредност од a , и ако се она уврсти у једначину

$$\eta=\varphi(\xi,a)$$

добија се једначина ортогоналне трајекторије.

Пример. Наћи ортогоналне трајекторије елипси претстављених једначином:

$$y=a\sqrt{1-x^2}$$

Овде је:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=-a\xi\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial a}=\sqrt{1-\xi^2}$$

а једначина којом је одређено a гласи:

$$1+a^2\frac{\xi^2}{1-\xi^2}-\xi a\frac{da}{d\xi}=0$$

Одавде се добија

$$\frac{da^2}{d\xi}-\frac{2\xi a^2}{1-\xi^2}=\frac{2}{\xi}\,,$$

а отуда интеграцијом следи:

$$a^2(1-\xi^2)=A-\xi^2+\log\xi^2$$

Према томе тражена ортогонална трајекторија

$$\eta^2=A-\xi^2+\log\xi^2$$

МЕШОВИТИ ЗАДАЦИ УЗ ЧЕТВРТО

ПОГЛАВЉЕ

1. Решити једначине:

/1/ $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(n^2-\frac{2}{x^2}\right)y=0$

/2/ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\left(\frac{dy}{dx}\right)+2y(1+x^2)=0$

/3/ $2y\frac{d^2y}{dx^2}-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4y^2=0$

/4/ $y^3+\left\{y^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^2y}{dx^2}=0$

/5/ $x\frac{d^2y}{dx^2}+\left[2-x\varphi(x)\right]\frac{dy}{dx}=y\varphi(x$

/6/ $\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

/7/ $\frac{d^2y}{dx^2}+2n\,\mathrm{ctg}\,nx\frac{dy}{dx}+(m^2-n^2)y=0$

/8/ $x(x+y)\frac{d^2y}{dx^2}+(x-y)\frac{dy}{dx}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y=0$

/9/ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{d^2y}{dx^2}=n\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$

/10/ $\mathrm{Sin}^2x\,\frac{d^2y}{dx^2}=2y$

/11/ $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^n f(x)\frac{dy}{dx}\varphi(x)=0$

Решење:

/1/ $y=C_1\left\{\frac{\mathrm{Sin}\,nx}{nx}-\frac{\mathrm{Cos}\,nx}{n^2x^2}\right\}+C_2\left\{\frac{\mathrm{Cos}\,nx}{nx}-\frac{\mathrm{Sin}\,nx}{n^2x^2}\right\}$

/2/ или применити §67 или ставити $\frac{dy}{dx}=p$; $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$

па онда: $p=yu$

Тада се добија: $y = \frac{c}{\cos^2(x+\alpha)}$

/4/ Ставити $\frac{dy}{dx}=p, \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$ и тада $p=yu$.На тај начин се добија једначина:

$$\frac{dy}{y}+\frac{(1+u^2)u\,du}{1+u^2+u^4}=0$$

дакле:

$$\log y^2+1/2\log(u^4+u^2+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2u^2+1}{\sqrt{3}}=C$$

Одавде се може одредити u као функција од y , па према томе, из $dx=\frac{dy}{yu}$ и x као функција од y .

Или се једноставније може ставити:

$y=e^u$ и $\frac{du}{dx}=v$

тада ће бити:

$$dx+\frac{(1+v^2)dv}{1+v^2+v^4}=0$$

дакле $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{3}\,v}{1-v^2}=C-x\sqrt{3}$ или $\frac{v\sqrt{3}}{1-v^2}=\mathrm{tg}(C-x\sqrt{3})$;

а отуда $v=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{ctg}(C-x\sqrt{3})\pm\sqrt{1+3/4\,\mathrm{Ctg}^2(C-\sqrt{3}.x)}$

Према томе је најзад:

$$u=C_1+1/2\log\sin(C-x\sqrt{3})\pm\int\sqrt{1+3/4\,\mathrm{Ctg}^2(C-x\sqrt{3})}\,dx$$

/5/ $xy=C_1+C\int e^{\int\varphi(x)dx}dx$

/6/ Ако се стави $x=e^{\vartheta}, y=\frac{z}{x}$ биће:

$$\left(2z-\frac{dz}{d\vartheta}\right)\frac{d^2z}{d\vartheta^2}=\left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2$$

дакле, ако се стави $\frac{dz}{d\vartheta}=p$

$$(2z-p)p\frac{dp}{dz}=p^2$$

т.ј или је $p=0$ или $(2z-p)\frac{dp}{dz}=p$

Прва претпоставка доводи до сингуларног решења: $y=\frac{c}{x}$, а друга до једначине: $z=p+Cp^2$. Одавде је диференцијацијом по ϑ.

$d\vartheta=\frac{dp}{p}+2Cdp$ дакле: $\vartheta=\log C_1+\log p+2Cp$

ϑ и z је дакле изражено као функција од p па према томе и од x и y, и то је:

$$x=C_1pe^{2Cp} \quad ; \quad y=\frac{1+Cp}{C_1}e^{-2Cp}$$

Треба ставити $y=\frac{v}{\sin nx}$. Тада ће бити

$$y=\frac{A\cos mx+B\sin mx}{\sin mx}$$

/8/ Једначина се може написати у облику:

$$\frac{d}{dx}\left[(x+y)(x\frac{dv}{dx}-y)\right]=0$$

Добија се: $(x+y)^2=C_1x^2+C_2$

/9/ Решавање као и у § 54, пример 3 /3/.

Опште решење: $Cy+C_1=e^{Cx}$, сингуларно: $y=na\sin\frac{c-x}{a}$

/10/ $y=B+(A+Bx)\operatorname{Cotg}x$

/11/ Ако се стави $\frac{dy}{dx}=p$, биће:

$$\frac{dp}{dx}+p\varphi(x)+p^nf(x)=0$$

Ова једначина спада међу оне које су обрађене у § 15

2. Под претпоставком да се интеграл једначине:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(1-\frac{2}{x^2}\right)y=0$$

може написати у облику: $y=u+\frac{v}{x}$, доказати да се општи интеграл може претставити једначинама

$$u=A\sin(x+\alpha)\ , \qquad v=A\cos(x+\alpha)$$

и одредити општи интеграл једначине:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(1-\frac{2}{x^2}\right)y=x^2$$

Решење: за $y = u + \frac{v}{x}$ једначина прелази у:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u+\frac{1}{x}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+v\right)-\frac{2}{x^2}\left(u+\frac{dv}{dx}\right)=0$$

Ако се стави $u+\frac{dv}{dx}=0$, дакле: $\frac{d^2u}{dx^2}+u+\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+v\right)=0$

то ће и ова и претохдна једначина бити задовољена ако се узме

$$v = A\cos(x+\alpha) \ , \quad u = A\sin(x+\alpha)$$

Према томе је:

$$y=A\left[\sin(x+a)+\frac{\cos(x+\alpha)}{x}\right]=C_1\left[\sin x+\frac{\cos x}{x}\right]+C_2\left[\cos x-\frac{\sin x}{x}\right]$$

Варијацијом констаната добија се као интеграл друге једначине:

$$y=C'\left[\sin x+\frac{\cos x}{x}\right]+C''\left[\cos x-\frac{\sin x}{x}\right]+x^2$$

3. Извести методом варијације констаната интеграл једначине:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\left(n-\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx}+\left(n^2-\frac{2n}{x}\right)y=0$$

Решење: Заменити $y=\frac{e^{nx}}{x}v$.Биће $y=e^{nx}\left(A+\frac{B}{x}\right)$

Да би се могла применити метода варијације констаната мора бити познат један партикуларни интеграл. То је: e^{nx} , дакле: $y=Ce^{nx}$. Ако се C сматра за функцију од x биће:

$$\frac{d^2C}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dc}{dx}=0 \quad \text{, дакле} \quad C=A+\frac{B}{x}$$

4. Доказати да једначина:

$$(a_2+b_2x)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+(a_0+b_0x)y=0$$

има партикуларни интеграл облика $e^{\lambda x}$, под претпоставком да је:

$$(a_0b_1-b_0a_1)(a_1b_2-b_1a_2)=(a_0b_2-b_0a_2)^2$$

и под том претпоставком решити једначину /Schlömilch

Решење: Ако се стави $y=e^{\lambda x}$, биће

$$a_2\lambda^2+a_1\lambda_1+a_0+x(b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0)=0$$

или $a_2\lambda^2+a_1\lambda_1+a_0=0$ и $b_2\lambda^2+b_1\lambda_1+b_0=0$. Да би ове једначине имале један заједнички корен мора бити

$$(a_0b_1-b_0a_1)(a_1b_2-b_1a_2)=(a_0b_2-a_2b_0)^2$$

Ако је тај услов испуњен и λ заједнички корен, онда је $y_1=e^{\lambda x}$ партикуларни интеграл дате једначине. Ако се сада стави $y=e^{\lambda x}z$ и $\frac{dz}{dx}=u$

онда се за u добија једначина:

$$\frac{du}{u}=-\left(2\lambda+\frac{a_1+b_1x}{a_2+b_2x}\right)dx$$

Ако је овде $b_2=0$, онда се отуда добија:

$$\log u=\log C-(2\lambda+K)x+\mu\log(a_2+b_2x),$$

дакле:
$$y=e^{\lambda x}\left[C_1+C\int(a_1+b_1x)^M e^{-(2\lambda+K)x}dx\right]$$

где је $K=\frac{b_1}{b_2}$, $M=\frac{a_2b_1+b_2a_1}{b_2^3}$. Ако је пак $b_2=0$ следује:

$$\log u=\log C-\left(2\lambda+\frac{a_1}{a_2}\right)x-\frac{b_1}{2a_2}x^2$$

дакле:
$$y=e^{\lambda x}\left[C_1+C\int e^{-\left(2\lambda+\frac{a_1}{a_2}\right)x-\frac{b_1}{2a_2}x^2}dx\right]$$

5. Интегралити једначину:

$$\sin^2x\frac{d^2u}{dx^2}+\sin x\cos x\frac{du}{dx}=u$$

Ако је $u=0$ за $x=0$ и $u=1$ за $x=\frac{\pi}{2}$ онда је $u=\sqrt{2}-1$ за $x=\frac{\pi}{4}$. Решити исто тако диференцијалну једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=2y\left(1-\frac{n+1}{2}\frac{y^{2n}}{a^{2n}}\right),$$

одређујући произвољне константе условом да мора бити $y=a$ и $\frac{dy}{dx}=0$ за $x=0$.

Решити: Општи интеграл:

$$u=\frac{A+B\cos x}{\sin x}$$

Постављени услов биће испуњен ако се стави $A=1$ и $B=-1$. Тада је $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Ако се у другој једначини стави $\frac{dy}{dx}=p; \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$ онда је: $p^2=y^2\left[1-\left(\frac{y}{a}\right)^{2n}\right]+C$

а како за $x=0$ мора бити и $p=0$ и $y=0$ следује $C=0;\ p=y\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^{2n}},$

$$C_1e^{2n\pi}=\frac{\left[1-\left(\frac{y}{a}\right)^{2n}\right]^{1/2}-1}{\left[1-\left(\frac{y}{a}\right)^{2n}\right]^{1/2}+1}$$

Како је $y=a$ за $x=0$ мора бити $C_1=-1$ Према томе је

$$y^n=\frac{2a^n e^{nx}}{1+e^{2nx}}$$

6. Нека једначине:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0;\quad \frac{d^2y}{dx^2}+P'\frac{dy}{dx}+Q'y=0$$

имају једно заједничко решење; одредити потпуно решење сваке и услов који мора постојати између величина P, P', Q, Q' за које се претпоставља да су функције од x .

Решење: Ако је y_1 заједнички интеграл обеју једначина, онда се добија

$$y_1=Ce^{-\int\frac{Q-Q'}{P-P'}dx}$$

Према томе је по § 65 општи интеграл прве

$$y=e^{-\int\frac{Q-Q'}{P-P'}dx}\left[A+B\int e^{\int(2\frac{Q-Q'}{P-P'}-P)dx}dx\right]$$

а друге

$$y=e^{-\int\frac{Q-Q'}{P-P'}dx}\left[A_1+B_1\int e^{\int(2\frac{Q-Q'}{P-P'}-P)dx}dx\right]$$

Ако се вредност од y_1 уврсти у једну од двеју датих једначина, онда се, као услов да обе једначине имају један заједнички интеграл, добија једначина:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Q-Q'}{P-P'}\right)=\left(\frac{Q-Q'}{P-P'}\right)^2+\frac{PQ'-P'Q}{P-P'}$$

7. Показати да се једначина:

$$\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}=\left(\alpha,\beta,\gamma,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma),\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma-\alpha),\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha-\beta)\right)\left(\frac{1}{x-a},\frac{1}{x-b},\frac{1}{x-c}\right)^2$$

може интегралити по методи из § 68 под претпоставком да је једначина

$$\sqrt{\alpha+1/4}+\sqrt{\beta+1/4}+\sqrt{\gamma+1/4}=1/2$$

задовољена за сваки систем знакова који се узму испред коренова.

Решење: Ако се стави

$$P_1=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

онда мора по § 68 постојати једначина

$$\left[A+A^2-\alpha,B+B^2-\beta,C+C^2-\gamma,BC-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma),CA-\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma-\alpha),\right.$$
$$\left.AB-\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha+\beta)\right]\left(\frac{1}{x-a},\frac{1}{x-b},\frac{1}{x-c}\right)^2=0$$

Она ће бити задовољена ако се A, B и C могу одредити из једначина $A+A^2=\alpha$, $B+B^2=\beta$, $C+C^2=\gamma$

$2BC=\alpha-\beta-\gamma$, $2CA=\beta-\gamma-\alpha$, $2AB=\gamma-\alpha-\beta$

Ако се вредности A,B и C добијене из прве три једначине уврсте у последње три једначине, онда се из сваке добија условна једначина:

$$\sqrt{\alpha+1/4}+\sqrt{\beta+1/4}+\sqrt{\gamma+1/4}=1/2$$

Даље је:

$$A=\sqrt{\alpha+1/4}-1/2, \quad B=\sqrt{\beta+1/4}-1/2, \quad C=\sqrt{\gamma+1/4}-1/2$$

Најзад ће бити:

$$y=(x-a)^{-A}(x-b)^{-B}(x-c)^{-C}\left[C_1+C_2\int(x-a)^{2A}(x-b)^{2B}(x-c)^{2C}dx\right]$$

8. Решити једначину:

$$(x+a)^2(x+b)^2\frac{d^2y}{dx^2}=k^2y$$

где су a, b, k константе под претпоставком да је $y=(x+a)^m(x+b)^n$ и одредити општи интеграл.

Решити исто тако једначину:

$$(a+x)(b+x)\frac{d^2y}{dx^2}+1/2(a+2b+3x)\frac{dy}{dx}+1/4\frac{a-b}{a+b}y=0$$

и исто тако пример 1 из § 68.

Решење: m и n морају задовољавати једначину:

$$(m+n)(m+n-1)x^2+2(mb+na)(m+n-1)x+m(m-1)b^2+2mnab+n(n-1)a^2=$$
$$=k^2$$

а то ће бити, ако је $m+n-1=0$ и

$$m(m-1)b^2+2mnab\ n(n-1)a^2=k^2$$

Ако се стави

$$\sqrt{1+\left(\frac{2k}{a-b}\right)^2}=\lambda \quad \text{биће } m={}^1\!/_2(1\pm\lambda),\ n={}^1\!/_2(1\mp\lambda)$$

На тај начин се добија:

$$y=\sqrt{(x+a)(x+b)}\left[A\left(\frac{x+a}{y+b}\right)^{\frac{\lambda}{2}}+B\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\right]$$

Ако се исто тако у другој једначини стави $y=(a+x)^m$ $(b+x)^n$, онда ће једначина између m и n бити:

$$[2(m+n)(2m+2n+1)]x^2+[8(m+n)(mb+na)+(2m+1)a+(2m+4n-1)b]x$$
$$+(4m^2-1)b^2+(4n+1)(2m+1)ab+2n(2n-1)a^2=0$$

А она ће бити задовољена или за $m=-{}^1\!/_2$ и $n=0$, или за $m=-{}^1\!/_2, n={}^1\!/_2$. Отуда: $y=\dfrac{A+B\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}}$

Ако се у примеру 1, § 68 исто тако стави $y=x^m(1-x)^n$ онда мора бити:

$$(m+1)(m+n-1)x^2-2[m(m+n-1)+1]x+m(m-1)=0$$

а отуда следи $m=-n=1$. Овде се дакле добија само један партикуларни интеграл: $y=\dfrac{x}{1-x}$

9. Доказати да, ако је $\varphi(x)$ партикуларни интеграл једначине $\dfrac{d^2z}{dx^2}=ax^{n-2}z$,

онда је $x\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$ партикуларни интеграл једначине:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=ax^{-n-2}z$$

и решити истом једначину:

$$x^4\frac{d^2z}{dx^2}=Az$$

Решење: Ставити у првој једначини $x=\dfrac{1}{u}$ а затим у једначини која се отуда добија $z=\dfrac{\xi}{u}$; тада једначина $\frac{d^2z}{dx^2} = ax^{n-2}$ прелази у $\frac{d^2\xi}{dn^2} = aU^{-n-2}\xi$. Ако је дакле $z=\varphi(x)$ један интеграл прве, онда је $\xi = n\varphi(\frac{1}{n})$ интеграл друге. У примеру је $n=2$, а интеграл једначине $\frac{d^2z}{dx^2} = Az$ је:

$$z = C_1e^{x\sqrt{A}} + C_2e^{-x\sqrt{A}}$$

Отуда је интеграл од $x^4\frac{d^2z}{dx^2} = Az$:

$$z = x\left(C_1e^{\frac{\sqrt{A}}{x}} + C_2e^{-\frac{\sqrt{A}}{x}}\right.$$

10. Показати да, ако је $z=\varphi(x)$, решење од

$$\frac{d^2z}{dx^2} = z\psi(x)$$

онда је $\xi = (cx+d)\varphi\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$ решење од

$$(cx+d)^4\frac{d^2\xi}{dx^2} = \xi\psi\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$$

где су константе a, b, c, d везане релацијом:

$$a\alpha - bc = 1$$

и решити потом први задатак у 8.

Решење: Ставити у првој једначини: $x = \frac{au+b}{cu+d}$

а затим у оној која се отуда добија: $z = \frac{\xi}{cu+d}$. На тај начин се добија:

$$(cu+d)^4\frac{d^2\xi}{du^2} = \xi\psi\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)$$

Ако се дакле $z=\varphi(x)$ једно решење дате једначине, онда је $\xi = (cu+d)\varphi\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)$

решење трансформисане једначине.

Супституцијама:

$$x = \frac{bu - \frac{a}{b-a}}{-u + \frac{1}{b-a}}, \qquad y = \frac{z}{-u + \frac{1}{b-a}}$$

прелази једначина из бр. 8 у

$$u^2\frac{d^2z}{du^2} = \left(\frac{k}{b-a}\right)^2 z$$

а из ове, ако се стави $\sqrt{1+\left(\frac{2k}{b-a}\right)^2}=\lambda$

следи: $Z=\left(Au^{\lambda/2}+Bu^{-\lambda/2}\right)\sqrt{u}$

па се, како је $u=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x+a}{x+b}$, као и раније добија:

$$y=\sqrt{(x+a)(y+b)}\left[\frac{A}{(b-a)^{1/2+\lambda/2}}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\lambda/2}+\frac{B}{(b-a)^{1/2-\lambda/2}}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^{\lambda/2}\right]$$

11. Интегралити једначину:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{A_1}{a+bx}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{A_2}{(a+bx)^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots\frac{A_n}{(a+bx)^n}y=X$$

где је X функција од x, а $A_1\ldots\ldots\ldots A_n$ константе.

Решење: Супституцијом $a+bx=e^{\vartheta}$ добија се једначина са константним коефицијентима, која се може решити по §§ 43 до 46; или треба ставити $a+bx=t$ и поступити по §§ 47, 48 одн. применити методу варијације константана.

12. Интегралити једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(2X+a)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dX}{dx}+X^2+aX+b\right)y=0$$

где је X нека функција од x.

Решење: Извршити замену $y=ve^{-1/2\int(2X+a)dz}$, тада ће бити:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)v$$

дакле, ако је $\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=\lambda$, $v=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}$

13. Показати да се, ако је познато партикуларно решење једначине:

$$\frac{dy}{dx}+X_1y^2+X_2=0$$

где су X_1 и X_2 функције од x, може наћи опште решење. Решити потом једначину:

$$\frac{dy}{dx}+y^2\sin x=2\,\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Ставити $y=y_1+z$ онда ће z бити одређено једначином

$$\frac{dz}{dx}+2yX_1z+X_1z^2=0$$

која је по § 15 интеграбилна.- За овај пример је $y_1=\frac{1}{\cos x}$ дакле:

$$\frac{dz}{dx}+2\operatorname{tg}x.z+\sin^2 x.z^2=0$$

а отуда:

$$z=\frac{3\cos^2 x}{c-\cos^3 x}$$

14. Ако општи интеграл једначине:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$$

гласи:

$$y=Ay_1+By_2$$

показати да диференцијална једначина чији је општи интеграл:

$$z=A'y_1^m+B'y_2^m$$

јесте следећа:

$$F(x)\frac{d^2z}{dx^2}+\left[pF(x)-(m-1)\frac{dF}{dx}\right]\frac{dz}{dx}+m\left[1/2(m-1)\frac{d^2F}{dx^2}+1/2(n-1)p\frac{dF}{dx}+mqF(z)\right]z=$$

$$=0$$

где је $F(x)=y_1y_2$

Решење: Из вредности од $z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2}$ елиминисати константе A' и B'. Отуда се добија:

$$F(x)\frac{d^2z}{dx^2}-\left[\frac{y_1y_2''-y_2y_1}{y_1y_2'-y_2y_1'}F(x)+(m-1)\frac{dF(x)}{dx}\right]\frac{dz}{dx}+m\Bigg[(m-1)y_1'y_2'+$$

$$+\frac{y_1'y_2''-y_2'y_1'}{y_1y_2'-y_2y_1'}F(x)\Bigg]z=0$$

али је $y_1y_2''=-p(y_1y_2'-y_2y_1')$, $y_1'y_2''-y_2'y_1''=q(y_1y_2'-y_2y_1')$

и $$y_1' y_2' = 1/2 \frac{d^2F}{dx^2} + 1/2\, p \frac{dF}{dx} + qF$$

Ако увртимо ове величине добићемо једначину која је дата у тексту.

15. Доказати да се, ако су y_1 и y_2 партикуларни интеграли једначине:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

корени од $y_1=0$ и $y_2=0$ раздвајају догод су оба интеграла непрекидна / Sturm /.

Решење: По § 65 је:

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} = Ce^{-\int Pdx}$$

где је C нека одређена константа која није једнака нули. Претпоставимо да је она позитивна, онда је:

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} > 0$$

те y_1 и $\frac{dy_2}{dx}$ не могу једновремено бити једнаки нули. То исто важи и за $\frac{dy_2}{dx}$ и y_2 Но ако је $y_1=0$ за $x=a$ и $x=b$ где је $b>a$ онда из горње неједначине следи у оба случаја: $y_2\frac{dy_1}{dx}<0$ тј. y_2 и $\frac{dy}{dx}$ су различито означени. Али ако x расте од a до b онда мора по једном познатом ставу $\frac{dy}{dx}$ да промени знак за неку одређену вредност $x=\alpha$ у том интервалу. Према томе мора и y_2 да промени знак пре него што x буде једнако b тј. y_2 ће бити једнако нули за неку вредност од x која лежи између два узастопна корена $x=a$ и $x=b$ једначине $y_1=0$ Исто тако и између коренова једначине $y_2=0$ постоји једна вредност за коју је y_1 једнако нули. Према томе ће y_1 и y_2 када x расте, једно за другим бити једнаки нули.

Као што није тешко увидети ово важи само ако су и коначни и непрекидни у том интервалу. /Sturm, Conrs d′ Analuse, tome II, p. 139/

16. Решити једначине:

/1/ $\sin^2\vartheta\frac{d^2y}{d\vartheta^2}+\sin\vartheta\cos\vartheta-y=\vartheta-\sin\vartheta$

/2/ $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x^2\log x}y=e^x\left(\frac{2}{x}+\log x\right)$

/3/ $(1+ax^2)\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}=n^2y$

/4/ $x^2(x^2+a)\frac{d^2y}{dx^2}+x(2x^2+a)\frac{dy}{dx}=n^2y$

/5/ $\frac{d^2y}{dx^2}-2\left(n-\frac{a}{x}\right)\frac{dy}{dx}+\left(n^2-\frac{2na}{x}\right)y=e^{nx}$

/6/ $(a^2-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-8x\frac{dy}{dx}-12y=0$

/7/ $(3-x)\frac{d^2y}{dx^2}-(9-4x)\frac{dy}{dx}+(6-3x)y=0$

Решења:

/1/ $y=C_1\operatorname{Cosec}\vartheta+C_2\operatorname{Cotg}\vartheta-\vartheta-2\operatorname{Cotg}\frac{\vartheta}{2}\log\operatorname{Cos}\frac{\vartheta}{2}$

/в.зад. 5/

/2/ $y=\log x\left(C_1+C_2\int\frac{dx}{\log^2x}+e^x\right)$

/3/ Код једначина облика

$$\varphi(x)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{d\varphi(x)}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+f(x)y=0$$

корисно је ставити $\int \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = z$

тако прелази једначина у:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(z)y = 0$$

где $f(t)$ постаје од $f(x)$ на тај начин што се за x стави његова вредност изражена помоћу t .- У нашем примеру ће бити $y = Ae^{nt} + Be^{-nt}$, где је

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax^2}}$$

/4/ $y = Ae^{nt} - Be^{nt}$ где је $t = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a}}$

Уосталом се ова једначина може добити из претходне на тај начин што ће се у њој ставити $\frac{1}{x}$ уместо x .

/5/ ако се стави $y = \frac{e^{nx}}{x^a} V$,

онда следи: $x^2 \frac{d^2v}{dx^2} - d(a-1)v = x^{a+2}$

а отуда: $V = Ax^a + Bx^{1-a} + \frac{1}{2(2a+1)} x^{a-2}$

/6/ Ставити $y = (a-x)^{\lambda}(a+x)^{\mu}$ и одредити погодно λ и μ .

Следи: $y = \frac{A}{(a-x)^3} + \frac{B}{(a+x)^3}$

/7/ $\left\{(3-x)\frac{d}{dx} + 3x - 6\right\}\left\{\frac{d}{dx} - 1\right\} y = 0$

а отуда $y = \left\{A + B\int e^{2x}(3-x)^3 dx\right\}$

17. Решити једначину:

$$P\frac{d^2y}{dx^2}+Q\frac{dy}{dx}-Ry=0$$

у којој Q и R задовољавају релацију:

$$R\left(\frac{dQ}{dx}-R\right)=Q\frac{dR}{dx}$$

Да ли се, ако та релација није задовољена, једначина може решити увођењем коефициената M који ће бити тако изабран да нови коефициенти задовољавају релацију?

Решење: Релација између Q и R може се написати у облику: $\frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{R}\right)=1$ дакле: $Q=(x+a)R$, где је a нека одређена константа. Дата једначина је дакле:

$$P\frac{d^2y}{dx^2}+R\left\{(x+a)\frac{dy}{dx}-y\right\}=0$$

Ако се стави $y=(x+a)u$ добија се:

$$u=A+B\int\frac{dx}{(x+a)^2}e^{-\int\frac{R(x+a)}{P}}dx$$

или

$$u=A+B\int\frac{R^2}{Q^2}e^{-\int\frac{Q}{P}dx}$$

Како се ова релација односи на количник $\frac{Q}{R}$ онда би множење једначине неким чиниоцем било бесциљно:

18. Решити једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a-\frac{by}{(2cx-x^2)^2}$$

Решење: Ако се ради скраћења стави $(c^2-b)^{1/2}=2c\alpha,\ (c^2-b)^{1/2}+c=2c\beta$ и уврсти: $y=\frac{x^\alpha}{(2c-x)^\beta}V$

онда се за V добија егзактна диференцијална једначина, а интегралећи је добијамо:

$$\frac{dv}{dx} + 2v\frac{x+2\alpha c}{2cx-x^2} = A + a\int\frac{(2c-x)^\beta}{x^\alpha}dx$$

а отуда:

$$v = \frac{(2c-x)^{2\beta}}{x^{2\alpha}}\left\{B + \int\frac{x^{2\alpha}}{(2c-x)^{2\beta}}\left(A + a\int\frac{(2c-x)^\beta}{x^\alpha}dx\right)dx\right\}$$

19. Наћи функцију φ такву да једначина

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

супституцијом $x=\varphi(z)$ пређе у:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$$

и решити потом прву једначину.

Решење: Ставити $x=\frac{1}{z}$ /види бр.16 /3//.Биће:

$$y = A\cos\frac{n}{x} + B\sin\frac{n}{x}$$

20. Показати да се једначина

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

може трансформисати у

$$\frac{d^2y}{dz^2} + F(z)\frac{dy}{dz} + y\Phi(z) = 0$$

ако је однос између z и x дат једначином

$$\int dz\, e^{-\int F(z)dz} = \int dx\, e^{-\int P dx}$$

а $\Phi(z)$ одређено једначином

$$Qe^{2\int P dx} = \Phi(z)e^{2\int F(z)dz}$$

Потом написати једначину:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = x^2y(n^2-e^{x^2})$$

у облику

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)y = 0$$

Решење: Ако трансформишемо за z онда ће дата једначина прећи у:

$$\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\left(\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}\right)+Qy=0$$

па према томе мора бити:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}-F(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=0$$

дакле: по примеру 2 § 67

$$\int dz\,e^{-\int F(z)dz}=\int dx\,e^{-\int P dx}$$

и даље $Q=\phi(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$

или $Qe^{2\int Pdx}=\phi(z)e^{2\int F(z)dz}$

у примеру је

$$P=-\frac{1}{x}\ ;\ Q=x^2\left(e^{x^2}-n^2\right)$$

и $F(z)=\frac{1}{z}$ према томе $z=e^{\frac{1}{2}x^2}$ и $\phi(z)=1-\frac{n^2}{z^2}$,

што се поклапа са вредношћу од $\phi(z)$ у другој једначини.

21. Решити једначину

$$\frac{d^2v}{dz^2}+2\left(\frac{1}{z}+\frac{B}{z^2}\right)\frac{dv}{dz}+\frac{A}{z^4}v=0$$

где су A и B константе. Показати да се једначина:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{B'}{x^3}+\frac{3}{2x}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{My}{x^6}=0$$

може трансформисати у претходну супституцијом:

$x=\sin(\operatorname{arctg} z^{1/2})$ под претпоставком да је $B'^2=4B^2-4A+M$

и наћи релацију између y и v .

Решити потом другу једначину.

Решење: Ако се стави $v=e^{\frac{B}{z}}\cdot z^{-1}w$

биће: $z^4\frac{d^2w}{dz^2}=(B^2-A)w$ /в.бр.9/. А отуда, ако је $(B^2-A)^{1/2}=\alpha$

$$v=\frac{B}{e^{z}}\left(C_1e^{\frac{\alpha}{z}}+C_2e^{-\frac{\alpha}{z}}\right)$$

Да би се друга једначина могла трансформисати у прву, то мора по § 64 /9/ бити задовољен услов

$$\tfrac{1}{2}\{zx\}+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(S-\frac{dR}{dx}-R^2\right)-\left(Q-\frac{dp}{dx}-p^2\right)=0$$

где је $P=\frac{B'}{x^3}+\frac{3}{2x},\ Q=\frac{M}{x^6},\ R=\frac{B}{z^2}+\frac{1}{z},\ S=\frac{A}{z^4}$, а то ће бити случај ако је $B'^2=4B^2-4A+M$. Између y и v постоји једначина /§64/ 10]:

$$y\left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2}e^{\int Pdx}=ve^{\int Rdx} \quad \text{или} \quad y=2^{-1/2}e^{-(B+\frac{1}{2}B')x^{-2}+Bv}$$

па је према томе:

$$y=C_1e^{[\frac{1}{2}B'+(B^2-A)^{1/2}]x^{-2}}+C_2e^{[\frac{1}{2}B'-(B^2-A)^{1/2}]x^{-2}}$$

22. Решити једначину:

$$P\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dP}{dx}\frac{dy}{dx}=a^2P^3y$$

замењујући зависно промењиву y са e^x , а потом и једначину:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}X=\tfrac{1}{2}v\left\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}\right)^2-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}\right)+2\left(a^2P^2-X^2\right)-2\frac{dX}{dx}\right\}$$

Решење: Трансформисана једначина је:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-\frac{d\log P}{dx}\frac{dz}{dx}=a^2P^2$$

Ако прво ставимо да је десна страна једнака нули, онда је по примеру 1 из § 67: $z=B+\log\left(A+a\int Pdx\right)$

Но ако применимо методу варијације констаната, добићемо једначине:

$$\frac{dB}{dx}+\frac{1}{A+a\int Pdx}\frac{dA}{dx}=0 \quad \text{и} \quad \frac{dA}{dx}=-aP\left(A+a\int Pdx\right)^2$$

а из њих следи:

$$A+a\int Pdx=\frac{e^{2a\int Pdx}-C_1}{e^{2a\int Pdx}-C_1}\ ;\quad B=C_2+\log\frac{e^{2a\int Pdx}+C_1}{e^{a\int Pdx}}$$

Према томе се добија $Z=C_2+\log\left(e^{a\int Pdx}-C_1e^{-a\int Pdx}\right)$

и најзад:

$$y=C'e^{a\int Pdx}+C''e^{-a\int Pdx}$$

Много се лакше долази до циља ако се дата једначина реши по § 15 као да је P функција која се тражи. Отуда следи: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=a^2(c+y^2)p^2$

и према томе: $y=C_1e^{a\int Pdx}+C_2e^{-a\int Pdx}$

или треба једначину помножити са $\frac{2}{p^3}\ \frac{dy}{dx}$

Ако у првој једначини стави $y=P^{\frac{1}{2}}u$, у другој $V=ue^{-\int Xdx}$ то ће се у оба случаја добити једначина:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{2}u\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dx}\right)^2-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dx}\right)+2a^2P^2\right\}$$

Отуда је

$$u=P^{-\frac{1}{2}}\left(C'e^{a\int Pdx}+C''e^{-a\int Pdx}\right)\ \text{и}\ V=P^{-\frac{1}{2}}\left\{C'e^{\int(aP-X)dx}+C''e^{-\int(aP+X)dx}\right\}$$

23. Показати да општи интеграл једначине

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2}-\frac{5}{4\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2+\frac{2}{3}\sigma^2=0$$

где је σ Schwartz-ова диференцијална инваријанта од y по x, гласи:

$$y\left(A'+B'x+C'x^2\right)=A+Bx+Cx^2$$

и показати да је то и општи интеграл од

$$\begin{array}{ccc} y_3 & 3y_2 & 3y_1 \\ y_4 & 4y_3 & 6y_2 \end{array}$$

$$y_5 \quad 5y_4 \quad 10y_3$$

где је $y_1, y_2 \ldots\ldots$ први, други итд. извод од y

Решење: Ако су α и β произвољне константе, онда је по § 67 општи интеграл једначине по σ

$$\sigma = \frac{-6\beta^2}{\left\{(x-\alpha)^2-\beta^2\right\}^2}$$

Но како је σ Schwartz -ова инваријанта од y по x , онда се y добија из једначине: $y = \frac{V_1}{V_2}$ ако су V_1 и V_2 два независна партикуларна интеграла једначине

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{1}{2}\sigma V = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{d^2V}{dx^2} - \frac{3\beta^2}{\left\{(x-\alpha)^2-\beta^2\right\}^2} = 0$$

Ова се једначина решава по методи из § 68 и то је:

$$p_1 = \frac{2\beta-(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2-\beta^2}$$

и

$$V = \left\{\frac{(x-\alpha+\beta)^3}{x-\alpha-\beta}\right\}^{1/2} \gamma\, \frac{(x-\alpha+\beta)^2+\delta(x-\alpha)}{(x-\alpha+\beta)^2}$$

Одавде следи:

$$y = \frac{\gamma_1(x-\alpha+\beta)^2+\delta_1(x-\alpha)}{\gamma_2(x-\alpha+\beta)^2+\delta_2(x-\alpha)}$$

Како су $\alpha, \beta, \gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2$ произвољне константе, онда се уместо овога може писати и

$$y = \frac{A+Bx+C'x^2}{A'+B'x+C'x^2}$$

24. Показати да је општи интеграл од

$$\left\{Sx\right\} = \theta(\alpha-\beta)^2(x-\alpha)^{-2}(x-\beta)^{-2}$$

дат једначином

$$\frac{\alpha S+b}{cS+d}=\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{n}$$

где је $n^2=1-2\theta$. Дискутовати случај $\theta=1/2$

25. Означимо са S лук неке криве у равни, мерен од неке одређене тачке A до неке тачке P чије су координате x и y . Одредити једначине кривих за које важе следеће једначине:

/1/ $S=(x^2+y^2)^{1/2}$

/2/ $S=C\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$

/3/ $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=a\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$

/4/ $S=a\frac{dy}{dx}$

/5/ $\frac{dS}{dy}+3\frac{d^2S}{dy^2}=0$

/6/ $S=(x^2+2cx)^{1/2}$

/7/ $S=(y^2+mx^2)^{1/2}$

Решења:

/1/ $y=Cx$ /Права линија/.

/2/ $\left(x-\frac{c}{2}\sin\alpha\right)^2+\left(y-\frac{c}{2}\cos\alpha\right)^2=\frac{c^2}{4}$ /круг/.

/3/ $(y+c)\left\{(y+c)^2-a\right\}^{1/2}-a^2\log\left\{y+C-\left[(y+c)^2-a^2\right]^{1/2}\right\}=2a(x+C_1)$

/4/ $y+C_1=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+c}{a}}+e^{-\frac{x+c}{a}}\right)$ /Ланчаница/.

/5/ $(C-x)^{2/3}+y^{2/3}=C_1^{2/3}$

/6/ $(x+c)=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{y+a}{c}}+e^{-\frac{y+a}{c}}\right)$ /Ланчаница/.

/7/ $\frac{x}{c}=\left\{\frac{y+(y^2+mx^2)^{1/2}}{x}\right\}^{\left(\frac{m}{m-1}\right)^{1/2}}$

У свим овим задацима треба произвљне константе одредити тако да лук мерен од одређене тачке A доиста задовољава услов постављен у задатку.

26. Наћи диференцијалну једначину свих парабола које додирују кородинатне осовине и имају додирну тетиву константне дужине. Решити добијене једначине.

Наћи исто тако и диференцијалне једначине свих парабола које додирују осе а да о додирној тетиви није ништа одређено.

Решење: Општа једначина параболе је

$$(ax+by)^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0$$

Да би парабола додиривала координатне осовине мора бити $\alpha^2=\gamma a^2,\ \beta^2=\gamma b^2$ а да би додирна тетива имала константну дужину l мора бити $\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{b^4}=l^2$

Још једна једначина се добија ако се једначина параболе диференцијали.

Отуда се добија:

$$ax+by=-\frac{\alpha+\beta p}{a+bp}$$

Из ових пет једначина треба елиминисати константе

$a, b, \alpha, \beta, \gamma$ те се тако добија:

$$(px-y)^4(x^2p^4+y^2)=\ell^2x^2y^2p^4$$

Ако се стави $x=\xi^2; y=\eta^2$ и $\frac{d\eta}{d\xi}=p_1$ биће, $\eta=p_1\xi-\ell^{1/2}\frac{p_1}{(1+p_1^4)^{1/4}}$ а одавде $c\xi-\eta=c\ell^{1/2}(1+c^4)^{1/4}$ или у рационалном облику ако се стави $c^2=\mathrm{Cotg}\,\alpha$

$$(x-y\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2-2\ell\,\mathrm{Sin}\,\alpha(x+y\,\mathrm{tg}\,\alpha)+\ell^2\,\mathrm{Sin}^2\alpha=0$$

Ако додирна тетива нема константну дужину онда треба $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ елиминисати из једначина:

$$(ax+by)^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0 \quad ax+by=-\frac{\alpha+\beta p}{a+bp}$$

$$(a+bp)^2+\{b(ax+by)+\beta\}\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \alpha^2=\gamma a^2, \ \beta^2=\gamma b^2$$

Тада се добија

$$2xy\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{dy}{dx}=0$$

27. Показати да је диференцијална једначина општег конусног пресека

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-2/3}\right]=0$$

а опште параболе

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-2/3}\right]=0$$

28. 1/ Интегралити диференцијалну једначину криве за коју је полупречник кривине сразмеран луку мереном од неке одређене тачке

2/. Наћи криву код које је производ нормала спуштеним из двеју одређених тачака на тангенту, константан.

3/. Наћи криву чија је еволута исте врсте које и она сама.

Решења: 1/. Диференцијална једначина криве је:

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left(1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+n\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0$$

Ако се стави $\frac{dy}{dx}=p$, онда је један први интеграл:

$$Ce^{u\,\mathrm{arctg}p}\frac{dp}{dx}=(1+p^2)^{3/2}$$

За $\mathrm{arctg}p=\tau$ добијају се обе симултане једначине криве

$$x-a=c'e^{u\tau}(u\cos\tau+\sin\tau);\quad y-b=c'e^{u\tau}(u\sin\tau-\cos\tau)$$

Крива је логаритмичка спирала.

2/. Ако за праву која спаја обе тачке узмемо x -осу а координатни почетак за њену средину, и ставимо да је удаљење одређених тачака једнако $2e$ производ нормала спуштених из њих на тангенте b^2 и најзад $b^2+e^2=a^2$, биће $y=px+(b^2+a^2p^2)^{1/2}$. Отуда је општи интеграл $y=cx+(b^2+a^2c^2)^{1/2}$

а сингуларни $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Ако тачке леже на разним странама тангенте, онда треба ставити $-b^2$ уместо b^2 .

3/. Ако ρ означава радиус кривине у некој тачки тражене криве, а φ угао што га он заклапа са неким константним правцем за који ћемо ми узети x - осу, онда је $dx=\rho\cos\varphi d\varphi;\ dy=\rho\sin\varphi d\varphi$

Акво су ρ_1 и φ_1 координате одговарајуће тачке на еволути, онда је $\varphi_1=\varphi+\frac{\pi}{2}$ према томе, $d\varphi_1=d\varphi$, а како је елемент лука еволуте једнак $d\rho$, то је $d\rho=\rho_1 d\varphi$. Ако је еволута слична првој кривој, и ако је n однос сличности, онда је $\rho_1=n\rho$, према томе $\frac{d\rho}{\rho}=n\,d\varphi$ дакле $\rho=ce^{n\varphi}$. Према томе ће бити

$$dx=ce^{n\varphi}\mathrm{Cos}\varphi\, d\varphi \qquad dy=ce^{n\varphi}\mathrm{Sin}\varphi\, d\varphi$$

Отуда следи $x-a=\frac{c}{n^2+1}e^{n\varphi}(n\mathrm{Cos}\varphi+\mathrm{Sin}\varphi)$

$$y-b=\frac{c}{n^2+1}e^{n\varphi}(n\mathrm{Sin}\varphi-\mathrm{Cos}\varphi)$$

а то су симултане једначине логаритамске спирале.

29/. Наћи диференцијалну једначину првога реда криве чији је радиус кривине n пута већи од нормале, и показати да се она када је n цео број, увек може интегралити у кончном облику.

Показати, специјално, да је крива за $n=-2$ циклоида, за $n=-1$ круг, за $n=1$ ланчаница, а за $n=2$ парабола.

Решење: Диференцијална једначина криве је

$$ny\frac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{или} \quad n\frac{p\,dp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}$$

Отуда је $x-a=b^{-\frac{1}{n}}\int\left(y^{\frac{2}{n}}-b^{\frac{2}{n}}\right)^{-1/2}dy$

Ако се стави $y=u^{\frac{n}{2}}$ биће:

$$x-a=\frac{n}{2}b^{-1/n}\int u^{n/2-1}\left(u-b^{2/n}\right)^{-1/2}du$$

а одавде се види да се интеграција доиста може извести у коначном облику ако је n цео број. Ако је

$n=2$ биће: $(x-a)^2=4\frac{y-b}{b}$

а то је једначина параболе. Ако је $n=-2$ биће

$$x-a=\frac{b}{2}\arccos\frac{b-2y}{b}-(by-y^2)^{1/2}$$

а то је једначина циклоиде.

За $n=1$ добија се

$$y=\frac{b}{2}\left(e^{-\frac{x-a}{b}}+\bar{e}^{\frac{x-a}{b}}\right)$$

а то је једначина ланчанице, и за $n=-1$ биће $(x-a)^2+$ $+y^2=b^2$ а то је једначина круга.

30. Одредити систем кривих које фамилију конфокалних елипси секу под неким углом који није прав.

Решење: Ако m означава тангенс угла под којим се криве секу, онда величина a и b треба елиминисати из једначина:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad a^2-b^2=e^2 \quad p=\frac{m\frac{y}{b^2}-\frac{x}{a^2}}{\frac{y}{b^2}+m\frac{x}{a^2}}$$

Добија се

$$\left[mx+y+(my-x)p\right]\left[x-my+(mx+y)p\right]=e^2(m-p)(1+mp)$$

Ако се стави $x-my+(mx+y)p=M(1+mp)$ и $M\left[mx+y+(my-x)p\right]$ па се елиминише p из ових једначина, следи: $(x^2+y^2+e^2)M=x(M^2+e^2)$

Ако се ова једначина диференцијали па се из тако добијене једначине и из макоје две од последњих једначина елиминишу величине y и p, добија се диференцијална једначина између M и x која се може написати у облику:

$$\frac{m\,d(xM)}{\left\{e^2(xM)-(xM)^2\right\}^{1/2}}+\frac{d\frac{M}{x}}{\frac{M}{x}\left(1-\frac{M}{x}\right)}=0$$

а из ње се интеграцијом добија

$$-2m\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{e^2}{xM}-1\right)^{1/2}+\log\frac{1-\left(1-\frac{M}{x}\right)^{1/2}}{1+\left(1-\frac{M}{x}\right)^{1/2}}=C$$

Овде још треба за M уврстити његову вредност која се добија из једначине $(x^2+y^2+e^2)M=x(M^2+e^2)$

да би се добила једначина тражене криве.

31. Одредити ортогоналне трајекторије кривих:

/1/ $x^2+y^2=cx$

/2/ $x^2+y^2+c^2=1+2cxy$

/3/ $x^3+y^3=3axy$

/4/ $rr'=c^2$

где су у последњој једначини r и r' удаљења од двеју одређених тачака.

Решења:

/1/ $\xi^2+\eta^2=C\eta$

/2/ $$\xi(1-\xi^2)^{1/2}-\eta(1-\eta^2)^{1/2}+\arcsin\left\{\xi(1-\eta^2)^{1/2}-\eta(1-\xi^2)^{1/2}\right\}=C$$

/3/ Диференцијална једначина трајекторије је:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi(2\eta^3-\xi^3)}{\eta(2\eta^3-\eta^3)}$$

Овде треба ставити $\eta=\xi u$. Тада ће бити

$$C+\log\xi=\int\frac{(u^3-2)u\,du}{(1-u)(1+u+3u^2+u^3+u^4}=-\log(1-u)-\int\frac{(1+u)^3du}{(1-u)(1+u+3u^2+u^3+u^4)}$$

У овај интеграл треба уврстити $u+\frac{1}{u}=z$, на тај начин се добија

$$C+\log(\xi-\eta)=\int\frac{(z+2)\,dz}{(z-2)(z^2+z+1)}=\frac{1}{7}\log\frac{(z-2)^4}{(z^2+z+1)^2}-\frac{2}{7}3^{1/2}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{3^{1/2}}$$

па, како је $z=\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi\eta}$

$$C=\frac{1}{7}\log\frac{\xi-\eta}{\{(\xi^2-\eta^2)^2+\xi\eta(\xi+\eta^2)+\xi^2\eta^2\}^2}-\frac{2}{7}3^{1/2}\operatorname{arctg}\frac{2(\xi^2+\eta^2)+\xi\eta}{\xi\eta 3^{1/2}}$$

/4/ Диференцијална једначина трајекторије гласи:
$$(\xi^2+\eta^2)\left(\xi\frac{d\eta}{d\xi}-\eta\right)=e^2\left(\xi\frac{d\eta}{d\xi}+\eta\right)$$

ако $2e$ означава удаљење одређених тачака, и ако је за праву која их спаја узета x -оса, и за њену средину координатни почетак. Ако се тада стави $\xi\eta=u; \frac{\eta}{\xi}=v$ то ће једначина прећи $dv+\frac{dv}{v^2}=e^2\frac{du}{u^2}$ те ће бити $\xi^2-\eta^2+C\xi\eta=e^2$

Ортогоналне трајекторије фамилије конфокалних Cassini -јевих кривих су према томе равностране хиперболе које имају исто средиште као и ове прве, и чије се осовине по положају и величини мењају.

32. Крива за коју се ордината и апсциса тежи-

шта површине, обухваћене ординатама које одговарају апсцисама $x=a$ и $x=x$, имају у истом односу као и гранична ордината y и апсциса x, дата је једначином

$$\frac{a^3}{x^3}-\frac{b^3}{y^3}=1$$

Решење: Треба да буде $x\int_a^x y^2dx=2y\int_a^x xy\,dx$

Одавде је:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{4}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

па према томе по примеру 2 из § 67: $\frac{Ab^3}{x^3}-\frac{b^3}{y^3}=1$

Проверавање показује да треба ставити $A=\left(\frac{a}{b}\right)^3$ и да је према томе једначина криве:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3-\left(\frac{b}{y}\right)^3=1$$

33. Крива чија је поларна једначина $r^m\cos m\theta = a^m$, котрља се по једној непокретној правој. Ако се x-оса узме за ову праву, показати да крива, коју описује пол, који лежи на кривој која се котрља, има једначину:

$$dx=\left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2m}{1-m}}-1\right\}^{-1/2}dy$$

Показати, специјално, да је за $2m=1$ описана крива ланчаница, за $m=2$ еластична крива.

Решење: При решавању оваквих проблема треба приметити да, ако је RTS дата крива која се котрља на правој OX и додирује је у T, сем тога APC крива коју описује пол P, и ако се OX

узме за x осу, ако се дакле стави $OM=x, PM=y$ да је права PT радиус вектор дате криве и уједно нормала на тражену криву. Ако су дакле r и θ поларне координате тачке T, онда је једначина криве која се котрља тиме задовољена, дакле /1/ $F(r,\theta)=0$, и још: (2) $r=y(1+p^2)^{1/2}$ где је $p=\frac{dy}{dx}$. Но како је PM нормално на тангенту дате криве, и уједно ордината y тражене криве, биће даље /3/ $r^2 d\theta = y(dr^2+r^2 d\theta^2)^{1/2}$ Из /1/, /2/, /3/ треба елиминисати величине r и θ да би се добила једначина тражене криве.- У нашем примеру ће бити:

$$y=a(1+p^2)^{\frac{1-m}{2m}} \quad \text{или} \quad dx=\left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2m}{1-m}}-1\right\}^{-1/2} dy$$

Ако је $m=1/2$ биће $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}}+e^{-\frac{x-b}{a}}\right)$

Описана крива је дакле ланчаница, коју описује жижа једне параболе. Ако је $m=2$ биће $x-b=a^2\int\frac{dy}{(y^4-a^4)^{1/2}}$ Ово је такозвана еластична крива који описује средиште једне равностране хиперболе.

- Крај -

Литрографија Косте Бојковића Скадарска 6.- Београд
Телефон бр.23-693

Исправке

Трудили смо се дајући ову књигу да са скромним средствима са којима располажемо, дамо што бољу сређеност и што бољу техничку опрему. Ван наше воље и настојања су настале знатне грешке. Ствари које могу да доведу у велику забуну овим исправљемо:

1) У првој половини књиге среће се веома често са малим знаком [који увек обухвата разломачку црту код извода $[\frac{dy}{dx}]$ или понекад изразе, где такође треба разломачка црта, а где је очито непотребан. На пример: страна 30, редови 4, 5, 6 и 8 одозго, где стоји $[\frac{dv}{(1-v)^2}]$, $[\frac{1}{1-v}]$, $[\,[\frac{x}{x-1}]$ и т. д. Ово је дошло приликом задње коректуре; штампар је свуда код ових израза изоставио разломачку црту. При коректури смо свуда овим малим заградама оградили све те изразе, означавајући му да ту треба повући и разломачку црту. Међутим он је извукао и црту и наше заграде и тако изопачио издање. Молимо читаоце да то само тако разумеју.

2)

Страна:	Ред:	Стоји:	Треба да стоји:
9	12 и 13 одозго	$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y};\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$
9	4	$x+y=a\,tg\,\overset{y-c}{a}$	$x+y=a\,tg\,\frac{y-c}{a}$
38	2	$[x^3y^2-2Cx^{3/2}y\,Cos(\frac{\sqrt{3}}{2})lgx)+C^2=0]$ треба =	$[x^3y^3-2Cx^{3/2}y\,Cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x)+C^2=0]$
57	11	$\varphi+\alpha=\int\frac{dr}{r\sqrt{(\frac{r}{f(r)^2})^2-1}}$	$\varphi+\alpha=\int\frac{dr}{r\sqrt{(\frac{r}{f(r)^2})^2-1}}$
108	13	$f''(a_1)\frac{\delta^2}{2}$	$f''(a_1)\frac{D^2}{2}$
134	1 озго	$\frac{d^uy}{dx^u}=X$	$\frac{d^ny}{dx^n}=X$
134	4 озго	$\frac{d^{u-1}y}{dx^{u-1}}\ \ldots\ldots$	$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\ \ldots\ldots$
134	7 озго	$\frac{d^{u-2}y}{dx^{u-2}}=\ldots\ldots$	$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\ldots\ldots$
134	12 озго	$\frac{Ar}{(u-r)!}$	$\frac{Ar}{(n-r)!}$
134	1 одоздо	$(\frac{dy}{dx})^y=\psi(y)+A$	$(\frac{dy}{dx})^2=\psi(y)+A$

142	1 одоздо	$-a\frac{udu}{(u^2-2nu-1)}^{\sqrt{u^2-1}}$	$-a\frac{udu}{(u^2-2nu-1)\sqrt{u^2-1}}$
146	2 одоздо	експонентима	експоненту
155	10 озго	$\overset{1}{x}$	$\frac{1}{x}$
157	3 одоздо	$p\frac{dy}{dx}$	$P\frac{dy}{dx}$
166	3 озго	Cauley	Cayley
169	2 озго	Cauleu	Cayley
172	12 озго	$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
174	13 озго	$y_1 = y\sqrt{\frac{dz}{dx}\,e}^{\int Pdx}$	$y_1 = y\sqrt{\frac{dz}{dx}}\,e^{\int Pdx}$
178	5 озго	трећи сабирак с десне стране гласи $\frac{dB}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dx}$	
222	10 одоздо	$\text{arc}\,\lg\overset{\eta}{\xi}$	$\text{arc}\log\frac{\eta}{\xi}$
224	9	$n\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)}^2+a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2,$	$n\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$
227	12 одоздо	$\overset{1}{x}$	$\frac{1}{x}$
242	3 озго	$\{2x\}$	$\{z, x\}$
243 244	прва два реда одоздо први ред озго	$\begin{matrix} y_3 & 3y_2 & 3y_1 \\ y_4 & 4y_3 & 6y_2 \\ y_5 & 5y_4 & 10y_3 \end{matrix}$	$\begin{vmatrix} y_3 & 3y_2 & 3y_1 \\ y_4 & 4y_3 & 6y_2 \\ y_5 & 5y_4 & 10y_3 \end{vmatrix}$

3) Упути на страну и пример, као на стр. 180, ред 10 одоздо, не одговарају овој књизи; то су опле упуте у рукопису.