МАРИН И. КАТАЛИНИЋ,
професор.

РЕПЕРТОРИЈ

средњошколске математике

У ИЗРАЂЕНИМ ПРИМЕРИМА

◆

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРЕ И ШТАМПАРИЈЕ

РЕПЕРТОРИЈ

средњошколске математике

У ИЗРАЂЕНИМ ПРИМЕРИМА

* * *

ИЗРАДИО:
Марин И. Каталинић,
професор гимназије у Вел. Кикинди.
Са 92 слике.

* * *

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРЕ И ШТАМПАРИЈЕ
ЈОВАНА РАДАКА у ВЕЛ. КИКИНДИ
1926.

ПРЕДГОВОР.

Циљ је овој књизи, да допуни школске уџбенике, те да ученику даде оно, што му уџбеник не може да даде. Уџбеник у збијеном стилу даје теорију, ниже теорем на теорем, а његов му обим не дозвољава, да дубље зађе у примену тих теорема као ни у све разнолике методе, које се употребљавају у решавању задатака. Ученик има да то научи у школи из предавања. Али код самосталног израђивања домаћих задатака може да се послужи само својим, понајвише непотпуним и непрегледним, забелешкама са предавања.

Две су врсте ученика, који тешко уче математику. Једну скупину чине они, код којих је слабије развијена моћ апстракције, те незнају, да на око разнолике проблеме раставе у једноставније, који се директно оснивају на елементима алгебре или геометрије. — Другу, бројнију скупину, чине они, који су из једнога или другога разлога занемарили поједине партије, и тим раскинули онај ланац, који имају да чине у њиховој памети истине математичке. Ова ће књига добро доћи и једнима и другима. А и добром је математичару корисно, да има при руци један преглед, у коме ће наћи нових метода, нових погледа на задатке, који су му већ познати, а и нових задатака.

У западним земљама, поименце у Француској, већ давно се посвећује особита брига инжињерству, не само ради све већега развоја индустрије него и ради важне улоге, коју техника има данас у народној одбрани. И ради једнога и ради другога разлога нама ће требати и ваљаних инжењера и ваљаних математичара. С друге стране стара је истина, да је без темељитог познавања и лаког руковања свима подручјима средњошколске математике, тешко заћи у методе више математике, која је подлога математичком делу свих грана технике. С ових разлога се у западним земљама настоји разним средствима, да се олакша, а тим и унапреди, и настава и учење математике у средњој школи. Поред многобројних збирака ове врсте издају се и математички часописи за средње школе, у којима сарађују и ученици, било износећи своје саставке, било натецањем у

Књига је уређена тачно према програму математике у вишим разредима наших средњих школа. Ученика води постепено од основних радња V. и VI. разреда до замршенијих проблема из програма за VII. и VIII. разред кроз сва подручја математике, која се обрађују у вишој гимназији. Након једнога или два типична задатка из једнога подручја, који имају ученику да послуже као модели, прелази на компликованије задатке, комбинујући често једно подручје с другим. Овећи број комбинованих задатака дошао је и зато, што држим, да ће књига доћи добро напосе матурантима код понављања и комбиновања градива прећашњих разреда у VIII. разреду.

Стручњак ће запазити у књизи ове особине. Кроз целу се књигу провлачи решавање једначина, као главни ослонац проблема ниже математике. Зато су у алгебарском делу разни типови једначина, особито квадратних, заузели замашан простор. Проблема у ужем смислу има релативно мало: обрађени су само главнији типови. — Код квадратних једначина и једначина, које се своде на квадратне, долазе претежно онакви типови, где се једначина или систем своди подесним супституцијама на једноставне једначине. Тим хоћу да постигнем то, да се ученик привикне на то, да задатак анализира, да тражи једноставне везе међу појединим алгебарским величинама; желим да га ослободим од везаног, механичког лутања око стереотипних калупа. Зато често дајем решење истога задатка на више начина. Тај је принцип проведен особито у геометријском делу, где се често исти проблем из планиметрије или из стереометрије решава и тригонометријски или аналитички. Зато често упозоравам на сличност једнога проблема с другим. Зато уз добар број решења додајем и геометријско тумачење. Да ученик лакше схвати задатак, књига доноси велик број слика, које тачно одговарају задатку. — Избегавајући вештачко отежавање примера, ишао сам за тим, да чим више примера буде имало везе с проблемима из живота или из других наука, које ученик учи у средњој школи. Тако је н. пр. обрађена цела једна скупина проблема о месецу.

Проблеме екстремних вредности (максима-минима) решавам већим делом помоћу деривација, али сам приказао и две елементарне методе. Особито је т. зв. аналитичка метода детаљно обрађена. Разлог овому је тај, што је наш наставни остављено на вољу наставнику, којом ће методом да се послужи. Међутим сви наши одобрени уџбеници алгебре решавају ове проблеме помоћу деривација; то сам и ја учинио у највећем делу примера. Зато сам испред ових проблема уметнуо и неколико основних примера из подручја теорије функција једне реелне варијабле као и неколико вежаба о деривирању основних функција. — А држим не само, да се може, него и да је потребно, да се ученик у највишим разредима упозна са елементима и применом инфинитезималног рачуна у овако ограниченом обиму, кад се већ у VI. разреду у геометрији *неопажено* упознао са неким инфинитезималним методама.

Не сматрам књигу савршеном; наћи ће се евентуално задатака, који би се могли заменити другима, па ћу бити захвалан свакому колеги, који ме упозори на њезине недостатке.

Вел. Кикинда, почетком маја 1926.

Писац.

РЕЧ УЧЕНИКУ.

Дајем ти ову књигу и да ти помогнем у учењу математике и да унапредим твоје знање. Добро ће ти доћи и онда, када узимаш у школи нове партије, и онда, када понављаш пређено градиво. Желиш ли, да од ње имаш трајне и реелне користи, послушај ове савете.

Почни са најлакшим задацима једне скупине и прелази поступно на теже и компликованије.

Сваки задатак рашчлани, проучи и кушај, да га решиш сам. Истом кад то неможеш, потражи савета у књизи, и увек само толико, колико ти је потребно.

Израда ти даје већим делом само важније податке у извођењу; те податке повежи сам потребним рачунским радњама.

Немој да верујеш, него се убеди о свему сам.

Задатак није довршен онда, кад си дошао до резултата. Анализирај решење и гледај, да га протумачиш алгебарским или геометријским путем.

Да провериш исправност решења, нађи начина, да израдиш бар приближну пробу.

Сваки геометријски проблем истражи на слици; у аналитичким задацима након решења изради тачну слику на милиметарском папиру. То је за њих најбоља проба.

Писац.

I. ДЕО.

АЛГЕБРА.

Бројеви, којима су означени обрасци, односе се на моју „Збирку образаца“.

I. ОДЕЉАК.

1. *Помножи полиноме:* $(x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 2y^3).(3x^2 + 5xy - y^2)$

$$\begin{array}{l}
\underline{(x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 2y^3)(3x^2 + 5xy - y^2)} \\
3x^5 - 9x^4y + 6x^3y^2 - 6x^2y^3 \\
\quad + 5x^4y - 15x^3y^2 + 10x^2y^3 - 10xy^4 \\
\qquad\qquad - x^3y^2 + 3x^2y^3 - 2xy^4 + 2y^5 \\
\hline
\mathbf{3x^5 - 4x^4y - 10x^3y^2 + 7x^2y^3 - 12xy^4 + 2y^5.}
\end{array}$$

2. *Помножи полиноме:* $(a^3 - 5a^2b - 3b^3).(2a^2 + 3b^2 - ab)$.

$$\begin{array}{l}
\underline{(a^3 - 5a^2b - 3b^3)(2a^2 + 3b^2 - ab)} \\
2a^5 - 10a^4b \qquad\qquad - 6a^2b^3 \\
\qquad\qquad + 3a^3b^2 - 15a^2b^3 \qquad\qquad - 9b^5 \\
\quad - a^4b + 5a^3b^2 \qquad\qquad + 3ab^4 \\
\hline
\mathbf{2a^5 - 11a^4b + 8a^3b^2 - 21a^2b^3 + 3ab^4 - 9b^5.}
\end{array}$$

3. *Изведи делење:*

$(7x^2y^3 + 2y^5 + 3x^5 - 12xy^4 - 4x^4y - 10x^3y^2) : (5xy - y^2 + 3x^2)$

Најпре поредај чланове у дивиденду и дивизору тако, да експоненти исте базе или расту или опадају; н. пр. да експоненти x опадају. Онда дели Хернеровим начином.

$$(3x^5 - 4x^4y - 10x^3y^2 + 7x^2y^3 - 12xy^4 + 2y^5):(3x^2 + 5xy - y^2) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 2y^3$$

$$\begin{array}{l}
\quad 3x^5 + 5x^4y - x^3y^2 \\
\underline{- \qquad - \qquad +} \\
\qquad - 9x^4y - 9x^3y^2 + 7x^2y^3 \\
\qquad - 9x^4y - 15x^3y^2 + 3x^2y^3 \\
\qquad \underline{+ \qquad + \qquad -} \\
\qquad\qquad 6x^3y^2 + 4x^2y^3 - 12xy^4 \\
\qquad\qquad 6x^3y^2 + 10x^2y^3 - 2xy^4 \\
\qquad\qquad \underline{- \qquad - \qquad +} \\
\qquad\qquad\qquad - 6x^2y^3 - 10xy^4 + 2y^5 \\
\qquad\qquad\qquad - 6x^2y^3 - 10xy^4 + 2y^5 \\
\qquad\qquad\qquad + \qquad + \qquad -
\end{array}$$

4. *Изведи делење*: $(x^6 - y^6) : (x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3)$.

(Делење непотпуних полинома)

$$\begin{array}{l}
(x^6 - y^6) : (x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3) = \underline{x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3} \\
x^6 - 2x^5y + 2x^4y^2 - x^3y^3 \\
- \quad\; + \qquad\qquad\quad + \\
\hline
\qquad 2x^5y - 2x^4y^2 + x^3y^3 - y^6 \\
\qquad 2x^5y - 4x^4y^2 + 4x^3y^3 - 2x^2y^4 \\
\qquad - \qquad\; + \qquad\; - \qquad\; + \\
\hline
\qquad\qquad 2x^4y^2 - 3x^3y^3 + 2x^2y^4 - y^6 \\
\qquad\qquad 2x^4y^2 - 4x^3y^3 + 4x^2y^4 - 2xy^5 \\
\qquad\qquad - \qquad\; + \qquad\; - \qquad\; + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad x^3y^3 - 2x^2y^4 + 2xy^5 - y^6 \\
\qquad\qquad\qquad x^3y^3 - 2x^2y^4 + 2xy^5 - y^6 \\
\qquad\qquad\qquad - \qquad\; + \qquad\; - \qquad\; + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

5. *Изведи делење:*

$$\left(\frac{3x^3}{y^3} - \frac{20x^2}{3y^2} - \frac{11x}{3y} + \frac{143}{18} - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{y} - 2 - \frac{2y}{3x}\right).$$

$$\left(\frac{3x^3}{y^3} - \frac{20x^2}{3y^2} - \frac{11x}{3y} + \frac{143}{18} - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{y} - 2 - \frac{2y}{3x}\right) =$$

$$= \boldsymbol{\frac{3x^2}{y^2} - \frac{2x}{3y} - 3 + \frac{3y}{2x}}$$

$$\begin{array}{l}
\frac{3x^3}{y^3} - \frac{6x^2}{y^2} - \frac{6x}{3y} \\
- \qquad + \qquad + \\
\hline
\quad -\frac{2x^2}{3y^2} - \frac{5x}{3y} + \frac{143}{18} \\
\quad -\frac{2x^2}{3y^2} + \frac{4x}{3y} + \frac{4}{9} \\
\quad + \qquad\; - \qquad - \\
\hline
\qquad -\frac{3x}{y} + \frac{15}{2} - \frac{y}{x} \\
\qquad -\frac{3x}{y} + \frac{12}{2} + \frac{2y}{x} \\
\qquad + \qquad - \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad \frac{3}{2} - \frac{3y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \\
\qquad\qquad \frac{3}{2} - \frac{3y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \\
\qquad\qquad - \qquad + \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$-\frac{20x^2}{3y^2} + \frac{6x^2}{y^2} = \frac{-20x^2 + 18x^2}{3y^2} = \frac{-2x^2}{3y^2}$$

$$-\frac{5x}{3y} - \frac{4x}{3y} = -\frac{9x}{3y} = -\frac{3x}{y}$$

$$\frac{143}{18} - \frac{4}{9} = \frac{143}{18} - \frac{8}{18} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{3}{2} : \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{3y}{2x}$$

6. *Изведи делење*: $1:(1-2x+x^2)$.

a) $$1:(1-2x+x^2)=1+2x+3x^2+4x^3+\dots\dots+n.x^{n-1}+ \\ +\frac{(n+1).x^n-n.x^{n+1}}{1-2x+x^2}$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
1 & -2x & +x^2 & & & \\
- & + & - & & & \\
\hline
 & 2x & -x^2 & & & \\
 & 2x & -4x^2 & +2x^3 & & \\
 & - & + & - & & \\
\cline{2-4}
 & & 3x^2 & -2x^3 & & \\
 & & 3x^2 & -6x^3 & +3x^4 & \\
 & & - & + & - & \\
\cline{3-5}
 & & & 4x^3 & -3x^4 & \\
 & & & 4x^3 & -8x^4 & +4x^5 \\
 & & & - & + & - \\
\cline{4-6}
 & & & & 5x^4 & -4x^5
\end{array}$$

и т. д.

Дакле је:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots\dots+n.x^{n-1}+R.$$

**b*) Али можеш дивиденд *1* замислити и као полином, у коме потенције x опадају, н. пр. овако: $O.x^2+O.x+1+O.x^{-1}+\dots\dots$, па ако и дивизор поређаш по опадајућим потенцијама, имаш овакво делење:

$$1:(x^2-2x+1)=x^{-2}+2x^{-3}+3x^{-4}+\dots+ \\ +(n-1).x^{-n}+\frac{n.x^{-n+1}-(n-1).x^{-n}}{x^2-2x+1}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
x^0 & -2x^{-1} & +x^{-2} & & \\
 & + & - & & \\
\hline
 & 2x^{-1} & -x^{-2} & & \\
 & 2x^{-1} & -4x^{-2} & +2x^{-3} & \\
 & - & + & - & \\
\cline{2-4}
 & & 3x^{-2} & -2x^{-3} & \\
 & & 3x^{-2} & -6x^{-3} & +3x^{-4} \\
 & & - & + & - \\
\cline{3-5}
 & & & 4x^{-3} & -3x^{-4}
\end{array}$$

и т. д.

Дакле је такођер:

$$\frac{1}{\qquad}=\frac{1}{\quad}+\frac{2}{\quad}+\frac{3}{\quad}+\quad+\frac{n-1}{\qquad}+R$$

7. *У полиному* $2x^4 - 3ax^3 - 3a^2x^2 + 8a^3x + 3ma^3$ *одреди* m *тако, да полином буде дељив са* $x^2 - ax + a^2$.

Подели делимак са дељитељем.

$$(2x^4 - 3ax^3 - 3a^2x^2 + 8a^3x + 3ma^3) : (x^2 - ax + a^2) =$$
$$= 2x^2 - ax - 6a^2$$

$$\begin{array}{l}
2x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 \\
\underline{- \quad + \quad -} \\
\quad - ax^3 - 5a^2x^2 + 8a^3x \\
\quad - ax^3 + a^2x^2 - a^3x \\
\quad \underline{+ \quad - \quad +} \\
\qquad - 6a^2x^2 + 9a^3x + 3ma^3 \\
\qquad - 6a^2x^2 + 6a^3x - 6a^4 \\
\qquad \underline{+ \quad - \quad +} \\
\qquad\qquad 3a^3x + 6a^4 + 3a^3m
\end{array}$$

Да задани полином буде дељив са заданим дељитељем, мора овај остатак бити једнак нули. Из једначине:

$3a^3x + 6a^4 + 3a^3m = 0$ следи: $m = -x - 2a$ т. ј. последњи члан полинома мора гласити: $3a^3m = -3a^3(x + 2a) = -3a^3x - 6a^4$. Цео полином онда гласи овако: $\mathbf{2x^4 - 3ax^3 - 3a^2x^2 + 5a^3x - 6a^4}$.

8. *У триному* $x^4 + m^2a^2x^2 + a^4$ *одреди* m *тако, да трином буде дељив са* $x^2 - ax + a^2$.

Као у пређашњем примеру подели делимак са делитељем.

$$(x^4 + m^2a^2x^2 + a^4) : (x^2 - ax + a^2) = x^2 + ax + m^2a^2$$

$$\begin{array}{l}
x^4 - ax^3 + a^2x^2 \\
\underline{- \quad + \quad -} \\
\quad ax^3 + (m^2 - 1)a^2x^2 + a^4 \\
\quad ax^3 - a^2x^2 + a^3x \\
\quad \underline{- \quad + \quad -} \\
\qquad m^2a^2x^2 - a^3x + a^4 \\
\qquad m^2a^2x^2 - m^2a^3x + m^2a^4 \\
\qquad \underline{- \quad + \quad -} \\
\qquad\qquad a^3x(m^2 - 1) - a^4(m^2 - 1)
\end{array}$$

Овај је остатак нула, ако је $m^2 - 1 = 0$, т. ј. за вредности $m = +1$. Задани трином гласи онда: $x^4 + a^2x^2 + a^4$,

9. *Ако су x, y и z позитивни бројеви и ако је $x+2y+3z=1$, онда је $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>3$. Докажи!*

Ако је $x+2y+3z=1$, онда је $x<1$, $2y<1$, $3y<1$. Тим више је: $x<1$, $y<1$, $z<1$. Онда је: $\frac{1}{x}>1$, $\frac{1}{y}>1$, $\frac{1}{z}>1$. Збир ових 3 неједначина даје: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>3$.

10. *Растварањем на факторе докажи, да је сваки број облика: $N=x(x^2+3x+2).(x^2-3x-18)$ дељив са 120 за сваку целу вредност $x\neq 0$.*

Први трином можеш написати овако: $x^2+3x+2=x^2+x+2x+2=x(x+1)+2(x+1)=(x+1)(x+2)$. [Или помоћу квадратне једначине према обрасцу /16./] — Други трином: $x^2-3x-18=(x^2-3x+2)-20=x^2-x-2x+2-20=(x-1).(x-2)-20$.

Дакле: $N=x.(x+1).(x+2).[(x-1).(x-2)-20]=(x+2).(x+1).x.(x-1).(x-2)-20(x+2).(x+1).x$.

За сваку целу вредност x првих 5 фактора представљају 5 узастопних целих бројева, од којих је свакако један дељив са 2, један са 3, један са 4, а један са 5. Дакле је први део дељив са $2.3.4.5=120$. Три фактора у другом делу представљају 3 узастопна цела броја, од којих је свакако један дељив са 2, а један са 3. Дакле је други део дељив са $\boldsymbol{2.3.20=120}$. Тако је цео број N дељив најмање са 120.

11. *Ако су цифре једнога броја са 4 цифре 4 узастопна броја, па ако му измениш ред првих 2 цифара, онда је добивени број дељив са 11. Докажи.*

Цифре су x, $x+1$, $x+2$, $x+3$. Ако му измениш ред првих 2 цифара, добиваш број са цифрама: $x+1$, x, $x+2$, $x+3$, који гласи $N=1000(x+1)+100x+10(x+2)+(x+3)$. Тај израз коначно даје $N=1111x+1023$. Овде је сваки члан

*12. *Докажи*[1]*, да је сваки цео број облика:* $3^{4n} - 2^{2n}$ *дељив са 7 и са 11.*

Тај бином можеш трансформирати овако: $3^{4n} - 2^{2n} = (3^2)^{2n} - 2^{2n} = 9^{2n} - 2^{2n} = (9^n + 2^n)(9^n - 2^n)$. — Ако је n непаран број, онда је први фактор облика $x^{2m+1} + y^{2m+1}$, који је дељив са $x + y$ (н. пр. $x^3 + y^3$ је дељиво са $x + y$). Дакле је $9^n + 2^n$ дељиво са $9 + 2 = 11$. — За парну и непарну вредност n је други фактор дељив са $9 - 2 = 7$, јер је бином $x^n - y^n$ дељив са $x - y$ (н. пр. $x^3 - y^3$ и $x^4 - y^4$ су дељиви са $x - y$) — Ако је n паран број н пр. $n = 2m$, онда можеш други фактор раставити на 2 фактора, од којих је један дељив са $9 - 2 = 7$, други са $9 + 2 = 11$.

13. Тако ћеш на сличан начин доказати и ово: *Сваки цео број облика:* $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ *је дељив са 7.*

14. *Нађи 1. највећу заједничку меру, 2. најмањи заједнички садржатељ ових полинома:*

$$6a^4 - 48ab^3,\ 3a^5b - 48ab^5,\ 6a^2b^2 - 12ab^3,\ 3a^4 - 12a^3b + 12a^2b^2.$$

Раствори их на факторе. Извади најпре заједничке факторе, а затим преостале полиноме растварај у факторе према њиховом саставу.

$6a^4 - 48ab^3 = 6a(a^3 - 8b^3)$; бином у загради је облика: $x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + xy + y^2)$; дакле: $6a^4 - 48ab^3 = 2 . 3a . (a - 2b).(a^2 + 2ab + 4b^2)$.

$$3a^5b - 48ab^5 = 3ab.(a^4 - 16b^6) = 3ab.(a^2 - 4b^2).(a^2 + 4b^2) = \\ = 3ab.(a - 2b).(a + 2b).(a^2 + 4b^2).$$

$$6a^2b^2 - 12ab^3 = 6ab^2(a - 2b).$$

$$3a^4 - 12a^3b + 12a^2b^2 = 3a^2.(a^2 - 4ab + 4b^2) = 3a^2.(a - 2b)^2.$$

1. У највећу заједничку меру улазе само *заједнички* фактори $3, a, a - 2b$ онолико пута, колико најмање долазе у једном од заданих бројева. Дакле је: $M = \mathbf{3a.(a - 2b)}$.

2. У најмањи заједнички садржатељ улази *сваки* фактор онолико пута, колико највише долази у једному броју. Дакле:

$$N = \mathbf{2.3.a^2b^2.(a - 2b)^2.(a + 2b).(a^2 + 4b^2).(a^2 + 2ab + 4b^2)}.$$

---

[1] Задаци и делови задатка, означени знаком*, су комбиновани

15. *Пократи разломак* $\frac{27293}{57371}$ *помоћу верижнога дељења.*

Потражи *највећу заједничку меру* бројитеља и именитеља верижним дељењем. Подели већи с мањим, затим дивизор подели с добивеним остатком, тај остатак подели с новим остатком, и т. д., док не дођеш до једнога дељења, где је остатак нула. Последњи дивизор, дотично последњи остатак, је највећа заједничка мера.

$$\begin{array}{r} 57371 : 27293 = 2 \\ 27293 : 2785 = 9 \\ 2785 : 2228 = 1 \\ 2228 : \boldsymbol{557} = 4 \\ // \; 0 \end{array}$$

Дакле је: $M\,(57371\,,\,27293) = 557$. — Подели бројитељ и именитељ са 557 и тим је разломак потпуно покраћен;

$$\frac{27293}{57371} = \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{103}}\cdot$$

16. *Нађи верижним дељењем 1. највећу заједничку меру, 2. најмањи заједнички садржатељ полинома:*
$4x^6 - 2x^5 - 10x^3 - 10x^2 - 2x\,,\; 12x^6 - 6x^5 - 12x^4 - 12x^3 - 24x^2 - 6x.$

1. Најпре извади заједничке факторе, ако их полиноми имаду; резултат верижног дељења помножићеш касније са заједничким фактором. — Ови се полиноми даду овако написати: $2\,x\,.(2\,x^5 - x^4 - 5\,x^2 - 5\,x - 1)\,,\; 2\,.\,3\,x\,.(2\,x^5 - x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x - 1).$ Заједнички је фактор: $2\,x$. Преостале полиноме подели један с другим, дивизор остатком, и т. д. као у пређашњем задатку.
$3\,.(2\,x^5 - x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x - 1) : (2\,x^5 - x^4 - 5\,x^2 - 5\,x - 1).$

Фактори, који нису заједнички, не улазе у заједничку меру; зато такав фактор у дивиденду или дивизору смеш одмах испустити. Такав је овде фактор 3 у дивиденду. Исто тако смеш да било дивиденд било дивизор помножиш подесним бројем, да олакшаш дељење.

$$\begin{array}{l} (2\,x^5 - x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x - 1) : (2\,x^5 - x^4 - 5\,x^2 - 5\,x - 1) = 1 \\ \;\;2\,x^5 - x^4 \qquad\qquad\quad - 5\,x^2 - 5\,x - 1 \\ \underline{- \qquad\; + \qquad\qquad\qquad\; + \qquad\; + \qquad +} \\ \qquad\qquad - 2\,x^3 + 3\,x^3 + \;\; x \;\;|\; : (-x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(2x^5 - x^4 \quad - 5x^2 - 5x - 1) : (\boldsymbol{2x^2 - 3x - 1}) = x^3 + x^2 + 2x + 1 \\
\;\; 2x^5 - 3x^4 - \quad x^3 \\
\underline{- \quad + \quad +} \\
\qquad\quad 2x^4 + \quad x^3 - 5x^2 \\
\qquad\quad 2x^4 - 3x^3 - \quad x^2 \\
\qquad\quad \underline{- \quad + \quad +} \\
\qquad\qquad\quad 4x^3 - 4x^2 - 5x \\
\qquad\qquad\quad 2x^3 - 6x^2 - 2x \\
\qquad\qquad\quad \underline{- \quad + \quad +} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2x^2 - 3x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2x^2 - 3x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{- \quad + \quad +} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Највећа заједничка мера полинома, који су преостали након изузимања заједничких фактора, је: $2x^2 - 3x - 1$. Онда је највећа заједничка мера *заданих* полинома: $M = 2x \, . \, (2x^2 - 3x - 1) = $ $= \boldsymbol{4x^3 - 6x^2 - 2x}$. То значи, да су ти полиноми дељиви са M.

2. Ако је M највећа заједничка мера бројева *A* и *B*, онда је њихов најмањи садржатељ: $N = \frac{A}{M} \, . \, B = A \, . \, \frac{B}{M} \, .$ – Подели стога у овом примеру *A* и *B* са *M*.

$(4x^6 - 2x^5 - 10x^3 - 10x^2 - 2x) : (4x^3 - 6x^2 - 2x) = x^3 + x^2 + 2x + 1,$

$(12x^6 - 6x^5 - 12x^4 - 12x^3 - 24x^2 - 6x) : (4x^3 - 6x^2 - 2x) =$
$= 3x^3 + 3x^2 + 3x + 3.$

Онда је најмањи заједнички садржатељ:

$N = (4x^6 - 2x^5 - 10x^3 - 10x^2 - 2x) \, . \, (3x^3 + 3x^2 + 3x + 3) =$
$= (12x^6 - 6x^5 - 12x^4 - 12x^3 - 24x^2 - 6x) \, . \, (x^3 + x^2 + 2x + 1) =$
$= 12x^9 + 6x^8 + 6x^7 - 24x^6 - 66x^5 - 66x^4 - 66x^3 - 36x^2 - 6x$

То је најнижи полином, који је дељив са оба задана полинома.

---

17. *Пократи разломак*: $\dfrac{(x^2 - 2xy + y^2)\,(x^3 + y^3)}{x^5 - x^4y - 2x^3y^2 + 2x^2y^3 + xy^4 - y^5}$

Раствори поједине делове на факторе:

$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \; ; \; x^3 + y^3 = (x + y) \, . \, (x^2 - xy + y^2) \, ;$
$x^5 - x^4y - 2x^3y^2 + 2x^2y^3 + xy^4 - y^5 = x^4(x - y) - 2x^2y^2(x - y) +$
$+ y^4(x - y) = (x - y) \, . \, (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = (x - y) \, . \, (x^2 - y^2)^2 =$
$= (x - y) \, . \, (x - y)^2 \, . \, (x + y)^2.$

Дакле је: $N = \dfrac{(x - y)^2 \, . \, (x + y) \, . \, (x^2 - xy + y^2)}{(x - y) \, . \, (x - y)^2 \, . \, (x + y)^2} =$

$x^2 - xy + y^2$

18. *Пократи разломак:* $\frac{8a^2 b^2 - 4a^3 b - 4ab^3}{6ab^3 - 6a^3b} = N.$

Учини као у пређашњем задатку.

$$8a^2 b^2 - 4a^3 b - 4ab^3 = - 4ab(a^2 - 2ab + b^2) = - 4ab(a - b)^2;$$
$$6ab^3 - 6a^3b = - 6ab . (a^2 - b^2) = - 6ab (a - b) . (a + b).$$

Дакле је: $N = \frac{- 4ab . (a - b)^2}{- 6ab . (a - b).(a + b)} = \frac{2 (a - b)}{3 (a + b)}.$

—

19. *Редукуј разломке:* $\frac{a^2 b - ab^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^3 + a^2 b}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{a^2 - 2ab}{a + b}.$

Раствори на факторе бројитеље и именитеље, па пократи разломке, а онда редукуј.

$$\frac{a^2 b - ab^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^3 + a^2 b}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{a^2 - 2ab}{a + b} = \frac{ab.(a - b)}{(a - b).(a + b)} +$$
$$+ \frac{a^2 . (a + b)}{(a + b)^2} - \frac{a . (a - 2b)}{a + b} = \frac{ab}{a + b} + \frac{a^2}{a + b} - \frac{a^2 - 2ab}{a + b} =$$
$$= \frac{ab + a^2 - a^2 + 2ab}{a + b} = \frac{3ab}{a + b}.$$

—

20. *Редукуј разломке:* $\frac{a}{a - b} + \frac{a}{a + b} - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} - \frac{4a^2 b^2}{a^4 - b^4}.$

Да избегнеш дугачка множења и дељења, сабери најпре прва 2 разломка, а добивени збир редукуј са осталима.

$$\frac{a}{a - b} + \frac{a}{a + b} - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} - \frac{4a^2 b^2}{a^4 - b^4} =$$
$$= \frac{a^2 + ab + a^2 - ab}{a^2 - b^2} - \frac{2b^2}{a^2 + b^2} - \frac{4a^2 b^2}{a^4 - b^4} =$$
$$= \frac{2a^2 . (a^2 + b^2) - 2b^2 . (a^2 - b^2) - 4a^2 b^2}{a^4 - b^4} = \frac{2 . (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4)}{(a^2 - b^2).(a^2 + b^2)} =$$
$$= \frac{2 . (a^2 - b^2)^2}{(a^2 - b^2) . (a^2 + b^2)} = 2 . \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

—

21. *Израчунај:* $N = \frac{a_2 + ab + b^2}{a + b} - \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b} + \frac{2b^3 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2}.$

$$N = \frac{(a^2 + ab + b^2).(a - b) - (a^2 - ab + b^2)(a + b) + 2b^3 - b^2 + a^2}{a^2 - b^2} =$$

$$(a^3 - b^3) - (a^3 + b^3) + 2b^3 + a^2 - b^2 \qquad a^2 - b^2$$

*22. *Пократи разломак*: $\dfrac{(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)^p\,.\,(x+y)^{2-p}}{(x^2+2xy+y^2)^{p-1}}$

и резултат прикажи као полином.

Решење: $R=\dfrac{[(x+y)^3]^p\,.\,(x+y)^2\,.\,(x+y)^{-p}}{[(x+y)^2]^{p-1}}=$

$$=\frac{(x+y)^{3p}\,.\,(x+y)^{-p}\,.\,(x+y)^2}{(x+y)^{2p}\,.\,(x+y)^{-2}}=\frac{(x+y)^{2p}\,.\,(x+y)^2\,.\,(x+y)^2}{(x+y)^{2p}}=$$

$=(x+y)^4$, а то, применом Паскаловог троугла (обр. 40), даје: $x^4+\mathbf{4}\,x^3y+\mathbf{6}\,x^2y^2+\mathbf{4}\,xy^3+y^4$.

---

23. *Ако су цифре једнога троцифренога броја 3 узастопна броја, онда је разлика између тога броја и броја са истим цифрама у обрнутом реду увек 198.*

24. *Ако су цифре једнога 4-цифренога броја 4 узастопна броја, онда је разлика између тога броја и броја са истим цифрама у обрнутом реду увек 3087.*

Докажи оба правила.

1) Ако су цифре тога броја 3 узастопна броја, онда су оне облика: a, $a+1$, $a+2$ и тај број онда гласи:

$$100\,a+10\,(a+1)+(a+2)=100\,a+10\,a+a+10+2.$$

Број с истим цифрама у обрнутом реду гласи:

$$100\,(a+2)+10\,(a+1)+a=100\,a+10\,a+a+200+10.$$

Кад једнога одузмеш од другога, поништавају се општи делови, а остаје $210-12=\mathbf{198}$.

2) Ако су цифре тога броја a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, онда тај број гласи: $1000\,a+100\,(a+1)+10\,(a+2)+(a+3)=$ $=1000\,a+100\,a+10\,a+a+100+20+3$ — Тај број у обрнутом реду цифара гласи: $1000\,(a+3)+100\,(a+2)+10\,(a+1)+$ $+a=1000\,a+100\,a+10\,a+a+3000+200+10$. — Кад одузмеш један од другога добиваш: $3210-123=\mathbf{3087}$.

---

25. *Број 6774 преведи из декадског система у систем броја 8.*

Састави позитивне потенције броја 8, које су мање од 6774. То су ове: $8^0=1$, $8^1=8$, $8^2=64$, $8^3=512$, $8^4=4096$. Подели задани број са 4096, т. ј. истражи, колико се пута 8^4

колико се пута у њему садржи 8^3, и т. д. Рачун изгледа овако:

$$\begin{aligned} 6774 &: 4096 = 1 \\ 2678 &: 512 = 5 \\ 118 &: 64 = 1 \\ 54 &: 8 = 6 \\ 6 &: 1 = 6 \end{aligned}$$

Онда број 6774 у систему броја 8 гласи овако: $1 . 8^4 + 5 . 8^3 + + 1 . 8^2 + 6 . 8^1 + 6 . 8^0$, или по испуштању потенција: ***15166.***

---

26. *Разломак:* $\frac{57}{16}$ *преведи из декадск. система у систем броја* 6.

Састави позитивне и негативне потенције броја 6, чија је вредност мања од $\frac{57}{16}$:

$$6^0 = 1$$

$$6^{-1} = \frac{1}{6}$$

$$6^{-2} = \frac{1}{36}$$

$$6^{-3} = \frac{1}{216}$$

$$6^{-4} = \frac{1}{1296}$$

Подели тај разломак редом са овим потенцијама, доводећи увек дивиденд и дивизор на једнак именитељ:

$$\frac{57}{16} : 6^0 = \frac{57}{16} : \frac{6}{6} = \frac{171}{48} : \frac{48}{48} = 3$$

остатак: $\frac{27}{48} = \frac{9}{16}$

$$\frac{9}{16} : \frac{1}{6} = \frac{27}{48} : \frac{8}{48} = 3$$

остатак: $\frac{3}{48} = \frac{1}{16}$

$$\frac{1}{16} : \frac{1}{36} = \frac{9}{144} : \frac{4}{144} = 2$$

$$\frac{1}{144}$$

$$\frac{1}{144} : \frac{1}{216} = \frac{3}{432} : \frac{2}{432} = 1$$

$$\frac{1}{432} : \frac{1}{1296} = \frac{3}{1296} : \frac{1}{1296} = 3$$

Дакле је:

$$\frac{57}{16} = 3 . 6^0 + 3 . 6^{-1} + 2 . 6^{-2} + + 1 . 6^{-3} + 3 . 6^{-4} = \boldsymbol{3 \cdot \overbrace{3216}^{6}}.$$

Проба:

$$3 + \frac{3}{6} + \frac{2}{36} + \frac{1}{216} + \frac{3}{1296} = = \frac{4617}{1296} = \frac{513}{144} = \frac{57}{16}.$$

27. *Број $\alpha 273 \alpha \cdot 36$ из система броја 11 преведи у декадски систем ($\alpha = 10$).*

Тај број, развијен по потенцијама 11, гласи овако:
$\alpha \,.\, 11^4 + 2 \,.\, 11^3 + 7 \,.\, 11^2 + 3 \,.\, 11 + \alpha \,.\, 11^0 + 3 \,.\, 11^{-1} + 6 \,.\, 11^{-2}$.

$$\begin{array}{lcrcrcr}
\alpha \,.\, 11^4 & = & 10 \,. & 14641 & = & 146410 \\
2 \,.\, 11^3 & = & 2 \,. & 1331 & = & 2662 \\
7 \,.\, 11^2 & = & 7 \,. & 121 & = & 847 \\
3 \,.\, 11 & = & 3 \,. & 11 & = & 33 \\
\alpha \,.\, 11^0 & = & 10 \,. & 1 & = & 10 \\
3 \,.\, 11^{-1} & = & 3 \,. & \frac{1}{11} & = & \frac{3}{11} \\
6 \,.\, 11^{-2} & = & 6 \,. & \frac{1}{121} & = & \frac{6}{121}
\end{array}$$

$$149962 + \frac{3}{11} + \frac{6}{121} = \mathbf{149962 \frac{39}{121}}$$

28. *Бројеве 1783 и 5324 преведи у систем броја 8, помножи их у том систему и производ преведи натраг у декадски систем.*

Потенције броја 8 до 5324 су: $8^0 = 1$, $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$, $8^4 = 4096$.

$$\begin{array}{rcr}
5324 & : & 4096 = 1 \\ \hline
1228 & : & 512 = 2 \\ \hline
204 & : & 64 = 3 \\ \hline
12 & : & 8 = 1 \\ \hline
4 & : & 1 = 4 \\ \hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcr}
1783 & : & 512 = 3 \\ \hline
247 & : & 64 = 3 \\ \hline
55 & : & 8 = 6 \\ \hline
7 & : & 1 = 7 \\ \hline
\end{array}$$

Дакле је: $5324 = 1 \,.\, 8^4 + 2 \,.\, 8^3 + 3 \,.\, 8^2 + 1 \,.\, 8^1 + 4 \,.\, 8^0 = \overbrace{12314}^{8}$, $1783 = 3 \,.\, 8^3 + 3 \,.\, 8^2 + 6 \,.\, 8^1 + 7 \,.\, 8^0 = \overbrace{3367}^{8}$.

$$\begin{array}{l}
\overbrace{12314}^{8} \,.\, \overbrace{3367}^{8} \\ \hline
37144 \\
\;\;37144 \\
\;\;\;\;76310 \\
\;\;\;\;110624 \\ \hline
44154324
\end{array}$$

44154324 у систему $8 = 4 \,.\, 8^7 + 4 \,.\, 8^6 + 1 \,.\, 8^5 + 5 \,.\, 8^4 + 4 \,.\, 8^3 + 3 \,.\, 8^2 + 2 \,.\, 8^1 + 4 \,.\, 8^0$.

Састави још потенције $8^5, 8^6, 8^7$ и измножи са добивеним ко-

Напутак: Множи у декадском систему, али сваки производ преводи одмах у систем 8; н. пр.:

$3 \,.\, 4 = 12$, $12 = 1 \,.\, 8 + 4$
(пишем 4, памтим 1);

$7 \,.\, 4 = 28$, $28 = 3 \,.\, 8 + 4$
(пишем 4, памтим 3);

Исто тако код сабирања; н. пр.:

$3 + 4 + 4 = 11$, $11 = 1 \,.\, 8 + 3$,
(пишем 3, памтим 1).

$$\begin{array}{rrrr}
4 \,.\, 8^7 = & 2097152 \,.\, 4 = & 8388608 \\
4 \,.\, 8^6 = & 262144 \,.\, 4 = & 1048576 \\
1 \,.\, 8^5 = & 32768 \,.\, 1 = & 32768 \\
5 \,.\, 8^4 = & 4096 \,.\, 5 = & 20480 \\
4 \,.\, 8^3 = & 512 \,.\, 4 = & 2048 \\
3 \,.\, 8^2 = & 64 \,.\, 3 = & 192 \\
2 \,.\, 8^1 = & 8 \,.\, 2 = & 16 \\
4 \,.\, 8^0 = & 1 \,.\, 4 = & 4 \\
\hline
\end{array}$$

9492692 у систему броја 10.

А директно множење у декадском систему даје такођер 9492692.

---

29. *Квадрирај*: $(x^{2-p} - x^{p-2} - x^{2+p})^2$.

$$(x^{2-p} - x^{p-2} - x^{2+p})^2 = (x^{2-p})^2 + (x^{p-2})^2 + (x^{2+p})^2 - 2\,x^{2-p} \,.\, x^{p-2} - 2\,x^{2-p} \,.\, x^{2+p} + 2\,x^{p-2} \,.\, x^{2+p} = x^{4-2p} + x^{2p-4} + x^{4+2p} - 2\,x^{2-p+p-2} - 2\,x^{2-p+2+p} + 2\,x^{p-2+2+p} = x^{4-2p} + x^{2p-4} + x^{4+2p} - \mathbf{2} - \mathbf{2}\,x^4 + \mathbf{2}\,x^{2p}.$$

---

30. ***Изведи***: $(x^p - 2 - x^{-p})^3$.

$$[(x^p-2)-x^{-p}]^3 = (x^p-2)^3 - 3\,(x^p-2)^2 \,.\, x^{-p} + 3\,(x^p-2) . (x^{-p})^2 - (x^{-p})^3 = (x^p)^3 - 3\,(x^p)^2 \,.\, 2 + 3 \,.\, x^p \,.\, 4 - 8 - 3\,x^{-p} \,.\, (x^{2p} - 4\,x^p + 4) + 3 \,.\, x^{-2p} \,.\, (x^p - 2) - x^{-3p} =$$

$$\begin{array}{r}
= x^{3p} - 6\,x^{2p} + 12\,x^p - 8 \phantom{- 12\,x^{-p} + 3\,x^{-p} - 6\,x^{-2p} - x^{-3p}} \\
- 3\,x^p + 12 - 12\,x^{-p} \phantom{- 6\,x^{-2p} - x^{-3p}} \\
+ 3\,x^{-p} - 6\,x^{-2p} - x^{-3p} \\
\hline
x^{3p} - 6\,x^{2p} + 9\,x^p + 4 - 9\,x^{-p} - 6\,x^{-2p} - x^{-3p}.
\end{array}$$

Можеш још учинити и то, да све потенције претвориш у потенције с позитивним експонентом:

$$x^{3p} - 6\,x^{2p} + 9\,x^p + 4 - \frac{9}{x^p} - \frac{6}{x^{2p}} - \frac{2}{x^{3p}} =$$

$$= \frac{1}{x^{3p}} \cdot (x^{6p} - 6\,x^{5p} + 9\,x^{4p} + 4\,x^{3p} - 9\,x^{2p} - 6\,x^p - 1).$$

До истога би резултата дошао и тако, да си пре кубирања извео следећу промену у заданом триному:

$$x^p - 2 - x^{-p} = x^p - 2 - \frac{1}{x^p} = \frac{1}{x^p}\,(x^{2p} - 2\,x^p - 1).$$

---

31. *Докажи, да је*: $(1 + x)^{n+1} - (1 + x)^{n-1} = x \,.\, (1 + x)^n \,.\, (2 + x)$.

$$(1 + x)^{n+1} - (1 + x)^{n-1} = (1 + x)^n \,.\, \left(1 + x - \frac{1}{1 + x}\right) =$$

32. *Израз:* $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=N$ претвори у продукт бинома.

Први члан кубирај: $(a+b+c)^3=[(a+b)+c]^3=(a+b)^3+$ $+3(a+b)^2c+3(a+b).c^2+c^3=a^3+b^3+c^3+3ab.(a+b)+$ $+3(a+b)^2.c+3(a+b).c^2$.

Дакле је: $N=3ab.(a+b)+3(a+b)^2.c+3(a+b).c^2=$ $=3(a+b).(ab+ac+bc+c^2)=3(a+b).[a(b+c)+c(b+c)]=$ $=\mathbf{3(a+b)(b+c)(a+c)}$.

* * *

33. *Упрости израз:* $\frac{x^n}{(x+y)^n}+\frac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}}-\left(\frac{x}{x+y}\right)^{n-2}=A$.

$$A=\frac{x^n}{(x+y)^n}+\frac{2x^{n-1}}{(x+y)^n.(x+y)^{-1}}-\frac{x^{n-2}}{(x+y)^n.(x+y)^{-2}}=$$

Фактор с негативним експонентом прелази из именитеља у бројитељ с промењеним предзнаком експонента.

$$A=\frac{x^n}{(x+y)^n}+\frac{2x^{n-1}(x+y)}{(x+y)^n}-\frac{x^{n-2}(x+y)^2}{(x+y)^n}=$$

$$=\frac{1}{(x+y)^n}\cdot[x^n+2x^n+2x^{n-1}.y-x^{n-2}.(x^2+2xy+y^2)]=$$

$$=\frac{1}{(x+y)^n}\cdot(x^n+2x^n+2x^{n-1}.y-x^n-2x^{n-1}.y-x^{n-2}.y^2)=$$

Након укидања супротних чланова:

$$=\frac{1}{(x+y)^n}\cdot(2x^n-x^n.x^{-2}.y^2)=\left(\frac{x}{x+y}\right)^n\cdot\left(2-\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Или: $A=\frac{x^n}{(x+y)^n}+\frac{2x^n.x^{-1}}{(x+y)^n.(x+y)^{-1}}-\frac{x^n.x^{-2}}{(x+y)^n.(x+y)^{-2}}$,

па извади заједнички фактор $\frac{x^n}{(x+y)^n}$, а степенове с негативним експонентом преведи у степенове са позитивним експонентом, превођењем из бројитеља у именитељ и обрнуто.

$A=\frac{x^n}{(x+y)^n}\cdot\left[1+\frac{2(x+y)}{x}-\frac{(x+y)^2}{x^2}\right]$. И т д.

34. *Изведи делење:* $(a^{-8m}-1):(a^{-2m}-1)$.

$$\begin{array}{l}
(a^{-8m}-1):(a^{-2m}-1)=a^{-6m}+a^{-4m}+a^{-2m}+1 \\
\underline{\begin{array}{l} a^{-8m}-a^{-6m} \\ - \quad\ + \end{array}} \\
\qquad a^{-6m}-1 \\
\qquad \underline{\begin{array}{l} a^{-6m}-a^{-4m} \\ - \quad\ + \end{array}} \\
\qquad\qquad a^{-4m}-1 \\
\qquad\qquad \underline{\begin{array}{l} a^{-4m}-a^{-2m} \\ - \quad\ + \end{array}} \\
\qquad\qquad\qquad a^{-2m}-1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\begin{array}{l} a^{-2m}-1 \\ - \quad\ + \end{array}} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

* * *

35. *Ако је* $a+b+c=o$, *онда је* $a^3+b^3+c^3=3\,a\,b\,c$. *Докажи.*

Из $a+b+c=o$ излази: $a+b=-c$. Кубирај: $a^3+3\,a^2\,b+3\,ab^2+b^3=-c^3$. Одатле:

$$a^3+b^3+c^3+3\,ab\,.\,(a+b)=o\,.$$

Дакле: $a^3+b^3+c^3=\mathbf{3\,a\,b}\,c.$

* * *

36. *Помоћу Паскаловог троугла развиј потенцију:* $(x^3-x^2y)^7$

Састави Паскалов троугао до 8. ретка:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

Тај редак даје коефицијенте 7. потенције бинома. У првом члану долази $(x^3)^7$, у другом $(x^3)^6$, и т. д. до 8. члана, где долази $(x^3)^0=1$. У првом члану долази $(x^2y)^0$, у другом $(x^2y)^1$, у трећем $(x^2y)^2$, и т. д. до 8. члана, где долази $(x^2y)^7$. Предзнаци алтернирају, јер су негативни само они чланови, у којима долази $-x^2y$ у

$$(x^3-x^2y)^7=(x^3)^7-7(x^3)^6.x^2y+21.(x^3)^5.(x^2y)^2-35(x^3)^4.(x^2y)^3+$$
$$+35(x^3)^3.(x^2y)^4-21(x^3)^2.(x^2y)^5+7x^3.(x^2y)^6-(x^2y)^7=x^{21}-$$
$$-\mathbf{7}x^{20}y+\mathbf{21}x^{19}y^2-\mathbf{35}x^{18}y^3+\mathbf{35}x^{17}y^4-\mathbf{21}x^{16}y^5+$$
$$+\mathbf{7}x^{15}y^6-x^{14}y^7.$$

* * *

37. *Коју реелну вредност мора имати x, да 4. члан развијене потенције $(x^2-3x^{-2})^8$ има вредност $a=-\frac{189}{2}$?*

Састави Паскалов троугао до 9. ретка, који гласи: 1, 8, 28, ***56***, 70, 56, 28, 8, 1; четврти члан има коефицијент 56. Чланови полинома $(x-y)^8$ почину са x^8y^0, свршавају са x^0y^8, а поредани су тако, да експоненти потенција x правилно опадају од 8 до 0, а експоненти потенција y правило расту од 0 до 8. Дакле ће 4. члан гласити: $-56x^{10}.(3x^{-2})^3$; има негативан знак, јер члан $-3x^{-2}$ долази у непарној потенцији. Према тому има да постоји једначина:

$-56x^{10}.27x^{-6}=-\frac{189}{2}$. Одатле након крађења: $8x^4=\frac{1}{2}$,

и реелно решење: $x=\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

* * *

38. *Изведи:* $\sqrt{x^4-6x^3y+17x^2y^2-24xy^3+16y^4}$.

$$\sqrt{\{x^4-6x^3y+17x^2y^2-24xy^3+16y^4\}}=x^2-\mathbf{3}xy+\mathbf{4}y^2$$
$$\underline{-x^4\qquad\qquad}$$
$$-6x^3y+17x^2y^2\quad:(2x^2-3xy).(-3xy)$$
$$-6x^3y+\ \ 9x^2y^2$$
$$\underline{+\qquad-\qquad}$$
$$8x^2y^2-24xy^3+16y^4\quad:(2x^2-6xy+4y^2).4y^2$$
$$8x^2y^2-24xy^3+16y^4$$
$$\underline{-\qquad+\qquad-}$$
$$0$$

* * *

39. *Ако су у правоуглом троуглу мерни бројеви катета цели бројеви облика $a=2n+1$, $b=2n(n+1)$, онда је и мерни број хипотенузе цео број. Докажи!*

По Питагорином је правилу $c=\sqrt{a^2+b^2}$, т. ј.:

дакле: $c = \sqrt{4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1} = 2n^2 + 2n + 1$

$$\begin{array}{l}
8n^3 + 8n^2 \ldots\ldots : (4n^2 + 2n)\,.\,2n \\
8n^3 + 4n^2 \\
- \qquad - \\
\hline
\qquad 4n^2 + 4n + 1 : (4n^2 + 4n + 1)\,.\,1 \\
\qquad 4n^2 + 4n + 1 \\
\qquad - \qquad - \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Дакле је у тому случају $\mathbf{c = 2n(n + 1) + 1}$, а то је за свако цело n цео број. Нађи примере за ово.

---

40. *Изведи:* $\sqrt[3]{\{x^{3p} - 6x^{2p} - 9x^{-p} - x^{-3p} + 9x^p - 6x^{-2p} + 4\}}$.

Радиканд најпре поређај по потенцијама x тако, да експоненти или расту или падају.

$$\sqrt[3]{\{x^{3p} - 6x^{2p} + 9x^p + 4 - 9x^{-p} - 6x^{-2p} - x^{-3p}\}} = x^p - \mathbf{2} - x^{-p}$$

$$\begin{array}{l}
- x^{3p} \\
\hline
\quad - 6x^{2p} + 9x^p + 4 \qquad\qquad : 3x^{2p}\,.\,(-2) \\
\quad - 6x^{2p} + 12x^p - 8 \qquad\qquad 3x^p\,.\,(-2)^2 \\
\quad + \qquad - \qquad + \qquad\qquad (-2)^3 \\
\hline
\qquad - 3x^p + 12 - 9x^{-p} - 6x^{-2p} - x^{-3p} : 3.(x^p - 2)^2.(-x^{-p}) \\
\qquad - 3x^p + 12 - 12x^{-p} \qquad\qquad 3\,.\,(x^p - 2)\,.\,x^{-2p} \\
\qquad + \qquad - \qquad + \\
\qquad\qquad + 3x^{-p} - 6x^{-2p} - x^{-3p} \qquad\qquad (x^{-p})^3 \\
\qquad\qquad - \qquad + \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Упореди пример бр. 30, стр. 20.

---

41. *Израчунај првих 5 чланова корена:* $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$.

Можеш поступати двојако. 1.) Замени $\sqrt{x} = y$, израчунај

$$\sqrt[3]{1-y}=1-\frac{1}{3}y-\frac{1}{9}y^2-\frac{5}{81}y^3-\frac{10}{243}y^4-\dots$$

$$\begin{array}{ll}
-1 & \\
\hline
-y & :3\cdot\left(-\frac{1}{3}y\right)\\
\underset{+}{-}y\underset{-}{+}\frac{1}{3}y^2 & 3\cdot\left(\ \frac{1}{3}y\right)^2\\
\underset{+}{-}\frac{1}{27}y^3 & \left(-\frac{1}{3}y\right)^3\\
\hline
-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{27}y^3 & :\ 3\left(1-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}y^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{9}y^2\right)\\
\underset{+}{-}\frac{1}{3}y^2\underset{-}{+}\frac{6}{27}y^3\underset{+}{-}\frac{3}{81}y^4 & 3\cdot\left(1-\frac{1}{3}y\right)\cdot\left(-\frac{1}{9}y^2\right)^2\\
\underset{-}{+}\frac{3}{81}y^4\underset{+}{-}\frac{1}{81}y^6 & \left(-\frac{1}{9}y^2\right)^3\\
\underset{+}{-}\frac{1}{729}y^6 & \\
\hline
-\frac{5}{27}y^3+\frac{1}{81}y^5+\frac{1}{729}y^6 & :3M^2\cdot\left(-\frac{5}{81}y^3\right)\\
\underset{+}{-}\frac{5}{27}y^3\underset{-}{+}\frac{10}{81}y^4\underset{-}{+}\frac{5}{243}y^5\underset{+}{-}\frac{10}{729}y^6\underset{+}{-}\frac{5}{2187}y^7 & 3M\cdot\frac{25}{81}\cdot y^6\\
\underset{-}{+}\frac{25}{2187}y^6\underset{+}{-}\frac{25}{6561}y^7\underset{+}{-}\frac{25}{19683}y^8 & -\frac{125}{81^3}y^9\\
\underset{+}{-}\frac{125}{81^3}y^9 & \\
\hline
-\frac{10}{84}y^4-\frac{2}{243}y^5+\frac{8}{2187}y^6+\frac{40}{6561}y^7+\frac{25}{19683}y^8+\frac{125}{81^3}y^9 &
\end{array}$$

и т. д.

У последњем израчунавању M значи:

$$M=1-\frac{1}{3}y-\frac{1}{9}y^2.$$

Дакле je: $\sqrt[3]{1-y}=1-\frac{1}{3}y-\frac{1}{9}y^2-\frac{5}{81}y^3-\frac{10}{243}y^4-\dots$

Замени овде: $y=\sqrt{x}, y^2=x$, и т. д.:

2. Ако замениш овако: $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, можеш вадити $\sqrt[3]{\;}$ директно с мањим потешкоћама:

$$\sqrt[3]{1-x^{\frac{1}{2}}}=1-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{9}x-\frac{5}{81}x^{\frac{3}{2}}-\frac{10}{243}x^{2}-\cdots\cdots$$

$$\begin{array}{ll}
\underset{-}{1} & \\
\hline
-x^{\frac{1}{2}} & :3.\left(-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)\\
\underset{+}{-}x^{\frac{1}{2}}\underset{-}{+}\frac{1}{3}x & 3.1.\left(-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\\
\qquad\underset{+}{-}\frac{1}{27}x^{\frac{3}{2}} & \left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^{3}\\
\hline
-\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}x^{\frac{3}{2}} & :3.\left(1-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{9}x\right).\left(-\frac{1}{9}x\right)\\
\underset{+}{-}\frac{1}{3}x\underset{-}{+}\frac{6}{27}x^{\frac{3}{2}}\underset{+}{-}\frac{3}{81}x^{2} & 3\left(1-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\right).\left(-\frac{1}{9}x\right)^{2}\\
\qquad\underset{-}{+}\frac{3}{81}x^{2}\underset{+}{-}\frac{1}{81}x^{\frac{5}{2}} & \left(-\frac{1}{9}x\right)^{3}\\
\qquad\qquad\underset{+}{-}\frac{1}{729}x^{3} & \\
\hline
-\frac{5}{27}x^{\frac{3}{2}}\qquad+\frac{1}{81}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{729}x^{3} &
\end{array}$$

и т. д.

42. *Докажи, да вредности* $x=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $y=\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

задовољују једначину: $y+\sqrt[3]{x\,y^{2}}=b$.

Замени те вредности у леву страну једначине.

$$\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{b^{3}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2}}}=\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\,.$$

$$\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\left(\sqrt{b}+\sqrt[3]{\sqrt{a^{3}}}\right)=\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\left(\sqrt{b}+\sqrt{\sqrt[3]{a^{3}}}\right)=$$

$$=\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}(\sqrt{b}+\sqrt{a})=b$$

43. *Докажи да је:*

$$\frac{\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{\sqrt[3]{a\sqrt{a}+\sqrt{a^3-b^3}}\,.\,\sqrt[3]{a.\sqrt{a}-\sqrt{a^3-b^3}}}=2\,\frac{a+b.}{b}$$

У бројитељу квадрирај бином, а у именитељу помножи коренове:

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}+a-\sqrt{a^2-b^2}+2\sqrt{(a+\sqrt{a^2-b^2}).(a-\sqrt{a^2-b^2})}}{\sqrt[3]{(a\sqrt{a}+\sqrt{a^3-b^3})\,.\,(a\sqrt{a}-\sqrt{a^3-b^3})}}=$$

$$=\frac{2a+2\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}}{\sqrt[3]{a^3-(a^3-b^3)}}=\mathbf{2.}\,\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{b}}\,.$$

---

44. *Израчунај:* $N=\sqrt{\dfrac{a+b+c}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}}\,.\,\sqrt{\dfrac{ab+ac+bc}{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}}}\,.$

$$N=\sqrt{\frac{(a+b+c).\,abc}{bc+ac+ab}}\,.\sqrt{\frac{(ab+ac+bc).\,abc}{a+b+c}}=\sqrt{(abc)^2}=\boldsymbol{abc}$$

---

45. *Сабери и рацијонализирај именитеље:*

$$\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3}+\frac{2}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}\,.$$

Решење. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3=3\sqrt{3}-9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-2\sqrt{2}=9\sqrt{3}-11\sqrt{2};$

$$\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3}+\frac{2}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=\frac{1}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}+\frac{2}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{3}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}=\frac{3(9\sqrt{3}+11\sqrt{2})}{(9\sqrt{3}-11\sqrt{2}).(9\sqrt{3}+11\sqrt{2})}=\mathbf{3\,.(9\,\sqrt{3}+11\sqrt{2})}$$

---

46. *Редукуј израз:* $\sqrt{7-\sqrt{3}-\sqrt{10}}.\sqrt{7-\sqrt{3}+\sqrt{10}}-\dfrac{3+2\sqrt{21}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}$

Изведи множење у првом члану, па добиваш:

$$=\sqrt{(7-\sqrt{3})^2-10}-\frac{3+2\sqrt{21}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}=\sqrt{14\,(3-\sqrt{3})}-\frac{3+2\sqrt{21}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}=$$

$$= \frac{\sqrt{14(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} - 3 - 2\sqrt{21}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{21} - 3 - 2\sqrt{21}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} = \frac{-3\sqrt{3+\sqrt{3}}}{3+\sqrt{3}} = \frac{-3(3-\sqrt{3})\sqrt{3+\sqrt{3}}}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 3) \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}} \cdot$$

47. *Израчунај*:

$$A = \sqrt[n+1]{a^n . b^{3-2n} . (c^{p+n})^2} . \sqrt[n+1]{a^{n-1} b^{n-2} c^{1-2p}} : \sqrt[n+1]{\frac{b^2}{a^3 c}}.$$

$$A = \sqrt[n+1]{a^n . a^{n-1} . b^{3-2n} . b^{n-2} . c^{2p+2n} . c^{1-2p}} . \sqrt[n+1]{a^3 . c . b^{-2}} =$$

$$= \sqrt[n+1]{a^{n+n-1+3} . b^{3-2n+n-2-2} . c^{2p+2n+1-2p+1}} = \sqrt[n+1]{a^{2n+2} . b^{-n-1} . c^{2n+2}} =$$

$$= \sqrt[n+1]{\left(\frac{a^2 c^2}{b}\right)^{n+1}} = \frac{a^2 c^2}{b}.$$

48. *Упрости израз*: $A = \dfrac{ac.\sqrt[3]{\dfrac{a b^4}{c^2}} \cdot \sqrt[12]{a^5 b^9 c^5}}{\sqrt[6]{\dfrac{b^5 c^3}{a^5}} \cdot \sqrt[8]{a^2 b^3 c^5}}$.

Доведи све коренове на једнак експонент, који је најмањи заједнички садржатељ заданих експонената. Вредност се корена не мења, ако му се експонент радиканда и експонент корена помноже истим бројем. Тако је:

$$A = \frac{\sqrt[24]{a^{24} c^{24}} \cdot \sqrt[24]{\dfrac{a^8 b^{32}}{c^{16}}} \cdot \sqrt[24]{a^{10} b^{18} c^{10}}}{\sqrt[24]{\dfrac{b^{20} . c^{12}}{a^{20}}} \cdot \sqrt[24]{a^6 . b^9 . c^{15}}} = \frac{\sqrt[24]{a^{24+8+10} . b^{32+18} . c^{24+10-16}}}{\sqrt[24]{a^{6-20} b^{20+9} c^{12+15}}} =$$

$$= \sqrt[24]{\frac{a^{42}.\,b^{50}.\,c^{18}}{a^{-14}.b^{29}.c^{27}}} = \sqrt[24]{\frac{a^{56}\,.\,b^{21}}{c^{9}}} = \sqrt[24]{\frac{a^{48}.a^{8}.b^{21}}{c^{9}}} =$$

$$= a^{2}.\sqrt[24]{a^{8}}.\sqrt[24]{\frac{b^{21}}{c^{9}}} = a^{2}.\sqrt[3]{a}.\ \sqrt[8]{\frac{b^{7}}{c^{3}}}$$

* * *

49. *Подели*: $(a-b):\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)$.

$$(a-b):\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right) = a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^{2}} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^{2}}.$$

$$\begin{array}{l}
a - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} \\
- \quad + \\
\hline
\qquad a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b \\
\qquad a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} \\
\hline
\qquad\qquad a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} - b \\
\qquad\qquad a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} - b \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Или овако: постави $a^{\frac{1}{3}} = x$, $b^{\frac{1}{3}} = y$; тада је $a = x^{3}$, $b = y^{3}$. Тим задатак претвараш у овакво дељење: $(x^{3}-y^{3}):(x-y) = x^{2}+xy+y^{2}$. У овому количнику замени: $x^{2} = a^{\frac{2}{3}}$, $y^{2} = b^{\frac{2}{3}}$, па добиваш предходни резултат.

* * *

50. *Развиј потенцију*: $\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{3}}$.

$\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^{5}}$ — Радиканд дигни на 5. степен помоћу Паскалова троугла, који даје коефицијенте чланова: 1, 5, 10, 10, 5, 1. Добиваш: $\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^{5} = a^{\frac{5}{2}} - 5\,a^{2}.\,a^{-\frac{1}{2}} + 10\,a^{\frac{3}{2}}.\,a^{-1} - 10\,a.\,a^{-\frac{3}{2}} + 5\,a^{\frac{1}{2}}.\,a^{-2} - a^{-\frac{5}{2}} = a^{\frac{5}{2}} - 5\,a^{\frac{3}{2}} + 10\,a^{\frac{1}{2}} - 10\,a^{-\frac{1}{2}} + 5\,a^{-\frac{3}{2}} - a^{-\frac{5}{2}} = a^{\frac{5}{2}} - 5\,a^{\frac{3}{2}} + 10\,a^{\frac{1}{2}} - \frac{10}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{5}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{2}}}\cdot(a^{5} - 5\,a^{4} + 10\,a^{3} - 10\,a^{2} + 5\,a - 1) =$

$= \frac{1}{\;\;}\cdot(a^{5} - 5\,a^{4} + 10\,a^{3} - 10\,a^{2} + 5\,a - 1).$

Дакле је:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}} \cdot \sqrt[3]{\{a^5 - 5a^4 + 10a^3 - 10a^2 + 5a - 1\}}.$$

---

51 *Израчунај*: $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(5 - 3\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}}$.

Доведи коренове на једнак експонент и онда измножи:

$$\sqrt[6]{(2 + \sqrt{3})^3} \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{(5 - 3\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt[6]{26 + 15\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{26 - 15\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt[6]{26^2 - 3 \,.\, 15^2} = \mathbf{1}.$$

---

52. *Израчунај*:

$$\sqrt[6]{\{x^6 - 12x^5y + 60x^4y^2 - 160x^3y^3 + 240x^2y^4 - 192xy^5 + 64y^6\}}$$

Напутак: $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$ или $= \sqrt{\sqrt[3]{a}}$; према тому извади квадратни корен из тога полинома, а одатле кубни, или обрнуто. Решење: $\boldsymbol{x - 2y}$.

---

53. *Редукуј разломке:*

$$\frac{2a - ib}{a^2 + b^2} + \frac{a}{a + ib} - \frac{ib}{a - ib} = A.$$

Доведи их на једнак именитељ. Први се именитељ раствара у ове комплексне факторе: $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$; према тому он је заједнички именитељ.

$$A = \frac{2a - ib + a(a - ib) - ib(a + ib)}{(a + ib)(a - ib)} =$$

$$= \frac{2a - ib + a^2 - iab - iab + b^2}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a^2 + b^2 - 2iab + 2a - ib}{a^2 + b^2} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{a^2 + b^2 + 2a}{a^2 + b^2} - i\,\frac{b(1 + 2a)}{a^2 + b^2}}.$$

---

54. *Израчунај*: $\frac{(1 - i)^5}{(1 + 2i)^4} : (31i + 17)$.

јитељ и именитељ разломка. Пази на потенције броја i! Добићеш: $(1-i)^5 = -4(1-i)$, $(1+2i)^4 = -7-24i$,

$$\frac{(1-i)^5}{(1+2i)^4} = \frac{4(1-i)}{7+24i} = \frac{4(1-i)(-7-24i)}{625} = \frac{-4(17+31i)}{625};$$

$$\frac{(1-i)^5}{(1+2i)^4} : (31i+17) = -\mathbf{\frac{4}{625}}.$$

55. *Докажи, да су у примеру бр. 117. коренови* x_2 *и* x_3 *реципрочни, т. ј. да је* $x_2 = \frac{1}{x_3}$.

$$x_2 = \frac{-1+3i\sqrt{7}}{8}, \quad x_3 = \frac{-1-3i\sqrt{7}}{8}, \quad \frac{1}{x_2} = \frac{8}{-1+3i\sqrt{7}}.$$

У овому разломку реализирај именитељ множећи и делећи разломак са комплексно конјугираном вредношћу именитеља:

$$\frac{1}{x_2} = \frac{8}{-1+3i\sqrt{7}} \cdot \frac{-1-3i\sqrt{7}}{-1-3i\sqrt{7}} = \frac{8(-1-3i\sqrt{7})}{1+9.7} =$$

$$= \frac{8(-1-3i\sqrt{7})}{64} = \frac{-1-3i\sqrt{7}}{8} = x_3.$$

56. *Докажи, да су коренови* y_2 *и* y_3 *у примеру бр. 123 реципрочни, т. ј., да је:* $y_2 = \frac{1}{y_3}$.

$$y_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad y_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{y_3} = \frac{2}{-1-i\sqrt{3}}.$$

Реализирај именитељ множењем и делењем разломка са конјугирано комплексном вредношћу именитеља:

$$\frac{1}{y_3} = \frac{2}{-1-i\sqrt{3}} \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{2(-1+i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = y_2.$$

57. *Израчунај:* $\left(\frac{3}{2-i\sqrt{3}} - \frac{1}{2+i\sqrt{3}}\right) : \frac{3+i\sqrt{3}}{7}$.

Решење: $\frac{3(2+i\sqrt{3})-(2-i\sqrt{3})}{(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})} \cdot \frac{7}{3+i\sqrt{3}} =$

$$= \frac{4+4i\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{7(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})} = \frac{4(1+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}{12} =$$

$$= \frac{3+3i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{} = \frac{2}{}(3+i\sqrt{3}).$$

58. *Реши ову једначину првога степена:*

$$x - \{3\,x - [2\,x - (4\,x - 1)] - 3\} = 2\,x - (x + 6).$$

Ослободи се заграда:

$$x - 3\,x + 2\,x - (4\,x - 1) + 3 = 2\,x - (x + 6)$$
$$x - 3\,x + 2\,x - 4\,x + 1 + 3 = 2\,x - x - 6$$

Пренеси познате чланове на десну страну, а непознате на леву:

$$x - 3\,x - 4\,x + x = -6 - 1 - 3.$$

Након редуковања: $\underset{+}{-}\,5\,x = \underset{+}{-}\,10$; $x = \mathbf{2}.$

---

59. *Реши једначину: $3 - 3.[x - 3.(x + 2)] = 15 - 2.(x + 1)$.*

Ослободи се заграда множењем (полином са мономом!)*:*

$$3 - 3\,x + 9\,(x + 2) = 15 - 2\,(x + 1),$$

$3 - 3\,x + 9\,x + 18 = 15 - 2\,x - 2$; коначно: $x = 1.$

---

60. *Реши једначину:*

$$\frac{5\,x + 2}{4} - 4.\left(\frac{2\,x - 3}{18} - \frac{3\,x + 1}{9}\right) = 2\,x - \left(2 - \frac{6\,x + 1}{6}\right).$$

Једначина садржи разломке и заграде; ослободи се најпре заграда:

$$\frac{5\,x + 2}{4} - \frac{8\,x - 12}{18} + \frac{12\,x + 4}{9} = 2\,x - 2 + \frac{6\,x + 1}{6}.$$

Ослободи се разломака множењем са најмањим заједничким имениteљем; тај је 36. Добиваш:

$$45\,x + 18 - 16\,x + 24 + 48\,x + 16 = 72\,x - 72 + 36\,x + 6.$$

Пренеси чланове, па редукуј:

$$\left.\begin{array}{r} +\,45\,x - 16\,x \\ 48\,x - 72\,x \\ -\,36\,x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{rr} +\,6 & -\,72 \\ & -\,18 \\ & -\,24 \\ & -\,10 \end{array}\right.$$

$$\underset{+}{-}\,31\,x = \underset{+}{-}\,124; \qquad x = \mathbf{4}.$$

---

61. *Реши једначину:*

$$1 - 1 \,.\, \{1\; x + 1 \,.\, [2 - 2\,(1\; x - 1)]\} - 1 \,.$$

Ослободи се заграда; оне су множене са мономима. Добиваш редом:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\left[2-2.\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\underset{+}{-}\frac{1}{6}x\underset{+}{-}\frac{1}{3}\underset{-}{+}\frac{1}{9}x\underset{+}{-}\frac{1}{6}=0 \qquad |\cdot(-1)$$

Ослободи се разломака множењем са заједничким именитељем 18 и редукуј. Коначно: $x=-9$.

---

62. *Реши једначину:* $\dfrac{x+a+b}{x+a}=\dfrac{x-a-b}{x-a}+\dfrac{a^2-b^2}{x^2-a^2}\cdot$

Помножи са заједничким именитељем $(x-a).(x+a)$

$$(x^2-a^2)+b(x-a)=(x^2-a^2)-b(x+a)+a^2-b^2$$

$$bx-ab=-bx-ab+a^2-b^2$$

$$2bx=a^2-b^2, \qquad x=\frac{a^2-b^2}{2b}$$

---

63. *Реши једначинама првога степена једначину:*

$$a-b-x=a^2-2ab+b^2-x^2.$$

Једначина је квадратна, али се растварањем на факторе даде решити једначинама првога степена. Можеш је писати овако: $a-b-x=(a-b)^2-x^2$,

$$(a-b)-x-[(a-b)-x].[(a-b)+x]=0$$

[десна је страна растворена на факторе према обрасцу (1 а)] Извади заједнички фактор $(a-b)-x$:

$(a-b-x).[1-(a-b+x)]=0.$ Ако је производ двају фактора раван нули, довољно је, да је један фактор нула; према томе се задана једначина распада на ове две: $a-b-x=0$, која даје решење: $x=a-b$, и на: $1-a+b-x=0$, која даје решење: $x=1+b-a$.

---

64. *Реши систем једначина:* $\begin{cases}3x+2y+2z=10\\ x-3y-4z=-3\end{cases}$

1. *методом поредбе (компарације)*, 2. *методом замене (супституције)*, 3. *методом једнаких коефицијената*, 4. *Безуовом методом*.

1. Из свих 3 једначина изрази исту непознату помоћу других, н. пр. x :
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{10-2y-2z}{3} \\ x &= 3y+4z-3 \\ x &= \frac{20-5y+z}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots /1/.$$

Поредбом првих двеју добиваш једначину: $10x-2y-2z=3(3y+4z-3)$, а поредбом друге са трећом: $2(3y+4z-3)=20-5y+z$. Ове 2 нове једначине добивају облик: $\left\{\begin{aligned} 11y+14z&=19 \\ 11y+7z&=26 \end{aligned}\right.$, а из њих: $\left\{\begin{aligned} y&=\frac{19-14z}{11} \\ y&=\frac{26-7z}{11} \end{aligned}\right.$ ……/2/

Одатле поредбом: $19-14z=26-7z$, $\mathbf{z=-1}$. Заменом ове вредности у /2/ добиваш: $\boldsymbol{y=3}$, а заменом у /1/: $\boldsymbol{x=2}$.

2. Из једне једначине изрази једну непознату помоћу осталих и то замени у остале 2 једначине. Бирај дакако ону непознату, која има најмањи коефицијенат. Из друге: $x=3y+4z-3$. Заменом у остале две: $\left\{\begin{aligned} 3(3y+4z-3)+2y+2z&=10 \\ 2(3y+4z-3)+5y-z&=20. \end{aligned}\right.$

Ове једначине, уређене, гласе: $\left\{\begin{aligned} 11y+14z&=19 \\ 11y+7z&=26. \end{aligned}\right.$

Из прве: $y=\dfrac{19-14z}{11}$, а заменом тога у другу: $19-14z+7z=26$. Одатле $z=-1$, и т. д.

3. Згодним множењем доведи исту непознату у свима једначинама на исти коефицијенат. Ако већ нису знакови противни, помножи једну једначину с негативним бројем. Бирај непознату тако, да имаш да множиш са чим мањим бројевима. Н. пр. овде x можеш довести на заједнички коефицијент *6*: прву помножи са *2*, другу се *— 6*, трећу са *3*. Добиваш:

$$\left.\begin{aligned} 6x+4y+4z&=20 \\ -6x+18y+24z&=18 \\ 6x+15y-3z&=60 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Сабирањем:} \\ &22y+28z=38 \\ &33y+21z=78 \end{aligned}$$

$\begin{cases}11y+14z=19\\11y+\;\;7z=26.\end{cases}$ Одузми другу од прве: $7z=-7, z=-$ -1, и т. д.

4. Помножи другу са слободним коефицијентом λ:

$$\left.\begin{array}{l}3x+2y\;\;+2z\;\;=10\\ \lambda x-3\lambda y-4\lambda z=-3\lambda\\ 2x+5y\;-\;\;\;z=20\end{array}\right\}$$ сабирањем првих 2 добиваш:

$(\lambda+3).x+y(2-3\lambda)+z.(2-4\lambda)=10-3\lambda$. Вредност λ одреди тако, да се н. пр. y докине, т. ј. да његов коефицијент буде O. Једначина $2-3\lambda=0$ даје: $\lambda=\frac{2}{3}$. Замени $\lambda=\frac{2}{3}$ у предходну једначину, па добиваш: $\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}z=8$, или: $11x-2z=24$ ..../3/. — Сабирањем других двеју: $(\lambda+2)x+$ $+(5-3\lambda)y-(1+4\lambda)z=20-3\lambda$. Одабери и овде λ тако, да се иста непозната y докине. Из једначине $5-3\lambda=0$ следи: $\lambda=\frac{5}{3}$ Заменом ове вредности λ у једначину добиваш: $\frac{11}{3}x-$ $-\frac{23}{3}z=15$, или: $11x-23z=45$ ..../4/.

У систему једначина /3/ и /4/ помножи једну са слободним коефицијентом μ, н. пр. прву. Сабирањем са /4/ добиваш: $11x(\mu-1)+z(23-2\mu)=24\mu-45$. Одабери μ тако, да се н. пр. x докине; то је за $\mu=1$. Заменом у једначину добиваш: $21z=-21$, одатле: $z=-1$, и т. д.

Дакако, не мораш од почетка до краја поступати истом методом, него методу можеш мењати према тому, какви су коефицијенти. Н. пр. овде је у свим методама након елиминације прве непознате најзгодније, да нови добивени систем решаваш методом једнаких коефицијената, јер се једноставним одузимањем укида једна непозната. Посебна метода, која се кадкада употребљава код решавања система са 3—4 непознате, обрађена је у примерима 65. и 66.

---

65. *Има 4 броја, од којих се добивају збирови 9, 10, 11, 12, ако се саберу увек по 3 различита од њих. Који су то бро-*

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ y + z + u = 10 \\ z + u + x = 11 \\ u + x + y = 12. \end{cases}$$

Најбрже ћеш решити овај систем овако Сабери све 4 једначине; добиваш након краћења: $x + y + z + u = 14$. У ову нову једначину замени из прве $x + y + z = 9$, па добиваш: $9 + u = 14$, одатле $\mathbf{u = 5}$. Замењујући у исту једначину редом остале 3 једначине добиваш: $\mathbf{x = 4}$, $\mathbf{y = 3}$, $\mathbf{z = 2}$.

---

65 *Има 6 бројева таквих, да ако их 5 сабереш, а шести од тога збира одузмеш, добиваш редом бројеве: 34, 38, 42, 56, 58, 60. Који су то бројеви?*

Имаш овај систем једначина:

$$\begin{cases} x + y + z + t + u - v = 34 \\ x + y + z + t - u + v = 38 \\ x + y + z - t + u + v = 42 \\ x + y - z + t + u + v = 56 \\ x - y + z + t + u + v = 58 \\ -x + y + z + t + u + v = 60. \end{cases}$$

Опажаш, да у сваком вертикалном ступцу једна непозната долази 5 пута позитивно, а један пут негативно. Сабери свих 6 једначина; добиваш: $4(x + y + z + t + u + v) = 288$, и након краћења: $x + y + z + t + u + v = 72$. Одузми од ове једначине прву; добиваш: $2v = 38$, $\mathbf{v = 19}$. Ако одузмеш другу: $2u = 34$, $\mathbf{u = 17}$. И тако редом добиваш: $\mathbf{t = 15}$, $\mathbf{z = 8}$, $\mathbf{y = 7}$, $\mathbf{x = 6}$.

---

67. *У овим системима једначина одреди а тако, да једначине буду противуречне:*

1. $\begin{cases} (1 - 3a) \, . \, x + 2y = 5 \\ (4a + 2) \, . \, x - 3y = 7, \end{cases}$ | *2. $\begin{cases} (a + 1) \, . \, x + 5y = 6 \\ 5x + (a + 1) \, . \, y = 7. \end{cases}$

1. Прву једначину подели са 2, другу са -3, па добиваш

$$\begin{cases} \dfrac{1 - 3a}{2} x + y = \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{4a + 2}{3} x + y = -\dfrac{7}{3} \, . \end{cases}$$

Да ове једначине буду противуречне потребно је, да буду коефицијенти непознатих једнаки; т. ј.

једначине: $-20x+2y=5$ и $30x-3y=7$ или: $10x-y=$ $=-\frac{5}{2}$, $10x-y=\frac{7}{3}$, које су противуречне.

*2. Подели прву једначину са **5**, другу са $(a+1)$: $\frac{a+1}{5}x+y=\frac{6}{5}$, $\frac{5}{a+1}x+y=\frac{7}{a+1}$. Одатле једначина: $\frac{a+1}{5}=\frac{5}{a+1}$, која даје решења: $a_1=-\mathbf{6}$, $a_2=+\mathbf{4}$.
Добиваш једначине: $5x+5y=6$, $5x+5y=7$ и ове: $5x-5y=-6$, $5x-5y=7$.

68. *Реши применом изведених пропорција најкраћим путем пропорцију*: $7:\left(\sqrt{\frac{z^3+71}{2}}-7\right)=63:117.$

Постави: $\sqrt{\frac{z^3+71}{2}}=x$, па примени пропорцију (5) са $+$.

$(7+x-7):(63+117)=7:63, \qquad x:180=1:\mathbf{9}.$

Одатле: $x=20$, т. ј.: $\sqrt{\frac{z^3+71}{2}}=20$. Квадрирај, помножи са 2: $z^3+71=800$, $z^3=729$, $\mathbf{z=9}$.

69. *Исто тако*: $a:b=\left(a+\frac{1}{x-a}\right):\frac{1}{x-a}$.

Постави $\frac{1}{x-a}=z$ и примени пропорцију (5) са $-$:
$(a-b):(a+z-z)=b:z$, т. ј.: $(a-b):a=b:z$.
Одатле: $z=\frac{ab}{a-b}$, т. ј.: $\frac{1}{x-a}=\frac{ab}{a-b}$, $x-a=\frac{a-b}{ab}$,
$x=\frac{a-b}{ab}+a=\frac{\mathbf{a-b+a^2b}}{\mathbf{ab}}$.

70. *У пропорцији*: $(a+x):(b+x)=(a-x):(c-x)$ *изведи такве трансформације, да* x *остане слободно само у једном члану, а онда га израчунај.*

Примени пропорцију (6) сабирањем првога члана са трећим; добиваш: $2a:(b+c)=(a+x):(b+x)$.

добиваш: $(2a-b-c):(a-b)=2a:(a+x)$, а то можеш писати и овако: $(a+x):a=(a-b):(a-\frac{b+c}{2}$ · Примени на то још пропорцију (5), одузимањем другога члана од првога, па добиваш: $x:\left(\frac{b+c}{2}-b\right)=a:\left(a-\frac{b+c}{2}\right)$, или: $x:(c-b)=a:(2a-b-c)$. Одатле: $x=\frac{a(c \quad b}{2a-b-c}$ ·

* * *

71. *Реши једначину*: $\frac{\sqrt{x+23}-2}{\sqrt{x+23}+2}=\frac{5}{9}$.

Схвати ову једначину (изједначење двају разломака!) као пропорцију: $(\sqrt{x+23}-2):(\sqrt{x+23}+2)=5:9$; постави: $\sqrt{x+23}=y$, па примени пропорцију (7). Добиваш: $2y:(-4)=14:(-4)$, или: $y:1=7:1$; одатле: $y=7$, т. j.: $\sqrt{x+23}=7$, $x+23=49$, $x=\mathbf{26}$.

* * *

72. *Применом пропорција реши једначину*:

$$\frac{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\frac{a+b-2x}{a-b}.$$

Схвати ту једначину као пропорцију и примени изведену пропорцију (7); добиваш: $2\sqrt[3]{a-x}:(-2\sqrt[3]{x-b})=2(a-x):2(b-x)$. Пократи први и трећи са , други и четврти члан са (-2): $\sqrt[3]{a-x}:\sqrt[3]{x-b}=(a-x):(x-b)$. Кубирај: $(a-x):(x-b)=(a-x)^3:(x-b)^3$ .... /1/. Пократи први и трећи, други и четврти члан: $1:1=(a-x)^2:(x-b)^2$. Извади квадратни корен и измножи унутрашње и спољашње чланове: $a-x=x-b$. Одатле: $x_1=\frac{a+b}{2}$ · — Овакво решавање није потпуно, јер једначина има још коренова, који су садржани у факторима, којима је покраћена пропорција /1/, пошто ти фактори садрже и непознату x. Измножи у /1/ спољашње и унутрашње чланове. Добиваш једначину: $(a-x)(x-b)^3=(a-x)^3.(x-b)$, или: $(a-x).(x-b)^3-(a-x)^3.(x-b)=0$. Растави леву страну у факторе: $(a-x)(x-b).[(x-b)^2-(a-x)^2]=0$, и коначно: $(a-x).(x-b).[(x-b-a+x).(x \quad b+a-x)]=0$. Одатле следе ове једначине: $a-x=0$, $x-b=0$, $x-b-a+x=0$. $x-b+a-x=0$. Прве две дају коренове: $x_2=a$, $x_3=b$, Последња једначина даје $a=b$, а то је услов идентичности за задану једначину $(\infty=\infty)$.

* * *

73. *У једној пропорцији вредност односаја је 3, збир спољашњих чланова је за 2 мањи од збира унутрашњих чланова, а први је члан једнак збиру другога и четвртога члана. Нађи ту пропорцију.*

Ако су њезини чланови редом x, y, z, u, онда први услов даје једначине: $\frac{x}{y}=3$, $\frac{z}{u}=3$ ..../1/. Други услов даје једначину: $x+u+2=y+z$ ..../2/, а трећи услов: $x=y+u$ ..../3/. Систем једначина /1/, /2/, /3/ најлакше решаваш методом замене. Јер из /1/ излази: $x=3y$, $z=3u$, па кад то замениш у /2/ и /3/, добиваш: $3y+u+2=y+3u$ ..../4/ и: $u+y=3y$. Из ове последње следи: $u=2y$, а кад то замениш у /4/, добиваш једначину с једном непознатом. Резултат: $x=3$, $y=1$, $z=6$, $u=2$, а пропорција: $\boldsymbol{3 : 1 = 6 : 2}$.

* * *

74. *Нађи средњу хармоничку пропорционалу бројева:* $\frac{a-3b}{a^3-b^3}$, $\frac{a-3b}{a^3+b^3}$, *састави пропорцију и докажи њезину ваљаност.*

Средњу хармон. пропорционалу брже ћеш израчунати помоћу обрасца (4′) него помоћу (4). Добиваш:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^3-b^3}{a-3b}+\frac{a^3+b^3}{a-3b}\right)=\frac{a^3}{a-3b};\quad \text{одатле: } x=\frac{a-3b}{a^3}.$$

Пропорција гласи:

$$\left(\frac{a-3b}{a^3+b^3}-\frac{a-3b}{a^3}\right):\left(\frac{a-3b}{a^3}-\frac{a-3b}{a^3+b^3}\right)=\frac{a-3b}{a^3-b^3}:\frac{a-3b}{a^3+b^3},$$

или ако пократиш са $a-3b$:

$$\left(\frac{1}{a^3-b^3}-\frac{1}{a^3}\right):\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^3+b^3}\right)=\frac{1}{a^3-b^3}:\frac{1}{a^3+b^3}.$$

Производ спољашњих чланова је:

$$\frac{a^3-a^3+b^3}{a^3.(a^3+b^3).(a^3-b^3)}=\frac{b^3}{a^3.(a^6-b^6)};$$ производ унутрашњих:

$$\frac{a^3+b^3-a^3}{a^3(a^3-b^3)(a^3+b^3)}=\frac{b^3}{a^3(a^6-b^6)};$$

75. *Средња хармоничка пропорцијонала двају бројева односи се према квадрату њихове средње геометријске пропорцијонале као 1:10. Разлика тих бројева је за 6 мања од њихове средње аритметичке пропорцијонале. Који су то бројеви?*

Ако су то бројеви x и y, онда је њихова средња хармоничка пропорцијонала $\frac{2xy}{x+y}$, средња геометријска $\sqrt{xy}$, а средња аритметичка $\frac{x+y}{2}$. Први услов даје пропорцију: $\frac{2xy}{x+y} : xy = 1 ; 10$ или краћењем: $\frac{2}{x+y} ; 1 = 1 ; 10$ .... /1/, а други: $x - y + 6 = \frac{x+y}{2}$ .... /2/. Систем /1/, /2/ даје решење: $\boldsymbol{x = 12}$, $\boldsymbol{y = 8}$.

---

76. *Три се играча картају. A је почео са 10 динара, B са 57 динара, а C са 29 динара. На крају је B имао три пута више од A, а C је имао три пута толико, колико је A добио. Ко је добио, а ко изгубио и колико?*

Ако је A на крају игре имао x динара, онда је B имао $3x$, а C $3(x-10)$; збир овога даје оно, што су сва тројица имали у почетку, т. ј. $x + 3x + 3(x - 10) = 96$. Одавле $\boldsymbol{x = 18}$; дакле је A добио 8 динара, B је изгубио 3 динара, а C изгубио 5 динара.

---

77. *Колико грама бакра треба додати на 400 gr. злата чистоте 0·925, да се добије злато чистоте 0·750?*

Код овога и сличних задатака једначину састављаш на основу захтева: количина чистога злата у смеси мора бити равна збиру количина чистога злата у састојцима. У 400 грама злата чистоте 0·925 има 400.0·925 *gr*. чистога злата (чистота *1*). Бакар је злато чистоте O, па у x грама бакра има $0.x$ грама чистога злата. Тежина добивене смесе је $x + 400$, а количина чистога злата у њој; $0·750 . (x + 400)$. Тако једначина гласи: $0.x + 400 . 0·925 = 0·750 (x + 400)$, или: $37.40 = 3x + 1200$. Решење: $\boldsymbol{x = 93\frac{1}{3}}$ *gr*.

78. *Колико шпиритуса од $60^0/_0$ и од $80^0/_0$ треба помешати, да се добије 40 l шпиритуса од $75^0/_0$?*

Ако се од прве врсте узме x, а од друге y, мора бити $x+y=40$ ..../1/. У x литара прве врсте има 60 x литара апсолутног алкохола ($100^0/_0$), у y литара друге врсте $60y$ l апсол. алкохола, а у добивеним 40 l има 75.40 l апсол. алкохола. Па мора бити: $60x+80y=40.75$ ..../2/. Решење система /1/, /2/ даје решење проблема: $x=\mathbf{10}\,l$, $y=\mathbf{30}\,l$.

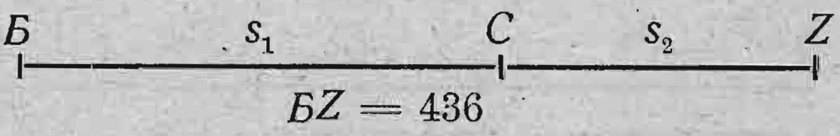
* * *

79. *Један базен напуни једна цев у 2 часа, друга га цев испразни у 3 часа, а трећа га испразни у 4 часа. Ако је базен пун, у колико ће се часова испразнити, кад су све три цеви отворене?*

Ако је запремина базена V, онда ће у један час прва цев напунити $\frac{V}{2}$, друга ће испразнити $\frac{V}{3}$, а трећа ће испразнити $\frac{V}{4}$. Након једнога часа биће у базену још воде: $V+\frac{V}{2}-\frac{V}{3}-\frac{V}{4}$. Ако су све три цеви отворене x часова, биће цео њихов рад: $\left(\frac{V}{2}-\frac{V}{3}-\frac{V}{4}\right)x$, а x треба одредити тако, да базен након x часова буде празан, т. ј. да буде: $V+\left(\frac{V}{2}-\frac{V}{3}-\frac{V}{4}\right)x=0$, или: $1+\frac{x}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=0$. Решење: $x=\mathbf{12}$ часова.

* * *

80. *Жељезничка линија од Београда до Загреба дугачка је 436 km. Из Београда је кренуо у 8^h путнички воз са средњом брзином 22 km на час, а из Загреба у 12^h кренуо је брзи воз пут Београда са средњом брзином 36 km на час. Када ће се састати и у којој даљини од Београда?*



1. слика.

Рецимо, да су се састали у тачки C; онда су они у том моменту превалили свих 436 km, који деле Београд од Загреба, т. ј. $s_1+s_2=436$. Ако је то било x часова након 8^h, путнички воз је кроз то време превалио пут $s_1 = 22\,x$. Брзи воз је био 4 часа мање на путу, па је превалио пут $s_2 = 36\,(x - 4)$. Тако имаш једначину: $22\,x + 36\,(x - 4) = 436$.

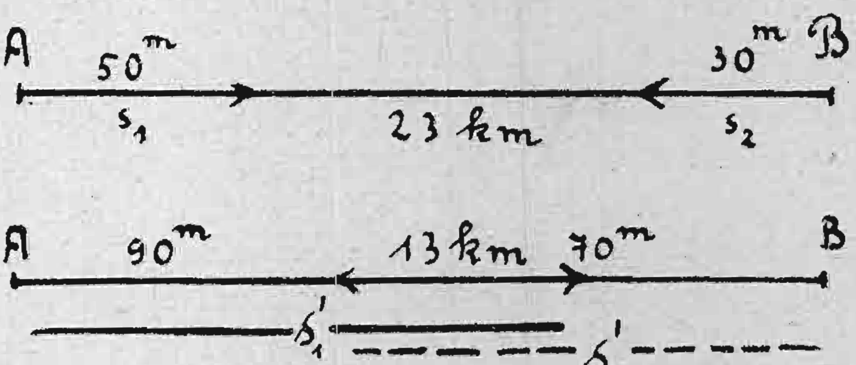
Решење: $x = 10$; т. ј. **састали су се у *18*^{h}** у даљини $22.10 = $ ***220*** *km* од Београда.

81. *Из Вел. Кикинде пође у 9^h коњаник пут Вел. Бечкерека и преваљује 12 km на час. У 13^h пошаљу из Драгутинова, које лежи на путу према Вел. Бечкереку, у раздаљености 18 km од Кикинде, за њим бициклисту, да му даду накнадно неко ново наређење. Када ће га бициклиста стићи, ако вози средњом брзином 27 km на час?*

2. слика.

Кажимо, да га је стигао у некој тачки C. Дотле је коњаник превалио пут $KC = s_1$, а бициклиста пут $DC = s_2$. Па видиш по слици, да је: $s_2 + 18 = s_1$. — Коњаник је био на путу x часова, па је превалио свега $s_1 = 12\,x$ *km*. Бициклиста је био на путу 4 часа мање, т. ј. $x - 4$ часа, па је превалио $s_2 = 27\,(x - 3)$ *km*. Онда је: $27\,(x - 4) + 18 = 12\,x$. Решење: $x = 6$, т. ј. **бициклиста га је стигао у *15*^{h}**, **2** часа након свога одласка из Драгутинова, у даљини ***72*** *km* од Кикинде.

82. *Са станица A и B, које су спојене двоструким трачницама, а међусобно раздаљене 60 km, крену 2 воза један према другому, и то воз из B крене 20^m након воза из A. 30^m након одласка воза из B они су још 23 km далеко један од другога, а иза нових 40^m, они су се мимоишли и опет удаљили за 13 km. Колико km превали сваки од тих возова на 1 час?*



3. слика.

Према 3. слици је: $s_1 + s_2 + 23 = AB$, и $s^1{}_1 + s^1{}_2 - 13 = AB$. Означи непознате брзине са x и y, време изради у часовима, па те једначине дају:

$$\begin{cases} \frac{50}{60}x + \frac{30}{60}y + 23 = 60, \\ \frac{90}{60}x + \frac{70}{60}y - 13 = 60, \text{ или: } \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}y = 37 \\ \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}y = 73. \end{cases}$$

Одатле: $x = 30\,km$, $y = 24\,km$.

83\. *4 друга имају да поделе 6925·5 динара тако, да други добије $\frac{4}{3}$ онога, што добива први; трећи $\frac{3}{5}$ онога, што добива други, а четврти $\frac{5}{6}$ онога, што добива трећи. Колико добива сваки?*

Ако први добива x, други добива $\frac{4}{3}x$, трећи $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3}x = \frac{4}{5}x$, а четврти $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{2}{3}x$. Збир појединих делова мора бити раван дељеном капиталу; т. ј.:

$x + \frac{4}{3}x + \frac{4}{5}x + \frac{2}{3}x = 6925{\cdot}5$, $x = \mathbf{1822{\cdot}5}$. Дакле добивају редом ове износе: 1822·5 дин., 2430 дин., 1458 дин, 1215 дин.

84\. *Кућевласник плаћа на кућу пореза 12% од онога, што добива за станарину. Кад је порез био повишен на 25% станарине, за колико процената мора повисити станарину, да му приход остане исти?*

Ако је станарина a, он плаћа пореза $\frac{12\,a}{100}$; дакле је његов приход: $a - \frac{12\,a}{100}$. Ако станарину повиси за $x\%$, онда ће она износити $a + \frac{ax}{100}$ и на њу ће плаћати пореза: $\frac{\left(a + \frac{ax}{100}\right) . 25}{100}$, па има приход: $a + \frac{ax}{100} - \frac{\left(a + \frac{ax}{100}\right) . 25}{100}$. Ова два прихода имају да буду једнака:

$$a - \frac{12\,a}{100} = a + \frac{ax}{100} - \frac{\left(a + \frac{ax}{100}\right) . 25}{100},$$ или након крађења са a:

$$\frac{12}{100}+\frac{x}{100}-\frac{\left(1+\frac{ax}{100}\right).25}{100}=0;\quad x=\mathbf{17\frac{1}{3}}\,\%.$$

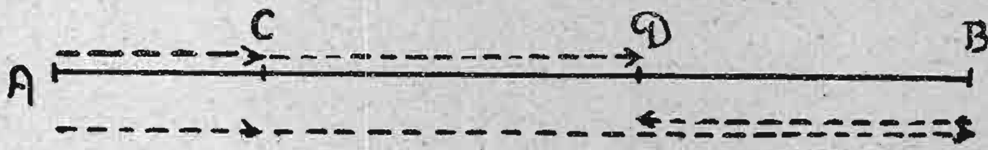
---

85. *Један број с 3 цифре је дељив са 4 и са 11. Збир његових цифара је 6; код пробе на дељивост са 11, помоћу разлике међу збировима цифара на парним и на непарним местима, добивена је разлика једнака нули. Ако се тај број подели са 4, добије се за 25 више од количника, који се добије код пробе на дељивост бројем 4. Који је то број?*

Његове су цифре x, y и z, па је збир његових цифара: $x+y+z=6$ .... /1/, а сам тај број гласи: $100x+10y+z$. Диференција, која се чини код пробе на дељивост бројем 11 је $(x+z)-y$, па је по задатку: $(x+y)-z=0$ .... /2/. Тај је број дељив са 4, ако је $10y+z$ дељиво са 4, а по задатку је: $\frac{100x+10y+z}{4}=\frac{10y+z}{4}+25$. Систем једначина, састављен од последње једначине и једначина /1/ и /2/ даје решење: $\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{y=3}$, $\boldsymbol{z=2}$, т. ј. тражени број је ***132***.

---

86. *Пешак пође у 7^h из места A у место B, које је удаљено $42\frac{1}{2}$ km. У 8^h крене из A у B бициклист, стигне пешака 12^m након свога одласка, дође у B, проборави ту 2 часа и на повратку у A сретне тачно у 12^h опет пешака, који још увек иде према B. Израчунај: а) колико km на час превали пешак, а колико бициклиста; б) када је сшигао бициклиста у B; в) у којој даљини од A су се састали први пут, у којој други пут.* (4. сл.)



4. сл.

Нека је пешак превањивао x km на час, а бициклиста y km. Први пут су се састали у тачки C и превалили дотле једнаке путеве: $s_1=s_2$. Пешак је ишао $1^h\,12^m=1\frac{1^h}{5}$ брзином

x на час и превалио $s_1 = \frac{6}{5}x$. Бициклиста је возио до C само $12^m = \frac{1^h}{5}$ брзином y и превалио је $s_2 = \frac{1}{5}\,y$. Онда је $\frac{6}{5}x = \frac{1}{5}x$, т. ј. $y = 6\,x$ ..../1/.

До места D, где су се други пут састали, пешак је превалио пут $s_3 = AD$, а бициклиста пут $s_4 = AB + BD$, па је: $s_3 + s_4 = AD + BD + AB = 2\,AB = 2.\frac{85}{2}\cdot$ Пешак је до D путовао 5 часова и превалио је пут $s_3 = 5\,x$. Бициклиста је за цео пут s_4 употребио само 2 часа, јер се у B одмарао 2 часа. Дакле је он превалио пут $s_4 = 2y$. Па је $5\,x + 2\,y = 85$............/2/.

Систем једначина: /1/, /2/, т. ј.: $\begin{cases} y = 6\,x \\ 5\,x + 2\,y = 85, \end{cases}$ даје решење: $x = 5$, $y = 30$, т. ј. пешак превањује **5 km на 1^h**, бициклиста **30 km на 1^h**.

б) Из једначине $30\,t = \frac{85}{2}$ излази: $t = 1\frac{25^h}{60} = 1^h\,25^m$, т. ј. бициклиста је стигао у B у $9^h\,25^m$. *в*) Пешак је до места C превалио $\frac{6}{5}\cdot 5 = 6\,km$, т. ј. $A\,D = 6\,km$. До места D пешак је превалио $5\,.\,5 = 25\,km$, те је $A\,D = 25\,km$. Бициклиста је из B кренуо натраг у $11^h\,25^m$ и до 12^h превалио пут $B\,D = \frac{7}{12}\cdot 30 = 17\frac{1}{2}\,km$. Тако је $A\,D + B\,D = 25 + 17\frac{1}{2} = 42\frac{1}{2}\,km$.

* * *

II. ОДЕЉАК.

87. *Реши једначину:* $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x=b^2-a^2$.

Пренеси стални члан лево и подели једначину са a^2-b^2; добиваш: $x^2-2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x+1=0$. Одатле: $x=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\pm\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\pm\frac{2ab}{a^2-b^2}$, $x_1=\frac{a+b}{a-b}$, $x_2=\frac{a-b}{a+b}$. Коренови су реципрочни $\left(x_1=\frac{1}{x_2}\right)$, јер је једначина симетрична. — Или директно по обрасцу (11). Пре тога пренеси члан b^2-a^2 на леву страну. Добиваш:

$$x=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\pm\frac{1}{2(a^2-b^2)}\sqrt{4(a^2+b^2)-4(a^2-b^2)}=$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\pm\frac{2}{2(a^2-b^2)}\sqrt{4a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\pm\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

* * *

88. *Пократи разломак:* $\frac{15x^2-37x+18}{10x^2-33x+27}$.

Ако су x_1 и x_2 коренови једначине $ax^2+bx+c=o$, онда је производ коренитих фактора $(x-x_1).(x-x_2)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$, т. ј. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Дакле да раствориш бројитељ и именитељ на факторе, реши једначине: $15x^2-37x+18=0$ и $10x^2-33x+27=0$. Прва даје коренове: $x_1=\frac{9}{5}$, $x_2=\frac{2}{3}$, а друга: $\alpha_1=\frac{9}{5}$, и $\alpha_2=\frac{3}{2}$. Дакле је:

$$\frac{15x^2-37x+18}{10x^2-33x+27}=\frac{3.5\left(x-\frac{9}{5}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{2.5\left(x-\frac{9}{5}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=$$

89. *Реши једначину*: $\frac{8-x}{x^2-6x+5}+\frac{x-3}{x^2-3x-10}=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$.

Растави именитеље на факторе помоћу коренитих фактора једначина: $x^2-6x+5=0$, $x^2-3x-10=0$, $x^2+x-2=0$. Ове једначине имају ове коренове: прва: $x_1=1$, $x_2=5$; друга: $x_1=5$, $x_2=-2$; трећа: $x_1=1$, $x_2=-2$. Коренити фактори су за прву: $x-1$, $x-5$; за другу: $x-5$, $x+2$; за трећу: $x-1$, $x+2$. Према обрасцу (16) имаш онда: $x^2-6x+5=(x-1).(x-5)$; $x^2-3x-10=(x-5).(x+2)$; $x^2+x-2=(x-1).(x+2)$. Дакле је најмањи заједнички именитељ у заданој једначини: $N=(x-5).(x-1)(x+2)$. Множењем са N добива једначина облик:

$(8-x).(x+2)+(x-3).(x-1)=(5x+1).(x-5)$, а одатле коначно: $5x^2-26x-24=0$. Одатле решење: $\alpha=\boldsymbol{6}$, $\beta=-\boldsymbol{\frac{4}{5}}$.

---

90. *Раствори на факторе полином*: $1+25x^{-1}+\left(\frac{x}{10}\right)^{-2}$.

$$1+25x^{-1}+\left(\frac{x}{10}\right)^{-2}=1+\frac{25}{x}+\frac{100}{x^2}=\frac{1}{x^2}(x^2+25x+100).$$

Полином у загради раствори у факторе помоћу коренитих фактора једначине: $x^2+25x+100=0$. Коренови ове једначине су: $x_1=-5$, $x_2=-20$, коренити фактори: $x+5$ и $x+20$. Дакле је:

$$1+25x^{-1}+\left(\frac{x}{10}\right)^{-2}=\boldsymbol{\frac{1}{x^2}\cdot(x+5).(x+20)}.$$

---

91. *Нађи квадратну једначину, која има коренове*: *а)* $x_1=2$, $x_2=-3$; б) $x_1=3+\sqrt{5}$, $x_2=3-\sqrt{5}$; в) $x_1=2+i$, $x_2=2-i$.

У решавању оваквих задатака послужи се својством коренова x_1 и x_2, приказаним у обрасцу (15).

а) $a=-(x_1+x_2)=-(2-3)=+1$, $b=x_1.x_2=(2-3)=-6$. Онда једначина гласи: $\boldsymbol{x^2+x-6=0}$

б) $a=-(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5})=-6$, $b=(3+\sqrt{5}).(3-\sqrt{5})=$

чина: $x^2 - 4x + 5 = 0$. — Реши ове једначине, па се увери, да имају задане коренове.

Могао си се послужити исто тако и својством коренитих фактора (16), особито у примеру а), где су коренови рацијонални.

*92. *Нађи квадратну једначину, код које је збир коренова 2, а њихов количник* $\frac{4i\sqrt{3} - 11}{13}$.

Тражену једначину можеш написати у облику: $x^2 + ax + b = 0$, где је $a = -(x_1 + x_2) = -2$, $b = x_1 . x_2$. Вредности x_1 и x_2 наћи ћеш из система једначина: $x_1 + x_2 = 2$, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{4i\sqrt{3} - 11}{13}$. Методом замене (супституције) добиваш одавле једначину: $\frac{4i\sqrt{3} - 11}{13} \cdot x_2 + x_2 = 2$. Одавле: $x_2 = 1 - 2i\sqrt{3}$, $x_1 - 1 + 2i\sqrt{3}$. Према тому $b = x_1 . x_2 = 13$, а једначина гласи: $\boldsymbol{x^2 - 2x + 13 = 0}$.

93. *Једначина:* $(b - a) . x^2 - (a - b - c) . x + \frac{c}{2} = 0$ *има реелне коренове за сваку реелну вредност величина a, b, c. Докажи!*

Да коренови квадратне једначине буду реелни, мора бити њезина дискриминанта позитивна. Према обрасцу (12) је дискриминанта ове једначине: $D = (a - b - c)^2 - 2c(b - a)$. Тај израз можеш даље писати овако: $D = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc - 2bc + 2ac = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab = (a - b)^2 + c^2$, т. ј. D је збир двају квадрата. Према тому за све вредности a, b, c је $D > 0$, а коренови су реелни.

*94. *За које вредности броја а једначина* $10^{x^2 - 6x + 10} = a$ *има реелна решења, и које реелно решење има за најмању дозвољену вредност броја а?*

дискриминанта $a^2 - 4b \geqq 0$. Овде је $a = -6$, $b = 10 - log\, a$. Дакле једначина има реелна решења, ако је њезина дискриминанта: $36 - 4(10 - log\, a) \geqq 0$, а то даје коначни услов: $log\, a \geqq 1$, и: $a \geqq \mathbf{10}$. Дакле је најмања дозвољена вредност броја a управ $a = 10$ и за ту вредност једначина даје 2 једнака решења, т. ј.: $10^{x^2-6x+10} = 10$ даје двоструко решење $x = \mathbf{3}$.

95. *У једначини: $x^2 - ax + 3a = 0$ одреди a тако, да један корен те једначине буде 3 пута већи од другога.*

Реши једначину. Коренови су; $x_1 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 12a}$, $x_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 12a}$. Услов, да је $x_1 = 3x_2$, даје једначину: $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 12a} = \frac{3a}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{a^2 - 12a}$, која води до једначине: $2\sqrt{a^2 - 12a} = a$, а након квадрирања: $3a^2 - 48a = 0$. Одатле $a = \mathbf{16}$. Добивена једначина је: $x^2 - 16x + 48 = 0$, а њезини коренови $x_1 = 12$, $x_2 = 4$, т. ј. $x_1 = 3x_2$.

Или: према (15) имаш овде обзиром на $x_1 = 3x_2$ ове једначине: $3x_2 + x_2 = a$, $3x^2_2 = 3a$. Елиминирај одавле x_2, па добиваш: $\frac{a^2}{16} = a$, а одатле: $a = 16$.

96. *У једначини: $2x^2 - (4m - 1)x + (2m^2 - 3m + 2) = 0$ одреди m тако, да оба корена једначине буду једнака.*

Квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има једнаке коренове, ако је њезина дискриминанта једнака нули, т. ј. ако је $b^2 - 4ac = 0$. Дискриминанта ове једначине је: $(4m - 1)^2 - 4 . 2(2m^2 - 3m + 2)$, па проблем решава једначина:

$16m^2 - 8m + 1 - 8(2m^2 - 3m + 2) = 0$, која даје корен $m = \frac{15}{16}$. За $m = \frac{15}{16}$ задана једначина прелази у једначину: $2x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{121}{128} = 0$, која има коренове: $x_1 = x_2 = \frac{11}{16}$.

97. *У једначини* $\frac{2c+3}{x}=\frac{x+5}{3x-c}$ *одреди* c *тако, да: а) један корен те једначине буде 4; б) један корен те једначине буде 0; в) да коренови буду једнаки, али противнога знака.*

Ослободи се именитеља и доведи једначину у облик: $x^2+ax+b=0$. Добиваш: $x^2-(4+6c)x+(2c^2+3c)=0$ ..../1/. Код решавања ових задатака послужи се особинама квадратне једначине, израженим у обрасцима (15).

а) Ако је $x_1=4$, онда је $4+x_2=-a=4+6c$. Одатле следи: $x_2=6c$. А према $x_1 . x_2=b$ следи овде: $4x_2=2c^2+3c$, т. ј. $24c=2c^2+3c$. Решење ове једначине даје две могућности: $\mathbf{c_1=0}$, $\mathbf{c_2=\frac{21}{2}}$. Решење $c_1=0$ доводи задану једначину у облик: $\frac{3}{x}=\frac{x+5}{3x}$, а та једначина има коренове: $x_1=0, x_2=4$. Решење $c_2=\frac{21}{2}$ даје једначину: $\frac{12}{x}=\frac{x+5}{6x-21}$. Њезини коренови су: $x_1=63$, $x_2=4$.

б) Према $x_1 . x_2=b$ следи $b=0$, т. ј. $2c^2+3c=0$, ако је $x_1=0$; онда је према $x_1+x_2=-a$ други корен $x_2=4+6c$ Једначина $2c^2+3c=0$ даје решења: $\mathbf{c_1=0}$, $\mathbf{c_2=-\frac{3}{2}}$. За $c_1=0$ задана једначина добива облик: $\frac{3}{x}=\frac{x+5}{3x}$, а ова једначина има коренове: $x_1=0$, $x_2=4$. За $c_2=-\frac{3}{2}$ задана једначина добива облик: $x^2+5x=0$, чији су коренови: $x_1=0$, $x_2=-5$.

в) Ако је $x_1=-x_2$, онда је $-a=x_1+x_2=x_1-x_1==0$, т. ј. $4+6c=0$; одатле следи: $c=-\frac{2}{3}$. Из $b=x_1 . x_2==-x^2{}_1$ следи, да је $x_1=-x_2=\sqrt{-2c^2-3c}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{10}$. За $c=-\frac{2}{3}$ задана једначина добива облик: $\frac{5}{3x}=\frac{3(x+5)}{9x+2}$, а ова једначина даје чисту квадратну једначину, која има коренове $x_1=+\frac{1}{3}\sqrt{10}$, $x_2=-\frac{1}{3}\sqrt{10}$.

*98. *У једначинама* $x^2+\frac{5}{2}x-9m=0$ *и* $x^2+\frac{2}{3}x-2m=0$ *одреди* m *тако, да један корен друге једначине буде трећина једнога корена прве једначине.*

Нека су коренови прве једначине x_1 и x_2, а коренови друге једначине α и β. Онда према особинама (15) квадратних једначина постоје ове једначине:

$$x_1+x_2=-\frac{5}{2}, \quad \alpha+\beta=-\frac{2}{3},$$
$$x_1 . x_2=-9m, \quad \alpha . \beta=-2m.$$

Под претпоставком: $\alpha=\frac{1}{3}x_1$ прелазе ове једначине у овај облик:

$$x_1+x_2=-\frac{5}{2}, \quad \frac{1}{3}x_1+\beta=-\frac{2}{3},$$
$$x_1 . x_2=-9m, \quad \frac{1}{3}x_1 . \beta=-2m.$$

У другој и четвртој доведи десне стране на једнаку вредност $-18m$, изједначи, па добиваш $2x_1x_2=3x_1\beta$. Одатле: $\beta==\frac{2}{3}x_2$. Ово и $\alpha=\frac{1}{3}x_1$ замени у трећу једначину, па са првом добиваш систем једначина:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{5}{2} \\ \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2=-\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Овај систем даје: $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$; Помоћу тога: $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{3}$, $m=\frac{1}{6}$. Дакле тражене једначине су ове: $x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{6}=0$, $x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{6}=0$.

---

99. *Реши једначину*: $1-\sqrt{2x^2-x-3}=x-8$.

Пренеси чланове тако, да $\sqrt{\ }$ остане сам на једној страни: $9-x=\sqrt{2x^2-x-3}$. Квадрирај и онда редукуј; добиваш: $x^2+17x-84=0$. Ова једначина даје решење:

$$x_1=-21, \; x_2=4.$$

100. *Реши једначину*: $\sqrt{14+\sqrt{7-x}}=4$.

Квадрирај: $14+\sqrt{7-x}=16$. Са овом једначином поступи као са пређашњом; добиваш редом: $\sqrt{7-x}=2$, $7-x=4$, $x=\mathbf{3}$.

* * *

101. *Реши једначину*: $\sqrt{21-2x}-2=\sqrt{1-4x}$.

Пренеси чланове тако, да оба корена остану на истој страни: $\sqrt{21-2x}-\sqrt{1-4x}=2$.

Квадрирај: $21-2x+1-4x-2\sqrt{21-2x}\cdot\sqrt{1-4x}=4$.

Редукуј: $18-6x-2\sqrt{(21-2x)(1-4x)}=0$.

Пократи са 2, пренеси корен на десну страну и опет квадрирај: $(9-3x)^2=(21-2x)(1-4x)$.

Измножи, редукуј, па добиваш једначину: $x^2+32x+60=0$, која даје коренове: $x_1=\mathbf{-2}$, $(x_2=\mathbf{-30})$.

* * *

102. *Реши једначину*: $\sqrt{27-x}=\sqrt{x+2}+\sqrt{3(x+1)}$.

Квадрирај једначину и редукуј; након редукције добиваш: $22-5x=2\sqrt{(3x+3)(x+2)}$.

Квадрирај поновно: $484-220x+25x^2=4(3x^2+9x+6)$; одатле добиваш квадратну једначину: $13x^2-256x+460=0$, која даје решење: $x=\frac{256}{26}\pm\frac{204}{26}$. Одатле: $x_1=\mathbf{+2}$, $x_2=\mathbf{\frac{230}{13}}$.

* * *

103. *Реши једначину*: $\sqrt{x+13}=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x-8}$.

Пренеси још један корен на леву страну и квадрирај: $\sqrt{x+13}+\sqrt{x-8}=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-3}$. Након квадрирања, редуковања и краћења: $2+\sqrt{(x+13)(x-8)}=\sqrt{(x+4)(x-3)}$; квадрирај још једанпут, па након редуковања и краћења добиваш: $\sqrt{(x+13)(x-8)}=22-x$. Кад још један пут квадрираш, добиваш коначно: $7x=84$, а одатле $x=\mathbf{12}$.

* * *

налне једначине на једноставне квадратне увођењем једне или двеју нових непознатих. Показане су и неке друге методе.

---

104. *Реши једначину*; $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{a}{b}$.

Подели бројитељ и именитељ леве стране са $\sqrt{1+x^2}$, а онда примени изведену пропорцију: $(a-b):(a+b)=(c-d):(c+d)$, па добиваш након краћења леве стране са 2: $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}=\dfrac{a-b}{a+b}$. Квадрирај, помножи са заједничким именитељем: $(1-x^2)(a+b)^2=(1+x^2)(a-b)^2$; одатле: $x^2(a+b)^2+x^2(a-b)^2=(a+b)^2-(a-b)^2$. Изведи квадрирања, редукуј и добиваш коначно: $x=\pm\sqrt{\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}$

Једначину можеш након дељења са $\sqrt{1+x^2}$ решити и заменом: $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=y$; из добивене једначине: $\dfrac{1+y}{1-y}=\dfrac{a}{b}$ израчунај $y=\dfrac{a-b}{a+b}$. Онда је: $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}=\dfrac{a-b}{a+b}$ као горе.

---

105. *Реши једначину*: $\sqrt{\dfrac{a}{x}-1}+\sqrt{\dfrac{x}{a}+1}=\sqrt{\dfrac{2a}{x}}$.

Квадрирај; након редукције ћеш моћи да једначину прикажеш у облику: $2\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{ax}}=\dfrac{a^2-x^2}{ax}$, или: $\left(2-\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{ax}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{ax}}=0$. Ово даје 2 једначине:

$$\sqrt{\frac{a^2-x^2}{ax}}=0 \;\ldots\ldots\ldots /1/, \text{ и : } 2-\sqrt{\frac{a^2-x^2}{ax}}=0 \;\ldots\ldots\ldots /2/ .$$

Једначина /1/ даје коренове: $x_1=a$, $x_2=-a$, а /2/ даје опет 2 корена: $x_3=-a(2+\sqrt{5})$, $x_4=-a(2-\sqrt{5})$.

---

106. *Реши једначину*: $2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}-3\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}=2$.

$-3z-2=0$ има коренове: $z_1=2$, $z_2=-\frac{1}{2}$. Кад то замениш у $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}=z$ добиваш: $x_1=-\frac{33}{15}=-\frac{11}{5}$, $x_2=+\frac{6}{5}$.

---

107. *Реши једначину:* $\sqrt[3]{x^2-5x+1}+\sqrt[6]{x^2-5x+1}=2.$

Постави: $\sqrt[6]{x^2-5x+1}=y$; онда је: $\sqrt[3]{x^2-5x+1}=$ $=y^2$, па добиваш једначину: $y^2+y-2=0$, која даје: $y_1=$ $=1$, $y_2=-2$. Постави то натраг у замену, па добиваш једначине: $\sqrt[6]{x^2-5x+1}=1$, $\sqrt[6]{x^2-5x+1}=-2$; или: x^2- $-5x+1=1$, $x^2-5x+1=64$. — Ове две једначине дају коренове задане једначине, и то: $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=\frac{5}{2}+$ $+\frac{1}{2}\sqrt{277}$, $x_4=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{277}$.

---

108. *Реши једначину:* $\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}=\frac{5}{12}\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}.$

Подели бројитељ и именитељ леве стране са $\sqrt{x+1}$.

Добиваш: $\frac{\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}+1}{\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}-1}=\frac{5}{12}\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$; постави: $\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}=z$,

па добиваш једначину: $\frac{z+1}{z-1}=\frac{5z}{12}$, или: $5z^2-17z-12=0$. Коренови су: $z_1=4$, $z_2=-\frac{3}{5}$. То даје једначине: $\frac{1-x}{1+x}=16$ и $\frac{1-x}{1+x}=\frac{9}{25}$. Одавле: $x_1=-\frac{15}{17}$, $x_2=\frac{8}{17}$.

---

109. *Реши једначину:* $\sqrt[3]{\frac{4-x}{x+5}}+\sqrt[3]{\frac{x+5}{4-x}}=\frac{5}{2}.$

имаш да решиш једначину: $z+\frac{1}{z}-\frac{5}{2}=0$ или: $z^2-\frac{5}{2}z+1=$ $=0$. Њезини су коренови: $z_1=2$ и $z_2=\frac{1}{2}\cdot$ Одатле добиваш једначине: $\sqrt[3]{\frac{4-x}{x+5}}=2$ и $\sqrt[3]{\frac{4-x}{x+5}}=\frac{1}{2}\cdot$ Кубирањем добиваш одавле обичне једначине. Коренови: $x_1=\boldsymbol{3}$, $x_2=\boldsymbol{-4}$.

*110. *Реши једначину:* $\sqrt[3]{(a+x)^2}+20\sqrt[3]{(a-x)^2}=9\sqrt[3]{a^2-x^2}$.

*Постави: $\sqrt[3]{a+x}=u$, $\sqrt[3]{a-x}=v$, онда је $\sqrt[3]{a^2-x^2}=$ $=uv$ и задана једначина прелази у хомогену једначину: u^2- $-9uv+20v^2=0$, која решењем по u даје:

$$u=\frac{9v\pm\sqrt{81v^2-80v^2}}{2}$$

, т. ј.: $u_1=5v$, $u_2=4v$. Прво решење даје једначину: $\sqrt[3]{a+x}=5\sqrt[3]{a-x}$, која након кубирања даје: $x_1=\frac{62}{63}a$. — Друго решење даје: $\sqrt[3]{a+x}=4\sqrt{a-x}$, а одатле $x_2=\frac{63}{65}a$.

Или: подели једначину са $\sqrt[3]{a^2-x^2}$, па добиваш једначину: $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}+20\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}-9=0$. Постави: $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}=u$, $\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=\frac{1}{u}$; добиваш једначину $u+20\frac{1}{u}-9=0$ или: u^2- $-9u+20=0$; и т. д.

**111.[1]) *Реши једначину:*

$$\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=4\sqrt{x^2-1}.$$

Заменама: $\sqrt{x^2+1}=u$ и $\sqrt{x^2-1}=v$ прелази ова једначина у: $\frac{u+v}{u-v}+\frac{u-v}{u+v}=4v$. Ослободи се именитеља и редукуј: $u^2+v^2=2v(u^2-v^2)$. Замени овде натраг вредности за u и v:

$x^2+1+x^2-1=2\sqrt{x^2-1}\,(x^2+1-x^2+1)$, т. ј. $x^2=$ $=2\sqrt{x^2-1}$.

Квадрирање даје биквадратну једначину: $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$, коју ћеш решити заменом $x^2 = z$: $z^2 - 4z + 4 = 0$, или $(z - 2)^2 = 0$. Одатле $z = 2$ т. ј.: $x = \pm\sqrt{\mathbf{2}}$.

**112. *Реши једначину*: $(x - 1)^4 + (2 + x)^4 = 257$.

Најлакше ћеш то решити уводећи 2 нове непознате. Постави $x - 1 = y$, $2 + x = z$; онда је $z - y = 3$ .... /1/. Задана једначина прелази тим у систем једначина:

$$\begin{cases} y^4 + z^4 = 257 \\ z - y = 3. \end{cases}$$

То је систем сличан примеру бр. 155.— Дигни другу једначину на 4-ту потенцију; добиваш редом:

$$\underbrace{z^4 + y^4}_{257} - 4z^3y + 6z^2y^2 - 4zy^3 = 81,\quad 4yz.\left(z^2 - \frac{3}{2}yz + y^2\right) = 176,$$

$$yz\left[\underbrace{(z - y)^2}_{9} + \frac{1}{2}yz\right] = 44,\quad yz\left(9 + \frac{1}{2}yz\right) = 44,\quad y^2z^2 + 18yz -$$

$- 88 = 0$. Одатле је: $yz = 4$ и: $yz = -22$. Реши сада системе:

$$\begin{cases} z - y = 3 \\ yz = 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z - y = 3 \\ yz = -22. \end{cases}$$

Прво решење првога система је $y_1 = 1$, $z_1 = 4$. Одатле $x_1 = \mathbf{2}$. Друго решење првога система је: $y_2 = -4$, $z_2 = -1$. Одатле: $x_2 = -\mathbf{3}$. Прво решење другога система је: $y_3 = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{79}$, $z_3 = +\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{79}$. Одатле је: $x_3 = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{i}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{79}}$.

И напокон из $y_4 = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{79}$, $z_4 = +\frac{3}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{79}$ следи: $x_4 = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{i}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{79}}$.

113. *Реши једначину*: $\dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x + 3} = \dfrac{7}{\sqrt{x - 3}}$.

Помножи са $\sqrt{x - 3}$; у добивеној једначини: $\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9} = 7$ замени: $x^2 - 9 = y$, $x^2 - 16 = y - 7$, па онда квадрирај 2 пута. $\sqrt{y - 7} + \sqrt{y} = 7$ .... /1/ даје $y = 16$, а одатле: $x^2 = +25$, $x = \pm\mathbf{5}$.

Ако у једначини /1/ пренесеш $\sqrt{y}$ на десну страну, онда

114. *Реши једначину:* $\sqrt{\frac{1}{9}+\sqrt{\frac{4}{9x^2}+\frac{9}{x^4}}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{x}$.

Након првог квадрирања и редуковања:

$$\sqrt{\frac{4}{9x^2}+\frac{9}{x^4}}=\frac{2}{3x}+\frac{1}{x^2}.$$

Након другога квадрирања и редуковања: $\frac{8}{x^4}-\frac{4}{3x^3}=0$.

Помножи са $\frac{3}{4}x^4$. Добиваш: $x=\boldsymbol{6}$. (Још 3 корена $x=\infty$).

—

115. *Реши једначину:* $x^4-13x^2+36=0$.

Једначина је биквадратна. Реши је заменом: $x^2=y$; тим добиваш једначину: $y^2-13y+36=0$. Одатле: $y_1=9$, $y_2=4$. Помоћу тога имаш једначине: $x^2=9$ и $x^2=4$, које дају: $\boldsymbol{x_1=+3}$, $\boldsymbol{x_2=-3}$, $\boldsymbol{x_3=2}$, $\boldsymbol{x_4=-2}$.

—

116. *Реши једначину:* $x^8-9x^4+8=0$.

Једначина је 8. степена; дакле ће дати 8 коренова. Постави: $x^4=z$, па добиваш: $z^2-9z+8=0$. Ова једначина даје решења: $z_1=8$, $z_2=+1$, т. ј. нове једначине: $x^4=8$ и $x^4=1$. Постави $x^2=y$, па добиваш нове једначине: $y^2=8$, $y^2=1$, чији су коренови: $y_1=+2\sqrt{2}$, $y_2=-2\sqrt{2}$, $y_3=+1$, $y_4=-1$. Ови коренови дају коначно једначине: $x^2=2\sqrt{2}$, $x^2=-2\sqrt{2}$, $x^2=+1$, $x^2=-1$, које дају решења задане једначине: $\boldsymbol{x_1=+\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\boldsymbol{x_2=-\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\boldsymbol{x_3=+i\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\boldsymbol{x_4=-i\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\boldsymbol{x_5=+1}$, $\boldsymbol{x_6=-1}$, $\boldsymbol{x_7=+i}$, $\boldsymbol{x_8=-i}$.

—

117. *Реши симетричну једначину 3. степена:*

$$4x^3+3x^2+3x+4=0.$$

Скупи чланове с једнаким коефицијентом и извади заједнички фактор: $4(x^3+1)+3x(x+1)=0$. Према обрасцу (2) је $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. Замени то у једначину и извади заједнички фактор $x+1$; добиваш:

$(x+1).[4(x^2-x+1)+3x]=0$. Да производ двају факпрви фактор $= 0$, добиваш једначину: $x + 1 = 0$, која даје $x_1 = - 1$. Други фактор, изједначен са нулом, даје једначину: $4x^2 - x + 4 = 0$, која даје коренове:

$$x_2 = \frac{-1 + 3i\sqrt{7}}{8}, x_3 = \frac{-1 - 3i\sqrt{7}}{8}.$$

Гледе реципрочности коренова x_2 и x_3 види пример бр. 55.- Симетричне једначине 4. степена се решавају у 118., 119. и у 120. примеру.

---

118. *Растави у факторе полином*: $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$.

Полином је симетричан, 4. степена, па ћеш задатак решити решавањем симетричне једначине 4. степена. Јер образац (16) квадратних једначина протеже се и на једначине виших степенова с 1 непознатом овако: Једначина у нормалном облику (коефицијент највише потенције = 1) је дељива са сваким својим коренитим фактором, а њезин је полином једнак производу свих коренитих фактора.

Из полинома узми заједнички фактор 6: $6\left(x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{38}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1\right)$. Полином у загради је у нормалном облику, па задатак решаваш симетричном једначином: $x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{19}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 = 0$ ..../1/

Подели једначину са x^2 и скупи чланове једнаких коефицијената: $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{6}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{19}{3} = 0$.

Постави: $x + \frac{1}{x} = y$; онда је: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$; тако добиваш једначину: $y^2 - 2 - \frac{5}{6}y - \frac{19}{3} = 0$, која даје коренове: $y_1 = + \frac{10}{3}, y_2 = - \frac{5}{2}$, а помоћу пређашње замене то даје једначине: $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}, x + \frac{1}{x} = - \frac{5}{2}$, или: $x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$, $x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$. И ове 2 једначине су симетричне, 2.

Коренови су: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$; $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$. Онда су коренити фактори једначине /1/: $x - x_1 = x - 3$, $x - x_2 = = x - \frac{1}{3}$, $x - x_3 = x + 2$, $x - x_4 = x + \frac{1}{2}$. Дакле полином се једначине /1/ овако раствара на факторе:

$$x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{19}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 = (x - 3).\left(x - \frac{1}{3}\right).(x + 2).$$

$. \left(x + \frac{1}{2}\right)$, а задани полином:

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 2 . 3 . (x - 3) . \left(x - \frac{1}{3}\right).$$

$$.(x + 2).\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)(2x + 1).$$

* * *

119. *Реши симетричну једначину 4. степена*:

$$2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0.$$

Ово је симетрична једначина 4. степена друге врсте, јер нема средњега члана, који фали зато, што чланови с једнаким коефицијентима имају противне знакове. На њу не требаш примењивати претходну методу, јер се решава простим растварањем у факторе. — Скупи чланове једнаких коефицијената **и** из добивених бинома извади заједничке факторе: $2(x^4 - 1) - 5x(x^2 - 1) = 0$.

Како је $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$, а $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, имаш даље: $2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) - 5x(x - 1)(x + 1) = 0$, а вађењем заједничког фактора: $(x - 1)(x + 1).[2(x^2 + 1) - 5x] = 0$. То даје једначине: $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Прве 2 једначине дају коренове: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, а трећа: $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$.

* * *

120. *Реши једначину* $36x^5 + 9x^4 - 223x^3 + 223x^2 - 9x - 36 = 0$

Једначина је симетрична, 5. степена. Да је решиш, скупи чланове једнаких коефицијената:

$36(x^5 - 1) + 9x(x^3 - 1) - 223x^2(x - 1) = 0$. Фактори $x^5 - 1$ и $x^3 - 1$ дељиви су са $x - 1$, па цела лева страна има

$x - 1$; извади из леве стране $x - 1$, па

$(x-1).[36(x^4+x^3+x^2+x+1)+9x(x^2+x+1)-$
$-223x^2]=0.$

Одатле следе једначине: $x-1=0$, која даје корен: $x_1=\boldsymbol{1}$, и једначина: $36x^4+45x^3-178x^2+45x+36=0$, која је симетрична, 4. степена. Подели ту једначину са x^2 и скупи чланове једнаких коефицијената:

$36\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+45\left(x+\frac{1}{x}\right)-178=0$. Замени овде: $x+$ $+\frac{1}{x}=y$, $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, па добиваш квадратну једначину: $36y^2+45y-250=0$, која даје коренове: $y_1=-\frac{10}{3}$, $y_2=\frac{25}{12}$. Одатле следе једначине: $x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$, $x+\frac{1}{x}=\frac{25}{12}$, које дају коренове задане једначине: $x_2=\boldsymbol{-3}$, $x_3=-\boldsymbol{\frac{1}{3}}$, $x_4=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$, $x_5=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$. Коренови x_2 и x_3, x_4 и x_5 су међусобно реципрочни, јер је $x_2=\frac{1}{x_3}$, $x_4=\frac{1}{x_5}$.

---

121. *Реши једначину:* $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0.$

Ова једначина није симетрична, јер *2.* и *4.* члан имају супротне знакове, а *1.* и последњи једнаке. Ипак се она решава по истој методи као симетрична 4. степена. Подели са x^2 и скупи чланове једнаких коефицијената:

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)-36=0.$$

Постави: $x-\frac{1}{x}=y$; онда је $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$. Тим заменама добиваш једначину: $6y^2+12+7y-36=0$, која даје коренове: $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=-\frac{8}{3}$. Помоћу горње замене та решења дају једначине: $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ и $x-\frac{1}{x}=-\frac{8}{3}$, које дају коренове: $x_1=\boldsymbol{2}$, $x_2=-\boldsymbol{\frac{1}{2}}$, $x_3=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$, $x_4=\boldsymbol{-3}$. Коренови долазе

122. *Реши једначину:* $x^5 - 3x^4 - \frac{37}{9}x^3 + \frac{37}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{4}{3} = 0.$

Једначина није симетрична, али се даде решити сличном методом као и симетрична 5. степена, т. ј. вађењем заједничких фактора. Лева се страна даде овако писати:

$$x^4.(x-3) - \frac{37}{9}x^2.(x-3) + \frac{4}{9}(x-3) = 0,$$

$(x-3).\left(x^4 - \frac{37}{9}x^2 + \frac{4}{9}\right) = 0.$ Одатле једначине: $x-3=0$ и $x^4 - \frac{37}{9}x^2 + \frac{4}{9} = 0$; $x-3=0$ даје $x_1 = \boldsymbol{3}$; $x^4 - \frac{37}{9}x^2 + \frac{4}{9} = 0$ даје $x^2 = \frac{37}{18} \pm \frac{1}{18}\sqrt{1369-144} = \frac{37}{18} \pm \frac{35}{18}$ т. ј. $x^2=4$, $x^2 = \frac{1}{9}$. Одатле: $x_2 = +\boldsymbol{2}$, $x_3 = -\boldsymbol{2}$, $x_4 = +\boldsymbol{\frac{1}{3}}$, $x_5 = -\boldsymbol{\frac{1}{3}}$. Коренови су 2 по 2 супротни бројеви.

—

123. *Реши једначину:* $125x^3 - 8 = 0.$

Једначина је биномна, 3. степена. Подели је с апсолутним чланом *8* и поставу замену: $\frac{5}{2}x = y$; онда је $\frac{125}{8}x^3 = y^3$, па једначина прелази у ову: $y^3 - 1 = 0$. Како је $y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1)$ (образац 1), то ова једначина добива облик: $(y-1)(y^2+y+1) = 0$, па се распада у ове једначине: $y-1=0$, $y^2+y+1=0$. Прва једначина даје: $y_1 = +1$, а друга: $y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Одатле је

$$y_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad y_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Помоћу горње замене добиваш онда једначине: $\frac{5}{2}x_1 = 1$, $\frac{5}{2}x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{5}{2}x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Одатле: $x_1 = \boldsymbol{\frac{2}{5}}$, $x_2 = \boldsymbol{\frac{-1+i\sqrt{3}}{5}}$, $x_3 = \boldsymbol{\frac{-1-i\sqrt{3}}{5}}$. Види пример бр. 56.

Сличним поступком решаваш и једначину $ax^3 + b = 0$. Заменом $x\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = y$ доводиш је на облик $y^3 + 1 = 0$, а ту решаваш

124. *Нађи све вредности корена* $\sqrt[3]{27}$.

На први мах изгледа, да је таква вредност само једна, т. ј. $\sqrt[3]{27}=3$. Али ако напишеш то овако: $x=\sqrt[3]{27}$ и кубираш, добиваш: $x^3=27$, а одатле биномну једначину: $x^3-27=0$, која супституцијом $\frac{x}{3}=y$ прелази у једначину: $y^3-1=0$, која је решена у претходном примеру. Из супституције $\frac{x}{3}=y$ следи: $x=3y$; па према кореновима једначине $y^3-1=0$ из претходног примера следе ове вредности за x: $x_1=3$, $x_2=\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $x_3=\frac{3}{2}(-1-i\sqrt{3})$. Дакле $\sqrt[3]{27}$ има ове вредности: $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[3]{27}=\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\sqrt[3]{27}=\frac{3}{2}(-1-i\sqrt{3})$. Да је то истина, увери се кубирањем једне од ових комплексних вредности, т. ј. н. пр. извођењем кубатуре: $\left[\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3})\right]^3$. Добиваш: $\frac{27}{8}(-1+3i\sqrt{3}+9-3i\sqrt{3})=\frac{27}{8}\cdot 8=27$.

Исто тако су вредности y_1, y_2, y_3 из пређашњег примера 3 вредности корена $\sqrt[3]{1}$. У опште се оваквим поступком доказује правило, да *сваки корен има толико вредности* (реелних и комплексних), *колики је његов експонент*; н. пр. $\sqrt[5]{a}$ има 5 вредности.

---

125. *Реши једначину*: $a^4x^4-b^4=0$.

Једначина је биномна 4. степена. Решаваш је растварањем у факторе: $a^4x^4-b^4=(a^2x^2-b^2)(a^2x^2+b^2)=(ax-b)(ax+b)(ax+ib)(ax-ib)$.

Тако задана једначина добива облик: $(ax-b)(ax+b)(ax+ib)(ax-ib)=0$ и распада се у ове 4 једначине: $ax-b=0$, $ax+b=0$, $ax+ib=0$, $ax-ib=0$, које дају коренове: $x_1=+\frac{b}{a}$, $x_2=-\frac{b}{a}$, $x_3=-i\frac{b}{a}$, $x_4=+i\frac{b}{a}$.

---

126. *Реши биномну једначину*: $x^4+1=0$.

разлику од предходног примера овде су сви фактори комплексни бројеви. Према обрасцу (1 а) имаш овде: $x^4+1=(x^2)^2-i^2=$ $=(x^2-i).(x^2+i)$. Први фактор даје даље: $x^2-i=x^2-$ $-(\sqrt{i})^2=(x+\sqrt{i}).(x-\sqrt{i})$. Други фактор: $x^2+i=x^2-$ $-(-i)=x^2-(\sqrt{-i})^2=[x-\sqrt{(-1).i}].[x+\sqrt{(-1).i}]=(x-$ $-i\sqrt{i}).(x+i\sqrt{i})$. Тако дана једначина добива облик: $(x-$ $-\sqrt{i}).(x+\sqrt{i}).(x-i.\sqrt{i}).(x+i.\sqrt{i})=0$. Одатле коренови: $x_1=$ $=+\sqrt{i}$, $x_2=-\sqrt{i}$, $x_3=+i.\sqrt{i}$, $x_4=-i.\sqrt{i}$. Решавање биномне једначине 5. степена приказано је у идућем примеру (једначина /1/).

**127. *Реши једначину*: $\dfrac{x^5-34}{\sqrt{x^5}-2}=33$.

Ослободи се именитеља и постави: $\sqrt{x^5}=y$; добивена једначина: $y^2-33y+32=0$ има коренове: $y_1=1$, $y_2=32$. Корен y_1 помоћу горње замене даје биномну једначину $\sqrt{x^5}=1$, или: $x^5-1=0$ ..../1/. Полином x^5-1 дељив је са $x-1$; зато ову једначину можеш написати овако: $(x-1)(x^4+x^3+$ $+x^2+x+1)=0$, те се једначина /1/ распада у следеће једначине: $x-1=0$, $x^4+x^3+x^2+x+1=0$. Из прве је: $\boldsymbol{x_1=1}$. Друга је симетрична, 4. степена, и решава се поступком приказаним у примеру бр. 118. Добиваш редом након замене: $x+\dfrac{1}{x}=z$ следеће помоћне једначине и решења: $z^2+z-1=0$, $z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$, $z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$; $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, $x+$ $+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Коренови: $x_{2,3}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}(1-\sqrt{5})\pm}$ $\boldsymbol{\pm\dfrac{i}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}$; $x_{4,5}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}(1+\sqrt{5})\pm\dfrac{i}{4}\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}$.

Друга вредност $y_2=32=2^5$ даје биномну једначину $\sqrt{x^5}=$ 2^5, т. ј. $x^5-2^{10}=0$. Подели ову једначину са 2^{10}, па замени: $\dfrac{x}{2^2}=t$. Добиваш једначину $t^5-1=0$, која је идентична са /1/. те има као коренове претходне вредности x_1 .... x_5. А коренове: $x_6 = 2^2 x_1 = 4$, $x_{7,8} = 2^2 x_{2,3} = -(1-\sqrt{5}) \pm i\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$, $x_{9,10} = 2^2 x_{4,5} = -(1+\sqrt{5}) \pm i\sqrt{2(5-\sqrt{5})}$.

* * *

**128. *Реши једначину:* $37x^{\frac{1}{2}} + 8x^2 = 216x^{-1}$.

Та једначина добива редом ове облике: $37x^{\frac{1}{2}} + 8x^2 = \frac{216}{x}$, $37x^{\frac{3}{2}} + 8x^3 = 216$. Замени овде: $x^{\frac{3}{2}} = z$, па добиваш једначину: $8z^2 + 37z - 216 = 0$, која има коренове: $z_1 = \frac{27}{8}$, $z_2 = -8$. Прво решење даје једначину: $x^{\frac{3}{2}} - \frac{27}{8} = 0$, коју најпре заменом $x^{\frac{1}{2}} = y$, $x = y^2$ преводиш у биномну једначину $y^3 - \frac{27}{8} = 0$, а ову заменом: $\frac{2y}{3} = t$, $y = \frac{3}{2}t$ у биномну једначину: $t^3 - 1 = 0$. Ова једначина има коренове: $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $t_3 = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$. Из ових вредности следи редом: $y_1 = \frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{9}{4}$; $y_2 = -\frac{3}{4}(1 - i\sqrt{3})$, $x_2 = -\frac{9}{8}(1 - i\sqrt{3})$; $y_3 = -\frac{3}{4}(1 - i\sqrt{3})$, $x_3 = -\frac{9}{8}(1 + i\sqrt{3})$.

Друго решење $z_2 = -8$ води до једначине: $x^{\frac{3}{2}} + 8 = 0$, коју трансформираш постенено као и претходну на облик: $b^3 + 1 = 0$. Из решења ове биномне једначине налазиш истим поступком као горе коренове: $x_4 = 4$, $x_5 = -2(1 + i\sqrt{3})$, $x_6 = -2(1 + i\sqrt{3})$. Али ови последњи коренови нису решења задане једначине него ове: $8x^2 - 37x^{\frac{1}{2}} = 216x^{-1}$. (Ради двозначности другог корена).

* * *

129. *Отац је оставио својој малолетној деци 84000 динара, да поделе на једнаке делове, када најмлађи постане пунолетан; а ако који брат умре пре пунолетства, тада се има његов део поделити међу преосталу браћу. До пунолетства су умрла 2 брата, па је онда сваки од преостале браће добио 3500 динара више, него је иначе имао да добије. Колико је браће било у почетку?*

$\frac{84000}{x}$ динара; а кад су два брата умрла, добио је сваки $\frac{84000}{x-2}$ динара. Овај део, који су добили након смрти браће, био је за 3500 динара већи од $\frac{84000}{x}$, т. ј. $\frac{84000}{x-2}=\frac{84000}{x}+3500$. Пократи са *100*, *5* и *7*. Коренови су: $x_1=8$, ($x_2=-6$), од којих само $x_1=8$ задовољава проблем.

*Или: Број браће x, првобитни део y; онда је

$$\left.\begin{aligned}&\text{у почетку:}\quad xy=84000\\&\text{након смрти двојице:}\ (x-2).(y+3500)=84000.\end{aligned}\right\}$$

Изједначи леве стране: $xy=(x-2)(y+35000)$, а то након множења и редуковања даје линеарну једначину: $y=1750(x-2)$ која у вези са првом једначином даје пређашњи резултат.

* * *

130. *Трговац је продао 2 врсте платна двама купцима по разним ценама и то првому 10 m више него другому, па је тако инкасирао свега 1800 динара. Да је први купио исто толико метара другога платна, био би платио 800 динара, а да је други купио исти број метара првога платна, био би платио 900 динара. Колико је платна купио који купац и по којој цени?*

Ако је први купио x метара, други је купио $x-10$. Први је платио по метру $\frac{900}{x-10}$ и платио је свега $x.\frac{900}{x-10}$ дин. Други је платио по метру $\frac{800}{x}$ динара и платио је за то $(x-10).\frac{800}{x}$ динара. Онда је:

$$x.\frac{900}{x-8}+(x-10).\frac{800}{x}=1800.$$

Једначина даје решење $x=\mathbf{40}$. *Дакле први је купио 40 m платна по 30 дин.,* **а** *други 30 m по 20 дин.*

* * *

131. *Две тачке се крећу из темена правога угла по крацима једнаким брзинама, али једна започне кретање 7 секунада раније од друге. Након 12 секунада после поласка прве оне су међусобно раздаљене 65 cm. Којом се брзином крећу?*

брзина x, прва је превалила пут $12x$, а друга $5x$. Њихова раздаљеност у том моменту је хипотенуза правоуглог троугла. Онда је: $(12x)^2 + (5x)^2 = 65^2$. Одатле **c = 5 cm/sec.**

---

132. *Пас прогони зеца, који је пред њим 20 m. Пас треба за 1 m $\frac{1}{20}$ секунде мање него зец и тако га стигне у 20 секунада. Колико је метара претрчао пас?*

Ако пас превали *1 m* у $\frac{1}{x}$ секунада, значи, да он у *1* секунди превали x метара. Зец превали *1 m* у $\frac{1}{x} + \frac{1}{20} = \frac{20 + x}{20x}$ секунада, а у једној секунди превали $\frac{20x}{20 + x}$ метара. У 20^s пас превали $20x$ метара, а зец $\frac{20 \,.\, 20x}{20 + x}$. Онда је:

$20x = 20 \,.\, \frac{20x}{20 + x} + 20$, или: $x = \frac{20x}{20 + x} + 1$, а то даје једначину: $x^2 - x - 20 = 0$. Позитивни корен ове једначине $x_1 = 5$ решава проблем, т. ј. пас превали $5\,m$ у 1^s, а у 20^s превали **свега *100* m.**

---

133. *Једно удружење има управ толико чланова, да је годишња чланарина једнога члана 5 пута већа од броја чланова. Од целе чланарине троши се на редовне издатке проценат, који је 2 пута већи од броја чланова, а $7\frac{58}{81}\,\%$ издатака отпада на осветљење, и то износи 10 пута више динара него ли је број чланова. Колико чланова има то удружење и колико износи њихова годишња чланарина?*

Нека је број чланова x; онда је годишња чланарина једнога члана $5x$, а цела чланарина $5x^2$. Редовни издаци удружења износе $2x\,\%$ од чланарине, а то је $\frac{10x^3}{100} = \frac{x^3}{10}$. На осветлење се троши $7\frac{58}{81}\,\%$ од тога, а то је: $\frac{x^3}{10} \cdot \frac{625}{81} : 100$, т. ј. $\frac{5x^3}{648}$.

Ово мора износити $10x$, т. ј. имаш једначину: $\frac{5x^3}{} = 10x$

или $\frac{x^2}{648}=2$. Одатле је $x=\mathbf{36}=$ број чланова; чланарина је **180** динара.

* * *

134. *Реши систем једначина*: $\begin{cases} x^2-y^2+2y-3x=4 \\ 6x^2-5xy-4y^2=0. \end{cases}$

Друга једначина је *хомогена*, па ћеш из ње извести нову једначину. Можеш то на *2* начина: 1. подели је са y^2, па добиваш: $6\frac{x^2}{y^2}-5\frac{x}{y}-4=0$. Постави $\frac{x}{y}=z$ .... /1/, па имаш једначину: $6z^2-5z-4=0$, која даје решења: $z_1=\frac{4}{3}$, $z_2=-\frac{1}{2}$, т. ј. добиваш нове једначине: $\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$, $\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$ ..../2/, које ћеш довести у везу с првом заданом једначином и решити добивене системе. — *Други начин*: постави у хомогеној једначини: $x=t.y$. Онда добиваш једначину: $6t^2y^2-5ty^2-4y^2=0$, која је, након делења са y^2, у облику $6t^2-5t-4=0$ идентична са пређашњом једначином и даје решења: $t_1=\frac{4}{3}$, $t_2=-\frac{1}{2}$; т. ј. имаш нове једначине: $x=\frac{4}{3}y$, $x=-\frac{1}{2}y$ ....../2/. Једначине /2/ са првом једначином дају системе:

$$\begin{cases} x^2-y^2+2y-3x=4, \\ x=\frac{4}{3}y \end{cases} \quad \text{и:} \quad \begin{cases} x^2-y^2+2y-3x=4. \\ x=-\frac{1}{2}y \end{cases}$$

Први систем, заменом друге једначине у прву, даје једначину: $7y^2-18y-36=0$, која даје коренове: $y_1=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\sqrt{\mathbf{37}}$, $y_2=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\sqrt{\mathbf{37}}$, а помоћу друге: $x_1=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{7}}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}\sqrt{\mathbf{37}}$, $x_2=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{7}}-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}\sqrt{\mathbf{37}}$. Други систем истим поступком води до једначине: $3y^2-14y+16=0$, која даје коренове: $y_3=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$, $y_4=\mathbf{2}$, а помоћу друге једначине: $x_3=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$, $x_4=-\mathbf{1}$. У бр. 110. приказана је трећа метода за хомогену једначину.

* * *

135. *Реши систем једначина*: $\begin{cases} 2x^2-xy-\ y^2=20 \\ 5x^2+xy-2y^2=40. \end{cases}$

Из ових 2 једначина можеш лако да добијеш хомогену.

Подели једну једначину с другом и ослободи се именитеља. Добиваш: $8x^2 - 4xy - 4y^2 = 10x^2 + 2xy - 4y^2$, т. ј. $x^2 + 3xy = 0$. Одатле: $x.(x + 3y) = 0$. Једна је могућност: $x_1 = \mathbf{0}$, а помоћу тога из прве дане једначине; $y^2 = -20$, т. ј. $y_1 = +\mathbf{2i\sqrt{5}}$, $y_2 = \mathbf{-2i\sqrt{5}}$. Други фактор даје једначину: $x = -3y$. Замени то у прву једначину, па добиваш: $18y^2 + 3y^2 - y^2 = 20$. Та једначина даје реелна решења;

$$x_3 = \mathbf{-3}, \; y_3 = \mathbf{+1}; \qquad x_4 = \mathbf{+3}, \; y_4 = \mathbf{-1}.$$

136. *Реши систем једначина:* $$\begin{cases} x^2 + 3xy - \quad y^2 = y^2 - x \\ \dfrac{x^2 - 2xy + 3y^2}{y - \sqrt{x}} = 3\,(y + \sqrt{x}). \end{cases}$$

Другу једначину помножи са $y - \sqrt{x}$ и онда је подели са првом. Добиваш: $\dfrac{x^2 - 2xy + 3y^2}{x^2 + 3xy - \quad y^2} = 3$, одакле следи хомогена једначина: $2x^2 + 11xy - 6y^2 = o$, која супституцијом $x = \alpha y$ даје једначину $2\alpha^2 + 11\alpha - 6 = o$. Одавле је $\alpha_1 = -6$ и $\alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, т. ј. $x = -6y$ и $x = \dfrac{y}{2}$. Заменом у једну од заданих једначина добиваш помоћу тога ова решења: $x_1 = x_3 = \mathbf{0}$, $y_1 = y_3 = \mathbf{0}$; $x_2 = -\mathbf{\dfrac{9}{4}}$, $y_2 = \mathbf{\dfrac{3}{8}}$; $x_4 = \mathbf{1}$, $y_4 = \mathbf{2}$.

137. *Реши систем једначина:* $$\begin{aligned} x^2 + y^2 - x - y - 12 &= o \\ xy - 2x - 2y + 16 &= o. \end{aligned}$$

Другу једначину помножи са 2 и сабери са првом; добиваш: $(x + y)^2 - 5(x + y) + 4 = o$. Замени овде $x + y = z$, па добиваш једначину: $z^2 - 5z + 4 = o$, чији су коренови: $z_1 = 4$, $z_2 = 1$; т. ј. $x + y = 4$, и $x + y = 1$. Изрази одавле x помоћу y и замени у другу, па добиваш решења: $y_1 = \mathbf{0}$, $x_1 = \mathbf{4}$; $y_2 = \mathbf{4}$, $x_2 = \mathbf{0}$. На исти начин из $z_2 = x + y = 1$ налазиш: $y_3 = \mathbf{3}$, $x_3 = \mathbf{-2}$; $y_4 = \mathbf{-2}$, $x_4 = \mathbf{3}$.

138. *Реши систем једначина:* $$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y - 2} = 14 \\ \dfrac{x^2 y^2}{3} - \dfrac{3xy}{2} = 255. \end{cases}$$

$z + \sqrt{z-2} = 14$, која има коренове: $z_1 = 18$, $z_2 = 11$. У другој једначини постави: $xy = u$; добивена квадратна једначина има коренове: $u_1 = 30$, $u_2 = -\frac{51}{2}\cdot$ Ове 4 вредности u и z дају следеће системе једначина:

$$\begin{array}{l|l|l|l} x+y=18 & x+y=18 & x+y=11 & x+y=11 \\ xy=30 & xy=-\frac{51}{2} & xy=30 & xy=-\frac{51}{2}, \end{array}$$

који дају 8 решења:

$$\begin{array}{l|l} x_1=9-\sqrt{51}\,,\ y_1=9+\sqrt{51} & \boldsymbol{x_5=5,\qquad y_5=6} \\ x_2=9+\sqrt{51}\,,\ y_2=9-\sqrt{51} & \boldsymbol{x_6=6,\qquad y_6=5} \\ x_3=9-\frac{1}{2}\sqrt{426},\ y_3=9+\frac{1}{2}\sqrt{426} & \boldsymbol{x_7=\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{233},\ y_7=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{233}} \\ x_4=9+\frac{1}{2}\sqrt{426},\ y_4=9-\frac{1}{2}\sqrt{426} & \boldsymbol{x_8=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{233},\ y_8=\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{233}.} \end{array}$$

Али прва 4 решења не задовољавају прву од заданих једначина, већ сличну једначину: $x + y - \sqrt{x+y-2} = 14$. *Одакле онда ова 4 решења?*

---

139. *Реши систем једначина:* $\left\{\begin{array}{l} x+y+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{240}{x-y} \\ x^2+y^2=353. \end{array}\right.$

Прву помножи са $x-y$; добиваш: $x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=240$; ту замени: $\sqrt{x^2-y^2}=z$. То даје: $z_1=15$, $z_2=-16$, т. ј. $x^2-y^2=225$, $x^2-y^2=256$ ..../1/. Комбинујући по једну од једначина /1/ са другом од заданих, добиваш решења:

$\boldsymbol{x=\pm 17,\ y=\pm 8;\ x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1218},\ y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{194}}.$

---

140. *Реши систем једначина:* $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=13 \\ xy=6. \end{array}\right.$

Можеш из друге $y=\frac{6}{x}$ заменити у прву, па добиваш након потребних операција биквадратну једначину: $x^4-13x^2+36=O$, коју заменом $x^2=z$ сводиш на квадратну једначину: $z^2-13z+36=O$, која даје коренове $z_1=9$, $z_2=4$. Одатле $x=\pm 3$, $y=\pm 2$ и $x=\pm 2$, $y=\pm 3$. Обзиром на другу знаци; дакле су ово решења: $x_1 = +3$, $y_1 = +2$; $x_2 = -3$, $y_2 = -2$; $x_3 = +2$, $y_3 = +3$; $x_4 = -2$, $y_4 = -3$.

Или овако: Помножи другу једначину са 2 и сабери с првом; добиваш; $(x+y)^2 = 25$. Удвостручену другу једначину одузми од прве; добиваш: $(x-y)^2 = 1$. Одатле: $x+y = \pm 5$, $x - y = \pm 1$. То даје системе:

$$\begin{array}{l|l|l|l} x+y=5 & x+y=-5 & x+y=+5 & x+y=-5 \\ x-y=1 & x-y=-1 & x-y=-1 & x-y=+1, \end{array}$$

који дају решења као горе.

* *Геометријско значење.* Прва једначина значи централни круг ($r = \sqrt{13}$), друга значи једну хиперболу, којој су координатне оси асимптоте. Решити овај систем једначина значи, наћи координате њихових пресека.

* * *

141. *Реши систем једначина:* $\left\{ \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 7 \\ xy &= 12. \end{aligned} \right.$

Као у претходном примеру замени у прву једначину вредност $y = \frac{12}{x}$ из друге једначине. Добићеш биквадратну једначину, која даје $z_1 = 16$, $z_2 = -9$. Одатле; $x = \pm 4$, $y = \pm 3$; $x = \pm 3i$, $y = \pm 4i$ Ради друге једначине долазе у једном пару решења из прве скупине само вредности x и y с једнаким знаком, а из друге с противним знацима.

Другу методу, примењену у претходном примеру, не можеш овде применити директно ради $-y^2$ у првој једначини. Али можеш поступити овако. Прву квадрирај, а другу квадрирај и онда помножи са 4. Добиваш: $\left\{ \begin{aligned} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 &= 49 \\ 4x^2y^2 &= 575. \end{aligned} \right.$ Сабирањем добиваш одавле; $x^2 + y^2 = \pm 25$. Ова једначина са првом заданом даје системе: $\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 &= +25 \\ x^2 - y^2 &= 7 \end{aligned} \right.$; $\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 &= -25 \\ x^2 - y^2 &= 7, \end{aligned} \right.$ а ови сабирањем и одузимањем дају прећашње скупине решења, т. ј: $x = 4$, $y = 3$; $x = -4$, $y = -3$; $x = +3i$, $y = -4i$; $x = -3i$, $y = +4i$.

**Геометријско значење.* Прва једначина значи једну равнострану хиперболу, којој је ос апсциса главна осовина, а асимптоте су симетрале I. и II. квадранта. Друга једначина као у су координатне оси асимптоте. Реелна решења дају координате њихових пресека.

---

142. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} 5\,(x^2+y^2)=14\,(x-y)+11 \\ xy=x-y+1\,. \end{cases}$

Помножи другу једначину са *10* и одузми од прве; добиваш једначину: $5\,(x-y)^2=4\,(x-y)+1$, која заменом: $x-y=z$ прелази у једначину $5\,z^2-4\,z-1=0$, чији су коренови: $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{5}$. Т. ј.: $x-y=1$ ……/1/, и $x-y=-\frac{1}{5}$ ……/2/. Вредност /1/ замени у задани систем, па добиваш нови систем: $x^2+y^2=5$, $x\,y=2$, који можеш решити истим начином као пример бр. 140. У вези с једначином /1/ добиваш одавле системе: $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=1 \end{cases}$, који дају решења: $x_1=\mathbf{2}$, $y_1=\mathbf{1}$; $x_2=-\mathbf{1}$, $y_2=-\mathbf{2}$. Једначина /2/, замењена у задани систем, води до система: $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{41}{25} \\ xy=\frac{20}{25} \end{cases}$, који сличним начином даје решења: $x_3=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$, $y_3=\mathbf{1}$; $x_4=-\mathbf{1}$, $y_4=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$.

**143. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \\ x^2-y^2=a^4\,b^4 \end{cases}$

Постави у првој једначини: $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=z$, онда је $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{1}{z}$; дакле добиваш једначину: $z+\frac{1}{z}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ или: $z^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)z+1=0$. Њезини су коренови: $z=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\pm\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$, т. ј. $z_1=\frac{a}{b}$, $z_2=\frac{b}{a}$. Дакле: $\frac{x+y}{x-y}=\frac{a^2}{b^2}$ ……/1/, $\frac{x+y}{x-y}=\frac{b^2}{a^2}$ ……/2/. Једначину /1/ можеш писати: $\frac{x+y}{x-y}=\frac{a^2t}{}$, где је t фактор пропорционалности; дакле можеш

$= a^2 b^2 t^2$. А из друге задане једначине је: $(x+y)(x-y) = a^4 b^4$. Одатле: $a^2 b^2 t^2 = a^4 b^4$, и: $t_1 = ab$, $t_2 = -ab$; т. ј.:
$\begin{cases} x+y = a^3 b \\ x-y = ab^3, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = -a^3 b \\ x-y = -ab^3. \end{cases}$ Из ових двају система излази: $x_1 = \frac{ab}{2}(a^2+b^2)$, $y_1 = \frac{ab}{2}(a^2-b^2)$; $x_2 = -\frac{ab}{2}(a^2+b^2)$, $y_2 = -\frac{ab}{2}(a^2-b^2)$.

На исти начин једначина /2/ даје ове парове решења: $x_3 = \frac{ab}{2}(a^2+b^2)$, $y_3 = -\frac{ab}{2}(a^2-b^2)$; $x_4 = -\frac{ab}{2}(a^2+b^2)$, $y_4 = \frac{ab}{2}(a^2-b^2)$.

---

144. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+2y^2} - xy\right)\sqrt{x^2+2y^2} = 3 \\ \left(\sqrt{x^2+2y^2} + xy\right)\sqrt{x^2+2y^2} = 15. \end{cases}$

Постави: $\sqrt{x^2+2y^2} = t$, $xy = z$; добиваш нови систем:
$\begin{cases} t^2 - tz = 3 \\ t^2 + tz = 15. \end{cases}$ Сабирањем: $2t^2 = 18$, $t^2 = 9$, $t_1 = 3$, $t_2 = -3$, а помоћу тога: $z_1 = 2$, $z_2 = -2$. То даје системе једначина:
$\begin{cases} x^2+2y^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2+2y^2 = 9 \\ xy = -2. \end{cases}$ Први систем даје решења: $x_1 = 2\sqrt{2}$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = -2\sqrt{2}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_3 = +1$, $y_3 = +2$; $x_4 = -1$, $y_4 = -2$, и то су решења заданога система. — Други систем даје опет 4 решења, али ова нису решења заданога система него сличнога:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+2y^2} - xy\right)\cdot\sqrt{x^2+2y^2} = 15 \\ \left(\sqrt{x^2+2y^2} + xy\right)\cdot\sqrt{x^2+2y^2} = 3. \end{cases}$$

**145. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2 y} = a \\ y + \sqrt[3]{x y^2} = b. \end{cases}$

Те једначине можеш овако написати: $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2 y} = a$, $\sqrt[3]{y^2}\cdot\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{x y^2} = b$, и након вађења заједничког фактора:
$\sqrt[3]{x^2}\cdot\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right) = a$ $\sqrt[3]{x^2}$

$= \frac{a}{b}$. Одатле добиваш даље: $\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^3}{b^3}$, $\frac{x}{y} = \frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{b}}$, па заменом у једну од заданих налазиш решење. Једноставније ћеш доћи до решења овако: једначину $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{y^2}} = \frac{a}{b}$ можеш написати: $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{y^2}} = \frac{a t^2}{b t^2}$, где је t фактор пропорцијоналности. Одатле: $\sqrt[3]{x^2} = a t^2$, $\sqrt[3]{x} = t.\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{y^2} = b t^2$, $\sqrt[3]{y} = t\sqrt{b}$. Ово замени у једну од заданих једначина, н. пр. у прву, па добиваш након краћења са a: $t^3(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = 1$, $t = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$ Заменом у једначине:

$\sqrt[3]{x} = t.\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{y} = t.\sqrt{b}$, дотично: $x = t^3.a\sqrt{a}$, $y = t^3.b\sqrt{b}$, добиваш решење; $x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $y = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Види пример бр. 42.

146. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} x^2 + 2xy = 9y + 6 \\ x^3 - y^3 = (x-y).(x^2+y^2+3). \end{cases}$

Другу једначину можеш написати и овако: $(x-y).(x^2+xy+y^2) = (x-y)(x^2+y^2+3)$ т. ј.: $(x-y).(x^2+xy+y^2-x^2-y^2-3) = 0$. Тако се друга једначина распада на једначине: $x - y = 0$ т. ј. $x = y$ ..../1/, и на једначину: $xy = 3$ ..../2/. Замени /1/ у прву једначину, па добиваш једначину: $x^2 - 3x - 2 = 0$. Одатле добиваш: $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$, $x_2 = y_2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{17})$. Ако замениш /2/, т. ј. $y = \frac{3}{x}$, у прву једначину, добиваш биномну једначину: $x^3 - 27 = 0$, чији су коренови1): $x_3 = 3$, $x_{4,5} = -\frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. Одатле:

$x_3 = 3$, $y_3 = 1$; $x_4 = -\frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})$, $y_4 = -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$; $x_5 = -\frac{3}{2}(1-i\sqrt{3})$, $y_5 = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$.

147. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} 12.(x^2 + y\sqrt{xy}) = 27 + 2\sqrt{2} \\ 36.(y^2 + x\sqrt{xy}) = 4 + 27\sqrt{2}. \end{cases}$

Из леве стране прве једначине извади заједнички фактор

$\sqrt{x}$, а из леве стране друге једначине заједнички фактор $\sqrt{y}$;

добиваш: $\begin{cases} 12\sqrt{x}\cdot(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})=27+2\sqrt{2} \\ 36\sqrt{y}\cdot(y\sqrt{y}+x\sqrt{x})=4+27\sqrt{2}. \end{cases}$ Подели другу једначину с првом, па у квоцијенту десних страна рационализирај именитељ: $3.\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{4+27\sqrt{2}}{27+2\sqrt{2}}=\frac{(4+27\sqrt{2})(27-2\sqrt{2})}{721}=$

$=\frac{721\,.\,\sqrt{2}}{721}=\sqrt{2}$, т. ј. $\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $y=\frac{2}{9}x$, $\sqrt{x\,y}=\frac{x}{3}\sqrt{2}$. Ово замени н. пр. у прву једначину, па добиваш:

$$x^2+\frac{2\sqrt{2}}{27}x^2-\frac{27+2\sqrt{2}}{12}=0, \text{ или: } \frac{27+2\sqrt{2}}{27}x^2=$$

$=\frac{27+2\sqrt{2}}{12}$. Одатле: $x=\pm\frac{3}{2}$, $y=\pm\frac{1}{3}$.

---

148. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} \frac{x+1}{y-3}+\frac{y+3}{x-1}=-\frac{3}{2} \\ \frac{x+1}{y+3}+\frac{y-3}{x-1}=\frac{3}{10}. \end{cases}$

Помножи прву са $(x-1).(y-3)$, другу са $(x-1).(y+3)$.

Добиваш: $\begin{cases} (x^2-1)+(y^2-9)=-\frac{3}{2}(x-1).(y-3) \\ (x^2-1)+(y^2-9)=+\frac{3}{10}(x-1).(y+3). \end{cases}$

Пошто су леве стране једнаке, следи: $-\frac{3}{2}(x-1).(y-3)=$ $=\frac{3}{10}(x-1).(y+3)$, а одатле: $(x-1).\left[(y-3)+\frac{1}{5}(y+3)\right]=0$ ..../1/. —

Решење $x=1$, које излази из $x-1=0$, даје за другу непознату $y=\pm3$. Али овај пар вредности $x=1$, $y=\pm3$ даје неодређено решење. Из једначине /1/ излази надаље једначина: $y-3+\frac{1}{5}(y+3)=0$. Одатле $y=2$; а помоћу једне од заданих једначина: $x_1=3$, $x_2=-\frac{3}{2}$. Т. ј. задани систем има ова решења: $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=-\frac{3}{2}$, $y_2=2$.

149. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} x - y = \frac{1}{2} \\ x^3 - y^3 = \frac{7}{8}. \end{cases}$

Овај систем је представник једне овеће групе задатака, које решаваш све сличним поступком. Кубирај прву једначину: $(x - y)^3 = \frac{1}{8}$ .... /1/. С левом страном изведи ове трансформације и замене: $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy \,.\, (x - y) = \frac{7}{8} - \frac{3}{2}xy$, јер је према задатку $x^3 - y^3 = \frac{7}{8}$, $x - y = \frac{1}{2}$. Тако помоћу /1/ добиваш једначину: $\frac{7}{8} - \frac{3}{2}xy = \frac{1}{8}$. Одатле: $xy = \frac{1}{2}$ ..../1/. Ово доведи у везу са првом једначином, па имаш систем: $x - y = \frac{1}{2}$, $xy = \frac{1}{2}$. Одавле, заменом једне једначине у другу: $2x^2 - x - 1 = 0$, а одатле: $\boldsymbol{x_1 = 1}$, $\boldsymbol{x_2 = -\frac{1}{2}}$, и помоћу тога: $\boldsymbol{y_1 = \frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{y_2 = -1}$.

---

150. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^5 - y^5 = 33. \end{cases}$

Систем је исте врсте као претходни и решава се истом методом. Прву једначину дигни на 5. степен према 6. ретку Паскаловог троугла: $(x - y)^5 = 243$. Леву страну можеш овако транформирати:

$$(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5 = \\ = x^5 - y^5 - 5xy \,.\, (x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3), \text{ где је } x^5 - y^5 = 33.$$

Израз у загради можеш даље овако трансформирати: $x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3 = (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) + (x^2y - xy^2) = \underbrace{(x - y)^3}_{27} + xy \,.\, \underbrace{(x - y)}_{3}$. Тако је онда: $(x - y)^5 = 33 - 5xy \,.(27 + 3xy)$. Дакле имаш једначину: $33 - 5xy \,.(27 + 3xy) = 243$, а након крађења и редукције: $(xy)^2 + 9xy + 14 = 0$. Одатле имаш 2 вредности: $xy = -7$, $xy = -2$. Доведи ове једначине у везу с првом једначином, па добиваш системе:

$\{ \; x - y = 3 \quad \{ \; x - y = 3$

Заменом $y=x-3$ у другу једначину првога система добиваш једначину $x^2-3x+7=0$, која даје решења: $x_1=+\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{19}$, $x_2=+\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{19}$, и помоћу тога: $y_1=-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{19}$, $y_2=-\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{19}$. Истом заменом у другом систему добиваш: $x^2-3x+2=0$, а одатле: $x_3=2$, $x_4=1$. Помоћу тога: $y_3=-1$, $y_4=-2$.

---

151. *Реши систем једначина:*
$$\begin{cases} x^3-y^3=\dfrac{95}{x+y} \\ x^3+y^3=\dfrac{35}{x-y}. \end{cases}$$

Делењем прве с другом и након крађења добиваш: $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{19}{7}$. Одатле хомогена једначина: $6x^2-13xy+$ $+6y^2=0$, чији су коренови: $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. Ако према првом корену замениш у прву једначину: $x=\frac{3}{2}y$, добиваш решења: $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=-3$, $y_2=-2$; $x_3=3i$, $y_3=2i$; $x_4=-3i$, $y_4=-2i$. Корен $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ даје само имагинарна решења.

---

152. *Реши систем једначина:*
$$\begin{cases} 32x^2+4xy-15y^2=0 \\ 3xy+\sqrt{10xy}-140=0. \end{cases}$$

Систем је сличан систему решеном у бр. 138., само је овде прва једначина хомогена; заменом $\frac{x}{y}=z$ она даје: $\frac{x}{y}=$ $=\frac{5}{8}$ и $\frac{x}{y}=-\frac{3}{4}$ ..../1/. У другој једначини постави: $\sqrt{xy}=$ $=t$; добиваш: $t_1=2\sqrt{10}$, $t_2=-\frac{7}{6}\sqrt{10}$, т. ј. $xy=40$, $xy=$ $=\frac{245}{18}$ ..../2/. Множећи по једну од /1/ са једном од /2/ добиваш ова решења: $x=\pm5, y=\pm8$; $x=\pm i\sqrt{30}, y=$ $=\mp\frac{4i}{3}\sqrt{30}$; $x=\pm\frac{35}{12}, y=\pm\frac{14}{3}$; $x=\pm\frac{7i}{12}\sqrt{30}, y=\mp\frac{7i}{9}\sqrt{30}$.

153. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} x^4+y^4=17\,(x+y)^2 \\ xy=-2\,(x+y). \end{cases}$

Другу квадрирај и подели прву с другом. Из добивене једначине изводиш одмах хомогену: $4\,x^4+4\,y^4-17\,x^2\,y^2=0$, која заменом $\frac{x^2}{y^2}=z$ даје коренове: $z_1=4$, $z_2=\frac{1}{4}$, т. ј.: $\frac{x}{y}=\pm 2$, $\frac{x}{y}=\pm\frac{1}{2}$. Кад ово замениш у другу од заданих једначина, добиваш решења: $\boldsymbol{x_1=-6}$, $\boldsymbol{y_1=-3}$; $\boldsymbol{x_2=+2}$, $\boldsymbol{y_2=-1}$; $\boldsymbol{x_3=-3}$, $\boldsymbol{y_3=-6}$; $\boldsymbol{x_4=-1}$, $\boldsymbol{y_4=+2}$, а сувише још 4 пута решење: $\boldsymbol{x=0}$, $\boldsymbol{y=0}$. —

* * *

154. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} x^4+x^2\,y^2+y^4=243 \\ x^2+xy+y^2=9 \end{cases}$

Другу квадрирај, па кад извадиш у једному делу заједнички фактор, добиваш: $(x^4+x^2\,y^2+y^4)+2\,xy\,(x^2+xy+y^2)=81$. Замени амо вредности из заданих једначина, па добиваш нову једначину: $xy=-9$ ..../1/. Замени /1/ у другу једначину, па добиваш нову једначину: $x^2+y^2=18$ ..../2/. Систем једначина /1/, /2/ реши према примеру бр. 140; добиваш: $x=\pm 3$, $y=\mp 3$; (ради /1/ узети супротне знакове!). — *Или*: Постави: $x^2+y^2=z$, $xy=t$; онда је $x^4+2\,x^2\,y^2+y^4=z^2$, т. ј.: $x^4+x^2\,y^2+y^4=z^2-t^2=(z-t)\,(z+t)$. Тако добиваш систем једначина: $(z-t)\,(z+t)=243$, $z+t=9$, или напокон помоћу ове друге прва добива облик: $z-t=27$ ..../3/. Једначина $z+t=9$ са /3/ даје систем, чије је решење: $z=18$, $t=-9$, т. ј. $x^2+y^2=18$, $xy=-9$, а то су једначине /2/ и /1/.

* * *

155. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} x+y=6 \\ x^4+y^4=34\,xy. \end{cases}$

Квадрирај два пута прву једначину: $x^4+y^4+4\,x^3\,y+6\,x^2\,y^2+4\,xy^3=1296$. Замени амо вредност друге једначине и из 3 последња члана извади заједнички фактор $4\,xy$; добиваш: $34\,xy+4\,xy.\left(x^2+\frac{3}{2}\,xy+y^2\right)=1296$. Триному у загради додај

1 1

$34\,xy + 4\,xy.\left[(x+y)^2 - \frac{1}{2}xy\right] = 1296$, и помоћу прве: $34\,xy + 4\,xy.\left(36 - \frac{1}{2}xy\right) = 1296$. Одатле једначина: $(xy)^2 - 89\,xy + 648 = 0$, која даје решења: $(xy)_1 = 81$, $(x\,y)_2 = 8$.

Један део решења овога система ћеш онда наћи системима једначина: $\begin{cases} xy = 81 \\ x + y = 6 \end{cases}$ и $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6. \end{cases}$ Први систем даје комплексна решења: $x_1 = 3 - 6\,i\sqrt{2}$, $y_1 = 3 + 6i\sqrt{2}$ и: $x_2 = 3 + 6\,i\sqrt{2}$, $y_2 = 3 - 6\,i\sqrt{2}$. Други систем даје реелна решења: $x_3 = 2$, $y_3 = 4$; $x_4 = 4$, $y_4 = 2$. — Види пример бр. 112.

156. *Реши сисшем једначина:* $\begin{cases} \sqrt{5\sqrt{x} + 5\sqrt{y}} + \sqrt{x} = 10 - \sqrt{y} \\ \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = 35. \end{cases}$

Прву једначину можеш написати овако: $\sqrt{5}\cdot\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$. Постави: $\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = z$, па добиваш једначину: $\sqrt{5}\cdot z + z^2 - 10 = 0$, која даје решења: $z = -\frac{1}{2}\sqrt{5} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5}$, $z_1 = \sqrt{5}$, $z_2 = -2\sqrt{5}$. Једначина $\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{5}$ даје једначину $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$, која с другом заданом једначином чини систем: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = 35. \end{cases}$ Ако овде поставиш $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$, добиваш систем; $a + b = 5$, $a^3 + b^3 = 35$, који се решава попут сличног примера бр. 149. — Или можеш поступати директно. Ако кубираш прву и у куб замениш вредност друге једначине, добиваш: $3\sqrt{xy}\,.(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 90$, а то помоћу прве даје: $3\,.\,5\,.\sqrt{xy} = 90$ или: $\sqrt{xy} = 6$. Замени овде из прве: $\sqrt{y} = 5 - \sqrt{x}$, па добиваш: $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$, а одатле: $\sqrt{x} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$, т. ј.: $\sqrt{x} = 3$, $x_1 = 9$ и $\sqrt{x} = 2$, $x_2 = 4$; $y_1 = 4$, $y_2 = 9$. — Вредност $z_2 = -2\sqrt{5}$, т. ј. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 20$ даје са једначином: $\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = 35$ комплексна решења.

157. *Реши систем једначина*: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=\frac{13}{3}xy \\ x^3-y^3=\frac{26}{3}xy. \end{cases}$

Прва једначина, доведена у облик: $x^2-\frac{10}{3}xy+y^2=0$, је хомогена, па заменом $y=xt$ даје једначину: $t^2-\frac{10}{3}t+1=0$, чији су коренови: $t_1=3$, $t_2=\frac{1}{3}$, т. ј. $y=3x$ и $y=\frac{x}{3}$. Замени ово у другу једначину, па са $y=3x$ добиваш $x^3-27x^3=$ $=26x^2$, или $x^3+x^2=0$, чији су коренови $x_1=x_2=\boldsymbol{0}$, $x_3=\mathbf{-1}$, а одатле $y_1=y_2=\boldsymbol{0}$, $y_3=\mathbf{-3}$. Замена $y=\frac{x}{3}$ даје опет 2 пара решења $x=0$, $y=0$ и једно решење $x_4=\mathbf{3}$, $y_4=\mathbf{1}$.

Или овако: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. Дакле друга једначина онда гласи: $(x-y)(x^2+y^2+xy)=\frac{26}{3}xy$. Подели ову једначину с првом, па добиваш: $x-y=2$. Одатле $x=y+2$; то замени у прву једначину. Добиваш коначно једначину: $y^2+2y-3=0$ и решења $x_1=\mathbf{3}$, $y_1=\mathbf{1}$; $x_2=\mathbf{-1}$, $y_2=\mathbf{-3}$.

**158. *Реши систем једначина*: $\begin{cases} (x+y)^4=\frac{81}{5}(x^2+y^2) \\ x^4+y^4=\frac{17}{5}(x^2+y^2). \end{cases}$

У првој једначини: $(x+y)^4=[(x+y)^2]^2=[(x^2+y^2)+2xy]^2$. У другој једначини: из $(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$ следи ово: $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$. Ове промене уведи у леве стране једначина, па постави ове нове непознате: $x^2+y^2=u$, $xy=v$ ..../1/. Онда задане једначине добивају овај облик: $u^2+4v^2+4uv=\frac{81}{5}u$, $u^2-2v^2=\frac{17}{5}u$ ..../2/. Ове једначине подели једну с другом; добиваш након редуковања хомогену једначину: $32u^2-34uv-115v^2=0$. Ова једначина даје решења: $z_1=+\frac{5}{2}$, т. ј. $u=\frac{5}{2}v$, $z_2=-\frac{23}{32}$, т. ј. $u=-\frac{23}{32}v$.

$v_1 = 0$; $u_2 = 5$, $v_2 = 2$; $u_3 = 0$, $v_3 = 0$; $u_4 = -\frac{17 . 23^2}{5 . 1519}$, $v_4 = +\frac{17 . 23 . 32}{5 . 1519}$. Решења u_2 и v_2, замењена у систем /1/ дају систем: $x^2 + y^2 = 5$, $2xy = 4$. Одатле добиваш као у примеру бр, 140 линеарне системе: $x + y = 3$, $x - y = 1$; $x + y = -3$, $x - y = -1$; $x + y = +3$, $x - y = -1$; $x + y = -3$, $x - y = +1$. Ови системи дају решења: $x_1 = y_3 = \mathbf{2}$, $y_1 = x_3 = 1$; $x_2 = y_4 = -2$, $y_2 = x_4 = -1$. Вредности $u = v = 0$ дају решења: $x_5 = \boldsymbol{0}$, $y_5 = \boldsymbol{0}$, а вредности u_4 и v_4 дају комплексна решења, јер је $u_4 = x^2 + y^2$ негативно.

**159. *Реши систем једначина:*

$$\begin{cases} x + y = 6 - z \\ x^2 + y^2 - z^2 = 12 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$$

Прву једначину квадрирај и кубирај. Када квадрираш и у добивени израз замениш другу једначину, добиваш након крађења: $6z + xy = 12$ .... /1/. Када кубираш и у добивени израз замениш трећу једначину, добиваш након крађења: $36z - 6z^2 + xy(x + y) = 60$. У ову једначину замени $x + y = 6 - z$ и $xy = 6(2 - z)$ [из /1/]; добиваш након редукције и крађења једначину: $2z - 2 = 0$, т. ј. $z = 1$. Заменом ове вредности у прву једначину и у /1/ добиваш систем: $xy = 6$, $x + y = 5$, из кога ћеш добити вредности непознатих x и y. Решења су ова: $x_1 = \mathbf{2}$, $y_1 = \mathbf{3}$, $z_1 = \boldsymbol{1}$; $x_2 = \mathbf{3}$, $y_2 = \mathbf{2}$, $z_2 = \boldsymbol{1}$.

Реши истодобно и систем из задатка бр. 47. у II. делу (геометрија).

160. *Број 3 растави у 2 ирацијонална фактора тако, да један од њих буде за 5 већи од другога.*

Један фактор нека је $\sqrt{x}$; онда је други фактор $\frac{3}{\sqrt{x}}$, јер је $\sqrt{x} . \frac{3}{\sqrt{x}} = 3$. Њихова разлика мора износити, према задатку, 5. Т. ј.: $\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 5$. Замени: $y = \sqrt{x}$, па добиваш квадратну решења: један фактор: $\frac{1}{2}(5+\sqrt{37})$, други фактор: $\frac{6}{5+\sqrt{37}}$,

и: један фактор; $\frac{1}{2}(5-\sqrt{37})$, други фактор: $\frac{6}{5-\sqrt{37}}$.

О исправности тога решења увери се пробом; н. пр. $\frac{1}{2}(5+ + \sqrt{37}) - \frac{6}{5+\sqrt{37}} = \frac{1}{2}(5+\sqrt{37}) - \frac{6(5-\sqrt{37})}{-12} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} + + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2} = 5$.

---

161. *Број 134522 растави у 2 суманда тако, да збир квадратних коренова тих суманада буде 500.*

Проблем, изражен једначинама, даје систем: $x+y=134522$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=500$.

Изгледа, да би било најједноставније, да другу једначину квадрираш, замениш $x+y$ и нађеш $2\sqrt{xy}$ Али идући даље зашао би одмах у квадрате великих бројева. Најзгодније ћеш избећи великим бројевима овако. Постави $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$ и другу једначину квадрирај; помоћу прве једначине добиваш: $2ab=115478$. Одузми то од прве једначине, па имаш. $a^2-2ab+ + b^2=(a-b)^2=19044$. Тако добиваш једначине: $\begin{cases} a-b=138 \\ a+b=500. \end{cases}$

Одатле је $a=319$, $b=181$, или: $\boldsymbol{x=101761}$, $\boldsymbol{y=32761}$.

**162. *Два броја имају особину, да је и збир њихових квадрата и збир њихових куба једнак њиховому збиру. Који су то бројеви?*

Задатак даје систем: $x^2+y^2=x+y$, $x^3+y^3=x+y$. — Из $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ следи: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$; онда прва једначина добива облик: $(x+y)^2-2xy=x+y$ ..../1/. Из $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ следи: $x^3+y^3= =(x+y)^3-3xy(x+y)$, а помоћу тога друга једначина добива облик: $(x+y)^3-3xy(x+y)-(x+y)=0$ ..../2/. Ова једначина /2/ даје једну могућност: $x+y=0$, и заменом у /1/: $xy=0$. Овај систем има коренове: $x_1=0$, $y_1=0$. Из остатка једначине /2/ и из једначине /1/ елиминирај xy, па добиваш

$+y=t$ даје квадратну једначину по t, чији су коренови $t_1=1$, $t_2=2$. Заменом у прву једначину добиваш помоћу тога коренове: $x_2=1$, $y_2=0$; $x_3=0$, $y_3=1$; $x_4=1$, $y_4=1$. — Дакле проблему одговарају ове групе бројева: **0, 0**; **1, 0**; **1, 1.**

163. *Да се у некој радњи повиси надница радницима, а да се истодобно не увећају издаци, морала су бити отпуштена 4 радника, а преосталима је надница повишена по 10 динара; тако су дневни издаци на персонал износили 360 динара. Да им је повишена надница по 15 динара, колико су они тражили, морало их је бити отпуштено 5, и тада би дневни издаци износили 350 динара. Колико је радника било у почетку и колико им је износила надница?*

Нека је x број радника, а y њихова надница; након отпуштања било је $x-4$ радника, а надница им је износила $y+10$. Дневни издатак на персонал је онда: $(x-4).(y+10=$ $=360$ ..../1/. Други услов даје једначину: $(x-5)(y+15)=$ $=350$ ..../2/. Из /1/ и /2/ елиминирај квадратни члан xy, па добиваш линеарну једначину: $5x-y=25$. Замени одавле y у /1/ или /2/ и узми позитивно решење; $x=\mathbf{12}$ радника, $y=\mathbf{35}$ динара.

164. *Капитал уложен на интерес порасте у 1 години на 4400 динара. Да је био за 500 динара мањи, а да је перценат био за 2 већи, тад би у једној години нарасао на 3920 динара. Који је то капитал и уз колики је перценат био уложен?*

Ако је капитал x, а перценат y, онда према обрасцу (24 a) имаш једначине: $x+\frac{xy}{100}=4400$ ..../1/, и: $x-500+$ $+\frac{(x-500).(y+2)}{100}=3920$ ..../2/. Једначина /2/ даде се и овако написати: $\left(x+\frac{xy}{100}\right)+\frac{2x-500y-1000}{100}=4420$; па када први члан замениш вредношћу из /1/, добиваш коначно

$250.(6+y).\frac{100+y}{100}=4400$, чије је позитивно решење: $y=$ $=$ ***10*** $^0/_0$, а одатле: $x=$ ***4000*** дин.

---

165. *Неко је купио кућу, па ју је опет продао за 119000 дин. и код тога је зарадио толико процената, колико је хиљада платио за њу. Колико је платио за кућу?*

Означи перценат зараде са x; онда је куповна цена $1000\,x$ На 100 динара је зарадио x, а на целој кући $\frac{1000\,x^2}{100}=10\,x^2$. Када од продајне цене одузмеш куповну цену, добиваш зараду, т. ј. $119000-1000\,x=10\,x^2$, т. ј. $x^2+100\,x-11900=0$, Позитивни корен ове једначине је $x=70$. Дакле зарадио је код продаје $70^0/_0$, а кућу је купио за ***70000*** динара.

---

166. *Неко је купио два земљишта. Једно му рентира 18000 динара годишње, а друго, које је за 20000 динара јефтиније, рентира за 2⁰/₀ више него прво, јер је бољи квалитет земље; тако му рентира ово друго годишње 17000 динара. Колико стоје та земљишта и колико перцената рентирају годишње?*

Вредност првога земљишта означи са x, а његов перценат рентабилности са y. Онда по обрасцу (24 а) добиваш једначину: $\frac{xy}{100}=18000$ или: $xy=1800000$ ..../1/. За друго земљиште имаш према задатку, а према истом обрасцу, једначину: $\frac{(x-20000).(y+2)}{100}=17000$, или $(x-20000).(y+2)=$ $=1700000$. Измножи ову другу и место xy уведи вредност из /1/, па добиваш коначно: $x=10000.(y-3)$. Замени то у /1/ па добиваш квадратну једначину, чији позитивни корен решава проблем. Резултат: $x=120000$, $y=15$, т. ј. вредност првог земљишта: ***120000*** динара, његова рентабилност: ***15*** $^0/_0$; вредност другог земљишта: ***100000*** динара, његова рентабилност: ***17*** $^0/_0$.

167. *Ако у једному броју с 3 цифре цифра стотица измени своје место са цифром јединица, добијеш број, који је за 198 већи. А ако цифра јединица измени своје место са цифром десетица, добијеш број за 9 већи. Збир квадрата цифара је за 52 мањи од квадрата збира цифара. Који је то број?*

Ако су цифре x, y и z, онда је тај број: $100x + 10y + z$; ако прва цифра измени своје место са трећом, добијеш број: $100z + 10y + x$. Према задатку је $100x + 10y + z = 100z + 10y + x - 198$ ..../1/. Ако друга цифра измени своје место са трећом, добиваш број: $100x + 10z + y$, па је према задатку: $100x + 10y + z = 100x + 10z + y - 9$ ..../2/. Збир квадрата цифара је: $x^2 + y^2 + z^2$, а квадрат збира цифара: $(x + y + z)^2$, па је према задатку: $x^2 + y^2 + z^2 + 52 = (x + y + z)^2$ ..../3/. Једначине /1/, /2/, /3/ дају коначно систем: $z - x = 2$, $z - y = 1$, $xy + yz + xz = 26$. Изрази из прве и друге x и y помоћу z, па замени у трећу. Добиваш једначину: $(z - 2).(z - 1) + z.(z - 2) + z.(z - 1) = 26$, која коначно даје: $z^2 - 2z - 8 = 0$. Позитивно решење ове једначине је: $z = 4$, а помоћу тога: $x = 2$, $y = 3$. Тражени број је: ***234***. Обзиром на први услов задатка могао си према примеру бр. 23 (стр. 17) очекивати, да су цифре овога броја 3 узастопна броја.

---

*168. *Када се пусти камен да пада у један бунар, чује се ударац камена о дно након $t = 3\frac{57}{100}$ секунада. Колико је метара дубок тај бунар, ако је оглед вршен при температури 16° C, када је брзина звука $c = 340$ m? За акцелерацију земљине теже узми округло $g = 10$ m.*

Време t, које је протекло од испуштања камена до доласка звука у ухо састоји се од 2 дела: од x секунада, колико је камен падао до дна, и од времена y, колико је требао звук да дође од дна до уха. У времену x камен је превалио дубину бунара слободним падањем, па је по физичком обрасцу $s = \frac{g t^2}{2}$ дубина бунара: $s = \frac{10}{2} \cdot x^2$. У времену y звук је превалио тај исти пут $s = 340y$. Одатле имаш једначину: $5x^2 = 340y$, или: $x^2 = 68y$. — Друга једначина је: $x + y = 3\frac{57}{}$. Заменом из ове једначине: $x=\frac{357}{100}-y$ у прву једначину добиваш:

$$y^2-\frac{7514}{100}y+\frac{127449}{10000}=0. \text{ Одатле је: } y=\frac{3757}{100}\pm$$

$$\pm\frac{1}{100}\sqrt{3757^2-127449}=\frac{3757}{100}\pm\frac{1}{100}\sqrt{13987600}=\frac{3757}{100}\pm\frac{3740}{100}.$$

То даје: $y_1=\frac{17}{100}$, $\left(y_2=\frac{7497}{100}\right)$, а помоћу тога: $x_1=3{\cdot}4$, ($x_2<0$). Решење проблема дају само вредности x_1 и y_1. Онда је $s=5.3{\cdot}4^2\,m$ и $s=\frac{17}{100}\cdot 340\,m$. Добиваш: $s=$ ***57·80*** *m*.

169. *У правоуглом троуглу задан је полупречник уписаног круга $r=15$ cm и хипотенуза $c=73$ cm. Израчунај му катете и површину.*

Ако су катете x и y, онда је по Питагорином правилу: $x^2+y^2=73^2$ ..../1/. По обрасцу (45.) је $r=\frac{P}{s}=15$, где је $P=\frac{xy}{2}$, $2s=x+y+73$. Дакле је: $r=\frac{xy}{x+y+73}=15$; одатле једначина: $xy=15(x+y+73)$ ..../2/.

Помножи /2/ са 2 и сабери са /1/; добиваш: $(x+y)^2=$ $=73^2+30(x+y+73)$. Постави овде $x+y=z$, па добиваш једначину: $z^2-30z-7519=0$, која има позитивно решење: $z=x+y=103$ ..../3/. Површина троугла је онда према /2/ и према овом решењу: $P=\frac{15}{2}(103+73)=$ ***1320*** *cm*^{2}. Да нађеш и катете замени /3/ у /2/ [т. ј. израчунај $2P$!], па резултат помножи са 2. Добиваш: $2xy=4280$. Ово одузми од /1/, па добиваш: $(x-y)^2=49$, т. ј. $x-y=7$ ..../4/. Систем једначина /3/ и /4/ даје онда решење проблема: катета $x=$ ***55*** *cm*, катета $y=$ ***48*** *cm*. — Више сличних проблема наћи ћеш у геометријском делу (планиметрија).

* * *

III. ОДЕЉАК.

170. *Напиши помоћу знака log ове идентичне једначине:* $2^4=16$, $4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$, $5^{-4}=\frac{1}{625}$, $3^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}$.

По дефиницији логаритма, $\overset{b}{\log}\, a = x$ значи једначину $b^x=a$.

Према тому: а) $2^4=16$ се пише овако: $\overset{2}{\log}\, \mathbf{16 = 4}$.

б) $5^{-4}=\frac{1}{5^4}=\frac{1}{625}$, дакле $\overset{5}{\log}\,\mathbf{\frac{1}{625}=-4}$.

в) $4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$; дакле $\overset{4}{\log}\,\mathbf{\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}}$.

г) $3^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}$; дакле: $\overset{3}{\log}\,\mathbf{\frac{1}{\sqrt[4]{27}}=-\frac{3}{4}}$.

171. *Нађи ове логаритме:* $\overset{3}{\log}\frac{1}{27}$, $\overset{4}{\log}\, 2\sqrt[3]{2}$, $\overset{0\cdot4}{\log}\, 39\frac{1}{16}$, $\overset{0\cdot0016}{\log}\, 125$.

Логаритманд прикажи као потенцију базе логаритмовања. Често ћеш морати код тога да трансформираш и базу логаритамску. Редовно је згодније, да децималан број претвориш у обичан разломак.

а) $\overset{3}{\log}\frac{1}{27}$ значи једначину: $3^x=\frac{1}{27}$; $\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}=3^{-3}$. Дакле: $3^x=3^{-3}$. Одатле: $x=-3$, т. ј. $\overset{3}{\log}\,\mathbf{\frac{1}{27}=-3}$.

б) $\overset{4}{\log}\, 2\sqrt[3]{2}$ значи једначину: $4^x=2\sqrt[3]{2}$; $2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{8\,.\,2}=$ $=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4^2}=4^{\frac{2}{3}}$. Дакле $4^x=4^{\frac{2}{3}}$. Одатле је $x=\frac{2}{3}$, т. ј.: $\overset{4}{\log}\,\mathbf{2\sqrt[3]{2}=\frac{2}{3}}$.

в) $\overset{0\cdot4}{\log}\, 39\frac{1}{16}$ значи једначину; $0{\cdot}4^x=39\frac{1}{16}$; $0{\cdot}4=\frac{4}{}=$

$=\frac{2}{5}$; $39\frac{1}{16}=\frac{625}{16}=\frac{5^4}{2^4}=\left(\frac{5}{2}\right)^4=\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$. Дакле имаш једначину: $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$. Одатле $x=-4$, $\overset{0{\cdot}4}{log}\,\mathbf{39\frac{1}{16}=-4}$.

г) $\overset{0{\cdot}0016}{log}125$ значи једначину: $0{\cdot}0016^x=125$; $0{\cdot}0016=$ $=\frac{16}{10000}=\frac{2^4}{10^4}=\left(\frac{2}{10}\right)^4=\left(\frac{1}{5}\right)^4$. Дакле једначина добива облик: $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x}=125$; $125=5^3=\frac{1}{5^{-3}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$, т. ј. $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$. Одатле $x=-\frac{3}{4}$, $\overset{0{\cdot}0016}{log}\,\mathbf{125}=-\mathbf{\frac{3}{4}}$.

172. *За које је позитивне логаритамске базе* $log.\frac{64}{15625}=6$, $log\ 0{\cdot}064=3$, $log\frac{8}{27}=-1{\cdot}5$, $log\ 25=-\frac{2}{3}$?

а) $\overset{x}{log}\frac{64}{15625}=6$ значи: $x^6=\frac{64}{15625}$, а по дефиницији корена то даје: $x=\sqrt[6]{\frac{64}{15625}}=\sqrt[6]{\frac{8^2}{625.25}}=\sqrt[6]{\frac{2^6}{5^4.5^2}}=\frac{2}{5}$; дакле је $\overset{\frac{2}{5}}{\log}\mathbf{\frac{64}{15625}=6}$.

б) $\overset{x}{log}\,0\,064=3$ значи: $x^3=0{\cdot}064=\frac{64}{1000}=\left(\frac{4}{10}\right)^3=\left(\frac{2}{5}\right)^3$, $x=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^3}=\frac{2}{5}$, т. ј. log $\mathbf{0{\cdot}064=3}$ по бази $\mathbf{\frac{2}{5}}$.

в) $\overset{x}{log}\frac{8}{27}=-3$ значи: $x^{-3}=\frac{8}{27}$, а по дефиницији корена: $x=\sqrt[-3]{\frac{8}{27}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$, т. ј. log $\mathbf{\frac{8}{27}=-3}$ по бази $\mathbf{\frac{3}{2}}$.

г) $\overset{x}{log}25=-\frac{2}{3}$ значи $x^{-\frac{2}{3}}=25$, а то најпре даје $x^2=$ $=25^{-3}$ (потенцирањем са -3!), а одатле: $x=\sqrt{25^{-3}}=$ $=\frac{1}{\sqrt{(5^2)^3}}=\frac{1}{(\sqrt{5^3})^2}=\frac{1}{125}$. Дакле је: $log\ \mathbf{25}=-\mathbf{\frac{2}{3}}$ по бази $\mathbf{\frac{1}{125}}$, јер $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}=(125)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^2}=\sqrt[3]{(5^3)^2}=\sqrt[3]{(5^2)^3}=25.$

173. *Логаритмуј по b израз:* $\dfrac{a^3\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{ab^2}}\cdot(a+b)^3$.

Израз је најпре производ двају фактора, па је по обрасцу о логаритму производа:

$$\overset{b}{\log}\frac{a^3\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{ab^2}}\cdot(a+b)^3=\overset{b}{\log}\frac{a^3\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{ab^2}}+\overset{b}{\log}(a+b)^3=$$

У првом члану имаш логаритам квоцијента, па ћеш ту применити образац за *log* квоцијента; у другом члану имаш логаритам потенције:

$$=\overset{b}{\log}a^3\sqrt{ab}-\overset{b}{\log}b^2\sqrt{ab^2}+3\,\overset{b}{\log}(a+b)=$$

У првим 2 члановима имаш опет логаритам производа; последњи се члан даље неда логаритмовати, јер је то логаритам збира.

$$=\overset{b}{\log}a^3+\overset{b}{\log}\sqrt{ab}-\left(\overset{b}{\log}b^2+\overset{b}{\log}\sqrt[3]{ab^2}\right)+3\,\overset{b}{\log}(a+b)=$$

Поступи даље по обрасцима за логаритме потенција и коренова:

$$=3\,\overset{b}{\log}a+\frac{1}{2}\overset{b}{\log}(a.b)-2-\frac{1}{3}\overset{b}{\log}(a\,b^2)+3\,\overset{b}{\log}(a+b)=$$

Даље по обрасцу за логаритам производа:

$$=3\,\overset{b}{\log}a+\frac{1}{2}\left(\overset{b}{\log}a+\overset{b}{\log}\,b\right)-2-\frac{1}{3}\left(\overset{b}{\log}a+\overset{b}{\log}b^2\right)+$$

$$+3\,\overset{b}{\log}(a+b)=3\,\overset{b}{\log}a+\frac{1}{2}\overset{b}{\log}a+\frac{1}{2}-2-\frac{1}{3}\overset{b}{\log}a-$$

$$-\frac{2}{3}+3\,\overset{b}{\log}(a+b)=\boldsymbol{\frac{17}{6}}\overset{b}{\log}a-\boldsymbol{\frac{13}{6}}+\boldsymbol{3}\,\overset{b}{\log}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

---

174. *Нађи израз N, чији је:* $\overset{b}{\log}N=\dfrac{1}{3}-3\,\overset{b}{\log}\,a+\dfrac{2}{3}\overset{b}{\log}\,c-$
$-\dfrac{1}{2}\overset{b}{\log}(a+c)$.

Поступи обрнутим редом него у претходном задатку: чланове прикажи као логаритме потенција и коренова:

$\overset{b}{\log}N=\overset{b}{\log}\sqrt[3]{b}-\overset{b}{\log}a^3+\overset{b}{\log}\sqrt[3]{c^2}-\overset{b}{\log}\sqrt{a+c}$. Скупи чланове једнакога знака и поступи по обрнутом правилу: збир логаритама је логаритам

$$\overset{b}{log}\, N = \left(\overset{b}{log}\sqrt[3]{b} + \overset{b}{log}\sqrt[3]{c^2}\right) - \left(\overset{b}{log}\, a^3 + \overset{b}{log}\sqrt{a+c}\right) =$$

$$= \overset{b}{log}\left(\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c^2}\right) - \overset{b}{log}\ (a^3 . \sqrt{a+c}).$$

Поступи по обрнутом правилу за логаритам квоцијента: разлика логаритама је логаритам квоцијента: $\overset{b}{log}\, N =$ $= \overset{b}{log}\dfrac{\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c^2}}{a^3.\sqrt{a+c}}\cdot$ Дакле је $N = \dfrac{\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c^2}}{a^3 .\sqrt{a+c}}\cdot$

* * *

175. *Израчунај вредност разломка:* $\dfrac{\overset{\frac{3}{50}}{log}\, 0{\cdot}000216}{\overset{2{\cdot}5}{log}\, 0{\cdot}064}\cdot$

По дефиницији логаритма бројитељ даје редом:

$\left(\dfrac{3}{50}\right)^x = (0{\cdot}06)^x = 0{\cdot}000216$. Одатле $x = 3$, т. ј. $\overset{\frac{3}{50}}{log}\, 0{\cdot}000216 = 3$, јер $0{\cdot}000216 = 0{\cdot}06^3$. По дефиницији логаритма даје именитељ: $2{\cdot}5^y = \left(\dfrac{5}{2}\right)^y = \left(\dfrac{10}{4}\right)^y = 0{\cdot}064$. С друге стране $0{\cdot}064 = \dfrac{64}{1000} =$ $= \left(\dfrac{4}{10}\right)^3\cdot$ Т. ј. $\left(\dfrac{10}{4}\right)^y = \left(\dfrac{4}{10}\right)^3$ или $\left(\dfrac{10}{4}\right)^y = \left(\dfrac{10}{4}\right)^{-3}$; одатле $y = -3$, т. ј. $\overset{2{\cdot}5}{log}\, 0{\cdot}064 = -3$. Према тому вредност разломка је:

$$\frac{x}{y} = -\boldsymbol{1},$$

* * *

176. *Нађи Бригов логаритам израза* $N = \dfrac{0{\cdot}000125 . 144^2}{50^2 . 0{\cdot}027}$ *без логаритамских таблица, ако је* $log\ 2 = 0{\cdot}30103$, $log\, 3 =$ $= 0{\cdot}47712$, $log\ 5 = 0{\cdot}69897$.

Изрази N у потенцијама бројева *2, 3, 5* и *10* као фактора. $0{\cdot}000125 = \dfrac{125}{1000^2} = \dfrac{5^3}{10^6}$; $144 = 16.9 = 2^4 . 3^2$; $144^2 = 2^8 . 3^4$; $50 =$ $= 5 . 10$; $50^2 = 5^2 . 10^2$; $0{\cdot}027 = \dfrac{27}{1000} = \dfrac{3^3}{10^3}\cdot$ Дакле је $N =$

$$= \frac{\dfrac{5^3}{10^6}\cdot 2^8 . 3^4}{5^2 . 10^2 \cdot \dfrac{3^3}{10^3}} = \frac{5 . 2^8 . 3}{10^5}\cdot$$ Онда је $log\, N = log\, 5 + 8\, log\, 2 +$

$$
\begin{array}{rl}
+\log 3 - 5\log 10 = & 0{\cdot}69897 - 5 \\
 & 2{\cdot}40824 \\
 & 0{\cdot}47712 \\
\hline
 & 3{\cdot}58433 - 5 \\
\hline
\log N = & \mathbf{0{\cdot}58433 - 2.}
\end{array}
$$

177. *Израчунај помоћу логаритама вредност израза:*

$$\frac{53{\cdot}826.\ \sqrt[3]{7{\cdot}86}}{143{\cdot}28.\ 0{\cdot}48726^2} = N.$$

Логаритмуј овај израз. Добиваш:

$$\log N = \log 53{\cdot}826 + \frac{1}{3}\log 7{\cdot}86 - \log 143{\cdot}28 - 2\log 0{\cdot}48726 =$$

$$
\begin{array}{rrr}
= & 1{\cdot}73094 & -\ 2{\cdot}15594 \\
 & 0{\cdot}29847,_3 & 24,_8 \\
 & 1 & 0{\cdot}37570,_8 \\
\hline
 & 3{\cdot}02941,_3 & -\ 2{\cdot}53189,_6 \\
 - & 2{\cdot}53189,_6 & \\
\hline
 & 0{\cdot}49751,_7 & \\
\hline
\log N = & 0{\cdot}49752 &
\end{array}
$$

Потражи нумерус; $\mathbf{N = 3{\cdot}1443.}$

178. *Израчунај помоћу логаритама вредност израза:* $N = \sqrt[5]{0{\cdot}048764}$.

$$\log \sqrt[5]{0{\cdot}048764} = \frac{1}{5}\log 0{\cdot}048764;\ \log\ 0{\cdot}048764 =$$

$$
\begin{array}{rl}
= 0{\cdot}68806 & -\ 2 \\
3,_6 & \\
\hline
0{\cdot}68809,_6 & -\ 2.
\end{array}
$$

Дакле је: $\log \sqrt[5]{0{\cdot}048764} = (0{\cdot}68809,_6 - 2) : 5$. Да ово дељење олакшаш, негативном делу додај -3, а позитивном $+3$. Онда је: $\log \sqrt[5]{0{\cdot}048764} = (3{\cdot}68809,_6 - 5) : 5 = 0{\cdot}73762 - 1$ Потражи у таблицама одговарајући нумерус. Добиваш: $N = \mathbf{0{\cdot}54654}$.

179. *Израчунај вредност израза:* $m = 14\,.\left(\sqrt[3]{\frac{8{\cdot}19}{7{\cdot}94}} - 1\right)$.

Неможеш директно логаритмовати, јер у загради долази разлика; зато израчунај најпре вредност кубног корена:

$$\log \frac{8{\cdot}19}{7{\cdot}94} = 0{\cdot}91328$$

$$\underline{\phantom{\log \frac{8{\cdot}19}{7{\cdot}94} =}\ 0{\cdot}89982}$$

$0{\cdot}01346$; ово подели са 3, па је:

$\log \sqrt[3]{\frac{8{\cdot}19}{7{\cdot}94}} = 0{\cdot}00448_{,7}$; одатле је: $\sqrt[3]{\frac{8{\cdot}19}{7{\cdot}94}} = 1{\cdot}010387$[1]). — Дакле је: $m = 14 \,.\, 0{\cdot}010387$; $\log m = 1{\cdot}14613$

$$\begin{array}{r} + 0{\cdot}01620 - 2 \\ 29 \\ \hline \log m = 0{\cdot}16262 - 1 \\ \hline \mathbf{m = 0{\cdot}14542} \end{array}$$

Види пример бр. 87. у II. делу.

---

180. *Нађи грешку у овому извођењу:*

$$\log \frac{1}{3} = \log \frac{1}{3}$$

$$3 > 2.$$

Помножи леве стране и десне стране:

$$3 \log \frac{1}{3} > 2 \log \frac{1}{3}$$

$$\log \left(\frac{1}{3}\right)^3 > \log \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 > \left(\frac{1}{3}\right)^2;$$

дакле: $\frac{1}{27} > \frac{1}{9}$, **а то није истина.**

---

181. *Реши једначину:* $\log (4x - 7) - \log (x - 6) - 2 \log 2 = \log 3 + \log (3x + 1) - \log (9x - 48)$.

Леву и десну страну прикажи као логаритме алгебарских израза. *Лева*: $\log(4x - 7) - \log(x - 6) - 2\log 2 = \log(4x - 7) - [\log (x - 6) + \log 4] = \log (4x - 7) - \log 4(x - 6) = \log \frac{4x - 7}{4(x - 6)}$.

Десна: $\log 3 + \log (3x + 1) - \log (9x - 48) = \log 3(3x + 1) - \log 3(3x - 16) = \log \frac{3(3x + 1)}{3(3x - 16)} = \log \frac{3x + 1}{3x - 16}$. Дакле

---

[1]) Majcen, Logaritmičke tablice, стр. 62

задана једначина добива облик: $log \frac{4x-7}{4(x-6)} = log \frac{3x+1}{3x-16}$. Једнаким логаритмима одговарају једнаки логаритманди (нумеруси), т. ј.; $\frac{4x-7}{4(x-6)} = \frac{3x+1}{3x-16}$, или: $(4x-7).(3x-16) = 4(x-6).(3x+1)$. Ова једначина даје решење: $x = \boldsymbol{8}$.

---

182. *Реши једначину:* $log\left[\frac{1}{x}+\frac{96}{x^2(x^2-1)}\right] = log(x+1) + log(x+2) + log(x+3) - 2\,log\,x - log(x^2-1)$.

Ту једначину можеш написати овако:

$$log\left[\frac{1}{x}+\frac{96}{x^2.(x^2-1)}\right] = log\frac{(x+1).(x+2).(x+3)}{x^2.(x^2-1)},$$

Одатле: $\frac{1}{x}+\frac{96}{x^2.(x^2-1)} = \frac{(x+1).(x+2)(x+3)}{x^2.(x^2-1)}$; или: $x.(x^2-1)+96 = (x+1).(x+2).(x+3)$. Коначно једначина: $x^2+2x-15=0$ даје решења: $x_1 = \boldsymbol{3}$, $x_2 = -\boldsymbol{5}$.

---

183. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} 2^{2x-p}+3^{x-y}+5^{p-y}=12 \\ 2^{2x-p}-3^{x-y}+5^{p-y}=6 \\ 2^{2x-p}+3^{x-y}-4.5^{p-y}=-13. \end{cases}$

Постави: $2^{2x-p}=a$, $3^{x-y}=b$, $5^{p-y}=c$, па добиваш систем: $\begin{cases} a+b+c=12 \\ a-b+c=6 \\ a+b-4c=-13, \end{cases}$ који ћеш најбрже решити методом једнаких коефицијената. Добиваш: $a=4$, $b=3$, $c=5$; а то даје експоненцијалне једначине: $2^{2x-p}=4=2^2$, $3^{x-y}=3$, $5^{p-y}=5$. Одавле добиваш систем једначина: $\begin{cases} 2x-p=2 \\ x-y=1 \\ p-y=1, \end{cases}$ који има решење: $x=\boldsymbol{2}$, $y=\boldsymbol{1}$, $p=\boldsymbol{2}$.

---

184. *Реши једначину:* $3125^{\frac{x+1}{x+2}}.\ 15625^{-\frac{x+2}{x+3}} = 0{\cdot}2$.

Растави базе леве стране на факторе; добиваш: $3125=5^5$, $15625=5^6$, а десна: $0{\cdot}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1}$. Тако једначина прелази у ову:

$$5^{5\cdot\frac{x+1}{x+2}}.5^{-6\cdot\frac{x+2}{x+3}}=5^{-1}$$ или: $$5^{5\cdot\frac{x+1}{x+2}-6\frac{x+2}{x+3}}=5^{-1}.$$ Одатле: $6\frac{x+2}{x+3}-5\frac{x+1}{x+2}=1$, а ова једначина даје корен $x=\boldsymbol{3}$.

---

185. *Реши једначину*: $\frac{2^{2x-10}.3^{x+2}}{8^{x-4}.6^{2-x}}=\frac{1}{3}\cdot 27^{x-1}$.

Прикажи све факторе као потенције база *2* и *3*. $\frac{2^{2x-10}.3^{x+2}}{2^{3x-12}.2^{2-x}.3^{2-x}}=3^{-1}.3^{3x-3}$. Две потенције са базом *2* у имењитељу измножи, онда крањењем отпадају потенције са базом *2*, па добиваш експоненцијалну једначину: $3^{2x}=3^{3x-4}$, која даје: $3x-4=2x$, т. ј. $x=\boldsymbol{4}$.

---

186. *Реши једначину*: $\sqrt[x+1]{5}=5^x:5^{\frac{5}{3}}$.

Одатле следи непосредно: $5^{\frac{1}{x+1}}=5^{x-\frac{5}{3}}$, а то даје једначину: $\frac{1}{x+1}=x-\frac{5}{3}$, која има коренове: $x_1=\boldsymbol{2}$, $x_2=-\boldsymbol{\frac{4}{3}}$.

---

187. *Реши једначину*: $3^{x+1}+9^x=108$.

$3^x.3+3^{2x}=108$. Постави $3^x=y$, па имаш једначину: $y^2+3y-108=0$. Одатле: $y_1=-12$, $y_2=9$, т. ј. $3^x=-$ -12 и $3^x=9$. Прва једначина даје имагинаран корен, а друга: $x=\boldsymbol{2}$.

---

188. *Реши једначину*: $\left(\frac{7}{5}\right)^{2x+1}-\left(\frac{7}{5}\right)^{x+2}+\frac{24}{35}=0$.

$\left[\left(\frac{7}{5}\right)^x\right]^2\cdot\frac{7}{5}-\left(\frac{7}{5}\right)^x\cdot\frac{49}{25}+\frac{24}{35}=0$; постави овде: $\left(\frac{7}{5}\right)^x=z$, па имаш једначину: $7z^2-\frac{49}{5}z+\frac{24}{7}=0$, која даје коренове: $z_1=\frac{5}{7}$, $z_2=\frac{24}{35}$, т. ј.: $\left(\frac{7}{5}\right)^x=\frac{5}{7}=\left(\frac{7}{5}\right)^{-1}$; одатле: $x_1=-\boldsymbol{1}$.

Из: $\left(\frac{7}{5}\right)^x=\frac{24}{35}$ следи редом: $\left(\frac{7}{5}\right)^x=\frac{24}{35}$, $x\,(log\ 7-log\ 5)=$

$= log\,24 - log\,35$, $-x = \frac{log\,35 - log\,24}{log\ \ 7 - log\ \ 5} = \frac{16386}{14613}$, $log\,(-x) = $ $= 0{\cdot}04973$, $-x = +1{\cdot}1213$, $x_2 = \mathbf{-1{\cdot}1213}$.

* * *

189. *Реши једначину*: $3\,.\,2^{4x^2-6x-12} - 5\,.\,2^{2x^2-3x-6} = 152$.

Постави: $2^{2x^2-3x-6} = y$; онда је: $2^{4x^2-6x-12} = $ $= \left(2^{x^2-3x-6}\right)^2 = y^2$. Тако добиваш једначину: $3\,y^2 - 5\,y - $ $- 152 = 0$; њезини су коренови: $y_1 = 8$, $\left(y_2 = -\frac{19}{23}\right)$. То даје нове једначине: $2^{2x^2-3x-6} = 8$ ………… /1/, $2^{2x^2-3x-6} = -$ $-\frac{19}{3}$ ………… /2/. Једначина /1/ даје квадратну једначину: $2\,x^2 -$ $- 3\,x - 6 = 3$, која има коренове: $x_1 = \mathbf{3}$, $x_2 = \mathbf{-\frac{3}{2}}$.

* * *

**190. *Реши једначину*: $2\,.\,\frac{4^{2(x^2-5)}}{4^{2x}} - 9.\,\frac{4^{x^2-5}}{2^{2x}} + 4 = 0$.

По законима о потенцирању даде се ова једначина довести у облик: $2.\ 4^{2(x^2-x-5)} - 9.\,4^{x^2-x-5} + 4 = 0$; заменом: $4^{x^2-x-5} = z$, $4^{2(x^2-x-5)} = (4^{x^2-x-5})^2 = z^2$ прелази она у квадратну једначину: $2\,z^2 - 9\,z + 4 = 0$, чији су коренови: $z_1 = 4$, $z_2 = $ $= \frac{1}{2}$. Та два корена значе експоненцијалне једначине: $4^{x^2-x-5} = $ $= 4^1$ и $4^{x^2-x-5} = 2^{2(x^2-x-5)} = 2^{-1}$. Прва од тих једначина даје једначину: $x^2 - x - 6 = 0$, која даје коренове: $x_1 = \mathbf{+3}$, $x_2 = \mathbf{-2}$. Друга даје једначину: $2\,(x^2 - x - 5) = -1$, која има коренове: $x_3 = \mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{19}}$, $x_4 = \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{19}}$. Ради вежбе учини пробу са сва 4 корена.

* * *

191. *Реши једначину*: $3^{x-1} + 24\,.\,5^x + 4\,.\,5^{x-2} = 5^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x$.

Пренеси чланове с једнаким базама на исту страну, а онда на свакој страни извади заједнички фактор:
$3^{x-1} + 3^{x+1} - 3^x = 5^{x+2} - 24\,.\,5^x - 4\,.\,5^{x-2}$; $3^x.(3^{-1} + 3 - 1) = $ $= 5^x\,.\,(5^2 - 24 - 4.\,5^{-2})$; $3^x\,.\,\frac{7}{\ } = 5^x\,.\,\frac{21}{\ }$.

Пократи са 7, а именитеље 3 и $25 = 5^2$ пренеси у бројитељ као потенције с негативним експонентом: $3^{x-1} = 5^{x-2} . 3$. Одатле: $3^{x-2} = 5^{x-2}$. Логаритмуј: $(x - 2) . log\, 3 = (x-2) . log\, 5$; одатле: $(x - 2) . (log\, 5 - log\, 3) = 0$, $x - 2 = 0$, $x = \mathbf{2}$.

192. *Реши систем једначина*: $\begin{cases} x^y = y^x \\ 100^x = 10^x . \end{cases}$

Логаритмуј обе једначине; добиваш: $y\, log\, x = x\, log\, y$, $2x = y$. Другу једначину замени у прву; добиваш $2x . log\, x = x . log\, 2 + x . log\, x$. Одатле: $x . log\, x = x . log\, 2$, а након краћења са x : $log\, x = log\, 2$, т. ј. $x = \mathbf{2}$; помоћу тога: $y = \mathbf{4}$. Краћење са x садржи још један корен $x = 0$, $y = 0$, али то у првој једначини даје неодређеност 0^0. — Можеш решити *и без логаритмовања*, свођењем на једнаке базе. Друга једначина даје: $10^{2x} = 10^y$, т. ј $y = 2x$. Замени то у прву; добиваш $x^{2x} = (2x)^x$. Одатле: $(x^x)^2 = 2^x . x^x$, а након краћења са x^x добиваш $x^x = 2^x$. Кад су потенције једнаких експонената једнаке, значи, да су и базе једнаке, т. ј. $x = 2$.

193. *Реши систем једначина*: $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 4 \\ 2^x . (x+y) = 32768 \end{cases}$

Логаритмуј обе једначине, па замени: $log\,(x+y) = z$. Добиваш редом:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}\, log\,(x+y) = log\, 4 \\ x\, log\, 2 + log\,(x+y) = log\, 32768 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} &\frac{z}{x} = log\, 4 \\ &x\, log\, 2 + z = log\, 32768. \end{aligned}$$

Вредност z из прве замени у другу; добиваш: $x = \dfrac{log\, 32768}{log\, 4 + log\, 2}$; израчунај десну страну, прошири разломак са 100000, па логаритмуј поновно; добиваш: $log\, x = log\, 451544 - log\, 90309$; одатле $x = \mathbf{5}$, $z = 5\, log\, 4$, т. ј.: $log\,(5 + y) = 5 . log\, 4 = log\, 4^5$. Дакле: $5 + y = 4^5 = 1024$, $y = \mathbf{1019}$.

**194. *Систем једначина*: $\begin{cases} y^x = 64 \\ y^{\frac{x+1}{x-1}} = 16 \end{cases}$ *реши без логаритмовања.*

Леву страну друге једначине можеш транформирати овако:

једначине даје: $\sqrt[x-1]{64} \,.\, \sqrt[x(x-1)]{64} = 64^{\frac{1}{x-1}} \,.\, 64^{\frac{1}{x(x-1)}} = 64^{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x(x-1)}} =$ $= (4^3)^{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x(x-1)}} = 4^{\frac{3}{x-1}+\frac{3}{(x-1)x}}$. Дакле другу једначину можеш написати овако: $4^{\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x(x-1)}} = 4^2$. Одатле једначина: $\frac{3}{x-1} + \frac{3}{x(x-1)} = 2$, или: $2x^2 - 5x - 3 = 0$, која даје коренове: $\boldsymbol{x_1 = 3}$, $\boldsymbol{x_2 = -\frac{1}{2}}$. Из прве једначине имаш онда: $y^3 = 64$, т. ј. $\boldsymbol{y_1 = \sqrt[3]{64} = 4}$; исто тако: $y^{-\frac{1}{2}} = 64$, $\frac{1}{\sqrt{y}} = 64$; дакле $\boldsymbol{y_2 = \frac{1}{64^2}}$.

---

195. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} 3^x \,.\, y^4 = 50625 \\ \sqrt{3^x} \,.\, y^3 = 1125. \end{cases}$

Другу једначину квадрирај и подели са првом. Добиваш: $y^2 = \frac{1125 \,.\, 1125}{50625}$. Одатле крањењем: $y^2 = 25$, т ј. $\boldsymbol{y = \pm 5}$; замени у прву једначину, пократи; из $3^x = 81 = 3^4$ следи: $\boldsymbol{x = 4}$.

Или: Обе једначине логаритмуј и поступи даље методом једнаких коефицијената. Први начин решавања је потпунији. Зашто?

На задатак бр. 180., стр. 91. У извођењу је учињена грешка у трећем ретку, који мора гласити: $\boldsymbol{3 \log \frac{1}{3} < 2 \log \frac{1}{3}}$. Разлог је овај: $\log \frac{1}{3} = -\log 3$, т. ј. негативан број. А међу 2 негативним бројевнма, *мањи* је онај, чија је апсолутна вредност већа, **н.** пр. $-5 < -2$. Дакле је: $3 \log \frac{1}{3} < 2 \log \frac{1}{3}$, јер је: $-3 \log 3 < -2 \log 3$,

---

196. *Реши у целим позитивнм бројевима неодређену једначину* $15x + 11y = 175$ *Ајлеровом методом.*

јер су коефицијенти непознатих x и y међусобно прости бројеви, т. ј. $(15, 11) = 1$. — Непознату мањега коефицијента изрази помоћу друге непознате: $y = \frac{175 - 15x}{11}$. Десну страну прикажи као мешовити број: $y = 15 - x + \frac{10 - 4x}{11}$ ..../1/. Вредност добивеног разломка уведи као нову непознату: $\frac{10 - 4x}{11} = a$; одатле: $10 - 4x = 11a$; x изрази помоћу a и прикажи као мешовити број: $x = \frac{10 - 11a}{4} = 2 - 2a + {}$ $+ \frac{2 - 3a}{4}$ ..../2/. Тај разломак уведи опет као нову непознату b: $\frac{2 - 3a}{4} = b$; одатле: $a = \frac{2 - 4b}{3} = -b + \frac{2 - b}{3}$ ..../3/. Постави: $\frac{2 - b}{3} = c$, одатле: $2 - b = 3c$, $b = 2 - 3c$. За сваку целу вредност c b је цео број, а према тому и a, x, y су цели бројеви за сваку целу вредност c. Зато изрази a, x, y помоћу c; $b = 2 - 3c$ замени најпре у /3/: $a = -b + c = 3c - 2 + {}$ $+ c = 4c - 2$ ..../4/. Обе вредности замени у /2/: $x = 2 - {}$ $- 2a + b = 2 - 2(4c - 2) + 2 - 3c$; $x = 8 - 11c$ ..../5/.

Исто тако у /1/: $y = 15 - x + a = 15 + 11c - 8 + 4c - {}$ $- 2$, $y = 5 + 15c$ ..../6/.

Одреди још границе, у којима сме да лежи c, па да x и y буду цели позитивни бројеви. За $c = 0$ су x и y позитивни; За $c = -1$ је $y < 0$; дакле мора бити $c \geqq 0$. За $c = +1$ је $x < 0$, па мора бити с друге стране $c \leqq 0$. Према тому је једина могућа вредност: $c = 0$. Тому одговара решење: $\boldsymbol{x = 8}$, $\boldsymbol{y = 5}$.

* * *

197. *Реши неодређени систем једначина:*

$$\begin{cases} 6x + 3y + 7z = 28 \\ 7x + 2y + 12z = 32 \end{cases}$$ *у целим позитивним бројевима.*

Систем је неодређен, јер има више непознатих него једначина, те има бесконачно много решења. Да га решиш у целим бројевима, елиминирај из њега једну непознату, н. пр. y. Помножи прву са *2*, другу са *3* и одузми прву од друге; добиваш: $9x + 22z = 40$. Ову једначину сада решавај Ајлеровом методом. $x = \frac{40 - 22z}{9} = 4 - 2z + \underbrace{\frac{4 - 4z}{9}}_{a}$ ..../1/; $\frac{4 - 4z}{9} = a$;

$4 - 4z = 9a$; одатле: $z = \frac{4 - 9a}{4} = 1 - 2a - \frac{a}{4}$ .... /2/.

Постави: $\frac{a}{4} = b$, онда је: $a = 4b$ ..../3/. Замени /3/ у /2/ и /1/, па добиваш: $z = 1 - 8b - b = 1 - 9b$ ..../4/, $x = 4 + 18b - 2 + 4b = 2 + 22b$ ..../5/. — Резултате /4/ и /5/ замени у једну од заданих једначина, н. пр. у /1/. Добиваш једначину са непознатама b и y, коју опет решаваш Ајлеровом методом.[1] У овом примеру случајно одмах добиваш решење, јер се и y одмах даде изразити као цела функција од b. Добиваш након крањења једначину: $23b + y = 3$, т. ј. $y = 3 - 23b$.

За свако цело b су x, y и z цели бројеви. Још одреди границе, које сме имати цели број b, да x, y и z буду цели позитивни бројеви. За $b = 0$ су x, y и z позитивни. За $b = -1$ је $x < 0$; дакле мора бити $b \geqq 0$. За $b = +1$ је $z < 0$, $y < 0$; дакле мора бити с друге стране $b \leqq 0$. Једина могућа вредност је $b = 0$, а њој одговара решење: $x = \mathbf{2}$, $y = \mathbf{3}$, $z = \mathbf{1}$.

* * *

198. *Помоћу двају комада гвожђа, од којих један тежи 12 kg, а други 23 kg, треба одвагнути неку количину жита, за коју се накнадним вагањем сазнало, да тежи 451 kg. На колико се начина то може учинити?*

Треба на вагу ставити x пута количину жита, која је једнака тежина тега од *12 kg*; тим је одвагнуто *12x kg* жита. Затим треба одвагнути помоћу тега од *23 kg* количину жита *23y*, изједначујући на ваги y пута по *23 kg*. Тада мора бити: $12x + 23y = 451$. То је неодређена једначина, коју имаш да решиш у целим позитивним бројевима. Поступајући као у бр. 196 добиваш: $x = \frac{451 - 23y}{12}$, $x = 37 - y + \frac{7 - 11y}{12}$; постави $\frac{7 - 11y}{12} = a$, па даље имаш: $y = \frac{7 - 12a}{11} = -a + \frac{7 - a}{11}$.

Постави: $\frac{7 - a}{11} = b$. Одатле $a = 7 - 11b$. За сваку цело-

---

[1] Види пример бр. 199, стр. 99.

бројну вредност b су x и y цели бројеви. Одреди још границе броја b, да x и y буду цели позитивни бројеви. Те границе су: $1 \leq b \leq 2$ т. ј. $b=1$ и $b=2$. Вредности x и y, које тому одговарају, су у овој таблици:

b	1	2
x	28	5
y	5	17

199. *Потражи целе бројеве између 1000 и 4000, који подељени са 11 дају остатак 2, подељени са 13 дају остатак 12, а подељени са 19 дају остатак 18.*

Тај број нека је N. Онда према проби за дељење имаш ове једначине: $N=11x+2$, $N=13y+12$, $N=19z+18$, где су x, y и z количници, које N даје редом код дељења са 11, 13 и 19. Изједначивањем десних страна добиваш систем неодређених једначина: $\begin{cases}11x-13y=10\\ 11x-19z=16.\end{cases}$ Поступајући даље Ајлеровом методом добиваш из прве: $x=\frac{10+13y}{11}=y+\frac{10+2y}{11}$; $\frac{10+2y}{11}=a$; $y=\frac{11a-10}{2}=5a-5+\frac{a}{2}$; $\frac{a}{2}=b$, $a=2b$. Изрази x и y помоћу b: $y=10b-5+b=11b-5$, $x=11b-5+2b=13b-5$. Ову вредност за x замени сада у другу неодређену једначину. Добиваш једначину: $143b-19z=71$. Одатле је $z=\frac{143b-71}{19}=7b-3+\frac{10b-14}{19}$; постави: $\frac{10b-14}{19}=c$; $b=\frac{19c+14}{10}=c+1+\frac{9c+4}{10}$; $\frac{9c+4}{10}=d$, $c=d+\frac{d-4}{9}$; $f=\frac{d-4}{9}$, па имаш коначно: $d=9f+4$. За сваку целу вредност f, све су ове величине до x цели бројеви; зато их изрази све помоћу f. Добиваш редом: $d=9f+4$, $c=10f+4$, $b=19f+9$, $z=143f+64$, $y=209f+94$, $x=247f+112$, f не може бити -1 или мањи, јер би x, y, z били негативни, а N мањи од 1000. Дакле мора бити $f \geq 0$. С друге стране f не може бити 2, јер би број N био већи од

$0 \leqq f \leqq 1$ и једине могуће вредности су 0 и 1. Одговарајуће вредности x, y, z и N садржи ова таблица:

f	0	1
x	112	359
y	94	303
z	64	207
N	1234	3951

---

200. *Нађи бројеве с 3 цифре, који су 12 пута већи од збира њихових цифара.*

Ако су њихове цифре x, y, z, онда је такав број: $100x+10y+z$, а збир цифара $x+y+z$. Дакле: $100x+10y+z=12.(x+y+z)$, или: $88x-2y-11z=0$. Одатле: $8x-z=\frac{2}{11}y$. Лева страна је цео број; онда мора таква бити и десна страна. Али $\frac{2}{11}y$ може да буде цео број, само ако је $y=0$, јер y не може бити 11, пошто је по задатку $y<10$. Ако је $y=0$, онда једначина добива облик: $8x-z=0$; одатле $z=8x$. Дакле ти бројеви морају имати на месту десетица 0, а цифра стотица је 8 пута мања од јединица. Такав је само број: **N** $=$ ***108***.

---

201. *У једној аритметичкој прогресији од 21 члана износи збир свих чланова без последњега 65, а збир свих чланова без првога 710. Која је то прогресија?*

Збир свих чланова без последњега чини аритметичку прогресију од 20 чланова, којој је први члан a, а диференција d. По обрасцу (18') је онда: $20a+10.19d=650$, или: $2a+19d=65$ .... /1/. Сви чланови без првога чине аритметичку прогресију од 20 чланова, којој је први члан $a+d$, а диференција d. Збир тих чланова даје онда једначину: $20(a+d)+10.19d=710$, или: $2a+2d+19d=71$. Одузми од ове једначину /1/; добиваш: $2d=6$, **d** $=$ ***3***, онда **a** $=$ ***4***. Прогресија: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64

202. *Збир једне аритметичке прогресије од 10 чланова је 85, а збир квадрата трећега и седмога члана 1360. Напиши ту прогресију.*

Према задатку: $S = na + \frac{n(n-1)}{2} d = 10a + 45d = 85$, $(a + 2d)^2 + (a + 6d)^2 = 1360$. Систем једначина: $2a + 9d = 17$, $a^2 + 8ad + 20d^2 = 680$ даје решења: $a_1 = 58$, $d_1 = -11$; $a^1_1 = -50$, $d^1_1 = 13$. Те прогресије гласе: I.: *58, 47, 36, 25, 14, 3, — 8, — 19, — 30, — 41*; II.: *— 50, — 37, — 24, — 11, + 2, + 15, + 28, + 41, + 54, + 67.*

* * *

203. *Експресни воз улазећи у станицу, у којој се не зауставља, почео је од уласка у њу умањивати своју брзину. У првој минути након уласка превалио је 600 m, а у свакој идућој минути подједнак број метара мање, тако да је испред перона прошао брзином од 110 m у минути. Колико му је времена требало од уласка у станицу до перона, ако та даљина износи 2135 m?*

Путеви у узастопним минутама чине падајућу аритметичку прогресију, од које је познат $a_1 = 600$, $a_n = 110$ и збир $S_n = 2135$. Онда према обрасцу (18): $\frac{n}{2}(600 + 110) = 2135$, где је $n =$ број минута. Решење: **7 минута.**

* * *

204. *Места A и B су међусобно удаљена 207 km. Из A пође путник према B и превали у првом часу 25 km, у другом 22 km, у трећем 19 km, и т. д. Из B крене 2 часа касније други путник према A и превали у првом часу 15 km, а у сваком идућем по 2 km више. Након колико ће се часова они састати и у којој удаљености од A? (5. сл)*

5. слика.

Ако су се они састали у тачки C, онда је: $s_1 + s_2 = AB = 207$ ..../1/. Путеви, које превањује први путник у узастопним часовима, чине падајућу аритметичку прогресију ($a = 25$, $d = -3$), у којој је n време, употребљено на путу $AC = s_1$. Према које превaљује други путник у узастопним часовима, чине растућу аритметичку прогресију ($a_1 = 15$, $d = +2$); непознат је број чланова $m = n - 2$. Према (18^1) имаш: $s_2 = 15(n-2) + (n-2)(n-3)$. Дакле /1/ добива облик:

$$25\,n - \frac{3}{2}n\,(n-1) + 15\,(n-2) + (n-2)\,(n-3) = 207,$$

и коначно: $n^2 - 73\,n + 462 = 0$. Коренови су: $\mathbf{n_1 = 7}$, ($n_2 = 66$). Проблем решава само n_1, т. ј. они су се састали 7 часова након поласка првога путника, у удаљености 112 *km* од *A*. Корен $n_2 = 66$ не решава проблем, јер су чланови прве прогресије од 10. члана даље негативни.

* * *

205. *Један број са 2 цифре има ове особине: његов збир цифара, тај број и број с истим цифрама у обрнутом реду чине једну аритметичку прогресију. Збир те прогресије, умањен за квадрат збира цифара, даје разлику те прогресије. Који је то број?*

Цифре: x, y; број: $10\,x + y$; чланови прогресије: $a_1 = x + y$, $a_2 = 10x + y$, $a_3 = 10y + x$. Онда имаш једначине: $10x + y - x - y = d$, $10y + x - 10\,x - y = d$, или: $d = 9x$, $d = 9y - 9x$. Поређивањем: $9y - 9x = 9x$, $y = 2x$ ..../1/. Збир прогресије $= 12\,(x + y)$, па онда према другом делу задатка: $12\,(x + y) - (x + y)^2 = d$. Замени амо: $d = 9x$ и /1/; добиваш: $12\,(x + 2x) - (x + 2x)^2 = 9x$. Одавле: $x = 3$, $y = 6$, број: ***36***, прогресија: 9, 36, 63, $d = 27$.

* * *

206. *Трговац је купио неколико труба платна, сваку од 50 m, и за најслабију врсту платио по метру 15 динара, за нешто бољу 25 динара, за још бољу 35 динара и. т. д., увек по 10 динара више по метру боље врсте. Колико је било врста платна, ако је од сваке врсте била по једна труба, а за све је платио 30000 динара?*

За 50 метара прве врсте платио је 750 динара, за 50 метара друге 1250, за 50 метара треће 1750 динара, и т. д. Цене труба чине аритметичку прогресију са диференцијом 500. Његин збир је 30000, број чланова је непознат. Према обрасцу (18′) имаш: $750\,x + \frac{x\,(x-1)}{2} \cdot 500 = 30000$, $x^2 + 2\,x - 120 = 0$.

Позитивно решење: $x = \mathbf{10}$

207. *Једна геометријска прогресија свршава са — 288, збир јој је — 189, а квоцијент $q=-2$. Како гласи та прогресија?*

Непознат је први члан a_1 и број чланова n. Образац (20) даје једначину: $a.(-2)^{n-1}=-288$ ……/1/, а образац (21) једначину: $a.\frac{(-2)^n-1}{(-2)-1}=-189$ ……/2/. Ако /1/ помножиш са — 2, добиваш: $a.(-2)^n=576$ ……/3/. Једначину /2/ можеш написати и овако: $a.(-2)^n-a=567$. Замени амо /3/, па добиваш: $\mathbf{a=9}$, а кад то замениш у /3/ и пократиш са 9, добиваш: $(-2)^n=64=2^6=(-2)^6$, $\mathbf{n=6}$. Прогресија гласи: 9, — 18, 36, — 72, 144, — 288.

* * *

208. *У једној геометријској прогресији први члан је 63, последњи члан $\frac{7}{9}$, а збир свих чланова $94\frac{1}{9}$. Израчунај јој количник (квоцијент) и број чланова.*

Према задатку је: $a_n=a_1\,q^{n-1}=63\,q^{n-1}=\frac{7}{9}$. Одатле након краћења: $q^{n-1}=\frac{1}{81}$ ……/1/. Збир прогресије: $S=$ $=a.\frac{q^n-1}{q-1}=63\,\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{847}{9}$, а након краћења: $\frac{q^n-1}{q-1}=$ $=\frac{121}{81}$ ……/2/. Једначину /1/ помножи са q: добиваш: $q^n=\frac{q}{81}$ ……/3/. Замени то у /2/: $\frac{q-81}{81(q-1)}=\frac{121}{81}$. Одатле: $\mathbf{q=\frac{1}{3}}$. Замени то у /3/, па добиваш експоненцијалну једначину: $\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3.81}$, т. ј.: $3^n=243=3^5$, $\mathbf{n=5}$. Та прогресија гласи: $63,\ 21,\ 7,\ \frac{7}{3},\ \frac{7}{9}$.

* * *

209. *Збир првих двају чланова једне геометријске прогресије износи 28, а збир двају идућих чланова је 252. Која је то прогресија?*

Према задатку је: $\begin{cases} a+aq=28 \\ aq^2+aq^3=252, \end{cases}$ или $\begin{cases} a(1+q)=28 \\ aq^2(1+q)=252. \end{cases}$

$= 3$, $a_1 = 7$; $q = -3$, $a_1 = -14$. Тим су одређена 2 таква низа бројева: ***7***, ***21***, ***63***, ***189*** и алтернирајући низ: $-$***14***, $+$***42***, $-$***126***, $+$***378***.

* * *

210. *У једној геометријској прогресији од 8 чланова збир чланова непарних по реду је за 127 $\frac{1}{2}$ мањи од збира чланова парних по реду. Збир целе прогресије је 382 $\frac{1}{2}$. Нађи ту прогресију.*

Збир непарних чланова је: $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$, а збир парних чланова: $a_2 + a_4 + a_6 + a_8$, па је према задатку: $(a_2 + a_4 + a_6 + a_8) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 127\frac{1}{2}$, т. ј.: $aq . (1 + q^2 + q^4 + q^6) - a(1 + q^2 + q^4 + q^6) = \frac{255}{2}$. Леву страну можеш даље трансформирати овако: $aq . (1 + q^2 + q^4 + q^6) - a(1 + q^2 + q^4 + q^6) = a(q - 1) . [(1 + q^2) + q^4 . (q^2 + 1)] = a(q - 1) . (q^2 + 1) . (q^4 + 1)$, тако да прва једначина онда гласи: $a(q - 1) . (q^2 + 1) . (q^4 + 1) = \frac{255}{2}$ ..../1/. Према другому услову имаш другу једначину: $S = a . \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 382\frac{1}{2}$. Разломак у њој даје даље: $\frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{(q^4 - 1) . (q^4 + 1)}{q - 1} = \frac{(q^2 - 1) . (q^2 + 1) . (q^4 + 1)}{q - 1} = (q + 1) . (q^2 + 1) . (q^4 + 1)$, тако да друга једначина добива облик: $a(q + 1) . (q^2 + 1) . (q^4 + 1) = \frac{765}{2}$ ..../2/. Кад поделиш /2/ са /1/, добиваш: $\frac{q + 1}{q - 1} = 3$, а одатле: $q = 2$, и помоћу /1/: $a = \frac{3}{2}$. Та прогресија је: $\frac{3}{2}$, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.

* * *

211. *У једној геометријској прогресији од 10 чланова износи продукт првога члана са последњим 4608, а сума двају средњих чланова 144. Одреди ту прогресију.*

$\{ a_1 . a = 4608$ $\qquad \{ a . aq^9 = 4608$

Другу једначину квадрирај и извади заједнички фактор: $a^2 q^9 = 4608$, $a^2 q^8 (1 + 2q + q^2) = 144^2$. Кад поделиш прву једначину с другом, добиваш: $\frac{q}{1 + 2q + q^2} = \frac{4608}{144^2} = \frac{2}{9}$. Одатле квадратна једначина: $2q^2 - 5q + 2 = 0$, чији су коренови: $q_1 = 2$, $q_2 = \frac{1}{2}$.

Из q_1 следи $a^2 = \frac{4608}{(2^3)^3} = 9$ и $a = \pm 3$, а из q_2: $a = \pm$ $+\sqrt{4608 . 2^9} = \pm\sqrt{8^3 . 3^2 . 8^3} = \pm 3 . 8^3$, $a = \pm 1536$. Тражене прогресије су ове: I.: 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536; II.: 1536, 768, 384, 192, 96, 48, 24, 12, 6, 3. Негативне вредности a воде до негативних прогресија, које не испуњују проблем.

Или: прву једначину напиши овако: $a q^4 . a q^5 = 4608$. Постави $a q^4 = x$, $a q^5 = y$, па реши систем једначина: $xy = 4608$, $x + y = 144$; израчунај x и y, а одатле a и q.

**212. *У једној геометријској прогресији са непарним бројем чланова први члан је 2, средњи 54, а збир прогресије је 2186. Која је то прогресија?*

Пошто је број чланова непаран, то се он може написати у облику $n = 2m + 1$; онда је средњи члан a_{m+1}. Из $a_{m+1} = a q^m$ излази: $54 = 2 . q^m$, или $q^m = 27$, $q^{2m} = 27^2$, $q^{2m+1} = 729 q$. Збир прогресије је: $S_{2m+1} = a \frac{q^{2m+1} - 1}{q - 1} = a \frac{729 q - 1}{q - 1}$, т. ј.: $2 . \frac{729 q - 1}{q - 1} = 2186$, или: $729 q - 1 = 1093 q - 1093$. Одатле: $q = 3$, $m = 3$, $n = 2m + 1 = 7$. Прогресија гласи: ***2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458.***

213. *Нађи геометријске прогресије, које имају особину, да производ њиховога првога и трећега члана даје 36, а збир квадрата првога, другога и трећега члана 364. Које од тих прогресија конвергирају, ако се број њихових чланова протегне у бесконачност?*

Према задатку је: $\begin{cases} a_1 . a_3 = 36 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 364, \end{cases}$ т. ј.:

$\{ \; a^2 q^2 = 36$

другу, па добиваш: $a^2 + 36q^2 = 328$, а ова помоћу прве даје биквадратну једначину: $9q^4 - 82q^2 + 9 = 0$, чији су коренови: $q_1 = 3$, $q_2 = -3$, $q_3 = \frac{1}{3}$, $q_4 = -\frac{1}{3}$. Помоћу прве једначине свака вредност q даје 2 вредности a, па тако добиваш следећа решења:

$a_{1,1} = 2$, $q_1 = 3$; $a_{1,2} = -2$, $q_1 = 3$; $a_{2,1} = 2$, $q_2 = -3$; $a_{2,2} = -2$, $q_2 = -3$; $a_{3,1} = 18$, $q_3 = \frac{1}{3}$; $a_{3,2} = -18$, $q_3 = \frac{1}{3}$; $a_{4,1} = 18$, $q_4 = -\frac{1}{3}$; $a_{4,2} = -18$, $q_4 = -\frac{1}{3}$.

Ови парови решења дају следеће прогресије: *2, 6, 18; —2, —6, —18; 2, —6, 18; —2, 6, —18; 18, 6, 2; —18, —6, —2; 18, —6, 2; —18, 6, —2.* Прве четири су дивергентне, ако им број чланова постане бескрајно велик, јер је $|q| > 1$. Остале 4 су конвергентне, јер им је $|q| < 1$; њихови су збирови: $S_{3,1} = 27$, $S_{3,1} = \frac{27}{2}$, $S_{3,2} = -27$, $S_{4,2} = -\frac{27}{2}$.

* * *

**214. *Из бурета, које садржи 5 hl вина, крчмар источи 1 l вина и долије 1 l воде. Одатле источи опет 1 l ове смесе и долије 1 l воде. Колико је првобитног вина остало у бурету, након што је крчмар ову операцију извео 100 пута?*

Посматрај неколико узастопних мешања.

1. У почетку је било у бурету *500 l* вина; кад је источио *1 l*, остало је *499 l* вина, а исто толико је остало и онда, кад је долио још *1 l* воде.

2. У 500 *l* садржине бурета остало је 499 *l* вина, а у 1 литру садржине $\frac{499}{500}$ *l* вина. Кад је он источио по други пут 1 *l*, источио је само $\frac{499}{500}$ *l* вина, а остало га је још у бурету $\frac{499}{500} \cdot 499$ *l*. Толико га је остало и онда, кад је долио *1 l* воде. Онда га у 1 *l* још има $\frac{499}{500} \cdot \frac{499}{500} = \left(\frac{499}{500}\right)^2$ *l*.

3. Кад је одавле оточен још 1 *l*, источено је само $\left(\frac{499}{500}\right)^2$ *l*

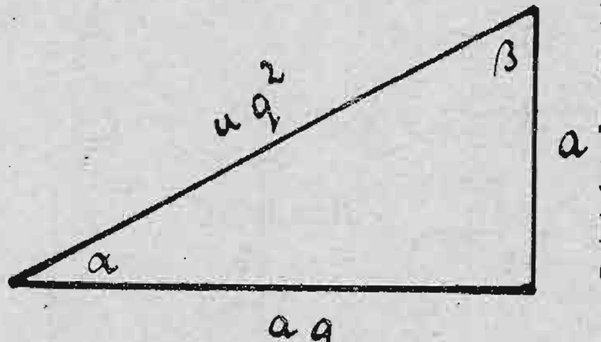
вина, а остало је још вина $\left(\frac{499}{500}\right)^2 \cdot 499\ l$; толико је остало и онда, кад је доливен је $1\ l$ воде. — И т. д. Након 3. мешања било је дакле још $\left(\frac{499}{500}\right)^2 \cdot 499\ l$, након 4. мешања $\left(\frac{499}{500}\right)^3 \cdot 499\ l$, након 5. мешања $\left(\frac{499}{500}\right)^4 \cdot 499\ l$ Садржина вина у почетку заједно са садржинама вина на крају 1., 2., 3., ………… мешања чине геометријску прогресију:

$$500,\ 499,\ \left(\frac{499}{500}\right)\cdot 499,\ \left(\frac{499}{500}\right)^2\cdot 499,\ \left(\frac{499}{500}\right)^3\cdot 499,\ \ldots\ldots,$$

којој је 1. члан 500, а количник $q = \frac{499}{500}\cdot$ Тражена количина вина након 100-тог мешања је 101. члан ове прогресије. По обрасцу (20) је: $a_{101} = 500 \cdot \left(\frac{499}{500}\right)^{100}$; $a_{101} =$ **$409{\cdot}273\ l$** вина.

215. *Израчунај углове у правоуглом троуглу, у коме стране чине геометријску прогресију (6. сл.).*

Означи мању катету са a; онда су стране тога троугла: катете a и aq, хипотенуза aq^2. По Питагорином правилу је онда: $a^2 q^4 = a^2 q^2 + a^2$. Одатле једначина: $q^4 - q^2 - 1 = 0$, коју решаваш заменом $q^2 = z$. Проблем решава њезин позитивни корен $q = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$. Из троугла је онда: $tg\,\beta = cotg\,\alpha = \frac{a\,q}{a} = q$; т. ј. $cotg\,\alpha = tg\,\beta = $ $= \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{3\,236}{2}}\cdot$ Одатле: $\alpha =$ **$38^0\ 10'\ 23''$**, $\beta =$ **$51^0\ 49'\ 37''$**.



6. слика.

Или; $tg\,\alpha = \frac{a}{aq} = \frac{1}{q}$, $cos\ \alpha = \frac{aq}{a\,q^2} = \frac{1}{q}$; дакле за овај троугао вреди једначина: $tg\,\alpha = cos\,\alpha$, која помоћу образаца (130) прелази у једначину: $cotg\,\alpha = \frac{\sqrt{1+cotg^2\,\alpha}}{cotg\,\alpha}\cdot$ Позитивни корен ове једначине је: $cotg\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$ као горе.

216. *Нађи збир бесконачне геометријске прогресије:*

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \quad \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \quad \ldots\ldots .$$

Дељењем једнога члана са претходним одреди q; наћи ћеш: $q=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot$ Прогресија је конвергентна, јер је $q<1$.

Напиши образац (22) у облику $S=a.\frac{1}{1-q}$, па замени и рационализирај именитељ:

$$S=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=(3+2\sqrt{2})\,.\,\sqrt{2}\,;$$

$\mathbf{S}=\mathbf{4}+3\sqrt{\mathbf{2}}$.

217. *Помоћу геометријске прогресије претвори у обичан разломак чисто периодан децимални разломак:* $0{\cdot}\dot{1}8\dot{9}$.

$$0{\cdot}\dot{1}8\dot{9}=0{\cdot}189\ 189\ 189\ \ldots\ldots=\frac{189}{10^3}+\frac{189}{10^6}+\frac{189}{10^9}+\frac{189}{10^{12}}+$$

$$+\ \ldots\ldots=\frac{189}{10^3}\cdot\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\ldots\ldots\right)\cdot$$ У загради је бесконачна геометријска прогресија, којој је $a_1=1$, $q=\frac{1}{10^3}\cdot$

Њезин збир је: $s=\frac{1}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{1000}{999}\cdot$ Дакле је:

$$0{\cdot}\dot{1}8\dot{9}=\frac{189}{1000}\cdot\frac{1000}{999}=\frac{189}{999}=\frac{21}{111}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{37}}.$$

218. *Помоћу геометријске прогресије претвори у обичан разломак мешовито периодни децимални разломак:* $0{\cdot}27\dot{3}\dot{6}$.

$$0{\cdot}27\dot{3}\dot{6}=0{\cdot}2736\ 36\ 36\ 36\ \ldots\ldots=\frac{27}{100}+\frac{36}{10^4}+\frac{36}{10^6}+\frac{36}{10^8}+$$

$$+\ \ldots\ldots=\frac{27}{100}+\frac{36}{10^4}\cdot\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots\ldots\right).$$

У загради је бесконачна геометријска прогресија $\left(a_1=1,\ q=\frac{1}{10^2}\right)\cdot$ Њезин збир је: $s=\frac{1}{1}=\frac{100}{99}\cdot$

Дакле је $0{\cdot}27\dot{3}\dot{6} = \frac{27}{100} + \frac{36}{10000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{27}{100} + \frac{36}{9900} = \frac{27}{100} + \frac{4}{1100} = \mathbf{\frac{301}{1100}}$.

219. *У једној конвергентној бесконачној геометријској прогресији реелних бројева износи продукт првих трију чланова 8, а збир квадрата другога члана са квадратом трећега* $\frac{89}{16}$. *Израчунај збир те прогресије.*

Према задатку је: $a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 = 8$, $a^2_2 + a^2_3 = \frac{89}{16}$, т. ј.: $a^3 q^3 = 8$, $a^2 q^2.(1+q^2) = \frac{89}{16}$. Из прве једначине је $aq = 2$, а то замењено у другу једначину даје: $1 + q^2 = \frac{89}{64}$. Одатле $q^2 = \frac{25}{64}$, $q_1 = \mathbf{\frac{5}{8}}$, $q_2 = -\mathbf{\frac{5}{8}}$. Из $aq = 2$ је $a = \frac{2}{q}$, т. ј. $a = \mathbf{\frac{16}{5}}$, и: $a = -\mathbf{\frac{16}{5}}$. Те прогресије су дакле ове:

I. $\frac{16}{5}, 2, \frac{5}{4}, \frac{25}{32}, \ldots\ldots$, II. $-\frac{16}{5}, 2, -\frac{5}{4}, \frac{25}{32}, \ldots\ldots$ Њихови збирови, по обрасцу (22), износе: $S_1 = \mathbf{\frac{128}{15}}$, $S_2 = -\mathbf{\frac{128}{65}}$.

220. *У једној конвергентној бесконачној геометријској прогресији је количник четвртога члана са другим 3 пута већи од реципрочне вредности првога члана, а збир трећега и петога је* $\frac{51}{16}$. *Нађи ту прогресију.*

Први услов даје једначину: $\frac{a\,q^3}{a\,q} = \frac{3}{a}$. Одатле: $q^2 = \frac{3}{a}$ и: $a\,q^2 = 3 = a_3$. Према другому услову: $3 + a\,q^4 = 3 + a\,q^2 . q^2 = = 3 + 3\frac{3}{a} = \frac{51}{16}$. Одатле $1 + \frac{3}{a} = \frac{17}{16}$, $a = 48$. Помоћу тога: $q^2 = \frac{3}{48}$, $q_1 = +\frac{1}{4}$, $q_2 = -\frac{1}{4}$. Задатку одговарају ове прогресије: $\mathbf{48, 12, 3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16}} \ldots\ldots$, и: $\mathbf{48, -12, 3, -\frac{3}{4}, \frac{3}{16}} \ldots\ldots$

221. *У једној конвергентној бесконачној геометријској прогресији реелних бројева износи продукт првих 3 чланова 216, а збир куба тих истих чланова 6056. Израчунај збир бесконачне прогресије.*

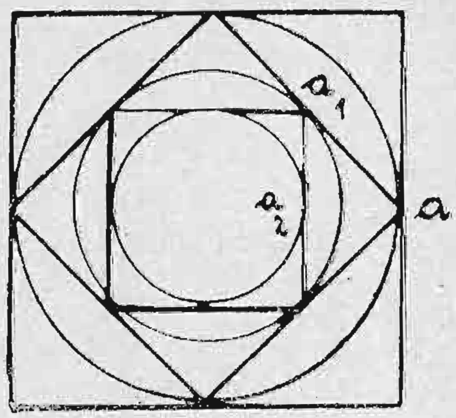
Према задатку је: $a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 = 216$, $a^3_1 + a^3_2 + a^3_3 = 6056$ т. ј. $a^3 q^3 = 216$, $a^3 + a^3 q^3 + a^3 q^6 = 6056$. Заменом прве једначине у другу добиваш најпре: $a^3 + 216\, q^3 = 5840$, а заменом из прве: $a^3 = \frac{216}{q^3}$ добиваш: $\frac{216}{q^3} + 216\, q^3 = 5940$. Након краћења и супституције: $q^3 = x$, прелази ова једначина у облик: $27\, x^2 - 730\, x + 27 = 0$, чија су решења: $x_1 = \frac{1}{27}$, $x_2 = = 27$. Одавле излазе *реелне* вредности за q и a: $q_1 = \frac{1}{3}$, $a_1 = = 18$; $q_2 = 3$, $a'_1 = 2$. Само прво решење ($q < 1$) одговара проблему, јер даје *конвергентну* прогресију: 18, 6, 2, $\frac{2}{3}$ ……….

Друга ($q < 1$) је дивергентна. Збир конвергентне је $S = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$.

---

222. *У квадрату (страна = a) уписан је круг, у тому кругу квадрат, у овому квадрату нови круг и т. д. Нађи: а) збир површина свих квадрата, б) збир обима свих кругова, в) збир њихових површина. (сл. 7.)*

Страна a првога квадрата равна је дијагонали d_1 другога квадрата; стога из $d_1 = a_1\sqrt{2}$ следи $a_1 = \frac{d_1}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$. Али страна a_1 је равна дијагонали d_2 трећега квадрата, те је $a_2 = \frac{d_2}{2}\sqrt{2} = \frac{a_1}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{a}{2}$.



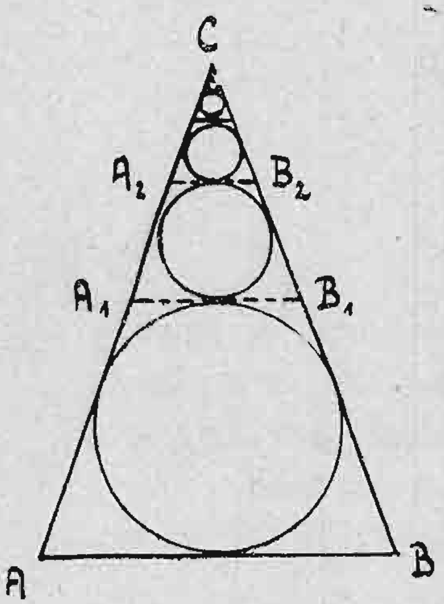
7. слика.

Тако ћеш даље наћи: $a_3 = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, $a_4 = \frac{a}{4}$, и т. д.

а) Збир површина ових квадрата износи: $S_1 = a^2 + + a_1{}^2 + a^2_2 + a_3{}^2 + \ldots\ldots = a^2 + \frac{a^2}{\;} + \frac{a^2}{\;} + \frac{a^2}{\;} + \ldots\ldots =$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} + \cdots\cdots\right) = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.\frac{4}{3} = \frac{a^2}{3}\sqrt{3}.$$

**224. *У равнокраком троуглу (основа a, крак b) уписан је круг, у углу између овога круга и кракова уписан је нови круг, који додирује кракове и овај круг; изнад овога круга уписан је трећи круг, који додирује други круг и кракове, и т. д. Израчунај а) збир обима, б) збир површина свих ових кругова (8. сл.).*



8. слика.

Нацртај слику и повуци тангенте на ове кругове у њиховим пресецима са висином. Тако видиш, да ћеш овај задатак решити помоћу зад. бр. 16 у II. делу. Јер су сви ови троуглови међусобно слични, т. ј. $ABC \sim A_1 B_1 C \sim A_2 B_2 C \sim A_3 B_3 C$ и т. д., и сви су постали један од другога на исти начин. Онда међу свима хомологним дужима у њима постоји исти фактор пропорцијоналности као међу двема хомологним странама. Према задатку бр. 16 (II. део) је: $a_1 = \frac{a.(2b-a)}{2b+1}$; дакле из пропорције $a_1 : a = \frac{a.(2b-a)}{2b+a} : a$ излази као фактор пропорцијоналности: $\lambda = \frac{2b-a}{2b+a}$. Према истому задатку је $r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. Онда је $r_1 = r\lambda = \frac{a}{2} \cdot \frac{2b-a}{2b+a} \cdot \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$.

Исто тако је $r_2 = r_1 \lambda = r\lambda^2 = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{2b-a}{2b+a}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$, $r_3 = = r_2 \lambda = r\lambda^3 = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{2b-a}{2b+a}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$, и т. д. Полупречници чине геометријску прогресију, која има количник $\lambda = \frac{2b-a}{2b+a}$. Збир обима је: $S_1 = 2\pi.(r + r_1 + r_2 + \cdots\cdots)$; у загради је збир бесконачне геометријске прогресије, која има први члан $r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$, а количник $\lambda = \frac{2b-a}{2b+a}$, $(\lambda < 1)$. По обрас-

$= a^2 . \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots\right)$. Збир геометријске прогресије у загради $\left[q = \frac{1}{2}\right]$ износи: $s_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$; дакле $S_1 = 2\,a^2$.

б) Полупречници кругова износе половину стране квадрата, у који су уписани; докле они износе редом: $r_1 = \frac{a}{2}$, $r_2 = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, $r_3 = \frac{a}{4}$, ······ Онда збир обима је $S_2 = 2\,\pi . \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2} + \frac{a}{4} + \cdots\cdots\right) =$ $= a\,\pi . \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\cdots\right) = a\pi\,(2 + \sqrt{2})$.

в) Збир површина: $S_3 = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{16} + \cdots\cdots\right) =$ $= \frac{a^2\,\pi}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots\right) = \frac{a^2\pi}{2}$.

---

223. *У равностраном троуглу (страна а) уписан је круг, у томе кругу је уписан равнострани троугао, у троуглу круг и т. д. Израчунај 1. збир површина свих кругова, 2. збир површина свих равностраних троуглова.*

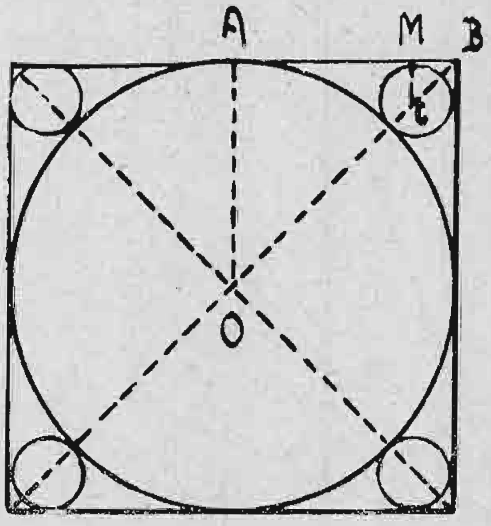
Збир површина свих кругова је: $S_1 = \pi\,(r^2 + r^2_1 + r^2_2 + \cdots\cdots)$. Збир површина равностраних троуглова је: $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + a^2_1 + + a^2_2 + \cdots\cdots)$. Према обрасцу (54.) је: $r = \frac{h}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$. Тај исти круг је описан око идућег проугла $(a_1,\ h_1,\ r_1)$, па је $r = \frac{2\,h_1}{3}$, дакле је $h_1 = \frac{h}{2}$; а из $h_1 = \frac{a_1}{2}\sqrt{3}$ излази: $a_1 = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$. Онда је $r_1 = \frac{h_1}{3} = \frac{r}{2} = \frac{a}{12}\sqrt{3}$. За трећи троугао $(a_2,\ h_2\ r_2)$ добиваш редом $r_1 = \frac{2\,h_2}{3}$, $h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{h}{4}$, $a_2 = \frac{a}{4}$, $r_2 = \frac{r}{4}$. Дакле је $S_1 =$ $= \pi\left(r^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{16} + \frac{r^2}{64} + \cdots\cdots\right) = r^2\,\pi\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$.

У загради је збир геометријске прогресије, којој је први члан $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{4}$. Онда је $S_1 = r^2\,\pi . \frac{4}{3} = \frac{a^2\,\pi}{9}$.

цу (22.) добиваш онда: $S_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{(2b-a)(2b+a)}$. — Ако саберeш саме полупречнике добиваш занимљиви резултат: $\frac{1}{4}\sqrt{(2b-a)(2b+a)}$, а кад то испоредиш с вредношћу висине h (II. део, пример бр. 16), видиш, да је збир свих полупречника тачно једнак половини висине. — Збир свих површина је $S_2 = \pi(r^2 + r^2_1 + r^2_2 + r^2_3 + \cdots\cdots)$. У загради је збир бесконачне геометријске прогресије, која има први члан $r^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{2b-a}{2b+a}$, а количник $\lambda^2 = \left(\frac{2b-a}{2b+a}\right)^2$ · Коначно: $S_2 = \frac{a\pi}{32b}(2b-a)(2b+a)$.

**225. *У једному квадрату (страна a) уписан је круг, у 4 преостала угла опет су уписани кругови и даље иза њих опет нови кругови, и. т. д. Израчунај: 1. збир обима свих ових кругова, 2. збир њихових површина. (9. сл.)*

1. Збир обима је: $S = 2r\pi + 4\,.\,2r_1\pi + 4\,.\,2r_2\pi + \cdots = (4\,.\,2r\pi + 4\,.\,2r_1\pi + 4\,.\,2r_2\pi + \cdots\cdots) - 3\,.\,2r\pi = 8\pi(r + r_1 + r_2 + \cdots\cdots) - 3\,.\,2r\pi$.

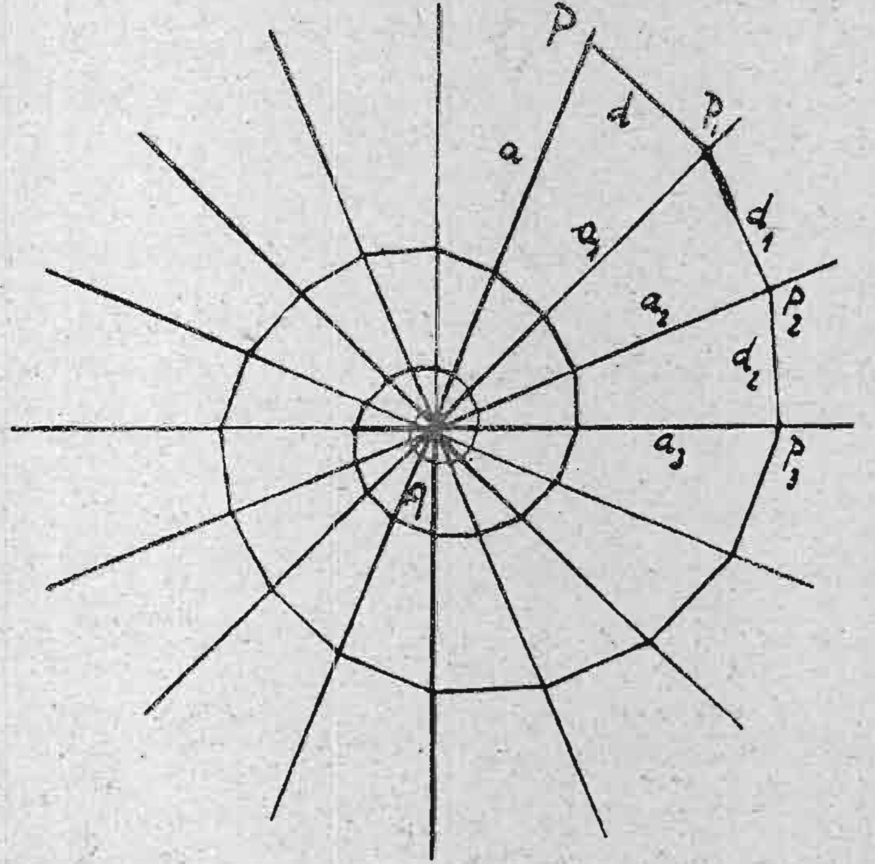


9. слика.

Да истражиш низ бројева r у загради, одреди количнике $\frac{r_1}{r}$, $\frac{r_2}{r_1}$ и т. д. Из троуглова: $AOB \backsim MCB$ излази $AO : MC = OB : BC$, т. ј. $r : r_1 = r\sqrt{2} : (OB - r - r_1)$, јер је $MC = r_1$, $OB = r\sqrt{2}$, $BC = OB - r - r_1 = r\sqrt{2} - r - r_1$. Дакле је: $1 : r_1 = \sqrt{2} : [r(\sqrt{2}-1) - r_1]$. Применом изведене пропорције (6) добиваш: $(1+\sqrt{2}) : r(\sqrt{2}-1) = 1 : r_1$, т. ј. $\frac{r_1}{r} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$. За други и трећи круг имаш ради сличности троуглова опет пропорцију: $r_1 : r_2 = BC : (BC - r_1 - r_2)$, или: $r_1 : r_2 = r_1 \cdot \sqrt{2} : [r_1.(\sqrt{2} - 1) - r_2]$. Одавле добиваш на исти начин: $\frac{r_2}{r_1} = 3 - 2\sqrt{2}$. Да-геометријску прогресију са квоцијентом : $q = 3 - 2\sqrt{2}$, $(q < 1)$, којој је први члан $r = \frac{a}{2}$· Онда је збир те прогресије: $s = = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{1 - 3 + \sqrt{2}} = \frac{a}{4}(\sqrt{2} + 1)$. Дакле је збир обима $S = = a\pi(2\sqrt{2} - 1)$.

2) Збир површина је: $S_1 = r^2\pi + 4r^2_1\pi + 4r_2{}^2\pi + \cdots\cdots = = 4\pi(r^2 + r^2_1 + r^2_2 + \cdots\cdots) - 3r^2\pi$. Прогресија у загради има први члан $r^2 = \frac{a^2}{4}$, квоцијент $q = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = 17 - 12\sqrt{2}$, $(q < 1)$. Њезин збир $s = \frac{a^2}{3^2} \cdot (3\sqrt{2} + 4)$, збир површина: $S = \frac{a^2\pi}{8} \cdot (3\sqrt{2} - 2)$.

**226. *Из тачке А излази n правих, које се секу под једнаким угловима* $\alpha = \frac{360}{n}$· *Из тачке Р на једној од њих, у раздаљености* $AP = a$ *од тачке А, спуштена је нормала на суседну праву; из трага* P_1 *те нормале на другој правој спуштена је нормала на идућу праву, и т. д. Тако добивамо једну сломљену линију спиралног облика, која се обавија око тачке А приближујући јој се у бескрајност· Израчунај дужину те сломљене линије (Види сл. 10.)*



10. слика.

AP_1P_2 : $d_1 = a_1 \sin\alpha = a \sin\alpha \,.\, \cos\alpha$, $a_2 = a_1 \cos\alpha = a \cos^2\alpha$. Тако добиваш из идућих троуглова: $d_2 = a_2 \sin\alpha = a \sin\alpha \cos^2\alpha$; $a_3 = a_2 \cos\alpha = a \cos^3\alpha$; $d_3 = a_3 \sin\alpha = a \sin\alpha \cos^3\alpha$; $a_4 = a \cos^4\alpha$, и т. д. Дакле дужина спиралне линије је:

$S = a \sin\alpha + a \sin\alpha \cos\alpha + a \sin\alpha \cos^2\alpha + a \sin\alpha \cos^3\alpha + + \cdots\cdots$. Чланови десне стране су чланови бесконачне геометријске прогресије, чији је количник $q = \cos\alpha$. Прогресија је конвергентна, јер је $\cos\alpha < 1$. Дакле је њезин збир:

$$S = \frac{a \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{2\, a \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = a \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}, \text{ т. ј. } \mathbf{S} = a\, \mathbf{cotg}\frac{\mathbf{180}}{\mathbf{n}};$$

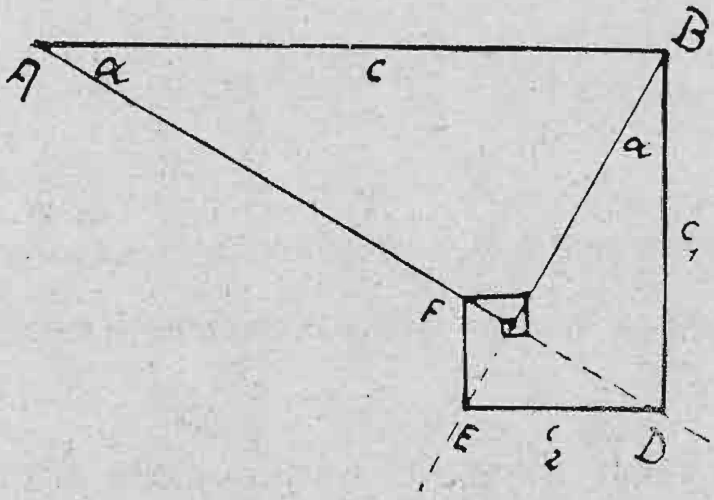
н. пр. за $n = 6$, $S = a\sqrt{3}$.

Слика ове спирале може ти уједно служити и као графичка слика за конвергентну бесконачну геометријску прогресију.

---

227. Тому је сличан и овај задатак:

Ако се на хипотенузу правоуглог троугла подигне нормала из темена већега оштрога угла, док не пресече продужак супротне катете, из овога пресека нормала на пређашњу нормалу до пресека са продушком друге катете, из овога новога пресека опет нормала на другу нормалу и т. д., добива се опет једна спирална сломљена линија. Израчунај дужину ове линије, ако је задана хипотенуза с и мањи оштри угао α. (Види слику 11.)



11. слика.

И ова се задаћа решава гониометријски. Из правоуглог троугла ABD следи: $c_1 = c \,.\, tg\,\alpha$, из BDE: $c_2 = c_1 \,.\, tg\,\alpha = c \,.\, tg^2\alpha$ и т. д. Дакле дужина спиралне линије је: $c + c_1 + c_2 + c_3 + + \cdots = c + c.tg\,\alpha + + c.tg^2\alpha + c.tg^3\alpha \cdots$ Овај низ је геометријска прогресија, која је конвергентна, јер $q = \frac{c_n}{\;} = tg\,\alpha < 1$, пошто је $\alpha<45^0$. Његов је збир $S=\frac{c}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{c\,.\cos\alpha}{2\cos(45+\alpha)}\cdot\sqrt{2}$. (Види задатак бр. 112. у II. делу). И слика ове спиралне линије може ти служити за предочивање *конвергентне* бесконачне прогресије. —

Ако нормалу на хипотенузу дигнеш из темена мањега угла и наставиш даље слично као у овом примеру, добиваш спиралу, која све више отвара (нацртај слику!). Дужине појединих нормала чине *растућу* геометријску прогресију, која дивергира, јер је количник $q=cotg\,\alpha>1$, пошто је $\alpha<45^0$. То ти може онда служити као слика *дивергентне* бесконачне геометријске прогресије.

* * *

228. *Одреди вредност израза:*

$$A=\sqrt{x\,.\sqrt{y^3.\sqrt{z^5.\sqrt{x\,.\sqrt{y^3.\sqrt{z^5.\sqrt{x\,.\sqrt{\dots\dots}}}}}}}}.$$

Коренове претварај поступно у потенције са сломљеним експонентом и у просте коренове:

$$A=x^{\frac{1}{2}}.\sqrt[4]{y^3.\sqrt{z^5.\sqrt{x\dots\dots}}}=x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{3}{4}}.\sqrt[8]{z^5.\sqrt{x\,.\sqrt{y^3.\sqrt{z^5\dots\dots}}}}=$$

$$=x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{3}{4}}.z^{\frac{5}{8}}.\sqrt[16]{x\sqrt{y^3.\sqrt{z^5}}}=\dots\dots\dots=x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{3}{4}}.z^{\frac{5}{8}}.x^{\frac{1}{16}}.y^{\frac{3}{32}}.z^{\frac{5}{64}}.$$

$$.x^{\frac{1}{128}}.y^{\frac{3}{256}}.z^{\frac{5}{512}}.\dots\dots\dots=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\dots\dots}.y^{\frac{3}{4}+\frac{3}{32}+\frac{3}{256}+\dots\dots}.$$

$$.z^{\frac{5}{8}+\frac{5}{61}+\frac{5}{512}+\dots\dots}.$$

Збирови експонената над x, y, z су збирови конвергентних геометријских прогресија са $q=\frac{1}{8}$. Збир експонената изнад y је $s_2=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{6}{7}$; исто тако: изнад $x:s_1=\frac{4}{7}$, изнад $z:s_3=\frac{5}{7}$.

Тако је: $A=x^{\frac{4}{7}}.y^{\frac{6}{7}}.z^{\frac{5}{7}}=\sqrt[7]{x^4.y^6.z^5}$.

229. *Три кугле имају специфичке тежине редом 6, 5 и 4. Њихове су запремине 3 узастопна члана једне геометријске прогресије, а њихове тежине чине једну аритметичку прогресију. Израчунај им полупречнике, ако све 3 укупно теже 180 kg.*

Запремине су им: x, xq, xq^2; тежина прве је $6x$, друге $5xq$, а треће $4xq^2$; а јер ове тежине чине аритметичку прогресију, то је $5xq - 6x = 4xq^2 - 5xq$. Одатле једначина: $2q^2 - 5q + 3 = 0$, која даје $q_1 = \frac{3}{2}$, $q_2 = 1$. Збир тежина је 180 kg, т. ј. $6x + 5xq + 4xq^2 = 180$. Помоћу $q_1 = \frac{3}{2}$ ова једначина даје: $6x + \frac{15}{2}x + 9x = 180$, а одатле $x = 8$. Кугле имају запремине 8, 12 и 18 dm^3. Одатле $\left(r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)$ добиваш: $r_1 = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$, $r_2 = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$, $r_3 = \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}}$, или: $\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{1{\cdot}2407}\ dm$, $\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{1{\cdot}4202}\ dm$, $\mathbf{r}_3 = \boldsymbol{1{\cdot}6258}\ dm$. Количник $q_2 = 1$ даје други низ кугала. Те кугле имају све једнаку запремину, која се добива, ако се у једначини $6x + 5xq + 4xq^2 = 180$ постави $q = 1$. Из једначине: $6x + 5x + 4x = 180$ излази: $x = 12\ dm^3$. Одатле њихов полупречник $r = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}} = \boldsymbol{1{\cdot}4202}\ dm$. Њихове су тежине: 72 kg, 60 kg и 48 kg.

230. *У једној аритметичкој прогресији први, други, пети и последњи члан су уједно узастопни чланови геометријске прогресије, чији је збир 120. Нађи обе прогресије.*

Према задатку чланови a, $a + d$, $a + 4d$, $a + (n - 1)d$ аритметичке прогресије су уједно узастопни чланови геометријске прогресије b_1, b_2, b_3, b_4. Количник те геометријске прогресије је: $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3}$, т. ј. постоје ове једначине: $\frac{a+d}{a} = \frac{a+4d}{a+d}$ .... /1/, $\frac{a+d}{a} = \frac{a+(n-1)d}{a+4d}$ .... /2/. Збир

$a . \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 120$, т. ј. $a . \frac{\left(\frac{a + d}{a}\right)^4 - 1}{\frac{a + d}{a} - 1} = 120$ .... /3/. Решавањем једначине /1/ налазиш: $d = 2a$. Замени ово у /3/, па добиваш: $a . \frac{\left(\frac{3\,a}{a}\right)^4 - 1}{\frac{3\,a}{a} - 1} = 120$, т. ј. $80 . \frac{a}{2} = 120$. Одатле: $a = \mathbf{3}$, $\mathrm{d} = \mathbf{6}$. Замени то у /2/, па добиваш $\mathrm{n} = \mathbf{14}$, а помоћу $q = \frac{a + d}{a}$ налазиш: $\mathrm{q} = 3$. Аритметичка прогресија је: *3*, *9*, 15, 21, ***27***, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, ***81***.

231. *4 броја чине геометријску прогресију. Ако други увећаш за 6, трећи за 3, а 4. умањиш за 36, добиваш аритметичку прогресију. Који су то бројеви?*

Ти бројеви су: a, aq^2, aq^3; онда бројеви: a, $aq + 6$, $aq^2 + 3$, $aq^3 - 36$ чине аритметичку прогресију, т. ј. онда је:

$$\begin{cases} (aq + 6) - a = (aq^2 + 3) - (aq + 6) = d, \\ (aq^3 - 36) - (aq^2 + 3) = (aq + 6) - a = d. \end{cases}$$

Ове 2 једначине дају коначно систем: $a . (q - 1)^2 = 9$, $a . (q - 1)^2 . (q + 1) = 45$. Дељењем једне једначине с другом: $q + 1 = 5$, т. ј. $q = 4$, $a = 1$. Ти бројеви су: ***1, 4, 16, 64*** (геом. прогр.), ***1, 10, 19, 28*** (аритм. прогр.).

232. *Три броја чине геометријску прогресију, чији је збир 19. Ако умањиш последњи број за 1, добиваш аритметичку прогресију. Који су то бројеви?*

Ти бројеви су: a, aq, aq^2. Онда бројеви: a, aq, $aq^2 - 1$ чине аритметичку прогресију, т. ј.: $(aq^2 - 1) - aq = aq - a$ ...... /1/. Збир тих бројева је: $a + aq + aq^2 = 19$ .... /2/. Из /1/ и /2/ добиваш систем једначина: $a\,(1 - 2q + q^2) = 1$, $a . (1 + q + q^2) = 19$. Дељењем и редукцијом добиваш одавле једначину: $18q^2 - 39\,q + 18 = 0$, чији су коренови: $q_1 = \frac{3}{2}$, $q_2 = \frac{2}{3}$. Заменом у /1/ или у /2/ добиваш: $a_1 = 4$, $a^1{}_1 = 9$. Ти бројеви су: ***4, 6, 9.***

234. *Који је перценат рачунао фабрикант, ако је трговцу продао робе за 65000 динара и за то добио од дужника меницу на 90000 динара, која се има исплатити након 4 године? Код меница се узима антиципатно укамаћивање.*

Употреби образац (26): $A_n = 90000$, $A = 65000$. Из једначине: $90000 = \frac{65000}{\left(1 - \frac{p}{100}\right)^4}$ излази: $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^4 = \frac{65000}{90000}$. Логаритмовањем добиваш редом: $4\, log \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 0{\cdot}85867 - 1 =$ $= 3{\cdot}85867 - 4$, $log \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 0{\cdot}96467 - 1$; одатле $1 - \frac{p}{100} =$ $= 0{\cdot}92188$, $p = \mathbf{7{\cdot}81}\%$.

---

235. *До 8 година има се исплатити дуг од 34700 динара. Коликом сумом се може исплатити тај дуг данас, ако се рачуна 7% годишње уз сложен интерес?*

Примени образац (24). Дуг $34700 = A_n$, тражи се садашња вредност капитала A. Из једначине, добивене заменом у (24): $34700 = A \,.\, 1{\cdot}07^8$, излази: $A = \frac{34700}{1{\cdot}07^8}$ и даље логаритмовањем: $log\, 1{\cdot}07 = 0{\cdot}0293838$[1], $log\, 1{\cdot}07^8 = 0{\cdot}23507$, $A = \mathbf{20195{\cdot}45}$ динара,

---

236. *Израчунај $\frac{1}{4}$-годитњи конформни перценат, ако је годишњи 8%.*

Релативни $\frac{1}{4}$-годишњи перценат је $\frac{8}{4}\% = 2\%$. *Конформни* је мањи. По обрасцу (25а) је овде: $p_1 = 100\left(\sqrt[4]{1 + \frac{8}{100}} - 1\right) =$ $= 100\sqrt[4]{1{\cdot}08} - 100$. Израчунај најпре $log\, 100 \,.\, \sqrt[4]{1{\cdot}08}$, одатле нумерус и одузми 100; $log\, 1{\cdot}08 = 0{\cdot}0334238$, $p = \mathbf{1{\cdot}943}\%$.

---

[1] [illegible] таблице са 7 децим. места.

237. *У колико се година сваки капитал потростручи, кад се уложи уз $10^0/_0$ декурзивно а) уз декурзивно годишње капитализирање интереса; б) уз декурзивно полугодишње капитализирање интереса са релативним интересним фактором; в) уз антиципатно годишње капитализирање интереса?*

а) Ако је то након n година, онда је $A_n = 3\,A$, па према обрасцу (24) имаш једначину: $3\,A = A\,.\,1{\cdot}1^n$ или $1{\cdot}1^n = 3$. Одатле: $n = \frac{log\,3}{log\,1{\cdot}1} = \frac{0{\cdot}47712_{,1}}{0{\cdot}04139_{,2}} = \frac{47712{\cdot}_1}{4139{\cdot}_2}$, $log\,n = 1{\cdot}06173$, **$n = 11{\cdot}527$ година.**

б) Уз $10^0/_0$ годишње је релативни полугодишњи перценат $5^0/_0$, $A_{2n} = 3\,A$. По обрасцу (25) имаш једначину: $3\,A = A\,.\,1{\cdot}05^{2n}$, или: $3 = 1{\cdot}05^{2n}$. Логаритмовањем: $2n = \frac{log\,3}{log\,1{\cdot}05}$, $n = \frac{log\,3}{2\,log\,1{\cdot}05} = \frac{0{\cdot}47712_{,1}}{0{\cdot}04239_{,8}} = \frac{47712_{,1}}{4239_{,8}}$, $log\,n = 1{\cdot}05129$, **$n = 11{\cdot}254$** год.

в) Уз антиципатно укамаћивање је $1 - \frac{p}{100} = 0{\cdot}9$, па по обрасцу (26) имаш једначину $3\,A = \frac{A}{0{\cdot}9^n}$, или: $3 = \frac{1}{0{\cdot}9^n}$. Логаритмовањем добиваш: $log\,n = 1{\cdot}02817$, **$n = 10{\cdot}67$** год.

* * *

238. *Два капитала, који се разликују за 900 динара, издани су на сложен интерес, већи уз $4^0/_0$, мањи уз $5^0/_0$. После 10 година нарасла су оба на једнаку вредност. Који су то капитали?*

Ако је већи капитал x, мањи је $x - 900$. Они у 10 година нарасту до вредности $x\,.\,1{\cdot}04^{10}$, $(x - 900)\,.\,1{\cdot}05^{10}$. Обе су вредности једнаке, т. ј. $x\,.\,1{\cdot}04^{10} = (x - 900)\,.\,1{\cdot}05^{10}$. Одатле: $x = \frac{900\,.\,1{\cdot}05^{10}}{1{\cdot}05^{10} - 1{\cdot}04^{10}} = 8962{\cdot}2$ динара. Већи капитал је износио: **8962·2** динара, а мањи **8062·2** динара.

* * *

239. *Дуг од 3600 динара дан је на сложен интерес. До које је вредности нарасао у 10 година, ако је кроз првих 6 година био уложен уз $70^0/_0$ годишње, а након тога уз $8^0/_0$?*

Дуг A је након првих n година дошао уз $p^0/_0$ до вредности $A_n = A\,e^n = 3600\,.\,1{\cdot}07^6$. Овај је капитал A_n почетни капитал за други део времена m. Капитал A_n је кроз m година уз $p_1\,{}^0/_0$ дошао до вредности $A_m = A_n\, e^m{}_1 = A\, e^n . e^m{}_1$, т. ј. $A_m =$ $= 3600 . 1{\cdot}07^6 . 1{\cdot}08^4 =$ ***7214·93*** динара.

240. *20000 динара је у 10 година сложеним интересом порасло на 35000 динара. Првих 5 година било је уложено уз $\frac{3}{4}\,{}^0/_0$ мање него у последњих 5 година. Колико је износио перценат?*

Ако је перценат био x, онда је A у првих 5 година дошло до вредности: $A_5 = A . \left(1 + \frac{x}{100}\right)^5$ · Овај капитал A_5 је у других 5 година био уложен уз $x + \frac{3}{4}\,{}^0/_0$, те је порасао до вредности $A_{10} = A_5 . \left(1 + \frac{4\,x + 3}{4.100}\right)^5 = A \left(1 + \frac{x}{100}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{4\,x + 3}{4.100}\right)^5$ · Дакле у овом примеру имаш да решиш једначину:

$$20000 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{4\,x + 3}{4.100}\right)^5 = 35000.$$

Одатле: $\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{4\,x + 3}{4.100}\right) = \sqrt[5]{\frac{7}{4}} = 1{\cdot}11844$, и коначно $4\,x^2 + 803\,x - 4737\,6 = 0$, $x =$ ***5·735***${}^0/_0$.

241. *Нетко је уложио 1. I. 1920 у банци 1500 динара и тому додаје концем сваке године по 900 динара почевши од 31. XII. 1920 Колико ће износити његов иметак у банци концем 1929. године, ако се укамаћује са $5^3/_4\,{}^0/_0$ годишње.*

Први уложак A био је у банци 10 година, па је нарасао до вредности $Ae^n = 1500 . 1{\cdot}0575^{10}$. Укупна вредност осталих 10 уложака, уплаћених концем године, представљена је обрасцем $S_n = r\frac{e^n - 1}{e - 1} = 900 \cdot \frac{1{\cdot}0575^{10} - 1}{0\,0575}$ · Према томе је његов иметак концем 1926. године:

$U = 1500 . 1\,0575^{10} + 900 \cdot \frac{1{\cdot}0575^{10} - 1}{0{\cdot}0575}$ · Израчунај парцијалним логаритмовањем. **U =** ***14346·77*** динара.

242. *Неко је имао 1. I. 1925. у банци улог од 7395 динара. Колико мора још улагати почетком сваке године од 1. I. 1926, ако жели да концем 1934. године има у банци 50000 динара? ($p = 7\frac{3}{4}\%$)*

Улог $A = 6395$ стоји на интересу $n = 10$ година, а број ануитета r, које још има да плати, је $n - 1 = 9$. Вредност улога A је након n година $A_n = Ae^n$, а вредност $n - 1$ ануитета r, уплаћених почетком године, је $S = re\dfrac{e^{n-1} - 1}{e - 1}$. Цео његов иметак након n година износи: $S_n = Ae^n + re\dfrac{e^{n-1} - 1}{e - 1}$. Одатле: $r = \dfrac{(S_n - Ae^n).(e - 1)}{e.(e^{n-1} - 1)}$. Нумерички:

$$r = \frac{(50000 - 7395.1{\cdot}0775^{10}).0{\cdot}0775}{1{\cdot}0775\,(1{\cdot}0775^9 - 1)},\quad r = \mathbf{2582{\cdot}22} \text{ динара.}$$

---

243. *Почетком сваке године неко улаже извесну суму у банку, која рачуна 5% годишње. Након колико година ће имати 3 пута више, него би имао, да је уложио почетком 1. године 4 пута већу суму и више не додавао ништа?*

Вредност свих уложака након n година је: $S_n = r\,e\dfrac{e^n - 1}{e - 1}$. Вредност капитала уложеногa у почетку је: $A_n = 4\,r\,e^n$. Према задатку n треба одредити тако, да буде: $re\dfrac{e^n - 1}{e - 1} = 3.4\,r\,e^n$. Одатле једначина: $e\dfrac{e^n - 1}{e - 1} = 12\,e^n$. Постави $e^n = x$, па из једначине: $e\,(x - 1) = 12\,x\,(e - 1)$ излази: $x = \dfrac{e}{12 - 11e}$, т. ј.: $1{\cdot}05^n = \dfrac{1{\cdot}05}{0{\cdot}45}$. Одатле $n = \mathbf{17{\cdot}366}$ година.

**244. *Неко улаже кроз 5 година почетком године суму r на сложен интерес. Кроз идућих 6 година он удвостручи уложак, али је истодобно банка смањила интересни перценат од 7%, колико је износио у првих 5 година, на 6%. На тај начин износи његов иметак у банци на концу 11. године 32000 динара. Колико је улагао годишње?*

Сума r, коју је он

стављала је концем 5. године кацитал: $S = re\frac{e^n - 1}{e - 1} =$ $= r \,.\, 1{\cdot}07 \cdot \frac{1{\cdot}07^5 - 1}{0{\cdot}07} \cdot$ Кроз $m = 6$ година након тога био је тај капитал S уложен на сложен интерес уз $p_1 = 6\%$, те је дошао до вредности $S_m = Se_1{}^m = r \,.\, 1{\cdot}07 \,.\, 1{\cdot}06^6 \cdot \frac{1{\cdot}07^5 - 1}{0{\cdot}07}$ ...... /1/.

Кроз исто $m = 6$ година он улаже почетком сваке године још и суму $2r$ уз 6%; вредност ових уложака након $m = 6$ година је:

$S_1 = 2r\, e_1 \frac{e_1{}^m - 1}{e_1 - 1} = 2r . 1{\cdot}06 \cdot \frac{1{\cdot}06^6 - 1}{0{\cdot}06}$ .... /2/. Коначна вредност његовог иметка у банци је збир вредности /1/ и /2/, т. ј.:

$$r.\left(1{\cdot}07 \,.\, 1{\cdot}06^6 \cdot \frac{1{\cdot}07^5 - 1}{0{\cdot}07} + 2 . 1{\cdot}06 \cdot \frac{1{\cdot}06^6 - 1}{0{\cdot}06}\right) = 32000.$$ Одатле:

$$r = 32000 : \left(1{\cdot}07 . 1{\cdot}06^6 \cdot \frac{1{\cdot}07^5 - 1}{0{\cdot}07} + 2 . 1{\cdot}06 \cdot \frac{1{\cdot}06^6 - 1}{0{\cdot}06}\right) \cdot$$

$$1{\cdot}07 . 1{\cdot}06^6 \cdot \frac{1{\cdot}07^5 - 1}{0{\cdot}07} = 8{\cdot}72846, \quad 2 . 1{\cdot}06 \cdot \frac{1{\cdot}06^6 - 1}{0{\cdot}06} = 14{\cdot}7879,$$

$r = 1360{\cdot}75$ динара, т. ј. кроз првих 5 година је улагао ***1360·75*** динара, а након тога ***2721·5*** динара.

---

245. *Трговац жели да амортизира у 15 година дуг од 64709 дин. тако, да одмах отплати 4600 динара, а од идуће године да кроз 14 година отплаћује једнаке ануитете почетком сваке године. Колико има износити тај ануитет, ако веровник рачуна сложен интерес са* $10\frac{1}{2}\%$ *годишње?*

Његов дуг је кроз ових $n - 1 = 14$ година (јер 15. године он се изравнао са веровником почетком јануара) нарасао на износ $A_n = Ae^{n-1}$. Први уложак a је кроз то исто време нарасао до вредности ae^{n-1}, а сви уплаћени ануитети су *почетком* 15. године представљали вредност $r\frac{e^{n-1} - 1}{e - 1} \cdot$ Ануитет r је морао одмерити тако, да буде: $Ae^{n-1} = ae^{n-1} + r\frac{e^{n-1} - 1}{e - 1} \cdot$

Одатле је: $r = \frac{(A - a) . (e - 1) . e^{n-1}}{e^{n-1} - 1}$.

Збир уложака предочен је вредношћу $r \cdot \frac{e^{n-1} - 1}{e - 1}$, а не са $re\frac{e^{n-1}-1}{e-1}$, премда су били уплаћивани почетком године, јер се тражи њихова вредност *у часу уплате последњега ануитета* почетком 15. године. Последњи ануитет (први члан геом. прогресије) је имао тада вредност r, а $n-1=14$ је број чланова прогресије. Види образац (28). Нумерички:

$$r=\frac{60109\,.\,0{\cdot}105\,.\,1{\cdot}105^{14}}{1{\cdot}105^{14}-1},\quad \mathbf{r}=\mathbf{8383{\cdot}2}\text{ дин.}$$

---

246. *Трговац је дуговао банци суму $A=75000$ динара уз $12^0/_0$ годишње са полугодишњим капитализирањем интереса. Кроз 4 године није отплаћивао ни интереса ни капитала, а почетком 5. године понуди банци амортизацију дуга са полугодишњим ануитетима $r=4500$ динара. Банка је одбила његову понуду и одредила као полугодишњи ануитет, који пада концем свакога полугодишта, такву суму, којом ће се дуг амортизирати у 7 година. — Зашто је банка одбила трговчеву понуду и колико износи ануитет, који је банка одредила?*

а) Узми као основ полугодишњи релативни перценат $p_1=\frac{p}{2}=6^0/_0$. Банка је одбила његову понуду, јер $r=4500$ динара је управ полугодишњи интерес на *почетни* дуг A. Дуг у банци у часу понуде био је $A_4=Ae^8=75000\,.\,1{\cdot}06^8$. Тако понуђени ануитет није био у стању да подмири ни интерес на фактични дуг A_4.

б) Почетак отплаћивања дуга је крај првога полугодишта 5. године. Дуг је дотле порасао до износа $A_4=Ae^{2\cdot 4+1}$ и овај се дуг A_n има амортизирати. Овај је дуг у идућих $2m-1$ полугодишта порасао на вредност $A'=A_n\,.\,e^{2m-1}=A_n\,.\,e^{13}$. Вредност ануитета, уплаћених концем $2m$ полугодишта, на крају $2m=14$-тог полугодишта, према (28) износи:

$$S=R\,\frac{e^{2m}-1}{e-1}=R\,\frac{e^{14}-1}{e-1}.$$

Онда једначина амортизације гласи: $A_ne^{13}=R\frac{e^{14}-1}{e-1}$,

или кад уврстиш вредност A_n: $Ae^9.\,e^{13}=R\frac{e^{14}-1}{e-1}$. Нумерички; $75000 . 1{\cdot}06^{22} = R\,\frac{1{\cdot}06^{14}-1}{0{\cdot}06}$; одатле:

$R = \frac{75000\,.\,0{\cdot}06\,.\,1{\cdot}06^{22}}{1{\cdot}06^{14}-1}$; **R** $=$ ***13968·39*** динара.

---

247. *Колико година мора капитал* $A = 85137$ *динара бити уложен на сложен интерес уз* 7% *годишње, да узмогне након тога времена покривати кроз 10 година полугодишњу ренту од* $r = 12000$ *динара, која ће се исплаћивати почетком свакога полугодишта, ако се кроз ово 10 година рачуна интерес* $2{\cdot}5\%$ *полугодишње?*

Капитал A ће кроз то време x порасти до вредности $A_x = A\,e_1^{\,x}$, а рента r је одмерена тако, да је: $A_x\,e_2^{\,2n} = r\,e_2\,\frac{e_2^{\,2n}-1}{e_2-1}$, т. ј. $A\,e_1^{\,x}\,e_2^{\,2n-1} = r\,\frac{e_2^{\,2n}-1}{e_2-1}$.

Одатле: $e_1^{\,x} = \frac{r\,(e_2^{\,2n}-1)}{A\,(e_2-1)\,.\,e_2^{\,2n-1}}$.

Краћење једначине са e_2 значи, да ће се обрачун извршити у моменту исплате последње ренте; зато тече интерес на A_x само $2n-1$ полугодишта. — У задатку је: $e_1 = 1{\cdot}07$, $e_2 = 1{\cdot}025$, $e_2^{\,2n-1} = 1{\cdot}025^{19}$. Дакле једначина гласи:

$1{\cdot}07^{x} = \frac{12000\,(1{\cdot}025^{20}-1)}{85137\,.\,0{\cdot}025\,.\,1{\cdot}025^{19}}$. Нумерички: $x =$ ***12*** година.

---

248. *Неко је уложио 36000 динара, да добије право на ренту, која ће се исплаћивати кроз 10 година почетком свакога полугодишта. Колико ће износити та рента, ако њезино исплаћивање почиње у деветој години након уплате споменуте суме и ако се рачуна цело време перценат* $2{\cdot}5\%$ *полугодишње.*

До почетка исплаћивања ренте r уложени капитал A био је на сложеном интересу пуних $n = 8$ година, а кроз то време се интерес $2n$ пута прилагао капиталу. Тако је капитал A порасао до вредности $A' = Ae^{2n}$. Ренту r треба тако одмерити, да капитал A' буде потпуно амортизиран са $2m = 20$ полугодишњих ануитета r. Како ће се обрачун извршити у моменту последње исплате ренте r, 1. VII. последње године, то последт. ј. укамаћивање капитала врши се само $2m-1$ пута, а за збир S употребићеш образац $S=r\,\dfrac{e^{2m}-1}{e-1}$, јер је $2m$ број исплаћених рента. Тако једначина амортизације гласи:

$$A'e^{2m-1}=r\,\frac{e^{2m}-1}{e-1},\ \text{т. ј.: } Ae^{2n}.\,e^{2m-1}=r\,\frac{e^{2m}-1}{e-1}.$$

Одатле: $r=\dfrac{Ae^{2(m+n)-1}.\,(e-1)}{e^{2m}-1}$. У овом примеру:

$r=\dfrac{36000\,.\,1\,025^{35}.\,0{\cdot}025}{1\,025^{20}-1}$; $\mathbf{r}=\boldsymbol{334{\cdot}54}$ дин.

**249. *Младић има право на годишњу ренту од 16000 динара, која му се има исплаћивати кроз 12 година почетком године. Али он није ту ренту узимао прве 4 године и почетком 5. године жели, да је измени у полугодишњу ренту, која ће исплаћивати од почетка 5. године почетком свакога полугодишта кроз 10 година. Колико ће износити та нова рента, ако се цело време рачуна* $p=6\%$ годишње?

Почетком 5. године он располаже у банци капиталом A, који се састоји од *садашње* вредности 4 неисплаћених рента и од *садашње* вредности осталих 8 рента, које се још имају исплатити. Садашња вредност 4 неисплаћених рента је $S_4=$ $=re\,\dfrac{e^4-1}{e-1}$. Садашња вредност x осталих 8 рента, одређена је једначином амортизације: $xe^8=re\cdot\dfrac{e^8-1}{e-1}$; дакле: $x=\dfrac{r(e^8-1)}{e^7(e-1)}$. Према томе његов иметак у банци почетком 5. године износи $A=S_4+x=re\,\dfrac{e^4-1}{e-1}+\dfrac{r(e^8-1)}{e^7(e-1)}=$ $=\dfrac{r}{e^7(e-1)}\cdot(e^{12}-e^8+e^8-1)=r\cdot\dfrac{e^{12}-1}{e^7(e-1)}$. — Овај капитал A има да кроз 10 година покрива полугодишњу ренту R почетком године уз $p_1\%$ полугодишње. Дакле имаш једначину амор-

$e_1^{2\cdot10}-1 \qquad A\ e_1^{19}(e-1)$

т. ј. $R = \frac{r e_1^{19}(e^{12}-1)(e_1-1)}{e^7(e_1^{20}-1).(e-1)}$. Ако узмеш, да је полугодишњи перценат $p_1 = \frac{p}{2}$, т. ј. $p_1 = 3^0/_0$, онда имаш:

$$R_1 = \frac{16000 . 1\cdot03^{19}(1\cdot06^{12}-1) . 0\cdot03}{1\cdot06^7(1\cdot03^{20}-1) . 0\cdot06}.$$

Ако се узме *конформни* перценат $y = 100 . (\sqrt{1\cdot06}-1) = 2\cdot955^0/_0$, онда је:

$$R_2 = \frac{16000 . 1\cdot02955^{19}(1\cdot06^{12}-1) . 0\cdot02955}{1\cdot06^7 . (1\cdot02955^{20}-1) . 0\cdot06}.$$

Нумерички: $R_1 =$ ***11714·48*** дин., $R_2 =$ ***11671·54*** динара.

IV. ОДЕЉАК.

250 *Одреди интервал непрекидности функције* $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x \pm 5}$, *ако је x реелна промењљива.*

Сломљена рацијонална функција је прекидна у коначности у свима реелним вредностима промењљиве, за које се полином у именитељу поништава, ако се истодобно не поништава и бројитељ. Дакле имаш да нађеш нултачке именитеља, т. ј. коренове једначине: $x^2 - 4x \pm 5 = 0$.

а) Једначина $x^2 - 4x + 5 = 0$ има само комплексне коренове. Према тому је функција $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}$ *непрекидна* у целом реелном интервалу $(-\infty, +\infty)$.

б) Коренови једначине $x^2 - 4x - 5 = 0$ су реелни бројеви: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Нултачке бројитеља су коренови једначине $x^2 - 2x + 1 = 0$, т. ј. $x_3 = +1$. Пошто бројитељ и именитељ немају заједничких нултачака, то се функција прекида за вредности промењљиве $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Ако тачке прекидности затвориш у узане интервале величине 2ε, остају као интервали непрекидности ови интервали: $(-\infty \quad \boldsymbol{-1} - \varepsilon)$, $(\boldsymbol{-1} + \varepsilon, \boldsymbol{5} - \varepsilon)$, $(\boldsymbol{5} + \varepsilon, +\infty)$.

* * *

254. *За имплицитну функцију реелне варијабле (промењљиве) x, која гласи: $f(xy) \equiv 16y^2 + 9x^2 - 6x + 16y - 139 = 0$, нађи интервал реелности и одреди њезину вредност за средину тога интервала.* Која кривуља предочује ову функцију?*

Реши једначину: $16y^2 + 16y + 9x^2 - 6x - 139 = 0$ по y. Добиваш: $y = \frac{-16 \pm 8\sqrt{4 - (9x^2 - 6x - 139)}}{32}$. Радиканд је дискриминанта једначине по y и вредности y су реелне, када

$- 6x - 139) < 0$. Границу између једних и других чине оне вредности x, за које је: $4 - (9x^2 - 6x - 139) = 0$. Коренови ове једначине су: $x_1 = -\frac{11}{3}$, $x_2 = +\frac{13}{3}$. За све вредности x, које леже између x_1 и x_2 (н. пр. $x = 0$ или $x = 1$) је израз $4 - (9x^2 - 6x - 139) > 0$; дакле је *интервал реелности*: $\left(-\frac{11}{3}, +\frac{13}{3}\right)$, а у интервалима: $\left(-\infty, -\frac{11}{3}\right)$, $\left(+\frac{13}{3}, +\infty\right)$ је функција *комплексна*. Средина интервала реелности је $x_0 = = \frac{x_1 + x_2}{2} = +\frac{1}{3}$. Функција има овде вредност $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2} \pm \pm\sqrt{143 - 9.\frac{1}{9} + 6.\frac{1}{3}}$, т. ј. двозначна је, са вредностима:

$y_0 = +\frac{5}{2}$, $y_0 = -\frac{7}{2}$. — *Задану функцију можеш довести у облик, који одговара обрасцу (216). Од чланова са x извади заједнички фактор *9*, а од чланова са y заједнички фактор *16*, па биноме, који остану у загради, додавањем подесних бројева претвори у квадрате бинома Добиваш редом: $9\left(x^2 - \frac{6}{9}x + \frac{1}{9}\right) + + 16\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) - 139 - 1 - 4 = 0$, т. ј.: $9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + + 16\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 9 . 16$. То је једначина елипсе, којој је средиште у тачки $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, а оси су паралелне са осима координатног система ($a = 4$, $b = 3$, ексцентрицитет $e = \sqrt{7}$). Види пример бр. 167. у II. делу.

---

251. *Извесна кривуља предочена је функцијом* $f(x) = = (3x - 4).(2x - 1) + (4x - 2)^2$. *Одреди константу смера њезине тангенте, која је додирује у тачки, која има апсцису* $x = \frac{1}{2}$; *нађи апсцису тачке, у којој кривуља има тангенту паралелну са оси апсциса.*

Нађи деривацију (извод) функције; јер деривација геометријски значи константу смера тангенте кривуље за макар коју додирну тачку. Деривација је: $f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = 3.(2x - 1) +$

$+2.(3x-4)+2.(4x-2).4=44x-27$. Постави овде $x=\frac{1}{2}$, па добиваш: $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\mathbf{5}=\operatorname{tg}\alpha$. — Тангента, паралелна са апсцисном оси, додирује кривуљу у тачки, чија је апсциса одређена једначином: $f'(x)=0$, т. ј.: $44x-27=0$. Одатле је:

$x_0=\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{44}}$ ..../1/.

---

253. *Кривуља из претходнога задатка је једна парабола. Зашто? Како лежи према координатном систему? Нађи јој координате темена и истражи, сече ли апсцисну осовину.*

Изведи у $f(x)$ множење и квадрат; добиваш квадратну функцију $f(x)=22x^2-27x+8$, а та значи уопште параболу, којој је главна ос паралелна са осју ордината. Пошто је коефицијенат квадратног члана позитиван, то је ова парабола конкавна према горе. На месту, где је њезина тангента паралелна са осју апсциса, она има *минимум* и ту је њезино теме. Апсциса темена одређена је према тому вредношћу /1/ из претходнога примера, а заменом ове вредности у $f(x)$, т. ј. $f(x_0)=-\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{88}}=y_0$ одређена је ордината темена = вредност минима. Величине x_0 и y_0 можеш одредити и помоћу обрасца (39). — Пресеци кривуље са оси апсциса имају ординату $y=$ $=0$, дакле су одређени једначином $f(x)=0$, т. ј. $22x^2-27x+$ $+8=0$. Коренови ове једначине су: $x_1=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, $x_2=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{11}}$; то су апсцисе пресека кривуље са оси x[1]; лако ћеш се уверити, да они леже симетрично према тачки x_0, јер је $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$.

---

254. *Нађи екстремне вредности функције*: $f(x)=x^3-13x^2-$ $-64x+32$.

a) Аналитичком (елементарном) методом. Тачке x_1 и x_2, за које је $f(x_1)=f(x_2)$, испуњују једначину:

$$x_1{}^3-13x_1{}^2-64x_1+32=x_2{}^3-13x_2{}^2-64x_2+32.$$

Одавле: $(x_1-x_2).(x_1{}^2+x_1x_2+x_2{}^2)-13(x_1-x_2)(x_1+x_2)-$ $-64(x_1-x_2)=0$, или: $(x_1 - x_2) . [x_1{}^2 + x_1 x_2 + x_2{}^2 - 13 (x_1 + x_2) - 64] = 0$. Одавле следи $x_1 = x_2$. Замени у другом фактору: $x_1 = x_2 = x$, па добиваш једначину: $3 x^2 - 26 x - 64 = 0$, чији су коренови: $x_1 = \frac{32}{3}$, $x_2 = - 2$. То су положаји екстремних вредности. Заменом у $f(x)$ наћи ћеш износе тих екстремних вредности, и то $\mathbf{f}(x_2) = \boldsymbol{100}$ *(максимум)*, $\mathbf{f}(x_1) = - \boldsymbol{\frac{24736}{27}}$ *(минимум)*.

*б) Дериви**рањем***. Изведи прву и другу деривацију: $f'(x) = = 3 x^2 - 26 x - 64$, $f''(x) = 6 x - 26$. Једначина $f'(x) = 0$, т. ј.: $3 x^2 - 26 x - 64 = 0$ даје положај екстремних вредности као горе. — Да истражиш врсту тих екстремних вредности, замени у другу деривацију нађене вредности x_1 и x_2. Добиваш: $f''\left(\frac{32}{3}\right) = + 38$, т. ј. $f''\left(\frac{32}{3}\right) > 0$; дакле је у $x_1 = \frac{32}{3}$ минимум функције. $x_2 = - 2$ је максимум, јер је $f''(- 2) < 0$.

---

255. *Наћи екстремне вредности функције:* $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}$.

Интервал непрекидности ове функције је, према задатку бр. 250 *а*: $(- \infty, + \infty)$. — *а) Елементарном (аналитичком) методом*. Постави $x = x_1$ и $x = x_2$, изједначи изразе $f(x_1) = = f(x_2)$ и ослободи се именитеља: $x^2{}_1 x^2{}_2 - 2 x_1 x^2{}_2 + x^2{}_2 - - 4x^2{}_1 x_2 + 8x_1 x_2 - 4x_2 + 5x^2{}_1 - 10x_1 + 5 = x^2{}_1 x_2{}^2 - 4 x_1 x^2{}_2 + + 5 x^2{}_2 - 2 x^2{}_1 x_2 + 8 x_1 x_2 - 10 x_2 + x^2{}_1 - 4 x_1 + 5$. Редукуј, па добиваш: $2 x_1 x^2{}_2 - 2 x^2{}_1 x_2 - 4 x^2{}_2 + 4 x^2{}_1 + 6 x_2 - 6 x_1 = 0$, или: $2 x_1 x_2 (x_2 - x_1) - 4 (x_2 - x_1) (x_2 + x_1) + 6 (x_2 - x_1) = 0$. Пократи са 2, извади заједнички фактор $x_2 - x_1$: $(x_2 - x_1) . [x_1 x_2 - - 2 (x_1 + x_2) + 6] = 0$. Први фактор даје $x_1 = x_2$. Постави у другом фактору $x_1 = x_2 = x$, па добиваш квадратну једначину: $x^2 - 4 x + 3 = 0$, која има коренове: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. За ове вредности промењљиве x има функција екстремне вредности, и то $\mathbf{f}(3) = + 2$ **(максимум)**, $\mathbf{f}(1) = 0^+$ **(минимум)**.

б) Деривацијом. Учини прву деривацију:

$$f'(x) = \frac{(2x - 2) (x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 2x + 1) (2x - 4)}{(x^2 -- 4 x + 5)^2} =$$

$= - 2 \cdot \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^2 - 4x + 5)^2}$. Екстремне вредности налазиш из једна-

$f'(x) = 0$, т. ј. $x^2 - 4x + 3 = 0$, која је идентична са оном горњом једначином. — Да одредиш још врсту екстремне вредности, изведи и другу деривацију: $f''(x) = \frac{d f'(x)}{dx} =$

$$= -2 \cdot \frac{(2x-4).(x^2-4x+5)^2-2(x^2-4x+3)(x^2-4x+5)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^4} =$$

$= 2.(2x-4) \cdot \frac{x^2-4x+1}{(x^2-4x+5)^3} \cdot$ Замени овде: $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

Добиваш: $f''(3) = -1$, $f''(1) = +1$, т. ј. $f''(3) < 0$, $f''(1) > > 0$. Дакле је $f(3)$ *максимум*, $f(1)$ *минимум*.

* * *

256. *Нађи елементарном (аналитичком) методом екстремне вредности функције:* $f(x) = x - \sqrt{2x^2 + 10x + 13}$.

Као у претходном примеру постави $x = x_1$ и $x = x_2$, па изједначи:

$$x_1 - \sqrt{2x_1^2 + 10x_1 + 13} = x_2 - \sqrt{2x_2^2 + 10x_2 + 13},$$

$$(x_1 - x_2) - \left(\sqrt{2x_1^2 + 10x_1 + 13} - \sqrt{2x_2^2 + 10x_2 + 13}\right) = 0.$$

Да можеш да извадиш заједнички фактор, изведи у другому члану овакву трансформацију: тај члан помножи и подели са збиром коренова:

$$(x_1 - x_2) - \frac{2x_1^2 + 10x_1 + 13 - 2x_2^2 - 10x_2 - 13}{\sqrt{2x_1^2 + 10x_1 + 13} + \sqrt{2x_2^2 + 10x_2 + 13}} = 0,$$

$$(x_1 - x_2) - \frac{2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 10(x_1 - x_2)}{\text{исто}} = 0.$$

Вади заједнички фактор: $(x_1 - x_2) . \left[1 - \frac{2(x_1 + x_2) + 10}{\text{исто}}\right] = 0.$

Изједначи други фактор са нулом и постави $x_1 = x_2 = x$:

$$1 - \frac{4x + 10}{2\sqrt{2x^2 + 10x + 13}} = 0 \text{ или: } \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 + 10x + 13}} = 1.$$

Квадрирањем добиваш одатле једначину: $x^2 + 5x + 6 = 0$, чији су коренови: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$.

За ове вредности x функција добива екстремне вредности, и то: $\mathbf{f(-2) = -3}$ **(максимум)**, $\mathbf{f(-3) = -4}$ **(минимум)**.

* * *

257. *Број a растави у 2 позитивна суманда тако, да њихов производ буде највећи.*

$-x = a$. Њихов производ $x.(a-x) = f(x)$ треба да буде највећи.

а) *Деривирај*: $f'(x) = a - x - x = a - 2x$. Једначина: $a - 2x = 0$ даје решење $x = \frac{a}{2}$, $a - x = \frac{a}{2}$, т. ј. производ суманада је највећи, ако су они једнаки. Да је ово максимум, видиш по тому, што је $f''(x) = -2$.

б) Учини $f(x_1) = f(x_2)$, т. ј.: $x_1(a - x_1) = x_2(a - x_2)$. Одатле: $a(x_1 - x_2) - (x^2_1 - x^2_2) = 0$, или: $(x_1 - x_2)(a - x_1 - x_2) = 0$. Први фактор даје $x_1 = x_2$. Ако у другому фактору ставиш $x_1 = x_2 = x$, добиваш непосредно: $x = \frac{a}{2}$, $a - x = \frac{a}{2}$.

Резултат овога примера можеш изрећи овако: *Производ двају променљивих позитивних фактора, чији је збир константа, највећи је онда, ако су оба фактора једнака и износе половину те константе.*

На овому правилу оснива се *Штајнерова метода* решавања проблема екстремних вредности, која се у много случајева даје корисно употребити, н. пр. у идућем примеру.

258. *Међу свима троугловима једнакога обима 2s, који стоје на истој основи a, треба наћи онај, који има највећу површину.*

Ти се троуглови разликују међусобно у осталим двема странама x и y. Површина једног од њих је: $P = \sqrt{s(s-a)(s-x)(s-y)}$, где је: $2s = a + x + y$. Одатле: $P^2 = s(s-a)(s-x)(s-y)$. А како је $y = 2s - (a + x)$, то је $s - y = (a + x) - s$. Прва 2 фактора су константе, па онда можеш писати:

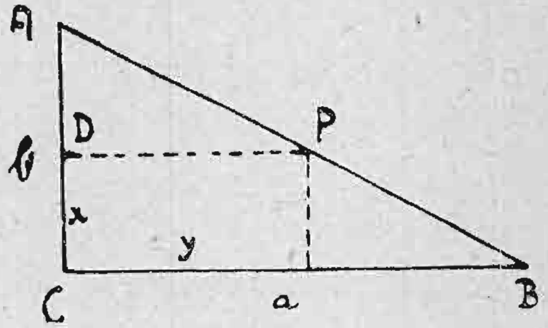
$$\frac{P^2}{s(s-a)} = (s-x)(a+x-s) = f(x).$$

Функција $f(x)$ одговара условима Штајнеровог правила, јер је $(s-x) + (a+x-s) = a$. Дакле је по претходном правилу услов за максимум овај: $s - x = a + x - s$. Мора бити: $s - x = \frac{a}{2}$, $a + x - s = \frac{a}{2}$. Одатле: $x = s - \frac{a}{2}$, а помоћу тога:

$y = 2s - \left(a + s - \frac{a}{2}\right) = s - \frac{a}{2}$, т. ј.: *Троугао највеће површине над страном* a *је равнокраки троугао.*

259. *Из тачке P на хипотенузи правоуглог троугла, кому је хипотенуза $c = 13$ cm, катета $a = 12$ cm, спуштене су нормале на катете, тако да се добива правоугаоник, који је уписан у правоуглом троуглу. Положај тачке P треба одредити тако, да добивени правоугаоник буде имао највећу површину. (12. сл.)*

Означи стране правоугаоника са x и y; онда је његова површина $P_1 = xy$. Означи још другу катету са $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Из сличних троуглова $ADP \sim \sim ABC$ излази пропорција: $y : a = (b - x) : b$. Одатле $y = \frac{a(b-x)}{b}$, а површина: $P_1 = \frac{ax(b-x)}{b} = f(x)$ Да нађеш екстремну вредност, деривирај $f(x)$; добиваш: $f'(x) = \frac{a}{b}(b - 2x)$. Једначина $f'(x) = 0$ даје онда: $x = \frac{b}{2}$, према тому $y = \frac{a}{2}$. Даљина тачке P од темена $A : AM = \sqrt{AD^2 + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{c}{2}$. Нумерички: $AP = \frac{13}{2}$ cm, а површина највећег правоугаоника: $P_1 = \frac{ab}{4} = \mathbf{15}$ **cm**^{2}.



12. слика.

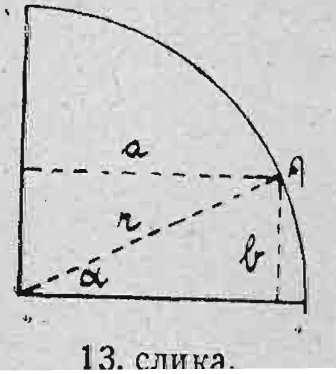
---

260. *На луку кружног квадранта одабери ма коју тачку A и спусти из ње нормале на полупречнике, који пролазе крајним тачкама квадранта. Одабери положај тачке A тако, да буде збир нормала највећи (13. сл.)*

Ако је полупречник круга r, а дужине нормала a и b, онда је $s = a + b = a + \sqrt{r^2 - a^2} = f(a)$.

Деривирај по $a : f'(a) = 1 - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}}$.

Из једначине: $1 - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} = 0$ следи: $a = \frac{r}{2}\sqrt{2}$, а помоћу тога $b = \frac{r}{2}\sqrt{2}$, т. ј. $a =$



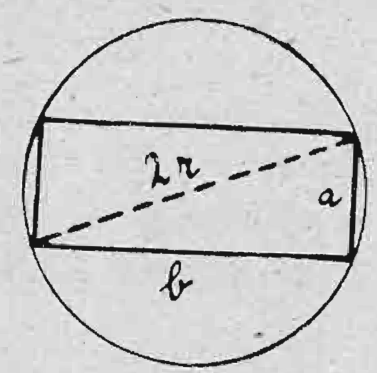
13. слика.

троугла је $a = r \cos \alpha$, $b = r \sin \alpha$, па је $s = r(\sin \alpha + \cos \alpha)$; али: $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}. \sin(45 + \alpha)$; дакле: $s = r\sqrt{2}. \sin(45 + \alpha)$. Збир s је највећи, ако је $\sin = 1$, т. ј. ако је $\alpha = 45$. *Или*: Квадрирај израз $s = r\ (\sin \alpha + \cos \alpha)$; добиваш: $s^2 = r^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha) = r^2 (1 + 2 \sin \alpha)$, т. ј. $s = r\sqrt{1 + 2 \sin \alpha}$. Збир $s = max.$, ако је $\alpha = 45^0$.

---

261. *Међу правоугаоницима, уписаним у кругу полупречника r, нађи онај, који има највећу површину. (14. сл.)*

Површина правоугаоника (стране a, b) је $P = ab$. По Питагорином правилу је $b = \sqrt{4r^2 - a^2}$, па је $P = a\sqrt{4r^2 - a^2}$. У овом изразу је r стална величина, а страна a је променљива; дакле је $P = a\sqrt{4r^2 - a^2} = f(a)$. Да нађеш екстремну вредност (максимум), деривирај функцију; добиваш: $f'(a) =$
$$= \sqrt{4r^2 - a^2} - \frac{2a^2}{2\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$
Деривација, изједначена са нулом, даје једначину: $4r^2 - a^2 - a^2 = 0$. Одатле $a = r\sqrt{2}$, $b = r\sqrt{2}$. Тај правоугаоник је квадрат са страном $a = r\sqrt{2}$. Његова површина је: $P = a^2 = 2r^2$.



14. слика.

Да се увериш, да је $f(a)$ максимум за $a = r\sqrt{2}$, изведи другу деривацију $f''(a)$, т. ј. $\frac{df'(a)}{da}$, па у њу замени $a = r\sqrt{2}$.

Друга деривација је: $$f''(a) = \frac{-a}{\sqrt{4r^2 - a^2}} - \frac{8ar^2 + a^3}{(4r^2 - a^2).\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

Замени овде: $a = r\sqrt{2}$, $a^2 = 2r^2$, $a^3 = 2r^3\sqrt{2}$, $\sqrt{4r^2 - a^2} = r\sqrt{2}$, па добиваш: $f''(r\sqrt{2}) = -6, < 0$, т. ј. $f(r\sqrt{2})$ је максимум.

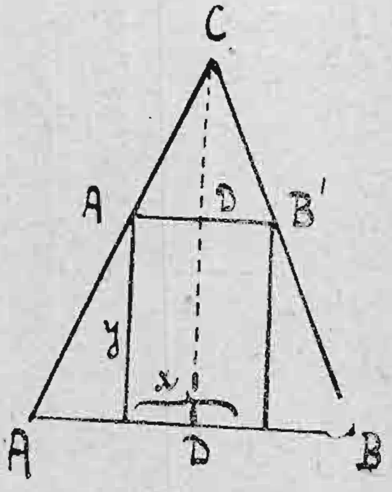
---

262. *У равнокраком троуглу висине h, а основе a, треба уписати највећи правоугаоник. Израчунај стране и површину тога правоугаоника (15. сл.).*

Означи стране правоугаоника са x, y; онда је његова површина: $P = xy$. — Из сличних троуглова $ADC \sim A'D'C$ следи пропорција: $A'C' : AB = C'D' : CD$, т. ј. $x : a = (h - y) : h$.

$a(h - y)$ Дакле је површина правоугаоника:

$P=\frac{a\,y\,(h-y)}{h}=ay-\frac{ay^2}{h}=f(y)$. Деривирај ово по y:



15. слика.

$f'(y)=a-\frac{2\,a\,y}{h}$. Једначина: $f'(y)=0$, т. ј.: $a-\frac{2ay}{h}=0$ даје решење $y=\frac{h}{2}$, а помоћу тога: $x=\frac{a}{2}$. Површина тога правоугаоника је: $\mathrm{P}=\frac{a\mathrm{h}}{4}$.

—

263. *Међу правим цилиндрима једнаке површине наћи онај, који има највећу запремину, а) ако је цилиндар на оба краја затворен, б) ако је цилиндар на једном крају отворен.*

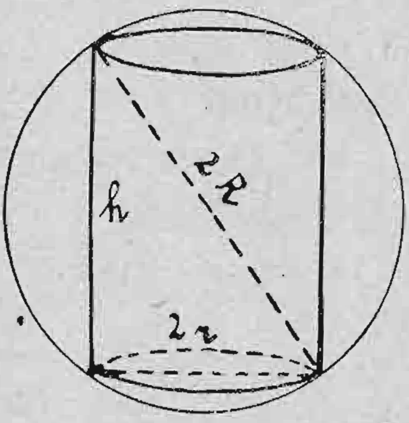
а) Површина цилиндра је: $P=2\,r^2\pi+2\,r\pi h$. Одатле је $h=\frac{P-2\,r^2\pi}{2\,r\pi}$, а запремина $V=\frac{Pr-2\,r^3\pi}{2}=f(r)$. Прва деривација је: $f'(r)=\frac{P-6\,r^2\pi}{2}$. Из једначине $f'(r)=0$, т. ј.: $P-6\,r^2\pi=0$, излази: $P=6\,r^2\pi$; дакле висина: $h=\frac{6\,r^2\pi-2\,r^2\pi}{2\,r\pi}=2\,r$, т. ј. *тај цилиндар је равностран.* Његова је запремина $\mathbf{V}=2\mathbf{r}^3\pi$. Да је то максимум, увераваш се тим, што је $f''(r)$ за $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ негативно. $f''(r)=$ $=-6\,r\pi$, $f''\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)=-6\pi\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, <0.

б) Површина овога другога цилиндра је: $P=r^2\pi+2r\pi h$. Одатле је: $h=\frac{P-r^2\pi}{2r\pi}$, а запремина: $V=\frac{Pr-r^3\pi}{2}=f(r)$. Прва деривација је: $f'(r)=\frac{P-3r^2\pi}{2}$. Из једначине $f'(r)=$ $=0$, т. ј.: $P-3\,r^2\pi=0$, излази: $P=3\,r^2\pi$; дакле је висина $h=\frac{3\,r^2\pi-r^2\pi}{2\,r\pi}=r$, т. ј. *висина цилиндра је једнака полу-*

во максимум, увераваш се тим, што је $f''(r)$ за $r = \sqrt{\frac{P}{3\pi}}$ негативно; $f''(r) = -3r\pi$, $f''\left(\sqrt{\frac{P}{3\pi}}\right) = -3\pi\sqrt{\frac{P}{3\pi}}, < 0.$ — Овај задатак практички би могао гласити овако: Од данога комада лима треба направити највећи цилиндарски суд *а*) на оба краја затворен, б) на једном крају отворен.

264. *Од дрвене кугле, полупречника R, треба изрезати прав цилиндар највеће запремине. Израчунај му запремину и нађи, колико перцената куглине запремине он износи. (16. сл.)*

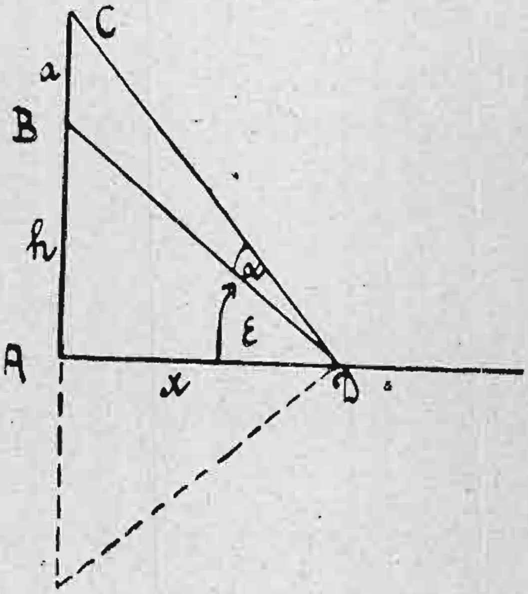
Тај цилиндар је уписан у кугли тако, да су његове базе два паралелна куглина круга. Његова је запремина $V = r^2\pi h$; а по Питагорином правилу је $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$, па је запремина: $V = 2r^2\pi\sqrt{R^2 - r^2} = f(r)$, јер је R стална величина, а r промењљива. Деривација функције по r: $f'(r) = 4r\pi\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{4r^3\pi}{2\sqrt{R^2 - r^2}}$. То води до једначине: $2(R^2 - r^2) = r^2$, а одатле: $r = \frac{R}{3}\sqrt{6}$, и заменом у горњи образац: $h = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$. Запремина тога цилиндра је: $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\mathbf{R}^3\pi\sqrt{\mathbf{3}}$. Да израчунаш перценат, употреби образац (24 а). То даје једначину: $\frac{4}{9}R^3\pi\sqrt{3} = \frac{4R^3\pi \,.\, x}{3 \,.\, 100}$. Одатле $x = \frac{100}{3}\sqrt{3} = \mathbf{57{\cdot}736}{}^0\!/_0$.



16. слика.

**265. *На торњу висине h стоји крст висине a. У којој се даљини од подножја мораш наместити, да крст видиш под највећим визирним углом? Колико износи тај угао и под којим углом елевације видиш врх крста? Н. пр. h = 25 m, a = 4 m. (Сл. 17.).* Види и зад. 159. у II. делу.

Нека је $\sphericalangle BDC$ тражени визирни угао α. Из троугла ABD имаш за угао елевације ε врха торња B: $tg\,\varepsilon = \frac{AB}{AD} = \frac{h}{x}$, а из троугла ACD за угао $\varepsilon + \alpha$: $tg(\varepsilon + \alpha) = \frac{AC}{AD} = \frac{a+h}{x}$. Угао α је $(\varepsilon + \alpha) - \varepsilon$, па је по обрасцу (133.):



17. слика.

$$tg\,\alpha = \frac{tg(\varepsilon+\alpha) - tg\,\varepsilon}{1 + tg(\varepsilon+\alpha) \, . \, tg\,\varepsilon} =$$

$$= \frac{\frac{a+h}{x} - \frac{h}{x}}{1 + \frac{(a+h)h}{x^2}} = \frac{(a+h)x - hx}{x^2 + h(a+h)};$$

коначно: $tg\,\alpha = \frac{ax}{x^2 + h(a+h)} = f(x)$. Деривирај по x: $f'(x) = \frac{a[x^2 + h(a+h)] - 2ax^2}{[x^2 + h(a+h)]^2} = a\frac{h(a+h) - x^2}{[x^2 + h(a+h)]^2}$.

Екстремне вредности су коренови једначине $f'(x) = 0$. Једначина $x^2 = h(a+h)$ даје: $x = \sqrt{h(a+h)}$. Да се увериш о тому, да је ово максимум, изведи још другу деривацију $f''(x)$:

$$f''(x) = a.\frac{-2x.[x^2+h.(a+h)]^2 - [h.(a+h) - x^2].[x^2+h.(a+h)].2.2x}{[x^2+h(a+h)]^4} =$$

$$= -2ax \, . \, \frac{[x^2 + h.(a+h)] + 2[h.(a+h) - x^2]}{[x^2 + h.(a+h)]^3}.$$

Ако амо замениш $x = \sqrt{h(a+h)}$, добива $f''(x)$ свакако негативну вредност, т. ј.: $f''\left(\sqrt{h(a+h)}\right) < 0$. Дакле за нађену раздаљеност x функција $f(x) = tg\,\alpha$ има максималну вредност. Та максимална вредност одређена је једначином:

$$tg\,\alpha = \frac{a.\sqrt{h(a+h)}}{h(a+h) + h(a+h)} = \frac{a}{2} \, . \, \frac{1}{\sqrt{(a+h).h}}.$$

Геометријско значење решења $x^2 = h(a+h)$ је према обрасцу (49.) ово: Раздаљеност x је висина у правоуглом троуглу, коме је хипотенуза $c = p + q = h + a + h = a + 2h$. На основу тога можеш овај проблем решити чистом *геометријском конструкцијом.* Види слику: конструисати правоугли $\triangle$ над хипотенузом: $a + h + h$.

Угао елевације $\varepsilon + \alpha$ одређен је једначином: $tg(\varepsilon + \alpha) = \frac{a+h}{x} = \frac{a+h}{\sqrt{h(a+a)}} = \sqrt{\frac{a+h}{h}}$. Нумерички резултати $x = 5\sqrt{29} = 26{\cdot}926$ m, $\alpha = 4^0\ 14'\ 53''$, $\varepsilon + \alpha = 47^0\ 7'\ 26''$.

II. ДЕО.

ГЕОМЕТРИЈА.

Бројеви, којима су означени обрасци. односе се на моју „Збирку образаца“.

I. ПЛАНИМЕТРИЈА.

1. *Изведи из Хероновог обрасца обични образац за површину правоуглог троугла* $P=\frac{ab}{2}$, *ако су* a *и* b *катете.*

$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, где је $s=\frac{a+b+c}{2}$, $s-a=\frac{b+c-a}{2}$, $s-b=\frac{a+c-b}{2}$, $s-c=\frac{a+b-c}{2}$.

Тако је: $P=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c).(a+b-c).(c+b-a).(c-b+a)}$.

Измножи 2 по 2 фактора оним редом, којим долазе, па добиваш: $P=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2-c^2+2ab)(c^2-b^2-a^2+2ab)}$.

Али у правоуглом троуглу је $a^2+b^2=c^2$, $a^2+b^2-c^2=0$; Дакле: $P=\frac{1}{4}\sqrt{2ab\,.\,2ab}=\frac{ab}{2}$.

---

2. *Ако су* a *и* b *катете,* c *хипотенуза,* h *висина у правоуглом троуглу, онда је* $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{h}\right)^2$. *Докажи!*

Означи са x и y пројекције катета a и b на хипотенузу. Према обрасцу (49) је $h^2=x.y$; одатле је: $\left(\frac{1}{h}\right)^2=\frac{1}{xy}$ ..../1/.

Према обрасцу (50) је $a^2=cx$, $b^2=cy$; дакле: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{cx}+\frac{1}{cy}=\frac{x+y}{cxy}=\frac{1}{xy}$, јер је $x+y=c$. Одатле помоћу /1/: $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{h}\right)^2$.

3. *Један правоугли троугао има катете $a = 18\ cm$, $b = 24\ cm$. Израчунај му висину, која припада хипотенузи.*

Нека су одсечци на хипотенузи x, y, хипотенуза c. Онда је: $a^2 = cx$, $b^2 = cy$, $x = \frac{a^2}{c}$, $y = \frac{b^2}{c}$. Висина је: $h = \sqrt{xy}$, т. ј. $h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $h = \frac{18 \,.\, 24}{\sqrt{6^2.3^2 + 6^2.4^2}} = \frac{18 \,.\, 24}{6\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{18 \,.\, 24}{6 \,.\, 5} = \mathbf{\frac{72}{5}}$.

* * *

4. *Један правоугли троугао има хипотенузу $c = 30\ cm$, а висина, спуштена на хипотенузу, је $h = \frac{72}{5}\ cm$. Израчунај му катете.*

Ако је један одсечак на хипотенузи x, онда је по обрасцу (50): $a^2 = cx$, $b^2 = c\,(c - x)$. По обрасцу (49) је $h^2 = x(c - x)$. Одатле једначина: $x^2 - cx + h^2 = 0$, која даје решење: $x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4h^2}}{2}$. Онда је: $a^2 = \frac{c^2}{2} \pm \frac{c}{2}\sqrt{c^2 - 4h^2}$, $b^2 = \frac{c^2}{2} \mp \frac{c}{2}\sqrt{c^2 - 4h^2}$, т. ј.: једна је катета: $a = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{c}{2}\sqrt{c^2 - 4h^2}}$, а друга: $b = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{c}{2}\sqrt{c^2 - 4h^2}}$. У овом примеру: $a = \mathbf{24}$ **cm**, $b = \mathbf{18}$ **cm.**

* * *

*5. *У правоуглом троуглу збир обих катета износи 7 cm, а висина над хипотенузом је 2·4 cm. Израчунај му стране.*

Површина троугла, израчунана помоћу катета, је $p = \frac{ab}{2}$, а помоћу хипотенузе је $p = \frac{2{\cdot}4 . c}{2} = \frac{2{\cdot}4\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. То даје једначину $a\,b = 2{\cdot}4 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$. Из задатка излази друга једначина: $a + b = 7$. Одатле решења: $b_1 = 4$, $a_1 = 3$,; $b_2 = 3$, $a_2 = 4$. Дакле тај троугао има катете: *3* **cm**, *4* **cm**, а хипотенузу *5* **cm.**

* * *

*6. *Израчунај катете и углове у правоуглом троуглу, који има површину $P = 13{\cdot}5\ cm^2$, а хипотенузу $c = 7{\cdot}5\ cm$.*

$P = \frac{ab}{\ } = 13{\cdot}5$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 7{\cdot}5$; помножи прву једначину са 4, другу квадрирај, па имаш систем: $a^2 + b^2 = 56{\cdot}25$, $2ab = 54$, коју решаваш попут примера бр. 140. у I. делу. Решење: $\boldsymbol{a = 6}$, $\boldsymbol{b = 4{\cdot}5}$.

$*tg\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{6}{4{\cdot}5}$. Логаритмовањем налазиш: $\alpha = 53^\circ\, 7'\, 49''$.

---

*7. *Израчунај стране и углове у правоуглом троуглу, чија је површина $P = 60\ cm^2$, а обим $o = 40\ cm$.*

Катете ћеш израчунати из система једначина: $P = \frac{xy}{2} = 60$, $o = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 40$. Пренеси у другој члан $x + y$ на десну страну, па квадрирај. Добићеш једначину: $800 + xy - 40\,(x + y) = 0$. Одатле помоћу прве: $x + y = 23$; помоћу тога израчунај из друге: $\sqrt{x^2 + y^2} = 17$ или $x^2 + y^2 = 289$ ..../1/. Из прве следи још: $2\,xy = 240$ ..../2/. Систем /1/, /2/ решавај према бр. 140. у I. делу. Решење: $\boldsymbol{x = 15}$, $\boldsymbol{y = 8}$. Једначина /1/ је већ пре дала за хипотенузу: $\boldsymbol{c = 17}$.

$tg\ \alpha = \frac{15}{8} = cotg\ \beta$, јер $\alpha + \beta = 90^\circ$; $\alpha = \boldsymbol{61^\circ\ 55'\ 40''}$, $\beta = \boldsymbol{28^\circ\ 4'\ 20''}$.

---

*8. *Хипотенуза једнога правоуглог троугла је 30 cm, а његова се површина не мења, ако му се једна катета пократи за 2 cm, а истодобно друга продужи за 3 cm. Израчунај му катете.*

Ако су катете x и y, онда је по Питагорином правилу: $x^2 + y^2 = 900$ ..../1/. — Површина тога троугла је $\frac{xy}{2}$, а када му изведемо са катетама задане промене, онда је површина: $\frac{(x-2)\,.\,(y+3)}{2}$. Према задатку је онда: $\frac{xy}{2} = \frac{(x-2).(y+3)}{2}$ ..../2/.

Задатак решаваш системом /1/, /2/, који даје позитивно решење: $x = \boldsymbol{18}\ cm$, $y = \boldsymbol{24}\ cm$.

**9. *Обим правоуглог троугла је 70 cm, а полупречник описаног круга је за $8\frac{1}{2}$ cm већи од полупречника уписаног круга. Израчунај стране и углове тога троугла.*

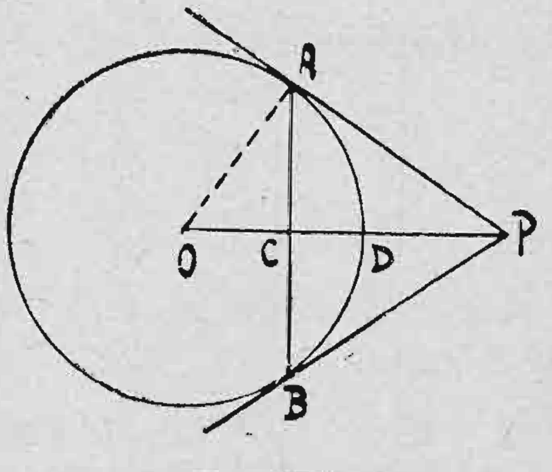
Према задатку је $a + b + c = 70$, $R - r = \frac{17}{}$. По Питагорином правилу je $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; надаље je $R = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, а други полупречник $r = \frac{P}{s} = \frac{2P}{a + b + c} = \frac{ab}{70}$. Уз ове промене горње једначине добивају облик: $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 70$ .... /1/, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{ab}{70} = \frac{17}{2}$ ..../2/. Из /1/ je: $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = 35 - \frac{a + b}{2}$, па када ово замениш у /2/, добиваш након редукције: $\frac{a + b}{2} + \frac{ab}{70} = \frac{53}{2}$ ..../3/. У /1/ пренеси $a + b$ на десно, па квадрирај једначину; након редукције и дељења са 140 добиваш: $a + b - \frac{ab}{70} = 35$ ..../4/. Из /3/ и /4/ добиваш елиминацијом: $a + b = 41$, $ab = 420$, а одатле: $\boldsymbol{a = 21}$, $\boldsymbol{b = 20}$, $\boldsymbol{c = 29}$.

* Углови: $tg\,\alpha = cotg\,\beta = \frac{21}{20}$; $\alpha = \boldsymbol{46^0\ 23'\ 50''}$, $\beta = \boldsymbol{43^0\ 36'\ 10''}$.

---

10. *Из тачке P изван круга, полупречника r, потегнуте су на круг 2 тангенте. Израчунај 1) потенцију те тачке према кругу, 2) висину лука међу додирним тачкама, 3) дужину тетиве међу додирним тачкама, ако je a раздаљеност тачке P од круга (18. сл.).*

1. Потенција тачке P према кругу je квадрат дужине тангенте повучене на круг из те тачке. Ако je $OA = OD = r$, $PD = a$, онда je из правоуглог $\triangle\ AOP$: $AP^2 = (r + a)^2 - r^2 = a\,(a + 2\mathrm{r}) = \mathrm{p}$.



18 слика.

2. Висина лука je $CD = r - OC = r - x$. Из предходног правоуглог $\triangle$ имаш: $OA^2 = OC . OP$, т. j. $r^2 = x\,(r + a)$; одатле: $x = \frac{r^2}{r + a}$, а помоћу

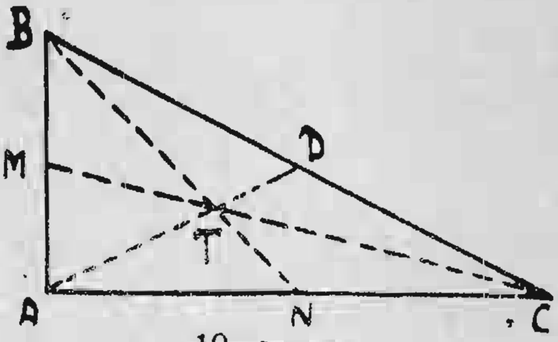
$h = CD = r - \frac{r^2}{\;} = \frac{a\mathrm{r}}{\;}$;

3. Из истог правоуглог троугла: $AC^2 = OC . PC$, т. ј. $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = x(r + a - x)$. $A : r + a - x = r + a - \frac{r^2}{r+a} = \frac{a(2r+a)}{r+a}$.
Помоћу тога: $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{r+a} \cdot \frac{a(2r+a)}{r+a}$; одатле: $t = \frac{2r}{r+a} \cdot \sqrt{a(2r+a)}$.

---

11. *У једном правоуглом троуглу тежишне (средње) линије, које припадају катетама, су $t_1 = 30$ cm, $t_2 = 40$ cm. Израчунај му стране (19. сл.).*

Ако је $AB = a$, $AC = b$, онда је $AM = \frac{a}{2}$, $AN = \frac{b}{2}$.



19. слика.

Из правоуглог троугла ABN следи: $AB^2 + AN^2 = DN^2$, т. ј. $a^2 + \frac{b^2}{4} = t_1^2$ .... /1/. Из правоуглог троугла AMC следи исто тако: $\frac{a^2}{4} + b^2 = t_2^2$ .... /2/ — Помножи /1/ са 4 и одузми од тога /2/; добиваш: $\frac{15}{4} a^2 = 4 t_1^2 - t_2^2$. Одатле $a^2 = \frac{4}{15}(4t_1^2 - t_2^2)$ и $a = 2\sqrt{\frac{(2t_1 - t_2).(2t_1 - t_2)}{15}}$. — Помножи /2/ са 4 и одузми од тога /1/; добиваш: $b^2 = \frac{4}{15}(4t_2^2 - t_1^2)$, $b = 2\sqrt{\frac{(2t_2 - t_1).(2t_2 + t_1)}{15}}$.
Надаље је: $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{16}{15} t_1^2 - \frac{4}{15} t_2^2 + \frac{16}{15} t_2^2 - \frac{4}{15} t_1^2 =$
$= \frac{4}{5}(t_1^2 + t_2^2)$, $c = \frac{2}{5}\sqrt{5(t_1^2 + t_2^2)}$. — Нумерички: $a = \frac{40}{3}\sqrt{3}$, $b = \frac{20}{3}\sqrt{33}$, $c = 20\sqrt{5}$.

---

12. *У правоуглом троуглу су задане катете $a = 18$ cm, $b = 24$ cm. Нађи му тежиште. (сл. 19.).*

Тежиште дели сваку тежишну (средњу) линију у размери 2 : 1 од одговарајућег темена. Тежишна линија хипотенузе једнака је полупречнику R описаног круга, јер је средиште

$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Тежиште T је од темена A раздаљено за $AT=$ $=\frac{2}{3}t_3=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$. Тежишна линија катете $AC=b$ је према бр. 11 : $t_1=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}$, а раздаљеност тежишта од темена B је $BT=\frac{2}{3}t_1=\frac{1}{3}\sqrt{4a^2+b^2}$. Исто тако ћеш наћи, да је раздаљеност од темена C т. ј. $CT=\frac{2}{3}t_2=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+4b^2}$.

Нумерички: **AT $=$ *10 cm*, BT $= 4\sqrt{13}$, CT $= 2\sqrt{73}$.**

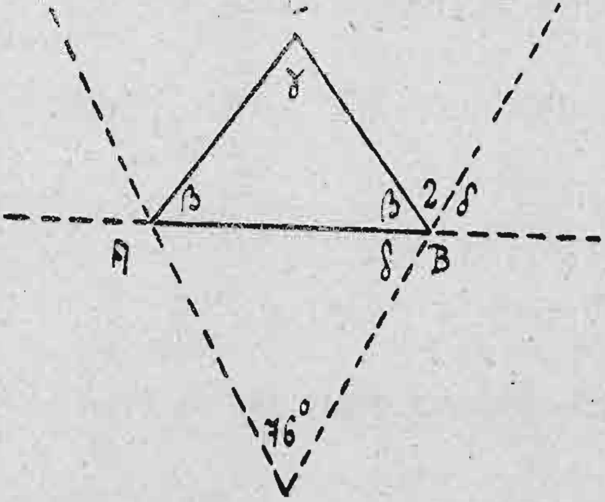
---

*13. *Стране једнога правоуглог троугла су чланови аритметичке прогресије. Израчунај те стране, ако је површина троугла* $P=294\,dm^2$.

Ако је мања катета a, већа катета је $a+d$, а хипотенуза $a+2d$. Према задатку је: $\frac{a(a+d)}{2}=294$, а по Питагорином правилу: $(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2$. Ова друга једначина води до хомогене једначине: $a^2-2ad-3d^2=0$, из које излази: $a=3d$. Замени ово у прву једначину, па добиваш позитивно решење $d=7$, кому одговара $a=21$. Дакле тај троугао има стране: ***21*, *28*, *35*.**

---

14. *У једном равнокраком троуглу повучене су симетрале спољашњих једнаких углова. Добивени равнокраки троугао има неједнаки угао* $\alpha=76^0$. *Колико износе унутрашњи углови првога троугла? (сл. 20.)*



Ако су унутрашњи углови β и γ, онда је спољашњи угао: $2\delta=180-\beta=\beta+\gamma$. Половина спољашњега, т. ј. $90-\frac{\beta}{2}$ је једнака унутрашњем $\sphericalangle\,\delta$ другога троугла, а цео спољашњи: $2.\left(90-\frac{\beta}{2}\right)=180-\beta=2\delta=$ $=180-76^0$. Одатле следи: $\beta=76^0$ и $\gamma=180-2\beta=28^0$

$=\frac{2b-a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$ ..../2/. Замени h и /2/ у /1/, па добиваш: $a_1=\frac{a(2b-a)}{2b+a}$ ..../3/. Помоћу /3/ и /2/ је тражена површина $P_1=\frac{a_1\,.\,h_1}{2}=\frac{a(2b-a)^2}{4(2b+a)}\cdot\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. Ако је троугао равностран, онда је $b=a$, па је онда $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$, $h_1=\frac{a}{6}\sqrt{3}=r$, $a_1=\frac{a}{3}$, $P_1=\frac{a^2}{36}\sqrt{3}=\frac{1}{9}P$. — Овај задатак можеш краће решити на основу правила (71.) Онда је: $P:P_1=h:h_1^2$. Одатле $P_1=\frac{a\,hh_1^2}{2h^2}=\frac{a\,h_1^2}{2h}$. Замени амо вредности h и h_1, па добиваш:

$$P_1=\frac{2a}{2\sqrt{(2b-a)(2b+a)}}\cdot\frac{(2b-a)^2.(2b-a)}{4(2b+a)}=$$

$$=\frac{a(2b-a)^2.(2b-a)}{4(2b+a)}\cdot\frac{\sqrt{(2b-a)(2b+a)}}{(2b-a)(2b+a)}.$$ Одатле:

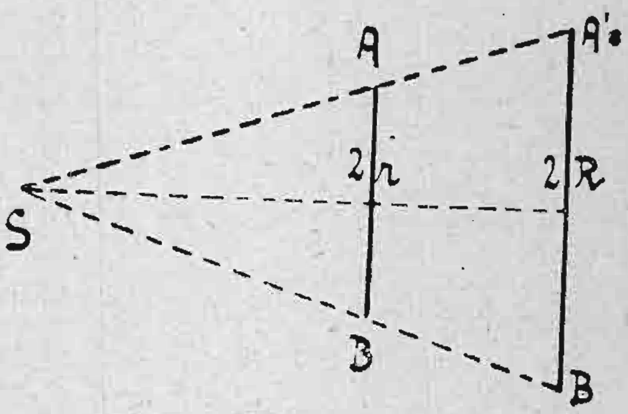
$$P_1=\frac{a(2b-a)^2}{4(2b+a)}\cdot\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$$ као горе.

17. *Обим равнокракога троугла је $o=256\,cm$, а висина, спуштена на неједнаку страну, $h=80\,cm$. Израчунај му стране, површину и *углове.*

$o=2x+y$; висина је по Питагорином правилу: $h=\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{(2x+y).(2x-y)}$; дакле имаш систем једначина: $2x+y=256$, $\frac{1}{2}\sqrt{(2x+y).(2x-y)}=80$. Замени прву у другу, па имаш: $\sqrt{256.(2x-y)}=160$ или: $\sqrt{2x-y}=10$. То са првом једначином даје систем: $2x+y=256$, $2x-y=100$, чије је решење; $x=\mathbf{89}$, $y=\mathbf{78}$. — Површина $P=\frac{y\,.\,h}{2}$; $P==39\,.\,80=3120\,cm^2$.

* Угао на неједнакој страни α, угао међу једнаким странама β. Онда је: $\frac{h}{x}=\sin\alpha=\frac{80}{89}$, $\frac{h}{x}=\cos\frac{\beta}{2}=\frac{80}{89}$. Одатле: $\alpha=\mathbf{64^0\ 0'\ 40''}$, $\beta=\mathbf{51^0\ 58'\ 40''}$.

18. *У раздаљености $d = 4{\cdot}2\ m$ од зида налази се сијалица, а по нормали спуштеној од ње до зида може се померати центар вертикалнога круга од картона. На којој раздаљености од сијалице мораш наместити тај картон, да површина његове сенке на зиду буде 3 пута већа од његове површине?* (*Сл. 23.*).



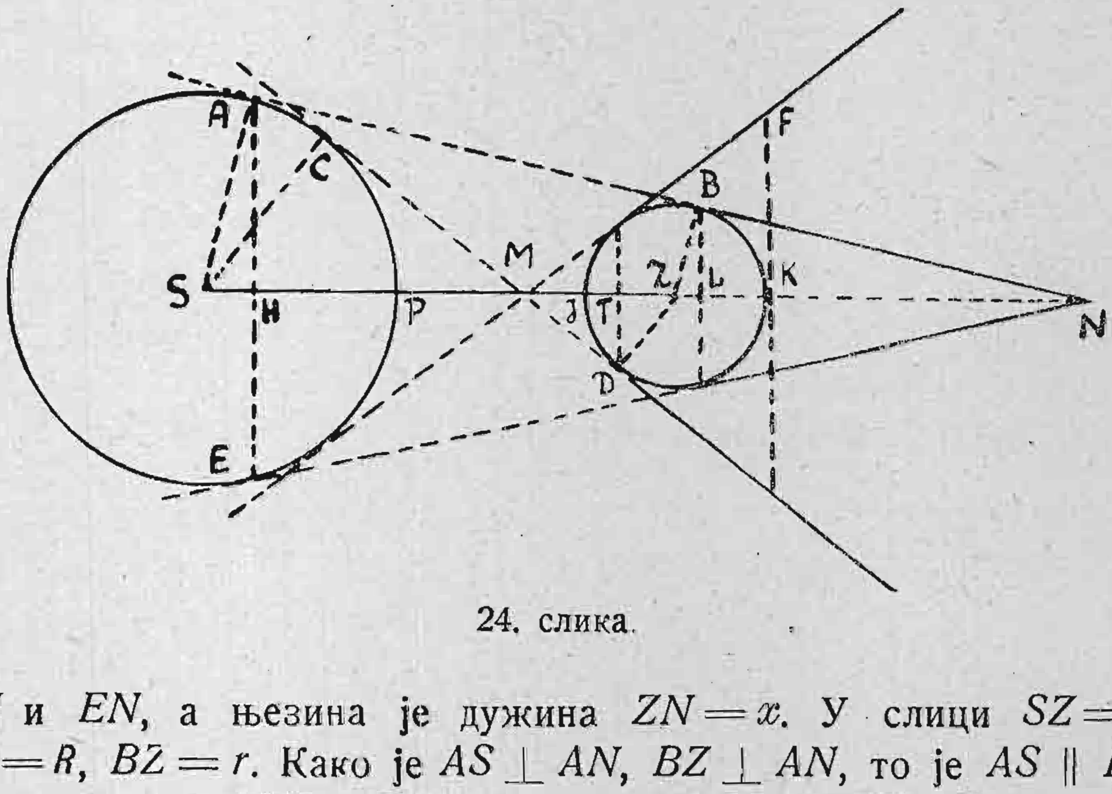
23. слика.

Међу површинама обих кругова постоји пропорција; $P : 3P = r^2 : R^2$. А из сличних троуглова имаш овде: $r : R = x : d$, $r^2 : R^2 = x^2 : d^2$. Одатле: $x^2 : d^2 = P : 3P = 1 : 3$, т. ј. $x = \frac{d}{3}\sqrt{3}$, $x = 1{\cdot}4\sqrt{3}$.

---

19. *Израчунај дужину сенке, коју баца земља, ако је њезин полупречник r, полупречник сунца $R = 108{\cdot}57\,r$, а средња централна раздаљеност сунца од земље $d = 23343{\cdot}7\,r$.*

Нека слика 24. приказује централни пресек по централи SZ. Сенка земље је оивичена спољашњим двојним тангентама



24. слика.

AN и EN, а њезина је дужина $ZN = x$. У слици $SZ = d$, $AS = R$, $BZ = r$. Како је $AS \perp AN$, $BZ \perp AN$, то је $AS \parallel BZ$. Из троуглова $ASN \sim BZN$ следи пропорција: $SN : ZN = AS : BZ$, т. ј. $(d + x) : x = R : r$ ..../1/. — Применом изведене пропорције (5.) : $d : (R - r) = x : r$. Одатле $x = \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{R - r}}$. Заменом вредности из задатка добиваш: $x = \frac{23343{\cdot}7}{107{\cdot}56}\, r =$ $= \mathbf{217{\cdot}03}\, r$.

---

20. *У троуглу су задане стране $a = 67{\cdot}57$, $b = 72{\cdot}34$, $c = 59{\cdot}85$. Нађи површину, ограничену уписаним и описаним кругом.* *(Вежба за логаритмовање!).

Ако је површина описаног круга P_1, а уписаног P_2, онда је тражена површина: $K = P_1 - P_2 = (R^2 - r^2)\,.\,\pi$. Полупречнике R и r израчунај по обрасцима (44) и (45). Ради нумеричког израчунавања згодније је, да r прикажеш у облику $r = \frac{P}{s}$, где ћеш P израчунати према (41.). *Нумерички резултати: $\log P = 3{\cdot}27558$, $\log r = 1{\cdot}27610$, $r = 18{\cdot}884$, $\log R = 1{\cdot}58855$, $R = 38{\cdot}7745$, $P_1 = 4723{\cdot}33$, $P_2 = 1120{\cdot}33$. Одатле је: $\mathrm{K} = \mathbf{3603}$.

**21. *Нађи површину троугла, ако су му задане све 3 висине.*

Ако су висине: h_1 над страном a, h_2 над страном b, h_3 над страном c, онда је: $h_1 = \frac{2P}{a}$, $h_2 = \frac{2P}{b}$, $h_3 = \frac{2P}{c}$. Одатле:
$\frac{1}{h_1} = \frac{a}{2P}$, $\frac{1}{h_2} = \frac{b}{2P}$, $\frac{1}{h_3} = \frac{c}{2P}$ Сабирањем ових 3 једначина добиваш:
$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{P} \cdot \frac{a + b + c}{2}$. Означи $\frac{a + b + c}{2} = s$, па имаш:
$\frac{s}{P} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$. Одатле је $s = P.\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)$ ..../1/. На израчунавање површине примени Херонов образац. Како је $a = 2P\,.\,\frac{1}{h_1}$, то је према /1/ : $s - a = P.\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{2}{h_1}\right)$,
т. ј. $s - a = P\,.\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_1}\right)$ ..../2/. На исти начин добиваш: $s - b = P.\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_2}\right)$ ..../3/, $s - c = P\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right)$
............/4/. Замени /1/, /2/, /3/, /4/ у Херонов образац, па

$$P=\sqrt{P^4\cdot\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)},$$

а након краћења са P:

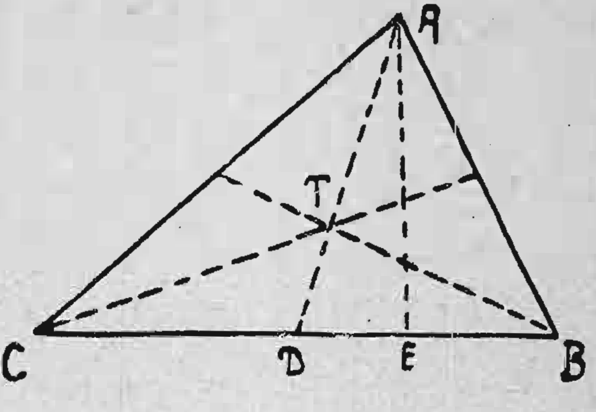
$$1=P.\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\right\}}.$$

Одатле:

$$P=\frac{1}{\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\right\}}}.$$

---

22. *У разностраном троуглу задане су стране a, b, c. Израчунај дужину његових тежишних (средњих) линија и нађи му положај тежишта (25. сл.)*



25. слика.

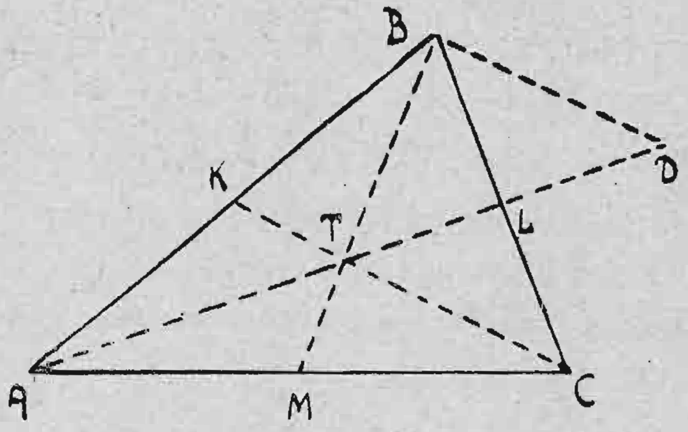
Нека су му стране $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, а тежишне линије: t_1 за страну a, t_2 за страну b, t_3 за страну c. Спусти висину h из A на BC и одсечак DE означи са x. Из $\triangle$ ACE је $b^2=h^2+CE^2=h^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2$; из $\triangle$ ABE је $c^2=h^2+BE^2=$ $=h^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2\cdot$ Сабери ове једначине; добиваш: $b^2+c^2=2h^2+2\frac{a^2}{4}+2x^2$ ..../1/. Из правоуглог $\triangle$ ADE је $x^2=t_1{}^2-h^2$. Замени то у /1/, па добиваш: $b^2+c^2=2\cdot\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+t_1{}^2\right]$ ..../2/. Из /2/ добиваш даље: $t_1{}^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$, и: $t_1=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. Слично ћеш добити: $t_2=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$, $t_3=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$. Даљине тежишта од темена су: $d_1=\frac{2}{3}t_1$, $d_2=\frac{2}{3}t_2$, $d_3=\frac{2}{3}t_3$, т ј.: $d_2=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$, и слично за d_1 и d_3.

изразе за тежишне линије: за страну $a : t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}$, за страну $b : t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2}$, за страну $c : t_3 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. То су вредности нађене у задатку бр. 12. *Погледај и задатак бр. 138.

* * *

**23. *У троуглу су задане све 3 тежишне (средње) линије. Израчунај му површину (26. сл.)*

Означи тежишне линије $AL = t_1$, $BM = t_2$, $CK = t_3$. Онда је према предходном задатку: $CT = \frac{2}{3}t_3$, $BT = \frac{2}{3}t_2$, $AT = \frac{2}{3}t_1$, $TL = \frac{1}{3}t_1$. — Задани троугао је тежиштем и тежишним линијама подељен на *3* троугла, тако да је $\triangle ABC = \triangle ABT + \triangle BTC + \triangle ATC$. Како је $KT = \frac{1}{2}CT$, то је $\triangle AKT = \frac{1}{2} ATC$ (висине су им једнаке!); исто тако је $\triangle BKT = \frac{1}{2} BTC$. Али $\triangle AKT = \triangle BKT$ (троуглови једнаке висине над једнаким основама $AK = KB$; висине су једнаке јер им је теме T заједничко). Стога је $\triangle BTC = \triangle ATC = \triangle ABT$. Онда је $\triangle ABC = 3 BTC$.



26. слика.

Да израчунаш површину троугла BTC, продужи $AL = t_1$ за $TL = \frac{1}{3}t_1$ преко L до D; тако добиваш троугао BTD. Троугао $BLD \cong TLC$ (по II. правилу), па је троугао $\triangle BTD = \triangle BTC = \frac{1}{3}\triangle ABC$. Троугао BTD има стране: $TD = 2FL = \frac{2}{3}t_1$, $BT = \frac{2}{3}t_2$, $BD = CT = \frac{2}{3}t_3$. Примени на њега Херонов образац; $2s = \frac{2}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$, $s = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$, $s - a = \frac{1}{3}(t_2 + t_3 - t_1)$, $s - b = \frac{1}{3}(t_1 + t_3 - t_2)$, $s - c = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 - t_3)$.

Онда је:

$$\triangle BTC = \frac{1}{9}\sqrt{(t_1 + t_2 + t_3)(t_2 + t_3 - t_1)(t_1 + t_3 - t_2)(t_1 + t_2 - t_3)},$$

а задани троугао:

$$\mathbf{ABC} = \frac{1}{3}\sqrt{(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3).(\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_1).(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_2).(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_3)}.$$

---

*24. *Један троугао има страну $a = 108\,cm$, обим $2s = 288\,cm$, а површину $P = 2592\sqrt{2}\,cm^2$. Израчунај му стране.*

Површина троугла је $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Овде је: $s = 144$, $s - a = 36$, $s - b = 144 - b$, $c = 288 - a - b = 180 - b$, $s - c = b - 36$ Дакле је: $\sqrt{144.\,36.(144 - b)(b - 36)} = 2592\sqrt{2}$, или: $12\,.\,6\sqrt{(144 - b).(b - 36)} = 2592\sqrt{2}$. Након краћења и квадрирања добиваш једначину: $(144 - b).(b - 36) = 2592$. Одатле квадратна једначина: $b^2 - 180\,b + 7776 = 0$. Стране троугла су: $\boldsymbol{b = 108}$ **cm**, $\mathbf{c} = \boldsymbol{72}$ **cm**.

---

*25. *У једному троуглу стране су чланови аритметичке прогресије са диференцијом $d = 3$, а његова је површина $P = 54\,cm^2$. Израчунај му стране и *углове.*

Ако је средња страна x, онда су остале стране $x - 3$ и $x + 3$, а обим троугла $2s = 3\,x$, $s = \frac{3\,x}{2}$. Помоћу Херонова обрасца имаш онда једначину: $\sqrt{\frac{3\,x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x+6}{2} \cdot \frac{x-6}{2}} = 54$, јер је $s - a = \frac{x+6}{2}$, $s - b = \frac{x}{2}$, $s - c = \frac{x-6}{2}$. Квадрирањем добиваш: $x^4 - 36\,x^2 - 15552 = 0$. Одатле: $x^2 = 18 \pm 126$. Решење проблема даје позитивни корен из позитивне вредности, т. ј. $x = \sqrt{144} = 12$. Стране троугла су: $\boldsymbol{a = 9}$ *cm*, $\boldsymbol{b = 12}$ *cm*, $\mathbf{c} = \boldsymbol{15}$ *cm*.

*Углове ћеш израчунати помоћу образаца (173). Добиваш:

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{6.3}{18.9}} = \frac{1}{3},\quad tg\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{9.3}{18.6}} = \frac{1}{2},\quad tg\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{9.6}{18.3}} = 1,$$

$\alpha = \mathbf{36^\circ\ 52'\ 11''}$, $\beta = \mathbf{53^\circ\ 7'\ 49''}$, $\gamma = \mathbf{90^\circ}$. т. ј. троугао је правоугли.

*26. *Одреди стране троугла, ако оне чине аритметичку прогресију, којој је диференција* $\frac{1}{4}r$ *(*$r =$ *полупречник уписаног круга.)*

Ако означиш $b = x$, онда можеш стране писати овако: $x - \frac{r}{4}$, $x, x + \frac{r}{4}$. Обим троугла: $2s = 3x$, т. ј. $x = \frac{2}{3}s$; с друге стране је $r = \frac{P}{s}$ (образац 45.), а одатле $s = \frac{P}{r}$. Према томе је $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{r}$. Дакле стране троугла можеш сада написати овако: $\frac{2P}{3r} - \frac{r}{4}$, $\frac{2P}{3r}$, $\frac{2P}{3r} + \frac{r}{4}$. Састави факторе за Херонов образац, па добиваш: $s - a = \frac{P}{3r} - \frac{r}{4}$, $s - b = \frac{P}{3r}$, $s - c = \frac{P}{3r} + \frac{r}{4}$, и заменом у Херонов образац:

$$P = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{P}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{P}{3r} + \frac{r}{4}\right) \cdot \left(\frac{P}{3r} - \frac{r}{4}\right)} = \frac{P}{r}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{P^2}{9r^2} - \frac{r^2}{16}\right)}.$$

Одатле: $\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{P^2}{9r^2} - \frac{r^2}{16}\right)} = r$. Квадрирај и израчунај P помоћу r; добиваш: $P = \frac{21}{4}r^2$; помоћу тога су стране тога троугла:

$$\boldsymbol{a = \frac{13}{4}r,\ b = \frac{14}{4}r,\ c = \frac{15}{4}r.}$$

27. *У једному квадрату задана је разлика између дијагонале и његове стране* $d - a = 10$. *Израчунај површину четири сегмената описаног круга, који се налазе изнад страна квадратових.*

Површина тих сегмената је једнака разлици између површине описаног круга и површине квадрата, т. ј. $P = \frac{d^2}{4}\pi - a^2 = \frac{2a^2}{4}\pi - a^2 = \frac{a^2}{2} \cdot (\pi - 2)$ ..../1/. Пошто је $d = a\sqrt{2}$, то из $d - a = 10$ следи $a\sqrt{2} - a = 10$, или $a = 10.(1 + \sqrt{2})$, [$d = 10(2 + \sqrt{2})$]. Замени то у /1/, па добиваш:

$$\boldsymbol{P = 50.(3 + 2\sqrt{2}).(\pi - 2).}$$

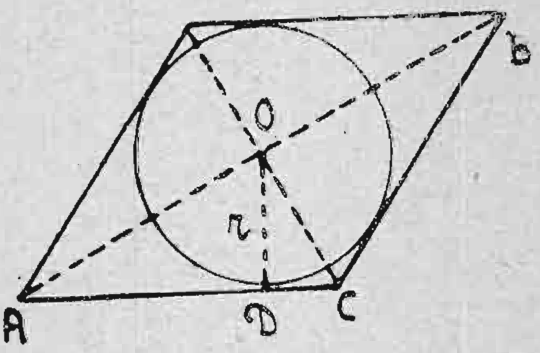
*28. *Збир дијагонала једнога ромба је 7 cm, а његова површина $p = 6\ cm^2$. Израчунај површину круга, чији је обим једнак обиму тога ромба.*

Нека је r полупречник круга, P његова површина, x, y и a дијагонале и страна тога ромба; тада је: $P = r^2\pi$, где ћеш r наћи из једначине $2r\pi = 4a$. Страна a ромба по Питагорином правилу је $a = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$; дакле $r\pi = \sqrt{x^2 + y^2}$, и $P = r^2\pi = \frac{x^2 + y^2}{\pi}$, где су x и y непознате. За x и y даје задатак једначине: $x + y = 7$, $\frac{xy}{2} = 6$. Ако прву квадрираш и у њу замениш другу, добићеш: $x^2 + y^2 = 49 - 2xy = 49 - 24 = 25$. Дакле: $P = \frac{25}{\pi} = \mathbf{7{\cdot}9576}$.

---

29. *У ромбу су задане дијагонале e, f. Израчунај полупречник круга, уписаног у њему, и нађи размеру, у којој додирна тачка дели страну ромба (сл. 27.)*

Пошто су дијагонале међусобно нормалне и полове се, то је троугао AOC правоугаон; страна a је његова хипотенуза. Онда је: $AC = a = \sqrt{AO^2 + CO^2} = \frac{1}{2}\sqrt{e^2 + f^2}$. Површина ромба је дијагоналама раздељена у 4 троугла, подударна са AOC, па је површина ромба $P = 4\,AOC = 4\,\frac{ar}{2}$. С друге стране површина је ромба $P = \frac{ef}{2}$. Дакле имаш једначину: $2ar = \frac{ef}{2}$. Одатле је: $r = \frac{ef}{4a}$, т. ј.: $r = \frac{ef}{2\sqrt{e^2 + f^2}}$. — По обрасцу (50.) је: $AO^2 = AD \,.\, AC$, т. ј.: $\frac{e^2}{4} = ax$; одатле је: $x = \frac{e^2}{4a}$. Исто тако: $OC^2 = CD \,.\, AC$, т. ј. $\frac{f^2}{4} = ay$. Одатле: $y = \frac{f^2}{4a}$. Према тому је тражена размера: $x : y = \frac{e^2}{\ } : \frac{f^2}{\ } = e^2 : f^2$, т. ј.:



27. слика.

раздаљености додирне тачке од темена односе се као квадрати дијагонала, које излазе из тих темена. —

И први део задатка можеш решити на основи образаца (49) и (50). Јер према (49) имаш: $r^2 = AD \,.\, CD = x \,.\, y$. А према (50) је $x = \frac{e^2}{4a}$, $y = \frac{f^2}{4a}$. Дакле: $r^2 = \frac{e^2 f^2}{4^2 \,.\, a^2}$, т. ј.: $r = \frac{ef}{4a} =$

$$= \frac{ef}{2\sqrt{e^2 + f^2}} \,.$$

---

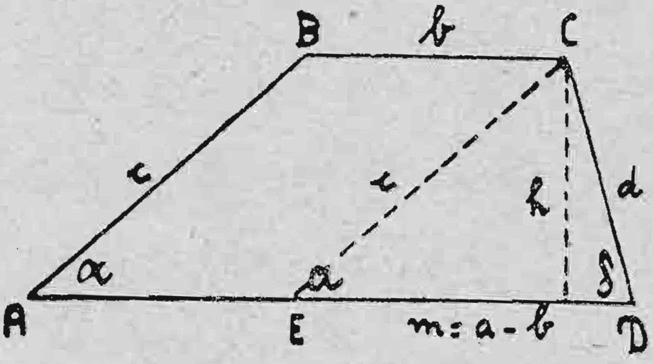
30. *Паралелне стране једнога трапеза су a и b ($a > b$), а висина h. Израчунај висину троугла, који се добије, кад се продуже непаралелне стране, док се не секу.*

Краћа паралелна страна b одсеца од тога троугла (висина $= x$) мањи троугао, који је с њим сличан, а има висину $x - h$. Онда постоји пропорција: $x : (x - h) = a : b$; одатле одузимањем чланова: $h : (a - b) = x : a$. То даје: $x = \frac{a \,.\, h}{a - b}$.

---

31. *Израчунај површину трапеза, чије су паралелне стране $a = 14$, $b = 11$, а непаралелне $c = 8$, $d = 6$ (28. сл.).*

Висину трапеза h израчунаћеш по обрасцу (42.). Добиваш:



28. слика.

$$h = \frac{2}{m}\sqrt{s(s-m)(s-c)(s-d)};$$

(из троугла CED, $CE \parallel AB$).

Ту је: $s = \frac{a + c + d - b}{2}$,

$$s - m = \frac{b + c + d - a}{2},$$

$$s - c = \frac{a + d - (b + c)}{2},$$

$s - d = \frac{a + c - (b + d)}{2}$, $m = a - b$. Заменом ових вредности у образац за површину трапеза добиваш:

$$P = \frac{a + b}{4(a - b)} \,.$$

$$\cdot \sqrt{(a + c + d - b).(b + c + d - a).[a + d - (b + c)].(a + c - (b + d)]}.$$

Нумерички: $P = \frac{25}{12}\sqrt{17.11.5} = \boldsymbol{63{\cdot}703}$. Види пример

б. 140. у II. делу.

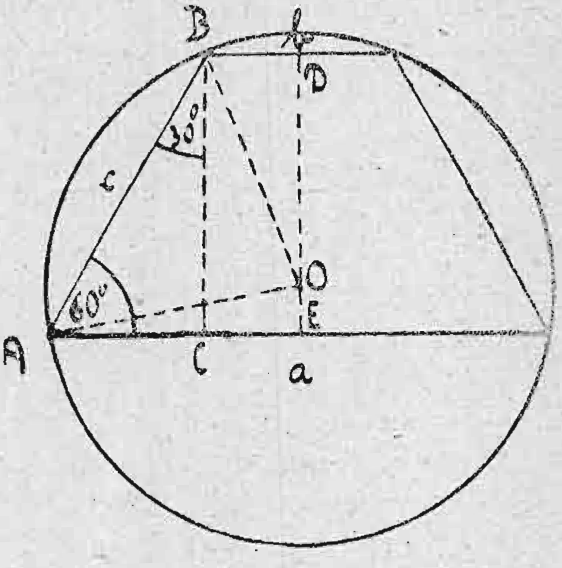
32. *У трапезу су задане већа паралелна страна a, мања b и висина h. Висина је подељена на 3 једнака дела и кроз делишта повучене паралеле са a, дотично са b. Израчунај површине 3 трапеза, који тако настају.*

Означи дужине паралела са x и y, редом од a. Онда је: $x = \frac{a+y}{2}$, $y = \frac{b+x}{2}$; дакле: $2x = a + \frac{b+x}{2}$. Одатле: $x = \frac{2a+b}{3}$, $y = \frac{a+2b}{3}$. Површине тих трапеза, редом од стране a, су ове: $P_1 = \frac{x+a}{2} \cdot \frac{h}{3} = (5a+b) \cdot \frac{h}{18}$, $P_2 = \frac{x+y}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{6}(a+b)$, $P_3 = \frac{b+y}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{18}(a+5b)$.

* * *

**33. *Око равнокраког трапеза, чије су паралелне стране a и b, а крак c затвара са већом страном a угао $\alpha = 60^0$, описан је круг. Израчунај површину тога круга. Н. пр. $a = 30$, $b = 20$. (сл. 29.)*

Из троугла ABC је $AB = c = 2\,AC = a - b$, $h = BC = DE = \frac{c}{2}\sqrt{3} = \frac{a-b}{2}\sqrt{3}$. Из троугла OBD је $OB^2 = r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + OD^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (h-x)^2$. Из троугла AOE је $OA^2 = r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2$. Из ових 2 једначина излази: $\frac{a^2}{4} + x^2 = \frac{b^2}{4} + h^2 + x^2 - 2\,hx$, а одавле: $2\,hx = h^2 - \frac{a^2-b^2}{4}$, или: $2\,x \cdot \frac{a-b}{2}\sqrt{3} = \frac{3\,(a-b)^2}{4} - \frac{(a-b)\,(a+b)}{4}$. Дакле: $x\sqrt{3} = \frac{a-2b}{2}$, $x^2 = \frac{a^2 - 4\,ab + 4\,b^2}{12}$.



29. слика.

Одатле је $r^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 = \frac{a^2 - ab + b^2}{3}$, а површина круга:

$P = \frac{a^2 - ab + b^2}{} \cdot \pi$. Нумерички: $P = \frac{700\,\pi}{}$

Ако у општем задатку (са истим углом 60^0) средиште круга пада изван трапеза, $\left(\text{а то је, ако је } h < \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}\text{, или: ако је } a < 2b\right)$ онда x само мења знак, јер пада изван висине, а образац за r остаје непромењен. Ако је $x = 0$, значи, да је средиште у половини дуље паралелне стране, те да је $r = \frac{a}{2}$ · Из: $x = \frac{a - 2b}{2.\sqrt{3}} = 0$ следи, да ће то бити, када је $a = 2b$.

* * *

34. *Конструиши равнокрак трапез, ако су му задане паралелне стране a=6·5 cm, b=4 cm, и дијагонала d=7·1 cm. Израчунај му површину.*

По Птоломејевом правилу (57.) је: $d^2 = ab + x^2$, ако са x означиш крак трапеза. Одатле је $x = \sqrt{d^2 - ab}$; нумерички: $x = 4{\cdot}9407$. Тим си задатак довео на познату конструкцију. — Површину можеш израчунати по обрасцу (58.) т. ј.
$P = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$, где је $s = \frac{a + b + c + d}{2}$ ·
Овде је $s = \frac{a + b + 2x}{2}$, а $P = \frac{a + b}{4}\sqrt{(a + 2x - b)(b + 2x - a)} = \frac{a + b}{4} \cdot \sqrt{4x^2 - (a - b)^2}$ · Или можеш по обичном обрасцу; h израчунај по Питагорином правили: $h = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - (a - b)^2}$.
Нумерички: $\mathbf{P = 25{\cdot}095\ cm^2}$.

* * *

**35. *Један делтоид има дијагонале $e = 24$, $f = 40$, а обим $2s = 100$. Израчунај му стране и *углове.*

Његова површина је; $P = \frac{ef}{2}$; с друге стране га дијагонала f дели у 2 подударна троугла са странама a, b и f. Његов обим је: $2s = 2(a + b)$, $s = a + b$; дакле: $b = s - a$. Обим једнога од ових троуглова је $2s' = a + b + f = s + f$, $s' = \frac{s + f}{2}$ ·
Онда је по Хероновом обрасцу површина делтоида:
$P = 2 . \sqrt{s'.(s' - a).(s' - b).(s' - f)}$. Дакле имаш једначину: $\sqrt{s'.(s' - a).(s' - b).(s' - f)} = \frac{e . f}{4}$, где је: $s' - a = \frac{s + f - 2a}{2}$, $s' - b = \frac{c + f}{2} - (s - a) = \frac{2a + f - s}{2}$, $s' - f = \frac{s - f}{2}$ · У овом примеру: $s = 50$, $b = 50 - a$, $s' = 45$, $s' - a = 45 - a$, $s' - b = a - 5$, $s' - f = 5$, а једначина гласи:

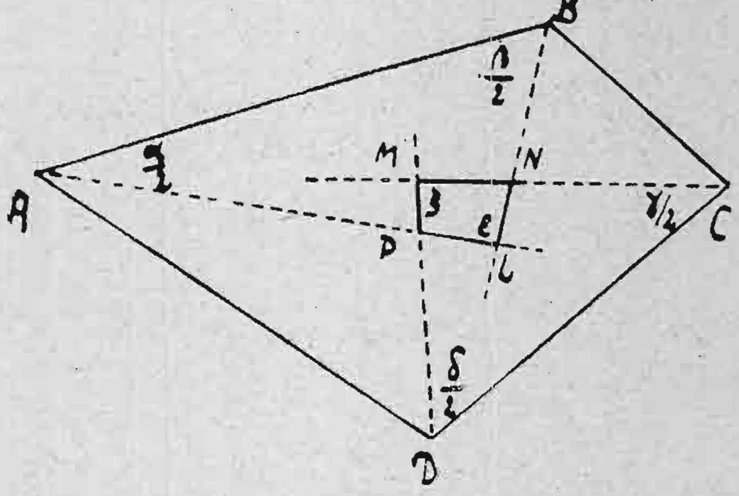
$\sqrt{45.5\,.\,(a-5)\,.\,(45-a)} = \frac{40.24}{4}$ и након квадрирања коначно: $a^2 - 50\,a + 481 = 0$. Одатле: $a_1 = \mathbf{37}$, $a_2 = b = \mathbf{13}$. *Означи углове међу странама a са $2\,\alpha$, међу странама b са 2β. Онда је $\sin\alpha = \frac{e}{2\,a} = \frac{12}{37}$, $\sin\beta = \frac{e}{2\,b} = \frac{12}{13}$, т. ј. $\mathbf{2\alpha = 37^0\ 50'\ 57''}$, $\mathbf{2\,\beta = 134^0\ 43'\ 40''}$, а угао γ међу страном a и b:

$$\gamma = \frac{360 - (2\,\alpha + 2\,\beta)}{2} = \mathbf{93^0\ 42'\ 41''}.$$

---

36. *Ако у једном четвероуглу нацрташ симетрале унутрашњих углова, онда те симетрале затварају унутар четвероугла један нов четвероугао. Докажи, да је тај нови четвероугао тетиван (сл. 30.)*

Доказ изведи на основи правила, да су у тетивном четвероуглу супротни углови суплементни (образац 57 a). У троуглу ABL, је $\varepsilon + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180^0$, т. ј.: $\varepsilon = 180 - \frac{\alpha + \beta}{2}$. Исто тако је из троугла CMD: $\rho = 180^0 - \frac{\gamma + \delta}{2}$. Дакле је: $\varepsilon + \rho = 360^0 - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 180^0$, јер је: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$. Онда су и углови код P и N суплементни; дакле је $MNLP$ *тетиван четвероугао*.



30. слика.

---

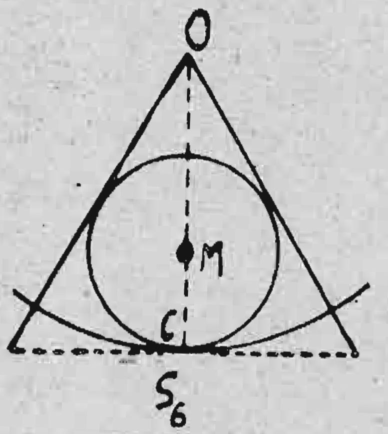
37. *Нађи средишњи (централни) угао, који у свакому кругу одговара луку, чија је дужина једнака полупречнику круга.*

По обрасцу (74) је овде $r = r\pi \cdot \frac{\alpha}{180}$; одатле: $\alpha = \frac{\mathbf{180}}{\pi} = \mathbf{57^0\ 17'\ 44{\cdot}8''}$. — Лук, чија је дужина једнака полупречнику, зове се *радијант круга*. Употребљава се у физици, а често и у математици, као *јединица за мерење угла*. Пун угао има $2\,\pi$

ових јединица (r је садржан 2π-пута у обиму круга!); онда прав угао има $\frac{\pi}{2}$ јединица, а спружен угао π јединица.

* * *

38. *У секстанту круга ($R = 18$ cm) уписан је круг, који додирује његов лук и оба крака. Израчунај површину тога круга (сл. 31.).*



31. слика.

Тај круг је уједно уписан и у равностраном троуглу, коме је страна S_6 правилног шестоугла описаног око заданог круга. Висина h тога равностраног $\triangle$ је $OC = R$ заданог круга, а полупречник уписаног круга је: $r = \frac{h}{3} = \frac{R}{3}$ · Одатле површина: $P = \frac{R^2}{9}\pi$. Нумерички: $P = 113{\cdot}1\,\text{cm}^2$.

* * *

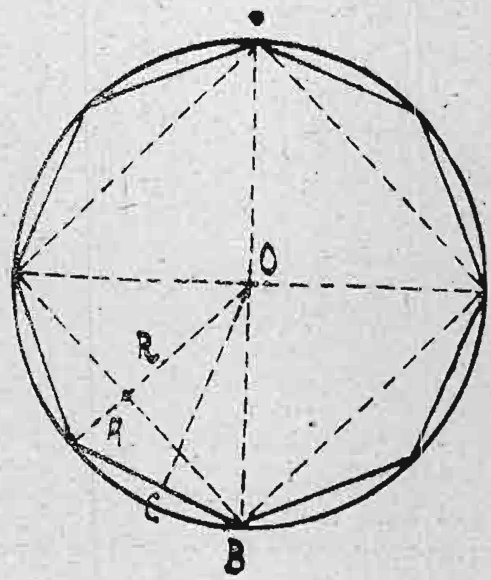
39. *У кругу полупречника R треба повући 2 концентрична круга тако, да круг буде подељен на 3 једнака дела. Нађи им полупречнике.*

Ако је полупречник спољашњег круга x, онда је $(R^2 - x^2).\pi = \frac{1}{3}R^2\pi$. Одатле: $x^2 = \frac{2}{3}R^2$, $x = \frac{R}{3} \cdot \sqrt{6}$ · Кружни прстен између заданога круга и унутрашњега (полупречник y) је $\frac{2}{3}$ површине круга, т. ј.: $(R^2 - y^2).\pi = \frac{2}{3}R^2\pi$. Одатле: $y^2 = \frac{R^2}{3}$, $y = \frac{R}{3}\sqrt{3}$. — *Или* овако: Круг са полупречником x је два пута већи од круга са полупречником y, а овај је трећина заданога круга. Т. ј.: $x^2\pi = 2y^2\pi$, $y^2\pi = \frac{1}{3}R^2\pi$. Из последње једначине излази: $y = \frac{R}{3}\sqrt{3}$, а помоћу тога из прве: $x = y.\sqrt{2} = \frac{R}{3}\sqrt{6}$.

* * *

40. *Израчунај страну правилнога многоугла са 8 страна, који је описан око круга полупречника $R = 10$ cm.*

Означи ту страну са S_8; страну 8-угла, уписаног у тому кругу, са s_8; полупречник круга, уписаног у овому, са r_8;страну



32. слика

Онда је по обрасцу (65.): $S_8 = \frac{R \,.\, s_8}{r_8}$; а по обрасцу (64.) је $s_8 = \frac{1}{2}\frac{R \,.\, s_4}{r_8}$, док је по обрасцу (66) $r_8 = \sqrt{\frac{R}{2}(R+r_4)}$. У квадрату је $OA = r_4 = \frac{1}{2}\, s_4$, а страна $s_4 = R\sqrt{2}$, дакле је: $r_4 = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{2}$. Онда је $r_8 = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}$,

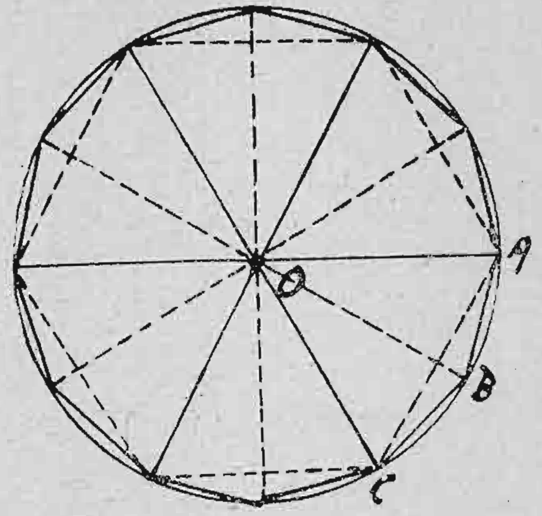
$s_8 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,R \,.\, R\,\sqrt{2}}{R.\sqrt{2+\sqrt{2}}} = R\,.\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Напокон: $\mathbf{S_8 = 2R} \,.\, \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$.

Нумерички: $\mathbf{S_8} = \mathbf{\mathit{8{\cdot}2844}}\; \mathit{cm}$. Види пример бр. 91 а.

---

41. *Израчунај површину правилног многоугла са 12 страна 1. уписаног у кругу полупречника r; 2. описаног око тога круга (33. сл.)*

1. Повучеш ли пречнике круга кроз сваки други пар наспрамних темена тога многоугла, поделићеш 12-угао у 6 подударних делтоида. Један од тих делтоида $OABC$ има дијагонале: $d_1 = OB = r$, $d_2 = AC = s_6 = r$. Онда је површина једнога делтоида: $p = \frac{r\,.\,r}{2} = \frac{r^2}{2}$, а површина 12-угла: $P_1 = 6\,p = \mathbf{3\,r^2}$.



33. слика.

2. Описани многоугао је сличан са уписаним, само је r за њега полупречник уписаног круга. Површине сличних многоуглова односе се као квадрати 2 њихових хомологних делова, н. пр. као квадрати полупречника уписаних кругова. Ако је ρ_{12} полупречник круга уписаног у унутрашњем многоуглу, онда имаш пропорцију: $P_1 : P_2 = \rho^2_{12} : r^2$. — А по обрасцу (66) је: $\rho_{12} = \sqrt{\frac{r}{2}(r+\rho_6)} = \sqrt{\frac{r}{2}\left(r+\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Дакле је: $P_1 : P_2 = \frac{r^2}{4} \cdot (2 + \sqrt{3}) : r^2 = (2 + \sqrt{3}) : 4$. Одатле је:

$$P_2 = \frac{4 P_1}{2 + \sqrt{3}} = 4 P_1 . (2 - \sqrt{3}) = \mathbf{12\, r^2 . (2 - \sqrt{3})}.$$

* * *

42. *Израчунај површину правилног десетероугла, који је уписан у кругу полупречника R.*

Страна a уписаног десетероугла дели полупречник R по златном пресеку; т. ј.: она је средња геометријска пропорцијонала међу R и разликом $R - a$. Дакле постоји ова пропорција: $R : a = a : (R - a)$. Одавле је: $a = \frac{R}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$ ……/1/.

По обрасцу (63) површина десетероугла је: $P = 5R.(\sqrt{5} - 1).\frac{r}{2}$, где је r полупречник круга уписаног у десетероуглу, а тај ћеш израчунати по Питагорином правилу:

$r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$. Онда је површина:

$$P = 5R . (\sqrt{5} - 1) . \frac{R}{8} . \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{5}{8} R^2 . (\sqrt{5} - 1) . \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{5}{4} R^2 . \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}.$$

* * *

43. *Израчунај површину правилнога 10-угла, који је описан око круга полупречника R.*

Овај задатак решаваш помоћу претходнога применом обрасца и правила (72). Полупречник R је за овај *10*-угао полупречник уписаног круга. Означи површину описаног *10*-угла са P_{10}, површину уписаног са p_{10}, тада је: $P_{10} : p_{10} = R^2 : r^2$. Применом резултата из претходнога задатка добиваш редом:

$$P_{10} : p_{10} = R^2 : \frac{R^2}{16}(10 + 2\sqrt{5}), \quad P_{10} : \frac{5}{8} R^2 (\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} =$$

$$= 1 : \frac{1}{16}(10 + 2\sqrt{5}),$$

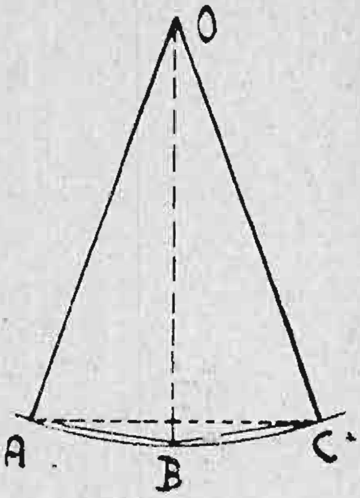
$$P_{10} = \frac{10\, R^2 . (\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{\quad}} = \frac{10\, R^2 . (\sqrt{5} - 1) . \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10 + 2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{10\,R^2\,.\,(\sqrt{5}-1\,).(10-2\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{80} =$$

$$\mathsf{P}_{10} = \frac{\mathsf{R}^2}{4}\cdot(\sqrt{5}-1)^2\cdot\sqrt{5.(10+2\sqrt{5})}.$$

---

44. *Израчунај површину правилнога многоугла са 20 страна, коме је страна a = 10 cm. (34. сл.)*



34. слика.

Поступи као у првом делу примера бр. 41. Дијаметралним дијагоналама подели многоугао на *10* подударних делтоида. Сваки од тих делтоида има дијагонале $d_1 = AC = s_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, $d_2 = R$, где је R полупречник круга, у кому је уписан тај *20*-угао. Површина једнога делтоида је $p = \frac{d_1\,.\,d_2}{2} = \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)$, а површина многоугла: $P = 10\,p =$ $= \frac{5}{2}R^2(\sqrt{5}-1)$ ..../1/ — Означи са r_{10} и са r_{20} полупречнике кругова уписаних у правилном многоуглу са *10*, дотично са *20* страна. Према обрасцу (64) је: $a = s_{20} = \frac{1}{2}\cdot\frac{R\,.\,s_{10}}{r_{20}}$, а према (66.) је: $r_{20} = \sqrt{\frac{R}{2}(R+r_{10})}$; напокон по обрасцу (66 *a*) је: $r_{10} = \sqrt{R^2-\left(\frac{s_{10}}{2}\right)^2} = \frac{R}{4}\cdot\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$.

Дакле је: $r_{20} = \sqrt{\frac{R}{2}\left[R+\frac{R}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right]} = \frac{R}{4}\cdot\sqrt{8+2\sqrt{(5+\sqrt{5}).2}}$.

Онда је: $a = \frac{R.(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{8+2\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}}$, а одатле је:

$R = a\cdot\frac{\sqrt{8+2\cdot\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}}{\sqrt{5}-1}$. Замени то у /1/, па добиваш:

$\mathsf{P} = \frac{5}{}a^2\left[4+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right].(\sqrt{5}+1)$. Нумерички:

Брже и лакше ћеш доћи до циља гониометријским решавањем у овом као и у другим примерима о многоуглима. Види пример бр. 92.

45. *Нађи површину трапеза, чије су паралелне стране s_6 и S_6 стране правилних шестоуглова, уписанога и описанога око круга с полупречником R, ако му је висина једнака раздаљености међу странама тих шестоуглова.*

Реши обрасцем (55.). Овде је $a = s_6 = R$, $b = S_6$, а то по обрасцу (65.) даје: $b = \frac{2 R \sqrt{3}}{3}$. Надаље је: $a + b = \frac{R}{3}(3 + 2\sqrt{3})$, $h = R - r = R - \frac{R}{2}\sqrt{3} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3})$. Коначно је:

$$P = \frac{R^2}{12} \cdot (3 + 2\sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = \frac{R^2}{12}\sqrt{3}.$$

II. СТЕРЕОМЕТРИЈА.

*46. *Израчунај површину и запремину кугле, описане око квадра, чије су ивице* a, b *и* c. *Н. пр.* $a=13$, $b=16$, $c=19$.

Та кугла пролази кроз сва темена тога квадра и њезин је пречник дијагонала квадрова, т. ј. према (83.); $4r^2=a^2+b^2+c^2$, $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Онда је: $P=4r^2\pi=$ $=(a^2+b^2+c^2).\pi$, $V=\frac{4r^2\pi}{3}\cdot r=\frac{\pi}{6}(a^2+b^2+c^2)\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Нумерички: $P=\mathbf{2469{\cdot}4}$, $V=\mathbf{11537{\cdot}9}$.

**47. *База једнога квадра има површину* $72\ cm^2$, *омотач му је* $204\ cm^2$, *а дијагонала* $d=\sqrt{181}\ cm$. *Израчунај му ивице и запремину.*

Ако су му основне ивице a, b, а бочна ивица c, онда задатак даје овај систем једначина:

$$\begin{cases} ab=72 \\ 2(bc+ac)=204 \\ a^2+b^2+c^2=181. \end{cases}$$

Да овај систем решиш, квадрирај трином $a+b+c$. $(a+b+c)^2=$ $=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{181}+\underbrace{2\,ab}_{144}+\underbrace{2\,ac+2\,bc}_{204}=529$. Дакле: $a+b+c=$ $=23$ .... /1/. Затим квадрирај $a+b-c$:

$$(a+b-c)^2=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{181}+\underbrace{2\,ab}_{144}-\underbrace{2\,ac-2\,bc}_{-204}=121.$$

Дакле: $a+b-c=11$ .... /2/. Сабирањем једначина /1/ и /2/ добиваш: $a+b=17$. Одавле $a=17-b$, па заменом у једначину $ab=72$ добиваш: $b^2-17\,b+72=0$. Одатле $b_1=9$, $b_2=8$; дакле су основне ивице: $\boldsymbol{a=9}$ **cm**, $\boldsymbol{b=8}$ **cm**. Одузимајући /2/ од /1/ добиваш: $\mathbf{c}=\boldsymbol{6}$ **cm**. Запремина $V=abc=\mathbf{432}\ \mathbf{cm}^3$.

---

48. *Правилна 6-страна призма има површину* $P=746\ cm^2$, *а све су јој ивице једнаке. Израчунај јој ивицу и запремину.*

$B = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$; дакле: $P = 3a^2\sqrt{3} + 6a^2 = 3a^2.(2+\sqrt{3})$. Одатле је: $a^2 = \frac{P}{3.(2+\sqrt{3})} = \frac{P}{3}(2-\sqrt{3})$, $a = \sqrt{\frac{P}{3}(2-\sqrt{3})}$. Висина призме је $h = a$, па је запремина: $V = \frac{3a^2.a\sqrt{3}}{2} =$ $= \frac{P}{2}\cdot(2\sqrt{3}-3)\cdot\sqrt{\frac{P}{3}(2-\sqrt{3})} = \frac{P}{2}\cdot\sqrt{\frac{P}{3}\cdot(21-12\sqrt{3}).(2-\sqrt{3})} =$ $= \frac{P}{2}\sqrt{P.(26-15\sqrt{3})}$. Нумерички: $a = 8{\cdot}1628$ cm, $V = 1413{\cdot}5$ cm^3

---

49. *Бокови праве тростране призме имају површине: $P_1 = 165$ cm², $P_2 = 99$ cm², $P_3 = 132$ cm², а површина базе је $B = 54$ cm². Израчунај јој ивице.*

Ако су основне ивице a, b, c, висина h, онда су бокови: $P_1 = ah$, $P_2 = bh$, $P_3 = ch$. Они се односе међусобно овако $P_1 : P_2 : P_3 = a : b : c = 165 : 99 : 132 = 5 : 3 : 4$. Одатле: $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$, $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$; т. ј: $b = \frac{3}{5}a$, $c = \frac{4}{5}a$. Базу изрази Хероновим обрасцем. Обкм $2s = a + b + c = a + \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}a = \frac{12}{5}a$, $s =$ $= \frac{6}{5}a$. Помоћу тога: $s - a = \frac{a}{5}$, $s - b = \frac{3}{5}a$, $s - c = \frac{2}{5}a$. Онда имаш за базу B ову једначину: $\sqrt{\frac{6}{5}a\cdot\frac{a}{5}\cdot\frac{3}{5}a\cdot\frac{2}{5}a} = 54$. Одатле: $a^2 = 9.25$, $a = 15$ **cm**. Помоћу тога: $b = 9$, $c = 12$ **cm**, $h = 11$ **cm**.

---

50. *Шестеространу правилну пирамиду, којој је основна ивица $a = 64{\cdot}5$ cm, а висина $h = 58{\cdot}39$ cm, претвори у тространу правилну призму једнаких ивица. Израчунај површину те призме.*

Та призма затворена је са *2* равнострана троугла (базе) и са *3* квадрата (омотач). Означиш ли ивицу призме са x, онда је њена површина: $P = \frac{x^2}{2}\sqrt{3} + 3x^2 = \frac{x^2}{2}\cdot(1+2\sqrt{3})\sqrt{3}$ .... /1/

Ивицу израчунај из једначине $V_1 = V_2$, т. ј. $\frac{Bh}{3} = \frac{x^3}{4}\sqrt{3}$. База $B = \frac{3a^2}{}\sqrt{3}$; дакле мора бити $\frac{3a^2h}{}\sqrt{3} = \frac{x^3}{}\sqrt{3}$. Одатле:

$x = \sqrt[3]{2\,a^2\,h}$, $x^2 = a.\sqrt[3]{4\,a\,h^2}$. Дакле заменом у /1/:

$P = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{4\,a\,h^2}.(1 + 2\sqrt{3})$. Нумерички: $\mathbf{P = 23892\ cm^2}$.

---

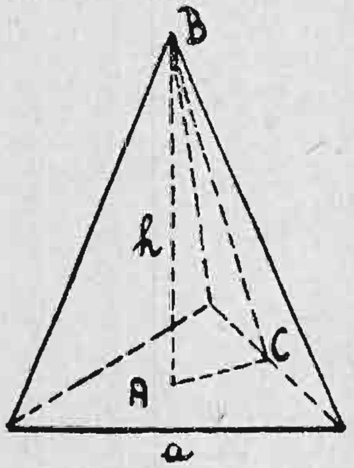
51. *У правилну четверострану пирамиду уметнута је коцка тако, да јој је доња основа у основи пирамиде, а горње бочне ивице леже у боковима пирамиде. Израчунај ивицу x ове коцке, ако је основна ивица пирамиде a, а бочна b.*

Ако пирамиду с коцком пресечеш једном равнином по апотемама двеју наспрамних страна пирамиде, добиваш слику 21. Да употребиш решење задатка бр. 15., израчунај Питагориним правилом висину h пирамиде из бочне ивице и дијагонале базе (квадрат!). Добиваш: $h = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(2b^2 - a^2)}$. Онда је применом решења задатка бр. 15.: $x = \frac{a\,h}{a + h} = \frac{a\sqrt{2\,(2b^2 - a^2)}}{2\,a + \sqrt{2\,(2b^2 - a^2)}}$.

---

52. *Задана је површина P правилне тростране пирамиде, којој је основна ивица a. Израчунај јој запремину. Н. пр. $P = 400\ cm^2$, $a = 9\ cm$. (сл. 35.)*

База је равностран троугао; висина h пада у средиште A описанога, дотично уписанога круга. Површина базе је $B = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Цела површина је $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3a}{2}\cdot v$. Одатле за апотему: $v = \frac{4P - a^2\sqrt{3}}{6\,a}$. Из правоуглог троугла ABC је висина пирамиде: $h = \sqrt{v^2 - \rho^2}$, где је ρ полупречник уписаног круга у равностраном троуглу.



35. слика.

По обрасцу (54.) је $\rho = \frac{a}{6}\sqrt{3}$; па је онда:

$$h = \sqrt{\frac{16\,P^2 + 3\,a^4 - 8\,a^2\,P\sqrt{3}}{36\,a^2} - \frac{a^2}{12}} = \frac{1}{3a}\sqrt{4\,P^2 - 2\,a^2\,P\sqrt{3}}.$$

Вредност за h и B замени у образац за запремину, па добиваш: $\mathbf{V} = \frac{a}{}\sqrt{4P^2\sqrt{3} - 6\,a^2P}$ Нумерички: $V = 330{\cdot}015\ cm^3$

53. *Једна правилна 4-страна пирамида има страну $b = 40$ ст, а висина h јој је за 5 ст већа од основне ивице. Израчунај јој површину и запремину.*

Ако је њезина основна ивица a, онда је $h = a + 5$. База пирамиде је квадрат, а омотач се састоји од 4 равнокрака троугла висине $v = \frac{1}{2}\sqrt{4\,b^2 - a^2}$. Њезина површина је: $P = a^2 + 2\,av = a^2 + a.\sqrt{4\,b^2 - a^2}$. Запремина је: $V = \frac{a^2\,h}{3} = \frac{a^2(a+5)}{3}$. Непознату основну ивицу израчунај из правоуглог троугла, коме је хипотенуза бочна ивица b, а катете висина $h = a + 5$ и половина квадратове дијагонале: $\frac{d}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Дакле је: $b^2 = (a+5)^2 + \frac{a^2}{2}$. То даје једначину: $\frac{3}{2}a^2 + 10\,a + 25 - 1600 = 0$, која даје позитивно решење: $a = 29{\cdot}24$ ст. Замени то у обрасце за P и V, па добиваш: **P** $=$ ***3032·75*** cm^2, **V** $=$ ***9758·2*** cm^3.

* * *

54. *Правилна 8-страна пирамида има основну ивицу $a = 14$ ст, а бочну $b = 24$ ст. Израчунај јој површину и запремину.*

Површина је $P = B + O$. Према обрасцу (63) је: $B = \frac{8\,ar}{2}$, где је r полупречник уписаног круга. Према примеру бр. 40 је $r = \frac{R}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}$, а из $s_8 = R.\sqrt{2-\sqrt{2}}$ је: $R = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$; тако је: $r = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \frac{a(2+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{2}(1+\sqrt{2})$. Помоћу тога: $B = \mathbf{2}\,a^2.(1+\sqrt{2})$. — Омотач се састоји од 8 подударних равнокраких троуглова основе a; њихова висина је апотема пирамидина $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$. Тако је омотач: $O = 4\,av = 2a\sqrt{(2b-a)(2b+a)}$. Дакле је површина: $P = 2a^2.(1+\sqrt{2}) + 2a\cdot\sqrt{(2b-a)(2b+a)} = \boldsymbol{2\,a.[a\,(1+\sqrt{2}) + \sqrt{(2\,b-a).(2b+a)}]}$. Запремина је $V = \frac{B\,.\,h}{3}$, где је:

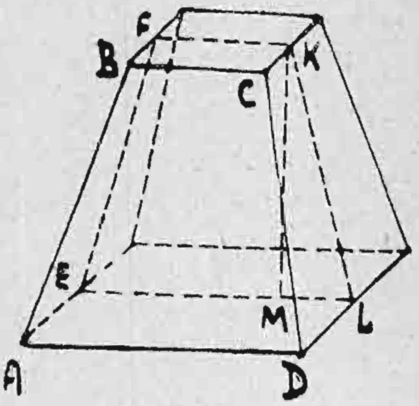
$h = \sqrt{b^2 - R^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}(2+\sqrt{2})}$. Тако је:

$V = \frac{2a^2}{3} \cdot (1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}(2+\sqrt{2})}$. Нумерички: **P=2231·75 cm^2**, **V = 4901·7 cm^3.**

* * *

55. *Израчунај запремину праве четверостране правилне прикраћене пирамиде, код које је збир њезиних бокова једнак збиру база (основне ивице a, b). (Сл. 36.)*

Омотач се састоји од 4 подударна равнострана трапеза, којима су паралелне стране $AD = a$, $BC = b$, а висина им је апотема $KL = v$ ове прикраћене пирамиде. Базе су квадрати. Онда према задатку имаш једначину: $a^2 + b^2 = 2(a+b).\ v$ ..../1/. И трапез $EFKL$ је равнокрак, па из правоуглог троугла KLM имаш: $KL = \sqrt{CM^2 + ML^2}$. А како је $CM = h$, $ML = \frac{a-b}{2}$, $KL = v$, имаш даље: $v = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + (a-b)^2}$.



36. слика.

Ово замени у /1/, па добиваш једначину: $a^2 + b^2 = a + b \cdot \sqrt{4h^2 + (a-b)^2}$, из које након квадрирања и редуковања добиваш: $h = \frac{a\,b}{a+b}$ ..../2/. Онда помоћу обрасца (88.) добиваш за запремину израз: $V = \frac{ab}{3(a+b)} \cdot (a^2 + ab + b^2)$.

Према обрасцу (4.) израз /2/ значи ово: висина те пирамиде је *половина средње хармоничне пропорцијонале* међу основним ивицама те пирамиде.

* * *

56. *Задану пирамиду (база B, висина h) треба поделити равнима, паралелним са базом, у 3 дела, који се односе као m : n : p. У којој даљини од темена морају лежати те равни?*

Запремине ових 3 делова чине пропорцију: $V_1 : V_2 : V_3 = m : n : p$. Од темена до ових пресека и до базе добиваш 3 пирамиде, чије запремине чине пропорцију: $V_1 : (V_1 + V_2) : (V_1 + V_2 + V_3) = m : (m+n) : (m+n+p)$. Ако је површина првога пресека B_1, другога B_2, раздаљеност првога пресека од

$= m : (m+n) : (m+n+p)$; или ове 2 пропорције: $B_1 x : Bh = m : (m+n+p)$ .... /1/ и: $B_2 y : Bh = (m+n) : (m+n+p)$ .... /2/. С друге стране: $B_1 : B = x^2 : h^2$, т. ј.: $B_1 = \frac{B x^2}{h^2}$. Кад то замениш у /1/: $\frac{B x^3}{h^2} : Bh = m : (m+n+p)$, и након множења са $\frac{h^2}{B}$: $x^3 : h^3 = m : (m+n+p)$.

Одатле: $x = h . \sqrt[3]{\frac{m}{m+n+p}}$, $B_1 = B . \sqrt[3]{\frac{m^2}{(m+n+p)^2}}$. Аналогно за y: $B_2 : B = y^2 : h^2$, т. ј. $B_2 = \frac{B y^2}{h^2}$, а након замене у /2/:

$$y = h \cdot \sqrt[3]{\frac{m+n}{m+n+p}}, \quad B_2 = B . \sqrt[3]{\left(\frac{m+n}{m+n+p}\right)^2}.$$

Н. пр. $m : n : p = 1 : 1 : 1$, т. ј. *повући те равни тако, да оне пирамиду поделе на 3 једнака дела.*

Онда је $x = h . \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $B_1 = B . \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$. Запремина тога дела је $V_1 = \frac{B_1 x}{3} = \frac{B h}{9}$, т. ј.: $V_1 = \frac{1}{3} V$. Надаље $y = h . \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $B_2 = B . \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$. Запремина другога дела је $V'_2 = V_2 - V_1 = \frac{B_2 y}{3} - \frac{B_1 x}{3} = \frac{2 B h}{9} - \frac{B h}{9} = \frac{B h}{9}$, т. ј. $V'_2 = \frac{1}{3} V$. Онда је и онај доњи део $V_3 = \frac{1}{3} V$.

57. *Ако се размота омотач једнога цилиндра, добива се квадрат, чија је дијагонала $d = 28{\cdot}9$ dm. Израчунај тежину тога цилиндра, ако је направљен од гвожђа специфичке тежине $s = 7{\cdot}65$.*

Тежина му је $T = r^2 \pi h . s$. Страна a квадрата је уједно висина h и обим цилиндрове базе; дакле је $r = \frac{a}{2\pi}$. Страна a, израчунана помоћу дијагонале d, је $a = \frac{d}{2}\sqrt{2}$. Дакле је: $h = \frac{d}{2}\sqrt{2}$, $r^2 = \frac{d^2}{8\pi^2}$. Одатле је тежина: $T = \frac{d^3 s}{16\pi} \cdot \sqrt{2}$. Нумерички: $\mathbf{T = 5195{\cdot}2}$ **kg**.

58. *Шупљи цилиндар (горе отворен) има спољашњу висину* $h_1 = 15$ cm, *а унутрашњу* $h_2 = 12$ cm. *Спољашњи му је пречник* $d_1 = 10$ cm, *а унутрашњи* $d_2 = 9$ cm. *Колико ће уронити пливајући у води* (4^0 C), *ако је специфична тежина материјала* $s = 1{\cdot}5$?

По Архимедовом закону ће тај цилиндар пливати, када његова тежина буде једнака тежини истиснуте воде. Тежина цилиндра: $T_1 = V_1\,s$, а $V_1 = R_1^2\pi h_1 - R_2^2\pi h_2 = \frac{\pi}{4}(d_1^2h_1 - d_2^2h_2)$; дакле $T_1 = \frac{\pi s}{4}(d_1^2\,h_1 - d_2^2\,h_2)$. Ако је висина истиснуте воде x, онда је њезина тежина $T_2 = R_1^2\,\pi x = \frac{d_1^2}{4}\pi x$. Из једначине: $T_1 = T_2$, т. ј. $s.(d_1^2\,h_1 - d_2^2\,h_2) = d_1^2\,x$, излази: $x = \frac{s.(d_1^2\,h_1 - d_2^2\,h_2)}{d_1^2}$. Нумерички: $x = \mathbf{7{\cdot}92}$ **cm**.

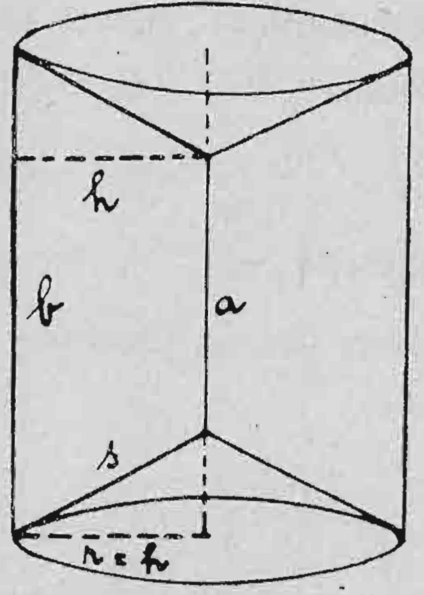
59. *Запремина правог конуса (купе) је* $8748.\pi$, *а висина му се односи према пречнику базе као* 9 : 4. *Израчунај му омотач.*

Први податак даје једначину $\frac{r^2h}{3} = 8748$ а други пропорцију: $h : 2r = 9 : 4$. Одатле $h = \frac{9}{2}r$; замени то у прву једначину, па добиваш: $r^3 = 5832$, $r = 18$, $h = 81$. Омотач је: $O = r\pi s = r\pi.\sqrt{r^2 + h^2}$. Нумерички: $O = \mathbf{4692{\cdot}1}$.

60. *У равностраном конусу, полупречника* R, *уписан је равностран цилиндар. Нађи запремину тога цилиндра (види зад. бр. 52., сл. 21.)*

Из сличних троуглова $ABC \backsim A'B'C$ следи: $AB : A'B' = CD : CD'$, где је $CD' = h - 2r$, ако је h висина конуса, а r полупречник базе цилиндрове. Дакле: $2R : 2r = h : (h - 2r)$. Одатле помоћу изведене пропорције $(a + c) : (b + d) = a : b$ излази: $(2R + h) : h = R : r$, а одатле $r = \frac{Rh}{2R + h}$. А како је $h = \frac{2R}{2}\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, то је: $r = \frac{R\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = R\sqrt{3}.(2 - \sqrt{3})$, а запремина: $V = 2r^3\pi = 6\,r^3\pi\sqrt{3}.(2 - \sqrt{3})^3 = \mathbf{6r^3\pi.(26 - 15\sqrt{3}).\sqrt{3}}$.

61. *Равнокраки трапез, паралелних страна a и b $(a < b)$, ротира око стране a као оси. Израчунај површину и запремину ротацијонога тела, ако је још задана и висина h тога трапеза (37. сл.)*



37. слика.

Ротацијоно тело састоји се од правог цилиндра висине b, полупречника h, умањеног за два подударна права конуса, којима је полупречник базе h, а висина $\frac{b-a}{2}\cdot$ Површина $=$ омотач цилиндра $+2$ омотача конуса.

$$P = 2h\pi . b + 2h\pi . s,\ s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4\,h^2 + (b-a)^2};$$ дакле:

$$\mathbf{P} = \mathbf{h}\pi\,.[\mathbf{2b} + \sqrt{\mathbf{4}\,\mathbf{h}^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2}].$$

Запремина $=$ запремина цилиндра $-\,2$ запремине конуса, т. ј.

$$V = h^2\pi b - \frac{2}{3}\,h^2\,\pi\cdot\frac{b-a}{2} = h^2\,\pi\,.\left(b - \frac{b-a}{3}\right) = \frac{\mathbf{h}^2\pi}{\mathbf{3}}\cdot(\mathbf{2b}+\mathbf{a}).$$

---

62. *Прав конус и прав цилиндар (облица) једнаких висина h имају једнаке запремине и једнаке површине. Израчунај њихове полупречнике у деловима висине.*

По задатку имаш ове једначине: $R^2\,\pi\,h = \frac{r^2\,\pi\,h}{3}$, $2\,R\,\pi.(R+h) = r\,\pi.(r+s)$, где за s (страна конуса) по Питагорином правилу имаш: $s = \sqrt{r^2 + h^2}$. Одавле добиваш једначине: $3\,R^2 = r^2$, $2\,R.(R+h) = r\,.(r + \sqrt{r^2+h^2})$. Након множења и замене прве једначине у другу добиваш: $2\,h - R = \sqrt{9\,R^2 + 3\,h^2}$, а одавле квадрирањем хомогену једначину: $8\,R^2 + 4\,R\,h - h^2 = 0$. Подели је са h^2, па замени $\frac{R}{h} = z$; добивена једначина $8\,z^2 + 4\,z - 1 = 0$ даје једно позитивно решење: $z = \frac{R}{h} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

Одатле: $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{4}}\cdot(\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1})$ (полупречник цилиндра)

и $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{h}}{\ }\cdot(\mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{3}})$ (полупречник конуса), јер је $r = R\sqrt{3}$.

63. *Од правога конуса (r, h) треба изрезати највећу правилну 12-страну пирамиду. Израчунај јој запремину. Колико се процената изгуби у отпацима?*

Основа те пирамиде је правилни 12-угао, који је уписан у бази конуса, а висина је једнака конусовој висини. За површину правилног 12-угла погледај пример бр. 41; према тому задатку је: $B = 6p = 3r^2$. Дакле запремина: $V = \frac{1}{3} Bh = r^2 h$.

Запремина отпадака је: $\frac{r^2 \pi h}{3} - r^2 h = \frac{r^2 h}{3} \cdot (\pi - 3)$.

Проценат ћеш израчунати из једначине:

$\frac{r^2 h}{3} \cdot (\pi - 3) = \frac{r^2 \pi h x}{3 . 100}$ [према обрасцу (24 a)]. Одатле:

$$x = \frac{(\pi - 3) . 100}{\pi} = \mathbf{4{\cdot}5041}\,\%.$$

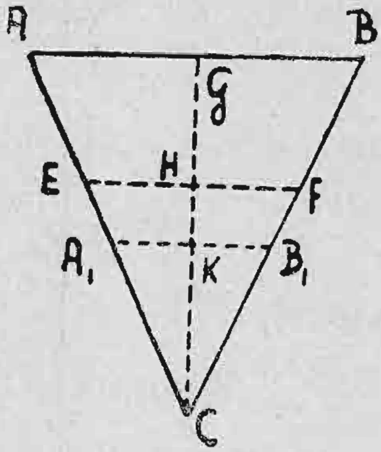
---

64. *Прав конус има страну $s = 16$ cm, а угао на темену његовог карактеристичног пресека износи 36^0. Израчунај му запремину.*

Пошто је угао на темену $36^0 = \frac{360^0}{10}$, то је пречник његове базе $2r$ страна правилног 10-угла, уписаног у кругу полупречника s. Према обрасцу (69.) је онда: $2r = \frac{s}{2} (\sqrt{5} - 1)$, т. ј. $r = \frac{s}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1)$. Висину израчунај из s и r помоћу Питагориног правила. Добиваш: $h = \frac{s}{4} \cdot \sqrt{2(5 + \sqrt{5})}$. Онда је:

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h = \frac{s^3 \pi}{48} \cdot (6 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{s^3 \pi}{48} \cdot \sqrt{16(7 - 3\sqrt{5}).(5 + \sqrt{5})} =$$
$$= \frac{s^3 \pi}{12} \cdot \sqrt{4(5 - 2\sqrt{5})} = \frac{s^3 \pi}{6} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

**65. *Шупљина једне чаше има облик конуса висине $h = 10$ cm, и у њој има воде до $3{\cdot}5$ cm над теменом конуса. Успеш ли још 50 cm^3 воде, онда се површина воде дигне за $c = 2{\cdot}5$ cm. Колико воде садржи та чаша, када је напуниш? (сл. 38.)*



38. слика.

пречници $EH = x$, $A_1K = y$, висина: $HK = c = 2{\cdot}5$. Његова је запремина: $\frac{\pi c}{3} \cdot (x^2 + xy + y^2) = 50$. Одатле је: $x^2 + xy + y^2 = \frac{3 \,.\, 50}{2 \,.\, 5\pi} = \frac{60}{\pi}$ .... /1/. Из сличних троуглова $A_1KC \backsim EHC$ следи пропорција: $x : y = HC : KC = 6 : 3{\cdot}5$. Одатле $x = EH = \frac{6\,y}{3{\cdot}5}$ · Замени то у /1/, па добиваш: $\frac{36\,y^2 + 21\,y^2 + y^2}{3{\cdot}5^2} = \frac{60 \,.\, 3{\cdot}5^2}{3{\cdot}5^2 \,.\, \pi}$; одатле: $58\,y^2 = \frac{60 \,.\, 3{\cdot}5^2}{\pi}$, $y^2 = \frac{60 \,.\, 3{\cdot}5^2}{58\,\pi}$ · Из сличних троуглова $AGC \backsim A_1KC$ следи пропорција: $AG : A_1K = 10 : 3{\cdot}5$, т. ј. $R : y = 10 : 3{\cdot}5$; одатле: $R^2 : y^2 = 100 : 3{\cdot}5^2$, т. ј. $R^2 = \frac{100\,y^2}{3{\cdot}5^2} = \frac{100 \,.\, 60}{58\,\pi}$ · Запремина пуне чаше је: $V = \frac{R^2\,\pi h}{3}$, т. ј. $V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{100 \,.\, 60 \,.\, 10}{58\,\pi} = \frac{10000}{29} = \mathbf{344{\cdot}83}\ \mathrm{cm}^2$.

* * *

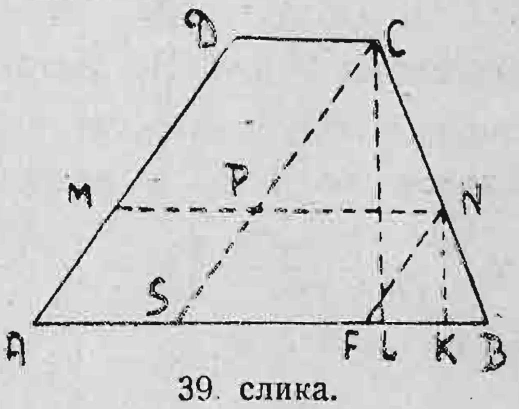
66. и 67. *Прикраћени конус* (R, r, h) *подели једном равни паралелном са базама на 2 дела тако, да 1. запремине њихове буду половина запремине; 2. да омотачи буду половина омотача тога прикраћеног конуса.* (*Сл. 39.*)

Нађи у оба случаја висину пресека над доњом базом.

1. Ово решење вреди за прав и за кос прикраћен конус. Ако је MN раван тога пресека, означи: $DC = 2\,r$, $AB = 2\,R$, $MN = 2\,x$, $CL = h$, $EL = NK = y$, онда је $CE = h - y$, $PN = 2\,(x - r)$, $BF = 2\,(R - x)$. Према задатку има да буде: $V_1 : V_2 = 1 : 1$, т. ј.

$$\frac{\pi y}{3} \cdot (R^2 + Rx + x^2) :$$

$$: \frac{(h - y)\,\pi}{3} \cdot (x^2 + rx + r^2) = 1 : 1.$$



39. слика.

Из сличних троуглова $PCN \backsim BFN$ следи пропорција:

$= \frac{y.(x - r)}{R - x}$. Замени то у предходну пропорцију, па након краћења, и множења са $R - r$, добиваш:

$$(R - x).(R^2 + Rx + x^2) : (x - r).(x^2 + rx + r^2) = 1 : 1.$$

Одатле: $R^3 - x^3 = x^3 - r^3$, а одатле: $x = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}$. Из пропорције /1/ можеш сабирањем извести пропорцију (5.): $h : (R - r) = y : (R - x)$, а одатле: $y = \frac{h.(R - x)}{R - r}$. Заменом нађене вредности x добиваш: $y = \frac{hR}{R - r} - \frac{hx}{R - r} = \frac{hR}{R - r} - \frac{h}{R - r} \cdot \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}} = \frac{h}{R - r} \cdot \left(R - \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}\right)$.

2. Супонирај да слика 38. представља прав прикраћени конус, т. ј. да је $AD = BC = s$, јер решење вреди за прав (равнокрак) прикраћен конус. Означи $BN = s_1$. Према задатку има да буде $O_1 = \frac{1}{2} O$, т. ј. $\pi s_1.(R + x) = \frac{1}{2} \pi s.(R + r)$. т. ј.: $s_1.(R + x) = \frac{s}{2} \cdot (R + r)$ .... /3/. Из сличних троуглова $BCS \sim$ $\sim BNF$ следи пропорција: $BF : BS = s_1 : s$, т. ј. $2(R - x)$: $: 2(R - r) = s_1 : s$. Одатле $s_1 = \frac{R - x}{R - s} \cdot s$ .... /4/. Заменом овога у /3/: $\frac{(R - x).(R + x)}{R - r} \cdot s = \frac{s}{2} \cdot (R + r)$, т. ј. $R^2 - x^2 = \frac{R^2 - r^2}{2}$. Одатле: $x^2 = \frac{R^2 + r^2}{2}$, $x = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$, $R - x = R - \sqrt{\frac{R_2 + r^2}{2}}$. Замени то у /4/, па имаш:

$s_1 = \frac{s}{R - r} \cdot \left(R - \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}\right)$ .... /5/. Још место s_1 и s имаш да уведеш y и h. По Питагорином правилу је из *равнокраког* троугла BNF: $s_1 = \sqrt{y^2 + (R - x)^2}$, а из BCS: $s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$. Замени то у /5/ и квадрирај, па добиваш: $y^2 + (R - x)^2 = \frac{h^2 + (R - r)^2}{(R - r)^2} \cdot \left(R - \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}\right)^2$. Одатле помоћу нађене вредности за $R - x$:

$$y^2 = \frac{h^2 + (R - r)^2}{\quad} \Big(R - \sqrt{R^2 + r^2}\Big) \qquad (R - r)^2.\left(R - \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{\left(R - \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}\right)^2}{(R - r)^2} \cdot [h^2 + (R - r)^2 - (R - r)^2] =$$

$$= \frac{h^2}{(R - r)^2} \cdot \left(R - \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}\right)^2 \cdot \text{Дакле: } y = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{R - r}} \cdot \left(\mathbf{R} - \sqrt{\frac{\mathbf{R^2 + r^2}}{\mathbf{2}}}\right).$$

---

68. *Запремине трију кугала стоје у размери као 5 : 7 : 13, а све скупа садрже 30 m^3. Израчунај им запремине и полупречнике.*

Запремину једне кугле, која би се према најмањој односила као 1 : 5, означи са x; онда је $V_1 = 5x$, $V_2 = 7x$, $V_3 = 13x$. А према задатку је: $5x + 7x + 13x = 30$. Одатле је $x = \frac{6}{5} m^3$. Дакле је: $V_1 = 6\,m^3$, $V^2 = 8\frac{2}{5} m^3$, $V_3 = 15\frac{3}{5} m^2$. Из једначине $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$ излази $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Тако овде: $\mathbf{r_1 = 1{\cdot}1272\,m}$, $\mathbf{r_2 = 1{\cdot}261\,m}$, $\mathbf{r_3 = 1{\cdot}5501\,m}$.

---

69. *Око квадрата (страница a) описан је круг и уписан је у њему круг. Израчунајте размеру међу запреминама телеса, која настају ротацијом целе ове слике за 180° око квадратове дијагонале.*

Од квадрата настане двоструки конус (ρ, $2h$), а у њему је уписана кугла (r) и око њега је описана кугла (R). Запремина двоструког конуса је $V_2 = \frac{2}{3} \rho^2 \pi h$. Односај међу запреминама је: $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{2}{3} \rho^2 \pi h : \frac{4}{3} R^3 \pi = 2 r^3 : \rho^2 h : 2 R^3$.

Изрази ове величине помоћу a; добиваш редом: $r = \frac{a}{2}$, $h = \rho = R = \frac{d}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $\rho^2 h = \rho^3 = \frac{a^3}{4}\sqrt{2}$, $R^3 = \rho^3 = \frac{a^3}{4}\sqrt{2}$. Онда је $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{a^3}{4} : \frac{a^3}{4}\sqrt{2} : \frac{a^3}{4} 2\sqrt{2} = \mathbf{1 : \sqrt{2} : 2\sqrt{2}}$.

---

70. *Око правога цилиндра висине h, чија се база односи према омотачу као m : n, описана је кугла. Израчунај јој запремину.*

$= m : n$, а одатле: $r = \frac{2\,mh}{n}$. Пречник кугле је дијагонала у правоугаонику са странама $2r$ и h; дакле је $4R^2 = h^2 + (2r)^2 = h^2 + \frac{16\,m^2h^2}{n^2} = \frac{h^2}{n^2} \cdot (n^2 + 16\,m^2)$, а $R = \frac{h}{2n} \cdot \sqrt{n^2 + 16\,m^2}$.

Запремина кугле: $V = \frac{\pi}{3} \cdot 4R^2 \,.\, R = \frac{\pi h^3}{6n^3} \cdot (n^2 + 16m^2) \cdot \sqrt{n^2 + 16m^2}$.

---

71. *Из дрвене кугле запремине V изрезан је највећи равнострани конус. Колико процената запремине куглине износи његова запремина?*

Карактеристични пресек тога конуса је равнострани троугао, око кога је описан главни круг те кугле. Између полупречника R кугле и висине тога конуса постоји веза: $R = \frac{2}{3}h$; одатле $h = \frac{3}{2}R$. Између висине конуса и полупречника ρ његове базе постоји веза: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \rho\sqrt{3}$; дакле $\rho = \frac{h}{3}\sqrt{3} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$. Онда је по обрасцу (99.) запремина тога конуса $V_1 = \frac{3}{8}R^3\pi$. По обрасцу (24 а) интереса је $V_1 = \frac{V \,.\, p}{100}$. Одатле је $p = \frac{100\,V_1}{V} = 100 \cdot \frac{\frac{3}{8}R^3\,\pi}{\frac{4}{3}R^3\,\pi} = \frac{900}{32}\,\%$, т. ј. $p = 28{\cdot}12\%$.

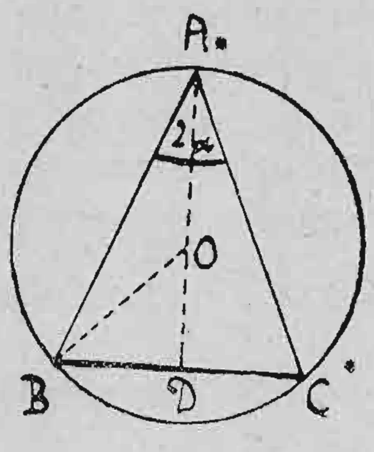
---

72. *У једној кугли (полупречник = R) уписан је прав конус тако, да средиште кугле дели његову висину по златном пресеку. Израчунај 1. колико перцената куглине запремине заузима тај конус, *2. израчунај угао на темену његовог карактеристичног пресека (сл. 40.)*

Ако је висина конуса $AD = h$, а $OD = x$, онда је $h = R + x$, а полупречник базе је $BD = r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Ако је његова запремина V_1, а запремина кугле V, онда је по обрасцу $p = \frac{100\,i}{k}$ тражени перценат $p = 100$ V_1 /1/. Према задатку O тако, да је $R^2 = (R + x)\,x$. Одатле: $R^2 — x^2 = R\,x = r^2$. Дакле је: $V_1 = \frac{r^2\,\pi\,h}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot R\,x\,(R + x)$. А како је $x\,(R + x) = R^2$, то је $V_1 = \frac{\pi}{3}\,R^3$. Тако је: $\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{R^3\,\pi}{3}}{\frac{4}{3}R^3\,\pi} = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25$. Дакле је према /1/: $\mathbf{p} = \mathbf{25\%}$.

*2. Ако је угао на темену $BAC = 2\alpha$, то је и угао $BOD = 2\,\alpha$. Онда је $tg\ 2\alpha = \frac{BD}{OD} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{Rx}}{x} = \sqrt{\frac{R}{x}}$. А из $R^2 = (R + x)\,x$ излази: $x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} — 1)$

Дакле $\mathrm{tg}\ 2\,\alpha = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5} — 1}}$; $\mathrm{tg}\ 2\,\alpha = \mathbf{52^0\,8'\,51''}$.



40. слика.

---

73. *Куглу од воска, површине O, треба претворити у прави цилиндар једнаке запремине тако, да омотач тога цилиндра буде једнак површини кугле. Израчунај висину тога цилиндра и полупречник његове базе. Н. пр. $O = 900\ cm^2$.*

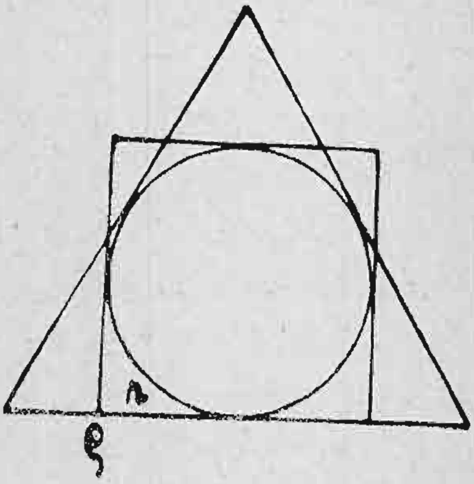
Запремине морају бити једнаке: $R^2\,\pi h = \frac{4}{3}r^3\pi$ ………… /1/.

Омотач цилиндра мора бити једнак површини кугле: $2\,R\pi h = O$ …… /2/. Подели ове једначине: $\frac{R}{2} = \frac{4\,r^3\,\pi}{3\,.\,O} = \frac{4\,r^2\pi\,.\,r}{3\,.\,O} = \frac{O\,.r}{3.O} = \frac{r}{3}$. Још из познате површине кугле израчунај r, па замени у десну страну; добиваш: $\frac{R}{2} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$ т. ј. $\mathbf{R} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{0}{\pi}}$. Нумерички: $R = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{900}{\pi}} = \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$, $\mathbf{R} = \mathbf{5{\cdot}642}$ **cm**; $\mathbf{h} = \frac{3\sqrt{O\,.\,\pi}}{2\pi}$; нумерички: $\mathbf{h} = \mathbf{25{\cdot}389}$ **cm**.

---

74. *Око кугле, чији је полупречник r, описан је равнострани цилиндар и равнострани конус. Како се односе запремине ових 3 телеса? (Сл. 41.)*

кугле, онда се у тој равни налазе карактеристични пресеци ових 3 телеса. Полупречник базе цилиндра једнак је полупречнику r кугле а висина $h = 2r$. Полупречник ρ базе конуса је половина стране a равностранога троугла. У тому равностраному троуглу је уписан један највећи круг задане кугле, па је висина конуса $h_1 = 3r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Одатле је $a = 2r.\sqrt{3}$, а полупречник $\rho = \frac{a}{2} = r.\sqrt{3}$. Запремине ових телеса V_1, V_2, V_3 праве размеру: $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{4}{3}r^3\pi : 2r^3\pi : \frac{\rho^3\pi}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{4}{3}r^3 : 2r^3 : 3r^3$.



41. слика.

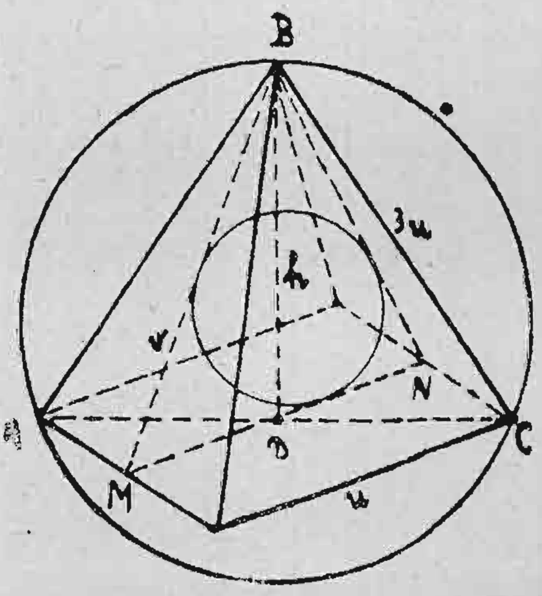
Конечно: $\mathbf{V_1 : V_2 : V_3 = 4 : 6 : 9}$.

75. *Регуларна (правилна) четверострана пирамида има основну ивицу u, а бочну $3u$. Нађите а) њезину запремину, б) запремину најмање лопте, од које се може резањем направити та пирамида, в) запремину највеће лопте, која се може изрезати из те пирамиде. (42. сл.)*

а) База пирамиде је квадрат са страном a. Њезина је запремина: $V_1 = \frac{u^2 . h}{3}$. Из троугла ABD је $h = \sqrt{(3u)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{9u^2 - \frac{u^2}{2}}$, јер је $d = u.\sqrt{2}$; коначно је $h = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{34}$. Дакле:

$$\mathbf{V_1 = \frac{u^3}{6}\cdot\sqrt{34}}.$$

б) Најмања лопта, од које се може изрезати ова пирамида, је лопта, која се може око ње описати. Полупречник те лопте је идентичан с полупречником круга описаног око троугла ABC. Тај ћеш израчунати према обра-



42. слика.

$=\frac{u^2}{4}\cdot\sqrt{2}.\sqrt{34}=\frac{u^2}{2}\cdot\sqrt{17}$; надаље је: $a=b=3u$, $c=d=u.\sqrt{2}$.

Дакле је: $R=\frac{9u^3.\sqrt{2}}{2u^2.\sqrt{17}}=\frac{9u}{34}\cdot\sqrt{34}$, $R^2=\frac{81u^2}{34}$,

$R^3=\frac{81u^2}{34}\cdot\frac{9u}{34}\cdot\sqrt{34}=\frac{729u^3}{34^2}\cdot\sqrt{34}$. Према тому је: $V_2=\frac{4}{3}R^3\pi=$ $=\frac{4}{3}\pi.\frac{729u^3}{4.17^2}\cdot\sqrt{34}=\frac{\mathbf{243}\,u^3\pi}{\mathbf{17^2}}\cdot\sqrt{\mathbf{34}}$.

в) Највећа лопта, која се даде направити од те пирамиде, је лопта, која је у њој уписана, а то је она лопта, која додирује изнутра све апотеме v те пирамиде и њезину базу у средишту D. Њезин полупречник је идентичан с полупречником круга уписаног у $\triangle\ BMN$, чије су стране: u, $v=v=\sqrt{9u^2-\frac{u^2}{4}}=$ $=\frac{u}{2}\sqrt{35}$. Тражени полупречник је $r=\frac{p}{s}$, где је $p=\frac{u}{2}\cdot h=$ $=\frac{u^2}{4}\sqrt{34}$. Дакле је: $r=\frac{\frac{u^2}{4}\cdot\sqrt{34}}{\frac{u}{2}\cdot(\sqrt{35}+1)}=\frac{u}{2}\cdot\frac{(\sqrt{35}-1)\cdot\sqrt{34}}{34}$,

$r^2=\frac{u^2}{2}\cdot\frac{18-\sqrt{35}}{34}$ Према тому: $V_3=\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{u^3\cdot\sqrt{\mathbf{34}}}{\mathbf{3.34^2}}(\mathbf{19}.\sqrt{\mathbf{35}}-\mathbf{53})$.

76. *Од лима, дебљине $m=5\,mm$, а специфичне тежине $s=7{\cdot}7$, треба направити шупљу лопту, тежине $T=385{\cdot}7\,kg$. Израчунај спољашњи и унутрашњи полупречник те лопте (R, r).*

По обрасцу $T=V.s$ добиваш помоћу обрасца (111.): $T=\frac{4}{3}\pi s.(R^3-r^3)$. А према идентитету: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+$ $+xy+y^2)$ следи: $R^3-r^3=(R-r).(R^2+Rr+r^2)$. Од другога фактора одузми и додај му $3Rr$; онда је $R^3-r^3=$ $=(R-r).[(R^2-2Rr+r^2)+3Rr]=(R-r).[(R-r)^2+3Rr)$. Али: $R-r=m$; дакле: $R^3-r^3=m.[m^2+3Rr]$. Дакле је тежина: $T=\frac{4}{3}\pi sm.(m^2+3Rr)$. Одатле: $2Rr=\frac{3T-4\pi sm^3}{6\pi sm}$ .... /1/.

Квадрирај једначину: $R-r=m$, па добивени израз напиши овако: $R^2+r^2=m^2+2Rr$; додавањем сабирка $2Rr$ добиваш даље: $(R+r)^2=m^2+4Rr$. Помоћу /1/ то даје: $(R+r)^2=m^2+$

$+\frac{3T - 4m^3s\pi}{3ms\pi}\cdot$ Одатле: $R + r = \sqrt{\frac{3T - m^3s\pi}{3ms\pi}}$ ..../2/.

Сабирањем и одузимањем ове једначине са: $R - r = m$ добиваш R и r: $R = \frac{1}{2}\cdot\left(m + \sqrt{\frac{3T - m^3s\pi}{3ms\pi}}\right)$,

$r = \frac{1}{2}\cdot\left(-m + \sqrt{\frac{3T - m^3s\pi}{3ms\pi}}\right)\cdot$ Нумерички: $R = 8{\cdot}954$ dm, $r = 8{\cdot}904$ dm. Вредност корена израчунај парцијалним логаритмовањем; $\sqrt{\frac{3\,.\,385{\cdot}7 - 7{\cdot}7\,.\,0{\cdot}05^3.\pi}{3\,.\,0{\cdot}05\,.\,7{\cdot}7\,\pi}} = 17{\cdot}858.$

---

77. *Израчунај површину калоте, која се на земљи види с врха брда апсолутне висине $a = 4000$ m. Колико перцената земаљске површине износи та калота? (Полупречник земље $r = 6370283$[1] m).*

a) Имаш да најпре одредиш висину те калоте. Тај је задатак већ решен у примеру бр. 10./2; употреби и тамошњу слику. Према тамошњем решењу је: $h = \frac{ra}{a + r}$, а површина калоте: $P = \frac{2r^2a\pi}{r + a}\cdot$ Нумерички: $P = 160003{\cdot}6$ km².

b) Према обрасцу (24 а) је овде: $\frac{2r^2a\pi}{r + a} = \frac{4r^2\pi x}{100}\cdot$ Одатле: $p = x = \frac{50a}{r + a}\cdot$ Нумерички: $x = 0{\cdot}031376\,^0/_0$. — Према обрасцу (4) висина h је половина средње хармоничне пропорционале између висине брда a и земљиног полупречника.

---

78. *До које висине бисмо се морали подићи, да видимо $p\,^0/_0$ земаљске површине? Н. пр. $p = 10\,^0/_0$.*

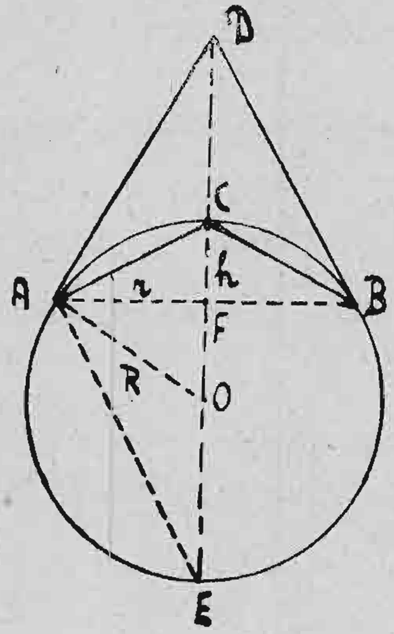
79. *Колико се перцената земаљске површине види с једне тачке на месецу, ако је средња раздаљеност месечеве површине од земље $a = 59{\cdot}27\,r$. (r = полупречник земље).*

1. Из решења претходнога задатка: $p = \frac{50a}{r + a}$; кад ову једначину решиш по a, следи: $a = \frac{pr}{50 - p}\cdot$ За $p = 10$ је: $a = \frac{r}{4} = 1592{\cdot}57$ km.

2. У решењу претходног задатка замени $a = 59{\cdot}27\,r$. Добиваш: $p = \frac{50\,.\,59{\cdot}27\,r}{60{\cdot}27\,r} = \frac{50\,.\,59{\cdot}27}{60{\cdot}27} = \mathbf{49{\cdot}17}\,\%$, т. ј. види се нешто мање од половине земљине површине.

80. *У кугли, полупречника R, задан је сегменат висине h. У тому је сегтенту уписан конус и око њега је конус описан. Нађи одношај међу запреминама ових 3 телеса.*

Уписани конус има као базу основни круг сегмента (полупречник r, сл. 43.), а теме му је у полу сегмента. Описани конус има исту базу, а изводнице његовог омотача су куглине тангенте, које додирују куглу по обиму основног сегментовог круга. Зато је: $\sphericalangle DAO = 90^{0}$. Полупречник r израчунај из правоуглог троугла CAE или из троугла AFO. Из троугла CAE је $AF^2 = CF\,.\,EF$, т. ј.: $r^2 = h\,.\,(2R - h)$. Из правоуглог $\triangle$ DAO нађи висину h_1 описаног конуса: $OA^2 = OD\,.\,OF$, т. ј.: $R^2 = (R + h_1 - h).(R - h)$. Одатле је: $h_1 = \frac{h\,.\,(2\,R - h)}{R - h}\cdot$ Онда је запремина уписаног конуса: $V_1 = \frac{r^2 \pi h}{3} = \frac{h^2\,\pi\,.\,(2\,R - h)}{3}\cdot$ Запремина сегмента: $V_2 = \frac{\pi h^2}{3}\cdot(3R - h)$. Запремина описаног конуса:



43. слика.

$V_3 = \frac{r^2 \pi h_1}{3} = \frac{h^2 \pi}{3}\cdot\frac{(2R - h)^2}{R - h}\cdot$ Размера међу запреминама:

$$V_1 : V_2 : V_3 = (2\mathrm{R} - \mathrm{h}) : (3\mathrm{R} - \mathrm{h}) : \frac{(2\mathrm{R} - \mathrm{h})^2}{\mathrm{R} - \mathrm{h}}\,.$$

81. *Колики део земаљске површине (у перцентима) обасјава пун месец, кад се налази у средњој централној раздаљености од земље $d = 60{\cdot}3\ R$ и колики део месечеве површине обасјава земља у истим приликама, ако је полупречник земље R, а месеца $r = 0{\cdot}273\ R$?*

Употреби слику 24., и нека је ту већи круг земља, а мањи месец. На земљу баца светлост онај део месечеве површине који је са стране земље, а оивичен је спољашњим двојним тангентама; његову светлост прима онај део земље, који је оивичен истим двојним тангентама. Висина осветљене калоте земљине је $h = HP = PS - HS = R - z$. Из правоуглог $\triangle ASN$ је $AS^2 = SH . SN$, т. ј. $R^2 = z . (d + x)$, где је према зад. 19.: $x = \frac{d\,r}{R - r}$. Помоћу тога је: $d + x = \frac{d\,R}{R - r}$, $R^2 = z \cdot \frac{d\,R}{R - r}$, $z = \frac{R . (R - r)}{d}$, $h = R - z = \frac{R}{d} \cdot (d - R + r)$, а површина осветљене калоте земљине: $P_1 = 2\,R\pi h = \frac{2\,R^2\pi}{d} \cdot (d - R + r)$, т. ј. $\mathbf{P_1 = 2\,R^2\pi \cdot \frac{59{\cdot}573}{60{\cdot}3}}$. Перцентуални део израчунај помоћу обрасца (24 *a*), који овде даје једначину: $2\,R^2\pi \cdot \frac{59{\cdot}573}{60{\cdot}3} = \frac{4\,R^2\pi . p}{100}$. Одатле: $p = \frac{50.58{\cdot}573}{60{\cdot}3} = \mathbf{49{\cdot}397}\,^0/_0$, т. ј. месец осветљује нешто мање од хемисфере земљине.

Висина месечеве калоте, на коју пада светлост земље је $h' = JL = JZ + ZL = r + z_1$. Из правоуглог $\triangle ZBN$ је $BL^2 = ZL . ZN$, т. ј. $r^2 = z_1 . x = z_1 . \frac{d\,r}{R - r}$. Одатле: $z_1 = \frac{r . (R - r)}{d}$, $h' = r + z_1 = \frac{r}{d} \cdot (d + R - r)$, а површина осветљене калоте: $P_2 = 2\,r\pi h' = \frac{2\,r^2\pi}{d} \cdot (d + R - r)$, т. ј. $R_2 = 2\,r^2\pi \cdot \frac{61{\cdot}027}{60{\cdot}3}$. За перцентуални део из једначине: $2\,r^2\pi \cdot \frac{61{\cdot}027}{60{\cdot}3} = \frac{4\,r^2\pi . p_1}{100}$ излази: $p_1 = \frac{50.61{\cdot}027}{60{\cdot}3} = \mathbf{50{\cdot}603}\,^0/_0$. Опажаш, да је $p + p_1 = 100$. — Први резултат потребује једну коректуру, јер *сунце* осветљује нешто мање од $50{\cdot}603\,^0/_0$ површине месечеве; тако је онај део месечеве површине, који баца фактично светлост на земљу, нешто мањи; зато је и онај део земљине површине, који прима светлост од месеца, нешто мањи од $49{\cdot}397\,^0/_0$; али је разлика незнатна.

* * *

82. *Једно биконвексно сочиво има пречник $2a = 12$ cm, дебљину у средини $b = 16$ mm, а закривљеност обих сферних површина је једнака. Израчунај тежину сочива, ако је специфична тежина стакла $s = 2{\cdot}6$.*

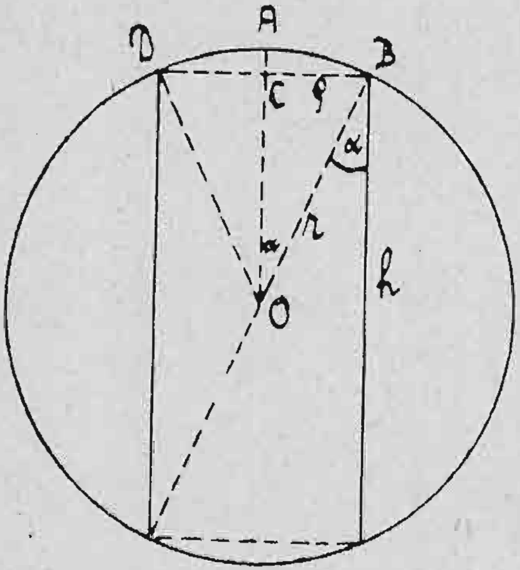
То се сочиво састоји од двају подударних куглиних сегмеполупречник a, а висина сегмента је $\frac{b}{2}$. Израчунаћеш запремину помоћу обрасца (116), па је онда тежина:

$\mathbf{T} = \frac{\pi b s}{6} \cdot \left(3\,a^2 + \frac{b^2}{4}\right)$ · Нумерички: $T = \frac{\pi.1'6.2'6}{6} \cdot (3.144 + 0'8^2)$.

$\mathbf{T} = \boldsymbol{942'36}$ **gr.**

**83. *Дрвена кугла, полупречника $r = 20$ cm, а специфичке тежине $s = 0'85$, пробушена је концентрично уздуж једнога дијаметра сврдлом, који је имао полупречник $\rho = \frac{1}{3} r\sqrt{3}$. Колико тежи та кугла након бушења? (44. сл.)*

Бушењем је кугла умањена за један прав цилиндар полупречника ρ, а висине h, и за 2 једнака сегмента, којима основни круг има полупречник $BC = \rho$, а висину $AC = v = r - \frac{h}{2}$.



44. слика.

Дакле је преостала запремина кугле: $V = \frac{4}{3} r^3\pi - V^1 - 2\,V_2$.

Запремина цилиндра $V_1 = \rho^2\pi h = 2\rho^2\pi . \sqrt{r^2 - \rho^2}$, јер је: $h = 2 . \sqrt{r^2 - \rho^2}$. По обрасцу (116) је $V_2 = \frac{\pi v}{6} \cdot (3\rho^2 + v^2)$, где је: $v = r - \frac{h}{2} = r - \sqrt{r^2 - \rho^2}$, а $v^2 = 2r^2 - \rho^2 - 2\,r . \sqrt{r^2 - \rho^2}$. Дакле је:

$$2\,V_2 = \frac{2\pi}{3} \cdot (r - \sqrt{r^2 - \rho^2}).(r^2 + \rho^2 - r.\sqrt{r^2 - \rho^2}) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot (2\,r^3 - 2\,r^2.\sqrt{r^2 - \rho^2} - \rho^2.\sqrt{r^2 - \rho^2}) = \frac{4\,r^3\pi}{4} -$$

$$- \frac{4\,r^2\pi}{3} \cdot \sqrt{r^2 - \rho^2} - \frac{2\,\rho^2\pi}{3} \cdot \sqrt{r^2 - \rho^2}.$$

Онда је $V = \frac{4}{3} r^3 \pi -$

$$- 2\rho^2\pi .\sqrt{r^2 - \rho^2} - \frac{4\,r^3\pi}{3} + \frac{4\,r^2\pi}{3} \cdot \sqrt{r^2 - \rho^2} + \frac{2\,\rho^2\pi}{3} \cdot \sqrt{r^2 - \rho^2} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot (r^2 - \rho^2) \cdot \sqrt{r^2 - \rho^2}.$$

Коначна тежина преосталог дела кугле износи: $\mathbf{T} = \frac{4\pi s}{3} \cdot (r^2 - \rho^2) \cdot \sqrt{r_2 - \rho^2}$. За $\rho = \frac{r}{3}\sqrt{3}$, као што је у овом задатку, $T = \frac{8\,r^3\pi s}{27} \cdot \sqrt{6}$. Нумерички: $\mathbf{T} = \boldsymbol{15'505}$ **kg.**

84. *Шупља кугла тежи 12 kg, а зароњена у води 5 kg. Израчунај јој дебљину стене, ако је направљена од гвожђа специфичне тежине* $s = 7{\cdot}65$.

Њезина тежина је: $T = V \,.\, s = \frac{4}{3}(R^3 - r^3) \,.\, \pi s = 12$ .... /1/.

По Архимедовом закону она изгуби у води толико од своје тежине, колика је тежина истиснуте воде; а она истисне воде $\frac{4}{3}R^3\pi$ *kg*. Дакле је: $12 - \frac{4}{3}R^3\pi = 5$. Одавле: $\frac{4}{3}R^3\pi = 7$, $R = \sqrt[3]{\frac{21}{4\pi}} = 1{\cdot}1867\ dm$. Помоћу овога лева стране једначине /1/ добива облик: $\frac{4}{3}R^3\pi s - \frac{4}{3}r^3\pi s = 7s - \frac{4}{3}r^3\pi s$, т. ј.: $7s - \frac{4}{3}r^3\pi s = 12$. Одавле: $r = \sqrt[3]{\frac{3\,.(7\,s - 12)}{4\,\pi s}} = 1{\cdot}09045\ dm$.

Дакле дебљина стене: $d = R - r = \mathbf{9{\cdot}625}$ **mm.**

---

85. *Шупља бакрена кугла* ($s = 8{\cdot}9$) *тежи* $T = 2100\ gr$, *а плива у води специфичне тежине* $s_1 = 1{\cdot}01$ *тако, да је за* $\frac{1}{4}$ *пречника у води. Израчунај јој дебљину стене.*

Ако је спољашњи полупречник R, унутрашњи r, онда је њезина тежина $T = \frac{4\pi}{3}\cdot(R^3 - r^3).s$. Ако она плива у води, то је њезина тежина једнака тежини истиснуте воде. Истиснута вода је сегмент кугле са висином $h = \frac{2R}{4} = \frac{R}{2}$. Дакле је тежина истиснуте воде, дотично тежина кугле: $T = \frac{\pi h^2}{3}\cdot(3R - h).s_1 = \frac{R^2\pi}{12}\cdot\frac{5R}{2}\cdot s_1$. Одатле: $R^3 = \frac{24\,T}{5\,\pi\,s_1}$. Замени то у први израз за T; добиваш: $\frac{4\,\pi\,s}{3}\cdot\frac{24\,T}{5\pi s_1} - \frac{4\,\pi\,s\,r^3}{3} = T$, $\frac{32\,Ts}{5\,s_1} - T = \frac{4\,r^3\pi\,s}{3}$, $96\,T s - 15\,T s_1 = 20\,r^3\pi\,s\,s_1$, $r^3 = \frac{3\,T.(32\,s - 5\,s_1)}{20\,\pi\,s\,s_1}$. Онда: $d = R - r = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{24\,T}}{\mathbf{5\,\pi\,s_1}}} - \sqrt[3]{\frac{\mathbf{3\,T.(32\,s - 5\,s_1)}}{\mathbf{20\,\pi\,s\,s_1}}}$. Нумерички резултат нађи парцијалним логаритмовањем. $R = 14{\cdot}703\ cm$, $r = 14{\cdot}613\ cm$, $\mathbf{d = 0{\cdot}9\ mm}$.

86. *Од бакра специфичне тежине $s = 8{\cdot}9$ треба направити шупљу куглу спољашњег пречника $2R = 38$ cm, која ће у морској води ($s_1 = 1{\cdot}027$) заронити управ до половине. Колико јој мора износити дебљина стене?*

По Архимедовом правилу ће та кугла пливати, када њезина тежина $T_1 = \frac{4}{3}\cdot(R^3 - r^3)\,.\,\pi s$ буде једнака тежини истиснуте морске воде $T_2 = \frac{2}{3}R^3\pi s_1$. Дакле мора бити: $\frac{4}{3}\cdot(R^3 - r^3)\,.\,\pi s = \frac{2}{3}R^3\pi s_1$ или: $2s\,.\,(R^3 - r^3) = R^3 s_1$. Дељењем са R^3 излази: $2s\cdot\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) = s_1$, а одавле $r = R\cdot\sqrt[3]{\frac{2s - s_1}{2s}}$.

Дебљина стене $m = R - r = \mathbf{R}\,.\left(\mathbf{1} - \sqrt[3]{\frac{\mathbf{2s - s_1}}{\mathbf{2s}}}\right)$. Нумерички: $\mathbf{m} = \mathbf{3{\cdot}719}$ **mm**.

87. *Масивну дрвену куглу, пречника $2r = 28$ cm, треба обложити бакреним лимом тако, да управ лебди у чистој води при температури 4° C. Коју ће дебљину имати лим? Специфичне тежине: за дрво: $s_1 = 0{\cdot}75$, за Cu: $s_2 = 8{\cdot}94$.*

Ако са T означиш тежину обложене кугле, а са T_1 тежину истиснуте воде, онда је по Архимедовом закону $T = T_1$. А како се T састоји од тежине бакра и од тежине дрвене кугле, то је $T = \frac{4}{3}\pi s_2\,.\,(R^3 - r^3) + \frac{4}{3}r^3\pi s_1$, где је R полупречник кугле, обложене бакром; $R = r + m$, ако са m означиш дебљину. Дакле је: $\frac{4}{3}r^3\pi s_1 + \frac{4}{3}\pi s_2\,.\,(R^3 - r^3) = \frac{4}{3}R^3\pi$, или: $r^3 s_1 + R^3 s_2 - r^3 s_2 = R^3$. Одатле редом: $R^3\,.\,(s_2 - 1) = r^3.(s_2 - s_1)$, $\frac{R^3}{r^3} = \frac{s_2 - s_1}{s_2 - 1}$, $R : r = \sqrt[3]{s_2 - s_1} : \sqrt[3]{s_2 - 1}$, или кад замениш: $R = r + m$, добиваш: $(r + m) : r = \sqrt[3]{s_2 - s_1} : \sqrt[3]{s_2 - 1}$ ..../1/. Кад на /1/ примениш пропорцију /5/ са —, добиваш: $m : r = (\sqrt[3]{s_2 - s_1} - \sqrt[3]{s_2 - 1}) : \sqrt{s_2 - 1}$. Одатле:

$\mathbf{m} = \mathbf{r}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{\mathbf{s_2 - s_1}}{\mathbf{s_2 - 1}}} - 1\right)$. Нумерички: $\mathbf{m} = \mathbf{1{\cdot}4542}$ **mm**. Види пример бр. 179. у I. делу.

* * *

III. ГОНИОМЕТРИЈА и ТРИГОНОМЕТРИЈА.

88. *Израчунај* $\sphericalangle \alpha$, *ако је* $tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{11}{17.5}}\cdot$ (Види пример бр. 140. у II. делу).

Подесније је за логаритмовање, ако напишеш овако: $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{11}{17.5}\cdot$ Онда је: $2\log tg\frac{\alpha}{2} = 1{\cdot}04139 - 1{\cdot}23045$

Пошто ћеш делити са 2, позитивному делу додај 20 и одузми 20.

$$\begin{array}{rr} & -\;0{\cdot}69897 \\ \hline & 1{\cdot}92942 \\ \hline +\begin{cases} 20 \\ 1{\cdot}04139 \end{cases} & -20 \\ -\;1{\cdot}92942 & \\ \hline \end{array}$$

$$2\log tg\frac{\alpha}{2} = 19{\cdot}11197 - 20$$

$$\log tg\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}55598_5 - 10$$

$$\frac{\alpha}{2} = 19^0\ 47'\ 8{\cdot}5''$$

$$\alpha = \mathbf{39^0\ 34'\ 17''}$$

89. *Израчунај вредност израза:*

$$P=\frac{3\,.\,42^2}{2\sin\beta}\cdot\sqrt[3]{\frac{14^2.\sqrt{3}.\cos^2\beta}{\sin\beta}},\ \textit{ако је}\ \beta=12^0\ 51'\ 25{\cdot}7''.$$

$\log P=\log 3+2\log 42-\log 2-\log\sin\beta+\log M$, где је M онај $\sqrt[3]{\ }$, т. ј. $M^3=\frac{14^2.\sqrt{3}.\cos^2\beta}{\sin\beta}$.

Нађи најпре *log M*.

$$\begin{array}{ll}
3\,log\,M = \Big\{ & 1{\cdot}14613 \\
2\,log\,14 & 1{\cdot}14613 \\
 & 0{\cdot}23856 \\
2\,log\,cos\,\beta \Big\{ & 9{\cdot}98897-10 \\
 & 9{\cdot}98897-10 \\
-\,log\,sin\,\beta \Big\{ & 10 \qquad -\ 9{\cdot}34713 \\
 & \qquad\qquad\quad 24 \\
\hline
 & 32{\cdot}50877-29{\cdot}34737 \\
 & -29{\cdot}34737 \\
\hline
3\,log\,M = & 3{\cdot}16140 \\
log\,M = & 1{\cdot}05380
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
log\,P = & 0{\cdot}47712 \\
2\,log\,42 \Big\{ & 1{\cdot}62325 \\
 & 1{\cdot}62325 - 0{\cdot}30103 \\
 & 10 \qquad\quad -9{\cdot}34713 \\
 & \qquad\qquad\qquad 24 \\
 & 1{\cdot}05380 \\
\hline
 & 14{\cdot}77742 - 9{\cdot}64840 \\
 & -\ 9{\cdot}64840 \\
\hline
log\,P = & 5{\cdot}12902 \\
\mathbf{P} = & \mathbf{134594}.
\end{array}$$

90. *Као примере за решавање правоуглог и равнокраког троугла* реши примере из планиметрије и стереометрије, у којима долази израчунавање углова. То су већином задаци или делови задатака, који су означени звездицом *.

91. *Нађи страну S правилнога многоугла, описаног око круга са полупречником r = 10 cm, а) са 8 страна, б) са 22 стране.*

Пошто је тај круг уписан у многоуглу, примени образац (149.); из њега следи $S = 2r.tg\,\frac{180}{n}$, т. ј. а) $S_8 = 2r.\,tg\,\frac{180}{8} =$ $= 2r\,.\,tg\,22^0\ 30'$, б) $S_{22} = 2r\,.\,tg\,\frac{180}{22} = 2r\,.\,tg\ 8^0\ 10'\ 54{\cdot}5''$.

$\mathbf{S_8} = \mathbf{8{\cdot}2842}$ **cm** (види бр. 40.), $\mathbf{S_{22}} = \mathbf{2{\cdot}8755}$ **cm.**

92. *Израчунај површину правилнога многоугла са 20 страна, кому је страна a = 10 cm (Види пример бр. 44.)*

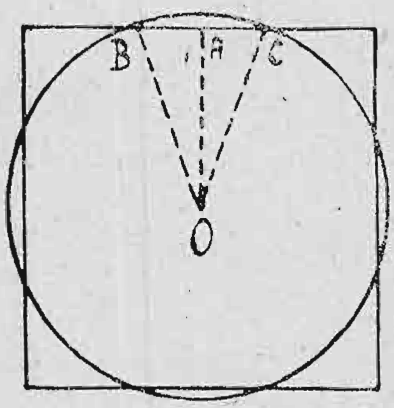
По обрасцу (150.) је $P = 5\,a^2\,.cotg\,9^0$, т. ј.: $P = 500.cotg\,9^0$
$\mathbf{P} = \mathbf{3156{\cdot}07}$ $\mathbf{cm^2}$.

93. *Квадрат, површине P = 136 cm², пресечен је кругом, кому је средиште у средишту квадрата, тако, да му је свака страна подељена на 3 једнака дела. Израчунај површину кружних сегмената изван квадрата (45. сл.)*

$r^2\pi\alpha$ OBC. Овде: $BC = \frac{a}{}$,

$BA = \frac{a}{6},\ AO = \frac{a}{2},\ tg \sphericalangle BOA = tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{BA}{AO} = \frac{1}{3};\ OB = r =$

$= \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{6}\sqrt{10},$



45. слика.

$\triangle\ OBC = \frac{a^2}{12}$ · Онда је:

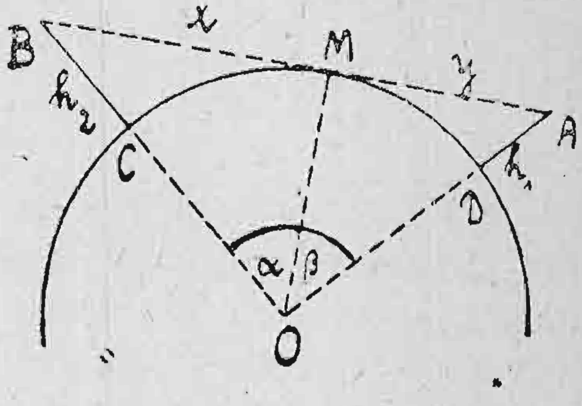
$$p = \frac{a^2}{12}\cdot\left(\frac{5\,\alpha\pi}{18.30} - 1\right) = \frac{10\,a^2}{6\,.\,12}\cdot\left(\frac{\pi\alpha}{180} - 0{\cdot}6\right)\cdot$$

Из $tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ излази: $\alpha = 36^0\ 52'\ 11'4''$.

Површина свих 4 сегмената је: $P_1 = \frac{40\,a^2}{6.\,12}\cdot\left(\frac{\pi\alpha}{180} - 0{\cdot}6\right) =$
$= \frac{5\,a^2}{9}\cdot\left(\frac{\pi\alpha}{180} - 0{\cdot}6\right)\cdot$ А јер је $a^2 = P$, то је коначно:
$\mathbf{P_1 = \frac{5P}{9}\cdot\left(\frac{\pi\alpha}{180} - 0{\cdot}6\right)}$ · **Нумерички**: $\frac{\pi\alpha}{180}$ потражи у таблицама; $\frac{\pi\alpha}{180}$ за $\alpha = 36^0\ 52'\ 11{\cdot}4''$ има вредност: 0·643705; онда је фактор у загради: $\frac{\pi\alpha}{180} - 0{\cdot}6 = 0{\cdot}043705$, а $P_1 = \frac{5.136}{9}\cdot 0{\cdot}043705$;
$\mathbf{P_1 = 3{\cdot}3021\ cm^2}$.

94. *С врха А брда, апсолутне висине $h_1 = 1875\ m$, види се управ на ивици морскога хоризонта сами врх В другога брда, висине $h_2 = 4460\ m$. Израчунај: а) директну раздаљеност врхова А и В, б) сферну раздаљеност међу њиховим осовинама у нивоу мора. Полупречник земље $r = 6370283\ m$. (сл. 46.)*

Први део решаваш планиметријски, а други планиметријски са примеиом гониометрије. — а) Троуглови BMO и AMO су правоугли, па по Питагорином правилу: $AB = x + y = \sqrt{(r+h_2)^2 - r^2} + \sqrt{(r+h_1)^2 - r^2} = \sqrt{\mathbf{h_2\,.\,(2\,r + h_2)}} + \sqrt{\mathbf{h_1\,.\,(2\,r + h_1)}}$. Величине x и y можеш израчунати и на основи теореме, да је дужина тангенте по



46. слика.

вучене на круг из једне тачке, средња геометријска пропорцијонала међу одсечцима, које круг чини на секанти, повученој истом тачком.

б) Да израчунаш сферну раздаљеност $arc\,CD$, мораш најпре израчунати углове α и β. Из споменутих правоуглих троуглова следи: $\cos\alpha = \frac{r}{r+h_2}$, $\cos\beta = \frac{r}{r+h_1}$. Одатле израчунај α и β, па је: $\mathrm{arc\,CD} = \frac{r\pi.(\alpha+\beta)}{180}$. Нумерички резултати:

$x = 238{\cdot}583$ **km**, $y = 154{\cdot}571$ **km**, $\mathrm{AB} = 393{\cdot}154$ **km**,
$\alpha = 2^0\ 8'\ 41''$, $\beta = 1^0\ 23'\ 24''$, $\mathrm{arc\,CD} = 393{\cdot}93$ **km**.

---

95. *Израчунај дијагоналу и њезин угао нагиба према бази у квадру, чија је висина $\frac{5}{6}$ дужине, а ширина $\frac{5}{9}$ дужине.*

Ако су a, b и c дужина, ширина и висина квадра, онда је према задатку: $b = \frac{5}{9}a$, $c = \frac{5}{6}a$. Према обрасцу (83.) дијагонала: $d = \sqrt{a^2 + \frac{25}{81}a^2 + \frac{25}{36}a^2} = \frac{a}{18}\cdot\sqrt{649}$. Тражени угао нагиба налази се између дијагонале d и њезине пројекције d_1 у бази; d_1 је уједно и дијагонала базе, па је:

$d_1 = \sqrt{a^2 + \frac{25}{81}a^2} = \frac{a}{9}\cdot\sqrt{106}$. Његов комплеменат је угао између дијагонале d и бочне ивице c у истом дијагоналном пресеку. Тај угао α по првом одређен је једначином:

$\cos\alpha = \frac{d_1}{d} = 2\sqrt{\frac{106}{649}}$, а по другом: $\sin\alpha = \frac{c}{d} = \frac{15}{\sqrt{649}}$. Одатле: $\alpha = \mathbf{36^0\ 4'\ 20''}$.

---

96. *Израчунај угао, под којим дијагонала коцке сече а) њезину ивицу, б) другу дијагоналу.*

а) Нека је задана ивица a те коцке. Угао између ивице и дијагонале коцке лежи у дијагоналном пресеку коцке, положеном двема наспрамним ивицама. Дијагонала, ивица и дијагонала b стране чине правоугли троуглао, чије су катете a и $b = a\sqrt{2}$; тражени угао лежи наспрам дијагонале b. Онда је

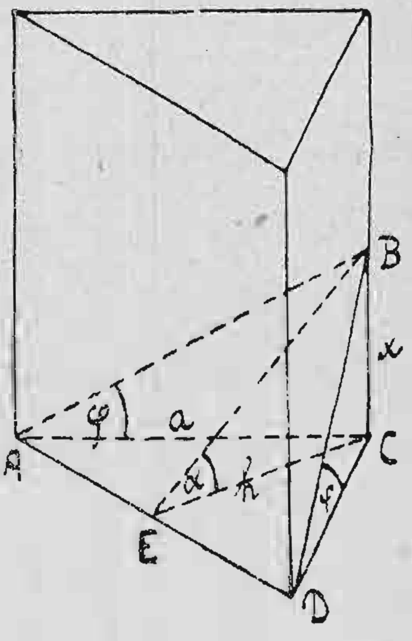
$tg\,\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$; одатле је $\alpha = \mathbf{54^0\ 44'\ 8''}$.

b) Тражени угао 2β лежи у дијагоналном пресеку коцке, са теменом у њезином средишту. Он је неједнаки угао у равнокраком троуглу, чије су једнаке стране половине дијагонала, а неједнака страна ивица a. Решавањем тога равнокраког троугла налазиш, да је $\sin\beta = \frac{a}{2} : \frac{d}{2} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Одатле: $\beta = 35^0\ 15'\ 53\cdot5''$, $\mathbf{2\beta = 70^0\ 31'\ 47''}$.

* * *

97. *Једна правилна тространа призма, којој је основна ивица a, пресечена је једном равни, која је положена једном основном ивицом, а нагнута је према бази за угао α. Израчунај: а) запремину добивене пирамиде, б) угао φ, који траг ове равни на једноме боку призме затвара са основном ивицом. Н. пр. a = 84·3, α = 53° 14′ 38″ (47. сл.)*

Угао α је угао међу том равни и базом, а мери се углом међу нормалама, подигнутим у тим равнима нормално на њихов пресек AD; то је угао међу висинама троуглова ABD и ADC. Добивена је пирамида $BACD$. *а)* Њезина запремина је: $V = \frac{B\,.\,x}{3}$, а x из правоуглог $\triangle\ BCE$ је: $x = h\,.\,tg\,\alpha = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}.\,tg\,\alpha$. Дакле: $V = \frac{1}{3}\,B\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}.\,tg\,\alpha = \frac{a^3}{8}\cdot tg\,\alpha$, јер је $ACD = B$ равностран $\triangle$.



47. слика.

б) Из правоуглог $\triangle\ ABC$ је: $tg\,\varphi = \frac{x}{a}$, а заменом вредности за x: $\mathbf{tg}\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \mathbf{tg}\,\alpha$. Нумерички: $\mathbf{V = 100259}$, $\varphi = \mathbf{49^0\ 13'\ 24''}$.

* * *

98. *Један прави конус има површину омотача $O = 432{\cdot}4\ cm^2$, страна му је $s = 38{\cdot}4\ cm$. Израчунај угао на темену његовог карактеристичног пресека.*

Из $O = r\pi s$ следи: $r = \frac{O}{\pi s}$. Угао на темену израчунај из једначине: $sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s}$, т. ј.: $\mathbf{sin}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\mathbf{O}}{\pi \mathbf{s}^2}$. Нумерички: $\frac{\alpha}{2}=5^0 21' 2''$, $\alpha=\mathbf{10^0\ 42'\ 4''}$.

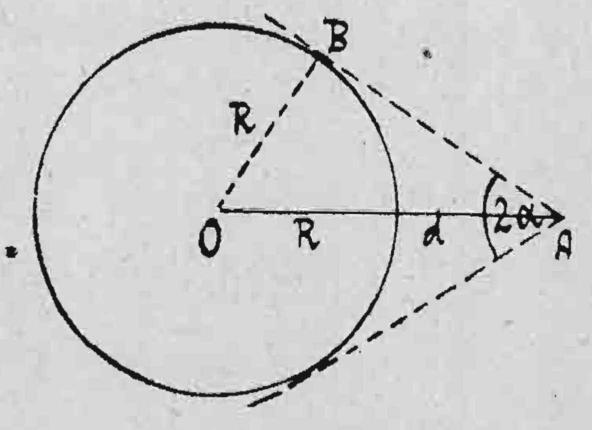
99. *У правом конусу нагнута је страна према бази за угао α. Израчунај му омотач, ако је његова запремина једнака запремини кугле полупречника R.*

Омотач је: $O=r\pi s$, где су r и s непознати. Карактеристични пресек је равнокраки троугао са странама s и $2r$, а α је угао између s и $2r$. Из тога равнокраког троугла је $h=r.tg\,\alpha$, па је онда запремина конуса $V=\frac{r^3\pi}{3}\cdot tg\,\alpha$. С друге стране је V једнак запремини кугле с полупречником R, т. ј: $\frac{r^3\pi}{3}\cdot tg\,\alpha=\frac{4}{3}R^3\pi$. Одатле је: $r=R.\sqrt[3]{4\,cotg\,\alpha}$. Из равнокраког троугла је: $s=\frac{r}{cos\,\alpha}=\frac{R}{cos\,\alpha}\cdot\sqrt[3]{4\,cotg\,\alpha}$. Дакле:

$$O=\frac{R^2\pi}{cos\,\alpha}\cdot\sqrt[3]{(4\,cotg\,\alpha)^2}=\mathbf{2\,R^2\pi}\cdot\sqrt[3]{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{sin^2\,\alpha\,.\,cos\,\alpha}}}.$$

100. *Под којим се углом види шупља гвоздена кугла, тежине $T=385·7\ kg$, направљена од лима дебљине $m=5\ mm$, из даљине $d=18·75\ m$? Специфична тежина гвожђа $s=7·7$.*

Из правоугког троугла OBA је $sin\,\alpha=\frac{R}{R+d}$ ..../1/ где је R још непознато (сл. 48). Из једначине: $T=V.s$ следи за ову лопту: $T=\frac{4}{3}\pi s.(R^3-r^3)$. Поступком израђеним у примеру бр. 76. II. дела наћи ћеш R, и то: $R=\frac{1}{2}\cdot\left(m+\sqrt{\frac{3T-\pi s m^3}{3\pi s m}}\right)$. Израчунај R нумерички и замени у /1/. Добиваш: $sin\,\alpha=\frac{8·954}{8·954+187·5}=\frac{8·954}{196·454}$, $\alpha=2^0\ 36'\ 44·6''$, $\mathbf{2\alpha=5^0\ 13'\ 29''}$. Види пример бр. 76.



48. слика.

101. *Правилну призму са 14 страна, направљену од пластичне материје, треба премесити у правилну тространу пирамиду једнаких ивица (тетраедар). Та призма има основну ивицу $a = 42\,cm$, а висина јој је равна полупречнику R круга, описаног око њезине базе. Израчунај површину те пирамиде.*

Мора да буде $V_1 = V_2$. Запремина призме је $V_1 = B.h$, где је $B = \frac{na^2}{4}\cdot cotg\,\beta$ (обр. 150.), док је $\frac{a}{2} = R.sin\,\beta$; одатле: $R = \frac{a}{2\,sin\,\beta}$. Дакле је: $V_1 = \frac{n\,a^3\,.\,cotg\,\beta}{8\,sin\,\beta}$, где је $\sphericalangle\beta = \frac{180^0}{n}$. — С друге стране је запремина тетраедра $V_2 = \frac{b^3\,.\sqrt{2}}{12}$. Из једначине $\frac{n\,a^3\,.\,cotg\,\beta}{8\,sin\,\beta} = \frac{b^3.\sqrt{2}}{12}$ добиваш: $b = a\cdot\sqrt[3]{\frac{3n\,\sqrt{2}.cos\,\beta}{4sin^2\beta}}$. Према обр. (117 а) је тражена површина: $P = b^2\,.\sqrt{3} =$ $= \frac{3\,a^2}{2\,\sin\beta}\cdot\sqrt[3]{\frac{n^2.\sqrt{3}.\cos^2\beta}{\sin\beta}}$. Нумерички: $\beta = \frac{180^0}{14} = 12^0\ 51'\ 25{\cdot}7''$, $\mathbf{P} = \mathbf{134594}\,\mathbf{cm}^2$. Види пример бр. 89. у II. делу.

———

102. *Карактеристични паралелограм једнога косога цилиндра, садржине $V = 3856{\cdot}7\ cm^3$, је ромб, који има међу странама оштри угао $\alpha = 71^0\ 15'\ 42''$. Израчунај садржину правог конуса, чији је полупречник базе страна тога ромба, а висина половина те стране.*

Карактеристични паралелограм косога цилиндра је његов пресек, положен кроз његову осовину и висину, спуштену из средишта горње базе. Запремина конуса је $V_1 = \frac{R^2\pi\,h_1}{3}$, где је $h_1 = \frac{R}{2} = \frac{a}{2} = r$, ако је r полупречник базе цилиндра; дакле је: $V_1 = \frac{4}{3}r^3\pi$. Запремина цилиндра је $V = r^2\pi h$; а h се израчунава из правоуглог троугла: $h = a\,sin\,\alpha = 2\,r\,sin\,\alpha$. Дакле је $V = 2\,r^3.sin\,\alpha$. Одатле је $r^3 = \frac{V}{2\,sin\,\alpha}$; према томе: $\mathbf{V_1} = \frac{\mathbf{2}\,V\pi}{\mathbf{3\,sin}\,\alpha}$. Нумерички: $log\,V_1 = 3{\cdot}93093$, $\mathbf{V_1} = \mathbf{85296}\ cm^3$.

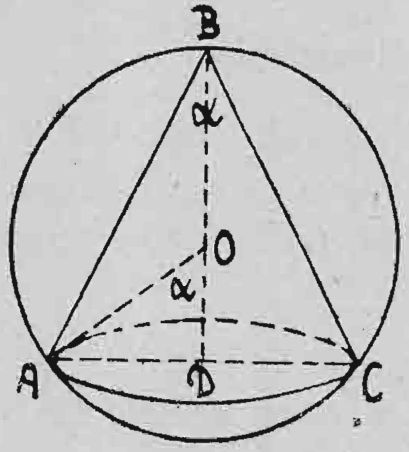
103. *Из дрвене кугле, површине $P = 795\ cm^2$, треба изрезати највећи прави конус, који треба да има на врху карактеристичног пресека угао $\alpha = 60^0\ 12'\ 57''$. Израчунај му запремину (сл. 49).*

Угао $ABC = \frac{AOC}{2} = \sphericalangle AOD$, т. ј. $AOD = \alpha$; $AO = r$, $AD =$ полупречник конусове базе $= \rho$. Запремина конуса је $V = \frac{1}{3}\rho^2\pi h$. Из троугла AOD је: $\rho = r . sin\,\alpha$, а из троугла ABD је: $h = BD = \rho . cotg\frac{\alpha}{2} = r . sin\,\alpha . cotg\frac{\alpha}{2} =$

$= 2r . sin\frac{\alpha}{2}\cdot cos\frac{\alpha}{2}\cdot cotg\frac{\alpha}{2} = 2\,r . cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Према томе је $V = \frac{2}{3}r^3\pi . sin^2\alpha . cos^2\frac{\alpha}{2}$.

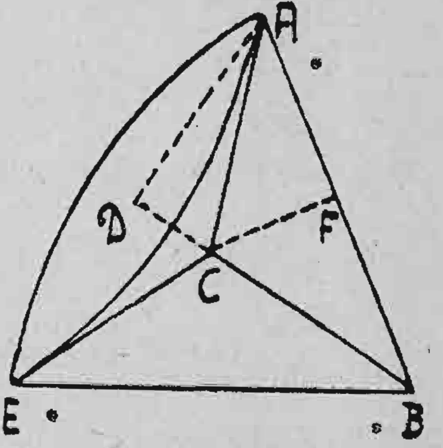
Из површине кугле је $r^2 = \frac{P}{4\pi}$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}}$, па је коначно: $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{12}\cdot\sqrt{\frac{\mathbf{P}}{\pi}}\cdot \mathbf{sin}^2\alpha . \mathbf{cos}^2\frac{\alpha}{2}$. Нумерички: $\mathbf{V} = 594{\cdot}1\ \mathbf{cm}^3$.



49. слика.

104. *Равнокраки тупоугли троугао, коме је основа a, а крак b, ротира око крака b. Израчунај запремину ротацијонога тела а) применом планиметријских образаца, б) гониометријски. Н. пр. $a = 12\ cm$, $b = 8\ cm$. (50. сл.)*

Запремина ротацијоног тела састоји се од запремине правога конуса $EBAD$, умањене за запремину правог конуса $ECAD$. Означи: $AB = a$, $AC = BC = b$, $AD = r$, $BD = h_1$, $CD = h_2$. Онда је $V = \frac{r^2\pi h_1}{3} - \frac{r^2\pi h_2}{3} = \frac{r^2\pi}{3}\cdot(h_1 - h_2) = \frac{r^2\pi b}{3}$, јер је $h_1 - h_2 = BC = b$. Полупречник базе $AD = r$ је висина троугла, спуштена на страну b, па применом обрасца (42.) налазиш: $r = \frac{2(s - b)}{b}\cdot\sqrt{s(s - a)} = \frac{a}{2b}\cdot\sqrt{2b + a) . (2\,b - a)}$. — До



50. слика.

истога резултата долазиш и *гониометријски*. Ако је $\sphericalangle ABD = \beta$, онда је из правоуглог $\triangle ABD$ полупречник $r = AB.\sin\beta = a.\sin\beta$. А из правоуглог $\triangle BCF$ је: $\cos\beta = \frac{FB}{BC} = \frac{a}{2b}$,

$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4b^2}} = \frac{1}{2b}\cdot\sqrt{(2b-a)(2b+a)}$, а $r = \frac{a}{2b}\cdot\sqrt{(2b-a)(2b+a)}$. Онда је запремина:

$V = \frac{1}{3}r^2\pi\,.\,b = \frac{a^2\pi}{12b}\cdot(2b-a).(2b+a)$. Нумерички:

$V = 168\,.\,\pi = \mathbf{527{\cdot}8\ cm^3}$. — Ако је $\sphericalangle ACB$ оштар, онда се запремина састоји од збира двају правих конуса; збир њихових висина је $h_1 + h_2 = b$, па нађени образац вреди и за такав троугао.

---

105. *Стереометријски пример бр. 83. реши гониометријски.*

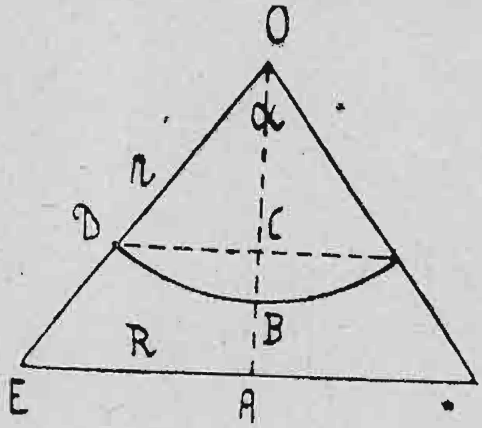
Угао DOB (види сл. 44.) означи са 2α; онда је $\sin\alpha = \frac{\rho}{r}$, $\rho = r.\sin\alpha$, $h = 2r.\cos\alpha$. Према тому запремина цилиндра износи: $V_1 = \rho^2\pi h = 2r^3\pi.\sin^2\alpha.\cos\alpha$. Висина сегмента $v = r - \frac{h}{2} = r.(1-\cos\alpha)$. Употреби са запремину сегмента образац (115), па добиваш: $V_2 = \frac{r^3\pi}{3}\cdot(1+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha).(2+\cos\alpha) = \frac{r^3\pi}{3}\cdot(2+\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$. Онда је запремина: $V = \frac{4r^3\pi}{3} - 2r^3\pi.\sin^2\alpha.\cos\alpha - \frac{2r^3\pi}{3}\cdot(2+\cos^3\alpha-3\cos\alpha) = \frac{2r^3\pi}{3}\cdot\cos\alpha.(3-3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha) = \frac{4r^3\pi}{3}\cdot\cos^3\alpha$, 1) а тежина $\mathbf{T} = \frac{4\mathbf{r}^3\pi\mathbf{s}}{3}\cdot\mathbf{cos}^3\alpha$. Пошто је $r.\cos\alpha = \frac{h}{2} = \sqrt{r^2-\rho^2}$, то је овај резултат идентичан са оним пређашњим. — Резултати: $V = \frac{4\pi}{3}\cdot(r^2-\rho^2)\cdot\sqrt{r^2-\rho^2} = \frac{4\pi}{3}.\left(\sqrt{r^2-\rho^2}\right)^3$, као и $V = \frac{4\pi}{3}\cdot(r\cos\alpha)^3$, показују да је преостала запремина равна запремини кугле, која има полупречник: $r_1 = r.\cos\alpha = \sqrt{r^2-\rho^2}$, т. ј. раван половини висине цилиндра, који настаје бушењем.

---

1) $3 - 3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 3(1-\sin^2\alpha) - \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha$

106. *Прави конус има полупречник базе $R = 12\,cm$, висину $H = 46\,cm$. Из његовог темена као средишта описана је кугла, која од конуса откида половину волумена. Нађи запремину те кугле. (51. сл.)*

$OA = H$, $BC = h$ куглиног сектора. Кугла одсеца један куглин сектор (висине h), који је према задатку половина конуса. Дакле задатак садржи једначину: $\frac{4}{3} r^3 \pi h = \frac{R^2\pi \,.\, H}{3}$, т. ј.: $4\, r^2 h = R^2 \,.\, H$ .... /1/. Ако је угао на темену карактеристичног пресека конусовог α, онда је $OC = r - h = r \,.\, cos \frac{\alpha}{2}$ Одатле $h = r . \left(1 - cos \frac{\alpha}{2}\right)$:



51. слика.

а из троугла AOE је $cos \frac{\alpha}{2} = \frac{H}{OE} = \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}}$ · Дакле је: $h = r \cdot \left(1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 - H^2}}\right) = \frac{r}{\sqrt{R^2 + H^2}} \cdot (\sqrt{R^2 + H^2} - H)$. Замени то у /1/ па добиваш: $\frac{4\, r^3}{\sqrt{R^3 + H^2}} \cdot (\sqrt{R^2 + H^2} - H) = R^2 . H$. Одатле је запремина кугле:

$$V = \frac{4\, r^3 \pi}{3} = \frac{R^2\, H\, \pi \,.\, \sqrt{R^2 + H^2}}{3 .\, \sqrt{R^2 + H^2} - H)} \cdot$$ Нумерички: $V = 214135\, cm^3$.

* * *

107. *Докажи да је*: $tg\, \delta = \frac{1 - cos\, 2\delta}{sin\, 2\delta}$.

Применом образаца (118.), (136.) и (137.) имаш:

$$\frac{1 - cos\, 2\delta}{sin\, 2\delta} = \frac{sin^2\, \delta + cos^2\, \delta + sin^2\, \delta - cos^2\, \delta}{2\, sin\, \delta . cos\, \delta} = \frac{2\, sin^2\, \delta}{2 sin \delta . cos \delta} = tg\, \delta.$$

* * *

108. *Докажи, да је*: $\frac{1 - cos\, 2\,\beta}{1 + cos\, 2\,\beta} = tg^2\, \beta$.

Применом истих образаца, или образаца (160.), имаш:

$$\frac{1 - cos\, 2\,\beta}{1 + cos\, 2\,\beta} = \frac{2\, sin^2\, \beta}{2\, cos^2 \beta} = tg^2\, \beta.$$

* * *

109. *Докажи, да је:* $\frac{2\,tg\,\gamma\,.\,cotg^2\gamma}{1+cotg^2\gamma}=sin\,2\gamma\,.$

$$\frac{2\,tg\,\gamma\,.\,cotg^2\gamma}{1+cotg^2\gamma}=\frac{2\,\frac{sin\,\gamma}{cos\gamma}\,.\,\frac{cos^2\gamma}{sin^2\gamma}}{\frac{sin^2\gamma+cos^2\gamma}{sin^2\gamma}}=\frac{2\,\frac{cos\,\gamma}{sin\,\gamma}}{\frac{1}{sin^2\gamma}}=2\,sin\,\gamma\,.\,cos\,\gamma=$$

$$=\mathbf{sin\,2\,\gamma}.$$

110. *Докажи, да је:* $\frac{2\,sin\,\gamma+sin\,2\,\gamma}{2\,sin\,\gamma-sin\,2\,\gamma}=cotg^2\frac{\gamma}{2}.$

$$\frac{2\,sin\,\gamma+sin\,2\,\gamma}{2\,sin\,\gamma-sin\,2\,\gamma}=\frac{2\,sin\,\gamma\,.(1+cos\,\gamma)}{2\,sin\,\gamma\,.(1-cos\,\gamma)}=\frac{1+cos\,\gamma}{1-cos\,\gamma}=$$

$$=\frac{2\,cos^2\frac{\gamma}{2}}{2\,sin^2\frac{\gamma}{2}}=\mathbf{cotg^2\frac{\gamma}{2}}\,.$$

111. *Ако је у једному троуглу* $\frac{cotg\,\alpha\,.\,sin\,\alpha}{sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma}=\frac{2}{3}$, *онда је* $tg\,\beta\,.\,tg\,\gamma=3$. *Докажи!*

Најпре замени: $cotg\,\alpha=\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$; онда је: $\frac{cotg\,\alpha\,.\,sin\,\alpha}{sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma}=$ $=\frac{cos\,\alpha}{sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma}=\frac{2}{3}$. У троуглу је: $\alpha=180-(\beta+\gamma)$, $cos\,\alpha=$ $=cos\,[180-(\beta+\gamma)]=-cos\,(\beta+\gamma)=sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma-cos\,\beta.cos\,\gamma$ (образац 132.). Дакле: $\frac{cos\,\alpha}{sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma}=\frac{sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma-cos\,\beta\,.\,cos\gamma}{sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma}=$ $=1-cotg\,\beta\,.\,cotg\,\gamma=\frac{2}{3}$. Из једначине: $1-cotg\,\beta\,.\,cotg\,\gamma=\frac{2}{3}$ следи: $cotg\,\beta\,.\,cotg\,\gamma=\frac{1}{3}$, и: $\mathbf{tg\,\beta\,.\,tg\,\gamma=3}$.

112. *Израз:* $\frac{c}{1-tg\,\varphi}$, *где је* $\varphi<45^\circ$, *доведи у облик подесан за логаритмовање. (Види зад. бр. 227. у I. делу).*

Замени $tg\,\varphi=\frac{sin\,\varphi}{cos\varphi}$; онда је: $\frac{c}{1-tg\,\varphi}=\frac{c\,.\,cos\,\varphi}{cos\,\varphi-sin\,\varphi}$.
Помоћу закона (126.) је $cos\,\varphi=sin\,(90-\varphi)$, па применом обрасца (155.) имаш: $sin(90-\varphi)-sin\varphi=2cos\,\frac{90-\varphi+\varphi}{2}\,.\,sin\frac{90-\varphi-\varphi}{2}=$

$= 2\cos 45^0 . \sin(45 - \varphi) = \sqrt{2} \cdot \sin(45 - \varphi)$ или $= \sqrt{2}.\cos(45 + \varphi)$.

Дакле: $\dfrac{c}{1 - tg\,\varphi} = \dfrac{c . \cos\varphi . \sqrt{2}}{2 . \sin(45 - \varphi)}$, или $= \dfrac{c . \cos\varphi . \sqrt{2}}{2\cos(45 + \varphi)}$.

113. *Докажи, да је* $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}} = tg\left(45^0 - \dfrac{\varphi}{2}\right) = cotg\left(45^0 + \dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Доказаћеш применом образаца (154.), (155.) и (127.).

$$\sqrt{\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}} = \sqrt{\frac{\sin 90^0 - \sin\varphi}{\sin 90^0 + \sin\varphi}} = \sqrt{\frac{2\cos\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)}{2\sin\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{cotg\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot tg\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)} = \sqrt{tg^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)} =$$

$$= tg\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = cotg\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Јер: $1 - \sin\varphi = \sin 90^0 - \sin\varphi = 2\cos\dfrac{90^0 + \varphi}{2} \cdot \sin\dfrac{90^0 - \varphi}{2} =$

$= 2\cos\left(45^0 + \dfrac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(45^0 - \dfrac{\varphi}{2}\right)$, и т. д.; аналогно за: $1 + \sin\varphi$; види пример бр. 130. у II. делу.

114. *Ако је у правоуглом троуглу један угао* $\alpha = 15^0$, *онда је производ катета једнак квадрату половине хипотенузе. Докажи.*

Ако су катете a, b, хипотенуза c, онда је $a = c . \sin 15^0$, $b = c . \cos 15^0$, $ab = c^2 . \sin 15^0 . \cos 15^0$. Али: $2\sin 15^0 . \cos 15^0 = \sin 30^0$. Дакле је: $ab = \dfrac{c^2}{2} \cdot \sin 30^0 = \dfrac{c^2}{4} = \left(\dfrac{c}{2}\right)^2$.

*115. *Изведи Питагорино правило из синусовога правила.*

Ако су у троуглу стране a, b, c, а углови наспрам њих α, β, γ, онда је по синусовом правилу: $a = \dfrac{c . \sin\alpha}{\sin\gamma}$, $b = \dfrac{c . \sin\beta}{\sin\gamma}$.

Квадрирај ове једначине и сабери: $a^2 + b^2 = \dfrac{c^2 . (\sin^2\alpha + \sin^2\beta)}{\sin^2\gamma}$.

Постави сада $\gamma = 90^0$, онда је: $\sin\gamma = 1$, $\sin\beta = \sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; дакле: $a^2 + b^2 = c^2$.

116. *Збир: $tg(45+\varepsilon)+tg(45-\varepsilon)$ доведи у облик, подесан за логаритмовање.*

Употребом обрасца (127.) је:

$$tg(45+\varepsilon)+tg(45-\varepsilon)=cotg(45-\varepsilon)+tg(45-\varepsilon)=$$
$$=\frac{cos(45-\varepsilon)}{sin(45-\varepsilon)}+\frac{sin(45-\varepsilon)}{cos(45-\varepsilon)}=\frac{cos^2(45-\varepsilon)+sin^2(45-\varepsilon)}{sin(45-\varepsilon).cos(45-\varepsilon)}.$$

По обрасцу (118.) је бројитељ $=1$, а именитељ по обрасцу (135.) даје: $\frac{sin\,2\,(45-\varepsilon)}{2}$. Дакле овај израз даје даље:

$$\frac{1}{\frac{sin(90-2\,\varepsilon)}{2}}=\frac{2}{cos\,2\,\varepsilon};\ \text{т. ј.}\ tg(45+\varepsilon)+tg(45-\varepsilon)=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{cos\,2\,\varepsilon}}.$$

---

117. *Докажи, да је*: $\frac{sin\,x}{x}=cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{4}\cdot cos\frac{x}{8}\cdot cos\frac{x}{16}$ ....*)

Доказ ћеш извести применом обрасца (135.). По том обрасцу је $sin\,x=2\,sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}$, а по истом обрасцу је $sin\frac{x}{2}=$ $=2\,sin\frac{x}{4}\cdot cos\frac{x}{4}$; дакле је $sin\,x=2^2.cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{4}\cdot sin\frac{x}{4}$. Ако даље примениш исти образац *n* пута на $sin\frac{x}{4}$, $sin\frac{x}{8}$, $sin\frac{x}{16}$ и т. д., добиваш:

$sin\,x=2^n.\,cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{4}\cdot cos\frac{x}{8}$ .... $cos\frac{x}{2^n}\cdot sin\frac{x}{2^n}$. Ако *n* постане врло велико, онда је $cos\frac{x}{2^n}=1$, док је: $sin\frac{x}{2^n}=\frac{x}{2^n}$, јер је код врло малених углова $sin\,x=arc\,x$. Дакле за врло велике вредности *n* производ: $2^n.\,cos\frac{x}{2^n}\cdot sin\frac{x}{2^n}$ добива вредност: $2^n.\,cos\frac{x}{2^n}\cdot sin\frac{x}{2^n}=2^n\cdot\frac{x}{2^n}=x.$

Према томе је: $sin\,x=x.\,cos\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{4}\cdot cos\frac{x}{8}\cdot cos\frac{x}{16}$ ....

т. ј.: $\frac{\mathbf{sin\,x}}{x}=\mathbf{cos}\frac{x}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{cos}\frac{x}{\mathbf{4}}\cdot\mathbf{cos}\frac{x}{\mathbf{8}}\cdot\mathbf{cos}\frac{x}{\mathbf{16}}$ .... —

118. *Реши за* I. *квадрант једначину*:

$$\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot(\cos x - \sin x).$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; раствори то на факторе према (1*a*), и извади из једначине заједнички фактор $\cos x - \sin x$:

$$(\cos x - \sin x)\cdot\left[(\cos x + \sin x) - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] = 0.$$ То даје једначине: $\cos x - \sin x = 0$ ..../1/, $\cos x + \sin x - \frac{1+\sqrt{3}}{2} = 0$ ..../2/.

Прва једначина заменом: $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ прелази у: $\cos x = \sqrt{1-\cos^2 x}$, а то даје: $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, где за I. квадрант вреди само горњи предзнак, јер су сви $\cos$ у I. квадранту позитивни. Одатле: $x_1 = \mathbf{45^0}$. — Друга једначина истом заменом прелази у облик: $\sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \cos x$, и након квадрирања и редуковања: $2\cos^2 x - (1+\sqrt{3}).\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$. Коренови су: $\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Одатле: $x_2 = \mathbf{60^0}$, $x_3 = \mathbf{30^0}$.

---

119. *Нађи, за које квадранте и за које углове у њима вреди једначина*: $10\,tg\,x - 12\,cotg\,x = 7$.

Замени: $cotg\,x = \frac{1}{tg\,x}$ и ослободи се именитеља; добиваш једначину: $10\,tg^2 x - 7\,tg\,x - 12 = 0$. Та једначина даје решења: $tg\,x_1 = +\frac{3}{2}$, $tg\,x_2 = -\frac{4}{5}$. Обзиром на знак тангенса, угао x_1 може да буде из првога или из трећега квадранта. Логаритамским путем налазиш за први квадрант: $x_1 = \mathbf{56^0\ 18'\ 36''}$. Одговарајући угао у трећем квадранту наћи ћеш помоћу једначине: $tg(180 + x_1) = tg\,x_1 = \frac{3}{2}$. Логаритмовањем: $180 + x_1 = \mathbf{236^0\ 18'\ 36''}$. — По предзнаку угао x_2 може да буде из другога и из четвртога квадранта. Решење за други квадрант наћи ћеш овако: постави $x_2 = 90 + \varepsilon$. Онда је $tg\,x_2 = tg(90 + \varepsilon) = -cotg\,\varepsilon$, т. ј. $cotg\,\varepsilon = +\frac{4}{5}$. Одатле: $\varepsilon = 51^0\ 20'\ 25''$; дакле: $x_2 = 90 + \varepsilon = \mathbf{141^0\ 20'\ 25''}$.

За IV. квадрант: постави: $x_2 = 270 + \psi$; онда $tg x_2 = tg(270 + \psi) = - cotg\,\psi$, дакле: $cotg\,\psi = + \frac{4}{5}$. Одатле: $x_2 = 270 + \psi = \boldsymbol{321^0\ 20'\ 25''}$.

---

120. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} x + y = 120^0 \\ \sin x . \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Пошто II. једначина садржи производ $\sin . \cos$, узми $\sin$ прве једначине; $\sin(x + y) = \sin 120^0$, т. ј.: $\sin x . \cos y + \cos x . \sin y = \sin 120^0 = \cos 30^0$. Замени амо вредност друге једначине па добиваш: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x . \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Одатле: $\cos x . \sin y = 0$. То даје две могућности: $\cos x = 0$ и $\sin y = 0$. Ако је $\cos x = 0$, онда $x_1 = \boldsymbol{90^0}$. Замени то у другу једначину, па добиваш: $\sin 90^0 . \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Одатле: $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. ј. $y_1 = \boldsymbol{30^0}$. — Ако је $\sin y = 0$, онда $y_2 = 0^0$; друга једначина даје заменом: $\sin x . \cos 0^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. ј.: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Обзиром на прву једначину то даје: $x_2 = \boldsymbol{120^0}$.

---

121. *Реши систем једначина:* $\begin{cases} x + y = 120^0 \\ \sin x . \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Систем је сличан претходному; али ради производа у левој страни друге једначине узми од прве једначине $\cos$, т. ј. $\cos(x + y) = \cos 120^0 = - \sin 30^0$. Одатле: $\cos x . \cos y - \sin x . \sin y = - \frac{1}{2}$. Замени вредност друге једначине, па добиваш: $\cos x . \cos y - \frac{1}{2} = - \frac{1}{2}$, т. ј.: $\cos x . \cos y = 0$. То даје опет 2 једначине; $\cos x = 0$ и $\cos y = 0$. Ако је $\cos x = 0$, онда $x = 90^0$, а из прве или из друге: $y = 30^0$. Исто тако: $\cos y = 0$ даје: $y = \boldsymbol{90^0}$, $x = \boldsymbol{30^0}$.

---

122. *Нађи у I. квадранту углове, за које вреде једначине:*

$$2^{2.(\sin x + \sin y)} = 4 \quad \text{и:} \quad 4^{5.(\sin^2 x - \sin^2 y)} = 0{\cdot}25.$$

Овај систем даде се приказати овако: $4^{\sin x + \sin y} = 4^1$, $4^{5.(\sin^2 x - \sin^2 y)} = 4^{-1}$. Од

$$\left.\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 1 \\ 5.(\sin^2 x - \sin^2 y) &= -1 \end{aligned}\right\}$$ ..../1/. Друга једначина система /1/ даје даље: $(\sin x - \sin y).(\sin x + \sin y) = -\frac{1}{5}$, а помоћу прве од једначина /1/ следи онда: $\sin x - \sin y = -\frac{1}{5}$. Ова једначина са првом из система /1/ даје нови систем:

$$\left\{\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 1 \\ \sin x - \sin y &= -\frac{1}{5} \end{aligned}\right.$$ Решење: $\sin x = \frac{2}{5}$, $\sin y = \frac{3}{5}$, $x = \mathbf{23^0\ 34'\ 42''}$, $y = \mathbf{36^0\ 52'\ 11''}$.

---

123. *Од дрвене праве купе, чија је страна $b = 24{\cdot}5\ cm$, а угао међу странама на темену карактеристичнога пресека $\psi = 63^0\ 16'$ треба истесати највећу куглу. Израчунај тежину те кугле ($s = 0{\cdot}85$).*

Послужи се код решавања сликом 22. и задатком 16. јер сл. 22. предочује карактеристични пресек те купе и те кугле. — За полупречник кугле налазиш израз:

$r = \frac{a}{2\,(2b+a)} \cdot \sqrt{(2b-a).(2b+a)}$. С друге стране је:

$\frac{a}{2} = b.\sin\frac{\psi}{2}$, $a = 2b.\sin\frac{\psi}{2}$, па помоћу тога r прелази у облик:

$$r = \frac{b.\sin\frac{\psi}{2}.\cos\frac{\psi}{2}}{1+\sin\frac{\psi}{2}} = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sin\psi}{1+\sin\frac{\psi}{2}}.$$ Именитељ можеш даље трансформирати овако: $1 + \sin\frac{\psi}{2} = \sin 90^0 + \sin\frac{\psi}{2}$, а то помоћу обрасца (154.) даје: $= 2\sin\left(45 + \frac{\psi}{4}\right) \cdot \cos\left(45 - \frac{\psi}{2}\right) =$

$= 2\sin^2\left(45 + \frac{\psi}{4}\right)$. Тако је $r = \frac{b}{4} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin^2\left(45 + \frac{\psi}{4}\right)}$. Тежина кугле је:

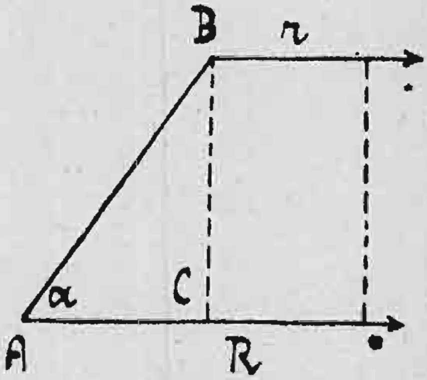
$T = \frac{4}{3} r^3 \pi s$, т. ј. $\mathrm{T} = \frac{b^3 \pi s}{48} \cdot \frac{\sin^3\psi}{\sin^6\left(45 + \frac{\psi}{4}\right)}$. Нумерички:

T = *1316·94* gr.

124. *Од правог прикраћеног конуса задана је страна $s=42$ cm, површина плашта $P=87\cdot34\ cm^2$ и угао нагиба стране према основи $\alpha=52^0\ 28'\ 14''$. Израчунај му запремину. (Сл. 52.).*

Запремина је: $V=\frac{\pi h}{3}\cdot(R^2+Rr+r^2)=\frac{\pi h}{3}\cdot[(R+r)^2-Rr]$.

Из омотача је: $R+r=\frac{O}{s\pi}$, $(R+r)^2=\frac{O^2}{s^2\pi^2}$. У правоуглом троуглу ABC је $AC=R-r$, $AB=s$, $\sphericalangle BAC=\alpha$, $BC=h$, па је: $R-r==s\,.\cos\alpha$, $h=s\,.\sin\alpha$. Из једначина: $R+r=\frac{O}{s\pi}$, $R-r=s\,.\cos\alpha$ излази сумирањем и одузимањем: $2R=\frac{O}{s\pi}++s.\cos\alpha$, $2r=\frac{O}{s\pi}-s.\cos\alpha$, а одатле: $Rr=\frac{O^2}{4s^2\pi^2}-\frac{s^2.\cos^2\alpha}{4}$. Помоћу тога је: $R^2+Rr+r^2==(R+r)^2-Rr=\frac{3O^2}{4s^2\pi^2}+\frac{s^2.\cos^2\alpha}{4}$. Дакле је запремина: $V=\frac{\pi\ s.\sin\alpha}{12}\cdot\left(\frac{3.0^2}{s^2\pi^2}+s^2.\cos^2\alpha\right)$. Нумерички: $\frac{3.O^2}{s^2\pi^2}=144\cdot147$, $s^2.\cos^2\alpha=654\cdot6$, $\mathbf{V=6651\ cm^3}$.

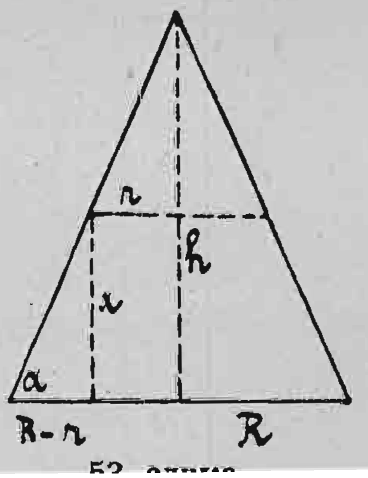


52. слика.

---

125. *Прав конус од дрва ($s=0\cdot65$) тежи $T=35\ kg$, а изводница му са полупречником затвара угао $\delta=75^0\ 38'$. Тај конус треба презати паралелно са основом тако, да добивени прави прикраћени конус буде имао за половину мању површину од заданог конуса. Израчунај полупречник пресека и његову висину над базом. (53. сл.)*

Означи полупречник конуса са R, пресека са r, висину конуса са h, висину прикраћеног конуса са x, страну конуса са a, страну (изводницу) прикраћеног конуса са b. Страна конуса $a=\frac{R}{\cos\delta}$, дакле је његова површина $P=R\pi.\left(R+\frac{R}{\cos\delta}\right)==\frac{R^2\pi}{\cos\delta}\cdot(1+\cos\delta)$. ..../1/. Страна прикраћеног конуса је: $b=\frac{R-r}{\cos\delta}$; дакле је његова површина: $P_1=R^2\pi+r^2\pi+$



53. слика

$$+\frac{(R+r).(R-r)\pi}{\cos\delta} = \frac{R^2\pi}{\cos\delta}\cdot(1+\cos\delta) - \frac{r^2\pi}{\cos\delta}\cdot(1-\cos\delta) \cdots /2/$$

А како је $P = 2\,P_1$, то имаш помоћу /1/ и /2/ једначину:

$$\frac{R^2\pi}{\cos\delta}\cdot(1+\cos\delta) = \frac{2\,R^2\pi}{\cos\delta}\cdot(1+\cos\delta) - \frac{2\,r^2\pi}{\cos\delta}\cdot(1-\cos\delta).$$

Одатле: $2\,R^2.\cos^2\frac{\delta}{2} = 4\,r^2.\sin^2\frac{\delta}{2}$ · Одатле: $r = \frac{R}{2}\cdot\sqrt{2}.\,\mathrm{cotg}\,\frac{\delta}{2}$ ·

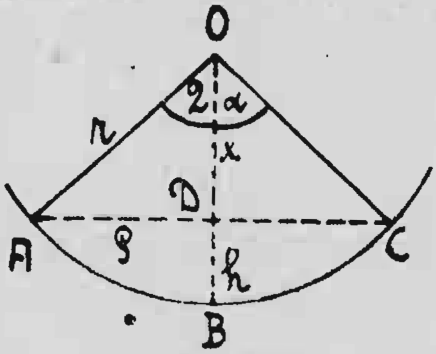
Запремина конуса је $V = \frac{R^3\pi}{3}\cdot tg\,\delta$, јер је $h = R\,.\,tg\,\delta$. Одатле: $R = \sqrt[3]{\frac{3\,V}{\pi}}\cdot \mathrm{cotg}\delta = \sqrt[3]{\frac{3T}{\pi\,.\,s}}\cdot \mathrm{cotg}\,\delta$ · Дакле:

$$\mathbf{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\,\mathrm{cotg}\,\frac{\delta}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{3\,T}{\pi\,s}}\cdot\mathrm{cotg}\,\delta,$$

$$x = \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{2}.\,\mathrm{cotg}\,\frac{\delta}{2}\right).\mathrm{tg}\,\delta.\sqrt[3]{\frac{3\,T}{s\pi}}\cdot\mathrm{cotg}\,\delta.$$

---

126. *Нађи централни угао 2α у сектору кугле, чија је површина једнака површини полукугле. Задан полупречник r кугле .(54. сл.)*



54. слика.

Површина сектора се састоји од омотача једнога правог конуса (страна $s = r$, полупречник базе $= \rho$) и од једне калоте. Његова површина је $P = O + K = \rho\pi\,r + 2\,r\pi\,h$, где је $h = r - x$. Решавањем правоуглог троугла налазиш: $\rho = r\,.\sin\alpha$, $x = r\,.\cos\alpha$. Дакле $P = r^2\pi\,.\sin\alpha + 2\,r^2\pi\,.\,(1-\cos\alpha)$. Та површина мора бити једнака површини полукугле, т. ј.: $r^2\pi\,.\sin\alpha + 2\,r^2\pi\,.\,(1-\cos\alpha) = 2\,r^2\pi$. Након краћења и редуковања то даје једначину: $\sin\alpha = 2\cos\alpha$ или $tg\,\alpha = 2$. Одатле $\alpha = 63^0\ 33'\ 50''$, а централни угао:

$\boldsymbol{2\,\alpha = 127^0\ 7'\ 40''}$.

---

127. *Нађи запремину сектора кугле, полупречника r, који има у карактеристичном пресеку средишњи угао 2ε. Н. пр. $r = 7{\cdot}25\ cm$, $2\varepsilon = 53^0\ 11'\ 58''$ (54. сл.).*

$V = \frac{2}{3}\,r^2\pi\,h$; $h = BD = r - OD$, а $OD = OA\,.\cos\varepsilon =$

$= r . \cos\varepsilon$. Дакле: $h = r - r.\cos\varepsilon = r.(1-\cos\varepsilon) = 2\,r.\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$ [по обрасцу (160)], $\mathbf{V} = \frac{4}{3}\mathbf{r}^3\,\pi.\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$. Нумерички: $\mathbf{V} = \mathbf{84{\cdot}482\,cm^3}$.

---

128. *Две праве железничке линије секу се у тачки А под углом $2\psi = 38^0\ 26'$. Ради олакшања промета треба их спојити кружном линијом, конвексном према А, која има полупречник кривине $R = 328\,m$. У којој даљини од А треба да почиње кружна линија и колико износи њезина најмања раздаљеност од А? Израчунај и дужину кружне линије.*

Послужи се 47. сликом; тангенте приказују праве железничке линије, а унутрашњи лук кружну линију. Из $\triangle$ *OBA* је $x = AB = \mathbf{R}.\mathbf{cotg}\,\psi$. Најмања раздаљеност d излази из истога троугла. Јер је: $R = (R + d).\sin\psi$; одатле:

$$d = \frac{R.(1-\sin\psi)}{\sin\psi} = \frac{2\,\mathbf{R}.\sin^2\left(45 - \frac{\psi}{2}\right)^{1)}}{\sin\psi}.$$

Дужина кружне линије је лук круга, кому припада централни $\sphericalangle\,\beta = 180 - 2\psi$, т. ј. $l = \frac{r\pi}{180}\cdot(180 - 2\psi)$. Нумерички: $x = \mathbf{941\,m}$, $\mathbf{d} = \mathbf{668{\cdot}53\,m}$, $\mathbf{l} = \mathbf{810{\cdot}42\,m}$.

---

129. *Централна раздаљина двају кругова је d, спољашње заједничке тангенте затварају међу собом угао 2δ, а унутрашње 2β. Израчунај полупречнике тих кругова.*

Послужи се сликом 24. Полупречник већега круга означи са R, полупречник мањега са r, $\sphericalangle ANS = 2\delta$, $\sphericalangle CMS = \sphericalangle DMN = 2\beta$. — Из сличних правоуглих троуглова $SAN \sim ZBN$ следи пропорција: $R : r = (d + x) : x$, где је $x = ZN$. А из правоуглог $\triangle\ BZN$ је $x = \frac{r}{\sin\delta}$. Дакле: $R : r = \left(d + \frac{r}{\sin\delta}\right) : \frac{r}{\sin\delta}$. Одатле је: $R = d.\sin\delta + r$ ..../1/. — Из сличних $\triangle\ MCS \sim MDZ$ следи пропорција: $R : r = SM : (d - SM)$, а из правоуглог $\triangle\ MCS$ излази: $SM = \frac{R}{\sin\beta}$. Дакле је: $R : r =$

---

1) Види образац (159.)

$= \frac{R}{sin\,\beta} : \left(d - \frac{R}{sin\,\beta}\right)\cdot$ Одатле: $r = d\,sin\,\beta - R$ ..../2/. Замени то у /1/, па добиваш: $R = d\,sin\,\delta + d\,sin\,\beta - R$, т. ј.:

$$\mathbf{R} = \frac{d}{2}\cdot(sin\,\delta + sin\,\beta) = \mathbf{d.sin}\,\frac{\beta+\delta}{2}\cdot \mathbf{cos}\,\frac{\beta-\delta}{2}\cdot$$ Помоћу тога:

$$\mathbf{r} = \frac{d}{2}\cdot(sin\,\beta - sin\,\delta) = \mathbf{d.cos}\,\frac{\beta+\delta}{2}\cdot \mathbf{sin}\,\frac{\beta-\delta}{2}\,.$$

130. *Правоугли троугао ротира око катете a. Израчунај површину и запремину ротацијонога тела, ако је задан производ катете a са хипотенузом $p = ac = 289$ и угао ψ наспрам катете a ($\psi = 39^0\ 16'$).*

1. Ротацијоно тело је прави конус, коме је полупречник базе катета b, висина катета a, страна хипотенуза c. Његова је површина $P = b\pi\,.(b + c)$. Помоћу једначине $a = c\,.\,sin\,\psi$ елиминирај a из $p = ac$. Добиваш: $p = c^2\,.\,sin\,\psi$; одатле: $c = \sqrt{\frac{p}{sin\,\psi}}\cdot$ Катета b је $b = c\,.\,cos\,\psi = cos\,\psi\,.\sqrt{\frac{p}{sin\,\psi}}\cdot$ Према тому је површина: $P = \pi\,.\,cos\,\psi\,.\sqrt{\frac{p}{sin\,\psi}}\cdot\left(cos\,\psi.\sqrt{\frac{p}{sin\,\psi}} + \right.$ $\left. + \sqrt{\frac{p}{sin\,\psi}}\right) = p\,\pi\,.\,cotg\,\psi\,.\,(cos\,\psi + 1) = \mathbf{2\,p\pi\,.\,cotg\,\psi\,.\,cos^2\,\frac{\psi}{2}}\,.$ [помоћу обрасца (160.)].

2. Запремина је $V = \frac{\pi}{3}\cdot b^2 a$. Из $p = ac$ елиминирај c једначином: $c = \frac{a}{sin\,\psi}\cdot$ Добиваш: $p = \frac{a^2}{sin\,\psi}$, а одатле: $a = \sqrt{p\,.sin\,\psi}$, $b = a\,.\,cotg\,\psi = cotg\,\psi\,.\,\sqrt{p\,.sin\,\psi}$, $b^2 = p\,.sin\psi\,.cotg^2\psi$. Одатле је запремина: $\mathbf{V} = \frac{\pi}{3}\cdot \mathbf{p\,.\,sin\,\psi\,.\,cotg^2\,\psi\,.\,\sqrt{p\,.sin\,\psi}}$. Нумерички: $\mathbf{P} = \boldsymbol{1881{\cdot}61}$, $\mathbf{V} = \boldsymbol{3876{\cdot}4}$.

131. *Израчунај стране у правоуглом троуглу, ако му је задан обим o и угао β. Н. пр. $o = 79$, $\beta = 56^0\ 15'$.*

$o = a + b + c = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$. А гониометријско решавање тога троугла даје: $b = a.tg\,\beta$; дакле је: $o = a.(tg\,\beta + 1) +$ $+ \sqrt{a^2.(tg^2\,\beta + 1)} = a.(1 + tg\,\beta) + a.\sqrt{\frac{sin^2\beta + cos^2\beta}{cos^2\beta}} =$

$= a.(1 + tg\,\beta) + \frac{a}{cos\,\beta} = \frac{a}{cos\,\beta}\cdot(cos\,\beta.tg\,\beta + cos\,\beta + 1) =$

$= \frac{a}{\cos\beta}\cdot(\sin\beta+\cos\beta+1)$; применом обрасца (158.) добиваш коначно: $\frac{a}{\cos\beta}\cdot[1+\sqrt{2}\,.\sin(45+\beta)]=o$. Одавле:

$a=\frac{o\,.\cos\beta}{1+\sqrt{2}\,.\sin(45+\beta)}$, $b=\frac{o\,.\sin\beta}{1+\sqrt{2}\,.\sin(45+\beta)}$. Напокон: $c=\frac{b}{\sin\beta}$, т. ј.: $c=\frac{o}{1+\sqrt{2}\,.\sin(45+\beta)}$. Нумерички: **$b=27{\cdot}519$, $a=18{\cdot}387$, $c=33{\cdot}096$.**

---

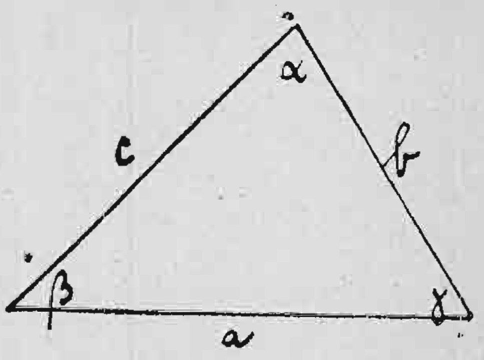
132. *Докажи ово: Ако међу двама угловима у троуглу постоји размера: $\sin\alpha:\sin\beta=\cos\beta:\cos\alpha$, онда је тај троугао равнокрак.*

Ако је: $\sin\alpha:\sin\beta=\cos\beta:\cos\alpha$, онда је $2\sin\alpha\,.\cos\alpha=2\sin\beta\,.\cos\beta$, т. ј. $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$. Одатле $2\alpha=2\beta$ и $\alpha=\beta$, т. ј. троугао је *равнокрак.*

---

133. *У троуглу је задана страна a, углови γ и β. Израчунај му стране и површину. Троугао је задан по I. правилу подударности. (55. сл.)*

По синусном правилу; $b:a=\sin\beta:\sin\alpha$, $c:a=\sin\gamma:\sin\alpha$. Одатле;



55. слика.

$b=\frac{a\,.\sin\beta}{\sin\alpha}$, $c=\frac{a\,.\sin\gamma}{\sin\alpha}$; а како је $\alpha=180-(\beta+\gamma)$, $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)$, то је коначно:

$b=\frac{a\,.\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$, $c=\frac{a\,.\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$.

Површина $P=\frac{a}{2}\cdot h$; из △ ABD је: $h=c\,.\sin\beta$, т. ј. $h=\frac{a\,.\sin\beta\,.\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$, дакле је површина:

$P=\frac{a^2\,.\sin\beta\,.\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$.

---

134. *У троуглу су задане стране a и b и угао међу њима γ. Израчунај му трећу страну, углове и површину. Троугао је задан по другом правилу подударности. (Сл. 55.)*

1. По тангенсову правилу:

$(a+b):(a-b)=tg\frac{\alpha+\beta}{2}:tg\frac{\alpha-\beta}{2}$; или, како је: $\alpha+\beta=180-\gamma$, $\frac{\alpha+\beta}{2}=90-\frac{\gamma}{2}$, то је: $tg\frac{\alpha+\beta}{2}=cotg\frac{\gamma}{2}$; дакле: $(a+b):(a-b)=cotg\frac{\gamma}{2}:tg\frac{\alpha-\beta}{2}$. Одатле: $tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot cotg\frac{\gamma}{2}$. Логаритмовањем ћеш одатле наћи $\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=m^0$. А по пређашњем је: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90-\frac{\gamma}{2}$. Сабирањем и одузимањем добиваш из ових 2 једначина: $\alpha=m^0+90^0-\frac{\gamma}{2}$, $\beta=90^0-m^0-\frac{\gamma}{2}$. Онда по синусовом правилу: $a:c=sin\,\alpha:sin\,\gamma$, $c=\frac{a.\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Површина: $P=\frac{a.h}{2}$, а како је $h=b.sin\,\gamma$, то је $P=\frac{a.b}{2}\cdot\sin\gamma$.

2. *По Молвајдовим једначинама:*

$$c.sin\frac{\alpha-\beta}{2}=(a-b).cos\frac{\gamma}{2},\quad c.cos\frac{\alpha-\beta}{2}=(a+b).sin\frac{\gamma}{2}.$$

Дељењем једначина добиваш претходни образац за $tg\frac{\alpha-\beta}{2}$, из кога ћеш израчунати $\frac{\alpha-\beta}{2}$, α, β. Онда из прве једначине: $c=(a-b)\cdot\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$. Овај је начин краћи.

3. Да израчунаш *саму трећу страну* употреби *козинусово* (*Карноово*) *правило*: $c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos\gamma$, или, ради логаритмовања *његову трансформацију*: $c=\frac{a-b}{\cos\varphi}$, где је помоћни угао φ задан једначином: $tg^2\varphi=\frac{4\,ab\,.\sin^2\frac{\gamma}{2}}{(a-b)^2}$.

---

135. *У троуглу су задане две стране a и b ($a>b$) и угао α наспрам веће стране a. Израчунај му углове, трећу страну и површину. Троугао је задан по трећем правилу подударности.* (*сл. 55.*)

По синусном правилу: $a:b=sin\,\alpha:sin\,\beta$; одатле:

$\sin\beta = \frac{b\,.\,\sin\alpha}{a}\cdot$ Одавле налазиш β, а γ из: $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$.

Трећу страну c израчунај опет по синусном правилу:
$c = \frac{a\,.\,\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot$ Површина се може израчунати или према примеру 133. или према 134. Према 133.: $P = \frac{a}{2}\cdot h$ где је $h = c\,.\,\sin\beta = \frac{a\,.\,\sin\beta\,.\,\sin\gamma}{\sin\alpha}$; тако је: $P = \frac{a^2\,.\,\sin\gamma\,.\,\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{a^2\sin\beta\,.\,\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}\cdot$ — Према 134.: $P = \frac{a\,.\,b}{2}\cdot\sin\gamma = \frac{a\,.\,b}{2}\cdot\sin(\alpha+\beta)$.

* * *

136. *Нађи углове у троуглу, који има стране:* $a = 16{\cdot}8$, $b = 23{\cdot}4$, $c = 20{\cdot}9$.

Троугао је задан по IV. правилу подударности. Употреби обрасце (173.). Заменом добијеш: $s = 30{\cdot}55$, $s - a = 13{\cdot}75$, и т. д. Резултат: $\alpha = \mathbf{44^0\ 7'\ 28''}$, $\beta = \mathbf{75^0\ 51'\ 53''}$, $\gamma = \mathbf{60^0\ 0'\ 39''}$. —

Површина по Хероновом обрасцу. — Израчунавање углова можеш узети по ма којем од образаца (170) — (173). По овом последњем је обичније.

* * *

137. *Углови у троуглу односе се као 5 : 7 : 11. Израчунај му стране, ако је једна страна $a = 50$ cm.*

Углови $\alpha : \beta : \gamma = 5 : 7 : 11$. Постави $\alpha = 5x$, $\beta = 7x$, $\gamma = 11x$; онда из једначине: $5x + 7x + 11x = 180^0$ следи: $x = 7^0\ 49'\ 33{\cdot}9''$, $\alpha = 39^0\ 7'\ 49{\cdot}5''$, $\beta = 54^0\ 46'\ 57{\cdot}3''$, $\gamma = 86^0\ 5'\ 13{\cdot}2''$.

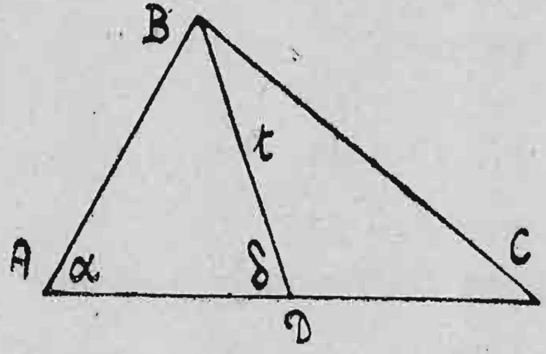
Стране ћеш израчунати синусовим правилом: $b = \frac{a\,.\,\sin\beta}{\sin\alpha}$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot$ Нумерички: $b = \mathbf{64{\cdot}72}$ **cm**, $c = \mathbf{79{\cdot}04}$ **cm**.

* * *

138. *У троуглу ABC задане су све 3 стране: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Израчунај му дужину тежишне (средње) линије, спуштене из темена B, и раздаљеност тежишта од B.* Види планиметријски задатак бр. 22. (Сл. 56.).

Нека је у слици тежишна линија $AB = t$, оштри угао

$ADB = \delta$. Пошто је $AD = CD = \frac{1}{2} b$, то је по косинусовом правилу из $\triangle$ ABD: $c^2 = t^2 + \frac{b^2}{4} - bt.\cos\delta$, а из троугла BDC, где је $\sphericalangle BDC = 180 - \delta$: $a^2 = t^2 + \frac{b^2}{4} + bt.\cos\delta$. Сабирањем ових 2 једначина добиваш: $a^2 + c^2 = 2t^2 + \frac{b^2}{2}$. Одатле:



56. слика.

$$t^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - c^2}{4},$$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}.$$ Даљина тежишта од темена B је:

$$d = \frac{2}{3} t = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}.$$ Или; из троугла ABD је по косинусовом правилу: $t^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} - bc\cos\alpha = c^2 + \frac{b^2}{4} -$ $- bc.\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. Замени амо вредности из образаца (170.) и (171.), па добиваш: $t^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} + (s - b).(s - c) - s.(s - a)$, где је $s = \frac{a + b + c}{2}$, $s - a = \frac{b + c - a}{2}$, $s - b = \frac{a + c - b}{2}$, $s - c = \frac{a + b - c}{2}$, $(s - b).(s - c) = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4}$, $s.(s - a) = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{4}$. Кад ово замениш, добиваш опет горњи резултат.

139. *Један равнокраки троугао има основу $a = 24\,cm$, а угао на њој $\beta = \gamma = 57^0\ 32'$. Овому је троуглу једнак један разнострани троугао, коме је једна страна $d = 43\,cm$, а угао на њој $\varphi = 49^0\ 36'$. Израчунај углове и стране разностраног троугла.*

Површина равнокраког троугла је: $P_1 = \frac{a^2}{4} \cdot tg\,\beta$. Означи у разностраном троуглу наспрамне стране и углове: d, δ; e, ε; f, φ, онда је његова површина: $P_2 = \frac{ed}{2} \cdot \sin\varphi$. Из једначине: $\frac{ed}{2}\cdot sin\,\varphi=\frac{a^2}{4}\cdot tg\,\beta$ следи онда: $e=\frac{a^2\,.\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\,d.\,\sin\varphi}$, $e=$ ***13·823*** *cm*. Сада је разнострани троугао задан по II. правилу подударности, па га решавај даље Молвајдовим једначинама. Из количника тих једначина добиваш: $cotg\,\frac{\delta-\varepsilon}{2}=$ $=\frac{d+e}{d-e}\cdot tg\,\frac{\varphi}{2}$. Заменом вредности добиваш: $\frac{\delta}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=48^0\ 1'$; а с друге стране $\frac{\delta+\varepsilon}{2}=90-\frac{\varphi}{2}=65^0\ 12'$. Из ових 2 једначина сабирањем и одузимањем излази: $\delta=$ ***113⁰ 13'***, $\varepsilon=$ ***17⁰ 11'***. Страна *f* излази из једне Молвајдове једначине, н. пр. из прве: $\mathbf{f}=\frac{(\mathrm{d}+\mathrm{e})\,.\,\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\delta-\varepsilon}{2}}$, т. ј.: $\mathbf{f}=$ ***35·63*** *cm*.

---

140. *У трапезу, заданом у планиметријском примеру бр. 31., израчунај унутрашње углове.*

Из сл. 28. лако видиш следећу везу између углова трапеза и углова троугла *CDE*: $\sphericalangle BAD=\sphericalangle CED=\alpha$, $\sphericalangle ABC=$ $=\beta=180-\alpha$, $\sphericalangle CDA=\delta$, $\sphericalangle BCD=180-\delta$. Углове α и δ израчунај по обрасцу (173.) из $\triangle$ *CDE*. Добиваш: $tg\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)\,.\,(s-m)}{s\,.\,(s-d)}}$, $tg\,\frac{\delta}{2}=\sqrt{\frac{(s-d)\,.(s-m)}{s\,.\,(s-c)}}$, где је $s=\frac{a+c+d-b}{2}$, $s-c=\frac{a+d-(b+c)}{2}$, $s-d=\frac{a+c-(b+d)}{2}$, $s-m=\frac{b+c+d-a}{2}$. Нумерички $tg\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{11}{17.5}}$, $tg\,\frac{\delta}{2}=\sqrt{\frac{5\,.11}{17}}$, $\alpha=\sphericalangle CED=$ ***39⁰ 34' 17''***, $\beta=\sphericalangle ABC=$ ***140⁰ 25' 43''***, $\gamma=\sphericalangle BCD=$ ***58⁰ 8' 42''***, $\delta=$ ***121⁰ 51' 18''***. — Види задатак бр. 88. у II. делу.

---

141. *Ако су у троуглу стране a, b, c, углови* α, β, γ, *повр- P, онда је:* $P=\frac{abc}{s}\cdot cos\,\frac{\alpha}{2}\cdot cos\,\frac{\beta}{2}\cdot cos\,\frac{\gamma}{2}$, *где је:* $2s=a+b+c$. *Докажи!*

По обрасцу (171.)

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s\,.\,(s-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s\,.\,(s-b)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{s\,.\,(s-c)}{ab}}=$$

$$=\sqrt{\frac{s^3\,.\,(s-a)\,.\,(s-b)\,.\,(s-c)}{a^2\,b^2\,c^2}}=\frac{s}{abc}\cdot\sqrt{s\,.\,(s-a).(s-b).(s-c)}.$$

Дакле је; $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{abc}\cdot P$. — Одатле:

$$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{abc}}{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot$$

Тако исто *докажи* помоћу образаца (173.), *да је*;

$$P=s^2\,.\,tg\,\frac{\alpha}{2}\cdot tg\,\frac{\beta}{2}\cdot tg\,\frac{\gamma}{2}\cdot$$

* * *

142. *У троуглу је задана размера међу двема странама $\frac{a}{b}=2{\cdot}568$, угао међу тима странама $\gamma=79^0\ 16'$ и висина $h=34$ cm, спуштена на трећу страну. Реши тај троугао.*

Количник $\frac{a}{b}=2{\cdot}568$ значи пропорцију: $a:b=2{\cdot}568:1$; из те пропорције следи ова изведена пропорција: $(a+b):(a-b)=3{\cdot}568:1{\cdot}568$. Одатле применом тангенсова правила: $tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1{\cdot}568}{3{\cdot}568}\cdot cotg\frac{\gamma}{2}\cdot$ Добиваш: $\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=27^0\ 57'\ 2''$; а јер је: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90-\frac{\gamma}{2}$ имаш даље: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=50^0\ 22'$. Сабирањем и одузимањем ових 2 једначина: $\alpha=\boldsymbol{78^0\ 19'\ 2''}$, $\beta=\mathbf{22^0\ 24'\ 58''}$. Пошто је $h=a.\sin\beta$, то је $a=\frac{h}{\sin\beta}$; слично $b=\frac{h}{\sin\alpha}$, а c ћеш наћи синусовим правилом или једном Молвајдовом једначином: $c=\frac{a.\sin\gamma}{\sin\alpha}$, или: $c=\frac{a+b}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot$ Нумерички:

$a=\mathbf{89{\cdot}162}$ cm, $b=\mathbf{34{\cdot}719}$ cm, $\mathbf{c}=\mathbf{89{\cdot}454}$ cm.

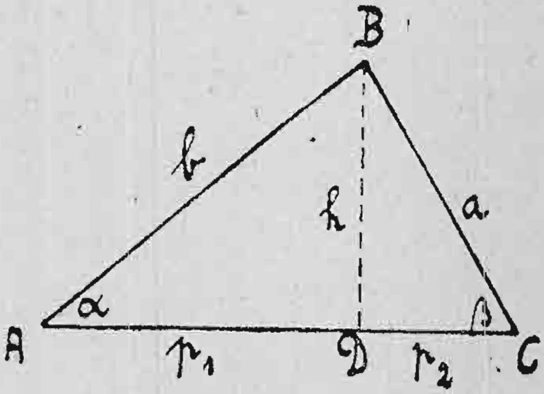
* * *

143. *Од једнога троугла задана су два угла $\alpha=56^0\ 24'$ и $\beta=68^0\ 37'$, те разлика пројекција страна a и b на трећу страну, т. ј.: $p_1-p_2=34{\cdot}6$. Нађи му стране и површину.*

Из троугла ABD (сл. 57.) је $p_1=b\,.\cos\alpha$, из BCD је $a\,.\cos\beta$. Дакле: $b\,.\cos\alpha-a\,.\cos\beta=p_1-p_2$ ..../1/. По синусовом правилу: $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$, $b = \frac{a \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha}$. Замени то у /1/; добиваш: $\frac{a \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\alpha}{\sin\alpha} - a.\cos\beta = p_1 - p_2$, и даље: $\frac{a}{\sin\alpha} \cdot (\sin\beta \,.\, \cos\alpha - {}$ $- \sin\alpha \,.\, \cos\beta) = p_1 - p_2$. Одатле: $a = \frac{(p_1 - p_2) \,.\, \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$, а помоћу тога: $b = \frac{(p_1 - p_2) \,.\, \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$, $c = \frac{(p_1 - p_2) \,.\, \sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$. Површина; $P = \frac{c \,.\, h}{2}$, $h = a \,.\, \sin\beta = \frac{(p_1 - p_2) \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$; дакле:

$$P = \frac{(p_1 - p_2)^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin^3(\beta - \alpha)}.$$

Нумерички: $\mathbf{P = 8491{\cdot}4\ cm^2}$.



57. слика.

* * *

144. *У једному троуглу задан је полупречник R описаног круга и 2 угла α и β. Нађи му а) површину, б) стране.*

а) Ако су 2 стране a и b, угао међу њима γ, онда је површина троугла $P = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma$. С друге стране је према (174): $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ и $R = \frac{b}{2\sin\beta}$, т. j. $a = 2R.\sin\alpha$, $b = 2R\,.\,\sin\beta$. Дакле површина: $P = \frac{4R^2}{2} \cdot \sin\alpha.\sin\beta\,.\,\sin\gamma = 2R^2.\sin\alpha.\sin\beta.\sin(\alpha + \beta)$.

б) Стране: $a = 2R\,.\sin\alpha$, $b = 2R.\sin\beta$, $c = 2R.\sin(\alpha + \beta)$.

* * *

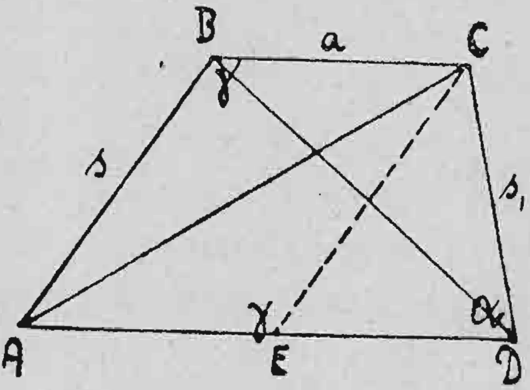
145. *У трапезу непаралелна страна $s = 10{\cdot}85$ затвара са краћом паралелном страном $a = 24{\cdot}6$ угао $\gamma = 126^0\ 58'\ 16''$, а угао наспрам углу γ је $\alpha = 53^0\ 28'\ 16''$. Израчунај обе дијагонале тога трапеза. (58. сл.)*

Из троугла ABC израчунај $AC = x$ по обрасцу (163.):

$$x = \frac{a - s}{\cos\varphi},\ tg^2\varphi = \frac{4\,as\,.\,\sin^2\frac{\gamma}{2}}{(a - s)^2}.$$

Повуци $CE \parallel AB$; онда је:

можеш израчунати другу непаралелну страну $s_1 = CD$ синусовим правилом. Из пропорције: $s : s_1 = \sin\alpha : \sin(180 - \gamma)$ излази: $s_1 = \frac{s.\sin\gamma}{\sin\alpha}$. А онда израчунај BD из троугла BCD по обрасцу (163.): $BD = y = \frac{a - s_1}{\cos\varphi_1}$, $tg^2\varphi_1 =$



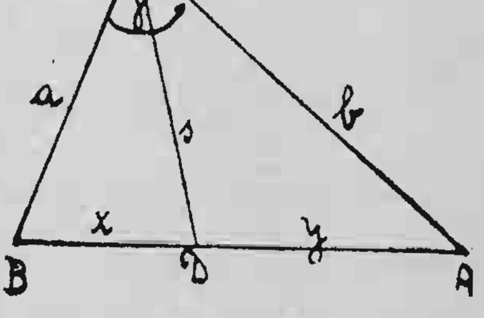
58. слика.

$$= \frac{4\,a\,s_1 . \sin^2\frac{180 - \alpha}{2}}{(a - s_1)^2} = \frac{4\,as_1 . \cos^2\frac{\alpha}{2}}{(a - s_1)^2}$$. Нумерички: $\varphi = 62^0\,49'\,21''$, $x = \mathbf{34{\cdot}044}$, $\varphi_1 = 62^0\;37'$, $y = \mathbf{33{\cdot}945}$, $s_1 = 10{\cdot}787$.

---

146. *У троуглу су задане стране a и b и дужина симетрале s угла, који затварају те стране. Реши га.* Н. пр. $a = 63$, $b = 48$, $s = 35$ (сл. 59.).

Симетрала одсеца на трећој страни c одсечке $BD = x$, $AD = y$. Ако је $\sphericalangle ACB = \gamma$, онда применом косинусног правила на $\triangle\ BCD$ и $\triangle\ ACD$ добиваш: $x^2 = a^2 + s^2 - 2\,as.\cos\frac{\gamma}{2}$ ..../1/, и: $y^2 = b^2 + s^2 - 2\,b\,s.\cos\frac{\gamma}{2}$ ..../2/. По једном планиметријском правилу односе се одсечци, које симетрала угла чини на супротној страни, као стране, које затварају тај угао; т. ј.: $x : y = a : b$. Одатле: $y = \frac{b\,x}{a}$. Помоћу тога /2/ добива облик: $\frac{b^2 x^2}{a^2} = b^2 + s^2 - 2\,bs.\cos\frac{\gamma}{2}$. Ову једначину одузми од /1/; добиваш: $\frac{x^2}{a^2}\cdot(a^2 - b^2) = a^2 - b^2 - 2s.(a - b).\cos\frac{\gamma}{2}$, а након краћења са $a - b$: $\frac{x^2}{a^2}\cdot(a + b) = (a + b) - 2\,s.\cos\frac{\gamma}{2}$.



59. слика.

Одатле: $x^2 = \frac{(a + b).a^2 - 2\,a^2 s.\cos\frac{\gamma}{2}}{}$. Поређењем овога са

/1/ добиваш једначину: $a^2.(a+b)+s^2.(a+b)-2\,a^2\,s\,.\cos\frac{\gamma}{2}-$ $-\,2\,abs\,.\cos\frac{\gamma}{2}=a^2.(a+b)-2\,a^2\,s\,.\cos\frac{\gamma}{2}\cdot$ Одатле: $2\,a\,b\,s\,.\cos\frac{\gamma}{2}=s^2.(a+b)$, и: $\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s\,.(a+b)}{2\,ab}$ ..../3/. Место да ово замениш директно у /1/ и /2/ и израчунаш $c=x+y$, подесније је, да примениш тангенсово, а онда синусно правило. Помоћу /3/ добиваш: $\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\gamma}{2}}=$ $=\frac{1}{2ab}\cdot\sqrt{[2\,ab+s\,.(a+b)].[2\,ab-s\,.(a+b)]}$, $\cot g\,\frac{\gamma}{2}=$ $=\frac{s\,.(a+b)}{\sqrt{[2\,a\,b+s.(a+b)].[(2\,ab-s.(a+b)]}}\cdot$ Онда по тангенсовом правилу: $(a+b):(a-b)=\frac{s\,(a+b)}{\sqrt{[2\,ab+s\,(a+b)].[2ab-s\,(a+b)]}}:$ $:tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot$ Одатле: $tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{(a-b)\,.\,s}{\sqrt{[2ab+s\,(a+b)].[2ab-s\,(a+b)]}}$ ..../4/.

Израчунај нумерички γ из /3/ и $\frac{\alpha-\beta}{2}$ из /4/; помоћу тих вредности добиваш још α и β. Добива се: $\frac{\gamma}{2}=50^0\;1'\;56''$, $\gamma=\mathbf{100^0\;3'\;52''}$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=6^0\;27'\;43$. А како је $\frac{\alpha+\beta}{2}=90-\frac{\gamma}{2}$, имаш систем једначина, из којега сабирањем и одузимањем добиваш: $\alpha=\mathbf{46^0\;25'\;47''}$, $\beta=\mathbf{33^0\;30'\;21''}$. А онда применом синусова правила: $c:a=\sin\gamma:\sin\alpha$, $c=\frac{a.\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $\sin\gamma=\sin 100^0\;3'\;52''=\cos 10^0\;3'\;52''$; $c=\mathbf{85{\cdot}57}$ **cm.**

* * *

147. *Ако имаш у троуглу, који је исто тако задан, да нађеш само трећу страну,* поступај овако:

Површина троугла је: $P=\frac{ab}{2}\cdot\sin\gamma$ ..../1/. С друге стране је: $\triangle\;ABC=\triangle\;CBD+\triangle\;CAD$, т. ј.:

$P=\frac{as}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{bs}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{2}\cdot(a+b)\,.\,\sin\frac{\gamma}{2}\cdot$ Испоредиш ли ово са /1/ и поставиш ли у /1/: $\sin\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$, добиваш: $\frac{ab}{2}\cdot 2\,\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{2}\cdot(a+b).\,\sin\frac{\gamma}{2}$, а одатле: $\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{(a+b).s}{2ab}$. — Како је $\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-\cos^2\frac{\gamma}{2}$, то је: $\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-\frac{(a+b)^2.s^2}{4a^2b^2}=\frac{4a^2b^2-(a+b)^2.s^2}{4a^2b^2}$. По обрасцу (163.) је: $c=\frac{a-b}{\cos\varphi}$, где је: $tg^2\varphi=\frac{4ab}{(a-b)^2}\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}=$ $=\frac{4ab}{(a-b)^2}\cdot\frac{4a^2b^2-(a+b)^2.s^2}{4a^2b^2}=\frac{4a^2b^2-(a+b)^2.s^2}{ab(a-b)^2}$. А како је: $\cos^2\varphi=\frac{1}{1+tg^2\varphi}$, то је: $\frac{1}{\cos^2\varphi}=1+tg^2\varphi=$

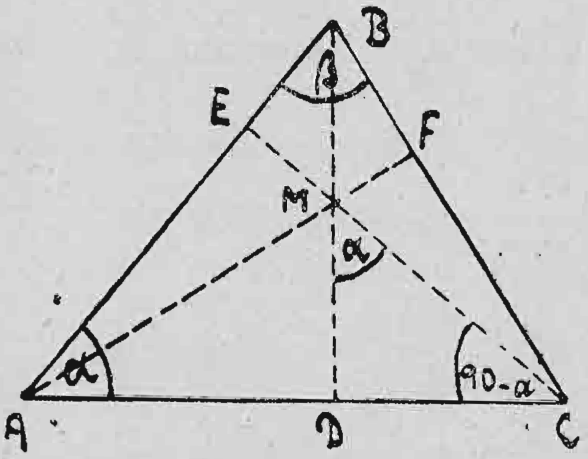
$$=\frac{ab.(a^2-2ab+b^2)+4a^2b^2-(a+b)^2.s^2}{ab.(a-b)^2}=$$

$=\frac{ab(a+b)^2-(a+b)^2.s^2}{ab(a-b)^2}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\cdot\frac{ab-s^2}{ab}$, а одатле: $\frac{1}{\cos\varphi}=\frac{a+b}{a-b}\cdot\sqrt{\frac{ab-s^2}{ab}}$. Помоћу тога је: $c=\frac{a-b}{\cos\varphi}=$ $=(a+b)\cdot\sqrt{\frac{ab-s^2}{ab}}$.

---

148. *У једноме су троуглу дани углови $\alpha=76^0\ 58'$, $\beta=60^0\ 21'$ и полупречник описаног круга $R=5{\cdot}38$ cm. Треба направити један квадар, чије су ивице равне раздаљеностима троуглових темена од тачке, у којој се секу троуглове висине. Израчунај запремину тога квадра. (60. сл.)*

Угао $EMF=180-\beta=AMC$, а $\sphericalangle CMD=\alpha$, јер су им краци наизменце нормални; $\sphericalangle MCD=90-\alpha$. — Из троугла AMC по синусном правилу: $AM:AC=\cos\alpha:\sin(180-\beta)$, т. ј. $AM:b=\cos\alpha:\sin\beta$; одатле $AM=\frac{b}{\sin\beta}\cdot\cos\alpha$. А по обрасцу (174.) је $\frac{b}{\sin\beta}=$ $=2R$; дакле $AM=2R.\cos\alpha$. Слично ћеш наћи: $BM=2R.\cos\beta$, $CM=2R.\cos\gamma$. Запремина квадра је онда: $V=AM.BM.CM=8R^3\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$. Нумерички; $V=17{\cdot}508\ \mathrm{cm}^3$.



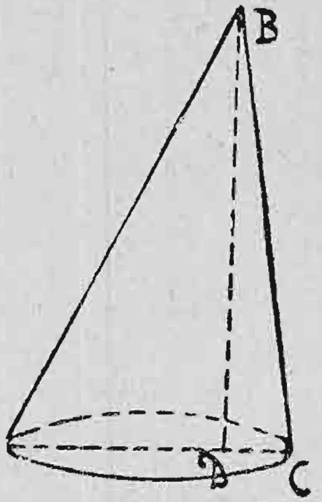
60. слика

119. *Израчунај запремину косог конуса, који у карактеристичном пресеку има стране (изводнице) a и c и угао међу њима β.*

Ако је у сл. 61.¹) $AB = c$, $BC = a$, $\sphericalangle ABC = \beta$, тада је $AC = 2r$, $BD = h$. Запремина је: $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$ ……… /1/. Троугао ABC задан је по II. правилу подударности, па ћеш $AC = 2r$ наћи косинусовим правилом или обрасцем (163.). По тому обрасцу је: $2r = \frac{c - a}{\cos \varphi}$, где је помоћни угао φ одређен једначином:

$$tg^2 \varphi = \frac{4ac \,.\, \sin^2 \frac{\beta}{2}}{(c-a)^2} \quad \text{………} /2/.$$

Висину h израчунај н. пр. из $\triangle ABD$, па је $h = c \,.\, \sin \alpha$, где је $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle BAC$. А по синусовом правилу: $2r : a = \sin \beta : \sin \alpha$, т. ј.:



61. слика.

$\sin \alpha = \frac{a \,.\, \sin \beta}{2r}$; дакле је: $h = \frac{ac \,.\, \sin \beta}{2r} \cdot$ Онда је запремина:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 h = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot \frac{ac \,.\, \sin \beta}{2r} = \frac{\pi}{6} \cdot r \,.\, ac \,.\, \sin \beta, \text{ т. ј.:}$$

$$\mathbf{V} = \frac{\pi}{\mathbf{12}} \cdot \frac{\mathbf{ac \,.\, (c - a) \,.\, \sin \beta}}{\mathbf{\cos \varphi}}, \text{ где је } \varphi \text{ одређен једначином } /2/.$$

---

150. *Израчунај запремину косог конуса, ако су у његовом карактеристичном пресеку задане обе изводнице (стране) a и c и пречник базе. (Сл. 61.).*

Запремина је $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 h$. Висину h израчунај из $\triangle ABD$, па је $h = c . \sin \alpha = 2c \,.\, \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot$ Помоћу образаца (170) и (171) имаш из $\triangle ABC$: $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-c).(s-2r)}{2rc}}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s.(s-a)}{2rc}}$, где је $s = \frac{a + c + 2r}{2}$. Онда је:

$$h = 2c \cdot \sqrt{\frac{(s-c).(s-2r)}{2rc}} \cdot \sqrt{\frac{s.(s-a)}{2rc}} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{s.(s-a).(s-c).(s-2r)} =$$

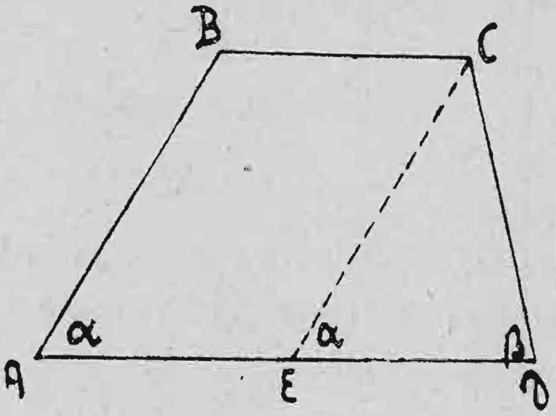
$= \frac{P}{r}$, где је $P = \triangle ABC$. До овога истога резултата могао си дођи и планиметријским решавањем (образац 42.). Онда је:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot r P = \frac{\pi}{3} \cdot \mathbf{r} \,.\, \sqrt{\mathbf{s}.(\mathbf{s} - a).(\mathbf{s} - \mathbf{c}).(\mathbf{s} - 2\,\mathbf{r})}.$$

---

151. *Нађи запремину косог прикраћеног конуса, ако су му задани полупречници база R и r и углови α и β, које са већом базом затварају његова најдужа и најкраћа страна у карактеристичном пресеку. (62. сл.)*

Карактеристични пресек је разнокраки трапез $ABCD$, а углови α и β су углови код A и D. Повуци $CE \parallel AB$, па је $\sphericalangle CED = \alpha$. — Запремина је: $V = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$. За висину h из троугла CED добиваш: $h = CE \,.\, \sin\alpha$, а CE ћеш израчунати синусним правилом из $\triangle\, CED$, где је страна $DE = 2\,.(R - r)$ а $\sphericalangle ECD = 180 - (\alpha + \beta)$. По синусном правилу: $2\,(R - r) : CE = \sin(\alpha + \beta) : \sin\beta$, т. ј.: $CE = \frac{2\,(R - r)\,.\,\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; дакле



62. слика.

$$h = \frac{2\,(R - r)\,.\,\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot$$ Одатле:

$$V = \frac{2\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)\,.\,(R - r) \cdot \frac{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot (\mathbf{R}^3 - \mathbf{r}^3) \cdot \frac{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

---

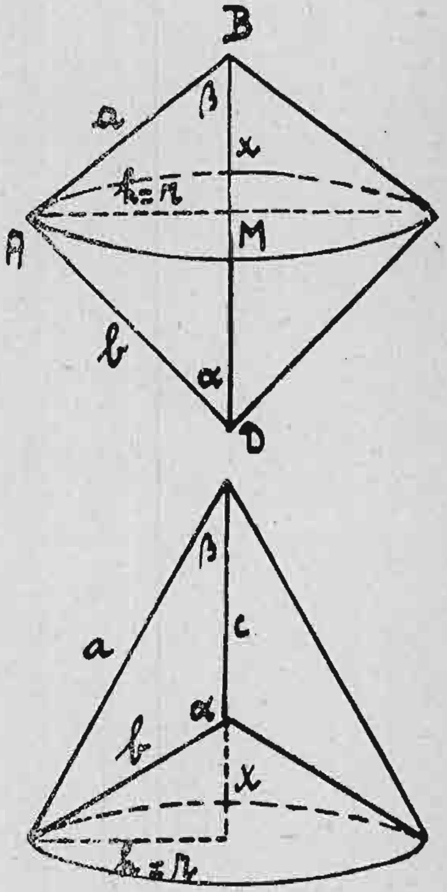
152. *Од троугла је задана страна c и оба угла на њој, α и β. Израчунај запремину тела, које настаје ротацијом тога троугла око стране c. (Сл. 63. и 64.)*

Ротацијоно тело састоји се од двају правих конуса, насађених на заједничку базу ($r = h$).

1. **Запремина:** $V = V_1 + V_2 = \frac{h^2 \pi x}{3} + \frac{h^2 \pi.(c - x)}{3}$,

т. ј.: $V = \frac{h^2 \pi c}{3}$ ..../1/, где је $BD = c$. Овај образац вреди

$V = V_1 - V_2$ т. ј. $V = \frac{h^2\pi.(c+x)}{3} - \frac{h^2\pi c}{3} = \frac{h^2\pi c}{3}$. Решавањем правоуглог троугла ABM налазиш: $r = h = a . sin\,\beta$ ..../2/. А по синусовом правилу је: $a : c = sin\,\alpha : sin\,(\alpha+\beta)$, т. ј.:



63. и 64. слика.

$a = \frac{c\,.sin\,\alpha}{sin\,(\alpha+\beta)}$; дакле $h = \frac{c\,.\,sin\,\beta\,.\,sin\,\alpha}{sin\,(\alpha+\beta)}$. Према томе је запремина: $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{c^3\pi\,.\,sin^2\alpha\,.sin^2\beta}}{\mathbf{3\,.\,sin^2(\alpha+\beta)}}$.

2. Површина се састоји од омотача двају правих конуса. По обрасцу (97.): $P = h\pi a + h\pi b = h\pi.(a+b)$ ..../3/. По синусовом правилу је: $b = \frac{c\,.sin\,\beta}{sin\,(\alpha+\beta)}$. Онда је:

$$P = \frac{c\pi.sin\alpha.sin\beta}{sin(\alpha+\beta)}.\left[\frac{c\,sin\,\alpha}{sin(\alpha+\beta)} + \frac{c\,sin\,\beta}{sin(\alpha+\beta}\right] =$$

$$= \frac{c^2\pi\,.\,sin\,\alpha\,.sin\,\beta}{sin^2(\alpha+\beta)}\,.\,(sin\,\alpha + sin\,\beta).$$

По обрасцу (135.) је: $sin\,(\alpha+\beta) = 2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha+\beta}{2}$; а по обрасцу (154.) је: $sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. С тим променама је коначно: $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{c^2\pi\,.\,sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta\,.\,cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\mathbf{2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}}$. Код нумеричког израчунавања: ако је један угао, н. пр. α, туп, напиши га у облику: $\alpha = 90 + \gamma$; тада је $sin\,\alpha = sin\,(90+\gamma) = cos\,\gamma$.

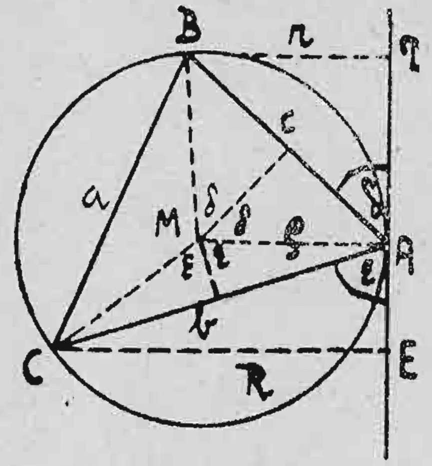
* * *

**153. *Око троугла ABC (задане стране a, b, c) описан је круг и троугао ротира око тангенте, повучене теменом A. Израчунај а) површину, коју код тога изведе страна BC = a; б) запремину ротацијоног тела. (сл. 65.)*

Означи површину троугла са P, полупречник круга са ρ. а) Страна a изводи омотач једног правог прикраћеног конуса, па је тај омотач $O = \pi a\,.(BD + CE) = \pi a\,(r+R)$. — Означи:

$\sphericalangle BAD = \delta$, $\sphericalangle CAE = \varepsilon$ (углови између тангенте и тетиве); онда је $\sphericalangle BMA = 2\delta$, $\sphericalangle CMA = 2\varepsilon$. Из троугла ABD је: $r = c \,.\, \sin\delta$, а из ACE је: $R = b \,.\, \sin\varepsilon$. Спусти у равнокраким троугловима ABM и CMA висине из M; из добивених правоуглих троуглова излази: $\sin\varepsilon = \frac{b}{2\rho}$, $\sin\delta = \frac{c}{2\rho} \cdot$ А по обрасцу (44.) је $\rho = \frac{abc}{4P}$, и помоћу тога је: $\sin\varepsilon = \frac{2P}{ac}$, $\sin\delta = \frac{2P}{ab} \cdot$ Замени то у нађене обрасце за r и R па добиваш: $R = \frac{2bP}{ac}$, $r = \frac{2cP}{ab} \cdot$ Замени то у образаз за омотач, па добиваш:

$$O = \frac{2a\pi P}{a} \cdot \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = \frac{2\pi P}{bc} \cdot (b^2 + c^2).$$



65. слика.

б) Запремина ротацијоног тела је запремина тога прикраћенога конуса, умањена за запремине двају правих конуса, којима су полупречници R и r, а висине AE и AD. Дакле је запремина $V = V_1 - V_2 - V_3$; т. ј.:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2).(AD + AE) - \frac{\pi}{3} r^2 .AD - \frac{\pi}{3} R^2 .AE =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot [b^2 . \sin^2\varepsilon + bc.\sin\delta .\sin\varepsilon + c^2 . \sin^2\delta) (c. \cos\delta + b.\cos\varepsilon) -$$

$$- c^3 . \sin^2\delta . \cos\delta - b^3 \sin^2\varepsilon . \cos\varepsilon] =$$

$$= \frac{\pi}{3} bc.(b.\sin^2\varepsilon.\cos\delta + b.\sin\varepsilon.\cos\varepsilon.\sin\delta + c.\sin\varepsilon.\sin\delta.\cos\delta + c.\sin^2\delta.\cos\varepsilon) =$$

$= \frac{bc\,\pi}{3} \cdot \sin(\varepsilon + \delta) . (b . \sin\varepsilon + c . \sin\delta)$. Угао $\varepsilon + \delta = 180 - \alpha$, па је: $\sin(\varepsilon + \delta) = \sin\alpha = 2 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot$ Употребом образаца (170.), (171.) добиваш даље: $\sin(\varepsilon + \delta) =$

$$= 2 . \sqrt{\frac{(s - b).(s - c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{s . (s - a)}{bc}} = \frac{2P}{bc},\ b \sin\varepsilon + c \sin\delta =$$

$$= R + r = \frac{2b\,P}{ac} + \frac{2c\,P}{ab} = \frac{2\,P}{abc} \cdot (b^2 + c^2).$$ Тако је коначно:

$\mathbf{V} = \frac{4 P^2\pi \,.\, (b^2 + c^2)}{3\,abc} \cdot$ Ако је $\alpha = 90^0$, т. ј. ако је троугао правоугаон са хипотенузом a, онда је: $b^2 + c^2 = a^2$, $bc = 2P$, па је онда: $O = a^2\pi$, $\mathbf{V} = \frac{abc\,\pi}{3} \cdot$

154. *Два права друма, дужине* $AB = c = 935\,m$ *и* $AC = b = 1214\,m$ *секу се под углом* $\alpha = 48^0\ 12'$. *Израчунај угао, под којим се из тачке* C *види друм* AB.

AB и AC са углом α одређују троугао ABC по II. правилу подударности. Угао γ код C, а уједно и угао β код B израчунаћеш по тангенсовом правилу: $(b + c) : (b - c) = \cot g \frac{\alpha}{2} : tg \frac{\beta - \gamma}{2}$; одатле: $tg \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cdot \cot g \frac{\alpha}{2}$. У овом задатку; $tg \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{279 \,.\, \cot g\, 24^0\ 6'}{2149}$. Логаритмовањем добиваш: $\log tg \frac{\beta - \gamma}{2} = 9\cdot46274 - 10$, $\frac{\beta - \gamma}{2} = 16^0\ 11'\ 3\cdot75''$. С друге стране је: $\alpha = 180 - (\beta + \gamma)$, т. ј. $\beta + \gamma = 180 - \alpha$; одатле: $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 65^0\ 54'$. Решавањем овога система добиваш: $\beta = 82^0\ 5'\ 3\cdot75''$, $\gamma = \mathbf{49^0\ 42'\ 56\cdot25''}$.

---

155. *Вега (α у Лири) затвара са Сиријем (α у Великом псу) визирни угао* $\gamma = 157^0\ 56'\ 57''$. *Колико година путује светлост од Веге до Сирија, ако је Вега удаљена од земље 30 година светлости, а Сириј 9 година светлости?*

Сириј, Вега и земља затварају разностран троугао, који је задан по другом правилу подударности. Трећу ћеш страну израчунати по козинусовом правилу, преудешеном за логаритмовање (163.). Постави $a = 30$, $b = 9$, $\gamma = 157^0\ 56'\ 57''$; онда је: $x = \frac{21}{\cos\varphi}$, а $tg^2\varphi = \frac{4.30.9 \,.\, \sin^2 78^0\ 58'\ 28\cdot5''}{21^2}$. Добиваш: $\varphi = 56^0\ 56'\ 4''$, $x = \mathbf{38\cdot49}$ година светлости.

---

156. *На 21. VI. 1922 био је Јупитер удаљен од земље за* $a = 5\cdot18\,d$ *(где је* d *истовремена раздаљеност земље од сунца); визирне линије Јупитер-земља и Сунце-земља затварале су угао* $\gamma = 99^0\ 7'\ 30''$, *а привидни полупречник сунца видео се са земље под углом* $\psi = 15'\ 46''$. *Колико је земаљских полупречника* r *износила тога дана раздаљеност Јупитра од сунца, ако је прави полупречник сунца* $R = 108\cdot6\,r$. (Углови и даљине су сведени на средиште земље).

Задатак је у општем делу идентичан са предходним задатком бр. 155; разликује се од њега задана друга страна троугла (раздаљина Сунце-земља), већ је треба израчунати пре замене у главни задатак. — По обрасцу (163.) је тражена раздаљеност Јупитра од сунца $x = \frac{a - d}{\cos\varphi}$, где је $tg^2\varphi = \frac{4\,ad.\sin^2\frac{\gamma}{2}}{(a-d)^2}$, или према подацима у задатку:

$$x = \frac{4{\cdot}18\,d}{\cos\varphi},\quad tg^2\varphi = \frac{4\,.\,5{\cdot}18\,d^2.\sin^2\frac{\gamma}{2}}{4{\cdot}18^2\,d^2} = \frac{4\,.\,5{\cdot}18.\sin^2\frac{\gamma}{2}}{4{\cdot}18^2}.$$

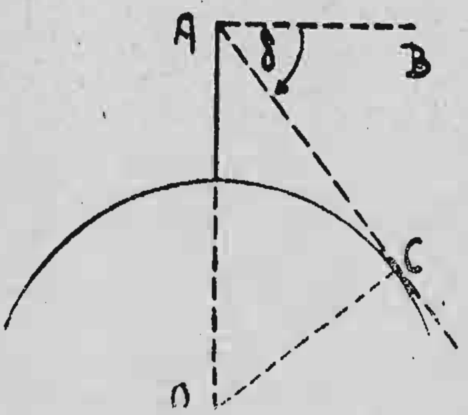
Према примеру бр. 129. је $d = \frac{R}{\sin\psi}$, т. ј. $d = \frac{108{\cdot}6}{\sin\psi}\,r$; дакле

$x = \frac{\mathbf{4{\cdot}18\,.\,108{\cdot}6}}{\sin\psi\,.\,\cos\varphi}\,r$. Нумерички резултати: $\varphi = 39^0\ 39'\ 11{\cdot}6''$,

$x = \mathbf{128605{\cdot}9}\ r$.

157. *Колико износи апсолутна висина h брда, с којега се хоризонт мора види под углом депресије $\delta = 2^0\ 10'\ 24''$? Полупречник земље $r = 6370283\ m$.*

Угао депресије δ (сл. 66.) је угао BAC, а једнак је углу AOC (краци наизменце нормални). Из правоуглог $\triangle\ AOC$ следи: $OC = r = AO\,.\cos\sphericalangle AOC$, т. ј. $r = (r+h)\,.\cos\delta$. Одатле: $h\,.\cos\delta = r\,(1 - \cos\delta)$; а како је: $1 - \cos\delta = 2\sin^2\frac{\delta}{2}$, то је: $h = \frac{2\,r\,.\sin^2\frac{\delta}{2}}{\cos\delta}$.



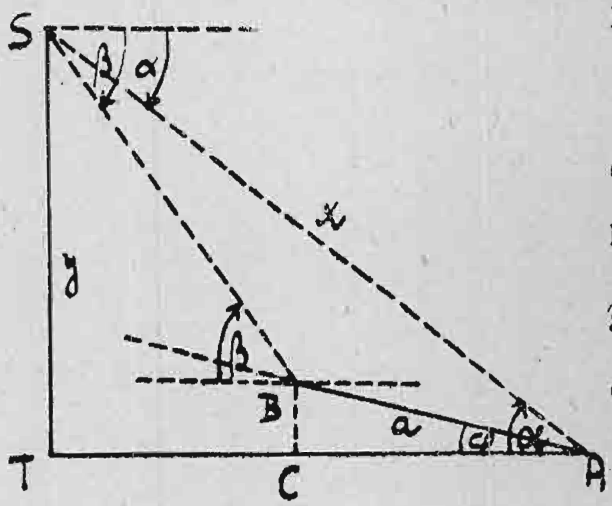
66. слика

Нумерички: $h = \mathbf{4585{\cdot}4}\ m$.

158. *Да се израчуна висина брда, измерена је на његовом обронку дуж $AB = a = 780\ m$, чији продужак пролази кроз осовину брда, а која чини нагибни угао φ са хоризонталном равни. Тај угао је одређен тако, што се установило, да је тачка B за $h = 22\,m$ над тачком A. Надаље су измерени из A и B углови елевације врха брда $\alpha = 20^0\ 15'\ 34''$ и $\beta = 31^0\ 43'\ 12''$. Израчунај висину брда над тачком A. (67. сл.)*

Из троугла AST је: $y = x\,.\sin\alpha$; x ћеш израчунати из троугла ABS синусовим правилом. Угао $ABS = 180 - \beta +$

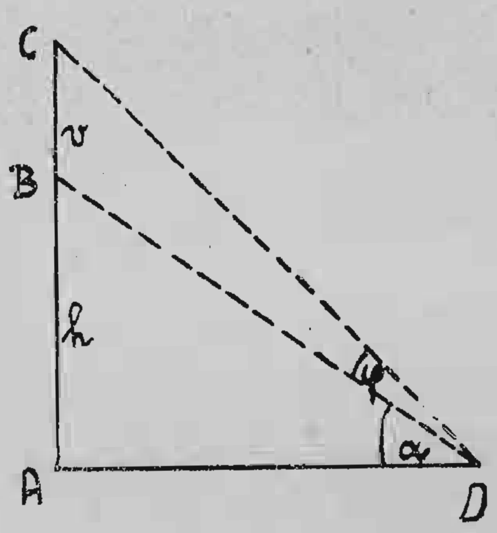
$+\varphi = 180 - (\beta - \varphi)$, а $\sphericalangle ASB = \beta - \alpha$. По синусовом правилу: $a : x = \sin(\beta - \alpha) : \sin ABS = \sin(\beta - \alpha) : \sin(\beta - \varphi)$. Дакле је $x = \frac{a \,.\, \sin(\beta - \varphi)}{\sin(\beta - \alpha)}$, а помоћу тога: $y = \frac{a \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin(\beta - \varphi)}{\sin(\beta - \alpha)}$. Угао φ израчунаћеш из $\triangle ABC$, јер је: $\sin\varphi = \frac{h}{a}$. Ако основна дуж AB лежи у хоризонталној равни, т. ј. ако је $\sphericalangle \varphi = 0$, онда: $y_1 = \frac{a \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$. Нумерички резултат $y = 681{\cdot}8$ **m.**



67. слика.

159. *На врху брда, високог $h = 385$ m над равном околином, стоји крст висине $v = 16$ m. Под којим се углом види тај крст из тачке C, која је по карти удаљена од врха брда за $a = 1340$ m? (68. сл.).*

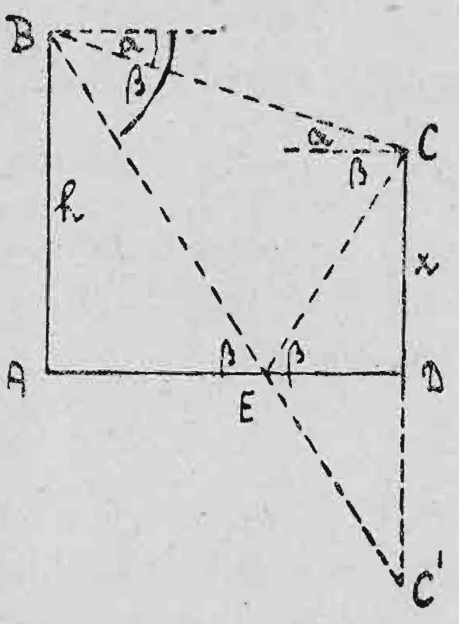
Даљина a са карте је у слици AD; $AB = h$, $BC = v$. Из троугла ABD је $tg\,\alpha = \frac{h}{a}$, а из ACD је: $tg(\alpha + \varphi) = \frac{h + v}{a}$. По обрасцу (133.) је онда: $tg\,\varphi = tg\,(\alpha + \varphi - \alpha) = \left(\frac{h + v}{a} - \frac{h}{a}\right) : \left[1 + \frac{(h + v) \,.\, h}{a^2}\right]$. Коначно $tg\,\varphi = \frac{a \,.\, v}{a^2 + \mathbf{h} \,.\, (\mathbf{h} + \mathbf{v})}$. Нумерички: $\varphi = 0^0\ 37'\ 48''$. Види пример 265. у I. делу.



68. слика.

160. *С брда релативне висине $h = 1600$ m види се врх нижега брда на другој страни долине под углом депресије $\alpha = 5^0\ 45'$, а његова слика у језеру у долини под углом депресије $\beta = 46^0\ 24'$. Израчунај висину тога другога брда над језером и раздаљеност међу њиховим врховима. (сл. 69.)*

Најпре установи углове. Горњи $\sphericalangle$ код C је наизменичан са α, па је и он α; $\sphericalangle AEB$ је наизменичан са β; $\sphericalangle CED = \sphericalangle AEB$ према закону о рефлекцији светлости, а доњи угао код C је наизменичан са $\sphericalangle CED$; Зато су сви ови углови једнаки са β. Надаље је $\sphericalangle CBE = \beta - \alpha$, $\sphericalangle BCE = \beta + \alpha$. Из правоуглог $\triangle\ CDE$ је $CD = x = CE \,.\, sin\,\beta$. Из $\triangle\ BEC$ је по синусном правилу: $CE : BE = sin\,(\beta - \alpha) : sin\,(\beta + \alpha)$. Одатле је: $CE = \dfrac{BE \,.\, sin\,(\beta - \alpha)}{sin\,(\beta + \alpha)}$. Помоћу тога је: $x = \dfrac{BE \,.\, sin\,\beta \,.\, sin\,(\beta - \alpha)}{sin\,(\beta + \alpha)}$. Напокон из правоуглог $\triangle\ ABE$ је: $BE = \dfrac{h}{sin\,\beta}$. Тако је: $x = \dfrac{h \,.\, sin\,\beta \,.\, sin\,(\beta - \alpha)}{sin\,\beta \,.\, sin\,(\beta + \alpha)} = \dfrac{\mathbf{h \,.\, sin\,(\beta - \alpha)}}{\mathbf{sin\,(\beta + \alpha)}}$. — Раздаљеност BC међу врховима израчунај из троугла BEC синусним правилом; $\sphericalangle BEC = 180 - 2\,\beta$. Имаш: $BC : BE = sin\,(180 - 2\,\beta) : sin\,(\beta + \alpha)$. Одатле је $BC = \dfrac{BE \,.\, sin\,2\,\beta}{sin\,(\beta + \alpha)} = \dfrac{2\,BE \,.\, sin\,\beta \,.\, cos\,\beta}{sin\,(\beta + \alpha)}$. А како је $BE = \dfrac{h}{sin\,\beta}$, то је коначно: $\mathbf{BC} = \dfrac{\mathbf{2\,h \,.\, cos\,\beta}}{\mathbf{sin\,(\beta + \alpha)}}$. Нумерички: $x = \mathbf{1485\ m}$, $\mathbf{BC = 3144\ m}$.

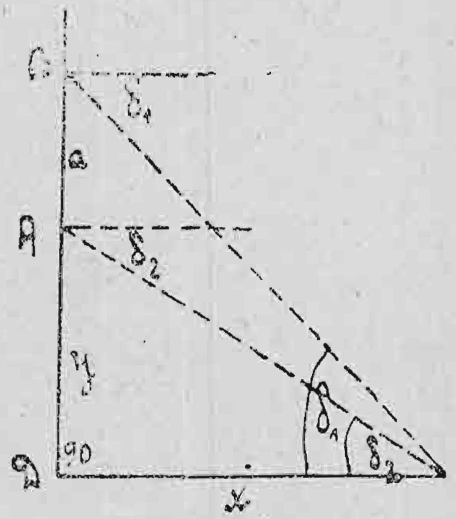


69. слика.

* * *

161. *Једна зграда саграђена је управ на високој вертикалној обали реке. С двају прозора, који стоје један над другим, види се једна тачка С на самом рубу воде на супротној обали под угловима депресије $\delta_1 = 17^0\ 15'$, $\delta_2 = 13^0\ 46'$. Израчунај ширину реке и висину доњег прозора над нивом воде, ако вертикална раздаљеност тачака, из којих су мерени углови, износи $a = 13{\cdot}5\ m$* (70. сл.)

Из троугла ACD је $x = AC.cos\ \delta_2$, $y = AC.sin\ \delta_2$. Страну AC израчунај из троугла ABC, који је потпуно задан. Његови су углови:



70. слика.

$CBD = 90 - \delta_1$, $BAC = 90 + \delta_2$, $ACB = \delta_1 - \delta_2$. По синусовом правилу је: $AC : a = sin\,(90 - \delta_1) : sin\,(\delta_1 - \delta_2) = cos\,\delta_1 : sin\,(\delta_1 - \delta_2)$.

Одатле је: $AC = \frac{a\,.\,cos\,\delta_1}{sin\,(\delta_1 - \delta_2)}$. Дакле:

$$x = \frac{a.\cos\delta_1.\cos\delta_2}{\sin(\delta_1 - \delta_2)},\ y = \frac{a.\cos\delta_1\,.\,\sin\delta_2}{\sin(\delta_1 - \delta_2)}.$$

Нумерички: $x = \mathbf{206{\cdot}1}$ **m**,

$y = \mathbf{50{\cdot}496}$ **m.**

---

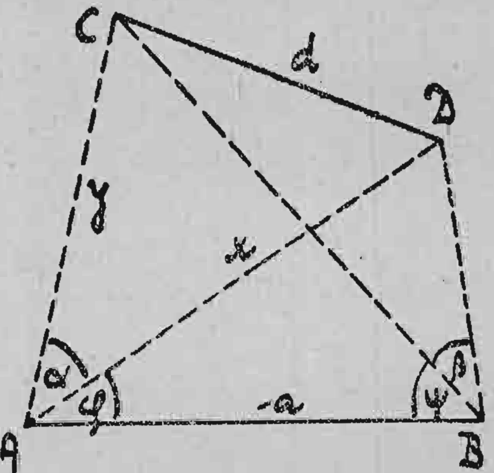
162. *Да се одреди раздаљина 2 тачака C и D у хоризонталној равни, измерена је у тој равни основна дуж AB = a и визирни углови $\measuredangle CAD = \alpha$, $\measuredangle DAB = \varphi$ из тачке A, те визирни углови из тачке B $\measuredangle CBD = \beta$ и $\measuredangle CBA = \psi$. Израчунај раздаљеност CD (71. сл.)*

Из троугла ACB имаш по синусном правилу: $a : y = sin \measuredangle ACB : sin\,\psi$; а како је: $\measuredangle ACB = 180 - (\alpha + \varphi + \psi)$, то је:

$$y = \frac{a\,.\,sin\,\psi}{sin\,(\alpha + \varphi + \psi)} \ldots\ldots /1/.$$

Исто тако из $\triangle\, ABD$: $x : a = sin \measuredangle ABD : sin \measuredangle ADB$; па како је $\measuredangle ABD = \beta + \psi$, $\measuredangle ADB = 180 - (\varphi + \psi + \beta)$, то је:

$$x = \frac{a\,.\,sin\,(\beta + \psi)}{sin\,(\beta + \varphi + \psi)} \ldots\ldots /2/.$$



71. слика.

Из троугла ACD је по обрасцу (163.):

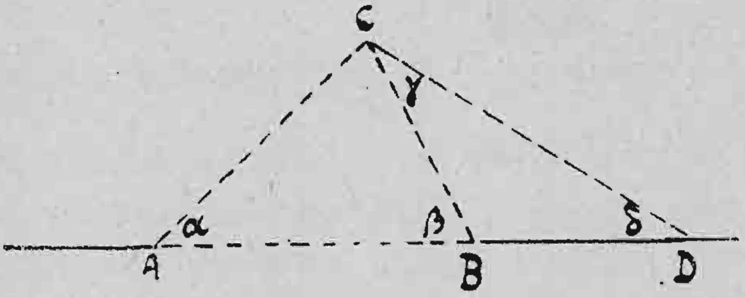
$\mathrm{d} = \frac{x - y}{\cos\lambda}$, где је помоћни угао λ одређен једначином:

$$tg^2\lambda = \frac{4\,xy\,.\,sin^2\frac{\alpha}{2}}{(x - y)^2},$$ а x и y са /1/ и /2/.

---

163. *Кроз једно брдо треба између тачака A и B пробити хоризонталан тунел. Да се израчуна његова дужина AB = x, узме се у продужењу дужи AB једну тачку D и измери се дужина BD = a. На гребену брда између*

А и В, изабере се једна тачка С, која лежи у истој вертикалној равнини са A, B *и* D, *а види се из свих ових тачака. Измере се углови елевације ове тачке из* A ($\sphericalangle \alpha$), из B ($\sphericalangle \beta$), из D ($\sphericalangle \delta$). *Из ових података израчунај* $AB=x$. *Н. пр.:* $a=108{\cdot}52$, $\alpha=19^0\ 30'\ 36''$, $\beta=32^0\ 48'\ 12''$, $\delta=27^0\ 31'\ 18''$. *(Сл. 72.).*



72. слика.

Ако замислиш, да је у $\triangle\ ABC$ позната страна $BC=y$, тада се проблем своди на пример бр. 133. По синусном правилу је: $x : y = \sin(\alpha+\beta) : \sin\alpha$. Одатле:

$$x=\frac{y.\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\cdot$$

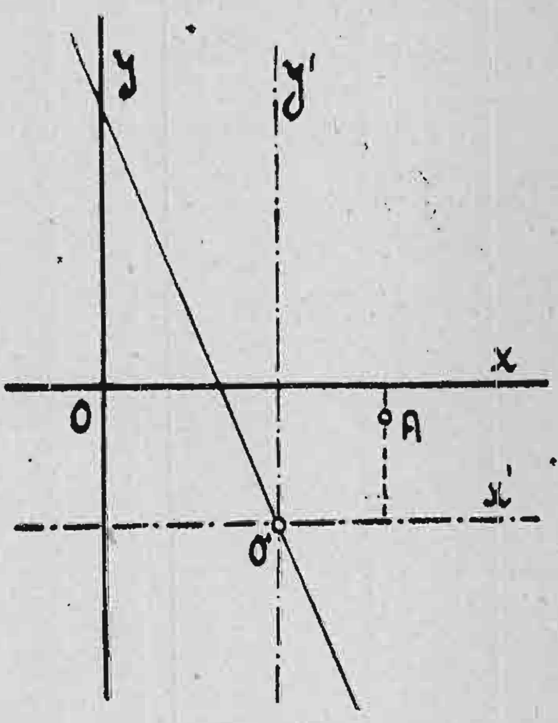
Непознату дуж $BC=y$ израчунај опет синусним правилом из $\triangle\ BDC$. У овому $\triangle$ је: $\sphericalangle\gamma=\beta-\delta$. Онда: $y : a = \sin\delta : \sin(\beta-\delta)$, а одатле: $y=\frac{a.\sin\delta}{\sin(\beta-\delta)}\cdot$

Дакле је: $x=\frac{a.\sin\delta.\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin(\beta-\delta)}\cdot$ Нумерички: $x=\mathbf{1290{\cdot}8}$ **m**.

* * *

IV. АНАЛИТИКА.

164. *Тачку* $A\left(5, -\frac{1}{2}\right)$ *и праву* $5x + 2y = 10$ *пренеси у паралелни правоугли систем, кому је почетак у тачки те праве, која има апсцису* $x = 3$. *Одреди координате те тачке и једначину те праве у новом систему. (сл. 73.)*[1]



73. слика.

Тачка те праве са апсцисом $x = 3$ има ординату одређену једначином $15 + 2y = 10$, т. ј. $y = -\frac{5}{2}$. Једначине трансформације су онда ове: $x = x' + 3$, $y = y' - \frac{5}{2}$. За тачку A: $5 = x' + 3$, $-\frac{1}{2} = y' - \frac{5}{2}$, т. ј. $x' = +2$, $y' = +2$. За праву: $5(x' + 3) + 2\left(y' - \frac{5}{2}\right) = 10$, т. ј.: $5x' + 2y' = 0$. Како права у новом систему нема апсолутнога члана, види се, да пролази кроз нови почетак.

165. *Координатни правоугли систем пренеси паралелно у систем, који има почетак у тачки* $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ *и одреди једначину кривуље* $16y^2 + 9x^2 - 6x + 16y - 139 = 0$ *у новому систему.*

По једначинама за паралелну транзлацију (185.) имаш овде једначине трансформације: $x = x' + \frac{1}{3}$, $y = y' - \frac{1}{2}$.

Замени то у једначину кривуље: $16.\left(y'-\frac{1}{2}\right)^2+9.\left(x'+\frac{1}{3}\right)-$ $-6.\left(x'+\frac{1}{3}\right)+16.\left(y'-\frac{1}{2}\right)-139=0$. Коначно: $\mathbf{16y'^2+9x'^2=}$ $\mathbf{=144}$. То је елипса. Једначине трансформације за прелаз из новога система у стари су ове: $x'=x-\frac{1}{3}$, $y'=y+\frac{1}{2}$. — Види задатак бр. 251. у I. делу.

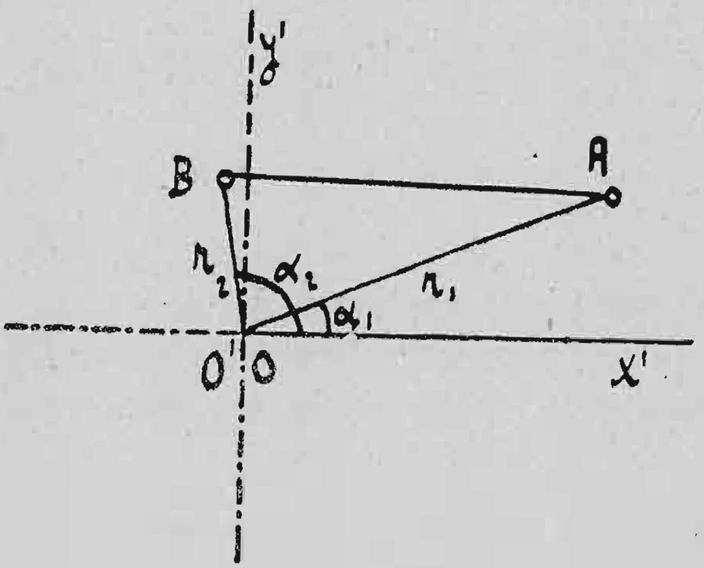
166. *Нађи раздаљеносм међу тачкама у поларном координатном систему: A (7, 21° 25'), B (3, 118° 34'). Сл. 74.*

Можеш израчунати или директно у поларном систему или преношењем тачака из поларнога у правоугли систем. а) Троугао *AOB* задан је по II. правилу подударности, па је: $AB=d=\frac{r_1-r_2}{\cos\varphi}$,

$$tg^2\varphi=\frac{4r_1r_2.\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}{(r_1-r_2)^2},$$

$$d=AB=\frac{4}{\cos\varphi},$$

$$tg^2\varphi=\frac{21.\sin^2 48^0\,34'\,30''}{4}.$$



74. слика.

Добиваш: $\varphi=59^0\ 47'\ 53''$, $\mathbf{d=7{\cdot}9515}$. б) Једначине трансформације, према (187.), за прелаз у правоугли систем су ове: за A: $x_1=7.\cos 21^0\ 25'$, $y_1=7.\sin 21^0\ 24'$; за B: $x_2=3.\cos 118^0\ 34'=(-3).\sin 28^0\ 34'$, $y_2=3.\cos 28^0\ 34'$. Добиваш: $x_1=6{\cdot}5167$, $y_1=2{\cdot}556$; $x_2=-1{\cdot}4345$, $y_2=2{\cdot}6347$ [код израчунавања: $-x_2=3.\sin 28^0\ 34'$, $\log(-x_2)=\log 3+$ $+\log\sin 28^0\ 34'$!]. Онда по обрасцу (179.):

$$d=\sqrt{7{\cdot}9512^2+0.0787^2}=\mathbf{7{\cdot}9515}.$$

167. *Око троугла са теменима A (1, 3), B (2, —4), C (—1, 2) описан је круг. Нађи му координате средишта, полупречник и површину.*

Задатак можеш решити на више начина, од којих су најлакши: *а)* примена обрасца (179.), *б)* начин употребљен у примеру бр. 184. *а)* Нека средиште M има координате a, b; онда је $AM = BM = CM = r$; т. ј. применом обрасца (179.) имаш једначине: $\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2} = \sqrt{(a-2)^2+(b+4)^2}$, $\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2} = \sqrt{(a+1)^2+(b-2)^2}$. Квадрирањем и редуковањем добиваш одатле једначине; $a - 7b = 10$, $4a + 2b = 5$, које дају: $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. Дакле је средиште у тачки **M** $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Полупречник $r = AM = \sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2} = = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{50}$, $r^2 = \frac{50}{4}$; површина $P = \frac{50}{4}\pi = \mathbf{39{\cdot}27}$. *Једначина тога круга: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$. — Начин *б)* види у примеру бр. 184.

* * *

168. *Нађи једначину праве, положене пресеком правих $2x - 3y - 2 = 5$, $3x + y = 5$ и почетком координатнога система, те израчунај угао, под којим та права сече апсцисну ос.*

Нађи пресек заданих правих решавајући систем: $2x - 3y = 7$, $3x + y = 5$. Решење система је $x = 2$, $y = -1$. И сад имаш да положиш праву кроз тачке $A(2, -1)$, $B(0, 0)$. Употребом обрасца (193.) добиваш једначину тражене праве: $y = -\frac{1}{2}x$. *Краћи начин.* Према обрасцу (194.) тражена права има једначину облика: $2x - 3y - 7 + \lambda.(3x + y - 5) = 0$, где λ треба тако одредити, да та права буде пролазила почетком координатног система. Ако права, или ма која кривуља, пролази почетком координатнога система, онда је њезин апсолутни члан (стални члан) једнак нули. У овој је једначини апсолутни члан: $-7 - 5\lambda$, па једначина: $-7 - 5\lambda = 0$ даје $\lambda = -\frac{7}{5}$. Замени то у једначину праве, па добиваш опет $y = -\frac{1}{2}x$. — Из $tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$ или: $tg\,(180 - \alpha) = +\frac{1}{2}$ излази: $180 - \alpha = 26^0\ 33'\ 54''$, $\alpha = \mathbf{153^0\ 26'\ 6''}$.

169. *Нађи површину равнокракога троугла, чији се краци, дужине* $s = \sqrt{26}$, *секу се у темену* $A(1, 3)$, *а неједнака му страна лежи на правој* $y = \frac{3}{2}x - 5$.

Дужину кракова можеш представити обрасцем (179.). Онда ћеш координате x и y непознатих темена наћи из једначине $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{26}$ тим, да та темена морају лежати на правој $y = \frac{3}{2}x - 5$, т. ј. морају задовољавати једначину те праве. Имаш да решиш систем једначина: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 26$, $y = \frac{3}{2}x - 5$. Решење даје координате тих темена: **B** $(6, 2)$, **C** $(4, -2)$. Онда по обрасцу (183.) за површину троугла добиваш: **P** $= 13$.

* * *

170. *Нађи тачку* $A(x, y)$ *на правој* $4y - 5x + 28 = 0$, *која је једнако раздаљена од тачака* $M(1, 5)$, $N(7, -3)$.

Из задатка излази помоћу обрасца (179.) једначина: $\sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+3)^2}$, која након квадрирања даје линеарну једначину: $12x - 16y = 14$. С друге стране тачка A лежи на заданој правој; дакле постоји и једначина: $4y - 5x + 28 = 0$. Координате x и y имају да задовоље систем једначина: $12x - 16y = 14$, $4y - 5x = -28$, чије је решење: $x = \frac{49}{4}$, $y = \frac{133}{16}$ · Дакле је тражена тачка: **A** $\left(\frac{49}{4}, \frac{133}{16}\right)$ ·

* * *

171. *Четвероугао је задан својим теменима* $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C\left(3, -\frac{1}{3}\right)$, $D\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ · *Израчунај углове међу његовим дијагоналама* AC *и* BD.

Помоћу обрасца (193.) нађи једначине тих дијагонала. Добиваш: $AC \equiv y = -\frac{1}{9}x$, $BD \equiv y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ · А онда помоћу обрасца (195.) израчунај угао међу тима правама. Добиваш: $tg\,\varphi = \frac{7}{9} : \frac{25}{27} = \frac{21}{25}$ · Одатле $\varphi = 40^0\ 1'\ 48''$.

* * *

172. *Нађи једначину оне криву̂ље, која је геометријско место свих тачака, које имају једнаку раздаљеност од 2 заданих тачака $A(-2, 3)$, $B(3, 7)$.*

Геометријско место свих тачака, које имају једнаку раздаљеност од 2 заданих тачака, је симетрала дужи, ограничене тима двема тачкама. Да њу нађеш, мораш наћи координате располовишта C дужи међу тима тачкама и туда подићи нормалу на AB.

Координате располовишта: $x = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{7+3}{2} = 5$, т. ј. $C\left(\frac{1}{2}, 5\right)$. Константа смера праве AB је: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-3}{3+2} = \frac{4}{5}$; онда је константа смера нормале $-\frac{5}{4}$, а њезина једначина: $y - 5 = -\frac{5}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$; коначно: $\boldsymbol{y = -\frac{5}{4}x + \frac{45}{8}}$.

* * *

173. *Нађи површину правоуглог троугла, чија катета спаја тачке $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $B(3, 2)$, а хипотенуза AC лежи на правој $y + 2x + \frac{3}{2} = 0$.*

Треће теме C је у пресеку хипотенузе с другом катетом. Друга катета је нормала на прву катету у тачки B. За прву катету AB добиваш по обрасцу (193.) једначину: $8y = 3x + 7$. Нормала на ту праву у тачки B је $y - 2 = -\frac{8}{3}(x - 3)$. Теме C добиваш решењем система ове једначине и дане једначине праве AC. Његове координате су $x_3 = \frac{69}{4}$, $y_3 = -36$. Онда површина троугла по обрасцу (183.): $\mathbf{P} = \boldsymbol{86\frac{11}{16}}$.

* * *

174. *У троуглу, у коме стране имају једначине $3y = -5x + 14$, $3y = 7x + 2$, $3y = x - 10$, нађи једначине висина.*

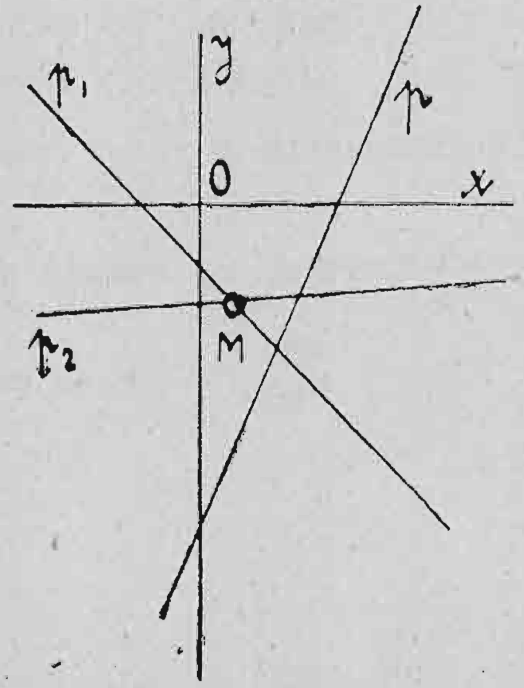
Задатак можеш решити на 2 начина.

а) Директни начин. Висина h_1 је један од зракова из прамена, који пролази пресеком првих двеју правих, па она има

(190.): $y = -\frac{5+7\lambda}{(1-\lambda).3} \cdot x + \frac{14-2\lambda}{3.(1-\lambda)}$ ..../1/. Константу смера $a = -\frac{5+7\lambda}{(1-\lambda).3}$ треба одредити тако, да буде према (197.) $a = -\frac{1}{a_3}$, где је $a_3 = \frac{1}{3}$ константа смера треће праве. То даје једначину: $\frac{5+7\lambda}{3(1-\lambda)} = 3$, чији је корен: $\lambda = \frac{1}{4}$. Замени ово у /1/, па добиваш једначину прве висине: $\boldsymbol{y = -3x + 6}$. Сличним ћеш поступком наћи једначине осталих 2 висина. Добиваш: за другу висину: $\boldsymbol{y = -\frac{7}{3}x - \frac{46}{9}}$, за трећу висину: $\boldsymbol{y = \frac{3}{5}x - \frac{26}{5}}$. б) *Индиректни начин.* Нађи теме A као пресек првих двеју страна решењем система: $3y = -5x + 14$, $3y = 7x + 2$; добиваш теме $A(1, 3)$. Једначина нормале из A на трећу страну је: $y - 3 = -3(x - 1)$, т. ј. $y = -3x + 6$ као горе.

---

175. *Нађи једначине правих, које пролазе тачком* $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ *и секу праву* $5x - 2y = 12$ *под углом* $\varphi = 63^0\ 26'\ 6''$. *(Сл. 75.)*



75. слика.

Те праве припадају прамену зракова, кому је теме $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$, па њихова једначина има облик: $y - y_1 = a.(x - x_1)$ ..../1/. Од тих правих треба помоћу (195.) наћи оне, које са p чине угао φ. Узми као a_1 константу смера задане праве $a_1 = \frac{5}{2}$, па из једначине: $\frac{a - \frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{2}a} = tg\ 63^0\ 26'\ 6'' = 2$ добиваш $a = -\frac{9}{8}$. Замени ову вредност у /1/, да добиваш: $\boldsymbol{y = \frac{9}{8}x - \frac{53}{48}}$.

Другу праву ћеш наћи, ако у (195.) замениш $a_2 = \frac{5}{2}$; добиваш: $a = \frac{1}{12}$; $p_2 \equiv y = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}} x - \frac{\mathbf{41}}{\mathbf{24}}$.

* * *

176. *Наћи раздаљеност праве $p_1 \equiv 3x + 4y - 5 = 0$ од паралелне праве $p_2 \equiv 3x + 4y + 8 = 0$.*

Одреди на p_1 једну тачку, н. пр. тачку на оси апсциса. Постави $y = 0$, па је одатле $x = \frac{5}{3}$. Раздаљеност ове тачке $A_1\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ од p_2 израчунај по обрасцу (201.). Заменом координата тачке A_1 у (201.) добиваш: $d = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{5}}$.

* * *

177. *У троуглу, коме су темена $A(1, 3)$, $B(4, -2)$, $C(-2, -4)$ нађи величине висина.*

Најпре применом обрасца (193) нађу једначине страна. За AB добиваш: $y - 3 = \frac{-2-3}{4-1} \cdot (x-1)$, т. ј. $3y = -5x + 14$, за AC: $3y = 7x + 2$, за BC: $3y = x - 10$. (Види зад. бр. 174.). Висина h_1 је раздаљеност темена A од BC. По обрасцу (201.) добиваш: $h_1 = \frac{3y_1 - x_1 + 10}{+\sqrt{10}}$, а након замене координата тачке A за x_1 и y_1 коначно: $h_1 = +\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}} \cdot \sqrt{\mathbf{10}}$. Слично за висину h_2 као раздаљеност темена B од AC: $h_2 = +\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{29}} \cdot \sqrt{\mathbf{58}}$, и за висину $h_3 = +\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{17}} \cdot \sqrt{\mathbf{34}}$.

* * *

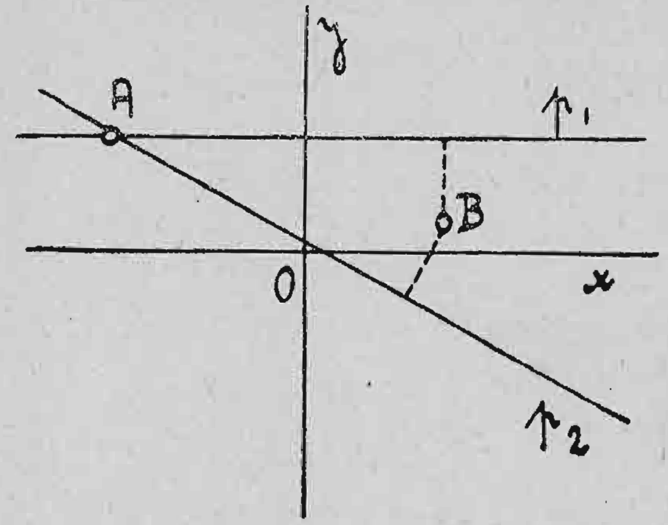
178. *Тачком $A(-7, 4)$ положи праве, које имају раздаљеност $d = 3$ од тачке $B(5, 1)$. (сл. 76.)*

Свака од тих правих има једначину облика: $y - 4 = a \cdot (x + 7)$ или $y = ax + (7a + 4)$. Упоређујући ову једначину са једначином $y=ax+b$, видиш, да за све ове праве вреди једначина: $b=7a+4$ ······ /1/ Према обрасцу (201) постоји за тачку B једначина:

$$\frac{1-5a-b}{\pm\sqrt{1+a^2}}=3 \text{ или}$$

$$1-5a-b=\pm 3.\sqrt{1+a^2},$$

која помоћу /1/ прелази у једначину: $4a+1=$ $=\pm\sqrt{1+a^2}$. Одатле $a_1=0$, $a_2=-\frac{8}{15}$. Те праве су:

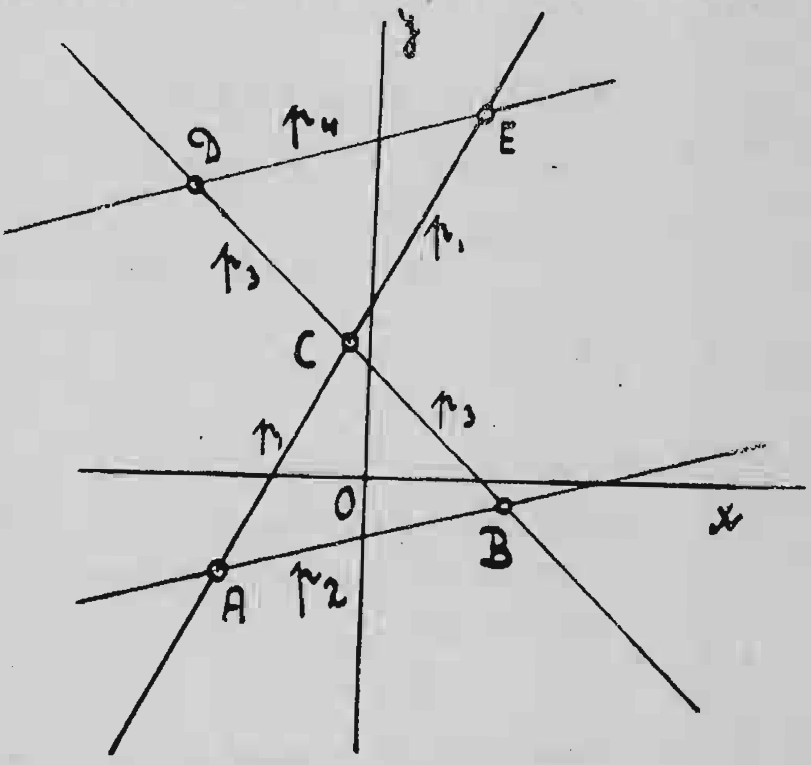


76. слика.

$$p_1\equiv y=4,\ p_2\equiv 15y+8x-4=0.$$

179. *Одреди једначине симетрала унутрашњих углова а) у троуглу, кому стране имају једначине:* $p_1\equiv y=2x+3$, $p_2\equiv y=\frac{1}{4}x-1$, $p_3\equiv y=-x+2$, *б) у троуглу, кому стране имају једначине* $p_1\equiv y=2x+3$, $p_4\equiv y=\frac{1}{4}x+6$, $p_3\equiv y=-x+2$. (77. сл.).

Ако су $\overline{p}_1=0$ и $\overline{p}_2=0$ једначине правих у нормалном облику, онда је према (202.), (203.) $\overline{p}_1-\overline{p}_2=0$ симетрала угла $\sphericalangle(p_1 p_2)$, у кому лежи почетак, а $\overline{p}_1+\overline{p}_2=0$ симетрала угла $\sphericalangle(p_2, p_1)$, у кому не лежи почетак координатнога система. — 1. Унутрашњи углови у △ ABC леже тако, да у сваком од њих лежи почетак координатног система. Према тому њихове симетрале имају ове једначине: за $\sphericalangle A$: $s_1\equiv\overline{p}_1-\overline{p}_2=0$, за $\sphericalangle B$: $s_2\equiv\overline{p}_2-\overline{p}_3=0$,



77. слика.

за $\sphericalangle C$: $s_3 \equiv \overline{p_3} - \overline{p_1} = 0$. Преведи праве p_1, p_2, p_3 у нормални облик. Добиваш: $\overline{p_1} \equiv \frac{y - 2x - 3}{-\sqrt{5}} = 0$, $\overline{p_2} \equiv \frac{4y - x + 4}{+\sqrt{17}} = 0$, $\overline{p_3} \equiv \frac{y + x - 2}{-\sqrt{2}} = 0$. Онда је: $s_1 \equiv \frac{y - 2x - 3}{-\sqrt{5}} - \frac{4y - x + 4}{+\sqrt{17}} = 0$, $s_2 \equiv \frac{4y - x + 4}{+\sqrt{17}} - \frac{y + x - 2}{-\sqrt{2}} = 0$, $s_3 \equiv \frac{y + x - 2}{-\sqrt{2}} - \frac{y - 2x - 3}{-\sqrt{5}} = 0$. Коначно: $\mathbf{s}_1 \equiv y = \frac{2\sqrt{17} + \sqrt{5}}{\sqrt{17} + 4\sqrt{5}} \cdot x - \frac{4\sqrt{5} - 3\sqrt{17}}{\sqrt{17} + 4\sqrt{5}}$, $\mathbf{s}_2 \equiv y = -\frac{\sqrt{17} - \sqrt{2}}{\sqrt{17} + 4\sqrt{2}} \cdot x + \frac{2\sqrt{17} - 4\sqrt{2}}{\sqrt{17} + 4\sqrt{2}}$, $\mathbf{s}_3 \equiv y = -\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot x + \frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.

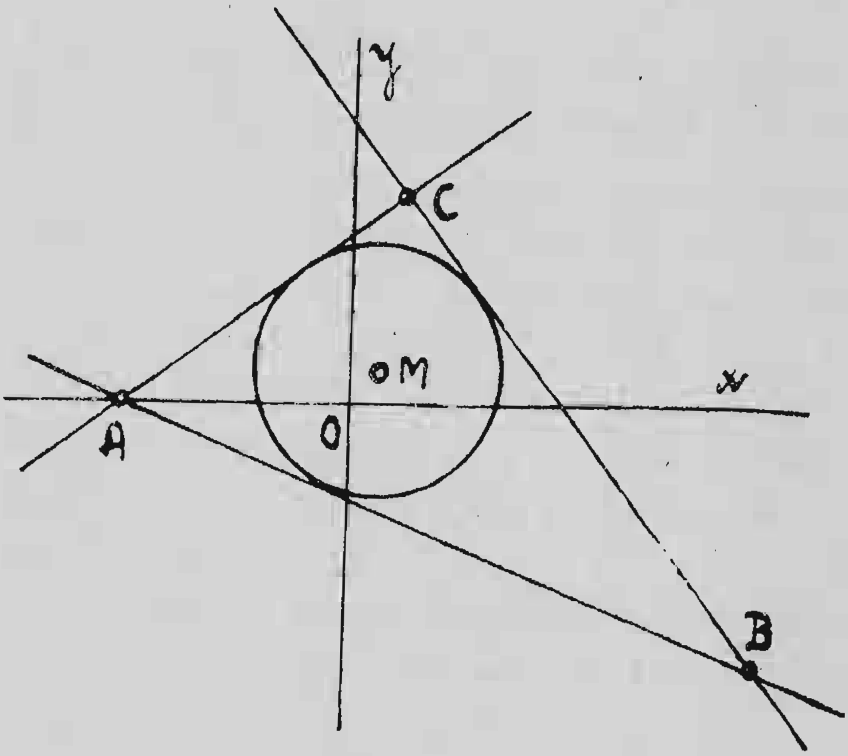
б) Код $\triangle CDE$ почетак лежи у $\sphericalangle C$, дотично у његовом унакрсном $\sphericalangle$, а код $\sphericalangle D$ и $\sphericalangle E$ почетак пада изван угла. Према тому ће њихове симетрале имати ове једначине: за $\sphericalangle E$: $s_4 \equiv \overline{p_1} + \overline{p_4} = 0$, за $\sphericalangle D$: $s_5 \equiv \overline{p_4} + \overline{p_3} = 0$, $s_6 \equiv s_3 \equiv \overline{p_3} - \overline{p_1} = 0$. Права p_4 у нормалном облику: $\overline{p_4} \equiv \frac{4y - x - 24}{-\sqrt{17}} = 0$. Коначно добиваш: $\mathbf{s}_4 \equiv y = \frac{2\sqrt{17} + \sqrt{5}}{\sqrt{17} + 4\sqrt{5}} \cdot x + \frac{3\sqrt{17} + 24\sqrt{5}}{\sqrt{17} + 4\sqrt{5}}$, $\mathbf{s}_5 \equiv y = -\frac{\sqrt{17} - \sqrt{2}}{4\sqrt{2} + \sqrt{17}} \cdot x + \frac{24\sqrt{2} + 2\sqrt{17}}{4\sqrt{2} + \sqrt{17}}$, $\mathbf{s}_6 \equiv \mathbf{s}_3$. Опажаш лако, да је $s_4 \parallel s_1$, $s_5 \parallel s_2$.

---

180. *Нађи површину круга, који је уписан у троуглу, чије 2 стране леже на правама $p_1 \equiv 4y = 3x + 12$, $p_2 \equiv 3y = -4x + 15$, а два су темена: $A(-4, 0)$, $B\left(\frac{80}{11}, -\frac{155}{33}\right)$. (Сл. 78.)*

Задатак можеш решити на 2 начина. а) Постави проблем овако: Треба наћи средиште M_1 (x_1, y_1) као тачку, која је једнако раздаљена од страна троугла. и одредити ту раздаљеност. Најпре одреди једначину стране AB према обрасцу

(193.) Добиваш: $p_3 \equiv y = -\frac{5}{12}x - \frac{5}{3}$. Раздаљеност стране p_1 од $M(x_1, y_1)$ према обрасцу (201.) је: $d_1 = \frac{4y_1 - 3x_1 - 12}{-5}$; исто тако $d_2 = \frac{3y_1 + 4x_1 - 15}{-5}$, $d_3 = \frac{12y_1 + 5x_1 + 20}{+13}$. А како



78. слика.

је $d_1 = d_2 = d_3 = r$, то добиваш систем једначина:

$$\frac{4y_1 - 3x_1 - 12}{-5} = \frac{3y_1 + 4x_1 - 15}{-5}, \quad \frac{4y_1 - 3x_1 - 12}{-5} = \frac{12y_1 + 5x_1 + 20}{13}.$$

Решење: $x_1 = \frac{28}{55}$, $y_1 = \frac{31}{55}$. То су координате средишта M. Замени то у један израз d, па добиваш, $d = r = \frac{124}{55}$. Онда је површина круга: $P = \left(\frac{124}{55}\right)^2 \cdot \pi = \mathbf{15{\cdot}969}$.

б) Средиште $M(x_1, y_1)$ је одређено и као тачка, у којој се секу симетрале унутрашњих углова. Према задатку (179 а) симетрале унутрашњих углова су: $\overline{p_1} - \overline{p_3} = 0$, $\overline{p_2} - \overline{p_3} = 0$ $\overline{p_1} - \overline{p_2} = 0$. Према обрасцу (191.) једначине правих у нормалном облику гласе овако: $\overline{p_1} \equiv \frac{4y - 3x - 12}{-5} = 0$, $\overline{p_2} \equiv \frac{3y + 4x - 15}{-5} = 0$, $\overline{p_3} \equiv \frac{12y + 5x + 20}{+13} = 0$. Ово замени у једначине симетрала. Добиваш коначно: $s_1 \equiv 8y - x - 4 = 0$,

$s_2 \equiv 99y + 77x - 95 = 0$, $s_3 \equiv -y + 7x - 3 = 0$. Решавањем система двеју од ових једначина налазиш као горе: $x_1 = \frac{28}{55}$, $y_1 = \frac{31}{55}$. Заменом ових вредности у једну од нормалних једначина добиваш даљину $d = r$, и т. д.

---

181. *Конструирај кривуљу $x^2 = 4{\cdot}2x + y^2 + 0{\cdot}41 = 0$ и одреди њезине пресеке са координатним осовинама.*

Кривуља је круг; доведи га у облик: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Из $4{\cdot}2x = -2xz$ излази: $z = 2{\cdot}1$, $z^2 = 4{\cdot}41$. Додај $4{\cdot}41$ на обе стране једначине, па добиваш: $x^2 + 4{\cdot}2x + 4{\cdot}41 + y^2 = 4{\cdot}41 - 0{\cdot}41$, т. ј. $(x + 2{\cdot}1)^2 + (y + 0)^2 = 2^2$. Тај круг има средиште у тачки $A(-2{\cdot}1, 0)$, а полупречник му је $r = 2$. Координате његових пресека са оси x добиваш, када у једначини поставиш $y = 0$. Из добивене једначине: $x^2 + 4{\cdot}2x + 0{\cdot}41 = 0$ излази $x_1 = -4{\cdot}1$, $x_2 = -0{\cdot}1$. — Координате пресека са оси ордината налазиш, ако у једначини круга поставиш $x = 0$. Излази: $y = \pm i\sqrt{0{\cdot}41}$, т. ј. тај круг не сече ос ордината.

---

182. *Нађи правоугли координатни систем, чији се почетак налази у средишту круга $x^2 + y^2 - 4x + 5y = 2$, а оси су паралелне са осима старога система.*

Круг доведи у облик (204). Добиваш: $(x^2 - 4x + 4) + \left(y^2 + 5y + \frac{25}{4}\right) = 2 + 4 + \frac{25}{4}$; одатле: $(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$. Тај круг има средиште $O\left(2, -\frac{5}{2}\right)$ и то је почетак новога система. Постави: $x' = x - 2$, $y' = y + \frac{5}{2}$; одатле: $x = x' + 2$, $y = y' - \frac{5}{2}$. То су једначине трансформације за преношење кривуље из старога система у нови. Тако задани круг прелази у новом систему у централни круг: $x'^2 + y'^2 = \frac{49}{4}$. — Једначине трансформације: $x' = x - 2$, $y' = y + \frac{5}{2}$ преносе га из новог система у стари.

---

183. *Истражи, је ли права* $5x + 4y = 80$ *тангента круга* $x^2 + y^2 = 100$.

Да права буде тангента круга мора га додиривати, т. ј. сећи у двема бескрајно блиским тачкама. Да то буде, мора систем једначина $5x + 4y = 80$, $x^2 + y^2 = 100$ дати само једно двоструко решење. Изрази из прве једну непознату помоћу друге, н. пр. y помоћу x, па добиваш једначину: $41x^2 - 800x + 4800 = 0$. Да та једначина има само једно решење, мора се њезина дискриминанта поништавати. Овде је: $D = (800)^2 - 4 . 41 . 4800 = 640000 - 787200$, т. ј. $D < 0$. Дакле задана права *није* тангента заданог круга, те га уопште *не сече.*

184. *Одреди једначину круга, који пролази почетком координатнога система и тачкама* $M_1\ (3, -1)$, $M_2\ (8, 4)$.

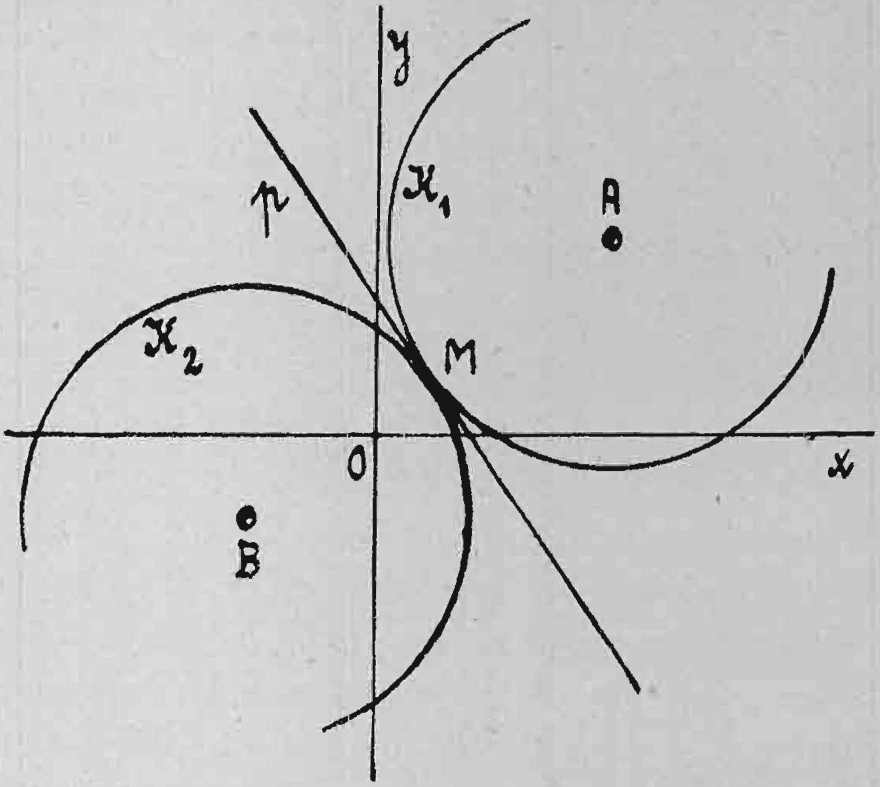
Круг ће имати једначину облика: $(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$ ..../1/, где координате средишта $A(a, b)$ и r још треба одредити. Да круг пролази тачкама: $O(o, o)$, $M_1(3,-1)$, $M_2(8, 4)$; морају координате ових тачака задовољавати једначину /1/; то даје једначине: $a^2 + b^2 = r^2$, $(3-a)^2 + (-1-a)^2 = r^2$, $(8-a)^2 + (4-b)^2 = r^2$. Изједначењем добиваш одавле систем једначина: $3a - b = 5$, $2a + b = 10$, које дају решење: $a = 3$, $b = 4$. Онда из прве једначине: $r = 5$. Заменом у /1/ добиваш једначину круга: $\boldsymbol{(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25}$, или у развијеном облику: $\boldsymbol{x^2 - 6x + y^2 - 8x = 0}$. По тому, што ова једначина нема апсолутног члана, види се, да круг фактично пролази почетком координатног система.

185. *Кроз тачку* $M(7, 5)$ *положи круг, чије је средиште у пресеку правих* $6x - y = 16$, $7x - 5y = 11$ *и нађи једначину његове тангенте у тачки* $M(7, 5)$

Координате средишта су одређене решењем система једначина $6x - y = 16$, $7x - 5y = 11$; решење је: $x = 3$, $y = 2$, т. ј. средиште је $O(3, 2)$. Полупречник је раздаљеност $OM = \sqrt{(7 - 3)^2 + (5 - 2)^3} = 5$. Према облику (204.) је једначина круга: $\boldsymbol{(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25}$. — Једначина тангенте (образац 210.) је: $(7 - 3) . (x - 3) + (5 - 2) . (y - 2) = 25$ т. ј. $\boldsymbol{4x + 3y = 43}$.

186. *Нађи једначину круга с полупречником $r=4$, који праву $4x+3y=7$ додирује у тачки $M(1, 1)$. (Сл. 79.)*

Два су таква круга: један додирује задану праву с позитивне стране, а други с негативне стране. Једначина ових кругова има облик $(x-a)^2+(y-b)^2=16$. Тачка $M(1, 1)$ лежи на тому кругу; дакле мора бити: $(1-a)^2+(1-b)^2=16$ ……/1/.



79. слика.

Средишта $O(a, b)$ кругова морају лежати на нормали, подигнутој на дану праву у тачки $M(1, 1)$. Једначина нормале је: $y-1=\frac{3}{4}\cdot(x-1)$; дакле постоји и једначина:

$b-1=\frac{3}{4}\cdot(a-1)$ ……/2/. Заменом једначине /2/ у /1/ добиваш $a_1=\frac{21}{5}$, $b_1=\frac{17}{5}$; $a_2=-\frac{11}{5}$, $b_2=-\frac{7}{5}$. Дакле су једначине кругова: k_1 …… $\left(x-\frac{21}{5}\right)^2+\left(y-\frac{17}{5}\right)^2=16$,

k_2 …… $\left(x+\frac{11}{5}\right)^2+\left(y+\frac{7}{5}\right)^2=16$.

---

187. *Одреди једначине темених кругова на осима x и y, који додирују праву $y=-\frac{3}{4}x+8$.*

Ови кругови пролазе почетком координатног система, а средишта им леже на оси x, дотично y. — На оси x су два:

њихова су средишта у тачкама $A(r_1,\ 0)$ и $B(-r_2,\ 0)$. Пошто додирују праву, то им је полупречник раздаљеност средишта од те праве, т. ј. применом обрасца (201.): $\dfrac{\frac{3}{4}r_1 - 8}{-\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = r_1,$

и $\dfrac{-\frac{3}{4}r_2 - 8}{-\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = r_2$. Из прве: $r_1 = 4$, из друге: $r_2 = 16$.

Једначине кругова: $(x-4)^2 + y^2 = 4^2$, $(x+16)^2 + y^2 = 16^2$, или: $\boldsymbol{x^2 + y^3 - 8x = 0}$, и: $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 32x = 0}$. — Посве слично решаваш и за ос y. Добиваш једначине кругова:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - \frac{64}{9}y = 0,\ x^2 + y^2 + 64y = 0.}$$

---

188. *Нађи једначину круга, који додирује ос апсциса и праву $3x - 4y + 6 = 0$, те пролази тачком $A(6,\ 2)$.*

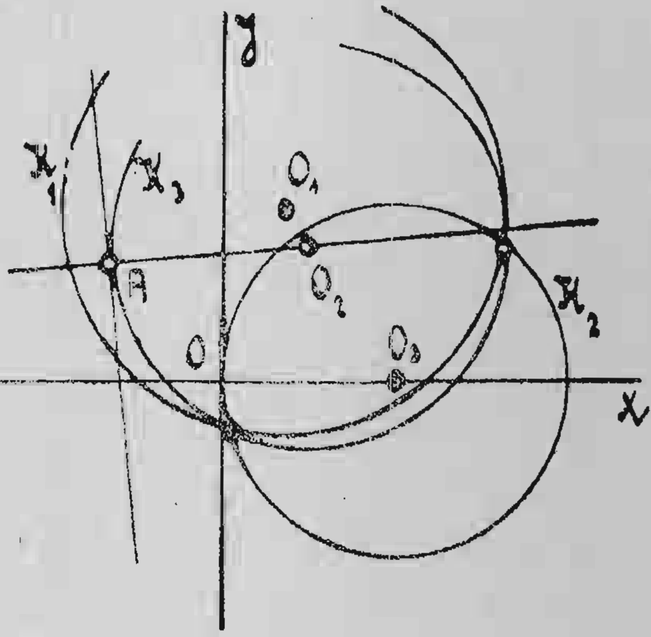
Како круг пролази тачком A, постоји једначина: $(6-a)^2 + (2-b)^2 = r^2$ ……… /1/. — Пошто он додирује ос апсциса, то је $r = b$; а како додирује праву $y = \frac{3}{4}x + \frac{6}{4}$, мора да је $r = b$ равно раздаљености средишта $O(a,\ b)$ од те праве, т. ј. $\dfrac{4b - 3a - 6}{-5} = r = b$ ……… /2/. Из /1/ и /2/ добиваш: $36 - 12a + a^2 + 4 - 4b = 0$, и: $3b = a + 2$. Решавањем овога система добиваш: $b_1 = 2$, $b_2 = \frac{34}{9}$, а помоћу тога: $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{28}{3}$. Према тому постоје 2 таква круга:

$$\boldsymbol{K_1 \equiv (x-4)^2 + (y-2)^2 = 2^2,\ K_2 \equiv \left(x - \frac{28}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{34}{9}\right)^2 = \left(\frac{34}{9}\right)^2.}$$

---

190. *Нађи једначину круга, који пролази пресецима кругова $k_1 \equiv x^2 - 2x + y^2 - 6y = 6$ и $k_2 \equiv x^2 - 6x + y^2 = 0$ и тачком $A(-2, +2)$. Одреди онда једначину тангенте и нормале тога круга у тачки A. (Сл. 80).*

Тражени круг k је један круг из снопа $k_1 - \lambda k_2 = 0$ (према обр. 215.), т. ј. из снопа: $x^2 - 2x + y^2 - 6y - 6 - \lambda.(x^2 - 6x + y^2) = 0$. Параметар λ треба одредити тако, да тражени круг пролази још и кроз A, т. ј. да његову једначину задовољавају координате тачке A. То даје условну једначину: $4 + 4 + 4 - 12 - 6 - \lambda.(4 + 12 + 4) = 0$. Одатле: $\lambda = -\frac{3}{10}$. Замени то у једначину снопа, па добиваш круг: **$7x^2 - 2x + 7y^2 - 60y - 60 = 0$**, или: $\left(x - \frac{19}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{30}{13}\right)^2 = \frac{2041}{169}$.



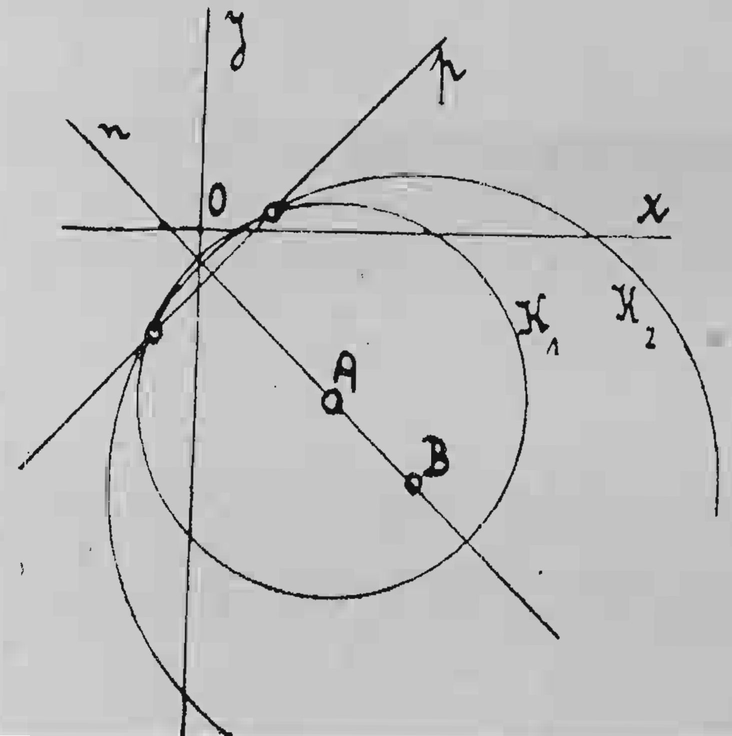
80. слика.

Једначина тангенте, према (210.), је: $\left(-2 - \frac{19}{13}\right)\cdot\left(x - \frac{19}{13}\right) + \left(2 - \frac{30}{13}\right)\cdot\left(y - \frac{30}{13}\right) = \frac{2041}{169}$. Одатле **$45x + 4y = -82$**. — Нормала је полупречник, т. ј. права, која је положена тачкама A и $O_3\left(\frac{19}{13}, \frac{30}{13}\right)$. Добиваш једначину: **$45y - 4x = 98$**.

---

191. *Нађи једначине потенцијале и централе кругова:* $x^2 + y^2 - 10x + 12y + 12 = 0$, $x^2 + y^2 - 16x + 18y + 24 = 0$. (*Сл. 82.*)

Према обрасцу (214.) добиваш одузимањем ових једначина једначину потенцијале: $p \equiv x - y = 2$. Пошто ова права има реелне пресеке с круговима, она је уједно њихова кордала. Провери то. —



пролази кроз средишта обају кругова. Зато дане једначине преведи у облик (204.). Добиваш: $(x-5)^2+(y+6)^2=7^2$, $(x-8)^2+(y+9)^2=11^2$. Средишта су: $A(5, -6)$, $B(8, -9)$. Онда применом обрасца (213.) једначина централе: $n \equiv \boldsymbol{x+y+1=0}$.

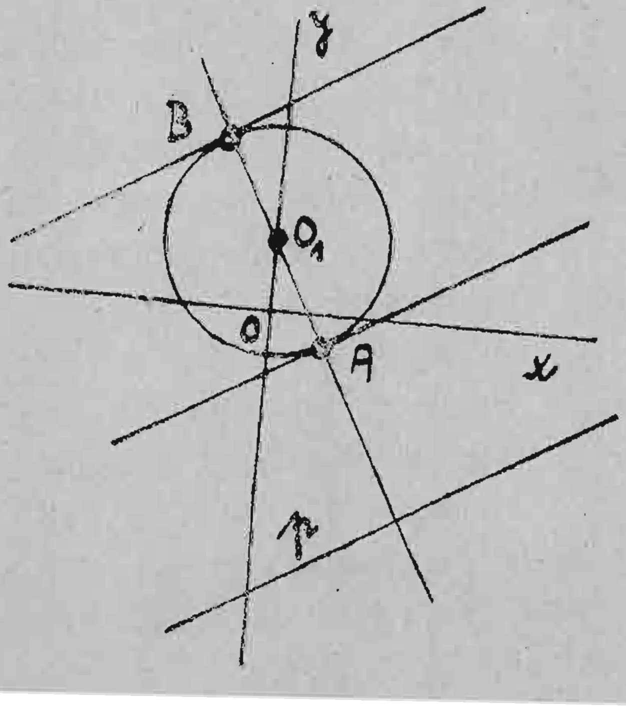
---

192. *Нађи једначине тангената круга $x^2+y^2=64$, које су паралелне с правом $3x+4y=11$.*

Према обрасцу (209.) једначина тангенте овога круга има облик: $yy_1+xx_1=64$ .... /1/. Како су x_1, y_1 координате додирних тачака, морају оне задовољавати и једначину круга, т. ј. мора постојати једначина: $x^2_1+y^2_1=64$ .... /2/. Права /1/ има константу смера $-\frac{x_1}{y_1}$, а та ради паралелности мора бити једнака константи смера задане праве. То даје другу условну једначину: $\frac{x_1}{y_1}=\frac{3}{4}$ .... /3/. Систем /2/, /3/ даје решења: $x_1=\frac{24}{5}$, $y_1=\frac{32}{5}$; $x_2=-\frac{24}{5}$, $y_2=-\frac{32}{5}$. То су координате додирних тачака. Замени то у /1/, па добиваш једначине тангената: $t_1 \equiv \boldsymbol{4y+3x=40}$, $t_2 \equiv \boldsymbol{4y+3x=-40}$.

---

193. *Која је тачка круга $2x^2+2y^2-5y-5=0$ највише, а која најмање удаљена од праве $p \equiv y=\frac{4}{7}x-5$ и колико износе те раздаљености?* (82. сл.)



Два начина. a) Те тачке леже на нормали, спуштеној из средишта круга на ту праву. Зато задани круг преведи у облик (204.): $x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{65}{16}$. Дакле је средиште: $O_1\left(0, \frac{5}{4}\right)$. По обрасцу (199.) једначина нормале из $O_1\left(O, \frac{5}{4}\right)$ на праву p:

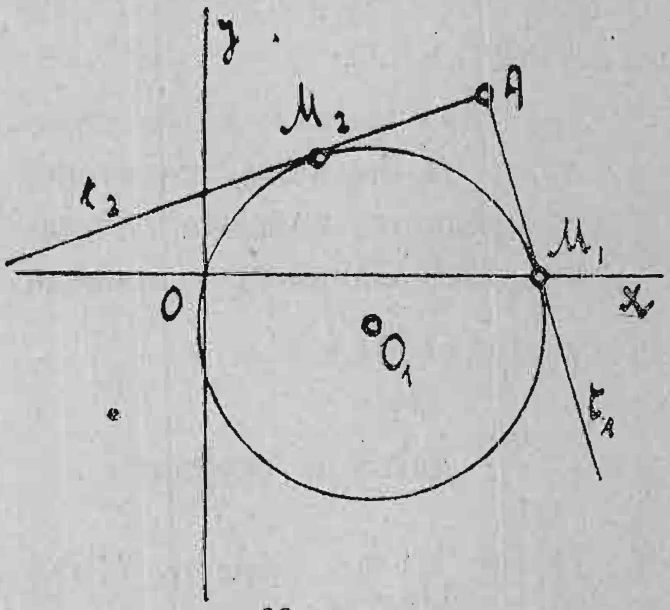
$y = -\frac{7}{4}x + \frac{5}{4}\cdot$ Решењем система $2x^2 + 2y^2 - 5y - 5 = 0$, $y = -\frac{1}{4}(7x - 5)$ добиваш: **A** $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, **B** $(-1, 3)$. То су пресеци нормале и круга. Њихове раздаљености од p по обрасцу (201.): $d_1 = \frac{11\sqrt{65}}{26}$, $d_2 = \frac{12\sqrt{65}}{13}$. *Проба*: $d_2 - d_1 = 2r$. *Или:*

б) Ове тачке су уједно додирне тачке $A(u, v)$ тангената паралелних са p. Зато поступај слично као у претходном примеру. Прва условна једначина: $2u^2 + 2v^2 - 5v - 5 = 0$ ..../1/. Константа смера тангенте према (210′) је $k = -\frac{4u}{4v-5}$, а мора бити равна константи смера праве p, т. ј.: $-\frac{4u}{4v-5} = \frac{4}{7}$ ..../2/. Решења система /1/, /2/ дају исте тачке као горе.

---

194. *Наћи једначине тангената, које се могу повући на круг* $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$ *из тачке* $A(5, 3)$. *(83. сл.).*

Једначина тога круга у облику (204.) гласи: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$, а према (210.) једначина његових тангената: $(x_1 - 3).(x - 3) + (y_1 + 1).(y + 1) = 10$ ..../1/. Како тачка A лежи на овој тангенти, мора постојати једначина: $(x_1 - 3).(5 - 3) + (y_1 + 1).(3 + 1) = 10$, или: $(x_1 - 3) + 2(y_1 + 1) = 5$ ..../2/. — С друге стране тачка $M(x_1, y_1)$ лежи на кругу, те мора постојати једначина: $(x_1 - 3)^3 + (y_1 + 1)^2 = 10$ ..../3/. Решење система /2/, /3/ даје координате додирних тачака: $M_1(6, 0)$, $M_2(2, 2)$.



83. слика.

Једначине тангената добиваш заменом координата у /1/: $t_1 \equiv 3x + y = 18$, $t_2 \equiv 3y - x = 4$. Који угао затварају међу собом ове тангенте?

195. *Нађи централну једначину елипсе, за коју је збир велике и мале полуоси* $a + b = 7$, *а линеарни ексцентрицитет* $e = \sqrt{21}$.

По обрасцу (218.) је $e = \sqrt{a^2 - b^2}$; дакле овде; $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21}$; одатле: $(a - b).(a + b) = 21$. Замени амо: $a + b = 7$, па добиваш: $a - b = 3$. Онда из система једначина: $a + b = 7$, $a - b = 3$ добиваш: $a = 5$, $b = 2$. Једначина елипсе: $\mathbf{4x^2 + 25y^2 = 100}$.

196. *Елипса има линеарни ексцентрицитет* $c = 3$, *а површина правоугаоника, кому су стране њезине полуоси је:* $P = 20$. *Нађи полупречник једнакога круга и њезину једначину.*

Према (218.): $a^2 - b^2 = 9$, а површина правоугаоника: $ab = 20$. Одавле $a = 5$, $b = 4$, једначина: $\mathbf{16x^2 + 25y^2 = 400}$. Из $r^2\pi = 5.4.\pi$ излази $\mathbf{r = \sqrt{20}}$, $x^2 + y^2 = 20$.

197. *У елипси* $7x^2 + 9y^2 = 63$ *уписан је квадрат, чије су стране паралелне са осима елипсе. Нађи координате његових темена и израчунај размеру између његове и елипсине површине.*

Темена квадрата морају свакако лежати симетрично према осима елипсе, т. ј. према координатним осима, јер је елипса дана централном једначином. Дакле су темена: $A(x_1, y_1)$, $B(-x_1, y_1)$, $C(-x_1, -y_1)$, $D(x_1, -y_1)$. Страну квадрата израчунај обрасцем (179), па је: $AB = \sqrt{(x_1 + x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = 2x_1$, $BC = \sqrt{(-x_1 + x_1)^2 + (y_1 + y_1)^2} = = 2y_1$. А јер је $AB = BC = CD = AD$, имаш: $x_1 = y_1$ ..../1/. Ове тачке осим тога леже на даној елипси, па постоји и једначина: $7x_1^2 + 9y_1^2 = 63$ ..../2/. Систем једначина /1/, /2/ даје:
$x_1 = \pm\frac{3}{4}\sqrt{7}$, $y_1 = \pm\frac{3}{4}\sqrt{7}$. Дакле су темена: $A\left(\frac{3}{4}\sqrt{7}, \frac{3}{4}\sqrt{7}\right)$, $B\left(-\frac{3}{4}\sqrt{7}, \frac{3}{4}\sqrt{7}\right)$, $C\left(-\frac{3}{4}\sqrt{7}, -\frac{3}{4}\sqrt{7}\right)$, $D\left(\frac{3}{4}\sqrt{7}, -\frac{3}{4}\sqrt{7}\right)$.

Дужина стране: $c = 2x_1 = 2y_1 = \frac{3}{2}\sqrt{7}$, површина квадрата: $P_1 = \frac{63}{4}$, површина елипсе $P_2 = ab.\pi = 3 \cdot \sqrt{7}.\pi$, тражена размера: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{3\sqrt{7}}{4\pi}$.

198. *Одреди једначине тангената, које се из тачке $A(-5, 4)$ могу повући на елипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.*

Доведи елипсу у облик: $4x^2 + 25y^2 = 100$. Једначина њезиних тангената је: $4x_1 x + 25 y_1 y = 100$, где још треба знати координате тачке $M(x_1, y_1)$. Како та тангента пролази тачком $A(-5, 4)$, мора постојати једначина: $-20x_1 + 100 y_1 = 100$, или: $x_1 - 5y_1 = -5$ ..../1/. — С друге стране тачка $M(x_1, y_1)$ лежи на елипси, па мора постојати једначина: $4x_1^2 + 25y_1^2 = 100$ ..../2/. Реши систем једначина /1/, /2/. Решења: $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{8}{5}$, а помоћу тога $x_1 = -5$, $x_2 = 3$. Додирне тачке су: $M_1(-5, 0)$, $M_2\left(3, \frac{8}{5}\right)$, а једначине тангената:

t$_1$ .... $\boldsymbol{x = -5}$, **t**$_2$ .... $\boldsymbol{3x + 10y = 25}$. Овакав задатак решава се сличним поступком за хиперболу и за параболу.

* * *

199. *Нађи једначине нормала елипсе $4x^2 + 25y^2 = 100$, које су паралелне с правом $p \equiv 3y - 10x = 10$.*

Према обрасцу (222.) једначине нормала ове елипсе су: $y - y_1 = \frac{25y_1}{4x_1} \cdot (x - x_1)$, где имаш да нађеш координате x_1 и y_1. Ради паралелности са p морају бити њихове константе смера $\frac{10}{3}$, т. ј. $\frac{25y_1}{4x_1} = \frac{10}{3}$ ..../1/. — Тачке $A(x_1, y_1)$ морају лежати на елипси, па постоји једначина: $4x_1^2 + 25y_1^2 = 100$ ..../2/. Реши систем једначина /1/, /2/. Добиваш: $x_1 = \pm 3$, $x_2 = \pm\frac{8}{5}$, т. ј. тачке елипсе: $A_1\left(3, \frac{8}{5}\right)$, $A_2\left(-3, -\frac{8}{5}\right)$. Једначине нормала: n_1 .... $\boldsymbol{y = \frac{10}{3}x - \frac{42}{5}}$, n_2 .... $\boldsymbol{y = \frac{10}{3}x + \frac{42}{5}}$.

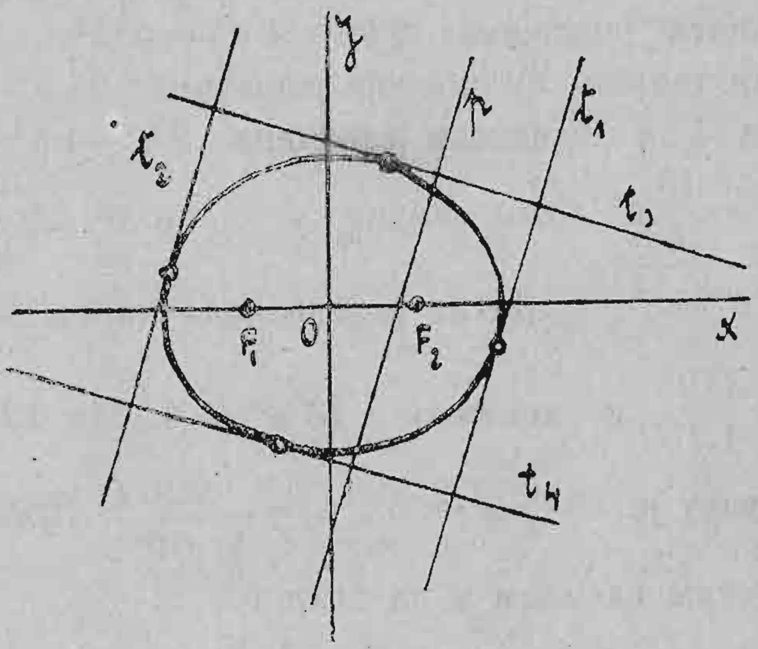
Једнаким поступком решаваш овај задатак за *хиперболу* и *параболу*.

* * *

200. *Елипсу $3x^2 + 4y^2 = 28$ затвори у најмањи правоугаоник, чије су стране паралелне и нормалне са правом $p \equiv 3y - 10x + 12 = 0$. Нађи једначине страна тога правоугаоника. (Сл. 84.)*

Стране тога правоугаоника су тангенте

лелне са p, а две нормалне на p. Тангенте ове елипсе имају према обрасцу (221.) општи облик: $y - y_1 =$ $= -\frac{7 \cdot 3x_1}{28y_1} \cdot (x - x_1)$ ..../1/, где су x_1 и y_1 непознате коорди-



84. слика.

нате њихових додирних тачака. Константа смера тангенте је фактор испред $x - x_1$, т. ј. $m = -\frac{3x_1}{4y_1}$. За тангенте паралелне са p мора бити m једнако константи смера праве p, т. ј. $m = \frac{10}{3}$. Одатле једначина: $-\frac{3x_1}{4y_1} = \frac{10}{3}$ ..../2/. Али x_1 и y_1 су координате тачке на елипси, па мора постојати и једначина: $3x_1^2 + 4y_1^2 = 28$ ..../3/. Ова једначина са /1/ даје координате додирних тачака за тангенте паралелне са p; добиваш: $x_1 = \pm \frac{40}{183}\sqrt{183}$, $y_1 = \mp \frac{9}{183}\sqrt{183}$. Замени то у /1/ па добиваш:

$\mathbf{t_1} \equiv 10x - 3y = \frac{7}{3}\sqrt{183}$, $\mathbf{t_2} \equiv 10x - 3y = -\frac{7}{3}\sqrt{183}$. — За тангенте нормалне на праву p мора бити: $-\frac{3x_1}{4y_1} = -\frac{3}{10}$ ..../4/. С друге стране имаш опет једначину /3/. Овај систем једначина /3/, /4/ даје додирне тачке за тангенте нормалне на p; добиваш: $x_2 = \pm 1$, $y_2 = \pm \frac{5}{2}$. Одатле једначине тангената:

$\mathbf{t_3} \equiv 3x + 10y = 28$, $\mathbf{t_4} \equiv 3x + 10y = -28$.

201. *Нађи централну једначину хиперболе, која пролази тачкама $M_1(3, 2)$, $M_2(-5, 8)$. Израчунај њезин линеарни ексцентрицитет.*

Једначина ће имати облик: $b x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, где имаш да нађеш a^2 и b^2. Пошто хипербола има да прође тачком M_1, мора постојати једначина: $9 b^2 - 4 a^2 = a^2 b^2$ ..../1/, а јер она пролази тачком M_2, постоји једначина: $25 b^2 - 64 a^2 = a^2 b^2$ ..../2/. Из /1/ и /2/ излази једначина: $9 b^2 - 4 a^2 = 25 b^2 - 64 a^2$. Одатле: $b^2 = \frac{15}{4} a^2$. Ово замени у /1/ или /2/ па добиваш $a^2 = \frac{119}{15}$, $b^2 = \frac{119}{4}$. Дакле је једначина хиперболе: $\frac{119}{4} x^2 - - \frac{119}{15} y^2 = \frac{119^2}{4.15}$ и коначно: $\boldsymbol{15 x^2 - 4 y^2 = 119}$. Линеарни ексцентрицитет је $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, $e = \sqrt{\boldsymbol{\frac{2261}{60}}}$. Први део задатка решаваш истим начином и за *елипсу*.

---

202. *Састави систем од првих једначина из примера бр. 140. и 141. (I. део, стр. 69, 70.) и реши га. Које аналитичко значење имају ове 2 једначине и што значе решења овога система?*

Види геометријско значење на крају споменутих примера. Систем решаваш сабирањем и одузимањем једначина. Координате пресека су ове: $A(\sqrt{10}, \sqrt{3})$, $B(-\sqrt{10}, \sqrt{3})$, $C(-\sqrt{10}, -\sqrt{3})$, $D(\sqrt{10}, -\sqrt{3})$.— Ради се о централном кругу и о равностраној хиперболи.

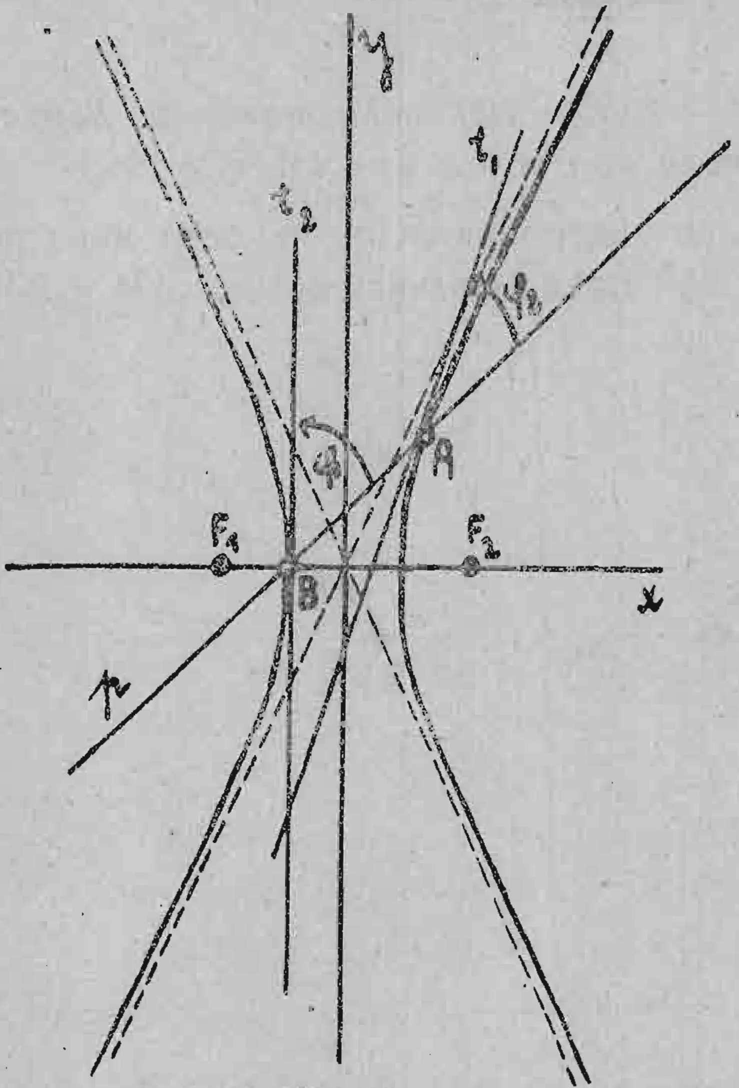
---

203. *Нађи једначине асимптота хиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$, те израчунај угао, који оне затварају међу собом.*

Замени непосредно у једначине асимптота (232.) вредности $a = 4$, $b = 3$ за ову хиперболу. Добиваш једначине: $y = + + \frac{3}{4} x$, $y = - \frac{3}{4} x$.— Њихове константе смера су: $a_1 = tg \alpha_1 = = \frac{3}{4}$, $a_2 = tg\, \alpha_2 = - \frac{3}{4}$. Угао $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ израчунај по обрасцу (195.). Добиваш: $tg\, \varphi = - \frac{24}{7} = - cotg(90 + \varphi')$; $\varphi = \boldsymbol{106^0\ 15'\ 37''}$.

204. *Нађи централну једначину хиперболе, која пролази тачком* $M(1, \sqrt{3})$, *и којој је права* $y = 2x$ *једна асимптота, те израчунај углове, под којима хиперболу сече права* $p \equiv y = x + \frac{1}{2}$ *(85. сл.)*

Једначина те хиперболе биће облика $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, јер тачка M лежи између асимптоте $y = 2x$ и оси x. Да ова тачка тако лежи, види се по тому, што тачка на асимптоти, којој је апсциса $x = 1$, има ординату $y > \sqrt{3}, (y = 2)$[1]. — Хипербола има да прође кроз тачку M; дакле координате ове тачке морају задовољити једначину хиперболе; то даје једначину: $b^2 - 3a^2 = a^2b^2$ .... /1/. Константе смера асимптота су $\pm\frac{b}{a}$; онда према задатку имаш другу једначину: $\frac{b}{a} = 2$ .... /2/. Решење система /1/, /2/ је: $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$; дакле хипербола има једначину: $4x^2 - y^2 = 1$. — Тражени углови леже међу правом $y = x + \frac{1}{2}$ и тангентама хиперболе, повученим кроз пресеке A и B хиперболе с правом. Зато нађи координате тачака A и B, а онда једначине тангената коз A и B. Координате ових тачака добиваш решењем система $4x^2 - y^2 = 1$, $y = x + \frac{1}{2}$. Добиваш: $A\left(\frac{5}{6}, \frac{4}{3}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Једначине тангената (према обр. 235′) за A: $t_1 \equiv \frac{5}{2}x - y = \frac{3}{4}$, за B: $t_2 \equiv x = -\frac{1}{2}$. Друга



85. слика.

---

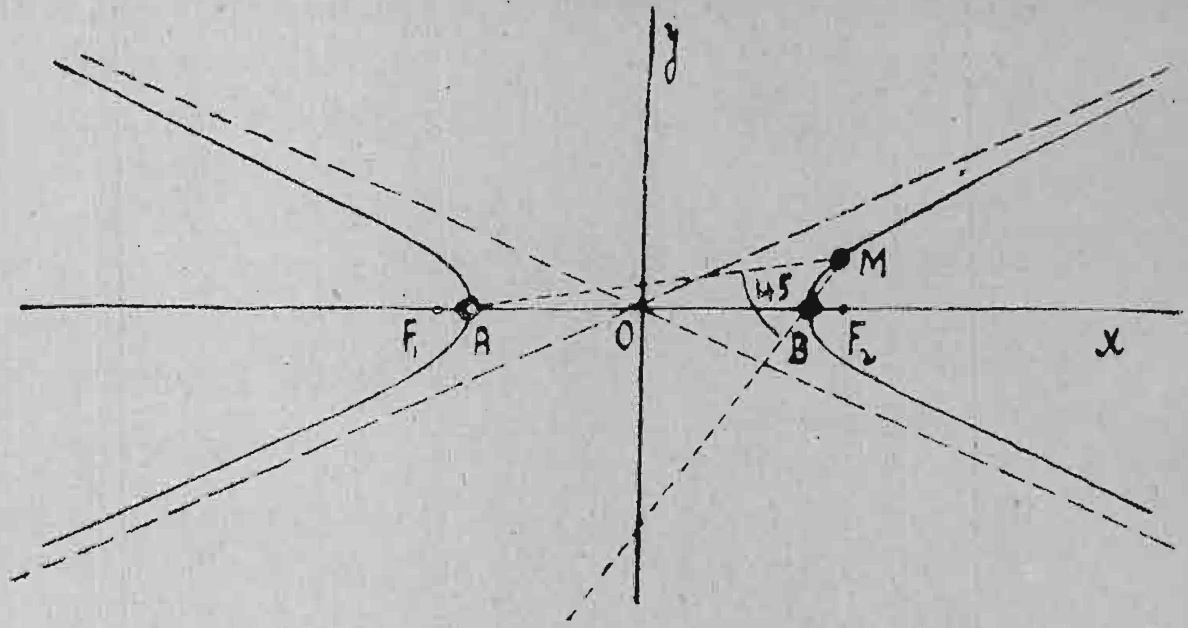
[1] Да тачка M лежи између асимптоте и оси y, долазила би у (спрегнута) хипербола (233).

тангента је || са ординатном осовином; њезина константа смера $tg\,\alpha_2 = \infty$; дакле $\sphericalangle\, \alpha_2 = 90^0$. А права p има $tg\,\alpha = 1$, $\alpha = 45^0$; према тому права p сече хиперболу у B под $\sphericalangle\, \varphi_1 = 45^0$. Угао у тачки A нађи по обрасцу (195). Овде је $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $tg\,\varphi_2 = \frac{8}{9}$, $\varphi_2 = 41^0\ 38'\ 2''$.

---

205. *На хиперболи $4x^2 - 25y^2 = 100$ нађи тачку, из које се њезина главна ос види под углом $\varphi = 45^0$. (Сл. 86.)*

Нека је то тачка на хиперболи $M(u,\ v)$; онда мора по задатку бити $\sphericalangle\, AMB = 45^0$. Нађи једначине правих AM и BM.



86. слика.

Тачке A и B су темена хиперболе, т. ј. $A(-5,\ 0)$, $B(+5,\ 0)$. Онда према обрасцу (193.) су једначине тих правих: $y = \frac{v}{u+5}\cdot(x+5)$, $y = \frac{v}{u-5}\cdot(x-5)$, а њихове константе смера: $a_1 = \frac{v}{u+5}$, $a_2 = \frac{v}{u-5}$. А јер је $tg 45^0 = 1$, имаш према задатку помоћу обрасца (195.) једначину: $\left(\frac{v}{u-5} - \frac{v}{u+5}\right) : \left[\left(1 + \frac{v^2}{(u-5).(u+5)}\right)\right] = 1$, или коначио: $u^2 + v^2 - 10v - 25 = 0$ .... /1/. Осим тога координате тачке M морају задовољавати једначину хиперболе, т. ј. $4u^2 - 25v^2 = 100$ ..... /2/. Решење система /1/, /2/ решава задатак. Добиваш: $u = \pm 6{\cdot}06$.

$v = \pm\frac{40}{29}$, тачке: $M\left(\pm \mathbf{6{\cdot}06}, \pm\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{29}}\right)$; свега 4 симетричне тачке.

Слично се решава овакав задатак и за елипсу.

---

206. *Израчунај дужину тетиве параболе* $y^2 = \frac{9}{2}x$, *која лежи на правој*: $y = 3x - 3$.

Та је тетива ограничена тачкама A и B, у којима та права сече параболу. Дакле мораш одредити координате тачака A и B, т. ј. решити систем: $y^2 = \frac{9}{2}x$, $y = 3(x-1)$. Решењем добиваш тачке: $A(2, 3)$, $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)\cdot$ Помоћу обрасца (179.) добиваш дужину тетиве: $AB = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{10}}$.

---

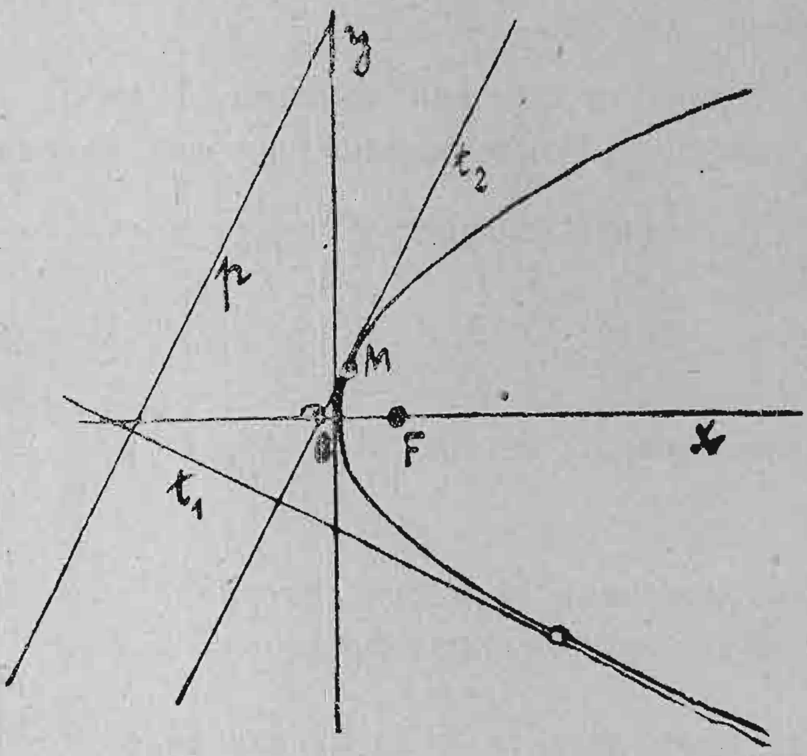
207. *Одреди једначину тангенте параболе* $y^2 = 15x$, *која са апсцисном осовином затвара угао* $\alpha = 45^0$.

Из једначине тангенте (242.) излази овде: $y = \frac{15}{2y_1}\cdot(x - x_1)$. Константа смера тангенте је $\frac{15}{2y_1}$, и мора да буде: $\frac{15}{2y_1} = \operatorname{tg} 45^0 = 1$; одатле $y_1 = \frac{15}{2}\cdot$ Наћи ћеш x_1 заменом вредности y_1 у једначину параболе. Добиваш: $x_1 = \frac{15}{4}$, а заменом у једначину тангенте: $y = x + \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}\cdot$

---

208. *Одреди једначину тангенте параболе* $y^2 = 4x$, *која је нормална на правој* $p \equiv y = 2x + 7$ *и тангенте, која је паралелна с том правом.* (*89. слика*).

a) Према (242′) једначине тангената ове параболе имају облик $y = \frac{2}{y_1}\cdot(x + x_1)$, где су x_1 и y_1 непознате координате додирних тачака $M(x_1, y_1)$. Тачка M лежи на параболи; дакле постоји једначина: $y_1{}^2 = 4x_1$ ..../1/. С друге стране константа смера $\frac{2}{y_1}$ тангенте мора бити једнака константи смера нормале на правој p, т. ј. мора бити: $\frac{2}{y_1} = -\frac{1}{2}\cdot$ Одатле: $y_1 = -4$, а помоћу /1/: $x_1 = 4$. Дакле једначина тангенте, нормалне на p, је: $t_1 \equiv \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x - 2}$. *б)* Константа смера $\frac{2}{y_1}$ паралелне



87. слика.

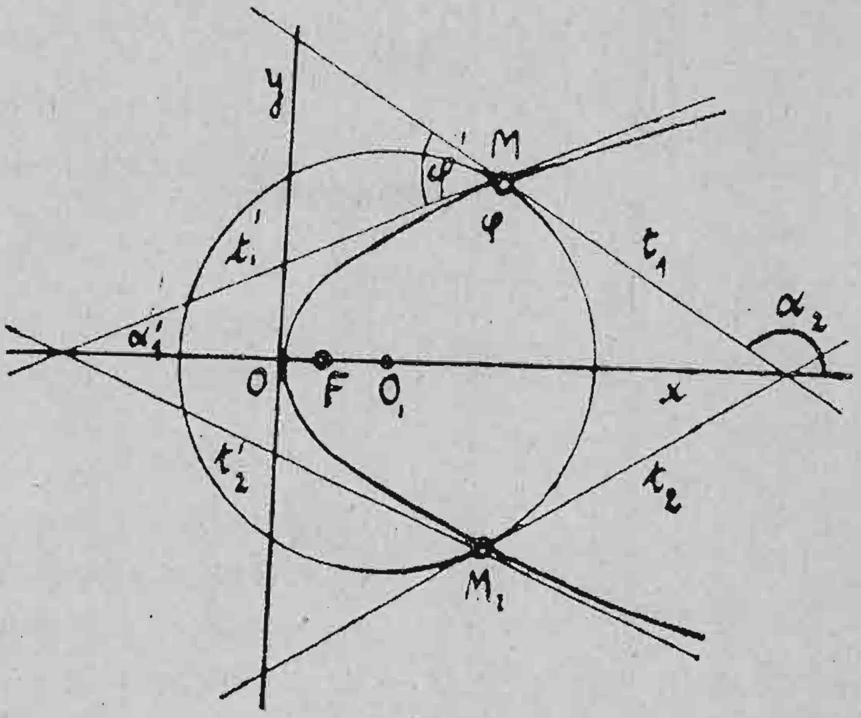
тангенте мора бити једнака константи смера праве p, т. ј.: $\frac{2}{y_1} = 2$; $y_1 = 1$, а помоћу /1/: $x_1 = +\frac{1}{4}\cdot$ Дакле једначина паралелне тангенте $t_2 \equiv \boldsymbol{y = 2x + \frac{1}{2}}\cdot$

---

209. *Нађи угао, под којим круг $x^2 - 6x + y^2 = 24$ сече параболу $y^2 = 4x$. (Сл. 88.)*

Смер кривуље у даној тачки дан је смером њезине тангенте у тој тачки. Према томе угао међу кругом и параболом је угао међу тангентама круга и параболе, повученим у њиховом пресеку. Зато решењем система једначина $x^2 - 6x + y^2 = 24$, $y^2 = 4x$ нађи најпре координате њихових пресека. Добиваш тачке: $M_1\,(6,\ 2\sqrt{6})$, $M_2\,(6,\ -2\sqrt{6})$. По обрасцу (210.) добиваш једначине тангената круга за те тачке: $t_1 \equiv 2y.\sqrt{6} +$

те параболе: $t'_1 \equiv y = \frac{\sqrt{6}}{6}x + \sqrt{6}$, $t'_2 \equiv y = -\frac{\sqrt{6}}{6}x - \sqrt{6}$. Угао међу кругом и параболом у тачки M_1 је угао међу тангентама



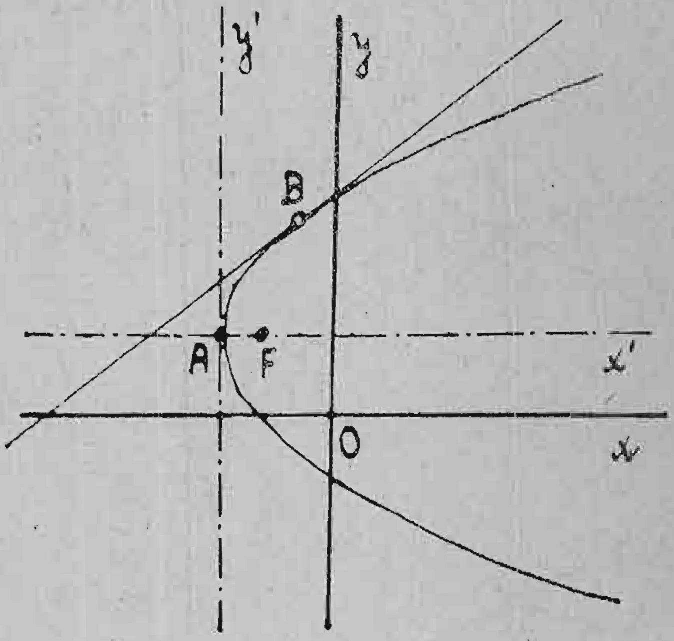
88. слика.

t_1 и t'_1, који се израчунава по обрасцу (195.) Добиваш: $\varphi = 126^0\ 18'\ 36''$, или оштри угао: $\varphi' = \mathbf{53^0\ 41'\ 24''}$. Због симетричног положаја круга према параболи добиваш исте углове и за тачку M_2.

**210. *Једна парабола, којој је главна ос паралелна са оси апсциса, а теме јој је у тачки $A(-3, 2)$, додирује праву $3x - 4y + 23 = 0$ у тачки B, којој је ордината $y_1 = 5$. Нађи једначину те параболе и даљину њезине жиже од те праве (89. слика).*

Најпре помери координатни систем паралелно у тачку $A(-3, 2)$. Једначине трансформације су: $x = x' - 3$, $y = y' + 2$. У том новом систему (x', y') тачка B има ординату $y'_1 = 3$, а права једначину: $3x' - 4y' + 6 = 0$ ..../1/. Ова права је тангента параболе; према тому она мора одговарати обрасцу (242.). Према тому овде је једначина тангенте: $y' = \frac{p}{3}x' + \frac{p}{3}x_1'$ ..../2/. Доведи /1/ у облик (190.), т. ј. у облик: $y' = \frac{3}{4}x' + \frac{3}{2}$, па упоређивањем десне стране са /2/ добиваш једначине:

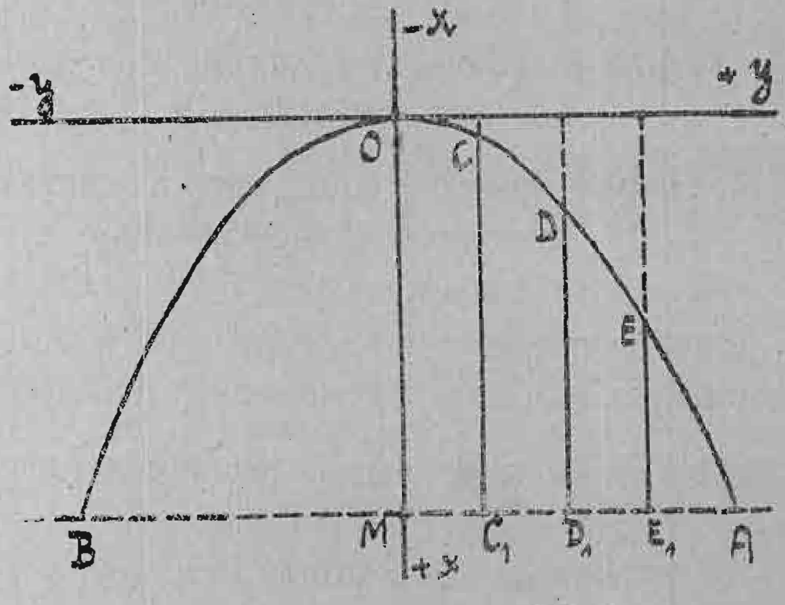
$\frac{p}{3} = \frac{3}{4}$, $\frac{p}{3}x'_1 = \frac{3}{2}$. Одатле $p = \frac{9}{4}$, $x' = 2$. Дакле тражена парабола има једначину: $y'^2 = \frac{9}{2}x'$, а додирује праву /1/ у тачки $B'(2, 3)$. Њезина жижа F има координате $x'_0 = \frac{9}{8}$, $y'_0 = 0$. За раздаљеност праве /1/ од F добиваш помоћу обрасца (201.): $d = \frac{15}{8}$. Још пренеси једначину параболе у стари координатни систем помоћу једначина трансформације: $x' = x + 3$, $y' = y - 2$. Добиваш: $(y - 2)^2 = \frac{9}{2}(x + 3)$, или: $\mathbf{2y^2 - 8y - 9x - 19 = 0}$.



89. слика.

211 *Свод једнога моста треба да има облик параболе. Највиша тачка свода је у висини $h = 14{\cdot}4\ m$ над хоризонталном равни, а унутрашња раздаљина међу његовим крајевима у тој равни износи $d = 24\ m$ (отвор моста). Које висине морају имати стубови скеле, који ће подупирати мост за време градње, ако се они морају наместити на свака 3 метра лево и десно од средине? (Сл. 90)*

Најпре треба наћи једначину параболе, која у даљини $x = 14{\cdot}4$ има тетиву, паралелну са директрисом, величине $d = 24$. Другим речима треба наћи темену једначину параболе, која пролази тачком $A\left(14{\cdot}4, \pm\frac{24}{2}\right)$. — Једначина ће бити

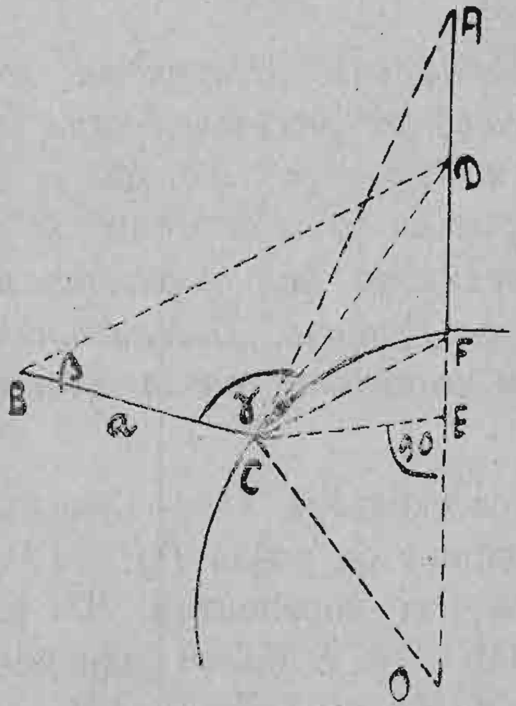


90. слика.

бити испуњена једначина: $12^2 = 2p \,.\, 14{\cdot}4$. Одатле $p = 5$, а једначина параболе; $y^2 = 10x$. Тачке M_1, C_1, D_1, E_1, у којима долазе стубови, имају ординате: $y = 0$, 3, 2.3, 3.3. Висине стубова су: $OM = h = 14{\cdot}4$, $CC_1 = OM - x_1 = 14{\cdot}4 - x_1$, $DD_1 = 14{\cdot}4 - x_2$, $EE_1 = 14{\cdot}4 - x_3$, где су x_1, x_2, x_3 апсцисе тачака параболе C, D, E. Апсцису тачке C израчунај из једначине: $3^2 = 10x_1$; одатле $x_1 = 0{\cdot}9$, а помоћу тога: $\mathbf{CC_1 = 13{\cdot}5}$. Истим поступком налазиш: $\mathbf{DD_1 = 10{\cdot}8}$, $\mathbf{EE_1 = 6{\cdot}3}$.

Додатак.

***212. *Да се израчуна апсолутна висина брда, чији се врх A диже над морским хоризонтом, измерени су ови подаци: хоризонтална дуж $BC = a = 1850\,m$ на морској обали, чији продужак не пролази кроз осовину брда: затим у вертикалној равни угао елевације врха A из тачке C ($\varphi = 5^0\ 54'\ 16''$), а у хоризонталној равни визирни угао из C између осовине брда и дужи BC ($\gamma = 93^0\ 14'\ 43''$) и визирни угао из B између дужи BC и осовине брда ($\beta = 83^0\ 13'\ 40''$). Израчунај висину тога брда, ако му је подножје под хоризонтом, и даљину AC. Полупречник земље $r = 6370000\,m$. (Сл. 91.)*



91. слика.

Троугао BCD лежи у хоризонталној равни (тангенцијална раван кугле у тачки C), а троуглови ACD, CDO, ACO, CDE, CEO леже у вертикалној равни. Означи: $\sphericalangle ACD = \varphi$, $\sphericalangle DCE = \alpha$, $\sphericalangle DCO = 90^0$ (угао између тангенте и полупречника), $\sphericalangle COE = \delta = \alpha$ (краци $\perp$). *Апсолутна* висина брда је $AF = h$, а *привидна* (видљиви део над хоризонтом) је AD. Троугао DCO је правоугли троугао, а $CE = v$ је његова висина; ACD је косоугли троугао. $AE = y$, $EF = z$. Из троугла BCD је: $CD = b = \dfrac{a \,.\, \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$ (по синусовом правилу). Апсолутна висина $h = AE - EF = y - z$. Из *правоуглог* троугла DCO је: $tg\,\alpha = tg\,\delta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{a.\,\sin\beta}{r.\,\sin(\beta+\gamma)}$ .... /1/.

Из правоуглог троугла ACE је $AE = y = v \,.\, tg\,(\varphi + \alpha)$, а из правоуглог троугла COE је $v = EC = r \,.\, sin\, \delta = r\, sin\, \alpha$; дакле је: $y = r \,.\, sin\, \alpha \,.\, tg\,(\alpha + \varphi)$ .... /2/. Угао DCF је угао између тангенте и тетиве, па је $\sphericalangle DCF = \frac{\delta}{2} = \frac{\alpha}{2}$; онда је и $\sphericalangle ECF = \frac{\alpha}{2}$, па из правоуглог троугла CEF: $EF = z =$ $= v \,.\, tg\, \frac{\alpha}{2} = r \,.\, sin\, \alpha \,.\, tg\, \frac{\alpha}{2} = 2r.\, sin^2 \frac{\alpha}{2}$ .... /3/. Онда је:

$$h = r \,.\, \left[sin\, \alpha \,.\, tg\,(\alpha + \varphi) - 2\, sin^2 \frac{\alpha}{2} \right]$$ .... /4/. Удаљеност врха брда од тачке C, т. ј. $AC = x = \frac{v}{cos\,(\alpha + \varphi)} = \frac{r \,.\, sin\, \alpha}{cos\,(\alpha + \varphi)}$ .... /5/.

Код нумеричког израчунавања израчунај постепено величине /1/, /2/, /3/, /4/. Нумерички резултати: $\alpha = 0^0\ 16'\ 7''$, $y = 3229{\cdot}8\ m$, $z = 69{\cdot}95\ m$, **h = $3159{\cdot}85$ m**, **$x = 30035{\cdot}3$ m.**

Оваквим се начином тачније израчунава висина брда, кад су углови мерени из већих даљина, јер се води рачуна о закривљености земаљске површине.

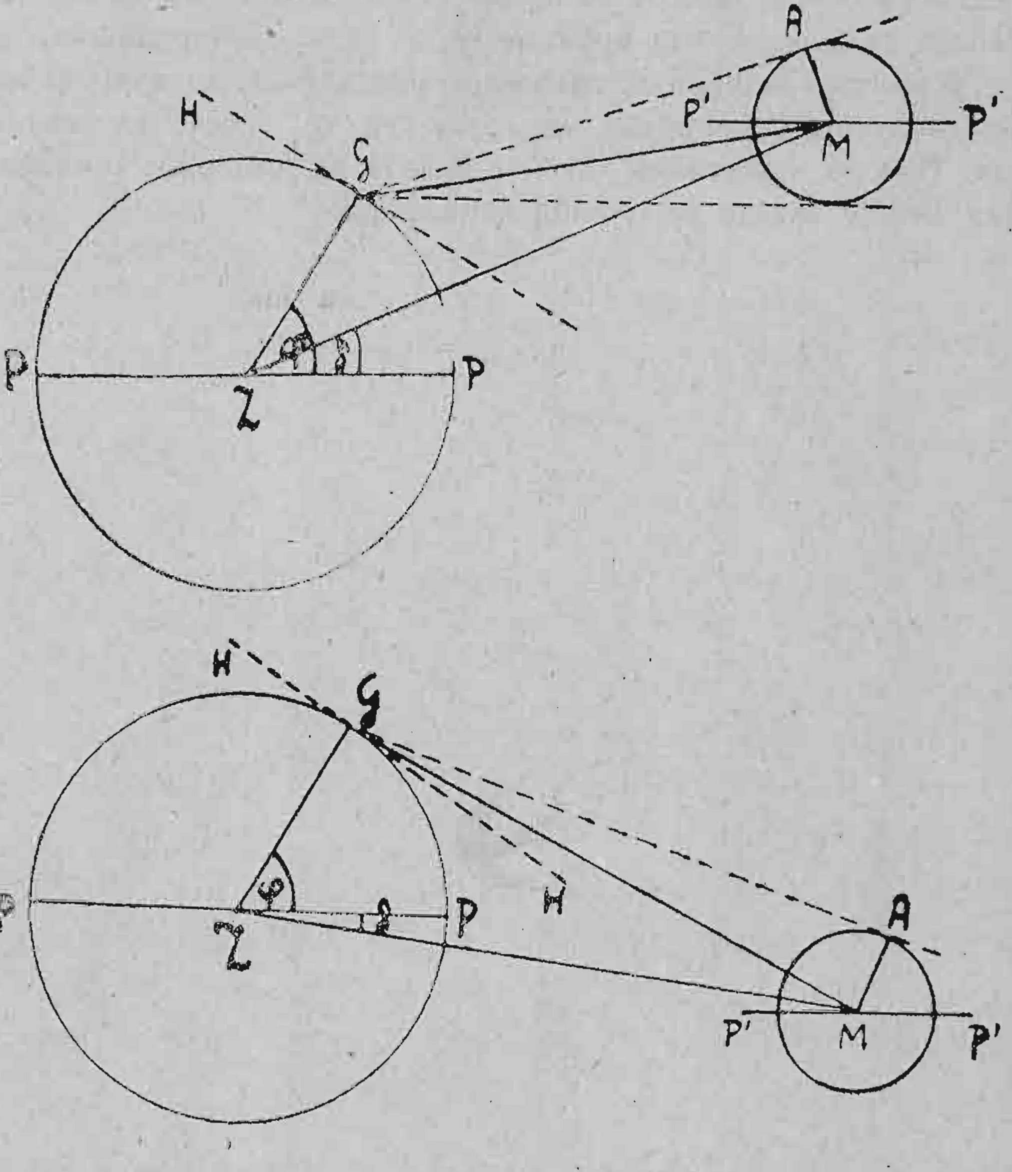
***213.

На пуном месецу не видимо увек тачно исти део његове површине: видљивост предела на његовом рубу зависи међу осталим о његовој деклинацији

Израчунај разлику међу „географским“ ширинама на горњој ивици видљиве северне хемисфере месечеве, када је његова деклинација $\delta_1 = + 18^0\ 30'$ *и* $\delta_2 = - 18^0\ 30'$, *ако је у оба случаја месец посматран из Гринича* ($\varphi = + 51^0\ 28'\ 38''$). *Израчунај уједно висину његовог средишта над хоризонтом у часу кулминације и раздаљеност од Гринича. Полупречник земље* R, *месеца* $r = 0{\cdot}273\ R$, *средња централна раздаљеност* $d = 60{\cdot}3\ R$.

У сл. 92. PP је раван земаљског екватора, $G =$ Гринич. На месецу рачунајмо „географску“ ширину од равни $P'P' \parallel PP$; то је $\sphericalangle AMP' = \alpha$. Висина средишта над хоризонтом HH је $\sphericalangle MGH = \beta$, раздаљеност од G: $x = MG$; $\sphericalangle P'MZ = \delta$ (наизменични). Означи још: $\sphericalangle GMZ = \gamma$, $\sphericalangle GMA = \varepsilon$, $GZ = R$, $AM = r$, $ZM = d$. — 1) *Деклинација* $+ \delta_1$ Геогр. ширина видљиве ивице A је $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle PMA = \sphericalangle GMA - GMP' = \varepsilon - \sphericalangle GMP'$.
A: $\sphericalangle GMP' = \sphericalangle P'MZ - \sphericalangle GMZ = \delta - \gamma$; дакле $\alpha = \varepsilon + \gamma - \delta$

$\sphericalangle ZGM = 90 + \beta$. Добиваш: $tg\,\frac{90+\beta-\gamma}{2} = \frac{d-R}{d+R}\cdot cotg\,\frac{\varphi-\delta}{2} = \frac{59{\cdot}3}{61{\cdot}3}\cdot cotg\,16^0\,29'\,19''$. Добиваш: $\frac{90+\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 72^0\,59'\,12{\cdot}5''$. А како је $\frac{90+\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90 - \frac{\varphi-\delta}{2} = 73^0\,30'\,41''$, добиваш: $90+\beta = 146^0\,29'\,53{\cdot}5''$, $\beta = \boldsymbol{56^0\,29'\,53{\cdot}5''}$ (висина), $\gamma = 0^0\,31'\,28{\cdot}5''$. $GM = x$ израчунај из $\triangle\,GMZ$ синусним правилом: $x = MG = \frac{R.\sin(\varphi-\delta)}{\sin\gamma} = \boldsymbol{59{\cdot}459}$ **R**. Из



92. слика.

правоуглог $\triangle\,GMA$: $\cos\varepsilon = \cos\sphericalangle AMG = \frac{r}{x} = \frac{r.\sin\gamma}{R.\sin(\varphi-\delta)} = \frac{0{\cdot}273.\sin\gamma}{\sin(\varphi-\delta)}$. Замени, па добиваш: $\varepsilon = 89^0\,44'\,12{\cdot}6''$. Онда према /1/: $\alpha = \boldsymbol{71^0\,45'\,41{\cdot}1''} = \alpha_1$. — 2) *Деклинација*: $-\delta_2$. Сада

$\sphericalangle GZM = \varphi + \delta = 69^0\ 58'\ 38''$. Сличним поступком добиваш $\gamma = \mathbf{0^0 53'\ 53{\cdot}3''}$, $\beta = \mathbf{19^0\ 7'\ 28{\cdot}7''}$, $x = GM = \mathbf{59{\cdot}941}\, R$, $\varepsilon = 89^0\ 44'\ 12{\cdot}6''$, и заменом у /2/: $\alpha_2 = \mathbf{109^0\ 7'\ 23{\cdot}8''}$. Онда је тражена разлика: $\alpha_2 - \alpha_1 = \mathbf{37^0\ 21'\ 42{\cdot}7''}$. Мерећи у *km* на меридијану месечевом то износи $l_1 = 1134{\cdot}05\, km$ (обр. 74.), јер један „географски“ степен на месецу износи:

$$l_0 = \frac{0{\cdot}273\,.\,6370\,.\,\pi}{180} = 30{\cdot}347\, km.$$

Овај је појав познат као *вертикална привидна либрација* месеца. Последица тоталне либрације је, да ми познајемо 59°/₀ месечеве површине место половине, како би на први мах изгледало. Невидљиво је 41°/₀.

Звезда *кулминира*, кад пролази кроз равнину меридијана. *Деклинација* је угао, који затвара са равнином земаљскога, дотично небескога екватора (полутара), спојница од средишта те звезде до земаљскога средишта. Она је позитивна, ако је звезда на северној хемисфери, а негативна, ако је звезда на јужној хемисфери.

ИСПРАВИ:

Страна	Ред	Треба:	Место:
16.	6. одоздо	a^2	a_2
23.	12.	правилно	правило
28.	8.	c^{1-2p}	$c^{1-{}^2}p$
29.	10. одоздо	претходни	предходни
31.	3.	$(7 - 24\,i)$	$(-7 - 24\,i)$
32.	13.	$x = -\mathbf{1}$	$x = \ \mathbf{1}$
35.	16. одоздо	одузимањем	сабирањем
38.	13. ,,	трећи са 2	трећи са
42.	2. ,,	изрази	изради
44.	1.	$1 + \frac{x}{100}$	$1 + \frac{ax}{100}$
45.	3.	$\frac{1}{5}y$	$\frac{1}{5}x$
47.	4. и 5. одоздо	$2.(-3)$	$(2-3)$
48.	13.	$x_1 = 1 + 2\,i\sqrt{3}$	$x_1 - 1 + 2\,i\sqrt{3}$
68.	11. одоздо	$xy - 2x - 2y + 8 = 0$	$xy - 2x - 2y + 16 = 0$
95.	6.	$100^x = 10^y$	$100^x = 10^x$
111.	5.	$\frac{a}{4}\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$
112.	10. одоздо	$2b + a$	$2b + 1$
114.	8.	$\frac{a^2}{32}$	$\frac{a^2}{3^2}$
118.	10.	$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3$	$a,\ aq^2,\ aq^3$
121.	12. одоздо	4737·6	4737 6
122.	5.	7395	6395
128.	9. одоздо	251	254
129.	9. ,,	165	167
129.	8. ,,	252	251
135.	2. ,,	$A'B' : AB = CD' : CD$	$A'C' ; AB = C'D' : CD$
138.	2. ,,	$h\,(a + h)$	$h\,(a + a)$
144.	11. ,,	$(2t_1 - t_2)\,.\,(2t_1 + t_2)$	$(2t_1 - t_2)\,(2t_1 - t_2)$
146.	1. ,,	$(2b + a)\,.\,(2b - a)$	$(2b + a)\,.\,(2b + a)$
147.	6.	$h^2 : h^2_1$	$h : h^2_1$
150.	1.	$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$	$\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$
151.	4. одоздо	$2\,TL$	$2\,FL$
168.	17.	$(a + b)$	$a + b$
173.	4.	2·5	2.5
182.	11.	59·573	58·573

Страна	Ред	Треба:	Место:
203.	6. одоздо	$26'\ 6''$	$33'\ 50''$
203.	5. „	$\mathbf{126^0\ 52'\ 12''}$	$\mathbf{127^0\ 7'\ 40''}$
227.	1.	$9\,.\left(x'+\frac{1}{3}\right)^2$	$9\,.\left(x'+\frac{1}{3}\right)$
229.	5. одоздо	*странама*	*дијагоналама*
231.	7.	$y=-\frac{3}{7}x-\frac{2}{7}$	$y=-\frac{7}{3}x-\frac{46}{9}$
231.	1. одоздо	$-\frac{9}{8}x$	$\frac{9}{8}x$
242.	8. „	$(x_1-3)^2$	$(x_1-3)^3$
254.	3. „	$P'MA$	PMA

Исправи у „Збирци образаца“:

5.	1.	експонената	експоненати
9.	5. одоздо	$f(x)=g(x)\,.\,k(x).\,h(x)$	$f(x)=g'(x).\,k(x).\,h(x)$
20.	8.	$\sqrt{B_2}$	$\sqrt{B^2}$
35.	11.	my_2+ny_1	my_2+nx_1
37.	8.	$-sgn\ b$	$sgn\ b$
39.	6.	$y-a_2\,x$	$y\quad a_2\,x$

* * *