ARITMETIKA I ALGEBRA

ZA

SEDMI RAZRED REALNIH GIMNAZIJA I KLASIČNIH GIMNAZIJA

PREMA NOVOM
NASTAVNOM PROGRAMU SASTAVIO

STJEPAN ŠKREBLIN

profesor II drž. klas. gimn. u Zagrebu

CIJENA 22 DINARA

DRUGO IZDANJE

Ovaj je udžbenik odobren odlukom gosp. Ministra prosvjete od 2 maja 1935 S. n. br. 14339 a na prijedlog Glavnog prosvjetnog savjeta S. br. 1417/34 od 28 marta 1935.

ZAGREB 1935

KOMISIONALNA NAKLADA KNJIŽARE S. KUGLI, ZAGREB

ARITMETIKA I ALGEBRA

ZA

SEDMI RAZRED REALNIH GIMNAZIJA I KLASIČNIH GIMNAZIJA

PREMA NOVOM
NASTAVNOM PROGRAMU SASTAVIO

STJEPAN ŠKREBLIN

profesor II drž. klas. gimn. u Zagrebu

ZAGREB 1935

TISAK ZAKLADE TISKARE NARODNIH NOVINA U ZAGREBU

SADRŽAJ

I POGLAVLJE

Kvadratna funkcija. Kvadratne nejednadžbe.

II POGLAVLJE

Jednadžbe koje se dadu svesti na kvadratne.

III POGLAVLJE

Aritmetički i geometrijski red.

IV POGLAVLJE

Kamatno-kamatni račun, račun amortizacije i renta.

PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

Ovaj je udžbenik sastavljen prema nastavnom programu za matematiku od god. 1930. Taj program propisuje ovu građu za 7 razred realnih gimnazija:

Kvadratni trinom (Rastavljanje na faktore, znak trinoma).

Nejednadžbe drugog stepena.

Kvadratne nepoznanice s dvjema nepoznanicama. (Obje jednadžbe drugog stepena, ali jedna homogena, binomne, bikvadratne, simetrične, logaritamske i eksponencijalne jednadžbe).

Aritmetički redovi.

Geometrijski redovi.

Složen kamatni račun. (Dekurzivan). — Anuitet, amortizacija, renta.

Izrađujući taj udžbenik nastojao sam — prema zahtjevima nastavnog programa — svratiti osobitu pažnju na to da se uzmogne uz razne mehanizme u računima u učenika razviti što više i misaona strana matematike. Tako će se na pr. uz mnogo jednostavnih zadataka naći dosta i takovih za koje držim da su zgodni, da jačaju i izoštravaju snagu mišljenja i zaključivanja.

Kod sastavljanja tog udžbenika bili su mi uzorom odlični udžbenici francuski i njemački od Cammana, Humberta, F. G. I., Bourleta, pa Färbera, Lichtblau-Wiesea, Zupančića, Bauer-Hanxledena, zatim udžbenici Hočevar-Varićak, a znatan dio građe ovog udžbenika uzet je iz mog udžbenika Aritmetike i algebre za preparandije i trg. akademije.

Najljepše se zahvaljujem gg. recenzentima za Glavni prosvjetni savjet za njihove savjete i opaske i to g. dr. Simonu Dolaru, g. Milanu Kariću i g. dr. Radivoju Kašaninu.

U Zagrebu, početkom rujna 1931.

Stjepan Škreblin.

I Poglavlje

Kvadratna funkcija. Kvadratne nejednadžbe.

§ 1. Predznak i svojstva kvadratne funkcije. Opći je oblik kvadratne funkcije:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Korijeni su kvadratne funkcije one vrijednosti od x za koje se ona poništava. Da ispitamo koji je predznak te funkcije za bilo koju vrijednost varijable, treba da prema predznaku diskriminante $b^2 - 4ac$ razlikujemo ova tri slučaja :

1. $b^2 - 4ac < 0$. Kvadratna se funkcija može pisati u obliku

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Izraz u zagradi jest, jer je $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$, pozitivan, pa je prema tome kvadratna funkcija jednaka produktu broja a sa zbrojem dvaju pribrojnika koji su uvijek pozitivni. Dakle je kvadratna funkcija uz $b^2 - 4ac < 0$, kad je a pozitivno, *uvijek* t. j. *za svaku realnu vrijednost varijable pozitivna*, a kad je a negativno, *uvijek negativna.*

2. $b^2 - 4ac = 0$. Sad možemo pisati.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Dakle je u slučaju $b^2 - 4ac = 0$ kvadratna funkcija jednaka produktu potpunog kvadrata i broja a. Ona je prema tome i sad uvijek istoga znaka kao i a osim za vrijednost od $x = -\frac{b}{2a}$, kad je ona jednaka nuli.

3. $b^2 - 4ac > 0$. U tom je slučaju izraz $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ pozitivan, a kvadratna se funkcija može pisati:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Kako su $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ korijeni x_1 i x_2 (s x_1 označujemo ovdje manji korijen) zadane kvadratne funkcije, to možemo pisati

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Kad je dakle $b^2-4ac>0$, kvadratna se funkcija može napisati u obliku produkta broja a s dva realna faktora prvog stepena ili linearna faktora. Zovemo li faktore $x-x_1$ i $x-x_2$ *korijenim faktorima* kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, možemo to i ovako reći:

Kvadratna funkcija $y=ax^2+bx+c$ jednaka je, kad je $b^2-4ac>0$, produktu broja a s korijenim faktorima.

Ujedno se razabira da kvadratna funkcija može biti jednaka nuli *samo za dvije vrijednosti* od x i to za x_1 i x_2 i ni za jednu više.

Nadalje se vidi da je kvadratna funkcija *djeljiva sa svakim korijenim faktorom.*

Primjer. Neka se rastavi u produkt linearnih faktora $y=2x^2-7x+5$. Kako su korijeni jednadžbe $2x^2-7x+5=0$, $x_1=1$ i $x_2=\frac{5}{2}$, to je $2x^2-7x+5=2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x-1)(2x-5)$.

Kvadratna se funkcija može napisati u obliku produkta linearnih faktora i onda, kad je $b^2-4ac<0$, samo su tad ti faktori *konjugirano kompleksni.*

Primjer. $y=x^2-6x+10=(x-3-i)(x-3+i)$, jer su korijeni jednadžbe $x^2-6x+10=0$ brojevi $3+i$ i $3-i$.

Izvedi to općeno!

Da odredimo kakav je predznak kvadratne funkcije, kad je $b^2-4ac>0$, sjetimo se da je prema našim oznakama $x_1<x_2$, pa načinimo ovu tablicu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
$a(x-x_1)(x-x_2)$		znaka od a	0	znaka protivna znaku od a	0	znaka od a	

Vidimo da je uz $b^2-4ac>0$ kvadratna funkcija *uvijek istoga predznaka kao i a osim za vrijednosti od x koje se nalaze između njezinih korijena x_1 i x_2.*

Uzevši sve u obzir možemo dakle izreći ovaj poučak:

Kvadratna funkcija $y=ax^2+bx+c$ uvijek je istog predznaka kao i a osim kad se u slučaju pozitivne diskriminante x nalazi između njezinih korijena x_1 i x_2 t. j. kad je $b^2-4ac>0$ i $x_1<x<x_2$. Jedino je tada predznak kvadratne funkcije protivan predznaku od a.

Primjeri. 1. Odredi predznak kvadratne funkcije $y = 5x^2 + 6x + 25$. Budući da je diskriminanta $36 - 500 = -464$ negativna, to je ta kvadratna funkcija uvijek istog predznaka kao i koeficijenat od x^2 t. j. ona je uvijek pozitivna.

2. Odredi predznak kvadratne funkcije $y = -2x^2 + 3x - 5$. Budući da je diskriminanta $9 - 40 = -31$ negativna, to je ta kvadratna funkcija uvijek istog predznaka kao i -2 t. j. ona je uvijek negativna.

3. Neka se odredi predznak kvadratne funkcije $y = x^2 - 4x + 3$. Kako su njezini korijeni 1 i 3, to je ta funkcija uvijek pozitivna osim za vrijednosti od x koje udovoljavaju nejednadžbi $1 < x < 3$.

4. Neka se odredi predznak kvadratne funkcije $y = 25x^2 - 40x + 16$. Budući da je diskriminanta $1600 - 1600 = 0$, to je ta kvadratna funkcija potpuni kvadrat; ona je jednaka nuli za $x = \frac{4}{5}$, a inače je uvijek pozitivna.

5. Za koju je vrijednost od m kvadratna funkcija $mx^2 - 2(m + 2)x + m - 3$ negativna za svaku vrijednost od x?

Treba da je diskriminanta negativna kao i koeficijenat od x^2 negativan. Moraju dakle biti ispunjeni ovi uvjeti:

$$1)\ 4(m + 2)^2 - 4m(m - 3) < 0 \text{ i } m < 0.$$

Iz prvog uvjeta izlazi $7m < -4$, $m < -\frac{4}{7}$.

Obadvjema je uvjetima udovoljeno, kad je $m < -\frac{4}{7}$.

§ 2. **Mijenjanje kvadratne funkcije.** Kvadratna funkcija

$$y = ax^2 + bx + c$$

može se, kako smo vidjeli u pređašnjem paragrafu, napisati u obliku

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Prvi izraz u uglatoj zagradi jest *promjenljiv*, drugi je stalan. Kad se x mijenja od $-\infty$ do $+\infty$, izraz $x + \frac{b}{2a}$ neprestano raste od $-\infty$ do $+\infty$, a za $x = -\frac{b}{2a}$ jednak je nuli. Njegov kvadrat t. j. $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ uvijek je pozitivan te raste ili pada kad x raste već prema tomu da li je $x + \frac{b}{2a}$ pozitivno ili negativno. Za $x = \frac{b}{2a}$ poprima $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ vrijednost nulu, a to je najmanja vrijednost koju taj izraz uopće može da poprimi. Kako je drugi pribrojnik stalan, kao $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ isto se tako mijenja i čitav izraz u uglatoj zagradi, te prema tomu i on poprima za $x = -\frac{b}{2a}$ najmanju vrijednost što je uopće može da poprimi. Ako je sad a pozitivno, kvadratna funkcija y poprima za $x = -\frac{b}{2a}$ svoju *najmanju vrijednost* ili *minimum* $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Taj je minimum pozitivan, jednak nuli ili negativan već prema tomu da li je diskriminanta $b^2 - 4ac < 0$, $b^2 - 4ac = 0$ ili $b^2 - 4ac > 0$. Ako je pak a negativno, y poprima za $x = -\frac{b}{2a}$ svoju *najveću vrijednost* ili *maksimum* $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Taj je maksimum pozitivan, jednak nuli ili negativan već prema tomu da li je $b^2 - 4ac \gtreqless 0$. Iz svega izlazi dakle ovo:

Kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx + c$ *poprima za* $x = -\frac{b}{2a}$ *maksimum ili minimum* $\frac{4ac - b^2}{4a}$ *već prema tome da li je a negativno ili je a pozitivno.*

Maksimum je pozitivan, jednak nuli ili je negativan prema tome da li je diskriminanta $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, *ili je* $b^2 - 4ac < 0$. *Minimum je pozitivan, jednak nuli ili je negativan prema tomu da li je* $b^2 - 4ac < 0$, $b^2 - 4ac = 0$, *ili je* $b^2 - 4ac > 0$.

Primjeri. 1. Neka se istraži tok funkcije

$$y = -x^2 - 4x + 12.$$

Budući da su a i c protivno označeni, diskriminanta je veća od nule, kvadratna je funkcija uvijek negativna osim za vrijednosti od x koje se nalaze između korijena -6 i 2. Za $x = -2$ poprima ona maksimum 16.

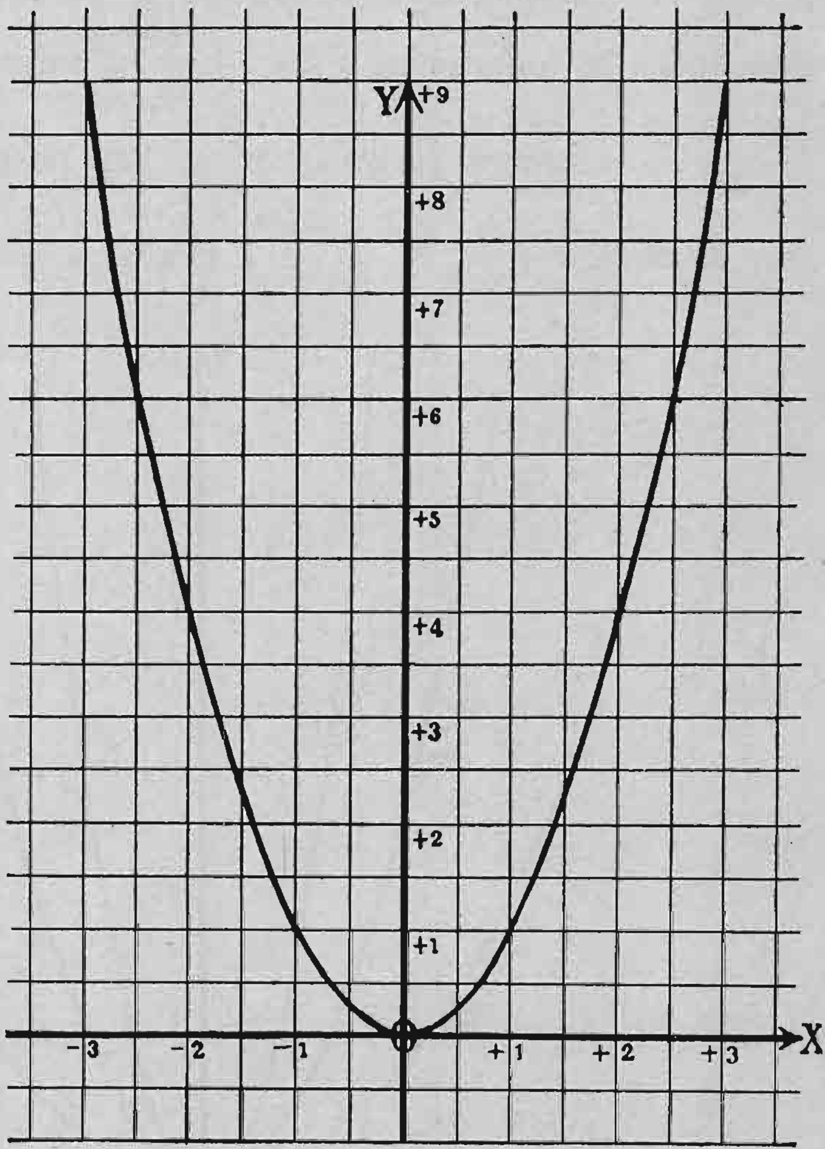
2. Neka se istraži tok funkcije

$$y = 4x^2 - 8x + 5.$$

Kako je diskriminanta jednaka -16 t. j. negativna, kvadratna je funkcija uvijek istoga znaka kao 4 t. j. ona je uvijek pozitivna. Za $x = -\frac{b}{2a} = 1$ poprima ona minimum 1.

§ 3. Grafičko predočivanje kvadratne funkcije. Funkcija $y = ax^2$ $(a > 0)$ poznata nam je već od prije. Ona je grafički predočena parabolom koja se dobiva iz parabole $y = x^2$ (sl. 1), ako se ordinata svake njezine tačke promijeni u omjeru $1 : a$. Za razne vrijednosti od a dobivaju se parabole koje s parabolom $y = x^2$ imadu zajednički vrh u ishodištu te im je svima os y os simetrije. Kad je $a > 1$ i sve jače i jače raste, krivulje bivaju sve uže i uže, ako je $a < 1$, te se sve više i više umanjuje, krivulje bivaju sve šire i šire. Sl. 2 nam predočuje parabole $y = 3x^2$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$.

Slično kao krivulje $y = ax^2$, gdje je a pozitivno iz $y = x^2$, crtaju se krivulje $y = ax^2$, gdje je a negativno, iz $y = -x^2$. Parabola $y = -x^2$ (sl. 3) kongruentna je s parabolom $y = x^2$, njezin je vrh također u ishodištu, os y joj je os simetrije, ali joj je os okrenuta prema dolje.



Sl. 1

Funkcija $y = ax^2 + c$ znači parabolu koja za isto x ima ordinate za c veće od ordinata parabole $y = ax^2$. Vrh je dakle te parabole tačka $M(0, c)$, a os ordinata joj je os simetrije.

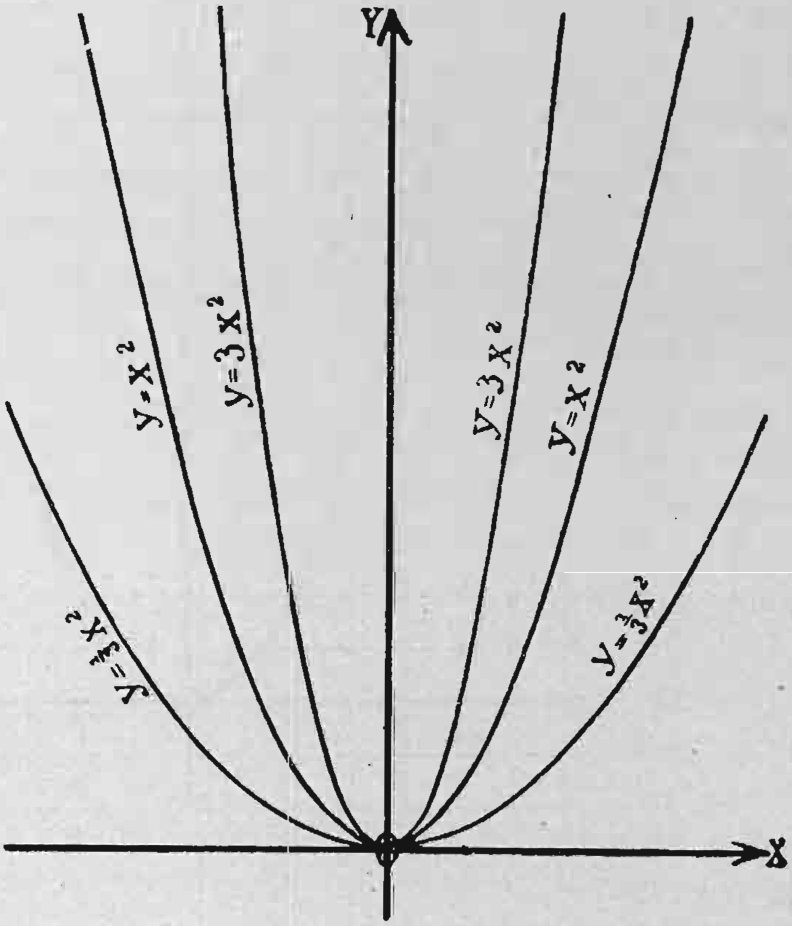
Ako je $y = (x - 2)^2$, izlazi da su za određene vrijednosti od x vrijednosti od y isto tako velike kao za 2 manje vrijednosti od x kod funkcije $y = x^2$; tako je na pr. za $x = 2$, $y = 0$, a tek za $x = 4$ jest $y = 2^2 = 4$. Parabola $y = (x - 2)^2$ nastaje dakle iz parabole $y = x^2$ *paralelnim pomakom* za 2 jedinice *u smjeru pozitivne osi apscisa.* Vrh je dakle te parabole tačka M (2, 0). (Sl. 4). Slično nam $y = (x + 2)^2$ predočuje parabolu kongruentnu s parabolom $y = x^2$, a vrh joj je tačka M (— 2, 0).

Općeno znači dakle $y = a(x - m)^2$ parabolu koja je kongruentna s parabolom $y = ax^2$, te nastaje, ako se parabola $y = ax^2$ pomakne za m jedinica u smjeru pozitivne osi x. Kako nastaje iz $y = ax^2$ parabola $y = a(x + m)^2$?

Sad ćemo lako moći grafički predočiti općenu funkciju drugog stepena $y = ax^2 + bx + c$. Budući da je

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

to na temelju predašnjih razmatranja izlazi da će ta funkcija biti predočena parabolom koja nastaje iz parabole $y = ax^2$ *dvostrukim pomakom* i to najprije za $x = -\frac{b}{2a}$ u smjeru pozitivne osi x, i za $\frac{4ac - b^2}{4a}$ u smjeru pozitivne osi y. Vrh parabole $y = ax^2 + bx + c$ jest tačka $M\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Pravac $x = -\frac{b}{2a}$ jest *os simetrije*



Sl. 2

te parabole. Uz parabolu $y = (x - 2)^2$ predočene su na slici 4 i ove parabole: $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$; $y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$, $y = -x^2 - 4x - 3 = -(x + 2)^2 + 1$.

Razabira se u skladu s razlaganjima u predašnjem paragrafu da prva funkcija poprima za $x = 2$ minimum -1, druga za $x = -1$ minimum 2, a treća funkcija za $x = -2$ maksimum 1.

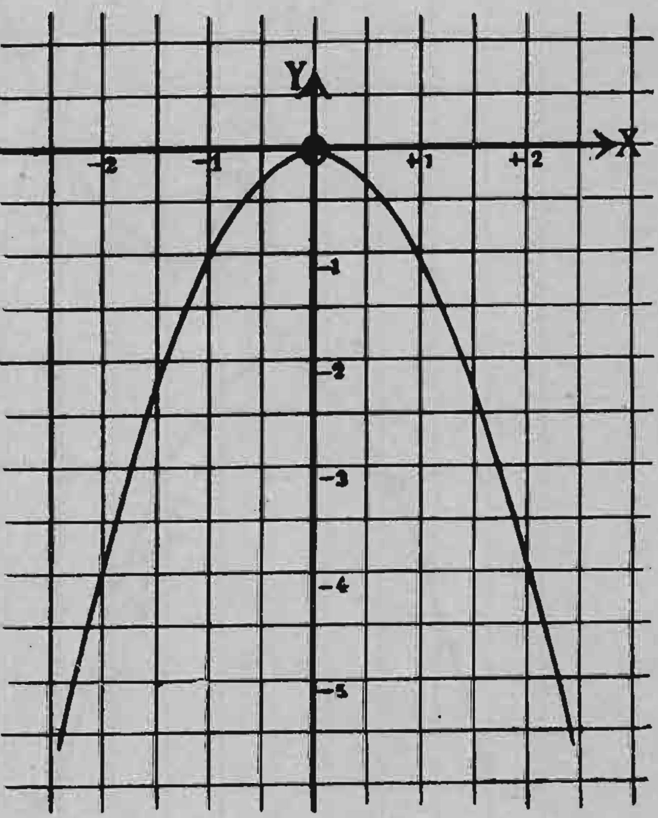
Primjer. 1. Kako će se grafički predočiti parabola $y = x^2 + 2x - 3$? Budući da je $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$, to je vrh te parabole

$M(-1, -4)$. Ta parabola nastaje dakle iz parabole $y = x^2$ pomakom za 1 u smjeru negativne osi x i onda pomakom za 4 u smjeru negativne osi y.

2. Kako će se nacrtati parabola $y = 4x^2 - 4x - 5$?

Budući da je $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6$, to ta parabola nastaje iz parabole $y = 4x^2$ pomakom za $\frac{1}{2}$ u smjer pozitivne osi x i pomakom za 6 u smjeru negativne osi y.

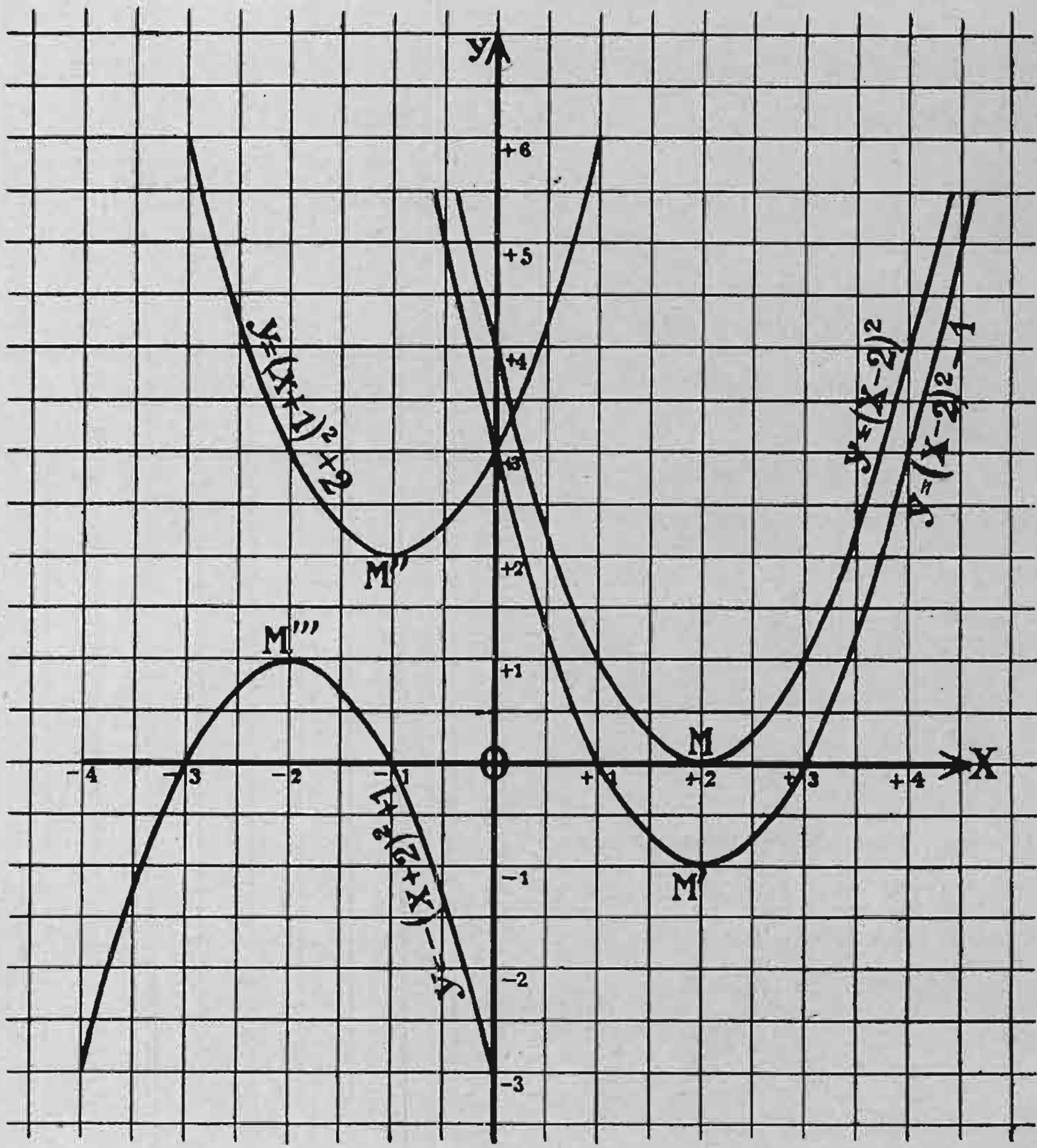
§ 4. Grafičko razrješavanje kvadratnih jednadžbi. Tačkama u kojima parabola $y = ax^2 + bx + c$ siječe os apscisa, pripada ordinata 0; zato su apscise tih tačaka korijeni jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Da se dakle kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ grafički razriješi, nacrtaće se parabola $y = ax^2 + bx + c$ i odrediće se *apscise presjecišta te parabole s osi x*. Na slici 4 grafički su razriješene ove kvadratne jednadžbe: $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $-x^2 - 4x - 3 = 0$; korijen je prve jednadžbe $x = 2$ i on je dvostruki; druga jednadžba ima korijene $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, a treća jednadžba $x_1 = -3$, $x_2 = -1$. Kvadratna jednadžba $x^2 + 2x + 3$ nema realnih korijena, jer je njezina diskriminanta manja od nule; to se vidi i na slici, jer funkcija $y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ ne siječe uopće osi x.



Sl. 3

Nacrtaj kvadratnu funkciju u svih 6 slučajeva koji se mogu dogoditi već prema tomu da li je $b^2 - 4ac \gtreqless 0$ i $a \gtrless 0$ pa razmatraj tok dobivenih krivulja.

Drugi način kojim se može razriješiti kvadratna jednadžba napisana u normalnom obliku $x^2 + px + q = 0$ sastoji se u tom da se nacrta parabola $y = x^2$ i pravac $y = -px - q$ i odrede njihova presjecišta. Svako presjecište pripada i pravcu i paraboli i njegova je ordinata za pravac i parabolu jednaka; dakle je $x_1^2 = -px_1 - q$ ili $x_1^2 + px_1 + q = 0$, i slično i $x_2^2 + px_2 + q = 0$ t. j. apscise x_1 i x_2 presjecišta pravca i parabole su korijeni te jednadžbe.



Sl. 4

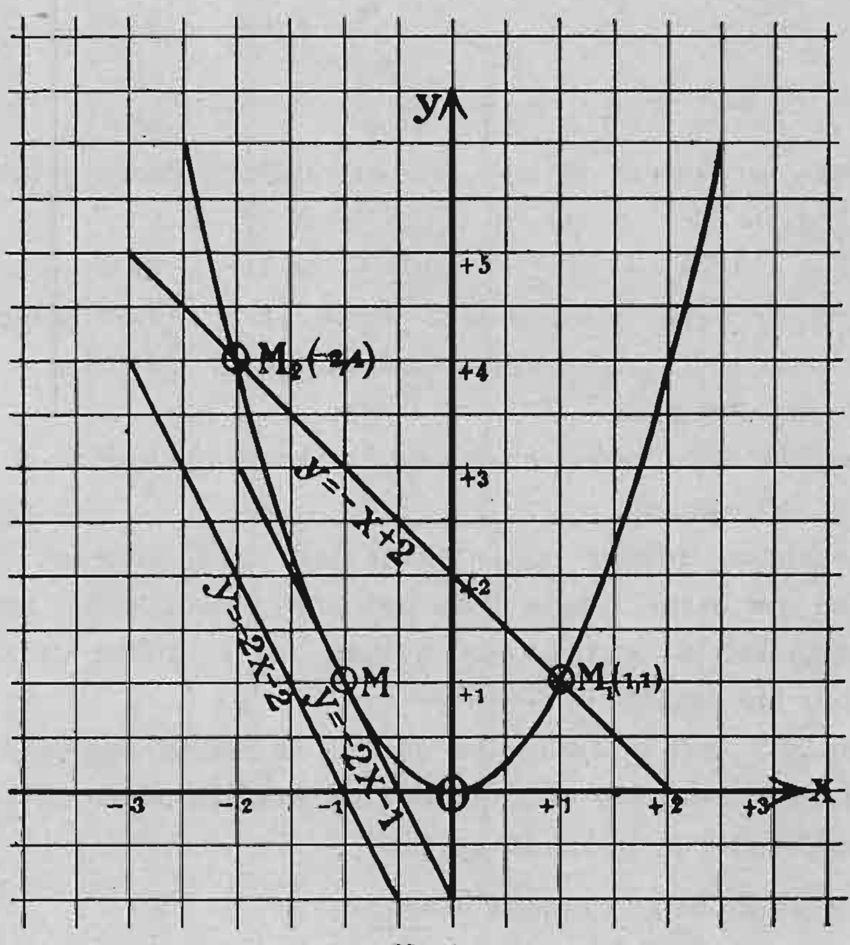
Da se dakle grafički razriješi kvadratna jednadžba $x^2 + px + q = 0$, treba potražiti apscise presjecišta parabole $y = x^2$ i pravca $y = -px - q$.

Ovaj je način zgodniji od pređašnjega, jer je dovoljno da se parabola $y = x^2$ nacrta jedanput za svagda, a i pravac $y = -px - q$ može se lako nacrtati, pa se tako mogu rješenja neposredno odrediti.

Ako pravac $y = -px - q$ dira parabolu $y = x^2$, jednadžba $x^2 + px + q = 0$ ima *dvostruki* korijen; njegovu vrijednost određuje apscisa dirališta; ne siječe li uopće pravac parabole, korijeni su konjugirano kompleksi.

Primjer. Da razriješimo jednadžbu $x^2 + x - 2 = 0$, nacrtaćemo parabolu $y = x^2$ i pravac $y = - x + 2$ (sl. 5). Razabiramo da pravac siječe krivulju u tačkama M_1 i M_2 kojih su apscise $x_1 = - 2$, $x_2 = 1$.

Hoćemo li grafički razriješiti jednadžbu $x^2 + 2x + 1 = 0$, treba uz parabolu $y = x^2$ nacrtati i pravac $y = - 2x - 1$. Taj pravac dira parabolu u tački M $(- 1, 1)$. Vrijednost $- 1$ jest dvostruki korijen zadane jednadžbe; korijeni jednadžbe $x^2 + 2x + 2 = 0$ nisu realni, jer pravac $y = - 2x - 2$ parabole $y = x^2$ uopće ne siječe.



Sl. 5

Zadaci. Rastavi u produkt linearnih faktora:

1. *a)* $y = x^2 + 12\,x - 160$,
   b) $y = - x^2 + 5x + 36$,
   c) $y = x^2 - 6x + 9$.
   d) $y = x^2 - 4x - 21$.
2. *a)* $y = x^2 - 4x + 5$,
   b) $y = - x^2 - 7x + 30$,
   c) $y = - x^2 - 3x + 4$.
   d) $y = x^2 - 2abx + a^2b^2$.
3. *a)* $y = 4x^2 + 9x + 2$,
   b) $y = - 3x^2 + 10x - 3$,
   c) $y = 16x^2 - 16x + 3$,
   d) $y = - 2x^2 - x + 1$.
4. *a)* $y = - 18x^2 + 57x + 145$,
   b) $y = - 56x^2 + 37x - 6$,
   c) $y = 25x^2 - 20x + 3$,
   d) $y = 9x^2 - 24x + 11$.
5. *a)* $y = 2x^2 - 2bx + b^2 - a^2$,
   b) $y = (x-a)^2 - b(x-a-c) - bc$.
6. *a)* $y = x^2 - 2a^2x + a^4 - b^4$.
   b) $y = x^2 - 2(a^2+b^2)x + (a^2-b^2)^2$.

Istraži predznak i tok ovih funkcija:

7. $a)$ $y = x^2 - 8x + 15$, 8. $a)$ $y = x^2 + 6x + 8$,
$b)$ $y = x^2 - 6x + 10$, $b)$ $y = x^2 + 4x$.

9. $a)$ $y = x^2 - 8x + 23$, 10. $a)$ $y = -x^2 + 6x - 7$,
$b)$ $y = x^2 - 9x - 10$, $b)$ $y = -x^2 - x + 2$,
$c)$ $y = x^2 \pm 5x$, $c)$ $y = -(x-3)^2 + 4$,
$d)$ $y = x^2 \pm 9$. $d)$ $y = 2x^2 - 2x + 1$.

11. $a)$ $y = 5x^2 - 8x + 23$, 12. $a)$ $y = 12x^2 + 4x + 7$,
$b)$ $y = 6x^2 - 7x + 1$, $b)$ $y = -4x^2 + 8x - 5$,
$c)$ $y = 3x^2 - 2x + 1$, $c)$ $y = -2x^2 - 7x + 4$,
$d)$ $y = -3x^2 + 4x + 5$. $d)$ $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$.

13. Neka se odredi m tako da ovi trinomi budu potpuni kvadrati:
$a)$ $y = 3x^2 - (m-2)x + m + 7$,
$b)$ $y = (m+9)x^2 - (30+m)x + m - 15$.

14. Broj a (144) rastavi u dva dijela da je njihov produkt što veći.

15. Između svih pravokutnika zadana opsega $2s$ neka se odredi onaj koga je površina što veća.

16. Između svih kvadrata upisanih u kvadrat stranice a neka se odredi onaj koji je najmanji.

17. Zadanom trokutu upiši pravokutnik tako da jedna strana pravokutnika padne na bazu trokuta i da površina pravokutnika bude što veća.

18. Zbroj kateta pravokutnog trokuta jest s; kolike su katete, ima li hipotenuza biti što manja.

19. Koji od svih pravokutnika opsega $2s$ imade najmanju dijagonalu?

20. Između svih pravokutnih trokuta konstantne sume kateta s neka se odredi onaj kome je površina najveća.

Riješi grafički ove kvadratne jednadžbe:

21. $a)$ $x^2 \pm 4x = 0$, **22.** $a)$ $x^2 + 5x + 4 = 0$,
$b)$ $x^2 - 5x + 6 = 0$, $b)$ $x^2 + 9x + 20 = 0$,
$c)$ $x^2 - x - 2 = 0$, $c)$ $x^2 - x - 6 = 0$,
$d)$ $x^2 - 2x - 15 = 0$, $d)$ $x^2 + 2x + 1 = 0$.

23. $a)$ $-x^2 + 4x + 5 = 0$ **24.** $a)$ $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$,
$b)$ $x^2 - \frac{7}{2}x - 2 = 0$. $b)$ $x^2 + 3x - 4 = 0$.

25. Neka se dokaže da jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ imade oba korijena realna i $a)$ da je broj α sadržan između tih korijena, ako je $af(\alpha) < 0$; $b)$ da su oba korijena veća od α, ako su ispunjeni uvjeti $D > 0$, $af(\alpha) > 0$, $\alpha < N$, gdje N znači kakav god broj koji se nalazi između korijena; najzgodnije je za N uzeti polovicu zbroja korijena

$\frac{S}{2} = -\frac{b}{2a}$, jer se ona uvijek nalazi između korijena; *c)* da su oba korijena manja od α, ako su ispunjeni uvjeti $D > 0, af(\alpha) > 0, \frac{S}{2} < \alpha$; *d)* da je jedan od korijena sadržan između α i β ($\beta > \alpha$), ako je ispunjen uvjet $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$; za $af(\alpha) > 0$ imamo $\alpha < x_1 < \beta < x_2$, za $af(\alpha) < 0$ imamo $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$; *e)* da su oba korijena sadržana između α i β, ako je ispunjeno ovih 5 uvjeta: $D > 0$, $af(\alpha) > 0$, $af(\beta) > 0$, $\alpha < \frac{S}{2} < \beta$.

26. Odredi ne razriješivši jednadžbe ima li realnih korijena jednadžba *a)* $x^2 - 15x - 34 = 0$ i ako ih ima, da li broj 1 nalazi ispred korijena, između njih ili iza njih; *b)* $2x^2 - 13x + 5 = 0$ i ako ih ima, da li se broj 4 nalazi ispred korijena između njih ili iza njih; *c)* $x^2 + 3x - 4$ i ako ih ima da li se broj 5 nalazi ispod korijena, između njih ili iza njih; *c)* $12x^2 + 13x - 90 = 0$ i ako ih ima koji je položaj brojeva -2 i $+2$ prema tim korijenima; *e)* $6x^2 + 13x - 63 = 0$ i ako ih ima koji je položaj brojeva 1 i 3 prema tim korijenima; *f)* $x^2 + x - 2 = 0$ i koji je položaj brojeva -3 i $+3$ prema tim korijenima; *g)* $x^2 - 4x - 5 = 0$ i koji je položaj brojeva 0 i 6 prema tim korijenima; *h)* $10x^2 - 39x + 35 = 0$ i koji je položaj brojeva -4 i 2 prema tim korijenima; *i)* $48x^2 - 110x + 63 = 0$ i položaj brojeva -2 i 1 prema tim korijenima.

§ 5. **Nejednadžbe drugog stepena.** Opći je oblik nejednadžbe drugog stepena s jednom nepoznanicom ovaj:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ili} \quad ax^2 + bx + c < 0.$$

Da se takova nejednadžba razriješi, primjenjuju se poučci o svojstvima kvadratnog trinoma. Razmatraćemo nejednadžbu

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

druga se nejednadžba razrješava sasvim analogno. Prema predznaku diskriminante $D = b^2 - 4ac$ moramo razlikovati 3 slučaja:

1) $b^2 - 4ac > 0$. Kvadratni trinom ima realne korijene x_1 i x_2 ($x_1 < x_2$).

Ako je $a > 0$, nejednadžbi jest udovoljeno za svaku vrijednost od x izvan intervala (x_1, x_2) t. j. za vrijednosti $x < x_1$ i $x > x_2$.

Ako je $a < 0$, nejednadžbi jest udovoljeno za svaku vrijednost od x koja se nalazi između x_1 i x_2 t. j. za $x_1 < x < x_2$.

2) $b^2 - 4ac = 0$. Kvadratni trinom imade dvostruki korijen $x = -\frac{b}{2a}$. Ako je $a > 0$, nejednadžbi udovoljava svaka vrijednost od x izuzevši $x = -\frac{b}{2a}$, za koju je vrijednost kvadratna funkcija

jednaka nuli. Ako je $a < 0$, nejednadžbi ne udovoljava nijedna vrijednost od x.

3) $b^2 - 4ac < 0$. Kvadratna funkcija nema realnih korijena. Ako je $a > 0$, nejednadžbi udovoljava svaka vrijednost od x; ako je $a < 0$, nejednadžbi ne udovoljava nijedna vrijednost od x.

Primjeri: 1) Neka se razriješi nejednadžba:

$$x^2 - 8x + 15 < 0.$$

Budući da su korijeni funkcije $y = x^2 - 8x + 15$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, izlazi da je funkcija y negativna za $3 < x < 5$.

2) Neka se razriješi nejednadžba:

$$-3x^2 + 2x - 1 > 0.$$

Kako je diskriminanta $4 - 12 = -8$ negativna, to je $y = -3x^2 + 2x - 1$ uvijek istog znaka kao i -3 t. j. uvijek negativno. Gornjoj nejednadžbi ne udovoljava dakle nijedna vrijednost od x.

3) Neka se razriješi nejednadžba:

$$\frac{3x + 2}{5 - 2x} > 0$$

Ova se nejednadžba ne smije pomnožiti s $5 - 2x$, jer je izraz $5 - 2x$ promjenljiv pa kao takav može biti i pozitivan i negativan već prema vrijednostima od x. Da se riješimo nazivnika, nejednadžba će se pomnožiti s $(5 - 2x)^2$ koji je izraz pozitivan za svaku realnu vrijednost od x. Dobivamo: $(3x + 2)(5 - 2x) > 0$. Ta se nejednadžba može pisati

$$-6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) > 0.$$

Korijeni su od $y = \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$, $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{5}{2}$, koeficijenat od x^2 jest -6; nejednadžbi jest udovoljeno za

$$-\frac{2}{3} < x < \frac{5}{2}.$$

Općena nejednadžba $\frac{ax + b}{cx + d} > 0$ razrješava se slično. Pomnožimo je s $(cx + d)^2$, imamo $(ax + b)(cx + d) > 0$ ili

$$ac\left(x + \frac{b}{a}\right)\left(x + \frac{d}{c}\right) > 0.$$

Korijeni tog trinoma jesu $x_1 = -\frac{b}{a}$, $x_2 = -\frac{d}{c}$. Ako je $ac < 0$, nejednadžbi jest udovoljeno za svaku vrijednost od x koja se nalazi između tih korijena. Ako je $ac > 0$, nejednadžbi jest udovoljeno za svaku vrijednost od x koja se nalazi izvan tih korijena.

4) Neka se razriješi nejednadžba:

$$(x^2 - x - 6)(6x^2 - 5x + 1) < 0.$$

Korijeni prvoga trinoma jesu $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; korijeni drugog trinoma jesu $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = \frac{1}{2}$. Karakteristične vrijednosti od x jesu $-2, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 3$. Mogli bismo prema različitim vrijednostima od y proučavati predznak svakog faktora i odatle izvesti znak za produkt. Jednostavnije je načiniti tabelu:

x	Predznak od $x^2 - x - 6$	Predznak od $6x^2 - 5x + 1$	Predznak produkta
$-\infty$			
	+	+	+
-2			
	−	+	−
$\frac{1}{3}$			
	−	−	+
$\frac{1}{2}$			
	−	+	−
3			
	+	+	+
$+\infty$			

Rješenje jest: $-2 < x < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} < x < 3$.

5) Neka se razriješi nejednadžba oblika:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} > 0.$$

Nejednadžba pomnožiće se s $(dx^2 + ex + f)^2$ pa će se dobiti

$$(ax^2 + bx + c)\,(dx^2 + ex + f) > 0.$$

Nejednadžbu tog oblika razmatrali smo u primjeru 4.

6) Nejednadžbe α) $ax^2 + bx + c \gtrless k$, β) $\frac{ax + b}{cx + d} \gtrless k$, δ) $\frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} \gtrless k$ razriješiće se da se k prenese na lijevu stranu i u slučaju β) i δ) svede lijeva strana na zajednički nazivnik. Time se dobivaju nejednadžbe poznatog oblika.

7) Neka se odredi, kako se mijenjaju korijeni jednadžbe $(m + 3)x^2 - 4mx + 1 - m = 0$, kad se m mijenja $-\infty$ do $+\infty$.

Da korijeni te jednadžbe budu realni, treba da je ispunjen uvjet:

$$16m^2 - 4(m + 3)\,(1 - m) \geqq 0 \text{ ili}$$

$$5m^2 + 2m - 3 \geqq 0.$$

Korijeni su te kvadratne funkcije -1 i $\frac{3}{5}$; da ta kvadratna funkcija bude pozitivna treba za m dati vrijednosti koje se ne nalaze između -1 i $\frac{3}{5}$.

Predznak korijena zavisi o njihovu zbroju i njihovu produktu. Zbroj je korijena $S = \frac{4m}{m+3}$, a produkt $P = \frac{1-m}{m+3}$.

Ti razlomci mijenjaju znak za $m = 0$, $m = 1$, $m = -3$.

Karakteristične su vrijednosti od m prema tomu ove: -3, -1, 0, $\frac{3}{5}$, 1. Treba dakle da razmatramo ove slučajeve:

1. $-\infty < m < -3$. Produkt je korijena negativan, zbroj pozitivan. Korijeni su nejednako označeni, pozitivni korijen ima veću apsolutnu vrijednost. T. j. $x_1 < 0 < x_2$, $x_2 > |x_1|$.

2. $m = -3$. Zbroj i produkt korijena jest beskonačno velik. Jedan je korijen beskonačno velik; drugi izlazi iz jednadžbe, kad se ondje stavi $m = -3$. T. j. $x_1 = -\frac{c}{b} = -\frac{1}{3}$.

3. $-3 < m < -1$. Zbroj korijena je negativan, produkt je korijena pozitivan. Oba su korijena negativna. T. j. $x_1 < x_2 < 0$.

4. $m = -1$. Diskriminanta je jednaka nuli, oba su korijena jednaka. Dakle je $x_1 = x_2 = \frac{S}{2} = -1$.

5. $-1 < m < \frac{3}{5}$. Diskriminanta je negativna, korijeni nisu realni.

6. $m = \frac{3}{5}$. Diskriminanta je opet jednaka nuli, oba su korijena jednaka. T. j. $x_1 = x_2 = \frac{S}{2} = \frac{1}{3}$.

7. $\frac{3}{5} < m < 1$. Zbroj i produkt korijena su pozitivni. Oba su korijena pozitivna. T. j. $0 < x_1 < x_2$.

8. $m = 1$. Produkt korijena jednak je nuli; jedan je korijen jednak nuli. Drugi korijen jednak je zbroju t. j. $x_2 = S = 1$.

9. $1 < m < \infty$. Produkt je korijena negativan, zbroj je pozitivan, korijeni su protivno označeni, pozitivni korijen ima veću apsolutnu vrijednost. T. j. $x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| < x_2$.

§ 6. Simultane nejednadžbe prvog i drugog stepena s 1 nepoznanicom. Ako nam je na pr. zadan sistem:

$$px + q > 0,$$
$$ax^2 + bx + c > 0,$$

pa treba naći vrijednosti od x koje udovoljavaju obje zadane nejednadžbe, odrediće se korijen x_1 jednadžbe $px + q = 0$, zatim korijeni x_2 i x_3 (ako su oni realni) jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ i te će se vrijednosti poređati rastućim redom. Na taj je način interval od $-\infty$ do $+\infty$ rastavljen na više parcijalnih intervala; u svakom parcijalnom intervalu odrediće se predznak svake funkcije i napokon će se napisati intervali koji sadržavaju brojeve koji zadovoljavaju obje nejednadžbe.

Primjer. Neka se razriješi sistem:

$$3x - 4 > 0,$$
$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Korijeni x_1, x_2, x_3 poređani rastućim redom jesu $\frac{4}{3}$, 2, 3. Imamo dakle intervale $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$; $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$; (2, 3); $(3, +\infty)$. U intervalu $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ jest $3x - 4 < 0$, $x^2 - 5x + 6 > 0$; brojevi sadržani u tom intervalu ne odgovaraju; u intervalu $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ jest $3x - 4 > 0$, $x^2 - 5x + 6 > 0$; brojevi sadržani u tom intervalu zadovoljavaju obje nejednadžbe; brojevi sadržani u intervalu (2, 3) ne zadovoljavaju drugu nejednadžbu; brojevi sadržani u intervalu $(3, \infty)$ zadovoljavaju obje nejednadžbe. Dakle rješenja obiju nejednadžbi sistema jesu:

$$\frac{4}{3} < x < 2, \quad 3 < x < \infty.$$

Slično se razrješava i sistem od 2 simultane kvadratne nejednadžbe s 1 nepoznanicom:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$
$$dx^2 + ex + f > 0.$$

A može se postupati i tako da se između 3 intervala što ih određuje prva jednadžba (ako je $b^2 - 4ac > 0$) eliminiraju oni, u kojima sadržani brojevi ne zadovoljavaju toj nejednadžbi: između preostalih intervala odrede se sad oni ili onaj, gdje su sadržani brojevi koji udovoljavaju drugoj nejednadžbi. Tako se dobivaju vrijednosti koje zadovoljavaju obje nejednadžbe.

Neka se na pr. razriješi sistem:

$$6x^2 + 7x + 2 < 0, \quad x^2 - 4x - 21 < 0.$$

Korijeni su jednadžbe $6x^2 + 7x + 2 = 0$, $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; imamo dakle intervale $\left(\infty, -\frac{2}{3}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, vrijednosti koje zadovoljavaju nejednadžbu $6x^2 + 7x + 2 < 0$ jesu sadržane u intervalu $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$. Ostala se dva intervala izostavljaju. Korijeni su jednadžbe $x^2 - 4x - 21 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 7$; $x^2 - 4x - 21$ jest < 0 u intervalu $(-3, 7)$. Dakle će objema nejednadžbama biti udovoljeno za vrijednosti od x koje zadovoljavaju nejednadžbu $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2}$.

Slično se radi kad je zadan sistem od više kvadratnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom.

Zadaci. Razriješi ove nejednadžbe:

1. *a)* $x^2 + 4x - 45 < 0$, *b)* $x^2 - 4x - 12 > 0$, *c)* $x^2 - 11x - 12 < 0$, *d)* $x^2 - 14x + 49 < 0$.

2. *a)* $25x^2 - 10x + 1 > 0$, *b)* $-3x^2 + 2x - 1 < 0$, *c)* $x^2 - 8x - 9 < 0$, *d)* $-25x^2 + 20x - 1 > 0$.

3. *a)* $-x^2 - x + 72 > 0$, *b)* $18x < 84 + x^2$, *c)* $2x > x^2 + 2$, *d)* $-3x^2 + 7x - 10 < 0$.

4. *a)* $x^2 + x > 7x - 10$, *b)* $9x < 20x^2 + 1$, *c)* $2x + 3 - x^2 > x(x-3)$, *d)* $x(x-3) + 4 > x - 3 - \frac{x}{4}$.

5. *a)* $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x > \frac{7}{6} + \frac{4}{3}$. *b)* $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x < 8 - \frac{59}{8}$, *c)* $x^2 - 4ax + a^2 < 0\ (a \gtrless 0)$.

6. *a)* $\frac{3x-4}{2x-3} < 0$, *b)* $\frac{x-4}{3x-3} > 0$, *c)* $\frac{7x-6}{4x-5} < -3$.

7. *a)* $\frac{3x-4}{4x-3} > -5$, *b)* $3 + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{2x+1}$.

8. *a)* $x > \frac{1}{4x-3}$, *b)* $\frac{19}{3x-5} > 6$.

9. *a)* $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2) > 0$; *b)* $(x^2 - 5x - 24)(2x^2 - 3x) > 0$; *c)* $(4x^2 - 12x + 5)(x^2 - 5x + 4) < 0$; *d)* $(x^2 - x - 12)(-4x^2 - 3x + 1) > 0$; *e)* $x(x^2 + x + 1)(2x^2 + 7x + 3)(x^2 - 3x + 2) < 0$.

10. *a)* $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} > 0$, *b)* $\frac{x^2 - 10x - 56}{x^2 - 2x - 48} > 0$, *c)* $\frac{5x^2 - 3x - 2}{9x^2 + 15x - 6} > 0$, *d)* $\frac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1} < 2$, *e)* $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x - 8} > 2$, *f)* $\frac{x^2 + 5x - 1}{x^2 + x + 1} < 3$.

11. *a)* $\frac{3x+2}{3} < \frac{x-7}{2x+1}$, *b)* $\frac{3x-2}{x+1} + \frac{8x-7}{x^2-1} > 1$.

Razriješi ove simultane nejednadžbe:

12. $x^2 - 5x + 6 < 0$, $2x + 3 > x + 2$.

13. $x^2 - 10x + 32 > 0$, $5x < 11$.

14. $-x^2 - 5x + 6 > 0,$
$12x + 3 > x + 25.$

15. $x^2 - 13x + 36 < 0,$
$15x + 3 > 10.$

16. $7x^2 - 13x - 2 < 0,$
$2x^2 - 4x + 3 > 0.$

17. $6x^2 - 13x + 6 < 0,$
$x^2 + 4x - 5 < 0.$

18. $-2x^2 - 5x + 3 > 0,$
$10x^2 + 17x - 20 < 0.$

19. $x^2 - 3x - 40 < 0,$
$x^2 - 3x - 28 > 0.$

Za koje vrijednosti od m jest za svaku vrijednost od x funkcija:

20. *a)* $(m + 1)x^2 + mx + m < 0$, *b)* $(m - 1)x^2 - mx + 2m < 0$, *c)* $mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$, *d)* $(4 - m)x^2 - 3x + 4 + m > 0$, *e)* $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m + 1) \gtrless 0$?

Neka se odredi kako se mijenjaju korijeni jednadžbe:

21. *a)* $(m - 1)x^2 - 2x + m - 1 = 0$, *b)* $2x^2 + (m - 3)x + 3 - m = 0$, *c)* $(2m - 3)x^2 - mx - m = 0$, *d)* $mx^2 - (m - 4)x + m + 1 = 0$, *e)* $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 3m = 0$
kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$?

Isti zadatak za ove jednadžbe:

22. *a)* $(m + 3)x^2 - (3m - 1)x + m + 1 = 0$, *b)* $mx^2 - (m + 4)x + m = 0$, *c)* $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$, *d)* $(m^2 - 4)x^2 + 4(m - 1)x - 4 = 0$, *e)* $(m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$.

23. Kako treba odrediti m da se 1 nalazi između korijena jednadžbe $(2m - 1)x^2 + (3m - 2)x - 6m = 0$?

[Iz $(2m - 1)f(1) < 0$ izlazi $-\infty < m - 3, \frac{1}{2} < m < \infty$].

24. Kako treba odrediti m da se 3 nalazi između korijena jednadžbe
$$(m + 2)x^2 - 4mx + m - 1 = 0?$$

25. Kako treba odrediti m da se 1 nalazi između korijena jednadžbe
$$(m - 1)x^2 - mx + m - 2 = 0?$$

26. Kako treba odrediti m da se -1 nalazi između korijena jednadžbe
$$(m + 1)x^2 - 2mx + 1 = 0?$$

27. Koje vrijednosti treba dati broju m da trinom $mx^2 + 2x + m$ bude veći od 12 za svaku vrijednost od x?

28. Za koje su vrijednosti od m oba korijena jednadžbe
$(m + 1)x^2 - 3mx + 4m = 0$ veća od -1?

[Moraju istodobno biti ispunjeni uvjeti (str. 10 zad. 25) 1) $(m + 1)f(-1) > 0$, 2) $-1 < \frac{S}{2}$, 3) $D \geqq 0$. Iz 1) izlazi $m < -1$ ili $m > -\frac{1}{8}$, iz 2) $m < -1$ ili $m > -\frac{2}{5}$, iz 3) $-\frac{16}{7} \leqq m \leqq 0$; rješenje: $-\frac{16}{7} \leqq m < -1, -\frac{1}{8} < m \leqq 0$].

29. Za koje su vrijednosti od m oba korijena jednadžbe?
$(1 - m)\, x^2 - 4\,(2 - m)\, x + 2\,(2 - m) = 0$ manja od 2?

[Iz $(1 - m)\, f(2) > 0,\ \frac{S}{2} < 2,\ D \geqq 0$ izlazi $1 < m \leqq 2$ ili $3 \leqq m < 4$].

30. Za koje je vrijednosti od m samo jedan korijen jednadžbe
$mx^2 - (m - 3)\, x + 1 = 0$ sadržan između -1 i 2?

[Iz $f(-1)\, f(2) < 0$ ili $2\,(m - 1)\,(2\,m + 7) < 0$ izlazi $-\frac{7}{2} < m < 1$].

31. Za koje je vrijednosti od m samo jedan korijen jednadžbe
$2mx^2 - 3x - m = 0$ sadržan između 0 i 1?

[Za $m < 0$ ili za $m > 3$].

32. Za koje je vrijednosti od m samo jedan korijen jednadžbe
$x^2 - (m - r)x + 2m^2 - r^2 = 0$ sadržan između $-r$ i $+r$?

[Mora biti $f(-r) \cdot f(+r) < 0$. Kako je $f(+r) = 2m^2 - mr + r^2$ uvijek pozitivno, izlazi $f(-r) = 2m^2 + mr - r^2 < 0$ t. j. $-r < m < \frac{r}{2}$].

33. Za koje se vrijednosti od m oba korijena jednadžbe
$(1 - m)\, x^2 - 4\,(2 - m)\, x + 2\,(2 - m) = 0$ nalaze između -1 i 6?

[Treba da su ispunjeni uvjeti (vidi str. 10 zad. 25): 1) $D \geqq 0$, 2) $(1 - m) f(-1) > 0$, 3) $(1 - m) f(6) > 0$, 4) $-1 < \frac{S}{2}$, 5) $\frac{S}{2} < 6$; iz 1) izlazi $2\,(2 - m)\,(3 - m) \geqq 0$ ili $m \leqq 2$, $m \geqq 3$; iz 2) izlazi $(1 - m)\,(-7\,m + 13) > 0$ ili $m < 1$, $m > \frac{13}{7}$; iz 3) izlazi $(1 - m)\,(-14\,m - 8) > 0$ ili $m < -\frac{4}{7}$, $m > 1$; iz 4) izlazi $-1 < \frac{2\,(2 - m)}{1 - m}$ ili $m < 1$, $m > \frac{5}{3}$; iz 5) izlazi $\frac{2\,(2 - m)}{1 - m} < 6$ ili $m < \frac{1}{2}$, $m > 1$.
Svih tih 5 uvjeta ispunjeno je za $m < -\frac{4}{7}$ i za $\frac{13}{7} < m \leqq 2$].

34. Za koje su vrijednosti od m oba korijena jednadžbe
$(m - 1)\, x^2 - (m - 5)\, x + m - 1 = 0$ sadržana između -2 i 3?

[$D \geqq 0$ za $-3 \leqq m \leqq \frac{7}{3}$, $a f(-2) > 0$ za $m < 1$ i $m > \frac{15}{7}$, $a f(3) > 0$ za $m < -\frac{5}{7}$ i za $m > 1$, $-2 < \frac{S}{2}$ za $m < 1$ i $m > \frac{9}{5}$,

$\frac{S}{2} < 3$ za $m < \frac{1}{5}$ i $m > 1$. Svih 5 uvjeta ispunjeno za $-3 \leqq m <$ $< -\frac{5}{7}$ i $\frac{15}{7} < m \leqq \frac{7}{3}$].

35. Za koje su vrijednosti od m oba korijena jednadžbe

$$x^2 - 2mx + 4m - 1 = 0$$

sadržana između -1 i $+1$?

[Iz $D \geqq 0$, $af(-1) > 0$, $af(1) > 0$, $-1 < \frac{S}{2}$, $\frac{S}{2} < 1$ izlazi redom $m^2 - 4m + 1 \geqq 0$, $6m > 0$, $2m > 0$, $-1 < m$, $m < 1$. Svih 5 uvjeta ispunjeno je za $0 < m \leqq 2 - \sqrt{3}$].

36. Za koje su vrijednosti od m oba korijena jednadžbe $2x^2 - 6mx + m - 1 = 0$ sadržana između -1 i $+1$?

[Iz gornjih 5 uvjeta izlazi $-\frac{1}{7} < m < \frac{1}{5}$].

37. U krug polumjera r neka se upiše pravokutnik kome je razlika stranica jednaka d.

[Iz $x - y = d$, $x^2 + y^2 = 4r^2$ izlazi $2y^2 + 2dy - (4r^2 - d^2) = 0$. Da koji korijen te jednadžbe udovoljava problemu, treba da je realan, pozitivan i manji od $2r$. Samo jedan korijen udovoljava, ako je $f\,0 \cdot f(2r) < 0$ ili $(d^2 - 4r^2)(2r + d)^2 < 0$ t. j. $d < 2r$; oba bi korijena udovoljavala, kad bi istodobno bilo $D \geqq 0$, $2f(0) > 0$, $2f(2r) > 0$, $0 < \frac{S}{2} <$ $< 2r$; ali zbog $\frac{S}{2} = -\frac{d}{2} < 0$ ti uvjeti ne mogu nikad biti istodobno ispunjeni].

38. U polukrug promjera $AB = 2r$ neka se upiše trapez opsega $2s$.

[Ako je x jedan krak trapeza, $2y$ gornja njegova baza, to je $x^2 =$ $= 2r(r - y)$ i $x + y + r = s$; odatle izlazi $x^2 - 2rx + 2r(s - 2r) = 0$. Da koji korijen te jednadžbe udovoljava problemu, treba da je realan, pozitivan i manji od $r\sqrt{2}$, jer je samo onda y pozitivno. Problem ima samo 1 rješenje, kad je $2r < s < r(\sqrt{2} + 1)$; dva rješenja kad je $r(\sqrt{2} +$ $+ 1) \leqq s \leqq 2{,}5 \cdot r$].

39. U krug polumjera r neka se upiše istokračni trokut kome je zadan zbroj njegove baze i visine l.

[Ako je baza trokuta $2y$, visina x, to je $x + 2y = l$, $y^2 = x(2r - x)$; odakle izlazi $5x^2 - 2x(l + 4r) + l^2 = 0$. Da koji korijen te jednadžbe udovoljava problemu, treba da je realan, sadržan između 0 i $2r$ i manji od l. Ako je $l < 2r$, $f(0) \cdot f(l) < 0$, problem ima samo jedno rješenje.

Ako je $l > 2r$, problem ima 2 rješenja, ako je uz to $l \leqq r(1 + \sqrt{5})$. Za $l = 2r$ izlaze također 2 rješenja, od kojih jedno granično].

*

II Poglavlje

Jednadžbe koje se dadu svesti na kvadratne.

§ 7. Recipročne jednadžbe. Ako su u jednadžbi koja je poređana po padajućim potencijama nepoznanice, koeficijenti članova jednako dalekih od oba kraja, jednaki ili protivno jednaki, jednadžba se zove recipročna. Opći je dakle oblik recipročne jednadžbe n-tog stepena:

1) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots \pm a_2x^2 \pm a_1x \pm a_0 = 0,$

gdje u drugom dijelu vrijede u isti čas ili gornji ili donji predznaci. Recipročnom se jednadžbom zove takova jednadžba zato što je, ako je x_1 korijen te jednadžbe i $\frac{1}{x_1}$ t. j. recipročna vrijednost od x_1 također korijen te jednadžbe. Uvrstimo li naime u jednadžbu 1) mjesto x vrijednost x_1, mora toj jednadžbi biti udovoljeno, t. j. treba da bude:

2) $a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} + \ldots \pm a_2x_1^2 \pm a_1x_1 \pm a_0 = 0.$

Stavimo li sad u lijevu stranu jednadžbe 1) za x vrijednost $\frac{1}{x_1}$, imamo

$$\frac{a_0}{x_1^n} + \frac{a_1}{x_1^{n-1}} + \frac{a_2}{x_1^{n-2}} + \ldots \pm \frac{a^2}{x_1^2} \pm \frac{a_1}{x_1} \pm a_0 =$$

$$\pm \frac{1}{x_1^n}(\pm a_0 \pm a_1x \pm a_2x_1^2 + \ldots + a_2x_1^{n-2} + a_1x_1^{n-1} + a_0x_1^n).$$

Budući da je zbog 2) izraz u okrugloj zagradi jednak nuli, to je čitava lijeva strana te jednadžbe jednaka nuli, pa jednadžbi 1) doista udovoljava vrijednost $x = \frac{1}{x_1}$, ako joj udovoljava vrijednost $x = x_1$.

§ 8. Razrješavanje recipročnih jednadžbi. Recipročne jednadžbe *trećeg stepena* općeg su oblika:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

$$\text{ili } a_0x^3 + a_1x^2 - a_1x - a_0 = 0.$$

Da razriješimo jednadžbu

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

spojićemo članove s jednakim koeficijentima. Na taj ćemo način dobiti

$$a_0(x^3 + 1) + a_1x(x + 1) = 0.$$

Izlučimo li odatle zajednički faktor $x + 1$, imamo:

$$(x + 1) [a_0 (x^2 - x + 1) + a_1 x] = 0.$$

Ova se jednadžba raspada u dvije jednadžbe, jednu kvadratnu i jednu linearnu i to:

$$x + 1 = 0 \text{ i } a_0 x^2 - (a_0 - a_1) x + a_0 = 0.$$

Dobivamo dakle 3 korijena. Slično se rješava i jednadžba

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 - a_1 x - a_0 = 0.$$

Recipročne jednadžbe 4 *stepena* općeg su oblika

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$\text{ili} \quad a_0 x^4 + a_1 x^3 - a_1 x - a_0 = 0.$$

U prvom slučaju treba jednadžbu podijeliti s x^2 i spojiti članove s jednakim koeficijentima. Time dobivamo jednadžbu:

$$a_0 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_1 \left(x + \frac{1}{x}\right) + a_2 = 0.$$

Stavimo li sad $x + \frac{1}{x} = y$, onda je $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$ ili $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Uvrstimo li tu vrijednost u gornju jednadžbu, imamo

$$a_0 (y^2 - 2) + a_1 y + a_2 = 0.$$

Ovo je *rezolvanta* gornje recipročne jednadžbe. Razriješivši je dobivamo 2 vrijednosti y_1 i y_2. Za svaku od tih vrijednosti od y izlaze iz $x + \frac{1}{x} = y$ ili $x^2 - xy + 1 = 0$ dvije vrijednosti za x. One su realne, ako je $y^2 - 4 \geq 0$ t. j. ako se y ne nalazi između -2 i $+2$. U svemu izlaze dakle 4 vrijednosti.

Da razriješimo recipročnu jednadžbu 4 stepena:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 - a_1 x - a_0 = 0,$$

spojićemo opet članove s jednakim koeficijentima. Tako dobivamo

$$a_0 (x^4 - 1) + a_1 x (x^2 - 1) = 0.$$

Izlučivši zajednički faktor $x^2 - 1$, imamo

$$(x^2 - 1) [a_0 (x^2 + 1) + a_1 x] = 0.$$

Ova se jednadžba raspada u ove dvije:

$$x^2 - 1 = 0, \; a_0 (x^2 + 1) + a_1 x = 0.$$

Iz svake od tih jednadžbi dobivamo dva, ukupno dakle 4 korijena zadane jednadžbe.

Recipročne jednadžbe *petog stepena* općeg su oblika:

$$a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 \pm a_2 x^2 \pm a_1 x \pm a_0 = 0.$$

Spojivši članove s jednakim ili protivnim koeficijentima i izlučivši zajednički faktor može se ta jednadžba svesti na 2 jednadžbe, od kojih je jedna $x \pm 1 = 0$, a druga je recipročna jednadžba 4 stepena prvog oblika.

Primjer. Neka se razriješi jednadžba:

$$8x^5 - 22x^4 - 55x^3 + 55x^2 + 22x - 8 = 0.$$

Spojivši članove s protivnim koeficijentima imamo:

$$8(x^5 - 1) - 22x(x^3 - 1) - 55x^2(x - 1) = 0.$$

Izlučivši $x - 1$ kao faktor izlazi:

$$(x - 1)[8(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)] - 22x(x^2 + x + 1) - 55x^2 = 0.$$

Ova se jednadžba raspada u ove dvije:

$$x - 1 = 0 \text{ i } 8(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - 22x(x^2 + x + 1) - 55x^2 = 0.$$

Iz prve dobivamo $x_1 = 1$; druga se može pisati

$$8x^4 - 14x^3 - 69x^2 - 14x + 8 = 0.$$

Ovo je recipročna jednadžba četvrtog stepena. Podijelimo li je s x^2 i spojimo li članove s jednakim koeficijentima, izlazi:

$$8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 69 = 0.$$

Stavimo li $x + \frac{1}{x} = y$, onda je $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Imamo

$$8y^2 - 16 - 14y - 69 = 0 \text{ ili } 8y^2 - 14y - 85 = 0.$$

Iz te kvadratne jednadžbe izlaze ove 2 vrijednosti za y : $y_1 = \frac{17}{4}$, $y_2 = -\frac{5}{2}$. Uvrstimo li ih u jednadžbu $x + \frac{1}{x} = y$, dobivano napokon

$$x_2 = 4, \ x_3 = \frac{1}{4}, \ x_4 = -2, \ x_5 = -\frac{1}{2}.$$

Od simetričnih jednadžbi višeg stepena može se općeno na kvadratne jednadžbe svesti samo ova jednadžba:

$$a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0.$$

Ako spojimo članove s jednakim koeficijentima i izlučimo zajedničke faktore, imamo

$$a_0(x^6 - 1) + a_1x(x^4 - 1) + a_2x^2(x^2 - 1) = 0 \quad \text{ili}$$

$$(x^2 - 1)[a_0(x^4 + x^2 + 1) + a_1x(x^2 + 1) + a_2x^2] = 0.$$

Ova se jednadžba raspada na ove dvije: $x^2 - 1 = 0$, $a_0x^4 + a_1x^3 + (a_0 + a_2)x^2 + a_1x + a_0 = 0$ koje znamo razriješiti.

§ 9. Binomne jednadžbe. Binomne su jednadžbe općeg oblika

$$x^n \pm a = 0.$$

Supstitucijom $x = y\sqrt[n]{a}$, gdje se pod $\sqrt[n]{a}$ razumijeva apsolutna vrijednost korijena, prelazi ta jednadžba u jednostavniju jednadžbu

$$y^n \pm 1 = 0.$$

Mnoge se binomne jednadžbe dadu svesti na kvadradne jednadžbe.

Primjeri. 1. $y^3 - 1 = 0$. Kako je $y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1)$. to su korijeni jednadžbe $y^3 - 1 = 0$ oni koji udovoljavaju ili jednadžbi $y - 1 = 0$ ili jednadžbi $y^2 + y + 1 = 0$. Dobivamo $y_1 = 1$, $y_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

2. $y^3 + 1 = 0$, $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$; $y_1 = -1$, $y_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

3. $y^4 - 1 = 0$, $(y^2-1)(y^2+1) = 0$; $y^2 - 1 = 0$, $y^2 + 1 = 0$, $y_{1,2} = \pm 1$; $y_{3,4} = \pm i$.

4. $y^4 + 1 = 0$. Kako je $y^4 + 1 = y^4 + 2y^2 + 1 - 2y^2 = (y^2+1)^2 - 2y^2 = (y^2 + 1 + y\sqrt{2})(y^2 + 1 - y\sqrt{2})$, to se jednadžba $y^4 + 1 = 0$ raspada u ove dvije:

$$y^2 + y\sqrt{2} + 1 = 0,\quad y^2 - y\sqrt{2} + 1 = 0.$$

Iz prve jednadžbe izlazi:

$$y_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \text{ a iz druge } y_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).$$

5. $y^5 - 1 = 0$, $(y-1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) = 0$, $y - 1 = 0$, $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$; $y_1 = 1$; druga je jednadžba recipročna jednadžba 4 stepena, prvog oblika; njezini su korijeni:

$$y_{2,3} = \frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},\ y_{4,5} = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

6. $y^5 + 1 = 0$, $(y+1)(y^4 - y^3 + y^2 - y + 1) = 0$, $y + 1 = 0$, $y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 = 0$; $y_1 = -1$;

$$y_{2,3} = \frac{1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},\ y_{4,5} = \frac{1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

7. $y^6 - 1 = 0$, $(y^3+1)(y^3+1) = 0$, $y^3 - 1 = 0$, $y^3 + 1 = 0$. Korijeni su tih jednadžbi izračunati u primjerima 1 i 2.

8. $y^6 + 1 = 0$, $(y^3 + i)(y^3 - i) = 0$; stavimo li $y = iz$ dobivamo jednadžbe $z^3 - 1 = 0$ i $z^3 + 1 = 0$ kojih su korijeni izračunati u primjerima 1 i 2.

9. $y^8 - 1 = 0$, $(y^4 - 1)(y^4 + 1) = 0$, $y^4 - 1 = 0$, $y^4 + 1 = 0$. Korijeni su tih jednadžbi izračunati u primjerima 3 i 4.

10. $y^{10} - 1 = 0$, $(y^5 - 1)(y^5 + 1) = 0$, $y^5 - 1 = 0$, $y^5 + 1 = 0$. Korijeni su tih jednadžbi naznačeni u primjerima 5 i 6.

11. $y^{12} - 1 = 0$, $(y^6 - 1)(y^6 + 1) = 0$, $y^6 - 1 = 0$, $y^6 + 1 = 0$. Te su jednadžbe razmatrane u primjerima 7 i 8.

Jednadžba $y^n \pm 1 = 0$ ima n među sobom različitih korijena.

Ako je y_1, korijen jednadžbe $y^n - 1 = 0$, to je i y_1^p, gdje je p bilo koji cio broj, također korijen te jednadžbe. Jer iz $y_1^n - 1 = 0$ izlazi ponajprije $y_1^{2n} - y_1^n = 0$; $(y_1^2)^n - 1 = 0$, odatle $y_1^{3n} - y_1^n = (y_1^3)^n - 1 = 0$ itd.

Zadaci. Razriješi ove jednadžbe:

1. *a)* $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$, *b)* $7x^3 + 57x^2 + 57x + 7 = 0$, *c)* $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$, *d)* $3x^3 + x^2 - x - 3 = 0$.

2. *a)* $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$,
b) $24x^4 - 110x^3 + 173x^2 - 110x + 24 = 0$,
c) $10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 10 = 0$,
d) $60x^4 + 119x^3 - 458x^2 + 119x + 60 = 0$.

3. *a)* $6x^4 - 13x^3 + 13x - 6 = 0$, *b)* $x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$, *c)* $15x^4 - 34x^3 + 34x - 15 = 0$, *d)* $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0$.

4. *a)* $2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2 = 0$,
b) $12x^5 - 23x^4 - 135x^3 + 135x^2 + 23x - 12 = 0$,
c) $15x^5 + 43x^4 - 202x^3 - 202x^2 + 43x + 15 = 0$,
d) $6x^5 - 5x^4 - 29x^3 - 29x^2 - 5x + 6 = 0$.

5. *a)* $3x^6 - 10x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 10x - 3 = 0$,
b) $2x^6 + 3x^5 - 18x^4 + 18x^2 - 3x - 2 = 0$,
c) $15x^6 - 128x^5 + 275x^4 - 275x^2 + 128x - 15 = 0$.

6. $x^4 = \dfrac{11x - 6}{6x - 11}$.

7. Pokaži da se jednadžba $x^4 + ax^3 + bx^2 + amx + m^2 = 0$ može razriješiti, ako se stavi $x + \dfrac{m}{x} = y$.

8. Uz koji se uvjet recipročna jednadžba 6 stepena

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

dade razriješiti s pomoću kvadratnih jednadžbi?

(Podijeli jednadžbu s x^3 i stavi $x + \dfrac{1}{x} = y$; onda je $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = y^3 - 3y$. Izlazi $c - 2a = 0$).

9. Neka se diskutira jednadžba: *a)* $x^4 - 2mx^3 + (m + 4)x^2 - 2mx + 1 = 0$, *b)* $mx^4 + 6x^3 + (3m - 8)x^2 + 6x + m = 0$.

10. *a)* $x^3 - 27 = 0$, *b)* $27x^3 + 125 = 0$, *c)* $x^4 + 16 = 0$.

11. *a)* $a^2x^4 - 1 = 0$, *b)* $256x^4 - 625 = 0$, *c)* $a^2x^4 + b^4 = 0$.

12. *a)* $16x^4 - 81 = 0$, *b)* $x^5 - 32 = 0$, *c)* $x^5 + 243 = 0$.

13. *a)* $x^6 - 729 = 0$, *b)* $x^6 + 64 = 0$, *c)* $x^8 - 256 = 0$.

14. *a)* $x^{10} - 1024 = 0$, *b)* $x^{12} - 4096 = 0$, *c)* $256x^8 - 6561 = 0$.

15. U kojoj su relaciji korijeni jednadžbe $x^3 - 1 = 0$ prema korijenima jednadžbe $x^3 + 1 = 0$?

16. Neka je ε jedan kompleksni korijen jednadžbe $x^3 - 1 = 0$. Uvjeri se da ε^2 i ε^3 daju ostale korijene te jednadžbe.

§ **19. Bikvadratne jednadžbe.** Opći je oblik bikvadratne jednadžbe

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Ta će se jednadžba razriješiti, ako se stavi $x^2 = y$; tako se dolazi do kvadratne jednadžbe $ay^2 + by + c = 0$ koja se zove *rezolvanta* bikvadratne jednadžbe.

Ako su korijeni te jednadžbe y_1 i y_2, korijeni bikvadratne jednadžbe jesu

$$\pm\sqrt{y_1} \text{ i } \pm\sqrt{y_2}.$$

Bikvadratna jednadžba imade dakle 4 korijena od kojih su 2 i 2 protivna.

Priroda korijena može se razabrati iz koeficijenata jednadžbe ne razriješivši same jednadžbe. Treba razlikovati 3 slučaja:

1) $b^2 - 4ac > 0$, 2) $b^2 - 4ac = 0$, 3) $b^2 - 4ac < 0$.

Diskusija je sama vrlo jednostavna te se rezultat diskusije može ovako sabrati:

$$b^2 - 4ac > 0 \begin{cases} \dfrac{c}{a} > 0 \begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0, \; y_1 \text{ i } y_2 > 0, & \text{4 realna korijena u } x, \\ -\dfrac{b}{a} < 0, \; y_1 \text{ i } y_2 < 0, & \text{4 imag. korijena u } x, \text{ 2 i 2 protivna}, \end{cases} \\ \dfrac{c}{a} = 0 \begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0, \; y_1 = 0, y_2 > 0, & \text{3 realna korijena, } (x = 0 \text{ dvostruki}). \\ -\dfrac{b}{a} < 0, \; y_1 < 0\; y_2 = 0, & x = 0 \text{ dvostruki korijen, druga dva imaginarna.} \end{cases} \\ \dfrac{c}{a} < 0 \left\{ y_1 < 0 < y_2 \right. & \text{dva realna korijena i dva imaginarna korijena.} \end{cases}$$

$$b^2 - 4ac = 0 \begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0, & \text{dva dvostruka realna korijena,} \\ -\dfrac{b}{a} < 0, & \text{dva dvostruka imaginarna korijena.} \end{cases}$$

$b^2 - 4ac < 0$, sva 4 korijena kompleksna (dva i dva konjugirana).

Budući da je $ay^2 + by + c = a(y - y_1)(y - y_2)$, to je $ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - x_1{}^2)(x^2 - x_2{}^2) = a(x - x_1)(x + x_1)(x - x_2)(x + x_2)$.

Ovo nam pokazuje kako se bikvadratni trinom $y = ax^4 + bx^2 + c$ može rastaviti u produkt od 4 faktora prvog stepena koji mogu biti ili realni ili kompleksni.

Primjer 1. Neka se unaprijed odredi priroda i predznak korijena jednadžbe $5x^4 - 13x^2 + 4 = 0$. Diskriminanta jest $b^2 - 4ac = 169 - 80 = 89$ dakle > 0; $\frac{c}{a} = \frac{4}{5} > 0$; $-\frac{b}{a} = \frac{13}{5}$ t. j. > 0; sva 4 korijena jesu dakle realna.

2) Neka se unaprijed odredi priroda i predznak korijena jednadžbe $2x^4 + 7x^2 - 12 = 0$. Diskriminanta jest $49 + 96 = 145$ t. j. > 0: $\frac{c}{a} = -6$ t. j. < 0; $-\frac{b}{a} = -\frac{7}{2}$ t. j. < 0; $y_1 < 0 < y_2$; jednadžbe imade 2 realna korijena $\sqrt{y_2}$ i $-\sqrt{y_2}$ i dva imaginarna $\pm\sqrt{y_1}$.

3) Neka se odredi kako se mijenjaju korijeni jednadžbe:

$9x^4 - 6(m + 1)x^2 + m^2 - 9 = 0$, kad se m mijenja od ∞ do $+\infty$. Korijeni ne mogu biti realni ako diskriminanta rezolvante nije pozitivna ili jednaka nuli. Treba dakle da je

$$36\,(m + 1)^2 - 36\,(m^2 - 9) \geqq 0 \text{ ili}$$
$$2m + 10 \geqq 0, \quad m \geqq -5,$$

Zbroj korijena rezolvante jest $S = \frac{6}{9}(m + 1) = \frac{2}{3}(m + 1)$; produkt korijena jest $P = \frac{m^2 - 9}{9} = \frac{(m + 3)\,(m - 3)}{9}$.

Karakteristične vrijednosti od m poređane rastućim redom jesu dakle $-5, -3, -1, +3$.

S obzirom na te karakteristične vrijednosti treba nam razmatrati ove slučajeve:

1) $-\infty < m < -5$; korijeni jesu konjugirano kompleksni.

2) $m = -5$, $D = 0$; dvostruki korijen $y = \frac{S}{2} = -\frac{4}{3}$, u x nema realnih korijena.

3) $-5 < m < -3$; $S < 0$; $P > 0$; $y_1 < y_2 < 0$; sva su 4 korijena imaginarna; dva i dva protivna.

4) $m = -3$; $S = -\frac{4}{3}$, $P = 0$; $y_1 = -\frac{4}{3}$, $y_2 = 0$; $x_{1,2}$ imaginarno i protivno, $x_{3,4} = 0$.

5) $-3 < m < -1$, $S < 0$, $P < 0$, $y_1 < 0 < y_2$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$, druga dva korijena imaginarna i protivna.

6) $m = -1$; $S = 0$, $P < 0$; $y_1 = -y_2$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$; $x_{1,2}$ imaginarno i protivno.

7) $-1 < m < 3, S > 0, P < 0,; y_1 < 0 < y_2; x_{3,4} = \pm \sqrt{y_2}$, $x_{1,2}$ imaginarno i protivno.

8) $m = 3; S > 0, P = 0; y_1 = 0; y_2 = \frac{8}{3}, x_{1,2} = 0; x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$.

9) $3 < m < \infty, S > 0, P > 0; 0 < y_1 < y_2; x_{1,2} = \pm \sqrt{y_1}; x_{3,4} = \pm \sqrt{y_2}$.

Bilješka. Razrješavanje bikvadratnih jednadžbi dovodi nas često do izraza oblika $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Zbog lagljeg izračunavanja takih izraza kad B nije potpuni kvadrat, mogu se upotrebljavati poznate formule:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Na pr. Neka se razriješi jednadžba $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Izlazi $x^2 = 5 \pm \sqrt{24}$; kako je $\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\sqrt{5 - \sqrt{24}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, to je

$$x_{1,2} = \pm (\sqrt{3} + \sqrt{2}), \quad x_{3,4} = \pm (\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

§ **11. Trinomne jednadžbe.** Opći je oblik trinomne jednadžbe

$$ax^m + bx^n + c = 0.$$

Na kvadratnu jednadžbu dade se trinomna jednadžba svesti samo onda kad je $m = 2n$. Da se razriješi jednadžba $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, treba staviti $x^n = y$. Tad imamo $ay^2 + by + c = 0$. Iz te jednadžbe izlazi $x^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. To je opet binomna jednadžba koju u nekim jednostavnim slučajevima možemo razriješiti s pomoću kvadratnih jednadžbi.

Primjer. Neka se razriješi jednadžba $256x^8 - 1312x^4 + 81 = 0$. Stavimo li $x^4 = y$, imamo $y^2 - \frac{82}{16} y + \frac{81}{256} = 0$. Odatle izlazi $y_1 = \frac{81}{16}$. $y_2 = \frac{1}{16}$. Još treba razriješiti binomne jednadžbe $x^4 - \frac{81}{16} = 0, x^4 - \frac{1}{16} = 0$.

Korijeni tih jednadžbi jesu: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}i$, $x_4 = -\frac{3}{2}i$, $x_5 = \frac{1}{2}$, $x_6 = -\frac{1}{2}$, $x_7 = \frac{1}{2}i$, $x_8 = -\frac{1}{2}i$.

Zadaci. Razriješi ove jednadžbe:

1. a) $x^4 - 10x^2 + 19 = 0$, **2.** a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$,

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$, b) $9x^4 + 12x^2 + 4 = 0$,

c) $x^4 - 12x^2 + 25 = 0.$ c) $x^4 - 4x^2 + 1 = 0,$
d) $x^4 - 28x^2 + 187 = 0.$ d) $x^4 - 15x^2 + 56 = 0.$

3. a) $x^4 - 8x^2 + 9 = 0.$ **4.** a) $x^4 + 4abx^2 - (a^2 + b^2)^2 = 0,$
b) $x^4 - 10x^2 + 26 = 0,$ b) $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0,$
c) $x^4 - 18x^2 + 64 = 0.$ c) $c^4x^4 + c^2(a^2 - b^2)x^2 - a^2b^2 = 0.$

5. a) $(2x-5)^4 + 5(2x-5)^2 = 36,$ b) $(x^2 - 4x + 3)^2 - 8(x^2 - 4x) = 9.$

6. a) $(3x^2 + x - 2)^2 - 30x^2 - 10x + 36 = 0,$
b) $(x^4 + x^2 - 1)^2 - 15(x^4 + x^2 + 2)^2 + 35 = 0.$

7. $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 + 0.$ Stavi $\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^2 = y.$

8. $\sqrt[3]{x^4} - 14\sqrt[3]{x^2} + 45 = 0.$

Odredi ne razriješivši jednadžbe da li su korijeni ovih jednadžbi realni ili imaginarni odnosno kompleksni, kao i njihov predznak, ako su oni realni.

9. a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$ b) $x^4 - 7x^2 - 144 = 0,$
c) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0,$ d) $x^4 + x^2 + 1 = 0,$
e) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0,$ f) $20x^4 + 7x^2 - 3 = 0.$

Napiši bikvadratnu jednadžbu kojoj su korijeni:

10. a) $\pm 4, \pm 1$: b) $\pm 2, \pm 3$; c) $\pm 5, \pm 8$; d) $\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{7}$;
e) $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}$; f) $\pm\frac{3}{4}, \pm\frac{5}{6}$; g) $\pm\frac{7}{8}, \pm\frac{3}{4}$; h) $\pm 4i,$
$\pm 5i$, i) $\pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \pm\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; k) $\pm\sqrt{4 + \sqrt{7}},$
$\pm\sqrt{4 - \sqrt{7}}$; l) $\pm(3 + 4i), \pm(3 - 4i).$

Rastavi u produkt linearnih faktora:

11. a) $y = x^4 - 5x^2 + 4,$ b) $y = x^4 - 13x^2 + 36,$
c) $y = x^4 - 25x^2 + 144,$ d) $y = 144x^4 - 40x^2 + 1.$

Kako se mijenjaju korijeni ovih jednadžbi, kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$:

12. a) $(m-1)x^4 - 3mx^2 + 2m = 0,$ b) $(m-1)x^4 + 2(m+1)x^2 + m = 0,$
c) $(m^2 - 4)x^4 + 4(m-1)x^2 - 4 = 0,$
d) $(m-2)x^4 - 2mx^2 + m - 1 = 0$?

Razriješi ove jednadžbe:

13. a) $x^6 - 15x^3 - 324 = 0,$ **14.** a) $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0,$
b) $x^6 - 35x^3 + 216 = 0,$ b) $x^{12} + 63x^6 - 64 = 0,$
c) $5x^6 - 4x^3 - 20224 = 0.$ c) $x^8 - (m^4 + n^4)x^4 + m^4n^4 = 0.$

15. Odredi ne razriješivši jednadžbe položaj brojeva 1 i -3 prema korijenima od a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0,$ b) $9x^4 + 11x^2 - 14 = 0.$

16. Koji uvjeti moraju biti ispunjeni da jednadžbe a) $2x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^4 - b^4 = 0,$ b) $x^4 - a(3b - a)x^2 - b^2(3a - b)^2 = 0$ gdje a i b znače pozitivne veličine, imadu korijena između 0 i b?

§ 12. **Logaritamske jednadžbe.** Jednadžba se zove *logaritamska*, ako u njoj dolaze logaritmi izraza koji sadrže nepoznanicu. Takova će se jednadžba razriješiti da se svede na oblik $\log f(x) = \log g(x)$, odakle izlazi jednadžba $f(x) = g(x)$.

Primjeri. 1: Neka se razriješi jednadžba:

$\log(x-2) - \log(x-4) = \log 5$. Ova se jednadžba može pisati:

$$\log \frac{x-2}{x-4} = \log 5, \text{ odakle izlazi } \frac{x-2}{x-4} = 5 \text{ i } x = \frac{9}{2}.$$

2. Neka se razriješi jednadžba:

$\log(x-1) + \log(x-2) = \log 6 + \log(x-3)$. Ta se jednadžba može pisati

$\log[(x-1)(x-2)] = \log[6(x-3)]$;

odatle izlazi

$$(x-1)(x-2) = 6(x-3) \text{ ili } x^2 - 9x + 20 = 0.$$

Korijeni su te jednadžbe $x_1 = 5$, $x_2 = 4$.

§ 13. **Eksponencijalne jednadžbe.** Jednadžba u kojoj nepoznanica dolazi u eksponentu zove se *eksponencijalna jednadžba.* Opći je oblik takove jednadžbe:

$$a^{f(x)} = b.$$

Razrješavanje te jednadžbe osniva se na poučku: ako su dva broja jednaka, to su i njihovi logaritmi s obzirom na istu bazu također jednaki. Logaritmiramo li dakle obje strane eksponencijalne jednadžbe, dobivamo $f(x) \log a = \log b$, odakle se u jednostavnim slučajevima dade izračunati x.

Eksponencijalne jednadžbe koje se dadu svesti na oblik $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, mogu se razriješiti i bez primjene logaritamskih tablica. Kako su potencije $a^{f(x)}$ i $a^{g(x)}$ jednake, a i njihove baze također jednake, izlazi da su i eksponenti jednaki. Dobivamo dakle jednadžbu $f(x) = g(x)$. Ipak treba isključiti vrijednosti baza 0 i 1.

Primjeri. Neka se razriješi jednadžba:

$$4^x - 3^{x-2} = 5 \cdot 3^{x-1} + 4^{x-1}.$$

Ta se jednadžba može pisati

$$4^x - 4^{x-1} = 5 \cdot 3^{x-1} + 3^{x-2},$$

$$4^{x-1}(4-1) = 3^{x-1}(5 + 3^{-1})$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} = \frac{5 + 3^{-1}}{3} = \frac{15+1}{9} = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$

$$x - 1 = 2, \; x = 3.$$

2. $$3^{1+4x} - 2^{3x-5} = 2^{3x-1} - 3^{4x},$$

$$3^{1+4x} + 3^{4x} = 2^{3x-1} + 2^{3x-5},$$

$$3^{4x}(3+1) = 2^{3x}(2^{-1} + 2^{-5}),$$

$$\left(\frac{3^4}{2^3}\right)^x = \frac{2^{-1}+2^{-5}}{3+1} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{32}}{4} = \frac{16+1}{128} = \frac{17}{128},$$

$$\left(\frac{81}{8}\right)^x = \frac{17}{128},$$

$$x\,(\log 81 - \log 8) = \log 17 - \log 128,$$

$$x = \frac{\log 17 - \log 128}{\log 81 - \log 8} = -\,0{,}87205.$$

Zadaci. Razriješi ove logaritamske jednadžbe:

1. *a)* $\log (x+2) = 2$, *b)* $\log (x+2) = \log (2x-3)$.

2. $\log (x+7) - \log (x-5) = \log 2$.

3. $\log (x+2) - \log (x-3) = \log (x+4) - \log (x+3)$.

4. $\log (3x+4) - \log 5 = \log (x+2) + \log 2$.

5. $\log (x+4) + \log (x-6) = \log 96$.

6. $2 \log (4x-1) = \log (25x-1)$.

7. $\log \sqrt{3x-2} + \log \sqrt{4x-7} = \log 13$.

Razriješi ove eksponencijalne jednadžbe (bez logaritamskih tablica):

8. *a)* $3^x = 27$, *b)* $(-3)^x = 9$, *c)* $(-3)^{-x} = 9$.

9. *a)* $(-2)^{-x} = -\frac{1}{8}$, *b)* $100^{3x+2} = 0{,}1$, *c)* $5^{2x+3} = 3125$.

10. *a)* $8^x \cdot 4^{2x-3} = 16^{2x+5}$, *b)* $\sqrt[x-2]{a^{x+2}} = \sqrt[x+3]{a^{x+1}}$.
c) $12^{5x-3} : 12^{2x-1} = 12^{3x+2} : 12^{4x-4}$.

11. *a)* $4^x + 5^{x-1} = 5^x - 4^{x-1}$, *b)* $4^{x+2} \cdot 16^{2x+1} = 64^{x+2}$,
c) $3 \cdot 2^{x+3} = 192 \cdot 3^{x-3}$, *d)* $8^{2x+1} = 0{,}125^{4-3x}$.

12. *a)* $8^x \cdot 4^{3x} = 16^{3x+6}$, *b)* $27^{5x-6} \cdot 81^{2x+3} = 9^{4x+5} \cdot 3^{x-2}$.

13. *a)* $8^x = 7^x + 7^{x-1}$, *b)* $7^{x+1} - 2^{x-1} = 5 \cdot 7^x + 3 \cdot 2^{x+3}$,
c) $3^{2x} + 4 \cdot 3^{2x-2} - 4 \cdot 3^{2x-1} = 27$.

14. *a)* $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$,
b) $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$.

15. *a)* $2^{x+1} + 4^x = 80$, *b)* $2^x + 4^x = 272$.

16. *a)* $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$, *b)* $(10^{5-x})^{6-x} = 100$.

17. *a)* $3^{x^2-4x-2} = 27$, *b)* $2^{2x} - 1025 \cdot 2^x + 1024 = 0$.

18. *a)* $12\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 25\left(\frac{3}{4}\right)^{x} + 12 = 0$,
b) $3x^{\log x} + 100x^{-\log x} = 40$.

19. $13^{xy} = 2197$,
$5^{x+y-4} = 1$.

20. $5^{\log x} + 3^{\log y} = 32$,
$5^{\log x} \cdot 3^{\log y} = 135$.

21. $3^x + 4^y = 265,$ $3^x \cdot 4^y = 2304.$

22. $x^{\log y} = 4,$ $xy = 200.$

23. $y^x = 19683,$ $y = 3^x.$

24. $3^{xy} + \sqrt[y]{2^x} = 35,$ $9^{xy} - 2^{\frac{2x}{y}} = 665.$

25. $2^x + 3^y = 17,$ $2^{2x} + 3^{2y} = 145.$

Razriješi s pomoću logaritamskih tablica:

26. *a)* $24^{3x-2} = 10000,$ *b)* $7^{-x} = 60,$ *c)* $1000^{-x} = 0{,}04.$

27. *a)* $1000^{\frac{1}{x}} = 250,$ *b)* $3^x = 100.$

28. *a)* $a^{x+1} \cdot b^{x-2} = c,$ *b)* $a^x \cdot b^{x-1} = c^x \cdot d^{x+1},$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{2x-3},$ *d)* $\sqrt[x]{\frac{3}{4}} = 304.$

29. *a)* $-3^x + 3^{x-4} = 5^{x+2} - 5^{x+3},$

b) $7^{2x-1} - 3^{3x-2} = 7^{2x+1} - 3^{3x+2}.$

30. $\left(\frac{4}{5}\right)^{x-3} = \left(\frac{4}{5}\right)^{x-2} + (0{,}8)^{x+1} - \frac{320}{81}.$

31. $3^x + 8 \cdot 3^{x-3} = 7 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{x+1}.$

32. *a)* $9^{(7^x)} = 11^{(2^x)},$ *b)* $3^{(5^x)} = 5^{(3^x)}.$

33. $5^{x(x+2)} \cdot 2^{x(x+3)} = 4 \cdot 10^{4x}.$

34. $27^{\frac{x-1}{x+1}} \cdot 5^{\frac{x+1}{x-1}} = 375.$

§ 14. Kvadratne jednadžbe s 2 nepoznanice. Ako nam je zadana kvadratna jednadžba s dvije nepoznanice $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ i još linearna jednadžba $mx + ny + p = 0$, sistem će se taj razriješiti, ako se vrijednost za x ili za y iz linearne jednadžbe uvrsti u kvadratnu jednadžbu i dobivena jednadžba riješi. To nam je poznato već od prije.

Ako je pak osim zadane kvadratne jednadžbe zadana još i druga kvadratna t. j. ako nam je zadan sistem

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \qquad (1)$$

$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0, \qquad (2)$$

to eliminacija jedne nepoznanice između te dvije jednadžbe dovodi redovno do jednadžbe 4 stepena koja se ne da razriješiti s pomoću jednostavnih metoda. Pomnožimo li jednadžbu 1) s c_2, jednadžbu 2) s $-c_1$, i zbrojimo li obje dobivene jednadžbe izlazi,

$$(ac_1 - ca_1)\,x^2 + 2\,(bc_1 - cb_1)\,xy + 2\,(dc_1 - cd_1)\,x + \qquad (3)$$
$$+ 2\,(ec_1 - ce_1)\,y + fc_1 - cf_1 = 0.$$

Ta jednadžba čini s jednadžbom 1) sistem ekvivalentan sa zadanim sistemom. Izračunamo li iz te jednadžbe y, dobivamo izraz ovog oblika

$$y = \frac{Ax^2 + Bx + C}{Dx + E}$$

Uvrstimo li ovu vrijednost u jednadžbu 1) pa pomnožimo li onda dobivenu jednadžbu s najmanjim zajedničkim višekratnikom, izlazi jednadžba ovog općenog oblika

$$Lx^4 + Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0.$$

Ta je jednadžba četvrtog stepena. Na kvadratnu se jednadžbu može ona općeno svesti u ta tri slučaja:

a) ako je ona bikvadratna $Lx^4 + Nx^2 + Q = 0$,

b) ako se lijeva strana te jednadžbe dade napisati kao produkt dvaju faktora drugog stepena,

c) ako je lijeva strana jednadžbe 1) ili 2) potpuni kvadrat ili se dade rastaviti u racionalne faktore prvog stepena.

Primjer. Neka se razriješi ovaj sistem:

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 + 3y^2 = 110.$$

Prva se jednadžba sistema dade napisati u obliku

$(x - 3y)^2 - 1 = 0$ t. j. $(x - 3y + 1)\,(x - 3y - 1) = 0.$

Odatle izlazi:

$$x - 3y + 1 = 0,\; x - 3y - 1 = 0.$$

Ovo su linearne jednadžbe. Uvrstimo li vrijednosti od x u drugu jednadžbu, dobivamo ova 4 rješenja zadanog sistema:

$$x_1 = \frac{47}{7},\; y_1 = \frac{18}{7},\; x_2 = -7,\; y_2 = -2,$$

$$x_3 = 7,\; y_3 = 2,\; x_4 = -\frac{47}{7},\; y_4 = -\frac{18}{7}.$$

Ipak se u slučajevima, kad su neki koeficijenti u jednadžbama 1) ili 2) jednaki nuli ili kad imaju neke osobite vrijednosti, zadani se sistem može razriješiti s pomoću kvadratnih jednadžbi.

To su ovi slučajevi:

1. Zadan je sistem oblika:

$$ax^2 + cy^2 = d,$$
$$a_1x^2 + c_1y^2 = d_1.$$

Uzmemo li za nepoznanice x^2 i y^2, nalazimo

$$x^2 = \frac{dc_1 - d_1c}{ac_1 - a_1c} = K, \quad y^2 = \frac{ad_1 - a_1d}{ac_1 - a_1c} = L.$$

Zato je $\quad x = \pm\sqrt{K}, \quad y = \pm\sqrt{L}.$

Izlaze 4 rješenja:

$$x_1 = +\sqrt{K},\ y_1 = +\sqrt{L}, \quad x_2 = +\sqrt{K},\ y_2 = -\sqrt{L},$$
$$x_3 = -\sqrt{K},\ y_3 = -\sqrt{L}, \quad x_4 = -\sqrt{K},\ y_4 = +\sqrt{L},$$

2. Jedna od zadanih jednadžbi jest *homogena* t. j. oblika

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

Ta će se jednadžba podijeliti s y^2 i odrediti omjer $x : y$. Time smo dobili drugi sistem u kom je jedna jednadžba linearna.

3. Obje jednadžbe sistema jesu ne obazirući se na opći član homogene t. j. oblika:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d,$$
$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 = d_1.$$

Pomnožimo li gornju jednadžbu s d_1 donju s $-d$ i zbrojimo li obje jednadžbe, dobivamo homogenu jednadžbu:

$$(ad_1 - a_1d)\,x^2 + 2(bd_1 - b_1d)xy + (cd_1 - c_1d)\,y^2 = 0,$$

iz koje opet treba odrediti omjer $\frac{x}{y}$.

Primjer. Neka se razriješi sistem:

$$x^2 + 3xy + 4y^2 = 23,$$
$$x^2 - 7xy + 5y^2 = 35.$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu s 35, drugu s -23 i zbrojimo li dobivene jednadžbe, dolazimo do homogene jednadžbe $12x^2 - 56xy + 25y^2 = 0$. Podijelimo li je s y^2, imamo $12\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 56\frac{x}{y} + 25 = 0$. Korijeni su te jednadžbe $\left(\frac{x}{y}\right)_1 = \frac{25}{6}$, $\left(\frac{x}{y}\right)_2 = \frac{1}{2}$. Uvrstimo li u prvu jednadžbu $x = \frac{25}{6}y$, dobivamo $y^2 = \frac{36}{53}$ i $y_{1,2} = \pm\frac{6\sqrt{53}}{53}$; onda je $x_{1,2} = \pm\frac{25\sqrt{53}}{53}.$

Uvrstimo li u prvu jednadžbu $x = \frac{1}{2}y$, imamo $23y^2 = 92$, $y_{3,4} = \pm 2$, i $x_{3,4} = \pm 1$.

Tako izlaze 4 riješenja:

$$x_1 = \frac{25}{53}\sqrt{53},\ y_1 = \frac{6\sqrt{53}}{53}; \quad x_2 = -\frac{25}{53}\sqrt{53},\ \ y_2 = -\frac{6\sqrt{53}}{53};$$
$$x_3 = 1,\ \ y_3 = 2,\ \ x_4 = -1,\ \ y_4 = -2.$$

4. Koeficijenti nepoznanica u jednadžbama zadanog sistema jesu takovi da se jednadžbe što ih dobijemo, kad obje jednadžbe sistema zbrojimo ili ih odbijemo, dadu lako svesti na kvadratne jednadžbe s jednom nepoznanicom.

Primjer. Neka se razriješi sistem:

$$5x^2 - 10xy + 4y^2 + 10x = 61, \quad x^2 + 2xy - 5y^2 - 6x + 24y = 52.$$

Odbivši obje zadane jednadžbe dobiva se jednadžba:

$$(2x - 3y)^2 + 8(2x - 3y) = 9$$

i odatle $(2x - 3y)_1 = 1$, $(2x - 3y)_2 = -9$ itd.

Razriješi ove jednadžbe:

1. $x^2 + y^2 + x + y = 62,\quad x^2 - y^2 + x - y = 50.$

2. $x^2 + y^2 = 13.\quad x^2 - y^2 = 5.$

3. $169x^2 + 2y^2 = 177,\quad 13x^2 - 4y^2 = -3.$

4. $3xy + 5(x - y) = 99,\quad 2xy - 3(x - y) = 47.$

5. $\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{9}{y^2} = 97,\quad \dfrac{9}{x^2} + \dfrac{4}{y^2} = 72.$

6. $\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{15}{4},\quad x^2 - y^2 = 16.$

7. $x^2 + y^2 - xy = 19,\quad x + y + xy = 23.$

8. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4,\quad (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 29.$

9. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 + 6x + 10y = 227,\quad (x - 11)^2 - (y - 1)^2 + 22x - 2y = 215.$

10. $(x + y)^2 + (x - y)^2 + 40(x + 5) = 34,\ x^2 - y^2 = 65.$

11. $x^2 + y^2 = 45,\quad xy = 2(x + y).$

12. $x^2 + y^2 = 61,\quad xy = 30(x - y).$

13. $x^2 + y^2 + 7xy = 171,\quad xy = 2(x + y).$

14. $x^2 + y^2 + x + y = 62,\quad 5xy + 4(x^2 + y^2) = 328.$

15. $x^2 + xy - 12y^2 = 0,\quad 2x^2 + xy + y^2 = 352.$

16. $x^2 - 5xy - 24y^2 = 0,\quad 3x^2 - 5y^2 = 88.$

17. $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0,\quad x^2 + 2xy - 3y^2 = 20.$

18. $3x^2 - 7xy + 4y^2 = 0,\quad 5x^2 - 3xy - y^2 = 35.$

19. $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 0,\quad x^2 - y^2 = 20.$

20. $x^2 - xy + y^2 = 28,\quad x^2 - y^2 = 20.$

21. $2x^2 - 3xy + 2y^2 = 23,\quad 3x^2 - 5xy + 3y^2 = 27.$

22. $x^2 - xy + y^2 = 19,\quad 3x^2 + xy + 3y^2 = 33.$

23. $3x^2 - 7xy + 4y^2 = 22,\quad 5x^2 - 8xy + 5y^2 = 50.$

24. $3x^2 + 7xy + 5y^2 = 53,\quad x^2 + 6y^2 = 15.$

8/6

25. $2x^2 - 5y^2 + 3xy = 60,$
$6x^2 + 5y^2 - 11xy = 60.$

26. $3x^2 - 2xy + 5y^2 = 35,$
$x^2 - 2y^2 = 1.$

27. $ax^2 + bxy + ay^2 = a^3,$
$bx^2 + axy + by^2 = b^3.$

28. $\dfrac{3x^2 + 5y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} = \dfrac{93}{67},$
$x^2 + y^2 = 25.$

29. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x = 37,$
$3x^2 + 8xy + 5y^2 + 12y = 45.$

30. $7x^2 - 49x + 3y^2 - 21y = 110,$
$8x^2 - 56x + 2y^2 - 14y = 40.$

31. $x^2 + 3xy - y^2 - 2x + 5y = 10,$
$3x^2 + xy + 2y^2 - 4x - 8y = 8.$

32. $(x + y)^2 + x^2y^2 = 41,$
$xy\,(x + y) = 20.$

33. $x^3 - y^3 = 91,$
$xy = 30.$

34. $x^3 + y^3 = 133,$
$xy = 10.$

35. $x^4 + y^4 = 641,$
$xy\,(x^2 + y^2) = 290.$

15 · 15
75
225

36. $x^4 + y^4 = 82,$
$xy = 3.$

37. $x^3 + y^3 = 341,$
$x^2y + xy^2 = 330.$

38. Zbroj kvadrata dvaju brojeva jest s (244). Uveća li se prvi broj za m (2), a drugi za n (3), zbroj njihovih kvadrata jest s' (369). Koji su to brojevi?

39. Koji je dvoznamenkasti broj za 4 manji od zbroja kvadrata svojih znamenaka a za 5 veći od dvostrukog produkta tih znamenaka?

40. Zbroj kvadrata dvaju brojeva jest s (625). Umanji li se prvi broj za a (2), drugi za b (3), zbroj je kvadrata s' (468). Koji su to brojevi?

41. Dva se tijela gibaju po krakovima pravoga kuta jednoliko prema vrhu. Na početku je prvo tijelo udaljeno od vrha a_1 (50 m), drugo a_2 (36 m). Nakon t_1 (1) sekunda njihova međusobna udaljenost jest d_1 (53 m), nakon t_2 (3) sekunda d_2 (37 m). Koja je brzina obaju tijela?

42. Neka se odrede katete pravokutnog trokuta kome je hipotenuza jednaka c (634 cm) i površina p (462 dm^2).

43. Stranica je romba a (130 cm), površina p (14784 cm^2). Kolike su diagonale?

44. Izračunaj katete pravokutnog trokuta, ako je zadana hipotenuza c i zbroj katete i pripadne težišnice $2s$.

45. U zadanu kuglu upiši valjak zadanog plašta p.

46. Izračunaj polumjere baza prikraćenog stošca, ako je njegova visina v (30 cm), stranica s (34 cm), i obujam V (53560 π cm^3).

47. U polukružnici polumjera r povuci tetivu CD paralelnu s promjerom AB tako da oplošja koja nastaju rotacijom od CD i BC oko AB budu u zadanom omjeru m.

54 · 112
548
5704

172 · 54
560
441

* 225
16

III Poglavlje

Aritmetički i geometrijski red.

§ 15. Redovi. Redom zovemo niz brojeva koji su poređani po određenom zakonu. Pojedini se brojevi reda zovu njegovim članovima; kažemo prvi član, drugi član, . . . n-ti član reda. Članovi se reda označuju redovno ovako: $a_1, a_2, \ldots a_n$. Član a_1 zove se *početni* član, a_n *opći* član. Neki je red *rastući* ili *padajući* već prema tomu da li je svaki slijedeći član veći od prethodnoga ili je manji od njega. Red jest *konačan*, ako imade konačnu, određenu množinu članova; ako je pak broj članova neograničen, red jest *beskonačan*.

§ 16. Aritmetički red. Aritmetički je red takav niz brojeva, gdje je *razlika* između svakog člana i člana pred njim stalna. Na pr. 5, 9, 13, 17, 21 . . . Stalnu razliku između svakog člana i člana pred njim označujemo s d. Aritmetički red raste, ako je d pozitivno, pada, ako je d negativno.

Budući da je prema definiciji aritmetičkoga reda

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d, \ldots$$

$$\text{to je} \quad a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Ovo je formula za *opći član* aritmetičkog reda.

Primjer. Neka se odredi 20 član u aritmetičkom redu 5, 9, 13 . . . Imamo:

$$a_{20} = a_1 + 19d = 5 + 19 \cdot 4 = 5 + 76 = 81.$$

Kako je $a_n - a_{n-1} = d$, i $a_{n+1} - a_n = d$, to je

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \quad \text{ili} \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

U aritmetičkom je redu svaki član aritmetička sredina između obaju susjednih članova.

Zbroj s_n od n članova aritmetičkog reda može se izračunati ovako:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + \ldots + [a_1 + (n - 2)d] + [a_1 + (n - 1)d].$$

Desnu stranu ove jednadžbe možemo i ovako pisati:

$$s_n = a_n + (a_n - d) + \ldots + [a_n - (n-2)d] + [a_n - (n-1)d].$$

Zbrojimo li obje jednažbe, imamo:

$$2s_n = n\,(a_1 + a_n)$$

$$\text{i odatle}\quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Kako je $a_n = a_1 + (n-1)d$, to je također $s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$.

Ovo su formule za *zbroj* od n članova aritmetičkog reda.

Primjeri. 1. Zbroj od 20 prvih članova aritmetičkog reda 5, 9, 13... biće

$$s_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 10\,(10 + 76) = 10 \cdot 86 = 860.$$

2. Zbroj prvih n prirodnih brojeva jest:

$s_n = \frac{n}{2}(n+1)$; zbroj prvih n neparnih brojeva 1, 3, ... $2n - 1$ jest

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2.$$

U jednadžbama za a_n i s_n dolazi 5 veličina: a_1, a_n, n, d i s_n. Ako su 3 od njih zadane, mogu se ostale dvije izračunati. Takih je zadataka moguće 10. Ako je zadano a_1, d i s_n ili d, a_n i s_n, dolazi se do kvadratnih, inače do linearnih jednadžbi.

§ 17. Interpolacija. Između dva zadana broja a i b interpolirati aritmetički red od r članova znači odrediti r brojeva koji zajedno s a i b čine aritmetički red kome je a prvi član, a b posljednji član. Označi li se diferencija traženog aritmetičkog reda s δ, to je, budući da je sad zajedno s a i b ukupni broj članova $r + 2$,

$$b = a + (r + 2 - 1)\,\delta,$$

$$\text{i odatle}\quad \delta = \frac{b - a}{r + 1}.$$

Primjer. Između 7 i 19 interpoliraj aritmetički red od 5 članova.

Kako je $\delta = 2$, to je traženi red 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Zadaci. **1.** Izračunaj *a)* a_{10} iz $a_1 = 4$, $a_2 = 9$, *b)* a_{20} iz $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, *c)* a_{12} iz $a_1 = 3$, $a_2 = 4{,}5$.

2. Koliki je zbroj prvih n parnih brojeva?

3. Koliki je zbroj *a)* prirodnih brojeva između 15 i 95 (ovi brojevi uključivo), *b)* parnih brojeva između 11 i 65, *c)* neparnih brojeva između 11 i 65.

4. Koliko se članova aritmetičkog reda mora zbrojiti da se za zbroj dobije 2808, ako je prvi član 2 i diferencija 10?

5. Izračunaj iz

a) a_1 (250), a_n (— 100), d (— 50) n i s_n,

b) a_1 (5), a_n (32), n (10), d i s_n,

c) $a_1 \left(-\frac{7}{2}\right)$, $d\left(\frac{1}{2}\right)$, s_n (— 9) n i a_n,

d) a_1 (— 4), n (9), s_n (144) a_n i d,

e) a_1 (15), a_n (— 27, s_n (— 48) d i n,

f) $d\left(\frac{7}{5}\right)$, n (6), a_n (11), a_1 i s_n,

g) $d\left(-\frac{4}{5}\right)$, n (11), s_n (176), a_1 i a_n,

h) d (— 8), a_n (— 13), s_n (— 4), a_1 i n,

i) n (20), $a_n\left(-61\frac{3}{4}\right)$, s_n (— 576) a_1 i d.

6. Kako glasi 8 član aritmetičkog reda $7a + 3b$, $5a - b$, $3a - 5b \ldots$?

Izračunaj a_1 i d, ako je zadano:

7. *a)* $a_3 + a_7 = 48$, $a_4 \cdot a_5 = 456$; *b)* $a_1^2 + a_{10}^2 = 785$, $a_5^2 + a_6^2 = 425$, *c)* $a_4 + a_7 = 29$, $a_4 \cdot a_7 = 190$.

8. *a)* $a_3 : a_8 = 2 : 5$, $a_1 \cdot a_8 = 100$; *b)* $a_3 + a_9 = 18$, $a_1 \cdot a_4 = 16$.

9. *a)* $a_2^2 = a_7$, $a_{12} = 5a_3$; *b)* $a_2 \cdot a_8 = 115$, $a_3 \cdot a_6 = 136$.

10. *a)* $a_2 : a_5 = 5 : 14$, $a_3 \cdot a_6 = 544$; *b)* $a_1 \cdot a_{14} = 82$, $a_7 \cdot a_8 = 460$. *c)* $a_4 \cdot a_6 = 48$, $a_8 \cdot a_{12} = 80$.

11. Zbroj aritmetičkog reda od 8 članova jest — 4; produkt od zbroja prvih 4 članova i zbroja posljednjih 4 članova jest — 572. Kako glasi red?

12. U aritmetičkom redu od 15 članova srednji je član 26, a produkt od četvrtog i posljednjeg člana 658. Koji je prvi član i diferencija?

13. Zbroj aritmetičkog reda od 5 članova jest 15; pomnoži li se peti član sa zbrojem prethodnih članova, dobije se 44. Koji je prvi član i diferencija?

14. Zbroj od 4 člana aritmetičkog reda jest 2, zbroj recipročnih vrijednosti krajnjih članova jest za $\frac{9}{20}$ veći od zbroja recipročnih vrijednosti srednjih članova. Koji su to brojevi?

15. U aritmetičkom redu 18, 15, 12 . . . neka se odredi član koji je jednak petom dijelu zbroja svih prethodnih članova.

28. Izračunaj s pomoću formula za S_1, S_2, S_3 zbroj od prvih n članova ovih izraza: *a)* $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1) \cdot (n+2)$, *b)* $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + n(n+1)^2$.

29. Interpoliraj između:

a) 12 i 288 aritmetički red od 22 člana, *b)* 50 i — 24 aritmetički red od 36 članova, *c)* $55 \frac{7}{12}$ i $2 \frac{1}{4}$ aritmetički red od 15 članova.

30. U redu 2, 5, 8 . . . treba između prvog i drugog člana interpolirati toliko članova da je zbroj interpoliranih članova samo za 1 manji od zbroja prvih 20 članova zadanog reda. Koliko treba članova interpolirati i koja je diferencija interpoliranih članova?

§ 18. Geometrijski red. Geometrijski je red niz brojeva, gdje je *kvocijent* između svakog člana i člana pred njim stalan. Na pr. 3, 15, 75, 375 . . . Stalni kvocijent između svakog člana i člana pred njim označujemo obično s q. Geometrijski red raste, ako je q veće od 1, pada, ako je q manje od 1. Budući da je prema definiciji geometrijskog reda

$$a_2 = a_1 q, \quad a_3 = a_2 q = a_1 q^2, \quad a_4 = a_3 q = a_1 q^3, \ldots$$

to je općeno
$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Ovo je formula za *opći član* geometrijskog reda.

Primjer. Neka se odredi 7 član u geometrijskom redu 4, 12, 36, . . .

Imamo:
$$a_7 = a_1 q^6 = 4 \cdot 3^6 = 4 \cdot 729 = 2916.$$

Kako je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ i $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, to je

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{i} \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

U geometrijskom je redu dakle svaki član geometrijska sredina između obaju susjednih članova.

Zbroj s_n od n članova geometrijskog reda može se izračunati ovako:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Pomnožimo li ovu jednadžbu s q, imamo

$$qs^n = a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Odbivši prvu jednadžbu od druge izlazi

$$s_n (q - 1) = a_1(q^n - 1)$$

i odatle
$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ovo je formula za zbroj od n članova geometrijskog reda.

16. Neka se odrede stranice pravokutnog trokuta, ako one čine aritmetički red s razlikom 6.

17. Dokaži da članovi reda $f(n+1) - f(n)$, $f(n+2) - f(n+1)$, $f(n+3) - f(n+2), \ldots$, gdje je $f(x) = ax^2 + bx + c$, čine aritmetički red.

18. Ako brojevi a, b, c čine aritmetički red, jednadžba $ax^2 + 2bx + c = 0$ ima korijen -1. Zašto?

19. Ako brojevi a, b, c čine aritmetički red i brojevi $a^2 + b^2 + ab$, $a^2 + c^2 + ac$, $b^2 + c^2 + bc$ čine aritmetički red. Zašto?

20. Pet brojeva čine aritmetički red; njihov je zbroj s (40), njihov produkt p (12320). Koji su to brojevi? Ako je $s > 0$, $p > 0$, koji uvjet mora biti ispunjen da su sva 4 reda koja zadovoljavaju zadatku realna? $(s^5 > 5^5 p)$.

21. Zbroj aritmetičkog reda od 5 članova jest s (45), zbroj njihovih recipročnih vrijednosti r $\left(\frac{137}{180}\right)$. Kako glasi red?

22. Četiri broja čine aritmetički red; zbroj njihov jest a (4), zbroj njihovih kvadrata b (84); koji su to brojevi? Kad su u općenom slučaju oni realni? $(4b > a^2)$.

23. Tri broja čine aritmetički red; njihov je zbroj a (15), zbroj njihovih kvadrata b (93). Koji su to brojevi? Kad su u općenom slučaju oni realni? $\left(b > \frac{a^2}{3}\right)$.

24. Tri broja čine aritmetički red s diferencijom d (1); njihov je zbroj jednak njihovu produktu. Koji su to brojevi?

25. Izračunaj zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva.

(U jednadžbi $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ stavi za n redom $0, 1, 2 \ldots n$ i zbroj sve dobivene jednadžbe. Izlazi $(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + (n+1)$, gdje S_1 znači zbroj prvih n prirodnih brojeva, S_2 zbroj njihovih kvadrata. Odatle se dobiva $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

26. Izračunaj zbroj kuba prvih n prirodnih brojeva.

(U jednadžbi $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ stavimo za n redom $0, 1, 2 \ldots n$ i zbrojimo sve dobivene jednadžbe. Izlazi $(n+1)^4 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + (n+1)$. Odatle se dobiva

$$S_3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 = (S_1)^2. \;)$$

27. Izračunaj s pomoću formula za S_1 i S_2 zbroj prvih n članova ovih izraza *a)* $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$, *b)* $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+2)$.

Kako je $a_n = a_1 q^{n-1}$, to je $a_n q = a_1 q^n$; zato je također

$$s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}.$$

Primjer. Zbroj 7 članova geometrijskog reda 4, 12, 36 ... biće

$$s_7 = 4 \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 2 \cdot 2186 = 4372.$$

U jednadžbama za a_n i s_n dolazi 5 veličina a_1, a_n, n, d i s_n. Ako su 3 zadane, mogu se ostale dvije izračunati. Između 10 mogućih zadataka dolazi se u 3 slučaja na linearne jednadžbe, u jednom na binomnu jednadžbu, u dva (kad je zadano a_1, n, s_n ili n, a_n, s_n) na jednadžbe više štepena. Kod ostalih zadataka treba riješiti eksponencijalnu jednadžbu.

§. 19. Interpolacija. Između dva zadana broja a i b interpolirati geometrijski red od r članova znači odrediti r brojeva koji zajedno s a i b čine geometrijski red kome je a prvi član, a b posljednji član.

Označi li se kvocijent traženog geometrijskog reda s q', to je, budući da je sad zajedno s a i b ukupni broj članova $r + 2$,

$$b = aq'^{\,r+2-1} = aq'^{\,r+1}$$

$$\text{i odatle } q' = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}.$$

Ako su a i b članovi geometrijskog reda s kvocijentom q, to je također

$$q' = \sqrt[r+1]{q}.$$

Primjer. Između 6 i 24576 treba interpolirati geometrijski red od 5 članova. Izlazi

$$q' = \sqrt[6]{\frac{24576}{6}} = \sqrt[6]{4096} = \sqrt[6]{2^{12}} = 4.$$

§ 20. Beskonačni geometrijski redovi. Neki je red *konvergentan*, ako se zbroj s_n od n članova toga reda, kad broj n beskonačno raste, približava određenoj graničnoj vrijednosti; postaje li pak zbroj s_n, kad broj n beskonačno raste, po apsolutnoj vrijednosti veći od kako mu drago velikog broja A, kažemo da je red *divergentan*.

Geometrijski je red konvergentan, ako je $|q| < 1$ t. j. *ako je apsolutna vrijednost kvocijenta manja od 1; inače je divergentan.*

Da to dokažemo, treba da prije dokažemo ova dva poučka:

1. *Potencije broja većeg od 1 koje slijede jedna za drugom, rastu beskonačno, kad njihovi eksponenti beskonačno rastu.*

Neka je q broj veći od 1; onda se q može napisati u obliku $q = 1 + \alpha$, gdje je α pozitivni broj. Iz $q > 1$ izlazi, ako obje strane te jednadžbe pomnožimo s q^{n-1}, $q^n > q^{n-1}$. Dakle je bilo koja potencija od q veća od prethodne potencije; potencije dakle rastu.

Potencije od q mogu postati veće od bilo kojeg pozitivnog broja A. Iz $q - 1 = \alpha$ izlazi, ako tu jednadžbu postepeno množimo s q, q^2, $q^3 \ldots q^{n-1}$, koji su brojevi svi veći od 1, $q^2 - q > \alpha$, $q^3 - q^2 > \alpha, \ldots$ $q^n - q^{n-1} > \alpha$.

Zbrojimo li jednadžbu $q - 1 = \alpha$ i sve te nejednadžbe, izlazi $q^n - 1 > n\alpha$ i $q^n > 1 + n\alpha$. Da q^n bude veće od bilo kojeg pozitivnog broja A, dovoljno je uzeti $1 + n\alpha > A$, odakle izlazi $n > \dfrac{A-1}{\alpha}$.

Dakle je q^n veće od A, ako je eksponent n veći od $\dfrac{A-1}{\alpha}$; q^n može dakle kad n raste i q je > 1 postati veće od kako mu drago velikog pozitivnog broja.

$$\text{T. j. } \lim_{n=\infty} q^n = \infty,$$

Primjer. Da se odredi cio broj n, za koji je $(1{,}000\,001)^n > 1\,000\,000$, treba uzeti $n > \dfrac{1\,000\,000 - 1}{0{,}000\,001}$ ili $n > \dfrac{1\,000\,000}{0{,}000\,001} = 1\,000\,000\,000\,000$.

2. *Potencije broja manjeg od 1 koje slijede jedna za drugom, umanjuju se kad n raste, te se približavaju nuli kao granici, kad njihovi eksponenti beskonačno rastu.*

Neka je q' broj manji od 1; q' možemo pisati u obliku

$$q' = \frac{1}{q}, \text{ gdje je } q > 1.$$

Imamo zato:

$$q'^n = \frac{1}{q^n}.$$

Iz te jednadžbe izlazi:

Kad n raste, q'^n se umanjuje, jer q^n raste, te se q'^n približava nuli kao granici, kad n beskonačno raste.

Ako je q negativno, oba poučka vrijede za apsolutne vrijednosti od q.

Sad nam ne će biti teško dokazati da je geometrijski red konvergentan, kad je $|q| < 1$. Zbroj s_n od n članova geometrijskog reda može se pisati i ovako:

$$s = a_1 \frac{1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}.$$

Prvi dio izraza za s_n jest nezavisan o n t. j. stalan, drugi je dio zbog izraza q^n promjenljiv. Ako je $|q| > 1$, vrijednost q^n raste, kad n raste, te će prijeći, ako je n dosta veliko, kako mu drago veliki broj A. Zato je

$$\lim_{n=\infty} s_n = \infty.$$

Ako je $q = 1$, to je $s_n = n \cdot a_n$, pa je također $\lim s_n = \infty$, za $\lim n = \infty$.

Ako je pak $|q| < 1$, q^n teži prema nuli, kad n beskonačno raste, a s_n se približava graničnoj vrijednosti $\frac{a_1}{1-q}$. Ta je granična vrijednost zbroj beskonačnog geometrijskog reda. Dakle je

$$\lim_{n=\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Primjer. Neka se odredi zbroj beskonačnog geometrijskog reda $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$ Kako je $q = \frac{1}{3}$, to je

$$\lim_{n=\infty} s_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}.$$

Što se zbiva sa zbrojem beskonačnog geom. reda, ako je $q = -1$?

Svaki se *periodski decimalni razlomak* može smatrati za beskonačni geometrijski red pa se po formuli za zbroj beskonačnog geometrijskog reda može pretvoriti u obični razlomak.

Primjeri. 1. $0{,}\dot{5}\dot{6} = \frac{56}{10^2} + \frac{56}{10^4} + \ldots = \frac{56}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} =$

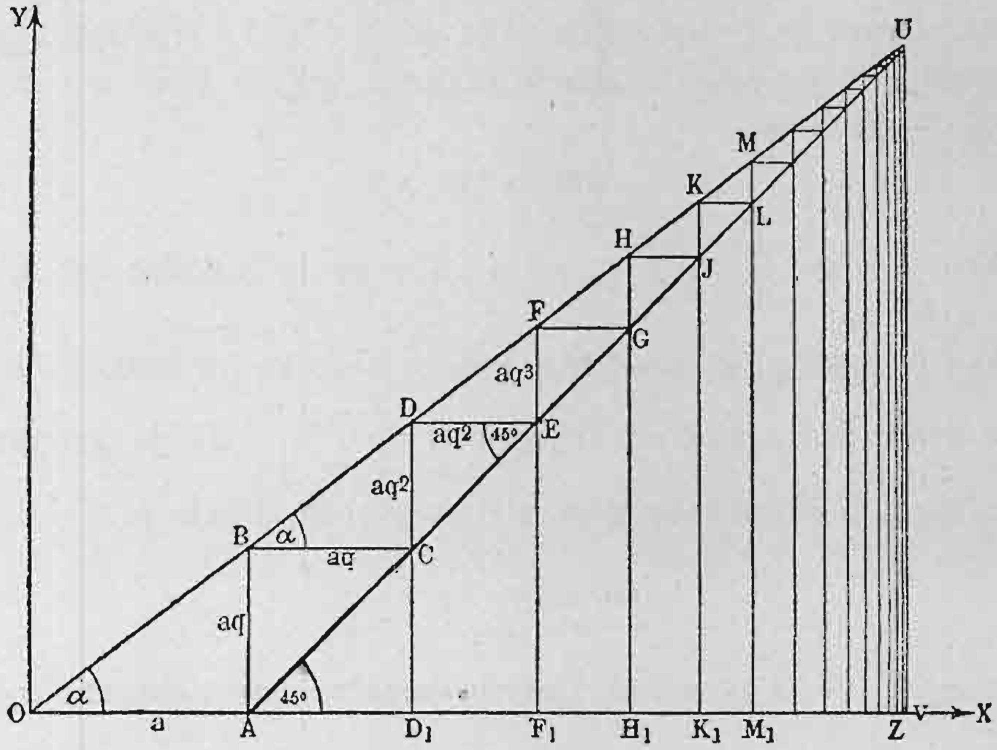
$$= \frac{56}{10^2 - 1} = \frac{56}{99}.$$

2. $0{,}2\dot{3}\dot{5} = \frac{2}{10} + \frac{35}{10^3} + \frac{35}{10^5} + \ldots = \frac{2}{10} + \frac{35}{10^3} \frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} =$

$$= \frac{2}{10} + \frac{35}{10(10^2-1)} = \frac{2 \cdot 10^2 - 2 + 35}{10\,(10^2-1)} = \frac{235-2}{990} = \frac{233}{990}.$$

Općeno vrijedi za čisto periodske decimalne razlomke:

$$\frac{Q_t}{10^t} + \frac{Q_t}{10^{2t}} + \frac{Q_t}{10^{3t}} + \ldots = \frac{Q_t}{10^t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^t}} = \frac{Q_t}{10^t - 1};$$



Slika 6.

a za mješovito periodske decimalne razlomke:

$$\frac{Q_s}{10^s} + \frac{Q_t}{10^{s+t}} + \frac{Q_t}{10^{s+2t}} + \ldots = \frac{Q_s}{10^s} + \frac{Q_t}{10^{s+t}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^t}} =$$

$$= \frac{Q_s}{10^s} + \frac{Q_t}{10^s\,(10^t - 1)} = \frac{Q_s\,10^t + Q_t - Q_s}{10^s\,(10^t - 1)}.$$

U tim jednadžbama znači Q_t t-znamenkasti period napisan kao dekadski broj, a Q_s s-znamenkasti pretperiod napisan kao dekadski broj. Izrazi te jednadžbe riječima!

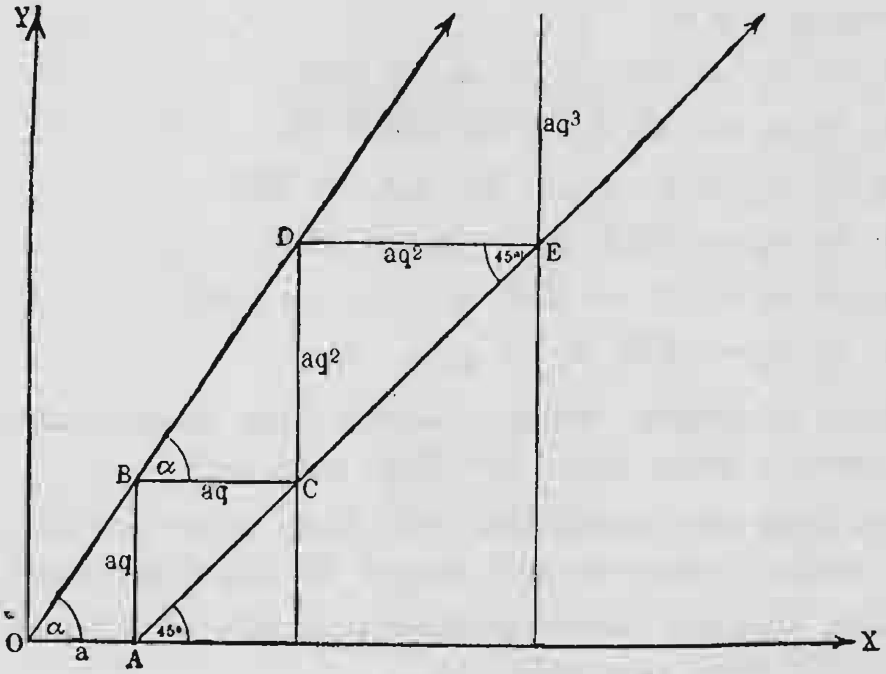
§ 42. Grafičko predočivanje zbroja geometrijskog reda. Zbroj konvergentnog geometrijskog reda može se grafički predočiti ovako: na os apscisa počevši od ishodišta nanesimo dužinu $OA = a$; ishodištem povucimo pravac pod kutom α tako da je $tg\alpha = q$ ($q < 1$), a tačkom A drugi pravac pod kutom 45^0. Sjecište obaju pravaca neka je U (sl. 6.). Iz U spustimo okomicu UV na os x. Tad je OV jednak zbroju konvergentnog geometrijskog reda s kvocijentom q. Iz slike izlazi naime:

$$AB = a \cdot tg\alpha = aq = BC = AD_1;\ CD = aq \cdot q = aq^2 = DE = D_1F_1;$$

$$EF = FG = F_1H_1 = aq^3 \text{ itd. Zato je}$$

$$OV = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$$

t. j. OV jest jednako zbroju konvergentnog geometrijskog reda.



Slika 7.

Ako je $q > 1$, tad je $\alpha > 45^0$, pravci OB i AC (sl. 7.) se ne sijeku, geometrijski je red divergentan.

Zadaci. 1. Načini geometrijski red iz:

$a)$ $a_1 = 3$, $q = 4$; $b)$ $a_1 = \frac{4}{5}$, $q = \frac{3}{4}$; $c)$ $a_1 = 81$, $q = -\frac{5}{3}$;

$d)$ $a_1 = m^2$, $q = \frac{n}{m}$.

2. Napiši šesti, osmi i deseti član geometrijskog reda kome su prva dva člana $a)$ 5, 15, $b)$ 10, — 2, $c)$ — 0,8, — 0,16, $d)$ $\frac{a^3}{b^2}$, $\frac{a}{b}$.

Odredi zbroj od $a)$ 4, $b)$ 6, $c)$ 8 članova tih redova.

3. Izračunaj iz:

$a)$ $a_n \left(\frac{4}{27}\right)$, n (5), $q \left(-\frac{2}{3}\right)$ a_1 i s_n.

$b)$ $a_1 \left(\frac{4}{5}\right)$, $a_n \left(\frac{324}{5}\right)$, q (3) n i s_n.

$c)$ a_1 (— 3), a_n (384), s_n (255) n i q.

$d)$ a_1 (— 5), q (— 3), s_n (910) n i a_n.

e) $a_1 \left(\frac{3}{4}\right)$, a_n (48), n (7) q i s_n.

f) a_n (864), q (— 6), s_n (740) a_1 i n.

g) n (6), q (— 3), s_n (728) a_1 i a_n.

Izračunaj a_1 i q iz:

4. $a_4 - a_6 = 756$, $a_4 - a_5 = 432$.

5. $a_1 + a_4 = 52$, $a_2 + a_3 = -12$.

6. $a_1 + a_2 + a_3 = -35$, $a_1 a_3 = 225$.

7. $a_7 - a_4 = 1404$, $a_7 - a_5 = 1296$.

8. $a_1 + a_2 + a_3 = 248$, $a_3 - a_1 = 192$.

9. $a_1 + a_6 = 244$, $a_3 + a_4 = 36$.

10. Zbroj od drugog, trećeg i četvrtog člana geometrijskog reda jest 18, razlika šestog i trećeg člana 108. Kako glasi red?

11. Tri broja čine geometrijski red. Zbroj njihov jest 21, a produkt geometrijske sredine i zbroja krajnjih članova 90. Koji je prvi član i kvocijent?

12. Zbroj neparnih članova geometrijskog reda od 5 članova jest 455, zbroj parnih 150. Kako glasi red?

13. Aritmetički i geometrijski red podudaraju se u trećem članu koji je jednak 24; produkt prvih članova jest 18, drugih 108. Kako glase ti redovi?

14. Zbroj triju brojeva koji čine geometrijski red, jest 39. Oduzme li se od trećeg člana 9, red prelazi u aritmetički; koji su to brojevi?

15. U geometrijskom redu od $2n - 1$(5) članova poznat je zbroj S_1 (336) prvih n članova i zbroj S_2 (21) posljednjih n članova. Koliki je prvi član i kvocijent toga reda?

16. Zbroj 3 brojeva koji čine geometrijski red jest 26, zbroj njihovih recipročnih vrijednosti $\frac{13}{18}$. Koji su to brojevi?

17. Tri broja čine geometrijski red; njihov je zbroj a (19), a zbroj njihov kvadrata b (133) . Koji su to brojevi?

18. U nekoj bačvi imade 100 l vina Izvadimo 2 l i dodajmo 2 l vode; izvadimo ponovno 2 l smjese i dodajmo 2 l vode itd. Koliko se puta mora taj postupak ponoviti da napokon bude u bačvi samo 80 l vina?

19. Dokaži ovaj poučak: ako brojevi a, b, c čine geometrijski red, postoji relacija:

$$a^2\, b^2\, c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3.$$

20. Dokaži da jednadžba $ax^2 + 2bx + c = 0$ ima dvostruki korijen ako a, b, c čine geometrijski red.

21. Dokaži, ako tri broja čine u isti čas i geometrijski i aritmetički red da su oni jednaki.

22. Odaberi x tako da brojevi $a + x$, $b + x$, $c + x$, čine geometrijski red.

23. Interpoliraj *a)* između 5 i 160 geom. red od 4 člana, *b)* 4 i 324 geom. red od 3 člana.

24. Između 1 i 10 interpoliraj geometrijski red od 19 članova i odredi zbroj toga reda.

25. Između svaka 2 člana geometrijskog reda $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \frac{1}{512}$ interpoliraj 2 nova člana i odredi zbroj svih članova novoga reda.

26. Izračunaj ove zbrojeve:

$a)\ 16 + 12 + 9 + \frac{27}{4} + \ldots$ $b)\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 - \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \ldots$

$c)\ 15 - 15 \cdot (0{,}8) + 15 \cdot (0{,}8)^2 - 15 \cdot (0{,}8)^3 + \ldots$

$d)\ 4 + 4 \cdot \left(\frac{5}{11}\right) + 4 \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^3 + \ldots$

$e)\ 3 + 5 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots$

$f)\ 4 + 5 + 6 + 4 \cdot \frac{3}{7} + 5 \cdot \frac{5}{8} + 6 \cdot \frac{7}{9} + 4\left(\frac{3}{7}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{8}\right)^2 + {}$
$+ 6\left(\frac{7}{9}\right)^2 + \ldots$

$g)\ \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \ldots$

27. Pretvori u obične razlomke: *a)* $0{,}\dot{4}\dot{8}$, *b)* $0{,}\dot{4}0\dot{5}$, *c)* $0{,}22\dot{7}$ *d)* $0{,}\dot{2}\dot{7}$, *e)* $0{,}41\dot{6}$, *f)* $0{,}15\dot{9}\dot{0}$, *g)* $0{,}15\dot{7}4\dot{0}$, *h)* $0{,}6\dot{4}2857\dot{1}$ *i)* $0{,}2\dot{9}$.

28. Zbroj:

a) $1 - \cos\alpha + \cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \ldots$

b) $1 + \sin\alpha + \sin^2\alpha + \sin^3\alpha + \ldots$

Specijalni slučajevi: $\alpha = 30^0$, $\alpha = 45^0$, $\alpha = 60^0$.

29. *a)* $1 + tg\,\alpha + tg^2\alpha + \ldots$, *b)* $1 - tg\,\alpha + tg^2\alpha - tg^3\alpha + \ldots$ $(\alpha < 45^0)$.

30. Zbroj ove razlomke:

$a)\ \frac{a^2}{b^2} - \frac{x}{b^4} + \frac{x^2}{a^2b^6} - + \ldots\ (x < a^2b^2)$,

$b)\ 1 + \frac{a - b}{a + b} + \left(\frac{a - b}{a + b}\right)^2 + \ldots\ (a > 0,\ b > 0)$.

31. Zbroj beskonačnog geometrijskog reda jest 18, prvi je član 12. Kako glasi treći član?

32. Zadan je istostraničan trokut stranice a. Spojimo raspolovišta stranica tog istostranog trokuta i u dobivenom trokutu spojimo opet raspolovišta stranica itd. Neka se odredi: *a)* zbroj opsega i površina svih istostranih trokuta, *b)* zbroj opsega i površina krugova upisanih u te trokute.

33. U istostranični trokut stranice a upisan je krug, u krug opet istostraničan trokut, u trokut opet krug itd. Neka se odredi *a)* zbroj opsega i površina svih trokuta, *b)* zbroj opsega i površina svih krugova, *c)* zbroj oplošja i obujma tjelesa koja nastaju vrtnjom trokuta oko jedne njegove visine.

34. U zadani kvadrat stranice a upisan je drugi kvadrat koga stranice raspolavljaju stranice prvoga kvadrata, u tai je opet upisan treći koga stranice raspolavljaju stranice drugog kvadrata itd. Koliki je zbroj opsega i površina svih kvadrata?

35. U krug polumjera R upisan je kvadrat, u kvadrat opet krug, u krug opet kvadrat itd. Koliki je *a)* zbroj opsega i površina svih kvadrata, *b)* zbroj opsega i površina svih krugova?

36. Vrh većeg šiljastog kuta α u pravokutnom trokutu neka je A. Nacrtajmo u A okomicu na hipotenuzu c i produžimo je do sjecišta s produženjem katete a. Na tu okomicu nacrtajmo u tom sjecištu opet okomicu i produžimo je produženja katete b itd. Kolik je zbroj svih tih okomica?

37. U kocku brida a upisana je kugla, u kuglu kocka, u kocku opet kugla itd. Koliki je zbroj oplošja i obujmova *a)* svih kocaka, *b)* svih kugala?

38. U uspravni stožac kuta na vrhu 2α upisana je kugla, u prostoru prema vrhu upisana je druga kugla koja dira prvu kuglu i plašt stošca itd. Koliki je zbroj oplošja i obujmova svih kugala, ako je polumjer prve kugle r.

39. U kutu $2\alpha < 90^0$ upisan je čitav niz kvadrata kojima jedna dijagonala leži u simetrali kuta 2α, vrhovi na simetrali se podudaraju, dok ostala dva vrha leže u krakovima kuta 2α. Koliki je zbroj opsega i površina svih tih kvadrata, ako je stranica prvog kvadrata s?

40. Kugli polumjer R upiše se tetraedar, u tetraedar opet kugla, u kuglu opet tetraedar itd. Koliki je zbroj obujmova *a)* svih tetraedara, *b)* svih kugala?

IV Poglavlje

Kamatno-kamatni račun, račun amortizacije i renta.

§ 21. Objašnjenja. Ukamaćivanje neke glavnice jest *jednostavno*, ako uložena glavnica ostaje uvijek jednaka t. j. kad kamate što ih ona donosi, ne služe povećanju glavnice. Na taj se način ukamaćuju na pr. državni zajmovi: svake pô godine dižu se kamate iskupljivanjem kupona.

Ako se pak kamate, što ih donosi neka glavnica u određenom razmaku vremena (na pr. 1 god., $\frac{1}{2}$ god., $\frac{1}{4}$ god.), priklapaju glavnici tako da i kamate nose kamate kažemo da je glavnica uložena na *kamate od kamata* ili na *složene kamate.*

Primjer. Glavnica od 2000 *d* nosi za godinu dana uz 5% 100 *d* kamata. Priklopi li se tih 100 *d* glavnici 2000 *d* izlazi vrijednost glavnice za godinu dana 2100 *d*; 2100 *d* daje opet za godinu dana 105 *d* kamata. Zato je vrijednost glavnice iza 2 godine 2205 *d* itd.

Ako se ukamaćivanje zbiva na koncu svakog razmaka vremena, kako je to u tom primjeru, ukamaćivanje jest *dekurzivno.*

Računa li pak vjerovnik dužniku kamate *unaprijed* t. j. na početku svakog roka ukamaćivanja, ukamaćivanje glavnice jest *anticipativno.* Ovdje ćemo se baviti samo dekurzivnim ukamaćivanjem.

§ 22. Konačna vrijednost glavnice uz dekurzivno ukamaćivanje. Glavnica g naraste uz p% za godinu dana na $g_1 = g + \frac{gp}{100} = g\left(1 + \frac{p}{100}\right)$; $1 + \frac{p}{100}$ zovemo *kamatni faktor* i označujemo ga kraće s q. Zato je

$$g_1 = gq.$$

Na koncu druge godine biće vrijednost glavnice

$$g_2 = g_1 + \frac{g_1 p}{100} = g_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = g_2 q = gq^2.$$

Na koncu treće godine biće vrijednost glavnice

$$g_3 = g_2 + \frac{g_2 p}{100} = g_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = g_2 q = gq^3.$$

Na koncu n-te godine vrijednost je glavnice:

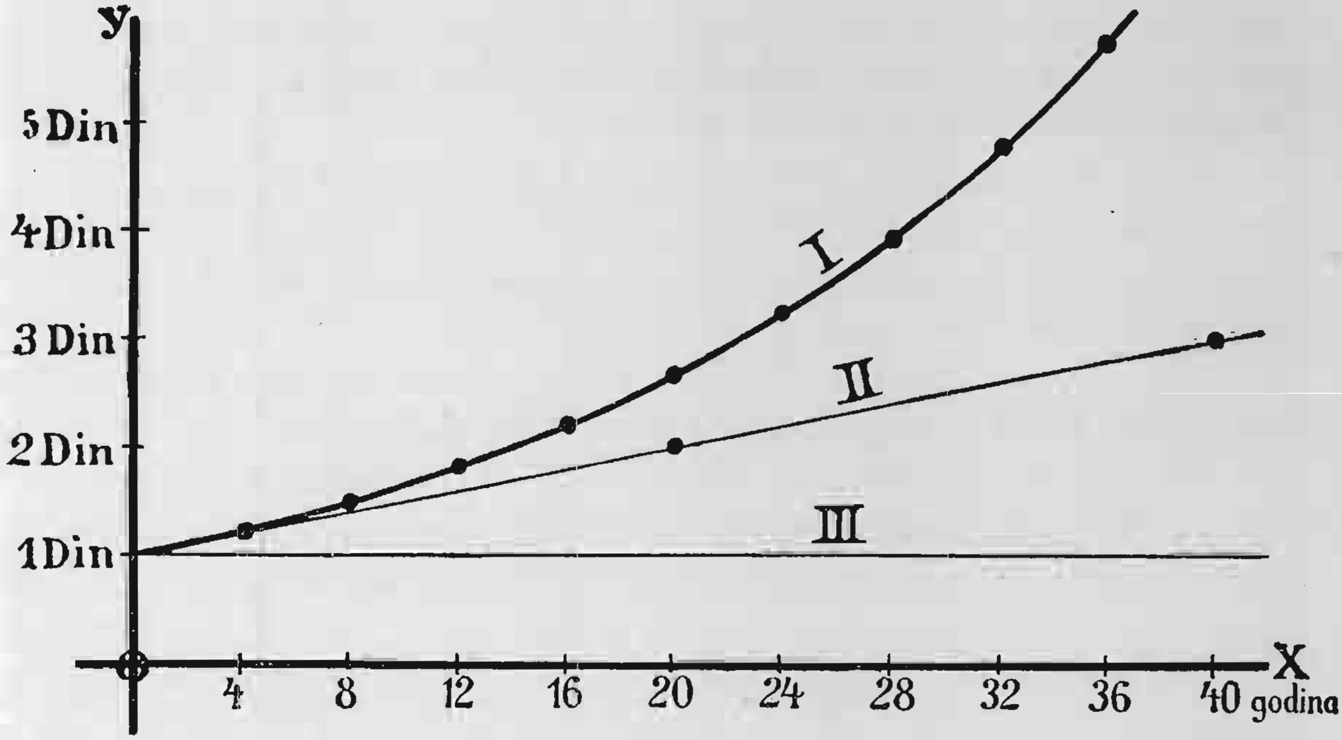
$$g_n = g_{n-1} + \frac{g_{n-1}\,p}{100} = g_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = gq^{n-1} \cdot q = gq^n.$$

Ova formula daje konačnu vrijednost glavnice nakon n godina, ako se kamate priklapaju glavnici na koncu svake godine. Iz te formule izlazi za *sadašnju vrijednost* glavnice

$$g = \frac{g_n}{q^n};\ \text{zatim}\ q^n = \frac{g_n}{g}\ \text{i}\ q = \sqrt[n]{\frac{g_n}{g}}.$$

$$\text{nadalje}\ n\ log\ q = log\ g_n + kolog\ g,\ n = \frac{log\ g_n + kolog\ g}{log\ q}.$$

Tako se može izračunati svaka od četiriju veličina g_n, g, q i n, ako su ostale tri zadane.



Sl. 8

Krivulja I (sl. 8.) prikazuje nam grafički, kako raste 1 *d* uložen na dekurzivne složene kamate uz 5%, pravac II, kako raste 1 *d* uložen na jednostavne kamate uz 5%, dok pravac III grafički predočuje da glavnica 1 *d* ne nosi nikakovih kamata.

Primjeri 1. Na koju vrijednost naraste glavnica od 2000 *d* uložena na složene kamate uz 6% i godišnje ukamaćivanje za 15 godina.

Izlazi $g_{15} = 2000 \cdot 1{,}05^{15}$. Logaritmiramo li ovu jednadžbu, dobivamo $log\ g_{15} = log\ 2000 + 15 \cdot log\ 1{,}05 = 3{,}30103 + 0{,}02119 \cdot 15 = 3{,}30103 + 0{,}31785 = 3{,}61888$. Zato je $g_{15} = 4158\ d$.

2. Za koje vrijeme naraste glavnica od 50000 *d* uložena na složene kamate od $7\frac{1}{2}\%$ i godišnje ukamaćivanje na 119095 *d*?

Iz $119095 = 50000 \cdot 1{,}075^n$ izlazi

$$1{,}075^n = \frac{119095}{50000},\ n \cdot log\ 1{,}075 = log\ 119095 + kolog\ 50000,$$

$$n = \frac{log\ 119095 + kolog\ 50000}{log\ 1{,}075} = \frac{5{,}07589 + 0{,}30103 - 5}{0{,}03141} = \frac{0{,}37692}{0{,}03141} =$$

$= 12$ godina.

Ako se kamate priklapaju glavnici svake pô godine, vrijednost je glavnice iza pô godine

$$g'_1 = g\left(1 + \frac{p}{200}\right) \text{ i za godinu dana } g'_2 = g'_1\left(1 + \frac{p}{200}\right) =$$

$$g = \left(1 + \frac{p}{200}\right)^2; \text{ a vrijednost je glavnice iza } n \text{ godina}$$

$$g'_{2n} = g\left(1 + \frac{p}{200}\right)^{2n}.$$

Dakle se mjesto kamatnog faktora $1 + \frac{p}{100}$ mora uzeti kamatni faktor $1 + \frac{p}{200}$, a mjesto broja godina n broj rokova ukamaćivanja $2n$.

Kod banaka jest najobičnije polugodišnje ukamaćivanje.

Priklapaju li se kamate glavnici svakog m-tog dijela godine, konačna je vrijednost glavnice g iza n godina

$$g'_{mn} = g\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}.$$

Primjer. Na koju vrijednost naraste svota od 750 *d* uložena uz 4% nakon 12 godina, ako se kamate svake četvrtine godine priklapaju glavnici?

Budući da su kamate za četvrtinu godine 1%, to je kamatni faktor $q = 1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$. Zato je konačna vrijednost glavnice iza 12 godina

$$g'_{48} = 750 \cdot 1{,}01^{48} = 12090\ d.$$

Da se postignu točniji rezultati, treba upotrebljavati logaritme na više od 5 decimala.

Bilješka. Imade li kamatnjak ostati nepromijenjen t. j. imade li glavnica za godinu dana narasti na istu vrijednost, kad se kamate priklapaju glavnici na koncu svakog m-tog dijela godine na koju bi narasla, kad se kamate priklapaju glavnici na koncu godine, tad vrijednost kamatnog faktora za m-ti dio godine $q_1 = 1 + \frac{p}{m \cdot 100}$ nije ispravna. U tom slučaju kamatni faktor treba biti tolik da 100 d za godinu dana naraste na $(100 + p)\, d$. Označi li se taj kamatni faktor s q'_1, mora postojati jednadžba

$$100\, q'^m_1 = 100 + p,$$

$$\text{odakle izlazi } q'_1 = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[m]{q}.$$

q'_1 zove se *konformni kamatni faktor.*

Ako je n mješoviti broj t. j. $n = \nu + \nu'$, gdje je ν cio broj godina, a ν' pravi razlomak, a kamate se priklapaju glavnici na koncu godine, onda se u praksi računa obično ovako:

$$g_\nu = g\left(1 + \frac{p}{100}\right)^\nu.$$

Glavnica g^ν donosi za ν' godina (po jednostavnom kamatnom računu) $\frac{g^\nu \cdot \nu' \cdot p}{100}$ dinara kamata. Zato je

$$g_n = g_\nu + \frac{g_\nu\, \nu' p}{100} = g_\nu\left(1 + \frac{\nu' p}{100}\right) = g\left(1 + \frac{p}{100}\right)^\nu \left(1 + \frac{\nu' p}{100}\right) =$$

$$= g q^\nu \left(1 + \frac{\nu' p}{100}\right).$$

Kad bi se služili formulom $g_n = gq^n$ t. j. kad bismo upotrijebili konformni kamatnjak, došli bismo do rezultata koji se od prvog razlikuje razmjerno vrlo malo.

Primjer. Na koji iznos naraste glavnica od 25000 d uz $3\frac{1}{2}\%$ za 10 godina i 3 mjeseca?

Računamo li po formuli $g_n = gq^\nu\left(1 + \frac{\nu' p}{100}\right)$, izlazi

$$g_n = 25000 \cdot 1035^{10}\left(1 + \frac{3{,}5}{400}\right) = 25000 \cdot 1{,}035^{10} \cdot 1{,}00875 = 35573\ d.$$

Računamo li prema konformom kamatnjaku, imamo

$$g_n = 25000 \cdot 1{,}035^{10\frac{1}{4}} = 35570\ d.$$

§ 24. Neprekidno ukamaćivanje. Jakov Bernuji (Bernoulli) je istraživao na koju vrijednost naraste glavnica, ako se kamate priklapaju glavnici svaki momenat. Priklapaju li se kamate glavnici svakog m-tog dijela godine, vrijednost je glavnice iza n godina $g'_{mn} = g\left(1 + \frac{p}{100\, m}\right)^{mn}$. Stavi li se $\frac{100\, m}{p} = x$ ili $m = \frac{px}{100}$, imamo $g'_{mn} = g\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{npx}{100}}$.

Kad m sve jače raste t. j. kad se kamate priklapaju glavnici u sve manjim razmacima vremena, raste sve jače i x, a izraz $g\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{npx}{100}} =$

$g\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{np}{100}}$ približava se, budući da se $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ približava vrijednosti $e = 2{,}7182818284\ldots$, vrijednosti

$$G_n = ge^{\frac{np}{100}}.$$

Po toj formuli treba računati, kad se radi o rastu organskih bića u prirodi na pr. o rastu drveća, bilja itd.

Zadaci. **1.** Na koju vrijednost naraste *a)* 5000 *d* uz 8% za 20 godina, *b)* 12548 *d* uz 7% za 24 godine, *c)* 70060 *d* uz $5\frac{1}{2}$% za 18 godina? Na koju bi vrijednost te svote narasle uz jednostavno ukamaćivanje?

2. Na koju vrijednost naraste glavnica od *a)* 2000 *d* za 10 godina uz 8%, ako se kamate priklapaju glavnici *b)* polugodišnje, *c)* četvrtgodišnje?

3. Na koju bi vrijednost narastao 1 *d*, kad bio uložen uz složene kamate od *a)* 5%, *b)* 8%, *c)* 10% 100 godina, a na koliku, kad bi bio uložen 1000 godina?

4. Glavnica od 40000 *d* bila je uložena 5 godina uz 6%, 4 godine uz 9% i 3 godine uz 8%, Na koju je vrijednost narasla ta glavnica? Na koju bi vrijednost narasla ona za 12 godina, kad bi bila uložena kroz to vrijeme uz srednji kamatnjak od $\frac{1}{12}(5 \cdot 6 + 5 \cdot 9 + 3 \cdot 8)$%?

5. Banka primi 100000 *d* uz 8%, a posudi uz 12%. Koliki je njezin dobitak za 12 godina?

6. Koja glavnica naraste za 10 godina uz 8% na 120000 *d*?

7. Koju svotu mora netko uložiti da iza 20 godina uzmogne podići svotu od 250000 *d* ($p = 6$%).

8. Koja je sadašnja vrijednost glavnice koja se ima isplatiti *a)* za 5 godina uz 5% u iznosu od 50000 *d*, *b)* za 4 godine uz 8% u iznosu od 75000 *d*, *c)* za 6 godina uz 10% u iznosu od 100000 *d*.

9. Vrijednost neke glavnice za 10 godina uz 10% biće 20000 *d*. Kolika je bila njezina vrijednost prije 5 godina?

10. Koja glavnica naraste za 30 godina uz 8% i polugodišnje ukamaćivanje na istu vrijednost kao za 10000 *d* veća glavnica uz 6% i godišnje ukamaćivanje?

11. Kolika je bila glavnica koja je za 24 godine narasla na 60000 *d*, ako se prvih 8 godina ukamaćivala sa 4,5%, slijedećih 8 godina uz 6%, a dalnjih 8 godina uz 8%?

12. Koja glavnica naraste uz 4% za 8 godina na istu vrijednost kao 20000 *d* uz 8% i za 4 godine?

13. Glavnica od 500000 d uložena je 10 godina uz 6%. Za koliko je konačna vrijednost te glavnice veća, ako se kamate priklapaju glavnici mjesto svake godine svake pô godine? Za kamatni faktor za pô godine uzmi

$$a)\ q_1 = 1 + \frac{p}{200},\quad b)\ q'_1 = \sqrt{1 + \frac{p}{100}}.$$

14. U šumi ima 60000 m^3 drva. Godišnji prirast iznosi 2%. Koliko će drva biti u toj šumi iza 12 godina? Računaj prema neprekidnom ukamaćivanju.

15. Koja je sadašnja vrijednost glavnice koja uz 6% za 20 godina naraste na 200000 d?

16. Netko je uložio prije 20 godina 18000 d uz 4%, prije 12 godina 20000 d uz $4{,}5\%$ i prije 8 godina 30000 d uz 5%. Kolika je njegova imovina?

17. Za koliko godina naraste glavnica od 50000 d uz 10% na istu vrijednost kao 80000 d uz 8% na 15 godina?

18. Netko ima da plati 16000 d iza 8 godina, 8000 d iza 12 godina. Kad može mjesto toga najednom da plati svotu od $8000 + 16000 = 24000$ d, ako se računa 8%?

19. Za koliko se godina potrostruči glavnica uz *a)* 4%, *b)* 6%, *c)* 8%, *d)* 10%?

20. Za koliko se godina podvostruči glavnica uz 6%, (8%, 10%, 12%) i *a)* godišnje, *b)* polugodišnje, *c)* četvrtgodišnje, *d)* mjesečno ukamaćivanje?

21. Kako dugo mora biti uložena glavnica od 24000 d uz 7% da naraste na istu vrijednost kao 20000 d uz 8% za 20 godina?

22. A uloži 25000 d uz $3{,}5\%$, B uloži 8 godina kasnije 30000 d uz 4%. Iza koliko će godina biti obje glavnice jednake i koliko su one onda?

23. Uz koliko postotaka mora biti uložena glavnica od *a)* 12000 d da iza 10 godina naraste na 25000 d, *b)* 30000 d da iza 8 godina naraste na 45000 d?

24. Uz koliko se postotaka *a)* podvostruči glavnica za 8 (10, 12, 15, 20) godina, *b)* potrostruči glavnica za 12 (15, 18, 25) godina?

25. Netko uzajmi 1728 d uz uvjet da iza 12 godina plati 2687,94 d. Koliko je postotaka računato?

26. Uz koliko postotaka mora biti uložena glavnica da iza 30 godina i četvrtgodišnje ukamaćivanje naraste na peterostruku vrijednost?

27. Uz koje postotke mora otac uložiti na dan rođenja svog sina svotu od 21800 d da ta svota uz polugodišnje ukamaćivanje iza 23 godine naraste na 48093 d?

§ 25. Konačna i sadašnja vrijednost periodskih uplata. Ako netko ulaže svotu r kroz n godina početkom svake godine na složene kamate uz $p^0/_0$, prva svota leži do početka n-te godine uložena $(n - 1)$ godinu i naraste na vrijednost rq^{n-1}; druga svota leži uložena $(n - 2)$ godine i naraste na vrijednost rq^{n-2} itd. Konačna vrijednost svih tih uplata na početku n-te godine biće zato

$$S_n = rq^{n-1} + rq^{n-2} + \ldots + r.$$

To je geometrijski red, gdje je prvi član r, kvocijent q (članovi su napisani obrnutim redom). Zato je

$$S_n = r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Budući da te uplate narastu na vrijednost S_n iza $(n - 1)$ godina, to je *sadašnja vrijednost* tih uplata

$$S = \frac{S_n}{q^{n-1}}.$$

Vrijednost svih uplata na koncu n-te godine biće

$$S'_n = rq\,\frac{q_n - 1}{q - 1}.$$

§ 26. Povećanje glavnice periodskim ulaganjem. Ako se glavnica g uložena na složene kamate od $p^0/_0$ i godišnje kapitaliziranje kroz n godina na koncu svake godine uvećava za svotu r, biće vrijednost glavnice g i svih uplata na koncu n-te godine

$$S_n = gq^n + r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ako se oduzimlje glavnici g kroz n godina na koncu svake godine svota r, vrijednost je glavnice iza n godina

$$S_n = gq^n - r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Uvećava li se odnosno umanjuje li se glavnica g svotom r kroz n godina na početku svake godine, biće onda njezina vrijednost na koncu n-te godine

$$S'_n = gq^n \pm rq\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Primjer. Na koju vrijednost naraste svota od 25000 d za 10 godina uz $8^0/_0$ složenih kamata, ako se ona na koncu svake godine uvećava za 4000 d?

Imamo $S_{10} = 25000 \cdot 1{,}08^{10} + 4000 \dfrac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08 - 1}$. Da izračunamo s pomoću logaritama S_{10}, stavimo $25000 \cdot 1{,}08^{10} = A$ i $4000 \dfrac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08 - 1} = B$ pa izračunajmo napose A i B. Nalazimo $log\, A = log\, 25000 + 10\, log\, 1{,}08 = 4{,}39794 + 10 \,.\, 0{,}04342 = 5{,}73214$. Zato je $A = 53969\ d$. Hoćemo li izračunati B, treba da najprije odredimo vrijednost od $1{,}08^{10} = y$. Kako je $log\, y = 0{,}33420$, to je $y = 2{,}15875$. Dakle je $B = 4000 \cdot \dfrac{1{,}15875}{0{,}08}$ i $log\, B = log\, 4000 + log\, 1{,}15875 + kolog\, 0{,}08 = 3{,}60206 + 0{,}06399 + 1{,}09691 = 4{,}76296$. Izlazi $B = 57938\ d$ i $S_{10} = 53969 + 57938 = 111907\ d$.

§ **27. Anuiteti.** Države, gradovi, općine, poduzeća trebaju često novaca za razne investicije pa su prisiljeni sklapati zajmove koje žele otplaćivati u jednakim obrocima iza određenog vremena na pr. na koncu svake godine. Ti se obroci zovu *anuiteti;* jednim se dijelom anuiteta isplaćuju kamate, a drugim se dijelom otplaćuje glavnica.

Formula

$$R = gq^n - a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

pokazuje nam, koliki je još dug iza n godina, ako se posuđena glavnica g otplaćuje u jednakim anuitetima a na koncu svake godine. Ima li iza n godina dug biti potpuno isplaćen, onda je $R = 0$, pa imamo

$$gq^n = a \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad 2)$$

Ovo je formula *amortizacije duga.* Iz te formule izlazi:

$$a = g \frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1} \qquad 2)$$

Ta nam formula kazuje, kolikim se anuitetom može otplatiti dug od g dinara za n godina na koncu svake godine uz $p\%$.

Da izračunamo n, pomnožimo jednadžbu 1) s $q - 1$; dobivamo

$$(q - 1)\, gq^n = aq^n - a$$

i odatle $q^n\, [a - (q - 1)\, g] = a$ ili $n = \dfrac{log\, a + kolog\, [a - (q - 1)\, g]}{log\, q}$

Primjer. 1. Kolikom godišnjom otplatom na koncu svake godine može se amortizirati dug od 61490,3 d za 30 godina, ako se računa 5% složenih kamata?

Formula 2) daje

$$a = 61490{,}3 \frac{1{,}05^{30} \cdot 0{,}05}{1{,}05^{30} - 1}.$$

Kako je $1{,}05^{30} - 1 = 3{,}3222$, to je

$$log\, a = log\, 61490{,}3 + 30\, log\, 1{,}05 + log\, 0{,}05 + kolog\, 3{,}3222 =$$
$$= 4{,}78882 + 0{,}63570 + 0{,}69897 - 2 + 0{,}47857 - 1 = 3{,}60206;$$
$$a = 4000\ d.$$

2. Iza koliko će se godina otplatiti dug od 10760,8 *d* godišnjim otplatama od 2400 *d* na koncu svake godine, ako se računa $3\frac{3}{4}\%$ složenih kamata?

Iz $10760{,}8 \cdot 1{,}0375^x = 2400\ \frac{1{,}0375^x - 1}{0{,}0375}$ izlazi

$$1{,}0375^x\ (10760{,}8 \cdot 0{,}0375 - 2400) = -\ 2400,\ 1{,}0375^x = \frac{2400}{1996{,}47},$$

$$x = \frac{log\, 2400 + kolog\, 1996{,}47}{log\, 1{,}0375} = 5 \text{ godina.}$$

3. Dug od g *d* ima se otplatiti u jednakim godišnjim obrocima od x *d* na koncu svake godine. Neka se odredi, koliko se svake pojedine godine plaća za kamate, a koliko za otplatu glavnice.

Za anuitet a imamo prema formuli 2).

$$a = \frac{gq^n\ (q - 1)}{q^n - 1}.$$

Kako su kamate za prvu godinu $k_1 = \frac{gp}{100}$, to za otplatu glavnice ostaje $x_1 = a - \frac{gp}{100}$. Dug na koncu prve godine jest $g - x_1$. Na koncu druge godine treba platiti kamate samo od glavnice $g - x_1$ t. j. $k_2 = \frac{(g - x_1)\, p}{100}$, a za otplatu glavnice ostaje $x_2 = a - \frac{(g - x_1)\, p}{100} = \left(a - \frac{gp}{100}\right) + \frac{px_1}{100} = x_1 + \frac{px_1}{100} = x_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_1 q$. Na koncu treće godine treba platiti kamate samo od svote $g - x_1 - x_2$, pa je zato

$$x_3 = a - \frac{(g - x_1 - x_2)p}{100} = a - \frac{(g - x_1)p}{100} + \frac{px_2}{100} = x_2 + \frac{px_2}{100} =$$
$$= x_2 q = x_1 q^2.$$

Općeno je $x_m = x_1 q^{m-1}$.

Kako je $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1\ \frac{q^n - 1}{q - 1} = g$,

$$\text{to je } x_m = gq^{m-1}\ \frac{q - 1}{q^n - 1}.$$

Primjer. Dug od 100000 *d* ima se isplatiti za 4 godine uz 4%. Neka se sastavi otplatna osnova.

$$\text{Nalazimo } x_1 = 100000 \frac{1,04 - 1}{1,04^4 - 1} = 23549 \ d,$$

$$x_2 = x_1 q = 23549 \cdot 1,04 = 24490,96 \ d,$$
$$x_3 = x_2 q = 24490,96 \cdot 1,04 = 25470,60 \ d,$$
$$x_4 = x_3 q = 25470,60 \cdot 1,04 = 26489,44 \ d.$$

Anuitet može se izračunati direktno po formuli za anuitet, a može se i tako da se kamate pribroje otplatnoj kvoti. Otplatna osnova biće:

Koncem godine	Dug	4% kamate	Otplatna kvota	Anuitet
0	100000	—	—	—
1	76451,00	4000,00	23549,00	27549,00
2	51960,04	3058,04	24490,96	27549,00
3	26489,44	2078,40	25470,60	27549,00
4	—	1059,56	26489,44	27549,00

Otplatna kvota na koncu 4 godine mora biti jednaka preostalom dugu na koncu 3 godine; kadšto izlazi posljednji anuitet nešto različit od ostalih i to zbog korekcije zadnje znamenke.

§ 26. **Rente.** *Rentom* zovemo svotu koja se plaća svaki put, kad prođe određeni razmak vremena obično godina dana. Razlikujemo *privremenu rentu* koja se plaća samo kroz određeni broj godina i *doživotnu rentu* na koju ima netko pravo sve do smrti svoje.

Plaća li se renta na koncu određenog razmaka vremena, ona je *dekurzivna*; plaća li se na početku, ona je *anticipativna.*

Pravo na rentu može netko steći uloživši jednom za svagda određenu svotu koju zovemo *sadašnjom vrijednosti rente* ili *mizom* ili opet da plaća više puta određene iznose koji se zovu *premije.*

Osnovna formula računa renta. Dospijeva li neka renta kroz n godina na početku svake godine, njezina je vrijednost na početku n-te godine

$$S_n = rq^{n-1} + rq^{n-2} + \ldots + r = r \frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad 1)$$

Označimo li svotu što je moramo uložiti na početku godine da steknemo pravo na rentu r kroz n godina na koncu svake godine sa S

i uzevši u obzir da svota S i rente r za n godina moraju narasti na istu vrijednost, dolazimo do jednadžbe

$$Sq^n = r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad 2)$$

Jednadžba 2) *osnovna je jednadžba računa renta.* Iz te jednadžbe izlazi

$$r = \frac{Sq^n\,(q-1)}{q^n - 1};\ S = \frac{r}{q^n}\,\frac{q^n - 1}{q - 1};\ n = \frac{\log r + \mathrm{kolog}\,[r - S\,(q-1)]}{\log q}$$

Veličina S jest *sadašnja vrijednost* rente r koja kroz n godina dospijeva na koncu svake godine.

Do jednadžbe 2) mogli smo doći također tako da smo isporedili vrijednosti od S i vrijednosti renta r o bilo kojem roku na pr. početkom prve godine. Kako prva renta dospijeva na koncu prve godine, imamo

$$S = \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \ldots + \frac{r}{q^n}.$$

Izraz na desnoj strani jest geometrijska progresija, gdje je prvi član $\frac{r}{q^n}$, kvocijent q;

$$\text{zato je } S = \frac{r}{q^n}\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Tražimo li sadašnju vrijednost rente koja kroz n godina dospijeva na početku svake godine, nalazimo

$$S' = \frac{r}{q^{n-1}}\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Primjeri. 1. Koju svotu mora netko uložiti da si osigura rentu od 1000 *d* koja kroz 20 godina dospijeva na koncu svake godine, ako se računa $4\,{}^0/_0$ složenih kamata?

$$\text{Nalazimo } S = \frac{1000}{1{,}04^{20}}\,\frac{1{,}04^{20} - 1}{1{,}04 - 1} = 13589\ d.$$

2. Netko ulaže kroz 12 godina na početku svake godine 1000 *d*. Koliko puta može on uživati rentu od 2716,7 *d* koja se počinje godinu dana iza posljednje uplate, ako se računa $6\,{}^0/_0$ složenih kamata?

Ispoređujući sadašnje vrijednosti obaju iznosa nalazimo

$$\frac{1000\ (1{,}06^{12} - 1)}{1{,}06^{11}\ (1{,}06 - 1)} = \frac{2716{,}7}{1{,}06^{12}} + \frac{2716{,}7}{1{,}06^{13}} + \frac{2716{,}7}{1{,}06^{12+x-1}}$$

$$\text{ili}\quad \frac{1000\,(1{,}06^{12}-1)}{1{,}06^{11}\,(1{,}06-1)} = \frac{2716{,}7}{1{,}06^{11+x}}\,\frac{1{,}06^x-1}{1{,}06-1},$$

odakle izlazi $1{,}06^x = \dfrac{2716{,}7}{2716{,}7 - 1000\,(1{,}06^{12}-1)}$ i $x = 8$ puta.

3. Renta r koja dospijeva kroz n godina na koncu svake godine, ima se pretvoriti u drugu rentu x koja se počinje k godina iza posljednje uplate prve rente i traje m godina. Kolika je ta posljednja, ako se računa $p\%$ složenih kamata?

Isporedićemo sadašnje vrijednosti obiju renta. Sadašnja je vrijednost prve rente $S_1 = \dfrac{r}{q^n}\,\dfrac{q^n-1}{q-1}$; sadašnja je vrijednost druge rente $S_2 = \dfrac{x}{q^{k+n}} + \dfrac{x}{q^{k+n+1}} + \ldots + \dfrac{x}{q^{k+n+m-1}} = \dfrac{x}{q^{k+n+m-1}}\,\dfrac{q^m-1}{q-1}$. Kako S_1 mora biti jednako S_2, imamo $\dfrac{r}{q^n}\,\dfrac{q^n-1}{q-1} = \dfrac{x}{q^{k+n+m-1}}\,\dfrac{q^m-1}{q-1}$ i

$$x = \frac{rq^{k+m-1}\,(q^n-1)}{q^m-1}.$$

Do istog bismo rezultata došli da smo isporedili vrijednosti obiju renta o bilo kojem roku.

4. Renta od 2000 d koja se ima isplatiti 20 puta na početku svake godine ima se pretvoriti u četvrtgodišnju rentu koja se počinje u isto doba, a ima se isplatiti 80 puta. Kolika je ta potonja, ako se kamate računaju s 4%, te se kod prve rente priklapaju glavnici na koncu svake godine, a kod druge rente na koncu svake četvrtine godine?

Sadašnja vrijednost prve rente jest

$$2000 + \frac{2000}{1{,}04} + \ldots + \frac{2000}{1{,}04^{19}} = \frac{2000}{1{,}04^{19}}\,\frac{1{,}04^{20}-1}{1{,}04-1}.$$

Sadašnja vrijednost druge rente jest

$$x + \frac{x}{1{,}01} + \frac{x}{1.01^2} + \ldots + \frac{x}{1{,}01^{79}} = \frac{x}{1{,}01^{79}}\,\frac{1{,}01^{80}-1}{1{,}01-1}.$$

$$\text{Iz}\quad \frac{x}{1{,}01^{79}}\,\frac{1{,}01^{80}-1}{1{,}01-1} = \frac{2000}{1{,}04^{19}}\,\frac{1{,}04^{20}-1}{1{,}04-1}$$

$$\text{izlazi}\quad x = \frac{2000\cdot 1{,}01^{79}\cdot 0{,}01\,(1{,}04^{20}-1)}{1{,}04^{19}\cdot 0{,}04\cdot(1{,}01^{80}-1)} = 509{,}96\ d.$$

5. Koju svotu mora netko uložiti da iza 10 godina na koncu svakog mjeseca kroz 20 godina prima 1000 d, ako se 4% kamate u oba slučaja na koncu svake godine priklapaju glavnici.

Treba prije svega odrediti kojoj su svoti na koncu godine ekvivalentne svote od 1000 d, što se plaćaju na koncu svakog mjeseca. Svota od

1000 d, što se plaća na koncu prvog mjeseca ekvivalentna je na koncu godine svoti od $\left(1000 + \frac{1000 \cdot 4 \cdot 11}{100 \cdot 12}\right)$ d. Svota od 1000 d što se plaća na koncu drugog mjeseca, ekvivalentna je svoti od $\left(1000 + \frac{1000 \cdot 4 \cdot 10}{12 \cdot 100}\right)$ d itd. Svota r kojoj su ekvivalentne na koncu godine sve svote što se plaćaju na koncu pojedinih mjeseca, biće dakle

$$r = 1000 \cdot 12 + \frac{1000 \cdot 4}{100 \cdot 12}(11 + 10 + \ldots + 1) =$$

$$= 1000 \cdot 12 + \frac{1000 \cdot 4}{100 \cdot 12} \cdot \frac{11}{2} \cdot 12 = 12220 \ d.$$

Zato je $x = \frac{12220}{q^{11}} + \ldots + \frac{12220}{q^{30}} = \frac{12220}{q^{30}} \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = 112188 \ d.$

Zadaci. **1.** Netko ulaže početkom svake godine 3000 d uz $3\frac{3}{4}\%$. Kolika je njegova imovina na početku 8 godine?

2. Koju svotu mora netko 15 godina početkom svake godine uz $4\frac{1}{4}\%$ ulagati da početkom 15 godine njegovi ulošci narastu na vrijednost 12960 d?

3. Koliko mora netko početkom svake godine staviti u banku da iza 25 uplate uštedi 250000 d ($p = 6\%$)?

4. Netko ulaže 12 puta na početku svake godine 2400 d. Prvih 6 godina iznosi kamatnjak 6%, kasnije 5%. Kolika je njegova imovina na koncu 15 godine?

5. A uloži početkom svake godine 3000 d uz 4%. Kolika je njegova imovina na koncu 20 godine, ako se kamate priklapaju glavnici svake pô godine?

6. Netko plati 5 puta i to početkom svake druge godine svotu od 10000 d. Na koju vrijednost narastu njegovi ulošci 10 godina iza prve uplate, ako se računa 6% složenih kamata?

7. Netko će ulagati kroz 10 godina početkom svake godine 1000 d. uz 8%. Kolika je vrijednost svih uložaka *a)* početkom prve godine, *b)* početkom 5 godine, *c)* na koncu 10 godine?

8. Za neko zemljište daje A 103000 d odmah, B 120000 d iza 2 godine, C po 35000 d u 4 godišnja obroka na početku svake godine. Koja je ponuda najbolja, ako se računa 8% složenih kamata?

9. Netko uloži 20000 d uz 6% i oduzima kroz 5 godina na koncu svake godine 4000 d. Koliko mu još preostaje na koncu 5 godine?

10. Netko uloži 12000 d uz $7\frac{1}{2}\%$. Koliko treba on dodavati toj svoti kroz 15 godina na koncu svake godine da bude imao na koncu 15 godine 100000 d?

11. Netko uzajmi 20000 d uz 8%, a uplaćuje kroz 10 godina na koncu svake godine 2400 d. Koliko je još dužan na kraju 10 godine?

12. *A* kupi kuću za 250000 *d*; odmah uplati 125000 *d*, a iza 2, 4; 6, 8 godina 35000 *d*. Koliko je još dužan na koncu 8 godine, ako se 8% kamata pribijaju glavnici svake pô godine?

13. Dug od 50000 *d* ima se otplatiti s 10 obroka koji dospijevaju na koncu svake godine. Koliki su ti obroci, ako se 4% kamate polugodišnje priklapaju glavnici?

14. Iza koliko će se godina otplatiti dug od 26902 *d* godišnjim otplatama od 6000 *d* na koncu svake godine, ako se računa $3\frac{3}{4}$% složenih kamata?

15. Poslije koliko godina biće otplaćen dug od *a)* 400000 *d* godišnjim otplatama od 25000 *d*, uz 5%, *b)* 300000 *d* godišnjim otplatama od 26982,34 *d* uz 4% na koncu svake godine?

16. Netko uloži 240000 *d* uz 3%. Krajem svake godine oduzima 4612 *d*. Iza koliko će se godina njegova glavnica podvostručiti?

17. Koliki je bio dug, ako se kroz 10 godina krajem svake godine otplaćivalo 2000 *d* i ako je na koncu 10 godine još preostalo 2000 *d* ($p = 4\%$)?

18. Dug od 80000 *d* ima se otplatiti za 8 godina uz 4%. Sastavi otplatnu osnovu!

19. Dug od 25000 *d* ima se otplatiti za 5 godina uz 5%. Sastavi otplatnu osnovu!

20. Država izda 4 449 000 komada obveznica uz nominalnu vrijednost 1000 *d* koje se imaju amortizirati za 50 godina uz 2,5%. Uvjeri se da je anuitet 156 863 000 *d* i izračunaj koliko je otpalo prvih pet godina na kamate a koliko na otplatu glavnice.

21. *A* imade kroz 25 godina na koncu svake godine da plati 2246,63 *d*; mjesto toga on bi htio da otplati dug u 5 jednakih obroka i to na početku 1, 6, 11, 16 i 21 godine. Koliki je pojedini obrok, ako se 4% kamate priklapaju glavnici na koncu svake godine?

22. *A* nudi odmah 100000 *d* i kroz 5 slijedećih godina na kraju svake godine 20000 *d*; *B* nudi odmah 50000 *d* i kroz slijedećih 10 godina na koncu svake godine 16000 *d*; za koliko je ponuda *A*-ova povoljnija od ponude *B*-ove, ako se računa 4% složenih kamata?

23. Netko uloži u banku određenu svotu uz 6% i uveća je iza 2, 4, 6, 8 i 10 godina za 2000 *d*. Kolika je bila ta svota, ako je iza 10 godina imao 60000 *d*?

24. Otac uloži na rođendan svog sina 5000 *d*, a svakog slijedećeg rođendana uveća on taj uložak za 1000 *d*. Iza koliko će godina sin imati pravo na svotu od 35900 *d*, ako se računa 3% složenih kamata?

25. Koiiko mora otac uz $4^0/_0$ uložiti na rođendan svog sina da njegov sin na koncu 18 godine dobije 18000 *d*, a koncem svake slijedeće godine kroz 10 godina $5^0/_0$ više negoli prеđašnje?

26. Netko uloži 20000 *d* i povećava svoj imutak svaki put iza 3, 6, 9, 12, 15 i 18 godina za 10000 *d*. Kolika je njegova imovina za 20 godina? ($p = 6^0/_0$).

27. Neka se izračuna sadašnja i konačna vrijednost rente od 4000 *d* koja kroz 12 godina dospijeva koncem svake godine, ako se računa $6^0/_0$ složenih kamata?

28. Kolika je sadašnja vrijednost rente od 12000 *d* koja kroz 24 godine dospijeva na koncu svake godine ($p = 7\frac{1}{2}{}^0/_0$)?

29. Netko uloži 25000 *d*; na koju rentu ima on pravo kroz 25 godina na koncu svake godine, ako se složene kamate od $8^0/_0$ *a)* svake godine, *b)* svake pô godine pribijaju glavnici?

30. Netko plaća 12 godina početkom svake godine 5000 *d* da uzmogne počevši od 13 godine kroz 20 godina dizati neku rentu. Kolika je ta renta? ($p = 8^0/_0$).

31. Rentu od 2000 *d* koja dospijeva 15 godina početkom svake godine, treba pretvoriti u drugu koja počne istodobno s prvom, traje 10 godina i dospijeva početkom svake pô godine. Kolika je ta ($p = 7\frac{1}{2}{}^0/_0$)?

32. Kolika je vrijednost n-godišnje rente r o m-toj uplati uz $p^0/_0$: *a)* $r = 2000\ d$, $n = 20$, $m = 12$, $p = 6^0/_0$; *b)* $r = 5000\ d$, $n = 18$, $m = 8$, $p = 7^0/_0$; *c)* $r = 8000\ d$, $n = 15$, $m = 10$, $p = 8^0/_0$?

33. Koju sadašnju vrijednost imade renta od 1000 *d* koja kroz 10 godina dospijeva svake pô godine, ako se složene kamate od $10^0/_0$ svake pô godine pribijaju glavnici?

34. Netko ima pravo na rentu od 2000 *d* kroz 15 godina koncem svake godine. Kad može on tu rentu prodati za 30000 *d* ($p = 8^0/_0$)?

35. Koju svotu treba da ulaže netko kroz 12 godina početkom svake godine da si počevši od konca 12 godine osigura rentu od 4000 *d* koja kroz 15 godina dospijeva na koncu svake godine ($p = 6^0/_0$)?

36. Netko uloži sad pa iza 2, 4, 6 godina 10000 *d*; na koju godišnju rentu ima on pravo kroz 10 godina počevši od konca 8 godine, ako se računa $6^0/_0$ kamata?

37. Koju svotu mora netko uložiti da si osigura rentu od 20000 *d* koja se počinje 10 godina kasnije i traje 15 godina ($p = 5^0/_0$)?

38. Otac uloži za svog sina na njegov rođendan pa iza 3, 6, 9, 12 i 15 godina 1000 *d*. Koliko godišnju rentu može sin uživati kroz 8 godina iza navršene 18 godine? ($p = 6^0/_0$).

39. Netko ima pravo na rentu od 1200 *d* kroz 24 godine na koncu svake godine; mjesto toga želi on da diže drugu neku rentu koja se počinje istodobno s prvom, dospijeva 16 puta i još da dobije odmah 2500 *d*. Koliko je ta druga renta ako se računa 5% složenih kamata?

40. Netko ima pravo na rentu od 18000 *d* kroz 30 godina: mjesto toga htio bi on imati drugu koja traje samo 20 godina i počinje istodobno s prvom. Kolika je ta, ako se računa 6% složenih kamata?

41. Netko želi da rentu od 10000 *d*, koja dospijeva kroz 25 godina početkom svake godine, pretvori u polugodišnju u iznosu od 5977 *d* i koja počinje istodobno s prvom. Kako dugo traje ta potonja, ako se $4\frac{1}{2}\%$ kamate priklapaju glavnici na koncu svake godine?

42. *A* želi rentu od 2000 *d* koja traje 15 godina, pretvoriti u polugodišnju koja traje 20 godina i počinje istodobno s prvom; kolika je ta potonja, ako se u prvom slučaju kamate priklapaju glavnici na koncu svake godine, a u drugom svake pô godine ($p = 4\%$)?

43. Renta od 10000 *d* koja dospijeva kroz 30 godina početkom svake godine, ima se pretvoriti u drugu koja počinje istodobno s prvom i traje 15 godina. Kolika je ta? ($p = 5\%$).

44. Netko želi da iza 10 godina podigne 5000 *d*, iza 11 godina 10% više, iza 12 godina opet 10% više itd.; ukupno 10 puta. Koju svotu treba on sad da uloži, ako se složene kamate računaju sa 6%?

45. Netko uloži 100000 *d* da iza 12 godina početkom svakog mjeseca prima stanovitu svotu kroz 18 godina. Kolika je ta, ako se 4% kamate priklapaju glavnici na koncu svake godine?

46. Godišnja renta od 10000 *d* neka se pretvori u *a)* polugodišnju, *b)* četvrtgodišnju koje se počinju istodobno s prvom. Kamatni faktor za pô godine uzmi $q_1 = \sqrt{1 + \frac{p}{100}}$, a za četvrt godine $q_2 = \sqrt[4]{1 + \frac{p}{100}}$ ($p = 6\%$).