MATURITÄTS-PRÜFUNGSFRAGEN

AUS DER

MATHEMATIK

ZUSAMMENGESTELLT

UND MIT AUFLÖSUNGEN VERSEHEN

VON

JOSEF GAJDECZKA
PROFESSOR I. R. IN BRÜNN

VIERTE AUFLAGE

WIEN UND LEIPZIG
FRANZ DEUTICKE
1925

Verlags-Nr. 3021.

Historisches Hilfsbuch für die Maturitätsprüfung.

Zur Wiederholung der allgemeinen und österreichischen Geschichte mit besonderer Berücksichtigung der Kulturgeschichte

für Abiturienten der österreichischen Mittelschulen, Lehrerbildungsanstalten und Fachschulen.

Von Professor **Rudolf Fiedler.**

Dritte, vermehrte Auflage (1906). IV und 110 Seiten.

Preis S 1.88.

Auflösungen
von arithmetischen und geometrischen Textaufgaben

für die Mittel- und Oberstufe der Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und für Handelsakademien.

Von Schulrat **Josef Gajdeczka.**

(1912) VI und 166 Seiten.

Preis S 3.75.

Zur Vorbereitung auf die Geschichts-Matura.

Achtundvierzig Aufgaben aus der Vaterlandskunde auf Grund der neuen Maturitäts-Prüfungsvorschrift für Maturanten der Gymnasien und Realschulen.

Von Prof. Dr. **Oskar Gratzy.**

(1908) 56 Seiten.

Preis S 1.20.

Maturitätsfragen aus der darstellenden Geometrie

nebst vollständigen Lösungen.

Für die oberen Klassen der Realschulen.

Von Prof. **Emilian Ilnicki.**

(1908) IV und 82 Seiten.

Preis S 1.88.

Maturitätsaufgaben aus der darstellenden Geometrie

nebst vollständigen Lösungen.

Für die oberen Klassen der Realschulen und verwandter Anstalten sowie für das Selbststudium zusammengestellt und gelöst von

Prof. **Rudolf Schill.**

I. Teil: Vergriffen.

II. Teil: **Darstellung von Körpern mit Parallel- und Zentralstrahlenflächen sowie regelmäßiger Körper samt ihren Schattenkonstruktionen.** 198 Aufgaben mit 130 Figuren auf 24 autographierten Doppeltafeln. (1907) VI und 92 Seiten. Preis S 4.50.

III. Teil: **Darstellung von Durchdringungen, Rotationskörpern, Schattenkonstruktionen sowie von dem Wichtigsten aus der Linearperspektive.** 218 und 33 Aufgaben mit 117 Figuren auf 18 autographierten Doppeltafeln. (1908) VI und 108 Seiten. Preis S 4.50.

MATURITÄTS-PRÜFUNGSFRAGEN

AUS DER

MATHEMATIK

ZUSAMMENGESTELLT

UND MIT AUFLÖSUNGEN VERSEHEN

VON

JOSEF GAJDECZKA
PROFESSOR I. R. IN BRÜNN

VIERTE AUFLAGE

WIEN UND LEIPZIG
FRANZ DEUTICKE
1925

Verlags-Nr. 3021.

Druck von Rudolf M. Rohrer in Brünn.

Vorwort zur vierten Auflage.

Die neuen Lehrpläne vom Jahre 1909 verlangen für den mathematischen Unterricht in den obersten Klassen der Gymnasien und Realschulen dasselbe, nämlich „Zusammenfassende Wiederholungen aus dem Gesamtgebiete des mathematischen Schulunterrichtes, namentlich der Gleichungen und Reihen, der Stereometrie, Trigonometrie und analytischen Geometrie, Anwendungen auf die verschiedenen Gebiete des Unterrichtes und des praktischen Lebens an Stelle bloß formalistischer Aufgaben“.

Auf Grund dieser Forderungen hat der Verfasser die dritte Auflage des Büchleins, das dem jungen Lehrer eine Sammlung von passenden Prüfungsfragen und dem Schüler eine Kontrolle bieten soll, ob seine Lösungen der zur Wiederholung des ganzen Lehrstoffes notwendigen Beispiele richtig sind, einer gründlichen Revision unterzogen, dabei 46 Beispiele als minder tauglich gestrichen und durch neue ersetzt. Darunter befinden sich keine Konstruktionsaufgaben (Figuren: 2, 5, 10, 11 sind weggefallen), dafür aber Aufgaben über Maxima und Minima der Funktionen und über Anwendung der Integralrechnung zur Flächen- und Volumsberechnung.

Die aufeinanderfolgenden 82 Gruppen sind so geordnet, daß leichtere Beispiele vorangehen, ihnen schwierigere nachfolgen und erst von Nr. 62 an eine größere Schwierigkeit eintritt.

Der Anhang enthält — als Zugabe für Realschüler — 8 Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und 15 aus der sphärischen Trigonometrie.

Möge auch dieser neuen Auflage eine freundliche Aufnahme beschieden sein!

Brünn, im Mai 1925.

Josef Gajdeczka.

Nr. 1.

1. In einem Halbkreise sind zwei parallele Sehnen $a = 8{\cdot}8\,dm$, $b = 5{\cdot}6\,dm$ und ihr Abstand $e = 3\,dm$ gegeben; wie groß ist der Radius des Kreises?

Ist x der Zentralabstand der größeren Sehne a, so ist $r^2 = (x+3)^2 + \frac{b^2}{4}$ und auch $= x^2 + \frac{a^2}{4}$.

Aus $x^2 + 6x + 9 + 7{\cdot}84 = x^2 + 19{\cdot}36$ erhält man $x = 0{\cdot}42$.

Demnach $r^2 = 0{\cdot}1764 + 19{\cdot}36$ und $r = \sqrt{19{\cdot}5364} = 4{\cdot}42\,dm$.

2. Bestimme den Logarithmus von $\sqrt[3]{a^2\sqrt{b\sqrt{c^{-1}}}}$!

$$\log\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{b^2c^{-1}}} = \log\sqrt[12]{a^8b^2c^{-1}} = \frac{1}{12}(8\log a + 2\log b - \log c) =$$

$$= \frac{2}{3}\log a + \frac{1}{6}\log b - \frac{1}{12}\log c.$$

3. Bestimme den Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreieckes mit der Basis $a = 124\,cm$ und dem Schenkel $b = 168\,cm$!

Durch die Höhe h_a zerfällt das gleichschenkelige Dreieck in zwei rechtwinkelige; aus jedem derselben ergibt sich für $\cos\beta = \frac{a}{2b} = \frac{124}{2\,.\,168} = \frac{31}{84}$.

$$\begin{array}{l}
\log\cos\beta = 1{\cdot}49136 - 10 \\
\qquad\qquad\;\; \underline{1{\cdot}92428 - 10} \\
\qquad\qquad\;\; 9{\cdot}56708 - 10 \\
\qquad\qquad\quad\;\; \underline{663} \\
\qquad\qquad\quad\; 4500 : 53 = 85'' \\
\qquad\qquad\quad\;\; 260
\end{array}$$

$\beta = 68^\circ 22' - 85'' = 68^\circ 20' 35''$.

4. Durch $A\ (2, -2)$ und $B\ (8, 10)$ ist eine Gerade bestimmt; wie lautet die Gleichung einer Geraden, die durch $C\ (-3, 5)$ geht und zur ersten 1. parallel, 2. normal ist?

Der Richtungskoeffizient der Geraden AB ist gleich $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12}{6} = 2$.

Jede zu ihr parallele Gerade muß den Richtungskoeffizienten 2 haben.

„ „ „ normale „ „ „ „ $-\frac{1}{2}$ „

Die Gleichung der parallelen Geraden lautet also $y - 5 = 2(x+3)$.

„ „ „ normalen „ „ „ $y - 5 = -\frac{1}{2}(x+3)$.

Nr. 2.

1. Zwei Vielecke haben zusammen 18 Ecken und 58 Diagonalen; wieviel Ecken hat jedes Polygon?

Ein Vieleck mit x Ecken hat $\frac{x(x-3)}{2}$ Diagonalen.

Das 2. Vieleck mit $(18-x)$ Ecken hat $\frac{(18-x)(15-x)}{2}$ Diagonalen.

Die Summe der Diagonalen liefert die Gleichung $x^2 - 18x = -77$; $x_1 = 7$, $x_2 = 11$.

2. Von einem Würfel schneidet man durch Ebenen, welche durch die Mitte der Kanten gehen, alle Ecken weg; wie groß ist die Oberfläche des Restkörpers?

Von jeder Würfelfläche werden 4 Dreiecke, jedes mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8}$ abgeschnitten; der Rest jeder Würfelfläche beträgt darnach $\frac{a^2}{2}$. An Stelle einer jeden Ecke tritt ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $s = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}$, also mit der Fläche $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$; die Gesamtoberfläche des Restkörpers beträgt also:

$$6 \cdot \frac{a^2}{2} + 8 \cdot \frac{a^2}{8}\sqrt{3} = a^2(3 + \sqrt{3}).$$

3. Von einem schiefwinkeligen Dreiecke sind folgende Stücke gegeben: $a = 319{\cdot}97$, $b - c = 136$, $\alpha = 42^\circ\, 32'\, 4''$; welches Stück läßt sich daraus zunächst berechnen?

$$a : (b - c) = \sin\alpha : (\sin\beta - \sin\gamma)$$
$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} : 2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2};\ \text{da } \cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \text{ ist,}$$

so läßt sich aus $a : (b - c) = \cos\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$, $\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$ berechnen.

$$\begin{array}{l} \log\sin\frac{\beta-\gamma}{2} = 2{\cdot}13354 \\ \qquad\qquad\quad \underline{9{\cdot}96937 - 10} \\ \qquad\qquad\quad 2{\cdot}10291 \\ \qquad\qquad\quad \underline{2{\cdot}50511} \\ \qquad\qquad\quad 9{\cdot}59780 - 10 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{78} \\ \qquad\qquad\quad 200 : 49 = 4'' \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{\beta-\gamma}{2} = 23^\circ\, 20'\, 4'' \\ \frac{\beta+\gamma}{2} = 68^\circ\, 43'\, 58'' \end{array}\right\} \begin{array}{l} \beta = 92^\circ\, 4'\, 2'' \\ \gamma = 45^\circ\, 23'\, 54''. \end{array}$$

4. Welche Länge hat die Strecke von $P\,(6, 7)$ bis zum Durchschnittspunkte von $3x - y = 4$ und $2x + y = 5$?

Der Durchschnittspunkt (S) der gegebenen Geraden hat die Koordinaten $\left(\frac{9}{5}, \frac{7}{5}\right)$; daher

$$PS = \sqrt{\left(6 - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(7 - \frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{21^2 + 28^2}{25}} = \frac{7}{5}\sqrt{9 + 16} = 7.$$

3.

1. Wie verwandelt man das Binom $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}$ in eine einzige Wurzelgröße?

Man setzt das Binom $= x$ und quadriert die Gleichung; aus

$$x^2 = 14 + 6\sqrt{5} - 2\sqrt{14^2 - 36 . 5} + 14 - 6\sqrt{5} = 28 - 2\sqrt{16} = 20$$

erhält man $x = 2\sqrt{5}$.

2. Durch jährliche Abschreibung von 6% ist der Buchwert einer Maschinenanlage in 10 Jahren auf 12540 K gesunken. Wieviel hatte die Anlage gekostet?

Die Anlage hat $x\,K$ gekostet; $x(1 - 0{\cdot}06)^{10} = 12540$, $x = \dfrac{12540}{0{\cdot}94^{10}}$.

$$\begin{array}{l} log\ x = 4{\cdot}09830 \\ \quad\ 0{\cdot}73130^{-1} \qquad x = 23281\ K. \\ \hline \quad\ 4{\cdot}36700 \end{array}$$

3. Das charakteristische Parallelogramm eines schiefen Zylinders mit dem Volumen $2295{\cdot}6\ dm^3$ ist ein Rhombus mit dem Winkel $\alpha = 60°$; berechne den Radius der Grundfläche!

$$2295{\cdot}6 = r^2\pi . 2r\,sin\,60°,\ r^3 = \frac{2295{\cdot}6}{2\pi\,sin\,60°};\ log\,r = 0{\cdot}87506,$$
$$r = 7{\cdot}5\ dm.$$

4. Es ist der Flächeninhalt der Ellipse $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = \dfrac{1}{9}$ zu berechnen.

Um $F = a\,b\,\pi$ zu berechnen, müssen die Halbachsen bekannt sein. Zu diesem Zwecke bringt man die Ellipsengleichung auf die Form $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Aus $\dfrac{9x^2}{100} + \dfrac{9y^2}{64} = 1$, d. i. $\left(\dfrac{x}{\frac{10}{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\frac{8}{3}}\right)^2 = 1$ folgt $a = \dfrac{10}{3}$, $b = \dfrac{8}{3}$;

daher $F = \dfrac{80}{9}\pi$.

Nr. 4.

1. In welcher Potenz von $(a - b)$ kommt ein Glied mit $a^7 b^5$ vor und wie lautet der Koeffizient dazu?

In $(a-b)^n$ ... kommt beim $\binom{n}{1} \ldots b^1$, bei $\binom{n}{2} \ldots b^2, \ldots$ also umgekehrt bei $b^5 \ldots$ kommt $\binom{n}{5} a^7 b^5$, und zwar mit $-$; $-\dfrac{12 . 11 . 10 . 9 . 8}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} = -792$.

2. Wie groß ist der Zahlenwert von $(\sqrt{6}-\sqrt{5})\sqrt{60+11\sqrt{30}}$?

$$=\sqrt{(60+11\sqrt{30})\,(11-2\sqrt{30})}=\sqrt[4]{30}=\omega.$$

$$log\,\omega=\frac{1\cdot47712}{4}=0\cdot36928 \qquad \omega=2\cdot3403.$$

$$\frac{22}{60:18=3}$$

3. Wird auf jede Fläche eines Würfels mit $a=32\,cm$ dieselbe gerade Pyramide aufgesetzt, so wird dadurch die Oberfläche des neuen Körpers um 1536 cm^2 größer als die des Würfels. Berechne die Höhe (x) dieser Pyramiden!

$Ob_\omega=6\,.\,32^2=6144.$ $\quad Ob_p=24$ gleichschenklige $\triangle$ mit der Höhe

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2} \qquad x=20\,cm.$$

4. Es ist die Gleichung einer Parabel abzuleiten.

Nr. 5.

1. Die Summe der Diagonalen eines Rhombus mit der Fläche 9 dm^2 beträgt 7 dm; wie groß ist der Umfang des Rhombus?

Sind x und y die Diagonalen, so ist $x+y=7$ und $\frac{x\,.\,y}{2}=6$, d. i. $xy=12$. Die Auflösung dieser Gleichungen gibt: $x=4$, $y=3$; die Seite $s=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$, also der Umfang $u=\frac{5}{2}\,.\,4=10\,dm$.

2. $\dfrac{2\,sin\,\alpha+sin\,2\,\alpha}{2\,sin\,\alpha-sin\,2\,\alpha}$ auf eine logarithmisch brauchbare Form zu bringen.

$$\frac{2\,sin\,\alpha+2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}{2\,sin\,\alpha-2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}=\frac{1+cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}=\frac{2\,cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\,sin^2\frac{\alpha}{2}}=cotg^2\frac{\alpha}{2}.$$

3. Wie verhalten sich die Volumina der einer Kugel (r) ein- und umgeschriebenen Hexaeder zueinander?

Beim eingeschr. Hexaeder ist die Diagonale $a\sqrt{3}=2r$, also $a=\frac{2r}{\sqrt{3}}$ und $V_1=\frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$.

„ umgeschr. „ „ „ Kante $A=2r$, also $V_2=8r^3$.

Es ist $V_1:V_2=1:3\sqrt{3}$.

4. Wann ist eine Gerade $y=ax+b$ Tangente einer Parabel $y^2=2px$?

Für den Durchschnitt dieser Linien muß $y^2 = 2p\,\frac{y-b}{a}$ sein.

Aus $y^2 - \frac{2p}{a}\,y = \frac{-2pb}{a}$ erhält man $y = \frac{p}{a} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 2pab}{a^2}}$; soll y nur einen Wert haben, so muß $p^2 - 2pab = o$, also $p = 2ab$ sein.

Nr. 6.

d $\sqrt{\ }$ **1.** Wie groß ist der Zahlenwert von $(3 - \sqrt{5})\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}$?

$$= \sqrt[3]{(9 + 4\sqrt{5})(72 - 32\sqrt{5})} = \sqrt[3]{(9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5}) . 8} = 2.$$

d **2.** Die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes bilden eine arithmetische Reihe; das vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Lot $= 21{\cdot}6\,dm$. Wie groß sind die Dreiecksseiten?

Es ist $a^2 + (a - d)^2 = (a + d)^2$, d. i. $a = 4d$. Nun ist $2\triangle = a(a - d) = (a + d)\,21{\cdot}6$, d. i. $4d . 3d = 5d . 21{\cdot}6$, $12d = 108$, $d = 9$. Die Seiten: 27, 36, 45 dm.

3. Einem geraden Kegel (r, h) soll ein Zylinder mit möglichst großem Rauminhalt eingeschrieben werden. Bestimme die Höhe dieses Zylinders!

Ist x der Radius, y die Höhe des Zylinders, so ist dessen Volumen: $v = x^2\pi . y$; zwischen x und y besteht ein Zusammenhang: $x : (h - y) = r : h$, $y = \frac{h}{r}(r - x)$, somit $v = x^2\pi\frac{h}{r}(r - x)$. Da von den konstanten Größen das Maximum oder Minimum nicht abhängig ist, hat man zu untersuchen, wann $\frac{Vr}{\pi h} = rx^2 - x^3$ ein Maximum wird; dies tritt ein bei der Wurzel der Gleichung, wenn die erste Ableitung (der Differentialquotient) des gegebenen Ausdruckes gleich Null gesetzt wird: $2rx - 3x^2 = 0$ gibt $x = \frac{2}{3}r$, damit ist $y = \frac{h}{3}$.

d **4.** Wie lautet die Gleichung der Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt der Geraden $\begin{cases} 4x - 7y = -39 \\ 5x + 4y = 15 \end{cases}$ geht und von der x-Achse die Strecke -4 abschneidet?

Die verlangte Gerade geht durch den Durchschnittspunkt $A(-1, 5)$ der gegebenen Geraden und durch den Punkt $B(-4, 0)$; ihre Gleichung lautet also $y - 5 = \frac{0 - 5}{-4 + 1}(x + 1)$, d. i. $3y - 5x = 20$.

Nr. 7.

1. Wieviel Uhr ist es, wenn die beiden Zeiger einer Uhr zwischen 8 und 9 genau übereinander stehen?

Ist es genau 8^h, so ist der Minutenzeiger auf 12, der Stundenzeiger auf 8; bis der Minutenzeiger auf 8 zu stehen kommt, also $40'$-Striche zurücklegt, rückt der Stundenzeiger um x'-Striche weiter, die der Minutenzeiger auch zurücklegen muß. Aus $40 + x = 12x$ folgt $x = 3\frac{7}{11}$ Minuten. Es ist $8^h\,43'\,38''$.

2. Aus dem Kubikinhalt V eines gleichseitigen Kegels die Oberfläche zu berechnen.

Aus $V = \frac{r^3\pi}{3}\sqrt{3}$ erhält man $r = \sqrt[3]{\frac{V\sqrt{3}}{\pi}}$.

$$O = 3r^2\pi = 3\pi\sqrt[3]{\frac{3V^2}{\pi^2}} = 3\sqrt[3]{3\pi V^2}.$$

3. $\left.\begin{array}{l} x + y = 90° \\ \cos x \,\cos y = 0{\cdot}43301 \end{array}\right\}$ aufzulösen.

Aus den Fundamentalformeln: $\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{cases}$

erhält man $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y = 6{\cdot}86602$; weil $\cos(x+y) = 0$ ist, bleibt $\cos(x-y) = 0{\cdot}86602$, daher $x - y = 30°$, $x = 60°$, $y = 30°$.

4. Es sind die Koordinaten der Durchschnittspunkte der Linien ($3y^2 = 16x$ und $8x + 9y = 24$) zu rechnen.

Die 1. Gleichung gibt eine Parabel an mit $p = \frac{8}{3}$. Zur Konstruktion der 2. Gleichung (einer Geraden) hebt man zwei Punkte hervor: $x = 0, y = \frac{8}{3}$ und $x = 0$, $x = 3$.

Für den Durchschnittspunkt sind x und y in beiden Gleichungen gleich: $8x = 24 - 9y$ in die 1. Gleichung gesetzt, gibt: $y^2 + 6y = 16$, also $y = \begin{cases} +2 \\ -8 \end{cases}$

zu $y_1 = 2$ gehört $x_1 = \frac{3}{4}$, zu $y_2 = -8$ gehört $x_2 = 12$.

Nr. 8.

1. Die Spitzen der beiden Zeiger einer Turmuhr haben um 6 Uhr den Abstand 126 *cm* und um 9 Uhr den Abstand 90 *cm*. Wie lang ist jeder Zeiger?

Man hat die Gleichungen $x + y = 126$ und $x^2 + y^2 + 8100$ aufzulösen. $y = 126 - x$ in die 2. Gleichung eingesetzt, gibt $x^2 - 126x = -3888$; $x = 63 \pm 9 = \begin{cases} 72 \\ 54 \end{cases}$. Der Stundenzeiger (Minutenzeiger) ist 54 (72) *cm* lang.

2. Wie groß ist das Volumen des Doppelkegels der durch, Rotation eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seite a um eine seiner Seiten entsteht? (Nach der Guldinschen Regel.)

$$V = fl_\Delta \,.\, 2 e\pi, \quad e = \frac{h}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

$$V = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \,.\, 2\pi \,.\, \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}\pi.$$

3. Es ist ein Dreieck aufzulösen aus: $b + c = 1117$, $a = 537$ und $\beta = 75^\circ\ 32'\ 24''$.

$$(b + c + a) : (b + c - a) = (\sin\beta + \sin\gamma + \sin\alpha) : (\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha)$$

$$1654 : 580 = 4 \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha}{2} : 4 \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$827 : 290 = \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{290}{827}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

4. Wie lautet die Gleichung der Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt der Geraden $\begin{cases} y = 7x - 4 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$ geht und mit der x-Achse einen Winkel von 45° bildet?

Die verlangte Gerade geht durch den Durchschnittspunkt A (1, 3) der gegebenen Geraden und hat den Richtungskoeffizienten $= 1$; ihre Gleichung lautet also: $y - 3 = 1(x - 1)$, d. i. $y = x + 2$.

Nr. 9.

1. Von zwei Fußgängern legt A 60 m, B 75 m in der Minute zurück. In welcher Zeit wird B den A einholen, wenn dieser um 10 Minuten früher wegging?

War B durch x Minuten unterwegs, so war A durch $x + 10$ Minuten unterwegs; A hat 60 m $(x + 10)$mal, B hat 75 m $x$mal zurückgelegt.

Aus $60\,(x + 10) = 75\,x$ folgt $x = 40$.

2. $\sqrt[3]{a^2} \,.\, \sqrt[4]{a^3} \,.\, \sqrt[5]{a^4} : \sqrt[4]{a^5} \,.\, \sqrt[6]{a^7} = ?$

$$= \sqrt[60]{a^{133}} : \sqrt[60]{a^{145}} = \sqrt[60]{a^{-12}} = \sqrt[5]{a^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a}}.$$

3. Es ist das Volumen eines Pyramidenstumpfes abzuleiten. B, b und h sind bekannt.

Es ist $V = P - p = B\dfrac{h + x}{3} - b\dfrac{x}{3} = \dfrac{Bh}{3} + \dfrac{x}{3}(B - b)$.

Wegen $B : b = (h + x)^2 : x^2$ ist $x\sqrt{B} = (h + x)\sqrt{b}$, $x = \dfrac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$, somit

$$V = \frac{Bh}{3} + \frac{B - b}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \cdot \frac{h\sqrt{b}}{3} = \frac{h}{3}\left[B + (\sqrt{B} + \sqrt{b})\sqrt{b}\right] = \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b).$$

4. Auf der Geraden $4x - y = 6$ ist derjenige Punkt zu bestimmen, der von den Punkten A (0, 10) und B (7, 9) gleich weit entfernt ist.

Der gesuchte Punkt ist der Durchschnittspunkt der Streckensymmetrale von AB und der gegebenen Geraden.

Der Richtungskoeffizient von $AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{7}$; der Halbierungspunkt von AB hat die Koordinaten $\left(\frac{7}{2}, \frac{19}{2}\right)$. Die Gerade $y - \frac{19}{2} = 7\left(x - \frac{7}{2}\right)$ schneidet sich mit $4x - y = 6$ im Punkte D (3, 6).

Nr. 10.

1. Die Seiten eines rechtwinkeligen Dreieckes bilden eine arithmetische Reihe; der Flächeninhalt ist $= 294\,dm^2$; wie groß sind die Seiten?

Die Seiten sind: $x - d$, x, $x + d$ und es ist $(x + d)^2 = (x - d)^2 + x^2$, also $x = 4d$. Aus $294 = \frac{x(x-d)}{2} = 6d^2$ erhält man $d = 7$; die Seiten des Dreieckes sind: 21, 28, 35 dm.

2. Um wieviel muß man den Radius eines gleichseitigen Zylinders vergrößern, damit bei ungeänderter Höhe die Oberfläche des neuen Zylinders 8mal so groß wird?

$O_1 = 2r^2\pi + 2r\pi \,.\, 2r = 6r^2\pi.$

$O_2 = 48r^2\pi = 2(r + x)^2\pi + 2(r + x)\pi \,.\, 2r$; die Auflösung der Gleichung $(r + x)^2 + 2r(r + x) = 24r^2$ gibt $r + x = 4r$, also $x = 3r$.

3. Bestimme die Unbekannte aus der Gleichung:

$$\log x = \log a + n \log b - \log(c + d) - \tfrac{3}{4} \log e.$$

Aus $\log x = \log a + \log b^n - \log(c + d) - \log e^{\frac{3}{4}}$

$$= \log \frac{a b^n}{(c + d)\sqrt[4]{e^3}} \text{ folgt } A = \frac{a b^n}{(c + d)\sqrt[4]{e^3}}.$$

4. Konstruiere die Kurve aus der Gl. $x^2 - 42x + y^2 + 41 = 0$ und bestimme ihre Durchschnittspunkte mit den Koordinatenachsen!

$x^2 - 42x + 21^2 + y^2 = -41 + 21^2$, d. i. $(x - 21)^2 + y^2 = 20^2$ ist eine Kreisgleichung; K (21, 0, 20).

Für den Durchschnitt mit der x-Achse ist $y = 0$. Dazu gehört $x_1 = 1$, $x_2 = 41$.
„ „ „ „ „ x-Achse „ $x = 0$; das y ist imaginär, d. h. die y-Achse wird nicht geschnitten. Die Figur zeigt dies.

Nr. 11.

1. Die Länge, Breite und Höhe eines rechtwinkeligen Parallelepipedes bilden eine geometrische Reihe; bestimme diese Dimensionen, wenn die Oberfläche $O = 252$ und das Volumen $V = 216$ ist.

Aus $216 = u \,.\, uq \,.\, uq^2$ erhält man $uq = 6$.

$252 = 2(u^2q + u^2q^2 + u^2q^3)$ gibt: $126 = u^2q(1 + q + q^2)$.

Wird u^2 durch $\frac{36}{q^2}$ ersetzt, die erhaltene Gleichung aufgelöst, erhält man $q = 2$ oder $\frac{1}{2}$.

2. $3 \,.\, 3^x + 4 \,.\, 3^{x+1} + 5 \,.\, 3^{x+2} = 202{\cdot}5 \,.\, 2^x$ ist ohne Logarithmen aufzulösen.

$3 \,.\, 3^x + 12 \,.\, 3^x + 5 \,.\, 9 \,.\, 3^x = 202{\cdot}5 \,.\, 2^x$

$$60 \,.\, 3^x = 202{\cdot}5 \,.\, 2^x\text{, also } \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2025}{600} \overset{25}{=} \frac{81}{24} \overset{3}{=} \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3;\; x = 3.$$

3. In ein zum Teil mit Wasser gefülltes Gefäß von der Form eines gleichseitigen Zylinders mit $r = 5\sqrt{5}\,cm$ wird ein kleinerer gleichseitiger Zylinder geworfen. Wie groß ist dessen Radius, wenn dadurch das Wasser um $2\,cm$ gestiegen ist?

Das Volumen des verdrängten Wassers $= 2x^3\pi$ hat die Form eines geraden Zylinders mit der Basis $r^2\pi = 125\pi$ und der Höhe $h = 2\,cm$. Aus $125\pi \,.\, 2 = 2x^3\pi$ folgt $x = \sqrt[3]{125} = 5\,cm$.

4. Es sind die Punkte: $A\,(-10, 7)$, $B\,(5, -13)$, $C\,(14, 17)$ gegeben; bestimme den vierten Punkt D so, daß $ABCD$ ein Parallelogramm wird!

Die Diagonalen eines Parallelogrammes halbieren einander im Punkte O

O als Mitte von AC hat die Koordinaten $\frac{-10 + 14}{2} = 2$, $\frac{7 + 17}{2} = 12$.

O „ „ „ BD „ „ „ $\frac{5 + x}{2}$, $\frac{-13 + y}{2}$.

$\frac{5 + x}{2} = 2$ gibt $x = -1$;

$\frac{y - 13}{2} = 12$ „ $y = 37$.

Nr. 12.

1. Wie schwer ist eine Kugel, die im Wasser zum größeren Teile eintaucht und so schwimmt, daß sie an der Oberfläche des Wassers einen Kreis von $48\,cm$ Umfang bildet, während ein größter Kreis den Umfang $73\,cm$ hat?

Der Radius der Kugel $= \frac{55}{2\pi}$ *cm*. Die Höhe h des Kugelabschnittes ist um $u = \sqrt[2]{r^2 - \varrho^2} = \sqrt{\frac{(73+48)(73-48)}{4\pi^2}} = \frac{55}{2\pi}$ größer als der Kugelradius r; also $h = \frac{64}{\pi}$ *cm* Volumen des Kugelabschnittes $= \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$.

2. $\sqrt{a^{7-3x}} \cdot \sqrt[3]{a^{x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{5x-7}} \cdot \sqrt[5]{a^{7-2x}} = 1$ aufzulösen.

Wird die Gleichung zur 60. Potenz erhoben, so erhält man:

$$(a^{7-3x})^{30} \cdot (a^{x+1})^{20} \cdot (a^{5x-7})^{15} \cdot (a^{7-2x})^{12} = 1 = a^0.$$

Aus $a^{209-19x} = a^0$ folgt $19x = 209$, $x = 11$.

3. Einen rechten Winkel so zu teilen, daß die Differenz der Sinus seiner Teile $= \frac{1}{3}$ ist.

$\sin x - \sin(90 - x) = \frac{1}{3}$ gibt $\sin x - \frac{1}{3} = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Durchs Quadrieren erhält man: $\sin^2 x - \frac{1}{3}\sin x = \frac{4}{9}$; nur die Wurzel $\sin x = \frac{1+\sqrt{17}}{6}$ ist zu brauchen.

4. Wie lang ist derjenige Durchmesser der Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$, welcher durch den Ellipsenpunkt $M\ (4, +y)$ hindurchgeht?

Für $x = 4$ ist $25y^2 = 400 - 256 = 144$, also $y = \pm\frac{12}{5}$.

Der Ellipsendurchmesser hat also die Endpunkte $\left(4, \frac{12}{5}\right)$ und $\left(-4, -\frac{12}{5}\right)$ seine Länge $= \sqrt{8^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2} = 8\sqrt{1 + \frac{9}{25}} = \frac{8}{5}\sqrt{34}$.

Nr. 13.

1. Ein gleichschenkeliges Dreieck habe den Flächeninhalt $F = 61460\ dm^2$ und den $\sphericalangle \alpha = 119°\,36'\,30''$. Wie groß sind seine Seiten?

Aus $F = \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ erhält man $a = \sqrt{4F \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 650\ dm$.

$\frac{a}{2} = b \sin \frac{\alpha}{2}$ gibt $b = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = 376\ dm$.

2. Wie lautet die stetige Proportion, wenn die Summe der drei Zahlen 39 und die Summe ihrer Quadrate 819 beträgt?

$a+b+c=39, \quad a^2+b^2+c^2=819, \quad b^2=ac.$

$$\left.\begin{array}{r}(a+c)^2=(39-b)^2\\ 2ac=2b^2\end{array}\right\} \text{subtrahiert, gibt: } \begin{array}{l} a^2+c^2=1521-78b-b^2 \\ \text{d. i.: } 819-b^2=1521-78b-b^2\end{array} \quad b=9.$$

Proportion: $27:9=9:3$.

3. Auf der Grundfläche einer Halbkugel ($r=10\,cm$) steht ein 30 cm hoher gerader Kegel; wie groß ist die außerhalb des Kegels liegende Zone?

Ist ϱ der Radius des Schnittkreises der Kegelfläche mit der Kugelfläche, x die Höhe der Zone, so ergibt sich aus $r:\varrho=30:(30-x)$ $3\varrho=30-x$, d. i. $3\sqrt{100-x^2}=30-x$, daraus $x=6$.

Zone $=2r\pi h=120\pi$.

4. Wie lautet die Scheitelgleichung der Parabel, die von der Geraden $4y-3x=8$ berührt wird?

Eine Gerade ist dann Tangente einer Parabel, wenn die Relation $p=2ab$ besteht; $y=\frac{3}{4}x+2$ gibt $a=\frac{3}{4}$, $b=2$; es ist also $p=3$; die gesuchte Gleichung lautet $y^2=6x$.

Nr. 14.

1. $\sqrt[5]{c^4\sqrt[3]{c^2}}\,.\,\sqrt[4]{c\sqrt{c^3}}:\sqrt[24]{c^{41}}=?$

$$=\sqrt[15]{c^{12}\,.\,c^2}\,.\,\sqrt[8]{c^4\,.\,c^3}:\sqrt[24]{c^{41}}=\sqrt[120]{c^{112}\,.\,c^{105}}:\sqrt[120]{c^{205}}=\sqrt[120]{c^{12}}=\sqrt[10]{c}.$$

2. $\log 1838-\log(31^x-42)=\log 2$ aufzulösen.

$\log 1838-\log 2=\log(31^x-42)$, daher $\frac{1838}{2}=31^x-42$;

$31^x=961=31^2$ und $x=2$.

3. Ein sechsseitiges Prisma mit regulärer Basis ist 2·74 dm hoch und enthält 455·6 dm^3; wie groß ist die Grundkante?

$455{\cdot}6=6\,.\,\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\,.\,2{\cdot}74$; also $a^2=\frac{455{\cdot}6}{4{\cdot}11\sqrt{3}}$;

$$\begin{array}{rl}\log a = & 2{\cdot}65858\\ & \left.\begin{array}{r}0{\cdot}61384\\ \underline{0{\cdot}23856}\end{array}\right\}\\ & 1{\cdot}80618:2=0{\cdot}90309. \quad a=8\,dm.\end{array}$$

4. $A(3,5)$, $B(-3,3)$, $C(4,y)$ sind Eckpunkte eines gleichschenkeligen Dreieckes mit der Spitze C. Wie groß ist y?

Es ist $CA=CB$, also $\sqrt{(4-3)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(4+3)^2+(y-3)^2}$

$1+y^2-10y+25=49+y^2-6y+9, \quad y=-8.$

Nr. 15.

12 III d

1. Zu wieviel Prozent sind 4900 K angelegt, wenn sie in $5\frac{1}{2}$ Jahren ebensoviel Zinsen bringen wie 7700 K in $4\frac{1}{2}$ Jahren zu einem um 1 kleineren Zinsfuße?

Die Zinsen vom 1. Kapital betragen $49 \times 5\frac{1}{2} x$;
" " " 2. " " $77 \times 4\frac{1}{2}(x-1)$;
Aus $49 \times 11x = 77 \times 9(x-1)$ folgt $x = 4\frac{1}{2}$.

2. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma$ in ein Produkt zu verwandeln.

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

3. In einer reg. vierseitigen Pyramide, deren Grundkante a und deren Seitenkante $\frac{3}{4}a$ ist, steht ein Würfel so, daß seine obere Grundfläche eine Durchschnittsfigur der Pyramide ist. Welchen Inhalt hat der Würfel?

Die Höhe der Pyramide beträgt $\sqrt{\frac{9}{16}a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{4}$.

Aus $a^2 : x^2 = \frac{a^2}{16} : \left(\frac{a}{4} - x\right)^2$, d. i. $a : x = \frac{a}{4} : \left(\frac{a}{4} - x\right)$ folgt: $a = 5x$, $x = \frac{a}{5}$.

$$V = \frac{a^3}{125}.$$

12 III d

4. Wie lautet die Gleichung des Lotes, das vom Punkte $N(3, 7)$ auf die Gerade $4x - 3y = 6$ gefällt ist; wie lang ist das Lot?

Die Gleichung lautet $y - 7 = -\frac{3}{4}(x-3)$ oder $4y + 3x = 37$.
Die Länge des Lotes $= 3$.

Nr. 16.

1. Der $\sphericalangle\alpha = 63°$ an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreieckes wird in 3 gleiche Teile geteilt. Wie groß sind die Stücke der Grundlinie $a = 30$?

Durch den $\sphericalangle\alpha$ ist der Basiswinkel $\beta = 58°\ 30'$ bekannt und die Höhe $h = 15\, tg\ 58°\ 30'$.

Der Basiswinkel β' des inneren gleichschenkeligen Dreieckes mit der fraglichen Basis x beträgt $58°\ 30' + 21° = 79°\ 30'$.

Nun ist $\frac{x}{2} = h\ cotg\ 79°\ 30'$, also $x = 30\, tg\ 58°\ 30'\ cotg\ 79°\ 30'$.

$$\begin{aligned} \log x = {} & 1{\cdot}47712 \\ & 0{\cdot}21268 \\ & 9{\cdot}26797 - 10 \\ \hline & 0{\cdot}95777 \end{aligned}$$

$x = 9{\cdot}0734$; die äußeren Stücke der Basis des gegebenen Dreieckes betragen zusammen: $\frac{30{\cdot}90734}{2}$.

2. Bei einem rechtwinkeligen Parallelepiped sind alle Seitenflächen angegeben: $F_1 = 135$, $F_2 = 345$, $F_3 = 207$; wie groß sind die Kanten?

$$\left.\begin{array}{r}\text{Aus } 135 = ab \\ 345 = ac \\ 207 = bc\end{array}\right\} \text{ folgt } (abc)^2 = 5 \,.\, 27 \,.\, 5 \,.\, 69 \,.\, 9 \,.\, 23$$

also $abc = 5 \,.\, 23 \,.\, 27$; $\qquad a = 15,\ b = 9,\ c = 23.$

3. Für welche Winkel ist:

$sin^2 x + cos^2 x + tg^2 x + cotg^2 x + sec^2 x + cosec^2 x = 7$?

Es ist $tg^2 x + cotg^2 x + (1 + tg^2 x) + 1 + cotg^2 x = 6.$

$$tg^2 x + \frac{1}{tg^2 x} = 2, \quad tg^4 x - 2\, tg^2 x = -1.$$

$tg^2 x = 1, \qquad tg x = \pm 1; \qquad x_1 = 45°, \qquad x_2 = 135°.$

4. Berechne die Seiten eines Dreieckes aus den Koordinaten zweier Eckpunkte $A(-4, 3)$ und $B(5, 11)$ und den des Schwerpunktes $S(-10, 7)$!

$$-10 = \frac{-4 + 5 + x_3}{3} \text{ gibt } x_3 = -31. \quad 7 = \frac{3 + 11 + y_3}{3} \text{ gibt } y_3 = 7,$$

also $C(-31, 7)$. Darnach ist $AB = \sqrt{81 + 64} = \sqrt{145}.$

$$AC = \sqrt{27^2 + 4^2}; \quad BC = \sqrt{36^2 + 4^2}.$$

Nr. 17.

1. Ein Geflügelhändler kaufte x Gänse um 6000 K; er behielt davon 20 Stück und verkaufte jedes Stück von den übrigen um 15 K teuerer, so daß er wieder 6000 K löste. Wie viel Gänse hat er gekauft?

x Gänse um 6000 K, so kostete 1 Gans $\frac{6000}{x}$ K und beim Verkaufe $\left(\frac{6000}{x} + 15\right) K$. Aus $\left(\frac{6000}{x} + 15\right)(x - 20) = 6000$ erhält man $x^2 - 20x + 8000 = 0$;

$$x = 10 + 90 = 100\ K.$$

2. Die Wurzeln einer Gleichung des 4. Grades bilden eine arithmetische Reihe. Bestimme die Gleichung, wenn die Summe ihrer Wurzeln $= 0$ und die Summe ihrer Quadrate $= 20$ ist.

Die Wurzeln sind mit: $x - 3d$, $x - d$, $x + d$, $x + 3d$ zu bezeichnen; ihre Summe $= 0$.

Die Summe ihrer Quadrate: $x^2 + 9d^2$, $x^2 + d^2$, $x^2 + d^2$, $x^2 + 9d^2 = 20$ (die doppelten Produkte geben bei der Addition 0). $4x^2 + 20d^2 = 20$ oder $x^2 + 5d^2 = 5$, gibt $x = 0$, $d^2 = 1$, $d = \pm 1$.

Die Wurzeln sind: -3, -1, $+1$, $+3$ und die Gleichung $(x + 3)(x - 3)(x - 1)(x + 1) = x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$

3. Aus einem Zylinder wird durch 2 Schnitte, welche in der Achse des Zylinders einen Winkel $\varphi = 36^\circ$ bilden, ein Stück herausgeschnitten. Wie groß ist der Ausschnitt und seine Oberfläche, wenn $r = 9$ *cm* und die Höhe des Zylinders 30 *cm* ist?

Der Ausschnitt beträgt wegen $\varphi = 36^\circ$ den 10. Teil des ganzen Zylinders:

$$V = \frac{r^2 \pi h}{10}.$$

Die Oberfläche besteht aus 2 Grundflächen zu $\frac{r^2\pi}{10}$, den 2 Schnittflächen: zu rh und der Mantelfläche $\frac{2r\pi h}{10}$.

4. Durch eine Grundkante eines Würfels wird unter $\sphericalangle \alpha = 36^\circ\ 52'\ 12''$ gegen die Basis eine Ebene gelegt; die Fläche der Schnittfigur beträgt 20 cm^2. Wie groß ist das Volumen des Würfels?

Ist y die Hypotenuse zur Würfelkante x, so ist $xy = 20 = y^2 \cos \alpha$, $y^2 = 25$, $x = 4$, also $V = 4^3 = 64\ cm^3$.

Nr. 18.

1. $9 . 5^x + 8 . 5^{x+1} = 1225$ aufzulösen.

$9 . 5^x + 40 . 5^x = 1225$, $5^x = 1225 : 49 = 25 = 5^2$; $x = 2$.

2. Zwei Schnittkreise einer Kugel haben die Radien $\varrho_1 = 7$ *cm*, $\varrho_2 = 15$ *cm*; ihre Entfernungen vom Kugelmittelpunkte verhalten sich wie $6 : 5$; wie groß ist der Kugelradius?

Der Zentralabstand zu ϱ_1 beträgt $6x$, der zu ϱ_2 $5x$; ist r der Kugelradius, so ist $r^2 = 49 + 36x^2$ und auch $= 225 + 25x^2$; $11x^2 = 176$ gibt $x = 4$; darnach $r^2 = 49 + 576 = 625$ und $r = 25$ *cm*.

3. Zur Auflösung eines Dreieckes sind die Größen: a, b, $\sphericalangle\gamma$ gegeben. Wie findet man die anderen Umfangsstücke?

Sind die Seiten a und b durch 1- oder 2ziffrige Zahlen ausgedrückt, so kann man den Cosinussatz anwenden: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$; hierauf den Sinussatz: $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

Sind jedoch a und b mehrziffrige Zahlen (wo das Quadrieren a^2, b^2 und das Produkt $2ab$ umständlich ist), benützt man den Tangentensatz:

$$(a + b) : (a - b) = tg\frac{\alpha+\beta}{2} : tg\frac{\alpha-\beta}{2},$$

woraus man, da $tg\frac{\alpha+\beta}{2} = cotg\frac{\gamma}{2}$ ist, $\frac{\alpha-\beta}{2}$ bestimmen kann; durch Hinzunahme von $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}$ ist α, β bestimmt. Nach dem Sinussatz findet man dann c.

4. Wann ist $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ ein Maximum, wann ein Minimum?

Wird $y' = 6x - 18x + 12 = 0$ gesetzt, erhält man $x_1 = 2$, $x_2 = 1$; Maximum (Minimum) tritt ein, wenn $y'' = 12x - 18$ für die gefundenen Werte für x eine negative (positive) Zahl gibt. $x_1 = 2$ gibt ein Minimum, $x_2 = 1$ ein Maximum.

Nr. 19.

1. Die Summe der beiden ersten Glieder einer geometrischen Reihe beträgt 28, die Summe der beiden folgenden 252; wie heißt die Reihe?

$$\left.\begin{array}{l} u + uq = u(1+q) = 28 \\ uq^2 + uq^3 = uq^2(1+q) = 252 \end{array}\right\} \frac{252}{28} = q^2,\ q = +3.$$

Die Reihe lautet: 7, 21, 63, 189 . . .

2. Die Gesamtoberfläche eines abgekürzten Kegels beträgt $2450\,\pi$; wie groß ist die Höhe des Körpers, wenn $R = 28$, $r = 21$ ist?

$2450\pi = R^2\pi + r^2\pi + (R+r)\pi s$, also $s = 25$ und $h = \sqrt{s^2 - (R-r)^2} = 24$.

3. $\left.\begin{array}{r} x + y = 45^\circ \\ 2\,tgx = 3\,tgy \end{array}\right\}$ aufzulösen.

$tg(x+y) = \dfrac{tgx + tgy}{1 - tgx\,tgy} = 1$. tgy durch $\dfrac{2}{3}\,tgx$ ersetzt, gibt die Gleichung

$$tg^2x + \frac{5}{2}\,tgx = \frac{3}{2}, \text{ somit } tgx = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ -3 \text{ (hier nicht zu brauchen).} \end{cases}$$

$tgx = 0{\cdot}5$, $lg\,tgx = 9{\cdot}69897 - 10$. $\qquad x = 26^\circ\ 33'\ 53''$.

$\dfrac{37}{6000} : 53 = 113''$ $\qquad$ somit $y = 18^\circ\ 26'\ 7''$.

4. Wie lautet die Gleichung eines Kreises, welcher durch A (3, 6) geht und beide Koordinatenachsen berührt?

In der Gleichung $(3-p)^2 + (6-q)^2 = r^2$ soll $p = r = q$ sein; diese Substitution gibt $r^2 - 18r = -45$, $r_1 = 15$, $r_2 = 3$. Die Gleichungen lauten:

$$(x-15)^2 + (y-15)^2 = 15^2$$
$$\text{und } (x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2.$$

Nr. 20.

1. Verdoppelt man die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vieleckes, so wächst dadurch jeder Winkel desselben um 10°. Wie groß ist die Anzahl der Seiten?

Im n-Eck beträgt jeder Polygonwinkel $\dfrac{(2n-4)R}{n}$;

„ $2n$-Eck „ „ „ $\dfrac{(4n-4)R}{2n}$.

Aus $\dfrac{(4n-4)R}{2n} - 10^\circ = \dfrac{(2n-4)R}{n}$ erhält man $n = 18$.

2. Die Grundkanten eines rechtwinkeligen Parallelepipedes betragen $a = 76\ cm$, $b = 16\ cm$, die Raumdiagonale $d = 84\ cm$; wie groß ist die Oberfläche?

$c^2 = d^2 - a^2 - b^2 = 7056 - 5776 - 256 = 1024$; $c = 32$.
Oberfläche $= 2\,(ab + ac + bc)$.

3. Unter allen Hohlmaßen von der Form eines geraden Zylinders mit der Oberfläche $O = 84{\cdot}78\ dm^2$ dasjenige zu bestimmen, welches den größten Inhalt hat. $\pi = 3{\cdot}14$.

Aus $84{\cdot}78 = x^2\pi + 2x\pi \,.\, y$ kann man y durch x ausdrücken:
$x^2 + 2xy = \frac{84{\cdot}78}{3{\cdot}14} = 27$, also $y = \frac{27 - x^2}{2x}$. Nun ist das Volumen $V = x^2\pi y$ und

$$\frac{V}{\pi} = x^2 \cdot \frac{27 - x^2}{2x}.$$

$\frac{2V}{\pi} = 27x - x^3$ wird Max., wenn $27 - 3x^2 = 0$, also $x = 3$ wird; in diesem Falle ist auch $y = 3$.

4. In welchem Verhältnisse teilt die Gerade $y = 3x + 9$ die Strecke zwischen den Punkten A (0,48) und B (36,0)?

Die Strecke AB hat die Länge $= \sqrt{36^2 + 48^2} = \sqrt{12^2\,(3^2 + 4^2)} = 12 \,.\, 5 =$ $= 60$; ihre Gleichung lautet: $y - 48 = -\frac{4}{3}x$:

Der Durchschnittspunkt M der Strecke mit der Geraden ergibt sich aus: $y = -\frac{4}{3}x + 48 = 3x + 9$, also $x = 9$, $y = 36$.

Nun ist $AM = \sqrt{(9-0)^2 + (36-48)^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$. Die Strecke ist im Verhältnisse $1:3$ geteilt.

Nr. 21.

1. $\left(x^{\frac{2}{3}} \,.\, x^{\frac{3}{4}} : x^{-\frac{4}{5}}\right)^{\frac{20}{19}} = ?$

$$= \left(x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}}\right)^{\frac{20}{19}} = \left(x^{\frac{133}{60}}\right)^{\frac{20}{19}} = x^{\frac{133}{57}} = x^{\frac{7}{3}} = x^2 \,.\, x^{\frac{1}{3}} = x^2\sqrt[3]{x}.$$

2. Bei einem Kreisausschnitt ist $r = 9$ und ein Zentriwinkel $\alpha = 102°\ 6'\ 48''$; wie groß ist die zum Winkel α gehörige Sehne und der Kreisabschnitt?

Es ist $\frac{s}{2} = r\,sin\,\frac{\alpha}{2}$; $s = 14$. $Ab = Aus - \triangle$.

3. Berechne den kleinsten Winkel des Dreieckes mit den Seiten $a = 99\ cm$, $b = 78\ cm$, $c = 67\ cm$!

Der kleinsten Seite c liegt der kleinste Winkel γ gegenüber; zu seiner Berechnung benützt man die Formel

$$tg\,\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.\qquad \begin{array}{l}2s=244\\ s=122\end{array}\qquad tg\,\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{23.44}{122.55}}=\sqrt{\frac{92}{610}}.$$

$$\begin{array}{l}log\,tg\,\frac{\gamma}{2}=1{\cdot}96379\\ \qquad\quad \underline{2{\cdot}78533}\\ \qquad (9{\cdot}17846-10):2=9{\cdot}58923-10\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{869}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 5400:63=86''\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{l}\frac{\gamma}{2}=21^\circ\,13'\,26''\\ \gamma=42^\circ\,26'\,52''\end{array}$$

4. Berechne die Koordinaten der Durchschnittspunkte der Linien:

$$\begin{cases}x-5y+60=0\\ x^2-y^2=144\end{cases}$$

Für den Durchschnitt besteht folgende Relation:

$$25y^2-600y+3600-y^2=144.\qquad\qquad y=\frac{300}{24}\pm\sqrt{\frac{90000-82944}{24^2}}=\begin{cases}16\\ 9\end{cases}$$

Zu $y_1=16$ gehört $x_1=5y-60=20$.

„ $y_2=9$ „ $x_2=5y-60=-15$.

Nr. 22.

1. Zwei Polygone haben zusammen 21 Seiten; das eine hat doppelt soviel Diagonalen als das andere; welche Polygone sind es?

Das erste Polygon soll x Seiten haben; dann hat es $\frac{x(x-3)}{2}$ Diagonalen.

Das zweite Polygon hat dann $21-x$ Seiten und $\frac{(21-x)(18-x)}{2}$ Diagonalen.

$(21-x)(18-x)=2x(x-3)$ gibt $x^2+33x=378$, also $x=\frac{-33}{2}\pm\frac{51}{2}=$
$=\begin{cases}9\\ -42\end{cases}$ nicht zu brauchen.

Die Polygone sind ein 9- und ein 12-Eck.

2. Bei einem geraden dreiseitigen Prisma sind die drei Seitenflächen: $f_1=25$, $f_2=29$, $f_3=36$ und die Grundfläche $=10$ gegeben; wie groß ist der Kubikinhalt?

$$f_1=ah=25,\ \text{also}\ a=\frac{25}{h}.$$

$$f_2=bh=29,\quad „\quad b=\frac{29}{h}.$$

$$f_3=ch=36,\quad „\quad c=\frac{36}{h}.$$

Aus den Seiten a, b, c der Grundfläche läßt sich letztere berechnen; es ist also

$$10=\sqrt{\frac{45}{h}\cdot\frac{20}{h}\cdot\frac{16}{h}\cdot\frac{9}{h}}=\frac{360}{h^2}.$$

$h=6$, somit Volumen $=60$.

3. Welcher spitze Winkel genügt der Gleichung: $1-sin\,x=$ $=2\,(1-cos\,x)$?

$1 - sin x = 2 - 2\sqrt{1 - sin^2 x}$, $2\sqrt{1 - sin^2 x} = 1 + sin x$; diese Gleichung, quadriert, gibt: $sin^2 x + \frac{2}{5} sin x = \frac{3}{5}$, somit $sin x = -\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} = \begin{cases} \frac{3}{5}. \\ -1. \end{cases}$

Aus $sin x = 0{\cdot}6$ erhält man $x = 36° 52' 11''$.

4. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die von M (14, 6) den Abstand $p = 10$ hat und von der x-Achse das Stück $+ 6$ abschneidet?

Die Gerade geht durch den Punkt (6, 0); sie hat also zur Gleichung $y = a(x - 6)$.

Die Formel für den Abstand des Punktes M von dieser Geraden $10 = \frac{y_1 - a x_1 + 6a}{\sqrt{1 + a^2}}$ gibt die Gleichung $3 - 4a = 5\sqrt{1 + a^2}$ mit der einzigen Wurzel $a = \frac{-4}{3}$.

Die gesuchte Gleichung lautet: $y = \frac{-4}{3}(x - 6)$.

Nr. 23.

1. Wie groß ist der Barwert von 2735 K, wenn diese Schuld bei $3\frac{3}{4}\%$ Zinseszinsen 5 Jahre früher gezahlt wird?

Aus $2735 = A \,.\, 1{\cdot}0375^5$ folgt $log A = log 2735 - 5 log 1{\cdot}0375 = 3{\cdot}43696 - - 0{\cdot}07995 = 3{\cdot}35701$.

2. Oberfläche eines Kegels $= 40{\cdot}56\,\pi$; berechne den Radius der Basis und die Höhe des Kegels, wenn $s = 6{\cdot}5$ ist!

Aus $40{\cdot}56\pi = r^2\pi + r\pi s$ folgt $r^2 + 6{\cdot}5 r = 40{\cdot}56$, $r = -3{\cdot}25 + 7{\cdot}15 = 3{\cdot}9$. $h = \sqrt{6{\cdot}5^2 - 3{\cdot}9^2} = \sqrt{10{\cdot}4 \times 2{\cdot}6} = 5{\cdot}2$.

3. Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes mit dem Winkel $\alpha = 64°$ und dem Umfang $u = 84{\cdot}14\ cm$?

Aus $84{\cdot}14 = a + b + c = c(sin\alpha + sin\beta + sin\gamma) = c \,.\, 4 cos\frac{\alpha}{2} cos\frac{\beta}{2} cos 45°$ folgt: $c = \frac{21{\cdot}035}{cos 32° cos 13° cos 45°}$; $log c = 1{\cdot}55631$. $c = 36$.

4. Für welchen Punkt der Linie $y^2 = 15x$ schließt die Tangente mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein?

Die Gleichung der Tangente lautet: $y y_1 = \frac{15}{2}(x + x_1)$, worin $x_1 y_1$ unbekannt ist.

Aus der Bedingung $\frac{15}{2y_1} = 1$ ergibt sich $y_1 = \frac{15}{2}$, daher $x_1 = \frac{y_1^2}{15} = \frac{15}{4}$.

Nr. 24.

1. Die Diagonalen eines Rhombus verhalten sich wie 4 : 3. Verlängert man die größere um 8 *cm* und verkürzt die kleinere um 4 *cm*, so bleibt der Inhalt unverändert. Wie groß sind die Diagonalen?

Die Diagonalen lauten $4x$ und $3x$; daraus die Fläche des Rhombus

$$\frac{4x \cdot 3x}{2} = 6x^2.$$

Nach der zweiten Angabe ist $\frac{(4x+8)(3x-4)}{2} = 6x^2$.

$12x^2 + 8x - 32 = 12x^2$ gibt $x = 4$; die Diagonalen sind 16, 12 *cm*.

2. In welcher Höhe muß man eine Pyramide von der Höhe h parallel zur Basis schneiden, um $\frac{1}{3}$ derselben abzuschneiden?

$$\left.\begin{array}{l} P:p = 3:1 \text{ (nach dem Text)} \\ P:p = h^3 : x^3 \text{ (Ähnlichkeitssatz)} \end{array}\right\} h^3 : x^3 = 3:1, \qquad x = \frac{h}{\sqrt[3]{3}}.$$

3. Wie lang ist der Schatten einer 8 *m* hohen Telegraphenstange, wenn die Sonnenhöhe 42° 38′ beträgt?

$$l = 8 \operatorname{cotg} \alpha; \quad \log l = \begin{array}{r} 0{\cdot}90309 \\ +\,0{\cdot}03592 \\ \hline 0{\cdot}93901 \end{array} \quad l = 8{\cdot}69 \; cm$$

4. Bestimme die Halbachsen, den Halbparameter p und die Koordinaten der Brennpunkte von der Ellipse mit der Gleichung $16x^2 + 25y^2 = 100$!

Aus $\left(\frac{x}{\frac{5}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ sieht man $a = \frac{5}{2}$, $b = 2$;

daher $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{3}{2}$; für $x = e = \frac{3}{2}$ ist $y = p = \frac{8}{5}$.

Nr. 25.

1. Ein Kapital von 2500 K ist nach 8 Jahren bei ganzjähriger Verzinsung auf 3421·40 K angewachsen; zu wieviel Prozent wurde es verzinst?

Aus $3421{\cdot}4 = 2500 \cdot (1+p)^8$ folgt $\log(1+p) = \frac{\log 3{\cdot}53420 - 3{\cdot}39794}{8} =$ $= 0{\cdot}01703$; $1 + p = 1{\cdot}04$, $P = 4\%$.

2. Wie groß sind die Seiten eines Dreieckes mit dem Inhalt 5184 dm^2, wenn sie sich wie 9 : 10 : 17 verhalten?

Die Seiten kann man mit $9x$, $10x$, $17x$ bezeichnen; darnach ist nach der Heronschen Formel $5184 = \sqrt{18x \cdot 9x \cdot 8x \cdot x} = 36x^2$; $x^2 = 144$, $x = 12$.

Die Seiten sind also 108, 120, 204 *dm*.

3. Das Volumen eines dreiseitigen Prismas $= 6048\ cm^3$; berechne die Höhe, wenn die Basis ein rechtwinkeliges Dreieck mit der Kathete $a = 84\ cm$ und dem Winkel $\alpha = 19° \ 17' \ 23''$ ist?

Aus $V = B . h$ folgt $h = \frac{V}{B} = \frac{6048 . 2}{a b} = \frac{12096}{a^2 \, cotg \, \alpha} = \frac{12096 \, tg \, \alpha}{7056} = 0{\cdot}6\ cm.$

4. Wie groß ist der Abstand der parallelen Geraden:

$$\left.\begin{array}{l} y - x\sqrt{3} + 4 = 0 \\ y - x\sqrt{3} - 2 = 0 \end{array}\right. ?$$

Wir heben aus der 1. Geraden einen Punkt $x = 0$, also $y = -4$ heraus und bestimmen seine Entfernung p von der 2. Geraden.

Es ist $p = -\frac{y_1 - x_1\sqrt{3} - 2}{\sqrt{1+3}} = \frac{+6}{2} = 3.$

Wird umgekehrt in der 2. Geraden ein Punkt $x = 0$, also $y = 2$ gewählt und seine Entfernung von der 1. Geraden gerechnet, so erhält man:

$p = -\frac{y_1 - x_1\sqrt{3} + 4}{\sqrt{1+3}} = -\frac{6}{2} = -3.$ Die Senkrechten sind (wegen des — Zeichens) einander entgegengesetzt parallel.

Nr. 26.

1. Es ist die Gleichung $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ aufzulösen.

$(x^3 + 1) - 3x(x + 1) = 0.$

$(x + 1)(x^2 - x + 1 - 3x) = 0.$ Diese Gleichung zerfällt in $x + 1 = 0$ und $x^2 - 4x + 1 = 0$. Die Wurzeln der vorgelegten Gleichung lauten: $x_1 = -1$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ und $x_3 = 2 - \sqrt{3}$.

Aus $x_2 x_3 = 4 - 3 = 1$ sieht man, daß $x_3 = \frac{1}{x_2}$ der reziproke Wert von x_2 ist.

2. Bei einem geraden Kegelstumpf ist die untere Basis dreimal, die Mantelfläche viermal so groß als die obere Basis; unter welchem Winkel ist die Seite gegen die Basis geneigt?

Aus der Angabe $R^2\pi = 3r^2\pi$ erhält man $R = r\sqrt{3}$

„ „ „ $(R + r)\pi s = 4r^2\pi$ „ „ $s = \frac{4r^2}{R+r} = \frac{4r}{\sqrt{3}+1}.$

Nun ist $R - r = r(\sqrt{3} - 1) = s \cos \alpha$, somit

$$\cos \alpha = \frac{r(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{4r} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = 60°$$

3. Ein Kapital, welches sich die ersten 10 Jahre hindurch zu 5%, die folgenden 10 Jahre zu 4% verzinst hat, ist mit den Zinseszinsen auf 40000 K angewachsen; wie groß war dasselbe?

Der Endwert des Kapitals nach 10 Jahren: $A\ 1{\cdot}05^{10}$ ist für die folgenden 10 Jahre als Anfangswert zu betrachten; der Endwert beträgt $A . 1{\cdot}05^{10} . 1{\cdot}04^{10}$ und nach dem Text $= 40000$.

Daher $A = \frac{40000}{1{\cdot}05^{10} . 1{\cdot}04^{10}} = 16590\ K.$

4. Bestimme die Fläche des durch die Punkte $A(3, 4)$, $B(7, 8)$, $C(9, 5)$ bestimmten Dreieckes auf zwei Arten!

a) $2F = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$ gibt $2F = 3 . 3 + 7 . 1 + 9 . (-4) = -20$, also $F = 10$. Das —-Zeichen sagt, daß die Punkte A, B, C im Sinne des Uhrzeigers aufeinanderfolgen.

b) Wird $AB = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$ als Basis genommen, so hat man die dazu gehörige Höhe zu berechnen. Die Gleichung von AB lautet $y - 4 = \frac{8-4}{7-3}(x - 3)$, d. i. $y - x - 1 = 0$. Die von $C(9, 5)$ darauf Senkrechte hat die Länge $p = -\frac{y_1 - x_1 - 1}{\sqrt{1+1}} = -\frac{5 - 9 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Es ist also $F = 4\sqrt{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{2}} = 10$ (wie früher).

Nr. 27.

1. Die Gleichung $13x + 5y = 82$ in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

a) $y = \frac{82 - 13x}{5} = 16 - 2x + \frac{2 - 3x}{5} = 16 - 2x + u_1$, wobei $5u_1 = 2 - 3x$ ist; daraus

b) $x = \frac{2 - 5u_1}{3} = -u_1 + \frac{2 - 2u_1}{3} = -u_1 + u_2$, wobei $3u_2 = 2 - 2u_1$ ist; daraus

c) $u_1 = \frac{2 - 3u_2}{2} = 1 - u_2 - \frac{u_2}{2}$; $\frac{u_2}{2}$ wird dann eine ganze Zahl sein, wenn $u_2 = 2u_3$ ist; dadurch ist

c) $u_1 = 1 - 2u_3 - u_3 = 1 - 3u_3$.

b) $x = -1 + 3u_3 + 2u_3 = -1 + 5u_3$.

a) $y = 16 + 2 - 10u_3 + 1 - 3u_3 = 19 - 13u_3$.

Soll $x > 0$ sein, so muß $5u_3 > 1$, $u_3 > \frac{1}{5}$, also $u_3 = 1, 2, 3 \ldots$ sein.

Soll $y > 0$ sein, so muß $19 > 13u_3$, $u_3 < \frac{19}{13}$, also $u_3 = 1, 0, -1, -2 \ldots$ sein.

Für den einzigen gemeinsamen Wert $u_3 = 1$ ist $x = 4$, $y = 6$.

2. Die Volumina zweier ähnlicher Zylinder sind $V_1 = 42\frac{7}{8}\,m^3$, $V_2 = 11\frac{25}{64}\,m^3$; wie hoch ist jeder, wenn der eine um $15\,cm$ höher ist als der andere?

$V_1 : V_2 = (x + 0{\cdot}15)^3 : x^3$;

$\frac{343}{8} : \frac{729}{64} = (x + 0{\cdot}15)^3 : x^3$ oder $\frac{7}{2} : \frac{9}{4} = (x + 0{\cdot}15) : x$; $x = 0{\cdot}27\,m$, $x + 0{\cdot}15 = 0{\cdot}42\,m$.

3. In wieviel Jahren erreicht ein Kapital von 1200 K bei $4{\cdot}5\%$ Zinseszins den Endwert $2322{\cdot}4$ K?

Aus $2322 \cdot 4 = 1200 \,.\, 1 \cdot 045^n$ folgt $1 \cdot 045^n = \frac{2322 \cdot 4}{1200}$.

$n \,.\, 0 \cdot 01912 = 3 \cdot 36594$
$\quad - 3 \cdot 07918$
$\quad = 0 \cdot 28676$

$n = 0 \cdot 28676 : 0 \cdot 01912$
$= 28 \cdot 68 : 1 \cdot 912 = 15.$

zad (m) **4.** Berechne die Seite des Quadrates, welches der Ellipse $25x^2 + 4y^2 = 100$ eingeschrieben werden kann.

Für jeden Eckpunkt des Quadrates ist $x = y = \frac{a}{2}$;

daher $25 \cdot \frac{a^2}{4} + 4 \cdot \frac{a^2}{4} = 100$; $\quad a^2 = \frac{400}{29}$, $\quad a = \frac{20}{\sqrt{29}}$.

Nr. 28.

X 17 III **1.** $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$ aufzulösen.

$x^{\log \sqrt{x}} = 10^2$, $\log \sqrt{x} \,.\, \log x = 2$, $(\log x)^2 = 4$, $\log x = \pm 2$;

also $x_1 = 100$, $x_2 = 0 \cdot 01$

2. Die Seiten eines Dreieckes sind 68, 65, 57; wie groß ist der Radius des 1. eingeschriebenen, 2. umgeschriebenen Kreises?

Es ist $\varrho = \frac{2F}{a+b+c}$ und $r = \frac{abc}{4F}$. Die Fläche F ist bestimmt durch

$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wobei $s = \frac{68+65+57}{2} = 95$ ist.

$F = \sqrt{95 \,.\, 27 \,.\, 30 \,.\, 38} = \sqrt{19 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 19 \,.\, 2} = 19 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 6 = 1710$

1. $\varrho = \frac{1710}{95} = 18$, $\quad$ 2. $r = \frac{68 \,.\, 65 \,.\, 57}{4 \,.\, 1710} = \frac{17 \,.\, 13}{6}$.

17 III **3.** Bei einem geraden Kegel von 24 m Höhe verhält sich die Grundfläche zum Mantel wie $7:25$; bestimme das Volumen des Kegels!

Aus $r^2\pi : r\pi s = 7:25$ erhält man $s = \frac{25}{7} r$.

$s^2 = r^2 + h^2$ gibt $\frac{625}{49} r^2 = r^2 + 24^2$, d. i. $\frac{576}{49} r^2 = 24^2$ oder einfach:

$\frac{24}{7} r = 24$, somit $r = 7$.

$V = 392\,\pi\, m^3$.

4. Die durch die Punkte E (6, 8) und F (10, 0) bestimmte Strecke soll über jeden Endpunkt um ihre Hälfte verlängert werden; wie lauten die Koordinaten der neuen Endpunkte?

Die Mitte G von EF hat die Koordinaten $\frac{6+10}{2}=8$, $\frac{0+8}{2}=4$.

Ist H der Endpunkt der Verlängerung über E hinaus, so ist E die Mitte von GH; also $\frac{x+8}{2}=6$, $\frac{y+4}{2}=8$, daher $H(4, 12)$. Ist L der Endpunkt der Verlängerung über F hinaus, so ist F die Mitte von GL; somit $\frac{8+x}{2}=10$, $\frac{4+y}{2}=0$; und $L(12, -4)$.

Nr. 29.

1. Welche sechsziffrige Zahl hat die Eigenschaft, daß sie sich verdoppelt, wenn man die beiden ersten Ziffern 14 links wegnimmt und rechts anhängt?

Die sechsziffrige Zahl ist mit $140000+x$ zu bezeichnen, wobei x eine vierziffrige Zahl bedeutet. Aus $x \,.\, 100+14=2\,(140000+x)$ erhält man $x=2857$. Die Zahl lautet: 142857.

2. Wie groß sind die Katheten (a, b) eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Hypotenuse 41 dm und dessen Flächeninhalt 180 dm^2 ist?

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2&=1681 \\ 4\cdot\frac{ab}{2}&=720 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{durch Addition: } (a+b)^2=2401 \\ &\quad\text{„} \quad \text{Subtraktion: } (a-b)^2=961 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a+b&=49 \\ a-b&=31 \end{aligned}\right\} \text{gibt } a=30,\ b=9.$$

3. In welcher Höhe muß eine Halbkugel (r) parallel zur Basis geschnitten werden, damit beide Teile eine gleich große Oberfläche haben?

Ist x der Zentralabstand des Schnittes (ϱ), so beträgt die gesamte Oberfläche des unteren Teiles $r^2\pi+\varrho^2\pi+2r\pi \,.\, x$ und die des oberen Teiles $\varrho^2\pi+2r\pi\,(r-x)$.

Aus $r^2\pi+2r\pi x=2r\pi\,(r-x)$ ergibt sich $x=\frac{r}{4}$.

4. Für ein Haus bietet A 32000 K bar, B 38400 K nach 4 Jahren. Wer bietet mehr, wenn man sein Kapital zu $4\frac{3}{4}$% anlegen kann?

Sollen zu verschiedenen Zeiten fällige Kapitalsbeträge miteinander verglichen werden, so muß man sie auf denselben Zeitpunkt reduzieren. Wir fragen also, welchen Endwert wird das Kapital 32000 K am Ende des 4. Jahres haben?

$E=32000 \,.\, 1{\cdot}0475^4$. $\qquad log\, E=4{\cdot}50515$ $\qquad E=38552{\cdot}6\ K$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}08060 \\ \hline 4{\cdot}58575 \\ 69 \\ \hline 60\,;\,11=55 \\ 5 \end{array}$$

A bietet mehr.

Nr. 30.

1. *B* legt 7500 *K* zu 5⁰/₀ und gleichzeitig 3700 *K* zu $4\frac{1}{2}$⁰/₀ an; in wieviel Jahren wird er von beiden Kapitalien 4332 *K* an Zinsen einnehmen?

In x Jahren erhält er vom 1. Kapital $75 . 5 . x$ Kronen Zinsen;

„ „ „ „ „ „ 2. „ $37 . \frac{9}{2} x$ „ „

Aus $375x + \frac{333}{2} x = 4332$ erhält man $x = 8$ Jahre.

d

2. Einer Kugel (r) wird ein gleichseitiger Zylinder und ein gleichseitiger Kegel umgeschrieben; wie verhalten sich die Volumina dieser Körper zueinander?

Es ist $V_1 = \frac{4}{3} r^3\pi$, $V_2 = r^2\pi . 2r = 2r^3\pi$.

$V_3 = R^2\pi . \frac{h}{3}$ wobei $h = R\sqrt{3} = 3r$, also $R = r\sqrt{3}$ ist, demnach $V_3 = 3r^2\pi . r = 3r^3\pi$. $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{4}{3} : 2 : 3 = 4 : 6 : 9$.

d

3. Zwei Winkel eines Dreieckes sind gegeben durch die Gleichungen: $4^{tg x + tg y} = 8$ und $16^{tg^2 x - tg^2 y} = 8$; wie groß ist der dritte Winkel?

$2^{2(tg x + tg y)} = 2^3$ gibt $tg x + tg y = \frac{3}{2}$.

$2^{4(tg^2 x - tg^2 y)} = 2^3$ gibt mit Berücksichtigung der ersten Gleichung: $tg x - tg y = \frac{1}{2}$.

Daraus folgt: $tg x = 1$, $x = 45°$

$tg y = 0{\cdot}5$, $log\,tg y = 9{\cdot}69897 - 10$, $y = 26° 33' 53''$.

37
6000 : 53 = 113''
70
170

4. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch M (7, 5) geht und dessen Mittelpunkt im Durchschnittspunkte der Geraden $6x - y = 16$ und $7x - 5y = 11$ liegt?

$$\left.\begin{aligned} 30x - 5y &= 80 \\ 7x - 5y &= 11 \end{aligned}\right\} \text{ gibt } x = 3,\ y = 2; \text{ also } r = \sqrt{(7-3)^2 + (5-2)^2} = 5.$$

Die Gleichung des Kreises: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Nr. 31.

X (m) **1.** Wieviele Glieder müssen zwischen $8\frac{3}{4}$ und $10\frac{1}{2}$ eingeschaltet werden, wenn die Summe der dadurch entstehenden arithmetischen Reihe $211\frac{3}{4}$ betragen soll? Wie lautet die neue Reihe?

Ist n die Anzahl der zu interpolierenden Glieder, so ist

$$211\tfrac{3}{4} = (8\tfrac{3}{4} + 10\tfrac{1}{2})\,\frac{n+2}{2}, \text{ also } n = 20.$$

$10\frac{1}{2}$ ist also das 22. Glied einer arithmetischen Reihe; somit

$$10\tfrac{1}{2} = 8\tfrac{3}{4} + 21d, \text{ daraus } d = \tfrac{1}{12}.$$

Die neue Reihe lautet: $8\frac{9}{12}$, $8\frac{10}{12}$, $8\frac{11}{12}$, $9 \ldots$

d **2.** Um einen Würfel mit der Kante x, wobei x der Gleichung $9^{x-2} - 3^{x+1} = 4374$ entspricht, wird eine Kugel beschrieben. Es ist der Radius dieser Kugel zu rechnen.

Aus $3^{2x-4} - 3 \,.\, 3^x = 4374$ folgt: $3^{2x} - 243 \,.\, 3^x = 354294$; $3^x = \dfrac{243 \pm 1215}{2} = 729$. $729 = 9^3 = 3^6$, also $x = 6$. Der Radius der Kugel $= \frac{1}{2}$ Diagonale des Würfels, d. i.: $= \dfrac{x}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

3. Zur Berechnung der Hypotenuse (c) eines rechtwinkeligen Dreieckes ist $c - a = 9$ und $\beta = 14^\circ\ 51'\ 46''$ gegeben.

$$c - c\cos\beta = 9$$
$$c(1 - \cos\beta) = 9$$
$$c \,.\, 2\sin^2\frac{\beta}{2} = 9$$
$$c = \frac{9}{2\sin^2 7^\circ\, 25'\, 53''}$$

$$\begin{array}{r} \log c = 0{\cdot}95424 \\ 0{\cdot}30103 \\ \left.\begin{array}{r} 9{\cdot}11173 - 10 \\ 9{\cdot}11173 - 10 \end{array}\right\} \\ \hline 2{\cdot}42975 \end{array}$$

$$c = 269.$$

d **4.** Die Gerade $3x - 4y + 30 = 0$ ist Tangente eines Kreises. Wie lautet die Mittelpunktgleichung dieses Kreises?

Man vergleicht die gegebene Gleichung $y = \dfrac{3x+30}{4}$ mit der Gleichung der Tangente an $x^2 + y^2 = r^2$. Aus $xx^1 + yy^1 = r^2$ folgt: $y = \dfrac{r^2 - xx^1}{y^1}$. Es ist also $\dfrac{3}{4} = -\dfrac{x^1}{y^1}$ und $\dfrac{15}{2} = \dfrac{r^2}{y^1}$; $y^1 = \dfrac{2r^2}{15}$ und $x^1 = \dfrac{r^2}{10}$ sind Punkte des Kreises, folglich $\dfrac{4r^2}{225} + \dfrac{r^2}{100} = 1$. $r = \dfrac{150}{25} = 6$.

Nr. 32.

d **1.** Der Bruch $\dfrac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}$ ist mit rationalem Nenner darzustellen.

Wird der Bruch mit $(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y})$ erweitert, so erhält man

$$\frac{x + y - 2\sqrt{x^2 - y^2} + x - y}{x + y - (x - y)} = \frac{2x - 2\sqrt{x^2 - y^2}}{2y} = \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{y}.$$

2. Die Grundkanten eines dreiseitigen Prismas betragen: 75 *cm*, 61 *cm*, 34 *cm*; die Seite $s = 80$ *cm* ist unter dem Winkel $\varepsilon = 87° \, 44'$ gegen die Basis geneigt; wie groß ist das Volumen des diesem Prisma eingeschriebenen Zylinders?

Es ist $V = r^2 \pi s \sin \varepsilon$; r als Radius des der Basis eingeschriebenen Kreises ist $= \frac{2F}{a+b+c} = \frac{1020 \, . \, 2}{170} = 12$; daher $V = 144\pi \, . \, s \, . \, \sin \varepsilon = 36162 \cdot 5 \; cm^3$.

3. Die Gleichungen $x + y = 90°$ und $\sin x \, . \sin y = 0 \cdot 20337$ aufzulösen.

Aus $\left.\begin{array}{l} \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \text{und } \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{array}\right\}$ erhält man

$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y = 0 \cdot 40674$; aber $\cos(x+y) = 0$, daher $\cos(x-y) = 0 \cdot 40674$ und $x - y = 66°$.

$\left.\begin{array}{l} x + y = 90° \\ x - y = 66° \end{array}\right\}$ gibt $x = 78°$, $y = 12°$.

4. Im Mittelpunkte der Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ liegt der Scheitel einer Parabel, deren Brennpunkt mit dem Brennpunkte $F_2 \, (+e, o)$ der Ellipse zusammenfällt; wo schneiden sich diese Linien?

Da $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$ der Ellipse gleich $\frac{p}{2}$ der Parabel ist, so lautet die Parabelgleichung $y^2 = 12\,x$.

Für den Durchschnittspunkt muß $16\,x^2 + 300\,x = 400$, also

$x^2 + \frac{300}{16} x = \frac{400}{16}$ und $x = -\frac{75}{8} \pm \sqrt{\frac{5625 + 1600}{64}} = -\frac{75}{8} \pm \frac{85}{8}$ sein.

Dem einzigen Werte für $x = \frac{5}{4}$ (warum?) entspricht $y = \pm \sqrt{15}$.

Nr. 33.

1. $(3\,x^2 + x - 2)^2 - 30\,x^2 - 10\,x = -36$ aufzulösen.

$(3\,x^2 + x - 2)^2 - 10\,(3\,x^2 + x - 2 = -36 + 20 = -16$ ist in bezug auf das Trinom eine quadratische Gleichung; daher $3\,x^2 + x - 2 = 5 \pm 3 = \left\{\begin{array}{l} 8 \\ 2 \end{array}\right.$. Es ist $3\,x^2 + x = 10$ und auch $3\,x^2 + x = 4$.

Die Wurzeln lauten: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = -2$; $x_3 = 1$, $x_4 = -\frac{4}{3}$.

2. Einem Kreise (r) wird ein reguläres n-Eck ein- und umgeschrieben, so daß die Seiten (s) des einen parallel sind den Seiten (S) des andern; wie groß ist die zwischen beiden Umfängen liegende Fläche?

Der Zentriwinkel des Bestimmungsdreieckes ist $\frac{360^\circ}{n}$, kurz α.

Die Fläche des großen Dreieckes $= \frac{S}{2} r = r^2 \, tg \, \frac{\alpha}{2}$;

„ „ „ kleinen „ $= \frac{r^2}{2} \sin \alpha = r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Die Differenz derselben $n$mal genommen, gibt die verlangte Fläche; also $F = n r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = n r^2 \, tg \, \frac{\alpha}{2} \, . \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

3. Aus der Kante a eines regulären Tetraeders das Volumen zu berechnen.

Man findet $V = ABC \, . \frac{h}{3} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \, . \frac{h}{3}$. $SO = h$; AO als Radius des der Basis ABC umgeschriebenen Kreises ist $\frac{abc}{4 \triangle} = \frac{a^3}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Demnach

$$SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ und } V = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}.$$

4. Eine Gerade geht durch den Punkt S (3, — 4) und bildet mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel von 135°; wo schneidet sie die Parabel $y^2 = 6x$?

Die Gleichung der Geraden ist von der Form $y + 4 = a(x - 3)$; aber $a = tg \, 135^\circ = -1$, daher die Gleichung $x = -y - 1$; dies in die 1. Gleichung substituiert, gibt $y^2 + 6x = -6$,

also $y = -3 \pm \sqrt{3}$ und $x = 2 \mp \sqrt{3}$.

Nr. 34.

1. Die Zahl 24 in zwei solche Faktoren zu zerlegen, daß die Differenz der Kuben dieser Teile 485 gibt.

Die Faktoren sind x und $\frac{24}{x}$; $x^3 - \left(\frac{24}{x}\right)^3 = 485$ reduziert sich auf $x^6 - 485 x^3 = 13824$; daraus $x^3 = \frac{485}{2} \pm \sqrt{\frac{290521}{4}} = \frac{485}{2} \pm \frac{539}{2} = \begin{cases} 512 \\ -27. \end{cases}$

$x_1 = 8$; $x_2 = -3$.

Die gesuchten Faktoren sind: 3, 8 oder — 8, — 3.

2. Zur Auflösung eines rechtwinkeligen Dreieckes ist gegeben: $F = 840$, $c = 58$.

$F = \frac{ab}{2}$, $2F = c \sin \alpha \, . \, c \cos \alpha$, daher $4F = c^2 \, . \, 2 \sin \alpha \cos \alpha = c^2 \sin 2\alpha$;

$\sin 2\alpha = \frac{4F}{c^2} = \frac{3360}{3364}$. $\log \sin 2\alpha = 3{\cdot}52634$ $2\alpha = 87^\circ \, 12'$

$\qquad 3{\cdot}52686 \qquad \alpha = 43^\circ \, 36'$.

$\qquad \overline{9{\cdot}99948 - 10}$

3. Der Radius einer Kugel ist bekannt ($= r$); berechne das Volumen eines Kugelsegmentes von der Höhe h!

Segment = Sektor — Kegel $= 2r\pi h \cdot \frac{r}{3} - \varrho^2\pi \frac{r-h}{3}$; ($\varrho$ bedeutet den Radius der Basis des Kegels), $\varrho^2 = h(2r - h)$.

Segment $= \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$.

Anmerkung: Ist statt r der bequemer zu messende Radius ϱ des Grundkreises des Abschnittes gegeben, so ist r durch $\frac{\varrho^2 + h^2}{2h}$ zu ersetzen. Man erhält:

$$\text{Segment} = \frac{\varrho^2\pi h}{2} + \frac{h^3\pi}{6}.$$

4. Welcher Punkt des Kreises $K(2, 6, 5)$ hat die kleinste und welcher die größte Entfernung von der Geraden $3y + 4x = 101$?

Den Punkt mit der kleinsten Entfernung findet man, indem man vom Mittelpunkte des Kreises die Normale auf die gegebene Gerade zieht; der Durchschnittspunkt mit der Kreislinie ist der gesuchte Punkt. Die Verlängerung der Normalen bis zum zweiten Durchschnitte mit der Kreislinie gibt den zweiten gesuchten Punkt.

Die Gleichung der Normalen zur Geraden lautet: $y - 6 = \frac{3}{4}(x - 2)$; diese Gerade schneidet sich mit $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 25$.

Aus $(x - 2)^2 + \frac{9}{16}(x - 2)^2 = 25$ erhält man $(x - 2)^2 = 16$, $x - 2 = \pm 4$, also $x_1 = 6$, $x_2 = -2$.

Zu $x_1 = 6$ gehört $y_1 = 9$ (Punkt mit der kleinsten Entfernung);
„ $x_2 = -2$ „ $y_2 = +3$ (Punkt mit der größten Entfernung).

Nr. 35.

1. In wieviel Punkten schneiden sich 10 Gerade, unter denen sich 4 Parallele befinden?

Zu jedem Durchschnittspunkte sind zwei Gerade notwendig; 10 beliebige Gerade geben also so viele Durchschnittspunkte als $\binom{10}{2}$ angibt; dabei sind aber 4 Gerade zueinander parallel; die berechnete Anzahl $\binom{10}{2}$ ist um $\binom{4}{2}$ zu vermindern.

$$\binom{10}{2} - \binom{4}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 45 - 6 = 39.$$

2. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz 3; das Produkt aller Zahlen $= 880$; welche Zahlen sind es?

Die Zahlen lauten: $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$, wobei $2d=3$, $d=\frac{3}{2}$ ist.

Aus $\left(a^2-\frac{9}{4}\right)\left(a^2-\frac{81}{4}\right)=880$, d. i. $a^4-\frac{90}{4}a^2=\frac{13351}{16}$ erhält man

$$a=\pm\frac{13}{2}.$$

Die Zahlen: 2, 5, 8, 11 oder -11, -8, -5, -2.

3. Einem Würfel mit der Kante a wird eine Kugel umgeschrieben; wie groß ist das Kugelsegment, das durch eine erweiterte Würfelfläche abgeschnitten wird?

Die körperliche Diagonale des Würfels $d=a\sqrt{3}$ ist Durchmesser der Kugel; also $r=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Das Volumen eines Kugelsegmentes ist nach der Formel $\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$ zu rechnen, wobei h die Höhe des Kugelsegmentes bedeutet; in unserem Falle ist $h=r-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$; daher

$$V=\frac{\pi}{3}\frac{a^2}{4}\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(a\sqrt{3}+\frac{a}{2}\right)=\frac{a^3\pi}{12}\left(3\sqrt{3}-4\right).$$

4. Wann ist eine Gerade $y=Ax+B$ Tangente einer Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$?

Für den Durchschnitt beider Linien muß $b^2x^2+a^2(A^2x^2+2ABx+B^2)=$ $=a^2b^2$, d. i. $x^2+\frac{2ABa^2}{b^2+A^2a^2}x=\frac{a^2b^2-B^2a^2}{b^2+A^2a^2}$ sein.

Soll $x=-\frac{ABa^2}{b^2+A^2a^2}\pm\sqrt{\frac{A^2B^2a^4+a^2b^4-B^2a^2b^2+A^2a^4b^2-A^2B^2a^4}{(b^2+A^2a^2)^2}}$ nur einen Wert haben, so muß der Zähler des Wurzelausdruckes $=$ Null sein. Aus $a^2b^4+A^2a^4b^2=B^2a^2b^2$ folgt $b^2+A^2a^2=B^2$ oder $A^2a^2=B^2-b^2$.

Nr. 36.

1. $4\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-21}=3\sqrt{2x+27}$ aufzulösen.

Wird die Gleichung quadriert, so erhält man

$$16(2x+3)+8\sqrt{4x^2-36x-63}+2x-21=18x+243;$$

die reduzierte Gleichung $\sqrt{4x^2-36x-63}=-2x+27$ muß nochmals quadriert werden; man erhält $x=11$.

2. Wie groß ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes: ausgedrückt durch den Radius 1. ϱ des eingeschriebenen, 2. r des umgeschriebenen Kreises?

Es ist $F=\frac{s^2}{4}\sqrt{3}$; aber $\varrho=\frac{h}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3s^2}{4}}=\frac{s}{6}\sqrt{3}$, also $s=\frac{6\varrho}{\sqrt{3}}$.

„ $r=\frac{2h}{3}=\frac{s}{3}\sqrt{3}$, also $s=r\sqrt{3}$.

Demnach ist bei 1. $F=3\varrho^2\sqrt{3}$, bei 2. $F=\frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$.

3. Der Kubikinhalt einer gleichkantigen vierseitigen Pyramide ist $= V$; wie lang ist jede Kante?

$$V = a^2 \cdot \frac{h}{3}, \text{ aber } h = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Daher } V = \frac{a^3}{3\sqrt{2}} \text{ und } a = \sqrt[3]{3\,V\sqrt{2}}.$$

4. Berechne für den Punkt $M(4, \frac{6}{5})$ der Ellipse $25\,y^2 + 4\,x^2 = 100$ die Berührungsgrößen!

Gleichung der Tangente: $25y \cdot \frac{6}{5} + 4x \cdot 4 = 100$; für den Durchschnitt mit der x-Achse ist $y = 0$, also $x = \frac{25}{4}$. $E\left(\frac{25}{4}, 0\right)$.

Länge der Tangente $ME = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2}$. Subtangente $= EN = \frac{9}{4}$.

Gleichung der Normalen: $y - \frac{6}{5} = \frac{15}{8}(x - 4)$; für den Durchschnitt (D) mit der x-Achse ist $y = 0$, also $x = \frac{84}{25}$. $D\left(\frac{84}{25}, 0\right)$.

Normale $= \sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2}$. Subnormale $= 4 - \frac{84}{25} = \frac{16}{25}$.

Nr. 37.

1. Welcher Zylinder hat bei gegebenem Volumen $V = 1024\pi$ die kleinste Oberfläche?

Aus $1024\pi = r^2\pi h$ folgt $h = \frac{1024}{r^2}$. Nun ist

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r^2\pi + \frac{2048\pi}{r}.$$

$\frac{O'}{\pi} = 4r - \frac{2048}{r^2} = 0$ gesetzt, gibt $r = 8$ und $h = 16$.

2. Den rechten Winkel so zu teilen, daß die Differenz der Sinus seiner Teile $= \frac{1}{3}$ ist.

$\sin x - \sin(90 - x) = \frac{1}{3}$ gibt $\sin x - \frac{1}{3} = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, quadriert und geordnet: $\sin^2 x - \frac{1}{3}\sin x = \frac{4}{9}$; nur die Wurzel

$$\sin x = \frac{1 + \sqrt{17}}{6} = \frac{5{\cdot}12310}{6} = 0{\cdot}85385$$

ist zu brauchen.

$$\log \sin x = 9{\cdot}93138 - 10$$
$$x = 58^\circ\, 38'.$$

3. Einem Kreise ($r = 6\ cm$) ist ein Dreieck umgeschrieben, dessen Seiten sich wie $5 : 5{\cdot}6 : 3{\cdot}4$ verhalten. Wie groß sind die Seiten?

Die Seiten kann man mit $5x$, $5{\cdot}6x$, $3{\cdot}4x$ bezeichnen; aus den Seiten läßt sich nach der Heronschen Formel die Fläche des Dreieckes berechnen: $f = \sqrt{7x \,.\, 2x \,.\, 1{\cdot}4x \,.\, 3{\cdot}6x} = 8{\cdot}4x^2$.

Für den Radius r des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises hat man die Formel $r = \dfrac{2F}{a+b+c}$; darnach ist $6 = \dfrac{16{\cdot}8x^2}{14x} = 1{\cdot}2x$, also $x = 5$; die Seiten des Dreieckes sind: 25, 28, 17 *cm*.

4. Welchen Winkel schließen diejenigen Tangenten miteinander ein, welche man von O (0, 0) aus an den Kreis K (6, 4, 4) ziehen kann?

Die Gerade $y = ax$ ist dann Tangente eines Kreises, wenn die Normale vom Mittelpunkte des Kreises auf diese Gerade gleich dem Radium des Kreises ist, wenn also die Gleichung $\dfrac{y_1 - ax_1}{\sqrt{1+a^2}} = r$ stattfindet.

Aus $4 - 6a = 4\sqrt{1+a^2}$ erhält man $a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{12}{5}$.

Darnach ist $tg\,\varphi = \dfrac{A-a}{1+Aa} = \dfrac{12}{5}$.

$$\begin{array}{rl} log\;tg\,\varphi = & 1{\cdot}07918 \\ & \underline{0{\cdot}69897} \\ = & 0{\cdot}38021 \\ & \underline{\;\;7992\cdot} \\ & \;\;290\cancel{0} : 6\cancel{0} = 48. \\ & \;\;50 \\ & \;\;\;\;2 \end{array} \qquad \varphi = 67^\circ\,22'\,48''.$$

Nr. 38.

1. Der Bruch $\dfrac{15x^2 - 37x + 18}{10x^2 - 33x + 27}$ soll gekürzt werden!

Zum Abkürzen des Bruches muß man Zähler und Nenner in Faktoren zerlegen. Da $15 \,.\, 18 = +270$ ist, muß -37 in zwei Teile geteilt werden, die als Produkt auch $+270$ geben; also $-37 = -27 - 10$.

$$15x^2 - 27x - 10x + 18 = 3x(5x-9) - 2(5x-9) = (5x-9)(3x-2).$$

Ein Trinom kann auch dadurch in Faktoren zerlegt werden, daß man dieses Trinom als ein Gleichungstrinom ansieht und es durch die Wurzelfaktoren ersetzt.

$$x^2 - \frac{33}{10}x + \frac{27}{10} = 0 \text{ gibt } x = \frac{33}{20} \pm \sqrt{\frac{1089-1080}{20^2}} = \frac{33}{20} \pm \frac{3}{20} = \begin{cases} \dfrac{36}{20} = \dfrac{9}{5}. \\[2ex] \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Die Faktoren lauten: $10\left(x - \dfrac{9}{5}\right)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ oder $(5x-9)(2x-3)$; der gekürzte Bruch $= \dfrac{3x-2}{2x-3}$.

X

2. Bestimme die Seiten eines Dreieckes aus folgenden Angaben: $a^2 + b^2 = 27476$, $c = 46$ und $\sphericalangle \gamma = 21° 37' 30''$.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, d. i. $2116 = 27476 - 2ab\cos\gamma$ gibt $2ab = \frac{25360}{\cos\gamma} = 27280$.

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^2 = 27476 + 27280 = 54756 \text{ und } a + b = 234. \\ (a-b)^2 = 27476 - 27280 = 196 \text{ und } a - b = 14.\end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 124 \\ b = 110.\end{array}$$

3. In einen Zylinder (r, h), der teilweise mit Wasser gefüllt ist, läßt man ein regelmäßiges Tetraeder mit der Seite a fallen; um wieviel steigt das Wasser?

Das Volumen V des Tetraeders soll in einen Zylinder mit der Basis r verwandelt werden. $V = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{h}{3}$; $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; daher $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$.

$\frac{a^3}{12}\sqrt{2} = r^2\pi \cdot x$ gibt $x = \frac{a^3\sqrt{2}}{12 r^2 \pi}$.

(m)

4. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte $A\ (0, 0)$, $B\ (4, 0)$, $C\ (2, 1)$ bestimmt ist?

Die gesuchte Gleichung ist von der Form $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, worin x, y die Koordinaten der Punkte des Kreises bedeuten;

$$\left.\begin{array}{lr} A \text{ ist ein Punkt der Peripherie; daher} & p^2 + q^2 = r^2. \\ B \text{ „ „ „ „ „ „} & (4-p)^2 + q^2 = r^2. \\ C \text{ „ „ „ „ „ „} & (2-p)^2 + (1-q)^2 = r^2. \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Die Auflö-} \\ \text{sung dieser} \\ \text{Gleichungen}\end{array}$$

gibt $p = 2$, $q = -\frac{3}{2}$, $r = \frac{5}{2}$; die Gleichung des Kreises lautet:

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

Nr. 39.

1. Welche Formeln haben wir für die Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreieckes?

1. In der Planimetrie: $F = \frac{gh}{2}$ und $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, worin $s = \frac{u}{2}$ ist.

2. In der Trigonometrie: $F = \frac{ab}{2}\sin\gamma$ und

3. In der Analytik: $2\triangle = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$.

Es ist die Heronsche Formel (150 v. Chr.) abzuleiten.

Zieht man von der Spitze C des Dreieckes ABC die Höhe CD, so zerfällt die Grundlinie c in die Teile $BD = x$ und $AD = c - x$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Aus } h^2 = a^2 - x^2 \\ \text{und } h^2 = b^2 - (c-x)^2\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{folgt: } a^2 = b^2 - c^2 + 2cx, \text{ also} \\ x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.\end{array}$$

Nun ist

$$h^2 = (a+x)(a-x) = \frac{2ac+a^2-b^2+c^2}{2c} \cdot \frac{2ac-a^2+b^2-c^2}{2c} =$$

$$= \frac{(a+c)^2-b^2}{2c} \cdot \frac{b^2-(a-c)^2}{2c} =$$

$$= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4c^2}.$$

Bei $a+b+c=2s$, wird $b+c-a=2(s-a)$

$$a+c-b=2(s-b)$$

$$a+b-c=2(s-c).$$

$$F = \frac{ch}{2} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{s \,.\, 2(s-a) \,.\, (s-b) \,.\, 2(s-c)}{c^2}} =$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

2. Eine Kegelbahn ist $28{\cdot}26\,m$ lang; eine hinausrollende Kugel ($s=2{\cdot}1$) dreht sich 75 mal. Wie schwer ist sie?

$28{\cdot}26\,m : 75 = 0{\cdot}3768\,m$; dies ist der Umfang $2r\pi$ der Kugel; daraus $r = 37{\cdot}68\,cm : 6{\cdot}28 = 6\,cm$.

Gewicht der Kugel $= \frac{4}{3} r^3\pi \,.\, 2{\cdot}1\,g$.

3. Wie bestimmt man das Volumen *a*) einer Kugel, *b*) eines Kugelabschnittes mittels der Integralrechnung?

a) Als Element einer Kugel kann man eine Kugelschale mit dem Radius x und der sehr kleinen Dicke dx ansehen; in diesem Falle ist

$$V = \int_o^r 4x^2\pi \,.\, dx = 4\pi \int_o^r x^2 dx = 4\pi \,.\, \frac{x^3}{3}\Bigg|_o^r = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Betrachten wir die Kugel als Rotationskörper, so ist für ein Kugelelement die Formel $dV = y^2\pi \,.\, dx$ zu nehmen. Bei Benützung der Scheitelgleichung des Kreises: $y^2 = x(2r-x)$ haben wir diese Elemente von $x=o$ bis $x=2r$ zu summieren; also

$$V = \pi \int_o^{2r} (2rx\,dx - x^2 dx) = \pi\left(2r\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_o^{2r} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

b) Das Volumen eines Kugelabschnittes

$$V = \pi \int_o^h (2rx\,dx - x^2 dx) = \pi\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_o^h = \frac{\pi h^2}{3}(3r-h).$$

4. Existiert ein regelmäßiges Vieleck, bei dem $r = 5{\cdot}44$ und $\varrho = 5{\cdot}4193$ ist?

Wird der Zentriwinkel des Bestimmungsdreieckes mit 2ε bezeichnet, so ist, wenn die Höhe $= \varrho$ gezogen wird, $\cos\varepsilon = \frac{\varrho}{r}$. Man findet $2\varepsilon = 10°$; das Vieleck ist ein $\frac{360°}{10°} = 36$-Eck.

Nr. 40.

1. Aus $2(\log 2 + \log 3) + \log(2 + 7^x) = \log 12 + \log 189 - x \log 7$ ist x zu berechnen.

Es ist $2 \log 6 + \log(2 + 7^x) = \log 12 . 189 - \log 7^x$, $\log(2 + 7^x) + \log 7^x = \log 12 . 189 - \log 36$, $(2 + 7^x) . 7^x = \frac{12 . 189}{36} = 63$, somit $7^{2x} + 2 . 7^x = 63$,

$$7^x = -1 \pm 8 = \begin{cases} 7; \quad x = 1. \\ -9 \text{ (nicht möglich).} \end{cases}$$

2. In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist eine Kathete das geometrische Mittel zwischen der anderen Kathete und der Hypotenuse; berechne einen Winkel dieses Dreieckes!

$b^2 = ac$ gibt $c^2 \cos^2\alpha = c^2 \sin\alpha$ oder $\sin^2\alpha + \sin\alpha = 1$; nur die Wurzel $\sin\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ist zu brauchen.

$$\sin\alpha = \frac{1.23606}{2} = 0{\cdot}61803; \qquad \log\sin\alpha = 9{\cdot}79101 - 10$$

$$\begin{array}{r} 095 \\ \hline 600 : 28 = 21 \\ 40 \end{array}$$

$\alpha = 38°\ 10'\ 21''$.

3. Der Punkt M (11, 3) hat von einer durch den Punkt P (0, −4) gehenden Geraden die Entfernung 1; wie lautet die Gleichung der Geraden?

Die Gleichung der Geraden ist von der Form $y + 4 = a(x - o)$. Die Entfernung des Punktes M ist gegeben durch

$$\frac{y_1 + 4 - ax_1}{\sqrt{1 + a^2}} = 1, \text{ d. i. } 7 - 11a = \sqrt{1 + a^2}; \text{ daraus } a = \frac{77}{120} \pm \frac{13}{120} = \begin{cases} \frac{3}{4} \\ \frac{8}{15} \end{cases}.$$

Man erhält also zwei Gerade: $y = \frac{3}{4}x - 4$ und $y = \frac{8}{15}x - 4$.

Nr. 41.

1. Wie lautet die stetige Proportion, wenn die Summe der drei Zahlen 39 und die Summe ihrer Quadrate 819 beträgt?

$$a+b+c=39,\quad a^2+b^2+c^2+819,\quad b^2=ac.$$

$$\left.\begin{array}{l}(a+c)^2=(39-b)^2\\ 2ac=2b^2\end{array}\right\}\ \text{subtr. gibt: } a^2+c^2=1521-78b-b^2,$$

$$\text{d. i. } 819-b^2=1521-78b-b^2.$$

$$b=9.$$

Die Proportion lautet: $27:9=9:3$.

d **2.** Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes, dessen Höhe das harmonische Mittel zwischen den Radien ist?

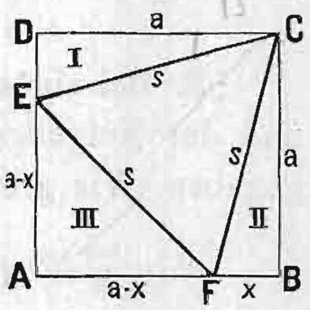
Ist b das harmonische Mittel zwischen a und c, so besteht folgende Relation: $(b-a):(c-b)=a:c$, also $b=\dfrac{2ac}{a+c}$.

Darnach: $h=\dfrac{2Rr}{R+r}$ und $s=\sqrt{h^2+(R-r)^2}=\dfrac{R^2+r^2}{R+r}$, somit

$$O=R^2\pi+r^2\pi+(R+r)\pi s=2\pi(R^2+r^2).$$

3. In ein Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so einzuzeichnen, daß eine Spitze in einem Eckpunkt des Quadrates, die andern Spitzen in die Seiten des Quadrates fallen.

Fig. 1.



Ist EFC (in Fig. 1) das verlangte Dreieck, dann muß I $\cong$ II sein; daraus $s^2=a^2+x^2$; aber aus III ist $s^2=(a-x)^2 . 2=2a^2-4ax+2x^2$. Die Gleichstellung beider Werte gibt die Gleichung $x^2-4ax=-a^2$, woraus sich für $x=2a\pm a\sqrt{3}$ ergibt.

Da $x<a$ ist, so kann nur $x=2a-a\sqrt{3}$ sein.

$a\sqrt{3}$ stellt die doppelte Höhe eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seite a vor. Der Ausdruck für x ist also leicht konstruierbar.

d **4.** Für den Parabelpunkt $x_1=2$ ist die Subnormale $=8$; welchen Winkel bildet die Tangente mit der x-Achse?

Bei der Parabel ist die Subnormale $=p$. Da $p=8$ ist, so lautet die Parabelgleichung: $y^2=16x$; für $x_1=2$ ist $y_1=\pm 4\sqrt{2}$.

Gleichung der Tangente: $yy_1=8(x+x_1)$; ihr Richtungskoeffizient $=$

$$=\frac{8}{y_1}=\frac{8}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.\qquad log\,tg\,\alpha=0{\cdot}15051\qquad \alpha=54^\circ\,44'\,7''.$$

$$\frac{48}{300:44=7}$$

Nr. 42.

1. A läßt einen Stein in einen Schacht fallen und hört ihn nach t Sekunden aufschlagen; wie tief ist der Schacht?

Die Tiefe x des Schachtes ist in der Zeit t zweimal zurückgelegt worden; vom fallenden Stein in der Zeit τ und vom am Boden erzeugten Schall in der übrigen Zeit $t-\tau$; es ist also $x = \frac{g}{2}\tau^2$ und auch $= (t-\tau)c$, wo c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles (333 m) bedeutet. Aus $\frac{g}{2}\tau^2 = ct - c\tau$ erhält man $\tau = -\frac{c}{g} + \sqrt{\frac{c^2+2cgt}{g^2}}$; mit τ ist auch $x = (t-\tau)c$ bekannt.

2. *a*) In einer Urne sind x schwarze und $x+10$ weiße Kugeln; die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist $= \frac{3}{4}$. Wieviel schwarze Kugeln sind vorhanden?

$W = \frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}}$ Fälle. $g = x+10$ Fälle, $m = 2x+10$ Fälle; also

$$\frac{x+10}{2x+10} = \frac{3}{4} \text{ und } x = 5.$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei dreimaligen Werfen mit einem Würfel 6 nicht zu werfen?

Die Wahrscheinlichkeit 6 nicht zu werfen, ist $= \frac{5}{6}$; daß dies dreimal hintereinander nicht geschieht, $= \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

3. Bei einem geraden Kegelstumpfe ist $R = 20\,dm$, $r = 8\,dm$ und der Neigungswinkel der Seite gegen die Basis $\alpha = 28°\,6'\,37''$ gegeben. Wie groß ist der Radius einer Kugel von gleichem Inhalte?

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{4}{3}x^3\pi. \qquad h = (R-r)\,tg\,\alpha.$$

$$x^3 = \frac{(R^2+Rr+r^2)(R-r)\,tg\,\alpha}{4} = 156\,.\,12\,tg\,\alpha = 1872\,tg\,\alpha.$$

$$\begin{aligned} log\,x = {} & 3{\cdot}27231 \\ & \underline{9{\cdot}72769 - 10} \\ & 3{\cdot}00000 : 3 = 1,\ x = 10\,dm. \end{aligned}$$

4. Es ist die Gleichung $9x^2 - 18x + 25y^2 + 100y = 116$ zu konstruieren und die Durchschnittspunkte mit den Koordinatenachsen zu rechnen!

$9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 4y + 4) = 116 + 9 + 100 = 225$ oder $9(x-1)^2 + 25(y+2)^2 = 225$ ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen: $a = 5$, $b = 3$, also $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$; ihr Mittelpunkt hat die Koordinaten $(1, -2)$.

Für den Durchschnitt mit der x-Achse ist $y = 0$; $x^2 - 2x = \frac{116}{9}$ gibt $x = 1 \pm \frac{5\sqrt{5}}{3}$

„ „ „ „ „ y-Achse „ $x = 0$; $y^2 + 4y = \frac{116}{25}$ „ $y = -2 \pm \frac{6\sqrt{6}}{5}$

Nr. 43.

1. $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$ aufzulösen.

$: x^2)\ 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1.$ Wird $x + \frac{1}{x}$ durch y, also $x^2 + \frac{1}{x^2}$ durch $y^2 - 2$ ersetzt, so lautet die Gleichung: $2(y^2 - 2) - 3y = 1$ oder $y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{5}{2}$; daraus: $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = -1$.

$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ gibt $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

$x + \frac{1}{x} = -1$ gibt $x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ und $x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$

Aus $x_3 x_4 = 1$ folgt: $x_4 = \frac{1}{x_3}$.

2. Wie groß ist das Volumen eines Kugelsektors, dessen Segment gleich seinem Kegel ist?

Sektor $= 2r\pi h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2r^2\pi}{3}h$; Segment $= \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$; Kegel $= \varrho^2\pi\frac{r-h}{3}$.

Aus $\frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = h(2r - h) \cdot \pi\frac{r-h}{3}$ erhält man die Gleichung $h^2 - 3rh = -r^2$ mit der einzigen Wurzel $h = \frac{3r}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{5} = \frac{r}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$.

Demnach: Sektor $= \frac{r^3\pi}{3}\left(3 - \sqrt{5}\right)$.

3. Zur Auflösung eines Dreieckes ist gegeben: $a + b = 173$, $\sphericalangle\gamma = 38^\circ 50'$ und die Fläche $F = 2280$.

Aus $F = \frac{ab}{2}\sin\gamma$ erhält man $ab = \frac{4560}{\sin\gamma} = 7272$.

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 173 \\ ab &= 7272 \end{aligned}\right\} \text{gibt: } a = 101,\ b = 72.$$

$(a + b) : (a - b) = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}$; $\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$.

4. Auf welcher Kurve liegen die Halbierungspunkte der Ordinaten des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$?

Sind u, v die Koordinaten dieser Halbierungspunkte, so ist $u = x$. $v = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - u^2}$, $4v^2 = r^2 - u^2$ oder $\left(\frac{u}{r}\right)^2 + \left(\frac{v}{\frac{r}{2}}\right)^2 = 1$,

d. i. die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen: $a = r$, $b = \frac{r}{2}$.

Nr. 44.

1. Wie viele Werte hat $\sqrt[3]{1}$? Bestimme sie!

Wird $\sqrt[3]{1} = x$ gesetzt, so ist $1 = x^3$ oder $x^3 - 1 = 0$ und in Form von Faktoren: $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$.

Diese Gleichung zerfällt in zwei: $\left\{\begin{array}{l} x - 1 = 0, \text{ also } x = 1. \\ x^2 + x + 1 = 0, \text{ also } x = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}. \end{array}\right.$

2. Ein Quadrat mit der Seite $a = 8{\cdot}5$ rotiert um eine Achse, welche durch einen Eckpunkt geht, und zur Diagonale des Quadrates senkrecht ist. Wie groß ist O und V des Rotationskörpers?

Es ist $V = Fl\,.\,2e\pi$, wobei e die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsachse ist; also $V = a^2\,.\,2\,\frac{d}{2}\,\pi = a^2 a\pi\sqrt{2} = a^3\pi\sqrt{2}$ und

$$O = U\,.\,2\delta\pi = 4a\,.\,2\cdot\frac{d}{2}\,\pi = 4a\,.\,a\pi\sqrt{2} = 4a^2\pi\sqrt{2}.$$

3. In einer geometrischen Reihe von zehn Gliedern beträgt das Produkt des ersten und letzten Gliedes 4608, die Summe der beiden mittleren Glieder 144; bestimme die Reihe!

$$4608 = u^2 q^9$$

$$144 = uq^4(1+q);\ \text{daraus}\ u^2 = \left[\frac{144}{q^4(1+q)}\right]^2 = \frac{20736}{q^8(1+q)^2},$$

somit $1 + 2q + q^2 = \frac{9}{2}\,q$ oder $q^2 - \frac{5}{2}\,q = -1$; $q = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$;

für $q = 2$ ist $u = 3$; die Reihe: 3, 6, 12, 24 . . . . 1536.

„ $q = \frac{1}{2}$ „ $u = 1536$; die Reihe 1536, 768, 384 . . . . 3.

4. Durch die Endpunkte des Parameters einer Parabel legt man Tangenten; wie groß ist die Fläche zwischen den Tangenten und dem dazwischen liegenden Parabelbogen?

Die Gleichung der Tangente im Punkte $M\left(\frac{p}{2},\,p\right)$ lautet: $y = x + \frac{p}{2}$; für den Durchschnitt mit der x-Achse ist $y = 0$, also $x = -\frac{p}{2}$.

Die obere Hälfte der verlangten Fläche = Dreieck — Parabelsegment = $= \frac{p^2}{2} - \frac{2}{3}\,p\,.\,\frac{p}{2} = \frac{p^2}{6}$.

Daher die ganze Fläche $= \frac{p^2}{3}$.

Nr. 45.

1. In einer arithmetischen Reihe von 21 Gliedern beträgt die Summe aller Glieder mit Ausschluß des letzten = 650, die Summe der Glieder mit Ausschluß des ersten = 710. Wie lautet die Reihe?

$u_1 + u_2 + \ldots u_{20} = (u_1 + u_{20})\,10 = 650$, also $2u_1 + 19d = 65$.

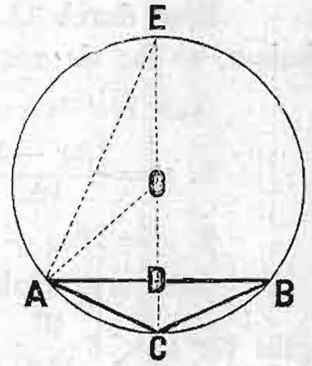
$u_2 + u_3 + \ldots u_{21} = (u_2 + u_{21})\,10 = 710$, „ $2u_1 + 21d = 71$.

$d = 3,\ u = 4.$

Die Reihe lautet: 4, 7, 10, 13 . . .

2. Aus der Seite des einem Kreise (r) eingeschriebenen n-Eckes ist die Seite des demselben Kreise eingeschriebenen $2n$-Eckes zu berechnen.

Fig. 2.



Ist (in Fig. 2) $AB = s_n$, $OC \perp AB$, dann ist $AC = BC = s_{2n}$.

Im $\triangle ACE$ ist $AC^2 = CE \cdot CD = 2r(r - OD) =$

$$= 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right) = r^2\left(2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}\right); \text{ somit}$$

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}.$$

Spezielle Fälle: Für $s_n = s_4 = r\sqrt{2}$ erhält man $s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

„ $s_n = s_6 = r$ „ „ $s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

3. Über einem größten Kugelkreise (r) steht eine Kugelschichte, deren Mantelfläche gleich der Basis ist; berechne das Volumen dieser Schichte!

Volumen einer Kugelschichte $= (\varrho_1^2 + \varrho_2^2)\dfrac{\pi h}{2} + \dfrac{h^3\pi}{6}$.

Aus $2r\pi h = r^2\pi$ erhält man $h = \dfrac{r}{2}$; $\varrho_1 = r$, $\varrho_2 = \dfrac{r}{2}\sqrt{3}$, somit

$$V = \frac{22}{48}r^3\pi = \frac{11}{24}r^3\pi.$$

4. Mit dem Radius $r = 10$ soll ein Kreis beschrieben werden, der die Gerade $4x + 3y = 70$ in dem Punkte M (10, 10) berührt. Wie lautet die Gleichung des Kreises?

Der Richtungskoeffizient der gegebenen Geraden $= -\dfrac{4}{3}$. Die Gleichung der darauf Senkrechten im Punkte M lautet; $y - 10 = \dfrac{3}{4}(x - 10) \ldots 1)$; in dieser Geraden liegt der Punkt C, der von M den Abstand $= 10$ hat; somit $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100 \ldots . 2)$

1) mit 2) verbunden: $(x - 10)^2 + \dfrac{9}{16}(x - 10)^2 = 100$

$$(x - 10)^2 \cdot \frac{25}{16} = 100, \text{ d. i. } x - 10 = \pm 8,$$

also $x_1 = 18$; zu x_1 gehört $y_1 = 16$

$x_2 = 2$; „ x_2 „ $y_2 = 4$:

es gibt also zwei Kreise $\begin{cases} (x - 18)^2 + (y - 16)^2 = 100 \\ (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 100. \end{cases}$

Nr. 46.

1. Welche Zahlen unter 1000 geben durch 13 geteilt den Rest 5, durch 12 geteilt den Rest 6?

Eine durch 13 teilbare Zahl muß $13x$ heißen; soll sie noch den Rest 5 haben, so ist sie mit $13x+5$ zu bezeichnen.

Aus $13x+5=12y+6$ erhält man:

1. $y=\frac{13x-1}{12}=x+\frac{x-1}{12}=x+u_1$, wobei $12u_1=x-1$ ist.

2. $x=12u_1+1$, mithin die Zahl $13x+5=156u_1+18$.

Jetzt erst wird die weitere Bedingung berücksichtigt: $156u_1+18<1000$ gibt für $u_1<6\frac{46}{156}$; also $u_1=6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$.

Die Zahlen: 954, 798, 642, 486, 330, 174, 18.

2. Eine 8 *kg* schwere Bleikugel ($s=11{\cdot}35$) soll mit einer Kugelschale aus Kork ($\sigma=0{\cdot}24$) so umgeben werden, daß die Kugel bis zur Hälfte in Wasser eintaucht. Wie dick muß die Korkschale sein?

Aus $8=\frac{4}{3}r^3\pi s$ folgt $r=\sqrt[3]{\frac{6}{11{\cdot}35\pi}}$. Das Gewicht des schwimmenden Körpers beträgt $8+\frac{4}{3}\pi.(R^3-r^3)\,0{\cdot}24$ und das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers $\frac{2}{3}\pi R^3$. Aus der Gleichstellung dieser beiden Ausdrücke erhält man nach einigen Reduktionen $R^3=\frac{107{\cdot}4}{11{\cdot}35\,.\,0{\cdot}52\pi}\cdot R=1{\cdot}796\,dm$ und $R-r=1{\cdot}244\,dm$.

3. Der Inhalt eines geraden Kegels sei $V=100\pi\,dm^3$, seine Erzeugende unter dem Winkel $\alpha=67°\ 22'\ 48''$ gegen die Basis geneigt; wie groß ist die Mantelfläche?

Aus $100\pi=\frac{r^2\pi}{3}\,r\,tg\,\alpha$ erhält man $r=\sqrt[3]{\frac{300}{tg\,\alpha}}=5\,dm$.

$$s=\frac{r}{\cos\alpha},\quad \log s=0{\cdot}69897$$
$$\underline{9{\cdot}58503-10}$$
$$1{\cdot}11394$$

$s=13\,dm$.
$M=r\pi s=65\pi$.

4. Welche Tangente der Hyperbel $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ schneidet von den Koordinatenachsen gleich große Stücke ab?

Die Tangente $9xx_1-25yy_1=225$ muß den Richtungskoeffizienten 1 haben; somit $9x_1=25y_1$. (x_1y_1) ist aber ein Punkt der Hyperbel, somit $9x_1{}^2-25\cdot\frac{81}{25^2}x_1{}^2=225$, d. i. $x_1=\pm\frac{25}{4}$, somit $y_1=\pm\frac{9}{4}$.

Die Berührungspunkte sind: $M_1\left(\frac{25}{4},\frac{9}{4}\right)$ und $M_2\left(-\frac{25}{4},-\frac{9}{4}\right)$.

Nr. 47.

1. In einem gleichschenkeligen Dreiecke mit dem Umfange $u = 256\ cm$ hat die zur Grundlinie gehörige Höhe die Länge $h = 80\ cm$. Wie groß sind die Seiten des Dreieckes?

Bezeichnet man die Länge des Schenkels mit x, dann ist die Basis mit $256 - 2x$ zu bezeichnen. Aus $80^2 + (128 - x)^2 = x^2$ erhält man $x = 89$; die Basis ist also $= 78$.

2. Einen gegebenen Kreis (r) durch konzentrische Kreise in 3 gleiche Teile zu teilen.

Ist ϱ_1 der Radius des innersten Kreises, so ist $\varrho_1{}^2\pi = \frac{r^2\pi}{3}$, also $\varrho_1 = \sqrt{r \cdot \frac{r}{3}}$, welche Strecke als mittlere geometrische Proportionale zwischen r und $\frac{r}{3}$ konstruierbar ist.

Aus $r^2\pi - \varrho_2{}^2\pi = \frac{r^2\pi}{3}$ ergibt sich $\varrho_2{}^2 = \frac{2}{3}r^2$, also $\varrho_2 = \sqrt{\frac{2r}{3} \cdot r}$.

3. Über derselben Kreisfläche (r) erheben sich zwei Kegel nach oben; der höhere unter dem Neigungswinkel α, der niedere unter dem Neigungswinkel β. Wie groß ist das Volumen zwischen beiden Mantelflächen?

$$V = r^2\pi\frac{H}{3} - r^2\pi\frac{h}{3} = \frac{r^2\pi}{3}(r\, tg\,\alpha - r\, tg\,\beta) = \frac{r^3\pi}{3}(tg\,\alpha - tg\,\beta);$$

$$tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} - \frac{sin\,\beta}{cos\,\beta} = \frac{sin\,(\alpha - \beta)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}, \text{ daher } V = \frac{r^3\pi}{3}\,\frac{sin\,(\alpha - \beta)}{cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta}.$$

4. Es ist zu untersuchen, ob die Gerade $5x + 4y = 80$ Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = 100$ ist.

a) Für den Durchschnittspunkt dieser Linien müßte $x^2 + \left(\frac{80 - 5x}{4}\right)^2 = 100$ sein. Die Auflösung der Gleichung $x^2 - \frac{800}{41}x = -\frac{4800}{41}$ gibt für x einen imaginären Ausdruck, d. h. die Gerade schneidet den Kreis nicht.

b) Eine Gerade ist dann Tangente eines Kreises, wenn die Normale vom Mittelpunkte des Kreises auf die gegebene Gerade $= r$ ist.

Die Normale p ist der Länge nach $= -\dfrac{y' + \frac{5}{4}x' - 20}{\sqrt{1 + \frac{25}{16}}} = \dfrac{20\,.\,4}{\sqrt{41}} = \dfrac{80}{\sqrt{41}}$,

also größer als der Radius $r = 10$; die Gerade liegt außerhalb des Kreises.

Nr. 48.

1. Die Fläche eines Trapezes aus den vier Seiten: den parallelen $a = 22$, $c = 8$, den nicht parallelen $b = 13$, $d = 15$ zu berechnen.

Zerlegt man das Trapez in ein Parallelogramm und ein Dreieck, so ist die Fläche des letzteren nach der Heronschen Formel zu bestimmen: $\triangle = 84$.

Aus $84 = 7h$ folgt für die Höhe des Dreieckes und auch die des Trapezes $h = 12$: somit $F = \frac{a+c}{2} 12 = 180$.

2. Das Volumen eines geraden Zylinders, dessen Basisdurchmesser sich zur Höhe wie $2:5$ verhält, beträgt $109760\pi\, cm^3$; wie groß ist seine Mantelfläche?

Aus $r^2\pi \,.\, 5r = 109760\pi$ erhält man $r = \sqrt[3]{21952} = 28\, cm$.

$M = 2r\pi \,.\, 5r = 10r^2\pi = 7840\pi\, cm^2$.

3. Aus den drei Seiten eines Dreieckes die drei Schwerlinien zu rechnen.

Wird im $\triangle\, ABC\; t_1$ gezogen und der spitze Winkel bei D mit φ bezeichnet, so ist $b^2 = t_1^2 + \frac{a^2}{4} - a t_1 \cos\varphi$.

$$c^2 = t_1^2 + \frac{a^2}{4} - a t_1 \cos(180 - \varphi)$$

$$\text{also } b^2 + c^2 = 3t_1^2 + \frac{a^2}{2}, \text{ somit } t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Darnach ist $t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$ und $t_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

4. Wie lautet die Gleichung der Normallinie im Punkte $N(2, 2)$ der Ellipse $20y^2 + 5x^2 = 100$?

Die Gleichung der Tangente lautet: $20y \,.\, 2 + 5x \,.\, 2 = 100$, ihr Richtungskoeffizient ist $= -\frac{1}{4}$.

Die Gleichung der Normallinie (als Linie, die durch N geht und zur Tangente normal ist) lautet: $y - 2 = 4\,(x - 2)$, d. i. $y = 4x - 6$.

Nr. 49.

1. Ein Holzhändler kaufte von einer Gemeinde ein Stück Wald für 12000 K und sollte davon 7000 K bar, 3500 K nach 9 Monaten und 1500 K nach 11 Monaten bezahlen. Wann konnte er die ganze Summe auf einmal bezahlen?

Dadurch, daß der Käufer 3500 K durch 9 Monate und 1500 K durch 11 Monate für sich nutzbringend zu $p\,{}^0\!/_0$ anlegen kann, erspart er an Zinsen $35 \cdot p \cdot \frac{9}{12} + 15p\frac{11}{12}$.

Er wird daher die Zahlung der ganzen Summe von 12000 K so lange (durch x Monate) zurückhalten dürfen, bis die Zinsen davon ebensoviel betragen als bei den Teilzahlungen.

Aus $\frac{120x \cdot p}{11} = 35p\frac{9}{12} + 15p\frac{11}{12}$ erhält man $x = 4$.

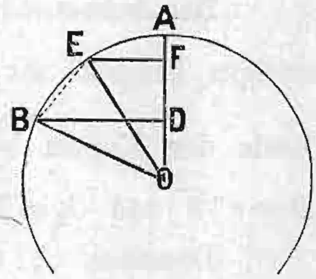
2. Zur Auflösung eines Dreieckes sind gegeben die Stücke: $r = 28{\cdot}5$, $a + b = 78{\cdot}656$ und $\alpha - \beta = 16°$.

$78{\cdot}656 = 2r(\sin\alpha + \sin\beta) = 4r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 78{\cdot}656 : 114\cos 8°$.

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 44°\,10'$ und $\frac{\alpha-\beta}{2} = 8°$ gibt: $\alpha = 52°\,10'$, $\beta = 36°\,10'$, $\gamma = 91°\,40'$.

3. Bestimme das Volumen (V) des Rotationskörpers, der durch Umdrehung eines Kreissegmentes (mit der Sehne $BE = s$) um einen außerhalb desselben liegenden Halbmesser (Ao) entsteht!

Fig. 3.



Durch Rotation des Kreisausschnittes BOE (Fig. 3) entsteht ein Körper mit dem Volumen

$2r\pi FD \cdot \frac{r}{3} = \frac{2r^2}{3}\pi \cdot FD.$

Durch Rotation des Dreieckes BOE entsteht ein Körper mit dem Volumen $2\varrho\pi h \cdot \frac{\varrho}{3}$, wobei ϱ den Abstand der Sehne BE vom Kreismittelpunkte bedeutet. Die Differenz beider Körper gibt: $V = \frac{2\pi h}{3}(r^2 - \varrho^2) = \frac{2}{3}\pi h\frac{s^2}{4} = \frac{\pi h s^2}{6}$.

4. Welchen Winkel schließen die beiden Asymptoten der Hyperbel $4x^2 - 5y^2 = 100$ miteinander ein?

Die Gleichungen der Asymptoten lauten: $y = \frac{b}{a}x$ und $y = -\frac{b}{a}$.

Der Winkel zwischen beiden läßt sich nach der Formel $tg\,\varphi = \frac{A - a}{1 + Aa}$ berechnen.

$$\text{Es ist } tg\,\varphi = \frac{\frac{-b}{a} - \frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Um die Halbachsen a, b der Hyperbel zu erhalten, hat man die Hyperbelgleichung in der Form $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ zu schreiben.

$\frac{4x^2}{100} - \frac{5y^2}{100} = 1$ oder $\left(\frac{x}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{20}}\right)^2 = 1$ gibt $a = 5$, $b = \sqrt{20}$;

daher $tg\,\varphi = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$.

Nr. 50.

1. $\left.\begin{array}{l} 2^x + 3^y = 19 \\ 2^{2x} + 3^{2y} = 265 \end{array}\right\}$ aufzulösen!

Wird die 1. Gleichung quadriert $2^{2x} + 2 . 2^x 3^y + 3^{2y} = 361$, davon die 2. subtrahiert, so erhält man $2 . 2^x 3^y = 96$.

Aus $2^{2x} + 3^{2y} - 2 . 2^x 3^y = 265 - 96 = 159$ erhält man $2^x - 3^y = 13$ (wenn man nur den positiven Wert behält).

$\left.\begin{array}{l} 2^x + 3^y = 19 \\ 2^x - 3^y = 13 \end{array}\right\}$ gibt $2^x = 16 = 2^4$, also $x = 4$.

$3^y = 3$, also $y = 1$.

2. Einer Kugel (r) wird ein gleichseitiger Zylinder und ein gleichseitiger Kegel umgeschrieben; wie verhalten sich die Oberflächen dieser Körper?

Es ist $O_1 = 4r^2\pi$ und $O_2 = 6r^2\pi$.

Der Achsenschnitt des der Kugel umgeschriebenen Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $\frac{s}{2}\sqrt{3}$, wobei $s = 2R$ den Durchmesser der Basis des Kegels bedeutet; in diesem Dreiecke ist $r = \frac{s\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{\sqrt{3}}$, also $R = r\sqrt{3}$ und $O_3 = 3R^2\pi = 9r^2\pi$.

Demnach $O_1 : O_2 : O_3 = 4r^2\pi : 6r^2\pi : 9r^2\pi = 4 : 6 : 9$.

3. In einem Rechtecke verhält sich der Umfang zur Diagonale wie 14 : 5; wie groß sind die Seiten, wenn die Fläche $F = 768\, cm^2$ beträgt?

Die Seiten sind: x und $\frac{F}{x}$. Aus $\left(2x + \frac{2F}{x}\right) : \sqrt{x^2 + \frac{F^2}{x^2}} = 14 : 5$ erhält man die Gleichung $x^4 - \frac{25}{12}x^2 = -F^2$, $x^2 = \frac{25}{24}F \pm \frac{7F}{24}$; $x_1 = 32$, $x_2 = 24$.

4. Innerhalb der Parabel $y^2 = 6x$ liegt der Punkt M (4, 3); wie lautet die Gleichung derjenigen Sehne, die in M halbiert wird?

Sind $A(x_1 y_1)$ und $B(x_2 y_2)$ die Endpunkte der Sehne, so ist $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ihr Richtungskoeffizient.

Aus $\left.\begin{array}{l} y_2^2 = 6x_2 \\ y_1^2 = 6x_1 \end{array}\right\}$ folgt $(y_2 + y_1)(y_2 + y_1) = 6(x_2 - x_1)$,

daher $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6}{y_2 + y_1}$.

M (als Halbierungspunkt einer Strecke) hat die Koordinaten $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$. $\frac{y_1 + y_2}{2} = 3$ gibt $y_1 + y_2 = 6$. Der Richtungskoeffizient der gesuchten Sehne $= \frac{6}{6} = 1$; die Gleichung lautet $y - 3 = x - 4$ oder $y = x - 1$.

Nr. 51.

1. Wie lautet die Gleichung der Hyperbel, deren numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{5}{4}$ und die Nebenachse $2b = 6$ ist?

Unter numerischer Exzentrizität versteht man den Quotienten $\frac{e}{a}$. Aus $\sqrt{a^2 + b^2} : a = 5 : 4$ erhält man $16(a^2 + b^2) = 25a^2$, also $a = \frac{4b}{3} = 4$.

Die Gleichung der Hyperbel lautet also $9x^2 - 16y^2 = 144$.

2. Der Umfang eines rechtwinkeligen Dreieckes ist 90, die Summe der Radien des ein- und umgeschriebenen Kreises $= 24{\cdot}5$; wie groß sind die Seiten?

Der Text gibt folgende Gleichungen:

1) $a^2 + b^2 = c^2$; 2) $a + b = 90 - c$; 3) $\frac{ab}{a+b+c} + \frac{c}{2} = 24{\cdot}5$.

Wird 2) quadriert und 1) berücksichtigt, so erhält man $ab = 4050 - 99c$. Dadurch ergibt sich aus 3) $c = 41$.

$\left.\begin{aligned} a + b &= 49 \\ ab &= 360 \end{aligned}\right\}$ gibt: $\begin{aligned} a &= 40 \\ b &= 9. \end{aligned}$

3. Bei einer arithmetischen (steigenden) Reihe ist $u_4 + u_8 = 18$ und $u_4^3 + u_8^3 = 3402$. Bestimme diese Reihe!

Aus $x + y = 18$ und $x^3 + y^3 = 3402$ erhält man $x = 3 = u_4$ und $y = 15 = u_8$.

$\left.\begin{aligned} u_4 &= u_1 + 3d = 3 \\ u_8 &= u_1 + 7d = 15 \end{aligned}\right\}$ gibt $d = 3$. Die Reihe: $-6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15$.

4. Wenn jede Kante einer vierseitigen Pyramide mit regulärer Basis a *dm* beträgt, wie groß ist der Radius der der Pyramide eingeschriebenen Kugel?

Wird die Pyramide mit der eingeschriebenen Kugel von der Spitze aus durch die Halbierungspunkte zweier gegenüberliegender Basiskanten geschnitten, so erhält man als Schnittfigur ein gleichschenkeliges Dreieck (mit der Basis a und dem Schenkel $\frac{a}{2}\sqrt{3}$), dem ein Kreis (mit dem Radius ϱ?) eingeschrieben ist. Es ist also

$$\varrho = \frac{2F}{a+b+c} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2.(a + a\sqrt{3})} = \frac{a\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{3})}.$$

Nr. 52.

1. Einer gegebenen Kugel ist ein gerader Kreiskegel von größtem Inhalte einzuschreiben.

Ist x der Zentralabstand der Basis (mit $\varrho = y$) des eingeschriebenen Kegels, so ist $x + r$ die Höhe desselben; also $V = y^2\pi\frac{x+r}{3}$, wobei $x^2 + y^2 = r^2$, also $y^2 = r^2 - x^2$ und $\frac{3V}{\pi} = (r^2 - x^2)\,(x + r) = r^2 x - x^3 + r^3 - r x^2$. Die erste Ableitung davon lautet: $r^2 - 3x^2 - 2rx$.

Die Gl. $r^2 - 3x^2 - 2rx = 0$ gibt $x = \frac{r}{3}$ und $y^2 = r^2 - \frac{r^2}{9} = \frac{8}{9} r^2$.

Das gesuchte Volumen $= \frac{8}{9} r^2 \pi \,.\, \frac{4r}{9} = \frac{32}{81} r^3 \pi = \frac{8}{27} \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi$, d. i. $\frac{8}{27}$ der ganzen Kugel.

2. Beim geraden Kegelstumpf ist $V = 7976\,\pi$, $h = 24$ und $R + r = 36$. Man bestimme die Mantelfläche!

$$7976 = 8\,(R^2 + Rr + r^2),\quad R = 36 - r,$$

also
$$997 = 1296 - 72r + r^2 + r^2 + 36r - r^2.$$

$$r^2 - 36r = -299 \text{ gibt } r = \begin{cases} 23 \\ 13 \end{cases};\quad r = 13,\quad R = 23.$$

$$s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26;\ \text{somit}\ M = (R + r)\,\pi\, s = 36 \,.\, 26\,\pi.$$

3. Auf der Verlängerung der Parabelachse ist derjenige Punkt zu finden, von welchem aus die Tangenten gezogen werden können, die mit der ihre Berührungspunkte verbindenden Sehne ein gleichseitiges Dreieck einschließen.

Die Gerade vom Punkte $M\,(-u,\, o)$ aus schließt mit der x-Achse einen Winkel von 30° ein; ihre Gleichung lautet $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(x + u)$; diese Gerade ist Tangente einer Parabel, wenn $p = 2ab$, also

$$p = 2\,\frac{1}{\sqrt{3}} \,.\, \frac{u}{\sqrt{3}} = \frac{2u}{3},\ \text{d. i.}\ u = \frac{3}{2}\,p\ \text{ist.}$$

Der gesuchte Punkt ist $M\left(-\frac{3}{2}\,p,\ o\right)$.

4. Einem Kreise (r) wird ein reguläres Sechseck ein- und umgeschrieben; wie verhalten sich die Flächen dieser Polygone?

Es ist $f = 6 \,.\, \frac{r^2}{2} \sin 60° = 3r^2 \sin 60°$.

$$F = 6 \,.\, \frac{Sr}{2} = 6r \,.\, r\,tg\,30° = 6r^2 tg\,30°;$$

daher $f : F = \sin 60° : 2\,tg\,30° = \sqrt{\frac{3}{4}} : 2\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{9} : 2\sqrt{4} = 3 : 4.$

Nr. 53.

1. Das Volumen eines Quaders beträgt 288 dm^3, seine Oberfläche 288 dm^2 und der Umfang seiner Grundfläche 20 dm. Wie groß sind Länge, Breite und Höhe desselben?

1) $xyz = 288$; 2) $xy + xz + yz = 144$; 3) $x + y = 10$.

$$xy = \frac{288}{z}, \qquad xy = 144 - z(x+y) = 144 - 10z;$$

$$10z^2 - 144z = -288, \quad z^2 - \frac{72}{5}z = -\frac{144}{5}; \quad z = 12, \quad x = 6, \quad y = 4.$$

2. In einem Dreiecke sind zwei Seiten a, b und die Transversale t zur dritten Seite gegeben; berechne die dritte Seite!

Liegt a dem spitzen Winkel gegenüber, den die Transversale mit c einschließt, so ist $a^2 = t^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2t\frac{c}{2}\cos\varphi$

$$\text{und } b^2 = t^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2t\frac{c}{2}\cos\varphi:$$

somit $a^2 + b^2 = 2t^2 + \frac{c^2}{2}$ und $c^2 = 2(a^2 + b^2 - 2t^2)$.

3. Um eine Kugel (r) wird ein gerader Kegel beschrieben, dessen Höhe 6mal so groß ist als der Kugelradius; wie verhalten sich die Oberflächen dieser Körper?

Die Oberfläche der Kugel: $O_1 = 4r^2\pi$.

Die Seite des Kegels besteht aus den Teilen ϱ und $\sqrt{25r^2 - r^2}$, wobei ϱ den Radius des Kegels bedeutet.

Nach dem pythagoreischen Satze ist $(6r)^2 + \varrho^2 = \left(\varrho + \sqrt{24r^2}\right)^2$; daraus $\varrho = \frac{3r}{\sqrt{6}} = \frac{r}{2}\sqrt{6}$ und $s = \frac{5r}{2}\sqrt{6}$.

Nun ist $O_2 = \varrho^2\pi + \varrho\pi s = \frac{6r^2\pi}{4} + \frac{r}{2}\sqrt{6}\,.\,\frac{5r}{2}\pi\sqrt{6} = \frac{6r^2\pi}{4} + \frac{30r^2\pi}{4} =$ $= 9r^2\pi$; somit $O_1 : O_2 = 4 : 9$.

4. Wie lauten die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten der Parabel $y^2 = 8x$ und des Kreises $5x^2 + 5y^2 = 64$?

Die Gerade $y = Ax + B$ ist Tangente 1. der Parabel $y^2 = 8x$, wenn $p = 2AB$, d. i. $B = \frac{2}{A}$ ist, 2. des Kreises $x^2 + y^2 = \frac{64}{5}$, wenn $\sqrt{\frac{64}{5}} =$ $= \frac{B}{\sqrt{1 + A^2}}$ ist.

$\frac{64}{5} + \frac{64}{5}A^2 = \frac{4}{A^2}$ gibt $A^4 + A^2 = \frac{5}{16}$, somit $A^2 = \frac{1}{4}$ und $A = \pm\frac{1}{2}$; danach $B = \pm 4$ und die gesuchten Gleichungen lauten: $y = +\frac{1}{2}x + 4$

und $x = -\frac{1}{2}x - 4$.

Nr. 54.

1. Wie groß sind die Seiten eines Dreieckes, wenn dieselben durch drei aufeinander folgende ganze Zahlen ausgedrückt sind und die Fläche des Dreieckes 84 dm beträgt?

Sind $x-1$, x, $x+1$ die Zahlenwerte der drei Seiten, so ist nach der Heronschen Formel $84 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{x}{2}\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}$; daraus folgt: $7056 = 3\left(\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{4}\right)$ und geordnet:

$x^4 - 4x^2 = 37632$; es ist also $x^2 = 2 \pm \sqrt{37636} = 2 + 194 = 196$.

$x = 14$; die Seiten des Dreieckes sind: 13, 14, 15.

2. An einem geraden Kegel bildet die Seitenlinie mit der Basis einen Winkel von $\alpha = 26° \, 34'$; wie groß ist der Radius (r) der Basis, wenn dieser Kegel mit einer Kugel ($\varrho = 2\,m$) inhaltsgleich ist?

Es ist $\frac{r^2\pi h}{3} = \frac{4}{3}\varrho^3\pi$, $h = r\,tg\,\alpha$, daher $r^3 tg\,\alpha = 4\varrho^3$ und

$$r = \varrho\sqrt[3]{4\,cotg\,\alpha} = 4\,m.$$

3. Auf der Parabel $y^2 = 12x$ soll derjenige Punkt gefunden werden, für welchen die Tangente und die Normale mit der x-Achse ein gleichschenkeliges Dreieck bilden.

Die Tangente $yy_1 = 6(x + x_1)$ muß mit der x-Achse einen Winkel von 45° einschließen; daher ist $\frac{6}{y_1} = 1$, also $y_1 = 6$; wegen $y_1{}^2 = 12x_1$ ist $x_1 = \frac{36}{12} = 3$. Der gesuchte Punkt ist M (3, 6).

4. Vier Zahlen bilden eine geometrische Reihe; wie heißen diese Zahlen, wenn $u_1 + u_4 = 3650$ und $u_2 + u_3 = 450$ ist?

$$\left.\begin{array}{r} u(1+q^3) = 3650 \\ uq(1+q) = 450 \end{array}\right\} \frac{1+q^3}{(1+q)q} = \frac{365}{45} = \frac{73}{9}.$$

$$1 - q + q^2 = \frac{73}{9}q \text{ gibt } q = \frac{41 \pm 40}{9} = 9\left(\frac{1}{9}\right).$$

$q_1 = 9$ gibt die Zahlen: 5, 45, 405, 3645.

$q_2 = \frac{1}{9}$ gibt dieselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge.

Nr. 55.

1. Von den Kanten eines rechtwinkeligen Parallelepipedes mit der Oberfläche $O = 780\,cm^2$ ist eine das geometrische Mittel der beiden andern und bildet mit ihnen die Summe $s = 39\,cm$; wie groß sind die Kanten?

$780 = 2(ab + ac + bc)$, $a = \sqrt{bc}$, $\sqrt{bc} + b + c = 39$.

$bc = 390 - a(b + c)$;

$bc = 390 - \sqrt{bc}(39 = \sqrt{bc})$ gibt $\sqrt{bc} = 10$.

Aus $bc = 100$ und $b + c = 29$ erhält man $b = 25$, $c = 4$.

2. In einer geo metrischen Reihe ist die Summe der drei ersten Glieder $= 21$, die Summe der drei folgenden $= \frac{21}{64}$; wie groß ist die Summe der ins Unendliche fortlaufenden Reihe?

$$\left.\begin{aligned} u + uq + uq^2 &= 21 = u(1 + q + q^2) \\ uq^3 + uq^4 + uq^5 &= \frac{21}{64} = uq^3(1 + q + q^2) \end{aligned}\right\} \text{Durch Division: } 64 = \frac{1}{q^3},\ q = \frac{1}{4};$$

$$\text{für } q = \frac{1}{4} \text{ ist } u = 21 : \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = 21 : \frac{21}{16} = 16.$$

$$\text{Nun ist } S_\infty = \frac{u}{1 - q} = \frac{16}{\frac{3}{4}} = \frac{64}{3}.$$

3. Wie lautet die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel, welche durch die Punkte M_1 (2, 1) und M_2 (10, 7) geht?

Die Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel lautet: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, wo x, y die Koordinaten der Punkte (M) der Hyperbel bedeuten. Es muß sowohl $4b^2 - a^2 = a^2b^2$ als auch $100b^2 - 49a^2 = a^2b^2$ sein. Wird aus der 1. Gleichung $b^2 = \frac{a^2}{4 - a^2}$ in die 2. Gleichung eingesetzt, so erhält man $a^2 = 2$, dadurch wird $b^2 = 1$. Die verlangte Gleichung lautet:

$$x^2 - 2y^2 = 2.$$

Nr. 56.

1. Bestimme x aus folgender Gleichung:

$4^{x+1} + 16^{x+1} = 1536!$

Man schreibt: $4^x . 4 + 16^x . \frac{1}{16} = 1536$ und geordnet:

$4^2 + 64 . 4 = 24576$; daraus erhält man:

$$4^x = -32 \pm 160 = \begin{cases} 128 \\ -192 \text{ (nicht zu brauchen).} \end{cases}$$

$$4^x = 128 = 4 . 32 = 2^2 . 2^5 = 2^7;\ 2^{2x} = 2^7 \text{ gibt } 2x = 7,\ x = \frac{7}{2}.$$

2. Die Gesamtoberfläche eines Kugelausschnittes beträgt $\frac{1}{4}$ der Kugeloberfläche; wie verhält sich der Kugelausschnitt zur ganzen Kugel?

Aus $2r\pi h + \varrho\pi r = r^2\pi$ erhält man $2h + \varrho = r$;

$$r - 2h = \sqrt{h(2r - h)} \text{ gibt } h = \frac{3r}{5} \pm \frac{2r}{5} = \begin{cases} r \text{ (nicht möglich).} \\ \frac{r}{5}. \end{cases}$$

Volumen des Ausschnittes $= \frac{2r^2\pi h}{3} = \frac{2r^3\pi}{15} = V_1$, während $V_2 = \frac{4}{3} r^3\pi$ ist; daher $V_1 : V_2 = 1 : 10$.

3. Wie lauten die Gleichungen der den Kreisen $x^2 + y^2 = 4$ und $x^2 + y^2 - 12x = o$ gemeinsamen Tangenten?

Die Gerade $y = Ax + B$ ist Tangente

1. des ersten Kreises, wenn $r = \frac{y^1 - Ax^1 - B}{\sqrt{1 + A^2}}$, $2 = \frac{B}{\sqrt{1 + A^2}}$,

also $2\sqrt{1 + A^2} = B$ ist.

2. des zweiten Kreises: $(x - 6)^2 + y^2 = 36$, wenn $6 = \frac{6A + B}{\sqrt{1 + A^2}}$ ist.

Aus beiden Gleichungen ergibt sich $B = 3A$ und $A = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$.

Die gesuchten Gleichungen lauten: $y = \pm (x + 3)\sqrt{\frac{4}{5}}$.

Nr. 57.

1. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Reihe; ihre Summe $= 20$, die Summe der reziproken Werte $= \frac{25}{24}$; wie heißen die Zahlen?

Die Zahlen sind mit $u - 3d$, $u - d$, $u + d$, $u + 3d$ zu bezeichnen.

$4u = 20$ gibt $u = 5$.

$$\left(\frac{1}{u - 3d} + \frac{1}{u + 3d}\right) + \left(\frac{1}{u - d} + \frac{1}{u + d}\right) = \frac{25}{24}.$$

$$\frac{10}{25 - 9d^2} + \frac{10}{25 - d^2} = \frac{25}{24} \text{ oder } \frac{2}{25 - 9d^2} + \frac{2}{25 - d^2} = \frac{5}{24}.$$

Geordnet: $d^4 - \frac{154}{9}d^2 = -\frac{145}{9}$; daraus $d^2 = \frac{77}{9} \pm \frac{68}{9} = \begin{cases} \frac{145}{9} \text{ nicht zu brauchen.} \\ \frac{9}{9} = 1. \end{cases}$

2. Die Seite des einem Kreise (r) eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes ist $= \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$; berechne die Fläche dieses Zehneckes!

Die Fläche des regelmäßigen Zehneckes besteht aus 10 gleichschenkeligen Dreiecken mit der Höhe $\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{16}(6 - 2\sqrt{5})} = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

$$\triangle = \frac{r}{4}(\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{r^2}{16}\sqrt{40 - 8\sqrt{5}} = \frac{r^2}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Demnach: $F = 10\triangle = \frac{5}{4}r^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

3. Den geometrischen Ort der Schwerpunkte aller Dreiecke zu suchen, die über der großen Achse einer Ellipse stehen und ihre Scheitel im Umfange der Ellipse haben.

Die Koordinaten der Eckpunkte des Dreieckes sind: $A(-a, o)$, $B(a, o)$, $C(x, y)$. Sind (u, v) die Koordinaten des Schwerpunktes dieses Dreieckes, so ist $u = \frac{x}{3}$, $v = \frac{y}{3}$. Wird in $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ x durch $3u$, y durch $3v$ ersetzt, so erhält man: $\left(\frac{3u}{a}\right)^2 + \left(\frac{3v}{b}\right)^2 = 1$, oder: $\left(\frac{u}{\frac{a}{3}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\frac{b}{3}}\right)^2 = 1$. Der geometrische Ort der Schwerpunkte dieser Dreiecke ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$.

Nr. 58.

1. Der Inhalt eines geraden Kegels und seine Gesamtoberfläche sind gegeben: $V = 100\pi$, $O = 90\pi$. Wie groß ist der Radius der Grundfläche und die Höhe des Kegels?

Die aufzulösenden Gleichungen sind: $r^2 h = 300 \ldots a)$ und $r^2 + r\sqrt{r^2 + h^2} = 90 \ldots b)$.

Aus beiden folgt: $r\sqrt{r^2 + \left(\frac{300}{r^2}\right)^2} = 90 - r^2$. Diese Gleichung, quadriert und geordnet, gibt $r^4 - 45r^2 = -500$; $r_1 = 5$, $r_2 = 2\sqrt{5}$. Zu $r_1 = 5$ gehört $h = 12$; zu $r_2 = 2\sqrt{5} \ldots h = 15$.

2. Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt einer dreiseitigen Pyramide mit den gleichen Grundkanten a und den gleichen Seitenkanten $2a$?

1. $O = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3\triangle$ mit der Höhe $\sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{15}$;

$$\triangle = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{15} = \frac{a^2}{4}\sqrt{15}.$$

$$O = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3a^2}{4}\sqrt{15} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\,(1 + \sqrt{5}).$$

2. $V = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{H}{3}$; der Fußpunkt der Höhe der Pyramide hat von einem Eckpunkte der Basis den Abstand $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$; es ist $H^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{11}{3}a^2$. $H = a\sqrt{\frac{11}{3}}$.

Daher $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{11}$.

3. Welches Dreiecksstück läßt sich aus den Angaben $b = 19{\cdot}15$, $a + c = 29{\cdot}25$ und $h_a + h_c = 27{\cdot}75$ zunächst berechnen?

Es ist $b : (a + c) = \sin\beta : (\sin\alpha + \sin\gamma)$ 1. und $h_a = b \sin\gamma$

$$h_c = b \sin\alpha$$

daher $h_a + h_c = b\,(\sin\alpha + \sin\gamma)$.

Aus $(a+c)\sin\beta = b(\sin\alpha + \sin\gamma) = h_a + h_c$ ergibt sich

$$\sin\beta = \frac{h_a+h_c}{a+c} = \frac{27\cdot75}{29\cdot25}; \qquad \log\sin\beta = 1\cdot44326$$

$$\begin{array}{r} 1\cdot46464 \\ \hline 9\;97862-10 \\ 61 \\ \hline 100:8=12. \end{array}$$

$\beta = 72^\circ\, 10'\, 12''$.

4. In einer Ellipse stehen die Brennstrahlen eines Punktes aufeinander senkrecht; wie groß sind die Halbachsen der Ellipse, wenn der kleinere Brennstrahl gleich der linearen Exzentrizität ist?

Die Richtungskoeffizienten der Brennstrahlen sind: $\dfrac{+y_1}{e+x_1}$ und $\dfrac{+y_1}{e-x_1}$; da sie aufeinander normal sind, so ist $\dfrac{y_1}{e+x_1} = -\dfrac{e-x_1}{y_1}$, also $y_1{}^2 + x_1{}^2 = e^2$. Der Abstand der zwei Punkte $(x_1\, y_1)$ und $(e_1\, o)$ beträgt nach der Angabe e; daher $e^2 = (x_1 - e)^2 + y_1{}^2$ oder $2ex_1 = e^2$, d. i. $x_1 = \dfrac{e}{2}$, somit $y_1{}^2 = e^2 - \dfrac{e^2}{4} = \dfrac{3e^2}{4}$. Für den längeren Brennstrahl erhält man:

$$(2a-e)^2 = \left(\frac{3e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 3e^2, \text{ daraus } a = \frac{e}{3}(1+\sqrt{3});$$

da $a^2 - b^2 = e^2$ ist, so ist $b^2 = a^2 - e^2 = \dfrac{e^2}{4}(2\sqrt{3})$, somit $b = \dfrac{e}{2}\sqrt{2\sqrt{3}}$.

Nr. 59.

1. Den gemischt-periodischen Dezimalbruch $0\cdot91\dot{6}$ in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Auflösung a).

Aus $0\cdot91\dot{6} = x$ folgt $\left.\begin{array}{r} 1000x = 916\cdot666\ldots \\ \text{und}\quad 100x = 91\cdot666\ldots \end{array}\right\}$ daher $900x = 916 - 91$

also $x = \dfrac{916-91}{900} = \dfrac{825}{900} \overset{25}{=} \dfrac{33}{36} = \dfrac{11}{12}$.

Auflösung b).

$$0\cdot91\dot{6} = \frac{91}{100} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \ldots \text{ in infinitum.}$$

$$= \frac{91}{100} + \frac{6}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right) = \frac{91}{100} + \frac{6}{10^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} =$$

$$= \frac{91}{100} + \frac{6}{900} = \frac{819+6}{900} = \frac{825}{900} = \frac{11}{12}.$$

2. Ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Basis a rotiert um den Schenkel b. Wie groß ist die Oberfläche des Rotationskörpers, wenn der Winkel an der Spitze des Dreieckes 1. ein spitzer, 2. ein stumpfer ist?

Im ersten Falle entsteht ein Doppelkegel, der a und b zu Seiten und h_b zum gemeinsamen Basisradius hat.

Aus $a h_a = b h_b$ erhält man $h_b = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Oberfläche $= m_1 + m_2 = h_2 \pi a + h_2 \pi b = (a+b)\,\frac{a\pi}{b}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Im zweiten Falle entsteht ein ausgehöhlter Kegel; a ist die äußere, b die innere Seite. Die Oberfläche ist dieselbe wie bei 1.

3. Den geometrischen Ort der Halbierungspunkte paralleler Sehnen einer Parabel zu suchen.

Sind $A\ (x_1 y_1)$ und $B\ (x_2 y_2)$ die Endpunkte einer der vielen Sehnen, so ist $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ihr Richtungskoeffizient. Aus $\left.\begin{matrix} y_2^2 = 2px_2 \\ y_1^2 = 2px_1 \end{matrix}\right\}$ folgt:

$$(y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 2p(x_2 - x_1), \text{ daher } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}.$$

Dieser Richtungskoeffizient bleibt für alle zu AB parallele Sehnen gleich, z. B. $= k$. Sind (u, v) die Koordinaten des Halbierungspunktes von AB, so ist $\frac{x_1 + x_2}{2} = u$ und $\frac{y_1 + y_2}{2} = v$, also $\frac{2p}{y_2 + y_1} = \frac{2p}{2v} = \frac{p}{v} = k$. $v = \frac{p}{k}$ ist die Gleichung einer Geraden, die zur x-Achse parallel ist. (Durchmesser der Parabel.)

Nr. 60.

1. $\log\sqrt{3z-2} + \log\sqrt{4z-7} = 1{\cdot}11394$ aufzulösen!

Aus $\log\left(\sqrt{3z-2}\,.\,\sqrt{4z-7}\right) = \log 13$ folgt $(3z-2)(4z-7) = 169$;

$$12z^2 - 29z = 155,\ z^2 - \frac{29}{12}z = \frac{155}{12};\ z = \frac{29}{24} \pm \frac{91}{24} = \begin{cases} 5 \\ -\frac{31}{12} \text{ nicht zu brauchen.} \end{cases}$$

2. Zu zeigen, daß für jedes ebene Dreieck die Gleichung $\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}$ richtig ist.

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\right] = \cos\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}\,.$$

3. In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a wird ein Kreis beschrieben, in den Kreis wieder ein gleichseitiges Dreieck, in dieses Dreieck wieder ein Kreis usf. in infinitum. Wie groß ist die Summe der Flächen a) der Kreise, b) der Dreiecke?

Der Radius des ersten Kreises ist $r_1 = \frac{2f}{a+b+c} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$. Wird diesem Kreise ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben, so ist $r_1 = \frac{abc}{4f} = \frac{b^3}{b^2\sqrt{3}}$, also und $b = r_1\sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

Der diesem Dreiecke eingeschriebene Kreis hat den Radius $r_2 = \frac{b}{6}\sqrt{3} = \frac{a}{12}\sqrt{3}$ die nächste Dreieckseite $c = \frac{b}{2} = \frac{a}{4}$.

Somit $(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots)\pi = \pi\left(\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{48} + \ldots\right) = \frac{a^2\pi}{12}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) =$ $= \frac{a^2\pi}{9}$ und $\frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{b^2}{4}\sqrt{3} + \frac{c^2}{4}\sqrt{3} + \ldots = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} + \ldots\right) = \frac{a^2}{3}\sqrt{3}$.

4. Es ist eine Gerade $y = 2x - 2$ und ein Punkt S (3, 9) gegeben; wie lauten die Koordinaten des zu S symmetrischen Punktes?

Der Durchschnittspunkt der Senkrechten von S auf die gegebene Gerade ist der Halbierungspunkt einer Strecke, von welcher der zweite Endpunkt zu suchen ist.

$y - 9 = -\frac{1}{2}(x - 3)$ schneidet sich mit $y = 2x - 2$ im Punkte $M(5, 8)$: $\frac{3+x}{2} = 5$ gibt $x = 7$, $\frac{9+y}{2} = 8$ gibt $y = 7$. S' (7, 7).

Nr. 61.

1. Unter 30 jungen Männern eines Dorfes sollen 12 durchs Los ausgehoben werden; darunter sind 3 Brüder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 1. daß alle drei zugleich, 2. daß nur einer von ihnen, 3. daß keiner von ihnen bezeichnet werde?

$W = \frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}}$ Fälle. Mögliche Fälle $= \binom{30}{12}$; $g_1 = \binom{27}{9}$; $g_2 = \binom{27}{11}3$; $g_3 = \binom{27}{12}$.

2. Die Seiten eines rechtwinkeligen Dreieckes bilden eine arithmetische Reihe, die größere Kathete ist $= 24$; wie groß sind die anderen Seiten?

Die kleinere Kathete $= 24 - x$, die Hypotenuse $= 24 + x$.

Aus $(24 + x)^2 = (24 - x)^2 + x^2$ folgt $96x = 576$, $x = 6$.

Die Seiten des Dreieckes sind: 18, 24, 30.

3. Wie groß ist das Volumen eines Kugelsektors, dessen konische Fläche gleich der sphärischen ist?

Volumen eines Kugelsektors $= 2\,r\pi h\,.\,\frac{r}{3} = 2\,r^2\pi\,\frac{h}{3}$.

Ist ϱ der Basisradius des Segmentes, so ist $\varrho\pi\,r$ die konische, $2\,r\pi\,.\,h$ die sphärische Fläche des Kugelsektors; aus $\varrho\pi r = 2\,r\pi h$ bleibt $\varrho = 2\,h$. Aber $\varrho^2 = h\,(2r - h)$; daher $4\,h^2 = 2rh - h^2$, $h = \frac{2}{5}\,r$ und $V = \frac{4}{15}\,r^3\pi$.

4. In der Hyperbel $9x^2 - 7y^2 = 63$ sind diejenigen Punkte zu finden, in denen die Radienvektoren senkrecht aufeinander stehen.

$b^2 = 9$, $a^2 = 7$, $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \pm\,4$; $F_1\,(4,\,0)$, $F_2\,(-4,\,0)$.

Ist $M\,(u,\,v)$ der gesuchte Punkt, dann lautet die Gleichung

für $F_1M\,.\,.\;y = \frac{v}{u-4}\,(x-4)$ und für $F_2M\,.\,.\;y = \frac{v}{u+4}\,(x+4)$.

Im Falle, als $F_2M \perp F_1M$ ist, muß $\frac{v}{u+4} = -\frac{u-4}{v}$, d. i. $v^2 = 16 - u^2$ sein.

Aus $v^2 = 16 - u^2$ und $9u^2 - 7v^2 = 63$ erhält man $\begin{cases} u^2 = \frac{175}{16},\; u = \pm\,\frac{5}{4}\sqrt{7} \\ v^2 = \frac{81}{16},\; v = \pm\,\frac{9}{4}. \end{cases}$

Nr. 62.

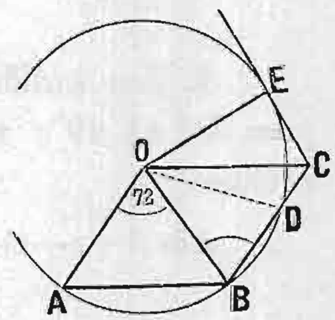
1. *A* zahlt, um eine Schuld zu tilgen, die zu $4^1/_2\,^0/_0$ Zinseszinsen aufgenommen war, durch 20 Jahre am Ende eines jeden 845·65 *K*; wie groß war die Schuld?

Die heutige Schuld von x Kronen hat am Ende der 20 Jahre den Endwert $x\,.\,1{\cdot}045^{20}$; ebensoviel müssen alle Raten betragen. Die erste Rate R hat den Endwert: $R\,.\,1{\cdot}045^{19}$; die zweite hat den Endwert: $R\,.\,1{\cdot}045^{18}$ usf., bis die letzte, die nur R beträgt; alle zusammen: $R\,\frac{1{\cdot}045^{20} - 1}{0{\cdot}045} = x\,.\,1{\cdot}045^{20}$, somit

$$x = 845{\cdot}65\,\frac{1{\cdot}045^{20} - 1}{0{\cdot}045\,.\,1{\cdot}045^{20}} = 845{\cdot}65\,\frac{1{\cdot}4117}{0{\cdot}045\,.\,2{\cdot}4117} = 11.000.$$

2. Das aus den Seiten des einem Kreise (r) eingeschriebenen regulären Fünfeckes, Sechseckes und Zehneckes konstruierte Dreieck ist rechtwinkelig.

Fig. 4.



Beweis: Es sei $AB = s_5$ (Fig. 4). Man ziehe $BC \parallel AO$ und $OC \parallel AB$. Da $\sphericalangle\,AOB = OBD = 72^\circ$ und $\triangle\,BOD$ gleichschenkelig ist, so ist $\sphericalangle\,BOD = 36^\circ$, d. h. $BD = s_{10}$. $BC = r$ ist im Punkte D stetig geteilt: $BD^2 = BC\,.\,CD$.

Wird von C die Tangente CE gezogen, so ist $CE^2 = BC\,.\,CD$; folglich $CE = BD = s_{10}$. $\triangle\,OCE$ ist immer rechtwinkelig und s_5 die Hypotenuse.

3. Für jedes ebene Dreieck besteht die Relation:

$$r = 4\,R\,sin\frac{\alpha}{2}\,sin\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ersetzt man in der Gleichung $Rr = \frac{abc}{4f}\cdot\frac{2f}{a+b+c} = \frac{abc}{2(a+b+c)}$ a durch $2R\,sin\,\alpha$, b durch $2R\,sin\,\beta$, c durch $2R\,sin\,\gamma$, so erhält man

$$Rr = \frac{8R^3\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma}{2R^2(sin\,\alpha + sin\,\beta + sin\,\gamma)} = \frac{2R^2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma}{4\,cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}} = 4R^2\,sin\frac{\alpha}{2}\,sin\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\gamma}{2}.$$

Daraus ist $r = 4R\,sin\frac{\alpha}{2}\,sin\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\gamma}{2}$.

4. Wie groß ist das von den beiden Parabeln $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ eingeschlossene Flächenstück?

Für den Durchschnitt beider Linien erhält man $x^2 = 2p\sqrt{2px}$, d. i. $x^3 = 8p^3$ oder $x = 2p$, dazu gehört $y = 2p$. Die fragliche Fläche besteht aus zwei gleichen Teilen; der eine beträgt $\frac{2}{3}xy - \triangle = \frac{2}{3}\,.\,4p^2 - 2p^2 = \frac{2}{3}p^2$; somit $F = \frac{4}{3}p^2$.

Nr. 63.

1. $\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} &= \frac{10}{3} \\ x^2 - y^2 &= 81 \end{aligned}\right\}$ aufzulösen!

Die erste Gleichung hat die Form $u + \frac{1}{u} = \frac{10}{3}$; $u = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2}. \end{cases}$

$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = 3$ gibt $y = \frac{4}{5}x$; dies in die 2. Gleichung eingesetzt, gibt $x = \pm 15$, dadurch ist $y = \pm 12$.

$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{1}{3}$ gibt $y = -\frac{4}{5}x$; dies in die 2. Gleichung eingesetzt, gibt $x = \pm 15$, dadurch ist $y = \pm 12$.

2. Zur Auflösung eines Dreieckes ist gegeben: $a = 5$, $b + c = 9$, $\gamma = 31^\circ\,41'\,49''$; welches Umfangsstück läßt sich daraus zunächst rechnen?

Aus $(b+c+a):(b+c-a) = (sin\,\beta + sin\,\gamma + sin\,\alpha):(sin\,\beta + sin\,\gamma - sin\,\alpha)$

$$= 4\,cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}\,cos\frac{\gamma}{2} : 4\,sin\frac{\beta}{2}\,sin\frac{\gamma}{2}\,cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= cotg\frac{\beta}{2} : tg\frac{\gamma}{2}$$ folgt:

$$cotg\frac{\beta}{2}=\frac{b+c+a}{b+c-a}tg\frac{\gamma}{2}=3{\cdot}5\,tg\,15^\circ\,50'\,54''; \; log\,cotg\frac{\beta}{2}=0{\cdot}54407$$

$$9{\cdot}45314-10$$

$$9{\cdot}99721-10$$

$$\frac{\beta}{2}=45^\circ\;11'\;3'' \qquad 697$$

$$\beta=90^\circ\;22'\;6''. \qquad 2400:42=57''.$$

3. Die durch den Punkt M (8, 3) gehende Gerade bildet mit den Abschnitten auf den Koordinatenachsen ein Dreieck mit der Fläche $F=50$; wie lautet die Gleichung der Geraden?

Aus der Gleichung $y-3=a\,(x-8)$ erhält man

den Abschnitt auf der x-Achse durch $y=0$; $x=\frac{8a-3}{a}$,

" " " " y- " " $x=0$; $y=3-8a$.

$xy=100$ gibt die Gleichung $a^2+\frac{13}{16}a=-\frac{9}{64}$, also $a_1=-\frac{1}{4}$, $a_2=-\frac{9}{16}$.

Die verlangte Gleichung lautet: $y-3=-\frac{1}{4}(x-8)$

oder: $y-3=-\frac{9}{16}(x-8)$.

Nr. 64.

1. Welche reelle Wurzeln hat die Gleichung: $\begin{cases} x^4+y^4=2482? \\ x+y=10 \end{cases}$

$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=10000$

$2xy\,(2x^2+3xy+2y^2)=7518$; aber $x^2+y^2=100-2xy$, daher

$2xy\,(200-xy)=7518$

$(xy)^2-200\,(xy)=-3759$; $xy=100\pm 79=\begin{cases}179 \text{ nicht zu brauchen.}\\ 21.\end{cases}$

Aus $\left.\begin{matrix} x+y=10 \\ xy=21 \end{matrix}\right\}$ erhält man: $x=7$, $y=3$ oder umgekehrt.

2. Wie groß ist der kleinere spitze Winkel eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Seiten eine geometrische Reihe bilden?

Aus $u^2+u^2q^2=u^2q^4$ erhält man $q^2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$, wovon nur der eine Wert $q^2=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ zu brauchen ist. Ist u die Kathete a, uq also die Kathete b, so ist $\frac{uq}{u}=q=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}=cotg\,\alpha$.

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3{\cdot}23606}{2}=1{\cdot}61803$; $cotg\,\alpha=\sqrt{1{\cdot}61803}$.

$$log\,cotg\,\alpha=\frac{0{\cdot}20899}{2}=10{\cdot}10449-10$$

$$07$$

$\alpha=38^\circ\;12'-98''=38^\circ\;10'\;22''.$ $\qquad 4200:43=98'$

3. Es ist der geometrische Ort derjenigen Punkte zu suchen, von denen aus die zwei an eine gegebene Parabel gezogenen Tangenten einen rechten Winkel bilden.

Sind (u, v) die Koordinaten eines Punktes, der die verlangte Eigenschaft hat, so soll die Gerade $y - v = a\,(x - u)$ eine Tangente der Parabel $y^2 = 2px$ sein. Eine Gerade $y = ax \underbrace{- au + v}_{b}$ ist dann Tangente einer Parabel, wenn $2ab = p$ ist. Aus $2a\,(-au + v) = p$ erhält man die quadratische Gleichung

$$a^2 - \frac{v}{u}\,a = -\frac{p}{2u}, \text{ aus der sich für } a_1 = \frac{v + \sqrt{v^2 - 2pu}}{2u},$$

$$\text{für } a_2 = \frac{v - \sqrt{v^2 - 2pu}}{2u} \text{ ergibt.}$$

Da diese Tangenten zueinander normal sein sollen, so muß $a_1 a_2 = -1$ sein. Setzen wir also $a_1 a_2 = \frac{v^2 - v^2 + 2pu}{4u^2}$ gleich -1, so erhalten wir $u = -\frac{p}{2}$; dies ist die Gleichung der Leitlinie der gegebenen Parabel.

Nr. 65.

1. Zwei Zahlen haben das harmonische Mittel $11\frac{1}{13}$, das Produkt aus ihrem arithmetischen und geometrischen Mittel ist $= 156$. Wie heißen die Zahlen?

Die Zahlen x und y ergeben sich aus den beiden Gleichungen $\frac{2xy}{x+y} = \frac{144}{13}$ und $\frac{x+y}{2} \cdot \sqrt{xy} = 156$. Da $\frac{x+y}{2}$ der 2. Gleichung durch $\frac{13xy}{144}$ ersetzt werden kann, so ist $\frac{13xy}{144}\sqrt{xy} = 156$ aufzulösen; aus $xy\sqrt{xy}$, d. i. $(\sqrt{xy})^3 = 12^3$ erhält man $xy = 144$; dadurch wird $x + y = 26$; die Auflösung dieser Gleichung gibt $x = 18$, $y = 8$.

2. Wie groß ist der Radius desjenigen Parallelschnittes, der einen abgestumpften Kegel (R, r, h) halbiert?

Wird der Kegelstumpf zu einem vollständigen Kegel ergänzt, so sind die drei Kegel k_1, k_2, k_3 mit dem Basisradius r, x, R ähnlich; demnach $k_1 : k_2 : k_3 = r^3 : x^3 : R^3$.

Daraus ergibt sich $(k_3 - k_2) : k_2 = (R^3 - x^3) : x^3$

und $(k_2 - k_1) : k_2 = (x^3 - r^3) : x^3$.

Da $k_3 - k_2 = k_2 - k_1$ sein soll, so muß $R^3 - x^3 = x^3 - r^3$

$$R^3 + r^3 = 2x^3$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}} \text{ sein.}$$

3. Von einem Dreiecke sind die drei Winkel und der Flächeninhalt bekannt; wie groß ist der Radius des diesem Dreiecke umgeschriebenen Kreises?

Es ist $R = \frac{abc}{4F} = \frac{2R\,sin\,\alpha\,.\,2R\,sin\,\beta\,.\,2R\,sin\,\gamma}{4F} = \frac{2R^3\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma}{F}$;

somit $R^2 = \frac{F}{2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma}$ und $R = \sqrt{\frac{F}{2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma}}$.

4. Wie lautet die Gleichung des Kreises, welcher die Parabel $y^2 = 12\,x$ im Punkte M (3, 6) von außen berührt und seinen Mittelpunkt in der Scheiteltangente der Parabel hat?

Die Parabeltangente $y\,.\,6 = 6\,(x + 3)$ ist gleichzeitig Tangente des Kreises; der Kreismittelpunkt liegt demnach in der Normalen zu $y = x + 3$, also in der Geraden $y - 6 = -(x - 3)$ und gleichzeitig in der y-Achse; für $x = o$ ist $y = 3 + 6 = 9$.

Der Kreismittelpunkt ist Z (0, 9), der Radius des Kreises $= \sqrt{(3-0)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{18}$ und die gesuchte Gleichung

$$(x - 0)^2 + (y - 9)^2 = 18.$$

Nr. 66.

1. $3\,x^{log\,x} + 100\,x^{-log\,x} = 35$ aufzulösen!

$$3x^{log\,x} + \frac{100}{x^{log\,x}} = 35,\quad (x^{log\,x})^2 - \frac{35}{3}x^{log\,x} = -\frac{100}{3}.$$

$$x^{log\,x} = \frac{35}{6} \pm \sqrt{\frac{1225 - 1200}{36}} = \frac{35}{6} \pm \frac{5}{6} = \begin{cases} \frac{40}{6} = \frac{20}{3}. \\ 5 \end{cases}$$

$(log\,x)^2 = 1{\cdot}30103$ $\quad log\,x = \pm\sqrt{0{\cdot}82|39|1} = \pm\,0{\cdot}90770$;

$\phantom{(log\,x)^2 = {}}0{\cdot}47712$ $\quad$ 139 : 18

$\phantom{(log\,x)^2 = {}}\overline{0{\cdot}82391}$ $\quad$ 13 91 : 1807

$\quad$ 1 26

$\quad$ 0

$(log\,x)^2 = log\,5$ gibt auch noch zwei Wurzeln.

Aus $log\,x_1 = +\,0{\cdot}90770$ folgt $x_1 = 8{\cdot}0854$

68

20 : 5 = 4

Aus $log\,x_1 = -\,0{\cdot}90770 = 0{\cdot}09230 - 1$ folgt $x_2 = 0{\cdot}12368$

02

280 : 35 = 8

0

2. Wie verhalten sich die Volumina der einer Kugel (r) ein- und umgeschriebenen regulären Tetraeder zueinander?

Ist a die Kante eines Tetraeders, so findet man für die Höhe $= a\sqrt{\frac{2}{3}}$ und für das Volumen $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$.

Aus $a^2 = a\sqrt{\frac{2}{3}} \,.\, 2r$ erhält man für $a = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$, daher für $V_1 = \frac{8r^3}{9\sqrt{3}}$.

Aus $\frac{A^3}{12}\sqrt{2} = 4 \,.\, \frac{A^2}{4}\sqrt{3}\,\frac{r}{3}$ erhält man $A = 4r\sqrt{\frac{3}{2}}$; danach ist $V_2 = 8r^3\sqrt{3}$ und $V_1 : V_2 = \frac{1}{9\sqrt{3}} : \sqrt{3} = 1 : 27$.

3. Um die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist ein gleichseitiges Dreieck beschrieben; wie groß ist dessen Flächeninhalt, wenn seine Spitze in der Verlängerung der großen Achse liegt?

Die Gerade, die durch die Spitze (u, o) des Dreieckes geht, hat zur Gleichung $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - u)$; sie ist dann Tangente der Ellipse, wenn $\frac{a^2}{3} = \frac{u^2}{3} - b^2$, also $u = \sqrt{a^2 + 3b^2}$ ist.

Die Höhe des Dreieckes beträgt $a + \sqrt{a^2 + 3b^2}$, somit die Fläche $= \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{(a + \sqrt{a^2 + 3b^2})^2}{\sqrt{3}}$.

Nr. 67.

1. In einem hohlen Glaskegel mit $r = 12\,cm$ und $h = 24\,cm$ steht gefärbtes Wasser $6\,cm$ hoch. Wie hoch steht das Wasser, wenn man den Kegel auf die Spitze stellt?

Das Wasser hat die Gestalt eines Kegelstumpfes mit $h' = 6\,cm$, $R = 12\,cm$ und $R : r = 24 : 18$, $r = 9\,cm$, also $V = 2\pi(144 + 108 + 81) = 666\,\pi$. Beim Umkehren des Glases nimmt das Wasser die Gestalt eines Kegels mit der Höhe z und dem Basisradius $\frac{z}{2}$; also $\left(\frac{z}{2}\right)^2 \pi \,.\, \frac{z}{3} = \frac{z^3\pi}{12}$.

$666 = \frac{z^3}{12}$ gibt $z = \sqrt[3]{7|992} =$ (fast) $20\,cm$.

2. Ein Rhombus mit der Seite $a = 6{\cdot}4\,dm$ dreht sich um eine Achse, die im Endpunkte der längeren Diagonale zu dieser normal ist; wenn der Neigungswinkel der Seite gegen die Achse $58°$ beträgt, wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?

Nach der Guldinschen Regel ist $V = F \,.\, 2\varrho\pi$; $\varrho = \frac{D}{2} = a \cos\beta$, wobei $\beta = 90° - \alpha = 32°$ ist; $F = a^2 \sin 2\beta$, also

$$V = 2a^3\pi \cos\beta \,.\, \sin 2\beta.$$

$$\begin{aligned} \log V = {} & 0{\cdot}30103 \\ & 2{\cdot}41854 \\ & 0{\cdot}49715 \\ & 9{\cdot}92842 - 10 \\ & \underline{9{\cdot}95366 - 10} \\ & 3{\cdot}09880 \end{aligned} \qquad V = 1255{\cdot}55\,dm^3.$$

3. Um die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist ein gleichseitiges Dreieck beschrieben; wie groß ist dessen Flächeninhalt, wenn seine Spitze in der Verlängerung der kleinen Achse liegt?

Die Gerade, die durch die Spitze (o, v) des Dreieckes geht, hat zur Gleichung $y - v = x\sqrt{3}$; diese Gerade ist dann Tangente der Ellipse, wenn die Relation $A^2a^2 = B^2 - b^2$, d. i. $3a^2 = v^2 - b^2$ besteht; demnach ist $v = \sqrt{3a^2 + b^2}$ und die Höhe des Dreieckes $b + \sqrt{3a^2 + b^2}$; durch die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes ist auch dessen Fläche bekannt:

$$F = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{(b + \sqrt{3a^2 + b^2})^2}{\sqrt{3}}.$$

Nr. 68.

1. In einem geraden Kegelstumpf mit $R = 84\ cm$, $r = 33{\cdot}6\ cm$, $h = 63\ cm$ werden zwei Kegel eingezeichnet, von denen jeder die eine Grundfläche des Stumpfes zur Basis und die Spitze im Mittelpunkte der anderen Basis hat. Bestimme das Volumen des gemeinsamen Doppelkegels!

Ist ϱ der Radius der Basis des Doppelkegels und x seine Entfernung von der Deckfläche, so ist $R : \varrho = h : x$ und $r : \varrho = h : (h - x)$; wird $x = \frac{h\varrho}{R}$ in die zweite Proportion eingesetzt, erhält man $\varrho = \frac{Rr}{R + r}$. $V = \varrho^2\pi \cdot \frac{63}{3}$.

2. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\sin^2 x} + \left(\frac{16}{81}\right)^{\cos^2 x} = \frac{26}{27}$ aufzulösen!

Wird in $\left(\frac{16}{81}\right)^{\sin^2 x} + \frac{16}{81} \cdot \left(\frac{81}{16}\right)^{\sin^2 x} = \frac{26}{27}$ $\left(\frac{16}{81}\right)^{\sin^2 x} = y$ gesetzt, so erhält man $y^2 - \frac{26}{27}y = -\frac{16}{81}$; daraus folgt $y = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{27} \end{cases}$.

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\sin^2 x} = \frac{2}{3},\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{4\sin^2 x} = \frac{2}{3} \text{ gibt } \sin x = \pm\frac{1}{2}.$$

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\sin^2 x} = \frac{8}{27},\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{4\sin^2 x} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ gibt } \sin x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

3. Die Gerade $3x + 5y = 50$ ist Tangente einer Ellipse mit $a = 10$; wie lauten die Koordinaten des Berührungspunktes M?

Die Gerade $y = \frac{-3x + 50}{5}$ ist dann Tangente der Ellipse $b^2x^2 + 100y^2 = 100b^2$, wenn $A^2a^2 = B^2 - b^2$ ist; dabei ist $A = -\frac{3}{5}$, $B = 10$; man findet $b^2 = 64$.

Aus $64x^2 + 100y^2 = 6400$ ergibt sich die Gleichung der Tangente $64xx_1 + 100yy_1 = 6400$; wird $y = \frac{6400 - 64xx_1}{100y_1}$ mit $y = -\frac{3}{5}x + 10$ verglichen, so erhält man

$$\frac{64}{y_1} = 10, \text{ also } y_1 = 6{\cdot}4 \text{ und } \frac{-64x_1}{100y_1} = -\frac{3}{5}, \text{ d. i. } x_1 = 6, \text{ also } M(6, 6{\cdot}4).$$

Nr. 69.

1. Zwei Orte M und N sind 119 *km* voneinander entfernt. A geht von M nach N und legt am ersten Tage 20, am zweiten 18, am dritten 16 *km*... zurück. B geht von N aus 2 Tage später dem A entgegen und legt am ersten Tage 10, am zweiten 13, am dritten 16 *km*... zurück. Wann und wo werden beide zusammentreffen?

Der Weg des A besteht aus n Stücken, die eine arithmetische Reihe bilden; $a_1 = 20$, $d = -2$, also $a_n = 22 - 2n$ und $s_1 = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} = (42 - 2n)\frac{n}{2}$.

Der Weg des B besteht aus $n - 2$ Stücken, die eine arithmetische Reihe bilden; $u_1 = 10$, $d = 3$, also $u_{n-2} = 1 + 3n$ und $s_2 = (u_1 + u_{n-2})\frac{n-2}{2} = (11 + 3n)\frac{n-2}{2}$.

$$s_1 + s_2 = 119 = (42 - 2n)\frac{n}{2} + (11 + 3n)\frac{n-2}{2},$$

$$n^2 + 47n = 260, \quad n = \frac{-47}{2} \pm \frac{57}{2} = \begin{cases} 5, \\ - \text{ nicht zu brauchen.} \end{cases}$$

Für $n = 5$ Tage beträgt der Weg des A 80 *km*.

2. Welches Stück muß man von jeder Seite eines gleichseitigen Dreieckes abschneiden, um durch Verbindung der Abtragungspunkte ein anderes gleichseitiges Dreieck zu erhalten, das die Hälfte des gegebenen ist?

Das abgeschnittene Dreieck mit den Seiten x und $a - x$ läßt sich mit dem gegebenen der Fläche nach vergleichen.

$$x(a - x) : a^2 = 1 : 6, \text{ d. i. } x^2 - ax = -\frac{a^2}{6}.$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{3}}{6}, \text{ wobei nur das } - \text{-Zeichen zu brauchen ist.}$$

Der Ausdruck $\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\sqrt{3}$ läßt sich leicht konstruieren; denn $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ bedeutet die Höhe des gegebenen gleichseitigen Dreieckes.

3. Bestimme den geometrischen Ort derjenigen Punkte, von denen aus die zwei an den Kreis $x^2 + y^2 = 32$ gezogenen Tangenten einen rechten Winkel bilden!

Die Gerade $y-v=a(x-u)$ ist Tangente des Kreises, wenn

$$\frac{y_1-v-ax_1+au}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{32},\text{ d. i. } -v+au=\sqrt{32(1+a^2)}\text{ oder}$$

$$a^2+\frac{2uv}{32-u^2}a=\frac{v^2-32}{32-u^2}\text{ ist: }\begin{cases} a_1=\dfrac{uv+\sqrt{32(u^2-32+v^2)}}{u^2-32} \\[2ex] a_2=\dfrac{uv-\sqrt{32(u^2-32+v^2)}}{u^2-32}\end{cases}$$

$$a_1a_2=\frac{u^2v^2-32(u^2-32+u^2)}{(u^2-32)^2}\text{ muß }=-1\text{ sein.}$$

$v^2(u^2-32)-32(u^2-32)=-(u^2-32)^2$, $v^2-32=-(u^2-32)$ oder $u^2+v^2=8^2$, d. i. die Gleichung eines Kreises.

Nr. 70.

1. Die Gleichungen $\left.\begin{aligned}2x^2-3xy+y^2&=14\\ 3x^2+xy-9y^2&=9\end{aligned}\right\}$ aufzulösen!

Dies sind homogene Gleichungen; man setzt $y=tx$ und verbindet beide Gleichungen durch Division:

$$\frac{2x^2-3x^2t+x^2t^2}{3x^2+x^2t-9x^2t^2}=\frac{2-3t+t^2}{3+t-9t^2}=\frac{14}{9};\text{ daraus: }135t^2-41t=24;$$

$$t^2-\frac{41}{135}t=\frac{24}{135};\quad t=\frac{162}{270}=\frac{3}{5}\text{ und }t_2=\frac{-8}{27}.$$

Bei $t_1=\frac{3}{5}$ ist $y=\frac{3}{5}x$ in eine der gegebenen Gleichungen einzusetzen. Man erhält $x^2=25$, $x=5$, also $y=3$. Probe!

2. Den geometrischen Ort der Schwerpunkte aller Dreiecke zu suchen, die über der großen Achse einer Ellipse stehen und ihre Spitzen im Umfange der Ellipse haben.

Aus $A(-a,o)$, $B(+a,o)$ und $C(x,y)$ folgt für die Koordinaten (u,v) für den Schwerpunkt des Dreieckes ABC $u=\frac{x}{3}$ und $v=\frac{y}{3}$. In der Gleichung der Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ hat man x durch $\frac{u}{3}$ und y durch $\frac{v}{3}$ zu ersetzen: $9b^2u^2+9a^2v^2=a^2b^2$,

d. i. $\frac{9u^2}{a^2}+\frac{9v^2}{b^2}=1$ oder $\left(\frac{u}{\frac{a}{3}}\right)^2+\left(\frac{v}{\frac{b}{3}}\right)^2=1$. Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a}{3}$ und $\frac{b}{3}$.

3. In einem gleichseitigen, auf der Spitze stehenden hohlen Blechkegel liegt eine Kugel mit $r = \sqrt[3]{225}\ cm$; man gießt nun so viel Wasser ein, daß die Kugel gerade mit Wasser bedeckt ist. Wie hoch wird das Wasser stehen, wenn die Kugel aus dem Kegel herausgenommen wird?

Ist s die Seite des Achsenschnittes des Kegels mit der eingeschriebenen Kugel, so ist das Volumen des Kegels bis zum obersten Punkte der Kugel

$$V = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \pi \cdot \frac{h}{3} = \frac{s^2}{4}\pi \cdot \frac{s\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{s^3 \pi}{8\sqrt{3}} \ldots 1).$$

Um dieses Volumen durch ϱ auszudrücken, benützen wir die Formel: $\varrho = \dfrac{2\triangle}{a+b+c} = \dfrac{s^2\sqrt{3}}{2 \cdot 3s} = \dfrac{s}{6}\sqrt{3}$, somit $s = \dfrac{6\varrho}{\sqrt{3}}$ und $V = \dfrac{s^3\pi}{8\sqrt{3}} = 3\varrho^3\pi$. Demnach ist das Volumen des Wassers allein $3\varrho^3\pi - \dfrac{4}{3}\varrho^3\pi = \dfrac{5}{3}\varrho^3\pi$. Dieses Volumen hat die Form eines gleichseitigen Kegels, dessen Höhe x zu rechnen ist. Volumen eines gleichseitigen Kegels durch r ausgedrückt, lautet $V = \dfrac{r^3\pi}{3}\sqrt{3}$, aber $h = r\sqrt{3}$, somit $r = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$ und $V = \dfrac{h^3\pi}{9}$.

$\dfrac{5}{3}\varrho^3\pi = \dfrac{x^3\pi}{9}$ gesetzt, gibt $x^3 = 15 \cdot 225 = 15 \cdot 15^2$, also $x = 15\ cm$.

Nr. 71.

1. $\frac{77}{65}$ als Summe zweier Brüche mit den Nennern 5 und 13 darzustellen.

$\dfrac{77}{65} = \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{13}$ gibt $77 = 13x + 5y$.

$y = \dfrac{77 - 13x}{5} = 15 - 2x + \dfrac{2 - 3x}{5}$; da x und y ganze Zahlen sein müssen, so muß auch $\dfrac{2-3x}{5}$ eine ganze Zahl $= u_1$ sein; aus $2 - 3x = 5u_1$ folgt $x = \dfrac{2 - 5u_1}{3} = -u_1 + \dfrac{2 - 2u_1}{3} = -u_1 + u_2$; $2 - 2u_1 = 3u_2$ gibt $u_1 = \dfrac{2 - 3u_2}{2} = 1 - u_2 - \dfrac{u_2}{2}$; $\dfrac{u_2}{2}$ ist eine ganze Zahl für $u_2 = 2u_3$.

Danach ist $u_1 = 1 - 3u_3$, $x = -1 + 5u_3$,
$y = 15 + 2 - 10u_3 + 1 - 3u_3 = 18 - 13u_3$.

x ist positiv, wenn $5u_3 > 1$, also $u_3 > \dfrac{1}{5}$, d. i. $u_3 = 1, 2, 3 \ldots$ gesetzt wird. y ist positiv, wenn $18 > 13u_3$, also $u_3 < \dfrac{18}{13}$, d. i. $u_3 = 1, 0, -1, -2 \ldots$ gesetzt wird.

Der beiden Reihen gemeinsame Wert für u_3 ist 1, also $x = 4$, $y = 5$.

2. Ein Parallelepiped hat die Seitenflächen F_1, F_2, F_3; wie groß sind die Seitenflächen eines ihm ähnlichen Parallelepipedes, dessen Inhalt $\frac{1}{4}$ des ersteren ist?

Nach dem Text ist $V : v = 4 : 1$ und nach dem geometrischen Satze $V : v = A^3 : a^3$ (A bedeutet eine Kante des gegebenen Parallelepipedes).

Daher $A^3 : a^3 = 4 : 1$, $a^3 = \frac{A^3}{4}$, $a = \frac{A}{\sqrt[3]{4}}$.

Ähnliche Flächen verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten; also $F_1 : f_1 = A^2 : a^2 = A^2 : \frac{A^2}{\sqrt[3]{1}} = 2\sqrt[3]{2} : 1$; daher $f_1 = \frac{F_1}{2\sqrt[3]{2}}$; ebenso $f_2 = \frac{F_2}{2\sqrt[3]{2}}$ und $f_3 = \frac{F_3}{2\sqrt[3]{2}}$.

3. Die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ dreht sich um die große Achse. Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers „des Ellipsoides"?

Das Volumen dieses Körpers ist gegeben durch $V = 2\int_0^a y^2\pi\,dx =$

$$= 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = 2\pi\,\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{2\,b^2\pi}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{2\,b^2\pi}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\,a b^2\pi.$$

Nr. 72.

1. Wieviel 3ziffrige Zahlen lassen sich aus den 9 Zahlzeichen bilden, in denen keine Ziffer mehr als einmal vorkommt? Wie würde das Resultat lauten, wenn die Null auch vorkommen darf?

a) die Anzahl der Variationen der 3. Klasse ohne Wiederholung ist $\binom{9}{3} . 6 = 9 . 8 . 7 = 504$.

b) Mit 1 an erster Stelle gibt es $n(n-1) = 9 . 8$ Variationen ohne Wiederholung. Dasselbe gilt für 2, 3 . . 9 an erster Stelle.

Anzahl der Zahlen ist also $= 72 \times 9 = 648$.

2. Die kleinste Seite eines schiefen Kegels ($r = 4\ dm$) ist $s = 5\ dm$, der Neigungswinkel der Mittellinie gegen die Basis $\varepsilon = 70°$; wie groß ist das Volumen des Kegels?

$r, s, \sphericalangle\,\varepsilon$ bestimmen ein Dreieck; $r : s = sin\eta : sin\ 70°$.

Also $log sin\eta = log\,\frac{r}{s}\,sin\ 70° = 0{\cdot}90309 - 1$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}97299 - 10 \\ \hline 9.87608 - 10 \\ \hline 1 \\ \hline 700 : 19 = 37 \end{array}$$

$\eta = 48°\,44'\,37''$ und der dritte Winkel dieses Dreieckes $\alpha = 61°\,15'\,23''$

Wird die Höhe gezogen, so ist $h = s\,sin\,\alpha$, folglich $V = \frac{r^2\pi\,.\,s}{3}\,sin\,\alpha$.

3. Eine Jahresrente, die 15mal nicht behoben worden war, wird am 16. Auszahlungstermin mit 8521·5 K auf einmal behoben. Wie groß war die Rente bei 4·5%?

Die Summe der 16 Raten beträgt am Ende des 16. Jahres: $r\dfrac{1{\cdot}045^{16}-1}{0{\cdot}045}$ und ist $= 8521{\cdot}5$; $r = \dfrac{8521{\cdot}5 \times 0{\cdot}045}{1{\cdot}045^{16}-1} = 383{\cdot}468 : 1{\cdot}02237 = 375\ K.$

4. Das Dreieck, welches eine Tangente einer Hyperbel mit den Asymptoten bildet, hat einen konstanten Inhalt.

Die Eckpunkte des Dreieckes sind $O(o, o)$; der obere Eckpunkt B ist Durchschnittspunkt der Tangente $b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$ mit der Asymptote

$$y = \frac{b}{a}x, \text{ also } B\left(\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1}, \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}\right).$$

Der untere Eckpunkt C ist Durchschnittspunkt der Tangente mit

$$y = -\frac{b}{a}x; \text{ also } C\left(\frac{a^2b}{bx_1 + ay_1}, -\frac{ab^2}{bx_1 + ay_1}\right).$$

Nach $2F = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$ erhält man

$$2F = \frac{2a^3b^3}{b^2x_1 - a^2y_1} = \frac{2a^3b^3}{a^2b^2} = 2ab.$$

Nr. 73.

1. Eine Kugel soll bei gegebener Mantelfläche m ein möglichst großes Volumen haben. Bestimme den Radius x der Basis, die Höhe y des Kegels und den Winkel an der Spitze des Achsenschnittes?

$$V = \frac{x^2\pi \cdot y}{3}, \quad m = x\pi\sqrt{x^2+y^2}, \text{ daraus } y^2 = \frac{m^2}{\pi^2x^2} - x^2.$$

$$\left(\frac{3V}{\pi}\right)^2 = x^4y^2 = x^4\left(\frac{m^2}{\pi^2x^2} - x^2\right) = \frac{m^2x^2}{\pi^2} - x^6;$$

die erste Abteilung davon $= 0$ gesetzt, gibt $x^4 = \dfrac{m^2}{3\pi^2}$, also $x^2 = \dfrac{m}{\pi\sqrt{3}}$, und $y^2 = \dfrac{m\sqrt{3}}{\pi} - \dfrac{m\sqrt{3}}{3\pi} = \dfrac{2m\sqrt{3}}{3\pi}$.

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{m}{\pi\sqrt{3}} \cdot \frac{3\pi}{2m\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad log\ tg\,\frac{\varphi}{2} = 9{\cdot}84944 - 10;$$

$\dfrac{\varphi}{2} = 35^\circ\,15'\,42''$.

2. In den Durchschnittspunkten der Kurven $9x^2 + 25y^2 = 225$ und $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ werden Tangenten an beide Kurven gelegt; berechne die Fläche des Viereckes, das von den Tangenten gebildet wird!

$x^2+y^2=8x-12$ stellt einen Kreis K (4, 0, 2) vor.

Für den Durchschnitt der beiden Kurven: $\left.\begin{array}{r} 9x^2+25y^2=225 \\ \text{und}\quad 25x^2+25y^2=200x-300 \end{array}\right\}$ subtr.

$$16x^2=200x-525;$$

daraus $x=\frac{15}{4}$; $\left(\frac{35}{4}\text{ nicht möglich}\right)$

Bei $x=\frac{15}{4}$ ist $y^2=8x-12-x^2=\frac{63}{16}$,

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{7}. \qquad P_1\left(\frac{15}{4},\ \frac{3}{4}\sqrt{7}\right),\ P_2\left(\frac{15}{4},\ -\frac{3}{4}\sqrt{7}\right).$$

Gleichung der Tangente an den Kreis: $(x-4)\left(\frac{15}{4}-4\right)+y\,.\,\frac{3}{4}\sqrt{7}=4.$

Für den Durchschnitt D_1 mit der X-Achse ist $y=0$, somit $(x-4)\left(-\frac{1}{4}\right)=4$, $x=-12$; $D_1(-12,\ 0)$.

Gleichung der Tangente an die Ellipse: $9x\,.\,\frac{15}{4}+25y\,.\,\frac{3}{4}\sqrt{7}=225$; bei D_2 ist $y=0$, also $x=\frac{20}{3}$.

Die 4 Punkte P_1, P_2, D_1 und D_2 bilden ein Deltoid mit der Fläche $F=\frac{Dd}{2}=14\sqrt{7}$.

3. Wie groß ist der Zentralabstand des Schwerpunktes *a*) eines Halbkreisbogens, *b*) einer halben Kreisfläche und *c*) einer halben Kreisringfläche?

Bei der Drehung um einen Durchmesser des Kreises (r) erzeugt *a*) der Halbkreisbogen die Kugelfläche $4r^2\pi$, *b*) die halbe Kreisfläche die ganze Kugel $\frac{4}{3}r^3\pi$ und *c*) die halbe Kreisringfläche eine Hohlkugel $\frac{4}{3}\pi(r^3-\varrho^3)$.

Nach der Guldinschen Regel ist:

a) $r\pi\,.\,2e\pi=4r^2\pi$, also $e=\frac{2r}{\pi}$; *b*) $\frac{r^2\pi}{2}\,.\,2e\pi=\frac{4}{3}r^3\pi$, also $e=\frac{4r}{3\pi}$

und *c*) $(r^2-\varrho^2)\frac{\pi}{2}\cdot 2e\pi=\frac{4}{3}\pi(r^3-\varrho^3)$, also $e=\frac{r^2+r\varrho+\varrho^2}{r+\varrho}\cdot\frac{4}{3\pi}$.

Der zweite geometrische Ort für den gesuchten Schwerpunkt ist der Radius, der den Kreisbogen halbiert.

Nr. 74.

1. Aus der Gleichung $log\left(5^{3\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}}-624\cdot996\right)=-2\cdot39794$ ist x zu berechnen.

Aus $log\left(5^{3\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}}-624\cdot996\right)=0\cdot60206-3$

folgt $5^{3\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}}=624\cdot996+0\cdot004=625$, d. i. $=25^2=5^4$.

$3\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}=4$ gibt $\sqrt[4]{x}=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4+12}{9}}=\frac{2}{3}\pm\frac{4}{3}=\begin{cases}2\\ -\frac{2}{3}.\end{cases}$

Daher $x_1=2^4=16$ und $x_2=\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$.

X

2. Ein Kreissektor rotiert um die Halbierungslinie seines Zentriwinkels. Wie groß muß der Zentriwinkel 2α sein, wenn der Kegel des Kugelausschnittes gleich dem Segmente sein soll?

Es muß Abschnitt $= \frac{1}{2}$ Kugelkegel sein: $\frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{r^2 \pi h}{3}$, d. i $h(3r - h) = r^2$.

Nun ist $r - h = r \cos \alpha$, also $h = r - r \cos \alpha$, somit

$$\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)\left(2 + \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 1 \text{ oder geordnet: } \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 1.$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0{\cdot}61803; \qquad \frac{\alpha}{2} = 51^\circ\, 49'\, 38'$$

$$\alpha = 103^\circ\, 39'\, 16''.$$

X

3. Wie lautet die Mittelpunktsgleichung der Ellipse, welche die Geraden $x + 2y = 27$ und $7x + 4y = 81$ berührt?

Eine Gerade $y = Ax + B$ ist dann Tangente der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = = a^2b^2$, wenn $A^2a^2 = B^2 - b^2$ ist.

Dies auf die gegebenen Gleichungen angewendet, soll sowohl

$$\frac{a^2}{4} = \left(\frac{27}{2}\right)^2 - b^2 \text{ als auch } \left(\frac{7}{4}\right)^2 a^2 = \left(\frac{81}{4}\right)^2 - b^2$$

stattfinden.

Man findet $b^2 = 162$, $a^2 = 81$; die verlangte Gleichung lautet:

$$162x^2 + 81y^2 = 162 \,.\, 81.$$

Nr. 75.

X

1. Jemand legt 100 K in eine Sparkassa ein und zahlt monatlich 10 K nach; wieviel hat er nach 15 Jahren zu fordern, wenn die Zinseszinsen zu 3% gerechnet und monatlich zum Kapital geschlagen werden?

Von 3% auf 12 Monate entfällt auf 1 Monat $\frac{1}{4}\%$, was bei den Ratenzahlungen und beim Stammkapital zu beachten ist. Der Endwert der Stammeinlage beträgt $100 \,.\, 1{\cdot}0025^{180}$.

Die erste Rate wächst an auf $10 \,.\, 1{\cdot}0025^{179}$, die zweite auf $10 \,.\, 1{\cdot}0025^{178} \ldots$, die letzte beträgt nur $10\,K$. Die Ratenzahlungen haben also den Endwert $10\,\frac{1{\cdot}0025^{180} - 1}{0{\cdot}0025}$, mithin $E = 100 \,.\, 1{\cdot}0025^{180} + 10\,\frac{1{\cdot}0025^{180} - 1}{0{\cdot}0025}$.

X

2. Bestimme die Seiten eines Dreieckes, wenn sie eine arithmetische Reihe mit der Differenz $\frac{\varrho}{4}$ bilden! (ϱ = Radius des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises.)

Die Seiten sind: $x - \frac{\varrho}{4}$, x, $x + \frac{\varrho}{4}$ und $\varrho = \frac{2F}{a + b + c}$, also $a + b + c = = 3x = \frac{2F}{\varrho}$. Die Seiten lauten jetzt: $\frac{2F}{3\varrho} - \frac{\varrho}{4}$, $\frac{2F}{3\varrho}$, $\frac{2F}{3\varrho} + \frac{\varrho}{4}$; aus ihnen läßt sich die Fläche des Dreieckes berechnen: $F = \frac{F}{\varrho}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{F^2}{9\varrho^2} - \frac{\varrho^2}{16}\right)}$; daraus findet man: $F = \frac{21}{4}\varrho^2$.

$$a + b + c = 3x = \frac{2F}{\varrho} = \frac{21}{2}\varrho;\ x = \frac{7}{2}\varrho = \frac{14}{4}\varrho;$$

die beiden andern Seiten sind: $\frac{13}{4}\varrho$ und $\frac{15}{4}\varrho$.

Für $\varrho = 4$ lauten die Seiten: 13, 14, 15.

3. Bestimme die Fläche, welche von den Linien 1. $y = 4x$ und 2. $y = x^2 + x + 2$ eingeschlossen wird!

Die zwei Linien schneiden einander in $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Die Fläche zwischen der Geraden und der X-Achse im Intervalle von $x_1 = 1$ bis $x_2 = 2$ ist $= \int\limits_1^2 4x\,dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 6$ (auch als Fläche eines Trapezes.) Die Fläche zwischen der Kurve $y = x^2 + x + 2$ und der X-Achse für dieselben Grenzen ist

$$\int\limits_1^2 (x^2 + x + 2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^2 = \frac{35}{6};$$

demnach die verlangte Fläche $= 6 - \frac{35}{6} = \frac{1}{6}$.

Nr. 76.

1. Jemand kauft eine Halbjahresrente von 800 K für 30000 K; wie lange wird ihm diese gezahlt, wenn 4% Zinseszins berechnet wird?

30000 K wachsen in n Jahren, d. i. in $2n$ Terminen zu 2% Zinseszinsen auf $30000 \cdot 1{\cdot}02^{2n}$ an; 800 K, die man am Ende eines jeden dieser $2n$ Termine erhält, haben einen Endwert von $800\,\frac{1{\cdot}02^{2n} - 1}{0{\cdot}02}$.

Aus $300 \cdot 1{\cdot}02^{2n} = 400\,(1{\cdot}02^{2n} - 1)$ erhält man: $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{1{\cdot}02^{2n}}$, also $1{\cdot}02^{2n} = 4$, $2n = 6020{\cdot}6 : 86 = 70$ und $n = 35$ Jahre.

2. Einer Kugel wird ein gerader Kegel so eingeschrieben, daß seine Höhe im Mittelpunkte der Kugel stetig geteilt wird; in welchem Verhältnisse stehen die Volumina beider Körper?

Aus $(h - r) : r = r : h$ erhält man $h = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

Danach ist $2r - h = \frac{r}{2}(3 - \sqrt{5})$ und $\varrho^2 = h\,(2r - h) = \frac{r^2}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Volumen des Kegels $= \frac{r^2\pi}{2}(\sqrt{5} - 1)\frac{r}{6}(\sqrt{5} + 1) = \frac{r^3\pi}{3}$.

Kegel: Kugel $= 1 : 4$.

3. In der Geraden $4y - 5x = -28$ einen Punkt zu bestimmen, der von $M(1, 5)$ und $N(7, -3)$ gleich weit entfernt ist.

Der gesuchte Punkt liegt auch in der Symmetrale von MN.

Die Mitte von MN hat die Koordinaten: $\frac{1+7}{2} = 4$, $\frac{5-3}{2} = 1$.

Der Richtungskoeffizient von $MN = \frac{-3-5}{7-1} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$.

Die Gleichung der Symmetrale von MN lautet also: $y - 1 = \frac{3}{4}(x-4)$, d. i. $4y - 3x = -8$. Der Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der gegebenen gibt den gesuchten Punkt.

Aus $\left\{\begin{array}{rcr} 4y - 5x &=& -28 \\ 4y - 3x &=& -\ \ 8 \\ - \quad + & & + \end{array}\right\}$ erhält man $x = 10$, $y = \frac{11}{2}$.

Nr. 77.

1. A hat von heute an regelmäßig alle 3 Jahre, im ganzen 10 mal, jedesmal 4000 K an B zu zahlen; wie groß ist bei $3^1/_2{}^0/_0$ die heutige Ablösungssumme?

Die erste Rate R kann bei B unter denselben Bedingungen auf $R \,.\, 1{\cdot}035^{27}$, die zweite auf $R \,.\, 1{\cdot}035^{24}$ . . ., die dritte auf $R \,.\, 1{\cdot}035^{21}$ . . . anwachsen; die letzte beträgt nur R.

B hat also am Ende des 30. Jahres einen Betrag von $4000 \frac{1{\cdot}035^{30} - 1}{1{\cdot}035^3 - 1}$ Kronen.

B wird mit einem solchen Anfangskapital K zufrieden sein müssen, welches durch 30 Jahre zu $3^1/_2{}^0/_0$ Zinseszinsen zu der eben angegebenen Summe anwächst. Aus $K \,.\, 1{\cdot}035^{30} = 4000 \frac{1{\cdot}035^{30} - 1}{1.035^3 - 1}$ ergibt sich $K = 23687$ Kronen.

2. Einer Kugel (r) wird ein Oktaeder ein- und umgeschrieben; wie verhalten sich die Volumina dieser Körper zueinander?

Ist a eine Kante eines Oktaeders, so ist $V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$.

Beim eingeschriebenen Oktaeder ist $2r = a\sqrt{2}$, also $a = r\sqrt{2}$ und $V_1 = \frac{4}{3}r^3$.

„ umgeschriebenen „ „ $\frac{A^3}{3}\sqrt{2} = 8 \cdot \frac{A^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{r}{3}$, also $A = r\sqrt{6}$

und $V_2 = 4r^3\sqrt{3}$; somit $V_1 \; V_2 = \frac{1}{3} : \sqrt{3} = 1 : 3\sqrt{3}$.

3. Bestimme den geometrischen Ort der Spitzen aller Dreiecke CDE, welche dieselbe Basis $2b$ und denselben Winkel φ an der Spitze haben!

Wird die Mitte der gegebenen Strecke $CD = 2b$ zum Anfangspunkte des Koordinatensystems gewählt, so hat jede Gerade, die durch

$C(-b, o)$ geht, zur Gleichung $y = A\,(x+b),$
$D(+b, o)$ „ „ „ $y = A^1\,(x-b).$ Aus $A = \frac{y}{x+b}$ und $A^1 = \frac{y}{x-b}$

ergibt sich für $tg\,\varphi = \frac{A^1 - A}{1 + AA^1} = \frac{2by}{x^2 + y^2 - b^2}$. Wird diese Gleichung geordnet,

so erhält man: $x^2 + y^2 - b^2 = \frac{2by}{tg\,\varphi}$ oder: $x^2 + \left(y - \frac{b}{tg\,\varphi}\right)^2 = b^2\left(1 + \frac{1}{tg^2\,\varphi}\right)$, d. i. eine Kreisgleichung.

Für den speziellen Fall $\varphi = 90°$, $tg\,\varphi = \infty$ erhält man: $x^2 + y^2 = b^2$, d. h. jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

Nr. 78.

1. Ein Kapital, welches zu $4^1/_2\,^0/_0$ auf Zinseszinsen angelegt war, hatte sich, obwohl jährlich 420 K behoben wurden, in 18 Jahren verdoppelt. Wie groß war das Kapital?

Das Anfangskapital A hat nach 18 Jahren den Wert $A \,.\, 1{\cdot}045^{18}$. Durch die erste Rate von 420 K, die man am Ende des Jahres behoben hat, hat man das Vermögen um $420 \,.\, 1{\cdot}045^{17}$ vermindert.

Die zweite Rate vermindert das Vermögen um $420 \,.\, 1{\cdot}045^{16}$ usf., bis zur letzten Rate 420 K. Die Summe aller Raten beträgt $420\,\frac{1{\cdot}045^{18} - 1}{0{\cdot}045}$.

Aus $A \,.\, 1{\cdot}045^{18} - 420\,\frac{1{\cdot}045^{18} - 1}{0{\cdot}045} = 2A$ erhält man für

$$A = 420\,\frac{1{\cdot}045^{18} - 1}{0{\cdot}045\,(1{\cdot}045^{18} - 2)} = 54100\,K.$$

2. Einer Kugel (r) wird ein gleichseitiger Kegel und ein gleichseitiger Zylinder eingeschrieben; wie verhalten sich die Oberflächen dieser Körper?

Oberfläche eines gleichseitigen Zylinders $O_2 = 6\varrho^2\pi$; aus $4r^2 = 4\varrho^2 + 4\varrho^2$ erhält man $\varrho^2 = \frac{r^2}{2}$, also $O_2 = 3r^2\pi$.

Oberfläche eines gleichseitigen Kegels $O_3 = 3x^2\pi$; um x zu finden, benützt man den Satz: $(2x)^2 = 2r \,.\, h$, wobei $h = x\sqrt{3}$ die Höhe des gleichseitigen Kegels bezeichnet. Aus $4x^2 = 2rx\sqrt{3}$ folgt $x = \frac{r}{2}\sqrt{2}$; folglich $O_3 = \frac{9}{4}r^2\pi$ und $O_1 : O_2 : O_3 = 4r^2\pi : 3r^2\pi : \frac{9}{4}r^2\pi = 16 : 12 : 9$.

3. Es soll der geometrische Ort der Mitten aller parallelen Sehnen einer Ellipse bestimmt werden.

Sind $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ die Koordinaten der Endpunkte einer Sehne, so soll $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ konstant bleiben, also $= c$ sein. Aus $\left.\begin{matrix} b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2 \\ b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \end{matrix}\right\}$ erhält man:

$b^2(x_2^2 - x_1^2) + a^2(y_2^2 - y_1^2) = O$, also $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}$.

Durch die Koordinaten der Endpunkte einer Strecke sind auch die Koordinaten des Halbierungspunktes bestimmt; es ist $\frac{x_1 + x_2}{2} = u$, $\frac{y_1 + y_2}{2} = v$; daher: $-\frac{b^2 u}{a^2 v} = c$, oder $v = -\frac{b^2}{a^2 c} u$, d. i. eine Gleichung einer Geraden durch O. Die Mitten paralleler Sehnen einer Ellipse liegen in einer Geraden, die durch O geht.

Nr. 79.

1. In einer Halbkugel ($r = 25\ cm$) liegen 2 parallele Schnitte mit den Halbmessern x und y. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt der Kugelschichte, wenn

$$(x^2 - y^2) + (x - y) = 360 \text{ und } (x^2 - y^2)(x - y) = 1359 \text{ ist?}$$

Aus $u + v = 360$ und $uv = 1359$ erhält man leicht $u - v = 342$.

Aus der Summe und der Differenz derselben Zahlen ist $u = 351 = x^2 - y^2$ und $v = 9 = x - y$; $(x^2 - y^2) : (x - y) = x + y = 39$; $x = 24$, $y = 15$.

$$V \text{ (der Kugelschichte)} = \frac{(\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2)\pi h}{2} + \frac{h^3 \pi}{6}.$$

2. Zur Auflösung eines Dreieckes ist $F = 1800$, $b + c = 175$ und $a = 145$ gegeben; welches Stück läßt sich daraus zunächst berechnen?

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{F}{s(s-a)} = \frac{180}{16\,.\,15} = 0{\cdot}75.$$

$$log\ tg\,\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}87506 \qquad \frac{\alpha}{2} = 36^\circ\,52'\,11''$$

$$\begin{array}{l} 01 \\ \hline 500 : 44 = 11. \end{array} \qquad \alpha = 73^\circ\,44'\,22''.$$

$$\frac{bc}{2} \sin\alpha = F \text{ gibt } bc = \frac{3600}{\sin\alpha} = 3750; \qquad b = 150,\ c = 25.$$

3. Jede Tangente einer Ellipse bildet mit den Brennstrahlen zum Berührungspunkte gleiche Winkel.

Ist GH eine Tangente im Berührungspunkte $M(x_1 y_1)$, $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$, so lautet der Richtungskoeffizient von $F_1 M \ldots \frac{y_1}{e + x_1}$, von $F_2 M \ldots \frac{-y_1}{e - x_1}$ und von der Tangente $-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$.

$$tg\ GMF_1 = \frac{A - a}{1 + Aa} = \frac{\frac{y_1}{e + x_1} + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}}{1 - \frac{b^2 x_1 y_1}{a^2 y_1 (e + x_1)}} = \frac{a^2 y_1{}^2 + b^2 e x_1 + b^2 x_1{}^2}{a^2 e y_1 + a^2 x_1 y_1 - b^2 x_1 y_1} =$$

$$= \frac{a^2 b^2 + b^2 e x_1}{a^2 e y_1 + e^2 x_1 y_1} = \frac{b^2}{e y_1}.$$

$$tg\, HMF_2 = \frac{-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} + \frac{y_1}{e - x_1}}{1 + \frac{b^2 x_1 y_1}{(e - x_1) a^2 y_1}} = \frac{b^2(-e x_1 + a^2)}{e y_1 (a^2 - e x_1)} = \frac{b^2}{e y_1}.$$

Daher $\sphericalangle\, GMF_1 = HMF_2$.

Nr. 80.

1. Ein Besitzer einer 15jährigen Rente von 1600 *K* bezieht dieselbe durch die ersten 4 Jahre nicht; wie groß ist dann jede der folgenden 11 Raten bei $4{\cdot}5\%$ Zinseszins?

Die 15 Raten haben den Endwert $1600 \frac{1{\cdot}045^{15} - 1}{0{\cdot}045}$.

Die 11 Raten haben den Endwert $x \frac{1{\cdot}045^{11} - 1}{0{\cdot}045}$.

Aus der Gleichstellung beider Ausdrücke erhält man

$$x = \frac{1600\ (1{\cdot}045^{15} - 1)}{1{\cdot}045^{11} - 1} = 1600 \frac{0{\cdot}93528}{0{\cdot}62285} = 2402{\cdot}13\ K.$$

2. Eine Kugel werde zylindrisch so ausgebohrt, daß die Achse des Zylinders durch den Kugelmittelpunkt geht. Wie groß ist der Radius des zylinderförmigen Körpers, wenn sein Kubikinhalt $\frac{61}{125}$ der ganzen Kugel beträgt?

Der Restkörper hat den Kubikinhalt $\frac{64}{125} \cdot \frac{4 r^3}{3} \pi$ und ist als Rotationskörper, entstanden durch Umdrehung eines Kreissegmentes, zu betrachten. Das Volumen eines solchen Körpers ist nach der Formel $\frac{\pi h}{6} s^2$ zu berechnen.

In unserem Falle ist die Sehne s gleich der Höhe h.

Aus $\frac{64}{125} \cdot \frac{4 r^3 \pi}{3} = \frac{\pi h^3}{6}$ erhält man $h = \frac{8}{5} r$ und $\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}} = \frac{3}{5} r$.

3. Für welchen Punkt der Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ ist die Subtangente gleich der Subnormale?

Die Gleichung der Tangente lautet: $b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = a^2 b^2$;

für $y = 0$ ist $x = \frac{a^2}{x_1}$; daher die Subtangente $= \frac{x_1{}^2 - a^2}{x_1}$.

Die Gleichung der Normale lautet: $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$;

für $y = 0$ ist $x - x_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2} =$ Subnormale.

Aus $\frac{x_1{}^2 - a^2}{x_1} = \frac{b^2 x_1}{a^2}$ erhält man $x_1 = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ und aus der Hyperbelgleichung $y_1 = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

Nr. 81.

1. A will eine Jahresrente von $1000\,K$, die noch 10 Jahre läuft, in eine Halbjahresrente von $R = 597{\cdot}7\,K$ verwandeln; wie lange erhält er diese, wenn 4% Zinseszins gerechnet wird?

Der Endwert aller Raten ist als Endwert eines gewissen Anfangskapitals A zu betrachten; $1000\,\frac{1{\cdot}04^{10}-1}{0{\cdot}04} = A\,.\,1{\cdot}04^{10}$, also $A = 1000\,\frac{1{\cdot}04^{10}-1}{0{\cdot}04\,.\,1{\cdot}04^{10}}$ und (nach der zweiten Art) $= R\,\frac{1{\cdot}02^{2n}-1}{0{\cdot}02\,.\,1{\cdot}02^{2n}}$;

$$R\,\frac{1{\cdot}02^{2n}-1}{1{\cdot}02^{2n}} = \frac{0{\cdot}48024:1000}{2\,.\,1{\cdot}48024} = \frac{240{\cdot}12}{1{\cdot}48024}.$$

$$1-\frac{1}{1{\cdot}02^{2n}} = \frac{240{\cdot}12}{597{\cdot}7\,.\,1{\cdot}48024} = 0{\cdot}2713; \qquad \frac{1}{1{\cdot}02^{2n}} = 0{\cdot}7287;$$

$2n = 16$ Halbjahre $= 8$ Jahre.

2. Es ist der Kubikinhalt *a)* eines Kegels, *b)* eines Kegelstumpfes nach den Regeln der Integralrechnung abzuleiten.

Wird eine Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ um die X-Achse gedreht, so beschreibt sie eine Fläche, welche einen Rotationskörper umschließt. Zwei auf der Achse senkrechte Ebenen, deren Abstände von dem Nullpunkte gleich x und $x + dx$ sind, schneiden aus dem Körper ein Raumelement dV heraus, das für ein sehr kleines dx durch einen Zylinder mit der Höhe dx und der Grundfläche $y^2\pi$ ersetzt werden kann.

a) Beim geraden Kegel ist $y = Ax$, daher $dV = A^2x^2\pi dx$ und

$$V = A^2\pi\int_0^{x_1} x^2dx = A^2\pi\,.\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{x_1} = A^2x_1\pi\,.\,\frac{x_1}{3} = y^2\pi\,.\,\frac{x_1}{3} = \text{Basis} \times \frac{\text{Höhe}}{3}.$$

b) Beim geraden Kegelstumpf hat man diese Raumelemente $dV = A^2x^2\pi dx$ von x_1 bis x_2 zu addieren; $x_2 - x_1$ stellt die Höhe des Stumpfes, y_1 bedeutet r und $y_2 = R$. Es ist also: $V = A^2\pi\int_{x_1}^{x_2} x^2dx = A^2\pi\,.\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{A^2\pi}{3}\,(x_2^3 - x_1^3) =$

$$= \frac{\pi}{3}\,(x_2 - x_1)\,(A^2x_2^2 + A^2x_1x_2 + A^2x_1^2) = \frac{\pi h}{3}\,(R^2 + Rr + r^2).$$

3. Vom Punkte (u, v) werden zwei Tangenten an eine Hyperbel $(b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2)$ gezogen; bestimme den geometrischen Ort von (u, v), wenn die Tangenten einen rechten Winkel einschließen!

Die Gerade $y - v = A\,(x - u)$ ist Tangente der Hyperbel, wenn die Beziehung $A^2a^2 = B^2 + b^2$ besteht; da $B = -Au + v$ ist, so lautet die Gleichung $v^2 - 2Auv + A^2u^2 + b^2 = A^2a^2$ oder $A^2 - \frac{2uv}{u^2 - a^2}\,A = \frac{-b^2 - v^2}{u^2 - a^2}$.

$$\left.\begin{aligned}\text{Daraus } A_1 &= \frac{uv + \sqrt{-b^2u^2 + a^2b^2 + a^2v^2}}{u^2 - a^2} \\ A_2 &= \frac{uv - \sqrt{-b^2u^2 + a^2b^2 + a^2v^2}}{u^2 - a^2}\end{aligned}\right\} \text{Aus } A_1 A_2 = -1 \text{ erhält man}$$

$-(u^2 - a^2)^2 = v^2(u^2 - a^2) + b^2(u^2 - a^2)$, d. i. $u^2 + v^2 = a^2 - b^2$; dies ist die Mittelpunktsgleichung eines Kreises mit dem Radius $\sqrt{a^2 - b^2}$.

82.

1. Durch den Punkt $A(3, 3)$ soll eine Gerade so gelegt werden, daß sie von den Mittelpunkten der Kreise $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ und $x^2 + y^2 - 8x = 0$ gleichen Abstand hat. In welchem Punkte und unter welchem Winkel schneidet diese Gerade die Potenzlinie der beiden Kreise?

1. Kreis: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; $K_1(1, -1, 2)$.
2. Kreis: $(x-4)^2 + y^2 = 16$; $K_2(4, 0, 4)$.

Die Verbindungsgerade C_1 mit C_2 gibt die Richtung der Geraden durch $A(3, 3)$ an; $C_1 C_2$ hat den $R.\,C = \frac{1}{3}$; daher die verlangte Gerade

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 3).$$

Die Gleichung der Potenzlinie findet man aus $K_1 = K_2$; man erhält $y = -3x + 1$. Die Potenzlinie ist zur Geraden durch A normal. Den Schnittpunkt beider Geraden hat die Koordinaten $x = \frac{-3}{10}$ und $y = \frac{19}{10}$.

2. Es sind die Gleichungen: $log\,x + log\,y = 0{\cdot}68124 - 1$ und $log(1 - x^2) + log(1 - y^2) = 0{\cdot}36248 - 1$ aufzulösen.

$xy = 0{\cdot}48$ und $(1 - x^2)(1 - y^2) = 0{\cdot}2304$. Wird in $1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 = 0{\cdot}2304$ für x^2y^2 der Wert $0{\cdot}2304$ eingesetzt, so erhält man $x^2 + y^2 = 1$; dazu $2xy = 0{\cdot}96$ gibt: $x = 0{\cdot}8$, $y = 0{\cdot}6$.

3. Bestimme die Fläche, welche von den Linien $8y = x^2 + 2$ und $8y = 6x - 3$ eingeschlossen wird.

Die 2 Linien haben 2 Schnittpunkte $x_1 = 1$, $x_2 = 5$; die Kurve liegt innerhalb des Intervalles 1—5 unterhalb der Geraden ($x = 2$ oder $x = 3$ zeigt dies).

Fläche zwischen der Geraden und der X-Achse =

$$= \frac{1}{8}\int_1^5 (6x - 3)\,dx = \frac{1}{8}\left(6 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x\right)\Bigg|_1^5 = \frac{15}{2}.$$

Fläche zwischen der Kurve und der X-Achse =

$$= \frac{1}{8}\int_1^5 (x^2 + 2)\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_1^5 = \frac{37}{6}.$$

Die verlangte Fläche $= \frac{15}{2} - \frac{37}{6} = \frac{4}{3}$.

Anhang.

Einige Aufgaben *a*) aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung,
b) aus der sphärischen Trigonometrie.

---

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln ein Sequens zu werfen?

Es ist $W = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{g}{6^3}$.

Günstige Fälle sind: 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5; 4, 5, 6. Davon ist jede Kombination, wie z. B. 2, 3, 4 auf $3! = 6$ verschiedene Arten möglich; daher gibt es 24 günstige Fälle; also $W = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$.

2. Eine Urne enthält 5 weiße und 7 schwarze Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 6 herausgenommenen Kugeln 2 weiße sind.

$$W = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}.$$

Die Anzahl der möglichen Fälle ist durch $\binom{12}{6}$ gegeben.

Die Anzahl der günstigen Fälle, 2 weiße Kugeln zu ziehen, ist $\binom{5}{2}$;

" " " " " 4 schwarze " " " " $\binom{7}{4}$;

da nun jeder günstige Zug der ersten Art mit jedem der zweiten Art zusammentreffen kann, so gibt es im ganzen $\binom{5}{2}\binom{7}{4}$ günstige Fälle; daher $W = \frac{\binom{5}{2}\binom{7}{4}}{\binom{12}{6}}$.

3. In einem Gefäße befinden sich 8 schwarze, 5 weiße, 10 gelbe und 4 rote Kugeln und zwei derselben sollen gezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese eher eine schwarze und eine gelbe, als eine weiße und eine rote seien?

Die schwarzen und die gelben lassen sich auf $8 \cdot 10 = 80$ Arten und die weißen und roten auf $5 \cdot 4 = 20$ Arten verbinden. Hier wird nach der relativen Wahrscheinlichkeit gefragt; die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird erhalten, wenn man die absolute Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der in Betracht kommenden Ereignisse dividiert; daher $W = \dfrac{80:\binom{27}{2}}{20:\binom{27}{2}+80:\binom{27}{2}} = \dfrac{80}{20+80} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$.

4. Jemand will mit zwei Würfeln zuerst 4, dann 5 werfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit 1. daß beide Würfe gelingen, 2. daß keiner gelingt, 3. daß nur der erste, 4. daß nur der zweite gelingt?

Die Wahrscheinlichkeit 4 zu werfen, beträgt $\frac{3}{36}$;

„ „ 5 „ „ „ $\frac{4}{36}$;

danach ist $W_1 = \frac{3}{36}\cdot\frac{4}{36} = \frac{1}{108}$; $W_2 = \frac{33}{36}\cdot\frac{32}{36} = \frac{22}{27}$;

$W_3 = \frac{3}{36}\cdot\frac{32}{36} = \frac{2}{27}$; $W_4 = \frac{33}{36}\cdot\frac{4}{36} = \frac{11}{108}$.

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln beim ersten Wurf 11, oder, wenn das nicht geschieht, beim zweiten Wurf 9 Augen zu werfen?

Die Wahrscheinlichkeit, 11 zu werfen, ist $= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{17}{18}$. Die Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Daß die dem ersten Falle entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit mit der zweiten eintritt, ist durch $\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{9}$ gegeben; die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das erste oder das zweite eintritt, beträgt also: $\frac{1}{18} + \frac{17}{18.9} =$ $= \frac{26}{18.9} = \frac{13}{81}$.

6. In einer Urne befinden sich 20 Lose mit den Nummern 1, 2, 3 . . . 20. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, daß zuerst Nr. 1, dann Nr. 2 und darauf Nr. 3 gezogen werde?

Die absolute Wahrscheinlichkeit, Nr. 1 zu ziehen, beträgt $\frac{1}{20}$; da diese Nummer nicht zurückgegeben wird, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, Nr. 2 zu ziehen, $\frac{1}{19}$ und ebenso für Nr. 3 $\frac{1}{18}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß alles dies nacheinander eintrifft, ist durch das Produkt der absoluten Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{18}$ gegeben.

7. *a*) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei $n$maligem Werfen eines Würfels mindestens einmal 1 zu werfen?

Die W., 1 nicht zu werfen, ist $= \frac{5}{6}$; daß dies $n$mal nicht geschieht $= \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Die verlangte W. ist also $P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$; für $P = \frac{1}{2}$, in welchem Falle das Ereignis zweifelhaft ist, ist $\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{2}$ und $n = \frac{\log 0{\cdot}5}{\log 5 - \log 6} = 3{\cdot}8$, d. h. beim 4. Wurf ist es wahrscheinlicher, 1 zu werfen.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln mindestens einmal $3 + 3$ zu werfen?

Die W., $3 + 3$ nicht zu werfen, ist $\frac{35}{36}$; dies $n$mal hintereinander nicht zu werfen, ist $\left(\frac{35}{36}\right)^n$. Die verlangte W. ist also $P = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$; bei $P = \frac{1}{2}$ ist $n = \frac{\log 0{\cdot}5}{\log 35 - \log 36} = 24{\cdot}6$, d. h. bei 24maligem Werfen mit 2 Würfeln ist das $3 + 3$ weniger wahrscheinlich als das Nichtfallen.

8. In einer Tasche befinden sich 9 Geldstücke; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Griff α) eine gerade, β) eine ungerade Anzahl zu greifen?

Aus den Binomialkoeffizienten ist bekannt, daß

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1} \text{ ist.}$$

Demnach ist $\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = 2^{n-1} - 1$

und $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots = 2 \,.\, 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$.

Es ist also $W_\alpha = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} = \frac{255}{511}$ und $W_\beta = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} = \frac{256}{511}$.

9. Zur Auflösung eines rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes sind beide Katheten: $a = 151^\circ\ 2'\ 32''$ und $b = 68^\circ\ 14'\ 12''$ gegeben.

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \cos a \,.\, \cos b \\ &= -\sin 61^\circ\ 2'\ 32''\ \cos b \end{aligned}\right\} \log\cos(180 - c) = 9{\cdot}94200 - 10$$

$$\begin{array}{r} 9{\cdot}56911 - 10 \\ \hline 9{\cdot}51111 - 10 \\ 043 \\ \hline 6800 : 62 = 110'' \end{array}$$

$180 - c = 71^\circ\ 4'\ 10''$, $c = 108^\circ\ 55'\ 50''$.

$$tg\, A = \frac{tg\, a}{\sin b} = \frac{-\cot g\, 61^\circ\ 2'\ 32''}{\sin b}; \quad \log tg\,(180 - A) = 9{\cdot}74300 - 10$$

$$\begin{array}{r} 9{\cdot}94200 - 10 \\ \hline 9{\cdot}80100 - 10 \\ 084 \\ \hline 1600 : 47 = 34'' \\ 190 \end{array}$$

$180 - A = 32^\circ\ 18'\ 34''$

$A = 147^\circ\ 41'\ 26''$

$$tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin a}$$

Korrigenda

zu

„Gajdeczka, Maturitäts-Prüfungsfragen aus der Mathematik".

Vor dem Gebrauche dieser Aufgabensammlung bittet der Verfasser folgende Fehler zu korrigieren:

S. 4. Die 2. Z. der Auflösung des Beisp. 3 soll heißen:

$$H = 20\,cm. \text{ Die verlangte Höhe } x = \sqrt{H^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Im Text der Aufg. 1 ist statt $9\,dm^2$ . . . $6\,dm^2$ zu setzen.

S. 6. 5. Z. in Nr. 4 beginnt mit $y = 0$ (statt $x = 0$).

S. 10. In der 1. Z. lies $r = \frac{73}{2\pi}$ $\left(\text{statt } \frac{55}{2\pi}\right)$.

S. 12. Auf der letzten Z. ist statt des Bruches $30 - x$ zu schreiben.

S. 13. Im Resultat von Nr. 1 ist bei 100 die Benennung K zu streichen.

S. 19. Z. 7 v. unten ist im Minuenden des Bruches das Zeichen *log* zu streichen.

S. 22. In der Auflösung von Nr. 4 ist die Seite des Quadrates anstatt mit a . . . mit s zu bezeichnen.

S. 25. In der vorletzten Z. von Nr. 4 ist dem Bruche $x^1 = \frac{r^2}{10}$ das $-$Zeichen vorzusetzen.

S. 26. In der 2. Z. von Nr. 1 fehlt vor dem $=$Zeichen die Klammer).

S. 31. In der 2. Z. des klein Gedruckten ließ „Radius" statt „Radium".

S. 35. 1. Z. oben fehlt nach c^2 das Gleichheitszeichen $=$.

S. 42. In der Lösung von 3, 4. Z. lies $2\,t_1^2$, (statt $3\,t_1^2$).

S. 44. 5. Z. von oben: lies statt 159 . . . 169!
und 5. Z. v. unten: von den zwei gleichen Faktoren soll der zweite $y_2 - y_1$ lauten.

S. 47. Die letzte Z. von Nr. 4 hat mit y (statt x) $=$ . . . anzufangen.

S. 48. In der 2. Z. von unten lautet der Klammerausdruck $(39 - \sqrt{bc})$.

S. 49. Im Text der Aufg. 1 soll statt 16^{x+1} . . . 16^{x-1} stehen und zwei Zeilen tiefer fehlen die Exponenten: $4^{2x} + 64 . 4^x = \ldots$

S. 50. 4. Z. v. oben ist vor dem Bruch für . . . das $-$ Zeichen zu setzen.

S. 59. 3. Z. in Nr. 1 ist $\frac{40}{6} = \frac{20}{3}$ $\left(\text{und nicht} = \frac{30}{3}\right)$.

S. 60. 6. Z. in Nr. 2: die Gleichung hat mit e anzufangen; $e = \frac{D}{2} = \ldots$

S. 63. 3. Z. v. unten statt $\frac{u}{3}$ und $\frac{v}{3}$ ist $3u$ und $3v$ zu schreiben.

S. 64. 2. Z. v. oben ist im Text statt $r \ldots \varrho$ zu schreiben.

S. 65. 8. Z. v. oben statt $\sqrt[3]{1} \ldots \sqrt[3]{16}$ zu setzen.

S. 66. Ersetze im Text von 1: „Eine Kugel“ durch „Ein Kegel“!

S. 67. die in Aufgabe 1 gegebene Gl. lautet:

$log\, 5^{3\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x}} - 624{\cdot}996 = log\,(-2{\cdot}39794)$; $log\,(-2{\cdot}39794) = log\,(0{\cdot}60206 - 3)$.

S. 68. 2. Z. v. oben ist bei $2\,\alpha$, 2 zu streichen und im klein Gedruckten statt $\alpha \ldots \frac{\alpha}{2}$ zu schreiben.

S. 71. 7. Z. v. unten: $\sqrt{2}$ ist bei $x = \frac{r}{2}\sqrt{2}$ durch $\sqrt{3}$ zu ersetzen.

S. 74. In der Auflösung von 2 a) ist im ersten Faktor des Produktes $A^2 x_1 \pi \cdot \frac{x_1}{3}$ statt $x_1 \ldots x_1^2$ zu schreiben.

Josef Gajdeczka.

10. In einem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke sei die Hypotenuse $c = 102° \; 24' \; 32''$ und die Kathete $b = 76° \; 36' \; 13''$; berechne einen Winkel und die zweite Kathete!

Es ist $sin B = \frac{sin b}{sin c}$, $log sin B = 9·98802 - 10$ $\quad B = 84° \; 54' \; 50''$.

$$\begin{array}{r} 9·98973 - 10 \\ \hline 9·99829 - 10 \end{array}$$

$cos A = \frac{tg b}{tg c}$.

$cos a = \frac{cos c}{cos b} = \frac{- sin 12° \, 24' \, 32''}{cos b}$, somit $cos (180 - a) = \frac{sin 12° \, 24' \, 32''}{cos b}$.

$$\begin{array}{r} log cos (180 - a) = 9·33221 - 10 \\ 9·36490 - 10 \\ \hline 9·96731 - 10 \\ 27 \\ \hline 400 : 8 = 50 \end{array}$$

$180 - a = 21° \; 57' \; 10''$.
$a = 158° \; 2' \; 50''$.

11. Zur Auflösung eines rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes ist die Hypotenuse $c = 106° \; 24' \; 30''$ und der schiefe Winkel $A = 161° \; 29' \; 35''$ gegeben.

Es ist 1. $sin a = sin c \, . \, sin A = sin \, 73° \, 35' \, 30'' \, . \, sin \, 18° \, 30' \, 25''$;

$$\begin{array}{r} log sin a = 9·98194 - 10 \\ 9·50164 - 10 \\ \hline 9·48358 - 10 \end{array}$$

$a = 17° \; 43' \; 40''$ und $162° \; 16' \; 20''$, was hier zu nehmen ist, weil auch $A > 90°$ ist.

2. $tg b = tg c \, . \, cos A = - cotg \, 16° \, 24' \, 30'' \; (- sin \, 71° \, 29' \, 35'')$.

$$\begin{array}{r} log tg b = 10·53096 - 10 \\ 9·97695 - 10 \\ \hline 0·50791 \\ 48 \\ \hline 4300 : 74 = 58'' \end{array}$$

$b = 72° \; 44' \; 58''$.

3. $cotg B = cos c \, . \, tg A$.

12. Zur Auflösung eines rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes sind die beiden schiefen Winkel: $A = 52° \; 8' \; 50''$, $B = 61° \; 14' \; 20''$ gegeben.

1. $cos c = cotg A \, . \, cotg B$; $log cos c = 9·89051 - 10$ $\quad c = 64° \; 45' \; 2''$.

$$\begin{array}{r} 9·73947 - 10 \\ \hline 9·62998 - 10 \\ 72 \\ \hline 2600 : 45 = 58'' \end{array}$$

2. $cos b = \frac{cos B}{sin A}$.

$$\begin{array}{r} log cos b = 9·68229 - 10 \\ 9·89740 - 10 \\ \hline 9·78489 - 10 \\ 78 \\ \hline 1100 : 27 = 41'' \end{array}$$

$b = 52° \; 27' \; 19''$.

3. $cos a = \frac{cos A}{sin B}$.

13. Von einem sphärischen Dreiecke sind alle Seiten bekannt: $a = 70°\ 49'\ 38''$, $b = 119°\ 18'\ 14''$, $c = 125°\ 40'\ 16''$; $\sphericalangle A$ zu berechnen.

$$tg\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}{sin\,s\,.\,sin\,(s-a)}},\ \text{wobei}\ s = \frac{a+b+c}{2} = 157°\ 54'\ 4'',$$

also $s-a = 87°\ 4'\ 26''$, $s-b = 38°\ 35'\ 50''$, $s-c = 32°\ 13'\ 48''$ ist.

$$\begin{aligned}
log\,tg\,\frac{A}{2} &= \left.\begin{matrix}9{\cdot}79508-10\\ 9{\cdot}72702-10\end{matrix}\right\}\\
&\quad \left.\begin{matrix}9{\cdot}52210-10\\ 9{\cdot}57543-10\end{matrix}\right\}\\
&\quad 9{\cdot}99943-10\\
&\quad \frac{19{\cdot}94724-20}{2} = 9{\cdot}97362-10\\
&\qquad 20\\
&\qquad 4200:43 = 97''.
\end{aligned}$$

$$\frac{A}{2} = 43°\ 15'\ 37''$$
$$A = 86°\ 31'\ 14''.$$

14. Von einem sphärischen Dreiecke sind alle Winkel bekannt: $A = 52°\ 32'\ 6''$, $B = 101°\ 37'\ 22''$, $C = 38°\ 46'\ 9''$; Seite c zu rechnen!

Es ist $cos\,\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{cos\,(S-A)\,cos\,(S-B)}{sin\,A\,sin\,B}}$, wobei $S = \frac{A+B+C}{2} =$ $= 96°\ 27'\ 47''$, also $S-A = 43°\ 55'\ 41''$ und $S-B = -5°\ 9'\ 35''$ ist.

$$\begin{aligned}
log\,cos\,\frac{c}{2} &= 9{\cdot}85746-10\\
&\quad 9{\cdot}99823-10\\
&\quad 9{\cdot}85569-10\\
&\quad \left.\begin{matrix}9{\cdot}89967-10\\ 9{\cdot}99107-10\end{matrix}\right\}\\
&\quad \frac{19{\cdot}96495-20}{2} = 9{\cdot}98247-10.
\end{aligned}$$

$$\frac{c}{2} = 16°\ 10'.$$
$$c = 32°\ 20'.$$

15. Ein schiefwinkeliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind: $a = 74°\ 14'\ 36''$, $b = 57°\ 28'\ 44''$ und $C = 83°\ 21'\ 12''$.

Es ist $tg\,\frac{A+B}{2} = \frac{cos\,\frac{1}{2}(a-b)}{cos\,\frac{1}{2}(a+b)}\,cotg\,\frac{C}{2}$ und

$$tg\,\frac{A-B}{2} = \frac{sin\,\frac{1}{2}(a-b)}{sin\,\frac{1}{2}(a+b)}\,cotg\,\frac{C}{2}.$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{131°\ 43'\ 20''}{2} = 65°\ 51'\ 40''; \quad \frac{a-b}{2} = \frac{16°\ 45'\ 52''}{2} = 8°\ 22'\ 56''.$$

$$\begin{aligned}
log\,tg\,\frac{A+B}{2} &= \left.\begin{matrix}9{\cdot}99533-10\\ 10{\cdot}05050-10\end{matrix}\right\}+\\
&\quad \left.\begin{matrix}10{\cdot}04583-10\\ 9{\cdot}61167-10\end{matrix}\right\}-\\
&\quad 10{\cdot}43416-10\\
&\qquad 346\\
&\qquad 7000:65 = 108'
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
log\,tg\,\frac{A-B}{2} &= 9{\cdot}16369-10\\
&\quad 0{\cdot}05050\\
&\quad 9{\cdot}21419-10\\
&\quad 9{\cdot}96026-10\\
&\quad 9{\cdot}25393-10\\
&\qquad 65\\
&\qquad 2800:121 = 23''
\end{aligned}$$

$$\frac{A+B}{2} = 69°\ 47'\ 48'' \qquad \frac{A-B}{2} = 70°\ 10'\ 23''$$

$$A = 79°\ 58'\ 11'',\ B = 59°\ 37'\ 25''.$$

16. In einem gleichseitigen sphärischen Dreiecke sind die Seiten $= 45°$; den Radius (r) des eingeschriebenen Dreieckes zu finden!

Es ist $tg\, r = \sqrt{\dfrac{sin\,(s-a)\,.\,sin\,(s-b)\,.\,sin\,(s-c)}{sin\, s}}$, wobei $s = \dfrac{a+b+c}{2} = 67°\,30'$, also $s-a = s-b = s-c = 22°\,30'$ ist.

$$tg\, r = \sqrt{\frac{sin^3\, 22°\,30'}{sin\, 67°\,30'}} \qquad \left.\begin{array}{r} log\, tg\, r = 28{\cdot}74852 - 30 \\ 9{\cdot}96562 - 10 \end{array}\right\} - $$

$$\frac{18{\cdot}78296 - 20}{2} = 9{\cdot}39145 - 10.$$

$$\frac{36}{900 : 91 = 10''}$$

$r = 13°\,50'\,10''.$

17. In einem gleichseitigen sphärischen Dreiecke sind die Winkel $= 66°$; den Radius (R) des umgeschriebenen Kreises zu rechnen!

Es ist $tg\, R = \sqrt{\dfrac{-\,cos\, S}{cos\,(S-A)\,cos\,(S-B)\,cos\,(S-C)}}$, wobei $S = \dfrac{A+B+C}{2} = 99°$, also $S-A = S-B = S-C = 33°$ ist.

$$tg\, R = \sqrt{\frac{sin\, 9°}{cos^3\, 33°}}; \qquad \begin{array}{r} log\, tg\, R = 9{\cdot}19433 - 10 \\ 29{\cdot}77077 - 30 \end{array}$$

$$\frac{19{\cdot}42356 - 20}{2} = 9{\cdot}71178 - 10$$

$$\frac{53}{2500 : 52 = 48'.}$$

$R = 27°\,14'\,48''.$

18. Den sphärischen Exzeß eines rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes aus den beiden Katheten $a = 155°$, $b = 120°$ zu rechnen.

Es ist $tg\,\dfrac{E}{2} = tg\,\dfrac{a}{2}\,.\,tg\,\dfrac{b}{2} = tg\, 77°\,30'\,.\,tg\, 60°$;

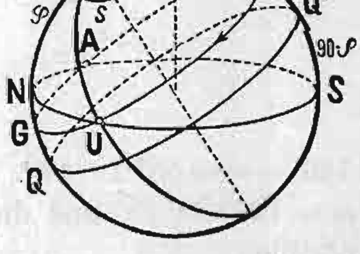
$$log\, tg\,\frac{E}{2} = 10{\cdot}65424 - 10 \qquad \frac{E}{2} = 82°\,42'\,21''$$

$$\begin{array}{r} 10{\cdot}23856 - 10 \\ \hline 0{\cdot}89280 \end{array} \qquad E = 165°\,24'\,42''.$$

$$\frac{44}{3600 : 168 = 21''}$$

***19.** Berechne für Brünn ($\varphi = 49°\,11'\,39''$) die Dauer des längsten Tages!

Fig. 5.



Stellt NZS (in Figur 5) den Meridian und NS den Horizont des Beobachtungsortes, QQ' den Himmelsäquator und GI den Parallelkreis vor, den die Sonne scheinbar beschreibt, so gibt $\widehat{AI}$ den halben, $\widehat{AIU}$ den ganzen Tagbogen an. Im sphärischen Dreiecke NPU ist $\sphericalangle N = 90°$, $\widehat{NP} = \varphi$, $\widehat{PU} = 90° - d$, $\widehat{NU} = 180° - a$ und $\sphericalangle NPU = 180° - s$; a bedeutet

* Führe diese Rechnung durch: 1. für Prag mit $\varphi = 50°\,5'\,19''$, 2. für Neapel mit $\varphi = 40°\,51'\,47''$ und 3. für London mit $\varphi = 51°\,31'\,30''$!

das Azimut und s den Stundenwinkel der untergehenden Sonne. 1) Den halben Tagbogen s findet man aus

$$\cos(180 - s) = \operatorname{cotg}(90 - \varphi) \,.\, \operatorname{cotg}(90 - d) = tg\,\varphi\, tg\, d.$$

Für den längsten Tag ist die Deklination der Sonne gleich der schiefen Ekliptik: $d = 23° 27' 10''$.

$$\begin{array}{rl} \log\cos(180 - s) = & 10{\cdot}06382 - 10 \\ & 9{\cdot}63733 - 10 \\ \hline & 9{\cdot}70115 - 10 \end{array} \qquad 180 - s = 59° 50'$$

$s = 120° 10'$ und in Stunden umgesetzt: $\dfrac{120{\cdot}166°}{15} = 8{\cdot}011$ Stunden.

Die Sonne geht um (12 — 8·011) Uhr auf, um 8·011 Uhr unter. Die Dauer des Tages beträgt 16·022 Stunden.

***20.** Berechne für Petersburg ($\varphi = 59° 56' 35''$) die Dauer des kürzesten Tages!

Aus dem sphärischen Dreiecke NUP (in Fig. 5) folgt:

$$\cos(180 - s) = \operatorname{cotg}(90 - \varphi) \,.\, \operatorname{cotg}(90 - d) = tg\,\varphi \,.\, tg\, d.$$

Für den kürzesten Tag ist die Deklination der Sonne $= -23° 27' 10''$, somit $\cos(180 - s) = -tg\,\varphi \,.\, tg\, 23° 27' 10''$ und $\cos s = tg\,\varphi \,.\, tg\, 23° 27' 10''$.

$$\begin{array}{rl} \log\cos s = & 10{\cdot}23739 - 10 \\ & 15 \\ & 9{\cdot}63695 - 10 \\ & 41 \\ \hline & 9{\cdot}87487 - 10 \end{array}$$

$s = 41° 26' 14''$; $\dfrac{s}{15} = \dfrac{41{\cdot}437°}{15} = 2{\cdot}762$ Stunden. Die Sonne geht um (12 — 2·762) Uhr $=$ $= 9{\cdot}238$ Uhr auf und um $\dfrac{s}{15} = 2{\cdot}762$ Uhr unter.

Die Dauer des kürzesten Tages beträgt $\dfrac{2s}{15} = 5{\cdot}524$ Stunden.

***21.** Berechne für Wien ($\varphi = 48° 12' 35''$) die Abendweite an dem längsten und kürzesten Tage!

In Fig. 5 ist $\widehat{NU} = 180° - \omega$, wobei ω das Azimut der untergehenden Sonne bedeutet. Aus dem sphärischen Dreiecke NUP ist $\cos(180 - \omega) = \dfrac{\sin d}{\cos\varphi}$.

Am längsten Tage ist $d = 23° 27' 10''$;

$$\begin{array}{rl} \text{daher } \log\cos(180 - \omega) = & 9{\cdot}59988 - 10 \\ & 9{\cdot}82374 - 10 \\ \hline & 9{\cdot}77614 - 10 \\ & 09 \\ \hline & 500 : 28 = 18'' \end{array}$$

$180 - \omega = 53° 19' 42''$. Das vom Südpunkte über Westen gezählte Azimut $\omega = 126° 40' 18''$ und die vom Westpunkte gezählte Abendweite $= 36° 40' 18''$ nördlich.

Am kürzesten Tage beträgt die Abendweite $90° - 53° 19' 42'' = 36° 40' 18''$ südlich.